

CONTRIBUIÇÃO À SOLUÇÃO DE
PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DE PARÂMETROS ORIUNDOS
DA SÍNTESE DE REGULADORES L-Q e L-Q-G COM RESTRIÇÕES DE ESTRUTURA

BASILIO E.A.MILANI

Orientador: Hermano M.F. Tavares

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas, Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do título de:

"DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA"
(Automação)

Campinas, Julho de 1980

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

AGRADECIMENTOS:

Agradeço a todas as pessoas que direta ou indiretamente me incentivaram ou auxiliaram a concluir este trabalho.

Este trabalho é dedicado a:

Minha avó Messias (em memória)

Meus pais Fioravante e Maria

Minha esposa Carmen

Meu filho Basílio

RESUMO

A síntese via otimização de parâmetros de reguladores L-Q e L-Q-G com restrições de estrutura é introduzida como uma solução de compromisso entre a subotimalidade do desempenho do sistema de controle e a viabilidade de sua implementação prática. É feita uma abordagem unificada com um tratamento detalhado e em profundidade do cálculo em forma fechada do índice de desempenho, vetor gradiente e matriz hessiana. É proposto um novo método Quasi-Newton especializado para solução do problema de otimização de parâmetros. O novo método é baseado em uma aproximação definida positiva da matriz hessiana e explora a fraqueza das restrições de estrutura para obter uma melhor razão de convergência. Comparado com outros métodos de otimização, o método Quasi-Newton especializado se mostrou melhor adaptado para tratar problemas de otimização de grande porte e também capaz de apresentar um desempenho computacional muitas vezes superior. No final são discutidas possibilidades de extensão e melhoria dos resultados obtidos.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO GERAL	0.1
CAPÍTULO I - TEORIA DE SISTEMAS LINEARES E REGULADORES ÓTIMOS: RECAPITULAÇÃO DE ALGUNS RESULTADOS E DEFINIÇÕES	
1.1 - INTRODUÇÃO	1.1
1.2 - TEORIA DE SISTEMAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO	1.2
1.2.1 - Representação na forma de equações diferenciais de estado	1.2
1.2.2 - Solução da equação diferencial de estado ..	1.3
1.2.3 - Estabilidade	1.6
1.2.4 - Controlabilidade e observabilidade	1.8
1.2.5 - Resposta a ruídos brancos	1.12
1.2.6 - Expressões quadráticas integrais com horizonte infinito	1.14
1.3 - OS PROBLEMAS DOS REGULADORES ÓTIMOS L-Q E L-Q-G DE TEMPO INFINITO	1.31
1.3.1 - Problema do regulador L-Q de tempo infinito	1.31
1.3.2 - Problema do regulador L-Q-G de tempo infinito	1.34
1.4 - SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE LIAPUNOV E RICCATI	1.40
1.4.1 - Equação de Liapunov	1.40
1.4.2 - Equação de Riccati	1.42
1.5 - CONCLUSÃO	1.45
CAPÍTULO II - REGULADOR L-Q COM RESTRIÇÕES DE ESTRUTURA	
2.1 - INTRODUÇÃO	2.1
2.2 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DE PARÂMETROS	2.4
2.3 - CÁLCULO DO VETOR GRADIENTE E MATRIZ HESSIANA ..	2.7
2.3.1 - Vetor gradiente	2.7

.../.

2.3.2 - Matriz hessiana	2.8
2.3.3 - Propriedades da matriz $H_2(\underline{\alpha})$	2.10
2.4 - CONDIÇÃO INICIAL DO SISTEMA E GRAU DE SUBOTIM <u>AL</u> LIDADE	2.13
2.4.1 - Comentário sobre a escolha da condição ini <u>ci</u> cial	2.13
2.4.2 - Cálculo do vetor gradiente e matriz hessia <u>na</u> para $J_n(\underline{\alpha})$	2.17
2.4.3 - Grau de subotimalidade da solução do proble <u>ma</u> de otimização de parâmetros	2.19
2.5 - UM MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO QUASI-NEWTON ESPECIALI <u>Z</u> ADO	2.21
2.5.1 - Apresentação do algoritmo	2.21
2.5.2 - Comparação com outros métodos de otimização	2.23
2.6 - APLICAÇÕES	2.28
2.6.1 - Regulador L-Q descentralizado: sistema com dimensões e número de parâmetros reduzidos	2.28
2.6.2 - Regulador L-Q com estrutura de controle lo <u>cal</u> para um típico sistema de grande porte	2.33
2.7 - CONCLUSÃO	2.45

CAPÍTULO III - REGULADOR L-Q-G COM RESTRIÇÕES DE ESTRUTURA

3.1 - INTRODUÇÃO	3.1
3.2 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DE PARÂME <u>T</u> TROS	3.3
3.3 - CÁLCULO DO ÍNDICE DE DESEMPENHO VATOR GRADIE <u>N</u> TE E MATRIZ HESSIANA	3.6
3.3.1 - Índice de desempenho	3.6
3.3.2 - Vetor gradiente	3.8
3.3.3 - Matriz hessiana	3.12
3.3.4 - Propriedades da matriz $H''(\underline{\alpha})$	3.15
3.4 - UM MÉTODO QUASI-NEWTON ESPECIALIZADO	3.21
3.4.1 - Apresentação do algoritmo	3.21
3.4.2 - Comparação com outros métodos de otimiz <u>a</u> ção	3.25

.../.

3.4.3 - Exemplo ilustrativo	3.27
3.5 - CONCLUSÃO	3.29

CAPÍTULO IV - CONSIDERAÇÕES FINAIS

BIBLIOGRAFIA

INTRODUÇÃO GERAL

O objetivo principal deste trabalho é apresentar contribuições à formulação e principalmente à solução dos problemas de otimização de parâmetros oriundos da síntese de reguladores Linear-Quadrático (L-Q) e Linear-Quadrático-Gaussiano (L-Q-G) com restrições de estrutura.

Trataremos de uma classe particular de problemas com as seguintes características:

- (a) Problema de otimização sem restrições
- (b) Sistema linear invariante no tempo
- (c) Índice de desempenho quadrático integral de tempo in finito
- (d) Restrições de estrutura: controlador na forma de realimentação de saída, linear, invariante no tempo e com estrutura de informação predeterminada.

Os principais tópicos tratados dentro da formulação do problema de otimização de parâmetros são:

- (a) Especificação da condição inicial do sistema para os regulador L-Q com restrições de estrutura.
- (b) Especificação do índice de desempenho para garantir a estabilidade assintótica do sistema controlado em ma lha fechada.

Dentro da solução do problema de otimização de parâmetros, os principais tópicos são:

- (a) Discussão sobre existência de solução
- (b) Cálculo em forma fechada do índice de desempenho, ve tor gradiente e matriz hessiana.
- (c) Solução do problema de otimização, utilizando métodos de descida.

Este trabalho é constituído de quatro capítulos com a se guinte descrição sumária:

Capítulo I - É composto de três seções principais e sua finalidade é coletar subsídios para os capítulos II e III.

Na seção 1.2 é feita uma recapitulação de conceitos e resultados da teoria de sistemas lineares invariantes no tempo, com uma ênfase especial às propriedades das expressões quadráticas integrais de tempo infinito e a utilização da equação de Liapunov para o cálculo das mesmas.

Na seção 1.3 são apresentados de forma sintética os resultados sobre existência e unicidade das soluções dos problemas dos reguladores ótimos L-Q e L-Q-G de tempo infinito. São discutidos os aspectos teóricos e de implementação prática desses resultados relevantes para a compreensão e tratamento dos problemas de reguladores L-Q e L-Q-G com restrições de estrutura. Uma ênfase especial é dada às questões sobre implementação nas aplicações a sistemas de grande dimensão caracterizados por grande dispersão espacial entre suas saídas e entradas de controle.

A seção 1.4 trata da solução numérica das equações de Liapunov e Riccati. Uma ênfase especial é dada aos métodos para sistemas de grande dimensão.

Capítulo II - É composto de seis seções e trata de aspectos da formulação e principalmente da solução do problema de otimização de parâmetros oriundo da síntese de reguladores L-Q com restrições de estrutura.

Na seção 2.1 a síntese via otimização de parâmetros de reguladores L-Q com restrições de estrutura é introduzida como uma solução de compromisso entre a subotimalidade do sistema de controle e a sua viabilidade de implementação. É Apresentado também um breve histórico das contribuições de outros autores à formulação e solução do problema de otimização de parâmetros.

Na seção 2.2 o problema de otimização de parâmetros é definido formalmente. São também discutidas a existência de solução e a especificação do índice de desempenho para garantir a estabilidade assintótica do sistema controlado.

Na seção 2.3 é feita uma abordagem unificada do problema de cálculo em forma fechada do índice de desempenho, vetor gradiente e matriz hessiana.

Na seção 2.4 é discutido o problema de especificação da condição inicial do sistema na formulação do problema de otimização

de parâmetros. É proposto um método eficiente para solução do problema de otimização de parâmetros para o pior caso de condição inicial do sistema. É também apresentado um método para obtenção de uma estimativa do grau de subotimalidade da solução do problema de otimização de parâmetros.

Na seção 2.5 é proposto um método Quasi-Newton especializado para solução do problema de otimização de parâmetros. O método é baseado numa aproximação da matriz hessiana discutida na seção 2.4. O desempenho computacional do método Quasi-Newton especializado é discutido e comparado como o de outros métodos já utilizados, ou possíveis de o serem, na solução do problema de otimização de parâmetros.

Na seção 2.6 o método Quasi-Newton especializado e os métodos mais promissores discutidos na seção 2.5 são utilizados na solução de problemas de otimização oriundos da síntese de reguladores L-Q com restrições de estrutura. São tratados dois tipos de problemas: o primeiro é um problema de otimização com poucos parâmetros, oriundo da síntese de um regulador descentralizado para um sistema de pequena dimensão; o segundo são dois problemas de otimização oriundos da síntese de um regulador, com estrutura de controle local, para um segmento de via expressa descrito por um modelo linearizado. Dadas a dimensão do sistema, suas características dinâmicas, dispersão espacial entre saídas e entradas de controle e número de parâmetros a serem otimizados, o exemplo da via expressa é um caso bastante significativo de síntese de regulador com restrição de estrutura para um sistema de grande porte.

A seção 2.7 é a seção de conclusão do capítulo. Nela é feita uma recapitulação dos principais resultados obtidos, os quais são discutidos e comparados com seus similares obtidos por outros autores.

Capítulo III - É composto de cinco seções e é inteiramente devotado à solução do problema de otimização de parâmetros oriundo da síntese de reguladores L-Q-G com restrições de estrutura. A forma de tratar o problema é a mesma utilizada para o regulador L-Q no capítulo II.

Na seção 3.1 a síntese via otimização de parâmetros de reguladores L-Q-G com restrições de estrutura é introduzida como

uma solução de compromisso entre a subotimalidade do sistema de controle e sua viabilidade de implementação. É também apresentado um breve histórico das contribuições de outros autores à formulação e solução do problema de otimização de parâmetros.

Na seção 3.2 o problema de otimização de parâmetros é definido e são discutidos os aspectos de existência de solução e estabilidade assintótica do sistema controlado em malha fechada.

Na seção 3.3 é feita uma abordagem unificada do cálculo em forma fechada do índice de desempenho, vetor gradiente e matriz hessiana.

Na seção 3.4 é proposto um método Quasi-Newton especializado para solução do problema de otimização de parâmetros. O método é baseado numa aproximação da matriz hessiana discutida na seção 3.3. O desempenho computacional do método Quasi-Newton especializado é comparado com o de outros conhecidos métodos já utilizados ou possíveis de serem utilizados na solução do problema de otimização de parâmetros. O uso e desempenho do método Quasi-Newton especializado é ilustrado através da solução do problema de otimização de parâmetros oriundo da síntese de um regulador L-Q-G, com estrutura de controle local, para o mesmo segmento de via expressa tratado na seção 2.6.

A seção 3.5 é a seção de conclusão deste capítulo. Nela é feita uma recapitulação dos principais resultados obtidos, os quais são discutidos e comparados com os obtidos por outros autores. Os resultados com finalidades similares obtidos com o regulador L-Q no capítulo II e o L-Q-G neste capítulo são também comparados entre si. Na seção 2.7 do capítulo II e nesta seção estão contidas as conclusões deste trabalho.

Capítulo IV - Neste capítulo são feitas algumas observações adicionais sobre as conclusões deste trabalho. São discutidas as possibilidades de aperfeiçoamento dos resultados obtidos e são também discutidas as possibilidades de extensão a outras classes de problemas dos resultados positivos obtidos.

CAPÍTULO I

TEORIA DE SISTEMAS LINEARES E REGULADORES ÓTIMOS:

RECAPITULAÇÃO DE ALGUNS RESULTADOS E DEFINIÇÕES

1.1 - INTRODUÇÃO

O objetivo principal dos resultados, definições e comentários apresentados neste capítulo é o de servir de subsídio para os capítulos II e III, que introduzem e tratam da solução do problema de otimização oriundo da síntese via otimização de parâmetros de reguladores L-Q e L-Q-G com restrições de estrutura.

Os tópicos tratados estão agrupados em três seções:

- Teoria de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo.
- Os Problemas dos Reguladores Ótimos L-Q e L-Q-G de Tempo Infinito.
- Solução Numérica das Equações de Liapunov e Riccati.

Dentro da teoria de sistemas lineares invariantes no tempo, são selecionados tópicos com a finalidade de servir de subsídio a tudo que é apresentado a seguir sobre os reguladores L-Q e L-Q-G com e sem restrições de estrutura. Em particular é dada uma atenção especial às expressões quadráticas integrais com horizonte infinito, suas relações com a equação de Liapunov e suas especificações para garantir a estabilidade assintótica de sistemas lineares invariantes no tempo.

Dos problemas dos reguladores ótimos L-Q e L-Q-G de tempo infinito, são apresentadas suas formulações, os resultados sobre existência e unicidade de suas soluções e são discutidos os aspectos de implementação do sistema de controle que podem levar à imposição de restrições de estrutura.

Sobre a solução numérica das equações de Liapunov e Riccati, são apresentados vários métodos de uso geral e os problemas de cálculo envolvendo sistemas de grande dimensão são discutidos.

A grande maioria dos resultados apresentados neste capítulo não são acompanhados das respectivas provas, por se tratar de

assunto bem conhecido e difundido na literatura. Ao longo do capítulo são indicadas as referências para obtenção de maiores detalhes sobre a matéria exposta.

1.2 - TEORIA DE SISTEMAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados e definições da teoria de sistemas lineares invariantes no tempo. Os tópicos tratados são:

- Representação na forma de equação de estado
- Solução da equação de estado
- Estabilidade
- Controlabilidade e Observabilidade
- Resposta a ruídos brancos
- Expressões quadráticas integrais com horizonte infinito.

A referência básica para os cinco primeiros itens é (Kwakernaak e Sivan [34]). Pela sua importância para este trabalho e por se tratar de assunto menos difundido na literatura, a maioria dos resultados sobre as expressões quadráticas de tempo infinito são acompanhados de suas respectivas provas.

1.2.1 - Representação na forma de equações diferenciais de estado

Os sistemas lineares contínuos de dimensão finita podem ser descritos por um conjunto de equações diferenciais da forma

$$\dot{\underline{x}}(t) = A(t) \underline{x}(t) + B(t) \underline{u}(t) ; \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (1-1)$$

$$\underline{y}(t) = C(t) \underline{x}(t) + D(t) \underline{u}(t) \quad (1-2)$$

onde: t é a variável independente; $\underline{x}(t)$ é um vetor de dimensão n representando as variáveis de estado; $\underline{u}(t)$ é um vetor de dimensão m representando as variáveis de controle; $\underline{y}(t)$ é um vetor de dimensão r representando as variáveis de saída e as matrizes $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ tem dimensões apropriadas. Se as matrizes A, B, C, D são constantes, o sistema é dito invariante no tempo.

Neste trabalho trataremos principalmente de sistemas con

tínuos lineares invariantes no tempo, descritos pelas equações

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \quad ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (1-3)$$

$$\underline{y}(t) = C\underline{x}(t) \quad (1-4)$$

onde a equação (1-3) é a equação diferencial de estado e a equação (1-4) é a equação de saída do sistema.

1.2.2 - Solução da equação diferencial de estado

Teorema 1.1 - A solução geral da equação de estado (1 - 3) é dada por

$$\underline{x}(t) = \exp (At) \underline{x}_0 + \int_0^t \exp (t-\tau) B \underline{u}(\tau) d\tau \quad (1-5)$$

onde a exponencial de uma matriz quadrada M é definida pela série infinita

$$\exp(M) = I + M + \frac{1}{2!} M^2 + \frac{1}{3!} M^3 \dots \quad (1-6)$$

que converge para qualquer M.

De (1-5) facilmente se verifica que a solução da equação homogênea

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) \quad ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (1-7)$$

é dada por

$$\underline{x}(t) = \exp(At) \underline{x}_0 \quad (1-8)$$

Teorema 1.2 - A matrix quadrada $\exp(At)$ tem as seguintes propriedades:

(a) - $\exp (At)$ é não singular para $-\infty < t < \infty$

(b) - $\exp(At_1) \exp(At_2) = \exp (A(t_1 + t_2)) \quad \forall t_1, t_2 \quad (1-9)$

(c) - $(\exp(At))^{-1} = \exp (-At) \quad (1-10)$

(d) - $\frac{d}{dt} (\exp(At)) = A \exp (At) = \exp (At)A \quad (1-11)$

Antes de prosseguir, vamos recordar alguns resultados e definições de álgebra linear.

Definição 1.1 - O espaço nulo de uma matriz M é definido como

$$N(M) = \{ \underline{x} : \underline{x} \in C^n, M\underline{x} = 0 \} \quad (1-12)$$

onde C^n é o espaço dos vetores complexos de dimensão n .

Definição 1.2 - Um subespaço linear u_3 é chamado de soma direta dos subespaços lineares u_1 e u_2 de um espaço de dimensão n se qualquer vetor $\underline{x}_3 \in u_3$ pode ser escrito de uma e apenas uma maneira como

$$\underline{x}_3 = \underline{x}_1 + \underline{x}_2 \quad (1-13)$$

onde $\underline{x}_1 \in u_1$ e $\underline{x}_2 \in u_2$

Teorema 1.3 - Dada uma matriz A de dimensão $(n \times n)$ com K autovalores distintos, λ_i , $i=1$ até K . Seja m_i a multiplicidade de cada autovalor no polinômio característico de A . Dados

$$M_i = (A - \lambda_i I)^{m_i} \quad (1-14)$$

$$N_i = N(M_i) \quad (1-15)$$

Então

(a) A dimensão do subespaço N_i é m_i , $i = 1$ até K

(b) Se $\underline{x} \in N_i \Rightarrow A\underline{x} \in N_i$

(c) O espaço complexo C^n é a soma direta dos espaços nulos N_i , $i = 1$ até K

Teorema 1.4 - Para a matriz A , com a mesma notação do teorema 1.2, é sempre possível achar uma matriz T de dimensão $(n \times n)$, não singular, que pode ser parcionada como

$$T = (T_1, T_2, \dots, T_K) \quad (1-16)$$

tal que

$$A = TJT^{-1} \quad (1-17)$$

onde

$$J = \text{diag} (J_1, J_2, \dots, J_K) \quad (1-18)$$

O bloco J_i tem dimensão $(m_i \times m_i)$, $i = 1$ até K , e a partição de T corresponde à partição de J . As colunas de T_i formam uma base especialmente escolhida para o espaço nulo N_i , $i = 1$ até K . Os blocos J_i podem ser subparticionados como

$$J_i = \text{diag} (J_{i,1}, J_{i,2}, \dots, J_{i,\ell_i}) \quad (1-19)$$

onde cada bloco $J_{i,j}$ tem a forma

$$J_{i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \dots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_i & 0 \end{bmatrix} \quad (1-20)$$

A matriz J definida acima é chamada de a forma normal de Jordan da matriz A .

Teorema 1.4 - Dada uma matriz A com a mesma notação dos teoremas 1.3 e 1.4, temos:

$$(a) \exp (At) = T \exp (Jt) T^{-1} \quad (1-21)$$

$$(b) \exp (Jt) = \text{diag} [\exp(J_1 t), \exp(J_2 t) \dots \exp(J_K t)] \quad (1-22)$$

$$(c) \exp (J_i t) = \text{diag} [\exp(J_{i,1} t), \dots, \exp (J_{i,\ell_i} t)] \quad (1-23)$$

$$(d) \exp(J_{i,j} t) = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n_{i,j}-1}}{(n_{i,j}-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n_{i,j}-2}}{(n_{i,j}-2)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-24)$$

onde $n_{i,j}$ é a dimensão de $J_{i,j}$

Teorema 1.5 - Dado o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) \quad ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (1-25)$$

onde: A tem a mesma notação dos teoremas 1.2, 1.3, 1.4; $\underline{x}_0$ é dado por

$$\underline{x}_0 = \sum_{i=1}^K \underline{v}_i \quad \text{com } \underline{v}_i \in N_i, \quad i = 1 \text{ até } K \quad (1-26)$$

Dado ainda

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_K \end{bmatrix} \quad (1-27)$$

onde o parcionamento corresponde ao da matriz T no teorema 1.3.

Então

$$(a) \quad \underline{x}(t) = \sum_{i=1}^K T_i \exp(J_i t) U_i \underline{v}_i \quad (1-28)$$

$$(b) \quad \underline{x}_0 \in N_i \Rightarrow \underline{x}(t) \in N_i, \quad A \underline{x}(t) \in N_i \quad (1-29)$$

Corolário 1.1 - Dado o sistema (1-25) e usando a mesma notação dos teoremas 1.2, 1.3, 1.4, se $\underline{x}_0$ pertence a um particular N_i então $\underline{x}(t)$ e todas as suas derivadas temporais pertencem ao mesmo N_i e as suas naturezas são completamente determinadas pelo autovalor λ_i correspondente.

Notando que $\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t)$, prova-se este corolário facilmente a partir do teorema 1.5.

Definição 1.3 - Utilizando a mesma notação dos teoremas 1.3, 1.4 e 1.5, chama-se modo do sistema linear invariante no tempo (1-25) à sua resposta $\underline{x}(t)$ a qualquer estado inicial $\underline{x}_0$ pertencente a um dos espaços nulos N_i .

1.2.3 - Estabilidade

Definição 1.4 - O sistema linear invariante no tempo de ordem n

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) \quad ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (1-30)$$

é assintoticamente estável se para qualquer $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) = 0 \quad (1-31)$$

Teorema 1.6 - O sistema linear invariante no tempo (1.30) é assintoticamente estável se e somente se a parte real de todos os autovalores de A for estritamente negativa.

Definição 1.5 - Dado o sistema linear invariante no tempo (1-30) e utilizando a notação dos teoremas 1.3 e 1.5 temos:

- (a) chama-se subespaço estável do sistema ao subespaço real formado pela soma direta dos espaços nulos N_i que correspondem a autovalores de A com parte real estritamente negativas.
- (b) Analogamente, o subespaço instável do sistema é o subespaço real formado pela soma direta dos espaços nulos N_i que correspondem a autovalores de A com partes reais não negativas.

Com esta definição, se o sistema (1-30) é de ordem n, então o espaço $\mathbb{R}^n$ é a soma direta dos subespaços estável e instável do sistema.

Corolário 1.2 - Dado o sistema (1-25) e usando a mesma notação dos teoremas 1.2, 1.3, 1.4, temos:

- (a) Se $\underline{x}_0$ pertence ao subespaço estável do sistema, então $\underline{x}(t)$ e todas as suas derivadas temporais também pertencem ao subespaço estável.
- (b) $\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) = 0$ para $\underline{x}_0 \neq 0$ se e somente se $\underline{x}_0$ pertence ao subespaço estável do sistema. Além disso, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^K \underline{x}(t)}{dt^K} = 0; \quad K = 1, 2, 3, \dots \quad (1-32)$$

Este corolário é consequência direta dos teoremas 1.3, 1.5.

1.2.4 - Controlabilidade e observabilidade

Definição 1.6 - O sistema linear invariante no tempo de dimensão n

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) + B u(t) \quad (1-33)$$

é chamado de completamente controlável se o estado do sistema pode ser transferido do estado zero em qualquer instante inicial t_0 a qualquer estado terminal $\underline{x}(t_1) = \underline{x}_1$ em um intervalo de tempo finito $t_1 - t_0$.

Teorema 1.7 - O sistema (1-33) é completamente controlável se e somente se a matriz de controlabilidade

$$P = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) \quad (1-34)$$

é de Posto n

Definição 1.7 - Sejam A e B matrizes de dimensões $(n \times n)$ e $(m \times n)$ respectivamente. O par A, B é chamado de completamente controlável se o sistema (1-33) é completamente controlável.

Definição 1.8 - Um conjunto de vetores V pertencentes a um espaço vetorial varre esse mesmo espaço se todo vetor pertencente a esse espaço puder ser escrito como uma combinação linear do conjunto de vetores V .

Definição 1.9 - O subespaço controlável do sistema linear invariante no tempo (1-33) é o subespaço linear formado pelos estados que podem ser alcançados a partir do estado inicial zero em um intervalo de tempo finito.

Teorema 1.8 - O subespaço controlável do sistema (1-33) é o subespaço linear varrido pelas colunas da matriz de controlabilidade P (1-34).

Definição 1.10 - O sistema linear (1-33) é estabilizável de seu subespaço instável está contido no seu subespaço controlável.

Definição 1.11 - O sistema linear invariante no tempo

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) + B u(t) \quad ; \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad (1-35)$$

$$\underline{y}(t) = C \underline{x}(t) \quad (1-36)$$

é chamado de completamente observável se para todo t_0 existe $t_1 < \infty$ tal que

$$y(t; t_0, \underline{x}_0, \underline{u}(t)) = y(t; t_0, \underline{x}'_0, \underline{u}(t)); t_0 \leq t \leq t_1 \quad (1-37)$$

para todo $\underline{u}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, isso implica $\underline{x}'_0 = \underline{x}_0$.

Teorema 1.8 - O sistema (1-35), (1-36) é completamente observável se e somente se para todo t_0 existe $t_1 < \infty$ tal que

$$y(t; t_0, \underline{x}_0, 0) = 0 \quad ; \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (1-38)$$

implica que $\underline{x}_0 = 0$

Teorema 1.9 - O sistema (1-35), (1-36) é completamente observável se e somente se a matriz de observabilidade

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ C A \\ C A^2 \\ \vdots \\ C A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1-39)$$

é de Posto n .

Definição 1.12 - Sejam A e C matrizes de dimensões $(n \times n)$ e $(n \times r)$ respectivamente. O par $[A, C]$ é chamado de completamente observável se o sistema (1-35), (1-36) é completamente observável.

Definição 1.13 - O subespaço não observável do sistema (1-35), (1-36) é o subespaço linear formado pelos estados $\underline{x}_0$ para os quais

$$y(t; \underline{x}_0, t_0, 0) = 0 \quad t \geq t_0 \quad (1-40)$$

Teorema 1.10 - O subespaço não observável do sistema (1-35), (1-36) é o espaço nulo da matriz de observabilidade $N(Q)$.

Teorema 1.11 - Se $\underline{x}_0$ pertence ao subespaço não observável do sistema (1-35), (1-36) então $\underline{x}(t)$ e $A\underline{x}(t)$ também pertencem ao subespaço não observável.

Corolário 1.3 - Se $\underline{x}_0$ pertence ao subespaço não observável do sistema (1-35), (1-36), então $\underline{x}(t)$ e todas as suas derivadas temporais pertencem ao subespaço não observável.

Lembrando que $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t)$, prova-se este corolário facilmente a partir do teorema 1.11.

Lema 1.1 - Dado o sistema (1-35), (1-36), se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{y}(t) = 0 \quad (1-41)$$

então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^K \underline{y}(t)}{dt^K} = 0 ; K = 1, 2, 3 \dots \quad (1-42)$$

Prova:

$\underline{y}(t)$ pode ser escrito como

$$\underline{y}(t) = \underline{y}_e(t) + \underline{y}_u(t) \quad (1-43)$$

$$\underline{y}(t) = C\underline{x}_e(t) \quad (1-44)$$

$$\underline{y}_u(t) = C\underline{x}_u(t) \quad (1-45)$$

onde $\underline{x}_e(t)$ e $\underline{x}_u(t)$ pertencem respectivamente aos subespaços estável e instável do sistema (1-35).

De (1-43) vemos que $\underline{y}(t)$ é formado por uma combinação linear de funções exponenciais integrantes dos modos estáveis e instáveis do sistema. Além disso

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{y}(t) = 0 \quad (1-46)$$

significa que $\underline{y}(t)$ é formado apenas pelas exponenciais integrantes dos modos estáveis do sistema. Neste caso, temos

$$\underline{y}_u(t) \equiv 0 \quad (1-47)$$

Substituindo (1-47) e (1-44) em (1-43) temos

$$\underline{y}(t) = C\underline{x}_e(t) \quad (1-48)$$

e portanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^K \underline{y}(t)}{dt^K} = C \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^K \underline{x}_e(t)}{dt^K} ; K=1, 2, \dots \quad (1-49)$$

aplicando o corolário 1.2 a (1-49) temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^K \underline{y}(t)}{dt^K} = 0 ; K = 1, 2, \dots \quad (1-50)$$

c.q.d.

Definição 1.14 - O sistema linear (1-35), (1-36) é chamado de detectável se o seu subespaço não observável está contido no seu subespaço estável.

Definição 1.15 - O par A, C é chamado de detectável se o sistema (1-35), (1-36) é detectável.

Definição 1.16 - É chamado de dual do sistema

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \quad (1-51)$$

$$\underline{y}(t) = C\underline{x}(t) \quad (1-52)$$

o sistema

$$\underline{x}^*(t) = A^T \underline{x}^*(t) + C^T \underline{u}^*(t) \quad (1-53)$$

$$\underline{y}^*(t) = B^T \underline{x}^*(t) \quad (1-54)$$

Teorema 1.12 - Dado o sistema (1-51), (1-52) e seu dual (1-53), (1-54), temos:

- (a) - O sistema (1-51), (1-52) é completamente controlável se e somente se o seu dual (1-53), (1-54) for completamente observável.
- (b) - O sistema (1-51), (1-52) é estabilizável se e somente se seu dual (1-53), (1-54) for detectável.
- (c) - O sistema (1-51), (1-52) é completamente observável se o seu dual (1-53), (1-54) for completamente controlável.
- (d) - O sistema (1-51), (1-52) é detectável se e somente se o seu dual (1-53), (1-54) for estabilizável.

1.2.5 - Resposta a ruídos brancos

Definição 1.17 - Seja a forma quadrática real

$$\phi(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} \quad (1-55)$$

onde A é uma matriz simétrica de dimensão (n x n). Temos:

(a) $\phi(\underline{x})$ é chamada de definida positiva se

$$\phi(\underline{x}) > 0 ; \quad \forall \underline{x} \neq 0, \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1-56)$$

(b) $\phi(\underline{x})$ é chamada de semidefinida positiva se

$$\phi(\underline{x}) \geq 0 ; \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1-57)$$

(c) $\phi(\underline{x})$ é chamada de definida negativa se

$$\phi(\underline{x}) < 0 ; \quad \forall \underline{x} \neq 0, \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1-58)$$

(d) $\phi(\underline{x})$ é chamada de semidefinida negativa se

$$\phi(\underline{x}) \leq 0 ; \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1-59)$$

(e) Em caso contrário, $\phi(\underline{x})$ é chamada de indefinida.

Definição 1.18 - A matriz simétrica A da forma quadrática (1-55) é chamada de definida positiva ($A > 0$), semidefinida positiva ($A \geq 0$), definida negativa ($A < 0$), semidefinida negativa ($A \leq 0$) ou indefinida se a forma quadrática (1-55) for respectivamente definida positiva, semidefinida positiva, definida negativa, semidefinida negativa ou indefinida.

Definição 1.19 - Dado o processo estocástico vetorial $\underline{v}(t)$, chamamos:

$$\underline{m}(t) = E \{ \underline{v}(t) \} \quad (1-60)$$

a média do processo,

$$R_v(t_1, t_2) = E \{ [\underline{v}(t_1) - \underline{m}(t_1)] [\underline{v}(t_2) - \underline{m}(t_2)]^T \} \quad (1-61)$$

a matriz de covariância,

$$C_V(t_1, t_2) = E \{ \underline{v}(t_1) \underline{v}^T(t_2) \} \quad (1-62)$$

a matriz dos momentos conjuntos de segunda ordem,

$$R_V(t, t) = V(t) \quad (1-63)$$

a matriz de variância e

$$C_V(t, t) = V'(t) \quad (1-64)$$

a matriz dos momentos de segunda ordem.

Teorema 1.13 - A matriz de covariância $R_V(t_1, t_2)$ e a matriz dos momentos conjuntos de segunda ordem $C_V(t_1, t_2)$ de um processo estocástico vetorial $\underline{v}(t)$ tem as seguintes propriedades:

$$(a) R_V(t_2, t_1) = R_V^T(t_1, t_2) ; \quad \forall t_1, t_2 \quad (1-65)$$

$$C_V(t_2, t_1) = C_V^T(t_1, t_2) ; \quad \forall t_1, t_2 \quad (1-66)$$

$$(b) W(t) = R_V(t, t) \geq 0 ; \quad \forall t \quad (1-67)$$

$$W'(t) = C_V(t, t) \geq 0 ; \quad \forall t \quad (1-68)$$

$$(c) C_V(t_1, t_2) = R_V(t_1, t_2) + \underline{m}(t_1) \underline{m}^T(t_2) ; \quad \forall t_1, t_2 \quad (1-69)$$

onde $\underline{m}(t)$ é a média do processo.

Definição 1.20 - Seja $\underline{\xi}(t)$ um processo estocástico vetorial com média zero e matriz de covariância

$$R_{\underline{\xi}}(t_2, t_1) = V(t_1) \quad (1-70)$$

onde $V(t) \geq 0$ e $\delta(\cdot)$ é a função delta de Dirac. O processo $\underline{\xi}(t)$ é chamado de processo estocástico ruído branco com intensidade $V(t)$.

Teorema 1.14 - Dado o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{\xi}(t) \quad , \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (1-71)$$

onde: $\underline{\xi}(t)$ é um processo estocástico ruído branco com intensidade V constante, matriz de covariância

$$R_{\underline{\xi}}(t_1, t_2) = V\delta(t_1 - t_2)\delta(t_2 - t_1) \quad (1-72)$$

$\underline{x}_0$ é uma variável aleatória, independente de $\underline{\xi}(t)$, com média $\underline{m}_0$, matriz de variância

$$W_0 = E \{ (\underline{x}_0 - \underline{m}_0) (\underline{x}_0 - \underline{m}_0)^T \} \quad (1-73)$$

e matriz dos momentos de segunda ordem

$$W'_0 = E \{ \underline{x}_0 \underline{x}_0^T \} \quad (1-74)$$

Temos:

$$(a) \dot{\underline{m}}_X(t) = A \underline{m}_X(t) \quad ; \quad \underline{m}_X(0) = \underline{m}_0 \quad (1-75)$$

$$(b) \dot{W}(t) = AW(t) + W(t)A^T + BVB^T; W(0) = W_0 \quad (1-76)$$

$$(c) \dot{W}'(t) = AW'(t) + W'(t)A^T + BVB^T; W'(0) = W'_0 \quad (1-77)$$

onde $\underline{m}_X(t)$, $W(t) = R_X(t, t)$ e $W'(t) = C_X(t, t)$ são respectivamente a média, a matriz de variância e a matriz dos momentos de segunda ordem de $\underline{x}(t)$.

Se o sistema (1-71) é assintoticamente estável, temos ainda:

$$(d) \lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} W'(t) = W_r \quad (1-78)$$

onde $W_r > 0$ é a solução única da equação matricial linear

$$AW_r + W_r A^T + BVB^T = 0 \quad (1-79)$$

1.2.6 - Expressões quadráticas integrais com horizonte infinito

Antes de considerar os vários aspectos do cálculo de expressões quadráticas integrais do estado de sistemas lineares invariantes no tempo, vamos recapitular mais alguns resultados e definições da teoria de matrizes que serão muito utilizados neste capítulo e em todo o resto do trabalho. Até o teorema 1.20, a referência é (Barnett e Storey, {6}).

Definição 1.21 - Dadas as matrizes A e B de dimensões (m x n) e (l x p) respectivamente, o produto de Kronecker (A $\otimes$ B) é dado por

$$A \otimes B = (a_{i,j} B) \quad (1-80)$$

onde A $\otimes$ B é uma matriz de dimensão (ml x np) particionada em mn blocos como indicado em (1-80).

Teorema 1.15 - Dadas as matrizes A,B,C,D de dimensões (m x n), (l x p), (n x g), (p x r) respectivamente, temos:

$$(A \begin{pmatrix} X \\ B \end{pmatrix})^T = A^T \begin{pmatrix} X \\ B \end{pmatrix}^T \quad (1-81)$$

$$(A \begin{pmatrix} X \\ B \end{pmatrix}) (C \begin{pmatrix} X \\ D \end{pmatrix}) = AC \begin{pmatrix} X \\ B \end{pmatrix} BD \quad (1-82)$$

Teorema 1.16 - Dadas as matrizes A,B,C de dimensões (n x n), (n x m), (m x n) respectivamente, temos:

(a) $AX=B$ é equivalente a

$$(A \begin{pmatrix} X \\ I_m \end{pmatrix}) X_V = B_V \quad (1-83)$$

(b) $XA=C$ é equivalente a

$$(I_m \begin{pmatrix} X \\ A^T \end{pmatrix}) X_V = C_V \quad (1-84)$$

onde: I_m é a matriz unidade de dimensão (n x m); X_V, B_V, C_V são vetores de dimensão (nm) contendo respectivamente, os elementos X, B, C armazenados por linha.

Teorema 1.17 - Dadas as matrizes A,B de dimensões (n x n) e (m x n) respectivamente temos:

(a) Os autovalores de $(A \begin{pmatrix} X \\ B \end{pmatrix})$ são os mn números

$$\lambda_{ij} = \lambda_i(A) \lambda_j(B) ; i = 1 \text{ até } n, j=1 \text{ até } m \quad (1-85)$$

(b) Os autovalores de $A \begin{pmatrix} X \\ I_m \end{pmatrix} + I_n \begin{pmatrix} X \\ B \end{pmatrix}$ são os mn números

$$\lambda_{ij} = \lambda_i(A) + \lambda_j(B) ; i = 1 \text{ até } n, j=1 \text{ até } m \quad (1-86)$$

onde $\lambda_i(A), \lambda_j(B)$ representam o i-ésimo autovalor de A,B respectivamente.

Lema 1.2 - Dada a equação matricial linear

$$AX + XB + C = 0 \quad (1-87)$$

onde A,B,C são matrizes de dimensões (n x n), (m x m), (n x m) respectivamente, temos:

(a) A equação (1-87) é equivalente aos sistema de equações lineares

$$[A \begin{pmatrix} X \\ I_m \end{pmatrix} + I_n \begin{pmatrix} X \\ B^T \end{pmatrix}] X_V = -C_V \quad (1-88)$$

onde X_V e C_V são vetores de dimensão nm contendo, respectivamente, os elementos de X e C armazenados por linha.

(b) A equação (1-87) tem solução única se e somente se

$$\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \neq 0 ; i=1 \text{ até } n, j=1 \text{ até } m \quad (1-89)$$

onde $\lambda_i(A)$, $\lambda_j(B)$ representam o i -ésimo autovalor de A, B respectivamente.

Prova

Parte (a) - Fazendo

$$Y = AX \quad (1-90)$$

$$Z = XB \quad (1-91)$$

e substituindo (1-90) e (1-91) em (1-87) temos

$$Y + Z + C = 0 \quad (1-92)$$

e conseqüentemente

$$Y_V + Z_V = -C_V \quad (1-93)$$

onde Y_V, Z_V são vetores de dimensão nm contendo respectivamente os elementos de Y, Z armazenados por linha. Aplicando o teorema 1.16 a (1-90) e (1-91) temos

$$Y_V = (A \begin{pmatrix} X \\ I_m \end{pmatrix}) X_V \quad (1-94)$$

$$Z_V = (I_n \begin{pmatrix} X \\ B^T \end{pmatrix}) X_V \quad (1-95)$$

que substituídos em (1-93) resulta

$$[A \begin{pmatrix} X \\ I_m \end{pmatrix} + I_n \begin{pmatrix} X \\ B^T \end{pmatrix}] X_V = -C \quad (1-96)$$

Parte (b) Pelo teorema 1.17(b), os autovalores de $[A \begin{pmatrix} X \\ I_m \end{pmatrix} + I_n \begin{pmatrix} X \\ B^T \end{pmatrix}]$ são dados por

$$\lambda_{ij} = \lambda_i(A) + \lambda_j(B^T) = \lambda_i(A) + \lambda_j(B) \quad (1-97)$$

Portanto, a equação (1-87) tem solução única se e somente se

$$\lambda_{ij} = \lambda_i(A) + \lambda_j(B) \neq 0 \quad (1-98)$$

c.q.d.

Observação: é fácil verificar que se A e B são matrizes assintoticamente estáveis, então temos $\lambda_{ij} \neq 0$ em (1-98) e portanto a equação (1-87) tem solução única.

Lema 1.3 - Dadas as matrizes A, X de dimensão (n x n) e a matriz C de dimensão (r x n), temos:

- (a) Se as partes reais de todos os autovalores da matriz A são estritamente negativas, então a solução da equação matricial.

$$A^T X + XA + C^T C = 0 \quad (1-99)$$

é dada pela matriz simétrica

$$X = \int_0^\infty \exp(A^T t) C^T C \exp(At) dt \quad (1-100)$$

- (b) X é uma matriz definida positiva se o par {A,C} é completamente observável.

Prova:

Parte (a) : Por inspeção, facilmente se verifica que a solução da equação diferencial matricial

$$\dot{Y}(t) = A^T Y(t) + Y(t)A; Y(0) = C^T C \quad (1-101)$$

é dada por

$$Y = \exp(A^T t) C^T C \exp(At) \quad (1-102)$$

Integrando ambos os lados da equação (1-101) temos

$$\int_0^t \dot{Y} dt = \int_0^t (A^T Y(t) + Y(t)A) dt; Y(0) = C^T C \quad (1-103)$$

$$Y(t) - Y(0) = A^T \int_0^t Y(t) dt + \int_0^t Y(t) dt A; Y(0) = C^T C \quad (1-104)$$

Fazendo o limite para t tendendo a infinito, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) - Y(0) = A^T \int_0^\infty Y(t) dt + \int_0^\infty Y(t) dt A; Y(0) = C^T C \quad (1-105)$$

A hipótese de que a parte real de todos os autovalores de A são estritamente negativas e (1-102) implicam que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0 \quad (1-106)$$

Substituindo (1-102) e (1-106) em (1-105) e fazendo

$$X = \int_0^{\infty} Y(t) dt = \int_0^{\infty} \exp(A^T t) C^T C \exp(At) dt \quad (1-107)$$

temos

$$A^T X + XA + C^T C = 0 \quad (1-108)$$

Parte (b): Para provar (b) por absurdo, vamos supor que X não é definida positiva. Então, existe $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_0 \neq 0$ tal que

$$\phi(\underline{x}_0) = \underline{x}_0^T X \underline{x}_0 \leq 0 \quad (1-109)$$

Substituindo (1-107) em (1-109), temos

$$\phi(\underline{x}_0) = \int_0^{\infty} \underline{x}_0^T \exp(A^T t) C^T C \exp(At) \underline{x}_0 dt \leq 0 \quad (1-110)$$

que pode ser reescrito como

$$\phi(\underline{x}_0) = \int_0^{\infty} \underline{y}^T(t) \underline{y}(t) dt \leq 0 \quad (1-111)$$

onde $\underline{y}(t)$ é dado por:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) \quad ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (1-112)$$

$$\underline{y}(t) = C\underline{x}(t) \quad (1-113)$$

De (1-111) verificamos que $\phi(\underline{x}_0) < 0$ é absurdo porque

$$\underline{y}^T(t) \underline{y}(t) \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq t < \infty \quad (1-114)$$

$\phi(\underline{x}_0) = 0$ também é absurdo porque neste caso teríamos

$$\underline{y}(t) \equiv 0 \quad ; \quad 0 < t < \infty \quad (1-115)$$

que contraria a hipótese de que o par $\{A, C\}$ é completamente observável. Portanto, $\phi(\underline{x}_0) \leq 0$ é absurdo e X é uma matriz definida positiva.

c.q.d.

Após este lema, as seguintes observações são oportunas:

- (a) Se $C^T C > 0$ temos $X > 0$ porque neste caso é bem conhecido que C tem posto n e portanto o par $\{A, C\}$ é completamente observável para qualquer A .

(b) Por seu papel no estudo da estabilidade de sistemas lineares pelo segundo método de Liapunov, a equação (1-99) é frequentemente chamada de equação de Liapunov, denominação esta que será utilizada neste trabalho.

(c) Uma matriz quadrada A com a parte real de todos os seus autovalores estritamente negativa, será chamada frequentemente neste trabalho de matriz assintoticamente estável.

Teorema 1.18 - Dada uma matriz quadrada A de dimensão (n x n), temos

$$\text{traço}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (1-116)$$

onde λ_i , $i=1$ até n são os autovalores da matriz A.

Teorema 1.19 - Dadas as matrizes A e B de dimensões (n x m) e (m x n) respectivamente, temos:

$$\text{traço}(AB) = \text{traço}(BA) \quad (1-117)$$

Teorema 1.20 - Dadas a matriz simétrica A e a matriz B de dimensões (n x n), temos

$$\text{traço}(AB) = \text{traço}(AB^T) \quad (1-118)$$

Teorema 1.21 - Dados o sistema linear invariante no tempo assintoticamente estável

$$\dot{\underline{x}}(t) = (A+BG)\underline{x}(t) \quad ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (1-119)$$

e o índice de desempenho quadrático

$$J = \int_0^\infty \underline{x}^T(t) (S_1^T S_1 + G^T S_2 G) \underline{x}(t) dt \quad (1-120)$$

onde S_2 é uma matriz definida positiva.

Temos:

$$(a) \quad J = \underline{x}_0^T W \underline{x}_0 = \text{traço}(\underline{x}_0 \underline{x}_0^T W) \quad (1-121)$$

$$(A+BG)^T W + W(A+BG) + S_1^T S_1 + G^T S_2 G = 0 \quad (1-122)$$

(b) W é uma matriz definida positiva ($W > 0$) se $S_1^T S_1 > 0$ ou se $S_1^T S_1 \geq 0$ e o par $\{A, S_1\}$ é completamente observável.

(c) Se $\underline{x}_0$ é uma variável aleatória com matriz dos momentos de segunda ordem $E \{\underline{x}_0 \underline{x}_0^T\} = X_0$, temos

$$E \{J\} = \text{traço}(X_0 W) \quad (1-123)$$

Prova:

Parte (a) - Do teorema 1.1, temos que a solução da equação (1-119) é dada por

$$\underline{x}(t) = \exp \{ (A+BG)t \} \underline{x}_0 \quad (1-124)$$

Substituindo (1-124) em (1-120) temos

$$J = \underline{x}_0^T \int_0^\infty \exp \{ (A+BG)^T t \} [S_1^T S_1 + G^T S_2 G] \exp \{ (A+BG)t \} dt \underline{x}_0 \quad (1-125)$$

Aplicando a (1-125) o lema 1.2 (a) e em seguida o teorema 1.19 temos

$$J = \underline{x}_0^T W \underline{x}_0 = \text{traço} (\underline{x}_0 \underline{x}_0^T W) \quad (1-126)$$

$$(A+BG)^T W + W(A+BG) + S_1^T S_1 + G^T S_2 G = 0 \quad (1-127)$$

Parte (b) - Como $(S_1^T S_1 + G^T S_2 G) \geq 0$, de (1-125) e (1-126) temos

$$J = \underline{x}_0^T W \underline{x}_0 \geq 0 \quad (1-128)$$

De (1-125) facilmente se verifica que para se ter $J = 0$ é necessário termos simultaneamente:

$$\underline{x}^T(t) S_1^T S_1 \underline{x}(t) \equiv 0 \quad ; \quad 0 \leq t < \infty \quad (1-129)$$

$$\underline{x}^T(t) G^T S_2 G \underline{x}(t) \equiv 0 \quad ; \quad 0 \leq t < \infty \quad (1-130)$$

Para $S_1^T S_1 > 0$, (1-129) é impossível para $\underline{x}_0 \neq 0$ e portanto devemos ter $W > 0$ porque $J = \underline{x}_0^T W \underline{x}_0 > 0$ para qualquer $\underline{x}_0 \neq 0$.

Para $S_1^T S_1 \geq 0$ e o par A, S_1 completamente observável, de (1-129) temos

$$S_1 \underline{x}(t) \equiv 0 \quad ; \quad 0 \leq t < \infty \quad (1-131)$$

Como temos $S_2 > 0$, (1-130) implica que

$$G \underline{x}(t) \equiv 0 \quad ; \quad 0 \leq t < \infty \quad (1-132)$$

Substituindo (1-132) em (1-119) e ajuntando com (1-131), temos

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) \quad ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (1-133)$$

$$y(t) = S_1 \underline{x}(t) \equiv 0 \quad ; \quad 0 \leq t < \infty \quad (1-134)$$

o que é impossível porque viola a hipótese de que o par $\{A, S_1\}$ é completamente observável. Portanto devemos ter também neste caso $W > 0$ porque $J = \underline{x}_0^T W \underline{x}_0 > 0$ para qualquer $\underline{x}_0 \neq 0$.

Parte (c) - De (1-121) temos

$$E \{J\} = E \{ \text{traço} (\underline{x}_0 \underline{x}_0^T W) \} \quad (1-135)$$

Devido à linearidade dos operadores traço e esperança matemática $E \{.\}$, temos

$$E \{J\} = \text{traço} (E \{ \underline{x}_0 \underline{x}_0^T \} W) \quad (1-136)$$

$$E \{J\} = \text{traço} (X_0 W) \quad (1-137)$$

c.q.d.

Lema 1.4 - Dadas as matrizes A, B, W, T, S de dimensão $(n \times n)$, onde A é uma matriz estável e B, W, T, S são matrizes simétricas, temos:

$$\text{traço} (SW) = \text{traço} (TB) \quad (1-138)$$

onde W e T são dados por

$$AW + WA^T + B = 0 \quad (1-139)$$

$$A^T W + WA + S = 0 \quad (1-140)$$

Prova:

Aplicando o lema 1.3 à equação (1-139) temos:

$$W = \int_0^{\infty} \exp(At) \text{Sexp}(A^T t) \quad (1-141)$$

Substituindo (1-141) em (1-138), temos

$$\text{traço}(SW) = \text{traço} \int_0^{\infty} \exp(At) \text{Bexp}(A^T t) dt \quad (1-142)$$

Trocando entre si os operadores traço e integral (a troca é possível porque se trata de operadores lineares), temos

$$\text{traço}(SW) = \int_0^{\infty} \text{traço} \left[\text{Sexp}(At) \text{Bexp}(A^T t) \right] dt \quad (1-143)$$

Pelo teorema 1.19 temos

$$\text{traço} \left[\text{Sexp}(At) \text{Bexp}(A^T t) \right] = \text{traço} \left[\exp(A^T t) \text{Sexp}(At) B \right] \quad (1-144)$$

Substituindo (1-144) em (1-143) e trocando novamente entre si os operadores traço e integral, temos

$$\text{traço}(SW) = \text{traço} \left(\int_0^{\infty} \exp(A^T t) \text{Sexp}(At) dt B \right) \quad (1-145)$$

Aplicando o lema 1.3 às equações (1-145) e (1-140), temos finalmente

$$\text{traço}(SW) = \text{traço}(TB) \quad (1-146)$$

c.q.d.

Lema 1.5 - Dados

$$J = \text{traço}(S_1 W_1) \quad (1-147)$$

$$A_1 W_1 + W_1 A_1^T + Q_1 = 0 \quad (1-148)$$

onde A_1 é uma matriz de dimensão $(n \times n)$ e S_1, W_1, Q_1 são matrizes simétricas de dimensão $(n \times n)$. Seja M uma matriz não singular de dimensão $(n \times n)$, então temos:

$$J = \text{traço}(SW) \quad (1-149)$$

$$AW + WA^T + Q = 0 \quad (1-150)$$

onde:

$$S = M^T S_1 M \quad (1-151)$$

$$A = M^{-1} A_1 M \quad (1-152)$$

$$Q = M^{-1} Q_1 M^{T^{-1}} \quad (1-153)$$

Prova:

Pré e pós multiplicando (1-148) por M^{-1} e $M^{T^{-1}}$ temos

$$M^{-1} A_1 W_1 M^{T^{-1}} + M^{-1} W_1 A_1^T M^{T^{-1}} + M^{-1} Q_1 M^{T^{-1}} = 0 \quad (1-154)$$

que é equivalente a

$$(M^{-1} A_1 M) (M^{-1} W_1 M^{T^{-1}}) + (M^{-1} W_1 M^{T^{-1}}) (M^T A_1^T M^{T^{-1}}) + M^{-1} Q_1 M^{T^{-1}} = 0 \quad (1-155)$$

a qual podemos reescrever como

$$AW + WA^T + Q = 0 \quad (1-156)$$

onde

$$A = M^{-1} A_1 M \quad (1-157)$$

$$Q = M^{-1} Q_1 M^{T^{-1}} \quad (1-158)$$

$$W = M^{-1} W_1 M^{T^{-1}} \quad (1-159)$$

De (1-159) podemos verificar que

$$W_1 = M W M^T \quad (1-160)$$

que substituído em (1-147) dá

$$J = \text{traço}(S_1 M W M^T) \quad (1-161)$$

a qual usando o teorema 1.19, podemos reescrever como

$$J = \text{traço}(SW) \quad (1-162)$$

$$S = M^T S_1 M \quad (1-163)$$

c.q.d.

Teorema 1.22 - Dados o sistema linear invariante no tem
po

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{\xi}(t) ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (1-164)$$

e o índice de desempenho quadrático

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left\{ \int_0^T \underline{x}^T(t) S \underline{x}(t) dt \right\} \quad (1-165)$$

onde: A é uma matriz estável; S é uma matriz simétrica; $\underline{x}_0$ é uma variável aleatória com matriz de momentos de segunda ordem

$$E \left\{ \underline{x}_0 \underline{x}_0^T \right\} = X_0 \quad (1-166)$$

$\underline{\xi}(t)$ é um processo estocástico ruído branco independente de $\underline{x}_0$, com média zero e matriz de covariância

$$E \left\{ \underline{\xi}(t_1) \underline{\xi}^T(t_2) \right\} = Q \delta(t_1 - t_2) \quad (1-167)$$

Temos:

$$J = \text{traço}(SW) \quad (1-168)$$

$$AW + WA^T + BQB^T = 0 \quad (1-169)$$

Prova:

Lembrando que o traço de uma variável escalar é igual a ela mesma, podemos reescrever (1-165) como

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left\{ \int_0^T \text{traço} \left[\underline{x}^T(t) S \underline{x}(t) \right] dt \right\} \quad (1-170)$$

Pelo teorema 1.19 temos

$$\text{traço} \left[\underline{x}^T(t) S \underline{x}(t) \right] = \text{traço} \left[S \underline{x}(t) \underline{x}^T(t) \right] \quad (1-171)$$

Substituindo (1-171) em (1-170) e trocando entre si os operadores integral, traço e esperança matemática, temos

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{traço} \left[S \int_0^T E \left\{ \underline{x}(t) \underline{x}^T(t) \right\} dt \right] \quad (1-172)$$

Pelo teorema 1.14(c) temos

$$E\{\underline{x}(t)\underline{x}^T(t)\} = W_1(t) \quad (1-173)$$

onde $W_1(t)$ é dado pela equação

$$\dot{W}_1(t) = AW_1(t) + W_1(t)A^T + BQB^T \quad ; \quad W_1(0) = X_0 \quad (1-174)$$

Por substituição direta é fácil verificar que se A é uma matriz estável, a solução de (1-174) é dada por:

$$W_1(t) = \exp(At)(X_0 - W)\exp(A^T t) + W \quad (1-175)$$

$$AW + WA^T + BQB^T = 0 \quad (1-176)$$

Substituindo (1-173), (1-175) em (1-172) temos

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{traço} \left[S \int_0^T \exp(At)(X_0 - W)\exp(A^T t) dt \right] \quad (1-177)$$

$$+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{traço} \left[S \int_0^T W dt \right] \quad (1-178)$$

Como A é uma matriz estável, usando o lema 1.3 é fácil verificar que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{traço} \left[S \int_0^T \exp(At)(X_0 - W)\exp(A^T t) dt \right] \quad (1-179)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{traço}[SW_0] = 0 \quad (1-180)$$

onde W_0 é a solução única e finita da equação

$$AW_0 + W_0A^T + X_0 - W = 0 \quad (1-181)$$

Por outro lado, é fácil verificar que como W é constante, temos

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{traço} \left[S \int_0^T W dt \right] = \text{traço}(SW) \quad (1-182)$$

Substituindo (1-182) e (1-180) em (1-178), temos finalmente

$$J = \text{traço} (SW) \quad (1-183)$$

c.q.d.

Teorema 1.23 - Dado o índice de desempenho quadrático

$$J = \text{traço} \left[S^T S \int_0^{\infty} \exp(A^T t) Q^T Q \exp(At) dt \right] \quad (1-184)$$

onde: A é uma matriz de dimensão $(n \times n)$, Q é uma matriz de dimensão $(r \times n)$ e o par $[A, Q]$ é detectável; S é uma matriz de dimensão $(m \times n)$ e o par $[A, S^T]$ é completamente controlável.

Se J é finito ($J < \infty$) então A é uma matriz assintoticamente estável.

Prova:

Assumindo ($J < \infty$) e aplicando o teorema 1.19 à equação (1-184), temos

$$J = \text{traço} \left[\int_0^{\infty} S \exp(A^T t) Q^T Q \exp(At) S^T dt \right] < \infty \quad (1-185)$$

que podemos reescrever na forma

$$J = \sum_{i=1}^m \int_0^{\infty} \underline{s}_i \exp(A^T t) Q^T Q \exp(At) \underline{s}_i^T dt < \infty \quad (1-186)$$

onde $\underline{s}_i$ é a i -ésima linha da matriz S .

A equação (1-186) pode ainda ser vista como

$$J = \sum_{i=1}^m \int_0^{\infty} \underline{y}_i^T(t) \underline{y}_i(t) dt < \infty \quad (1-187)$$

onde $\underline{y}_i(t)$ é a saída do sistema

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) \quad ; \quad \underline{x}(0) = \underline{s}_i^T \quad (1-188)$$

$$\underline{y}_i(t) = Q \underline{x}(t) \quad (1-189)$$

Para se obter (1-187) é necessário que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{y}_i(t) = 0 \quad ; \quad i=1 \text{ até } m \quad (1-190)$$

Pelo lema 1.1, (1-190) implica também que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^K \underline{y}_i(t)}{dt^K} = 0 \quad ; \quad i=1 \text{ até } m, K=1 \text{ até } \infty \quad (1-191)$$

Pelo teorema 1.1 e 1.2(d), temos

$$\underline{y}_i(t) = Q \exp(At) \underline{s}_i^T \quad (1-192)$$

$$\frac{d^K \underline{y}_i(t)}{dt^K} = Q \exp(At) A^K \underline{s}_i^T \quad (1-193)$$

que substituídos em (1-190), (1-191) temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q \exp(At) \underline{x}_0 = 0 \quad (1-194)$$

para qualquer $\underline{x}_0$ pertencente ao subespaço linear varrido pelas colunas da matriz de controlabilidade

$$P = \left[S^T, AS^T, A^2S^T, \dots, A^{n-1}S^T \right] \quad (1-195)$$

Substituindo (1-194) em (1-189), temos

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) \quad ; \quad \underline{x}(t) = \underline{x}_0 \quad (1-196)$$

$$\underline{y}(t) = Q\underline{x}(t) \quad (1-197)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{y}(t) = 0 \quad (1-198)$$

Como por hipótese o par $[A, S^T]$ é completamente controlável, pelo teorema 1.7, a matriz P tem posto n e portanto (1-196), (1-197), (1-198) é válido para qualquer $\underline{x}_0 \in R^n$.

Pelo lema 1.1, (1-198) implica também

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^K \underline{y}(t)}{dt^K} = 0 \quad ; \quad K=1 \text{ até } n-1 \quad (1-199)$$

Aplicando o teorema 1.2(d) a (1-198) e (1-199) temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} Q \\ QA \\ QA^2 \\ \vdots \\ QA^{n-1} \end{bmatrix} \underline{x}(t) = 0 \quad (1-200)$$

para qualquer $\underline{x}_0 \in R^n$.

Pelo corolário 1.3, se $\underline{x}_0$ pertence ao subespaço não observável do sistema (1-196), (1-197), então $\underline{x}(t)$ também pertence ao subespaço não observável. Como por hipótese o par $[A, Q]$ é detectável, se $\underline{x}_0$ pertence ao subespaço não observável do sistema (1-196), (1-197), então $\underline{x}_0$ pertence ao subespaço estável do mesmo sistema e portanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) = 0 \quad (1-201)$$

Se $\underline{x}_0$ pertence ao subespaço observável de (1-196), (1-197) então, pelo teorema 1.10, $\underline{x}(t)$ não pertence ao espaço nulo da matriz de observabilidade e, portanto, de (1-200) devemos concluir que também neste caso temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) = 0 \quad (1-202)$$

Como o R^n é a soma direta dos subespaços observável e não observável de (1-201), (1-202), concluímos que o mesmo é um sistema assintoticamente estável e portanto A é uma matriz estável.

c.q.d.

Corolário 1.4 - A tese do teorema 1.23 continua válida quando a hipótese de que o par $[A, Q]$ é detectável é trocada pela hipótese de que $[A, Q]$ é completamente observável.

Este corolário é facilmente verificável, notando-se que todo par $[A, Q]$ completamente observável é também detectável.

Teorema 1.24 - Dado o índice de desempenho quadrático

$$J = \text{traço} \left\{ S^T S \int_0^{\infty} \exp[(A+BG)^T t] [Q^T Q + G^T R G] \exp[(A+BG)t] dt \right\} \quad (1-203)$$

onde: A, B, G são matrizes de dimensões (nxn), (nxm), (mxn), respectivamente; Q é uma matriz de dimensão (rxn) e o par [A, Q] é detectável; S é uma matriz de dimensão (lxn) e o par [(A+BG), S^T] é completamente, R é uma matriz simétrica definida positiva de dimensão (mxm). Se J é finito (J < ∞) então (A+BG) é uma matriz estável.

Prova:

Assumindo J < ∞, analogamente ao teorema 1.24, facilmente se verifica que

$$J = \sum_{i=1}^{\ell} \int_0^{\infty} \underline{y}_i^T(t) \underline{y}_i(t) dt + \sum_{i=1}^{\ell} \int_0^{\infty} \underline{u}_i^T(t) R \underline{u}_i(t) dt < \infty \quad (1-204)$$

onde $\underline{u}_i(t)$ e $\underline{y}_i(t)$ são dados por

$$\dot{\underline{x}}_i(t) = (A+BG) \underline{x}_i(t) \quad ; \quad \underline{x}_i(0) = \underline{s}_i^T \quad (1-205)$$

$$\underline{y}_i(t) = Q \underline{x}_i(t) \quad (1-206)$$

$$\underline{u}_i(t) = G \underline{x}_i(t) \quad (1-207)$$

onde $\underline{s}_i$ é a i-ésima linha da matriz S.

Para se obter (1-204), é necessário que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{y}_i(t) = 0 \quad ; \quad i=1 \text{ até } \ell \quad (1-208)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{u}_i(t) = 0 \quad ; \quad i=1 \text{ até } \ell \quad (1-209)$$

Pelo lema, 1.1, (1-208) implica também que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^K \underline{y}_i(t)}{dt^K} = 0 \quad ; \quad i=1 \text{ até } \ell, K=1 \text{ até } \infty \quad (1-210)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^K \underline{u}_i(t)}{dt^K} = 0 \quad ; \quad i=1 \text{ até } \ell, K=1 \text{ até } \infty \quad (1-211)$$

Analogamente ao teorema 1.24, concluímos que

$$\underline{\dot{x}}(t) = (A+BG)\underline{x}(t) \quad ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (1-212)$$

$$\underline{y}(t) = Q\underline{x}(t) \quad (1-213)$$

$$\underline{u}(t) = G\underline{x}(t) \quad (1-214)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{y}(t) = 0 \quad (1-215)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{u}(t) = 0 \quad (1-216)$$

para qualquer $\underline{x}_0$ pertencente ao subespaço linear varrido pelas colunas da matriz de controlabilidade

$$P = \left[S^T, (A+BG)S^T; (A+BG)^2 S^T, \dots, (A+BG)^{n-1} S^T \right] \quad (1-217)$$

Como por hipótese o par $[(A+BG), S^T]$ é completamente controlável, pelo teorema 1.7, a matriz P tem posto n e portanto (1-213), (1-214), (1-215), (1-216) são válidas para qualquer $\underline{x}_0 \in R^n$.

Pelo lema 1.1 e teoremas 1.1 e 1.2(d), (1-215) implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\underline{y}(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(A+BG)\underline{x}(t) \quad ; \quad \forall \underline{x}_0 \in R^n \quad (1-218)$$

substituindo (1-214), (1-216) em (1-219) temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} QA\underline{x}(t) = 0 \quad ; \quad \forall \underline{x}_0 \in R^n \quad (1-219)$$

Aplicando sucessivamente os passos que levaram às equações (1-218) e (1-219) temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} Q \\ QA \\ QA^2 \\ \vdots \\ QA^{n-1} \end{bmatrix} \underline{x}(t) = 0 \quad ; \quad \forall \underline{x}_0 \in R^n \quad (1-220)$$

Como por hipótese o par $[A, Q]$ é detectável, analogamente ao teorema 1.23 temos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) = 0 \quad ; \quad \forall \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad (1-221)$$

de onde concluímos que o sistema (1-212) é assintoticamente estável e portanto $(A+BG)$ é uma matriz estável.

Corolário 1.5 - A tese do teorema 1.24 continua válida quando a hipótese de que o par $[A,Q]$ é detectável é trocada pela hipótese de que o par $[A,Q]$ é completamente observável.

Este corolário é facilmente verificável notando-se que todo par $[A,Q]$ completamente observável é também detectável.

1.3 - OS PROBLEMAS DOS REGULADORES ÓTIMOS L-Q E L-Q-G DE TEMPO INFINITO

Nesta seção vamos recapitular algumas definições e resultados sobre o problema do regulador ótimo para sistemas lineares contínuos, invariantes no tempo, com funcionais de desempenho quadrático de tempo infinito. As referências básicas para esta seção são (Kwakernaak e Sivan, {34} e Athans, {1,2}).

1.3.1 - Problema do regulador L-Q de tempo infinito

Definição 1.21 - Dados o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \quad ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (1-222)$$

e o funcional de desempenho quadrático

$$J(\underline{u}(t)) = \int_0^{\infty} \left[\underline{x}^T(t) Q^T Q \underline{x}(t) + \underline{u}^T(t) R \underline{u}(t) \right] dt \quad (1-223)$$

onde: $\underline{x}(t)$, $\underline{u}(t)$ são vetores de dimensões n, m respectivamente; A , B, Q, R são matrizes reais, constantes, dimensionadas consistentemente e R é uma matriz simétrica definida positiva.

O problema de achar $\underline{u}(t)$ que minimiza (1-223) é chamado de "Problema do Regulador Ótimo Determinístico Linear- Quadrático de Tempo Infinito". Para simplicidade de notação, neste trabalho este problema será sempre referido de forma abreviada como o "Problema do Regulador Ótimo L-Q de Tempo Infinito".

Teorema 1.25 - Dados o sistema linear (1-222) e o funcional de desempenho (1-223), temos

(a) Se o sistema (1-222) é estabilizável e o par $[A, Q]$ é detectável, a solução do problema do regulador ótimo L-Q de tempo infinito é dada por

$$\underline{u}^*(t) = G\underline{x}(t) = -R^{-1}B^T T\underline{x}(t) \quad (1-224)$$

onde T é a única solução semidefinida positiva da equação matricial de Riccati

$$A^T T + TA + Q - TBR^{-1}B^T T = 0 \quad (1-225)$$

(b) Para $\underline{u}(t) = \underline{u}^*(t)$, o sistema em malha fechada

$$\dot{\underline{x}}(t) = (A + BG)\underline{x}(t) \quad ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (1-226)$$

é assintoticamente estável se e somente se o sistema (1-222) é estabilizável e o par $[A, Q]$ é detectável.

(c) Se $\underline{u}(t)$ é dado por

$$\underline{u}(t) = G\underline{x}(t) = -R^{-1}B^T T\underline{x}(t) \quad (1-227)$$

onde T é solução da equação de Riccati

$$A^T T + TA + Q - TBR^{-1}B^T T = 0 \quad (1-228)$$

o valor do funcional de desempenho (1-223) é

$$J(\underline{u}(t)) = \underline{x}_0^T T \underline{x}_0 \quad (1-229)$$

(d) A solução T da equação de Riccati (1-228) é definida positiva se e somente se o par $[A, Q]$ é completamente observável.

Antes de continuar, são oportunas, neste trabalho, as seguintes observações sobre o teorema 1.25:

(a) Da equação (1-227) temos que a lei de controle ótima é linear, invariante no tempo, na forma de realimentação de estado e independente da condição inicial do sistema.

(b) A invariância e a linearidade da lei de controle,

bem como a sua independência para com a condição inicial do sistema facilitam muito a implementação da lei de controle. Como o sistema controlado continua linear e invariante no tempo, a sua análise é também muito facilitada.

(c) A lei de controle na forma de realimentação está intimamente associada a uma série de propriedades bem conhecidas, que além dos resultados apresentados no teorema 1.25, viabilizam sobremaneira o problema do regulador ótimo L-Q de tempo infinito como ferramenta para projeto de sistemas de controle:

- Alocação assintótica de polos através da escolha apropriada do funcional de desempenho (1-233) (Sandell e outros, {56}).
- Sistema controlado com excelente propriedades de sensibilidade e robustesa de acordo com vários critérios, incluindo o das clássicas margens de ganho e fase (Sandell e outros, {56}, Safonov e Athans, {54}).
- A escolha adequada do funcional de desempenho (1-233) permite maximizar a validade de modelos linearizados em torno de uma posição de equilíbrio estável (Loose e outros, {37}, Brison e Ho, {11}).

(d) Do ponto de vista da implementação da lei de controle (1-227), suas principais desvantagens são:

- Exige medição completa do estado do sistema. Isto nem sempre é possível ou economicamente interessante.
- Na lei de controle (1-227) cada entrada de controle $u_i(t)$ pode ser afetada por todas as saídas dos sensores $x_i(t)$. Em muitos sistemas, mas particularmente em sistemas de grande porte caracterizados por grande dispersão espacial entre suas entradas de controle e seus estados, devido a problemas de custo e confiabilidade do sistema de comunicação exigido, nem sempre é possível ou economicamente viável implementar todas as malhas de realimentação requeridas pela lei de controle (1-227).

(e) Se ao problema do regulador ótimo L-Q de tempo infinito (1-222), (1-223) forem acrescentadas restrições afetando a

medição completa do estado do sistema e a comunicação entre as saídas dos sensores e as entradas dos atuadores, não há mais garantia de que a lei de controle ótima caso possa ser obtida, tenha as interessantes propriedades dos itens (a), (b), (c) anteriores.

Um diagrama de blocos do regulador ótimo L-Q de tempo infinito é apresentado na Fig.1.1.

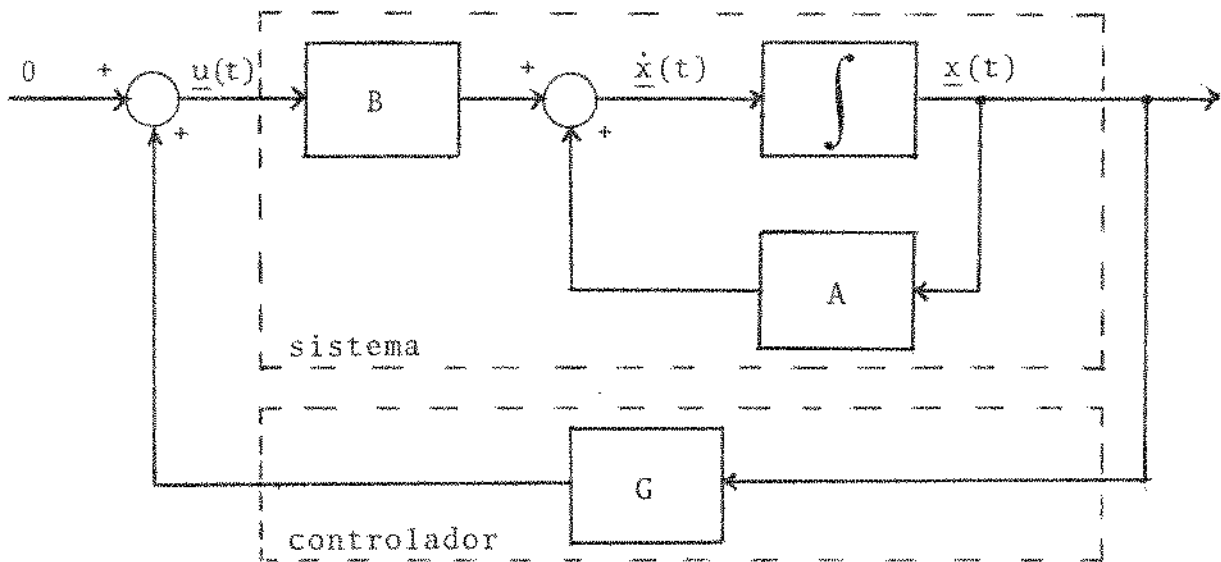


Fig. 1.1 - Diagrama de blocos do regulador ótimo L-Q de tempo infinito

1.3.2 - Problema do regulador L-Q-G de tempo infinito

Definição 1.22 - Dados o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) + \underline{\xi}(t) \quad ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (1-230)$$

$$\underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + \underline{\theta}(t) \quad (1-231)$$

e o funcional de desempenho quadrático

$$J(\underline{u}(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \left[\underline{x}^T(t) S_1^T S_1 \underline{x}(t) + \underline{u}^T(t) S_2^T S_2 \underline{u}(t) \right] dt \right\} \quad (1-232)$$

onde: $\underline{x}(t)$, $\underline{x}_0$, $\underline{\xi}(t)$, $\underline{u}(t)$, $\underline{y}(t)$, $\underline{\theta}(t)$ são vetores de dimensão n , n , n , m , r , r , respectivamente; A, B, C, S_1, S_2 são matrizes reais, cons

tantes, dimensionadas consistentemente, S_1 é uma matriz definida positiva; $\underline{\xi}(t)$, $\underline{\theta}(t)$ são processos estocásticos ruídos brancos gaussianos

$$E\{\underline{\xi}(t)\underline{\theta}^T(\tau)\} = Q^T Q \delta(t-\tau) \quad (1-233)$$

$$E\{\underline{\theta}(t)\underline{\theta}^T(\tau)\} = R \delta(t-\tau) \quad (1-234)$$

Q é uma matriz de dimensão $(r \times n)$ e R é uma matriz definida positiva; $\underline{x}_0$ é uma variável aleatória.

$$E\{\underline{x}_0\} = \bar{\underline{x}}_0 \quad (1-235)$$

$$E\{\underline{x}_0 \underline{x}_0^T\} = X_0 \quad (1-236)$$

$$E\{\underline{\xi}(t)\underline{\theta}^T(\tau)\} = E\{\underline{\xi}(t)\underline{x}_0^T\} = E\{\underline{\theta}(t)\underline{x}_0^T\} = 0 \quad (1-237)$$

O problema de achar $\underline{u}(t)$ que minimiza o funcional de desempenho (1-232) é chamado de "Problema do Regulador Ótimo Estocástico Linear-Quadrático-Gaussiano de Tempo Infinito". Para simplicidade de notação, este problema será sempre referido neste trabalho, de forma abreviada, como o "Problema do Regulador Ótimo L-Q-G de Tempo Infinito".

Teorema 1.26 - Dados o sistema linear (1-230), (1-231) e o funcional de desempenho (1-232), temos

(a) Se o sistema (1-230), (1-231) é estabilizável e detectável, o par $[A, S_1]$ é detectável e o par $[A, Q^T]$ é estabilizável, então a solução do problema do regulador ótimo L-Q-G de tempo infinito é dada por

$$\underline{u}^*(t) = G\hat{\underline{x}}(t) = -S_2^{-1} B^T T \hat{\underline{x}}(t) \quad (1-238)$$

$$\dot{\hat{\underline{x}}}(t) = A\hat{\underline{x}} + H[\underline{y}(t) - C\hat{\underline{x}}(t)] + B\underline{u}(t) \quad ; \quad \hat{\underline{x}}(0) = \bar{\underline{x}}_0 \quad (1-239)$$

$$H = W C^T R^{-1} \quad (1-240)$$

onde W e T são as únicas soluções semidefinidas positivas das equações de Riccati:

$$A^T T + T A + S_1^T S_1 - T B S_2^{-1} B^T T = 0 \quad (1-241)$$

$$AW + WA^T + Q^T Q - WCR^{-1}C^T W = 0 \quad (1-242)$$

(b) Para $\underline{u}(t) = \underline{u}^*(t)$, o sistema em malha fechada

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{x}}(t) \\ \dot{\underline{\hat{x}}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BG \\ HC & A+BG-HC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{\hat{x}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_n \\ H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\xi}(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} \underline{x}(0) \\ \underline{\hat{x}}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{\bar{x}}_0 \end{pmatrix} \quad (1-243)$$

é assintoticamente estável se e somente se o sistema (1-230), (1-231), é estabilizável e detectável, o par $[A, S_1]$ é detectável e o par $[A, Q^T]$ é estabilizável.

(c) Se $\underline{u}(t) = \underline{u}^*(t)$, o valor do funcional de desempenho (1-232) é dado por:

$$J(\underline{u}^*(t)) = \text{traço}[Q^T Q T + G^T S_2 G W] \quad (1-244)$$

(d) A solução T da equação de Riccati (1-241) é definida positiva se e somente se o par $[A, S_1]$ é completamente observável. A solução W da equação de Riccati (1-242) é definida positiva se e somente se o par $[A, Q^T]$ é controlável.

A Fig.1.2 mostra um diagrama de blocos do regulador ótimo L-Q-G de tempo infinito. Antes de prosseguir, as seguintes observações sobre o teorema 1.26 são oportunas:

(a) Das equações (1-238), (1-239), (1-240), (1-241), (1-242) temos que a lei de controle ótima $\underline{u}(t) = G\hat{\underline{x}}(t)$ é na forma de realimentação onde a matriz dos ganhos de realimentação G é a mesma obtida para o regulador ótimo L-Q de tempo infinito e $\hat{\underline{x}}(t)$ é a estimativa ótima do estado do sistema (1-230), (1-231) dadas pelo filtro de Kalman. Em outras palavras, o problema de otimização conjunta do controle e estimação de estado é separável em dois problemas independentes:

- Problema do regulador ótimo L-Q de tempo infinito
- Problema de estimação ótima do estado de sistemas lineares com ruídos brancos gaussianos (filtro de Kalman)

(b) Das equações (1-238), (1-239), (1-240), (1-241), (1-242) temos que a lei de controle ótima é na forma de realimentação de saída e na Fig.1.2 podemos ver que o controlador é linear, invariante no tempo e seus ganhos são independentes das condições iniciais do sistema.

(c) Uma representação de estado alternativa para o sistema controlado em malha fechada pode ser obtida utilizando-se o erro de estimação

$$\underline{\hat{e}}(t) = \underline{x}(t) - \underline{\hat{x}}(t) \quad (1-245)$$

Substituindo (1-245) em (1-243) temos

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{\hat{x}}}(t) \\ \dot{\underline{\hat{e}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BG & -BG \\ 0 & A-HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\hat{x}}(t) \\ \underline{\hat{e}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\xi}(t) \\ \underline{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad (1-248)$$

onde podemos notar uma interessante propriedade dos $2n$ polos do sistema em malha fechada: os polos do sistema em malha fechada são os autovalores das matrizes $(A+BG)$ e $(A-HC)$. Os autovalores de $(A+BG)$ são ajustados por G que depende apenas das matrizes S_1 e S_2 do índice de desempenho quadrático (1-232). Os autovalores de $(A-HC)$ dependem apenas das matrizes de variância $Q^T Q$ e R dos ruídos do sistema e de observação respectivamente (1-233), (1-234).

(d) A invariância e a linearidade do controlador, bem como a independência de suas matrizes para com as condições iniciais do sistema, facilitam muito o seu cálculo e implementação. O uso de processadores paralelos digitais com unidades aritméticas com ponto flutuante ou computadores analógicos de uso especial são recomendados quando alta velocidade de cálculo em tempo real for necessária.

(e) Além dos resultados apresentados no enunciado do teorema 1.26, a viabilidade do problema do regulador ótimo L-Q-G de tempo infinito como ferramenta para projeto de sistemas de controle é bastante reforçada pelas seguintes propriedades:

- Alocação assintótica de polos através da escolha adequada do funcional de desempenho e matrizes de variância

cia dos ruídos (Kwakernaak e Sivan, {34}).

- Maximização da validade de modelos linearizados em torno de uma posição de equilíbrio estável (Loose e outros, {37}, Brison e Ho, {11}).
- Sistema controlado com boas propriedades de sensibilidade e robustesa de acordo com vários critérios incluindo o das clássicas margens de ganho e fase (Sandell e outros, {56}, Safonov e Athans, {54}).

(f) Comparando os problemas dos reguladores ótimos L-Q e L-Q-G de tempo infinito, temos:

- O regulador L-Q-G não requer medida completa do estado do sistema. Para o regulador L-Q isto é uma condição necessária.
- O regulador L-Q-G requer grande quantidade de cálculo em tempo real para a solução de suas equações diferenciais. O regulador L-Q não exige cálculo em tempo real.
- O regulador L-Q-G tem maior sensibilidade a variações de parâmetros que o regulador L-Q (Sandell e outros, {56}).

(g) Do ponto de vista da implementação da lei de controle (1-238), (1-239), as principais desvantagens são:

- As equações do estimador de estado (1-239) são acopladas entre si e tem que ser resolvidas em tempo real. Em sistemas de grande dimensão, o tempo de cálculo requerido e a precisão dos mesmos podem dificultar ou mesmo inviabilizar economicamente a implementação do sistema de controle.
- Na lei de controle (1-238) cada entrada $u_i(t)$ pode ser afetada por todas as estimativas de estado $\hat{x}(t)$ que por sua vez podem ser influenciadas por todas as saídas $y(t)$ do sistema. Em muitos sistemas, mas particularmente em sistemas de grande porte caracterizados por uma grande dispersão entre suas saídas e entradas de controle, devido a problemas de confiabilidade e custo do sistema de comunicações exigido, nem sempre é possível ou economicamente viável comunicar todas

as saídas dos sensores, espalhados pelo sistema, um ponto central onde é calculada a lei de controle $\underline{u}(t)$ que depois deve ser comunicada de volta aos atuadores também espalhados pelo sistema.

(h) Se ao problema do regulador ótimo L-Q-G de tempo infinito forem impostas restrições afetando a comunicação entre as saídas dos sensores e as entradas dos atuadores, não há mais garantia de que a lei de controle ótima, caso possa ser obtida, tenha as interessantes propriedades dos itens (a), (b), (c) anteriores. Em particular, a separação dos problemas de estimação e controle não é mais válida e a lei de controle ótima pode vir a depender dos registros de dimensão infinita de todas as observações anteriores ao invés do vetor de dimensão finita das estimativas de estado obtidas através do filtro de Kalman (Sandell e outros, {56}, Witsenhausen, {64}).

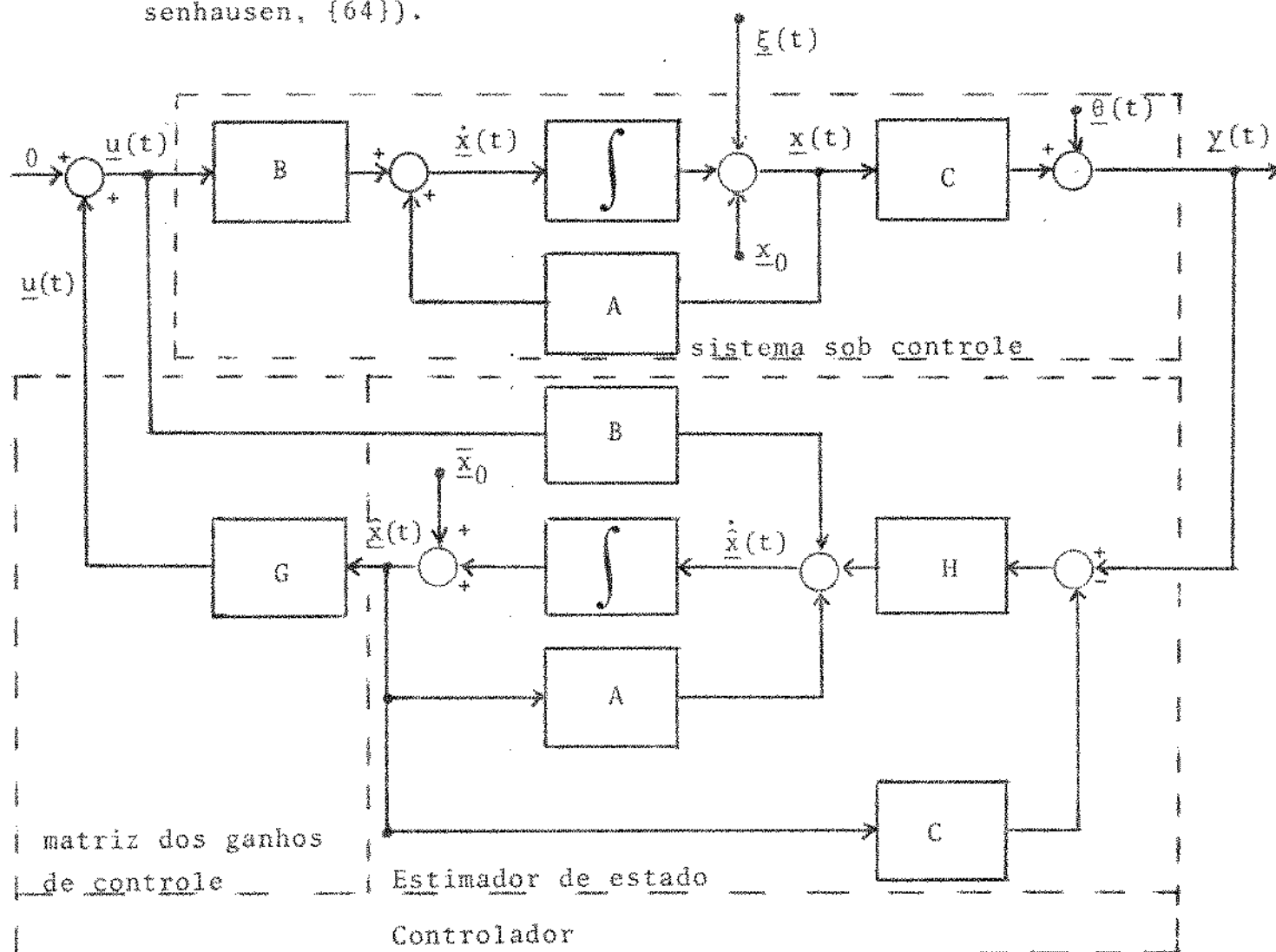


Fig. 1.2 - Diagrama de blocos do regulador estocástico ótimo L-Q-G de tempo infinito

1.4 - SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE LIAPUNOV E RICCATI

Nesta seção vamos discutir e apresentar métodos numérica, de uso geral, para solução das equações algébricas de Liapunov e Riccati.

1.4.1 - Equação de Liapunov

Seja a equação matricial de Liapunov

$$A^T X + XA + Q = 0 \quad (1-247)$$

onde A é uma matriz de dimensão $(n \times n)$ e X, Q são matrizes simétricas também de dimensões $(n \times n)$.

Os métodos numéricos de solução de (1-247) podem ser classificadas em três tipos:

(a) Métodos diretos (Bingulac, {8}; Chen, {12}; Loose, {37}). Estes métodos consistem em transformar a equação (1-247) em um sistema de $(n+1)n/2$ equações lineares na forma padrão:

$$BX_V = -Q_V \quad (1-248)$$

onde X_V, Q_V são vetores contendo os elementos de X e Q respectivamente. A maior parte do esforço computacional requerido por esses métodos é devido à solução do sistema de equações (1-248). A solução do sistema de equações (1-248) necessita aproximadamente $n^6/6$ somas e multiplicações e $n^4/2$ posições de memória (Pace e Barnett, {51}).

(b) Métodos iterativos (indiretos) (Smith, {58}, {59}, Hoskins e outros, {27}). Nestes métodos, a solução da equação (1-247) é dada pela soma de uma série infinita, convergente, de matrizes. O método de Smith (Smith, {58}, {59}) tem convergência quadrática e requer aproximadamente $25n^3$ somas e multiplicações e $3n^3$ posições de memória. O método de Hoskins (Hoskins e outros, {27}) tem convergência superior ao Smith e se o espectro da matriz A já for conhecido, este método requer aproximadamente $17n^3$ multiplicações e somas e $4n^2$ posições de memória. O problema maior do método de Hoskins é a necessidade do conhecimento prévio do espectro de A que, em última instância, requer o cálculo dos autovalores da matriz A .

(c) Transformações de similaridade (Golub e outros, {24}). Estes métodos procuram através de transformações de similaridade, aplicadas à matriz A , colocar a equação (1-247) em uma forma de fácil solução.

Em estudo comparativo envolvendo a maioria dos métodos acima citados, Pace e Barnett, {51} concluíram que os métodos diretos são melhores para $n \leq 10$, enquanto que para $n > 10$ os métodos iterativos com convergência quadrática devem ser preferidos. Em sistemas de grande dimensão existem em todas as áreas da teoria de sistemas uma curiosidade geral sobre os mais variados aspectos de possibilidades de decomposição de problemas de grande porte. Milani, {41} apresenta um método de decomposição iterativo para equações de Liapunov. O desempenho computacional deste método é em geral inferior aos de Smith e Hoskins e o seu uso é recomendável apenas em situações muito especiais, dentre as quais ressaltamos:

- Restrições de memória interna do computador obrigam a decomposição da equação (1-247).
- Sistemas com características bastante acentuadas de acoplamento fraco entre seus subsistemas e a mesma equação deve ser resolvida para vários termos de entrada diferentes.

A seguir apresentaremos o método de Smith, que foi utilizado na solução de todas as equações de Liapunov dos exemplos ilustrativos neste trabalho.

Teorema 1.27 - (Smith, {58}, {59})

Sejam:

$$U = (qI_n - A)^{-1} \quad (1-249)$$

$$V = U(qI_n + A) \quad (1-250)$$

$$W = 2qUQU^T \quad (1-251)$$

onde I_n é a matriz identidade de dimensão $(n \times n)$ e q é uma constante escalar positiva.

Se A é uma matriz assintoticamente estável, então:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Y_i = X \quad (1-252)$$

onde Y_i é dado pela recorrência:

$$Y_{i+1} = Y_i + V(2^i) Y_i V(2^i)^T ; \quad Y_0 = W \quad (1-253)$$

A razão de convergência de (1-253) é quadrática.

Em testes feitos com sistemas de grande dimensão ($n \leq 146$) o método de Smith mostrou-se suficientemente preciso (Smith, {59}). Uma característica importante da recorrência (1-253) é ela envolver apenas somas e multiplicações de matrizes. Estas operações são facilmente executadas com as matrizes parcionadas em submatrizes de menor dimensão, o que reduz bastante o efeito dos erros de arredondamente.

1.4.2 - Equação de Riccati

Seja a equação de Riccati:

$$A^T W + W A + Q^T Q - W B R^{-1} B^T W = 0 \quad (1-254)$$

onde: A, B, Q, R, W são matrizes de dimensões $(n \times n), (n \times m), (r \times n), (m \times m), (n \times n)$ respectivamente. O par $[A, B]$ é estabilizável e o par $[A, Q]$ é detectável; R é uma matriz definida positiva.

Do teorema 1.25 sabemos que neste caso a equação (1-254) possui uma única solução W semidefinida positiva.

Uma alternativa para solução da equação (1-254) é resolver a equação dinâmica de Riccati

$$\dot{Y}(t) = A^T Y + Y A + Q^T Q - Y B R^{-1} B^T Y ; \quad Y(0) = 0 \quad (1-255)$$

utilizando métodos numéricos de integração de equações diferenciais tais como Runge-Kutta, Predictor-Corrector e outros (Kwaker naak e Sivan, {34}). A solução da equação (1-254) é a solução de regime permanente de (1-255):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = W \quad (1-256)$$

Devido às dificuldades normais de integração numérica

de grandes sistemas de equações diferenciais e a fraca razão de convergência de (1-256), este método é de pouca utilidade para sistemas de grande porte (Kleinman,{31}).

A seguir, apresentaremos um método iterativo para solução da equação (1-254) proposto por Kleinmam,{31}. Este método foi desenvolvido simultaneamente e independentemente por outros autores (Puri e Gruver,{52}; Baldwin-Sims,{9}; Blakburn,{10}; Wonham e Cashman,{65}).

Teorema 1.28 - (Kleinman,{31})

Seja V_K a única solução da equação de Liapunov

$$A_K^T V_K + V_K A_K + Q^T Q + L_K^T R L_K = 0 \quad (1-257)$$

onde temos sucessivamente

$$L_K = R^{-1} B^T V_{K-1} \quad (1-258)$$

$$A_K = A - B L_K \quad (1-259)$$

e L_0 é escolhido de forma a termos $(A - B L_0)$ uma matriz assintoticamente estável.

Então:

$$(a) \quad W \leq V_{K+1} \leq V_K \dots; K=0,1,\dots \quad (1-260)$$

$$(b) \quad \lim_{K \rightarrow \infty} V_K = W \quad (1-261)$$

(c) A convergência de V_K para W é quadrática.

A maior parte do esforço computacional requerido pelo método de Kleinman é devido à solução repetida da equação de Liapunov (1-257) de ordem n . Utilizando o método de Smith, não há problema em resolver (1-257) para sistemas de grande dimensão ($n \leq 120$). Utilizando esse mesmo método, o cálculo da recorrência (1-257), (1-258), (1-259) exige apenas somas e multiplicações de matrizes, as quais podem ser facilmente executadas com as matrizes parcionadas para reduzir erros de arredondamento.

Limitantes superiores e inferiores para a solução da equação de Riccati podem ser obtidos utilizando o seguinte teorema citado em (Isaksen e Payne,{30})

Teorema 1.29 - Dada a equação de Riccati

$$A^T W + W A + Q^T Q - W B R^{-1} B^T W = 0 \quad (1-262)$$

onde o par $[A, Q]$ é completamente observável.

Temos:

(a) Se $(A+BF)$ é uma matriz assintoticamente estável, então:

$$W \leq M \quad (1-263)$$

$$(A+BF)^T M + M(A+BF) + F^T R F + Q^T Q = 0 \quad (1-264)$$

(b) Se além disso a matriz $(-A^T - Q^T Q M^{-1})$ for estável, teremos:

$$N^{-1} \leq W \quad (1-265)$$

$$N(-A^T - Q^T Q M^{-1}) + (-A^T - Q^T Q M^{-1})^T N + M^{-1} Q^T Q M^{-1} + B R^{-1} B^T = 0 \quad (1-266)$$

Prova:

Fazendo $L_0 = F$ na recorrência (1-257), (1-258), (1-259), verificamos facilmente que o teorema 1.28(a) garante:

$$W \leq M \quad (1-267)$$

Como o par $[A, Q]$ é completamente observável, o teorema 1.25(d) garante que W é uma matriz definida positiva e portanto sua inversa existe. Prê e pós multiplicando a equação (1-262) por W^{-1} , temos

$$W^{-1} A^T + A W^{-1} + W^{-1} Q^T Q W^{-1} - B R^{-1} B^T = 0 \quad (1-268)$$

que pode ser reescrita como

$$P(-A^T) + (-A^T)^T P - P Q^T Q P + B R^{-1} B^T = 0 \quad (1-269)$$

Fazendo $L_0 = Q M^{-1}$ na recorrência (1-257), (1-258), (1-259), verificamos facilmente que se $(-A^T - Q^T Q M^{-1})$ for uma matriz assinto

ticamente estável, o teorema 1.28(a) garante que:

$$P = W^{-1} \leq N \quad (1-270)$$

$$N(-A^T - Q^T Q M^{-1}) + (-A^T - Q^T Q M^{-1})^T N + M^{-1} Q^T Q M^{-1} + B R^{-1} B^T = 0 \quad (1-271)$$

(1-270) garante que N é uma matriz definida positiva e consequentemente a existência de N^{-1} . Em (1-270) é fácil verificar também que

$$W \geq N^{-1} \quad (1-272)$$

o que, junto com (1-267), resulta em

$$N^{-1} \leq W \leq M \quad (1-273)$$

Para concluir esta seção, lembramos que uma condição necessária para a utilização do método de Kleinman é a inicialização da recorrência (1-257), (1-258). (1-259) com um L_0 que estabilize assintoticamente a matriz $(A - B L_0)$. Este problema nem sempre é de fácil solução, mas (Kleinman, {32} e Fernando, {19}) apresentam métodos que, quando aplicáveis, são de muito fácil utilização.

1.5 - CONCLUSÃO

Foram apresentados um conjunto de definições, resultados e comentários dentro da teoria de sistemas lineares invariantes no tempo, problemas dos reguladores ótimos L-Q e L-Q-G de tempo infinito e solução numérica das equações de Liapunov e Riccati. A finalidade principal foi a de coletar subsídios necessários aos capítulos II e III seguintes, onde são definidos e tratados os problemas de otimização de parâmetros oriundos da síntese de reguladores L-Q e L-Q-G com restrições de estrutura.

A utilidade do que foi aqui apresentado poderá ser notada no desenrolar da matéria, nos capítulos seguintes deste trabalho. A originalidade do conteúdo deste capítulo, se existir, é muito pequena. Ela se resume na forma de demonstrar os teoremas 1.23 e 1.24 e o resultado do teorema 1.24 é um pouco menos restritivo que o do corolário 1.5 apresentado em (Geromel, {23}). Esses teoremas e corolários mostram como especificar as matrizes das expres

sões quadráticas integrais de tempo infinito para que elas, ao a apresentar valores finitos, garantam a estabilidade assintótica dos sistemas lineares invariantes no tempo que as formam.

CAPÍTULO II

REGULADOR L-Q COM RESTRIÇÕES DE ESTRUTURA

2.1 - INTRODUÇÃO

Sem considerar a possibilidade de utilizar reconstrução de estado, em um problema prático de engenharia de controle, o engenheiro deve examinar as seguintes possíveis restrições (Kosut, {33}):

- (a) O conjunto de saídas do sistema e sua relação com os estados do sistema
- (b) O conjunto de saídas a ser colocado à disposição de cada canal de realimentação
- (c) A forma do controlador: malha fechada, malha aberta, misto de malha fechada e aberta, linear, não linear, etc...

As restrições (a), (b) e (c), acima mencionadas são conhecidas na literatura por "restrições de estrutura de controle". O item (b) em particular define o que aqui chamamos que estrutura de informação do controlador.

Conforme foi visto na seção 1.3.1, a solução do problema do regulador ótimo L-Q de tempo infinito é uma lei de controle linear, invariante no tempo, na forma de realimentação de estado e independente da condição inicial do sistema. Estas propriedades são as principais responsáveis pelo sucesso do problema do regulador ótimo L-Q de tempo infinito como ferramenta para síntese de sistemas de controle. Na mesma seção vimos que do ponto de vista da implementação do sistema de controle, suas principais desvantagens são a exigência de medição completa de estado e o seu caráter centralizado, onde cada uma das entradas de controle pode depender de todos os estados do sistema. Os motivos principais são que em muitos sistemas não é possível ou economicamente viável fazer medição completa de estado e incorporar todas as malhas de realimentação requeridas pela lei de controle. Esses fatores são particularmente acentuados em sistemas de grande porte caracterizados por uma grande dispersão geográfica entre os estados do sistema e as entradas de controle. Dois casos típicos, onde isso ocorre, são a regulação de vias expressas e a regulação de carga e frequên

cia em sistemas de potência (Isaksen e Payne {30}, Davison e outros {16}).

Quanto ao problema do regulador ótimo L-Q de tempo infinito, enunciado na seção 1.3.1, são acrescentadas restrições sobre a estrutura de informação do controlador que não permitem a alguma das entradas de controle depender de algum estado do sistema, nada garante que a solução ótima, caso venha a ser obtida, tenha todas as interessantes propriedades de ser na forma de realimentação linear, invariante no tempo e independente das condições iniciais do sistema.

Uma solução de compromisso bastante utilizada é resolver o problema do regulador ótimo L-Q de tempo infinito acrescido das seguintes restrições:

- (a) Lei de controle na forma de realimentação de saída, linear e invariante no tempo.
- (b) Estrutura de informação predeterminada.
- (c) Especificações sobre a condição inicial do sistema.

Isto resulta em um problema de otimização de parâmetros onde as variáveis independentes são todos os elementos da matriz de realimentação admissíveis dentro da estrutura de informação a dotada.

O "bom senso" recomenda restringir o uso deste tipo de abordagem a problemas onde uma estrutura de controle conveniente possa ser escolhida sem que o desempenho do sistema de controle seja significativamente afetado. A razão disto é que, em caso contrário, a sensibilidade da solução ótima obtida para com as especificações sobre a condição inicial do sistema pode ser grande e, para uma mesma estrutura de informação, uma lei de controle não linear pode ter um desempenho significativamente melhor com um custo praticamente igual.

Até o presente, a seleção da estrutura de controle linear é baseada em tentativas e erros, utilizando justificativas heurísticas, características de acoplamento "fraco" e "forte" no sistema dinâmico e o conhecimento da solução do problema do regulador ótimo L-Q de tempo infinito (Sandell e outros {56}). No mesmo trabalho é argumentado com muita propriedade que uma abordagem

verdadeiramente científica do problema de seleção da estrutura de controle deveria incluir no índice de desempenho, de forma realista, os seguintes tópicos:

- (a) Custo de comunicação;
- (b) Confiabilidade;
- (c) Custo das interfaces dos computadores;
- (d) Valor da informação incompleta ou atrasada;
- (e) Uma medida formal da complexidade do sistema.

Não menos importante que a seleção da estrutura de controle é a solução do problema de otimização de parâmetros. A rigor a questão é tão antiga quanto pode ser antigo o problema de otimização de parâmetros em sistemas dinâmicos. Em particular, este problema foi tratado anteriormente em (Davison e outros, {16}), (Levine e Athans, {36}), (Naeije e outros, {67}), (Kosut, {33}), (Isaksen e Payne, {30}), (Geromel e Bernussou, {21,23}).

Levine e Athans {36}, Naeije e outros {67} trataram o problema do regulador linear com medida incompleta de estado. Eles obtiveram o conjunto de equações correspondentes às condições necessárias de otimalidade e o resolveram utilizando técnicas de solução de equações algébricas. Davison e outros {16}, Geromele e Bernussou {21}, {23} trataram o caso mais geral de restrições de estrutura, quando além da medição incompleta de estado, são impostas restrições também sobre os estados mensuráveis disponíveis a cada canal de realimentação. Eles preferiram o uso de métodos de minimização de uso geral, do tipo descida (garantem o decréscimo da função objetivo a cada passo). Davison, por não saber como calcular o vetor gradiente em forma fechada, optou pelo método de Rosembrock. Geromel e Bernussou propuseram uma maneira fácil de calcular o vetor gradiente em forma fechada e utilizaram o método do gradiente ("Steepest descent") com passo adaptável para garantir o decréscimo da função objetivo. A vantagem principal do uso de métodos de descida para este tipo de problema de otimização de parâmetros é que uma seleção adequada do índice de desempenho e a existência de uma solução factível, que estabilize o sistema controlado em malha fechada, são suficientes para garantir a estabilidade do sistema controlado em malha fechada durante todo o processo de descida até a solução do problema de otimização de parâmetros (Geromel, {23}).

Kosut {33}, utilizando a solução do regulador ótimo L-Q como referência, propôs dois métodos heurísticos para obter uma solução aproximada do problema de otimização de parâmetros. Isak sen e Payne {30} propuseram um outro método, especializado para reguladores com estrutura local em sistemas interconectados caracterizados por acoplamento fraco entre os subsistemas. Tanto os métodos de Kosut quanto o de Payne são fáceis de utilizar, requerem pequeno esforço computacional, mas nenhum deles garante a estabilidade do sistema controlado. Quando o sistema controlado obtido é estável, estes métodos podem ser utilizados, com bom proveito durante a fase de seleção da estrutura de controle.

Levine e Athans {36} e Geromel {23} trataram também do problema de especificação das condições iniciais do sistema na formulação do problema de otimização de parâmetros. A especificação das condições iniciais do sistema influenciam a solução do problema de otimização de parâmetros e é uma questão conexa ao problema de seleção do índice de desempenho para garantir a estabilidade de assintótica do sistema controlado em malha fechada.

Este capítulo é inteiramente devotado ao estudo da solução exata do problema de otimização de parâmetros utilizando métodos de minimização do tipo descida. As questões conexas sobre seleção do índice de desempenho e especificação das condições iniciais são também abordadas, porém com menor ênfase. Os resultados obtidos são comentados ao longo do capítulo e comparados com seus similares conhecidos anteriormente. Este trabalho não trata do problema de seleção da estrutura de controle.

2.2 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DE PARÂMETROS

Dados:

(a) O sistema linear invariante no tempo e o índice de desempenho quadrático integral de tempo infinito.

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) ; \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (2-1)$$

$$\underline{y}(t) = C\underline{x}(t) \quad (2-2)$$

$$J(\underline{u}(t)) = E\left\{ \int_0^{\infty} [\underline{x}^T(t) S_1^T S_1 \underline{x}(t) + \underline{u}^T(t) S_2 \underline{u}(t)] dt \right\} \quad (2-3)$$

onde: $\underline{x}(t)$, $\underline{x}_0$, $\underline{y}(t)$, $\underline{u}(t)$ são vetores de dimensões n, n, r, m respectivamente; A, B, C, S_1, S_2 são matrizes reais, constantes, dimensionadas consistentemente; S_2 é uma matriz definida positiva, posto $[C] = r$; $\underline{x}_0$ é uma variável aleatória com matriz de momentos de segunda ordem $X_0^T X_0$.

(b) A restrição de estrutura que obriga $\underline{u}(t)$ ser na forma de realimentação de saída, linear e invariante no tempo

$$\underline{u}(t) = G(\underline{\alpha})\underline{y}(t) \quad (2-4)$$

onde alguns elementos da matriz $G(\underline{\alpha})$ são fixados iguais a zero e $\underline{\alpha}$ é um vetor de dimensão np representando os elementos não pré-fixados de $G(\underline{\alpha})$.

O problema de otimização de parâmetros corresponde a determinar $\underline{\alpha}$ que minimiza o índice de desempenho quadrático (2-3) sujeito às restrições (2-1), (2-2)', (2-4).

Substituindo (2-4) em (2-1) e (2-3), temos

$$\dot{\underline{x}}(t) = [A + BG(\underline{\alpha})C]\underline{x}(t) ; \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (2-5)$$

$$J(\underline{\alpha}) = E\left\{\int_0^{\infty} \underline{x}^T(t) [S_1^T S_1 + C^T G^T(\underline{\alpha}) S_2 G(\underline{\alpha}) C] \underline{x}(t) dt\right\} \quad (2-6)$$

Do teorema 1.1, temos

$$\underline{x}(t) = \exp[(A + BG(\underline{\alpha})C)t] \underline{x}_0 \quad (2-7)$$

Substituindo (2-7) em (2-6), temos

$$J(\underline{\alpha}) = E\left\{\int_0^{\infty} \underline{x}_0^T X(t) \underline{x}_0 dt\right\} \quad (2-8)$$

$$X(t) = \exp[(A + BG(\underline{\alpha})C)^T t] [S_1^T S_1 + C^T G^T(\underline{\alpha}) S_2 G(\underline{\alpha}) C] \exp[(A + BG(\underline{\alpha})C)t] \quad (2-9)$$

Aplicando a (2-8) o teorema 1.19, verifica-se facilmente que

$$J(\underline{\alpha}) = \text{traço}\{X_0^T X_0 \int_0^{\infty} X(t) dt\} \quad (2-10)$$

Se o sistema (2-5) é assintoticamente estável, aplicando a (2-10) o teorema 1.21, podemos redefinir o problema de otimização de parâmetros como:

$$\min_{\underline{\alpha}} J(\underline{\alpha}) \quad (2-11)$$

$$J(\underline{\alpha}) = \text{traço}[X_0^T X_0 T] \quad (2-12)$$

$$(A+BG(\underline{\alpha})C)^T T + T(A+BG(\underline{\alpha})C) + S_1^T S_1 + C^T G^T(\underline{\alpha}) S_2 G(\underline{\alpha}) C = 0 \quad (2-13)$$

Calcular $J(\underline{\alpha})$ através das equações (2-12) e (2-13) é bem mais eficiente que através das equações (2-9) e (2-10). É importante para a aplicabilidade prática do sistema de controle obtido que a solução do problema de otimização de parâmetros estabilize assintoticamente o sistema (2-5). Aplicando a (2-10) o teorema 1.24, temos que se X_0 e S_1 forem escolhidos de forma que o par $[A, S_1]$ seja detectável e o par $[(A+BG(\underline{\alpha})C), X_0^T]$ seja completamente controlável, basta $J(\underline{\alpha})$ ser finito ($J(\underline{\alpha}) < \infty$) para garantir que $(A+BG(\underline{\alpha})C)$ é uma matriz assintoticamente estável e conseqüentemente a validade de (2-12), (2-13). Isto viabiliza sobremaneira o uso de métodos de otimização iterativos do tipo descida para a solução do problema de otimização de parâmetros (2-11), (2-12), (2-13). A razão é que esses métodos garantem que $J(\underline{\alpha}_{K+1}) \leq J(\underline{\alpha}_K)$ e portanto, partindo de $\underline{\alpha}_0$ que estabilize assintoticamente o sistema (2-5), teremos sempre $J(\underline{\alpha}_K) \leq J(\underline{\alpha}_0) < \infty$, o que garante não só a validade da formulação (2-11), (2-12), (2-13) durante todo o processo de descida como também que a solução final estabiliza assintoticamente o sistema (2-5).

Não foi possível encontrar na literatura garantias sobre a convexidade de $J(\underline{\alpha})$ e conseqüentemente pouco se pode afirmar e praticamente nada é encontrado na literatura sobre existência de solução para o problema de otimização de parâmetros e a globalidade do ponto de mínimo que proventura venha a ser encontrado. Devido a essas incertezas todas, parece-nos de "bom senso" limitar na medida do possível o uso de otimização de parâmetros aos casos em que as restrições de estrutura são fracas e utilizar a solução do problema do regulador ótimo L-Q de tempo infinito como referência para orientar na escolha dos parâmetros a serem otimizados. Neste caso, os métodos de Kosut [33], Isaksen e

Payne {30} podem ser utilizados para a obtenção de um $\underline{\alpha}_0$ próximo do ponto ótimo global ou pelo menos na sua região de atratividade.

2.3 - CÁLCULO DO VETOR GRADIENTE E MATRIZ HESSIANA

Nesta seção os problemas de cálculo em forma fechada do índice de desempenho quadrático, seu vetor gradiente e matriz hessiana são tratados de uma maneira unificada (Milani {42}).

2.3.1 - Vetor gradiente

Utilizando $J(\underline{\alpha})$ dado por (2-12), (2-13), os elementos $\partial J(\underline{\alpha})/\partial \alpha_i$ do vetor gradiente $\nabla J(\underline{\alpha})$ de dimensão np são dados por

$$\frac{\partial J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} = \text{traço} \left[X_0^T X_0 \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} \right] \quad (2-14)$$

$$(A+BG(\underline{\alpha})C)^T \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} (A+BG(\underline{\alpha})C) + C^T X + X^T C = 0 \quad (2-15)$$

$$X = \frac{\partial G^T(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} [B^T T + S_2 G(\underline{\alpha})C] \quad (2-16)$$

Aplicando o lema 1.4 às equações (2-14), (2-15), (2-16), temos

$$\frac{\partial J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} = \text{traço}[W(C^T X + X^T C)] \quad (2-17)$$

$$(A+BG(\underline{\alpha})C)W + W(A+BG(\underline{\alpha})C)^T + X_0^T X_0 = 0 \quad (2-18)$$

O lema 1.3 garante que W é uma matriz simétrica e neste caso o teorema 1.20 garante que

$$\text{traço}[WC^T X] = \text{traço}[WX^T C] \quad (2-19)$$

Substituindo (2-19), (2-16) em (2-17), temos

$$\frac{\partial J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} = 2 \text{traço} \{ CW [TB + C^T G^T(\underline{\alpha}) S_2] \frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} \} \quad (2-20)$$

A matriz $\partial G(\underline{\alpha})/\partial \alpha_i$ tem todos os elementos nulos exceto aquele na posição ocupada por α_i que é igual a um. Portanto, por inspeção na equação (2.20) podemos verificar facilmente que

$$\frac{\partial J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} = q_{\ell_i, c_i} \quad (2-21)$$

$$Q = 2 [S_2 G(\underline{\alpha}) C + B^T T] W C^T \quad (2-22)$$

onde (ℓ_i, c_i) é a posição do parâmetro α_i na matriz $G(\underline{\alpha})$ e q_{ℓ_i, c_i} é o elemento (ℓ_i, c_i) da matriz Q de dimensão $(m \times n)$.

2.3.2 - Matriz hessiana

Utilizando $J(\underline{\alpha})$ dado por (2-12), (2-13), os elementos $h_{i,j}$ da matriz hessiana $H(\underline{\alpha})$ de dimensão $(n \times n)$ são dadas por

$$h_{i,j} = \frac{\partial^2 J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \text{traço} \left[X_0^T X_0 \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right] \quad (2-23)$$

$$(A + B G(\underline{\alpha}) C)^T \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} (A + B G(\underline{\alpha}) C) + Z = 0 \quad (2-24)$$

$$\begin{aligned} Z = & \left(B \frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} C \right)^T \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} \left(B \frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} C \right) + \\ & + \left(B \frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} C \right)^T \frac{\partial T}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial T}{\partial \alpha_j} \left(B \frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} C \right) + \\ & + C^T \frac{\partial G^T(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} S_2 \frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} C + C^T \frac{\partial G^T(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} S_2 \frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} C \end{aligned} \quad (2-25)$$

Aplicando às equações (2-23), (2-24), (2-25) o lema 1.4 e do resultado do teorema 1.20, verificamos facilmente que

$$h_{i,j} = 2\text{traço} \left\{ CW \left[\frac{T}{\partial \alpha_i} B \frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} + \frac{T}{\partial \alpha_j} B \frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} \right] \right\} + \\ + 2\text{traço} \left[\frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} (CWC^T) \frac{\partial G^T(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} S_2 \right] \quad (2-26)$$

Definindo os elementos das matrizes $H_1(\underline{\alpha})$ e $H_2(\underline{\alpha})$ de dimensão (npxnp) como

$$h_{1i,j} = 2\text{traço} \left[CW \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} B \frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right] \quad (2-27)$$

$$h_{2i,j} = 2\text{traço} \left[\frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} (CWC^T) \frac{\partial G^T(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} S_2 \right] \quad (2-28)$$

$$\text{temos} \quad h_{i,j} = h_{1i,j} + h_{1j,i} + h_{2i,j} \quad (2-29)$$

e conseqüentemente,

$$H(\underline{\alpha}) = H_1(\underline{\alpha}) + H_1^T(\underline{\alpha}) + H_2(\underline{\alpha}) \quad (2-30)$$

Podemos verificar facilmente por inspeção nas equações (2-27) , (2-28) que

$$h_{1i,j} = f_{\ell_j, c_j} \quad (2-31)$$

$$h_{2i,j} = p_{c_i, c_j} s_{2\ell_i, \ell_j} \quad (2-32)$$

$$F = 2 B^T \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} WC^T \quad (2-33)$$

$$P = 2 CTC^T \quad (2-34)$$

onde: $s_{2\ell_i, \ell_j}$ é o elemento (ℓ_i, ℓ_j) da matriz S_2 ;

p_{c_i, c_j} e f_{ℓ_j, c_j} são os elementos (c_i, c_j) , (ℓ_j, c_j) das matrizes P e F respectivamente;

(ℓ_i, c_i) , (ℓ_j, c_j) são as posições de $G(\underline{\alpha})$ ocupadas pelos parâmetros α_i e α_j respectivamente.

Considerando que o produto de duas matrizes de dimensão $(n \times n)$ requer n^3 somas e multiplicações e aproximadamente $3n^2$ posições de memória e que a solução de uma equação de Liapunov de ordem n pelo método iterativo de Smith [58] requer aproximadamente $25n^3$ somas e multiplicações e $3n^2$ posições de memória (ver seção 1.4.1), temos:

(a) Nas equações (2-12) e (2-13) verificamos que a maior parte do esforço computacional necessário à obtenção de $J(\underline{\alpha})$ para um dado $\underline{\alpha}$ é representado pela solução de uma equação de Liapunov (2-13) de ordem n .

(b) Das equações (2-21), (2-22) verificamos que uma vez que T tenha já sido obtido para o cálculo de $J(\underline{\alpha})$, a maior parte do esforço computacional necessário à obtenção de $\nabla J(\underline{\alpha})$ é representado pela solução de uma equação extra de Liapunov (2-18) de ordem n , independentemente do número de parâmetros n_p .

(c) Das equações (2-32), (2-34) verificamos que uma vez que W e T tenham já sido obtidos para o cálculo do par $[J(\underline{\alpha}), \nabla J(\underline{\alpha})]$, a obtenção de $H_2(\underline{\alpha})$ requer um esforço computacional extra muito pequeno. Nas mesmas condições, das equações (2-31), (2-33) verificamos que a obtenção de $H_1(\underline{\alpha})$ requer o cálculo de uma mesma equação de Liapunov (2-15) de ordem n para n_p termos de entrada diferentes. Utilizando o método de Smith [58], o esforço computacional necessário para isso é pouco menor que o requerido pela solução de n_p equações de Liapunov diferentes, o que é sem dúvida uma tarefa computacional muito pesada quando tratamos de sistemas de grande dimensão, com grande número de parâmetros a serem otimizados.

2.3.3. - Propriedades da matriz $H_2(\underline{\alpha})$

Além do baixo esforço computacional necessário à sua ob

tenção, $H_2(\underline{\alpha})$ possui outras propriedades importantes:

Teorema 2.1: $H_2(\underline{\alpha})$ é uma matriz definida positiva se a matriz $(A+BG(\underline{\alpha})C)$ é assintoticamente estável e o par $[(A+BG(\underline{\alpha})C), X_0^T]$ é completamente controlável.

Prova:

Da equação (2-28) é fácil verificar que $H_2(\underline{\alpha})$ é a matriz da função quadrática

$$J_1(\underline{\alpha}) = \text{traço}[G(\underline{\alpha})CWC^TG^T(\underline{\alpha})S_2] \quad (2-35)$$

Por inspeção na equação (2-35) é fácil verificar que

$$J_1(\underline{\alpha}) = X_V^TY_V \quad (2-36)$$

$$X = G(\underline{\alpha})CWC^T \quad (2-37)$$

$$Y = S_2G(\underline{\alpha}) \quad (2-38)$$

onde X_V, Y_V são vetores de dimensão (mr) contendo respectivamente os elementos das matrizes X, Y de dimensão (mxr) . Aplicando (2-37), (2-38) o teorema 1.16, temos

$$(I_m \otimes X)CWC^TG_V(\underline{\alpha}) = X_V \quad (2-39)$$

$$(S_2 \otimes I_r)G_V(\underline{\alpha}) = Y_V \quad (2-40)$$

onde I_m, I_r são matrizes de dimensões $(mxm), (r,r)$, respectivamente e $G_V(\underline{\alpha})$ é um vetor de dimensão (mr) contendo os elementos da matriz $G(\underline{\alpha})$ armazenados por linha.

Substituindo (2-39), (2-40) em (2-36), temos

$$J_1(\underline{\alpha}) = G_V^T(\underline{\alpha})(I_m \otimes X)CWC^T(S_2 \otimes I_r)G_V(\underline{\alpha}) \quad (2-41)$$

Aplicando o teorema 1.15 a (2-41), temos

$$J_1(\underline{\alpha}) = G_V^T(\underline{\alpha})(S_2 \otimes X)CWC^TG_V(\underline{\alpha}) \quad (2-42)$$

Da definição do problema de otimização de parâmetros, temos que S_2 é uma matriz definida positiva e posto $[C]=r$. Por hipó

tese temos o par $\{(A+BG(\underline{\alpha})C), X_0^T\}$ completamente controlável e con-
sequentemente, pelo teorema 1.12 temos o par $\{(A+BG(\underline{\alpha}_g)C)^T, X_0\}$ com-
pletamente observável. Com isto mais a estabilidade assintótica
de $(A+BG(\underline{\alpha})C)$, o lema 1.3 garante que W é uma matriz definida po-
sitiva. Posto $[C]=r$ e W definida positiva garantem que CWC^T é tam-
bém uma matriz definida positiva. Com CWC^T e S_2 definidas positi-
vas, o teorema 1.17(a) garante que $(S_2 \otimes CWC^T)$ é também definida
positiva e portanto a forma quadrática (2-42) é definida positiva.
Assim sendo, $H_2(\underline{\alpha})$ é uma matriz definida positiva porque é a ma-
triz hessiana de uma forma quadrática definida positiva (2-42).

Teorema 2.2: Se S_2 é uma matriz diagonal e os parâmetros de $G(\underline{\alpha})$
a serem otimizados são armazenados por linha em $\underline{\alpha}$, então $H_2(\underline{\alpha})$
tem uma estrutura bloco diagonal. O número de submatrizes em $H_2(\underline{\alpha})$
é igual ao número de linhas de $G(\underline{\alpha})$ onde existem parâmetros e a
dimensão de cada submatriz é igual ao número de parâmetros na li-
nha de $G(\underline{\alpha})$ a ela associada.

Prova:

Este teorema pode ser facilmente verificado por inspe-
ção na equação (2-32), notando que

$$h_{2_{i,j}} = 0 \quad \text{se} \quad \ell_i \neq \ell_j \quad (2-43)$$

o que significa que $h_{2_{i,j}} = 0$ sempre que α_i e α_j estão situados
em linhas diferentes de $G(\underline{\alpha})$.

Teorema 2.3: Se o par $[A,B]$ é estabilizável e o par $[A,S_1]$ é de-
tectável, então $H_1(\underline{\alpha})=0$ e consequentemente $H_2(\underline{\alpha}) = H_2(\underline{\alpha})$ quando

$$G(\underline{\alpha})C = -S_2^{-1}B^T T \quad (2-44)$$

onde, como é bem sabido, $(-S_2^{-1}B^T T)$ é a solução do problema do regu-
lador ótimo L-Q de tempo infinito.

Prova:

Substituindo (2-44) em (2-15), (2-16), temos

$$(A-S_2^{-1}B^T T)^T \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} (A-S_2^{-1}B^T T) = 0 \quad (2-45)$$

Com o par $[A, B]$ estabilizável e o par $[A, S_1]$ detectável, o teorema 1.2.5(b) garante que a matriz $(A - S_2^{-1} B^T T)$ é assintoticamente estável e portanto, o lema 1.3 garante que a equação (2-45) tem solução única

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (2-46)$$

Substituindo (2-46) em (2-33), temos

$$H_1(\underline{\alpha}) = 0 \quad (2-47)$$

e conseqüentemente, de (2-30) verificamos finalmente

$$H(\underline{\alpha}) = H_2(\underline{\alpha}) \quad (2-48)$$

Em última análise, o teorema 2.3 está mostrando que nas proximidades do ponto de ótimo, $H_2(\underline{\alpha})$ é uma eficiente aproximação de $H(\underline{\alpha})$ quando as restrições de estrutura impostas são "fracas" no sentido de que a solução do problema do regulador L-Q com restrições de estrutura e a solução do regulador sem restrições são próximas uma da outra.

2.4 - CONDIÇÃO INICIAL DO SISTEMA E GRAU DE SUBOTIMALIDADE

2.4.1 - Comentários sobre a escolha da condição inicial

Conforme foi mostrado nas seções 2.2 e 2.3, as especificações sobre as condições iniciais do sistema afetam o índice de desempenho, vetor gradiente, matriz hessiana e suas propriedades e as garantias de que a solução do problema de otimização de parâmetros resultará em um sistema controlado assintoticamente estável. No ponto de ótimo, temos como condição necessária

$$\nabla J(\underline{\alpha}^*) = 0 \quad (2-49)$$

Substituindo (2-49) na equação (2-21) que define os elementos de $\nabla J(\underline{\alpha})$, verifica-se facilmente que o ponto de mínimo do problema de otimização de parâmetros depende da escolha da matriz de momentos de segunda ordem da condição inicial $\underline{x}_0$

$$E\{\underline{x}_0 \underline{x}_0^T\} = X_0^T X_0 \quad (2-50)$$

Quando $X_0^T X_0$ é uma matriz definida positiva, temos

$$\text{posto } [X_0] = \text{posto } [X_0^T] = n \quad (2-51)$$

e conseqüentemente, o par $[(A+BG(\underline{\alpha})C), X_0^T]$ é completamente controlável para qualquer matriz $(A+BG(\underline{\alpha})C)$. Conforme foi mostrado na seção 2.2, isto facilita muito a existência das condições que garantem que a solução do problema de otimização de parâmetros resultará em um sistema controlado assintoticamente estável e favorecem a utilização dos métodos de otimização do tipo descida.

No caso de conhecimento completo da condição inicial do sistema ($\underline{x}_0$ determinístico), temos

$$E\{\underline{x}_0 \underline{x}_0^T\} = X_0^T X_0 = \underline{x}_0 \underline{x}_0^T \quad (2-52)$$

$$J(\underline{\alpha}) = \text{traço } \underline{x}_0 \underline{x}_0^T = \underline{x}_0^T T \underline{x}_0 \quad (2-53)$$

Quando pouco se conhece sobre o estado inicial, Levine e Athans {36} sugerem

$$E\{\underline{x}_0 \underline{x}_0^T\} = X_0^T X_0 = \frac{I_n}{n} \quad (2-54)$$

$$J_1(\underline{\alpha}) = \frac{1}{n} \text{traço}(T) \quad (2-55)$$

onde I_n é a matriz unidade de dimensão $(n \times n)$. (2-55) corresponde a considerar $\underline{x}_0$ uma variável aleatória uniformemente distribuída na esfera unitária de dimensão n . Geromel { } trata da questão formulando um problema de jogo minimax:

$$\min_{\underline{\alpha}} J_2(\underline{\alpha}) \quad (2-56)$$

$$J_2(\underline{\alpha}) = \max_X \{\text{traço}(XT)\} \quad (2-57)$$

$$\|X\| \leq 1 \quad (2-58)$$

onde $\|\cdot\|$ é o operador norma euclidiana. Sendo T uma matriz simétrica, podemos escrever

$$\text{traço}(XT) = \langle X_V, T_V \rangle \quad (2-59)$$

onde X_V, T_V são vetores de dimensão n^2 contendo os elementos de X e T armazenados por linha e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a operação produto escalar. Lembrando que o produto escalar de dois vetores é máximo quando eles são colineares e de mesmo sentido, e considerando a restrição (2-58), é fácil verificar que o ponto de máximo de (2-57) e $J_2(\underline{\alpha})$ são

$$X = \frac{T}{||T||} \quad (2-60)$$

$$J_2(\underline{\alpha}) = \text{traço} \left\{ \frac{T}{||T||} T \right\} = ||T|| \quad (2-61)$$

$$||T|| = [\text{traço}(T^2)]^{1/2} \quad (2-62)$$

É importante notar que Geromel{23} tratou o problema da escolha de $\underline{x}_0$ de forma indireta, porque $J_2(\underline{\alpha})$ em (2-57) é $J(\underline{\alpha})$ para o pior caso de matriz de momentos de segunda ordem $X_0^T X_0$ que não é o mesmo que $J(\underline{\alpha})$ para o pior caso de $\underline{x}_0$. Neste último caso, temos o seguinte problema minimax:

$$\min_{\underline{\alpha}} J_{\infty}(\underline{\alpha}) \quad (2-63)$$

$$J_{\infty}(\underline{\alpha}) = \max_{\underline{x}_0} \left\{ \frac{\underline{x}_0^T T \underline{x}_0}{\underline{x}_0^T \underline{x}_0} \right\} \quad (2-64)$$

que é bem sabido ser igual a

$$J_{\infty}(\underline{\alpha}) = \lambda_M(T) \quad (2-65)$$

onde $\lambda_M(T)$ representa o maior autovalor de T .

Antes de prosseguir, vamos demonstrar o seguinte resultado:

Lema 2.1: Se X é uma matriz semidefinida positiva de ordem m , temos

$$[\text{traço}(X^n)]^{1/n} \geq [\text{traço}(X^{n+1})]^{1/(n+1)} \geq \lambda_M(X); n=1 \text{ até } \infty \quad (2-66)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\text{traço}(X^n)]^{1/n} = \lambda_M(X) \quad (2-67)$$

Prova:

Do teorema 1.18 temos

$$[\text{traço}(X^n)]^{1/n} = \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i(X)^n \right)^{1/n} \quad (2-68)$$

onde $\lambda_i(X)$ é o i -ésimo autovalor de X . Dividindo ambos os lados de (2-68) por $\lambda_M(X)$, temos

$$\left[\frac{\text{traço}(X^n)}{\lambda_M(X)^n} \right]^{1/n} = \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\lambda_i(X)}{\lambda_M(X)} \right)^n \right]^{1/n} \quad (2-69)$$

Como X é semidefinida positiva, todos seus autovalores são positivos ou nulos e facilmente verificamos que

$$0 \leq \frac{\lambda_i(X)}{\lambda_M(X)} \leq 1 \quad ; \quad i=1 \text{ até } m \quad (2-70)$$

$$1 \leq \sum_{i=1}^m \left(\frac{\lambda_i(X)}{\lambda_M(X)} \right)^n \quad ; \quad \forall n \quad (2-71)$$

Devido a (2-70) e (2-71), temos

$$\left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\lambda_i(X)}{\lambda_M(X)} \right)^n \right]^{1/n} \geq \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\lambda_i(X)}{\lambda_M(X)} \right)^{n+1} \right]^{1/(n+1)} \geq 1 \quad (2-72)$$

Substituindo (2-72) em (2-69), verificamos que

$$[\text{traço}(X^n)]^{1/n} \geq [\text{traço}(X^{n+1})]^{1/(n+1)} \geq \lambda_M(X) \quad (2-73)$$

Da expressão (2-69), temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\text{traço}(X^n)}{\lambda_M^n} \right]^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\lambda_i(X)}{\lambda_M(X)} \right)^n \right]^{1/n} = 1 \quad (2-74)$$

e conseqüentemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\text{traço}(X^n)]^{1/n} = \lambda_M(X) \quad (2-75)$$

Voltando ao problema das condições iniciais, com os resultados do lema 2.1, vemos que $J_1(\underline{\alpha})$ (2-55) e $J_2(\underline{\alpha})$ (2-57) são casos particulares de

$$J_n(\underline{\alpha}) = \left[\text{traço}(T^n) \right]^{1/n} \quad (2-76)$$

para $n=1$ e $n=2$ respectivamente. É fácil ver também que ambos são aproximações crescentes de $J_\infty(\underline{\alpha})$ (2-65) que corresponde a $J(\underline{\alpha})$ para a pior condição inicial $\underline{x}_0$. A principal razão para a não utilização de $J_\infty(\underline{\alpha})$ (2-65) é a dificuldade de seu cálculo e de suas derivadas de primeira e segunda ordem em forma fechada. Contudo, conforme mostrou o lema 2.1, o índice de desempenho $J_n(\underline{\alpha})$ com n suficientemente elevado pode ser uma boa aproximação de $J_\infty(\underline{\alpha})$. A seguir, trataremos do problema do cálculo em forma fechada do vetor gradiente e matriz hessiana para o índice de desempenho $J_n(\underline{\alpha})$.

2.4.2 - Cálculo do vetor gradiente e matriz hessiana para $J_n(\underline{\alpha})$

Tomando $J_n(\underline{\alpha})$ dado por (2-76), os elementos $\partial J_n(\underline{\alpha}) / \partial \alpha_i$ do vetor gradiente $\nabla J_n(\underline{\alpha})$ de dimensão np são dados por

$$\frac{\partial J_n(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} = \left[\text{traço}(T^n) \right]^{1-n/n} \left[\text{traço } T^{n-1} \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} \right] \quad (2-77)$$

onde T e $\partial T / \partial \alpha_i$ são dados por (2-13), (2-15), respectivamente. Reorganizando os termos em (2-77), temos

$$\frac{\partial J_n(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} = \text{traço} \left\{ \left[\frac{T^{n-1}}{(\text{traço}(T^n))^{n-1/n}} \right] \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} \right\} \quad (2-78)$$

Comparando (2-78) com (2-14) na seção 2.3.1, vemos que para calcular $\nabla J_n(\underline{\alpha})$ podemos usar a expressão (2-21) para cálculo de $\nabla J(\underline{\alpha})$, substituindo

$$X_0^T X_0 = \frac{T^{n-1}}{(\text{traço}(T^n))^{n-1/n}} \quad (2-79)$$

na equação (2-18) para cálculo de W .

Os elementos $h_{n_{i,j}}$ da matriz hessiana $H_n(\underline{\alpha})$ de dimensão $(n \times n \times n)$ são dados por:

$$\begin{aligned} h_{n_{i,j}} = \frac{\partial^2 J_n(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} &= \left[\text{traço}(T^n) \right]^{1-n/n} \text{traço} \left(T^{n-1} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right) + \\ &+ (n-1) \left[\text{traço}(T^n) \right]^{1-n/n} \text{traço} \left(T^{n-2} \frac{\partial T}{\partial \alpha_j} \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} \right) + \\ &+ (1-n) \left[\text{traço}(T^n) \right]^{1-2n/n} \text{traço} \left(T^{n-1} \frac{\partial T}{\partial \alpha_j} \right) \text{traço} \left(T^{n-1} \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} \right) \end{aligned} \quad (2-80)$$

Podemos reescrever (2-80) na seguinte forma:

$$h_{n_{i,j}} = 2 p_{1_{i,j}} + p_{2_{i,j}} + p_{3_{i,j}} \quad (2-81)$$

$$p_{1_{i,j}} = \text{traço} \left\{ \left[\frac{T^{n-1}}{(\text{traço}(T^n))^{n-1/n}} \right] \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right\} \quad (2-82)$$

$$p_{2_{i,j}} = (n-1) \left[\text{traço}(T^n) \right]^{1-n/n} \text{traço} \left(T^{n-2} \frac{\partial T}{\partial \alpha_j} \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} \right) \quad (2-83)$$

$$p_{3_{i,j}} = (1-n) \left[\text{traço}(T^n) \right]^{1-2n/n} \text{traço} \left(T^{n-1} \frac{\partial T}{\partial \alpha_j} \right) \text{traço} \left(T^{n-1} \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} \right) \quad (2-84)$$

Comparando (2-82) com (2-23) na seção 2.3.2, vemos que para calcular $p_{1_{i,j}}$ podemos usar a expressão (2-29) para cálculo de $h_{i,j}$, substituindo (2-79) na equação (2-18) para cálculo de W . Assim sendo, é fácil verificar que

$$H_n(\underline{\alpha}) = H_{n_1}(\underline{\alpha}) + H_{n_1}^T(\underline{\alpha}) + H_{n_2}(\underline{\alpha}) + H_{n_3}(\underline{\alpha}) \quad (2-85)$$

onde os elementos de $H_{n_1}(\underline{\alpha})$ e $H_{n_2}(\underline{\alpha})$ são obtidos de (2-31) e (2-32), substituindo (2-79) em (2-18) para o cálculo de W ; os elementos $h_{n_{i,j}}$ de $H_{n_3}(\underline{\alpha})$ são dados por

$$h_{n_{3i,j}} = p_{2i,j} + p_{3i,j} \quad (2-86)$$

Lembrando que para

$$G(\underline{\alpha})C = -R^{-1}B^T T \quad (2-87)$$

temos
$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial T}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (2-88)$$

é fácil verificar nas equações (2-31), (2-85) e (2-86) que

$$H_n(\underline{\alpha}) = H_{n_2}(\underline{\alpha}) \quad (2-89)$$

para $G(\underline{\alpha})$ dado por (2-87). É imediato também constatar que $H_{n_2}(\underline{\alpha})$ tem as mesmas propriedades de $H_2(\underline{\alpha})$. Para finalizar, é fácil verificar que para $J_n(\underline{\alpha})$ basta o par $[A, S_1]$ ser completamente observável e existir $\underline{\alpha}_0$ tal que $(A+BG(\underline{\alpha}_0)C)$ é assintoticamente estável para garantir que $(A+BG(\underline{\alpha})C)$ é assintoticamente estável em todos os passos intermediários de um método de otimização do tipo descida começando em $\underline{\alpha}_0$. As mesmas condições são também suficientes para garantir que a solução do problema de otimização de parâmetros com $J_n(\underline{\alpha})$ resultará em um sistema controlado assintoticamente estável.

2.4.3 - Grau de subotimalidade da solução do problema de otimização de parâmetros

Conforme foi mostrado na seção 1.3, o valor do índice de desempenho para a solução do problema do regulador ótimo L-Q de tempo infinito é

$$J_0 = x_0^T P x_0 \quad (2-90)$$

$$A^T P + P A + S_1^T S_1 - P B S_2^{-1} B^T P = 0 \quad (2-91)$$

Para o mesmo sistema, o índice de desempenho para a solução do problema do regulador L-Q de tempo infinito com restrições de estrutura é dado por

$$J(\underline{\alpha}^*) = \underline{x}_0^T T \underline{x}_0 \quad (2-92)$$

$$(A+BG(\underline{\alpha}^*)C)^T T + T(A+BG(\underline{\alpha}^*)C) + S_1^T S_1 + C^T G^T(\underline{\alpha}^*) S_2 G(\underline{\alpha}^*) C = 0 \quad (2-93)$$

Podemos definir o grau de subotimalidade da solução $\underline{\alpha}^*$ como

$$E = \max_{\underline{x}_0} \left\{ \frac{J(\underline{\alpha}^*)}{J_0} \right\} = \max_{\underline{x}_0} \left\{ \frac{\underline{x}_0^T T \underline{x}_0}{\underline{x}_0^T P \underline{x}_0} \right\} \quad (2-94)$$

É bem conhecido que

$$E = \lambda_M(P^{-1}T) \quad (2-95)$$

Como T é calculado quando da obtenção de $\underline{\alpha}^*$, para calcularmos E utilizando (2-95) devemos obter P resolvendo a equação de Riccati (2-91) e calcular o maior autovalor da matriz $(P^{-1}T)$. Quando P não é disponível podemos obter um limitante superior para E sem resolver a equação de Riccati (2-91) (Isaksen e Payne {30}). Do teorema 1.29, temos que se a matriz $(-A^T - S_1^T S_1 T^{-1})$ é assintoticamente estável, então

$$N^{-1} \ll P \ll T \quad (2-96)$$

$$N(-A^T - S_1^T S_1 T^{-1}) + (-A^T - S_1^T S_1 T^{-1})^T N + T^{-1} S_1^T S_1 T^{-1} + B S_2^{-1} B^T = 0 \quad (2-97)$$

De (2-96) temos

$$N \gg P^{-1} \gg T^{-1} \quad (2-98)$$

e portanto,

$$P^{-1}T \ll NT \quad (2-99)$$

$$E = \lambda_M(P^{-1}T) \ll \lambda_M(NT) \quad (2-100)$$

Conforme foi mostrado acima, a obtenção de um limitante superior para E depende da obtenção de um limitante

inferior para a solução da equação de Riccati. Yassuda e Hirai{63} apresentam um limitante inferior para solução da equação de Riccati, alternativo ao acima apresentado.

2.5 - UM MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO QUASI-NEWTON ESPECIALIZADO

Nesta seção é proposto um algoritmo de otimização especializado do tipo Quasi-Newton para solução do problema de otimização de parâmetros definido na seção 2.2. O desempenho computacional do método proposto será analisado e o seu esforço computacional por passo será comparado com o de outros conhecidos métodos de uso geral (Milani, {43}).

2.5.1 - Apresentação do Algoritmo

Apoiado pelas propriedades da matriz $H_2(\underline{\alpha})$ e procedimentos de cálculo apresentados nas seções 2.3.1 a 2.3.3 o seguinte algoritmo pode ser utilizado para resolver o problema de otimização de parâmetros definido na seção 2.2:

$$\underline{\alpha}_{K+1} = \underline{\alpha}_K - \beta \underline{y} \quad (2-101)$$

$$H_2(\underline{\alpha}_K) \underline{y} = \nabla J(\underline{\alpha}_K) \quad (2-102)$$

onde β é um escalar. A recorrência acima deve ser inicializada com um $\underline{\alpha}_0$ que estabilize assintoticamente a matriz $(A + B G(\underline{\alpha}_0) C)$ e β deve ser determinado de forma a garantir

$$J(\underline{\alpha}_{K+1}) \leq J(\underline{\alpha}_K) \quad (2-103)$$

O teorema 2.1 apresenta condições suficientes para que $H_2(\underline{\alpha})$ seja uma matriz definida positiva. Se $H_2(\underline{\alpha})$ é positiva definida, é sempre possível obter um β garantindo (2-103) (Luenberger, {40}). Se $H_2(\underline{\alpha})$ é definida positiva, é fácil verificar que se a recorrência (2-101), (2-102) converge ($\underline{\alpha}_{K+1} = \underline{\alpha}_K$), então temos necessariamente

$$\nabla J(\underline{\alpha}_K) = 0 \quad (2-104)$$

Como pouco se sabe sobre a convexidade de $J(\underline{\alpha})$, (2-104) não é su

ficiente para garantir que foi obtido um ponto de mínimo e nem se o ponto de mínimo porventura obtido é global. Em todo caso, é de "bom senso" esperar que foi ao menos obtido um ponto de mínimo local, porque os pontos de mínimo são pontos de equilíbrio estáveis de recorrência (2-101), (2-102) (Bingulac,{7}).

O teorema 2.2 apresenta sugestões que facilitam e minimizam consideravelmente o esforço computacional para solução do sistema de equações lineares (2-102). É bem conhecido que a razão de convergência do algoritmo (2-101), (2-102) aumenta e se aproxima da do método de Newton na medida que a matriz $M(\underline{\alpha}_K)$ (2-105) se aproxima da matriz unidade, o que deve acontecer na medida que $H_2(\underline{\alpha}_K)$ se aproxima de $H(\underline{\alpha}_K)$.

$$M(\underline{\alpha}_K) = \beta H_2^{-1}(\underline{\alpha}_K) H(\underline{\alpha}_K) \quad (2-105)$$

O teorema 2.3 indica que nas proximidades do ponto de mínimo de $J(\underline{\alpha})$, $H_2(\underline{\alpha}_K)$ se aproxima de $H(\underline{\alpha}_K)$ na medida que as restrições de estrutura impostas são fracas, no sentido de que a solução do problema com restrições e a do regulador ótimo L-Q de tempo infinito são próximas uma da outra.

O seguinte procedimento de cálculo pode ser utilizado para computar a recorrência (2-101), (2-102):

passo 1: Inicialização

Fazer $K=0$; $\beta = \beta_0$

Determinar $\underline{\alpha}_K$ que estabiliza assintoticamente a matriz $(A + \beta G(\underline{\alpha}_K)C)$

Calcular $J(\underline{\alpha}_K)$, $\nabla J(\underline{\alpha}_K)$

passo 2: Calcular $H_2(\underline{\alpha}_K)$

Resolver o sistema de equações lineares

$$H_2(\underline{\alpha}_K) \underline{y} = \nabla J(\underline{\alpha}_K) \quad (2-106)$$

passo 3: Calcular

$$\underline{\alpha}_{K+1} = \underline{\alpha}_K - \beta \underline{y} \quad (2-107)$$

passo 4: Calcular $J(\underline{\alpha}_{K+1})$

passo 5: Testar se $J(\underline{\alpha}_{K+1}) < J(\underline{\alpha}_K)$

Sim: $\beta = \beta_0$ e seguir para o passo 6

Não: $\beta = \beta/2$ e voltar para o passo 3

passo 6: Calcular $\nabla J(\underline{\alpha}_{K+1})$

passo 7: Testar se $||\nabla J(\underline{\alpha}_{K+1})|| \leq \text{Tolerância}$:

Sim: parar

Não: Fazer $K=K+1$ e voltar ao passo 2

No procedimento de cálculo acima, é fácil verificar que a maior parte do esforço computacional por passo é devido primeiramente ao cálculo do par $[J(\underline{\alpha}), \nabla J(\underline{\alpha})]$ e em seguida pela solução do sistema de equações lineares simétrico (2-102). Quando o teorema 2.2 é aplicável, esta última parte torna-se geralmente insignificante.

Para utilizar o método Quasi-Newton especializado na solução do problema de otimização de parâmetros com o índice de desempenho $J_n(\underline{\alpha})$ (2-76), basta trocar $J(\underline{\alpha})$, $\nabla J(\underline{\alpha})$, $H_2(\underline{\alpha})$ na recorrência (2-101), (2-102) e no procedimento de cálculo na seção 2.5.1 por $J_n(\underline{\alpha})$, $\nabla J_n(\underline{\alpha})$ e $H_{n_2}(\underline{\alpha})$ cujo cálculo é discutido nas seções 2.4.1, 2.4.2.

Para encerrar, não foi possível obter uma estimativa de $M(K)$ que permitisse antecipar com precisão a razão de convergência da recorrência (2-101), (2-102) utilizando o procedimento de cálculo acima. Em todo caso, é importante lembrar que uma razão de convergência baixa é um indicador de que o desempenho do sistema de controle pode ser significativamente afetado pelas restrições de estrutura impostas, o que, conforme foi discutido nas seções 1.3, 2.1, 2.2, pode inviabilizar o problema de otimização de parâmetros aqui tratado, como ferramenta para síntese de sistemas de controle com restrições de estrutura.

2.5.2 - Comparação com outros métodos de otimização

O desempenho computacional global de um método de otimização qualquer na solução de um problema de otimização é função do seu esforço computacional por passo e da sua razão de conver

gências. Em uma aplicação específica, é em geral fácil obter boas estimativas do esforço computacional por passo. Já o mesmo não o corre com as previsões sobre razão de convergência. Nesta seção, baseados nos procedimentos para cálculo de $J(\underline{\alpha})$, $J'(\underline{\alpha})$, $H(\underline{\alpha})$, $H_2(\underline{\alpha})$, apresentados nas seções 2.2, 2.3, vamos fazer uma estimativa do esforço computacional por passo dos seguintes métodos de otimização: Gradiente de passo fixo ("steepest descent"); Quasi-Newton especializado (2-101), (2-102) seção 2.5; Newton; Davidon-Fletcher - Powell [17]; Fletcher-Reeves, [18]; Rosembrock, [53]. As estimativas do esforço computacional por passo serão utilizadas, juntamente com algumas considerações rudimentares sobre as características de convergência dos métodos citados, para a obtenção de uma visão de conjunto do desempenho desses métodos de otimização na solução do problema de otimização de parâmetros definido na seção 2.2.

Consideremos o seguinte procedimento computacional básico:

Passo 1: Inicialização

Dado $\underline{\alpha}_0$ que estabiliza assintoticamente a matriz

$(A + BG(\underline{\alpha}_0)C)$:

Fazer $K=0$

Calcular o par $[J(\underline{\alpha}_0), \nabla J(\underline{\alpha}_0)]$

Passo 2: Calcular

$$\underline{\alpha}_{K+1} = \underline{\alpha}_K + f(\underline{\alpha}_K) \quad (2-108)$$

Passo 3: Testar se $||\nabla J(\underline{\alpha}_{K+1})|| \leq \text{Tolerância}$:

Sim: parar

Não: Fazer $K=K+1$ e voltar ao passo 2 onde a função vetorial $f(\underline{\alpha}_K)$ varia com o método de otimização

Sejam $LYAP(n)$ e $LSYS(np)$ o tempo de computação para solução de uma equação de Liapunov de ordem n e um sistema de equações lineares simétrico de ordem np , respectivamente. Seja $CMPT(\cdot)$ o tempo de computação para calcular ns termos da recorrência (2-108) do método $(\cdot)$ no procedimento de cálculo básico apresentado acima. Considerando as suas predominâncias sobre outros fatores no cálculo de $J(\underline{\alpha}_K)$, $\nabla J(\underline{\alpha}_K)$, $H(\underline{\alpha}_K)$ e $H_2(\underline{\alpha}_K)$ apenas $LYAP(n)$ e $LSYS(np)$ se

rão considerados para o cálculo de CMPT(.). Nessas condições, temos:

(a) gradiente de passo fixo

$$f(\underline{\alpha}_K) = -\beta \nabla J(\underline{\alpha}_K) \quad (2-109)$$

onde β é um escalar selecionado para garantir

$$J(\underline{\alpha}_{K+1}) < J(\underline{\alpha}_K)$$

$$\text{CMPT}(\text{gradiente}) = 2(ns+1)\text{LYAP}(M)$$

(b) Quasi-Newton especializado (2-101), (2-102)

$$f(\underline{\alpha}_K) = -\beta \underline{y} \quad (2-110)$$

$$H_2(\underline{\alpha}_K) \underline{y} = \nabla J(\underline{\alpha}_K) \quad (2-111)$$

onde β é um escalar selecionado para garantir

$$J(\underline{\alpha}_{K+1}) < J(\underline{\alpha}_K)$$

$$\text{CMPT}(\text{quasi-Newton}) = 2(ns+1)\text{LYAP}(n) + ns\text{LSYS}(np)$$

Quando o teorema 2.2 é aplicável, temos

$$\text{LSYS}(np) = \sum_{i=1}^m \text{LSYS}(np_i) \quad (2-112)$$

onde np_i é o número de parâmetros a serem otimizados na linha i da matriz $G(\underline{\alpha})$. Geralmente isto torna $\text{LSYS}(np)$ insignificante quando comparado com $\text{LYAP}(n)$ e nessas condições temos:

$$\text{CMPT}(\text{Quasi-Newton}) = 2(ns+1)\text{LYAP}(n)$$

(c) Newton

$$f(\underline{\alpha}_K) = -\beta \underline{y} \quad (2-113)$$

$$H(\underline{\alpha}_K) \underline{y} = \nabla J(\underline{\alpha}_K) \quad (2-114)$$

onde β é um escalar selecionado para garantir

$$J(\underline{\alpha}_{K+1}) < J(\underline{\alpha}_K)$$

$$\text{CMPT}(\text{Newton}) = (ns(np+2)+2)\text{LYAP}(n) + ns\text{LSYS}(np) \quad (2-115)$$

(d) Davidon-Fletcher-Powell [17,40]

Quando este método é operado de forma iterada, $f(\underline{\alpha}_K)$

é obtida através de uma sequência de buscas unidimensionais em np direções. A sequência de buscas constroem uma aproximação progressiva da matriz hessiana inversa e se aplicada a uma função quadrática, no fim da sequência, temos;

$$f(\underline{\alpha}_K) = H^{-1}(\underline{\alpha}_K) \nabla J(\underline{\alpha}_K) \quad (2-116)$$

Assumindo otimisticamente que cada uma das buscas unidimensionais são executadas através de uma sequência de duas interpolações cúbicas e considerando que cada interpolação cúbica requer o cálculo do par $[J(\underline{\alpha}), \nabla J(\underline{\alpha})]$ em dois pontos diferentes, é fácil verificar que

$$CMPT(\text{Fletcher-Powell}) = (6nsnp+2)LYAP(n) \quad (2-117)$$

(e) Fletcher-Reeves {18},{40}

Como o método de Fletcher-Powell, este método também é baseado numa sequência de buscas unidimensionais em np direções. Quando aplicado a uma função quadrática com matriz hessiana $H(\underline{\alpha}_K)$ as direções geradas são $H(\underline{\alpha}_K)$ conjugadas e ao final obtemos diretamente

$$f(\underline{\alpha}_K) = -H^{-1}(\underline{\alpha}_K) \nabla J(\underline{\alpha}_K) \quad (2-118)$$

sem construir $H^{-1}(\underline{\alpha}_K)$.

$$CMPT(\text{Fletcher-Reeves}) = (6nsnp+2)LYAP(N) \quad (2-119)$$

(f) Rosembrock {53}

É um método heurístico concebido com dois objetivos: obter uma razão de convergência melhor que a do método de gradiente ("steepest descent") e evitar o cálculo do gradiente. Neste método $f(\underline{\alpha}_K)$ é obtida através de uma sequência de buscas unidimensionais em np direções ortogonais. Analogamente ao Fletcher - Reeves, temos

$$CMPT(\text{Rosembrock}) = (6nsnp+2)LYAP(n) \quad (2-120)$$

Os requisitos de memória interna dos métodos Gradiente, Quasi-Newton especial, Fletcher-Reeves, Rosembrock que não constroem a matriz hessiana são praticamente iguais. Os requisitos de memória interna dos métodos de Newton e Davidon - Fletcher - Powell

são praticamente iguais e correspondem ao requerido pelos métodos que não utilizam a matriz hessiana acrescidas do número de posições de memória ocupadas pela matriz hessiana.

Quanto às previsões gerais sobre a convergência dos métodos aqui tratados, temos:

(a) O método Quasi-Newton especializado tem a convergência garantida mesmo longe do ponto de mínimo e nas proximidades do mesmo, sua razão de convergência melhora e se aproxima da do Newton quando as restrições de estrutura são fracas.

(b) O método do Gradiente tem convergência garantida mesmo longe do ponto de mínimo. Seu grande problema é que nas proximidades do ponto de mínimo, sua razão de convergência pode ser muito baixa quando a matriz hessiana é mal condicionada.

(c) O método de Newton apresenta razão de convergência quadrática quando nas proximidades do ponto de mínimo. Longe do ponto de mínimo, o uso deste método é desaconselhável quando não existem garantias sobre a convexidade da função objetivo.

(d) Os métodos Davidon-Fletcher-Powell e Fletcher-Reeves quando utilizados de forma iterada, tem convergência garantida longe e próximo do ponto de mínimo. É muito difícil prever as razões de convergência e neste trabalho ficaremos com a hipótese simplista de que eles, quando utilizados de forma iterada, apresentam nas proximidades do ponto de mínimo razão de convergência igual à do método de Newton.

(e) É difícil prever a razão de convergência do método de Rosembrock devido à sua concepção heurística. Não há razão para crer que ele apresente um desempenho computacional superior ao Fletcher-Reeves.

Para uma dada tolerância no teste de convergência, para fins de comparação, é razoável supor que nas vizinhanças de um ponto de mínimo temos:

$$ns(\text{Newton}) \simeq ns(\text{Fletcher-Powell}) \simeq ns(\text{Fletcher-Reeves}) \quad (2-121)$$

$$ns(\text{Newton}) < ns(\text{Quasi-Newton}) < ns(\text{Gradiente}) \quad (2-122)$$

ns(Newton) <<< ns(Gradiente)

(2.123)

Dos esforços computacionais estimados, vemos que o esforço computacional por passo dos métodos Quasi-Newton especializado e Gradiente com mesmo tipo de passo são muito próximos e praticamente independentes de n_p . Esta propriedade mais as suas qualidades de convergência fazem do Quasi-Newton especializado um método particularmente bem adaptado para sistemas de grande dimensão com grande número de parâmetros. Sugerimos que a solução do problema de otimização de parâmetros inicie sempre com o método Quasi-Newton especializado. À medida que a sua razão de convergência se mostrar insatisfatória, teremos uma indicação de que as restrições de estrutura impostas podem afetar significativamente o índice de desempenho do sistema. Neste caso, se a otimização é ainda desejada, o processo deve ser continuado utilizando o método de Newton para pequenos valores de n_p e o método de Fletcher-Reeves para grandes valores de n_p . Esta preferência pelo Fletcher-Reeves sobre o Davidson-Fletcher-Powell e Newton é que a utilização de matrizes de grande dimensão por esses métodos causam não só problemas de disponibilidade de memória mas também acentuam os problemas de erros de arredondamento nos cálculos.

2.6 - APLICAÇÕES

Nesta seção serão ilustrados o uso e desempenho do método Quasi-Newton especializado e outros métodos citados na seção anterior. Serão tratados dois exemplos de reguladores L-Q de tempo infinito com restrições de estrutura: um regulador descentralizado para um sistema de pequena dimensão com poucos parâmetros a serem otimizados e um regulador com estrutura de controle local para um segmento de via expressa descrito por um modelo linearizado. O exemplo da via expressa, por suas características e dimensões, representa um caso típico bastante significativo de síntese de reguladores L-Q com restrições de estrutura para um sistema de grande porte com grande número de parâmetros a serem otimizados.

2.6.1 - Regulador L-Q descentralizado: Sistema com dimensões e número de parâmetros reduzidos

Nesta seção serão utilizados os métodos Quasi-Newtones especializado, Gradiente de passo fixo, Newton e Davidon-Fletcher-Powell para a solução do problema de otimização de parâmetros resultantes da síntese de um regulador descentralizado L-Q de tempo infinito. Os dados sobre o sistema dinâmico e a formulação do problema de otimização de parâmetros foram obtidos em (Geromel e Bernusou, {21}, {23}).

Equações do sistema e índice de desempenho:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \quad (2-124)$$

$$\underline{u}(t) = G(\underline{\alpha})\underline{x}(t) \quad (2-125)$$

$$J(\underline{\alpha}) = \frac{1}{n} \text{traço} \left[\int_0^{\infty} (\underline{x}^T(t)\underline{x}(t) + \underline{u}^T(t)\underline{u}(t)) dt \right] \quad (2-126)$$

onde: $\underline{x}(t)$, $\underline{u}(t)$ são vetores de dimensão $n=6$, $m=4$ respectivamente; o controle é dividido em três subsistemas e o vetor de parâmetros a serem otimizados $\underline{\alpha}$ é de dimensão $np=8$; as matrizes A,B são dadas abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 0. & 1. & 5. & 1. & 6. & 0. \\ -2. & -3. & 1. & 0. & 0. & 1. \\ .5 & 1. & 0. & 2. & 1. & 5. \\ .0 & -.5 & 1. & 3. & 0. & -.5 \\ 1. & 0. & 1. & 0. & 0. & 1. \\ 0. & 5. & 5. & 0. & -3. & -4. \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. \\ 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 3. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 4. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 2. \\ 0. & 0. & 0. & 2. \end{bmatrix} \quad (2-127)$$

O vetor $\underline{\alpha}_0$ dos parâmetros iniciais escolhidos e a matriz $G(\underline{\alpha}_0)$ são:

$$\underline{\alpha}_0^T = [-11.5, .55, -2.3, -.62, -.82, -3.41, -4.96, -.06] \quad (2-128)$$

$$G(\underline{\alpha}_0) = \begin{bmatrix} -11.51 & .55 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -2.3 & -.62 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -.82 & -3.41 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -4.96 & -.06 \end{bmatrix} \quad (2-129)$$

Os valores obtidos para o índice de desempenho $J(\underline{\alpha}_0)$ e a norma adotada para o vetor gradiente $||\nabla J(\underline{\alpha}_0)||$ são:

$$J(\underline{\alpha}_0) = 1.473692 \quad (2-130)$$

$$||\nabla J(\underline{\alpha}_0)|| = \frac{3}{8} \sum_{i=1}^8 |g_i| = .1169456 \quad (2-131)$$

onde $|g_i|$ é o valor absoluto do i -ésimo elemento de $\nabla J(\underline{\alpha}_0)$.

Para o teste de convergência

$$||\nabla J(\underline{\alpha})|| \leq 10^{-5} \quad (2-132)$$

todos os métodos de otimização convergiram para o mesmo ponto de mínimo. O vetor de parâmetros ótimos $\underline{\alpha}^*$ e o correspondente índice de desempenho foram:

$$\underline{\alpha}^{*T} = [-1.1848, -.3855, -1.4454, -.5399, -.9299, \\ , -2.2766, -1.6121, -.3674] \quad (2-133)$$

$$J(\underline{\alpha}^*) = .4977398 \quad (2-134)$$

Os resultados em cada etapa dos processo iterativos obtidos com os métodos Quasi-Newton especializado, Newton e Gradiente de passo fixo são apresentados nas Tabelas 2.1, 2.2 e 2.3, respectivamente. Na Tabela 2.4 são apresentados os tempos de cálculo utilizados na solução do problema de otimização de parâmetros. Confirmando as previsões feitas na secção 2.5.2, vemos que mesmo em um sistema de pequena dimensão com poucos parâmetros a otimizar, o desempenho computacional do método Quasi-Newton especializado pode ser bastante superior aos do método de Newton, Davidon-Fletcher-Powell e Gradiente de passo fixo. Comparando os valores de CMPT e tempo de "CPU" dos métodos Quasi-Newton especializado e Gradiente de passo fixo apresentados na Tabela 2.4, vemos que realmente esses métodos possuem esforços computacionais por passo praticamente iguais.

TABELA 2.1

Regulador L-Q descentralizado
Método Quasi-Newton especializado
Etapas do processo iterativo

K	β	$J(\underline{\alpha}_K)$	$ \nabla J(\underline{\alpha}_K) $
0	-	1.473692	.1169456
1	1.	1.413800	.1110349
2	1.	.8184661	.8277122x10 ⁻¹
3	1.	.5793556	.5035244x10 ⁻¹
4	1.	.5081433	.2335849x10 ⁻¹
5	1.	.4983083	.8332994x10 ⁻²
6	1.	.4977790	.2248645x10 ⁻²
7	1.	.4977435	.7120837x10 ⁻³
8	1.	.4977402	.2279869x10 ⁻³
9	1.	.4977398	.7266128x10 ⁻⁴
10	1.	.4977398	.2331968x10 ⁻⁴
11	1.	.4977398	.7439858x10 ⁻⁵

TABELA 2.2

Regulador L-Q descentralizado
Método de Newton
Etapas do processo iterativo

K	β	$J(\underline{\alpha}_K)$	$ \nabla J(\underline{\alpha}_K) $
0	-	1.473692	.1169456
1	.5	.8017500	.7990945x10 ⁻¹
2	.5	.5810024	.4854772x10 ⁻¹
3	1.	.5126552	.6623608x10 ⁻¹
4	.5	.5041515	.3629300x10 ⁻¹
5	1.	.4980659	.6686071x10 ⁻²
6	1.	.4977403	.2278862x10 ⁻³
7	1.	.4977398	.5251720x10 ⁻⁵

TABELA 2.3

Regulador L-Q descentralizado
Método do Gradiente de passo fixo
Etapas do processo iterativo

K	β	$J(\underline{\alpha}_K)$	$ \nabla J(\underline{\alpha}_K) $
0	-	1.473692	.1169456
1	3.	1.413800	.1110349
2	3.	1.359798	.1057092
3	3.	1.310633	.1008344
4	3.	1.265532	.9631588x10 ⁻¹
5	3.	1.223903	.9208441x10 ⁻¹
6	3.	1.185282	.8808767x10 ⁻¹
7	3.	1.149299	.8428532x10 ⁻¹
8	3.	1.115654	.8064582x10 ⁻¹
9	3.	1.084096	.7714436x10 ⁻¹
10	3.	1.054416	.7376142x10 ⁻¹
11	3.	1.026438	.7048183x10 ⁻¹
12	3.	1.000008	.6729402x10 ⁻¹
13	3.	.9749939	.6418955x10 ⁻¹
14	3.	.9512779	.6116263x10 ⁻¹
15	3.	.9287565	.5820978x10 ⁻¹
16	3.	.9073367	.5532446x10 ⁻¹
17	3.	.8869351	.5252168x10 ⁻¹
18	3.	.8674758	.4978770x10 ⁻¹
19	3.	.8488902	.4789485x10 ⁻¹
20	3.	.8311159	.4629411x10 ⁻¹
21	3.	.8140965	.4469648x10 ⁻¹
⋮	⋮	⋮	⋮
138	3.	.4977398	.9341854x10 ⁻⁵

TABELA 2.4

Regulador L-Q descentralizado
 Tempo de computação utilizado
 $||\nabla J(\underline{\alpha})|| \leq 10^{-5}$

Método	CMPT	Tempo de "CPU" PDP-10 (UNICAMP) (segundos)
Quasi-Newton especializado	24LYAP(6)+44LSYS(2)	8.39
Newton	75LYAP(6)+7LSYS(8)	29.86
Gradiente de passo fixo	276LYAP(6)	99.48
Davidon-Fletcher -Powell*	396LYAP(6)	143.42

* Versão contida na biblioteca de programas SSP/IBM

2.6.2 - Regulador L-Q com estrutura de controle local para um típi co sistema de grande porte

Nesta seção serão utilizados os métodos Quasi-Newton es
pecializado e Gradiente de passo fixo para a solução dos problemas
de otimização de parâmetros resultantes da síntese de um regulador
L-Q com estrutura de controle "local" para um segmento de via ex
pressa com oito milhas de comprimento descrito por um modelo li
nearizado apresentado em (Thompson e Payne, {61}). Pela dispersão
geográfica entre seus estados e entradas de controle, pelas suas
dimensões e características dinâmicas, a via expressa é um exemplo
típico de sistema de grande porte onde um regulador com estrutura
de controle local, em princípio subótimo, é mais interessante na
prática que um regulador ótimo mas com estrutura de controle cen
tralizado (Athans, {1}; Isaksen e Payne, {30}).

As equações do sistema dinâmico e índice de desempenho são:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \quad (2-135)$$

$$\underline{u}(t) = G(\underline{\alpha})\underline{x}(t) \quad (2-136)$$

$$J(\underline{\alpha}) = \frac{1}{n} \text{traço} \left\{ \int_0^{\infty} \left[\underline{x}^T(t) S_1 \underline{x}(t) + \underline{u}^T(t) S_2 \underline{u}(t) \right] dt \right\} \quad (2-137)$$

onde: $\underline{x}(t)$ é um vetor de dimensão $n=34$ com os elementos ímpares representando as densidades médias de tráfego e os elementos pares representando as velocidades médias dos veículos em 17 secções consecutivas da via expressa; $\underline{u}(t)$ é um vetor de dimensão $m=11$ representando o fluxo de veículos nas rampas de acesso à via expressa; os elementos das matrizes A de dimensão (34×34) , B de dimensão (34×11) e das matrizes diagonais definidas positivas S_1 de dimensão (34×34) e S_2 de dimensão (11×11) são dados na Tabela 2.5.

As estruturas de controle local consideradas são:

Estrutura 1: A mesma estrutura de controle utilizada em (Thompson e Payne, {61}) resultante da aplicação do método de "aumentação" para síntese de reguladores lineares com estrutura de controle local. É composta por $n_p=106$ parâmetros e utiliza medição completa de estado. A posição dos elementos do vetor de parâmetros $\underline{\alpha}$ na matriz $G(\underline{\alpha})$ é apresentada na Tabela 2.6.

Estrutura 2: Esta estrutura foi seleccionada de forma a englobar a maioria das posições com os ganhos mais significativos na matriz de realimentação da solução do problema do regulador ótimo L-Q de tempo infinito. É composta por $n_p=55$ parâmetros e utiliza apenas medidas de densidade de tráfego. A posição dos elementos do vetor de parâmetros $\underline{\alpha}$ na matriz $G(\underline{\alpha})$ é apresentada na Tabela 2.6.

O vetor de parâmetros iniciais $\underline{\alpha}_0$ para a estrutura 1 foi obtido utilizando o método de "aumentação" (Isaksen e Payne, {30}) e seus elementos são dados na Tabela 2.7.

Para a estrutura 2 é adotado $\underline{\alpha}_0 = 0$.

O teste de convergência é:

$$||\nabla J(\underline{\alpha})|| = \frac{17}{np} \sum_{i=1}^{np} |g_i| \leq 10^{-5} \quad (2-139)$$

onde $|g_i|$ é o valor absoluto do i -ésimo elemento de $\nabla J(\underline{\alpha})$.

Os resultados obtidos foram:

Estrutura 1: Os elementos do vetor de parâmetros ótimo $\underline{\alpha}^*$ são apresentados na Tabela 2.9. Os valores inicial $J(\underline{\alpha}_0)$ e ótimo $J(\underline{\alpha}^*)$ do índice de desempenho são:

$$J(\underline{\alpha}_0) = .7624637 \quad (2-140)$$

$$J(\underline{\alpha}^*) = .7513710 \quad (2-141)$$

Os resultados em cada etapa do processo iterativo obtido com o método Quasi-Newton especializado são apresentados na Tabela 2.8.

Estrutura 2: Os elementos do vetor de parâmetros ótimos $\underline{\alpha}^*$ são apresentados na Tabela 2.9. Os valores inicial e final do índice de desempenho são:

$$J(\underline{\alpha}_0) = .8392886 \quad (2-142)$$

$$J(\underline{\alpha}^*) = .7512925 \quad (2-143)$$

Os resultados em cada etapa dos processos iterativos obtidos com os métodos Quasi-Newton especializado e Gradiente de passo fixo são apresentados nas Tabelas 2.8 e 2.10 respectivamente.

O valor do índice de desempenho (2-137) para a solução do problema do regulador ótimo de tempo infinito é:

$$J^* = .7479287 \quad (2-144)$$

Em (2-141), (2-143), (2-144) podemos verificar que os valores ótimos do índice de desempenho para a estrutura de controle 1, estrutura de controle 2 e regulador ótimo L-Q são muito próximos um do outro. A diferença entre eles não chega a 0,4%. Temos portanto um caso típico de restrições de estrutura "fracas", o que é confirmado pelas excelentes razões de convergência do método Quasi

-Newton especializado, apresentadas na Tabela 2.8. Comparando os resultados nas Tabelas 2.8 e 2.10, vemos que o desempenho computacional do método Quasi-Newton é bastante superior ao do Gradiente de passo fixo.

Sejam $CMPT_1(\cdot)$ o esforço computacional por passo do método $(\cdot)$. Utilizando as fórmulas apresentadas na seção 2.5.2, para este exemplo com a estrutura de controle, temos

$$CMPT_1(\text{Newton}) = 61LYAP(34) + LSYS(55)$$

$$CMPT_1(\text{D-F-P}) = CMPT_1(\text{F-R}) \simeq CMPT_1(\text{Rosembrock}) = 332LYAP(34)$$

Assim sendo, vemos que o método Quasi-Newton especializado resolveu o problema de otimização de parâmetros em um tempo mais que seis vezes menos que o necessário para dar um único passo do método de Newton. Em relação aos métodos de Davidon-Fletcher-Powell, Fletcher-Reeves e Rosembrock, esta relação muda para trinta e três.

Nas Figs. 2.1, 2.2 e 2.3 são apresentados esquemas simplificados dos sistemas de controle correspondentes ao regulador ótimo L-Q, regulador L-Q com a estrutura 1 e o regulador L-Q com estrutura 2. Comparando os requisitos para implementação dos sistemas de controle, vemos que os do regulador L-Q com a estrutura 2 são os menores e sensivelmente inferiores aos do regulador ótimo L-Q.

...

TABELA 2.5

Via expressa: Regulador L-Q com estrutura local

Matrizes do sistema: A,B

Matrizes do índice de desempenho: S_1, S_2

i	$a_{i,i-2}$	$a_{i,i-1}$	$a_{i,i}$	$a_{i,i+1}$	$s_{1,i}$	j^*	$s_{2,j}$
1			-1.758	-1.666	1.000		
2		.564	-1.200	-.697	1.929		
3	1.955	1.853	-2.371	-1.956	1.000	1	25.00
4	1.983	.725	-3.122	-.583	1.929		
5	1.194	.985	.946	-1.059	1.000	2	25.00
6	1.333	.278	-2.467	-.325	1.929		
7	.870	.975	-.964	-1.011	1.000	3	25.00
8	.950	-.332	-2.130	-.356	1.929		
9	.964	1.011	-.962	-1.013	1.000		
10	.962	.271	-2.161	-.303	1.929		
11	.677	.713	-.718	-.734	1.000	4	25.00
12	.824	.243	-2.029	-.267	1.929		
13	.706	.722	-.703	-.725	1.000		
14	.708	.301	-1.905	-.317	1.929		
15	1.037	1.071	-1.033	-1.123	1.000	5	25.00
16	.825	.394	-2.007	-.298	1.929		
17	1.106	1.203	-1.079	-1.266	1.000	6	25.00
18	1.041	.285	-2.215	-.299	1.929		
19	.652	.765	-.648	-.805	1.000	7	25.00
20	.801	.266	-1.980	-.285	1.929		
21	.915	1.137	-1.001	-1.278	1.000	8	25.00
22	.782	.314	-1.975	-.347	1.929		
23	.934	1.188	-.963	-1.153	1.000		
24	.996	.269	-2.226	-.338	1.929		
25	.680	.815	-.925	-.953	1.000	9	25.00
26	.996	.339	-2.250	-.371	1.929		
27	.716	.895	-.931	-.881	1.000		
28	.960	.451	-2.175	-.449	1.929		
29	1.571	1.487	-1.513	-1.487	1.000	10	25.00
30	1.170	.454	-2.399	-.554	1.929		
31	1.253	1.232	-1.619	-1.334	1.000	11	25.00
32	1.591	.611	-2.844	-.652	1.929		
33	1.626	1.339	-1.659	-1.312	1.000		
34	1.656	-.029	-2.889		1.929		

* j é o número da coluna para a qual $b_{i,j} = 1$.

Os elementos não mostrados nesta tabela são iguais a zero.

TABELA 2.6

Via expressa: Regulador L-Q com estrutura local
Posição dos elementos do vetor $\underline{\alpha}$ na matriz $G(\underline{\alpha})$

Estrutura de controle 1

K	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11																															
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34																		
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34																		
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																										
2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20																																										
3	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30																																										
4											31	32	33	34	35	36																																				
5																37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48																									
6																49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60																									
7																61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72																									
8																73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84																									
9																																			85	86	87	88	89													
10																																								91	92	93	94	95	96	97	98					
11																																													99	100	101	102	103	104	105	106

Estrutura de controle 2

K	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11														
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	
i	1	1	2	3	4	5																													
2		6	7	8	9	10																													
3																																			
4																																			
5																																			
6																																			
7																																			
8																																			
9																																			
10																																			
11																																			

i - representa as linhas da matriz $G(\underline{\alpha})$
j - representa as colunas da matriz $G(\underline{\alpha})$ e as linhas da matriz B
K - representa as colunas da matriz B, onde $b_{j,K} = 1$.
As posições de $G(\underline{\alpha})$ não ocupadas por elementos de $\underline{\alpha}$ são iguais a zero.

TABELA 2.7

Via expressa: Regulador L-Q com estrutura local
Elementos do vetor de parâmetros inicial $\underline{\alpha}_0$ (x25.)

Estrutura de controle 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α_i	-.461	.199	-.754	.132	-.619	.124	-.233	.073	-.059	.023
α_{i+10}	-.502	.046	-.618	.087	-1.562	.242	-.612	.170	-.150	.057
α_{i+20}	-.198	-.033	-.233	-.014	-.612	-.001	-1.197	.193	-.272	.084
α_{i+30}	-.696	-.012	-1.591	.217	-.348	.088	-1.434	-.140	-1.715	.180
α_{i+40}	-.880	-.219	-.671	.161	-.165	.082	-.056	.025	-.772	-.090
α_{i+50}	-.879	-.033	-1.367	.218	-.918	.178	-.245	.113	-.078	.034
α_{i+60}	-.624	-.108	-.671	-.091	-.918	-.012	-2.245	.271	-.686	.267
α_{i+70}	-.198	.082	-.140	-.033	-.164	-.041	-.244	-.046	-.685	-.041
α_{i+80}	-1.107	.235	-.263	.090	-.461	-.009	-1.171	.169	-.261	.064
α_{i+90}	-.763	-.061	-.928	.147	-.435	.105	-.158	-.061	-.389	-.019
α_{i+100}	-.435	.056	-.914	.136	-.136	.114	-	-	-	-

α_i representa o i-ésimo elemento do vetor $\underline{\alpha}_0$ multiplicado pelo fator 25.

TABELA 2.8

Via expressa: Regulador L-Q com estrutura local
Método Quasi-Newton especializado

Etapas do processo iterativo

Estrutura de controle 1				Estrutura do controle 2			
K	β	$J(\underline{\alpha}_K)$	$ \nabla J(\underline{\alpha}_K) $	K	β	$J(\underline{\alpha}_K)$	$ \nabla J(\underline{\alpha}_K) $
0	-	.7624637	.2325914	0	-	.8392886	.8392886
1	1.	.7514499	.1926159x10 ⁻¹	1	1.	.7597259	.3681124
2	1.	.7513713	.1071955x10 ⁻²	2	1.	.7513055	.1183073x10 ⁻¹
3	1.	.7513710	.1010831x10 ⁻³	3	1.	.7512926	.2528578x10 ⁻³
4	1.	.7513710	.8303315x10 ⁻⁵	4	1.	.7512925	.6722810x10 ⁻⁵
CMPT		10LYAP(34)+16LSYS(12)+ +12LSYS(10)+ +8LSYS(8) + +8LSYS(6)		CMPT		10LYAP(34)+44LSYS(5)	
Tempo CPU PDP-10 UNICAMP(segundos)		346.39		Tempo CPU PDP-10 UNICAMP(segundos)			

TABELA 2.9

Via expressa: Regulador L-Q com estrutura local
Elementos do vetor de parâmetros ótimo $\underline{\alpha}^*$

Estrutura de controle 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α_i	-.0122	.0049	-.0177	.0034	-.0178	.0034	-.0106	.0033	-.0103	.0028
α_{i+10}	-.0162	-.0006	-.0178	.0015	-.0015	.0062	-.0259	.0074	-.0254	.0066
α_{i+20}	-.0106	-.0039	-.0108	-.0022	-.0263	-.0021	-.0425	.0075	-.0414	.0092
α_{i+30}	-.0442	-.0040	-.0624	.0082	-.0587	.0078	-.0395	-.0061	-.0366	.0041
α_{i+40}	-.0201	.0058	-.0185	.0049	-.0065	.0035	-.0050	.0021	-.0224	-.0052
α_{i+50}	-.0200	-.0017	-.0304	.0055	-.0244	.0050	-.0091	.0045	-.0071	.0027
α_{i+60}	-.0218	-.0061	-.0181	-.0041	-.0243	-.0015	-.0566	.0068	-.0231	.0097
α_{i+70}	-.0176	.0063	-.0071	-.0025	-.0064	-.0025	-.0091	-.0028	-.0233	-.0031
α_{i+80}	-.0319	.0073	-.0229	.0065	-.0250	-.0032	-.0355	.0039	-.0269	.0052
α_{i+90}	-.0190	-.0017	-.0189	.0040	-.0088	-.0028	-.0033	.0016	-.0096	-.0011
α_{i+100}	-.0088	.0015	-.0183	.0037	-.0070	.0031	-	-	-	-

Estrutura de controle 2

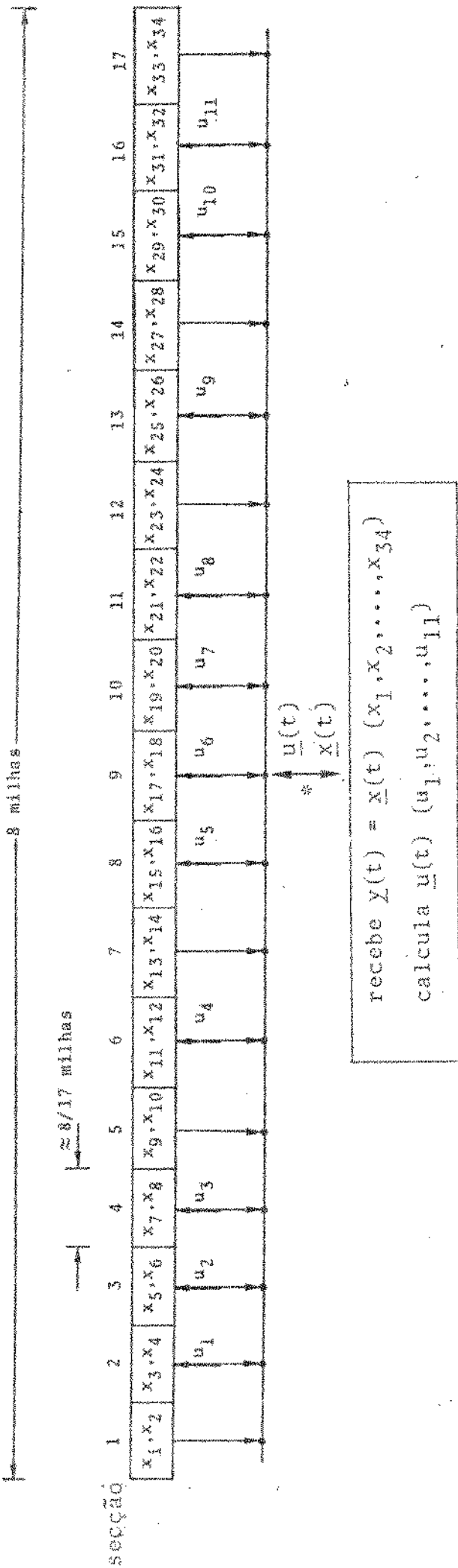
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α_i	-.0154	-.0173	-.0181	-.0105	-.105	-.0272	-.0432	-.0263	-.0168	-.0201
α_{i+10}	-.0304	-.0433	-.0267	-.229	-.0194	-.0445	-.0623	-.0423	-.0166	-.0156
α_{i+20}	-.0388	-.0367	-.0193	-.0183	-.0094	-.0330	-.0307	-.0244	-.0093	-.0072
α_{i+30}	-.0430	-.0562	-.0237	-.0131	-.0104	-.0299	-.0328	-.0168	-.0101	-.0072
α_{i+40}	-.0248	-.0352	-.0211	-.0062	-.0044	-.0083	-.0149	-.0191	-.0086	-.0034
α_{i+50}	-.0043	-.0073	-.0088	-.0183	-.0073	-	-	-	-	-

Nesta tabela, α_i representa o i-ésimo elemento do vetor $\underline{\alpha}^*$.

TABELA 2.10

Via expressa: Regulador L-Q com estrutura local
 Gradiente de passo fixo: Etapas do processo iterativo
 Estrutura de controle 2

K	β	$J(\underline{\alpha}_K)$	$ J(\underline{\alpha}_K) $
0	-	.8392886	2.628697
1	.17	.8361674	2.557642
2	.17	.7627994	.4093299
3	.17	.7548473	.2357636
4	.17	.7524787	.1248452
5	.17	.7518341	.7232422x10 ⁻¹
6	.17	.7516046	.5056693x10 ⁻¹
7	.17	.7514918	.3767508x10 ⁻¹
8	.17	.7514271	.2901763x10 ⁻¹
9	.17	.7513870	.2284486x10 ⁻¹
10	.17	.7513610	.1866615x10 ⁻¹
⋮			
46	.17	.7512927	.4617823x10 ⁻³
CMPT		94LYAP(34)	



Requisitos para implementação do sistema de controle:

Sensores: 17 sensores de densidade de tráfego

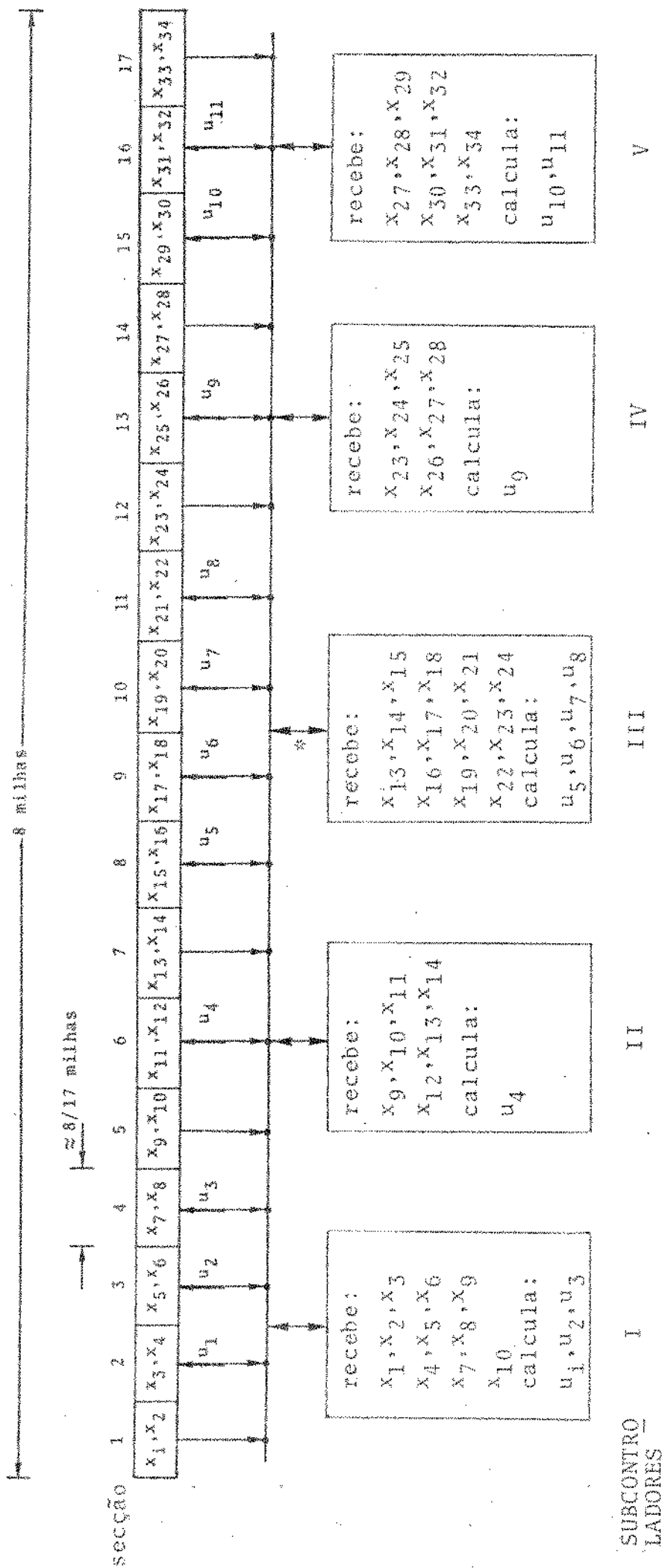
17 sensores de velocidade de veículos

Distância máxima entre emissores e receptores: 4 milhas

*Capacidade de transmissão de dados: 45 variáveis/intervalo de tempo

Fig. 2.1 - Via expressa: regulador ótimo L-Q

Esquema simplificado e requisitos do sistema de controle



Requisitos para implementação do sistema de controle:

Subcontroladores: 5

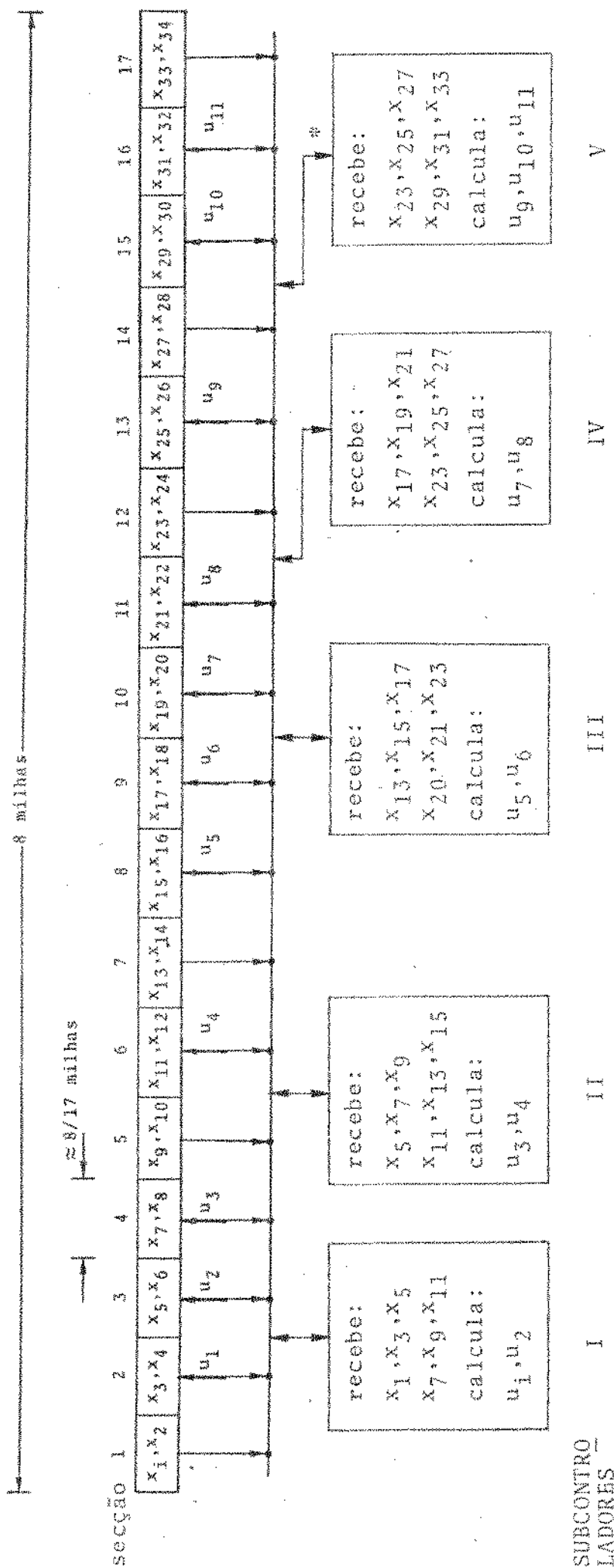
Sensores: 17 sensores de densidade de tráfego

17 sensores de velocidade de veículos

Distância máxima entre emissores e receptores: 1,4 milhas

*Capacidade máxima de transmissão de dados: 16 variáveis/intervalo de tempo

Fig. 2.2 - Via expressa: regulador L-Q com estrutura local - estrutura 1
Esquema simplificado e requisitos do sistema de controle



Requisitos para implementação do sistema de controle:

Subcontroladores: 5

Sensores: 17 sensores de densidade de tráfego

Distância máxima entre emissores e receptores: 1.4 milhas

*Capacidade máxima de transmissão de dados: 9 variáveis/intervalo de tempo

Fig. 2.3 - Via expressa: regulador L-Q com estrutura local - estrutura 2

Esquema simplificado e requisitos do sistema de controle

2.7 - CONCLUSÃO

Podemos classificar os assuntos tratados neste capítulo em dois grandes grupos:

(a) Solução do problema de otimização de parâmetros utilizando métodos de minimização do tipo descida;

(b) Escolha do Índice de desempenho quadrático: condições para garantir a estabilidade assintótica do sistema controlado em malha fechada e especificação das condições iniciais do sistema na formulação do problema de otimização de parâmetros.

No grupo (a) destacamos os seguintes resultados:

(i) Uma abordagem unificada, com um tratamento detalhado e em profundidade do problema de cálculo em forma fechada do índice de desempenho $J(\underline{\alpha})$, vetor Gradiente $\nabla J(\underline{\alpha})$, matriz hessiana $H(\underline{\alpha})$ e suas componentes $H_1(\underline{\alpha})$ e $H_2(\underline{\alpha})$. Embora deduzido de forma diferente, o algoritmo para o cálculo do par $[J(\underline{\alpha}), \nabla J(\underline{\alpha})]$ é igual ao proposto em (Geromel e Bernussou, [21], [23]). O algoritmo para cálculo de $H(\underline{\alpha})$, $H_1(\underline{\alpha})$ e $H_2(\underline{\alpha})$ e as propriedades de $H_2(\underline{\alpha})$ apresentadas nos teoremas 2.1, 2.2, 2.3 são resultados relevantes que consideramos originais.

(ii) $H_2(\underline{\alpha})$ e suas propriedades serviram de base para a confecção de um novo algoritmo de otimização especializado do tipo Quasi-Newton, cuja razão de convergência melhora e se aproxima da do método de Newton na medida que as restrições de estrutura são "fracas". O seu esforço computacional por passo é praticamente igual ao do Gradiente com mesmo tipo de passo e é praticamente independente do número de parâmetros a serem otimizados.

A abordagem unificada do cálculo de $J(\underline{\alpha})$, $\nabla J(\underline{\alpha})$, $H_2(\underline{\alpha})$, associada com considerações grosseiras sobre a razão de convergência de vários métodos de otimização de uso corrente, permitiu a obtenção de uma visão de conjunto do problema de pré-análise e seleção de métodos de otimização de parâmetros. Os resultados mostram que quando as restrições de estrutura são fracas, a superioridade do método Quasi-Newton especializado é marcante para qualquer tipo de sistema. Por suas características de convergência e esforço computacional por passo, devemos começar a solução do problema de otimização de parâmetros utilizando o método Quasi-Newton especializa

do. Quando sua razão de convergência é baixa, temos uma indicação de que o desempenho do sistema pode ser significativamente afetado pelas restrições de estrutura. Em sistemas de grande dimensão com grande número de parâmetros a serem otimizados, somente uma razão de convergência realmente muito baixa pode vir a viabilizar o uso de outros métodos como o Gradiente (utilizado em Geromel e Bernusson, {21}, {23}), Rosembrock (utilizado em Davison e outros, {16}), Newton, Davidon-Fletcher-Powell e Fletcher Reeves. É importante ainda lembrar que a fraqueza das restrições de estrutura é um requisito importante para a factibilidade do problema de otimização de parâmetros como ferramenta para síntese de sistemas de controle e que as aplicações correntes desta técnica ocorrem justamente em problemas de síntese de reguladores lineares onde procura-se eliminar as malhas de realimentação de menor importância para o desempenho do sistema de controle e com custo de implementação elevado (Davison e outros, {16}; Isaksen e Payne, {30}). O método Quasi-Newton especializado, juntamente com a visão de conjunto do problema de otimização de parâmetros, são resultados relevantes que consideramos originais.

(iii) As aplicações apresentadas na secção 2.5 comprovam a eficiência do método Quasi-Newton especializado na solução do problema de otimização de parâmetros. Em particular, o exemplo da via expressa ilustra muito bem a presença de restrições de estrutura "fracas": a estrutura de controle 2 com somente 55 parâmetros tem desempenho apenas 0,4% inferior ao do regulador ótimo L-Q com 374 parâmetros; o excepcional desempenho computacional do método Quasi-Newton especializado.

No grupo (b) destacamos os seguintes resultados:

(i) Na secção 2.4.1 foi mostrado que o índice de desempenho $J_n(\underline{\alpha})$, à medida que n cresce, converge uniformemente para $J_\infty(\underline{\alpha}) = \lambda_M(T)$ que corresponde a $J(\underline{\alpha})$ para o pior caso de condição inicial do sistema. Foi mostrado também que a sugestão em (Levine, {36}) de considerar $\underline{x}_0$ como uma variável aleatória com distribuição uniforme é equivalente a utilizar $J(\underline{\alpha}) = J_1(\underline{\alpha})$ e que a abordagem min-max em (Geromel, {23}) corresponde a utilizar $J(\underline{\alpha}) = J_2(\underline{\alpha})$. Na secção 2.4.2 foi mostrado que as expressões para o cálculo de $J(\underline{\alpha})$, $\nabla J(\underline{\alpha})$, $H_2(\underline{\alpha})$ podem ser muito facilmente adaptadas para o cál

culo de $J_n(\underline{\alpha})$, $\nabla J_n(\underline{\alpha})$, $H_{n_2}(\underline{\alpha})$ respectivamente e que $H_{n_2}(\underline{\alpha})$ possui as mesmas propriedades que $H_2(\underline{\alpha})$. Isto faz com que o método Quasi-Newton especializado possa ser utilizado para a solução do problema de otimização de parâmetros, bastando para isso trocar $J(\underline{\alpha})$, $\nabla J(\underline{\alpha})$ e $H_2(\underline{\alpha})$ por $J_n(\underline{\alpha})$, $\nabla J_n(\underline{\alpha})$, $H_{n_2}(\underline{\alpha})$ respectivamente. O índice $J_n(\underline{\alpha})$, sua relação com $J(\underline{\alpha})$ para o pior caso de $\underline{x}_0$ são resultados originais. O algoritmo para cálculo de $\nabla J_n(\underline{\alpha})$, embora deduzido de forma diferente, é uma generalização do utilizado em (Geromel, {23}). O algoritmo para cálculo de $H_{n_2}(\underline{\alpha})$ é uma extensão do utilizado para obtenção de $H_2(\underline{\alpha})$.

(ii) Quanto à seleção do índice de desempenho para garantir a estabilidade assintótica do sistema controlado, nada de relevante foi acrescentado do anteriormente conhecido. Foi visto na seção 2.2 para $J(\underline{\alpha})$ que a existência de $\underline{\alpha}_0$ que estabilize assintoticamente $(A+BG(\underline{\alpha}_0)C)$ mais a detectabilidade do par $[A, S_1]$ e a controlabilidade do par $[(A+BG(\underline{\alpha})C), X_0^T]$ durante todo o processo de descida formam em conjunto uma condição suficiente. A controlabilidade do par $[(A+BG(\underline{\alpha})C), X_0^T]$ é o requisito mais incômodo, porque depende de $\underline{\alpha}$ durante o processo de descida. Essa condição suficiente é bem mais restritiva que a sua similar para o regulador ótimo L-Q que necessita apenas que o par $[A, B]$ seja estabilizável e o par $[A, S_1]$ seja detectável para garantir não só a estabilidade assintótica do sistema controlado, mas também a existência e unicidade da solução ótima. Para $J_n(\underline{\alpha})$, na seção 2.4.2 foi mostrado que a existência de $\underline{\alpha}_0$ que estabilize assintoticamente $(A+BG(\underline{\alpha}_0)C)$ mais a observabilidade do par $[A, S_1]$ formam em conjunto uma condição suficiente para garantir a estabilidade assintótica do sistema controlado. Não existem garantias de unicidade da solução ótima para $J(\underline{\alpha})$ ou $J_n(\underline{\alpha})$ devido à falta de garantias sobre a convexidade desses índices de desempenho.

Para encerrar este capítulo, é importante notar que para obter a solução do problema do regulador ótimo L-Q de tempo infinito basta resolver uma equação de Riccati de ordem n . Utilizando o método de Kleinman (teorema 1.28) isto é obtido através de uma sequência com razão de convergência quadrática, onde a maior parte do esforço computacional por passo é devida à solução de uma equação de Liapunov de ordem n . O método Quasi-Newton especializado pa

ra resolver um problema com restrições de estrutura bem "fracas" utiliza uma sequência com razão de convergência praticamente quadrática onde a maior parte do esforço computacional por passo é dada à solução de duas equações de Liapunov de ordem n , uma das quais é praticamente igual à que aparece na sequência do método de Kleinman. Portanto, é fácil concluir que o esforço computacional para obter a solução do problema do regulador ótimo L-Q de tempo infinito é um limitante inferior do esforço computacional para solução do problema do regulador L-Q com restrições de estrutura para o mesmo sistema. Isto enfatiza mais uma vez que as restrições de estrutura são impostas por razões ligadas à problemas de implementação do sistema de controle e não para facilitar o problema de síntese do sistema de controle.

CAPÍTULO III

REGULADOR L-Q-G COM RESTRIÇÕES DE ESTRUTURA

3.1 - INTRODUÇÃO

Com reconstrução de estado temos as seguintes restrições de estrutura:

- (a) O conjunto de saídas e estimativas de estado do sistema a ser colocado à disposição de cada canal de realimentação .
- (b) A forma do controlador: Malha fechada, malha aberta, misto de malha fechada e aberta, linear, não linear, centralizado, descentralizado, etc... .

O item (a) define o que aqui chamaremos de estrutura de informação do controlador.

Conforme foi visto na seção 1.3.2, a solução do problema do regulador ótimo L-Q-G de tempo infinito tem a seguinte forma:

$$\underline{u}(t) = G \hat{x}(t) \quad (3-1)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + H(\underline{y}(t) - C\hat{x}(t)) + B\underline{u}(t); \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0 \quad (3-2)$$

onde G é a matriz dos ganhos de realimentação da solução do problema do regulador L-Q de tempo infinito e $\hat{x}(t)$ é a estimativa de estado gerada pelo filtro de Kalman (3-2). O resultado é portanto um controlador na forma de realimentação de saída, de dimensão finita; linear, invariante no tempo, cujos ganhos são independentes das condições iniciais do sistema.

Na mesma seção vimos que estas propriedades são as principais responsáveis pelo sucesso do problema do regulador L-Q-G como ferramenta para síntese de sistemas de controle. Vimos também que suas principais desvantagens, do ponto de vista da implementação do sistema de controle, são o caráter centralizado de sua estrutura de informação e a necessidade de cálculo em tempo real para solução das equações do filtro.

As necessidades de cálculo em tempo real se agravam com a dimensão do sistema e a solução comumente adotada é a utilização de processadores paralelos equipados com unidades aritméticas para operações com ponto flutuante. O caráter centralizado da estrutura de informação requer um esforço de comunicação que se agrava com a dimensão do sistema e a dispersão espacial entre as suas saídas e entradas de controle. A dimensão do sistema aumenta muito o número das malhas de realimentação e a dispersão espacial o comprimento dessas malhas.

Quando ao problema do regulador ótimo L-Q-G de tempo infinito, enunciado na seção 1.3.2, são acrescidas restrições sobre a estrutura de informação do controlador, nada garante que a solução ótima, caso venha a ser obtida, apresenta as desejáveis propriedades de linearidade e invariança e a lei de controle pode ainda depender do registro de dimensão infinita das medidas passadas (Sandell e outros {56}, witsenhausen {64}).

Uma solução de compromisso é resolver o problema do regulador ótimo L-Q-G acrescido das seguintes restrições de estrutura (Sandell e outros {56}, Loose e outros {37,38}):

- (a) Controlador na forma de realimentação de saída linear, invariante no tempo, de dimensão finita e com ganhos independentes da condição inicial do sistema.
- (b) Estrutura de informação predeterminada.

Isto resulta em um problema de otimização de parâmetros, onde as variáveis independentes são todos os elementos das matrizes do controlador admissíveis dentro da estrutura de informação adotada.

As restrições de estrutura devem ser escolhidas de forma a facilitar a utilização dos processadores paralelos e diminuir os problemas de custo e confiabilidade do sistema de comunicações. Como no caso do regulador L-Q, é de "bom senso" limitar o uso desta técnica aos casos de restrições de estrutura "fracas" e as mesmas considerações sobre o problema de seleção da estrutura são também válidas.

O problema de otimização de parâmetros foi tratado an-

teriormente por Loose e outros { 37 , 38} . Eles estudaram o problema de seleção do índice de desempenho para garantir a estabilidade assintótica do sistema controlado, propuseram algoritmos para cálculo do índice de desempenho e vetor gradiente em forma fechada e utilizaram o método de Davidon - Fletcher-Powell {17} para resolver o problema de otimização de parâmetros.

Este capítulo é inteiramente devotado à solução do problema de otimização de parâmetros, utilizando métodos de descida. O assunto é abordado da mesma forma utilizada para o regulador L-Q no capítulo II.

3.2 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DE PARÂMETROS

Dados:

(a) O sistema linear invariante no tempo e o índice de desempenho quadrático integral de tempo infinito

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) + B u(t) + \underline{\xi}(t) \quad ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (3-3)$$

$$\underline{y}(t) = C \underline{x}(t) + \underline{\theta}(t) \quad (3-4)$$

$$J(\underline{u}(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ -\frac{1}{T} \int_0^T [\underline{x}^T(t) S_1^T S_1 \underline{x}(t) + \underline{u}^T(t) S_2 \underline{u}(t)] dt \right\} \quad (3-5)$$

$$E \{ \underline{\xi}(t) \underline{\xi}^T(\tau) \} = Q^T Q \delta(t - \tau) \quad (3-6)$$

$$E \{ \underline{\theta}(t) \underline{\theta}^T(\tau) \} = R \delta(t - \tau) \quad (3-7)$$

$$E \{ \underline{\theta}(t) \} = E \{ \underline{\xi}(t) \} = 0 \quad (3-8)$$

$$E \{ \underline{x}_0 \} = \bar{\underline{x}}_0 \quad (3-9)$$

$$E \{ \underline{\xi}(t) \underline{\theta}^T(\tau) \} = E \{ \underline{\xi}(t) \underline{x}_0^T \} = E \{ \underline{\theta}(t) \underline{x}_0^T \} = 0 \quad (3-10)$$

onde: $\underline{x}(t)$, $\underline{x}_0$, $\underline{\xi}(t)$ são vetores de dimensão n ; $\underline{u}(t)$, $\underline{y}(t)$, $\underline{\theta}(t)$ são de vetores de dimensões m, r, r respectivamente; A, B, C, S_1, S_2, Q, R são matrizes reais dimensionadas consistentemente; posto $\{C\} = r$; S_2, R são matrizes definidas positivas; $\underline{\xi}(t), \underline{\theta}(t)$ são processos estocásticos ruídos brancos.

(b) A restrição de estrutura de controle

$$\underline{u}(t) = G(\underline{\alpha}_g) \underline{\hat{x}}(t) \quad (3-11)$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\hat{x}}}(t) &= F(\underline{\alpha}_f) \underline{\hat{x}}(t) + H(\underline{\alpha}_h) (\underline{y}(t) - C \underline{\hat{x}}(t)) + B \underline{u}(t); \underline{\hat{x}}(0) = \\ &= \underline{\bar{x}}_0 \end{aligned} \quad (3-12)$$

onde: alguns elementos das matrizes $G(\underline{\alpha}_g)$, $F(\underline{\alpha}_f)$, $H(\underline{\alpha}_h)$ são fixados iguais a zero; $\underline{\alpha}_g$, $\underline{\alpha}_h$, $\underline{\alpha}_f$ são vetores de dimensões n_{pg} , n_{ph} , n_{pf} representando os elementos não prefixados de $G(\underline{\alpha}_g)$, $H(\underline{\alpha}_h)$, $F(\underline{\alpha}_f)$ respectivamente.

O problema de otimização de parâmetros corresponde a escolher $\underline{\alpha}_g$, $\underline{\alpha}_h$, $\underline{\alpha}_f$, que em conjunto minimizam o índice de desempenho - (3-5), sujeito às restrições (3-3), (3-4), (3-11), (3-12).

Combinando (3-3), (3-4), (3-5), (3-11), (3-12), temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}(t) \\ \dot{\underline{\hat{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BG(\underline{\alpha}_g) \\ H(\underline{\alpha}_h)C & F(\underline{\alpha}_f) + BG(\underline{\alpha}_g) - H(\underline{\alpha}_h)C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\xi}(t) \\ \underline{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

$$J(\underline{\alpha}) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{\hat{x}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_1^T & 0 \\ 0 & G^T(\underline{\alpha}_g) S_2 G(\underline{\alpha}_g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} dt \right\} \quad (3-14)$$

onde $\underline{\alpha}$ é o vetor de dimensão np indicado abaixo.

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_g \\ \underline{\alpha}_h \\ \underline{\alpha}_f \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

$$np = n_{pg} + n_{ph} + n_{pf} \quad (3-16)$$

Se o sistema (3-13) é assintoticamente estável, aplicando a (3-13), (3-14) o teorema 1.22, podemos redefinir o problema de otimização de parâmetros como:

$$\min_{\underline{\alpha}} J(\underline{\alpha}) \quad (3-17)$$

$$J(\underline{\alpha}) = \text{traço} \left[\bar{S}(\underline{\alpha}_g) \bar{W} \right] \quad (3-18)$$

$$\bar{A}(\underline{\alpha}) \bar{W} + \bar{W} \bar{A}^T(\underline{\alpha}) + \bar{\Sigma}(\underline{\alpha}_h) = 0 \quad (3-19)$$

$$\bar{S}(\underline{\alpha}_g) = \begin{bmatrix} S_1^T S_1 & 0 \\ 0 & G^T(\underline{\alpha}_g) S_2 G(\underline{\alpha}_g) \end{bmatrix} \quad (3-20)$$

$$\bar{A}(\underline{\alpha}) = \begin{bmatrix} A & BG(\underline{\alpha}_g) \\ H(\underline{\alpha}_h) C & F(\underline{\alpha}_f) + BG(\underline{\alpha}_g) - H(\underline{\alpha}_h) C \end{bmatrix} \quad (3-21)$$

$$\bar{\Sigma}(\underline{\alpha}_h) = \begin{bmatrix} Q^T Q & 0 \\ 0 & H(\underline{\alpha}_h) R H^T(\underline{\alpha}_h) \end{bmatrix} \quad (3-22)$$

Calcular $J(\underline{\alpha})$ através das equações (3-18), (3-19) é bem mais eficiente que o fazer através das equações (3-13), (3-14). Também é importante para a aplicabilidade prática do sistema de controle obtido, que a solução de problema de otimização de parâmetros estabilize assintoticamente o sistema (3-13). Loose e outros [37] mostraram que se o par $[\bar{A}(\underline{\alpha}), \sqrt{\bar{S}(\underline{\alpha})}]$ é completamente observável, o par $[\bar{A}(\underline{\alpha}), \sqrt{\bar{\Sigma}(\underline{\alpha})}^T]$ é completamente controlável, então, partindo de um $\underline{\alpha}_0$ que estabilize assintoticamente o sistema (3-13), o índice de desempenho (3-14) tende para o infinito à medida que $\bar{A}(\underline{\alpha})$ se aproxima do limite da sua região de estabilidade que contém $\underline{\alpha}_0$. Esta propriedade permite aos métodos de otimização do tipo de descida, partindo de $\underline{\alpha}_0$, obter $\bar{A}(\underline{\alpha})$ assintoticamente estável durante todo o processo de descida. Isto

permite a utilização da formulação (3-17), (3-18), (3-19) e garante que a solução final porventura obtida estabiliza assintoticamente o sistema (3-13). Loose e outros [37] mostraram que $J(\underline{\alpha})$ não é necessariamente convexo, que o domínio de estabilidade de $\bar{A}(\underline{\alpha})$ não é necessariamente conexo e consequentemente, praticamente nada se pode afirmar sobre a globalidade do ponto de mínimo porventura obtido.

3.3 - CÁLCULO DO ÍNDICE DE DESEMPENHO, VETOR GRADIENTE E MATRIZ HESSIANA

Nesta seção os problemas de cálculo em forma fechada do índice de desempenho quadrático, seu vetor gradiente e matriz hessiana são tratados de uma maneira unificada (Milani [44,46]).

3.3.1 - Índice de desempenho

Utilizando a matriz de transformação

$$M = M^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \quad (3-23)$$

e o lema 1.5, podemos reescrever as equações (3-18), (3-19) como:

$$J(\underline{\alpha}) = \text{traço} [S(\underline{\alpha}_g)W] \quad (3-24)$$

$$A(\underline{\alpha})W + WA^T(\underline{\alpha}) + \Sigma(\underline{\alpha}_h) = 0 \quad (3-25)$$

$$A(\underline{\alpha}) = M^{-1}\bar{A}(\underline{\alpha})M = \begin{bmatrix} A + BG(\underline{\alpha}_g) & -BG(\underline{\alpha}_g) \\ A-F(\underline{\alpha}_f) & F(\underline{\alpha}_f) - H(\underline{\alpha}_h)C \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

$$S(\underline{\alpha}_g) = M^T \bar{S}(\underline{\alpha}_g) M = \begin{bmatrix} S_1^T S_1 + G^T(\underline{\alpha}_g) S_2 G(\underline{\alpha}_g) & -G^T(\underline{\alpha}_g) S_2 G(\underline{\alpha}_g) \\ -G^T(\underline{\alpha}_g) S_2 G(\underline{\alpha}_g) & G^T(\underline{\alpha}_g) S_2 G(\underline{\alpha}_g) \end{bmatrix} \quad (3-27)$$

$$\Sigma(\underline{\alpha}_h) = M^{-1} \Sigma(\underline{\alpha}) M^{T-1} = \begin{bmatrix} Q^T Q & Q^T Q \\ Q^T Q & Q^T Q + H(\underline{\alpha}_h) R H^T(\underline{\alpha}_h) \end{bmatrix} \quad (3-28)$$

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_g \\ \underline{\alpha}_h \\ \underline{\alpha}_f \end{bmatrix} \quad (3-39)$$

aplicando a (3-24), (3-25) o lema 1.4, temos também

$$J(\underline{\alpha}) = \text{traço} [\Sigma(\underline{\alpha}_h)T] \quad (3-30)$$

$$A^T(\underline{\alpha})T + TA(\underline{\alpha}) + S(\underline{\alpha}_g) = 0 \quad (3-31)$$

Das equações (3-24), (3-25) e (3-30), (3-31) verificamos que a maior parte do esforço computacional necessário ao cálculo de $J(\underline{\alpha})$ para um dado $\underline{\alpha}$ é representado pela solução de uma das equações de Liapunov (3-25) ou (3-30) de ordem $2n$.

Assumindo a restrição de estrutura

$$F(\underline{\alpha}_f) = A \quad (3-32)$$

que elimina $\underline{\alpha}_f$ do vetor de parâmetros $\underline{\alpha}$, de (3-26) temos

$$A(\underline{\alpha}) = \begin{bmatrix} A+BG(\underline{\alpha}_g) & -BG(\underline{\alpha}_g) \\ 0 & A-H(\underline{\alpha}_h)C \end{bmatrix} \quad (3-33)$$

Considerando W e T parcionadas em matrizes de dimensão $(n \times n)$

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{21}^T \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \quad (3-34)$$

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21}^T \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \quad (3-35)$$

devido à estrutura bloco triangular de $A(\underline{\alpha})$, a solução das equações (3-25) em W e (3-30) em T podem ser decompostas na so

lução das seguintes equações de ordem n

$$(A-H(\underline{\alpha}_h)C)W_{22}+W_{22}(A-H(\underline{\alpha}_h)C)^T + Q^TQ + H(\underline{\alpha}_h)RH^T(\underline{\alpha}_h) = 0 \quad (3-36)$$

$$(A-H(\underline{\alpha}_h)C)W_{21} + W_{21}(A + BG(\underline{\alpha}_g))^T + Q^TQ - W_{22}(BG(\underline{\alpha}_g))^T = 0 \quad (3-37)$$

$$(A+BG(\underline{\alpha}_g))W_{11} + W_{11}(A+BG(\underline{\alpha}_g))^T - (BG(\underline{\alpha}_g))W_{21} - W_{21}^T(BG(\underline{\alpha}_g))^T + Q^TQ = 0 \quad (3-38)$$

$$(A+BG(\underline{\alpha}_g))^T T_{11} + T_{11}(A+BG(\underline{\alpha}_g)) + S_1^T S_1 + G^T(\underline{\alpha}_g) S_2 G(\underline{\alpha}_g) = 0 \quad (3-39)$$

$$(A-H(\underline{\alpha}_h)C)^T T_{21} + T_{21}(A+BG(\underline{\alpha}_g)) - (BG(\underline{\alpha}_g))^T T_{11} - G^T(\underline{\alpha}_g) S_2 G(\underline{\alpha}_g) = 0 \quad (3-40)$$

$$(A-H(\underline{\alpha}_h)C)^T T_{22} + T_{22}(A-H(\underline{\alpha}_h)C) - T_{21}(BG(\underline{\alpha}_g)) - (BG(\underline{\alpha}_g))^T T_{21}^T + \\ + G^T(\underline{\alpha}_g) S_2 G(\underline{\alpha}_g) = 0 \quad (3-41)$$

Neste caso verificamos que, quando $F(\underline{\alpha}_f) = A$, a maior parte do esforço computacional para a obtenção de $J(\underline{\alpha})$ é representado pela solução de um dos conjuntos de equações de Liapunov de ordem n(3-36), (3-37), (3-38) ou (3-39), (3-40), (3-41).

3.3.2 - Vetor gradiente

Diferenciando (3-24), (3-25) com respeito a α_i , temos os elementos $\frac{\partial J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i}$ do vetor gradiente $\nabla J(\underline{\alpha})$ de dimensão np dados por:

$$\frac{\partial J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} = \text{traço} \left[\frac{\partial S(\underline{\alpha}_g)}{\partial \alpha_i} W + S(\underline{\alpha}_g) \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \right] \quad (3-42)$$

$$A(\underline{\alpha}) \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} A^T(\underline{\alpha}) + \frac{\partial A(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} W + W \frac{\partial A^T(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} + \\ + \frac{\partial \Sigma(\underline{\alpha}_h)}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (3-43)$$

Aplicando o lema 1.4 às equações (3-42), (3-43) temos:

$$\frac{\partial J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} = \text{traço} \left[\frac{\partial S(\underline{\alpha}_g)}{\partial \alpha_i} W + TX \right] \quad (3-44)$$

$$X = \frac{\partial A(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} W + W \frac{\partial A^T(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \Sigma(\underline{\alpha}_h)}{\partial \alpha_i} \quad (3-45)$$

onde W e T são dadas por (3-25) e (3-31) respectivamente.

Sejam W e T parcionadas como em (3-34), (3-35) e $\nabla J(\underline{\alpha})$ como

$$\nabla J(\underline{\alpha}) = \begin{bmatrix} \nabla_g(\underline{\alpha}) \\ \nabla_h(\underline{\alpha}) \\ \nabla_f(\underline{\alpha}) \end{bmatrix} \quad (3-46)$$

Substituindo (3-34) em (3-45) e trocando α_i por α_{g_i} em (3-44) e (3-45), os elementos $\frac{\partial J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_{g_i}}$ do vetor subgradiente $\nabla_g(\underline{\alpha})$ de dimensão npg são dados por g_i

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_{g_i}} = \text{traço} \left\{ \frac{\partial S(\underline{\alpha}_g)}{\partial \alpha_{g_i}} W + TX \right\} \quad (3-47)$$

$$X = \begin{bmatrix} B \frac{\partial G(\underline{\alpha}_g)}{\partial \alpha_{g_i}} & - B \frac{\partial G(\underline{\alpha}_g)}{\partial \alpha_{g_i}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{11} & W_{21}^T \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_{11} & W_{21}^T \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \dots$$

$$\dots \begin{bmatrix} \frac{\partial G^T(\underline{\alpha}_g)}{\partial \alpha_{g_i}} & B^T & 0 \\ \frac{\partial G^T(\underline{\alpha}_g)}{\partial \alpha_{g_i}} & B^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3-48)$$

Substituindo (3-48), (3-34) em (3-47) e utilizando os teoremas 1.19 e 1.20, temos

$$\frac{\partial J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_{g_i}} = \text{traço} \left\{ \left[(W_{11} - W_{21} - W_{21}^T + W_{22}) (G^T(\underline{\alpha}_g) S_2 + T_{11} B) + (W_{21}^T + W_{22}) (T_{11} + T_{21}) B \right] \frac{\partial G(\underline{\alpha}_g)}{\partial \alpha_{g_i}} \right\} \quad (3-49)$$

Efetuada a diferenciação parcial com respeito a α_{g_i} , é fácil verificar que o único elemento não nulo da matriz $\frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_{g_i}}$ de dimensão (mxn) é aquele na posição ocupada por α_{g_i} , que é igual a um. Por inspeção em (3-49) é fácil verificar que

$$\frac{\partial J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_{g_i}} = K_1_{\ell_i, c_i} \quad (3-50)$$

$$K_1 = 2 \left[(S_2 G(\underline{\alpha}_g) + B^T T_{11}) (W_{11} - W_{21}^T - W_{21} + W_{22}) + B^T (T_{11} + T_{21}^T) (W_{21} - W_{22}) \right] \quad (3-51)$$

onde (ℓ_i, c_i) é a posição do parâmetro α_{g_i} na matriz $G(\underline{\alpha}_g)$ e $K_1_{\ell_i, c_i}$ é o elemento (ℓ_i, c_i) da matriz K_1 .

Utilizando a mesma sequência de passos é fácil verificar que:

Os elementos $\partial J(\underline{\alpha}) / \partial \alpha_{h_i}$ do vetor subgradiente $\nabla_h(\underline{\alpha})$ de dimensão nph são dados por

$$\frac{\partial J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_{h_i}} = K_2_{\ell_i, c_i} \quad (3-52)$$

$$K_2 = 2 [T_{22}(H(\underline{\alpha}_h) R - W_{22}C^T) - T_{21} W_{12}C^T] \quad (3-53)$$

onde: (ℓ_i, c_i) é a posição do parâmetro α_{h_i} na matriz $H(\underline{\alpha}_h)$ e $K_{2_{\ell_i, c_i}}$ é o elemento (ℓ_i, c_i) da matriz K_2 .

Os elementos $\partial J(\underline{\alpha}) / \partial \alpha_{f_i}$ do vetor subgradiente $\nabla_f(\underline{\alpha})$ de dimensão npf são dados por

$$\frac{\partial J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_{f_i}} = K_{3_{\ell_i, c_i}} \quad (3-54)$$

$$K_3 = T_{21}(W_{21}^T - W_{11}) + T_{22}(W_{22} - W_{21}) \quad (3-55)$$

onde: (ℓ_i, c_i) é a posição do parâmetro α_{f_i} na matriz $F(\underline{\alpha}_f)$ e $K_{3_{\ell_i, c_i}}$ é o elemento (ℓ_i, c_i) da matriz K_3 .

Nas equações (3-50), (3-52), (3-54) verificamos que uma vez que W tenha sido obtida para cálculo de $J(\underline{\alpha})$, a maior parte do esforço computacional necessário ao cálculo de $\nabla J(\underline{\alpha})$, para um dado $\underline{\alpha}$, é representado pela solução de uma única equação de Liapunov extra (3-31) de ordem $2n$, para obtenção de T . Assim sendo, a maior parte do esforço computacional necessário ao cálculo do par $J(\underline{\alpha})$, $\nabla J(\underline{\alpha})$ para um dado $\underline{\alpha}$ é representado pela solução de apenas duas equações de Liapunov de ordem $2n$, independentemente do número de parâmetros np.

Loose e outros {37,38} utilizaram as equações (3-24), (3-25) e (3-42). (3-43) para cálculo de $J(\underline{\alpha})$ e os elementos de $\nabla J(\underline{\alpha})$ respectivamente. Nessas equações é fácil verificar que a maior parte do esforço computacional para cálculo do par $\{J(\underline{\alpha}), \nabla J(\underline{\alpha})\}$ é representado pela obtenção de W e $\partial W / \partial \alpha_i$ que requer a solução de uma mesma equação de Liapunov (3-43) de ordem $2n$ para $(np + 1)$ termos de entrada diferentes. Para sistemas de grande dimensão, o uso de métodos iterativos {51, 58} é obrigatório e neste caso praticamente $(np + 1)$ equações de Liapunov de ordem $2n$ devem ser resolvidas. O procedimento de cálculo para obtenção do par $\{J(\underline{\alpha}), \nabla J(\underline{\alpha})\}$ proposto nesta seção é notoriamente superior ao pro

posto em (Loose e outros {37 , 38}) e amplia significativamente as possibilidades de utilização de todos os métodos de otimização, baseados no cálculo de $[J(\underline{\alpha}), \nabla J(\underline{\alpha})]$, na solução do problema de otimização de parâmetros. Esta melhoria é tão mais significativa e mesmo decisiva quanto maiores forem a dimensão do sistema n e o número de parâmetros np .

Finalmente, lembramos que, quando

$$F(\underline{\alpha}_f) = A \quad (3-56)$$

as soluções das equações de Liapunov (3-25) e (3-31) de ordem $2n$ podem ser decompostas nas soluções das equações (3-36), (3-37), (3-38) e (3-39), (3-40), (3-41) de ordem n .

3.3.3 - Matriz hessiana

Utilizando $J(\underline{\alpha})$ dado por (3-24), (3-25), os elementos $h_{i,j}$ da matriz hessiana $H(\underline{\alpha})$ de dimensão $(np \times np)$ são dados por

$$h_{i,j} = \frac{\partial^2 J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \text{traço} \frac{\partial^2 S(\underline{\alpha}_g)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} W + \frac{\partial S(\underline{\alpha}_g)}{\partial \alpha_i} \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial S(\underline{\alpha}_g)}{\partial \alpha_j} \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} + S(\underline{\alpha}_g) \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \quad (3-57)$$

$$A(\underline{\alpha}) \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} A^T(\underline{\alpha}) + \frac{\partial A(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \frac{\partial A^T(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial A(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} \frac{\partial A^T(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial^2 \Sigma(\underline{\alpha}_h)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = 0 \quad (3-58)$$

onde W , $A(\underline{\alpha})$, $S(\underline{\alpha}_g)$, $\Sigma(\underline{\alpha}_h)$, $\frac{\partial W}{\partial \alpha_i}$ são dados por (3-25), (3-26), (3-27), (3-28), (3-43), respectivamente.

Aplicando o lema 1.4 às equações (3-57), (3-58), temos

$$\begin{aligned} \text{traço} \left[S(\underline{\alpha}_g) \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right] &= \text{traço} \left\{ T \left[\frac{\partial A(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \frac{\partial A^T(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial A(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} \frac{\partial A^T(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial^2 \Sigma(\underline{\alpha}_h)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right] \right\} \quad (3-59) \end{aligned}$$

onde T é dado por (3-31).

Aplicando o teorema 1.20 a (3-59) temos

$$\begin{aligned} \text{traço} \left[S(\underline{\alpha}_g) \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right] &= \text{traço} \left\{ T \left[2 \frac{\partial A(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial A(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} \right] + \frac{\partial^2 \Sigma(\underline{\alpha}_h)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right\} \quad (3-60) \end{aligned}$$

Substituindo (3-60) em (3-57) e definindo os elementos das matrizes $H'(\underline{\alpha})$ e $H''(\underline{\alpha})$ de dimensão $(np \times np)$ como

$$h'_{i,j} = \text{traço} \left\{ \left[\frac{\partial S(\underline{\alpha}_g)}{\partial \alpha_i} + 2T \frac{\partial A(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} \right] \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} \right\} \quad (3-61)$$

$$h''_{i,j} = \text{traço} \left[\frac{\partial^2 S(\underline{\alpha}_g)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} W + T \frac{\partial^2 \Sigma(\underline{\alpha}_h)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right] \quad (3-62)$$

é fácil verificar que

$$h_{i,j} = h'_{i,j} + h'_{j,i} + h''_{i,j} \quad (3-63)$$

que corresponde a termos

$$H(\underline{\alpha}) = H'(\underline{\alpha}) + H'^T(\underline{\alpha}) + H''(\underline{\alpha}) \quad (3-64)$$

assumindo $\underline{\alpha}$, W , T parcionados como em (3-29), (3-34), (3-35), em (3-62) verificamos que:

$$H''(\underline{\alpha}) = \text{diag} [H''_g(\underline{\alpha}), H''_h(\underline{\alpha}), 0] \quad (3-65)$$

onde os elementos $h''_{g_{i,j}}$ da matriz $H''_g(\underline{\alpha})$ de dimensão $(npg \times npg)$ são dados por

$$h''_{g_{i,j}} = \text{traço} \left[W \frac{\partial^2 S(\underline{\alpha}_g)}{\partial \alpha_{g_i} \partial \alpha_{g_j}} \right] \quad (3-66)$$

e os elementos $h''_{h_{i,j}}$ da matriz $H''_h(\underline{\alpha})$ de dimensão $(nph \times nph)$ são dados por

$$h''_{h_{i,j}} = \text{traço} \left[T \frac{\partial^2 \Sigma(\underline{\alpha}_h)}{\partial \alpha_{h_i} \partial \alpha_{h_j}} \right] \quad (3-67)$$

Calculando as diferenciações parciais duplas em (3-66) e utilizando o teorema 1.20, temos

$$h''_{g_{i,j}} = \text{traço} \left[2 (W_{11}^T - W_{21} - W_{21}^T + W_{22}) \frac{\partial G^T(\underline{\alpha}_g)}{\partial \alpha_{g_i}} S_2 \frac{\partial G(\underline{\alpha}_g)}{\partial \alpha_{g_j}} \right] \quad (3-68)$$

Por inspeção podemos verificar em (3-68) que

$$h''_{g_{i,j}} = 2p_{c_i, c_j} s_{2_{l_i, l_j}} \quad (3-69)$$

$$P = (W_{11} - W_{21}^T - W_{21} + W_{22}) \quad (3-70)$$

onde: (l_i, c_i) , (l_j, c_j) são as posições de $G(\underline{\alpha}_g)$ ocupadas pelos parâmetros α_{g_i} , α_{g_j} respectivamente; $s_{2_{l_i, l_j}}$ é o elemento (l_i, l_j) da matriz S_2 de dimensão $(m \times m)$; p_{c_i, c_j} é o elemento (c_i, c_j) da matriz P de dimensão $(n \times n)$.

Analogamente a $h''_{g_{i,j}}$, os elementos $h''_{h_{i,j}}$ são dados por

$$h''_{h_{i,j}} = \text{traço} \left[2 T_{22} \frac{\partial H(\underline{\alpha}_h)}{\partial \alpha_{h_i}} R \frac{\partial H^T(\underline{\alpha}_h)}{\partial \alpha_{h_j}} \right] \quad (3-71)$$

e conseqüentemente temos

$$h''_{h_{i,j}} = \sum_{l_i, l_j} t_{22_{l_i, l_j}}^r c_{i, c_j} \quad (3-72)$$

onde: (l_i, c_i) , (l_j, c_j) são as posições de $H(\underline{\alpha}_h)$ ocupadas pelos parâmetros α_{h_i} , α_{h_j} ; r_{c_i, c_j} é o elemento (c_i, c_j) da matriz R de dimensão $(r \times r)$; $t_{22_{l_i, l_j}}$ é o elemento (l_i, l_j) da matriz T_{22} de dimensão $(n \times n)$.

Nas equações (3-65), (3-69), (3-72) verificamos que uma vez que W e T tenham sido obtidas para cálculo do par $[J(\underline{\alpha}), \nabla J(\underline{\alpha})]$, o cálculo de $H''(\underline{\alpha})$ requer um esforço computacional extra muito pequeno. Podemos verificar em (3-61) que o cálculo de $H'(\underline{\alpha})$ e conseqüentemente o de $H(\underline{\alpha})$ requer a solução de uma equação de Liapunov (3-43) de ordem $2n$ para np temos de entrada diferentes. (Loose e outros { 37}) trata do problema de solução eficiente de uma mesma equação de Liapunov para diversos termos de entrada diferentes, utilizando métodos diretos (Pace e Barnett { 51}). O uso de métodos diretos torna-se rapidamente impraticável com o aumento da dimensão do sistema n . Um estudo similar ao de (Loose e outros { 37}), utilizando métodos iterativos é obrigatório para a viabilidade do cálculo de $H(\underline{\alpha})$ para grandes valores de n e np . Nas condições atuais, o esforço computacional necessário à obtenção de $H(\underline{\alpha})$ não é significativamente inferior ao requerido pela solução de np equações de Liapunov de ordem $2n$ diferentes. Quando temos

$$F(\underline{\alpha}_f) = A \quad (3-73)$$

a solução da equação (3-43) de ordem $2n$ pode ser decomposta na solução de três equações de ordem n .

3.3.4 - Propriedades da matriz $H''(\underline{\alpha})$

Além do pequeno esforço computacional necessário à sua obtenção, $H''(\underline{\alpha})$ tem outras interessantes propriedades:

Teorema 3.1 - $H''_g(\underline{\alpha})$ e $H''_h(\underline{\alpha})$ são matrizes definidas positivas se o par $[A(\underline{\alpha}), \sqrt{S}(\underline{\alpha}_g)]$ for completamente observável e

o par $[A(\underline{\alpha}), \sqrt{\Sigma(\underline{\alpha}_h)^T}]$ for completamente controlável.

Prova:

Podemos verificar na equação (3-69) que $H_g''(\underline{\alpha})$ é a matriz hessiana da função quadrática.

$$J_1(\underline{\alpha}_g) = \text{traço} [P G^T(\underline{\alpha}_g) S_2 G(\underline{\alpha}_g)] \quad (3-74)$$

$$P = W_{11} - W_{21}^T - W_{21} + W_{22} \quad (3-75)$$

Como o par $[A(\underline{\alpha}), \sqrt{\Sigma(\underline{\alpha}_h)^T}]$ é completamente controlável, o teorema 1.12(a) garante que o par $[A^T(\underline{\alpha}), \sqrt{\Sigma(\underline{\alpha}_h)}]$ é completamente observável e consequentemente o lema 1.3(b) garante que W é uma matriz definida positiva. Por inspeção, é fácil verificar que

$$P = [I_n \quad -I_n] \begin{bmatrix} W_{11} & W_{w1}^T \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ -I_n \end{bmatrix} \quad (3-76)$$

onde I_n é a matriz unidade de dimensão $(n \times n)$. Como W é definida positiva e $[I_n \quad -I_n]$ tem posto n , temos que a matriz P é definida positiva. Aplicando o teorema 1.16 a (3-74) temos

$$J_1(\underline{\alpha}_g) = G_V^T(\underline{\alpha}_g) (S_2 \otimes P) G_V(\underline{\alpha}_g) \quad (3-77)$$

onde $G_V(\underline{\alpha}_g)$ é um vetor de dimensão nm contendo os elementos de $G(\underline{\alpha}_g)$ armazenados por linha. Sendo S_2 e P matrizes definidas positivas, o teorema 1.17(a) garante que $(S_2 \otimes P)$ é também uma matriz definida positiva e consequentemente $J_1(\underline{\alpha}_g)$ é uma função quadrática definida positiva. Assim sendo, $H_g''(\underline{\alpha})$ é uma matriz definida positiva porque é a matriz hessiana de $J_1(\underline{\alpha}_g)$ que é uma função quadrática definida positiva.

Analogamente, provamos facilmente que se o par $[A(\underline{\alpha}), \sqrt{\Sigma(\underline{\alpha}_g)}]$ é completamente observável, a matriz $H_h''(\underline{\alpha})$ é definida positiva porque ela é a matriz hessiana da função quadrática definida positiva.

$$J_2(\underline{\alpha}_h) = H_V^T(\underline{\alpha}_h) (T_{22} \otimes R) H_V(\underline{\alpha}_h) \quad (3-78)$$

onde $H_V(\underline{\alpha}_h)$ é um vetor de dimensão rn contendo os elementos de $H(\underline{\alpha}_h)$ armazenados por linha.

Teorema 3.2

(a) Se $\underline{\alpha}_g$ contém os parâmetros de $G(\underline{\alpha}_g)$ armazenados por linha e S_2 é uma matriz diagonal, então: $H_g''(\underline{\alpha})$ tem uma estrutura bloco diagonal onde cada submatriz é biunivocamente associada a uma linha de $G(\underline{\alpha}_g)$ com parâmetros a serem otimizados; a dimensão de cada submatriz é igual ao número de parâmetros na linha de $G(\underline{\alpha}_g)$ a ela associada.

(b) A mesma propriedade vale para $H_h''(\underline{\alpha})$ se os parâmetros de $H(\underline{\alpha}_h)$ forem armazenados por coluna em $\underline{\alpha}_h$ e R for uma matriz diagonal. A dimensão de cada submatriz é igual ao número de parâmetros na coluna de $H(\underline{\alpha}_h)$ a ela associada.

Prova:

As propriedades (a) e (b) acima podem ser facilmente verificadas por inspeção nas equações (3-69) e (3-72). Na equação (3-69) verificamos que se S_2 é uma matriz diagonal, temos

$$h_{g_{i,j}}'' = 0 \text{ se } l_i \neq l_j \quad (3-79)$$

Em outras palavras, $h_{g_{i,j}}''$ é zero sempre que α_{g_i} e α_{g_j} pertencerem a linhas diferentes de $G(\underline{\alpha}_g)$. Analogamente, se R é uma matriz diagonal, na equação (3-72) temos

$$h_{h_{i,j}}'' = 0 \text{ se } c_i \neq c_j \quad (3-80)$$

o que corresponde a ter $h_{h_{i,j}}''$ igual a zero sempre que α_{h_i} e α_{h_j} pertencerem a colunas diferentes de $H(\underline{\alpha}_h)$.

Teorema 3.3

Se:

$$F(\underline{\alpha}_f) = A \quad (3-81)$$

$$H(\underline{\alpha}) = \begin{bmatrix} H_{gg} & H_{gh} \\ H_{hg} & H_{hh} \end{bmatrix} \quad (3-82)$$

$$G(\underline{\alpha}_g) = - S_2^{-1} B^T T_{11} \quad (3-83)$$

$$H(\underline{\alpha}_h) = W_{22} C^T R^{-1} \quad (3-84)$$

onde: H_{gg} , H_{gh} , H_{hg} , H_{hh} são submatrizes da matriz hessiana $H(\underline{\alpha})$ associadas a $\underline{\alpha}_g$ e $\underline{\alpha}_h$ conforme indicado em seus subscritos; T_{11} , W_{22} são obtidos substituindo (3-83), (3-84) em (3-39), (3-36) respectivamente e correspondem à solução do problema do regulador ótimo L-Q-G de tempo infinito.

Então:

$$\text{diag} [H_{gg}, H_{hh}] = H''(\underline{\alpha}) = \text{diag} [H''_g(\underline{\alpha}), H''_h(\underline{\alpha})] \quad (3-85)$$

Prova:

Nas equações (3-61) a (3-65) verificamos que

$$\begin{aligned} \text{diag} [H_{gg}, H_{hh}] &= \text{diag} [H'_g(\underline{\alpha}), H'_h(\underline{\alpha})] + \text{diag} [H'_{gg}, H'_{hh}] \\ &\quad + \text{diag} [H'_{gg}, H'_{hh}]^T \end{aligned} \quad (3-86)$$

onde os elementos $h'_{gi,j}$, $h'_{hi,j}$ das matrizes H'_{gg} , H'_{hh} são dados

por:

$$h'_{gi,j} = \text{traço} \left\{ \left[\frac{\partial S(\underline{\alpha}_g)}{\partial \alpha_{gi}} + 2T \frac{\partial A(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_{gi}} \right] \frac{\partial W}{\partial \alpha_{gj}} \right\} \quad (3-87)$$

$$h'_{hi,j} = \text{traço} \left[2T \frac{\partial A(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_{hi}} \frac{\partial W}{\partial \alpha_{hj}} \right] \quad (3-88)$$

Devido a (3-81) podemos obter W e T através das equações (3-36) a (3-41). Diferenciando as equações (3-36) a (3-38) com

respeito a α_{g_j} , temos:

$$(A-H(\alpha_h)C) \frac{\partial W_{22}}{\partial \alpha_{g_j}} + \frac{\partial W_{22}}{\partial \alpha_{g_j}} (A-H(\alpha_h)C)^T = 0 \quad (3-89)$$

$$(A + BG(\alpha_g)) \frac{\partial W_{11}}{\partial \alpha_{g_j}} + \frac{\partial W_{11}}{\partial \alpha_{g_j}} (A + BG(\alpha_g))^T +$$

$$W_{21} (B \frac{\partial G(\alpha_g)}{\partial \alpha_{g_j}})^T - W_{22} (B \frac{\partial G(\alpha_g)}{\partial \alpha_{g_j}})^T = 0 \quad (3-90)$$

$$(A+BG(\alpha_g)) \frac{W_{21}}{\partial \alpha_{g_j}} + \frac{\partial W_{21}}{\partial \alpha_{g_j}} (A+BG(\alpha_g))^T + (B \frac{\partial G(\alpha_g)}{\partial \alpha_{g_j}}) W_{11} +$$

$$W_{11} (B \frac{\partial G(\alpha_g)}{\partial \alpha_{g_j}})^T - (B \frac{\partial G(\alpha_g)}{\partial \alpha_{g_j}}) W_{21} - W_{21}^T (B \frac{\partial G(\alpha_g)}{\partial \alpha_{g_j}})^T -$$

$$- (BG(\alpha_g)) \frac{\partial W_{21}}{\partial \alpha_{g_j}} - \frac{\partial W_{21}^T}{\partial \alpha_{g_j}} (BG(\alpha_g))^T = 0 \quad (3-91)$$

Substituindo (3-84) em (3-36), somando e subtraindo $W_{22}(BG(\alpha_g))^T$ ao resultado, temos

$$(A-W_{22}C^TR^{-1}C) W_{22} + W_{22}(A+BG(\alpha_g))^T - W_{22}(BG(\alpha_g))^T + Q = 0 \quad (3-92)$$

Substituindo (3-84) em (3-37), temos

$$(A-W_{22}C^TR^{-1}C) W_{21} + W_{21}(A+BG(\alpha_g))^T - W_{22}(BG(\alpha_g))^T + Q=0 \quad (3-93)$$

Comparando (3-92) e (3-93), temos:

$$W_{22} = W_{21} = W_{21}^T \quad (3-94)$$

Substituindo (3-83) em (3-40) temos

$$(A - H(\underline{\alpha}_h)C)^T T_{21} + T_{21} (A + BG(\underline{\alpha}_g)) = 0 \quad (3-95)$$

e conseqüentemente

$$T_{21} = T_{21}^T = 0 \quad (3-96)$$

Substituindo (3-94) em (3-90), temos

$$\frac{\partial W_{21}}{\partial \alpha_{g_j}} = \frac{\partial W_{21}^T}{\partial \alpha_{g_j}} = 0 \quad (3-97)$$

De (3-89), temos

$$\frac{\partial W_{22}}{\partial \alpha_{g_j}} = 0 \quad (3-98)$$

Calculando as derivadas com respeito a α_{g_i} em (3-87), substituindo (3-96), (3-97), (3-98) e rearranjando os termos, temos

$$h'_{g_{i,j}} = 2 \text{ traço } \left\{ [G^T(\underline{\alpha}_g)S_2 + T_{11}B] \frac{\partial G(\underline{\alpha}_g)}{\partial \alpha_{g_i}} \frac{\partial W_{11}}{\partial \alpha_{g_j}} \right\} \quad (3-99)$$

Substituindo (3-83) em (3-99), temos

$$h'_{g_{i,j}} = 0 \quad (3-100)$$

Analogamente, é fácil verificar que

$$h'_{h_{i,j}} = 0 \quad (3-101)$$

e conseqüentemente, temos

$$H'_g = 0 \quad (3-102)$$

$$H'_h = 0 \quad (3-103)$$

Substituindo (3-102), (3-103) em (3-86), temos finalmente,

$$\text{diag} [H_{gg}, H_{hh}] = H''(\underline{\alpha}) = \text{diag} [H''_g(\underline{\alpha}), H''_h(\underline{\alpha})] \quad (3-104)$$

Em última análise, o teorema 3.3 mostra que, nas proximidades do ponto de ótimo, $H''(\underline{\alpha})$ é uma eficiente aproximação da correspondente parte bloco diagonal de $H(\underline{\alpha})$, quando as restrições de estrutura impostas são fracas no sentido de que a solução do problema do regulador ótimo L-Q-G é a solução do problema do regulador L-Q-G com restrições de estrutura são próximas uma da outra. É importante notar que neste caso $H''(\underline{\alpha})$ aproxima apenas a parte bloco diagonal de $H(\underline{\alpha})$ e não $H(\underline{\alpha})$ completa como no caso do regulador L-Q com restrições de estrutura tratado no capítulo II.

3.4 - UM MÉTODO QUASI-NEWTON ESPECIALIZADO

Nesta seção é proposto um algoritmo de otimização especializado do tipo Quasi-Newton para solução do problema de otimização de parâmetros definido na seção 3.2. O desempenho computacional do método proposto é analisado e comparado com o de outros conhecidos métodos de uso geral. O uso e o desempenho computacional do método Quasi-Newton especializado é ilustrado através da solução de um problema de otimização de parâmetros decorrentes da síntese de um regulador L-Q-G com estrutura de controle local, para um segmento de via expressa descrito por um modelo linearizado (Milani e Yamakami, {45}).

3.4.1 - Apresentação do Algoritmo

Sejam

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_g \\ \underline{\alpha}_h \\ \underline{\alpha}_f \end{bmatrix} \quad (3-105)$$

$$\nabla J(\underline{\alpha}) = \begin{bmatrix} \nabla_g(\underline{\alpha}) \\ \nabla_h(\underline{\alpha}) \\ \nabla_f(\underline{\alpha}) \end{bmatrix} \quad (3-106)$$

$$H''(\underline{\alpha}) = \text{diag} [H''_g(\underline{\alpha}), H_h(\underline{\alpha}), 0] \quad (3-107)$$

$$H''_a(\underline{\alpha}) = \text{diag} [H''_g(\underline{\alpha}), H_h(\underline{\alpha}), I_{npf}] \quad (3-108)$$

Apoiados nas propriedades da matriz $H''(\underline{\alpha})$ e nos procedimentos para cálculo de $J(\underline{\alpha})$, $\nabla J(\underline{\alpha})$, $H(\underline{\alpha})$ apresentados nas seções 3.3.1 a 3.3.4, o seguinte algoritmo pode ser utilizado para solução do problema de otimização de parâmetros definido na seção 3.2.

$$\underline{\alpha}_{K+1} = \underline{\alpha}_K - \beta \underline{y} \quad (3-109)$$

$$H''_a(\underline{\alpha}_K) \underline{y} = \nabla J(\underline{\alpha}_K) \quad (3-110)$$

A recorrência acima deve ser inicializada com um $\underline{\alpha}_0$ tal que $A(\underline{\alpha}_0)$ seja assintoticamente estável e β deve ser escolhido de modo a garantir que

$$J(\underline{\alpha}_{K+1}) \leq J(\underline{\alpha}_K) \quad (3-111)$$

O teorema 3.1 apresenta condições suficientes para que $H''_g(\underline{\alpha})$ e $H''_h(\underline{\alpha})$ sejam matrizes definidas positivas e em (3-108) é imediato verificar que $H''_a(\underline{\alpha})$ é definida positiva se e somente se $H''_g(\underline{\alpha})$ e $H''_h(\underline{\alpha})$ forem matrizes definidas positivas. Se $H''_a(\underline{\alpha})$ é definida positiva é sempre possível obter um β garantindo (3-111). Se $H''_a(\underline{\alpha})$ é definida positiva temos que se a recorrência (3-109), (3-110) convergir ($\underline{\alpha}_{K+1} = \underline{\alpha}_K$), temos necessariamente $\nabla J(\underline{\alpha}_K) = 0$.

Como não temos garantias sobre a convexidade de $J(\underline{\alpha})$, isto não é suficiente para garantir que foi obtido um ponto de mínimo e nem se o ponto de mínimo porventura obtido é global. Em todo caso

é de "bom senso" esperar que foi ao menos obtido um ponto de mímo local, poque apenas os pontos de mínimo são pontos de equilí - brio estáveis da recorrência (3-109), (3-110) (Bingulac { 7 }).

O teorema 3.2 apresenta sugestões que facilitam e minizam consideravelmente o esforço computacional para solução do sis - tema de equações lineares (3-110).

É bem conhecido que a razão de convergência do algoritmo (3-109), (3-110) aumenta e se aproxima da do método de Newton na medida que a matriz $M(\underline{\alpha}_K)$ (3-112) se aproxima da matriz unidade.

$$M(\underline{\alpha}_K) = H_a^{-1}(\underline{\alpha}_K) H(\underline{\alpha}_K) \quad (3-112)$$

Quando o problema de otimização de parâmetros não inclui $\underline{\alpha}_f$, temos

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_g \\ \underline{\alpha}_h \end{bmatrix} \quad (3-113)$$

Neste caso, em lugar da recorrência (3-109), (3-110), te - mos

$$\underline{\alpha}_{K+1} = \underline{\alpha}_K - \beta \underline{\gamma} \quad (3-114)$$

$$H''(\underline{\alpha}_K) \underline{\gamma} = \nabla J(\underline{\alpha}_K) \quad (3-115)$$

cuja razão de convergência aumenta e se aproxima da do método de Newton na medida que a matriz $M'(\underline{\alpha}_K)$ (3-116) se aproxima da ma - triz unidade.

$$M'(\underline{\alpha}_K) = \beta H''^{-1}(\underline{\alpha}_K) H(\underline{\alpha}_K) \quad (3-116)$$

O teorema 3.3 indica que nas proximidades do ponto de mínimo, $H''(\underline{\alpha}_K)$ se aproxima da parte bloco diagonal de $H(\underline{\alpha}_K)$ na medi - da que as restrições de estrutura impostas são fracas, no senti - do de que a solução do problema com restrições e a do regulador ótimo L-Q-G de tempo infinito são próximas uma da outra. Assim sen - do, a razão de convergência do algoritmo (3-114), (3-115) deve me

lhorar e se aproximar da do método de Newton na medida que as restrições de estrutura são fracas e a parte bloco diagonal de $H(\underline{\alpha})$ é dominante.

O procedimento de cálculo abaixo pode ser utilizado para computar a recorrência (3-109), (3-110):

Passo 1 - Inicialização

Fazer $K = 0$; $\beta = \beta_0$

Determinar $\underline{\alpha}_K$ que estabiliza assintoticamente a matriz $A(\underline{\alpha})$

Calcular $J(\underline{\alpha}_K)$, $\nabla J(\underline{\alpha}_K)$

Passo 2 - Calcular $H''_g(\underline{\alpha}_K)$, $H''_h(\underline{\alpha}_K)$

Resolver os sistemas de equações lineares

$$H''_g(\underline{\alpha}_K) \underline{y}_1 = \nabla_g(\underline{\alpha}_K) \quad (3-117)$$

$$H''_h(\underline{\alpha}_K) \underline{y}_2 = \nabla_h(\underline{\alpha}_K) \quad (3-118)$$

Passo 3 - Calcular

$$\underline{\alpha}_{K+1} = \underline{\alpha}_K - \beta \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ -\nabla_f(\underline{\alpha}_K) \end{bmatrix} \quad (3-119)$$

Passo 4 - Calcular $J(\underline{\alpha}_{K+1})$

Passo 5 - Testar se $J(\underline{\alpha}_{K+1}) < J(\underline{\alpha}_K)$:

Sim : $\beta = \beta_0$ e seguir para o passo 6

Não : $\beta = \beta/2$ e voltar para o passo 3

Passo 6 - Calcular $\nabla J(\underline{\alpha}_{K+1})$

Passo 7 - Testar se $\|\nabla J(\underline{\alpha}_{K+1})\| \leq \text{Tolerância}$:

Sim : parar

Não : fazer $K = K+1$ e voltar para o passo 2.

O mesmo procedimento de cálculo pode ser utilizado para computar a recorrência (3-114), (3-115), bastando substituir a equação (3-119) no passo 3 por

$$\underline{\alpha}_{K+1} = \underline{\alpha}_K - \beta \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (3-120)$$

No procedimento de cálculo acima, é fácil verificar que a maior parte do esforço computacional por passo é devido primeiramente do cálculo do par $[J(\underline{\alpha}), \nabla J(\underline{\alpha})]$ e em seguida pela solução do sistema de equações lineares simétrico (3-117) (3-118). Quando o teorema 3.2 é aplicável, esta última parte torna-se geralmente insignificante quando comparada com a primeira.

Como no caso do regulador L-Q com restrições de estrutura apresentado no capítulo 2, não foi possível obter estimativas de $M(\underline{\alpha}_K)$ e $M'(\underline{\alpha}_K)$ que permitissem antecipar com precisão a razão de convergência das recorrências (3-109), (3-110) e (3-114), (3-115). É de se esperar no entanto que em igualdade de condições quanto à fraqueza das restrições impostas, a recorrência (3-114), (3-115) apresente uma razão de convergência inferior à sua similar (2-101), (2-102) no capítulo 2. O motivo é que no caso do regulador L-Q, $H_2(\underline{\alpha})$ aproximava a matriz hessiana $H(\underline{\alpha})$ e no presente caso, $H'(\underline{\alpha})$ aproxima apenas a parte bloco diagonal $\text{diag} [H_{gg}, H_{hh}]$ da matriz hessiana $H(\underline{\alpha})$.

3.4.2 - Comparação com outros métodos de otimização

Sejam LYAP(n) e LSYS(np) o tempo de computação para solução de uma equação de Liapunov de ordem n e um sistema de equações lineares simétrico de ordem np respectivamente. Seja CMPT(.) o tempo de computação para cálculo ns passos do método de otimização (.). Como na seção 2.5.1, apenas LSYS(.) e LYAP(.) serão considerados no cálculo de CMPT(.). Utilizando procedimento análogo ao da seção 2.5.2 no capítulo 2, temos

(a) Gradiente de passo fixo

$$\text{CMPT (gradiente)} = 2 (ns + 1) \text{ LYAP } (2n) \quad (3-121)$$

(b) Quasi-Newton especializado (3-109), (3-110) ou (3-114), (3-115)

$$\begin{aligned} \text{CMPT(Quasi-Newton)} &= 2 (ns+1) \text{LYAP}(2n) + ns (\text{LSYS} (nph) + \\ &+ \text{LSYS} (npg)) \end{aligned} \quad (3-122)$$

Quando o teorema 3.2 é aplicável, temos

$$\text{LSYS} (npg) = \sum_{i=1}^m \text{LSYS} (np\ell_i) \quad (3-123)$$

$$\text{LSYS} (nph) = \sum_{i=1}^r \text{LSYS} (npc_i) \quad (3-124)$$

onde $np\ell_i$, npc_i são o número de parâmetros na i -ésima linha da matriz $G(\underline{\alpha}_g)$ e o número de parâmetros na i -ésima coluna da matriz $H(\underline{\alpha}_h)$ respectivamente. Geralmente isto torna $(\text{LSYS} (npg) + \text{LSYS}(nph))$ insignificante quando comparando com $\text{LYAP} (2n)$. Assim sendo temos:

$$\text{CMPT(Quasi-Newton)} = 2(ns + 1) \text{LYAP} (2n) \quad (3-125)$$

(c) Newton

$$\text{CMPT(Newton)} = (ns(np+2) + 2) \text{LYAP}(2n) + ns \text{LSYS}(np) \quad (3-126)$$

(d) Davidon-Fletcher-Powell [17], Fletcher-Reeves [18], Rosembrock [53] aplicados de forma iterada

$$\begin{aligned} \text{CMPT} (D-F-P) &= \text{CMPT} (F-R) = \text{CMPT(Rosembrock)} = \\ &= (6nsnp + 2) \text{LYAP} (2n) \end{aligned} \quad (3-127)$$

Quando $\underline{\alpha}_f$ é eliminado do conjunto de variáveis independentes $\underline{\alpha}$ assumindo $F(\underline{\alpha}_f) = A$, conforme foi mostrado na seção 3.3.1, de vemos ter:

$$\text{LYAP} (2n) = 3\text{LYAP}(n) \quad (3-128)$$

Isto reduz consideravelmente o esforço computacional de todos os métodos acima, quando são tratados sistemas de grande dimensão.

Nos resultados apresentados acima, vemos que utilizando o teorema 3.2 o esforço computacional por passo do método Quasi-Newton especializado é praticamente igual ao do gradiente de passo fixo e independente do número de parâmetros np . Dada a expectativa

de ele possuir uma razão de convergência melhor que o método do gradiente, o método Quasi-Newton especializado deve ser preferido para tratar sistemas de grande dimensão n e grande número de parâmetros np . Em (c), (d) é fácil verificar a forte dependência do esforço computacional por passo dos métodos de Newton, Davidon - Fletcher-Powell, Fletcher-Reeves e Rosembrock. Para justificar o uso de qualquer um desses métodos em problemas com grandes valores de n e np é preciso que a razão de convergência do método Quasi-Newton especializado, ou mesmo a do método do gradiente com mesmo tipo de passo, sejam muito fracas.

3.4.3 - Exemplo ilustrativo

Nesta seção serão utilizados os métodos Quasi-Newton especializado (3-114), (3-115) e gradiente com mesmo tipo de passo na solução de um problema de otimização de parâmetros, oriundo da síntese de um regulador L-Q-G com estrutura de controle "local", para o mesmo segmento de via expressa tratado na seção 2.6.2.

As equações do sistema dinâmico e índice de desempenho são:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) + \underline{\xi}(t) \quad ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (3-129)$$

$$\underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + \underline{\theta}(t) \quad (3-130)$$

$$\underline{u}(t) = G(\underline{\alpha}_g) \hat{\underline{x}}(t) \quad (3-131)$$

$$\dot{\hat{\underline{x}}}(t) = A\hat{\underline{x}}(t) + H(\underline{\alpha}_h) (\underline{y}(t) - C\hat{\underline{x}}(t)) + B\underline{u}(t); \quad \hat{\underline{x}}(0) = \bar{\underline{x}}_0 \quad (3-132)$$

$$J(\underline{\alpha}) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T [\underline{x}^T(t) S_1 \underline{x}(t) + \underline{u}^T(t) S_2 \underline{u}(t)] dt \right\} \quad (3-133)$$

$$E \{ \underline{\xi}(t) \underline{\xi}^T(\tau) \} = Q \delta(t - \tau) \quad (3-134)$$

$$E \{ \underline{\theta}(t) \underline{\theta}^T(\tau) \} = R \delta(t - \tau) \quad (3-135)$$

$$E \{ \underline{\theta}(t) \} = E \{ \underline{\xi}(t) \} = 0 \quad (3-136)$$

$$E \{ \underline{x}_0 \} = \bar{\underline{x}}_0 \quad (3-137)$$

$$E\{ \underline{x}(t) \underline{Q}(t) \} = E\{ \underline{x}(t) \underline{x}_0^T \} = E\{ \underline{Q}(t) \underline{x}_0^T \} = 0 \quad (3-138)$$

onde: $\underline{x}(t)$, $\underline{x}_0$, $\underline{Q}(t)$ são vetores de dimensão $n=34$; os elementos ímpares de $\underline{x}(t)$, $\underline{x}_0$, $\underline{Q}(t)$ são associados às densidades de tráfego médias e os elementos pares às velocidades médias dos veículos em 17 seções adjacentes da via expressa; o controlador (3-131), (3-132) é suposto dividido em 5 subsistemas e $\underline{\alpha}_g$, $\underline{\alpha}_h$ são vetores de dimensões $n_{pg} = 112$, $n_{ph} = 154$ respectivamente. Todos os dados referentes ao sistema, índice de desempenho e controlador estão resumidos nas tabelas 3.1 a 3.5. Nessas tabelas os subsistemas do controlador são identificados por algarismos romanos de I a V.

O índice de desempenho ótimo é

$$J(\underline{\alpha}^*) = 43.8516 \quad (3-139)$$

O índice de desempenho ótimo para o problema do regulador ótimo L-Q-G de tempo infinito é

$$J^* = 43.5538 \quad (3-140)$$

Comparando (3-139), (3-140), temos

$$\frac{J(\underline{\alpha}^*) - J^*}{J^*} \times 100 = 0,7 \% \quad (3-141)$$

o que mostra a fraqueza das restrições impostas. Conforme pode ser verificado nas figuras 3.1 e 3.2, os requisitos para implementação do sistema de controle para o regulador L-Q-G com restrições de estrutura são inferiores aos do regulador ótimo L-Q-G.

Os resultados em cada etapa dos processos iterativos obtidos com os métodos Quasi-Newton especializado e gradiente com mesmo tipo de passo são apresentados nas tabelas 3.6(a) e (b) respectivamente. Nessas tabelas podemos constatar a superioridade do método Quasi-Newton especializado sobre o gradiente com mesmo tipo de passo. Os métodos de Newton, Davidon-Fletcher-Powell, Fletcher-Reeves, são impraticáveis para este problema devido ao grande número de parâmetros envolvidos ($n_p = 267$).

Comparando o desempenho do método Quasi-Newton especializado no problema do regulador L-Q com restrições de estrutura (seção 2.6) com o seu desempenho no problema do regulador L-Q-G com

restrições de estrutura, vemos que neste último, o desempenho do método foi bem inferior. Conforme comentado na seção 3.3.4, temos $H(\underline{\alpha})$ parcionado como

$$H(\underline{\alpha}) = \begin{bmatrix} H_{gg} & H_{gh} \\ H_{hg} & H_{hh} \end{bmatrix} \quad (3-142)$$

e o teorema 3.3 garante que com a fraqueza das restrições de estrutura $H''(\underline{\alpha})$ aproxima $\text{diag} [H_{gg}, H_{hh}]$. O menor desempenho obtido é explicado pela influência da matriz dos termos cruzados

$$H_C(\underline{\alpha}) = \begin{bmatrix} 0 & H_{gh} \\ H_{hg} & 0 \end{bmatrix} \quad (3-143)$$

que não se anula mesmo para a solução do regulador ótimo L-Q-G de tempo infinito.

3.5 - CONCLUSÃO

Este capítulo tratou praticamente apenas dos aspectos computacionais da solução do problema de otimização de parâmetros utilizando métodos de minimização do tipo descida. O problema de otimização de parâmetros tratados neste capítulo é bastante semelhante ao tratado no capítulo II, o que é confirmado pela similaridade dos resultados obtidos. Dentre outros destacamos:

(i) Uma abordagem unificada com um tratamento detalhado e em profundidade do problema de cálculo em forma fechada do índice de desempenho $J(\underline{\alpha})$, vetor gradiente $\nabla J(\underline{\alpha})$, matriz hessiana $H(\underline{\alpha})$ e suas componentes $H'(\underline{\alpha})$, $H''(\underline{\alpha})$. O algoritmo para cálculo do par $[J(\underline{\alpha}), \nabla J(\underline{\alpha})]$ é bastante superior ao proposto com a mesma finalidade por Loose e outros { 37, 38 }. A sua originalidade contudo, se existir é muito pequena porque Kwakernaak e Sivan { 34 } obteve o mesmo resultado para um problema de otimização de parâmetros equivalentes oriundo da síntese de compensadores de ordem reduzida. Os algoritmos para cálculo de $H(\underline{\alpha})$, $H'(\underline{\alpha})$, $H''(\underline{\alpha})$ e as propriedades de $H''(\underline{\alpha})$ apresentadas nos teoremas 3.1, 3.2 e 3.3 são resultados relevantes que consideramos originais.

(ii) $H''(\underline{\alpha})$ e suas propriedades serviram de base para a confecção de um novo algoritmo de otimização especializado do tipo Quasi-Newton, cuja razão de convergência melhora com a fraqueza das restrições de estrutura. Comparado com outros métodos de otimização, o método Quasi-Newton especializado mostrou-se melhor adaptado para tratar sistemas de grande dimensão com grande número de parâmetros a serem otimizados. Este método especializado é um resultado relevante que consideramos original.

(iii) Ainda com relação ao método Quasi-Newton especializado, vimos através do exemplo da via expressa que seu desempenho computacional é bastante inferior ao seu similar para o regulador L-Q no capítulo II. O primeiro motivo é que $\underline{\alpha}_f$, quando incluído no conjunto das variáveis independentes, varia através de passos do método do gradiente. A hipótese $F(\underline{\alpha}_f) = A$ elimina este inconveniente e reduz consideravelmente o esforço computacional para cálculo de $J(\underline{\alpha})$, $\nabla J(\underline{\alpha})$, $H''(\underline{\alpha})$. Conforme, pode ser verificado na tabela 3.5 do exemplo da via expressa, em sistemas com matrizes A com a forma de banda estreita, poucas variáveis devem ser comunicadas entre os subcontroladores para se obter $F(\underline{\alpha}_f) = A$. O segundo motivo é que mesmo sem $\underline{\alpha}_f$ e com restrições muito fracas os termos cruzados da matriz hessiana não são nulos e afetam a razão de convergência do algoritmo.

Para finalizar, é fácil verificar que o esforço computacional para obter a solução do problema do regulador ótimo L-Q-G de tempo infinito é um limitante inferior do requerido para a solução do problema do regulador L-Q-G com restrições de estrutura.

TABELA 3.1

Via Expressa: Regulador L-Q-G com Estrutura Local

Matriz do Sistema:A

i	$a_{i, i-2}$	$a_{i, i-1}$	$a_{i, 1}$	$a_{i, i+1}$
1			-1.758	-1.666
2		.564	-1.200	- .687
3	1.955	1.853	-2.371	-1.956
4	1.983	.725	-3.122	- .583
5	1.194	.985	- .946	-1.059
6	1.333	.278	-2.467	- .325
7	.870	.975	- .964	-1.011
8	.950	.332	-2.140	- .356
9	.964	1.011	- .962	-1.013
10	.962	.271	-2.161	- .303
11	.677	.713	- .718	- .734
12	.824	.243	-2.029	- .267
13	.706	.722	- .703	- .725
14	.708	.301	-1.905	- .317
15	1.037	1.071	-1.033	-1.123
16	.825	.394	-2.007	- .298
17	1.106	1.203	-1.079	-1.266
18	1.041	.285	-2.215	- .299
19	.652	.765	- .648	- .805
20	.801	.266	-1.980	- .285
21	.915	1.137	-1.001	-1.278
22	.782	.314	-1.975	- .347
23	.934	1.188	- .963	-1.153
24	.996	.269	-2.226	- .338
25	.680	.815	- .925	- .953
26	.996	.339	-2.250	- .371
27	.716	.895	- .931	- .881
28	.960	.451	-2.175	- .449
29	1.571	1.487	-1.513	-1.487
30	1.170	.454	-2.399	- .554
31	1.253	1.232	-1.619	-1.334
32	1.591	.611	-2.844	- .652
33	1.626	1.339	-1.659	-1.312
34	1.656	-.029	-2.889	

Os elementos não mostrados nesta tabela são nulos.

Via expressa: Regulador L-Q-G com Estrutura Local

Matrizes do Sistema B,C

Matrizes de Covariância: Q,R

Matrizes do Índice de Desempenho: S_1, S_2

	i	j	$s_{1,i,i}$	$s_{2,j,j}$	ℓ	$q_{i,i}$	$r_{\ell,\ell}$
I	1	1	1.000	25.	1	2.	16.
	2		1.929		2	1.	16.
	3		1.000			2.	
	4		1.929		3	1.	16.
	5	1.000	2.				
	6	1.929	1.				
	7	3	1.000	25.		4	2.
	8	1.929	1.				
II	9	4	1.000	25.	5	2.	16.
	10		1.929		6	1.	16.
	11		1.000			2.	
	12		1.929			1.	
	13		1.000		7	2.	16.
	14		1.929			1.	
III	15	5	1.000	25.	8	2.	16.
	16	6	1.929	25.	9	1.	16.
	17		1.000			2.	
	18		1.929			1.	
	19	7	1.000	25.	10	2.	16.
	20		1.929			1.	
	21	8	1.000	25.	11	2.	16.
	22		1.929			1.	
IV	23	9	1.000	25.	12	2.	16.
	24		1.929		13	1.	16.
	25		1.000			2.	
	26		1.929			1.	
	27		1.000		14	2.	16.
	28		1.929			1.	
V	29	10	1.000	25.	15	2.	16.
	30	11	1.929	25.	16	1.	16.
	31		1.000			2.	
	32		1.929			1.	
	33		1.000		17	2.	16.
	34		1.929			1.	

j representa o número da coluna da matriz B onde temos $b_{i,j} = 1$.

ℓ representa o número da linha da matriz C onde temos $c_{\ell,i} = 1$.

Os elementos não mostrados nesta tabela são nulos.

TABELA 3.3

Via Expressa: Regulador L-Q-G com Estrutura Local

Posição dos elementos do vetor $\underline{a}_g$ na matriz $G(\underline{a}_g)$

j \ i		I			II	III				IV	V	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
I	1	x	x	x								
	2	x	x	x								
	3	x	x	x								
	4	x	x	x								
	5	x	x	x	x							
	6	x	x	x								
	7	x	x	x	x							
	8	x	x	x	x							
II	9	x	x	x	x							
	10				x							
	11	x	x	x	x	x						
	12				x							
	13				x	x	x	x				
	14				x	x	x	x				
III	15				x	x	x	x				
	16					x	x	x	x			
	17				x	x	x	x				
	18					x	x	x	x			
	19					x	x	x	x			
	20					x	x	x	x			
	21					x	x	x	x	x		
	22					x	x	x	x	x		
IV	23					x	x	x	x	x		
	24									x		
	25									x		
	26									x		
	27									x	x	
	28									x	x	
V	29									x	x	
	30									x	x	
	31									x	x	
	32									x	x	
	33									x	x	
	34									x	x	

x representa que a posição é ocupada por um elemento $\underline{a}_g$

Os elementos de $G(\underline{a}_g)$ fora das posições marcadas x são nulos

TABELA 3.4

Via Expressa: Regulador L-Q-G com Estrutura Local
Posição dos elementos do vetor α_h na matriz $H(\alpha_h)$

i \ j		I				II			III				IV			V		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
I	1	x	x	x	x													
	2	x	x	x	x													
	3	x	x	x	x													
	4	x	x	x	x													
	5	x	x	x	x	x	x											
	6	x	x	x	x	x	x											
	7	x	x	x	x	x	x											
	8	x	x	x	x	x	x											
II	9					x	x	x										
	10					x	x	x	x									
	11					x	x	x	x									
	12					x	x	x	x	x								
	13					x	x	x	x	x								
	14					x	x	x	x	x								
III	15						x		x	x	x	x						
	16						x		x	x	x	x						
	17						x		x	x	x	x						
	18						x		x	x	x	x	x					
	19								x	x	x	x	x					
	20								x	x	x	x	x					
	21								x	x	x	x	x					
	22								x	x	x	x	x					
IV	23									x			x	x	x			
	24									x			x	x	x		x	
	25												x	x	x		x	
	26												x	x	x		x	
	27												x	x	x		x	
	28												x	x	x		x	
V	29													x		x	x	x
	30													x		x	x	x
	31															x	x	x
	32													x		x	x	x
	33															x	x	x
	34													x		x	x	x

x representa que a posição é ocupada por um elemento de α_h .
Os elementos de $H(\alpha_h)$ fora das posições marcadas x são nulos.

TABELA 3.5

Via Expressa: Regulador L-Q-G com Estrutura Local
Estrutura de Informações dos Subcontroladores
Matriz Destino-Origem (D/O)

D \ O	I	II	III	IV	V
I	y_1, y_2, y_3, y_4 $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4$ $\hat{x}_5, \hat{x}_6, \hat{x}_7, \hat{x}_8$	y_5, y_6 $\hat{x}_9^*, \hat{x}_{11}$			
II	$\hat{x}_5, \hat{x}_7^*, \hat{x}_8^*$	y_5, y_6, y_7 $\hat{x}_9, \hat{x}_{10}, \hat{x}_{11}, \hat{x}_{12}$ $\hat{x}_{13}, \hat{x}_{14}$	y_8, y_9 $\hat{x}_{15}^*, \hat{x}_{17}$		
III		y_7 $\hat{x}_{11}, \hat{x}_{13}^*, \hat{x}_{14}^*$	y_8, y_9, y_{10}, y_{11} $\hat{x}_{15}, \hat{x}_{16}, \hat{x}_{17}, \hat{x}_{18}$ $\hat{x}_{19}, \hat{x}_{20}, \hat{x}_{21}, \hat{x}_{22}$	y_{12} x_{23}^*	
IV			y_{11} $\hat{x}_{21}^*, \hat{x}_{22}$	$y_{12}, y_{13}, y_{14},$ $\hat{x}_{23}, \hat{x}_{24}, \hat{x}_{25}, \hat{x}_{26}$ $\hat{x}_{27}, \hat{x}_{28}$	y_{15} $\hat{x}_{29}^*$
V				y_{14} $\hat{x}_{27}^*, \hat{x}_{28}^*$	y_{15}, y_{16}, y_{17} $\hat{x}_{29}, \hat{x}_{30}, \hat{x}_{31}, \hat{x}_{32}$ $\hat{x}_{33}, \hat{x}_{34}$

*Variáveis que devem ser comunicadas entre os subcontroladores para se obter $F(\alpha_f)=A$

TABELA 3.6

Via Expressa: Regulador L-Q-G com Estrutura Local
Etapas do Processo Iterativo

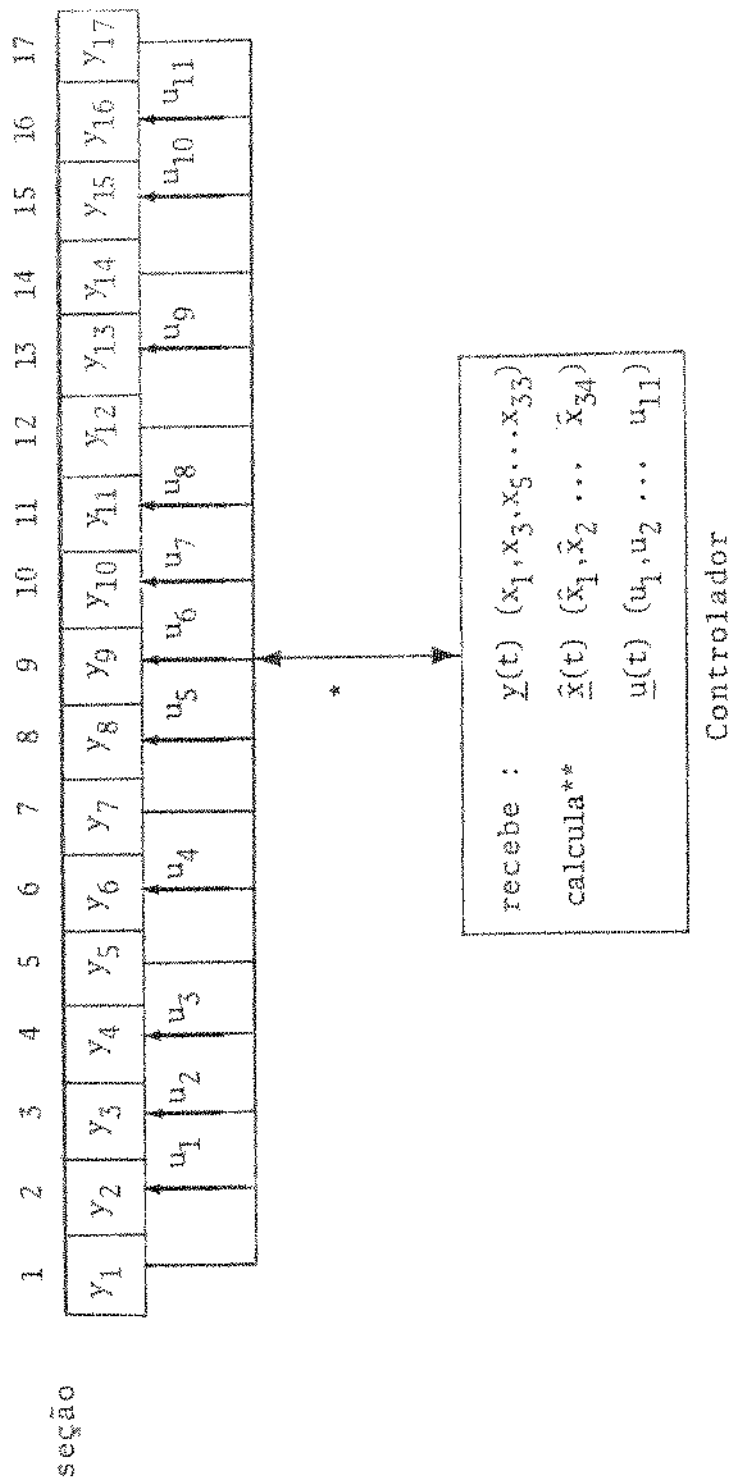
(a) Método Quasi-Newton Especializado

K	$J(\underline{\alpha}_K)$	$\ \nabla J(\underline{\alpha}_K)\ $	β
0	43.9759	$.1584 \times 10^{-1}$	-
1	43.9400	$.1155 \times 10^{-1}$	.125
2	43.8964	$.8375 \times 10^{-2}$	.25
3	43.8625	$.5161 \times 10^{-2}$	.5
4	43.8551	$.1203 \times 10^{-2}$	.5
5	43.8534	$.9321 \times 10^{-3}$	.5
6	43.8524	$.5066 \times 10^{-3}$	.5
7	43.8519	$.3696 \times 10^{-3}$	.5
8	43.8516	$.2763 \times 10^{-3}$	.5
Tempo de "CPU" PDP-10 UNICAMP		45,0 minutos	

(b) Método do Gradiente com mesmo Tipo de Passo

K	$J(\underline{\alpha}_K)$	$\ J(\underline{\alpha}_K)\ $	β
0	43.9759	$.15849 \times 10^{-1}$	-
1	43.92166	$.93258 \times 10^{-2}$	.01
2	43.90305	$.58675 \times 10^{-2}$	.01
3	43.89478	$.38932 \times 10^{-2}$	.01
4	43.89010	$.27409 \times 10^{-2}$	.01
5	43.88854	$.45481 \times 10^{-2}$	.02
6	43.88427	$.24516 \times 10^{-2}$	.01
7	43.88191	$.20643 \times 10^{-2}$	.01
8	43.88157	$.36504 \times 10^{-2}$	.02
Tempo de "CPU" PDP-10 UNICAMP		60,0 minutos	

// . // representa a norma euclidiana.



Requisitos para implementação do sistema de controle:

Sensores: 17 sensores de densidade de tráfego

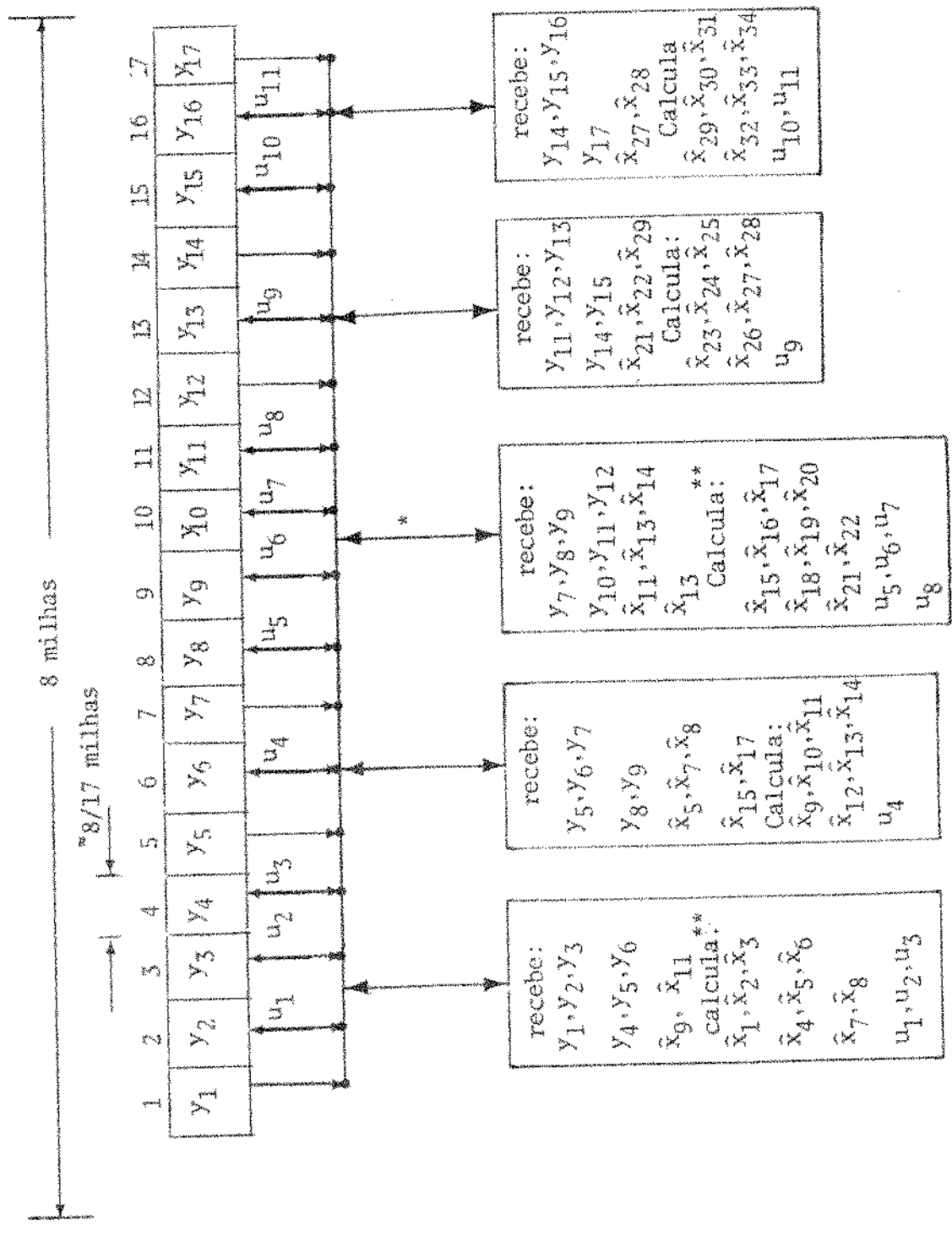
Distância máxima entre emissores e receptores: ≈ 4 milhas

* Capacidade máxima de transmissão de dados: 28 variáveis/intervalo de tempo

Capacidade de cálculo em tempo real: = solução de equação diferencial de ordem 34/intervalo de tempo

Figura 3.1 - Via Expressa: Regulador Ótimo L-Q-G

Esquema Simplificado e Requisitos do Sistema de Controle



Subcontroladores I II III IV V

recebe: y_1, y_2, y_3
 y_4, y_5, y_6
 $\hat{x}_9, \hat{x}_{11}$ **
 calcula: $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$
 $\hat{x}_4, \hat{x}_5, \hat{x}_6$
 $\hat{x}_7, \hat{x}_8$
 u_1, u_2, u_3

recebe: y_5, y_6, y_7
 y_8, y_9
 $\hat{x}_5, \hat{x}_7, \hat{x}_8$
 $\hat{x}_{15}, \hat{x}_{17}$
 Calcula: $\hat{x}_9, \hat{x}_{10}, \hat{x}_{11}$
 $\hat{x}_{12}, \hat{x}_{13}, \hat{x}_{14}$
 u_4

recebe: y_7, y_8, y_9
 y_{10}, y_{11}, y_{12}
 $\hat{x}_{11}, \hat{x}_{13}, \hat{x}_{14}$
 $\hat{x}_{13}$ **
 Calcula: $\hat{x}_{15}, \hat{x}_{16}, \hat{x}_{17}$
 $\hat{x}_{18}, \hat{x}_{19}, \hat{x}_{20}$
 $\hat{x}_{21}, \hat{x}_{22}$
 u_5, u_6, u_7
 u_8

recebe: y_{11}, y_{12}, y_{13}
 y_{14}, y_{15}
 $\hat{x}_{21}, \hat{x}_{22}, \hat{x}_{29}$
 Calcula: $\hat{x}_{23}, \hat{x}_{24}, \hat{x}_{25}$
 $\hat{x}_{26}, \hat{x}_{27}, \hat{x}_{28}$
 u_9

recebe: y_{14}, y_{15}, y_{16}
 y_{17}
 $\hat{x}_{27}, \hat{x}_{28}$
 Calcula: $\hat{x}_{29}, \hat{x}_{30}, \hat{x}_{31}$
 $\hat{x}_{32}, \hat{x}_{33}, \hat{x}_{34}$
 u_{10}, u_{11}

CAPÍTULO IV

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram tratados vários aspectos da formulação e principalmente da solução do problema de otimização oriundo da síntese via otimização de parâmetros de reguladores L-Q e L-Q-G com restrições de estrutura. Foi considerada uma classe particular de problemas com as seguintes características:

- (a) Problema de otimização sem restrições
- (b) Sistema linear invariante no tempo
- (c) Índice de desempenho quadrático integral de tempo in finito
- (d) Controlador de dimensão finita na forma de realimentação, linear, invariante no tempo, com estrutura de in formação predeterminada.

Acreditamos ter apresentado neste trabalho contribuições significativas as quais foram detalhadamente discutidas nas seções de conclusão 1.5, 2.7, 3.5 dos capítulos I, II e III respectivamente. Por suas importâncias, possibilidades de serem estendidas a ou tras classes de problemas ou mesmo de serem aperfeiçoadas, faremos aqui uma recapitulação de algumas das contribuições deste trabalho:

- (a) Uma abordagem unificada, com um tratamento detalhado e em profundidade do problema de cálculo em forma fe chada do índice de desempenho, vetor gradiente e ma triz hessiana.
- (b) Do estudo das propriedades da matriz hessiana nasceu um novo método Quasi-Newton especializado para solu - do problema de otimização de parâmetros. O novo méto do é baseado em uma aproximação definida positiva da matriz hessiana tem um esforço computacional por pas so praticamente igual ao do gradiente com mesmo tipo de passo e explora a fraqueza das restrições de estru tura para obtenção de uma melhor razão de convergên - cia. Restrições de estrutura fracas são muito frequen

tes devido ao compromisso que deve existir entre a subotimalidade do desempenho do sistema de controle e a viabilidade de sua implantação prática.

- (c) Uma visão de conjunto da seleção de métodos para solução do problema de otimização de parâmetros. Comparado com vários métodos, o método Quasi-Newton especializado se mostrou particularmente bem adaptado para solução de problemas envolvendo sistemas de grande dimensão e grande número de parâmetros, sendo capaz de apresentar um desempenho computacional muitas vezes superior.
- (d) Um tratamento eficiente do problema de otimização de parâmetros oriundo da síntese de reguladores L-Q com restrições de estrutura para o pior caso de condição inicial do sistema.
- (e) Em condições semelhantes de fraqueza de restrições, o método Quasi-Newton especializado apresenta melhor desempenho com o regulador L-Q com restrições de estrutura do que com o regulador L-Q-G. A razão disto é que neste último existem partes da matriz hessiana que não se anulam com a fraqueza das restrições e não estão incorporadas na aproximação definida positiva da matriz hessiana na qual o método se baseia.

Acreditamos não haver dificuldade em estender os resultados enumerados acima a problemas sem restrições nos parâmetros, para sistemas discretos com índice de desempenho de tempo infinito e sistemas contínuos e discretos com índice de desempenho de tempo finito. Para os sistemas contínuos com índice de desempenho de tempo finito, basta utilizar o mesmo procedimento, substituindo a equação algébrica de Liapunov pela equação diferencial de Liapunov. O mesmo vale para os sistemas discretos, utilizando a correspondente equação de Liapunov para sistemas discretos.

Quanto aos problemas com restrições nos parâmetros ou mesmo no estado do sistema, a projeção da direção de descida gerada pelo método Quasi-Newton especializado, sobre o conjunto das

restrições, tem grande possibilidade de ser mais eficiente que projetar o gradiente sobre as mesmas.

Além das extensões acima mencionadas, ficam ainda as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- (a) Estudo das possibilidades de utilização de modelos simplificados na obtenção de forma eficiente da solução aproximada de uma mesma equação de Liapunov para muitos termos de entrada diferentes.
- (b) Estudo das possibilidades de integrar a aproximação da matriz hessiana utilizada pelo método Quasi-Newton especializado com um processo de construção progressiva da matriz hessiana.

Acreditamos que o sucesso em qualquer uma dessas possibilidades permitirá melhorar o desempenho do método Quasi-Newton na solução do regulador L-Q-G com restrições de estrutura, permitirá tratar de problemas onde as restrições não são fracas ou mesmo contornar algum problema que possa aparecer nas extensões comentadas anteriormente.

BIBLIOGRAFIA

- {1} - ATHANS, M.; FALB, P. L. (1966), "Optimal Control: An Introduction to the Theory and its Applications", McGraw-Hill Inc., New York, USA.
- {2} - ATHANS, M. (1971), "The Role and Use of the Stochastic Linear - Quadratic-Gaussian Problem in Control System Design", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-16, No. 6.
- {3} - ATHANS, M. (1978), "Advances and Open Problems on the Control of Large Scale Systems", Plenary Paper, Proceedings of the 1978 IFAC Congress, Helsinki, Finlandia.
- {4} - ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. (1971), "Linear Optimal Control", Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, N.J., USA.
- {5} - AOKI, M. (1971), "Introduction to Optimization Techniques", Mc Millan Co., USA.
- {6} - BARNETT S.; STOREY, C. (1970), "Matrix Methods in Stability Theory", Thomas Nelson and Sons Ltd., Inglaterra.
- {7} - BINGULAC, S. P. (1965), "Automatic Optimization of Linear Feedback Control Systems", Annales de l'Association Internationale pour le Calcul Analogique, No. 1.
- {8} - BINGULAC, S. P. (1970), "An Alternate Approach to Expanding $PA + A^T P = -Q$ ", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-15, No. 1.
- {9} - BALDWIN, J. F.; SIMS-WILLIAMS, J. H. (1968), "An On-line Control Scheme Using Successive Approximations in Policy Space Approach", Journal of Mathematical Analysis and Applications, No. 22.
- {10} - BLACKBURN, T. R. (1968), "Solution of the Algebraic Matrix Riccati Equation Via Newton Raphson Iteration", Preprints of JACC, Ann Arbor, Michigan, USA.

.../.

- {11} - BRISON, A.E., Jr; HO, Y.C. (1969), "Applied Optimal Control", Ginn and Co., Waltham Massachusetts, USA.
- {12} - CHEN, C.F. (1968), "A Note on Expanding $PA + P^A T = -Q$ ", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-13, No.1.
- {13} - CHONG, C.Y.; ATHANS, M. (1971), "On the Stochastic Control of Linear Systems with Different Information Sets", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-16, No.5.
- {14} - CHU, K.C. (1972), "Team Decision Theory and Information Structures in Optimal Control Problems, Part II", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-17, No.1.
- {15} - DURAND, E. (1972), "Solutions Numériques des Equations Algébriques, Tomes I et II", Masson et Cie., Paris, France.
- {16} - DAVISON, E.J.; RAU, N.S.; PALMAY, F.V. (1973), "The Optimal Decentralized Control of a Power System Consisting of a Number of Interconnected Synchronous Machines", International Journal of Control, Vol.18, No.6.
- {17} - FLETCHER, R.; POWELL, M.J. (1963), "A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization", Computer Journal, Vol.6, No.2.
- {18} - FLETCHER, R.; REEVES, C.M. (1964), "Function Minimization by Conjugate Gradients", Computer Journal, Vol.7, No.2.
- {19} - FERNANDO, K.V.M.; NICHOLSON, H. (1978), "Modified Newton's Algorithm for the Riccati Equation", Electronics Letters, Vol.14, No.18.
- {20} - GANTMACHER, F.R. (1959), "The Theory of Matrices, Volumes I and II", Cheesha Publishing Co., USA.
- {21} - GEROMEL, J.C.; BERNUSSOU, J. (1979), "An Algorithm for Optimal Decentralized Regulation of Linear Quadratic Interconnected Systems", Automatica, Vol.14, No.4.

.../.

- {22} - GEROMEL,J.C.; BERNUSSOU,J. (1979), "Optimal Decentralized Control Problem - Application to Electrical Power Networks" , Proceedings of the IFAC/IFORS Symposium on Optimization Methods, Applied Aspects, Verna, Bulgaria.
- {23} - GEROMEL,J.C. (1979), "Contribution à l'Etude des Systèmes Dynamiques Interconnectés , Aspects de Décentralisation",Thèse d'État, Université Paul Sabatier, Toulouse, França.
- {24} - GOLUB,H.H.; NASH,S.; VAN LOAN,C. (1979), "A Hessemberg - Schur Method for the Problem $AX+XB=-C$ ", IEEE Transactions matic Control, Vol.AC-24, No.6.
- {25} - GUARDABASSI,G.; LOCATELLI,A.; MAFFEZZONI,C.;SCHIAVONI,N.(1979), "Parameter Optimization in Decentralized Process Control A Unified Setting for Multivariable Industrial Regulator Design", Proceedings of the IFAC Symposium on Computer Aided Design of Control Systems, Zurique, Suíça.
- {26} - GUARDABASSI,G.; LOCATELLI,A; MAFFEZZONI,C.; SCHEAVONI,N.(1979), "A Program Package for Multivariable Industrial Regulator Design", Proceedings of the IFAC Symposium on Computer Aided Design of Control Systems, Zurique, Suíça.
- {27} - HOSKINS,W.D.; MEEK,D.S.; WALTON,D.J. (1977), "The Numerical Solution of $A^TQ+QA=-C$ ", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-22, No.5.
- {28} - HO,Y.C.; CHU,K.C. (1972), "Team Decision Theory and Information Structures in Optimal Control Problems, Part I",IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-17, No.1.
- {29} - ISAKSEN,L. (1971), "Suboptimal Control of Large Scale Systems with Application to Freeway Regulation", Ph.D. Thesis,Dept. of Electrical Engeneering, University of Southern, California, Los Angeles, USA.
- {30} - ISAKSEN,L.; PAYNE,H.J.(1973),"Suboptimal Control of Linear Systems by Augmentation with Application to Freeway Traffic Regulation", IEEE Transactions on Automatic Control,Vol.AC-18, No.3.

.../.

- {31} - KLEINMAN,D.L.(1968), "On An Iterative Technique for Riccati Equation Computation", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-23, No.1.
- {32} - KLEINMAN,D.L.(1970),"A Easy Way to Stabilize a Linear Constant System", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-15, No.6.
- {33} - KOSUT,R.L. (1970), "Suboptimal Control of Linear Time-Invariant Systems Subjected to Control Structure Constraints", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-15, No.15.
- {34} - KWAKERNAAK,H.; SIVAN,R. (1972), "Linear Optimal Control Systems", Wiley-Interscience, John Wiley and Sons, New York, USA.
- {35} - LAUB,A.J. (1979), "A Schur Method for Solving Algebraic Riccati Equations", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-24, No.6.
- {36} - LEVINE,W.S.; ATHANS,M. (1970), "On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-15, No.1.
- {37} - LOOSE,D.P.; HOUP,T,P.K.; ATHANS,M. (1977), "Dynamic Centralized and Decentralized Control Systems", Report DOT-TSC-77-10 , U.S. Department of Transportation, Washington, USA.
- {38} - LOOSE,D.P.; HOUP,T,P.K.; SANDELL N.R.Jr.; ATHANS,M. (1978), "On Decentralized Estimation and Control with Application to Freeway Ramp Metering", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-23, No.2.
- {39} - LOOSE,D.P.; SANDELL,N.R.Jr. (1980) "Gradient Calculations for Linear Quadratic Fixed-Control Structure Problems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-25, No.2.
- {40} - LUENBERGER,D.G. (1973), "introduction to Linear and Nonlinear Programming", Addison-Wesley Publishing Co., USA.

.../.

- {41} - MILANI, B.E.A. (1979), "Decomposition of Large-Scale Matrix Equations $XA+BX=C$ ", Proceedings of the Seventh Canadian Congress of Applied Mechanics, Université de Sherbroock, Sherbroock Qué, Canada.
- {42} - MILANI, B.E.A. (1979), "A Quasi-Newton Algorithm for Optimization of the Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems Subjected to Control Structure Constraints", 1979 Optimization Days Conference, McGill University, Montreal P.Q., Canada.
- {43} - MILANI, B.E.A. (1979), "On the Computation of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Large-Scale Linear Time-Invariant Systems Subjected to Control Structure Constraints", Proceedings of the Ninth IFIP Conference on Optimization Techniques, Varsóvia, Polônia.
- {44} - MILANI, B.E.A. (1980), "Large Scale Structure Constrained L-Q-G Regulator Design Via Parameter Optimization: Procedures for Computation of the Performance Index, Gradient Vector and Hessian Matrix", Publicação Interna UNICAMP-FEC, No.9/80, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, S.P.
- {45} - MILANI, B.E.A.; YAMAKAMI, A. (1980), "Decentralized Estimation and Control for Large Scale Dynamic Systems", Proceedings of the Third International Symposium on Large Scale Engineering Systems, University of Newfoundland, St. John's, Newfoundland, Canada.
- {46} - MILANI, B.E.A. (1980), "Large Scale Structure Constrained L-Q-G Regulator Design Via Parameter Optimization: Procedures for Computation of the Performance Index, Gradient Vector and Hessian Matrix", Proceedings of the 1980 IEEE International Conference on Circuits and Computers, Port Chester, N.Y., USA.
- {47} - NOBLE, B.; DANIEL, J.W. (1977), "Applied Linear Algebra", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., USA.

.../.

- {48} - NOTON,M. (1972), "modern Control Engineering", Perganon Press Inc., Elmsford, N.Y., USA.
- {49} - OGATA,K. (1967), "State Space Analysis of Control Systems" , Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., USA.
- {50} - OREN,S.S. (1976), "On Quasi-Newton and Pseudo-Newton Algorithms", Journal of Optimization Theory and Applications , Vol.20, No.2.
- {51} - PACE,I.S.; BARNETT,S. (1972), "Comparison of Numerical Methods for Solving Liapunov Matrix Equations", International Journal of Control, Vol.15, No.5.
- {52} - PURI,N.N.; GROVER,W.A. (1967), "Optimal Control Design Via Successive Approximations", Preprints JACC, Philadelphia , Pa., USA.
- {53} - ROSENBROCK,H.H. (1960), "An Automatic Method for Finding the Greatest or Least Value of a Function", Computer Journal, Vol.3.
- {54} - SAFONOV,M.G.; ATHANS,M. (1977), "Gain and Phase Margins for Multiloop L-Q-G Regulators", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-22, No.2.
- {55} - SANDERS,C.W.; TACKER,E.C.; LINTON,T,A. (1974), "A New Class of Decentralized Filter for Interconnected Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-19, No.3.
- {56} - SANDELL,N.R.Jr.; VARAIYA,P.; ATHANS,M.; SAFONOV,M.G. (1978) , "Survey of Decentralized Control Methods for Large Scale Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-23, No.2.
- {57} - SAEKS,R. (1979), "On the Decentralized Control of Interconnected Dynamical Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-24, No.2.

.../.

- {58} - SMITH, R.A. (1968), "Matrix Equation $XA+BX=C$ ", SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol.16, No.1.
- {59} - SMITH, P.G. (1971), "Numerical Solution of the Matrix Equation $AX+XA^T+B=0$ ", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-16, No.3.
- {60} - SPEYER, J.L. (1979), "Computation and Transmission Requirements for a Decentralized Linear-Quadratic-Gaussian Control Problem", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-24, No.2.
- {61} - THOMPSON, W.A.; PAYNE, H.J. (1972), "Traffic Responsive Control by on-Ramp Regulation for the Hollywood Freeway", USCEE Report 432, University of Southern California, Los Angeles, USA.
- {62} - VARAIYA, P.P. (1972), "Notes on Optimization", Notes on System Sciences, Van Nostrand Reinhold, New York, USA.
- {63} - YASUDA, K.; HISAI, K. (1979), "Upper and Lower Bounds on the Solution of the Algebraic Riccati Equation", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-24, No.3.
- {64} - WITSENHAUSEN, H.S. (1968), "A Counterexample in Stochastic Optimal Control", SIAM Journal of Control, Vol.6, No.1.
- {65} - WONHAM, W.M.; CASHMAN, W.F. (1968), "A Computational Approach to Optimal Control of Stochastic Stationary Systems", Preprints of JACC, Ann Arbor, Michigan, USA.
- {66} - ZADEH, L.A.; DESOER, C.A. (1963), "Linear System Theory: The State Space Approach", McGraw-Hill, New York, USA.
- {67} - NAEIJE, W.J.; VALK, P.; BOSGRA, O.H. (1973), "Design of Optimal Incomplete State Feedback Controllers for Large Linear Constant Systems", 5th. IFIP Conference on Optimization Techniques, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Berlin, Alemanha.

...