UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E CONTROLE DE ENERGIA

Filtragem Robusta Via Combinação Convexa de Filtros de Kalman

Rafael de Castro Duarte Martins
Engenheiro Eletricista - FEEC/Unicamp (2004)

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, área de concentração: **Automação**.

Banca Examinadora

Prof. Dr. José C. Geromel (Orientador) .... DSCE/FEEC/Unicamp
Prof. Dr. Akebo Yamakami .... DT/FEEC/Unicamp
Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val .... DT/FEEC/Unicamp
Prof. Dr. Alexandre Trofino Neto .... DAS/UFSC

Campinas, SP

11 de Abril de 2007

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

M366f	Martins, Rafael de Castro Duarte Filtragem robusta via combinação convexa de filtros de Kalman / Rafael de Castro Duarte Martins. --Campinas, SP: [s.n.], 2007. Orientador: José C. Geromel Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. 1. Kalman, Filtragem de. 2. Teoria dos sistemas. 3. Programação (Matemática). I. Geromel, José C. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Robust filtering via convex combination of Kalman filters.
Palavras-chave em Inglês: Kalman filters, System theory, Programming (Mathematics).
Área de concentração: Automação
Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica
Banca examinadora: Akebo Yamakami, João Bosco Ribeiro do Val e Alexandre Trofino Neto.
Data da defesa: 11/04/2007
Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

Resumo

Neste trabalho, é proposto um novo método para o projeto de filtros robustos em norma $\mathcal{H}_2$, que consiste na utilização de uma combinação linear dos filtros de Kalman obtidos para os vértices do politopo de incertezas. Para esta classe de filtros, são obtidos problemas, expressos na forma de LMIs, para a determinação dos coeficientes que produzem o melhor filtro robusto. Inicialmente, uma sub-classe de sistemas politópicos é considerada e, em seguida, os resultados são generalizados para sistemas a tempo contínuo e discreto com incertezas paramétricas politópicas. São definidos limitantes inferior e superior para a norma do erro de estimação que permitem avaliar a qualidade do filtro proposto. Sua ordem é geralmente maior que a do sistema em estudo, o que contribui para melhorar o seu desempenho.

Palavras-chave: Filtragem Robusta, Filtros de Kalman, Desigualdades Matriciais Lineares.

Abstract

In this work, a new method to $\mathcal{H}_2$ robust filtrer design is proposed. A convex combination of Kalman filters, calculated in each vertex of the uncertainty polytope, is used to synthesize the robust filter. For this model, the best one is calculated through a convex programming problem, expressed in terms of LMIs. Inicially a sub-class of polytopic systems is considerated and later it is widened to cope with both continuous and discrete time systems subject to polytopic parameter uncertainty. Lower and upper bounds of the estimation error norm are defined in order to evaluate the quality of the proposed filter. Its order generally is greater than the order of the plant, which contributes to reduce conservatism.

Keywords: Robust filtering, Kalman filters, Linear Matrix Inequalities.

Agradecimentos

Gostaria, sinceramente, de agradecer às pessoas que, não só tornaram este trabalho possível, mas que também me apoiaram durante os anos dedicados ao mestrado e à graduação em Engenharia Elétrica, em especial:

Ao meu orientador Prof. José C. Geromel, por suas idéias brilhantes e pela paciência durante o mestrado e a iniciação científica.

Ao Prof. Maurício C. de Oliveira, que me orientou durante a iniciação científica.

Aos professores da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, com quem aprendi mais do que simplesmente circuitos elétricos e equações de Maxwell.

Aos colegas de graduação, que formaram uma das melhores turmas que se tem notícia.

A todos meus amigos, especialmente: Neto, Rodrigo, Kazuo, Lomaski, Sako e Cincoetti.

Aos colegas de laboratório e bandejão: Rubens, Elias, Pateta, Leonardo, Roger, Fazanaro, Anzai, Andrea, Fioravanti e Grace.

A Luciana, por estar do meu lado este tempo todo.

À minha família pelo apoio durante toda minha vida: Vô Azael, Tia Nice, Tio Alvise, Tia Raquel, Tio Ivan, meus primos e também a quem deixa saudades: Vó Nete, Vô Zé, Vó Landa e Bisa.

Aos meus irmãos, que são muito importantes para mim.

Aos meus pais que sempre incentivaram e deram condições para me dedicar aos estudos. Devo tudo a vocês!

À FAPESP, pelo apoio financeiro a este trabalho e à iniciação científica.

Sumário

Lista de Figuras **vi**

Lista de Tabelas **vii**

1 Introdução **1**

1.1 Apresentação da Dissertação 2

1.2 Notação 3

2 Filtragem Linear **5**

2.1 Sistemas Lineares Invariantes no Tempo 5

2.2 Norma $\mathcal{H}_2$ 6

2.3 Cálculo da Norma $\mathcal{H}_2$ através de LMIs 8

2.4 Problema de Filtragem 10

2.5 Filtragem para Sistemas com Parâmetros Conhecidos 12

2.5.1 Sistemas a Tempo Contínuo 13

2.5.2 Sistemas a Tempo Discreto 15

2.6 Incertezas e Estrutura de Filtragem Proposta 16

2.7 Conclusão 17

3 Filtragem Robusta para uma Classe de Sistemas Politópicos **18**

3.1 Sistemas a Tempo Contínuo 20

3.1.1 Aproximação Linear 20

3.1.2 Modelo Quadrático 22

3.1.3 Exemplo 25

3.2 Sistemas a Tempo Discreto 27

3.2.1 Aproximação Linear 27
3.2.2 Modelo Quadrático 27
3.2.3 Exemplo 29
3.3 Conclusão 30

4 Filtragem Robusta para Sistemas com Incertezas Politópicas 32
4.1 Modelo de Incertezas 33
4.2 Estrutura e Desempenho 34
4.3 Sistemas a Tempo Contínuo 36
4.3.1 Exemplo 38
4.4 Sistemas a Tempo Discreto 41
4.4.1 Exemplo 43
4.4.2 Exemplo 44
4.5 Conclusão 45

5 Conclusões e Perspectivas 47

Referências bibliográficas 49

Lista de Figuras

2.1 Estrutura de Filtragem 11

2.2 Banco de Filtros 16

3.1 Norma do erro de estimação para os filtros de Kalman(K_1 e K_2) e o filtro proposto . 26

3.2 Diagrama de Bode do ruído e filtro do exemplo 3.1.3 26

4.1 Norma do erro de estimação para os filtros de Kalman(K_1 e K_2) e o filtro proposto . 40

4.2 Norma do erro de estimação para os filtros de Kalman(K_1 e K_2) e o filtro proposto . 41

Lista de Tabelas

3.1 Resultados do exemplo 3.1.3 25
3.2 Resultados do exemplo 3.2.3 29

4.1 Norma garantida do erro para o exemplo 4.3.1 39
4.2 Norma garantida do erro para o exemplo 4.4.1 44
4.3 Norma garantida do erro para o exemplo 4.4.2 45

Capítulo 1

Introdução

O objetivo do projeto de filtros é criar um sistema que reproduza sinais de interesse, reconstituídos com a menor influência possível do ruído presente nos sinais de entrada do filtro. Para um sistema com parâmetros bem definidos, a solução ótima deste problema é o filtro de Kalman. No entanto, grande parte dos sistemas reais possuem incerteza em seus parâmetros. Essa incerteza, dependendo de sua natureza e influência, pode fazer com que o filtro projetado para as características nominais do sistema não seja o mais apropriado quando ele não obedece à risca estas características. Neste caso, é necessário que o projeto leve em conta as incertezas e que o resultado seja um filtro robusto, isto é, tolerante às variações das características do sistema.

Nos últimos anos, o problema de filtragem robusta foi considerado em diversos trabalhos. Apesar disto, não há atualmente na literatura uma solução ótima para este problema. A principal dificuldade surge da necessidade de um filtro único, que tenha um limitante superior para a norma do erro de estimação válido para todos os modelos possíveis, gerados através dos parâmetros incertos do sistema. Podemos destacar as contribuições ao tema feitas para sistemas a tempo contínuo em (Geromel 1999), (Li, Luo, Davidson, Wong & Bossé 2002), (Souza & Trofino 1999), (Tuan, Apkarian & Nguyen 2001) e (Xie, Soh & de Souza 1994); e para sistemas a tempo discreto em (Geromel, de Oliveira & Bernussou 2002), (Shaked, Xie & Soh 2001), (Theodor & Shaked 1996) e (Xie, Soh & Du 1999). Todos os resultados presentes nestes trabalhos têm uma característica em comum, que é a ordem do filtro projetado igual à ordem do sistema.

Para um sistema de características bem definidas, o filtro ótimo, chamado filtro de Kalman, é um sistema linear invariante no tempo e de ordem igual à ordem do sistema. No caso de um sistema com incertezas paramétricas, o projeto do filtro consiste em um problema do tipo minimax. Ou seja, no caso da filtragem robusta, objetiva-se encontrar o melhor filtro, que garanta uma norma mínima do erro de estimação para todo o domínio de incertezas do sistema estudado. Nesta situação, a norma do erro é mínima em relação aos parâmetros do filtro e máxima em relação às incertezas do sistema. A solução de equilíbrio deste problema é difícil de ser calculada, e existe método para encontrá-la apenas em uma sub-classe de sistemas com incertezas paramétricas politópicas, veja (Regis Filho 2004).

Neste trabalho, consideramos sistemas contínuos e discretos no tempo, sujeitos a incertezas paramétricas politópicas. O filtro robusto será determinado através de uma abordagem minimax. Os problemas são resolvidos utilizando-se desigualdades matriciais lineares - LMIs[1]. Propomos um limitante inferior para a norma do erro de estimação, que fornece um parâmetro para inferir a distância do filtro projetado ao filtro robusto ótimo. O projeto do filtro é feito através de uma classe restrita de sistemas lineares. Desta forma podemos encontrar uma solução sub-ótima do problema. Os exemplos considerados aqui mostram que apesar de se tratar de uma solução sub-ótima, a metodologia proposta apresenta resultados melhores que os existentes na literatura e, em alguns casos, significativamente próximos da otimalidade. Esta solução difere das soluções apresentadas na literatura na ordem do filtro encontrado, que neste trabalho é, a menos de possíveis cancelamentos de pólos e zeros, igual à ordem do sistema vezes o número de vértices do conjunto politópico de incertezas.

1.1 Apresentação da Dissertação

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos. Este primeiro capítulo contém a introdução ao tema da dissertação e a estrutura de capítulos adotada.

O segundo capítulo apresenta uma revisão de alguns conceitos e ferramentas matemáticas fundamentais para a elaboração deste trabalho. Em especial, apresentamos a representação de sistemas dinâmicos lineares, a norma $\mathcal{H}_2$, bem como a metodologia utilizada para seu cálculo; o problema de filtragem clássico e sua solução para sistemas sem incertezas paramétricas. Ao final do capítulo há uma rápida explicação sobre sistemas com incertezas paramétricas e o modelo de filtragem proposto neste trabalho.

O terceiro capítulo define o primeiro modelo de incertezas tratado, que consiste em sistemas lineares cujas funções de transferência dependem linearmente dos parâmetros incertos. O problema de

[1] do inglês, Linear Matrix Inequalities

filtragem é então resolvido considerando o modelo de filtros proposto neste trabalho, tanto para sistemas contínuos e discretos no tempo. O capítulo contém ainda exemplos de sistemas com incertezas e a utilização do método proposto, e comentários sobre os resultados obtidos.

O quarto capítulo expande o modelo de incertezas paramétricas do capítulo anterior para tratar sistemas com incertezas paramétricas politópicas genéricos. São propostos limitantes inferior e superior para a norma do erro de estimação dos filtros robustos. O problema de filtragem para estes sistemas é resolvido através do mesmo modelo de filtro proposto e utilizando-se LMIs. Para esta classe de sistemas incertos a solução ótima do problema de estimação robusta não é conhecida e a metodologia proposta neste trabalho obtém resultados melhores que os presentes na literatura para os exemplos considerados no capítulo.

Encerrando, o quinto capítulo contém conclusões sobre o método proposto e perspectivas para trabalhos futuros.

1.2 Notação

A notação utilizada ao longo deste texto é convencional. Letras latinas maiúsculas denotam matrizes e letras minúsculas denotam vetores ou escalares. As letras gregas são utilizadas para escalares e conjuntos. Para simplificar a notação de matrizes simétricas o sinal $\bullet$ indica o elemento simétrico em relação à sua posição. Funções de transferência são notadas de duas formas distintas :

$$\begin{aligned} H(\zeta) &= C(\zeta I - A)^{-1}B + D \\ &= \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \end{aligned} \tag{1.1}$$

ficando evidenciada uma possível representação de estado mínima definida pelas matrizes reais de dimensões compatíveis (A, B, C, D). A notação $H(\omega)$ indica duas situações diversas :

- para sistemas a tempo contínuo $H(\omega) = H(\zeta)$ calculada para $\zeta = j\omega$ com $\omega \in \mathbb{R}$;
- para sistemas a tempo discreto $H(\omega) = H(\zeta)$ calculada para $\zeta = e^{j\omega}$ com $\omega \in \mathbb{R}$.

o uso de cada uma delas, sem ambigüidade, será definido pelo contexto. A notação $H(\omega)^{\sim}$ indica o complexo conjugado transposto de $H(\omega)$. O simplex unitário de dimensão N, composto por todos os escalares $\lambda_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, N$ tais que $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$ é denotado por Λ. Funções de transferência que dependem de forma não linear de $\lambda \in \Lambda$ são denotadas por $H(\lambda, \omega)$. A notação $H_\lambda(\omega)$ ou A_λ é usada para explicitar a dependência linear de funções de transferência ou matrizes em relação a $\lambda \in \Lambda$. A função traço de matriz é denotada $tr(.)$.

Capítulo 2

Filtragem Linear

Neste capítulo apresentamos o formalismo matemático utilizado durante o trabalho. Inicialmente introduzimos o cálculo de norma $\mathcal{H}_2$ para sistemas dinâmicos lineares contínuos ou discretos no tempo. Duas versões são discutidas, a saber, o cálculo de normas a partir dos gramianos e alternativamente através de problemas de programação convexa expressos por desigualdades matriciais lineares (LMIs).

Em seguida, o problema de filtragem clássico que levou à determinação do Filtro de Kalman é introduzido. Apresentamos sua solução ótima para sistemas contínuos e discretos no tempo através de problemas descritos por LMIs. Trata-se de re-apresentar resultados clássicos porém com uma visão voltada para a programação matemática que será útil no tratamento dos capítulos posteriores.

Este capítulo termina com uma rápida discussão a respeito dos modelos dinâmicos sujeitos a parâmetros desconhecidos porém pertencentes a um domínio poliedral convexo dado. Para esta classe de sistemas lineares com parâmetros incertos, discutimos o problema de filtragem ótima robusta, bem como, introduzimos a estrutura proposta para os filtros a serem projetados nos capítulos seguintes.

2.1 Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Um sistema linear invariante no tempo, a tempo contínuo pode ser representado no espaço de estados pelas seguintes equações:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \tag{2.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Dw(t) \tag{2.2}$$

onde $t \geqslant 0$ é a variável independente, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $w(t) \in \mathbb{R}^p$ é a entrada e $y(t) \in \mathbb{R}^q$ é a saída do sistema. Em todo o decorrer deste texto assumimos que os sistemas tratados sempre evoluem a partir de condições iniciais nulas. Para este modelo, podemos escrever sua função de transferência, definida no domínio da transformada de Laplace, dada por

$$H(\zeta) = C(\zeta I - A)^{-1}B + D \tag{2.3}$$

No caso de sistemas a tempo discreto, a representação no espaço de estados passa a ser

$$x(k+1) = Ax(k) + Bw(k) \tag{2.4}$$

$$y(k) = Cx(k) + Dw(k) \tag{2.5}$$

onde $k \geqslant 0$ é a variável independente. Da mesma forma que no caso anterior, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $w(k) \in \mathbb{R}^p$ é a entrada e $y(k) \in \mathbb{R}^q$ é a saída do sistema e, em todo o decorrer deste texto assumimos que ele evolui a partir de condições iniciais nulas. A função de transferência, obtida a partir da aplicação da transformada $\mathcal{Z}$, é dada por

$$H(\zeta) = C(\zeta I - A)^{-1}B + D \tag{2.6}$$

Como já ressaltado no capítulo anterior, a expressão $H(\omega)$ é utilizada para representar as funções de transferência de sistemas contínuos e discretos no tempo, $H(\zeta)$, avaliadas em $\zeta = j\omega$ e $\zeta = e^{j\omega}$, respectivamente.

2.2 Norma $\mathcal{H}_2$

Para podermos medir a qualidade de um determinado filtro é preciso definir um critério de qualidade. Neste trabalho o critério adotado é a norma $\mathcal{H}_2$ do erro de estimação.

Um sistema linear contínuo e invariante no tempo, como os que são aqui tratados, tem função de transferência que pertence ao domínio $\mathcal{H}_2$ se e somente se ele for estável e estritamente próprio. Neste domínio, podemos atribuir a cada função uma norma, chamada norma $\mathcal{H}_2$, definida por

$$\|H(\zeta)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} tr\left(H(-j\omega)'H(j\omega)\right)d\omega \tag{2.7}$$

Empregando o teorema de Parseval podemos reescrever a expressão (2.7) de modo a permitir que seja calculada no domínio do tempo. O vetor e_i representa a i-ésima coluna da matriz identidade de dimensão p portanto a resposta impulsiva do sistema para uma entrada $w_i(t) = e_i\delta(t)$, dada por $y_i(t) = h(t) * e_i\delta(t)$ onde $h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(\zeta))$, permite determinar

$$\begin{aligned} \|H(\zeta)\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{p} e_i{}'H(-j\omega)'H(j\omega)e_i d\omega \\ &= \sum_{i=1}^{p}\int_0^{\infty} y_i(t)'y_i(t)dt \\ &= \int_0^{\infty} tr\left(h(t)'h(t)\right)dt \end{aligned} \tag{2.8}$$

Podemos ainda utilizar a expressão da resposta ao impulso, $h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$, obtida a partir da representação de estados, para obter uma fórmula alternativa para o cálculo da norma, ou seja

$$\begin{aligned} \|H(\zeta)\|_2^2 &= \int_0^{\infty} tr\left(h(t)'h(t)\right)dt \\ &= \int_0^{\infty} tr\left(B'e^{A't}C'Ce^{At}B + B'e^{A't}C'D\delta(t) + D'Ce^{At}B\delta(t) + D'D\delta^2(t)\right)dt \\ &= tr\left(B'\int_0^{\infty} e^{A't}C'Ce^{At}dtB\right) + tr(B'C'D) + \\ &\quad + tr(D'CB) + tr(D'D)\int_0^{\infty}\delta^2(t)dt \\ &= tr\left(B'PB\right) + tr(B'C'D) + tr(D'CB) + tr(D'D)\int_0^{\infty}\delta^2(t)dt \end{aligned} \tag{2.9}$$

Como podemos perceber, esta norma é finita apenas para sistemas que tenham a matriz A com autovalores com parte real negativa e $D = 0$, pois $tr(D'D)\int_0^{\infty}\delta^2(t)dt$ é zero para $D = 0$ e infinito caso contrário. Isto justifica a necessidade dos sistemas serem estáveis e estritamente próprios, e simplifica a expressão para o cálculo da norma

$$\|H(\zeta)\|_2^2 = tr\left(B'PB\right) \tag{2.10}$$

onde o gramiano de observabilidade $P = \int_0^{\infty} e^{A't}C'Ce^{At}dt \geqslant 0$ é obtido pela solução da seguinte equação de Lyapunov

$$A'P + PA + C'C = 0 \tag{2.11}$$

Alternativamente a mesma norma pode ser calculada por uma formulação dual, utilizando o gramiano de observabilidade $Q = \int_0^\infty e^{At}BB'e^{A't}dt \geqslant 0$, que leva às equações

$$\|H(\zeta)\|_2^2 = tr\,(CQC') \qquad AQ + QA' + BB' = 0 \tag{2.12}$$

Para sistemas a tempo discreto a norma $\mathcal{H}_2$ tem expressões análogas àquelas para sistemas a tempo contínuo. Neste caso, a única restrição para a existência da norma é que o sistema seja assintoticamente estável. Lembrando que a transformada $\mathcal{Z}$ inversa fornece $h(0) = D$ e $h(k) = CA^{k-1}B$ para todo $k \geqslant 1$, com o teorema de Parseval obtemos

$$\begin{aligned} \|H(\zeta)\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} tr\left(H(e^{-j\omega})'H(e^{j\omega})\right)d\omega \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} tr\,(h(k)'h(k)) \\ &= tr\,(D'D + B'PB) \qquad (2.13) \\ &= tr\,(DD' + CQC') \qquad (2.14) \end{aligned}$$

onde os gramianos de observabilidade e controlabilidade, $P \geqslant 0$ e $Q \geqslant 0$, são definidos por:

$$P = \sum_{k=0}^{\infty}(A')^k C'CA^k \qquad A'PA - P + C'C = 0 \tag{2.15}$$

$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} A^k BB'(A')^k \qquad AQA' - Q + BB' = 0 \tag{2.16}$$

Vale a pena observar que para os casos contínuo e discreto, as equações de Lyapunov que permitem determinar os gramianos, admitem uma única solução como decorrência da estabilidade assintótica dos sistemas em consideração.

2.3 Cálculo da Norma $\mathcal{H}_2$ através de LMIs

Neste trabalho, utilizamos LMIs para o cálculo da norma $\mathcal{H}_2$. Deste modo, podemos utilizar algoritmos de otimização convexa para a solução dos problemas propostos. As equações de Lyapunov em (2.11), (2.12), (2.15) e (2.16) por serem lineares, podem ser transformadas em desigualdades, ou seja LMIs, através de uma manipulação algébrica simples e do complemento de Schur. Desta forma torna-se possível a utilização de métodos numéricos para a resolução de LMIs e o conseqüente cálculo da norma $\mathcal{H}_2$.

Lema 2.1. *Considere A assintoticamente estável. Para toda a matriz X simétrica definida positiva tal que*

$$A'X + XA + C'C < 0 \tag{2.17}$$

temos $\|H(\zeta)\|_2^2 < tr(B'XB)$.

Prova. Qualquer matriz que satisfaça a desigualdade (2.17) resolve a equação de Lyapunov

$$A'X + XA + C'C + R = 0 \tag{2.18}$$

com $R > 0$. Portanto $X > P \geqslant 0$ e conseqüentemente $\|H(\zeta)\|_2^2 = tr(B'PB) < tr(B'XB)$, o que prova o lema proposto. □

Este resultado é bem conhecido (Oliveira 1999) e é também válido para sistemas a tempo discreto. Como qualquer solução $X > 0$ factível em relação à desigualdade (2.17) é limitada inferiormente, isto é $X > P \geqslant 0$, a minimização da quantidade $tr(B'XB)$ sujeita às restrições $X > 0$ e (2.17) fornece a norma $\mathcal{H}_2$ de $H(\zeta)$. Desta forma reescrevemos as expressões (2.10) e (2.11) na forma de LMIs.

$$\begin{gathered}
\|H(\zeta)\|_2^2 = \min_{W,X} tr(W) \\
\begin{bmatrix} W & B'X \\ \bullet & X \end{bmatrix} > 0 \\
\begin{bmatrix} A'X + XA & C' \\ \bullet & -I \end{bmatrix} < 0
\end{gathered} \tag{2.19}$$

A mesma manipulação pode ser feita para o cálculo da norma na forma dual para sistemas contínuos no tempo, levando às expressões

$$\|H(\zeta)\|_2^2 = \min_{W,Y} tr(W)$$
$$\begin{bmatrix} W & CY \\ \bullet & Y \end{bmatrix} > 0$$
$$\begin{bmatrix} AY + YA' & B \\ \bullet & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{2.20}$$

No caso de sistemas a tempo discreto as LMIs para o cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ podem ser escritas da seguinte forma

$$\|H(\zeta)\|_2^2 = \min_{W,X} tr(W) \qquad \begin{bmatrix} W & B'X \\ \bullet & X \end{bmatrix} > 0 \qquad \begin{bmatrix} X & A'X & C' \\ \bullet & X & 0 \\ \bullet & \bullet & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{2.21}$$

$$\|H(\zeta)\|_2^2 = \min_{W,Y} tr(W) \qquad \begin{bmatrix} W & CY \\ \bullet & Y \end{bmatrix} > 0 \qquad \begin{bmatrix} Y & AY & B \\ \bullet & Y & 0 \\ \bullet & \bullet & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{2.22}$$

Em relação a todos os problemas envolvendo LMIs devemos ressaltar que os conjuntos de restrições são abertos. Rigorosamente deveríamos tê-los formulado com “$\inf$” no lugar de “$\min$”, porém isto não é necessário se entendermos que todos os conjuntos abertos aqui tratados podem ser fechados com um escalar $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, sem que isto altere a solução ótima do problema em consideração. Os métodos de pontos interiores, muito usados para tratar problemas envolvendo LMIs, levam este fato em consideração fazendo com que a precisão $\varepsilon > 0$ seja definida pelo usuário.

2.4 Problema de Filtragem

O problema de filtragem consiste em recuperar um sinal de interesse que foi corrompido pela presença de ruído. Este ruído pode ser devido, por exemplo, a um canal de transmissão ruidoso ou a um transdutor sensível a interferências externas.

Podemos representar o problema através da figura 2.1, que mostra um sistema $H(\omega)$, que gera o sinal z, a ser estimado pelo filtro, e o sinal y, utilizado como entrada do filtro. Neste contexto, o sinal

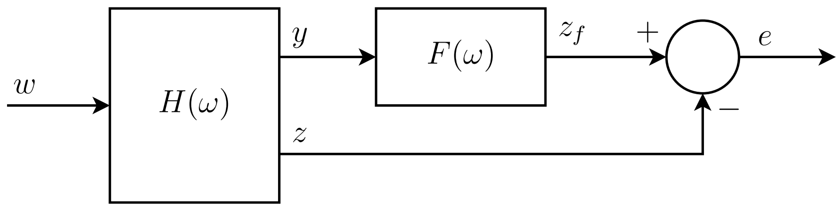

Fig. 2.1: Estrutura de Filtragem

de entrada do sistema w é um vetor aleatório, na verdade um ruído branco. O filtro produz um sinal de saída z_f, que é a estimativa do sinal z. A diferença $e = z - z_f$ é chamada de erro de estimação, e a minimização do erro médio quadrático fornece um critério de qualidade para o projeto do filtro. Alternativamente, o mesmo problema pode ser formulado pela minimização da norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência entre o sinal de entrada e o erro de estimação.

Retomando a figura 2.1, a função de transferência $H(\omega)$ pode ser particionada em funções de transferência $T(\omega)$ e $S(\omega)$, que produzem os sinais y e z, respectivamente, isto é

$$H(\omega) = \begin{bmatrix} T(\omega) \\ S(\omega) \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

cuja representação de estado é escrita na forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \tag{2.24}$$

$$y(t) = C_t x(t) + D_t w(t) \tag{2.25}$$

$$z(t) = C_s x(t) + D_s w(t) \tag{2.26}$$

que permite definir o problema para a obtenção do filtro ótimo como sendo

$$\min_{F \in \mathcal{F}} ||S(\omega) - F(\omega)T(\omega)||_2^2 \tag{2.27}$$

tendo em vista que a função de transferência entre $\hat{w}$ e $\hat{e}$ é dada por $E(\omega) = S(\omega) - F(\omega)T(\omega)$. O domínio $\mathcal{F}$ engloba todos os filtros lineares, causais e invariantes no tempo. Quando o modelo do sistema não possui incertezas, a solução ótima do problema (2.27) nos dá o filtro de Kalman. É importante observar que o filtro de Kalman tem duas propriedades que devem ser ressaltadas. A primeira diz respeito ao fato de que o filtro de Kalman minimiza globalmente a norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência $E(\omega)$, isto é, não é possível determinar um outro filtro invariante no tempo, de qualquer ordem, com melhor desempenho. A segunda é que o filtro de Kalman tem ordem igual à ordem da função de transferência $H(\omega)$.

2.5 Filtragem para Sistemas com Parâmetros Conhecidos

O projeto de um filtro ótimo para sistemas com parâmetros conhecidos, isto é, com a função de transferência $H(\omega)$ dada, determina o chamado filtro de Kalman. Este filtro pode ser calculado através da solução de uma equação de Riccati que estabelece as condições de otimalidade do problema de filtragem. Em seguida, apresentamos uma solução alternativa obtida através de LMIs. Em seguida, assumimos que o sistema seja assintoticamente estável. Muito embora esta hipótese não seja importante no contexto do filtro de Kalman, ela torna-se necessária para a síntese de filtros robustos.

Definindo um filtro genérico porém com ordem fixa, igual à ordem de $H(\omega)$, através de sua representação de estados

$$\dot{x_f}(t) = A_f x_f(t) + B_f y(t) \tag{2.28}$$

$$z_f(t) = C_f x(t) + D_f y(t) \tag{2.29}$$

e conectando-o ao sistema (2.24)-(2.26) como na figura 2.1, podemos definir um novo vetor de estados $x_{sf} \triangleq [x; x_f]$ e escrever o modelo para o erro de estimação na forma

$$\dot{x}_{sf}(t) = \mathcal{A}x_{sf}(t) + \mathcal{B}w(t) \tag{2.30}$$

$$e(t) = \mathcal{C}x(t) + \mathcal{D}w(t) \tag{2.31}$$

onde as matrizes $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ são dadas por

$$\mathcal{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C_t & A_f \end{bmatrix} \qquad \mathcal{B} \triangleq \begin{bmatrix} B \\ B_f D_t \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

$$\mathcal{C} \triangleq \begin{bmatrix} (C_s - D_f C_t) & -C_f \end{bmatrix} \qquad \mathcal{D} \triangleq \begin{bmatrix} (D_s - D_f D_t) \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

onde devemos notar que a estabilidade assintótica de $\mathcal{A}$ é assegurada pela estabilidade assintótica de A e da matriz A_f do filtro que se deseja projetar.

2.5.1 Sistemas a Tempo Contínuo

O teorema 2.2 permite o cálculo do filtro de Kalman para um sistema a tempo contínuo utilizando-se LMIs. Ressaltamos que se trata de resultados bastante conhecidos (Boyd & Vandenberghe 2004) e que são largamente utilizados nos capítulos subseqüentes.

Teorema 2.2. *O filtro que produz a melhor estimativa, ou seja, produz o menor erro de estimação pode ser calculado resolvendo-se o problema convexo*

$$\begin{aligned} min \quad & tr(W) \\ s.a. \quad & \begin{bmatrix} W & B'X + D_t'L' \\ \bullet & X \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} A'X + XA + C_t'L' + LC_t & C_s' \\ \bullet & -I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \tag{2.34}$$

onde as matrizes $W = W'$, $X = X'$ e L são de dimensões apropriadas. As matrizes da representação em espaço de estado do filtro de Kalman são calculadas da seguinte forma

$$K = \left[\begin{array}{c|c} A + X^{-1}LC_t & -X^{-1}L \\ \hline C_s & 0 \end{array}\right] \tag{2.35}$$

Prova. A norma do erro de estimação pode ser calculada através da minimização de $tr(W)$, obedecendo as seguintes desigualdades

$$\begin{bmatrix} W & \mathcal{B}P \\ \bullet & P \end{bmatrix} > 0 \tag{2.36}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}'P + P\mathcal{A} & \mathcal{C}' \\ \bullet & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{2.37}$$

Particionamos a matriz simétrica P, sua inversa e definimos uma matriz T da seguinte forma

$$P = \begin{bmatrix} X & U \\ U' & \hat{X} \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \hat{V} \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & V'Y^{-1} \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

Definimos as variáveis $L \triangleq UB_f$ e $Z \triangleq Y^{-1}$. Da definição de P e P^{-1} é possível provar que $U' + \hat{X}VY^{-1} = 0$ e $X + UV'Y^{-1} = Z$. Em seguida, multiplicamos a desigualdade (2.36) à direita por $diag(I, T)$ e à esquerda por sua transposta.

$$\begin{bmatrix} W & B'X + D_t{}'L' & B'Z \\ \bullet & X & Z \\ \bullet & \bullet & Z \end{bmatrix} > 0 \tag{2.39}$$

Definimos as variáveis $G \triangleq C_f V'Y^{-1}$ e $Q \triangleq UA_f V'Y^{-1}$. Multiplicando a desigualdade (2.37) à direita por $diag(T, I)$ e à esquerda por sua transposta, obtemos

$$\begin{bmatrix} A'X + XA + C_t{}'L' + LC_t & A'Z + XA + LC_t + Q & C_s{}' \\ \bullet & A'Z + ZA & C_s{}' - G' \\ \bullet & \bullet & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{2.40}$$

Multiplicamos esta desigualdade à direita e à esquerda pela matriz R obtemos:

$$R \triangleq \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

$$\begin{bmatrix} A'X + XA + C_t{}'L' + LC_t & C_s{}' & A'Z + XA + LC_t + Q \\ \bullet & -I & C_s - G \\ \bullet & \bullet & A'Z + ZA \end{bmatrix} < 0 \tag{2.42}$$

Como A é estável e $Z > 0$, podemos garantir que $A'Z + ZA < 0$ e simplificar a expressão (2.42) impondo $Q = -A'Z - XA - LC_t$ e $G = C_s$, mantendo a otimalidade e obtendo (2.36). A desigualdade (2.38) permite concluir que a solução ótima é dada pela escolha de $Z > 0$ factível arbitrariamente pequena. As variáveis Q, Z e G assim determinadas, fornecem a representação de estados do filtro dada por (2.35). Isto prova o teorema proposto. □

Este teorema mostra que o filtro de Kalman pode ser calculado, sem dificuldades, com uma rotina que resolve LMIs. Assim procedendo obtém-se o mesmo filtro que seria obtido através da solução das condições de otimalidade expressa por uma equação matricial de Riccati, ver (Colaneri, Geromel

& Locatelli 1997). Geralmente, a solução obtida com a equação de Riccati é menos custosa do ponto de vista computacional. No caso da síntese de filtros robustos a equação de Riccati não pode ser empregada pois não traduz a otimalidade do problema a ser resolvido.

2.5.2 Sistemas a Tempo Discreto

De maneira similar, o teorema 2.3 apresenta a solução ótima para o problema de filtragem para sistemas discretos no tempo sem incertezas.

Teorema 2.3. *O filtro de Kalman pode ser calculado para sistemas discretos, resolvendo-se o seguinte problema convexo*

$$\begin{aligned} min \quad & tr(W) \\ s.a. \quad & \begin{bmatrix} W & B'X + D_t{}'L' & D_s' - D_t'M' \\ \bullet & X & 0 \\ \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} X & A'X + C_t{}'L' & C_s{}' - C_t{}'M' \\ \bullet & X & 0 \\ \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \tag{2.43}$$

A matrizes da representação em espaço de estado do filtro de Kalman são calculadas da seguinte forma:

$$K = \left[\begin{array}{c|c} A + X^{-1}LC_t & -X^{-1}L \\ \hline C_s - MC_t & M \end{array}\right] \tag{2.44}$$

Prova. A prova deste teorema segue os mesmos passos da prova do teorema 2.2. □

Como a norma $\mathcal{H}_2$ para sistemas discretos não está restrita a funções de transferência estritamente próprias, a solução ótima do problema acima, geralmente é tal que $D_f = M \neq 0$. Se desejarmos obter um filtro estritamente próprio basta incluir a restrição $M = 0$. Neste caso, é evidente, o resultado será um erro de estimação maior (Hoang, Tuan, Apkarian & Hosoe 2004) porém o filtro resultante será mais simples e conseqüentemente mais fácil de ser implementado. Para que se possa comparar os resultados obtidos aqui com os resultados da literatura, quando necessária a restrição linear $M = 0$ será introduzida no cálculo do filtro. Em particular, isto ocorreu nas comparações descritas no capítulo 4.

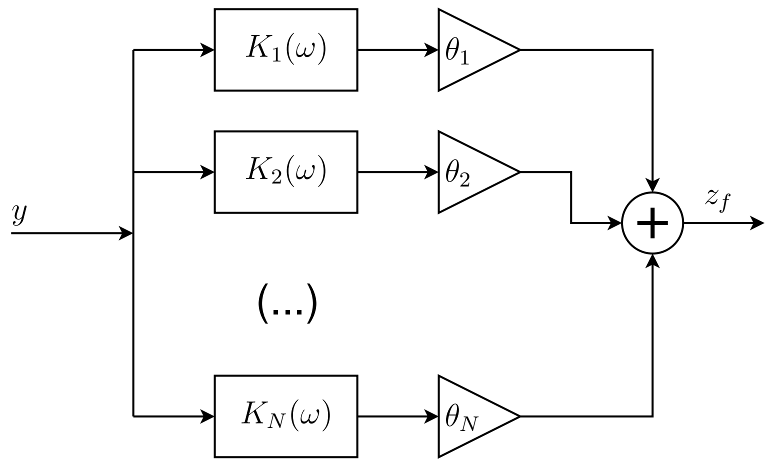

Fig. 2.2: Banco de Filtros

2.6 Incertezas e Estrutura de Filtragem Proposta

O modelo de filtro apresentado na seção anterior foi desenvolvido para sistemas com parâmetros conhecidos. Quando isto não ocorre, dizemos que se trata de um sistema com parâmetros incertos. Para essa classe de sistemas, é necessário utilizar um filtro robusto, que tenha um desempenho satisfatório em todo o domínio de incertezas paramétricas considerado. Neste trabalho, utilizamos o domínio de incertezas politópicas para representar os parâmetros incertos presentes no sistema em estudo. Este modelo é apresentado com maiores detalhes nos capítulos 3 e 4. De forma simplificada, podemos dizer que o domínio de incertezas é um politopo convexo, cujos vértices são modelos extremos do sistema com parâmetros bem determinados. Deste modo, as matrizes de sua representação de estado são combinações convexas, com pesos desconhecidos, das matrizes que definem a representação de estado dos vértices.

Neste trabalho, o filtro robusto será projetado como um banco de filtros, ilustrado na figura 2.2. Como os filtros que compõem o banco devem ser definidos antes da etapa de otimização, escolhemos os filtros de Kalman associados a cada um do vértices do politopo de incertezas. Esta escolha se deve ao fato de que estes filtros produzem a melhor estimativa do sinal desejado para cada um dos vértices do politopo.

O projeto do filtro robusto passa a ser a determinação dos coeficientes que minimizam a norma garantida do erro de estimação em todo domínio de incertezas. Assim sendo, o filtro robusto pode ser escrito na forma

$$F_\theta(\omega) = \sum_{j=1}^{N} \theta_j K_j(\omega) \tag{2.45}$$

para algum $\theta \in \Lambda$. O objetivo deste trabalho é determinar o melhor conjunto de pesos $\theta_1, \cdots, \theta_N$ de tal forma a minimizar o custo garantido associado ao erro de estimação (norma $\mathcal{H}_2$). Deve-se colocar em evidência que o problema associado à determinação dos pesos ótimos é convexo e pode ser expresso através de LMIs. As comparações realizadas mostram que este procedimento gera filtros robustos com melhor desempenho que aqueles existentes na literatura.

2.7 Conclusão

Neste capítulo foram apresentadas as principais ferramentas matemáticas utilizadas ao longo deste trabalho. Em especial, a norma $\mathcal{H}_2$, que fornece meios para a determinação de um critério de qualidade para o projeto de filtros. Foram determinadas expressões para o cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ através de LMIs, para que possam ser utilizados algoritmos de programação convexa.

Em seguida, o problema clássico de filtragem foi escrito como a minimização da norma da função de transferência do erro de estimação. A solução ótima deste problema é o filtro de Kalman e serve como ponto de partida para a construção do filtro robusto proposto neste trabalho.

Por último, o capítulo contém uma breve explicação sobre sistemas com parâmetros incertos e o modelo de incertezas paramétricas politópicas utilizado para representá-los em todo o trabalho. Deste modelo de incertezas surge a proposta da utilização de um banco de filtros para a obtenção do filtro robusto. A utilização dos filtros de Kalman para formar o banco pode parecer arbitrária, porém, é baseada na otimalidade destes filtros para os correspondentes modelos extremos do conjunto de incertezas. De fato, como será visto em exemplos nos próximos capítulos, essa escolha produz bons resultados.

Capítulo 3

Filtragem Robusta para uma Classe de Sistemas Politópicos

Inicialmente o modelo considerado neste trabalho para as incertezas paramétricas presentes nos sistemas engloba todos aqueles cujas funções de transferência dependam linearmente de um ou mais parâmetros incertos. Este modelo foi proposto por (Regis Filho 2004). Ele é importante pois para esta classe particular de incertezas paramétricas o problema de filtragem robusta admite uma solução ótima global que pode ser determinada sem grandes dificuldades. No capítulo seguinte consideraremos um modelo mais abrangente, porém com uma solução bastante mais complexa do mesmo problema.

Segundo este modelo, a função de transferência do sistema em estudo, $H(\omega)$, pertence a um conjunto $\mathcal{H}$, dado por:

$$\mathcal{H} = conv\{H_1(\omega), H_2(\omega), ..., H_N(\omega)\} \tag{3.1}$$

onde $conv\{\cdots\}$ representa o conjunto formado pela combinação convexa de todas as funções de transferência $H_1(\omega), \cdots, H_N(\omega)$. Assumimos que estas funções de transferência são assintoticamente estáveis. O conjunto $\mathcal{H}$ é um politopo de funções de transferência com N vértices ao qual a função de transferência do sistema incerto em estudo pertence. De fato, qualquer função de transferência do sistema em estudo pode ser escrita na forma

$$H(\omega) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i H_i(\omega) \tag{3.2}$$

onde $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ são as componentes de um vetor $\lambda \in \mathbb{R}^N$ pertencente ao simplex unitário em

$$\Lambda \triangleq \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N \ : \ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1, \lambda_i \geqslant 0 \right\} \tag{3.3}$$

Como a norma é uma função convexa e o máximo de uma função convexa em um conjunto politópico ocorre e um de seus vértices, para um filtro qualquer com função de transferência $F(\omega)$ podemos escrever

$$\begin{aligned} \max_{H \in \mathcal{H}} ||S(\omega) - F(\omega)T(\omega)||_2^2 &= \max_{\lambda \in \Lambda} \left\| \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)) \right\|_2^2 \\ &= \max_{i=1,\cdots,N} \|S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)\|_2^2 \\ &= \min_{\gamma} \{\gamma \ : \ \|S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)\|_2^2 \leqslant \gamma, \ i = 1, \cdots, N\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

O primeiro passo para sintetizar um filtro robusto dentro da proposta deste trabalho, discutida anteriormente, é encontrar os filtros de Kalman para cada um dos vértices do politopo de incertezas. Estes filtros servirão como vértices do politopo de filtros que servirá para a síntese do filtro robusto, ou seja para cada $j = 1, \cdots, N$ determinamos os filtros de Kalman

$$K_j(\omega) = \arg \min_{F \in \mathcal{F}} \|S_j(\omega) - F(\omega)T_j(\omega)\|_2^2 \tag{3.5}$$

e parametrizamos os filtros robustos através da combinação convexa

$$F_\theta(\omega) \triangleq \sum_{i=1}^{N} \theta_j K_j(\omega) \tag{3.6}$$

onde o vetor de pesos $\theta \in \Lambda$ deve ser convenientemente determinado. De fato, como o problema de filtragem robusta busca determinar o melhor filtro associado à pior incerteza paramétrica, ele pode ser formulado como

$$\min_{F \in \mathcal{F}} \max_{H \in \mathcal{H}} ||S(\omega) - F(\omega)T(\omega)||_2^2 \tag{3.7}$$

Assim sendo, levando em conta (3.4) e (3.6) obtemos a sua formulação final a ser utilizada ao longo deste capítulo, ou seja

$$\min_{\gamma,\theta\in\Lambda}\left\{\left\|S_i(\omega)-\left(\sum_{j=1}^{N}\theta_j K_j(\omega)\right)T_i(\omega)\right\|_2^2 \leqslant \gamma; i=1,...,N\right\} \tag{3.8}$$

Neste ponto deve ser observado que o problema acima é convexo e sua solução ótima global pode ser calculada sem dificuldades. Ademais a sua solução ótima permite determinar um filtro robusto com função de transferência (3.6) cuja ordem, antes do eventual cancelamento de pólos e de zeros é igual a N vezes a ordem de cada vértice do politopo $\mathcal{H}$. Como veremos nos próximos capítulos, este aspecto é fundamental para obter filtros com excelentes desempenhos.

3.1 Sistemas a Tempo Contínuo

Nesta seção abordaremos com detalhes vários aspectos do problema de filtragem (3.8). Utilizaremos dois métodos para determinar os coeficientes $\theta \in \Lambda$ que definem o filtro robusto. No primeiro, adotamos uma aproximação linear para o cálculo da norma do erro, esta maneira garante uma simplicidade ao problema de otimização, no entanto sua solução é sub-ótima. A segunda abordagem é através de um modelamento quadrático do problema de otimização. Nesta abordagem, o modelo é um pouco mais complexo, porém a solução ótima é calculada.

3.1.1 Aproximação Linear

A partir da função objetivo (3.8) e utilizando a desigualdade triangular podemos determinar um limitante superior γ_L para a norma do erro de estimação dado por

$$\left\|\sum_{j=1}^{N}\theta_j(S_i(\omega)-K_j(\omega)T_i(\omega))\right\|_2^2 \leqslant \sum_{j=1}^{N}\theta_j\left\|S_i(\omega)-K_j(\omega)T_i(\omega)\right\|_2^2 \leqslant \gamma_L \tag{3.9}$$

para todo $i=1,\cdots,N$. Essa expressão pode ser utilizada para a síntese de um filtro sub-ótimo. Isto se deve ao fato da desigualdade acima ser, geralmente, estrita. A vantagem, no entanto, é de termos um problema linear de otimização, o que permite o uso de algoritmos bastante simples e eficientes como é o caso do método Simplex. A formulação final é a seguinte

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\gamma_L, \theta \in \Lambda} & \gamma_L \\ s.a. & \sum\limits_{j=1}^{N} R_{ij}\theta_j \leqslant \gamma_L, \quad 1 \leqslant i \leqslant N \end{array} \tag{3.10}$$

onde $R_{ij} = \|S_i(\omega) - K_j(\omega)T_i(\omega)\|_2^2$ para todo $i, j = 1, \cdots, N$ são coeficientes calculados a priori tendo em vista que dispomos dos filtros de Kalman $K_j(\omega)$ para todo $j = 1, \cdots, N$. O lema seguinte fornece limitantes inferior e superior para o valor ótimo de γ_L. Isto é, podemos estabelecer limitantes inferior e superior para a norma do erro de estimação a partir das normas dos erros produzidas pelos filtros de Kalman.

Lema 3.1. *O valor ótimo da função objetivo γ_L^* do problema (3.10) admite os limitantes inferior e superior $\gamma_{inf} \leqslant \gamma_L^* \leqslant \gamma_{sup}$ dados por*

$$\gamma_{inf} \triangleq \max_{i=1,\cdots,N} \min_{j=1,\cdots,N} R_{ij} = \max_{i=1,\cdots,N} R_{ii} \tag{3.11}$$

$$\gamma_{sup} \triangleq \min_{j=1,\cdots,N} \max_{i=1,\cdots,N} R_{ij} \tag{3.12}$$

Prova. Como o filtro ótimo para cada um dos vértices é o filtro de Kalman associado, em função deste limitante inferior para cada um dos vértices, podemos definir um limitante inferior global. De fato,

$$\begin{aligned} \gamma_L^* &= \min_{\theta \in \Lambda} \max_{i=1,\cdots,N} \sum_{j=1}^{N} \theta_j \|S_i(\omega) - K_j(\omega)T_i(\omega)\|_2^2 \\ &\geqslant \max_{i=1,\cdots,N} \min_{\theta \in \Lambda} \sum_{j=1}^{N} \theta_j \|S_i(\omega) - K_j(\omega)T_i(\omega)\|_2^2 \\ &\geqslant \max_{i=1,\cdots,N} \min_{j=1,\cdots,N} \|S_i(\omega) - K_j(\omega)T_i(\omega)\|_2^2 \\ &\geqslant \max_{i=1,\cdots,N} \min_{j=1,\cdots,N} R_{ij} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Observe que sendo $K_i(\omega)$ o filtro ótimo para o vértice i, a segunda igualdade de 3.11 se verifica.

Por outro lado, considerando a utilização de cada filtro de Kalman no sistema incerto, podemos definir um limitante superior para o desempenho do filtro robusto. Neste sentido, fazendo $\theta_k = 1$ para

$k = j$ e $\theta_k = 0$ para $k \neq j$ que define um vetor $\theta \in \Lambda$, obtemos o limitante

$$\begin{aligned}
{\gamma_L}^* &= \min_{\theta \in \Lambda} \max_{i=1,\cdots,N} \sum_{j=1}^{N} \theta_j \, \|S_i(\omega) - K_j(\omega)T_i(\omega)\|_2^2 \\
&\leqslant \max_{i=1,\cdots,N} \|S_i(\omega) - K_j(\omega)T_i(\omega)\|_2^2
\end{aligned} \tag{3.14}$$

que é válido para todo $j = 1, \cdots, N$. O menor deles é exatamente o valor denominado γ_{sup} definido em (3.12), o que conclui a prova do lema proposto. $\square$

A existência de limitantes superior e inferior que podem ser facilmente calculados é um fato importante pois permite avaliar a distância (em termos do critério adotado) da solução sub-ótima calculada até solução ótima do problema de filtragem robusta.

3.1.2 Modelo Quadrático

Para o cálculo exato da norma do erro, podemos utilizar um modelo quadrático. Com isso o filtro robusto obtido é o ótimo global do problema (3.8), sendo portanto o melhor filtro dentre aqueles do conjunto de filtros proposto neste trabalho.

Teorema 3.2. *Para cada filtro da forma (3.6), a norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência do erro de estimação em cada vértice do politopo $\mathcal{H}$ pode ser calculada através de*

$$\begin{aligned}
\|S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)\|_2^2 &= \theta' Q_i \theta \\
Q_i(j,k) &= tr({B_{ij}}' P_{ijk} B_{ik}) \\
P_{ijk} &= \int_0^\infty e^{A'_{ij}t} {C_{ij}}' C_{ik} e^{A_{ik}t} dt
\end{aligned} \tag{3.15}$$

onde as matrizes (A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}) definem a representação de estado da função de transferência do erro de estimação $E_{ij}(\omega) = S_i(\omega) - K_j(\omega)T_i(\omega)$ para todo $i, j = 1, \cdots, N$.

Prova. Partindo da definição da norma $\mathcal{H}_2$ para o erro de estimação, obtemos

$$\begin{aligned}\|S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)\|_2^2 &= \left\|\sum_{j=1}^{N} \theta_j E_{ij}(\omega)\right\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} tr\left[\left(\sum_{j=1}^{N} E_{ij}(\omega)^{\sim}\theta_j\right)\left(\sum_{k=1}^{N} E_{ik}(\omega)\theta_k\right)\right] d\omega \\ &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} tr\left(E_{ij}(\omega)^{\sim}E_{ik}(\omega)\right) d\omega\theta_j\theta_k \\ &= \theta' Q_i \theta \end{aligned} \tag{3.16}$$

sendo que os elementos da matriz simétrica e semi-positiva definida Q_i podem ser calculados, utilizando-se o teorema de Parseval, da seguinte forma

$$\begin{aligned} Q_i(j,k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} tr\left(E_{ij}(\omega)^{\sim}E_{ik}(\omega)\right) d\omega \\ &= \int_0^{\infty} tr\left(e_{ij}{}'(t)e_{ik}(t)\right) dt \end{aligned} \tag{3.17}$$

onde $e_{ij}(t) = C_{ij}e^{A_{ij}t}B_{ij}$ para todo $t \geqslant 0$, ou seja

$$\begin{aligned} Q_i(j,k) &= \int_0^{\infty} tr\left(B_{ij}{}'e^{A_{ij}{}'t}C_{ij}{}'C_{ik}e^{A_{ik}t}B_{ik}\right) dt \\ &= tr\left(B_{ij}{}'\int_0^{\infty} e^{A_{ij}{}'t}C_{ij}{}'C_{ik}e^{A_{ik}t}dtB_{ik}\right) \\ &= tr\left(B_{ij}{}'P_{ijk}B_{ik}\right) \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde a última igualdade decorre do fato de que todas as matrizes A_{ij} para $i,j = 1,\cdots,N$ são, por hipótese, assintoticamente estáveis. Isto prova o teorema proposto. □

Não há novidade em salientarmos que as matrizes P_{ijk} utilizadas no cálculo da norma do erro de estimação podem ser determinadas de forma mais eficiente, resolvendo-se a seguinte equação de Lyapunov

$$A_{ij}{}'P_{ijk} + P_{ijk}A_{ik} + C_{ij}{}'C_{ik} = 0 \tag{3.19}$$

para todo $i,j,k = 1,\cdots,N$. De fato, avaliando a derivada temporal da expressão (3.15) de dois modos distintos temos primeiramente que, como conseqüência do teorema fundamental do cálculo e da estabilidade assintótica das matrizes A_{ij},

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{d}{dt} e^{A_{ij}'t} C_{ij}' C_{ik} e^{A_{ik}t} dt &= e^{A_{ij}'t} C_{ij}' C_{ik} e^{A_{ik}t} \Big|_0^\infty \\ &= -C_{ij}' C_{ik} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Por outro lado, avaliando a mesma expressão com a matriz $W(t) = e^{A_{ij}'t} C_{ij}' C_{ik} e^{A_{ik}t}$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{d}{dt} e^{A_{ij}'t} C_{ij}' C_{ik} e^{A_{ik}t} dt &= \int_0^\infty (A_{ij}' W(t) + W(t) A_{ik}) dt \\ &= A_{ij}' \int_0^\infty W(t) dt + \int_0^\infty W(t) dt A_{ik} \\ &= A_{ij}' P_{ijk} + P_{ijk} A_{ik} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Igualando as expressões (3.20) e (3.21) chega-se à equação de Lyapunov (3.19).

É preciso salientar que as matrizes $Q_i, i = 1, \cdots, N$ são simétricas e definidas positivas. Pelo Teorema 3.2, em princípio, estas matrizes são semi-definidas positivas e admitem um autovalor nulo desde que exista $\theta \in \mathbb{R}^N$ tal que $Q_i \theta = 0$. Entretanto isto requer que o filtro $F(\omega)$ produza um erro de estimação nulo, ocorrência que podemos descartar em problemas reais. Assim sendo consideramos que estas matrizes são definidas positivas e portanto não singulares. Aplicando o Complemento de Schur, o problema de estimação (3.8) pode ser expresso na forma

$$\begin{aligned} \min_{\gamma_Q, \theta \in \Lambda} \quad & \gamma_Q \\ s.a. \quad & \begin{bmatrix} \gamma_Q & \theta' \\ \bullet & Q_i^{-1} \end{bmatrix} > 0, \quad 1, \cdots, N \end{aligned} \tag{3.22}$$

que é um problema convexo passível de ser resolvido com algoritmos dedicados à solução de LMIs. Finalmente, devemos salientar que o mesmo raciocínio adotado para provar o Lema 3.1 relativo à aproximação linear permanece válido para o custo ótimo ${\gamma_Q}^*$ que satisfaz

$$\gamma_{inf} \leqslant {\gamma_Q}^* \leqslant \gamma_{sup} \tag{3.23}$$

onde os limitantes indicados são dados por (3.11) e (3.12).

Método	θ^*	Estimador	Norma Real
Aprox. Linear	$\begin{bmatrix}0.4388 & 0.5612\end{bmatrix}'$	$\gamma_L{}^* = 4.3304$	3.4986
Quadrático	$\begin{bmatrix}0.5092 & 0.4908\end{bmatrix}'$	$\gamma_Q{}^* = 3.2482$	3.2482
(Regis Filho 2004)	–	2.4996	2.4996

Tab. 3.1: Resultados do exemplo 3.1.3

3.1.3 Exemplo

Este exemplo foi retirado de (Regis Filho 2004). Em um sistema, representado por sua função de transferência (3.24), incide uma fonte de ruído de características incertas, (3.25).

$$H_S(\zeta) = \frac{2}{\zeta^2 + 0.05\zeta + 1} \tag{3.24}$$

$$H_{N1}(\zeta) = \frac{\zeta}{\zeta^2 + 0.05\zeta + 0.2} + 0.5 \qquad H_{N2}(\zeta) = \frac{\zeta}{\zeta^2 + 0.05\zeta + 4} + 0.5 \tag{3.25}$$

Considerando o ruído como sendo aditivo ao sinal, a função de transferência $H(\zeta)$ definida em (2.23) é dada por $T(\zeta) = \begin{bmatrix}H_S(\zeta) & H_N(\zeta)\end{bmatrix}$ e $S(\zeta) = \begin{bmatrix}H_S(\zeta) & 0\end{bmatrix}$. Os filtros de Kalman obtidos para cada um destes vértices são representados abaixo.

$$K_1(\zeta) = \frac{1.514\zeta^3 + 3.643\zeta^2 + 0.4812\zeta + 0.7135}{\zeta^4 + 3.391\zeta^3 + 4.845\zeta^2 + 2.313\zeta + 0.8242} \tag{3.26}$$

$$K_2(\zeta) = \frac{3.225\zeta^3 + 2.379\zeta^2 + 13.01\zeta + 8.872}{\zeta^4 + 4.034\zeta^3 + 11.04\zeta^2 + 14.15\zeta + 16.49} \tag{3.27}$$

Os coeficientes utilizados nos problemas de otimização (3.10) e (3.22) são mostrados abaixo.

$$R = \begin{bmatrix}2.4344 & 5.8126\\ 7.7152 & 1.6842\end{bmatrix} \qquad Q_1 = \begin{bmatrix}2.4344 & 2.4346\\ 2.4346 & 5.8126\end{bmatrix} \qquad Q_2 = \begin{bmatrix}7.7152 & 1.6843\\ 1.6843 & 1.6842\end{bmatrix} \tag{3.28}$$

Os resultados obtidos através dos dois métodos podem ser vistos na tabela 3.1, juntamente com o filtro ótimo global dado em (Regis Filho 2004). A figura 3.1 mostra a norma do erro de estimação para os filtros de Kalman e para o filtro robusto obtido com o modelo quadrático, em função do parâmetro incerto. A figura 3.2 mostra o diagrama de Bode de módulo do filtro robusto e também

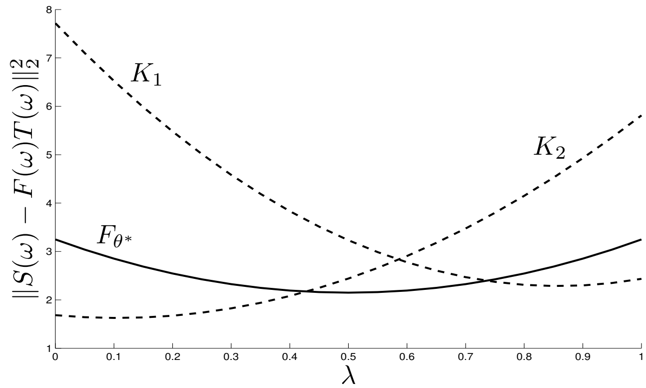

Fig. 3.1: Norma do erro de estimação para os filtros de Kalman(K_1 e K_2) e o filtro proposto

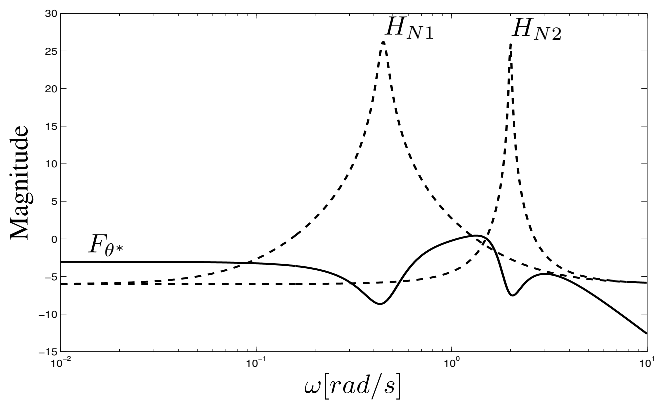

Fig. 3.2: Diagrama de Bode do ruído e filtro do exemplo 3.1.3

do ruído presente no sistema, definido pelas funções de transferência extremas $H_{N1}(\zeta)$ e $H_{N2}(\zeta)$. Nota-se perfeitamente uma maior atenuação nas regiões onde o ruído é mais significativo.

Considerando os limitantes inferior e superior obtidos através da utilização dos filtros de Kalman nos diferentes vértices do problema, $\gamma_{inf} = 2.4644$ e $\gamma_{sup} = 5.8126$, respectivamente, podemos afirmar que o método proposto apresenta bons resultados. Apesar de apresentar resultados piores que em (Regis Filho 2004) com filtros de mesma ordem, o filtro proposto neste trabalho conta com uma dificuldade menor de implementação, já que pode ser obtido através de uma combinação convexa de filtros desacoplados de ordens menores.

3.2 Sistemas a Tempo Discreto

Nesta seção, analisamos o problema de filtragem robusta para sistemas a tempo discreto. O desenvolvimento para este caso foi elaborado para ser o mais próximo possível do caso de sistemas a tempo contínuo, respeitando, entretanto, as diferenças no tratamento matemático dado a estes dois tipos de sistemas.

3.2.1 Aproximação Linear

A aproximação linear utilizada no caso contínuo é igualmente válida no caso discreto, pois a expressão (3.9) permanece verdadeira para ambas situações. No entanto, deve-se levar em conta que os coeficientes $R_{ij} = \|S_i(\omega) - K_j(\omega)T_i(\omega)\|_2^2$ devem ser calculados segundo a definição da norma $\mathcal{H}_2$ para sistemas a tempo discreto. O problema a ser resolvido continua sendo o problema linear (3.14).

3.2.2 Modelo Quadrático

No caso do modelo quadrático, as expressões válidas para sistemas contínuos não se aplicam, pois são dependentes das expressões de cálculo da norma $\mathcal{H}_2$. O teorema a seguir fornece as expressões utilizadas para sistemas a tempo discreto.

Teorema 3.3. *Para cada filtro da forma (3.6), a norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência do erro de estimação em cada vértice do politopo $\mathcal{H}$ pode ser calculada através de*

$$\begin{aligned} \|S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)\|_2^2 &= \theta' Q_i \theta \\ Q_i(j,k) &= tr\left(D_{ij}{}' D_{ik} + B_{ij}{}' P_{ijk} B_{ik}\right) \\ P_{ijk} &= \sum_{m=0}^{\infty} (A_{ij}{}')^m C_{ij}{}' C_{ik} (A_{ik})^m \end{aligned} \tag{3.29}$$

onde as matrizes $(A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij})$ definem a representação de estado da função de transferência do erro de estimação $E_{ij}(\omega) = S_i(\omega) - K_j(\omega)T_i(\omega)$ para todo $i, j = 1, \cdots, N$

Prova. Partindo da definição da norma $\mathcal{H}_2$ para o erro de estimação, , obtemos

$$\begin{aligned}
\|S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)\|_2^2 &= \left\| \sum_{j=1}^{N} \theta_j E_{ij}(\omega) \right\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} tr \left[\left(\sum_{j=1}^{N} E_{ij}(\omega)^{\sim} \theta_j \right) \left(\sum_{k=1}^{N} E_{ik}(\omega)\theta_k \right) \right] d\omega \\
&= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} tr \left(E_{ij}(\omega)^{\sim} E_{ik}(\omega) \right) d\omega \theta_j \theta_k \\
&= \theta' Q_i \theta
\end{aligned} \tag{3.30}$$

sendo que os elementos da matriz simétrica e semi-positiva definida Q_i podem ser calculados aplicando-se o teorema de Parseval, obtendo-se

$$\begin{aligned}
Q_i(j,k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} tr \left(E_{ij}(\omega)^{\sim} E_{ik}(\omega) \right) d\omega \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} tr \left({e_{ij}}'(m) e_{ik}(m) \right)
\end{aligned} \tag{3.31}$$

onde $e_{ij}(m) = C_{ij} {A_{ij}}^{m-1} B_{ij}$ para todo $m \geqslant 1$ e $e_{ij}(0) = D_{ij}$. Portanto

$$\begin{aligned}
Q_i(j,k) &= tr \left({D_{ij}}' D_{ik} + {B_{ij}}' \sum_{m=0}^{\infty} ({A_{ij}}')^m {C_{ij}}' C_{ik} (A_{ik})^m B_{ik} \right) \\
&= tr \left(D'_{ij} D_{ik} + {B_{ij}}' P_{ijk} B_{ik} \right)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

sendo que a última igualdade é possível graças a estabilidade assintótica das matrizes A_{ij}. Isto prova o teorema proposto. □

Como no caso contínuo, as matrizes P_{ijk} utilizadas no cálculo da norma podem ser calculadas de forma mais eficiente, resolvendo a seguinte equação de Lyapunov

$$ {A_{ij}}' P_{ijk} A_{ik} - P_{ijk} + {C_{ij}}' C_{ik} = 0 \tag{3.33}$$

para todo $i, j, k = 1, \cdots, N$. Considerando uma matriz $W(\ell) = \sum_{m=0}^{\ell} ({A_{ij}}')^m {C_{ij}}' C_{ik} (A_{ik})^m$, que

Método	θ^*	Estimador	Norma Real
Aprox. Linear	$\begin{bmatrix}0.5121 & 0.4879\end{bmatrix}'$	$\gamma_L{}^* = 1.9642$	1.7724
Quadrático	$\begin{bmatrix}0.4859 & 0.5141\end{bmatrix}'$	$\gamma_Q{}^* = 1.7524$	1.7524
(Regis Filho 2004)	–	1.6777	1.6777

Tab. 3.2: Resultados do exemplo 3.2.3

no limite para $\ell \to \infty$ tende a P_{ijk}, substituindo-a na equação (3.33), obtemos

$$\begin{aligned}
&A_{ij}'W(\ell)A_{ik} - W(\ell) + C_{ij}'C_{ik} = \\
&= A_{ij}'\left[\sum_{m=0}^{\ell}(A_{ij}')^m C_{ij}'C_{ik}(A_{ik})^m\right]A_{ik} - \sum_{m=0}^{\ell}(A_{ij}')^m C_{ij}'C_{ik}(A_{ik})^m + C_{ij}'C_{ik} \\
&= (A_{ij}')^{\ell+1}C_{ij}'C_{ik}(A_{ik})^{\ell+1} + \sum_{m=1}^{\ell}(A_{ij}')^m C_{ij}'C_{ik}(A_{ik})^m - \\
&\qquad - \sum_{m=1}^{\ell}(A_{ij}')^m C_{ij}'C_{ik}(A_{ik})^m - C_{ij}'C_{ik} + C_{ij}'C_{ik} \\
&= (A_{ij}')^{\ell+1}C_{ij}'C_{ik}(A_{ik})^{\ell+1}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Considerando que A_{ij} e A_{ik} tenham autovalores de módulo menor que um, o limite da expressão (3.34) quando $\ell \to \infty$ fornece (3.33). Portanto as matrizes P_{ijk} são soluções das respectivas equações de Lyapunov. Com exceção das expressões para o cálculo das matrizes Q_i e P_{ijk} o problema de otimização é igual ao do caso contínuo. Portanto, o problema de otimização convexa (3.22) é igualmente válido para o caso discreto.

3.2.3 Exemplo

Este exemplo foi retirado de (Regis Filho 2004). Um sistema de telecomunicação tem sua função de transferência afetada pelo efeito Doppler. Os extremos que esta função de transferência pode assumir são dados em (3.35). O sistema é afetado também por uma fonte de ruído (3.36).

$$H_{S1}(\zeta) = \frac{0.4450\zeta + 0.4299}{\zeta^2 - 1.0300\zeta + 0.9048} \qquad H_{S2}(\zeta) = \frac{0.7924\zeta + 0.7378}{\zeta^2 - 0.2885\zeta + 0.8187} \tag{3.35}$$

$$H_N(\zeta) = \frac{0.7446\zeta - 0.7446}{\zeta^2 - 0.7209\zeta + 0.9048} \tag{3.36}$$

Considerando o ruído como sendo aditivo ao sinal, a função de transferência $H(\zeta)$ definida em (2.23) é dada por $T(\zeta) = \begin{bmatrix} H_S(\zeta) & H_N(\zeta) \end{bmatrix}$ e $S(\zeta) = \begin{bmatrix} H_S(\zeta) & 0 \end{bmatrix}$. Os filtros de Kalman obtidos para cada um destes vértices são representados abaixo.

$$K_1(\zeta) = \frac{0.557\zeta^4 - 0.1695\zeta^3 + 0.01505\zeta^2 + 0.4418\zeta - 0.291}{\zeta^4 - 0.06167\zeta^3 - 0.04315\zeta^2 + 0.8266\zeta - 0.1806} \tag{3.37}$$

$$K_2(\zeta) = \frac{0.5143\zeta^4 + 0.3088\zeta^3 + 0.1973\zeta^2 + 0.4549\zeta + 0.2007}{\zeta^4 + 0.2125\zeta^3 + 0.3672\zeta^2 + 0.5529\zeta + 0.02462} \tag{3.38}$$

Os coeficientes utilizados nos problemas de otimização (3.10) e (3.22) foram calculados como sendo

$$R = \begin{bmatrix} 1.5013 & 2.4501 \\ 2.3386 & 1.5713 \end{bmatrix} \qquad Q_1 = \begin{bmatrix} 1.5013 & 1.5014 \\ 1.5014 & 2.4501 \end{bmatrix} \qquad Q_2 = \begin{bmatrix} 2.3386 & 1.5712 \\ 1.5712 & 1.5713 \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

Os resultados obtidos através dos dois métodos podem ser vistos na tabela 3.2, juntamente com o ótimo global dado em (Regis Filho 2004). Os limitantes inferior e superior deste exemplo são $\gamma_{inf} = 1.5713$ e $\gamma_{sup} = 2.3386$.

Novamente o filtro ponderado apresenta desempenho inferior ao desempenho do filtro proposto por (Regis Filho 2004). Este resultado já era esperado pois este segundo filtro é o ótimo global do problema de filtragem robusta em estudo (3.7). No entanto, é necessário notar que o filtro proposto aqui tem uma complexidade de projeto e implementação menor, pois apesar de ter a mesma ordem do filtro proposto por (Regis Filho 2004), é formado pela combinação convexa de filtros desacoplados, cada um deles de ordem igual à ordem do sistema.

3.3 Conclusão

Neste capítulo foi apresentada a primeira abordagem ao problema de filtragem robusta. Para isto, foi considerada uma sub-classe de incertezas paramétricas politópicas, caracterizada pela dependência linear da função de transferência do sistema em relação aos parâmetros incertos. Para estas incertezas a solução ótima global do problema (3.7) foi determinada em (Geromel & Regis Filho 2006). Logo, o método proposto neste trabalho não poderia reduzir ainda mais a norma do erro de estimação.

No entanto, o modelo considerado neste capítulo é essencial para o desenvolvimento do modelo do capítulo seguinte.

Foram definidos limitantes inferior e superior para a norma do erro de estimação. Desta forma, é possível uma análise comparativa do desempenho do filtro projetado para os problemas considerados.

Dois filtros robustos foram propostos. Primeiramente, um deles foi calculado através de uma aproximação linear para a norma do erro de estimação em função dos pesos a serem determinados. Este método, apesar de não fornecer a solução exata, permite um desenvolvimento bastante simples do filtro robusto.

Em seguida apresentamos um método para o cálculo exato do erro de estimação em relação às variáveis de decisão. Desta forma, a solução do problema por este método tem sempre um resultado melhor, ou pelo menos igual, ao do caso anterior, o que foi comprovado através de exemplos.

É importante ressaltar que todo o desenvolvimento do capítulo foi feito para sistemas a tempo contínuo e discreto. Além disto, dois exemplos ilustram o método proposto e sua aplicação em sistemas reais.

Capítulo 4

Filtragem Robusta para Sistemas com Incertezas Politópicas

No capítulo anterior, foram apresentados os resultados obtidos para sistemas cujas funções de transferência dependem linearmente dos parâmetros incertos. Estes resultados são importantes pois permitem uma solução menos complexa para uma classe de sistemas que apresentam incertezas mais simples de serem tratadas. No entanto, muitos sistemas de interesse não obedecem a esta restrição. Neste capítulo, os resultados serão ampliados para sistemas com incertezas politópicas genéricas, permitindo assim o projeto de filtros robustos para uma quantidade maior de problemas.

No capítulo anterior, a comparação entre o método aqui proposto e o método proposto por (Regis Filho 2004) mostrou a sub-otimalidade do primeiro. No entanto, devido às não-linearidades presentes em sistemas com incertezas politópicas, isto é, devido ao fato de que as funções de transferência a serem manipuladas dependem de forma não linear dos parâmetros incertos, até o presente momento não existe nenhum método capaz de determinar o filtro robusto ótimo global para estes sistemas. Mostraremos que o método proposto aqui, apesar de sub-ótimo, obtém, nos exemplos considerados, resultados melhores que os existentes na literatura.

Para resolver o problema do projeto do filtro robusto, utilizamos a função objetivo

$$\min_{\theta \in \Lambda} \max_{\lambda \in \Lambda} \|E_\theta(\lambda, \omega)\|_2^2 = \min_{\theta \in \Lambda} \max_{\lambda \in \Lambda} \|S(\lambda, \omega) - F_\theta(\omega) T(\lambda, \omega)\|_2^2 \tag{4.1}$$

onde $S(\lambda, \omega)$ e $T(\lambda, \omega)$ são as função de transferência particionadas de $H(\lambda, \omega) \in \mathcal{H}$ e $F_\theta(\omega)$ do filtro robusto proposto. O conjunto $\mathcal{H}$ que define as incertezas politópicas a serem consideradas, é discutido com detalhes a seguir.

4.1 Modelo de Incertezas

Neste capítulo utilizamos um modelo de incertezas paramétricas politópicas genérico para representar os sistemas em estudo. Considerando a representação no espaço de estados a tempo contínuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \tag{4.2}$$

$$y(t) = C_t x(t) + D_t w(t) \tag{4.3}$$

$$z(t) = C_s x(t) + D_s w(t) \tag{4.4}$$

ou a tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{4.5}$$

$$y(k) = C_t x(k) + D_t u(k) \tag{4.6}$$

$$z(k) = C_s x(k) + D_s u(k) \tag{4.7}$$

em que as matrizes indicadas não são exatamente conhecidas, o modelo de incertezas paramétricas politópicas assume que as funções de transferência $H(\lambda, \omega)$ pertencem ao conjunto

$$\mathcal{H} = \left[co \left\{ \begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_{ti} & D_{ti} \\ C_{si} & D_{si} \end{array} \right\},\ i = 1, \cdots, N \right] \tag{4.8}$$

onde é imperativo notar que cada elemento de $\mathcal{H}$ depende não linearmente dos parâmetros incertos $\lambda \in \Lambda$, ou seja

$$H(\lambda, \omega) = \left[\begin{array}{c|c} A_\lambda & B_\lambda \\ \hline C_{t\lambda} & D_{t\lambda} \\ C_{s\lambda} & D_{s\lambda} \end{array} \right] \tag{4.9}$$

sendo que

$$\begin{bmatrix} A_\lambda & B_\lambda \\ C_{t\lambda} & D_{t\lambda} \\ C_{s\lambda} & D_{s\lambda} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_{ti} & D_{ti} \\ C_{si} & D_{si} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

para qualquer $\lambda \in \Lambda$. Observe que os parâmetros da representação de estados de cada modelo factível depende linearmente de $\lambda \in \Lambda$, mas o mesmo não ocorre com as respectivas funções de transferência devido aos produtos e inversa de matrizes necessários para a definição de $H(\lambda, \omega)$. Assim sendo, o modelo de incertezas politópicas que acabamos de definir é mais abrangente que o modelo utilizado no capítulo anterior.

4.2 Estrutura e Desempenho

Como no capítulo anterior parametrizamos o filtro robusto na forma $F_\theta(\omega) = \sum_{j=1}^{N} \theta_j K_j(\omega)$, onde $\theta \in \Lambda$ será determinado tendo em vista o melhor desempenho possível. Com o intuito de simplificar as expressões utilizadas neste capítulo definimos uma matriz $\Sigma(\theta) \triangleq [\theta_1 I, \cdots, \theta_N I]'$, de dimensão $Np \times p$, e combinamos as funções de transferência pertencentes ao politopo $\mathcal{H}$ com os filtros de Kalman $K_1(\omega), \cdots, K_N(\omega)$, obtendo a notação simplificada para o erro de estimação

$$E_\theta(\lambda, \omega) \triangleq \sum_{j=1}^{N} \theta_j \left(S(\lambda, \omega) - F_j(\omega) T(\lambda, \omega) \right) \tag{4.11}$$

cuja representação de estados é dada por

$$E_\theta(\lambda, \omega) = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A}_\lambda & \mathcal{B}_\lambda \Sigma(\theta) \\ \hline \mathcal{C}_\lambda & \mathcal{D}_\lambda \Sigma(\theta) \end{array} \right] \tag{4.12}$$

com $(\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{B}_\lambda \Sigma(\theta), \mathcal{C}_\lambda, \mathcal{D}_\lambda \Sigma(\theta))$ definidas como sendo a seguinte combinação convexa

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_\lambda & \mathcal{B}_\lambda \Sigma(\theta) \\ \mathcal{C}_\lambda & \mathcal{D}_\lambda \Sigma(\theta) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \begin{bmatrix} \mathcal{A}_i & \mathcal{B}_i \Sigma(\theta) \\ \mathcal{C}_i & \mathcal{D}_i \Sigma(\theta) \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

para $\lambda \in \Lambda$. Note que as matrizes $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i\Sigma(\theta), \mathcal{C}_i, \mathcal{D}_i\Sigma(\theta)$ definem uma representação de estados da função de transferência do vértice i combinada com o filtro $F_\theta(\omega)$ e, portanto, são definidas por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i &\triangleq diag\,[A_{i1}, \cdots, A_{iN}] & \mathcal{B}_i &\triangleq diag\,[B_{i1}, \cdots, B_{iN}] \\ \mathcal{C}_i &\triangleq [C_{i1}, \cdots, C_{iN}] & \mathcal{D}_i &\triangleq [D_{i1}, \cdots, D_{iN}] \end{aligned} \tag{4.14}$$

sendo que as matrizes $(A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij})$ são calculadas segundo as expressões

$$\begin{aligned} A_{ij} &\triangleq \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_{kj}C_{ti} & A_{kj} \end{bmatrix} & B_{ij} &\triangleq \begin{bmatrix} B_i \\ B_{kj}D_{ti} \end{bmatrix} \\ C_{ij} &\triangleq \begin{bmatrix} (C_{si} - D_{kj}C_{ti}) & -C_{kj} \end{bmatrix} & D_{ij} &\triangleq \begin{bmatrix} (D_{si} - D_{kj}D_{ti}) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.15}$$

onde (A_i, B_i, C_i, D_i) e $(A_{kj}, B_{kj}, C_{kj}, D_{kj})$ são, respectivamente, as matrizes da representação de estados do vértice i do politopo de parâmetros e do filtro de Kalman $K_j(\omega)$.

Desta forma, apesar da não linearidade da função de transferência $E_\theta(\lambda, \omega)$ em relação ao parâmetro incerto $\lambda \in \Lambda$, podemos aproveitar a linearidade em relação à $\theta \in \Lambda$ para definirmos um limitante superior para a norma do erro de estimação.

Verificamos que as idéias introduzidas no capítulo anterior podem ser adotadas para determinar um filtro, cuja robustez não é assegurada, mas que serve para estabelecer um limitante inferior do desempenho do filtro robusto ótimo. Este limitante inferior será calculado e permitirá avaliar de maneira bastante precisa o desempenho dos filtros robustos propostos.

Lema 4.1. *O limitante inferior definido abaixo é válido para os sistemas com incertezas politópicas genéricas.*

$$\gamma_P = \min_{F \in \mathcal{F}} \max_{\lambda \in \Lambda} \left\| \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)) \right\|_2^2 \tag{4.16}$$

Prova. De fato, este resultado decorre diretamente da desigualdade

$$\begin{aligned} \min_{F \in \mathcal{F}} \max_{\lambda \in \Lambda} \|S(\lambda, \omega) - F(\omega)T(\lambda, \omega)\|_2^2 &\geqslant \min_{F \in \mathcal{F}} \max_{i=1,\ldots,N} \|S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)\|_2^2 \\ &\geqslant \min_{F \in \mathcal{F}} \max_{\lambda \in \Lambda} \left\| \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left(S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)\right) \right\|_2^2 \end{aligned} \tag{4.17}$$

onde notamos que a primeira desigualdade é conseqüência do fato de limitarmos λ ao conjunto dos vértices de Λ. A segunda desigualdade ocorre pois a norma é uma função convexa, e portanto, seu máximo ocorre em um dos vértices de Λ. □

Este lema nos permite utilizar as funções de transferência dos vértices de um sistema politópico com a metodologia do capítulo anterior para determinar um limitante inferior para a norma do erro de estimação. O limitante inferior que este lema fornece corresponde ao filtro robusto ótimo proposto em (Regis Filho 2004). Como o limitante inferior do lema 3.1 depende apenas dos filtros de Kalman para ser calculado e é válido para o problema introduzido em (Regis Filho 2004), vamos utilizá-lo tendo em vista que

$$\begin{aligned}
\gamma_P &= \min_{F\in\mathcal{F}} \max_{\lambda\in\Lambda} \left\| \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)) \right\|_2^2 \\
&= \min_{F\in\mathcal{F}} \max_{i=1,\ldots,N} \|S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)\|_2^2 \\
&\geqslant \max_{i=1,\ldots,N} \min_{F\in\mathcal{F}} \|S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)\|_2^2 \\
&\geqslant \max_{i=1,\ldots,N} \min_{j=1,\ldots,N} \|S_i(\omega) - K_j(\omega)T_i(\omega)\|_2^2 = \gamma_{inf}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

onde observamos que o mínimo em relação a $j = 1, \cdots, N$ ocorre para $j = i$.

4.3 Sistemas a Tempo Contínuo

O teorema a seguir fornece um limitante superior para a norma $\mathcal{H}_2$ do erro de estimação $E_\theta(\lambda,\omega)$ e um filtro factível da forma $F_\theta(\omega) = \sum_{j=1}^{N} \theta_j K_j(\omega)$ com desempenho garantido igual a este limitante.

Teorema 4.2. *Considerando o sistema em estudo com $\mathcal{D}_i = 0$ e matrizes $(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{C}_i)$ que satisfazem as seguintes LMIs*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_i G + G'\mathcal{A}_i' & P_i + \mathcal{A}_i L - G' & \mathcal{B}_i\Sigma(\theta) \\ \bullet & -L - L' & 0 \\ \bullet & \bullet & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.19}$$

$$\begin{bmatrix} W_i & \mathcal{C}_i V \\ \bullet & V + V' - P_i \end{bmatrix} > 0 \tag{4.20}$$

para todo $i = 1, \cdots, N$ com $\theta \in \Lambda$, as matrizes simétricas definidas positivas P_i, W_i e matrizes *completas L, G, V. É válido o limitante superior*

$$||E_\theta(\lambda,\omega)||_2^2 \leqslant \sum_{i=1}^{N} \lambda_i tr(W_i), \quad \forall\lambda \in \Lambda \tag{4.21}$$

Prova. Multiplicando a desigualdade (4.19) por $\lambda_i \geqslant 0$, somando o resultado para todo $i = 1, \cdots, N$ e aplicando o complemento de Schur na terceira linha e coluna, obtemos

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_\lambda G + G'\mathcal{A}_\lambda' + \mathcal{B}_\lambda \Sigma(\theta)\Sigma(\theta)'\mathcal{B}_\lambda' & P_\lambda + \mathcal{A}_\lambda L - G' \\ \bullet & -L - L' \end{bmatrix} < 0 \tag{4.22}$$

Em seguida, multiplicando a desigualdade acima à esquerda por $\begin{bmatrix} I & \mathcal{A}_\lambda \end{bmatrix}$ e à direita por seu transposto obtemos a desigualdade

$$\mathcal{A}_\lambda P_\lambda + P_\lambda \mathcal{A}_\lambda' + \mathcal{B}_\lambda \Sigma(\theta)\Sigma(\theta)'\mathcal{B}_\lambda' < 0, \ \forall\lambda \in \Lambda \tag{4.23}$$

Por conseqüência a seguinte equação também é válida para qualquer $\lambda \in \Lambda$

$$P_\lambda > \int_0^\infty e^{A_\lambda t} \mathcal{B}_\lambda \Sigma(\theta)\Sigma(\theta)'\mathcal{B}_\lambda' e^{A_\lambda' t} dt \tag{4.24}$$

Multiplicando a desigualdade (4.20) por $\lambda_i \geqslant 0$, somando o resultado para todo $i = 1, \cdots, N$, podemos afirmar que V é uma matriz não singular pois a desigualdade $V + V' > P_\lambda > 0$ é válida para qualquer $\lambda \in \Lambda$.

$$\begin{bmatrix} W_\lambda & \mathcal{C}_\lambda V \\ \bullet & V + V' - P_\lambda \end{bmatrix} > 0 \tag{4.25}$$

$$W_\lambda > \mathcal{C}_\lambda V (V + V' - P_\lambda)^{-1} V' \mathcal{C}_\lambda' \tag{4.26}$$

Em seguida combinamos a definição da norma $\mathcal{H}_2$ e a desigualdade (4.24). É bem conhecido que a desigualdade $V' {P_\lambda}^{-1} V \geqslant V + V' - P_\lambda$ é valida para $P_\lambda > 0$ e V não singular, logo verifica-se que

$P_\lambda \leqslant V(V + V' - P_\lambda)^{-1}V'$. Finalmente, utilizando a desigualdade (4.26), obtemos

$$\begin{aligned} ||E_\theta(\lambda,\omega)||_2^2 &= tr\left(\mathcal{C}_\lambda \int_0^\infty e^{A_\lambda t}\mathcal{B}_\lambda \Sigma(\theta)\Sigma(\theta)'\mathcal{B}_\lambda' e^{A_\lambda' t} dt\, \mathcal{C}_\lambda'\right) \\ &\leqslant tr\left(\mathcal{C}_\lambda P_\lambda \mathcal{C}_\lambda'\right) \\ &\leqslant tr\left(\mathcal{C}_\lambda V(V + V' - P_\lambda)^{-1}V'\mathcal{C}_\lambda'\right) \\ &\leqslant tr\left(W_\lambda\right), \quad \forall \lambda \in \Lambda \end{aligned} \tag{4.27}$$

Como W_λ é função linear de $\lambda \in \Lambda$ o limitante superior (4.21) é válido. □

O melhor custo garantido para a norma do erro de estimação, dado pelo teorema 4.2, pode ser calculado através da solução do seguinte problema de programação convexa, expresso por LMIs.

$$\begin{aligned} \gamma_H &\triangleq \min_{\theta\in\Lambda, P_i>0, W_i, L, G, V} \max_{\lambda\in\Lambda} \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i tr(W_i) \ : \ (4.19) - (4.20) \right\} \\ &= \min_{\sigma,\theta\in\Lambda, P_i>0, W_i, L, G, V} \{\sigma \ : \ tr(W_i) \leqslant \sigma \ , \ (4.19) - (4.20)\} \end{aligned} \tag{4.28}$$

Após a solução deste problema, o filtro robusto pode ser calculado com o vetor ótimo $\theta^* \in \Lambda$, através de

$$F(\omega) = \sum_{j=1}^N \theta_j^* K_j(\omega) \tag{4.29}$$

onde $K_j(\omega)$ é o filtro de Kalman associado à função de transferência $H_j(\omega)$ para todo $j = 1, \cdots, N$. Através do teorema 4.2 podemos afirmar que o custo garantido deste filtro é dado por $||E_{\theta^*}(\lambda,\omega)||_2^2 \leqslant \gamma_H$, válido para todo $\lambda \in \Lambda$.

4.3.1 Exemplo

O exemplo a seguir foi considerado em (Geromel 1999), (Souza & Trofino 1999), (Tuan et al. 2001) e (Barbosa, de Souza & Trofino 2005). Um sistema linear tem sua função de transferência definida por

$$H(\zeta) = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 + 0.3\alpha & -2 & 0 \\ 1 & -0.5 & 1 & 0 \\ \hline -100 + 10\beta & 100 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{4.30}$$

Parâmetros	$\lvert\alpha\rvert \leqslant 1$ $\lvert\beta\rvert \leqslant 1$	$\lvert\alpha\rvert \leqslant 1$ $\beta = \alpha$	$\lvert\alpha\rvert \leqslant 2$ $\beta = \alpha$	$\lvert\alpha\rvert \leqslant 3$ $\lvert\beta\rvert \leqslant 1$	$\lvert\alpha\rvert \leqslant 3$ $\beta = \alpha$
(Geromel 1999)	5.728	4.819	–	–	–
(Souza & Trofino 1999)	4.867	4.373	–	–	–
(Tuan et al. 2001)	2.382	2.382	–	93.365	100.963
(Barbosa et al. 2005)	–	–	6.285	–	–
γ_H	2.114	2.115	6.266	21.566	26.434
γ_{inf}	2.114	2.114	6.245	15.509	12.093

Tab. 4.1: Norma garantida do erro para o exemplo 4.3.1

Esta função de transferência depende dos parâmetros reais desconhecidos α e β. O número de vértices no politopo de incertezas deste sistema depende de como definimos a variação destes parâmetros. Consideramos os casos em que β assume o mesmo valor do parâmetro α, ou um valor incerto dentro de um intervalo conhecido. No primeiro caso o politopo é definido por dois vértices, enquanto no segundo por quatro vértices, já que ambos os parâmetros α e β pertencem a intervalos independentes. A tabela 4.1 faz uma comparação entre diversos métodos existentes na literatura para o projeto de filtros robustos em relação a diversos casos deste exemplo. Podemos perceber que o método proposto neste trabalho garante resultados melhores e que em muitos casos a norma garantida está bastante próxima do limitante inferior definido na equação (4.18). Em seguida, analisamos dois casos com maiores detalhes.

- Caso $|\alpha| \leqslant 1$, $\beta = \alpha$ - O primeiro passo no projeto do filtro robusto proposto é o cálculo dos filtros de Kalman associados a cada um dos vértices. As funções de transferência dos filtros obtidos são

$$K_1(\zeta) = \frac{-2.004\zeta - 2.292}{\zeta^2 + 320.2\zeta + 53.02} \qquad K_2(\zeta) = \frac{-1.163\zeta - 1.806}{\zeta^2 + 280.1\zeta + 47} \tag{4.31}$$

  O quadrado da norma do erro de estimação destes filtros nos vértices em que foram calculados é de, respectivamente, 0.0127 e 2.114. Segundo a equação (4.18), temos um limitante inferior $\gamma_{inf} = 2.114$ para o quadrado da norma do erro de estimação do filtro robusto.

  Resolvendo o problema (4.28) encontramos um vetor de pesos $\theta^* = \begin{bmatrix} 0.003 & 0.997 \end{bmatrix}'$ e um

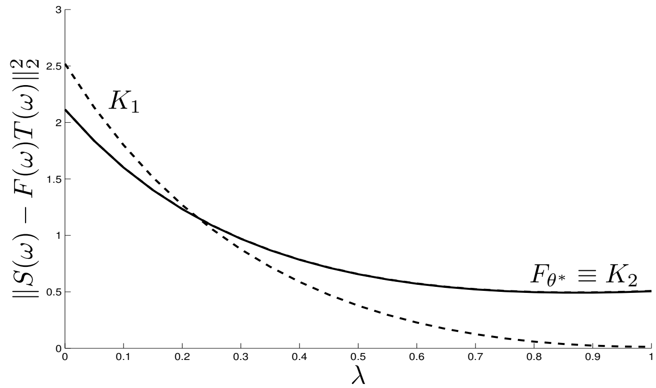

Fig. 4.1: Norma do erro de estimação para os filtros de Kalman(K_1 e K_2) e o filtro proposto

limitante superior $\gamma_H = 2.115$. O filtro robusto, calculado a partir de (4.29), é

$$F_{\theta^*}(\zeta) = \frac{-1.165\zeta^3 - 374.5\zeta^2 - 640.2\zeta - 95.79}{\zeta^4 + 600.3\zeta^3 + 89790\zeta^2 + 29900\zeta + 2492} \tag{4.32}$$

Como θ^* tem a primeira componente praticamente nula, podemos então considerar, para todos os fins práticos, $F_{\theta^*}(\zeta) = K_2(\zeta)$. Para o exemplo que estamos discutindo a tabela 4.1 informa que $\gamma_H = \gamma_{inf}$ o que mostra que é impossível determinar um filtro robusto com desempenho melhor que $F_{\theta^*}(\zeta) = K_2(\zeta)$. Assim sendo, podemos afirmar que o filtro de segunda ordem $K_2(\zeta)$ é o filtro robusto ótimo, solução do problema

$$K_2 = \min_{F \in \mathcal{F}} \max_{\lambda \in \Lambda} \|S(\lambda, \omega) - F(\omega)T(\lambda, \omega)\|_2^2 \tag{4.33}$$

A figura 4.1 mostra a norma do erro de estimação produzido pelos filtros $K_1(\zeta)$, $K_2(\zeta)$ e $F_{\theta^*}(\zeta)$ em função do parâmetro incerto $\lambda \in \Lambda$.

- Caso $|\alpha| \leqslant 3$, $\beta = \alpha$ - Da mesma forma, os filtros de Kalman foram obtidos e com a solução ótima do problema (4.28) encontramos um vetor de pesos $\theta^* = \begin{bmatrix} 0.442 & 0.558 \end{bmatrix}'$. A figura 4.2 mostra a norma do erro de estimação produzido pelos filtros $K_1(\zeta)$, $K_2(\zeta)$ e $F_{\theta^*}(\zeta)$ em função do parâmetro incerto $\lambda \in \Lambda$.

Nota-se que no primeiro caso o filtro ótimo é de segunda ordem. Entretanto, o mesmo não ocorre com o segundo caso pois o filtro ótimo é de ordem quatro. Podemos supor que o melhor desempenho dos filtros propostos, em relação aos existentes na literatura, reside na sua maior ordem e por

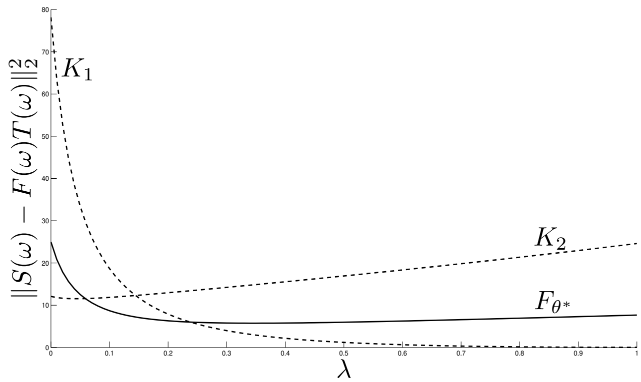

Fig. 4.2: Norma do erro de estimação para os filtros de Kalman(K_1 e K_2) e o filtro proposto

conseguinte na existência de maior flexibilidade para reduzir o erro de estimação.

4.4 Sistemas a Tempo Discreto

Os sistemas a tempo discreto podem ser tratados de forma bastante similar. A diferença central reside na determinação do custo garantido e dos pesos $\theta \in \Lambda$ do filtro robusto a ele associado. O próximo teorema trata destes aspectos.

Teorema 4.3. *Considerando o sistema em estudo com matrizes ($\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{C}_i, \mathcal{D}_i$) que satisfazem as seguintes desigualdades:*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_i G + G'\mathcal{A}_i - P_i & \mathcal{A}_i L - G' & \mathcal{B}_i \Sigma(\theta) \\ \bullet & P_i - L - L' & 0 \\ \bullet & \bullet & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.34}$$

$$\begin{bmatrix} W_i & \mathcal{C}_i V & \mathcal{D}_i \Sigma(\theta) \\ \bullet & V + V' - P_i & 0 \\ \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0 \tag{4.35}$$

para todo $i = 1, \cdots, N$ para as matrizes simétricas definidas positivas variáveis P_i, W_i, matrizes variáveis completas L, G, V e $\theta \in \Lambda$. É válido o limitante superior (4.36).

$$||E_\theta(\lambda, \omega)||_2^2 \leqslant \sum_{i=1}^{N} \lambda_i tr(W_i), \forall \lambda \in \Lambda \tag{4.36}$$

Prova. Multiplicando a desigualdade (4.34) por $\lambda_i \geqslant 0$, somando o resultado para todo $i = 1, \cdots, N$ e aplicando o complemento de Schur para a terceira linha e coluna, obtemos

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_\lambda G + G'\mathcal{A}_\lambda{}' - P_\lambda + \mathcal{B}_\lambda \Sigma(\theta)\Sigma(\theta)'\mathcal{B}_\lambda{}' & \mathcal{A}_\lambda L - G' \\ \bullet & P_\lambda - L - L' \end{bmatrix} < 0 \tag{4.37}$$

Em seguida multiplicamos esta desigualdade à esquerda por $\begin{bmatrix} I & \mathcal{A}_\lambda \end{bmatrix}$ e à direita por seu transposto para obter

$$\mathcal{A}_\lambda P_\lambda \mathcal{A}_\lambda' - P_\lambda + \mathcal{B}_\lambda \Sigma(\theta)\Sigma(\theta)'\mathcal{B}_\lambda' < 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda \tag{4.38}$$

Por conseqüência a seguinte equação também é válida para qualquer $\lambda \in \Lambda$

$$P_\lambda > \sum_{m=0}^{\infty} (A_\lambda)^m \mathcal{B}_\lambda \Sigma(\theta)\Sigma(\theta)'\mathcal{B}_\lambda' (A_\lambda')^m \tag{4.39}$$

Multiplicando a desigualdade (4.35) por $\lambda_i \geqslant 0$, somando o resultado para todo $i = 1, \cdots, N$, e aplicando o complemento de Schur em relação à terceira linha e coluna, podemos afirmar que V é uma matriz não singular pois a desigualdade $V + V' > P_\lambda > 0$ é válida para qualquer $\lambda \in \Lambda$. Estas operações permitem determinar

$$\begin{bmatrix} W_\lambda - \mathcal{D}_\lambda \Sigma(\theta)\Sigma(\theta)'\mathcal{D}_\lambda' & \mathcal{C}_\lambda V \\ \bullet & V + V' - P_\lambda \end{bmatrix} > 0 \tag{4.40}$$

ou seja

$$W_\lambda \geqslant \mathcal{D}_\lambda \Sigma(\theta)\Sigma(\theta)'\mathcal{D}_\lambda' + \mathcal{C}_\lambda V (V + V' - P_\lambda)^{-1} V' \mathcal{C}_\lambda' \tag{4.41}$$

Em seguida combinamos a definição da norma $\mathcal{H}_2$ e a desigualdade (4.41). É bem conhecido que a desigualdade $V' P_\lambda{}^{-1} V \geqslant V + V' - P_\lambda$ é valida para $P_\lambda > 0$ e V não singular, logo verifica-se que $P_\lambda \leqslant V(V + V' - P_\lambda)^{-1} V'$ e conseqüentemente

$$\begin{aligned} ||E_\theta(\lambda,\omega)||_2^2 &= tr\left[\mathcal{D}_\lambda \Sigma(\theta)\Sigma(\theta)'\mathcal{D}_\lambda' + \mathcal{C}_\lambda \left(\sum_{m=0}^{\infty} (A_\lambda)^m \mathcal{B}_\lambda \Sigma(\theta)\Sigma(\theta)'\mathcal{B}_\lambda' (A_\lambda')^m\right) \mathcal{C}_\lambda'\right] \\ &\leqslant tr\left(\mathcal{D}_\lambda \Sigma(\theta)\Sigma(\theta)'\mathcal{D}_\lambda' + \mathcal{C}_\lambda P_\lambda \mathcal{C}_\lambda'\right) \\ &\leqslant tr\left(\mathcal{D}_\lambda \Sigma(\theta)\Sigma(\theta)'\mathcal{D}_\lambda' + \mathcal{C}_\lambda V (V + V' - P_\lambda)^{-1} V' \mathcal{C}_\lambda'\right) \\ &\leqslant tr\left(W_\lambda\right), \quad \forall \lambda \in \Lambda \end{aligned} \tag{4.42}$$

Como W_λ é função linear de $\lambda \in \Lambda$ o limitante superior (4.21) é válido. $\square$

O melhor custo garantido para a norma do erro de estimação, dado pelo teorema 4.3, pode ser calculado através da solução do seguinte problema de programação convexa expresso através de LMIs

$$\gamma_H = \min_{\sigma, \theta \in \Lambda, P_i > 0, W_i, L, G, V} \{\sigma \ : \ tr(W_i) \leqslant \sigma \ , \ (4.34) - (4.35)\} \tag{4.43}$$

que ao ser resolvido fornece o vetor ótimo $\theta^* \in \Lambda$ que permite calcular o filtro robusto $F_{\theta^*}(\omega)$.

Neste ponto cabe ressaltar um aspecto interessante que é válido para os casos contínuo e discreto indistintamente. Trata-se da implementação do filtro robusto aqui proposto que pode ser feita de maneira bastante simples notando que a estimativa $z_f(t)$ pode ser escrita na forma

$$z_f(t) = \sum_{j=1}^{N} \theta_j^* z_{fj}(t) \tag{4.44}$$

onde $z_{fj}(t)$ é a estimativa produzida pelo filtro de Kalman $j = 1, \cdots, N$ tendo como entrada comum o sinal recebido $y(t)$ para todo $t \geqslant 0$.

4.4.1 Exemplo

Este exemplo foi considerado em (Xie et al. 1994), (Theodor & Shaked 1996), (Xie et al. 1999) e (Shaked et al. 2001). A função de transferência

$$H(\zeta) = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -0.5 & -6 & 0 \\ 1 & 1+\delta & 1 & 0 \\ \hline -100 & 10 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{4.45}$$

O parâmetro incerto satisfaz $|\delta| \leqslant 0.3$. Os filtros de Kalman encontrados para cada vértice são

$$K_1(\zeta) = \frac{-0.0008199\zeta + 0.004918}{\zeta^2 - 0.7049\zeta - 0.00002548} \tag{4.46}$$

$$K_2(\zeta) = \frac{-0.004904\zeta + 0.004509}{\zeta^2 - 0.7722\zeta + 0.00002868} \tag{4.47}$$

e as normas mínimas dos erros de estimação são 36.000 e 51.380, respectivamente. A solução do

Método	Custo Garantido
(Theodor & Shaked 1996)	69.07
(Xie et al. 1999)	66.90
(Shaked et al. 2001) (a)	52.17
(Shaked et al. 2001) (b)	51.43
γ_H	51.384
γ_{inf}	51.381

Tab. 4.2: Norma garantida do erro para o exemplo 4.4.1

problema (4.43) para este exemplo é $\gamma_H = 51.384$ com $\theta^* = \begin{bmatrix} 0.001 & 0.999 \end{bmatrix}$'. Para todos os efeitos práticos, $F_{\theta^*}(\zeta) = K_2(\zeta)$.

A tabela 4.2 mostra os resultados obtidos frente aos resultados presentes na literatura. Como podemos ver o filtro projetado têm um custo garantido muito próximo do limitante inferior definido em (4.18). Isto nos mostra que neste exemplo, calculamos o melhor filtro possível.

4.4.2 Exemplo

Este exemplo foi resolvido em (Xie et al. 1994), (Theodor & Shaked 1996), (Xie et al. 1999) e (Shaked et al. 2001). Considere o sistema descrito pela função de transferência

$$H(\zeta) = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -0.8187 + \delta & -6 & 0 \\ 1 & -0.9854 + 2\delta & 1 & 0 \\ \hline -100 & 10 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{4.48}$$

com o parâmetro incerto dado por $|\delta| \leqslant 0.08$. Os filtros de Kalman encontrados para cada vértice são (4.49) e (4.50). As normas mínimas dos erros de estimação são 54.204 e 36.001, respectivamente.

$$F_1(\zeta) = \frac{0.002204\zeta + 0.009208}{\zeta^2 + 0.8507\zeta - 0.00006902} \tag{4.49}$$

$$F_2(\zeta) = \frac{-0.001212\zeta + 0.007267}{\zeta^2 + 0.8347\zeta - 0.0001549} \tag{4.50}$$

A solução do problema (4.43) para este exemplo é $\gamma_H = 54.274$ com $\theta^* = \begin{bmatrix} 0.9596 & 0.0404 \end{bmatrix}$'. O

Método	Custo Garantido
(Theodor & Shaked 1996)	151.85
(Xie et al. 1999)	97.73
(Shaked et al. 2001) (a)	70.40
(Shaked et al. 2001) (b)	63.95
(Shaked et al. 2001) (c)	56.60
γ_H	54.274
γ_{inf}	54.204

Tab. 4.3: Norma garantida do erro para o exemplo 4.4.2

filtro robusto obtido, de quarta ordem, é dado por

$$F(\zeta) = \frac{0.002066\zeta^3 + 0.01085\zeta^2 + 0.007625\zeta - 0.000001389}{\zeta^4 + 1.685\zeta^3 + 0.7098\zeta^2 - 0.0001893\zeta + 0.00000001069} \tag{4.51}$$

A tabela 4.3 contém os custos garantidos associados a cada filtro proposto na literatura e neste trabalho, bem como o limitante inferior (4.18). Como no exemplo 4.4.1 o filtro proposto se aproximou bastante do limitante inferior. Isto mostra que o método proposto neste trabalho permite a obtenção de resultados bastante expressivos.

4.5 Conclusão

Neste capítulo, o modelo de incertezas paramétricas politópicas foi generalizado em relação ao utilizado no capítulo anterior. Desta forma, o filtro proposto neste trabalho pode ser aplicado à sistemas cujas matrizes da representação de estado dependem linearmente dos parâmetros incertos. Com esta generalização, algumas das hipóteses que permitiram o desenvolvimento do capítulo anterior deixam de ser necessárias. Logo, este capítulo tem um desenvolvimento diferente para o método de projeto do filtro robusto.

Após definir devidamente o modelo de incertezas utilizado, foi deduzido um limitante inferior para a norma do erro de estimação. Este limitante permite avaliar a distância entre o filtro projetado e o ótimo global e, portanto, serve como um indicador seguro determinar o desempenho do filtro proposto.

Em seguida, foram deduzidas as expressões que permitem o projeto do filtro robusto para sistemas com incertezas paramétricas politópicas genéricas. O resultado é um modelo de otimização convexa expresso por LMIs, que pode ser resolvido facilmente com um algoritmo apropriado.

Os exemplos contidos neste capítulos são analisados em diversos trabalhos e permitem a avaliação da eficiência do filtro proposto em relação aos métodos existentes na literatura. De fato, para estes exemplos, o desempenho do filtro é melhor que todos os outros considerados. Atribuímos esta vantagem ao fato de que o filtro proposto poder ter ordem maior que a dos outros filtros.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho foi proposto um novo método para o projeto de filtros robustos para sistemas lineares contínuos ou discretos no tempo, com incertezas paramétricas politópicas. Utilizamos os filtros de Kalman associados a cada um dos vértices do politopo de incertezas para formar um banco de filtros que produz uma boa estimativa do sinal a ser estimado. O filtro robusto foi determinado como sendo uma combinação convexa apropriada dos elementos do banco de filtros.

Este método foi aplicado primeiramente para uma sub-classe de incertezas paramétricas. Dois modelos foram considerados para o cálculo do vetor de pesos ótimo para o banco de filtros: uma aproximação linear e um método exato. A aproximação linear tem um modelo mais simples, que permite uma implementação mais rápida do problema de otimização. Entretanto, para se obter resultados exatos, é necessário utilizar um modelo quadrático para a norma do erro de estimação. Desta forma, como esperado, no segundo caso, obtemos filtros robustos com desempenhos melhores. Apesar do fato de que para esta sub-classe o problema tem solução ótima global conhecida, é importante notar que os resultados obtidos podem ser ampliados para sistemas com incertezas paramétricas politópicas genéricas. Este fato é importante na medida que neste caso a solução ótima global do problema de filtragem robusta não é conhecida.

Em seguida, o modelo foi expandido para sistemas com incertezas paramétricas politópicas genéricas. Deste modo é possível o projeto de filtros robustos para um número maior de sistemas de interesse. Foram determinados os modelos de otimização dos pesos para o filtro ponderado, todos expressos na forma de LMIs. O limitante inferior proposto para a norma do erro de estimação fornece um critério para avaliar a qualidade do filtro robusto calculado.

Ressaltamos que em todo o trabalho, foram analisados sistemas a tempo contínuo e discreto. De fato, os métodos propostos têm equivalentes contínuos e discretos. Foi mostrado, através de diversos exemplos, que o método proposto para sistemas com incertezas paramétricas genéricas produz resultados melhores que os existentes na literatura.

Este trabalho foi a base para a elaboração de dois artigos, a saber, (Martins & Geromel 2006), apresentado em congresso e (Geromel & Martins 2007), submetido para publicação em revista científica internacional.

Para trabalhos futuros é importante considerar a generalização dos resultados aqui apresentados para tratar o projeto de filtros robustos em norma $\mathcal{H}_\infty$. Outro ponto que merece atenção é a determinação da solução ótima global do problema de estimação robusta para uma classe de sistemas mais ampla que aquela considerada em (Geromel & Regis Filho 2006).

Referências Bibliográficas

Barbosa, K. A., de Souza, C. E. & Trofino, A. (2005), 'Robust H_2 filtering for uncertain linear systems: LMI based methods with parametric lyapunov functions', *Systems & Control Letters* **54**(3), 251–262.

Boyd, S. & Vandenberghe, L. (2004), *Convex Optimization*, Cambridge University Press.

Colaneri, P., Geromel, J. C. & Locatelli, A. (1997), *Control Theory and Design: An RH_2 and RH_∞ Viewpoint*, Cambridge University Press.

Geromel, J. C. (1999), 'Optimal linear filtering under parameter uncertainty', *IEEE Transactions on Signal Processing* **47**(1), 168–175.

Geromel, J. C., de Oliveira, M. C. & Bernussou, J. (2002), 'Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent lyapunov functions', *SIAM Journal on Control and Optimization* **41**(3), 700–711.

Geromel, J. C. & Martins, R. (2007), 'A new method to H_2 robust filter design', *Submitted to publication* .

Geromel, J. C. & Regis Filho, L. A. V. (2006), 'H_2 optimal robust filtering', *European Journal of Control* **12**(1), 30–39.

Hoang, N. T., Tuan, H. D., Apkarian, P. & Hosoe, S. (2004), 'Robust filtering for discrete nonlinear fractional transformation systems', *IEEE Transactions on Circuits and Systems - II: Express Briefs* **51**(11), 587–592.

Li, L., Luo, Z.-Q., Davidson, T. N., Wong, K. M. & Bossé, E. (2002), 'Robust filtering via semidefinite programming with applications to target tracking', *SIAM Journal on Optimization* **12**(3), 740–755.

Martins, R. & Geromel, J. C. (2006), Filtragem robusta via aproximações politópicas convexas, *in* 'XVI Congresso Brasileiro de Automática', Salvador - BA.

Oliveira, M. (1999), *Controle de sistemas lineares baseado nas desigualdades matriciais lineares*, Tese de Doutorado - Unicamp.

Regis Filho, L. A. V. (2004), *Filtragem Ótima Robusta em Sistemas Dinâmicos*, Tese de mestrado - Unicamp.

Shaked, U., Xie, L. & Soh, Y. C. (2001), 'New approaches to robust minimum variance filter design', *IEEE Transactions on Signal Processing* **49**(11), 2620–2629.

Souza, C. & Trofino, A. (1999), *An LMI Approach to the design of robust H_2 filters*, Recent Advances on Linear Matrix Inequalities Methods in Control, SIAM.

Theodor, Y. & Shaked, U. (1996), 'Robust discrete-time minimum-variance filtering', *IEEE Transactions on Signal Processing* **44**, 181–189.

Tuan, H. D., Apkarian, P. & Nguyen, T. Q. (2001), 'Robust and reduced-order filtering: New LMI-based characterization and methods', *IEEE Transactions on Signal Processing* **49**(12), 2975–2984.

Xie, L., Soh, Y. C. & de Souza, C. E. (1994), 'Robust kalman filtering for uncertain discrete-time systems', *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**, 1310–1314.

Xie, L., Soh, Y. C. & Du, C. (1999), Robust H_2 estimation and control, Tech. rep., Sch. Elect. Electron Eng., Nanyang Technol. Univ., Singapore.