

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Engenharia de Sistemas

Otimização do Planejamento da Rede Secundária de Distribuição de Energia Elétrica

Alysson Machado Costa
Orientador: Paulo Morelato França

Banca Examinadora:

Flávio Neves Júnior - CEFET - PR
Marcos Carneiro da Silva - Teledesign - SP
Christiano Lyra Filho - FEEC/UNICAMP
Paulo Morelato França - FEEC/UNICAMP (Orientador)

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica

Campinas, Julho de 2002
SP – Brasil

página da ficha catalográfica

Resumo

O presente trabalho lida com o problema de planejamento da rede de distribuição secundária de energia elétrica, estando dividido em três partes: Definição do Problema, Abordagens de Resolução e Resultados e Conclusões.

A rede secundária de distribuição tem uma grande importância econômica em países como o Brasil. Por um lado, há os custos fixos de instalação de condutores e transformadores e, por outro, os custos de operação da rede, sobretudo os custos de perda devido às baixas tensões. O montante elevado destes custos, unidos à escassez de bibliografia no assunto, justificam o desenvolvimento desta pesquisa. O estudo de tais aspectos, a definição precisa do problema e o desenvolvimento de formulações matemáticas podem ser encontrados na primeira parte deste trabalho.

Na segunda parte deste trabalho, apresentam-se as abordagens de resolução. Quatro abordagens foram desenvolvidas: abordagem exata, heurística, híbrida e meta-heurística. A abordagem exata resolve de forma ótima (mas com alto custo computacional) as formulações matemáticas apresentadas anteriormente. A abordagem heurística estende desenvolvimentos da literatura e baseia-se na divisão do problema em subproblemas, obtendo resultados sub-ótimos com pouco esforço computacional. A abordagem híbrida é um compromisso entre as duas abordagens anteriores e a abordagem meta-heurística é uma estratégia alternativa, baseada em algoritmos evolutivos, muito em voga na literatura para problemas similares.

As abordagens citadas são testadas a partir de três grupos de instâncias: dois grupos de teste, compostos por instâncias de porte pequeno-médio, para os quais o método exato consegue obter a solução ótima, e um grupo de instâncias reais. Os resultados, apresentados na terceira parte deste trabalho, mostram a eficácia dos métodos propostos, em especial o bom compromisso obtido pela abordagem híbrida.

Abstract

This work deals with the power systems secondary network planning problem. It is divided in three parts: Problem Definition, Resolution Techniques and Results / Conclusions.

The secondary distribution network has a great economical importance in countries like Brazil. Besides the costs related to the equipment installation, there are the costs associated with the network operation, mainly the cost of losses, which are increased due to the low voltage levels. The great value of these costs and the lack of research devoted to the subject justify this work. The detailed problem definition and two associated mathematical formulations are presented in the first part of this work.

In the second part we develop the resolution techniques. Four approaches have been developed: exact approach, heuristic approach, hybrid approach and a meta-heuristic. The exact approach solves the problem to optimality, but with a high computational cost, using the former presented mathematical models. The heuristic methodology extends a planning strategy found in the literature, and is based on the problem division into subproblems. This method yields sub-optimal results with low computational effort. The hybrid approach is an intermediate alternative between the heuristic and the exact approaches. Finally, the meta-heuristic is an alternative strategy, based on evolutionary computation, widely used in similar problems nowadays.

The four cited approaches are tested with three instance groups: two test groups, formed by small/medium sized instances, for which the exact approach has been able to find the optimal solution, and a group of instances composed by real networks. The results, presented in the third part of this work, have shown the good performance of the proposed methods, particularly the hybrid one.

Este trabalho teve o suporte financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - (FAPESP) e da Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior - (CAPES)

Agradecimentos

“Sofia apertou-lhe a mão com força e sussurrou um agradecimento.”

Machado de Assis – em Quincas Borba

Em vez de sussurrar, como a personagem de Machado, gostaria de gritar aos quatro ventos meus agradecimentos a todos aqueles que por tantas vezes tornaram este trabalho ainda mais agradável. Meu muito obrigado a todos:

À Companhia Paulista de Força e Luz, pelas diversas reuniões técnicas que tanto contribuíram para fazer o trabalho caminhar na direção correta.

A todos do Densis, pelo que aprendi com vocês e pelo que aprendemos juntos.

Ao Marcos Carneiro, pelas importantes discussões iniciais e pelas instâncias reais de teste.

Ao Celso Cavellucci e ao José Ermínio, por acrescentarem a este trabalho, sempre com tanta amabilidade, seus tantos anos de experiência como engenheiros.

Ao professor Christiano Lyra, fundamental neste trabalho, pelas horas de conversa agradabilíssima sobre os temas mais técnicos e também sobre os mais lúdicos.

Ao Paulo França, por uma orientação alegre e inteligente, que teve início no dia em que ainda não nos conhecíamos e bati à sua porta. Em uma palavra: irretocável.

E a todos aqueles que também foram fundamentais e muitas vezes nem se aperceberam:

A todos os amigos com os quais fui presenteado nestes já tantos anos de Campinas.

Ao amigo Luiz Carlos, um quase irmão.

À Maria Santana e Maria Elena, duas quase mães.

À minha família. Em especial, Graça e Antonio, por toda confiança e apoio desde sempre.

À Raquel, pelas razões da razão e por aquelas que a razão desconhece.

Siglas

AH (Car) - Algoritmo Híbrido, partindo do resultado de Car .

AH (Lag) - Algoritmo Híbrido, partindo do resultado de Lag .

AHE (Car) - Algoritmo Híbrido Estendido, partindo do resultado de Car.

AHE (Lag) - Algoritmo Híbrido Estendido, partindo do resultado de Lag.

AHE (AG) - Algoritmo Híbrido Estendido, partindo do resultado do AG.

AG - Algoritmo Genético .

Car - Heurística de Carneiro *et al.*.

FBA - Formulação Monoproduto Baseada em Arcos.

FBN - Formulação Monoproduto Baseada em Nós.

Lag - Heurística Estendida Baseada em Relaxação Lagrangiana.

PPRSD - Problema de Planejamento da Rede Secundária de Distribuição de Energia Elétrica.

PPIM - Problema de Programação Inteira-Mista.

Sumário

Resumo	iii
Abstract	iii
Agradecimentos	v
Siglas	vi
I Definição do Problema	1
1 O Problema de Planeamento do Sistema de Distribuição	3
1.1 Introdução	3
1.2 O Sistema de Distribuição e a Necessidade de Expansão	4
1.3 Subdivisão Clássica - Sistema Primário / Sistema Secundário	4
1.4 Particularidades do Sistema Secundário	5
1.5 Tratamentos dados pela Literatura e Formas de Abordagem do Problema	7
1.6 O PPRSD Deste Trabalho	8
2 Estudo da Bibliografia	13
2.1 Introdução	13
2.2 Análise de Publicações para a Rede Secundária	13
2.3 Análise de Publicações para Problemas Similares	15
2.3.1 Problema de Planeamento da Rede Primária	15
2.3.2 Artigos em Planeamento de Redes de Telecomunicações	18
2.3.3 Problemas de Companhias Aéreas	20
3 Formulações Matemáticas	23
3.1 Introdução	23
3.2 Formulações da Literatura	24

3.2.1	Formulação Simplificada do PPRSD	24
3.2.2	Formulação para Problemas Gerais de Planejamento de Redes Multiníveis	26
3.3	Construindo as Formulações	26
3.3.1	Função de Custo	26
3.3.2	Restrições	29
3.4	Formulações Desenvolvidas	29
3.4.1	Formulação Baseada em Nós	31
3.4.2	Formulação Baseada em Arcos	33
II	Abordagens de Resolução	35
4	Abordagem Exata	37
4.1	Introdução	37
4.2	Abordagem Exata para Resolução de um Problema de Programação Inteiro-Misto	38
4.2.1	Enumeração Explícita	38
4.2.2	Enumeração Implícita	39
4.3	Pacotes Computacionais	41
4.4	Usando o CPLEX no PPRSD	42
4.4.1	Algoritmo de Resolução do Subproblema Linear	42
4.4.2	Ordem de Ramificação	43
4.4.3	Solução Inicial	44
5	Abordagens Heurísticas	47
5.1	Introdução	47
5.2	A Heurística de Carneiro <i>et al.</i>	48
5.2.1	Metodologia de Solução	48
5.2.2	Técnicas de Solução	49
5.2.3	Algoritmo de Resolução	50
5.3	Heurística Proposta	52
5.3.1	Relaxação Lagrangiana	52
5.3.2	Busca Local	58

6	Abordagem Híbrida	61
6.1	Introdução	61
6.2	Características Desejadas	61
6.2.1	Abordagem Exata	62
6.2.2	Abordagens Heurísticas	62
6.3	Algoritmo Híbrido	62
6.4	Algoritmo Híbrido Estendido	65
7	Abordagem Alternativa: Otimização via Computação Evolutiva	71
7.1	Introdução	71
7.2	Algoritmos Genéticos	71
7.3	Exemplo de Funcionamento	75
7.4	Mecanismos de Funcionamento	77
7.5	Algoritmo Implementado	79
7.5.1	Codificação do Problema	79
7.5.2	Geração da População Inicial	81
7.5.3	Operador de Crossover	82
7.5.4	Operador de Mutação	82
7.5.5	Avaliação da Função de <i>Fitness</i>	82
III	Resultados e Conclusões	85
8	Instâncias de Teste	87
8.1	Introdução	87
8.2	Redes de Teste	87
8.2.1	Grupo 1: Instâncias Aleatórias	88
8.2.2	Grupo 2: Instâncias Regulares	88
8.2.3	Grupo 3: Instâncias Reais	89
8.3	Custos Utilizados	90
9	Resultados	93
9.1	Introdução	93
9.2	Comparações dos Modelos Matemáticos	93
9.3	Comparações das Abordagens de Resolução	94

10 Conclusões e Trabalhos Futuros	103
IV Apêndices	107
A Um Problema Similar (e mais complicado) de Planejamento de Redes	109
A.1 Formulação Monoproduto Baseada em Nós	111
A.2 Formulação Monoproduto Baseada em Arcos	113
A.3 Formulação Multiproduto Baseada em Nós	115
A.4 Formulação Multiproduto Baseada em Arcos	117
A.5 Comparações entre as formulações	118
B Uma Formulação <i>Fuzzy</i> para o PPRSD	121
B.1 A Formulação Original e a <i>Fuzzyficação</i>	121

Parte I

Definição do Problema

Capítulo 1

O Problema de Planejamento do Sistema de Distribuição

“Uma boa definição de um problema já é meio caminho andado para a sua solução.”

Albert Einstein

1.1 Introdução

A perfeita definição e compreensão de um problema é, sem dúvida, passo essencial para sua resolução. Neste capítulo, define-se o Problema de Planejamento da Rede Secundária de Distribuição de Energia Elétrica (PPRSD), que será estudado ao longo de todo este trabalho.

Este capítulo evidencia algumas das motivações desta pesquisa, em especial, a importância econômica e dificuldade de resolução do PPRSD. O capítulo está estruturado da seguinte forma: na Seção 1.2 caracteriza-se a importância da rede de distribuição e a necessidade de um bom planejamento. Na sequência (Seção 1.3), seguindo a abordagem clássica, divide-se o problema em problema da rede primária e secundária, apresentando-se logo em seguida as particularidades do PPRSD (Seção 1.4). Estuda-se então a forma como este problema vem sendo abordado na literatura técnica (Seção 1.5).

Finalmente, na Seção 1.6, as características e a forma de abordagem do PPRSD tratado neste trabalho são apresentadas. Esta última seção foi criada com o intuito de servir de referência rápida para o leitor ao longo da leitura dos outros capítulos. Sempre que for preciso esclarecer ou relembrar as características do problema estudado, recomenda-se ao leitor que volte a esta seção.

1.2 O Sistema de Distribuição e a Necessidade de Expansão

O sistema de distribuição de energia elétrica é a parte do sistema de potência que vai das subestações rebaixadoras até os transformadores (sistema de distribuição primário) e destes até a entrada elétrica dos consumidores (sistema de distribuição secundário). Devido às baixas tensões, é no sistema de distribuição onde ocorre a maior parcela das perdas. No Brasil, os valores mais frequentes para as perdas técnicas nas redes de distribuição estão entre 7 e 15% [15]. Esses números indicam a existência de espaços promissores para ganhos de energia por redução de perdas.

A expansão do sistema de distribuição faz-se necessária sempre que a demanda de uma região apresenta crescimento significativo, se aproximando dos limites de operação dos equipamentos, ou quando se deseja atender uma nova área. A expansão pode envolver a construção e/ou ampliação de subestações, instalação de postes, instalação e/ou recondutoramento de trechos de alimentadores, entre outras operações—todas elas com altos custos de investimentos associados.

Além destes custos de investimento, é necessário considerar o custo de operação da rede. Wolff [77] argumenta que as perdas na distribuição chegam a representar mais da metade das perdas existentes em um sistema elétrico, devido principalmente à baixa tensão utilizada nestes sistemas.

Os altos custos de investimento e de operação, somados ao fato que o sistema de distribuição é o que se conecta diretamente com os consumidores, conferem uma importância destacada ao planejamento da expansão deste sistema. Ações derivadas do processo de planejamento podem acarretar ganhos substanciais nos custos de expansão e operação.

Além dos ganhos financeiros diretos, um planejamento adequado da rede de distribuição pode permitir a consideração de questões adicionais como qualidade de energia elétrica, confiabilidade da rede, limitações nos orçamentos, possibilidade de expansão, etc [75].

1.3 Subdivisão Clássica - Sistema Primário / Sistema Secundário

O nível de tensão de operação é normalmente usado para subdividir o problema do planejamento da distribuição. Em um primeiro plano temos o problema das redes de distribuição primárias (tensão típica de 13,8kV); no segundo plano temos o problema de planejamento das redes de distribuição secundárias (tensão 220V). A Figura 1.1 ilustra, esquematicamente, os dois níveis.

As publicações encontradas na literatura abordando o tema da “expansão do sistema de distribuição” quase sempre ignoram a rede secundária, tratando apenas de encontrar as configurações ótimas ou sub-ótimas para as subestações e para o roteamento dos alimentadores primários.

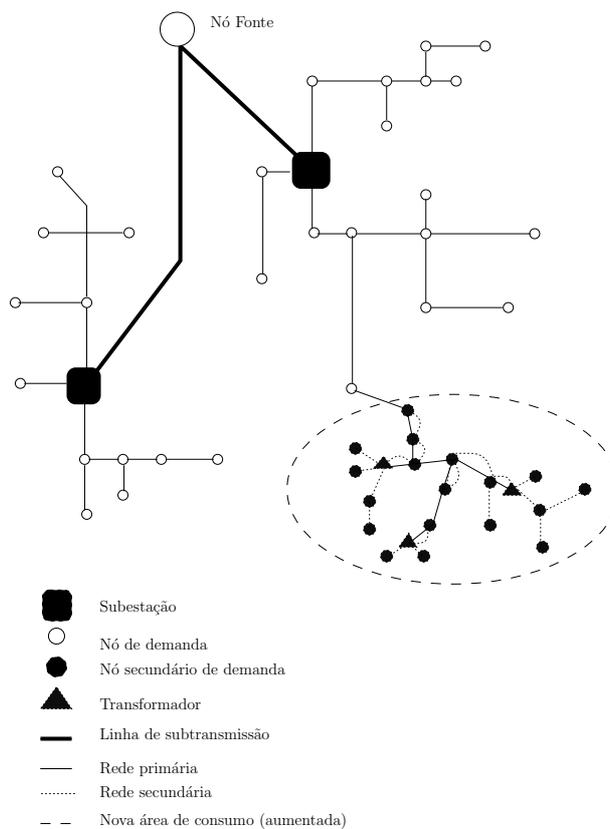


Figura 1.1: Representação de um Sistema de Distribuição

Entretanto, em países como o Brasil, cujo sistema secundário constitui uma parte significativa do sistema de distribuição, pode ser extremamente benéfica a utilização de métodos de otimização avançados para o planejamento do sistema secundário.

Além do problema da expansão do sistema primário, tem-se então o problema de se encontrar, para cada nó de demanda (área interna da elipse tracejada na Figura 1.1), o número e a localização ótima dos transformadores, além do roteamento dos alimentadores para conectá-los às subestações (rede primária) e aos pontos de carga (rede secundária).

1.4 Particularidades do Sistema Secundário

Deve-se ressaltar que o problema do planejamento da rede secundária possui semelhanças ao da rede primária. Se na rede primária tem-se o problema de localização das subestações, na secundária tem-se o problema da localização dos transformadores. Na rede primária necessita-se conectar as subestações à rede de subtransmissão e aos centros de carga, enquanto na rede secundária necessita-se conectar os

transformadores às linhas primárias e aos consumidores. A Figura 1.2 explicita estas analogias.

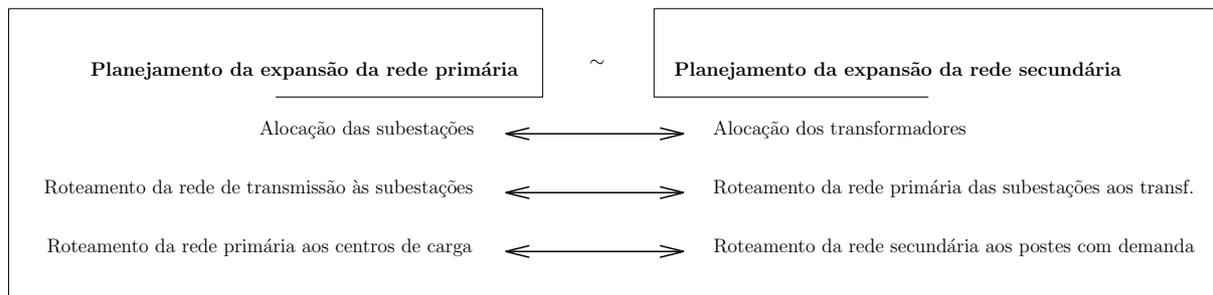


Figura 1.2: Analogias entre as etapas de planejamento da rede primária e secundária

Esta semelhança poderia levar à conclusão (precipitada) de que é suficiente aplicar as técnicas de planejamento da rede primária à rede secundária, para se obter um bom planejamento desta. Entretanto, a rede secundária possui uma série de características particulares, que fazem necessário o desenvolvimento de metodologias específicas.

Uma destas particularidades é a que diz respeito à dimensão do problema. Para a rede primária, um grande número de restrições limita a quantidade de possíveis locais para a instalação das subestações (e.g.: restrições estéticas, ambientais, disponibilidade de terrenos e restrições de custo). Já na rede secundária, praticamente todo poste é candidato a receber um transformador. O número de possibilidades de solução cresce ainda mais ao se considerar as diferentes capacidades nominais para os transformadores. Tal número cresce exponencialmente com o tamanho do problema.

Além disso, o problema da primária está geralmente associado à expansão da rede por causa do esgotamento da capacidade atual. Neste caso, a rede existente tem um peso fundamental e confere uma inércia ao problema matemático que facilita a análise das alternativas de expansão. Apesar de no caso da rede secundária o problema de expansão também estar presente, muitas vezes é necessário planejar redes novas, em bairros ou loteamentos ainda inexistentes. É quando o número de possíveis alternativas apresenta a maior taxa de crescimento, dificultando a escolha de uma solução otimizada.

Um outro aspecto fundamental da rede secundária é que ela conecta o sistema ao consumidor final, tornando mais críticas questões como queda de tensão e confiabilidade. Essas questões precisam ser tratadas durante o planejamento, já que as redes secundárias, em geral, permanecem rígidas, sem a realização de reconfigurações. A Figura 1.3 mostra esquematicamente as principais diferenças entre as redes primária e secundária.

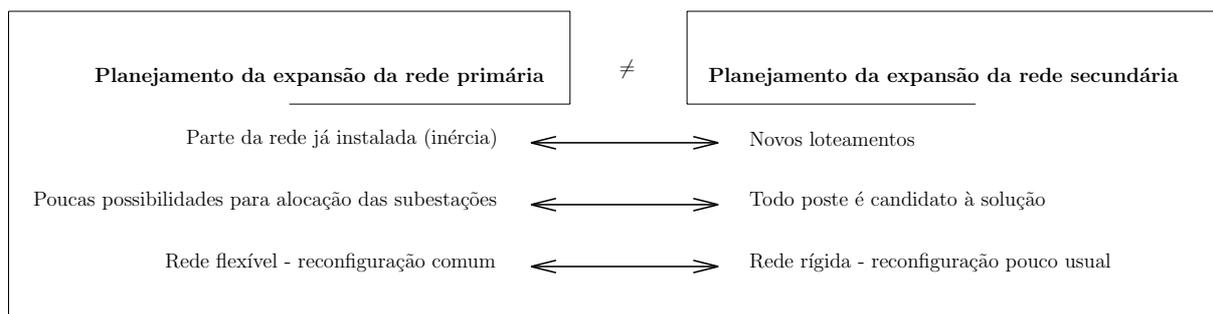


Figura 1.3: Diferenças importantes entre as redes primárias e secundárias

1.5 Tratamentos dados pela Literatura e Formas de Abordagem do Problema

Como citado anteriormente, a literatura técnica internacional relacionada a problemas de expansão de redes de distribuição de energia elétrica é quase que integralmente dedicada ao problema da expansão da rede primária [34, 75], muito embora o PPRSD seja tão importante quanto este.¹ Em grandes linhas, procura-se desenvolver alternativas que levem a boas indicações para a quantidade e localização das subestações rebaixadoras, e para interligação entre esses centros de carga e as linhas de transmissão.

Uma divisão possível dos tipos de planejamento do sistema de distribuição é aquela que se efetua segundo a urgência com que as medidas devem ser tomadas ou de acordo com o horizonte necessário para implantar as ações planejadas. A curto e médio prazo tem-se, entre outras, correções nos níveis de tensão, tratamento de sobrecargas, reconfiguração da rede radial e alocação de capacitores. A longo prazo, existe o problema da expansão da rede que engloba a previsão da demanda futura, a construção e/ou expansão de subestações, a alocação e dimensionamento de equipamentos transformadores e o traçado dos alimentadores.

Os investimentos de longo prazo nem sempre são efetuados de uma única vez. Basicamente existem dois motivos para o estagiamento dos investimentos:

1. os recursos são limitados (restrições de orçamento);
2. a demanda geralmente é progressiva, crescendo ao longo dos anos—não exigindo a estrutura final já nos primeiros anos do projeto.

¹Vale ressaltar dois pontos que realçam a importância do PPRSD em relação ao planejamento da rede primária: 1) as perdas nas redes secundárias são agravadas por tensões substancialmente mais baixas que nas redes primárias e 2) as redes secundárias permanecem “rígidas” após a implantação, enquanto as redes primárias, em geral, recebem modificações nas suas configurações de operação para melhor atender determinados perfis de carga

Para lidar com esse problema, existem as metodologias *dinâmicas* de expansão, que designam ações para o atendimento da demanda crescente e estagiada ao longo do período de planejamento. Ao contrário, as metodologias *estáticas* consideram apenas a demanda para um ano horizonte final.

Metodologias intermediárias são as assim chamadas *pseudo-dinâmicas*. Em uma primeira fase, projeta-se uma rede para atender a demanda do ano horizonte. O planejamento é então detalhado para cada estágio, considerando apenas os equipamentos escolhidos na primeira fase. Esta estratégia, proposta por Sun *et al.* [27], é largamente utilizada no planejamento de longo prazo. A proposta deste trabalho é estática, podendo ser facilmente estendida em uma metodologia pseudo-dinâmica.

1.6 O PPRSD Deste Trabalho

Nas seções anteriores, foi apresentada uma visão geral do problema de planejamento em sistemas de distribuição. Como em toda pesquisa, nem todas as variações do problema podem ser analisadas e uma série de escolhas, limitando o espaço de estudo, devem ser tomadas. Nesta seção, apresentam-se estas escolhas, definindo-se completamente o problema aqui tratado.

Escolheu-se o problema de novos loteamentos (*greenfield*), por ser essa a situação mais comum no PPRSD. Com o intuito de dar um caráter mais prático ao problema, decidiu-se assumir que dispunha-se das mesmas informações que a concessionária local de energia elétrica – CPFL.

Na fase de planejamento, a CPFL dispõe de dados permitindo a previsão da demanda dos futuros consumidores de um loteamento, de acordo com classe social e o tipo de consumidores (comercial, residencial, etc). Além disso, conhece-se o mapa das futuras ruas do loteamento, incluindo a posição dos postes.

Com estas informações (posição dos postes e demanda média dos consumidores), pode-se estimar a demanda por poste. Além disso, tem-se conhecimento a priori, dos postes através dos quais a rede primária vai ser levada ao loteamento. A Figura 1.4 mostra esquematicamente estas informações, realçadas abaixo:

1. traçado das ruas.
2. posição dos postes.
3. demanda por poste.
4. postes já abastecidos com rede primária.

Este é o conjunto de dados de entrada do problema. A Figura 1.5 exprime estes dados graficamente. Note que as conexões poste-casas da Figura 1.4 já foram convertidas em demanda por poste. Além disso,

pode ser resumido em:

1. postes que devem receber transformadores;
2. capacidade de cada transformador instalado;
3. traçado da rede primária conectando a rede primária já existente aos transformadores;
4. conexão dos postes com demanda aos transformadores.

As Figuras 1.6 e 1.7 exprimem estas informações. Cada transformador, representado na figura como um triângulo, tem sua demanda associada conhecida. O planejador deve escolher um transformador com capacidade nominal suficiente para atender esta demanda⁴. A Figura 1.6 mostra a conexão da rede primária aos transformadores enquanto a Figura 1.7 mostra a conexão destes aos pontos de demanda.

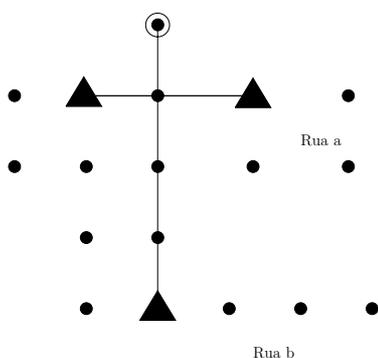


Figura 1.6: Dados de saída para o problema: localização dos transf. e traçado da rede primária

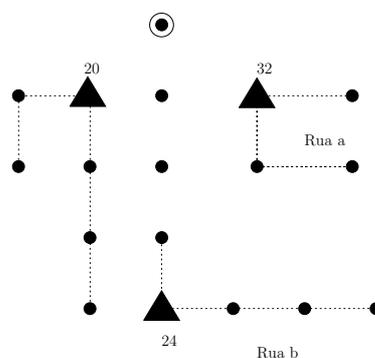


Figura 1.7: Dados de saída para o problema: conexão dos postes com demanda aos transformadores e potência alocada a cada transformador

Uma observação importante é que a Figura 1.7 não representa fisicamente a rede secundária. Na verdade, normalmente, todos os arcos possíveis da rede secundária são construídos. Isso se dá por duas razões:

1. a construção de todos os arcos elimina vãos. A existência de vãos exige a construção de suportes para o poste, encarecendo a rede.
2. a existência física de toda a rede secundária permite a manutenção da rede com desligamento de menos consumidores. Para se efetuar manutenção em um trecho basta reconfigurar as chaves da rede, transferindo os fluxos para outros arcos e interrompendo o fornecimento apenas aos consumidores daquele trecho.

⁴A Tabela 3.1 fornece os dados de capacidades nominais e custos dos transformadores usados na CPFL.

O processo de otimização deve achar a melhor configuração das chaves (pontos onde a rede deve ser aberta para se manter a sua estrutura radial) para operação do sistema.

Capítulo 2

Estudo da Bibliografia

“Copiar de um autor é plágio. Copiar de vários autores é pesquisa.”

Autor Desconhecido

2.1 Introdução

A literatura técnica é muito pobre em artigos específicos para o planejamento da rede secundária. Uma possível explicação para essa escassez de pesquisa verificada é a opção da maioria dos países por redes de distribuição de baixa voltagem de pequena extensão e longas redes primárias.

Neste capítulo, o objetivo é apresentar um estudo bibliográfico. Devido à escassez citada, procurou-se analisar não somente publicações referentes especificamente ao planejamento da rede secundária, mas também publicações em problemas de planejamento com alguma similaridade. O capítulo apresenta a seguinte estrutura: na Seção 2.2, são analisadas algumas das referências encontradas sobre otimização em sistemas de distribuição de baixa voltagem. Na Seção 2.3, são apresentados artigos baseados em problemas que apresentam alguma analogia matemática ou estrutural com o problema da expansão da rede secundária. Em particular, analisam-se artigos relacionados com a rede primária (Seção 2.3.1), artigos enfocando o planejamento de redes de telecomunicações (Seção 2.3.2) e artigos de controle de fluxo de passageiros entre cidades através de cidades concentradoras (Seção 2.3.3).

2.2 Análise de Publicações para a Rede Secundária

Embora pouco estudado, o PPRSD é relativamente antigo: as primeiras referências na área de técnicas de otimização para sistemas de baixa tensão datam já da década de 60.

A primeira referência encontrada sobre o assunto é um artigo de M. Davies, de 1965 [23]. Trata-se

de um estudo analítico sobre o projeto de redes de baixa tensão a partir de um conjunto padrão de alimentadores. Nenhuma referência ao problema da localização de transformadores é feita. A otimização é efetuada simplesmente no projeto de redes secundárias que respeitem as restrições de queda de tensão e fluxo nos cabos, minimizando o custo total de instalação e também o custo de perdas ao longo da vida útil do cabo.

Snelson e Carson [68] estenderam o trabalho de Davies [23] considerando o caso em que já existe uma rede instalada; deseja-se ampliar a capacidade desta ou apenas reconfigurar os cabos para minimização dos custos.

O primeiro artigo a tratar o problema de modo a enfatizar prioritariamente o projeto de rede foi publicado por Backlund e Bubenko [7]. A metodologia apresentada consiste em se obter uma rede inicial através de um algoritmo de construção de “árvore de peso mínimo” [4]. A partir da solução inicial, melhorias são obtidas por troca de arcos da árvore. Esta metodologia tem algumas limitações importantes, principalmente em relação à otimalidade da solução obtida, uma vez que a solução inicial ignora aspectos fundamentais, como o custo das perdas.

Aoki *et al.* [6] propuseram um método heurístico para integrar o planejamento da rede primária e da rede secundária. Seu método se baseia na construção de uma rede inicial e, a partir daí, na troca de arcos da rede por arcos de fora da rede (*branch-exchange method*). Um algoritmo do tipo Simplex [51] orienta a heurística sobre que arcos devem sair e entrar na rede. As instâncias apresentadas, entretanto, limitam os locais candidatos a receberem transformadores aos pontos vizinhos às subestações, o que simplifica excessivamente o problema (diminuindo muito o número de variáveis 0-1 e praticamente eliminando a necessidade de roteamento dos alimentadores primários).

Em 1996, Carneiro *et al.* [14] propuseram uma outra metodologia de planejamento para o PPRSD. Esta metodologia se baseia na decomposição do problema em três subproblemas: pr_1 , a definição da localização dos transformadores; pr_2 , o roteamento dos alimentadores secundários ligando os transformadores aos consumidores; pr_3 , o roteamento dos alimentadores primários, ligando os transformadores à rede primária. Para cada subproblema, um método heurístico clássico foi escolhido. Assim, pr_1 foi resolvido através da solução de um problema de p -medianas, pr_2 através de um problema de caminho mínimo e pr_3 através de um Problema de Steiner. A grande vantagem do método é a sua rapidez—em poucos segundos redes reais são estudadas. A desvantagem recai no fato de não ser possível se garantir a obtenção de soluções ótimas; de fato, os três problemas são tratados de forma independente quando, na realidade, não o são.

A heurística de Carneiro *et al.* serviu como base para o desenvolvimento de uma das abordagens apresentadas neste trabalho e, por isso, é estudada em mais detalhes no Capítulo 5.

Mais recentemente, Souza e Neves Jr. também trabalharam com o problema de planejamento na rede secundária [70]. Em tal trabalho, os autores lidaram com aspectos diferentes do problema, impossibilitando comparações diretas com as metodologias aqui desenvolvidas. Entretanto, o trabalho de Souza e Neves Jr. reforça a importância do problema de planejamento da rede secundária, já discutida anteriormente.

2.3 Análise de Publicações para Problemas Similares

Nesta seção analisam-se trabalhos significativos da literatura técnica abordando problemas similares ao tema deste projeto. A subseção 2.3.1 é dedicada ao problema da expansão de redes primárias, o problema mais próximo ao de expansão de redes secundárias. Nas subseções posteriores serão examinados dois outros problemas análogos: o problema do planejamento de redes de telecomunicações (subseção 2.3.2) e o problema da distribuição de passageiros em companhias aéreas (subseção 2.3.3).

2.3.1 Problema de Planejamento da Rede Primária

A grande maioria dos artigos enfocando os problemas de planejamento da rede de distribuição lida apenas com o planejamento das redes primárias. Como visto na Seção 1.4, embora o PPRSD tenha algumas particularidades em relação ao planejamento da rede primária, muitas características em comum podem ser encontradas. De fato, dos três problemas análogos tratados nesta seção, este é o que mais se assemelha ao PPRSD.

O estudo das referências em planejamento de redes primárias inicia-se com a apresentação de três trabalhos dedicados a revisões de artigos sobre o problema. Em seguida, alguns artigos selecionados são analisados brevemente.

Revisões da Literatura

Algumas revisões sobre o problema de planejamento de redes de distribuição primária podem ser encontradas na literatura; são fontes valiosas de conhecimento na área. Nesta seção, analisam-se algumas das mais importantes: Gonen e Ramirez-Rosado [36], Khator e Leung [46] e Vaziri, Tomsovic e Gonen [75].

Gonen e Ramirez-Rosado [36] analisaram 16 publicações, classificando-as segundo a abordagem utilizada: estática (12 artigos), dinâmica (5 artigos) ou pseudo-dinâmica (1 artigo). Muitos destes primeiros artigos tratavam de maneira independente o problema da alocação das subestações e o roteamento dos alimentadores. Gonen e Ramirez-Rosado separaram estes trabalhos dos que consideravam o problema de

uma forma global (9 dos 16 artigos). Os autores também classificaram os artigos segundo a metodologia de resolução: programação matemática (13 trabalhos), programação dinâmica (2 trabalhos) e métodos heurísticos (1 trabalho).

Khator e Leung [46] analisaram e classificaram cerca de 38 trabalhos, 24 dos quais posteriores à revisão de Gonen e Ramirez-Rosado (1986). A classificação principal foi em *planejamento sob condições de emergência* (15 trabalhos) e *planejamento sob condições normais* (23 trabalhos)—o planejamento sob condições de normalidade é o tema desta tese.

Vaziri, Tomsovic e Gonen [75] publicaram a mais recente revisão sobre o assunto, analisando 42 trabalhos, 6 dos quais posteriores a 1997 (ano da revisão de Khator e Leung). A classificação utilizada foi baseada no método de otimização e na abordagem utilizados por cada trabalho. Encontrou-se uma predominância de métodos baseados em programação matemática (33 trabalhos) sobre métodos heurísticos (9 trabalhos). Quanto ao aspecto de estagiamento do problema, 31 trabalhos utilizaram uma abordagem estática contra 11 trabalhos utilizando uma metodologia multi-período (dinâmica).

As revisões mencionadas anteriormente deram pouca (ou nenhuma) importância a estratégias evolutivas, em particular aos algoritmos genéticos. Entretanto, esses métodos, baseados nos princípios biológicos da evolução das espécies (veja Capítulo 7), vêm despertando grande interesse recentemente. Miranda, Srinivasan e Proença [58] apresentam uma coletânea de 140 artigos baseados em estratégias evolutivas para problemas encontrados em sistemas de potência. Dos artigos apresentados, 17 tratam do problema da transmissão/distribuição de energia, sendo 11 dedicados ao problema do planejamento da distribuição.

Análise de Referências Escolhidas

Primeiras Propostas. Os primeiros esforços no sentido de obter uma metodologia para o auxílio no planejamento das redes de distribuição primárias concentravam-se exclusivamente no problema da localização das novas subestações. Masud, em 1974 e em 1978 [52, 53] foi pioneiro ao estudar essas questões. Seus trabalhos consistem na utilização de um modelo matemático em variáveis inteiras para obter a localização e o dimensionamento ótimo das subestações.

As primeiras tentativas de se representar o custo da rede de alimentadores foram feitas por Holt e Crawford [42] e por Adams *et al.* [2]. Nesses trabalhos, o custo da rede era representado através do momento elétrico (produto “distância×carga”). Os modelos, baseados no problema de transporte da programação linear, continham uma série de deficiências: não conseguiam considerar a rede existente, não contemplavam o custo de perdas, não tratavam a questão dos custos fixos das subestações e não consideravam a capacidade dos alimentadores.

Wall *et al.* [76] desenvolveram um modelo para o planejamento dos alimentadores primários através

de uma representação mais apurada da rede. A área de planejamento era dividida em quadrículas e, em seguida, transformada em um grafo, de forma a fornecer uma aproximação da rede real.

Aprimoramentos. As tentativas de se tratar o problema de forma mais realista conduziram à utilização de modelos mais elaborados de programação inteira-mista, permitindo representar de forma adequada o custo fixo das subestações e dos alimentadores. Entretanto, a utilização destes modelos esbarra no crescimento exponencial do esforço de cálculo com a dimensão do problema. Esta característica deixa pouca esperança para a solução de problemas reais, com porte não trivial.

Uma maneira de contornar dificuldades com a dimensão do problema é a simplificação do modelo—por exemplo, ignorando-se os custos fixos dos alimentadores. O resultado é uma formulação mais leve, com variáveis binárias apenas para as subestações. Exemplos de uso desta metodologia de caráter estático podem ser encontrados em Hindi e Brameller [39], Thompson e Wall [74], Gonen e Foote [35] e Sun *et al.* [27].

Uma outra simplificação possível é a divisão do problema em subproblemas. Primeiramente, trata-se do problema da localização e dimensionamento das subestações para, em seguida, tratar-se do roteamento dos alimentadores. Backlund e Bubenko [7] resolveram o subproblema de roteamento dos alimentadores com uma técnica baseada em roteamento de veículos. Foram obtidas rotas de custo mínimo, começando e terminando nas subestações; para obtenção de uma rede radial, as rotas eram abertas em pontos determinados. Já em Fawzi *et al.* [28], o roteamento é efetuado através de um método heurístico que considera o custo fixo através de ajuste de custo linear, abrindo a rede nos arcos de menor fluxo.

Uma terceira alternativa de simplificação foi proposta por Carneiro *et al.* [13]. Neste trabalho, um método de enumeração implícita é utilizado para considerar simultaneamente o problema do dimensionamento e localização das subestações, associado ainda com o roteamento e recondutoramento dos alimentadores primários. A simplificação reside na diminuição dos locais candidatos a subestações, através de solução de problema de *p*-medianas [4]; em seguida, os autores aplicam uma série de heurísticas para considerar problemas adjacentes, como a queda de tensão e a radialidade das redes.

El-Kadi [25] e Gonen e Ramirez-Rosado [37] foram os primeiros a tentar atacar o problema através de uma abordagem dinâmica, fugindo da abordagem pseudo-dinâmica proposta por Sun *et al.* [27]. A complexidade dos modelos, entretanto, limitou a aplicação dos métodos propostos a sistemas muito pequenos, sem interesse prático.

Questões Atuais. Na década de 90, a questão da confiabilidade das redes passou a ser tratada nos artigos de planejamento da distribuição. A abordagem deste problema passa por uma avaliação das

possibilidades de falhas dos equipamentos, do tempo de reparo e dos custos econômicos causados por uma contingência no sistema. Alguns trabalhos nesta linha são o de Kjolle *et al.* [47], Jonnavithula e Billington [45], Tang [72], Chowdhury e Koval [16] e Ramirez-Rosado e Bernal-Augustín [64].

As mais recentes publicações na área de planejamento da rede de distribuição são baseadas em algoritmos evolutivos [40, 56]. Estes algoritmos são em geral suficientemente eficientes para obter soluções próximas das ótimas, para problemas reais. Além disso, esta categoria de algoritmos é flexível o suficiente para englobar aspectos desejáveis, como consideração de restrições de confiabilidade e representação explícita de custos não lineares. A consideração desses aspectos, que normalmente é realizada sem grandes dificuldades em algoritmos evolutivos, pode não ser trivial para os métodos de programação matemática.

Alguns exemplos de implementações bem sucedidas podem ser encontrados nos trabalhos de Miranda *et al.* [57] e Ramirez-Rosado e Bernal-Augustín [62, 63, 64]. Outras referências são encontradas na coletânea apresentada por Miranda *et al.* [58].

Miranda *et al.* [57] foram uns dos primeiros autores a aplicarem a técnica de otimização por algoritmos genéticos ao problema do planejamento do sistema de distribuição. Eles trataram o problema do planejamento multi-período considerando a questão da confiabilidade do sistema. Os resultados obtidos para uma rede de 50 nós são indicadores da habilidade dos algoritmos em obter boas soluções.

Ramirez-Rosado e Bernal Augustín propõem uma série de artigos usando algoritmos genéticos para este problema [62, 63, 64]. Nos dois primeiros artigos eles consideram o problema do planejamento preocupados apenas com a minimização de custos. No primeiro [62], é utilizada uma codificação binária e resultados promissores são obtidos para redes de tamanho real. Na sequência [63], uma nova codificação é usada e novos operadores são desenvolvidos, obtendo-se resultados ainda melhores. No artigo mais recente [64], a metodologia é estendida para englobar o problema da confiabilidade, além da minimização de custos.

2.3.2 Artigos em Planejamento de Redes de Telecomunicações

Outro problema com diversos pontos em comum com o problema de planejamento de redes secundárias é o projeto de redes de telecomunicações.

Na realidade, “redes de telecomunicações” é uma expressão suficientemente ampla para englobar um conjunto muito grande de problemas diferentes. O objetivo desta seção é oferecer uma visão geral sobre o assunto, sem a pretensão de apresentar, como na seção anterior, uma evolução histórica do problema. De fato, os artigos tratados nesta seção, embora guardem alguma relação entre si, são na sua maioria dedicados a problemas muito particulares. Discutem-se alguns artigos recentes, procurando ressaltar as

similaridades de cada trabalho com o PPRSD.

Análise de Referências Escolhidas

Jongh, Gendreau e Labbé [44] lidam com o problema de redes de telecomunicações com duas tecnologias (cobre e fibra ótica, por exemplo). O problema é formulado através de uma representação por grafos [4], com um custo associado a cada arco e um custo de transição de uma tecnologia para outra, associado a cada nó. Os nós de demanda podem ser atendidos pela rede secundária (cobre) ou diretamente pela rede primária (fibra ótica)— vale notar que no PPRSD, esta possibilidade também pode ser considerada, uma vez que alguns pontos de consumo (prédios, shoppings) podem ser atendidos diretamente pela rede primária. Apesar de apresentarem uma formulação matemática detalhada, dada a complexidade do problema, os autores o resolvem através de dois métodos heurísticos, baseados em teoria de grafos.

Costamagna, Fanni e Giacinto [21] trabalham com o problema da otimização de redes de banda larga. Nessas redes, uma central deve ser conectada a uma série de multiplexadores que devem, por sua vez, ser conectados aos usuários. Considerando as centrais como as subestações e os multiplexadores como transformadores, trata-se de um problema bem similar ao da rede secundária. Os autores propõem um método de resolução baseado em Busca Tabu [33] para encontrar a localização dos transformadores. Em seguida, utilizam heurísticas clássicas de caminho mínimo para encontrar a topologia da rede.

Kubat e Smith [49] otimizam o planejamento na estrutura fixa das redes celulares (antenas e centrais). Em geral, conexões do tipo estrela são utilizadas no problema (cada antena conectada diretamente à central). Com o aumento da densidade dos sistemas, pode ser interessante construir concentradores de fluxos entre as antenas e as centrais. Sugerindo uma analogia, estes concentradores seriam os transformadores, as centrais seriam as subestações e as antenas seriam os consumidores. Os autores propõem uma série de heurísticas baseadas em relaxação Lagrangiana e métodos de “ramificação e corte” (*branch and cut*), para a resolução do problema. Bons resultados são apresentados para problemas de tamanho real (com 300 pontos de demanda).

Paiva, Armentano e Carlson [59] trabalham com um problema parecido, cujo objetivo é determinar a localização das estações base, centrais chaveadoras, antenas, e as interconexões entre centrais e antenas. Os autores utilizam um método heurístico composto de uma fase construtiva e de uma fase de melhoria.

Poon, Conway, Wardrop e Mellis [61] lidam com um problema de redes de telefonia fixa, onde é necessário instalar pontos de distribuição, conectá-los a uma rede primária e também aos pontos de consumo. Novamente, os pontos de distribuição podem ser encarados como os transformadores, em uma analogia clara com o problema de planejamento de redes secundárias. Os autores utilizam um algoritmo genético híbrido para planejar redes de até 240 nós.

Além dos artigos mencionados, diversas publicações propõem formulações para o problema de projeto em grafos (*network design*), citando as redes de telecomunicações como uma aplicação possível. Exemplos deste tipo de artigo são os trabalhos de Cruz *et al.* [22] e Melkote e Daskin [54, 55].

Cruz *et al.* [22] propõem uma formulação para o problema da otimização de redes multiníveis; a validade da abordagem é ilustrada com o estudo de redes pequenas. Melkote e Daskin [54, 55] apresentam diferentes formulações matemáticas para o planejamento de redes; um aspecto interessante de seu trabalho é a utilização de uma transformação de variáveis que torna a formulação mais restritiva e, conseqüentemente, de mais fácil resolução computacional. Mais informações sobre estes trabalhos poderão ser obtidas no capítulo seguinte.

2.3.3 Problemas de Companhias Aéreas

A última área a ser analisada trata do problema de transporte de passageiros através de cidades concentradoras (escalas).¹ Este problema é geralmente formulado na literatura como um problema de *p-hubs* [4]—*hubs* são centros de distribuição ou de concentração. No problema da rede secundária, um *hub* seria um transformador, recebendo fluxo através de uma rede primária e distribuindo aos nós de demanda através da rede secundária. Esta analogia nos motiva a analisar algumas publicações recentes para este problema.

Análise de Referências Escolhidas

J. Skorin-Kapov e D. Skorin-Kapov [67] propõem uma formulação matemática para o problema e uma heurística baseada em Busca Tabu. Seu algoritmo usa os dados do problema das companhias aéreas nos Estados Unidos, obtendo bons resultados.

Ernst e Krishnamoorthy [26] propõem formulações inteiras-mistas com número reduzido de variáveis para o problema dos *p-hubs*. Além disso, um método heurístico baseado em caminhos mínimos é proposto e testado em um conjunto de dados de uma rede de entrega postal. Bons resultados são obtidos para redes com poucos nós.

Como visto no artigo de Ernst e Krishnamoorthy [26], a grande dificuldade para resolução deste tipo de problema através do enfoque de modelagem matemática é a complexidade computacional (tornando viável apenas a resolução de redes sem interesse prático). Abdinnour-Helm [1] propõe um método heurístico

¹Optou-se por nomear este problema como “problema de companhias aéreas”, por ser esta a utilização mais associada às formulações que serão apresentadas. Entretanto, tais formulações são sugeridas na literatura para resolver uma gama maior de situações de planejamento de redes e tráfego (sejam elas de correspondências, passageiros ou pacotes de dados de telecomunicações).

híbrido de resolução, baseado em Busca Tabu e algoritmo genético. O algoritmo genético é utilizado para definir a localização dos *hubs*, enquanto a Busca Tabu procura melhores soluções a partir da solução encontrada pelo algoritmo genético.

Sohn e Park [69] desenvolvem formulações matemáticas diferentes para o problema, reduzindo em mais de 50% o número de variáveis da formulação de Skorin-Kapov [67]. Ainda assim, apenas exemplos pequenos (de até 25 nós) são testados.

Um dos mais recentes trabalhos é o de Ebery *et al.* [24]. Os autores desenvolvem um número maior de formulações matemáticas e reduzem a quantidade de variáveis inteiras necessárias para a representação do problema. Além disso, propõem uma nova heurística construtiva, baseada em algoritmos de caminhos mínimos.

Capítulo 3

Formulações Matemáticas

“Os matemáticos são como os franceses: não importa o que você diga, eles traduzem para a sua própria língua e, de pronto, tem-se algo completamente diferente.”

Goethe, Máximas e Reflexões

3.1 Introdução

O desenvolvimento de um modelo de programação matemática para um problema de engenharia passa por duas grandes etapas: 1) a especificação de uma função de custo que corresponda ao problema real tratado e 2) a expressão das restrições que condicionam este problema na forma desejada. O modo como estas duas grandes etapas são conduzidas depende da finalidade das formulações.

As formulações matemáticas desenvolvidas neste capítulo têm duas finalidades maiores. A primeira é trazer uma formalização maior ao problema. Ao traduzir o problema à linguagem matemática, obrigatoriamente eliminam-se possíveis dubiedades. Muito pode ser aprendido sobre um problema apenas desenvolvendo/analizando as suas formulações matemáticas.

A segunda finalidade é a resolução direta do problema através de métodos de programação matemática. Apesar de se ter pouca esperança de se resolver instâncias reais do PPRSD através destes métodos, é possível obter resultados ótimos para pequenos exemplos. Estes resultados podem então ser usados para fins de comparação e calibração dos algoritmos aproximados desenvolvidos.

Neste capítulo, apresentam-se duas formulações desenvolvidas para o PPRSD. O capítulo está estruturado da seguinte maneira: na seção seguinte (Seção 3.2) analisam-se algumas referências tratando de formulações matemáticas para problemas de otimização em redes. Em seguida (Seção 3.3) analisam-se algumas questões centrais do PPRSD e a sua representação matemática. Finalmente, na Seção 3.4, apresentam-se as duas formulações desenvolvidas.

3.2 Formulações da Literatura

Devido à escassa bibliografia dedicada ao PPRSD, a única referência encontrada lidando com formulações matemáticas para o PPRSD foi o trabalho de Carneiro *et al.*, de 1996 [14]. Nesta seção, além de analisar-se esta formulação, estuda-se também o trabalho de Cruz *et al.* [22], que trata do problema geral de planejamento de redes multiníveis.

3.2.1 Formulação Simplificada do PPRSD

Carneiro *et al.* [14] expressa o PPRSD como um grafo de dois níveis, conforme pode ser visto na Figura 3.1.

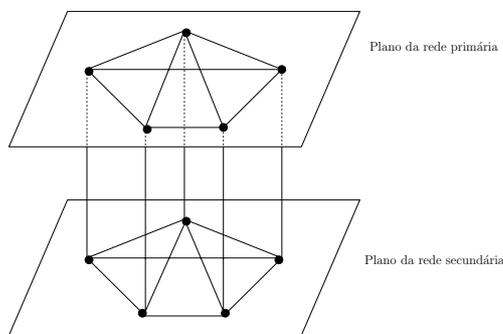


Figura 3.1: Modelo de dois níveis para rede primária e secundária

O modelo duplica os nós do grafo, criando explicitamente os níveis primário e secundário (na realidade, sabe-se que os postes que sustentam a rede primária sustentam também a rede secundária, sendo o desmembramento em dois níveis um artifício matemático). A partir desta representação, os autores propõem a formulação (3.1)–(3.8).

$$\text{Min} \sum_{j \in M} (|c_j x_j| + F_j y_j) \quad (3.1)$$

Sujeito a:

$$Ax = b \quad (3.2)$$

$$-y_j \bar{x}_j \leq x_j \leq y_j \bar{x}_j \quad \forall j \in M_1 \quad (3.3)$$

$$0 \leq x_j \leq y_j \bar{x}_j \quad \forall j \in M_2 \quad (3.4)$$

$$\sum_{j \in S_k} y_j \leq 1 \quad \forall j \in N \quad (3.5)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in N \quad (3.6)$$

$$\text{Restrições de radialidade} \quad (3.7)$$

$$\text{Restrições de queda de tensão} \quad (3.8)$$

(3.1)-(3.8) – Formulação de Carneiro *et al.* para o PPRSD

Onde N é o conjunto de nós; M é o conjunto de arcos ($M = M_1 \cup M_2$); M_1 é o conjunto de arcos pertencentes ao plano superior (rede primária) ou plano inferior (rede secundária); M_2 é o conjunto de arcos conectando os dois planos; S_k é o conjunto de arcos de M_2 associados ao nó k ; A é a matriz de incidência nó-arco; x_j é o fluxo de potência no arco j ; b é o vetor de demanda de potência; c_j o custo variável anualizado do elemento j ; F_j é o custo fixo anualizado do elemento j ; y_j é a variável binária associada com o elemento j ; e \bar{x}_j é o limite de fluxo de potência no arco j .

A função objetivo (3.1) tenta minimizar o custo total anualizado composto dos custos fixos ($F_j y_j$) e variáveis ($|c_j x_j|$). O conjunto de equações (3.2) garante o atendimento da demanda e a conservação do fluxo de potência. As restrições (3.3) e (3.4) fazem com que apenas elementos existentes ou a serem construídos ($y_i = 1$) apresentem fluxo de potência, além de garantir o respeito às capacidades dos elementos. As restrições (3.5) impedem que mais de um transformador seja instalado em um nó, enquanto as restrições (3.6) garantem a integralidade da solução. As restrições (3.7) e (3.8) requerem uma configuração radial e impedem uma queda de tensão maior que a permitida.

A formulação (3.1)-(3.8) atende, de maneira primorosa, uma das finalidades deste capítulo: a maior compreensão do problema. Entretanto, tal formulação ignora alguns aspectos essenciais do problema, como a existência de uma rede primária a priori e o custo não linear das perdas nos alimentadores.

3.2.2 Formulação para Problemas Gerais de Planejamento de Redes

Multiníveis

O PPRSD é claramente um problema de otimização em redes multiníveis. No caso do PPRSD, a rede tem dois níveis, primário e secundário, conectados através de transformadores.

O problema de otimização em redes multiníveis foi recentemente estudado por Cruz *et al.* [22]. A formulação desenvolvida, embora testada apenas para redes de dois níveis, é aplicável a redes de um número n , qualquer, de níveis.

A princípio, por ter somente dois níveis, o caso do PPRSD seria apenas um caso particular do problema estudado em [22]. Entretanto, o problema estudado por Cruz *et al.* considera cada nó como tendo uma função fixa **a priori** (seja como nó de transformação, demanda ou transporte).

No caso do PPRSD, cada nó (poste) pode ter várias funções, algumas das quais definidas **durante** o processo de otimização. Assim, um mesmo nó (poste) pode ser um nó de demanda (caso haja pontos de consumo conectados ao poste associado) e/ou de transformação (caso seja instalado um transformador no poste) e/ou de transporte (caso o nó não consuma toda a potência que receber, transmitindo-a integralmente, ou em parte, para o nó seguinte).

Esta maior possibilidade de funções para cada nó aumenta consideravelmente o número de soluções possíveis para o problema, tornando-o computacionalmente muito mais complicado.

Ainda assim, o estudo do modelo de Cruz *et al.* [22] é útil para este trabalho. Em especial, seu modelo lida de uma forma interessante com os nós de transformação. A idéia dos autores foi criar um balanço de potência entre cada par de níveis vizinhos, para cada nó onde há transformação. Esta idéia foi estendida e utilizada nas formulações para o PPRSD, conforme se pode ver nas seções 3.3 e 3.4.

3.3 Construindo as Formulações

Nesta seção, aspectos fundamentais das formulações desenvolvidas, como a função de custo e as principais restrições, são detalhados.

3.3.1 Função de Custo

O desenvolvimento de uma função de custo que represente de forma adequada o problema é um dos pontos primordiais para a qualidade de uma formulação.

O objetivo do PPRSD é minimizar os custos de instalação e operação da rede. Os custos fixos são

relativos à instalação de transformadores e alimentadores primários¹, enquanto os custos variáveis dizem respeito às perdas durante a operação do sistema.

Para fins de otimização, os custos precisam ser tratados de modo a expressar grandezas similares. Para os custos fixos considera-se o seu custo anualizado, considerando-se a vida útil do equipamento. Para os custos variáveis considera-se o montante de perdas ao longo de um ano de operação. Desta forma, para ambos os custos, tem-se um valor que representa o seu valor anual, permitindo comparações diretas.

Definição dos custos: O custo de um transformador depende de sua potência nominal. A Tabela 3.1 dá uma idéia destes custos. Um aspecto interessante neste caso é a forte economia de escala que apresentam, visto que o custo por kVA tende a ser bem menor nos transformadores maiores. Este fato traz mais um compromisso ao problema: em termos de minimização de custos de transformadores, é melhor ter poucos transformadores de alta capacidade nominal. Entretanto, em termos de minimização de custos dos alimentadores, é melhor ter muitos transformadores de pequena capacidade, mas perto dos pontos de demanda.

Capacidade (kVA)	Custo (US\$)	Custo por kVA (US\$/kVA)
15	178,8	11,92
30	240,6	8,02
45	276,7	6,15
75	348,9	4,65
112,5	468,3	4,16

Tabela 3.1: Custos dos transformadores segundo sua capacidade nominal

A Figura 3.2 apresenta os custos (já considerando os custos fixos e variáveis) de um conjunto de alimentadores secundários padrão. Nota-se que há sempre uma escolha mais econômica de condutor, segundo o fluxo que o atravessa. Um aspecto interessante é que a análise econômica é suficiente para determinar que cabo deve ser usado, uma vez que este fator é mais restritivo que a capacidade do alimentador. Por exemplo, a Figura 3.3 mostra o alimentador mais econômico para cada trecho de fluxo. Nota-se que é vantajoso usar o primeiro alimentador para fluxos entre zero e 10kVA. A capacidade deste cabo, entretanto, é de 68kVA (muito além da sua faixa de aplicação).

Como custo dos alimentadores secundários, pode-se usar então, a curva (composta por trechos de

¹os alimentadores secundários, por serem todos construídos devido à questão dos vãos, representam um custo fixo “não-otimizável”.

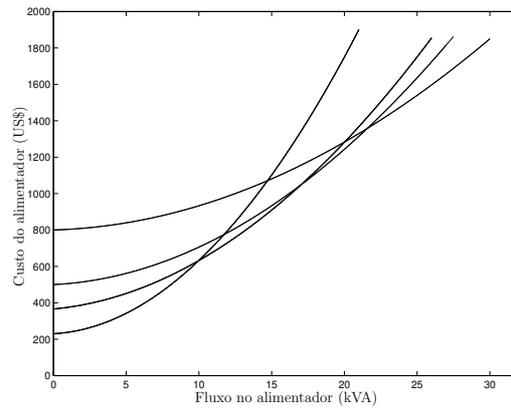


Figura 3.2: Custos dos alimentadores secundários (US\$) segundo o fluxo de potência (kVA).

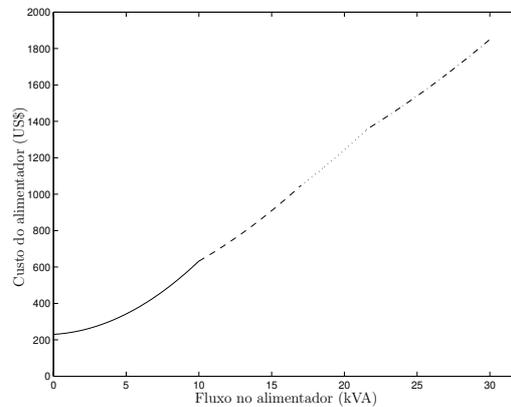


Figura 3.3: Custos do alimentador mais econômico (US\$) para cada situação de fluxo de potência (kVA).

curvas) dada pela Figura 3.3. Tal curva é obtida a partir da Figura 3.2, utilizando-se sempre o alimentador mais econômico no trecho. Na realidade, para a utilização de métodos de programação linear é necessária a linearização de tal curva. Dependendo da estrutura dos custos e da precisão requerida, pode-se optar por uma linearização por partes para se conseguir resultados mais precisos.

Para os alimentadores primários, um só tipo de alimentador é considerado, uma vez que esta é a prática empregada em concessionárias de energia. Seu custo é também anualizado. Além disso, no trecho de rede considerado (área interior à elipse tracejada da Figura 1.1), as perdas dos alimentadores primários são quase que desprezíveis em relação aos custos fixos de instalação. Pode-se portanto, considerar apenas os custos fixos sem que isso represente um erro significativo.

3.3.2 Restrições

As restrições deste problema podem ser agrupadas em três grandes grupos: 1) restrições de conservação de fluxo e capacidade de transformação, 2) restrições de capacidade dos alimentadores e 3) restrições das variáveis do modelo.

Carneiro *et al.* [14] trata 1) através das restrições (3.2), (3.4) e (3.5), 2) através de (3.3) e 3) pelas restrições (3.6). Estas restrições precisam ser expandidas, de forma a suplantarem as limitações já citadas do seu modelo. De forma a considerar o custo linear por partes, por exemplo, variáveis adicionais devem ser criadas para o fluxo em cada arco.

A seguir apresentam-se as formulações desenvolvidas. A forma de apresentação destas segue, de certa forma, a sequência seguida nesta subseção, visando facilitar a compreensão.

3.4 Formulações Desenvolvidas

As formulações desenvolvidas nesta seção foram inspiradas nos trabalhos de Carneiro *et al.* [14] e Cruz *et al.* [22]. Duas formulações foram desenvolvidas: “Formulação Baseada em Nós” (FBN) e “Formulação Baseada em Arcos” (FBA).

Os nomes das formulações dizem respeito à maneira como elas satisfazem a conservação de fluxo de potência nos transformadores. Esta conservação deve ser feita de maneira que o fluxo de potência a 13,8kV que entra em um transformador seja convertido em igual fluxo de potência em 220V.

A FBN leva este nome por efetuar a conservação de fluxo nos nós do grafo (ou seja, modelam os transformadores como nós). O trabalho de Cruz *et al.* [22] também utiliza esta idéia. Já a FBA modela os transformadores como arcos, como feito por Carneiro *et al.* [14].

A seguir apresentam-se as duas formulações desenvolvidas, precedidas pela nomenclatura utilizada. Um detalhe importante é que, nas duas formulações, embora não se mencione explicitamente, é necessário a verificação dos limites de queda de tensão.

Nomenclatura

Nós e Arcos:

N - conjunto total de nós.

A - conjunto total de arcos.

F - conjunto de nós do tipo “fly-tap”. Estes nós não são postes, mas apenas conexões aéreas da rede.

Por este motivo, nós do tipo fly-tap não têm demanda nem são aptos para a instalação de transformadores.

o - nó origem, artificial.

Variáveis:

x_{ij}^1 - fluxo no arco primário (i, j) (nível 1).

x_{ijp}^2 - fluxo no trecho de aproximação linear p no arco secundário (i, j) (nível 2).

z_i^e - variável binária associada aos transformadores. Vale 1 se um transformador do tipo e está instalado no nó i e 0 caso contrário (formulação baseada em nós).

y_i^e - variável binária associada aos transformadores. Vale 1 se um transformador do tipo e está instalado no nó i e 0 caso contrário (formulação baseada em arcos).

y_{ij}^1 - variável binária associada ao arco primário (i, j) . Vale 1 se o arco está construído e 0 caso contrário.

Custos:

c_{ij}^1 - custo variável do arco primário (i, j) .

c_{ijp}^2 - custo variável na aproximação linear p do arco secundário (i, j) .

f_{ij} - custo fixo do arco primário (i, j) .

f^e - custo fixo do transformador do tipo e .

Capacidades:

s^e - capacidade do transformador do tipo e (formulação baseadas em nós).

M_e - capacidade do transformador do tipo e (formulação baseadas em arcos).

M^1 - capacidade dos arcos primários - considera-se que os arcos sempre tinham capacidade suficiente, usando-se M^1 suficientemente grande.

M_p^2 - capacidade da aproximação linear dos arcos secundários.

Outros:

$\delta^+(i)$ - conjunto $\{j | (i, j) \in A\}$.

$\delta^-(i)$ - conjunto $\{j | (j, i) \in A\}$.

N_t - quantidade de tipos de transformadores.

N_p - quantidade de segmentos de reta na aproximação linear por partes.

d_i - demanda do nó i .

3.4.1 Formulação Baseada em Nós

$$\text{Min} \quad \sum_{(i,j) \in A, i < j} f_{ij} y_{ij}^1 + \sum_{i \in N} \sum_{e=1}^{N_t} f^e z_i^e + \sum_{(i,j) \in A} (c_{ij}^1 x_{ij}^1 + \sum_{p=1}^{N_p} c_{ijp}^2 x_{ijp}^2) \quad (3.9)$$

Sujeito a:

Restrições de conservação do fluxo, atendimento da demanda e capacidade de transformação

$$\sum_{j \in \delta^-(i)} (x_{ji}^1 + \sum_{p=1}^{N_p} x_{jip}^2) - \sum_{j \in \delta^+(i)} (x_{ij}^1 + \sum_{p=1}^{N_p} x_{ijp}^2) = \begin{cases} -\sum_i d_i & i = 0 \\ d_i & i \neq 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

$$0 \leq \sum_{j \in \delta^-(i)} x_{ji}^1 - \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^1 \leq \sum_{e=1}^{N_t} s^e z_i^e. \quad (3.11)$$

$$-d_i \leq \sum_{j \in \delta^+(i)} \sum_{p=1}^{N_p} x_{ijp}^2 - \sum_{j \in \delta^-(i)} \sum_{p=1}^{N_p} x_{jip}^2 \leq \sum_{e=1}^{N_t} s^e z_i^e - d_i. \quad (3.12)$$

$$\sum_{e=1}^{N_t} z_i^e \leq 1. \quad (3.13)$$

$$z_i^e = 0, \quad \forall i \in F, \quad e = 1 \dots N_t. \quad (3.14)$$

Restrições de capacidade nos arcos

$$x_{ij}^1 \leq M^1 y_{ij}^1 \quad \forall (i, j) \in A, \quad i < j. \quad (3.15)$$

$$x_{ji}^1 \leq M^1 y_{ij}^1 \quad \forall (i, j) \in A, \quad i < j. \quad (3.16)$$

$$x_{ijp}^2 \leq M_p^2 \quad \forall (i, j) \in A, \quad i < j, \quad p = 1 \dots N_p. \quad (3.17)$$

$$x_{jip}^2 \leq M_p^2 \quad \forall (i, j) \in A, \quad i < j, \quad p = 1 \dots N_p. \quad (3.18)$$

Definições das variáveis

$$x_{ij}^1 \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A. \quad (3.19)$$

$$x_{ijp}^2 \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, \quad p = 1 \dots N_p. \quad (3.20)$$

$$y_{ij}^1 \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad i < j. \quad (3.21)$$

$$z_i^e \in \{0, 1\} \quad \forall i \in T, \quad e = 1 \dots N_t. \quad (3.22)$$

É criado um nó artificial de produção. Este nó está ligado, com custo zero, aos nós do grafo onde passa a rede primária. A produção deste nó é feita igual à demanda de todos os outros nós do grafo ($d_0 = -\sum_i d_i$) (veja eq. 3.10).

A função objetivo (3.9) minimiza os custos fixos associados aos arcos no nível 1 (alimentadores primários) e nós (transformadores) e os custos variáveis associados aos arcos. As restrições (3.10) garantem a conservação do fluxo na origem e estabelecem o nó origem como fonte de toda a demanda consumida na rede. O nó origem está conectado sem custo a todos os nós onde já há rede primária instalada a priori. As restrições (3.10) funcionam permitindo a transformação, ou seja, permitindo que, em um nó qualquer, haja um sumidouro de fluxo primário e uma fonte de fluxo secundário (de mesmo valor). Nota-se que estas restrições atuam em conjunto com as restrições (3.11) e (3.12), que só permitem que haja sumidouro de fluxo primário e fonte de fluxo secundário caso exista um transformador instalado no nó. As restrições (3.11) e (3.12) garantem também o respeito à capacidade dos transformadores, limitando o valor do “sumidouro primário” e da “fonte secundária”.

As restrições (3.13) limitam a um o número de transformadores em cada nó, enquanto as restrições (3.14) denotam que alguns nós não podem receber transformadores².

As restrições (3.15) - (3.16) asseguram que só há fluxo de potência primária em arcos primários construídos. Um detalhe é que, para economia de variáveis binárias, consideraram-se apenas as variáveis binárias com $i < j$. Assim, um arco ij construído permite o fluxo x no sentido ij ou no sentido ji . As restrições (3.17) - (3.18) garantem o respeito às capacidades da linearização por partes.

As restrições (3.19) e (3.20) garantem fluxos positivos e as restrições (3.21) e (3.22) denotam o caráter binário das variáveis y_{ij}^1 e z_i .

²Na rede real estes nós são conhecidos como “fly-taps”. Não correspondem a postes, mas a conexões aéreas entre as redes.

3.4.2 Formulação Baseada em Arcos

$$Min \sum_{(i,j) \in A, i < j} f_{ij} y_{ij}^1 + \sum_{i \in N} \sum_{e=1}^{N_t} f^e y_{ii}^e + \sum_{(i,j) \in A} (c_{ij}^1 x_{ij}^1 + \sum_{p=1}^{N_p} c_{ijp}^2 x_{ijp}^2) \quad (3.23)$$

Sujeito a:

Restrições de conservação do fluxo, atendimento da demanda e capacidade de transformação

$$\sum_{j \in \delta^-(i)} x_{ji}^1 - \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^1 = \begin{cases} -\sum_{i \in N} d_i & i = 0, \\ x_{ii} & i \neq 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

$$x_{ii} + \sum_{j \in \delta^-(i)} \sum_{p=1}^{N_p} x_{jip}^2 - \sum_{j \in \delta^+(i)} \sum_{p=1}^{N_p} x_{ijp}^2 = d_i. \quad (3.25)$$

$$x_{ii} \leq \sum_{e=1}^{N_t} y_{ii}^e M_e. \quad (3.26)$$

$$\sum_{n=1}^{N_t} y_{ii}^e = 1. \quad (3.27)$$

$$y_{ii}^e = 0, \quad \forall i \in F, \quad n = 1 \dots N_t. \quad (3.28)$$

Restrições de capacidade nos arcos

$$x_{ij}^1 \leq y_{ij}^1 M^1, \quad (i, j) \in A, \quad i < j. \quad (3.29)$$

$$x_{ji}^1 \leq y_{ij}^1 M^1, \quad (i, j) \in A, \quad i < j. \quad (3.30)$$

$$x_{ijp}^2 \leq M_p^2, \quad (i, j) \in A, \quad i < j, \quad p = 1 \dots N_p. \quad (3.31)$$

$$x_{jip}^2 \leq M_p^2, \quad (i, j) \in A, \quad i < j, \quad p = 1 \dots N_p. \quad (3.32)$$

Definições das variáveis

$$x_{ij}^1 \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A. \quad (3.33)$$

$$x_{ijp}^2 \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, \quad p = 1 \dots N_p. \quad (3.34)$$

$$y_{ij}^1 \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A, \quad i < j. \quad (3.35)$$

$$y_{ii}^e \in \{0, 1\} \quad \forall i \in T, \quad i < j, \quad e = 1 \dots N_t. \quad (3.36)$$

Novamente, a função objetivo (3.23) minimiza os custos fixos de construção de trechos de alimentadores e instalação de transformadores, além do custo linear por partes dependente do fluxo em cada trecho de alimentador secundário.

As restrições condicionam o problema da seguinte forma: (3.24) garantem a conservação do fluxo, no nível superior do grafo (rede primária) e cria o nó origem (artificial). As restrições (3.25) são as restrições equivalentes para o nível 2 do grafo (rede secundária).

As restrições (3.26) atuam em conjunto com (3.24) e (3.25), garantindo que só há passagem de fluxo através de um arco de ligação se houver um transformador instalado. Além disso, elas estabelecem o respeito à capacidade deste transformador.

As restrições (3.27) estabelecem que apenas um transformador pode ser instalado por nó, enquanto as restrições (3.28) impedem a instalação de transformadores em nós do tipo fly-tap.

As restrições (3.29) e (3.30) garantem que só há fluxo primário em um trecho se nele houver rede primária instalada, enquanto as restrições (3.31) e (3.32) estabelecem os limites da aproximação linear por partes.

Finalmente, as restrições (3.33) - (3.36) definem as variáveis binárias e a canalização.

Parte II

Abordagens de Resolução

Capítulo 4

Abordagem Exata

“Se as coisas são inatingíveis
Não é motivo para não querê-las
Que tristes os caminhos, se não fora
A mágica presença das estrelas”

Mário Quintana - Das Utopias

4.1 Introdução

Uma abordagem de resolução é dita exata quando, além de fornecer uma solução para um problema, é capaz de provar que a solução fornecida é a melhor possível (solução ótima).

Um exemplo de algoritmo exato capaz de resolver qualquer modelo linear de otimização descrito por meio de variáveis reais é o algoritmo Simplex [51] da programação linear. De fato, métodos do tipo simplex ou métodos de pontos interiores [3] conseguem resolver, atualmente, problemas com dezenas de milhares de variáveis e restrições, em tempos relativamente pequenos.

Para os problemas de programação inteiro-mistos (PPIM), entretanto, as abordagens exatas poucas vezes são factíveis. Apesar das constantes evoluções nos algoritmos de resolução para esta classe de problemas, as abordagens exatas ainda encontram seus limites em problemas de dimensões muito menores.

Este capítulo aborda as dificuldades de uma abordagem exata para um PPIM. Em especial, estuda-se uma abordagem exata para o PPRSD, considerando o pacote computacional CPLEX¹. O capítulo está estruturado da seguinte maneira: a Seção 4.2 aborda de uma forma genérica o problema da abordagem

¹CPLEX é marca registrada da ILOG.

exata dos PPIM. Na Seção 4.3, discute-se a disponibilidade de pacotes computacionais, entre eles o CPLEX, e se justifica a escolha feita neste trabalho por este pacote. Finalmente, na Seção 4.4 analisam-se algumas particularidades da resolução do PPRSD através do CPLEX.

4.2 Abordagem Exata para Resolução de um Problema de Programação Inteiro-Misto

Esta seção tem por objetivo fornecer uma idéia geral de como funcionam os métodos básicos de otimização de problemas de programação inteiro-mistos (PPIM). Na subseção 4.2.1, analisa-se a idéia de resolução através da *enumeração explícita* das soluções inteiras possíveis. Na subseção seguinte, estuda-se uma alternativa mais eficiente: a *enumeração implícita*, base dos métodos de otimização inteira, em especial, do método de *Branch and Bound*, proposto por Land e Doig [50] em 1960

4.2.1 Enumeração Explícita

Considere o problema de otimização inteiro-misto com três variáveis inteiras, descrito abaixo:

$$\text{Minimize } c^T[x \mid y] \tag{4.1}$$

$$\text{Sujeito a:} \tag{4.2}$$

$$A[x \mid y] = b \tag{4.3}$$

$$l \leq x \leq u \tag{4.4}$$

$$y = [y_1 \ y_2 \ y_3] \text{ inteiros} \tag{4.5}$$

Uma maneira de resolver este problema é fixando as variáveis inteiras e resolvendo-se um problema de programação linear (para o qual métodos eficientes são disponíveis). Entretanto, para se garantir a obtenção da solução ótima, todas as possibilidades de fixação das variáveis inteiras devem ser testadas. O número de testes a ser efetuado cresce exponencialmente com o número de variáveis inteiras do problema. Este método é chamado de *enumeração explícita*.

A Figura 4.1 mostra a expansão necessária para resolução do problema por enumeração explícita. Ao cabo da otimização, oito (2^n , onde n é o número de variáveis inteiras) problemas de programação linear do tipo (4.6)-(4.10) terão sido resolvidos.

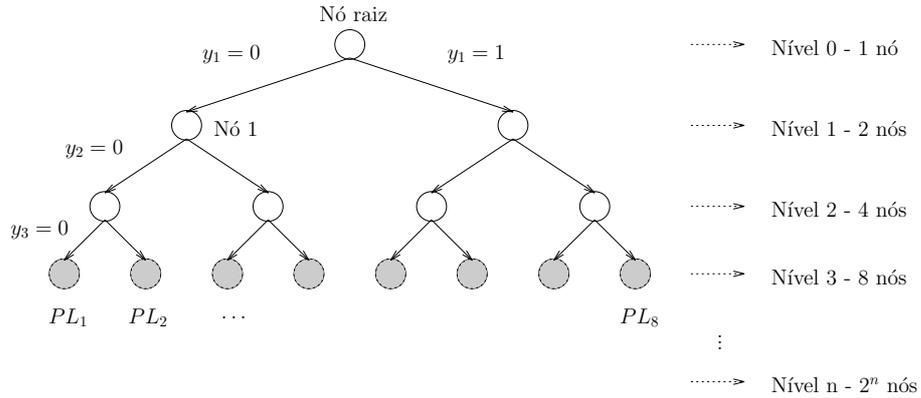


Figura 4.1: Árvore de ramificação da enumeração explícita

$$\text{Minimize } c^T x + c^T \bar{y} \quad (4.6)$$

$$\text{Sujeito a:} \quad (4.7)$$

$$A[x] = b - A[\bar{y}] \quad (4.8)$$

$$l \leq x \leq u \quad (4.9)$$

$$y = \bar{y} \quad (\text{fixos}) \quad (4.10)$$

Problema de Programação Linear

(a ser resolvido em cada nó folha da árvore de enumeração explícita)

Métodos de enumeração explícita são extremamente ineficientes. A necessidade de se avaliar cada conjunto possível de valores para as variáveis inteiras esgota, com algumas poucas variáveis deste tipo, a capacidade do método, mesmo em computadores muito rápidos.

4.2.2 Enumeração Implícita

Uma solução alternativa à enumeração explícita é a enumeração implícita. Neste caso, não necessariamente avalia-se cada nó folha da árvore (como anteriormente), mas consegue-se “podar” alguns ramos, não-possuidores da solução ótima, sem que se tenha a necessidade de expandir a árvore até chegar nos seus nós folha. A enumeração implícita é a idéia por trás do método de *Branch and Bound* [78], muito usado nesta classe de problemas.

Antes de se entender como funciona a podagem destes ramos, é necessária a definição dos conceitos

de limitante inferior e superior ²:

LB = limitante inferior: valor inferior ou igual ao valor da solução ótima do problema.

UB = limitante superior: valor de uma solução factível, superior ou igual ao valor da solução ótima do problema.

Tome-se por exemplo o nó raiz da árvore da Figura 4.1. Resolvendo-se o problema de PL, ignorando a integralidade das variáveis y (problema relaxado linearmente), obtém-se uma solução. É fácil observar que o valor desta solução é menor ou igual à solução do problema original (LB).

Tomando-se, agora, esta solução e aplicando um processo de factibilização (por exemplo, levando-se todas as variáveis inteiras às quais o PL atribuiu um valor não-inteiro para “1”), pode-se obter uma solução factível. O valor desta solução, se existente, é maior ou igual ao valor da solução ótima do problema (UB).

Os valores da solução do problema relaxado e de uma solução factível são encontrados para cada nó expandido da árvore (quando possível - nem sempre é possível encontrar uma solução factível). É através destes valores que os ramos são sondados. As três situações possíveis, após uma ramificação, são mostradas na Figura 4.2.

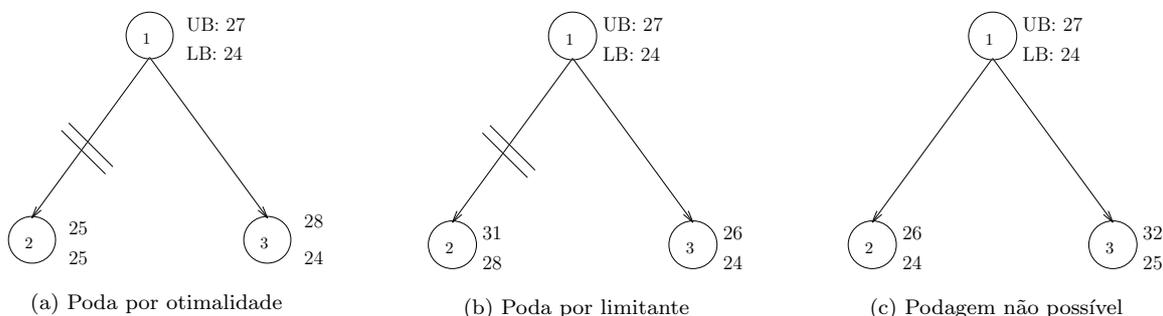


Figura 4.2: Situações de ramificação

Na Figura 4.2(a), o nó 2 apresenta como solução do problema relaxado um valor igual ao da factibilização. Isso significa que nenhum resultado inteiro vai ser encontrado melhor que o já obtido, por isso, o ramo é podado. No exemplo, o UB do problema vai ser atualizado para 25 (informação vinda do nó 2). O LB continua o mesmo (menor limitante inferior dos nós ativos = 24).

Na situação expressa em 4.2(b), novamente o ramo que leva ao nó 2 é podado. Desta vez a poda esta baseada nos limitantes. A solução relaxada do nó 2 é pior que uma solução inteira conhecida (UB). Isto

²Especificados aqui para um problema de minimização.

significa que nenhuma solução inteira de um nó surgindo no nó 2 pode ser melhor que a solução UB. Além do corte, o algoritmo também atualiza os limitantes (UB recebe 26, da solução factível do nó 3).

Finalmente, no caso 4.2(c), nenhuma poda pode ser efetuada, uma vez que a solução ótima pode estar em qualquer das ramificações efetuadas. O algoritmo apenas atualiza UB com o valor 26 (vindo da solução factível do nó 2).

Há ainda a situação, não mostrada, em que a ramificação leva a soluções sempre infactíveis. Neste caso, o ramo também é podado.

4.3 Pacotes Computacionais

A alternativa mais prática de implementação de uma abordagem para resolução exata de um PPIM é a utilização de *pacotes computacionais comerciais*, que se tornaram populares nos últimos 15 anos. Exemplos destes pacotes são: AMPL [31], MPL ³, GAMS ⁴ e CPLEX ⁵.

Estes pacotes são extremamente competitivos para resolução de modelos inteiro-mistos. Isto se dá devido ao pequeno *gap* existente entre as mais modernas técnicas de otimização disponíveis na literatura e as técnicas implementadas nos pacotes [11]. De fato, a inclusão constante de técnicas matemáticas de solução desenvolvidas a partir dos métodos *branch-and-bound* e *cutting planes*, com procedimentos heurísticos de pré-processamento, proporcionaram um grande aumento no poder de resolução de alguns desses pacotes para problemas inteiro-mistos [78]. Este avanço tornou válida a utilização destes métodos em detrimento da alternativa de se desenvolver um método exato de solução especializado.

É possível que a exploração de algumas estruturas particulares do problema possa levar um método especializado a ser mais eficiente do que aqueles disponíveis nos pacotes comerciais, já que estes últimos, por serem concebidos como métodos de propósito geral, não exploram as especificidades dos problemas. Entretanto, a maior facilidade de resolução através dos pacotes e a possibilidade oferecida por estes de testar, com pouco esforço, diversas configurações de algoritmos, direcionou esta pesquisa para a utilização de um pacote computacional comercial.

A escolha efetuada foi a utilização do CPLEX. Na seção seguinte, mais detalhes sobre a utilização do CPLEX no PPRSD podem ser encontrados.

³<http://www.maximal-usa.com/index.html>

⁴<http://www.gams.com>

⁵<http://www.ilog.com/products/cplex>

4.4 Usando o CPLEX no PPRSD

Quando se trata de modelos inteiro-mistos, como no caso do PPRSD, pode-se lançar mão de vários procedimentos exatos para se alcançar um ótimo global. Entretanto, sabe-se a priori que a complexidade dos modelos que se utilizam de variáveis inteiras é muito maior quando comparada a modelos somente com variáveis reais.

O PPRSD, assim como diversos outros problemas de planejamento em redes, é provado pertencer à classe dos problemas NP-Difíceis [32], para os quais não há (e conjectura-se que nunca haverá) algoritmos capazes de resolver instâncias em tempo computacional limitado por uma função polinomial do tamanho da instância. Isso quer dizer que o tempo de resolução computacional tende a crescer de forma exponencial com o tamanho da instância. Em termos práticos essa constatação implica na impossibilidade de se usar algoritmos exatos para solucionar o PPRSD, excluindo-se o caso de instâncias de pequeno porte.

Este “pequeno porte” pode ser ligeiramente modificado caso se utilize uma boa configuração de parâmetros para o problema. O próprio fabricante do CPLEX (ILOG) sugere que seja efetuada uma bateria de testes para determinar a melhor configuração de parâmetros, para cada novo problema que se deseja resolver. Esta bateria de testes foi efetuada neste trabalho e as alterações que mais significativamente alteraram os tempos computacionais são discutidas na sequência.

4.4.1 Algoritmo de Resolução do Subproblema Linear

Cada nó expandido da árvore de busca é resolvido através de uma relaxação linear. Para a resolução do problema de programação linear obtido, o CPLEX 6.5 dispõe de 4 algoritmos⁶:

1. **Primal Simplex** - algoritmo primal.
2. **Dual Simplex** - algoritmo dual.
3. **Network Simplex** - algoritmo com subalgoritmos de rede, que constroem uma base inicial para o problema.
4. **Barrier** - algoritmo primal-dual.

A ILOG, embora sugira a utilização de alguns algoritmos para problemas específicos, propõe que apenas experimentos podem indicar a melhor rotina para um problema em particular.

De fato, a eficiência do CPLEX pode ser dramaticamente alterada segundo o algoritmo de resolução da relaxação linear. O algoritmo que melhores resultados apresentou para o PPRSD foi o dual-simplex. A

⁶Para mais informações sobre os algoritmos, veja [43]

Tabela 4.1 mostra os tempos computacionais encontrados para a resolução do mesmo problema (instância reg25 - veja Seção 8.2) usando os diferentes subalgoritmos.

Algoritmo	Tempo (s)	N. nós avaliados
1-Primal	34,19	1564
2-Dual	9,98	1087
3-Network	109,68	1033
4-Barrier	395,60	1231

Tabela 4.1: Tempos de resolução do CPLEX usando diferentes subalgoritmos - instância reg16

4.4.2 Ordem de Ramificação

Uma estratégia que levou a maiores reduções nos tempos computacionais, sobretudo de instâncias maiores, foi a definição de uma ordem de prioridades para ramificação.

Os métodos de otimização inteira atuam ramificando a árvore inteira. A definição de uma ordem adequada de ramificação pode levar o algoritmo a encontrar limitantes de boa qualidade mais rapidamente, o que torna o algoritmo mais eficiente (mais podas são efetuadas e menos nós avaliados, chegando-se ao fim da execução mais rapidamente).

Nem todo problema apresenta uma estrutura tal que permita se dizer, a priori, qual a melhor ordem de ramificação. Alguns, entretanto, apresentam esta ordem de maneira muito clara. Tome-se o exemplo de um problema que contém variáveis binárias para a construção de fábricas (y_1 e y_2) e para a utilização de equipamentos dentro de cada uma das fábricas (x_{11} , x_{12} , e x_{13} para a fábrica 1) e (x_{21} , x_{22} , e x_{23} para a fábrica 2), como mostra a Figura 4.3.

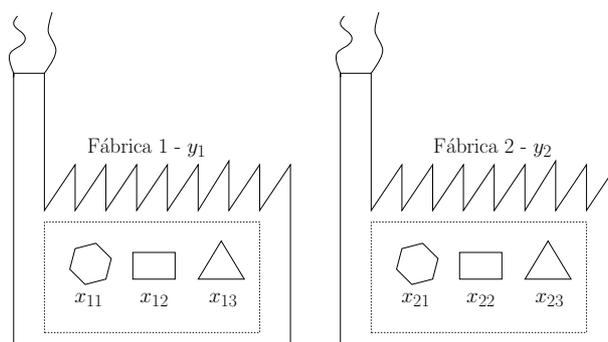


Figura 4.3: Exemplo da importância da ordem das variáveis de ramificação

Obviamente, não adianta se perguntar sobre a utilização ou não do equipamento x_{11} , caso a fábrica 1

não esteja construída. Caso o ramo $y_1 = 0$ esteja sendo avaliado, toda a ramificação em x_{11} , x_{12} , ou x_{13} será esforço inútil. Definindo uma maior prioridade para as variáveis y_1 e y_2 , em detrimento das demais, o algoritmo tenderá a definir primeiro o valor destas variáveis, economizando tempo de computação.

No PPRSD, há uma estrutura similar. Tem-se variáveis binárias para a instalação de transformadores e para a ramificação da rede primária. A forma como a rede primária deve ser construída depende exclusivamente da posição dos transformadores. Assim, como no exemplo das fábricas, a definição de uma prioridade é importante. Neste caso, informa-se ao algoritmo que as variáveis binárias relativas aos transformadores devem ser tratadas com prioridade em relação às variáveis binárias relativas aos arcos primários.

A Tabela 4.2 apresenta o ganho em tempo computacional ao se fornecer a informação de prioridades ao CPLEX, para a instância reg25.

reg25	Tempo computacional (s)
Sem prioridade	15,33
Com prioridade	10,98 (-28,38%)

Tabela 4.2: Comparação dos tempos de resolução do CPLEX com e sem prioridades para as variáveis binárias dos transformadores

De um modo geral, a instância reg25, mostrada na Tabela 4.2, é representativa do que acontece nas outras instâncias de teste.

4.4.3 Solução Inicial

A partir da versão 5.0, o CPLEX permite a inicialização da árvore de busca com um valor para o limitante superior. Isto pode ser feito passando-se uma solução conhecida para o CPLEX, antes do início da expansão da árvore. Desta maneira, espera-se acelerar as sondagens na árvore diminuindo o número de nós avaliados e aumentando a velocidade do algoritmo.

No caso do PPRSD, as soluções obtidas de forma heurística tem uma qualidade muito boa (a cerca de 5% do ótimo, como pode ser visto no Capítulo 9). Desta maneira, a solução heurística é um ótimo limitante para a expansão da árvore binária.

A Tabela 4.3 mostra os resultados para a instância reg25, quando o algoritmo era inicializado com e sem a informação do limitante inferior. A última linha da tabela mostra o que acontece ao se combinar as informações da solução inicial e da prioridade de ramificação.

A instância reg25 é um bom exemplo do que acontece para as instâncias regulares. Para as instâncias

reg25	Tempo computacional (s)
Sem limitante inicial	15,33
Com limitante inicial	10,79 (-29,21%)
Com limitante e prioridade	9,98 (-34,90%)

Tabela 4.3: Comparação dos tempos de resolução do CPLEX com/sem o fornecimento do valor da solução heurística

aleatórias (grupo 1), entretanto, observou-se que nenhuma das duas estratégias (prioridade ou solução inicial) trazia benefícios em termos de tempo computacional. Assim, para estas instâncias, as estratégias não foram utilizadas.

Capítulo 5

Abordagens Heurísticas

“Para que o espírito se torne sagaz, deve exercitar-se em investigar as mesmas coisas que já foram encontradas por outros e em percorrer com método todos os menos importantes artifícios dos homens, e sobretudo aqueles que manifestam ou supõem.”

René Descartes – Regras para a direção do espírito (Regra X)

“A cópia só é válida quando é melhor que o original”

Ocimar Versolato

5.1 Introdução

A dificuldade de resolução de algumas classes de problemas, em especial nos ramos da otimização discreta e combinatória, levou a um grande desenvolvimento dos, assim chamados, *métodos heurísticos*.

Métodos heurísticos são métodos aproximados, constituídos por procedimentos iterativos, geralmente baseados em características intrínsecas ao problema de estudo. De maneira informal, pode-se dizer que os métodos heurísticos são tentativas de formalização e sofisticação das metodologias empiricamente empregadas por engenheiros/técnicos com experiência no problema. De fato, muitos métodos heurísticos nascem da observação e análise de tais metodologias.

As principais características dos métodos heurísticos são: a obtenção de “boas” (não necessariamente as melhores) soluções para o problema e o baixo esforço computacional (comparado aos métodos exatos, por exemplo).

Neste capítulo, apresentam-se dois métodos heurísticos para o PPRSD. Na Seção 5.2, analisa-se a proposta de Carneiro *et al.* [14]. Esta proposta baseia-se em uma estratégia de decomposição do problema original em três subproblemas. A decomposição permite uma resolução eficiente de cada subproblema, mas acarreta a perda da visão global do problema.

Na Seção 5.3, uma nova proposta de método heurístico é feita para o PPRSD. O método proposto baseia-se na mesma decomposição efetuada por Carneiro *et al.*. Entretanto, um novo método de resolução, mais eficiente, é proposto para o principal subproblema. Além disso, uma fase de melhoria é adicionada. Tal fase recupera, em parte, a visão geral do problema perdida com a decomposição, permitindo alcançar regiões do espaço de busca inacessíveis ao método original.

5.2 A Heurística de Carneiro *et al.*

O método proposto por Carneiro *et al.* [14] atua decompondo o PPRSD em três subproblemas hierarquicamente organizados, como mostra a Figura 5.1. No nível superior, há o problema da localização/dimensionamento dos transformadores. No nível inferior há os problemas de roteamento da rede primária e roteamento da rede secundária.

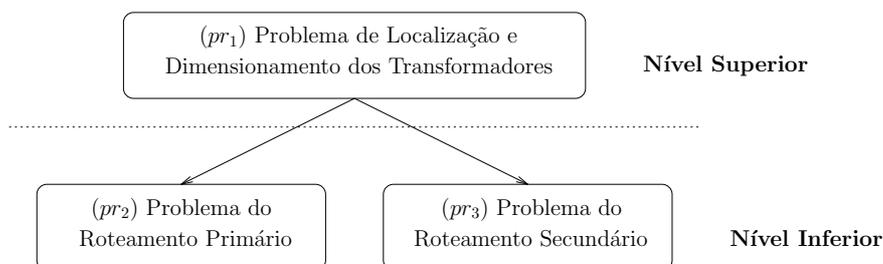


Figura 5.1: Hierarquia dos subproblemas de Carneiro *et al.*

A hierarquia se dá pelo fato que os dois subproblemas do nível inferior só poderem ser resolvidos uma vez que o subproblema do nível superior o for, dado que o roteamento dos alimentadores depende da posição dos transformadores. Assim, o método de resolução baseado nesta decomposição consiste em se encontrar uma solução para (pr_1) e, a partir desta solução, encontrar soluções para (pr_2) e (pr_3) . A união das soluções dos três subproblemas constitui uma solução do PPRSD.

5.2.1 Metodologia de Solução

Cada um dos três subproblemas é resolvido por um método heurístico. Para isso, (pr_1) , (pr_2) e (pr_3) são formulados como problemas clássicos de otimização. Para cada subproblema, escolhe-se a formulação que se mantenha mais fiel possível à função objetivo original.

Formulação para (pr_1) : Uma boa formulação e uma boa solução do problema de localização / dimensionamento dos transformadores são fundamentais para a obtenção de uma boa solução para o PPRSD.

De fato, (pr_1) é o subproblema central na decomposição efetuada.

Na heurística de Carneiro *et al.*, (pr_1) é formulado como um problema de *p*-medianas não-capacitado, que consiste em achar a localização dos p^1 transformadores de modo que cada nó de demanda seja conectado ao transformador mais próximo, e que a soma dos momentos elétricos seja minimizada. Por momento elétrico entre um dado transformador e um dado nó da rede deve-se entender o produto da demanda deste nó pela distância mínima que os separa. Despreza-se a capacidade dos transformadores pois o problema não-capacitado é bem mais simples de resolver.

Formulação para (pr_2) : Na rede secundária há dois tipos de custos: os fixos, que dependem da extensão da rede instalada, e os variáveis, que dependem do fluxo de potência através dos alimentadores. A formulação para (pr_2) decidiu privilegiar os custos variáveis por dois motivos: 1) como discutido na Seção 1.6, os custos fixos são constantes (não otimizáveis) devido a inexistência de vãos na rede secundária e 2) os custos variáveis rapidamente se tornam mais importantes que os custos fixos, como indica a Figura 3.2.

Assim, a formulação utilizada é a do *problema de caminhos mínimos*. Tenta-se conectar cada nó de demanda ao transformador mais próximo. De fato, trata-se apenas da idéia de minimização dos momentos elétricos, já explicitada em (pr_1) . Um ponto interessante nesta escolha é que ela tende a respeitar uma outra restrição do PPRSD, não abordada diretamente, a restrição das quedas de tensão: minimizando o momento elétrico tende-se a eliminar-se o problema das quedas de tensão.

Formulação para (pr_3) : Diferentemente do caso da rede secundária, na rede primária o problema das quedas de tensão e das perdas elétricas não é tão grave². Neste caso, os custos fixos são predominantes. Por este motivo, uma formulação diferente é utilizada para o problema de roteamento da rede primária.

A minimização dos custos fixos é obtida através da minimização do comprimento total da rede primária. A melhor formulação para este problema é através do *Problema de Steiner*, que consiste em conectar com menor custo possível alguns dos nós de um grafo, podendo ou não utilizar os nós restantes (que se usados serão conhecidos como nós de Steiner).

5.2.2 Técnicas de Solução

A vantagem de formular os subproblemas como problemas clássicos é o fato de se poder usar métodos eficientes de resolução disponíveis na literatura.

¹O parâmetro p poderia alternativamente ser encarado como uma variável, o que aumentaria a complexidade de (pr_1) .

²Considerando-se a parte da rede primária que é manipulada pelo PPRSD.

Resolução do p – medianas: Carneiro *et al.* utilizam um método heurístico construtivo, seguido de uma fase de melhoria, para obtenção da solução do problema de p -medianas.

O método construtivo [18] consiste basicamente em um procedimento iterativo que insere uma mediana por vez na solução. Primeiramente, insere-se na solução a melhor mediana (aquela que seria escolhida no problema de p -medianas com $p = 1$). Estando esta mediana fixa, busca-se a segunda melhor mediana, inserindo-a na solução final. O procedimento prossegue até que p medianas tenham sido escolhidas.

O método construtivo é seguido por uma heurística de melhoria [73] que tenta aprimorar a solução incumbente trocando a posição de medianas. O método é iniciado com a solução construtiva e avalia o ganho na função objetivo ao se tirar uma mediana do nó i e colocá-la no nó j , sem medianas até o momento. Caso haja ganho, a troca é efetuada e o processo reiniciado. Caso todos os pares (i, j) sejam testados sem sucesso, o procedimento é finalizado.

Resolução do problema de caminhos mínimos: O problema de caminhos mínimos surge como uma consequência do problema de p -medianas. Assim, ao se resolver (pr_1) , (pr_2) é automaticamente resolvido, estando cada nó de demanda associado ao nó mediana (transformador) mais próximo.

Resolução do Problema de Steiner: O Problema de Steiner é resolvido através de uma metodologia heurística baseada no algoritmo de Prim [4]. Primeiramente, monta-se um grafo completo não-orientado com os nós onde já existe rede primária e com os nós onde serão instalados transformadores. O custo de um arco ligando o nó i ao nó j deste grafo é dado pelo caminho mínimo entre os arcos i e j .

Uma vez de posse deste subgrafo completo (de cardinalidade $n' < n$), aplica-se o algoritmo de Prim, obtendo-se a árvore de menor custo que conecta estes pontos (caso não existissem outros nós no grafo). É feita então uma busca por pontos de Steiner no grafo original (cardinalidade n). Como pontos de Steiner têm grau ≥ 3 , o que se faz é uma lista com todos os nós n' mais os nós com grau ≥ 3 . Então, avalia-se o custo de se adicionar um nó candidato a Steiner na árvore obtida anteriormente com o algoritmo de Prim. O nó que apresenta maior ganho é inserido e o procedimento reiniciado, até que nenhum nó de Steiner apresente ganho ao ser inserido na árvore.

5.2.3 Algoritmo de Resolução

As técnicas de resolução para os três subproblemas são integradas com o intuito de obter-se uma solução para o PPRSD. A Figura 5.2 mostra a integração dos métodos heurísticos.

Seguindo a hierarquia já mencionada, primeiramente resolve-se (pr_1) e em seguida (pr_2) e (pr_3) . Para a resolução de (pr_1) necessita-se saber o número de transformadores da rede. Esta informação não é

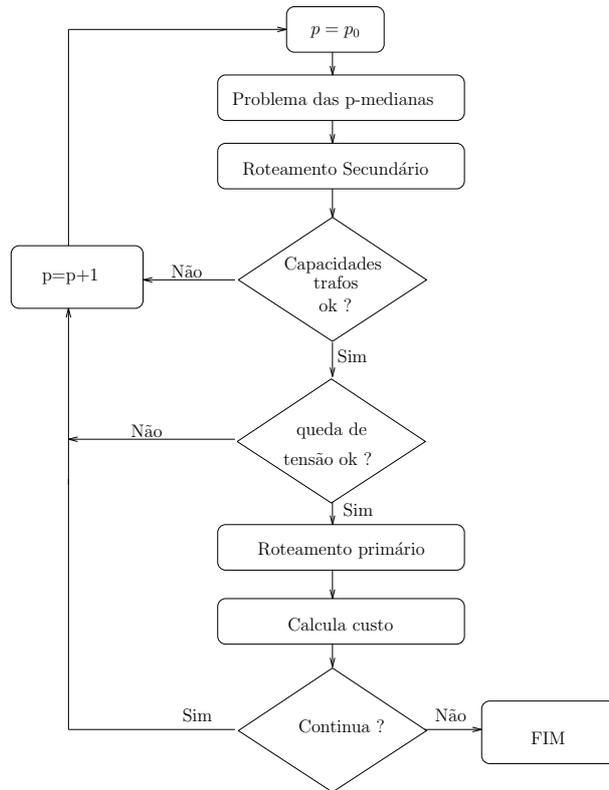


Figura 5.2: Heurística de Carneiro *et al.*

conhecida a priori, uma vez que ela é uma das variáveis de otimização. A solução deste impasse é feita resolvendo-se o algoritmo diversas vezes, para diferentes valores de p . Assim, internamente, p é fixo mas, externamente, p é uma variável de otimização. Um bom valor de inicialização p é dado pelo menor número de transformadores capaz de atender a demanda (considerando todos os transformadores com a maior capacidade nominal disponível)³

Resolvido (pr_1), têm-se os nós designados para instalação de transformadores e os nós associados a estes transformadores. A capacidade de cada transformador é ajustada para uma capacidade nominal disponível, imediatamente acima da soma das demandas dos nós conectados àquele transformador. Caso não exista um transformador com tal capacidade, alguns consumidores são transferidos para transformadores vizinhos ociosos. Se ainda assim verifica-se uma infactibilidade, a solução corrente é descartada, o número de transformadores é aumentado de 1 e o método retorna ao problema das p -medianas.

Para as soluções factíveis, verifica-se a queda de tensão. Caso esta queda encontre-se dentro dos valores estabelecidos, efetua-se o roteamento primário e calcula-se o custo. Faz-se $p = p + 1$ e retorna-se

³Este valor é simplesmente dado pelo menor inteiro maior que a divisão da demanda total pela capacidade nominal do maior transformador disponível em estoque.

ao processo de otimização, até que um critério de parada seja atingido (por exemplo, $p > p_{max}$).

5.3 Heurística Proposta

A heurística de Carneiro *et al.* é uma utilização feliz de idéias clássicas da pesquisa operacional para formular problemas reais.

A parte central da heurística é a formulação do problema de localização dos transformadores através de um p -medianas. Esta formulação mostra-se extremamente adequada, apresentando resultados eficientes com baixíssimo esforço computacional (veja Capítulo 9). Além disso, vale destacar a eficiência da consideração das diferentes naturezas dos custos das redes primária e secundária, e a consequente utilização de metodologias diferentes para tais problemas na heurística (caminho mínimo e Steiner).

A grande limitação da heurística de Carneiro *et al.* é o fato dos subproblemas serem resolvidos de maneira míope, i.e., embora as decisões tomadas em (pr_1) afetem diretamente (pr_2) e (pr_3) , elas são tomadas sem levar em conta este fato.

A heurística proposta neste trabalho contorna esta limitação de duas formas: o aumento da eficiência do método de resolução do p -medianas e a inserção de uma fase de busca local considerando o custo global do problema.

Novo método para o p -medianas: O aumento da eficiência da resolução do p -medianas é realizado resolvendo-se o problema não mais através de uma busca gulosa seguida de melhoria (como em [14]), mas através de uma heurística mais sofisticada, baseada em Relaxação Lagrangiana. Na Seção 5.3.1 esta nova heurística é detalhada.

Fase de busca local: A fase de busca local atua considerando o custo global do problema. Com isso, tenta-se eliminar a “miopia” introduzida ao se considerar o problema através de subproblemas independentes. Na Seção 5.3.2 esta fase de busca é explicitada.

5.3.1 Relaxação Lagrangiana

Na nova heurística, as técnicas de solução para (pr_2) e (pr_3) continuam as mesmas. A nova proposta do trabalho concentra-se na resolução do problema de p -medianas de uma forma mais eficiente. Esta escolha se dá por se avaliar que os resultados da heurística são amplamente dependentes dos resultados de (pr_1) . Para resolução deste subproblema, no lugar da heurística gulosa seguida por uma melhoria, optou-se por atacar o problema através de Relaxação Lagrangiana.

Relaxação Lagrangiana é um método especialmente útil para resolução de uma gama de problemas combinatórios [29, 30]. O conceito sob o qual se baseia a Relaxação Lagrangiana é a percepção de que muitos problemas combinatórios de difícil resolução podem ser reduzidos a problemas simples, quando se extrai um pequeno conjunto de restrições. Então, a idéia é promover a relaxação deste conjunto de restrições e obter limitantes, provavelmente de melhor qualidade que os fornecidos por uma relaxação linear simples. Estes limitantes podem ser usados em uma expansão de árvore de um *Branch and Bound*, por exemplo, ou em um método derivado diretamente da Relaxação Lagrangiana (como será visto na continuação).

A Relaxação Utilizada

Para entender a aplicação da Relaxação Lagrangiana ao problema das *p*-medianas, tome-se a formulação abaixo:

$$z = \text{Min} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \quad (5.1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N \quad (5.2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{jj} = p \quad (5.3)$$

$$x_{ij} \leq x_{jj}, \quad \forall i, j \in N, i \neq j \quad (5.4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in N \quad (5.5)$$

(5.1)-(5.5) – Formulação do problema das *p*-medianas

onde:

$N = \{1, \dots, n\}$, sendo n o número de vértices da rede;

p = número de medianas;

d_{ij} = a distância (momento elétrico) entre os nós i e j .

$x_{ij} (i \neq j)$ = variável binária associada à alocação: vale 1 se o nó i está alocado à mediana j e 0 caso contrário.

x_{jj} = variável binária associada à construção de medianas: vale 1 se j recebe uma mediana e 0 caso contrário.

A função objetivo minimiza a distância (no caso do PPRSD, o momento elétrico) entre cada nó e a mediana à qual ele está alocado. As restrições (5.2) garantem que cada nó está associado a uma mediana, enquanto as restrições (5.4) afirmam que um nó i só pode estar associado a um nó j , se este nó j for mediana. As restrições (5.3) fixam o número de medianas em p e as restrições (5.5) denotam o caráter binário das variáveis.

As restrições complicadoras, neste caso, são as restrições (5.2). De fato, dualizando tais restrições o problema obtido é:

$$v(Rel_\lambda) = Min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} - 1 \right)$$

Sujeito a (5.3), (5.4) e (5.5).

Ou, escrito de forma mais compacta:

$$v(Rel_\lambda) = Min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (d_{ij} + \lambda_i) x_{ij} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \tag{5.6}$$

Sujeito a (5.3), (5.4) e (5.5).

Este problema, chamado de Problema Relaxado ou Problema Lagrangiano, possui uma estrutura tal que algumas variáveis binárias são limitadas superiormente por outras variáveis binárias. Esta característica é conhecida como VUB (*Variable Upper Bounded* – Variável Limitada Superiormente). A estrutura VUB do problema, ocasionada por (5.4), adicionada à função objetivo, permite obter a solução de maneira direta:

Para x_{jj} , basta definir β_j como $\sum_{i=1}^n \min(0, d_{ij} + \lambda_i)$. Os valores ótimos x_{jj} devem obedecer:

$$\begin{aligned} & Min \sum_{j=1}^n \beta_j x_{jj} \\ \text{s.a. } & \sum_{j=1}^n x_{jj} = p \\ & x_{jj} \in \{0, 1\}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

A sua solução é trivial (basta atribuir 1 aos p x_{jj} com menores β_j e 0 aos demais).

Para x_{ij} basta fazer:

$$x_{ij} = \begin{cases} x_{jj}, & \text{se } d_{ij} + \lambda_i \leq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.8)$$

Definindo-se assim os valores de todas as variáveis do problema.

Heurística Lagrangiana

O algoritmo de resolução aqui utilizado é baseado no trabalho de Senne e Lorena [66]. Trata-se de um método de subgradiente que, atualizando os valores de λ , tenta obter, a partir do problema relaxado – (5.6) – a melhor solução possível para o problema das *p*-medianas – (5.1)–(5.5).

Prova-se que $v(Rel_\lambda)$ é um limitante inferior para z [78]. Logo, é natural que se deseje encontrar

$$w = \underset{\lambda}{Max} \ v(Rel_\lambda) \quad (5.9)$$

Tal problema é chamado de problema dual.

Infelizmente, para problemas inteiros não se garante sempre que $z = w$. Em muitos casos ocorre o que se chama de *gap* de dualidade, quando o ótimo do dual é diferente do ótimo do primal – como pode ser chamada a formulação (5.1)–(5.5), em oposição ao problema dual (5.9).

Entretanto, é possível aproximar w através de um algoritmo de subgradiente. Prova-se que, ao se resolver o Problema Lagrangiano (5.6), para um $\bar{\lambda}$ fixo, obtém-se uma solução x_{ij}^λ tal que $g_j^\lambda = \sum_{j=1}^n x_{ij}(\lambda) - 1$ é um subgradiente da função w no ponto $\bar{\lambda}$. Um algoritmo iterativo, do tipo gradiente que dá passos adequados⁴ na direção do subgradiente é capaz de levar ao valor ótimo w do problema dual.

Devido ao gap de dualidade, uma alternativa que fornece bons resultados é empregar uma heurística Lagrangiana onde agrega-se ao algoritmo de subgradiente um procedimento de factibilização da solução (em geral infactível) encontrada a cada iteração do método subgradiente. Com isso, tem-se a cada passo uma solução factível que tende a ser melhorada conforme o algoritmo evolui. Um pseudo-código desta heurística Lagrangiana é mostrado na sequência.

Nomenclatura:

C - conjunto das medianas já fixadas, isto é: $C = \{j | x_{jj} = 1\}$.

UB - limitante superior para o problema das *p*-medianas – (5.1).

LB - limitante inferior para o problema das *p*-medianas – (5.1).

Rel_λ - problema relaxado – (5.6).

⁴Certas condições de atualização do tamanho do passo são necessárias, ver [78].

x^λ - solução do problema relaxado.

x_f - solução do problema relaxado após factibilização.

v_f - valor da solução do problema relaxado após factibilização.

$v(Rel_\lambda)$ - valor da solução do problema relaxado – (5.6), dado por (5.8) e (5.7), para um dado valor de λ .

Heurística Lagrangiana

Dado $\lambda > 0$, $\lambda \neq 0$;

Faça $LB = -\infty$, $UB = +\infty$, $C = \phi$;

Repita

Resolva Rel_λ , obtendo x^λ e $v(Rel_\lambda)$;

Obtenha uma solução factível, x_f , e seu valor v_f ;

Atualize $LB = \max[LB, v(Rel_\lambda)]$;

Atualize $UB = \min[UB, v_f]$;

Fixe $x_{jj} = 1$ se $v(Rel_\lambda | x_{jj} = 0) \geq UB$, $i \in N - C$ e atualize C ;

Faça $g_j^\lambda = \sum_{i=1}^n x_{ij}^\lambda - 1$, $j \in N$

Atualize Θ

Faça $\lambda_j = \min[0, \lambda_j + \Theta g_j^\lambda]$, $j \in N$

até critério de parada

Atualização de Θ : A atualização do passo do algoritmo, Θ é dada por:

$$\Theta = \frac{\pi(UB - LB)}{\|g^\lambda\|^2}$$

O controle do parâmetro π é feito pela estratégia clássica de Held e Karp [38]. π é iniciado em 2, sendo dividido por 2 sempre que LB permanece inalterada por 30 iterações sucessivas.

Critério de Parada: Os critérios de paradas utilizados foram:

a) $\pi \leq 0,005$;

b) $UB - LB < 1$;

c) $\|g^\lambda\|^2 = 0$;

d) Todas as medianas fixadas.

Factibilização da solução x^λ : A solução do Problema Lagrangiano não é necessariamente factível para o problema original. Entretanto, uma solução factível é necessária para atualização do limitante superior. Como se trata do problema não-capacitado, a factibilização é feita de maneira simples:

1) Gera Medianas: aos nós com os p menores valores de β são alocadas medianas. I é o conjunto destas medianas

2) Aloca nós às medianas: aloque cada nó à mediana (conjunto I) mais próxima, i.e.:

$$x_{f_{ik}}^\lambda = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in I \text{ e } k = \text{índice que minimiza } \text{Min}_{i \in I} \{d_{ij}\}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Heurísticas Auxiliares

Para acelerar o processo de convergência, duas heurísticas adicionais foram implementadas. A Primeira, *location-allocation heuristic*, baseada nos trabalhos de Cooper [17] e Taillard [71], é usada sempre que o limitante superior (UB) é melhorado. A segunda heurística, *interchange heuristic*, sugerida por Beasley [10] é utilizada sempre que π é atualizado por $\pi/2$.

Interchange Heuristic (IH): A idéia da IH é efetuar uma busca local nas medianas, trocando a posição de uma mediana. Um pseudocódigo é fornecido na sequência.

Interchange Heuristic

Faça $U = \sum_{j=1}^n \text{Min}_{i \in I} d_{ij}$, correspondente à solução x^λ com maior LB.

$m = p/2, 5$;

Para $j = p + 1$ até $j = p + m$ faça

Para $i = 1$ até p , $i \notin C$, faça

troque β_i com β_j e atualize I

recalcule v_f

se $v_f < U \Rightarrow U = v_f$

caso contrário desfaça a troca e atualize I

fim:Para

fim:Para

Location-Allocation Heuristic (LAH): A LAH atua rearrumando os agrupamentos. O princípio surge da observação que, estando o agrupamento definido, pode ser que exista um outro nó, dentro dele, que se preste melhor ao papel de mediana do que a mediana atual. Segue um pseudocódigo.

Location-Allocation Heuristic

Seja a solução factível x^f que acaba de atualizar o limitante superior.

Para cada mediana $i \in I$

Para cada nó j pertencente ao agrupamento atendido por i

troque a mediana de i para j e atualize I

recalcule v_f .

caso $v_f < UB \Rightarrow$ atualize UB e mantenha troca

caso contrário, desfaça a troca e atualize I

fim:Para

fim:Para

5.3.2 Busca Local

A busca local implementada tenta atacar uma das principais dificuldades do método de Carneiro *et al.* [14]: a falta de consideração do problema como um todo. Ela atua alterando a posição das medianas

e recalculando o custo global.

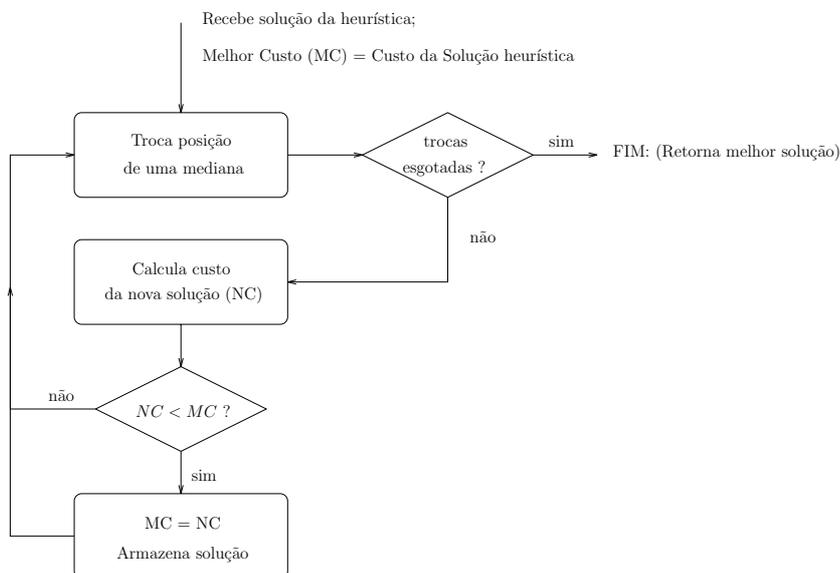


Figura 5.3: Diagrama esquemático da busca local

Para o cálculo do novo custo global, é necessário recalcular a rede secundária e a rede primária. Embora isto tenha que ser feito para cada modificação efetuada (passo da busca local), o novo cálculo não chega a ser um problema, uma vez que os algoritmos são suficientemente rápidos para que a busca local possa ser efetuada em poucos segundos, mesmo para redes reais.

A Figura 5.3 mostra esquematicamente o funcionamento da busca local.

Primeiramente, entrega-se ao algoritmo a melhor solução obtida. A partir desta solução, efetuam-se trocas na posição dos transformadores. As trocas são efetuadas da seguinte maneira: para cada mediana, tenta-se trocar a posição desta por todas as outras posições que não contém medianas. A ordem com que os nós não-medianas são testados obedece ao valor dos β 's, dando prioridade aos nós não-medianas com menores β 's.

Para cada troca efetuada, calcula-se o valor da nova solução. Caso esta nova solução tenha menor custo que a melhor solução armazenada, guarda-se a nova solução.

O procedimento é interrompido quando todas as trocas possíveis foram testadas desde a última melhoria encontrada.

Capítulo 6

Abordagem Híbrida

“As ciências exatas são dominadas pela idéia da aproximação”

Bertrand Russell

6.1 Introdução

Uma abordagem híbrida de resolução de um problema de otimização é uma abordagem que incorpora características de mais de um método de resolução. A motivação para se construir um método híbrido é a esperança de se capturar as boas e eliminar as más características dos métodos originais.

Neste trabalho, a abordagem híbrida é criada a partir das abordagens exata e heurística, estudadas nos Capítulos 4 e 5.

Este capítulo apresenta a estrutura da abordagem híbrida desenvolvida. Na Seção 6.2, as abordagens exata e heurística são revisitadas, dando ênfase às características desejadas e às principais limitações de cada uma delas. Esta seção permite a compreensão das escolhas efetuadas no desenvolvimento do algoritmo híbrido e do algoritmo híbrido estendido, estudados nas seções 6.3 e 6.4.

6.2 Características Desejadas

Nesta seção, resumem-se as características desejadas (e as indesejadas) das abordagens exata e heurística desenvolvidas nos Capítulos anteriores. A subseção 6.2.1 aborda o método exato do Capítulo 4 enquanto a subseção 6.2.2 estuda os métodos heurísticos do Capítulo 5.

6.2.1 Abordagem Exata

As vantagens e desvantagens da abordagem exata de resolução são muitas claras. Como vantagem principal, a garantia da otimalidade da solução. Como desvantagem, o grande esforço computacional (representado em termos do tempo necessário para se obter as soluções) e a impossibilidade de se resolver grandes instâncias do problema.

Os grandes tempos computacionais devem-se à presença de muitas variáveis inteiras nas formulações dos problemas (confira Seção 3.4). De fato, uma maneira atraente de se reduzir o tempo computacional é eliminando algumas destas variáveis.

A redução do espaço de busca pode ser feita, por exemplo, pela diminuição do número de postes candidatos a receber transformadores. Obviamente, tal redução não pode ser feita a esmo, sob pena de se perderem boas soluções. É necessário um critério que garanta que boas soluções continuarão presentes no espaço de busca reduzido.

6.2.2 Abordagens Heurísticas

A grande vantagem das abordagens heurísticas é a velocidade de execução. Em poucos segundos, redes reais são simuladas e boas soluções podem ser obtidas. A desvantagem recai na menor qualidade das soluções obtidas em comparação com os métodos exatos.

Em particular, para o caso do PPRSD, as soluções obtidas através dos métodos heurísticos, discutidos neste trabalho, apresentam boa qualidade. Em especial, o método das *p*-medianas mostra-se extremamente eficaz para o problema. A grande dificuldade consiste em unir este método aos outros métodos heurísticos de forma a minimizar as perdas de qualidade devido à consideração míope do problema (discutida no Capítulo 5).

Uma possível solução seria utilizar a solução do problema de *p*-medianas em formulações mais sofisticadas do que o Problema do Caminho Mínimo e o Problema de Steiner.

6.3 Algoritmo Híbrido

A Tabela 6.1 resume a breve discussão da seção anterior, mostrando as duas abordagens apresentadas e as principais dificuldades encontradas em cada uma delas.

Estas dificuldades motivam a criação de um método híbrido pelo fato de serem, de certa forma, complementares para as duas abordagens. De fato, enquanto a abordagem exata tem dificuldade em trabalhar com muitas possibilidades de postes-candidatos a receber transformadores, a abordagem heurística lida

muito bem com esta situação: formulando o problema através do *p-medianas*.

Abordagem	Principal dificuldade	Possível Solução
Exata	Tempo de resolução	Diminuição do espaço de busca com a eliminação de algumas variáveis inteiras
Heurística	Interligação entre as subheurísticas	Aproveitamento da solução do <i>p-medianas</i> em métodos mais sofisticados de cálculo das redes

Tabela 6.1: Principais dificuldades encontradas pelas abordagens exata e heurística.

Por outro lado, a abordagem heurística tem dificuldade em encontrar a melhor rede secundária estando a posição dos transformadores definidas, enquanto na abordagem exata este problema é resolvido de forma muito eficiente. Na realidade, estando as posições dos transformadores definidas, a formulação exata do problema de se encontrar a melhor rede secundária recai em um problema de programação linear, para o qual a abordagem exata apresenta ótimas soluções.¹

A idéia do algoritmo híbrido é, portanto, utilizar o que há de melhor na heurística: o cálculo da posição dos transformadores através do problema das *p-medianas* e a determinação da rede primária através do Problema de Steiner, e o que há de melhor na abordagem exata: o cálculo eficiente da melhor rede secundária possível para um conjunto de transformadores. A Figura 6.1 apresenta de forma esquemática a estrutura do algoritmo.

A “parte heurística” (para simplificar – AH-Heu) do algoritmo consiste na determinação da posição dos transformadores e na determinação da interligação entre estes transformadores e a rede primária existente.

A “parte exata” (AH-Exa) recebe a posição dos transformadores e, para estas posições, determina a melhor rede secundária possível, ajustando cada transformador à capacidade nominal adequada. Isto é feito através de um problema de programação linear, o Problema de Fluxo em Redes com Custo Mínimo (PFRCM) [4].

A solução do problema das *p-medianas* pode ser obtida através do método proposto por Carneiro *et. al* [14] ou através do método proposto neste trabalho, baseado em Relaxação Lagrangiana. No Capítulo 9, os resultados com ambas as possibilidades são comparados.

Uma simplificação do algoritmo apresentado na Figura 6.1 pode ser vista na Figura 6.2. Nesta nova versão, nem toda solução do problema de *p-medianas* é testada em AH-Exa, mas apenas aquela que obteve melhor resultado na parte heurística do algoritmo. Esta é a estratégia usada neste trabalho.

¹A rede primária interligando os transformadores pode continuar a ser calculada através do Problema de Steiner.

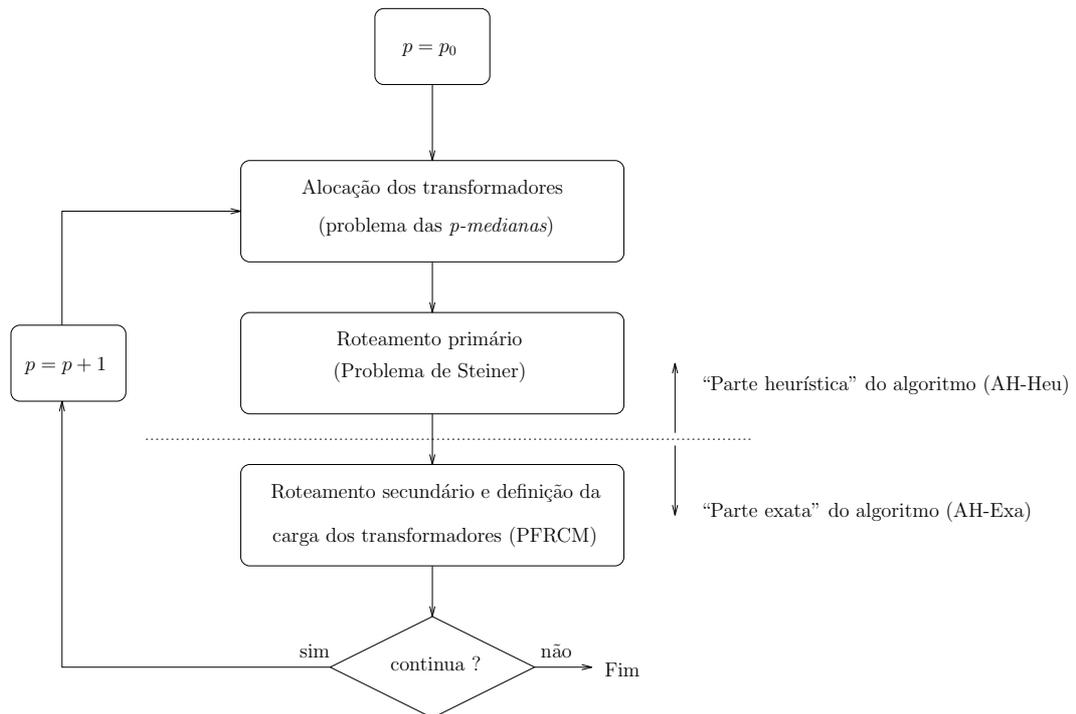


Figura 6.1: Algoritmo Híbrido

Também para o método heurístico da Figura 6.2, pode-se escolher tanto o método proposto por Carneiro *et al.*, como a heurística proposta neste trabalho. No Capítulo 9, comparam-se os resultados obtidos pelas duas estratégias.

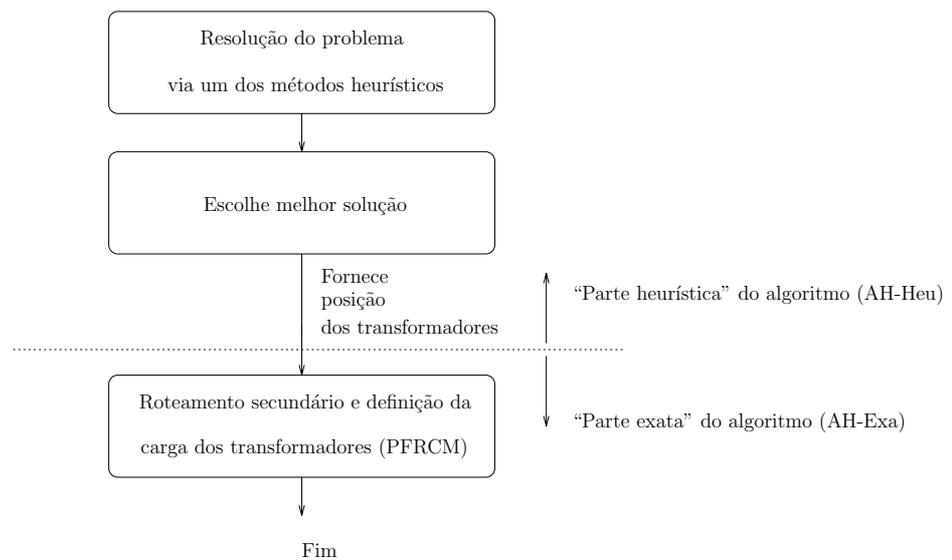


Figura 6.2: Algoritmo Híbrido (Modificado)

6.4 Algoritmo Híbrido Estendido

Uma limitação do Algoritmo Híbrido apresentado na seção anterior é a extrema rigidez na posição dos transformadores. Uma vez definidas pela solução do problema de *p-medianas*, estas posições permanecem absolutamente inalteradas.

A importância desta limitação torna-se ainda maior quando se tem em mente que o problema das *p-medianas*, embora seja uma formulação adequada, não deixa de ser uma aproximação para o problema real. Esta aproximação não considera sequer os custos reais, mas apenas os momentos elétricos da rede (basta lembrar que a formulação utilizada ignora a capacidade dos transformadores). Embora os momentos elétricos tenham uma alta correlação com os custos reais, pequenos erros podem ser cometidos, deslocando levemente a posição de algumas medianas. Seria interessante permitir que a “parte exata” do algoritmo híbrido pudesse ter algum controle sobre a posição das medianas, atuando como um corretor de eventuais desvios efetuados pela “parte heurística”.

A idéia é utilizar AH-Heu como um indicador da melhor região possível para os transformadores. Dentro desta região, AH-Exa teria autonomia para escolher as melhores posições. Esta escolha, por levar em conta os custos reais da rede, e por olhar o problema como um todo, é muito mais efetiva.

A Figura 6.3 explicita a nova proposta. Em 6.3(a), mostra-se a solução fornecida pelo problema das *p-medianas* para uma rede de teste. A Figura 6.3(b) mostra os candidatos a transformadores considerados por AH-Exa. Além da solução fornecida por AH-Heu, considera-se uma “nuvem” de candidatos em torno desta solução, permitindo que o algoritmo exato tenha uma maior autonomia, sem comprometer demasiadamente os tempos computacionais.

A “nuvem” em torno da solução original do *p-medianas* pode ser feita de diversas maneiras. Algumas são listadas abaixo:

- Considerando-se como candidatos os postes conectados diretamente aos postes-solução do *p-medianas* (caso da Figura 6.3)
- Considerando-se como candidatos os postes que se situarem até uma distância r de um poste-solução.
- Considerando-se como candidatos os k postes mais próximos de cada poste-solução.

Uma maneira de diminuir o tempo de resolução computacional de AH-Exa é determinando que, de cada “nuvem” (região em torno de uma mediana), um e apenas um transformador seja escolhido. Evitam-se assim soluções de comprovada má qualidade (como quatro transformadores instalados em uma mesma

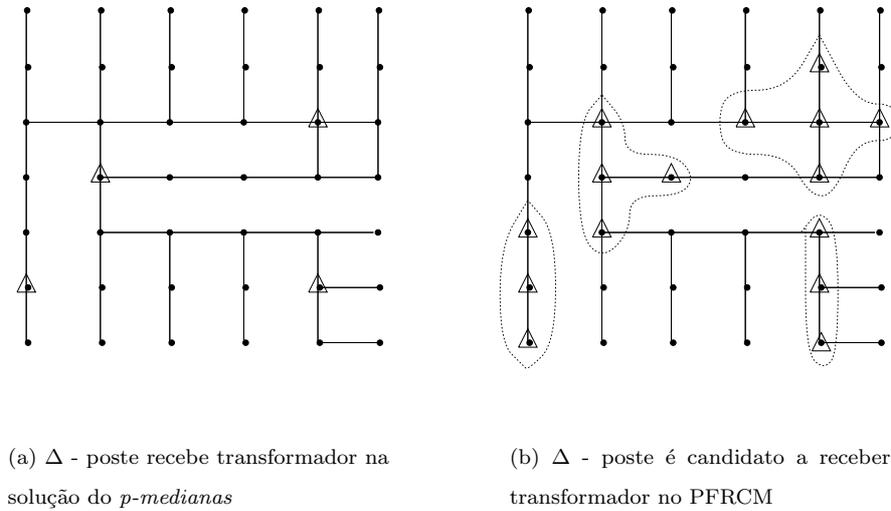


Figura 6.3: Criação de uma região (“nuvem” em torno da solução do p -medianas para definição dos candidatos a receber transformador

nuvem por exemplo) e mantém-se a estrutura de solução fornecida por AH-Heu. Este comentário é especialmente importante para a consideração da rede primária, como será visto mais adiante .

A Figura 6.4 representa o Algoritmo Híbrido Estendido (AHE). Trata-se do Algoritmo Híbrido da Figura 6.1 com duas modificações: agora há uma etapa de geração da nuvem de candidatos. Com isso, não mais se resolve um problema de fluxo em redes, como anteriormente, mas um problema de programação inteira-mista. Entretanto, este PPIM apresenta um número bem mais reduzido de variáveis, o que torna sua execução bem mais rápida que a abordagem exata.

Em relação à abordagem exata, o número de variáveis é reduzido não somente pela diminuição dos postes candidatos, mas pela eliminação das variáveis binárias para consideração da rede primária. Neste caso, porém, devido a se permitir que a parte exata do algoritmo modifique um pouco a posição dos transformadores, é necessário considerar as modificações no custo da rede primária. Para isso, basta modificar o valor da função de custo dos transformadores, como explicado a seguir através de um exemplo.

A Figura 6.5 apresenta as três situações possíveis para avaliação do custo modificado dos transformadores. Na figura, os transformadores em negro são os transformadores da solução original do p -medianas. A rede primária é calculada para este conjunto de transformadores. Se, na resolução de AH-Exa, qualquer outro transformador for escolhido em detrimento de um destes, é necessário alterar o custo da rede primária. As três situações possíveis são explicitadas abaixo:

- 1) **Aumento do custo:** por exemplo, escolhendo-se o nó 7 no lugar do nó 4: a rede primária ganha

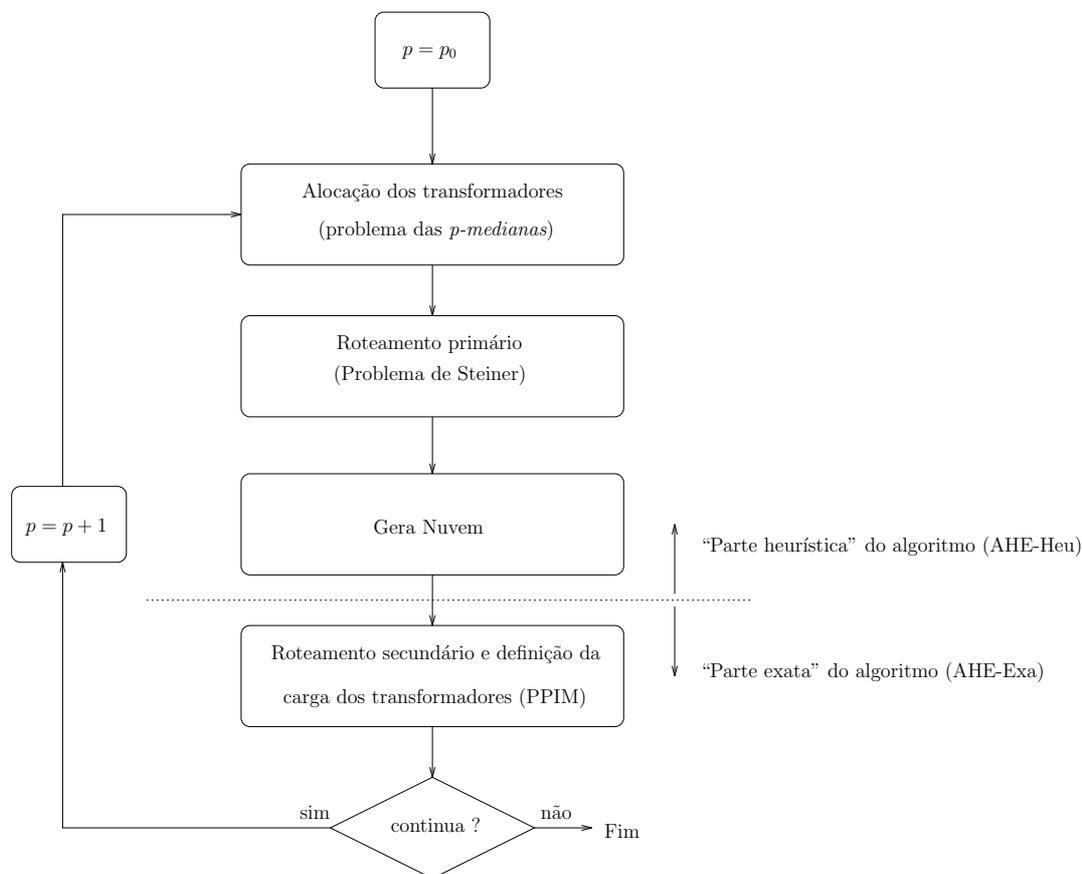


Figura 6.4: Algoritmo Híbrido Estendido

em extensão. O custo do alimentador primário ligando o nó 7 ao nó 4 deve ser incluído no custo da rede primária.

- 2) **Diminuição do custo:** por exemplo, escolhendo-se o nó 6 no lugar do nó 3: a rede primária tem sua extensão diminuída. O custo do alimentador primário ligando o nó 3 ao nó 6 deve ser retirado do custo da rede primária.
- 3) **Manutenção do custo:** por exemplo, escolhendo-se o nó 5 no lugar do nó 2: a rede primária tem sua extensão, bem como seu custo, inalterados.

As possíveis alterações de custo devem ser informadas ao algoritmo exato, de modo que ele possa considerar esta informação *durante* o processo de otimização. Isto é feito de maneira muito simples: uma pré-análise da rede primária e dos nós candidatos reavalia o custo efetivo de cada transformador. No

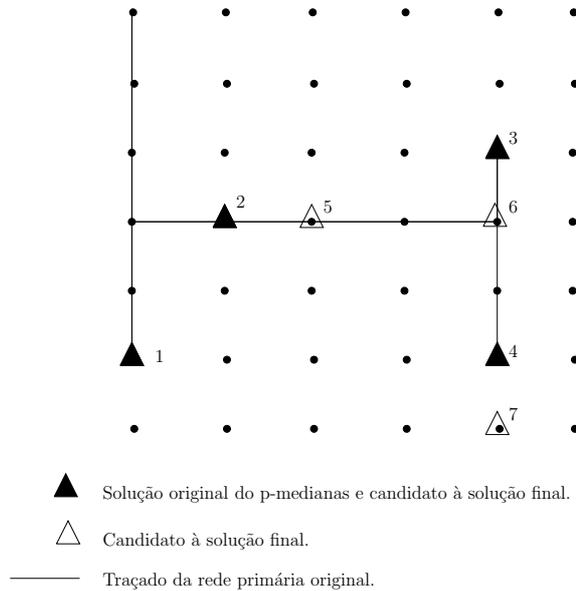


Figura 6.5: Modificações na rede primária para alterações suaves na função de custo

exemplo da Figura 6.5, a parte exata do algoritmo híbrido receberia os seguintes custos como custos dos transformadores:

$$\text{Custo-Efetivo}(z_1) = \text{Custo}(z_1);$$

$$\text{Custo-Efetivo}(z_2) = \text{Custo}(z_2);$$

$$\text{Custo-Efetivo}(z_3) = \text{Custo}(z_3);$$

$$\text{Custo-Efetivo}(z_4) = \text{Custo}(z_4);$$

$$\text{Custo-Efetivo}(z_5) = \text{Custo}(z_5);$$

$$\text{Custo-Efetivo}(z_5) = \text{Custo}(z_5);$$

$$\text{Custo-Efetivo}(z_6) = \text{Custo}(z_6) - \text{Custo do Arco Primário } (3,6);$$

$$\text{Custo-Efetivo}(z_7) = \text{Custo}(z_7) + \text{Custo do Arco Primário } (4,7);$$

É importante realçar que este procedimento só é válido devido ao comentário da página 66, onde se afirma que apenas um candidato é escolhido por nuvem. Sem esta restrição, a construção da primária teria que ser feita através da atribuição de variáveis binárias, o que definitivamente comprometeria a eficiência do algoritmo para redes grandes.

Tal estratégia pode acarretar em alguns pequenos erros, como ilustrado na Figura 6.6. A Figura 6.6(a)

mostra a rede original e um nó candidato a receber transformador. Alterando-se a posição do nó e seguindo-se a metodologia citada, tem-se a rede primária da Figura 6.6(b), quando a rede ótima seria a rede da Figura 6.6(c). Ou seja, a parte exata do algoritmo estaria prejudicando esta solução por superestimar o custo da sua rede primária. Tais erros, entretanto, não são muito significativos. Uma breve discussão pode ser encontrada no Capítulo de resultados, na Seção 9.3, página 101.

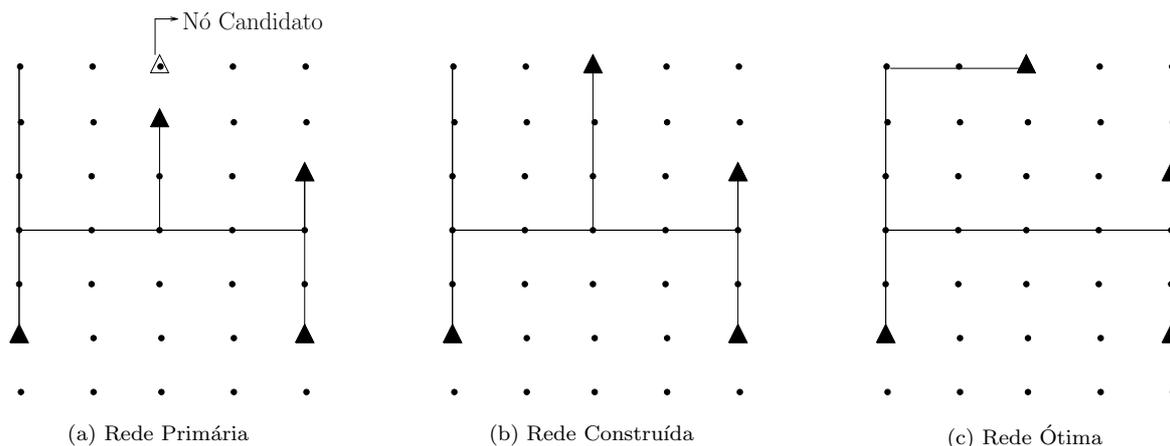


Figura 6.6: Erro introduzido pela simplificação no cálculo da rede primária.

Assim como para o Algoritmo Híbrido, também o Algoritmo Híbrido Estendido apresenta uma versão simplificada, onde apenas a melhor solução do método heurístico é testada na parte exata do algoritmo, como pode ser visto na Figura 6.7.

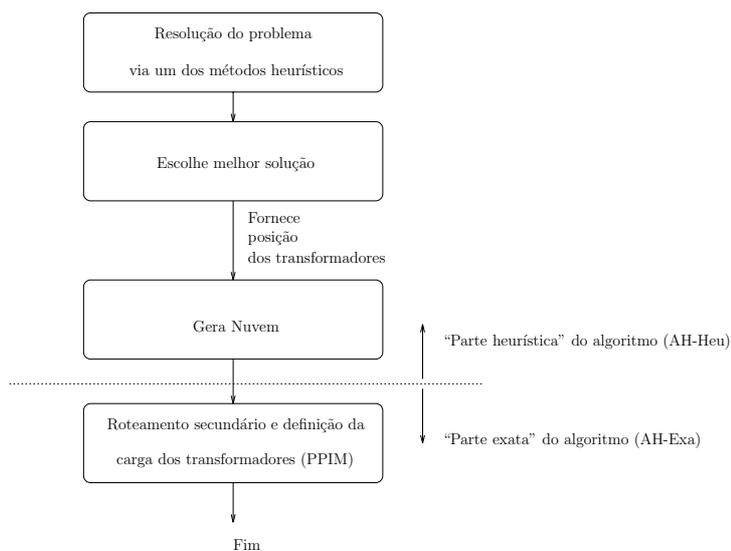


Figura 6.7: Algoritmo Híbrido Estendido (Modificado)

Neste caso, tal modificação é essencial para manter os tempos computacionais em valores baixos, uma vez que a resolução de AHE-Exa demanda a aplicação de um algoritmo de programação inteira-mista.

Os resultados obtidos pelos algoritmos AH e AHE para redes de testes e redes reais, e comparações com os outros métodos podem ser encontradas no Capítulo 9.

Capítulo 7

Abordagem Alternativa: Otimização via Computação Evolutiva

“Dei a este princípio, pelo qual cada ligeira variação, se útil, é preservada, o nome de Seleção Natural”

Darwin, A origem das espécies, III

7.1 Introdução

Algoritmos genéticos são métodos de otimização, baseados em analogias com as teorias de evolução natural de Charles Darwin. Esses métodos obtiveram projeção a partir de meados dos anos 70, após a publicação do livro de John Holland intitulado “*Adaptation in Natural and Artificial Systems*” [40].

Atualmente, algoritmos evolutivos são amplamente utilizados nos mais diferentes problemas, devido principalmente às suas características de adaptabilidade e robustez.

Neste capítulo propõe-se uma implementação baseada em algoritmos genéticos para o PPRSD. Na Seção 7.2, os algoritmos genéticos são estudados brevemente. Na Seção 7.3, um exemplo didático de implementação de um algoritmo genético é apresentado e na Seção 7.4 discute-se muito brevemente o mecanismo básico de funcionamento dos AGs. Finalmente, na Seção 7.5, as características da implementação efetuada são discutidas.

7.2 Algoritmos Genéticos

Algoritmos Genéticos (AG) são métodos de otimização, propostos na década de 70, e desde então testados com sucesso nas mais diferentes classes de problemas.

A idéia básica por trás dos AGs é uma analogia com os mecanismos de Evolução Natural, propostos por Charles Darwin. De fato, Darwin tenta explicar como os seres vivos foram capazes de se adaptar aos mais diferentes ambientes, otimizando suas chances de sobrevivência, enquanto Holland tenta copiar os mecanismos apresentados por Darwin e adaptá-los de forma a possibilitar a otimização de problemas.

As idéias de Darwin: De forma extremamente resumida, pode-se dizer que o que Darwin propõe é que as espécies evoluem através de modificações nos códigos genéticos dos indivíduos (*genótipos*). Estas modificações aparecem tanto devido à reprodução sexuada (combinação dos códigos genéticos de dois indivíduos), seja através de *mutações* (pequenas modificações neste código genético).

Cada indivíduo, desde o nascimento, passa por um processo de crescimento onde as características do seu genótipo, associadas às condições encontradas no ambiente, constroem as suas características físicas (*fenótipo*). Os indivíduos cujos genótipos favorecem o aparecimento de fenótipos adaptados ao ambiente onde vivem têm mais chances de sobrevivência e reprodução. Este é o princípio conhecido como *seleção natural*. Com isso, as boas características dos indivíduos tendem a se difundir nas próximas gerações, evoluindo a espécie em si.

As idéias de Holland: Baseado nas idéias de Darwin, Holland propõe uma nova forma de abordar problemas, um algoritmo que funciona da seguinte maneira: “Um conjunto de soluções é codificado, geralmente em uma “string”, e chamado de cromossomo ou indivíduo. O conjunto de indivíduos é dito ser uma população. Para um dado número de iterações, chamadas gerações, os indivíduos da população são submetidos a operações de *crossover* (novos indivíduos são gerados usando informação de dois indivíduos da população atual), *mutação* (indivíduos recebem leves modificações), *avaliação* (a cada indivíduo é atribuído um valor de *fitness*, que deve refletir a qualidade da solução) e seleção (indivíduos da população são selecionados para a nova geração, dando prioridade aos indivíduos mais adaptados, i.e., com maiores valores de *fitness*)” [19].

Pode-se dizer que os AGs possuem quatro características básicas que o diferenciam de outros métodos de otimização:

- apresentam dois espaços de trabalho: genótipo e fenótipo.
- fazem busca sobre uma população de soluções e não sobre uma única solução.
- fazem uso apenas de uma descrição genérica do que se deseja em uma boa solução – através da função de adequação (*fitness*).
- utilizam regras de transição probabilísticas.

A Figura 7.1 mostra graficamente a idéia dos AGs de Holland. Para cada uma das etapas do algoritmo, representadas pelos blocos da Figura 7.1, existem várias possibilidades de implementação já discutidas na literatura [8, 9, 56]. Cada novo problema requer o teste destas possibilidades e, se necessário, o desenvolvimento de novos operadores, específicos para as características do problema.

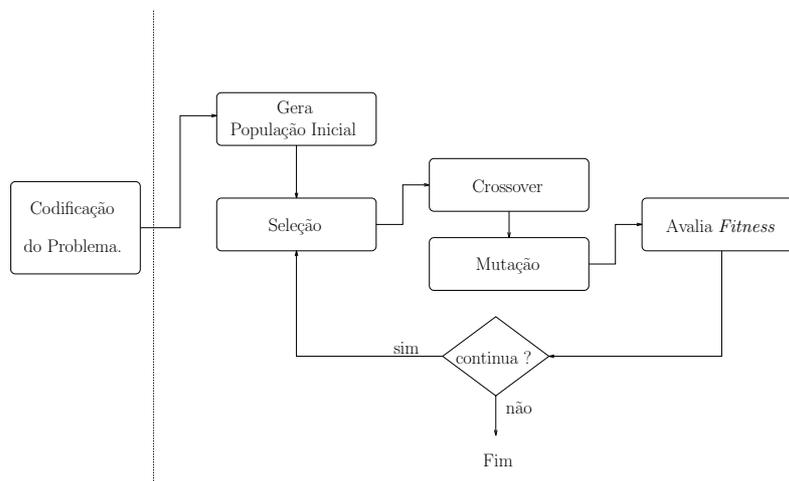


Figura 7.1: Algoritmo Genético

Codificação do Problema: Na realidade, esta etapa é preliminar à resolução do problema por AGs. Preliminar mas essencial. O sucesso de um AG depende muito da representação genética escolhida para descrever as soluções como cromossomos. Essa escolha influencia o desempenho de todas as etapas do algoritmo: avaliação de *fitness*, operadores de recombinação e de mutação, etc. O ideal é a utilização de representações compactas, completas e estáveis.

Uma representação compacta deve se valer do menor número possível de variáveis para representar de forma unívoca uma solução. Representações completas devem ser capazes de representar todas as possíveis soluções do problema, inclusive a ótima. Uma representação estável tem como característica que pequenas mudanças no cromossomo levam a alterações também pequenas da adaptabilidade. Este efeito é conhecido na literatura como “localidade da representação”.

Seleção: A seleção é uma etapa fundamental para o bom desempenho do algoritmo. Uma boa seleção deve favorecer os bons indivíduos sem causar uma convergência muito rápida da população na direção dos melhores indivíduos.

A forma de seleção mais utilizada na literatura é a *Seleção por Roleta Ponderada*. Nesta seleção, os indivíduos que passarão suas características genéticas à próxima geração são escolhidos a partir de um

sorteio, onde a chance de um indivíduo ser escolhido é proporcional ao seu *fitness*. Com isso, privilegiam-se os melhores indivíduos. A Figura 7.2 ilustra a criação de uma roleta ponderada para uma população de cinco indivíduos.

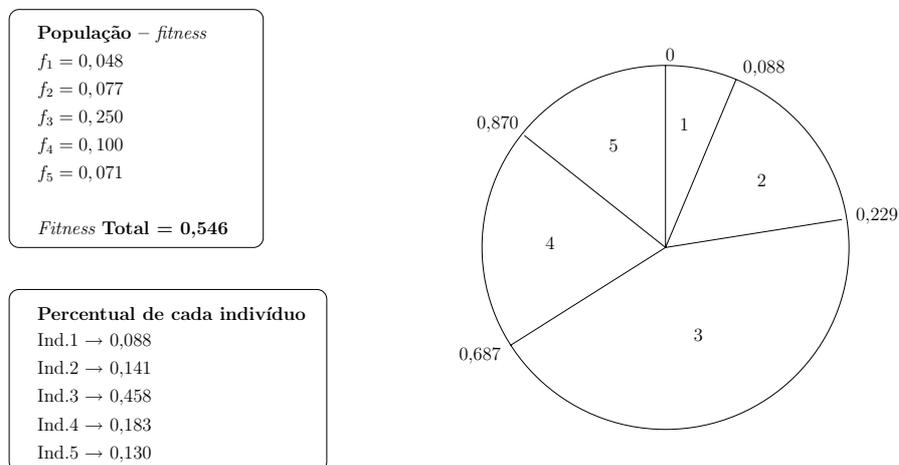


Figura 7.2: Exemplo de um procedimento do tipo *Roleta Ponderada* com uma população de 5 indivíduos

A literatura também apresenta a *Seleção Linear Com Respeito ao Rank*, onde a probabilidade de seleção de cada indivíduo depende do seu *rank* dentro da população, a *Seleção por Descendência*, onde a competição se dá apenas entre indivíduos filhos e pais (ou seja, entre os indivíduos originais e os que nasceram do seu crossover), entre outras [8, 9, 56].

Crossover: Assim como para a seleção, existem diversos operadores de crossover. De uma maneira geral, a idéia é misturar informações genéticas de dois indivíduos, originando um terceiro.

A Figura 7.3 ilustra um dos operadores de crossover mais comuns para codificação binária (*Crossover a Um Ponto*). Neste tipo de operador, um *ponto de corte* é escolhido aleatoriamente e o filho herda a informação genética do primeiro pai até este ponto, e do segundo pai a partir deste ponto.

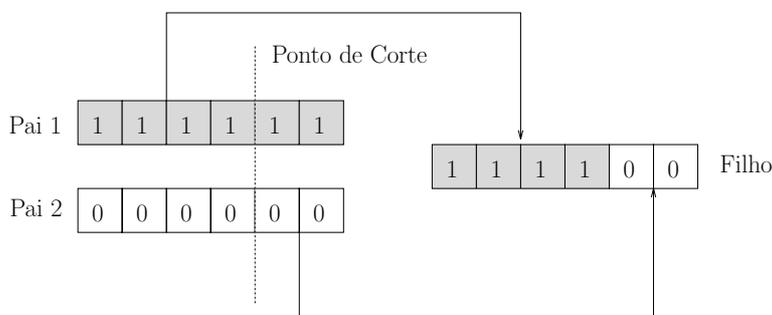


Figura 7.3: Operador de crossover a um ponto

Outros operadores para codificação binária são os operadores de *Crossover a Múltiplos Pontos* e *Crossover Uniforme*. Para codificações reais há os operadores de *Crossover Aritmético*, *Crossover Aritmético Estendido*, entre outros [8, 9, 56].

Mutação: A mutação é uma leve alteração em uma parte do cromossomo do indivíduo. A mutação é essencial dentro do algoritmo como mantenedora da diversidade da população e como exploradora de boas regiões dentro do espaço de busca.

Para a codificação binária, a *Mutação a um bit* é a mutação por excelência. A Figura 7.4 ilustra este operador.

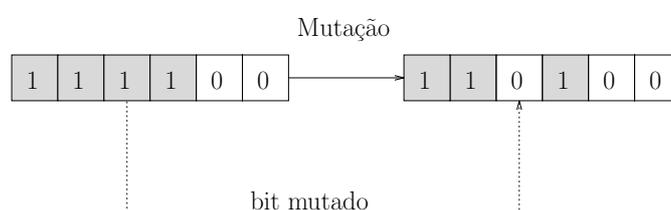


Figura 7.4: Operador de mutação a um bit

Outros operadores podem ser encontrados na literatura. Em especial, para o caso de codificação real, existe a *Mutação Aritmética*, que adiciona uma pequena perturbação ao valor do bit [8, 9, 56].

Função de *Fitness*: A determinação de uma função de *fitness* adequada para o problema é um dos passos mais importantes do algoritmo. De fato, é unicamente através da função de *fitness* que o algoritmo evolutivo recebe informações sobre o problema a otimizar. Caso esta função seja inapropriada, a otimização fica impossibilitada de encontrar as melhores soluções, por melhor que estejam configurados os parâmetros e operadores do algoritmo.

Uma característica importante da função de *fitness* é que ela deve ser calculada de uma forma eficiente. Isto pois a função de *fitness* deve ser avaliada para cada indivíduo em cada nova geração. Em uma simulação com g gerações e n indivíduos na população, a função de *fitness* terá sido calculada $g \times n$ vezes durante o processo. Assim, a eficiência do algoritmo depende muitas vezes da eficiência com a qual se calcula a função de avaliação.

7.3 Exemplo de Funcionamento

Nesta seção um breve exemplo de funcionamento dos AGs é apresentado. Trata-se de um exemplo meramente didático, inserido no texto de forma a facilitar a visualização dos conceitos da seção anterior.

Tome-se o problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \text{Min } (x - 16)^2 \\ & \text{s.a. } 0 \leq x < 32 \\ & \quad x \text{ inteiro} \end{aligned} \tag{7.1}$$

O primeiro passo para resolução de um problema via AGs é a codificação das soluções. Utilizando-se codificação binária, um cromossomo de 5 bits é suficiente para representar x dentro do espaço de busca.

O primeiro passo do algoritmo é, então, a geração de uma população inicial e avaliação dos *fitness*. Um método muito utilizado na literatura é a inicialização da população com valores aleatórios. A Figura 7.5 mostra uma população inicial gerada desta maneira.

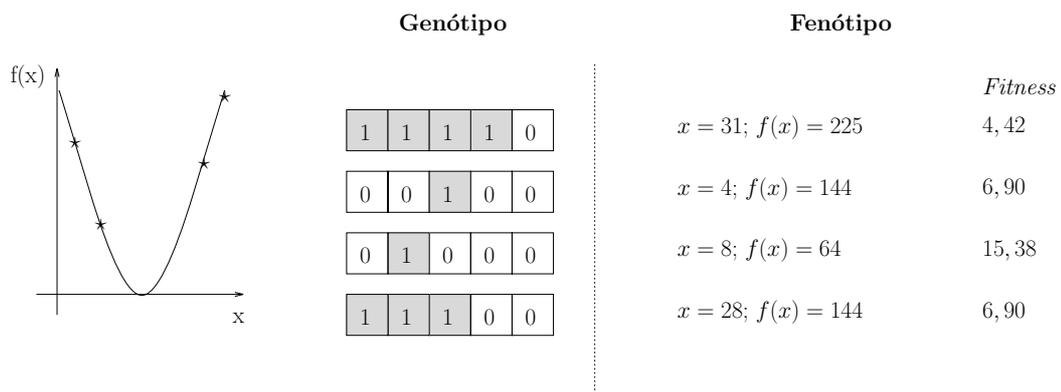


Figura 7.5: População Inicial

Como se trata de um problema de minimização, baixos valores de $f(x)$ devem corresponder a bons valores de *fitness*. Uma conversão simples, utilizada neste exemplo, é a mostrada abaixo:

$$fitness = \frac{1000}{1 + f(x)}$$

Na população inicial da Figura 7.5, o algoritmo aplica os operadores de seleção, crossover e mutação, como explicitado na Figura 7.6. Na fase de seleção, é representada a situação em que o indivíduo de maior *fitness* foi selecionado duas vezes, em detrimento do indivíduo de menor *fitness* que foi excluído da população. Os pontos de corte do crossover são determinados aleatoriamente, assim como os bits a serem mutados.

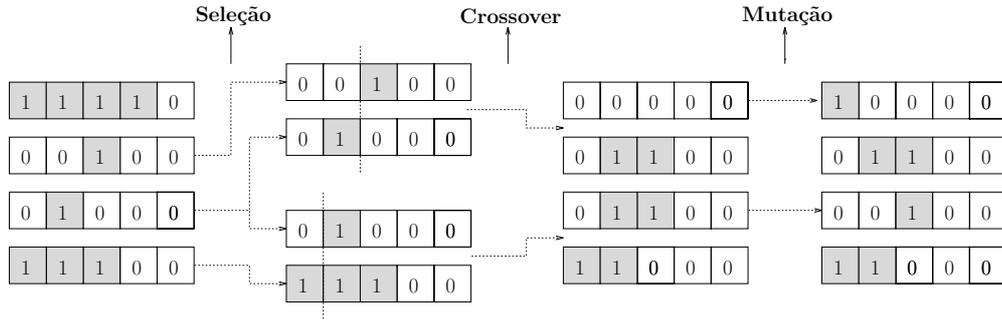


Figura 7.6: Operadores genéticos em ação

A população ao final da primeira aplicação dos operadores (final da primeira geração) é apresentada na Figura 7.7. No exemplo didático apresentado, o ótimo foi encontrado ao final da primeira geração.

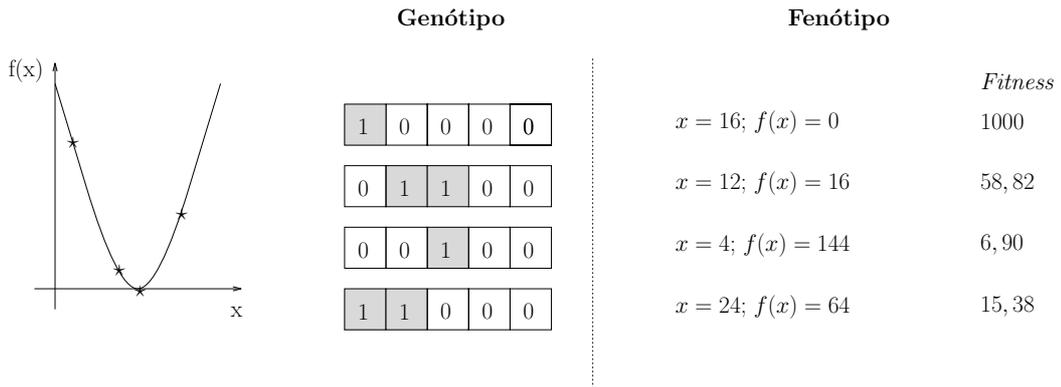


Figura 7.7: População após a primeira geração

7.4 Mecanismos de Funcionamento

Observando-se a simplicidade da estrutura do algoritmo proposto por Holland, expresso na Figura 7.1, e o exemplo da seção anterior, uma pergunta surge naturalmente: “Por que os algoritmos genéticos funcionam?”. A resposta, segundo Holland, está na teoria dos *esquemas* e no *paralelismo implícito*.

Esquema é a representação de diversos cromossomo de uma só vez através da utilização de bits do tipo *don't care*, (*). A Figura 7.8 mostra um esquema, e os cromossomos que ele representa.

Para um esquema, definem-se *Comprimento Definitório*, $\delta(s)$, como a maior distância entre suas posições fixas (1's ou 0's) e *Ordem*, $o(s)$, como o número destas posições. O número de cromossomos

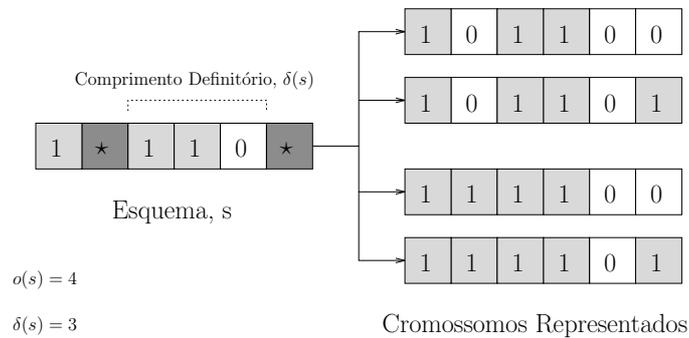


Figura 7.8: Esquema e Cromossomos Representados

representados pelo esquema é dado por 2^r , onde r é o número de posições do tipo *don't care*. Por outro lado, cada cromossomo de tamanho m é representado por 2^m esquemas.

A teoria dos esquemas de Holland apresenta o teorema dos esquemas:

Teorema dos Esquemas: esquemas com comprimento definitório curto, de ordem baixa, e com *fitness* acima da média, têm um aumento exponencial de sua participação em gerações consecutivas de um algoritmo genético. (Prova: [40])

Uma consequência deste teorema é que os algoritmos genéticos tendem a explorar o espaço de busca através de esquemas curtos e de baixa ordem que, subsequentemente, são usados para trocas de informação durante o crossover.

O teorema acima leva à justificativa do funcionamento dos AGs através da hipótese dos blocos construtivos:

Hipótese dos Blocos Construtivos: Um algoritmo genético consegue desempenhos quasi-ótimos através da justaposição de esquemas curtos, de baixa ordem e alto desempenho, chamados *blocos construtivos*.

Holland mostra [40, 41] que, devido à atuação dos blocos construtivos, em uma população de tamanho n , pelo menos n^3 esquemas são processados¹ de forma útil². Este processamento de muito mais esquemas que indivíduos na população é que dá a origem à idéia de *paralelismo implícito*.

¹Bertoni e Dorigo, em 1993, estabeleceram condições adicionais para que os números obtidos por Holland fossem corretos – a idéia básica dos blocos construtivos continua válida, entretanto.

²i.e., sem serem quebrados por meio de crossover e mutação.

É o paralelismo implícito que faz com que os AGs explorem, implicitamente, muito mais soluções que as efetivamente testadas, efetuando uma larga exploração do espaço de busca e aumentando a eficiência do algoritmo.

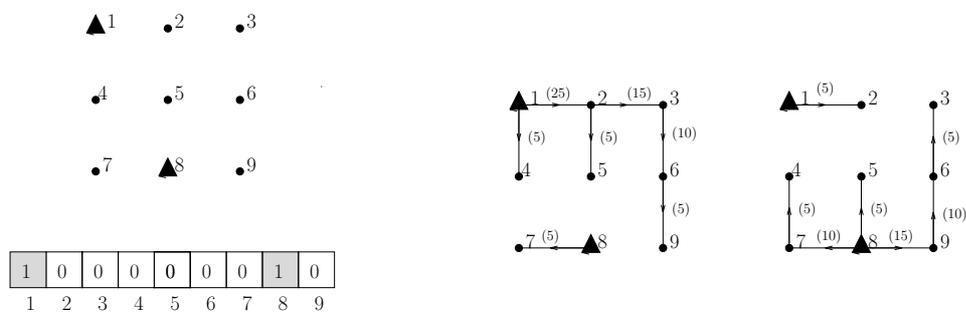
7.5 Algoritmo Implementado

Após a discussão das características gerais dos AGs, efetuada nas seções anteriores, apresentam-se agora as características particulares do AG utilizado para o problema do PPRSD. A estrutura do algoritmo é a mesma do AG clássico, mostrada na Figura 7.1. Cada bloco daquela figura é novamente discutido, considerando agora as particularidades da implementação efetuada.

7.5.1 Codificação do Problema

A primeira grande questão que se coloca é como deve ser feita a codificação do PPRSD, de modo a se permitir a aplicação da abordagem via AGs.

Uma escolha possível é uma codificação binária, onde cada bit do cromossomo está associado a um nó do grafo, como mostra a Figura 7.9(a). Um bit com valor 1 indica que há uma mediana instalada enquanto um bit com valor 0 indica que não há mediana naquele nó.



(a) Codificação para o problema de p -medianas

(b) Duas configurações possíveis de fluxo na rede secundária para a mesma codificação

Figura 7.9: Codificação 1 – codificação baseada apenas na posição dos transformadores

A dificuldade desta codificação está ilustrada na Figura 7.9(b). Como não há informações sobre a rede secundária, um mesmo cromossomo pode representar uma infinidade de soluções do problema, impossibilitando a avaliação da função de *fitness*. Dificuldade similar aparece para a definição do traçado da rede primária que deve interconectar os transformadores.

Trata-se de um problema importante, uma vez que as duas soluções apresentadas em 7.9(b), embora apresentem a mesma posição de transformadores, são completamente diferentes. Duas soluções para este problema são apresentadas na sequência.

Solução 1: Codificação Estendida

Uma solução para o problema explicitado na Figura 7.9(b) é estender-se a codificação, de modo a conter informações sobre a rede primária e secundária.

Para a rede primária, uma vez que os custos são dependentes apenas da extensão da rede³, basta uma variável binária sinalizando a existência ou não do alimentador primário. Para a rede secundária, entretanto, informações sobre o fluxo em cada arco são necessárias. A Figura 7.10 mostra como ficaria a codificação de uma solução do problema.

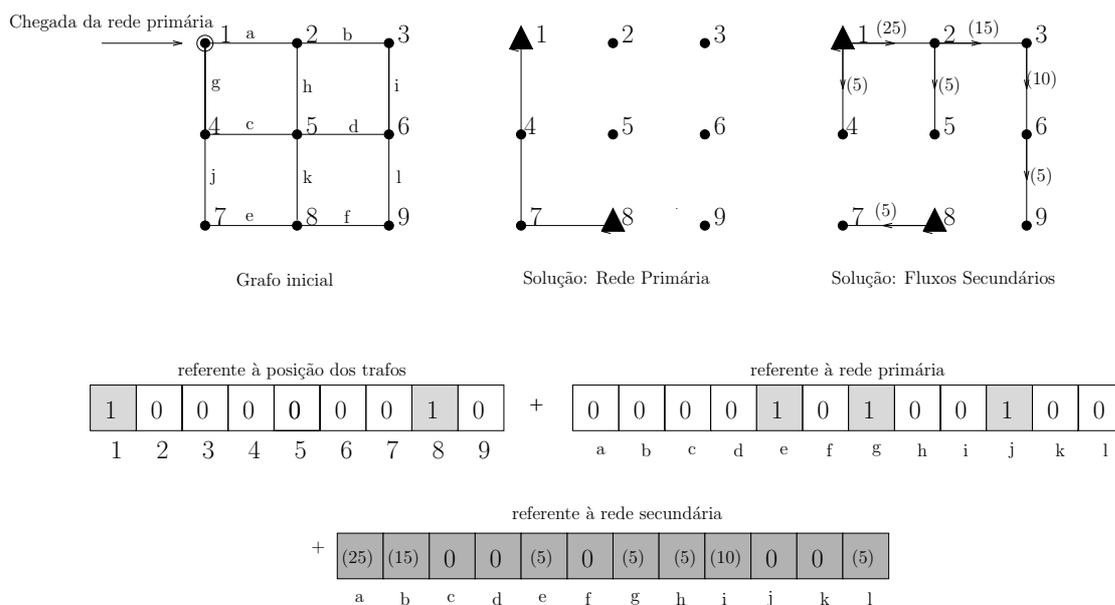


Figura 7.10: Codificação 2 – Codificação considerando as redes primária e secundária

A codificação apresentada na Figura 7.10 lida com um espaço de busca bem mais complexo. Além desta maior complexidade, há uma outra grande dificuldade, que diz respeito à factibilidade: no caso da codificação 1, as operações de crossover e mutação geram indivíduos factíveis. Para a codificação 2, entretanto, a chance de gerar um indivíduo factível após a aplicação de um operador de crossover (ou

³desprezam-se os custos de perdas, segundo as considerações da Seção 3.3.

mesmo de um operador mutação) é muito pequena. Após cada operação genética é necessário efetuar um procedimento de factibilização.

Procedimentos de factibilização deste tipo não chegam a ser raros na literatura. Problemas de otimização em redes em geral apresentam esta característica. Tais procedimentos podem chegar a ser a parte mais custosa do algoritmo.

No caso do PPRSD, há ainda um fator complicante: a presença de dois níveis. De fato, dois procedimentos de factibilização devem ser efetuados: um para a rede primária e outro para a rede secundária. Tal característica motivou a adoção de uma outra solução.

Solução 2: Correção da Indeterminação

A principal limitação da codificação da Figura 7.9(a) é a indeterminação. Um mesmo cromossomo solução pode representar diversas soluções do problema.

Tal problema pode ser resolvido tentando-se obter a melhor solução para as redes primária e secundária, dada aquela configuração de transformadores. A cada avaliação de *fitness*, o algoritmo deve calcular as redes primária e secundária, atribuindo ao indivíduo o custo real daquela configuração.

Assim, o AG trabalha apenas com a posição dos transformadores, considerando implicitamente, através da função de *fitness*, a qualidade das redes secundária e primária. A maneira como estas redes são calculadas é discutida adiante, em 7.5.5.

Esta solução foi adotada neste trabalho devido à maior simplicidade frente à solução proposta na subseção anterior.

7.5.2 Geração da População Inicial

Uma das grandes qualidades dos AGs é a forte capacidade de exploração do espaço de busca. Neste trabalho, tenta-se reforçar esta característica através de uma inicialização “quasi-cega” da solução inicial.

Uma solução cega (ou aleatória) seria aquela que atribuiria valores “1” e “0”, com 50% de probabilidade, a cada bit, de cada indivíduo nas soluções iniciais.

O problema desta estratégia é que ela gera soluções iniciais com, em média, um transformador para cada dois nós, quando se sabe que, para as capacidades e demandas utilizadas, existem uns poucos transformadores em relação ao número de nós.

O “quasi” responde, pois, por um artifício utilizado para limitar o número de transformadores nas soluções iniciais. Simplesmente, dá-se uma maior probabilidade ao valor “0” (ausência de transformador no nó) durante a criação da solução inicial.

7.5.3 Operador de Crossover

O operador de crossover utilizado foi o clássico “crossover a um ponto”, mostrado na Figura 7.3. Tal operador, extremamente simples, adequa-se muito bem à codificação utilizada.

7.5.4 Operador de Mutação

Dada a representação utilizada, seria possível pensar em um procedimento de mutação clássico, como o mostrado na Figura 7.4.

A dificuldade desta abordagem seria a mesma encontrada na geração da população inicial: como em geral há (ou deve haver) mais valores “0” que “1” nas boas soluções, a tendência do operador seria sempre estar substituindo nós sem transformador por nós com transformador.

Decidiu-se por uma estratégia mais neutra. Assim, uma vez decidido (aleatoriamente com uma probabilidade p_m) que um indivíduo⁴ deve ser mutado, uma das três mutações a seguir é escolhida e efetuada:

- 1) **retira transformador:** o operador retira um transformador de um nó.
- 2) **insere transformador:** o operador insere um transformador em um nó.
- 3) **troca transformador:** o operador troca a posição de um transformador.

7.5.5 Avaliação da Função de *Fitness*

Como discutido na Seção 7.5.1, a avaliação da função de *fitness* exige a construção das redes primária e secundária e a determinação do custo real da solução.

O ideal seria que, para cada conjunto de transformadores, fosse obtida a melhor solução em termos de redes primária e secundária possível. Assim, haveria a garantia de que o *fitness* representa realmente a qualidade daquele conjunto de medianas.

Para garantir a obtenção das melhores redes, seria necessário utilizar-se um algoritmo ótimo, ao estilo de AH-Exa (veja Figura 6.1). A dificuldade desta abordagem é que, como já discutido em 7.2, a função de *fitness* precisa ser calculada diversas vezes ao longo do processo de otimização ($n \times g$ vezes). Um algoritmo como AH-Exa poderia tornar a solução via AGs pouco competitiva, em termos de tempo computacional de resolução.

Uma alternativa é a utilização de heurísticas para cálculo das redes primária e secundária. Tais heurísticas, embora não garantam a solução ótima, obtém uma solução muito boa, de modo que o *fitness*

⁴Note-se que enquanto a mutação da Figura 7.4 trabalha em cada bit, de cada indivíduo, a mutação implementada considera o indivíduo como um todo

obtido represente com um erro pequeno a qualidade da solução para um conjunto de medianas. Neste caso, a obtenção da rede primária é feita através do algoritmo de Prim seguido da busca por pontos de Steiner. Já para a rede secundária, um algoritmo que obtém boas soluções em tempos compatíveis para uma função de *fitness*, é o algoritmo do caminho mínimo utilizando-se como distâncias os momentos elétricos.⁵

⁵Ou seja, efetua-se o cálculo da função de *fitness* segundo as propostas de Carneiro et al. [14].

Parte III

Resultados e Conclusões

Capítulo 8

Instâncias de Teste

“O problema não é que existem problemas. O problema é esperar o contrário e pensar que ter problemas é um problema.”

Theodore Rubin

“A melhor maneira de escapar de um problema é resolvê-lo.”

Alan Saporta

8.1 Introdução

Neste capítulo, apresentam-se os três grupos de instâncias utilizados para testes e os custos utilizados.

Na Seção 8.2.1, apresentam-se as instâncias “aleatórias”, obtidas a partir da adaptação de um método clássico da literatura. Tais instâncias não representam adequadamente as instâncias reais do PPRSD, por isso, na Seção 8.2.2, instâncias de pequeno porte, similares às instâncias do PPRSD são apresentadas. Em seguida, na Seção 8.2.3, comenta-se sobre as instâncias reais do PPRSD, utilizadas neste trabalho.

Finalmente, na Seção 8.3, apresentam-se os custos utilizados para simulação das abordagens desenvolvidas anteriormente.

8.2 Redes de Teste

Três grupos de instância, descritos na sequência, foram utilizados para testes das abordagens desenvolvidas.

8.2.1 Grupo 1: Instâncias Aleatórias

As instâncias do primeiro grupo foram geradas baseando-se na metodologia proposta por Aneja em 1980 [5]. A metodologia utilizada é descrita abaixo.

- Procedimento para se obter uma instância com N nós e A arcos:
 - 1) escolhem-se N nós no plano com coordenadas geradas aleatoriamente.
 - 2) os nós são ligados de forma a se ter uma árvore .
 - 3) arcos complementares, diferentes dos já existentes, são adicionados até se atingir o número de arcos desejado na instância (A).
 - 4) a cada nó é atribuído uma demanda aleatória.
 - 5) alguns nós são escolhidos para receber a rede primária.

Algumas observações específicas para as instâncias geradas: 1) as coordenadas de cada nó foram limitadas aos valores inteiros do intervalo $[0,100]$, 2) a árvore foi obtida da seguinte maneira: conectou-se o nó 1 ao nó 2, o nó 2 ao nó 3 e assim sucessivamente até o nó N , 3) a demanda de cada nó foi escolhida aleatoriamente no intervalo $[0,5]$ e 4) assumiu-se que a rede primária chega sempre nos nós 1 e 2.

Com esta metodologia criaram-se 20 instâncias, nomeadas $cbaxx^1$ (onde xx é a referência numérica da instância). A menor instância ($cba01$) possui 4 nós e 4 arcos, enquanto a maior ($cba20$) possui 30 nós e 60 arcos. A lista completa das instâncias utilizadas pode ser vista nas Tabelas 8.1 e 8.2.

8.2.2 Grupo 2: Instâncias Regulares

Uma limitação das instâncias do grupo 1 é que elas não representam bem a realidade das redes de distribuição. De fato, os grafos das redes reais do PPRSD são determinados a partir da posição dos postes. Como estas posições dependem do traçado das ruas e dos vãos máximo e mínimo entre dois postes, tem-se, em geral, configurações geométricas muito bem comportadas, o que não é o caso das redes aleatórias criadas em 8.2.1.

Com o intuito de se obter redes de porte pequeno-médio que mantivessem a estrutura das redes reais, criou-se um segundo grupo de instâncias, nomeadas $regxx$ (onde reg responde por “regular” e xx é o número de nós da instância). Os nós destas instâncias estão dispostos em um grid completo, conforme mostra o exemplo da Figura 8.1, e os arcos conectam todos os nós vizinhos.

¹Uma curiosidade: as instâncias recebem este nome por terem sido criadas inicialmente para um artigo a ser apresentado no Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2002) [20].

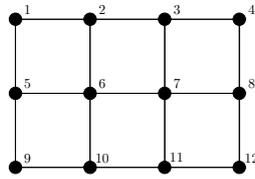


Figura 8.1: Exemplo de configuração das instâncias do grupo 2: instância regular com 12 nós e 17 arcos

8.2.3 Grupo 3: Instâncias Reais

O último grupo de instâncias é formado por instâncias reais. As duas primeiras instâncias deste grupo foram utilizadas em [12] e cedidas pelo autor, enquanto as outras foram cedidas pela Companhia Paulista de Força e Luz, CPFL. Na Figura 8.2 mostra-se o grafo de uma das redes reais utilizadas para testes. As instâncias reais foram referenciadas como *grdxx* (onde *grd* responde por instâncias grandes e *xx* é a referência numérica da instância).

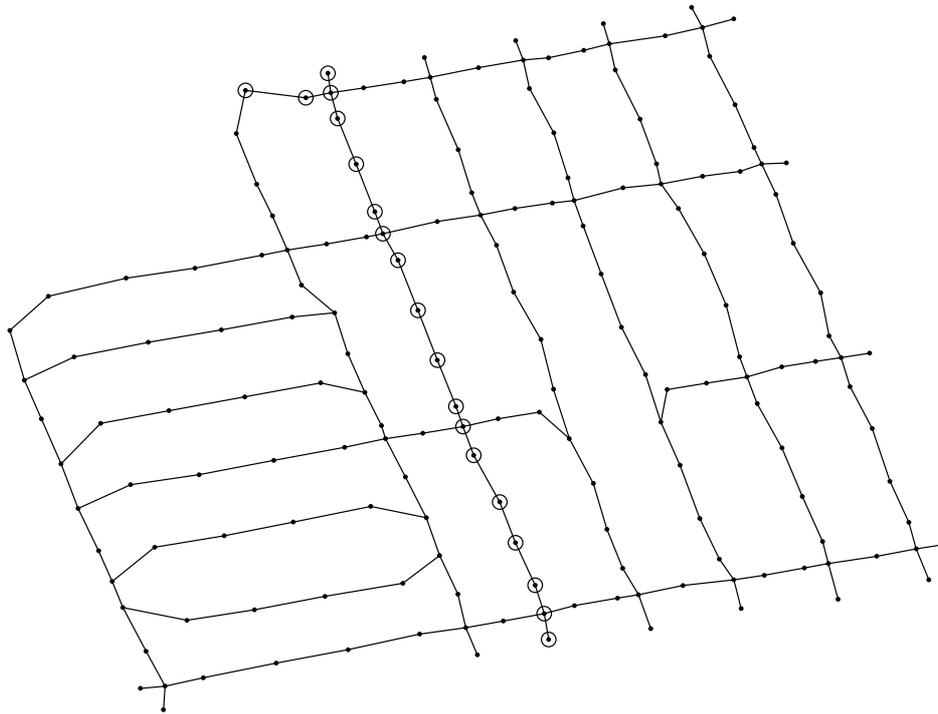


Figura 8.2: Rede real (*grd2*). Nós marcados recebem rede primária a priori.

As Tabelas 8.1 e 8.2 resumem as informações de todas as instâncias:

Instância	Grupo	N	A	Dem. tot. (kVA)
cba01	1	4	4	20,00
cba02	1	4	6	10,00
cba03	1	8	8	42,50
cba04	1	8	12	26,25
cba05	1	8	16	37,50
cba06	1	12	12	45,00
cba07	1	12	18	43,75
cba08	1	12	24	51,25
cba09	1	16	16	46,25
cba10	1	16	24	68,75
cba11	1	16	32	53,75
cba12	1	20	20	68,75
cba13	1	20	30	60,00
cba14	1	20	40	87,50
cba15	1	24	24	88,75

Tabela 8.1: Instâncias de teste

Instância	Grupo	N	A	Dem. tot. (kVA)
cba16	1	24	36	92,50
cba17	1	24	48	86,25
cba18	1	30	30	125,00
cba19	1	30	45	122,5
cba20	1	30	60	113,75
reg04	2	4	4	15,00
reg09	2	9	12	45,00
reg12	2	12	17	55,00
reg16	2	16	24	80,00
reg20	2	20	31	100,00
reg25	2	25	40	100,00
reg30	2	30	45	150,00
reg35	2	35	58	175,00
grd1	3	100	100	51,56
grd2	3	173	192	750,00
grd3	3	143	153	605,00

Tabela 8.2: Instâncias de teste

8.3 Custos Utilizados

Para as redes reais, utilizaram-se os custos determinados na Seção 3.3.1, na página 26. Para as instâncias menores, nos grupos 1 e 2, efetuou-se uma diminuição dos custos e das capacidades dos transformadores.

Os custos utilizados para os alimentadores e transformadores são representados nas Tabelas 8.3 (instâncias do grupo 1 e 2) e 8.4 (instâncias reais do grupo 3).

Elemento	Custo (US\$)
transformador (20kVA)	150
transformador (30kVA)	180
transformador (40kVA)	200
transformador (70kVA)	280
alimentador 1ario (por metro)	1,00
alimentador 2ario (por metro)	0,30
alimentador 2ario (por metro · unidade de fluxo na faixa 0–10kVA)	0,050
alimentador 2ario (por metro · unidade de fluxo na faixa 5–16kVA)	0,075
alimentador 2ario (por metro · unidade de fluxo na faixa 16–20kVA)	0,100
alimentador 2ario (por metro · unidade de fluxo acima de 20kVA)	0,125

Tabela 8.3: Custos para as instâncias dos grupos 1 e 2

Elemento	Custo (US\$)
transformador (15kVA)	178,8
transformador (30kVA)	240,6
transformador (45kVA)	276,7
transformador (75kVA)	348,9
transformador (112,5kVA)	468,3
alimentador 1ario (por metro)	0,81
alimentador 2ario (por metro)	0,22
alimentador 2ario (por metro · unidade de fluxo na faixa 0–5kVA)	0,012
alimentador 2ario (por metro · unidade de fluxo na faixa 5–16kVA)	0,054
alimentador 2ario (por metro · unidade de fluxo acima de 16kVA)	0,092

Tabela 8.4: Custos para as instâncias do grupo 3

Capítulo 9

Resultados

“Insanidade: fazer a mesma coisa várias vezes e esperar resultados diferentes”

Albert Einstein

9.1 Introdução

Neste capítulo, as abordagens desenvolvidas anteriormente são testadas e comparadas entre si. Para isso, utilizam-se os três grupos de instâncias desenvolvidas no capítulo anterior.

Na Seção 9.2, comparam-se a eficiência e o alcance da abordagem exata para as duas formulações matemáticas desenvolvidas anteriormente (vide Seção 3.4).

Em seguida, na Seção 9.3, as três outras abordagens desenvolvidas são comparadas entre si. Como referência de comparação usam-se os valores ótimos (quando disponíveis) e os resultados obtidos pela literatura.

9.2 Comparações dos Modelos Matemáticos

A eficiência da abordagem exata pode ser muito dependente da formulação desenvolvida. Muitas vezes novas formulações são desenvolvidas apenas por apresentarem características desejáveis ao processo de execução de algoritmos ótimos, como nos trabalhos de Melkote e Daskin [54, 55].

As duas formulações foram testadas no CPLEX. Os ótimos obtidos pelas duas formulações são, obviamente, os mesmos. O dado a comparar é o tempo computacional necessário para que o CPLEX atingisse o ótimo, em cada formulação, para cada instância. Utilizou-se para os testes uma máquina Sun Ultra 1 e o CPLEX versão 6.5.

A primeira informação que se pode retirar das Tabelas 9.1 e 9.2 é a dificuldade de resolução do

Instância	N	A	FBN t(s)	FBA t(s)	$\frac{FBA}{FBN} - 1$
cba01	4	4	0,05	0,04	-20,00%
cba02	4	6	0,08	0,09	+12,50%
cba03	8	8	0,67	0,52	-22,39%
cba04	8	12	0,32	0,21	-34,98
cba05	8	16	0,29	0,29	0,00%
cba06	12	12	1,01	0,86	-14,85%
cba07	12	18	1,36	2,20	+61,76%
cba08	12	24	1,36	0,93	-31,32%
cba09	16	16	2,62	1,64	-37,40%
cba10	16	24	1,68	1,35	-19,64%
cba11	16	32	6,66	5,47	-17,87%
cba12	20	20	16,76	15,42	-8,00%
cba13	20	30	7,15	8,65	+20,98%
cba14	20	40	7,38	8,01	+8,54%
cba15	24	24	49,58	46,53	-6,15%
cba16	24	36	113,77	197,75	+73,82%
cba17	24	48	22,98	16,09	-29,98%
cba18	30	30	866,11	1253,91	+44,77%
cba19	30	45	4523,32	4223,10	-6,64%
cba20	30	60	1119,90	1070,79	-4,39%
Média					-1,55%

Tabela 9.1: Tempos computacionais de simulação (grupo 1)

Instância	N	A	FBN t(s)	FBA t(s)	$\frac{FBA}{FBN} - 1$
reg04	4	4	0,07	0,06	-14,29%
reg09	9	12	0,61	0,50	-18,03%
reg12	12	17	1,20	0,77	-35,83%
reg16	16	24	4,69	5,83	-24,31%
reg20	20	31	14,71	8,81	-40,11%
reg25	25	40	10,98	12,71	+15,76%
reg30	30	45	729,99	658,32	-9,82%
reg35	35	58	1130,45	722,33	-36,10%
Média					-19,02%

Tabela 9.2: Tempos computacionais de simulação (grupo 2)

problema. Não importando a formulação utilizada, os tempos computacionais crescem muito rapidamente com o número de nós da instância. Para o primeiro grupo de instâncias, o das instâncias aleatórias, é difícil dizer que há predominância de uma formulação em detrimento de outra. Já para o segundo grupo de instâncias, composto por instâncias “regulares”, FBA apresenta-se mais rápida que FBN (tempos de simulação, em média, 19,02% menores). Embora seja fácil constatar a maior eficiência de FBA, é difícil apresentar uma justificativa para este fato sem estudar a fundo as rotinas e técnicas utilizadas pelo CPLEX, que não são abertas.

9.3 Comparações das Abordagens de Resolução

A segunda bateria de testes visa avaliar a eficiência dos métodos propostos na parte II deste trabalho. A idéia é comparar os métodos em termos de esforço computacional (medido através do tempo necessário para se obter as soluções) e pelo resultado obtido em termos da função custo.

As figuras 9.1 e 9.2 mostram a solução obtida pela heurística de Carneiro para a instância grd01. A

figura 9.1 mostra a localização dos transformadores e o traçado da rede primária, enquanto a figura 9.2 mostra a rede secundária. Nesta última figura, a ausência de um alimentador secundário não significa que este alimentador não está construído (pois todos estão - vide capítulo 1), mas sim a ausência de fluxo de energia por aquele trecho. Em ambas as figuras, os transformadores são representados por um triângulo. Na figura 9.2, os pontos onde a rede primária já está presente são marcados com um círculo.

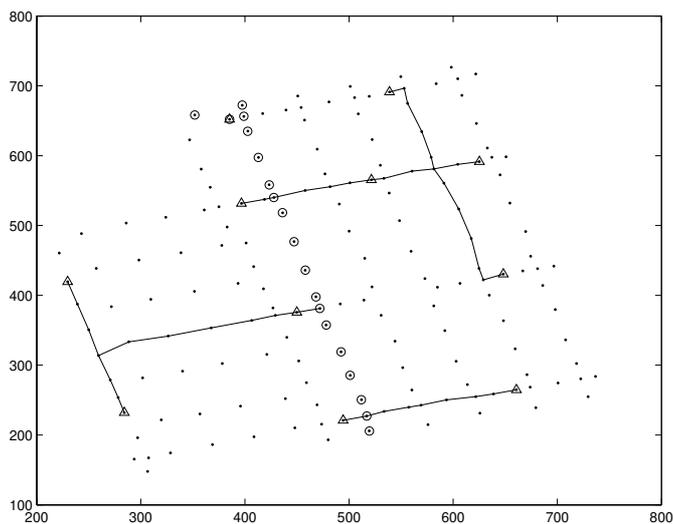


Figura 9.1: Solução de Carneiro para a instância grd01: transformadores e rede primária.

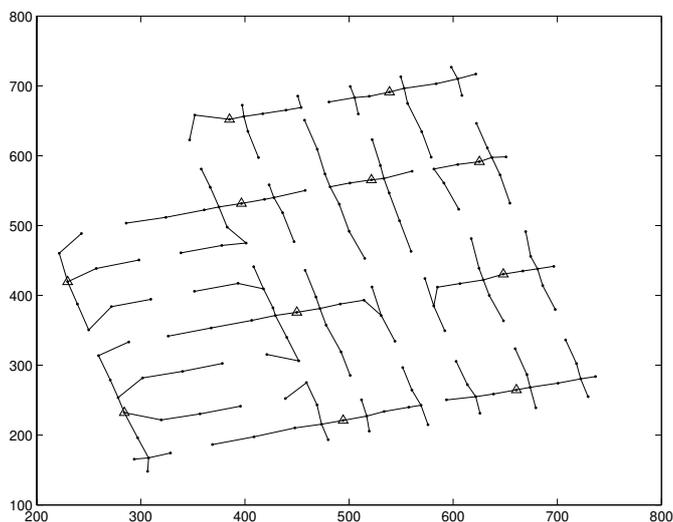


Figura 9.2: Solução de Carneiro para a instância grd01: transformadores e trechos com fluxo secundário.

É difícil comparar a eficiência das heurísticas através de figuras como 9.1 e 9.2. Estas figuras foram

inseridas apenas para dar uma idéia visual do problema. Para fins de comparação, serão utilizadas as três tabelas a seguir, que compilam os resultados obtidos pelos métodos para os três grupos de instância. As tabelas utilizam a seguinte nomenclatura:

Car - Heurística de Carneiro *et al.* [14] (Seção 5.2).

Lag - Heurística Lagrangiana, proposta na Seção 5.3 (Seção 5.3).

AH (Car) - Algoritmo Híbrido, partindo do resultado de Car (Figura 6.2, p. 64).

AH (Lag) - Algoritmo Híbrido, partindo do resultado de Lag (Figura 6.2, p. 64).

AHE (Car) - Algoritmo Híbrido Estendido, partindo do resultado de Car (Figura 6.7, p. 69).

AHE (Lag) - Algoritmo Híbrido Estendido, partindo do resultado de Lag (Figura 6.7, p. 69) .

AG - Algoritmo Genético (Seção 7.5).

AHE (AG) - Algoritmo Híbrido Estendido, partindo do resultado do AG.

Em cada linha da tabela, a primeira coluna apresenta o ótimo obtido através do método exato.¹ A partir de então, para cada método, apresenta-se o desvio percentual em relação ao ótimo:

$$dp = \left(\frac{Res}{Otimo} - 1 \right) \cdot 100\%$$

ond dp é o desvio percentual apresentado na tabela e Res é o resultado, em termos de custo, obtido pelo método para aquela instância.

A última linha de cada tabela indica os valores médios dos desvios percentuais.

A Tabela 9.6 mostra os tempos computacionais para todas as abordagens/instâncias. Nota-se que apenas as abordagens Lag, AHE e AG necessitam de mais de 10 segundos para simular, mesmo as instâncias reais. Mesmo para estas abordagens, os tempos obtidos (na ordem de uns poucos minutos) são perfeitamente compatíveis com a natureza da aplicação: um problema de planejamento.

Os resultados expressos nas tabelas permitem uma série de análises. A seguir, algumas questões particulares são discutidas.

Abordagens Heurísticas: Focando-se primeiramente apenas nos métodos puramente heurísticos, **Car** e **Lag**, nota-se a maior eficiência do método proposto, Lag, em quase todas as instâncias de teste. Considerando-se o conjunto total de instâncias, Lag contabiliza 18 vitórias, 9 empates e 4 derrotas em relação a Car.

A maior eficiência de Lag pode ser vista também nos melhores resultados obtidos por **AH(Lag)** e **AHE(Lag)** em relação a **AH(Car)** e **AHE(Car)**. Tais resultados indicam claramente que Lag é

¹Na Tabela 9.5, conseguiu-se o resultado ótimo apenas para a primeira instância (gd1). Nas demais instâncias, o valor ótimo foi substituído pelo melhor resultado obtido pelos métodos.

Instância	Ótimo	Car	Lag	AH(Car)	AH(Lag)	AHE(Car)	AHE(Lag)	AG	AHE (AG)
cba01	251,74	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
cba02	261,53	10,21	7,73	10,21	7,73	0,00	0,00	0,00	0,00
cba03	526,16	2,84	1,27	2,84	0,00	0,00	0,00	1,27	0,00
cba04	389,96	2,15	0,13	2,15	0,00	0,00	0,00	0,13	0,00
cba05	511,79	1,66	6,30	1,66	6,01	0,00	0,00	0,00	0,00
cba06	758,43	4,11	0,80	4,11	0,00	0,00	0,00	0,80	0,00
cba07	846,50	3,72	3,72	3,63	3,63	0,00	0,00	0,09	0,00
cba08	655,15	0,11	0,11	0,00	0,00	0,00	0,00	0,11	0,00
cba09	1134,53	1,02	1,02	0,70	0,70	0,00	0,00	0,70	0,00
cba10	759,05	3,40	5,39	1,10	3,19	1,10	0,71	1,89	0,71
cba11	1134,59	1,05	0,97	0,17	0,09	0,09	0,09	1,35	0,09
cba12	1694,57	1,51	0,27	1,44	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27
cba13	1240,70	4,97	3,41	4,74	3,29	3,29	3,29	2,81	0,26
cba14	1380,57	3,32	3,32	1,30	1,30	0,00	0,00	2,72	0,00
cba15	2151,42	0,56	0,38	0,56	0,32	0,07	0,07	0,85	0,07
cba16	1641,10	2,70	1,18	1,05	0,00	1,05	0,00	3,58	0,00
cba17	1396,60	5,62	2,26	3,42	0,40	1,47	0,06	2,58	0,06
cba18	2666,29	2,64	0,99	1,85	0,00	1,15	1,15	1,20	0,00
cba19	1889,40	3,15	1,75	1,15	0,15	1,15	0,15	2,27	0,15
cba20	2106,99	1,69	3,70	1,16	0,00	0,00	0,00	2,68	0,00
Média:		2,82	2,24	2,16	1,35	0,48	0,29	1,26	0,08

Tabela 9.3: Resultados para instâncias do grupo 1

Instância	Ótimo	Car	Lag	AH(Car)	AH(Lag)	AHE(Car)	AHE(Lag)	AG	AHE (AG)
reg04	164,00	2,29	2,29	2,29	2,29	0,00	0,00	0,00	0,00
reg09	448,50	0,56	0,28	0,00	0,11	0,00	0,00	0,28	0,00
reg12	686,50	1,18	1,18	0,00	0,00	0,00	0,00	1,18	0,00
reg16	824,50	12,95	0,61	6,60	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61
reg20	613,75	3,67	3,95	0,10	0,43	0,10	0,10	3,67	0,00
reg25	1026,29	1,83	1,83	0,00	0,00	0,00	0,00	1,22	0,00
reg30	935,25	7,85	6,76	1,30	0,24	0,50	0,24	2,02	1,54
reg35	1057,75	19,40	8,27	10,13	0,30	1,49	0,00	3,11	1,02
Média:		6,22	3,15	2,55	0,50	0,34	0,12	1,51	0,40

Tabela 9.4: Resultados para instâncias do grupo 2

Instância	Ótimo	Car	Lag	AH(Car)	AH(Lag)	AHE(Car)	AHE(Lag)	AG	AHE (AG)
grd01	1301,98	4,27	4,27	2,08	2,08	0,00	0,00	2,35	2,13
grd02	7958,18	0,98	0,71	0,26	0,31	0,00	0,10	1,02	0,00
grd03	8021,61	2,99	1,54	1,35	0,83	0,94	0,10	0,95	0,00
Média:		2,75	2,17	1,23	1,07	0,31	0,07	1,44	0,71

Tabela 9.5: Resultados para instâncias do grupo 3

Inst	Car	Lag	AH(Car)	AH(Lag)	AHE(Car)	AHE(Lag)	AG	AHE (AG)
cba01	0,03	0,12	0,03	0,13	0,08	0,13	2,29	2,30
cba02	0,04	0,07	0,05	0,08	0,11	0,08	2,39	2,40
cba03	0,04	0,14	0,05	0,15	0,07	0,17	2,60	2,63
cba04	0,04	0,14	0,05	0,15	0,06	0,18	2,76	2,79
cba05	0,04	0,13	0,06	0,14	0,09	0,16	2,84	2,87
cba06	0,04	0,14	0,05	0,15	0,07	0,18	3,52	3,56
cba07	0,08	0,17	0,10	0,18	0,13	0,21	4,06	4,11
cba08	0,05	0,19	0,07	0,20	0,12	0,24	4,18	4,25
cba09	0,07	0,27	0,10	0,31	0,32	0,53	5,42	5,67
cba10	0,07	0,23	0,09	0,25	0,13	0,28	7,78	7,85
cba11	0,08	0,22	0,10	0,24	0,15	0,30	8,11	8,18
cba12	0,06	0,17	0,11	0,20	0,40	0,55	8,90	9,29
cba13	0,08	0,23	0,09	0,26	0,16	0,31	11,28	11,60
cba14	0,07	0,29	0,12	0,36	0,37	0,59	13,91	14,22
cba15	0,08	0,27	0,16	0,34	1,32	1,54	13,06	14,30
cba16	0,09	0,31	0,15	0,37	0,53	0,63	22,01	22,34
cba17	0,09	0,33	0,16	0,42	0,51	0,78	22,76	23,14
cba18	0,12	0,39	0,20	0,47	4,67	6,89	23,64	46,82
cba19	0,10	0,32	0,17	0,38	0,42	0,70	37,16	37,59
cba20	0,11	0,47	0,22	0,55	0,44	0,95	41,06	41,57
reg04	0,03	0,05	0,04	0,06	0,06	0,08	2,43	2,44
reg09	0,06	0,20	0,07	0,21	0,11	0,25	2,76	2,81
reg12	0,09	0,26	0,10	0,28	0,13	0,32	4,02	4,08
reg16	0,11	0,39	0,16	0,41	0,29	0,61	8,00	8,32
reg20	0,12	0,44	0,18	0,51	0,52	0,82	15,60	15,89
reg25	0,13	0,51	0,21	0,59	0,52	0,90	20,65	21,06
reg30	0,15	0,47	0,25	0,55	1,12	1,68	59,25	60,06
reg35	0,17	0,38	0,54	0,52	6,26	1,94	92,02	93,29
grd01	0,39	1,05	0,93	1,59	0,79	1,80	148,68	149,92
grd02	2,61	75,37	4,75	77,51	352,35	416,83	533,75	874,65
grd03	1,27	54,00	2,44	55,54	507,38	760,48	361,83	686,44

Tabela 9.6: Tempos Computacionais (s)

capaz, sobretudo, de encontrar melhores configurações para a posição dos transformadores. Isto deve-se à Relaxação Lagrangiana utilizada que, na maioria dos casos, obteve a solução ótima para o problema das *p*-medianas.

Para redes reais, apenas a utilização de Lag no lugar de Car permite economias de até 1,46%, como na rede grd03, em relação à solução já otimizada de *Carneiro et al.*

Abordagem Híbrida: Como esperado, os resultados obtidos pela Abordagem Híbrida (**AH**) foram melhores que os resultados obtidos pelas heurísticas originais, sem que isso prejudicasse de maneira significativa os tempos computacionais. De fato, AH-Exa era executado em décimos de segundo mesmo para instâncias reais, como mostra a Tabela 9.6.

Estes resultados mostram que uma grande deficiência de Car e Lag é a maneira simplista de cálculo da rede secundária. AH consegue ganhos consideráveis apenas recalculando esta rede, mantendo as posições dos transformadores fixas. Um exemplo ilustrativo é o da instância *reg35*, cujo erro caiu de 19,40% para 10,13% (AH Car) e de 8,27% para 0,30% (AH Lag).

De uma maneira geral, os ganhos foram importantes, como atestam as médias dos três grupos (última linha das Tabelas 9.3 – 9.5). Uma conclusão que se retira das entrelinhas destes resultados é a eficiência do método das *p*-medianas. De fato, os resultados obtidos por AH atestam a capacidade do *p*-medianas em obter boas posições dos transformadores, uma vez que a parte exata de AH não altera estas posições e, ainda assim, obtém resultados muito bons.

Um último comentário é que AH-Exa, embora não altere a posição dos transformadores, pode alterar a capacidade deles. Assim, transformadores com muita folga podem ser trocados por transformadores menores (diminuindo o custo dos transformadores) apenas transferindo-se algumas cargas de um transformador para outro (aumentando-se um pouco o custo da rede secundária). Esta estratégia é utilizada em Car e Lag através de um procedimento heurístico que tenta substituir transformadores com muita folga por transformadores com menor capacidade nominal. AH-Exa faz este procedimento de forma exata, obtendo melhores resultados.

Abordagem Híbrida Estendida: Os resultados obtidos pela AHE são, sem dúvida, os resultados mais significativos obtidos neste trabalho. De fato, para as redes de teste dos grupos 1 e 2, AHE consegue resultados médios a menos de 0,5% do ótimo, mesmo utilizando-se Car como heurística inicial.

Na realidade, os resultados mostram a capacidade das abordagens Car e Lag em encontrar as melhores regiões do espaço de busca, e sua incapacidade de explorar adequadamente este espaço de busca. E como AHE, aproveitando-se deste fato, explora a vizinhança descoberta (de maneira rápida) por Car e Lag,

até encontrar a melhor solução possível naquela vizinhança. As redes de teste dos grupos 1 e 2 mostram que, em geral, tal região é a ótima (veja comentários no parágrafo: “Exploração do Espaço de Busca”, na página 101).

Abordagem Alternativa: A diminuição do espaço de busca discutida na Seção 7.5 permite que operadores muito simples obtenham bons resultados no processo de evolução.

A idéia de usar o AG desta forma é obter uma boa configuração inicial dos transformadores e utilizar AHE para efetuar um refinamento. Os resultados mostram que a estratégia é muito eficiente para redes pequenas. Realmente, as Tabelas 9.3 e 9.4 mostram que o AG consegue encontrar a melhor região para localização dos transformadores em quase todas as instâncias (vale aqui o mesmo comentário feito para a AHE: veja “Exploração do Espaço de Busca”, em seguida).

Entretanto, para as redes reais, AHE (Lag), mais rápido, é competitivo também em termos de resultados. Duas são as razões para isso: 1) a simplificação efetuada no AG leva o algoritmo a convergir para outra região, que não aquela que contém a posição ótima dos transformadores e 2) mesmo com a codificação reduzida, o espaço de busca começa a atingir dimensões consideráveis, exigindo a implementação de mecanismos mais sofisticados, e.g. busca local.

Um terceiro fator pode ser incluído: em redes grandes, a questão já mencionada da troca de cargas entre transformadores vizinhos de modo a evitar transformadores com folga é muito importante. AG desconsidera este fator durante o processo de evolução, considerando-o apenas na última geração (AHE (AG)). Com isso, perde-se muitas vezes o ótimo global, caindo-se em regiões que são muito boas para a função de *fitness* considerada, mas nem tão boas levando-se em conta o custo real do problema.

Em outras palavras: para redes grandes, a simplificação da função de *fitness* começa a cobrar o seu preço, desviando o algoritmo das melhores regiões do espaço de busca. Um bom exemplo deste fato é a instância *grd01*. Segundo a simplificação, a solução de Car tem um custo de 1364,08 (4,27% acima do ótimo). O algoritmo, durante o processo de evolução, melhora esta solução obtendo um valor de 1332,29 (2,35% acima do ótimo). Entretanto, considerando a nuvem e o custo real, a solução de Car atinge o custo ótimo, enquanto a solução da abordagem alternativa fica no valor de 1329,72 (2,13% acima do ótimo). Em outras palavras, o algoritmo foi desviado da região ótima devido à imperfeição da função de *fitness*.

Uma maneira de eliminar este problema seria a consideração do custo real da rede secundária, através de um cálculo da rede, para cada indivíduo, através do algoritmo AH. Isto, embora torne cada geração muito mais demorada, elimina tais erros.

A abordagem alternativa demanda pois, algumas modificações. Os resultados obtidos para as instâncias

dos grupos 1 e 2 demonstram que há boas possibilidades que, com as modificações sugeridas, obtenham-se resultados mais competitivos.

Vale lembrar que a Abordagem Alternativa não é o foco central deste trabalho. Na realidade, o objetivo maior deste desenvolvimento é mostrar que as estratégias heurísticas, Car e Lag, posicionam os transformadores dentro da região onde está a solução ótima (ou uma solução muito próxima desta), como discutido no parágrafo seguinte.

Exploração do Espaço de Busca: Como citado, o objetivo maior da Abordagem Alternativa é mostrar que as estratégias heurísticas são capazes de encontrar boas regiões para a posição dos transformadores. Isso provado, a estratégia AHE seria favorecida, uma vez que, dada uma boa região inicial, ela é capaz de explorá-la com muita eficiência.

As Tabelas 9.3 – 9.5 já mostram de certa forma a eficiência da combinação estratégia heurística + AHE (sobretudo AHE (Lag)). Entretanto, é importante notar que tais tabelas mascaram um pouco a eficiência de Car e Lag em encontrar as melhores regiões do espaço de busca, uma vez que elas imbutem o erro de aproximação do cálculo da nova rede primária (veja Figura 6.6 e comentários da página 68). Na Tabela 9.7 apresentam-se os resultados obtidos por AHE (Car), AHE (Lag) e AHE (AG) sem se utilizar tal aproximação (ou seja, considerando variáveis binárias para os arcos da rede primária).

Grupo	AHE (Car)	AHE (Lag)	AHE (AG)
1	0,34	0,31	0,03
2	0,57	0,03	0,09

Tabela 9.7: Erro médio para os grupos 1 e 2, executando-se AHE sem a aproximação da Figura 6.5

O que a Tabela 9.7 tenta discutir é justamente a eficiência dos algoritmos Car, Lag e AG em encontrar a melhor região para a posição dos transformadores. Os resultados mostram que, em redes pequenas, os AGs são eficientes. Nota-se entretanto que Car e Lag, sobretudo Lag, obtém resultados sempre muito competitivos.

A Tabela 9.7 mostra que o erro de Lag é, em média, bem pequeno, chegando a ser inferior ao erro de AG, nas instâncias do grupo 2. Verdadeiramente, uma informação importante é a dada pelas instâncias pequenas, mas regulares, do grupo 2. Neste grupo, embora as instâncias sejam pequenas (ou seja, os erros de AG devido à não consideração explícita de transformadores pouco carregados, como se faz em Car e Lag, são pequenos), AHE consegue encontrar melhores resultados a partir das soluções iniciais de Lag do que a partir das melhores soluções iniciais de AG. Este resultado mostra a eficiência da estratégia Lag na resolução do problema de localização dos transformadores.

Distribuição dos custos: As tabelas 9.3 – 9.7 apresentam apenas o resultado final, em termos de custo e tempo computacional, das redes obtidas. Esta informação é essencial para se poder comparar os métodos desenvolvidos. Entretanto, pode ser interessante analisar as soluções com um pouco mais de detalhe. Em especial, é interessante desmembrar o custo total nas suas parcelas constituintes.

As tabelas 9.8 – 9.10 apresentam as parcelas que compõe o custo total para as abordagens Carneiro e Lagrangiana, e também para a abordagem híbrida partindo destas duas abordagens heurísticas, para os três exemplos reais estudados (instâncias do grupo 3).

Parcela/Metodologia	Car	Lag	AHE (Car)	AHE (Lag)
Tranformadores (\$)	517,3 (38,10%)	517,3 (38,10%)	481,2 (36,96%)	481,2 (36,96%)
Alimentadores Primários (\$)	0,0 (0,0%)	0,0 (0,0%)	0,0 (0,0%)	0,0 (0,0%)
Alimentadores Secundários (instalação) (\$)	657,9 (48,46%)	657,9 (48,46%)	657,9 (48,46%)	657,9 (48,46%)
Alimentadores Secundários (perdas) (\$)	182,42 (13,44%)	182,42 (13,44%)	162,88 (13,44%)	162,88 (13,44%)
Total (\$)	1357,62	1357,62	1301,98	1301,98

Tabela 9.8: Custos das soluções obtidas para a instância grd01

Parcela/Metodologia	Car	Lag	AHE (Car)	AHE (Lag)
Tranformadores (\$)	3740,7 (46,55%)	3740,7 (46,67%)	3740,7 (47,00%)	3740,7 (46,96%)
Alimentadores Primários (\$)	931,86 (11,60%)	895,09 (26,52%)	868,36 (10,91%)	876,58 (11,00%)
Alimentadores Secundários (instalação) (\$)	1253,65 (15,60%)	1253,65 (15,64%)	1253,65 (15,75%)	1253,65 (15,74%)
Alimentadores Secundários (perdas) (\$)	2109,74 (26,25%)	2125,22 (26,52%)	2095,47 (26,33%)	2095,47 (26,30%)
Total (\$)	8035,95	8014,66	7958,18	7966,40

Tabela 9.9: Custos das soluções obtidas para a instância grd02

Parcela/Metodologia	Car	Lag	AHE (Car)	AHE (Lag)
Tranformadores (\$)	3645,3 (44,12%)	3573,1 (43,87%)	3500,9 (43,24%)	3368,6 (41,95%)
Alimentadores Primários (\$)	1826,1 (22,10%)	1662,02 (22,31%)	1722,01 (21,27%)	1581,85 (19,70%)
Alimentadores Secundários (instalação) (\$)	1092,38 (13,22%)	1092,38 (13,41%)	1092,38 (13,49%)	1092,38 (13,61%)
Alimentadores Secundários (perdas) (\$)	1697,92 (20,55%)	1817,3 (22,31%)	1781,48 (22,00%)	1986,41 (24,74%)
Total	8261,70	8144,80	8096,77	8029,24

Tabela 9.10: Custos das soluções obtidas para a instância grd03

Nas tabelas 9.8 – 9.10 pode-se observar a importância de cada custo na composição do custo total. Em particular, observa-se a importância do custo dos transformadores, que chega a representar quase metade do custo total da rede.

É interessante notar como os ganhos obtidos pela abordagem híbrida são realmente devido à consideração da características globais do problema. Em geral, a abordagem híbrida permite um aumento do custo das perdas permitindo assim um ganho mais importante nos custos dos transformadores e da rede primária. Esta abordagem só consegue efetuar tal melhoria por levar em consideração, simultaneamente, os custos das redes secundária e primária e os custos dos transformadores.

Capítulo 10

Conclusões e Trabalhos Futuros

“Não me venham com conclusões!”

Fernando Pessoa – Lisbon Revisited

“Dentre as penas humanas, a mais dolorosa é a de prever muitas coisas e não poder fazer nada.”

Heródoto – Histórias, IX, 16

O Problema de Planejamento da Rede Secundária de Distribuição de Energia Elétrica, embora extremamente relevante em países com redes secundárias importantes (como o Brasil), é menosprezado pela literatura mundial.

Este trabalho procurou mostrar a importância deste problema, sobretudo em seu aspecto econômico. Esta questão pode ser resumida nos custos fixos de instalação de equipamentos e nos custos de perdas elétricas.

Redes secundárias longas tendem a apresentar custos de perdas significativos, enquanto redes secundárias pequenas apresentam predominância de custos fixos. É no compromisso entre os custos fixos e os custos de perdas que se encontra a situação de custo ótimo.

A busca deste equilíbrio foi feita através de quatro abordagens de resolução: exata, heurística, híbrida e meta-heurística. As quatro abordagens foram testadas e comparadas, e os resultados indicam as qualidades e limitações de cada uma delas.

A abordagem exata rapidamente encontra seus limites devido à dificuldade de resolução do problema. Tal abordagem foi, entretanto, extremamente útil como *referência de comparação* para os outros métodos.

A abordagem heurística proposta é rápida o suficiente para simular redes reais em poucos segundos,

apresentando ganhos de até 1,5% em relação à melhor estratégia conhecida da literatura, que por sua vez já apresenta ganhos significativos (da ordem de 10%) em relação à metodologia atualmente utilizada na CPFL.

A abordagem híbrida trabalha com as limitações da abordagem exata (tempos de resolução) e da abordagem heurística (qualidade da solução), obtendo um algoritmo intermediário que mantém as características de rapidez e melhora significativamente a qualidade da solução. Os resultados obtidos pela abordagem heurística chegam a ser mais de 4% melhores que a solução da literatura.

Finalmente uma abordagem alternativa, otimização via algoritmos genéticos, é utilizada com o intuito de confirmar a qualidade da solução obtida anteriormente. O algoritmo desenvolvido lida simplesmente com a localização dos transformadores, considerando as redes secundária e primária implicitamente na função de custo. Os resultados obtidos por tal abordagem mostram a eficiência do método heurístico proposto em encontrar boas regiões para a localização dos transformadores.

Como visto, o problema foi abordado por diferentes enfoques. Os resultados mostram a qualidade da abordagem híbrida desenvolvida. Acredita-se que tal abordagem seja competitiva mesmo em relação a outros métodos que por ventura venham a ser propostos na literatura. Um destes métodos pode até mesmo ser um Algoritmo Genético mais trabalhado que o apresentado aqui. Tal algoritmo poderia conter, por exemplo, uma fase de busca local e/ou uma maior precisão no cálculo da rede secundária (durante a avaliação da função de *fitness*).

De uma maneira geral, os ganhos obtidos para as redes reais em relação à solução da literatura variaram entre 0,71% e 4,27%. Ao ler-se tais números deve-se levar em conta que o problema de planejamento da rede secundária aparece para cada novo loteamento construído. Assim, o valor efetivo (em Reais) de tais ganhos deve ser multiplicado por uma quantidade muito grande de vezes em que eles são obtidos.

Algumas questões, específicas ao problema, não foram trabalhadas e podem dar margem a trabalhos futuros. Duas destas questões são a consideração de custos de perdas nos transformadores (que pode ser facilmente incluída em todas as abordagens desenvolvidas) e a consideração de uma abordagem dinâmica para o planejamento da rede.

Uma terceira questão surge da observação de que todo o planejamento é efetuado sobre uma *previsão de demanda*. Ora, erros nesta previsão podem comprometer, em parte, os resultados obtidos. Uma solução seria a utilização de lógica nebulosa nos algoritmos considerados. Existem propostas de utilização de tal teoria em problemas semelhantes, notadamente no problema de planejamento da rede primária (veja [65]).

Como uma última questão para trabalhos futuros haveria a consideração da expansão de um trecho de rede secundária existente, e não apenas a consideração de novos loteamentos. Tal desenvolvimento

necessitaria de mais informações, como por exemplo, o custo de se alterar a posição de um transformador, de se efetuar o recondutoramento de um trecho, etc. Os principais benefícios desta abordagem podem aparecer justamente em casos onde a previsão de demanda (sob a qual foi feita o planejamento original) não se confirmou com o passar dos anos, e agora se necessita de uma correção da rede existente.

Parte IV

Apêndices

Apêndice A

Um Problema Similar (e mais complicado) de Planejamento de Redes

No Capítulo 1, discutiu-se o fato de todos os ramos da rede secundária serem construídos, por questões de sustentação e facilidade de manutenção (veja Seção 1.6, em especial a página 10). Este fato simplifica as formulações FBN, (3.9)–(3.22) e FBA, (3.24)–(3.36) apresentadas no Capítulo 3, pelo fato de exigir menos variáveis binárias.

Isto acontece pois, como todos os ramos da rede secundária estão construídos, é necessário apenas saber o fluxo que passa por cada ramo. Para isso, não há necessidade de variáveis binárias, podendo o problema ser resolvido simplesmente através de um problema de fluxo em redes a custo mínimo.

Entretanto, em muitos problemas de planejamento em redes, há a necessidade de se perguntar sobre a construção ou não dos ramos. Seja pela necessidade de uma estrutura radial¹, seja pelo fato de que se pode obter economia deixando de construir alguns arcos.

Pensando neste problema, construíram-se novas formulações matemáticas, no estilo das apresentadas no Capítulo 3. Estas formulações são mais computacionalmente exigentes que as formulações anteriores, justamente pelo fato de apresentarem mais variáveis binárias.

Novamente, duas formulações foram construídas, uma “baseada em nós” e outra “baseada em arcos”, conforme idéias apresentadas no Capítulo 3.

¹Note que tal necessidade também existe no PPRSD. Neste caso, entretanto, a radialidade é conseguida através da abertura de conexões nos nós, e não nos arcos.

Buscando uma eficiência maior destas formulações, analisaram-se os trabalhos de Melkote e Daskin [54, 55]. Nestes dois trabalhos, os autores mostram a eficiência das formulações ditas “multiprodutos”. Nestas formulações, mesmo que haja um único produto circulando no grafo, assume-se que cada nó de demanda requer um produto diferente.

Embora este subterfúgio acabe resultando em uma explosão do número de variáveis reais do problema, devido à criação de diversos produtos, os autores argumentam que ele permite tornar a formulação mais “forte”, reduzindo o espaço de busca delimitado pelas restrições.

As idéias de Melkote e Daskin são interessantes especialmente para problemas de difícil resolução. Seus estudos atuam no sentido de aumentar a eficiência dos métodos de programação matemática. Buscando exatamente este maior desempenho, mais duas formulações foram desenvolvidas, chamadas “formulação *multiproduto* baseada em nós” e “formulação *multiproduto* baseada em arcos”. Na sequência, as quatro formulações são apresentadas e na Seção A.5 as suas eficiências são comparadas. A nomenclatura é a mesma usada no Capítulo 3, com a adição das variáveis binárias relativas à rede secundária (y_{ij}^2) e de uma referência de nós T que indica os nós que não são fly-taps ($T = N - F$).

A.1 Formulação Monoproduto Baseada em Nós

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in A, i < j} (f_{ij}^1 y_{ij}^1 + f_{ij}^2 y_{ij}^2) + \sum_{i \in T} \sum_{e=1}^{N_t} f^e z_i^e + \sum_{(i,j) \in A} (c_{ij}^1 x_{ij}^1 + \sum_{p=1}^{N_p} c_{ijp}^2 x_{ijp}^2) \quad (\text{A.1})$$

Sujeito a:

Restrições de conservação do fluxo, atendimento da demanda e capacidade de transformação

$$\sum_{j \in \delta^-(i)} (x_{ji}^1 + \sum_{p=1}^{N_p} x_{jip}^2) - \sum_{j \in \delta^+(i)} (x_{ij}^1 + \sum_{p=1}^{N_p} x_{ijp}^2) = \begin{cases} -\sum_{i \in T} d_i & i = o \\ d_i & i \in T \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$\sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^1 - \sum_{j \in \delta^-(i)} x_{ji}^1 = 0 \quad \forall i \in F. \quad (\text{A.3})$$

$$\sum_{j \in \delta^+(i)} \sum_{p=1}^{N_p} x_{ijp}^2 - \sum_{j \in \delta^-(i)} \sum_{p=1}^{N_p} x_{jip}^2 = 0 \quad \forall i \in F. \quad (\text{A.4})$$

$$0 \leq \sum_{j \in \delta^-(i)} x_{ji}^1 - \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^1 \leq \sum_{e=1}^{N_t} s^e z_i^e \quad \forall i \in T. \quad (\text{A.5})$$

$$-d_i \leq \sum_{j \in \delta^+(i)} \sum_{p=1}^{N_p} x_{ijp}^2 - \sum_{j \in \delta^-(i)} \sum_{p=1}^{N_p} x_{jip}^2 \leq \sum_{e=1}^{N_t} s^e z_i^e - d_i \quad \forall i \in T. \quad (\text{A.6})$$

$$\sum_{e=1}^{N_t} z_i^e \leq 1 \quad \forall i \in T. \quad (\text{A.7})$$

Restrições de capacidade nos arcos

$$x_{ij}^1 \leq M^1 y_{ij}^1 \quad \forall (i,j) \in A, \quad i < j. \quad (\text{A.8})$$

$$x_{ji}^1 \leq M^1 y_{ij}^1 \quad \forall (i,j) \in A, \quad i < j. \quad (\text{A.9})$$

$$x_{ijp}^2 \leq M_p^2 y_{ij}^2 \quad \forall (i,j) \in A, \quad i < j, \quad p = 1 \dots N_p. \quad (\text{A.10})$$

$$x_{jip}^2 \leq M_p^2 y_{ij}^2 \quad \forall (i,j) \in A, \quad i < j, \quad p = 1 \dots N_p. \quad (\text{A.11})$$

Definições das variáveis

$$x_{ij}^1 \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A. \quad (\text{A.12})$$

$$x_{ijp}^2 \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A, \quad p = 1 \dots N_p. \quad (\text{A.13})$$

$$y_{ij}^l \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in A \quad i < j, \quad l = 1, 2. \quad (\text{A.14})$$

$$z_i^e \in \{0, 1\} \quad \forall i \in T, \quad e = 1 \dots N_t. \quad (\text{A.15})$$

É criado um nó artificial de produção. Este nó está ligado, com custo zero, aos nós do grafo onde passa a rede primária. A produção deste nó é feita igual à demanda de todos os outros nós do grafo ($d_0 = -\sum_{i \in T} d_i$) (veja eq. A.2).

A função objetivo (A.1) minimiza os custos fixos associados aos arcos (alimentadores) e nós (transformadores) e os custos variáveis associados aos arcos. As restrições (A.2) garantem a conservação do fluxo na origem e em nós onde pode haver transformação de potência. Estas restrições atuam permitindo a transformação, ou seja, permitindo que, em um nó qualquer, haja um sumidouro de fluxo primário e uma fonte de fluxo secundário (de mesmo valor). Nota-se que estas restrições atuam em conjunto com as restrições (A.5) e (A.6), que só permitem que haja sumidouro de fluxo primário e fonte de fluxo secundário caso exista um transformador instalado no nó. As restrições (A.5) e (A.6) garantem também o respeito à capacidade dos transformadores, limitando o valor do “sumidouro primário” e da “fonte secundária”.

As restrições (A.3) e (A.4) são de mais simples entendimento, garantindo a conservação de fluxo para os nós do tipo F (sem possibilidade de transformação). Já as restrições (A.7) limitam o número de transformadores em cada nó a um.

As restrições (A.8) - (A.11) asseguram que só há fluxo em arcos construídos. Um detalhe é que, para economia de variáveis binárias, consideraram-se apenas as variáveis binárias com $i < j$. Assim, um arco ij construído permite o fluxo x no sentido ij ou no sentido ji . As restrições (A.12) e (A.13) garantem fluxos positivos e as restrições (A.14) e (A.15) denotam o caráter binário das variáveis y_{ij}^l e z_i .

A.2 Formulação Monoproduto Baseada em Arcos

$$Min \sum_{(i,j) \in A, i < j} (f_{ij}^1 y_{ij}^1 + f_{ij}^2 y_{ij}^2) + \sum_{i \in T} \sum_{e=1}^{N_t} f^e y_{ii}^e + \sum_{(i,j) \in A} (c_{ij}^1 x_{ij}^1 + \sum_{p=1}^{N_p} c_{ijp}^2 x_{ijp}^2) \quad (\text{A.16})$$

Sujeito a:

Restrições de conservação do fluxo, atendimento da demanda e capacidade de transformação

$$\sum_{j \in \delta^-(i)} x_{ji}^1 - \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^1 = \begin{cases} -\sum_{i \in N} d_i & i = 0, \\ x_{ii} & i \in T. \\ 0 & i \in F. \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

$$x_{ii} + \sum_{j \in \delta^-(i)} \sum_{p=1}^{N_p} x_{jip}^2 - \sum_{j \in \delta^+(i)} \sum_{p=1}^{N_p} x_{ijp}^2 = d_i, \quad i \in T. \quad (\text{A.18})$$

$$\sum_{j \in \delta^-(i)} \sum_{p=1}^{N_p} x_{jip}^2 - \sum_{j \in \delta^+(i)} \sum_{p=1}^{N_p} x_{ijp}^2 = 0, \quad i \in F. \quad (\text{A.19})$$

$$x_{ii} \leq \sum_{e=1}^{N_t} y_{ii}^e M_e, \quad i \in T. \quad (\text{A.20})$$

$$\sum_{e=1}^{N_t} y_{ii}^e = 1, \quad i \in T. \quad (\text{A.21})$$

Restrições de capacidade nos arcos

$$x_{ij}^1 \leq y_{ij}^1 M^1, \quad (i,j) \in A, \quad i < j. \quad (\text{A.22})$$

$$x_{ji}^1 \leq y_{ij}^1 M^1, \quad (i,j) \in A, \quad i < j. \quad (\text{A.23})$$

$$x_{ijp}^2 \leq y_{ij}^2 M_p^2, \quad (i,j) \in A, \quad i < j, \quad p = 1 \dots N_p. \quad (\text{A.24})$$

$$x_{jip}^2 \leq y_{ij}^2 M_p^2, \quad (i,j) \in A, \quad i < j, \quad p = 1 \dots N_p. \quad (\text{A.25})$$

Definições das variáveis

$$x_{ij}^1 \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A. \quad (\text{A.26})$$

$$x_{ijp}^2 \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A, \quad p = 1 \dots N_p. \quad (\text{A.27})$$

$$y_{ij}^l \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in A, \quad i < j, \quad l = 1, 2. \quad (\text{A.28})$$

$$y_{ii}^e \in \{0, 1\} \quad \forall i \in T, \quad e = 1 \dots N_t. \quad (\text{A.29})$$

Novamente, a função objetivo (A.16) minimiza os custos fixos de construção de trechos de alimentadores e instalação de transformadores, além do custo linear por partes dependente do fluxo em cada trecho de alimentador.

As restrições condicionam o problema da seguinte forma: (A.17) garantem a conservação do fluxo, no nível superior do grafo, para o nó origem (artificial), para os nós que têm arco de ligação (nós onde é possível a transformação) e para os nós onde não é possível a instalação de transformadores. As restrições (A.18) e (A.19) são as restrições equivalentes para o nível inferior do grafo (rede secundária), para os nós onde pode haver transformação (A.18) e para os nós onde a transformação não é possível (A.19).

As restrições (A.20) garantem que só há passagem de fluxo através de um arco de ligação se houver um transformador instalado, garantindo também o respeito à capacidade deste transformador. As restrições (A.21) estabelecem que apenas um transformador pode ser instalado por nó.

As restrições (A.22) e (A.23) garantem que só há fluxo primário em um trecho se nele houver rede primária instalada, enquanto as restrições (A.24) e (A.25) além de desempenhar papel equivalente para a rede secundária, ainda estabelecem os limites da aproximação linear por partes.

Finalmente, as restrições (A.26) - (A.29) definem as variáveis binárias e a canalização.

A.3 Formulação Multiproduto Baseada em Nós

$$\text{Min} \quad \sum_{(i,j) \in A, i < j} (f_{ij}^1 y_{ij}^1 + f_{ij}^2 y_{ij}^2) + \sum_{i \in T} \sum_{e=1}^{N_t} f^e z_i^e + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in T} (c_{ij}^1 x_{ijk}^1 + c_{ij}^2 x_{ijk}^2) d_k \quad (\text{A.30})$$

Sujeito a:

Restrições de conservação do fluxo, atendimento da demanda e capacidade de transformação

$$\sum_{j \in \delta^-(i)} (x_{jik}^1 + x_{jik}^2) - \sum_{j \in \delta^+(i)} (x_{ijk}^2 + x_{ijk}^1) = \begin{cases} -1 & \forall k \in T, \quad i = o. \\ +1 & \forall k \in T, \quad i = k. \\ 0 & \forall i, k \in T, \quad i \neq k. \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

$$\sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ijk}^l - \sum_{j \in \delta^-(i)} x_{jik}^l = 0 \quad \forall i \in F, \quad \forall k \in T, \quad l = 1, 2. \quad (\text{A.32})$$

$$0 \leq \sum_{k \in T} \left(\sum_{j \in \delta^-(i)} x_{jik}^1 d_k - \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ijk}^1 d_k \right) \leq \sum_{e=1}^{N_t} s^e z_i^e \quad \forall i, k \in T. \quad (\text{A.33})$$

$$-d_i \leq \sum_{k \in T} \left(\sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ijk}^2 d_k - \sum_{j \in \delta^-(i)} x_{jik}^2 d_k \right) \leq \sum_{e=1}^{N_t} s^e z_i^e - d_i \quad \forall i, k \in T. \quad (\text{A.34})$$

$$\sum_{e=1}^{N_t} z_i^e \leq 1 \quad \forall i \in T \quad (\text{A.35})$$

Restrições de capacidade nos arcos

$$x_{ijk}^l \leq y_{ij}^l \quad \forall (i, j) \in A, \quad \forall k \in T, \quad i < j, \quad l = 1, 2. \quad (\text{A.36})$$

$$x_{jik}^l \leq y_{ij}^l \quad \forall (i, j) \in A, \quad \forall k \in T, \quad i < j, \quad l = 1, 2. \quad (\text{A.37})$$

Definições das variáveis

$$x_{ijk}^l \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, \quad k \in T, \quad l = 1, 2. \quad (\text{A.38})$$

$$y_{ij}^l \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A, \quad i < j, \quad l = 1, 2. \quad (\text{A.39})$$

$$z_i^e \in \{0, 1\} \quad \forall i \in T, \quad e = 1 \dots N_t. \quad (\text{A.40})$$

As formulações multiproduto foram adaptadas diretamente das duas formulações monoproduto desenvolvidas. A idéia básica permanece: minimização dos custos fixos de instalação de alimentadores primários e secundários e de transformadores, além da minimização das perdas elétricas.

O número de variáveis nas formulações multiproduto é muito maior que nas formulações monoproduto. A cada nó de demanda, associa-se um produto (embora saiba-se que um único produto - energia elétrica - circula na rede). Desse modo, cada arco do grafo possui, associadas a si, duas variáveis de fluxo para cada nó de demanda do grafo. Lê-se então a variável x_{ijk}^l como o “fluxo do produto k circulando do nó i para o nó j no nível l ”.

A grande dificuldade da aplicação de formulações multiproduto ao PPRSD reside no fato do problema requisitar, constantemente, o valor do fluxo através de um arco. Nas formulações monoproduto, este valor é conhecido imediatamente (existe uma variável associada a ele). Nas formulações multiproduto, todavia, este valor só é conhecido através de um somatório dos fluxos de todos os produtos circulando no arco.

Por causa desta dificuldade de se descobrir o valor real do fluxo em um arco, optou-se nas formulações multiproduto, pela expressão do custo de perdas através de uma linearização simples (e não uma linearização por partes), tornando a formulação um pouco mais grosseira.

A função objetivo e as restrições do problema são bem parecidas com as restrições da formulação monoproduto baseada em nós. A função objetivo (A.30) minimiza os custos fixos (instalação de alimentadores e transformadores) e variáveis (perdas nos alimentadores secundários).

Analogamente ao caso monoproduto, as restrições (A.31) junto com as restrições (A.33) e (A.34) garantem o respeito às capacidades dos transformadores e a transformação de fluxo somente nos nós onde há transformadores instalados. Nota-se entretanto que neste caso, como as variáveis representam porcentagem da demanda atendida, o segundo termo de (A.31) é $+1$ (caso aquele seja o nó relativo ao produto - ou seja, 100% do produto k é consumido no nó k), -1 (para o nó origem) ou 0 (o produto k escoar livremente até o nó k , não atendendo nenhuma outra demanda).

Um aspecto interessante das restrições (A.33) e (A.34) é a necessidade, como comentado anteriormente, de se efetuar um somatório de todas as variáveis de fluxo, em cada arco, com o intuito de se verificar a violação da capacidade de transformação.

As restrições (A.32) garantem a conservação do fluxo de cada produto, para nós onde não há possibilidade de conversão de potência. As restrições (A.35) limitam o número de transformadores por poste a 1. As restrições (A.36) e (A.37) obrigam o fluxo a escoar somente por arcos construídos, enquanto as restrições (A.38)-(A.40) lidam com a canalização.

A.4 Formulação Multiproduto Baseada em Arcos

$$\text{Min} \quad \sum_{(i,j) \in A, i < j} (f_{ij}^1 y_{ij}^1 + f_{ij}^2 y_{ij}^2) + \sum_{i \in T} \sum_{e=1}^{N_t} f^e y_{ii}^e + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in T} (c_{ij}^1 x_{ijk}^1 + c_{ij}^2 x_{ijk}^2) \quad (\text{A.41})$$

Sujeito a:

Restrições de conservação do fluxo, atendimento da demanda e capacidade de transformação

$$\sum_{j \in \delta^-(i)} x_{jik}^1 - \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ijk}^1 = \begin{cases} -1 & i = 0, \\ x_{iik} & i \in T, \\ 0 & i \in F. \end{cases} \quad k \in T \quad (\text{A.42})$$

$$x_{iik} + \sum_{j \in \delta^-(i)} x_{jik}^2 - \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ijk}^2 = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}, \quad i, k \in T. \quad (\text{A.43})$$

$$\sum_{j \in \delta^-(i)} x_{jik}^2 - \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ijk}^2 = 0, \quad i \in F, \quad k \in T \quad (\text{A.44})$$

$$\sum_{k \in T} x_{iik} \leq \sum_{e=1}^{N_t} y_{ii}^e M_e, \quad i, k \in T. \quad (\text{A.45})$$

$$\sum_{i=1}^{N_t} y_{ii}^e = 1, \quad i \in T. \quad (\text{A.46})$$

Restrições de capacidade nos arcos

$$x_{ijk}^l \leq y_{ij}^l M^l, \quad (i, j) \in A, \quad i < j, \quad l = 1, 2. \quad (\text{A.47})$$

$$x_{jik}^l \leq y_{ij}^l M^l, \quad (i, j) \in A, \quad i < j, \quad l = 1, 2. \quad (\text{A.48})$$

Definições das variáveis

$$x_{ijk}^1 \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, \quad k \in T. \quad (\text{A.49})$$

$$x_{ijk}^2 \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, \quad k \in T. \quad (\text{A.50})$$

$$y_{ij}^l \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A, \quad i < j, \quad l = 1, 2. \quad (\text{A.51})$$

$$y_{ii}^e \in \{0, 1\} \quad \forall i \in T, \quad e = 1 \dots N_t. \quad (\text{A.52})$$

A formulação multiproduto baseada em arcos, assim como a formulação multiproduto baseada em nós, é derivada diretamente da sua equivalente monoproduto.

Conforme já assinalado para a formulação anterior, a grande diferença entre as versões monoproduto e multiproduto reside no fato da versão multiproduto apresentar uma linearização simples para o custo das perdas elétricas na rede secundária.

Além disso, é necessário uma soma dos fluxos nos arcos de ligação de níveis (arcos associados aos transformadores), de maneira a verificar a capacidade do transformador utilizado, como verifica-se nas restrições (A.45).

De maneira simplificada, a formulação novamente minimiza os custos de instalação e perdas (A.41), obedecendo as restrições de conservação de fluxo e atendimento de demanda (A.42)-(A.44) e capacidade dos transformadores (A.45), que podem ser instalados no máximo um por poste (A.46)

As restrições (A.47)-(A.48) asseguram que os fluxos só circulem através de arcos construídos e as restrições (A.49)-(A.52) definem e canalizam as variáveis.

A.5 Comparações entre as formulações

Para efeito de comparação entre as formulações, utilizaram-se as instâncias aleatórias apresentadas no Capítulo 8. Devido à maior dificuldade de resolução do problema, apenas as quinze primeiras instâncias foram utilizadas.

Inst.	(N,A)	FBN	FMBN	FBA	FMBA
cba01	(4,4)	0,14	0,10	0,12	0,08
cba02	(4,6)	0,29	0,25	0,24	0,36
cba03	(8,8)	2,55	4,04	2,17	3,06
cba04	(8,12)	1,25	4,68	1,58	6,34
cba05	(8,16)	1,67	3,90	2,12	3,90
cba06	(12,12)	6,22	16,12	6,40	15,11
cba07	(12,18)	41,55	148,15	43,30	59,50
cba08	(12,24)	7,98	297,52	18,45	68,36
cba09	(16,16)	27,54	73,43	42,33	62,09
cba10	(16,24)	23,96	181,73	49,19	170,49
cba11	(16,32)	215,85	2430,90	495,73	588,53
cba12	(20,20)	177,69	1030,86	463,13	307,12
cba13	(20,30)	397,65	3424,68	1026,19	1287,33
cba14	(20,40)	155,80	3287,24	1066,75	759,37
cba15	(24,24)	1986,92	14,6%	9,35%	2,72%

Tabela A.1: Tempos Computacionais (s) de Resolução no CPLEX (Para cba15, FMBN, FBA e FMBA não obtiveram uma solução em 6000s de simulação - o valor na tabela mostra então o *gap* da solução obtida)

Os resultados são apresentados na Tabela A.1, em termos do tempo computacional gasto CPLEX para simulação das instâncias, utilizando as diferentes formulações.

Nota-se que os tempos computacionais são bem maiores que os da Tabela 9.1. Por exemplo, a instância cba15, simulada naquele caso em cerca de 50s, neste novo problema exige 2000s (e apenas uma das formulações consegue ser simulada em menos de 6000s). Obviamente, este fato ocorre devido ao grande aumento das variáveis binárias necessárias para representar adequadamente o problema.

Diferentemente do que se poderia esperar ao ler-se os trabalhos de Melkote e Daskin [54, 55], as formulações multiprodutos não apresentaram ganhos em relação às formulações originais. Uma possível explicação é o fato de que o fluxo real nos arcos tenha que ser usado explicitamente (acarretando a necessidade da soma de todos os produtos), o que pode estar diminuindo a força na utilização da estratégia multiproduto.

Apêndice B

Uma Formulação *Fuzzy* para o PPRSD

Uma das etapas importantes para um bom planejamento é uma previsão adequada da demanda. Para tal, as companhias de distribuição possuem metodologias baseadas em experiências passadas que levam em conta o tipo de loteamento, a classe social dos futuros moradores, etc.

Apesar de tais metodologias obterem bons resultados, há sempre uma incerteza no tocante à demanda, como dado de entrada do problema de otimização. Esta incerteza não é levada em consideração nas formulações desenvolvidas no Capítulo 3, nem em nenhuma das metodologias desenvolvidas na parte II deste trabalho.

Para preencher esta lacuna, neste apêndice B, apresenta-se uma idéia de formulação *fuzzy* (ou nebulosa) para o PPRSD. Lógica *Fuzzy* é extremamente usada na literatura para consideração de problemas com incertezas. Detalhes sobre a teoria de lógica *fuzzy* podem ser encontrados em [48, 60]. Este trabalho limita-se a aplicar diretamente tais teorias ao problema, e efetuar uma breve análise de resultados.

B.1 A Formulação Original e a *Fuzzyficação*

As formulações FBA e FBN apresentadas nas páginas 31 e 33 podem ser resumidas na seguinte representação genérica:

$$\text{Min } cx + dy \quad (\text{B.1})$$

s.a.

$$a_{11}x + a_{12}y = d_i \quad (\text{B.2})$$

$$a_{21}x + a_{22}y = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$a_{31}x + a_{32}y \geq d_i \quad (\text{B.4})$$

$$a_{41}x + a_{42}y \geq 0 \quad (\text{B.5})$$

$$y \in \{0, 1\} \quad (\text{B.6})$$

Devido a erros de previsão, d_i contém em si uma incerteza, podendo variar, por exemplo, entre $d_i - p_i/2$ e $d_i + p_i/2$, onde p_i é o valor absoluto da incerteza.

Assumindo-se:

$d_l = d_i - p_i/2$ – demanda subestimada.

$d_u = d_i + p_i/2$ – demanda superestimada.

z_l – valor da solução de (3.9)–(3.22) considerando-se o caso de demanda d_l .

z_u – valor da solução de (3.9)–(3.22) considerando-se o caso de demanda d_u .

Uma formulação *fuzzy* para o problema é dada abaixo:

$$\text{Max } \lambda \quad (\text{B.7})$$

s.a.

$$cx + dy \leq z_l + \lambda(z_u - z_l) \quad (\text{B.8})$$

$$a_{11}x + a_{12}y = (d_i - p_i/2) + \lambda p_i \quad (\text{B.9})$$

$$a_{21}x + a_{22}y = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$a_{31}x + a_{32}y \geq (d_i - p_i/2) + \lambda p_i \quad (\text{B.11})$$

$$a_{41}x + a_{42}y \geq 0 \quad (\text{B.12})$$

$$y \in \{0, 1\} \quad (\text{B.13})$$

$$0 \leq \lambda < 1 \quad (\text{B.14})$$

Nota-se que λ é o parâmetro que permite que a demanda varie entre d_l e d_u . Para altos valores de λ , o problema original é resolvido considerando-se valores de demanda próximos de d_u , enquanto para

baixos valores de λ , o problema original é resolvido considerando-se baixos valores de demanda, próximos de d_l (veja restrições B.9 e B.11).

Uma solução λ só é factível caso o aumento no custo original ($cx + dy$) ocasionado pelo aumento de demanda seja menor que o aumento no termo linear dado pela reta que une os custos z_l e z_u . Em outras palavras, a formulação fuzzy tenta considerar a maior demanda possível, desde que o custo de atender esta demanda não ultrapasse um limite. Este limite é dado por $\lambda(z_u - z_l)$.

Com isso, tenta-se achar um compromisso entre o dilema de atender-se ou não uma demanda cuja existência é incerta.

A Figura B.1 mostra o custo obtido ($cx + dy$) em função de λ para a instância reg12nos. A figura mostra também a reta pontilhada dada por $\lambda(z_u - z_l)$, que serve de referência para analisar se “vale a pena” considerar um aumento de demanda.

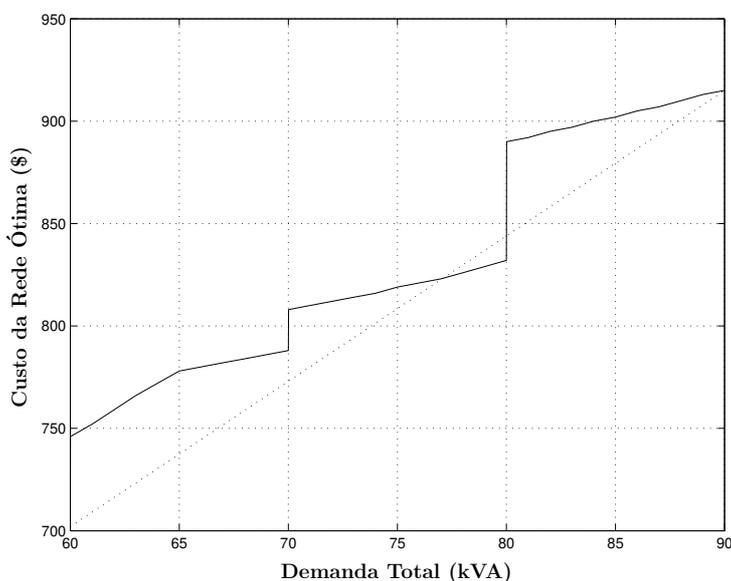


Figura B.1: Custo da solução ótima em função da demanda total

A solução da formulação fuzzy para esta instância resulta em $\lambda = 2/3$. Ou seja, uma demanda de 80kVA. A interpretação deste resultado é: a demanda de 80kVA é a maior demanda cujo aumento no custo em relação ao custo da situação d_l é menor que o termo de referência $\lambda(z_u - z_l)$, usado para verificar se o aumento no custo devido à consideração de uma demanda incerta é justificável.

Em outras palavras: tendo-se uma demanda assegurada de 60kVA e uma demanda incerta de 30kVA, a formulação fuzzy indica que o atendimento de $2/3$ da demanda incerta é um bom compromisso entre o risco de não se atender parte da demanda e o custo adicional relativo ao atendimento de uma demanda

incerta.

Na figura, é interessante notar os aumentos bruscos nos custos nas demandas 60, 70 e 80 kVA. Estes são justamente os pontos onde é necessário aumentar a capacidade dos transformadores da rede.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Abdinnour-Helm. A hybrid heuristic for the uncapacitated hub location problem. *European Journal of Operations Research*, 106:489–499, 1998. - Citado em: p. 20
- [2] R. N. Adams, A. Afuso, A. Rodrigues, and V. Gerez. A methodology for distribution system planning. *8th Power Systems Computation Conference - Helsinki, Finland*, 1984. - Citado em: p. 16
- [3] I. Adler, M. G. C. Resende, and G. Veiga. An implementation of Karmarkar’s algorithm for linear programming. *Mathematical Programming*, 44:297–335, 1989. - Citado em: p. 37
- [4] R. Ahuja, T. Magnanti, and J. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993. - Citado em: p. 14, 17, 19, 20, 50, 63
- [5] Y. P. Aneja. An integer linear programming approach to steiner problems in graphs. *Networks*, 10:167–178, 1980. - Citado em: p. 88
- [6] K. Aoki, K. Nara, T. Satoh, M. Kitagawa, and K. Yamanaka. New approximate optimization method for distribution system planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, 5(1):126–132, 1990. - Citado em: p. 14
- [7] Y. Backlund and J. A. Bubenko. Computer-aided distribution system planning. *Electrical Power & Energy Systems*, 121:35–45, 1979. - Citado em: p. 14, 17
- [8] T. Bäck, D. Fogel, and Z. Michalewicz. *Evolutionary Computation 1: Basic Algorithms and Operators*. Institute of Physics Publishing, 2000. - Citado em: p. 73, 74, 75
- [9] T. Bäck, D. Fogel, and Z. Michalewicz. *Evolutionary Computation 2: Advanced Algorithms and Operators*. Institute of Physics Publishing, 2000. - Citado em: p. 73, 74, 75
- [10] J. E. Beasley. Lagrangean heuristics for location problems. *European Journal of Operations Research*, 65:383–399, 1993. - Citado em: p. 57
- [11] R. E. Bixby, M. Fenelon, Z. Gu, E. Rothberg, and R. Wunderling. *System Modelling and Optimization: Methods, Theory and Applications*, chapter MIP: Theory and practice – closing the gap, pages 19–49. Kluwer, 2000. - Citado em: p. 41
- [12] M. S. Carneiro. *Planejamento a longo prazo em sistemas de distribuição de energia elétrica*. Tese de Doutorado - FEEC/UNICAMP, 1990. - Citado em: p. 89
- [13] M. S. Carneiro, P. França, and P. D. Silveira. Long-range planning of power distribution systems: primary networks. *Electrical Power & Energy Systems*, 1:139–148, 1993. - Citado em: p. 17

- [14] M. S. Carneiro, P. França, and P. D. Silveira. Long-range planning of power distribution systems: secondary networks. *Computers and Electrical Engineering*, 22(3):179–191, 1996. - Citado em: p. 14, 24, 29, 47, 48, 52, 58, 63, 83, 96
- [15] C. Cavellucci. *Buscas Informadas Baseadas em Grafos para a Minimização das Perdas em Sistemas de Distribuição de Energia Elétrica*. Tese de Doutorado - FEEC/UNICAMP, 1998. - Citado em: p. 4
- [16] A. A. Chowdhury and D. O. Koval. Current practices and customer value-based distribution system reliability planning. *Industry Applications Conference 2000, IEEE, Roma - Itália*, 2:909–916, 2000. - Citado em: p. 18
- [17] L. Cooper. Location-allocation problems. *Operations Research*, 11:331–343, 1963. - Citado em: p. 57
- [18] G. Cornuejols, M. L. Fisher, and G. Nemhauser. Location of bank accounts to optimize float: an analytic study of exact and approximate algorithms. *Management Science*, 23:789–810, 1977. - Citado em: p. 50
- [19] A. M. Costa, R. R. F. Attux, and J. M. T. Romano. Blind linear equalization: Principles and a case study using genetic algorithms. In *Submitted to IEEE International Telecommunications Symposium*, Natal - Brazil, Sep 2002. - Citado em: p. 72
- [20] A. M. Costa and P. M. França. Planejamento da rede secundária de distribuição de energia elétrica. In *Aceito para o Congresso Brasileiro de Automática*, Natal - Brazil, Sep 2002. - Citado em: p. 88
- [21] E. Costamagna, A. Fanni, and G. Giacinto. A tabu search algorithm for the optimisation of telecommunications networks. *European Journal of Operations Research*, 106:357–372, 1998. - Citado em: p. 19
- [22] F. R. B. Cruz, J. M. Smith, and G. R. Matheus. Algorithms for a multi-level network optimization problem. *European Journal of Operations Research*, 118:164–180, 1999. - Citado em: p. 20, 24, 26, 29
- [23] M. Davies. Design of l. v. distributors from standard cable sizes. *Proceedings of the IEE*, 112(5):949–956, 1965. - Citado em: p. 13, 14
- [24] J. Ebery, M. Krishnamoorthy, A. Ernst, and N. Boland. The capacitated multiple allocation hub location problem: Formulations and algorithms. *European Journal of Operations Research*, 120:614–631, 2000. - Citado em: p. 21
- [25] M. A. El-Kadi. Computer aided planning of distribution substation and primary feeders. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 103(6):1183–1189, 1984. - Citado em: p. 17
- [26] A. T. Ernst and M. Krishnamoorthy. Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem. *European Journal of Operations Research*, 104:100–112, 1998. - Citado em: p. 20
- [27] D. S. *et al.* Optimal distribution substation and primary feeder planning via the fixed charge network formulation. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 101:602–609, 1982. - Citado em: p. 8, 17
- [28] T. H. Fawzi, K. F. All, and S. M. El-Sobki. A new planning model of distribution systems. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 102(9):3010–3017, 1983. - Citado em: p. 17
- [29] M. L. Fisher. The lagrangian relaxation method for solving integer programming problems. *Management Science*, 27 (1):1–18, 1981. - Citado em: p. 53

- [30] M. L. Fisher. An applications oriented guide to lagrangian relaxation. *Interfaces*, 15 (2):10–21, 1985. - Citado em: p. 53
- [31] R. Fourer, D. M. Gay, and B. W. Kernighan. *AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming*. Duxbury Press, Cole Publishing Company, 1993. - Citado em: p. 41
- [32] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and intractability*. W. H. Freeman, 1979. - Citado em: p. 42
- [33] F. Glover and M. Laguna. *Tabu Search*. Kluwer, 1998. - Citado em: p. 19
- [34] T. Gonen. *Electric Power Distribution System Engineering*. McGraw-Hill, 1986. - Citado em: p. 7
- [35] T. Gonen and B. L. Foote. Distribution system planning using mixed-integer programming. *Proceedings of the IEE - Part C*, 128(2):70–79, 1981. - Citado em: p. 17
- [36] T. Gonen and I. Ramírez-Rosado. Review of distribution system planning models: a model for optimal multi-stage planning. *Proceedings of the IEE - Part C*, 133(7):397–408, 1986. - Citado em: p. 15
- [37] T. Gonen and I. Ramírez-Rosado. Optimal multi-stage planning of power distribution systems. *IEEE Trans. on PD*, 2:512–519, 1987. - Citado em: p. 17
- [38] M. Held and R. Karp. The traveling-salesman problem and minimum spanning trees: part II. *Mathematical Programming*, 1:6–25, 1971. - Citado em: p. 56
- [39] K. S. Hindi and A. Brameller. Design of low-voltage distribution networks: A mathematical programming method. *Proceedings of the IEE*, 124(1):54–58, 1977. - Citado em: p. 17
- [40] J. H. Holland. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. The University of Michigan Press, 1975. - Citado em: p. 18, 71, 78
- [41] J. H. Holland. *Adaptation in Natural and Artificial Systems - 2nd Edition*. The University of Michigan Press, 1992. - Citado em: p. 78
- [42] S. B. Holt and D. M. Crawford. A mathematical optimization technique for locating and sizing distribution substations and deriving their optimal service areas. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 94(2):230–235, 1975. - Citado em: p. 16
- [43] ILOG. *ILOG Cplex 6.5 - Users Manual*. ILOG, 1999. - Citado em: p. 42
- [44] A. Jongh, M. Gendreau, and M. Labbe. Finding disjoint routes in telecommunications networks with two technologies. *Operations Research*, 47(1):81–92, 1997. - Citado em: p. 19
- [45] S. Jonnavithula and R. Billington. Minimum cost analysis of feeder routing in distribution system planning. *IEEE Trans. on PD*, pages 1935–1940, 1996. - Citado em: p. 18
- [46] S. Khator and L. C. Leung. Power distribution planning: A review of models and issues. *IEEE Transactions on Power Systems*, pages 1151–1559, 1997. - Citado em: p. 15, 16
- [47] G. Kjolle, L. Rolfseng, and E. Dahl. The economic aspect of reliability in distribution system planning. *IEEE Trans. on PD*, 5(2):1153–1157, 1990. - Citado em: p. 18
- [48] G. J. Klir and B. Yuan. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic - theory and applications*. Prentice Hall, 1997. - Citado em: p. 121
- [49] P. Kubat and J. M. Smith. A multi-period network design problem for cellular telecommunications systems. *European Journal of Operations Research*, 134:439–456, 2001. - Citado em: p. 19

- [50] A. H. Land and A. G. Doig. An automatic method for solving discrete programming problems. *Econometrica*, 28:497–520, 1960. - Citado em: p. 38
- [51] D. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley, 1984. - Citado em: p. 14, 37
- [52] E. Masud. An interactive procedure for sizing and timing distribution substations using optimization techniques. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 93(5):1281–1286, 1974. - Citado em: p. 16
- [53] E. Masud. Distribution planning: State-of-the-art and extensions to substation sizing. *Electric Power Systems Research*, 1:203–212, 1978. - Citado em: p. 16
- [54] S. Melkote and M. S. Daskin. Capacitated facility location/network design problems. *European Journal of Operations Research*, 129:481–495, 2001. - Citado em: p. 20, 93, 110, 119
- [55] S. Melkote and M. S. Daskin. An integrated model of facility location and transportation network design. *Transportation Research Part A*, 35:515–538, 2001. - Citado em: p. 20, 93, 110, 119
- [56] Z. Michalewicz. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Springer, 1996. - Citado em: p. 18, 73, 74, 75
- [57] V. Miranda, J. Ranito, and L. M. Proença. Genetic algorithms in optimal multistage distribution network planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9:1927–1933, 1994. - Citado em: p. 18
- [58] V. Miranda, D. Srinivasan, and L. M. Proença. Evolutionary computation in power systems. *Electrical Power & Energy Systems*, 20(2):89–98, 1998. - Citado em: p. 16, 18
- [59] I. Paiva, V. A. Armentano, and C. M. F. Carlson. Heurística para o projeto de redes de comunicações móveis. *XXXIII SBPO, Campos do Jordão - SP*, 2001. - Citado em: p. 19
- [60] W. Pedrycz and F. Gomide. *An introduction to fuzzy sets - Analysis and Design*. MIT Press, 1998. - Citado em: p. 121
- [61] K. F. Poon, A. Conway, G. Wardrop, and J. Mellis. Successful application of genetic algorithms to network design and planning. *BT Technology Journal*, 18(4):32–41, 2000. - Citado em: p. 19
- [62] I. J. Ramirez-Rosado and J. L. Bernal-Agustín. Optimization of the power distribution network design by application of genetic algorithms. *International Journal of Power and Energy Systems*, 15(3):104–110, 1995. - Citado em: p. 18
- [63] I. J. Ramirez-Rosado and J. L. Bernal-Agustín. Genetic algorithm applied to the design of large power distribution systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 13:696–703, 1998. - Citado em: p. 18
- [64] I. J. Ramirez-Rosado and J. L. Bernal-Agustín. Reliability and costs optimization for distribution networks expansion using an evolutionary algorithm. *IEEE Transactions on Power Systems*, 16:111–118, 2001. - Citado em: p. 18
- [65] R. Sarfi, M. Salama, and A. Chikhani. Applications of fuzzy sets theory in power systems planning and operation: a critical review to assist in implementation. *Electric Power Systems Research*, 39(2):89–101, 1996. - Citado em: p. 104

- [66] E. L. F. Senne and L. A. N. Lorena. *Computing Tools for Modeling, Optimization and Simulation: Interfaces in Computer Science and Operations Research*, chapter Lagrangean/Surrogate heuristics for p-median problems, pages 115–130. Luwer, 2000. - Citado em: p. 55
- [67] D. Skorin-Kapov and J. Skorin-Kapov. On tabu-search for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operations Research*, 73:502–509, 1994. - Citado em: p. 20, 21
- [68] J. K. Snelson and M. J. Carson. Logical design of branched l. v. distributors. *Proceedings of the IEE*, 117(2):415–420, 1970. - Citado em: p. 14
- [69] J. Sohn and S. Park. Efficient solution procedure and reduced size formulations for p-hub location problems. *European Journal of Operations Research*, 108(2):118–126, 1998. - Citado em: p. 21
- [70] A. A. A. Souza and F. N. Junior. Otimização de projetos de rede secundária de distribuição. *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Campos do Jordão - SP*, pages 1203–1212, 2001. - Citado em: p. 15
- [71] E. D. Taillard. Heuristic methods for large centroid clustering problems. Technical Report IDSIA-96-96, IDSIA, 10, 1996. - Citado em: p. 57
- [72] Y. Tang. Power distribution system planning with reliability modelling and optimization. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(1):181–189, 1996. - Citado em: p. 18
- [73] M. B. Teitz and P. Bart. Heuristic methods for estimating the generalized vertex median of a weighted graph. *Operations Research*, 16:955–961, 1968. - Citado em: p. 50
- [74] G. L. Thompson and D. L. Wall. A branch and bound model for choosing optimal substation locations. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 100:2683–2688, 1981. - Citado em: p. 17
- [75] M. Vaziri, K. Tomsovic, and T. Gonen. Distribution expansion problem revisited: Part 1 categorical analysis and future directions. *Proceedings of the Fourth IASTED International Conference on Power and Energy Systems (PES 2000), Marbella, Spain*, 2000. - Citado em: p. 4, 7, 15, 16
- [76] D. Wall, G. Thompson, and J. Northcote-Green. An optimization model for planning radial distribution networks. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 98:1061–1068, 1979. - Citado em: p. 16
- [77] R. Wolff. The new electronic frontier distribution design. *Electrical World*, pages 65–80, 1982. - Citado em: p. 4
- [78] L. Wolsey. *Integer Programming*. John Wiley & Sons, 1998. - Citado em: p. 39, 41, 55