

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E CONTROLE DE ENERGIA - DSCE

**A TRANSFORMADA Z APLICADA AO CÁLCULO DE
TRANSITÓRIOS ELETROMAGNÉTICOS EM SISTEMAS
DE TRANSMISSÃO DE ENERGIA ELÉTRICA E DE
TELECOMUNICAÇÕES**

Pedro da Costa Junior

Orientador: Prof. Dr. José Pissolato Filho

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de *Doutor em Engenharia Elétrica*.

JUNHO - 1995

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida por _____
_____ da Comissão Julgadora em _____
Orientador _____

9511963

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

RESUMO

Linhas de transmissão possuem parâmetros elétricos (indutâncias e resistências distribuídas) que são altamente dependentes da frequência e, conseqüentemente, requerem um tratamento matemático que possa levar em consideração estas dependências. Neste trabalho, a transformada Z é aplicada na determinação de equações de recorrência no domínio do tempo, as quais são usadas no cálculo de transitórios eletromagnéticos em sistemas de potência e de telecomunicações. Basicamente, o método implementado consiste em uma adaptação do método desenvolvido por Humpage (1982c), o qual, por sua vez, é baseado no método das características de Bergeron [Dommel, 1969]. A partir dos dados físicos de uma linha de transmissão, calcula-se duas funções matemáticas que caracterizam esta linha (impedância característica e resposta ao impulso direto), as quais são representadas por seus pólos e zeros, como sugerido por Marti (1981). Tais pólos e zeros são calculados por aproximação assintótica (método de Bode), cuja simplicidade evita instabilidades e problemas de convergências comuns às técnicas de otimização. As equações de recorrência, assim determinadas e implementadas, são validadas através de comparações com os resultados obtidos por Humpage (1982c). O aperfeiçoamento sobre implementações anteriores, envolvendo o uso da transformada Z, consiste em possibilitar o uso de frequências de amostragem mais altas, as quais são necessárias na análise de transitórios eletromagnéticos em linhas de telecomunicações.

ABSTRACT

Transmission lines have electrical parameters (distributed inductance and resistance) that are highly frequency dependent and, consequently, require a numeric treatment that can take these effects into account. In this work, Z-transform is applied to find recurrence equations, in the time domain, which are used to calculate electromagnetic transients in power systems and subscriber lines. Basically, the implemented method is an adaptation of the method developed by Humpage (1982c), which is based upon the characteristic method of Bergeron [Dommel, 1969]. From the physical data of a transmission line, two mathematical functions (surge impedance and forward impulse response) are represented by their poles and zeros, as suggested by Marti (1981). Such poles and zeros are found by the asymptotic approximation (Bode's method), whose simplicity avoids usual instabilities and convergence troubles of optimizations' techniques. The recurrence equations, established in this way, are implemented and so validated through comparisons to obtained results by Humpage (1982c). The improvement, upon older implementations of Z-transform, is to make possible the use of higher sampling frequencies, which are necessary for analysis of electromagnetic transients in subscriber lines.

Meus sinceros agradecimentos:

Ao Prof. Dr. José Pissolato Filho, pelo apoio e amizade;

Ao Prof. M. Sc. José Renato Castro Pompéia Fraga pelo apreço e companheirismo;

Ao Prof. Dr. Glássio Costa de Miranda, da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, pelas férteis discussões;

À CAPES, pelo auxílio financeiro;

Aos colegas de trabalho do Departamento de Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia e Tecnologia da UNESP, campus de Bauru, pelo apoio e incentivo;

Aos amigos: Brito, Eliane, Marcos e Ângelo do Laboratório de Alta Tensão da UNICAMP, Campinas - S.P., pelo apoio, amizade e atenção dispensadas;

Ao professor Dr. Amauri Lopes, pela disposição e presteza de ensinar os elementos básicos da teoria de filtros digitais.

À minha esposa, Cris, que sempre acreditou neste ideal e me apoiou do início ao fim com muito carinho;

Aos meus filhos: Bruna, Brian e Igor, cujas existências tornam este trabalho mais precioso.

Aos meus pais: Pedro e Walkiria, que tornaram essa realização possível.

Às minhas irmãs: Marilayde e Patricia, com muito orgulho.

SUMÁRIO

Resumo	ii
Abstract.....	iii
Agradecimentos.....	iv
Lista de Figuras.....	viii
Lista de Tabelas	xi
1. INTRODUÇÃO.....	1.1
1.1. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA.....	1.1
1.2. OBJETIVOS.....	1.5
1.3. ORGANIZAÇÃO DESTE TRABALHO.....	1.6
2. PARÂMETROS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO AÉREAS.....	2.1
2.1. IMPEDÂNCIA SÉRIE.....	2.2
2.2. CAPACITÂNCIA SHUNT.....	2.6
2.3. ALGORITMO DE CÁLCULO DOS PARÂMETROS.....	2.8
3. PARÂMETROS DE LINHAS TELEFÔNICAS.....	3.1
3.1. MODELAMENTO DA LINHA DE TRANSMISSÃO.....	3.1
3.1.1. MODELAMENTO DA LINHA EM BAIXAS FREQUÊNCIAS.....	3.1
3.1.2. MODELAMENTO DA LINHA EM ALTAS FREQUÊNCIAS.....	3.2
3.1.3. MODELO DA LINHA EM MÉDIAS FREQUÊNCIAS.....	3.3
4. A LINHA DE TRANSMISSÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.....	4.1
4.1. EQUAÇÕES DA LINHA DE TRANSMISSÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.....	4.1
4.2. FUNÇÕES IMPEDÂNCIA DE SURTO E RESPOSTA AO IMPULSO DIRETO.....	4.10

4.3. EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS	4.13
4.4. CARACTERÍSTICAS DE FASE E TEMPO DE VIAGEM DE ONDA	4.13
4.5. DEPENDÊNCIA COM A FREQUÊNCIA DAS MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO MODAL.....	4.16
4.6. SÍNTESE DAS FUNÇÕES RESPOSTAS	4.21
4.6.1. EQUAÇÕES NO PLANO Z.....	4.21
4.7. TRANSFORMAÇÃO PARA O DOMÍNIO DO TEMPO	4.22
4.8. TRANSFORMAÇÃO NAS VARIÁVEIS QUE FORMAM AS CARACTERÍSTICAS.....	4.26
4.9. EQUAÇÕES DA LINHA NO DOMÍNIO DO TEMPO.....	4.27
5. ALGORITMO COMPUTACIONAL IMPLEMENTADO	5.1
5.1. LINHA DE TRANSMISSÃO.....	5.1
5.1.1. TRANSFORMAÇÃO EM TERMOS DE TENSÕES E CORRENTES.....	5.5
5.1.2. EQUAÇÕES DA LINHA NO DOMÍNIO DO TEMPO	5.8
5.2. INDUTÂNCIA CONCENTRADA.....	5.10
5.3. CAPACITÂNCIA CONCENTRADA	5.12
5.4. RESISTÊNCIA CONCENTRADA.....	5.14
5.5. INDUTÂNCIAS CONCENTRADAS COM ACOPLAMENTO MÚTUO.....	5.15
5.6. EQUAÇÕES DE MALHA.....	5.16
5.7. ALGORITMO DO PROGRAMA IMPLEMENTADO	5.17
6. SÍNTESE NUMÉRICA DE $Z_c(\omega)$ E $F_n(\omega)$.....	6.1
6.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS	6.1
6.2. TÉCNICA DE APROXIMAÇÃO RACIONAL.....	6.2
6.2.1. APROXIMAÇÃO DA FUNÇÃO MÓDULO.....	6.3
6.2.2. CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS	6.7
7. SÍNTESE NUMÉRICA DE $F_n(z)$ E $Z_c(z)$.....	7.1
8. ESCOLHA DO PASSO DE SIMULAÇÃO Δt	8.1
8.1. INTERPOLAÇÃO.....	8.3
9. APLICAÇÕES	9.1
9.1. ENERGIZAÇÃO DE UMA LINHA DE TRANSMISSÃO EM ABERTO	9.1
9.2. LINHA DE TELECOMUNICAÇÕES	9.5
10. CONCLUSÕES.....	10.1
11. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	11.1

APÊNDICES

A. ELIMINAÇÃO DOS CABOS PARA-RAIOS E CONDUTORES MÚLTIPLOS.....	A.1
B. RAIOS MÉDIOS GEOMÉTRICOS E IMPEDÂNCIA INTERNA.....	B.1
C. IMPEDÂNCIA INTERNA DE CABOS ENCORDADOS	C.1
D. FÓRMULA DE GARY, DERI E OUTROS	D.1
E. TÉCNICAS DE PROJETO DE FILTROS DIGITAIS.....	E.1
<i>E.1. PROJETO DE FILTROS DIGITAIS IIR A PARTIR DE FILTROS ANALÓGICOS</i>	<i>E.3</i>
<i>E.1.1. INVARIÂNCIA IMPULSIVA.....</i>	<i>E.4</i>
<i>E.1.2. PROJETOS BASEADOS NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL</i>	<i>E.11</i>
<i>E.1.3. TRANSFORMAÇÃO BILINEAR.....</i>	<i>E.14</i>

Lista de Figuras

Fig. 1.1 - Elementos não-lineares presentes em um S.E.P.	1.3
Fig. 1.2 - Métodos de modelamento em baixa e alta frequência.	1.5
Fig. 1.3 - Simulação de transitórios eletromagnéticos.	1.5
Fig. 2.1 - Torre da Linha de Transmissão de 400 kV usada como exemplo de aplicação	2.1
Fig. 2.2 - Distâncias utilizadas no cálculo da impedância série da linha.	2.3
Fig. 2.3 - Resistências Próprias.	2.5
Fig. 2.4 - Resistências Mútuas.	2.5
Fig. 2.5 - Indutâncias Parciais Próprias.	2.5
Fig. 2.6 - Indutâncias Parciais Mútuas.	2.6
Fig. 2.7 - Configuração Equivalente usada no cálculo da matriz de Capacitâncias.	2.7
Fig. 4.1 - Trecho do Circuito Equivalente de uma linha Trifásica.	4.2
Fig. 4.2 - Resistências modais da impedância série modal da linha $z(\omega)$	4.7
Fig. 4.3 - Indutâncias modais da impedância série modal da linha $z(\omega)$	4.7
Fig. 4.4 - Módulo da função Impedância Característica $Z_c(\omega)$	4.10
Fig. 4.5 - Fase da função Impedância Característica $Z_c(\omega)$	4.10
Fig. 4.6 - Módulo da Resposta ao Impulso direto $F_t(\omega)$	4.12
Fig. 4.7 - Fase da Resposta ao Impulso direto $F_t(\omega)$	4.12
Fig. 4.8 - Coeficiente de Atenuação $(\alpha(\omega))$	4.14
Fig. 4.9 - Função deslocamento de fase $(\beta(\omega))$	4.14
Fig. 4.10 - Característica de Fase Não-Linear $\beta_n(\omega)$	4.15
Fig. 4.11 - Comportamento do tempo de propagação (t_p)	4.15

Fig. 4.12 - Parte real dos coeficientes da matriz de transformação modal $T_v(\omega)$	4.17
Fig. 4.13 - Parte real dos coeficientes da matriz de transformação modal $T_i(\omega)$	4.18
Fig. 4.14 - Parte imaginária dos coeficientes da matriz de transformação modal $T_v(\omega)$	4.19
Fig. 4.15 - Parte imaginária dos coeficientes da matriz de transformação modal $T_i(\omega)$	4.20
Fig. 5.1 - Grafo representando a equação (5.9).....	5.3
Fig. 5.2 - Grafo relativo à equação (5.12).....	5.4
Fig. 5.3 - Grafo relativo à equação (5.13).....	5.4
Fig. 5.4 - Grafo relativo à equação (5.15).....	5.4
Fig. 5.5 - Grafo correspondente à equação (5.28).....	5.6
Fig. 5.6 - Grafo correspondente à equação (5.31).....	5.7
Fig. 5.7 - Grafo correspondente à equação (5.32).....	5.8
Fig. 5.8 - Linha de Transmissão no domínio da Frequência.....	5.9
Fig. 5.9 - Circuito Equivalente de uma Linha de Transmissão no domínio do Tempo.....	5.9
Fig. 5.10 - Indutância no domínio da Frequência	5.10
Fig. 5.11 - Circuito Equivalente de uma Indutância Concentrada.....	5.11
Fig. 5.12 - Capacitância no domínio da Frequência.....	5.12
Fig. 5.13 - Circuito Equivalente de uma Capacitância no domínio do Tempo.....	5.13
Fig. 5.14 - Resistência no domínio da Frequência.....	5.14
Fig. 5.15 - Circuito Equivalente de uma Resistência	5.14
Fig. 5.16 - Indutância Trifásica com acoplamento mútuo.....	5.16
Fig. 6.1 - Aproximação Assintótica de $ F_n(\omega) $	6.3
Fig. 6.2 - Aproximação Assintótica de $F_n(\omega)$	6.4
Fig. 6.3 - Aproximação Assintótica de $ Z_c(\omega) $	6.5
Fig. 6.4 - Aproximação Assintótica de $Z_c(\omega)$	6.6
Fig. 6.5 - Diagrama de blocos do algoritmo implementado para cálculo dos pólos e zeros de respostas em frequência através do método das assíntotas modificado.....	6.8
Fig. 7.1 - Resultados de simulação para $\Delta t = 100 \mu seg$	7.4
Fig. 7.2 - Resultados de simulação para $\Delta t = 50 \mu seg$	7.4
Fig. 7.3 - Resultados de simulação para $\Delta t = 25 \mu seg$	7.4
Fig. 7.4 - Resultados de simulação para $\Delta t = 10 \mu seg$	7.5

Fig. 8.1 - Tempo de Trânsito.....	8.1
Fig. 8.2 - Tensão fase-neutro no terminal receptor da fase "a". $\Delta t = 50 \mu seg$	8.2
Fig. 8.3 - Tensão fase-neutro no terminal receptor da fase "a". $\Delta t = 25 \mu seg$	8.2
Fig. 8.4 - Tensão fase-neutro no terminal receptor da fase "a". $\Delta t = 10 \mu seg$	8.3
Fig. 9.1 - Energização de Linha de Transmissão em aberto.....	9.2
Fig. 9.2 - Circuito Equivalente do Sistema da figura Fig. 9.1	9.2
Fig. 9.3 - Resultados obtidos para a fase "a".....	9.3
Fig. 9.4 - Resultados obtidos para a fase "b".....	9.3
Fig. 9.5 - Resultados obtidos para a fase "c".....	9.4
Fig. 9.6 - Pulso Recebido através de Cabos 19, 22, 24 e 26 AWG.....	9.6
Fig. 9.7 - Configuração do sistema simulado para o cabo de 22 AWG.....	9.6
Fig. 9.8 - Pulso ao Longo da Transmissão.....	9.7
Fig. 9.9 - Linha de Assinante contendo Derivação	9.7
Fig. 9.10 - Pulso Recebido na Linha de Assinante da Fig. 9.9.....	9.8
Fig. 9.11 - Transitório calculado com método de Fourier	9.8
Fig. 9.12 - Aproximação Assintótica da função $F_n(\omega)$ para o cabo 22 AWG.....	9.12
Fig. 9.13 - Aproximação Assintótica da função $Z_c(\omega)$ para o cabo 22 AWG.....	9.12
Fig. 10.1 - Fontes de aproximações ao longo do procedimento de simulação digital	10.4
Fig. A.1 - Sub-Condutores de raio r formando uma fase.....	A.2
Fig. E.1 - Limites de Tolerância para a aproximação de um filtro passa-baixa.....	E.1
Fig. E.2 - Representação de uma amostragem periódica	E.5
Fig. E.3 - Representação Gráfica dos efeitos de remontamento na técnica de projeto por invariância ao impulso.....	E.6
Fig. E.4 - (a) Gráfico dos pólos e zeros e resposta em frequência de um Sistema Analógico de Segunda Ordem; (b) Gráfico dos pólos e zeros e resposta em frequência do Sistema Discreto obtido pela amostragem da resposta ao impulso do sistema acima.....	E.9
Fig. E.5 - Mapeamento do Plano S no Plano Z correspondente a primeira aproximação por diferença.....	E.13
Fig. E.6 - Mapeamento do eixo da frequência analógica sobre o círculo unitário utilizando a transformação bilinear.....	E.17
Fig. E.7 - Mapeamento do Plano S no plano Z usando a transformação Bilinear.....	E.17

Lista de Tabelas

Tab. 2.1 - Dados Básicos da Linha Exemplo	2.2
Tab. 3.1 - Parâmetros dos cabos utilizados nas simulações	3.4
Tab. 4.1 - Tempo de Propagação para 160 km de linha	4.16
Tab. 7.1 - Mapeamento no plano Z	7.1
Tab. 7.2 - $F_n(\omega)$, modo terra ou modo 0	7.2
Tab. 7.3 - $Z_c(\omega)$, modo terra ou modo 0	7.2
Tab. 7.4 - $F_n(\omega)$, modo 1	7.2
Tab. 7.5- $Z_c(\omega)$, modo 1	7.2
Tab. 7.6- $F_n(\omega)$, modo 2	7.3
Tab. 7.7- $Z_c(\omega)$, modo 2	7.3
Tab. 7.8 - Ganho, zeros e pólos para o modo 0 da função $F_n(z)$ para $\Delta t = 25 \mu seg$	7.3
Tab. 8.1 - Valores numéricos das variáveis que aparecem na equação (8.2)	8.4
Tab. 8.2 - Coeficientes das equações (8.15) e (8.16) para o modo terra	8.7
Tab. 9.1 - Arquivo de dados: DADOSSLA.DAT para o cabo 19 AWG	9.5
Tab. 9.2 - Parâmetros da resistência de carga para casamento de impedâncias dos cabos	9.6
Tab. 9.3 - Arquivo de dados do programa principal: DATAHUMP.DAT	9.9
Tab. 9.4 - Descrição do conteúdo do arquivo de dados DATAHUMP.DAT	9.9
Tab. 9.5 - Parâmetros da função $F_n(\omega)$ do Cabo 22 AWG	9.10
Tab. 9.6 - Parâmetros da função $Z_c(\omega)$ do Cabo 22 AWG	9.11

1. INTRODUÇÃO

1.1. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

A adequada operação de um Sistema Elétrico de Potência, bem como o planejamento de sua expansão exige dos engenheiros de Sistemas a execução de uma série de análises de rede. Os tipos mais comuns de estudos de redes são:

- Análise de Curto-Circuito (ou Falta);
- Análise de Fluxo de Carga (ou Potência);
- Análise de Estabilidade;
- Análise de Transitórios Eletromagnéticos.

A confiabilidade de um Sistema Elétrico de Potência (SEP) é avaliada pela frequência e duração das interrupções no fornecimento de energia. Esta confiabilidade depende, em grande parte, do comportamento de surtos de tensão e corrente no Sistema e da probabilidade da ruptura do isolamento. Na prática, o isolamento tem de resistir às sobretensões, com várias formas de onda, magnitude e duração. Estes parâmetros da sobretensão afetam a capacidade de eficiência do isolamento.

O problema então consiste em:

- Determinar a magnitude, forma, frequência e duração das sobretensões, e as variações que estes parâmetros experimentam quando a onda de tensão viaja do ponto de origem ao equipamento em foco;

- Determinar as características de suportabilidade do isolamento dos vários tipos de materiais que são, ou possam ser utilizados como isolantes, com relação a essas sobretensões;
- Adaptar a suportabilidade do isolamento aos esforços.

Deve-se enfatizar que nem sempre é teoricamente possível proporcionar isolamento que irá resistir aos maiores esforços que irão ocorrer. Além disso, o limite econômico interfere bem antes do limite técnico quando o custo para obter-se um aumento adicional na confiabilidade não pode ser justificado pelo retorno econômico na redução do número de rupturas. Desta forma, uma certa probabilidade de ruptura é aceita no projeto de Sistemas Elétricos de Potência. Por outro lado, o projeto de um SEP deve ser de tal maneira que, quando as faltas forem inevitáveis, estas sejam confinadas a locais onde causem o mínimo dano e o menor distúrbio na operação.

Em geral, as sobretensões que pode acontecer em um SEP são:

- Sobretensões Atmosféricas;
- Sobretensões geradas internamente, tais como:
 - a. Energização ou desligamento de elementos do circuito;
 - b. Início ou Interrupção de faltas;

As sobretensões geradas internamente também podem ser classificadas como:

- Sobretensões sustentadas de frequência nominal ou harmônica, às quais são normalmente de longa duração e fracamente amortecidas, e são devidas à rejeição de carga, ferro ressonância, faltas, etc.
- Surtos de manobra, os quais são sobretensões fortemente amortecidas e de curta duração, devido às variações bruscas na configuração da rede.

As magnitudes de surtos atmosféricos susceptíveis de aparecerem em linhas de transmissão não são muito afetadas pela tensão do sistema. Conseqüentemente o desempenho de surtos atmosféricos tende a melhorar com o aumento do nível de tensão de trabalho do sistema. Em contraste, sobretensões geradas pelo sistema são diretamente relacionadas com a tensão do sistema, e suas magnitudes crescem com o nível de tensão do

sistema. Para tensões acima de 400 kV, sobretensões geradas pelo sistema assumem maior relevância na determinação do nível de isolamento do mesmo.

Como conseqüência, torna-se extremamente necessária a determinação, durante o planejamento, das sobretensões que poderão ocorrer no sistema, permitindo que sejam tomadas medidas para reduzir suas severidades e minimizar o nível de isolamento do sistema tanto quanto possível. A computação dos transitórios apresenta um certo grau de complexidade, e um dos fatores responsáveis por isto é que os transitórios de tensão e de corrente nos SEP estão situados em uma faixa de frequência bastante larga, de 60 Hz a 100 kHz. Dentro desta faixa, os valores dos parâmetros do sistema e do retorno por terra não são constantes. Na computação de transitórios uma segunda gama de fatores, que introduzem um elevado grau de complexidade e que têm que ser considerados são: o efeito da não linearidade dos pára-raios, saturação magnética, corona e disjuntores. Tais fenômenos podem ser representados basicamente pelos elementos apresentados na Fig. 1.2. Finalmente, é necessário um conjunto de dados sobre os equipamentos, suficientemente precisos, os quais nem sempre são disponíveis.

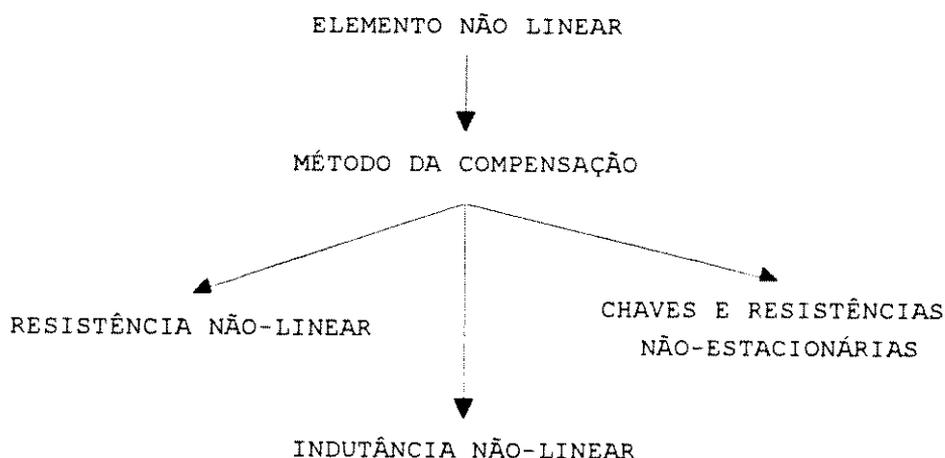


Fig. 1.1 - Elementos não-lineares presentes em um S.E.P.

Os sistemas elétricos de potência modernos apresentam um grau de complexidade tão grande que uma solução puramente analítica de qualquer problema (exceto os mais simples) é virtualmente impossível. O método tradicional de estimar a severidade dos fenômenos transitórios em sistemas elétricos de potência modernos é através de um Analisador de Redes Analógico (TNA). Este é um tipo de computador analógico, o qual proporciona facilidades para formação de um modelo escalar a ser estudado, sendo tais modelos sujeitos a limitações de tamanho. O TNA é vantajoso nos casos onde o mecanismo exato do fenômeno transitório sob investigação não é conhecido. Neste caso o TNA é utilizado para identificar o fenômeno. Por outro lado a solução numérica dos problemas

tornou-se possível com o advento de poderosos computadores digitais, o que tem levado ao desenvolvimento de várias técnicas de computação de transitórios eletromagnéticos.

Neste trabalho também são abordados os problemas relacionados à transmissão de sinais em linhas de telecomunicações. Tais linhas têm as seguintes características principais: são monofásicas, normalmente curtas (comprimentos na ordem de alguns quilômetros), são heterogêneas, isto é, são constituídas por cabos de bitola variável, e possuem derivações em aberto (devido à mudanças de endereço do usuário). Tais derivações são fontes de reflexões que distorcem os sinais transmitidos e, portanto, tal fenômeno tem sua importância aumentada principalmente com incremento da frequência usada nas transmissões digitais de dados. Da mesma forma que a linha de energia, as linhas de assinantes também se caracterizam por terem seus parâmetros elétricos fortemente dependentes da frequência. Embora o destaque maior tenha sido dado à problemas em Sistemas Elétricos de Potência, devido à sua generalidade, os métodos descritos são aplicáveis em linhas de telecomunicações.

Assim o presente trabalho constitui uma contribuição ao estudo de redes do ponto de vista de transitórios eletromagnéticos. Tal contribuição servirá de subsídio não só ao engenheiro de sistemas preocupado com a isolação e proteção dos sistemas de transmissão de energia mas também aos estudos desenvolvidos pelo engenheiro de telecomunicações preocupado com a fidelidade dos dados transmitidos e proteção de equipamentos terminais.

Com o propósito de calcular transitórios de chaveamento, os elementos de um SEP podem ser divididos em dois tipos: primeiramente, aqueles cujos parâmetros são essencialmente concentrados, tais como geradores, transformadores, reatores e capacitores e, no segundo tipo, linhas aéreas e cabos subterrâneos cujos parâmetros possuem natureza distribuída.

A Fig. 1.4 mostra de forma simples os algoritmos investigados. Assim, dentro do escopo dos métodos de simulação digital podemos dividir os trabalhos avaliados em dois grupos, de acordo com o modelo de linha utilizado, isto é, linha com parâmetros constantes (e.g. [Costa Jr., 1989] e [Dommel, 1985],) ou linha com parâmetros variantes com a frequência (e.g. [Almeida, 1988], [Humpage, 1982c] e [Martí, 1981]).

A nível de dissertação de mestrado foi desenvolvido um programa para cálculo de transitórios eletromagnéticos igualmente baseado nas propriedades da transformada Z , isto é, o método do Casamento de Raízes [Costa Jr., 1989]. Porém, no mestrado, o modelo de linha empregado foi o modelo monofásico, a parâmetros concentrados e constantes com a frequência.

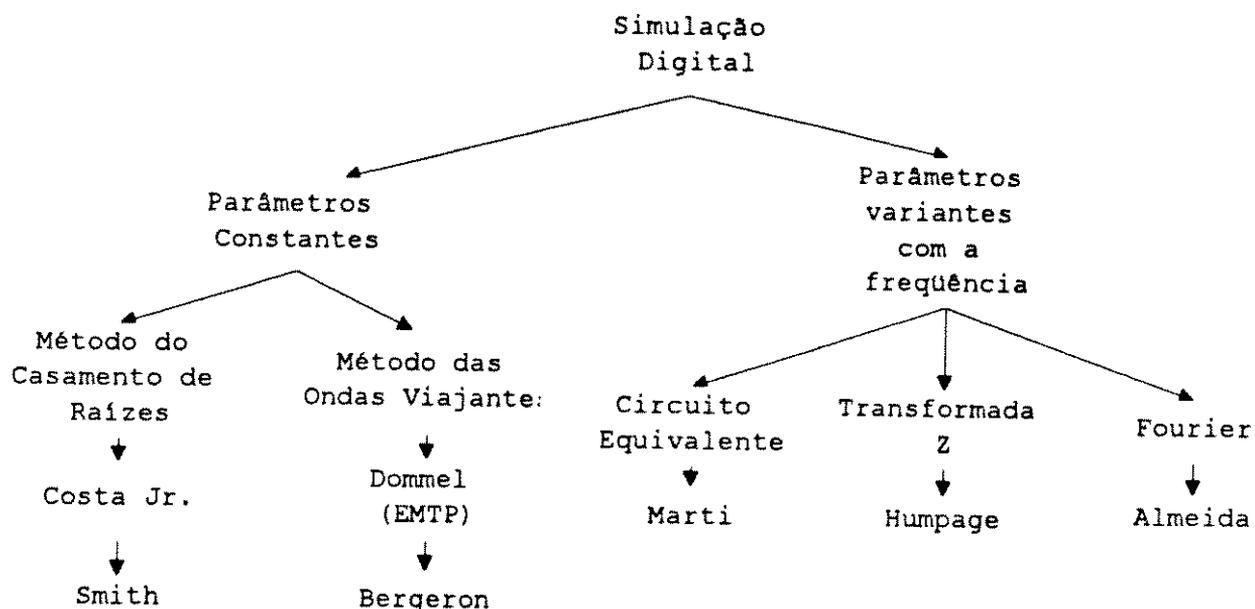


Fig. 1.3 - Métodos de modelagem em baixa e alta frequência.

1.2. OBJETIVOS

A Fig. 1.6 mostra esquematicamente em que contexto se encaixa o presente trabalho dentro da área de simulação de sistemas.

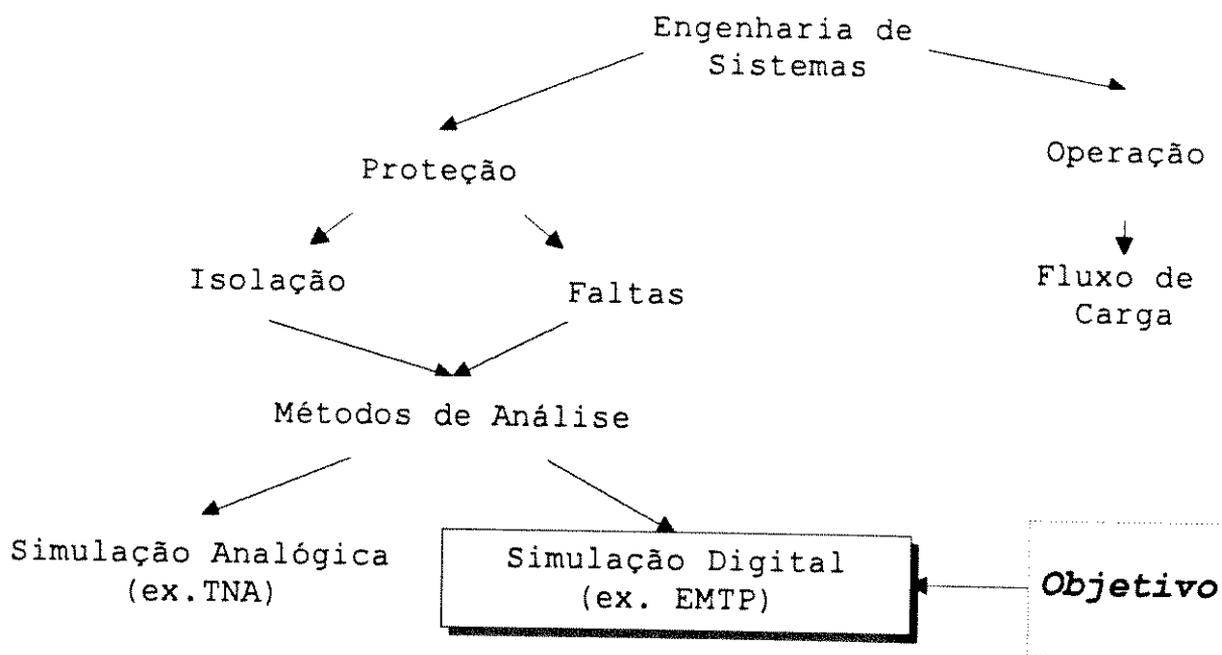


Fig. 1.5 - Simulação de transitórios eletromagnéticos.

O objetivo básico deste trabalho é desenvolver um programa computacional, baseado em modernas técnicas de simulação numérica, as quais são formuladas com base nas propriedades da transformada Z [Humpage, 1982c]. Tal programa deve ser capaz de calcular transitórios eletromagnéticos em sistemas elétricos polifásicos contendo parâmetros concentrados e distribuídos, invariantes e dependentes da frequência e do tempo, lineares e não-lineares. Para tanto, optou-se trabalhar com linguagens de programação mais adequadas à programação estruturada, tal como Turbo-Pascal.

Este trabalho tem como objetivo adicional avaliar o procedimento de cálculo em [Humpage, 1982c], o qual é baseado na transformada Z . Em trabalho anterior [Fraga, 1993], o método proposto por Humpage foi implementado e avaliado somente para sistemas monofásicos.

1.3. ORGANIZAÇÃO DESTE TRABALHO

Capítulo 1 - Introdução. Exposição sucinta do contexto no qual o presente trabalho se encaixa, os objetivos e a organização estrutural deste trabalho.

Capítulo 2 - Parâmetros de Linhas de Transmissão Aéreas. Descrição do procedimento de cálculo de parâmetros elétricos de linhas de transmissão aéreas polifásicas. A Fig. 1.7 mostra esquematicamente como está dividida a obtenção de parâmetros elétricos neste trabalho.

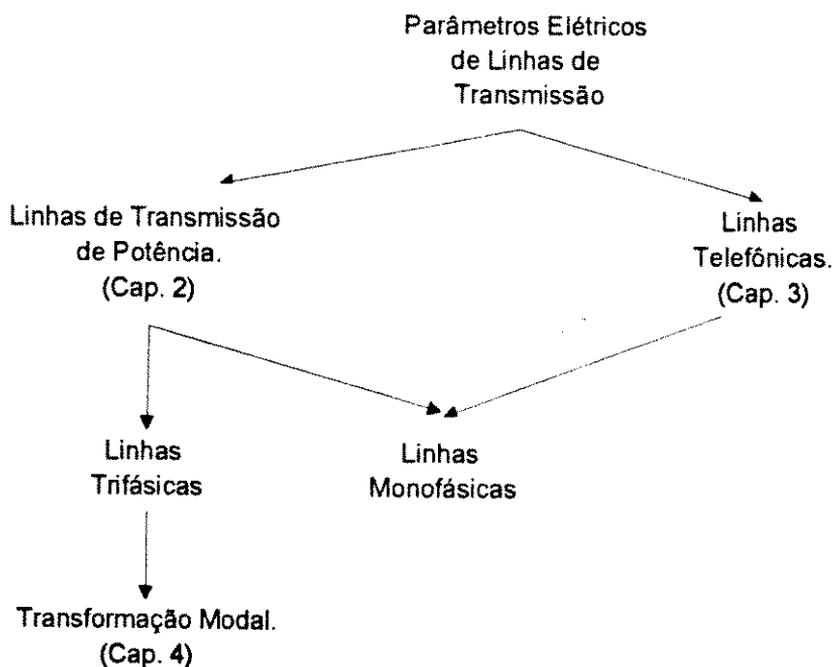


Fig. 1.7 - Obtenção de parâmetros elétricos.

Capítulo 3 - Parâmetros de Linhas Telefônicas. Desenvolvimento do procedimento de cálculo de parâmetros elétricos de linhas de assinantes.

Capítulo 4 - A Linha de Transmissão no Domínio da Freqüência. Modelo e equacionamento da linha de transmissão no domínio da freqüência.

Capítulo 5 - Algoritmo Computacional Implementado. Descrição do algoritmo computacional implementado.

Capítulo 6 - Síntese Numérica de $Z_c(\omega)$ e $F_n(\omega)$. Descrição do método de síntese das funções características de linhas de transmissão, no domínio da freqüência, a partir de seus parâmetros elétricos.

Capítulo 7 - Síntese Numérica de $F_n(z)$ e $Z_c(z)$. Síntese das funções da linha de transmissão no plano Z a partir das funções no domínio da freqüência .

Capítulo 8 - Escolha do Passo de Simulação Δt . Discussão com respeito à influência do passo de simulação utilizado e descrição do procedimento de interpolação.

Capítulo 9 - Aplicações. Exemplos de simulações na área de sistemas de potência e de telecomunicações.

Capítulo 10 - Conclusões. Conclusões finais e sugestões de prosseguimento deste trabalho.

Apêndice A - Eliminação dos Cabos Para-Raios e Condutores Múltiplos. Redução da matriz de coeficientes de potencial de Maxwell e determinação do sistema trifásico a três fios equivalente.

Apêndice B - Raio Médio Geométrico e Impedância Interna. Discussão dos conceitos de RMG e impedância interna de condutores.

Apêndice C - Impedância Interna de Cabos Encordoados. Cálculo da impedância interna de condutores encordoados.

Apêndice D - Fórmula de Gary, Deri e Outros. Formulação alternativa para levar em consideração o efeito do retorno pelo solo. Esta formulação substitui os termos adicionais de correção de Carson.

Apêndice E - Técnicas de Projeto de Filtros Digitais. Métodos de projeto de filtros digitais IIR a partir de filtros analógicos. Discute formas de mapeamento do domínio da freqüência para o plano Z .

2. PARÂMETROS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO AÉREAS

Este capítulo descreve o cálculo dos parâmetros elétricos de linhas de transmissão aéreas a partir dos parâmetros físicos da linha [MtLine, 1992]. O procedimento, é completamente genérico e pode ser aplicado para qualquer número de circuitos (e.g., linhas de circuito duplo), qualquer arranjo com sub-condutores, e qualquer número de cabos pára-raios. Para ilustrar o método, adotaremos uma configuração de torre, com circuito simples e um cabo pára-raios, como mostrado na Fig. 2.1 ([Humpage, 1982c]):

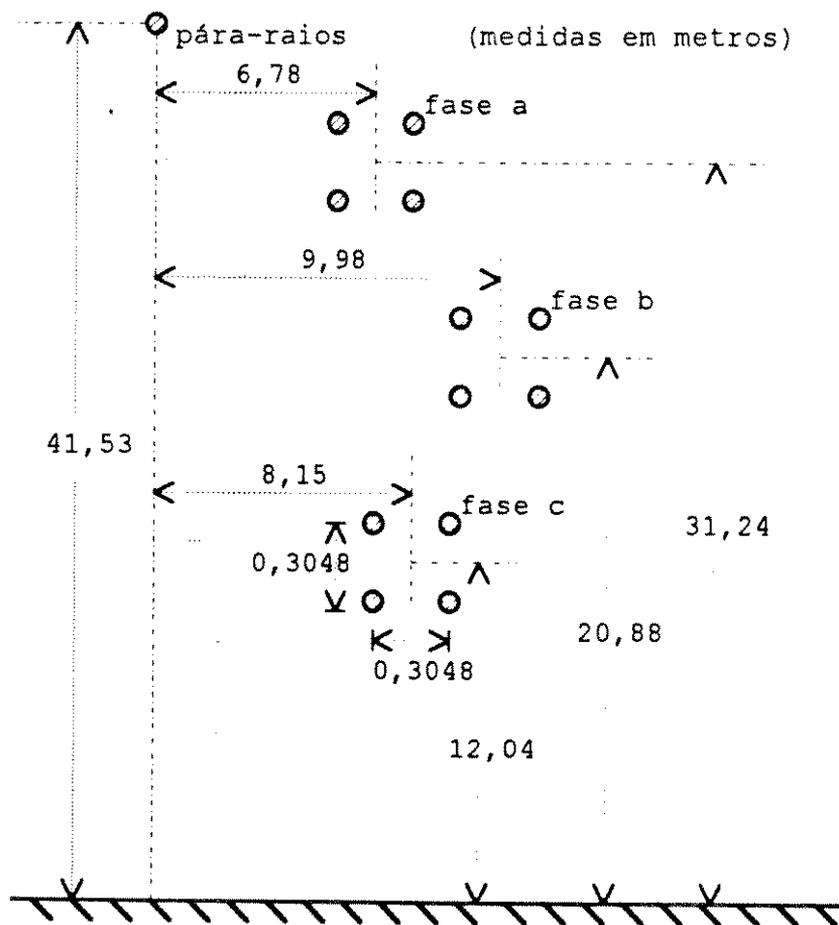


Fig. 2.1 - Torre de Linha de Transmissão de 400 kV usada como exemplo de aplicação.

Os principais dados da linha exemplo são fornecidos na Tab. 2.1:

Tab. 2.1 - Dados Básicos da Linha Exemplo	
Número de Circuitos	1
Número de condutores por fase	4
Número de cabos pára-raios	1
Simetria de posição dos condutores	Nenhuma
Resistividade dos condutores das fases	32 n Ω m
Resistividade do cabo pára-raios	26,9 n Ω m
Diâmetro dos filamentos que compõem os cabos das fases	3,2 mm
Diâmetro dos filamentos que compõem o cabo pára-raios	3,2 mm
DMG do conjunto de 4 cabos de cada fase	30,94 cm
Diâmetro externo dos cabos	28,6 mm
Número de filamentos efetivos nos cabos das fases	54
Número de filamentos efetivos no cabo pára-raios	54
Resistividade do solo	20 Ω m
Permeabilidade relativa dos cabos pára-raios	1000

2.1. IMPEDÂNCIA SÉRIE

Neste item descrevemos o procedimento adotado no cálculo da matriz impedância série da linha $[Z]$. Os elementos da diagonal Z_{ii} são chamados de impedâncias próprias por unidade de comprimento do condutor i com o terra servindo de caminho de retorno, e os elementos fora da diagonal Z_{ik} são chamados de impedâncias mútuas por unidade de comprimento entre os condutores i e k . A matriz é simétrica, $Z_{ik} = Z_{ki}$. Os valores dos elementos da matriz são calculados através das expressões:

$$Z_{ii} = R_i + j \left(2 \omega 10^{-4} \ln \frac{2 h_i}{RMG_i} \right) \text{ em } \Omega / km \quad (2.1)$$

$$Z_{ik} = Z_{ki} = j \left(2 \omega 10^{-4} \ln \frac{D_{ik}}{d_{ik}} \right) \text{ em } \Omega / \text{km} \quad (2.2)$$

onde:

R_i Resistência interna do condutor i (em Ω/km) - calculada com as equações (C.1) e (C.2) do apêndice C. No exemplo dado a resistência equivalente de cada fase é (1/4) da resistência de cada sub-condutor.

h_i Altura média acima do solo do condutor i em metros (Fig.2.1)

D_{ik} Distância entre o condutor i e a imagem do condutor k em metros (Fig.2.2).

d_{ik} Distância direta entre os condutores i e k em metros

RMG_i Raio médio geométrico do condutor i em metros. Em altas frequências, calcula-se o RMG através das expressões (B.4) e (C.3) dos apêndices B e C.

ω Frequência angular em rad/s

Obs.: D_{ik} , d_{ik} e RMG_i possuem a mesma unidade (P.ex., em metros)

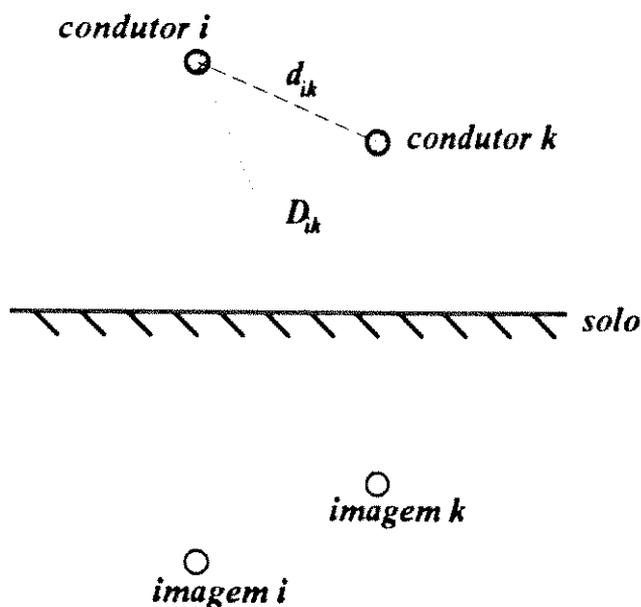


Fig. 2.2 - Distâncias utilizadas no cálculo da impedância série da linha.

Para levar em consideração o efeito da frequência sobre a impedância série da linha opta-se por utilizar a formulação proposta por Deri e outros (1981) reproduzida no apêndice D.

A matriz $[Z]$ [eq. (2.3)] é calculada para 300 pontos, logaritmicamente espaçados na faixa de 10^2 à 10^5 rad/s. Esta faixa foi escolhida afim de fornecer resultados que pudessem ser comparados com aqueles apresentados por Humpage (1982c).

O primeiro passo para determinação da impedância série da linha em questão foi substituir, na configuração original, os quatro sub-condutores por fase por condutores singelos equivalentes no que diz respeito à sua resistência e RMG. O segundo passo foi reduzir a matriz $Z_{4 \times 4}$ da configuração equivalente, a qual, supondo que o cabo pára-raios seja aterrado em todas as estruturas, deverá ser reduzida à uma matriz 3×3 . Tal redução é obtida através do seguinte procedimento:

1º) Partição da matriz $Z_{4 \times 4}$:

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} & Z_{a0} \\ Z_{ab} & Z_{bb} & Z_{bc} & Z_{b0} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & Z_{cc} & Z_{c0} \\ Z_{a0} & Z_{b0} & Z_{c0} & Z_{00} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Ou seja,

$$A_1 = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ab} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & Z_{cc} \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} Z_{a0} \\ Z_{b0} \\ Z_{c0} \end{bmatrix} \\ A_3 = [Z_{a0} \quad Z_{b0} \quad Z_{c0}] \quad A_4 = [Z_{00}] \quad (2.4)$$

Obs.: O subscrito 0 indica coeficientes relacionados com o cabo pára-raios.

2º) Cálculo da matriz equivalente 3×3 através de:

$$[Z]_{red} = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3 \quad (2.5)$$

A matriz impedância série reduzida é então dividida em uma parte real e outra imaginária conforme a seguinte expressão:

$$[Z]_{red} = \begin{bmatrix} r_{aa} & r_{ab} & r_{ac} \\ r_{ba} & r_{bb} & r_{bc} \\ r_{ca} & r_{cb} & r_{cc} \end{bmatrix} + j \omega \begin{bmatrix} l_{aa} & l_{ab} & l_{ac} \\ l_{ba} & l_{bb} & l_{bc} \\ l_{ca} & l_{cb} & l_{cc} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

A partir dos coeficientes da matriz de impedância série $[Z]$ reduzida, obtém-se as figuras 2.3 e 2.4 que mostram as resistências parciais e as figuras 2.5 e 2.6 que mostram as indutâncias parciais.

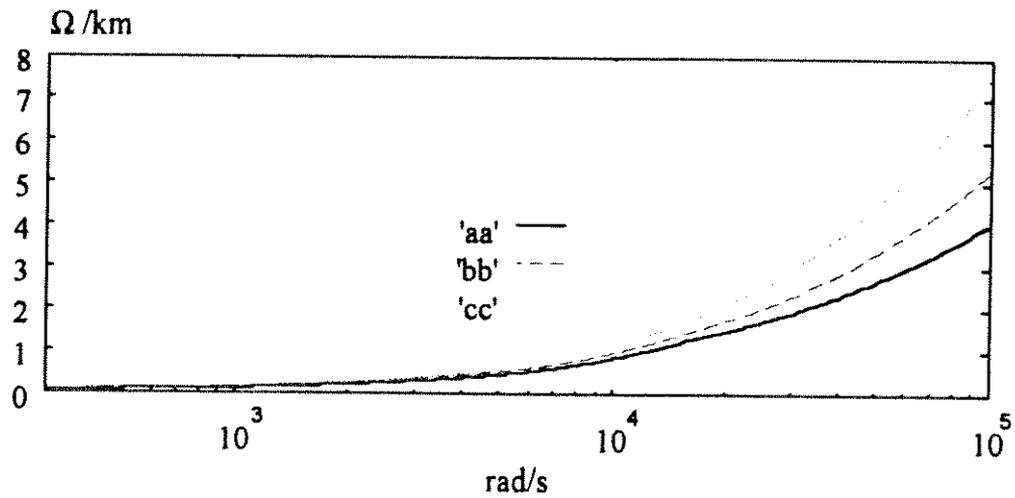


Fig. 2.3 - Resistências Próprias.

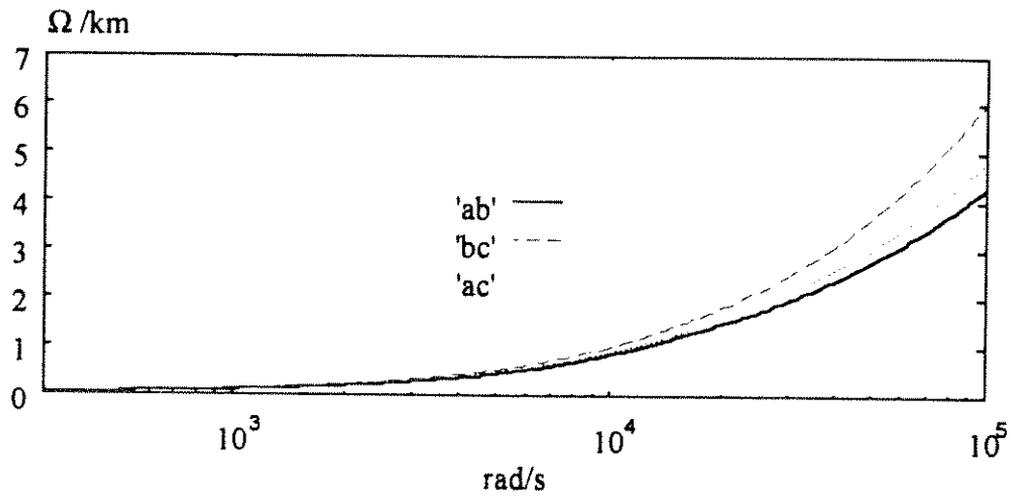


Fig. 2.4 - Resistências "Mútuas"

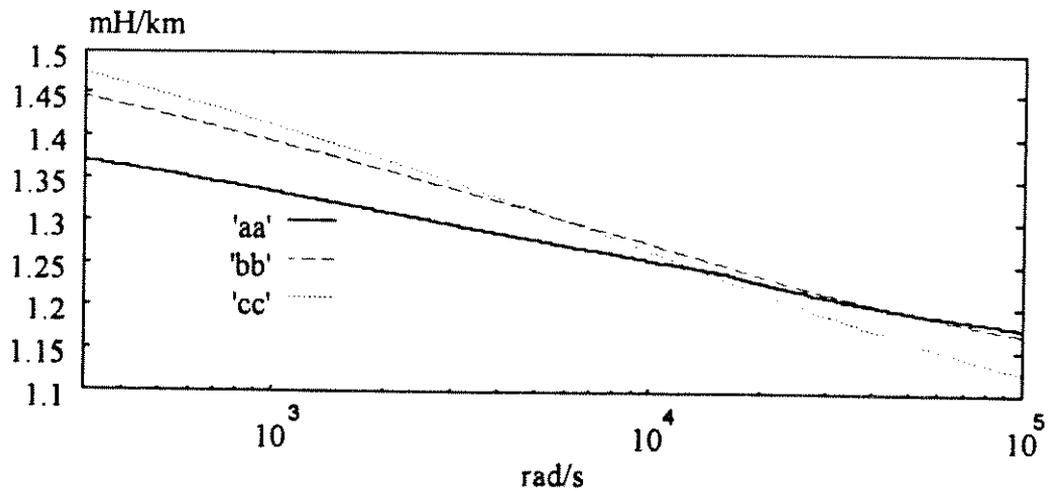


Fig. 2.5 - Indutâncias Parciais Próprias.

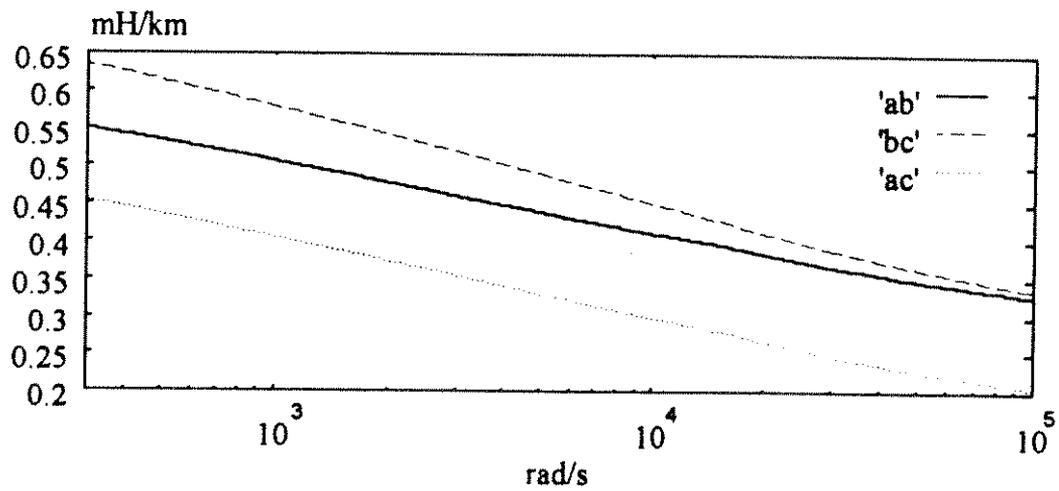


Fig. 2.6 - Indutâncias Parciais Mútuas

2.2. CAPACITÂNCIA SHUNT

O primeiro passo adotado no cálculo da capacitância shunt da linha foi reduzir a configuração inicial com 13 condutores (sendo 4 sub-condutores por fase e um cabo pára-raios) a uma configuração equivalente onde cada fase é representada por um único condutor (Fig. 2.7).

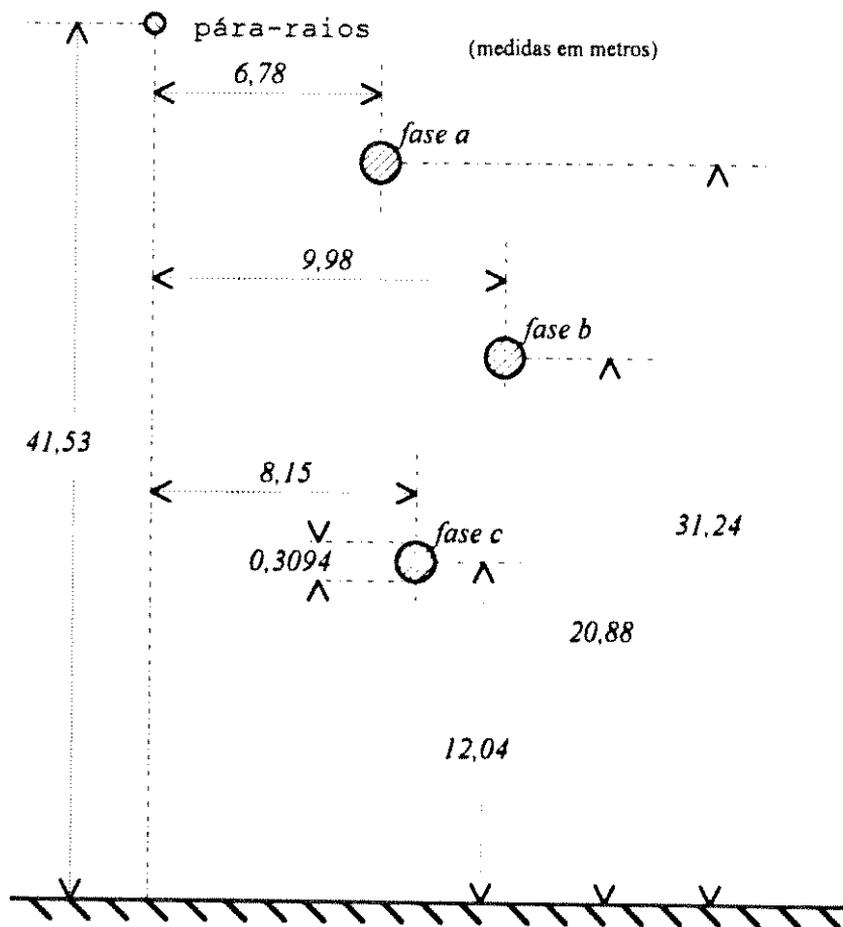


Fig. 2.7 - Configuração Equivalente usada no cálculo da matriz de Capacitâncias.

O raio do condutor equivalente para uso no cálculo da capacitância shunt é calculado com a equação (A.3) do apêndice A, como segue:

$$r_{equivalente} = \sqrt[4]{\left(\frac{2,86 \cdot 10^{-2}}{2}\right) 0,3048^3 \sqrt{2}} = 0,1547 \text{ m} \quad (2.7)$$

As capacitâncias entre os 4 condutores equivalentes e o solo são descritas na forma de uma matriz Capacitância 4x4. Os elementos da diagonal C_{ii} constituem a soma das capacitâncias shunt por unidade de comprimento do condutor i à todos os outros condutores bem como ao solo; seus elementos fora da diagonal C_{ik} são valores negativos da capacitância shunt por unidade de comprimento entre os condutores i e k . Da mesma forma que $[Z]$, a matriz de capacitâncias parciais $[C]$ é simétrica, isto é, $C_{ki} = C_{ik}$. Entretanto, a matriz de capacitâncias não pode ser calculada diretamente. Primeiramente, a matriz dos coeficientes de potencial de Maxwell deve ser calculada, e $[C]$ é então obtida por inversão da matriz $[P]$, isto é,

$$[C] = [P]^{-1} \quad (2.8)$$

Os elementos de $[P]$ são calculados da geometria da torre. Se $r \ll h$ (i.e., o raio do condutor muito menor que sua distância ao solo), então

$$P_{ii} = 18 \cdot 10^6 \ln \frac{2h_i}{r_i} \text{ em km / F} \quad (2.9)$$

$$P_{ik} = P_{ki} = 18 \cdot 10^6 \ln \frac{D_{ik}}{d_{ik}} \text{ em km / F} \quad (2.10)$$

O valor exato do fator $(18 \cdot 10^6)$ nas equações (2.9) e (2.10) é $2c^2 \cdot 10^{-4}$, com c sendo a velocidade da luz no ar em km/s . Os coeficientes de potencial relacionam as tensões ao terra e carga eletrostática nos condutores através da seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{aa} & P_{ab} & P_{ac} & P_{a0} \\ P_{ba} & P_{bb} & P_{bc} & P_{b0} \\ P_{ca} & P_{cb} & P_{cc} & P_{c0} \\ P_{0a} & P_{0b} & P_{0c} & P_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_a \\ Q_b \\ Q_c \\ Q_0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Obs.: O subscrito 0 indica coeficientes relacionados com o cabo pára-raios.

A redução da matriz $[P]_{4 \times 4}$ é feita da mesma forma que aquela utilizada na matriz impedância série da linha. O inverso da matriz $[P]$ reduzida conduz a matriz de capacitâncias parciais equivalentes:

$$\begin{bmatrix} C_{aa} & C_{ab} & C_{ac} \\ C_{ba} & C_{bb} & C_{bc} \\ C_{ca} & C_{cb} & C_{cc} \end{bmatrix} = [P]_{equivalente}^{-1} \quad (2.12)$$

Para o caso particular da linha-exemplo (Fig. 2.1) determinou-se:

$$\begin{bmatrix} C_{aa} & C_{ab} & C_{ac} \\ C_{ba} & C_{bb} & C_{bc} \\ C_{ca} & C_{cb} & C_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,5531 & -2,4326 & -0,8640 \\ -2,4326 & 11,2890 & -2,4315 \\ -0,8640 & -2,4315 & 11,8048 \end{bmatrix} \text{ nF / km} \quad (2.13)$$

2.3. ALGORITMO DE CÁLCULO DOS PARÂMETROS

Esta seção é dedicada à explicação do procedimento de cálculo implementado no cálculo dos parâmetros elétricos de linhas de transmissão de energia. Uma vez que estes parâmetros possuem comportamentos bastante distintos em baixas e altas frequências é necessário utilizar modelagens em baixas, médias e altas frequências. O procedimento nas médias frequências é análogo aquele do item 3.1.3 do capítulo 3. No caso da linha-exemplo de potência, o limite superior do modelo de baixa frequência e o limite inferior do modelo de alta frequência respectivamente utilizados foram: 50 Hz e 2,5 kHz, isto é, entre 50 e 2.500 Hz, os modelos de baixa e alta frequência são ponderados, obtendo-se um modelo de média frequência.

O algoritmo pode ser dividido em cinco partes principais:

- 1ª) Preparação das variáveis e constantes de acordo com os dados físicos da torre de sustentação da linha, parâmetros elétricos dos cabos e do solo;
- 2ª) Cálculo da Matriz Admitância Shunt da linha;
- 3ª) Cálculo da Matriz Impedância Série da linha;
- 4ª) Cálculo das Matrizes de Transformação Modal;
- 5ª) Cálculo das funções impedância característica e resposta ao impulso direto para cada um dos modos de propagação.

Os itens 4º e 5º estão desenvolvidos no capítulo 4.

3. PARÂMETROS DE LINHAS TELEFÔNICAS

As linhas telefônicas, de modo geral, são heterogêneas, contendo emendas e derivações as quais são fontes de reflexões e distorções dos sinais transmitidos.

Este capítulo descreve como obter as funções (impedância característica e função de propagação) que caracterizam linhas de assinantes no domínio da frequência.

3.1. MODELAGEM DA LINHA DE TRANSMISSÃO

O objetivo do modelagem da linha de transmissão homogênea é obter a função de propagação (γ) e a função impedância característica (Z_c) de modo que estas se aproximem dos valores medidos, para toda faixa de frequência.

Este trabalho contém modelagens em baixas, médias e altas frequências. A necessidade de se fazer o modelagem para estas três faixas de frequências, decorre do fato de que, o comportamento destas funções em baixas frequências é bem distinto do comportamento em altas frequências.

3.1.1. MODELAGEM DA LINHA EM BAIXAS FREQUÊNCIAS

No modelagem em baixas frequências os parâmetros distribuídos $r(\omega)$, $L(\omega)$, $g(\omega)$ e C são considerados constantes e a partir das seguintes equações descreve-se matematicamente as funções $\gamma(\omega)$ e $Z_c(\omega)$, na faixa de frequência de 0 à 10 kHz,

$$\gamma_B(\omega) = \alpha_B(\omega) + j\beta_B(\omega) = \sqrt{(r_B + j\omega L_B)(g_B + j\omega C_B)} \quad (3.1)$$

$$Z_{c_B}(\omega) = \sqrt{\frac{r_B + j\omega L_B}{g_B + j\omega C_B}} \quad (3.2)$$

onde, o índice B denota valor calculado na faixa de 0 à 10 kHz.

3.1.2. MODELAGEM DA LINHA EM ALTAS FREQUÊNCIAS

Nas altas frequências os parâmetros elétricos [$r(\omega)$, $L(\omega)$, $g(\omega)$] não são mais constantes e assim são necessárias aproximações da função de propagação $\gamma(\omega)$ e da impedância característica $Z_c(\omega)$.

$$\alpha_A(\omega) \cong \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{\omega} + \alpha_2 \omega \quad (3.3)$$

$$\beta_A(\omega) \cong \beta_1 \sqrt{\omega} + \beta_2 \omega \quad (3.4)$$

$$\gamma_A(\omega) = \alpha_A(\omega) + j\beta_A(\omega) \quad (3.5)$$

$$Z_{c_A}(\omega) \cong \frac{\alpha_A(\omega) + j\beta_A(\omega)}{j\omega C} = \frac{\beta_A(\omega)}{\omega C} - j \frac{\alpha_A(\omega)}{\omega C} \quad (3.6)$$

onde:

$$\beta_1 = \alpha_1 \quad (3.7)$$

$$\beta_2 = C|Z_c(\infty)| \quad (3.8)$$

sendo:

$|Z_c(\infty)|$ - Módulo da Impedância Característica medido em altas frequências.

C - Capacitância por unidade de comprimento do cabo.

Note que o modelo de alta frequência fica completamente determinado conhecendo-se C , $|Z_c(\infty)|$, α_0 , α_1 e α_2 .

Os parâmetros α_0 , α_1 e α_2 são determinados através da minimização do desvio quadrático médio entre o modelo teórico e valores medidos [Almeida, 1988], isto é,

$$\text{Min} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \left(\frac{\alpha_{mi} - \alpha_i}{\alpha_i} \right)^2 \right\} \quad (3.9)$$

onde:

α_{mi} - Valor da atenuação medida em dB/km;

α_i - Valor calculado ($\alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{\omega_i} + \alpha_2 \omega_i$)

M - Número de amostras na frequência

3.1.3. MODELO DA LINHA EM MÉDIAS FREQUÊNCIAS

O modelo para médias frequências baseia-se na função p que é uma função linear de ω que pondera a função de atenuação do modelo de baixa e do modelo de alta frequência, variando de 0 à 1, quando ω varia de ω_B (limite superior do modelo de baixa frequência) à ω_A (limite inferior do modelo de alta frequência):

$$p(\omega) = \frac{\omega - \omega_B}{\omega_A - \omega_B} \quad (3.10)$$

As equações (3.11) e (3.12) fornecem as equações do modelo de médias frequências:

$$\gamma_M(\omega) = [1 - p(\omega)] \gamma_B(\omega) + p(\omega) \cdot \gamma_A(\omega) \quad (3.11)$$

$$Z_{c_M}(\omega) = [1 - p(\omega)] Z_{c_B}(\omega) + p(\omega) \cdot Z_{c_A}(\omega) \quad (3.12)$$

ω_A - Limite inferior da faixa de altas frequências (50 kHz);

ω_B - Limite superior da faixa de baixas frequências (10 kHz);

$\gamma_B(\omega)$ - Função de Propagação na faixa de baixas frequências (0-10 kHz);

$\gamma_M(\omega)$ - Função de Propagação na faixa de médias frequências (10-50 kHz);

$\gamma_A(\omega)$ - Função de Propagação na faixa de altas frequências (acima de 50 kHz);

$Z_{c_B}(\omega)$ - Impedância Característica entre 0 e 10 kHz;

$Z_{c_M}(\omega)$ - Impedância Característica entre 10 kHz e 50 kHz;

$Z_{c_A}(\omega)$ - Impedância Característica acima de 50 kHz.

A Tab. 3.1 apresenta os valores dos parâmetros necessários para a obtenção das funções da linha em toda a faixa de frequência de interesse.

Tab. 3.1 - Parâmetros dos cabos utilizados nas simulações [Almeida, 1988].

Parâmetro	Unidade	CABO (AWG)			
		19	22	24	26
r_B	Ω/km	53	106	171	273
L_B	mH/km	0,62	0,62	0,62	0,62
g_B	$\mu\text{S}/\text{km}$	1,37	1,30	1,18	1,12
C	nF/km	52	51	45	43
$ Z_c(\infty) $	Ω	97	102	104	103
α_0	$(\text{km})^{-1}$	0,12318	0,24479	0,40163	0,45771
α_1	$(\text{rad}/\mu\text{s})^{1/2}(\text{km})^{-1}$	0,27154	0,38461	0,69436	1,0625
α_2	$\mu\text{s}/(\text{rad km})$	0,17444	0,21278	0,13271	0,072733
f_B	kHz	10	10	10	10
f_A	kHz	50	50	50	50

Este capítulo contém o procedimento para obtenção dos parâmetros elétricos de linhas de assinantes. Tal procedimento foi implementado e usado na elaboração de bancos de dados utilizados nas simulações de transitórios eletromagnéticos em linhas telefônicas. Algumas destas simulações são apresentadas e validadas no capítulo 9, através de comparações com resultados obtidos pelo método de Fourier.

4. A LINHA DE TRANSMISSÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Este capítulo contém o procedimento de cálculo de transitórios eletromagnéticos originalmente descrito por Humpage (1982c), o qual foi implementado para verificação de desempenho.

4.1. EQUAÇÕES DA LINHA DE TRANSMISSÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Seja um trecho elementar de uma linha de transmissão como na Fig. 4.1. O trecho tem comprimento Δx e se encontra a uma distância x do terminal da linha designado como emissor. Conforme visto no capítulo 2, as fases constituídas de dois ou mais sub-condutores são reduzidas a um único condutor em cada fase, e as variáveis relacionadas com o cabo pára-raios são eliminadas sujeitas à condição de queda de tensão nula ao longo dos mesmos. Note que na Fig. 4.1 não estão representadas as resistências "mútuas", as quais aparecem na matriz impedância série devido ao efeito do retorno pelo solo.

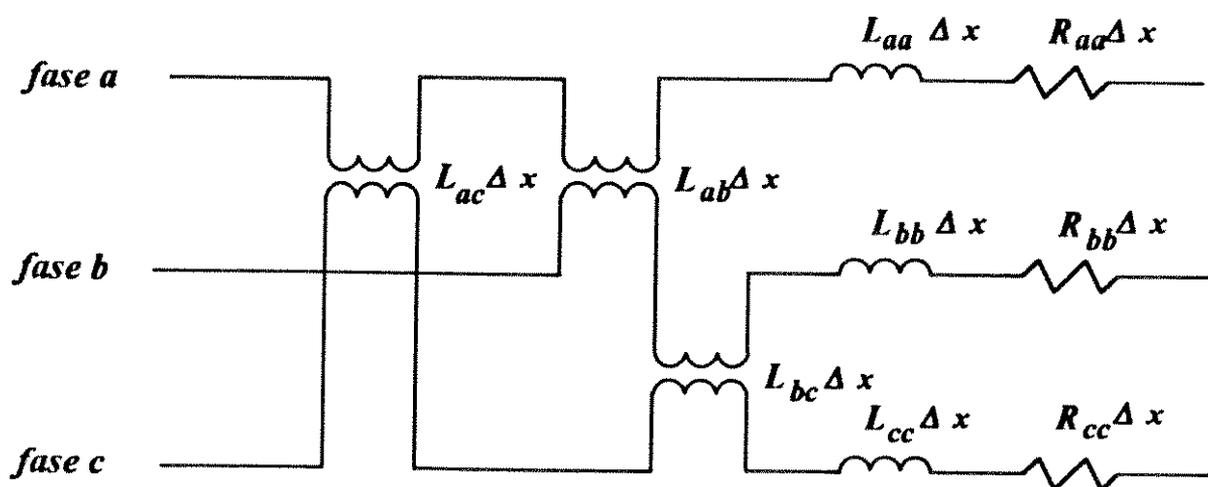
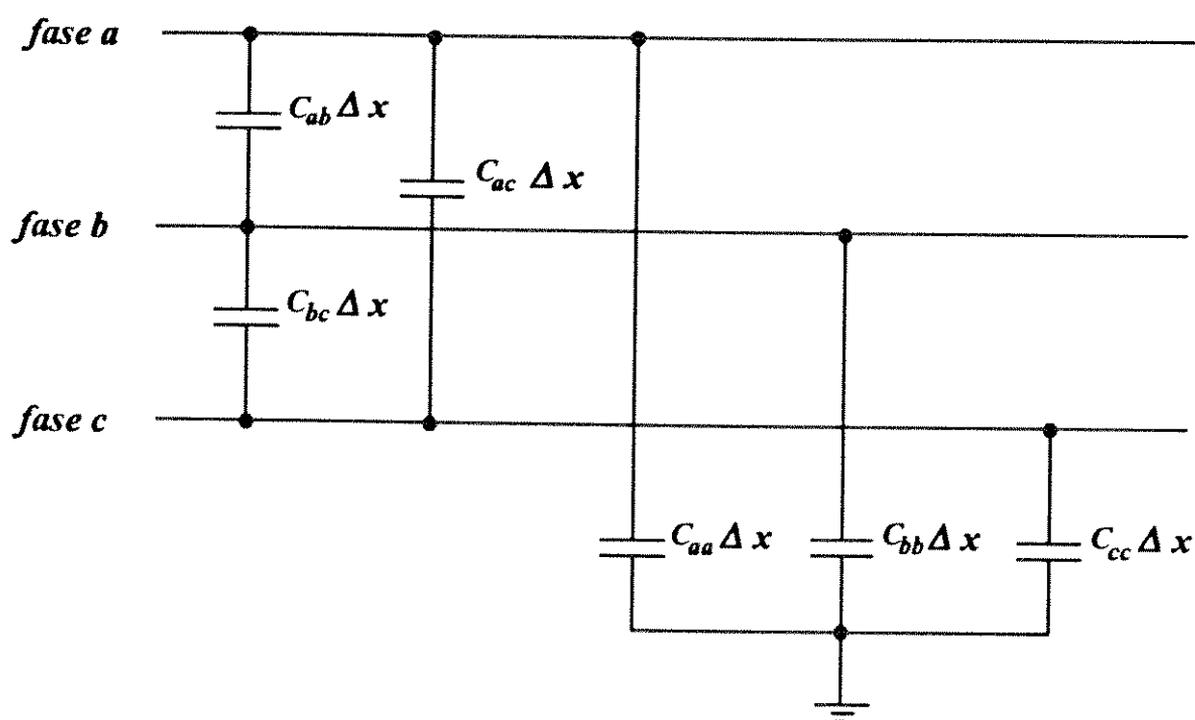
(a) Impedância Série Equivalente para um trecho de comprimento Δx .(b) Admitância Shunt para um trecho de comprimento Δx .

Fig. 4.1 - Trecho do Circuito Equivalente de uma linha Trifásica

As figuras 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6, do capítulo 2 fornecem o comportamento dos parâmetros elétricos da linha exemplo como função da frequência.

As variáveis de tensão e corrente são funções da frequência e da posição ao longo da linha. Usaremos o subscrito " f " para identificar as variáveis de tensão e corrente nas fases a , b e c :

$$v_f(\omega, x) = \begin{bmatrix} v_a(\omega, x) \\ v_b(\omega, x) \\ v_c(\omega, x) \end{bmatrix} \quad i_f(\omega, x) = \begin{bmatrix} i_a(\omega, x) \\ i_b(\omega, x) \\ i_c(\omega, x) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

As variáveis no vetor $v_f(\omega, x)$ são tensões entre os condutores e o solo e aquelas em $i_f(\omega, x)$ são as correntes nas impedâncias série da linha. Para a queda de tensão ao longo da linha denotaremos $\Delta v_f(\omega, x)$ e $\Delta i_f(\omega, x)$ o vetor de correntes de carregamento entre os condutores e entre os mesmos e o solo. Então:

$$\Delta v_f(\omega, x) = \begin{bmatrix} \Delta v_a(\omega, x) \\ \Delta v_b(\omega, x) \\ \Delta v_c(\omega, x) \end{bmatrix} \quad \Delta i_f(\omega, x) = \begin{bmatrix} \Delta i_a(\omega, x) \\ \Delta i_b(\omega, x) \\ \Delta i_c(\omega, x) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Se $z_f(\omega)$ e $y_f(\omega)$ são as matrizes de impedância série e admitância "shunt" por unidade de comprimento, respectivamente, então as variáveis de tensão e corrente são inter-relacionadas por:

$$\Delta v_f(\omega, x) = -z_f(\omega) \Delta x i_f(\omega, x) \quad (4.3)$$

$$\Delta i_f(\omega, x) = -y_f(\omega) \Delta x v_f(\omega, x) \quad (4.4)$$

onde:

$$z_f(\omega) = r_f(\omega) + j \omega L_f(\omega) \quad (4.5)$$

$$y_f(\omega) = g_f(\omega) + j \omega C_f(\omega) \quad (4.6)$$

Os parâmetros $z_f(\omega)$ e $y_f(\omega)$ são obtidos conforme o desenvolvimento feito nos capítulos 1 e 2. No caso de linhas de transmissão de energia, considerou-se, conforme sugerido por Marti, $g_f(\omega) = 3,0 \times 10^{-8} \text{ S / km}$. Na faixa de frequência de interesse na análise dos transitórios eletromagnéticos, os valores de $y_f(\omega)$ variam linearmente com a frequência, o que implica em coeficientes de capacitância constantes.

Fazendo $\Delta x \rightarrow 0$ nas equações (4.3) e (4.4) obtém-se as seguintes equações diferenciais.

$$\frac{\partial v_f(\omega, x)}{\partial x} = -z_f(\omega) \cdot i_f(\omega, x) \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial i_f(\omega, x)}{\partial x} = -y_f(\omega) \cdot v_f(\omega, x) \quad (4.8)$$

Diferenciando novamente as equações (4.7) e (4.8):

$$\frac{\partial^2 v_f(\omega, x)}{\partial x^2} = -z_f(\omega) \frac{\partial i_f(\omega, x)}{\partial x} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial^2 i_f(\omega, x)}{\partial x^2} = -y_f(\omega) \frac{\partial v_f(\omega, x)}{\partial x} \quad (4.10)$$

Substituindo as equações (4.7) e (4.8) nas equações (4.9) e (4.10); respectivamente, segue:

$$\frac{\partial^2 v_f(\omega, x)}{\partial x^2} = z_f(\omega) \cdot y_f(\omega) \cdot v_f(\omega, x) \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial^2 i_f(\omega, x)}{\partial x^2} = y_f(\omega) \cdot z_f(\omega) \cdot i_f(\omega, x) \quad (4.12)$$

Tanto $z_f(\omega)$ quanto $y_f(\omega)$ são sempre simétricas, tal que a ordem do produto na equação (4.11) conduz à transposta daquela dada pelo produto na seqüência inversa da equação (4.12). Portanto é conveniente usar esta propriedade:

$$\frac{\partial^2 v_f(\omega, x)}{\partial x^2} = P(\omega) \cdot v_f(\omega, x) \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial^2 i_f(\omega, x)}{\partial x^2} = P'(\omega) \cdot i_f(\omega, x) \quad (4.14)$$

onde:

$$P(\omega) = z_f(\omega) \cdot y_f(\omega) \quad (4.15)$$

e

$$P'(\omega) = y_f(\omega) \cdot z_f(\omega) \quad (4.16)$$

Uma transformação linear das variáveis é agora necessária para que $P(\omega)$ e $P'(\omega)$ sejam reduzidas à matrizes diagonais. Trabalho anterior [Wedepohl, 1963] sobre transformação modal mostra que um dos modos resultantes da transformação está

predominantemente associado com o retorno por terra, enquanto que os dois restantes são bastante independentes das características do retorno por terra, e eles são chamados de modos aéreos. Adotaremos a notação na qual o subscrito 0 identifica o modo de retorno por terra, e os subscritos 1 e 2 denotam os modos aéreos independentes. Usando $v(\omega, x)$ e $i(\omega, x)$ para representar as variáveis modais resultantes da transformação modal nos vetores $v_f(\omega, x)$ e $i_f(\omega, x)$, então:

$$v(\omega, x) = \begin{bmatrix} v_0(\omega, x) \\ v_1(\omega, x) \\ v_2(\omega, x) \end{bmatrix} \quad i(\omega, x) = \begin{bmatrix} i_0(\omega, x) \\ i_1(\omega, x) \\ i_2(\omega, x) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

As relações de transformação são:

$$v_f(\omega, x) = T_v(\omega) \cdot v(\omega, x) \quad (4.18)$$

$$i_f(\omega, x) = T_i(\omega) \cdot i(\omega, x) \quad (4.19)$$

Na ordem inversa:

$$v(\omega, x) = T_v^{-1}(\omega) \cdot v_f(\omega, x) \quad (4.20)$$

$$i(\omega, x) = T_i^{-1}(\omega) \cdot i_f(\omega, x) \quad (4.21)$$

Usando estas relações de transformação nas equações de segunda ordem de (4.13) e (4.14) então tem-se:

$$\frac{\partial^2 v(\omega, x)}{\partial x^2} = \gamma^2(\omega) \cdot v(\omega, x) \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial^2 i(\omega, x)}{\partial x^2} = \gamma_i^2(\omega) \cdot i(\omega, x) \quad (4.23)$$

onde:

$$\gamma^2(\omega) = T_v^{-1}(\omega) \cdot P(\omega) \cdot T_v(\omega) \quad (4.24)$$

$$\gamma_i^2(\omega) = T_i^{-1}(\omega) \cdot P'(\omega) \cdot T_i(\omega) \quad (4.25)$$

Os elementos de $\gamma^2(\omega)$ são os autovalores de $P(\omega)$, e uma vez que os autovalores de $P(\omega)$ são os mesmos de sua transposta $P'(\omega)$, isto é $\gamma^2(\omega) = \gamma_i^2(\omega)$. Tanto o produto $z_f(\omega) \cdot y_f(\omega)$ quanto $y_f(\omega) \cdot z_f(\omega)$ são transformados na mesma

matriz diagonal. $T_v(\omega)$ e $T_i(\omega)$ são as matrizes dos auto-vetores de $P(\omega)$ e $P'(\omega)$, respectivamente. As equações modais de segunda ordem básicas no domínio da frequência são portanto:

$$\frac{\partial^2 v(\omega, x)}{\partial x^2} = \gamma^2(\omega) \cdot v(\omega, x) \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial^2 i(\omega, x)}{\partial x^2} = \gamma^2(\omega) \cdot i(\omega, x) \quad (4.27)$$

onde:

$$\gamma^2(\omega) = \begin{bmatrix} \gamma_0^2(\omega) & & \\ & \gamma_1^2(\omega) & \\ & & \gamma_2^2(\omega) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Note que as equações (4.26) e (4.27) são mutuamente independentes em seus modos de propagação e, portanto, podem ser facilmente implementadas como no caso monofásico. Supondo que a expressão da tensão seja dada por:

$$v(\omega, x) = e^{-\gamma(\omega)x} \cdot A(\omega) + e^{\gamma(\omega)x} \cdot B(\omega) \quad (4.29)$$

Verifica-se a hipótese tomando-se a primeira derivada parcial:

$$\frac{\partial v(\omega, x)}{\partial x} = -\gamma(\omega) \cdot e^{-\gamma(\omega)x} \cdot A(\omega) + \gamma(\omega) \cdot e^{\gamma(\omega)x} \cdot B(\omega) \quad (4.30)$$

diferenciando novamente,

$$\frac{\partial^2 v(\omega, x)}{\partial x^2} = \gamma^2(\omega) \cdot [e^{-\gamma(\omega)x} \cdot A(\omega) + e^{\gamma(\omega)x} \cdot B(\omega)] \quad (4.31)$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 v(\omega, x)}{\partial x^2} = \gamma^2(\omega) \cdot v(\omega, x) \quad (4.32)$$

como queríamos verificar.

Por outro lado, a equação inicial de primeira ordem (4.7) fica:

$$\frac{\partial [T_v(\omega) \cdot v(\omega, x)]}{\partial x} = -z_f(\omega) \cdot [T_i(\omega) \cdot i(\omega, x)] \quad (4.33)$$

de onde segue,

$$\frac{\partial v(\omega, x)}{\partial x} = -[T_v^{-1}(\omega) \cdot z_f(\omega) \cdot T_i(\omega)] \cdot i(\omega, x) \quad (4.34)$$

Logo, existe uma matriz de impedância série modal calculada por:

$$z(\omega) = T_v^{-1}(\omega) \cdot z_f(\omega) \cdot T_i(\omega) \quad (4.35)$$

tal que,

$$\frac{\partial v(\omega, x)}{\partial x} = -z(\omega) \cdot i(\omega, x) \quad (4.36)$$

As figuras 4.2 e 4.3 fornecem os parâmetros modais calculados com a expressão (4.35).

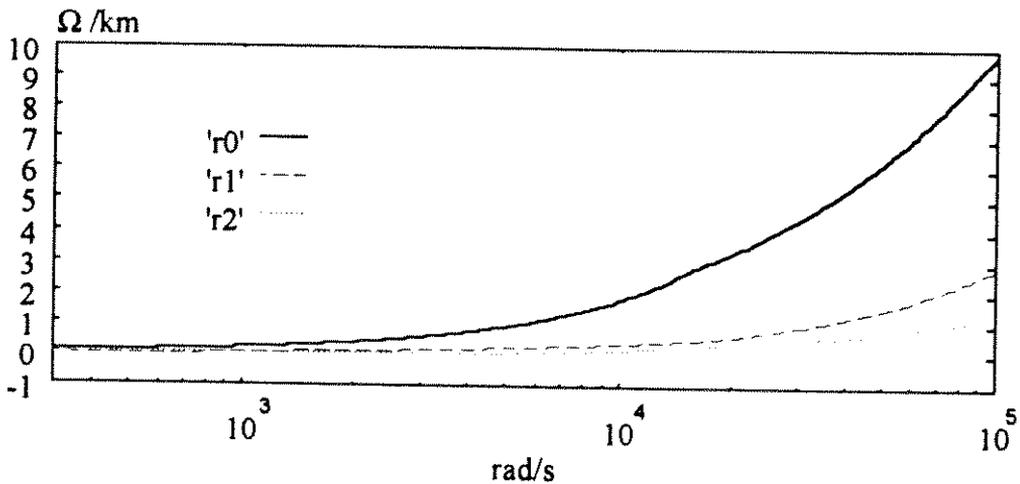


Fig. 4.2 - Resistências modais da impedância série modal da linha $z(\omega)$.

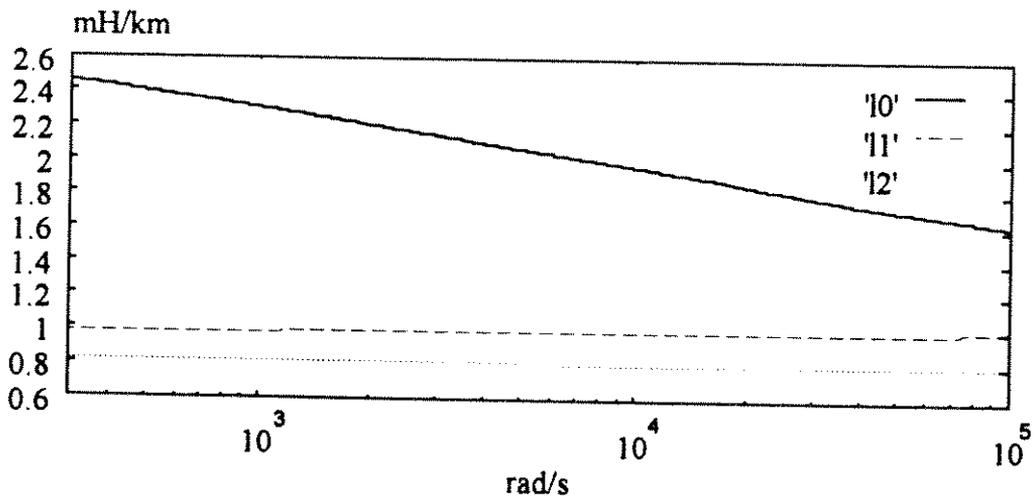


Fig. 4.3 - Indutâncias modais da impedância série modal da linha $z(\omega)$.

Substituindo a equação (4.36) na equação (4.30), determinamos a expressão da corrente:

$$-z(\omega) \cdot i(\omega, x) = -\gamma(\omega) \cdot e^{-\gamma(\omega)x} \cdot A(\omega) + \gamma(\omega) \cdot e^{\gamma(\omega)x} \cdot B(\omega) \quad (4.37)$$

ou ainda,

$$\gamma^{-1}(\omega) \cdot z(\omega) \cdot i(\omega, x) = e^{-\gamma(\omega)x} \cdot A(\omega) - e^{\gamma(\omega)x} \cdot B(\omega) \quad (4.38)$$

Denominando:

$$Z_c(\omega) = \gamma^{-1}(\omega) \cdot z(\omega) \quad (4.39)$$

resulta em,

$$Z_c(\omega) \cdot i(\omega, x) = e^{-\gamma(\omega)x} \cdot A(\omega) - e^{\gamma(\omega)x} \cdot B(\omega) \quad (4.40)$$

Dada a dependência com a frequência dos coeficientes de resistência e indutância da matriz original $z_f(\omega)$, obtém-se os coeficientes de $z(\omega)$ resultantes da transformação modal, os quais são mostrados nas figuras 4.2 e 4.3. De certo modo, a dependência com a frequência e os valores numéricos dos coeficientes de resistência nos modos 1 e 2, com relação àqueles do modo terra, consistem em uma indicação de como a transformação desacopla os modos 1 e 2 do retorno por terra.

As funções $A(\omega)$ e $B(\omega)$ são encontrados a partir de condições de contorno especificadas e, por analogia a um sistema monofásico, $Z_c(\omega)$ é a matriz diagonal das impedâncias características modais da linha.

Denotando as variáveis de tensão e de corrente quando $x=0$ (extremidade emissora) por $v_e(\omega)$ e $i_e(\omega)$ nas (4.29) e (4.40), tem-se

$$v_e(\omega) = A(\omega) + B(\omega) \quad (4.41)$$

$$Z_c(\omega) \cdot i_e(\omega) = A(\omega) - B(\omega) \quad (4.42)$$

Resolvendo as equações (4.41) e (4.42) em termos de $A(\omega)$ e $B(\omega)$, segue,

$$A(\omega) = \frac{1}{2}[v_e(\omega) + Z_c(\omega) \cdot i_e(\omega)] \quad (4.43)$$

$$B(\omega) = \frac{1}{2}[v_e(\omega) - Z_c(\omega) \cdot i_e(\omega)] \quad (4.44)$$

Na outra extremidade, quando $x = \ell$ (receptor),

$$v_r(\omega) = e^{-\gamma(\omega)\ell} \cdot A(\omega) + e^{\gamma(\omega)\ell} \cdot B(\omega) \quad (4.45)$$

$$Z_c(\omega) \cdot i_r(\omega) = e^{-\gamma(\omega)\ell} \cdot A(\omega) - e^{\gamma(\omega)\ell} \cdot B(\omega) \quad (4.46)$$

Somando e posteriormente subtraindo e somando as equações (4.45) e (4.46) obteremos as relações de corrente e tensão na formulação proposta por Bergeron

$$v_r(\omega) + Z_c(\omega) \cdot i_r(\omega) = 2 \cdot e^{-\gamma(\omega)\ell} \cdot A(\omega) \quad (4.47)$$

$$v_r(\omega) - Z_c(\omega) \cdot i_r(\omega) = 2 \cdot e^{\gamma(\omega)\ell} \cdot B(\omega) \quad (4.48)$$

Substituindo $A(\omega)$ e $B(\omega)$ nas equações acima:

$$v_r(\omega) + Z_c(\omega) \cdot i_r(\omega) = e^{-\gamma(\omega)\ell} \cdot [v_e(\omega) + Z_c(\omega) \cdot i_e(\omega)] \quad (4.49)$$

$$v_r(\omega) - Z_c(\omega) \cdot i_r(\omega) = e^{\gamma(\omega)\ell} \cdot [v_e(\omega) - Z_c(\omega) \cdot i_e(\omega)] \quad (4.50)$$

Rearranjando a equação (4.50):

$$v_e(\omega) - Z_c(\omega) \cdot i_e(\omega) = e^{-\gamma(\omega)\ell} \cdot [v_r(\omega) - Z_c(\omega) \cdot i_r(\omega)] \quad (4.51)$$

Finalmente, mudando o sinal de $i_r(\omega)$ de maneira que $i_e(\omega)$ e $i_r(\omega)$ correspondam as correntes entrando nos terminais e e r da linha, respectivamente, tem-se então as equações da linha no domínio da frequência.

$$v_e(\omega) - Z_c(\omega) \cdot i_e(\omega) = e^{-\gamma(\omega)\ell} \cdot [v_r(\omega) + Z_c(\omega) \cdot i_r(\omega)] \quad (4.52)$$

$$v_r(\omega) - Z_c(\omega) \cdot i_r(\omega) = e^{-\gamma(\omega)\ell} \cdot [v_e(\omega) + Z_c(\omega) \cdot i_e(\omega)] \quad (4.53)$$

4.2. FUNÇÕES IMPEDÂNCIA DE SURTO E RESPOSTA AO IMPULSO DIRETO

Resolvendo as equações de 2ª ordem (4.26) e (4.27) tem-se diretamente a função impedância de surto $Z_c(\omega)$. As figuras 4.4 e 4.5 mostram, respectivamente, a variação com a frequência do módulo e da fase da função impedância de surto para linha de transmissão do exemplo de aplicação (Fig. 2.1, pag. 2.1).

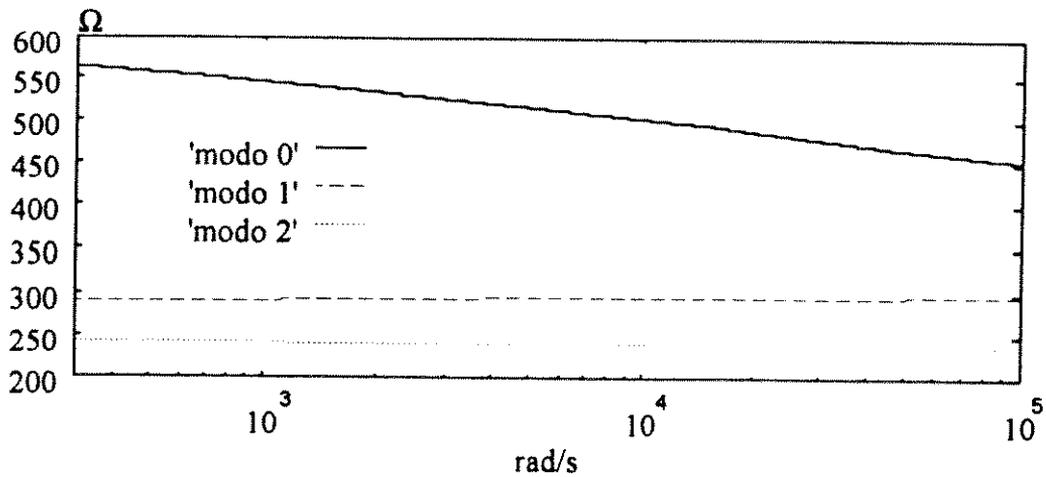


Fig. 4.4 - Módulo da função Impedância Característica $Z_c(\omega)$

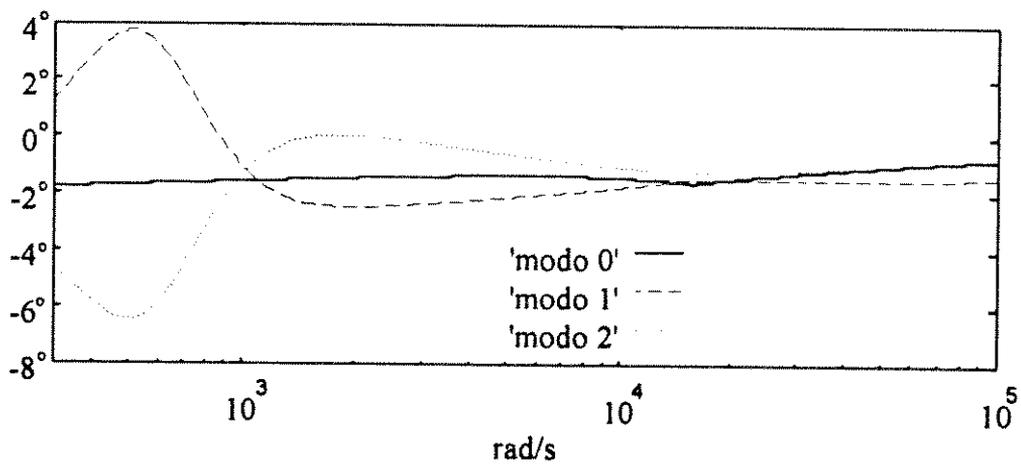


Fig. 4.5 - Fase da função Impedância Característica $Z_c(\omega)$ em graus.

Para a interpretação da função resposta ao impulso direto, faz-se primeiramente a decomposição das tensões em qualquer ponto da linha em duas componentes, uma componente direta $v^D(\omega, x)$ e outra reversa $v^R(\omega, x)$, de modo que

$$v(\omega, x) = v^D(\omega, x) + v^R(\omega, x) \quad (4.54)$$

Comparando as equações (4.29) e (4.54), segue

$$v^D(\omega, x) = e^{-\gamma(\omega)x} \cdot A(\omega) \quad (4.55)$$

$$v^R(\omega, x) = e^{\gamma(\omega)x} \cdot B(\omega) \quad (4.56)$$

Na propagação direta, o vetor $A(\omega)$ é encontrado através das condições de contorno para $x=0$. Se $V_S(\omega)$ é a tensão de transmissão, então,

$$v^D(\omega, 0) = v_e(\omega) \quad (4.57)$$

Considera-se o caso particular em que a tensão de entrada é a função impulso

$$v_e(\omega) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ para qualquer } \omega \quad (4.58)$$

Com esta excitação de entrada

$$v^D(\omega, x) = e^{-\gamma(\omega)x} \quad (4.59)$$

A função $e^{-\gamma(\omega)x}$ é então a resposta ao impulso direto da seção da linha de comprimento x e é designada por

$$F_x(\omega) = e^{-\gamma(\omega)x} \quad (4.60)$$

Para uma linha de transmissão de comprimento ℓ , a resposta ao impulso direto é dada por:

$$F_{\ell}(\omega) = e^{-\gamma(\omega)\ell} \quad (4.61)$$

As figuras 4.6 e 4.7 mostram as características do módulo e da fase da função resposta ao impulso da linha exemplo, cujo comprimento é de 160 km.

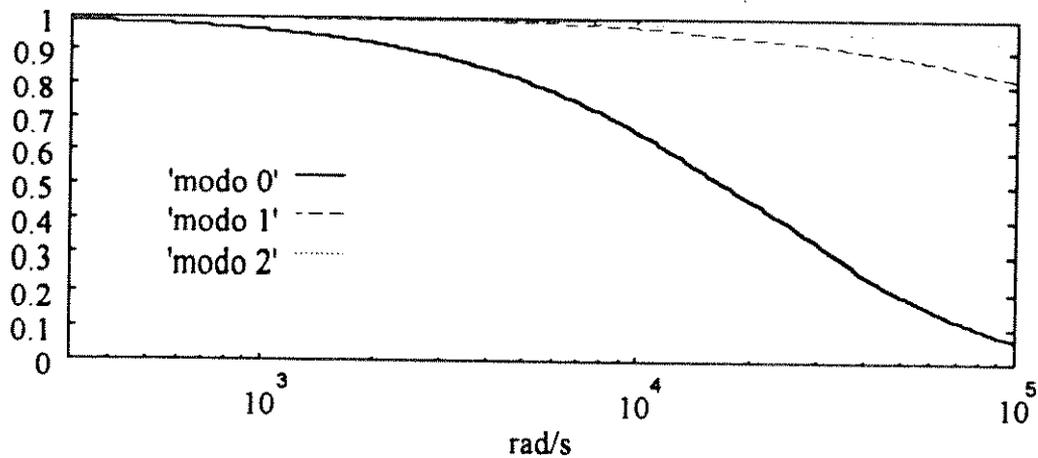


Fig. 4.6 - Módulo da Resposta ao Impulso direto $F_{\ell}(\omega)$

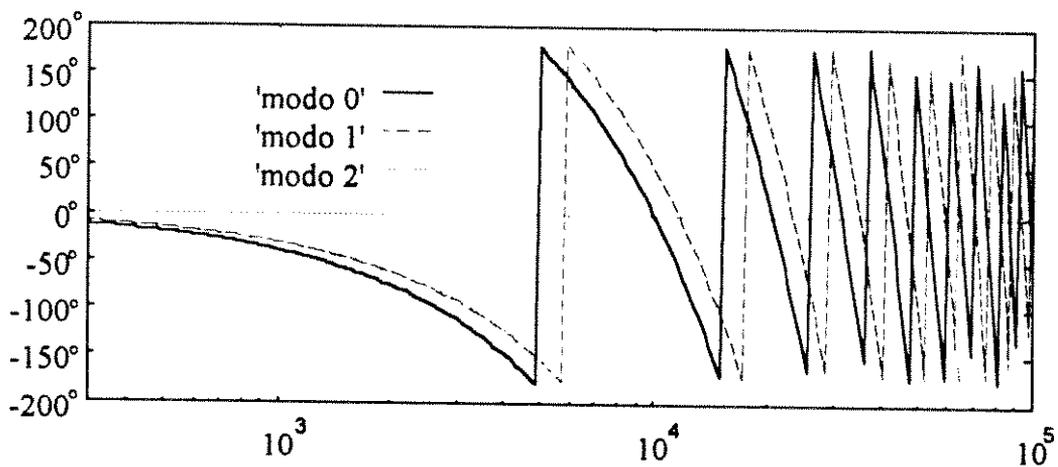


Fig. 4.7 - Fase da Resposta ao Impulso direto $F_{\ell}(\omega)$ em graus

4.3. EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS

Expressando as equações (4.29) e (4.40) em termos de componentes diretas e reversas de tensões modais, obtém-se:

$$v(\omega, x) = v^D(\omega, x) + v^R(\omega, x) \quad (4.62)$$

$$Z_c(\omega, x) \cdot i(\omega, x) = v^D(\omega, x) - v^R(\omega, x) \quad (4.63)$$

logo,

$$2 v^D(\omega, x) = v(\omega, x) + Z_c(\omega) i(\omega, x) \quad (4.64)$$

$$2 v^R(\omega, x) = v(\omega, x) - Z_c(\omega) i(\omega, x) \quad (4.65)$$

A equação (4.64) corresponde a propagação direta na formulação proposta pela análise de Bergeron. A equação (4.65) corresponde a característica de propagação reversa. Nos terminais \underline{e} e \underline{r} da linha, as características diretas $D_e(\omega)$ e $D_r(\omega)$, são dadas, respectivamente, por

$$D_e(\omega) = v_e(\omega) + Z_c(\omega) \cdot i_e(\omega) \quad (4.66)$$

$$D_r(\omega) = v_r(\omega) + Z_c(\omega) \cdot i_r(\omega) \quad (4.67)$$

Enquanto que as características reversas, $R_e(\omega)$ e $R_r(\omega)$ são formadas por

$$R_e(\omega) = v_e(\omega) - Z_c(\omega) \cdot i_e(\omega) \quad (4.68)$$

$$R_r(\omega) = v_r(\omega) - Z_c(\omega) \cdot i_r(\omega) \quad (4.69)$$

4.4. CARACTERÍSTICAS DE FASE E TEMPO DE VIAGEM DE ONDA

Separando em parte real e imaginária da função de propagação, por unidade de comprimento da linha de transmissão, tem-se:

$$\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j \beta(\omega) \quad (4.70)$$

A dependência da frequência dos coeficientes de atenuação e de fase são mostradas nas figuras 4.8 e 4.9.

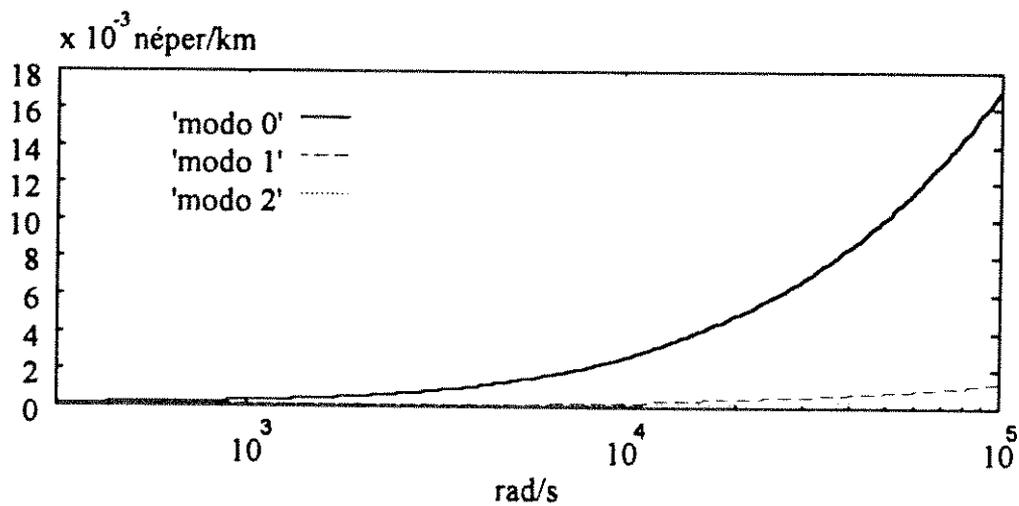


Fig. 4.8 - Coeficiente de Atenuação ($\alpha(\omega)$).

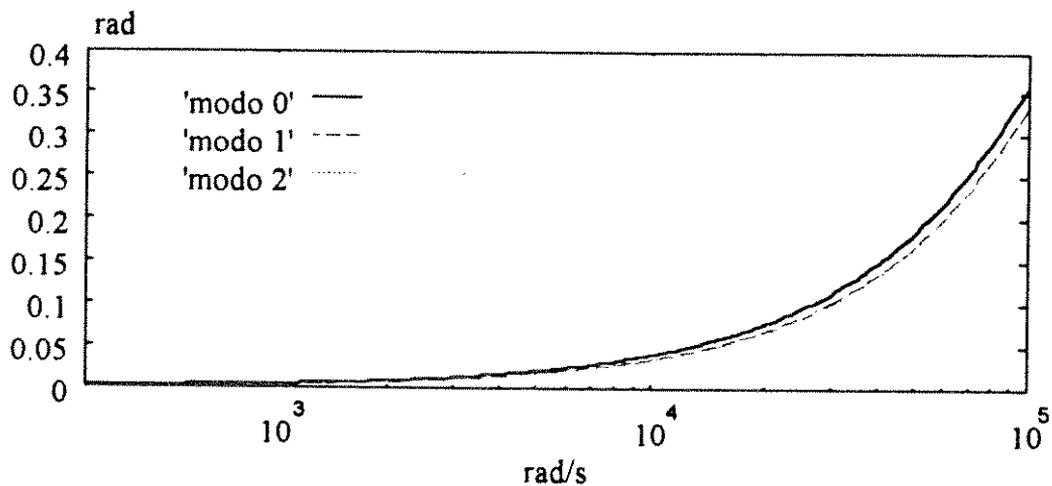


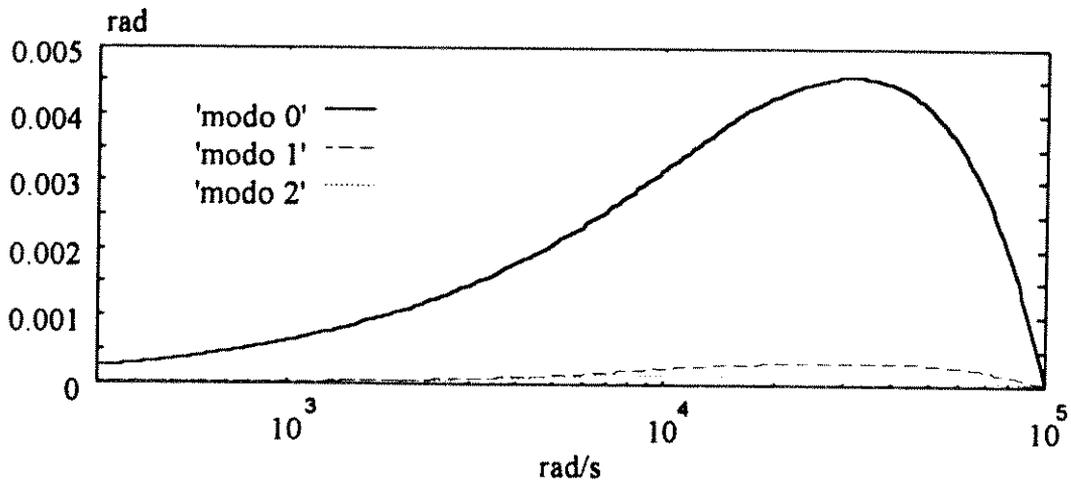
Fig. 4.9 - Função deslocamento de fase ($\beta(\omega)$).

A característica da fase $\beta(\omega)$, mostrada na Fig. 4.9, pode ser dividida em duas componentes, uma linear $\beta_l(\omega)$ e outra não-linear em $\beta_n(\omega)$ (Fig. 4.10), tal como

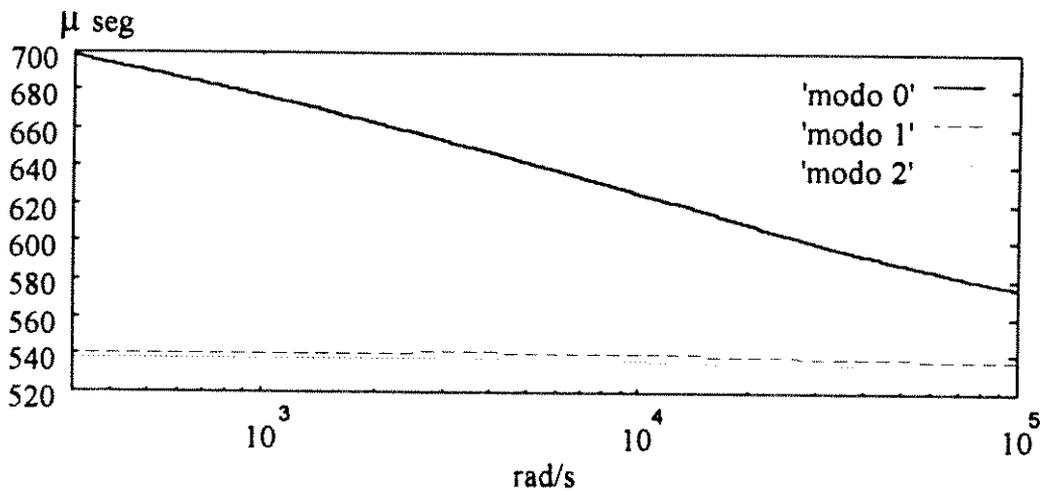
$$\beta(\omega) = \beta_l(\omega) + \beta_n(\omega) \quad (4.71)$$

Por outro lado o tempo de propagação da onda é dado por:

$$\frac{\beta(\omega) \cdot \ell}{\omega} \quad (4.72)$$

Fig. 4.10 - Característica de Fase Não-Linear $\beta_n(\omega)$.

A Fig. 4.11 fornece o comportamento do tempo de trânsito da linha para cada modo de propagação.

Fig. 4.11 - Comportamento do tempo de propagação (t_p).

Porém é conveniente definir o tempo de propagação, t_p , da componente linear de característica da fase, usando

$$\omega \cdot t_p = \beta_l(\omega) \cdot \ell \quad (4.73)$$

Então

$$\beta(\omega) \cdot \ell = \omega \cdot t_p + \beta_n(\omega) \cdot \ell \quad (4.74)$$

Utilizando esta expressão para as funções de fase, a resposta ao impulso direto conduz

$$F_t(\omega) = e^{[-\alpha(\omega) \cdot \ell - j\omega t_p - j\beta(\omega) \cdot \ell]} \quad (4.75)$$

ou

$$F_t(\omega) = e^{-j\omega t_p} \cdot F_n(\omega) \quad (4.76)$$

onde

$$F_n(\omega) = e^{-[\alpha(\omega) + j\beta_n(\omega)] \cdot l} \quad (4.77)$$

A componente não linear da característica de fase da linha de transmissão até agora considerada é mostrada na figura Fig. 4.10. O valor do tempo de viagem t_p é proporcional ao comprimento da linha. A Tab. 4.2 fornece os tempos de propagação para todos os modos.

Modo de Propagação	t_p (Microssegundos Segundos)
0	575,36
1	536,52
2	534,18

4.5. DEPENDÊNCIA DAS MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO MODAL COM A FREQUÊNCIA.

Uma investigação da dependência com a frequência das matrizes de transformação $T_v(\omega)$ e $T_i(\omega)$ para diferentes construções de linha foi feita por Magnusson (1973), e as conclusões gerais deste trabalho são facilmente verificadas para o caso da linha de 400 kV em estudo para a qual as respostas foram calculadas neste capítulo. As figuras Fig. 4.12 e Fig. 4.13 fornecem o comportamento da parte real dos elementos das matrizes de transformação $T_v(\omega)$ e $T_i(\omega)$, respectivamente, enquanto que as figuras Fig. 4.14 e Fig. 4.15 fornecem as partes imaginárias para a linha de 400 kV (Fig.2.1, pg.2.1). Observe que as matrizes de transformação modal têm o seguinte formato:

$$T(\omega) = \begin{bmatrix} R_{aa}(\omega) & R_{ab}(\omega) & R_{ac}(\omega) \\ R_{ba}(\omega) & R_{bb}(\omega) & R_{bc}(\omega) \\ R_{ca}(\omega) & R_{cb}(\omega) & R_{cc}(\omega) \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} X_{aa}(\omega) & X_{ab}(\omega) & X_{ac}(\omega) \\ X_{ba}(\omega) & X_{bb}(\omega) & X_{bc}(\omega) \\ X_{ca}(\omega) & X_{cb}(\omega) & X_{cc}(\omega) \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

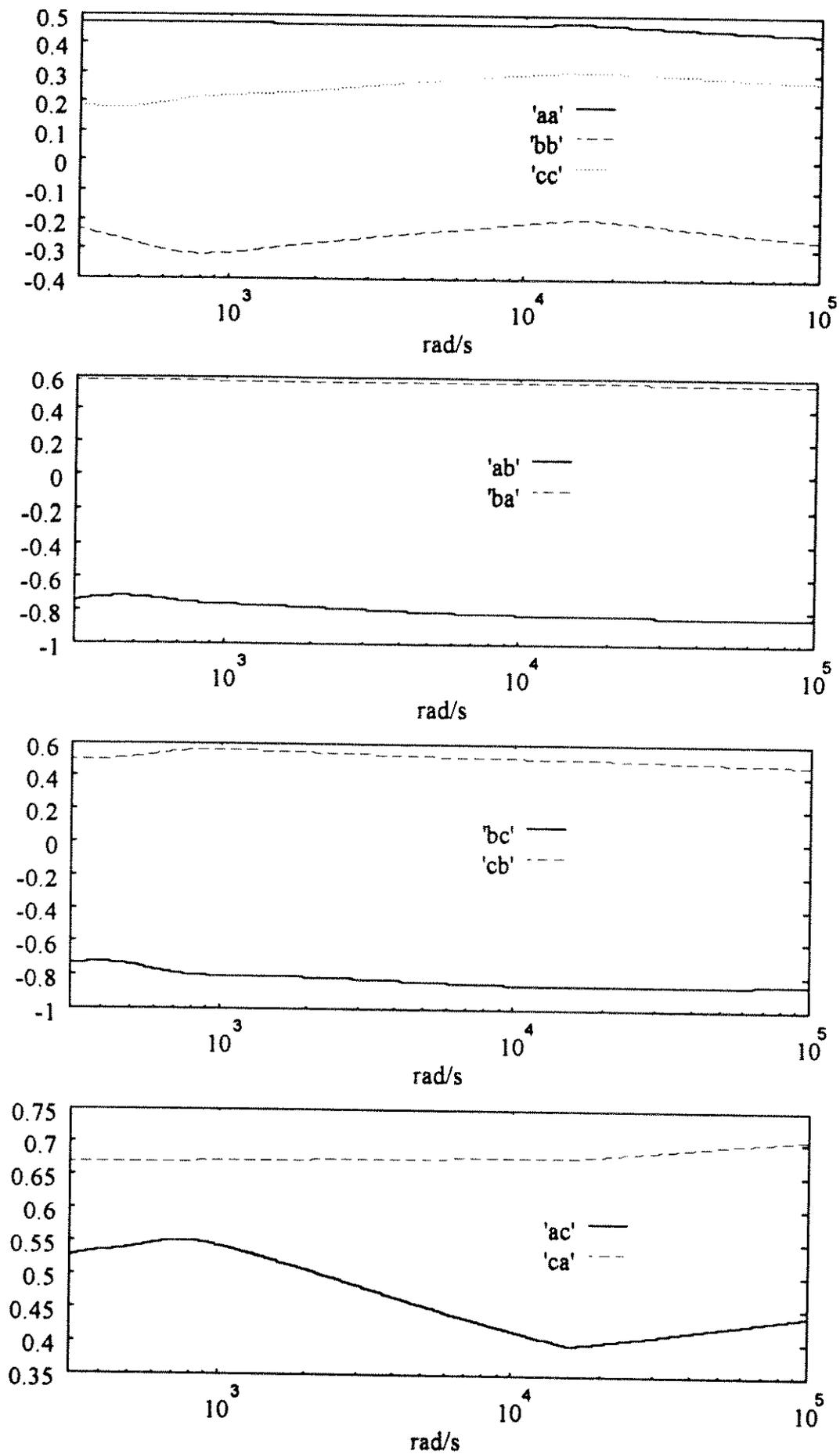


Fig. 4.12 - Parte real dos elementos da matriz de transformação modal $T_v(\omega)$

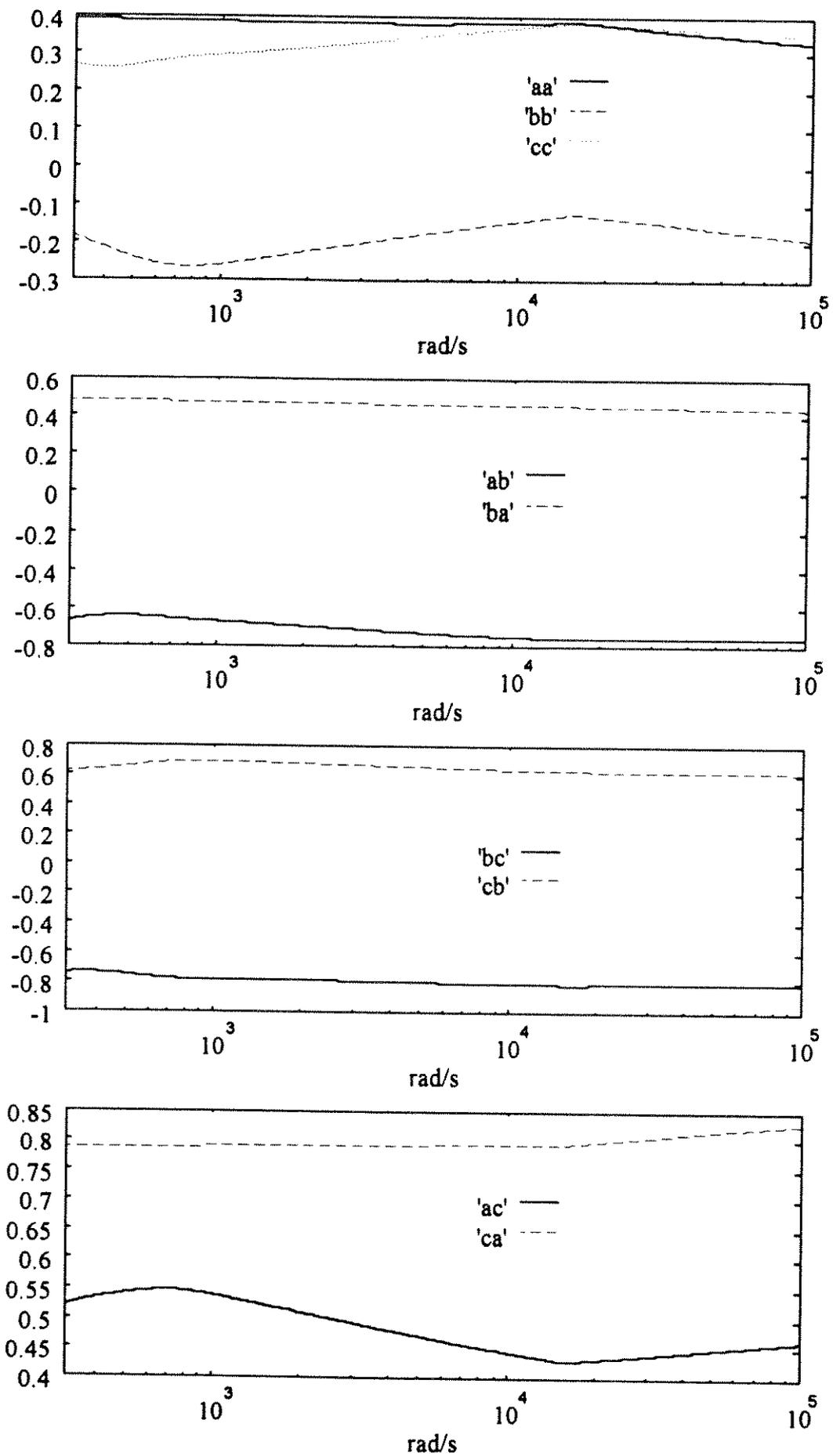


Fig. 4.13 - Parte real dos elementos da matriz de transformação modal $T_i(\omega)$

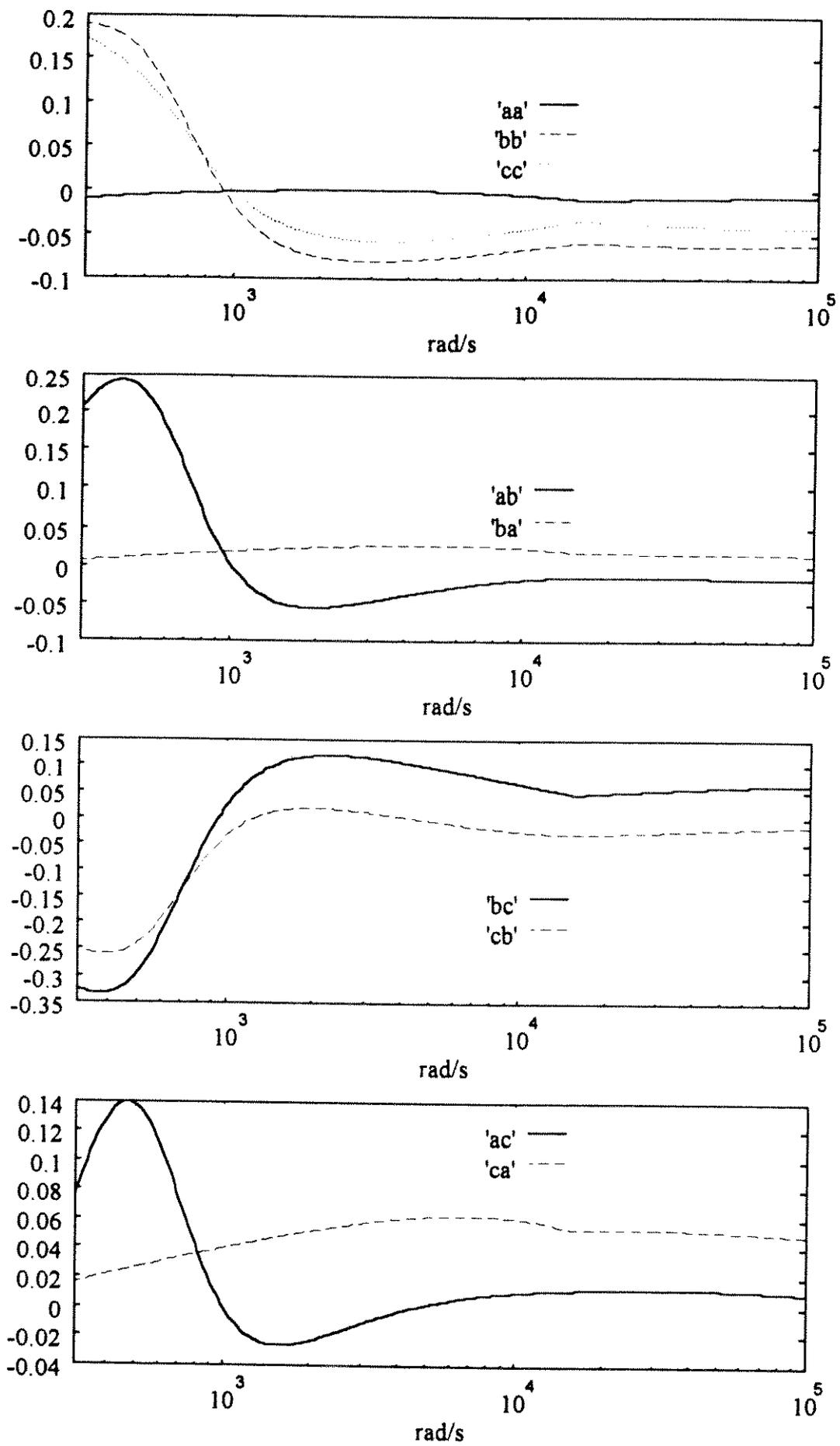


Fig. 4.14 - Parte imaginária dos elementos da matriz de transformação modal $T_v(\omega)$

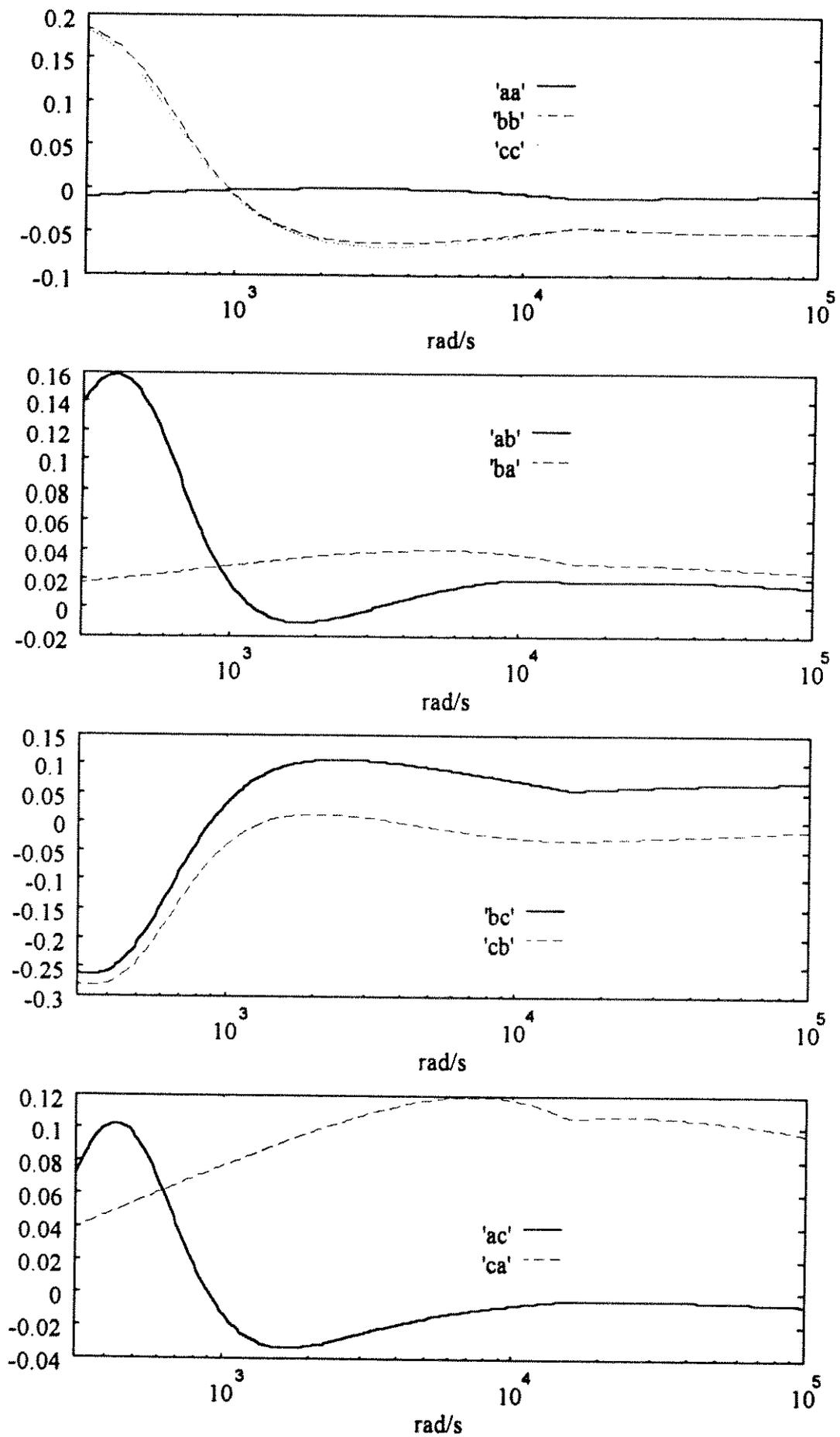


Fig. 4.15 - Parte imaginária dos elementos da matriz de transformação modal $T_i(\omega)$

A seguir são fornecidos os valores numéricos dos elementos das matrizes de transformação modal de tensão $T_v(\omega)$, e de corrente $T_i(\omega)$, calculados para $\omega = 4 \times 10^3 \text{ rad/s}$:

$$T_v(\omega) = \begin{bmatrix} 0,4660 & -0,8057 & 0,4664 \\ 0,5681 & -0,2494 & -0,8352 \\ 0,6751 & 0,5300 & 0,2656 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} -0,0005 & -0,0399 & -0,0034 \\ 0,0273 & -0,0793 & 0,1055 \\ 0,0600 & 0,0011 & -0,0566 \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

$$T_i(\omega) = \begin{bmatrix} 0,3793 & -0,7266 & 0,4799 \\ 0,4659 & -0,1887 & -0,7997 \\ 0,7903 & 0,6576 & 0,3397 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} -0,0011 & 0,0051 & -0,0197 \\ 0,0392 & -0,0632 & 0,0992 \\ 0,1135 & -0,0018 & -0,0674 \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Em toda a faixa de frequências relevantes na análise de transitórios eletromagnéticos, as partes imaginárias de $T_v(\omega)$ e $T_i(\omega)$ são sempre pequenas em comparação com as partes reais, e, para frequências maiores que 1 kHz, as partes reais são quase que constantes. No domínio da frequência as matrizes de transformação são disponíveis em qualquer frequência, mas quando nas transformações entre variáveis modais e de fase no domínio do tempo, a dependência de $T_v(\omega)$ e $T_i(\omega)$ com a frequência deve ser ponderada. Normalmente, é satisfatório usar matrizes de transformação constantes no domínio do tempo quando formadas pelas partes reais calculadas em frequências acima de 1 kHz. Neste trabalho adotou-se as matrizes de transformação calculadas na frequência de $\omega = 4 \times 10^3 \text{ rad/s}$.

4.6. SÍNTESE DAS FUNÇÕES RESPOSTAS

4.6.1. EQUAÇÕES NO PLANO Z

As equações da linha de transmissão no domínio da frequência transformadas diretamente ao plano Z são dadas por

$$v_e(z) - Z_c(z) \cdot i_e(z) = F_t(z) [v_r(z) + Z_c(z) \cdot i_r(z)] \quad (4.81)$$

$$v_r(z) - Z_c(z) \cdot i_r(z) = F_t(z) [v_e(z) + Z_c(z) \cdot i_e(z)] \quad (4.82)$$

Onde as funções no plano Z, $F_t(z)$ e $Z_c(z)$ são dadas por

$$F_t(z) = T_z\{F_t(\omega)\} \quad (4.83)$$

$$Z_c(z) = T_z\{Z_c(\omega)\} \quad (4.84)$$

Onde T_z é o operador da transformada Z . Se Δt é o intervalo de amostragem do tempo para o qual a transformação é subseqüentemente feita, o parâmetro z , é dado por

$$z = e^{j\omega \Delta t} \quad (4.85)$$

O objetivo da análise agora, é voltado para a formação das respostas das funções $F_t(z)$ e $Z_c(z)$, dado que estas funções podem ser calculadas no domínio da frequência.

$$F_t(\omega) = e^{-j\omega t_p} \cdot F_n(\omega) \quad (4.86)$$

Procedendo a transformação para Z e utilizando $t_p = m \cdot \Delta t$, onde m é um número inteiro, obtém-se:

$$F_t(z) = z^{-m} \cdot F_n(z) \quad (4.87)$$

Resta ainda definir a forma da expressão de $F_n(z)$. Com este objetivo, Humpage (1982c) utilizou a forma de multi-produtos de frações parciais, largamente utilizada na análise de filtros digitais.

$$F_n(z) = A \prod_{k=1}^N \frac{1 + a_k z^{-1} + b_k z^{-2}}{1 + c_k z^{-1} + d_k z^{-2}} \quad (4.88)$$

Esta forma assegura que os coeficientes a serem encontrados no plano Z , a , b , c e d são sempre reais. Dividindo a expressão por um coeficiente real A conduz-se a uma forma normalizada para os termos individuais do produto.

Para a função impedância Característica, a forma correspondente

$$Z_c(z) = B \prod_{k=1}^L \frac{1 + e_k z^{-1} + f_k z^{-2}}{1 + g_k z^{-1} + h_k z^{-2}} \quad (4.89)$$

Agora será necessário obter maneiras para que os coeficientes no plano Z na forma de $F_n(z)$ e $Z_c(z)$ possam ser encontrados no domínio da frequência.

4.7. TRANSFORMAÇÃO PARA O DOMÍNIO DO TEMPO

Uma vez deduzidas as funções da linha de transmissão no plano Z podemos agora transformar as mesmas para o domínio do tempo. Para tanto opta-se por efetuar tal

transformação em dois estágios principais. Primeiro, a transformação das equações da linha em termos de características diretas ("forward") e reversas ("backward"), e em seguida nas combinações individuais de tensão e corrente das quais as características são constituídas. Das funções da linha de transmissão, a transformação da resposta ao impulso direto é feita no primeiro estágio, ficando a transformação da função impedância Característica no segundo.

No plano Z , as características diretas e reversas nos terminais e e r de uma linha de transmissão monofásica estão inter-relacionados da seguinte forma:

$$R_e(z) = F_t(z) \cdot D_r(z) \quad (4.90)$$

$$R_r(z) = F_t(z) \cdot D_e(z) \quad (4.91)$$

É preferível nos subseqüentes passos da transformação para o domínio do tempo usar estas equações nas suas aplicações aos modos individuais e portanto na forma escalar. Os passos da transformação se aplicam identicamente à cada modo, e é possível voltar à forma vetorial quando a transformação estiver minuciosamente desenvolvida.

Quando as perdas são desprezadas:

$$F_t(z) = z^{-m} \quad (4.92)$$

neste caso,

$$R_e(z) = z^{-m} \cdot D_r(z) \quad (4.93)$$

$$R_r(z) = z^{-m} \cdot D_e(z) \quad (4.94)$$

Sendo a transformação destas equações para o domínio do tempo direta:

$$R_e(t_n) = D_r(t_n - m \cdot \Delta t) \quad (4.95)$$

$$R_r(t_n) = D_e(t_n - m \cdot \Delta t) \quad (4.96)$$

No domínio do tempo, t_n significa o corrente ponto de amostragem, e Δt o intervalo de amostragem. Uma vez que isto esteja esclarecido, freqüentemente é preferível adotar uma notação mais compacta na qual a amostra no domínio do tempo corrente seja identificada por n , e a amostra passada [lado direito das equações (4.95) e (4.96)] por $n-m$. Logo,

$$R_e(n) = D_r(n-m) \quad (4.97)$$

$$R_r(n) = D_e(n-m) \quad (4.98)$$

Analisando agora a resposta ao impulso direto contendo uma parte não-linear de 2ª ordem:

$$F_e(z) = A \cdot z^{-m} \left[\frac{1 + a z^{-1} + b z^{-2}}{1 + c z^{-1} + d z^{-2}} \right] \quad (4.99)$$

Neste caso,

$$R_e(z) = A \cdot z^{-m} \left[\frac{1 + a z^{-1} + b z^{-2}}{1 + c z^{-1} + d z^{-2}} \right] D_r(z) \quad (4.100)$$

$$R_r(z) = A \cdot z^{-m} \left[\frac{1 + a z^{-1} + b z^{-2}}{1 + c z^{-1} + d z^{-2}} \right] D_e(z) \quad (4.101)$$

Rearranjando a equação (4.100), segue,

$$R_e(z) = A \cdot z^{-m} [1 + a \cdot z^{-1} + b \cdot z^{-2}] D_r(z) - [c \cdot z^{-1} + d \cdot z^{-2}] R_e(z) \quad (4.102)$$

e

$$R_r(z) = A \cdot z^{-m} [1 + a \cdot z^{-1} + b \cdot z^{-2}] D_e(z) - [c \cdot z^{-1} + d \cdot z^{-2}] R_r(z) \quad (4.103)$$

Obtendo a transformada Z inversa e usando n para identificar o presente ponto de amostragem no domínio do tempo, e $(n-1)$, $(n-2)$ e $(n-m)$ para identificar os pontos anteriores:

$$R_e(n) = A \cdot D_r(n-m) + A \cdot a \cdot D_r(n-(m+1)) + A \cdot b \cdot D_r(n-(m+2)) - c \cdot R_e(n-1) - d \cdot R_e(n-2) \quad (4.104)$$

e

$$R_r(n) = A \cdot D_e(n-m) + A \cdot a \cdot D_e(n-(m+1)) + A \cdot b \cdot D_e(n-(m+2)) - c \cdot R_r(n-1) - d \cdot R_r(n-2) \quad (4.105)$$

Generalizando o procedimento acima onde $F_n(z)$ tem ordem qualquer, toma-se a forma multi-produto e expande-se a mesma na forma de quociente de polinômios, tal que:

$$F_\ell(z) = A \cdot z^{-m} \prod_{k=1}^N \left[\frac{1 + a_k \cdot z^{-1} + b_k \cdot z^{-2}}{1 + c_k \cdot z^{-1} + d_k \cdot z^{-2}} \right] \quad (4.106)$$

torna-se

$$F_\ell(z) = \frac{A \cdot z^{-m} \left[1 + \sum_{k=1}^{2N} A_k \cdot z^{-k} \right]}{\left[1 + \sum_{k=1}^{2N} B_k \cdot z^{-k} \right]} \quad (4.107)$$

Os coeficientes A_k são combinações de a_k , b_k , enquanto que os valores de B_k são combinações de c_k e d_k

Quando $F_\ell(z)$ tem a forma da equação (4.107) as características direta e reversa no plano Z são dadas por:

$$R_e(z) = A \cdot z^{-m} \left[1 + \sum_{k=1}^{2N} A_k \cdot z^{-k} \right] D_r(z) - \left[1 + \sum_{k=1}^{2N} B_k \cdot z^{-k} \right] R_e(z) \quad (4.108)$$

e

$$R_r(z) = A \cdot z^{-m} \left[1 + \sum_{k=1}^{2N} A_k \cdot z^{-k} \right] D_e(z) - \left[1 + \sum_{k=1}^{2N} B_k \cdot z^{-k} \right] R_r(z) \quad (4.109)$$

Determinando a transformada Z inversa:

$$R_e(n) = A \cdot D_r(n-m) + A \cdot \sum_{k=1}^{2N} [A_k \cdot D_r(n-(m+k))] - B \cdot \sum_{k=1}^{2N} [B_k \cdot R_e(n-k)] \quad (4.110)$$

e

$$R_r(n) = A \cdot D_e(n-m) + A \cdot \sum_{k=1}^{2N} [A_k \cdot D_e(n-(m+k))] - B \cdot \sum_{k=1}^{2N} [B_k \cdot R_r(n-k)] \quad (4.111)$$

4.8. TRANSFORMAÇÃO NAS VARIÁVEIS QUE FORMAM AS CARACTERÍSTICAS

No segundo estágio da transformação das equações da linha de transmissão para o domínio do tempo, consideramos as variáveis que derivam as características direta e reversa. Uma vez que para cada combinação o formato é o mesmo, os principais passos da transformação podem ser limitados à um deles e o resultado final extrapolado para os casos remanescentes. Dito isto, consideraremos primeiramente a característica $R_e(z)$:

$$R_e(z) = v_e(z) - Z_c(z) \cdot i_e(z) \quad (4.112)$$

Tomando a forma geral da impedância $Z_c(z)$:

$$Z_c(z) = B \cdot \prod_{k=1}^N \left[\frac{1 + e_k \cdot z^{-1} + f_k \cdot z^{-2}}{1 + g_k \cdot z^{-1} + h_k \cdot z^{-2}} \right] \quad (4.113)$$

torna-se

$$Z_c(z) = \frac{B \left[1 + \sum_{k=1}^{2N} E_k \cdot z^{-k} \right]}{1 + \sum_{k=1}^{2N} D_k \cdot z^{-k}} \quad (4.114)$$

Uma vez que $Z_c(z) \rightarrow B$ quando $z \rightarrow \infty$, adotamos $B = Z_\infty$, onde:

$$Z_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \{ Z(\omega) \} \quad (4.115)$$

Logo,

$$Z_c(z) = \frac{Z_\infty + \sum_{k=1}^{2N} C_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{2N} D_k \cdot z^{-k}} \quad (4.116)$$

No somatório do numerador da equação (4.116), os coeficientes C_k absorvem o escalonamento de Z_∞ . Usando $Z_c(z)$ nesta forma e rearranjando os termos segue:

$$R_e(z) = v_e(z) - Z_\infty \cdot i_e(z) - \left[\sum_{k=1}^{2N} C_k \cdot z^{-k} \right] i_e(z) - \left[\sum_{k=1}^{2N} D_k \cdot z^{-k} \right] [R_e(z) - v_e(z)] \quad (4.117)$$

Transformando para o domínio do tempo:

$$R_e(n) = v_e(n) - Z_\infty \cdot i_e(n) - \sum_{k=1}^{2N} C_k \cdot i_e(n-k) - \sum_{k=1}^{2N} D_k \cdot [R_e(n-k) - v_e(n-k)] \quad (4.118)$$

As expressões correspondentes das características remanescentes são:

$$R_r(n) = v_r(n) - Z_\infty \cdot i_r(n) - \sum_{k=1}^{2N} C_k \cdot i_r(n-k) - \sum_{k=1}^{2N} D_k \cdot [R_r(n-k) - v_r(n-k)] \quad (4.119)$$

$$D_e(n) = v_e(n) + Z_\infty \cdot i_e(n) + \sum_{k=1}^{2N} C_k \cdot i_e(n-k) - \sum_{k=1}^{2N} D_k \cdot [D_e(n-k) - v_e(n-k)] \quad (4.120)$$

$$D_r(n) = v_r(n) + Z_\infty \cdot i_r(n) + \sum_{k=1}^{2N} C_k \cdot i_r(n-k) - \sum_{k=1}^{2N} D_k \cdot [D_r(n-k) - v_r(n-k)] \quad (4.121)$$

4.9. EQUAÇÕES DA LINHA NO DOMÍNIO DO TEMPO

Substituindo $R_e(n)$ e $R_r(n)$ nas equações (4.97) e (4.98), segue:

$$v_e(n) - Z_\infty \cdot i_e(n) = v_{ep}(n-p) \quad (4.122)$$

$$v_r(n) - Z_\infty \cdot i_r(n) = v_{rp}(n-p) \quad (4.123)$$

onde

$$v_{ep}(n-p) = A \cdot D_r(n-m) + A \cdot \sum_{k=1}^{2N} [A_k \cdot D_r(n-m-k)] - \sum_{k=1}^{2N} [B_k \cdot R_e(n-k)] + \sum_{k=1}^{2M} [C_k \cdot i_e(n-k)] + \sum_{k=1}^{2M} \{D_k \cdot [R_e(n-k) - v_e(n-k)]\} \quad (4.124)$$

$$v_{rp}(n-p) = A \cdot D_e(n-m) + A \cdot \sum_{k=1}^{2N} [A_k \cdot D_e(n-m-k)] - \sum_{k=1}^{2N} [B_k \cdot R_r(n-k)] + \sum_{k=1}^{2M} [C_k \cdot i_r(n-k)] + \sum_{k=1}^{2M} \{D_k \cdot [R_r(n-k) - v_r(n-k)]\} \quad (4.125)$$

Os valores das características diretas $D_e(n)$ e $D_r(n)$, para uso no lado direito das equações (4.124) e (4.125) são determinados das equações (4.120) e (4.121) e os valores das características reversas, $R_e(n)$ e $R_r(n)$, são encontrados nas equações (4.118) e (4.119).

As equações de simulação desenvolvidas neste capítulo quando implementadas conduziram à simulações instáveis para frequências de interesse acima dos 20 kHz. Desta forma propomos, no capítulo 5 uma forma alternativa para as equações deste capítulo, as quais se mostraram estáveis mesmo para altas frequências de amostragem.

5. ALGORITMO COMPUTACIONAL IMPLEMENTADO

Neste capítulo desenvolvemos as equações de simulação para linhas de transmissão e elementos de circuitos elétricos concentrados (resistência, indutância e capacitância).

A obtenção das equações de recorrência no tempo é descrita em suas principais etapas.

5.1. LINHA DE TRANSMISSÃO

No plano Z , as características diretas ($D_e(z)$ e $D_r(z)$) e reversas ($R_e(z)$ e $R_r(z)$) nos terminais emissor (representado pelo índice "e") e receptor (representado pelo índice "r") de uma linha de transmissão monofásica estão inter-relacionadas da seguinte forma:

$$R_e(z) = F_\ell(z) \cdot D_r(z) \quad (5.1)$$

$$R_r(z) = F_\ell(z) \cdot D_e(z) \quad (5.2)$$

Para determinarmos as equações de simulação de uma linha de transmissão, bem como seu circuito equivalente, optamos rescrever as equações de $F_\ell(z)$ e $Z_c(z)$ através das seguintes formas fatoradas em zeros e pólos no plano Z :

$$F_\ell(z) = a_0 \cdot \frac{\prod_{i=1}^{N_z} (1 - a_i \cdot z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N_p} (1 - b_i \cdot z^{-1})} \cdot z^{-m} \quad (5.3)$$

onde:

$$m = \frac{t_p}{\Delta t}$$

t_p - Tempo de propagação;

N_z - Número de zeros de $F_\ell(z)$

N_p - Número de pólos de $F_\ell(z)$

a_i , com $i = 1, 2, \dots, N_z$ - i ésimo zero de $F_\ell(z)$

b_i , com $i = 1, 2, \dots, N_p$ - i ésimo pólo de $F_\ell(z)$

$$Z_c(z) = \frac{\prod_{i=1}^{M_z} (1 - c_i \cdot z^{-1})}{\prod_{i=1}^{M_p} (1 - d_i \cdot z^{-1})} \cdot Z_\infty \quad (5.4)$$

onde:

$$Z_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} Z_c(\omega)$$

M_z - Número de zeros de $Z_c(z)$

M_p - Número de pólos de $Z_c(z)$

c_i , com $i = 1, 2, \dots, M_z$ - i ésimo zero de $Z_c(z)$

d_i , com $i = 1, 2, \dots, M_p$ - i ésimo pólo de $Z_c(z)$

Estas formas foram escolhidas por apresentarem maior estabilidade numérica através da minimização dos erros que ocorrem ao se arredondar e truncar valores numéricos

Quando $F_\ell(z)$ tem a forma da equação (5.3), as características reversas em ambos os terminais da linha, no plano Z , são dadas por:

$$R_e(z) = a_0 \cdot \frac{\prod_{i=1}^{N_z} (1 - a_i \cdot z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N_p} (1 - b_i \cdot z^{-1})} \cdot z^{-m} \cdot D_r(z) \quad (5.5)$$

e

$$R_r(z) = a_0 \cdot \frac{\prod_{i=1}^{N_p} (1 - a_i \cdot z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N_z} (1 - b_i \cdot z^{-1})} \cdot z^{-m} \cdot D_e(z) \quad (5.6)$$

A transformada inversa da equação (5.5) é obtida por partes através de um vetor auxiliar denominado $T_e(z,1)$. Definindo:

$$T_e(z,1) = \frac{(1 - a_1 \cdot z^{-1})}{(1 - b_1 \cdot z^{-1})} \cdot z^{-m} \cdot D_r(z) \quad (5.7)$$

segue:

$$T_e(z,1) = z^{-m} \cdot D_r(z) - a_1 \cdot z^{-m} \cdot z^{-1} \cdot D_r(z) + b_1 \cdot z^{-1} \cdot T_e(z,1) \quad (5.8)$$

Transformando para o domínio do tempo:

$$T_e(n,1) = D_r(n-m) - a_1 \cdot D_r(n-m-1) + b_1 \cdot T_e(n-1,1) \quad (5.9)$$

A figura abaixo ilustra a equação acima:

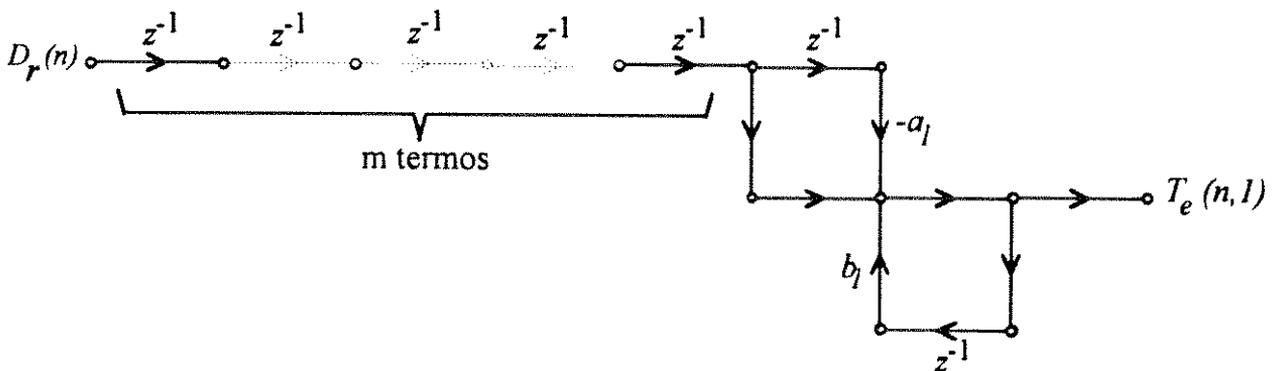


Fig. 5.1 - Grafo representando a equação (5.9)

Para o par de pólos e zeros seguinte, temos:

$$T_e(z,2) = \frac{(1 - a_2 \cdot z^{-1})}{(1 - b_2 \cdot z^{-1})} \cdot T_e(z,1) \quad (5.10)$$

ou

$$T_e(z,2) = T_e(z,1) - a_2 \cdot z^{-1} \cdot T_e(z,1) + b_2 \cdot z^{-1} \cdot T_e(z,2) \quad (5.11)$$

transformando para o domínio do tempo,

$$T_e(n,2) = T_e(n,1) - a_2 \cdot T_e(n-1,1) + b_2 \cdot T_e(n-1,2) \quad (5.12)$$

A seguir temos o grafo correspondente da equação acima:

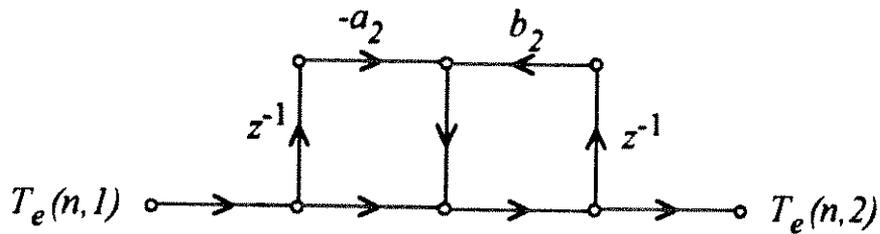


Fig. 5.2 - Grafo relativo à equação (5.12)

Da mesma forma, para $W_i \geq i \geq 2$, com, $W_i = \max(N_z, N_p)$, temos:

$$T_e(n, i) = T_e(n, i - 1) - a_i \cdot T_e(n - 1, i - 1) + b_i \cdot T_e(n - 1, i) \quad (5.13)$$

A figura a seguir fornece o grafo equivalente a equação acima:

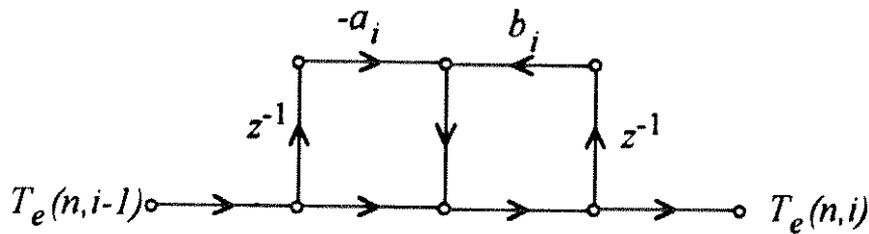


Fig. 5.3 - Grafo relativo à equação (5.13)

Finalmente,

$$R_e(n) = a_0 \cdot T_e(n, W_t) \quad (5.14)$$

onde:

$$T_e(n, W_t) = T_e(n, W_t - 1) - a_{W_t} \cdot T_e(n - 1, W_t - 1) + b_{W_t} \cdot T_e(n - 1, W_t) \quad (5.15)$$

Da equação acima obtém-se o grafo da figura seguinte:

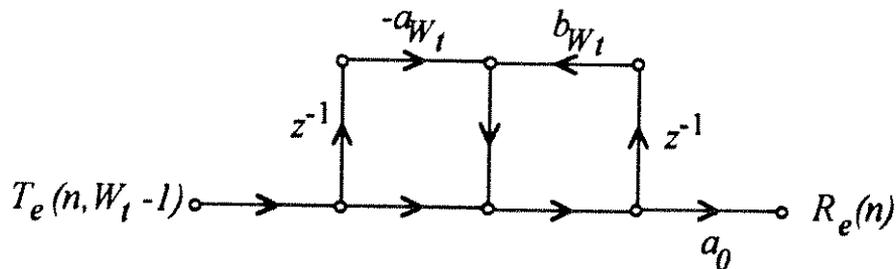


Fig. 5.4 - Grafo relativo à equação (5.15)

Resumindo, para calcular $R_e(n)$, primeiro é necessário calcular $T_e(n, 1)$ através da expressão (5.9) e em seguida $T_e(n, 2)$ utilizando os valores de $T_e(n, 1)$ e $T_e(n - 1, 1)$ já

calculados através da expressão (5.12). As demais variáveis temporárias, $T_e(n, 3)$, ..., até $T_e(n, W_t)$ são obtidas seqüencialmente através da equação (5.13).

Através de procedimento análogo, obtém-se

$$R_r(n) = a_0 \cdot T_r(z, W_t) \quad (5.16)$$

onde $T_r(n, W_t)$ é calculado de maneira análoga ao cálculo de $T_e(n, W_t)$, bastando, para isso, substituir o índice "e" pelo índice "r", e vice-versa, nas equações (5.7) à (5.15).

Uma vez que:

$$D_e(z) = v_e(z) + Z_c(z) \cdot i_e(z) \quad (5.17)$$

e

$$R_e(z) = v_e(z) - Z_c(z) \cdot i_e(z) \quad (5.18)$$

segue que:

$$D_e(z) + R_e(z) = 2 \cdot v_e(z) \quad (5.19)$$

ou, rearranjando:

$$D_e(z) = 2 \cdot v_e(z) - R_e(z) \quad (5.20)$$

Transformando a expressão acima para o domínio do tempo:

$$D_e(n) = 2 \cdot v_e(n) - R_e(n) \quad (5.21)$$

De forma análoga, determina-se a expressão da característica direta:

$$D_r(n) = 2 \cdot v_r(n) - R_r(n) \quad (5.22)$$

5.1.1. TRANSFORMAÇÃO EM TERMOS DE TENSÕES E CORRENTES

No segundo estágio da transformação das equações da linha de transmissão para o domínio do tempo, consideramos as variáveis que derivam as características direta e reversa. Uma vez que para cada combinação o formato é o mesmo, os principais passos da transformação podem ser limitados à um deles e o resultado final extrapolado para os casos remanescentes. Dito isto, consideraremos primeiramente a característica reversa no terminal "e", dada pela equação (5.18).

Tomando a forma geral da impedância $Z_c(z)$ dada na equação (5.4), tem-se:

$$Z_c(z) \cdot i_e(z) = \frac{\prod_{i=1}^{M_z} (1 - c_i \cdot z^{-1})}{\prod_{i=1}^{M_p} (1 - d_i \cdot z^{-1})} \cdot Z_\infty \cdot i_e(z) \quad (5.23)$$

A transformada inversa da equação anterior é obtida por partes através de um vetor auxiliar denominado $U_e(z, i)$. Definindo:

$$U_e(z, 1) + Z_\infty \cdot i_e(z) = \frac{(1 - c_1 \cdot z^{-1})}{(1 - d_1 \cdot z^{-1})} \cdot Z_\infty \cdot i_e(z) \quad (5.24)$$

Segue,

$$U_e(z, 1) - d_1 \cdot z^{-1} \cdot U_e(z, 1) + Z_\infty \cdot i_e(z) - Z_\infty \cdot d_1 \cdot z^{-1} \cdot i_e(z) = Z_\infty \cdot i_e(z) - Z_\infty \cdot c_1 \cdot z^{-1} \cdot i_e(z) \quad (5.25)$$

Simplificando,

$$U_e(z, 1) = d_1 \cdot z^{-1} \cdot U_e(z, 1) + Z_\infty \cdot d_1 \cdot z^{-1} \cdot i_e(z) - Z_\infty \cdot c_1 \cdot z^{-1} \cdot i_e(z) \quad (5.26)$$

ou ainda,

$$U_e(z, 1) = d_1 \cdot z^{-1} \cdot U_e(z, 1) + Z_\infty \cdot (d_1 - c_1) \cdot z^{-1} \cdot i_e(z) \quad (5.27)$$

No domínio do Tempo,

$$U_e(n, 1) = d_1 \cdot U_e(n - 1, 1) + Z_\infty \cdot (d_1 - c_1) \cdot i_e(n - 1) \quad (5.28)$$

O grafo correspondente a equação (5.28) é fornecido na figura a seguir:

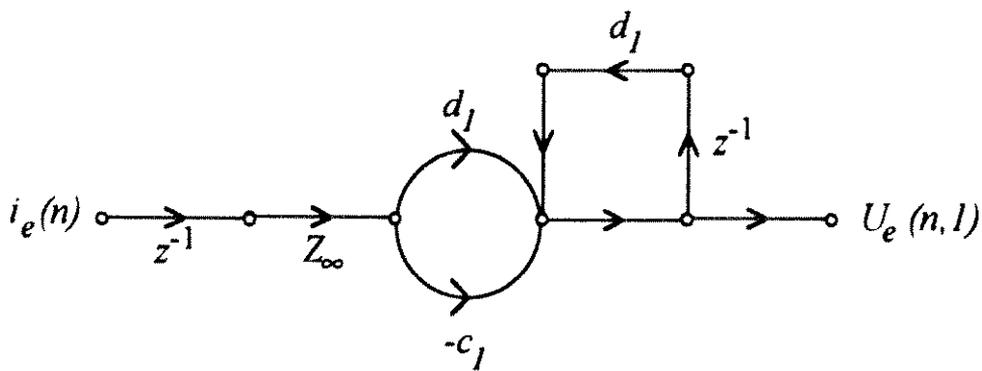


Fig. 5.5 - Grafo correspondente à equação (5.28)

Por outro lado,

$$U_e(z, 2) + Z_\infty \cdot i_e(z) = \frac{(1 - c_2 \cdot z^{-1})}{(1 - d_2 \cdot z^{-1})} \cdot [U_e(z, 1) + Z_\infty \cdot i_e(z)] \quad (5.29)$$

rearranjando a expressão acima, segue:

$$U_e(z, 2) = d_2 \cdot z^{-1} \cdot U_e(z, 2) + Z_\infty \cdot (d_2 - c_2) \cdot z^{-1} \cdot i_e(z) + U_e(z, 1) - c_2 \cdot z^{-1} \cdot U_e(z, 1) \quad (5.30)$$

No domínio do tempo,

$$U_e(n, 2) = d_2 \cdot U_e(n-1, 2) + Z_\infty \cdot (d_2 - c_2) \cdot i_e(n-1) + U_e(n, 1) - c_2 \cdot U_e(n-1, 1) \quad (5.31)$$

A seguir temos a figura contendo o grafo da equação anterior:

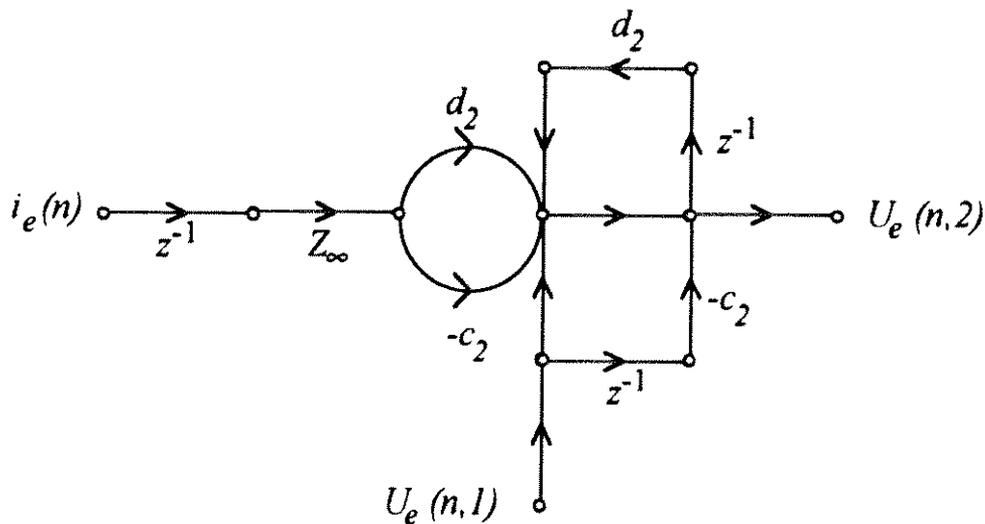


Fig. 5.6 - Grafo correspondente à equação (5.31)

Da mesma forma, para $W_u \geq i \geq 2$, com, $W_u = \max(M_z, M_p)$, temos:

$$U_e(n, i) = d_i \cdot U_e(n-1, i) + Z_\infty \cdot (d_i - c_i) \cdot i_e(n-1) + U_e(n, i-1) - c_i \cdot U_e(n-1, i-1) \quad (5.32)$$

O grafo desta equação é dado a seguir:

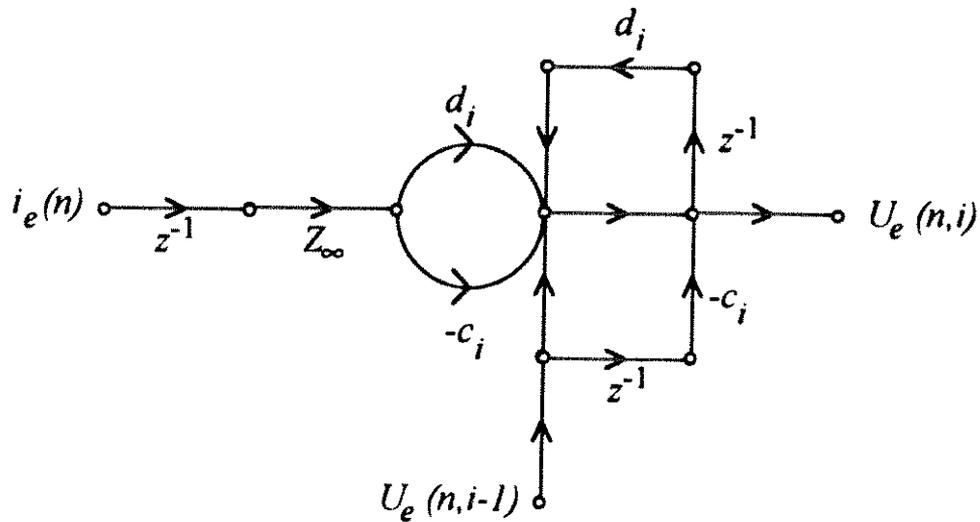


Fig. 5.7 - Grafo correspondente à equação (5.32)

Finalmente,

$$Z_c(n) \cdot i_e(n) = U_e(n, W_u) + Z_{\infty} \cdot i_e(n) \quad (5.33)$$

Substituindo a equação acima na equação (5.18) segue:

$$R_e(n) = v_e(n) - U_e(n, W_u) - Z_{\infty} \cdot i_e(n) \quad (5.34)$$

A expressão correspondente da característica remanescente é obtida da mesma forma:

$$R_r(n) = v_r(n) - U_r(n, W_u) - Z_{\infty} \cdot i_r(n) \quad (5.35)$$

5.1.2. EQUACÕES DA LINHA NO DOMÍNIO DO TEMPO

Rearranjando as equações (5.34) e (5.35), segue:

$$v_e(n) - Z_{\infty} \cdot i_e(n) = R_e(n) + U_e(n, W_u) \quad (5.36)$$

$$v_r(n) - Z_{\infty} \cdot i_r(n) = R_r(n) + U_r(n, W_u) \quad (5.37)$$

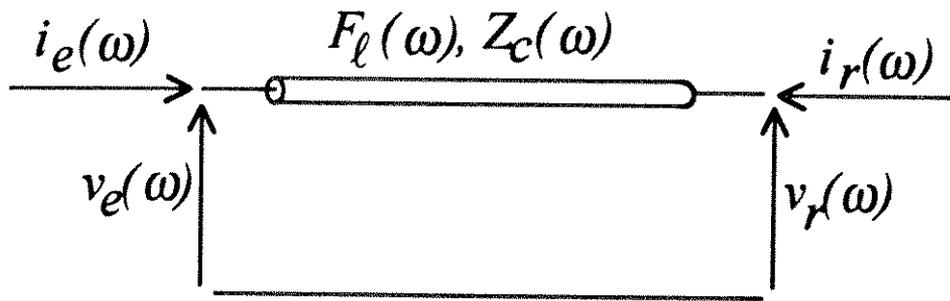


Fig. 5.8 - Linha de Transmissão no domínio da Frequência.

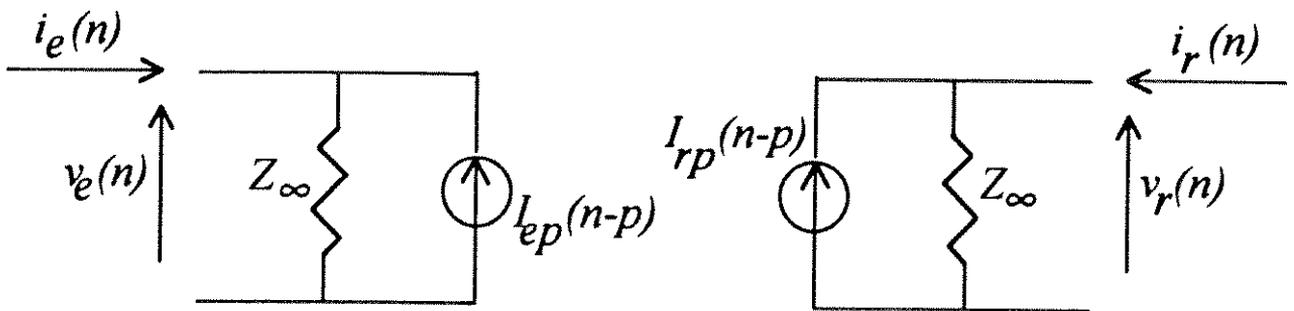


Fig. 5.9 - Circuito Equivalente de uma Linha de Transmissão no domínio do Tempo.

Rescrevendo as equações (5.36) e (5.37) na forma de condutâncias segue:

$$Y_{\infty} \cdot v_e(n) = i_e(n) + I_{ep}(n-p) \tag{5.38}$$

$$Y_{\infty} \cdot v_r(n) = i_r(n) + I_{rp}(n-p) \tag{5.39}$$

onde,

$$Y_{\infty} = \frac{1}{Z_{\infty}}$$

e

$$I_{ep}(n-p) = \frac{R_e(n) + U_e(n, W_u)}{Z_{\infty}} \tag{5.40}$$

$$I_{rp}(n-p) = \frac{R_r(n) + U_r(n, W_u)}{Z_{\infty}} \tag{5.41}$$

As equações (5.38) e (5.39) fornecem o circuito equivalente da linha de transmissão apresentado na Fig. 5.9 .

5.2. INDUTÂNCIA CONCENTRADA

Seja L uma indutância, ligada entre os nós "e" e "r" de um circuito (Fig. 5.10). A equação de ramo é,

$$v_{er}(t) = L \cdot \frac{d i_{er}(t)}{dt} \quad (5.42)$$

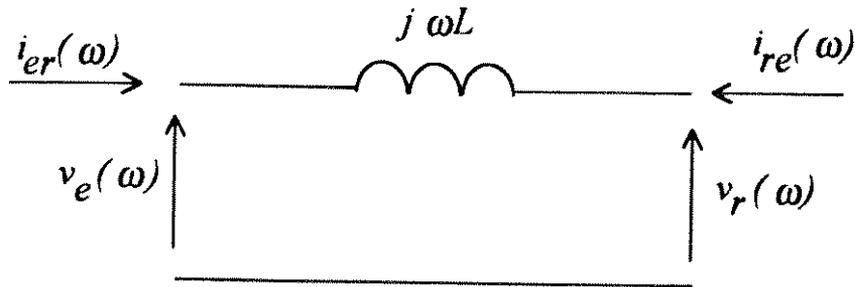


Fig. 5.10 - Indutância no domínio da Frequência.

A nomenclatura $v_{er}(t)$ significa a diferença de potencial entre as tensões $v_e(t)$ e $v_r(t)$. A corrente $i_{er}(t)$ significa a corrente fluindo do nó "e" para o nó "r" no instante "t".

Tomando a transformada de Laplace da equação anterior tem-se:

$$v_{er}(s) = L \cdot s \cdot i_{er}(s) \quad (5.43)$$

ou,

$$i_{er}(s) = \frac{v_{er}(s)}{s \cdot L} \quad (5.44)$$

onde ($s = j \omega$) é o operador da transformada de Laplace.

A equação (5.44) pode, então, ser mapeada no plano "Z" através da transformação bilinear,

$$i_{er}(z) = \frac{v_{er}(z)}{L \cdot \left(\frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)} \quad (5.45)$$

ou,

$$\frac{2 \cdot L}{\Delta t} (1 - z^{-1}) \cdot i_{er}(z) = v_{er}(z) \cdot (1 + z^{-1}) \quad (5.46)$$

ou, ainda,

$$\frac{2 \cdot L}{\Delta t} \cdot i_{er}(z) - \frac{2 \cdot L}{\Delta t} \cdot z^{-1} \cdot i_{er}(z) = v_{er}(z) + z^{-1} \cdot v_{er}(z) \quad (5.47)$$

Tomando a transformada inversa para o domínio do tempo da equação (5.47) determina-se a seguinte equação de recorrência no tempo,

$$\frac{2 \cdot L}{\Delta t} \cdot i_{er}(n) - \frac{2 \cdot L}{\Delta t} \cdot i_{er}(n-1) = v_{er}(n) + v_{er}(n-1) \quad (5.48)$$

ou,

$$\frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot v_{er}(n) = i_{er}(n) - I_L(n-1) \quad (5.49)$$

ou, ainda,

$$\frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot v_e(n) - \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot v_r(n) = i_{er}(n) - I_L(n-1) \quad (5.50)$$

com:

$$I_L(n-1) = i_{er}(n-1) + \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot v_{er}(n-1) \quad (5.51)$$

O circuito equivalente de uma indutância em regime transitório é mostrado na Fig. 5.11. Nota-se que a equação obtida é idêntica àquela obtida através da lei trapezoidal.

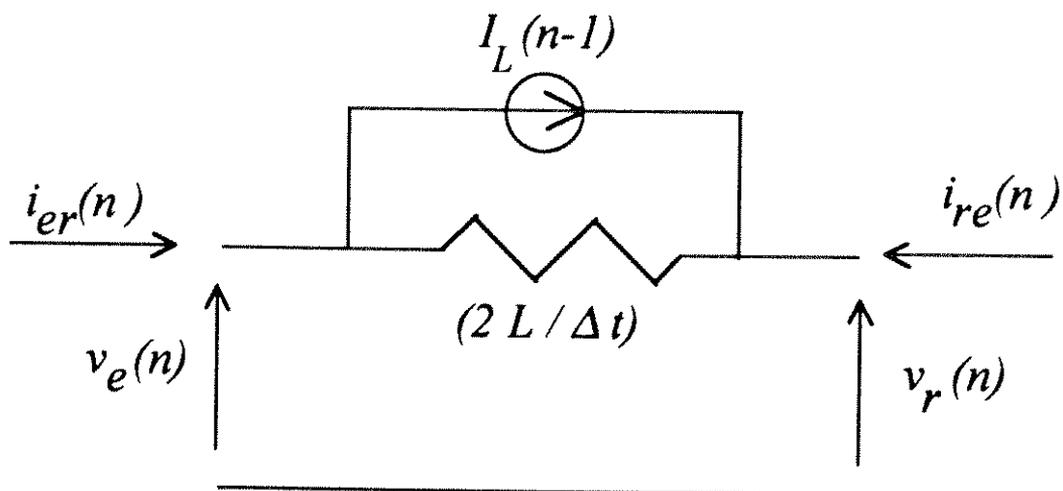


Fig. 5.11 - Circuito Equivalente de uma Indutância Concentrada

5.3. CAPACITÂNCIA CONCENTRADA

Seja C uma capacitância, ligada entre os nós " e " e " r " de um circuito (Fig. 5.12). A equação de ramo é,

$$i_{er}(t) = C \cdot \frac{d v_{er}(t)}{dt} \quad (5.52)$$

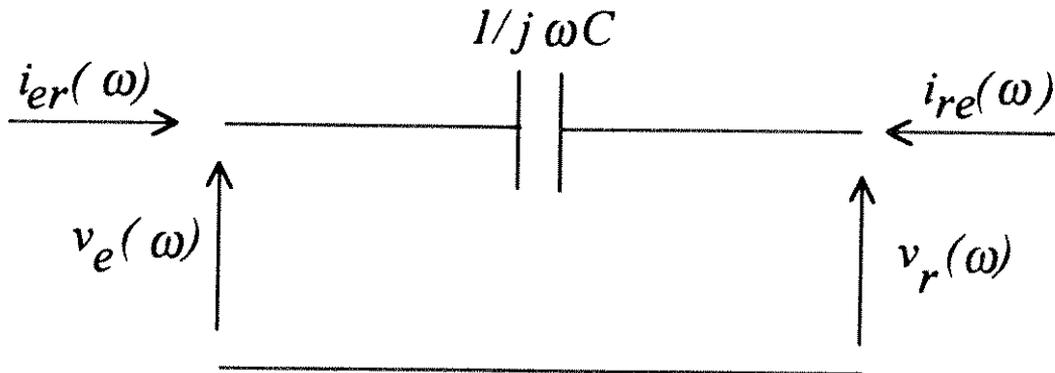


Fig. 5.12 - Capacitância no domínio da Frequência.

Tomando a transformada de Laplace da equação anterior tem-se:

$$i_{er}(s) = C \cdot s \cdot v_{er}(s) \quad (5.53)$$

ou,

$$v_{er}(s) = \frac{i_{er}(s)}{s \cdot C} \quad (5.54)$$

A equação (5.54) pode, então, ser mapeada no plano Z através da transformação bilinear,

$$v_{er}(z) = \frac{i_{er}(z)}{C \cdot \left(\frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)} \quad (5.55)$$

ou,

$$\frac{2 \cdot C}{\Delta t} \cdot (1-z^{-1}) \cdot v_{er}(z) = i_{er}(z) \cdot (1+z^{-1}) \quad (5.56)$$

ou, ainda,

$$\frac{2 \cdot C}{\Delta t} \cdot v_{er}(z) - \frac{2 \cdot C}{\Delta t} \cdot z^{-1} \cdot v_{er}(z) = i_{er}(z) + z^{-1} \cdot i_{er}(z) \quad (5.57)$$

Tomando a transformada Z inversa da equação (5.57), segue

$$\frac{2 \cdot C}{\Delta t} \cdot v_{er}(n) - \frac{2 \cdot C}{\Delta t} \cdot v_{er}(n-1) = i_{er}(n) + i_{er}(n-1) \quad (5.58)$$

ou,

$$\frac{2 \cdot C}{\Delta t} \cdot v_{er}(n) = i_{er}(n) + I_C(n-1) \quad (5.59)$$

ou, ainda,

$$\frac{2 \cdot C}{\Delta t} \cdot v_e(n) - \frac{2 \cdot C}{\Delta t} \cdot v_r(n) = i_{er}(n) + I_C(n-1) \quad (5.60)$$

onde:

$$I_C(n-1) = i_{er}(n-1) + \frac{2 \cdot C}{\Delta t} \cdot v_{er}(n-1) \quad (5.61)$$

O circuito equivalente de uma capacitância em regime transitório é mostrado na Fig. 5.13. Nota-se que a equação obtida é idêntica àquela obtida através da lei trapezoidal.

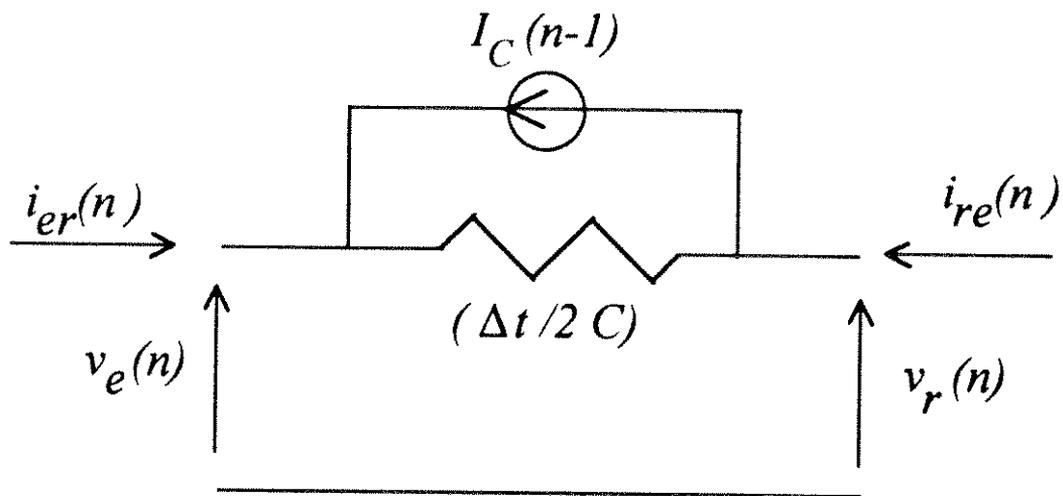


Fig. 5.13 - Circuito Equivalente de uma Capacitância no domínio do Tempo.

5.4. RESISTÊNCIA CONCENTRADA

Para completar o quadro de elementos, é analisado o circuito de uma resistência concentrada (Fig. 5.14). A equação que define o ramo, neste caso, é

$$\frac{1}{R} \cdot v_{er}(t) = i_{er}(t) \quad (5.62)$$

ou, em termos de iterações no tempo:

$$\frac{1}{R} \cdot v_e(n) - \frac{1}{R} \cdot v_r(n) = i_{er}(n) \quad (5.63)$$

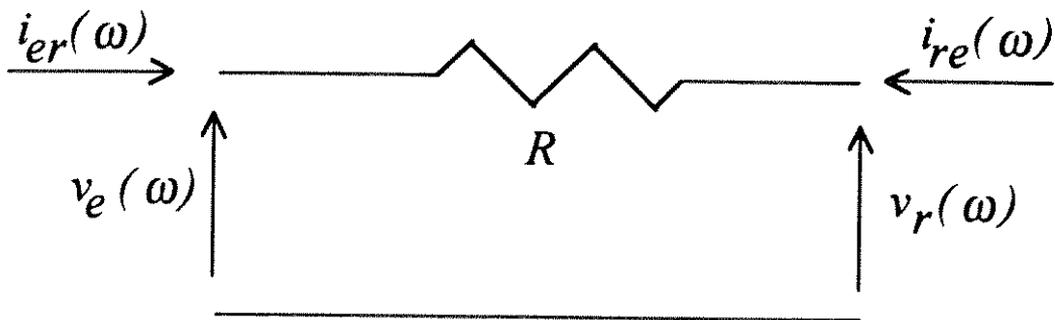


Fig. 5.14 - Resistência no domínio da Frequência.

A Fig. 5.15 fornece o circuito equivalente da resistência no domínio do tempo.

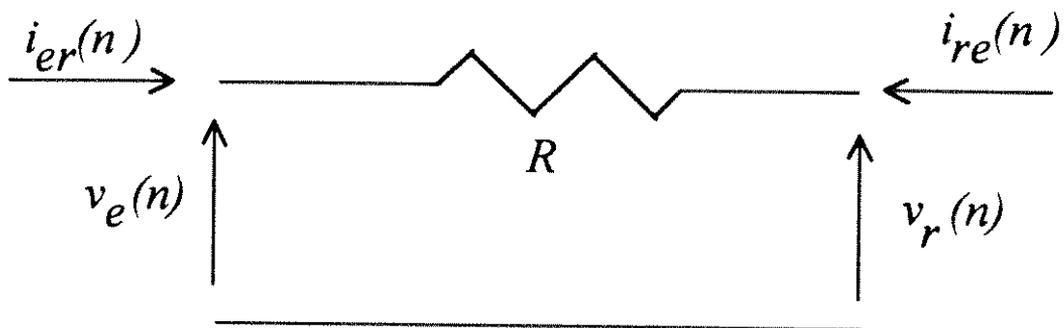


Fig. 5.15 - Circuito Equivalente de uma Resistência

5.5. INDUTÂNCIAS CONCENTRADAS COM ACOPLAMENTO MÚTUO

A indutância ligada entre os nós e_a , e_b e e_c , e os nós r_a , r_b e r_c de um sistema trifásico (Fig.5.16 - a), onde existe acoplamento entre as fases, é definida pelas equações:

$$\begin{cases} v_{er_a} = L_{11} \frac{\partial i_{er_a}}{\partial t} + L_{12} \frac{\partial i_{er_b}}{\partial t} + L_{13} \frac{\partial i_{er_c}}{\partial t} \\ v_{er_b} = L_{21} \frac{\partial i_{er_a}}{\partial t} + L_{22} \frac{\partial i_{er_b}}{\partial t} + L_{23} \frac{\partial i_{er_c}}{\partial t} \\ v_{er_c} = L_{31} \frac{\partial i_{er_a}}{\partial t} + L_{32} \frac{\partial i_{er_b}}{\partial t} + L_{33} \frac{\partial i_{er_c}}{\partial t} \end{cases} \quad (5.64)$$

isto é,

$$[v_{er}(t)] = [L_R] \cdot \frac{\partial}{\partial t} [i_{er}(t)] \quad (5.65)$$

Aplicando a lei trapezoidal,

$$[i_{er}(n)] - [i_{er}(n-1)] = \frac{\Delta t}{2} \cdot [L_R]^{-1} \cdot \{[v_{er}(n)] - [v_{er}(n-1)]\} \quad (5.66)$$

isto é,

$$[i_{er}(n)] = \frac{\Delta t}{2} \cdot [L_R]^{-1} \cdot [v_{er}(n)] + [I_L(n-1)] \quad (5.67)$$

ou,

$$[i_{er}(n)] = [G_L] \cdot [v_{er}(n)] + [I_L(n-1)] \quad (5.68)$$

com:

$$[I_L(n-1)] = [G_L] \cdot [v_{er}(n-1)] + [i_{er}(n-1)] \quad (5.69)$$

isto é,

$$[I_L(n-1)] = 2 \cdot [G_L] \cdot [v_{er}(n-1)] + [I_L(n-2)] \quad (5.70)$$

A matriz $[G_L]$, que representa a indutância trifásica, é uma matriz 3 x 3. Ela entra na matriz de condutância $[Y(n)]$ como mostra a Fig.5.16.

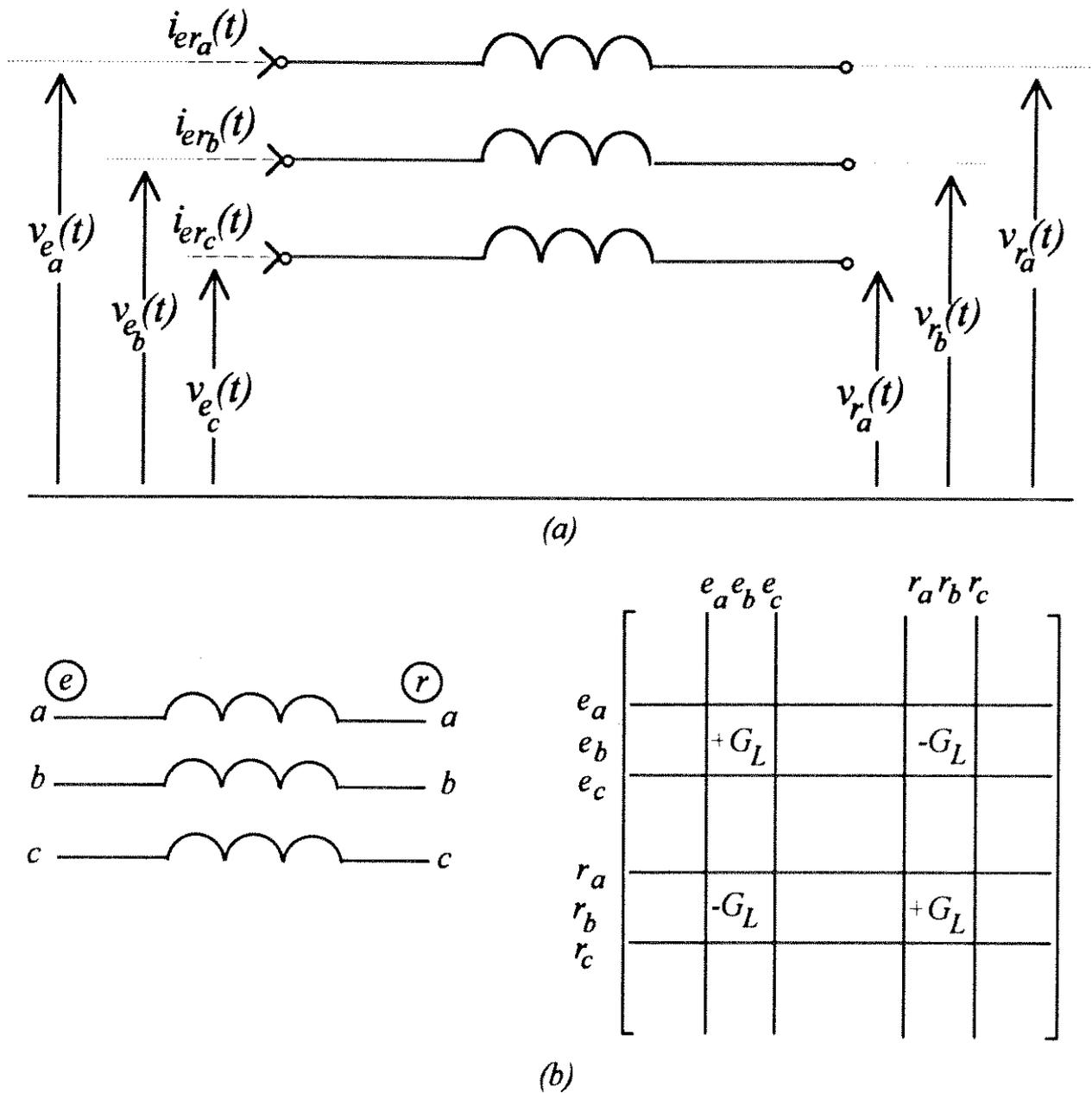


Fig.5.16 - Indutância Trifásica com acoplamento mútuo. (a) Circuito Elétrico; (b) formação da matriz $[Y(n)]$

5.6. EQUAÇÕES DE MALHA

Com todos os elementos da malha substituídos por seus circuitos equivalentes, as equações nodais da malha podem ser estabelecidas. O resultado é um sistema de equações algébricas lineares que descreve o estado da malha no instante "n".

$$[Y(n)] \cdot [v(n)] = [i(n)] - [I_h(n-p)] \tag{5.71}$$

onde:

$[Y(n)]$ é a matriz de condutância nodal, normalmente constante se não há chaveamentos ou alterações de seus componentes;

$[v(n)]$ é o vetor de tensões nodais no instante "n". Estas são geralmente as incógnitas da malha.

$[i(n)]$ é o vetor de correntes nodais injetadas. Estas são fontes de correntes ligadas entre qualquer nó e o nó de referência.

$[I_h(n-p)]$ é o vetor de correntes conhecidas. Estas representam a história passada da malha. Este vetor é preenchido através das equações (5.40), (5.41), (5.51), (5.61) e (5.70)

A matriz de condutância $[Y(n)]$, que é simétrica e real, será constante enquanto o intervalo de tempo Δt for constante e a configuração da malha não se alterar (através de um chaveamento, por exemplo). Como muitos elementos da matriz $[Y(n)]$ são nulos, utiliza-se técnicas de armazenamento compacto e um esquema de eliminação otimamente ordenada para aproveitar a característica esparsa da matriz [Zollenkopf, 1971].

5.7. ALGORITMO DO PROGRAMA IMPLEMENTADO

A seguir são apresentados as principais etapas do programa computacional implementado:

- 1) Leitura de Dados;
- 2) Cálculo do número de pontos (nptos) a serem calculados no tempo;
- 3) Preparação dos valores iniciais das fontes de corrente fictícias nos indutores e capacitores;
- 4) Preparação dos valores iniciais dos Apontadores utilizados no Armazenamento Compacto da Matriz Condutância Nodal;
- 5) Armazenamento Compacto da Estrutura da Matriz Condutância Nodal;
- 6) Preenchimento dos vetores de armazenamento compacto com os elementos não nulos da matriz condutância nodal;
- 7) Preparação dos valores iniciais dos apontadores dos vetores de história;

- 8) Preparação dos valores iniciais de todas as variáveis com o valor zero;
- 9) Simulação Ordenada da Matriz Condutância Nodal;
- 10) Redução da matriz Condutância Nodal à fatores de multiplicação;
- 11) Definição dos parâmetros do gráfico em tempo real;
- 12) Desenho da Moldura do Gráfico;
- 13) Atualização das variáveis $R_e(n)$ e $R_r(n)$ de cada modo de propagação;
- 14) Atualização do Vetor Independente;
- 15) Solução do Sistema de Equações;
- 16) Atualização das variáveis $D_e(n)$ e $D_r(n)$; atualização das Correntes nos Indutores e Capacitores;
- 18) Atualização das Correntes e Tensões nas extremidades de cada linha;
- 19) Atualização dos Apontadores dos Vetores de História;
- 20) Saída gráfica das tensões calculadas em nós previamente determinados;
- 21) Repetir os itens 13 ao 20 "nptos" vezes;
- 22) Saída Gráfica dos Resultados em Tela e arquivo.

O programa implementado para o cálculo de transitórios eletromagnéticos mostrou ser muito mais rápido que o programa de transitórios pelo método da transformada de Fourier.

O programa foi implementado em Turbo Pascal v. 7.0. No capítulo 9 descrevemos algumas aplicações deste programa na solução de transitórios eletromagnéticos em sistemas de telecomunicações [Costa Jr. et al., 1994a] e de potência [Costa Jr. et al., 1994b e 1994c], sendo que sistemas de telecomunicações exigem frequências de amostragem mais altas (na ordem de 10 MHz) devido ao fato de ser, o comprimento médio das linhas telefônicas, muito pequeno (apenas algumas dezenas de quilômetros).

6. SÍNTESE NUMÉRICA DE $Z_c(\omega)$ E $F_n(\omega)$

Este capítulo discute as formas de estimativas conhecidas para determinar funções que se ajustem à respostas em frequência da função Impedância Característica $Z_c(\omega)$ e da parcela não linear da função Resposta ao Impulso Direto $F_n(\omega)$

6.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Uma função racional no plano complexo tem a seguinte forma geral:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (6.1)$$

onde $P(s)$ e $Q(s)$ são polinômios na variável complexa $s = \sigma + j\omega$. Se $F(s)$ corresponde a resposta de um sistema físico, por exemplo, uma admitância ou uma função de transferência, algumas restrições são impostas nos graus de $P(s)$ e $Q(s)$ e nas locações das raízes (zeros e pólos) destes polinômios.

O problema de aproximar uma dada função da frequência pela forma racional genérica (6.1) é encontrar os polinômios $P(s)$ e $Q(s)$. Este problema não é direto pois, mesmo com as restrições impostas pelo sistema físico, ainda resta um infinito número de possíveis soluções para $P(s)$ e $Q(s)$. Conseqüentemente, como em outros problemas de aproximação, a questão consiste em determinar um método de solução que possa fornecer resultados suficientemente precisos, por meio de uma formulação implementada de um modo prático e através de recursos razoáveis (e.g. custos, mão-de-obra e infra-estrutura).

Diferentes técnicas são mencionadas na literatura clássica na síntese de redes para solução do problema da aproximação racional. Exemplos destes métodos tradicionais são aproximações baseadas nos conceitos de Butterworth, Chebyshev, Fourier, Taylor,

Padé... Estes métodos foram desenvolvidos quando só eram disponíveis recursos computacionais limitados (anterior aos computadores digitais) e eram principalmente aplicados ao problema particular da resposta de filtros ideais. A função $F(s)$ em (6.1) era restrita, por exemplo, a $P(s)=1$ e $Q(s)$ um polinômio de baixa ordem. Do mais recente desenvolvimento (com a evolução de computadores digitais) tem-se técnicas de otimização bastante genéricas, tais como o método do gradiente conjugado, e o método de Fletcher e Powell. Estas técnicas estão baseadas na otimização de parâmetros pré definidos da função $F(s)$. Devido à capacidade dos computadores digitais, bastante liberdade e generalidade é permitida para a forma de $F(s)$. Entretanto, isto tem criado um novo problema: muitos graus de liberdade provocam desordem, e estes métodos freqüentemente apresentam problemas de convergência. O usuário na verdade tem de suprir, de alguma maneira, uma forma inicial que seja próxima o suficiente da solução tal que o processo de otimização convirja à uma solução final melhorada. Em muitos problemas de aproximação, esta tarefa não é fácil e requer experiência e familiaridade tanto com a forma da função que esta sendo aproximada quanto das características internas dos algoritmos numéricos que estão sendo empregados. Na modelagem da dependência das linhas de transmissão com a freqüência, a forma das funções a serem aproximadas depende das características físicas da linha, do seu comprimento, e do modo de propagação em particular. Uma forma pré-selecionada da função a aproximar, ou uma desenvolvida para um caso particular, não representará genericamente a melhor forma para outros casos, e a menos que ajustes sejam feitos pelo usuário, algoritmos de otimização podem conduzir à resultados bastante pobres ou, simplesmente, não convergirem.

Antes de apresentar a técnica empregada neste trabalho para aproximação de $Z_c(\omega)$ e $F_n(\omega)$, referências serão feitas à técnicas de aproximação empregadas por outros autores em conexão com formulações dependentes da freqüência.

6.2. TÉCNICA DE APROXIMAÇÃO RACIONAL

O método implementado neste trabalho para a síntese da impedância característica equivalente e a função resposta ao impulso direto é bastante flexível e direto. Além de não ser limitado à aproximações de baixa ordem, como nos métodos clássicos, também não requer que o usuário forneça funções e parâmetros adequados, como nas modernas técnicas de otimização. A ordem e os parâmetros da aproximação são automaticamente determinados pela rotina enquanto que a função aproximada adapta-se livremente à forma da função aproximada. Uma vez que a forma da aproximação não é determinada de antemão, problemas de instabilidade e precisão devido à escolhas erradas são evitados. Além disso, ampla faixa de freqüências pode ser considerada.

A técnica está baseada em uma adaptação do conceito de aproximação assintótica do módulo da função complexa, introduzida por Bode em 1945. Os princípios básicos da implementação deste método de síntese de $Z_c(\omega)$ e a aproximação racional de $F_n(\omega)$ são discutidos a seguir.

6.2.1. APROXIMAÇÃO DA FUNÇÃO MÓDULO

O algoritmo de Bode para aproximar o módulo de uma função racional é ilustrado nas figuras 6.1 à 6.3 para a impedância característica. O módulo (em decibéis) é plotado como uma função do logaritmo da frequência. O princípio básico do algoritmo consiste em traçar a curva aproximada através de segmentos de reta. Estes segmentos podem ser horizontais ou terem uma inclinação que seja múltiplo de 20 dB/década. Os pontos de mudança de inclinação (quinas ou pontos de quebra) definem os pólos e zeros da função racional aproximada.

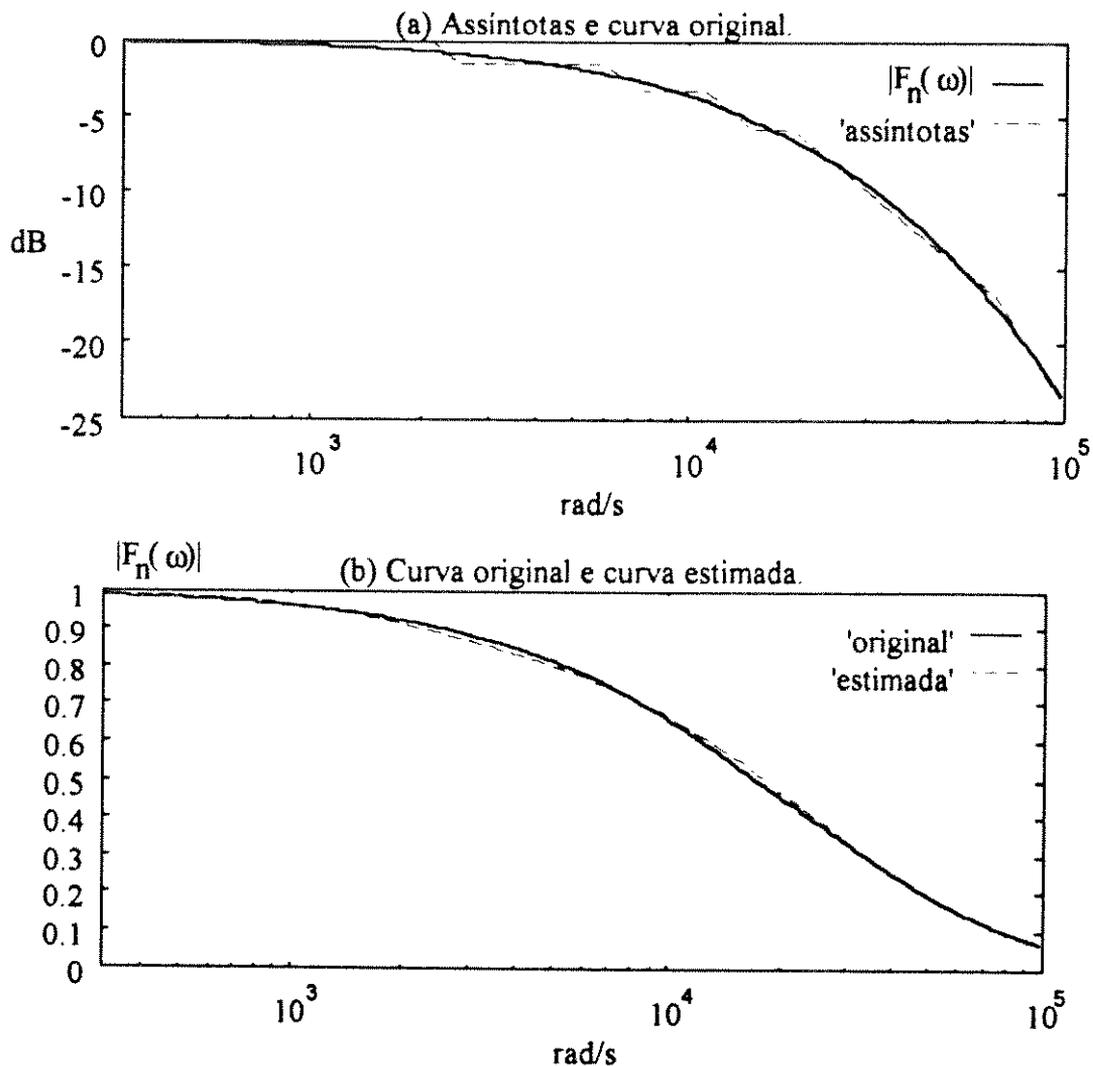
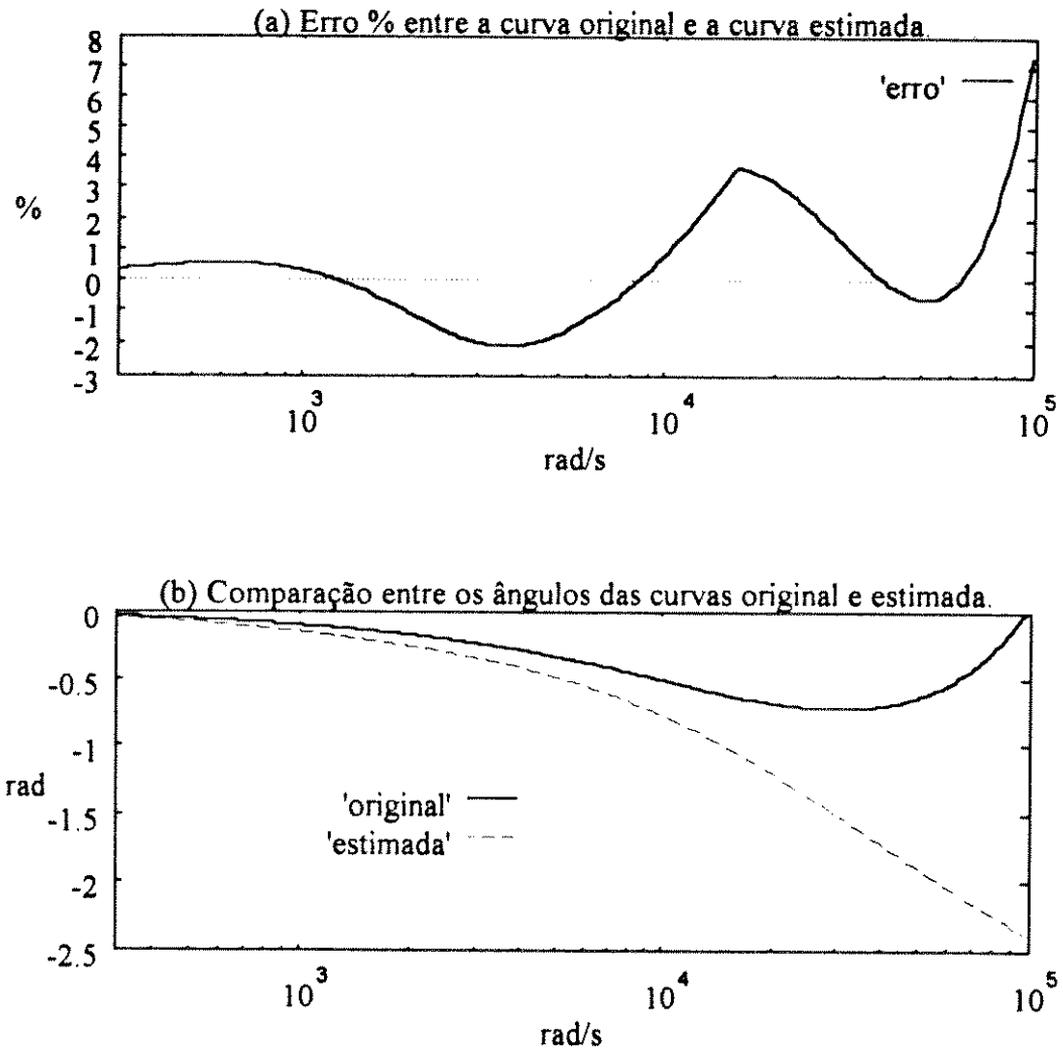
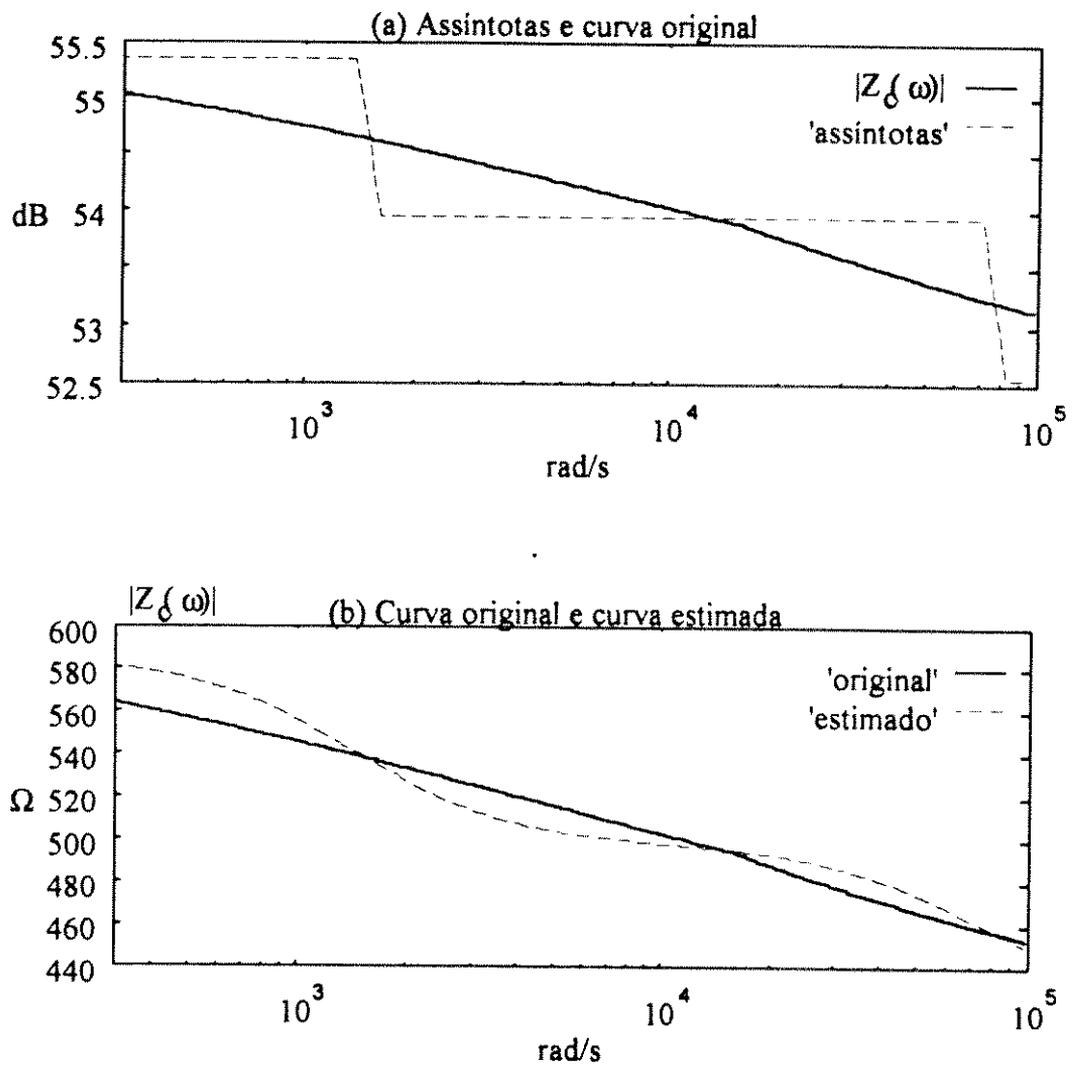
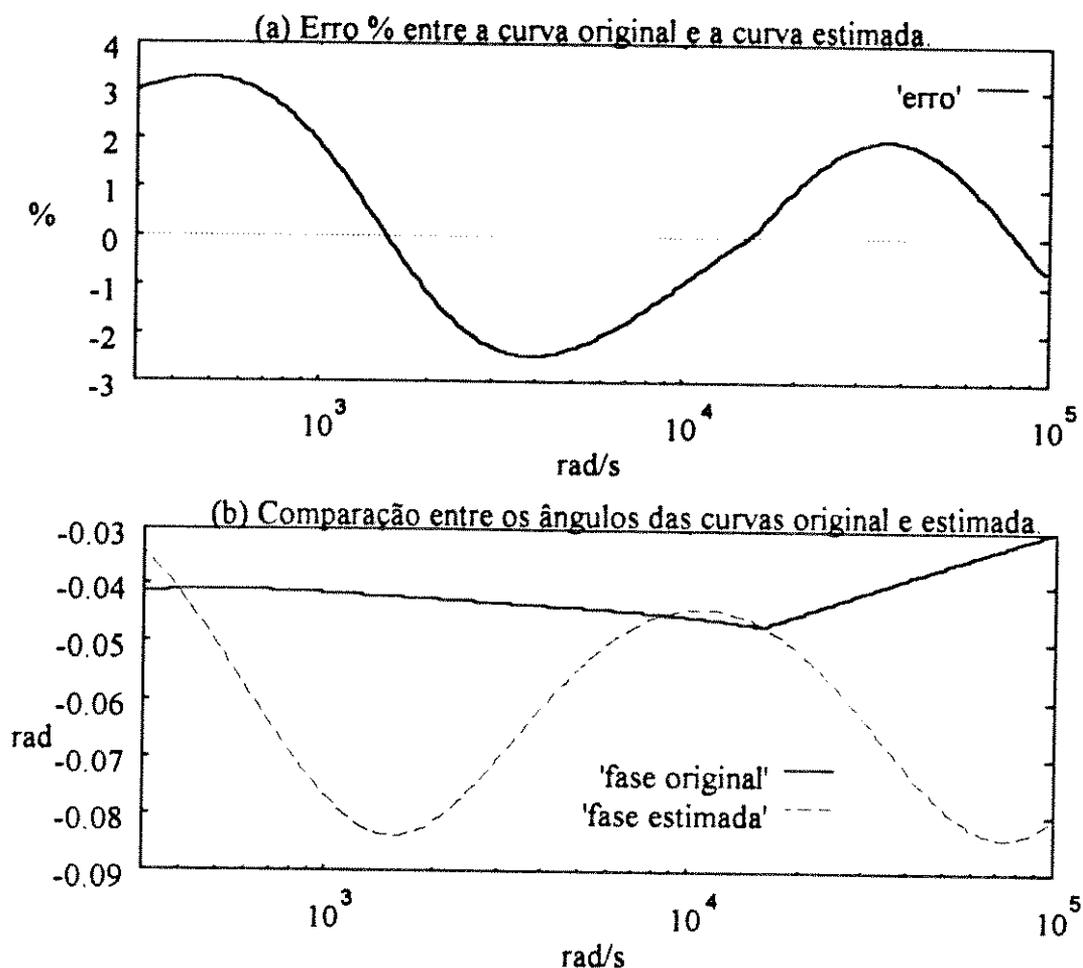


Fig. 6.1 - Aproximação Assintótica de $|F_n(\omega)|$.

Fig. 6.2 - Aproximação Assintótica de $F_n(\omega)$.



Fig. 6.4 - Aproximação Assintótica de $Z_c(\omega)$.

A forma desejada de $Z_c(\omega)$ é dada na equação (6.2):

$$Z_{eq}(s) = H \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_{nz})}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_{np})} \quad (6.2)$$

Tomando o logaritmo do módulo desta função e multiplicando por 20 (para seguir a convenção do módulo como ganho ou atenuação em decibéis), obtém-se:

$$20 \log |Z_{eq}(s)| = 20 \log(H) + 20 \log |s + z_1| + \dots + 20 \log |s + z_{nz}| - 20 \log |s + p_1| + \dots + 20 \log |s + p_{np}| \quad (6.3)$$

Para $s = j\omega$, cada um dos termos desta expressão tem um comportamento assintótico à uma reta com respeito à ω . Considerando, por exemplo, o termo

$$20 \log |s + z_1|$$

segue que,

Limite para $\omega \ll z_1 \rightarrow 20 \log(z_1)$, isto é, uma constante. Por outro lado,

Limite para $\omega \gg z_1 \rightarrow 20 \log(\omega)$, o que, como uma função de $\log(\omega)$, é uma linha reta tendo um incremento de 20 decibéis a cada $(\omega_2 / \omega_1) = 10$, isto é, uma inclinação de 20 dB/década. O comportamento assintótico combinado de todos elementos na equação (6.3) pode ser visualizado como segue. Imagine a equação (6.3) sendo construída passo à passo, cada vez que um zero é adicionado (*em* $\omega = z_1$), a inclinação da curva assintótica é aumentada de 20 dB. Cada vez que um pólo é adicionado (*em* $\omega = p_1$), a inclinação é diminuída de 20 dB. A descrição acima é uma síntese breve dos fundamentos bem conhecidos da aproximação assintótica de Bode. Na Fig. 6.3 deve-se notar que os segmentos de reta não representam a forma real da função de aproximação (equação (6.2)) mas apenas a linha assintótica desta curva. A verdadeira função de aproximação é uma curva suave, sem quinas, e bastante próxima da função aproximada.

Uma vez que toda a curva é traçada durante o processo de aproximação, de $\omega \rightarrow 0$ (a condição CC pode ser facilmente casada exatamente) até a maior frequência na qual a função aproximada torna-se praticamente constante, não há regiões de lacunas, e uma aproximação precisa é obtida em toda a faixa de frequências.

O mesmo procedimento básico descrito para síntese de $Z_c(\omega)$ é aplicado na estimativa de $F_n(\omega)$.

6.2.2. CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS

Uma vez que as curvas a serem aproximadas ($|Z_c(\omega)|$ e $|F_n(\omega)|$), e.g. figuras 6.1 e 6.3 são suaves, somente pólos e zeros reais são esperados nas correspondentes funções de aproximação. Pólos ou zeros complexos podem produzir oscilações locais.

A Fig. 6.5 mostra o algoritmo implementado, o qual consiste no método das assíntotas de Bode modificado:

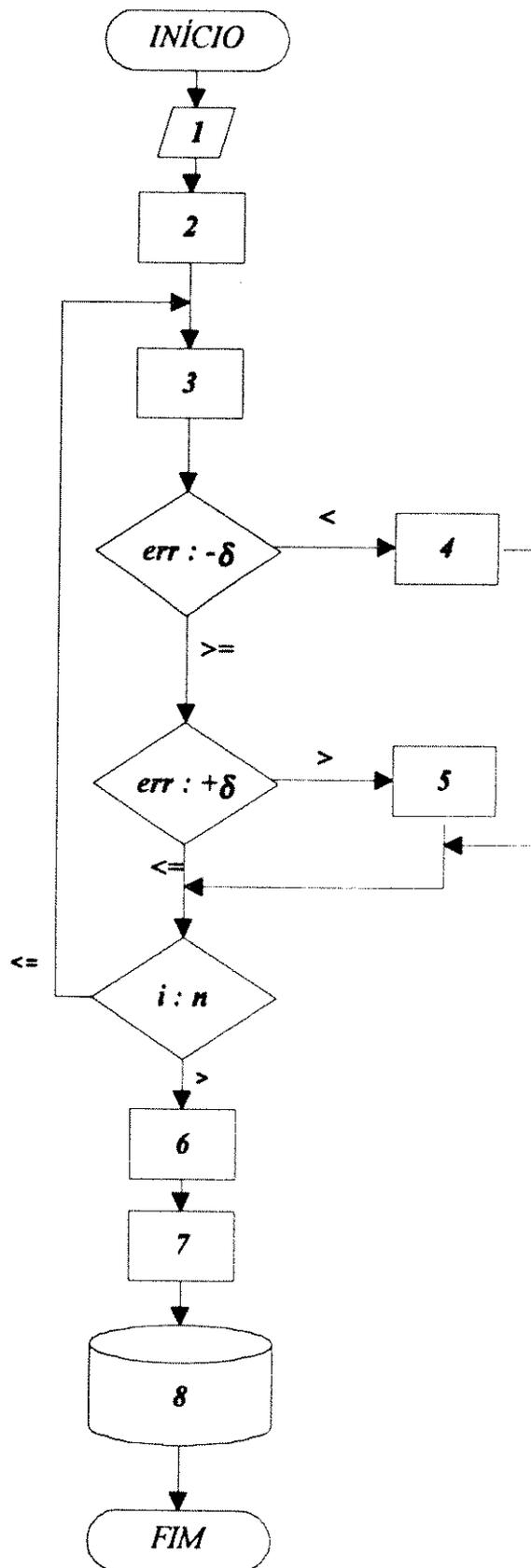


Fig. 6.5 - Diagrama de blocos do algoritmo implementado para cálculo dos pólos e zeros de respostas em frequência através do método das assíntotas modificado.

Descrição dos blocos da Fig. 6.5:

Bloco nº 1: Leitura de dados:

- ω vetor da frequência angular em *rad/s*
 x vetor da resposta em frequência;
 n número de elementos em ω e x

Bloco nº 2: Preparação dos valores iniciais das variáveis:

$n_z = 0$ número de zeros da função estimada;

$n_p = 0$ número de pólos da função estimada;

$x_{dB} = 20 \cdot \frac{\ln(|x|)}{\ln(10)}$ cálculo resposta em frequência em *dB*;

$x_{ass} = 0$ vetor que armazena as assíntotas;

$$\left. \begin{array}{l} x_{ass}(i) = 0 \\ x_{const} = x_{dB}(1) \\ i = 1 \\ k = 1 \\ caso = 0 \end{array} \right\}$$
 variáveis de cálculo e controle auxiliares;

Bloco nº 3: Cálculo da assíntota e diferença entre a assíntota e curva original:

$x_{ass}(i) = x_{const} - 20 \cdot caso \cdot \log_{10}\left(\frac{w(i)}{w(imp)}\right)$ ponto sobre a assíntota;

$err = x_{ass}(i) - x_{dB}(i)$ desvio entre a assíntota e a curva original;

Bloco nº 4: Rotina para incrementar um zero:

$n_z = n_z + 1$ incremento do número de zeros

$i = i - 1$ decremento do apontador principal

$x_{const} = x_{ass}(i)$ ponto de mudança de inclinação da curva de assíntotas;

$Z(n_z) = -\omega(i)$ armazenamento do zero;

- $k = k + 1$ variável que auxilia o controle do número máximo de pólos e zeros;
- $caso = caso - 1$ variável que indica a existência de zeros consecutivos, alterando a inclinação da assíntota calculada

Bloco nº 5: Rotina para incrementar um pólo:

- $n_p = n_p + 1$ incremento do número de pólos
- $i = i - 1$ decremento do apontador principal
- $x_{const} = x_{ass}(i)$ ponto de mudança de inclinação da curva de assíntotas;
- $P(n_p) = -\omega(i)$ armazenamento do pólo;
- $k = k + 1$ variável que auxilia o controle do número máximo de pólos e zeros;
- $caso = caso + 1$ variável que indica a existência de pólos consecutivos, alterando a inclinação da assíntota calculada

Bloco nº 6: Ajuste dos pólos e zeros calculados para minimizar o erro:

$$Z(i) = g \cdot Z(i) \quad \text{com } i = 2, \dots, (n_z - 1)$$

$$P(i) = g \cdot P(i) \quad \text{com } i = 2, \dots, (n_p - 1)$$

Para o exemplo de linha trifásica ilustrado neste trabalho utilizou-se os seguintes desvios para todos os modos:

$g = 1,36$ se a função sendo estimada for a resposta ao impulso direto ($|F_n(\omega)|$)

$g = 1,00$ se a função sendo estimada for a impedância característica ($|Z_c(\omega)|$)

Bloco nº 7: Ajuste do ganho da função estimada:

$$H = \frac{|x(1)|}{\left| \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_{nz})}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_{np})} \right|} \quad \text{com } s = j \cdot \omega(1)$$

Bloco nº 8: Armazenamento em arquivos dos pólos, zeros e ganho calculados

No exemplo de linha trifásica ilustrado neste trabalho utilizou-se os seguintes desvios para todos os modos:

$\delta = 0,7 \text{ dB}$ se a função sendo estimada for a resposta ao impulso direto ($|F_n(\omega)|$)

$\delta = 0,6 \text{ dB}$ se a função sendo estimada for a impedância característica ($|Z_c(\omega)|$)

O método para obtenção do ganho, pólos e zeros de funções de respostas em frequência implementado, denominado método de Bode modificado, é inerentemente livre de instabilidades numéricas, não exigindo "chutes" iniciais, e extremamente rápido. No entanto é preciso aperfeiçoar este método, pois o ajuste dos pólos e zeros efetuado no bloco nº 6 do algoritmo (Fig. 6.5) é feito através do parâmetro g , o qual foi determinado através da utilização repetida do programa. Além disso, o parâmetro δ modifica o número de zeros e pólos que são calculados, isto é, quanto menor o valor de δ , maior será o número de pólos e zeros calculados. Portanto δ deve ser escolhido tal que sejam estimados apenas pólos e zeros que não sejam numericamente muito próximos um do outro. Pólos e Zeros com valores muito próximos entre si provocam instabilidades numéricas devido a erros numéricos de arredondamento e truncamento. Deve-se, então, procurar uma alternativa para tornar automática a determinação dos parâmetros g e δ para qualquer tipo de linha de transmissão.

7. SÍNTESE NUMÉRICA DE $F_n(z)$ E $Z_c(z)$

Após a obtenção das funções $F_n(\omega)$ e $Z_c(\omega)$ no domínio da frequência (cap. 6), resta mapear os zeros e pólos no plano Z . Os coeficientes das equações (6.4) e (6.5) podem ser determinados através dos procedimentos explanados no apêndice E.

A seguir apresentamos de forma resumida os principais resultados numéricos obtidos. A Tab. 7.1 resume as formas de mapeamento utilizadas.

Tab. 7.1 - Mapeamento no plano Z .

Invariância Impulsiva	$z = e^{s \cdot \Delta t}$
Diferença Finita	$z = \frac{1}{1 - s \cdot \Delta t}$
Transformação Bilinear	$z = \frac{1 + s \cdot \frac{\Delta t}{2}}{1 - s \cdot \frac{\Delta t}{2}}$

As Tab. 7.2 à 7.7 apresentam valores numéricos dos ganhos, pólos e zeros das funções $F_n(\omega)$ e $Z_c(\omega)$ para o modo terra no plano S para a linha de potência especificada no capítulo 1.

Tab. 7.2 - $F_n(\omega)$, modo terra ou modo 0.

$F_n(\omega)$		
Ganho	8.63823710651327E+0008	
	zero	pólo
1°	-2.481126100000000E+3	-2.110642700000000E+3
2°	-9.994467144000000E+3	-8.118179320000000E+3
3°	-1.469684400000000E+4	-1.480226584000000E+4
4°		-1.894924800000000E+4
5°		-6.597782500000000E+4

Tab. 7.3 - $Z_c(\omega)$, modo terra ou modo 0.

$Z_c(\omega)$		
Ganho	4.65238266814905E+0002	
	zero	pólo
1°	-7.462935700000000E+2	-6.648787800000000E+2
2°	-1.939212600000000E+4	-1.727659700000000E+4

Tab. 7.4- $F_n(\omega)$, modo 1.

$F_n(\omega)$		
Ganho	7.20505066803777E-0001	
	zero	pólo
1°	-9.330387200000000E+4	-6.751984500000000E+4

Tab. 7.5 - $Z_c(\omega)$, modo 1.

$Z_c(\omega)$		
Ganho	2.99280369476652E+0002	
	zero	pólo
1°	-6.447102100000000E+4	-6.597782500000000E+4

Tab. 7.6 - $F_n(\omega)$, modo 2.

$F_n(\omega)$	
Ganho	9.95258990000000E-0001

Tab. 7.7 - $Z_c(\omega)$, modo 2.

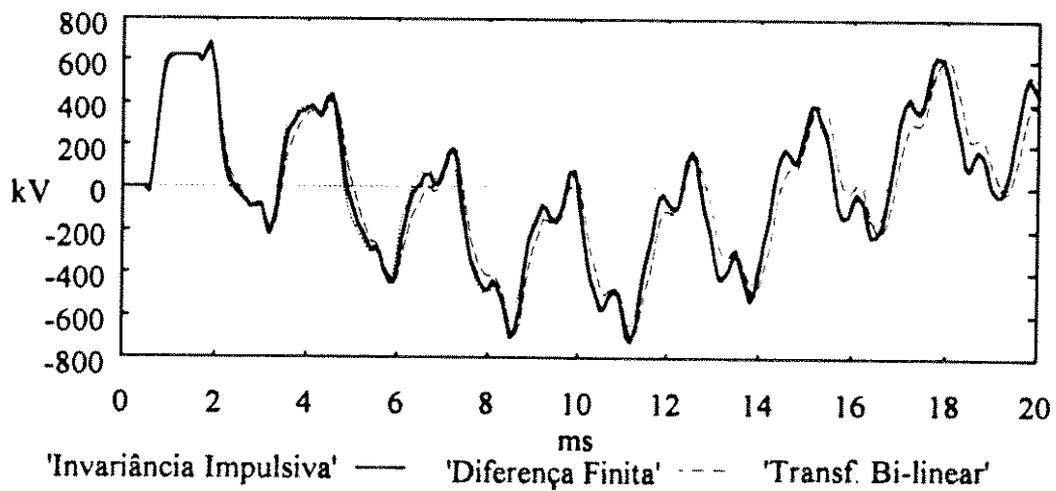
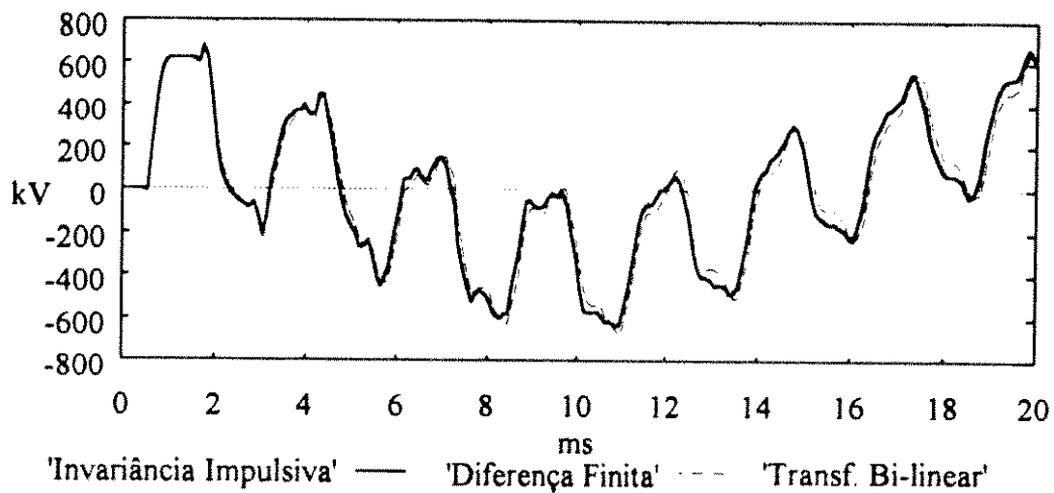
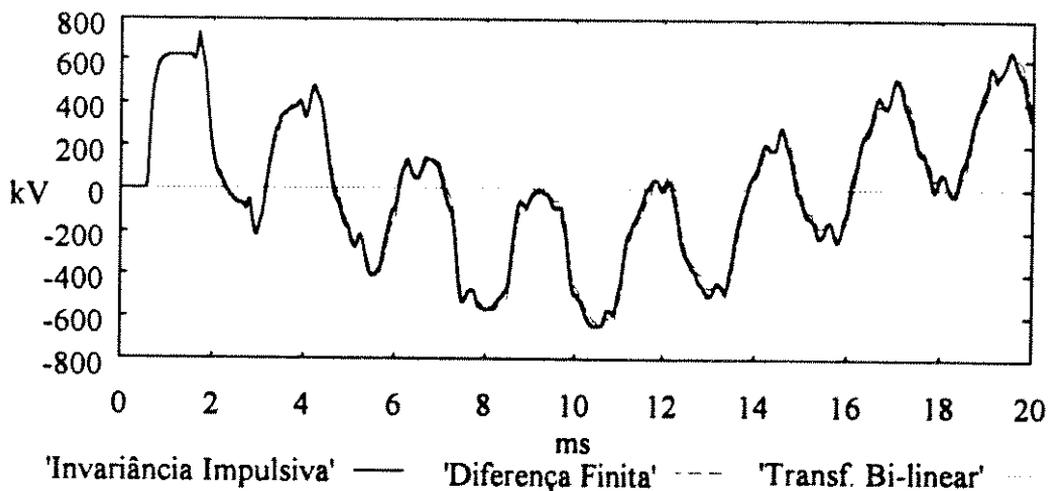
$Z_c(\omega)$	
Ganho	2.40441170000000E+0002

A Tab. 7.8 contém os valores dos coeficientes no plano Z da função $F_n(z)$, modo 0, obtidos através dos três procedimentos resumidos na Tab. 7.1. Neste caso o período de amostragem vale $\Delta t = 25 \mu\text{seg}$.

Tab. 7.8 - Ganho, zeros e pólos para o modo 0 da função $F_n(z)$ para $\Delta t = 25 \mu\text{seg}$.

	Invariância Impulsiva	Diferenças Finitas	Transformação Bilinear
Ganho	0.216139926	0.144648026	0.245136476
1° zero	0.939856427	0.941594625	0.939837725
2° zero	0.778908515	0.800088535	0.777887075
3° zero	0.692517964	0.731303620	0.689602243
1° pólo	0.948601895	0.949878640	0.948590277
2° pólo	0.816315397	0.831286648	0.815743371
3° pólo	0.690695204	0.729896828	0.687723374
4° pólo	0.622674605	0.678549793	0.616990561
5° pólo	0.192156406	0.377437450	0.096056884

Muito embora apresentem os ganhos, pólos e zeros bastante diferentes entre si (Tab. 7.8), as diferenças entre os resultados apresentados pelas simulações não são tão grandes, como é verificado nas figuras 7.1 à 7.4. Estas figuras apresentam o resultados de simulações na fase "a" do sistema elétrico de potência, cujos dados estão descritos nos capítulos 2 e 9 deste trabalho.

Fig. 7.1 - Resultados de simulação para $\Delta t = 100 \mu \text{seg}$ Fig. 7.2 - Resultados de simulação para $\Delta t = 50 \mu \text{seg}$ Fig. 7.3 - Resultados de simulação para $\Delta t = 25 \mu \text{seg}$

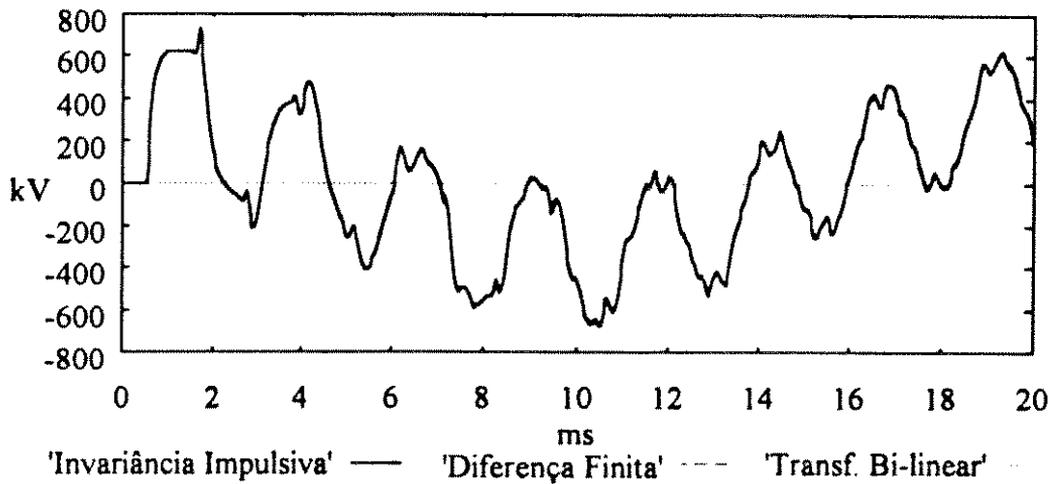


Fig. 7.4 - Resultados de simulação para $\Delta t = 10 \mu \text{seg}$

Note que a medida que reduzimos o passo de simulação, diminuimos também as diferenças entre as simulações feitas com as diversas fórmulas de mapeamento.

A partir dos coeficientes das funções $F_n(\omega)$ e $Z_c(\omega)$ no domínio da frequência, as funções $F_n(z)$ e $Z_c(z)$ podem ser sintetizadas de vários modos, como explicado no apêndice E. Porém, após observarmos a influência de cada uma destas maneiras de mapeamento, chega-se a conclusão que no domínio do tempo, poucas serão as diferenças entre as simulações obtidas seja com mapeamento através de diferenças finitas, seja com transformação bilinear ou mesmo com invariância impulsiva.

8. ESCOLHA DO PASSO DE SIMULAÇÃO Δt

Valores numéricos do passo de simulação no domínio do tempo, Δt devem ser submúltiplos inteiros dos tempos de trânsito, T_i , de cada modo de propagação, isto é,:

$$m_i \cdot \Delta t = T_i \quad i = 0, 1 \text{ e } 2 \quad (\text{modos de propagação}) \quad (8.1)$$

onde m_i é um número inteiro e positivo.

No caso particular quando os parâmetros da linha são balanceados entre as fases, os dois tempos de trânsitos aéreos (T_1 e T_2) são iguais entre si e quase independentes da frequência acima de 10 rad/s. Por outro lado, o tempo de trânsito do modo terra varia com a frequência (Fig. 8.1) em toda faixa de frequências de interesse. Neste trabalho utilizamos o valor para o qual o tempo de trânsito tende em altas frequências para ser utilizado na equação (8.1).

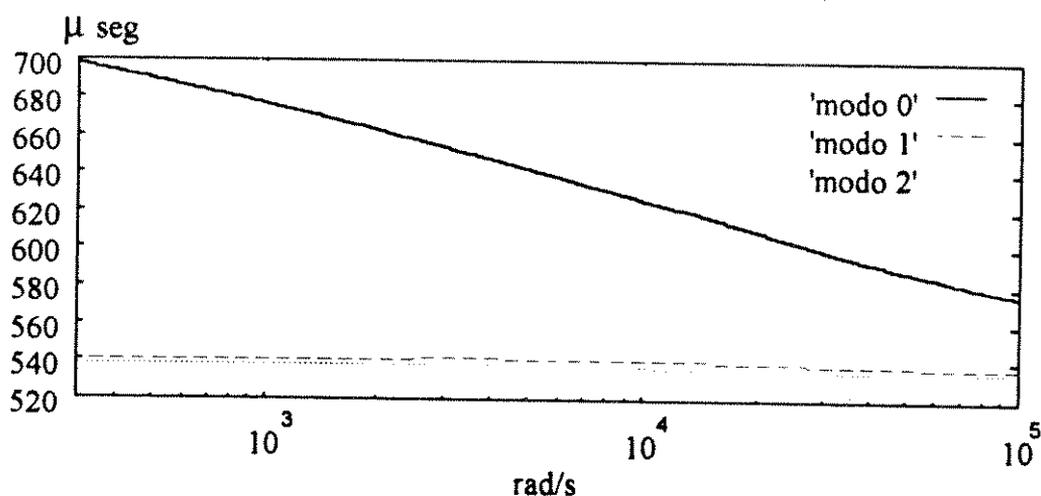


Fig. 8.1 - Tempo de Trânsito.

Mais genericamente, quando os parâmetros da linha não são balanceados entre as fases, isto é, não havendo transposição, os tempos de trânsitos aéreos serão diferentes entre

si. Da Tab. 3.1, $T_0 \cong 575,36 \mu s$, $T_1 \cong 536,52 \mu s$ e $T_2 \cong 534,18 \mu s$. Assim, para satisfazer completamente a equação (8.1) deve-se procurar um passo de simulação (Δt) muito pequeno, que seja submúltiplo inteiro de T_0 , T_1 e T_2 . Em termos de tempo de computação necessário para análise, há sempre consideráveis incentivos ao uso de passos de simulação grandes que sejam consistentes com a precisão da solução requerida. Frequentemente na prática, portanto, a relação de submúltiplo inteiro entre passo de simulação e tempo de trânsito não é precisamente atingida.

A seguir são apresentadas várias simulações utilizando-se passos de simulação de $50 \mu seg$ à $10 \mu seg$ (Figuras 8.2 à 8.4). Cada gráfico apresenta a simulação realizada com interpolação e sem interpolação. Além disso, é importante lembrar que a transformação do domínio da frequência para o plano Z é feita através do método da transformação bilinear nestas simulações.

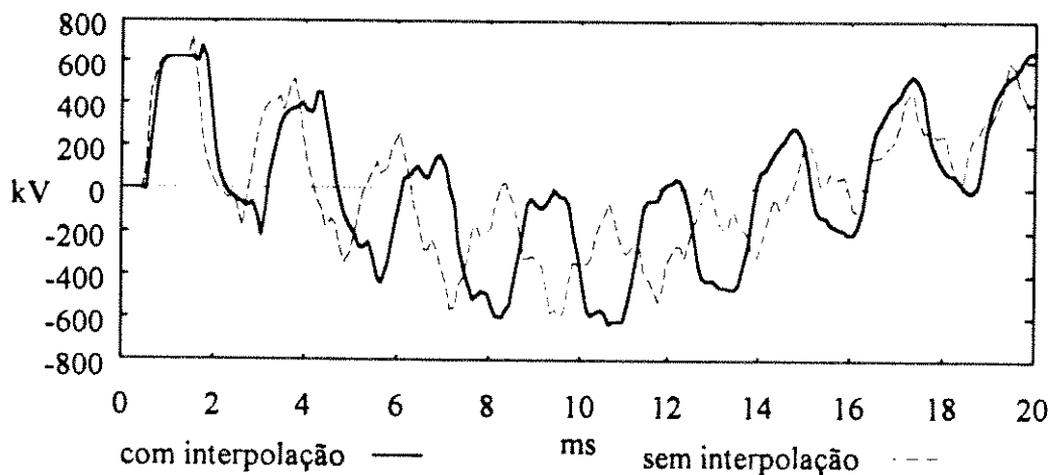


Fig. 8.2 - Tensão fase-neutro no terminal receptor da fase a. $\Delta t = 50 \mu seg$

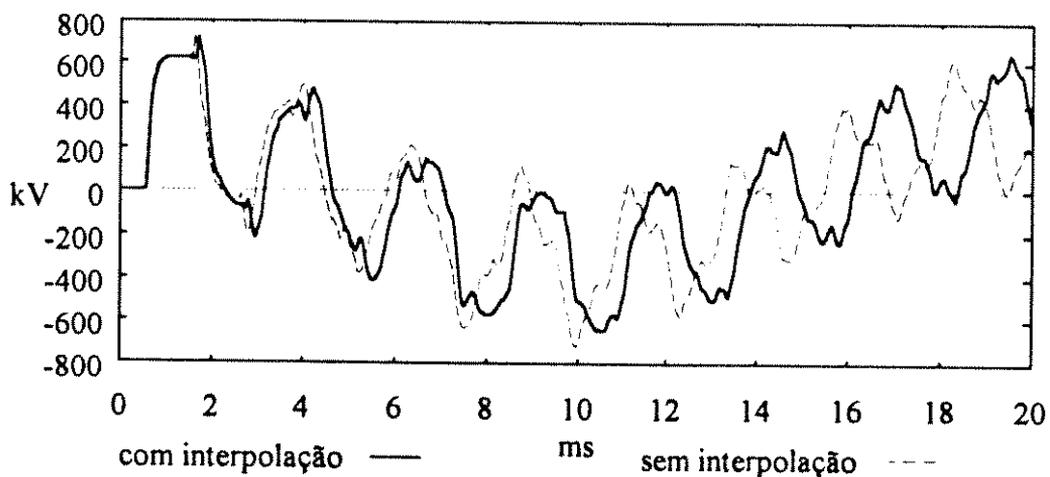


Fig. 8.3 - Tensão fase-neutro no terminal receptor da fase a. $\Delta t = 25 \mu seg$

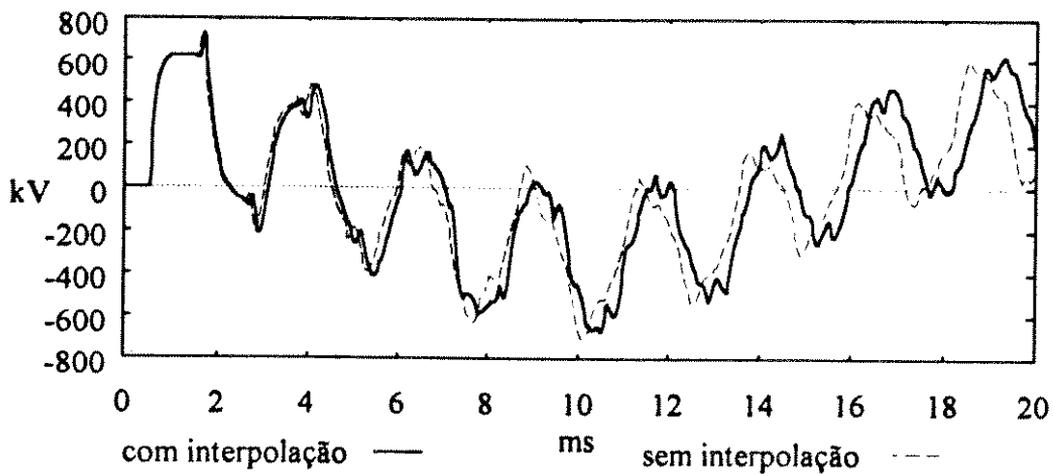


Fig. 8.4 - Tensão fase-neutro no terminal receptor da fase a. $\Delta t = 10 \mu\text{seg}$

Observa-se das figuras 8.2 à 8.4 que a diferença entre as simulações com e sem interpolação diminui à medida que o passo de simulação também diminui. Além disso, quando $\Delta t = 100 \mu\text{seg}$, a função de correção da interpolação se torna mais acentuada pois nota-se, neste caso, uma forte atenuação do sinal no decorrer da simulação quando não se procede a interpolação.

A questão que permanece é: quanto o valor de Δt pode ser aumentado a fim de reduzir o tempo de computação da simulação?. Por outro lado, a medida em que Δt é aumentado, amplia-se também os desvios das relações de submúltiplos inteiros entre Δt , T_0 , T_1 e T_2 . Tais desvios introduzem, por sua vez, erros significativos na solução. Uma análise desta fonte de erros é requerida e, se possível, algum tipo de compensação automática deve ser providenciada. A seguir descreve-se a regra de interpolação utilizada capaz de controlar esta fonte de erros quando o passo de simulação, Δt , não é precisamente um submúltiplo inteiro de cada tempo de trânsito modal.

8.1. INTERPOLAÇÃO

Considerando o caso onde a equação (8.1) não é satisfeita, tem-se:

$$(m_i + \varepsilon_i) \cdot \Delta t = T_i, \quad i = 0,1,2 \quad (8.2)$$

com

$$0 < \varepsilon_i < 1, \quad i = 0,1,2 \quad (8.3)$$

Valores numéricos de m_i , ε_i e Δt utilizados são encontrados na Tab. 8.1.

Tab. 8.1 - Valores numéricos das variáveis que aparecem na equação (8.2)

Δt	10 μseg	25 μseg	50 μseg	100 μseg
m_0	57	23	11	5
ϵ_0	0,53616	0,014464	0,507232	0,753616
m_1	53	21	10	5
ϵ_1	0,652443	0,4609772	0,7304886	0,3652443
m_2	53	21	10	5
ϵ_2	0,417724	0,3670896	0,6835448	0,3417724

Anteriormente, a resposta ao impulso direto no domínio da frequência foi formada de:

$$F_t(\omega) = e^{-j m \omega \Delta t} \cdot F_n(\omega) \quad (8.4)$$

onde:

$$F_n(\omega) = e^{-[\alpha(\omega) + j \beta(\omega)] t} \quad (8.5)$$

Substituindo m por $(m + \epsilon)$ na equação (8.4), segue:

$$F_t(\omega) = e^{-j m \omega \Delta t} \cdot e^{-j \epsilon \omega \Delta t} \cdot F_n(\omega) \quad (8.6)$$

ou

$$F(\omega) = F_t(\omega) \cdot F_\epsilon(\omega) \quad (8.7)$$

onde:

$$F_\epsilon(\omega) = e^{-j \epsilon \omega \Delta t} \quad (8.8)$$

e $F_t(\omega)$ sendo a expressão original da resposta ao impulso direto dada na equação (8.4). No plano Z:

$$F_\epsilon(z) = z^{-\epsilon} \quad (8.9)$$

A matriz ϵ na equação (8.9) é dada por:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & & \\ & \varepsilon_1 & \\ & & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

Faremos agora uma análise para um modo de propagação qualquer para obtermos as características diretas e reversas da linha. No plano Z :

$$R_e(z) = F(z) \cdot D_r(z) \quad (8.11)$$

$$R_r(z) = F(z) \cdot D_e(z) \quad (8.12)$$

Substituindo a equação (8.7), transformada no plano Z , nas equações acima, segue:

$$R_e(z) = F_t(z) \cdot F_\varepsilon(z) \cdot D_r(z) \quad (8.13)$$

$$R_r(z) = F_t(z) \cdot F_\varepsilon(z) \cdot D_e(z) \quad (8.14)$$

Em seguida aproximamos $F_\varepsilon(z)$ na forma polinomial de segundo grau:

$$z^{-\varepsilon} = A_{-1}(\varepsilon) + A_0(\varepsilon) \cdot z^{-1} + A_1(\varepsilon) \cdot z^{-2} \quad (8.15)$$

Determinando a forma fatorada da expressão acima segue:

$$F_\varepsilon(z) = z^{-\varepsilon} = E_0 \cdot (1 - E_1 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - E_2 \cdot z^{-1}) \quad (8.16)$$

Substituindo a aproximação acima nas equações características (8.13) e (8.14), segue:

$$R_e(z) = E_0 \cdot (1 - E_1 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - E_2 \cdot z^{-1}) \cdot F_t(z) \cdot D_r(z) \quad (8.17)$$

$$R_r(z) = E_0 \cdot (1 - E_1 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - E_2 \cdot z^{-1}) \cdot F_t(z) \cdot D_e(z) \quad (8.18)$$

Uma vez que a forma utilizada para a função resposta ao impulso direto é dada por:

$$F_t(z) = a_0 \cdot \frac{\prod_{i=1}^{N_z} (1 - a_i \cdot z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N_p} (1 - b_i \cdot z^{-1})} \cdot z^{-m} \quad (8.19)$$

A inclusão dos termos de interpolação pode ser interpretada como uma inserção de zeros adicionais na expressão de $F_\ell(z)$. Assim a expressão de $F_\ell(z)$ considerando o polinômio interpolador fica sendo a seguinte:

$$F_\ell(z) = a_0 \cdot \frac{\overbrace{E_0 \cdot (1 - E_1 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - E_2 \cdot z^{-1})}^{\text{termos interpoladores}} \cdot \prod_{i=1}^{N_i} (1 - a_i \cdot z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N_p} (1 - b_i \cdot z^{-1})} \cdot z^{-m} \quad (8.20)$$

Para completar o esquema de interpolação, é necessário estabelecer um procedimento de cálculo dos coeficientes do polinômio de $z^{-\varepsilon}$. Neste caso, foi utilizado coeficientes de Lagrange [Shafer, 1973], tal que, se q é o número de termos presentes no polinômio:

para q par:

$$A_k(\varepsilon) = \frac{(-1)^{k+q/2}}{\left(\frac{(q-2)}{2} + k\right)! \cdot \left(\frac{q}{2} - k\right)! \cdot (\varepsilon - k)} \cdot \prod_{i=1}^q \left(\varepsilon + \frac{q}{2} - i\right) \quad (8.21)$$

com $k = -\left[\frac{(q-2)}{2}\right], \dots, \frac{q}{2}$

ou, para q ímpar:

$$A_k(\varepsilon) = \frac{(-1)^{k+(q-1)/2}}{\left(\frac{(q-1)}{2} + k\right)! \cdot \left(\frac{(q-1)}{2} - k\right)! \cdot (\varepsilon - k)} \cdot \prod_{i=0}^{q-1} \left(\varepsilon + \frac{(q-1)}{2} - i\right) \quad (8.22)$$

com $k = -\left[\frac{(q-1)}{2}\right], \dots, \frac{(q-1)}{2}$

Para o caso particular do polinômio de segunda ordem, os coeficientes de Lagrange são calculados pelas seguintes expressões:

$$A_{-1} = \frac{\varepsilon \cdot (\varepsilon - 1)}{2} \quad (8.23)$$

$$A_0 = 1 - \varepsilon^2 \quad (8.24)$$

$$A_1 = \frac{\varepsilon \cdot (\varepsilon + 1)}{2} \quad (8.25)$$

Para exemplificar com valores numéricos, fornecemos, na Tab. 8.2, os coeficientes A_{-1} , A_0 , A_1 , E_0 , E_1 e E_2 calculados para o modo terra.

Tab. 8.2 - Coeficientes das equações (8.15) e (8.16) para o modo terra.

Δt	$10 \mu\text{seg}$	$25 \mu\text{seg}$	$50 \mu\text{seg}$	$100 \mu\text{seg}$
A_{-1}	-0,124346227	-0,007127396	-0,124973849	-0,092839462
A_0	0,712532454	0,999790793	0,742715698	0,432062925
A_1	0,411813773	0,007336604	0,382258151	0,660776538
E_0	-0,124346227	-0,007127396	-0,124973849	-0,092839462
E_1	-0,529102987	-0,007337755	-0,476475084	-1,213126431
E_2	6,259332769	140,281674038	6,419443982	5,866997899

O provimento de um esquema automático de interpolação é fundamental para que não haja perda de precisão nos resultados, principalmente quando baixas frequências de amostragem são utilizadas. O procedimento explanado neste capítulo constitui uma implementação facilmente adaptada ao algoritmo computacional descrito no capítulo 5, pois consiste simplesmente no uso de "zeros" adicionais na expressão de $F_t(z)$.

9. APLICAÇÕES

Neste capítulo avaliamos o desempenho do algoritmo implementado através da simulação de exemplos contendo linhas de transmissão trifásicas e linhas telefônicas. No caso de linhas de energia, os resultados são validados com as simulações apresentadas por Humpage (1982c). Por outro lado, os resultados com linhas de comunicações são validados através de comparações com os resultados apresentados por Almeida (1988), cujo trabalho está baseado no método de Fourier.

9.1. ENERGIZAÇÃO DE UMA LINHA DE TRANSMISSÃO EM ABERTO

Para examinar uma solução típica das equações de linha de transmissão consideremos as condições de contorno para o caso onde o terminal receptor "r" está em circuito aberto e a linha é energizada por uma fonte de tensão no terminal de envio "e". No terminal de recepção, $i_a(n) = i_b(n) = i_c(n) = 0$ para todo n , e as tensões no terminal "r" são as principais variáveis em termos de sobretensões de chaveamento. Na extremidade em que ocorre o chaveamento, propõe-se usar uma representação de fonte simplificada, isto é, uma f.e.m. em série com uma impedância $Z = R + j \cdot X$ [Ω / fase]. As impedâncias de fase à frequência de 50 Hz são determinadas a partir da potência de curto-circuito no ponto imediatamente anterior aos disjuntores e por uma razão X/R especificada. Nas simulações desenvolvidas nesta tese, adota-se uma potência de curto-circuito de 20.000 MVA e uma razão X/R valendo 100 (Fig. 9.1).

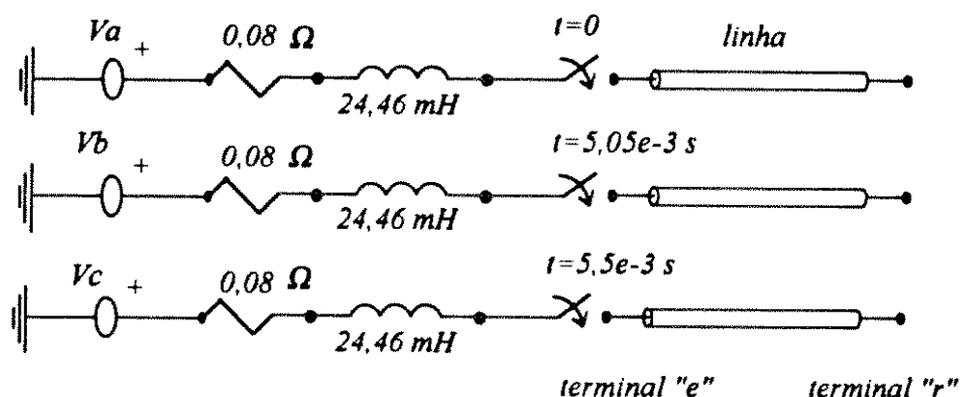


Fig. 9.1 - Energização de Linha de Transmissão em aberto.

A fonte de tensão trifásica é de 400 kV (valor de eficaz, fase-fase), 50 Hz e seqüência de fase positiva. A tensão fase-neutro na fase "a" equivalente para simulação é dada por:

$$v_a(t) = \frac{400}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t) \text{ kV} \quad (9.1)$$

A Fig. 9.2 mostra o circuito equivalente, para análise de transitórios, usado na implementação computacional. Nesta figura, observa-se os modelos da indutância concentrada do gerador e da linha trifásica com as transformações modais necessárias.

As figuras 9.3 à 9.5 apresentam os resultados obtidos com um passo de simulação de 25 μs , junto com os resultados apresentados por Humpage (1982c).

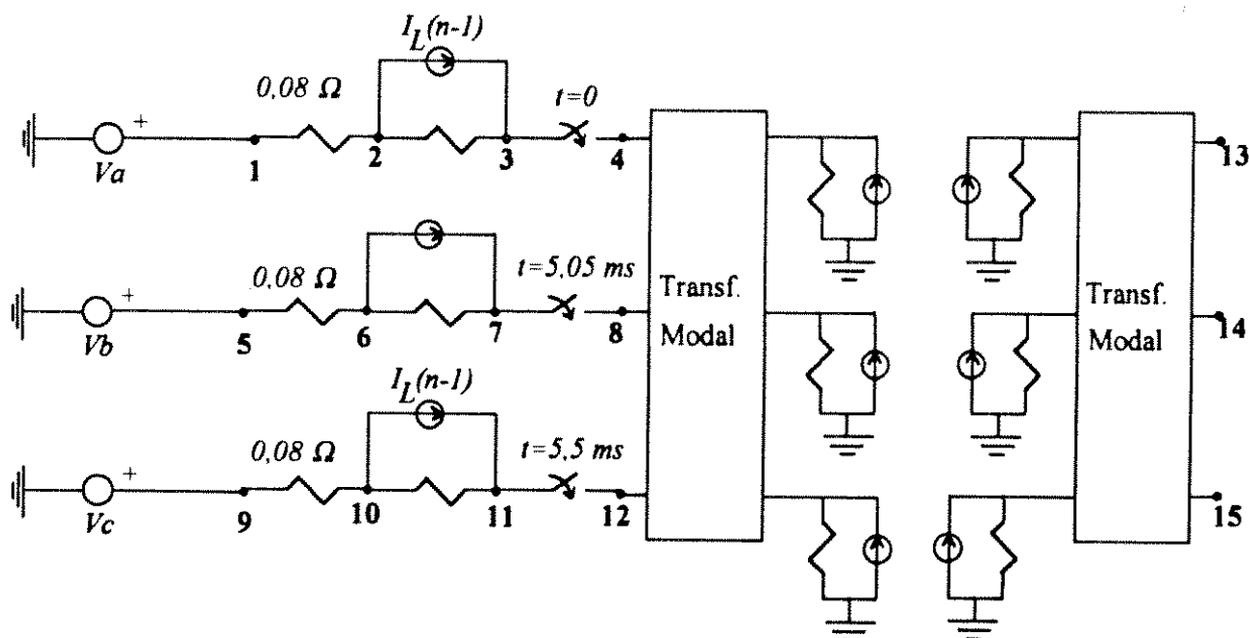


Fig. 9.2 - Circuito Equivalente do Sistema da figura Fig. 9.1

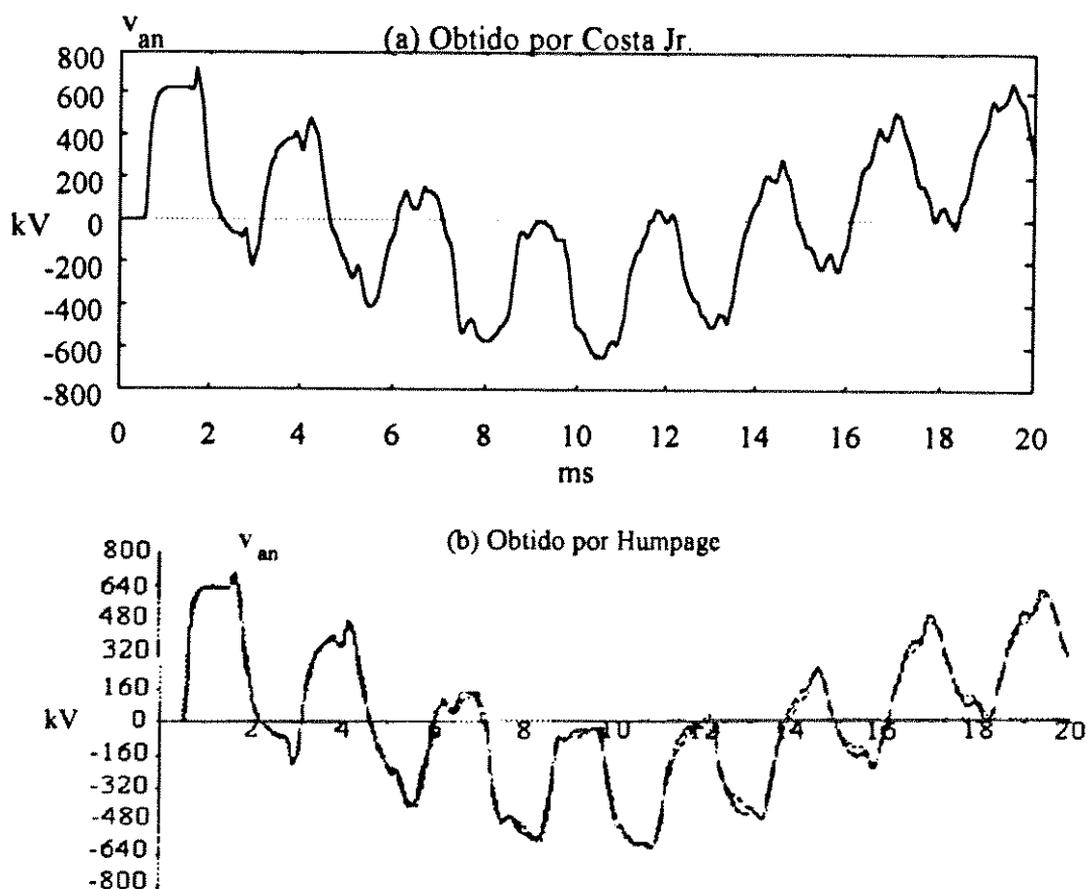


Fig. 9.3 - Resultados obtidos para a fase "a".

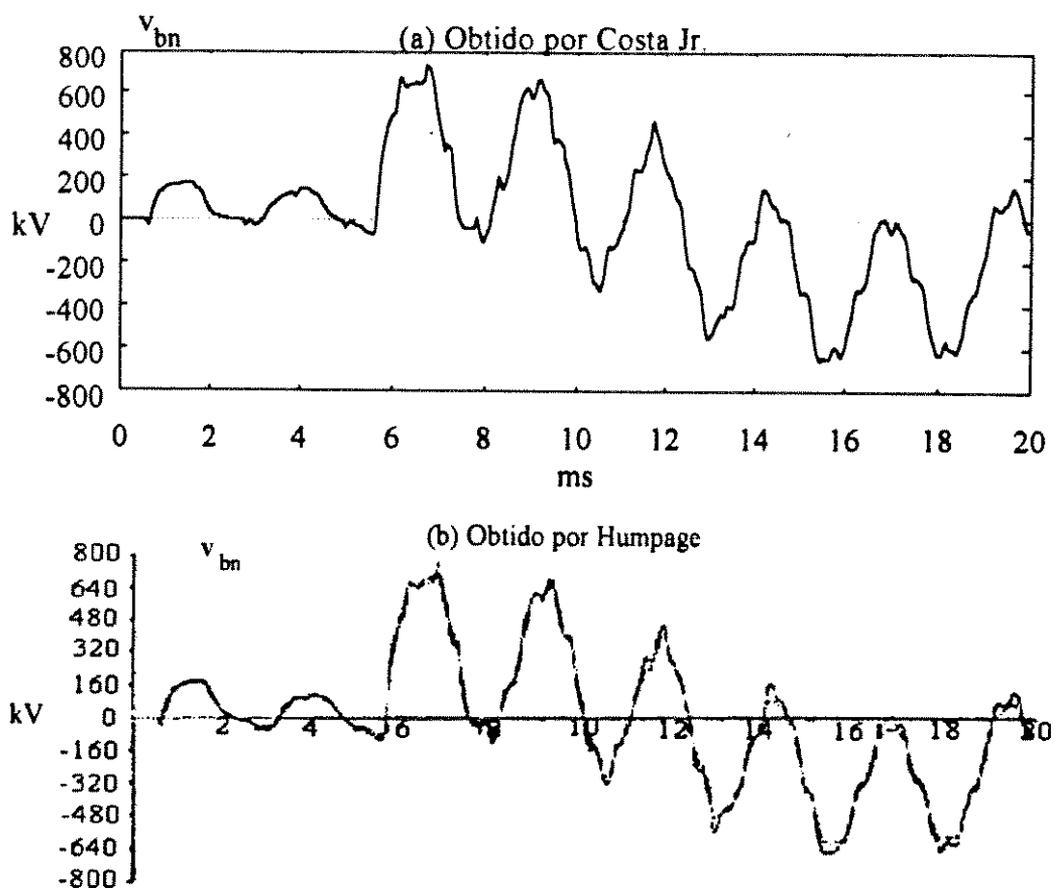


Fig. 9.4 - Resultados obtidos para a fase "b".

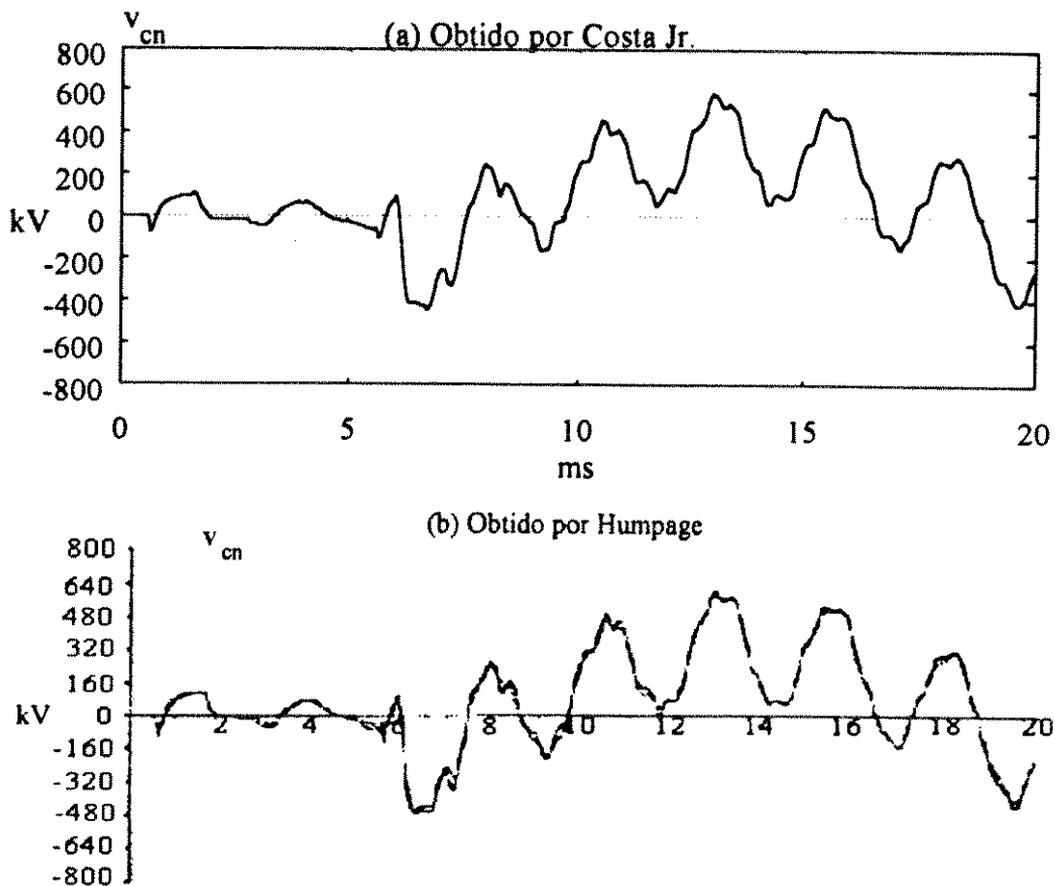


Fig. 9.5 - Resultados obtidos para a fase "c".

Observa-se, nas figuras 9.3, 9.4 e 9.5, que existem algumas diferenças entre os resultados apresentados por Humpage daqueles obtidos neste trabalho. Tais diferenças, embora pequenas, ocorrem devido à falta de um detalhamento maior dos parâmetros utilizados por Humpage. Humpage omite, por exemplo, o passo de simulação utilizado, a relação X/R do modelo do gerador, além de detalhes dos parâmetros elétricos da linha, como a permeabilidade magnética dos cabos pára-raios.

9.2. LINHA DE TELECOMUNICAÇÕES

Os dados de cada cabo (Tab. 3.1) são fornecidos a um programa que calcula a resposta em frequência das funções Resposta ao Impulso Direto e Impedância Característica. Este mesmo programa determina os ganhos, zeros e pólos das funções $F_t(s)$ e $Z_c(s)$, gerando um arquivo contendo todos os dados necessários para simulação com o programa principal.

Tab. 9.1 - Arquivo de dados: DADOSSLA.DAT para o cabo 19 AWG

1	Comprimento da Linha
10e6	Frequência de Amostragem
53	Resistência por unidade de Comprimento
0,62e-3	Indutância por unidade de Comprimento
0,00137e-3	Condutância por unidade de Comprimento
52e-9	Capacitância por unidade de Comprimento
97	Módulo da Impedância em altíssimas frequências
0,12318	α_0
0,27154e-3	α_1
0,17444e-6	α_2
10e3	f_B -Limite Superior do modelo de Baixa freq.
50e3	f_A -Limite Inferior do modelo de Alta Freq.
512	n - Número de Pontos a serem gerados

A Tab. 9.6 contém os dados necessários para ser processado pelo programa que determina as funções $F_t(s)$ e $Z_c(s)$ para a faixa de frequências desejada:

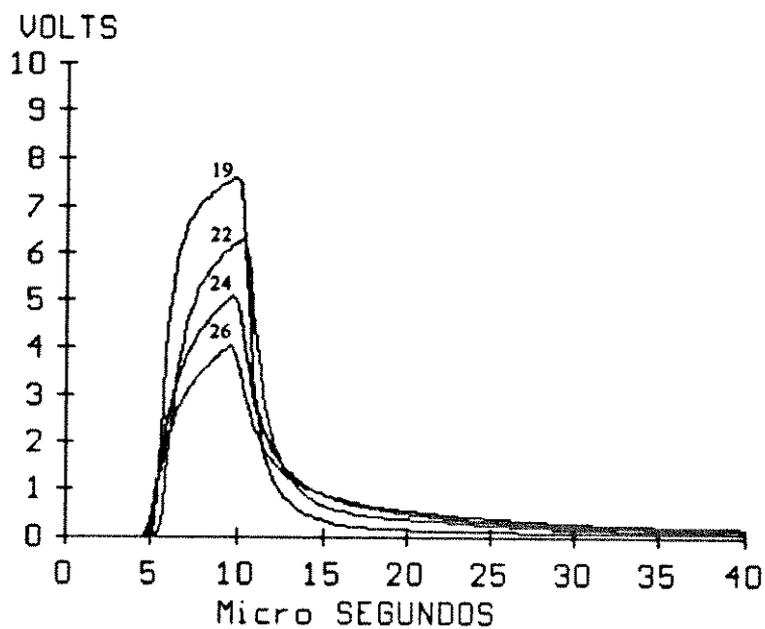


Fig. 9.6 - Pulso Recebido através de Cabos 19, 22, 24 e 26 AWG

A Fig. 9.6 mostra o pulso recebido em uma linha homogênea para os cabos 19, 22, 24 e 26 AWG, 1 km, casada, para um pulso transmitido retangular de 10 V de pico e 5 ms de duração (Fig. 9.7). Observe que a atenuação da linha 26 AWG é a maior, bem como o espalhamento do pulso. O casamento da linha é feito através de resistências cujos valores estão da Tab. 9.2.

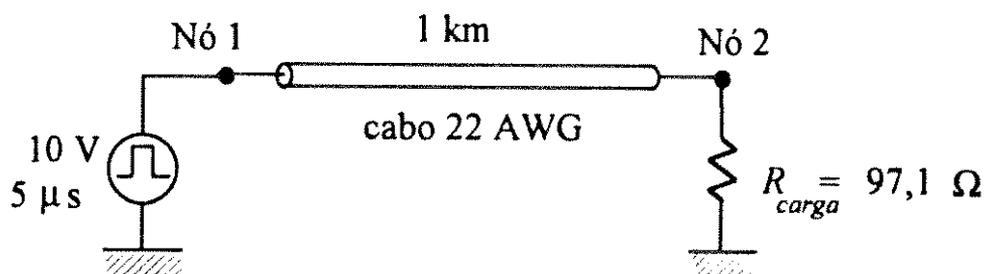


Fig. 9.7 - Configuração do sistema simulado para o cabo de 22 AWG.

Tab. 9.2 - Parâmetros da resistência de carga para casamento de impedâncias dos cabos:

Cabo	19 AWG	22 AWG	24 AWG	26 AWG
R_{carga}	99,3	97,1	107,6	101,7

A Fig. 9.8 mostra, para uma linha casada, os pulsos recebidos para um comprimento de 1, 2 e 3 km, respectivamente. O pulso transmitido é de 10V de pico e 5 μseg de duração. Observe a maior atenuação e espalhamento a medida que o comprimento aumenta.

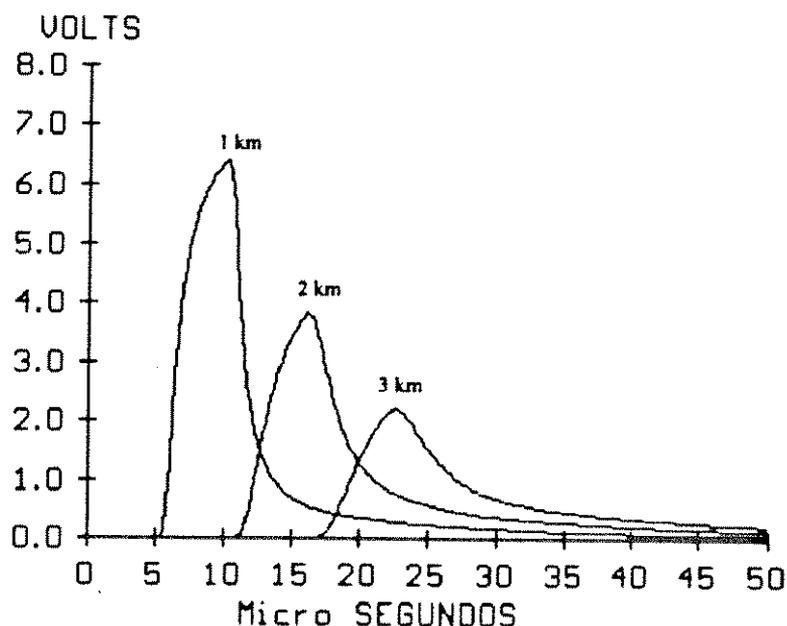


Fig. 9.8 - Pulso ao Longo da Transmissão

A Fig. 9.9 mostra um exemplo de linha de assinante. A Fig. 9.10 mostra o pulso recebido em 4 na Fig. 9.9. Note na Fig. 9.10 a presença de dois pulsos recebidos sendo que o segundo trata-se da reflexão ocorrida na derivação em aberto.

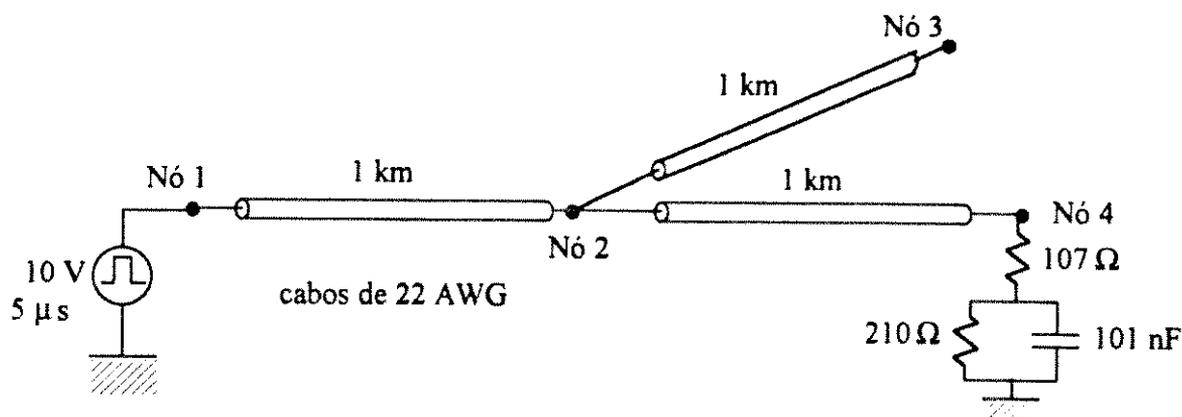


Fig. 9.9 - Linha de Assinante contendo Derivação

Neste caso, para efeito de comparação, utilizou-se uma "rede de equilíbrio" para simular uma impedância de carga que tivesse uma resposta em frequência próxima da resposta em frequência da impedância característica. Tal impedância é constituída de uma resistência em série com uma associação em paralelo de capacitor e resistor, conforme ilustra a Fig. 9.9.

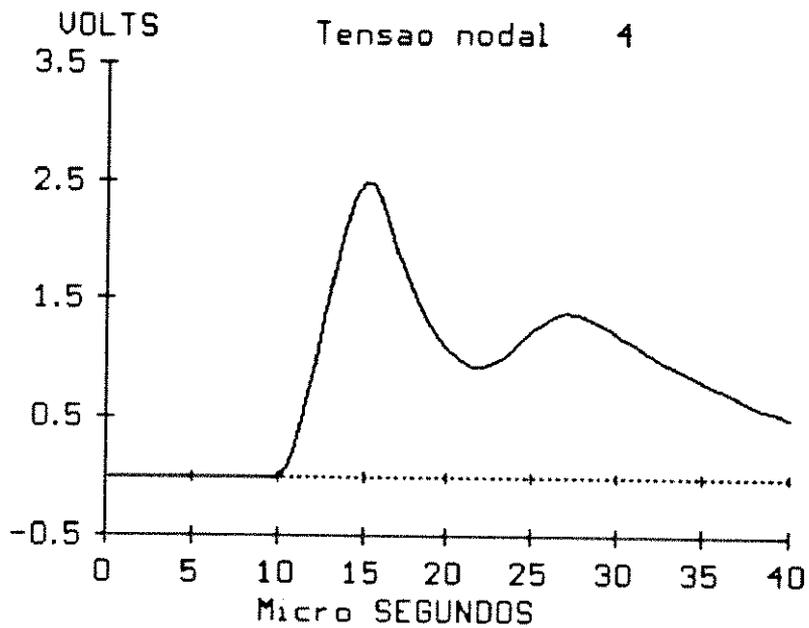


Fig. 9.10 - Pulso Recebido na Linha de Assinante da Fig. 9.9

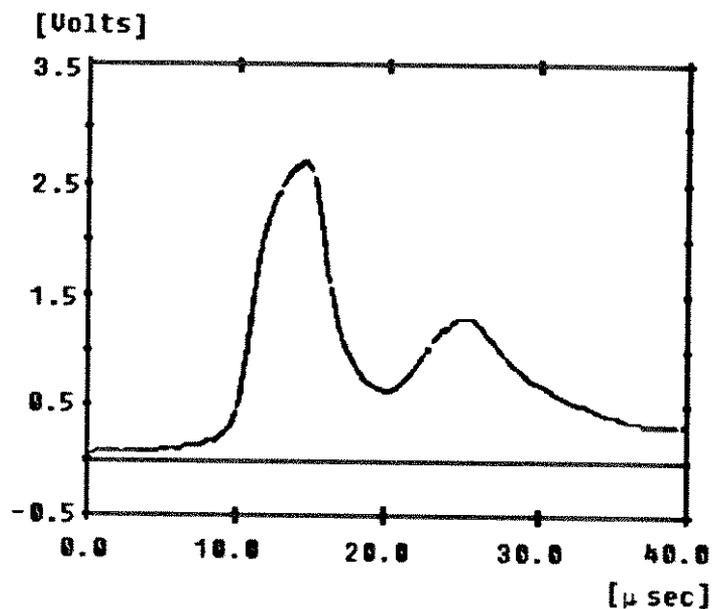


Fig. 9.11 - Transitório calculado com método de Fourier [Almeida, 1988].

Os dados do sistema que se deseja simular são processados pelo programa principal através da leitura de um arquivo de dados, como, por exemplo, ilustra a tab. 9.3 e explica a Tab. 9.4:

Tab. 9.3 - Arquivo de dados do programa principal: DATAHUMP.DAT

Linha.dat	Linha de 2 Km com Derivacao de 1 Km - 19 AWG
40e-6 0.5e-6	{ t_simulacao delta_t }
1 2 3 4	{ quatro nos de observacao }
0 10	{ y_min y_max }
I 1 0 1 10e12 5e-6 0 0 0	
R 1 0 1e-12	
H 1 0 2 0 4.5e-6	
19AWG2M.DAT	
H 2 0 3 0 4.5e-6	
19AWG2M.DAT	
R 3 0 107.5	
H 2 0 4 0 4.5e-6	
19AWG2M.DAT	
X	

Tab. 9.4 - Descrição do conteúdo do arquivo de dados DATAHUMP.DAT:

1ª Linha:	NOME de um arquivo para saída de resultados;
2ª Linha:	Tempo máximo de simulação (T_{max}) e passo de simulação (Δt);
3ª Linha:	NÓS de observação (1 2 3 3);
4ª Linha:	I (Fonte de Corrente); NÓ (+); NÓ (-); TIPO de fonte (pulso, senoidal, etc., definido na unidade FUNÇÕES.PAS); VALOR da fonte de corrente; parâmetros (5e-6 0 0 0);
5ª Linha:	R (Resistência); NÓ (+); NÓ (-); VALOR da resistência;
6ª Linha:	H (Linha de Transmissão - Modelo sugerido por Humpage); NÓ (+) do emissor; NÓ (-) do emissor; NÓ (+) do receptor; NÓ (-) do receptor; TEMPO de propagação;
7ª Linha:	Idem linha nº5;
8ª Linha:	X (Fim do arquivo de dados).

As tabelas 9.5 e 9.6 fornecem os zeros, pólos e ganhos das funções $F_n(\omega)$ e $Z_c(\omega)$ no plano s , para o cabo 22 AWG. O tempo de propagação considerado para este cabo foi de $4,5 \mu\text{seg} / \text{km}$.

Tab. 9.5 - Parâmetros da função $F_n(\omega)$ do Cabo 22 AWG:

Ganho da função $F_n(\omega)$	5.90090812251695E+0056
Zeros de $F_n(\omega)$	
1° Zero.	-7.59547147000702E+0003
2° Zero.	-1.16961175886885E+0005
3° Zero.	-7.59680780838826E+0005
4° Zero	-2.23806612201083E+0006
5° Zero	-5.97200042246891E+0006
Pólos de $F_n(\omega)$	
1° Pólo.	-5,99170530483980E+0003
2° Pólo.	-9,22650951674371E+0004
3° Pólo.	-5,68508555590512E+0005
4° Pólo.	-1,39272165898635E+0006
5° Pólo.	-3,07052027260566E+0006
6° Pólo.	-4,93424321703147E+0006
7° Pólo.	-9,53550252924797E+0006
8° Pólo.	-9,79013108876738E+0006
9° Pólo.	-1,89195821228232E+0007
10° Pólo.	-2,10228322627281E+0007
11° Pólo.	-2,80921746414251E+0007
12° Pólo.	-2,61237442554263E+0007
13° Pólo.	-2,98030032435191E+0007

Tab. 9.6 - Parâmetros da função $Z_c(\omega)$ do Cabo 22 AWG:

Ganho da função $Z_c(\omega)$	9.70888268710957E+0001
Zeros de $Z_c(\omega)$	
1° Zero.	-2.49463385076763E+0001
2° Zero.	-6.79068868868591E+0001
3° Zero.	-1.66357025293012E+0002
4° Zero.	-3.96938797209947E+0002
5° Zero.	-9.22488650098458E+0002
6° Zero.	-2.14387032847882E+0003
7° Zero.	-4.98237022736412E+0003
8° Zero.	-1.15790646256755E+0004
9° Zero.	-2.69098303592948E+0004
10° Zero.	-6.25386413648918E+0004
11° Zero.	-1.45340257130816E+0005
12° Zero.	-1.59909315391674E+0006
Pólos de $Z_c(\omega)$	
1° Pólo.	-1.91671524896097E+0001
2° Pólo.	-4.69553327753279E+0001
3° Pólo.	-1.09124534692248E+0002
4° Pólo.	-2.60378312671449E+0002
5° Pólo.	-6.05121091360985E+0002
6° Pólo.	-1.40630581500062E+0003
7° Pólo.	-3.26826493662038E+0003
8° Pólo.	-7.59547147000702E+0003
9° Pólo.	-1.76519309084372E+0004
10° Pólo.	-4.21186674316089E+0004
11° Pólo.	-1.05936804440242E+0005
12° Pólo.	-1.26144834735942E+0006

Os valores das tabelas 9.5 e 9.6 são determinados através do algoritmo de Bode modificado (Cap. 6) com $\delta = 1,0$ e $g = 1,259$ para a função $F_n(\omega)$ (Fig. 9.12) e $\delta = 1,0$ e $g = 1,0$ no caso da função $Z_c(\omega)$ (Fig. 9.13).

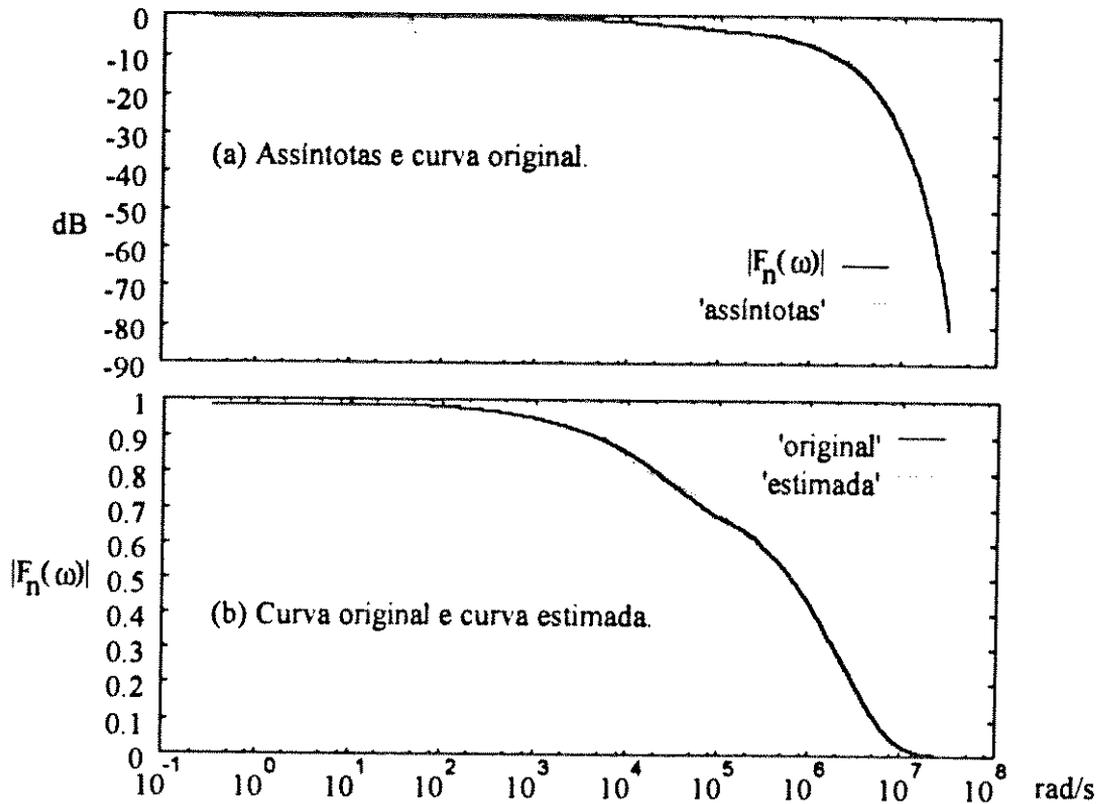


Fig. 9.12 - Aproximação Assintótica da função $F_n(\omega)$ para o cabo 22 AWG.

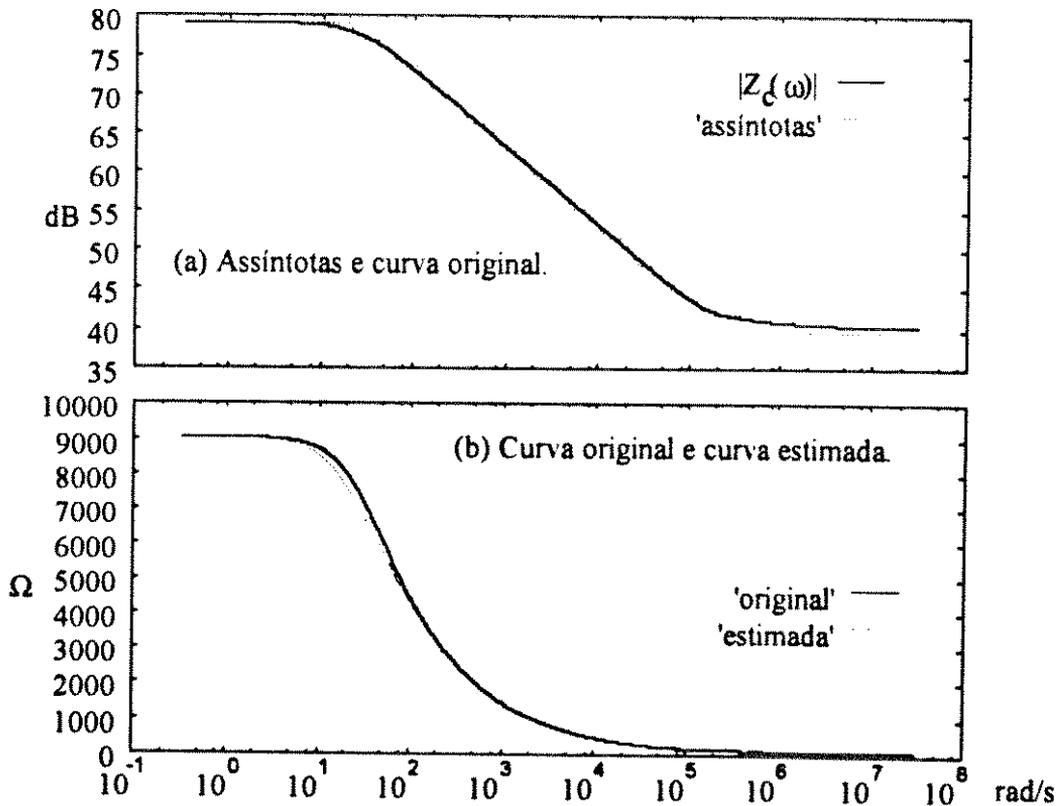


Fig. 9.13 - Aproximação Assintótica da função $Z_c(\omega)$ para o cabo 22 AWG.

Através das simulações apresentadas neste capítulo, pode-se concluir pela validade do método e procedimentos implementados.

10. CONCLUSÕES

O presente trabalho constitui o desenvolvimento de programas computacionais capazes de tratar elementos concentrados ou distribuídos, constantes ou dependentes da frequência, lineares ou não-lineares. Isto é possível pois as equações de recorrência determinadas são perfeitamente adaptáveis à algoritmos já conhecidos de transitórios em redes elétricas.

A contribuição desta pesquisa consiste em uma adaptação da técnica da transformada Z encontrada na bibliografia, como explanado no capítulo 5. Tal adaptação mostrou ser numericamente mais estável, mesmo quando é necessário utilizar altas frequências de amostragem (na ordem de MHz).

Particularmente, o tratamento de sistemas trifásicos exige a técnica de transformação modal, a qual é discutida no capítulo 4. Trata-se de um fator complicador no cálculo de transitórios eletromagnéticos, uma vez que as matrizes de transformação modal são dependentes da frequência e não são constituídas de números reais puros.

A primeira dificuldade encontrada no desenvolvimento deste sistema de simulação digital foi a obtenção das respostas em frequência das funções que caracterizam a linha (Impedância Característica e Resposta ao Impulso Direto). Para tanto, utilizou-se dados conhecidos de linhas de assinantes [Almeida, 1988] e linhas de potência [Humpage, 1982c]. A segunda dificuldade foi sintetizar, em termos de ganho, pólos e zeros, as funções de Propagação da linha e Impedância Característica no plano complexo. Uma vez analisadas várias rotinas de otimização [Matlab, 1989] para efetuar a síntese destas funções, concluiu-se que, para as linhas de transmissão em geral, não há necessidade de se lançar mão de modernas técnicas de otimização, as quais, muitas vezes mostram-se instáveis numericamente.

Em vez de se empregar complexas técnicas de otimização, opta-se pela aplicação de um algoritmo modificado do método das assíntotas de Bode (cap. 6). Tal procedimento

mostrou-se eficaz, simples, rápido, livre de instabilidades e mais preciso que as técnicas de otimização já implementadas [Matlab, 1989]. Basicamente, este método fornece os pólos e zeros das funções de interesse no plano complexo a partir das respostas em frequência destas funções [Martí, 1981].

Uma vez determinados os pólos e zeros das funções no domínio da frequência, utilizou-se vários procedimentos para mapear estes pólos e zeros no plano Z (Apêndice E). Após análise do efeito de cada método no domínio do tempo (cap. 7), conclui-se que os vários modos de mapeamento avaliados não afetam significativamente os resultados das simulações, considerando a máxima frequência de interesse $\omega_{m\acute{a}x} = 10^5 \text{ rad/s}$.

Para avaliar o simulador desenvolvido em altas frequências de amostragem, trabalha-se com linhas telefônicas, pois estas exigem menores passos de simulação, devido ao seu menor comprimento médio. Além disso, dispõe-se de um "software" desenvolvido através de um convênio UNICAMP/TELEBRÁS, capaz de efetuar cálculos de transitórios eletromagnéticos específico para linhas telefônicas.

O programa desenvolvido pelo convênio UNICAMP/TELEBRÁS, conhecido como SLA [Almeida, 1988], é baseado na transformada rápida de Fourier e, portanto, capaz de manipular os parâmetros distribuídos e dependentes da frequência encontrados no modelo de linhas de transmissão.

Comparando os desempenhos dos programas simuladores, pode-se concluir que a técnica da transformada Z é extremamente mais rápida que a técnica de Fourier e, se implementada adequadamente, é livre dos problemas de instabilidade numérica tão comuns nas implementações da transformada rápida de Fourier.

Além da vantagem de precisão apresentada pela técnica da transformada Z , deve-se salientar que esta técnica, ao contrário do que permite a análise de Fourier, é capaz de lidar com parâmetros não-lineares (e.g. pára-raios) e variantes com o tempo (e.g. disjuntores).

Resumindo, para tratarmos a linha de transmissão do ponto de vista de transitórios eletromagnéticos, são necessários vencer as seguintes etapas:

1º) Implementação de um programa de cálculo de parâmetros de linha de transmissão (de potência ou dados). Tal programa deve ser capaz de levar em consideração a dependência dos parâmetros elétricos com a frequência, devido principalmente ao efeito pelicular e o retorno pelo solo. Na bibliografia investigada, nem sempre fica claro quais as hipóteses de cálculo utilizadas no cálculo de parâmetros das linhas. Normalmente o detalhamento da configuração dos cabos é negligenciado. Sendo assim, os capítulos 2 e 3 visam esclarecer o máximo possível a obtenção dos parâmetros utilizados.

2º) Definição do modelo de linha a ser utilizado. Basicamente há duas alternativas possíveis: utilizar o modelo à parâmetros concentrados ou o modelo à parâmetros distribuídos. O modelo a parâmetros concentrados consiste em segmentar a linha em um número de trechos suficientemente grande tal que seja possível aplicar as leis de circuito a cada trecho como se fossem constituídos de parâmetros concentrados. Tal modelo é especialmente indicado quando é necessário estudar fenômenos tais como o efeito corona [Miranda, 1994], o qual é não-linear e de característica distribuída.

O modelo à parâmetros distribuídos é caracterizado por manipular apenas as variáveis de circuito (tensão e corrente) nas terminações da linha. Os parâmetros da linha ficam aglutinados em duas funções que caracterizam o comportamento dinâmico da linha: a impedância característica e a resposta ao impulso direto. Neste caso a dependência com a frequência é mais facilmente implementada e o esforço computacional em termos de tempo e memória é bem menor, quando comparado ao modelo a parâmetros concentrados.

3º) Escolha da implementação numérica mais adequada. Se o modelo escolhido é o modelo à parâmetros concentrados, cada trecho da linha contribui com duas equações diferenciais de primeira ordem que podem ser convertidas em equações de recorrência através de integradores numéricos (Euler, Regra do trapézio, etc.) ou utilizando a transformada Z como no casamento de raízes [Costa Jr., 1989].

Após estudos iniciais, observou-se que algumas alterações no algoritmo proposto por Humpage (1982c) poderiam ser feitas para melhorar as características de estabilidade numérica do algoritmo, em altas frequências de amostragem. Basicamente, Humpage trabalha com as funções características da linha na forma de quociente de polinômios. Neste ponto faz-se um paralelo com o trabalho de Marti (1981), o qual foi publicado na mesma época que o de Humpage, propondo, no entanto trabalhar as funções características na forma de ganho, pólos e zeros. Neste trabalho é adotada a proposta de Marti e feita uma modificação no algoritmo de Humpage. A vantagem encontrada foi que o método elaborado mostra ser estável mesmo para casos em que frequências de amostragem mais altas são necessárias, como por exemplo, no estudos de sobretensões de origem atmosféricas e a transmissão de dados em linhas telefônicas.

4º) Obtenção das funções características da linha de transmissão, no domínio da frequência, nos moldes requeridos. Marti propõe um algoritmo modificado das assíntotas de Bode. No entanto, em seu trabalho, não fica esclarecido quais as modificações necessárias. Sendo assim, propõe-se modificações que se mostram razoavelmente práticas e precisas. Tais modificações estão descritas no capítulo 6.

5º) Obtenção das equações de recorrência no domínio do tempo. As equações de recorrência são obtidas através do mapeamento dos pólos e zeros das funções características do domínio da frequência para o plano Z. Várias opções são investigadas: a transformação

bilinear, a invariância impulsiva e as diferenças finitas (cap. 7 e apêndice E). Observa-se que não existem diferenças significativas entre as simulações efetuadas pelas três opções investigadas.

As dificuldades do cálculo de transitórios eletromagnéticos não se limitam as características do método computacional empregado. A provisão de dados do sistema com suficiente precisão também tem seus problemas, e é de considerável importância, uma vez que a precisão de qualquer método não pode ser melhor que os dados no qual esta sendo aplicado. Para resultados mais precisos, um completo conhecimento da resposta em frequência de cada um dos elementos do SEP é necessária, e isto nem sempre está prontamente disponível.

Finalmente, para avaliar os resultados obtidos é necessário ter em mente as várias fontes de erro ao longo do procedimento de obtenção das equações de recorrência. As aproximações começam na obtenção dos parâmetros elétricos e vão até a simulação digital propriamente dita através dos erros de arredondamento e truncamento numéricos. A Fig. 10.1 mostra esquematicamente as fontes de aproximações que devem ser consideradas.

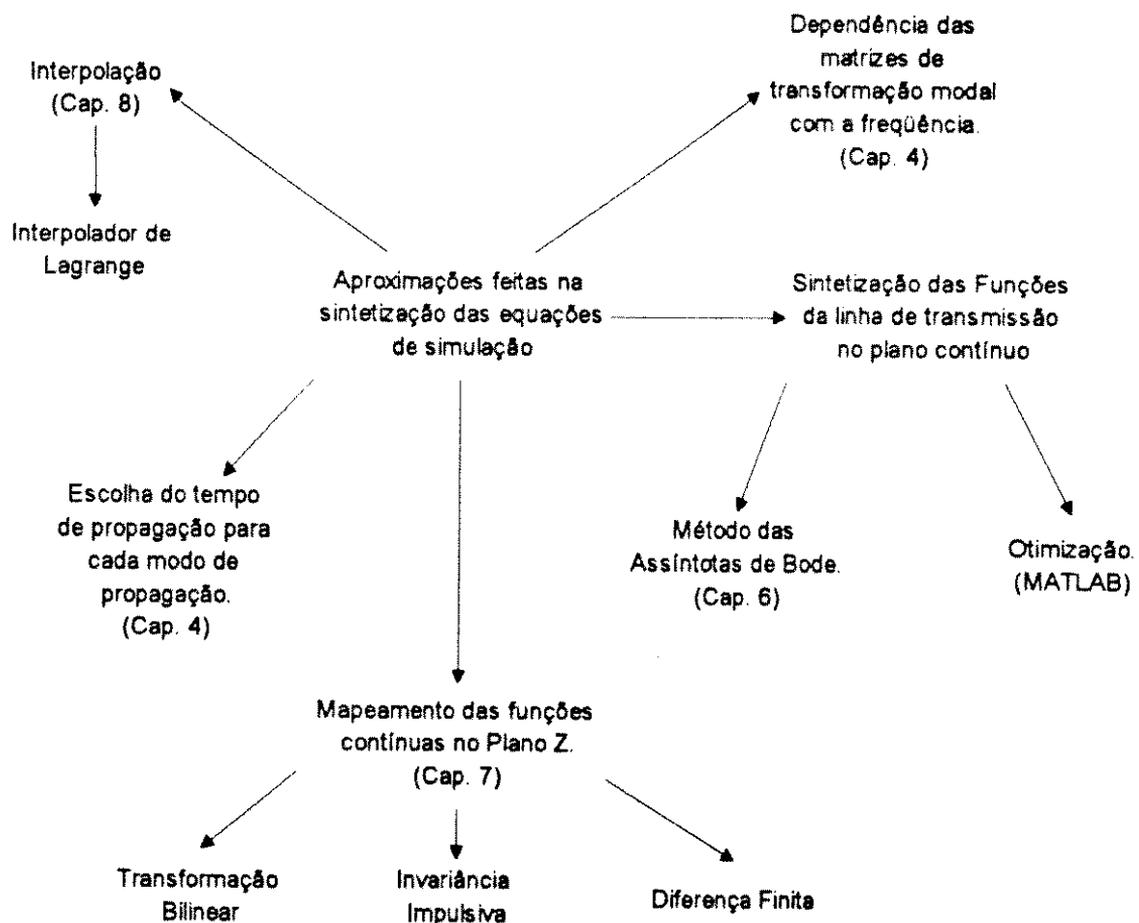


Fig. 10.1 - Fontes de aproximações ao longo do procedimento de simulação digital.

Como proposta de pesquisa futura podemos enumerar:

- 1) Desenvolver algoritmos e equações através da transformada Z para os demais componentes dos sistemas de potência tais como transformadores [Su, 1990], reatores, geradores, etc.
- 2) Aprimorar o algoritmo de cálculo das funções $Z_c(\omega)$ e $F_n(\omega)$ proposto no capítulo 6.

11. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA, M. G., "*A Linha de Assinantes na Rede Digital de Serviços Integrados: Modelamento e Simulação*", tese de mestrado, UNICAMP, 1988.
- AMETANI, A. - "*A Highly Efficient Method for Calculating Transmission Line Transients*", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-95, nº 5, pp. 1545-51, September/October, 1976.
- ANDERSON, J. H. & HEATON, A. G. - "*Transient Analysis of Power Line/Cable Systems*", Proc. IEE, vol. 113, nº12, pp. 2017-2022, 1966.
- BATTISSON, M. J. & DAY, Sylvia J. & MULLINEUX, N. & REED, J. R., "*Calculation of Transients on Transmission Lines with Sequential Switching*", Proc. IEE, vol. 117, nº 3, pp. 587-590, March, 1970.
- BATTISSON, M. J. & DAY, Sylvia J. & PARTON, K. C. & REED, J. R. - "*Some Effects of the Frequency Dependence of Transmission-line Parameters*", Proc. IEE, vol. 116, nº 7, pp. 1209-1216, July, 1969.
- BERGMANN, R. C. G. & PONSIOEN, I. J. P. J. M. - "*Calculation of Electrical Transient in Power Systems: Untransposed Transmission Line with Frequency-dependent Parameters*", Proc. IEE, vol. 126, nº 8, pp. 764-770, August, 1979.

- BICKFORD, J. P. & DOEPEL, P. S.**, *"Calculation of Switching Transient with Particular Reference to Line Energisation"*, Proc. IEE, vol. 114, n° 4, pp. 465-477, April, 1967.
- BICKFORD, J. P. & HEATON, A. G.**, *"Transient Overvoltages on Power Systems"*, IEE Proc., vol. 133, Pt. C, n° 4, May, 1986.
- BICKFORD, J. P. & RAHMAN, M. H. Abdel**, *"Application of Travelling-wave Methods to the Calculation of Transient-fault Currents and Voltages in Power System Networks"*, Proc. IEE, vol. 127, n° 3, pp. 153-168, 1980.
- BOWMAN, W. I. & McNAMEE, J. M.**, *"Development of Equivalent Pi and T Matrix Circuits for Long Untransposed Transmission Lines"*, pp. 625-632, June, 1964.
- BUDNER, Alan**, *"Introduction of Frequency-Dependent Line Parameters into an Electromagnetic Transients Program"*, Proc. IEE, vol. 89, n° 1, pp. 88-97, January, 1970.
- CARROLL, D. P. & NOZARI, F.**, *"An Efficient Computer Method for Simulating Transients on Transmission Lines with Frequency Dependent Parameters"*, IEEE Transactions on Power apparatus and Systems, vol. 94, n° 4, pp. 1167-1176, July/August, 1975.
- CHANG, Fung-Yuel**, *"Transient Analysis of Lossless Coupled Transmission Lines in a Nonhomogeneous Dielectric Medium"*, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 18, n° 9, pp. 616-626, September, 1970.
- COSTA Jr., P.**, *"Método do Casamento de Raízes Aplicado à Simulação Digital de Sobretensões em Linhas de Assinantes"*, tese de mestrado, UNICAMP, julho, 1989.

- COSTA Jr., Pedro da, & Pissolato Filho, José,** *"Applying Z-transform on Computation of Electromagnetic Transients on Subscriber Lines"*, "The 1994 International Symposium on Electromagnetic Compatibility", São Paulo, S.P., 05 à 09 de dezembro, anais, pp. 52-57, 1994a.
- COSTA Jr., Pedro da, & Pissolato Filho, José, & Fraga, José R. C. P.,** *"Aplicação da Transformada Z no Cálculo de Transitórios Eletromagnéticos em Linhas de Transmissão"*, 10º Congresso Brasileiro de Automática e 6º Congresso Latino Americano de Controle Automático", Rio de Janeiro, R.J., 19 à 23 de setembro, anais, pp. 299-304, 1994b.
- COSTA Jr., Pedro da, & Pissolato Filho, José, & Fraga, José R. C. P.,** *"Aplicação da Transformada Z no Cálculo de Transitórios Eletromagnéticos em Linhas de Transmissão"*, "XII Seminário de Ciências Exatas e Engenharias", Guaratinguetá, S.P., anais, 23 à 25 de novembro, pp. 122-125, 1994c.
- DERI, A., TEVAN, G., SEMLYEN, A. & CASTANHEIRA, A.,** *"A Simplified Model for Homogeneous and Multi-Layer Earth Return"*, IEEE Trans. Power App. System, vol. PAS-100 (nº8):3686-3693, Aug., 1981.
- DOMMEL, H. W.,** *"Overhead Line Parameters from Handbook Formulas and Computer Programs"*, IEEE Transactions on Power apparatus and Systems, vol. PAS-104, nº 2, pp. 366-372, February, 1985.
- DOMMEL, Hermann W.,** *"Digital Computer Solution of Electromagnetic Transients in Single-and Multiphase Networks"*, IEEE Transactions on Power apparatus and Systems, vol. PAS-88, nº 4, pp. 388-398, April, 1969.
- DUTT, J.,** *"Overvoltages on Subscriber Lines"*, Electrical Communication, vol. 54, nº 2, pp. 115-119, 1979.

- FRAGA, José Renato C. P., "*Análise de Transitórios Eletromagnéticos em Linhas de Transmissão utilizando a transformada Z*", Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Campinas - S.P., setembro, 1993.
- FUCHS, R. D., "*Transmissão de Energia Elétrica - Linhas Aéreas*", Livros Técnicos e Científicos, Escola Federal de Engenharia de Itajubá - MG, 1971.
- GALLOWAY, R. H. & SHORROCKS, W. B. & WEDEPOHL, L. M., "*Calculation of Electrical Parameters for Short and Long Polyphase Transmission Lines*", Proc. IEE, vol. 111, nº 12, pp. 2051-2059, December, 1964.
- GRANT, I. S. & ANDERSON, J. G. & HILEMAN, A. R., "*A Simplified Method for Estimating Lightning Performance of Transmission Lines*", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. 104, nº 4, pp. 919-932, April, 1985.
- HEDMAN, D. E., "*Propagation on Overhead Transmission Lines I - Theory of Modal Analysis*", IEEE Winter Power Meeting, pp. 200-205, New York, N. Y., January 31 - February 5, 1965.
- HEDMAN, D. E., "*Propagation on Overhead Transmission Lines II - Earth-Conduction Effects and Practical Results*", IEEE Winter Power Meeting, pp. 205-211, New York, N.Y., January 31 - February 5, 1965.
- HUMPAGE, W. & WONG, Kit-Po, "*Electromagnetic Transient Analysis in EHV Power Networks*", Proceedings of the IEEE, vol. 70, nº 4, pp. 379-402, April, 1982a.
- HUMPAGE, W. D. & WONG, K. P. & NGUYEN, B. E. & SUTANTO, B. E., "*Z-transform Electromagnetic Transient Analysis in Power Systems*", IEE Proc., vol. 127, Pt. C, nº 6, November, 1980a.

- HUMPAGE, W. D. & WONG, K. P. & NGUYEN, T. T. "*Z-Plane Synthesis of Response Functions and Interpolators in Z-transform Electromagnetic Transient Analysis in Power Systems*", IEE Proc., vol. 129, Pt. C, n° 3, pp. 104-110, May, 1982b.
- HUMPAGE, W. D. & WONG, K. P. & NGUYEN, T. T., "*Development of Z-Transform Electromagnetic Transient Analysis Methods for Multinode Power Networks*", IEEE Proc., vol. 127, Pt. C, n° 6, : 379-385, November, 1980b.
- HUMPAGE, W. D. & WONG, Kit-Po, "*Time Convolution and Z-Transform Methods of Electromagnetic Transient Analysis in Power Systems*", IEE Proc., vol. 127, Pt. C, n° 6, November, 1980c.
- HUMPAGE, W. D., *Z-Transform Electromagnetic Transient Analysis in High-Voltage Networks*, Peter Peregrinus Ltd., 1982c.
- MAGNUSSON, P.C., "*Travelling Waves on Multi-conductor Open Wire Lines - A Numerical Survey of the Effects of Frequency-Dependence on Modal Composition*", IEEE Trans., PAS-92, (3), pp. 999-1008, 1973.
- MAO, JUN-FA & LI, ZHENG-FAN, "*Analysis of the Time Response of Multiconductor Transmission Lines with Frequency-Dependent Losses by the Method of Convolution-Characteristics*", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 40, n° 4, pp. 637-644, April, 1992.
- MARTI, J. R., "*Accurate Modelling of Frequency-Dependent Transmission Lines in Electromagnetic Transients Simulations*", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-101, n° 1, pp. 147-157, January, 1982.
- MARTI, José R. & LIN, Jiming "*Suppression of Numerical Oscillations in the EMTP*", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-4, n° 2, pp. 739-747, 1989.

- MARTI, José R., *"The Problem of Frequency Dependence in Transmission Line Modelling"*, doctor thesis, University of British Columbia, Canada, April, 1981.
- MATLAB, USER'S GUIDE, "Matrix Laboratory", May, 1989.
- MICROTRAN, *"Transient Analysis Program for Power and Power Electronic Circuits"*, reference manual, Microtran Power System Analysis Corporation Published, Vancouver, B. C., September, 1992.
- MIRANDA, Glássio Costa de, *"Uma Contribuição ao Estudo do Efeito Corona em Linhas de Transmissão utilizando o Método dos Elementos Finitos"*, Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas - S.P., dezembro, 1994.
- MtLine, *"Overhead Line Parameters Program Reference Manual"*, reference manual, Microtran Power System Analysis Corporation Published, 1992.
- NAIDU, S. R., "Transitórios Eletromagnéticos em Sistemas de Potência", Ed. Grafset, ELETROBRÁS, UFPb, Campina Grande, Pb, 1985.
- NATARAJAN, R. & GENTZLER, David B., *"Adoption of Electromagnetic Transients Program(EMTP) on Personal Computers"*, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 4, nº 4, pp. 1550-1556, October, 1989.
- NELMS, R. M. , SHEBLE, G. B. , NEWTON, S. R. & GRIGSBY, L. L., *"Using a Personal Computer to Teach Power Systems Transients"*, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 4, nº 3, pp. 1293-1297, August, 1989.
- OPPENHEIM, A. V., SCHAFER, R. W., *"Digital Signal Processing"*, Prentice/Hall International Inc., 1975.
- PERZ, M. C. & RAGHUVeer, M. R., *"Transmission Lines-Effect of Earth Resistivity on Magnetic Field, Images and Equivalent Circuit"*, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-98, nº 6, pp. 2135-2143, Nov./Dec., 1979.

- PONSIOEN, Y. P. J. M. "*Simple Approach to Calculation of Power System Transients Using the Z-Transform*", IEE proceedings-C, vol. 138, nº 4, pp. 297-298, July 1991.
- SEMLYEN, A. & DABULEANU, A. "*Fast and Accurate Switching Transient Calculations on Transmission Lines with Ground Return Using Recursive Convolutions*", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-94, nº 2, pp. 561-571, March/April, 1975.
- SEMLYEN, Adam, "*Contributions to the Theory of Calculation of Electromagnetic Transients on Transmission Lines with Frequency Dependent Parameters*", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-100, nº 2, pp. 848-856, February, 1981.
- SHAFER, Ronald W. and Rabiner, Lawrence R., "*A Digital Signal Processing Approach to Interpolation*", Proc. of the IEEE, vol. 61, nº 06, pp. 692-702, June, 1973.
- SMITH, J.M., "*Mathematical Modeling and Digital Simulation for Engineers and Scientists*", John Wiley & Sons, inc., New York, 1977.
- SU, Q. & JAMES, R. E. & SUTANTO, D., "*Z-Transform Model of Transformers for the Study of Electromagnetic Transients in Power Systems*", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 5, nº 1, pp. 27-33, February, 1990.
- WEDEPOHL, M. V., "*Application of Matrix Methods to the Solution of Travelling-Wave Phenomena in Polyphase Systems*", Proc. IEE, vol. 110, (nº12), pp. 2200-2212, 1963.
- ZOLLENKOPF, K., "*Bi-Factorisation-Basic Computational Algorithm and Programming Techniques*", Proceedings of the Oxford Conference of the Institute of Mathematics and its Applications", Academic Press, pp. 75-96, April, 1971.

A. ELIMINAÇÃO DOS CABOS PÁRA-RAIOS E CONDUTORES MÚLTIPLOS [Microtran, 1992]

A equação (2.11) é muito detalhada se alguém deseja trabalhar com grandezas de fase. Ela pode ser reduzida a três equações para as três fases. O processo de redução é mais fácil de se explicar se as formas inversas das equações (2.11) são usadas. O cálculo é mais rápido, entretanto, se o processo de redução é aplicado às formas originais. Suponha que a relação inversa da equação (2.11) tenha sido encontrada invertendo-se a matriz dos coeficientes de potencial de Maxwell $[P]$,

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdot & \cdot & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdot & \cdot & C_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdot & \cdot & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Uma vez que a tensão nos cabos pára-raios é zero (assumindo que os mesmos não estejam isolados das torres), as tensões V_i na equação (A.1), relacionadas com os cabos pára-raios, pode ser anuladas, isto é, $V_i = 0$ se o condutor i está aterrado nas estruturas. Além disso podemos omitir as linhas correspondentes Q_i aos pára-raios (a menos que se deseje calcular as cargas nos cabos pára-raios. Isto significa que os cabos pára-raios são eliminados pela simples eliminação das linhas e colunas correspondentes. A presença dos cabos pára-raios é contida, entretanto, nas equações remanescentes.

O processo de redução no caso de n condutores formando uma fase também é simples. Vejamos como funciona para a fase a . Uma vez que os condutores 1, 2, 3 e 4 formam a fase a , podemos dizer que $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V_a$. Portanto, não é possível haver distinção entre V_1 , V_2 , V_3 e V_4 na equação (A.1) mas deve-se chamá-la de V_a . Isto equivale a adicionarmos as colunas 1, 2, 3 e 4 na matriz formando uma nova coluna para V_a . Além

disso, $Q_1+Q_2+Q_3+Q_4=Q_a$. Isto significa que devemos adicionar as colunas 1, 2, 3 e 4 para obter a nova linha para Q_a . Em outras palavras, o agrupamento de condutores de mesma fase é executado primeiramente pela formação de uma nova coluna pela adição das colunas dos condutores individuais, e então formando uma nova linha pela adição das linhas dos condutores individuais. Desta forma obtém-se a forma reduzida das equações:

$$\begin{bmatrix} Q_a \\ Q_b \\ Q_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{aa} & C_{ab} & C_{bc} \\ C_{ba} & C_{bb} & C_{bc} \\ C_{ca} & C_{cb} & C_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

Um procedimento equivalente ao descrito acima é determinar um condutor equivalente aos condutores que formam uma fase para fins do cálculo das capacitâncias parciais. Fuchs apresenta a dedução da expressão do raio equivalente e aqui nos limitamos a fornecer a expressão final:

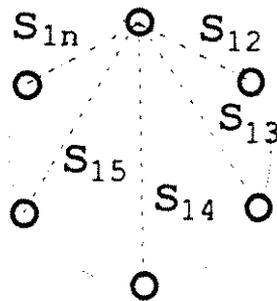


Fig. A.1 Sub-condutores de raio r formando uma fase

$$r_{equivalente} = \sqrt[n]{r \cdot s_{12} \cdot s_{13} \cdot s_{14} \cdot \dots \cdot s_{1n}} \quad (A.3)$$

B. RAIO MÉDIO GEOMÉTRICO E IMPEDÂNCIA INTERNA [Microtran, 1992]

A equação (2.1) usa o raio médio geométrico no lugar do raio real r para levar em conta a contribuição que a indutância interna tem com relação a indutância total. Originalmente, a indutância total para um solo perfeitamente condutor é definida por:

$$L_{(\rho=0)} = 2 \cdot 10^{-4} \ln \frac{r}{RMG} + 2 \cdot 10^{-4} \ln \frac{2 \cdot h - r}{r} \text{ em } H / km \quad (\text{B.1})$$

onde o primeiro termo representa a indutância interna e o segundo termo a indutância externa.

Uma vez que $r \ll 2h$, $2h - r$ é normalmente substituído por $2h$ no segundo termo, então:

$$L_{(\rho=0)} = 2 \cdot 10^{-4} \cdot \ln \frac{2 \cdot h}{RMG} \text{ em } H / km \quad (\text{B.2})$$

como usada na equação (1.1).

O raio médio geométrico RMG é uma função do:

- tipo do condutor,
- permeabilidade relativa μ_r para condutores magnéticos, e
- frequência ($RMG = r$ em frequências muito altas onde a corrente flui pela superfície).

O *RMG* pode ser calculado para todos os tipos de condutores se o efeito skin for desprezado. Frequentemente, pode ser encontrado em tabelas. Livros norte americanos frequentemente fornecem a reatância para 1 pé de espaçamento X_A , a qual está relacionada com o *RMG* através de:

$$X_A = 2 \cdot \omega \cdot 10^{-4} \cdot \ln \frac{1}{RMG} \text{ em } \Omega / km \quad (B.3)$$

com *RMG* em pés (ou em metros se X_A é a reatância para 1 metro de espaçamento). O conceito de raio médio geométrico foi originalmente desenvolvido para condutores antimagnéticos em frequências que são baixas o bastante para ignorar o efeito skin. Naquele caso, seu significado era puramente geométrico, isto é, distância média geométrica entre todos os pontos da área de seção transversal, e.g., $RMG / r = e^{-1/4}$ para condutores sólidos, cilíndricos e antimagnéticos. Atualmente, o *RMG* é usado como um número que representa a indutância interna de todos os tipos de condutores, e perde o seu significado geométrico, continuar sendo chamando-o de "Raio Médio Geométrico" é altamente questionável.

Se o efeito skin na indutância interna deve ser levado em consideração, e se fórmulas para isso podem ser encontradas para tipos específicos de condutores, então não é o *RMG* que obtém-se mas sim a reatância interna $\omega L_{interna}$. Se o *RMG* é mantido, ele pode ser encontrado da reatância interna,

$$\frac{RMG}{r} = e^{-[\omega \cdot L_{interna} / (2 \cdot \omega \cdot 10^{-4})]} \quad (B.4)$$

com $\omega L_{interna}$ em Ω/km . Com o aumento da frequência, a indutância interna diminui e eventualmente torna-se desprezível. Uma vez que a indutância interna é somente uma pequena parte da indutância total, o efeito skin na indutância total é tão pequeno que praticamente é imperceptível.

C. IMPEDÂNCIA INTERNA DE CABOS ENCORDADOS [Microtran, 1992]

Em estudos de propagação em alta frequência, constantes de atenuação razoavelmente precisas são muito importantes. Substituir o cabo encordado por um condutor tubular de igual seção transversal não é suficiente o bastante para tais propósitos. Neste caso, a resistência interna é calculada por:

$$R_{\text{interno}} = \omega \cdot L_{\text{interno}} = \frac{2,25 \cdot \sqrt{\omega \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \rho}}{r \cdot \pi \cdot (2 + n) \cdot \sqrt{2}} \quad \Omega / m \quad (\text{C.1})$$

ou com

$$\frac{\rho}{\pi \cdot r^2} = R \quad (\text{C.2})$$

$$R_{\text{interno}} = \omega \cdot L_{\text{interno}} = \frac{4,5 \cdot \sqrt{5} \cdot 10^{-4}}{2 + n} \sqrt{\omega \cdot \mu_r \cdot R} \quad \Omega / m \quad (\text{C.3})$$

onde

R resistência CC de um dos filamentos externos do condutor encordado (Ω/m);

μ_r permeabilidade relativa;

μ_0 $4 \pi 10^{-7}$ (H/m);

ω frequência angular (rad/s);

- ρ resistividade do condutor (Ωm);
- r raio de cada filamento externo (m);
- n número de filamentos externos.

O fator 2,25 foi encontrado experimentalmente do mapeamento de campo em um tanque eletrolítico. A fórmula fornece resultados razoavelmente precisos em frequências acima de dois à 5 kHz para os cabos encordoados mais comuns com números de filamentos externos sendo de 6, 12, 18 ou 24.

D. FÓRMULA DE GARY, DERI E OUTROS [Microtran, 1992]

Uma maneira bastante simples de levar em conta os efeitos do solo é proposto na referência [Microtran, 1992]. Em vez de adicionarmos termos de correção de Carson, uma profundidade complexa

$$p = \sqrt{\frac{\rho}{j \omega \cdot \mu_0}} \quad (\text{D.1})$$

é adicionada na altura nas equações (2.1) substituindo-se $2 h_i$ por $2 (h_i + p)$ na equação (B.2) e D_{ik} por $\sqrt{(h_i + h_k + 2 p)^2 + x_{ik}^2}$ na equação (2.2) (x_{ik} = distância horizontal entre os condutores i e k). Esta simples fórmula produz resultados os quais são próximos daqueles obtidos com os termos de correção de Carson.

E. TÉCNICAS DE PROJETO DE FILTROS DIGITAIS [Oppenheim, 1975]

No sentido mais amplo, um filtro digital é um sistema discreto no tempo invariante com a fase que é constituído usando-se aritmética de precisão finita. O projeto de filtros digitais envolve três passos básicos: (1°) a especificação das propriedades desejadas do sistema; (2°) a aproximação destas especificações usando um sistema discreto causal; e (3°) a constituição do sistema usando aritmética de precisão finita. Embora estes três passos não sejam independentes, nós cremos ser conveniente deter nossa atenção neste capítulo no segundo passo. Do ponto de vista prático, é freqüente o caso em que o filtro digital desejado deva ser utilizado para filtrar um sinal digital que é derivado de um sinal analógico por meio de um amostrador periódico. As especificações tanto para o filtro digital como para o filtro analógico são freqüentemente (porém nem sempre) dadas no domínio da freqüência, como, por exemplo, no caso de filtros seletivos de freqüência tais como filtros passa-baixa e filtros passa-alta.

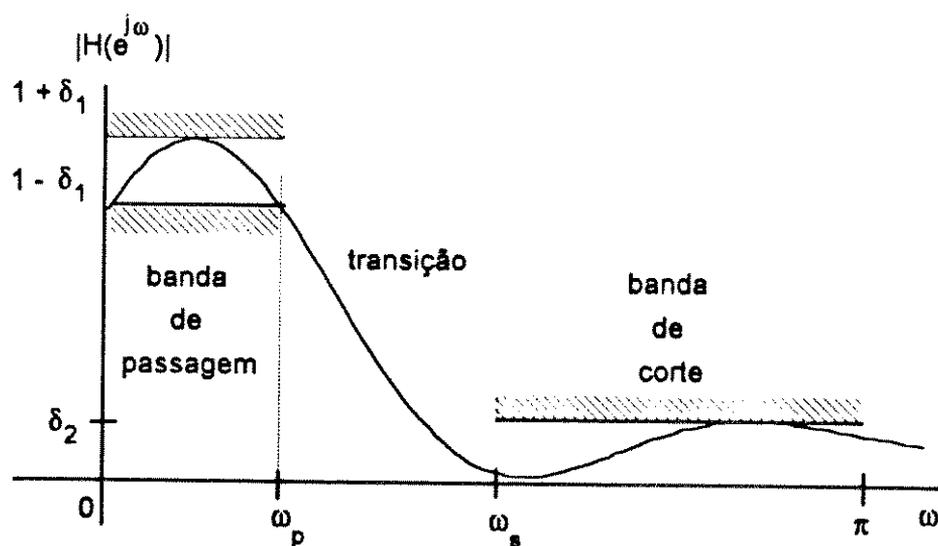


Fig. E.1 - Limites de Tolerância para a aproximação de um filtro passa-baixa.

No caso de um filtro passa-baixa, por exemplo, as especificações freqüentemente tomam a forma de um esquema de tolerância, como mostrado na Fig.E.1. A linha pontilhada representa a resposta em freqüência de um sistema que case a especificação prescrita. Neste caso, há uma faixa de passagem onde a magnitude da resposta deve se aproximar de 1 com um erro de $\pm\delta_1$; isto é,

$$1 - \delta_1 \leq |H(e^{j\theta})| \leq 1 + \delta_1, \quad |\theta| \leq \theta_p \quad (\text{E.1})$$

Existe uma banda de corte na qual a resposta da magnitude deve se aproximar de zero com um erro menor que δ_2 ; isto é,

$$|H(e^{j\theta})| \leq \delta_2, \quad \theta_s \leq |\theta| \leq \pi \quad (\text{E.2})$$

A freqüência de corte de banda de passagem θ_p e a freqüência de corte de banda de corte θ_s são dadas em termos do ângulo no plano Z . Para que seja possível aproximarmos do filtro passa-baixa ideal desta forma temos que definir também uma faixa de transição de largura não-nula ($\theta_s - \theta_p$) na qual a magnitude diminui suavemente da faixa de passagem para a faixa de corte. Muito dos filtros usados na prática são especificados através deste esquema de tolerância, sem restrições nas respostas de fase além daquelas impostas pelos itens de estabilidade e casualidade; isto é, os pólos da função do sistema devem estar situados dentro do círculo unitário.

Dado um conjunto de especificações na forma da Fig.E.1, o próximo passo consiste em encontrar um sistema discreto linear cuja resposta em freqüência esteja dentro das tolerâncias prefixadas. Neste ponto o problema de projeto de filtro torna-se um problema de aproximação. No caso de sistemas IIR nós devemos aproximar a resposta em freqüência desejada por uma função racional, enquanto que nos casos de sistemas FIR estaremos voltados à aproximações através de polinômios. Por conveniência nossa discussão está organizada de tal forma a distinguir entre as técnicas apropriadas para filtros IIR daquelas apropriadas para filtros FIR. Discutiremos uma variedade de técnicas de projeto para ambos os tipos de filtros. Estas técnicas vão de procedimentos na forma fechada, os quais constituem-se apenas na substituição das especificações de projeto nas fórmulas de projeto, à algoritmos, onde a solução é obtida através de procedimentos iterativos.

E.1. PROJETO DE FILTROS DIGITAIS IIR A PARTIR DE FILTROS ANALÓGICOS

A forma tradicional de projetar um filtro digital IIR consiste na transformação de um filtro analógico em um filtro digital que satisfaça especificações prefixadas. Esta filosofia de projeto é razoável pois:

1°) A arte de projetar um filtro analógico está extremamente avançada e, uma vez que resultados úteis podem ser atingidos, é vantajoso utilizar procedimentos de projeto já desenvolvidos para filtros analógicos.

2°) Muitos métodos úteis de projeto têm fórmulas prontas relativamente simples. Portanto, os métodos de projeto de filtros digitais baseados em tais fórmulas no projeto analógico são mais simples de se implementar.

3°) Em muitas aplicações é interessante usar um filtro digital para simular o desempenho de um filtro analógico linear e invariante no tempo.

Considere uma função de um sistema analógico:

$$H_a(s) = \frac{\sum_{k=0}^M d_k s^k}{\sum_{k=0}^N c_k s^k} = \frac{Y_a(s)}{X_a(s)} \quad (\text{E.3})$$

onde $X_a(s)$ e $Y_a(s)$ são funções resultantes da transformada de Laplace da excitação $x(t)$ e da resposta $y(t)$ respectivamente. Considera-se que $H_a(s)$ tenha sido obtida através de métodos de aproximação usados no projeto de filtros analógicos. A excitação e a resposta de tal sistema são descritos pela integral de convolução,

$$y_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) h_a(t - \tau) d\tau \quad (\text{E.4})$$

onde $h_a(t)$, é a resposta impulsiva, ou a transformada inversa de Laplace de $H_a(s)$. Alternativamente, um sistema analógico tendo uma a função de sistema $H_a(s)$ pode ser descrita por uma equação a diferencial:

$$\sum_{k=0}^N c_k \frac{d^k y_a(t)}{d t^k} = \sum_{k=0}^M d_k \frac{d^k x_a(t)}{d t^k} \quad (\text{E.5})$$

A correspondente função do sistema racional para filtros digitais tem a forma:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M d_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N c_k z^{-k}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (\text{E.6})$$

A excitação e a resposta estão relacionadas pelo somatório de convolução

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) h(n-k) \quad (\text{E.7})$$

ou equivalentemente, pela equação-diferença

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (\text{E.8})$$

Na transformação de um sistema analógico em um digital devemos portanto obter ou $H(z)$ ou $h(n)$ do projeto de filtro analógico. Em tais transformações geralmente desejamos que propriedades essenciais da resposta em frequência analógica sejam preservadas na resposta em frequência do filtro digital resultante. Em outras palavras, isto implica que desejamos que o eixo imaginário do plano S seja mapeado em uma circunferência de raio unitário no plano Z . Uma segunda condição é que um filtro analógico estável deve ser transformado em um filtro digital estável. Isto é, se o sistema analógico possui pólos somente no semiplano esquerdo do plano S então o filtro digital terá apenas pólos no interior do círculo de raio unitário. Estas imposições são básicas em todas as técnicas que serão discutidas neste capítulo.

E.1.1. INVARIÂNCIA IMPULSIVA

Um procedimento para transformar um projeto de filtro analógico em um projeto de filtro digital corresponde a escolher a resposta à amostra unitária de um filtro digital como sendo amostras igualmente espaçadas da resposta impulsiva de um filtro analógico. Isto é,

$$h(n) = h_a(n \Delta t) \quad (\text{E.9})$$

onde Δt é o período de amostragem.

Pode-se demonstrar, que a transformada Z de $h(n)$ esta relacionada com a transformada de $h_a(t)$ pela equação a

$$H(z)|_{z=e^{j\Delta t}} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a \left(s + j \frac{2\pi}{\Delta t} k \right) \quad (E.10)$$

Da relação $z = e^{j\Delta t}$ nota-se que tiras de largura $\frac{2\pi}{\Delta t}$ no plano S são mapeadas em todo o plano Z como descrito na Fig.E.2. A metade da tira que fica no semiplano esquerdo no plano S é mapeada no interior do círculo unitário, sendo que a metade direita é mapeada fora do círculo de raio unitário, e cada segmento de comprimento $\frac{2\pi}{\Delta t}$ sobre o eixo imaginário do plano S é mapeado sobre a circunferência de raio unitário do plano Z . Da equação (E.10) é óbvio que cada tira horizontal no plano S é mapeada no plano Z para formar a função do sistema digital a partir da função do sistema analógico. Conseqüentemente o método da invariância impulsiva não corresponde a um simples mapeamento algébrico do plano S no plano Z .

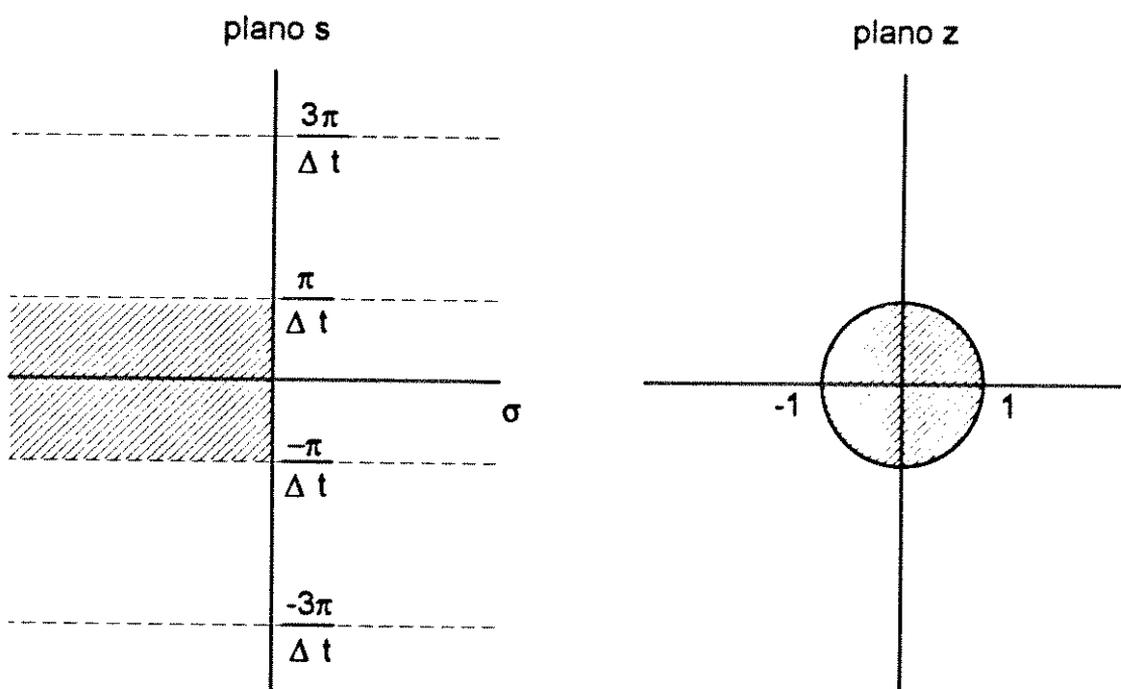


Fig. E.2 - Representação de uma amostragem periódica

A resposta em frequência do filtro digital esta relacionada com a resposta do filtro analógico como:

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a \left(j \frac{\theta}{\Delta t} + j \frac{2\pi}{\Delta t} k \right) \quad (E.11)$$

Então, se e somente se

$$H_a(j\omega) = 0, \quad |\omega| \geq \frac{\pi}{\Delta t} \quad (E.12)$$

tem-se

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{\Delta t} H_a\left(j\frac{\theta}{\Delta t}\right), \quad |\theta| \leq \pi \quad (E.13)$$

Infelizmente, qualquer filtro analógico prático não será limitado por banda, e conseqüentemente existe interferência entre sucessivos termos da equação (E.11) como ilustrado na Fig.E.3.

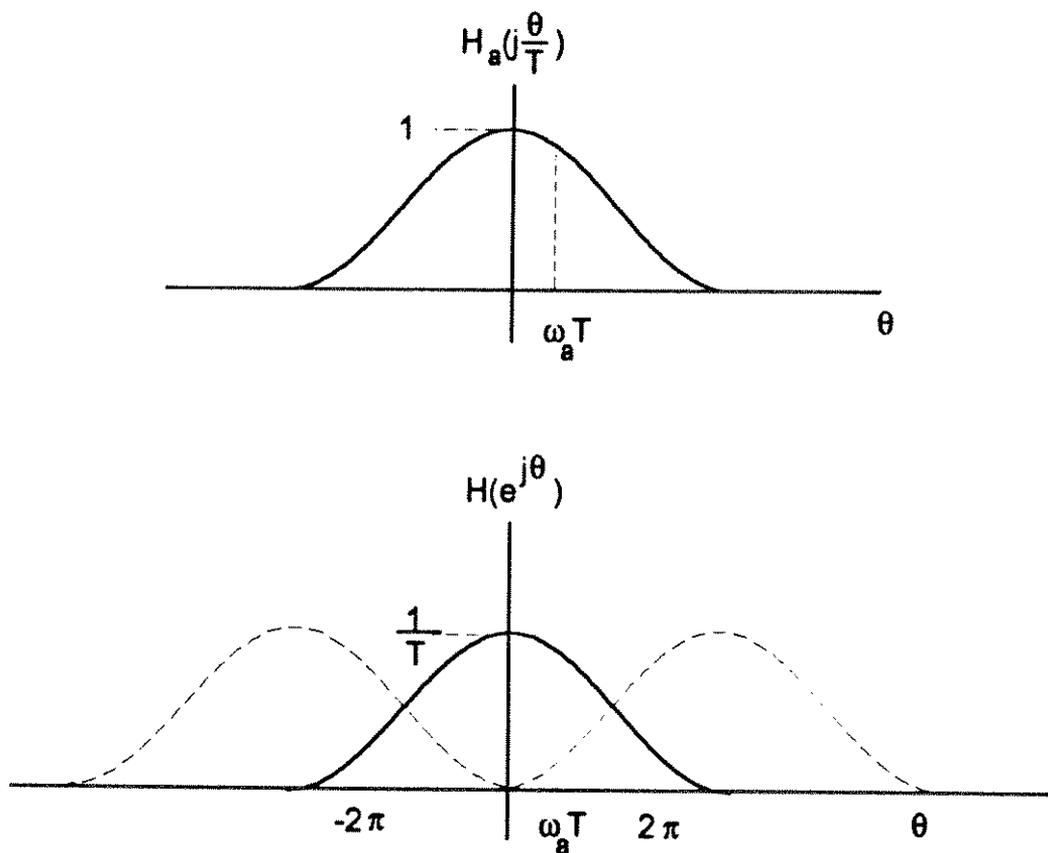


Fig. E.3 - Representação Gráfica dos efeitos de sobreposição na técnica de projeto por invariância ao impulso.

Devido ao sobreposição que ocorre no processo de amostragem, a resposta em frequência do filtro digital resultante não será idêntica à resposta em frequência do filtro analógico original. É importante notar que se considerarmos as especificações do filtro como sendo em termos das especificações de um filtro digital, então uma mudança no valor de Δt não afetará a quantidade de sobreposição no procedimento de projeto por invariância

impulsiva. Por exemplo, observando a Fig.E.3, nós podemos considerar que a frequência de corte do filtro digital deve ser $\omega_c \Delta t$. Este ponto na resposta em frequência é conhecido como frequência de corte de um filtro passa-baixa, e se Δt é reduzido, então ω_c no filtro analógico deve ser correspondentemente aumentado tal que $\omega_c \Delta t$ permaneça constante e a igual à frequência de corte especificada para o filtro digital. Conseqüentemente, se Δt é diminuído em um esforço de reduzir o efeito de sobreposição, ω_c deve ser correspondentemente maior. Com o a propósito de fazer com que o filtro digital projetado seja especificado em termos da frequência no círculo unitário, Δt é portanto um parâmetro irrelevante no projeto por invariância impulsiva e pode ser considerado igual a unidade. Uma vez que seja uma prática comum incluir o parâmetro Δt na discussão do projeto por invariância impulsiva, é importante manter em mente que o parâmetro desempenha um papel secundário do procedimento de projeto.

Para investigar a interpretação do projeto por invariância impulsiva em termos de uma relação entre o plano S e o plano Z , vamos considerar a função de sistema de um filtro analógico expressa em termos de uma expansão em frações parciais tal que

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad (\text{E.14})$$

A correspondente resposta impulsiva é

$$h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t) \quad (\text{E.15})$$

onde $u(t)$ é a função degrau unitário no tempo contínuo.

Logo, a resposta a amostra unitária de um filtro digital é então

$$h(n) = h_a(n \Delta t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k n \Delta t} u(n) = \sum_{k=1}^N A_k (e^{s_k \Delta t})^n u(n) \quad (\text{E.16})$$

A função de transferência do filtro digital $H(z)$ é então dada por:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k \Delta t} z^{-1}} \quad (\text{E.17})$$

Comparando-se as equações (E.14) e (E.17) observamos que o pólo em $s = s_k$ no plano S transforma-se em um pólo $e^{s_k \Delta t}$ no plano Z e os coeficientes na expansão em frações parciais de $H_a(s)$ e $H(z)$ são iguais. Se o filtro analógico é estável, ou seja a parte real de s_k é menor que zero, então o módulo de $e^{s_k \Delta t}$ será menor que a k unidade, tal que o correspondente pólo no filtro digital estará dentro do círculo unitário, e conseqüentemente o

filtro digital também será estável. Embora os pólos no plano S sejam mapeados no plano Z pela relação $z_k = e^{s_k \Delta t}$, é importante reconhecer que o procedimento de projeto de invariância impulsiva não corresponde à um mapeamento do plano S no plano Z por aquela relação ou de fato por nenhuma relação. Em particular, os zeros da função de transferência do filtro digital são uma função dos pólos e coeficientes A_k na expansão em frações parciais; e eles nem sempre serão mapeados da mesma forma que os pólos são mapeados.

EXEMPLO. Como exemplo da determinação de um filtro digital a partir de um filtro analógico por meio da invariância impulsiva, vamos considerar a função de transferência do sistema analógico $H_a(S)$ dada por:

$$H(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2} = \frac{1/2}{s+(a+jb)} + \frac{1/2}{s+(a-jb)} \quad (\text{E.18})$$

A correspondente função de transferência do sistema digital obtida através no método da invariância impulsiva é então

$$H(z) = \frac{1/2}{1 - e^{-ja\Delta t} e^{-jb\Delta t} z^{-1}} + \frac{1/2}{1 - e^{-ja\Delta t} e^{jb\Delta t} z^{-1}} \quad (\text{E.19})$$

ou seja,

$$H(z) = \frac{1 - (e^{-ja\Delta t} \cos(b\Delta t)) z^{-1}}{(1 - e^{-ja\Delta t} e^{-jb\Delta t} z^{-1})(1 - e^{-ja\Delta t} e^{jb\Delta t} z^{-1})} \quad (\text{E.20})$$

Conseqüentemente o filtro digital tem um zero na origem e um zero em $z = e^{-a\Delta t} \cos(b\Delta t)$.

A Fig. E.4 mostra o mapa dos pólos e zeros para $H_a(s)$ e o a mapa dos pólos e zeros para $H(z)$, ao lado de suas correspondentes resposta em freqüência. Neste caso a resposta em freqüência do sistema analógico diminui muito lentamente com relação à freqüência de amostragem e conseqüentemente o efeito de sobreposição é aparente na resposta em freqüência digital.

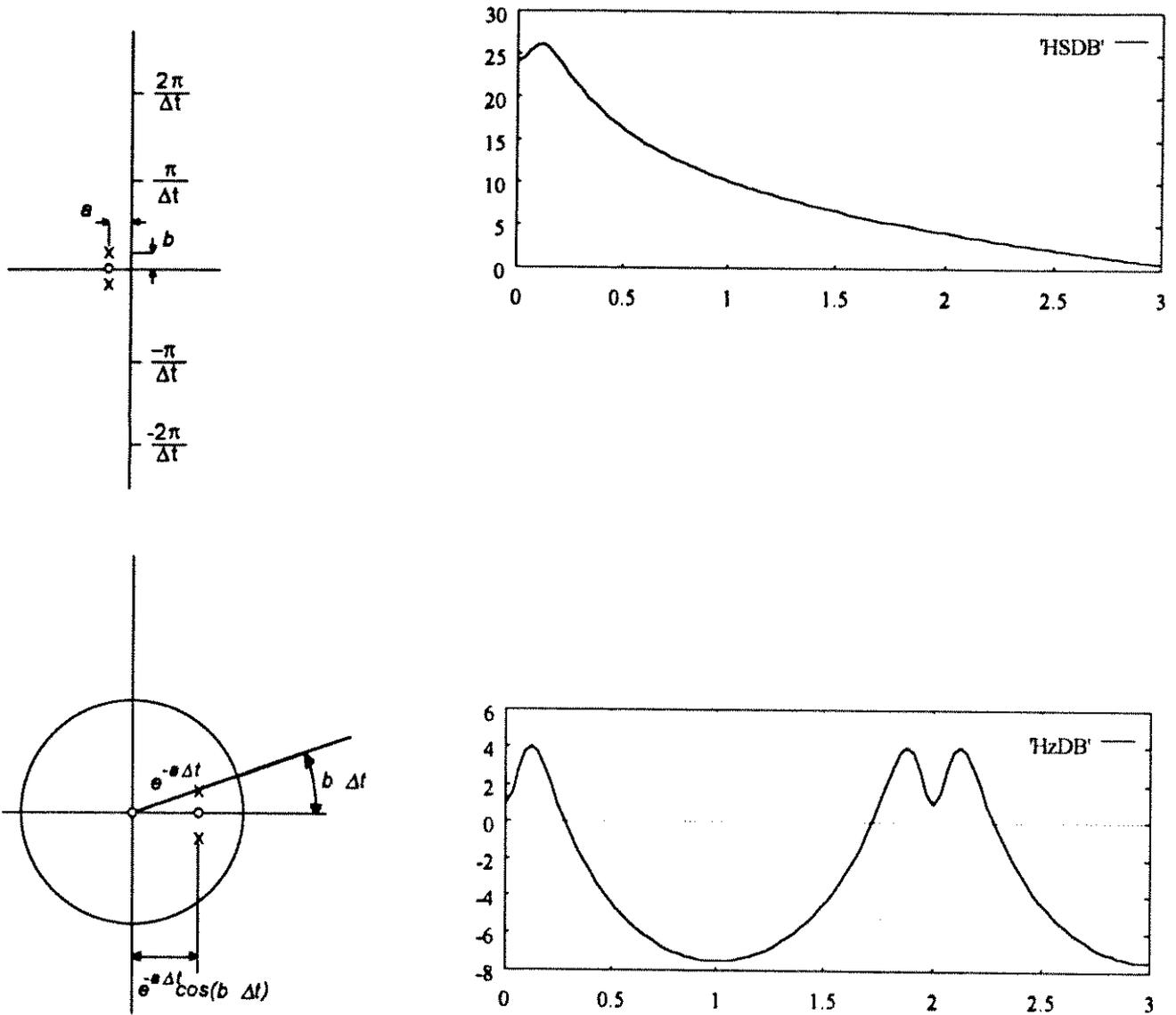


Fig. E.4 -(a) Gráfico dos pólos e zeros e resposta em frequência de um Sistema Analógico de Segunda Ordem; (b) Gráfico dos pólos e zeros e resposta em frequência do Sistema Discreto obtido pela amostragem da resposta ao impulso do sistema acima.

Deve-se notar que quando o filtro analógico é suficientemente limitado por banda, o procedimento explicitado no exemplo produz um filtro digital cuja resposta em frequência é, da equação (E.11),

$$H(e^{j\theta}) \approx \frac{1}{\Delta t} H_a(j\frac{\theta}{\Delta t}) \quad (\text{E.21})$$

Conseqüentemente para altas taxas de amostragem (Δt pequeno) o filtro digital pode ter um ganho extremamente alto. Por esta razão, é geralmente aconselhável usar no lugar da equação (E.17):

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{\Delta t A_k}{1 - e^{s_k \Delta t} z^{-1}} \quad (\text{E.22})$$

Isto é, a resposta à amostra unitária é $h(n) = \Delta t h_a(n \Delta t)$.

A base da invariância impulsiva como descrita acima é escolher uma resposta à amostra unitária para o filtro digital que seja similar de alguma forma à resposta impulsiva do filtro analógico. O uso deste procedimento freqüentemente não é motivado principalmente pelo desejo de se manter o formato da resposta impulsiva; porém pelo conhecimento de que o filtro analógico é limitado por banda, então a resposta em frequência do filtro digital se aproximará bastante da resposta do filtro analógico. Entretanto, em alguns problemas de projeto de filtros, um objetivo primário pode ser controlar algum aspecto da resposta temporal bem como a resposta impulsiva ou resposta ao degrau. Em tais casos, uma tentativa natural seria projetar o filtro por invariância impulsiva ou um procedimento de invariância ao degrau. No último caso, a resposta do filtro digital à função degrau unitário amostrada é escolhida como sendo amostras da resposta ao degrau analógica. Desta forma, se um filtro analógico tem boas características de resposta ao degrau, tais como curto tempo de subida e pequeno pico de "overshoot", estas características serão conservadas no filtro digital. Obviamente, este conceito de invariância da forma de onda pode ser estendido para a preservação da forma de onda de saída para uma variedade de excitações. Embora no algoritmo de projeto por invariância ao impulso, distorções na resposta em frequência sejam introduzidas devido ao sobreposição, a relação entre a frequência analógica e digital é linear e conseqüentemente, exceto pelo sobreposição, o formato da resposta em frequência é preservado. Isto contrasta com os algoritmos que veremos adiante, os quais correspondem ao uso de transformações algébricas. Deve-se notar finalmente que a técnica da invariância ao impulso é somente apropriada para filtros essencialmente limitados por banda. Por exemplo, filtros passa-alta e bloqueia-banda necessitarão de adicionais limitações de banda para evitar severas distorções de sobreposição.

E.1.2. PROJETOS BASEADOS NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

Uma segunda técnica de determinação de um filtro digital é aproximar as derivadas na equação (E.5) por diferenças finitas. Este é um procedimento padrão em análise numérica e em simulações digitais de sistemas analógicos. Este procedimento pode ser motivado pela noção intuitiva de que a derivada de uma função analógica no tempo pode ser aproximada pela diferença entre amostras consecutivas da função a ser diferenciada. Devemos esperar que a medida em que a taxa de amostragem aumenta, isto é, as amostras vão se aproximando uma das outras, então a aproximação à derivada terá sua precisão aumentada. Por exemplo, suponha que a primeira derivada seja aproximada pela seguinte diferença:

$$\left. \frac{dy_a(t)}{dt} \right|_{t=n \Delta t} \rightarrow \nabla^{(1)}[y(n)] = \frac{y(n) - y(n-1)}{\Delta t} \quad (E.23)$$

onde $y(n) = y_a(n \Delta t)$.

Aproximações das derivadas de ordem mais altas a são obtidas pela aplicação repetida da equação (E.23), isto é,

$$\left. \frac{d^k y_a(t)}{dt^k} \right|_{t=n \Delta t} = \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{k-1} y_a(t)}{dt^{k-1}} \right) \right|_{t=n \Delta t} \rightarrow \nabla^{(k)}[y(n)] = \nabla^{(1)}[\nabla^{(k-1)}[y(n)]] \quad (E.24)$$

Por conveniência, definimos:

$$\nabla^{(0)}[y(n)] = y(n) \quad (E.25)$$

Aplicando as equações (E.23)-(E.25) em (E.5), obtemos

$$\sum_{k=0}^N c_k \nabla^{(k)}[y(n)] = \sum_{k=0}^N d_k \nabla^{(k)}[x(n)] \quad (E.26)$$

onde $y(n) = y_a(n \Delta t)$ e $x(n) = x_a(n \Delta t)$. Salientamos que o operador $\nabla^{(1)}[]$ é linear e invariante com a fase e $\nabla^{(k)}[]$ pode ser entendido como uma cascata de (k) operadores $\nabla^{(1)}[]$. Em particular,

$$Z\{\nabla^{(1)}[x(n)]\} = \left[\frac{1-z^{-1}}{\Delta t} \right] X(z) \quad (E.27)$$

e

$$Z\{\nabla^{(k)}[x(n)]\} = \left[\frac{1-z^{-1}}{\Delta t} \right]^k X(z) \quad (\text{E.28})$$

Assim, tomando a transformada Z de ambos os lados

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M d_k \left[\frac{1-z^{-1}}{\Delta t} \right]^k}{\sum_{k=0}^N c_k \left[\frac{1-z^{-1}}{\Delta t} \right]^k} \quad (\text{E.29})$$

Comparando a equação (E.29) à (E.14), observa-se que a função de transferência digital pode ser obtida diretamente da função de transferência analógica por meio de uma substituição de variáveis

$$s = \frac{1-z^{-1}}{\Delta t} \quad (\text{E.30})$$

tal que o processo de substituir as derivadas por diferenças corresponde na verdade a mapear o plano S no plano Z , de acordo com a equação (E.30). Nós previamente indicamos que o eixo imaginário no plano S deve ser mapeado sobre uma circunferência de raio unitário no plano Z e filtros analógicos estáveis devem ser mapeados em filtros digitais estáveis. Para investigar estas questões para a transformação da equação (E.30) devemos expressá-la como uma função de S , obtendo

$$z = \frac{1}{1-s \Delta t} \quad (\text{E.31})$$

Substituindo $s = j \omega$,

$$z = \frac{1}{1-j \omega \Delta t} \quad (\text{E.32})$$

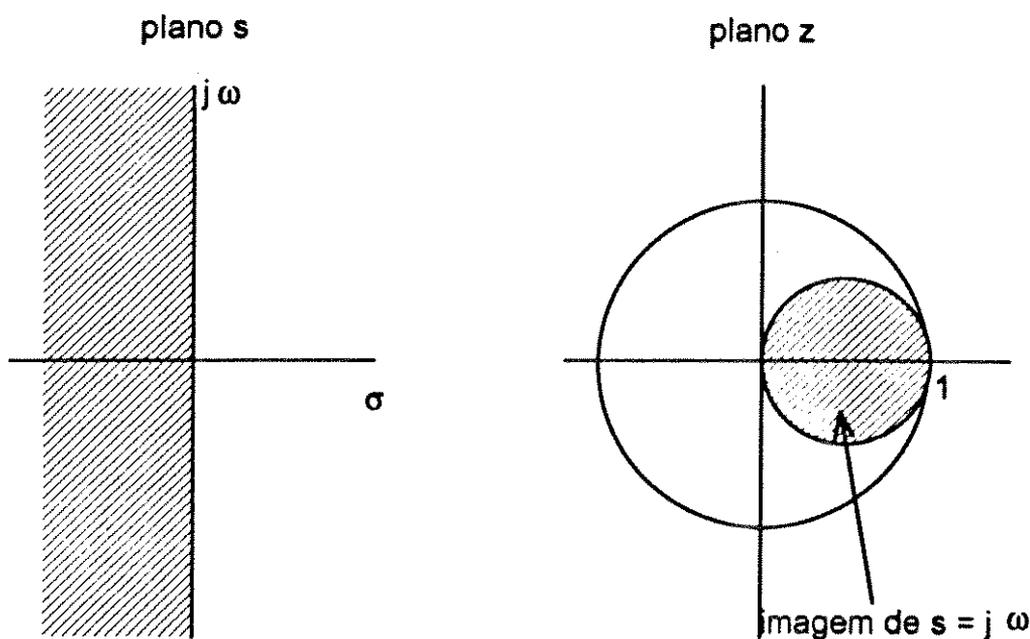


Fig. E.5 - Mapeamento do Plano S no Plano Z correspondente a primeira aproximação por diferença "backward" da derivada.

Obviamente, o mapeamento do eixo $j\omega$ no plano Z não é um círculo unitário uma vez que $|z| \neq 1$ para todos os valores de ω na equação (E.32). De fato, podemos rescrever a equação (E.32) como segue

$$z = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1 + j\omega\Delta t}{1 - j\omega\Delta t} \right] = 0,5 \left[1 + e^{j2 \tan^{-1}(\omega\Delta t)} \right] \quad (E.33)$$

o que corresponde à uma circunferência cujo centro está em $z = 0.5$ e raio 0.5 , como mostrado na Fig.E.5. É fácil verificar que a metade esquerda do plano S é mapeada dentro do pequeno círculo e o lado direito é mapeado fora do círculo. Portanto, embora a condição de mapeamento do eixo $j\omega$ na circunferência unitária não seja satisfeita, este mapeamento satisfaz a condição de estabilidade uma vez que os pólos do lado esquerdo do plano S são mapeados dentro do pequeno círculo, o qual está dentro do círculo de raio unitário.

É valioso correlatar este resultado com uma noção intuitiva. Geralmente presume-se que uma simulação em um computador digital de um processo de sinal contínuo por uma equação diferencial possa ser efetuado substituindo-se as derivadas por diferenças, se o sinal contínuo é amostrado em uma taxa alta o suficiente. Por exemplo, se desejarmos diferenciar um sinal contínuo, nós intuitivamente esperamos que uma aproximação da derivada possa ser calculada amostrando a função contínua no tempo com intervalos suficientemente pequenos entre as amostras e formar a primeira diferença da seqüência resultante. Para mostrar que de fato esta intuição é consistente com os resultados já obtidos, nós ressaltamos primeiramente que se um sinal analógico limitado em banda é amostrado na

taxa de Nyquist, então o espectro é não-nulo sobre todo o círculo unitário. À medida em que aumentamos a taxa de amostragem da taxa de Nyquist, isto é, à medida em que diminuimos o período de amostragem, a parte não-nula do espectro do sinal digital fica confinada à uma porção cada vez menor do círculo unitário, e, em particular, se escolhermos um período de amostragem suficientemente pequeno, nós poderemos concentrar a parte não-nula do espectro nas vizinhanças de $z = 1$ no plano Z . Correspondentemente, se Δt é suficientemente pequeno na equação (E.24), então a resposta em frequência do filtro digital será concentrada no pequeno círculo da Fig.E.5 nas proximidades de $z = 1$. Este é, naturalmente, o ponto no qual o pequeno círculo e o círculo unitário são tangentes, e se tanto a resposta do filtro são concentradas nesta região, então podemos esperar que o filtro digital aproximará com precisão do filtro analógico.

No procedimento acima, as derivadas foram substituídas por diferenças "backward". Uma aproximação alternativa à derivada é a diferença "forward" definida como

$$\Delta^{(1)}[y(n)] = y(n+1) - y(n) \quad (\text{E.34})$$

No mapeamento correspondente à esta aproximação, filtros digitais instáveis podem ser obtidos desta aproximação.

A principal diferença desta técnica é que, em contraste com a técnica da invariância ao impulso, diminuindo o período de amostragem teoricamente produz um filtro melhor uma vez que o espectro tende a ficar concentrado em uma região muito pequena do círculo unitário. Geralmente, entretanto, é pouco recomendável o uso de diferenças "backward" e "forward" no processo de sinais digitais, uma vez que taxas de amostragem altas são requeridas resultando em representações bastante ineficientes de filtros e sinais de excitação. Além disso, está claro que estes procedimentos são altamente insatisfatórios para qualquer coisa exceto filtros limitados em banda. Conseqüentemente nós somos conduzidos a considerar outros mapeamentos que evitem problemas de sobreposição do método da invariância ao impulso.

E.1.3. TRANSFORMAÇÃO BIINEAR

Na seção anterior um filtro digital foi desenvolvido pela aproximação das derivadas em diferenças. Uma técnica alternativa está baseada na integração da equação diferencial usando uma aproximação numérica da integral. Por exemplo, considere a equação de primeira ordem

$$c_1 y'_a(t) + c_0 y_a(t) = d_0 x(t) \quad (\text{E.35})$$

onde $y'(t)$ é a primeira derivada de $y(t)$. A correspondente função de transferência do sistema analógico é

$$H(s) = \frac{d_0}{c_1 s + c_0} \quad (\text{E.36})$$

Nós podemos escrever $y_a(t)$ como sendo uma integral de $y'_a(t)$,

$$y_a(t) = \int_{t_0}^t y'_a(\tau) d\tau + y_a(t_0) \quad (\text{E.37})$$

Em particular, se $t = n \Delta t$ e $t_0 = (n-1) \Delta t$,

$$y_a(n \Delta t) = \int_{(n-1) \Delta t}^{n \Delta t} y'_a(\tau) d\tau + y_a[(n-1) \Delta t] \quad (\text{E.38})$$

Se a integral é aproximada pela regra do trapézio, podemos escrever

$$y_a(n \Delta t) = y_a[(n-1) \Delta t] \frac{\Delta t}{2} + \{y'_a(n \Delta t) + y'_a[(n-1) \Delta t]\} \quad (\text{E.39})$$

Entretanto, da equação (E.35),

$$y'_a(n \Delta t) = \frac{-c_0}{c_1} y_a(n \Delta t) + \frac{d_0}{c_1} x_a(n \Delta t) \quad (\text{E.40})$$

Substituindo na equação (E.39) obtemos:

$$[y(n) - y(n-1)] = \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{-c_0}{c_1} [y(n) - y(n-1)] + \frac{d_0}{c_1} [x(n) - x(n-1)] \right] \quad (\text{E.41})$$

onde $y(n) = y_a(n \Delta t)$ e $x(n) = x_a(n \Delta t)$. Tomando a transformada Z e resolvendo para $H(z)$ tem-se

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{d_0}{c_1 \frac{2}{\Delta t} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + c_0} \quad (\text{E.42})$$

Da equação (E.42) fica evidente que $H(z)$ é obtida de $H(s)$ a pela substituição:

$$s = \frac{2}{\Delta t} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (\text{E.43})$$

Isto é,

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{\Delta t} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)} \quad (\text{E.44})$$

Pode-se demonstrar que o resultado é geral para toda equação diferencial de ordem N da forma da equação (E.5) que possa ser escrita como um conjunto de N equações de primeira ordem na forma da equação (E.35). Resolvendo a equação (E.43) em z tem-se

$$z = \frac{1 + \frac{\Delta t}{2} s}{1 - \frac{\Delta t}{2} s} \quad (\text{E.45})$$

A transformação invertível (E.43) é conhecida como transformação bilinear. Para demonstrar que este mapeamento tem a propriedade de mapear o eixo imaginário do plano S na circunferência de raio unitário do plano Z , considere $z = e^{j\theta}$. Então, da equação (E.43), s é dado por

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{\Delta t} \frac{1 - e^{j\theta}}{1 + e^{j\theta}} \\ &= \frac{2}{\Delta t} \frac{j \operatorname{sen}(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} \\ &= \frac{2}{\Delta t} j \tan(\theta/2) \\ &= \sigma + j \omega \end{aligned}$$

Conseqüentemente para z sobre a circunferência unitária, $\sigma = 0$, ω e θ são relacionados por

$$\frac{\Delta t \omega}{2} = \tan(\theta/2) \quad (\text{E.46})$$

Esta relação está ilustrada na Fig.E.6. Desta figura fica claro que os eixos positivos e negativos do plano S são mapeados, respectivamente, nas metades superior e inferior do círculo unitário no plano Z .

Em complementação ao fato de que o eixo imaginário no plano S é mapeado no círculo unitário no plano Z , a metade esquerda do plano S é mapeada no interior do círculo unitário, enquanto que a metade direita do plano S fica mapeada fora do círculo unitário, como está esboçado na Fig.E.7.

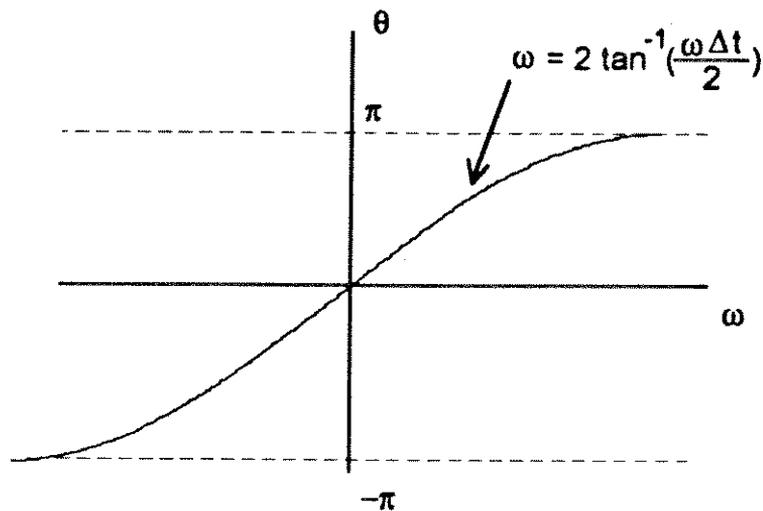


Fig. E.6 - Mapeamento do eixo da freqüência analógica sobre o círculo unitário utilizando a transformação bilinear.

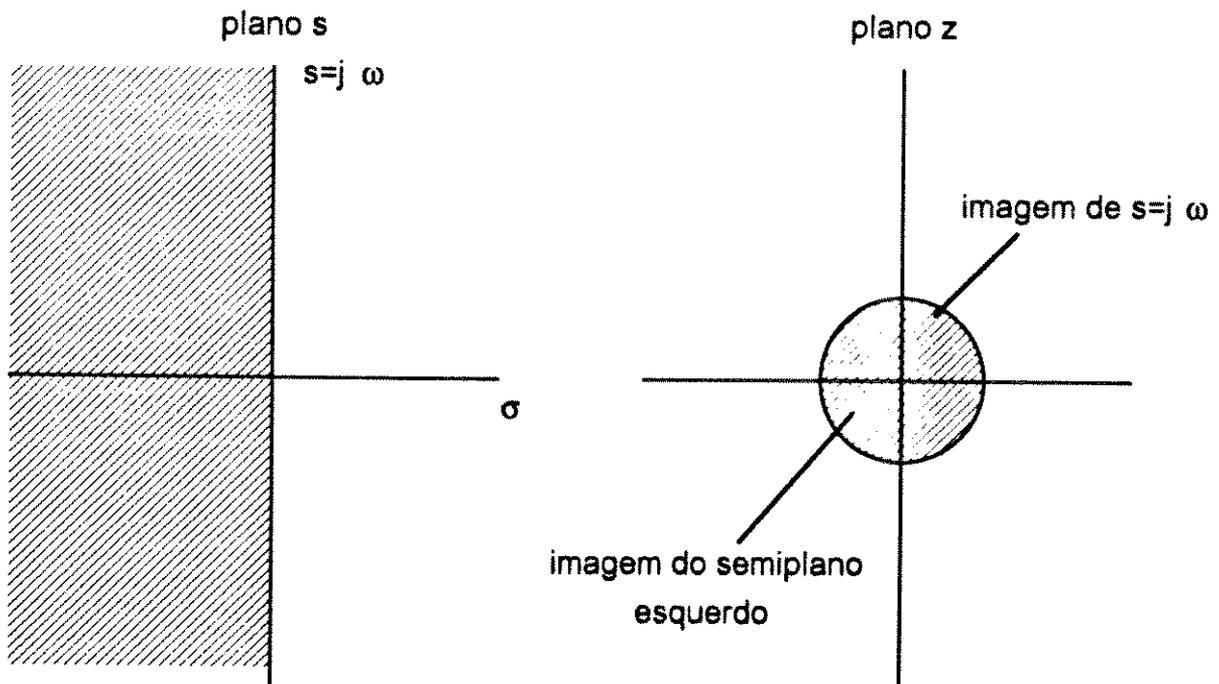


Fig. E.7 - Mapeamento do Plano S no plano Z usando a transformação bilinear.

Isto pode ser visto pela referência à equação (E.45). Para partes reais negativas de S , o módulo do fator $\frac{(1 + s \Delta t / 2)}{(1 - s \Delta t / 2)}$ é menor que a unidade, correspondendo ao interior do círculo unitário. Inversamente, para partes reais positivas de s , a magnitude daquela razão é maior que a unidade, correspondendo ao espaço externo ao círculo unitário. Portanto conclui-se que o uso da transformação bilinear em filtros analógicos estáveis conduz à filtros digitais estáveis. Além disso, a transformação bilinear evita o problema de sobreposição encontrado no uso da invariância ao impulso, pois a mesma mapeia todo o eixo imaginário do plano S sobre o círculo unitário. O preço pago por isto, entretanto, é a introdução de uma distorção no eixo da frequência. Conseqüentemente, o projeto de filtros digitais usando a transformação bilinear somente é útil quando esta distorção puder ser tolerada ou compensada.