

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MICROONDAS E ÓPTICA

Estudo de Ondas Localizadas do Tipo Mathieu

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia Elétrica**.

Autor: César Augusto Dartora

Orientador: Prof. Dr. Hugo E. Hernández-Figueroa

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Hugo Enrique Hernández-Figueroa - DMO/FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Carlos Allan Caballero Petersen - Universidade de Passo Fundo/RS

Prof. Dr. Erasmo Recami - Università Statale di Bergamo/Italia

Prof. Dr. Evandro Conforti - DMO/FEEC/UNICAMP

Campinas, 1 de Agosto de 2002.

*"A emoção mais profunda que podemos sentir é o mistério.
É este o sentimento que cria toda a arte e a ciência verdadeiras.*

*Se alguém não conhece esta sensação
ou não pode mais experimentar espanto ou surpresa,
já é um morto vivo e seus olhos se cegaram."*

(Albert Einstein)

A meus pais Adroaldo e Pelágia,
Aos meus irmãos Alexandre, Henrique e Eduardo,
Ao meu avô Vitoldo - *in memoriam*.

Agradecimentos

Ao Prof. Hugo E. Hernández-Figueroa pelo apoio, compreensão, sinceridade e liberdade dada durante toda a orientação deste trabalho.

A todos os colegas do Departamento de Microondas e Óptica, especialmente ao Michel Zamboni Rached e ao Kléber Zuza Nóbrega pela troca de idéias, pelo companheirismo e agradável convivência.

Ao Prof. Carlos A. Caballero Petersen, meu orientador de graduação, pelo apoio e incentivo a fazer o Mestrado.

A todos os professores que de alguma forma contribuíram com o trabalho e por todo conhecimento que adquiri com vocês.

Ao Vinícius F. Montagner e ao Ricardo L. Kulzer pela amizade, companheirismo e ótima convivência.

Ao Eng. Costa, do Laboratório de Ensino de Óptica, do Instituto de Física da Unicamp, pelo apoio nos testes experimentais que realizamos.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

Finalmente a todos os meus familiares e amigos, por tudo o que representam para mim, pelo apoio, compreensão e pelas lições de vida.

Resumo

Nas últimas décadas os feixes não-difrativos e os pulsos localizados tem sido objeto de muitos estudos, principalmente após a demonstração experimental dos feixes de Bessel por Durnin e colaboradores e pela geração das ondas do tipo X por Lu (ultra-som) e outros, devido às suas aplicações potenciais em metrologia, microlitografia, captação de imagem na medicina, cortes ultra-precisos em chapas metálicas e cirurgia a laser, óptica não-linear, comunicações ópticas e comunicações sem fio (wireless).

Os feixes ópticos não-difrativos são soluções da equação de Helmholtz não sujeitos à difração, ou seja, idealmente o perfil de intensidade transversal não sofre mudanças ao longo da direção de propagação. Na prática tem-se conseguido boas aproximações para tais soluções ideais. Já os pulsos localizados surgem naturalmente da modulação dos feixes não-difrativos.

Neste trabalho faz-se um estudo dos feixes não-difrativos e dos pulsos localizados, especialmente em coordenadas elípticas cilíndricas, que despertaram muito interesse desde a produção experimental dos feixes de Mathieu por Gutiérrez-Vega. Para fazer possível a análise dos pulsos de Mathieu, na qual surgem integrais em frequência muito complexas para serem efetuadas com as funções de Mathieu exatas, é também apresentada uma aproximação válida e bastante útil para as funções de Mathieu totalmente nova ao nosso conhecimento.

Abstract

In the past decades the nondiffracting beams and the localized pulses have been the subject of many studies, since the experimental demonstration of Bessel beams by Durnin and coworkers and the X-Waves generation by Lu (ultrasonography) and others, due to their potential applications in metrology, microlithography, medical imaging, nonlinear optics, laser machining and surgery, optics and wireless communications.

Nondiffracting beams are Helmholtz equation's solutions unaffected by diffraction, ideally the transverse intensity profile have no changes along the propagation direction. In practice good approximations have been made for the ideal solutions. The localized pulses arrives naturally from the modulation of diffraction-free beams.

In this work a study of diffraction-free beams and localized pulses is made, specially in elliptic cylindric coordinates, because of the actual interest generated due to the experimental demonstration of Mathieu beams by Gutiérrez-Vega. To make possible the analysis of Mathieu pulses, in which integrals evaluated in frequency must be done and are very hard to do with the exact Mathieu functions, is presented here a valid and useful approximation to Mathieu functions, totally new to the best of our knowledge.

Sumário

1	Introdução	1
2	Feixes Ópticos Não-Difrativos: Análise via Equação de Ondas	7
2.1	A equação de Helmholtz	9
2.2	Coordenadas Cilíndricas: feixes de Bessel	12
2.3	Coordenadas Cilíndricas Elípticas: feixes de Mathieu	15
2.3.1	A transformação de Lu em Coordenadas Elípticas Cilíndricas	21
2.4	Soluções via integral simplificada de Whittaker	24
2.5	Conclusões do Capítulo 2	29
3	Feixes Ópticos Não-Difrativos: Análise via Teoria Escalar da Difração	31
3.1	A teoria escalar da difração	33
3.2	Feixes de Bessel	36
3.2.1	O aparato experimental de Durnin e obtenção de feixes de Bessel	37
3.3	Feixes de Mathieu	45
3.4	Estruturas Difrativas com vários anéis	51
3.4.1	Espaçamento logarítmico dos anéis	54
3.4.2	Espaçamento senoidal, exponencial e linear dos Anéis	55
3.4.3	Análise do espaçamento logarítmico dos anéis para o caso real: lente finita.	57
3.5	Conclusões do Capítulo 3	60
4	Aproximação às funções de Mathieu	63
4.1	Demonstração das fórmulas gerais de aproximação às funções de Mathieu	64
4.2	Algumas fórmulas aproximadas para as funções de Mathieu	68

4.3	Conclusões do Capítulo 4	72
5	Pulsos Ópticos Localizados	77
5.1	Solução de Onda do tipo X	79
5.2	Pulsos de Mathieu	82
5.3	Pulsos Localizados obtidos com espectros usuais	85
5.4	Teorema da Convolução e algumas propriedades dos pulsos localizados	90
5.5	Conclusões do Capítulo 5	91
6	Conclusões Gerais	93
6.1	Estudo da Viabilidade dos Sistemas Ópticos Sem Fio	95
6.2	Um sistema para guiamento de átomos e partículas através de Bessel beams	97
6.3	Guias de ondas e cavidades elípticas	99
6.4	Estudo dos sistemas de geração de feixes e pulsos	100

Lista de Figuras

2.1	k_z , $k_\perp$ e o ângulo θ	10
2.2	Intensidade Transversal $F = \Psi ^2$:(a)Feixe de Bessel de ordem 0; (b)Feixe de Bessel de ordem 1; (c)Feixe de Bessel de ordem 2.	13
2.3	Coordenadas Cilíndricas Elípticas no plano $z = 0$	15
2.4	Intensidade Transversal $F = \Psi ^2$:(a)Feixe de Mathieu par de ordem 0; (b)Feixe de Mathieu par de ordem 1; (c)Feixe de Mathieu par de ordem 2.	19
2.5	Intensidade Transversal $F = \Psi ^2$:(a)Feixe de Mathieu ímpar de or- dem 1; (b)Feixe de Mathieu ímpar de ordem 2; (c)Feixe de Mathieu ímpar de ordem 3.	20
3.1	Arranjo experimental proposto por Durnin para a criação dos feixes não difrativos.	38
3.2	Simulação numérica para o feixe de Bessel de ordem zero em $\rho = 0$	42
3.3	Simulação numérica em $\rho = 0$ para intensidade do feixe de Bessel de ordem zero, com as dimensões utilizadas por Gutiérrez-Vega para criar feixes de Mathieu	42
3.4	Simulação numérica em $\rho = 0$ para intensidade do feixe de Bessel de ordem zero, com as dimensões utilizadas por Gutiérrez-Vega respei- tando a relação (3.38).	43
3.5	Simulação numérica para intensidade do feixe de Mathieu de ordem zero e $q = 25$	51
3.6	Arranjo experimental de Durnin para fendas multi-anulares.	52
3.7	Raios dos anéis em função de n	55
3.8	Padrão de intensidade $F = \psi ^2$: (a) em todo o espaço; (b) para $\rho = 0$	56
3.9	Padrão de intensidade $F = \psi ^2$: (a) em todo o espaço; (b) para $\rho = 0$ para o espaçamento senoidal.	57

3.10	Padrão de intensidade $F = \psi ^2$: (a) em todo o espaço; (b) para $\rho = 0$ para o espaçamento exponencial.	58
3.11	Padrão de intensidade $F = \psi ^2$: (a) em todo o espaço; (b) para $\rho = 0$ para o espaçamento linear.	59
3.12	Padrão de intensidade $F = \psi ^2$: (a) em todo o espaço e (b) para $\rho = 0$ no caso ideal; (c) em todo o espaço e (d) para $\rho = 0$ para o aparato de Durnin multi-anular.	60
4.1	Erro médio calculado utilizando a equação (4.27) em função de q para : (a) $ce_0(q, x)$; (b) $se_1(q, x)$; (c) $ce_1(q, x)$; (d) $se_2(q, x)$; (e) $ce_2(q, x)$; (f) $se_3(q, x)$; (g) $ce_3(q, x)$; (h) $se_4(q, x)$	71
4.2	Funções de Mathieu Pares, exatas (curva sólida) e aproximadas (curvas tracejadas): (a) $ce_0(q, x)$ for $q = 5$; (b) $ce_0(q, x)$ for $q = 25$; (c) $ce_1(q, x)$ for $q = 15$; (d) $ce_1(q, x)$ for $q = 125$; (e) $ce_2(q, x)$ for $q = 25$; (f) $ce_2(q, x)$ for $q = 125$; (g) $ce_3(q, x)$ for $q = 125$	73
4.3	Funções de Mathieu Ímpares, exatas (curva sólida) e aproximadas (curvas tracejadas): (a) $se_1(q, x)$ for $q = 5$; (b) $se_1(q, x)$ for $q = 25$; (c) $se_2(q, x)$ for $q = 15$; (d) $se_2(q, x)$ for $q = 125$; (e) $se_3(q, x)$ for $q = 25$; (f) $se_3(q, x)$ for $q = 125$; (g) $se_4(q, x)$ for $q = 125$	74
4.4	Padrão de intensidade com $q = 25$ para as funções de Mathieu Pares: (a),(c),(e) exatas; (b),(d),(f) aproximadas de ordem 0,1 e 2 respectivamente.	75
4.5	Padrão de intensidade com $q = 25$ para as funções de Mathieu Ímpares: (a),(c),(e) exatas; (b),(d),(f) aproximadas de ordem 1,2 e 3 respectivamente.	76
5.1	X-Shaped Wave: (a) Intensidade $F = \Phi ^2$; (b) Contornos para o gráfico da figura (a); (c) Contornos da intensidade $F = \Phi ^2$ no centro do pulso $\zeta = 0$	81
5.2	Intensidade $F = \Phi ^2$: (a) e (b) em $\zeta = 0$; (c) em $\zeta = -20$; (d) em $\zeta = 20$. A amplitude é desprezível para pontos longe do centro do pulso.	85
5.3	Intensidade $F = \Phi ^2$ para o pulso de Mathieu ímpar de ordem 1: (a) e (b) em $\zeta = 0$; (c) em $\zeta = -20$; (d) em $\zeta = 20$. A amplitude é desprezível para pontos longe do centro do pulso.	86

5.4	Pulso retangular $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(\omega)$	87
5.5	Padrão de intensidade $F = \Phi ^2$ normalizado para modulação de pulso retangular.	89
5.6	Padrão de intensidade $F = \Phi ^2$ normalizado para modulação gaussiana.	89

Capítulo 1

Introdução

Os fenômenos de difração e dispersão são inerentes a todos os campos ondulatórios, indesejáveis na maioria das vezes, pois são responsáveis pelo espalhamento da energia eletromagnética no espaço e no tempo, distorcendo a informação transportada pela onda e tornando-a muitas vezes incompreensível. A difração ocorre no domínio espacial, sendo governada pela Equação de Helmholtz. Considerando um sistema de coordenadas cilíndricas para uma onda que possui uma direção preferencial de propagação, z , a difração provoca o espalhamento espacial da energia eletromagnética de um feixe e o que se observa é que o perfil de intensidade transversal sofre um alargamento tanto maior quanto maior for a distância propagada em z , ocorrendo a redução da amplitude no ponto onde esta assumia seu valor máximo. Para uma distribuição transversal gaussiana radialmente simétrica, no ponto inicial de propagação, $z = 0$, a energia está inicialmente concentrada em torno de $\rho = 0$. Ao propagar-se ao infinito a onda tenderá a tornar-se uma onda plana, para a qual não há região de concentração preferencial da energia, e a densidade de energia é uma constante, porém com a amplitude de todos os pontos muito menor do que a amplitude no ponto de máximo da onda na posição inicial. Usualmente a compensação deste fenômeno se faz através do guiamento das ondas, seja por guias metálicos ou coaxiais em microondas ($\sim 10^9$ Hz), seja através de fibras ópticas no domínio óptico de frequências ($\sim 10^{14}$ Hz). Os meios nos quais a onda não é guiada são chamados meios difratores, exemplo disso é o espaço livre e todo o meio de índice de refração constante em todos os pontos, não limitado espacialmente por outro meio.

Pulsos são formados a partir da adequada superposição dos feixes, e estão sujeitos tanto ao fenômeno da difração quanto ao da dispersão. A dispersão é um fenômeno temporal e ocorre em meios no qual o índice de refração é função da

frequência, de tal forma que a velocidade de propagação de cada componente espectral do pulso seja função da sua frequência. A defasagem entre as componentes provida pela dispersão faz com que o pulso inicial sofra alargamento e distorção temporal, ocasionando erros na recepção em sistemas de comunicações, devido à Interferência Intersimbólica (ISI) por exemplo. O procedimento usual para correção dessas distorções é compensar a dispersão alterando a forma inicial do pulso (predistorção), de maneira a chegar com o formato desejado ao destino final, ou através de regeneradores de sinal ao longo do caminho, o que torna o sistema mais caro e complexo.

Já em 1915, o trabalho pioneiro de Bateman demonstrou que toda equação de ondas homogênea, seja escalar, vetorial ou spinorial, admite soluções com velocidades de grupo menores que aquela das ondas ordinárias no meio considerado. Mais recentemente, soluções com velocidades maiores do que a velocidade das ondas ordinárias no meio foram propostas e verificadas [1]. Soluções localizadas subluminais e superluminais podem se propagar sem mudança no formato por distâncias infinitas, sendo chamadas de "Undistorted Progressive Waves" por Courant e Hilbert [2].

Os feixes não-difrativos foram descobertos por Stratton [3] em 1941 e redescobertos em 1987 por Durnin [4, 5]. Esses feixes teoricamente tem profundidade de campo infinita, na prática propagando-se por distâncias consideravelmente maiores do que feixes convencionais. O trabalho de Durnin e colaboradores é um marco por ter sido realizado experimentalmente, através da geração dos chamados feixes de Bessel, devido ao padrão transversal de intensidade ser dado por funções de Bessel. Tais feixes sugerem de imediato a aplicação em comunicações sem fio, devido ao fato de reduzirem-se significativamente os efeitos difrativos, ou seja, tais feixes são quase imunes à difração por longas distâncias, mesmo sem a presença de um guia de onda. Pulsos obtidos através da superposição de feixes de Bessel foram produzidos inicialmente em acústica por Lu [6], sendo reproduzidos em microondas posteriormente, e denominados de ondas do tipo X, devido ao formato espaço-temporal se assemelhar a um "X". Muitos trabalhos tem sido realizados no sentido de encontrar soluções de ondas localizadas que possam ser aplicadas na prática. Na dissertação de Mestrado de Michel Zamboni-Rached [7], realizada no Instituto de Física "Gleb Wataghin" sob a orientação do Prof. Dr. Hugo E. Hernández-Figueroa, encontra-se uma boa descrição da estrutura de ondas localizadas e algumas aplicações.

Muito embora surja de imediato a possibilidade de aplicação desses tipos de on-

das em comunicações, as aplicações potenciais extrapolam essa área do conhecimento tecnológico, encontrando utilização em guiamento de átomos e partículas, microliografia, metrologia, cortes a laser ultra-precisos em chapas metálicas, captação de imagem e cirurgias a laser na medicina, óptica não-linear e outras [8, 9, 10]. Em comunicações ópticas sem fio apresentam aplicações imediatas para interconexões de redes e conexões a curtas distâncias, onde se torna mais apropriado e simples que o lançamento de cabos e fibras ópticas.

Entre os anos de 2000 e 2001 a publicação de um artigo relatando a geração experimental de um novo tipo de feixes denominados feixes de Mathieu (Mathieu beams) por Gutiérrez-Vega *et al* [9, 11, 12] provocou grande impacto devido ao fato de estes anunciarem distâncias de propagação de 15 m para tais feixes, utilizando para produzi-los aparato semelhante àquele utilizado por Durnin para gerar feixes de Bessel. No entanto, a distância máxima propagada pelo feixe de Mathieu (anunciada pelo grupo de Gutiérrez-Vega) era da ordem de 10 vezes mais do que aquela prevista para os feixes de Bessel produzidos no mesmo aparato. A diferença marcante entre um tipo de feixe e outro é a modulação angular de uma fenda anular, e além do que, o cálculo de estimativa de 15 m supostamente estava baseado em dados puramente geométricos. A motivação e grande objetivo desta dissertação, inicialmente, é estudar em detalhes os feixes não-difrativos de forma a demonstrar as possíveis vantagens dos feixes de Mathieu sobre os feixes de Bessel. Obviamente, afora situações em que a simetria radial é indesejada, não há nenhuma vantagem de um feixe sobre o outro no que se refere à distância máxima de propagação, como será demonstrado posteriormente nessa dissertação. A continuidade do trabalho leva ao estudo dos pulsos de Mathieu e das aproximações às funções de Mathieu, para simplificar o estudo dos pulsos, que foram grandes contribuições para este trabalho de dissertação.

No Capítulo 2 as soluções do tipo feixes não-difrativos são demonstradas diretamente a partir da equação de ondas escalar. A consideração da equação de ondas em coordenadas cilíndricas circulares leva diretamente aos feixes de Bessel, ao passo que quando a equação de ondas é considerada em coordenadas cilíndricas elípticas obtém-se os feixes de Mathieu. Tais feixes formam um conjunto completo de funções ortogonais, fazendo com que a superposição de tais funções seja solução da equação de ondas também. Uma forma de obtenção da solução da equação de ondas é colocar tal solução na forma de uma integral de Whittaker, ou seja, considerar a adequada

superposição de ondas planas. No caso ideal, tem-se uma forma simplificada da integral de Whittaker [13, 3], cuja solução leva diretamente aos feixes de Bessel e de Mathieu dependendo da função espectral angular considerada. Ainda nesse primeiro capítulo mostra-se o Teorema de Lu em coordenadas cilíndricas elípticas. A demonstração do teorema é mostrada em detalhes em [7] para coordenadas genéricas.

No Capítulo 3 considera-se a teoria escalar da difração para a obtenção dos feixes de Bessel e de Mathieu, de forma a tomar conhecimento também da fonte necessária para gerá-los na prática. A combinação das idéias de Huygens e Young em 1818 por Augustin Fresnel produziu uma teoria ondulatória da óptica quantitativamente razoável. O princípio de Huygens considera cada ponto de uma abertura como fonte puntual de ondas esféricas. Obviamente os trabalhos de Huygens e Fresnel datam de antes dos trabalhos fundamentais de Maxwell na teoria eletromagnética então muitas considerações arbitrárias foram feitas para adequar teoria e prática. Requer-se a solução das equações de Maxwell para a obtenção de resultados quantitativos corretos em qualquer faixa do espectro eletromagnético, porém, fazer a análise dos fenômenos com base em tais equações e nas condições de contorno requeridas para satisfazê-las torna-se muito difícil, exceto em casos simétricos. Muitos cientistas, incluindo Kirchhoff, Rayleigh e Sommerfeld desenvolveram uma teoria da difração no domínio óptico bastante simplificada, entre 1880 e 1900. Os resultados dessas teorias concordam bem com os experimentos ao menos qualitativamente, portanto tal teoria é utilizada para avaliar os feixes de Bessel e de Mathieu produzidos experimentalmente através do aparato proposto por Durnin. Mostra-se que os feixes de Mathieu podem ser considerados superposição adequada de feixes de Bessel e não há motivo especial para os feixes de Mathieu propagarem-se distâncias maiores que feixes de Bessel produzidos através do mesmo aparato, ainda mais considerando-se apenas a óptica geométrica para fazer a estimativa de distância máxima de invariância. As estruturas multi-anulares podem produzir interessantes fenômenos devido a interferência de múltiplos feixes não-difrativos de constantes de propagação diferentes, e também são estudados neste Capítulo.

No Capítulo 4 apresenta-se uma aproximação válida e bastante útil às funções de Mathieu. Deu-se ênfase desde o início ao sistema coordenado cilíndrico elíptico, no qual as funções de Mathieu surgem naturalmente. No entanto, a integração de tais funções no domínio da frequência se faz praticamente impossível. A necessidade de avaliar os pulsos resultantes da superposição de feixes de Mathieu fez com que

uma aproximação adequada que simplificasse de maneira significativa os cálculos fosse desenvolvida. Neste Capítulo são avaliadas as funções aproximadas e os limites de validade dessas aproximações, bem como demonstra-se o desenvolvimento matemático necessário para chegar-se às fórmulas gerais de aproximação.

No Capítulo 5 são estudadas as estruturas dos pulsos localizados no espaço-tempo. Os pulsos localizados são estruturas não sujeitas à difração e à dispersão, e por isso despertam tanto interesse, especialmente em comunicações. Aqui são avaliadas as estruturas do tipo X, apenas para efeito de comparação com os pulsos de Mathieu. Utilizando-se as aproximações às funções de Mathieu desenvolvidas no Capítulo 3, obtém-se as propriedades básicas dos pulsos de Mathieu par de ordem 0 e ímpar de ordem 1. Mostra-se que os pulsos de Mathieu tem várias das propriedades das soluções do tipo X, exceto pelo fato do perfil transversal não ser radialmente simétrico. São avaliadas também as situações mais realistas, que envolvem espectros convencionais na modulação de um laser em forma de feixe de Bessel. O teorema da convolução é apresentado, como forma de demonstrar teoricamente algumas propriedades dos pulsos que se tornam mais evidentes pela aplicação desse teorema.

No Capítulo 6, de Conclusões Gerais apresentam-se as observações finais deste trabalho e sugestões futuras dissertações e para a continuidade desas pesquisa, já que há muito por ser estudado ainda nesta área do conhecimento.

Capítulo 2

Feixes Ópticos Não-Difrativos: Análise via Equação de Ondas

Os feixes não-difrativos (nondiffracting beams) tem sido intensamente estudados nas últimas décadas, devido às potenciais aplicações nas mais diversas áreas tecnológicas, especialmente no domínio de frequências ópticas, onde se faz mais simples a sua geração, podendo-se, entretanto, estender a teoria para qualquer banda do espectro eletromagnético. Tais feixes não sofrem difração e portanto mantêm o padrão de intensidade transversal ao longo da propagação. Idealmente, propagam-se ao infinito sem mudança no perfil transversal, porém, mostrar-se-à mais adiante, no Capítulo 3, que isso é fisicamente inconcebível, pois demandaria uma fonte de dimensões infinitas, ou ainda, resultaria em energia infinita. Na prática, é possível a geração de ondas que propagam-se como feixes não-difrativos ideais por longas distâncias em comparação com o comprimento Rayleigh, que é da ordem do comprimento de onda.

O trabalho de Durnin e colaboradores [4, 5] em 1987 é um marco na área, principalmente por demonstrar experimentalmente a possibilidade da geração de feixes não-difrativos através de elementos ópticos simples. Também conhecidos como Campos Ópticos de Propagação Invariante (PIOF - Propagation Invariant Optical Fields) os feixes não-difrativos possuem um amplo espectro de aplicações como microlitografia, para criação de pequenos padrões isolados [8], metrologia, cortes a laser ultra-precisos em chapas metálicas, captação de imagem e cirurgias a laser na medicina [9, 11]. Tem-se demonstrado bastante eficientes em óptica não-linear [10], geração de segundo harmônico, terceiro harmônico e geração Raman [14]. Feixes de Bessel podem ser utilizados para guiamento de átomos, pois atuam como guias

ópticos de átomos, para acoplamento de átomos frios [15]. A aplicação tecnologia mais desejada atualmente está nas comunicações sem fio (wireless) [11, 16]. Ver também referências [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23].

Um requerimento necessário para a obtenção dos campos ópticos de propagação invariantes é a solução da equação de Helmholtz em sistemas coordenados cilíndricos, dos quais serão abordadas as soluções em coordenadas cilíndricas circulares e cilíndricas elípticas. Uma outra abordagem se faz através da solução de uma forma simplificada da integral de Whittaker [3, 13]. Neste capítulo mostrar-se-à todas essas abordagens bem como a transformação de Lu em coordenadas elípticas cilíndricas. Tal transformação permite encontrar a solução de uma equação de ondas em $n + 1$ dimensões a partir da solução n -dimensional. Na Seção 2.1 faz-se a apresentação da Equação de Helmholtz e suas soluções. Na Seção 2.2 é realizada a solução da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas circulares e na Seção 2.3 em coordenadas cilíndricas elípticas, resultando nos feixes de Bessel e feixes de Mathieu respectivamente. Na Seção, 2.3.1 apresenta-se a transformação de Lu. A Seção 2.4 traz a solução da equação de Helmholtz a partir de uma integral simplificada de Whittaker e finalmente em 2.5 são apresentadas as conclusões gerais do Capítulo.

2.1 A equação de Helmholtz

No domínio das frequências ópticas os fenômenos eletromagnéticos podem ser tratados, ao menos qualitativamente, por uma função de ondas escalar, ou ainda, em sistemas coordenados cilíndricos a componente longitudinal do campo elétrico ou magnético sempre obedece uma equação de ondas desacoplada das componentes transversais. Essa função de ondas escalar obedece à equação de ondas homogênea no domínio temporal:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.1)$$

Fazendo a decomposição do laplaciano em suas componentes transversais e longitudinais a equação (2.2) toma a forma abaixo:

$$\left(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Psi(\mathbf{r}_{\perp}, z, t) = 0 \quad (2.2)$$

onde $\perp$ denota as componentes transversais com relação à direção de propagação. Aplicando-se a transformação de Fourier em z e t , e fazendo uso das propriedades de transformadas:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \rightarrow (ik_z)^2 = -k_z^2 \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow (-i\omega)^2 = -\omega^2$$

obtem-se a Equação de Helmholtz no domínio de k_z e ω :

$$\left(\nabla_{\perp}^2 + k_{\perp}^2\right) \psi(\mathbf{r}_{\perp}, k_{\perp}) = 0 \quad (2.3)$$

onde:

$$k_{\perp}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2. \quad (2.4)$$

A solução no domínio de k_z e ω é:

$$\Psi(\mathbf{r}_{\perp}, k_z, \omega) = \psi(\mathbf{r}_{\perp}, k_{\perp}) \exp[i(k_z z - \omega t)] \quad (2.5)$$

Voltando ao domínio temporal:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(k_z, \omega) \psi(\mathbf{r}_{\perp}) e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (2.6)$$

Dado que k_z e ω devem respeitar a relação de dispersão dada pela equação (2.4) então a solução pode ser colocada da seguinte maneira:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\omega) \psi(\mathbf{r}_{\perp}, \frac{\omega \sin \theta}{c}) \exp[i\omega \frac{\zeta}{v}] \quad (2.7)$$

onde:

$$\zeta = z - vt \quad (2.8)$$

$$v = \frac{c}{\cos \theta} \quad (2.9)$$

$$k_z = \frac{\omega}{c} \cos \theta \quad (2.10)$$

$$k_{\perp} = \frac{\omega}{c} \sin \theta \quad (2.11)$$

Na Fig. 2.1 mostra-se a relação entre k_z , $k_{\perp}$ e o ângulo θ no espaço.

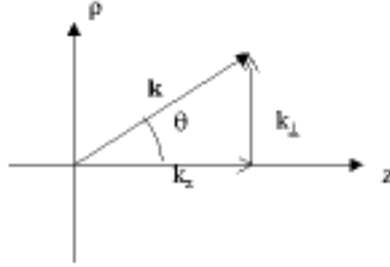


Figura 2.1: k_z , $k_{\perp}$ e o ângulo θ

A expressão (2.7) leva em conta somente vetores de onda tangentes ao cone que forma um ângulo θ com a direção de propagação z . Para levar em conta o efeito de vetores de onda cujo ângulo com a direção à propagação são diferentes, deve-se integrar a expressão na variável θ também de tal forma que:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\theta, \omega) \psi(\mathbf{r}_{\perp}, \frac{\omega \sin \theta}{c}) \exp[i\omega \frac{\cos \theta}{c} \zeta] \quad (2.12)$$

Um feixe óptico corresponde a uma onda monocromática de tal forma que a função espectral $A(\theta, \omega)$ é:

$$A(\theta, \omega) = \delta(\theta - \theta_0) \delta(\omega - \omega_0). \quad (2.13)$$

A substituição da função espectral (2.13) na equação (2.12) tem como resultado os feixes monocromáticos:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}_\perp, \frac{\omega_0 \sin \theta_0}{c}) \exp(i\omega_0 \frac{\zeta}{v}) \quad (2.14)$$

Para resolver o problema dos feixes não-difrativos precisa-se resolver a equação (2.3), onde somente a função transversal $\psi(\mathbf{r}_\perp, \frac{\omega_0 \sin \theta_0}{c})$ está por ser determinada em um sistema coordenado cilíndrico qualquer, para substituição posterior em (2.14).

2.2 Coordenadas Cilíndricas: feixes de Bessel

Considerando a equação de Helmholtz (2.3) em coordenadas cilíndricas circulares, o laplaciano transversal será dado por:

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

A equação de Helmholtz transversal será:

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k_{\perp}^2 \right] \psi(\rho, \varphi, k_{\perp}) = 0 \quad (2.15)$$

Utilizando-se o tradicional método da separação de variáveis, e devido à necessidade de periodicidade 2π na variável φ , para que a solução possua o mesmo valor em $\varphi = 0$ e $\varphi = 2\pi$, caso contrário, haveria uma inconsistência física, tem-se:

$$\psi(\rho, \varphi, k_{\perp}) = R(\rho, k_{\perp}) e^{im\varphi}; m = 0, 1, 2, 3 \dots$$

A substituição da expressão acima em (2.15) resulta em:

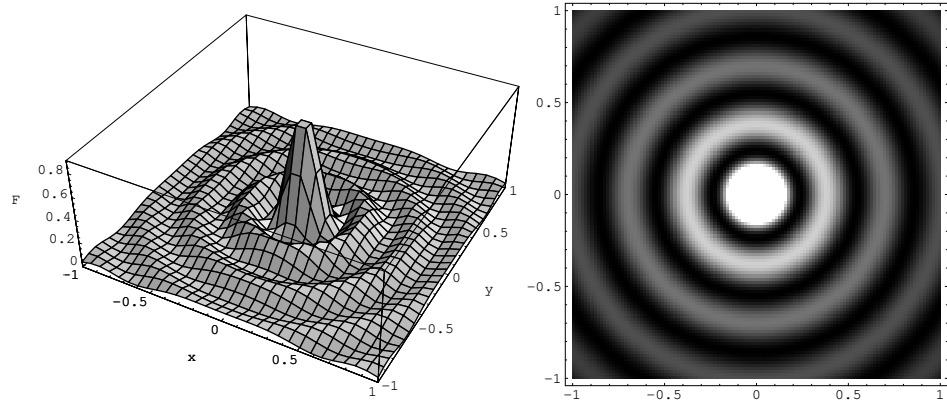
$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{m^2}{\rho^2} + k_{\perp}^2 \right] R(\rho, k_{\perp}) = 0 \quad (2.16)$$

A expressão (2.16) é a equação de Bessel e a solução geral fisicamente viável será então [2, 24, 25, 26, 27]:

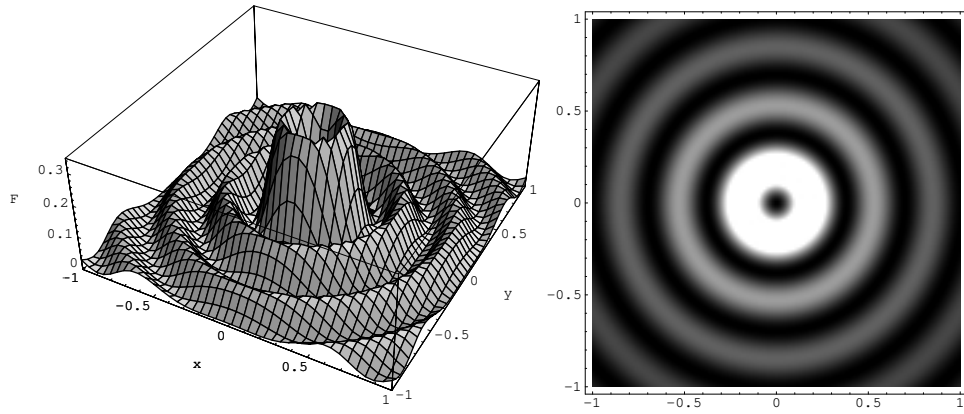
$$\Psi(\rho, \varphi, \zeta) = A_m J_m(k_{\perp} \rho) e^{im\varphi} e^{i\omega_0 \frac{\zeta}{v}} \quad (2.17)$$

onde A_m é uma constante qualquer e J_m é a função de Bessel de ordem m .

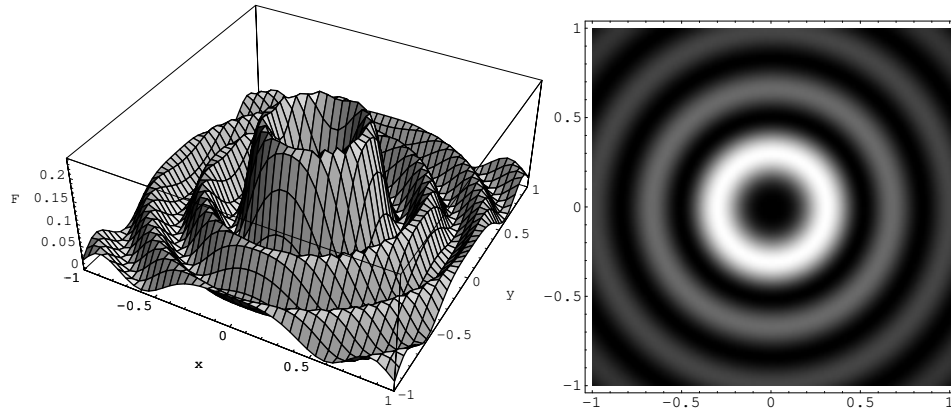
A solução dada pela equação (2.17) é conhecida como feixe de Bessel (Bessel beam) de ordem m . Esta solução é ideal, e propaga-se ao infinito sem sofrer mudanças no padrão de intensidade transversal. Alguns padrões transversais para os feixes de Bessel são mostrados na Fig. 2.2. O feixe de Bessel de ordem zero é o mais comumente utilizado em virtude de que o máximo da intensidade transversal encontra-se no eixo de propagação $\rho = 0$. Em sistemas de comunicações, por exemplo, o feixe de Bessel de ordem zero seria mais desejável. Para o guiamento óptico de átomos, porém, os feixes de Bessel de ordem mais alta são utilizados, e podem ser obtidos através de "axicons" (elemento óptico de formato cônico), conforme [15]. Os feixes de Bessel de ordem mais alta formam uma espécie de guia óptico, sendo



(a)



(b)



(c)

Figura 2.2: Intensidade Transversal $F = |\Psi|^2$: (a) Feixe de Bessel de ordem 0; (b) Feixe de Bessel de ordem 1; (c) Feixe de Bessel de ordem 2.

nula a intensidade central, o que faz com que o guiamento dos átomos ocorra no centro.

O feixe de Bessel de ordem zero possui um "spot" de luz central como mencionado anteriormente. Para os feixes de Bessel de ordem maior o ponto central apresenta intensidade zero, e a máxima intensidade no perfil transversal encontra-se nos anéis concêntricos ao eixo de propagação, afastando-se mais e mais do centro tanto maior é a ordem do Bessel beam.

Os pulsos localizados serão tratados mais adiante, porém, a forma de obter estruturas localizadas no espaço-tempo se faz através da modulação dos feixes localizados. Para a modulação dos feixes de Bessel tem-se então:

$$\Psi(\rho, \varphi, \zeta) = e^{im\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\omega) J_m\left(\frac{\omega}{c} \sin \theta \rho\right) e^{i\omega \frac{\cos \theta}{c} \zeta} \quad (2.18)$$

Dado que a velocidade de propagação dos feixes de Bessel é dada por (2.9), cuja dependência está na variável θ , é possível a composição de feixes de diferentes velocidades. Isso pode ser feito através de estruturas multi-anulares, tratadas mais adiante. Outro fato a ser ressaltado aqui é que da forma como a velocidade do feixe é definida, esta é maior que a velocidade da luz no meio. O fato de a velocidade do feixe ser superluminal já foi muito discutido na literatura corrente e para uma análise simples ver [28]. É importante notar que o padrão apresentado pelo feixe é criado através da interferência de frentes de onda que se propagam com a velocidade da luz, e qualquer informação transmitida se propaga com velocidade luminal. Para qualquer feixe não-difrativo as mesmas conclusões a respeito da velocidade de propagação do feixe e velocidade de propagação da informação são as mesmas, e a velocidade da informação sempre é igual à velocidade da luz, não havendo violação dos princípios da Relatividade Restrita.

2.3 Coordenadas Cilíndricas Elípticas: feixes de Mathieu

O sistema de coordenadas cilíndricas elípticas [29, 30] consiste na representação dos pontos no plano xy através de um conjunto de hipérboles e elipses, conforme mostrado na Fig. 2.3.

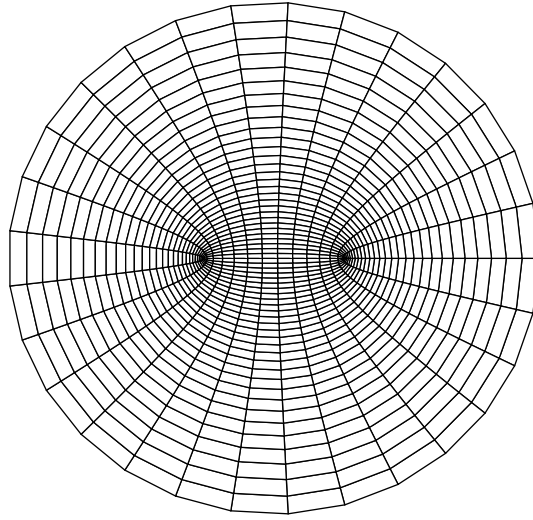


Figura 2.3: Coordenadas Cilíndricas Elípticas no plano $z = 0$

Matematicamente um ponto $P(x, y, z)$ pode ser representado nesse sistema de coordenadas cilíndricas elípticas por $P(u, v, z)$ onde:

$$\begin{aligned} x &= h \cosh u \cos v \\ y &= h \sinh u \sin v \\ z &= z \end{aligned} \tag{2.19}$$

Todo o espaço tridimensional de pontos é mapeado desde que:

$$\begin{aligned} u &\geq 0 \\ 0 &\leq v \leq 2\pi \\ -\infty &\leq z \leq \infty \end{aligned} \tag{2.20}$$

Para valores de u constante, no plano $z = 0$ variando-se apenas v , resultam elipses confocais, de foco maior quanto maior for o valor de u . Mantendo v constante, variando-se apenas u obtem-se um conjunto de hipérboles. O laplaciano no sistema de coordenadas cilíndricas elípticas é dado por [26]:

$$\nabla^2 = \frac{2}{h^2(\cosh 2u - \cos 2v)} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.21)$$

Tomando-se agora somente as componentes transversais do laplaciano dado por (2.21) para resolver a equação (2.3) tem-se:

$$\left[\frac{2}{h^2(\cosh 2u - \cos 2v)} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) + k_{\perp}^2 \right] \psi(u, v, k_{\perp}) = 0 \quad (2.22)$$

Utilizando-se o Método da Separação de Variáveis, pode-se supor ψ da forma abaixo:

$$\psi(u, v, k_{\perp}) = U(u, k_{\perp}) V(v, k_{\perp}) \quad (2.23)$$

A substituição de (2.23) em (2.22) resulta em duas equações diferenciais para $U(u)$ e $V(v)$ conhecidas como Equação de Mathieu Modificada e Equação de Mathieu, respectivamente:

$$\frac{d^2 U(u, k_{\perp})}{du^2} - (a - 2q \cosh 2u) U(u, k_{\perp}) = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{d^2 V(v, k_{\perp})}{dv^2} + (a - 2q \cos 2v) V(v, k_{\perp}) = 0 \quad (2.25)$$

onde:

$$q = \frac{h^2 k_{\perp}^2}{4} \quad (2.26)$$

As soluções de (2.24) e (2.25) são as funções de Mathieu Modificadas e as funções de Mathieu, respectivamente. As funções de Mathieu são ainda chamadas de Seno e Cosseno Elíticos, e as funções de Mathieu modificadas de Seno Hiperbólico e Cosseno Hiperbólico Elíticos. Utilizar-se-à a notação convencional:

$$\begin{aligned} \text{ce}_n(a, q, v) &\rightarrow \text{Cosseno Eliptico} \\ \text{se}_n(a, q, v) &\rightarrow \text{Seno Eliptico} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ce}_n(a, q, v) &\rightarrow \text{Cosseno Hiperbolico Eliptico} \\ \text{Se}_n(a, q, v) &\rightarrow \text{Seno Hiperbolico Eliptico} \end{aligned}$$

O parâmetro livre nas equações de Mathieu e Mathieu Modificada é o valor de a . Porém há a necessidade de periodicidade 2π para os problemas físicos reais, em termos das coordenadas transversais, que no caso são u e v . Nesse caso especificamente deve haver periodicidade nas funções de v . Há um conjunto de soluções periódicas da Equação de Mathieu. Somente determinados valores de a tornam a função periódica, e estes são ditos valores característicos da função de Mathieu. Os valores de a são diferentes para o cosseno e o seno elítico. O valor de n é dito ordem da função de Mathieu, e para haver periodicidade de 2π deve tomar valores inteiros [24, 25, 31]. Para uma discussão mais detalhada a referência [31] é a mais indicada. Tem-se então as soluções possíveis fisicamente:

$$\psi_n^{par}(u, v, k_z, \omega) = e^{i(k_z z - \omega t)} \text{Ce}_n(a_n, q, u) \text{ce}_n(a_n, q, v), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

$$\psi_n^{impar}(u, v, k_z, \omega) = e^{i(k_z z - \omega t)} \text{Se}_n(b_n, q, u) \text{se}_n(b_n, q, v), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.28)$$

As soluções gerais para a equação de ondas homogênea nas coordenadas cilíndricas elípticas são então:

$$\psi_{par}(u, v, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(k_z, \omega) \text{Ce}_n(a_n, q, u) \text{ce}_n(a_n, q, v) e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (2.29)$$

$$\psi_{impar}(u, v, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(k_z, \omega) \text{Se}_n(b_n, q, u) \text{se}_n(b_n, q, v) e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (2.30)$$

onde a_n são os valores característicos das funções Mathieu $\text{ce}(a, q, v)$ de ordem n , e b_n são os valores característicos das funções de Mathieu $\text{se}(b, q, v)$ de ordem n e $q = \frac{h^2 k_z^2}{4}$. Mas como k_z e ω estão relacionados entre si, e podemos escrever a solução como uma soma das funções par e ímpar, tem-se, como solução geral:

$$\begin{aligned} \psi(u, v, z, t) = & \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\sum_n (A_n(\theta, \omega) \text{Ce}_n(q, u) \text{ce}_n(q, v)) + \right. \\ & \left. + \sum_n (B_n(\theta, \omega) \text{Se}_n(q, u) \text{se}_n(q, v)) \right] e^{i\omega \frac{\cos \theta}{c} \zeta} \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde:

$$q = \frac{h^2 k_t^2}{4} = \frac{h^2 \omega^2 \sin^2 \theta}{4c^2} \quad (2.32)$$

Fixando-se a variável θ , ou seja, não há composição de feixes de diferentes velocidades, a equação (2.31) torna-se:

$$\begin{aligned} \psi(u, v, z, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\sum_n (A_n(\omega) \text{Ce}_n(q, u) \text{ce}_n(q, v)) + \right. \\ & \left. + \sum_n (B_n(\omega) \text{Se}_n(q, u) \text{se}_n(q, v)) \right] e^{i\omega \frac{\cos \theta}{c} \zeta} \end{aligned} \quad (2.33)$$

O feixe de Mathieu de Ordem 0, verificado experimentalmente por Gutierrez-Vega e colaboradores [11] trata-se apenas de um caso particular, monocromático desta solução geral da equação de ondas, na qual pode-se supor um espectro do tipo delta de Dirac em $A_0(\omega)$ e zero para todos os outros coeficientes, resultando:

$$A_0(\omega) = A\delta(\omega - \omega_0) ; A_n(\omega) = B_n(\omega) = 0 / n \neq 0$$

$$\psi_0(u, v, \zeta) = A \exp\left(i\omega_0 \frac{\zeta}{v_1}\right) \text{Ce}_0(a_0, q, u) \text{ce}_0(a_0, q, v) \quad (2.34)$$

Portanto, os feixes de Mathieu de ordem 0 resultam naturalmente da solução da equação de ondas homogênea em coordenadas cilíndricas elípticas. Aqui as variáveis ζ e v_1 são dadas por (2.8) e (2.9) onde v_1 é a velocidade, para não haver confusão com a variável transversal v . Qualquer feixe de Mathieu pode ser obtido da solução geral em coordenadas elípticas cilíndricas dada por (2.33). Trivialmente obtém-se:

$$\Psi_n^{par}(u, v, \zeta) = A \exp\left(i\omega_0 \frac{\zeta}{v_1}\right) \text{Ce}_n(q, u) \text{ce}_n(q, v); n = 0, 1, 2, 3... \quad (2.35)$$

$$\Psi_n^{impar}(u, v, \zeta) = A \exp\left(i\omega_0 \frac{\zeta}{v_1}\right) \text{Se}_n(q, u) \text{se}_n(q, v); n = 1, 2, 3... \quad (2.36)$$

As Figs. 2.4 e 2.5 mostram o perfil transversal para alguns feixes de Mathieu utilizando os valores $q = 25$ e $h = 1$. Nota-se aqui que estas soluções não possuem mais simetria radial, podendo ser aplicadas em situações em que se requer assimetria radial. Os pulsos ópticos podem ser obtidos modulando-se os feixes localizados, o que será tratado mais adiante, porém a integração de (2.33) é bastante difícil para espectros que não sejam a função delta de Dirac.

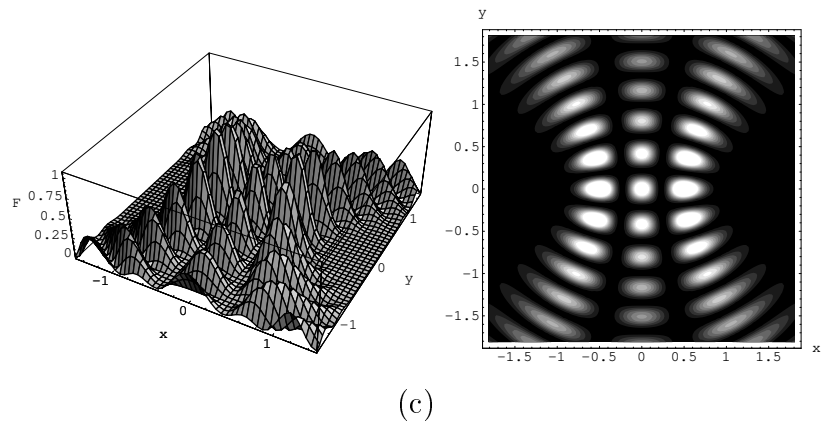
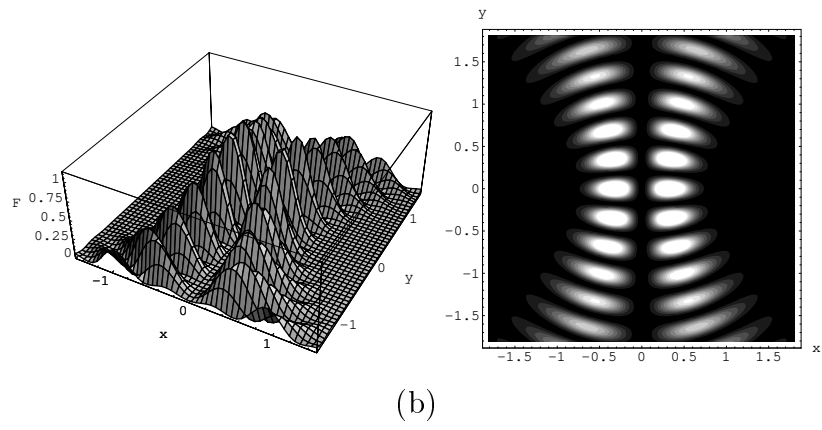
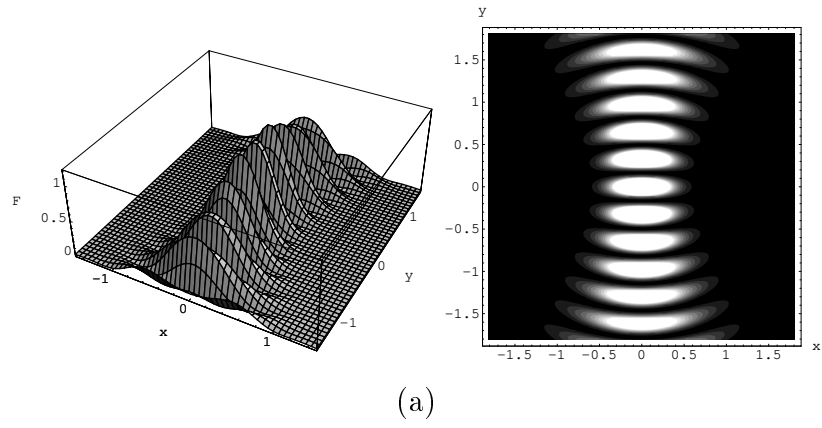
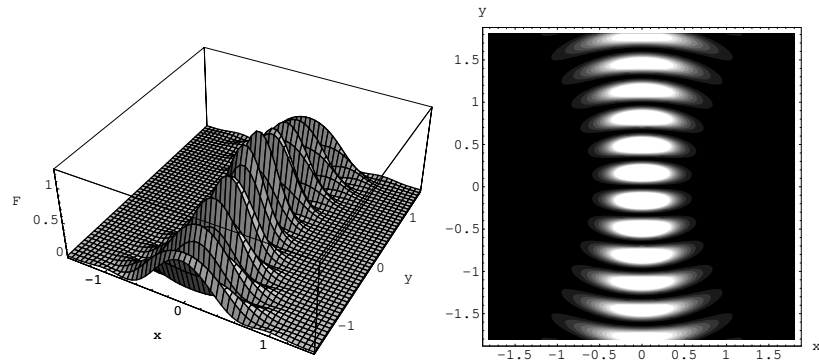
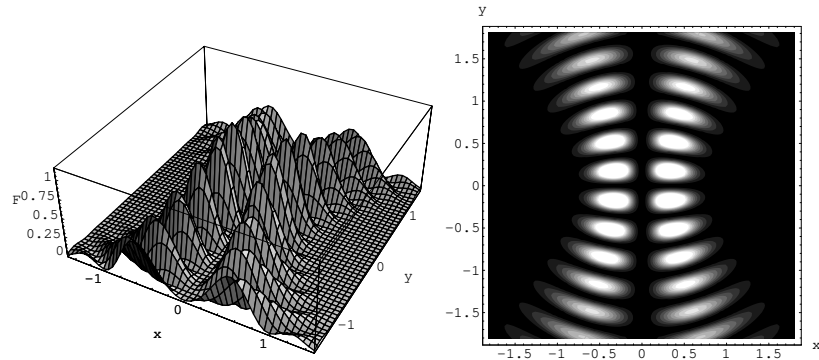


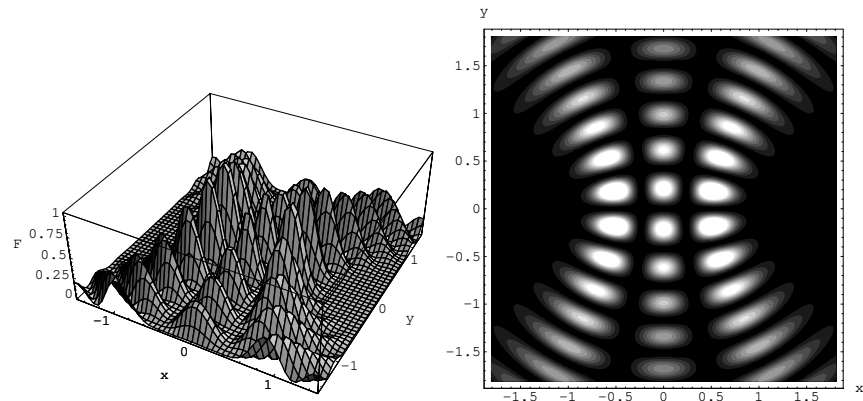
Figura 2.4: Intensidade Transversal $F = |\Psi|^2$: (a) Feixe de Mathieu par de ordem 0; (b) Feixe de Mathieu par de ordem 1; (c) Feixe de Mathieu par de ordem 2.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.5: Intensidade Transversal $F = |\Psi|^2$: (a) Feixe de Mathieu ímpar de ordem 1; (b) Feixe de Mathieu ímpar de ordem 2; (c) Feixe de Mathieu ímpar de ordem 3.

2.3.1 A transformação de Lu em Coordenadas Elípticas Cilíndricas

A transformação de Lu permite a obtenção da solução da equação de ondas em n dimensões a partir de uma solução conhecida em $n - 1$ dimensões. A prova do teorema é dado em [7]. De forma geral tem-se a equação de ondas em n dimensões da forma:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \Phi_{n-1}}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_{n-1}}{\partial t^2} = 0$$

então:

$$\Phi_n = \Phi_{n-1}(x_1 \sin \theta, x_2 \sin \theta, \dots, t - \frac{\cos \theta}{c} x_n)$$

será solução de:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial t^2} = 0$$

Considerando-se a equação de ondas em 3 dimensões, cuja solução é função de u, v e t em coordenadas cilíndricas elípticas:

$$\frac{2}{h^2 (\cosh 2u - \cos 2v)} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

Sendo a solução conhecida e da forma abaixo:

$$\Phi(u, v, t) = F(u, v) e^{-i\omega t}$$

onde:

$$F(u, v) \rightarrow \text{Ce}_n(q, u) \text{ ce}_n(q, v) \text{ ou } \text{Se}_n(q, u) \text{ se}_n(q, v)$$

O Teorema de Lu em coordenadas retangulares ou cilíndricas diz que pode-se conhecer a solução de uma equação de onda n dimensional, sabendo-se a solução da equação equivalente a $n - 1$ dimensões, através de uma transformação das variáveis. O que se deseja é obter um teorema equivalente para o sistema de coordenadas cilíndricas elípticas. A passagem para 4 dimensões, exige que:

$$t \rightarrow t - \frac{\cos \theta}{c} z$$

Fazendo-se esta transformação na variável t da solução original, qual é a transformação adequada em u e v que é solução da equação de ondas em 4 dimensões? Não há mudança trivial, em u e v , como ocorre nas coordenadas retangulares ou cilíndricas. Tem-se que verificar novamente a equação de ondas:

$$\frac{2}{h^2(\cosh 2u - \cos 2v)} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} (1 - \cos^2 \theta) \phi = 0$$

Pode-se escrevê-la de dois modos distintos:

$$\frac{2}{h^2(\cosh 2u - \cos 2v)} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta \phi = 0 \quad (2.37)$$

$$\frac{2}{h^2 \sin^2 \theta (\cosh 2u - \cos 2v)} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \phi = 0 \quad (2.38)$$

No caso tridimensional em u , v e t tem-se $\frac{\omega^2}{c^2} = k_{\perp}^2$, e ao passar para quatro dimensões, u , v , z e t faz-se:

$$\phi(u, v, t) \rightarrow \phi(u, v, t - \frac{\cos \theta}{c} z)$$

Dadas as equações (2.37) e (2.38) pode-se construir duas hipóteses igualmente válidas, que é o equivalente ao teorema de Lu:

1) Ao passar de 3 para 4 dimensões fazendo a substituição $t \rightarrow t - \frac{\cos \theta}{c} z$, a constante transversal $k_{\perp}$ deverá ser multiplicada por $\sin \theta$, de tal modo que $\phi(u, v, t - \frac{\cos \theta}{c} z)$ seja solução da equação de ondas a 4 dimensões. A interpretação dada é que a constante transversal fica reduzida por um fator $\sin \theta$. Esta situação é retratada na equação (2.37).

2) Analisando a equação (2.38), nota-se que também é possível a substituição $h \rightarrow h \sin \theta$. Ou seja, se tivéssemos um contorno elíptico, cuja condição de contorno a ser cumprida em uma elipse de semi-eixo h , em 3 dimensões, então, o semi-eixo fica reduzido por um fator $\sin \theta$.

Em ambos os casos as condições de contorno devem ser revistas, e como as duas interpretações são equivalentes, obviamente as dimensões transversais do problema tridimensional ficam reduzidas por um fator $\sin \theta$ no caso de 4 dimensões. Pode-se interpretar o teorema de Lu, da mesma forma, em qualquer que seja o sistema coordenado, ou seja, ao passar da solução $n-1$ dimensões, para n dimensões, através de uma mudança de variáveis do tipo proposto, as dimensões "transversais" sempre sofrem uma redução por um fator $\sin \theta$. Para as coordenadas cilíndricas elípticas tem-se resumidamente:

$$\phi(u, v, t) \rightarrow \phi(u, v, t - \frac{\cos \theta}{c} z)$$

$$h \rightarrow h \sin \theta$$

ou então:

$$k_{\perp} \rightarrow k_{\perp} \sin \theta$$

2.4 Soluções via integral simplificada de Whittaker

Feixes localizados podem ser descritos através de uma forma simplificada da integral de Whittaker [11, 13]:

$$\Psi(x, y, z, t) = e^{i(k_z z - \omega t)} \int_0^{2\pi} A(\varphi') e^{ik_{\perp}(x \cos \varphi' + y \sin \varphi')} d\varphi' \quad (2.39)$$

A função $A(\varphi')$ é uma função φ' periódica de período π ou 2π e:

$$k_{\perp} = k_0 \sin \theta ; k_z = k_0 \cos \theta$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c} ; \tan \theta = \frac{k_{\perp}}{k_z}$$

Mostrar-se-à que tal equação integral é solução para a equação de ondas (2.2). Considerando-se a equação (2.39) então:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) e^{i(k_z z - \omega t)} \int_0^{2\pi} A(\varphi') e^{ik_{\perp}(x \cos \varphi' + y \sin \varphi')} d\varphi' = 0$$

Efetuando-se as derivadas em z e t fica-se com:

$$\left(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) e^{i(k_z z - \omega t)} \int_0^{2\pi} A(\varphi') e^{ik_{\perp}(x \cos \varphi' + y \sin \varphi')} d\varphi' = 0$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 = k_{\perp}^2$$

Como a integral é efetuada em φ' e as derivadas transversais são em x e y utilizando-se o sistema coordenado retangular, pode-se inserir o operador dentro da integral:

$$e^{i(k_z z - \omega t)} \int_0^{2\pi} A(\varphi') \left(\nabla_{\perp}^2 + k_{\perp}^2 \right) e^{ik_{\perp}(x \cos \varphi' + y \sin \varphi')} d\varphi' = 0$$

Efetuando-se agora as derivadas em x e y tem-se:

$$e^{i(k_z z - \omega t)} \int_0^{2\pi} A(\varphi') \left(-k_{\perp}^2 (\cos^2 \varphi' + \sin^2 \varphi') + k_{\perp}^2 \right) e^{ik_{\perp}(x \cos \varphi' + y \sin \varphi')} d\varphi' = 0$$

Obviamente o resultado do integrando é nulo pois $(\cos^2 \varphi' + \sin^2 \varphi') = 1$ e está provado que a integral de Whittaker é solução para a equação de ondas. Como foi descrito por Gutierrez-Vega [11], o aparato experimental para a produção de um

PIOF baseia-se no fato de que a interseção do cone contendo os vetores de onda com uma esfera delinea uma circunferência de raio proporcional a $k_{\perp}$. Faça-se então:

$$x \cos \varphi' + y \sin \varphi' = \sqrt{x^2 + y^2} \cos(\varphi' - \tan^{-1}(\frac{y}{x}))$$

Agora, substituindo x e y pelas suas representações em coordenadas cilíndricas elípticas obtém-se:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = h \sqrt{\cosh^2 u - \sin^2 v} \quad (2.40)$$

$$\varphi = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \tan^{-1}(\tanh u \tan v) \quad (2.41)$$

$$k_{\perp}(x \cos \varphi' + y \sin \varphi') = k_{\perp} \rho \cos(\varphi' - \varphi) \quad (2.42)$$

Utilizando o fato de que em coordenadas elípticas cilíndricas q é dado por (2.32): obtém-se:

$$z_1 = k_{\perp} \rho = 2\sqrt{q} \sqrt{\cosh^2 u - \sin^2 v}. \quad (2.43)$$

Substituindo a definição (2.43) na equação (2.42) tem-se:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{i(k_z z - \omega t)} \int_0^{2\pi} A(\varphi') e^{iz_1 \cos(\varphi' - \varphi)} d\varphi' \quad (2.44)$$

A expressão (2.44) pode ainda ser modificada para:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{i(k_z z - \omega t)} \int_0^{2\pi} A(\varphi') \left[\cos(z_1 \cos(\varphi' - \varphi)) + i \sin(z_1 \cos(\varphi' - \varphi)) \right] d\varphi' \quad (2.45)$$

Pode-se ainda colocar a integral de Whittaker de forma a possuir séries infinitas das funções de Bessel. Tem-se as seguintes relações, que são bastante úteis:

$$\cos(x \sin \theta) = J_0(x) + 2 J_2(x) \cos(2\theta) + 2 J_4(x) \cos(4\theta) + \dots$$

$$\sin(x \sin \theta) = 2[J_1(x) \sin \theta + J_3(x) \sin(3\theta) + J_5(x) \sin(5\theta) + \dots]$$

Fazendo a manipulação adequada da expressão (2.44) obtém-se a integral de Whittaker como um somatório de funções de Bessel:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}, t) = e^{i(k_z z - \omega t)} \int_0^{2\pi} d\varphi' A(\varphi') \left\{ J_0(z_1) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[J_{2n+2}(z_1) \cos[(2n+2)(\varphi' - \varphi + \frac{\pi}{2})] + \right. \right. \\ \left. \left. + i J_{2n+1}(z_1) \sin[(2n+1)(\varphi' - \varphi + \frac{\pi}{2})] \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Da tabela de integrais de Gradshteyn tem-se [24]:

$$\int_0^{2\pi} \cos[z_1 \cos(\varphi - \alpha)] \text{ce}_{2n}(q, \varphi) d\varphi = \frac{2\pi A_0^{2n}}{\text{ce}_{2n}(q, 0) \text{ce}_{2n}(q, \pi/2)} \text{Ce}_{2n}(q, u) \text{ce}_{2n}(q, v)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin[z_1 \cos(\varphi - \alpha)] \text{ce}_{2n}(q, \varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin[z_1 \cos(\varphi - \alpha)] \text{ce}_{2n+1}(q, \varphi) d\varphi = \frac{-2\pi \sqrt{q} A_1^{2n+1}}{\text{ce}_{2n+1}(q, 0) \text{ce}_{2n+1}(q, \pi/2)} \text{Ce}_{2n+1}(q, u) \text{ce}_{2n+1}(q, v)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos[z_1 \cos(\varphi - \alpha)] \text{ce}_{2n+1}(q, \varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin[z_1 \cos(\varphi - \alpha)] \text{se}_{2n+1}(q, \varphi) d\varphi = \frac{2\pi \sqrt{q} B_1^{2n+1}}{\text{se}_{2n+1}(q, 0) \text{se}_{2n+1}(q, \pi/2)} \text{Se}_{2n+1}(q, u) \text{se}_{2n+1}(q, v)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos[z_1 \cos(\varphi - \alpha)] \text{se}_{2n+1}(q, \varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos[z_1 \cos(\varphi - \alpha)] \text{se}_{2n+2}(q, \varphi) d\varphi = \frac{2\pi q B_2^{2n+2}}{\text{se}_{2n+2}(q, 0) \text{se}_{2n+2}(q, \pi/2)} \text{Se}_{2n+2}(q, u) \text{se}_{2n+2}(q, v)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin[z_1 \cos(\varphi - \alpha)] \text{se}_{2n+2}(q, \varphi) d\varphi = 0$$

onde:

$$z_1 = 2 \sqrt{q} \sqrt{\cosh^2 u - \sin^2 v}$$

$$\alpha = \tan^{-1}(\tanh u \tan v) \quad (2.47)$$

Facilmente pode-se agora comparar a expressão (2.45) com as expressões integrais de Gradshteyn, inserindo-se funções de Mathieu periódicas no lugar da

função espectral $A(\varphi')$. Obtém-se basicamente 4 tipos de soluções distintas:

1) $A(\varphi') = \text{ce}_{2n}(q, \varphi')$

$$\Psi_{2n}^{par} = \frac{2\pi A_0^{2n}}{\text{ce}_{2n}(q, 0) \text{ce}_{2n}(q, \pi/2)} \text{Ce}_{2n}(q, u) \text{ce}_{2n}(q, v) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

2) $A(\varphi') = \text{ce}_{2n+1}(q, \varphi')$

$$\Psi_{2n+1}^{par} = -\frac{2\pi \sqrt{q} A_1^{2n+1}}{\text{ce}_{2n+1}(q, 0) \text{ce}_{2n+1}(q, \pi/2)} \text{Ce}_{2n+1}(q, u) \text{ce}_{2n+1}(q, v) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

3) $A(\varphi') = \text{se}_{2n+1}(q, \varphi')$

$$\Psi_{2n+1}^{impar} = \frac{i 2\pi \sqrt{q} B_1^{2n+1}}{\text{se}_{2n+1}(q, 0) \text{se}_{2n+1}(q, \pi/2)} \text{Se}_{2n+1}(q, u) \text{se}_{2n+1}(q, v) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

4) $A(\varphi') = \text{se}_{2n+1}(q, \varphi')$

$$\Psi_{2n+2}^{impar} = \frac{i 2\pi q B_2^{2n+2}}{\text{se}_{2n+2}(q, 0) \text{se}_{2n+2}(q, \pi/2)} \text{Se}_{2n+2}(q, u) \text{se}_{2n+2}(q, v) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

Estas soluções são os feixes de Mathieu pares e ímpares, obtidos diretamente da equação integral de Whittaker.

Agora considerando-se uma função espectral angular do tipo:

$$A(\varphi') = \frac{1}{2\pi} A_m e^{im\varphi'} \quad (2.48)$$

A solução da equação (2.44) para a função espectral dada pela expressão (2.48) serão os feixes de Bessel. Para provar esta afirmativa, inserindo-se um espectro angular $A(\varphi) = \frac{A_0}{2\pi}$ em (2.46), o que se obtém é o feixe de Bessel de ordem 0 proposto por Durnin [4] em 1987. As integrais que contêm senos e cossenos, quando integradas de $\varphi' = 0$ até $\varphi' = 2\pi$ se anulam, ficando apenas:

$$\Psi(x, y, z, t) = e^{i(k_z z - \omega t)} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{A_0}{2\pi} J_0(z_1) = A_0 J_0(z_1) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

e tem-se portanto:

$$\Psi(x, y, z, t) = A_0 J_0(k_\perp \rho) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

De forma geral tem-se inserindo (2.48) em (2.44):

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} e^{i(k_z z - \omega t)} \int_0^{2\pi} A_m e^{im\varphi'} e^{iz_1 \cos(\varphi' - \varphi)} d\varphi' \quad (2.49)$$

A integração em φ' nos dá:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = A_m J_m(k_{\perp} \rho) e^{im\varphi} e^{i(k_z z - \omega t)}$$

onde A_m é uma constante qualquer e os outros parâmetros já foram definidos anteriormente. A expressão acima é equivalente àquela dada pela expressão (2.17) obtida diretamente da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas.

2.5 Conclusões do Capítulo 2

Neste Capítulo demonstrou-se teoricamente a obtenção das soluções para feixes não-difrativos diretamente da equação de ondas e da solução da integral de Whittaker simplificada. Tais soluções são ideais, não fornecendo muitas informações a respeito das fontes para gerar os feixes não-difrativos e possuem energia infinita, sendo fisicamente irrealizáveis. Porém, assim como as ondas planas obtidas em coordenadas cartesianas, que também possuem energia infinita, podem ser muito úteis na análise de problemas físicos reais. Tanto os feixes de Bessel quanto os feixes de Mathieu formam um conjunto completo de funções de base e qualquer solução para a equação de ondas pode ser representada adequadamente como uma combinação de tais funções de base. Os feixes de Bessel formam o conjunto de funções ortogonais no sistema de coordenadas cilíndricas e os feixes de Mathieu no sistema de coordenadas cilíndricas elípticas.

A partir dessas soluções gerais verifica-se ainda que os feixes de Bessel possuem simetria radial ao passo que os feixes de Mathieu não. A demonstração do Teorema de Lu em coordenadas elípticas cilíndricas não havia sido ainda demonstrado, e diferentemente dos sistemas cartesiano e cilíndrico, onde o fator $(\sin \theta)$ atua diretamente nas variáveis de coordenadas, multiplicando x e y ou ρ quando passamos de três para quatro dimensões, no sistema de coordenadas cilíndricas elípticas esse termo não irá multiplicar u e v , e sim o parâmetro h . Qualquer um dos feixes não-difrativos aqui estudados se propagará com velocidade superluminal, e isso fica bastante evidente na transformação de Lu, já que quando aplicada leva uma solução em t para uma solução em $t - \frac{\cos \theta}{c}z$. A função solução resultante sempre possuirá essa dependência e a velocidade de propagação será $v = \frac{c}{\cos \theta}$, que é sempre maior que c para θ real e diferente de zero. Esse fato já foi bastante discutido na literatura e não implica violação dos postulados da Relatividade especial já que apesar de a velocidade de grupo ser superluminal a informação é carregada com velocidade subluminal [32, 28].

Capítulo 3

Feixes Ópticos Não-Difrativos: Análise via Teoria Escalar da Difração

Difração e espalhamento são fenômenos intrinsecamente ondulatórios. A teoria escalar da difração [33, 34, 35] aproxima o vetor campo elétrico ou magnético através de uma única função escalar e adota uma representação bastante simplificada da interação das ondas eletromagnéticas com a matéria. Apesar de apenas parcialmente correta, devido ao fato de não levar em conta o caráter vetorial das ondas eletromagnéticas, produz resultados bastante satisfatórios do ponto de vista qualitativo e quantitativo quando trata-se do domínio óptico.

Aceitando-se a teoria escalar de Huygens-Fresnel, torna-se possível manipular imagens alterando-se o seu espectro de frequências espacial, do mesmo modo que é possível manipular o som alterando o espectro de frequências temporal por um circuito eletrônico apropriado. Em 1818 Augustin Fresnel combinou as idéias intuitivas de Christian Huygens e sua teoria ondulatória da luz, de 1678, com o princípio de interferência de Young para produzir uma teoria ondulatória da óptica quantitativamente razoável. O princípio de Huygens considera que cada ponto de uma abertura age como fonte puntual de ondas esféricas. Evidentemente os trabalhos de Huygens e Fresnel são anteriores aos trabalhos fundamentais de James Clerk Maxwell na teoria eletromagnética (1865), então muitas considerações arbitrárias foram feitas de modo a conciliar a teoria escalar com os fenômenos observados experimentalmente. Requer-se a solução das equações de Maxwell para a obtenção de resultados quantitativos corretos em qualquer faixa do espectro eletromagnético.

Fazer uma análise dos fenômenos com base nas equações de Maxwell e nas condições de contorno requeridas para satisfazê-las torna-se, entretanto, muito complexa, exceto em casos simétricos. Felizmente muitos cientistas, entre 1880 e 1900, incluindo Kirchhoff, Rayleigh e Sommerfeld desenvolveram uma teoria da difração no domínio óptico bastante simplificada. Os resultados dessas teorias são bastante satisfatórios e concordam bem com os experimentos.

Neste Capítulo analisam-se os feixes não-difrativos através da teoria escalar em sua forma mais simples, que não leva em conta o fato de que as ondas esféricas difratadas devem propagar-se apenas para frente. Tal teoria pode ser obtida através da consideração do princípio de Huygens, muito mais físico e intuitivo, bem como das técnicas de análise de Fourier ou dos teoremas de Green aplicadas à equação de Helmholtz. Na Seção 3.1 um panorama geral da teoria da difração escalar é apresentado. Na Seção 3.2 utiliza-se a teoria escalar para a demonstração da possibilidade da geração dos feixes Bessel. Na Seção 3.2.1 o aparato experimental de Durnin é apresentado e analisado na geração de feixes de Bessel. A análise da geração dos feixes de Mathieu através do aparato de Durnin modulado através de uma função angular de Mathieu é feita na Seção 3.3. A Seção 3.4 traz uma análise das estruturas com fendas multi-anulares, que produz a superposição de feixes não-difrativos de velocidades diferentes. Finalmente na Seção 3.5 são apresentadas as considerações e conclusões finais do Capítulo 3.

3.1 A teoria escalar da difração

Uma onda escalar monocromática é representada por uma função do tipo:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)e^{-i\omega t}$$

A integral de difração, na sua forma mais simples, obtida a partir da integral de Kirchhoff [33], é mostrada abaixo:

$$\psi(x, y, z) = \frac{k}{2\pi i} \int_{S'} \psi(x', y', z') \tau(x', y') \frac{e^{ikR}}{R} dS' \quad (3.1)$$

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (3.2)$$

onde (x', y', z') são as coordenadas da abertura difratora, (x, y, z) são as coordenadas do ponto de observação, a integral é efetuada sobre todo o plano S' da abertura. O parâmetro $\tau(x', y')$ é a função de transferência da abertura. Supondo que a abertura difratora está no plano $z' = 0$, e para valores grandes de z , pode-se expandir (3.2) em séries considerando apenas os termos em primeira ordem. Facilmente mostra-se que para valores grandes de z o resultado é:

$$R \cong z + \frac{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'(\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi')}{2z} \quad (3.3)$$

No denominador de (3.1) o valor da distância R da abertura ao ponto de observação pode ser aproximado por z . A substituição de (3.3) na exponencial da integral de difração dada por (3.1) leva-nos à seguinte equação, em coordenadas cilíndricas:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \frac{k}{2\pi iz} \int_{\rho'=0}^{\infty} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \rho' d\rho' d\varphi' \tau(\rho', \varphi') \psi(\rho', \varphi', 0) e^{ik[z + \frac{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'(\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi')}{2z}]} \quad (3.4)$$

Fazendo algumas manipulações algébricas, a equação (3.4) pode ser colocada de forma mais clara e simples:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \frac{ke^{ik(z + \frac{\rho^2}{2z})}}{2\pi iz} \int_{\rho'=0}^{\infty} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \rho' d\rho' d\varphi' \tau(\rho', \varphi') \psi(\rho', \varphi', 0) e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} e^{-iz_1 \cos(\varphi' - \varphi)} \quad (3.5)$$

onde:

$$z_1 = \frac{k\rho\rho'}{z} \quad (3.6)$$

Expandindo agora a exponencial $e^{-iz_1 \cos(\varphi' - \varphi)}$ em termos de funções de Bessel, em procedimento análogo ao realizado no Capítulo 2 para a integral simplificada de Whittaker obtém-se o resultado abaixo:

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \varphi, z) = & \frac{ke^{ik(z + \frac{\rho^2}{2z})}}{2\pi iz} \int_{\rho'=0}^{\infty} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \rho' d\rho' d\varphi' \times \\ & \times \tau(\rho', \varphi') \psi(\rho', \varphi', 0) e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} \left\{ J_0(z_1) + \right. \\ & + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[J_{2n+2}(z_1) \cos[(2n+2)(\varphi' - \varphi + \frac{\pi}{2})] - \right. \\ & \left. \left. - iJ_{2n+1}(z_1) \sin[(2n+1)(\varphi' - \varphi + \frac{\pi}{2})] \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Quanto à integral de difração (3.5) aqui utilizada, pode-se chegar naturalmente a ela utilizando-se a aproximação paraxial e transformadas de Fourier como será demonstrado. Por simplicidade considera-se a equação de Helmholtz em coordenadas cartesianas:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \Psi(x, y, z) = 0 \quad (3.8)$$

Agora considere a seguinte solução para a equação de Helmholtz:

$$\Psi(x, y, z) = \psi(x, y, z) e^{ikz} \quad (3.9)$$

de modo a eliminar variações rápidas em z . A substituição de (3.9) em (3.8) resulta em:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi(x, y, z) = 0 \quad (3.10)$$

A equação (3.10) é conhecida como equação paraxial. A forma de solução mais simples é a aplicação da transformada de Fourier bidimensional em (x, y) :

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi(k_x, k_y, z) = \frac{-i}{2k} (k_x^2 + k_y^2) \psi(k_x, k_y, z) \quad (3.11)$$

Resolvendo-se (3.11) em z obtém-se:

$$\psi(k_x, k_y, z) = \psi_0(k_x, k_y) \exp\left[\frac{-i}{2k} (k_x^2 + k_y^2) z\right] \quad (3.12)$$

Voltando-se ao domínio (x, y) pode-se aplicar o teorema da convolução das transformadas de Fourier:

$$\psi(x, y, z) = \psi_0(x, y) * h(x, y) \quad (3.13)$$

onde:

$$\psi_0(x, y) = F^{-1} \left[\psi_0(k_x, k_y) \right] \quad (3.14)$$

$$h(x, y) = F^{-1} \left[\exp\left[\frac{-i}{2k}(k_x^2 + k_y^2)z\right] \right] = \frac{k}{i2\pi z} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \quad (3.15)$$

Portanto, ao efetuar a convolução dada por (3.13) obtém-se finalmente:

$$\psi(x, y, z) = \frac{k}{2\pi iz} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x', y') \exp\left(\frac{ik}{2z}[(x - x')^2 + (y - y')^2]\right) dx' dy' \quad (3.16)$$

Substituindo (3.16) em (3.9) e voltando às coordenadas cilíndricas circulares obtém-se a equação (3.5). Aqui a função $\psi_0(x', y')$ é o produto da onda incidente com a função de transferência da abertura.

Outra forma de obtenção da integral de difração é a aplicação dos teoremas de Green à equação de Helmholtz, procedimento usual adotado pela maioria dos autores como por exemplo [33, 35].

3.2 Feixes de Bessel

No Capítulo 2 os feixes de Bessel foram obtidos diretamente da equação de ondas ou através da integral simplificada de Whittaker, porém sem mencionar qual a forma de geração de tais feixes, ou seja, sem fazer menção ao aparato necessário à geração. Nesta Seção será analisada a criação de um feixe de Bessel através da teoria de difração escalar estabelecida na Seção 1 deste Capítulo, o que permite obter informações sobre a forma de geração. Para criar um feixe de Bessel, suponha que a onda incidente na abertura difratora seja uma onda plana com amplitude A_0 em todos os pontos da abertura, ou seja, $\psi(\rho', \varphi', 0) = A_0$. Considere-se ainda a situação ideal em que a abertura é infinitamente extensa, e por conveniência a função de transferência da abertura será dada pela seguinte equação:

$$\tau(\rho', \varphi') = J_0(k_\rho \rho') \quad (3.17)$$

ou seja, é uma função de Bessel de ordem zero. Substituindo (3.17) em (3.7) e integrando primeiramente na variável φ' , os termos contendo senos e cossenos naquela equação se anulam quando integrados de 0 a 2π então a integral resultante fica simplesmente dada por:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \frac{A_0 k e^{ik(z + \frac{\rho^2}{2z})}}{iz} \int_{\rho'=0}^{\infty} \rho' d\rho' e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} J_0(k_\rho \rho') J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \quad (3.18)$$

Com a ajuda de [24, 36] pode-se integrar (3.18) diretamente:

$$\int_{\rho'=0}^{\infty} \rho' d\rho' e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} J_0(k_\rho \rho') J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) = \frac{iz}{k} e^{-i\frac{k\rho^2}{2z}} e^{-i\frac{k_z^2 z}{2k}} J_0(k_\rho \rho)$$

Finalmente a solução é mostrada abaixo:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = A_0 J_0(k_\rho \rho) e^{i(k - \frac{k_z^2}{2k})z} \quad (3.19)$$

onde:

$$k - \frac{k_z^2}{2k} = k_z \quad (3.20)$$

Tal solução é válida para valores grandes de z , já que utilizou-se a teoria escalar da na Seção 1, onde k_z predomina, o que pode ser concluído através de (3.20) já que tal expressão é a relação de dispersão para k_ρ pequeno em comparação com

k_z . Uma teoria correta da difração levaria à mesma resposta [37]. Aqui nota-se que também o feixe de Bessel obedece a lei da difração, porém para obter um feixe obedecendo a equação de Helmholtz e ainda assim permanecer não-difrativo, mantendo o padrão de intensidade transversal inafetado, a abertura difratora deve ser infinitamente extensa, ou seja, uma fonte infinitamente extensa se faz necessária, o que é inconcebível no mundo físico real, pois também a energia necessária para a geração de tal feixe é infinita. Observa-se que para geração de feixes de Bessel de ordem maior a função de transferência da abertura infinita deve ser:

$$\tau(\rho', \varphi') = J_m(k_\rho \rho') e^{im\varphi'} \quad (3.21)$$

A substituição de (3.21) em (3.7) resulta em:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = A_m J_m(k_\rho \rho) e^{im\varphi} e^{i(k_z z - \omega t)}$$

onde k_z é dado por (3.20).

Dada uma abertura cuja função de transferência seja dada por 3.21, porém com raio finito R tem-se para o feixe de Bessel de qualquer ordem:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \frac{A_0 k e^{im\varphi} e^{ik(z + \frac{\rho^2}{2z})}}{iz} \int_{\rho'=0}^R \rho' d\rho' e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} J_m(k_\rho \rho') J_m\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \quad (3.22)$$

com A_0 sendo uma constante qualquer.

3.2.1 O aparato experimental de Durnin e obtenção de feixes de Bessel

Considerar-se-à agora uma aproximação mais realística para a geração dos feixes de Bessel, baseada na teoria escalar da difração e no aparato experimental proposto por Durnin [4]. Atualmente existem muitas formas de geração de feixes ópticos não-difrativos consistindo de elementos ópticos mais sofisticados como por exemplo os "axicons" [15, 22], interferômetros de Fabri-Perot [8] entre outros [21]. Geração de feixes de Bessel de ordem maior utilizam-se basicamente de "axicons". Porém o aparato proposto por Durnin utiliza-se apenas de elementos ópticos simples e ainda é o mais utilizado para propósitos experimentais didáticos. Mostrar-se-à que no caso ideal o aparato de Durnin é completamente equivalente a considerar a abertura difratora infinita de função de transferência do tipo Bessel. A configuração básica utilizada por Durnin é mostrada na Figura 3.1.

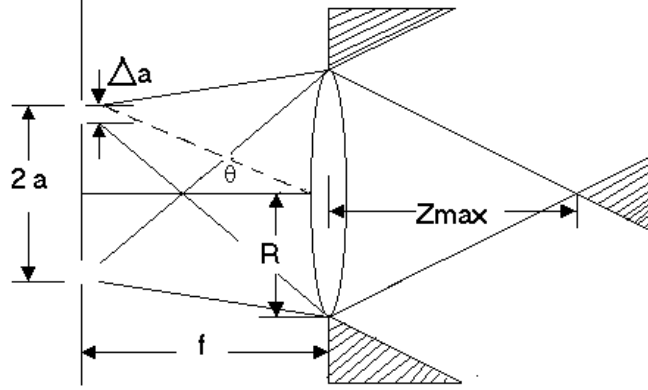


Figura 3.1: Arranjo experimental proposto por Durnin para a criação dos feixes não difrativos.

Nesta configuração básica uma fenda anular, que pode ser modulada através de uma função angular qualquer, é iluminada por um feixe de laser colimado. Uma lente delgada situa-se a uma distância focal f da fenda anular. Idealmente a fenda anular de raio a possui a seguinte função de transferência para a criação do feixe de Bessel de ordem zero:

$$\tau(\rho', \varphi') = \delta(\rho' - a) \quad (3.23)$$

Considerando-se uma onda plana incidente na fenda (feixe de laser colimado), colocada no plano $z' = 0$ e inserindo a função de transferência (3.23) na equação (3.7) fornece:

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \varphi, z) = & \frac{ke^{ik(z + \frac{\rho^2}{2z})}}{2\pi iz} \int_{\rho'=0}^{\infty} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \rho' d\rho' d\varphi' \delta(\rho' - a) A_0 e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} \left\{ J_0(z_1) + \right. \\ & + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[J_{2n+2}(z_1) \cos[(2n+2)(\varphi' - \varphi + \frac{\pi}{2})] - \right. \\ & \left. \left. - iJ_{2n+1}(z_1) \sin[(2n+1)(\varphi' - \varphi + \frac{\pi}{2})] \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

A integração da equação (3.24) é trivial e o resultado é:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \frac{A_0 a k e^{ik(z + \frac{\rho^2}{2z} + \frac{a^2}{2z})}}{2\pi iz} J_0\left(\frac{ka\rho}{z}\right) \quad (3.25)$$

A onda plana será afetada pelo efeito difrativo da fenda anular. O perfil transversal de intensidade resultante após a fenda assemelha-se a uma função Bessel de ordem zero, porém este perfil irá espalhar-se transversalmente enquanto a onda propaga-se ao longo de z , fato que pode ser percebido facilmente analisando a equação (3.25). O padrão produzido pela fenda propaga-se até o ponto onde encontra-se a lente delgada. Para uma lente delgada convergente ideal, ou seja, sem atenuação da onda incidente, a função de transferência pode ser dada por [34]:

$$\tau_{lens}(\rho', \varphi') = e^{-i\frac{k\rho'^2}{2f}} \quad (3.26)$$

A lente delgada convergente transforma uma onda plana incidente em sua superfície em uma onda esférica convergindo ao foco f da lente. Se a lente é colocada a uma distância focal da fenda, como no caso do experimento de Durnin, então a lente poderá corrigir o efeito difrativo, de maneira ideal. O padrão transversal que chega à lente após propagar-se da fenda até a lente será:

$$\psi(\rho, \varphi, z = f) = \frac{A_0 a k e^{ik(f + \frac{\rho^2}{2f} + \frac{a^2}{2f})}}{2\pi i f} J_0\left(\frac{ka\rho}{f}\right)$$

Para analisar o fenômeno apenas do ponto de vista qualitativo, deixe-nos abrir mão das constantes de amplitude e fase, então:

$$\psi(\rho, \varphi, f) = A_f e^{i\frac{k\rho^2}{2f}} J_0\left(\frac{ka\rho}{f}\right) \quad (3.27)$$

Considerando-se então uma lente de raio R , impondo novamente $z' = 0$ e substituindo (3.26) e (3.27) em (3.7) resultará em:

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \varphi, z) &= \frac{ke^{ik(z + \frac{\rho^2}{2z})}}{2\pi iz} \int_{\rho'=0}^R \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \rho' d\rho' d\varphi' \times \\ &\times e^{-i\frac{k\rho'^2}{2f}} A_f e^{i\frac{k\rho'^2}{2f}} J_0\left(\frac{ka\rho'}{f}\right) e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} \left\{ J_0(z_1) + \right. \\ &+ 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[J_{2n+2}(z_1) \cos[(2n+2)(\varphi' - \varphi + \frac{\pi}{2})] - \right. \\ &\left. \left. - iJ_{2n+1}(z_1) \sin[(2n+1)(\varphi' - \varphi + \frac{\pi}{2})] \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Note que o termo $\exp(i\frac{k\rho'^2}{2f})$ da onda incidente é totalmente cancelado pelo termo $\exp(-i\frac{k\rho'^2}{2f})$ proveniente da lente convergente. Se a lente convergente é colocada a

uma distância arbitrária qualquer diferente da distância focal f a onda incidente na lente possuirá um termo de fase do tipo $\exp(i\frac{k\rho'^2}{2z_{lf}})$, onde z_{lf} é a distância da fenda até a lente, e verifica-se que o cancelamento de tal termo de fase, que é responsável também pela difração do feixe, não é totalmente cancelado, por isso foi dito anteriormente que se a lente está a uma distância focal da fenda anular o efeito difrativo é corrigido totalmente, de maneira ideal. A integração de (3.28) em φ' é trivial, fornecendo o resultado abaixo:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \frac{A_f k e^{ik(z + \frac{\rho^2}{2z})}}{iz} \int_{\rho'=0}^R \rho' d\rho' e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} J_0\left(\frac{ka\rho'}{f}\right) J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \quad (3.29)$$

Se o raio da lente tende ao infinito, no caso ideal, a solução é dada da mesma forma que em (3.19). Porém aqui a constante transversal é estabelecida pelo aparato experimental utilizado na geração:

$$k_\rho = \frac{ka}{f} \quad (3.30)$$

Em casos práticos o raio da lente é finito e a integral (3.29) deve ser avaliada numericamente, já que não há solução analítica para tal equação. Através de uma lente de raio finito obviamente o feixe não permanecerá sem sofrer espalhamento do perfil transversal até o infinito, mas pode-se determinar o máximo "range" de invariância do feixe assumindo que:

$$\frac{R}{Z_{max}} = \frac{k_\rho}{k_z} \quad (3.31)$$

Nestes casos é válido ainda assumir que:

$$\begin{aligned} k_\rho &= k \sin \theta \\ k_z &\cong k \\ Z_{max} &= \frac{R}{\sin \theta} ; \theta = \tan^{-1} \left(\frac{a}{f} \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

As expressões (3.32) são obtidas diretamente da óptica geométrica e são mostradas na referência [4]. Para a geração de feixes de Bessel de ordem qualquer utiliza-se:

$$\tau(\rho', \varphi') = \delta(\rho' - a) e^{im\varphi'}$$

O caso analisado até aqui foi idealizado devido ao fato da fenda possuir função de transferência do tipo delta de Dirac mesmo no caso em que a lente possua raio

finito. Considere-se agora o caso real em que a função de transferência da fenda não é mais $\tau(\rho', \varphi') = \delta(\rho' - a)$. De fato, no mundo físico real, devido a dificuldades práticas de construção o anel da fenda tem uma certa dimensão δa onde passará luz. E após integrar a equação (3.7) em φ tem-se:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \frac{A_0 k e^{ik(z + \frac{\rho^2}{2z})}}{iz} \int_{\rho' = a - \frac{\delta a}{2}}^{a + \frac{\delta a}{2}} \rho' d\rho' e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \quad (3.33)$$

Pode-se aproximar a exponencial $\exp(i\frac{k\rho'^2}{2z})$ no integrando como uma função constante dentro do intervalo de integração, devido ao fato de que $\delta a \ll a$ e a integral tem valor não nulo somente nas proximidades de a . Considerando que a onda resultante propagou-se da fenda até a lente, ou seja, uma distância focal e impondo novamente $z' = 0$ no plano da lente, considerando-se ainda que a lente possui raio finito, leva-nos à seguinte expressão, depois que a onda passa pela lente:

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \varphi, z) = & \frac{A_f k e^{ik(z + \frac{\rho^2}{2z})}}{iz} \int_{\rho'=0}^R \rho' d\rho' e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \times \\ & \times \left(\frac{(a - \frac{\delta a}{2}) J_1\left(\frac{k(a - \frac{\delta a}{2})}{f} \rho'\right) - (a + \frac{\delta a}{2}) J_1\left(\frac{k(a + \frac{\delta a}{2})}{f} \rho'\right)}{\rho'} \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

A função entre parênteses em (3.34) tende à função de Bessel de ordem zero quando $\delta a \rightarrow 0$:

$$\left(\frac{(a - \frac{\delta a}{2}) J_1\left(\frac{k(a - \frac{\delta a}{2})}{f} \rho'\right) - (a + \frac{\delta a}{2}) J_1\left(\frac{k(a + \frac{\delta a}{2})}{f} \rho'\right)}{\rho'} \right) \rightarrow -\frac{k a \delta a}{f} J_0\left(\frac{k a}{f} \rho'\right) \quad (3.35)$$

Analisando com mais detalhe a função acima tem-se:

$$\frac{\delta a}{\rho'} \frac{d}{da} [J_1\left(\frac{k\rho'a}{f}\right)] = - \lim_{\delta a \rightarrow 0} \left(\frac{(a - \frac{\delta a}{2}) J_1\left(\frac{k(a - \frac{\delta a}{2})}{f} \rho'\right) - (a + \frac{\delta a}{2}) J_1\left(\frac{k(a + \frac{\delta a}{2})}{f} \rho'\right)}{\rho'} \right) \quad (3.36)$$

Mas das propriedades das funções de Bessel tem-se que:

$$\frac{1}{\rho'} \frac{d}{da} [J_1\left(\frac{k\rho'a}{f}\right)] = \frac{1}{\rho'} J_1\left(\frac{k\rho'a}{f}\right) + \frac{ka}{2f} J_0\left(\frac{k\rho'a}{f}\right) - \frac{ka}{2f} J_2\left(\frac{k\rho'a}{f}\right) \quad (3.37)$$

Para a validade da equação (3.36) é requerido que $\delta a \ll a$. Para conciliar as equações (3.35) e (3.37), a condição para o raio da lente deve ser $R < \frac{f}{2\pi k a}$. A função transversal que chega a todos os pontos da lente aproxima-se a uma função de Bessel de ordem zero se a condição que segue é satisfeita:

$$\delta a \ll \frac{\lambda f}{R} \quad (3.38)$$

Tal expressão é obtida conciliando-se o requerimento de que $\delta a \ll a$ e $R < \frac{f}{2\pi ka}$. O fato da relação (3.38) não ser satisfeita, faz com que a função que chega aos limites da lente seja aproximadamente a função de Bessel de ordem zero somente nas proximidades do centro da lente. O padrão transversal que chega nas regiões mais periféricas da lente já não é mais uma Bessel de ordem zero, contribuindo então para a degeneração do feixe de Bessel. Na verdade a amplitude da onda que chega à periferia da lente é menor do que seria se um padrão Bessel verdadeiro estivesse chegando à lente.

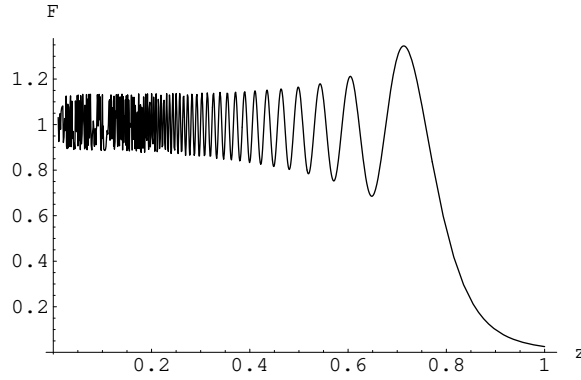


Figura 3.2: Simulação numérica para o feixe de Bessel de ordem zero em $\rho = 0$.

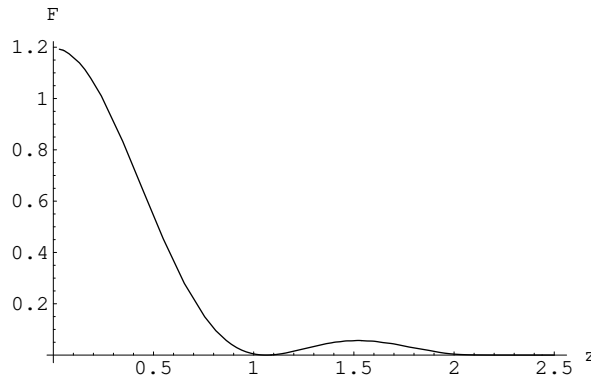


Figura 3.3: Simulação numérica em $\rho = 0$ para intensidade do feixe de Bessel de ordem zero, com as dimensões utilizadas por Gutiérrez-Vega para criar feixes de Mathieu

Na figura 3.2 reproduz-se a simulação numérica da intensidade "on-axis" para o setup experimental utilizado por Durnin, distância focal da lente $f = 305$ mm,

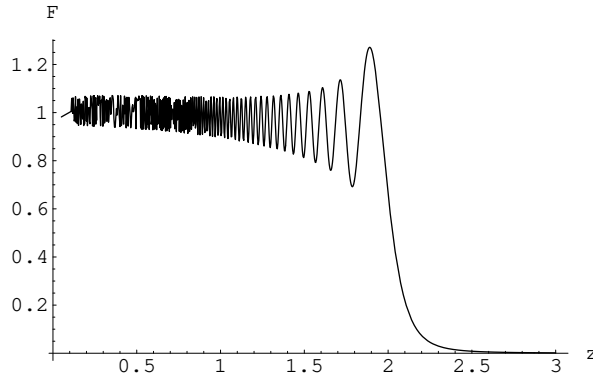


Figura 3.4: Simulação numérica em $\rho = 0$ para intensidade do feixe de Bessel de ordem zero, com as dimensões utilizadas por Gutiérrez-Vega respeitando a relação (3.38).

raio da lente $R = 3.5$ mm e raio da fenda $a = 1.25$ mm, com $\delta a = 10$ μm e $\lambda = 632.8$ nm. Facilmente calcula-se a distância máxima de invariância de tal feixe e para esse caso o resultado é 85 cm e está em perfeita concordância com a simulação numérica mostrado na Figura 3.2. A Figura 3.3 mostra os resultados utilizando-se a expressão (3.34) para a intensidade "on-axis" com os parâmetros utilizados por Gutiérrez-Vega [11] para produzir os feixes de Mathieu, mas aqui a simulação foi para o caso de feixes de Bessel. Foram utilizados os seguintes parâmetros de simulação: $f = 75$ cm, $R = 9.38$ mm, $a = 3.35$ mm, $\delta a = 0.1$ mm e o mesmo comprimento de onda utilizado por Durnin. O raio da lente não foi fornecido por Gutiérrez-Vega naquele trabalho. Nota-se que o experimento de Durnin obedece a relação (3.38) e propaga-se uma distância razoável com relação ao comprimento Rayleigh, enquanto que com os parâmetros de Gutierrez-Vega aquela relação não é contemplada e o feixe degenera-se rapidamente. O resultado no segundo caso é que tem-se um padrão transversal Bessel que varia ao longo de z inclusive degenerando completamente e apresentando máximos e zeros no eixo $\rho = 0$, assemelhando-se aos padrões de onda estacionária de linhas de transmissão. Esse fato foi verificado experimentalmente no Laboratório de Ensino de Óptica do Instituto de Física "Gleb Wataghin", da Unicamp. Utilizando-se os valores $f = 75$ cm, $R = 9.38$ mm, $a = 3.35$ mm, porém com $\delta a = 10$ μm a relação (3.38) é respeitada e a distância máxima de invariância prevista é de $2.345m$, valor que concorda com a simulação. Veja Figura (3.4). Volta-se a afirmar que para obter um feixe não-difrativo a relação (3.38) deve necessariamente

ser respeitada, no caso do aparato de Durnin, para a sua geração.

Observa-se que para o aparato experimental de Durnin ocorre uma oscilação na amplitude do feixe Bessel em $\rho = 0$. Tal fato deve-se à reminiscência das franjas de difração de Fresnel, que ocorre nos contornos da fenda. Sistemas compostos por axicons podem ser utilizados de tal forma a eliminar as oscilações causadas pela difração do contorno [21]. Tal sistema proposto na referência citada é composto por um elemento que transforma um feixe gaussiano em um feixe anular com um envelope $1/\rho$. O segundo elemento óptico do sistema transforma tal feixe em um campo aproximadamente do tipo feixe de Bessel.

3.3 Feixes de Mathieu

Os feixes de Mathieu ideais foram analisados no Capítulo 2, entretanto, o aparato experimental utilizado por Gutiérrez-Vega para a geração de feixes de Mathieu é análogo àquele utilizado por Durnin, com a diferença de que a fenda é modulada por uma função angular. O mesmo procedimento adotado na Seção anterior será utilizado aqui para determinar o comportamento dos feixes de Mathieu, ou seja, considerar-se-à a integral de difração na sua forma simplificada e o aparato experimental de Durnin. Considere-se, por simplicidade e conveniência, que a relação (3.38) é respeitada e então a função de transferência da fenda é dada aproximadamente por (3.23) multiplicada pela modulação angular:

$$\tau(\rho', \varphi') = A(\varphi') \delta(\rho' - a) \quad (3.39)$$

Uma onda plana passando através de tal fenda irá difratar-se e a onda que deixa a fenda será:

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \varphi, z) = & \frac{ke^{ik(z+\frac{\rho^2}{2z})}}{2\pi iz} \int_{\rho'=0}^{\infty} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \rho' d\rho' d\varphi' A(\varphi') \delta(\rho' - a) A_0 e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} \left\{ J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) + \right. \\ & + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[J_{2n+2}\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \cos[(2n+2)(\varphi' - \varphi + \frac{\pi}{2})] - \right. \\ & \left. \left. - iJ_{2n+1}\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \sin[(2n+1)(\varphi' - \varphi + \frac{\pi}{2})] \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.40)$$

A integração na variável ρ' é direta, devido ao fato de haver uma função delta de Dirac no integrando. O resultado é mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \varphi, z) = & \frac{ke^{ik(z+\frac{\rho^2}{2z})}}{2\pi iz} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} d\varphi' A(\varphi') A_0 e^{i\frac{k\rho^2}{2z}} \left\{ J_0\left(\frac{k\rho a}{z}\right) + \right. \\ & + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[J_{2n+2}\left(\frac{k\rho a}{z}\right) \cos[(2n+2)(\varphi' - \varphi + \frac{\pi}{2})] - \right. \\ & \left. \left. - iJ_{2n+1}\left(\frac{k\rho a}{z}\right) \sin[(2n+1)(\varphi' - \varphi + \frac{\pi}{2})] \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Se a lente está situada a uma distância focal da fenda, para maior eficiência da lente, a onda incidente no plano da lente delgada será:

$$\psi(\rho, \varphi, z = f) = \frac{ke^{ik(f+\frac{\rho^2}{2f})}}{2\pi if} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} d\varphi' A(\varphi') A_0 e^{i\frac{k\rho^2}{2f}} \left\{ J_0\left(\frac{k\rho a}{f}\right) + \right.$$

$$+2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[J_{2n+2}\left(\frac{ka\rho}{f}\right) \cos[(2n+2)(\varphi' - \varphi + \frac{\pi}{2})] - \right. \\ \left. - i J_{2n+1}\left(\frac{ka\rho}{f}\right) \sin[(2n+1)(\varphi' - \varphi + \frac{\pi}{2})] \right] \} \quad (3.42)$$

Considerando o plano da lente sendo em $z' = 0$, deixando à parte as constantes, sendo a função de transferência da lente dada por (3.26) e utilizando novamente (3.7) fornece como resultado a equação que segue:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \frac{Ae^{ik(z + \frac{k\rho^2}{2z})}}{z} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} d\varphi' \int_{\varphi''=0}^{2\pi} d\varphi'' \int_{\rho'=0}^R \rho' d\rho' A(\varphi') e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} \left\{ J_0\left(\frac{ka\rho'}{f}\right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[J_{2n+2}\left(\frac{ka\rho'}{f}\right) \cos[(2n+2)(\varphi' - \varphi'' + \frac{\pi}{2})] - \right. \right. \\ \left. \left. - i J_{2n+1}\left(\frac{ka\rho'}{f}\right) \sin[(2n+1)(\varphi' - \varphi'' + \frac{\pi}{2})] \right] \right\} \times \\ \times \left\{ J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[J_{2n+2}\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \cos[(2n+2)(\varphi'' - \varphi + \frac{\pi}{2})] - \right. \right. \\ \left. \left. - i J_{2n+1}\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \sin[(2n+1)(\varphi'' - \varphi + \frac{\pi}{2})] \right] \right\} \quad (3.43)$$

A multiplicação de todos os termos do integrando resulta em nove termos, que podem ser avaliados separadamente. A forma mais simples de efetuar a integral é começar a integração pela variável φ'' , e fazer uso de propriedades das funções trigonométricas de ortogonalidade. Escreve-se a integral como segue:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \frac{Ae^{ik(z + \frac{k\rho^2}{2z})}}{z} \sum_{j=1}^9 \phi_j \quad (3.44)$$

Agora cada termo será avaliado separadamente.

$$\phi_1 = \int_{\varphi'=0}^{2\pi} d\varphi' \int_{\varphi''=0}^{2\pi} d\varphi'' \int_{\rho'=0}^R \rho' d\rho' A(\varphi') e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} J_0\left(\frac{ka\rho'}{f}\right) J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \quad (3.45)$$

O resultado da integração em φ'' é:

$$\phi_1 = 2\pi \int_{\varphi'=0}^{2\pi} d\varphi' \int_{\rho'=0}^R \rho' d\rho' A(\varphi') e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} J_0\left(\frac{ka\rho'}{f}\right) J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \quad (3.46)$$

O segundo termo é:

$$\begin{aligned} \phi_2 = & 2 \int_{\varphi'=0}^{2\pi} d\varphi' \int_{\varphi''=0}^{2\pi} d\varphi'' \int_{\rho'=0}^R \rho' d\rho' A(\varphi') e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} \times \\ & \times J_0\left(\frac{ka\rho'}{f}\right) \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+2}\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \cos[(2n+2)(\varphi'' - \varphi + \frac{\pi}{2})] \end{aligned} \quad (3.47)$$

O resultado da integração em φ'' é:

$$\phi_2 = 0$$

Então vê-se que todos os termos envolvendo funções Bessel de ordem zero no integrando serão nulos, exceto o primeiro, devido ao fato de a integração em φ'' sempre dar resultado nulo para termos envolvendo apenas um seno ou um cosseno no integrando. Os termos envolvendo produtos de seno por cosseno serão nulos por ortogonalidade. Então apenas dois termos mais serão não nulos. Estes dois termos envolvem produtos do tipo $\cos() \times \cos()$ and $\sin() \times \sin()$ e devem ser de mesma frequência. O procedimento é trivial e tem-se:

$$\begin{aligned} \phi_5 = & 4 \int_{\varphi'=0}^{2\pi} d\varphi' \int_{\varphi''=0}^{2\pi} d\varphi'' \int_{\rho'=0}^R \rho' d\rho' A(\varphi') e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} \times \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+2}\left(\frac{ka\rho'}{f}\right) \cos[(2n+2)(\varphi'' - \varphi' - \frac{\pi}{2})] \times \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+2}\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \cos[(2n+2)(\varphi'' - \varphi + \frac{\pi}{2})] \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \phi_9 = & 4 \int_{\varphi'=0}^{2\pi} d\varphi' \int_{\varphi''=0}^{2\pi} d\varphi'' \int_{\rho'=0}^R \rho' d\rho' A(\varphi') e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} \times \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}\left(\frac{ka\rho'}{f}\right) \sin[(2n+1)(\varphi'' - \varphi' - \frac{\pi}{2})] \times \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \sin[(2n+1)(\varphi'' - \varphi + \frac{\pi}{2})] \end{aligned} \quad (3.49)$$

O resultado final da integração em φ'' considerando novamente a ortogonalidade das funções trigonométricas em (3.48) e (3.49) é:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \frac{2\pi A e^{ik(z + \frac{k\rho^2}{2z})}}{z} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} d\varphi' \int_{\rho'=0}^R \rho' d\rho' \times$$

$$\begin{aligned}
& \times A(\varphi') e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} \left\{ J_0\left(\frac{ka\rho'}{f}\right) J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) + \right. \\
& + 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+2}\left(\frac{ka\rho'}{f}\right) J_{2n+2}\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \cos[(2n+2)(\varphi' - \varphi)] - \\
& \left. - 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}\left(\frac{ka\rho'}{f}\right) J_{2n+1}\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \sin[(2n+1)(\varphi' - \varphi)] \right\} \quad (3.50)
\end{aligned}$$

A equação (3.50) é a expressão geral para o aparato de Durnin, consistindo de uma fenda anular ideal e uma lente delgada, sendo válida também para o caso de qualquer abertura de raio R e modulação angular arbitrária. Tal abertura pode ser conseguida por meio de hologramas ou outras técnicas. Agora será considerada a modulação angular da fenda como sendo funções de Mathieu pares de ordem $2n$. Estas funções de Mathieu são dadas em séries de Fourier:

$$A(\varphi) = ce_{2n}(q, \varphi) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} \cos(2r\varphi) \quad (3.51)$$

Inserindo a expressão acima em (3.50) leva-nos à seguinte equação:

$$\begin{aligned}
\psi(\rho, \varphi, z) &= \frac{2\pi A e^{ik(z + \frac{k\rho^2}{2z})}}{z} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} d\varphi' \int_{\rho'=0}^R \rho' d\rho' \times \\
& \times \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} \cos(2r\varphi') e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} \left\{ J_0\left(\frac{ka\rho'}{f}\right) J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) + \right. \\
& + 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+2}\left(\frac{ka\rho'}{f}\right) J_{2n+2}\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \cos[(2n+2)(\varphi' - \varphi)] - \\
& \left. - 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}\left(\frac{ka\rho'}{f}\right) J_{2n+1}\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \sin[(2n+1)(\varphi' - \varphi)] \right\} \quad (3.52)
\end{aligned}$$

Novamente termos envolvendo produtos do tipo $\cos(mx) \sin(n(x + \theta))$ terão integral nula, pelo fato de que m é par e n é ímpar nesse caso, e quando $m \neq n$ a integral é nula pela propriedade de ortogonalidade. Após efetuada a integração em φ' tem-se:

$$\begin{aligned}
\psi(\rho, \varphi, z) &= \frac{4\pi^2 A e^{ik(z + \frac{k\rho^2}{2z})}}{z} \int_{\rho'=0}^R \rho' d\rho' e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} \left\{ A_0^{(2n)} J_0\left(\frac{ka\rho'}{f}\right) J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) + \right. \\
& \left. + \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+2}^{(2n)} J_{2m+2}\left(\frac{ka\rho'}{f}\right) J_{2m+2}\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \cos[(2m+2)(\varphi)] \right\} \quad (3.53)
\end{aligned}$$

Uma pequena troca de índices nas funções de Bessel é feita para não fazer confusão entre os índices das funções e a ordem da função de Mathieu que modulam a fenda que foi representada por $2n$. Os coeficientes $A_{2r}^{(2n)}$ são os coeficientes das funções de Mathieu de ordem $2n$ e são funções de q . Facilmente podem ser calculados por ortogonalidade:

$$A_0^{(2n)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ce_{2n}(q, x) dx$$

$$A_{2r}^{(2n)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} ce_{2n}(q, x) \cos(2rx) dx ; r > 0$$

A integral (3.53) é colocada abaixo em uma forma mais compacta:

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \varphi, z) &= \frac{4\pi^2 A e^{ik(z + \frac{k\rho^2}{2z})}}{z} \int_{\rho'=0}^R \rho' d\rho' e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}^{(2n)} J_{2m}\left(\frac{ka\rho'}{f}\right) J_{2m}\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \cos(2m\varphi) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Para uma lente de raio infinito a integral resulta em:

$$\int_{\rho'=0}^{\infty} \rho' d\rho' e^{i\frac{k\rho'^2}{2z}} J_{2m}\left(\frac{ka\rho'}{f}\right) J_{2m}\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) = \frac{ize^{-i(\frac{k\rho^2}{2z} + \frac{ka^2z}{2f^2})}}{k} (-1)^m J_{2m}\left(\frac{ka\rho}{f}\right)$$

Tem-se então:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = A_0 e^{ik(1 - \frac{a^2}{2f^2})z} \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}^{(2n)} (-1)^m J_{2m}\left(\frac{ka\rho}{f}\right) \cos(2m\varphi) \quad (3.55)$$

De acordo com [31]:

$$p_{2n} \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}^{(2n)} (-1)^m J_{2m}\left(\frac{ka\rho}{f}\right) \cos(2m\varphi) = Ce_{2n}(q, u) ce_{2n}(q, v)$$

onde:

$$p_{2n} = \frac{ce_{2n}(q, 0) ce_{2n}(q, \pi/2)}{A_0^{(2n)}}$$

e u e v são definidos em coordenadas elípticas cilíndricas Este resultado é justamente o feixe de Mathieu par de ordem $2m$. Relembrando novamente que a análise é para grandes valores de z e por este fato: and because of that:

$$k_z \cong k(1 - \frac{a^2}{2f^2})$$

Portanto a solução para a modulação angular do slit ideal por uma função Mathieu par de ordem $2n$ e lente de raio infinito é:

$$\psi(u, v, z) = \frac{A_0}{p_{2n}} e^{ik_z z} \text{Ce}_{2n}(q, u) \text{ce}_{2n}(q, v)$$

Para um dado aparato k_ρ é fixo, então a excentricidade das elipses que compõem o sistema coordenado será maior ou menor de acordo com o valor de q da função angular modulante.

$$q = \frac{h^2 k_\rho^2}{4} ; \quad k_\rho \cong \frac{ka}{f}$$

Aqui demonstraram-se os feixes de Mathieu de ordem par, porém inserindo-se a função angular adequada na integral de difração obtém-se todos os feixes de Mathieu, conforme mostrado no Capítulo 2.

Pode-se então entender os feixes de Mathieu como a superposição adequada de feixes de Bessel. Isto é evidente do fato de que as funções de Bessel compõem um conjunto completo de funções de base ortogonais que são soluções da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas. O contrário também é verdadeiro. Pode-se pensar que os feixes Bessel são a superposição adequada de feixes de Mathieu, já que as soluções feixes de Mathieu também constituem um conjunto de funções de base ortogonal soluções da equação de Helmholtz em coordenadas elípticas cilíndricas. Entretanto é mais fácil e mais natural pensar os feixes Mathieu como superposição de Bessel beams do que o contrário. O comportamento dos feixes de Mathieu, é portanto semelhante ao comportamento dos feixes de Bessel. A distância máxima de invariância pode ser dada pela equação (3.32). Para calcular o padrão transversal em casos reais, considerando o raio finito da lente é necessário integrar a equação (3.54) numericamente. Tal integral foi calculada para os valores $f = 75 \text{ cm}$, $R = 9.38 \text{ mm}$, $a = 3.35 \text{ mm}$, e $\delta a \rightarrow 0$, ou seja, a relação (3.38) é respeitada e a distância máxima de invariância prevista por óptica geométrica é de $2.1m$. A função de Mathieu utilizada é de ordem 0 e $q = 25$ para modular o slit. O resultado é mostrado na Figura 3.5 para $\varphi = 0$, e como pode ser observado a distância máxima da região de invariância concorda bem com o valor teórico de $2.1m$, para o caso em que a fenda seja ideal. Portanto o valor previsto de $15m$ pelo grupo de Gutiérrez-Vega [11] não pode estar correto.

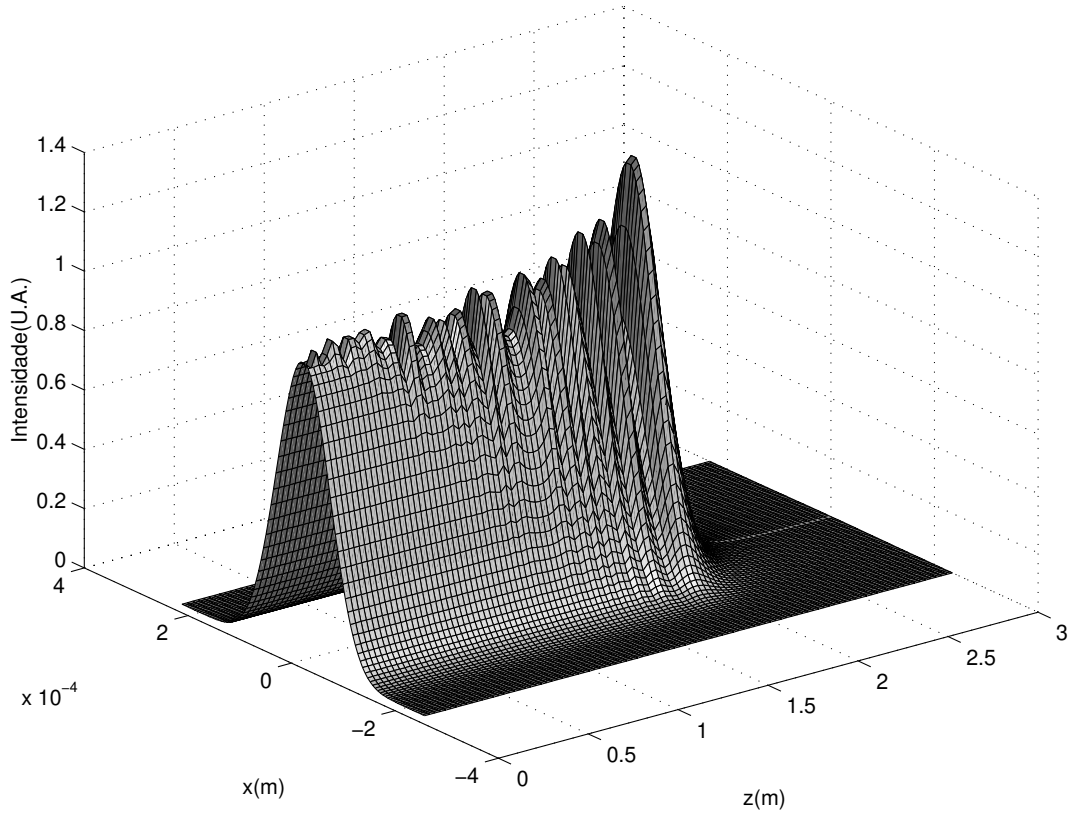


Figura 3.5: Simulação numérica para intensidade do feixe de Mathieu de ordem zero e $q = 25$.

3.4 Estruturas Difrativas com vários anéis

Inicialmente será feita a análise de uma estrutura multi-anular ideal, mostrada na Fig. 3.6 com n anéis concentricos. Isto significa que a condição (3.56) é preservada e pode-se considerar que cada um dos anéis atua como uma função de transferência delta de Dirac. Em (3.56) a_j é o raio do j -ésimo anel, δa_j é a espessura do j -ésimo anel, λ é o comprimento de onda, f a distância focal da lente e R é o raio da lente.

$$\delta a_j \ll \frac{\lambda f}{R} \quad (3.56)$$

Então para cada um dos anéis tem-se a seguinte função de transferência

$$\tau_j(\rho, \varphi) = \delta(\rho - a_j) \quad (3.57)$$

Para um anel de raio a_j , e função de transferência dada por (3.57), utilizando a

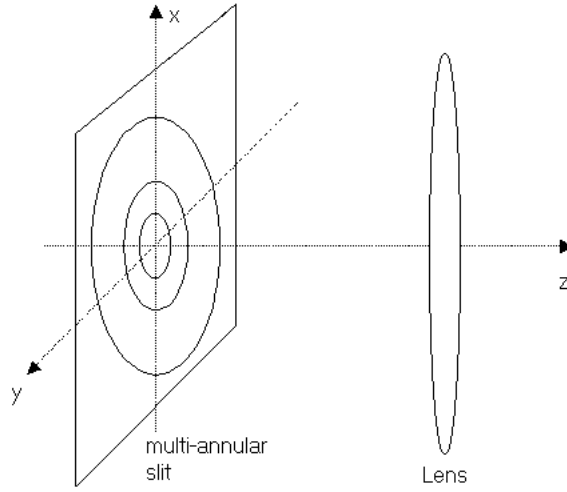


Figura 3.6: Arranjo experimental de Durnin para fendas multi-anulares.

teoria da difração escalar, supondo uma onda plana incidente na fenda e propagando-se após a fenda uma distância f em z , onde está colocada a lente a função resultante incidente na lente delgada é então:

$$\psi_j(\rho, \varphi, f) = \frac{A_0 a_j k \exp[ik(f + \frac{\rho^2}{2f} + \frac{a_j^2}{2f})]}{2\pi i f} J_0(\frac{k a_j \rho}{f}) \quad (3.58)$$

e a expressão (3.58) é o padrão Bessel produzido pelo j -ésimo anel da fenda na lente delgada. A função de transferência da lente delgada já foi dada anteriormente mas é aqui reproduzida:

$$\tau_{lens}(\rho, \varphi) = e^{-i \frac{k \rho^2}{2f}}$$

A função total incidente na lente, gerada por n anéis é dada abaixo:

$$\psi(\rho', \varphi', f) = \sum_{j=0}^n \psi_j(\rho', \varphi', f) \quad (3.59)$$

Tirando-se as constantes novamente e considerando apenas A_f tem-se:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \frac{A_f k \exp[ik(z + \frac{\rho^2}{2z})]}{iz} \sum_{j=0}^n a_j e^{ik \frac{a_j^2}{2f}} \int_{\rho'=0}^{R_{lens}} \rho' d\rho' J_0(\frac{k a_j \rho'}{f}) J_0(\frac{k \rho \rho'}{z}) e^{i \frac{k \rho'^2}{2z}} \quad (3.60)$$

no caso não ideal, onde o raio da lente é finito, mas a relação (3.56) é respeitada a solução é dada por:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \frac{A_f k \exp[ik(z + \frac{\rho^2}{2z})]}{z} \sum_{j=0}^n C_j \int_{\rho'=0}^{R_{lens}} \rho' d\rho' J_0(\frac{k a_j \rho'}{f}) J_0(\frac{k \rho \rho'}{z}) e^{i \frac{k \rho'^2}{2z}} \quad (3.66)$$

Outro aparato óptico e utilizando-se luz policromática pode ser utilizado para iluminar a fenda, de tal modo que cada anel receba um comprimento de onda específico, de tal forma que a solução para o problema seja dada por:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \frac{A_f}{z} \sum_{j=0}^n C_j k_j \exp[ik_j(z + \frac{\rho^2}{2z})] \int_{\rho'=0}^{R_{lens}} \rho' d\rho' J_0(\frac{k_j a_j \rho'}{f}) J_0(\frac{k_j \rho \rho'}{z}) e^{i \frac{k_j \rho'^2}{2z}} \quad (3.67)$$

Com a expressão (3.67) é possível encontrar composições de campos bastante interessantes mas na prática tornar-se-ia difícil separar a luz policromática de modo a que cada anel recebesse a frequência específica correta. Pode-se usar para isso técnicas holográficas.

3.4.1 Espaçamento logarítmico dos anéis

Um caso bastante interessante das estruturas multi-anulares ocorre quando os anéis seguem uma ordem de raios logarítmica. Considere o vetor abaixo:

$$n = \{2; 2.2; 2.4; 2.6; 2.8; 3; 3.2; 3.4; 3.6\}$$

O raio dos anéis será dado por:

$$a_j = \log(n_j) \text{ mm}$$

Na Fig. 3.7 é plotado o gráfico do raio dos anéis como uma função de n . No caso ideal pode-se utilizar a expressão (3.61) para plotar a distribuição espacial resultante do campo. Na Fig. 3.8 tem-se a intensidade normalizada F do campo em todo o espaço e a intensidade "on-axis". O comportamento do campo é tal que cria um padrão estacionário de interferência construtiva em apenas poucos pontos do espaço, e poderia ser utilizado como paredes eletromagnéticas em dois ou mais pontos localizados do espaço. Pinças eletromagnéticas e armadilhas para partículas

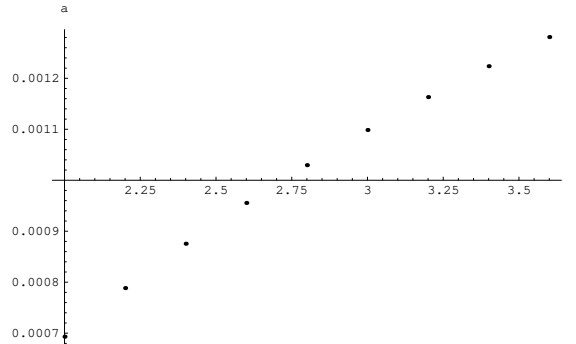


Figura 3.7: Raios dos anéis em função de n .

também poderiam ser algumas das aplicações para tal comportamento. A região onde a interferência é construtiva poderia ser modificada por algum mecanismo adequado que mudasse o raio dos anéis. O comportamento para o caso do espaçamento logarítmico foi analisado somente na região $0 \leq z \leq 2m$, o comportamento para $z \geq 2m$ não é analisado aqui.

Os valores usados nos cálculos são $f = 360$ mm e $\lambda = 632.8$ nm.

3.4.2 Espaçamento senoidal, exponencial e linear dos Anéis

Os caso de espaçamento senoidal, exponencial e linear dos anéis é apresentado a seguir. No caso ideal pode-se utilizar a expressão (3.61) para plotar a distribuição espacial resultante do campo. Para o caso do espaçamento senoidal considere o vetor abaixo:

$$n = \{1, 1.05, 1.1, 1.15, 1.2, 1.25, 1.3, 1.35, 1.4, 1.45, 1.5\}$$

O raio dos anéis será dado por:

$$a_j = 2 \sin(n_j) \text{ mm}$$

Na Fig. 3.9 tem-se a intensidade normalizada F do campo em todo o espaço a intensidade "on-axis".

Para o caso do espaçamento exponencial considere o vetor abaixo:

$$n = \{0.42, 0.44, 0.46, 0.48, 0.5, 0.52, 0.54, 0.56\}$$

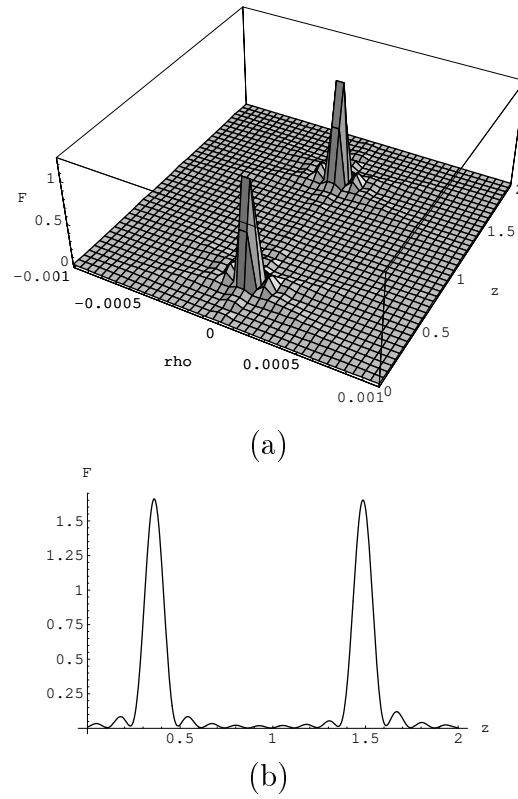


Figura 3.8: Padrão de intensidade $F = |\psi|^2$: (a) em todo o espaço; (b) para $\rho = 0$.

O raio dos anéis será dado por:

$$a_j = \exp(n_j) \text{ mm}$$

Na Fig. 3.10 tem-se a intensidade normalizada F do campo em todo o espaço a intensidade "on-axis".

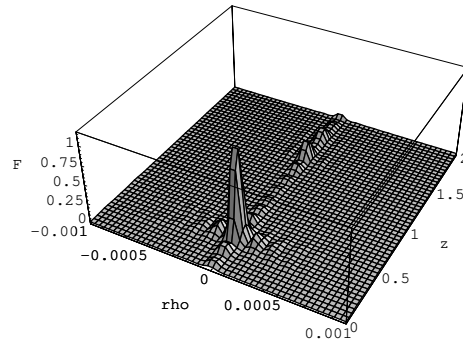
Finalmente apresenta-se o caso do espaçamento linear dos anéis. Considere o vetor abaixo:

$$n = \{1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2, 2.2, 2.4, 2.6\}$$

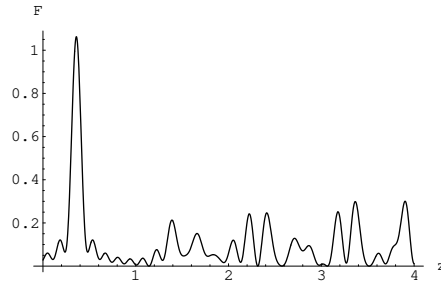
O raio dos anéis será dado por:

$$a_j = n_j \text{ mm}$$

Na Fig. 3.11 tem-se a intensidade normalizada F do campo em todo o espaço a intensidade "on-axis".



(a)



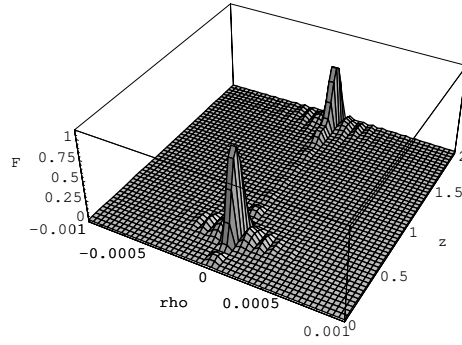
(b)

Figura 3.9: Padrão de intensidade $F = |\psi|^2$: (a) em todo o espaço; (b) para $\rho = 0$ para o espaçamento senoidal.

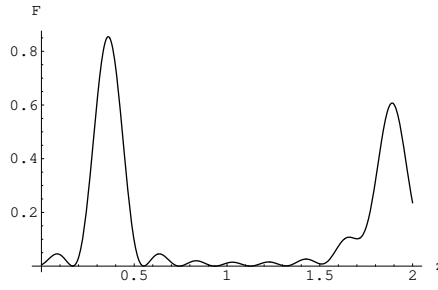
Os valores usados nos cálculos são $f = 360 \text{ mm}$ e $\lambda = 632.8 \text{ nm}$. Observa-se aqui que quando se deseja variações espaciais bastante rápidas ao longo da direção de propagação do feixe, maior deve ser o espaço entre os anéis, ou seja, as diferenças entre os raios dos anéis, então tanto maior será a diferença de fase entre cada um dos feixes produzidos pelos anéis individualmente e as variações espaciais serão tanto mais rápidas.

3.4.3 Análise do espaçamento logarítmico dos anéis para o caso real: lente finita.

No caso real da utilização de fendas multi-anulares, deve-se levar em conta as dimensões finitas do aparato experimental. Considerando-se que a condição (3.56) é respeitada, então pode-se efetuar o cálculo do comportamento de um tal feixe através da equação (3.60). Considera-se aqui o espaçamento logarítmico entre anéis, porém



(a)



(b)

Figura 3.10: Padrão de intensidade $F = |\psi|^2$: (a) em todo o espaço; (b) para $\rho = 0$ para o espaçamento exponencial.

com apenas três anéis. O vetor n é dado por:

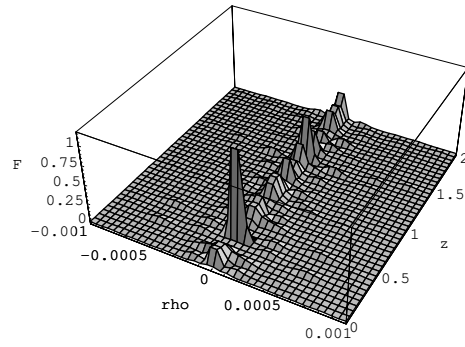
$$n = \{3, 3.2, 3.4\}$$

e o raio dos anéis por:

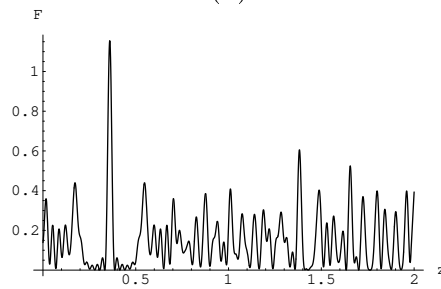
$$a_j = \log(n_j) \text{ mm}$$

Analisou-se o comportamento ideal e comparou-se ao comportamento do feixe se houvesse sido utilizado um aparato equivalente ao de Durnin multi-anular com uma lente de raio $R = 7 \text{ mm}$ e distância focal $f = 360 \text{ mm}$ no comprimento de onda usual $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ em experimentos com óptica. O comportamento ideal e através do aparato de Durnin é mostrado na Fig. 3.12.

Nota-se que o comportamento na região de invariância, cuja máxima distância pode ser predita pela equação (3.32) e um raio médio dos anéis é aproximadamente igual ao do caso ideal, decaindo rapidamente após a região de invariância no caso de utilizar-se o aparato experimental de Durnin. Então pode-se inferir o comportamento de um feixe composto através das fórmulas ideais, sendo válida a solução



(a)



(b)

Figura 3.11: Padrão de intensidade $F = |\psi|^2$: (a) em todo o espaço; (b) para $\rho = 0$ para o espaçamento linear.

dentro da região de invariância média do feixe.

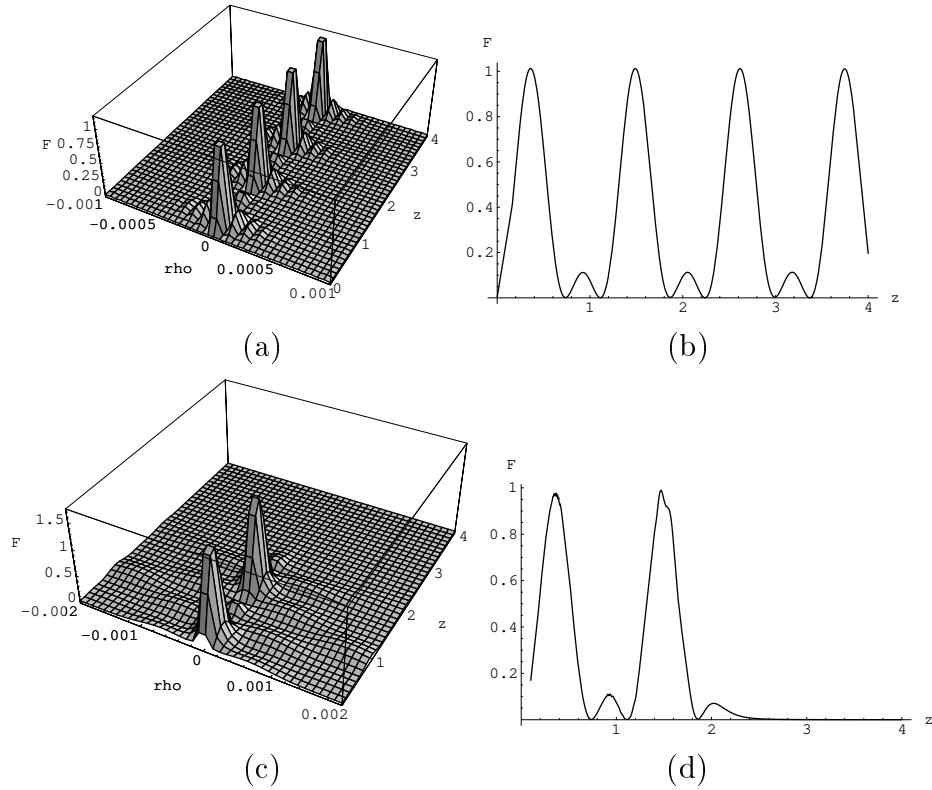


Figura 3.12: Padrão de intensidade $F = |\psi|^2$: (a) em todo o espaço e (b) para $\rho = 0$ no caso ideal; (c) em todo o espaço e (d) para $\rho = 0$ para o aparato de Durnin multi-anular.

3.5 Conclusões do Capítulo 3

Neste Capítulo foram estudados os feixes não-difrativos a partir da teoria escalar da difração. Esta teoria funciona muito bem no domínio óptico. Demonstrou-se a solução para os feixes de Mathieu a partir da teoria escalar da difração e a possibilidade de criar feixes não difrativos a partir de estruturas multi-anulares. A partir de estruturas multi-anulares é possível conseguir um comportamento de interferência construtiva em apenas algumas regiões do espaço, os parâmetros do aparato experimental utilizados na sua criação podem ser manipulados de tal forma a mudar a região de interferência construtiva de acordo com a conveniência, apresentando aplicações potenciais em pinças a laser, armadilhamento de partículas e outras aplicações. Os resultados experimentais podem ser ligeiramente diferentes devido ao fato de o formalismo escalar não estar levando em conta o caráter vetorial

das ondas eletromagnéticas.

Importante também é destacar que para estruturas cuja diferença de raio entre os anéis são maiores, maior é a oscilação do feixe ao longo da direção de propagação. Outro fato importante que pode ser facilmente verificado é que quanto maior é o número de anéis mais concentrada fica a região de intensidade máxima do feixe, ao longo da direção de propagação. Também este fenômeno pode ter alguma aplicação importante pois iluminando-se um número maior ou menor de anéis pode-se fazer a região de intensidade máxima contrair-se ou expandir-se. Para que o ponto de intensidade máxima desloque-se ao longo do eixo se faz necessária a variação da distância focal da lente.

Capítulo 4

Aproximação às funções de Mathieu

As funções de Mathieu foram introduzidas por É. Mathieu [38] por volta de 1868, quando este estava analisando os movimentos de uma membrana de forma elíptica. Desde aquela época muitos problemas físicos, astronômicos ou simplesmente matemáticos necessitam o cálculo destas funções em sua análise. Em virtude das dificuldades oferecidas na determinação analítica das funções de Mathieu, estas apresentam muito menos aplicações atualmente do que as tão conhecidas funções hipergeométricas e as funções de Bessel. Na corrente literatura da Física Matemática, muitas tentativas de aproximações foram feitas, [39, 40] para citar alguns. As aproximações feitas em [40] por exemplo são expansões assintóticas para valores pequenos de q ou então expansões em termos das funções cilíndricas parabólicas para valores grandes de q , porém as expansões assintóticas parecem tão complexas quanto a própria função original. Neste Capítulo, no intuito de facilitar a análise de problemas físicos são demonstradas e introduzidas algumas aproximações bastante simples e úteis. Na Seção 4.1 demonstram-se as fórmulas gerais de aproximação para as funções de Mathieu. Na Seção 4.2 mostram-se algumas fórmulas obtidas empiricamente para as funções de Mathieu e os resultados obtidos através dessas aproximações, e finalmente na Seção 4.3 são apresentados os comentários e conclusões finais desse Capítulo.

4.1 Demonstração das fórmulas gerais de aproximação às funções de Mathieu

As funções de Mathieu são dadas em termos de séries trigonométricas, como mostrado abaixo [31]:

$$\text{ce}_{2n}(q, x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} \cos(2rx) \quad (4.1)$$

$$\text{ce}_{2n+1}(q, x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)} \cos((2r+1)x) \quad (4.2)$$

$$\text{se}_{2n+1}(q, x) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} \sin((2r+1)x) \quad (4.3)$$

$$\text{se}_{2n+2}(q, x) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)} \sin((2r+2)x) \quad (4.4)$$

Os coeficientes A e B dependem de q e a sua determinação é bastante árdua, apesar dos excelentes recursos computacionais de hoje então muitas tentativas de aproximar as funções de Mathieu foram e estão sendo feitas ao longo do tempo no intuito de facilitar os cálculos. Tentar-se-à demonstrar aqui algumas aproximações válidas e úteis. Considere a função de Mathieu par:

$$\text{ce}_{2n}(q, x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} \cos(2rx) = A_0^{2n} + A_2^{2n} \cos(2x) + A_4^{2n} \cos(4x) + \dots$$

Considere as relações trigonométricas a seguir [26]:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

Uma série de senos ou cossenos pode então, a partir destas relações, ser separada em um produto de duas séries trigonométricas se os coeficientes são adequadamente escolhidos:

$$\text{ce}_{2n}(q, x) = A(q) \sum_{r=0}^{\infty} a_{2r}^{(2n)} \cos(2rx) \times \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r}^{(2n)} \cos(2rx)$$

de maneira que as funções de Mathieu assumam a sua forma exata ou muito bem aproximada. Os coeficientes são funções de q e da correspondente ordem $2n$ da função. Expandindo as somatórias:

$$\begin{aligned} \text{ce}_{2n}(q, x) &= A(q)[a_0^{2n} + a_2^{2n} \cos(2x) + a_4^{2n} \cos(4x) \dots] \times \\ &\times [b_0^{2n} + b_2^{2n} \cos(2x) + b_4^{2n} \cos(4x) \dots] \end{aligned}$$

Se ambas as séries possuem infinitos termos obtém-se:

$$\begin{aligned} \text{ce}_{2n}(q, x) &= A(q) \left\{ [a_0^{2n} b_0^{2n} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i}^{2n} b_{2i}^{2n}] + \right. \\ &+ [a_0^{2n} b_2^{2n} + a_2^{2n} b_0^{2n} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (a_{2i}^{2n} b_{2i+2}^{2n} + \\ &+ a_{2i+2}^{2n} b_{2i}^{2n})] \cos(2x) + [a_0^{2n} b_4^{2n} + a_4^{2n} b_0^{2n} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (a_{2i}^{2n} b_{2i+4}^{2n} + a_{2i+4}^{2n} b_{2i}^{2n})] \cos(4x)] + \dots \left. \right\} \end{aligned}$$

Desse modo a determinação dos novos coeficientes toma uma forma exata:

$$\begin{aligned} A_0^{2n} &= A(q)[a_0^{2n} b_0^{2n} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i}^{2n} b_{2i}^{2n}] \\ A_{2r}^{2n} &= A(q)[a_0^{2n} b_{2r}^{2n} + a_{2r}^{2n} b_0^{2n} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (a_{2i}^{2n} b_{2i+2r}^{2n} + a_{2i+2r}^{2n} b_{2i}^{2n})] , \quad r > 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Resolvendo-se o sistema de equações acima, pode-se encontrar a_{2r}^{2n} bem como os valores b_{2r}^{2n} e $A(q)$. Ao invés disso, truncar-se-à uma das séries para simplificar os cálculos. Pode-se, particularmente assumir:

$$\text{ce}_{2n}(q, x) = A(q) \sum_{r=0}^{2n} a_{2r}^{(2n)} \cos(2rx) \times \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r}^{(2n)} \cos(2rx) + er(q, x)$$

onde $er(q, x)$ é a função que leva em conta o erro de truncamento da série.

$$er(q, x) = A(q) \sum_{r=2n+1}^{\infty} a_{2r}^{(2n)} \cos(2rx) \times \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r}^{(2n)} \cos(2rx) \quad (4.6)$$

Tendo-se em conta a série truncada, pode-se escolher adequadamente os coeficientes a_{2r}^{2n} , b_{2r}^{2n} e $A(q)$ de modo a minimizar o erro dado pela equação (4.6):

$$ce_{2n}(q, x) \cong A(q)S_1(q, x)S_2(q, x) \quad (4.7)$$

onde:

$$S_1(q, x) = \sum_{r=0}^{2n} a_{2r}^{(2n)} \cos(2rx) \quad (4.8)$$

$$S_2(q, x) = \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r}^{(2n)} \cos(2rx) \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} A_0^{2n} &\cong A(q)[a_0^{2n}b_0^{2n} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} a_{2i}^{2n}b_{2i}^{2n}] \\ A_{2r}^{2n} &\cong A(q)[a_0^{2n}b_{2r}^{2n} + a_{2r}^{2n}b_0^{2n} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n-r} (a_{2i}^{2n}b_{2i+2r}^{2n} + a_{2i+2r}^{2n}b_{2i}^{2n})] , \quad r > 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Agora, expandindo a função exponencial abaixo em séries de Taylor:

$$\begin{aligned} e^{-k(2n)\sqrt{q}\cos^2(x)} &= 1 - k(2n)\sqrt{q}\cos^2(x) + \\ &+ \frac{k^2(2n)q}{2}\cos^4(x) + \frac{k^3(2n)q^{3/2}}{3!}\cos^6(x) + \dots \end{aligned} \quad (4.11)$$

Utilizando as relações abaixo:

$$\begin{aligned} \cos^2(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \\ \cos^4(x) &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x) \\ \cos^{2n}(x) &= \sum_{m=0}^n C_{2m} \cos(2mx) \end{aligned}$$

a expressão (4.11) pode ser colocada na forma abaixo:

$$e^{-k(2n)\sqrt{q}\cos^2 x} = \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r}(q, k) \cos(2rx) \quad (4.12)$$

Escolhendo $S_2(q, x)$ como sendo a função dada pela expressão (4.12) obtém-se:

$$ce_{2n}(q, x) \cong A_{2n}(q) \sum_{r=0}^{2n} a_{2r}^{(2n)} \cos(2rx) e^{-k(2n)\sqrt{q}\cos^2 x}$$

Utilizando-se o procedimento análogo, demonstra-se que aquela função exponencial pode ser escolhida para todas as funções de Mathieu. A demonstração de que $e^{-k(2n)\sqrt{q}\cos^2 x}$ é uma função sempre válida não é trivial e foi obtida de um ponto de vista heurístico, mas é uma função adequada para a aproximação, seguindo os argumentos acima demonstrados. O truncamento da série $S_1(q, x)$ elimina parcialmente termos de frequência mais alta, o que pode ser mostrado através de transformadas de Fourier. Pode-se assumir ainda que:

$$A_{2n}(q) = \text{ce}_{2n}(q, x = x_{\max}) f_{2n}(q)$$

onde $x = x_{\max}$ é o valor de x onde a função de Mathieu toma seu máximo valor. As fórmulas gerais para aproximação das funções de Mathieu são mostradas abaixo:

$$\text{ce}_{2n}(q, x) \cong \text{ce}_{2n}(q, x_{\max}) f_{2n}^{(\text{ce})}(q) \times \sum_{r=0}^{2n} a_{2r}^{(2n)} \cos(2rx) e^{-k(2n)\sqrt{q}\cos^2 x} \quad (4.13)$$

$$\text{ce}_{2n+1}(q, x) \cong \text{ce}_{2n+1}(q, x_{\max}) f_{2n+1}^{(\text{ce})}(q) \times \sum_{r=0}^{2n+1} a_{2r+1}^{(2n+1)} \cos((2r+1)x) e^{-k(2n)\sqrt{q}\cos^2 x} \quad (4.14)$$

$$\text{se}_{2n+1}(q, x) \cong \text{se}_{2n+1}(q, x_{\max}) f_{2n+1}^{(\text{se})}(q) \times \sum_{r=0}^{2n} b_{2r+1}^{(2n+1)} \sin((2r+1)x) e^{-k(2n)\sqrt{q}\cos^2 x} \quad (4.15)$$

$$\text{se}_{2n+2}(q, x) \cong \text{se}_{2n+2}(q, x_{\max}) f_{2n+2}^{(\text{se})}(q) \times \sum_{r=0}^{2n+1} b_{2r+2}^{(2n+2)} \sin((2r+2)x) e^{-k(2n)\sqrt{q}\cos^2 x} \quad (4.16)$$

4.2 Algumas fórmulas aproximadas para as funções de Mathieu

As fórmulas a seguir são dadas para algumas funções de Mathieu com coeficientes determinados empiricamente, mas utilizando as fórmulas gerais dadas na Seção anterior.

1) Função Mathieu Par de Ordem 0

A fórmula abaixo aproxima a função de Mathieu de ordem zero, tanto melhor quanto maior for o valor de q :

$$\text{ce}_0(q, x) \cong \text{ce}_0\left(q, \frac{\pi}{2}\right) e^{-\sqrt{q} \cos^2 x} \quad (4.17)$$

Se uma aproximação mais precisa se faz necessária pode-se utilizar:

$$\text{ce}_0(q, x) \cong \text{ce}_0\left(q, \frac{\pi}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3q} \cos(2x)\right) e^{-\sqrt{q} \cos^2 x} - \frac{1}{3q} \quad (4.18)$$

A expressão (4.18) se reduz à expressão (4.17) quando q assume um valor grande. A função (4.18) trabalha melhor para valores $3 \leq q \leq 25$.

2) Função Mathieu Ímpar de Ordem 1

Tal aproximação também funciona melhor quanto maior for o valor de q .

$$\text{se}_1(q, x) \cong \text{se}_1\left(q, \frac{\pi}{2}\right) \sin(x) e^{-\sqrt{q} \cos^2 x} \quad (4.19)$$

3) Função Mathieu Par de Ordem 1

$$\begin{aligned} \text{ce}_1(q, x) \cong & \left(1.76 + \frac{q}{250} + \frac{q^2}{10^6}\right) \left(1 - \frac{q}{10000}\right) \text{ce}_1(q, 1.35) [\cos(x) - \\ & - 0.8 \cos(3x)] e^{-0.9\sqrt{q} \cos^2 x}, \quad 10 \leq q \leq 2000 \end{aligned} \quad (4.20)$$

4) Função Mathieu Ímpar de Ordem 2

$$\begin{aligned} \text{se}_2(q, x) \cong & \left(2.19 + \frac{6q}{1225} + \frac{q^2}{1700000}\right) \left(1 - \frac{q}{30000}\right) \text{se}_2(q, 1.35) [\sin(2x) - \\ & - 0.19 \sin(4x)] e^{-0.9\sqrt{q} \cos^2 x}, \quad 10 \leq q \leq 2000 \end{aligned} \quad (4.21)$$

5) *Função Mathieu Par de Ordem 2*

$$\begin{aligned} \text{ce}_2(q, x) \cong & \left(-3 - \frac{q}{60} - \frac{q^2}{10000}\right) \left(1 - \frac{q}{4500}\right) \text{ce}_2\left(q, \frac{\pi}{2}\right) \left[0.62 + \frac{\text{Ln}(q)}{16 + 0.001q} + 0.28 \cos(2x) - \right. \\ & \left. - 0.8 \cos(4x)\right] e^{-0.9\sqrt{q} \cos^2 x}, 25 \leq q \leq 140 \end{aligned} \quad (4.22)$$

6) *Função Mathieu Ímpar de Ordem 2*

$$\begin{aligned} \text{se}_3(q, x) \cong & (2\pi + 4.6 \frac{(q-25)}{100}) \text{se}_3\left(q, \frac{\pi}{2}\right) \left[-(0.39 + 6.7 \frac{(q-25)}{10000}) \sin(x) - 0.353 \sin(3x) + \right. \\ & \left. + 0.2 \sin(5x)\right] e^{-0.8\sqrt{q} \cos^2 x}, 20 \leq q \leq 160 \end{aligned} \quad (4.23)$$

7) *Função Mathieu Par de Ordem 3*

$$\begin{aligned} \text{ce}_3(q, x) \cong & (2.35 + 1.42 \frac{(q-125)}{100}) \text{ce}_3(q, 1.125) \left[(2.2 + 0.9 \frac{q-125}{100}) \cos(x) - 0.5 \cos(3x) + \right. \\ & \left. + 0.75 \cos(5x) + 1.72 \cos(7x)\right] e^{-(0.7 + \frac{q}{4500})\sqrt{q} \cos^2 x}, 100 \leq q \leq 300 \end{aligned} \quad (4.24)$$

8) *Função Mathieu Ímpar de Ordem 4*

$$\begin{aligned} \text{se}_4(q, x) \cong & (0.67 + 0.45 \frac{(q-125)}{100}) \text{se}_4(q, 1.125) \left[(6.55 + 1.85 \frac{q-125}{100}) \sin(2x) - \right. \\ & \left. - 1.461 \sin(4x) - 2.45 \sin(6x) + 2.459 \sin(8x)\right] e^{-(0.7 + 0.06 \frac{(q-125)}{100})\sqrt{q} \cos^2 x}, 100 \leq q \leq 250 \end{aligned} \quad (4.25)$$

As expressões mostradas anteriormente são válidas apenas nas regiões definidas, mas pode-se encontrar coeficiente que fitam melhor as funções em qualquer que seja a região de interesse. Pode-se ainda colocar mais termos na série trigonométrica, como mostrado para a função de Mathieu de ordem zero. Há várias maneiras de estimar o erro para as funções aproximadas, mas o erro relativo não é um parâmetro adequado nesse caso, em virtude de a função exata de Mathieu possuir valor zero em pontos em q a aproximação vai muito próximo a zero, mas o erro relativo resultaria infinito nesses pontos. Uma das formas de estimar o erro é computar a integral do

quadrado da função como mostrado abaixo, já que as funções de Mathieu obedecem à seguinte relação:

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \pi$$

Nas funções aproximadas tem-se:

$$2.85 \leq \int_0^{2\pi} f_{apx}^2(x)dx \leq 3.35$$

Outras estimativas de erro podem ser feitas, como o erro absoluto e a integral da norma quadrática do erro absoluto (erro médio) como mostrado abaixo:

$$\epsilon_{abs}(x) = |f(x) - f_{apx}(x)| \quad (4.26)$$

$$\epsilon_{quad} = \int_0^{2\pi} \epsilon_{abs}^2(x)dx \quad (4.27)$$

O erro médio dado pela equação (4.27) é mostrado na Fig. 4.1. Foi assumido que o erro médio não pode ser maior que 0.05 para a função de Mathieu exata ser bem representada pela aproximação. Se maior precisão é requerida então pode-se fazer uma imposição para que o erro médio máximo seja inferior a 0.05. Os resultados para as aproximações (4.17) até (4.25) são mostrados nas Figs. 4.2 e 4.3. Na Fig. 4.2-(a) utilizou-se a expressão (4.18) para plotar a função aproximada. Como já foi dito anteriormente as funções de Mathieu estão bem representadas pela aproximação e se maior precisão é necessária mais termos devem ser incluídos nas aproximações. Os termos de baixa frequência da função de Mathieu verdadeira estão melhor representados na aproximação do que os termos de variação rápida, como pode-se verificar através das transformadas de Fourier, ou observando-se na expressão para o erro que os termos de frequência mais alta foram desprezados.

Para provar a validade da aproximação às funções de Mathieu pode-se resolver a integral de Whittaker para obter os feixes de Mathieu utilizando as fórmulas aproximadas da função de Mathieu de ordem zero, e integrar numericamente. Os resultados são mostrados nas Figs. 4.4 e 4.5, para o padrão transversal. Foram utilizados 1000 pontos na integração numérica através do Método de Simpson. Nota-se que os perfis obtidos pela solução ideal e pela aproximação são idênticos. Foram utilizados $h = 1$ e $q = 25$ para todos os casos.

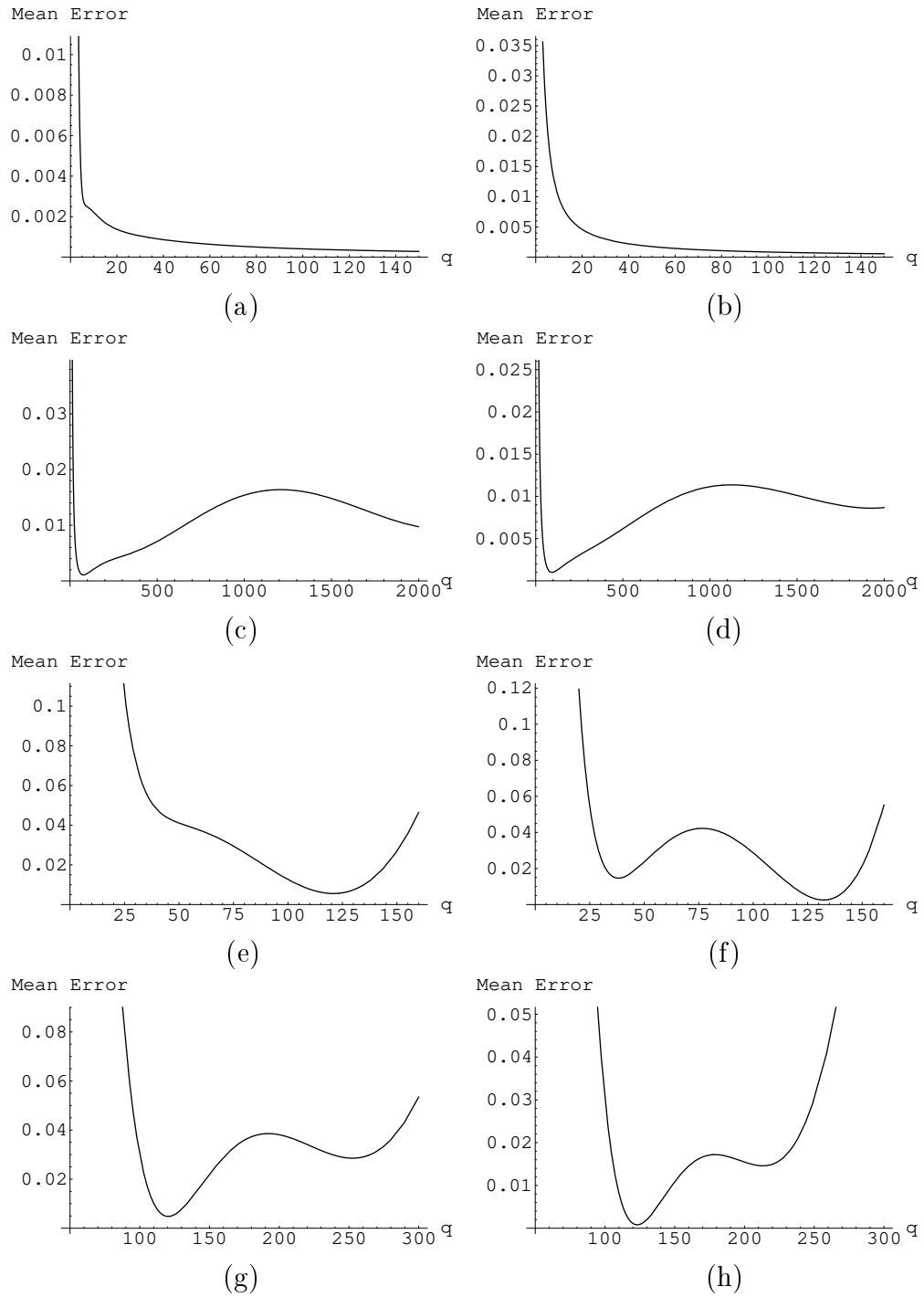


Figura 4.1: Erro médio calculado utilizando a equação (4.27) em função de q para : (a) $ce_0(q, x)$; (b) $se_1(q, x)$; (c) $ce_1(q, x)$; (d) $se_2(q, x)$; (e) $ce_2(q, x)$; (f) $se_3(q, x)$; (g) $ce_3(q, x)$; (h) $se_4(q, x)$.

4.3 Conclusões do Capítulo 4

Neste Capítulo foram introduzidas novas aproximações para as funções de Mathieu, analíticas em todo o domínio da variável independente, que representam adequadamente cada uma das funções de Mathieu. Tais aproximações contribuíram bastante para este trabalho de dissertação, já que as funções de Mathieu são um tanto complexas, e muitas formas de aproximações foram estudadas ao longo dos anos, sendo algumas formas de aproximação assintóticas quase tão complexas quanto as funções exatas. As aproximações aqui apresentadas são simples, eficientes, úteis e apresentam fórmulas fechadas. Pode-se dar um tratamento mais rigoroso à determinação dos coeficientes das fórmulas aproximadas, e possivelmente pode-se fazer considerações a partir das condições de ortogonalidade das funções de Mathieu para tal determinação.

Através das funções aproximadas de Mathieu faz-se possível a análise dos pulsos de Mathieu, que serão vistos mais adiante, no Capítulo seguinte. Tornar-se-ia muito difícil a análise de tais pulsos sem as aproximações aqui apresentadas.

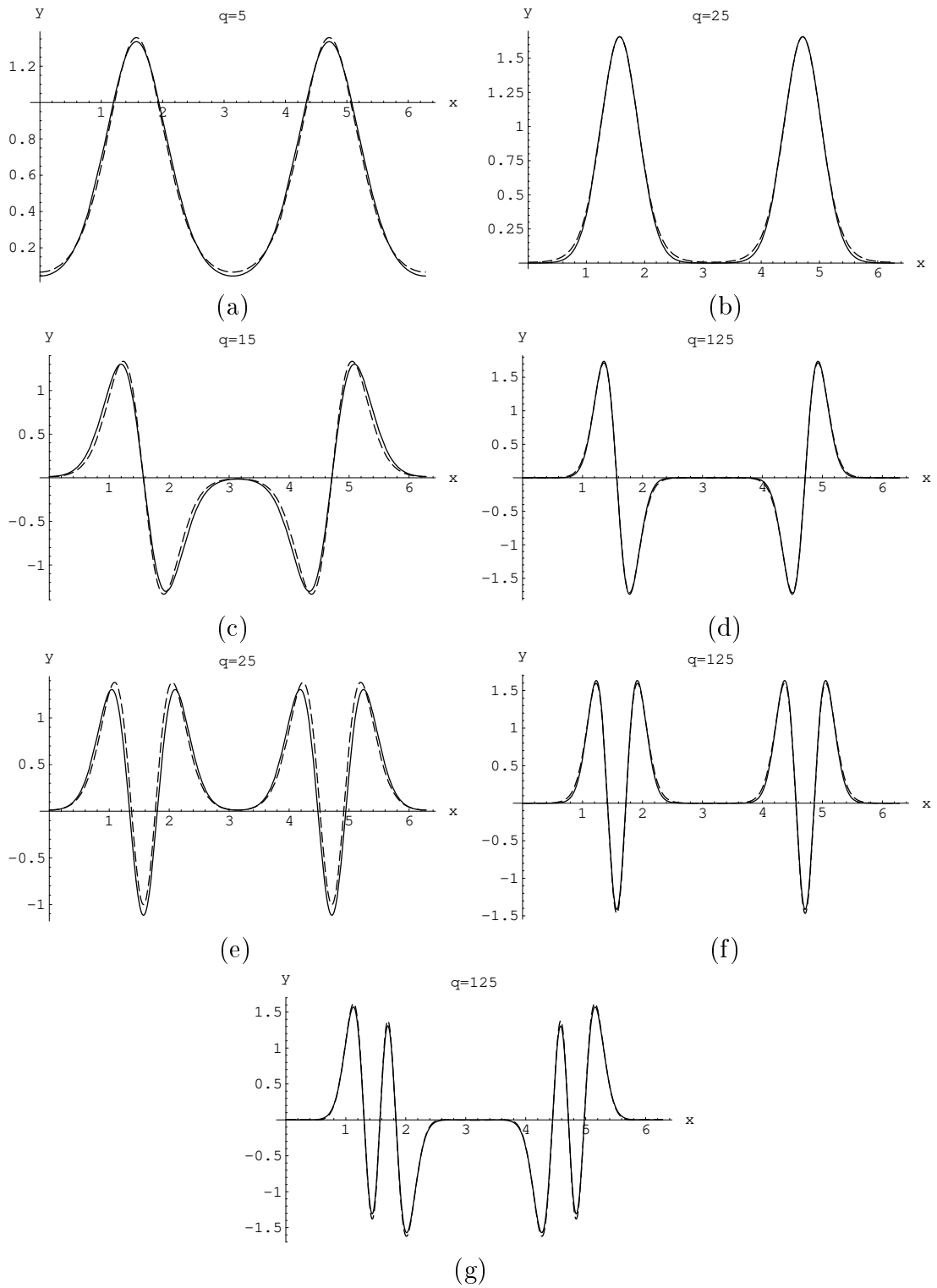


Figura 4.2: Funções de Mathieu Pares, exatas (curva sólida) e aproximadas (curvas tracejadas): (a) $ce_0(q, x)$ for $q = 5$; (b) $ce_0(q, x)$ for $q = 25$; (c) $ce_1(q, x)$ for $q = 15$; (d) $ce_1(q, x)$ for $q = 125$; (e) $ce_2(q, x)$ for $q = 25$; (f) $ce_2(q, x)$ for $q = 125$; (g) $ce_3(q, x)$ for $q = 125$.

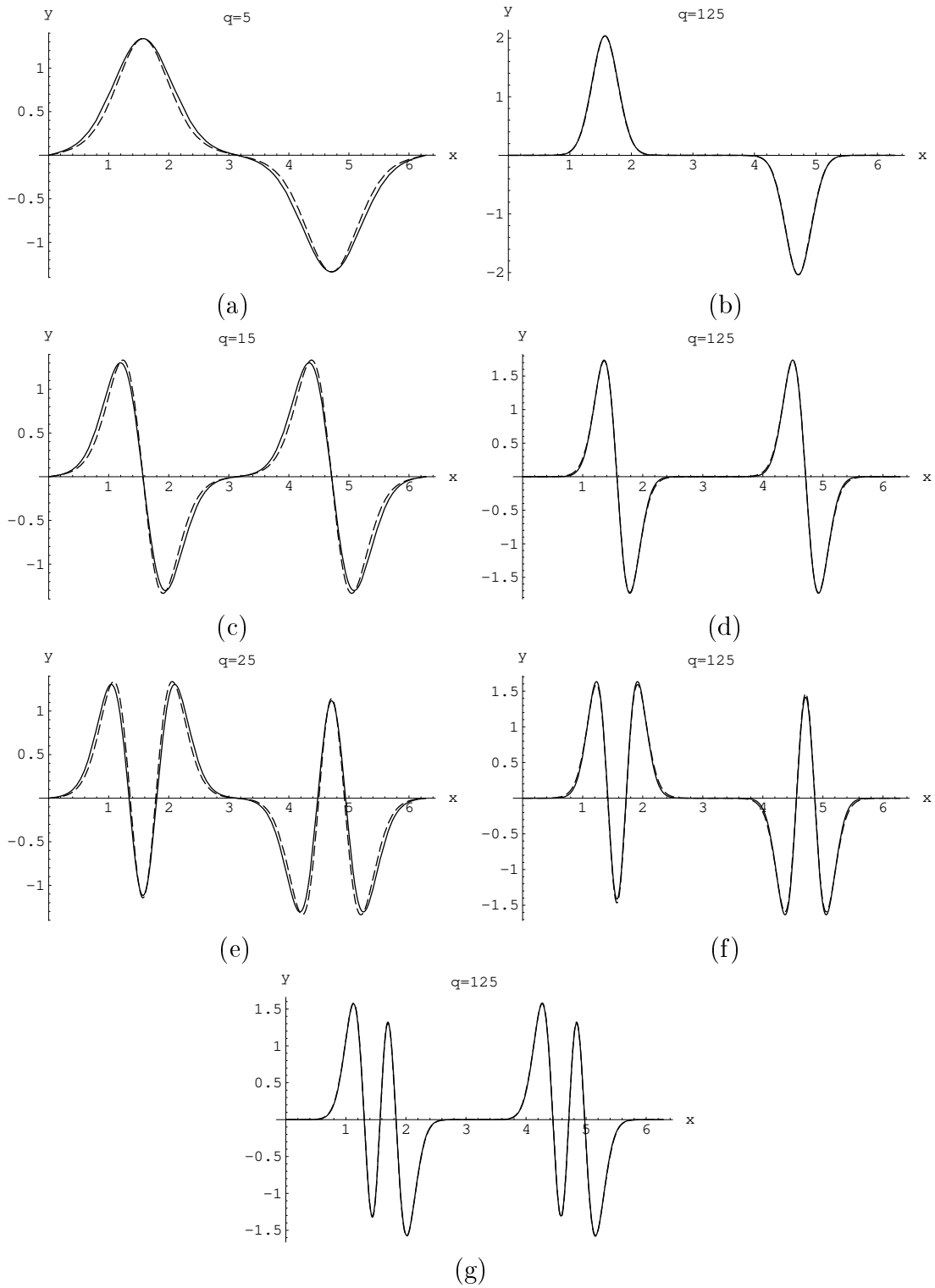


Figura 4.3: Funções de Mathieu Ímpares, exatas (curva sólida) e aproximadas (curvas tracejadas): (a) $se_1(q, x)$ for $q = 5$; (b) $se_1(q, x)$ for $q = 25$; (c) $se_2(q, x)$ for $q = 15$; (d) $se_2(q, x)$ for $q = 125$; (e) $se_3(q, x)$ for $q = 25$; (f) $se_3(q, x)$ for $q = 125$; (g) $se_4(q, x)$ for $q = 125$.

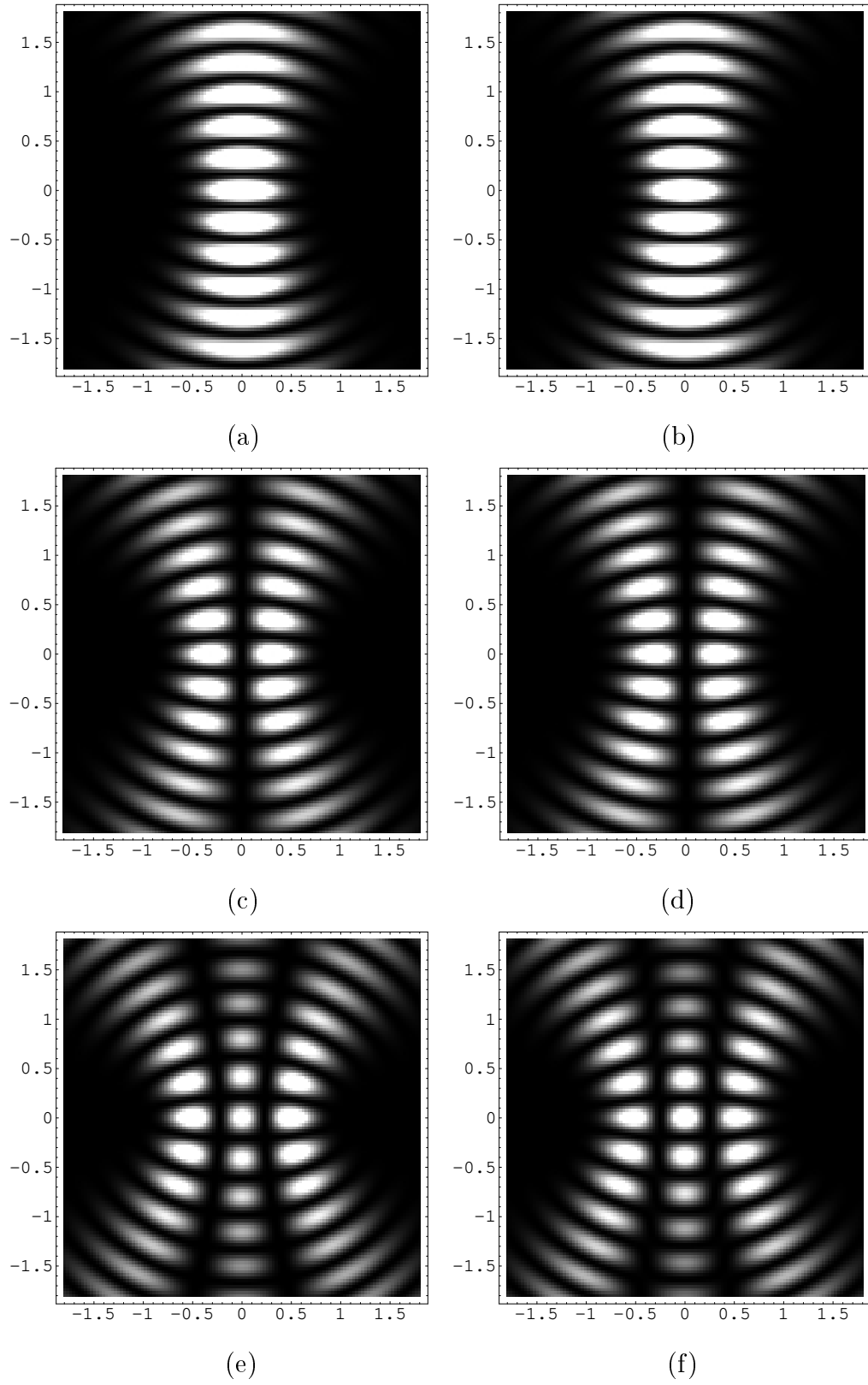


Figura 4.4: Padrão de intensidade com $q = 25$ para as funções de Mathieu Pares: (a),(c),(e) exatas; (b),(d),(f) aproximadas de ordem 0,1 e 2 respectivamente.

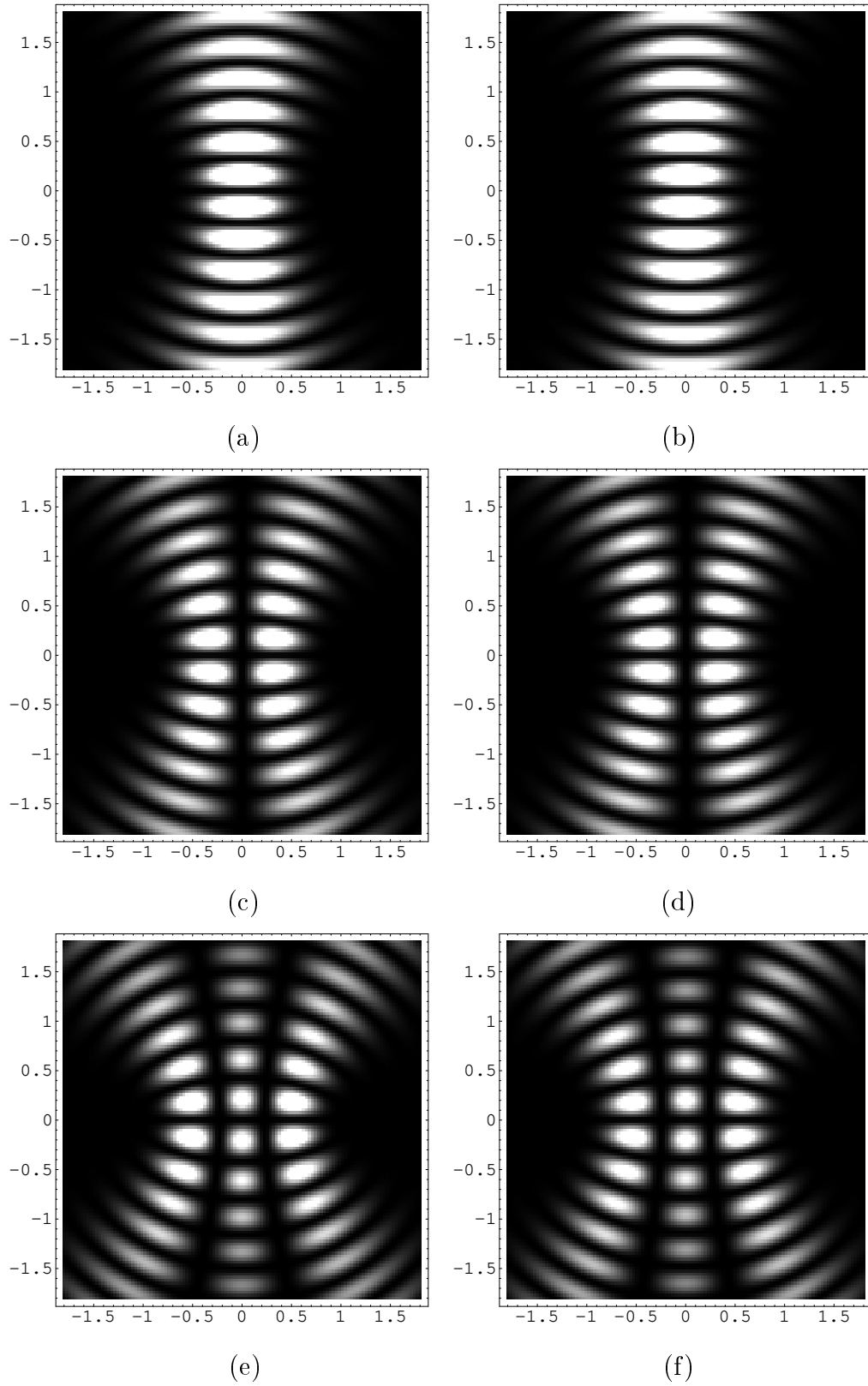


Figura 4.5: Padrão de intensidade com $q = 25$ para as funções de Mathieu Ímpares: (a),(c),(e) exatas; (b),(d),(f) aproximadas de ordem 1,2 e 3 respectivamente.

Capítulo 5

Pulsos Ópticos Localizados

Os pulsos localizados formam uma classe especial de soluções da equação de ondas que idealmente não sofrem qualquer efeito de dispersão, mantendo-se localizados no espaço-tempo, sem decaimento. Em termos práticos os pulsos localizados são ondas que propagam-se por longas distâncias sem mudança significativa no seu formato espaço-temporal, ou em outras palavras, mantêm seu perfil de intensidade transversal e seu formato temporal ao longo da propagação. Encontram aplicações em diversas áreas. Potencialmente em comunicações ópticas, onde torna-se possível a transmissão de dados a longas distâncias minimizando o erro devido ao fato de o pulso propagar-se sem distorção. Em aplicações médicas onde se faz necessário o uso de lasers pulsados, dentre várias outras.

O primeiro passo na construção de pulsos localizados é a construção dos feixes não difrativos [4, 11, 14, 17], já estudados com bastante detalhes nos capítulos anteriores desta dissertação. A modulação de tais feixes através de uma função temporal resulta então em estruturas localizadas no espaço-tempo, ou seja, os pulsos localizados. A modulação de um feixe Bessel através de uma estrutura temporal que possui decaimento exponencial no domínio da frequência produz as tão conhecidas ondas do tipo X (X-Shaped Waves) [7, 1, 41, 42, 43]. Esta estrutura será mostrada brevemente, mas em sistemas de comunicações não é a mais conveniente em virtude de privilegiar as frequências mais baixas do espectro, estando bastante abaixo do espectro óptico.

A modulação de um laser aproximadamente monocromático translada o espectro do sinal modulante para uma região de frequências mais altas no espectro, então é mais conveniente trabalhar com outros padrões espectrais, devido a geração de pulsos localizados com formatos temporais usualmente utilizados em sistemas de

comunicações. Neste Capítulo é dada uma descrição geral dos pulsos localizados, e os pulsos de Mathieu são obtidos pela primeira vez ao nosso conhecimento.

Na Seção 5.1 as soluções do tipo X são apresentadas e brevemente analisadas. Na Seção 5.2 os pulsos de Mathieu são obtidos, utilizando-se algumas das expressões obtidas no Capítulo 4 para as funções de Mathieu. Utilizando-se espectros usualmente utilizados em comunicações analisam-se na Seção 5.3 pulsos ópticos resultantes da modulação de um laser através desses espectros e em 5.4 algumas propriedades dos pulsos localizados são obtidas através do teorema da convolução. Finalmente em 5.5 as considerações e conclusões do Capítulo 5 são colocadas.

5.1 Solução de Onda do tipo X

As soluções de onda do tipo X foram intensivamente estudadas na corrente literatura [7, 1, 41, 42, 43]. Através da transformada inversa de Fourier a equação(2.44) toma a forma abaixo:

$$\Phi(\rho, \varphi, \zeta) = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\varphi', \omega) e^{iz_1 \cos(\varphi' - \varphi)} e^{i\omega \frac{\cos \theta}{c} \zeta} \quad (5.1)$$

Relembrando que:

$$\zeta = z - vt$$

$$z_1 = k_t \rho$$

$$k_t = \frac{\omega}{c} \sin \theta ; k_z = \frac{\omega}{c} \cos \theta$$

$$v = \frac{c}{\cos \theta} \quad (5.2)$$

Considere uma função espectral da forma abaixo:

$$A(\varphi, \omega) = 0 ; \omega < 0$$

$$A(\varphi, \omega) = A_0 B(\omega) e^{-a\omega + in\varphi} ; \omega \geq 0 \quad (5.3)$$

Substituindo (5.3) em (5.1) resulta na equação abaixo:

$$\Phi(\rho, \varphi, \zeta) = A_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\infty} d\omega B(\omega) e^{-a\omega + in\varphi'} e^{iz_1 \cos(\varphi' - \varphi)} e^{i\omega \frac{\cos \theta}{c} \zeta} \quad (5.4)$$

A integração de (5.5) em φ' resulta na solução geral para as ondas do tipo X:

$$\Phi(\rho, \varphi, \zeta) = A_0 e^{in\varphi} \int_0^{\infty} d\omega B(\omega) J_n(z_1) e^{-(a - i \frac{\cos \theta}{c} \zeta) \omega} \quad (5.5)$$

Vê-se diretamente da equação (5.5) que as ondas do tipo X são formadas a partir da superposição ou modulação de feixes de Bessel de ordem n . Para $n = 0$ e $B(\omega) = 1$ tem-se a X-Shaped Wave de ordem 0, e após algumas manipulações nas equações:

$$\Phi(\rho, \varphi, \zeta) = \frac{A_0}{\sqrt{(a - i\zeta)^2 + (\frac{v^2}{c^2} - 1)\rho^2}} \quad (5.6)$$

onde agora tem-se:

$$a \rightarrow a \frac{c}{\cos \theta}$$

$$A_0 \rightarrow A_0 \frac{c}{\cos \theta}$$

Considerando-se novamente o espectro dado por (5.3) com $n = 0$ e $B(\omega) = 1$, a substituição desse espectro em (5.1) e integração inicialmente em ω resulta na seguinte equação:

$$\Phi(\rho, \varphi, \zeta) = A_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{1}{(a - i\frac{\cos \theta}{c}\zeta) - i\rho\frac{\sin \theta}{c} \cos(\varphi' - \varphi)} \quad (5.7)$$

A equação (5.7) será importante para comparação da X-Shaped de ordem zero com a equação resultante para os pulsos de Mathieu de ordem zero. A integração de (5.7) em φ' obviamente fornece o resultado já conhecido da equação (5.6). A Fig. 5.1 mostra o formato das ondas do tipo X de ordem zero utilizando os valores $a = 0.01$, velocidade normalizada com relação à velocidade da luz em unidades em que $c = 1$ e $\theta = 0.43633$.

Na referência [1] é analisada a possibilidade de geração das ondas do tipo X eletromagnéticas, e mostra-se que tais soluções são soluções das equações de Maxwell e o vetor de Poynting está na direção z . Porém, tais soluções, conforme aqui apresentadas, possuem energia infinita. Soluções com energia finita já foram estudadas e sugeridas porém não permanecem localizadas "ad infinitum", podendo permanecer bem localizadas por longas distâncias, entretanto.

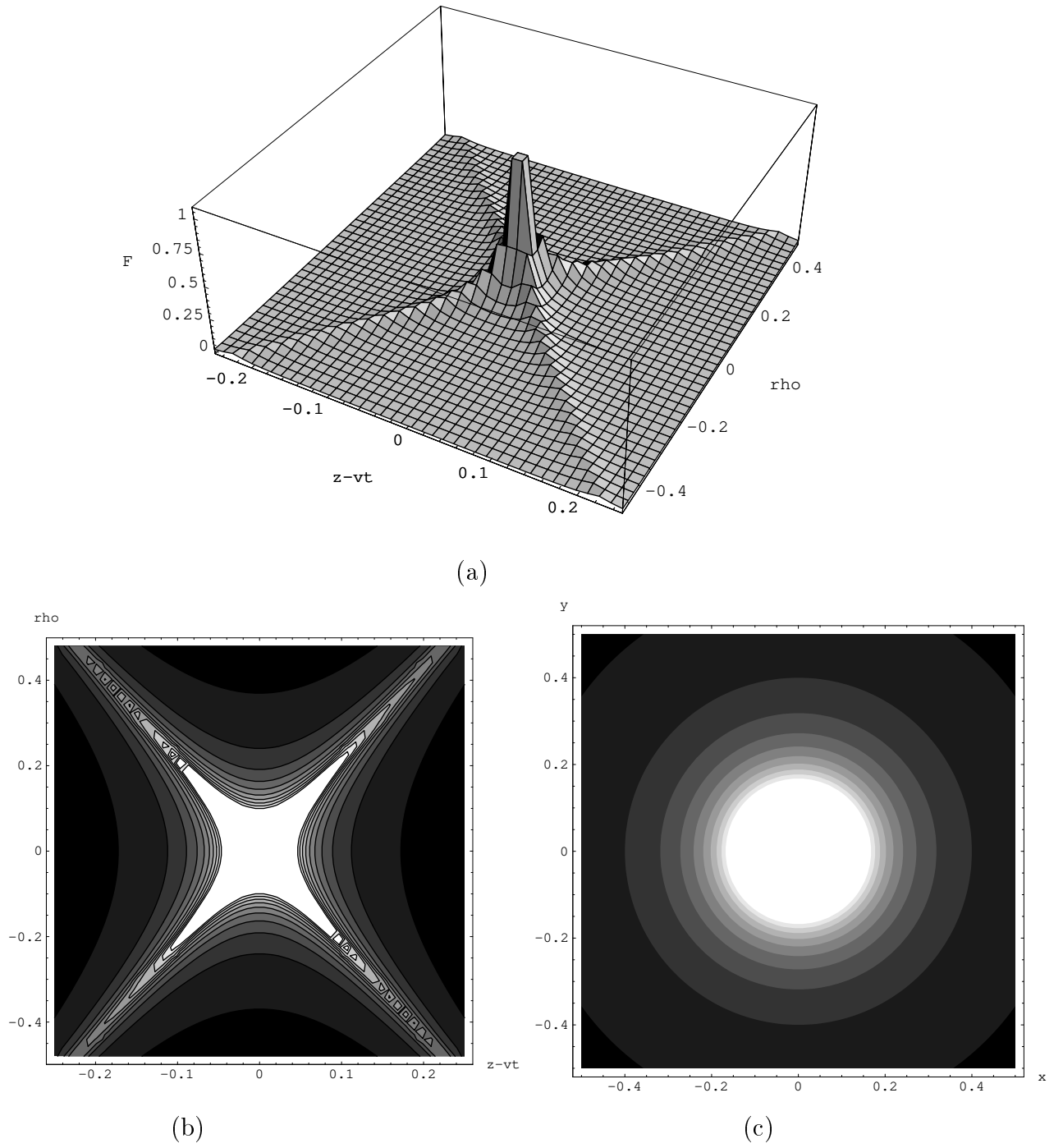


Figura 5.1: X-Shaped Wave: (a) Intensidade $F = |\Phi|^2$; (b) Contornos para o gráfico da figura (a); (c) Contornos da intensidade $F = |\Phi|^2$ no centro do pulso $\zeta = 0$.

5.2 Pulsos de Mathieu

Em coordenadas cilíndricas elípticas, os feixes de Mathieu são as soluções naturais para a equação de Helmholtz, então uma solução que é a superposição de feixes de Mathieu é possível, e é esperado que o comportamento de tal pulso, resultante da modulação dos feixes de Mathieu seja semelhante às ondas resultantes da superposição de feixes de Bessel, como é o caso das ondas do tipo X, tendo todas as propriedades básicas dos pulsos localizados. Considere o espectro abaixo:

$$A(\varphi, \omega) = 0 ; \omega < \omega_0$$

$$A(\varphi, \omega) = B(\omega)e^{-a\omega} \text{ce}_{2n}(q, \varphi); \omega \geq \omega_0 \quad (5.8)$$

Este espectro é uma função $B(\omega)$ que depende somente da frequência, multiplicada por uma função de Mathieu par de ordem $2n$, sendo esta, função da frequência (q é dependente da frequência) bem como é uma função angular. A substituição de (5.8) em (5.1) e integrando em φ' nos leva à seguinte equação:

$$\Phi(\rho, \varphi, \zeta) = \int_{\omega_0}^{\infty} d\omega \frac{2\pi B(\omega) A_0^{2n}(q)}{\text{ce}_{2n}(q, 0) \text{ce}_{2n}(q, \pi/2)} \text{Ce}_{2n}(q, u) \text{ce}_{2n}(q, v) e^{-(a - i \frac{\cos \theta}{c} \zeta) \omega} \quad (5.9)$$

Utilizando [31] a equação (5.9) pode ser colocada na forma abaixo:

$$\Phi(\rho, \varphi, \zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cos(2m\varphi) \int_{\omega_0}^{\infty} d\omega B(\omega) A_{2m}^{(2n)}(q) J_{2m}(z_1) e^{-(a - i \frac{\cos \theta}{c} \zeta) \omega} \quad (5.10)$$

Observa-se que (5.10) é bastante semelhante à equação (5.5). Denota-se então os pulsos resultantes da equação (5.10) "pulsos de Mathieu". Estes pulsos são gerados a partir da superposição adequada dos feixes de Mathieu ou em outras palavras, comparando (5.10) com (5.5), os pulsos de Mathieu são gerados a partir da adequada superposição de X-Waves. Uma importante conclusão pode ser tomada deste fato: os pulsos de Mathieu comportam-se tal qual as X-Waves, exceto pelo padrão de intensidade transversal. Devido ao fato de q possuir dependência em ω e todos os coeficientes $A_{2m}^{(2n)}$ das funções de Mathieu sendo funções de q , a integração analítica da equação (5.10) é muito difícil senão impossível, e mesmo numericamente os cálculos são bastante pesados. Ao invés disso, as aproximações para as funções de

Mathieu podem ser utilizadas, esta é a proposta principal das aproximações apresentadas no Capítulo anterior. Elas provaram ser eficientes e simplificarão a integração numérica: Relembrando a aproximação (4.17) para o feixe de Mathieu de ordem 0:

$$\text{ce}_0(q, \varphi) = \text{ce}_0(q, \frac{\pi}{2}) e^{-\sqrt{q} \cos(\varphi)^2}$$

com:

$$\sqrt{q} = \frac{h \sin \theta}{2c} \omega$$

A função espectral dada abaixo será utilizada por conveniência:

$$A(\varphi, \omega) = 0; \omega < \omega_0$$

$$A(\varphi, \omega) = \frac{e^{-a\omega}}{\text{ce}_0(q, \frac{\pi}{2})} \text{ce}_0(q, \varphi); \omega \geq \omega_0 \quad (5.11)$$

O espectro (5.11) é similar àquele utilizado para gerar X-Waves de ordem 0: tem valor nulo para $\omega < \omega_0$, onde pode-se fazer $\omega_0 = 0$ ou não, e tem decaimento exponencial com a frequência para $\omega \geq \omega_0$. A parte angular do espectro tem a forma de uma função de Mathieu de ordem 0, e está normalizada com relação ao valor de máximo da função que ocorre em $\varphi = \frac{\pi}{2}$. A normalização é feita por conveniência e irá simplificar os cálculos. A substituição de (5.11) em (5.1) e já considerando a aproximação para a função de Mathieu nos leva à seguinte expressão:

$$\Phi(\rho, \varphi, \zeta) = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{\omega_0}^{\infty} d\omega e^{-\frac{h \sin \theta}{2c} \omega \cos(\varphi')^2} e^{\omega[-a + i(\rho \frac{\sin \theta}{c} \cos(\varphi' - \varphi) + \frac{\cos \theta}{c} \zeta)]}$$

A integração em ω é simples e dá o seguinte resultado:

$$\Phi(\rho, \varphi, \zeta) = \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{e^{-\omega_0[(a - i\frac{\cos \theta}{c} \zeta) - i\rho \frac{\sin \theta}{c} \cos(\varphi' - \varphi) + \frac{h \sin \theta}{2c} \cos(\varphi')^2]}}{(a - i\frac{\cos \theta}{c} \zeta) - i\rho \frac{\sin \theta}{c} \cos(\varphi' - \varphi) + \frac{h \sin \theta}{2c} \cos(\varphi')^2} \quad (5.12)$$

Na equação (5.12) ocorre um termo extra $(\frac{h \sin \theta}{2c} \cos(\varphi')^2)$ que não ocorre para a X-Shaped Wave, no formato integral dado por (5.7). Este termo é responsável por variações angulares no padrão de intensidade transversal, que não ocorre nos pulsos localizados construídos trivialmente com feixes de Bessel. Os resultados são obtidos numericamente utilizando-se o Método de Simpson. Os valores aqui utilizados foram $h = 1$, $c = 1$, $a = 0.01$, $\omega_0 = 20$ e $\theta = 0.43633$. O padrão de intensidade transversal

no centro do pulso de Mathieu de ordem zero é mostrado nas Fig. 5.2. Esta onda pode ser chamada Mathieu X-Shaped de ordem zero, no sentido de que este pulso tem o mesmo comportamento que a onda X, a amplitude máxima está em $\zeta = 0$, com rápido decaimento afastando-se do centro, apenas o padrão transversal é diferente. O pulso mantém-se ao longo da propagação, tendo portanto as propriedades desejáveis dos pulsos localizados. Como no caso das ondas do tipo X mostradas, possui energia infinita, e fisicamente somente aproximações para estes pulsos podem ser obtidas.

Para a criação do pulso de Mathieu ímpar de ordem 1 o procedimento adotado é idêntico e os valores dos parâmetros adotados na integração numérica foram os mesmos daqueles utilizados na geração do Mathieu de ordem 0. A função espectral é dada abaixo:

$$A(\varphi, \omega) = 0; \omega < \omega_0$$

$$A(\varphi, \omega) = \frac{e^{-a\omega}}{\text{se}_1(q, \frac{\pi}{2})} \text{se}_1(q, \varphi); \omega \geq \omega_0 \quad (5.13)$$

Os gráficos são mostrados na Fig. 5.3.

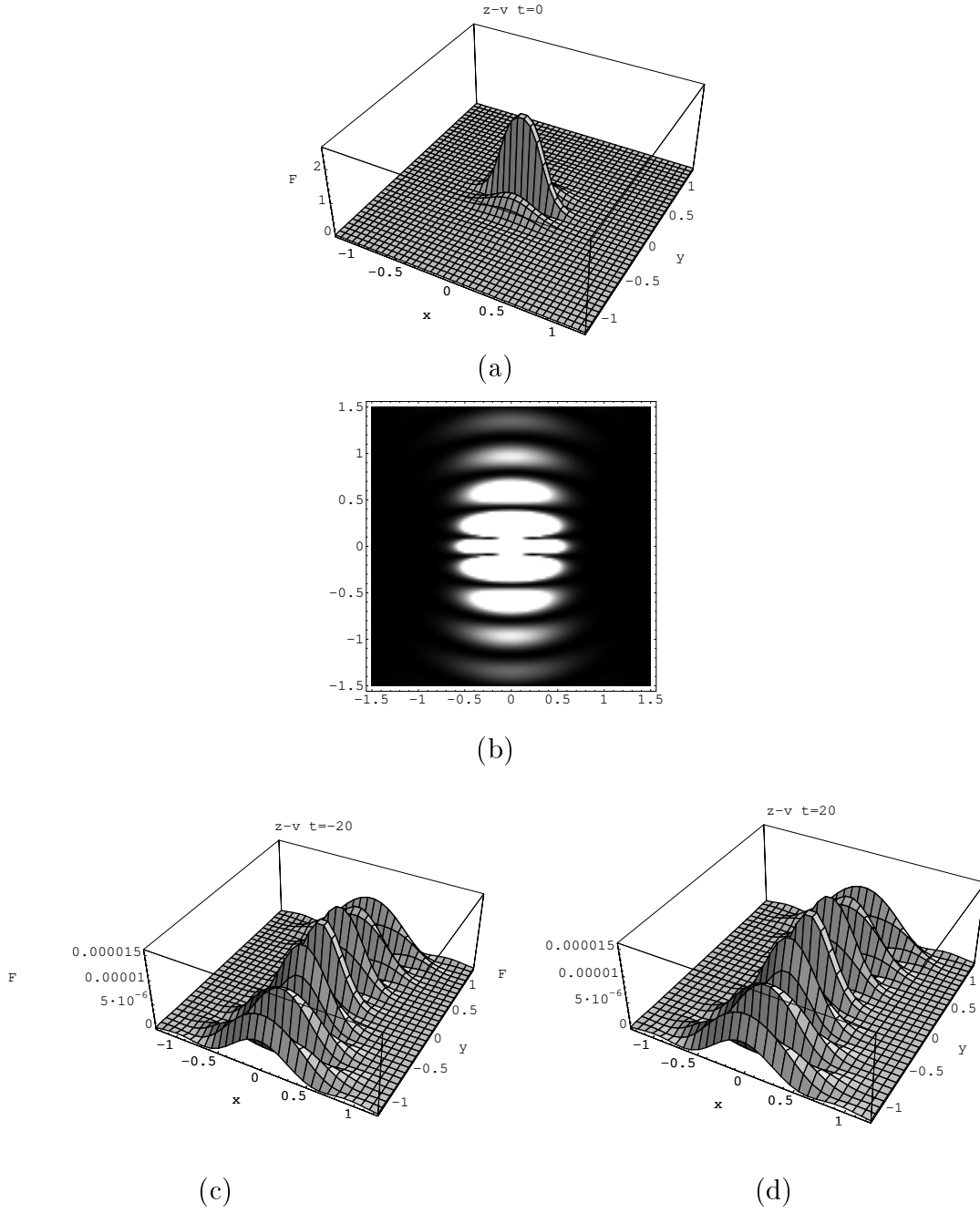


Figura 5.2: Intensidade $F = |\Phi|^2$: (a) e (b) em $\zeta = 0$; (c) em $\zeta = -20$; (d) em $\zeta = 20$. A amplitude é desprezível para pontos longe do centro do pulso.

5.3 Pulsos Localizados obtidos com espectros usuais

A solução para a equação de ondas pode ser dada na forma abaixo:

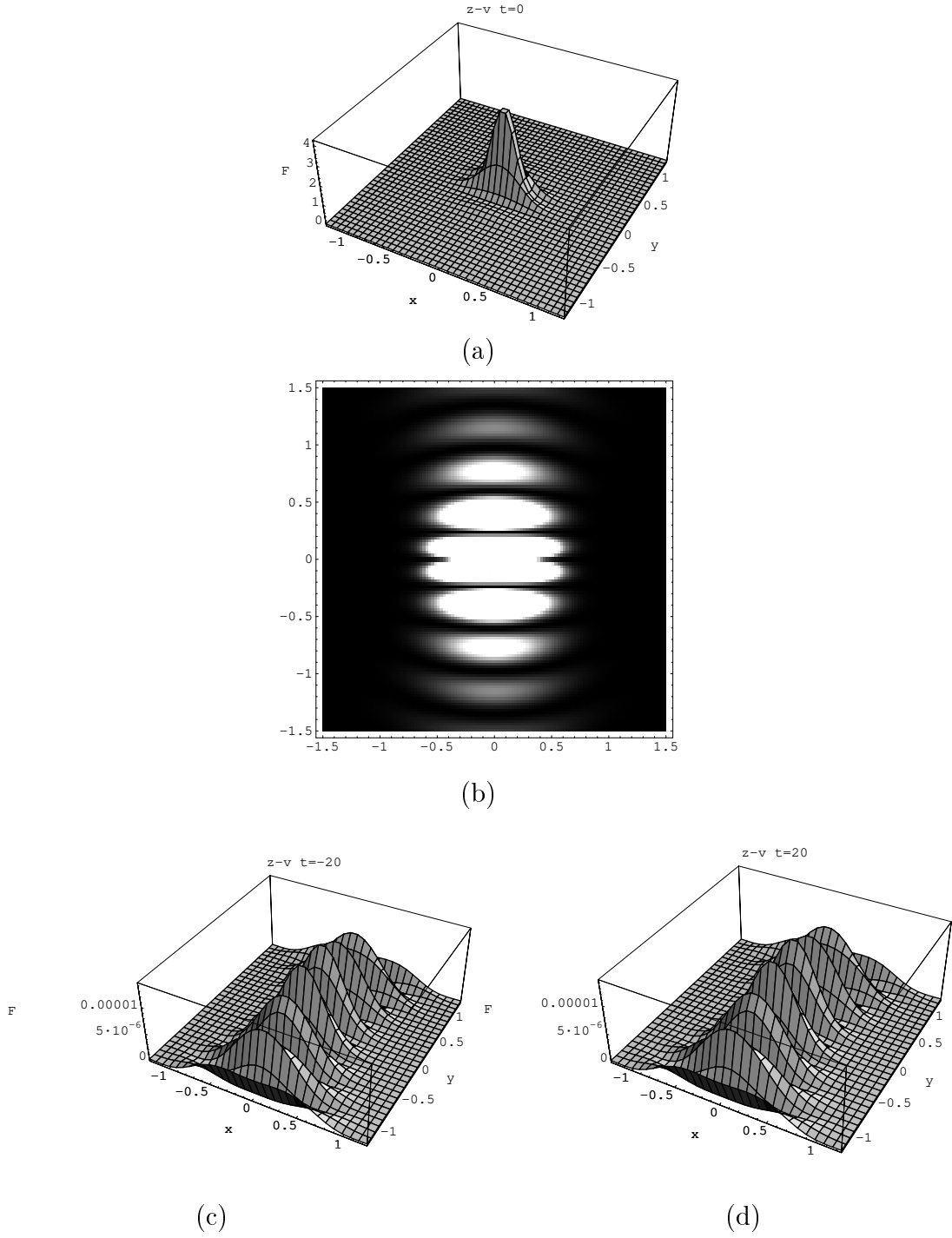


Figura 5.3: Intensidade $F = |\Phi|^2$ para o pulso de Mathieu ímpar de ordem 1: (a) e (b) em $\zeta = 0$; (c) em $\zeta = -20$; (d) em $\zeta = 20$. A amplitude é desprezível para pontos longe do centro do pulso.

$$\Phi(\rho, \varphi, \zeta) = e^{im\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\omega) J_m(z_1) \exp(i\omega \frac{\zeta}{v})$$

$$m = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (5.14)$$

Para os pulsos retangulares no domínio temporal (usualmente utilizados em comunicações) nós temos:

$$f(t) = 1; |t| \leq b$$

$$f(t) = 0; |t| > b$$

À parte as constantes, a transformada de Fourier desta função é dada por:

$$F(\omega) = 2 \frac{\sin(b\omega)}{\omega}$$

Na Fig. 5.4 é plotada a função e sua transformada.

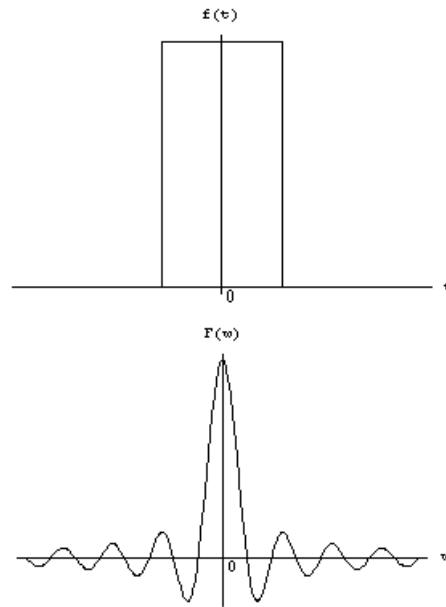


Figura 5.4: Pulso retangular $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(\omega)$.

Deixando de lado as constantes e utilizando as propriedades de deslocamento em frequência nas transformadas de Fourier, devido ao fato de que este pulso temporal é utilizado na modulação de uma fonte de laser de frequência ω_0 , tem-se no domínio da frequência:

$$F(\omega) = \frac{\sin(b(\omega - \omega_0))}{(\omega - \omega_0)} \quad (5.15)$$

Inserindo-se o espectro dado por (5.15) na expressão (5.14) e fazendo $m = 0$, que significa a modulação do feixe de Bessel de ordem zero, a solução será:

$$\Phi(\mathbf{r}, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega J_0\left(\frac{\rho \sin \theta}{c} \omega\right) \frac{\sin(b(\omega - \omega_0))}{(\omega - \omega_0)} e^{i\omega \frac{\zeta}{v}} \quad (5.16)$$

onde $2b$ é a largura temporal do pulso. Como é usual nas comunicações ópticas, considera-se que a largura temporal do pulso é muito maior que o período de oscilação de portadora, o que significa que

$$2b \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$$

A contribuição mais significativa à integral na expressão 5.16 estará na região próxima a $\omega = \omega_0$. Considere que a duração do pulso no tempo é da ordem de $10 \times \frac{2\pi}{\omega_0}$ no pior caso. Empiricamente podemos determinar a região onde o integrando é mais significativo e para esta condição tem-se:

$$\Phi(\mathbf{r}, \zeta) = \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{2\omega_0} d\omega J_0\left(\frac{\rho \sin \theta}{c} \omega\right) \exp\left(i\omega \frac{\zeta}{v}\right) \frac{\sin(b(\omega - \omega_0))}{(\omega - \omega_0)} \quad (5.17)$$

Na Fig. 5.5 tem-se o padrão de intensidade para a modulação dos feixes Bessel de ordem zero com um pulso retangular no domínio temporal. O gráfico está normalizado para amplitude máxima unitária. O resultado foi obtido integrando a equação (5.16) numericamente. Os valores utilizados foram $c = 1, \omega_0 = 15, b = \frac{10\pi}{15}$ e $\theta = 0.004098 \text{ rads}$.

Considere agora outro pulso muito utilizado, o pulso gaussiano no domínio temporal como segue:

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2b^2}} \quad (5.18)$$

A transformada de Fourier de (5.18), à parte constantes, e com deslocamento em frequência já considerado é:

$$F(\omega) = e^{-\frac{b^2(\omega - \omega_0)^2}{2}} \quad (5.19)$$

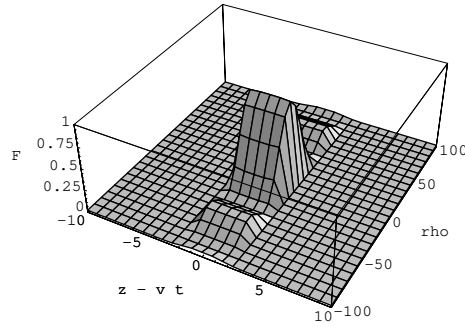


Figura 5.5: Padrão de intensidade $F = |\Phi|^2$ normalizado para modulação de pulso retangular.

Substituição de (5.19) em (5.14) para o feixe de Bessel de ordem zero, e levando-se em conta apenas a parte em que o integrando possui valores significativos nos leva à seguinte equação:

$$\Phi(\mathbf{r}, \zeta) = \int_{\omega_0 - \frac{\pi}{b}}^{\omega_0 + \frac{\pi}{b}} d\omega J_0\left(\frac{\rho \sin \theta}{c} \omega\right) \exp(i\omega \frac{\zeta}{v}) \exp\left[-\frac{b^2(\omega - \omega_0)^2}{2}\right] \quad (5.20)$$

Na Fig. 5.6 mostra-se o padrão transversal para a modulação do feixe de Bessel de ordem zero com um pulso gaussiano. Os parâmetros utilizados foram $c = 1, \omega_0 = 15, b = \frac{10\pi}{15}$ e $\theta = 0.004098$ *rads* novamente.

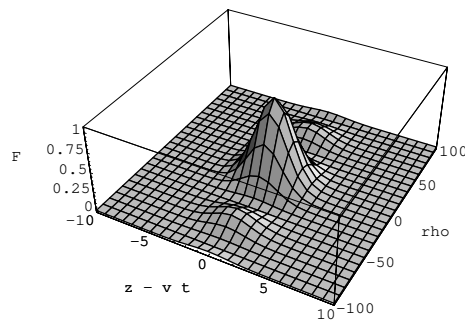


Figura 5.6: Padrão de intensidade $F = |\Phi|^2$ normalizado para modulação gaussiana.

5.4 Teorema da Convolução e algumas propriedades dos pulsos localizados

Iniciando novamente de (5.14), esta equação é reproduzida abaixo:

$$\Phi(\mathbf{r}, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\omega) J_0\left(\frac{\rho \sin \theta}{c} \omega\right) \exp(i\omega \frac{\zeta}{v})$$

Esta solução espaço-temporal é a transformada de Fourier inversa da solução no domínio frequencial. Considere agora o Teorema da Convolução das transformadas de Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega) G(\omega) e^{i\omega t} = f(t) * g(t)$$

onde $*$ denota convolução no domínio temporal. Fazendo as identificações abaixo:

$$F(\omega) = A(\omega)$$

$$G(\omega) = J_0\left(\frac{\rho \sin \theta}{c} \omega\right)$$

tem-se:

$$\Phi(\mathbf{r}, \zeta) = f(\zeta/v) * g(\zeta/v) \quad (5.21)$$

onde:

$$f(\zeta/v) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\omega) \exp(i\omega \frac{\zeta}{v}) \quad (5.22)$$

$$g(\zeta/v) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega J_0\left(\frac{\rho \sin \theta}{c} \omega\right) \exp(i\omega \frac{\zeta}{v}) \quad (5.23)$$

Considerando-se o experimento de Durnin [4] já mencionado nos capítulos anteriores para a geração de feixes de Bessel e modulando-se o feixe com um pulso temporal finito, vê-se que o resultado será a convolução do formato temporal do pulso com a função de transferência do aparato experimental. A função de transferência do aparato imaginado por Durnin é o feixe de Bessel no domínio da frequência. Há aqui uma importante conclusão: o formato do pulso no domínio espaço-temporal será a convolução da estrutura temporal da função modulante de entrada, que se translada ao longo da direção de propagação, com a função de transferência do aparato necessário para produzir o feixe. Deve-se alertar o leitor que a função de transferência do aparato será uma função de (ρ, ζ) e a função modulante será de ζ somente.

5.5 Conclusões do Capítulo 5

Neste Capítulo foram estudados os pulsos localizados, especialmente no domínio óptico. Uma breve introdução através das ondas do tipo X já muito conhecidas na literatura corrente, para a apresentação do novo tipo de pulsos, que denominamos pulsos de Mathieu. Nenhuma solução do tipo Mathieu para pulsos é encontrada na literatura corrente, e foram analisadas as propriedades básicas de tais pulsos verificando que comportam-se com as propriedades desejadas dos pulsos localizados. As aproximações apresentadas no Capítulo anterior contribuíram enormemente para a simplificação dos cálculos e obtenção dos pulsos de Mathieu.

Uma análise de estruturas temporais usualmente utilizadas nas comunicações ópticas, como os pulsos gaussianos e retangulares no domínio temporal nos permitiu concluir, também utilizando o teorema da convolução, que o formato do pulso será sempre dado como a convolução, ou a grosso modo, um produto entre o sinal modulante, e a função de transferência do aparato. Pode-se inferir ainda que a modulação dos feixes localizados, como feixes de Mathieu ou feixes de Bessel sempre produzem pulsos localizados, e a forma de obtenção dos pulsos localizados é justamente a modulação dos feixes. As soluções obtidas são de energia infinita, o que é fisicamente irrealizável, porém o próprio aparato experimental para gerar os feixes faz com que o feixe fique localizado apenas por uma região determinada do espaço, dependente dos parâmetros do aparato, removendo o problema de energia infinita.

Finalmente acrescenta-se que a geração de tais pulsos pode apresentar imensas vantagens de transmissão em sistemas de comunicações já que não se distorcem e minimizam o erro.

Capítulo 6

Conclusões Gerais

Neste trabalho de dissertação, requisito necessário para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica foram estudados muitos aspectos importantes dos feixes não-difrativos e dos pulsos localizados. Estes tipos de ondas tem aplicação imediata na engenharia, seja em comunicações ou em áreas como medicina, microlitografia, guiamento de átomos, metrologia e outras. Conseguiu-se realizar um estudo bastante profundo dos feixes não-difrativos, através da equação de ondas diretamente, e especialmente através da teoria escalar da difração, que permitiu a análise dos feixes de Bessel e feixes de Mathieu gerados a partir do aparato experimental proposto por Durnin. O objetivo inicialmente proposto, de estudar os feixes não-difrativos de modo a poder comparar os feixes de Bessel bastante conhecidos na literatura, com os feixes de Mathieu, recentemente propostos, foi concluído com êxito. Conclui-se que quanto à distância propagada, não há vantagem de um feixe sobre outro, quando gerados a partir do mesmo aparato, diferenciando-se apenas pelo padrão transversal. Na sequência do trabalho, naturalmente faz-se a análise dos pulsos com a necessidade do desenvolvimento de uma aproximação às funções de Mathieu que permitisse a simplificação das integrações, e obteve-se uma forma de aproximação que é de grande contribuição para esta dissertação, sendo nova ao nosso conhecimento. O estudo dos pulsos de Mathieu e o teorema da convolução fecham o trabalho.

No Capítulo 2 demonstrou-se a obtenção das soluções para feixes não-difrativos através da solução direta da equação de ondas e da solução da integral de Whittaker simplificada. Tais soluções são ideais e possuem energia infinita, sendo fisicamente inconcebíveis podendo, entretanto, ser bastante úteis na análise de problemas físicos reais. Tanto os feixes de Bessel quanto os feixes de Mathieu formam um conjunto

completo de funções de base e qualquer solução para a equação de ondas pode ser representada adequadamente como uma combinação de tais funções de base. Os feixes de Bessel formam o conjunto de funções ortogonais no sistema de coordenadas cilíndricas e os feixes de Mathieu no sistema de coordenadas cilíndricas elípticas.

No Capítulo 3 foram analisados os feixes não-difrativos a partir da teoria escalar da difração. Esta teoria funciona muito bem no domínio óptico. O aparato experimental proposto por Durnin foi analisado e demonstrou-se que os feixes de Mathieu e os feixes de Bessel possuem comportamento semelhante no que se refere à distância máxima de propagação, e demonstrou-se ainda a decomposição dos feixes de Mathieu em feixes de Bessel. Ainda como contribuição, um estudo de estruturas com vários anéis foi levado adiante, demonstrando as equações básicas que descrevem tais situações, obtidas através da teoria escalar de difração.

No Capítulo 4 novas aproximações para as funções de Mathieu, analíticas em todo o domínio da variável independente e representando adequadamente cada uma das funções de Mathieu foram apresentadas. Estas aproximações são muito úteis para qualquer aplicação matemática. Através das funções aproximadas de Mathieu fez-se possível a análise dos pulsos de Mathieu.

No Capítulo 5, foram estudados os pulsos localizados, especialmente no domínio óptico. As ondas do tipo X já muito conhecidas na literatura corrente, foram comparadas ao que denominamos pulsos de Mathieu, analisados com o auxílio das aproximações às funções de Mathieu apresentadas nessa dissertação. Nenhuma solução do tipo Mathieu para pulsos havia sido encontrada na literatura corrente, e foram analisadas as propriedades básicas de tais pulsos verificando que comportam-se com as propriedades desejadas dos pulsos localizados. A análise de estruturas temporais usualmente utilizadas nas comunicações ópticas, como os pulsos gaussianos e retangulares no domínio temporal e o teorema da convolução permitiu a conclusão de que o formato do pulso será sempre dado pela convolução, ou a grosso modo, um produto entre o sinal modulante, e a função de transferência do aparato.

Nesta dissertação deu-se ênfase ao estudo teórico dos feixes e pulsos com suas características mais essenciais. Para a geração de tais ondas apenas o aparato experimental proposto por Durnin foi estudado em maiores detalhes. A abordagem utilizada nesse trabalho foi a teoria da difração escalar, porém, para casos mais complexos faz-se necessária a análise através de uma teoria vetorial. Sistemas de transmissão de dados seriam muito mais precisos e confiáveis utilizando-se uma tecnologia

adequada para implementar a geração de pulsos localizados, já que tais pulsos não sofrem distorções por longas distâncias. O guiamento de partículas parece ser uma aplicação bastante promissora para os feixes de Bessel de ordem maior. Essas e outras questões de ordem prática e teórica ficam em aberto para futuras dissertações e nesse Capítulo serão mencionados e comentados de forma geral a seguir. Na Seção 6.1 são feitos comentários a respeito do estudo da viabilidade dos sistemas ópticos wireless. Na Seção 6.2 a análise do guiamento de átomos e partículas através de feixes de Bessel. A Seção 6.3 trata de guias de ondas e cavidades elípticas e finalmente em 6.4 comenta-se o estudo de sistemas de geração de feixes não-difrativos para futuras dissertações.

6.1 Estudo da Viabilidade dos Sistemas Ópticos Sem Fio

Os sistemas de comunicações ópticas sem fio já estão se tornando realidade. Feixes de luz propagando-se através do ar oferecem a velocidade dos sistemas ópticos sem o custo da fibra óptica. Atualmente utilizam-se feixes de laser focalizados. Feixes não-difrativos e pulsos ópticos localizados ainda não são utilizados e para tal se faz necessário o aprimoramento tecnológico na geração de ondas. Além de reduzir custos, devido à não necessidade de fibras e sem o ônus pela negociação de direito de passagem e lançamento de cabos, os sistemas ópticos sem fio apresentam muitas aplicações [16], a serem citadas abaixo:

- Redes cuja extensão é de alguns poucos metros. Ampliação das redes de comunicações nas áreas metropolitanas já existentes e baseadas em fibras ópticas, sem necessidade de implementar novo cabeamento;
- Pode ser utilizado para conectar usuários nos pontos de chegada de internet ou outros serviços, providenciando alta velocidade sem necessitar de cabeamentos;
- Interconexão em redes locais, que são separadas por regiões de domínio público, como ruas e construções, novamente sem a necessidade e o ônus de realização de um sistema de cabeamento de fibras ópticas;
- Backup de redes de fibras ópticas, o wireless óptico pode fazer o link redundante para segurança do sistema de fibras, mas sem a necessidade de um segundo link de fibras;
- Aceleração de serviços, pode providenciar serviço instantâneo no caso de a infra-

estrutura de fibras estar em atraso(lag) ou congestionado.

Apresentam também certas desvantagens com relação ao sistema de fibras, como por exemplo:

- Os sistemas atuais são confiáveis apenas para distâncias relativamente curtas, até 4 km. o feixe está sujeito à difração no ar, ao passo que apresenta-se confinado quando utiliza-se fibra óptica. Utilização de feixes não-difrativos poderiam ser a solução, porém não há um estudo sobre o efeito mais nocivo ao sinal, se a perda de localização pela difração, ou a absorção no ar;
- As distâncias permitidas são bem menores que aquelas utilizadas em sistemas utilizando fibras, e além disso apresentam menor confiabilidade, pois o feixe de laser está sujeito a obstrução, por qualquer interferência atmosférica, como chuva, neve, neblina (que atenua o sinal), ou então a passagem de uma ave na linha de visada. Oscilações da estrutura de um prédio onde esteja colocado o transmissor ou o receptor também podem tirar o feixe da linha de visada;
- Os sistemas utilizam-se de lasers em 1550 *nm*. Lasers de 850 *nm* são bem mais baratos, porém a utilização do espectro infravermelho se deve à proteção do olho humano, além de poder transmitir potências maiores atualmente.

A utilização de feixes ópticos não-difrativos em sistemas de comunicações ópticas sem fio poderia aumentar efetivamente o alcance do sistema e também a confiabilidade já que um feixe não-difrativo propaga-se no ar ou espaço livre como se estivesse confinado por uma fibra, na região de invariância do feixe, muito embora os feixes não-difrativos também sejam susceptíveis à interrupção por obstrução. O problema de confiabilidade do sistema é facilmente resolvido através de criação de rotas alternativas e estruturas em anel. Fica em aberto para futuras dissertações a análise de estruturas utilizando-se de feixes não-difrativos e confiabilidade do sistema, e também o estudo da competição entre a difração e a absorção, para saber-se qual fenômeno degenera mais o sinal a ser transmitido. A propagação e efeitos de difração e dispersão dos feixes e pulsos ópticos no ar também podem ser estudados com bastante detalhes, mesmo em sistemas que não se utilizem de feixes não-difrativos.

6.2 Um sistema para guiamento de átomos e partículas através de Bessel beams

Uma aplicação que parece ser bastante promissora para os feixes não-difrativos é o guiamento de átomos e partículas, sem a existência de um guia metálico. Feixes de Bessel de alta ordem produzem um padrão cuja intensidade central é nula e a uma determinada distância radial tem-se uma "parede" feita de luz para átomos e partículas, tendo-se então um guia constituído apenas de luz para partículas. Tal fenômeno poderia ser utilizado até mesmo em aceleradores de partículas.

Tendo em conta a solução (2.17):

$$\Psi(\rho, \varphi, \zeta) = J_m(k_\perp \rho) e^{im\varphi} e^{i\omega \frac{\zeta}{v}}$$

pode-se supor que tal solução é a componente longitudinal do campo elétrico ou magnético, já que tal componente encontra-se desacoplada das outras componentes na equação de ondas vetorial e através das equações de Maxwell pode-se obter todas as componentes através das componentes longitudinais:

Modos TE:

$$E_z = 0 ; H_z = \Psi(\rho, \varphi, \zeta)$$

$$\mathbf{E}_t = \frac{-i\omega\mu}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2} \mathbf{e}_z \times \nabla_t H_z \quad (6.1)$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{ik_z}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2} \nabla_t H_z \quad (6.2)$$

Modos TM:

$$E_z = \Psi(\rho, \varphi, \zeta) ; H_z = 0$$

$$\mathbf{E}_t = \frac{ik_z}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2} \nabla_t E_z \quad (6.3)$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{i\omega\varepsilon}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2} \mathbf{e}_z \times \nabla_t E_z \quad (6.4)$$

Uma forma de encontrar soluções físicas para as equações de Maxwell também seria utilizando-se a teoria dos potenciais, e de forma simplificada para o Bessel beam de ordem zero é tratada em [37]. O quadrivetor potencial, utilizando-se a notação tensorial usual é dado por:

$$\mathbf{A} = A_\mu e^\mu = (\phi, -\vec{A})$$

e obedece à equação de ondas:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A_\mu = -j_\mu \quad (6.5)$$

onde:

$$\mathbf{J} = j_\mu e^\mu = (\rho, -\vec{J})$$

Novamente a solução (2.17) pode ser escolhida para ser qualquer das componentes do quadrivetor A_μ , e cumprindo a condição de propagação de Lorentz são os campos dados então por:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \end{aligned}$$

As possíveis soluções devem cumprir as condições exigidas pelas equações de Maxwell e as condições fisicamente possíveis.

Uma terceira forma de solucionar o problema físico, tendo em conta a solução ideal (2.17) é através dos potenciais de Hertz [33] pág. 280-282. Ver também [1]. A obtenção dos campos gerados pelos pulsos é trivial, podendo-se fazer a superposição em frequência dos campos obtidos para os feixes, ou então diretamente dos pulsos obtidos pela equação (5.1). No caso dos feixes de Bessel a equação (5.5) pode ser utilizada diretamente.

A dinâmica de uma partícula sujeita aos campos gerados pelo feixe obedece à equação de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

e está sendo analisada atualmente, para conclusões a respeito do comportamento da partícula carregada em tal feixe, e qual a possível aplicação. Uma possível aplicação seria a obtenção de um condutor luminoso de resistência central nula, porém, isto é especulativo.

6.3 Guias de ondas e cavidades elípticas

Os guias de ondas constituem um elemento importante na geração e na transmissão da energia eletromagnética. Para frequências na faixa das microondas são utilizados guias de ondas metálicos, e no domínio óptico as fibras ópticas, que são guias de ondas constituídos por meios dielétricos [33]. As cavidades ressonantes são bastante utilizadas em filtros e osciladores e são nada mais do que um guia de onda fechado em seus dois extremos. Um estudo de guias de ondas e cavidades elípticas foi realizado porém não faz parte desta dissertação em virtude de a teoria dos guias de ondas já estar bem estabelecida e uma análise de fibras ópticas elípticas é feita em [44, 45, 46, 47]. A solução é bastante complexa devido à própria complexidade das funções de Mathieu e dificuldade para cumprir analiticamente as condições de contorno requeridas pelas equações de Maxwell no caso das fibras ópticas, onde o campo não se anula na interface entre os dois meios dielétricos, o da casca e o do núcleo. Guias elípticos podem ser utilizados na rotação de polarização dos campos, devido ao acoplamento dos componentes de campo inerente à simetria elíptica. Mesmo quando não se deseja utilizar uma fibra óptica de simetria elíptica, o estudo de imperfeições pode ser efetuado considerando que a fibra é aproximadamente elíptica. As equações de Maxwell em coordenadas cilíndricas elípticas, na ausência de fontes, e para os modos TE e TM são mostradas abaixo:

Modos TE:

$$\begin{aligned}
 E_z &= 0 ; H_z = \Psi(u, v, k_z, \omega) \\
 E_u &= \frac{i\omega\mu}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2} \frac{1}{h\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} \frac{\partial \Psi}{\partial v} \\
 E_v &= \frac{-i\omega\mu}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2} \frac{1}{h\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} \frac{\partial \Psi}{\partial u} \\
 H_u &= \frac{ik_z}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2} \frac{1}{h\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} \frac{\partial \Psi}{\partial u} \\
 H_v &= \frac{i k_z}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{1}{h\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} \frac{\partial \Psi}{\partial v}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Modos TM:

$$E_z = \Psi(u, v, k_z, \omega) ; H_z = 0$$

$$\begin{aligned}
E_u &= \frac{ik_z}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{1}{h \sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} \frac{\partial \Psi}{\partial u} \\
E_v &= \frac{ik_z}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{1}{h \sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} \frac{\partial \Psi}{\partial v} \\
H_u &= \frac{-i\omega \varepsilon}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{1}{h \sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} \frac{\partial \Psi}{\partial v} \\
H_v &= \frac{i \omega \varepsilon}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{1}{h \sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} \frac{\partial \Psi}{\partial u}
\end{aligned} \tag{6.7}$$

De tais equações nota-se que a dependência dos campos sempre se dá em u e v simultaneamente havendo portanto acoplamento das equações dos campos transversos. Propõe-se um estudo da eficiência de dispositivos de rotação de polarização utilizando simetria elíptica.

6.4 Estudo dos sistemas de geração de feixes e pulsos

Os sistemas de geração de feixes não-difrativos e de pulsos localizados requerem um estudo à parte. Atualmente tais sistemas são constituídos essencialmente pelo aparato de Durnin com pequenas variações. Na corrente literatura, muitos sistemas utilizando-se axicons e interferômetros de Fabri-Perot são mostrados, sendo estes mais eficientes do que o aparato mais simples proposto por Durnin. Sistemas mais eficientes poderiam ser criados através de métodos holográficos. Não há na corrente literatura muitos trabalhos a respeito da geração eficiente dos feixes e pulsos.

A geração de feixes e pulsos localizados em microondas requer antenas capazes de reproduzir o aparato de Durnin naquelas frequências. Tais antenas seriam muito diretivas e as distâncias de invariância seriam muito grandes, já que o que diferencia um feixe em óptica e um feixe em microondas, quando tratado no vácuo, é apenas um fator de escala. Feixes em microondas e feixes ópticos diferenciam-se por um fator de escala da ordem de 10^5 . Portanto para um feixe óptico que mantém-se invariante no percurso de $1m$ deve haver um feixe de microondas que mantém-se invariante por distâncias de $10km$.

Uma análise completamente baseada em teoria de antenas se utilizaria da teoria da difração vetorial e através de um sistema de transmissão utilizando feixes ópticos não-difrativos poderíamos conseguir a transmissão de sinais a potências mais baixas

e havendo menor espalhamento da energia por difração, a potência recebida seria bastante maior, então o requerimento de eficiência do sistema receptor torna-se menor também. Tais questões, tratadas no âmbito das microondas geraria uma outra dissertação a respeito de sistemas de geração e transmissão de feixes e pulsos ópticos localizados.

Referências Bibliográficas

- [1] Erasmo Recami, “On localized x-shaped superluminal solutions to maxwell equations”, *Physica A*, , no. 252, pp. 586–610, April 1998.
- [2] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, 2 vols*, Wiley, New York, 1962.
- [3] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.
- [4] J. Durnin, J. J. Miceli Jr. and J. H. Eberly, “Diffraction-free beams”, *Physical Review Letters*, vol. 58, no. 15, pp. 1499–1501, April 1987.
- [5] J. Durnin, “Exact solutions for nondiffracting beams 1. the scalar theory”, *J. Opt. Soc. Am. A*, , no. 4, pp. 651–654, 1987.
- [6] Jian yu Lu and J. F. Greenleaf, ”, *IEEE Trans. Ultrasonics Ferroelectrics Frequency Control*, , no. 39, pp. 19–31, 1992.
- [7] M. Zamboni-Rached, “Ondas localizadas: Estruturas e aplicações”, Master’s thesis, Instituto de Física Gleb Wataghin, UNICAMP, 1999.
- [8] M. Erdélyi, Z. L. Horváth, G. Szabó, Zs Bor, F. K. Tittel , J. R. Carvalho and M.C. Smayling, “Generation of diffraction-free beams for applications in optical microlithography”, *J. Vac. Sci. Technol. B*, vol. 15, no. 2, pp. 287–292, Mar/Apr 1997.
- [9] Julio César Gutiérrez Vega, Marcelo David Iturbe-Castillo, Eduardo Tepichin, Gustavo Ramírez, Ramon Martin Rodríguez-Dagnino and Savino Chávez-Cerda, “New member in the family of propagation-invariant optical fields: mathieu beams”, *Optics and Photonics News*, pp. 37–38, December 2000.

- [10] Hyuntae Kim, Hyoung-Joo Kim, Kisik Kim and Dae-Yoon Park, “Partially coherent nondiffracting beams”, *Journal of the Korean Physical Society*, vol. 37, no. 5, pp. 713–719, November 2000.
- [11] J. C. Gutiérrez-Vega, M. D. Iturbe-Castillo, G. A. Ramírez, E. Tepichín, R. M. Rodríguez-Dagnino, S. Chávez-Cerda and G. H. C. New., “Experimental demonstration of optical mathieu beams”, *Optics Communications*, , no. 195, pp. 35–40, 2001.
- [12] J. C. Gutiérrez-Vega, M. D. Iturbe-Castillo and S. Chávez-Cerda, “Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams”, *Opt. Lett.*, , no. 25, pp. 1493–1495, 2000.
- [13] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course in Modern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, fourth ed. edition, 1950.
- [14] S. Chávez-Cerda, M. A. Meneses-Nava and J. M. Hickmann, “Interference of traveling nondiffracting beams”, *Optics letters*, vol. 23, no. 24, pp. 1871–1873, 1998.
- [15] J. Arlt and K. Dholakia, “Generation of high-order bessel beams by use of an axicon”, *Optics Communications*, , no. 177, pp. 297–301, 2000.
- [16] Heinz A. Willebrand and Baksheesh S. Ghuman, “Fiber optics without fiber”, *IEEE Spectrum*, pp. 41–45, August 2001.
- [17] S. Chávez-Cerda, G.S. McDonald and G.H. New, “Nondiffracting beams: travelling, standing, rotating and spiral waves”, *Optics Communications*, , no. 123, pp. 225–233, 1996.
- [18] Ville Kettunen and Jari Turunen, “Propagation-invariant spot arrays”, *Optics Letters*, vol. 23, no. 16, pp. 1247–1249, 1998.
- [19] A. S. Ostrovsky, G. M. Nikonoff and J. C. Ramírez-San-Juan, “Coherent-mode representation of propagation-invariant fields”, *Optics Communications*, , no. 195, pp. 27–34, 2001.
- [20] Rafael Piestun and Joseph Shamir, “Generalized propagation-invariant wave fields”, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 15, no. 12, pp. 3039–3043, 1998.

- [21] Marcko Honkanen and Jari Turunen, “Tandem systems for efficient generation of uniform axial intensity bessel fields”, *Optics Communications*, , no. 154, pp. 368–375, May 1998.
- [22] Jani Tervo and Jari Turunen, “Generation of vectorial propagation-invariant fields by polarization-grating axicons”, *Optics Communications*, , no. 192, pp. 13–18, 2001.
- [23] Z. Bouchal and J. Wagner, “Self-reconstruction effect in free propagation of wavefield”, *Optics Communications*, , no. 176, pp. 299–307, 2000.
- [24] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York and London, 1965.
- [25] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1965.
- [26] Murray R. Spiegel, *Manual de Fórmulas, Métodos e Tabelas de Matemática*, Schaum Collection. McGraw-Hill.
- [27] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics, 2 Pts*, McGraw-Hill.
- [28] Thilo Sauter and Fritz Paschke, “Can bessel beams carry superluminal signals?”, *Physics Letters A*, , no. 285, pp. 1–6, 2001.
- [29] G. Gouesbet, L. Mees and G. Gréhan, “Partial-wave description of shaped beams in elliptical-cylinder coordinates”, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 15, no. 12, pp. 3028–3038, 1998.
- [30] G. Gouesbet, L. Mees, G. Gréhan and K. F. Ren, “Description of arbitrary shaped beams in elliptical cylinder coordinates by using a plane wave spectrum approach”, *Optics Communications*, , no. 161, pp. 63–78, 1999.
- [31] N. W. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions*, Oxford At The Clarendon Press, 1947.
- [32] D. Mugnai, A. Ranfagni and R. Ruggeri, “Observation of superluminal behaviors in wave propagation”, *Physical Review Letters*, vol. 84, no. 21, pp. 4830–4833, May 2000.

- [33] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, 1998.
- [34] Joseph W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, 2nd ed edition.
- [35] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, New York, 6th ed edition, 1989.
- [36] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2nd ed. edition, 1958.
- [37] Kirk T. McDonald, “Bessel beams”, <http://arxiv.org/abs/physics/0006046>, June 2000, Joseph Henry Laboratories, Princeton University, Princeton.
- [38] É. Mathieu, “Mémoire sur le mouvement vibratoire d’une membrane de forme elliptique”, *J. Math. Pure Appl.*, , no. 13, pp. 137–203, 1868.
- [39] R. Sips, “Représentation asymptotique des fonctions de mathieu et des fonctions d’onde sphéroïdales”, *Am. Math. Soc.*, , no. 66, pp. 93–134, 1949.
- [40] D. Frenkel and R. Portugal, “Algebraic methods to compute mathieu functions”, *J. Phys A: Math. Gen.*, , no. 34, pp. 3541–3551, 2001.
- [41] M. Zamboni-Rached, E. Recami and F. Fontana, “Localized superluminal solutions to maxwell equations propagating along a normal size waveguide”, *Physical Review E*, vol. 64, pp. 1–6, December 2001.
- [42] M. Zamboni Rached and H. E. Hernández-Figueroa, “A rigorous analysis of localized wave propagation in optical fibers”, *Optics Communications*, vol. 191, pp. 49–54, May 2001.
- [43] R. W. Ziolkowski , I. M. Besieris and A. M. Shaarawi, “Aperture realizations of exact-solutions to homogeneous-wave equations”, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 10, no. 1, pp. 75–87, Jan 1993.
- [44] Sembian R. Rengarajan, “On higher order mode cutoff frequencies in elliptical step index fibers”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 37, no. 8, pp. 1244–1248, August 1989.

- [45] Z. E. Harutjunian and A. B. Grudinin, “Eigenstates of polarization of elliptical single-mode fibers”, *Journal of Lightwave Technology*, vol. 11, no. 12, pp. 1946–1955, December 1993.
- [46] Ye heng Wang and Xiang Zhang, “Elliptical fourier series expansion method together with cutoff frequencies in elliptical optical waveguides”, *Journal of Lightwave Technology*, vol. 16, no. 10, pp. 1933–1941, 1998.
- [47] A. Mabrouki, M. Gadonna, A. Gouronnec, R. Goarin and R. Le Naour, “Analysis of polarization mode dispersion of single-mode elliptic-core optical fibers”, *Optics Communication*, , no. 149, pp. 255–260, April 1998.