

# Análise de Desempenho de Detectores Multiusuários Lineares em Canal com Desvanecimento Rayleigh

Autor: Gustavo Fraidenraich

Orientador: Prof. Dr. Renato Baldini Filho

Tese submetida à Universidade de Campinas -  
UNICAMP como requisito para o grau de mes-  
tre em Engenharia Elétrica na Faculdade de En-  
genharia Elétrica e de Computação

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Renato Baldini Filho    DECOM / UNICAMP

Prof. Dr. Cecilio José Lins Pimentel    DES / UFPE

Prof. Dr. Celso de Almeida    DECOM / UNICAMP

Prof. Dr. João Marcos T. Romano    DECOM / UNICAMP

Agosto de 2002

## Resumo

Este trabalho apresenta expressões analíticas para o cálculo de probabilidade de erro de bit em sistemas CDMA utilizando detectores multiusuários MMSE (*minimum mean square error*) em canal Rayleigh seletivo. Utilizou-se seqüências de espalhamento puramente aleatórias, controle ideal de potência e considerou-se os casos síncronos e assíncronos de transmissão.

Também foram obtidas neste trabalho expressões para o cálculo da probabilidade de erro de bit em sistemas multitasas utilizando detectores multiusuários Descorrelacionador e MMSE. Todos os resultados foram validados por simulação.

## Abstract

In this work simplified expressions to evaluate the performance of multiuser MMSE detector in CDMA systems using random spreading sequence on multipath Rayleigh fading channel are obtained. This work also presents simplified expressions for the mean bit error probability for a multirate system using random spreading sequences on AWGN and multipath Rayleigh fading channels using the multiuser MMSE and decorrelating detectors. All the results were validated by simulation.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Detecção Multiusuário</b>	<b>4</b>
2.1	Modelo básico de um sistema CDMA síncrono . . . . .	4
2.1.1	Representação Matricial do Sistema CDMA Síncrono . . . . .	7
2.2	Modelo básico de um sistema CDMA Assíncrono . . . . .	8
2.3	Detector Multiusuário Descorrelacionador . . . . .	14
2.3.1	O detector Descorrelacionador para o caso Síncrono . . . . .	14
2.3.2	O Detector Descorrelacionador para o caso Assíncrono . . . . .	17
2.3.3	Comparação do detector Descorrelacionador para o caso síncrono e assíncrono . . . . .	19
2.3.4	Detector Descorrelacionador com Desvanecimento Rayleigh . . . . .	20
2.3.5	Detector Multiusuário Descorrelacionador com Desvanecimento Rayleigh e Múltiplos Percursos . . . . .	22
2.4	Detector Multiusuário Linear de Mínimo Erro Quadrático Médio (MMSE)	27
2.4.1	Probabilidade de erro do detector linear MMSE . . . . .	30
2.4.2	Probabilidade de erro do detector linear MMSE utilizando seqüên- cias puramente aleatórias . . . . .	31
2.4.2.1	Seqüências puramente aleatórias . . . . .	31
2.4.2.2	Probabilidade de Erro de Bit para o MMSE . . . . .	32

2.4.2.3	Desempenho do MMSE em canal Rayleigh seletivo . . .	33
2.4.2.4	Verificação da Validade das Expressões Aproximadas . .	36
<b>3</b>	<b>Sistemas Multitaxas</b>	<b>39</b>
3.1	Introdução . . . . .	39
3.2	Probabilidade de Erro em Sistemas Multitaxas com Ganho de Processamento Variável . . . . .	41
3.2.1	Probabilidade de Erro para os detectores Descorrelacionador e MMSE usando seqüências puramente aleatórias . . . . .	42
3.2.2	Probabilidade de erro de bit em sistemas multiusuários com múltiplas taxas em canal AWGN . . . . .	43
3.2.3	Desempenho de um sistema multiusuário com múltiplas taxas em canal com desvanecimento seletivo Rayleigh . . . . .	44
3.2.4	Resultados Numéricos e Comparações . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Considerações Finais e Trabalhos Futuros</b>	<b>50</b>
4.1	Considerações Finais . . . . .	50
4.2	Trabalhos Futuros . . . . .	51
	<b>Bibliografia</b>	<b>52</b>
<b>A</b>	<b>Cálculo da Matriz de Mínimo Erro Quadrático Médio (MMSE)</b>	<b>54</b>
<b>B</b>	<b>Cálculo da Probabilidade de Erro de Bit para o Detector MMSE em Canal AWGN</b>	<b>57</b>
B.1	Formulação do Problema . . . . .	58
<b>C</b>	<b>Trabalhos Publicados</b>	<b>62</b>

# Lista de Figuras

2.1	Modelo de um sistema Síncrono CDMA com receptores filtro casados. . .	5
2.2	Sistema CDMA Assíncrono com três usuários, $M = 1$ e janela de observação de 3 bits. . . . .	9
2.3	Modelo assíncrono mostrando a interferência dos usuários 2 e 3 em relação ao usuário 1. . . . .	12
2.4	Modelo do detector Descorrelacionador, caso síncrono. . . . .	16
2.5	Probabilidade de erro de bit para o detector filtro casado e o Descorrelacionador. Caso síncrono, $G_p = 32$ e 10 usuários. . . . .	17
2.6	Detector Descorrelacionador caso assíncrono. . . . .	18
2.7	Comparação do detector Descorrelacionador para o caso síncrono e assíncrono, SNR= 7 dB. . . . .	20
2.8	Probabilidade de erro de bit para o Descorrelacionador, caso síncrono. Comparação da probabilidade de erro de bit para o canal com e sem desvanecimento Rayleigh. . . . .	22
2.9	Modelo de um sistema CDMA com detecção multiusuário com detector Descorrelacionador utilizando diversidade de ordem $L$ e uma única inversão de matriz $\mathbf{R}$ para todos os ramos de diversidade. . . . .	25
2.10	Modelo de um sistema CDMA com detecção multiusuário com detector Descorrelacionador utilizando diversidade de ordem $L$ e inversão de matriz $\mathbf{R}$ para todos os ramos da diversidade. . . . .	26

2.11	Probabilidade de erro para o detector Descorrelacionador variando a ordem da diversidade $L$ em sistema CDMA síncrono. . . . .	27
2.12	Diagrama em bloco do receptor multiusuário MMSE, caso síncrono. . . . .	29
2.13	MMSE síncrono, $Gp=64$ e $SNR = 7$ dB, canal AWGN. . . . .	37
2.14	MMSE assíncrono, $Gp=64$ e $SNR = 7$ dB, canal AWGN. . . . .	37
2.15	MMSE síncrono, $Gp=64$ e $SNR = 7$ dB, canal com desvanecimento Rayleigh seletivo. . . . .	38
2.16	MMSE assíncrono, $Gp=128$ e $SNR = 7$ dB, canal com desvanecimento Rayleigh seletivo. . . . .	38
3.1	Sistema multitaxa, com 10 usuários. 5 usuários com $Gp = 64$ , e 5 usuários e $Gp = 128$ . . . . .	42
3.2	Detector Descorrelacionador em canal AWGN, 5 usuários com $Gp = 64$ e 5 usuários com $Gp = 128$ , Sistema equivalente a um sistema com 15 usuários e $Gp = 128$ . . . . .	46
3.3	Detector Descorrelacionador Síncrono, $Gp = 64$ , canal com desvanecimento Rayleigh plano. . . . .	46
3.4	Detector Descorrelacionador Síncrono, $Gp = 64$ , canal com desvanecimento Rayleigh seletivo em frequência com 2 percursos. . . . .	47
3.5	Detector Descorrelacionador síncrono, $Gp = 64$ , canal com desvanecimento Rayleigh seletivo em frequência com 4 percursos. . . . .	47
3.6	Detector MMSE em canal AWGN com 5 usuários com $Gp = 64$ e 5 usuários com $Gp = 128$ , sistema equivalente a um sistema com 15 usuários com $Gp = 128$ . . . . .	48
3.7	Detector MMSE síncrono, $Gp = 64$ , canal com desvanecimento Rayleigh plano. Sistema com 5 usuários com $Gp = 64$ e 5 usuários com $Gp = 128$ . . . . .	48

3.8	Detector MMSE síncrono, $Gp = 64$ , canal com desvanecimento Rayleigh seletivo em frequência com 2 percursos. . . . .	49
3.9	Detector MMSE síncrono, $Gp = 64$ , canal com desvanecimento Rayleigh seletivo em frequência com 4 percursos. . . . .	49

# Glossário

**FDMA** - Frequency Division Multiple Access (Múltiplo acesso por divisão em frequência)

**TDMA** - Time Division Multiple Access (Múltiplo acesso por divisão no tempo)

**CDMA** - Code Division Multiple Access (Múltiplo acesso por divisão nos códigos)

**MMSE** - Minimum Mean Square Error (mínimo erro quadrático médio)

**MAI** - Multiple Access Interference (interferência de múltiplo acesso)

**MUD** - Multiuser Detection (detecção multiusuário)

**AWGN** - Additive white Gaussian Noise (ruído aditivo branco Gaussiano)

$K$  - Número de Usuários do Sistema

$G_p$  - Ganho de Processamento

$s_k$  - Seqüência de espalhamento do usuário  $k$ .

$A_k$  - Amplitude do usuário  $k$ .

$\sigma$  - Desvio padrão do ruído

$\rho_{i,j}$  - Correlação entre a seqüência de espalhamento do usuário  $i$  e a seqüência de espalhamento do usuário  $j$ .

$n$  - Ruído AWGN

$b_k$  - Bit do usuário  $k$ .

$R_i$  - Taxa de transmissão do  $i$ -ésimo grupo em um sistema multitaxa

$\mathbf{R}$  - Matriz de autocorrelação das seqüências de espalhamento

$\mathbf{A}$  - Matriz das Amplitudes dos bits transmitidos pelos usuários

$\mathbf{b}$  - Vetor de bits transmitidos

$\mathbf{n}$  - Vetor ruído AWGN

$\mathbf{M}$  - Matriz MMSE

$M$  - Parâmetro para o cálculo do tamanho da janela de observação no caso assíncrono

$\tau_k$  - Atraso de propagação do usuário  $k$

$\eta$  - Eficiência multiassintótica

$\alpha$  - Desvanecimento Rayleigh

$L$  - Número de multipercursos

$\phi$  - Função de Autocorrelação

$\gamma_b$  - Relação sinal-ruído

$E_b$  - Energia por Bit

$B$  - Largura de Banda do sinal

$\frac{N_0}{2}$  - Variância do ruído AWGN

Dedico esta tese aos meus pais, Naum e Maria Inês,  
e a minha irmã, Verônica.

# Agradecimentos

Eu gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos ao Prof. Renato Baldini Filho, meu orientador, pelo apoio, ajuda, opinião e amizade durante todo o decorrer da tese.

Eu gostaria de agradecer ao Prof. Celso de Almeida pela ajuda e participação durante toda a minha tese. Gostaria de agradecer ao Prof. Roger Hoefel pelo incentivo, participação e colaboração nas minhas simulações. Gostaria de agradecer ao Prof. Michel Yacoub pela amizade e motivação no meu trabalho.

Eu gostaria de agradecer aos colegas de trabalho Sílvia, Rodrigo, Teógenes, Gonzalo, Tarciana e Magno pela amizade e por me proporcionar uma agradável convivência, clima de companheirismo e ajuda no ambiente de trabalho.

Eu gostaria de agradecer à minha namorada, Lelma, pelo apoio, incentivo, carinho e compreensão durante o período da tese.

Eu gostaria de agradecer aos meus grandes amigos: André, Carlos Henrique, Daniel, Dimitri, Divanilson, Fabrício, Felipe, Joselan, Marcus, Márcio, Vitor, e a todos aqueles que por uma falha imprópria da minha memória deixei de citar.

À FAPESP, pelo apoio a este projeto.

# Capítulo 1

## Introdução

Os primeiros sistemas celulares surgiram no início da década de 80. Estes sistemas eram analógicos e utilizavam a tecnologia de múltiplo acesso denominada de FDMA (*frequency division multiple access*). Com o crescimento da demanda de usuários e serviços de telefonia móvel, foi necessário aumentar a capacidade por célula. Para satisfazer essa necessidade houve a migração dos sistemas FDMA para IS-136 [1] e GSM (*global system mobile*), dois sistemas de múltiplo acesso baseados no acesso por divisão temporal. Pouco tempo depois vieram os sistemas CDMA (*code division multiple access*), sistemas de múltiplo acesso baseados na divisão dos usuários por códigos, que prometiam um aumento ainda maior do número de usuários quando comparados aos anteriores, IS-136 e GSM. Uma vez estabelecida a tecnologia CDMA, a questão era como melhorar o desempenho deste sistema. Vários avanços foram feitos nessa área, entre eles, pode-se destacar: a melhoria no controle de potência visando mitigar o efeito perto-longe (*near-far*) [2], a utilização de receptores *RAKE* [3], que se beneficiam do canal com múltiplos percursos, a escolha adequada das seqüências de espalhamento para o enlace de subida ou enlace reverso (enlace entre o móvel e a estação rádio base) e o enlace de descida *ou direto* (enlace entre a rádio base e o móvel). A detecção multiusuário (*MUD - multiuser detection*) surgiu como mais uma ferramenta para melhorar o desempenho dos receptores

---

que serão utilizados nos sistemas de terceira geração [4].

A recepção realizada através do filtro casado é ótima quando o sinal desejado sofre interferência apenas de ruído aditivo [3]. No entanto esta condição não é mais válida em sistemas CDMA, onde a interferência majoritária advém dos outros usuários. A detecção multiusuário traz, de inovador, o fato de considerar as seqüências de espalhamento de todos os usuários na detecção do sinal de um dado usuário específico. A detecção multiusuário ótima requer um custo computacional elevado [5], assim, técnicas sub-ótimas que requerem um custo computacional menor foram desenvolvidas, permitindo que este tipo de detecção seja utilizado em sistemas comerciais. Neste cenário de detectores sub-ótimos, pode-se destacar pelo seu desempenho, os detectores Descorrelacionador e MMSE (*minimum mean square error*) [6]. O benefício introduzido por este tipo de detecção tem feito com que sistemas de terceira geração utilizem detectores MMSE nas estações rádio base [7, 8, 9].

Ainda no âmbito dos sistemas de terceira geração, diferentes serviços serão oferecidos, tais como: vídeo, voz, dados, etc. Estes tipos de serviços irão requerer taxas variáveis de transmissão para cada usuário. Um sistema, que tem por característica taxas variáveis de transmissão, é chamado *sistema multitaxa* [10]. A junção de sistemas multitaxas com os sistemas de detecção multiusuário é bem recente e ainda está em relevância no ambiente de pesquisa. Este trabalho de tese propõe, inicialmente, estudar o comportamento desta conjunção de sistemas.

A tese é organizada da seguinte forma: no capítulo 2 são apresentados os conceitos básicos dos detectores lineares multiusuário Descorrelacionador e MMSE (*minimum mean square error*). Ainda neste capítulo são feitas considerações sobre o cálculo de probabilidade de erro em sistemas unicelulares, casos síncronos e assíncronos, com controle ideal de potência e seqüências de espalhamento puramente aleatórias. Como contribuição relevante neste capítulo, foram obtidas expressões analíticas para o cálculo de probabilidade de erro de bit do detector MMSE com seqüências puramente aleatórias

---

em canal com desvanecimento Rayleigh por múltiplos percursos.

No capítulo 3 é feita uma introdução aos sistemas multitaxas utilizando filtros casados na recepção [3]. A idéia dos sistemas multitaxa é então estendida aos receptores multiusuários Descorrelacionador e MMSE. Também como contribuição deste capítulo, foram obtidas expressões analíticas para o cálculo da probabilidade de erro para sistemas multitaxas. Todos os resultados obtidos foram validados através de simulações computacionais.

Finalmente no capítulo 4 são apresentadas as conclusões, comentários e sugestões para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Detecção Multiusuário

### 2.1 Modelo básico de um sistema CDMA síncrono

Considere um sistema CDMA (*Code Division Multiple Access*) com  $K$  usuários transmitindo simultaneamente seqüências de bits de informação. Cada usuário espalha os seus bits de informação utilizando uma seqüência de espalhamento específica e única. Uma vez que o sinal foi transmitido, este se propaga até alcançar o receptor. O sinal recebido será a soma de todos os sinais dos  $K$  usuários espalhados pelas suas respectivas seqüências adicionado ao ruído aditivo branco Gaussiano introduzido pelo canal.

No receptor, o sinal de interesse é multiplicado novamente pela seqüência do usuário correspondente e, dessa forma, o sinal é restabelecido. A Fig. 2.1 mostra o modelo deste sistema.

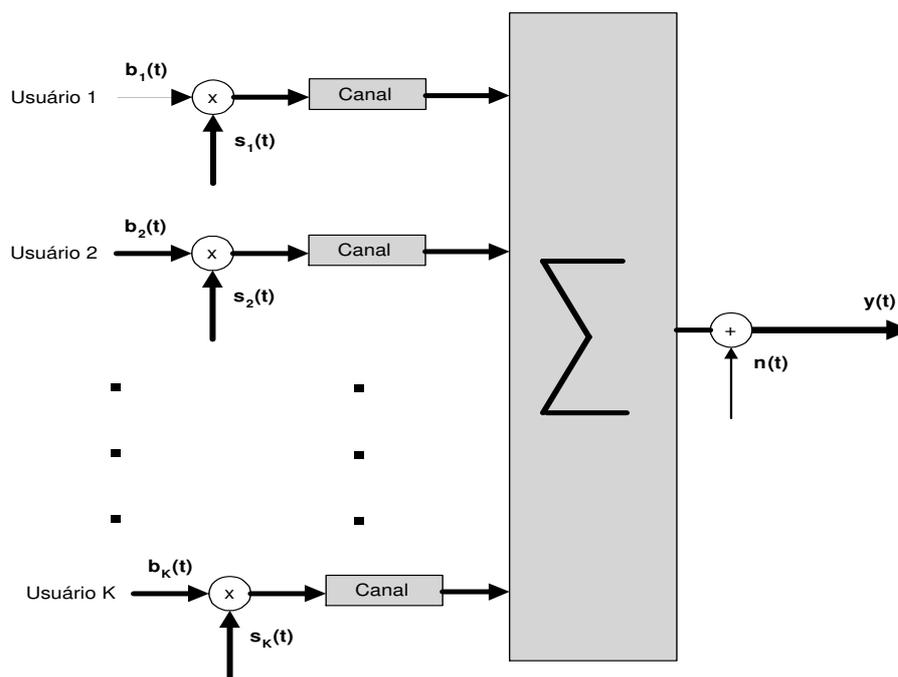


Figura 2.1: Modelo de um sistema Síncrono CDMA com receptores filtro casados.

O sinal recebido pode ser representado matematicamente como [4]:

$$y(t) = \sum_{k=1}^K A_k b_k s_k(t) + \sigma n(t) \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.1)$$

onde:

- $s_k(t)$  é a seqüência de espalhamento cuja energia é normalizada, isto é:

$$\|s_k\|^2 = \int_0^T s_k^2(t) dt = 1; \quad (2.2)$$

- $T$  é o inverso da taxa de transmissão de dados;
- $A_k$  é a amplitude recebida do sinal do usuário  $k$ ;

- A energia de bit do sinal em banda base do  $k$ -ésimo usuário é dada por:

$$E_b = A_k^2; \quad (2.3)$$

- $b_k \in [-1, +1]$ , é o bit transmitido do  $k$ -ésimo usuário;
- $n(t)$  é o ruído aditivo Gaussiano branco com densidade espectral  $\frac{N_0}{2}$ (W/Hz). A potência do ruído para uma largura de banda  $B$  é igual a  $2\sigma^2 B$ ;

Note que  $y(t)$  é o sinal recebido ainda espalhado. Os sinais desejados depois de restabelecidos têm a seguinte forma:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \int_0^T s_1(t) y(t) dt; \\ y_2(t) &= \int_0^T s_2(t) y(t) dt; \\ &\vdots \\ y_K(t) &= \int_0^T s_K(t) y(t) dt; \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como exemplo, em um sistema de três usuários, o sinal  $y_1(t)$  será dado por:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \int_0^T \{s_1(t) [A_1 b_1 s_1(t) + A_2 b_2 s_2(t) + A_3 b_3 s_3(t) + \sigma n(t)]\} dt; \\ &= \int_0^T (A_1 b_1 s_1^2(t) + A_2 b_2 s_1(t) s_2(t) + A_3 b_3 s_1(t) s_3(t) + s_1(t) \sigma n(t)) dt; \\ &= A_1 b_1 + A_2 b_2 \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt + A_3 b_3 \int_0^T s_1(t) s_3(t) dt + \sigma \int_0^T s_1(t) n(t) dt; \\ &= A_1 b_1 + A_2 b_2 \rho_{1,2} + A_3 b_3 \rho_{1,3} + \sigma n_1, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde

$$\rho_{k,l} = \int_0^T s_k(t) s_l(t) dt. \quad (2.6)$$

Neste modelo, foi assumido que todos os bits transmitidos chegam ao receptor ao mesmo

tempo, por isso é chamado síncrono. Este tipo de modelo se aplica bem no enlace entre a estação rádio base e a estação móvel. Note que o sinal desejado possui, além do termo de interesse,  $A_1 b_1$ , mais três termos que influenciam na decisão do receptor. Os dois termos seguintes,  $A_2 b_2 \rho_{1,2}$  e  $A_3 b_3 \rho_{1,3}$  representam a interferência dos outros usuários, denominada de MAI (*multiple access interference*). O quarto termo representa o ruído aditivo Gaussiano branco.

### 2.1.1 Representação Matricial do Sistema CDMA Síncrono

A Eq. (2.1) pode ser reescrita utilizando-se a representação matricial, dessa forma tem-se que [6]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{n}, \quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{A}$  são matrizes de dimensão  $K \times K$  e  $\mathbf{n}$  é o vetor ruído de dimensão  $K \times 1$  de média zero e matriz covariância dada por:

$$\mathbb{E}[\mathbf{n}\mathbf{n}^T] = \sigma^2 \mathbf{R}. \quad (2.8)$$

Os elementos da matriz  $\mathbf{R}$  são as correlações cruzadas entre as seqüências de espalhamento  $s_k(t)$ , definida pela Eq. (2.6), assim tem-se que:

$$R_{k,l} = \rho_{k,l}. \quad (2.9)$$

A matriz  $\mathbf{A}$  é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal  $A_{k,k}$  correspondem às amplitudes dos  $K$  sinais recebidos.

Como exemplo considere o caso anterior de três usuários. Tem-se que o sinal recebido será:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} \\ \rho_{1,2} & 1 & \rho_{2,3} \\ \rho_{1,3} & \rho_{2,3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

com

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^T s_1(t) n(t) dt \\ \int_0^T s_2(t) n(t) dt \\ \int_0^T s_3(t) n(t) dt \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Logo, o sinal recebido do primeiro usuário é dado por:

$$y_1 = A_1 b_1 + A_2 b_2 \rho_{12} + A_3 b_3 \rho_{13} + \sigma n_1, \quad (2.12)$$

que é o mesmo resultado da Eq. (2.5). Este exemplo mostra que os dois sistemas de representação são equivalentes.

O esquema de detecção descrito anteriormente é chamado de detector convencional ou detector filtro casado. Neste tipo de detector, o sinal recebido é multiplicado pela seqüência do usuário desejado. Os sistemas celulares atuais que utilizam o esquema de múltiplo acesso CDMA, empregam este tipo de tecnologia.

## 2.2 Modelo básico de um sistema CDMA Assíncrono

O modelo de sistema assíncrono é adequado para modelar o enlace reverso, ou seja, a transmissão da estação móvel para a estação rádio base. Como cada usuário está em um local distinto, mesmo que todos os usuários transmitam no mesmo instante de tempo, o sinal chegará em instantes diferentes devido aos diferentes atrasos de propagação.

O modelo síncrono da Seção 2.1 é o modelo em que o sinal é observado apenas no tempo de um bit, ou seja, a janela de observação tem comprimento  $T$  (tamanho do

período de um bit). No caso do sistema assíncrono, deve-se levar em conta não só um intervalo de bit, mas a duração de um quadro de bits:

$$b_k[-M], \dots, b_k[0], \dots, b_k[M]. \quad (2.13)$$

Assume-se, sem perda de generalidade, que o tamanho dos pacotes transmitidos de cada usuário é de  $(2M + 1)$  bits. A Fig. 2.2 ilustra o modelo de um sistema

assíncrono. Nesta figura observa-se três usuários com  $M = 1$  e, por conseguinte, comprimento de quadro  $2M + 1 = 3$  bits. Estes três bits são denominados  $b_i[-1]$ ,  $b_i[0]$  e  $b_i[1]$ . Neste exemplo, o bit  $b_2[-1]$  interfere no bit  $b_1[0]$ , o bit  $b_2[0]$  interfere no bit  $b_1[1]$ , ou seja, *bits do passado* interferem nos *bits do futuro*. Esse fenômeno caracteriza o sistema assíncrono, ou seja, os quadros de bits chegam em instantes distintos, e um quadro interfere no outro através do bit atual e também através de bits anteriores.

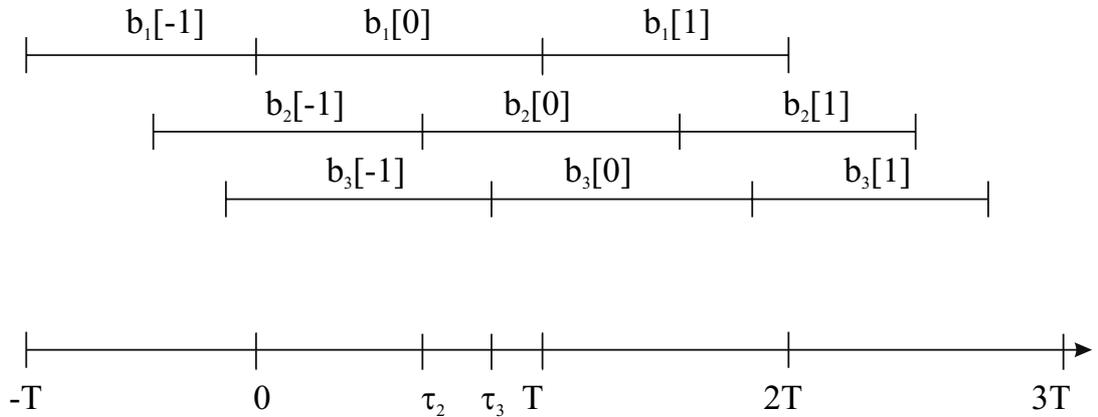


Figura 2.2: Sistema CDMA Assíncrono com três usuários,  $M = 1$  e janela de observação de 3 bits.

Reescrevendo a Eq. (2.1) para o caso assíncrono, o sinal recebido no modelo CDMA pode ser descrito por:

$$y(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=-M}^M A_k b_k[i] s_k(t - iT - \tau_k) + \sigma n(t). \quad (2.14)$$

O caso síncrono corresponde ao caso particular da Eq. (2.14) no qual os atrasos de propagação são feitos iguais para os diferentes percursos, isto é,

$$\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_K. \quad (2.15)$$

Para o caso assíncrono, a notação é simplificada se os usuários forem dispostos no tempo em ordem cronológica (isto é, pelo tempo de chegada), que é equivalente a assumir, sem perda de generalidade, que:

$$\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3 \leq \dots \leq \tau_K. \quad (2.16)$$

Assim, o ordenamento da Eq. (2.16) leva a seguinte saída do filtro casado:

$$\begin{aligned} y_k [i] = & A_k b_k [i] + \sum_{j < k} A_j b_j [i + 1] \rho_{kj} + \sum_{j < k} A_j b_j [i] \rho_{jk} \\ & + \sum_{j > k} A_j b_j [i] \rho_{kj} + \sum_{j > k} A_j b_j [i - 1] \rho_{jk} + n_k [i], \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde

$$n_k [i] = \sigma \int_{\tau_k + iT}^{\tau_k + iT + T} n(t) s_k(t - iT - \tau_k) dt, \quad (2.18)$$

e

$$\rho_{kl}(\tau) = \int_{\tau}^T s_k(t) s_l(t - \tau) dt \quad (2.19)$$

$$\rho_{lk}(\tau) = \int_0^{\tau} s_k(t) s_l(t + T - \tau) dt, \quad (2.20)$$

Note que agora não há mais simetria nas correlações cruzadas da matriz  $\mathbf{R}$ , ou seja,  $\rho_{ij}$  é diferente de  $\rho_{ji}$  devido à assincronicidade do sistema. Pode-se escrever a Eq. (2.17)

na forma matricial:

$$\mathbf{y}[i] = \mathbf{R}^T[1] \mathbf{A} \mathbf{b}[i+1] + \mathbf{R}[0] \mathbf{A} \mathbf{b}[i] + \mathbf{R}[1] \mathbf{A} \mathbf{b}[i-1] + \mathbf{n}[i], \quad (2.21)$$

onde  $\mathbf{n}(t)$  é um ruído branco Gaussiano de média nula e matriz de autocorrelação dada por:

$$E[\mathbf{n}[i] \mathbf{n}^T[j]] = \begin{cases} \sigma^2 \mathbf{R}^T[1] & \text{se } j=i+1; \\ \sigma^2 \mathbf{R}[0] & \text{se } j=i; \\ \sigma^2 \mathbf{R}[1] & \text{se } j=i-1; \\ 0 & \text{outros casos,} \end{cases}, \quad (2.22)$$

e os elementos das matrizes de dimensão  $K \times K$ ,  $\mathbf{R}[0]$  e  $\mathbf{R}[1]$  são definidas por:

$$R_{jk}[0] = \begin{cases} 1 & \text{se } j=k; \\ \rho_{jk} & \text{se } j < k; \\ \rho_{kj} & \text{se } j > k, \end{cases}, \quad (2.23)$$

e

$$R_{jk}[1] = \begin{cases} 0, & \text{se } j \geq k; \\ \rho_{kj} & \text{se } j < k. \end{cases}. \quad (2.24)$$

Como exemplo, para um sistema com três usuários tem-se:

$$\mathbf{R}[0] = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

e

$$\mathbf{R}[1] = \begin{bmatrix} 0 & \rho_{21} & \rho_{31} \\ 0 & 0 & \rho_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Neste caso,  $\mathbf{y}$  será:

$$\mathbf{y}[i] = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_{21}b_1[i+1] \\ \rho_{31}b_1[i+1] + \rho_{32}b_1[i+1] \\ \rho_{21}b_2[i-1] + \rho_{31}b_3[i-1] \\ \rho_{32}b_3[i-1] \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1[i] + \rho_{12}b_2[i] + \rho_{13}b_3[i] \\ \rho_{12}b_1[i] + b_2[i] + \rho_{23}b_3[i] \\ \rho_{13}b_3[i] + \rho_{23}b_2[i] + b_3[i] \end{bmatrix} + \mathbf{n}[i]. \quad (2.27)$$

Observando em particular a saída  $y_1[1]$ , obtém-se que:

$$y_1[i] = b_1[i] + \rho_{12}b_2[i] + \rho_{13}b_3[i] + \rho_{21}b_2[i-1] + \rho_{31}b_3[i-1] + n_1[i], \quad (2.28)$$

o que mostra que o bit  $b_1$  é afetado pelos bits  $b_2$  e  $b_3$  multiplicados pelas suas respectivas correlações cruzadas das seqüências de espalhamento. Este efeito da interferência pode ser ilustrado pela Fig. 2.3. Nesta figura observa-se a interferência dos usuários 2 e 3 em relação ao usuário 1. O sinal de interesse é o bit  $b_1[i]$ , e os sinais interferentes são os bits  $\rho_{21}b_2[i-1]$ ,  $\rho_{12}b_2[i]$ ,  $\rho_{31}b_3[i-1]$ , e  $\rho_{13}b_3[i]$ .

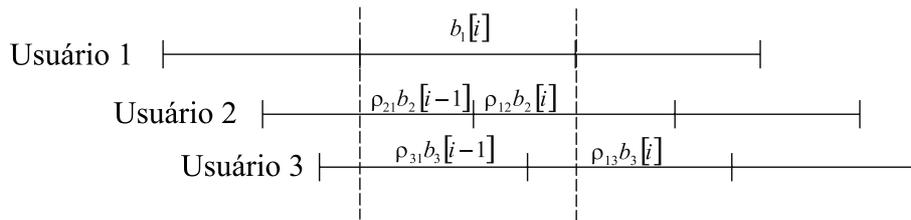


Figura 2.3: Modelo assíncrono mostrando a interferência dos usuários 2 e 3 em relação ao usuário 1.

O vetor recebido dado pela Eq. (2.21) também pode ser representado pela sua

transformada Z da seguinte forma [6]:

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{S}(z) \mathbf{A} \mathbf{b}(z) + \mathbf{n}(z), \quad (2.29)$$

onde  $\mathbf{S}(z)$  é dado por:

$$\mathbf{S}(z) = \mathbf{R}^T [1] z + \mathbf{R} [0] + \mathbf{R} [1] z^{-1}, \quad (2.30)$$

e  $\mathbf{b}(z)$  e  $\mathbf{n}(z)$  são as transformadas Z das variáveis discretas  $\mathbf{b}[i]$  e  $\mathbf{n}[i]$ .

A Eq. (2.29) parece ser mais simples que a Eq. (2.21), no entanto é necessário computar as transformadas Z das variáveis em questão, o que acarretaria em um aumento de complexidade, principalmente no que se refere à simulação. Em vista deste aumento de complexidade, pode-se representar o sistema assíncrono como um sistema síncrono, onde a matriz  $\mathbf{R}$  é agora definida como:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} [0] & \mathbf{R}^T [1] & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mathbf{R} [1] & \mathbf{R} [0] & \mathbf{R}^T [1] & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R} [1] & \mathbf{R} [0] & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{R} [0] & \mathbf{R}^T [1] \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{R} [1] & \mathbf{R} [0] \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

A matriz  $\mathbf{R}$  tem dimensão  $K(2M+1) \times K(2M+1)$ . A expressão  $2M+1$  representa o tamanho do quadro transmitido por um usuário. Considerando essa nova matriz de correlação cruzada, obtém-se na saída dos filtros casados a seguinte expressão:

$$\mathbf{y} = \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{b} + \mathbf{n}, \quad (2.32)$$

que é a mesma expressão definida pela Eq. (2.7) para o sistema síncrono.

Este modelo facilita a simulação do sistema assíncrono, pois só é necessário alterar

a forma da matriz  $\mathbf{R}$ , e todo o resto do programa computacional permanece inalterado.

## 2.3 Detector Multiusuário Descorrelacionador

### 2.3.1 O detector Descorrelacionador para o caso Síncrono

No sistema de detecção convencional realizada através de filtros casados nota-se que o sinal recebido contém vários termos, entre eles a interferência de múltiplo acesso (MAI) e também o ruído. Os sistemas de detecção multiusuários são superiores aos convencionais pois tentam eliminar a MAI.

Se a matriz  $\mathbf{R}$  for inversível, é possível eliminar a MAI. Multiplicando-se a Eq. (2.7) pela matriz inversa,  $\mathbf{R}^{-1}$ , pode-se obter o vetor de bits transmitidos  $\mathbf{b}$ :

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{n}) = \mathbf{A}\mathbf{b} + \bar{\mathbf{n}}, \quad (2.33)$$

com

$$\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{n}. \quad (2.34)$$

Este tipo de detector é chamado de detector Descorrelacionador [6], pois elimina a correlação do sinal do usuário desejado dos demais usuários que atuam como interferentes.

Note que o detector Descorrelacionador elimina completamente a MAI a custo de um aumento na potência do ruído. A potência do ruído  $\bar{n}$  vale:

$$\sigma_{\bar{\mathbf{n}}}^2 = \frac{N_0}{2} (\mathbf{R}^{-1})_{k,k}, \quad (2.35)$$

onde  $(\mathbf{R}^{-1})_{k,k}$  é o elemento da  $k$ -ésima linha e  $k$ -ésima coluna da matriz  $\mathbf{R}^{-1}$ .

Por exemplo, para um sistema síncrono com dois usuários com correlação cruzada entre as seqüências de espalhamento  $\rho$  ( $0 \leq \rho \leq 1$ ), a potência do ruído na saída do filtro Descorrelacionador é igual a:  $\frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \geq \sigma^2$ .

Assim, a probabilidade de erro de bit para o Descorrelacionador é dada por [6]:

$$P_k(\sigma) = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}\eta_k}\right), \quad (2.36)$$

onde

$$Q(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad (2.37)$$

$\eta_k$  é a eficiência multiassintótica do  $k$ -ésimo usuário dada por:

$$\eta_k = \frac{1}{(\mathbf{R})_{kk}^{-1}}, \quad (2.38)$$

No caso de seqüências puramente ortogonais, a variável  $\eta_k$  deve representar o caso do filtro casado convencional e portanto  $\eta_k = 1$ . O parâmetro  $\eta$ , chamado de eficiência multiassintótica, fornece informação de quão próximo o desempenho do detector multiusuário está do filtro casado.

O desempenho do detector Descorrelacionador é degradado quando a correlação cruzada entre os usuários aumenta. Para seqüências de espalhamento com correlação cruzada igual a zero, por exemplo, seqüências formadas pelas linhas da matriz de Hadamard [3], observa-se que a probabilidade de erro do detector Descorrelacionador será a mesma que a do detector para um único usuário e dependerá apenas do ruído Gaussiano aditivo branco.

A Fig. 2.4 ilustra o modelo do filtro Descorrelacionador. Pode-se notar que a complexidade na recepção do sinal é maior (compare com a Fig. 2.1) do que a complexidade do filtro casado em vista da inversão da matriz  $\mathbf{R}$ .

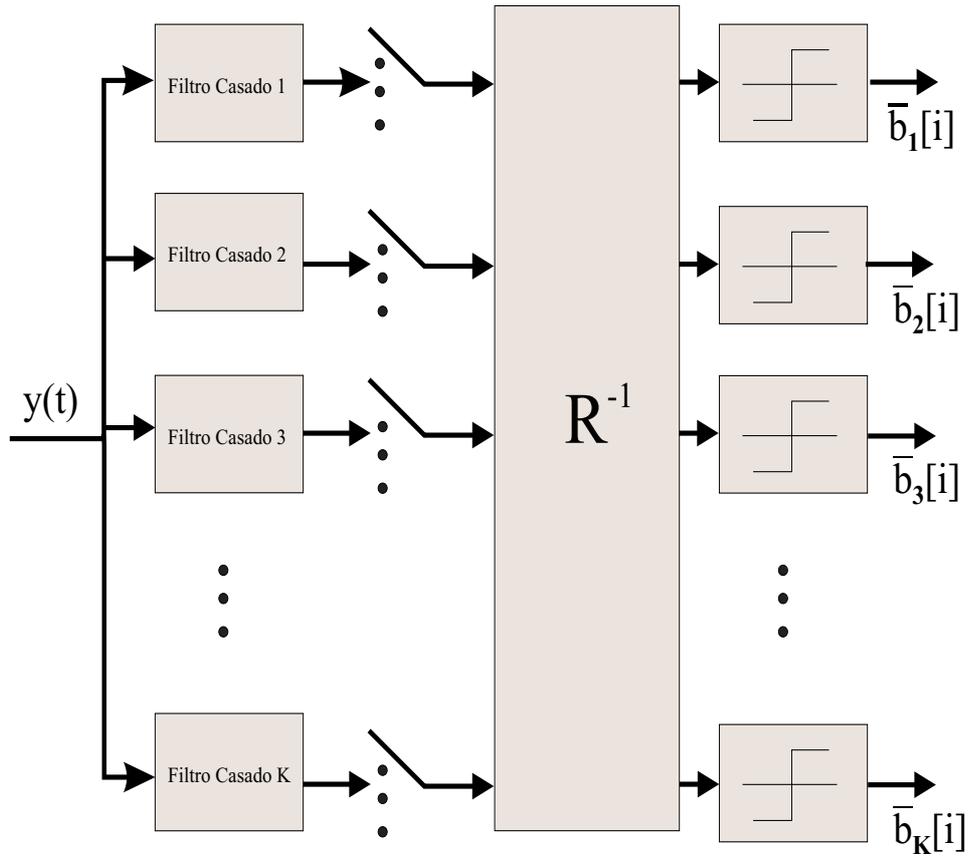


Figura 2.4: Modelo do detector Descorrelacionador, caso síncrono.

A Fig. 2.5 apresenta o gráfico da probabilidade de erro de bit para um sistema CDMA síncrono com 10 usuários e ganho de processamento 32, utilizando na recepção o filtro casado e o Descorrelacionador. A expressão de probabilidade de erro de bit utilizada no gráfico para traçar a curva do filtro casado é dada por [6]:

$$P_{b_k} = Q \left( \sqrt{\frac{E_b}{\sigma^2 + \sum_{j \neq k} A_j^2 \rho_{jk}^2}} \right) \quad (2.39)$$

Utilizou-se seqüências de espalhamento puramente aleatórias para gerar a matriz  $\mathbf{R}$ . Observa-se, neste caso, que o desempenho do Descorrelacionador é da ordem de alguns dBs superior ao do filtro casado para probabilidades de erro de bit em torno de  $10^{-2}$  e aumenta cada vez mais quando se diminui o valor da probabilidade.

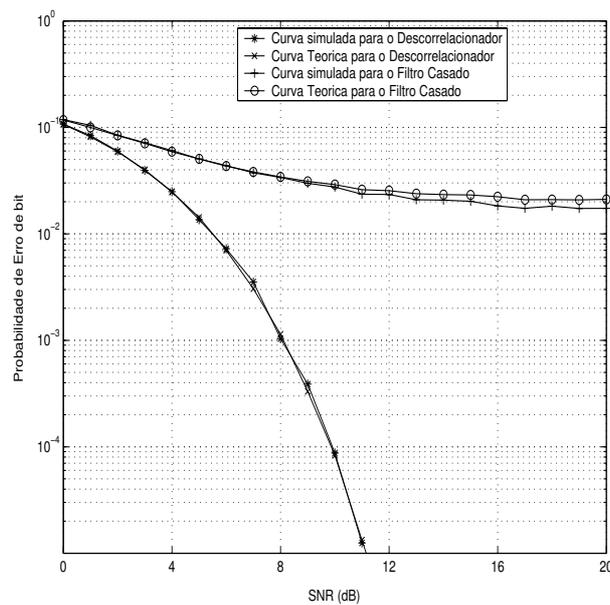


Figura 2.5: Probabilidade de erro de bit para o detector filtro casado e o Descorrelacionador. Caso síncrono,  $G_p = 32$  e 10 usuários.

### 2.3.2 O Detector Descorrelacionador para o caso Assíncrono

A análise da Eq. (2.29) no domínio  $Z$  sugere uma maneira similar ao caso síncrono de eliminar a interferência de múltiplo acesso, ou seja, encontrar a matriz inversa de  $S(z)$ :

$$\mathbf{S}^{-1}(z) = [\mathbf{R}^T [1] z + \mathbf{R} [0] + \mathbf{R} [1] z^{-1}]^{-1}. \quad (2.40)$$

Isso leva ao detector mostrado na Fig. 2.6.

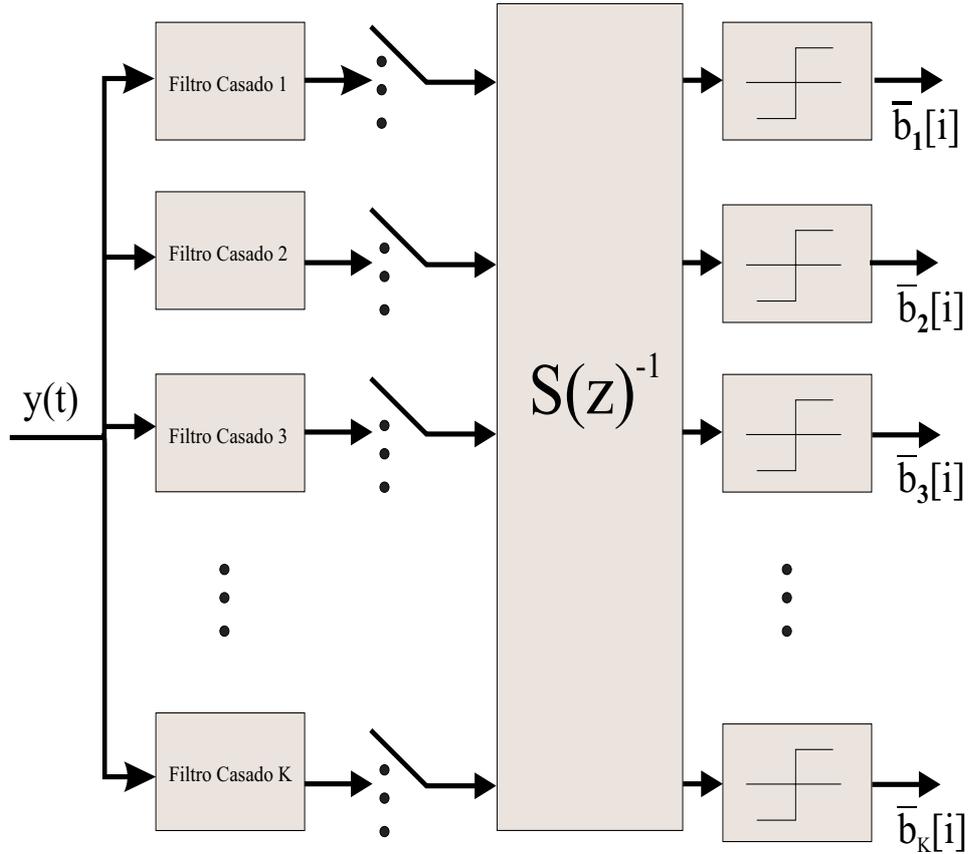


Figura 2.6: Detector Descorrelacionador caso assíncrono.

A dificuldade de implementar este detector está justamente no cálculo da transformada Z inversa,  $\mathbf{S}^{-1}(z)$ . Se ao invés de se utilizar  $\mathbf{S}^{-1}(z)$  for utilizada a matriz  $\mathbf{R}$  da Eq. (2.31), o sistema assíncrono pode ser simulado de forma semelhante ao sistema síncrono.

No caso assíncrono, a probabilidade de erro de bit é dada pela Eq. (2.36), no entanto, o parâmetro  $\eta$  agora é dado pela seguinte expressão [6]:

$$\eta = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\mathbf{R}^T [1] e^{jw} + \mathbf{R} [0] + \mathbf{R} [1] e^{-jw}]_{kk}^+ dw \right)^{-1}. \quad (2.41)$$

### 2.3.3 Comparação do detector Descorrelacionador para o caso síncrono e assíncrono

A Fig. 2.7 mostra o desempenho do detector Descorrelacionador para o caso síncrono e assíncrono em função do número de usuários do sistema. Utilizou-se um ganho de processamento de 128 e uma relação sinal-ruído de 7 dB. Este valor de 7 dB foi escolhido, pois é um valor no qual a probabilidade de erro de bit é maior do que  $10^{-3}$  para ambos os casos. Como foi utilizado o método de Monte Carlo, uma probabilidade de  $p = 10^{-3}$  requer em torno de  $p/10 = 10^4$  iterações [11]. Este número de iterações garante, com probabilidade de 0.95, que o resultado pertence ao intervalo  $I \in \{2p, p/2\}$ . No caso de utilizar um valor de relação sinal-ruído maior do que 7 dB, acarretaria em uma probabilidade de erro de bit menor e, por conseguinte, um número de iterações maior, o que demandaria mais tempo de simulação.

Pode-se observar na Fig. 2.7 que o desempenho do caso síncrono é pior que o caso assíncrono. Este mesmo efeito também é observado no filtro casado convencional.

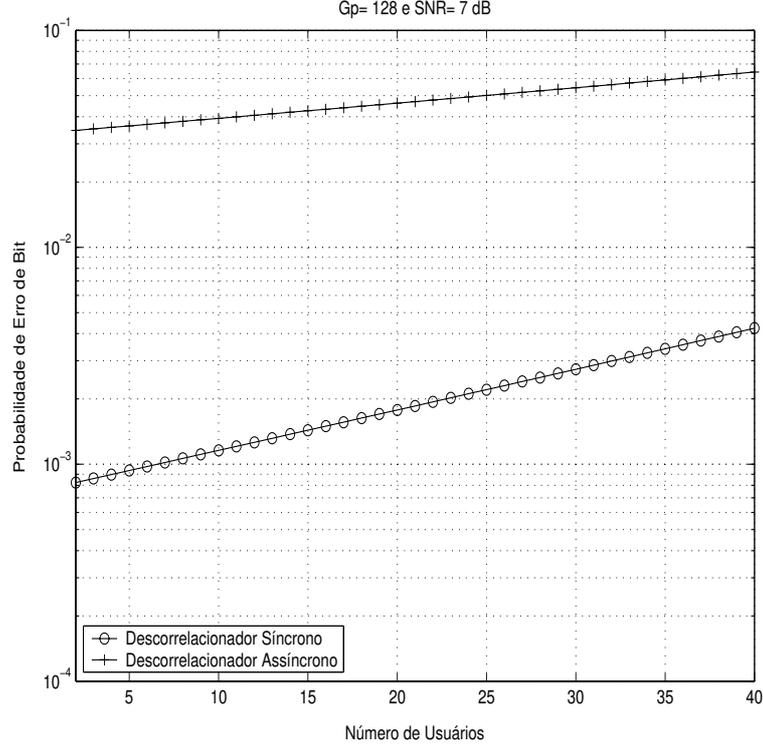


Figura 2.7: Comparação do detector Descorrelacionador para o caso síncrono e assíncrono, SNR= 7 dB.

### 2.3.4 Detector Descorrelacionador com Desvanecimento Rayleigh

A probabilidade de erro de bit do detector Descorrelacionador no caso síncrono com desvanecimento plano Rayleigh é dada por [6]

$$P_{b_k}(\alpha) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b\alpha_k^2\eta_k}{N_0}}\right), \quad (2.42)$$

onde  $\alpha_k$  é a variável aleatória Rayleigh que afeta o  $k$ -ésimo usuário e tem distribuição de probabilidade dada por:

$$p(\alpha) = \frac{\alpha}{\sigma_R} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma_R^2}}, \quad \alpha \geq 0. \quad (2.43)$$

O valor médio quadrático de  $\alpha_k$  é dado por:

$$E [\alpha_k^2] = 2\sigma_R^2, \quad (2.44)$$

onde  $\sigma_R$  é a desvio padrão da variável aleatória Gaussiana que gerou a variável Rayleigh.

Descondicionando a Eq. (2.42) pela variável aleatória Rayleigh  $\alpha_k$ , obtém-se que:

$$P_{b_k} = \int_0^\infty \frac{\alpha_k}{\sigma_R} e^{-\frac{\alpha_k^2}{2\sigma_R^2}} Q \left( \sqrt{\frac{2E_b\alpha_k^2\eta_k}{N_0}} \right) d\alpha = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\overline{\gamma_{b_k}}}{1 + \overline{\gamma_{b_k}}}} \right) \quad (2.45)$$

onde:

$$\overline{\gamma_{b_k}} = \frac{E_b E [\alpha_k^2] \eta_k}{N_0}. \quad (2.46)$$

A Fig. 2.8 ilustra o efeito do desvanecimento no caso do detector Descorrelacionador para um sistema CDMA síncrono. O gráfico mostra a perda de desempenho relacionada à presença de desvanecimento Rayleigh.

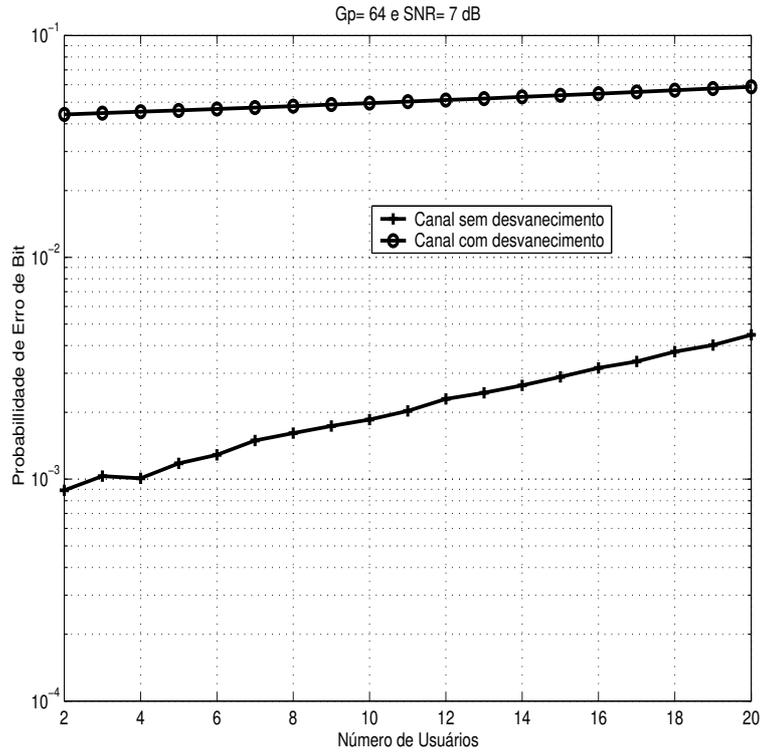


Figura 2.8: Probabilidade de erro de bit para o Descorrelacionador, caso síncrono. Comparação da probabilidade de erro de bit para o canal com e sem desvanecimento Rayleigh.

### 2.3.5 Detector Multiusuário Descorrelacionador com Desvanecimento Rayleigh e Múltiplos Percursos

Considerando um canal com diversidade de  $L$  caminhos possíveis, a saída para o usuário  $l$  do modelo discreto no tempo será dado por:

$$\mathbf{y}_l = \mathbf{R}(l) \mathbf{A}(l) \mathbf{b} + \mathbf{n}_l, \quad (2.47)$$

onde  $\mathbf{A}(l) = \text{diag}\{\alpha_{l1}, \dots, \alpha_{lK}\}$  e  $\mathbf{n}_l$  é um vetor Gaussiano complexo com matriz de covariância  $2\sigma^2 \mathbf{R}(l)$ . Além disso,  $\mathbf{n}_l$  e  $\mathbf{n}_d$  são independentes para  $l \neq d$ . Para cada um dos  $l$  canais, pode-se aplicar a matriz de correlação inversa na saída de cada canal, sendo

assim tem-se:

$$\begin{aligned}\bar{y}_l &= \mathbf{R}^{-1}(l) \mathbf{y}_l \\ &= \mathbf{A}(l) \mathbf{b} + \bar{\mathbf{n}}_l,\end{aligned}\tag{2.48}$$

onde a matriz de covariância de  $\bar{\mathbf{n}}_l$  é dada por  $2\sigma^2 \mathbf{R}^{-1}(l)$ . Note que devido a diversidade, o bit enviado pelo usuário  $k$ ,  $b_k$ , chegará  $L$  vezes no receptor com amplitudes diferentes. Dessa forma tem-se para o usuário  $k$  o seguinte sinal recebido:

$$\begin{aligned}\bar{y}_{1k} &= \alpha_{1k} b_k + \bar{n}_{1k} \\ &\quad \vdots \\ \bar{y}_{Lk} &= \alpha_{Lk} b_k + \bar{n}_{Lk}\end{aligned}\tag{2.49}$$

Os ganhos do canal  $\alpha_{ik}$  são independentes e identicamente distribuídos. A combinação destes  $L$  sinais que minimiza a probabilidade de erro é dada por [6]:

$$\hat{b}_k = \text{sign} \left( \Re \left\{ \sum_{l=1}^L \alpha_{lk} \eta_k(l) \bar{y}_{lk}^* \right\} \right),\tag{2.50}$$

onde o operador  $\Re(\cdot)$  representa a parte real da variável, e o operador  $(\cdot)^*$  representa o conjugado da variável complexa.

Reescrevendo a expressão anterior pode-se obter:

$$\Re \left\{ \sum \alpha_{lk} \eta_k(l) \bar{y}_{lk}^* \right\} = b_k \sum_{l=1}^L |\alpha_{lk}|^2 \eta_k(l) + \mathbf{n},\tag{2.51}$$

onde o valor quadrático médio da variável aleatória Gaussiana  $\mathbf{n}$  é dado por:

$$E[\mathbf{n}^2] = \sigma^2 \sum_{l=1}^L |\alpha_{lk}|^2 \eta_k(l).\tag{2.52}$$

Dessa maneira, a probabilidade de erro de bit pode ser expressa como:

$$P_b(\sigma, \alpha) = Q\left(\frac{1}{\sigma} \sum_{l=1}^L |\alpha_{lk}|^2 \eta_k(l)\right). \quad (2.53)$$

Descondicionando em relação às variáveis aleatória Rayleigh,  $\alpha_{1k}, \dots, \alpha_{Lk}$ , pode-se chegar à seguinte expressão [6]:

$$P_b(\sigma) = \sum_{i=1}^L \frac{\alpha_i}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{\lambda_i}}}\right), \quad (2.54)$$

onde

$$\lambda_i = \frac{E[|\alpha_{ik}|^2] \eta_k(i)}{\sigma^2}. \quad (2.55)$$

A expressão da Eq. (2.54) pode também ser representada através de uma série [6]:

$$P_b(\sigma) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\eta_k \sigma_R^2}}} \times \left(1 + \sum_{n=1}^{L-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n! 2^n \left(\left(\frac{\sigma_R^2 \eta_k}{\sigma^2}\right) + 1\right)^n}\right). \quad (2.56)$$

A Fig. 2.9 ilustra o modelo em diagrama de bloco do sistema CDMA com detecção multiusuário utilizando o Descorrelacionador. Note que neste sistema a inversão da matriz  $\mathbf{R}$  de cada multipercurso é realizada antes da combinação dos sinais feita pelo receptor RAKE. Outra forma de detecção que levaria ao mesmo desempenho [12, 13, 14] seria fazer a combinação (RAKE) antes da inversão da matriz. Esta segunda combinação é ilustrada na Fig. 2.10. No esquema da Fig. 2.9 é necessário realizar apenas uma inversão de matriz, o que leva a um custo computacional inferior com relação ao outro caso.

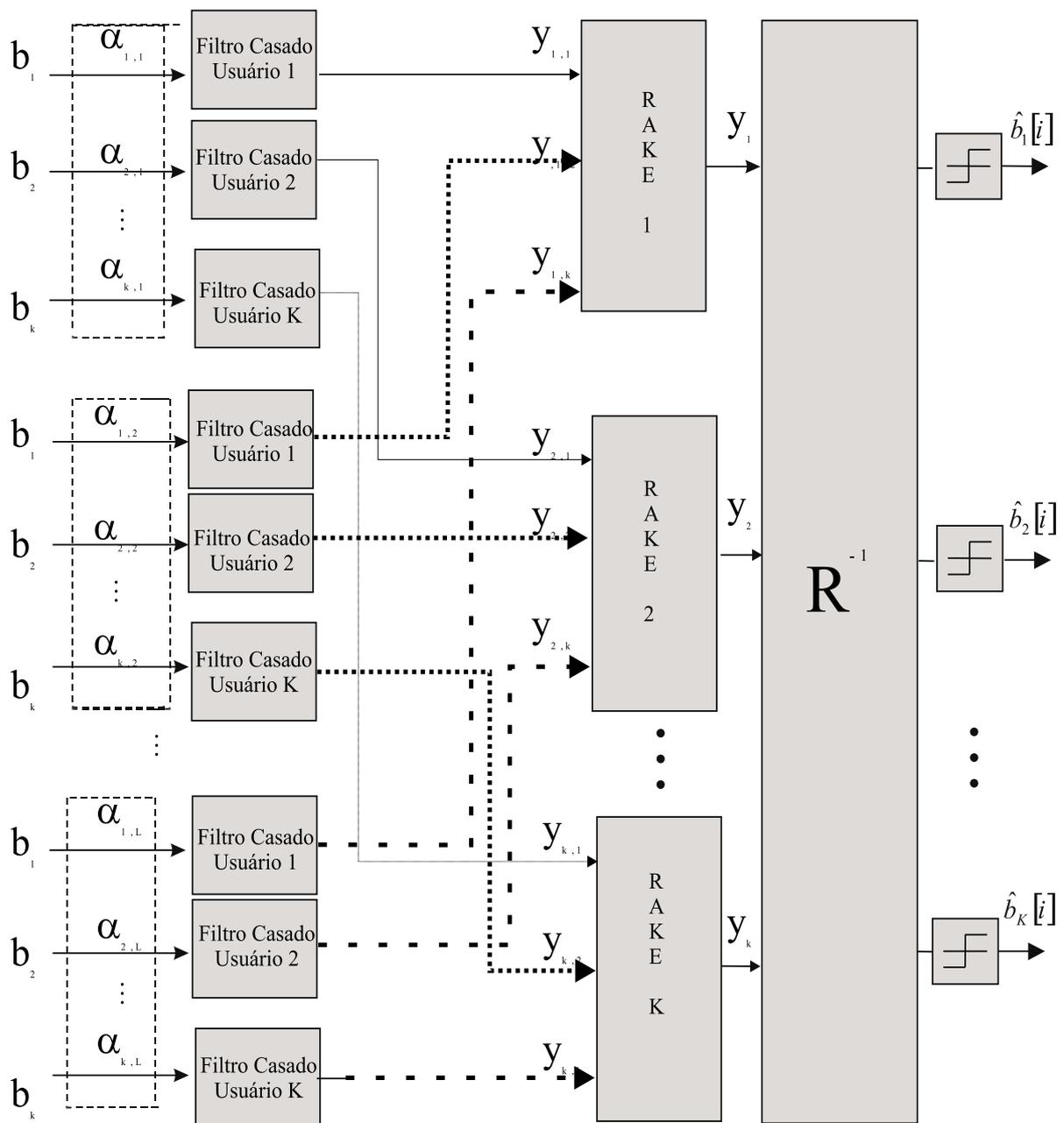


Figura 2.9: Modelo de um sistema CDMA com detecção multiusuário com detector Descorrelacionador utilizando diversidade de ordem  $L$  e uma única inversão de matriz  $\mathbf{R}$  para todos os ramos de diversidade.

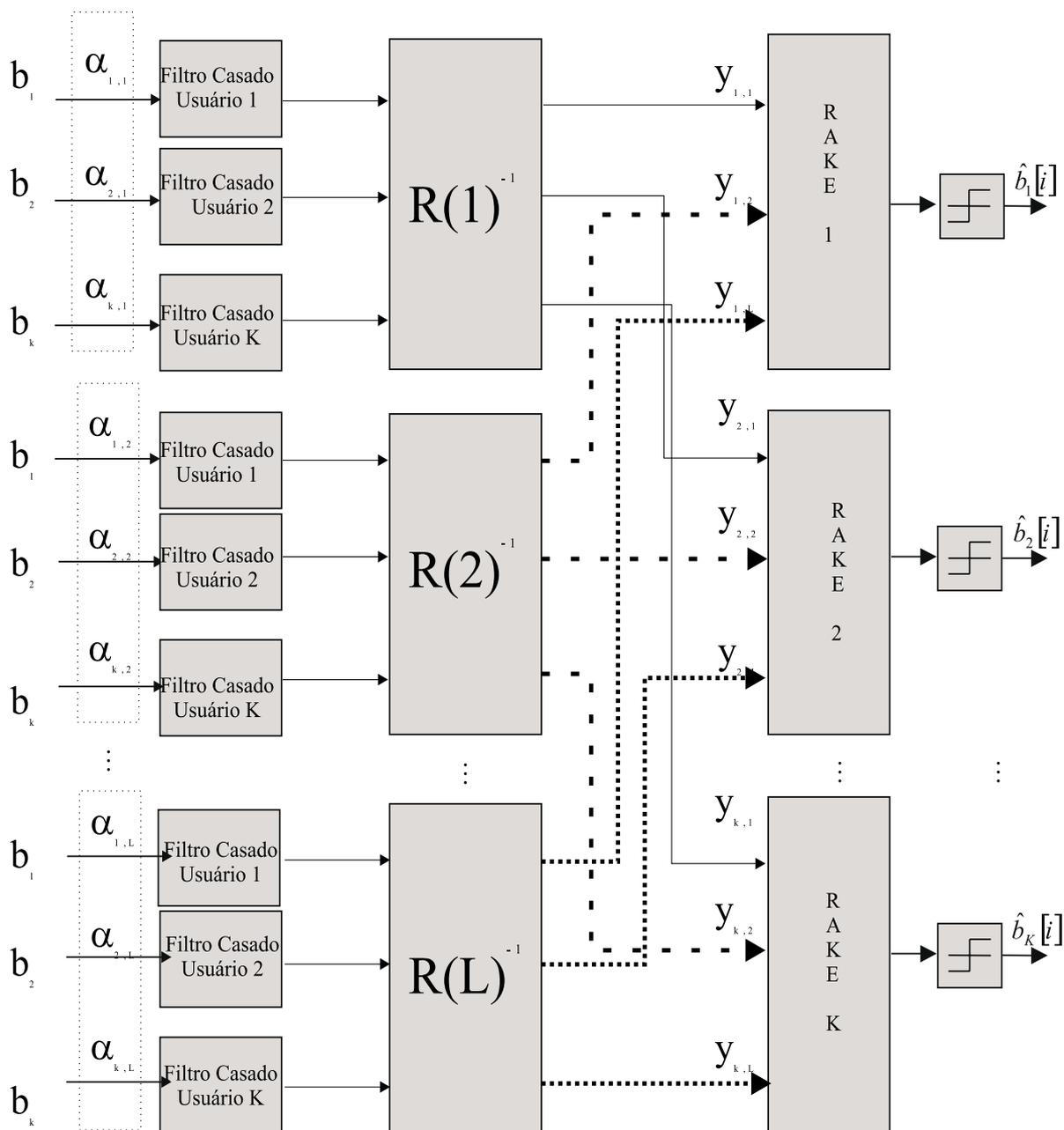


Figura 2.10: Modelo de um sistema CDMA com detecção multiusuário com detector Descorrelacionador utilizando diversidade de ordem  $L$  e inversão de matriz  $\mathbf{R}$  para todos os ramos da diversidade.

A Fig. 2.11 ilustra as curvas de probabilidade de erro de bit versus número de usuários, no caso do detector Descorrelacionador sem diversidade ( $L=1$ ) e com diversidade de

ordem 2 e 4. Observa-se o ganho de desempenho obtido através do uso da diversidade, as curvas obtidas foram feitas de forma analítica e também utilizando o simulador. Note a boa concordância entre os resultados analíticos e simulados

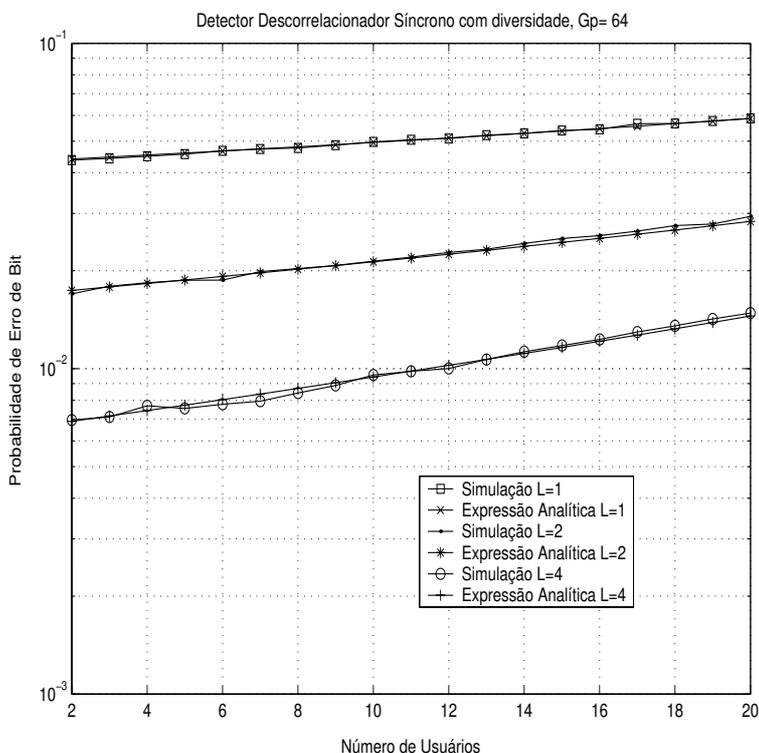


Figura 2.11: Probabilidade de erro para o detector Descorrelacionador variando a ordem da diversidade L em sistema CDMA síncrono.

## 2.4 Detector Multiusuário Linear de Mínimo Erro Quadrático Médio (MMSE)

Outro tipo de detector multiusuário é o detector multiusuário linear de mínimo erro quadrático, MMSE. Este tipo de detector leva em conta, além da MAI (interferência de múltiplo acesso), o ruído de fundo. Com esta característica, o detector MMSE consegue ter desempenho igual ou melhor em termos de probabilidade de erro de bit, que o detector Descorrelacionador. No entanto, para obter tal melhoria no desempenho, o detector

#### 2.4. Detector Multiusuário Linear de Mínimo Erro Quadrático Médio (MMSE)

---

MMSE necessita conhecer as potências dos sinais recebidos, o que o faz sua implementação mais complexa que o Descorrelacionador. Este detector substitui a inversão da matriz  $\mathbf{R}$  pela inversão da matriz (veja prova no apêndice A):

$$\mathbf{M} = [\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2}]^{-1}, \quad (2.57)$$

com  $\sigma^2 \mathbf{A}^{-2}$  sendo uma matriz diagonal dada por:

$$\sigma^2 \mathbf{A}^{-2} = \text{diag} \left\{ \frac{\sigma^2}{A_1^2}, \frac{\sigma^2}{A_2^2}, \dots, \frac{\sigma^2}{A_K^2} \right\}. \quad (2.58)$$

Esta expressão minimiza o erro quadrático médio entre os dados transmitidos e a saída do detector convencional, ou seja, minimiza o valor esperado na saída do detector MMSE:

$$\min E \left[ (\mathbf{y} - \mathbf{b})^H (\mathbf{y} - \mathbf{b}) \right]. \quad (2.59)$$

A Fig. 2.12 ilustra o esquema do detector MMSE. Note que este detector é muito semelhante ao Descorrelacionador, diferindo apenas na substituição da matriz  $\mathbf{R}$  por  $\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2}$ .

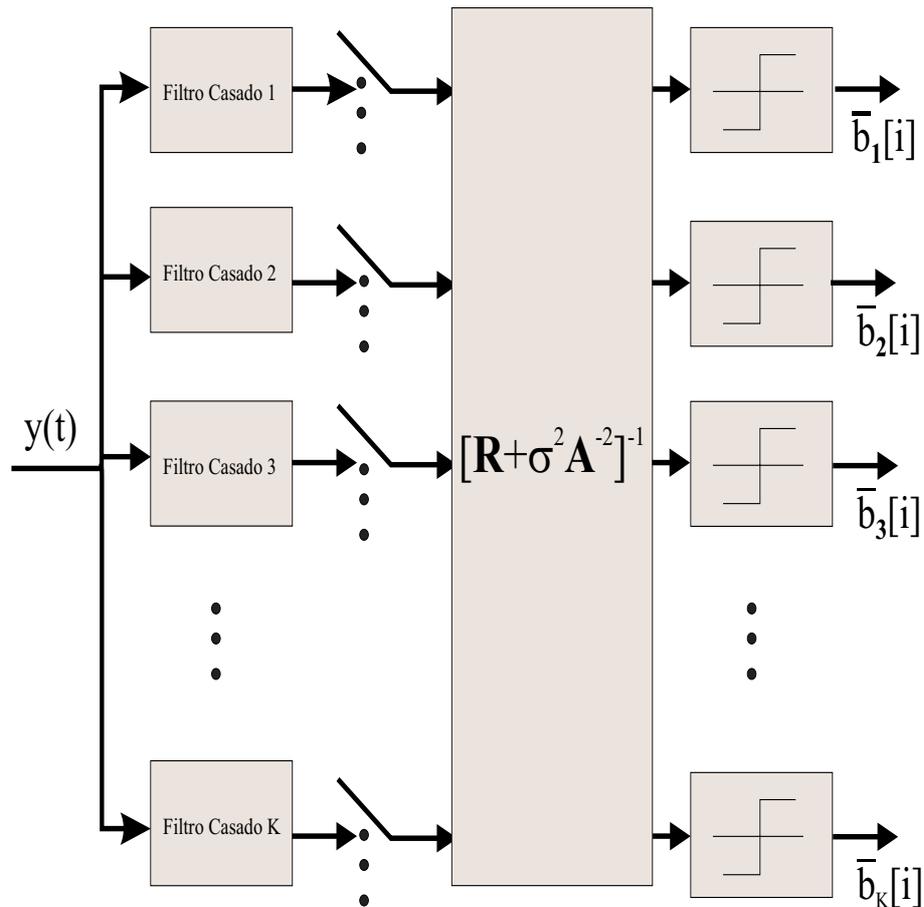


Figura 2.12: Diagrama em bloco do receptor multiusuário MMSE, caso síncrono.

As principais desvantagens do detector MMSE são:

- Requer estimativa das amplitudes; e
- Seu desempenho depende das potências dos usuários interferentes.

Enquanto o receptor convencional é otimizado para tratar exclusivamente do ruído aditivo Gaussiano branco (AWGN), o detector Descorrelacionador elimina a interferência de múltiplo acesso (MAI) sem levar em conta o AWGN. Em contraste, o detector linear MMSE pode ser visto como uma solução de compromisso ente o AWGN e a MAI na otimização do detector multiusuário. De fato, ambos os receptores, o convencional e

o Descorrelacionador, podem ser visualizados como casos limites do detector MMSE.

Pode-se fazer as seguintes observações:

1. Mantendo-se  $A_1$  fixo, e tomando-se  $A_2, A_3, \dots, A_K \rightarrow 0$ , a primeira linha de  $[\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2}]^{-1}$  tende a  $\left[\frac{A_1^2}{A_1^2 + \sigma^2}, 0, \dots, 0\right]$ , que corresponde ao filtro casado para o usuário 1 ou, caso todas as amplitudes sejam mantidas fixas e tomando-se  $\sigma \rightarrow \infty$ , a matriz torna-se diagonal e o detector MMSE converge para o filtro casado.
2. Quando  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $[\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2}]^{-1}$  tende para a matriz do detector Descorrelacionador:

$$[\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2}]^{-1} \rightarrow [\mathbf{R}]^{-1}. \quad (2.60)$$

### 2.4.1 Probabilidade de erro do detector linear MMSE

Como foi visto, o desempenho do detector linear MMSE converge para o detector Descorrelacionador quando  $\sigma \rightarrow 0$ . Da mesma forma, a eficiência multiusuário assintótica converge para o detector Descorrelacionador, isto é,

$$\bar{\eta}_k = \frac{1}{(\mathbf{R})_{kk}^{-1}}, \quad (2.61)$$

no caso síncrono e

$$\bar{\eta}_k = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{R}^T [1] e^{jw} + \mathbf{R} [0] + \mathbf{R} [1] e^{jw}]_{kk}^+ dw \right)^{-1}, \quad (2.62)$$

no caso assíncrono.

No filtro convencional, ou filtro casado, a variável de decisão (condicionada ao bit de interesse) não é Gaussiana mas uma soma de variáveis aleatórias Gaussianas (devido ao ruído de fundo) e uma variável aleatória Binomial (devido à interferência de múltiplo acesso). No MMSE, caso síncrono, a primeira componente da saída da transformação

linear na Eq. (2.57) pode ser escrita como:

$$(\mathbf{M}\mathbf{y})_1 = \left( [\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2}]^{-1} \mathbf{y} \right)_1 = B_1 \left( b_1 + \sum_{k=2}^K \beta_k b_k \right) + \sigma \bar{n}_1, \quad (2.63)$$

com

$$\beta_k = \frac{B_k}{B_1}, \quad (2.64)$$

$$B_k = A_k (\mathbf{MR})_{1k}, \quad (2.65)$$

$$\bar{n}_1 \sim \aleph(0, (\mathbf{MRM})_{11}). \quad (2.66)$$

O coeficiente  $\beta_k$  quantifica a contribuição do  $k$ -ésimo interferente na variável de decisão, relativa à contribuição do usuário desejado e  $\aleph(x, y)$  representa uma variável aleatória Gaussiana de média  $x$  e variância  $y$ . Dessa maneira, a probabilidade de erro de bit é dada por [6]:

$$P_1(\sigma) = 2^{1-K} \sum_{b_2, \dots, b_K \in [-1, 1]^{K-1}} \mathcal{Q} \left( \frac{A_1}{\sigma} \frac{(\mathbf{MR})_{11}}{\sqrt{(\mathbf{MRM})_{11}}} \left( 1 + \sum_{k=2}^K \beta_k b_k \right) \right). \quad (2.67)$$

## 2.4.2 Probabilidade de erro do detector linear MMSE utilizando seqüências puramente aleatórias

### 2.4.2.1 Seqüências puramente aleatórias

Seqüências puramente aleatórias são seqüências do tipo  $\mathbf{x} = x_1 x_2 \cdots x_n$ , que assumem valores  $x_i \in \{-1, 1\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , onde  $x_i$  é distribuído de acordo com uma função distribuição de probabilidade Bernoulli (1/2). A função autocorrelação  $\phi(k)$  de uma seqüência qualquer é definida como:

$$\phi(k) = \sum_{i=0}^n x_i x_{i+k}, \quad (2.68)$$

e para seqüências puramente aleatórias assume os seguintes valores  $\phi(0) = n$  e  $\phi(j) = 0$  para  $1 \leq j \leq n - 1$ .

### 2.4.2.2 Probabilidade de Erro de Bit para o MMSE

Na subseção 2.4.1 foi mostrada a expressão genérica, Eq. (2.67), para probabilidade de erro de bit do detector multiusuário MMSE. Nesta subseção foca-se a atenção na probabilidade de erro de bit para o detector MMSE quando se utiliza seqüências de espalhamento puramente aleatórias. Este caso particular é de grande interesse, uma vez que estas são as seqüências utilizadas nos métodos de simulação computacional pela sua facilidade de geração. Além disso, os sistemas celulares atuais utilizam seqüências de comprimento máximo (*m-sequence*), que exibem comportamentos estatísticos próximos aos das seqüências puramente aleatórias, já que a função de autocorrelação destas seqüências assume os valores  $\phi(0) = n$  e  $\phi(j) = -1$  para  $1 \leq j \leq n - 1$ . Quando  $n$  aumenta a relação  $\phi(j)/\phi(0) = -1/n$  tende para 0 aproximando-se das seqüências puramente aleatórias.

A probabilidade de erro de bit em um sistema CDMA síncrono com controle ideal de potência em canal AWGN utilizando seqüências puramente aleatórias é dada por (veja apêndice B):

$$P_b^s = Q \left( \sqrt{2\gamma_b - \frac{1}{4}F \left( 2\gamma_b, \frac{K-1}{G_p} \right)} \right), \quad (2.69)$$

com

$$F(x, y) \triangleq \left( \sqrt{x(1+\sqrt{y})^2 + 1} - \sqrt{x(1-\sqrt{y})^2 + 1} \right)^2, \quad (2.70)$$

onde  $G_p$  é o ganho de processamento,  $\gamma_b$  é a relação sinal ruído do sistema,  $K$  é o número de usuários e  $Q(\cdot)$  é a função de erro Gaussiana. Para o caso assíncrono tem-se a seguinte expressão para a probabilidade de erro de bit [15]:

$$P_b^a = Q \left( \sqrt{2\gamma_b - \frac{1}{4}F \left( 2\gamma_b, \frac{2(K-1)}{3G_p} \right)} \right). \quad (2.71)$$

As Eq. (2.69) e Eq. (2.71) são aproximações da Eq. (2.67) pois assumem que a interferência de múltiplo acesso pode ser modelada por uma variável aleatória Gaussiana, quando a verdadeira distribuição é Binomial. Poor e Verdú [16] mostraram, através da função de Kullback-Leibler, que a diferença entre a variável Binomial e a variável Gaussiana aproximada diferiam de menos de  $10^{-4}$  nats para autocorrelação entre as seqüências de espalhamento abaixo de 0.5 (as seqüências aleatórias tem autocorrelação tendendo para zero quando o ganho de processamento tende para infinito). A função de Kullback-Leibler  $D(f_X \parallel f_{\bar{X}})$  mede a distância em nats entre duas distribuições  $f_X$  e  $f_{\bar{X}}$ , e é definida como:

$$D(f_X \parallel f_{\bar{X}}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log \frac{f_X(x)}{f_{\bar{X}}(x)} dx. \quad (2.72)$$

Observe que  $0 \leq D(\cdot \parallel \cdot) \leq 1$ .

As expressões dadas nas Eq. (2.69) e Eq. (2.71) são válidas para  $K < G_p$ , ou seja, o número de usuários  $K$  deve ser menor que o ganho de processamento do sistema. Essa condição é verdade na maioria dos sistemas instalados comercialmente. Por exemplo, sistemas CDMA que seguem a norma IS-95, o ganho de processamento é de 128 e o número de usuários máximo por célula fica em torno de 60. Para  $K > G_p$ , a aproximação deixa de ser válida pois a autocorrelação entre as seqüências dos usuários aumenta e pode assumir valores próximos de 1.

### 2.4.2.3 Desempenho do MMSE em canal Rayleigh seletivo

As expressões apresentadas nesta subseção são contribuições deste trabalho de tese. Quando o receptor MMSE é utilizado em um canal CDMA síncrono com desvanecimento Rayleigh seletivo em frequência, com  $L$  múltiplos percursos, pode-se reescrever a Eq.

(2.69) como:

$$P_b^s(\alpha) = \mathbb{Q} \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^L \alpha_i^2 \left[ 2\frac{E_b}{N_0} - \frac{1}{4}F \left( 2\frac{E_b}{N_0}, \frac{(K-1)}{G_p} \right) \right]} \right\}, \quad (2.73)$$

e então descondicionar essa expressão em relação à variável aleatória  $\alpha$  Rayleigh, obtendo-se assim a seguinte expressão [3]:

$$\begin{aligned} \bar{P}_b &= \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_b}{\bar{\gamma}_b + L}} \right) \right]^L \\ &\times \sum_{i=0}^{L-1} \binom{L-1+i}{i} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_b}{\bar{\gamma}_b + L}} \right) \right]^i. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Para o caso síncrono,  $\bar{\gamma}_b$  é dado por:

$$\bar{\gamma}_b = L\bar{\alpha}^2 \left[ \frac{E_b}{N_0} - \frac{1}{8}F \left( 2\frac{E_b}{N_0}, \frac{(K-1)}{G_p} \right) \right]. \quad (2.75)$$

Enquanto que no caso assíncrono,  $\bar{\gamma}_b$  é dado por:

$$\bar{\gamma}_b = L\bar{\alpha}^2 \left[ \frac{E_b}{N_0} - \frac{1}{8}F \left( 2\frac{E_b}{N_0}, \frac{2(K-1)}{3G_p} \right) \right]. \quad (2.76)$$

Para verificar a validade das expressões acima podemos fazer algumas aproximações de primeira ordem e observar que, para altas relações sinal- ruído as equações convergem para o mesmo resultado do detector Descorrelacionador, enquanto que, para baixas relações sinal-ruído as equações convergem para os resultados do filtro casado.

Na função  $F(x, y)$ , quando  $x(1 + \sqrt{y})^2 \gg 1$ , isto é, para uma relação sinal-ruído alta ( $x$  representa a relação sinal-ruído),  $F(x, y)$  pode ser aproximada por:

$$F(x, y) \approx 4xy. \quad (2.77)$$

Utilizando a expressão acima na Eq. (2.75), a relação sinal-ruído média no caso síncrono será dada por:

$$\bar{\gamma}_b = L\bar{\alpha}^2 \frac{E_b}{N_0} \left[ 1 - \frac{(K-1)}{G_p} \right], \quad (2.78)$$

que é a aproximação Gaussiana para a interferência de múltiplo acesso do detector Descorrelacionador [17].

Para baixas relações sinal-ruído média, ou seja, para  $x < 1$ , pode-se fazer uma transformação de variável  $z = xy$  e aplicar a série de Taylor no ponto  $x = 0$  para obter:

$$F(x, y) \approx \frac{4x^2y}{1 + xy}. \quad (2.79)$$

Utilizando Eq. (2.79) na Eq. (2.75), a relação sinal ruído média no caso síncrono pode ser escrita como:

$$\bar{\gamma}_b = \frac{L\bar{\alpha}^2}{2 \left[ \frac{1}{2\frac{E_b}{N_0}} + \frac{(K-1)}{G} \right]}. \quad (2.80)$$

Como esperado, a expressão dada na Eq. (2.80) é a relação sinal-ruído média para o detector filtro casado.

Usando o mesmo raciocínio, expressões para o caso assíncrono podem ser obtidas para altas e baixas relações sinal-ruído. Para uma relação sinal-ruído alta,  $\bar{\gamma}_b$  é dada por:

$$\bar{\gamma}_b = L\bar{\alpha}^2 \frac{E_b}{N_0} \left[ 1 - \frac{2(K-1)}{3G} \right]. \quad (2.81)$$

Enquanto que para baixas relações sinal ruído,  $\bar{\gamma}_b$  é dado por:

$$\bar{\gamma}_b = \frac{L\bar{\alpha}^2}{2 \left[ \frac{1}{2\frac{E_b}{N_0}} + \frac{2(K-1)}{3G} \right]}. \quad (2.82)$$

#### 2.4.2.4 Verificação da Validade das Expressões Aproximadas

Para validar as expressões encontradas foram simulados os casos síncrono e assíncrono no canal AWGN e no canal com desvanecimento Rayleigh plano e Rayleigh seletivo com 2 e 4 percursos.

As figuras 2.13, 2.14, 2.15 e 2.16 ilustram as probabilidades de erro de bit simulada e analítica em função do número de usuários. Estas curvas de probabilidade de erro podem ser traçadas tanto em função do número de usuários, como também em função da relação sinal-ruído. No entanto, não faz muito sentido traçar estas curvas em função da relação sinal-ruído, uma vez que a variante nos sistemas é o número de usuários que entram e saem do sistema, e não a relação sinal-ruído. O valor da relação sinal-ruído foi escolhido em 7 dB pela mesma razão descrita na seção 2.3.3, e escolheu-se um valor típico de 64 para o ganho de processamento.

As figuras 2.13 e 2.14 apresentam resultados da probabilidade de erro de bit em canal AWGN, e as figuras 2.15 e 2.16 mostram a probabilidade de erro de bit em canal com desvanecimento Rayleigh seletivo em frequência casos síncrono e assíncrono, respectivamente. Pode-se notar a boa concordância dos resultados analíticos e simulados.

## 2.4. Detector Multiusuário Linear de Mínimo Erro Quadrático Médio (MMSE)

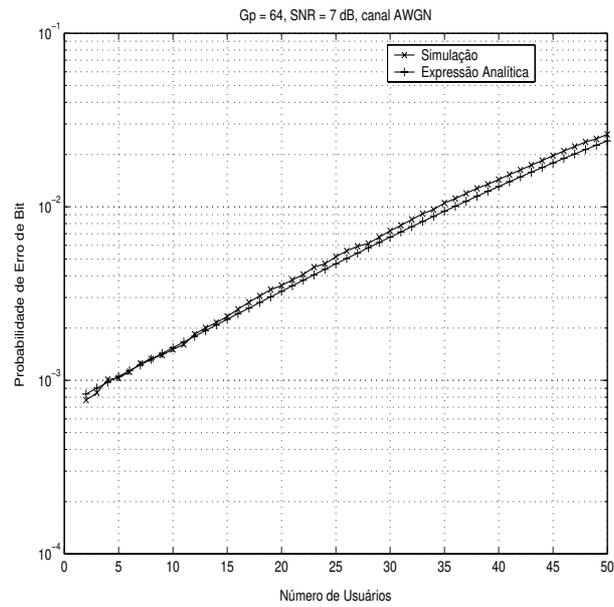


Figura 2.13: MMSE síncrono,  $Gp=64$  e  $SNR = 7$  dB, canal AWGN.

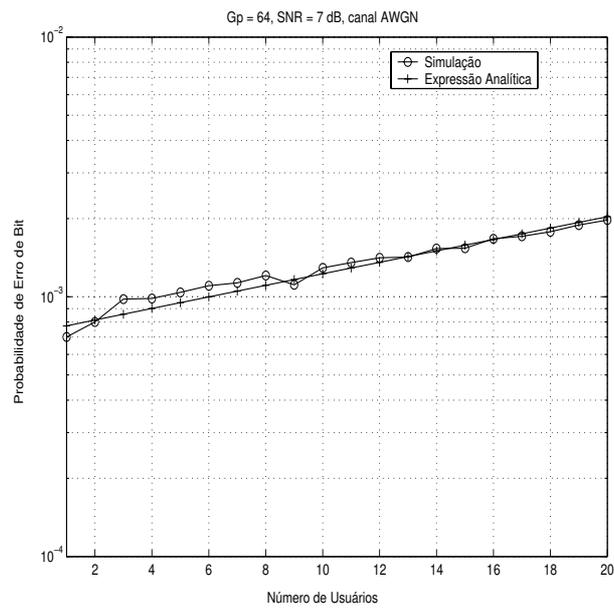


Figura 2.14: MMSE assíncrono,  $Gp=64$  e  $SNR = 7$  dB, canal AWGN.

## 2.4. Detector Multiusuário Linear de Mínimo Erro Quadrático Médio (MMSE)

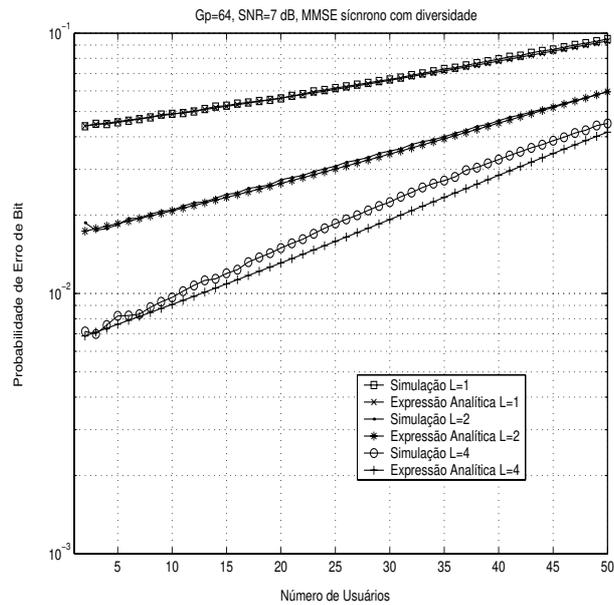


Figura 2.15: MMSE síncrono,  $G_p=64$  e  $\text{SNR} = 7$  dB, canal com desvanecimento Rayleigh seletivo.

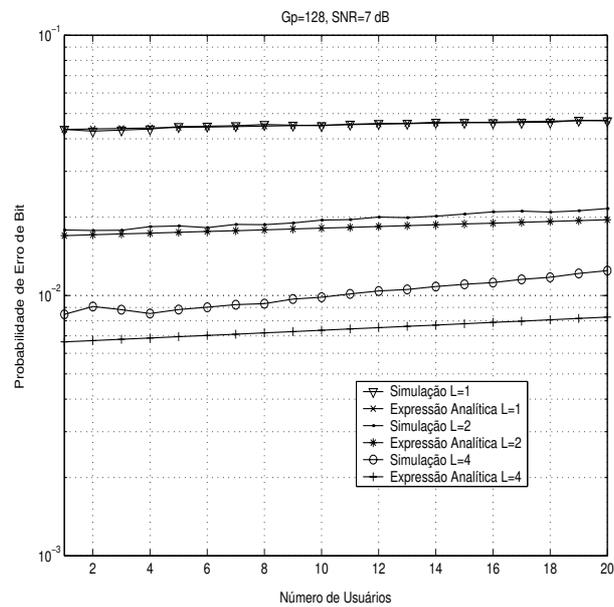


Figura 2.16: MMSE assíncrono,  $G_p=128$  e  $\text{SNR} = 7$  dB, canal com desvanecimento Rayleigh seletivo.

# Capítulo 3

## Sistemas Multitaxas

### 3.1 Introdução

Os sistemas de terceira geração permitirão transmissão de vários tipos de serviços, entre eles dados, voz, imagens, etc. Essa nova demanda de serviços exige uma mudança na forma de transmissão a fim de otimizar os recursos disponíveis. Um dos requisitos deste sistema é a capacidade de trabalhar com diversas taxas de transmissão, adequando-se quadro a quadro à demanda do usuário. Este tipo de sistema é chamado de sistema multitaxa, pois permite que cada usuário tenha taxa de transmissão de acordo com a sua necessidade individual.

Em sistemas celulares CDMA (*code-division multiple access*), há várias maneiras de se obter este tipo de recurso. Entre os mais importantes pode-se destacar os sistemas de ganho de processamento variável, sistemas de múltiplos códigos e sistemas de modulação variável. Em todos estes sistemas a banda final de transmissão permanece inalterada, ou seja, a taxa de dados varia mas a banda em frequência em que o sinal é espalhado e transmitido permanece a mesma para todos os usuários.

No sistemas de ganho de processamento variável, o sinal é espalhado com uma relação de ganho de processamento que é inversamente proporcional à taxa de dados, por exem-

plo, um usuário transmitindo a uma taxa de 2Mbps em um sistema que utiliza uma banda de 4,096 MHz (com uma eficiência espectral unitária, ou seja taxa máxima de 4,096 Mbps) tem ganho de processamento de  $G_p = 4,096 \text{ MHz} / 2,048 \text{ Mbps} = 2$ . Outro usuário que deseje ter uma taxa de dados de 256 kbps terá  $G_p = 4,096 \text{ MHz} / 256 \text{ kbps} = 16$ . Este sistema deve lidar com seqüências de espalhamento de tamanhos diferentes, e como desejado, estas seqüências devem ter baixa correlação cruzada. Essa mudança no ganho de processamento também pode ocorrer para um mesmo usuário durante a transmissão de um quadro para o outro, ou seja, o usuário começa transmitindo em um determinada taxa e caso queira aumentar ou diminuir a taxa de transmissão deste serviço ele diminuirá ou aumentará o ganho de processamento.

Nos sistemas de múltiplos códigos, o ganho de processamento permanece fixo. Caso o usuário deseje aumentar a taxa de dados, ele apenas utilizará outro código duplicando assim a taxa de dados. Note que a granularidade deste sistema, isto é, de quanto se pode aumentar ou diminuir a taxa tem o valor de uma potência de 2. Por exemplo, em um sistema em que o ganho de processamento é de 128, com uma taxa mínima de 128 kbps, o usuário que deseje ter uma taxa de 512 kbps, irá utilizar quatro códigos diferentes, comportando-se para o sistema como se fosse 4 usuários distintos.

Nos sistemas de modulação variável, a taxa de dados é variada alterando a eficiência espectral da modulação. Por exemplo, suponha um usuário em um sistema BPSK com eficiência espectral de 1 bit/Hertz, caso queira aumentar em 4 vezes a taxa de transmissão, aumentará a eficiência espectral para 4 bits/ Hertz (mudando, por exemplo, de uma modulação BPSK para uma 16 QAM). Este tipo de sistema não é muito utilizado pois necessita de alteração no modulador, operação bem mais complexa do que alterar o ganho de processamento ou alocar outro código.

## 3.2 Probabilidade de Erro em Sistemas Multitaxas com Ganho de Processamento Variável

Usuários distintos com diferentes taxas podem ser alocados na mesma banda  $B$ , se o ganho de processamento for variável, dessa maneira usuários com altas taxas de dados terão ganho de processamento menores do que aqueles com baixas taxas de transmissão de dados.

Neste sistema foi assumido ganho de processamento variável com  $K$  usuários. Sem perda de generalidade assumimos taxas de transmissão de dados ordenadas, isto é,  $R_1 > R_2 > \dots > R_n$ , onde  $n$  é o número de taxas diferentes do sistema. Todos os usuários possuem a mesma relação sinal-ruído  $\gamma_b$  e o ganho de processamento para o  $i$ -ésimo grupo é definido como  $G_{p_i} = B/R_i$ , onde  $R_i$  é a taxa de bit para o  $i$ -ésimo grupo com  $K_i$  usuários. O sistema é definido de tal forma que  $\sum_{i=1}^n K_i = K$ . Também é assumido neste sistema que as seqüências de espalhamento são puramente aleatórias. A probabilidade de erro de bit do  $j$ -ésimo grupo com taxa  $R_j$  em um sistema CDMA síncrono, usando como detector o filtro casado, pode ser obtida pela expressão [10]:

$$P_j = Q \left( \left[ \frac{N_0}{2E_b} + \frac{1}{G_{p_j}} \left( \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{R_j} K_i - 1 \right) \right]^{-1/2} \right). \quad (3.1)$$

Esta expressão nos permite assumir que um sistema multitaxa é equivalente a um sistema de uma única taxa onde é definido um número de usuários equivalente dado por:

$$K_{equi} = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{R_j} K_i. \quad (3.2)$$

Como exemplo, a Fig. 3.1 mostra um sistema com 10 usuários: 5 usuários com  $Gp = 64$ , e 5 usuários e  $Gp = 128$ . O resultado da simulação mostra que este sistema é equivalente a um sistema com 15 usuários e  $Gp = 128$ .

Na Fig. 3.1 também foram traçados os gráficos de probabilidade de erro de bit para um sistema com 10 usuários e ganho de processamento de 128 e para um sistema com 10 usuários e ganho de processamento de 64. Estas duas curvas foram traçadas para ilustrar como seria o desempenho do sistema no caso de se ter apenas uma única taxa, ou seja, ter apenas usuários com  $G_p = 64$  ou ter apenas usuários com taxas de  $G_p = 128$ . Note que estes dois casos são casos limitantes para o sistema descrito.

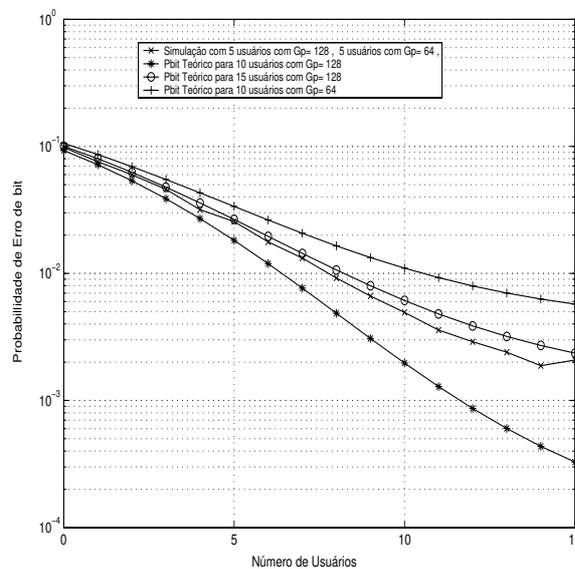


Figura 3.1: Sistema multitaxa, com 10 usuários. 5 usuários com  $G_p = 64$ , e 5 usuários e  $G_p = 128$ .

### 3.2.1 Probabilidade de Erro para os detectores Descorrelacionador e MMSE usando seqüências puramente aleatórias

Nesta subseção serão apresentadas equações que são contribuições deste trabalho de tese. A Eq. (3.1) pode ser estendida para utilização na medida de desempenho dos detectores lineares MMSE e Descorrelacionador. Expressões similares às da Eq. (3.1) em função apenas do ganho de processamento e do número de usuários foram propostas em [6, 15, 17].

A probabilidade de erro de bit média para o detector Descorrelacionador com controle perfeito de potência em um sistema síncrono, e canal AWGN já foi descrita no Capítulo 2 e pode ser expressa como:

$$P_b = Q \left( \sqrt{2\gamma_b \left( 1 - \frac{(K-1)}{G_p} \right)} \right), \quad (3.3)$$

e para o detector MMSE,  $P_b$  é dada pela Eq. (2.69) :

$$P_b = Q \left( \sqrt{2\gamma_b - \frac{1}{4} F \left( 2\gamma_b, \frac{(K-1)}{G_p} \right)} \right), \quad (3.4)$$

com a função  $F(\cdot)$  dada pela Eq. (2.70).

### 3.2.2 Probabilidade de erro de bit em sistemas multiusuários com múltiplas taxas em canal AWGN

As equações obtidas nesta subseção são contribuições deste trabalho de tese. A utilização do conceito de número de usuários equivalente dado na Eq. (3.2) permite escrever a probabilidade de erro de bit de um sistema multitaxa como a de um sistema de taxa única. Substituindo o parâmetro  $K$ , número de usuários pelo parâmetro número de usuários equivalente,  $K_{equi}$  nas Eq. (3.3) e Eq. (3.4) tem-se que a probabilidade de erro de bit para o  $j$ -ésimo grupo é dada por:

$$P_{b_j} = Q \left( \sqrt{2\gamma_b \left( 1 - \frac{(K_{equi} - 1)}{G_{p_j}} \right)} \right) = Q \left( \sqrt{2\gamma_b \left( 1 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{R_j} K_i - 1 \right)}{G_{p_j}} \right)} \right), \quad (3.5)$$

e para o detector MMSE,  $P_b$  é dada por :

$$P_{b_j} = Q \left( \sqrt{2\gamma_b - \frac{1}{4} F \left( 2\gamma_b, \frac{(K_{equi} - 1)}{G_{p_j}} \right)} \right) = Q \left( \sqrt{2\gamma_b - \frac{1}{4} F \left( 2\gamma_b, \frac{\left( \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{R_j} K_i - 1 \right)}{G_{p_j}} \right)} \right). \quad (3.6)$$

### 3.2.3 Desempenho de um sistema multiusuário com múltiplas taxas em canal com desvanecimento seletivo Rayleigh

Estendendo os resultados da subseção anterior é possível calcular a probabilidade de erro de bit média para os detectores em um canal com multipercurso e desvanecimento Rayleigh. A probabilidade de erro de bit para o Descorrelacionador para o  $j$ -ésimo grupo em um canal com  $L$  percursos é contribuição deste trabalho de tese, e pode ser escrita como:

$$P_{b_j} = Q \left( \sqrt{\sum_{l=1}^L \alpha_l^2 \left( 2\gamma_b \left( 1 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{R_j} K_i - 1 \right)}{G_{p_j}} \right)} \right)} \right), \quad (3.7)$$

onde  $\alpha$  são as variáveis complexas Rayleigh para o percurso  $l$ . A probabilidade de erro de bit média é obtida descondicionando a variável Rayleigh na Eq. (3.7) resultando em [3]:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{b_j} &= \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_{b_j}}{\bar{\gamma}_{b_j} + L}} \right) \right]^L \\ &\quad \times \sum_{i=0}^{L-1} \binom{L-1+i}{i} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_{b_j}}{\bar{\gamma}_{b_j} + L}} \right) \right]^i, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde a relação sinal-ruído média por bit  $\bar{\gamma}_{b_j}$  para o Descorrelacionador é dada por:

$$\bar{\gamma}_{b_j} = L\alpha^2 \frac{E_b}{N_0} \left\{ 1 - \frac{\left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{R_i}{R_j} K_i \right) - 1 \right]}{G_{p_j}} \right\}, \quad (3.9)$$

e para o MMSE é dada por:

$$\bar{\gamma}_{b_j} = L\bar{\alpha}^2 \left[ \frac{E_b}{N_0} - \frac{1}{8}F \left( 2\frac{E_b}{N_0}, \frac{\left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{R_i}{R_j} K_i \right) - 1 \right)}{G_{p_j}} \right) \right]. \quad (3.10)$$

### 3.2.4 Resultados Numéricos e Comparações

Foram feitas simulações para validar as expressões analíticas. Os resultados são exibidos nas Fig. 3.2 a 3.9. Os gráficos mostram uma comparação entre as expressões analíticas e os resultados das simulações. O sistema foi subdividido em dois grupos, o primeiro com 5 usuários e ganho de processamento  $G_p = 64$  e o segundo grupo também com 5 usuários mas com ganho de processamento  $G_p = 128$ . Os resultados mostram que este sistema é equivalente ao um sistema com 15 usuários e ganho de processamento de  $G_p = 128$ , ou a um sistema tendo um número  $K_{equi}$  de usuários equivalente de 7,5 e ganho de processamento  $G_p = 64$ .

A Fig. 3.2 mostra os resultados da simulação e a curva traçada através da expressão analítica, Eq. (3.9), para o detector Descorrelacionador. A Fig. 3.3 mostra os resultados da simulação e a curva traçada através da expressão analítica, Eq. (3.10), para o detector MMSE.

Como no caso anterior do filtro casado, também é possível ter o mesmo parâmetro, *número de usuários equivalente*  $K_{equi}$ , o qual nos permite tomar o sistema multitaxa como sendo um sistema de uma única taxa equivalente. No caso simulado, o número equivalente de usuários é igual a 15 para um ganho de processamento  $G_p = 128$ .

### 3.2. Probabilidade de Erro em Sistemas Multitaxas com Ganho de Processamento Variável

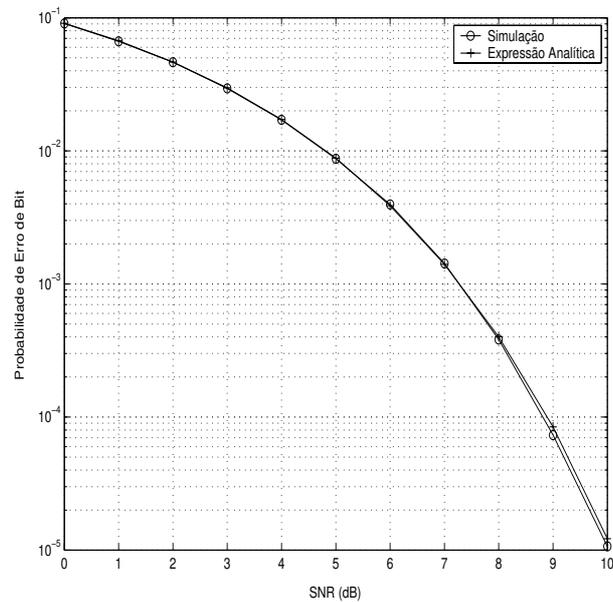


Figura 3.2: Detector Descorrelacionador em canal AWGN, 5 usuários com  $Gp = 64$  e 5 usuários com  $Gp = 128$ , Sistema equivalente a um sistema com 15 usuários e  $Gp = 128$ .

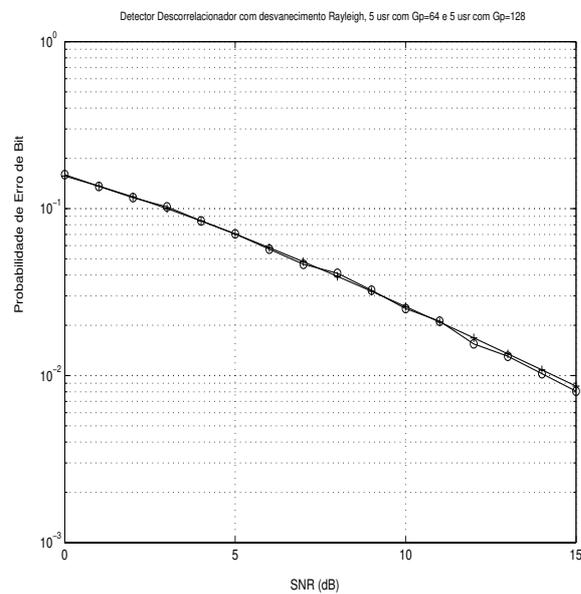


Figura 3.3: Detector Descorrelacionador Síncrono,  $Gp = 64$ , canal com desvanecimento Rayleigh plano.

### 3.2. Probabilidade de Erro em Sistemas Multitaxas com Ganho de Processamento Variável

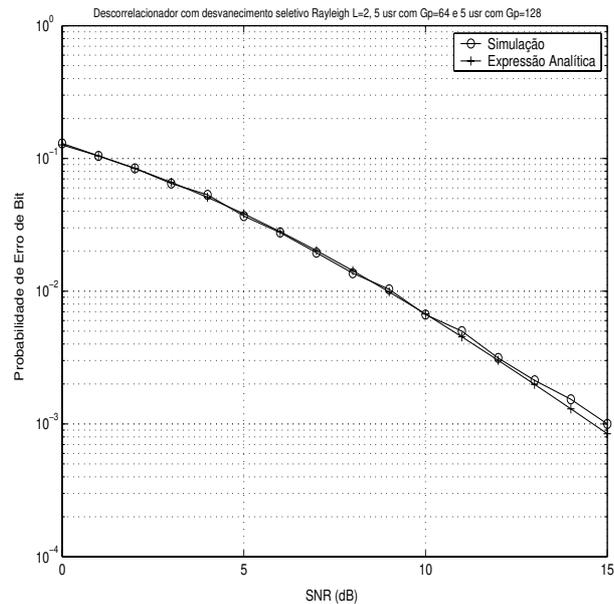


Figura 3.4: Detector Descorrelacionador Síncrono,  $G_p = 64$ , canal com desvanecimento Rayleigh seletivo em frequência com 2 percursos.

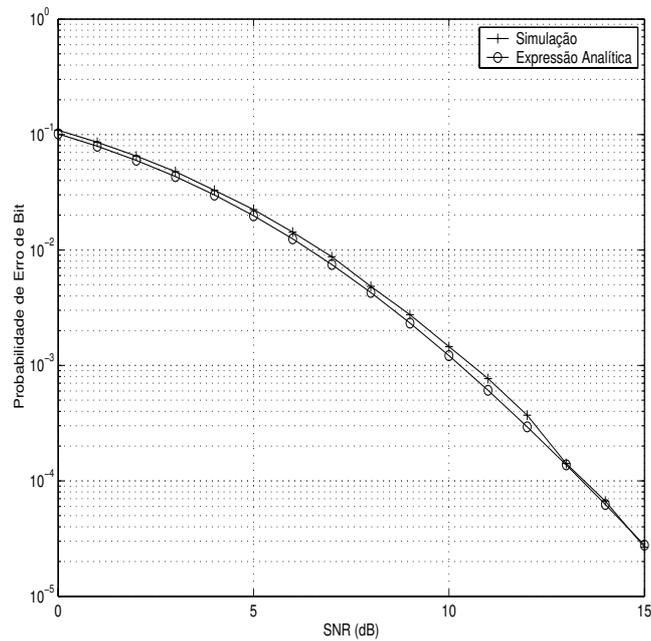


Figura 3.5: Detector Descorrelacionador síncrono,  $G_p = 64$ , canal com desvanecimento Rayleigh seletivo em frequência com 4 percursos.

### 3.2. Probabilidade de Erro em Sistemas Multitaxas com Ganho de Processamento Variável

---

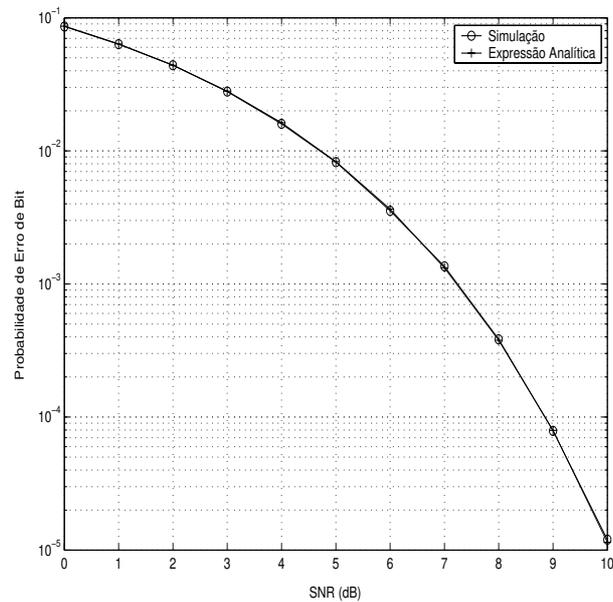


Figura 3.6: Detector MMSE em canal AWGN com 5 usuários com  $Gp = 64$  e 5 usuários com  $Gp = 128$ , sistema equivalente a um sistema com 15 usuários com  $Gp = 128$ .

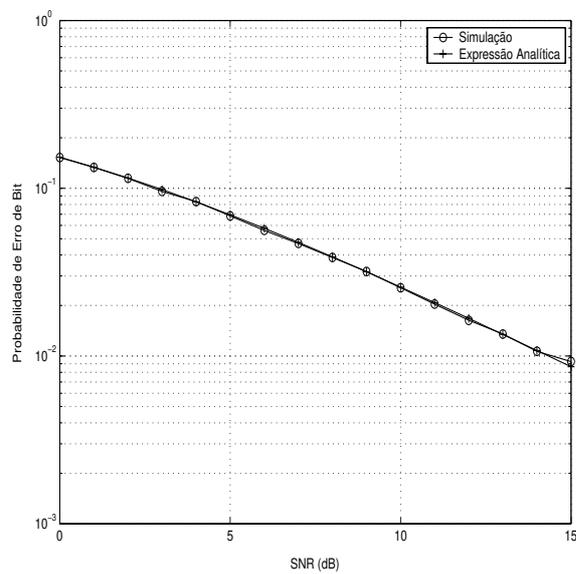


Figura 3.7: Detector MMSE síncrono,  $Gp = 64$ , canal com desvanecimento Rayleigh plano. Sistema com 5 usuários com  $Gp = 64$  e 5 usuários com  $Gp = 128$ .

### 3.2. Probabilidade de Erro em Sistemas Multitaxas com Ganho de Processamento Variável

---

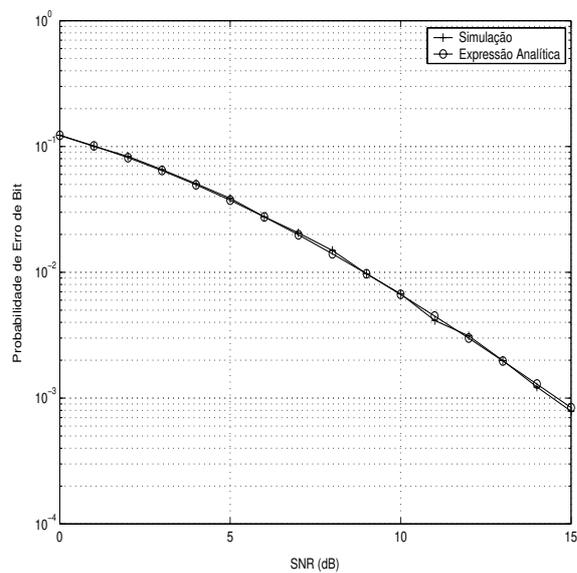


Figura 3.8: Detector MMSE síncrono,  $G_p = 64$ , canal com desvanecimento Rayleigh seletivo em frequência com 2 percursos.

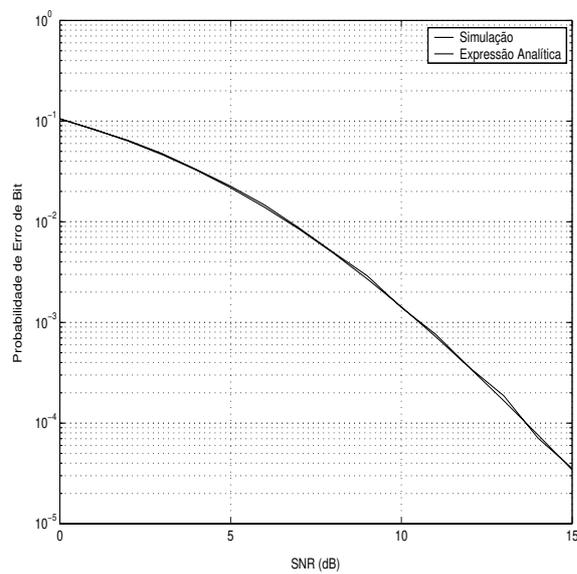


Figura 3.9: Detector MMSE síncrono,  $G_p = 64$ , canal com desvanecimento Rayleigh seletivo em frequência com 4 percursos.

# Capítulo 4

## Considerações Finais e Trabalhos Futuros

### 4.1 Considerações Finais

Este trabalho de tese considerou a utilização de detectores multiusuários em sistemas CDMA utilizando seqüências puramente aleatórias. Foram obtidas expressões analíticas aproximadas para o cálculo da probabilidade de erro de bit do detector MMSE em canal com múltiplos percursos e desvanecimento Rayleigh. As expressões apresentaram uma boa concordância com os resultados das simulações.

Além deste resultado também obtiveram-se outras expressões para a probabilidade de erro de bit em sistemas multitasas com detectores multiusuários Descorrelacionador e MMSE. Estas expressões são consideradas os resultados mais relevantes deste trabalho uma vez que conseguiu-se unir duas áreas tão em voga e recentes no âmbito da pesquisa: detectores multiusuário e sistemas multitasas. As simulações e as expressões analíticas também apresentaram boa concordância como mostrado nas figuras relacionadas no capítulo anterior.

Neste trabalho não são apresentados detalhes de implementação do programa computacional elaborado em linguagem Matlab utilizado para a simulação do sistema em estudo. Vale ressaltar que este trabalho de simulação, apesar de não ser exibido, é

considerado de grande importância e relevância, pela sua dificuldade, e pelo tempo requerido para obter resultados válidos e confiáveis que puderam dar subsídios para o desenvolvimento das equações encontradas.

## 4.2 **Trabalhos Futuros**

Sugere-se para trabalhos futuros: o estudo destes detectores na presença de outros tipos de desvanecimento tais como Nakagami, Rice e outros; a obtenção de expressões analíticas aproximadas utilizando seqüências puramente aleatórias para os detectores multiusuários não lineares; e a obtenção de expressões analíticas para sistemas multitaxas em sistemas assíncronos.

# Referências Bibliográficas

- [1] YACOUB, M. *Wireless Communications Engineering*. CRC Press, 1998.
- [2] RAPPAPORT, T. S. *Wireless Communications: Principles and Practice*. Prentice Hall, NJ: 1996.
- [3] PROAKIS, J. G. *Digital Communications*. 3a. Edição, McGraw-Hill, 1995.
- [4] DUEL-HALLEn; Z. ZVONAR. Multiuser Detection for CDMA Systems. IEEE Personal Communications, Abril, 1995.
- [5] VERDÚ, S. *Optimum multiuser signal detection*. PhD Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, Aug. 1984.
- [6] VERDÚ, S. *Multiuser Detection*. Cambridge University Press, 1998.
- [7] PRASAD, Ramjee; et al, “*Third Generation Mobile Communications Systems*”, Artech House.
- [8] HOLMA, HARRI; TOSKALA, Antti *WCDMA for UMTS*, Willey 2001.
- [9] YACOUB, M. *Wireless Technology*. CRC Press, Set 2001.
- [10] OTTOSSON, T.; SVENSSON, A; *Multirate performance in DS/CDMA Systems*, Tech. Report no. 14, ISSN 0283-1260, Dept. of Information Theory, Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden, March 1995.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [11] JERUCHIN, M. C.; BALABAN, P.; SHANMUGAN, K. *Simulation of Communication Systems*, Plenum Press, 1992.
- [12] LATVA-AHO, M. Bit Error Probability Analysis for FRAMES WCDMA Downlink Receivers, *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, pp. 1119-1133, Vol 47, NO. 4, Nov. 1998.
- [13] KAASILA, V. P; MÄMMELÄ, A. Bit-Error Probability for an Adaptive Diversity Receiver in a Rayleigh-Fading Channel, *IEEE Trans. on Comm.*, pp. 1106 – 1108, VOL 46, no. 9, Sept. 1998.
- [14] LATVA-AHO, M., LMMSE Detection for DS-CDMA Systems in Fading Channels, *IEEE Trans. on Comm.*, pp. 194 - 199, VOL 48, no. 2, Fev 2000.
- [15] FRAIDENRAICH, GUSTAVO; BALDINI, RENATO F.; ALMEIDA, CELSO *On the Performance for MMSE Detection of Direct Sequence CDMA Signals with Random Spreading in Multipath Rayleigh Fading Channels*, Ericsson Report n. 2, Mar 2002.
- [16] POOR, H. VICENT; VERDÚ, S. Probability of Error in MMSE Multiuser Detection. *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 43, No. 3, May 1997.
- [17] SILVA, GABRIEL; Tese de Mestrado FEEC UNICAMP, 2002.
- [18] BAI, Z. D.; YIN, Y. Q. *Limit of the smallest eigenvalue of a large dimensional sample covariance matrix* *Annals of Probability*, 21:1275 - 1294, 1993.
- [19] PURSLEY, M. B. Performance evaluation for phase-coded spread-spectrum multiple-access communication Part I: System analysis, *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-25, pp. 795-799, Aug. 1977.
- [20] GRADSHTEYN, I.; RYZHIK'S, I. *Table of Integrals, Series, and Products*. Sixth edition, Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger. July 2000.

# Apêndice A

## Cálculo da Matriz de Mínimo Erro Quadrático Médio (MMSE)

Deseja-se encontrar uma matriz  $\mathbf{M}$  de forma a minimizar o erro médio quadrático entre o sinal recebido  $\mathbf{y}$  e o sinal enviado  $\mathbf{b}$  no transmissor, isto é:

$$\min_{\mathbf{M} \in R^{K \times K}} E [\|\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{y}\|^2], \quad (\text{A.1})$$

onde,

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{n}, \quad (\text{A.2})$$

e a função esperança é aplicada ao vetor transmitido  $\mathbf{b}$  e ao vetor ruído  $\mathbf{n}$ , que tem média zero e matriz de covariância igual a  $\sigma^2\mathbf{R}$ . Sabe-se que:

$$\|x\|^2 = \text{traço} \{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}, \quad (\text{A.3})$$

o primeiro passo para resolver a Eq. (A.1) é obter a matriz covariância do vetor erro:

$$\text{cov} \{\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{y}\} = E [(\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{y})(\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{y})^T];$$

---


$$\begin{aligned}
&= E [\mathbf{b}\mathbf{b}^T] - E [\mathbf{b}\mathbf{y}^T] \mathbf{M}^T - \mathbf{M} E [\mathbf{y}\mathbf{b}^T] \\
&\quad + \mathbf{M} E [\mathbf{y}\mathbf{y}^T] \mathbf{M}^T,
\end{aligned} \tag{A.4}$$

usando a Eq. (A.2) e o fato de que o ruído e os dados não são correlacionados tem-se que:

$$E [\mathbf{b}\mathbf{b}^T] = \mathbf{I}; \tag{A.5}$$

$$E [\mathbf{b}\mathbf{y}^T] = E [\mathbf{b}\mathbf{b}^T \mathbf{A}\mathbf{R}] = \mathbf{A}\mathbf{R}; \tag{A.6}$$

$$E [\mathbf{y}\mathbf{b}^T] = E [\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{b}\mathbf{b}^T] = \mathbf{R}\mathbf{A}; \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
E [\mathbf{y}\mathbf{y}^T] &= E [\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{b}\mathbf{b}^T \mathbf{A}\mathbf{R}] + E [\mathbf{n}\mathbf{n}^T]; \\
&= \mathbf{R}\mathbf{A}^2\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{R}.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Substituindo estes resultados na Eq. (A.4), pode-se expressar a matriz covariância do vetor erro como:

$$\text{cov} \{ \mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{y} \} = \mathbf{I} + \mathbf{M} (\mathbf{R}\mathbf{A}^2\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{R}) \mathbf{M}^T - \mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{M}^T - \mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{A}; \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
&= [\mathbf{I} + \sigma^{-2}\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{A}]^{-1} \\
&\quad + (\mathbf{M} - \overline{\mathbf{M}}) (\mathbf{R}\mathbf{A}^2\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{R}) (\mathbf{M} - \overline{\mathbf{M}})^T,
\end{aligned} \tag{A.10}$$

2onde:

$$\overline{\mathbf{M}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}^{-1} [\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{A}^{-2}]^{-1}, \tag{A.11}$$

e assumiu-se que  $\mathbf{A}$  é uma matriz não singular, isto é, apenas os usuários que estão ativos estão sendo levados em conta. A identidade na Eq. (A.10) pode ser verificada pelas seguintes expressões:

$$\overline{\mathbf{M}} (\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{A}^{-2})^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{R}, \tag{A.12}$$

---

e

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{R}\overline{\mathbf{M}}^T\right) \left(\mathbf{I} - \sigma^{-2}\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{A}\right) = \mathbf{I}. \quad (\text{A.13})$$

Esta última Eq. (A.13) segue da Eq. (A.11).

Finalmente, pode-se resolver:

$$\min_{\mathbf{M} \in R^{K \times K}} E [\|\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{y}\|^2] = \min_{\mathbf{M} \in R^{K \times K}} \text{traço} \{ \text{cov} \{ \mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{y} \} \}. \quad (\text{A.14})$$

A matriz  $\mathbf{R}\mathbf{A}^2\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{R}$  é definida e não singular. Portanto, o traço do segundo termo da direita da Eq. (A.10) é sempre não negativo. Conclui-se que a matriz  $\overline{\mathbf{M}}$  definida na Eq. (A.11) atinge o mínimo da soma dos erros médios quadrados, provando-se assim que  $\overline{\mathbf{M}}$  é a solução do problema de minimização e seu mínimo é dado por:

$$\min_{\mathbf{M} \in R^{K \times K}} E [\|\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{y}\|^2] = \text{traço} \left\{ [\mathbf{I} + \sigma^{-2}\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{A}]^{-1} \right\}. \quad (\text{A.15})$$

Sendo assim, de acordo com a Eq. (A.11) o detector linear multiusuário MMSE estima o sinal enviado  $\mathbf{b}$  através da expressão:

$$\begin{aligned} \hat{b}_k &= \text{sgn} \left( \frac{1}{A_k} \left( [\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{A}^{-2}]^{-1} \mathbf{y} \right)_k \right); \\ &= \text{sgn} \left( \left( [\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{A}^{-2}]^{-1} \mathbf{y} \right)_k \right). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

## Apêndice B

# Cálculo da Probabilidade de Erro de Bit para o Detector MMSE em Canal AWGN

**Proposição 1** - Bai e Yin [18]

Suponha que  $K$  usuários utilizem seqüências puramente aleatórias com  $G_p$  chips por símbolo. Seja:

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{K-1}{G_p} \in (0, +\infty). \quad (\text{B.1})$$

Suponha que a escolha das assinaturas é completamente aleatória: as seqüências de cada usuário são independentes e igualmente prováveis. A porcentagem dos  $K$  autovalores de  $\mathbf{R}$  (matriz de autocorrelação das seqüências de espalhamento) que estão abaixo de um determinado valor  $x$  converge (quando  $K \rightarrow \infty$ ) para a função distribuição de probabilidade:

$$f_\beta(x) = [1 - \beta^{-1}] \delta(x) + \frac{\sqrt{[x-a]^+ [b-x]^+}}{2\pi\beta x}, \quad (\text{B.2})$$

onde a função  $[\cdot]^+$  é dada por:

$$[z]^+ = \max[0, z],$$

e

$$a = (1 - \sqrt{\beta})^2, \quad (\text{B.3})$$

$$b = (1 + \sqrt{\beta})^2. \quad (\text{B.4})$$

Se  $\beta \leq 1$ , o menor autovalor converge para  $a$ .

## B.1 Formulação do Problema

O sinal recebido em um sistema CDMA síncrono pode ser expresso pela Eq. (2.1), ou

$$\mathbf{r} = \sum_{k=1}^K A_k b_k \mathbf{s} + \sigma \mathbf{m}, \quad (\text{B.5})$$

onde  $\mathbf{m}$  é o vetor ruído com componentes da variância independentes e as outras variáveis foram definidas na seção 2.1. Considerando o usuário 1, como usuário de interesse, temos que o detector linear MMSE procura um vetor  $\mathbf{v}$  que minimiza:

$$E \left[ (b_1 - \mathbf{v}^T \mathbf{r})^2 \right]. \quad (\text{B.6})$$

Portanto, podemos aplicar o gradiente para minimizar a Eq. (B.6) em relação à variável  $\mathbf{v}$  e igualar a zero, obtendo-se assim:

$$\begin{aligned} \nabla E \left[ (b_1 - \mathbf{v}^T \mathbf{r})^2 \right] &= 0, \\ E \left[ b_1 \mathbf{r} - \mathbf{r} \mathbf{r}^T \mathbf{v} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Calculando o primeiro termo da Eq. (B.7), observando que o ruído tem média zero, e que os elementos do vetor  $\mathbf{b}$  são i.i.d. obtém-se que:

$$E [b_1 \mathbf{r}] = A_1 \mathbf{s}_1, \quad (\text{B.8})$$

e também:

$$E [\mathbf{r} \mathbf{r}^T] = \sigma^2 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^K A_k^2 \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T. \quad (\text{B.9})$$

Portanto, a solução da Eq. (B.7) é dada pelo vetor  $\mathbf{v}^*$ :

$$\mathbf{v}^* = E [\mathbf{r} \mathbf{r}^T]^{-1} E [b_1 \mathbf{r}], \quad (\text{B.10})$$

$$= A_1 \left[ \sigma^2 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^K A_k^2 \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T \right]^{-1} \mathbf{s}_1. \quad (\text{B.11})$$

O erro quadrático médio dado pela transformação linear  $\mathbf{v}$  pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} E \left[ (b_1 - \mathbf{r}^T \mathbf{v}^*)^2 \right] &= 1 - (E [b_1 \mathbf{r}])^T (E [\mathbf{r} \mathbf{r}^T])^{-1} E [b_1 \mathbf{r}], \\ &= 1 - A_1^2 \mathbf{s}_1^T E [\mathbf{r} \mathbf{r}^T]^{-1} \mathbf{s}_1, \\ &= 1 - A_1^2 \mathbf{s}_1^T \left[ \sigma^2 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^K A_k^2 \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T \right]^{-1} \mathbf{s}_1. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Denotando a matriz covariância dos usuários interferentes como  $\Sigma$  obtém-se que:

$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^2 \mathbf{I} + \sum_{k=2}^K A_k^2 \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T. \quad (\text{B.13})$$

Pode-se notar que na Eq. (B.13) o sinal do usuário 1 não foi considerado (índice de  $k$  começa em 2).

A Eq. (B.11) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{v}^* = \frac{A_1}{1 + A_1^2 \mathbf{s}_1^T \Sigma^{-1} \mathbf{s}_1} \Sigma^{-1} \mathbf{s}_1, \quad (\text{B.14})$$

e

$$E \left[ (b_1 - \mathbf{v}^T \mathbf{r}^*)^2 \right] = \frac{1}{1 + A_1^2 \mathbf{s}_1^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{s}_1}. \quad (\text{B.15})$$

Usando as Eq. (B.14) e Eq. (B.15) pode-se calcular a relação sinal-interferência para o usuário 1:

$$\begin{aligned} SIR_1 &= \frac{E \left[ (A_1 b_1 \mathbf{s}_1^T \mathbf{v}^*)^2 \right]}{E \left[ ((\mathbf{r}^T - A_1 b_1 \mathbf{s}_1^T) \mathbf{v}^*)^2 \right]}; \\ &= \frac{1}{E \left[ (b_1 - \mathbf{r}^T \mathbf{v}^*)^2 \right]} - 1; \\ &= A_1^2 \mathbf{s}_1^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{s}_1. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Descondicionando-se a Eq. (B.16) em relação às seqüências de espalhamento puramente aleatórias, obtém-se que:

$$E[SIR_1] = E \left[ A_1^2 \mathbf{s}_1^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{s}_1 \right]; \quad (\text{B.17})$$

$$= A^2 E \left[ \mathbf{s}_1^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{s}_1 \right]; \quad (\text{B.18})$$

$$= \frac{A^2}{G_p} \sum_{n=1}^{G_p} E \left[ (\boldsymbol{\Sigma}^{-1})_{nn} \right]; \quad (\text{B.19})$$

$$= \frac{A^2}{G_p} E \left[ \text{traço} (\boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \right];$$

$$= \frac{A^2}{G_p} E \left[ \sum_{n=1}^{G_p} \lambda_n (\boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \right];$$

$$= \frac{A^2}{G_p} E \left[ \sum_{n=1}^{G_p} \frac{1}{\lambda_n (\boldsymbol{\Sigma})} \right];$$

$$= E \left[ \frac{A^2}{\lambda_1 (\boldsymbol{\Sigma})} \right];$$

$$= E \left[ \frac{A^2}{\sigma^2 + A^2 \beta \lambda_1 \left( \frac{1}{\beta} \sum_{k=2}^K \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T \right)} \right], \quad (\text{B.20})$$

e fazendo-se  $K \rightarrow \infty$  obtém-se que:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} E \left[ \frac{A^2}{\sigma^2 + A^2 \beta \lambda_1 \left( \frac{1}{\beta} \sum_{k=2}^K \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T \right)} \right] = \int_0^\infty \frac{A^2}{\sigma^2 + A^2 \beta x} f_{1/\beta}(x) dx, \quad (\text{B.21})$$

$$= \frac{A^2}{\sigma^2} - \frac{1}{4} F \left( \frac{A^2}{\sigma^2}, \beta \right). \quad (\text{B.22})$$

A função  $F(\cdot)$  é dada na Eq. (2.70). A passagem da Eq. (B.18) para a Eq. (B.19) utiliza-se do fato de que a variância de seqüências puramente aleatórias em sistemas síncronos é dada por  $\frac{1}{G_p}$  [19]. A passagem da Eq. (B.21) para a Eq. (B.22) é dada em Gradshteyn [20].

Pode-se ainda escrever o primeiro termo da função  $F(\cdot)$  como:

$$\frac{A^2}{\sigma^2} = 2 \frac{E_b}{N_0} = 2\gamma_b, \quad (\text{B.23})$$

obtendo-se assim que a probabilidade de erro de bit para seqüências puramente aleatórias é dada por:

$$P_b = Q \left( \sqrt{2\gamma_b - \frac{1}{4} F \left( 2\gamma_b, \frac{K-1}{G_p} \right)} \right). \quad (\text{B.24})$$

No caso assíncrono tem-se a expressão:

$$P_b = Q \left( \sqrt{2\gamma_b - \frac{1}{4} F \left( 2\gamma_b, \frac{2(K-1)}{3G_p} \right)} \right), \quad (\text{B.25})$$

pois na passagem da Eq. (B.18) para a Eq. (B.19), a variância de seqüências puramente aleatórias em sistemas assíncronos assume o valor de  $\frac{2(K-1)}{3G_p}$ .

# Apêndice C

## Trabalhos Publicados

No período da tese, de março de 2000 a julho de 2002 foram publicados os seguintes trabalhos:

1. Celso de Almeida, Teógenes B. Nóbrega, Gustavo Fraidenraich, Sílvia Coelho, "*Cálculo de Throughput para Protocolos RLP / TCP em modulação BPSK*", SBrt - Sociedade Brasileira de Telecomunicações, Fortaleza, Set. 2001.
2. Gustavo Fraidenraich, Renato Baldini Filho e Celso de Almeida, "*Multirate Performance in Multiuser MMSE and Decorrelating Detectors using Random Spread Sequences on AWGN channels*", CSNDSP2002, Stafford - Inglaterra 15-17 Jul. 2002.
3. Gustavo Fraidenraich, Renato Baldini Filho e Celso de Almeida, "*Multirate Performance in Multiuser MMSE and Decorrelating Detectors using Random Spread Sequences on multipath fading channels*", ITS2002, Natal - RN Set. 2002.