



LCSI

Universidade Estadual de Campinas

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Máquinas, Componentes e Sistemas Inteligentes
Laboratório de Controle e Sistemas Inteligentes

Modelagem computacional do aquecimento de um motor de indução monofásico aplicado em máquinas de lavar roupas durante a etapa de agitação

Autor: Eng. Mateus Giesbrecht
Orientador: Prof. Dr. Gilmar Barreto

Dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de mestre em engenharia elétrica.

Banca examinadora:

Prof. Dr. José Luiz Silvino	CPDEE/UFMG
Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura	FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. Yaro Burian Jr.	FEEC/UNICAMP

Campinas, 09 de novembro de 2007.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

G363m Giesbrecht, Mateus
Modelagem computacional do aquecimento de um motor de indução monofásico aplicado em máquinas de lavar roupas durante a etapa de agitação / Mateus Giesbrecht. -- Campinas, SP: [s.n.], 2007.

Orientador: Gilmar Barreto
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Máquinas automáticas. 2. Máquinas - Projetos. 3. Máquinas elétricas – Corrente alternada. 4. Mínimos quadrados. 5. Identificação de sistemas. I. Barreto, Gilmar. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Computer based model for the heating of a single phase induction motor applied on washing machine during agitation task

Palavras-chave em Inglês: Washing machine, Electric machine, Mean square method, System identification

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Celso Pascoli Bottura, José Luis Silvino e Yaro Burian Junior

Data da defesa: 09/11/2007

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidato: Mateus Giesbrecht

Data da Defesa: 9 de novembro de 2007

Título da Tese: "Modelagem Computacional do Aquecimento de um Motor de Indução Monofásico Aplicado em Máquinas de Lavar Roupas Durante a Etapa de Agitação"

Prof. Dr. Gilmar Barreto (Presidente): Gilmar Barreto

Prof. Dr. Jose Luiz Silvino: Jose Luiz Silvino

Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura: Celso Pascoli Bottura

Prof. Dr. Yaro Burian Junior: Yaro Burian Junior

Resumo

A motivação para este estudo é criar um modelo computacional capaz de prever se o regime de trabalho a que um motor monofásico de indução é submetido implica ou não em um aquecimento que comprometa os materiais isolantes do mesmo.

A solução apresentada busca encontrar uma equação a diferenças em que a saída do sistema (temperatura do motor no instante $k+1$) é calculada como uma combinação linear das entradas (temperatura do motor, valor RMS da corrente e temperatura ambiente no instante k). Para conhecer os coeficientes desta combinação linear, foram realizados alguns ensaios e, a partir de seus resultados, foi aplicado o método dos mínimos quadrados para a obtenção do modelo computacional que representa o sistema.

Os resultados computacionais obtidos com o modelo proposto refletem com exatidão o comportamento do sistema real. O modelo desenvolvido também é útil para outras aplicações em que se utilize um motor de indução monofásico em regime intermitente periódico com partida.

Palavras-chave: Máquina de lavar roupas, Máquina Elétrica, Método dos mínimos quadrados, Identificação de sistemas

Abstract

This study motivation was finding a computer-based model that was able to foresee if the duty cycle applied in a single-phase induction motor implies or not in an overheating that can compromise the motor insulation.

The solution presented here is based on finding a difference equation in which the system output (motor temperature at time $k+1$) is calculated as a linear combination of the input (motor temperature, RMS current and ambient temperature at time k). The Mean Square Method was applied to find the coefficients of this linear combination, resulting in the final computational model that represents the system.

The computational results found with the proposed model reflect exactly the real system behaviour. This model is also useful to other applications in which a single-phase induction motor during intermittent periodic duty with starting is used.

Keywords: Washing Machine, Electrical Machine, Least Square Method, System Identification

Aplicando-me a conhecer a sabedoria e a ver o trabalho que há sobre a terra então contemplei toda a obra de Deus e vi que o homem não pode compreender a obra que se faz debaixo do sol; por mais que trabalhe o homem para a descobrir, não a entenderá; e, ainda que diga o sábio que a virá a conhecer, nem por isso a poderá achar (...) Vai, pois, come com alegria o teu pão e bebe gostosamente o teu vinho, pois Deus já de antemão se agrada das tuas obras. Em todo tempo sejam alvas as tuas vestes, e jamais falte óleo sobre a tua cabeça. Goza a vida com a mulher que amas, todos os dias de tua vida fugaz, os quais Deus te deu debaixo do sol; porque esta é a tua porção nesta vida pelo trabalho com que te afadigaste debaixo do sol. (...) Demais, filho meu, atenta: não há limite para fazer livros, e o muito estudar é enfado da carne. De tudo o que se tem ouvido, a suma é: Teme a Deus e guarda os seus mandamentos; porque isto é o dever de todo homem. Porque Deus há de trazer a juízo todas as obras, até as que estão escondidas, quer sejam boas, quer sejam más.

Eclesiastes 8:16,17; 9:7-10; 12:12-14

Força Má, você é inteligente, você consegue...

Daniela do Lago Rugani, em seu último sábado

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Gilmar Barreto, meu orientador, pelo compartilhamento de experiências, tanto acadêmicas quanto de vida.

Ao Prof. Dr. Celso Pascoli Botura, pelo incentivo e apoio.

A Daniela do Lago Rugani, mulher a quem amei, que muito me encorajou e motivou durante o começo de meu mestrado. A ela dedico esta dissertação como homenagem póstuma.

A meus pais Mauro e Hulda, a minha irmã Érica e a minha tia Ruth, que me acompanharam de perto durante esta fase de minha vida.

A Célio, Wilma e Priscila Rugani, que demonstraram por mim muito carinho.

Aos amigos João, Cláudia, Douglas, Claudinha, Juliana, Timóteo, Thiago, Gustavo e Noemi que se mostraram preocupados comigo em uma hora muito difícil. Muito do ânimo para a conclusão deste trabalho veio por meio deles.

Aos colegas da Whirlpool S.A. pelo apoio e resposta a dúvidas quanto ao funcionamento da máquina de lavar roupas.

À empresa Whirlpool S.A., por ceder os equipamentos necessários para os ensaios cujos resultados são mostrados nesta dissertação.

À empresa GE Hydro Inepar pelo tempo cedido para a conclusão deste trabalho.

Em memória de Daniela do Lago Rugani

Sumário

Lista de Figuras	xvii
Lista de Tabelas	xxi
Trabalhos Publicados Pelo Autor	xxiii
1 Introdução	1
1.1 O problema de elevação de temperatura	1
1.2 Revisão bibliográfica	2
1.3 Motivação	3
1.4 Dificuldades	4
1.5 Organização da dissertação	4
2 A máquina de lavar roupas	5
2.1 Introdução	5
2.2 Histórico do processo de lavagem de roupas	5
2.3 A lavadora em partes	8
2.4 Etapas do ciclo de lavagem	11
3 A máquina de indução monofásica	13
3.1 Introdução	13
3.2 Princípios da máquina de indução	14
3.3 Circuito equivalente da máquina de indução	19
3.4 Conceitos sobre a máquina de indução monofásica	22
3.5 Circuito equivalente da máquina de indução monofásica	26
3.6 Determinação dos parâmetros do circuito equivalente	30
4 Identificação de sistemas lineares	33
4.1 Introdução	33
4.2 Modelos matemáticos	34
4.3 O método dos mínimos quadrados	35
4.3.1 Gauss e problema das órbitas elípticas	35
4.3.2 Desenvolvimento clássico do método	37
4.3.3 Interpretação do método nos subespaços fundamentais	38
4.3.4 Método dos mínimos quadrados recursivo	42

4.3.5	Relação entre algoritmo recursivo e aproximação estocástica	47
4.3.6	Uso do algoritmo recursivo	49
4.4	Sistemas dinâmicos e modelos entrada saída	49
4.4.1	Discretização de sistemas contínuos	53
4.4.2	Modelos representados pelas equações a diferenças	54
5	Ensaio e resultados	63
5.1	Introdução	63
5.2	Aparelhagem experimental	63
5.3	Levantamento do circuito em função da temperatura	66
5.3.1	Introdução	66
5.3.2	Método utilizado	66
5.3.3	Resultados	67
5.3.4	Discussão	70
5.4	Estimação da corrente elétrica no motor	71
5.4.1	Introdução	71
5.4.2	Método utilizado	71
5.4.3	Resultados	71
5.4.4	Discussão	71
5.5	Modelo do aquecimento do motor	73
5.5.1	Introdução	73
5.5.2	Planejamento experimental inicial	77
5.5.3	Resultados dos experimentos iniciais	81
5.5.4	Discussão sobre os experimentos iniciais	81
5.5.5	Resultados da nova abordagem	86
6	Conclusão	91
A	Circuitos de corrente alternada	93
A.1	Introdução	93
A.2	Bipolos lineares	93
A.3	Regime senoidal e fasores	94
A.4	Potência em circuitos de corrente alternada	96
B	Introdução à Álgebra linear	99
B.1	Introdução	99
B.2	Matrizes	99
B.2.1	Operações com matrizes	100
B.3	Espaços vetoriais	101
B.4	Subespaços Vetoriais	102
B.5	Combinação linear	102
B.6	Base de um subespaço	103
B.7	Soma de subespaços	103
B.8	Produto interno	104

B.9	Transformações lineares	104
B.10	Sistemas lineares e matrizes	105
B.11	Resumo das definições importantes	106
C	Códigos computacionais desenvolvidos	109
C.1	Programa estimador de parâmetros do circuito elétrico equivalente	109
C.1.1	Primeira parte	109
C.1.2	Segunda parte	111
C.2	Programa de cálculo da curva de corrente	112
C.3	Programa recortador de correntes	114
C.4	Programa estimador de parâmetros de aquecimento do motor	117
C.4.1	Cálculo de corrente RMS	117
C.4.2	Relação entre corrente RMS e temperatura	117
C.4.3	Estimador de parâmetros	118
D		119
	Referências bibliográficas	126

Lista de Figuras

1.1	Sistema cuja entrada é a corrente elétrica e a saída é a temperatura	1
1.2	Resposta em temperatura do sistema a um degrau de corrente aplicado	2
1.3	Ciclo de corrente típico durante a agitação	3
2.1	Máquina lavadora de roupas proposta por Hamilton Smith	6
2.2	Máquina lavadora de roupas patenteada por Alva J. Fisher	7
2.3	Lavadora de roupas moderna	7
2.4	Modelo da lavadora em AutoCad	8
2.5	Parte inferior da tampa fixa da máquina de lavar roupas	9
2.6	Fotografia do tanque suportado pelos quatro conjuntos de suspensão	9
2.7	Fotografia da parte inferior do tanque	10
3.1	Máquina elétrica e as possíveis direções de transformação de energia	13
3.2	Figura da patente de Tesla ilustrando o conceito de campo girante	15
3.3	Motor com dois polos e duas bobinas	16
3.4	Variação da direção do campo magnético ao longo do tempo	16
3.5	Máquina elétrica usada no experimento de Tesla	17
3.6	Fluxograma do funcionamento do motor de indução	18
3.7	Circuito elétrico equivalente de um transformador	19
3.8	Modelo elétrico equivalente de um motor de indução	22
3.9	Exemplo didático de máquina	23
3.10	Evolução do campo pulsante ao longo do tempo	23
3.11	Campo pulsante visto como soma de dois campos girantes em direção oposta	24
3.12	Características esperada da relação entre velocidade e conjugado da máquina de indução monofásica a partir da hipótese de campos girantes.	25
3.13	Característica real da relação entre velocidade e conjugado da máquina de indução monofásica	26
3.14	Esquema de ligação do motor de indução monofásico usado na máquina de lavar roupas	27
3.15	Temperatura e corrente em um ciclo de um regime intermitente periódico com partida	28
3.16	Circuito equivalente da máquina de indução monofásica	29
3.17	Circuito equivalente da máquina de indução monofásica usada na máquina de lavar roupas com o capacitor e a bobina	30
3.18	Circuito equivalente da máquina de indução quando o rotor está bloqueado	31
3.19	Circuito equivalente da máquina de indução quando o rotor está livre	32

4.1	Método de obtenção de sistemas do tipo caixa preta	36
4.2	Subespaços fundamentais das matrizes A e A^T e suas relações	40
4.3	Subespaço $\mathcal{R}(A)$ contendo o vetor $\hat{B}_{m \times 1}$. Note que o menor erro ocorre quando $\epsilon_{m \times 1}$ é ortogonal a $\mathcal{R}(A)$	42
4.4	Sistema massa mola	50
4.5	Modelo entrada-saída do sistema	52
4.6	Modelo FIR	56
4.7	Modelo ARX	56
4.8	Modelo ARMAX	57
4.9	Modelo ARMA	58
4.10	Modelo OE	59
4.11	Modelo Box-Jenkins	60
5.1	Motor utilizado para o trabalho experimental	64
5.2	Termopares instalados na bobina do motor	64
5.3	Esquema elétrico para aquisição de tensão e corrente RMS	65
5.4	Relação entre o parâmetro R_1 dos enrolamentos CW e CCW e a temperatura do enrolamento	67
5.5	Relação entre o parâmetro R_2 dos enrolamentos CW e CCW e a temperatura do enrolamento	68
5.6	Relação entre o parâmetro X_1 dos enrolamentos CW e CCW e a temperatura do enrolamento	68
5.7	Relação entre o parâmetro X_2 dos enrolamentos CW e CCW e a temperatura do enrolamento	69
5.8	Relação entre o parâmetro X_{mag} dos enrolamentos CW e CCW e a temperatura do enrolamento	69
5.9	Comparação entre valor RMS da corrente elétrica real e valor RMS calculado via circuito equivalente em vários ciclos de centrifugação pulsada.	72
5.10	Comparação entre valor RMS da corrente elétrica real e valor RMS calculado via circuito equivalente em apenas um ciclo de centrifugação pulsada.	72
5.11	Circuito elétrico análogo ao fenômeno térmico envolvido no problema	74
5.12	Comparação entre dados reais e estimados para temperatura na cabeça do motor durante três ciclos completos de lavagem	75
5.13	Comparação entre dados reais e estimados para temperatura na ranhura do motor durante três ciclos completos de lavagem	76
5.14	Comparação entre dados reais e estimados para temperatura na lateral do motor durante três ciclos completos de lavagem	76
5.15	Forma de onda de corrente típica do motor tomada no teste CT=90	79
5.16	Corrente RMS em função da temperatura da ranhura para o teste CT=05 (pontos em formato de cruz) e reta que melhor os aproxima (reta contínua)	82
5.17	Corrente RMS em função da temperatura da ranhura para o teste CT=90 (pontos em formato de cruz) e reta que melhor os aproxima (reta contínua)	82
5.18	Curva de aquecimento do motor ao longo do tempo para o teste CT=05	83
5.19	Curva de aquecimento do motor ao longo do tempo para o teste CT=90	83

5.20	Como deve ser a escolha da escala horizontal do osciloscópio. Deve-se ter na figura todo o período de motor ligado nas duas direções, assim como os períodos de descanso.	85
5.21	Comparação entre a evolução da corrente RMS ao longo da temperatura obtida experimentalmente e a estimada com o software de recorte de formas de onda	85
5.22	Resultados de estimação de temperatura para a cabeça usando parâmetros obtidos no próprio teste. Os resultados para temperatura na ranhura e na lateral são semelhantes. O erro quadrático médio para as três temperaturas é de 12.0600	86
5.23	Dados reais para a temperatura na cabeça de um teste do tipo CT=20 comparados aos dados estimados com os parâmetros do teste CT=24 usando como entradas as correntes RMS obtidas por meio da rotina de recorte de formas de ondas. A evolução de temperatura para ranhura e lateral tem forma semelhante.	87
5.24	Dados reais para a temperatura na cabeça de um teste do tipo CT=15 comparados aos dados estimados com os parâmetros do teste CT=24 usando como entradas as correntes RMS obtidas por meio da rotina de recorte de formas de ondas. A evolução de temperatura para ranhura e lateral é semelhante.	88
5.25	Resultados de estimação de temperatura para a cabeça usando parâmetros obtidos no próprio teste. Neste caso foram separados os dados de aquecimento e resfriamento. Os resultados para a evolução da temperatura na ranhura e na lateral têm formas semelhantes a este. O erro quadrático médio para as três temperaturas é de 2.7486	88

Lista de Tabelas

4.1	Subespaços fundamentais de uma matriz	41
4.2	Modelos paramétricos existentes	61
5.1	Coefficientes das retas que relacionam temperatura e coeficientes do circuito elétrico equivalente de cada um dos enrolamentos do motor	70
5.2	Ciclos propostos para aquisição de dados do motor	78
5.3	Erros quadráticos médios e posição da curva de dados estimados com relação aos dados reais (ou seja, se a curva de dados estimados está acima ou abaixo da curva da dados reais) obtidos ao se estimar resultados de testes usando parâmetros obtidos em outros testes.	80
A.1	Potências complexas e suas unidades	98
B.1	Álgebra linear em poucas palavras	107

Trabalhos Publicados Pelo Autor

1. GIESBRECHT, M.;BARRETO, G. Modelagem computacional do aquecimento de um motor de indução monofásico aplicado a máquinas de lavar roupas durante a etapa de agitação. *V Seminário Nacional de Controle e Automação (V SNCA), Salvador, BA, Junho 2007.*

Capítulo 1

Introdução

1.1 O problema de elevação de temperatura

Pessoas com olhares mais cépticos poderiam afirmar que o problema de elevação de temperatura em um motor elétrico tem solução plenamente conhecida. De fato, o aquecimento de qualquer circuito elétrico ocorre pois a movimentação dos elétrons gera calor, uma vez que os choques entre os elétrons e a rede iônica formadora do material condutor aumentam a amplitude das vibrações térmicas da rede implicando em aumento de temperatura [26]. Sabe-se também que a geração de calor tem relação linear com a taxa de movimentação de cargas elétricas, definida como corrente elétrica. Sabe-se ainda que, no caso em que o motor é alimentado por uma corrente alternada, a elevação de temperatura é proporcional à raiz da média do quadrado da forma de onda de corrente, conhecida como corrente RMS (*root mean square*) ou ainda como corrente eficaz [15]. É conhecido também que sistemas térmicos têm geralmente, no domínio das frequências, nenhum zero e um pólo. Dadas estas informações, o motor pode ser visto como um sistema semelhante ao mostrado na figura 1.1.

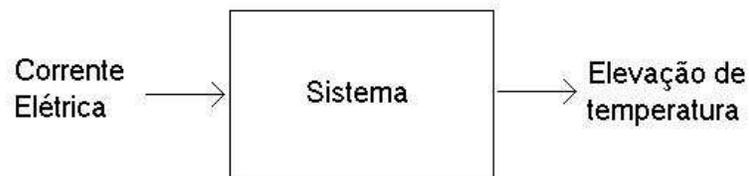


Fig. 1.1: Sistema cuja entrada é a corrente elétrica e a saída é a temperatura

Na figura 1.2 é mostrada a evolução da temperatura em um determinado ponto do motor da máquina de lavar roupas ao longo do tempo. Ao se analisar o formato da curva mostrada na figura, nota-se que o sistema que tem como entrada a corrente elétrica e como saída a temperatura do motor é linear de primeira ordem. Com isto a simples determinação da constante térmica resolveria o problema de modelagem da temperatura do motor

No entanto, no caso do motor usado na máquina de lavar roupas, conhecer apenas a relação entre

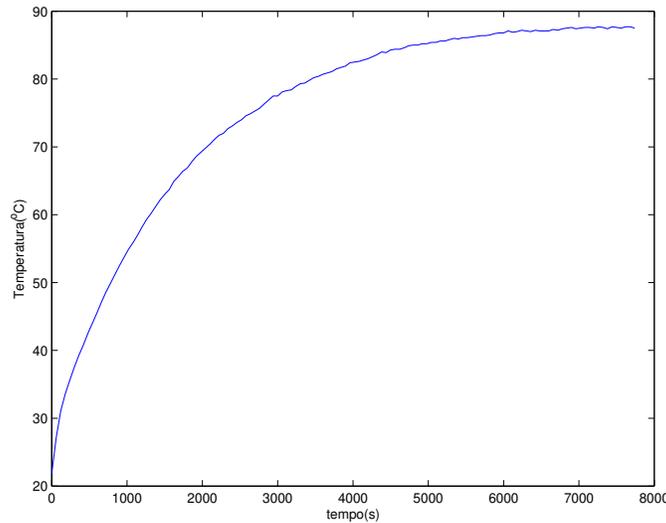


Fig. 1.2: Resposta em temperatura do sistema a um degrau de corrente aplicado

elevação de temperatura e corrente elétrica não é suficiente para que se tenha um modelo computacional que substitua os testes de elevação de temperatura. Esta relação seria suficiente se a entrada do modelo fosse a corrente elétrica e a saída a temperatura do motor, conforme o sistema da figura 1.1. Porém, a entrada desejada para o modelo é um ciclo de agitação, ou seja, a definição de quanto tempo o motor passa ligado e quanto tempo ele passa desligado, e a relação do ciclo com a corrente é algo não linear, uma vez que a máquina opera em um regime denominado intermitente periódico com partida e codificado como S4 segundo as normas [5] e [27], ou seja, há uma seqüência de ciclos de regime idênticos, cada qual incluindo um período de partida, um período de funcionamento a carga constante e um período de repouso. A nomenclatura periódico é dada pois o equilíbrio térmico não é atingido a cada ciclo. Na figura 1.3 é mostrada uma curva de corrente típica para um ciclo de agitação, de onde pode-se notar claramente a não linearidade descrita.

1.2 Revisão bibliográfica

A modelagem do aquecimento de um motor é um problema que pode ser abordado de diversas formas. Uma delas é mostrada em [37], em que se resolve o problema através da solução de equações provenientes da termodinâmica [28] com o uso do método dos elementos finitos. Esta técnica também é usada em [33], em [24] e em diversos outros trabalhos. Para empregá-la é necessário o conhecimento de constantes térmicas e da geometria dos materiais empregados na construção do motor, assim como o modelamento da transferência de calor entre os materiais e entre os materiais e o ambiente. Esta forma de abordagem é do tipo caixa branca, conforme será visto mais adiante no capítulo 4.

Uma outra abordagem encontrada para a modelagem de aquecimento é o uso de circuitos térmicos equivalentes. Esta é técnica empregada em [30] e [40] para a modelagem do aquecimento do tiristor do sistema de partida suave de um motor de indução trifásico. Nestes trabalhos os parâmetros do circuito térmico equivalente foram calculados a partir das características dos materiais usados.

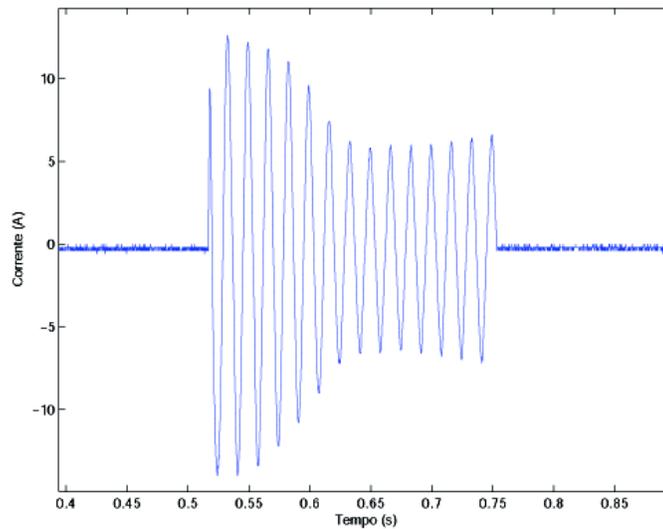


Fig. 1.3: Ciclo de corrente típico durante a agitação

O trabalho apresentado nesta dissertação incorpora a técnica do circuito térmico equivalente, no entanto a técnica de obtenção de parâmetros adotada não faz o uso de constantes térmicas ou dados geométricos dos materiais usados na construção do motor. Além disto, este trabalho trata da modelagem do aquecimento do motor que está sempre em regime transiente.

1.3 Motivação

Para cada novo ciclo de lavagem de roupas que é desenvolvido, é necessário que se faça testes de elevação de temperatura do motor, ou seja, um motor é instalado em uma máquina de lavar roupas programada para fazer o novo ciclo desenvolvido e a elevação de temperatura é acompanhada por meio de termopares colocados em posições definidas pela norma [4] (tabela 2). Caso a temperatura medida pelos termopares ultrapasse um valor máximo definido na norma, o ciclo de lavagem não é tido como válido. Caso contrário, o ciclo é aprovado quanto ao quesito de elevação de temperatura.

Estes testes são repetidos exaustivamente, até que se chegue a um ciclo de lavagem que seja aprovado. A repetição destes testes consome muito tempo, uma vez que eles são feitos com cargas formadas por panos padrão, que devem estar secos no início do teste. Como estes panos padrão têm um custo muito elevado, o laboratório não dispõe de mais de uma carga deste material de teste, de forma que, entre uma tentativa e outra de se encontrar um ciclo em que o motor não atinja uma temperatura muito alta, as cargas têm que ser secadas, o que consome em torno de um dia. Além de consumir tempo, os testes ainda consomem recursos humanos, uma vez que um operador deve acompanhar estes testes em tempo integral para garantir que os dados adquiridos sejam confiáveis.

Com o modelo computacional em mãos, o criador do ciclo de lavagem leva poucos segundos para simular o teste de elevação de temperatura, aumentando o número de alternativas a serem testadas e diminuindo significativamente o tempo de criação do ciclo de lavagem, que é uma etapa crítica no projeto de máquinas de lavar roupas.

1.4 Dificuldades

Uma das dificuldades envolvida no trabalho é que os dados de entrada têm constante de tempo incomparavelmente mais rápida que a constante de tempo da temperatura, o que fica claro ao se observar as escalas de tempo das figuras 1.2 e 1.3. Isto dificulta a escolha da taxa de amostragem dos sinais, uma vez que uma taxa rápida o suficiente para captar a variação dos sinais de entrada implicaria em muitos dados a serem tratados, e uma taxa que fosse suficiente apenas para a aquisição dos dados de saída perderia detalhes do sinal de entrada do sistema.

Além da diferença das constantes de tempo e da não linearidade entre ciclo e corrente, devem ainda ser consideradas as diferenças de cargas mecânicas sobre o motor. No caso da máquina de lavar, há dois fatores que influenciam a carga. O primeiro deles é a quantidade de roupa seca que é colocada no início da lavagem. O segundo fator é o nível de água selecionado. Este nível de água não é algo definido precisamente. Sabe-se apenas que existe um número definido de níveis com uma porcentagem grande de erros. Para determinar estes níveis é utilizado um dispositivo chamado pressostato, descrito no capítulo 2. Os fatores carga de roupa e nível de água devem ser considerados conjuntamente uma vez que a interação entre eles tem grande influência no problema. Por exemplo, para uma quantidade média de roupas, a escolha do nível baixo faz com que não haja água suficiente para a roupa flutuar, implicando em menor possibilidade de movimentação da roupa no cesto, o que sobrecarrega o motor. Contudo, se para a mesma quantidade média de roupas for selecionado o nível alto de água, apesar de haver mais massa no tanque da máquina, haverá menos esforço do motor uma vez que as roupas flutuarão na água, aumentando sua mobilidade.

Devido ao grande trabalho necessário para que se determine a influência das cargas mecânicas sobre o motor, os resultados aqui apresentados se limitam a uma condição fixa de nível de água e carga de roupa.

1.5 Organização da dissertação

No presente capítulo são mostradas as motivações para o trabalho e introduzidas as dificuldades a serem resolvidas. No segundo capítulo é descrita a máquina de lavar roupas e as etapas do algoritmo que ela executa para atingir seus objetivos, passando antes por um breve histórico deste produto tão comum atualmente. No terceiro capítulo encontra-se a descrição do motor de indução monofásico, que é o usado nas máquinas de lavar roupas e em outras aplicações que exijam motores elétricos de baixa potência. No quarto capítulo são introduzidas algumas técnicas de identificação de sistemas lineares e no quinto capítulo há a descrição de como foram resolvidos os problemas experimentais e também a apresentação dos resultados finais da modelagem. Ao final da dissertação há três apêndices. Dois deles são voltados para a teoria básica de circuitos elétricos e álgebra linear e um deles apresenta os códigos de rotinas implementadas em Matlab para a resolução dos problemas propostos no trabalho.

Embora voltada para o problema das máquinas de lavar roupas, a solução aqui proposta é interessante para quaisquer aplicações em que se esteja interessado no aquecimento do motor de indução monofásico operando em sua fase de transiente.

Capítulo 2

A máquina de lavar roupas

2.1 Introdução

Esta dissertação tem como objeto de estudo o aquecimento do motor usado em uma máquina de lavar roupas. Por este motivo, é interessante que se apresente o funcionamento deste eletrodoméstico tão comum atualmente.

Neste capítulo será apresentado um breve histórico da automatização do processo de lavagem de roupas e será mostrado como isto é feito hoje em dia com a apresentação das partes de uma lavadora de roupas e apresentação das etapas do ciclo de lavagem.

2.2 Histórico do processo de lavagem de roupas

O processo de lavagem de roupas é tão antigo quanto a existência das roupas. A medida que a humanidade foi evoluindo, este processo também evoluiu. Há relatos de que em sociedades antigas já havia métodos de lavagem que usavam areias abrasivas e pedras encontradas nas margens de rios para a lavagem das roupas [1]. Há também notas históricas sobre os marinheiros do período das grandes navegações que, para lavar suas roupas, colocavam-nas em um saco permeável que era amarrado ao navio. O choque do saco com o casco do navio e a ação das ondas permitiam que, passado um determinado tempo, as roupas ficassem menos sujas [2].

Os relatos acima mostram que já era conhecido desde a antigüidade o fato que o choque das roupas contra algo permitia a extração de sujeira. Em outras palavras, para que se lave roupas é interessante que elas sejam esfregadas. Baseado nesta idéia, Nathaniel Briggs patenteou em 1797 uma máquina de lavar roupas [46], [3]. Pouco se sabe sobre esta máquina, mas especula-se que ela nada mais era que uma tábua de esfregar roupas [1]. De qualquer forma, com ela não seria mais necessário procurar pedras ou areias abrasivas para a lavagem de roupas. No entanto, o processo continuava individual, ou seja, cada peça de roupa demandaria uma atenção especial.

Na tentativa de poder tratar o conjunto de roupas sujas como um todo e automatizar o processo de esfregá-las, foi criada por Hamilton Smith a máquina de lavar rotativa, patenteada em 1858. Esta máquina consiste de um tambor rotativo movido manualmente onde eram colocadas as roupas. A movimentação do tambor permitia que as roupas se chocassem contra as paredes e contra elas mesmas de forma que, com isto, fossem esfregadas. Nestas máquinas já eram usados alguns princípios que



Fig. 2.1: Máquina lavadora de roupas proposta por Hamilton Smith

são usados até hoje. Uma máquina destas é mostrada na figura 2.1.

No entanto, as máquinas manuais requeriam muito esforço do usuário. Para resolver este inconveniente no início do século XX foi criada por Alva J. Fisher uma máquina de lavar rotativa movida a motor elétrico [3], [20]. Esta máquina, conhecida como *Thor*, contava também com um par de cilindros rotativos que, ao se passar a roupa entre eles, faziam com que o excesso de umidade fosse extraído. A máquina de Fisher é mostrada na figura 2.2.

As máquinas do início do século XX não eram totalmente automatizadas. Era necessário que elas fossem enchidas e esvaziadas manualmente. Além disso, não havia muitas normas de segurança visando o usuário, de forma que muitas vezes ele era sujeito a choques elétricos. Além disso, algumas vezes a água entrava em contato com o motor, causando curtos circuitos e até mesmo pequenos incêndios.

Com o passar do século XX, as máquinas de lavar roupas foram se modernizando, incorporando itens de segurança do usuário e novas tecnologias disponíveis, se tornando cada vez mais seguras e confiáveis. Hoje em dia, elas se tornaram mecanismos complexos em que há grande aplicação de eletrônica e teoria de controle. Uma máquina de lavar moderna é mostrada na figura 2.3. Seu princípio de funcionamento é baseado tanto na ação mecânica quanto na potencialização da ação química de produtos adequados para a lavagem de roupas.

Para o futuro, espera-se que a máquina seja equipada com uma variedade de sensores e dispositivos que permitam o reconhecimento de todas as características da roupa colocada em seu interior tais quais peso, tipo de roupa, nível de sujeira, etc. Com isto, bastaria ao usuário carregar a máquina e acioná-la, sem ter que fazer nenhuma outra decisão. A máquina tomaria todas as decisões que implicassem em remoção da sujeira de roupas com o menor consumo possível de água, energia elétrica e produtos químicos.

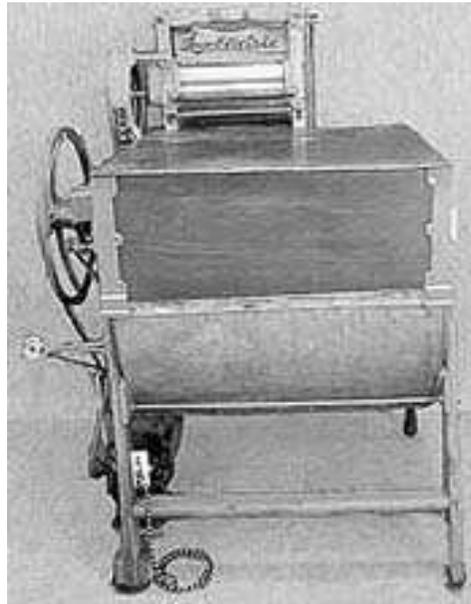


Fig. 2.2: Máquina lavadora de roupas patenteada por Alva J. Fisher



Fig. 2.3: Lavadora de roupas moderna

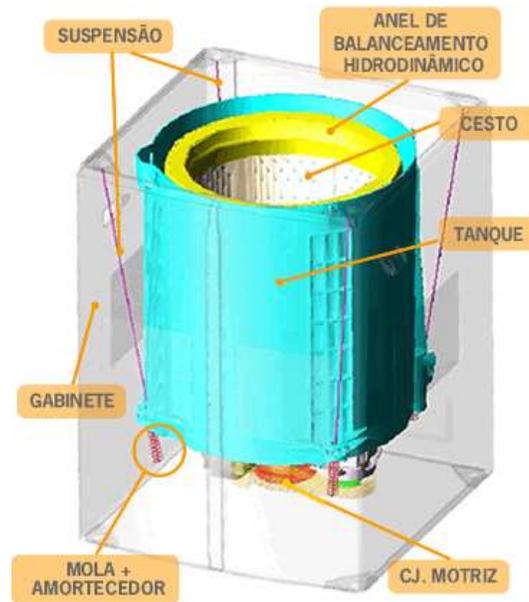


Fig. 2.4: Modelo da lavadora em AutoCad

2.3 A lavadora em partes

Os principais componentes das máquinas de lavar roupas são o gabinete, o cesto, o tanque, o agitador, o conjunto de suspensão, o controle eletrônico, a válvula, o pressostato, o motor, o mecanismo de engrenagens, o atuador de freio e a bomba. Há ainda outros componentes, que serão citados ao longo da explicação a seguir.

O gabinete é o corpo metálico visto na parte externa da lavadora. Ele tem como função dar suporte ao tanque, em que estão montados a maioria dos componentes da máquina de lavar roupas. No caso de lavadoras *top load*, ou seja, lavadoras em que as roupas são carregadas por sua parte superior e que são as mais usuais no Brasil, o gabinete é coberto pela tampa fixa onde há um recorte, sobre o qual é encaixada a tampa móvel, que é por onde as roupas são colocadas na máquina. São ainda montados na tampa fixa a placa eletrônica ou o timer eletromecânico que têm como objetivo controlar a ação da máquina a cada instante do ciclo, a válvula de entrada de água, que é um dispositivo eletromecânico que permite ou não a entrada de água vinda da rede de abastecimento e ainda o pressostato, que é uma chave que abre e fecha de acordo com a pressão detectada por uma almofada de ar que fica na parte inferior do tanque. É a partir desta chave que o controle da máquina conhece o nível de água no tanque e decide se ele é ou não alto o suficiente para interromper o abastecimento de água durante o enchimento ou se ele já é ou não baixo o suficiente para interromper o funcionamento da bomba de drenagem.

O tanque é pendurado no gabinete por quatro conjuntos de suspensão, formados por vareta, mola e amortecedor. Com isto, ele ganha a mobilidade necessária caso algum movimento translacional ocorra devido ao desbalanceamento da carga durante a centrifugação, conforme é explicado na seção 2.4. Além disto, as molas e os amortecedores têm coeficientes adequados para que a movimentação translacional seja a menor possível.



Fig. 2.5: Parte inferior da tampa fixa da máquina de lavar roupas



Fig. 2.6: Fotografia do tanque suportado pelos quatro conjuntos de suspensão

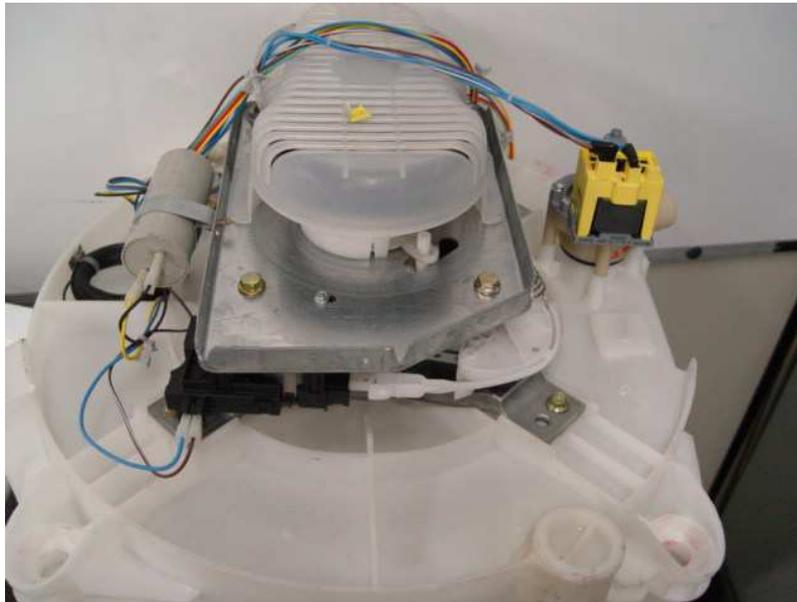


Fig. 2.7: Fotografia da parte inferior do tanque

Na parte interna do tanque, é acoplado o cesto que é um cilindro perfurado aberto em uma das extremidades, feito geralmente de plástico ou alumínio. Ele é montado de forma que tenha liberdade de movimento rotativo. No interior do cesto está o agitador, que é uma torre com pás que tem como objetivo esfregar as roupas, ou o *impeller*, que é uma espécie de hélice muito usada em tanquinhos ou lavadoras semi automáticas. Ambos também têm liberdade de movimento rotativo e podem ou não ser acoplados ao cesto.

Sob o tanque é montado o mecanismo de engrenagens. Este mecanismo tem como função fazer a comutação entre dois possíveis modos de funcionamento. No primeiro modo, apenas o agitador tem movimento e sua velocidade é mais baixa que a do motor. No segundo modo tanto agitador quanto cesto têm movimento com velocidade igual à do motor. Para ativar o mecanismo, é usado um dispositivo eletromecânico denominado atuador do freio. Este dispositivo tensiona uma correia que prende ou não uma banda de freio ao mecanismo de engrenagens. Caso o dispositivo não esteja energizado, a correia está presa e apenas o agitador se move com velocidade um pouco menor que a do motor. Caso contrário, a correia está solta e tanto o cesto quanto o agitador giram com velocidade igual à do motor.

Sob o tanque ainda ficam o motor monofásico de indução que será tratado no capítulo 3, o capacitor e a bobina usados na partida do motor e a bomba de drenagem usada para drenar a água do tanque. Esta bomba é alimentada em conjunto com o atuador de freio uma vez que ambos são apenas necessários na mesma etapa do ciclo de lavagem.

2.4 Etapas do ciclo de lavagem

O ciclo de lavagem das máquinas de lavar roupas modernas consiste basicamente de quatro etapas descritas abaixo:

- **Molho**

Na primeira das etapas, as roupas são colocadas de molho em água durante um tempo com ordem de grandeza de minutos. Durante esta etapa, o sabão colocado pelo usuário tem ação química sobre as roupas quebrando e se agregando às partículas de sujeira. Em máquinas de lavar mais sofisticadas, é ativada uma resistência que aquece a água, potencializando a ação química do sabão.

Nas máquinas em que há aquecimento, o agitador é acionado por alguns segundos durante o molho para distribuir melhor o sabão e o calor que é gerado pontualmente no tanque.

- **Agitação**

Durante a etapa de agitação, o motor da máquina é ligado intermitentemente nos dois sentidos de rotação. Desta forma, as roupas se chocam contra o agitador e contra o cesto, o que é análogo ao ato de esfregar as roupas. Durante esta etapa, a principal ação envolvida na limpeza é a ação mecânica. Ao fim desta etapa geralmente a água é drenada pela bomba de drenagem, levando parte da sujeira das roupas.

O design do agitador ou do *impeller* é feito de tal forma que se obtenha a melhor eficiência possível durante esta etapa.

- **Enxagüe**

Na etapa de enxagüe, a bomba é acionada para a retirada da água que está no tanque e, terminado o esvaziamento, a válvula de entrada de água é acionada. Com isto, água limpa entra na máquina até que se atinja o nível escolhido pelo usuário. Durante esta etapa todos os outros dispositivos da máquina estão desligados.

Esta etapa ocorre principalmente em dois momentos. O primeiro deles é entre o molho e a agitação. Desta forma permite-se que a sujeira mais pesada que foi desprendida das roupas pela ação química do sabão seja direcionada para o esgoto. O segundo momento é logo depois da agitação, antes da aplicação do amaciante. Neste momento deve ocorrer o enxagüe porque o amaciante que entrará no tanque não pode se misturar com o sabão usado durante a lavagem, pois senão haveria risco de se manchar as roupas. Mesmo não havendo amaciante a ser colocado na máquina, o enxagüe pós agitação se faz necessário para evitar o risco de um fenômeno conhecido como *suds lock*. Este fenômeno raro ocorre quando a espuma do sabão da máquina trava o cesto durante a centrifugação devido a sua viscosidade mais alta com relação à viscosidade da água.

O número de enxagües posterior à agitação é fixo em máquinas mais simples. Nos modelos mais sofisticados, o usuário tem a possibilidade de escolher o número de enxagües que julgue adequado, levando em conta a quantidade de roupas colocadas e a quantidade de água que ele esteja disposto a usar no ciclo.

- **Centrifugação**

A centrifugação, que é a última das etapas, tem como objetivo tirar o excesso de água das roupas. Ela faz algo análogo ao que era feito pelos cilindros da máquina Thor. Antes de iniciar a centrifugação, a bomba de drenagem retira toda a água da máquina. Como a bomba está funcionando, o atuador de freio também está acionado. Terminada a drenagem, o motor é ligado de forma contínua em um sentido. Como o atuador está funcionando, todo o cesto gira a uma alta velocidade. Com isto, as roupas que estiverem no interior da máquina são pressionadas contra a parede do cesto pela força centrífuga fazendo com que grande parte da umidade residual que esteja nela seja removida.

Como o cesto gira em alta rotação, há o perigo de que, se as cargas não estiverem distribuídas uniformemente, haja movimentação longitudinal do tanque, que pode atingir o gabinete, causando avarias no mecanismo. Para evitar que isto ocorra, antes da centrifugação é feito um pequeno ciclo de motor ligado e desligado que tem como objetivo distribuir bem as roupas no cesto. Enquanto isto, a válvula de admissão de água também é acionada de forma intermitente de forma que a roupa seja molhada por igual. Esta tarefa feita antes da centrifugação é conhecida como *SIS*.

Capítulo 3

A máquina de indução monofásica

3.1 Introdução

Motores de indução monofásicos são amplamente utilizados em aplicações domésticas devido a sua robustez, simplicidade e baixo custo. Além de estarem presentes em máquinas de lavar roupas, que são o objeto de estudo desta dissertação, os motores de indução monofásicos ainda podem ser encontrados em ventiladores, máquinas de automatização de portões, liquidificadores e processadores de alimentos industriais, secadoras de roupa, cortadores de grama, dentre outros.

Embora o foco desta dissertação seja apenas o motor de indução, no título deste capítulo é usado o termo máquina por ele ser mais genérico que os termos motor e gerador. Tanto os motores quanto os geradores têm princípios e montagens semelhantes, variando apenas o sentido do fluxo de energia da seguinte forma:

- **Motor:** Energia elétrica se transforma em energia mecânica.
- **Gerador:** Energia mecânica se transforma em energia elétrica.

Desta forma, pode-se usar o termo máquina no estudo dos motores, permitindo que não se perca generalidade.

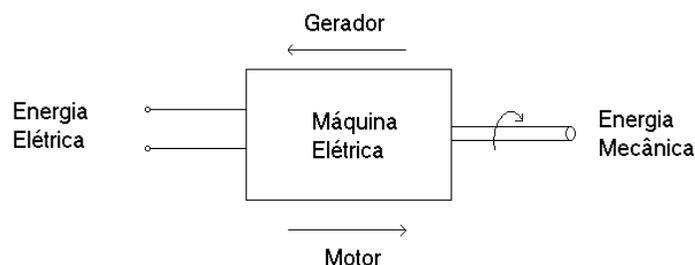


Fig. 3.1: Máquina elétrica e as possíveis direções de transformação de energia

A máquina de indução é uma das três máquinas elétricas mais estudadas, sendo que as outras duas são a de corrente contínua e a síncrona, cujos conceitos foram, de certa forma, precursores

daqueles adotados na máquina de indução, conforme será mostrado na primeira seção do capítulo. Na segunda seção será introduzido o circuito elétrico equivalente por fase da máquina de indução polifásica. Serão também revistos alguns conceitos envolvidos na máquina de indução monofásica para que, com esta base bem sedimentada, seja introduzido o modelo elétrico equivalente da máquina de indução monofásica. Finalmente, será mostrada uma experiência que tem por objetivo conhecer as mudanças das características da máquina de indução monofásica em função de sua temperatura. Conhecer este comportamento será fundamental para a determinação do modelo de aquecimento, conforme foi comprovado ao longo da dissertação.

3.2 Princípios da máquina de indução

A máquina elétrica de indução foi proposta por Nikola Tesla [44] em um trabalho que quebrou o paradigma da época, que era o uso de máquinas elétricas de corrente contínua. Naquela ocasião, havia muitas discussões entre os simpatizantes da corrente contínua, que tinham como seu maior ícone Thomas Edison e os simpatizantes da corrente alternada, representados principalmente por George Westinghouse e pelo próprio Tesla. O grande trunfo do primeiro grupo era que, até então, as máquinas mais usuais eram as de corrente contínua (ver a introdução de [14]). Além disso, havia um sistema de distribuição de corrente contínua implementado, saindo da *Pearl Street power station*, que era uma usina termoelétrica administrada por Edison [17]. O segundo grupo, por sua vez, se valia das vantagens da transmissão em corrente alternada devidas à facilidade de se mudar sua amplitude com o uso de transformadores de tensão. Sendo assim, se houvesse uma boa proposta de construção de uma máquina de corrente alternada, o primeiro grupo seria facilmente desbancado. Com isto nota-se a importância do trabalho de Tesla nesta disputa.

No início de seu trabalho, Tesla apresenta o motor de corrente contínua mostrando que embora a tensão nos terminais fosse contínua, o que fazia com que máquina se movesse quando ligada como motor era a variação do fluxo magnético, que é uma grandeza relacionada à corrente. Em outras palavras, Tesla queria dizer que o motor de corrente contínua se movia devido ao efeito de uma corrente alternada. Isto é possível devido à ação do comutador, que inverte a corrente do rotor, que é a parte girante da máquina, a cada meia volta que ele dá em torno do próprio eixo. Para mais informações, são sugeridas as referências [38] e [21].

Conhecendo o princípio que relaciona a corrente com o campo magnético, o cientista propôs uma experiência semelhante a esta: um estator, que é a parte fixa de uma máquina elétrica, seria provido de quatro bobinas feitas com dois fios. Estas bobinas estariam dispostas como duas duplas de jogadores em uma mesa de truco. Ou seja, um dos fios seria enrolado em uma saliência do estator, chamada de pólo, e depois seguiria para o outro lado do estator para ser enrolado no pólo oposto. O outro fio idem, sendo que os pares de pólos formam 90° entre si, conforme pode ser visto na figura 3.3

Em um primeiro momento, é aplicada uma tensão entre os terminais A e B . Neste instante, o campo magnético está todo na vertical. Depois, a alimentação entre A e B é reduzida ao longo do tempo enquanto a tensão entre os terminais C e D aumenta. Desta forma, haverá um campo magnético resultante girante resultado da soma dos vetores de campo magnético a cada momento, conforme pode ser visto na figura 3.4.

Ao se colocar um disco de material magnético dentro do estator, ele acompanhará o campo girante de forma síncrona. De acordo com o texto original de Tesla este fenômeno ocorre pois:

(No Model.)

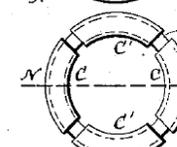
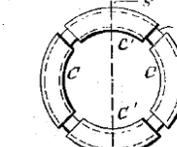
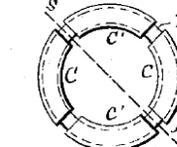
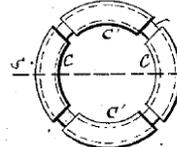
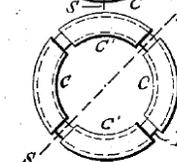
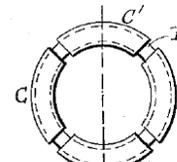
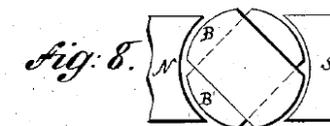
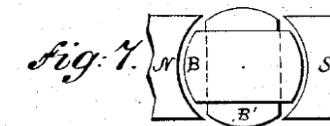
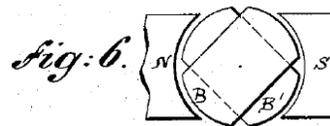
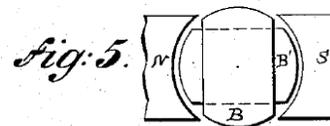
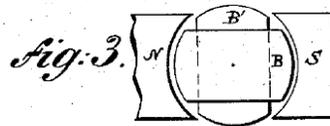
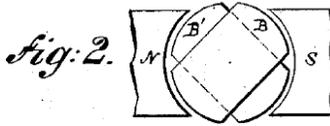
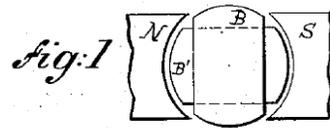
4 Sheets—Sheet 1.

N. TESLA.

ELECTRO MAGNETIC MOTOR.

No. 381,968.

Patented May 1, 1888.



WITNESSES:

Frank E. Hartley
Frank B. Murphy

INVENTOR.

Nikola Tesla,
BY
Duncan, Curtis & Sage
ATTORNEYS.

Fig. 3.2: Figura da patente de Tesla ilustrando o conceito de campo girante

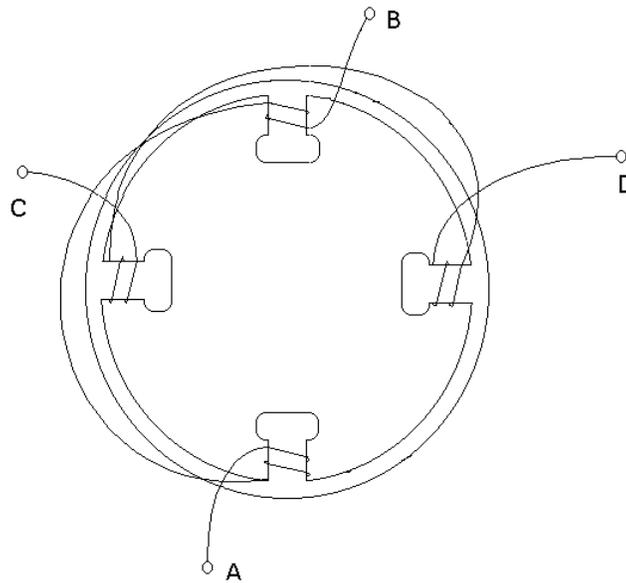


Fig. 3.3: Motor com dois polos e duas bobinas

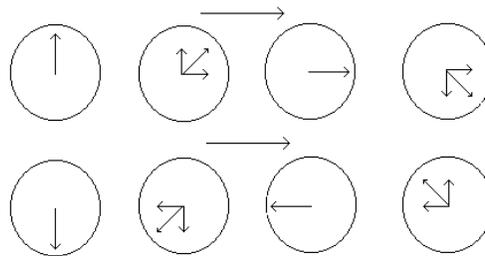


Fig. 3.4: Variação da direção do campo magnético ao longo do tempo

Quando o campo magnético resultante se aproxima do disco, ele induz um outro campo de polaridade oposta no próprio disco, de forma que é produzida uma atração entre o disco e o ponto em que está o campo magnético resultante. A medida que o este campo magnético gira, o disco o acompanha.

Com isto, tem-se então a máquina de histerese. Caso o campo magnético do rotor seja gerado por um eletroímã tem-se então o motor síncrono, que pode ser usado como gerador ao se inverter o sentido do fluxo de energia, conforme comentado na introdução.

O motor síncrono, no entanto, não é capaz de produzir conjugado de partida se sua alimentação tiver frequência fixa¹. Para resolver o problema, Tesla propôs o que é conhecido hoje como máquina de indução. Nesta máquina, ao invés de se colocar um anel de material magnético dentro do estator,

¹Hoje em dia é possível partir motores síncronos usando dispositivos de eletrônica de potência que variam a frequência da alimentação

é colocado um núcleo ferromagnético no qual são enroladas bobinas curto circuitadas. No caso do experimento de Tesla, havia duas bobinas perpendicularmente dispostas, como é mostrado na figura 3.5.

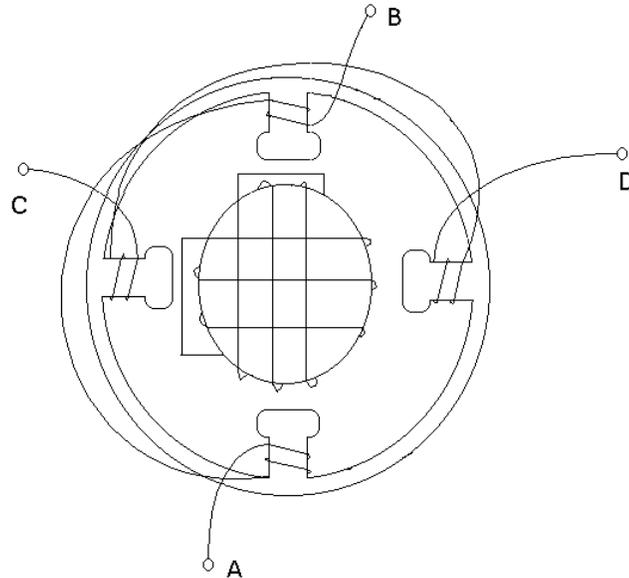


Fig. 3.5: Máquina elétrica usada no experimento de Tesla

A medida que o campo magnético girante e variante no tempo é aplicado, são induzidas correntes nas bobinas. No entanto, como as bobinas também estão no rotor que gira, a variação do fluxo magnético é proporcional à diferença entre as velocidades do campo e do rotor.

Como exemplo, durante a partida, assim que o campo girante é ligado, a diferença entre velocidade do campo girante e a velocidade do rotor será máxima, uma vez que o campo girante gira com toda velocidade e o rotor está parado, fazendo com que a variação do fluxo com relação às bobinas do rotor também seja máxima, o que também faz com que a corrente nas bobinas do rotor seja máxima. A corrente das bobinas do rotor induz um campo no rotor, que neste caso também é máximo, fazendo com que ele tenha mais força para acompanhar o campo girante. A medida que a velocidade do rotor aumenta, a diferença entre a velocidade do campo e a velocidade do rotor diminui, fazendo com que a corrente induzida nas bobinas do rotor diminua, o que enfraquece o campo gerado por elas. O enfraquecimento do campo é seguido por perda de velocidade, mas isto é compensado pois a perda de velocidade do rotor aumentará a diferença entre as velocidades do rotor e do campo girante, fazendo com que uma corrente maior seja induzida nas bobinas do rotor, implicando em um campo magnético mais forte no rotor, que segue o campo girante. Isto ocorrerá de forma transitória até que o motor atinja o regime de velocidade, ou seja, até que a diferença entre a velocidade do rotor e a do campo girante seja tal que a corrente induzida no rotor gere um campo forte o suficiente para manter aquela diferença de velocidade. O princípio de funcionamento durante o transitório é mostrado de forma mais didática na figura 3.6.

Caso qualquer carga seja adicionada ao eixo do rotor, sua velocidade diminuirá, fazendo com que a diferença entre velocidade de campo girante e velocidade do rotor aumente, aumentando a variação

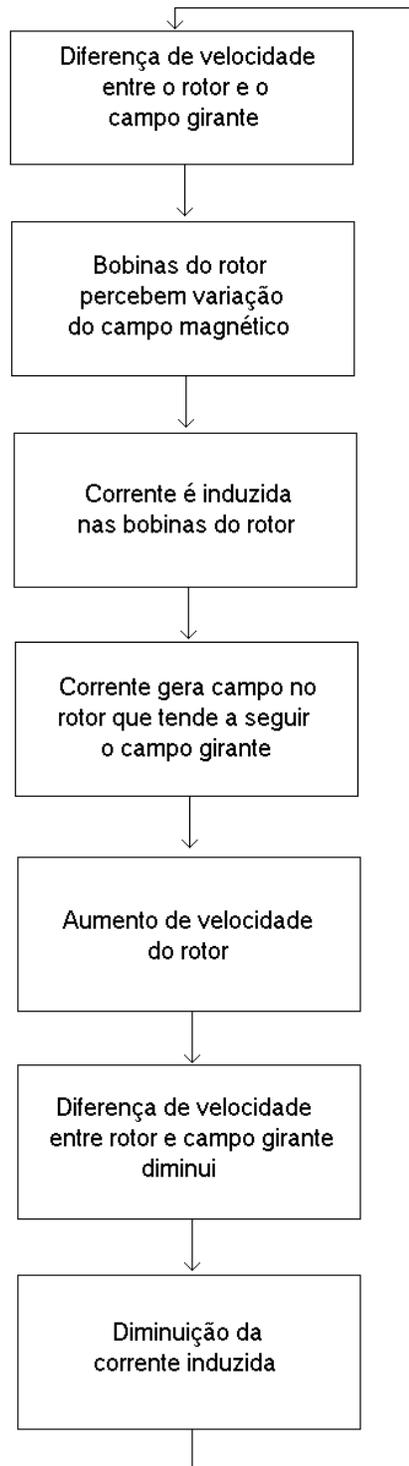


Fig. 3.6: Fluxograma do funcionamento do motor de indução

do fluxo do ponto de vista do rotor, aumentando a corrente de suas bobinas, causando o fortalecimento do campo das bobinas, que tende a seguir mais de perto o campo girante, aumentando a velocidade do rotor.

Além de todas estas vantagens, a máquina de indução tem uma característica de alto conjugado para as velocidades de operação. Desta maneira, mesmo antes de existirem estudos mais profundos em teoria de controle, pode-se dizer que Tesla conseguiu um motor que é capaz de seguir de perto uma referência de velocidade, que é o campo girante.

3.3 Circuito equivalente da máquina de indução

Nesta seção é apresentado o circuito elétrico equivalente por fase da máquina de indução polifásica baseado principalmente em [9]. Na próxima seção serão mostrados alguns conceitos a mais que estão envolvidos na máquina de indução monofásica para que se possa introduzir o circuito equivalente da máquina de indução monofásica de forma mais simples daqui a duas seções.

O princípio de funcionamento de uma máquina de indução é semelhante ao do transformador, ou seja, uma bobina alimentada gera um fluxo magnético que, ao passar por uma outra bobina, gera uma corrente. Sendo assim, o modelo elétrico de um transformador, mostrado na figura 3.7, pode ser usado para a máquina de indução.

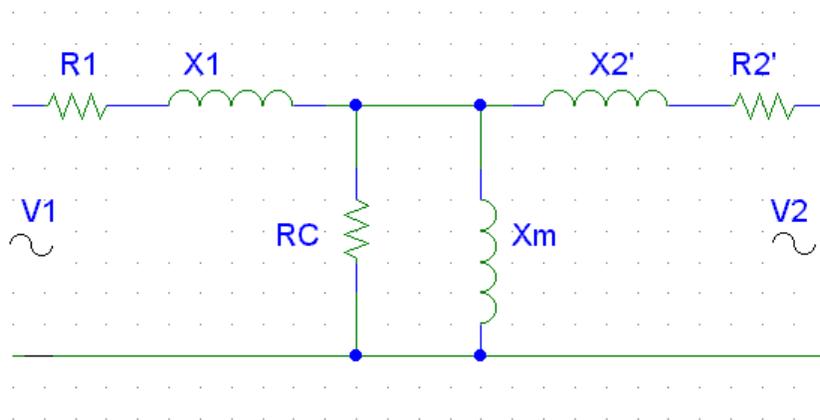


Fig. 3.7: Circuito elétrico equivalente de um transformador

O enrolamento primário (que no caso da máquina de indução é o estator) apresenta uma resistência elétrica, que é representada pela resistência R_1 . Além disso, quando há corrente elétrica passando por ele, haverá fluxo magnético na região livre entre o primário e o secundário (que no caso é o rotor), chamada de entreferro, além de fluxo disperso no próprio enrolamento primário. Estes fluxos de dispersão são representados pela reatância X_1 . A reatância X_m representa o fluxo que que liga tanto a enrolamentos do estator quanto do rotor e a resistência R_c representa as perdas por efeito joule e correntes parasitas.

Para o enrolamento secundário, tem-se a resistência R_2' , representando a resistência equivalente por fase e a indutância X_2' , que representa a indutância própria do enrolamento do rotor. O sobrescrito

' denota que as grandezas do secundário estão refletidas no enrolamento primário. A carga, que no caso do transformador representa aquilo que será alimentado pelos terminais do secundário, representa para o motor eventuais cargas mecânicas que podem ser consideradas como resistências puras, uma vez que consomem apenas energia ativa.

Na máquina de indução, devido à rotação do rotor, a velocidade do campo girante com relação ao rotor é menor do que sua velocidade com relação ao estator. Uma ilustração linear para isto pode ser percebida em uma corrida de automóveis. Um veículo rápido tem velocidade menor com relação a um veículo menos rápido do que sua velocidade com relação a um observador parado. Desta forma, a variação do fluxo magnético é, do ponto de vista do enrolamento do rotor, feita com uma taxa mais baixa se comparada àquela que ocorreria se o rotor estivesse em repouso. Para quantificar esta velocidade relativa, foi criado o conceito de escorregamento, representado por s , definido a seguir.

Seja p o número de pólos de uma máquina, ou seja, o número de saliências do estator em que estão enroladas as bobinas. Como exemplo, na máquina de Tesla havia 2 pólos. A cada vez que a alimentação senoidal de um par de pólos completa caminha um ângulo θ_s de 2π radianos, o campo girante terá caminhado θ_m radianos mecânicos no estator dados por:

$$\theta_s = p \frac{\theta_m}{2} \quad (3.1)$$

Dada esta relação de ângulos, pode-se estabelecer uma relação entre a frequência da alimentação elétrica ω_s e a velocidade angular mecânica ω_m dividindo-se os dois lados da equação 3.1 pelo tempo, resultando em:

$$\omega_s = p \frac{\omega_m}{2} \quad (3.2)$$

A velocidade linear n_1 da máquina será dada, em termos da velocidade angular ω_m por:

$$\omega_m = 2\pi n_1 \quad (3.3)$$

Da mesma forma, a frequência da alimentação f_1 se relaciona com a velocidade angular da alimentação por:

$$\omega_s = 2\pi f_1 \quad (3.4)$$

A partir das equações 3.2, 3.3 e 3.4 pode-se concluir que:

$$n_1 = \frac{2f_1}{p} \quad [rps] \quad (3.5)$$

ou ainda, transformando para uma unidade mais usual:

$$n_1 = \frac{120f_1}{p} \quad [rpm] \quad (3.6)$$

Seja n a velocidade do rotor. Como foi visto na primeira seção, esta velocidade será menor que a velocidade n_1 do campo girante, mas na mesma direção. Com isto, a velocidade relativa entre o rotor e o campo girante, definida por n_2 , será:

$$n_2 = n_1 - n \quad (3.7)$$

Dividindo e multiplicando o lado direito da equação 3.7 por n_1 chegamos finalmente ao conceito de escorregamento s

$$n_2 = \frac{n_1 - n}{n_1} n_1 = s n_1 \quad (3.8)$$

O nome escorregamento é bem adequado pois ele representa o quanto que o rotor escorrega em relação ao campo girante. Além disso, também é interessante perceber que, devido à diferença entre a velocidade do campo girante e a velocidade do rotor, a frequência da corrente elétrica induzida no enrolamento do rotor é diferente daquela da corrente que alimenta o estator e é dada por:

$$f_2 = s f_1 \quad (3.9)$$

Definido o conceito de escorregamento e a forma como a frequência do secundário se comporta, pode-se voltar ao circuito equivalente e rebater o enrolamento secundário para o primário para se obter um circuito sem transformador.

A tensão induzida no rotor é, conforme a equação proporcional à variação do fluxo. Considere que há apenas um par de pólos no estator que criam um fluxo magnético vertical. Se o rotor estiver girando dentro do estator, e houver uma bobina enrolada neste rotor, o fluxo cruzando a bobina será máximo quando seu eixo estiver na vertical, ou seja, quando o ângulo mecânico $\theta_m = \omega_m t$ entre a linha que passa pelos dois pólos e o rotor for nulo. Quando o eixo da bobina estiver na horizontal, o fluxo que a cruza será nulo. Com isto, pode-se dizer que o fluxo que corta a bobina varia com o cosseno do ângulo mecânico, ou seja

$$\Phi \propto \Phi_{max} \cos(\omega_m t) \quad (3.10)$$

A tensão induzida na bobina será então:

$$E_* = \frac{d\Phi}{dt} \propto \omega_m \Phi_{max} \sin(\omega_m t) \propto f_* \Phi_{max} \sin(\omega_m t) \quad (3.11)$$

ou seja, a tensão induzida é proporcional à frequência. Logo, a tensão induzida no rotor em função da tensão aplicada no estator, supondo que a relação de espiras de rotor e estator seja 1:1, é, usando 3.9, igual a:

$$E_2 = s E_1 \quad (3.12)$$

A impedância do enrolamento secundário do ponto de vista do primário, supondo que a relação entre o número de espiras de rotor e estator seja unitária, e que a carga mecânica consome energia puramente ativa, e ainda que ela somada a R'_2 é igual a R'_2 apenas por uma questão de nomenclatura, é dada por

$$Z'_2 = \sqrt{R'^2_2 + s^2 X'^2_2} \quad (3.13)$$

Note que a indutância do secundário foi multiplicada pelo escorregamento s para compensar a mudança de frequência que ocorre conforme mostra a equação 3.9. Em casos reais, como os valores de resistências e indutâncias são calculados empiricamente conforme será visto mais adiante neste capítulo, a relação entre espiras de rotor e estator perde sua importância pois ela ficará embutida no valor calculado para a resistência.

Das equações 3.12 e 3.13, a corrente que passa pelo enrolamento secundário do ponto de vista do primário é dada por:

$$I'_2 = \frac{sE_1}{\sqrt{R_2'^2 + s^2 X_2'^2}} \quad (3.14)$$

Sendo que esta equação pode ser simplificada da seguinte forma:

$$I'_2 = \frac{E_1}{\sqrt{(R_2'/s)^2 + X_2'^2}} \quad (3.15)$$

Por ser muito alta, a resistência de dispersão R_c pode ser retirada do circuito. Com isto o circuito equivalente por fase do motor de indução polifásico é conforme o mostrado na figura 3.8

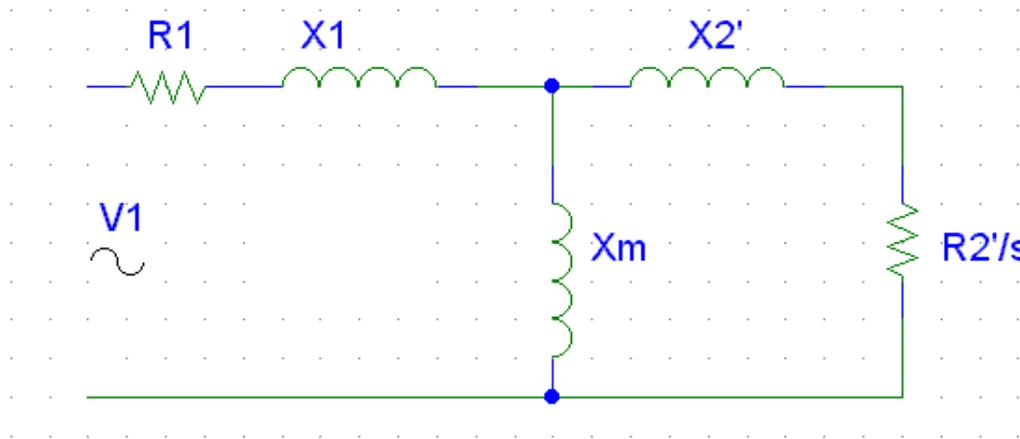


Fig. 3.8: Modelo elétrico equivalente de um motor de indução

3.4 Conceitos sobre a máquina de indução monofásica

A máquina de indução proposta por Tesla usa em seu estator duas bobinas, alimentadas por tensões senoidais defasadas de 90° , conforme mostrado na figura 3.3. Sendo assim, é necessária uma fonte de alimentação bifásica para que ela funcione. No entanto, em aplicações residenciais leves, como é o caso da máquina de lavar roupas, só está disponível uma fase da rede elétrica de forma que é necessário o uso de motores de indução monofásicos.

Como exemplo, suponha um motor que tem em seu estator um par de bobinas formado por um fio e como rotor um núcleo com bobinas curto circuitadas conforme é mostrado na figura 3.9

Quando a bobina do estator for alimentada por uma tensão senoidal, haverá um fluxo induzido em seu interior. No entanto, este fluxo não é girante, pois não há mais a outra bobina usada por Tesla, de modo que não ocorre mais a soma de fasores mostrada na figura 3.6. Este fluxo será pulsado, ou seja, ora será máximo, ora será mínimo, conforme mostrado na figura 3.10. Por este motivo, a máquina não parte.

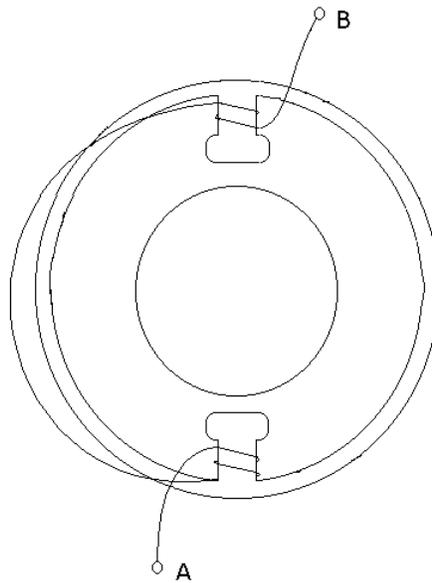


Fig. 3.9: Exemplo didático de máquina

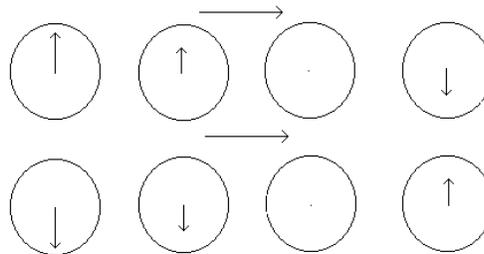


Fig. 3.10: Evolução do campo pulsante ao longo do tempo

Para que se possa fazer um estudo analítico usando a teoria de campos girantes, o campo pulsante pode também ser visto como a soma de dois campos girantes, com direção oposta, conforme mostrado na figura 3.11.

Também é possível mostrar de forma analítica que o campo pulsante é a soma de campos girantes na direção oposta. O fluxo magnético em uma determinada direção é função do ângulo θ que esta direção forma com a linha dos pólos, ou seja:

$$\Phi(\theta) = \Phi(t) \cos(\theta) \quad (3.16)$$

Mas o fluxo é também uma função do tempo uma vez que a tensão aplicada é alternada, ou seja:

$$\Phi(t) = \Phi_{max} \cos(\omega t) \quad (3.17)$$

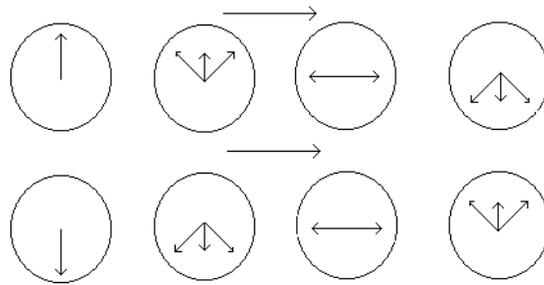


Fig. 3.11: Campo pulsante visto como soma de dois campos girantes em direção oposta

Portanto:

$$\Phi(\theta, t) = \Phi_{max} \cos(\omega t) \cos(\theta) \quad (3.18)$$

O que pode ser reescrito como:

$$\Phi(\theta, t) = \frac{1}{2} \Phi_{max} [\cos(\theta - \omega t) + \cos(\theta + \omega t)] \quad (3.19)$$

De onde fica claro que há um campo girante com velocidade ω e outro com velocidade $-\omega$.

O campo girante e suas grandezas relacionadas que estiverem no sentido da rotação do rotor serão chamados de progressivos e ganharão o subscrito p enquanto que o campo girante e as grandezas relacionadas com o sentido contrário à rotação do rotor serão chamados de regressivos, ganhando o subscrito r .

Pode-se esperar que a relação entre o conjugado da máquina e sua velocidade seja semelhante à soma de duas curvas de conjugado de uma máquina de indução polifásica sendo que uma delas é rebatida nos dois eixos. Cada uma destas curvas representaria o conjugado de um dos campos girantes. Partindo desta hipótese, poder-se-ia esperar que, se a máquina sair do repouso por algum mecanismo que a faça, ela desenvolverá conjugado na direção de seu movimento, conforme mostrado na figura 3.12.

No entanto, a característica de conjugado real é ainda mais acentuada que a mostrada na figura 3.12. Na verdade, como o campo regressivo gira na direção oposta à do rotor, sua velocidade relativa é mais alta do que a velocidade relativa obtida quando o rotor está parado. Isto faz com que as correntes induzidas nas bobinas do rotor sejam maiores. Estas correntes produzirão um fluxo que tende a diminuir as correntes formadoras de campo regressivo no motor, favorecendo ainda mais o movimento progressivo. Este fenômeno faz com que a verdadeira relação entre conjugado e velocidade no motor de indução monofásico seja a mostrada na figura 3.13. As figuras 3.12 e 3.13 foram retiradas da fonte [21].

Para garantir que a máquina de indução monofásica parta, são usadas principalmente duas técnicas. A primeira delas é o uso de um enrolamento auxiliar alocado no estator e ligado em paralelo com o enrolamento principal. Este enrolamento auxiliar é feito de forma que a fase de sua impedância seja diferente da fase da impedância do enrolamento principal, o que pode ser obtido pelo uso de condutores de dimensões diferentes em cada enrolamento. Desta forma, a corrente através desse enrolamento é defasada, causando o mesmo efeito de se usar um enrolamento bifásico, conforme foi feito por Tesla. A segunda forma é colocar um enrolamento auxiliar ligado em série com um capacitor, e este

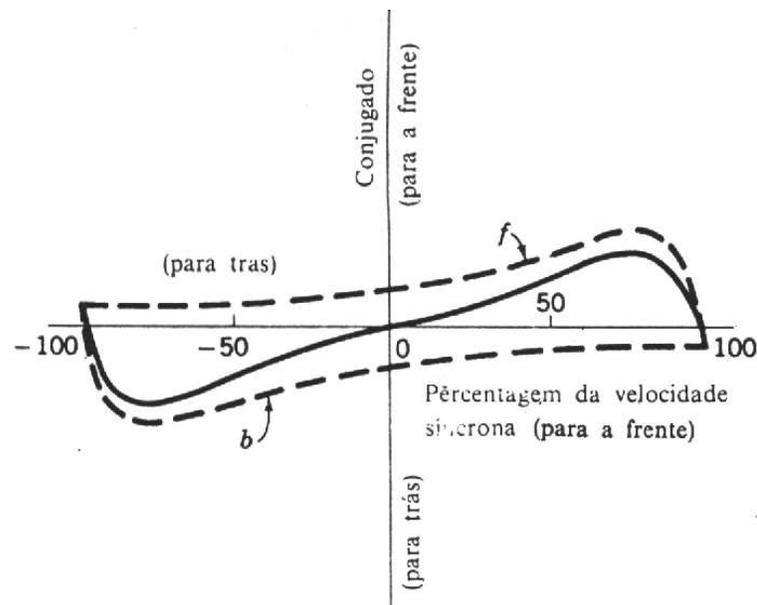


Fig. 3.12: Características esperada da relação entre velocidade e conjugado da máquina de indução monofásica a partir da hipótese de campos girantes.

conjunto é posto em paralelo com o enrolamento principal. Desta forma, é obtido o mesmo efeito de defasagem, permitindo que a máquina parta.

No caso do motor usado na máquina de lavar roupa, há dois enrolamentos iguais, além de uma bobina externa e um capacitor, ligados conforme é mostrado na figura 3.14.

Os enrolamentos do motor são feitos de forma que cada um impulsione o motor para um lado. Sendo assim, eles são chamados de enrolamento *CW* (*clockwise*) e *CCW* (*counterclockwise*). Quando a fonte de alimentação é ligada entre os terminais *CW* e *GND*, o enrolamento *CW* será o principal. O outro enrolamento, ligado em série com a bobina externa e o capacitor, funcionará como enrolamento auxiliar. Isto fará com que o motor gire no sentido horário. No caso em que a alimentação é feita entre os terminais *CCW* e *GND*, o enrolamento *CCW* é o enrolamento principal, e o *CW* será o enrolamento auxiliar, tendo a corrente defasada pelo conjunto formado pelo capacitor e pela bobina externa. A possibilidade de fazer com que o motor gire para os dois lados apenas mudando os terminais em que a alimentação é ligada é bastante interessante para o caso da máquina de lavar roupas uma vez que, durante a agitação, esta possibilidade faz com que a roupa seja esfregada de uma forma melhor do que se o motor girasse apenas para um dos lados. Durante a agitação, o motor está em regime intermitente periódico com partida, e seu comportamento de temperatura é conforme o mostrado na figura 3.15. No eixo superior desta figura é mostrada a corrente durante o ciclo. Deve-se notar que o tempo de partida (pico de corrente) é significativo com relação ao tempo total de motor ligado. No eixo inferior nota-se que o tempo de ciclo não é grande o suficiente para que a temperatura atinja um valor de regime.

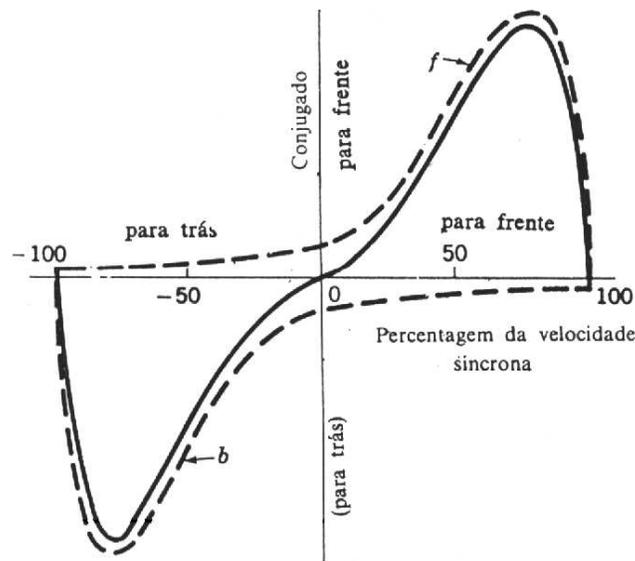


Fig. 3.13: Característica real da relação entre velocidade e conjugado da máquina de indução monofásica

3.5 Circuito equivalente da máquina de indução monofásica

Partindo-se da teoria dos campos girantes opostos apresentada na seção anterior, e também do circuito elétrico equivalente da máquina de indução polifásica, pode-se obter o circuito equivalente da máquina de indução monofásica.

A impedância relativa ao estator se mantém a mesma, representada pela resistência R_1 e pela reatância X_1 . A parte do circuito equivalente referente ao motor sofre, no entanto, algumas mudanças. Ao invés de ser apenas um circuito com a reatância de dispersão X_m em paralelo com a reatância do enrolamento do rotor X'_2 e sua resistência R'_2 dividida pelo escorregamento, agora há dois circuitos com esta mesma forma, ligados em série, sendo que cada um dos circuitos representa um dos campos girantes opostos.

As reatâncias são divididas em partes iguais pelos dois circuitos, assim como as resistências. Em outras palavras, estes valores são, em cada um dos circuitos, a metade dos que seriam usados caso se tratasse do circuito equivalente por fase de uma máquina de indução polifásica.

A única diferença entre os circuitos em série que representam o rotor é que, como o primeiro representa o campo progressivo, a resistência é dividida pelo escorregamento s , assim como no caso da máquina de indução monofásica. O segundo circuito, por representar o campo regressivo, tem a resistência dividida pelo escorregamento com relação ao campo regressivo. Se o rotor girasse com a velocidade síncrona, a velocidade entre ele e o campo girante regressivo seria igual a duas vezes a velocidade síncrona, uma vez que cada um deles gira para um lado. No entanto, a velocidade do rotor é um pouco menor que a síncrona devido ao escorregamento, de forma que a velocidade do rotor com relação à velocidade do campo girante regressivo é $2 - s$ vezes maior que a velocidade síncrona. Portanto, a resistência no segundo circuito é dividida por $2 - s$.

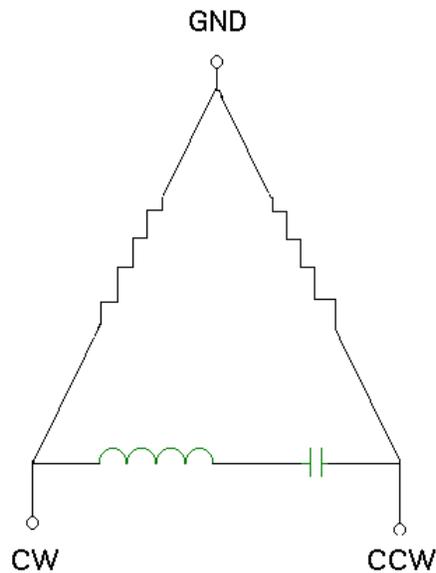


Fig. 3.14: Esquema de ligação do motor de indução monofásico usado na máquina de lavar roupas

O circuito equivalente final de um enrolamento máquina de indução monofásica é mostrado na figura 3.16. Na figura 3.17 é mostrado o circuito equivalente do motor usado em máquinas de lavar roupas já com o capacitor e a bobina ligados em série com enrolamento auxiliar, que ora é o *CW* e ora o *CCW*, dependendo do lado para o qual se quer girar a máquina. Deve-se notar que neste circuito, além dos circuitos auxiliar e principal ligados em paralelo, há ainda fontes de tensão representando as tensões induzidas entre os enrolamentos principal e auxiliar. Como as correntes nos enrolamentos auxiliar e principal estão atrasadas ou adiantadas de $\pi/2$, as tensões induzidas são multiplicadas respectivamente por $-j$ e j .

Na figura 3.17, o subscrito *a* representa as impedâncias do circuito auxiliar e o subscrito *m* as impedâncias do circuito principal.

A relação entre tensão aplicada e corrente no motor de indução monofásico é calculada a seguir:

Sejam por definição Z_{1m} a impedância do primário do enrolamento principal, Z_{1a} a impedância do primário do enrolamento auxiliar, Z_{fm} a impedância da parte do enrolamento principal que representa o campo progressivo, Z_{bm} a impedância da parte do enrolamento principal que representa o campo regressivo, Z_{fa} a impedância da parte do enrolamento auxiliar que representa o campo progressivo, Z_{ba} a impedância da parte do enrolamento auxiliar que representa o campo regressivo, ZC_{ext} a impedância do capacitor externo e ZL_{ext} a impedância da bobina externa ao motor, ou seja:

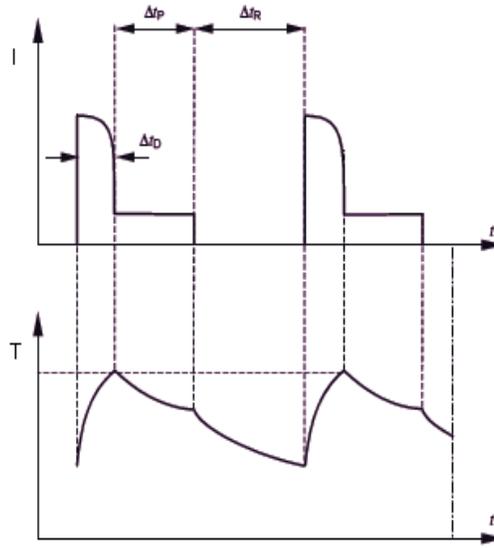


Fig. 3.15: Temperatura e corrente em um ciclo de um regime intermitente periódico com partida

$$Z_{1m} = R_{1m} + jX_{1m}$$

$$Z_{1a} = R_{1a} + jX_{1a}$$

$$Z_{fm} = 0.5jX_{magm} \parallel (0.5jX_{2m} + 0.5\frac{R_{2m}}{s})$$

$$Z_{bm} = 0.5jX_{magm} \parallel (0.5jX_{2m} + 0.5\frac{R_{2m}}{2-s}) \quad (3.20)$$

$$Z_{fa} = 0.5jX_{maga} \parallel (0.5jX_{2a} + 0.5\frac{R_{2a}}{s})$$

$$Z_{ba} = 0.5jX_{maga} \parallel (0.5jX_{2a} + 0.5\frac{R_{2a}}{2-s})$$

Do circuito mostrado na figura 3.17 tem-se então as seguintes relações:

$$V_1 = I_m(Z_{1m} + Z_{fm} + Z_{bm}) - jE_{fa} + jE_{ba} \quad (3.21)$$

$$V_1 = I_a(ZC_{ext} + ZL_{ext} + Z_{1a} + Z_{fa} + Z_{ba}) + jE_{fm} - jE_{bm}$$

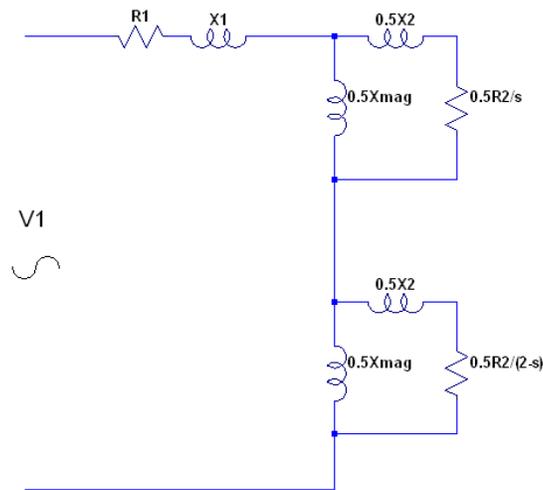


Fig. 3.16: Circuito equivalente da máquina de indução monofásica

mas

$$E_{fm} = I_m Z_{fm}$$

$$E_{bm} = I_m Z_{bm}$$

$$E_{fa} = I_a Z_{fa} \quad (3.22)$$

$$E_{ba} = I_a Z_{ba}$$

Portanto,

$$V_1 = (Z_{1m} + Z_{fm} + Z_{bm})I_m - j(Z_{fa} - Z_{ba})I_a \quad (3.23)$$

$$V_1 = j(Z_{fm} - Z_{bm})I_m + (Z_{C_{ext}} + Z_{L_{ext}} + Z_{1a} + Z_{fa} + Z_{ba})I_a$$

Ou ainda:

$$V_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{1m} + Z_{fm} + Z_{bm} & -j(Z_{fa} - Z_{ba}) \\ j(Z_{fm} - Z_{bm}) & (Z_{C_{ext}} + Z_{L_{ext}} + Z_{1a} + Z_{fa} + Z_{ba}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m \\ I_a \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

A corrente total no motor é a soma de I_m e I_a , ou ainda:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m \\ I_a \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Logo, conhecendo-se o circuito equivalente do motor, a tensão aplicada e o escorregamento s a cada instante de tempo, pode-se estimar a corrente que passa por ele pela seguinte equação:

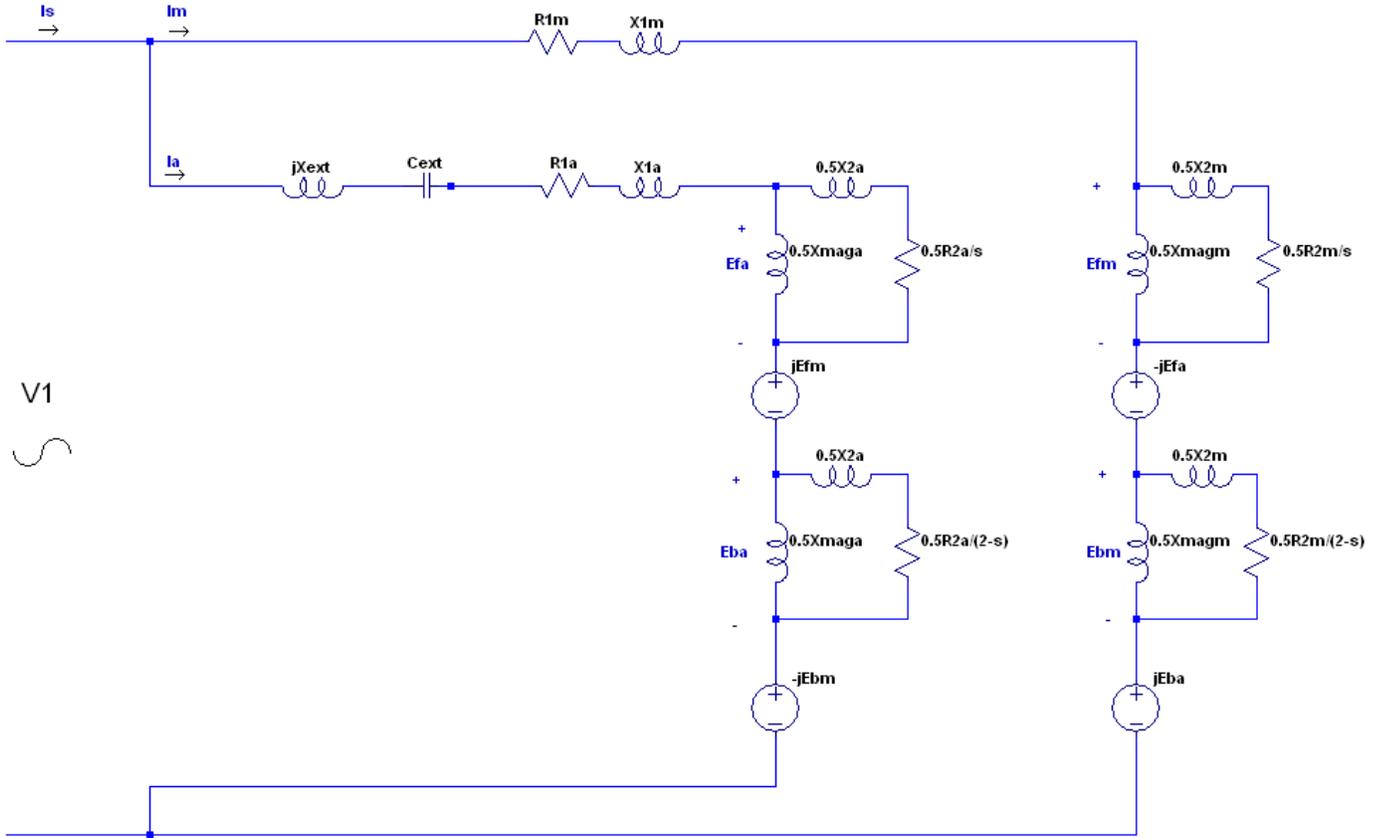


Fig. 3.17: Circuito equivalente da máquina de indução monofásica usada na máquina de lavar roupas com o capacitor e a bobina

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1m} + Z_{fm} + Z_{bm} & -j(Z_{fa} - Z_{ba}) \\ j(Z_{fm} - Z_{bm}) & (Z_{C_{ext}} + Z_{L_{ext}} + Z_{1a} + Z_{fa} + Z_{ba}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} V_1 \quad (3.26)$$

3.6 Determinação dos parâmetros do circuito equivalente

Uma vez que o circuito equivalente da máquina de indução monofásica é conhecido, basta que se conheça o valor das resistências e das reatâncias para que se determine o modelo de uma determinada máquina.

Para se conhecer o valor das resistências e das reatâncias de cada enrolamento de uma máquina de indução polifásica são geralmente utilizados os testes de rotor livre e de rotor bloqueado [38]. Os nomes dos testes já ilustram como são feitos os ensaios. No primeiro deles, a máquina é alimentada e seu rotor é deixado livre para se movimentar, sem nenhuma carga adicional ao eixo. Enquanto isto, são observadas a tensão, a corrente e a potência consumidas pela máquina. No segundo teste, as

grandezas observadas são as mesmas mas o rotor é travado por algum dispositivo.

Como a máquina em questão é monofásica, os testes de rotor livre e bloqueado foram feitos para cada um dos enrolamentos, a saber, *CW* e *CCW*. Ou seja, os testes foram conduzidos aplicando-se a tensão entre os terminais *CW* e *GND* e depois com a tensão aplicada entre os enrolamentos *CCW* e *GND* sem que o capacitor e a bobina estivessem ligados ao motor. Desta forma, os parâmetros do circuito elétrico foram obtidos como se cada um dos enrolamentos correspondesse ao enrolamento de uma fase de uma máquina de indução polifásica. Como a máquina não parte naturalmente quando alimentada por apenas um enrolamento, o teste de rotor livre foi feito forçando-se a partida da máquina com um piparote.

Quando o rotor está bloqueado, o escorregamento é unitário. Desta forma, a ligação em série da resistência R'_2 com a reatância X'_2 tem impedância muito menor que a impedância do ramo da reatância X_m , de forma que pode-se supor que toda a corrente que passa pelo rotor não passa pela reatância X_m ficando o circuito conforme é mostrado na figura 3.18

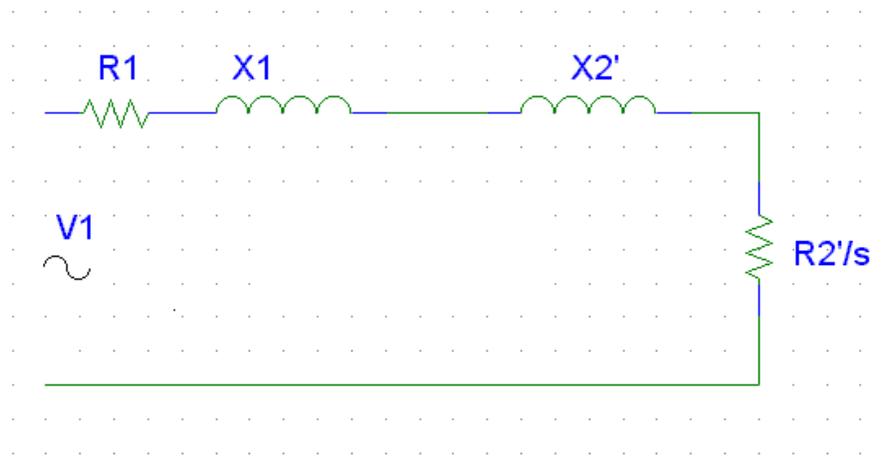


Fig. 3.18: Circuito equivalente da máquina de indução quando o rotor está bloqueado

Sejam V_{bl} , I_{bl} e P_{bl} respectivamente a tensão, a corrente e a potência ativa do motor quando o rotor está bloqueado. Tem-se então a seguinte relação:

$$P_{bl} = (R_1 + R'_2)I_{bl}^2 \Rightarrow R'_2 = \frac{P_{bl}}{I_{bl}^2} - R_1 \quad (3.27)$$

Mas a resistência R_1 nada mais é que a resistência do enrolamento do estator, que pode ser medida diretamente com um multímetro posicionado entre os terminais do enrolamento. Desta forma, o parâmetro R'_2 é facilmente conhecido.

A reatância total do circuito equivalente com rotor bloqueado é a soma de X_1 e X'_2 , que é a parte imaginária da impedância do circuito. Conhecido o módulo da impedância, dado como a razão entre os módulos da tensão e da corrente, e conhecida a parte real da impedância por meio da equação 3.27, obtém-se a soma das reatâncias desejadas. Analiticamente:

$$\left(\frac{V_{bl}}{I_{bl}}\right)^2 = (R_1 + R'_2)^2 + (X_1 + X'_2)^2 \Rightarrow X_1 + X'_2 = \sqrt{\left(\frac{V_{bl}}{I_{bl}}\right)^2 - (R_1 + R'_2)^2} \quad (3.28)$$

Usualmente costuma-se fazer $X_1 = X'_2$ por simplicidade, embora esta aproximação não seja a mais recomendável para máquinas de pequeno porte como a estudada nesta dissertação.

No teste do rotor livre, tem-se que o escorregamento é próximo de zero. Desta forma, a impedância $R'_2 + jX'_2$ é muito maior que a impedância de magnetização X_m . Desta forma, pode-se considerar que toda a corrente passa por X_m ficando o circuito conforme é mostrado na figura 3.19

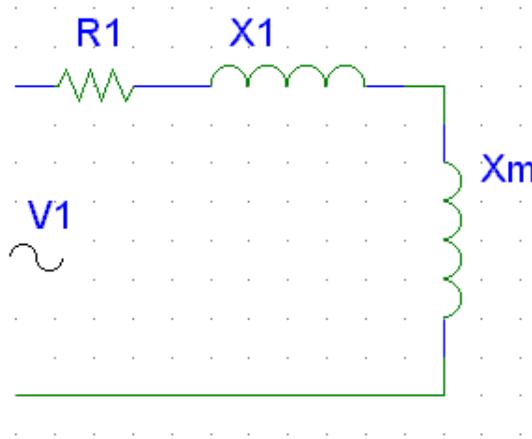


Fig. 3.19: Circuito equivalente da máquina de indução quando o rotor está livre

Sejam V_l , I_l e P_l respectivamente a tensão, a corrente e a potência ativa do motor quando o rotor está livre. Tem-se então que a resistência R_l de rotor livre é dada por:

$$P_l = R_l I_l^2 \Rightarrow R_l = \frac{P_l}{I_l^2} \quad (3.29)$$

A impedância Z_l observada no teste de rotor livre é dada por

$$Z_l^2 = R_l^2 + X_l^2 \quad (3.30)$$

Desta forma, a reatância de magnetização pode ser calculada como sendo a diferença entre a reatância X_l de rotor livre e a reatância do estator, ou seja:

$$X_m = X_l - X_1 = \sqrt{Z_l^2 - R_l^2} - X_1 = \sqrt{\left(\frac{V_l}{I_l}\right)^2 - \left(\frac{P_l}{I_l^2}\right)^2} - X_1 \quad (3.31)$$

Sendo que o valor da reatância X_1 já é conhecido do teste de rotor bloqueado.

Os resultados experimentais para a máquina de indução monofásica que gera o movimento da máquina de lavar roupas objeto deste estudo serão mostrados no capítulo 5.

Capítulo 4

Identificação de sistemas lineares

4.1 Introdução

A modelagem de sistemas é algo inerente aos seres vivos. Esta técnica consiste em se observar algum fenômeno e, a partir das observações feitas, criar um modelo capaz de prever o comportamento das variáveis envolvidas naquele fenômeno.

O conceito de modelo é algo muito amplo, daí sua inerência a qualquer forma de vida. Por exemplo, um animal ao farejar uma presa tem em sua mente um modelo que relaciona o cheiro e o aspecto da vítima com seu sabor e qualidade nutricional, de forma que ele pode decidir se vale ou não a pena investir no ataque. Caso resolva atacar, é necessário que ele tenha um modelo dinâmico do movimento da presa de forma que consiga ter uma ação eficiente para não deixá-la fugir. Estes modelos inerentes ao predador podem ser adquiridos com sua experiência anterior ou até mesmo pela evolução sofrida por sua espécie desde os primórdios.

Os seres humanos, assim como os animais, não deixam de ter também seus modelos. Um motorista, por exemplo, precisa ter em sua mente um modelo do automóvel para poder aplicar comandos que impliquem no movimento desejado. Para criar este modelo mental, o motorista deve ter experiências ao volante até que conheça o carro plenamente.

Em geral, a vida consiste no aprendizado e acúmulo de experiências, o que permite a criação e o aperfeiçoamento de modelos ao longo do tempo de vida. Isto é semelhante ao método dos mínimos quadrados recursivo, que será estudado mais adiante.

É interessante notar que a criação de modelos também é a base do método científico, não se restringindo a apenas uma determinada área do conhecimento. Na área de ciências humanas por exemplo, os antropólogos sociais são cientistas preocupados em responder a questão: O que é o homem? Ou seja, estão preocupados em encontrar modelos para o comportamento social dos seres humanos a partir dos estudos de diferentes sociedades em diferentes momentos históricos. Em textos históricos desta disciplina, chega-se a buscar elementos de culturas consideradas primitivas e simples para se contruir com mais facilidade um modelo aplicável a culturas modernas [35], [19]. Isto é semelhante às simplificações de problemas muitas vezes feitas na área de engenharia.

No campo das ciências biológicas, a modelagem também é usada. Um profissional de saúde, por exemplo, ao diagnosticar uma doença, conhece um modelo fisiológico, adquirido tanto durante seus estudos quanto no exercício da profissão, que permite que ele indique algum tratamento que possa ser eficaz contra determinado mal. Caso a cura do paciente não aconteça, o profissional pode estudar

mais a fundo o problema e, com isto, adquirir mais experiência e refinar seu modelo fisiológico em um procedimento iterativo. A experiência adquirida iterativamente por cada um é acumulada ao longo do tempo em forma de ciência.

Em ciências exatas, a abordagem não é diferente. Em linhas gerais, Engenheiros, físicos, químicos, dentre outros, estão interessados em usar modelos para os fenômenos estudados se basando na linguagem desenvolvida principalmente pelos matemáticos. Estes modelos são portanto conhecidos como modelos matemáticos.

4.2 Modelos matemáticos

Modelos matemáticos, assim como todos os outros modelos citados na introdução, são representações de sistemas. Entende-se por sistema qualquer mecanismo que a partir de uma determinada entrada gere uma saída. Por exemplo, no caso do animal, as entradas são o cheiro e o aspecto da presa enquanto a saída é a decisão de capturá-la ou não. No caso do motorista, a entrada é o comando dado ao volante e pedais, enquanto a saída é a resposta do carro. No caso dos antropólogos o sistema é a sociedade que sofre a influência dos indivíduos. Como os indivíduos também sofrem a influência da sociedade, trata-se de um sistema realimentado. Há ainda casos em que o conjunto de entradas é tão grande e complexo que elas são ignoradas e estuda-se apenas as saídas, como acontece com as séries temporais usadas em economia, por exemplo.

Segundo [6] e [39], os modelos matemáticos podem ser divididos principalmente em duas classes:

- Não paramétricos
- Paramétricos

No primeiro caso, a relação entre entrada e saída é descrita por uma curva, como por exemplo a curva $B \times H$ usada amplamente em eletromagnetismo ou ainda a resposta ao impulso de um sistema, que é suficiente para prever seu comportamento futuro, conforme será estudado neste capítulo.

Modelos paramétricos são aqueles em que existe uma equação matemática que relaciona entradas a saídas. Estes modelos são do escopo deste estudo. Segundo [6], eles podem ser classificados de três maneiras:

- Caixa branca
- Caixa preta
- Caixa cinza

Os modelos do primeiro tipo são obtidos a partir das características físicas do fenômeno. Esta técnica é amplamente utilizada para a modelagem de sistemas elétricos de potência, sistemas térmicos, mecânicos, dentre outros. No entanto, estes modelos podem se tornar complexos caso os sistemas sejam grandes ou apresentem condições de contorno que não se aproximem de paralelepípedos, cilindros ou esferas no caso tridimensional ou de retângulos e circunferências no caso bidimensional.

Apesar de poderem ser complexos em muitos casos, os modelos caixa branca têm a vantagem de serem baseados apenas em características físicas especificadas do sistema e de seu ambiente de

operação, de forma que não é necessário fazer nenhum ensaio para se determinar um modelo deste tipo. Esta vantagem é aproveitada na modelagem de sistemas de difícil montagem, como hidrogenadores, em sistemas como veículos espaciais e satélites artificiais que operam em condições ambientais difíceis ou mesmo impossíveis de se reproduzir, dentre outros.

Os modelos do tipo caixa preta são obtidos a partir de entradas e saídas do sistema. Para isto, deve-se planejar e realizar ensaios que tenham entradas úteis para os métodos de identificação, adquirindo os sinais ao longo do tempo. Com as medidas, deve-se escolher uma estrutura de modelo, estimar os parâmetros desta estrutura e verificar se o comportamento do modelo se assemelha ao do sistema. Caso se tenha uma aproximação satisfatória, o modelo é aceito. Caso contrário, volta-se para alguma fase anterior e se faz uma nova tentativa. A decisão a respeito de a qual fase voltar, ou qual estrutura escolher depende da experiência do modelador. Usando um raciocínio recursivo, pode-se dizer que a escolha da estrutura do modelo depende do modelo mental que o modelador tem sobre a modelagem de dados. A descrição do método de obtenção de modelos caixa preta é esquematizada na figura 4.1

Os modelos do tipo caixa cinza são uma combinação entre os dois primeiros tipos apresentados. O procedimento para obtenção do modelo é semelhante ao caso caixa preta, mas a estrutura do modelo é determinada a partir do conhecimento das leis físicas que regem o sistema. Este tipo de modelo foi o utilizado no trabalho experimental desta dissertação.

4.3 O método dos mínimos quadrados

A determinação dos parâmetros de um modelo é em geral feita ao se minimizar algum critério pré determinado que represente o erro entre a saída do sistema e a saída do modelo para uma mesma entrada. Uma das formas de se fazer isto é o uso do método dos mínimos quadrados, descrito nesta seção.

4.3.1 Gauss e problema das órbitas elípticas

No início do século XIX, o matemático alemão Karl Friedrich Gauss se inquietou com o problema das órbitas elípticas. Seu desafio era prever a posição futura do aparecimento de um asteroide, hoje conhecido como Ceres, a partir de algumas observações passadas da sua posição. Na verdade, o problema da órbitas de corpos celestes já havia inquietado inúmeros pensadores como Hiparco e Ptolomeu na idade clássica, Copérnico, Johannes Kepler e Tycho Brahe durante o período do renascimento, dentre outros [10]. Em 1609, Kepler publicou um livro intitulado *Astronomia Nova* em que enunciou suas leis, baseadas nas observações celestes feitas por Brahe. Dentre estas leis há uma que enuncia que as órbitas descritas pelos planetas são elípticas. A lei enunciada por Kepler rompeu um paradigma carregado desde a antiguidade clássica segundo o qual o movimento dos corpos celestes era circular ou formado de composições de movimentos circulares (teoria dos epicentros), dado que o círculo era a forma perfeita e, portanto, os movimentos dos corpos celestes deviam ser regidos em formas circulares.

No entanto, a lei enunciada por Kepler se limitava a informar o formato das órbitas, sem fornecer qualquer equação que as descrevessem com relação a algum referencial. Gauss elaborou então uma teoria tendo como objetivo a determinação da equação de uma curva - no caso específico a elipse formada pela órbita dos planetas - a partir de apenas alguns pontos observados. Esta teoria foi divul-

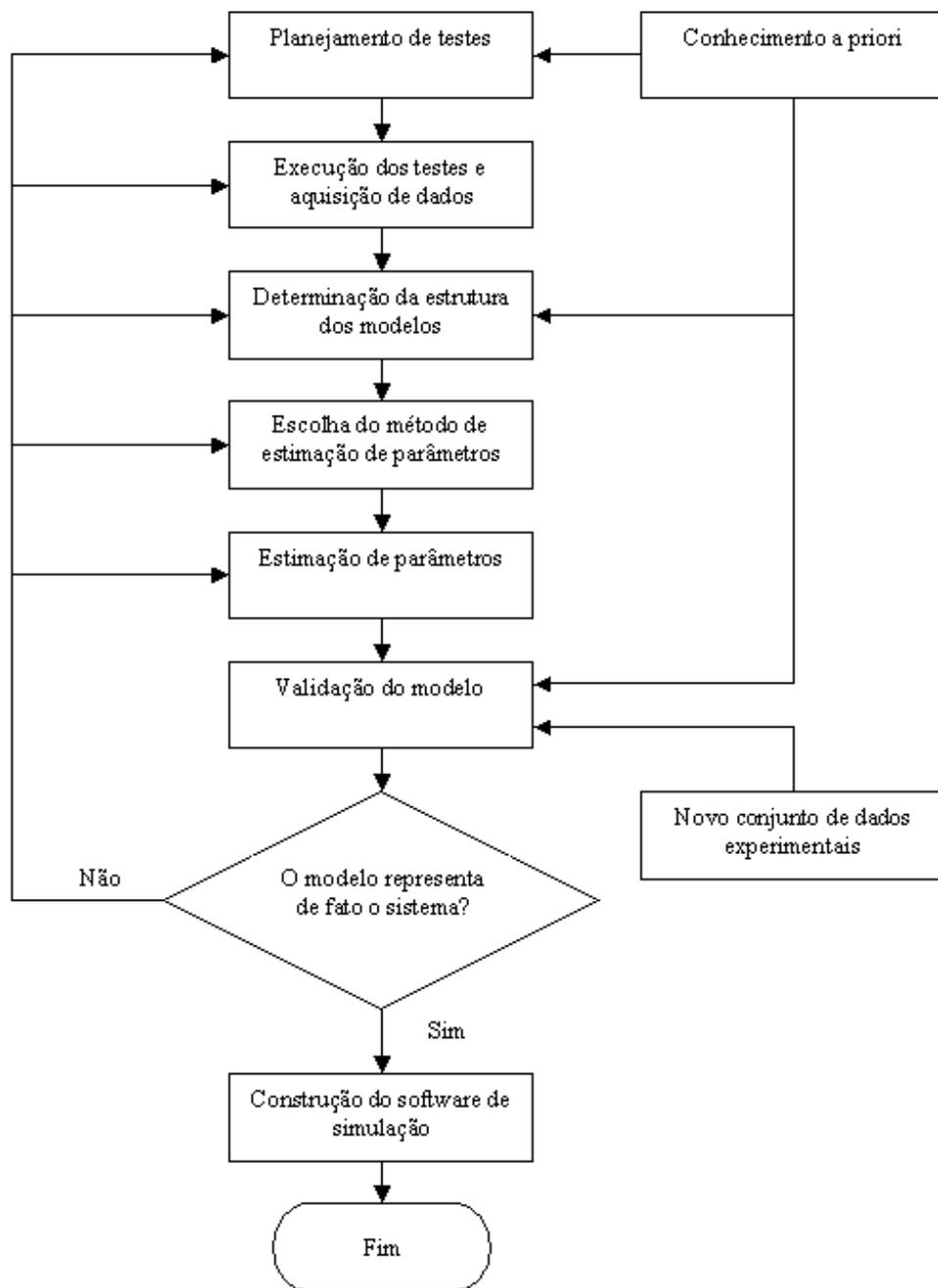


Fig. 4.1: Método de obtenção de sistemas do tipo caixa preta

gada em um trabalho intitulado *Teoria Motus Corporum Coelestium* que até os dias de hoje tem sido referência para a resolução de inúmeros problemas semelhantes ao enfrentado por Gauss.

4.3.2 Desenvolvimento clássico do método

Em linhas gerais simplificadas, o problema que Gauss enfrentou foi o da solução de um sistema de equações lineares sobredeterminado (ver apêndice B) exemplificado com a equação 4.2.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{4.1}$$

Em que os valores valores a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ e b_i , são valores conhecidos e se quer determinar os n valores x_j .

Este sistema de equações pode ser reescrito na forma matricial conforme mostrado abaixo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Ou ainda:

$$AX = B \tag{4.3}$$

Em que $A_{m \times n}$ é uma matriz de elementos a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ e $X_{n \times 1}$ e $B_{m \times 1}$ são vetores.

Para resolver este problema, a solução encontrada por Gauss é simples, porém genial. Como há mais equações do que incógnitas, o matemático elaborou um método que encontrasse um conjunto de incógnitas $\hat{X}_{n \times 1}$ que quando substituído no sistema, implica na menor diferença possível entre o resultado $\hat{B}_{m \times 1}$ e o valor real $B_{m \times 1}$.

Para isto, Gauss definiu o vetor de erros ϵ tal que:

$$\epsilon = B - \hat{B} \tag{4.4}$$

E resolveu o problema de encontrar $\hat{X}_{n \times 1}$ que minimize a metade da norma quadrática do vetor de erros, ou seja, o problema de se encontrar o mínimo do critério J definido em 4.5.

$$J = \frac{1}{2} \epsilon^T \epsilon = \frac{1}{2} (B - \hat{B})^T (B - \hat{B}) = \frac{1}{2} (B - A\hat{X})^T (B - A\hat{X}) \tag{4.5}$$

Em que o sobrescrito T denota a transposição do vetor. Para se minimizar a norma vetor deve-se derivar a expressão em 4.5 com relação \hat{X} a e igualá-la a zero, conforme desenvolvido em 4.6.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial J}{\partial \hat{X}} = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \hat{X}} \frac{1}{2} (B - A\hat{X})^T (B - A\hat{X}) = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \hat{X}} (B^T - \hat{X}^T A^T) (B - A\hat{X}) = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \hat{X}} (B^T B - \hat{X}^T A^T B + B^T A\hat{X} - \hat{X}^T A^T A\hat{X}) = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow B^T A + B^T A - 2\hat{X}^T A^T A = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \hat{X}^T = B^T A (A^T A)^{-1T} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T B \Rightarrow \\
& \Rightarrow \hat{X} = A^\dagger B
\end{aligned} \tag{4.6}$$

em que $A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T$ é, por definição, a matriz pseudoinversa de A .

Desta forma, tem-se o vetor \hat{X} que multiplicado à esquerda por A implica em um vetor \hat{B} que é o mais próximo possível de B .

4.3.3 Interpretação do método nos subespaços fundamentais

Esta seção tem como objetivo dar a interpretação do método dos mínimos quadrados segundo a teoria dos subespaços. O caminho de raciocínio seguido é o mínimo para que se chegue ao resultado do método dos mínimos quadrados pois o escopo desta dissertação não é a identificação de sistemas pelo método de subespaços. Para mais informações sobre este tema recomenda-se a referência [8]. Para um melhor entendimento desta seção recomenda-se a leitura prévia do apêndice B.

Subespaços fundamentais de uma matriz

A matriz $A_{m \times n}$ definida na equação 4.3 pode ser vista como um operador linear que toma vetores em um determinado espaço \mathfrak{R}^n e os leva para um espaço \mathfrak{R}^m .

Seja $\text{posto}(A) = r$. Pode-se definir o subespaço coluna da matriz $A_{m \times n}$ como sendo o subespaço de \mathfrak{R}^m formado pelos n vetores que são as colunas de A denotado por $\mathcal{R}(A)$. A dimensão deste subespaço será igual ao número de colunas linearmente independentes, ou seja, igual a r . Da mesma forma, pode-se definir o subespaço linha da matriz $A_{m \times n}$ como sendo o espaço formado pelos vetores que são as linhas desta matriz. Como as linhas de $A_{m \times n}$ são as colunas de $A_{n \times m}^T$, o subespaço formado pelas linhas de $A_{m \times n}$ é chamado de subespaço coluna de $A_{n \times m}^T$ e denotado por $\mathcal{R}(A^T)$. O subespaço coluna de $A_{n \times m}^T$ é subespaço de \mathfrak{R}^n .

Tomemos o subespaço coluna de $A_{m \times n}$. Caso o número de colunas linearmente independentes r seja menor que m , nem todos os vetores de \mathfrak{R}^m poderão ser gerados por esse subespaço. Para gerar todo o espaço \mathfrak{R}^m é necessário que se adicione à base de $\mathcal{R}(A)$ $m - r$ vetores ortogonais à base e

entre si. Um vetor $b_{m \times 1}$ é ortogonal a um vetor da base do subespaço de $\mathcal{R}(A)$ se o produto interno entre qualquer vetor da base e $b_{m \times 1}$ for nulo. Analiticamente, se a matriz $A_{m \times n}$ for vista da seguinte forma:

$$A = [a_1 | a_2 | \dots | a_n] \quad (4.7)$$

Em que $a_i, i = 1 \dots n$ são as colunas de $A_{m \times n}$ tem-se que:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Portanto, um vetor $b_{m \times 1}$ é linearmente independente a todas colunas de A se:

$$\begin{aligned} a_1^T b &= 0 \\ a_2^T b &= 0 \\ &\vdots \\ a_n^T b &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ou ainda, se:

$$A^T b = 0 \quad (4.10)$$

Por este motivo, o subespaço formado por todos os vetores b ortogonais ao subespaço $\mathcal{R}(A)$ é chamado de subespaço nulo de A^T e denotado por $\mathcal{N}(A^T)$. Esses subespaços são complementares, ou seja, sua soma direta é igual ao espaço \mathfrak{R}^m .

De forma análoga, pode-se definir o subespaço nulo de A , denotado por $\mathcal{N}(A)$, como sendo o complemento ortogonal de $\mathcal{R}(A^T)$. A soma direta entre esses subespaços é o espaço \mathfrak{R}^n . A tabela 4.1 sumariza os quatro subespaços fundamentais da matriz $A_{m \times n}$.

Na figura 4.2 retirada de [8] são mostrados os subespaços e as transformações envolvidas de toda a discussão acima. Da figura nota-se claramente os seguintes aspectos:

- O subespaço $\mathcal{R}(A^T)$ é mapeado no subespaço $\mathcal{R}(A)$ pela transformação linear da matriz A . Por este motivo, $\mathcal{R}(A)$ também é chamado de espaço imagem de A .
- O subespaço $\mathcal{N}(A)$ é mapeado na origem do espaço \mathfrak{R}^m pela transformação linear da matriz A .
- O subespaço $\mathcal{R}(A)$ é mapeado no subespaço $\mathcal{R}(A^T)$ pela transformação linear da matriz A^T . Por este motivo, $\mathcal{R}(A^T)$ também é chamado de espaço imagem de A^T .
- O subespaço $\mathcal{N}(A^T)$ é mapeado na origem do espaço \mathfrak{R}^n pela transformação linear da matriz A^T .

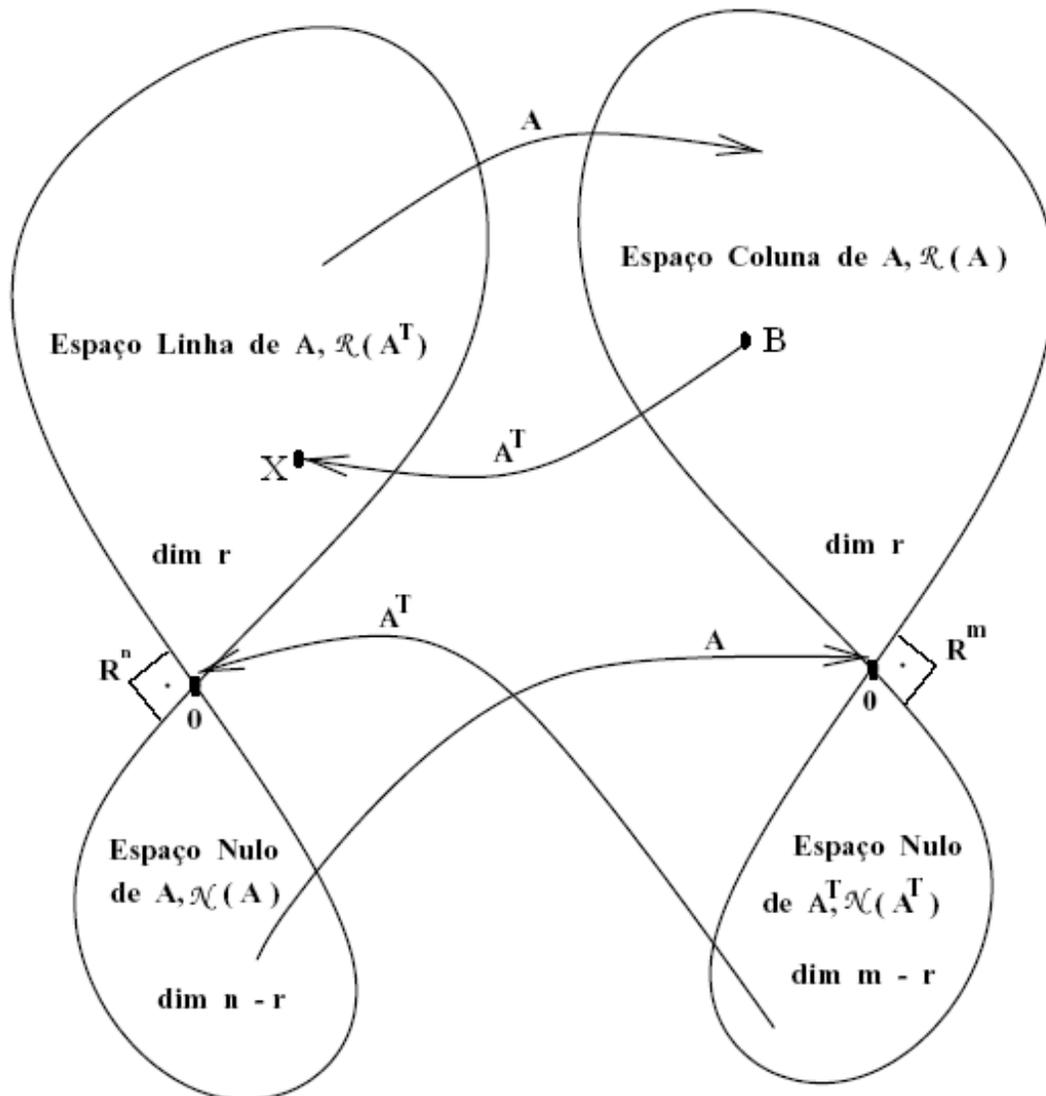


Fig. 4.2: Subespaços fundamentais das matrizes A e A^T e suas relações

Tab. 4.1: Subespaços fundamentais de uma matriz

Representação	Nome	Complemento	Está contido em
$\mathcal{R}(A)$	Subespaço coluna de A	$\mathcal{N}(A^T)$	\mathbb{R}^m
$\mathcal{R}(A^T)$	Subespaço coluna de A^T	$\mathcal{N}(A)$	\mathbb{R}^n
$\mathcal{N}(A)$	Subespaço nulo A	$\mathcal{R}(A^T)$	\mathbb{R}^n
$\mathcal{N}(A^T)$	Subespaço nulo de A^T	$\mathcal{R}(A)$	\mathbb{R}^m

Projeção ortogonal e matriz pseudo inversa à esquerda

Definidos os subespaços fundamentais da transformação linear $A_{m \times n}$, suponha mais uma vez o problema proposto na equação 4.3. Suponha também que o vetor $B_{m \times 1}$ não está contido totalmente no subespaço $\mathcal{R}(A)$, ou seja, ele tem componentes tanto em $\mathcal{R}(A)$ quanto em $\mathcal{N}(A^T)$. Como pode ser visto da figura 4.2, não existe um vetor $X_{n \times 1}$ que, transformado por $A_{m \times n}$, gere componentes em $\mathcal{N}(A^T)$, e portanto que gere o vetor $B_{m \times 1}$.

Sendo assim, quer se encontrar o vetor $\hat{X}_{n \times 1}$ que ao passar pela transformação $A_{m \times n}$ implique em um vetor $\hat{B}_{m \times 1}$ que seja a melhor aproximação possível para $B_{m \times 1}$ formada apenas por vetores da base do subespaço $\mathcal{R}(A)$.

Para se atingir o objetivo, define-se o vetor $\epsilon_{m \times 1}$ como sendo:

$$\epsilon_{m \times 1} = \hat{B}_{m \times 1} - B_{m \times 1} \quad (4.11)$$

Para se ter o menor erro, o vetor $\epsilon_{m \times 1}$ deve ser ortogonal ao subespaço $\mathcal{R}(A)$ conforme ilustrado na figura 4.3. Para isto, tem-se que, segundo raciocínio análogo ao usado nas equações 4.9 e 4.10:

$$A_{n \times m}^T \epsilon_{m \times 1} = 0 \quad (4.12)$$

Substituindo-se a equação 4.11 em 4.12 encontra-se a forma final do vetor $\hat{X}_{n \times 1}$ que resolve o problema proposto, conforme mostrado em 4.13

$$A_{n \times m}^T (\hat{B}_{m \times 1} - B_{m \times 1}) = 0$$

$$A_{n \times m}^T (A_{m \times n} \hat{X}_{n \times 1} - B_{m \times 1}) = 0$$

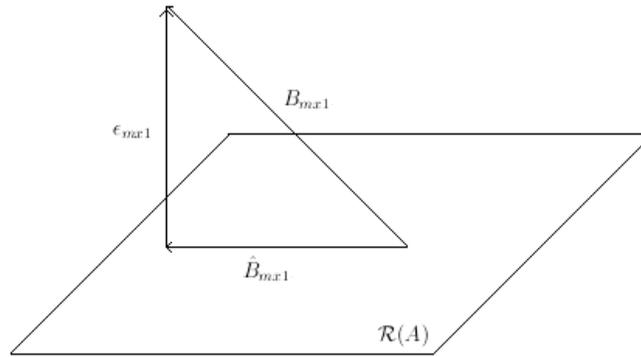


Fig. 4.3: Subespaço $\mathcal{R}(A)$ contendo o vetor \hat{B}_{mx1} . Note que o menor erro ocorre quando ϵ_{mx1} é ortogonal a $\mathcal{R}(A)$

$$\begin{aligned}
 A_{n \times m}^T A_{m \times n} \hat{X}_{n \times 1} &= A_{n \times m}^T B_{m \times 1} \\
 \hat{X}_{n \times 1} &= (A_{n \times m}^T A_{m \times n})^{-1} A_{n \times m}^T B_{m \times 1} \\
 \hat{X}_{n \times 1} &= A_{n \times m}^\dagger B_{m \times 1}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Em que $A_{n \times m}^\dagger$ é a matriz pseudoinversa de $A_{n \times m}$, conforme já definido anteriormente.

O resultado encontrado em 4.13 ao se usar a teoria dos subespaços fundamentais é o mesmo encontrado ao se usar a derivada na equação 4.6. Isto confirma o resultado obtido previamente, além de permitir uma visão mais clara do problema no contexto dos espaços vetoriais.

4.3.4 Método dos mínimos quadrados recursivo

Na técnica desenvolvida nas seções anteriores, é necessário que o ensaio sobre o sistema termine para que se conheçam as entradas e saídas em todos instantes de tempo de interesse e com isto se aplique o método dos mínimos quadrados. No entanto, em alguns casos reais, pode ser necessário estimar os parâmetros do sistema durante o ensaio. Isto ocorre por exemplo com sistemas que variam ao longo de um intervalo de tempo não muito maior que o de sua dinâmica principal. Com isto, a identificação tem sempre que ser feita, de forma paralela à aquisição de dados. Para resolver este tipo de problema foi desenvolvido o método dos mínimos quadrados recursivo que é descrito a seguir baseado na referência [47].

Como já visto anteriormente, seja uma saída b a combinação linear de várias entradas a_j , $j = 1, \dots, n$, sendo que os coeficientes desta combinação linear são x_j , somadas a um erro e , conforme mostrado na equação 4.14

$$b = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_jx_j + \dots + a_nx_n + e \quad (4.14)$$

Se forem feitas m medições da saída b ao longo do tempo tem-se o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n + e_1 \\ b_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n + e_2 \\ &\vdots \\ b_k &= a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kj}x_j + \dots + a_{kn}x_n + e_k \\ &\vdots \\ b_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n + e_m \end{aligned} \quad (4.15)$$

O que pode ser reescrito matricialmente como:

$$B = AX + E \quad (4.16)$$

Sendo que os vetores e matrizes envolvidos na equação 4.16 são mostrados abaixo:

$$B_{m \times 1} = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_k \quad \dots \quad b_m]^T \quad (4.17)$$

$$E_{m \times 1} = [e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_k \quad \dots \quad e_m]^T \quad (4.18)$$

$$X_{n \times 1} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T \quad (4.19)$$

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Tomando-se a equação 4.15, isolando-se o e_i e escrevendo a combinação linear das entradas a_j como uma somatória teremos:

$$e_i = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (4.21)$$

Pode-se então definir uma função J como sendo a soma do quadrado de todos os erros e_i da seguinte forma:

$$J = \sum_{i=1}^m e_i^2 = \sum_{i=1}^m (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j)^2 \quad (4.22)$$

Mas a somatória em j nada mais é que o produto de uma linha da matriz A definida em 4.20 pelo vetor X definido em 4.19. Logo, 4.22 pode ser escrita como:

$$J = \sum_{i=1}^m (b_i - A_i \cdot X)^2 \quad (4.23)$$

Em que A_i denota a i ésima das m linhas da matriz A .

Para encontrar o vetor X que minimiza a função J basta encontrar a derivada de J com relação a X , que é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \sum_{i=1}^m (b_i - A_i \cdot X)^2 &= \frac{\partial}{\partial X} \sum_{i=1}^m [(A_i \cdot X)^2 - 2A_i \cdot X b_i + b_i^2] = \\ &= \sum_{i=1}^m [2A_i \cdot A_i^T X - 2A_i \cdot b_i] = \\ &= 2 \sum_{i=1}^m [A_i \cdot A_i^T X - A_i \cdot b_i] \end{aligned} \quad (4.24)$$

E igualá-la a 0, obtendo que, para k instantes de observação, $k < m$, o vetor \hat{X}_k ótimo será:

$$\hat{X}_k = \left(\sum_{i=1}^k A_i \cdot A_i^T \right)^{-1} \sum_{i=1}^k A_i \cdot b_i \quad (4.25)$$

Pode-se então definir P_k e d_k de forma que:

$$\hat{X}_k = P_k d_k \quad (4.26)$$

O que faz com que:

$$P_k = \left(\sum_{i=1}^k A_i \cdot A_i^T \right)^{-1} \quad (4.27)$$

e

$$d_k = \sum_{i=1}^k A_i \cdot b_i \quad (4.28)$$

A partir da equação 4.27 pode-se encontrar uma expressão que relacione P_k^{-1} e P_{k-1}^{-1} , ou seja, o valor de P^{-1} no instante de tempo anterior, conforme pode ser visto no desenvolvimento abaixo:

$$P_k^{-1} = \sum_{i=1}^k A_i \cdot A_i^T \Rightarrow P_{k-1}^{-1} = \sum_{i=1}^{k-1} A_i \cdot A_i^T \Rightarrow P_k^{-1} = P_{k-1}^{-1} + A_k \cdot A_k^T \quad (4.29)$$

Similarmente, ao se manipular a equação 4.28 tem-se:

$$d_k = \sum_{i=1}^k A_i \cdot b_i \Rightarrow d_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} A_i \cdot b_i \Rightarrow d_k = d_{k-1} + A_k \cdot b_k \quad (4.30)$$

Manipulando-se 4.29 pode-se encontrar o valor de P_k em função de P_{k-1} . Ao se multiplicar 4.29 à esquerda por P_k e à direita por P_{k-1} tem-se:

$$\begin{aligned}
P_k P_k^{-1} P_{k-1} &= P_k P_{k-1}^{-1} P_{k-1} + P_k A_k A_k^T P_{k-1} \Rightarrow \\
&\Rightarrow P_{k-1} = P_k + P_k A_k A_k^T P_{k-1}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Ao se multiplicar 4.31 à direita por A_k :

$$P_{k-1} A_k = P_k A_k + P_k A_k A_k^T P_{k-1} A_k = P_k A_k (1 + A_k^T P_{k-1} A_k) \tag{4.32}$$

Multiplicando 4.32 por $(1 + A_k^T P_{k-1} A_k)^{-1} A_k^T P_{k-1}$ à direita encontra-se:

$$\begin{aligned}
P_{k-1} A_k (1 + A_k^T P_{k-1} A_k)^{-1} A_k^T P_{k-1} &= P_k A_k (1 + A_k^T P_{k-1} A_k) (1 + A_k^T P_{k-1} A_k)^{-1} A_k^T P_{k-1} = \\
&= P_k A_k A_k^T P_{k-1}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

mas de 4.31 nota-se que o lado direito da equação 4.33 nada mais é que $P_{k-1} - P_k$. Portanto:

$$P_k = P_{k-1} - P_{k-1} A_k (1 + A_k^T P_{k-1} A_k)^{-1} A_k^T P_{k-1} \tag{4.34}$$

Então, usando 4.26, substituindo os valores encontrados em 4.30 e em 4.34 tem-se:

$$\begin{aligned}
\hat{X}_k &= (P_{k-1} - P_{k-1} A_k (1 + A_k^T P_{k-1} A_k)^{-1} A_k^T P_{k-1}) (d_{k-1} + A_k b_k) = \\
&= P_{k-1} d_{k-1} - P_{k-1} A_k (1 + A_k^T P_{k-1} A_k)^{-1} A_k^T P_{k-1} d_{k-1} + \\
&+ P_{k-1} A_k b_k - P_{k-1} A_k (1 + A_k^T P_{k-1} A_k)^{-1} A_k^T P_{k-1} A_k b_k
\end{aligned}$$

mas $P_{k-1} d_{k-1}$ nada mais é que \hat{X}_{k-1} . Então:

$$\begin{aligned}
\hat{X}_k &= \hat{X}_{k-1} - P_{k-1} A_k (1 + A_k^T P_{k-1} A_k)^{-1} A_k^T \hat{X}_{k-1} + \\
&+ P_{k-1} A_k b_k - P_{k-1} A_k (1 + A_k^T P_{k-1} A_k)^{-1} A_k^T P_{k-1} A_k b_k
\end{aligned}$$

Colocando-se em evidência o termo $P_{k-1} A_k (1 + A_k^T P_{k-1} A_k)^{-1}$ nos três últimos termos da equação acima tem-se:

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k-1} - P_{k-1} A_k (1 + A_k^T P_{k-1} A_k)^{-1} [A_k^T \hat{X}_{k-1} - (1 + A_k^T P_{k-1} A_k) b_k + A_k^T P_{k-1} A_k b_k]$$

de onde se tem:

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k-1} - P_{k-1} A_k (1 + A_k^T P_{k-1} A_k)^{-1} [A_k^T \hat{X}_{k-1} - b_k] \tag{4.35}$$

ou ainda:

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k-1} - K_k [A_{k:}^T \hat{X}_{k-1} - b_k] \quad (4.36)$$

em que

$$K_k = P_{k-1} A_{k:} (1 + A_{k:}^T P_{k-1} A_{k:})^{-1} \quad (4.37)$$

Sendo que K_k pode ser simplificado ao se multiplicar a equação 4.37 à esquerda por $P_k P_k^{-1} = I$, o que dá:

$$K_k = P_k P_k^{-1} P_{k-1} A_{k:} (1 + A_{k:}^T P_{k-1} A_{k:})^{-1} \quad (4.38)$$

Ao se substituir P_k^{-1} obtido na equação 4.29 tem-se:

$$\begin{aligned} K_k &= P_k (P_{k-1}^{-1} + A_{k:} A_{k:}^T) P_{k-1} A_{k:} (1 + A_{k:}^T P_{k-1} A_{k:})^{-1} = \\ &= P_k (A_{k:} + A_{k:} A_{k:}^T P_{k-1} A_{k:}) (1 + A_{k:}^T P_{k-1} A_{k:})^{-1} = \\ &= P_k A_{k:} (1 + A_{k:}^T P_{k-1} A_{k:}) (1 + A_{k:}^T P_{k-1} A_{k:})^{-1} = \\ &= P_k A_{k:} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Portanto a equação 4.36 pode ser reescrita como:

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k-1} - P_k A_{k:} [A_{k:}^T \hat{X}_{k-1} - b_k] \quad (4.40)$$

As equações 4.40 e 4.34 são as equações recursivas do método dos mínimos quadrados multivariável. Note que para atualizar o valor de P e \hat{X} no instante k é necessário que se conheça apenas seus valores no instante $k - 1$ e o vetor de entradas $A_{k:}$ aplicado ao sistema no instante k .

A grande vantagem destas equações é que a inversão envolvida em 4.34 que é necessária para a obtenção de P_k é apenas a inversão de um escalar, e não de uma matriz. Isto simplifica tremendamente os cálculos, permitindo que não seja necessário inverter matrizes, que ficariam maiores para cada nova medida k adicionada.

Para começar o algoritmo é necessário que se escolha os valores de X_0 e P_0 . Para que haja convergência, pode-se escolher um valor qualquer para X_0 e uma matriz P_0 com elementos grandes em sua diagonal. Isto deve ser feito pois espera-se que a estimativa inicial de X seja distante de seu valor real. Logo, um valor grande para P_0 faz com que se chegue mais rápido à boas estimativas de X uma vez que se dá um peso maior às informações obtidas pelas entradas e saídas do sistema do que o peso da estimativa inicial, conforme pode ser visto na equação 4.40.

4.3.5 Relação entre algoritmo recursivo e aproximação estocástica

O algoritmo usado anteriormente tende a reduzir a soma quadrática dos resíduos e da equação 4.14, que traduzem as imprecisões nas medidas das variáveis.

Obviamente, se não houvesse essas imprecisões, o sistema teria uma solução exata e o resíduo já seria naturalmente nulo.

Por serem imprecisões que ocorrem aleatoriamente, os resíduos podem então ser vistos como variáveis aleatórias. No universo não determinístico em que elas estão inseridas, está definido o operador esperança, que é o valor que se espera de uma variável aleatória quando o tempo vai a infinito. No caso contínuo a esperança de uma variável aleatória Q qualquer é definida como:

$$E[Q] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Q dt \quad (4.41)$$

No caso discreto, a esperança é definida por:

$$E[Q] = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_0^k Q \quad (4.42)$$

No caso estudado na seção anterior, o quadrado de cada resíduo pode ser visto como uma variável aleatória. Então, a função J definida em 4.22 nada mais é que o valor esperado da variável aleatória resíduo ao quadrado.

O parágrafo acima pode ser escrito algebricamente como:

$$Q_k = e_k^2 \quad (4.43)$$

e

$$J = E[Q] \quad (4.44)$$

Para o caso em que se quer estudar Q como sendo o erro quadrático de cada medida, sendo que e_k é função de $A_{k:}$ e de \hat{X}_k , o que faz com que Q_k também o seja, permitindo que se escreva $Q_k = Q_k(A_{k:}, \hat{X}_k)$

Então, ao se tomar o gradiente da função de custo com relação a X e ao se igualar o resultado a zero, pode-se encontrar uma forma recursiva de estimação de X que é a seguinte:

$$X_k = X_{k-1} - \gamma_k [\nabla_X Q_k(A_{k:}, \hat{X}_k)] \quad (4.45)$$

Em que $\nabla_X Q_k(A_{k:}, \hat{X}_k)$ é o gradiente de $Q_k = Q_k(A_{k:}, \hat{X}_k)$ com relação a X , e γ é um ganho. Esta forma de estimação é encontrada ao se repetir os passos entre 4.24 e 4.40. A diferença entre esta forma recursiva e a obtida anteriormente é que esta se aplica para qualquer função de custo Q , que não precisa ser necessariamente o erro quadrático. Ou seja, o objetivo desta seção é generalizar o estudado na seção anterior. De fato, ao se observar a equação 4.40 nota-se que o produto entre $A_{k:}$ e a expressão entre chaves nada mais é que o gradiente do erro quadrático com relação a X , conforme o que foi desenvolvido na equação 4.24.

Espera-se que, a partir de um número de amostras suficientemente grande, a forma recursiva em 4.45 convirja, ou seja, a diferença entre X_k e X^* , que é o valor real do vetor X , seja nula. Como X_k

é variável aleatória, não se fala diretamente que a diferença acima deve ser nula quando $k \rightarrow \infty$ mas sim que a probabilidade da diferença ser nula quando $k \rightarrow \infty$ é igual a um. Ou seja:

$$P[\lim_{k \rightarrow \infty} \|X_k - X^*\| = 0] = 1 \quad (4.46)$$

Quando houver convergência em 4.45, a diferença entre o vetor X_k e o vetor X_{k-1} obtido na iteração seguinte é nula, ou muito próxima disto.

Para que isto aconteça é necessário que:

$$\gamma_k [\nabla_X Q_k(A_{k:}, \hat{X})] = 0 \quad (4.47)$$

Como Q_k é uma função de custo no instante k , ela nunca terá gradiente com relação a X nulo, embora sua esperança o tenha. Este gradiente nunca se anulará pois ele depende do valor de $A_{k:}$ que, embora conhecido, é arbitrário e não necessariamente leva o gradiente a zero. Sendo assim, para que 4.47 ocorra, γ_k deve tender a zero para um valor muito grande de k .

Ainda é pertinente que se comente sobre o gradiente de $Q(A_{k:}, \hat{X}_{k-1})$. No caso do método recursivo de mínimos quadrados apresentado até aqui, a função Q é:

$$Q = [\hat{e}(A_{k:}, \hat{X}_{k-1})]^2 \quad (4.48)$$

Logo, o gradiente desta função com relação ao vetor X é, utilizando a regra da cadeia [41]:

$$\nabla_{\hat{X}} Q = 2 \nabla_{\hat{X}} [\hat{e}(A_{k:}, X_{k-1})] \hat{e}(A_{k:}, X_{k-1}) \quad (4.49)$$

Sendo assim, o algoritmo recursivo 4.45 se torna:

$$X_k = X_{k-1} - \gamma_k [\nabla_{\hat{X}} [\hat{e}(A_{k:}, X_{k-1})] \hat{e}(A_{k:}, X_{k-1})] \quad (4.50)$$

Em que a constante 2 foi embutida na constante γ .

Na forma que tem sido desenvolvida, o resíduo de predição no instante k é calculado usando o vetor \hat{X} ótimo obtido na iteração $k - 1$. Em outras palavras, o vetor de parâmetros é obtido na iteração $k - 1$, a partir dele se calcula a saída estimada no instante k que é subtraída da saída que de fato ocorreu neste instante. O resultado desta subtração é o resíduo $\hat{e}_{k|k-1} = \hat{e}(A_{k:}, X_{k-1})$, ou seja, o erro de previsão da medida no instante k dado que se conhece as saídas até o instante $k - 1$.

Sendo assim, a função do ganho γ_k é ponderar o quanto de correção é necessário para o vetor de parâmetros A para que a medida no instante k se ajuste com o novo conjunto de dados gerados. Em outras palavras, γ_k é um ganho de filtro dos resíduos. De fato, o método dos mínimos quadrados recursivo pode ser visto como uma forma simplificada do filtro de Kalman, apresentado detalhadamente em [31] ou [7], se o vetor de estados do filtro de Kalman for visto como o vetor de parâmetros a se determinar.

Para que, a cada nova iteração, os resíduos tragam novas informações para o cálculo do vetor de parâmetros A , ou seja, para que os resíduos tragam inovações para o cálculo dos parâmetros, é interessante que não haja correlação entre o resíduo em um instante e os resíduos nos instantes anteriores. Em outras palavras, a função de autocorrelação dos resíduos deve ser da seguinte forma:

$$E[e_k, e_j] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{se } k = j \\ 0 & \text{se } k \neq j \end{cases} \quad (4.51)$$

Também é interessante que a média dos resíduos seja zero para ele não cause efeito no valor médio da função, ou seja:

$$E[e_k] = 0 \quad (4.52)$$

Juntando as condições 4.51 e 4.52 temos que o resíduo deve ser um ruído branco para que o método iterativo funcione corretamente.

Caso o resíduo não seja um ruído branco, ele pode ser "branqueado" usando-se o filtro que transformaria o ruído branco em um ruído com aquela correlação. Ou seja, caso o ruído seja colorido, deve-se fazer uma fatorização de seu espectro (método que permite que seja calculado um filtro que tem como entrada um ruído branco e como saída um ruído com uma dada densidade espectral de potência) e utilizar o filtro obtido. Para mais informações sobre fatorização de espectro, recomenda-se as referências [7] e [45].

4.3.6 Uso do algoritmo recursivo

Como foi visto, o algoritmo recursivo de mínimos quadrados fornece estimativas para a grandeza que se quer estimar de forma iterativa. Desta forma, seu uso é interessante em casos em que se quer estimar alguma grandeza enquanto o processo esteja ocorrendo para que possa ser tomada alguma atitude no controle do processo, por exemplo. O esforço computacional requerido a cada iteração deste algoritmo é pequeno se comparado ao esforço necessário para se aplicar a solução clássica de mínimos quadrados a cada vez que um dado novo é adicionado.

No caso da modelagem estudada nesta dissertação, os ensaios são realizados e depois disto os dados são analisados. Por este motivo, foi usado o algoritmo clássico de mínimos quadrados pois sua implementação é mais simples. O algoritmo recursivo seria uma opção caso se queira fazer a estimativa em tempo real da temperatura do motor. Esta estimativa poderia ser útil para o controlador da máquina de lavar caso se queira implementar um ciclo de agitação inteligente que tenha uma taxa de agitação capaz de retirar uma determinada sujeira das roupas sem que o motor sobreaqueça dentro de um determinado intervalo de tempo. Pela adaptabilidade deste algoritmo, o controlador poderia, durante os primeiros instantes da agitação, aprender sobre como o motor aquece para a carga de roupas no cesto naquela lavagem para com isto encontrar uma estratégia de agitação que otimize a limpeza sem sobreaquecer o motor. Naturalmente, o controle eletrônico precisaria também de outras informações, como o nível de sujeira das roupas, o que pode ser obtido por meio de um sensor óptico no tubo de drenagem do tanque.

4.4 Sistemas dinâmicos e modelos entrada saída

A menos da seção que trata sobre o método dos mínimos quadrados recursivo, a discussão desenvolvida nas seções iniciais é focada no ajuste de curvas. No entanto, o método dos mínimos quadrados também pode ser aplicado para a previsão e simulação do comportamento de sistemas dinâmicos conforme é descrito nesta e nas próximas seções deste capítulo.

Sistemas dinâmicos são por definição, aqueles que têm o comportamento em um dado instante de tempo caracterizado por eventos ocorridos naquele instante e em instantes de tempo passados [12] [22]. Dentre os sistemas dinâmicos, existem os sistemas contínuos no tempo, que são aqueles em que

um sinal contínuo aplicado na entrada é transformado em outro sinal, também contínuo, que pode ser observado na saída. Exemplos de sistemas contínuos são os sistemas físicos, ou seja, aqueles que são regidos pelas leis da física, como por exemplo, um sistema mecânico, um sistema térmico, um sistema elétrico, dentre outros.

Como ponto de partida para o entendimento da teoria de sistemas dinâmicos e para exemplificar algumas definições necessárias, será usado como exemplo um sistema mecânico simples formado por uma massa m e uma mola de constante elástica k , conforme mostrado na figura 4.4.

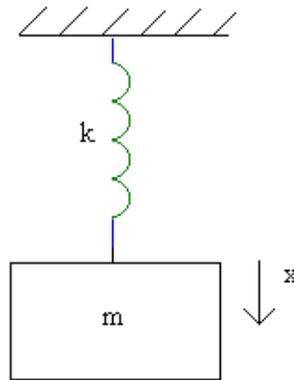


Fig. 4.4: Sistema massa mola

Digamos que o sistema esteja sujeito a alguma entrada, ou seja, alguma força é aplicada de alguma forma sobre a massa. Esta força pode variar em função do tempo e portanto será representada pela função temporal $u(t)$. Aplicando-se leis físicas conhecidas sobre a força de uma mola [26] e o princípio de D'Allembert [12], [22], pode-se escrever uma equação diferencial que representa o sistema:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = u(t) \quad (4.53)$$

Deve-se observar que a equação diferencial mostrada já é um modelo matemático para o sistema, ou seja, uma forma matemática que representa, pelo menos para os iniciados neste modo de representação, a posição da massa ao longo do tempo. É interessante notar também que este modelo pode ser visto como um modelo entrada-saída se for considerado que a entrada é a função $u(t)$ e a saída é a posição da massa $x(t)$. Em uma linguagem mais clara, a equação descreve onde vai estar a massa em cada instante de tempo dado que ela foi perturbada por uma força conhecida.

A partir do sistema exemplificado, pode-se apresentar algumas definições. Digamos que a constante elástica k da mola e a massa m não se alterem ao longo do tempo. Com isto, o sistema é conhecido como um sistema *invariante no tempo*. No caso de a análise deste sistema ser feita por um longo período de tempo, talvez fosse necessário pensar no envelhecimento da mola para se ter um modelo mais preciso. Se este fosse o caso, o sistema seria conhecido como um sistema *variante no tempo*.

Imagine agora que se arbitre um determinado instante como sendo o instante inicial de observação do sistema. Se o comportamento do sistema após aquele instante inicial não depender de absolutamente nada que ocorreu anteriormente àquele instante, mas apenas da condição em que o sistema estava no início dos tempos e do que acontece daquele instante em diante, o sistema é dito *causal*. Como no sistema dado como exemplo a posição da massa depende apenas da posição e da velocidade iniciais e da força aplicada sobre a massa a partir do instante inicial, ele é um sistema causal.

Uma terceira definição vem da observação da equação 4.53. Note que não há nenhum termo envolvendo relações não lineares da variável x . Por este motivo o modelo é dito *linear*. O sistema térmico que é o foco do estudo nesta dissertação é linear, causal e invariante no tempo, assim como o sistema massa mola dado como exemplo para o desenvolvimento desta seção.

A solução da equação diferencial 4.53 é trivial e o método de resolução de problemas deste tipo é baseado em se supor heurísticamente uma determinada solução paramétrica e encontrar os coeficientes ligados a esta solução que satisfazem o sistema. A solução que deve ser suposta para a resolução da equação diferencial é uma função exponencial conforme pode ser visto mais detalhadamente nas referências [41], [36], [25], [32], [13] dentre outras referências sobre cálculo diferencial. Para o escopo desta dissertação é interessante mostrar uma outra técnica de solução de equações diferenciais baseada em se fazer a troca de domínio da função de forma que ela se torne algébrica. Esta solução será mostrada mais detalhadamente pois a partir dela surge o conceito de *função de transferência*, fundamental para o entendimento de sistemas entrada-saída.

A mudança de domínio é feita por meio da transformada de Laplace, denotada por \mathcal{L} . A transformada de Laplace de uma função temporal é definida por:

$$\mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = X(s) \quad (4.54)$$

O operador \mathcal{L} é linear pois:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x_1(t) + x_2(t)] &= \int_0^{\infty} (x_1(t) + x_2(t))e^{-st} dt = \int_0^{\infty} x_1(t)e^{-st} dt + \int_0^{\infty} x_2(t)e^{-st} dt = \\ &= \mathcal{L}[x_1(t)] + \mathcal{L}[x_2(t)] \\ \mathcal{L}[\alpha x_1(t)] &= \int_0^{\infty} \alpha x_1(t)e^{-st} dt = \alpha \int_0^{\infty} x_1(t)e^{-st} dt = \\ &= \alpha \mathcal{L}[x_1(t)] \end{aligned} \quad (4.55)$$

A partir de 4.54 pode-se deduzir a transformada de Laplace da derivada de uma função conforme a demonstração abaixo que parte da equação da derivada do produto de duas funções:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x(t)e^{-st}) &= \frac{dx(t)}{dt}e^{-st} + (-s)x(t)e^{-st} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{d}{dt}(x(t)e^{-st}) dt &= \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt}e^{-st} dt + \int_0^{\infty} (-s)x(t)e^{-st} dt \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x(t)e^{-st}|_{t=0}^{\infty} &= \mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] - s\mathcal{L}[x(t)] \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] &= s\mathcal{L}[x(t)] - x(0) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Ao se seguir o mesmo raciocínio encontra-se que a transformada de Laplace da n ésima derivada de uma função $x(t)$ é dada por:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right] = s^n\mathcal{L}x(t) - s^{n-1}f(0) - \dots - s\frac{d^2f}{dt^2}(0) - \frac{df}{dt}(0) \quad (4.57)$$

Pode-se agora aplicar a transformada de Laplace aos dois lados da equação 4.53 obtendo-se a função de transferência do sistema dinâmico que é a função que relaciona as entradas e saídas do sistema. Para isto é usada a propriedade de linearidade da transformada de Laplace provada em 4.55 e considera-se que as condições iniciais do sistema sejam nulas.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[m\frac{d^2x}{dt^2} - kx\right] &= \mathcal{L}[u(t)] \Rightarrow \\ \Rightarrow ms^2X(s) - kX(s) &= U(s) \Rightarrow \\ \Rightarrow X(s) &= \frac{1}{ms^2-k}U(s) \Rightarrow \\ \Rightarrow X(s) &= H(s)U(s) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Em que $H(s)$ é a função de transferência do sistema em questão.

Da forma mostrada na equação 4.58 tem-se mais claramente o conceito de modelo entrada-saída do sistema, conforme pode ser visto na figura 4.5

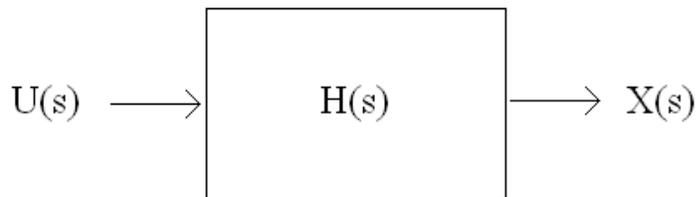


Fig. 4.5: Modelo entrada-saída do sistema

4.4.1 Discretização de sistemas contínuos

Com o advento da computação digital, tem sido cada vez mais interessante trabalhar com sistemas discretizados no tempo. Isto acontece pois os computadores digitais processam a informação de forma não instantânea. A opção por computadores digitais se dá pois eles são mais versáteis que os computadores analógicos que em geral são dedicados à resolução de apenas um tipo de problema.

Para discretizar um sistema contínuo basta que se tome amostras dos sinais de entrada e saída em intervalos de tempo constantes de duração T . Isto pode ser feito com um sistema do tipo *segurador de ordem zero*, conforme demonstrado na referência [22].

A equação discretizada obtida é conhecida como equação a diferenças. Semelhantemente às equações diferenciais, as equações a diferenças também têm solução baseada em uma suposição heurística, mas ao invés de se supor uma exponencial deve-se supor que a solução é da forma μ^k .

De forma semelhante ao que ocorre com as equações diferenciais, as equações a diferenças também podem sofrer uma transformação de forma a se tornarem algébricas. Esta transformação é a transformada \mathcal{Z} , definida a seguir:

$$\mathcal{Z}[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = X(z) \quad (4.59)$$

Assim como o operador \mathcal{L} , o operador \mathcal{Z} também é linear, conforme demonstrado a seguir:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x_1(k) + x_2(k)] &= \sum_{k=0}^{\infty} (x_1(k) + x_2(k))z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} x_2(k)z^{-k} = \\ &= \mathcal{Z}[x_1(k)] + \mathcal{Z}[x_2(k)] \\ \mathcal{Z}[\alpha x_1(k)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha x_1(k)z^{-k} = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)z^{-k} = \\ &= \alpha \mathcal{Z}[x_1(k)] \end{aligned} \quad (4.60)$$

A transformada \mathcal{Z} de uma amostra de uma série $x(k)$ adiantada em um instante de tempo é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(k+1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)z^{-k} = \sum_{u=1}^{\infty} x(u)z^{-u+1} = z \left(\sum_{u=0}^{\infty} x(u)z^{-u} - x(0) \right) = \\ &= z(X(z) - x(0)) \end{aligned} \quad (4.61)$$

Usando o mesmo procedimento usado em 4.61 pode-se generalizar a transformada \mathcal{Z} para um adiantamento de n instantes de tempo como sendo:

$$\mathcal{Z}[x(k+n)] = z^n(X(z) - \sum_{i=0}^{n-1} x(i)z^{-i}) \quad (4.62)$$

Seja uma equação a diferenças que modela um sistema discreto ou discretizado conforme mostrado abaixo

$$x(k+n) + a_{n-1}x(k+n-1) + \dots + a_1x(k+1) + a_0x(k) = b_{n-1}u(k+n-1) + \dots + b_1u(k+1) + b_0u(k) \quad (4.63)$$

Supondo condições iniciais nulas, pode-se encontrar a relação entre $X(z)$ e $U(z)$ com a seguinte manipulação:

$$\begin{aligned} z^n X(z) + a_{n-1}z^{n-1}X(z) + \dots + a_1zX(z) + a_0X(z) &= b_{n-1}z^{n-1}U(z) + \dots + b_1zU(z) + b_0U(z) \Rightarrow \\ \Rightarrow X(z) &= \frac{b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0} U(z) \Rightarrow \\ \Rightarrow X(z) &= H(z)U(z) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Em que $H(z)$ é a função de transferência do sistema discreto representado pela equação a diferenças 4.63

O desenvolvimento da solução da equação a diferenças por transformada \mathcal{Z} foi feito por uma questão de analogia com a seção anterior. Deve-se no entanto notar que a própria equação a diferenças carrega em si a sua solução. Basta resolvê-la iterativamente. Como exemplo, é mostrada a resolução iterativa da equação a diferenças de um sistema com a mesma ordem do massa mola proposto anteriormente.

$$\begin{aligned} x(2) &= u(2) - a_1x(1) - a_2x(0) \\ x(3) &= u(3) - a_1x(2) - a_2x(1) \\ &\vdots \\ x(n) &= u(n) - a_1x(n-1) - a_2x(n-2) \end{aligned} \quad (4.65)$$

Caso sejam conhecidas as entradas e as saídas do sistema, tem-se que as equações representadas em 4.65 formam um sistema de equações sobredeterminado, que pode ser resolvido com o menor erro possível com o uso do método dos mínimos quadrados.

4.4.2 Modelos representados pelas equações a diferenças

Na literatura de identificação de sistemas é comum a classificação de diferentes estruturas de modelos dependendo dos termos da equação a diferenças que são levados em conta ao se procurar

os parâmetros para o sistema. Nesta seção são mostradas diferentes estruturas de modelos existentes. Para todas as estruturas finitas mostradas é possível a determinação de parâmetros pelo método dos mínimos quadrados.

Modelo IIR

O modelo IIR (*Infinite Impulse Response*), a saída do sistema no instante k é considerada como sendo uma combinação linear de infinitas amostras passadas do sinal de entrada somadas ao sinal de erro no instante k . Sua função de transferência é dada por:

$$x(k) = b_0u(k) + b_1u(k-1) + \dots + e(k) = \sum_{i=0}^{\infty} b_iu(k-i) + e(k) \quad (4.66)$$

Naturalmente é impossível calcular todos os coeficientes deste modelo, de forma que é necessário que se trunque o somatório em algum valor nb suficientemente grande de forma que o modelo tenha uma representação razoável, conforme visto a seguir.

Modelo FIR

O modelo FIR (*Finite Impulse Response*), é semelhante ao IIR a menos de que o número de entradas considerado é finito, ou seja:

$$x(k) = b_0u(k) + b_1u(k-1) + \dots + b_{nb}u(k-nb) + e(k) = \sum_{i=0}^{nb} b_iu(k-i) + e(k) \quad (4.67)$$

Como este modelo é finito, a estimação de seus parâmetros é possível. Esta estrutura é aplicável a modelos em que não há realimentação de saídas.

Neste modelo o sinal de ruído $e(k)$ é branco, ou seja, a média deste sinal quando k tende a infinito é nula e a correlação tem a seguinte propriedade:

$$E[e_i, e_j] = \begin{cases} \sigma^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (4.68)$$

Em alguns sistemas reais a hipótese do ruído branco não se aplica. Nestes casos é necessário modelar um filtro que converta o ruído branco em um ruído de entrada do sistema como será visto a mais adiante.

Aplicando-se a transformada \mathcal{Z} à equação 4.67 e considerando condições iniciais nulas encontra-se que:

$$X(z) = \sum_{i=0}^{nb} b_i z^{k-i} U(z) + E(z) = B(z)U(z) + E(z) \quad (4.69)$$

Em que $B(z)$ é um polinômio em z com os coeficientes b_i , $i = 0 \dots nb$. Na figura 4.6 é mostrada a relação entrada-saída do modelo FIR.

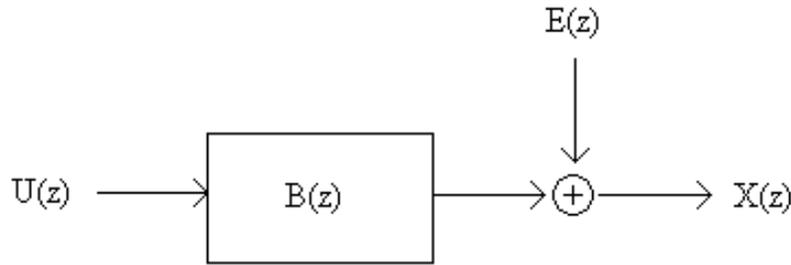


Fig. 4.6: Modelo FIR

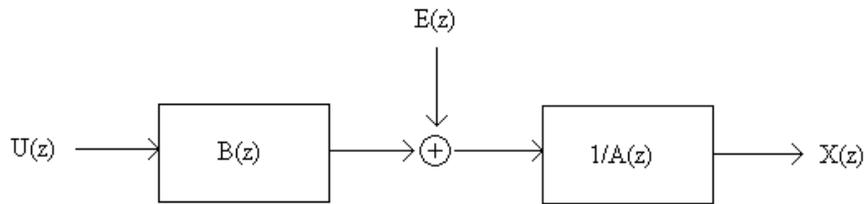


Fig. 4.7: Modelo ARX

Modelo ARX

No modelo ARX (*Auto Regressive with eXogenous inputs*) considera-se que a saída no instante k além de ser função de entradas passadas e ruído, é também função de saídas passadas, ou seja:

$$\begin{aligned}
 x(k) + a_1x(k-1) + \dots + a_{na}x(k-na) &= b_0u(k) + b_1u(k-1) + \dots + b_{nb}u(k-nb) + e(k) \Rightarrow \\
 \Rightarrow x(k) &= -\sum_{i=i}^{na} a_i x(k-i) + \sum_{i=0}^{nb} b_i u(k-i) + e(k)
 \end{aligned}
 \tag{4.70}$$

Aplicando-se a transformada \mathcal{Z} tem-se que:

$$A(z)X(z) = B(z)U(z) + E(z) \Rightarrow X(z) = \frac{B(z)}{A(z)}U(z) + \frac{1}{A(z)}E(z)
 \tag{4.71}$$

Este modelo foi o utilizado para o sistema estudado nesta dissertação, conforme descrito no capítulo 5. A relação entrada-saída do modelo ARX é ilustrada na figura 4.7.

Modelo ARMAX

No modelo ARMAX (*Auto Regressive Moving Average with eXogenous inputs*) considera-se, além do considerado no modelo ARX, que a saída depende também de amostras passadas do sinal de ruído. Por este motivo, considera-se também uma média móvel, ou seja, uma média das nc últimas amostras do sinal de ruído ao se estimar a saída.

Este modelo é usado quando as amostras de ruído em diferentes instantes de tempo têm correlação umas com as outras. Em outras palavras, o ruído a ser modelado não é branco. Como para fins de modelagem é melhor que se considere o ruído como sendo branco, é usado um filtro que transforma o ruído branco em um ruído com correlações que pode ser chamado de ruído colorido.

Com isto a equação a diferenças paramétrica fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 x(k) + a_1x(k-1) + \dots + a_{na}x(k-na) &= b_0u(k) + b_1u(k-1) + \dots + b_{nb}u(k-nb) + \\
 &+ c_0e(k) + c_1e(k-1) + \dots + c_{nc}e(k-nc) \Rightarrow \\
 \Rightarrow x(k) &= -\sum_{i=1}^{na} a_i x(k-i) + \sum_{i=0}^{nb} b_i u(k-i) + \sum_{i=0}^{nc} c_i e(k-i)
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

Aplicando-se a transformada \mathcal{Z} à equação a diferenças e fazendo-se algumas manipulações encontra-se que o modelo ARMAX tem a seguinte relação entrada saída:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)}U(z) + \frac{C(z)}{A(z)}E(z) \tag{4.73}$$

O diagrama de blocos do modelo ARMAX é mostrado na figura 4.8.

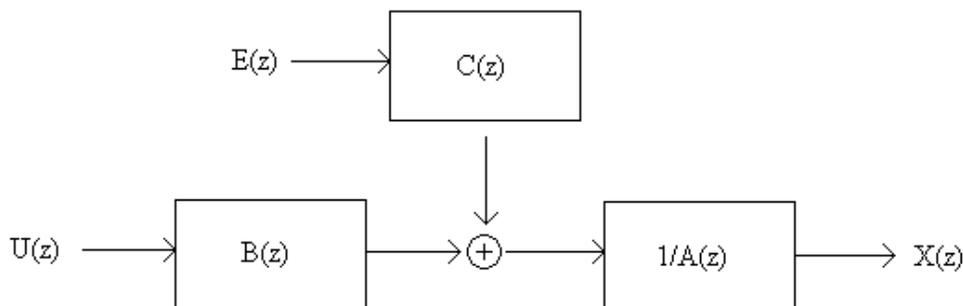


Fig. 4.8: Modelo ARMAX

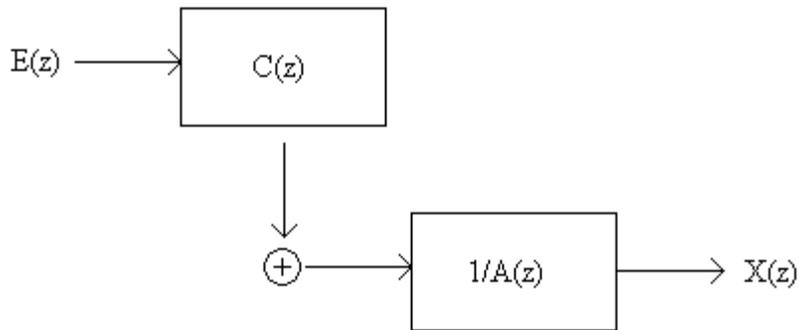


Fig. 4.9: Modelo ARMA

Modelo ARMA

O modelo ARMA (*Auto Regressive Moving Average*) é uma forma particular do ARMAX quando não há sinais de entrada aplicados ao sistema, ou seja, não há mais o termo referente às *exogenous inputs*. Com isto a saída do sistema depende apenas de um ruído de entrada que é colorido. Sua equação a diferenças paramétrica é da forma:

$$\begin{aligned}
 x(k) + a_1x(k-1) + \dots + a_{na}x(k-na) &= c_0e(k) + c_1e(k-1) + \dots + c_{nc}e(k-nc) \Rightarrow \\
 \Rightarrow x(k) &= -\sum_{i=1}^{na} a_i x(k-i) + \sum_{i=0}^{nc} c_i e(k-i)
 \end{aligned}
 \tag{4.74}$$

O que, ao se aplicar a transformada \mathcal{Z} implica na seguinte relação entrada saída:

$$X(z) = \frac{C(z)}{A(z)} E(z) \tag{4.75}$$

O diagrama de blocos do modelo ARMA é mostrado na figura 4.9.

Modelo OE

Assim como no modelo ARX, no modelo OE (*Output Error*) considera-se que a saída depende da entrada presente, de entradas passadas e de saídas passadas, além do sinal de ruído. No entanto, este modelo difere do ARX pois ao se considerar as amostras passadas do sinal de saída são consideradas sem ruído, sendo que o sinal de ruído é adicionado posteriormente à saída sem passar por nenhum filtro. Em outras palavras, considera-se que o ruído é branco. Define-se então uma variável auxiliar k que representa a saída sem ruído, resultando na seguinte equação a diferenças:

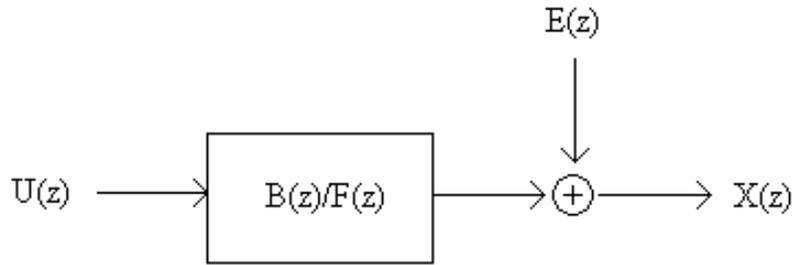


Fig. 4.10: Modelo OE

$$\begin{aligned}
 w(k) + f_1 w(k-1) + \dots + f_{n_f} w(k-n_f) &= b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_{n_b} u(k-n_b) \Rightarrow \\
 \Rightarrow w(k) &= -\sum_{i=1}^{n_f} f_i w(k-i) + \sum_{i=0}^{n_b} b_i u(k-i)
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

Sendo que a saída é dada por:

$$x(k) = w(k) + e(k) \tag{4.77}$$

Ao se aplicar a transformada \mathcal{Z} encontra-se que:

$$X(z) = W(z) + E(z) = \frac{B(z)}{F(z)} U(z) + E(z) \tag{4.78}$$

Que é uma estrutura diferente da encontrada no modelo ARX, como pode ser notado ao se comparar as figuras 4.7 e 4.10 em que é ilustrada a relação entrada-saída do modelo OE.

Modelo Box-Jenkins

Assim como o modelo OE se assemelha ao modelo ARX, o modelo Box-Jenkins se assemelha ao ARMAX. Ou seja, a variável auxiliar se relaciona com as entradas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 w(k) + f_1 w(k-1) + \dots + f_{n_f} w(k-n_f) &= b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_{n_b} u(k-n_b) \Rightarrow \\
 \Rightarrow w(k) &= -\sum_{i=1}^{n_f} f_i w(k-i) + \sum_{i=0}^{n_b} b_i u(k-i)
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

No entanto, o ruído passa por um filtro com função de transferência do tipo $\frac{C(z)}{D(z)}$, ou seja, não é branco, de forma que a relação entrada-saída deste modelo, já em termos das transformadas \mathcal{Z} é dada por:

$$X(z) = \frac{B(z)}{F(z)}U(z) + \frac{C(z)}{D(z)}E(z) \quad (4.80)$$

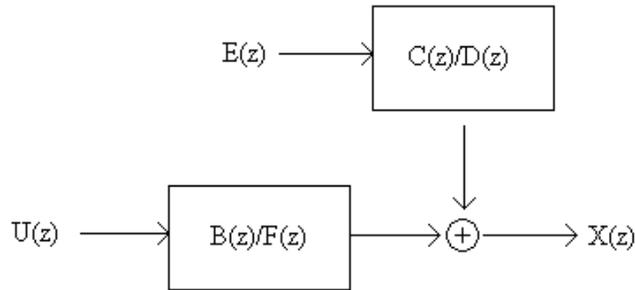


Fig. 4.11: Modelo Box-Jenkins

O diagrama de blocos do modelo Box-Jenkins é mostrado na figura 4.11.

Modelo paramétrico geral

Todos os modelos paramétricos estudados acima podem ser colocados na forma geral do tipo:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)F(z)}U(z) + \frac{C(z)}{A(z)D(z)}E(z) \quad (4.81)$$

em que $E(z)$ é um sinal de ruído branco.

Na tabela 4.2 é mostrado um resumo dos modelos paramétricos existentes em termos dos polinômios que são usados em cada um deles.

Para se determinar os parâmetros de cada um dos modelos pode ser usado o método dos mínimos quadrados ou ainda o método dos mínimos quadrados recursivo desenvolvidos nas seções anteriores.

Tab. 4.2: Modelos paramétricos existentes

Polinômios não unitários	Nome do modelo
$B(z)$	FIR
$A(z), B(z)$	ARX
$A(z), B(z), C(z)$	ARMAX
$A(z), C(z)$	ARMA
$B(z), F(z)$	OE
$B(z), F(z), C(z), D(z)$	Box-Jenkins

Capítulo 5

Ensaio e resultados

5.1 Introdução

Neste capítulo são mostrados os resultados obtidos com a aplicação dos métodos propostos nesta dissertação. A parte experimental é composta por três conjuntos principais de ensaios e análises.

No primeiro conjunto, o objetivo dos ensaios foi o levantamento dos parâmetros do circuito elétrico equivalente da máquina de indução monofásica em função da temperatura. Estes ensaios foram conduzidos visando os conjuntos de ensaios seguintes.

No segundo conjunto os parâmetros obtidos para o circuito elétrico equivalente do motor de indução monofásico são usados para se tentar estimar a corrente em uma determinada situação. Para comprovar a qualidade dos parâmetros obtidos, a corrente calculada foi comparada com a corrente medida.

No terceiro conjunto de ensaios foi observado o comportamento de aquecimento do motor. A partir destas observações, é proposto o modelo matemático para o aquecimento do motor. Levantado o modelo, sua exatidão foi comprovada por meio de comparações entre resultados experimentais de novos ensaios e resultados de execuções do modelo matemático encontrado. Um resumo deste conjunto de ensaios pode ser encontrado na referência [23] anexada a esta dissertação no apêndice D.

5.2 Aparelhagem experimental

Para os experimentos de estimação da corrente elétrica do motor (seção 5.4) e de modelagem do aquecimento do motor (seção 5.5) foi usada uma máquina de lavar roupas da marca Brastemp modelo *Tira Machas 9Kg* (BWT09A) equipada com um motor de indução monofásico com rotor do tipo gaiola de esquilo e com enrolamento do estator feito em cobre mostrado na figura 5.1. O motor é fabricado pela Weg e tem potência igual a 1/3 de cv e tensão de alimentação nominal igual a 127V .

O motor foi instrumentado com três termopares tipo T posicionados em três pontos: na cabeça das bobinas do estator, na ranhura do estator entre o ferro e o cobre dos enrolamentos e na lateral das bobinas. Este tipo de termopar foi escolhido por ser formado de materiais não magnéticos (Cobre e constantana, que é uma liga formada por cobre e níquel) que não sofrem influência dos campos do motor [29]. Na figura 5.2 são mostrados os termopares da cabeça e da lateral.

A alimentação do motor foi feita por meio de uma placa eletrônica equipada com *triacs* que são

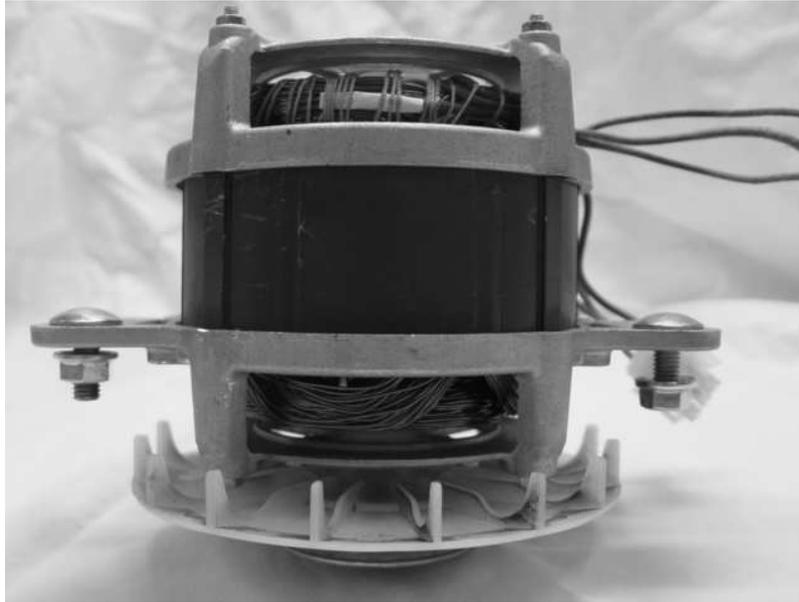


Fig. 5.1: Motor utilizado para o trabalho experimental



Fig. 5.2: Termopares instalados na bobina do motor

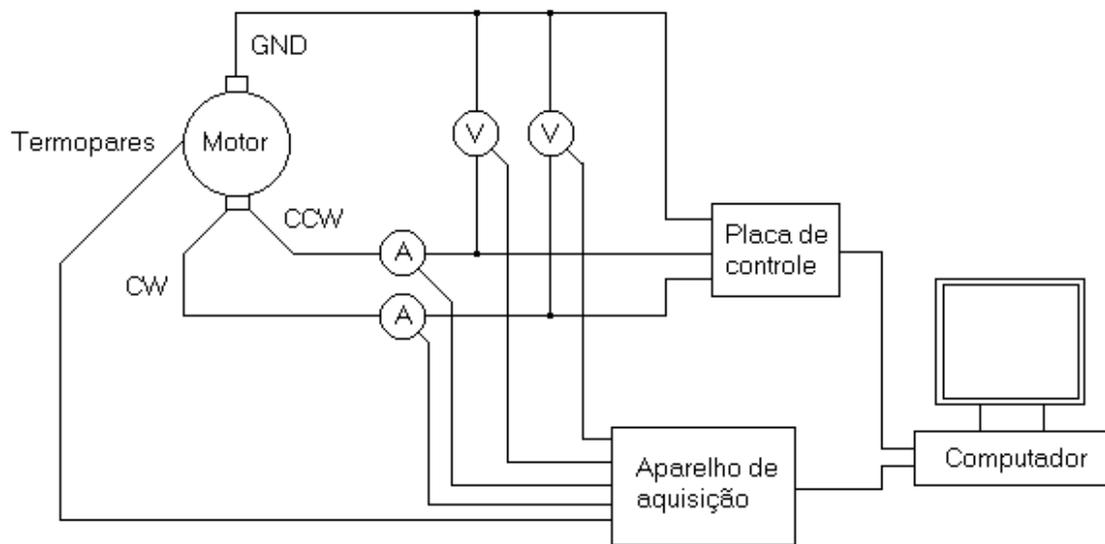


Fig. 5.3: Esquema elétrico para aquisição de tensão e corrente RMS

controlados por um computador. Desta forma, é possível que se controle o tempo de motor ligado e motor desligado a partir do disparo ou não dos *triacs* ligados aos terminais *CW* e *CCW* do motor. Os outros componentes elétricos da máquina de lavar são também controlados por esta placa eletrônica ligada ao computador, de forma que é possível criar qualquer ciclo de lavagem experimental a partir desta montagem. Esta placa eletrônica já estava desenvolvida quando do começo deste estudo e seus detalhes não são apresentados nesta dissertação por motivo de segurança de informação industrial.

No circuito de ligação do motor havia também transdutores que são aparelhos que transformam a grandeza de entrada, seja ela tensão ou corrente alternada, em uma tensão contínua que varia entre 0 e 10V. Esta tensão contínua é proporcional ao valor RMS da grandeza medida. A saída de tensão contínua dos transdutores é ligada a um canal do aparelho de aquisição usado, que é da marca Agilent, modelo 34970A. Esse aparelho lê o valor da tensão do canal a cada período de aquisição e aplica a este valor um ganho, via software, de forma que o valor registrado é igual ao valor RMS da grandeza medida. O aparelho de aquisição também capta os sinais dos termopares e de outros aparelhos de medição que eventualmente estejam incluídos na montagem. O esquema de ligação da máquina é mostrado na figura 5.3. No experimento de determinação do modelo térmico também foi usado um osciloscópio da marca Tektronix modelo TDS3052B equipado com uma ponta de corrente do mesmo fabricante modelo A6302 para que se fizesse a leitura da corrente elétrica com uma taxa de aquisição mais alta que a do aparelho de aquisição.

No experimento de estimação da corrente elétrica do motor a velocidade também é monitorada. Para isto, tiras reflexivas foram coladas no topo do agitador da máquina. Sobre o agitador foi posicionado um tacômetro óptico que contava quantas vezes a tira passava por ele por meio da reflexão do laser por ele mesmo emitido. A partir disto, pode-se calcular a velocidade do agitador, a partir da qual calcula-se a velocidade do motor por meio da relação de transformação da correia que liga o eixo do motor ao eixo do agitador. O sinal do tacômetro é transmitido ao aparelho aquisitor de dados

da mesma forma que o sinal dos transdutores.

O tecido colocado na máquina foi o tecido padrão ABNT para elevação de temperatura. Este tecido é formado por panos 100% algodão de dimensão 70x70cm. Os panos eram empilhados quatro a quatro e enrolados no sentido diagonal formando trouxas. Estas trouxas eram posicionadas dentro do cesto da máquina de lavar de uma forma balanceada para evitar movimentos indesejados do tanque durante a centrifugação.

No experimento de levantamento dos parâmetros do circuito (seção 5.3), o motor foi alimentado por meio de uma tomada monitorada por um medidor de grandezas elétricas da marca Yokogawa capaz de medir tensão, corrente e potência, e permaneceu em uma bancada ao invés de ser instalado na máquina de lavar roupas. A aquisição de temperaturas foi feita por meio de termopares da mesma forma como foi feita nos outros experimentos.

5.3 Levantamento do circuito em função da temperatura

5.3.1 Introdução

O objetivo final desta dissertação é a modelagem do aquecimento do motor de indução monofásico. Para atingir este objetivo é necessário que se conheça a corrente RMS que passa pelos condutores do motor a cada instante de tempo. No entanto, por uma questão de transitório de partida, o valor RMS da corrente não é proporcional à tensão aplicada, que é a grandeza conhecida. Desta forma, é necessário que se conheça a relação entre tensão e corrente, e para isto é necessário conhecer o circuito equivalente do motor. A estrutura paramétrica deste circuito já foi estudada no capítulo 3 por uma abordagem física dos fenômenos envolvidos. Resta ainda que se faça a determinação das impedâncias, o que é feito experimentalmente nesta seção. O modelo final portanto é do tipo caixa cinza.

5.3.2 Método utilizado

O motor foi ligado de forma contínua, ora com rotor livre ora com rotor bloqueado, e a temperatura foi observada. A partir dos 25°C, os valores RMS da tensão e da corrente e a potência real (Watts) que alimentavam o motor eram anotados de 5 em 5°C. Para cada um dos enrolamentos do motor foram feitos dois testes de rotor bloqueado e dois testes de rotor livre. Quando a temperatura atingia o regime, a alimentação era desligada e, enquanto o motor esfriava, a resistência do enrolamento do estator era medida por meio de um multímetro para as temperaturas em que tinham sido feitas as medidas de tensão, corrente e potência.

Dos três termopares ligados ao motor, o que mede a temperatura mais próxima da temperatura nos enrolamentos é o localizado na ranhura. Portanto, a leitura deste termopar foi utilizada como referência de temperatura nestes testes.

Um programa baseado no software MatLab foi desenvolvido para calcular os valores dos parâmetros do circuito elétrico equivalente a partir dos testes feitos. O código deste programa é mostrado no apêndice C. Os parâmetros foram calculados para as temperaturas indo de 25°C até 70°C, que foi o menor valor de regime obtido pelos testes.

O programa desenvolvido cruza os dados obtidos nos dois testes de rotor livre e nos dois de rotor bloqueado de forma a encontrar quatro valores de parâmetros para cada temperatura. A média destes valores é considerada o resultado final.

O código utilizado é composto por três partes principais. Na primeira delas são carregados na memória os valores de tensão, corrente e potência obtidos para cada temperatura estudada nos testes de rotor livre e bloqueado. Para o cálculo também é carregado um vetor contendo as leituras da resistência R_1 em função da temperatura. Carregados estes valores, são feitos os cálculos descritos em 3.6. A segunda parte do código procura uma aproximação linear para os parâmetros encontrados na primeira parte em função da temperatura. Desta forma é possível que se calcule o valor das impedâncias para qualquer temperatura armazenando-se apenas dois valores, que são os coeficientes da aproximação linear encontrada. É possível até mesmo a extrapolação dos valores das impedâncias para temperaturas acima daquelas em que os testes foram feitos. A parte final do código plota os resultados obtidos e armazena os parâmetros calculados em disco. As duas primeiras partes do código implementado são mostradas na seção C.1.

5.3.3 Resultados

Os resultados obtidos para os parâmetros do circuito mostrado na figura 3.17 são mostrados nas figuras 5.4 a 5.8. Os coeficientes das retas obtidas para cada um dos parâmetros do circuito são mostrados na tabela 5.1

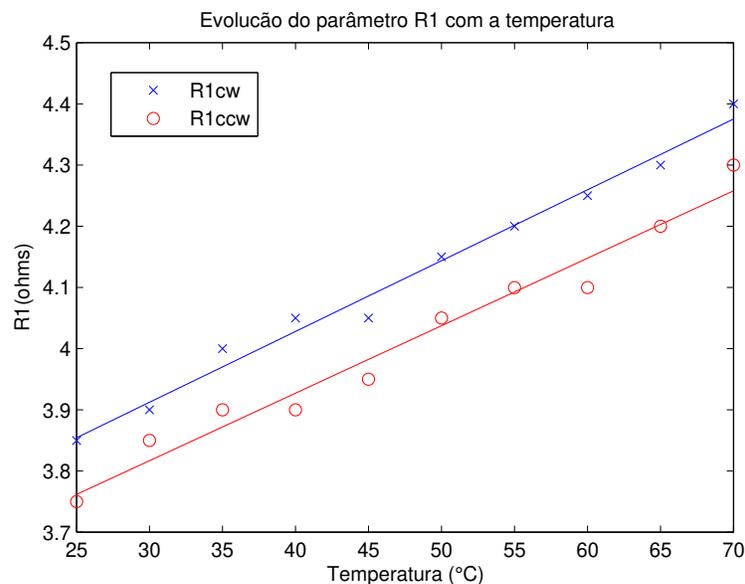


Fig. 5.4: Relação entre o parâmetro R_1 dos enrolamentos CW e CCW e a temperatura do enrolamento

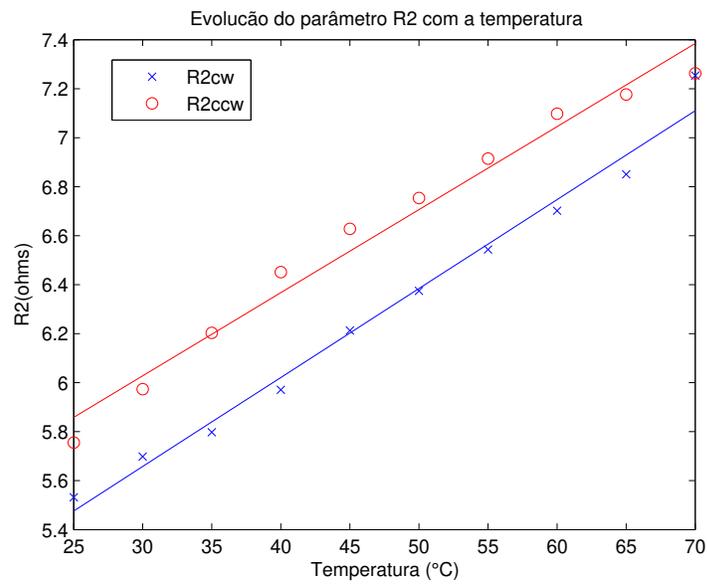


Fig. 5.5: Relação entre o parâmetro R_2 dos enrolamentos CW e CCW e a temperatura do enrolamento

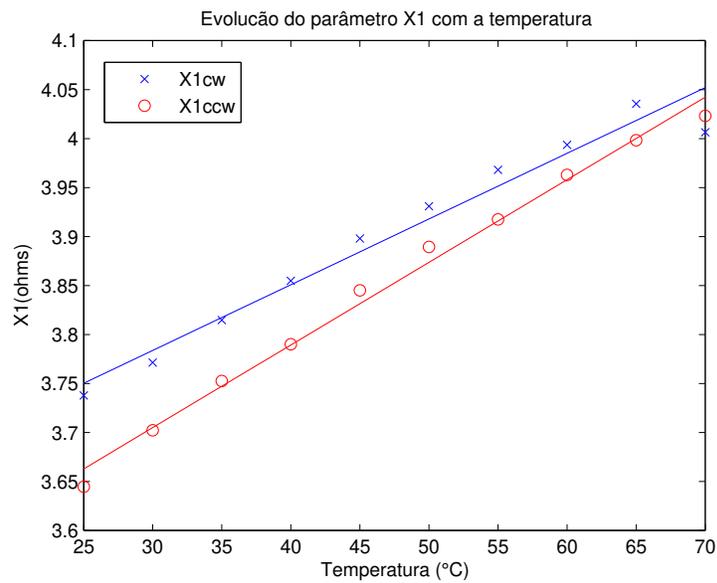


Fig. 5.6: Relação entre o parâmetro X_1 dos enrolamentos CW e CCW e a temperatura do enrolamento

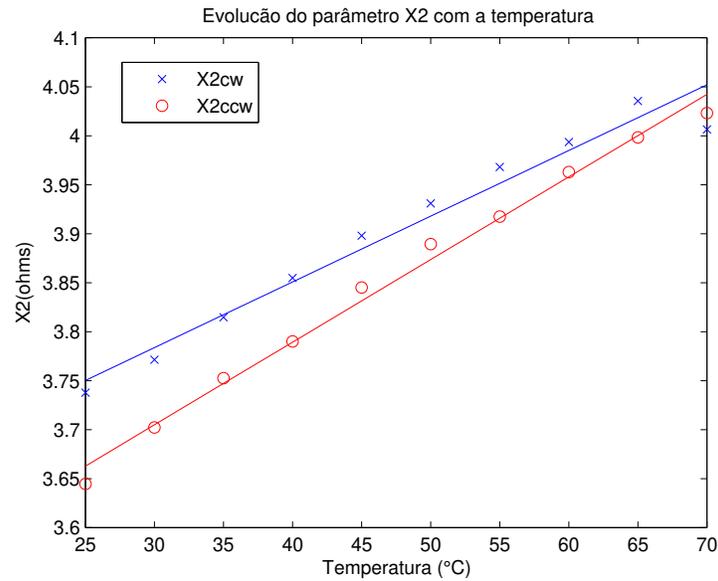


Fig. 5.7: Relação entre o parâmetro X_2 dos enrolamentos CW e CCW e a temperatura do enrolamento

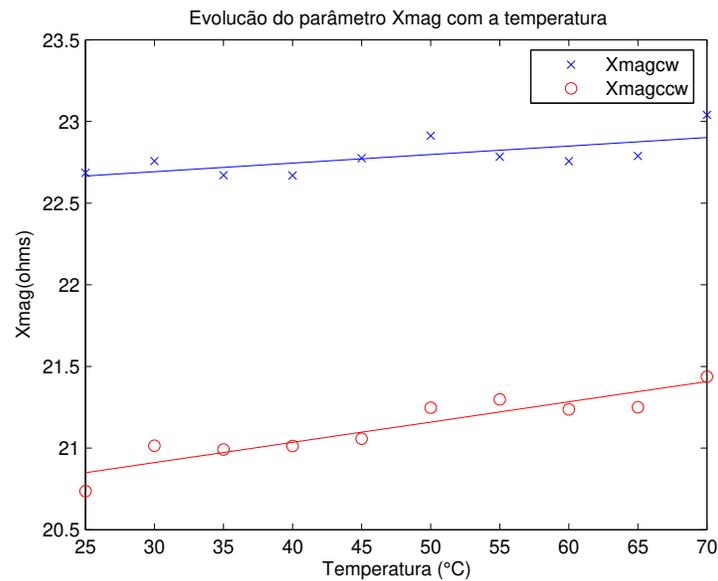


Fig. 5.8: Relação entre o parâmetro X_{mag} dos enrolamentos CW e CCW e a temperatura do enrolamento

Tab. 5.1: Coeficientes das retas que relacionam temperatura e coeficientes do circuito elétrico equivalente de cada um dos enrolamentos do motor

Parâmetro	Coef. angular (CW)	Coef. linear (CW)	Coef. angular (CCW)	Coef. linear (CCW)
R_1	0.0166	3.5652	0.0110	3.4861
R_2	0.0363	4.5688	0.0339	5.0109
X_1	0.0067	3.5827	0.0084	3.4521
X_2	0.0067	3.5827	0.0084	3.4521
X_{mag}	0.0052	22.5353	0.0124	20.5389

5.3.4 Discussão

Os parâmetros do motor que têm relação com o enrolamento (R_1 , R_2 , X_1 e X_2) apresentaram um comportamento diretamente relacionado à temperatura. O aumento das resistências em função da temperatura já era esperado por ser resultado do aumento da resistividade do cobre com a temperatura. O aumento observado das indutâncias próprias do estator e do rotor assim como o aumento do parâmetro X_{mag} , embora relativamente pequeno, não eram esperados. Uma hipótese provável para a variação das indutâncias e conseqüentemente das reatâncias é a dilatação dos materiais magnéticos do estator e do rotor, o que causa alterações na relutância do circuito magnético implicando em aumento de reatâncias.

O fenômeno observado com relação às reatâncias é interessante e pode motivar estudos futuros. O estudo deste fenômeno não será aprofundado porque para o escopo principal desta tese basta saber que existe um aumento da impedância do circuito elétrico equivalente do motor a medida que ocorre o aumento de temperatura.

5.4 Estimação da corrente elétrica no motor

5.4.1 Introdução

A partir do circuito elétrico equivalente obtido na seção anterior, dos valores de tensão aplicada e da velocidade angular do motor é teoricamente possível que se calcule o módulo e a fase da corrente elétrica a cada instante de tempo. Com isto pode-se obter seu valor RMS a partir do qual é possível desenvolver o modelo do aquecimento do motor, que é o objetivo final desta dissertação.

Esta seção tem como objetivo a verificação da qualidade da corrente calculada por meio do circuito equivalente. Para isto o resultado do cálculo da corrente do motor a partir de dados obtidos experimentalmente foi comparado com a corrente real para que se saiba se é possível ou não confiar nos parâmetros obtidos na seção anterior.

5.4.2 Método utilizado

O procedimento proposto é o seguinte: A máquina de lavar é submetida a uma centrifugação pulsada, ou seja, o motor é ligado durante um determinado tempo e depois desligado. Foi usada uma centrifugação pulsada e não uma agitação porque o aparelho de aquisição de dados a que era ligado o tacômetro não tem uma taxa de aquisição grande o suficiente para captar as mudanças de velocidade e corrente elétrica durante o ciclo de agitação.

A partir dos dados de velocidade captados pelo tacômetro calcula-se o escorregamento do rotor do motor com relação ao campo girante. A partir do escorregamento, das impedâncias do circuito elétrico equivalente levantadas na seção anterior e da tensão aplicada, calcula-se a amplitude e a fase da corrente no circuito, a partir das quais pode-se calcular o valor RMS da corrente ponto a ponto. A curva de corrente RMS calculada é então comparada à curva de corrente RMS medida para se testar a qualidade do circuito elétrico equivalente.

Para se fazer estes cálculos foi implementado um programa em Matlab cujo código é mostrado na seção C.2 do apêndice C e é baseado nas relações desenvolvidas na seção 3.5 do capítulo 3. Nos cálculos supõe-se que a temperatura do motor é constante e igual a 35°C , o que é próximo à realidade segundo as medidas dos termopares. O valor de temperatura é relativamente baixo com relação àqueles usados na seção anterior pois durante a centrifugação o motor é continuamente ventilado por uma ventoinha acoplada ao seu eixo principal.

5.4.3 Resultados

Os resultados obtidos para estimação da corrente a partir dos dados de tensão e escorregamento são mostrados nas figuras 5.9 e 5.10.

5.4.4 Discussão

Das figuras 5.9 e 5.10 nota-se que, embora apresentem a mesma ordem de grandeza, a corrente calculada é significativamente diferente da corrente real. O motivo da diferença é provavelmente devido à simplicidade do circuito elétrico equivalente utilizado. No procedimento utilizado é suposto

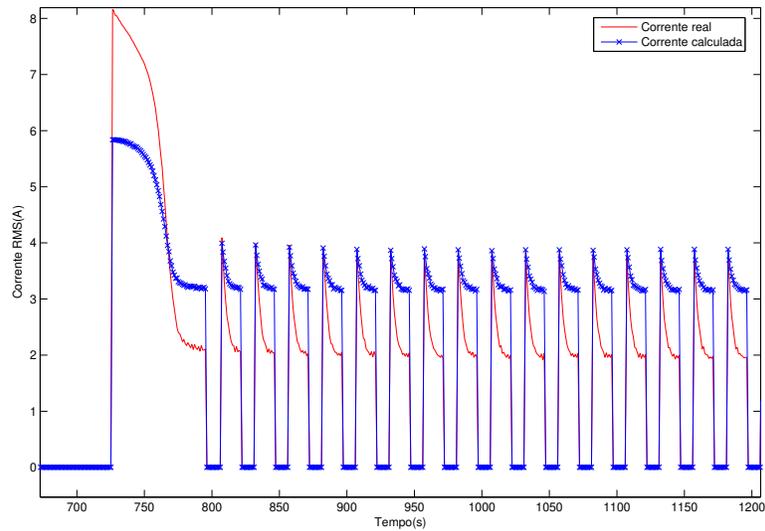


Fig. 5.9: Comparação entre valor RMS da corrente elétrica real e valor RMS calculado via circuito equivalente em vários ciclos de centrifugação pulsada.

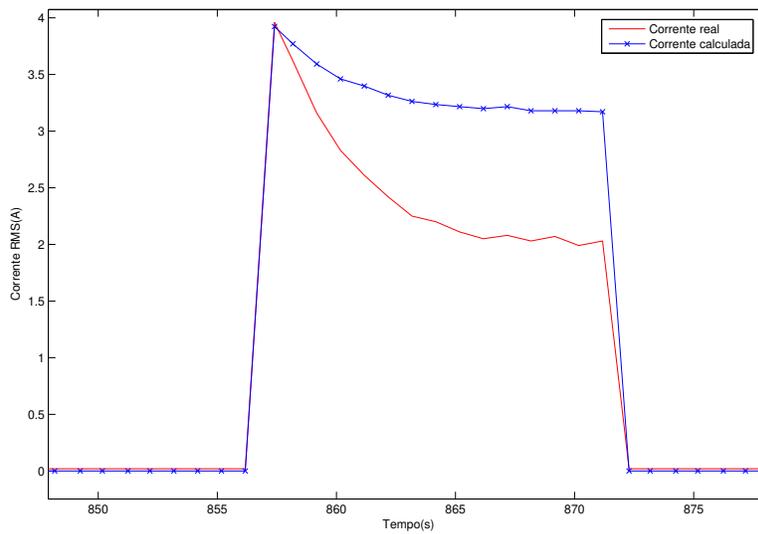


Fig. 5.10: Comparação entre valor RMS da corrente elétrica real e valor RMS calculado via circuito equivalente em apenas um ciclo de centrifugação pulsada.

que as induções mútuas dos enrolamentos principal e auxiliar do motor estão perfeitamente em quadratura, sendo que esta hipótese não é perfeitamente aplicável. Além disto, a divisão das impedâncias em partes iguais entre o campo progressivo e regressivo não é muito própria, conforme comentado por um especialista da empresa fornecedora do motor. Outra possível causa de imprecisão é a estimativa da impedância da bobina externa, que é simplesmente um fio enrolado em torno de si mesmo de uma forma não muito criteriosa.

Comparando-se os resultados nota-se que o circuito simulado tem mais inércia que o real. Sendo assim, o circuito real provavelmente tem indutâncias menores que as obtidas nos ensaios da seção anterior. O aperfeiçoamento do método de obtenção de parâmetros do motor serve como motivação para estudos futuros.

Caso os resultados obtidos nestes experimentos fossem bem sucedidos, a próxima etapa seria a estimação da velocidade do motor ao longo do tempo, o que seria feito da seguinte forma: No instante inicial seria suposta velocidade nula e com isto, a partir do circuito equivalente do motor de indução, seria calculada a corrente no motor. Depois, seria necessário tomar da curva de conjugado do motor fornecida pelo fabricante o valor do conjugado referente à velocidade inicial. Com o conjugado, seria necessário calcular a aceleração angular do sistema mecânico, passando pelo momento de inércia do sistema. Com a aceleração e o passo de simulação seria calculado o valor da nova velocidade do sistema e a partir dela poderia ser calculada o escorregamento e, com o uso do circuito elétrico equivalente do motor, a corrente elétrica. Com a nova velocidade também seria obtido o novo conjugado, e assim por diante, até atingir o instante de tempo desejado.

Neste procedimento deve-se ter o cuidado de, a cada iteração, atualizar o valor das resistências do circuito elétrico equivalente e a curva de conjugado, pois essas grandezas são função da temperatura.

O procedimento descrito acima, além de ser muito trabalhoso e exigir um grande esforço computacional, envolveria o levantamento do momento de inércia de um sistema mecânico altamente complexo devido à flutuação das roupas no interior da máquina.

No entanto, como os resultados da estimação da corrente a partir do circuito elétrico equivalente não foram bem sucedidos, se partirá para uma maneira mais simples de se estimar a corrente do motor conforme será mostrado nas seções seguintes. Esta maneira não envolve a estimação da velocidade do motor, o que simplifica a solução do problema.

5.5 Modelo do aquecimento do motor

5.5.1 Introdução

Conforme comentado no capítulo introdutório, o resultados dos testes de elevação de temperatura do motor podem ser vistos como a saída de um sistema térmico que tem como entrada o ciclo de lavagem escolhido, que implica em um certo regime de corrente para o motor. Ao se aproximar o sistema térmico por um sistema de primeira ordem, tem-se que a equação a diferenças que rege o processo é a seguinte:

$$t(k+1) = \alpha_1 t(k) + \alpha_2 t_{amb}(k) + \alpha_3 i(k) \quad (5.1)$$

Em que t denota a temperatura absoluta em um ponto do motor, t_{amb} é a temperatura ambiente, i denota o valor RMS da corrente que passa pelo motor e os coeficientes α_i são os parâmetros a serem

determinados

O sistema de primeira ordem proposto foi idealizado a partir da aproximação do sistema térmico por um circuito analógico elétrico. Nesta analogia, a grandeza temperatura é relacionada com a grandeza tensão, pois ambas estão inseridas no contexto de campos escalares que representam potenciais. A transferência de calor é relacionada com a grandeza corrente elétrica, pois ambas representam fluxos de energia. A carcaça do motor é vista como um acumulador de calor, o que pode ser traduzido por um capacitor. A energia acumulada no motor vem da fonte de calor, que é a corrente elétrica que passa através dos enrolamentos. Para o análogo elétrico, a fonte de calor seria uma fonte de corrente. Deve-se tomar cuidado para não se confundir a corrente do análogo elétrico que representa transferência de calor com a corrente física que passa pelo motor. Há ainda a influência da temperatura ambiente, que é um potencial e, portanto, representada por uma fonte de tensão ligada ao capacitor por uma resistência que representa a resistência térmica do motor. O circuito análogo elétrico é mostrado na figura 5.11

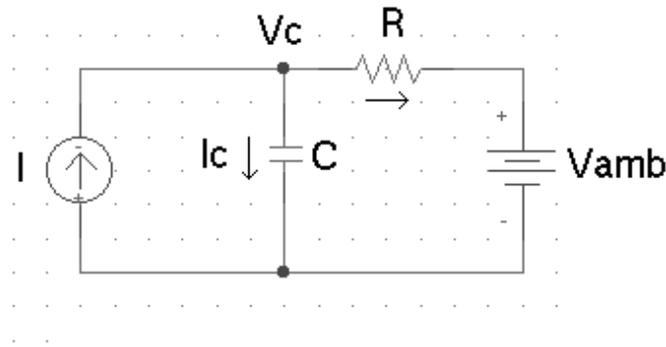


Fig. 5.11: Circuito elétrico análogo ao fenômeno térmico envolvido no problema

A partir do circuito, pode-se encontrar a equação a diferenças que rege o aumento de tensão (temperatura) no capacitor (carcaça do motor) em função das entradas de corrente (corrente que passa pelo motor) e de tensão (temperatura ambiente) a partir das seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 I_c &= I + \frac{V_{amb} - V_c}{R} \Rightarrow \\
 \Rightarrow C \frac{dV_c}{dt} &= I + \frac{V_{amb} - V_c}{R} \Rightarrow \\
 \Rightarrow C \frac{V_c(k+1) - V_c(k)}{\Delta t} &= I(k) + \frac{V_{amb}(k) - V_c(k)}{R} \Rightarrow \\
 \Rightarrow V_c(k+1) &= \frac{\Delta t}{C} I(k) + \frac{\Delta t}{CR} V_{amb}(k) - \left(\frac{\Delta t}{CR} - 1 \right) V_c(k) \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

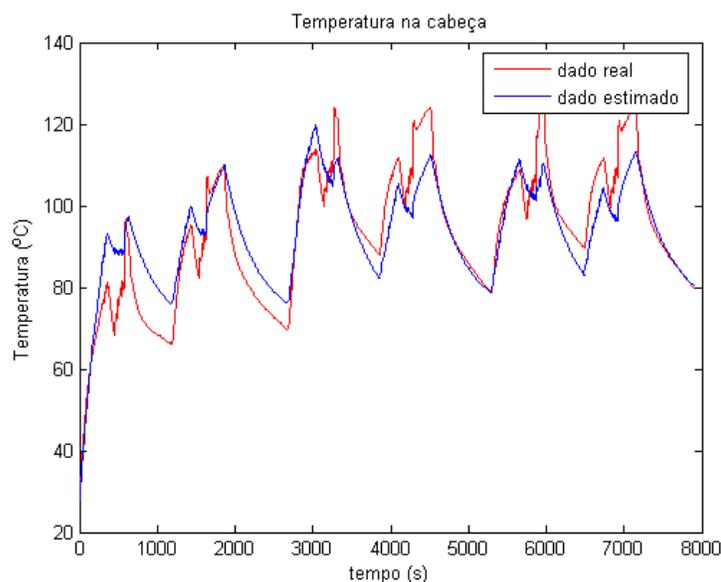


Fig. 5.12: Comparação entre dados reais e estimados para temperatura na cabeça do motor durante três ciclos completos de lavagem

Substituindo as tensões por temperaturas, a corrente do modelo equivalente pela corrente que passa pelo motor e as constantes por parâmetros α_i tem-se a equação a diferenças 5.1.

A partir disto, uma primeira abordagem que se imagina para a estimação de parâmetros do sistema térmico é, a partir das leituras feitas em testes de aquecimento do motor durante três ciclos de lavagem consecutivos¹, encontrar os parâmetros α_i que garantam uma aproximação para a temperatura com o menor erro quadrático médio com relação à evolução real da temperatura.

Para isto, foi implementado um programa em MatLab que estima estes parâmetros usando as técnicas discutidas no capítulo 4, calcula a evolução da temperatura ao longo do tempo usando a equação a diferenças que norteia o processo e plota as curvas de dados reais e dados estimados. Os resultados desta primeira abordagem são mostrados nas figuras 5.12, 5.13 e 5.14.

Das figuras nota-se que o modelo não consegue seguir o comportamento de temperatura do motor. Um dos problemas que faz com que isto aconteça é o ciclo completo a que a máquina é submetida nestes testes envolve a etapa de agitação e a corrente RMS adquirida pelo equipamento de aquisição durante esta etapa não é correta pelo seguinte motivo: o período de aquisição mínimo que pode ser programado no aparelho de aquisição utilizado para garantir resultados confiáveis é de 1s. Períodos menores que este fazem com que o aparelho se perca durante as medidas, uma vez que ele é lento para chavear os canais que deve ler. Como a ordem de grandeza dos tempos envolvidos na agitação é de décimos de segundo, a taxa de aquisição não é grande o suficiente para acompanhar a dinâmica do fenômeno.

No entanto, quando a máquina está em centrifugação, a dinâmica do sistema é muito mais lenta, uma vez que o sistema elétrico se comporta com uma dinâmica próxima à do sistema mecânico, for-

¹Estes testes são feitos rotineiramente e há vários resultados disponíveis, por isso eles foram usados em uma primeira abordagem.

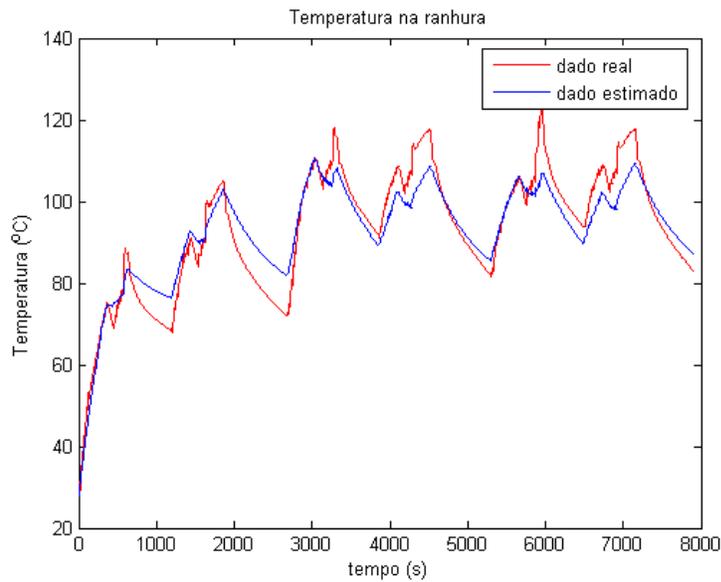


Fig. 5.13: Comparação entre dados reais e estimados para temperatura na ranhura do motor durante três ciclos completos de lavagem

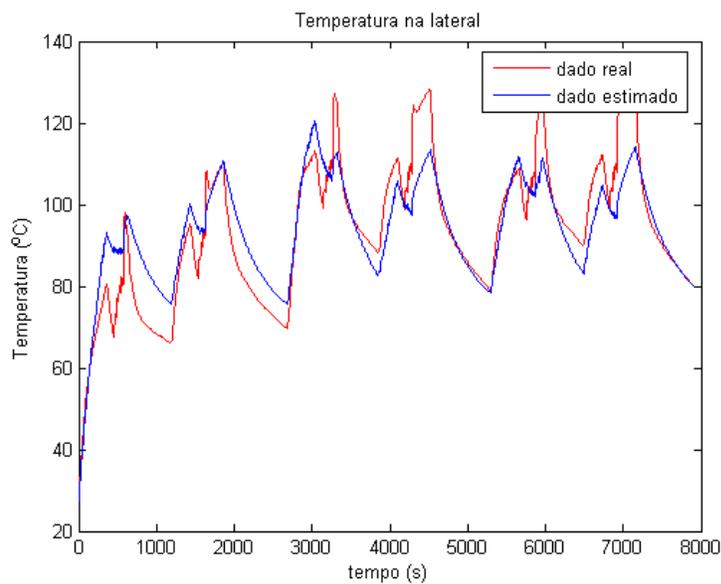


Fig. 5.14: Comparação entre dados reais e estimados para temperatura na lateral do motor durante três ciclos completos de lavagem

mado por cesto e cargas de roupa em seu interior, que é lenta. Nesta fase, as leituras de tensão e corrente são confiáveis. Contudo, durante a centrifugação o motor permanece girando em altas velocidades, de forma que a ventoinha faz um fluxo de ar constante que não permite que ele aqueça o tanto quanto aqueceria se funcionasse em velocidades menores. Desta forma, os parâmetros estimados para uma etapa de agitação podem ser diferentes dos obtidos em uma etapa de centrifugação. Sendo assim, é interessante dividir a investigação em duas etapas: a primeira delas seria a agitação e a segunda a centrifugação. A primeira tem a vantagem de não haver grande influência da ventoinha e a desvantagem de a dinâmica ser muito rápida, enquanto a segunda tem a vantagem de ter uma dinâmica lenta o suficiente para ser captada pelo aparelho de aquisição mas a desvantagem de ter uma grande influência da ventoinha, que pode introduzir até mesmo não linearidades no sistema. A primeira etapa faz parte do escopo desta dissertação, enquanto a segunda pode servir como motivação para estudos futuros.

5.5.2 Planejamento experimental inicial

Para encontrar um modelo para o comportamento térmico do motor durante a agitação, a máquina é carregada com a carga máxima, ou seja, 9Kg de tecidos e 71L de água. O motor é submetido então a um ciclo de agitação enquanto a temperatura nos três pontos já citados é lida pelo equipamento de aquisição. Os ciclos de agitação propostos inicialmente são mostrados na tabela 5.2

Cada um dos testes foi nomeado como CT=xx, em que xx indica qual o ciclo de trabalho adotado em cada teste. Para calcular este valor, basta dividir o tempo de motor ligado (primeira coluna da tabela 5.2) com a soma dos tempos de motor ligado e desligado (sempre igual a 1s no caso dos testes mostrados na tabela).

Como não é possível captar o valor da corrente RMS no mesmo aparelho que capta a evolução das temperaturas devido aos problemas de taxa de aquisição comentados na seção anterior, a forma de onda da corrente durante uma agitação é registrada em um osciloscópio. Esta forma de onda é então tratada em uma planilha de dados de forma que se obtenha um vetor contendo os dados de corrente apenas nos momentos em que o motor está ligado. Como os parâmetros do circuito elétrico equivalente do motor variam em função da temperatura, e conseqüentemente a corrente também muda, um registro da forma de onda é feito cada vez que a temperatura da ranhura atinge um múltiplo de 5°C. Uma forma de onda típica de corrente é mostrada na figura 5.15.

Cada uma das formas de onda registradas é então tratada por um software escrito em *Matlab* que tem como saída o seu valor RMS definido como:

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{K_{total}} \sum_{k=0}^{K_{total}} i(k)^2} \quad (5.3)$$

Em que K_{total} é o número de elementos do vetor que conteria as correntes durante um período da forma de onda e $i(k)$ é o k -ésimo elemento deste vetor de correntes. Deve-se lembrar que embora pareça contínuo, o registro tomado do osciloscópio é discreto, justificando o uso da somatória ao invés de uma integral.

Nestes experimentos iniciais o tamanho do vetor que é dado como entrada ao programa (rotulado de K_{vetor}) compreende apenas o tempo de motor ligado. Portanto deve-se fazer uma compensação para se chegar ao valor de K_{total} , uma vez que o ciclo completo também compreende o tempo de

Tab. 5.2: Ciclos propostos para aquisição de dados do motor

Ciclo	Tempo de motor ligado (s)	Tempo de motor desligado (s)	Nome
1	0,05	0,95	CT=05
2	0,10	0,90	CT=10
3	0,15	0,85	CT=15
4	0,20	0,80	CT=20
5	0,30	0,70	CT=30
6	0,40	0,60	CT=40
7	0,50	0,50	CT=50
8	0,90	0,10	CT=90

motor desligado. Para fazer esta compensação, basta dividir o tamanho do vetor de corrente pelo ciclo de trabalho, ou seja:

$$K_{total} = K_{vetor} / CT \quad (5.4)$$

Em que CT é o ciclo de trabalho do referido teste.

Por exemplo, se o ciclo de trabalho é igual a 0.1, o tamanho de um vetor que compreenderia todo o ciclo é 10 vezes o tamanho do vetor que compreende apenas o período de motor ligado, ou seja 1/0.1 vezes maior.

Deve-se ressaltar que, durante o tempo de motor desligado, a corrente é nula, de forma que excluir os valores de corrente i_k durante o tempo de motor desligado na somatória do cálculo da corrente RMS não interfere no resultado final.

O trecho de código que executa esta tarefa é mostrado em C.4.1:

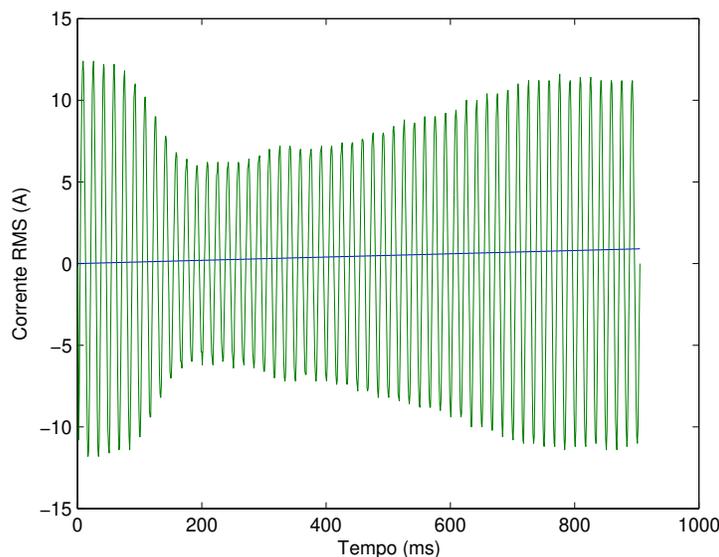


Fig. 5.15: Forma de onda de corrente típica do motor tomada no teste CT=90

Da forma de onda mostrada pode-se observar que, se a corrente RMS for calculada para um ciclo do teste CT=90 mostrado na figura 5.15 e depois para um ciclo de outro teste com diferente tempo de motor ligado, a relação entre tempo de motor ligado e corrente RMS é altamente não linear devido ao momento da partida do motor. Logo que ocorre a partida, o escorregamento é unitário e a corrente é máxima. A medida que o motor acelera, o escorregamento diminui e, portanto, a corrente também diminui conforme pode ser observado nos primeiros 100ms da figura 5.15. Há ainda um outro fenômeno envolvido no formato da envoltória da corrente que será discutido mais adiante.

Para mostrar que, se fosse feito um modelo levando em conta apenas o ciclo de trabalho e não a corrente RMS haveria forte não linearidade, é feito um modelo exploratório que tem as entradas da equação a diferenças conforme o proposto na seção introdutória exceto pela entrada de corrente RMS, que é substituída por uma constante proporcional ao ciclo de trabalho. Ao se estimar os parâmetros para um teste e depois usar estes parâmetros para estimar a temperatura com entradas de um outro teste, tem-se os resultados de erro quadrático médio e a posição da curva de dados estimados com relação à curva de dados reais mostrados na tabela 5.3.

Da tabela nota-se que o erro quadrático médio ao se estimar a evolução da temperatura de um teste usando parâmetros obtidos com os dados do próprio teste é baixo (ver diagonal principal da tabela). Isto mostra que a um modelo linear de primeira ordem é bastante razoável para descrever o fenômeno. No entanto, ao se estimar dados de testes em que a entrada foi diferente, nota-se que o erro quadrático médio aumenta consideravelmente, provando que a relação entre elevação de temperatura e ciclo de trabalho não é linear.

Além dos erros quadráticos médios, observa-se da tabela que se um conjunto de dados de temperatura obtido por meio de uma entrada que tem um determinado tempo de motor ligado é comparada à temperatura estimada para a mesma entrada, mas por meio de parâmetros obtidos em um teste em que o tempo de motor ligado é menor, a curva referente ao conjunto de dados estimados fica abaixo

Tab. 5.3: Erros quadráticos médios e posição da curva de dados estimados com relação aos dados reais (ou seja, se a curva de dados estimados está acima ou abaixo da curva da dados reais) obtidos ao se estimar resultados de testes usando parâmetros obtidos em outros testes.

Dado	CT=10	CT=20	CT=30
Parâmetros			
CT=10	0.9 alinhado	901.0 abaixo	3822.6 abaixo
CT=20	104.4 acima	1.2 alinhado	114.8 abaixo
CT=30	2703.0 acima	599.3 acima	3.0 alinhado

da curva de dados reais. Por exemplo, a curva de dados estimados tendo como entrada um número proporcional a 30, mas usando os parâmetros do teste CT=10 fica abaixo da curva de dados reais do teste CT=30.

O motivo desta diferença é o seguinte: No teste CT=10, o tempo de motor ligado está praticamente todo no tempo de partida. Desta forma, a corrente absoluta, e conseqüentemente a RMS do teste CT=10 é proporcionalmente mais alta que a encontrada em um teste com tempo de motor ligado maior, como o teste CT=30, por exemplo. Com isto, o parâmetro referente à corrente RMS é relativamente menor quando estimado para testes com tempo de motor ligado menor, já que a corrente RMS, proporcionalmente maior, compensa o produto entre parâmetro e ela própria. Quando estes parâmetros subestimados são usados em outro teste, a curva de dados estimados fica abaixo da curva obtida empiricamente.

Uma alternativa que pode ser usada para o levantamento da relação entre tempos de motor ligado e desligado e corrente RMS é fazer uma linearização por partes, ou seja, devem ser feitos vários testes, conforme mostrado na tabela 5.2 e caso o tempo de motor ligado durante a agitação pedido pelo usuário esteja entre os tempos de motor ligado com que foram feitos os testes, deve ser feita uma interpolação linear para se estimar o valor da corrente RMS pedido. Com este valor, pode-se usar o modelo linear para se estimar a evolução da temperatura. Apesar de factível, esta alternativa é muito trabalhosa pois envolve a repetição de vários testes.

Outra questão importante é a variação da corrente em função da temperatura do motor. Para lidar com esta variação, encontra-se a melhor aproximação dos valores de corrente RMS observados em função da temperatura da ranhura do estator, escolhida por ser a temperatura mais próxima do núcleo do estator. Desta forma, durante a simulação, se for conhecida a temperatura da ranhura do estator, pode-se determinar a corrente RMS que passaria pela máquina naquele momento. A

melhor aproximação da relação entre corrente e temperatura é supostamente linear pois espera-se que a corrente decresça linearmente com o aumento de temperatura dado que as impedâncias do circuito elétrico equivalente crescem linearmente com a temperatura, conforme visto no levantamento do circuito equivalente do motor na seção 5.3. O trecho de software que encontra a reta que relaciona o valor de corrente RMS com a temperatura é mostrado em C.4.2:

A partir do momento em que a relação entre os tempos que caracterizam uma agitação, ou seja, o tempo de motor ligado e tempo de motor desligado, e o valor RMS da corrente estiver mapeada, parte-se para o modelo térmico propriamente dito. Este modelo, conforme discutido anteriormente, é de primeira ordem e tem como entradas o valor da corrente RMS, o valor da própria temperatura no instante de tempo anterior, e o valor da temperatura ambiente.

Para estimar os parâmetros do modelo é usado o método dos mínimos quadrados, cuja implementação é apresentada no trecho listado em C.4.3 onde é mostrada apenas a estimação de parâmetros para a temperatura na cabeça do estator, mas a estimação de parâmetros para as temperaturas em outros pontos tem código análogo.

Com os parâmetros encontrados, é possível estimar a temperatura do motor para qualquer ciclo de agitação dado que se conheça a corrente RMS daquele ciclo e sua evolução com a temperatura.

5.5.3 Resultados dos experimentos iniciais

Coletados os dados dos testes, ao se executar o software que trata as formas de onda de corrente para cada temperatura é observado que, para testes em que o tempo de motor ligado é maior, a relação entre corrente RMS e temperatura é aparentemente aleatória, enquanto que para testes com tempo de motor ligado menor, esta relação é linear e decrescente, conforme é esperado, dado que as impedâncias do modelo elétrico equivalente do motor de indução monofásico aumentam linearmente com a temperatura, conforme visto na seção 5.3. Nas figuras 5.16 e 5.17 são mostradas as relações entre correntes RMS e temperatura para os testes CT=05 e CT=90.

Além disso, também pode ser observado que, nos testes em que o tempo de motor ligado é pequeno, a evolução da temperatura ao longo do tempo segue uma forma do tipo $c_1 - c_2 e^{-c_3 t}$, em que c_1 , c_2 e c_3 são constantes, ou seja, uma forma do tipo carregamento de capacitor, conforme pode ser visto na figura 5.18 e conforme era esperado quando se fez a escolha por um modelo linear de primeira ordem. No entanto, nos testes com tempo de motor ligado grande, a curva de aquecimento ao longo do tempo não é tão bem comportada, conforme pode ser visto na figura 5.19

5.5.4 Discussão sobre os experimentos iniciais

Depois de se levantar algumas hipóteses e testá-las, descobriu-se que o motivo para o comportamento inesperado dos testes com o tempo de motor ligado muito grande é o travamento de roupas no agitador. A máquina de lavar usada nas experiências é equipada com um agitador do tipo *dual action*. Este agitador tem hélices dispostas em forma de espiral que servem para fazer com que, além do movimento horizontal, a carga tenha também um movimento vertical. Quando o agitador gira para um lado, as hélices movimentam as cargas para cima. Quando o movimento do agitador é para o lado contrário, as hélices movimentam a carga para baixo. Quando o tempo de motor ligado é muito grande, as cargas enroscam na hélice, aumentando o momento de inércia visto pelo motor, fazendo com que a corrente aumente e, conseqüentemente, o motor aqueça mais. Eventualmente as cargas se

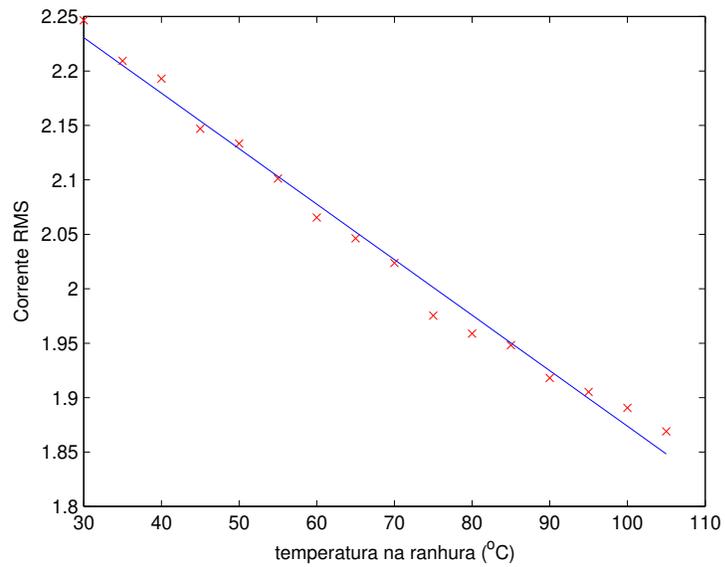


Fig. 5.16: Corrente RMS em função da temperatura da ranhura para o teste CT=05 (pontos em formato de cruz) e reta que melhor os aproxima (reta contínua)

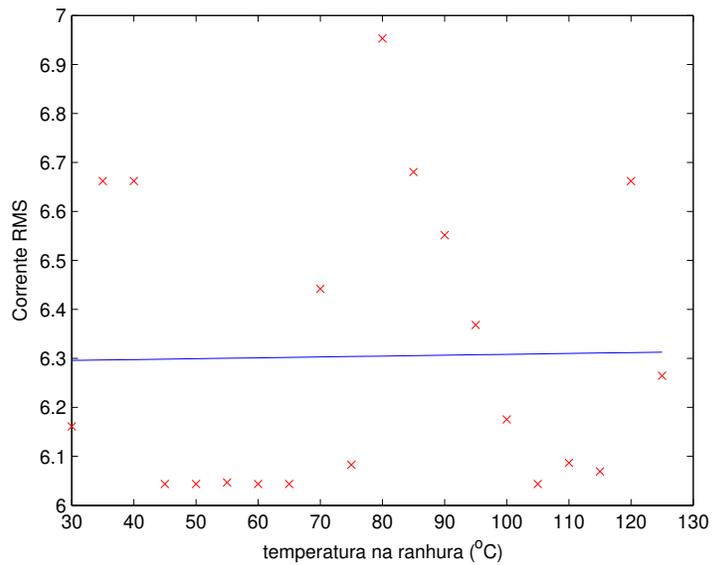


Fig. 5.17: Corrente RMS em função da temperatura da ranhura para o teste CT=90 (pontos em formato de cruz) e reta que melhor os aproxima (reta contínua)

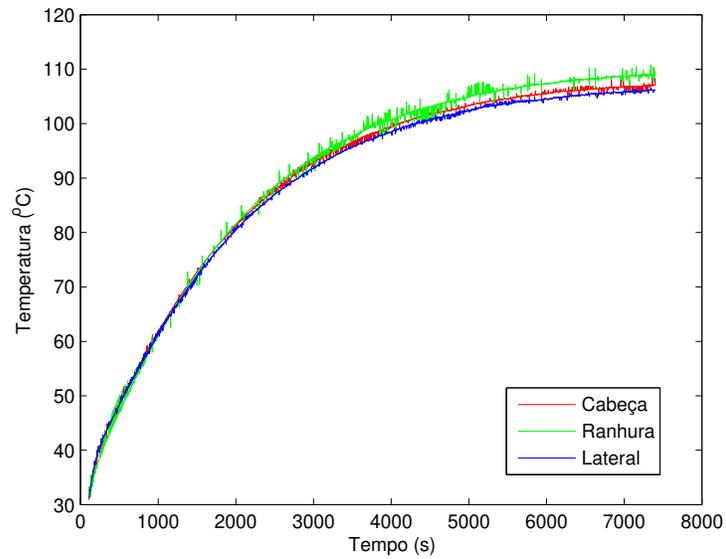


Fig. 5.18: Curva de aquecimento do motor ao longo do tempo para o teste CT=05

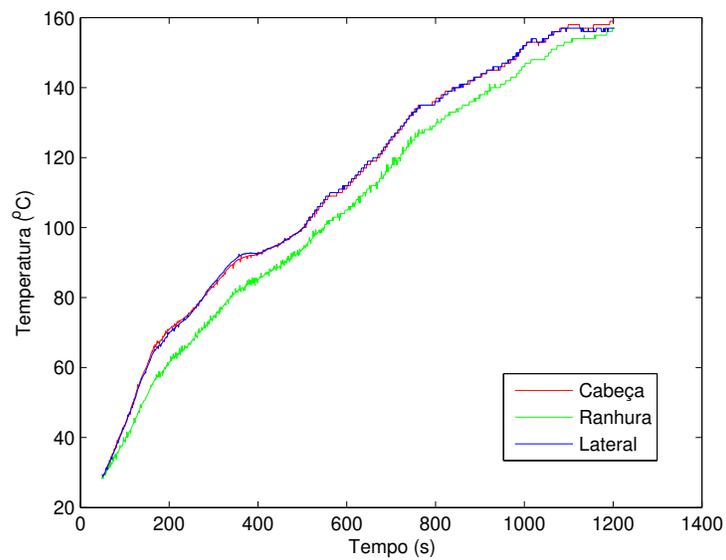


Fig. 5.19: Curva de aquecimento do motor ao longo do tempo para o teste CT=90

soltam, fazendo com que a corrente volte ao esperado e a elevação de temperatura também volte ao padrão semelhante ao carregamento de um capacitor. Por este motivo a relação entre o valor RMS da corrente e a tempo de motor ligado é realmente aleatória nestes casos, impossibilitando a estimação da elevação de temperatura.

O fenômeno de travamento de roupas também é a explicação para a mudança do comportamento da envoltória da forma de onda de corrente a partir de, aproximadamente, 300ms, conforme observado na figura 5.15. De fato, ao observar a especificação de ciclos de máquinas de lavar que usam o agitador *Dual Action*, nota-se que o maior tempo de motor ligado usado não passa de 240ms. Sendo assim, quaisquer estimações de parâmetros do modelo térmico não são boas para testes em que o tempo de motor ligado é maior que 240ms, dada a aleatoriedade do travamento de roupas.

Além da questão do travamento das roupas, há ainda outras questões a serem observadas que prejudicam a precisão da medida do valor RMS da corrente. A primeira delas é que as formas de onda registradas no osciloscópio são apenas de um período de motor ligado, ou seja, mostram a corrente de apenas um enrolamento. No entanto, há diferenças de construção entre o enrolamento que faz com que o motor gire no sentido horário (enrolamento *CW*) e aquele que faz com que ele gire no sentido anti-horário (enrolamento *CCW*), que implicam em diferentes características elétricas conforme pode ser observado na seção 5.3. Sendo assim, é interessante captar a forma de onda de corrente para dois momentos de motor ligado. Além disso, foi observado que a escala de tempo do osciloscópio deve ser ajustada de forma que o intervalo tempo que aparece na tela seja igual ao período de agitação. Por exemplo, para os testes propostos na tabela 5.2, o ciclo de agitação incluindo dois períodos de motor ligado e dois de motor desligado é de 2s. Como o osciloscópio usado tem 10 divisões na escala de tempo, é interessante então fazer com que a escala horizontal seja de 200ms por divisão, conforme pode ser visto na figura 5.20. Desta forma, os dados não precisam ser tratados antes de entrarem no software escrito para calcular o valor RMS.

Para estimar a corrente RMS em qualquer tempo de motor ligado foi adotado um novo procedimento. Ao invés de se fazer testes exaustivos e depois a linearização sugerida, a forma de onda de corrente é adquirida no teste de maior tempo de motor ligado possível (240ms) e depois é recortada via software escrito em Matlab no intervalo que vai de zero ao tempo que for escolhido pelo usuário de forma que, para qualquer caso, tem-se uma estimativa para o valor de corrente RMS. O software preenche o intervalo de tempo de motor desligado, também escolhido pelo usuário, com zeros e calcula o valor RMS da forma de onda reformada. Para lidar com a questão da mudança dos parâmetros do circuito elétrico equivalente do motor ao longo da temperatura, o procedimento de recorte é feito para cada uma das formas de ondas obtidas de 5 em 5°C.

Na figura 5.21 são mostradas duas retas que relacionam corrente RMS e temperatura. Uma delas é a obtida ao se tomar dados reais de corrente RMS de um teste com tempo de motor ligado igual a 150ms e de motor desligado igual a 850ms e a outra é obtida ao se fazer o recorte a partir de um teste em que o tempo de motor ligado é de 240ms. Da figura nota-se que o procedimento de recorte de formas de onda leva a resultados bastante razoáveis.

Para que os resultados sejam confiáveis deve-se garantir que o tempo de motor desligado seja suficiente para que o motor pare. Desta forma, garante-se que durante a partida não há o excesso de corrente que ocorreria caso o motor ainda estivesse em movimento para o lado contrário daquele que se deseja partir. Felizmente isto já é garantido nos ciclos de lavagem comum para que não haja sobre aquecimento, de forma que estimar as correntes pelo método do recorte é bem eficaz.

Para os testes de identificação é interessante também ler o dados de temperatura durante o res-

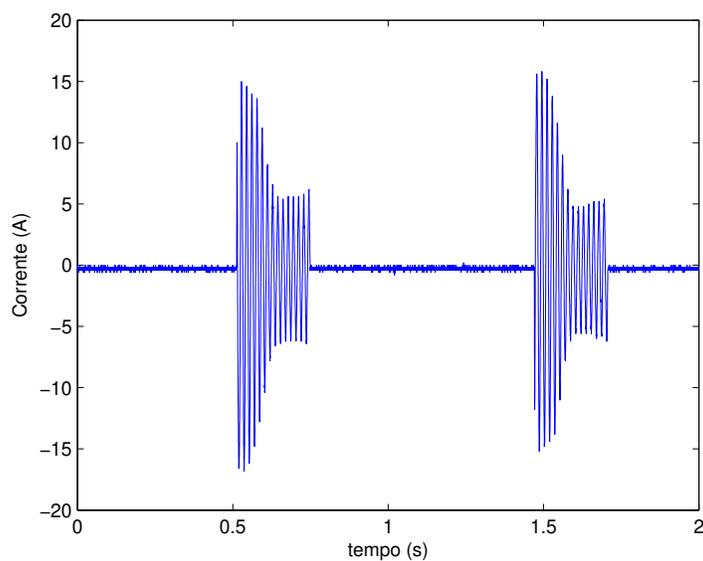


Fig. 5.20: Como deve ser a escolha da escala horizontal do osciloscópio. Deve-se ter na figura todo o período de motor ligado nas duas direções, assim como os períodos de descanso.

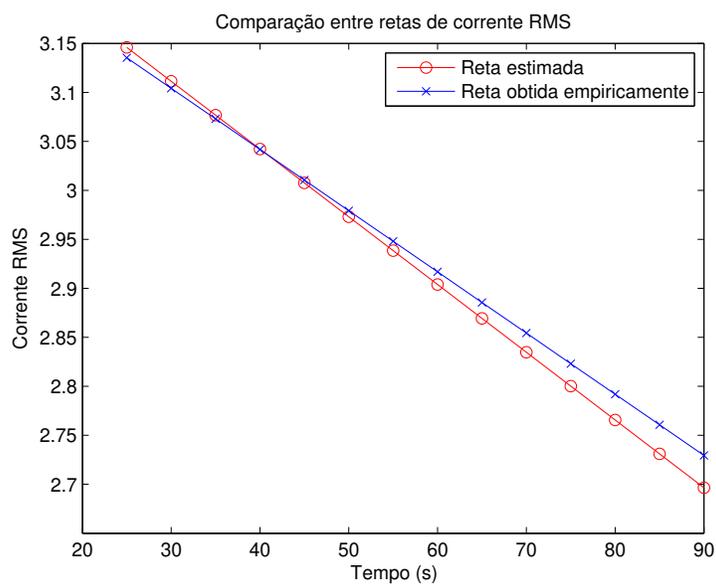


Fig. 5.21: Comparação entre a evolução da corrente RMS ao longo da temperatura obtida experimentalmente e a estimada com o software de recorte de formas de onda

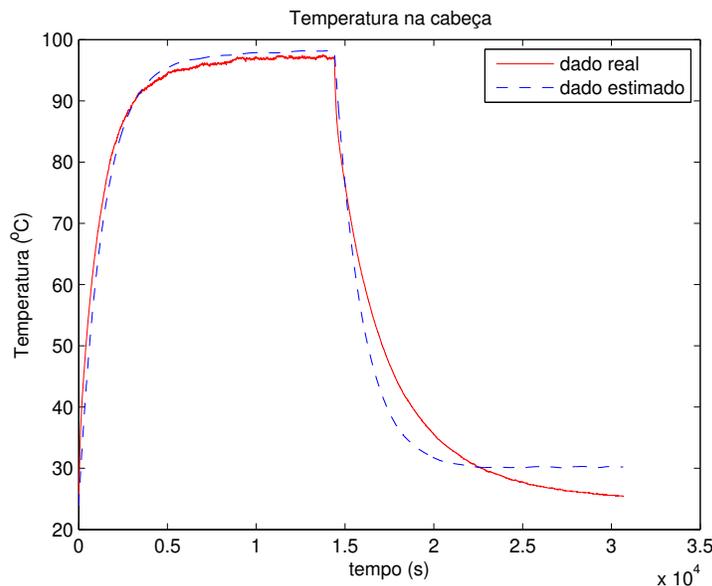


Fig. 5.22: Resultados de estimação de temperatura para a cabeça usando parâmetros obtidos no próprio teste. Os resultados para temperatura na ranhura e na lateral são semelhantes. O erro quadrático médio para as três temperaturas é de 12.0600

friamento do motor, e não apenas durante o aquecimento como foi feito na aquisição dos dados das figuras 5.16 e 5.17. Desta forma pode-se saber se o modelo é útil para prever o resfriamento do motor durante uma pausa, por exemplo. Além disso, ao se conhecer dados tanto no aquecimento quanto no resfriamento pode-se determinar se há influência da ventoinha durante a agitação.

5.5.5 Resultados da nova abordagem

Ao se fazer um teste com ciclos de 240ms de motor ligado, 760ms de motor desligado durante um tempo suficiente para que seja atingido o regime de temperatura e, depois disto manter o motor desligado que sua temperatura do volte à temperatura ambiente, os resultados da estimação da temperatura não foram muito bons, durante o resfriamento, conforme pode ser visto na figura 5.22

O valor do erro quadrático médio definido no capítulo 4 foi calculado para as três temperaturas.

A diferença de comportamento do sistema durante o resfriamento é muito provavelmente devida à influência da ventoinha. Enquanto ocorre o aquecimento do motor, a ventoinha gira gerando um fluxo de ar que não permite que o motor aqueça o quanto poderia. Quando o motor pára de se mover, a ventoinha também pára, mas aparentemente o modelo não é capaz de perceber isto, de maneira que quando a corrente cessa, a temperatura estimada tende a cair de forma mais rápida que a temperatura real. Ou seja, aparentemente o modelo entende que ainda há uma ventoinha resfriando o sistema.

Apesar dos problemas no resfriamento, quando os parâmetros encontrados no último teste são usados para estimar temperaturas durante aquecimentos em testes com diferentes tempos de motor ligado, os resultados são muito bons conforme pode ser visto nas figuras 5.23 e 5.24. Ao se fazer essas estimações, é usada a corrente reformada como entrada, mostrando a eficácia da técnica de recortar

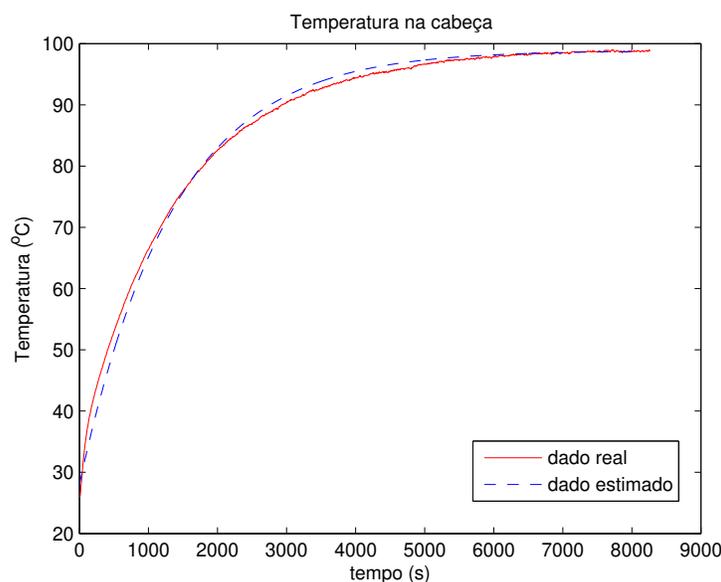


Fig. 5.23: Dados reais para a temperatura na cabeça de um teste do tipo CT=20 comparados aos dados estimados com os parâmetros do teste CT=24 usando como entradas as correntes RMS obtidas por meio da rotina de recorte de formas de ondas. A evolução de temperatura para ranhura e lateral tem forma semelhante.

as correntes.

A figura 5.24 tem um erro maior pois a variação da temperatura ambiente foi grande ao longo do teste e o modelo trabalha apenas com um valor de temperatura ambiente para todo o período. No entanto, mesmo assim o resultado é bastante razoável.

Uma alternativa para fazer com que o modelo funcione corretamente é separar a etapa de agitação da etapa de resfriamento, usando o mesmo modelo mas estimando parâmetros diferentes para cada uma das etapas. Outra alternativa seria pesquisar sobre o resfriamento causado pela ventoinha, mas isto envolveria estudos sobre a velocidade do motor durante a agitação, o que está fora do escopo desta dissertação pois a determinação da velocidade passaria pela determinação do momento de inércia da carga ligada ao eixo do motor, o que é muito complicado tendo em vista que esta carga se trata de um cesto carregado de tecidos que flutuam em água.

Ao usar a primeira alternativa, ou seja, ao se separar o modelo em aquecimento e resfriamento, obtém-se uma melhor relação entre temperatura real e temperatura estimada conforme pode ser visto na figura 5.25.

O resultado obtido tem uma exatidão aceitável. Os parâmetros encontrados são mostrados nas equações abaixo:

- **Equação para temperatura na cabeça do motor durante o aquecimento:**

$$T_{cabeça}(k+1) = 0.0406I_{rms}(k) + 0.0151T_{amb}(k) + 0.9949T_{cabeça}(K)$$

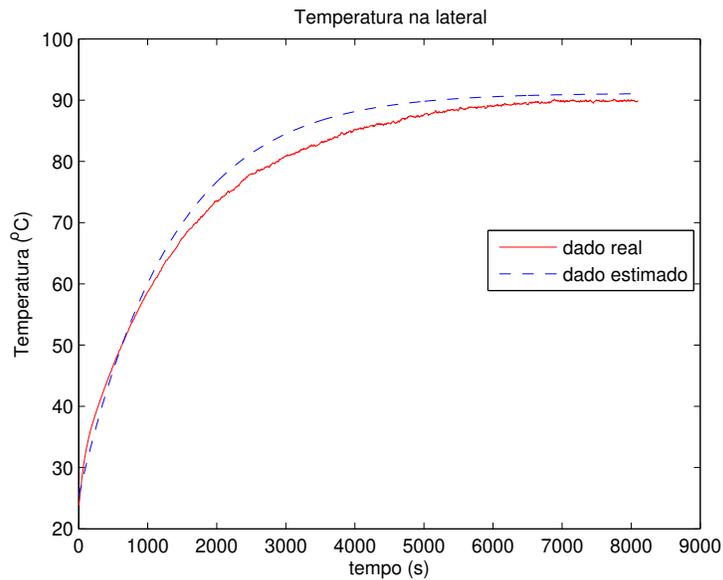


Fig. 5.24: Dados reais para a temperatura na cabeça de um teste do tipo CT=15 comparados aos dados estimados com os parâmetros do teste CT=24 usando como entradas as correntes RMS obtidas por meio da rotina de recorte de formas de ondas. A evolução de temperatura para ranhura e lateral é semelhante.

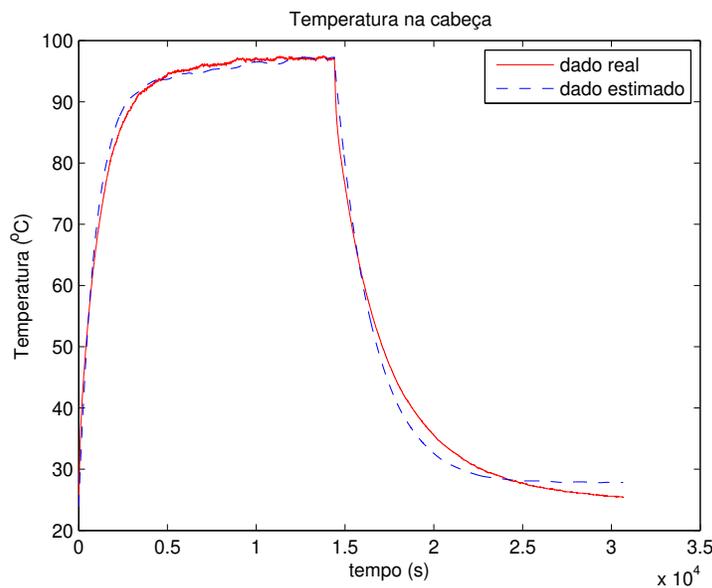


Fig. 5.25: Resultados de estimação de temperatura para a cabeça usando parâmetros obtidos no próprio teste. Neste caso foram separados os dados de aquecimento e resfriamento. Os resultados para a evolução da temperatura na ranhura e na lateral têm formas semelhantes a este. O erro quadrático médio para as três temperaturas é de 2.7486

- **Equação para temperatura na ranhura do motor durante o aquecimento:**

$$T_{ranhura}(k + 1) = 0.0416I_{rms}(k) + 0.0125T_{amb}(k) + 0.9955T_{ranhura}(K)$$

- **Equação para temperatura na lateral do motor durante o aquecimento:**

$$T_{lateral}(k + 1) = 0.0121I_{rms}(k) + 0.0193T_{amb}(k) + 0.9946T_{lateral}(K)$$

- **Equação para temperatura na cabeça do motor durante o resfriamento:**

$$T_{cabeça}(k + 1) = 0.0025T_{amb}(k) + 0.9977T_{cabeça}(K)$$

- **Equação para temperatura na ranhura do motor durante o resfriamento:**

$$T_{ranhura}(k + 1) = 0.0022T_{amb}(k) + 0.9979T_{ranhura}(K)$$

- **Equação para temperatura na lateral do motor durante o resfriamento:**

$$T_{lateral}(k + 1) = 0.0025T_{amb}(k) + 0.9977T_{lateral}(K)$$

Além de implicarem em resultados estimados com baixo erro quadrático médio, os coeficientes encontrados ainda são coerentes com os da equação 5.2. Daquela equação nota-se que a soma dos coeficientes da temperatura ambiente no instante (k) e da temperatura no próprio local no instante (k) deve ser 1, e de fato os coeficientes encontrados são bem próximos de 1.

Capítulo 6

Conclusão

Durante o desenvolvimento do trabalho, pôde-se perceber que o problema mais desafiador não era a modelagem do sistema térmico, mas sim o mapeamento da relação entre tempo de motor ligado e corrente RMS. O método proposto para a solução deste problema leva a bons resultados, mas é limitado uma vez que apenas situações semelhantes à mostrada podem ser simuladas. Conforme discutido, haveria outras formas de se relacionar o tempo de motor ligado e corrente RMS. O desenvolvimento destas novas formulações do problema pode servir como motivação para estudos posteriores.

Também seria interessante o estudo da relação entre o peso de roupas colocadas na máquina, nível de água selecionado pelo usuário, e as formas de onda de corrente observadas. Com isto, pode-se prever o comportamento do aquecimento do motor da máquina em situações diferentes da experimentada neste trabalho.

Pode-se ainda fazer o estudo das formas de onda de corrente durante a centrifugação. Embora possa parecer semelhante ao que foi apresentado neste trabalho, durante a centrifugação ocorre a aceleração contínua do cesto da máquina de lavar roupas onde há uma carga de massa variável com o tempo, uma vez que as roupas perdem massa de água durante esta etapa. A variação da massa depende, dentre outras variáveis, da velocidade de centrifugação e do tipo de tecido das roupas, tornando o problema bastante interessante.

Com o conhecimento do comportamento da máquina durante a agitação e a centrifugação, o ciclo de lavagem estaria completamente modelado, facilitando o projeto e até mesmo tornando as máquinas mais inteligentes caso o controle destas aplicações passasse a incorporar técnicas de controle preditivo.

Conclui-se finalmente que o modelo linear de primeira ordem proposto representa uma boa aproximação do fenômeno real de aquecimento do motor. Com isto, boas estimativas da temperatura do motor são obtidas desde que seja conhecido o valor RMS da corrente elétrica que passa por ele.

O método de obtenção da corrente RMS proposto também apresenta bons resultados, quando aplicado a máquinas elétricas no regime intermitente periódico com partida.

Apêndice A

Circuitos de corrente alternada

A.1 Introdução

A maior parte da energia elétrica disponível para consumo é alternada [18]. Embora haja aplicações em que a corrente contínua apresente vantagens sobre a alternada, a segunda tem como grande vantagem a simplicidade com que a amplitude de tensão pode ser aumentada ou diminuída de forma simples e com baixas perdas por meio de dispositivos eletromagnéticos chamados transformadores. Desta maneira, a energia pode ser transportada de seu local de geração para o local de consumo em linhas de alta tensão por onde circula uma corrente relativamente baixa, apresentando poucas perdas por aquecimento. Ao chegar ao local de consumo, a tensão é diminuída servindo as aplicações industriais ou domésticas.

Conforme descrito no capítulo 3, o motor de indução monofásico estudado nesta dissertação é de corrente alternada. Por este motivo, seu modelo elétrico é baseado em relações de corrente alternada, envolvendo o uso de impedâncias e fasores. O objetivo deste apêndice é introduzir brevemente a teoria de fasores e o conceito de impedância. Para um estudo mais detalhado deste tema recomenda-se a referência [15]

A.2 Bipolos lineares

Há três tipos fundamentais de bipolos lineares: resistor, capacitor e indutor. Se uma tensão $V(t)$ for aplicada sobre um resistor haverá passagem de uma corrente elétrica $I(t)$. A relação entre tensão e corrente é linear. Define-se então a resistência R do resistor como sendo a razão entre a tensão e a corrente, ou seja

$$R = \frac{V(t)}{I(t)} \quad (\text{A.1})$$

O capacitor é um bipolo que acumula cargas elétricas. A relação entre a carga elétrica $Q(t)$ acumulada no capacitor e a tensão $V(t)$ aplicada sobre ele é linear. Sendo assim, define-se a capacitância C como sendo

$$C = \frac{Q(t)}{V(t)} \quad (\text{A.2})$$

Isolando-se $Q(t)$ em A.2 e aplicando-se a derivada dos dois lados chega-se à relação entre tensão aplicada e corrente que passa através do capacitor, conforme mostrado em A.3

$$\frac{dQ(t)}{dt} = I(t) = C \frac{dV(t)}{dt} \quad (\text{A.3})$$

Em A.3 considera-se que a capacitância é constante com relação ao tempo.

O indutor é um bipolo que acumula energia de forma magnética. Seja uma bobina com N voltas por onde passa uma corrente $I(t)$. Esta bobina gerará um fluxo magnético proporcional à corrente, supondo que o material envolvido pela bobina não esteja saturado. A indutância é então definida como sendo a razão entre o fluxo concatenado λ definido como o produto entre o número de voltas N e o fluxo gerado, e a corrente que passa pela bobina. Ou seja:

$$L = \frac{\lambda}{I(t)} \quad (\text{A.4})$$

Tomando-se a derivada da expressão A.4 com relação ao tempo e lembrando que a tensão em uma bobina é igual à derivada temporal do fluxo concatenado, tem-se a relação entre a tensão e a corrente em um indutor, mostrada na equação abaixo.

$$V(t) = L \frac{dI(t)}{dt} \quad (\text{A.5})$$

Sendo que em A.5 considera-se a indutância constante ao longo do tempo.

A.3 Regime senoidal e fasores

Seja uma tensão que varia senoidalmente ao longo do tempo definida¹ em A.6.

$$V(t) = V_{max} \cos(\omega t + \theta) \quad (\text{A.6})$$

A partir da fórmula de Euler, pode-se escrever a tensão como a parte imaginária de uma exponencial complexa, conforme mostrado abaixo:

$$e^{j(\omega t + \theta)} = \cos(\omega t + \theta) + j \sin(\omega t + \theta) \Rightarrow \cos(\omega t + \theta) = \mathcal{R}e(e^{j(\omega t + \theta)}) \quad (\text{A.7})$$

Em que $\mathcal{R}e(x)$ denota a parte real do número complexo x . Como $\omega = 2\pi f$ não muda em um circuito em que a frequência f é constante, uma onda senoidal se torna completamente conhecida a partir de sua magnitude V_{max} e de sua fase θ . Estes dois valores formam o fasor, que é um número complexo girante representado de forma polar. A representação da senóide mostrada em A.6 com fasores é a seguinte:

¹Na definição a tensão foi definida como tendo um ângulo θ . Em geral a fonte de tensão principal do circuito é escolhida como referência angular, ou seja, $\theta = 0$ para a fonte de tensão principal

$$V(t) = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} \angle \theta = V \angle \theta = \hat{V} \quad (\text{A.8})$$

Sendo que $\frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$ é o valor quadrático médio (RMS) da tensão $V(t)$. Este valor é calculado tomando-se a raiz quadrada da média do quadrado da forma de onda senoidal, ou seja:

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{\theta}^{T+\theta} (V_{max} \cos(\omega t + \theta))^2 dt} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.9})$$

O fasor de tensão é denotado com o valor RMS pois este valor equivale em energia a uma tensão contínua de mesmo valor.

Se a tensão senoidal é aplicada aos terminais de um resistor, tem-se que a corrente que o atravessa é dada por:

$$I(t) = \frac{V(t)}{R} \quad (\text{A.10})$$

Para o capacitor a corrente será dada por:

$$\begin{aligned} I(t) &= C \frac{dV(t)}{dt} = \\ &= -\omega C V_{max} \text{sen}(\omega t + \theta) = \\ &= \omega C V_{max} \cos(\omega t + \theta + \pi/2) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Portanto, o fasor que representa a corrente vem da seguinte exponencial:

$$\omega C V_{max} e^{\omega t + \theta + \pi/2} = \omega C V_{max} e^{\omega t + \theta} e^{\pi/2} = j \omega C V_{max} e^{\omega t + \theta} \quad (\text{A.12})$$

De forma que a corrente pode ser escrita como:

$$I(t) = j \omega C V(t) \quad (\text{A.13})$$

No caso do indutor, a tensão que surge em seus terminais caso seja aplicada uma corrente alternada $I(t) = I_{max} \cos \omega t$ é dada por:

$$\begin{aligned} V(t) &= L \frac{dI(t)}{dt} = \\ &= \omega - L I_{max} \text{sen}(\omega t + \theta) = \\ &= \omega L I_{max} \cos(\omega t + \theta + \pi/2) = \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Sendo que o fasor que representa a tensão vem da exponencial:

$$\omega LI_{max}e^{\omega t + \theta + \pi/2} = \omega LI_{max}e^{\omega t + \theta}e^{\pi/2} = j\omega LI_{max}e^{\omega t + \theta} \quad (\text{A.15})$$

De forma que a tensão pode ser escrita como:

$$V(t) = j\omega LI(t) \quad (\text{A.16})$$

Com as equações A.10, A.13 e A.16 pode-se definir a impedância² Z de forma análoga como foi definida a resistência para corrente contínua, ou seja, como a razão entre os fasores de tensão e de corrente em um bipolo. Tem-se então que as impedâncias do três bipolos básicos são dadas respectivamente por:

$$Z_R = R \quad (\text{A.17})$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (\text{A.18})$$

$$Z_L = j\omega L \quad (\text{A.19})$$

Desta forma pode-se usar todas as técnicas desenvolvidas no estudo de circuitos de corrente contínua para circuitos de corrente alternada contendo não só resistores, mas também indutores e capacitores.

A.4 Potência em circuitos de corrente alternada

Seja um caso em que o ângulo de referência da tensão é nulo e a corrente está atrasada de um ângulo ϕ com relação à tensão, ou seja:

$$v(t) = V_{max}\cos(\omega t) \quad (\text{A.20})$$

$$i(t) = I_{max}\cos(\omega t - \phi) \quad (\text{A.21})$$

A potência instantânea do circuito será dada como o produto entre as funções de corrente e tensão, ou seja:

$$p(t) = v(t)i(t) = V_{max}I_{max}\cos(\omega t)\cos(\omega t - \phi) \quad (\text{A.22})$$

O que pode ser simplificado usando-se a relação trigonométrica:

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} \quad (\text{A.23})$$

Resultando em:

²As impedâncias também poderiam ser definidas pela transformação de Laplace das variáveis envolvidas no processo, levando aos mesmos resultados obtidos nesta seção

$$p(t) = \frac{V_{max}I_{max}}{2} \cos(\phi) + \frac{V_{max}I_{max}}{2} \cos(2\omega t - \phi) \quad (A.24)$$

Se tensão e corrente forem escritos com seus valores RMS definidos em A.9 tem-se que a potência instantânea pode ser reescrita como:

$$p(t) = VI \cos(\phi) + VI \cos(2\omega t - \phi) \quad (A.25)$$

A equação A.25 ilustra que existem dois componentes da potência. Um deles é seu valor médio, constante, denominado potência ativa e denotado por P . O outro componente oscila com o tempo em uma frequência igual ao dobro da dos fasores de tensão e corrente. Este segundo componente representa uma troca de energia entre os acumuladores de energia do sistema.

A potência complexa S de um sistema é definida como o produto entre o fasor de tensão \hat{V} e o complexo conjugado do fasor de corrente \hat{I} que passa pelo circuito em que a tensão foi aplicada, ou seja:

$$S = \hat{V}\hat{I}^* \quad (A.26)$$

O módulo do fasor de potência é definido como potência aparente. Sua parte real é igual ao componente DC da equação A.25, que já foi definido como potência ativa. Sua parte imaginária é definida como potência reativa e denotada por Q . Algebricamente tem-se:

$$P_{ap} = |S| = VI \quad (A.27)$$

$$P = \mathcal{R}e(S) = VI \cos(\phi) \quad (A.28)$$

$$Q = \mathcal{I}m(S) = VI \sin(\phi) \quad (A.29)$$

Das equações acima encontra-se a relação entre potências em um circuito de corrente alternada:

$$P_{ap}^2 = |S|^2 = P^2 + Q^2 \quad (A.30)$$

Seja por exemplo um circuito com impedância equivalente $Z = R + jX$. A potência complexa S fornecida a este circuito por uma fonte de tensão representada pelo fasor \hat{V} é dada por

$$S = \hat{V}\hat{I}^* = Z\hat{I}\hat{I}^* = ZI^2 = RI^2 + jXI^2 \quad (A.31)$$

Em que a parte real da potência dada por RI^2 está ligada à transformação de energia elétrica em outras formas de energia como movimento ou calor e a parte imaginária XI^2 está ligada à transferência interna de potência entre os acumuladores de energia do circuito. Por este motivo foi usado no capítulo 5 o produto entre a resistência e o valor quadrático médio da corrente de partida como sendo a potência que causa o aquecimento do motormonofásico de indução.

Por questões de notação são usadas diferentes unidades de medida para as três potências apresentadas neste capítulo. Estas unidades são mostradas na tabela A.1.

Tab. A.1: Potências complexas e suas unidades

Potência	Símbolo	Unidade	Símbolo
Complexa	S	Volt-Ampere	VA
Ativa	P	Watt	W
Reativa	Q	Volt-Ampere reativo	VAr

Apêndice B

Introdução à Álgebra linear

B.1 Introdução

Durante o desenvolvimento da teoria de modelagem de sistemas feita no capítulo 4, foram usados alguns conceitos de álgebra linear. Este apêndice tem então como objetivo fazer uma breve recordação destes conceitos. Para um estudo mais detalhado deste assunto recomenda-se as referências [42], [11], [16] e [34], ou ainda a referência de preferência do leitor.

B.2 Matrizes

Uma matriz é por definição uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas. Seus elementos podem ser números reais ou complexos. No desenvolvimento da teoria de modelagem de dados foram usadas matrizes de números reais. No entanto, elas podem também ter como elementos números complexos.

Em geral, uma matriz é representada por uma letra maiúscula seguida de seu número total de linhas e colunas em subscrito separados por um X e seus elementos por uma letra minúscula seguida do número da linha e do número da coluna em que está o elemento em subscrito separados por $,$. Por exemplo, seja a seguinte matriz $A_{3 \times 2}$.

$$A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 9 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$$

O elemento $a_{1,1}$ vale 1. Por simplicidade, as matrizes são algumas vezes representadas apenas pela letra maiúscula, deixando-se o número de linhas e colunas oculto.

Por definição, duas matrizes são iguais se a quantidade de linhas e colunas das duas matrizes forem as mesmas e se todos os elementos de posições correspondentes são iguais. Uma matriz em que o número de linhas é igual ao número de colunas é chamada de matriz quadrada. Na matriz quadrada é definida como diagonal principal aquela formada pelos elementos que têm o número da linha igual ao número da coluna.

B.2.1 Operações com matrizes

São definidas as seguintes operações com matrizes:

- Soma de matrizes

Soma de matrizes é a soma dos elementos correspondentes de cada matriz. Para que seja possível somar duas matrizes, o número de linhas e o número de colunas de ambas devem ser os mesmos. A soma de matrizes apresenta as seguintes propriedades:

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. Existe 0 tal que $A_{m \times n} + 0_{m \times n} = A_{m \times n}$

- Produto por um escalar

O produto de um escalar (representado por uma letra minúscula) por uma matriz é igual a cada um dos elementos da matriz multiplicado por este escalar. Esta operação apresenta as seguintes propriedades:

1. $k(A + B) = kA + kB$
2. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
3. $0A = 0$
4. $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$

Em que A e B são matrizes e k_1 , k_2 e 0 escalares.

- Produto entre matrizes

O produto entre matrizes é definido como sendo uma nova matriz cujos elementos são a soma dos produtos dos elementos das linhas da primeira matriz pelos elementos correspondentes das colunas da segunda matriz. Algebricamente o produto entre duas matrizes é dado como:

$$A_{m \times n} B_{n \times p} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1,i} b_{i,1} & \sum_{i=1}^n a_{1,i} b_{i,2} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{1,i} b_{i,p} \\ \sum_{i=1}^n a_{2,i} b_{i,1} & \sum_{i=1}^n a_{2,i} b_{i,2} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{2,i} b_{i,p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{m,i} b_{i,1} & \sum_{i=1}^n a_{m,i} b_{i,2} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{m,i} b_{i,p} \end{bmatrix}$$

Para que esta operação seja possível, o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda. A matriz resultante tem o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda. O produto entre duas matrizes tem as seguintes propriedades:

1. Existe I tal que $AI = IA = A$. I é chamada de matriz identidade. Esta matriz é quadrada com elementos na diagonal principal iguais a 1 e todos outros elementos nulos.
2. $A(B + C) = AB + AC$

3. $(A + B)C = AC + BC$
4. $(AB)C = A(BC)$
5. $0A = A0 = 0$

Em alguns casos, pode existir uma matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. A matriz A^{-1} é chamada de matriz inversa de A e as condições para sua existência serão mostradas mais adiante.

- **Transposição** Dada uma matriz $A_{m \times n}$ pode-se escrever uma matriz $A_{n \times m}^T$ cujas linhas são as colunas de $A_{m \times n}$. A nova matriz A^T é definida como a matriz transposta de A . A operação de transposição apresenta as seguintes propriedades:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(kA)^T = kA^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$
5. Se $A = A^T$, A é dita simétrica

B.3 Espaços vetoriais

Um espaço vetorial é, por definição, um conjunto de elementos não vazio sobre os quais estão definidas as operações de soma entre elementos denotada por $+$ e produto de elementos por um escalar, denotado por \cdot ¹ que satisfaçam as seguintes propriedades, sendo que a e b são escalares reais ou complexos e u , v e w são elementos do espaço vetorial V :

1. $(u + v) + w = u + (v + w)$
2. $u + v = v + u$
3. Existe $0 \in V$ tal que $u + 0 = u$ e 0 é chamado de elemento nulo ou ainda elemento neutro da adição
4. Existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$
5. $a(bu) = (ab)u$
6. $a(u + v) = au + av$
7. $(a + b)v = av + bv$
8. Existe $1 \in V$ tal que $1u = u$ e 1 é chamado de elemento neutro da multiplicação

¹Por simplicidade, o produto de elementos por um escalar pode ser escrito suprimindo-se o sinal \cdot .

Note que as matrizes definidas na seção anterior com mesmo número de linhas e de colunas formam um espaço vetorial. Deve-se observar que os elementos de um espaço vetorial podem ser números reais, complexos, funções, matrizes e qualquer outro ente matemático sobre o qual possam ser definidas as duas operações acima de forma que as propriedades listadas sejam satisfeitas. Um exemplo simples de espaço vetorial é o plano cartesiano. A cada ponto do plano pode-se atribuir uma matriz com duas componentes. Se a soma entre duas dessas matrizes e o produto de uma delas por um escalar forem definidos da mesma forma que foram definidos para as matrizes, tem-se que todas as condições listadas acima são satisfeitas e portanto tem-se um espaço vetorial

Um elemento de um espaço vetorial é, por definição, chamado de vetor. É importante ressaltar que, com esta definição, um vetor pode ser qualquer coisa, como por exemplo uma matriz, uma função, um número complexo, etc. No exemplo apresentado no parágrafo anterior, a matriz com dois elementos é um vetor de um determinado espaço vetorial.

B.4 Subespaços Vetoriais

Um subespaço vetorial é um espaço que está contido em um espaço vetorial maior. Para que W seja subespaço de V ele deve apresentar as seguintes características:

1. Para quaisquer vetores u e v pertencentes a W , $u + v$ também deve pertencer a W
2. Para qualquer escalar a e qualquer $u \in W$, $au \in W$
3. $0 \in W$

Note que um espaço vetorial é subespaço dele mesmo.

Um exemplo de subespaço vetorial do plano cartesiano é uma reta.

No desenvolvimento do método dos mínimos quadrados pela visão dos subespaços mostrado no capítulo 4 são estudadas matrizes que em cada coluna contêm vetores de um determinado espaço vetorial. O espaço vetorial gerado por estes vetores é dividido em dois subespaços fundamentais sobre os quais a teoria é desenvolvida.

B.5 Combinação linear

Sejam a_1, a_2, \dots, a_n escalares e v_1, v_2, \dots, v_n vetores de um espaço vetorial V . Então o vetor v tal que:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$$

é definido como sendo a combinação linear dos vetores v_1, v_2, \dots, v_n . Pelas propriedades da soma e do produto por escalar tem-se que $v \in V$. Um subespaço de V é gerado por infinitas combinações lineares de vetores fixos, ou seja, infinitas combinações de escalares multiplicando cada um dos vetores escolhidos. Um elemento particular deste subespaço é resultado de uma ou mais combinações lineares dos vetores escolhidos. Caso este vetor particular do subespaço seja gerado por apenas uma combinação linear dos vetores escolhidos, os vetores escolhidos são ditos linearmente independentes.

Caso haja mais de uma combinação linear dos vetores escolhidos que resulte em um determinado vetor do subespaço, estes vetores são ditos linearmente dependentes.

Uma definição mais formal de independência linear é dada a seguir. Seja o conjunto de vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Os vetores deste conjunto serão linearmente independentes se e somente se a seguinte igualdade:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$$

Implica que $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Caso haja valores de $a_i, i = 1, \dots, n$ não nulos de forma que a equação acima é satisfeita, os vetores são ditos linearmente dependentes. Em um conjunto de vetores linearmente dependentes, pelo menos um destes vetores é combinação linear de todos os outros pois, por exemplo, se existe $a_i \neq 0$ tal que:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_1v_i + \dots + a_nv_n = 0$$

então:

$$v_i = -\frac{a_1}{a_i}v_1 - \frac{a_2}{a_i}v_2 - \dots - \frac{a_n}{a_i}v_n$$

Portanto v_i é combinação dos outros vetores do conjunto. Com isto pode-se dizer que os vetores de um conjunto são linearmente independentes apenas se nenhum deles for combinação linear dos outros.

B.6 Base de um subespaço

A partir dos conceitos de combinação linear, dependência e independência linear pode-se definir a base de um espaço vetorial. A base é um conjunto de vetores linearmente independentes tais que todos os vetores do espaço em que está a base podem ser obtidos por combinações lineares dela. O número de vetores da base é definido como a dimensão do espaço vetorial. Por exemplo, no plano cartesiano uma das bases possíveis é formada pelos vetores $[1 \ 0]$ e $[0 \ 1]$ ². Note que qualquer vetor deste espaço pode ser obtido como combinação linear destes dois vetores. Além disso, a dimensão deste espaço é 2.

B.7 Soma de subespaços

Sejam U e W dois subespaços do espaço V . Define-se $U + W$ como sendo a soma dos subespaços U e W o subespaço gerado por todos os vetores das bases de U e W . Caso os vetores da base de U sejam linearmente independentes a todos os vetores da base de W , diz-se que a soma de U e W é uma soma direta, denotada por $U \oplus W$.

²Por esta ser a base mais simples do espaço ela é chamada de base canônica

B.8 Produto interno

Sejam v_1, v_2 e v_3 vetores de um determinado espaço vetorial V e a um escalar qualquer. Um produto interno entre estes dois vetores denotado por $\langle v_1, v_2 \rangle$ é qualquer operação entre eles que tenha como resultado um escalar e satisfaça as seguintes condições:

1. $\langle v_1, v_1 \rangle \geq 0$ ($\langle v_1, v_1 \rangle = 0$ se e somente se $v_1 = 0$)
2. $\langle av_1, v_2 \rangle = a \langle v_1, v_2 \rangle$
3. $\langle v_1 + v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle$
4. $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$

Caso o produto interno dois vetores seja nulo estes vetores são ditos ortogonais e eles são linearmente independentes, conforme demonstrado a seguir:

Sejam v_1 e v_2 vetores não nulos pertencentes a V tais que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Seja a igualdade

$$a_1v_1 + a_2v_2 = 0 \tag{B.1}$$

em que a_1 e a_2 são escalares. Tomando o produto interno da igualdade por v_1 tem-se:

$$\begin{aligned} \langle a_1v_1 + a_2v_2, v_1 \rangle &= \langle 0, v_1 \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow a_1 \langle v_1, v_1 \rangle &= 0 \end{aligned} \tag{B.2}$$

Da mesma forma, ao se tomar o produto interno da igualdade por v_2 tem-se:

$$\begin{aligned} \langle a_1v_1 + a_2v_2, v_2 \rangle &= \langle 0, v_2 \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow a_2 \langle v_2, v_2 \rangle &= 0 \end{aligned} \tag{B.3}$$

Ou seja, a igualdade proposta só é possível se $a_1 = a_2 = 0$, portanto v_1 e v_2 são vetores linearmente independentes.

Note que o produto entre matrizes definido anteriormente tem como resultado uma matriz em que cada elemento é o produto interno entre uma linha da primeira matriz e uma coluna da segunda matriz.

B.9 Transformações lineares

Uma transformação linear F é uma operação feita sobre um determinado vetor de um espaço que o leva para um outro espaço, o que se denota por $F : U \rightarrow V$. Para que F seja uma transformação linear, ela deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2)$
2. $F(au) = aF(u)$

Em que u_1, u_2 e u são vetores do espaço vetorial U e a é um escalar.

Desta forma, pode-se definir uma transformação sobre matrizes de uma determinada dimensão de forma que elas sejam refletidas em um espaço de outra dimensão. A transformação linear que faz isto é uma outra matriz. Pode-se verificar que ao se multiplicar uma matriz por outra as propriedades da linearidade são satisfeitas.

Conforme estudado na seção de mínimos quadrados pela abordagem de subespaços do capítulo 4, tem-se que a matriz de transformação linear leva um vetor de um determinado espaço a um vetor do subespaço imagem do outro espaço. Mais detalhes sobre este e outros subespaços fundamentais de uma matriz são estudados no capítulo 4.

B.10 Sistemas lineares e matrizes

Sistemas lineares são conjuntos de equações lineares com as mesmas incógnitas que se encaixam na seguinte forma genérica:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Se $m > n$, ou seja, se há mais equações do que incógnitas, o sistema é dito sobredeterminado. Caso $m < n$ o sistema é dito subdeterminado. Estes sistemas não têm solução exata para o vetor de incógnitas x .

A partir da definição do produto entre duas matrizes, a equação B.4 é equivalente a seguinte igualdade matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

ou ainda

$$Ax = b$$

Desta forma, só existe solução para o sistema caso exista uma matriz A^{-1} tal que $A^{-1}A = I$. Se esta matriz existir, ela pode ser multiplicada dos dois lados da equação obtendo-se $A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$. Com isto, pode-se dizer que determinar se o sistema tem solução é equivalente a determinar se a matriz A tem inversa.

A princípio, a matriz A só pode ser invertida se ela for quadrada. Isto é fato pois a inversa deve satisfazer tanto $A^{-1}A = I$ quanto $AA^{-1} = I$. Sendo assim, se a matriz A não for quadrada não haverá uma matriz A^{-1} que possa ser multiplicada tanto à esquerda quanto à direita por A .

No entanto, não é qualquer matriz quadrada que admite inversa, conforme será demonstrado a seguir.

Seja $A_{n \times n}$ tal que exista $A_{n \times n}^{-1}$ ³ de forma que $A_{n \times n}^{-1}A_{n \times n} = I_{n \times n}$, ou seja:

³Os elementos de A^{-1} são denotados por a_{ij}^{-1} , $i = 1, \dots, n$ $j = 1, \dots, n$ e não necessariamente $a_{ij}^{-1} = \frac{1}{a_{ij}}$

$$\begin{aligned}
& A^{-1}A = I \Rightarrow \\
& \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & \dots & a_{1n}^{-1} \\ a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} & \dots & a_{2n}^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{-1} & a_{n2}^{-1} & \dots & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
& \begin{bmatrix} \langle a_{1,:}^{-1}, a_{:,1} \rangle & \langle a_{1,:}^{-1}, a_{:,2} \rangle & \dots & \langle a_{1,:}^{-1}, a_{:,n} \rangle \\ \langle a_{2,:}^{-1}, a_{:,1} \rangle & \langle a_{2,:}^{-1}, a_{:,2} \rangle & \dots & \langle a_{2,:}^{-1}, a_{:,n} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_{n,:}^{-1}, a_{:,1} \rangle & \langle a_{n,:}^{-1}, a_{:,2} \rangle & \dots & \langle a_{n,:}^{-1}, a_{:,n} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})
\end{aligned}$$

Em que $a_{i,:}^{-1}$ denota a i ésima linha da matriz A^{-1} e $a_{:,i}$ denota a i ésima coluna da matriz A . Da última igualdade de B.6 tem-se que a coluna i de A é linearmente dependente apenas da linha i de A^{-1} . A linha i de A^{-1} por sua vez é linearmente independente de todas as colunas de A . Desta forma, a coluna i de A é linearmente independente de todas as outras colunas de A . Portanto, para que exista A^{-1} tal que $A^{-1}A = I$, as colunas de A devem ser vetores linearmente independentes entre si. O mesmo raciocínio pode ser desenvolvido para a expressão $AA^{-1} = I$, concluindo-se que todas as linhas de A devem ser linearmente independentes entre si.

Matrizes que apresentam linhas e colunas linearmente independentes entre si são chamadas de matrizes não singulares, ou seja, elas não são únicas pois sua inversa existe. Caso a inversa não exista, elas são ditas matrizes singulares.

Define-se o posto de uma matriz como sendo o número de linhas ou de colunas linearmente independentes. Desta forma, uma matriz de dimensão $n \times n$ só será inversível se tiver posto completo, ou seja, se seu posto for igual a n .

Portanto, um sistema linear $Ax = b$ tem solução exata quando a matriz A tem colunas e linhas linearmente independentes. No caso em que a matriz A não for quadrada, ou ainda se A for quadrada ou não inversível, existem soluções aproximadas que encontram a melhor estimativa possível para o vetor de incógnitas x conforme descrito no capítulo 4.

B.11 Resumo das definições importantes

Ao longo deste apêndice foram apresentados alguns conceitos fundamentais para o desenvolvimento do capítulo 4. Estes conceitos estão resumidos na tabela B.1, adaptada de [43] para uma matriz $A_{n \times n}$.

Tab. B.1: Álgebra linear em poucas palavras

Não singular	Singular
A é inversível	A não é inversível
As colunas são independentes	As colunas são dependentes
As linhas são independentes	As linhas são dependentes
$Ax = 0$ tem solução $x = 0$	$Ax = 0$ tem infinitas soluções
$Ax = b$ tem solução $x = A^{-1}b$	$Ax = b$ não tem solução exata
A tem posto $r = n$	A tem posto $r < n$
O espaço coluna de A é todo \mathfrak{R}^n	O espaço coluna tem dimensão $r < n$
O espaço linha de A é todo \mathfrak{R}^n	O espaço linha tem dimensão $r < n$

Apêndice C

Códigos computacionais desenvolvidos

C.1 Programa estimador de parâmetros do circuito elétrico equivalente

C.1.1 Primeira parte

```
clc
clear
close all
hold off

resistencias=load('resistencias.txt');

for i=1:10
    %Calcula a resistencia media para cada temperatura (ver
    %resistencias.txt)
    Rlcw(i)=(resistencias(i,2)+resistencias(i,4))/2;
    Rlccw(i)=(resistencias(i,3)+resistencias(i,5))/2;
end

for j=1:4
    %Carrega arquivos com tensão, corrente e potência para cada
    %temperatura observada nos testes. Como há dois testes de
    %rotor livre e dois de rotor bloqueado, são feitas as quatro
    %combinações possíveis entre os testes para dar consistência
    %aos dados
    switch (j)
        case 1
            cwnl=load('livre_cw_1.txt');
            ccwnl=load('livre_ccw_1.txt');
```

```

        cw_bl=load('travado_cw_1.txt');
        ccw_bl=load('travado_ccw_1.txt');
    case 2
        cw_nl=load('livre_cw_1.txt');
        ccw_nl=load('livre_ccw_1.txt');
        cw_bl=load('travado_cw_2.txt');
        ccw_bl=load('travado_ccw_2.txt');
    case 3
        cw_nl=load('livre_cw_2.txt');
        ccw_nl=load('livre_ccw_2.txt');
        cw_bl=load('travado_cw_1.txt');
        ccw_bl=load('travado_ccw_1.txt');
    case 4
        cw_nl=load('livre_cw_2.txt');
        ccw_nl=load('livre_ccw_2.txt');
        cw_bl=load('travado_cw_2.txt');
        ccw_bl=load('travado_ccw_2.txt');
end
%Transforma a potencia para wats
cw_nl(:,4)=1000*cw_nl(:,4);
ccw_nl(:,4)=1000*ccw_nl(:,4);
cw_bl(:,4)=1000*cw_bl(:,4);
ccw_bl(:,4)=1000*ccw_bl(:,4);

for i=1:10
    %Calculo para o enrolamento cw
    %r2=(potencia_bloqueado/corrente_bloqueado^2)-r1
    R2cw(i,j)=(cw_bl(i,4)/cw_bl(i,3)^2)-R1cw(i);
    %(X1+X2)^2=(V_bloqueado/I_bloqueado)^2-(r1+r2)^2
    X1cw(i,j)=
    =0.5*sqrt((cw_bl(i,2)/cw_bl(i,3))^2-(R1cw(i)+R2cw(i,j))^2);
    X2cw(i,j)=X1cw(i,j);
    %R_livre=P_livre/I_livre^2
    RNLcw(i,j)=cw_nl(i,4)/cw_nl(i,3)^2;
    %X_livre^2=(V_livre/I_livre)^2-R_livre^2
    XNLcw(i,j)=sqrt((cw_nl(i,2)/cw_nl(i,3))^2-RNLcw(i,j)^2);
    %Xmag=2*(X_livre-X1-0.5*X2)
    Xmagcw(i,j)=XNLcw(i,j)-X1cw(i,j);

    %Calculo para enrolamento ccw
    %r2=(potencia_bloqueado/corrente_bloqueado^2)-r1
    R2ccw(i,j)=(ccw_bl(i,4)/ccw_bl(i,3)^2)-R1ccw(i);
    %(X1+X2)^2=(V_bloqueado/I_bloqueado)^2-(r1+r2)^2

```

C.1. PROGRAMA ESTIMADOR DE PARÂMETROS DO CIRCUITO ELÉTRICO EQUIVALENTE111

```
X1ccw(i, j)=
=0.5*sqrt((ccw_b1(i, 2)/ccw_b1(i, 3))^2-(R1ccw(i)+R2ccw(i, j))^2);
X2ccw(i, j)=X1ccw(i, j);
%R_livre=P_livre/I_livre^2
RNLccw(i, j)=ccw_n1(i, 4)/ccw_n1(i, 3)^2;
%X_livre^2=(V_livre/I_livre)^2-R_livre^2
XNLccw(i, j)=sqrt((ccw_n1(i, 2)/ccw_n1(i, 3))^2-RNLccw(i, j)^2);
%Xmag=2*(X_livre-X1-0.5*X2)
Xmagccw(i, j)=XNLccw(i, j)-X1ccw(i, j);
end
end

%Toma as médias para cada temperatura das grandezas calculadas nas
%quatro combinações feitas entre os dois pares de testes
R2cwfin=(R2cw(:, 1)+R2cw(:, 2)+R2cw(:, 3)+R2cw(:, 4))/4;
X1cwfin=(X1cw(:, 1)+X1cw(:, 2)+X1cw(:, 3)+X1cw(:, 4))/4;
X2cwfin=(X2cw(:, 1)+X2cw(:, 2)+X2cw(:, 3)+X2cw(:, 4))/4;
Xmagcwfin=(Xmagcw(:, 1)+Xmagcw(:, 2)+Xmagcw(:, 3)+Xmagcw(:, 4))/4;

R2ccwfin=(R2ccw(:, 1)+R2ccw(:, 2)+R2ccw(:, 3)+R2ccw(:, 4))/4;
X1ccwfin=(X1ccw(:, 1)+X1ccw(:, 2)+X1ccw(:, 3)+X1ccw(:, 4))/4;
X2ccwfin=(X2ccw(:, 1)+X2ccw(:, 2)+X2ccw(:, 3)+X2ccw(:, 4))/4;
Xmagccwfin=(Xmagccw(:, 1)+Xmagccw(:, 2)+Xmagccw(:, 3)+Xmagccw(:, 4))/4;
```

C.1.2 Segunda parte

```
%Calculo da aproximação linear da evolução dos parametros:
```

```
Temp=[25:5:70]';
```

```
%Matriz de calculo de parametros
```

```
A(:, 1)=Temp;
```

```
A(:, 2)=ones(length(Temp), 1);
```

```
%Cálculo dos parâmetros
```

```
parR1cw=pinv(A)*R1cw';
```

```
parR2cw=pinv(A)*R2cwfin;
```

```
parX1cw=pinv(A)*X1cwfin;
```

```
parX2cw=pinv(A)*X2cwfin;
```

```
parXmagcw=pinv(A)*Xmagcwfin;
```

```
parR1ccw=pinv(A)*R1ccw';
```

```

parR2ccw=pinv(A)*R2ccwfin;
parX1ccw=pinv(A)*X1ccwfin;
parX2ccw=pinv(A)*X2ccwfin;
parXmagccw=pinv(A)*Xmagccwfin;

```

C.2 Programa de cálculo da curva de corrente

```

clear
close all

data=load('pior_partida07.txt');

%Entradas de tensão e corrente

for i=1:length(data)
    if data(i,2)>1
        Vs(i)=106/sqrt(2);    %Tensão aplicada rms
    else
        Vs(i)=0;
    end
end

Is=data(:,2);                %Corrente

%Cálculo da velocidade síncrona
nsyn=120*60/4;              %rpm
n=(data(:,3)*(123.4/60));    %Transformação de velocidade pela correia
s=((ones(length(data),1)*nsyn)-n)/nsyn; %Vetor de escorregamento

%Valores dos parâmetros do motor a 35°C (ver testes de rotor travado e
%livre da modelagem do aquecimento do motor)
R1_cw=[0.0116 3.5652]*[35 1]';
R2_cw= ([0.0363 4.5688]*[35 1]')/2;
X1_cw= [0.0067 3.5827]*[35 1]';
X2_cw= ([0.0067 3.5827]*[35 1]')/2;
Xmag_cw= ([0.0052 22.5353]*[35 1]')/2;
R1_ccw= [0.0110 3.4861]*[35 1]';
R2_ccw= ([0.0339 5.0109]*[35 1]')/2;
X1_ccw= [0.0084 3.4521]*[35 1]';
X2_ccw= ([0.0084 3.4521]*[35 1]')/2;
Xmag_ccw= ([0.0124 20.5389]*[35 1]')/2;

```

```

%Cálculo das impedâncias do circuito
Cext=50E-6; %50uF
zcext=1/(j*2*pi*60*Cext);
Zcext=zcext*ones(size(s)); %Vetor de impedância do capacitor
Lext=100E-6; %100mH
zxext=j*2*pi*60*Lext;
Zxext=zxext*ones(size(s)); %Vetor de impedância do indutor
z1m=R1_cw+j*X1_cw;
Z1m=z1m*ones(size(s)); %Impedância Z1 do enrolamento principal (cw)
z1a=R1_ccw+j*X1_ccw;
Z1a=z1a*ones(size(s)); %Impedância Z1 do enrolamento auxiliar (ccw)
zmm=j*Xmag_cw;
Zmm=zmm*ones(size(s)); %Impedância de mag. do enr. principal
zma=j*Xmag_ccw;
Zma=zma*ones(size(s)); %Impedância de mag. do enr. auxiliar
for k=1:length(s)
    Z2fm(k)=(R2_cw/s(k))+j*X2_cw;
    Zfm(k)=(Z2fm(k)*Zmm(k))/(Z2fm(k)+Zmm(k));

    Z2bm(k)=(R2_cw/(2-s(k)))+j*X2_cw;
    Zbm(k)=(Z2bm(k)*Zmm(k))/(Z2bm(k)+Zmm(k));

    Z2fa(k)=(R2_ccw/s(k))+j*X2_ccw;
    Zfa(k)=(Z2fa(k)*Zma(k))/(Z2fa(k)+Zma(k));

    Z2ba(k)=(R2_ccw/(2-s(k)))+j*X2_ccw;
    Zba(k)=(Z2ba(k)*Zma(k))/(Z2ba(k)+Zma(k));

%Formação da matriz de impedâncias
    a11(k)=Z1m(k)+Zfm(k)+Zbm(k);
    a12(k)=-j*(Zfa(k)-Zba(k));
    a21(k)=j*(Zfm(k)-Zbm(k));
    a22(k)=Z1a(k)+Zfa(k)+Zba(k)+Zcext(k)+Zxext(k);
    A(:, :, k)=[a11(k) a12(k); a21(k) a22(k)];

%Cálculo da corrente da fonte que é a soma de Im e Ia
    Is_est(k)=sum(inv(A(:, :, k))*[1;1]*Vs(k));
    Isrms_est(k)=abs(Is_est(k));
end

plot(data(:,1), Is, 'r', data(:,1), Isrms_est, 'b')

```

```
legend('Corrente real','Corrente calculada')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Corrente RMS (A)')

%Cálculo do erro cometido
erro=Is-Isrms_est';
eqm=mse(erro)
```

C.3 Programa recortador de correntes

%Programa que calcula correntes RMS para diferentes tempos de motor ligado e desligado a partir das correntes captadas para o teste DC=24

```
close all
clear

t_on=0.24; %Tempo de motor ligado da forma de onda recortada
t_off=0.20; %Tempo de motor desligado da forma de onda recortada
%Carrega as correntes do teste com maior tempo de motor ligado
for k=1:14
    switch k
        case 1
            i_real=load('25c.txt');
        case 2
            i_real=load('30c.txt');
        case 3
            i_real=load('35c.txt');
        case 4
            i_real=load('40c.txt');
        case 5
            i_real=load('45c.txt');
        case 6
            i_real=load('50c.txt');
        case 7
            i_real=load('55c.txt');
        case 8
            i_real=load('60c.txt');
        case 9
            i_real=load('65c.txt');
        case 10
```

```

        i_real=load('70c.txt');
    case 11
        i_real=load('75c.txt');
    case 12
        i_real=load('80c.txt');
    case 13
        i_real=load('85c.txt');
    case 14
        i_real=load('90c.txt');
end

```

```

%calcula o tempo de aquisição a partir do vetor de tempos das
%correntes e o número de elementos no vetor equivalente aos tempos
%de ligado e desligado

```

```

    t_aq=i_real(2,1)-i_real(1,1);
    i_on=t_on/t_aq;
    i_off=t_off/t_aq;

```

```

%Encontra o início de cada uma das duas senóide de amplitudes
%variáveis que são as correntes. Para isto, ele soma três elementos
%consecutivos. Se esta soma for maior que 6, significa que ocorreu
%o início da senóide

```

```

    i=1;
    inicio_1=0;
    inicio_2=0;
    while i<size(i_real,1)-3
        i=i+1;
        sum=0;
        for j=1:3
            sum=sum+abs(i_real(i+j,2));
        end
        if sum>6 & inicio_1==0 %Se a soma de termos for significativa
            inicio_1=i; %encontrou-se o início da 1a senóide
            i=i+(.4/t_aq); %Então pula-se a 1a senóide
            inicio_2=0;
            sum=0;
        end
        if sum>6 & inicio_2==0 %Se a soma for significativa pós pulo
            inicio_2=i; %Encontrou-se o início da 2a senóide
        end
    end
end

```

```

%Encontrados os inícios das senóides, cria as formas de onda
%referentes a qualquer tempo de ligado e desligado desde que
%o tempo de ligado nao ultrapasse o tempo de motor ligado do
%teste de onde se tiram as correntes.
    periodo=2*(t_on+t_off)/t_aq;      %período da nova forma de onda
    for i=1:periodo
        corr_est(i,1)=i_real(i,1);
        if i>=1 & i<i_on
            corr_est(i,2)=i_real(i+inicio_1,2);
        end
        if i>=i_on & i<(i_on+i_off)
            corr_est(i,2)=0;
        end
        if i>=(i_on+i_off) & i<(2*i_on)+i_off
            corr_est(i,2)=i_real(i+inicio_2-(i_on+i_off),2);
        end
        if i>=(2*i_on)+i_off & i<=2*(i_on+i_off);
            corr_est(i,2)=0;
        end
    end
end

%calcula a corrente RMS para cada forma de onda de corrente reformada
    corr_est_s=0;
%Soma dos quadrados dos termos de corrente
    for i=1:length(corr_est)
        corr_est_s=corr_est_s+corr_est(i,2)^2;
    end
    %eixo das temperaturas
    corr_est_rms(k,1)=(k-1)*5+25;
    %valor rms da forma de onda de corrente
    corr_est_rms(k,2)=sqrt((1/length(corr_est))*corr_est_s);
end

%Ajuste da reta de correntes rms

reg(:,1)=ones(length(corr_est_rms),1);
reg(:,2)=corr_est_rms(:,1);
coef_reta=pinv(reg)*corr_est_rms(:,2)
for i=1:length(corr_est_rms)
    reta(i)=coef_reta(1)+coef_reta(2)*corr_est_rms(i,1);
end
clear reg
figure(1)

```

```

plot(corr_est_rms(:,1),corr_est_rms(:,2),'rx',corr_est_rms(:,1),reta,'b')
axis tight
title('Reta que relaciona corrente RMS e temperatura')
xlabel('temperatura na ranhura (^oC)')
ylabel('Corrente')
figure(2)
plot(corr_est(:,1),corr_est(:,2))
title('Corrente estimada para a temperatura mais alta')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Corrente (A)')
figure(2)

```

C.4 Programa estimador de parâmetros de aquecimento do motor

C.4.1 Cálculo de corrente RMS

```

i30C=load('30c.txt'); %Carrega o vetor de corrente
i30cs=0; %Zera o somador
for i=1:length(i30C)
    i30cs=i30cs+i30C(i,2)^2; %Soma dos quadrados dos i(k)
end
i30crms=sqrt((DC/length(i30C))*i30cs); %Cálculo final do valor RMS

```

C.4.2 Relação entre corrente RMS e temperatura

```

%Formação do vetor de correntes RMS

```

```

i_rms(1)=i30crms;
i_rms(2)=i35crms;
i_rms(3)=i40crms;
i_rms(4)=i45crms;
i_rms(5)=i50crms;
i_rms(6)=i55crms;
i_rms(7)=i60crms;
i_rms(8)=i65crms;
i_rms(9)=i70crms;
i_rms(10)=i75crms;
i_rms(11)=i80crms;

```

```

i_rms(12)=i85crms;
i_rms(13)=i90crms;
i_rms(14)=i95crms;
i_rms(15)=i100crms;
i_rms(16)=i105crms;
i_rms(17)=i110crms;
i_rms(18)=i115crms;
i_rms(19)=i120crms;
i_rms(20)=i125crms;

%Formação do vetor de temperaturas

temp_i=30:5:125;

%Ajuste da reta de correntes rms

%1a coluna da matriz de regressão
reg(:,1)=ones(length(temp_i),1);
%2a coluna da Matriz de regressão
reg(:,2)=temp_i';
%Calculo dos coeficientes da reta
coef_reta=pinv(reg)*i_rms';

```

C.4.3 Estimador de parâmetros

```

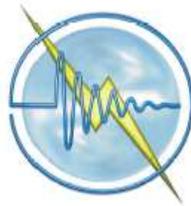
%Matriz de regressao para temperatura na cabeça

for i=2:size(temp,1)
    %Temperatura na cabeça com um atraso
    reg1(i,1)=temp(i-1,2);
    %Temperatura ambiente com um atraso
    reg1(i,2)=temp(i-1,5);
    %Corrente com um atraso
    reg1(i,3)=coef_reta(1)+coef_reta(2)*temp(i-1,3);
end

%Coeficientes para a temperatura da cabeça
coef_c=pinv(reg1)*temp(:,2)

```

Apêndice D



V SEMINÁRIO NACIONAL DE
CONTROLE E AUTOMAÇÃO
INDUSTRIAL, ELÉTRICA E DE TELECOMUNICAÇÕES

Promoção:



Modelagem Computacional do Aquecimento de um Motor de Indução Monofásico Aplicado a Máquinas de Lavar Roupas Durante a Etapa de Agitação

Mateus Giesbrecht*, Gilmar Barreto*

*Departamento de Máquinas, Componentes e Sistemas Inteligentes (DMCSI)
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC)
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

GRUPO: A B C D E

TEMA: Sistemas elétricos e eletrônica de potência

PALAVRAS CHAVE: Máquina de Lavar Roupas, Máquinas Elétricas, Método dos Mínimos Quadrados, Identificação de Sistemas

RESUMO - A motivação para este estudo é criar um modelo computacional capaz de prever se o regime de trabalho a que um motor monofásico de indução é submetido implica ou não em um aquecimento que comprometa os materiais isolantes do mesmo.

A solução apresentada é baseada em se encontrar uma equação a diferenças em que a saída do sistema (temperatura do motor no instante $k+1$) é calculada como uma combinação linear das entradas (temperatura do motor, valor RMS da corrente e temperatura ambiente no instante k). Para conhecer os coeficientes desta combinação linear, foram realizados alguns ensaios e, a partir de seus resultados, foi aplicado o método dos mínimos quadrados para a obtenção do modelo computacional que representa o sistema.

Os resultados computacionais obtidos com o modelo proposto refletem com exatidão o comportamento do sistema real. O modelo desenvolvido também é útil para outras aplicações que utilizem o regime intermitente periódico com partida [1].

ABSTRACT - This study motivation is to find a computer-based model able to foresee if the duty cycle applied in a single-phase induction motor implies or not in an overheating that can compromise the motor insulation.

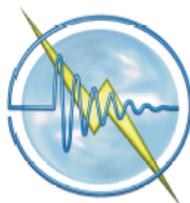
The solution here presented is based on finding a discrete difference equation in which the system output (temperature at time $k+1$) is calculated as a linear combination of the input (temperature, RMS current and ambient temperature at time k). To find the coefficients of this linear combination, the Mean Square Method was applied, resulting in the final computational model that represents the system.

The computational results found with the proposed model reflect exactly the real system behaviour. This model is also useful to other applications in which the intermittent periodic duty with starting is used [1].

INTRODUÇÃO

Um dos fatores mais importantes para a qualidade de uma máquina de lavar roupas é o projeto do ciclo de lavagem. Entende-se por ciclo de lavagem a seqüência de ações, ou ainda o algoritmo que deve ser realizado pela máquina para que a roupa em seu interior tenha a sujidade removida da melhor forma possível.

O ciclo de lavagem ideal é basicamente aquele em que a roupa é agitada por um tempo determinado pelo compromisso entre remoção de sujidade e conservação das roupas, e depois centrifugada durante um tempo que represente o compromisso entre melhor extração de água e menor formação de rugas. No entanto, durante a agitação e a centrifugação o motor da máquina



V SEMINÁRIO NACIONAL DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL, ELÉTRICA E TELECOMUNICAÇÕES

permanece ligado e sua temperatura conseqüentemente aumenta, o que é um fator limitante para a escolha dos tempos do ciclo de lavagem pois, se a temperatura do motor ultrapassar um determinado valor limite, haverá fadiga do isolamento e conseqüente redução da vida útil do equipamento.

Sendo assim, o projetista do ciclo de lavagem deve encontrar um compromisso entre seus objetivos e a temperatura do motor.

Em geral, para se descobrir se um determinado ciclo de lavagem implica ou não em ultrapassagem da temperatura máxima do motor, são feitos testes que demandam tempo, recursos humanos e de laboratório.

Para substituir estes testes, é proposto um modelo computacional capaz de simular a elevação de temperatura do motor da máquina de lavar roupas a partir de um ciclo de lavagem dado como entrada. Este trabalho se limita ao modelo durante a etapa de agitação. O modelo durante a etapa de centrifugação serve como motivação para trabalhos futuros.

DESENVOLVIMENTO DO MODELO

O modelo escolhido para representar o aquecimento do motor é do tipo "caixa cinza" [2], ou seja, a partir de características físicas não muito bem conhecidas do sistema determina-se uma estrutura de modelo, ou seja, uma equação a diferenças paramétrica, que, se determinados os parâmetros, pode representar o sistema real com exatidão. A escolha por este tipo de modelo foi devido a sua simplicidade frente a um modelo "caixa branca", que envolveria a solução de equação de distribuição de temperatura (1) para uma determinada região de contorno, conforme descrito em [3].

$$\nabla^2 T = -\frac{\rho c}{k} \frac{dT}{dt} \quad (1)$$

Sendo que em (1) as constantes representam propriedades físicas dos materiais envolvidos na construção do motor e T denota o campo escalar de temperaturas.

Para a solução do problema pelo modelo "caixa cinza", sabe-se que no sistema térmico envolvido há uma fonte de calor que é a potência dissipada nos enrolamentos do motor, um acumulador de calor que é a própria massa da carcaça, enrolamento e outros componentes do motor, e um meio refrigerante externo com inércia térmica infinita que é o ar do ambiente. A partir destas informações o sistema térmico pode ser

representado pelo sistema elétrico análogo mostrado na Fig. 1.

Na analogia do sistema térmico com um sistema elétrico a grandeza temperatura é relacionada com a grandeza tensão, pois ambas estão inseridas no contexto de campos escalares que representam potenciais. A transferência de calor é relacionada com a grandeza corrente elétrica, pois ambas representam fluxos de energia. A carcaça do motor é vista como um acumulador de calor, o que pode ser traduzido por um capacitor. A energia acumulada no motor vem da fonte de calor, que é proporcional ao valor quadrático médio (RMS) da corrente elétrica que passa através dos enrolamentos. Para o análogo elétrico, a fonte de calor seria uma fonte de corrente. Deve-se tomar cuidado para não se confundir a corrente do análogo elétrico que representa transferência de calor com a corrente física que de fato passa pelo motor. A temperatura ambiente, por representar um potencial de inércia infinita, é representada por uma fonte de tensão ligada ao capacitor através de uma resistência que representa a resistência térmica de condução de calor do motor para o ar ambiente.

O circuito análogo da Fig. 1 pode ser representado pela equação diferencial (2).

$$C \frac{dV_c}{dt} = I + \frac{V_{amb} - V_c}{R} \quad (2)$$

Se for considerado que o tempo na equação não mais é infinitesimal, mas sim um incremento de tempo Δt , pode-se obter sua forma discreta (3).

$$C \frac{V_c(k+1) - V_c(k)}{\Delta t} = I(k) + \frac{V_{amb}(k) - V_c(k)}{R} \quad (3)$$

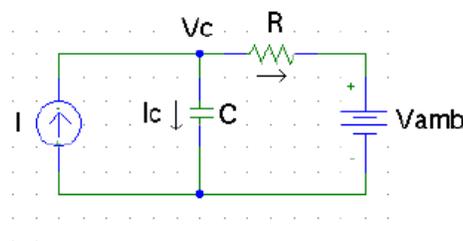
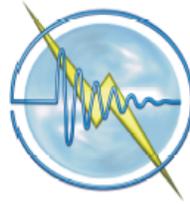


Fig. 1 Circuito elétrico análogo ao sistema térmico estudado



V SEMINÁRIO NACIONAL DE
CONTROLE E AUTOMAÇÃO
INDUSTRIAL, ELÉTRICA E DE TELECOMUNICAÇÕES

De onde, após algumas manipulações algébricas, obtém-se a equação a diferenças (4) que rege o sistema, agora discretizado.

$$V_c(k+1) = \left(\frac{\Delta t}{C}\right)I(k) + \left(\frac{\Delta t}{CR}\right)V_{amb}(k) - \left(\frac{\Delta t}{CR} - 1\right)V_c(k) \quad (4)$$

Voltando-se ao sistema térmico, pode-se escrever sua equação a diferenças paramétrica (5) pela simples substituição das tensões por temperaturas, e das constantes desconhecidas por outras constantes, também desconhecidas, mas agora desprovidas de significado elétrico.

$$T(k+1) = \alpha_1 I_{rms}(k) + \alpha_2 T_{amb}(k) + \alpha_3 T(k) \quad (5)$$

T é a temperatura em um determinado ponto do motor, I_{rms} é o valor RMS da corrente elétrica e T_{amb} é a temperatura ambiente.

Para a determinação das constantes desconhecidas α foram realizados ensaios sobre o sistema sendo que, durante os ensaios, os dados de temperatura no motor, de temperatura ambiente e corrente nos enrolamentos do estator são coletados.

No caso específico deste trabalho a temperatura do motor é considerada como sendo a temperatura de um ponto entre o enrolamento e a ranhura do estator. Este ponto foi escolhido pois nele são alcançadas as maiores temperaturas conforme demonstra a experiência adquirida na manipulação deste tipo de aplicação.

Depois de coletados os dados, aplica-se o método dos mínimos quadrados e, caso a estrutura do modelo escolhida tenha sido suficientemente boa, serão encontrados os parâmetros que fazem com que o modelo se aproxime do sistema real.

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

O método dos mínimos quadrados é aplicável pois, com N medidas feitas, tem-se um sistema de $N-1$ equações algébricas e o número de incógnitas igual ao número de parâmetros a determinar, que no caso é 3. O desenvolvimento do sistema de equações é mostrado em (6).

$$\begin{aligned} T(1) &= \alpha_1 I_{rms}(0) + \alpha_2 T_{amb}(0) + \alpha_3 T(0) \\ T(2) &= \alpha_1 I_{rms}(1) + \alpha_2 T_{amb}(1) + \alpha_3 T(1) \\ &\vdots \\ T(N) &= \alpha_1 I_{rms}(N-1) + \alpha_2 T_{amb}(N-1) + \alpha_3 T(N-1) \end{aligned} \quad (6)$$

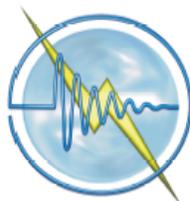
Sendo que (6) pode ser reescrita de forma matricial como mostrado em (7):

$$\begin{bmatrix} T(1) \\ T(2) \\ \vdots \\ T(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{rms}(0) & T_{amb}(0) & T(0) \\ I_{rms}(1) & T_{amb}(1) & T(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ I_{rms}(N-1) & T_{amb}(N-1) & T(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Aplicando-se a solução de mínimos quadrados à equação (7) são encontrados os parâmetros α que implicam em menor diferença quadrática entre os valores medidos e os valores estimados pelo modelo.

No entanto, modelar o sistema tendo como entrada o valor RMS da corrente não reflete a escolha do usuário final do modelo. O projetista do ciclo de lavagem tem interesse em ter como entrada um ciclo de agitação, ou seja, os tempos em que o motor permanece ligado e desligado durante um período de agitação. A relação entre os tempos escolhidos pelo projetista e a corrente RMS é não linear pois, toda vez que o motor parte, a corrente em seus enrolamentos passa por um transitório de partida que dura um tempo da mesma ordem de grandeza do tempo de motor ligado, conforme mostrado na Fig. 2.

Uma alternativa para resolver o problema seria calcular os pontos da forma de onda de corrente no transitório para, a partir dela, calcular o valor RMS da corrente. Para isto seria necessário estimar o circuito elétrico equivalente do motor de indução monofásico envolvido e levantar as equações do sistema mecânico formado por eixo, agitador e peças de pano, sendo que parte delas está flutuando na água. O procedimento para cálculo dos pontos de corrente seria iterativo. No instante inicial seria suposta velocidade nula e com isto, a partir do circuito equivalente do motor de indução [4], seria calculada a corrente no motor. Depois, seria necessário tomar da curva de conjugado do motor, fornecida pelo fabricante, o valor do conjugado referente à velocidade inicial. Com o conjugado, seria necessário calcular a aceleração angular do sistema mecânico, passando pelo momento de inércia do sistema [5], [6]. Com a aceleração e o passo de simulação seria calculado o valor da nova velocidade do sistema e a partir dela poderia ser calculada a corrente com o uso do circuito elétrico equivalente do motor. Com a nova velocidade também seria obtido o novo conjugado, e assim por diante, até atingir o instante de tempo desejado.



V SEMINÁRIO NACIONAL DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL, ELÉTRICA E TELECOMUNICAÇÕES

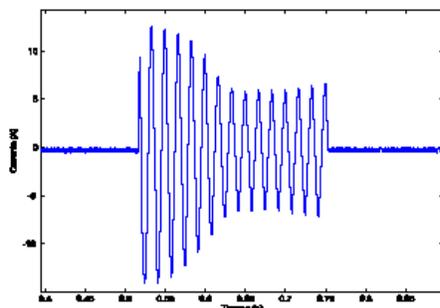


Fig. 2. Corrente elétrica durante a partida da máquina

Deve-se ter o cuidado de, a cada iteração, atualizar o valor das resistências do circuito elétrico equivalente e a curva de conjugado, pois essas grandezas são função da temperatura.

O procedimento descrito acima, além de ser muito trabalhoso e exigir um grande esforço computacional, envolveria o levantamento do momento de inércia de um sistema mecânico altamente complexo devido à flutuação das roupas no interior da máquina.

Outro procedimento que poderia ser usado para relacionar os tempos de motor ligado e desligado com a corrente RMS seria a aplicação de técnicas de identificação não lineares, mas isto está fora do escopo deste trabalho.

Por todos esses motivos foi utilizada uma técnica alternativa descrita a seguir.

A forma de onda de corrente RMS de um ciclo de agitação com o maior tempo de motor ligado utilizado, compreendendo dois tempos de motor ligado e dois tempos de motor desligado, foi registrada. O registro envolveu dois tempos de motor ligado pois a cada vez o motor é acionado em uma direção com o uso de um de seus enrolamentos como principal e o outro como auxiliar. Por razões construtivas os enrolamentos têm características elétricas diferentes, implicando que as formas de onda de corrente para cada um dos enrolamentos são sensivelmente diferentes. Para maior esclarecimento da questão dos enrolamentos, recomenda-se a referência [4].

Para se levar em conta o aumento da resistividade do cobre, e conseqüente diminuição da corrente com o aumento da temperatura, as formas de onda foram captadas a cada variação de 5°C na temperatura. Estas formas de onda amostradas são dadas como entradas a um programa escrito em Matlab que, a partir delas, recorta o vetor de amostras de acordo com o

tempo de motor ligado selecionado pelo usuário e preenche o vetor com zeros de acordo com o tempo de motor desligado determinado pelo usuário. A partir da forma de onda montada, é calculado o valor RMS da corrente em um ciclo e com ele, a elevação de temperatura por meio da equação a diferenças (5) com os parâmetros já determinados.

VALIDAÇÃO DO MODELO

Para validar o procedimento de se recortar a forma de onda de corrente, remontá-la e, a partir da forma de onda montada, calcular o valor RMS, foram feitos dois ensaios. No primeiro deles, o motor foi submetido a um ciclo de agitação em que o tempo de motor ligado era 240ms (tempo máximo de motor ligado utilizado neste tipo de aplicação), e tempo de motor desligado igual a 760ms. A máquina foi submetida a este ciclo de agitação até que o motor atingisse o regime térmico. Depois ela foi deixada desligada até que a temperatura do motor voltasse à temperatura ambiente. No segundo ensaio, o procedimento foi similar, mas o tempo de motor ligado utilizado foi de 150ms, enquanto que o tempo de motor desligado foi de 850ms. As formas de onda de corrente elétrica foram captadas a cada 5°C de elevação de temperatura para contemplar a mudança da resistividade do cobre em função da temperatura.

As formas de onda de corrente elétrica registradas no primeiro ensaio foram recortadas e remontadas de acordo com os tempos usados no segundo ensaio pelo programa escrito em Matlab e o valor RMS foi calculado para cada temperatura. Semelhantemente, as formas de onda de corrente obtidas no segundo ensaio tiveram o valor RMS calculado para cada temperatura.

Para levantar os parâmetros da equação a diferenças (5), os dados de temperatura coletados no primeiro ensaio foram usados. Para se validar o modelo, as curvas de evolução de temperatura do segundo ensaio foram comparadas com as curvas de evolução de temperatura simulada usando os parâmetros obtidos no primeiro. Na simulação já foi incorporado o programa recortador de correntes.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nos ensaios foi usado um motor monofásico de indução do fabricante Weg, com potência de 1/3 cv e alimentação de 127V acoplado a uma máquina de lavar roupas da marca Brastemp modelo Tira Manchas carregada com 9Kg de



panos padrão para elevação de temperatura e 71L de água.

A evolução com a temperatura dos valores RMS da corrente calculados com a forma de onda recortada e os valores RMS da forma de onda real do segundo teste são mostrados na Fig. 3.

Como pode ser visto, o método de recortar correntes é eficiente para a estimação do valor RMS da corrente em função da temperatura.

Como o aumento da resistividade do cobre em função da temperatura que implica em diminuição da corrente é linear, é interessante fazer uma regressão para os dados da corrente em função da temperatura. De fato, ao se observar a Fig. 3, é possível supor uma relação linear entre corrente RMS e temperatura. Desta forma, tem-se a relação entre os tempos escolhidos pelo projetista do ciclo de lavagem e a corrente RMS completamente mapeada.

Deve-se notar no entanto que o tempo de motor desligado utilizado nos ensaios é grande o suficiente para que o agitador pare completamente entre uma partida e outra do motor. Nos ciclos de lavagem usados atualmente, o tempo de motor desligado não é suficiente para que isto aconteça. Desta forma, a corrente de partida tem um pico maior que o captado na forma de onda da Fig. 2 implicando em elevação de temperatura maior do que a prevista no modelo. Por um lado isto pode ser visto como uma falha do modelo em representar o caso real. Por outro lado, pode-se usar esta informação para descobrir qual é o menor tempo de motor desligado que faz com que o agitador pare completamente entre duas partidas da agitação.

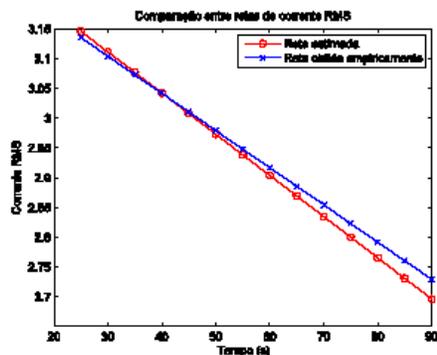


Fig. 3. Comparação entre a evolução do valor RMS da corrente em função da temperatura obtida experimentalmente e a estimada com o programa recortador de formas de onda

Para isto, basta encontrar o menor tempo de motor desligado em que o valor RMS da corrente real se iguala ao valor estimado pelo programa recortador de formas de onda. Ao se utilizar este menor tempo de motor desligado, se evita que a energia seja desperdiçada para frear o agitador.

O menor tempo de motor desligado determinado pode ser usado como padrão para os ciclos de lavagem, implicando que o modelo encontrado vale para as situações que serão enfrentadas daqui em diante.

Para se chegar a um modelo que relacione os tempos escolhidos para o ciclo de agitação e a corrente RMS mesmo no caso em que o tempo de motor desligado não é suficiente para a parada do agitador, é necessário seguir o procedimento baseado em leis físicas citado anteriormente.

Uma vez determinada a relação entre tempos de ciclo de agitação e a corrente RMS, foram levantados os parâmetros da equação a diferenças proposta para o sistema, e depois o sistema foi simulado. As curvas de evolução de temperatura são mostradas na Fig. 4

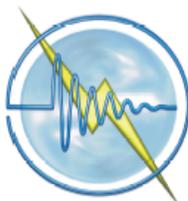
Da Fig. 4 nota-se que os dados estimados são próximos dos dados reais, a menos do período de resfriamento. A hipótese para esta diferença é que, durante o aquecimento, há movimentação do motor que implica em ventilação do sistema. Durante o resfriamento, no entanto, não há mais a ventilação, de forma que os parâmetros obtidos durante o aquecimento não são mais aplicáveis ao problema.

Para comprovar a hipótese que a diferença do comportamento térmico observada durante o resfriamento é devida apenas aos parâmetros, e não à estrutura do modelo, foi feito um novo levantamento de parâmetros em que foram divididos os períodos de aquecimento e resfriamento. Este novo levantamento foi feito sobre os dados do primeiro ensaio. Depois, o segundo ensaio foi simulado com o novo conjunto de parâmetros, obtendo-se o resultado mostrado na Fig. 5.

Nota-se da Fig. 5 que a qualidade do modelo melhorou. Na tabela 1 são mostrados os erros quadráticos médios obtidos com as duas abordagens, confirmando a melhora de qualidade observada

Tabela 1. Erros quadráticos médios das figuras

Figura	Erro quadrático médio
4	12.06
5	2.7486



V SEMINÁRIO NACIONAL DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL, ELÉTRICA E TELECOMUNICAÇÕES

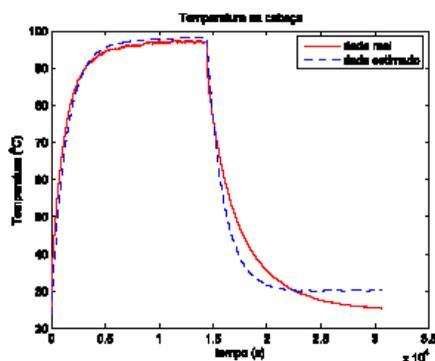


Fig 4. Curva de evolução temporal da temperatura para o sistema real em comparação com a curva estimada.

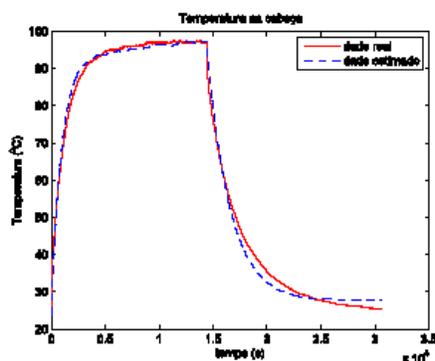


Fig 5. Curva de evolução temporal da temperatura para o sistema real em comparação com a curva estimada usando-se parâmetros diferentes para o aquecimento e o resfriamento.

CONSIDERAÇÕES GERAIS

Durante o desenvolvimento do trabalho, pôde-se perceber que o problema mais desafiador não era a modelagem do sistema térmico, mas sim o mapeamento da relação entre tempo de motor ligado e corrente RMS. O método proposto para a solução deste problema leva a bons resultados, mas é bastante limitado uma vez que apenas situações semelhantes à mostrada podem ser simuladas. Conforme discutido, haveria outras formas de se relacionar o tempo de motor ligado e corrente RMS. O desenvolvimento destas novas formulações do problema pode servir como motivação para estudos posteriores.

Também seria interessante estudar a relação entre o peso de roupas colocadas na máquina, nível de água selecionado pelo usuário, e as

formas de onda de corrente observadas. Com isto, pode-se prever o comportamento do aquecimento do motor da máquina em situações diferentes da experimentada neste trabalho.

Pode-se ainda fazer o estudo das formas de onda de corrente durante a centrifugação. Embora possa parecer semelhante ao que foi apresentado neste trabalho, durante a centrifugação ocorre a aceleração contínua do cesto da máquina de lavar roupas onde há uma carga de massa variável com o tempo, uma vez que as roupas perdem massa de água durante esta etapa. A variação da massa depende, dentre outras variáveis, da velocidade de centrifugação e do tipo de tecido das roupas, tornando o problema bastante interessante.

Com o conhecimento do comportamento da máquina durante a agitação e centrifugação, o ciclo de lavagem estaria completamente modelado, facilitando o projeto e até mesmo tomando as máquinas mais inteligentes caso o controle destas aplicações passe a incorporar técnicas de controle preditivo.

CONCLUSÃO

O modelo linear de primeira ordem proposto representa uma boa aproximação do fenômeno real de aquecimento do motor. Com isto, boas estimativas da temperatura do motor são obtidas desde que seja conhecido o valor RMS da corrente elétrica que passa por ele.

O método de obtenção da corrente RMS proposto também apresenta bons resultados, embora seja limitado em sua aplicação.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a empresa Whirlpool S.A. pela disponibilização dos materiais e do laboratório usados neste trabalho e pelo fomento a esta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- [1] IEC60034-1 (2004) Machines Électriques Tournantes – Partie 1: Caractéristiques de Fonctionnement. Onzième édition
- [2] L.A. Aguirre. (2004) Introdução à Identificação de Sistemas. 2ª Edição. Editora UFMG.
- [3] F. P. Incropera, D. P. Dewitt (1996) Fundamentals of Heat and Mass Transfer. John Wiley & Sons Inc.
- [4] P. C. Sen (1996) Principles of Electric Machines and Power Electronics. John Wiley & Sons
- [5] C. P. Bottura (1982) Análise Linear de Sistemas. Ed. Guanabara Dois
- [6] J. C. Geromel, A.G.B. Palhares (2004) Análise Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios. Ed. Edgard Blucher

Referências Bibliográficas

- [1] History of washing machines. em <http://inventors.about.com/od/wstartinventions/a/washingmachines.htm>, Agosto 2007.
- [2] Invention of the washing machine. em <http://www.ideafinder.com/history/inventions/story067.htm>, Agosto 2007.
- [3] Washing machine. em http://en.wikipedia.org/wiki/Washing_machine, Agosto 2007.
- [4] ABNT. *NBR 9377 - Máquinas de lavar roupas de uso doméstico - Requisitos de segurança*. São Paulo, 1986.
- [5] ABNT. *NBR 7094 - Máquinas Elétricas Girantes - Motores de Indução - Especificação*. Rio de Janeiro, 2003.
- [6] AGUIRRE, L. A. *Introdução à identificação de sistemas*, 2 ed. Editora UFMG, 2004.
- [7] BAR-SHALOM, Y., E LI, X.-R. *Estimation with applications to tracking and navigation algorithms and software for information extraction*. Artech House, 2001.
- [8] BARRETO, G. *Modelagem computacional distribuída e paralela de sistemas e de séries temporais multivariáveis no espaço de estado*. Tese de Doutorado, Unicamp, 2002.
- [9] BARRETO, G., E BOTTURA, C. P. *Veículos Elétricos*. Editora da Unicamp, 1989.
- [10] BOCCALETTI, D. From the epicycles of the greeks to kepler's ellipse: The breakdown of the circle paradigm. *ArXiv Physics e-prints* (Julho 2001).
- [11] BOLDRINI, J. L., COSTA, S. I. R., RIBEIRO, V. L. F. F., E WETZLER, H. G. *Álgebra Linear*, 2 ed. Ed. Harper & Row do Brasil Ltda., 1978.
- [12] BOTTURA, C. P. *Análise linear de sistemas*. Ed. Guanabara Dois, 1982.
- [13] BOYCE, W. E., E DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. LTC Editora, Rio de Janeiro, 2002.
- [14] BRITAIN, J. E. The tesla alternating-current power system. *Proceedings of IEEE* 72, 2 (Fevereiro 1984), 165–173.
- [15] BURIAN JR., Y., E LYRA, A. C. C. *Circuitos Elétricos*. Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2006.

- [16] CALLIOLI, C. A., DOMINGUES, H. H., E COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*. Ed. Atual, 1995.
- [17] DA SILVA, M. V. M. A dinâmica excludente do sistema elétrico paraense. Tese de Mestrado, USP, 2005.
- [18] DAWES, C. L. *Curso de eletrotécnica*, 1 ed., vol. 2. Editora Globo, Porto Alegre, 1957.
- [19] DURKHEIN, E. *As Formas Elementares da Vida Religiosa*. 1912.
- [20] FISHER, A. J. *U.S. Patent 966677 - Drive mechanism for washing machine*, August 1910.
- [21] FITZGERALD, A. E., KINGSLEY, C., E KUSKO, A. *Máquinas Elétricas*. McGrawHill do Brasil, 1978.
- [22] GEROMEL, J. C., E PALHARES, A. G. B. *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos*. Editora Edgard Blücher LTDA, São Paulo, 2004.
- [23] GIESBRECHT, M., E BARRETO, G. Modelagem computacional do aquecimento de um motor de indução monofásico aplicado a máquinas de lavar roupas durante a etapa de agitação. *V Seminário Nacional de Controle e Automação (V SNCA), Salvador, BA (Junho 2007)*.
- [24] GONÇALVES, H., BARBOSA, C., SOARES, O., E CARVALHO, A. S. Simulation of induction motors heating in steady state. *IASTED Conference on modelling and simulation (Fevereiro 2003)*.
- [25] GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*, 2 ed. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1987.
- [26] HALLIDAY, D., E RESNICK, R. *Física*, 1 ed. Ao Livro Técnico S.A., São Paulo, 1966.
- [27] IEC. *IEC 60034-1: Machines Électriques Tournantes - Partie 1: Caractéristiques de Fonctionnement*. IEC, 2004.
- [28] INCROPERA, F. P., E DEWITT, D. P. *Fundamentals of heat and mass transfer*. John Willey and Sons, 1996.
- [29] ISE INC. *Standart thermocouples*. em <http://instrumentation-central.com/>, Novembro 2007.
- [30] JUDS, M. A., LEE, K., SOLVESON, M. G., BERKOPEC, W. E., E BECKER, J. A. A coupled thermal and electrical time-domain soft starter system model. *IEEE Industry Applications Society Conference (2005)*, 2607–2614.
- [31] KATAYAMA, T. *Subspace Methods for System Identification: a Realization Approach*. Springer Verlag, Leipzig, 2005.
- [32] KREYSZIG, E. *Advanced Engineering Mathematics*. John Willey and Sons, USA, 1999.

- [33] LAISSAOUI, S., MÉKÏDECHE, M. R., SEDIRA, D., E LADJIMI, A. Dynamic modeling of induction motor taking into account thermal stresses. *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering* 26 (2007), 36–47.
- [34] LIPSCHUTZ, S. *Teoria y problemas de Algebra Lineal*. Libros McGraw-Hill, 1971.
- [35] MALINOWSKI, B. *Os Argonautas do Pacífico Ocidental*. 1922.
- [36] PISKUNOV, N. *Differential and Integral Calculus*. MIR Publishers, Moscow.
- [37] SARKAR, D., MUKHERJEE, P. K., E SEN, S. K. Temperature rise of an induction motor during plugging. *IEEE transactions on energy conversion* 7 (Março 1992), 116–124.
- [38] SEN, P. C. *Principles of Electric Machines and Power Electronics*. John Wiley and Sons, 1996.
- [39] SÖDESTRÖN, T., E STOICA, P. *System Identification*. Prentice Hall, 1989.
- [40] SOLVESON, M. G., MIRAFZAL, B., E DEMERDASH, N. A. O. Soft started induction motor modeling and heating issues for different starting profiles using a flux linkage abc-frame of reference. *IEEE Industry Applications Society Conference* 4 (Outubro 2004), 18–25.
- [41] STEWART, J. *Cálculo*, 4 ed., vol. 1. Pioneira Thomsom Learning, São Paulo, 2001.
- [42] STRANG, G. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, 1993.
- [43] STRANG, G. *Linear Algebra in a Nutshell*. em <http://www-math.mit.edu/gs/>, Novembro 2007.
- [44] TESLA, N. A new system of alternate current motors and transformers. *AIEE meeting* (Maio 1888).
- [45] VAL, J. B. R. Notas de aula da disciplina ia856-identificação e filtragem. 2006.
- [46] WHIRLPOOL. A invenção dos eletrodomésticos. Tech. rep., Whirlpool S.A., 2005.
- [47] YOUNG, P. *Recursive Estimation and Time Series Analysis*. Springer-Verlag, 1984.