

CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DE
CAMPO ELÉTRICO PELO MÉTODO NUMÉRICO
DE SIMULAÇÃO DE CARGAS EM
CONFIGURAÇÕES DE ELETRODOS INFINITOS

FRANCISCA APARECIDA DE CAMARGO PIRES

Orientador: IOSHIAKI DOI

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas, da Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de MESTRE EM CIÊNCIAS.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
OUTUBRO 1981

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Dedicamos este trabalho a todos
aqueles que participaram direta
ou indiretamente na implantação
do Laboratório de Alta Tensão
do DEE/FEC/UNICAMP.

AGRADECIMENTOS:

. Agradecemos à Financiadora de Estudos e Projetos - FINEP - pelo apoio dado à implantação e formação de recursos humanos do Laboratório de Alta Tensão do DEE - FEC - UNICAMP.

RESUMO

No presente trabalho foi estudado e calculado numericamente, pelo Método de Simulação de Cargas (MSC), o campo elétrico para a configuração cilindro infinito-plano de terra, bem como para a configuração metade inferior do cilindro infinito-plano de terra e "strip" infinito-plano de terra. Os resultados obtidos de campo elétrico são aproximadamente iguais para estas configurações se a distância entre os eletrodos for menor que um certo valor da ordem da dimensão do raio do eletrodo de Alta Tensão, apresentando diferenças entre si com valores crescentes na sequência: "strip" infinito, cilindro infinito e metade inferior do cilindro infinito, para distâncias maiores.

O número de cargas utilizado, assim como sua localização influem nos resultados obtidos pelo MSC, estando os melhores resultados compreendidos numa pequena faixa de f_a e N .

Foi observado também que o Método das Diferenças Finitas (MDF) é inadequado para a solução do campo elétrico das configurações enfocadas.

ABSTRACT

In this work it was studied and numerically calculated, by a Charge Simulation Method (CSM); the electric field for the infinite cylinder-ground plane configuration, as well as for the lower half of infinite cylinder-ground plane and infinite strip-ground plane. The results obtained for electric field are approximately equal for these configurations if the distance between the electrodes is smaller than a certain value of about the dimension of the high tension electrode radius, showing differences among them with increasing values in the sequence: infinite strip, infinite cylinder and lower half of infinite cylinder, for longer distances.

The utilized number of charges as well as their location have influence in the results of CSM, and the best results are in a small range of f_a and N .

It was also observed that the Finite Differences Method (FDM) is inadequate for the solution of the electric field of the focused configurations.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	001
CAPÍTULO 1 - MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DE POTENCIAIS E CAM POS ELETROSTÁTICOS	004
1.1 - INTRODUÇÃO	005
1.2 - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS (MDF)	006
1.2.1 - Princípio	006
1.2.2 - Solução	010
1.3 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)	012
1.3.1 - Princípio	012
1.3.2 - Solução	017
1.4 - MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE CARGAS (MSC)	019
1.4.1 - Princípio	019
1.4.2 - Solução	024
1.5 - COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS MDF, MEF E MSC	024
CAPÍTULO 2 - IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE SIMULAÇÃO de CAR GAS	027
2.1 - APLICAÇÃO DO MÉTODO PARA SISTEMAS DE ELETRO DOS INFINITOS	028
2.2 - FATOR DE LOCALIZAÇÃO	033
2.3 - FATOR DE UTILIZAÇÃO DE CAMPO	038
2.4 - SISTEMA DE ELETRODOS UTILIZADOS	040
2.5 - DIAGRAMA DE BLOCOS	042
CAPÍTULO 3 - RESULTADOS E DISCUSSÕES	043
3.1 - APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS	044
3.1.1 - Resultados Obtidos pelo MSC	053
3.1.1.1 - Cilindro Infinito	054

3.1.1.2 - Metade Inferior do Cilindro Infinito	059
3.1.1.3 - "Strip" Infinito	072
3.1.2 - Resultados Obtidos pelo MDF	076
3.1.3 - Resultados Comparativos entre MSC, MDF e Método Analítico	079
3.2 - DISCUSSÕES	060
CAPÍTULO 4 -CONCLUSÕES	088
APÊNDICE I	091
APÊNDICE II	098
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	104

INTRODUÇÃO

Cerca de 80% das falhas verificadas em equipamentos elétricos podem ser atribuídas, direta ou indiretamente, a deficiências nas partes isolantes. Deste modo, o isolamento merece uma grande atenção no projeto de equipamentos.

O estudo dos isolamentos e de sua aplicação em grande escala, começou somente durante a Segunda Guerra Mundial. Em períodos anteriores, isolar equipamentos elétricos se constituía numa arte conhecida por poucos privilegiados. Hoje, para a análise de projetos de isolação, bem como para o estudo dos fenômenos de descargas elétricas, além de outros problemas concernentes à Alta Tensão, é fundamental a avaliação de campos elétricos, sendo que na grande maioria dos casos se avalia campos eletrostáticos.

Para um equipamento elétrico, sob o ponto de vista de isolamento, o ideal seria a presença de um campo elétrico uniforme. Praticamente, no entanto, temos configurações de campos não uniformes, ou seja, temos pontos da isolação sujeitos a esforços elétricos mais intensos que outros. Identificar o ponto sujeito ao mais intenso esforço elétrico corresponde a localizar o ponto onde ocorre o campo elétrico máximo da configuração.

Num sistema isolante homogêneo, o ponto que apresenta o máximo valor de campo é o ponto mais crítico da configuração. Assegurando-se que a rigidez dielétrica do sistema isolante seja superior ao valor encontrado para o campo elétrico neste ponto, podemos assegurar o desempenho desta isolação desde que as condições ambientais, cujas variações possam afetar a estrutura do sistema isolante, sejam mantidos inalteradas.

Campos elétricos uniformes praticamente inexistem, porém podemos identificar equipamentos e sistemas de eletrodos com maior ou menor uniformidade de campo através do fator de utilização de campo, η , que traduz a relação entre o campo elétrico máximo e um campo uniforme hipotético que se estabeleceria na menor distância entre eletrodos da configuração

Deste modo o fator de utilização de campo, η , tem o valor mínimo unitário, e os equipamentos elétricos melhores dimen

sionados teriam para este fator de utilização valores próximos de 1,0.

O presente trabalho tem por objetivo estudar o fator de utilização de campo η , acima mencionado, de uma configuração simples constituída por um eletrodo infinito localizado acima do plano de terra, bem como das variações deste fator com pequenas alterações na configuração geométrica básica. Com isto pretende-se além da análise do fator de utilização de campo η , avaliar também a influência da geometria na configuração do campo eletrostático.

O método numérico escolhido para calcular os potenciais, os campos e o fator de utilização de campo η , foi o método de simulação de cargas (MSC) devido a sua simplicidade de aplicação em problemas deste tipo.

No Capítulo 1 são apresentados os métodos de avaliação de potenciais e campos elétricos, destacando os principais métodos numéricos utilizados em cálculos de campos elétricos, analisando as vantagens e desvantagens de cada método assim como das dificuldades na sua implementação, e fazendo uma comparação global com o MSC.

No Capítulo 2 é feita a implementação do método de Simulação de Cargas (MSC) apresentando-se os parâmetros mais influentes na sua aplicação como o fator de localização de cargas f_a , e a localização dos pontos de teste. São deduzidas ainda as expressões dos coeficientes de potencial de Maxwell e componentes de campo para cargas em linha infinita com densidade linear de carga, além do diagrama em blocos do cálculo de fator de utilização de campo, do campo elétrico e dos potenciais para a configuração básica cilindro infinito-plano de terra. São apresentadas também neste capítulo outras configurações estudadas derivadas do sistema básico: metade inferior do cilindro infinito e "strip".

No Capítulo 3 são apresentados os resultados obtidos para as configurações estudadas em forma de tabelas e gráficos. São apresentados os resultados obtidos pelo método de Simulação de Cargas (MSC), pelo método de Diferenças Finitas (MDF) e os determinados analiticamente pelas expressões (A.12) e (A.13). No mesmo capítulo é feita ainda uma comparação entre os dois métodos.

dos numéricos e entre o valor analítico de E_{\max} e η , para o caso específico de cilindro infinito-plano de terra.

No mesmo capítulo é feito ainda uma análise dos resultados apresentados onde pode-se constatar a dependência do fator de utilização do campo com a configuração geométrica do sistema de eletrodos e da sua dimensão, assim como da grande influência da quantidade de cargas e da localização dessas cargas no interior do eletrodo energizado.

CAPÍTULO 1

MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DE POTENCIAIS
E CAMPOS ELETROSTÁTICOS

1.1 - INTRODUÇÃO

Na análise de um campo eletrostático temos de solucionar a equação de Poisson não linear, sujeita às condições de Neumann ou Dirichlet,

$$\text{div}(\epsilon \text{ grad } \phi) = -\rho \quad (1.1)$$

onde: ϕ é o potencial elétrico
 ρ é a densidade de cargas
 ϵ é a permitividade do meio

Para meios homogêneos e lineares onde ϵ é constante, temos,

$$\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon \quad (1.2)$$

e, no caso particular em que $\rho=0$, temos a equação de Laplace,

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.3)$$

Para qualquer das situações expressas por (1.1), (1.2) ou (1.3), o campo elétrico pode ser determinado por

$$\vec{E} = -\text{grad}.\phi \quad (1.4)$$

A solução da equação diferencial (1.1) ou (1.3), é simples somente para sistemas que apresentam determinadas configurações geométricas como configurações lineares, esféricas, coaxiais, toroidais, etc^[1]. Alguns sistemas pouco mais complicados podem ser analisados a partir de outros mais simples, como por exemplo na determinação do campo de dois condutores cilíndricos paralelos que podem ser estudados a partir do campo elétrico produzido por um condutor.

Nas situações práticas de projeto e desenvolvimento de equipamentos elétricos, as configurações encontradas entre condutores, e condutores e partes aterradas, nem sempre podem ser reduzidos ou estudados a partir de configurações geométricas mais simples. Assim, na prática deparamos com sistemas em que uma solução analítica simples não é possível, seja devido a complexidade da geometria ou da presença de diversos meios. Nestes casos, procuram-se soluções numéricas, aproximadas, normalmente obtidas por computação devido a enorme quantidade de ope

rações aritméticas exigidas.

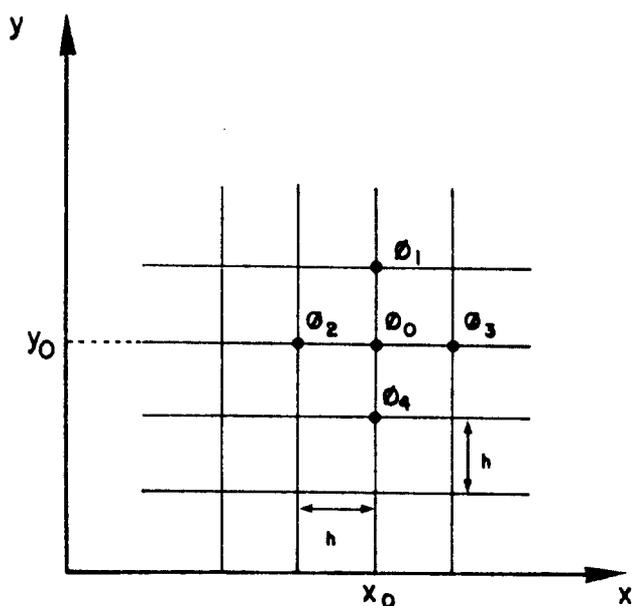
Na determinação de campo elétrico em Alta Tensão, os processos numéricos mais usuais são:

- a) Método das Diferenças Finitas (MDF),
- b) Método dos Elementos Finitos (MEF) e
- c) Método de Simulação de Cargas (MSC).

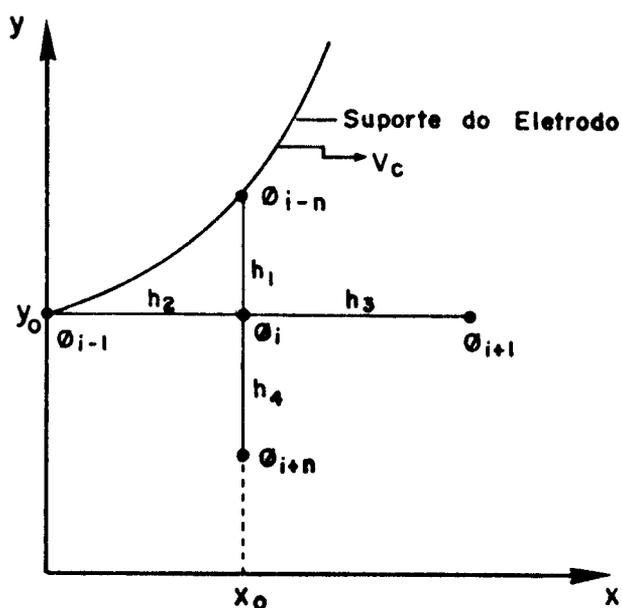
1.2 - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS (MDF) [2]

1.2.1 - Princípio

Dentre os processos numéricos o MDF foi um dos primeiros métodos a ser utilizado no cálculo de Campo Elétrico. Essencialmente, o processo das diferenças finitas substitui a equação diferencial de Poisson ou Laplace por um sistema de equações algébricas envolvendo potenciais de determinados pontos do domínio considerado. Estes pontos são os nós de uma malha que abrangem o domínio no qual se quer determinar o Campo Elétrico.



(a)



(b)

Fig. 1.1 - Divisão do domínio para aplicação do MDF

Em geral, a subdivisão é regular (Fig. 1.1(a)) de modo que a expressão na forma de diferenças finitas seja a mesma para todos os pontos. Entretanto, isto não impede de se ter um reticulado não uniforme (Fig. 1.1(b)), com subdivisões menores onde se espera uma variação maior do potencial.

Analisemos o processo das diferenças finitas para o caso de campo eletrostático bidimensional. Problemas tridimensionais ou com simetrias axiais também podem ser tratados de forma semelhante.

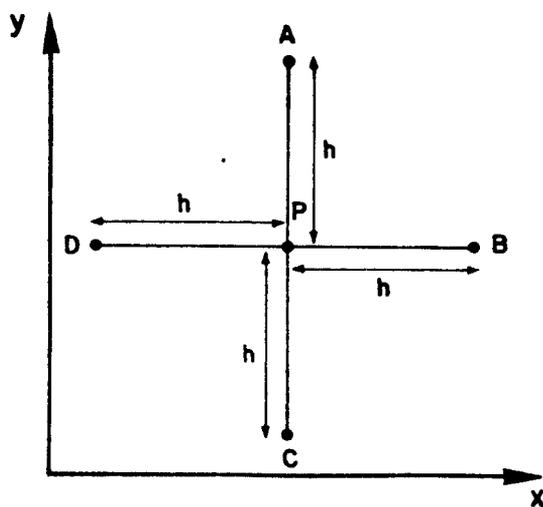


Fig. 1.2 - Ponto genérico da malha e seus vizinhos

Suponhamos uma parte de uma malha uniforme (Fig. 1.2) em torno do ponto P e seus pontos vizinhos A, B, C, D.

Fazendo a expansão em série de Taylor do potencial em torno do ponto P, temos;

$$\begin{aligned} \phi_B &= \phi_P + h \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_P + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_P + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_P + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \right)_P + \dots \\ \phi_D &= \phi_P - h \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_P + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_P - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_P + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \right)_P + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

Desprezando os termos de ordem superior ou igual a 4, e adicionando ambas as expressões de (1.5) temos,

$$\phi_B + \phi_D \cong 2\phi_P + h^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_P \quad (1.6)$$

Analogamente temos para os pontos A e C:

$$\phi_A = \phi_P + h \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_P + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)_P + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right)_P + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \right)_P + \dots \quad (1.7)$$

$$\phi_C = \phi_P - h \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_P + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)_P - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right)_P + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \right)_P + \dots$$

e

$$\phi_A + \phi_C = 2\phi_P + h^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)_P \quad (1.8)$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\phi_B + \phi_D - 2\phi_P}{h^2} \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\phi_A + \phi_C - 2\phi_P}{h^2}$$

Lembrando-se que para um problema bidimensional a equação de Poisson (1.2) pode ser expressa por:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\rho/\epsilon \quad (1.10)$$

Substituindo (1.9) em (1.10) resulta,

$$\phi_A + \phi_B + \phi_C + \phi_D = -h^2 \rho/\epsilon \quad (1.11)$$

Portanto, para uma malha regular, temos uma relação do tipo (1.11) para cada nó da malha. Aplicando-a a todos os nós do sistema obtemos o sistema de equações, cuja solução nos fornece os potenciais desejados. Evidentemente os valores obtidos são aproximados.

Na solução das equações, se a condição de contorno é a de Dirichlet, não há problema, pois basta impor aos pontos de contorno os potenciais conhecidos e resolver o sistema de equações referente aos pontos restantes.

Entretanto, se as condições de contorno são as de Neumann, onde são fixados os valores das derivadas do potencial em relação a normal ($\partial\phi/\partial n$) o problema é contornado por meio de nós adicionais fora do domínio considerado (Fig. 1.3).

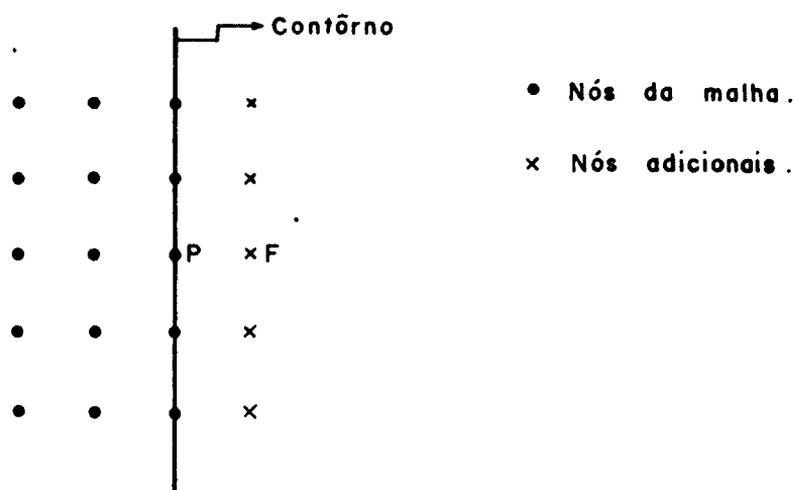


Fig. 1.3 - Nós adicionais para fixação da condição de contorno de Neumann

temos,
$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_P \approx \frac{\phi_F - \phi_P}{h} \quad (1.12)$$

ou seja,
$$\phi_F = \phi_P + h\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_P \quad (1.13)$$

Desta forma, se for dada como condição de contorno o valor de $(\partial\phi/\partial n)_P$, ϕ_F pode ser calculada pela expressão (1.13), e usamos esse valor nas equações de diferenças finitas. Em muitos casos temos $(\partial\phi/\partial n)_P=0$, no contorno, resultando simplesmente em:

$$\phi_F = \phi_P \quad (1.14)$$

Se o contorno for uma curva, o tratamento das condi

ções de contorno seguem as mesmas regras gerais, evidentemente a carretando maior dificuldade na obtenção das equações do sistema, devido ao surgimento de partes do reticulado não regulares (Fig. 1.1(b)).

Quando o problema envolve meios de permitividades diferentes, na obtenção do sistema de equações devemos impor na interface dos meios, condições de contorno para os componentes dos vetores E e D, ou seja,

$$E_{tg1} = E_{tg2} \quad (1.15)$$

$$D_{n2} - D_{n2} = \gamma \quad (1.16)$$

1.2.2 - Solução

O sistema de equações algébricas obtido com as n incógⁿitas que são os potenciais dos n nós (excluídos os nós com poⁿtenciais dados), usualmente é resolvido por processo iterativo ou relaxação. Partimos de certos valores adotados para o potencial, e vamos corrigindo-os sucessivamente nas iterações seguintes de forma a satisfazer às relações do tipo (1.11).

Suponhamos os valores aproximados para os potenciais ϕ_A , ϕ_B , ϕ_C e ϕ_D . A substituição desses valores na expressão (1.12) não a satisfaz, a qual resulta em:

$$\phi_A + \phi_B + \phi_C - 4\phi_P = -h^2 \rho/\epsilon + R \quad (1.17)$$

onde R é o resíduo.

O processo iterativo consiste portanto, em modificar sucessivamente os potenciais de forma a anular o resíduo R.

No cálculo por computador, este deve ser feito de ordem sistemática e ordenada, variando-se todos os nós da malha numa iteração seguindo a sequência de numeração dos nós.

Para o ponto genérico P temos na k-ésima iteração:

$$\phi_P^k = \frac{1}{4} (\phi_A^k + \phi_B^{k-1} + \phi_C^{k-1} + \phi_D^k + h^2 \rho/\epsilon) \quad (1.18)$$

Nesta relação os Índices superiores indicam a ordem de iteração.

Ao atingir o ponto P na iteração k, significa que o valor do potencial ϕ_P é ϕ_P^{k-1} , o qual deverá ser corrigido para ϕ_P^k nesta iteração. Desta forma, obtém-se um resíduo que é dado por:

$$R_P^k = \phi_P^k - \phi_P^{k-1} \quad (1.19)$$

Para se obter resíduos suficientemente pequenos, pode-se exigir um número de iterações muito grande, consequentemente um tempo elevado de processamento por computador. Para reduzir o número de iterações, então, emprega-se o processo de Liebman que utiliza a sobre-relaxação. Consiste este, numa dada iteração, corrigir o potencial não pelo resíduo obtido mas por um valor maior, ou seja:

$$\phi_P^k = \phi_P^{k-1} + \alpha R_P^k \quad (1.20)$$

onde α é o fator de sobre-relaxação.

Se $\alpha=1.0$, recaímos no processo de relaxação, e se $\alpha=2.0$ o processo sempre diverge.

O mínimo número de iterações necessário para reduzir o resíduo a valores satisfatórios é obtido com:

$$1.0 \leq \alpha < 2.0 \quad (1.21)$$

A dificuldade que aparece, é que não temos meios de saber a priori qual deve ser o valor de α para um determinado problema. Na prática, inicia-se o processo com o valor de α próximo a 2.0 de modo a obter oscilações nos resíduos, e depois reduz-se o valor de α até obter a convergência na solução.

O método das diferenças finitas está sujeito a dois tipos principais de erros na solução do problema causados pelo truncamento da série de Taylor e pelo processo iterativo.

O erro de truncamento depende da dimensão da malha, e para os problemas com condições de contorno de Dirichlet o limite superior do erro é proporcional a h^2 . Além disso, o erro au

menta com o aumento das derivadas de ϕ , o que obriga o uso de malhas mais refinadas em regiões onde o potencial varia mais acentuadamente. Desta forma, teremos expressões diferentes para as equações de diferenças finitas, dependendo da localização do ponto.

Como não sabemos qual deve ser o valor de h , para uma dada precisão, procede-se por tentativas. Obtém-se a solução para um certo valor de h , repetindo-se após, o processo para $h/2$, e assim sucessivamente, comparando-se as soluções obtidas. Quando a diferença entre as soluções sucessivas for desprezível, encerramos o cálculo.

O erro introduzido na solução das equações pelo processo iterativo, pode ser reduzido aumentando-se o número de iterações. Entretanto, tem o inconveniente de aumentar o tempo de utilização do computador, pois não podemos prever qual o número de iterações necessárias para uma dada precisão.

1.3 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF) [3,4,5]

1.3.1 - Princípio

Este método foi aplicado inicialmente em cálculos de estruturas e após o ano de 1970 em problemas de Engenharia Elétrica, sendo atualmente um dos processos mais utilizados em cálculos de Campos Elétricos e Magnéticos.

Basicamente, o seu princípio que consiste na subdivisão do domínio em várias partes ou elementos é semelhante ao método das Diferenças Finitas. Entretanto, a forma geométrica do elemento pode ser quadrilátero, triângulo, etc., dependendo das condições de contorno do problema. A subdivisão do domínio não precisa ser regular, podendo ser escolhidas diversas dimensões desejadas sem que isto dificulte a obtenção do sistema de equações.

Suponhamos que queremos calcular o campo elétrico de um problema bidimensional. Teremos que resolver a equação de Poisson dada por:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \rho/\epsilon \quad (1.22)$$

A solução desta equação diferencial com as condições de contorno apropriadas, de acordo com a teoria de Euler do Cálculo Variacional, é idêntico ao de calcular a função que minimiza a funcional χ , expressa como:

$$\chi = \iint_R \left\{ \frac{1}{2} \epsilon \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] - \rho \phi \right\} dx dy \quad (1.23)$$

A funcional χ tem o significado físico de energia elétrica (potencial) armazenada na região delimitada por R.

No caso de problemas bidimensionais, a forma mais simples e adequada de dividir o domínio R é em triângulos, o que permite uma melhor adaptação a contornos não poligonais, ou seja, curvos. Evidentemente, esta subdivisão não necessariamente precisa ser uniforme, podendo as regiões onde se espera variação maior da função potencial ϕ , terem mais elementos.

Seja o elemento como é ilustrado na Fig. 1.4, com os pontos definidos por $l(x_l, y_l)$, $m(x_m, y_m)$ e $n(x_n, y_n)$, e os potenciais associados a estes pontos por $\phi_l(x_l, y_l)$, $\phi_m(x_m, y_m)$ e $\phi_n(x_n, y_n)$.

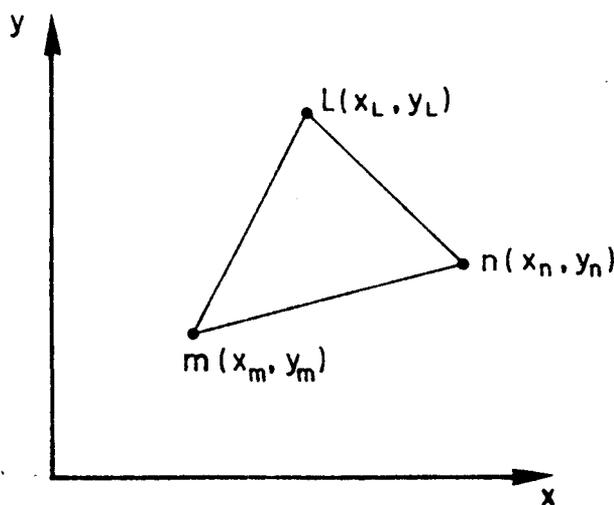


Fig. 1.4 - Coordenadas do elemento

Assim definidos, a função potencial $\phi_N(x,y)$ de cada elemento que aproxima $\phi(x,y)$, na forma de interpolação linear pode ser obtido por:

$$\phi_N^{(e)}(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (1.24)$$

onde: e indica elemento

α_1 , α_2 e α_3 são constantes para cada elemento a serem determinados

Aplicando (1.24) para todos os nós do triângulo temos:

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (1.25)$$

logo,

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix} \quad (1.26)$$

Substituindo (1.26) em (1.24) resulta,

$$\phi_N^{(e)}(x,y) = \{1 \ x \ y\} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix} \quad (1.27)$$

Podendo ser escrito ainda na forma,

$$\phi_N^{(e)}(x,y) = \frac{1}{2\Delta} \{1 \ x \ y\} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix} \quad (1.28)$$

onde:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix} = \text{área do triângulo}$$

$$B_k, C_k, D_k \quad (k=1,2,3)$$

$$B_k = x_1 y_m - x_m y_1$$

$$C_k = y_1 - y_m$$

$$D_k = x_m - x_1$$

com k, l, m índices giratórios (se $k=2, l=3$ e $m=1$).

Assim, conhecendo-se os potenciais dos nós do elemento ϕ_1, ϕ_m e ϕ_n de (1.28) pode-se determinar o potencial $\phi_N(x,y)$ do ponto desejado. Os potenciais dos nós ϕ_i são calculados a partir da condição de minimização da energia potencial, ou seja,

$$\frac{\partial \chi}{\partial \phi_i} = 0 \quad (1.29)$$

onde: $i=1,2,3,\dots,n_u$

n_u = número de nós de potencial desenvolvido.

Como

$$\chi = \sum_{n_e} \chi^{(n_e)}, \quad (1.30)$$

teremos para (1.29),

$$\frac{\partial \chi}{\partial \phi_i} = \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial \phi_i} + \dots + \frac{\partial \chi^{(n_e)}}{\partial \phi_i} = \sum_{n_e} \frac{\partial \chi^{(n_e)}}{\partial \phi_i} = 0 \quad (1.31)$$

onde n_e = número de elementos.

Da expressão (1.31) fica evidente que muitos termos

de $\partial\chi/\partial\phi_i$ são nulos por não ser a funcional χ função de ϕ_i . χ é função de ϕ_i somente no elemento que contém o ponto i . Denotando por R_i o domínio que contém esses elementos, a expressão (1.23) resulta em:

$$\frac{\partial\chi}{\partial\phi_i} = \iint_{R_i} \{ \epsilon [\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial\phi_i} (\frac{\partial\phi}{\partial x}) + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial\phi_i} (\frac{\partial\phi}{\partial y})] - \rho \frac{\partial\phi}{\partial\phi_i} \} dx dy \quad (1.32)$$

Substituindo (1.28) em (1.32),

$$\frac{\partial\chi}{\partial\phi_i} = \sum_{R_i} \iint_{R_e} \left[\frac{\epsilon}{(2\Delta)^2} (C_i \{C_{1r} C_{2r} C_{3r}\} + D_i \{D_{1r} D_{2r} D_{3r}\}) \begin{Bmatrix} \phi_{1r} \\ \phi_{2r} \\ \phi_{3r} \end{Bmatrix} - \frac{\rho}{2\Delta} \{1 \ x \ y\} \begin{Bmatrix} B_i \\ C_i \\ D_i \end{Bmatrix} \right] dx dn \quad (1.33)$$

onde: R_e , domínio dos elementos e
 r , significa relativo ao elemento.

Supondo que ϵ e ρ são constantes no elemento, integrando (1.33) resulta,

$$\frac{\partial\chi}{\partial\phi_i} = \sum_{R_i} \{ S_{i1r} S_{i2r} S_{i3r} \} \begin{Bmatrix} \phi_{i1r} \\ \phi_{i2r} \\ \phi_{i3r} \end{Bmatrix} - \sum_{R_i} K \quad (1.34)$$

onde:

$$\begin{aligned} S_{i1r} &= \frac{\epsilon}{4\Delta} (C_i C_{1r} + D_i D_{1r}) \\ S_{i2r} &= \frac{\epsilon}{4\Delta} (C_i C_{2r} + D_i D_{2r}) \\ S_{i3r} &= \frac{\epsilon}{4\Delta} (C_i C_{3r} + D_i D_{3r}) \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$K = \frac{\Delta\rho}{3}$$

Os índices, por exemplo, ϕ_{i2r} significa potencial do elemento que contém i , do nó de número 2.

A expressão (1.34) pode ser estabelecida para todos os pontos, porém para os pontos onde o potencial é conhecido não há a necessidade de se fazer o cálculo. Portanto, calculando-se (1.29) e (1.34) para os pontos de potenciais desconhecidos e rearranjando na forma de sistema de equações lineares resulta em,

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1,n_u} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{i,j} & & \\ \vdots & & \vdots \\ H_{n_u,1} & \dots & H_{n_u,n_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_i \\ \vdots \\ \phi_{n_u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ \vdots \\ G_i \\ \vdots \\ G_{n_u} \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

Resolvendo-se o sistema de equações (1.36) determina-se os potenciais ϕ_i ; $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n_u}$, e os potenciais ϕ dos elementos pode ser calculado com o auxílio de (1.27) ou (1.28).

Como ϕ_i influencia somente as equações dos elementos adjacentes, a matriz H de (1.36) resulta numa matriz esparsa.

1.3.2 - Solução

Existe uma relação entre a solução $\phi_N(x,y)$ obtida com as dimensões dos elementos finitos escolhidos e o grau dos polinômios $\phi_i(x,y)$ utilizados. Os polinômios de graus mais elevados permitem soluções mais próximas das exatas, uma vez que permitem uma melhor adaptação da função $\phi_N(x,y)$ num dado problema. Quanto maior o grau do polinômio mais rapidamente a solução aproximada converge para o valor exato, conforme reduzimos a dimensão dos elementos.

Numa divisão em triângulos, o erro resultante na solução aproximada decresce segundo h^{m+1} , onde m é o grau do polinô

mio e h a máxima dimensão dos lados dos triângulos^[5]. Isto significa que podemos reduzir o número de elementos, e portanto o número de nós, utilizando polinômios de grau mais elevado e obter uma solução com o mesmo erro.

Entretanto, conforme o grau do polinômio aumenta, aumenta também a complexidade na programação. Deste modo, a decisão de utilizar muitos elementos com programação simples e maior tempo de computação ou de poucos elementos com programação mais complexa e menor tempo de computação deve ser feita caso por caso.

Um polinômio de grau maior com mesmo número de elementos resulta em erro menor. Mas a diferença obtida com diferentes graus é insignificante conforme $h \rightarrow 0$, isto é, conforme o número de elementos aumenta.

É importante uma distribuição criteriosa dos elementos, principalmente nas regiões de maior variação da função procurada, podendo ser mais efetiva em termos de redução do erro do que um simples aumento indiscriminado de elementos.

Outro fator que afeta a precisão da solução é a "relação de aspecto" dos elementos, que traduz a relação entre a maior e a menor dimensão dos elementos a serem adotados^[4]. Os menores erros são obtidos para elementos com "relação de aspecto" mais próximo de 1. Deste modo deve-se preferir os triângulos equiláteros e os quadrados.

Quanto a precisão da solução obtida é difícil a sua avaliação, a menos que se conheça a solução exata. As principais fontes de erros são:

- a) representação da função procurada ϕ pelas funções de interpolação ϕ_i .
- b) as integrais efetuadas nas funcionais que geralmente são obtidas numericamente devido a sua complexidade.
- c) nos casos não homogêneos, devido a representação aproximada de ϵ .
- d) solução dos sistemas de equações.

Na representação da função pela interpolação linear, o

erro varia com a dimensão do elemento. Por exemplo, no caso de triângulo com h^2 . Na integração das funcionais, os erros resultantes dependem do particular processo numérico empregado. Em relação a ϵ , do valor aproximado adotado por elemento em relação ao valor experimental. Quanto a solução do sistema de equações, devido a quantidade de operações necessárias, os erros advêm da perda de algarismos significativos.

Em termos práticos, a melhor forma de avaliar a precisão da solução é basearmos no erro resultante da solução de um problema semelhante do qual se conhece a solução exata. De qualquer forma, uma maneira eficaz é acompanhar a convergência da solução com um determinado número de elementos e posterior refinamento dos mesmos.

1.4 - MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE CARGAS (MSC) [6,7]

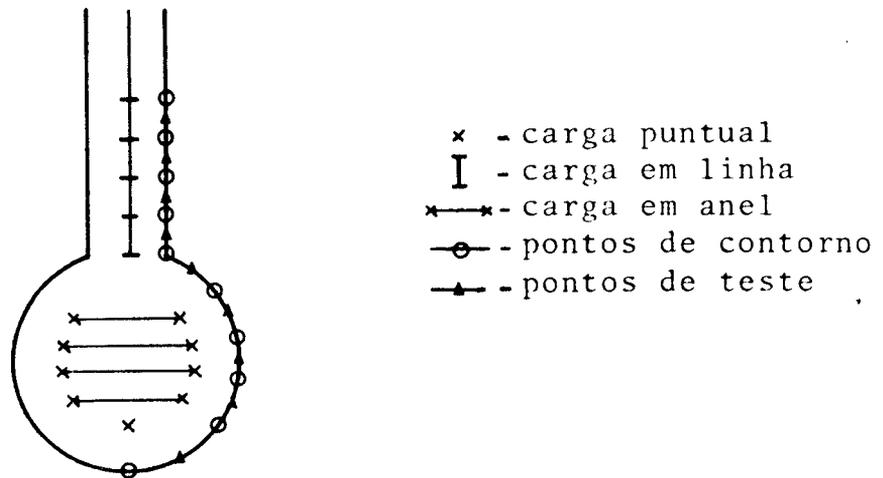
1.4.1 - Princípio

Este método, também chamado de Método de Cargas Substitutivas, consiste em determinar o campo elétrico, substituindo o campo gerado pelas cargas superficiais do eletrodo pelo campo produzido por um número finito de cargas imaginárias ou fictícias distribuídas convenientemente no interior do eletrodo. Genericamente, a distribuição dessas cargas imaginárias é feita fora da região ou domínio em que se quer determinar o campo. Se as equipotenciais resultantes dessas cargas coincidirem com as equipotenciais produzidas pelas cargas superficiais do eletrodo, a sua solução é assegurada de acordo com o princípio da unicidade das teorias da Eletrostática [8].

As cargas fictícias podem ser de várias formas conforme a forma geométrica do sistema a ser calculado, sendo para os problemas com simetria axial [7], bastante eficaz o uso de cargas do tipo:

- a) carga puntual
- b) carga em linha
- c) carga em anel

Para ilustração do método tomemos como exemplo o eletrodo da Fig. 1.5.



∅ = 0

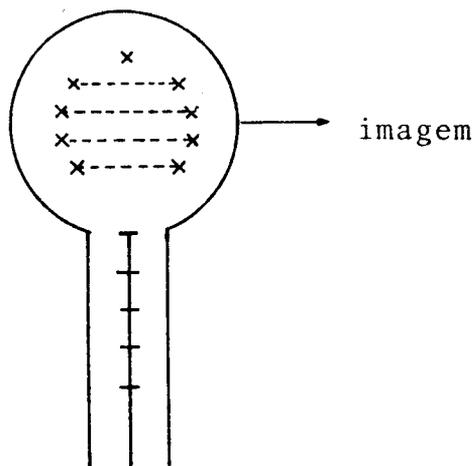


Fig. 1.5 - Ilustração do método MSC

Denotando por Q_j o valor da carga devida a carga puntual, carga em linha e carga em anel, essa carga no ponto i fica sujeita a um potencial $P_{ij}Q_j$. O potencial ϕ_i no ponto i é devido a resultante da superposição das N cargas,

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N P_{i,j} Q_j \quad (1.37)$$

onde, Q_j é o valor da carga j

$P_{i,j}$ é o coeficiente de potencial associado

Para determinar a carga Q_j , escolhe-se N pontos na superfície do eletrodo, denominados pontos de contorno, e impõe-se que o potencial produzido por essas cargas, inclusive os da sua imagem, seja igual à tensão ou potencial do condutor V_C , ou seja,

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N P_{i,j} Q_j = V_C \quad (1.38)$$

A aplicação da equação (1.38) para N pontos de contorno leva a um sistema de N equações lineares para N cargas,

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N1} & P_{N2} & \cdots & P_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

ou,

$$[P] \vec{Q} = \vec{V}_C \quad (1.40)$$

Como os potenciais V_1, V_2, \dots, V_N são dados do problema, e os coeficientes de potenciais associados podem ser calculados uma vez definidos a localização dos pontos de contorno e das cargas fictícias, as cargas Q_1, \dots, Q_N podem ser determinadas a partir do sistema de equações dado por (1.39).

Calculadas as cargas Q_j , escolhem-se outros N pontos na superfície do eletrodo, os pontos de teste, normalmente localizados a meia distância entre dois pontos de contorno, e calculamos nesses pontos o potencial devido às cargas Q_j .

$$\phi_{ti} = \sum_{j=1}^N P'_{i,j} Q_j \quad (1.41)$$

onde: Q_j , valor calculado da carga j

$P'_{i,j}$, coeficiente de potencial associado

ϕ_{ti} , potencial no ponto de teste i , devido às cargas Q_j .

A diferença entre os potenciais calculados por (1.41) e o potencial de contorno dado é a primeira forma de medir a precisão da solução obtida.

$$\sum_{i=1}^N \delta\phi_i^2 = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N P_{i,j} Q_j - V_c \right)^2 = \text{mínimo} \quad (1.42)$$

Evidentemente, quanto menor for o erro (1.42), melhor será a solução do potencial obtido. Deste modo, uma vez aceito o potencial como suficientemente preciso, utilizando-se do princípio básico da teoria de campos que é a superposição, pode se determinar direta e analiticamente o campo elétrico em qualquer ponto desejado. Por exemplo, se o campo a ser determinado apresenta uma simetria rotacional, temos,

$$E_r = \sum_{j=1}^N F_{i,j} Q_j \quad (1.43)$$

e

$$E_z = \sum_{j=1}^N G_{i,j} Q_j$$

onde: $F_{i,j}$ e $G_{i,j}$ são constantes obtidas através dos coeficientes de potencial associados.

Neste método os potenciais devidos às cargas fictícias são soluções particulares das equações de Laplace e de Poisson, uma vez que satisfaz as condições de Dirichlet e de Neumann. Portanto, este fato assegura também que a solução obtida por este método é único dentro do domínio considerado.

No caso da solução da equação de Poisson, ou seja, quando temos uma densidade de carga conhecida, o sistema de equações que é obtido a partir da equação (1.38) é tomado da seguinte forma:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N P_{i,j} Q_j + \sum_{k=1}^{N_s} P_{s_{i,k}} Q_{s_k} = V_c \quad (1.44)$$

onde: $P_{S_{i,k}}$, coeficiente de potencial associado à carga espacial

Q_{S_k} , carga espacial

N_S , número de cargas espaciais.

logo,

$$[P] \vec{Q} + [P_S] \vec{Q}_S = \vec{V}_C \quad (1.45)$$

ou seja,

$$[P] \vec{Q} = \vec{V}_C - [P_S] \vec{Q}_S \quad (1.46)$$

Assim, quando a densidade de cargas é conhecida, o potencial pode ser calculado sem que a matriz dos coeficientes de potencial $[P]$ seja ampliada. Quando a densidade de carga não é conhecida como no caso de campos associados a descargas elétricas, as cargas espaciais devem ser determinadas a partir de condições físicas. Deste modo, como requer para a sua solução outras condições como gradiente do potencial no canal de descarga, além das já mencionadas, a matriz $[P]$ é ampliada.

Nos casos de problemas com simetria é muito frequente o aparecimento da condição de contorno de Neumann. Neste caso, o número de cargas fictícias de ambos os lados do eixo de simetria devem ser iguais, de modo que a condição $\partial\phi/\partial n=0$ seja satisfeita. Para isto, deve se certificar de que os valores das cargas em ambos os lados estão equalizados.

Outra situação de interesse prático é quando temos meios dielétricos de permitividades diferentes. Neste caso, devem ser impostas as seguintes condições na superfície de separação [9]:

$$\begin{aligned} \text{a) } \phi_A &= \phi_B \\ \text{b) } E_{tA} &= E_{tB} \\ \text{c) } \epsilon_A E_{nA} &= \epsilon_B E_{nB} \end{aligned} \quad (1.47)$$

onde:

A e B indicam meios dielétricos A e B
 E_t componente tangencial de campo

E_n componente normal do campo

ϵ_A e ϵ_B , permitividades dos meios A e B

1.4.2 - Solução

Uma das dificuldades deste método é avaliar corretamente a precisão da solução obtida, uma vez que a contribuição para os erros podem ser devidas à escolha da carga fictícia, da sua quantidade, assim como da sua localização. Na escolha da forma das cargas fictícias a serem utilizadas, estes dependem essencialmente da forma geométrica do sistema a ser estudado, se é bi ou tridimensional, apresenta simetrias ou não. Em relação à quantidade de carga desejável, a sua localização e a escolha das posições dos pontos de contorno na superfície do eletrodo, estes dependem muito da intuição e da prática deste método.

Outra fonte de erros deste método está na inversão da matriz [P] e na solução das integrais elípticas quando envolvem cargas em anéis, devido a perda nos algarismos significativos.

Apesar destes fatos, com o cuidado necessário consegue-se obter soluções de boa precisão sem exigir muito em termos de tempo de computação. Além do mais, o campo elétrico poderá ser determinado diretamente como na expressão (1.43) sem a necessidade de solucionar numericamente a partir da função de potencial.

1.5 - COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS MDF, MEF E MSC

Entre MDF e MEF existem alguns aspectos semelhantes quanto a:

- a) Em ambos os métodos dá-se a discretização sobre todo o domínio onde se deseja conhecer o potencial. No MDF se faz com o estabelecimento da malha e no MEF por elementos finitos.
- b) As incógnitas procuradas são os potenciais dos nós da malha no caso do MDF ou dos vértices dos elementos

tos finitos no caso do MEF.

- c) O campo elétrico é obtido por diferenciação do potencial.
- d) O número de equações a serem resolvidas varia de 400-10.000 em ambos os métodos, podendo chegar à ordem 10^6 para problemas com meios não homogêneos e não lineares ou que apresentam simetria rotacional. Ambos utilizam para a solução das equações o método direto ou método de super-relaxação.

Em contrapartida, temos para o MSC nestos mesmos aspectos:

- a) A discretização é feita nos contornos e nas cargas. No contorno do eletrodo, caso o problema envolva somente um meio dielétrico, e também na superfície de separação dos dielétricos quando mais de um meio é envolvido. A forma da carga fictícia, sua localização e a quantidade é escolhida de acordo com a forma geométrica do sistema a ser estudado.
- b) As incógnitas são os valores das cargas fictícias distribuídas.
- c) O campo elétrico é calculado diretamente a partir dos valores das cargas.
- d) O número de equações a serem resolvidas não ultrapassa 100 nos casos gerais, podendo triplicar para casos de meios dielétricos compostos.

Além disso, o MDF apresenta tratamento difícil para meios compostos e para contornos complicados. Para problemas cujo domínio se estende ao infinito, como é o caso de Campo Elétrico devido às descargas elétricas, mesmo que tome malhas bastante esparsas, há a necessidade de se interromper em algum ponto do domínio e impor as condições de $\phi=0$ ou $\partial\phi/\partial n=0$. Neste aspecto, para o MSC, como o efeito das cargas fictícias se anula no infinito não há a necessidade de considerar as condições de contorno do infinito. O MSC permite calcular ainda o campo elétrico somente na parte do domínio desejado sem necessidade de cal

cular o potencial de todo o domínio.

O MEF se adapta facilmente a contornos complicados e com meios compostos, porém a elaboração do programa e dos dados de entrada são complexos para qualquer situação. Assim, o MEF não é vantajoso para problemas simples.

Deste modo, é vantajoso utilizar o MSC em vez de utilizar o MDF ou MEF especialmente para solucionar problemas que envolvam meios homogêneos e que apresentam simetrias. uti

CAPÍTULO 2

IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE
SIMULAÇÃO DE CARGAS

2.1 - APLICAÇÃO DO MÉTODO PARA SISTEMAS DE ELETRODOS INFINITOS

Em muitos problemas de cálculo de campo em Engenharia Elétrica é de grande interesse o sistema condutor-plano infinito com potencial de terra, por ser uma excelente aproximação de casos práticos como para cálculos de linhas de transmissão. O plano é tomado pela introdução das cargas imagem.

A simulação da carga na superfície de um condutor por linhas de carga de comprimento infinito é um princípio conhecido para o cálculo de campo eletrostático de cilindros circulares^[7]. Muitos métodos têm sido desenvolvidos baseados neste princípio, particularmente para os cálculos de condutores em feixe^[10,11].

No modelo analítico frequentemente utilizado para configurações de multicondutores, cada condutor é representado por uma única carga em linha localizada no seu centro. Este modelo é relativamente preciso para configurações onde as distâncias entre os condutores individuais ou entre os condutores e o plano de terra, são bem maiores que o raio do condutor^[12].

De um modo geral, eletrodos infinitos podem ser tratados pelo MSC através da escolha conveniente de cargas em linha infinita. Tais eletrodos apresentam a secção reta constante, não existindo, portanto, variação da função potencial ao longo do comprimento do eletrodo. Desta forma, o problema pode ser tratado como sendo um problema bi-dimensional.

Assim, para um eletrodo infinito genérico sujeito a um potencial V_c e localizado acima do plano de terra, potenciais e campos elétricos podem ser calculados no meio dielétrico entre o eletrodo e o plano de terra utilizando-se o MSC. Na aplicação do método, as N cargas fictícias em linha são distribuídas no interior do eletrodo, escolhendo-se N pontos de contorno na sua superfície. Para assegurar que o potencial do plano de terra seja nulo, introduz-se pela utilização do método das imagens, mais N cargas imagens.

Como o método está baseado no princípio da superposição, os coeficientes de potencial e as expressões para o campo elétrico podem ser estabelecidos, tomando-se apenas uma carga

em linha infinita.

Seja uma carga em linha infinita, j , com densidade λ_j near de carga, λ_j (C/m), e sua imagem, de modo que as respectivas coordenadas sejam (x_j, y_j) e $(x_j, -y_j)$ para todo z (Fig. 2.1).

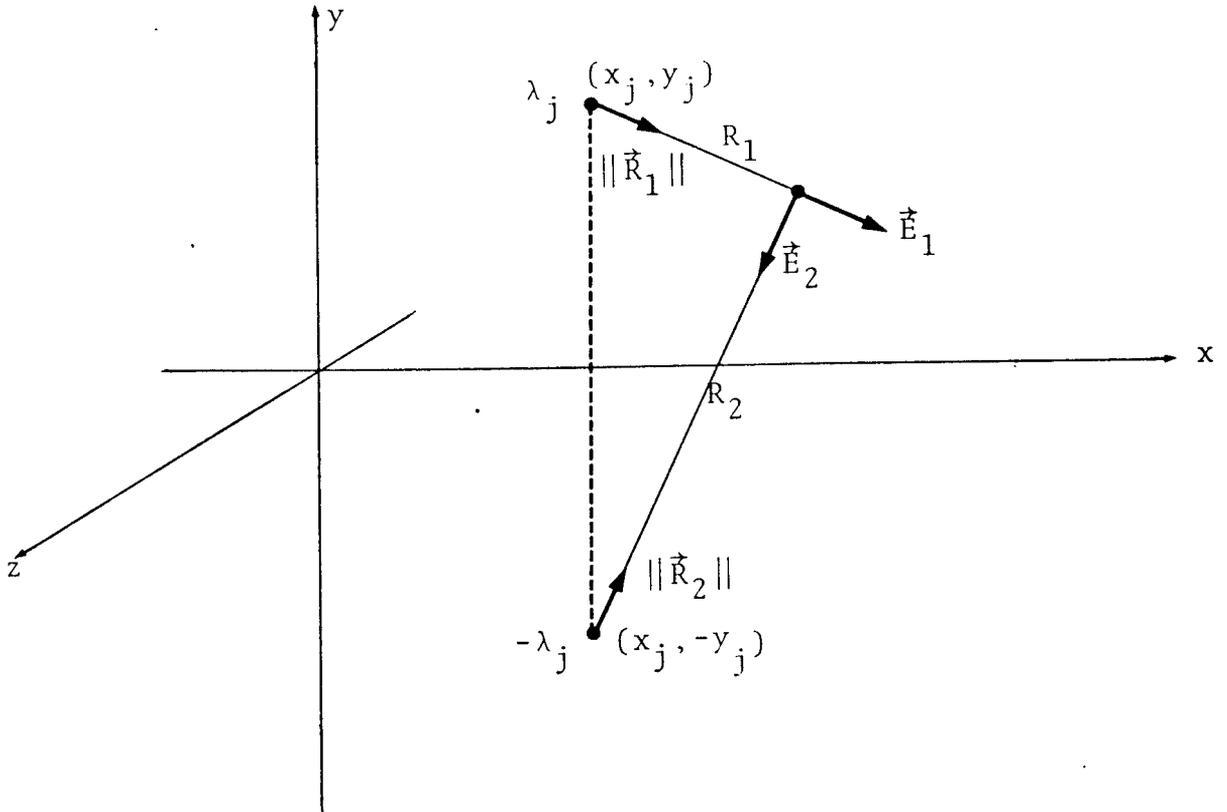


Fig. 2.1 - Carga em linha infinita e sua imagem

Seja um ponto, i , do plano $Z=0$, de coordenadas (x_i, y_i) situado acima do plano de terra. Neste ponto, devido à carga de densidade linear λ_j , temos o campo elétrico \vec{E} , dado por:

$$\vec{E}_1 = \frac{\lambda_j}{2\pi\epsilon} \frac{1}{R_1} \|\vec{R}_1\| \quad (2.1)$$

onde:

$$R_1 = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

Analogamente, no mesmo ponto, devido à carga imagem de densidade linear $-\lambda_j$, temos:

$$\vec{E}_2 = \frac{-\lambda_j}{2\pi\epsilon} \frac{1}{R_2} \|\vec{R}_2\| \quad (2.2)$$

onde:

$$R_2 = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i + y_j)^2}$$

Como $\vec{E} = -\text{grad}\phi$, o potencial no ponto i devido à carga j e sua imagem resulta em:

$$V_i^j = \frac{\lambda_j}{2\pi\epsilon} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \quad (2.3)$$

O coeficiente de potencial P_{ij} é dado por:

$$P_{ij} = \frac{V_i^j}{\lambda_j} \quad (2.4)$$

Portanto, o coeficiente de potencial associado ao ponto i devido à carga em linha infinita j e sua imagem resulta em:

$$P_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \left(\frac{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i + y_j)^2}}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} \right) \quad (2.5)$$

Para N cargas em linha infinita e suas respectivas imagens temos:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N V_i^j \quad (2.6)$$

logo,

$$\sum_{j=1}^N P_{ij} \lambda_j = \phi_i \quad (2.7)$$

Aplicando-se a expressão (2.7) para N pontos de contorno, temos o sistema:

$$[P]\vec{\lambda} = \vec{\phi} \quad (2.8)$$

onde:

[P] matriz dos coeficientes de potencial P_{ij} , $i=1,2, \dots, N$ e $j=1,2, \dots, N$.

$\vec{\lambda}$ vetor dos valores das densidades lineares de carga λ_j , $j=1, \dots, N$.

$\vec{\phi}$ vetor potencial.

Como no contorno $\phi_i = V_c$, temos para (2.7)

$$\sum_{i=1}^N P_{ij} \lambda_j = V_c \quad (2.9)$$

Assim, de (2.8), conhecendo-se os valores dos coeficientes de potenciais pode se determinar o valor das cargas, a partir de:

$$\vec{\lambda} = [P]^{-1} \vec{\phi} \quad (2.10)$$

Tendo-se determinado λ_j , o potencial do ponto de teste i , devido a essa densidade linear de carga pode ser calculado por:

$$\phi_{T_i} = \sum_{j=1}^N P'_{ij} \lambda_j \quad (2.11)$$

onde: P'_{ij} é o coeficiente de potencial do ponto de teste i devido à carga em linha j .

Para N pontos de teste, aplicando (2.11), temos,

$$\vec{\phi}_{T_i} = [P'] \vec{\lambda} \quad (2.12)$$

O campo elétrico num dado ponto (x,y) devido à carga em linha infinita j e sua imagem (Fig. 2.2) pode ser determinado por:

$$E_{xj} = |\vec{E}_1| \frac{x - x_j}{R_1} - |\vec{E}_2| \frac{(x - x_j)}{R_2}$$

$$E_{yj} = |\vec{E}_1| \frac{y - y_j}{R_1} - |\vec{E}_2| \frac{y + y_j}{R_2}$$

onde:

$$R_1 = \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{(x-x_j)^2 + (y+y_j)^2}$$

ou seja,

$$E_{x_j} = \frac{\lambda_j}{2\pi\epsilon} \left(\frac{x-x_j}{R_1^2} - \frac{x-x_j}{R_2^2} \right)$$

(2.13)

$$E_{y_j} = \frac{\lambda_j}{2\pi\epsilon} \left(\frac{y-y_j}{R_1^2} - \frac{y+y_j}{R_2^2} \right)$$

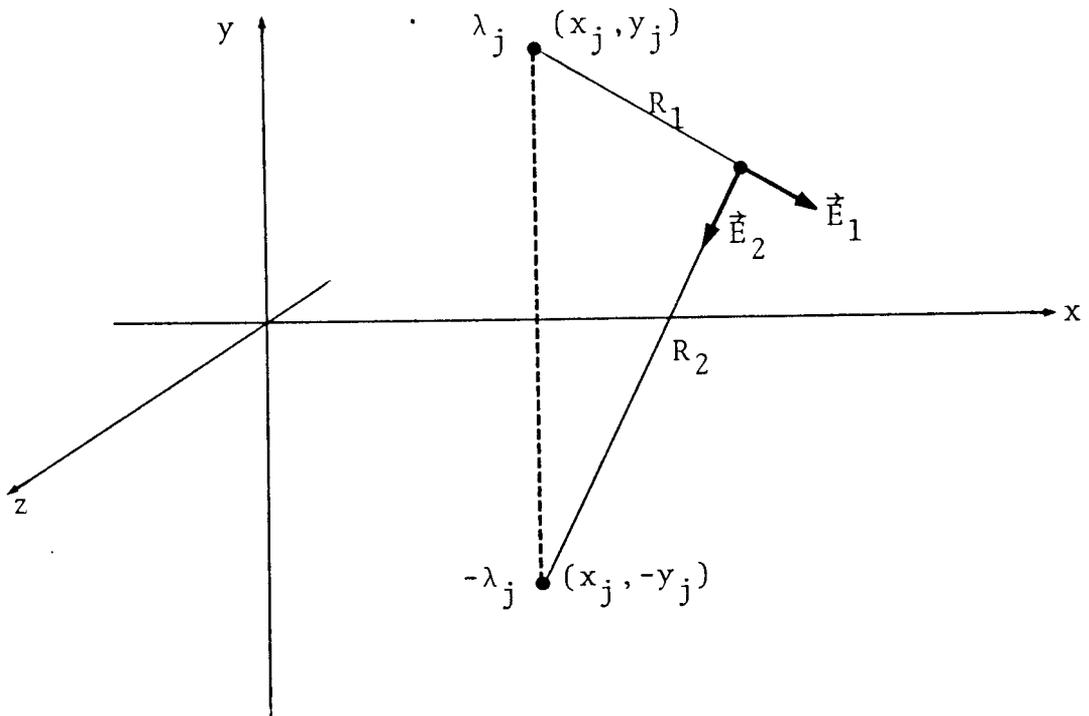


Fig. 2.2 - Campo no ponto (x, y) devido à carga λ_j e sua imagem

Pelo princípio da superposição temos para para N cargas:

$$\vec{E} = \sum_{j=1}^N \vec{E}_j \quad (2.14)$$

ou seja,

$$E_x = \sum_{j=1}^N E_{xj} = \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j}{2\pi\epsilon} \left[\frac{x - x_j}{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2} + \frac{x - x_j}{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2} \right] \quad (2.15)$$

$$E_y = \sum_{j=1}^N E_{yj} = \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j}{2\pi\epsilon} \left[\frac{y - y_j}{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2} - \frac{y + y_j}{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2} \right]$$

2.2 - FATOR DE LOCALIZAÇÃO

Na aplicação do MSC os resultados obtidos dependem da quantidade e da localização das cargas, das localizações dos pontos de contorno e dos pontos de teste na superfície do eletrodo. Uma escolha adequada desses dados reflete na precisão dos resultados obtidos, assim como no tempo de computação necessário à sua solução.

Para elucidar este problema, tomemos como exemplo o sistema de eletrodos do tipo da Fig. 2.3, sujeito a um certo potencial V_c .

Pela teoria do MSC as cargas fictícias podem ser distribuídas em qualquer parte interna do eletrodo. Na realidade, existe uma distribuição e posição adequada que leva a resultados mais precisos. A distribuição deve basear-se na forma geométrica do eletrodo e nos princípios físicos, por exemplo observar regiões que ocorrem concentrações de linhas de forças^[13].

Em relação à posição de cada carga e seu respectivo ponto de contorno, estes devem situar-se na mesma normal ao contorno do eletrodo. O efeito conjunto das cargas fictícias deve reproduzir o potencial de contorno V_c .

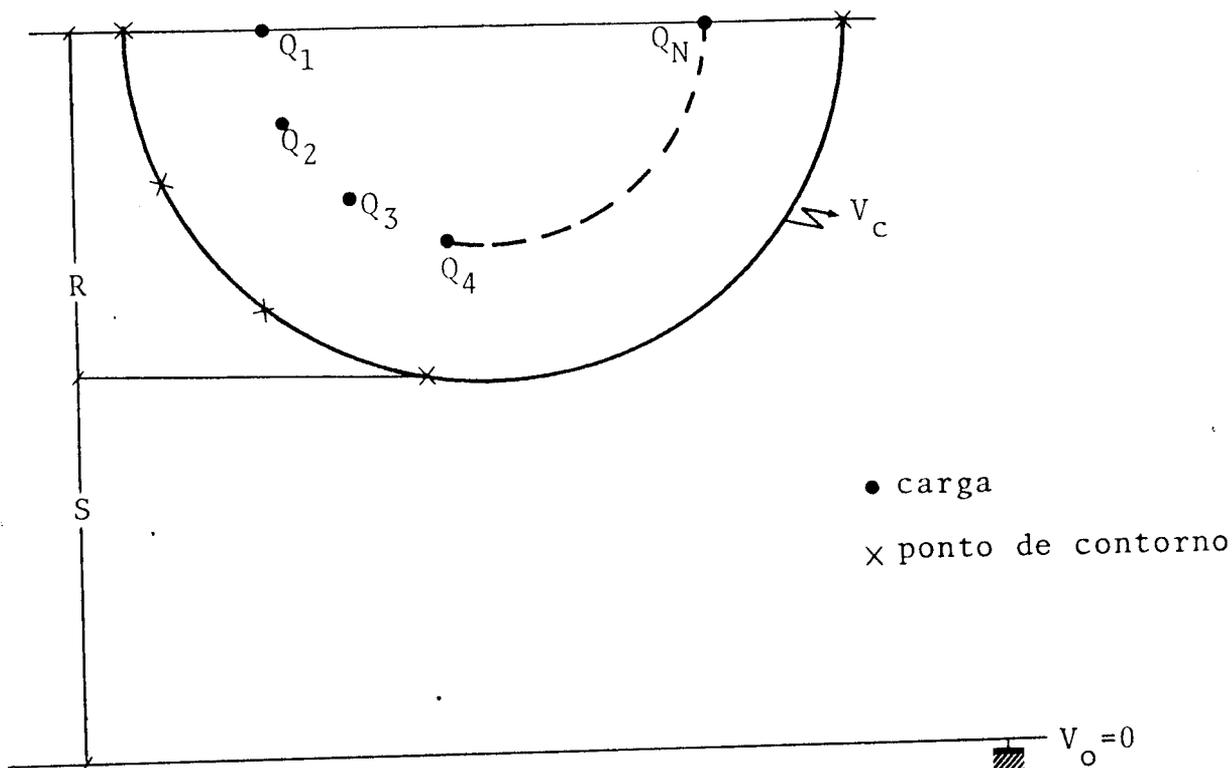


Fig. 2.3 - Distribuição das cargas e pontos de contorno na superfície do eletrodo

Este efeito pode ser observado pela ilustração da Fig. 2.4, feita para 7 cargas.

Na distribuição da Fig. 2.4.a, as cargas fictícias estão localizadas muito próximas da superfície (contorno) do eletrodo e muito distantes entre si. Nos pontos de contorno assinalados, temos o potencial V_c , porém nos pontos entre dois pontos de contorno sucessivos nada se pode afirmar sobre o potencial. Isto pode ser verificado analisando-se as equipotenciais que passam pelo ponto de contorno correspondente, devido a cada uma das cargas isoladamente.

Na situação da Fig. 2.4.b, as cargas estão bem distantes do contorno e bem próximas entre si. Neste caso, aparentemente a condição do potencial de contorno ser igual ao potencial atribuído V_c é satisfeita em todos os pontos do contorno. Esta configuração é alterada ao considerar a carga imagem. A distribuição dos potenciais e de campo é bastante semelhante a de 2 cargas iguais e opostas localizadas a uma distância aproximada

de $2(R+S)$, sendo R o raio de curvatura do eletrodo e S a distância entre eletrodo e o plano de terra.

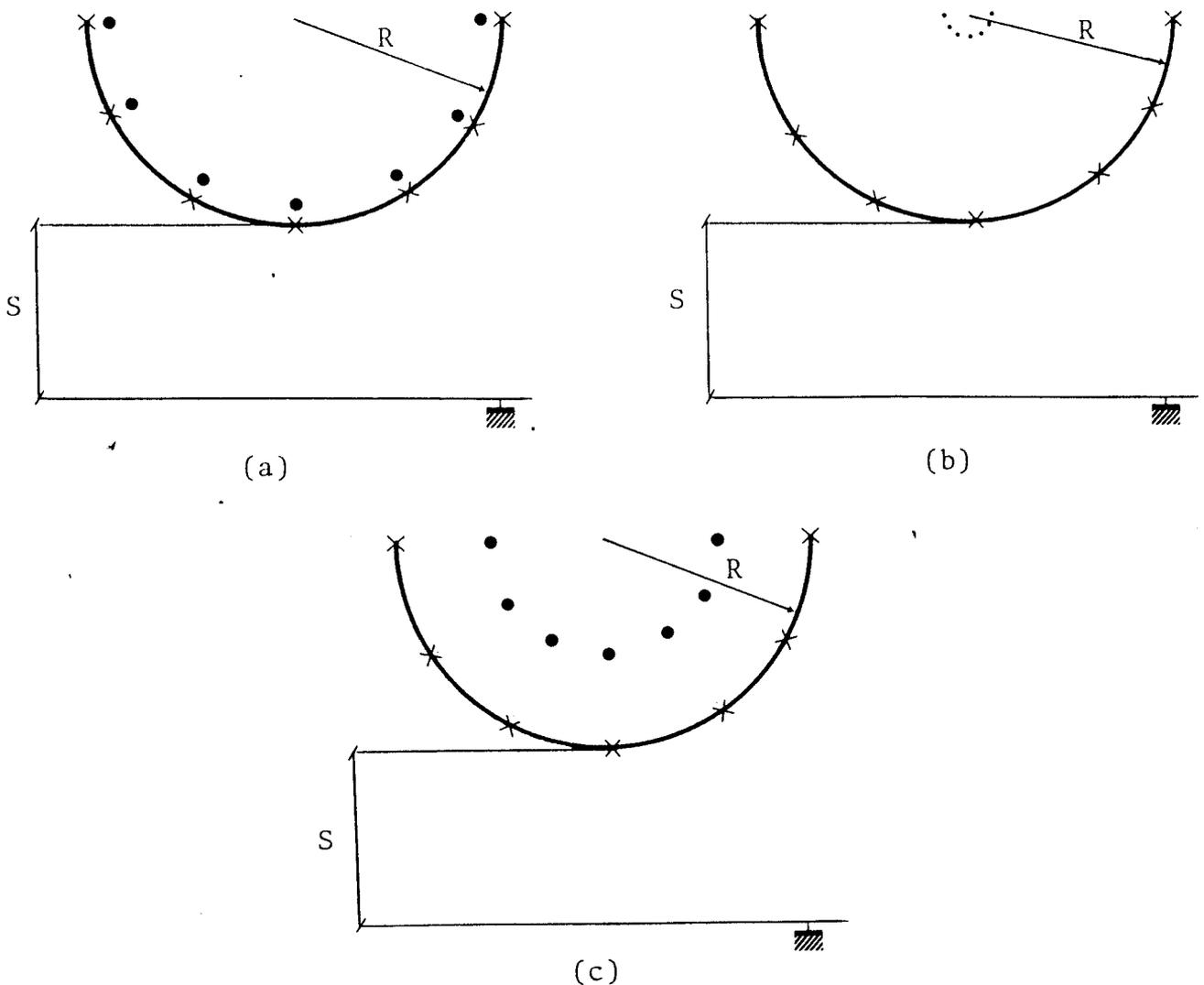


Fig. 2.4 - Localização de cargas fictícias no eletrodo

O efeito da carga imagem na configuração da Fig. 2.4.a é menos marcante que o da Fig. 2.4.b.

Note que em ambas as configurações apresentadas (Fig. 2.4.a e Fig. 2.4.b) a variação foi somente na distância entre a carga fictícia e o seu ponto de contorno correspondente, mantendo-se constante a posição e a distância entre os pontos de contorno. Se aumentarmos na configuração da Fig. 2.4.a, o número de cargas, portanto também dos pontos de contorno, podemos melhorar sensivelmente os valores dos potenciais em todo o contorno

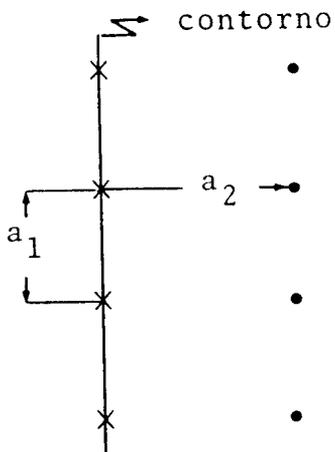
No entanto, esta prática nem sempre é recomendável de ser feita pelo fato do acréscimo na quantidade de cargas implicar no aumento da matriz [P]. O que significa maior tempo necessário na computação.

Assim, é sempre desejável que para o mesmo número de cargas, encontre-se uma localização satisfatória que contorne os problemas do tipo dos surgidos nas configurações da Fig. 2.4.a e Fig. 2.4.b, podendo ser por exemplo a distribuição da Fig. 2.4.c.

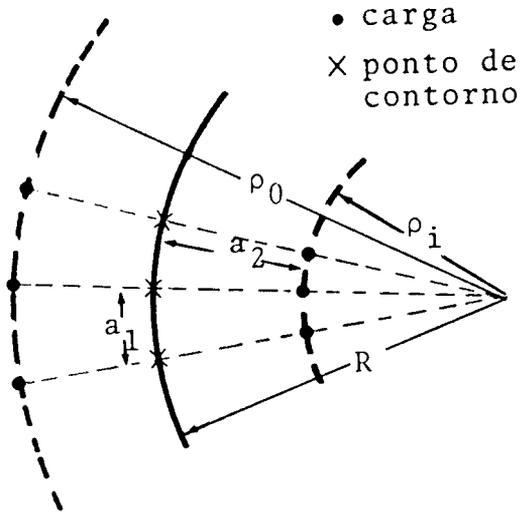
Para facilitar a localização das cargas define-se o fator de localização^[7] f_a (Fig. 2.5):

$$f_a = \frac{a_2}{a_1} \tag{2.16}$$

onde: a_1 = distância entre 2 pontos de contorno sucessivos
 a_2 = distância entre a carga e o ponto de contorno correspondente



(a)



(b)

Fig. 2.5 - Para a definição do fator de localização

Para contornos curvos as distâncias entre as cargas não podem ser muito pequenas. E isto requer que na definição do fator de localização seja considerado o efeito da curvatura (Fig. 2.5.b) o que é feito tomando-se a média geométrica de a_1 e a_2 , o que resulta em:

$$\rho_{i/0} = R \left[\sqrt{1 + \left(f_a \cdot \frac{a_1}{R}\right)^2} \mp f_a \cdot \frac{a_1}{R} \right] \quad (2.17)$$

onde: ρ_i , válido para curvaturas convexas
 ρ_0 , válido para curvaturas côncavas.

O fator de localização, definido por (2.16), tem oferecido soluções com boa precisão em muitos dos problemas, estando f_a situado entre 1.0 e 2.0^[6].

A precisão desses cálculos evidentemente depende, além do valor assumido para o fator de localização, também da densidade de pontos de contorno. Em regiões de maior interesse, a precisão pode ser melhorada aumentando-se a densidade dos pontos de contorno.

Para avaliar a precisão do método, no caso de um único meio dielétrico, é feita a comparação do potencial de vários pontos da superfície do eletrodo (pontos de testes) com o potencial atribuído V_c (expressão 1.42), calculados a partir do valor das cargas. Quanto mais próximo os pontos de testes estiverem dos pontos de contorno, menor será o erro do potencial de contorno do eletrodo. Isto não significa de forma alguma que todos os pontos da superfície do eletrodo estejam num potencial próximo de V_c , devido ao efeito global das cargas.

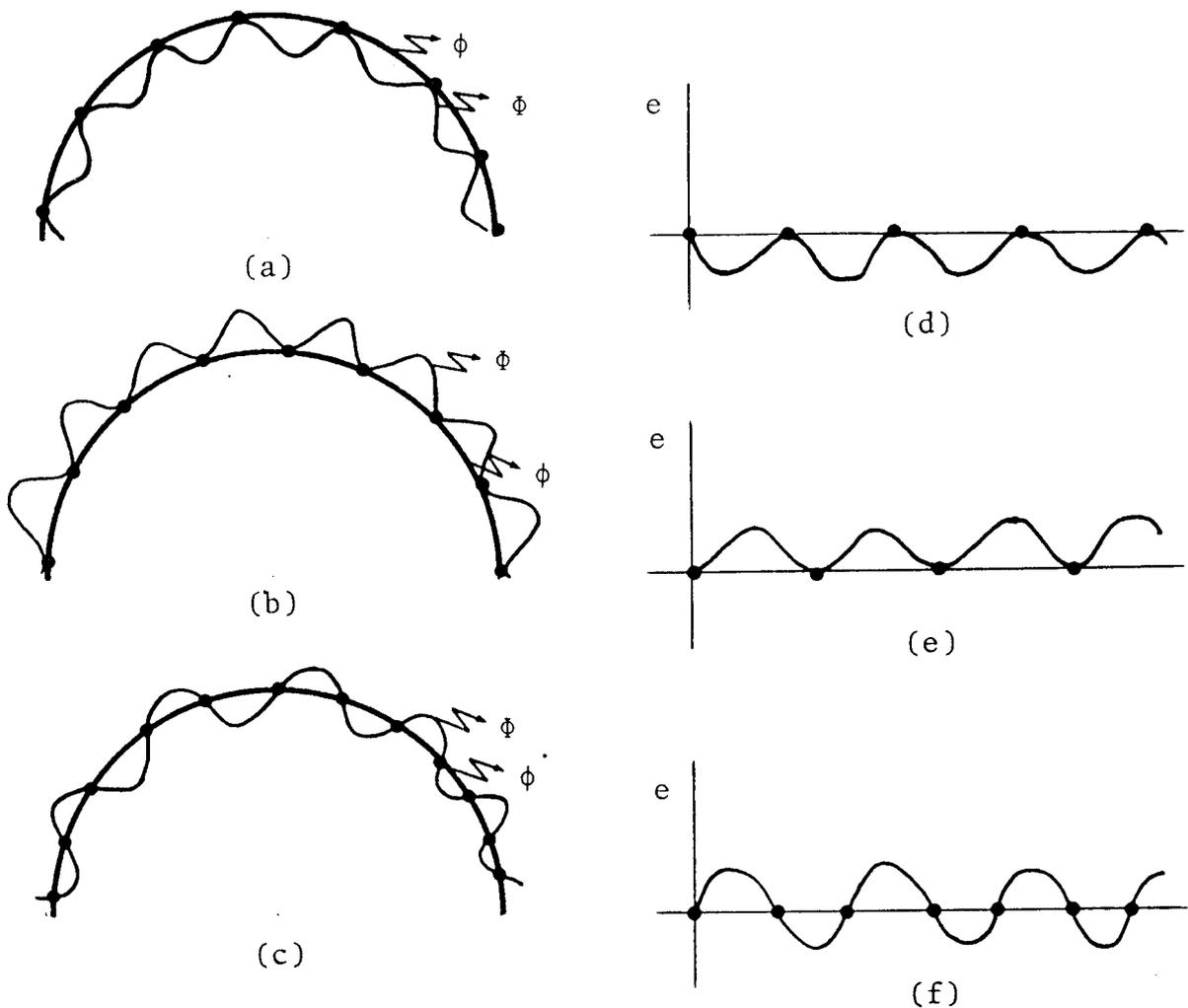
Este fato pode ser melhor observado a partir dos resultados obtidos por Kato^[14], ilustrado na Fig. 2.6, calculados assumindo-se que a função erro do potencial também satisfaz a equação de Laplace ou Poisson, no domínio, ou seja:

$$e = \Phi - \phi \quad (2.18)$$

onde: e = erro do potencial
 Φ = potencial calculado por MSC
 ϕ = potencial correto.

portanto satisfazendo:

$$\begin{aligned} \nabla^2 e &= 0 & r \in D \\ \nabla^2 \Phi &= 0 & r \in D \\ \nabla^2 \phi &= 0 & r \in D \end{aligned}$$



• ponto de contorno

ϕ , equipotencial da superfície do eletrodo

ϕ , equipotencial calculado pelo MSC

Fig. 2.6 - Equipotencial de Contorno [14]

Neste trabalho, para assegurar que o erro do potencial seja o menor possível, os pontos de testes foram localizados exatamente à meia distância entre 2 pontos de contornos consecutivos.

2.13 - FATOR DE UTILIZAÇÃO DE CAMPO

Um dos pontos importantes em Alta Tensão, seja em u i pamento ou projeto de isolação é o esforço elétrico aplicado s o bre o material isolante quando sujeito a um determinado campo e

létrico. O parâmetro que nos fornece esta medida é denominado de fator de Utilização de Campo. A sua idéia básica em Alta Tensão foi introduzida por Schwaiger^[15] e pode ser definida por:

$$\eta = \frac{E_{\max} \cdot d}{U} \quad (2.19)$$

onde: U , tensão aplicada no sistema
d , distância entre os eletrodos
 E_{\max} , campo elétrico do ponto de maior curvatura do sistema.

O fator de utilização assim definido por (2.19) pode significar característica de utilização do campo, medida da situação ou condição do campo ser ótimo ou péssimo, ou ainda da qualidade de campo de um sistema de eletrodo.

O conhecimento deste fator é importante, portanto, na prática, uma vez que o campo elétrico é fator decisivo em termos de isolamento de equipamentos elétricos, assim como nas suas instalações. A sua importância é maior ainda nos dias atuais, tendo em vista os equipamentos para Extra e Ultra Alta Tensão.

Note-se que a expressão (2.19) permite calcular o fator η , mesmo para os casos em que não se conhece a distância d entre os eletrodos, relacionando-se ao campo homogêneo. Isto é feito tomando-se U/d como sendo a intensidade de campo elétrico homogêneo de um sistema, supondo-se a tensão U aplicada a um sistema de placas paralelas de mesma distância d. Com estas considerações, (2.19) pode ser escrita na forma:

$$\eta = \frac{E_{\max}}{E_{\text{hom}}} \quad (2.20)$$

Deste modo, o fator de utilização de campo permite uma consideração com o campo homogêneo, o qual possibilita fazer uma avaliação quanto à condição do campo elétrico do sistema. Quando o campo é homogêneo, η é unitário, e em casos não homogêneos como ponta, haste, ou quando apresentam irregularidades acentuadas, o valor de η é muito grande tendendo ao infinito (∞).

Para cabos η é da ordem de 1,5-2,0, enquanto que para linhas aéreas seria superior a 10 vezes este valor.

Além de permitir a avaliação do Campo Elétrico, o fator de utilização possibilita ainda determinar a tensão de início de corona do sistema U_d , escrevendo (2.18) como:

$$U_d = E_d \cdot d \cdot f \quad (2.21)$$

onde: E_d , rigidez dielétrica do material
 $f = 1/\eta$

Assim, conhecendo-se η , de (2.21) pode-se determinar:

- valor de rigidez dielétrica do material E_d , obtendo-se U_d experimentalmente.
- valor da tensão de início de corona U_d , obtendo-se E_d experimentalmente.

2.4 - SISTEMA DE ELETRODOS UTILIZADOS

Neste trabalho, os cálculos foram feitos em 3 tipos de configurações particulares de eletrodos infinitos, a saber:

- cilindro infinito-plano de terra
- metade inferior do cilindro infinito-plano de terra
- "strip" infinito-plano de terra

A secção reta, o dimensionamento adotado e a distribuição das cargas é apresentado nas figuras a seguir.

- Configuração cilindro infinito-plano de terra

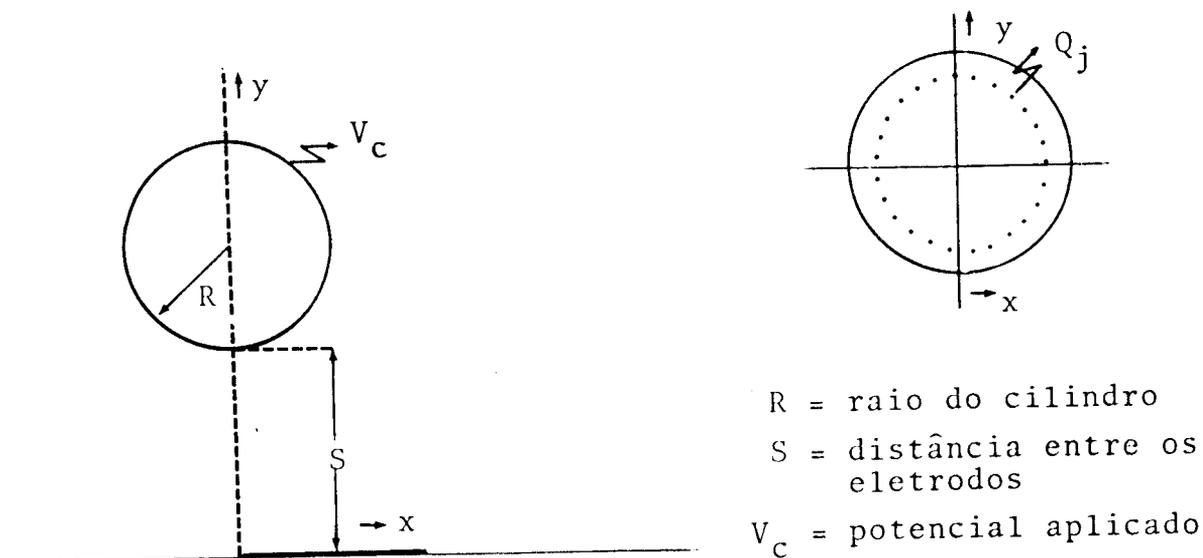


Fig. 2.7 - Dimensionamento e Arranjo das Cargas

b) Configuração metade inferior do cilindro infinito-plano de terra

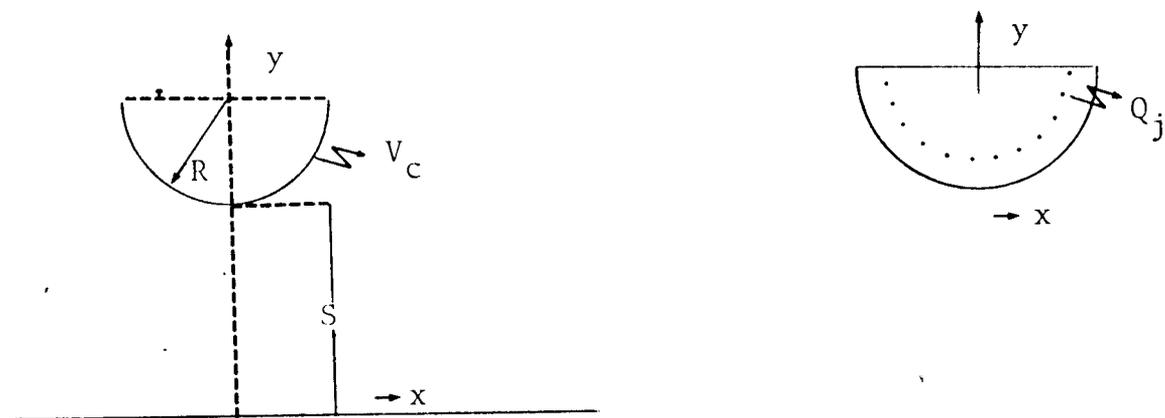


Fig. 2.8 - Dimensionamento e Arranjo de Cargas

c) Configuração "strip" infinito

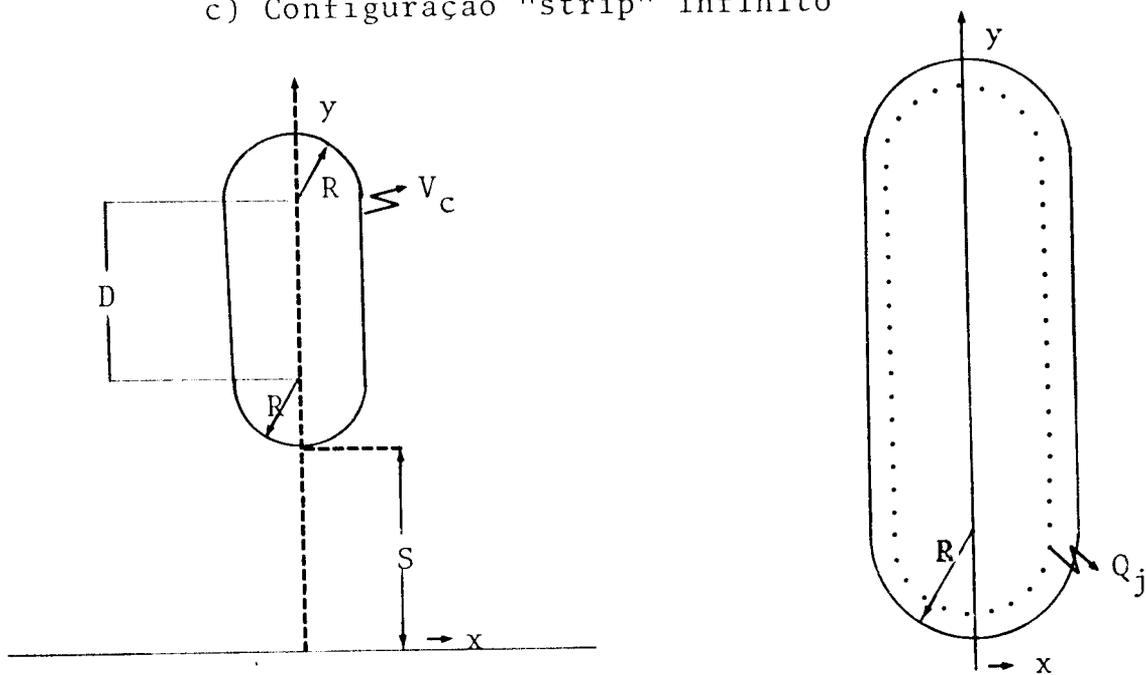
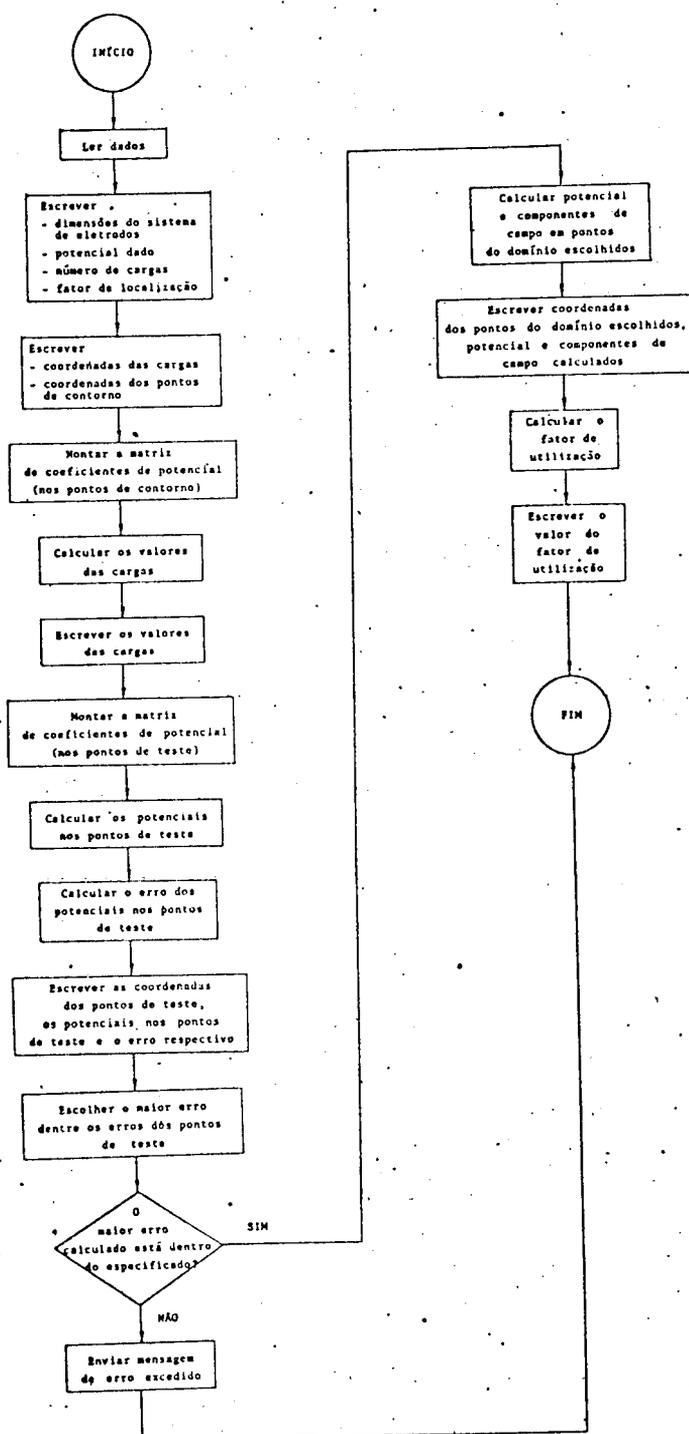


Fig. 2.9 - Dimensionamento e Arranjo de Cargas

2.5 - DIAGRAMA DE BLOCOS

Apresentamos a seguir, o procedimento adotado para a implementação do método de Simulação de Cargas, MSC, no computador em forma de diagrama de blocos. O programa foi desenvolvido em linguagem FORTRAN-IV e processado no computador PDP-10 da UNICAMP. A listagem do programa encontra-se no Apêndice II.



CAPÍTULO 3

RESULTADOS E DISCUSSÕES

3.1 - APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Nesta parte apresentamos os resultados obtidos de campo máximo (E_{\max}) e fator de utilização de campo (η), para as configurações apresentadas no capítulo anterior, com a variação de alguns parâmetros.

Para apresentação, assim como para discussão, os resultados podem ser separados em 3 itens:

- a) resultados obtidos pelo MSC
- b) resultados obtidos pelo MDF
- c) comparação dos resultados obtidos pelo MSC, com os valores obtidos pelo MDF e com o valor exato calculado através das fórmulas (A-12) e (A-13) para uma situação particular.

Correspondem ao item (a) os resultados das tabelas 3.1 a 3.12 e os gráficos 3.1 a 3.7, bem como a Fig. 3.3, sendo que nas tabelas 3.1 a 3.4 e 3.7 também são apresentados resultados exatos obtidos através das fórmulas (A-12) e (A-13), para possibilitar algumas comparações.

Pelo MSC foram calculados para cada configuração:

- campo elétrico máximo (E_{\max})
- fator de utilização de campo (η)
- potencial médio nos pontos de teste do eletrodo ($\bar{\phi}$)
- erro do potencial calculado nos pontos de teste (ϵ).

O campo elétrico máximo da configuração (E_{\max}) foi calculado pela expressão (2.15), que fornece o campo elétrico no ponto de coordenadas (x,y) , fazendo-se $x=0$ e $y=S$, que é o ponto onde ocorre o campo elétrico máximo para as configurações enfocadas.

O fator de utilização de campo (η) foi obtido pela expressão (2.19) utilizando-se o E_{\max} calculado pelo procedimento supra citado.

O potencial médio nos pontos de teste do eletrodo ($\bar{\phi}$) foi obtido em cada caso como:

$$\bar{\phi} = \sum_{i=1}^N \frac{V_{Ti}}{N}$$

onde V_{Ti} é o potencial calculado no ponto de teste i .

$\bar{\phi}$ fornece uma estimativa da média dos potenciais calculados pelo MSC, nos pontos de teste, que sendo pontos pertencentes ao contorno do eletrodo, estão na realidade no potencial V_c .

O erro do potencial calculado nos pontos de teste pelo MSC foi obtido a partir da expressão:

$$\epsilon = \text{Max}_{i=1, N} \left\{ \left| \frac{V_{Ti} - V_c}{V_c} \right| \cdot 100\% \right\}$$

onde V_{Ti} é o potencial calculado no ponto de teste i .

Deste modo $\epsilon(\%)$ traduz em porcentagem a maior diferença obtida entre os potenciais calculados pelo MSC nos pontos de teste e o potencial dado para o contorno, V_c ; ou seja, considere-se como erro a diferença em porcentagem entre o potencial do contorno, V_c , e o potencial do ponto de teste cujo valor mais se distancia de V_c dentre todos os potenciais calculados nos pontos de teste.

Inicialmente, o estudo foi efetuado utilizando-se a configuração cilindro infinito-plano de terra, porém considerando-se a parte do cilindro infinito que mais afeta a distribuição de potenciais na região do domínio entre eletrodos, e que portanto é a parte que mais influência exerce sobre o campo máximo, o estudo foi estendido também para outras duas configurações: metade inferior do cilindro infinito e "strip" infinito. Todas as 3 configurações se identificam pela parte mais próxima ao plano de terra, diferindo somente na parte superior.

Deste modo, os resultados obtidos pelo MSC podem ser agrupados em:

- i) cilindro infinito (tabelas 3.1 a 3.4, gráfico 3.1 e Fig. 3.3)

- ii) metade inferior do cilindro infinito (tabelas 3.5 a 3.10 e gráficos 3.2, 3.3 e 3.5).
- iii) "strip" infinito (tabelas 3.11, 3.12 e gráfico 3.6).

Tomando-se um cilindro infinito de raio $R=1,0\text{cm}$, sujeito ao potencial $V_c=100,0\text{V}$, a tabela 3.1 apresenta os valores, obtidos pelo MSC, de η , $\bar{\phi}$ e ϵ em função da distância S . Tais resultados foram obtidos utilizando-se $f_a=1,25$ e $N=24$ cargas. Na mesma tabela é dado também o fator de utilização de campo exato (η^*) obtido através da expressão (A-13) para cada S abordado. Nesta tabela é interessante observar os valores de η e η^* para cada S , bem como notar o comportamento de ϵ em função de S .

No gráfico 3.1 é apresentada a curva característica de η em função de S , plotada com os valores obtidos da tabela 3.1.

O mesmo cilindro infinito colocado agora a uma distância $S=10,0\text{cm}$ foi utilizado para, através do MSC, se obter os valores de η , $\bar{\phi}$ e ϵ em função de f_a . Estes são os resultados presentes na tabela 3.2 para os quais $N=24$ cargas. Através destes resultados é possível notar a influência do fator de localização f_a na estimativa do fator de utilização pelo MSC.

Na Fig. 3.3 são apresentadas as equipotenciais para a configuração cilindro infinito-plano de terra, obtidas pelo MSC para o caso particular de $R=1,0\text{cm}$; $S=2,0\text{cm}$; $N=24$ cargas e $f_a=1,25$.

Enfocando-se a parte do cilindro infinito em que se espera maior influência sobre o campo elétrico máximo da configuração foi calculado o campo máximo (E_{max}), através do MSC, para a metade inferior do cilindro infinito, dispondo nessa metade o mesmo número de cargas e nas mesmas localizações daquelas utilizadas para as situações das tabelas 3.1 e 3.2. Deste modo, como para o cilindro infinito foi utilizado $N=24$ cargas, para a metade inferior do cilindro infinito foi utilizado $N=13$ cargas, usando-se em cada situação correspondente o mesmo f_a .

A tabela 3.3 apresenta os valores de E_{max} para a configuração cilindro infinito-plano de terra com $R=1,0\text{cm}$, $V_c=100,0\text{V}$, em função de S , obtidos pelo MSC, considerando-se o cilindro

infinito ($N=24$ cargas e $f_a=1,25$) e considerando-se apenas a metade inferior do cilindro infinito ($N=13$, $f_a=1,25$). Na mesma tabela é apresentado ainda para cada S , o valor do campo elétrico máximo obtido analiticamente pela expressão (A-12), a fim de que se possa compará-los entre si.

Na tabela 3.4, temos os valores de campo elétrico máximo (E_{\max}) obtidos para a configuração cilindro infinito-plano de terra com $R=1,0\text{cm}$, $S=10,0\text{cm}$ e $V_c=100,0\text{V}$, calculados pelo MSC, em função de f_a , considerando-se o cilindro infinito ($N=24$ cargas), ou a metade inferior do cilindro infinito ($N=13$ cargas) e também o valor do campo elétrico máximo obtido analiticamente.

Tendo em vista que os resultados obtidos pelo MSC para E_{\max} e η nas duas configurações de eletrodos cilindro infinito-plano de terra e metade inferior do cilindro infinito-plano de terra, são muito próximos entre si e dos valores analíticos, foi feito um estudo das influências de N , S e f_a sobre os valores de E_{\max} e η tomando-se somente a segunda configuração cujos resultados estão tabelados nas tabelas 3.5 e 3.6.

A tabela 3.5 se constitui de sub-tabelas ((a),(b),(c),(d),(e),(f),(g),(h) e (i)) que apresentam em função de f_a , os valores de η , $\bar{\phi}$, ϵ , além dos desvios padrão dos potenciais calculados nos pontos de teste em relação a $\bar{\phi}$ (σ_1) e em relação a V_c (σ_2). Cada sub-tabela corresponde a um certo número de cargas N . Estes resultados foram obtidos pelo MSC utilizando-se a metade inferior do cilindro infinito com $R=1,0\text{cm}$, $S=10,0\text{cm}$ e $V_c=100,0\text{V}$.

Os desvios padrão σ_1 e σ_2 foram calculados da seguinte maneira:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (V_{Ti} - \bar{\phi})^2}{N}}$$

$$e \quad \sigma_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (V_{Ti} - V_c)^2}{N}}$$

onde V_{Ti} é o potencial calculado no ponto de teste i ,

$$\bar{\phi} = \frac{\sum_{i=1}^N V_{Ti}}{N} \quad e$$

V_c é o potencial dado do contorno do eletrodo.

Deste modo, os resultados da tabela 3.5 permitem avaliar os resultados quanto às influências do número de cargas (N) e do fator de localização (f_a) na determinação do fator de utilização (η), calculado pelo MSC. As influências do f_a e S podem ser vistas também na tabela 3.6 onde são apresentados os valores de η , $\bar{\phi}$ e ϵ em função de S e f_a , obtidos pelo MSC, tomando-se a metade inferior do cilindro infinito com $R=1,0\text{cm}$, $V_c=100\text{V}$ e $N=13$ cargas.

O gráfico 3.2 apresenta o fator de utilização, η , em função da distância S , obtido pelo MSC para a configuração cilindro infinito-plano de terra com $R=1,0\text{cm}$ e $V_c=100,0\text{V}$, utilizando-se o cilindro infinito com $N=24$ cargas e $f_a=1,25$ (A), e utilizando-se a metade inferior do cilindro infinito correspondente com $N=13$ cargas e $f_a=1,25$ (B).

No gráfico 3.3 temos η em função de S , tendo-se f_a como parâmetro, obtido pelo MSC, utilizando-se a metade inferior do cilindro infinito com $R=1,0\text{cm}$, $V_c=100,0\text{V}$ e $N=13$ cargas.

Na tabela 3.7 apresentamos os valores de E_{\max} obtidos pelo MSC em função do número de cargas N , utilizando-se a metade inferior do cilindro infinito com $R=1,0\text{cm}$, $S=10,0\text{cm}$, $V_c=100,0\text{V}$ e $f_a=1,25$. O valor de E_{\max} obtido analiticamente pelo expressão (A-12) também é apresentado nesta tabela.

Conforme já citado no capítulo anterior, a utilização do fator de localização, f_a , em eletrodos que apresentem curvaturas, como é o caso dos eletrodos em estudo, pode, dependendo do número de cargas N escolhido, levar a uma localização muito próxima entre cargas. Este problema deve ser evitado na aplicação do MSC. Para tal, foi estudado o caso da metade inferior do cilindro infinito utilizando-se o critério da curvatura ρ_i dado pela expressão (2.17).

Uma vez escolhido o número de cargas N e o fator de localização f_a , as dimensões a_1 e a_2 podem ser facilmente calculadas.

ladas a partir do raio R . Deste modo, as N cargas ficam localizadas radialmente à curvatura do eletrodo num raio de localização equivalente à $R-a_2$. Se nesta mesma metade inferior do cilindro infinito escolhermos f_a , mas optarmos por utilizar o critério de curvatura (no caso ρ_i), podemos notar a diferença existente no raio de localização das cargas comparando-se para o mesmo f_a os valores obtidos de ρ_i e $R-a_2$. A análise desta diferença pode ser feita a partir dos dados da tabela 3.8(a), onde são apresentados os valores de $R-a_2$ e ρ_i em função de f_a para a metade inferior do cilindro infinito com $R=1,0\text{cm}$ e utilizando-se $N=13$ cargas. A tabela 3.8(b) apresenta $R-a_2$ e ρ_i em função de N para a metade inferior do cilindro infinito com $R=1,0\text{cm}$ e fixando-se $f_a=1,5$.

A partir desses resultados, é mostrado no gráfico 3.4 o comportamento das curvas de ρ_i e $R-a_2$ em função de f_a para $N=13$ cargas e em função de N para $f_a=1,5$ para a metade inferior do cilindro infinito.

A tabela 3.9(a) apresenta os resultados de η , $\bar{\phi}$ e ϵ em função de f_a para a metade inferior do cilindro infinito com $R=1,0\text{cm}$, $S=10,0\text{cm}$ e $V_c=100,0\text{V}$, utilizando-se $N=13$ e raio de localização de cargas igual à ρ_i .

Na tabela 3.9(b) são apresentados de η , $\bar{\phi}$ e ϵ em função do número de cargas N dispostos segundo o raio de localização ρ_i , para a metade inferior do cilindro infinito com $R=1,0\text{cm}$, $S=10,0\text{cm}$, $V_c=100,0\text{cm}$ e $f_a=1,5$.

Para a metade inferior do cilindro infinito, o ângulo de distribuição de cargas, α , é igual a πrad . Logo, se diminuirmos o ângulo de distribuição de cargas (α), pode-se verificar a possibilidade, ou não, na aplicação do MSC, de se restringir ainda mais a parte do cilindro infinito que mais influência exerce sobre o valor do campo elétrico máximo. Assim, distribuindo o mesmo número de cargas, pontos de contorno e pontos de teste utilizados na metade inferior do cilindro infinito, num ângulo de distribuição de cargas $\alpha < \pi\text{rad}$., foi determinado para $\alpha = 1,0\text{ rad}$., e $\alpha=2,0\text{ rad}$., o η (tabela 3.10 e o gráfico 3.5) conforme a distribuição mostrada na Fig. 3.4.

A tabela 3.10 apresenta os resultados de η , $\bar{\phi}$ e ϵ em

função de N e α obtidos pelo MSC para a metade inferior do cilindro infinito com $R=1,0\text{cm}$, $S=10,0\text{cm}$, $V_c=100,0\text{V}$ e $f_a=1,5$.

No gráfico 3.5 é apresentado o fator de utilização η em função do número de cargas N , obtido pelo MSC tendo α como parâmetro.

Outra configuração de eletrodo que possui a parte inferior idêntica ao cilindro infinito é o "strip" infinito. A configuração "strip" infinito-plano de terra é especificada pelas dimensões R , D e S .

Os valores de η , $\bar{\phi}$ e ϵ , obtidos pelo MSC para "strips" de $R=1,0\text{cm}$ e $D=2,0$; $5,0$ e $8,0\text{cm}$ e $V_c=100,0\text{V}$ em função da distância S são apresentados na tabela 3.11, onde o fator de localização de carga utilizado é de $f_a=1,25$.

Na tabela 3.12 são apresentados η , $\bar{\phi}$ e ϵ em função de f_a , obtidos pelo MSC, para "strip" de $R=1,0\text{cm}$, $D=8,0\text{cm}$, $S=10,0\text{cm}$ e $V_c=100,0\text{V}$ com $N=58$ cargas.

O gráfico 3.6 apresenta os resultados de η em função de S para os "strips" abordados, além dos resultados obtidos por Singer et al. para o "strip" de dimensões $R=1,0\text{cm}$ e $D=8,0\text{cm}$.

No gráfico 3.7 são apresentadas as curvas de η em função de S , obtidas pelo MSC, para um "strip" infinito com $R=1,0\text{cm}$, $D=8,0\text{cm}$ e $N=58$ cargas (A); para um cilindro infinito com 24 cargas (B), e para a metade inferior do cilindro infinito com $R=1,0\text{cm}$ e $N=13$ cargas (C). Nos três casos $V_c=100,0\text{V}$, tendo sido utilizado $f_a=1,25$. Na parte idêntica das três configurações (metade inferior do cilindro infinito) foi distribuído o mesmo número de cargas, pontos de contorno e pontos de teste, ou seja, 13 cargas localizadas identicamente. Os valores do fator de utilização de um cilindro infinito com $R=1,0\text{cm}$, obtidos analiticamente pela expressão (A-13) encontram-se também no gráfico 3.7 (D).

Com intuito de comparar os resultados obtidos por este processo numérico (MSC) com outros processos numéricos, foi calculado θ , ϕ , E_{\max} e η , utilizando-se o método das diferenças finitas (MDF), cujos resultados encontram-se na tabela 3.13 e Fig. 3.6.

O emprego do MDF se restringiu à configuração cilindro infinito-plano de terra com $R=1,0\text{cm}$ e $S=2,0\text{cm}$ com $V_c=100,0\text{V}$.

Considerando a existência de simetria em relação ao eixo y da configuração enfocada, e dos problemas do MDF apresentados no Capítulo 1, como o domínio, dimensão da malha, dados de entrada, etc, os resultados obtidos pelo MDF, o foram através de 4 (quatro) formas diferentes, a saber:

- I) tomando-se apenas a metade positiva do cilindro infinito em relação ao eixo x , estabelecendo-se um domínio de $[(3 \times 5) - \pi/2] \text{ cm}^2$ no plano (x,y) , conforme mostrado na Fig. 3.1. Este domínio foi subdividido com uma malha de $0,2\text{cm}$ de lado, resultando em 354 nós. O cálculo foi efetuado com dados iniciais aleatórios pelo processo iterativo de Liebman com $\alpha=1,5$ e um erro admissível $\epsilon=0,001$.

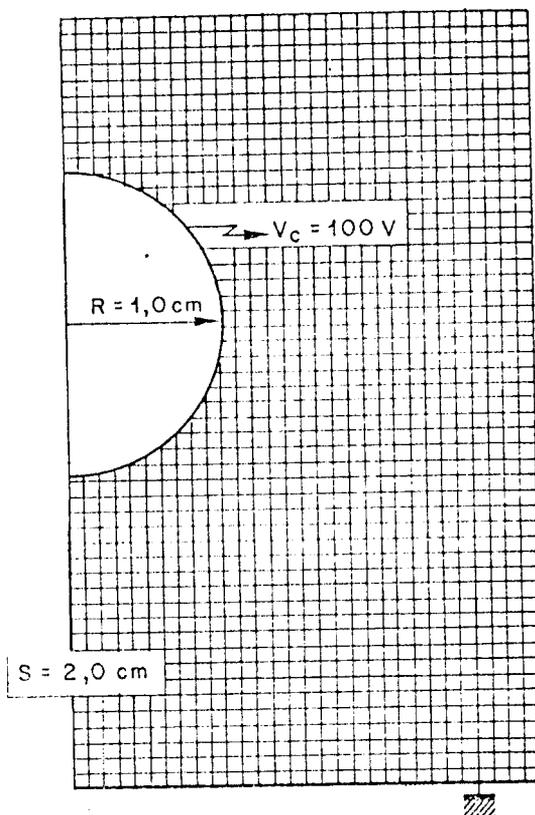


Fig. 3.1 - Domínio para aplicação do MDF

II) tomando-se o cilindro infinito total fixando um domínio de $[(6 \times 5) - \pi] \text{ cm}^2$ conforme a Fig. 3.2. O domínio assim tomado foi subdividido em malhas com $h = 0,2 \text{ cm}$ resultando em 694 nós. O cálculo foi efetuado com dados iniciais aleatórios pelo processo iterativo de Liebman com $\alpha = 1,5$ e um erro permissível $\epsilon = 0,001$.

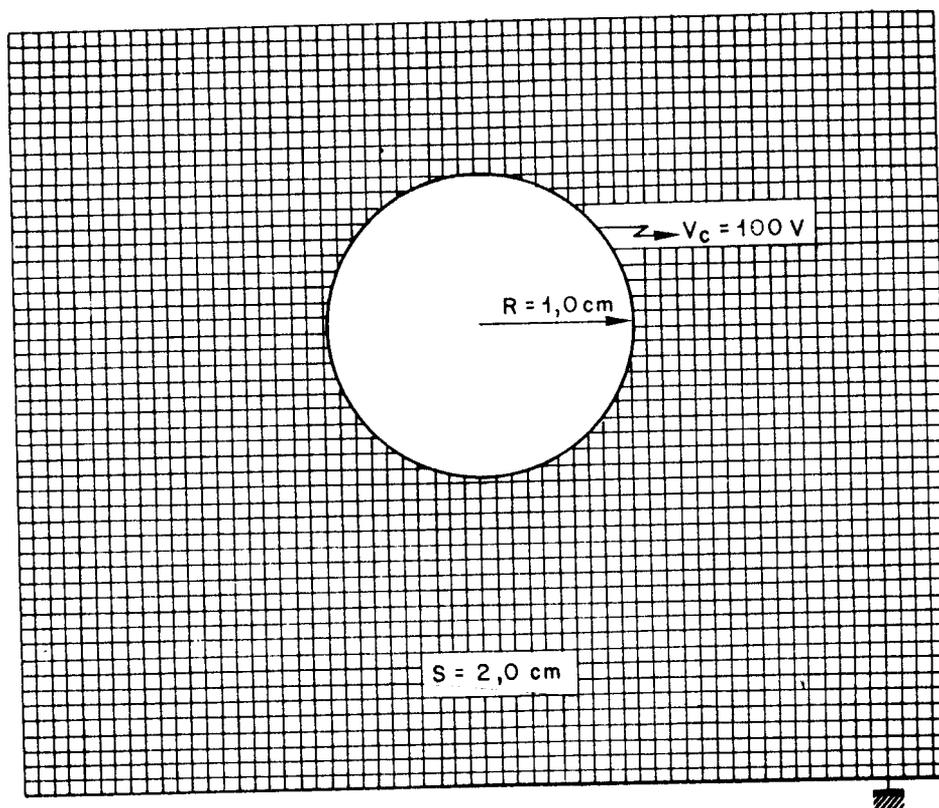


Fig. 3.2 - Domínio para aplicação do MDF

III) nas mesmas condições do item anterior alterando-se somente os dados iniciais. Os potenciais dos nós da malha foram calculados inicialmente pelo MSC utilizando-se o cilindro total com $N=24$ cargas e $f_a = 1,25$. Estes potenciais assim calculados é que se constituíram nos dados iniciais.

IV) tomando-se o mesmo domínio da Fig. 3.2 e utilizando uma malha de 0,1cm de lado, o que resultou em 2733 nós. O cálculo foi efetuado com dados iniciais aleatórios pelo processo iterativo de Liebman com $\alpha=1,5$ e um erro permissível $\epsilon=0,0001$.

O MDF fornece como resultado o potencial (ϕ) dos nós da malha utilizada. Deste modo, foram selecionados 29 nós que pertencem às malhas utilizadas, conforme consta da Fig. 3.5. Os potenciais (ϕ) obtidos pelo MDF para estes nós são apresentados na tabela 3.13, juntamente com as respectivas coordenadas.

As colunas (a), (b), (c) e (d) correspondem respectivamente às formas I), II), III) e IV) apresentadas para a utilização do MDF.

Para que se possa ter uma estimativa dos valores dos potenciais, assim como das suas discrepâncias, entre os valores obtidos pelos dois processos numéricos (MSC e MDF), é apresentado na mesma tabela (coluna e) os resultados obtidos pelo MSC para o cilindro infinito com $f_a=1,25$ e $N=24$ cargas.

A Fig. 3.6 apresenta as equipotenciais obtidas pelo MDF para um cilindro infinito com $R=1,0\text{cm}$ e $S=2,0\text{cm}$, utilizando-se as condições apresentadas em IV), bem como as equipotenciais obtidas pelo MSC com $N=24$ cargas e $f_a=1,25$ (tracejadas).

Por final, é feita uma comparação entre os resultados (tabela 3.14) obtidos pelo MSC, pelo MDF e analiticamente para cilindro infinito-plano de terra com $R=1,0\text{cm}$, $S=2,0\text{cm}$ e $V_c=100\text{V}$, dos valores de E_{max} e η em função de cada método utilizado e de acordo com as condições empregadas.

3.1.1 - RESULTADOS OBTIDOS PELO MSC

3.1.1.1 - CILINDRO INFINITOTabela 3.1 - Variação do fator de utilização de campo η com a distância S

S(cm)	η	$\bar{\phi}$ (V)	ϵ (%)	η^*
0,05	1,0159	100,0085	0,4530	1,0166
0,10	1,0333	99,9990	0,0428	1,0331
0,20	1,0662	99,9990	0,0219	1,0658
0,50	1,1619	99,9995	0,0037	1,1616
1,00	1,3153	99,9995	0,0013	1,3151
2,00	1,6047	99,9996	0,0007	1,6045
5,00	2,3878	100,0000	0,0003	2,3875
10,00	3,5466	100,0000	0,0003	3,5463
15,00	4,6093	100,0002	0,0004	4,6089
20,00	5,6134	99,9998	0,0002	5,6129

R = 1,0cm N = 24 cargas
 $V_c = 100,0V$ $f_a = 1,25$

Tabela 3.2 - Variação do fator de utilização η em função do fator de localização f_a

f_a	η	$\bar{\phi}$ (V)	ϵ (%)	η^*
0,50	3,6739	99,9137	0,1045	3,5463
0,75	3,5655	99,9867	0,0162	
1,00	3,5489	99,9983	0,0021	
1,25	3,5466	100,0000	0,0003	
1,50	3,5463	99,9996	0,0005	
1,75	3,5463	100,0026	0,0057	
2,00	3,5460	99,9911	0,0092	
2,25	3,5480	100,0419	0,0441	
2,50	3,5407	99,6973	0,3377	

R = 1,0cm $V_c = 100,0V$
S = 10,0cm N = 24 cargas

η^* = fator de utilização obtido analiticamente pela fórmula (A-13)

Gráfico 3.1 - Fator de utilização para cilindro infinito

$R = 1,0 \text{ cm}$
 $f_a = 1,25$
 $N = 24$
 $V_C = 100V$

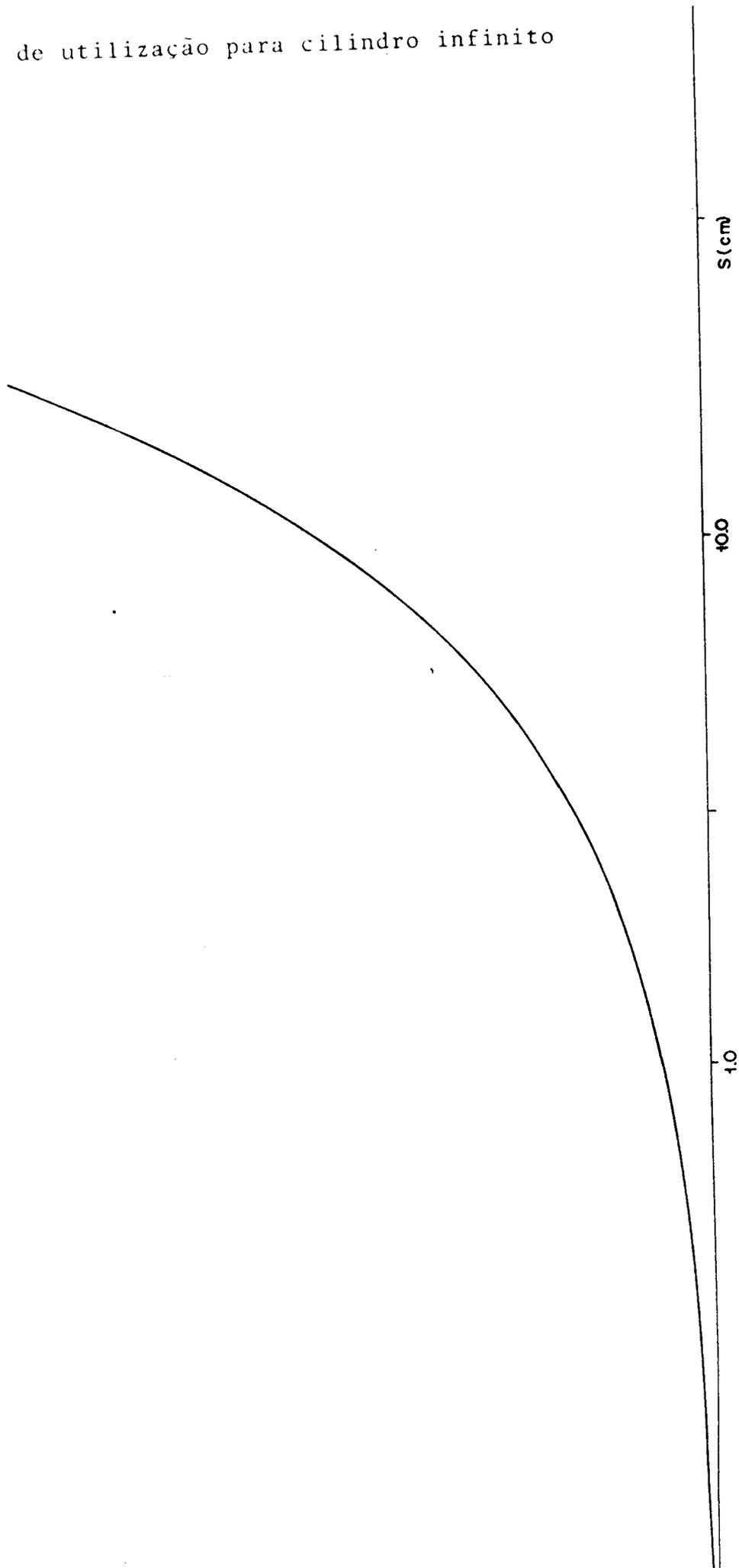


Fig. 3.3 - Equipotenciais obtidas para o cilindro infinito pelo MSC

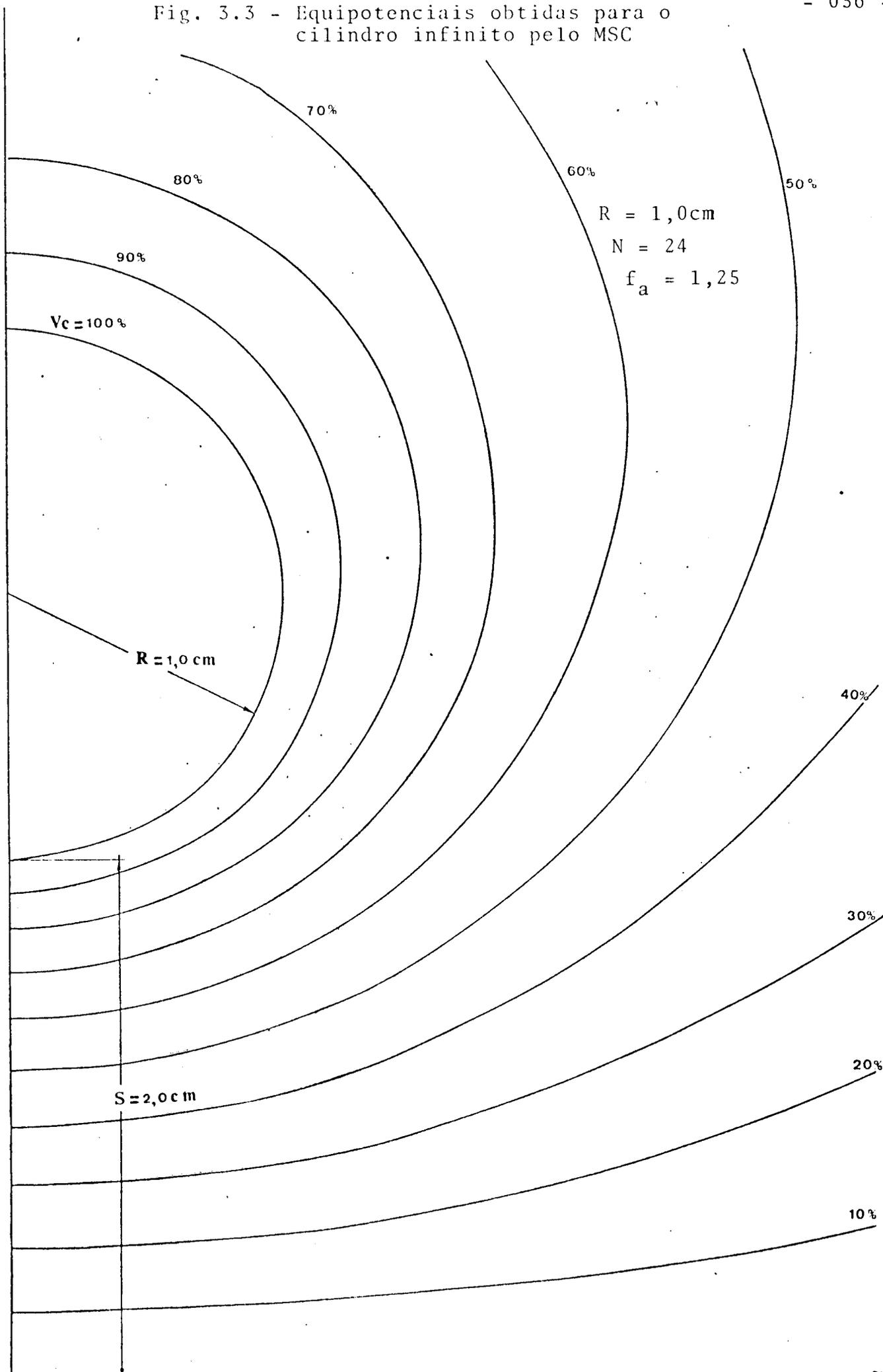


Tabela 3.3 - Variação de E_{\max} calculado pelo MSC em função da distância S

S (cm)	analítico	cilindro infinito N=24 e $f_a=1,25$		metade inferior do cilindro infinito N=13 e $f_a=1,25$	
	E_{\max} (V/cm)	E_{\max} (V/cm)	ΔE (%)	E_{\max} (V/cm)	ΔE (%)
0,05	-2033,2235	-2031,8681	0,0666	-2031,8667	0,0667
0,10	-1033,1162	-1033,3375	0,0214	-1033,3388	0,0215
0,20	- 532,9072	- 533,0809	0,0326	- 533,0873	0,0338
0,50	- 232,3371	- 232,3744	0,0160	- 232,3968	0,0257
1,00	- 131,5190	- 131,5338	0,0112	- 131,6493	0,0990
2,00	- 80,2278	- 80,2352	0,0092	- 80,5984	0,4619
5,00	- 47,7509	- 47,7551	0,0088	- 48,5094	1,5884
10,00	- 35,4631	- 35,4660	0,0082	- 36,3977	2,6354
15,00	- 30,7260	- 30,7286	0,0084	- 31,7085	3,1976
20,00	- 28,0647	- 28,0669	0,0078	- 29,0623	3,5546

R = 1,0cm

$V_c = 100,0V$

$\Delta E(\%) =$ variação do valor de E_{\max} obtido pelo MSC em relação ao E_{\max} obtido analiticamente

Tabela 3.4 - Variação do E_{\max} calculado pelo MSC em função do fator de localização de cargas f_a

f_a	cilindro infinito N=24		metade inferior do cilindro infinito N=13		analítico
	E_{\max} (V/cm)	ΔE (%)	E_{\max} (V/cm)	ΔE (%)	E_{\max} (V/cm)
0,50	-36,7388	3,5972	-38,6278	8,9239	-35,4631
0,75	-35,6554	0,5422	-37,0892	4,5853	
1,00	-35,4886	0,0718	-36,6506	3,3485	
1,25	-35,4660	0,0082	-36,3977	2,6354	
1,50	-35,4632	0,0003	-36,1863	2,0393	
1,75	-35,4629	0,0006	-35,9996	1,5128	
2,00	-35,4602	0,0081	-35,8392	1,0605	
2,25	-35,4800	0,0476	-35,7040	0,6793	
2,50	-35,4070	0,1582	-35,5469	0,2363	

R = 1,0cm

S = 10,0cm

V_c = 100,0V

$\Delta E(\%)$ = variação do valor de E_{\max} obtido pelo MSC em relação do E_{\max} obtido analiticamente

3.1.1.2 - METADE INFERIOR DO CILINDRO INFINITOTabela 3.5 - Fator de utilização η em função do fator de localização de cargas f_a e número de cargas N

$$R = 1,0\text{cm}$$

$$S = 10,0\text{cm} \quad \eta^* = 3,5463$$

$$V_c = 100,0\text{V}$$

Tabela 3.5(a)

N=3

f_a	η	$\bar{\phi}(V)$	$\epsilon(\%)$	σ_1	σ_2
0,10	7,6829	92,6642	11,0036	5,1871	8,9844
0,20	4,8232	96,7645	4,8531	2,2877	3,9525
0,30	3,9792	98,8167	1,7749	0,8367	1,4492
0,40	3,6666	99,7410	0,3885	0,1831	0,3172
0,50	3,5640	100,0222	0,0334	0,0157	0,0272
0,60	3,5459	100,0214	0,0322	0,0151	0,0262
0,70	3,5456	100,0069	<u>0,0095</u>	0,0045	0,0077

Tabela 3.5(b)

N=5

f_a	η	$\bar{\phi}(V)$	$\epsilon(\%)$	σ_1	σ_2
0,50	3,7185	100,0092	0,3071	0,2644	0,2645
0,75	3,6014	100,0819	0,2800	0,1639	0,1833
1,00	3,5591	100,0189	0,0625	0,0360	0,0406
1,25	3,5466	100,0081	<u>0,0081</u>	0,0000	0,0081

Tabela 3.5(c)

N=7

f_a	η	$\bar{\phi}$ (V)	ϵ (%)	σ_1	σ_2
0,50	3,7663	99,9645	0,3096	0,2325	0,2352
0,75	3,6257	100,0727	0,3744	0,1977	0,2106
1,00	3,5860	100,0436	0,2084	0,1099	0,1182
1,25	3,5651	100,0159	0,0771	0,0411	0,0441
1,50	3,5517	100,0006	<u>0,0126</u>	0,0079	0,0079
1,75	3,5522	100,1553	0,1558	0,0003	0,1553

Tabela 3.5(d)

N=9

f_a	η	$\bar{\phi}$ (V)	ϵ (%)	σ_1	σ_2
0,50	3,8133	99,9456	0,2911	0,1949	0,2024
0,75	3,6693	100,0539	0,3837	0,1826	0,1904
1,00	3,6270	100,0418	0,2589	0,1230	0,1299
1,25	3,5995	100,0227	0,1394	0,0673	0,0711
1,50	3,5771	100,0089	0,0603	0,0298	0,0311
1,75	3,5604	99,9989	<u>0,0160</u>	0,0098	0,0098
2,00	3,5516	100,0311	0,0344	0,0018	0,0312
2,25	3,6050	101,5830	1,5918	0,0082	1,5830

Tabela 3.5(e)

N=11

f_a	η	$\bar{\phi}$ (V)	ϵ (%)	σ_1	σ_2
0,50	3,8416	99,9385	0,2722	0,1653	0,1764
0,75	3,6900	100,0397	0,3743	0,1631	0,1679
1,00	3,6450	100,0359	0,2741	0,1188	0,1241
1,25	3,6183	100,0283	0,1679	0,0742	0,0775
1,50	3,5971	100,0121	0,0914	0,0409	0,0486
1,75	3,5795	100,0039	0,0422	0,0197	0,0201
2,00	3,5652	99,9929	<u>0,0161</u>	0,0080	0,0107
2,25	3,5571	100,0305	0,0325	0,0022	0,0306
2,50	3,5527	100,0752	0,0787	0,0032	0,0752

Tabela 3.5(f)

N=13

f_a	η	$\bar{\phi}(V)$	$\epsilon(\%)$	σ_1	σ_2
0,50	3,8628	99,9365	0,2554	0,1425	0,1560
0,75	3,7089	100,0299	0,3605	0,1456	0,1487
1,00	3,6651	100,0304	0,2763	0,1108	0,1149
1,25	3,6398	100,0201	0,1807	0,0738	0,0765
1,50	3,6186	100,0121	0,1083	0,0449	0,0465
1,75	3,6000	100,0081	0,0613	0,0250	0,0263
2,00	3,5839	99,9983	0,0373	0,0127	0,0128
2,25	3,5690	99,9703	<u>0,0356</u>	0,0063	0,0303
2,50	3,5547	99,8851	0,1203	0,0056	0,1101

Tabela 3.5(g)

N=15

f_a	η	$\bar{\phi}(V)$	$\epsilon(\%)$	σ_1	σ_2
0,50	3,8787	99,9370	0,2411	0,1248	0,1398
0,75	3,7227	100,0227	0,3460	0,1309	0,1329
1,00	3,6785	100,0257	0,2733	0,1024	0,1056
1,25	3,6537	100,0184	0,1864	0,0709	0,0733
1,50	3,6332	100,0116	0,1179	0,0456	0,0470
1,75	3,6151	100,0061	0,0698	0,0275	0,0281
2,00	3,5993	100,0113	0,0470	0,0154	0,0191
2,25	3,5857	100,0174	<u>0,0351</u>	0,0078	0,0191
2,50	3,5803	100,1588	0,1647	0,0052	0,1589

Tabela 3.5(h)

N=17

f_a	η	$\bar{\phi}(V)$	$\epsilon(\%)$	σ_1	σ_2
0,50	3,8813	99,9386	0,2287	0,1108	0,1267
0,75	3,7340	100,0176	0,3324	0,1186	0,1199
1,00	3,6904	100,0221	0,2680	0,0946	0,0971
1,25	3,6668	100,0159	0,1873	0,0673	0,0691
1,50	3,6474	100,0103	0,1227	0,0448	0,0459
1,75	3,6297	100,0051	0,0758	0,0283	0,0288
2,00	3,6140	100,0065	0,0484	0,0169	0,0181
2,25	3,5998	100,0095	<u>0,0327</u>	0,0095	0,0135
2,50	3,5891	100,0529	0,0625	0,0048	0,0531
2,75	3,5814	100,1446	0,1480	0,0035	0,1446

Tabela 3.5(i)

N=41

f_a	η	$\bar{\phi}(V)$	$\epsilon(\%)$	σ_1	σ_2
0,50	3,9512	99,9610	0,1530	0,0459	0,0602
0,75	3,7905	100,0007	0,2336	0,0543	0,0544
1,00	3,7508	100,0059	0,2028	0,0467	0,0471
1,25	3,7337	100,0042	0,1548	0,0364	0,0366
1,50	3,7212	100,0032	0,1137	0,0271	0,0273
1,75	3,7097	100,0015	0,0810	0,0197	0,0197
2,00	3,6988	100,0013	0,0578	0,0140	0,0141
2,25	3,6884	100,0008	<u>0,0397</u>	0,0098	0,0098
2,50	3,6785	100,0137	0,0420	0,0070	0,0154
2,75	3,6642	99,9246	0,0814	0,0071	0,0757
3,00	3,6534	99,9526	0,0660	0,0125	0,0489

σ_1 = desvio padrão dos potenciais calculados nos pontos de teste em relação a $\bar{\phi}$.

σ_2 = desvio padrão dos potenciais calculados nos pontos de teste em relação a V_c .

Tabela 3.6 - Fatores de utilização de campo, potenciais médios e erros de potencial no contorno, obtidos pelo MSC.

R=1,0cm , N=13 cargas , $V_c=100V$

S(cm)		r_a								
		0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
0,05	η	1,0332	1,0199	1,0168	1,0159	1,0156	1,0155	1,0154	1,0153	1,0153
	$\bar{\phi}(V)$	98,5766	99,8214	99,9953	100,0046	99,9968	99,9850	99,9639	99,9207	99,8320
	$\epsilon(\%)$	7,4776	1,7104	0,1075	0,4555	0,8203	1,0542	1,2123	1,3348	1,7559
0,10	η	1,0628	1,0395	1,0345	1,0333	1,0330	1,0328	1,0328	1,0327	1,0326
	$\bar{\phi}(V)$	98,9729	99,8759	99,9988	100,0029	99,9972	99,9937	99,9912	99,9872	99,9659
	$\epsilon(\%)$	4,1431	0,9938	0,2384	0,0439	0,0368	0,0868	0,1176	0,1431	0,2593
0,20	η	1,1040	1,0733	1,0674	1,0662	1,0659	1,0658	1,0658	1,0658	1,0659
	$\bar{\phi}(V)$	99,3234	99,9420	100,0177	100,0134	100,0048	100,0001	100,0000	99,9996	100,0112
	$\epsilon(\%)$	2,0112	0,4565	0,2847	0,1345	0,0453	0,0022	0,0118	0,0165	0,0299
0,50	η	1,2062	1,1693	1,1630	1,1620	1,1618	1,1617	1,1617	1,1618	1,1611
	$\bar{\phi}(V)$	99,6299	99,9981	100,0334	100,0225	100,0113	100,0049	99,9994	100,0070	99,9396
	$\epsilon(\%)$	0,8002	0,5169	0,3629	0,2082	0,1040	0,0446	0,0123	0,0099	0,0663
1,00	η	1,3683	1,3251	1,3178	1,3165	1,3160	1,3157	1,3155	1,3155	1,3150
	$\bar{\phi}(V)$	99,7702	100,0207	100,0385	100,0256	100,0140	100,0068	100,0064	100,0145	99,9879
	$\epsilon(\%)$	0,4359	0,5178	0,3795	0,2318	0,1267	0,0622	0,0302	0,0228	0,0142
2,00	η	1,6818	1,6259	1,6152	1,6120	1,6100	1,6083	1,6069	1,6056	1,6059
	$\bar{\phi}(V)$	99,8551	100,0308	100,0387	100,0256	100,0148	100,0072	100,0012	99,9859	100,0460
	$\epsilon(\%)$	0,3317	0,4860	0,3649	0,2308	0,1324	0,0689	0,0306	0,0198	0,0491
5,00	η	2,5546	2,4601	2,4369	2,4255	2,4165	2,4086	2,4021	2,3968	2,3929
	$\bar{\phi}(V)$	99,9139	100,0324	100,0346	100,0230	100,0137	100,0076	100,0095	100,0104	100,0084
	$\epsilon(\%)$	0,2912	0,4160	0,3173	0,2058	0,1219	0,0668	0,0385	0,0331	0,0107
10,00	η	3,8628	3,7089	3,6651	3,6398	3,6186	3,6000	3,5839	3,5690	3,5547
	$\bar{\phi}(V)$	99,9365	100,0299	100,0305	100,0201	100,0121	100,0081	99,9983	99,9703	99,8851
	$\epsilon(\%)$	0,2554	0,3605	0,2763	0,1807	0,1083	0,0613	0,0373	0,0356	0,1203
15,00	η	5,0671	4,8582	4,7948	4,7563	4,7235	4,6944	4,6698	4,6486	4,6329
	$\bar{\phi}(V)$	99,9451	100,0279	100,0280	100,0188	100,0114	100,0062	100,0174	100,0148	100,0201
	$\epsilon(\%)$	0,2356	0,3308	0,2540	0,1667	0,1004	0,0556	0,0421	0,0261	0,0234
20,00	η	6,2071	5,9458	5,8638	5,8125	5,7686	5,7296	5,6953	5,6615	5,6410
	$\bar{\phi}(V)$	99,9499	100,0265	100,0265	100,0175	100,0112	100,0087	100,0058	99,9371	99,9543
	$\epsilon(\%)$	0,2224	0,3115	0,2394	0,1571	0,0953	0,0555	0,0299	0,0674	0,0475

Gráfico 3.2 - Fator de Utilização

(A) - cilindro infinito - $N=24$
(B) - metade inferior do cilindro infinito - $N=13$

$R=1,0$; $f_a=1,25$; $V_c=100,0V$

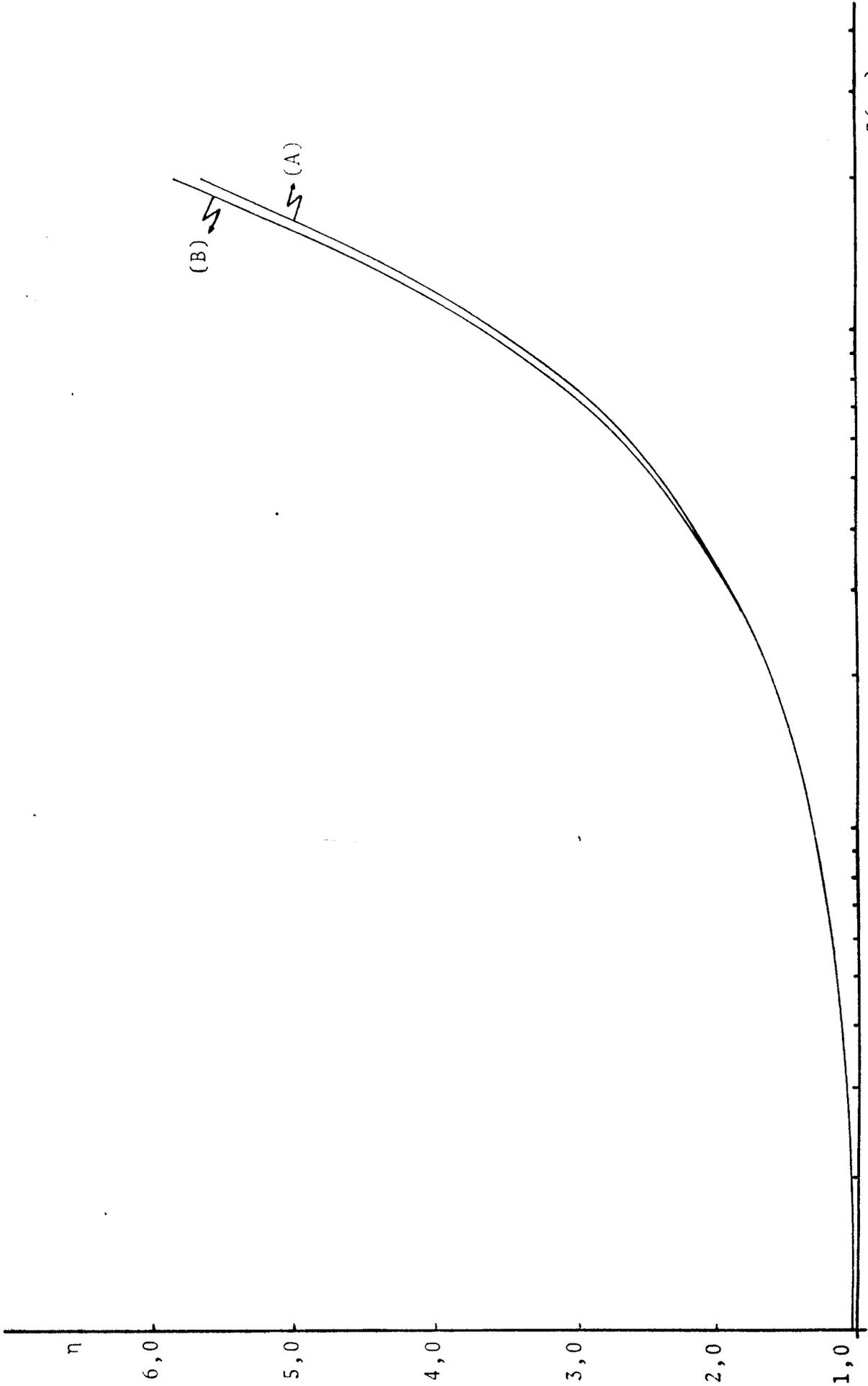


Gráfico 3.3 - Fator de Utilização
metade inferior do

cilindro infinito - $R=1,0\text{cm}$; $N=13$; $V_c=100,0\text{V}$

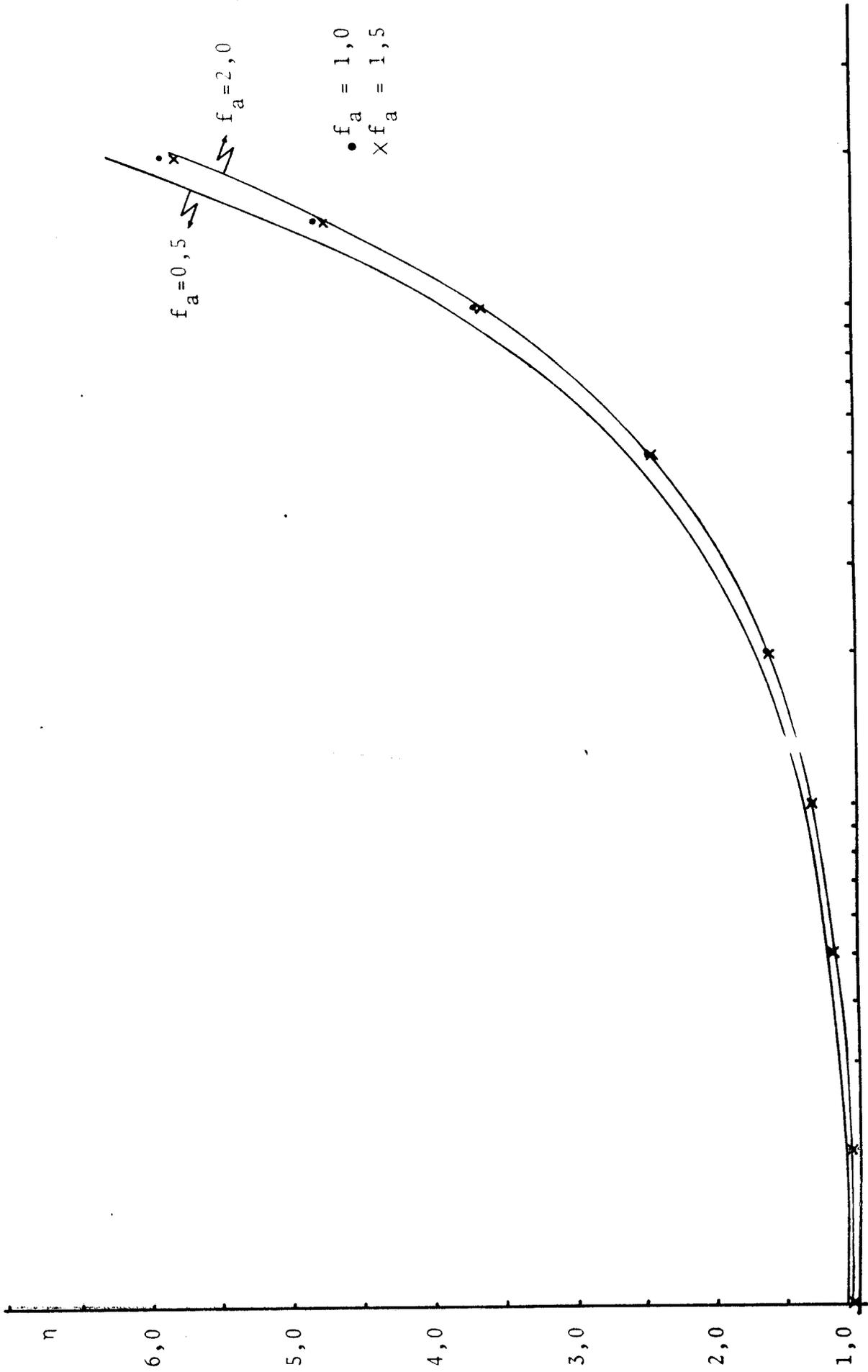


Tabela 3.7 - Variação de E_{\max} em função do número de cargas N

N	MSC metade inferior do cilindro infinito $f_a = 1,25$		analítico E_{\max} (V/cm)
	E_{\max} (V/cm)	ΔE (%)	
5	-35,4659	0,0079	-35,4631
7	-35,6508	0,5292	
9	-35,9950	1,5010	
11	-36,1832	2,0305	
13	-36,3977	2,6354	
15	-36,5368	3,0276	
17	-36,6676	3,3964	
41	-37,3366	5,2829	

R = 1,0cm

S = 10,0cm

Tabela 3.8 - Relação entre o fator de localização de cargas f_a e os raios de localização das cargas ρ_i e $R-a_2$ para a metade inferior do cilindro infinito

(a) $R=1,0\text{cm}$

$N=13$

f_a	$R-a_2$	ρ_i
0,50	0,8695	0,8780
0,75	0,8042	0,8232
1,00	0,7389	0,7725
1,25	0,6737	0,7256
1,50	0,6084	0,6824
1,75	0,5432	0,6426
2,00	0,4779	0,6060
2,25	0,4126	0,5724
2,50	0,3474	0,5415

(b) $R=1,0\text{cm}$

$f_a=1,5$

N	$R-a_2$	ρ_i
5	-0,1481	0,3745
7	0,2235	0,4896
9	0,4147	0,5734
11	0,5307	0,6353
13	0,6084	0,6824
15	0,6641	0,7190
17	0,7059	0,7482
41	0,8822	0,8891

Gráfico 3.4 - Comparação entre ρ_i e $R-a_2$

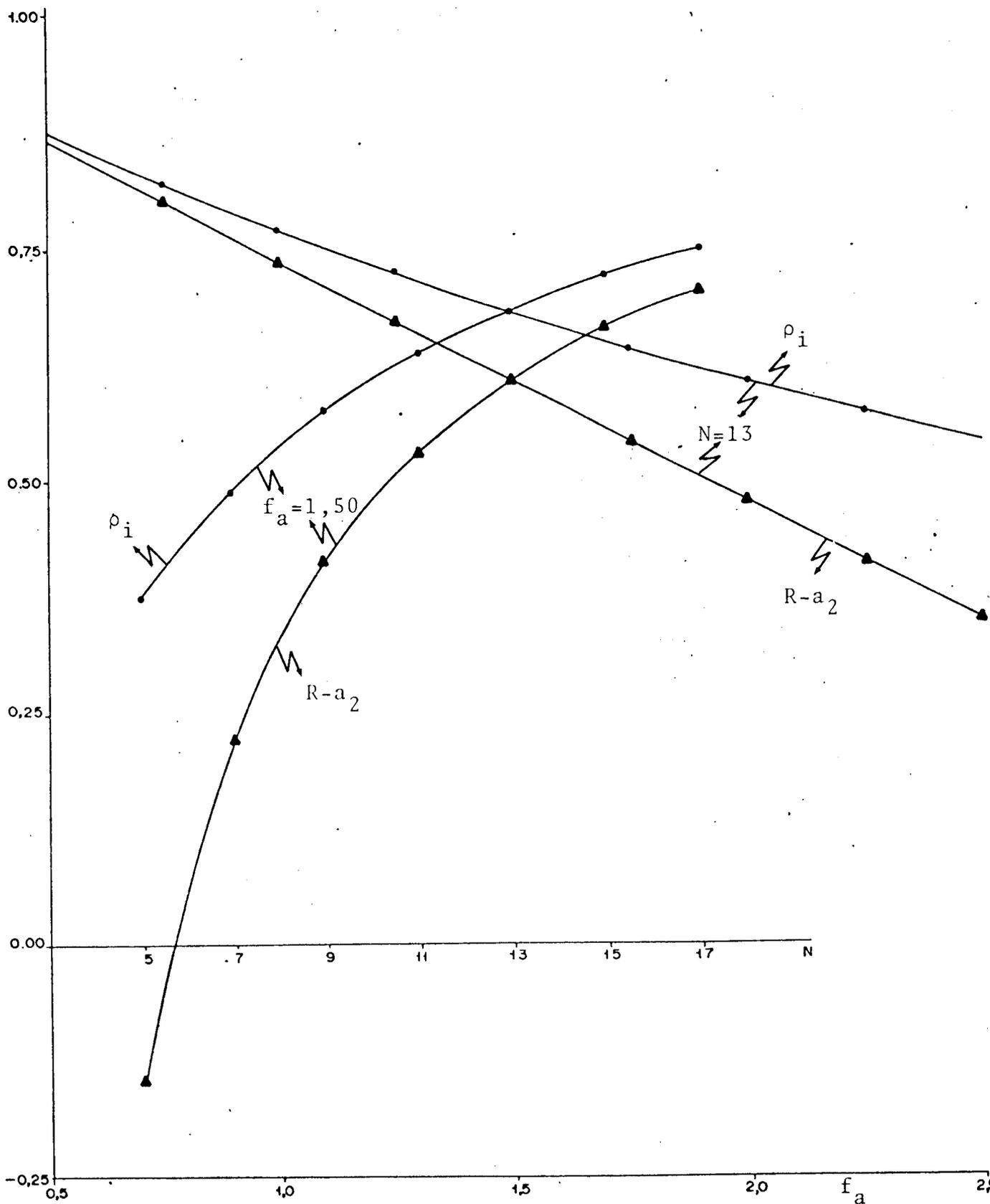


Tabela 3.9 - Fator de utilização de campo η em função de ρ_i (a) $R=1,0\text{cm}$ $S=10,0\text{cm}$ $V_C=100,0\text{V}$ $N=13$

f_a	ρ_i	η	$\bar{\phi}(\text{V})$	$\epsilon(\%)$
0,50	0,8780	3,8846	99,9062	0,2172
0,75	0,8232	3,7224	100,0214	0,3649
1,00	0,7725	3,6781	100,0338	0,3256
1,25	0,7256	3,6569	100,0283	0,2545
1,50	0,6824	3,6413	100,0213	0,1906
1,75	0,6426	3,6278	100,0156	0,1405
2,00	0,6060	3,6155	100,0121	0,1030
2,25	0,5724	3,6034	100,0076	0,0726
2,50	0,5415	3,5910	100,0097	0,0530

(b) $R=1,0\text{cm}$ $S=10,0\text{cm}$ $V_C=100,0\text{V}$ $f_a=1,5$

N	ρ_i	η	$\bar{\phi}(\text{V})$	$\epsilon(\%)$
5	0,3745	3,4943	99,9114	0,2818
7	0,4896	3,5811	100,0392	0,1864
9	0,5734	3,6110	100,0324	0,1977
11	0,6353	3,6248	100,0262	0,1981
13	0,6824	3,6413	100,0213	0,1906

Tabela 3.10 - Fator de utilização de campo η em função do ângulo de distribuição de cargas

N	$\alpha=1,0$ rad			$\alpha=2,0$ rad		
	η	$\bar{\phi}$ (V)	ϵ (%)	η	$\bar{\phi}$ (V)	ϵ (%)
5	4,2803	100,0505	0,1642	3,5926	100,0091	0,0311
7	4,5404	100,0418	0,1982	3,7059	100,0240	0,1149
9	4,7731	100,0323	0,1984	3,8048	100,0246	0,1498
11	4,8932	100,0253	0,1912	3,8588	100,0213	0,1612
13	5,0080	100,0204	0,1830	3,9112	100,0182	0,1641

$R=1,0\text{cm}$
 $f_a=1,5$

$S=10,0\text{cm}$

$V_C=100,0\text{V}$

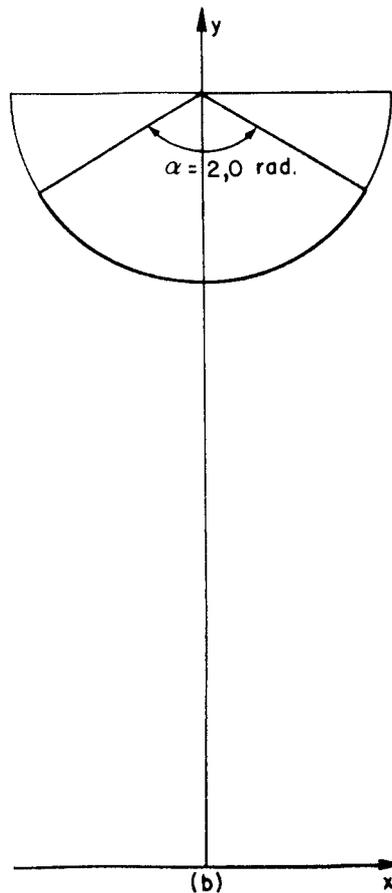
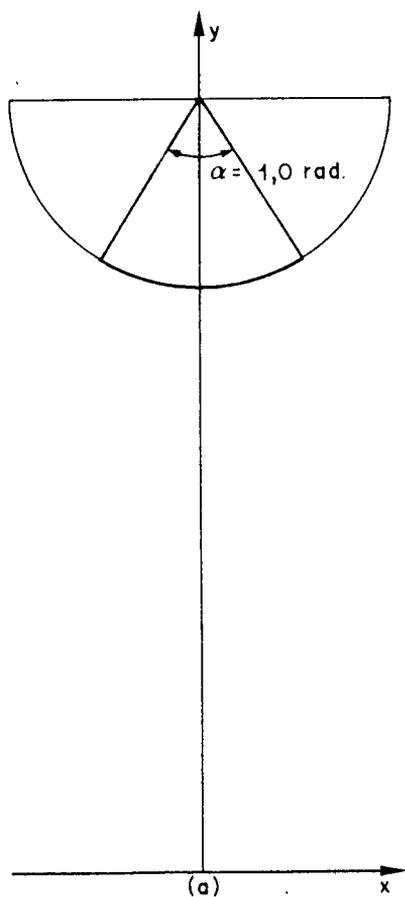
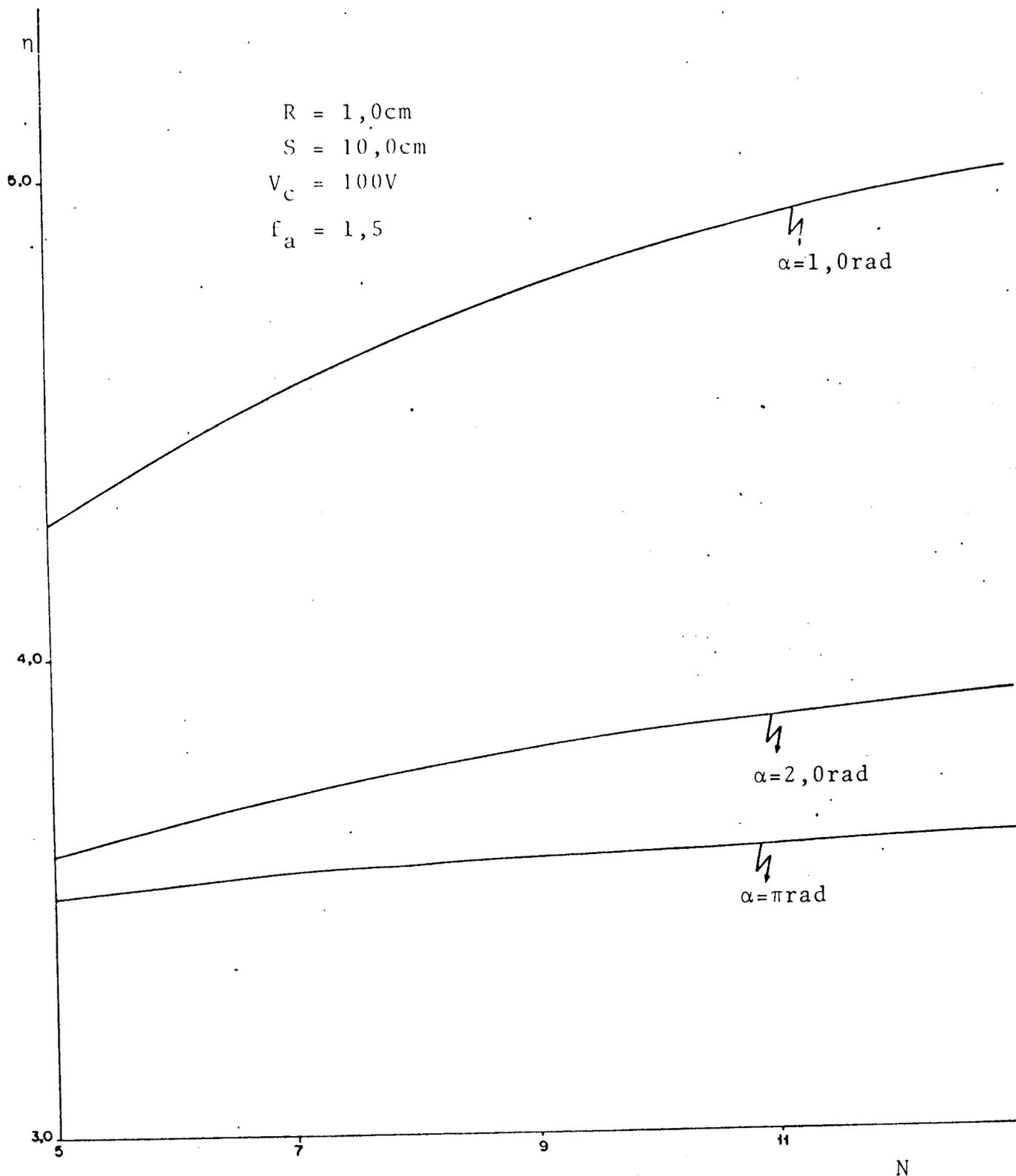


Fig. 3.4 - Ângulos de distribuição de cargas α

Gráfico 3.5 - Variação do fator de utilização η em função de N , tendo como parâmetro o ângulo α



3.1.1.3 - "STRIP INFINITO"

Tabela 3.11 - Variação do fator de utilização de campo η em função da distância S

S (cm)	D=2,0cm N=38		D=5,0cm N=42		D=8,0cm N=58				
	η	$\bar{\phi}$ (V)	ϵ (%)	η	$\bar{\phi}$ (V)	ϵ (%)	η	$\bar{\phi}$ (V)	ϵ (%)
0,05	1,0159	100,5418	2,6860	1,0159	100,3737	2,0281	1,0159	100,2227	1,6998
0,10	1,0333	100,5320	2,6705	1,0333	100,3620	2,0213	1,0333	100,2164	1,6961
0,20	1,0662	100,4730	2,6413	1,0662	100,3568	2,0083	1,0662	100,2142	1,6880
0,50	1,1617	100,5082	2,5602	1,1616	100,3479	1,9706	1,1616	100,2107	1,6632
1,00	1,3125	100,4842	2,4462	1,3117	100,3369	1,9143	1,3115	100,2059	1,6300
2,00	1,5856	100,4474	2,2713	1,5789	100,3197	1,8204	1,5767	100,1982	1,5691
5,00	2,2824	100,3841	1,9613	2,2327	100,2851	1,6285	2,2128	100,1803	1,4330
10,00	3,2775	100,3323	1,7056	3,1278	100,2525	1,4459	3,0591	100,1624	1,2924
15,00	4,1789	100,3034	1,5624	3,9229	100,2325	1,5349	3,7979	100,4608	1,2013
20,00	5,0265	100,3378	1,4681	4,6643	100,2188	1,2580	4,4811	100,2111	1,1362

R = 1,0cm

V_C = 100,0V

f_a = 1,25

Tabela 3.12 - Variação do fator de utilização de campo η em função do fator de localização de cargas f_a

f_a	η	$\bar{\phi}(V)$	$\epsilon(\%)$
0,50	3,1723	100,1386	1,2162
0,75	3,0765	100,1521	1,2802
1,00	3,0613	100,1608	1,2900
1,25	3,0591	100,1624	1,2924
1,50	3,0588	100,1625	1,2930
1,75	3,0587	100,1614	1,2927
2,00	3,0589	100,1574	1,2841
2,25	3,0578	100,1044	1,2064
2,50	3,0569	100,2043	1,4110

$R=1,0\text{cm}$

$D=8,0\text{cm}$

$S=10,0\text{cm}$

$V_c=100,0V$

$N=58$ cargas

Gráfico 3.6 - Fator de utilização para "strip" infinito

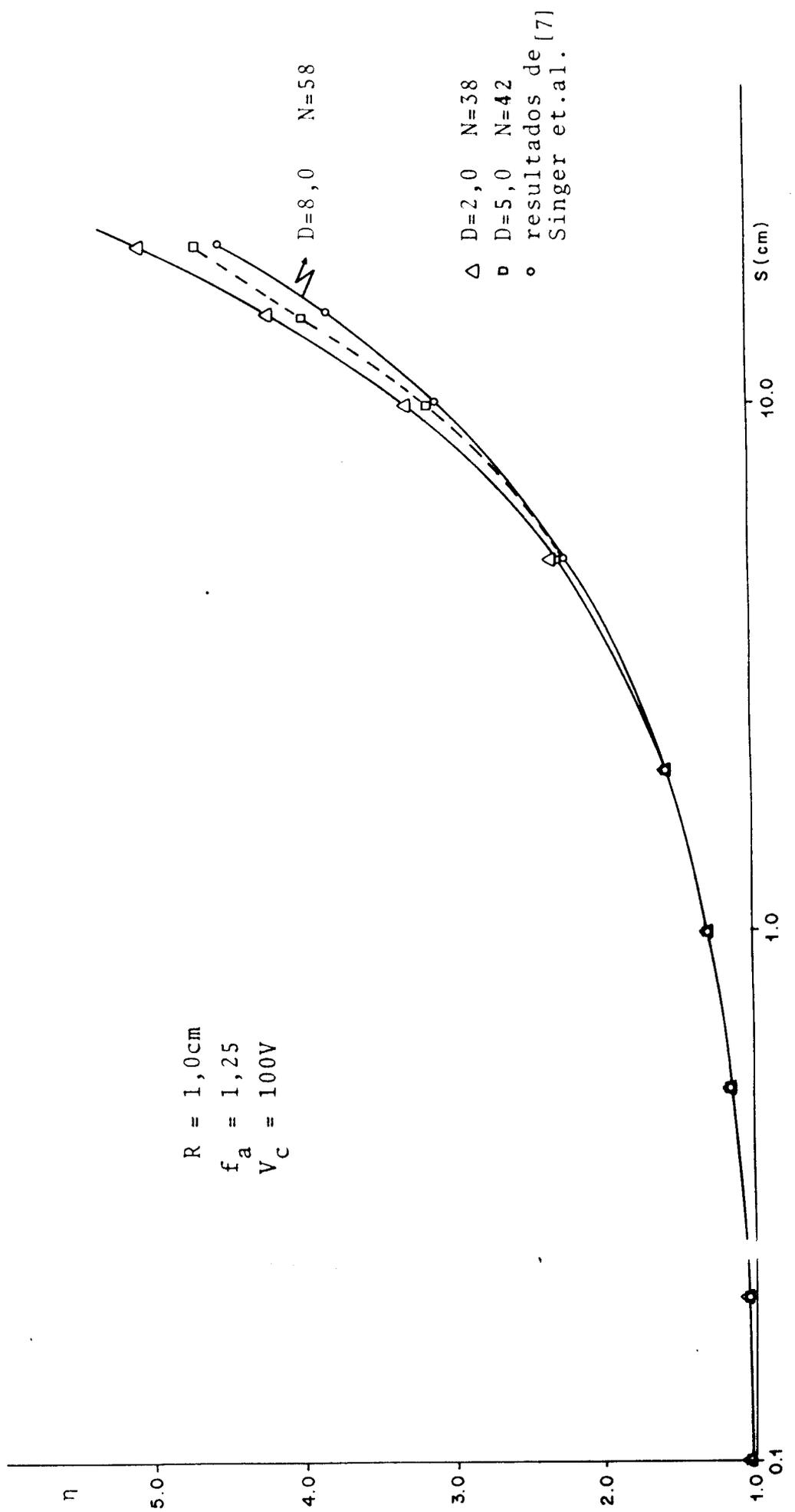
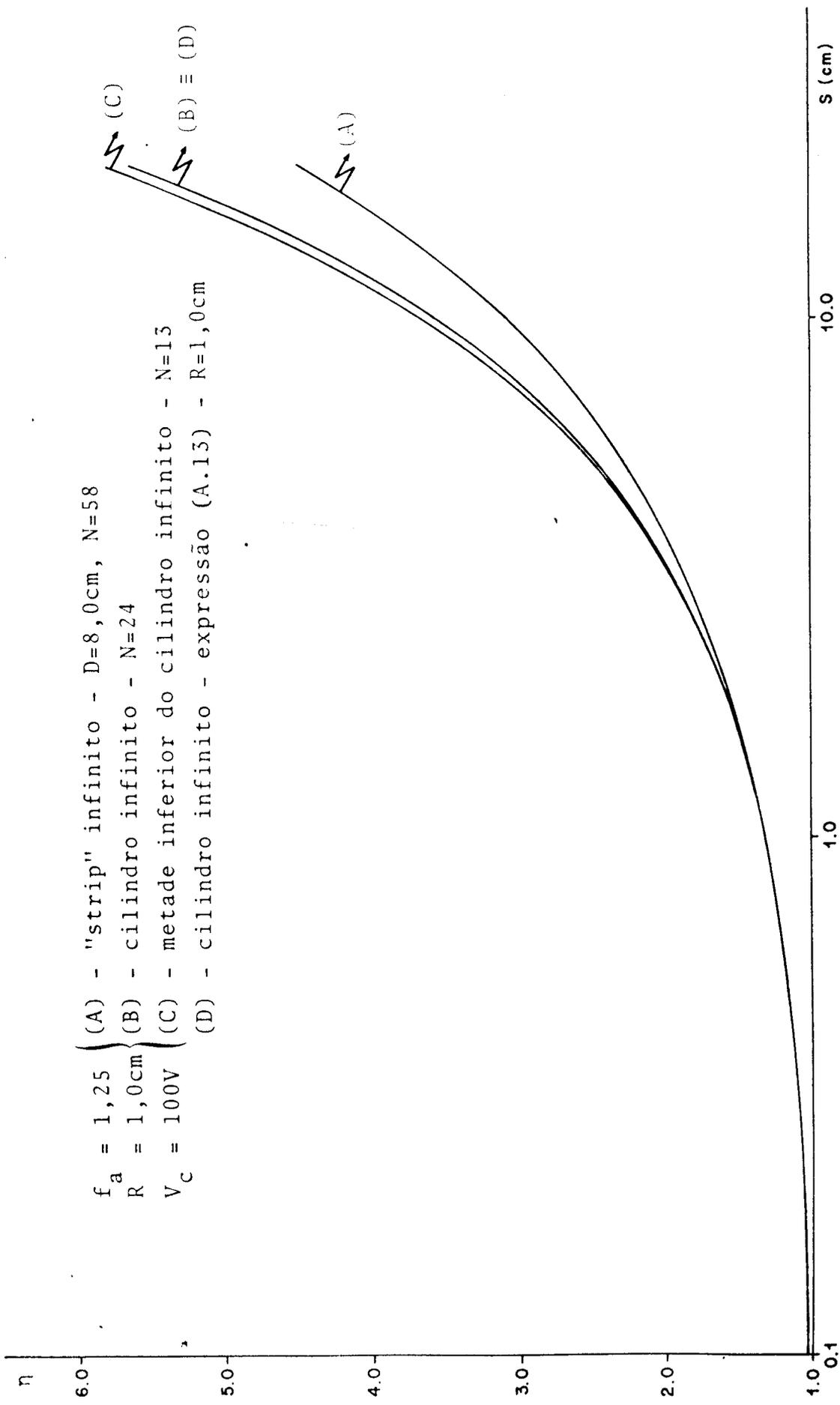


Gráfico 3.7 - Fator de Utilização



3.1.2 - RESULTADOS OBTIDOS PELO MDF

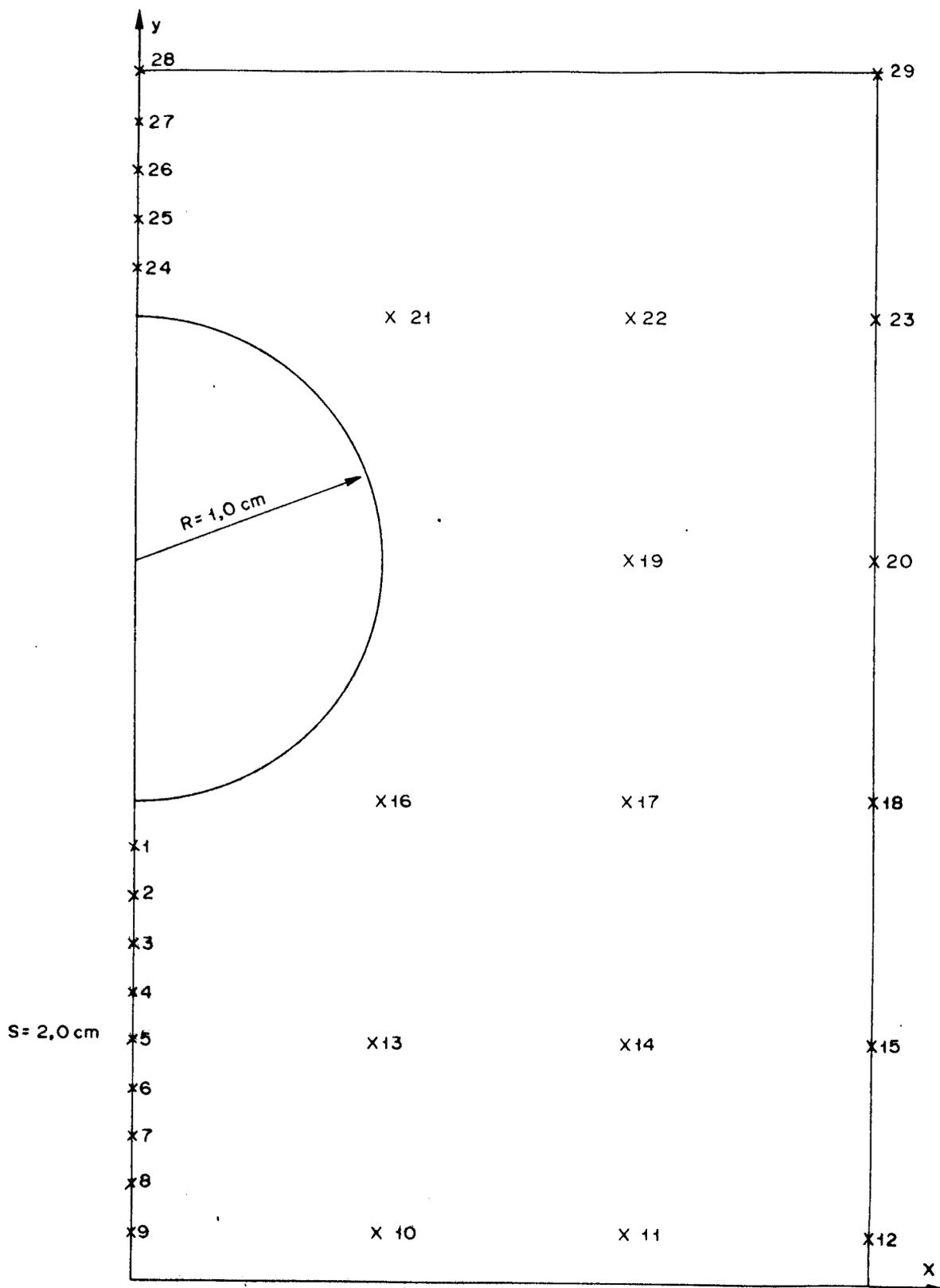


Fig. 3.5 - Coordenadas dos pontos escolhidos para apresentação dos potenciais calculados pelo MDF

Fig. 3.6 - Equipotenciais para o cilindro infinito segundo o MDF (-) e o MSC(--)

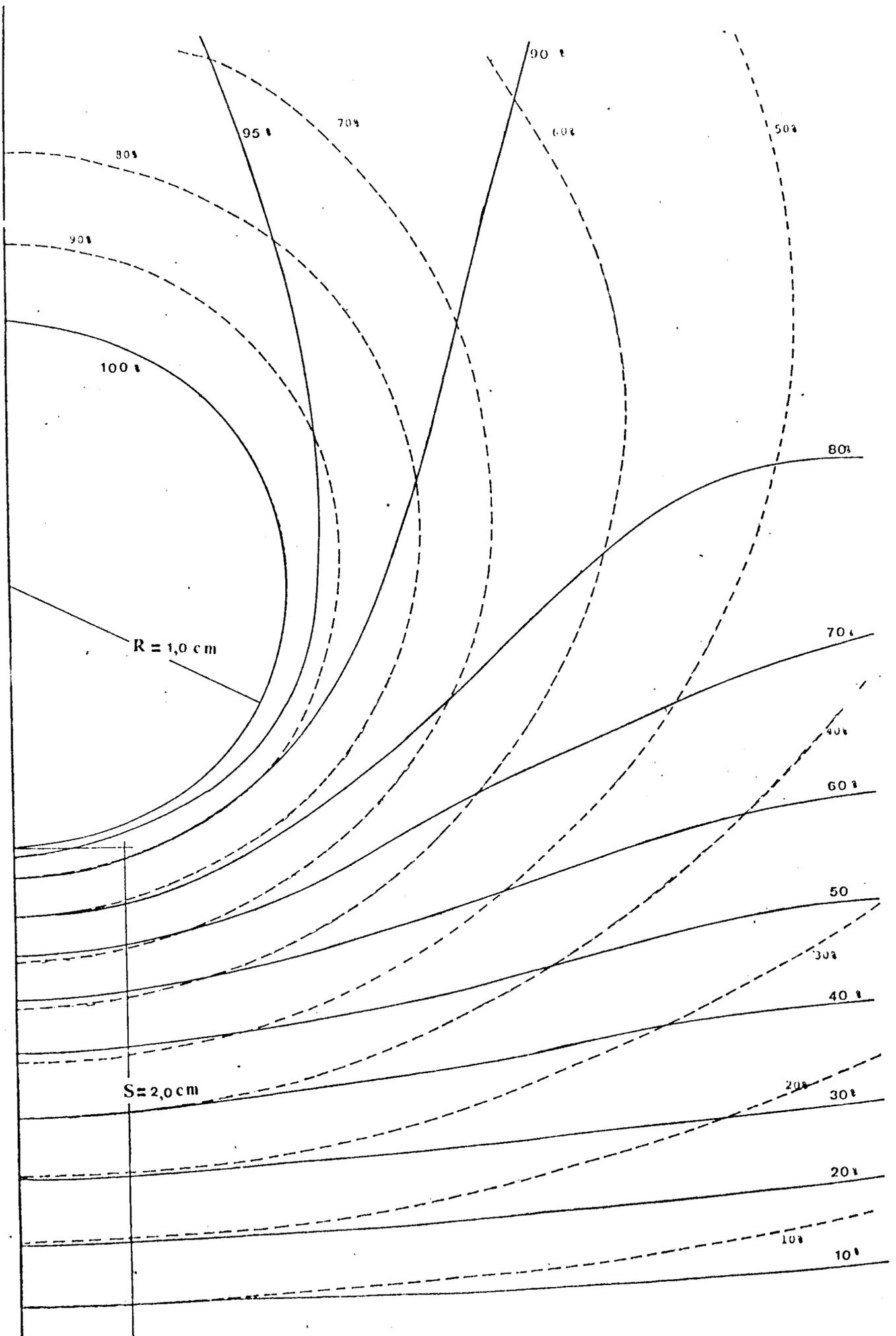


Tabela 3.13 - Potenciais nos pontos assinalados na Fig. 3.5

			ϕ (V)				
			MDF				MSC
N ^o	coordenadas (cm)		(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
	x	y	n ^o s = 354 h = 0,2 cm dados aleatórios (metade positiva do cilindro infinito) convergência com 427 iterações $\epsilon = 0,001$	n ^o s = 694 h = 0,2 cm dados aleatórios (cilindro infinito) convergência com 436 iterações $\epsilon = 0,001$	n ^o s = 694 h = 0,2 cm dados do MSC (cilindro infinito) convergência com 401 iterações $\epsilon = 0,001$	n ^o s = 2733 h = 0,1 cm dados aleatórios (cilindro infinito) convergência com 2000 iterações $\epsilon = 0,0001$	N=24 cargas $f_a = 1,25$ (cilindro infinito)
1	0,0	1,8	83,507	83,543	83,507	82,613	85,332
2	0,0	1,6	71,369	71,426	71,369	70,136	72,745
3	0,0	1,4	60,862	60,930	60,862	59,423	61,566
4	0,0	1,2	51,195	51,267	51,196	49,724	51,383
5	0,0	1,0	42,059	42,128	42,060	40,693	41,923
6	0,0	0,8	33,286	33,348	33,287	32,116	32,990
7	0,0	0,6	24,768	24,817	24,768	23,852	24,439
8	0,0	0,4	16,422	16,457	16,423	15,795	16,154
9	0,0	0,2	8,185	8,203	8,185	7,867	8,036
10	1,0	0,2	7,626	7,680	7,626	7,572	7,137
11	2,0	0,2	6,691	6,807	6,691	6,699	5,347
12	3,0	0,2	6,298	6,452	6,298	6,313	3,772
13	1,0	1,0	38,415	38,660	38,416	38,306	36,372
14	2,0	1,0	32,944	33,536	32,946	33,010	26,449
15	3,0	1,0	30,826	31,684	30,827	30,907	18,453
16	1,0	2,0	77,770	78,055	77,770	78,027	75,692
17	2,0	2,0	61,854	62,968	61,856	62,039	50,000
18	3,0	2,0	57,326	60,022	57,328	57,490	34,173
19	2,0	3,0	80,354	81,293	80,357	80,599	63,627
20	3,0	3,0	75,439	76,981	75,443	75,661	44,250
21	1,0	4,0	95,479	95,696	95,480	95,598	85,078
22	2,0	4,0	87,588	88,232	87,592	87,819	63,627
23	3,0	4,0	84,458	85,309	84,465	84,702	47,639
24	0,0	4,2	98,559	98,597	98,560	98,498	92,696
25	0,0	4,4	97,652	97,714	97,654	97,562	86,566
26	0,0	4,6	97,058	97,136	97,061	96,925	81,319
27	0,0	4,8	97,716	96,803	96,719	96,553	76,758
28	0,0	5,0	96,604	96,694	96,607	96,430	72,745
29	3,0	5,0	86,960	87,654	86,965	87,207	46,348

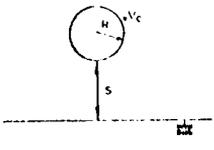
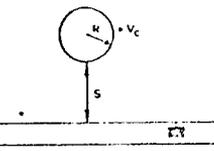
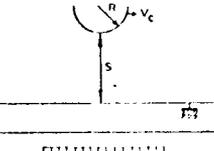
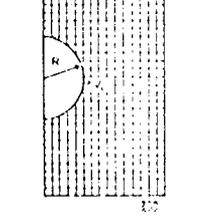
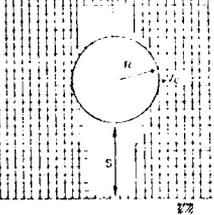
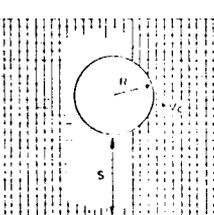
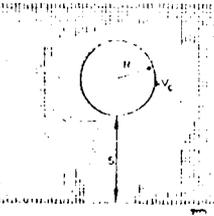
3.1.3 - RESULTADOS COMPARATIVOS ENTRE MSC, MDF E MÉTODO ANALÍTICO

Tabela 3.14 - Comparação dos resultados obtidos pelo MSC e MDF e os calculados analiticamente de η e E_{\max}

R = 1,0cm

S = 2,0cm

$V_C = 100,0V$

MÉTODO	CONFIGURAÇÃO	E_{\max} (V/cm)	η
calculado analiticamente		-80,2278	1,6015
MSC N = 24 $f_a = 1,25$		-80,2352	1,6047
MSC N = 13 $f_a = 1,25$		-80,5984	1,6120
MDF n = 354 $\alpha = 1,5$ h = 0,2cm dados iniciais aleatórios		-82,4650	1,6493
MDF n = 694 $\alpha = 1,5$ h = 0,2cm dados iniciais aleatórios		-82,2850	1,6457
MDF n = 2753 $\alpha = 1,5$ h = 0,1cm dados iniciais aleatórios		-86,9350	1,7387
MDF n = 694 $\alpha = 1,5$ h = 0,2cm dados iniciais iguais aos potenciais dos nós fornecidos pelo MSC (N=24 e $f_a=1,25$)		-82,4650	1,6493

3.2 - DISCUSSÕES

Dos resultados obtidos (tabela 3.1 e gráfico 3.1) para o sistema cilindro infinito-plano, observa-se que o fator de utilização de campo, η , desse sistema aumenta com o aumento de S . Este comportamento de η se deve ao fato de que ao aumentarmos a distância de separação entre os eletrodos, altera-se a configuração de campo constituído por estes eletrodos, tornando-o menos homogêneo.

A tabela 3.1 mostra ainda que os valores de η obtidos pelo MSC com a condição de cálculo de $f_a=1,25$ e $N=24$ cargas concordam plenamente com os resultados determinados analiticamente pela expressão (A-13) para cada S . Neste caso, dentro do domínio utilizado para S , o erro relativo do potencial no ponto de teste, ϵ , verificado, foi de $2 \cdot 10^{-4}$ a 0,453%, sendo portanto menor que 0,5%. O erro do potencial decresce à medida que S aumenta. Este comportamento observado no erro do potencial, supõe-se que seja devido ao decréscimo da influência das cargas imagens com o aumento de S , nos potenciais da superfície do eletrodo.

O fator de utilização de campo η , por outro lado, quando calculado pelo MSC (tabela 3.2) varia com o fator de localização de cargas f_a . O η aumenta com f_a aproximando-se de η^* , portanto dos valores determinados analiticamente. Em relação aos erros no potencial dos pontos de teste, estes também variam com o f_a . Decresce até atingir um valor mínimo para um determinado f_a passando a aumentar novamente para f_a maiores que a deste ponto. Este comportamento do erro no potencial indica a existência, na aplicação do MSC, de um fator de localização de cargas f_a ótimo, no qual o erro no potencial dos pontos de teste em relação ao potencial atribuído é o menor possível na sua primeira aproximação. Nas condições de cálculo e dentro da faixa dos f_a analisados na tabela 3.2, o valor de f_a ótimo de 1,25. Os menores erros no potencial dos pontos de teste foram observados para uma faixa de $1,0 \leq f_a \leq 2,0$. O efeito do fator de localização sobre o erro do potencial está relacionado à menor ou maior concentração de cargas. Um valor alto do fator f_a significa uma concentração excessiva de cargas, o que influe na oscilação das equipotenciais da superfície do eletrodo. Este fato explica porque o erro do poten

cial aumenta acima de um determinado f_a , e portanto o comportamento dos resultados observados na tabela 3.2.

Com $f_a=1,25$ obtêm-se pelo MSC, $\eta=3,5466$ enquanto o valor analítico é de $\eta^*=3,5463$, portanto com uma concordância bastante grande. Particularmente para a configuração de eletrodos em estudo, pode-se dizer da tabela 3.2 que dentro da faixa de $1,0 \leq f_a \leq 2,0$ os valores de η calculados pelo MSC e o analítico apresentam uma concordância satisfatória. Além do resultado puramente numérico, pode-se melhor analisar os resultados obtidos a partir da configuração das equipotenciais. Na Fig. 3.3 temos as equipotenciais obtidas pelo MSC para $f_a=1,25$ e $S=2\text{cm}$, onde se observa uma configuração esperada.

Quanto ao campo elétrico máximo, E_{\max} , calculado pelo MSC, a configuração cilindro infinito-plano, apresenta apenas uma pequena dispersão em relação ao E_{\max} obtido analiticamente, em todo o domínio de S empregado com um erro não superior a 0,2% (tabela 3.3). O comportamento da variação da dispersão de campo elétrico é análogo ao observado para o erro no potencial dos pontos de teste. Este comportamento se explica pelo fato do campo elétrico ser determinado diretamente a partir do potencial.

Utilizando-se apenas a metade inferior do cilindro infinito, os valores de E_{\max} obtidos pelo MSC em relação aos analíticos apresentam um desvio que aumenta com o aumento de S . Esta característica é complementemente oposto ao caso do cilindro total infinito. No entanto, para a condição de $S \ll R$ em ambas as situações os desvios no campo elétrico máximo, ΔE são da mesma ordem. Este resultado se deve ao fato de que para $S \ll R$ a homogeneidade do campo pouco se altera com a variação de qualquer um dos parâmetros, uma vez que a homogeneidade do sistema em termos de campo elétrico é devida somente a parte do eletrodo mais próximo ao plano de terra, e portanto, no caso, da configuração cilíndrica da parte inferior do cilindro. Em vista dos resultados da tabela 3.3, onde o desvio máximo verificado para a metade inferior do cilindro infinito-plano é de 3,55% em relação ao analítico, se tem que o valor de cálculo de E_{\max} para esta configuração pode ser perfeitamente utilizada como resultado da configuração cilindro infinito total-plano com boa aproximação. E isto pode ser consta

tado também na tabela 3.4 no caso particular de $S=10,0\text{cm}$, por exemplo tomando-se o resultado de $f_a=1,25$, onde se tem E_{max} para o cilindro infinito total, metade inferior do cilindro e analítico, 35,466, 36,397 e 35,463 respectivamente.

Dentro das condições de cálculo utilizadas na tabela 3.4, os melhores resultados de E_{max} foram obtidos para o cilindro infinito numa faixa de $1,0 \leq f_a \leq 2,0$ com desvios menores que 0,08%, enquanto que com a metade inferior do cilindro infinito o melhor resultado de E_{max} é obtido para $f_a=2,5$ com desvio de cerca de 0,2%. O fator de localização de cargas f_a , apesar das duas configurações serem semelhantes na sua parte inferior, não coincide para melhor resultado de E_{max} , devido às influências das cargas serem diferentes em ambos os casos.

No caso da metade inferior do cilindro, $f_a=1,25$.

A utilização de $N=13$ cargas, que é a metade das cargas do cilindro infinito, representa uma quantidade de cargas excessiva. Com $f_a=1,25$, o número de cargas fictícias necessárias para se obter um resultado satisfatório está em torno de $5 \leq N \leq 9$ (tabela 3.5 (b), (c) e (d)), onde se tem para E_{max} , 3,5466, 3,5604 e 3,5995.

Da tabela 3.5, verifica-se ainda que os resultados de η , para um dado N , fixo, apresenta o mesmo comportamento da configuração de cilindro infinito, ou seja, a de decrescer com o aumento do fator de localização de cargas f_a . Entretanto, para f_a fixo, o η aumenta com o aumento de N . Estes fatos estão relacionados com a variação do raio de localização das cargas, as quais aumentam ou diminuem de acordo com f_a e N , de forma a manter uma distribuição uniforme possível, alterando assim o fator de utilização de campo η . Para um dado N , o aumento de f_a faz com que os valores de η se aproximem daqueles η^* obtidos analiticamente. Evidentemente, nem sempre o menor erro no potencial de testes corresponde ao melhor resultado de E_{max} , ou seja, daquele valor onde o calculado por MSC mais se aproxima dos obtidos analiticamente.

Os resultados da tabela 3.5 mostram claramente esta tendência. Enquanto temos para $\eta^*=3,5463$, obtém-se com $N=9$, para $f_a=1,75$, $\eta=3,5604$, $\epsilon=0,0160\%$, para $f_a=2,00$, $\eta=3,5516$, $\epsilon=0,0344\%$ e

com $N=11$, para $f_a=2,00$, $\eta=3,5652$, $\epsilon=0,0161\%$, para $f_a=2,50$, $\eta=3,5527$, $\epsilon=0,0787\%$. Esta discrepância supõe-se que seja devido a estarmos considerando como critério de precisão somente o erro relativo do potencial nos pontos de teste em relação ao potencial atribuído na superfície do eletrodo, o que influe na compensação dos erros, comuflando os desvios reais que teriam no ponto de E_{\max} .

Assim, certamente com a introdução de critérios de com paração mais severas, como a minimização dos erros de segun^a a aproximação, ou da imposição de que a componente tangencial nos pontos de contorno seja o menor possível, se possa obter resulta dos menos conflitantes entre E_{\max} , η e ϕ .

Fixando-se N , à medida que S aumenta, o valor de η ob tido pelo MSC que mais se aproxima do η^* obtido analiticamente é conseguido com f_a crescentes (tabela 3.6), o que significa que à medida que S aumenta em relação à R , o modelo de carga única cen trada no eixo cilindro infinito, é o melhor.

A curva característica de η em função de S (gráfico 3. 2) mostra que ambas as configurações, a de cilindro infinito (A) e metade inferior do cilindro infinito (B), possuem comportamen tos similares. Para um dado f_a existe um S , abaixo do qual estas curvas se superpõem (região I), e acima desse valor as curvas se distanciam com o aumento de S (região II). No caso específico de $f_a=1,25$, a região I é definida para $S \leq 3,0\text{cm}$. Numericamente, no caso, os valores são coincidentes, com uma precisão de 10^{-4} , pa ra $S < R$ (tabelas 3.1 e 3.6).

Por outro lado, pode-se observar do gráfico 3.3 que pa ra $f_a=1,0$, $1,5$ e $2,0$ as curvas são praticamente coincidentes no caso de metade inferior do cilindro infinito, o que não se veri fica para $f_a=0,5$. Este fato mostra que f_a pequenos resulta para esta configuração uma insuficiência nas equipotenciais, não po dendo portanto reproduzir exatamente as características desta con figuração de eletrodos.

Da tabela 3.7, para $S=10,0\text{cm}$ e $f_a=1,25$, verifica - se que o menor desvio ΔE , do campo elétrico máximo E_{\max} em relação ao E_{\max} calculado analiticamente é obtido para $N=5$. Com $N=13$, com portamento semelhante é obtido para $f_a=2,25$ (tabela 3.5). Para es

te caso, em que se tem $S=10,0\text{cm}$, o comportamento da configuração de campo tende para a condição de $S \gg R$, ou seja, do modelo de carga única centrada no eletrodo. Logo, quando se utiliza $f_a=1,25$, requer-se uma quantidade menor de cargas.

A influência do fator de localização f_a sobre o potencial ϕ , e portanto sobre o campo elétrico máximo E_{max} e fator de utilização de campo η , pode ser melhor percebida pelo critério de curvatura ρ_i . Esse critério evita a aproximação excessiva entre as cargas, fazendo-se com que o raio de localização de cargas $R-a_2$, para o caso de se utilizar somente o f_a , seja sempre menor que o ρ_i . Desta forma, aquelas distribuições de cargas que resultam para um dado N e f_a em raios $R-a_2$ negativos, portanto não representando situações reais, podem ser automaticamente selecionados. Dos resultados da tabela 3.8 pode-se notar que esta situação ocorre para os casos de N fixos com f_a grandes, e para f_a fixos com N pequenos. Na configuração metade inferior do cilindro infinito para $R=1,0\text{cm}$ e $f_a=1,5$ (tabela 3.8(b)), o raio $R-a_2$ negativo é verificado para $N=5$, o que significa na aplicação do NSC de que para o f_a deste caso que N deve ser pequeno, porém superior a 5 de forma a se obter os resultados mais próximos da situação real.

O comportamento de $R-a_2$ e ρ_i em função de f_a e N pode ser melhor visualizada a partir do gráfico 3.4. Note-se as curvas de $R-a_2$ e ρ_i para um dado N , são mais próximas quanto menor for o f_a , tendendo a se distanciar à medida que f_a aumenta. Para f_a fixos, o comportamento é o inverso com o aumento de N . Este comportamento mostra também que para um dado N ou f_a , existe uma faixa em que pode se obter resultados satisfatórios.

Dos resultados da tabela 3.5f e 3.9a, o comportamento de η em relação ao f_a é análogo tanto para o critério de f_a ou ρ_i . Entretanto, o f_a de menor erro no potencial dos pontos de teste ϵ passa de $f_a=2,25$ com o critério somente de f_a , para $f_a=2,50$ com o critério da curvatura ρ_i . O η passa de 3,5690 para 3,5910 respectivamente com os erros no potencial de 0,0356% e 0,0530%, enquanto o valor de η^* analítico é de 3,5463.

Este resultado mostra que nas condições em que se tem $S/R \approx 10$, o comportamento do campo é melhor avaliado com modelos

em que as cargas estão mais concentradas nas proximidades do centro do eletrodo.

A região em que são distribuídas as cargas também influencia apreciavelmente os resultados de η (tabela 3.10 e gráfico 3.5), principalmente das regiões mais próximas do plano de terra. Estes efeitos podem também ser observados a partir de uma configuração do tipo "strip" infinito em que a parte inferior do eletrodo, portanto a região mais próxima ao plano de terra consiste numa forma geométrica igual ao cilindro infinito.

Da tabela 3.11 temos que para $f_a=1,25$ e secção reta $D=2,0, 5,0$ e $8,0\text{cm}$, com a mesma densidade de carga na parte curva e reta para $D=2,0\text{cm}$ e com densidades de cargas maiores na parte reta para $D=5,0$ e $8,0\text{cm}$, o comportamento de η é análogo ao das configurações estudadas.

Quando a distância entre os eletrodos S é pequena, os valores de η são praticamente coincidentes nas três situações de D (gráfico 3.6) defasando-se a medida que S aumenta. Esta concordância nos resultados verifica-se no caso de $D=2,0\text{cm}$, em relação aos de $D=5,0$ e $8,0$ para $S < 2,0\text{cm}$ e entre $D=5,0$ e $8,0\text{cm}$ para $S < 5\text{cm}$. Esta diferença, com certeza surge devido a densidade de cargas utilizadas na parte reta do eletrodo para $D=2\text{cm}$ e $D=5,0$ e $D=8,0\text{cm}$ serem tomadas de formas diferentes, o que mostra, por outro lado, que as cargas distribuídas nesta parte também influem na configuração do campo elétrico a partir de uma dada distância de separação S . Nota-se também que para um dado f_a , S e N , para $S > R$, o η diminui com o aumento de D , o que significa maior homogeneidade do campo elétrico. Fisicamente, o aumento de D implica no aumento da densidade de fluxo de linhas de força que alcançam o plano de terra, tornando com isso a configuração de campo mais uniforme. Devido a esta variação no fluxo das linhas de força, para $S > R$, as alterações nas dimensões de D , influenciam os valores de E_{max} , logo os valores também de η .

Percebe-se da tabela 3.12 que o η da configuração de "strip" infinito varia com f_a , com a mesma característica e os valores de η não muito diferentes daqueles obtidos para configurações de cilindro infinito e metade inferior do cilindro infinito. Comparando-se com o η^* analítico do cilindro infinito, a discre

pância é da ordem de 10-20%.

Comparando os resultados de "strip" infinito (gráfico 3.6) com aqueles obtidos por Singer et al nas mesmas condições com $D=8,0\text{cm}$, verifica-se que os resultados são plenamente concordes.

Do gráfico 3.7 podem ser observadas as curvas características de η em relação a S das três configurações estudadas, ou seja, "strip" infinito (curva A), cilindro infinito (curva B) e metade inferior do cilindro infinito (curva C) obtidas pelo MSC com $f_a=1,25$, bem como uma comparação com os valores η^* calculados analiticamente para cada S .

Desta comparação, verifica-se que o η para as três configurações são coincidentes para $S \leq 2,0\text{cm}$, diferenciando-se a medida que S aumenta. Como o valor de η^* analítico é aproximadamente igual ao do cilindro infinito para cada S , nas condições de cálculo do gráfico 3.7, pode-se dizer que para um dado R , existe um determinado S , onde os valores de η determinados para distâncias menores que S , são aproximadamente iguais, portanto configurações de campos iguais. Este resultado é importante na prática de Alta Tensão, uma vez que facilita bastante os cálculos na análise do campo elétrico.

Para $S > 2\text{cm}$, a forma geométrica do eletrodo passa a influenciar na configuração do campo elétrico, o que resulta no afastamento das curvas do gráfico 3.7. Na prática, o efeito da forma geométrica é imperceptível para as configurações estudadas somente para $S \ll R$, sendo acentuada para $S \gg R$.

Comparando-se os resultados obtidos dos potenciais pelo MDF e MSC, tabela 3.13 e Fig. 3.6, para a configuração de cilindro infinito nas mesmas condições geométricas, verifica-se que os potenciais obtidos para os pontos situados entre cilindro e o plano de terra são aproximadamente iguais, ao passo que fora dessa região os potenciais calculados pelo MDF mais se distanciam daqueles obtidos pelo MSC quanto mais afastado for o ponto desta região. Este fato pode melhor ser visualizado a partir da configuração das equipotenciais obtidas pelo MDF e MSC (Fig. 3.6). Enquanto as equipotenciais obtidas pelo MSC apresentam um aspecto esperado, as pelo MDF apresentam uma distorção acentuada, exceto

na região mais próxima do cilindro infinito do plano de terra.

Este aspecto da configuração de equipotenciais obtido pelo MDF se deve a dificuldade de impor a condição de potencial nulo nos limites de contorno externo do domínio ($x=+3,0\text{cm}$ e $y=5,0\text{cm}$). Como na região entre os eletrodos as potenciais dos contornos podem ser fixados corretamente, as equipotenciais também resultam numa configuração próxima a esperada.

Evidentemente que problemas deste tipo influem na precisão do método, bem como nos resultados obtidos.

Fazendo uma comparação dos resultados de E_{max} e η obtidos analiticamente daqueles obtidos através de cálculo pelo MSC e MDF para a configuração de cilindro infinito-plano de terra, com $R=1,0$ e $S=10,0\text{cm}$ (tabela 3.14), nota-se que os resultados obtidos pelo MSC são mais concordantes com os valores analíticos do que aqueles obtidos pelo MDF. Nas condições da tabela 3.14, os resultados obtidos para metade inferior do cilindro infinito são praticamente iguais aos do cilindro infinito, portanto são também com os valores analíticos.

Para a aplicação do MDF, a utilização da metade positiva em relação ao eixo x do cilindro infinito ou do cilindro infinito para a mesma dimensão da malha também pouco influi nos resultados, sendo aproximadamente iguais.

Nota-se também dos resultados (tabelas 3.13 e (3.14) que o refinamento da malha, bem como alterações nos potenciais iniciais, pouco influem na melhora dos resultados anteriormente obtidos. A utilização de uma malha mais refinada deveria, a princípio, resultar uma melhora dos resultados de E_{max} e η . Entretanto, isto não ocorre, supondo-se que com o aumento do número de nós aumenta-se também o erro cumulativo da resolução numérica.

Quanto ao efeito dos potenciais iniciais, pode ser visto comparando-se os resultados de E_{max} e η obtidos nas mesmas condições com utilização de potenciais aleatórios e com as potenciais obtidas através do MSC. Os valores de E_{max} e η pouco diferem entre si, o que mostra de um lado a pouca influência das potenciais iniciais, e do outro, da inadequacidade do MDF para aplicação em problemas de campos elétricos com condições de contorno como as estudadas.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES

Dos resultados obtidos para os sistemas de eletrodos , cilindro infinito-plano de terra, metade inferior do cilindro infinito-plano de terra e "strip"-plano de terra, pode-se concluir que o fator de utilização de campo dessas configurações de eletrodos apresenta uma dependência com a configuração geométrica do sistema de eletrodos e das suas dimensões.

O fator de utilização de campo é uma função da distância S , o qual aumenta com o aumento de S . Para as configurações estudadas, os resultados de η obtidos pelo MSC são aproximadamente iguais quando $S \leq R$ se no cálculo são utilizados a mesma quantidade de cargas e se estas são distribuídas de acordo com o mesmo fator de localização. Para $S > R$, o η é distinto para cada configuração sendo a sua diferença mais acentuada quanto maior for a distância entre os eletrodos. Nesta região, onde $S > R$, o valor de η para "strip" é menor que a do cilindro infinito, e este menor ao da metade inferior do cilindro infinito. No caso do "strip" a dimensão da parte reta influi no valor do fator de utilização de campo η , sendo que o aumento de D , acarreta na redução do valor de η .

O cálculo de E_{\max} e η pelo MSC, depende ainda da quantidade de cargas N utilizada para substituir o campo gerado pelas cargas na superfície do eletrodo, assim como da sua localização e da distribuição no eletrodo a ser estudado. Para uma dada quantidade de cargas N e distância entre os eletrodos S , existe um fator de localização de cargas f_a ótimo, e para um dado f_a e S , existe um N ótimo, onde os valores de E_{\max} e η calculados com estes fatores resultam em valores mais precisos e melhores em comparação com os valores exatos ou determinados analiticamente. Na prática, os melhores resultados de E_{\max} e η estão compreendidos numa faixa de f_a e N ótimos. Para $N=13$ cargas, temos $1,0 \leq f_a \leq 2,0$ e para $f_a=1,25$, $5 \leq N \leq 7$.

Assim, temos que na região de $S > R$, o aumento de N não melhora os resultados de E_{\max} e η em relação aos valores analíticos se o fator de localização de cargas f_a é mantido constante, enquanto o aumento de f_a para um N constante resulta em valores de E_{\max} e η mais próximos dos valores analíticos.

O fator de localização de cargas f_a depende da quanti

dade de cargas N , o que implica na sua dependência com as condições específicas do problema em estudo, ou seja, da configuração geométrica do sistema de eletrodos e das suas dimensões. Requer-se, portanto, um cuidado especial na escolha do f_a a ser utilizado no cálculo, especialmente em contornos curvos a fim de se evitar a aproximação excessiva entre as cargas.

Uma comparação rápida dos resultados obtidos por MSC e MDF com os valores analíticos de E_{\max} e η , permite concluir que o MSC é um método numérico muito mais flexível e vantajoso que o MDF para o cálculo de campo em configuração de eletrodos como as aqui analisadas.

Enquanto somente as condições de contorno estabelecidas pela configuração dos eletrodos é suficiente para os cálculos com o MSC, os cálculos com o MDF requer a imposição da condição de Dirichlet em todo o contorno do domínio em análise. Este fato leva a erros na determinação de E_{\max} e η , o qual um simples refinamento da malha ou ainda dos dados de potenciais nos nós da malha são insuficientes para melhorar o resultado de cálculo, pelo menos para problemas de contornos abertos.

Analisando os resultados obtidos pelo MSC para cilindro infinito, metade inferior do cilindro infinito e "strip" em relação ao plano de terra, pode-se concluir que para o cálculo de campo elétrico em sistema de eletrodos do tipo cilindro infinito-plano de terra, pode ser utilizada a configuração metade inferior do cilindro infinito-plano de terra com uma aproximação relativamente boa, em comparação com o valor analítico mesmo para distâncias $S > R$. Além do mais, no cálculo pelo emprego de MSC, como há a redução na ordem das matrizes, há também uma redução no tempo de utilização do computador, o que uma grande vantagem.

O MSC é um método numérico bastante simples quanto a sua aplicação, pelo menos para cálculos de campos de contornos abertos como os sistemas de eletrodos estudados, bastando para se obter uma solução satisfatória, a escolha conveniente do tipo, quantidade e localização das cargas.

APÊNDICE I

AI.1 - CAMPO ELÉTRICO MÁXIMO DA CONFIGURAÇÃO CILINDRO INFINITO-PLANO DE TERRA [16]

O campo elétrico máximo da configuração cilindro infinito-plano de terra pode ser calculado a partir do método das imagens.

Sejam dois cilindros infinitos de mesmo raio localizados paralelamente, conforme a Fig. A.1.

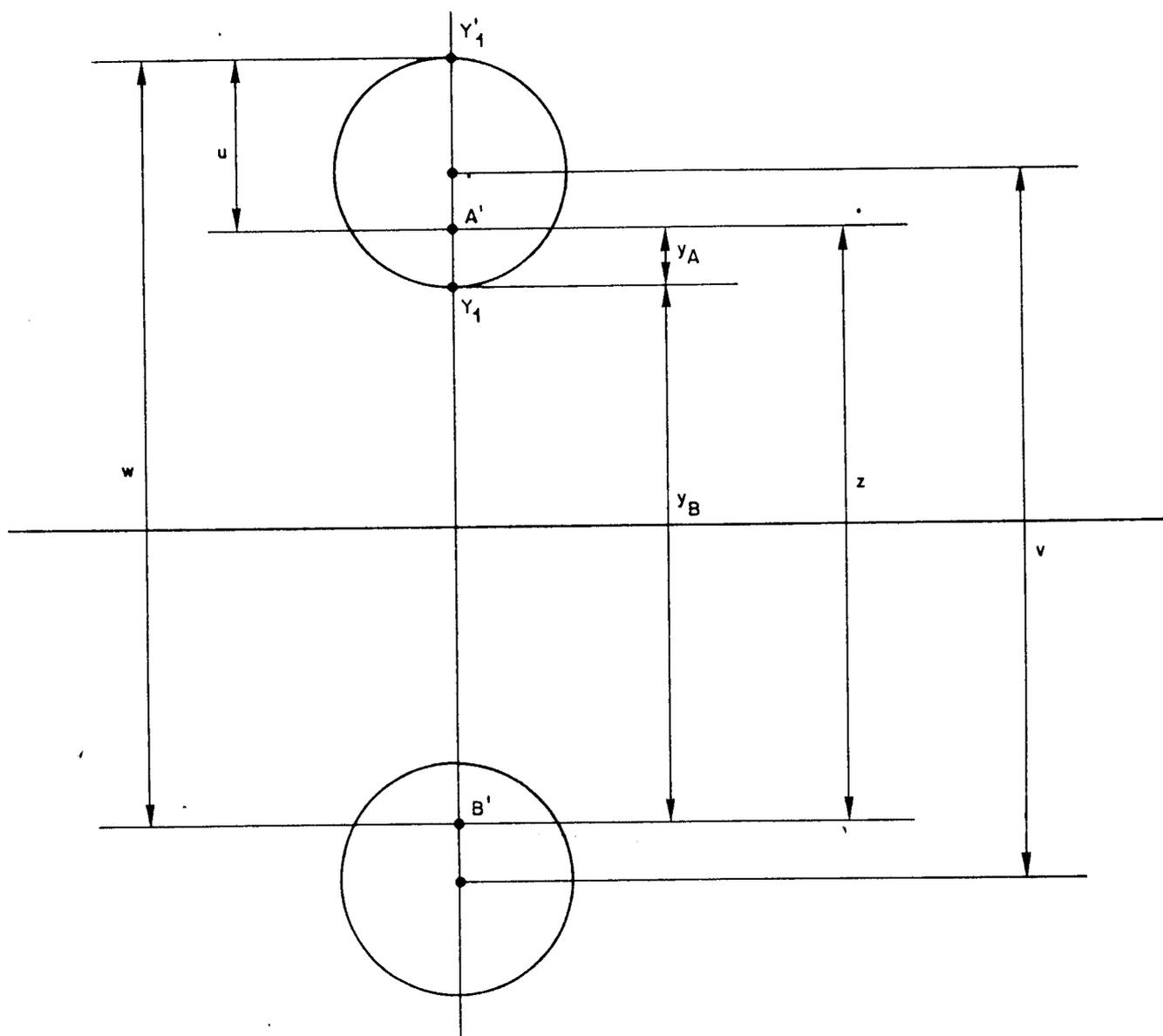


Fig. A.1 - Cilindro Infinito e sua imagem

O cilindro superior está carregado positivamente, enquanto que o inferior negativamente. A densidade de carga, λ , de cada cilindro está concentrada nos respectivos eixos A' e B', sendo em A' positiva e em B' negativa.

A intensidade do campo elétrico no ponto Y_1 produzida pela densidade λ do eixo A' é:

$$|\vec{E}_{1A'}| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon y_A}$$

Analogicamente, a intensidade do campo elétrico produzida no ponto Y_1 pela densidade $-\lambda$ do eixo B' é:

$$|\vec{E}_{1B'}| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon y_B}$$

Como as densidades de carga são iguais e contrárias o potencial no ponto Y_1 é:

$$U_{Y1} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{y_B}{y_A}$$

Todos os pontos que estão neste mesmo potencial apresentam relação de distâncias aos eixos B' e A' igual a y_B/y_A .

Já que neste caso o ponto Y_1 tem o mesmo potencial do ponto Y_1 então:

$$\frac{y_B}{y_A} = \frac{\omega}{u}$$

Na Fig. A.1 observa-se que:

$$y_B = Z - y_A$$

$$u = 2R - y_A$$

$$\omega = 2R + Z - y_A$$

e deste modo podemos escrever:

$$\frac{y_A}{y_B} = \frac{y_\Lambda}{Z - y_\Lambda} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{y_A}{Z - y_\Lambda} = \frac{2R - y_\Lambda}{2R + Z - y_\Lambda} \quad (\text{A.2})$$

ou: $(2R + Z - y_\Lambda)y_\Lambda = (2R - y_\Lambda)(Z - y_\Lambda)$

donde: $2y_\Lambda = 2R + Z + \sqrt{4R^2 + Z^2}$ (A.3)

Também da Fig. A.1 observa-se que:

$$Z - 2y_\Lambda = v - 2R$$

ou: $2y_\Lambda = -v + 2R + Z$ (A.4)

Combinando-se (A.3) com (A.4) temos:

$$-v = \sqrt{4R^2 + Z^2}$$

e deste modo:

$$Z = \sqrt{v^2 - 4R^2} \quad (\text{A.5})$$

Substituindo-se (A.5) em (A.4) temos:

$$y_A = \frac{-v + 2R + \sqrt{v^2 - 4R^2}}{2} \quad (\text{A.6})$$

Deste modo, o potencial do cilindro superior em relação ao plano de terra é:

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{Z - y_\Lambda}{y_\Lambda}$$

ou: $U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \left(\frac{Z}{y_\Lambda} - 1 \right)$ (A.7)

Substituindo (A.5) e (A.6) em (A.7) resulta:

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \left(\frac{\sqrt{v^2 - 4R^2} + v - 2R}{\sqrt{v^2 - 4R^2} + v + 2R} \right)$$

deste modo:

$$\lambda = \frac{U \cdot 2\pi\epsilon}{\ln \left(\frac{\sqrt{v^2 - 4R^2} + v - 2R}{\sqrt{v^2 - 4R^2} - v + 2R} \right)} \quad (A.8)$$

A intensidade de campo elétrico máxima da configuração cilindro infinito-plano de terra ocorre no ponto Y_1 e é:

$$E_{\max} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1}{y_A} + \frac{1}{y_B} \right)$$

ou seja:

$$E_{\max} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1}{y_A} + \frac{1}{z - y_A} \right) \quad (A.9)$$

Substituindo-se (A.5), (A.6) e (A.8) em (A.9) temos:

$$E_{\max} = \frac{U}{\ln \left(\frac{\sqrt{v^2 - 4R^2} + v - 2R}{\sqrt{v^2 - 4R^2} - v + 2R} \right)} \cdot \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{v + 2R}{v - 2R}} \quad (A.10)$$

A configuração cilindro infinito-plano de terra normalmente é especificada conforme a Fig. A.2, e deste modo:

$$\left. \begin{aligned} U &= V_c \\ v &= 2(R+S) \end{aligned} \right\} \quad (A.11)$$

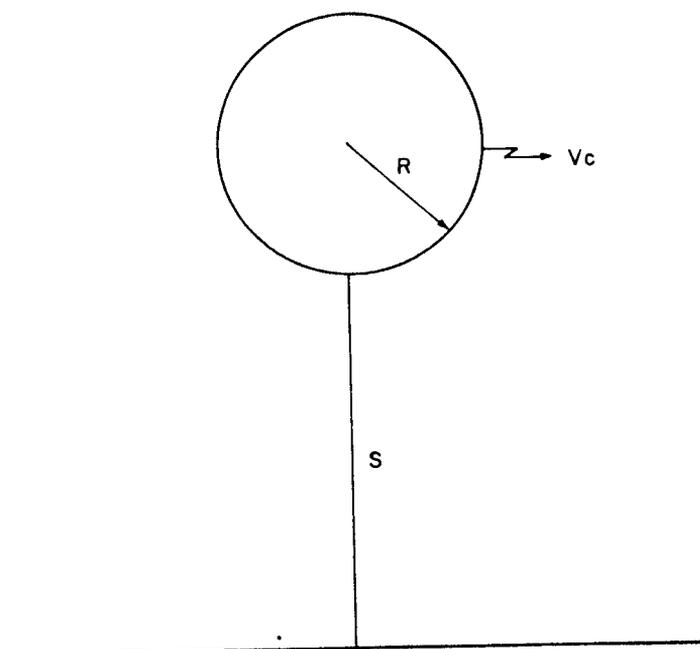


Fig. A.2 - Configuração cilindro infinito-plano de terra

Substituindo-se (A.11) em (A.10) temos:

$$E_{\max} = \frac{1}{R} \cdot \frac{V_c}{\ln \frac{\sqrt{S^2 + 2SR} + 2S}{\sqrt{S^2 + 2SR} - 2S}} \cdot \sqrt{\frac{S + 2R}{S}} \quad (\text{A.12})$$

A expressão (A.12) é a forma analítica de se expressar o campo máximo da configuração cilindro infinito-plano de terra especificada conforme a Fig. A.2.

AI.2 - FATOR DE UTILIZAÇÃO DE CAMPO DA CONFIGURAÇÃO CILINDRO INFINITO-PLANO DE TERRA

Levando-se em conta as expressões (2.19) e (A.12), obtemos para a configuração da Fig. A.2, a seguinte expressão para o fator de utilização:

$$\eta^* = \frac{S}{R} \cdot \frac{1}{\ln \frac{\sqrt{S^2 + 2SR} + 2S}{\sqrt{S^2 + 2SR} - 2S}} \cdot \sqrt{\frac{S + 2R}{S}} \quad (\text{A.13})$$

Deste modo, podemos afirmar que o fator de utilização desta configuração depende apenas de suas dimensões geométricas, independentemente do potencial V_c utilizado.

Portanto, para a presente configuração, podemos avaliar a tensão de descarga apenas através das suas dimensões e da rigidez dielétrica do meio isolante; ou a rigidez dielétrica do meio isolante através das dimensões e da tensão de descarga.

APENDICE II

O programa computacional utilizado para a aplicação do MSC para a configuração cilindro infinito-plano de terra é apresentado a seguir.

O programa foi escrito na linguagem FORTRAN IV e processado no computador PDP-10 da UNICAMP.

PRINCIPAIS VARIÁVEIS DO PROGRAMA:

R = raio do cilindro infinito
S = distância do cilindro infinito ao plano de terra
VC = potencial do cilindro infinito
FA = fator de localização
N1 = quantidade de cargas, pontos de contorno e pontos de teste

XQ(I), I = 1, N1
vetor das abcissas das cargas

XQ(I), I = 1, N1
vetor das ordenadas das cargas

XC(I), I = 1, N1
vetor das abcissas dos pontos de contorno

YC(I), I = 1, N1
vetor das ordenadas dos pontos de contorno

XT(I), I = 1, N1
vetor das abcissas dos pontos de teste

YT(I), I = 1, N1
vetor das ordenadas dos pontos de contorno

P(I, J), I = 1, N1, J = 1, N1
matriz dos coeficientes de potencial nos pontos de contorno

V(I), I = 1, N1
vetor dos potenciais nos pontos de contorno

Q(J), J = 1, N1
vetor dos valores das cargas

PL(I, J), I = 1, N1, J = 1, N1
matriz dos coeficientes de potencial nos pontos de teste

VPT(I), I = 1, N1
vetor dos potenciais calculados nos pontos de teste

ABSO(I), I = 1, N1
vetor dos erros porcentuais dos potenciais calculados nos pontos de teste

VAB = maior valor dentre ABSO(I) I = 1, N1
K = número de pontos escolhidos no domínio para se calcular potenciais e campo

X(I), I = 1, K
valor das abcissas dos pontos escolhidos no domínio

Y(I), I = 1, K
vetor das ordenadas nos pontos escolhidos no domínio

PPV(I, J), I = 1, K, J = 1, N1
matriz dos coeficientes de potencial nos pontos escolhidos no domínio

VF(I), I = 1, K
vetor dos potenciais calculados nos pontos escolhidos no domínio

EX(I), I = 1, K
vetor das componentes do campo nos pontos escolhidos no domínio segundo o eixo x

EY(I), I = 1, K
vetor das componentes do campo nos pontos escolhidos no domínio segundo o eixo y

ESE = fator de utilização

```

EXTREAL DIV
WRITE(2) R, I, F, D
DIMENSION P(24,24), PD(24,24), V(24), X(24), VPT(24), PPV(10,24)
DIMENSION XG(24), YG(24), YGB(24), ZC(24), YC(24), YCL(24)
DIMENSION XT(24), YF(24), YFB(24), ABS(24)
WRITE(2) L(24), I(24)
DIMENSION X(10), Y(10), VC(10), XC(10), YF(10)
RE=10
DS=11
READ(RR,10010)R
READ(RR,10020)VC
READ(RR,10030)FA
READ(RR,10040)S
READ(RR,10050)H1
DO 10 I=1, 11
READ(RR,10060)X(I),YGB(I),ZC(I),YC(I),XT(I),YFB(I)
10 CONTINUE
DO 20 I=1, 11
20 V(I)=VC
DO 30 I=1, 11
30 YG(I)=0.0
YC(I)=0.0
YF(I)=0.0
CONTINUE
DO 40 I=1, 11
40 YG(I)=YGB(I)+0
YC(I)=YC(I)+0
YF(I)=YFB(I)+0
CONTINUE
DO 50 I=1, 11
50 DO 55 J=1, 11
P(I,J)=0.0
CONTINUE
DO 60 I=1, 11
60 DO 65 J=1, 11
X1=SQRT((YC(I)+YF(J))**2+(XC(I)-XG(J))**2)
X2=SQRT((YC(I)-YF(J))**2+(XC(I)+XG(J))**2)
P(I,J)=ABS(X1/X2)
CONTINUE
CALL DIV(P, H1, D, L, I)
DO 70 I=1, 11
70 Q(I)=0.0
CONTINUE
DO 80 I=1, 11
80 DO 85 J=1, 11
Q(I)=Q(I)+P(I,J)*V(J)
CONTINUE
DO 90 I=1, 102, 2
90 DO 2=I+1, 102, 2
W=(Q(I)+Q(I+1))/2.
Q(I)=W
Q(I+1)=W
CONTINUE
DO 100 I=1, 4, 1-1, 2
100 DO 110 I=1, 4
Q(I)=W
Q(I+1)=W
CONTINUE
DO 110 I=1, 11

```

```

110  DO 110 J=1, 41
      PL(1, J)=0.0
      CONTINUE
      DO 120 I=1, 41
        DO 120 J=1, 41
          SA3=SQRT((Y(I)+Y(J))**2+(X(I)-X(J))**2)
          SA4=SQRT((Y(I)-Y(J))**2+(X(I)-X(J))**2)
          PL(1, J)=SA3/SA4
        CONTINUE
      DO 130 I=1, 41
        VPT(1)=0.0
      DO 140 I=1, 41
        DO 140 J=1, 41
          VPT(1)=VPT(1)+PL(1, J)*J(I)
        CONTINUE
      DO 150 I=1, 41
        ABSO(I)=0.0
      CONTINUE
      DO 160 I=1, 41
        ABSO(I)=ABSO(I)+((VPT(1)-VC)/VC)*100.0
      CONTINUE
      VAB=ABSO(I)
      DO 180 I=2, 41
        IF (VAB-ABSO(I)) 170, 180, 180
      170 VAB=ABSO(I)
      CONTINUE
      READ(RS, 10070)E
      DO 190 I=1, K
        READ(RS, 10080)X(I), Y(I)
      CONTINUE
      DO 200 I=1, K
        VF(1)=0.0
      DO 210 I=1, K
        DO 210 J=1, 41
          SA5=SQRT((Y(I)+Y(J))**2+(X(I)-X(J))**2)
          SA6=SQRT((Y(I)-Y(J))**2+(X(I)-X(J))**2)
          PPV(1, J)=SA5/SA6
        CONTINUE
      DO 220 I=1, K
        DO 220 J=1, 41
          VF(1)=VF(1)+PPV(1, J)*J(J)
        CONTINUE
      DO 230 I=1, K
        FX(I)=0.0
      DO 240 I=1, K
        FY(I)=0.0
      DO 240 J=1, 41
        D1=((Y(I)-Y(J))**2)+(X(I)-X(J))**2)
        D2=((Y(I)+Y(J))**2)+(X(I)-X(J))**2)
        X(I)=X(I)+(J(J)*((X(I)-X(J))/D1)-((X(I)-X(J))/D2))
        Y(I)=Y(I)+(J(J)*((Y(I)-Y(J))/D1)-((Y(I)+Y(J))/D2))
      CONTINUE
      EAPD=VC/S
      E=CY(1)/EAPD
      ESS=-1.*E
      RSS=R/S
      WRITE(ES, 10090)
      WRITE(ES, 10100)R, S
      WRITE(ES, 10110)VC, NI
      WRITE(ES, 10120)E*

```

```

WRITE(ES,10130)
WRITE(ES,10140)
DO 250 I=1,41
WRITE(ES,10150)X(I),Y(I),XC(I),YC(I)
250 CONTINUE
WRITE(ES,10160)
DO 260 I=1,41
WRITE(ES,10170)I,S(I)
260 CONTINUE
WRITE(ES,10180)
WRITE(ES,10190)
DO 270 I=1,41
WRITE(ES,10200)XI(I),YI(I),VFI(I),RSSI(I)
270 CONTINUE
WRITE(ES,10210)VMS
WRITE(ES,10220)
WRITE(ES,10230)
DO 280 I=1,N
WRITE(ES,10240)X(I),Y(I),VF(I),EX(I),EY(I)
280 CONTINUE
WRITE(ES,10250)RSS,SSR
290 STOP
10010 FORMAT(G)
10020 FORMAT(G)
10030 FORMAT(G)
10040 FORMAT(G)
10050 FORMAT(I)
10060 FORMAT(GG)
10070 FORMAT(I)
10080 FORMAT(2G)
10090 FORMAT(/,10X,'CIBENHO TOTAL',/)
10100 FORMAT(/,10X,'P=',F5.2,10X,'S=',F10.5)
10110 FORMAT(10X,'VC=',F6.2,3X,'H=',I3)
10120 FORMAT(10X,'PL=',F5.2)
10130 FORMAT(10X,'COORDENADAS DAS CARGAS E PONTOS DE TESTE')
10140 FORMAT(10X,'X',12X,'Y',12X,'XC',12X,'YC')
10150 FORMAT(10X,'(2X,F10.4)')
10160 FORMAT(10X,'VALORES DAS CARGAS')
10170 FORMAT(10X,'Q(',I2,')=',F14.5)
10180 FORMAT(10X,'TENSÃO NOS PONTOS DE TESTE')
10190 FORMAT(10X,'XF',12X,'YF',12X,'VF',12X,'FRRO')
10200 FORMAT(10X,'(2X,F10.4)')
10210 FORMAT(10X,'ERRO MÁXIMO=',F10.4)
10220 FORMAT(10X,'POTENCIAIS O CAMPOS')
10230 FORMAT(10X,'X',12X,'Y',12X,'V',12X,'EX',11X,'EY')
10240 FORMAT(10X,'(2X,F10.4)')
10250 FORMAT(/,10X,'RSS=',F10.4,10X,'SSR=',F10.4)
END

```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - P. Silvester:
"Campos Eletromagnéticos Modernos" - Ed. Polígono S.A.
(1971)
- [2] - K.J. Binns and P.J. Lawrenson:
"Analysis and Computation of Electric and Magnetic Field Problems" - Pergamon Press, Oxford (1963)
- [3] - O.C. Zienkiewicz:
"The finite element method in Engineering Science" -
Mc Graw-Hill, London - 2^a ed. (1971)
- [4] - C.S. Desai, J.F. Abel:
"Introduction to the finite element method - A numerical
method for engineering analysis" - Van Nostrand Reinhold
Company (1972)
- [5] - J.M. Janiszewski:
"Método dos Elementos Finitos aplicado a problemas de
campos eletromagnéticos estatísticos" - Tese de Douto
ramento - Poli USP (1978)
- [6] - H. Singer:
"Das Hochspannungs feld von Gitterelektroden" - Doctoral
Thesis - TU - München (1969)
- [7] - H.Singer, H.Steinbigler. P.Weiss:
"A charge simulation method for the calculation of high
voltage fields" - Trans. IEEE - PAS93 - pp. 1660-1668
(1974)
- [8] - J.C. Maxwell:
"Treatise in Electricity and Magnetism" - Rover
Publications, Inc. New York - unabridged 3^a ed. by the
Clapendon Press in 1981 (1954)

- [9] - P. Weiss:
"Berechnung von Zweistoffdielektrika" - ETZ-A Bd.90 -
pp. 693-694 (1969)
- [10] - A.S.Timascheff:
"Field Patterns of Bundle Conductors and their
Electrostatic Properties" - Trans AIEE - PAS-80 -
pp. 590-597 (1961)
- [11] - M.S. Abov-Seada, E.Nasser:
"Digital computer calculation of the potential and its
gradient of a twin cylindrical conductor" - Trans IEEE -
PAS-88 - pp.1802-1814 (1969)
- [12] - M.P.Sarma, V. Janiŝchewskyi:
"Electrostatic Field of a system of parallel cylindrical
conductors" - Trans IEEE - PAS-88 - pp.1069-1079 (1969)
- [13] - H.Steinbigler:
"Anfangsfeldstärken und Ausnutzungsfaktoren
rotationssymmetrischer Elektrodenanordnungen in Luft" -
Diss. TU München (1969)
- [14] - S.Kato:
"An estimation method for the electric field error of
a charge simulation method" - 3^o International
Symposium on High Voltage Engineering (3^o ISH) - 11.11
(1979)
- [15] - H.Prinz:
"Hochspannungsfelder" - Oldenbourg, München - Wien
(1969)
- [16] - H. von Beeren:
"Técnica de la Alta Tension" - Editorial Labor S.A.
(1956)