

Controle $\mathcal{H}_\infty$ no Espaço de Variáveis de Estado

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas,
como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

por

Reinaldo Martinez Palhares

Graduado em Engenharia Elétrica - EEE/UFG

em 28 de abril de 1995 perante a banca examinadora

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres

Orientador

Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa

DEE/EPUSP

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val

FEE/UNICAMP

Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por Reinaldo Martinez Palhares

_____ e aprovada pela Comissão
Julgadora em 28 / 04 / 95.

Pedro Kuni Dias Rios
Orientador

Para a Veruschka, pela moti-
vação especial.

**“Estou vivendo de hora em hora embora com muito temor.
Um dia me safarei - aos poucos me safarei, começarei um safari.”**

Ana Cristina César

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres pela esplêndida orientação, sóbria e correta, e principalmente pela forma descontraída com a qual empolga o trabalho. E ainda aos meus pais, irmãos e avós pelo apoio e carinho nas horas decisivas.

Agradeço aos amigos Sérgio, Marcelo, Adriane, Rosângela, Tomás, Cris, Wagner, Marco Antônio, Baleeiro, Rodrigo e as goianas Sandra e Regina pelas idéias compartilhadas, discutidas e pela convivência e o incentivo do dia a dia. A todos os colegas e professores do DT/FEE/UNICAMP que dividiram os bons e maus momentos. E finalmente, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho trata de três abordagens para o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estado. A primeira baseia-se na solvabilidade de equações algébricas de Riccati, a segunda explora a convexidade das expressões matriciais e a terceira trata o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ como um problema de otimização linear sujeito a restrições matriciais na forma de LMIs (Linear Matrix Inequalities). Demonstra-se em relação as duas primeiras que, para sistemas dinâmicos lineares com parâmetros precisamente conhecidos, o conjunto de ganhos estabilizantes gerado pela primeira abordagem está contido no conjunto de ganhos obtido pela segunda. As duas últimas abordagens permitem incorporar incertezas no modelo e também a restrição de estrutura descentralizada para o controle de maneira bastante simples, diferindo de abordagens similares por não aumentar a dimensão do problema em análise. Tendo em vista o papel de fundamental importância que a norma $\mathcal{H}_\infty$ desempenha na análise de sistemas e na síntese de controladores, precede-se a discussão das abordagens com a apresentação de alguns métodos de cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ de matrizes de transferência. Algoritmos que implementam as abordagens tratadas são apresentados e, por último, exemplos numéricos que ilustram os resultados teóricos.

Abstract

This work deals with three approaches to the $\mathcal{H}_\infty$ control problem by state feedback. The first one is based on the solvability of algebraic Riccati equations, the second explores the convexity of the matrix expressions and the last approach treats the $\mathcal{H}_\infty$ control problem as an optimization problem subject to matrix constraints in form of LMIs (Linear Matrix Inequalities). Concerning the two first approaches, it is shown that, for linear dynamic systems with precisely known parameter, the set of stabilizing gains produced by the first approach is contained in the set of gains obtained by the second approach. The last two approaches allow to add constraints as uncertainty in the model and also decentralized structure for the control in a simple form, differing from similar approaches by not augmenting the dimension of the problem in analysis. Having in mind the important role that the $\mathcal{H}_\infty$ norm fulfills in analysis of systems and in the synthesis of controllers, this work initially expose some methods of computing the $\mathcal{H}_\infty$ norm of a transfer matrix. Algorithms that perform the approaches discussed are exhibited and, finally, numerical examples illustrate the theoretical results.

Conteúdo

1	Introdução Geral	1
2	Cálculo da Norma $\mathcal{H}_\infty$	5
2.1	Introdução	5
2.2	Matriz Hamiltoniana	8
2.3	Inequação Algébrica de Riccati	11
2.4	Métodos Numéricos	17
2.4.1	Busca Exaustiva	17
2.4.2	Bisseção	18
2.4.3	Dois Passos	19
2.4.4	Seção Áurea	21
2.4.5	Fibonacci	22
2.4.6	LMIs	26
2.5	Conclusão	32
3	Otimização $\mathcal{H}_\infty$ via Realimentação de Estado	33
3.1	Introdução	33

3.2	Preliminares	34
3.3	Abordagem Iterativa	36
3.3.1	Algoritmo	38
3.4	Abordagem Convexa	42
3.4.1	Sistemas Precisamente Conhecidos	42
3.4.2	Algoritmo	44
3.4.3	Sistemas Incertos	49
3.4.4	Controle Descentralizado	53
3.5	Abordagem via LMIs	55
3.5.1	Sistemas Precisamente Conhecidos	55
3.5.2	Sistemas Incertos	61
3.5.3	Controle Descentralizado	64
3.6	Conclusão	66
4	Exemplos Numéricos	68
4.1	Introdução	68
4.2	Exemplos Numéricos	69
4.3	Conclusão	85
5	Conclusão Geral	88
	Bibliografia	90
	Apêndice A - Noções Básicas sobre LMIs	96

Lista de Figuras

1.1	Problema padrão de otimização $\mathcal{H}_\infty$	2
2.1	Diagrama de Nyquist.	7
2.2	Diagrama de magnitude de Bode.	8
2.3	Valores singulares de um sistema dinâmico com $D_1 = 0$	10
2.4	Valores singulares de um sistema dinâmico com $D_1 \neq 0$	11
2.5	Ilustração do Algoritmo Seção Áurea.	22
2.6	Diagrama de magnitude de Bode para o exemplo 2.1.	24
2.7	Diagrama de Nyquist para o exemplo 2.1.	24
3.1	Ilustração do método de planos de corte.	48
4.1	μ^* e suas matrizes definidas positiva associadas, $0 < W_\epsilon \leq W(\mu_{max})$	70
4.2	Evolução de μ (planos de corte) a cada iteração em um sistema precisamente conhecido.	72
4.3	Evolução de ϱ (LMI-Lab, pontos interiores) a cada iteração em um sistema precisamente conhecido.	72
4.4	Diagrama de valores singulares comparativo para o exemplo 4.3 com matriz dinâmica incerta (três vértices).	77

4.5	Nuvem de raízes em malha fechada para o exemplo 4.2 (matriz dinâmica incerta).	78
4.6	Diagrama de valores singulares comparativo; malha aberta e malha fechada com o ganho centralizado (exemplo 4.4).	81
4.7	Diagrama de valores singulares comparativo; centralizado $\times$ descentralizado (exemplo 4.4).	82
4.8	Norma $\mathcal{H}_\infty$ em malha fechada para cada vértice em um exemplo de estrutura descentralizada para o controle com incertezas na matriz dinâmica. . .	84
4.9	Norma $\mathcal{H}_\infty$ em malha fechada para cada vértice e custo garantido γ^* (exemplo 4.5).	86
4.10	Diagrama de valores singulares para cada vértice; exemplo 4.5, com $A \in \mathcal{D}_A$ e $B_2 \in \mathcal{D}_B$	86

Lista de Tabelas

2.1	Cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ de um Sistema SISO com $D_1 = 0$	25
2.2	Cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ para $D_1 \neq 0$ (exemplo 2.2).	26
2.3	Cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ para $D_1 = 0$	31
4.1	Comparação entre as abordagens iterativa, convexa e via LMIs.	71
4.2	Evolução de γ variando ϵ na Abordagem Iterativa (exemplo 4.2).	73
4.3	Ocorrência de altos ganhos próximo ao valor ótimo da norma $\mathcal{H}_\infty$ na Abordagem Iterativa (exemplo 4.2).	74
4.4	Evolução da norma do ganho variando ϵ na Abordagem Convexa (exemplo 4.2).	74
4.5	Evolução de γ em função dos valores de ϵ na Abordagem Convexa (exemplo 4.2).	75
4.6	Pontos de operação de um caça modelo F4E (exemplo 4.3).	75
4.7	Uma comparação entre as abordagens convexa e via LMIs para um sistema incerto (exemplo 4.3).	76

Lista de Teoremas

Teorema 2.1	9
Teorema 2.2	9
Teorema 2.3	12
Teorema 2.4	13
Teorema 2.5	16
Teorema 2.6	27
Teorema 3.1	35
Teorema 3.2	37
Teorema 3.3	39
Teorema 3.4	40
Teorema 3.5	43
Teorema 3.6	44
Teorema 3.7	44
Teorema 3.8	45
Teorema 3.9	51
Teorema 3.10	52

Teorema 3.11	54
Teorema 3.12	54
Teorema 3.13	55
Teorema 3.14	57
Teorema 3.15	58
Teorema 3.16	62
Teorema 3.17	65
Teorema 3.18	65

Lista de Lemas

Lema 2.2	13
Lema 3.1	38

Notação

A notação empregada neste trabalho é a usual.

$\mathbb{N}$ - conjunto dos números naturais

$\mathbb{R}$ - conjunto dos números reais

$\mathbb{C}$ - conjunto dos números complexos, particionado em $\mathbb{C}^- \cup \mathbb{C}^0 \cup \mathbb{C}^+$

$\mathbb{C}^- = \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) < 0\}$

$\mathbb{C}^0 = \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) = 0\}$

$\mathbb{C}^+ = \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > 0\}$

“ $\| \cdot \|$ ” - norma euclideana no espaço $\mathbb{R}^n$

$\|X\| = \sigma_{\max}(X)$ - norma espectral nos espaços $\mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbb{C}^{m \times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$

$\sigma_{\max}(X)$ - valor singular máximo de X

$\text{tr}(X)$ - traço de X (soma dos elementos da diagonal principal de X)

$\det(X)$ - determinante da matriz X

$\text{rank}(X)$ - rank da matriz X

$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(XY^*) = \text{tr}(Y^*X)$ - produto interno nos espaços $\mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbb{C}^{m \times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$ que é o usual

Y' - transposta de $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$\text{Im}(X)$ - espaço vetorial real imagem da transformação linear representada por X em relação às bases canônicas

S_n - espaço de Banach das matrizes simétricas reais, definida pela métrica induzida pela norma

S_n^+ - conjunto das matrizes simétricas definidas positivas

S_n^o - conjunto das matrizes simétricas positivas semidefinidas

S_n^{+-} - conjunto das matrizes simétricas não positivas semidefinidas

$X \geq Y$ - equivale a $X - Y \geq 0$. para $X, Y \in S_n$, isto é, $X - Y$ é positiva semidefinida

$\lambda_{\max}(Y) = \max\{\langle x, Yx \rangle \in \mathbb{R} \mid \|x\| = 1, Y \in S_n\}$ - autovalor máximo de Y

$\lambda_{\min}(Y) = \min\{\langle x, Yx \rangle \in \mathbb{R} \mid \|x\| = 1, Y \in S_n\}$ - autovalor mínimo de Y

q.t.p. - quase toda parte (qualquer propriedade matemática que ocorre exceto em um conjunto de medida zero de um espaço mensurável é dito acontecer em quase toda parte)

$\mathcal{L}_2[0; \infty)$ - espaço de Lebesgue das funções de quadrado integrável

Θ_W - derivada parcial em relação a W

Capítulo 1

Introdução Geral

O objetivo deste trabalho é estudar o controle de sistemas dinâmicos lineares contínuos, modelados por variáveis de estado, frente a perturbações no sinal de entrada, isto é, deseja-se determinar um ganho de realimentação de estado de modo que o sistema dinâmico em malha fechada seja estável, com norma $\mathcal{H}_\infty$ (definida no próximo capítulo) menor ou igual a um certo limitante. Este é o denominado problema de controle $\mathcal{H}_\infty$. Para isso, o conceito de norma $\mathcal{H}_\infty$, que pode ser entendido como uma medida de pior caso, é analisado e discutido em um primeiro momento.

Durante a última década, tem-se assistido a uma proliferação de artigos e livros sobre o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ sub-ótimo e ótimo, desde que este foi introduzido pela primeira vez por Zames [Zam81], permitindo abrir novos caminhos na Teoria de Controle que, até então, concentrava-se em obter um ganho estabilizante associado à solução da equação algébrica de Riccati. Um exemplo é o problema linear quadrático que, apesar de suas características de robustez como margem de fase de 60° e margem de ganho infinita, não se mostrou uma ferramenta capaz de tratar imposições do tipo rejeição de distúrbios.

Porém, antes de tecer comentários a respeito do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ sub-ótimo e ótimo, cabe explicá-lo. Considere a figura 1.1 onde P é uma planta linear invariante no tempo, e u é o controle, w é o distúrbio, y a saída medida e z a saída controlada. Considere o estado $x = y$. O problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ sub-ótimo consiste então em encontrar uma lei de controle $u = K(s)y$, para um dado escalar $\gamma > 0$, tal que o sistema em malha fechada na figura 1.1 seja internamente estável e a norma $\mathcal{H}_\infty$ (2.1) da função de transferência de w para z seja menor que γ . Já no problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ ótimo

deseja-se encontrar uma lei de controle apropriada $u = K(s)y$, tal que o sistema em malha fechada seja internamente estável e a norma $\mathcal{H}_\infty$ seja minimizada.

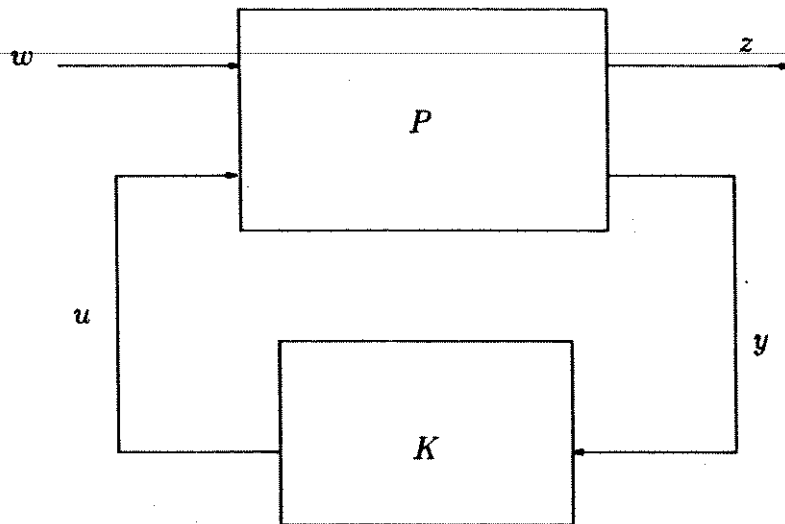


Figura 1.1: Problema padrão de otimização $\mathcal{H}_\infty$.

Diferentes técnicas para tratar este problema têm surgido na literatura, tais como: métodos no domínio da frequência ([Fra87], [FD87]), fatorização J -espectral [Kim89], métodos polinomiais [Kwa86] e técnicas no espaço de variáveis de estado, apresentadas, por exemplo, no artigo tutorial [DGKF89]. Neste trabalho, adotam-se técnicas no espaço de variáveis de estado.

O problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ sub-ótimo por realimentação de estados, encontrou uma primeira solução em [Pet87a], que mostrou ser suficiente solucionar uma única equação algébrica tipo Riccati (que no caso, contém um certo parâmetro de ajuste $\epsilon > 0$) afim de estabelecer um conjunto de ganhos de realimentação estabilizantes. Formulações semelhantes, considerando a solvabilidade de uma equação de Riccati parametrizada em ϵ , no sentido de se caracterizar sub-otimalidade do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estado, aparecem em [KPR88], [ZK88], [Sch92].

Em [DGKF89], Doyle e colegas tratam um problema sub-ótimo $\mathcal{H}_\infty$ padrão, cuja solubilidade é caracterizada em termos de duas equações algébricas de Riccati, e ainda as soluções destas duas equações devem satisfazer uma certa condição de acoplamento, chamada de raio espectral. Além disso, um controlador, chamado de controlador central, é estabelecido e desempenha um papel crucial na caracterização de todas as soluções sub-ótimas para um dado γ . Uma série de trabalhos, consequência desta abordagem no espaço de variáveis de estados, com outros tipos de parametrizações, pode ser vista por

exemplo em [Gah92], [PGS94], [SCL94], [Gah94], [IS93], [IS94]. Uma gama de referências bibliográficas é encontrada em [DTM93].

O problema ótimo, entretanto, mostra-se mais difícil de ser tratado do que o sub-ótimo, tendo em vista que a atenuação de distúrbios deve ser reduzida ao seu valor ínfimo.

Para sistemas precisamente conhecidos (isto é, sistemas sem incerteza), Scherer [Sch89] apresenta um procedimento iterativo (chamado neste trabalho de abordagem iterativa) para solucionar o problema ótimo. A cada passo, através de um limitante superior, uma melhor aproximação do valor ótimo da norma $\mathcal{H}_\infty$ é obtida, fornecendo o correspondente controle de realimentação sub-ótimo e, caracterizando ainda, quando são necessários altos ganhos de realimentação para atingir o ótimo. Em [Sch90], [Sch94], Scherer resolve completamente o problema.

Um outro tratamento, via análise convexa, que não trata apenas o caso de sistemas precisamente conhecidos, mas também sistemas incertos, e ainda soluciona tanto o problema sub-ótimo como o problema ótimo, é apresentada em [PGS93], [PGS94], [PSG94]. Nessa abordagem, um conjunto convexo é definido em um espaço de parâmetros apropriado, fazendo uso de uma formulação aumentada que permite conjuntamente determinar um ganho de realimentação de estado estabilizante e o valor ótimo de atenuação de distúrbios. Outras abordagens para sistemas incertos podem ser encontradas na literatura, como por exemplo [KPZ90], [XS90], [Pet87b].

Neste trabalho, um resultado relevante [POP94] é relacionar a abordagem iterativa apresentada em [Sch89], [Sch90], com uma nova abordagem que denominamos, por conveniência, de convexa (que, em particular, se assemelha àquela apresentada em [PGS94], [PGS93]). De fato, para sistemas precisamente conhecidos, o conjunto de ganhos estabilizantes por realimentação de estado, gerado pela abordagem iterativa, está contido em um outro caracterizado pela abordagem convexa. Além disso, as diferenças entre os resultados para a abordagem convexa e os apresentados na literatura prévia são devidas ao tratamento do problema $\mathcal{H}_\infty$, neste trabalho, sem uma representação aumentada do sistema.

O problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ é apresentado também como um problema de otimização sujeito a restrições matriciais na forma de LMIs (Linear Matrix Inequalities), denominado, neste trabalho, abordagem via LMIs. Além disso são considerados sistemas com incertezas paramétricas pertencentes a domínios poliedrais convexos e/ou estrutura descentralizada para o controle, nas abordagens convexa e via LMIs.

Embora a abordagem via LMIs trate unicamente problemas convexos, neste trabalho adota-se uma nomenclatura que a distingue da abordagem que explora diretamente a convexidade das expressões matriciais relacionadas com a norma $\mathcal{H}_\infty$, chamada abordagem convexa.

O trabalho é subdividido como segue. No próximo capítulo, a norma $\mathcal{H}_\infty$ é definida e alguns métodos de cálculo desta norma para uma matriz de transferência são apresentados e discutidos com exemplos numéricos. Uma motivação para este capítulo segue da necessidade do cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma matriz de transferência na síntese de um controlador na abordagem iterativa e, ainda, na análise dos resultados obtidos nos exemplos numéricos do capítulo 4.

No capítulo 3 é apresentado o problema de otimização $\mathcal{H}_\infty$ a ser tratado, bem como as abordagens iterativa, convexa e via LMIs. Além disso, a relação entre os conjuntos de ganhos estabilizantes das abordagens iterativa e convexa é estabelecida para sistemas com os parâmetros do modelo precisamente conhecidos. O tratamento do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ é também facilmente estendido para sistemas incertos e/ou controle descentralizado nas abordagens convexa e via LMIs.

Exemplos numéricos que validam a teoria apresentada no capítulo 3 são exibidos e discutidos no capítulo 4. Já o último capítulo apresenta as conclusões cabíveis e perspectivas. O apêndice A é dedicado a uma breve explanação de conceitos envolvendo LMIs.

Capítulo 2

Cálculo da Norma $\mathcal{H}_\infty$

2.1 Introdução

No artigo germinal em [Zam81], Zames formula o problema de redução de sensibilidade por realimentação como um problema de otimização utilizando uma norma do operador (entenda-se por operador como uma transformação linear limitada), em particular, uma norma $\mathcal{H}_\infty$.

A norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma função de transferência tem surgido recentemente como um importante parâmetro na literatura de análise robusta e controle, como por exemplo em [DGKF89], [FD87], [Fra87]. O seu cálculo também pode ser necessário na análise de sistemas ou na síntese de um controlador, como em [Sch89], [Sch90], [Sch92], [Sch94].

Um ponto nevrálgico ao se tratar o problema de otimização $\mathcal{H}_\infty$, consiste então em interpretar a norma de funções no espaço $\mathcal{H}_\infty$ e o seu conseqüente cálculo. Entende-se por $\mathcal{H}_p$, $0 < p \leq \infty$ ($\mathcal{H}$ em deferência a Hardy), neste trabalho, a classe de funções analíticas no semiplano direito aberto as quais sejam limitadas em norma $\mathcal{L}_p$ (veja [Hof88], [Dur70]). Portanto, o espaço $\mathcal{H}_\infty$ é um componente dos espaços de Hardy $\mathcal{H}_p$.

$H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times n}$ é um elemento do espaço de Lebesgue $\mathcal{L}_\infty$ se e somente se H é limitada, isto é, $\|H(j\omega)\| = \sigma_{\max}(H(j\omega)) \leq k < \infty, \forall \omega \in \mathbb{R}$, exceto em um conjunto de medida zero. Define-se em $\mathcal{L}_\infty$ a norma

$$\|H\|_{\mathcal{L}} = \inf \{k \mid \|H(j\omega)\| \leq k \text{ q.t.p.}\}$$

que é o supremo essencial de H , denotado por

$$\|H\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \text{ess} \|H(j\omega)\|.$$

Com esta norma, $\mathcal{L}_{\infty}$ é um espaço de Banach. $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ é um elemento do espaço de Hardy $\mathcal{H}_{\infty}$ se e somente se F é analítica em $\mathbb{C}^+$ e

$$\|F\|_{\infty} \triangleq \sup_{s \in \mathbb{C}^+} \{\|F(s)\|\} = \sup_{s \in \mathbb{C}^+} \{\sigma_{\max}(F(s))\} < \infty,$$

$\|F\|_{\infty}$ é chamada norma $\mathcal{H}$ infinito (confundindo-se com a denominação do espaço, “norma $\mathcal{H}_{\infty}$ ”).

Cada função em $\mathcal{H}_{\infty}$ está associada a uma única função em $\mathcal{L}_{\infty}$, no sentido de que $H(j\omega) = \lim_{\xi \rightarrow 0} F(\xi + j\omega)$, a função $F \mapsto H$ de $\mathcal{H}_{\infty}$ em $\mathcal{L}_{\infty}$ é linear, injetiva e preserva a norma (veja [SF70]), portanto, $\mathcal{H}_{\infty}$ pode ser encarado como um subespaço fechado do espaço de $\mathcal{L}_{\infty}$ [Dou72] e ainda:

$$\|H\|_{\infty} = \sup_{s \in \mathbb{C}^+} \{\sigma_{\max}(H(s))\} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \text{ess} \{\sigma_{\max}(H(j\omega))\} = \|H\|_{\mathcal{L}} \quad (2.1)$$

onde $\sigma_{\max}(\cdot)$ é o valor singular máximo de uma matriz (veja [Che84]).

Seja o sistema linear invariante no tempo dado por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_2u(t) + B_1w(t) \\ z(t) = Cx(t) + D_2u(t) + D_1w(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{q \times m}$ e $D_1 \in \mathbb{R}^{q \times r}$. E considere o seu modelo em malha fechada na forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_f x(t) + B_1 w(t) \\ z(t) = C_f x(t) + D_1 w(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

de tal forma que $A_f = A + B_2K$, $C_f = C + D_2K$, $u = Kx$ e K um ganho estabilizante dado, de modo que A_f seja assintoticamente estável (ou seja, os autovalores de A_f estão em $\mathbb{C}^-$). A correspondente matriz de transferência em malha fechada de w para z de (2.3) é descrita por

$$H(s) = C_f(sI - A_f)^{-1}B_1 + D_1. \quad (2.4)$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ desta matriz de transferência (2.4) é definida exatamente como em (2.1). Observe que a norma $\mathcal{H}_\infty$ da matriz de transferência de um sistema é igual a norma do operador do sistema, vista como um operador mapeando entradas do $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ para saídas em $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ (veja [ST93]).

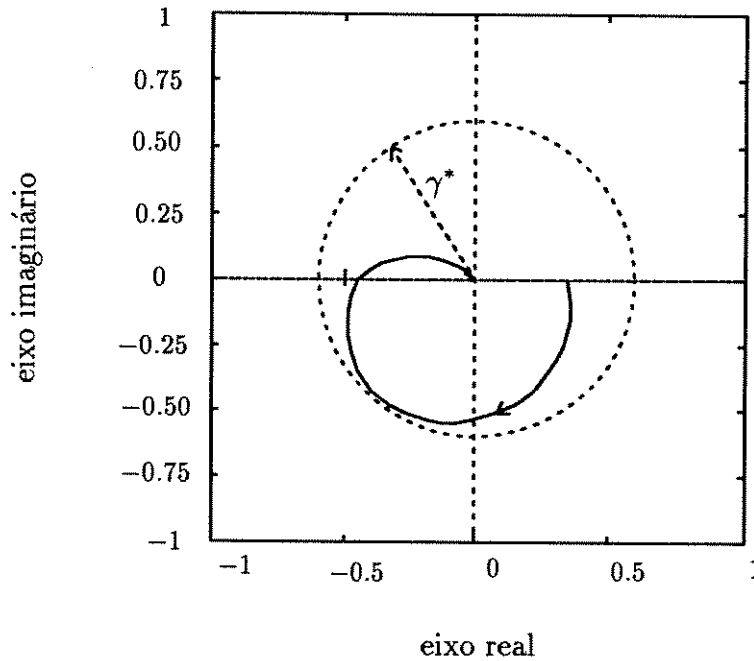


Figura 2.1: Diagrama de Nyquist.

Uma interpretação clássica da norma $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas monovariáveis é estabelecida em termos dos diagramas de Nyquist e de Bode. Nesse caso, (2.4) é uma função racional em s , e a norma $\mathcal{H}_\infty$ é equivalente à distância no plano complexo da origem ao ponto mais afastado no diagrama de Nyquist (figura 2.1), ou ainda, ao valor de pico no diagrama de magnitude de Bode (figura 2.2).

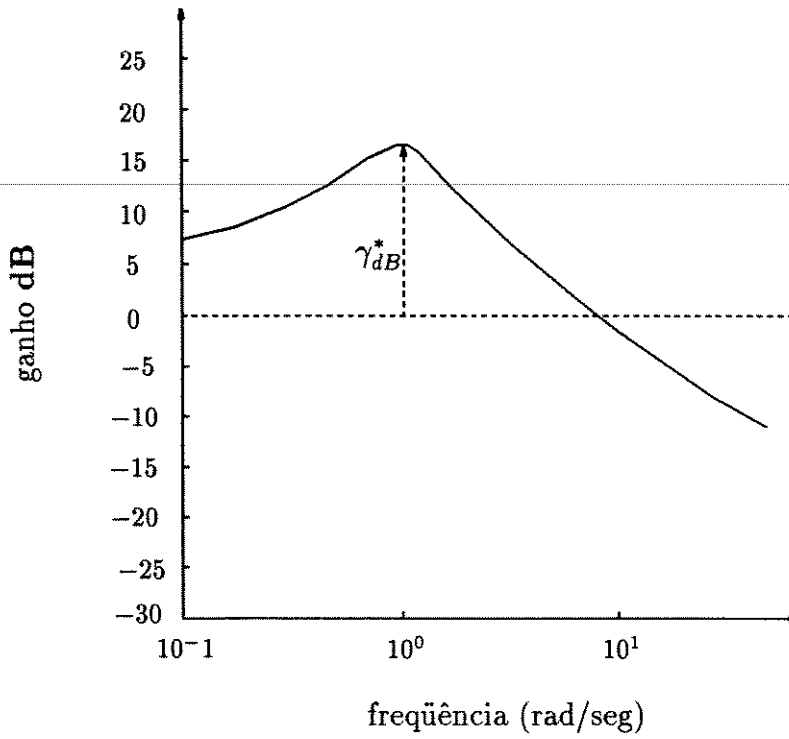


Figura 2.2: Diagrama de magnitude de Bode.

Na literatura, vários métodos de cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma função de transferência têm sido apresentados ([Rob89], [HKL89], [BBK89], [DGKF89], [CLYB90], [BS90], [BB90], [Kav94], [Sha94]). Particularmente, neste capítulo, são abordados os métodos expostos em ([BBK89], [BS90]), bem como métodos baseados em desigualdades matriciais e procedimentos de otimização.

Na próxima seção a relação entre os valores singulares de uma matriz de transferência e os autovalores imaginários de uma matriz Hamiltoniana é estabelecida. Na seção 2.3, discute-se a associação entre norma $\mathcal{H}_\infty$ e uma inequação de Riccati. Os métodos numéricos são apresentados na seção 2.4. E por fim, as conclusões cabíveis na última seção.

2.2 Matriz Hamiltoniana

Considere o sistema (2.3) e sua matriz de transferência (2.4).

Para $\gamma > 0$, e γ não sendo um valor singular de D_1 , define-se a matriz Hamiltoniana

de ordem $(2n \times 2n)$ como:

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} A_f - B_1 R^{-1} D_1' C_f & -\gamma B_1 R^{-1} B_1' \\ \gamma C_f' S^{-1} C_f & -A_f' + C_f' D_1 R^{-1} B_1' \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

onde $R = (D_1' D_1 - \gamma^2 I)$ e $S = (D_1 D_1' - \gamma^2 I)$.

O teorema a seguir relaciona os autovalores imaginários de H_γ e os valores singulares de (2.4).

Teorema 2.1 - *Seja $\gamma > 0$ e diferente dos valores singulares de D_1 . Assuma ainda que A_f não tenha autovalores imaginários. Então para todo $\omega_p \in \mathbb{R}$, γ é um valor singular de $H(j\omega_p)$ se e somente se $j\omega_p$ é um autovalor de H_γ .*

Prova: A prova pode ser vista em [BS90] ou então em [BBK89]. E ainda para $D_1 = 0$ e $\rho = \gamma^{-2}$, em [HKL89]. $\square$

Note que os autovalores imaginários de H_γ são exatamente as frequências para as quais algum valor singular de $H(j\omega_p)$ iguala-se a γ . Este teorema permite estabelecer a associação entre os autovalores imaginários de H_γ e a norma $\mathcal{H}_\infty$, já que a definição desta última está diretamente relacionada com o supremo do valor singular máximo da matriz de transferência, $\forall \omega \in \mathbb{R}^+$. O seguinte teorema pode então ser enunciado.

Teorema 2.2 - *Seja A_f estável e $\gamma > \sigma_{\max}(D_1) > 0$. Então $\|H\|_\infty \geq \gamma$ se e somente se H_γ tem autovalores imaginários.*

Prova: Segue do Teorema 2.1 (veja [BBK89]). $\square$

Alguns métodos de cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma matriz de transferência, seguem naturalmente a partir do Teorema 2.2, simplesmente assumindo um intervalo de existência da norma $\mathcal{H}_\infty$ e aplicando um método de bisseção como em [BBK89] ou ainda métodos tipo Fibonacci ou Seção Áurea.

Para o caso onde não há transmissão direta entre a entrada $w(t)$ e a saída $z(t)$, $D_1 = 0$; neste caso a matriz Hamiltoniana é dada por

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} A_f & \gamma^{-1} B_1 B_1' \\ -\gamma^{-1} C_f' C_f & -A_f' \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

e obviamente o Teorema 2.2 continua válido.

Assim, considerando uma matriz de transferência com $D_1 = 0$, e seus valores singulares ($\sigma_i(H(j\omega))$) como uma função das frequências $j\omega$, $\forall \omega \in \mathbb{R}^+$, assume-se por convenção que $\sigma_i(H(j\omega)) \geq \sigma_{i+1}(H(j\omega))$, $\forall i \in [1, \dots, r-1]$, e que $\max\{\sigma_1(H(j\omega))\} = \gamma^*$. Pela figura 2.3, se $\sigma_1(H(j\omega)) = \gamma_n$ intercepta os valores singulares nas frequências ω_1 e ω_2 , segue pelo Teorema 2.1 que H_{γ_n} tem autovalores imaginários $\pm j\omega_1$ e $\pm j\omega_2$. Nota-se então, que a norma $\mathcal{H}_\infty$ desta matriz de transferência é o valor de pico γ^* .

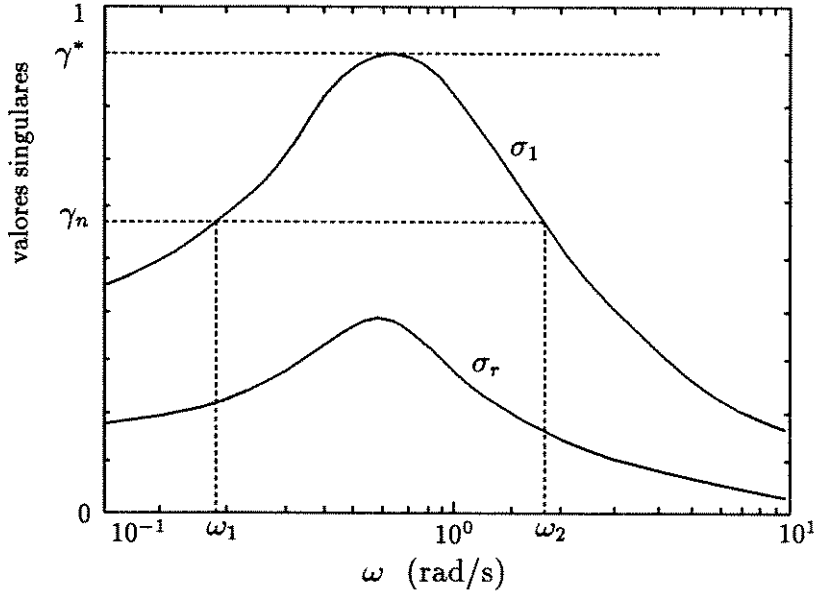


Figura 2.3: Valores singulares de um sistema dinâmico com $D_1 = 0$.

Portanto, para um $\gamma > \gamma^*$, H_γ não terá autovalores imaginários. Para $\omega \rightarrow \infty$, $\sigma_i(H(j\omega)) \rightarrow 0$, $\forall i \in [1, \dots, r]$, então para qualquer $0 < \gamma \leq \gamma^*$, H_γ terá autovalores imaginários.

Agora, considerando $D_1 \neq 0$, para $\omega \rightarrow \infty$ os valores singulares da matriz de transferência igualam-se aos valores singulares de D_1 , e particularmente, $\sigma_1(H(j\omega)) \rightarrow \sigma_{\max}(D_1)$. Portanto para $\gamma_n \geq \gamma \geq \sigma_{\max}(D_1)$, o diagrama de valores singulares poderá não ser in-

terceptado (figura 2.4), implicando pelo Teorema 2.1 que H_{γ_n} não terá autovalores imaginários. Mas, seguramente, H_γ terá autovalores imaginários no intervalo $\sigma_{\max}(D_1) < \gamma \leq \gamma^*$.

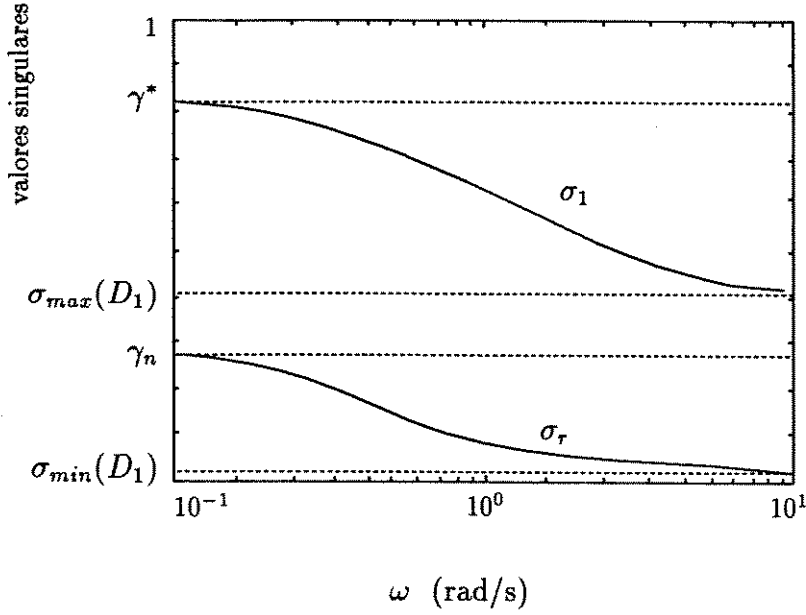


Figura 2.4: Valores singulares de um sistema dinâmico com $D_1 \neq 0$.

A próxima seção analisa a relação da norma $\mathcal{H}_\infty$ com uma inequação de Riccati.

2.3 Inequação Algébrica de Riccati

Considere o sistema (2.3) com $D_1 = 0$, de tal forma que sua matriz de transferência é dada por

$$H(s) = C_f(sI - A_f)^{-1}B_1. \quad (2.7)$$

Para esta matriz de transferência, com $\gamma > 0$, define-se a matriz Hamiltoniana como em (2.6), transcrita novamente por conveniência¹

¹Optou-se por colocar γ^{-2} na segunda linha da matriz Hamiltoniana, afim de se obter a inequação de Riccati desejada.

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} A_f & B_1 B_1' \\ -\gamma^{-2} C_f' C_f & -A_f' \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

O teorema a seguir estabelece uma relação entre a matriz Hamiltoniana, o limitante γ e uma equação algébrica de Riccati. Considere-se que um ganho estabilizante K foi calculado, de tal forma que A_f seja assintoticamente estável.

Teorema 2.3 - *As seguintes afirmações são equivalentes para $\gamma > 0$ e A_f estável.*

- i) $\|H\|_\infty \leq \gamma$.
- ii) H_γ não tem autovalores no eixo imaginário.
- iii) Os subespaços $\mathcal{X}_-(H_\gamma) = \text{Im} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ (formado pelo subespaço invariante correspondente aos n autovalores com parte real negativa de H_γ) e $\text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ são complementares (que equivale a X_1 ser não singular).
- iv) $X = X_2 X_1^{-1}$ é unicamente determinada por H_γ com $X = X' > 0$ se o par (A_f, C_f) for observável e X satisfaz a equação algébrica de Riccati

$$A_f' X + X A_f + X B_1 B_1' X + \gamma^{-2} C_f' C_f = 0.$$

Prova: Veja [DGKF89]. □

A partir deste último teorema, pode-se então construir um método de cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$, verificando os autovalores de H_γ , que seria estritamente equivalente ao método associado ao Teorema 2.2.

O próximo teorema estabelece a associação entre a existência de um limitante γ da norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência (2.7) e uma inequação algébrica de Riccati (note a semelhança com o teorema anterior). Novamente ressalta-se que o ganho estabilizante K é dado. Antes, porém, um resultado preliminar se faz necessário.

Lema 2.1 - Suponha que a matriz A_f seja estável. A desigualdade

$$G'(-j\omega I - A_f')^{-1}Q(j\omega I - A_f)^{-1}G \leq \gamma^2 I \quad (2.9)$$

é verdadeira $\forall \omega \in \mathbb{R}$, se e somente se existir uma solução $X = X'$ da equação algébrica de Riccati

$$A_f'X + XA_f - XGG'X - \gamma^{-2}Q = 0, \quad (2.10)$$

onde G e $Q = Q'$ são matrizes constantes de dimensão apropriada.

Prova: Veja [Sch89] ou [Wil71]. □

Este lema poderia também ser formulado a partir do teorema principal em [Fai87], e a desigualdade em (2.10) seguiria imediatamente.

Teorema 2.4 - Suponha que (A_f, C_f) seja observável e $\gamma > 0$ dado. Então A_f é assintoticamente estável e $\|H\|_\infty \leq \gamma$ se e somente se a inequação de Riccati

$$A_f'P + PA_f + PB_1B_1'P + \gamma^{-2}C_f'C_f \leq 0 \quad (2.11)$$

admite uma solução $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P = P' > 0$.

Prova: Suponha que $\|H\|_\infty \leq \gamma$, então pelo Lema 2.1 tem-se que a desigualdade

$$H(-j\omega)'H(j\omega) \leq \gamma^2 I, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

implica em

$$B_1'(-j\omega I - A_f')^{-1}C_f'C_f(j\omega I - A_f)^{-1}B_1 \leq \gamma^2 I$$

deduz-se, então, que existe $X = X'$ solução da equação

$$A_f'X + XA_f = XB_1B_1'X + \gamma^{-2}C_f'C_f \quad (2.12)$$

e, pela estabilidade de A_f , $X \leq 0$. Fazendo então $P = -X$, tem-se $P \geq 0$ solução da inequação

$$A_f'P + PA_f + PB_1B_1'P + \gamma^{-2}C_f'C_f \leq 0. \quad (2.13)$$

Para mostrar que $P > 0$, a partir de (2.13) tem-se

$$A_f'P + PA_f + \gamma^{-2}C_f'C_f \leq -PB_1B_1'P \leq 0. \quad (2.14)$$

Como P é uma solução de (2.14), tem-se que $P \geq \hat{P}$, solução da equação

$$A_f'\hat{P} + \hat{P}A_f + \gamma^{-2}C_f'C_f = 0. \quad (2.15)$$

Multiplicando a equação (2.15) à esquerda por x' e à direita por x , onde $x \in \mathbb{R}^n$, obtém-se:

$$x'(A_f'\hat{P} + \hat{P}A_f + \gamma^{-2}C_f'C_f)x = 0.$$

Por absurdo, suponha que existe $x \neq 0$ tal que $\hat{P}x = 0$, implicando que $C_fx = 0$ e, portanto, $\hat{P}A_fx = 0$. Sabendo que a solução de (2.15) é dada por

$$\hat{P} = \int_0^\infty \gamma^{-2} e^{A_f't} C_f' C_f e^{A_f t} dt$$

segue que

$$x'\hat{P}x = \int_0^\infty \gamma^{-2} \|C_f e^{A_f t} x\|^2 dt.$$

Como, por hipótese, $\gamma > 0$ e (A_f, C_f) é observável, isto é, as linhas de $Ce^{A_f t}$ são linearmente independentes no intervalo de $[0; \infty)$, $C_f e^{A_f t} x = 0$ se e somente se $x = 0$. Concluindo, não existe $x \neq 0$ tal que $\hat{P}x = 0$, implicando que $P \geq \hat{P} > 0$.

Agora, suponha que $P > 0$ é solução de (2.11). Se x é um autovetor de A_f associado ao autovalor λ , multiplicando (2.11) a esquerda por x' e a direita por x obtém-se

$$x'A_f'Px + x'PA_fx + x'PB_1B_1'Px + \gamma^{-2}x'C_f'C_fx \leq 0$$

e lembrando que $A_fx = \lambda x$,

$$2\Re\{\lambda\}x'Px + x'PB_1B_1'Px + \gamma^{-2}x'C_f'C_fx \leq 0$$

o que implica que $\Re\{\lambda\} \leq 0$. Agora se $\Re\{\lambda\} = 0$, então $\{\lambda\}x'Px = 0$, obtendo assim que $x'PB_1B_1'Px + \gamma^{-2}x'C_f'C_fx \leq 0$. Desta forma, x está no espaço nulo à direita de C_f , como o par (A_f, C_f) é observável implica que λ associado a x é estável, logo $\Re\{\lambda\} < 0$, e A_f é assintoticamente estável.

Agora, para $\forall \omega \in \mathbb{R}^+$, some e subtraia o fator $j\omega P$ em (2.11), de tal forma que

$$-(-j\omega I - A_f')P - P(j\omega I - A_f) + PB_1B_1'P + \gamma^{-2}C_f'C_f \leq 0. \quad (2.16)$$

Como A_f é assintoticamente estável, então $(-j\omega I - A_f)$ é inversível. Assim multiplicando (2.16) à esquerda por $((j\omega I - A_f)^{-1}B_1)'$ e à direita por $(j\omega I - A_f)^{-1}B_1$, e lembrando ainda que $H(j\omega) = C_f(j\omega I - A_f)^{-1}B_1$, obtém-se:

$$\begin{aligned} & -B_1'P(j\omega I - A_f)^{-1}B_1 - B_1'(-j\omega I - A_f')^{-1}PB_1 \\ & + B_1'(-j\omega I - A_f')^{-1}PB_1B_1'P(j\omega I - A_f)^{-1}B_1 + \gamma^{-2}H(-j\omega)'H(j\omega) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Definindo agora:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(j\omega) & \triangleq B_1'P(j\omega I - A_f)^{-1}B_1 \\ \mathcal{J}(-j\omega)' & \triangleq B_1'(-j\omega I - A_f')^{-1}PB_1 \end{aligned} \quad (2.18)$$

segue que,

$$- \mathcal{J}(j\omega) - \mathcal{J}(-j\omega)' + \mathcal{J}(-j\omega)' \mathcal{J}(j\omega) + \gamma^{-2} H(-j\omega)' H(j\omega) \leq 0. \quad (2.19)$$

Assim, tomando

$$(I - \mathcal{J}(-j\omega)') (I - \mathcal{J}(j\omega)) = I - \mathcal{J}(j\omega) - \mathcal{J}(-j\omega)' + \mathcal{J}(-j\omega)' \mathcal{J}(j\omega) \quad (2.20)$$

e substituindo (2.20) em (2.19) tem-se

$$\gamma^{-2} H(-j\omega)' H(j\omega) \leq I - (I - \mathcal{J}(-j\omega)') (I - \mathcal{J}(j\omega)) \quad (2.21)$$

como $(I - \mathcal{J}(-j\omega)')' (I - \mathcal{J}(j\omega)) \geq 0$, então

$$H(-j\omega)' H(j\omega) \leq \gamma^2 I$$

e finalmente

$$\|H\|_{\infty} \leq \gamma . \quad \square$$

Teorema 2.5 - Considere que (A_f, C_f) seja observável e $\gamma > 0$ dado. Então A_f é assintoticamente estável e $\|H\|_{\infty} \leq \gamma$ se e somente se a inequação de Riccati

$$A_f W + W A_f' + \gamma^{-2} W C_f' C_f W + B_1 B_1' \leq 0 \quad (2.22)$$

admite uma solução $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W = W' > 0$.

Prova: Imediata a partir do Teorema 2.4, bastando tomar $W = P^{-1} > 0$. $\square$

Este último teorema motivará a construção de um método de cálculo da norma $\mathcal{H}_{\infty}$ da matriz de transferência (2.7), baseado em um tratamento via LMIs (Linear Matrix Inequalities)².

²Veja o Apêndice A para um breve discussão sobre LMIs.

2.4 Métodos Numéricos

Quando da ausência de métodos apropriados para o cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$, este, a princípio, tem sido feito através da busca pelo supremo do valor singular máximo da matriz de transferência sobre $\forall \omega \in \mathbb{R}$, isto é, usando a própria definição da norma $\mathcal{H}_\infty$, transcrita novamente como em (2.1):

$$\|H\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(H(j\omega)) \quad (2.23)$$

Esta busca, chamada neste trabalho de Busca Exaustiva, apresenta, no entanto, vários inconvenientes, como determinar o espaço de frequências a ser avaliado e o fato de se calcular uma decomposição de valores singulares a cada frequência.

Desta forma, métodos numéricos que tendem a contornar estes tipos de problemas são discutidos a seguir. O primeiro a ser apresentado é a própria Busca Exaustiva, seguido dos métodos de Bisseção, Dois Passos, Fibonacci, Seção Áurea e via LMIs. Este último resolvido por um algoritmo de planos de corte e também através de um método de projeção e pontos interiores [NG94] (pacote computacional LMI-Lab [GN93a], [GN93b]). Em todos os algoritmos assume-se que A_f é estável, bem como considera-se um $\epsilon > 0$ suficientemente “pequeno”.

2.4.1 Busca Exaustiva

Evidentemente, não se trata de um método, mas sim da própria definição da norma $\mathcal{H}_\infty$.

Algoritmo 2.1

BUSCA EXAUSTIVA

passo 1: *Calcule os limitantes no espaço de frequências, tal que:*

$$\omega_{\min} = \min_i |\lambda_i(A_f)| \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

$$\omega_{\max} = \max_i |\lambda_i(A_f)| \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

passo 2: *Encontre*

$$\|H\|_{\infty} = \max_{\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]} \{\sigma_{\max}(H(j\omega))\}$$

As frequências $\omega_{\min}$ e $\omega_{\max}$ são aproximadas para a década mais próxima no diagrama de valores singulares.

Através deste processo de cálculo, no entanto, como apresentado em [BBK89], não há uma forma eficaz de certificar-se o quanto $\max_k \{\sigma_{\max}(H(j\omega_k))\}$ aproxima-se da norma $\mathcal{H}_{\infty}$.

2.4.2 Bisseção

A partir do Teorema 2.2, Boyd e colegas [BBK89] propuseram um algoritmo de Bisseção no qual os limitantes inferior e superior são dados, respectivamente, por

$$\gamma_i = \max\{\sigma_{\max}(D_1), \sigma_{H_1}\} \quad , \quad \gamma_s = \sigma_{\max}(D_1) + 2 \sum_i \sigma_{H_i} \quad (2.24)$$

onde σ_{H_i} são os valores singulares de Hankel do sistema (2.3) como definido a seguir [Glo84] e σ_{H_1} denota o valor singular máximo de Hankel.

Definição 2.1 - *Seja A_f estável, então os valores singulares de Hankel da matriz de transferência (2.7) são definidos como*

$$\sigma_{H_i} \triangleq \{\lambda_i(W_c W_o)\}^{1/2} \quad (2.25)$$

onde $\sigma_{H_i} \geq \sigma_{H_{i+1}}$, $\forall i \in [1, \dots, n-1]$, e W_c e W_o são, respectivamente, soluções das equações de Lyapunov dos gramianos de controlabilidade e observabilidade, determinados por:

$$\begin{aligned} A_f W_c + W_c A_f' + B_1 B_1' &= 0 \\ A_f' W_o + W_o A_f + C_f' C_f &= 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

No entanto, afim de evitar o cálculo dos autovalores de $W_c W_o$ em (2.25), Boyd e colegas sugeriram uma alternativa elegante, de tal forma que os limitantes sejam dados por

$$\gamma_i = \max\{\sigma_{\max}(D_1), \sqrt{\text{tr}(W_c W_o)/n}\} \quad , \quad \gamma_s = \sigma_{\max}(D_1) + 2\sqrt{n \text{tr}(W_c W_o)} \quad (2.27)$$

onde n é a dimensão de A_f .

Algoritmo 2.2

BISSEÇÃO

passo 1: Calcule os limitantes γ_i e γ_s .

passo 2: Se $\gamma_s - \gamma_i \leq 2\epsilon\gamma_i$, pare e $\|H\|_\infty = \frac{1}{2}(\gamma_s + \gamma_i)$. Caso contrário vá para o passo 3.

passo 3: Calcule $\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_s + \gamma_i)$ e construa a matriz Hamiltoniana H_γ como em (2.5), vá para o passo seguinte.

passo 4: Se H_γ não tem autovalores imaginários, então $\gamma_s = \gamma$, caso contrário $\gamma_i = \gamma$. Volte ao passo 2.

Naturalmente, como ressaltado em [BBK89], poderia ser usado, no algoritmo anterior, o fato que H_γ tem autovalores imaginários se e somente se H_γ^2 tem autovalores reais não positivos. Note que, ao final do processo, $\frac{1}{2}(\gamma_s + \gamma_i)$ aproxima-se da norma $\mathcal{H}_\infty$ da matriz de transferência do sistema com uma precisão relativa de ϵ , isto é,

$$\left| \frac{1}{2}(\gamma_s + \gamma_i) - \|H\|_\infty \right| \leq \epsilon \|H\|_\infty .$$

e o algoritmo converge dentro do intervalo $\gamma_i \leq \|H\|_\infty \leq \gamma_s$.

2.4.3 Dois Passos

Este método é baseado em [BS90], que consiste em aproximar o valor da norma $\mathcal{H}_\infty$ a partir de um limitante inferior tal que, a cada passo $\gamma_i \rightarrow \|H\|_\infty$. Um possível limitante inferior é dado como na subseção 2.4.2 anterior,

$$\gamma_i = \max\{\sigma_{\max}(D_1), \sigma_{H_1}\}$$

Assim, a partir do Teorema 2.1 pode-se calcular as freqüências correspondentes a um valor singular γ . O primeiro passo consiste em calcular as freqüências ω_1 até ω_p correspondentes ao limitante inferior $\gamma_i(k)$, de modo que $\pm j\omega_1$ até $\pm j\omega_p$ sejam autovalores da matriz Hamiltoniana $H_{\gamma_i}(k)$. E o segundo passo busca as freqüências m_1 até m_{p-1} tais que, $m_k = \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_{k+1})$, $\forall k \in [1, \dots, p-1]$. O novo limitante inferior é dado então por:

$$\gamma_i(k+1) = \max_k \{\sigma_{\max}(H(jm_k))\}$$

Algoritmo 2.3

DOIS PASSOS

passo 1: Calcule o limitante inferior γ_i .

passo 2: Faça $\gamma = (1 + 2\epsilon)\gamma_i$. Vá para o próximo passo.

passo 3: Determine os autovalores da matriz Hamiltoniana H_γ dada em (2.5). Se H_γ não tem autovalores imaginários, faça $\gamma_l = \gamma$ e vá para o passo 5. Caso contrário vá para o próximo passo.

passo 4: Determine $m_k = \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_{k+1})$, $k \in [1, \dots, p-1]$, onde $\pm j\omega_1$ até $\pm j\omega_p$ são os autovalores imaginários de H_γ . Calcule o novo limitante dado por $\gamma_i = \max_k \{\sigma_{\max}(H(jm_k))\}$. Volte ao passo 2.

passo 5: Pare. Faça $\|H\|_\infty = \frac{1}{2}(\gamma_i + \gamma_l)$.

Ao final do algoritmo, γ_l é um limitante superior para $\|H\|_\infty$ e $\gamma_i \leq \|H\|_\infty < (1+2\epsilon)\gamma_i$. Tomando, $\frac{1}{2}(\gamma_i + \gamma_l) = \frac{1}{2}(2 + 2\epsilon)\gamma_i = (1 + \epsilon)\gamma_i = \|H\|_\infty$, o erro relativo máximo é então ϵ . Como o próximo limitante inferior a ser calculado pelo algoritmo é sempre maior que o limitante inferior anterior, o algoritmo converge.

2.4.4 Seção Áurea

De forma análoga à subseção 2.4.2, utilizando o Teorema 2.2, um algoritmo tipo Seção Áurea baseado em [BS79] pode ser proposto. Considere então, os limitante inferior (γ_i) e superior (γ_s) dados como em (2.27). O algoritmo é descrito a seguir.

Algoritmo 2.4

SEÇÃO ÁUREA

passo 1: *Determine os limitantes γ_i e γ_s como em (2.27). Faça $k = 1$.*

passo 2: *Faça $\eta_k = \gamma_i + (1 - \alpha)(\gamma_s - \gamma_i)$ e $\tau_k = \gamma_i + \alpha(\gamma_s - \gamma_i)$, com $\alpha = 0.618$.*

passo 3: *Se $\gamma_s - \gamma_i \leq 2\epsilon\gamma_i$, pare e $\|H\|_\infty = \frac{1}{2}(\gamma_s + \gamma_i)$. Caso contrário, construa as matrizes Hamiltonianas H_{η_k} e H_{τ_k} . Se H_{η_k} e H_{τ_k} têm autovalores imaginários, vá para o passo 4. Se H_{η_k} tem autovalores imaginários mas não H_{τ_k} , vá para o passo 5. Se tanto H_{η_k} como H_{τ_k} não têm autovalores imaginários, vá para o passo 6.*

passo 4: *Mantenha γ_s e faça $\gamma_i = \eta_k$, $\eta_{k+1} = \tau_k$, $\tau_{k+1} = \gamma_i + \alpha(\gamma_s - \gamma_i)$ e $k = k + 1$. Volte ao passo 3, agora somente avaliando os autovalores de $H_{\tau_{k+1}}$.*

passo 5: *Faça $\gamma_i = \eta_k$, $\gamma_s = \tau_k$, $\eta_{k+1} = \gamma_i + (1 - \alpha)(\gamma_s - \gamma_i)$, $\tau_{k+1} = \gamma_i + \alpha(\gamma_s - \gamma_i)$ e $k = k + 1$. Volte ao passo 3.*

passo 6: *Mantenha γ_i e faça $\gamma_s = \tau_k$, $\tau_{k+1} = \eta_k$, $\eta_{k+1} = \gamma_i + (1 - \alpha)(\gamma_s - \gamma_i)$ e $k = k + 1$. Volte ao passo 3, somente avaliando os autovalores de $H_{\eta_{k+1}}$.*

Uma interpretação deste algoritmo é dada a seguir. Considere a figura 2.5. No caso 1 tanto H_{η_k} como H_{τ_k} têm autovalores imaginários, o que implica, obviamente, que o valor da norma $\mathcal{H}_\infty$ está no novo intervalo determinado, particularmente, por η_k e γ_s . No caso 2, H_{η_k} tem autovalores imaginários mas não H_{τ_k} , assim o novo intervalo de existência da norma $\mathcal{H}_\infty$ é dado por $\gamma_i = \eta_k$ e $\gamma_s = \tau_k$. No caso 3, as matrizes Hamiltonianas H_{η_k} e H_{τ_k} não têm autovalores imaginários, e o novo intervalo é dado por γ_i e τ_k .

A escolha do critério de parada foi discutida na subseção 2.4.2. Este algoritmo, em comparação aos anteriores, tem a inconveniência de fazer o uso do cálculo de duas matrizes Hamiltonianas no passo inicial, bem como em algum ponto do algoritmo, se assim for necessário.

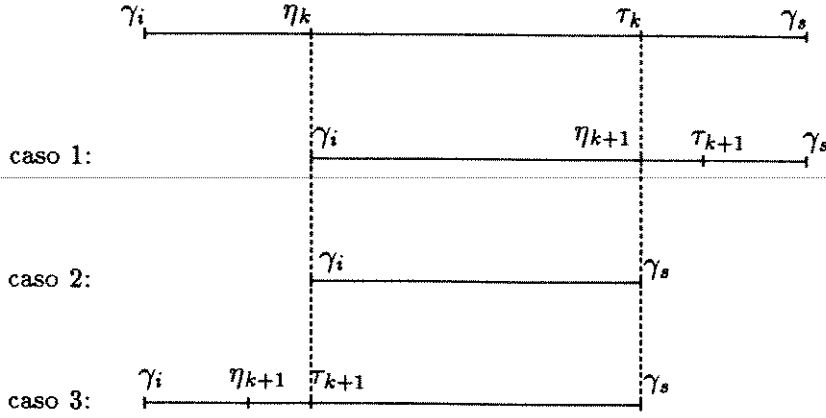


Figura 2.5: Ilustração do Algoritmo Seção Áurea.

2.4.5 Fibonacci

Este algoritmo é idêntico ao anterior, considerando os mesmos limitantes inferior e superior, variando apenas a forma de cálculo de η_k e τ_k . Para inicializá-lo [BS79], no entanto, é necessário gerar uma sequência de Fibonacci definida a seguir:

$$F_0 = F_1 = 1$$

$$F_{j+1} = F_j + F_{j-1} \quad , \quad j = 1, 2, \dots$$

onde j é o número de observações a ser tomado.

Algoritmo 2.5

FIBONACCI

passo 1: *Determine os limitantes γ_i e γ_s como em (2.27). Faça $k = 1$.*

passo 2: *Calcule $\eta_k = \gamma_i + (F_{j-2}/F_j)(\gamma_s - \gamma_i)$ e $\tau_k = \gamma_i + (F_{j-1}/F_j)(\gamma_s - \gamma_i)$.*

passo 3: *Se $\gamma_s - \gamma_i \leq 2\epsilon\gamma_i$, pare e $\|H\|_\infty = \frac{1}{2}(\gamma_s + \gamma_i)$. Caso contrário, construa as matrizes Hamiltonianas H_{η_k} e H_{τ_k} . Se H_{η_k} e H_{τ_k} têm autovalores imaginários, vá para o passo 4. Se H_{η_k} tem autovalores imaginários mas não H_{τ_k} , vá para o passo 5. Se tanto H_{η_k} como H_{τ_k} não têm autovalores imaginários, vá para o passo 6.*

passo 4: *Mantenha γ_s e faça $\gamma_i = \eta_k$, $\eta_{k+1} = \tau_k$, $\tau_{k+1} = \gamma_i + (F_{j-k-1}/F_{j-k})(\gamma_s - \gamma_i)$ e $k = k + 1$. Volte ao passo 3, agora somente avaliando os autovalores de $H_{\tau_{k+1}}$.*

passo 5: Faça $\gamma_i = \eta_k$, $\gamma_s = \tau_k$, $\eta_{k+1} = \gamma_i + (F_{j-k-2}/F_{j-k})(\gamma_s - \gamma_i)$, $\tau_{k+1} = \gamma_i + (F_{j-k-1}/F_{j-k})(\gamma_s - \gamma_i)$ e $k = k + 1$. Volte ao passo 3.

passo 6: Mantenha γ_i e faça $\gamma_s = \tau_k$, $\tau_{k+1} = \eta_k$, $\eta_{k+1} = \gamma_i + (F_{j-k-2}/F_{j-k})(\gamma_s - \gamma_i)$ e $k = k + 1$. Volte ao passo 3, somente avaliando os autovalores de $H_{\eta_{k+1}}$.

A interpretação dada na figura 2.5 permanece válida para este algoritmo.

Considere agora os seguintes exemplos.

Exemplo 2.1 - Seja o sistema dinâmico dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2x(t) + 2w(t) \\ z(t) = 1x(t) \end{cases}$$

Fazendo o cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ pela própria definição (2.23) tem-se para $s = j\omega$:

$$\begin{aligned} \|H\|_\infty &= \max_{w \in \mathbb{R}} \left(\frac{2}{j\omega + 2} \cdot \frac{2}{-j\omega + 2} \right)^{1/2} \\ \|H\|_\infty &= \max_{w \in \mathbb{R}} \left(\frac{4}{\omega^2 + 4} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

note que o máximo é atingido para $\omega = 0$, então

$$\|H\|_\infty = 1$$

Usando-se o algoritmo de Busca Exaustiva chega-se ao valor da norma $\mathcal{H}_\infty$ igual a 0.9988. Isto ocorre pois o algoritmo delimita o intervalo de busca para todo $\omega \in \mathbb{R}^+$, excluindo portanto $\omega = 0$. Ilustrações, para este exemplo, dos diagramas de magnitude de Bode e de Nyquist são apresentados nas figuras 2.6 e 2.7, respectivamente.

Agora, construindo a matriz Hamiltoniana (2.6) associada a este sistema, tem-se:

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} -2 & 4\gamma^{-1} \\ -\gamma^{-1} & 2 \end{bmatrix}$$

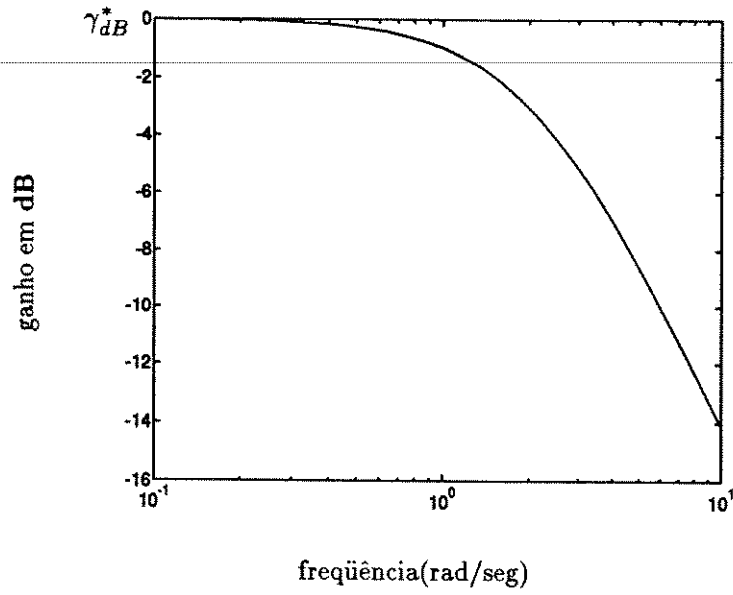


Figura 2.6: Diagrama de magnitude de Bode para o exemplo 2.1.

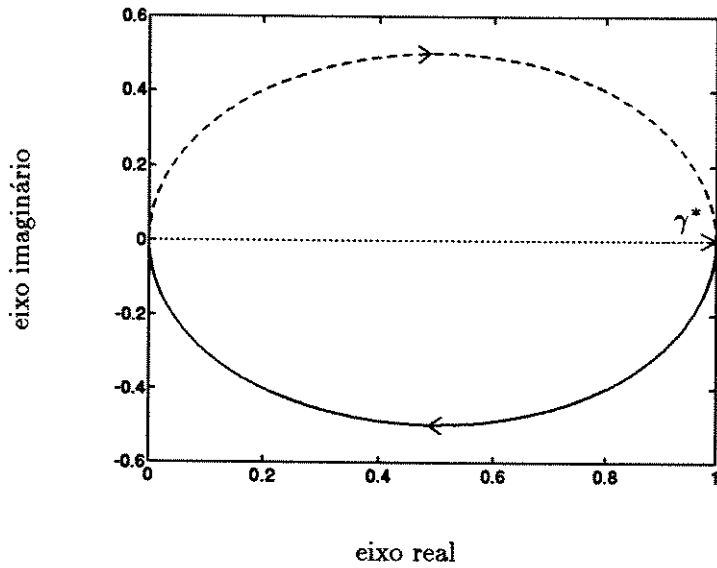


Figura 2.7: Diagrama de Nyquist para o exemplo 2.1.

Algoritmo	γ^*	iterações	cputime(s)	flops
Bisseção	1	18	0.1000	1206
Dois Passos	1	10	0.1667	1045
Seção Áurea	1	26	0.1500	1545
Fibonacci	1	17	0.1167	1485

Tabela 2.1: Cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ de um Sistema SISO com $D_1 = 0$.

cujos autovalores são dados por:

$$\lambda I - H_\gamma = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & -4\gamma^{-1} \\ \gamma^{-1} & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - H_\gamma) = (\lambda + 2)(\lambda - 2) + 4\gamma^{-2} = 0$$

$$\lambda^2 = 4(1 - \gamma^{-2})$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2\sqrt{1 - 1/\gamma^2}$$

então, duas situações são possíveis:

- 1) se $\gamma < 1$, os autovalores de H_γ são puramente imaginários.
- 2) se $\gamma > 1$, os autovalores de H_γ estão em $\mathbb{R}$.

o que implica que $\|H\|_\infty = \gamma^* = 1$. Utilizando os algoritmos propostos até este momento, aplicando-se os limitantes (2.27) inferior e superior $\gamma_i = 0.5$ e $\gamma_s = 1$ respectivamente, obtêm-se os resultados da tabela 2.1. Observe que o valor da norma $\mathcal{H}_\infty$ é o próprio limitante superior, isto é, $\gamma^* = \gamma_s$.

Este exemplo monovariável proporciona uma visão geral da forma como se comporta o cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma matriz de transferência.

Exemplo 2.2 - Considere as seguintes matrizes apresentadas em [BBK89], que representam um sistema como em (2.3), tal que:

Algoritmo	γ^*	iterações	cputime(s)	flops
Bisseção	6.4405	21	0.2833	80451
Dois Passos	6.4405	3	0.1500	26432
Seção Áurea	6.4405	18	0.3333	68825
Fibonacci	6.4405	20	0.3500	66519

Tabela 2.2: Cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ para $D_1 \neq 0$ (exemplo 2.2).

$$A_f = \begin{bmatrix} -0.08 & 0.83 & 0 & 0 \\ -0.83 & 0.08 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7 & 9 \\ 0 & 0 & -9 & -0.7 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_f = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0.6 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & -0.15 \end{bmatrix}.$$

Com uma precisão relativa de $\epsilon = 10^{-6}$ e os limitantes inferior e superior calculados como em (2.27), implicando $\gamma_i = 2.2758$ e $\gamma_s = 18.5065$, tem-se o valor da norma $\mathcal{H}_\infty$ e o comportamento dos algoritmos dados na tabela 2.2.

A próxima subseção trata de um método via LMIs.

2.4.6 LMIs

Considere o sistema em malha fechada (2.3) com a matriz de transmissão direta $D_1 = 0$, e defina $\Omega : \mathcal{S}_n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\Omega(W, \gamma^{-2}) = A_f W + W A_f' + \gamma^{-2} W C_f' C_f W + B_1 B_1'$$

e ainda o conjunto

$$\mathcal{M}_\gamma \triangleq \{(W, \gamma^{-2}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R} \mid W = W' > 0, \gamma > 0, y' \Omega(W, \gamma^{-2}) y \leq 0, \forall y \in \mathbb{R}^n\}$$

Agora reescrevendo

$$\Omega(W, \gamma^{-2}) \leq 0 \quad (2.28)$$

como uma LMI (veja Apêndice A), e definindo a função $\Gamma : \mathcal{S}_n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+q \times n+q}$ tem-se

$$\Gamma(W, \gamma^2) = \begin{bmatrix} -(A_f W + W A_f' + B_1 B_1') & -W C_f' \\ -C_f W & \gamma^2 I \end{bmatrix} \geq 0$$

e tomando ainda $\delta \triangleq \gamma^2$, segue que

$$\Gamma(W, \delta) = \begin{bmatrix} -(A_f W + W A_f' + B_1 B_1') & -W C_f' \\ -C_f W & \delta I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.29)$$

Note que o vetor de decisão consiste das $n(n+1)/2$ entradas livres da matriz simétrica W e mais uma entrada livre que é o escalar δ .

Redefinindo o conjunto $\mathcal{M}_\gamma$ como $\mathcal{M}_\delta$, obtém-se

$$\mathcal{M}_\delta \triangleq \{(W, \delta) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R} \mid W = W' > 0, \delta > 0, z' \Gamma(W, \delta) z \geq 0, \forall z \in \mathbb{R}^{n+q}\}.$$

O cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ da matriz de transferência em malha fechada consiste então em encontrar:

$$\begin{aligned} (\text{P 2.1}) \quad & \min \delta \\ & \text{s.a. } (W, \delta) \in \mathcal{M}_\delta \end{aligned}$$

Teorema 2.6 - *O problema (P 2.1) é um problema convexo.*

Prova: Sejam $(W_1, \delta_1), (W_2, \delta_2) \in \mathcal{M}_\delta$, $\alpha \in [0; 1]$ e $(W, \delta) = \alpha(W_1, \delta_1) + (1 - \alpha)(W_2, \delta_2)$, então

$$\Gamma(W, \delta) = \begin{bmatrix} -(\alpha A_f W_1 + (1 - \alpha) A_f W_2 + \alpha W_1 A_f' + (1 - \alpha) W_2 A_f' + B_1 B_1') \\ -\alpha C_f W_1 - (1 - \alpha) C_f W_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha W_1 C'_f - (1-\alpha)W_2 C'_f \\ + (\alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_2)I \end{bmatrix}$$

somando e subtraindo $\alpha B_1 B'_1$ de forma conveniente, tem-se

$$\Gamma(W, \delta) = \begin{bmatrix} -\alpha(A_f W_1 + W_1 A'_f + B_1 B'_1) - (1-\alpha)(A_f W_2 + W_2 A'_f + B_1 B'_1) \\ -\alpha C_f W_1 - (1-\alpha)C_f W_2 \\ -\alpha W_1 C'_f - (1-\alpha)W_2 C'_f \\ + (\alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_2)I \end{bmatrix}$$

e finalmente

$$\begin{aligned} \Gamma(W, \delta) = & \alpha \begin{bmatrix} -(A_f W_1 + W_1 A'_f + B_1 B'_1) & -W_1 C'_f \\ -C_f W_1 & \delta_1 I \end{bmatrix} \\ & + (1-\alpha) \begin{bmatrix} -(A_f W_2 + W_2 A'_f + B_1 B'_1) & -W_2 C'_f \\ -C_f W_2 & \delta_2 I \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

logo $(W, \delta) \in \mathcal{M}_\delta$.

Já que o conjunto $\mathcal{M}_\delta$ é convexo e a função objetivo do problema (P 2.1) é linear, o mesmo é um problema convexo. $\square$

Devido ao fato do problema (P 2.1) ser um problema de programação convexa e, ainda, graças ao resultado a seguir, pode-se usar um método de “Linearização Externa” para resolvê-lo. Defina então o conjunto

$$\mathcal{M}_\delta^* \triangleq \{(W, \delta) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R} \mid (W, \delta) \in \mathcal{M}_\delta, W \geq \epsilon I \text{ e } \delta \geq 0\}$$

com $\epsilon > 0$ suficientemente “pequeno”. Considere então o problema de otimização

$$\begin{aligned} \text{(P 2.2)} \quad & \min \quad \delta \\ \text{s.a} \quad & (W, \delta) \in \mathcal{M}_\delta^* \end{aligned}$$

É fácil de observar que o conjunto $\mathcal{M}_\delta^*$ é um conjunto convexo fechado. Então (P 2.2) pode ser resolvido por métodos de planos de corte. Note ainda que, se (P 2.2) é factível, então (P 2.1) também é factível.

A forma geral do algoritmo é a seguinte:

Algoritmo 2.6**PLANOS DE CORTE**

passo 1: Defina o politopo inicial P_k tal que $\mathcal{M}_\delta^* \subseteq P_k$.

passo 2: Resolva o problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \delta \\ \text{s.a} \quad & (W, \delta) \in P_k \end{aligned}$$

se for infactível, então $\mathcal{M}_\delta^* = \emptyset$. Caso contrário obtenha $(W_k, \delta_k) \in P_k$. Se $(W_k, \delta_k) \in \mathcal{M}_\delta^*$ pare, faça $\gamma = \sqrt{\delta}$ e $\|H\|_\infty = \gamma$. Caso contrário:

passo 3: Encontre o hiperplano que separa o ponto (W_k, δ_k) de $\mathcal{M}_\delta^*$. Atualize P_k para obter P_{k+1} incluindo como uma restrição a inequação que define o semiplano limitado pelo hiperplano e que contém $\mathcal{M}_\delta^*$. Volte ao passo 2.

Cabe agora explicar como os hiperplanos separadores são selecionados.

Suponha que no j -ésimo passo, $j \in \mathbb{N}$, tem-se $(W_j, \delta_j) \notin \mathcal{M}_\delta^*$, com $W_j = W'_j$, $\delta_j \geq 0$ e um elemento qualquer $(W, \delta) \in \mathcal{M}_\delta^*$. Então, $W_j \not\geq \epsilon I$ ou $\Gamma(W_j, \delta_j) \not\geq 0$, isto é, $\lambda_{\min}(W_j) < \epsilon$ ou $\lambda_{\min}(\Gamma(W_j, \delta_j)) < 0$. Assim:

- i) $\epsilon \leq \lambda_{\min}(W) \leq y'_j W y_j$, ou
- ii) $0 \leq \lambda_{\min}(\Gamma(W, \delta)) \leq z'_j (\Gamma(W, \delta)) z_j$

onde, $y_j \in \mathbb{R}^n$ e $z_j \in \mathbb{R}^{n+q}$ são autovetores normalizados associados aos autovalores $\lambda_{\min}(W_j)$ e $\lambda_{\min}(\Gamma(W_j, \delta_j))$, respectivamente.

Pode-se reescrever (i) como $\langle y_j, W y_j \rangle \geq \epsilon$, mas $\langle y_j, W y_j \rangle = \text{tr}\{y_j(y'_j W)\} = \text{tr}\{(y_j y'_j) W\} = \langle y_j y'_j, W \rangle$, então

$$i) \epsilon \leq \langle y_j y'_j, W \rangle = \langle (y_j y'_j, 0), (W, \delta) \rangle,$$

mostrando que, se $(W_j, \delta_j) \notin \mathcal{M}_\delta^*$, por violar a primeira condição, $W_j \geq \epsilon I$, então $\mathcal{M}_\delta^*$ está contido no semi-espaço: $\{(W, \delta) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R} \mid \langle (y_j y_j', 0), (W, \delta) \rangle \geq \epsilon\}$ e assim o hiperplano separador S_j^1 neste caso é dado pela igualdade em (i).

Agora, com relação a condição (ii), fazendo

$$\text{tr}\{z_j' \Gamma(W, \delta) z_j\} \geq 0$$

tem-se

$$\text{tr}\{z_j z_j' \Gamma(W, \delta)\} \geq 0$$

e desenvolvendo

$$\text{tr} \left\{ \begin{bmatrix} z_j^{11} & z_j^{12} \\ z_j^{21} & z_j^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(A_f W + W A_f' + B_1 B_1') & -W C_f' \\ -C_f W & \delta I \end{bmatrix} \right\} \geq 0$$

obtem-se

$$\text{tr}\{-z_j^{11} A_f W - z_j^{11} W A_f' - z_j^{11} B_1 B_1' - z_j^{12} W C_f' - z_j^{21} C_f W + z_j^{22} \delta I\} \geq 0$$

$$\text{tr}\{(-z_j^{11} A_f - A_f' z_j^{11} - C_f' z_j^{12} - z_j^{21} C_f) W + z_j^{22} \delta\} \geq \text{tr}\{z_j^{11} B_1 B_1'\}$$

que, finalmente, pode ser escrito como:

$$\langle ((-z_j^{11} A_f - A_f' z_j^{11} - C_f' z_j^{12} - z_j^{21} C_f), z_j^{22}), (W, \delta) \rangle \geq \text{tr}\{z_j^{11} B_1 B_1'\} \quad (2.30)$$

Assim, se $(W_j, \delta_j) \notin \mathcal{M}_\delta^*$, por violar esta segunda condição, $\Gamma(W_j, \delta_j) \geq 0$, a inequação (2.30) mostra que $\mathcal{M}_\delta^*$ esta contido no semiplano definido por esta inequação e o hiperplano separador S_j^2 é definido neste caso pela igualdade em (2.30).

Como discutido no início desta seção 2.4, a solução do problema (P 2.2) poderia também ser alcançada usando-se o pacote computacional LMI-Lab [GN93a], [GN93b].

O exemplo a seguir fornece uma ilustração do comportamento de todos os algoritmos no cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma matriz de transferência em malha fechada.

Exemplo 2.3 - Suponha um sistema dinâmico como em (2.2) representado pelas seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Algoritmo	γ^*	iterações	cputime(s)	Mflops
Bisseção	0.4743	21	0.2333	0.0489
Dois Passos	0.4743	2	0.1167	0.0141
Seção Áurea	0.4743	18	0.3000	0.0448
Fibonacci	0.4743	20	0.3333	0.0497
Planos de Corte	0.4743	121	5.9333	1.4473
LMI-Lab	0.4743	34	1.7500	— ³

Tabela 2.3: Cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ para $D_1 = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} -0.9896 & 17.41 & 96.15 \\ 0.2648 & -0.8512 & -11.39 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -97.78 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

e considere

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Seja o ganho K igual a

$$K = \begin{bmatrix} 2.4253 & 6.2712 & 4.8030 \end{bmatrix}.$$

de tal forma que $A_f = A + B_2K$ seja assintoticamente estável, $C_f = C + D_2K$ e a matriz de transferência em malha fechada dada como em (2.7).

Calculando-se os limitantes (2.27) inferior e superior obtém-se $\gamma_i = 0.2408$ e $\gamma_s = 1.4447$ respectivamente. O valor da norma $\mathcal{H}_\infty$ para este sistema é dado na tabela 2.3.

³O pacote LMI-Lab utiliza executáveis externos ao Matlab, não contabilizados no número total de flops.

2.5 Conclusão

Neste capítulo procurou-se passar uma visão geral do conceito de norma $\mathcal{H}_\infty$, bem como algumas interpretações associadas à norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma matriz de transferência. Evidenciou-se a relação entre valores singulares de uma matriz de transferência e os autovalores puramente imaginários de uma matriz Hamiltoniana, e também a associação entre a norma $\mathcal{H}_\infty$ e uma inequação algébrica de Riccati, que por fim, interliga os valores singulares de uma matriz de transferência com uma inequação algébrica de Riccati.

Foram apresentados cinco algoritmos (Busca Exaustiva, Bisseção, Dois Passos, Seção Áurea e Fibonacci) para o cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ das matrizes de transferência (2.4) e (2.7) (isto é, para $D_1 \neq 0$ e $D_1 = 0$ respectivamente), bem como o método via LMI para o cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ de (2.7). Os algoritmos (2.2) até (2.5), apesar de exigirem menor esforço computacional e tempo de máquina inferior ao da abordagem via LMI (pelo menos para sistemas de ordem não muito elevada, já que a matriz Hamiltoniana é de dimensão $(2n \times 2n)$), dependem no entanto de como os limitantes inferior e superior se aproximam da norma $\mathcal{H}_\infty$. Além disso, como enfatizado em [BB90], existe a possibilidade dos intervalos nos quais $\sigma_1(H(j\omega)) > \gamma_n$, não serem identificados, a partir apenas dos autovalores puramente imaginários de H_γ .

A abordagem via LMI, especificamente o algoritmo (2.6), apresenta a vantagem de não necessitar, a priori, de um intervalo de busca; além disso, o processo de minimização depende apenas da existência de uma solução $(W, \delta) \in \mathcal{M}_\delta^*$. No entanto, como o valor de δ é inicializado em zero, o algoritmo pode ter um mau comportamento numérico, em algumas situações.

Capítulo 3

Otimização $\mathcal{H}_\infty$ via Realimentação de Estado

3.1 Introdução

Neste capítulo, as abordagens iterativa, convexa e via LMIs enunciadas na introdução geral, são formuladas e discutidas.

Além do mais, um dos resultados deste capítulo é discutir a relação entre as abordagens iterativa e convexa no caso de sistemas precisamente conhecidos. Demonstra-se que as soluções maximais das equações tipo Riccati, usadas na primeira abordagem, definem parte da fronteira do conjunto convexo que gera os ganhos de controle na abordagem convexa.

Um outro ponto importante é que a abordagem convexa apresentada neste capítulo ([POP94]), ao contrário de outras similares ([PGS93], [PGS94], [PSG94]), trata os problemas de controle $\mathcal{H}_\infty$ sem usar uma representação aumentada do sistema, portanto, sendo mais condensado e permitindo um tratamento mais simples para os casos de controle descentralizado e/ou incerteza.

Este capítulo é subdividido da seguinte forma. Na seção 3.2 a estrutura do problema de otimização $\mathcal{H}_\infty$ que se deseja tratar é apresentada, bem como a hipótese de regularidade sobre o sistema linear invariante no tempo a ser considerado. Na seção 3.3 a abordagem iterativa é discutida. Na seção 3.4 é apresentada uma abordagem convexa tanto para

sistemas precisamente conhecidos como ainda sistemas incertos (matriz dinâmica incerta) e controle descentralizado. Na seção 3.5 o problema de otimização $\mathcal{H}_\infty$ é tratado por uma abordagem via LMIs, onde a solução de um problema de otimização sujeito à uma restrição matricial semelhante à apresentada em [KR91] fornece um ganho de controle que estabiliza o sistema, e ainda, minimiza a norma $\mathcal{H}_\infty$.

3.2 Preliminares

Considere o sistema linear contínuo no tempo descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_2u(t) + B_1w(t) \\ z(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a variável de estado, $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ a variável de controle, $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^r$ o distúrbio externo e $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ a saída controlada. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{q \times m}$. Note que este sistema linear é idêntico ao sistema (2.2) do capítulo anterior, considerando-se $D_1 = 0$ e $D_2 = D$. Assuma, neste trabalho, as seguintes hipóteses de regularidade:

- i) (A, B_2) é estabilizável e (A, C) é observável.
- ii) $D'[C \ D] = [0 \ I]$.

A hipótese $D'C = 0$ em (ii) significa que não existe ponderação cruzada entre o estado x e o controle u , isto é, o sinal de saída z tem uma parte que só depende do estado e outra, independente desta, que é afetada apenas pelo controle; não implica em perda de generalidade. Já $D'D = I$ significa que todos os controles devem ser ponderados unitariamente [DGKF89] auxiliando no condicionamento dos ganhos. Esta parte da hipótese (ii) poderia ser relaxada facilmente para $D'D > 0$.

Assume-se ainda que todos os estados do sistema sejam acessíveis para controle, isto é, a saída medida y é o próprio estado x . E deseja-se então construir um compensador que estabilize o sistema (3.1) em malha fechada e reduza a norma induzida em $\mathcal{L}_2[0; \infty)$ do mapeamento do distúrbio w para a saída z tanto quanto possível ([Sch89], [Sch90],

[FD87]). Desde que pretende-se calcular o menor valor possível da norma e , como mostrado em [KPR88], este valor, usando realimentação estática, equivale ao valor mínimo da mesma norma sobre todos os controles de realimentação de estado dinâmicos, pode-se então tomar o controle da forma:

$$u = Kx$$

onde o ganho de realimentação K pertence ao conjunto

$$\mathcal{K} \triangleq \{K \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid A + B_2 K \text{ é assintoticamente estável}\}.$$

Define-se, como no capítulo anterior, $A_f \triangleq A + B_2 K$ e $C_f \triangleq C + DK$. Então, o mapeamento do distúrbio w para a saída z , isto é, a função de transferência do sistema em malha fechada, é definida pela matriz de transferência dada como em (2.7) e transcrita novamente por conveniência:

$$H(s) \triangleq C_f(sI - A_f)^{-1} B_1 \quad (3.2)$$

O problema de Otimização $\mathcal{H}_\infty$ pode então ser formalizado como: encontrar

$$(\mathbf{P} \ 3.1) \quad \inf \{\|H\|_\infty \mid K \in \mathcal{K}\}$$

onde a norma $\mathcal{H}_\infty$ é definida como em (2.1). No entanto, a minimização da norma $\mathcal{H}_\infty$ em função dos elementos de $\mathcal{K}$, como escrita em (P 3.1), não é trivial de ser obtida. Afim de contornar esta situação, uma outra formulação para o problema (P 3.1) pode ser estabelecida considerando-se a solução de uma certa inequação de Riccati.

Teorema 3.1 - *Seja $\gamma > 0$ dado. Assumindo que (A, B_2) é estabilizável e (A, C) é observável, existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $\|H\|_\infty \leq \gamma$ se e somente se existe $W = W' > 0$ tal que*

$$AW + WA' + WC'CW + \gamma^{-2} B_1 B_1' - B_2 B_2' \leq 0 \quad (3.3)$$

além disso, K pode ser tomado como $K = -B_2' W^{-1}$.

Prova: Veja [Sch90]. □

Este resultado mostra que para um $\gamma > 0$ fixado, definindo o conjunto

$$\mathcal{K}_\gamma \triangleq \{K \in \mathcal{K} \mid \|H\|_\infty \leq \gamma\}$$

segue que $\mathcal{K}_\gamma \neq \emptyset$ se e somente se (3.3) admitir solução definida positiva, e principalmente, que o problema de otimização **(P 3.1)** é equivalente ao seguinte problema: encontrar

$$\textbf{(P 3.2)} \quad \gamma^* = \inf \{\gamma \mid K \in \mathcal{K}_\gamma\}$$

Essa nova formulação do problema sugere uma técnica iterativa para a sua solução, que consiste em caracterizar pelo menos um elemento do conjunto $\mathcal{K}_\gamma$ à medida que se diminui o valor da atenuação de distúrbios γ , isto é, resolver em cada etapa um problema sub-ótimo.

3.3 Abordagem Iterativa

Definem-se, para $\mu = \gamma^{-2}$ e $R_\mu : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, a seguinte expressão matricial

$$R_\mu(W) \triangleq AW + WA' + WC'CW + \mu B_1 B_1' - B_2 B_2' \quad (3.4)$$

bem como os conjuntos ⁴

$$\mathcal{M}_\mu \triangleq \{W \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid W = W' \text{ e } R_\mu(W) \leq 0\}$$

$$\mathcal{N}_\mu \triangleq \{W \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid W = W' \text{ e } R_\mu(W) = 0\}$$

onde $\mathcal{N}_\mu \subset \mathcal{M}_\mu$.

Usando o fato que o par $(-A', C')$ é estabilizável, pode-se reescrever o importante Teorema 2.1 em [RV88] como a seguir.

⁴Neste trabalho, deseja-se caracterizar apenas (se existir) a única solução simétrica real definida positiva de $R_\mu(W) = 0$ [RW94]; repare ainda que, por hipótese (A, B_2) é estabilizável e (A, C) é observável.

Teorema 3.2 - Seja $\mu \geq 0$ dado. Se $\mathcal{M}_\mu \neq \emptyset$, então existe uma matriz $W(\mu) \in \mathcal{N}_\mu$ tal que:

$$W(\mu) \geq W, \quad \forall W \in \mathcal{M}_\mu,$$

em particular $W(\mu)$ é chamada solução simétrica maximal de $R_\mu(W) = 0$, e além disso, todos os autovalores de $A(\mu) \triangleq A + W(\mu)C'C$ estão em $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^o$

Prova: Veja [RV88]. Observe que se a equação de Riccati tem solução, existe então uma única solução maximal ([GLR86]). $\square$

Note que qualquer matriz que é chamada solução de $R_\mu(W) = 0$ é uma matriz real e simétrica [RR92]; observe ainda que a estabilizabilidade de $(-A', C')$ é condição suficiente para deduzir, da solvabilidade da inequação algébrica de Riccati, a existência de uma única solução maximal simétrica, e tal solução implica na solvabilidade da equação algébrica de Riccati. Este teorema permite portanto caracterizar, a cada etapa, um problema sub-ótimo com $\mu \geq 0$ em termos da solvabilidade da equação algébrica de Riccati.

É importante observar ainda que, para $0 \leq \nu \leq \mu$, se $W(\mu)$ existe pode-se escrever $R_\mu(W(\mu)) = 0$ como:

$$AW(\mu) + W(\mu)A' + W(\mu)C'CW(\mu) + \nu B_1 B_1' - (\nu - \mu)B_1 B_1' - B_2 B_2' = 0$$

isto é,

$$AW(\mu) + W(\mu)A' + W(\mu)C'CW(\mu) + \nu B_1 B_1' - B_2 B_2' = (\nu - \mu)B_1 B_1' \leq 0,$$

portanto $W(\mu) \in \mathcal{M}_\nu$ e assim pelo Teorema 3.2 existe $W(\nu)$ com $W(\nu) \geq W(\mu)$, ou seja, a função que associa o parâmetro μ à correspondente solução simétrica maximal $W(\mu) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de $R_\mu(W) = 0$ é não crescente e está definida a princípio em $[0; \infty)$.

Scherer em [Sch89], motivado pelo Teorema 3.1 e baseado nos resultados do Teorema 3.2 propõe uma nova formulação para o problema (**P 3.2**): encontrar

$$(\mathbf{P} \ 3.3) \quad \mu^* = \sup \{ \mu \mid \exists W(\mu) \in \mathcal{N}_\mu \text{ e } W(\mu) > 0 \}$$

e estabelece um algoritmo iterativo para a sua solução.

3.3.1 Algoritmo

A construção de um algoritmo iterativo para resolver (P 3.3) é consequência da obtenção de resultados que resolvem completamente este problema.

Estes resultados baseiam-se em certas propriedades de suavidade da função que associa μ a $W(\mu)$. Antes de apresentá-los, entretanto, se faz necessário estabelecer com precisão qual é o domínio dessa função. O lema a seguir é fundamental não apenas para responder essa questão, mas, como será visto, para a própria construção do algoritmo.

Lema 3.1 - *Sejam μ_1, μ_2 com $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$ e $W(\mu_1)$ solução simétrica maximal de $R_{\mu_1}(W) = 0$. $W(\mu_2)$ é a solução simétrica maximal de $R_{\mu_2}(W) = 0$ se e somente se $\Delta W = W(\mu_2) - W(\mu_1)$ é solução simétrica maximal de*

$$A(\mu_1)W + WA(\mu_1)' + WC'CW + (\mu_2 - \mu_1)B_1B_1' = 0.$$

Prova: Suponha que $R_{\mu_2}(W(\mu_2)) = 0$. Substituindo-se $W(\mu_2)$ por $\Delta W + W(\mu_1)$ em $R_{\mu_2}(W(\mu_2)) = 0$ e lembrando que $A(\mu_1) = A + W(\mu_1)C'C$ tem-se:

$$A(\mu_1)\Delta W + \Delta WA(\mu_1)' + \Delta WC'C\Delta W + (\mu_2 - \mu_1)B_1B_1' = 0$$

segue que ΔW é uma solução da equação proposta e, pelo Teorema 3.2, é solução simétrica maximal, uma vez que $(-A', C')$ é estabilizável por hipótese.

Agora, assuma que ΔW é solução da equação proposta. Para obter-se $W(\mu_2)$ como solução simétrica maximal de $R_{\mu_2}(W) = 0$, basta substituir ΔW pelo seu valor e lembrar que $(-A', C')$ é estabilizável. $\square$

Tendo em vista os Teoremas 3.1 e 3.2, pode-se definir o domínio da função φ , que associa μ a $W(\mu)$, como $[0; \mu_{max})$, onde μ_{max} é o maior valor de μ tal que $R_\mu(W) = 0$ tem uma solução real simétrica, portanto $\mu_{max} \leq \infty$. Observe que $W(0) > 0$ existe, pois é solução simétrica maximal de $R_0(W) = 0$, que é uma equação padrão de Riccati de controle ótimo. Pelo lema anterior, segue que, $\forall \mu \in [0; \mu_{max}]$, $W(\mu)$ existe se e somente se

$$A(0)\Delta W + \Delta W A(0)' + \Delta W C' C \Delta W + \mu B_1 B_1' = 0 \quad (3.5)$$

tem solução e então $W(\mu) = W(0) + \Delta W$. Agora, pela estabilidade de $-A(0)$, a equação (3.5) tem uma solução simétrica se e somente se $\|C(sI + A(0))^{-1}B_1\|_\infty \leq 1/\sqrt{\mu}$ (veja [Fai87]). Distinguem-se então dois casos:

i) Se $C(sI + A(0))^{-1}B_1$ não é nula, segue que ⁵

$$\mu_{max} = \|C(sI + A(0))^{-1}B_1\|_\infty^{-2} < \infty.$$

ii) Se $C(sI + A(0))^{-1}B_1$ é nula, então, de [Fai87], $\forall \mu \in [0; \infty)$, (3.5) tem uma solução simétrica, logo $\mu_{max} = \infty$.

Com base na estabilidade de $-A(\mu)$ para $\mu < \mu_{max}$, o resultado a seguir estabelece importantes propriedades de suavidade de φ .

Teorema 3.3 - *Seja $\varphi : [0; \mu_{max}] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\varphi(\mu) \triangleq W(\mu)$, onde $W(\mu)$ é solução simétrica maximal de $R_\mu(W) = 0$. Então são válidas as seguintes afirmações:*

i) φ é não crescente e $\varphi(0) = W(0) > 0$.

ii) $\mu \in [0; \mu_{max})$, $-A(\mu)$ é estável e $\mu_{max} = \mu + \|C(sI + A(\mu))^{-1}B_1\|_\infty^{-2} \leq \infty$.

iii) φ é afim e não constante se e somente se $\text{Im}(B_1)$ está contida no subespaço não observável ⁶ de $[A - sI \ C]'$.

iv) φ é constante se e somente se B_1 é nula.

v) Se $\mu_{max} < \infty$, então φ é analítica, não crescente e côncava em $[0; \mu_{max}]$. Além disso $W(\mu_{max})$ existe.

⁵Nesse caso $\begin{pmatrix} A' & C'C \\ B_2 B_2' - \mu_{max} B_1 B_1' & -A \end{pmatrix}$ tem autovalores em $\mathcal{C}^\circ$.

⁶O espaço observável de $[A - sI \ C]'$ é $\sum_{i=0}^{n-1} \text{Im}(C)A^i$, (onde $\sum$ denota a soma direta).

Prova: Veja [Sch90]. □

Observações :

- a) O item (i) já foi mostrado, bem como o item (ii) para $\mu = 0$.
- b) Para (iii) $\mu_{max} = \infty$, $\varphi(\mu_{max}) = W(\mu_{max})$ é definido como qualquer matriz não positiva semidefinida. Nesse caso, evidentemente, (A, C) não é observável.
- c) Para (iv) $\varphi(\mu) = W(0)$, $\forall \mu \in [0; \infty)$ e define-se $\varphi(\mu_{max}) = W(0)$.
- d) Para (v), a analiticidade é mostrada usando-se o teorema da função implícita para o mapeamento $\Theta : \mathcal{S}_n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\Theta(W, \mu) \triangleq R_\mu(W)$, desde que $\Theta_W : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ é linear, $\Theta_W(W(\mu_0), \mu_0)$ é inversível para $0 < \mu_0 < \mu_{max}$ e também porque a estabilidade de $-A(\mu_0)$ pode ser estendida para todo $\mu \in [0; \mu_{max})$.

Teorema 3.4 - *São válidas as seguintes afirmações:*

- i) O valor ótimo γ^* é atingido se e somente se $W(\mu_{max}) > 0$ e neste caso $\gamma^* = 1/\sqrt{\mu_{max}}$ e o ganho estabilizante é $K^* = -B_2'W(\mu_{max})^{-1}$.
- ii) Se $W(\mu_{max}) \not> 0$, existe um único $\mu_s \in [0; \mu_{max}]$ tal que $\mu_s < \infty$, $W(\mu_s)$ é positiva semidefinida e $\gamma^* = 1/\sqrt{\mu_s}$.
- iii) Se o valor ótimo γ^* não é atingido e se (K_ℓ) é uma seqüência de ganhos admissíveis com $\|(C + DK_\ell)(sI - A - B_2K_\ell)^{-1}B_1\|_\infty \leq \gamma_\ell$ e $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \gamma_\ell = \gamma^*$, então $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|K_\ell\| = \infty$.

Prova: Veja [Sch90]. □

Observações :

- a) No caso (i) se $\mu_{max} = \infty$ e $W(\mu_{max}) > 0$, $W(\mu) = W(\mu_{max})$, $\forall \mu \in [0; \mu_{max})$, logo pelo Teorema 3.1, $\|H\|_\infty < 1/\sqrt{\mu}$, $\forall \mu \in (0; \mu_{max})$ e assim $\gamma^* = 1/\sqrt{\mu_{max}} = 0$. Se $\gamma^* = 0$, segue que $\mu_{max} = \infty$ e $W(\mu) > 0$, $\forall \mu \in [0; \infty)$, logo $\varphi(\mu) = W(0)$, $\forall \mu \in [0; \infty)$, isto é, φ é constante e então $W(\mu_{max}) > 0$.
- b) Em (ii), quer seja $\mu_{max} < \infty$ com $W(\mu_{max}) \not> 0$ ou $\mu_{max} = \infty$, $\mu_s \triangleq \sup \{\mu \mid \mu \in [0; \mu_{max}) \text{ e } W(\mu) > 0\}$. A existência de μ_s segue da continuidade de φ , a unicidade segue de sua definição e da concavidade de φ . Observe que a unicidade de μ_s é no sentido de que

μ_s é o único valor de μ em $[0; \mu_{max})$ tal que $W(\mu)$ é positiva semidefinida. Se $W(\mu_{max})$ é positiva semidefinida, mas não definida, toma-se $\mu_s = \mu_{max}$. Observe que este valor μ_s não pode ser atingido com ganhos finitos.

c) Para (iii) a sequência (K_ℓ) é chamada de alto ganho no sentido de que

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|K_\ell\| = \infty$$

Os resultados do teorema anterior sugerem o seguinte procedimento para resolver o problema (P 3.3).

Algoritmo 3.1

ALGORITMO ITERATIVO

passo 1: Calcule $W(0)$, solução de $R_0(W) = 0$.

passo 2: Calcule $\mu_{max} = \|C(sI + A(0))^{-1}B_1\|_\infty^{-2} < \infty$ e $W(\mu_{max})$, usando que $W(\mu_{max}) = W(0) + \Delta W$, onde ΔW é a solução simétrica maximal de:

$$A(0)W + WA(0)' + WC'CW + \mu_{max}B_1B_1' = 0.$$

passo 3: Se $W(\mu_{max}) > 0$, então $\mu^* = \mu_{max}$ e $K^* = -B_2'W(\mu_{max})^{-1}$ e o algoritmo pára. Caso contrário, se faz necessário usar realimentação de alto ganho para aproximar-se do ótimo $\mu^* = \mu_s$. Controles sub-ótimos podem ser calculados seguindo os próximos passos.

passo 4: Faça $\ell = 0$ e $\mu_\ell = 0$ e vá para o passo seguinte.

passo 5: Calcule (veja [Sch89]):

$$\mu_{\ell+1} = \mu_\ell + \frac{\mu_{max} - \mu_\ell}{\|I - W(\mu_\ell)^{-1/2}W(\mu_{max})W(\mu_\ell)^{-1/2}\|}$$

e também $W(\mu_{\ell+1}) = W(\mu_\ell) + \Delta W$, onde ΔW é a solução simétrica maximal de

$$A(\mu_\ell)W + WA(\mu_\ell)' + WC'CW + (\mu_{\ell+1} - \mu_\ell)B_1B_1' = 0$$

faça $\ell = \ell + 1$. Se $W(\mu_\ell) \geq 0$, então pare e $\mu^* = \mu_s = \mu_\ell$. Uma solução sub-ótima é dada por $W(\mu_{\ell-1})$, na forma $K = -B_2'W(\mu_{\ell-1})^{-1}$. Caso contrário, vá para o passo 6.

passo 6: Se $|\mu_{\ell+1} - \mu_\ell|/|\mu_\ell| \leq \epsilon$, para um $\epsilon > 0$ prescrito, pare. Caso contrário, volte ao passo 5.

A partir do passo 6, se $W(\mu_\ell) > 0$ em cada passo, a sequência (μ_ℓ) converge para μ^* , $W(\mu_\ell)$ converge para $W(\mu^*)$ e $K_\ell = -B_2'W(\mu_\ell)^{-1}$ é uma sequência de altos ganhos. Note que para cada $\mu \in [0; \mu^*)$, $K = -B_2'W(\mu)^{-1}$ fornece um controle sub-ótimo. Um critério de parada para o algoritmo, neste caso, é minimizar o erro relativo, $|\mu_{\ell+1} - \mu_\ell|/|\mu_\ell| \leq \epsilon$, para um $\epsilon > 0$ prescrito.

3.4 Abordagem Convexa

3.4.1 Sistemas Precisamente Conhecidos

Definem-se o mapeamento $\Theta : \mathcal{S}_n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ como apresentado na observação (d) do Teorema 3.3 na página 40, isto é,

$$\Theta(W, \mu) \triangleq AW + WA' + WC'CW + \mu B_1 B_1' - B_2 B_2'$$

e ainda os conjuntos

$$\mathcal{G}_\infty \triangleq \{(W, \mu) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R} \mid W = W' > 0, \mu \geq 0, x' \Theta(W, \mu) x \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

$$\mathcal{G}_\infty(\mu) \triangleq \{W \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid W = W' > 0, x' \Theta(W, \mu) x \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

Note que $(W, \mu) \in \mathcal{G}_\infty$ se e somente se $W \in \mathcal{G}_\infty(\mu)$ e além disso $\mathcal{G}_\infty(\mu) \subseteq \mathcal{M}_\mu$, $\forall \mu > 0$.

Teorema 3.5 - Dado $\mu > 0$, para o sistema em (3.1) as seguintes afirmações são verdadeiras:

i) $\mathcal{G}_\infty(\mu)$ é convexo.

ii) $\mathcal{G}_\infty(\mu) \neq \emptyset$ se e somente se (A, B_2) é estabilizável e (A, C) é observável, $\|H\|_\infty \leq 1/\sqrt{\mu}$ e o ganho estabilizante é, neste caso, $K = -B_2'W^{-1}$.

Prova: Para o caso (i) sejam $W_1, W_2 \in \mathcal{G}_\infty(\mu)$, $\alpha \in [0; 1]$ e $W = \alpha W_1 + (1 - \alpha)W_2$. Obviamente $W = W' > 0$, então

$$\begin{aligned} \Theta(W, \mu) &= \alpha(AW_1 + W_1A') + (1 - \alpha)(AW_2 + W_2A') + \alpha^2 W_1C'CW_1 + \alpha(1 - \alpha)W_1C'CW_2 \\ &\quad + \alpha(1 - \alpha)W_2C'CW_1 + (1 - \alpha)^2 W_2C'CW_2 + \mu B_1B_1' - B_2B_2' \end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned} AW_1 + W_1A' &\leq -W_1C'CW_1 - \mu B_1B_1' + B_2B_2' \\ AW_2 + W_2A' &\leq -W_2C'CW_2 - \mu B_1B_1' + B_2B_2' \end{aligned}$$

tem-se

$$\begin{aligned} \Theta(W, \mu) &\leq \alpha(\alpha - 1)W_1C'CW_1 - \alpha(\alpha - 1)W_1C'CW_2 \\ &\quad - \alpha(\alpha - 1)W_2C'CW_1 + \alpha(\alpha - 1)W_2C'CW_2 \end{aligned}$$

e finalmente segue que

$$\Theta(W, \mu) \leq \alpha(\alpha - 1)(W_1 - W_2)C'C(W_1 - W_2) \leq 0$$

já que $(W_1 - W_2)C'C(W_1 - W_2)$ é positiva semidefinida. Assim $W \in \mathcal{G}_\infty(\mu)$, que é, portanto, um conjunto convexo.

Para o item (ii) suponha que $\mathcal{G}_\infty(\mu) \neq \emptyset$, isto é, existe $W = W' > 0$ tal que

$$AW + WA' + WC'CW + \mu B_1B_1' - B_2B_2' \leq 0$$

então pelo Teorema 3.1 existe $K = -B_2'W^{-1}$ que estabiliza o sistema com $\|H\|_\infty \leq 1/\sqrt{\mu}$.

Supondo agora, que (A, B_2) é estabilizável e (A, C) é observável com $\|H\|_\infty \leq 1/\sqrt{\mu}$, segue pelo mesmo Teorema 3.1, que existe $W = W' > 0$ tal que:

$$AW + WA' + WC'CW + \mu B_1B_1' - B_2B_2' \leq 0$$

ou seja, $\mathcal{G}_\infty(\mu) \neq \emptyset$. □

Este teorema e o Teorema 3.1 estabelecem que a função $\psi : \mathcal{G}_\infty(\mu) \rightarrow \mathcal{K}_\gamma$ tal que $\psi(W) = -B'_2 W^{-1}$ está bem definida e é obviamente injetiva, assim $\mathcal{K}_\gamma$ contém um subconjunto bem determinado de ganhos estabilizantes, o que resolve o problema sub-ótimo.

Pela forma como foi definido o conjunto $\mathcal{G}_\infty$ e pelo Teorema 3.5, o problema $\mathcal{H}_\infty$ ótimo, proposto em (P 3.3), pode ser colocado de maneira equivalente como um problema convexo. Ou seja, encontrar:

$$(P \ 3.4) \quad \mu^* = \sup \{ \mu \mid (W, \mu) \in \mathcal{G}_\infty \}$$

Esta formulação lida ao mesmo tempo com o limitante da norma $\mu = \gamma^{-2}$ e o ganho estabilizante K , que está relacionado com W , conforme estabelecido no teorema anterior, então $\gamma^* = 1/\sqrt{\mu^*}$ e $K^* = -B'_2 W_*^{-1}$ (se $W_* > 0$).

Teorema 3.6 - *O problema (P 3.4) é um problema convexo.*

Prova: A convexidade de $\mathcal{G}_\infty$ decorre imediatamente da convexidade de $\mathcal{G}_\infty(\mu)$. Como a função objetivo é linear o problema é então convexo. □

3.4.2 Algoritmo

Usando a forte condição de que o problema (P 3.4) é um problema de programação convexa, e ainda, com os resultados que se seguem, a aplicação de um método tipo “Linearização Externa” (planos de corte) torná-se possível. Seja

$$\mathcal{G} \triangleq \{ (W, \mu) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R} \mid (W, \mu) \in \mathcal{G}_\infty, W \geq \epsilon I \text{ e } \mu \in [0; \mu_{max}] \}$$

Teorema 3.7 - *O conjunto $\mathcal{G}$ é compacto.*

Prova: Como $\mathcal{G}$ é fechado, precisa-se apenas mostrar que o mesmo é limitado. Esse fato, contudo, é consequência imediata dos resultados do Teorema 3.3 ou Teoremas 2.1 e 2.2

em [RV88]. Pelas hipóteses do problema, $\mu_{\max} < \infty$ e dado $(W, \mu) \in \mathcal{G}$, para $\mu \in [0; \mu_{\max}]$ fixo, $W(\mu) \geq W$, $\forall (W, \mu) \in \mathcal{G}$, logo $\|W(\mu)\| \geq \|W\|$, $\forall (W, \mu) \in \mathcal{G}$. Dados agora, $\mu, \nu \in [0; \mu_{\max}]$ com $\mu \geq \nu$, tem-se $W(\nu) \geq W(\mu)$ e assim $\|W(\nu)\| \geq \|W(\mu)\|$. Portanto $\|W(0)\| \geq \|W\|$, $\forall (W, \mu) \in \mathcal{G}$. $\square$

Considere agora o problema:

$$(P \ 3.5) \quad \max \quad f(W, \mu) = \mu$$

$$\text{s.a} \quad (W, \mu) \in \mathcal{G}$$

Observe que se (P 3.4) é factível, então (P 3.5) é factível também.

O problema (P 3.5) está nas condições ideais para ser resolvido através de um método de planos de corte. Note que $\mathcal{G}$ está contido no politopo $\{(W, \mu) \mid W = W' \text{ e } \mu \leq \mu_{\max}\}$. Considerando esse politopo como o inicial, a implementação numérica deste método necessita, entretanto, do cálculo da norma $\mathcal{H}_{\infty}$ afim de se encontrar $\mu_{\max}$. Embora tenham sido estudados no Capítulo 2 algoritmos eficientes para esse cálculo, em [PGS93], [PGS94] é apresentado um limitante superior μ_M , facilmente calculável e que permite definir um problema equivalente a (P 3.5).

Teorema 3.8 - *Seja $V \in \mathbb{R}^{r \times (n+m)}$, $V = (B_1' B_1)^{-1} B_1' [A \ - B_2]$. Se $\text{rank}(V)$ é completo, $r > n - \text{rank}(C)$, então, para $\mu_M \triangleq \min \{\mu > 0 \mid \det(V'V - \mu R) = 0\}$, $(W, \mu) \notin \mathcal{G}$, $\forall \mu > \mu_M$.*

Prova: Veja [PGS94]. $\square$

Observações:

a) Note que se $\text{rank}(B_1) > n - \text{rank}(C)$, então $\text{Im}(B_1)$ não está contida no subespaço não observável de $[A - sI \ C]'$.

$$\text{b) } R \triangleq \begin{bmatrix} C' C & 0 \\ 0 & D' D \end{bmatrix}, R \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}.$$

c) Em [PGS94], mostra-se que sempre é possível encontrar um limitante μ_M algebricamente, considerando um $\zeta > 0$ “suficientemente pequeno” tal que $R_{\zeta} = R + \zeta I$, então a condição $x' \Theta(W, \mu) x \geq 0$ do conjunto $\mathcal{G}_{\infty}$, é sempre verificada para $\zeta \rightarrow 0^+$.

Seja

$$\mathcal{G}^* \triangleq \{(W, \mu) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R} \mid (W, \mu) \in \mathcal{G}_\infty, W \geq \epsilon I \text{ e } \mu \in [0; \mu_M]\}.$$

O conjunto $\mathcal{G}^*$, pelo Teorema (3.7), é compacto e o problema

$$(P \ 3.6) \quad \max \quad f(W, \mu) = \mu$$

$$\text{s.a} \quad (W, \mu) \in \mathcal{G}^*$$

é equivalente a (P 3.5), e (P 3.6) pode ser resolvido através de um método de Planos de Corte. A forma geral do algoritmo é a seguinte:

Algoritmo 3.2

PLANOS DE CORTE

passo 1: Construa um politopo inicial P_k tal que $\mathcal{G}^* \subseteq P_k$.

passo 2: Resolva o problema:

$$\max \quad f(W, \mu) = \mu$$

$$\text{s.a} \quad (W, \mu) \in P_k$$

Se este for infactível, então $\mathcal{G}^* = \emptyset$. Senão tem-se $(W_k, \mu_k) \in P_k$. Se $(W_k, \mu_k) \in \mathcal{G}^*$, então $(W_k, \mu_k) = (W_*, \mu_*)$, caso contrário:

passo 3: Determine um hiperplano que separa o ponto (W_k, μ_k) de $\mathcal{G}^*$. Atualize P_k obtendo P_{k+1} , incluindo como nova restrição, a inequação que define o semi-espaco limitado pelo hiperplano e que contém $\mathcal{G}^*$. Volte ao passo 2.

Cabe agora explicar como a profundidade do corte é definida, isto é, como são seleccionados os hiperplanos separadores.

Suponha que na j -ésima etapa, $j \in \mathbb{N}$, tem-se $(W_j, \mu_j) \notin \mathcal{G}^*$, com $W_j = W'_j$, $\mu_j \in [0; \mu_M]$ e um elemento qualquer $(W, \mu) \in \mathcal{G}^*$. Então $W_j \not\geq \epsilon I$ ou $\Theta(W_j, \mu_j) \not\leq 0$, isto é, $\lambda_{\min}(W_j) < \epsilon$ ou $\lambda_{\max}(\Theta(W_j, \mu_j)) > 0$, além disso:

- i) $\epsilon \leq \lambda_{\min}(W) \leq x_j' W x_j$, ou
- ii) $0 \geq \lambda_{\max}(\Theta(W, \mu)) \geq y_j'(\Theta(W, \mu))y_j$

onde, por exemplo, $x_j, y_j \in \mathbb{R}^n$ são os autovetores normalizados associados aos autovalores $\lambda_{\min}(W_j)$ e $\lambda_{\max}(\Theta(W_j, \mu_j))$, respectivamente.

Agora, a condição (i) pode ser escrita como $\epsilon \leq \langle x_j, W x_j \rangle$, mas $\langle x_j, W x_j \rangle = \text{tr}\{x_j(x_j' W)\} = \text{tr}\{(x_j x_j') W\} = \langle x_j x_j', W \rangle$, assim

$$i) \quad \epsilon \leq \langle x_j x_j', W \rangle = \langle (x_j x_j', 0), (W, \mu) \rangle ,$$

mostrando que se $(W_j, \mu_j) \notin \mathcal{G}^*$, por violar a primeira condição, $W_j \geq \epsilon I$, então $\mathcal{G}^*$ está contido no semi-espço: $\{(W, \mu) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R} \mid \langle (x_j x_j', 0), (W, \mu) \rangle \geq \epsilon\}$ e assim o hiperplano separador nesse caso é $H_j = \{(W, \mu) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R} \mid \langle (x_j x_j', 0), (W, \mu) \rangle = \epsilon\}$.

Com relação a condição (ii), a idéia chave consiste em escrevê-la como:

$$ii) \quad 0 \geq y_j' \Theta(W, \mu) y_j + y_j' \Theta(W_j, \mu_j) y_j - y_j' \Theta(W_j, \mu_j) y_j.$$

Então, desenvolvendo esta última expressão e usando o fato que:

$$W C' C W - W_j C' C W_j \geq W C' C W_j + W_j C' C W - 2 W_j C' C W_j ,$$

pois $(W - W_j) C' C (W - W_j) \geq 0$, obtém-se:

$$y_j' (A + W_j C' C) W y_j + y_j' W (A' + C' C W_j) y_j - y_j' W_j C' C W_j y_j + y_j' \mu B_1 B_1' y_j - y_j' B_2 B_2' y_j \leq 0$$

ou seja,

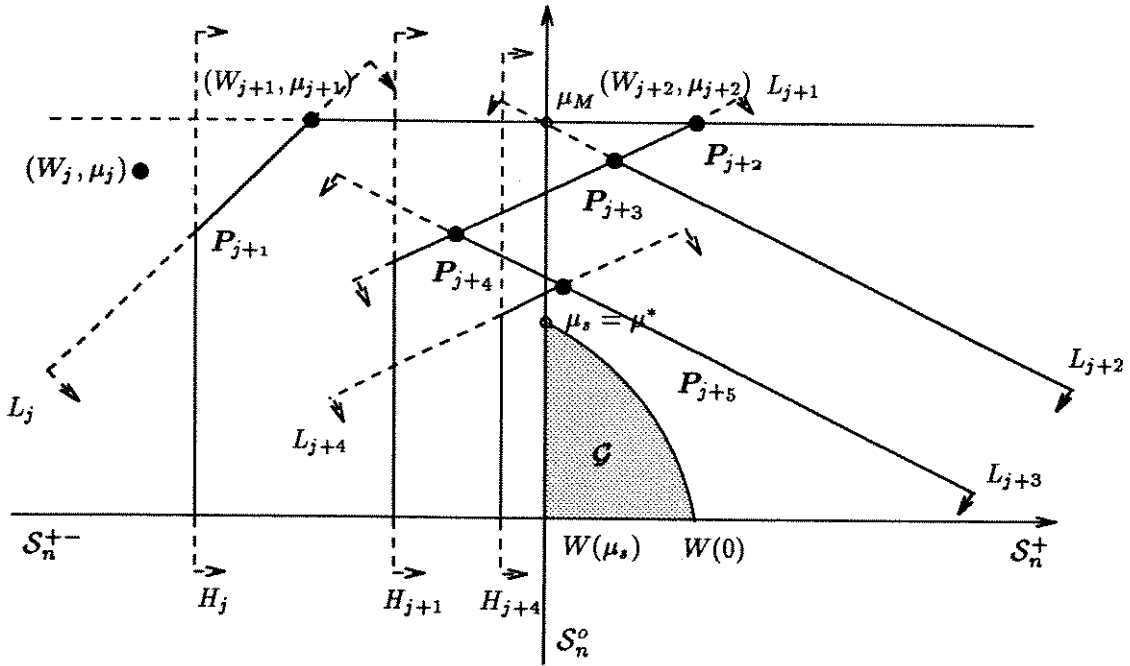
$$\text{tr}\{[y_j y_j' (A + W_j C' C) + (A + W_j C' C)' y_j y_j'] W\} + y_j' B_1 B_1' y_j \mu \leq y_j' (W_j C' C W_j + B_2 B_2') y_j$$

que finalmente, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & \langle (y_j y_j' (A + W_j C' C) + (A + W_j C' C)' y_j y_j' , y_j' B_1 B_1' y_j), (W, \mu) \rangle \\ & \leq y_j' (W_j C' C W_j + B_2 B_2') y_j \end{aligned} \quad (3.6)$$

Logo, se $(W_j, \mu_j) \notin \mathcal{G}^*$, por violar a segunda condição, $\Theta(W_j, \mu_j) \leq 0$, a inequação (3.6) mostra que $\mathcal{G}^*$ está contido no semi-espço por ela definido e o hiperplano separador L_j , neste caso, é aquele definido pela igualdade em (3.6).

A profundidade do corte é então definida acrescentando-se a cada passo, como restrições, as inequações que são violadas por (W_j, μ_j) . Como ilustração deste algoritmo veja a figura 3.1, onde na j -ésima iteração o par $(W_j, \mu_j) \notin \mathcal{G}^*$, portanto os dois hiperplanos separadores L_j e H_j geram o politopo P_{j+1} e como o novo par $(W_{j+1}, \mu_{j+1}) \notin \mathcal{G}^*$, o próximo politopo P_{j+2} é gerado a partir dos hiperplanos separadores H_{j+1} e L_{j+1} e $P_{j+2} \subset P_{j+1}$. O processo se estende até que a solução ótimo seja encontrada, isto é, $\exists(W, \mu) \in \mathcal{G}^*$. Note ainda que, pelo Teorema 3.3, $\varphi(\mu) = W(\mu)$ (onde $W(\mu)$ é a solução simétrica maximal de $\Theta(W, \mu) \triangleq R_\mu(W) = 0$) é não crescente e côncava em $[0; \mu_{\max}]$, então o gráfico de φ é representado pela curva côncava na figura 3.1. A convergência deste método é mostrada em [Lue84]. A caracterização de ocorrência de realimentação de alto ganho para aproximar o valor ótimo γ^* , pode ser detectada testando se, na solução ótima, W_* é singular [PGS94].



$$P_{j+1} \supset P_{j+2} \supset P_{j+3} \supset P_{j+4} \supset P_{j+5} \supset \dots \supset \mathcal{G}$$

Figura 3.1: Ilustração do método de planos de corte.

3.4.3 Sistemas Incertos

Considere sistemas como em (3.1) com a presença de incertezas nas matrizes A e B_2 , isto é, $A \in \mathcal{D}_A$ e $B_2 \in \mathcal{D}_B$ onde

$$\mathcal{D}_A \triangleq \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \alpha_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1\} \quad (3.7)$$

$$\mathcal{D}_B \triangleq \{B_2 \in \mathbb{R}^{n \times m} \mid B_2 = \sum_{j=1}^M \beta_j B_{2j}, \beta_j \geq 0 \text{ e } \sum_{j=1}^M \beta_j = 1\} \quad (3.8)$$

são conjuntos poliedrais convexos, de tal forma que quaisquer $A \in \mathcal{D}_A$ e $B_2 \in \mathcal{D}_B$ podem ser escritos como uma combinação convexa dos vértices do poliedro, expressos, pelas matrizes A_i e B_{2j} , respectivamente.

No caso de representação no espaço de estado, o conceito de estabilidade quadrática descreve o conjunto de ganhos que estabilizam o sistema sobre todo o domínio de incerteza.

Definição 3.1 - *O sistema incerto descrito por (3.1), (3.7) e (3.8) é dito ser quadraticamente estabilizável se existirem $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P = P' > 0$ e $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que:*

$$(A + B_2 K)'P + P(A + B_2 K) + B_1 B_1' < 0, \quad \forall A \in \mathcal{D}_A, \forall B_2 \in \mathcal{D}_B. \quad (3.9)$$

Definição 3.2 - *O sistema incerto definido por (3.1), (3.7) e (3.8), com (A, C) observável, é dito ser quadraticamente estabilizável com atenuação de distúrbios $\gamma > 0$ se e somente se existirem $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P = P' > 0$ e $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que:*

$$(A + B_2 K)'P + P(A + B_2 K) + P B_1 B_1' P + \gamma^{-2} (C + DK)'(C + DK) \leq 0, \quad (3.10)$$

$$\forall A \in \mathcal{D}_A, \forall B_2 \in \mathcal{D}_B.$$

Note que as inequações (3.9) e (3.10) poderiam ser testadas apenas nos sistemas “vértices” A_i , $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ e B_{2j} , $\forall j \in \{1, \dots, M\}$, afim de assegurar que ambas

as inequações verificam-se $\forall A \in \mathcal{D}$ e $\forall B_2 \in \mathcal{D}_B$. Observe ainda, que se o sistema incerto descrito por (3.1), (3.7) e (3.8) é quadraticamente estabilizável, logo (A, B_2) é estabilizável, $\forall A \in \mathcal{D}_A, \forall B_2 \in \mathcal{D}_B$.

Nesta seção, para a Abordagem Convexa, considere sistemas como em (3.1) apenas com a presença de incerteza na matriz A , ou seja, $A \in \mathcal{D}_A$ e B_2 precisamente conhecido.

Defina o conjunto

$$\mathcal{K}_Q \triangleq \{K \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid A + B_2 K \text{ é quadraticamente estável } \forall A \in \mathcal{D}_A\}.$$

Uma formulação similar ao problema (P 3.2), no contexto de sistemas incertos, é encontrar:

$$(P \ 3.7) \quad \gamma_Q = \min \{ \gamma \mid \|H\|_\infty \leq \gamma, K \in \mathcal{K}_Q \}$$

que é o chamado “problema de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ ” [PGS93].

Por analogia com o caso anterior, definem-se as funções $\Theta_i : \mathcal{S}_n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que

$$\Theta_i(W, \mu) \triangleq A_i W + W A_i' + W C' C W + \mu B_1 B_1' - B_2 B_2', \quad i \in \{1, \dots, N\}$$

e os conjuntos

$$\mathcal{G}_{\infty i} \triangleq \{(W, \mu) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R} \mid W = W' \geq \epsilon I, \mu \geq 0 \text{ e } x' \Theta_i(W, \mu) x \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n\},$$

$$i \in \{1, \dots, N\}$$

e

$$\mathcal{G}_Q \triangleq \bigcap_{i=1}^N \mathcal{G}_{\infty i}.$$

Pelo Teorema 3.6, segue que $\mathcal{G}_{\infty i}$ é convexo $\forall i \in \{1, \dots, N\}$; então $\mathcal{G}_Q$ também é convexo.

Teorema 3.9 - $\mathcal{G}_Q \neq 0$ se e somente se o sistema incerto definido por (3.1), (3.7) é quadraticamente estabilizável com atenuação de distúrbios γ . No caso afirmativo, o ganho estabilizante é dado por $K = -B_2'W^{-1}$, $(W, \mu) \in \mathcal{G}_Q$

Prova: Se $\mathcal{G}_Q \neq 0$, existe $(W, \mu) \in \mathcal{G}_Q$, e então

$$A_i W + W A_i' + W C' C W + \mu B_1 B_1' - B_2 B_2' \leq 0, \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (3.11)$$

fazendo $P = W^{-1}$ e multiplicando-se (3.11) à direita e à esquerda por P e ainda somando-se e subtraindo-se $P B_2 B_2' P$ (lembrando que $D' D = I$ e $D' C = 0$), tem-se:

$$\begin{aligned} P(A_i - B_2 B_2' P) + (A_i - B_2 B_2' P)' P + C' C + P B_2 B_2' P \\ + \mu P(B_1 B_1') P \leq 0, \forall i \in \{1, \dots, N\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

ou seja,

$$A_i' P + P A_i + C_f' C_f + \mu P B_1 B_1' P \leq 0, \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

implicando que o sistema incerto é quadraticamente estável com atenuação de distúrbios $\gamma = 1/\sqrt{\mu}$.

Agora, se o sistema incerto definido por (3.1), (3.7) é quadraticamente estável com atenuação de distúrbios γ , existem $P = P' > 0$ e K tais que, com $\mu = \gamma^{-2}$,

$$A_f' P + P A_f + C_f' C_f + \mu P B_1 B_1' P \leq 0, \forall A \in \mathcal{D}.$$

Desenvolvendo esta última inequação, tem-se

$$A' P + P A + \mu P B_1 B_1' P + C' C + (B_2' P - K)' (B_2' P - K) - P B_2 B_2' P \leq 0, \forall A \in \mathcal{D}$$

mas como $(B_2' P - K)' (B_2' P - K) \geq 0$,

$$A' P + P A + C' C + P(\mu B_1 B_1' - B_2 B_2') P \leq 0 \quad (3.13)$$

se verifica $\forall A \in \mathcal{D}_A$, e, em particular, nos vértices A_i , $\forall i \in \{1, \dots, N\}$. Finalmente, com $W = P^{-1}$, multiplicando (3.13) à direita e à esquerda por W segue que

$$x' \Theta_i(W, \mu) x \leq 0, \forall i \in \{1, \dots, N\} \text{ e } \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

isto é, $(W, \mu) \in \mathcal{G}_Q$. □

Pelo teorema anterior, segue que os elementos do conjunto convexo $\mathcal{G}_Q$ permitem determinar ganhos que estabilizam quadraticamente o sistema. Desta forma, pode-se reescrever o problema (P 3.7) como: encontrar

$$(P \ 3.8) \quad \mu^* = \sup \{ \mu \mid (W, \mu) \in \mathcal{G}_Q \}$$

Teorema 3.10 - Considere $(W_*, \mu^*) \in \mathcal{G}_Q$ como a solução ótima de (P 3.8). Então $K^* = -B_2' W_*^{-1}$ e $\gamma_Q = 1/\sqrt{\mu^*}$ solucionam (P 3.7).

Prova: Pelo teorema anterior, $(W_*, \mu^*) \in \mathcal{G}_Q$ garante que o sistema incerto definido por (3.1), (3.7) é quadraticamente estabilizável com atenuação de distúrbios $\gamma^* = 1/\sqrt{\mu^*}$ e ganho estabilizante $K^* = -B_2' W_*^{-1}$. Logo, $\gamma^* \in \{ \gamma \mid K \in \mathcal{K}_Q, \|H\|_\infty \leq \gamma \}$ e $\gamma_Q \leq \gamma^*$.

Por outro lado, como μ_* é solução ótima global de (P 3.8), γ^* é o menor limitante da norma $\mathcal{H}_\infty$, $\forall A \in \mathcal{D}_A$ (no sentido da definição (3.2), para B_2 precisamente conhecido) e então $\gamma^* \leq \gamma_Q$, isto é, $\gamma^* = \gamma_Q$. □

Este teorema mostra que resolver o problema convexo (P 3.8) é equivalente a resolver o problema (P 3.7). Observe que (P 3.8) envolve conjuntamente o ganho K (que estabiliza quadraticamente o sistema), e a atenuação de distúrbios γ no processo de otimização. Além disso, por analogia com o caso de sistemas precisamente conhecidos na subseção 3.4.1, um limitante superior para μ pode se calculado [PGS94], da forma

$$\mu_M = \min \{ \mu(A_i) \mid i = 1, \dots, N \},$$

com

$$\mu(A_i) = \min \{ \mu > 0 \mid \det(V_{A_i}' V_{A_i} - \mu R) = 0 \}$$

onde R e V_{A_i} foram definidos no Teorema 3.8, com $A = A_i$. Então, o problema: encontrar

$$(P \ 3.9) \quad \mu^* = \sup \{ \mu \mid (W, \mu) \in \mathcal{G}_Q, \mu \in [0; \mu_M] \}$$

que é equivalente ao problema convexo (P 3.8), também pode ser resolvido por um método de planos de corte.

3.4.4 Controle Descentralizado

Como apontado em [GBP94] a hipótese do uso de estrutura descentralizada aparece naturalmente em processos onde o controle é alcançado através de vários agentes cujas localizações são distribuídas geograficamente. É o caso, por exemplo, do controle de sistemas de potência, redes de comunicação, redes de transporte e processos de manufatura flexíveis.

Considere nesta subseção sistemas lineares invariantes no tempo como dado em (3.1) com controle descentralizado, isto é, com a exigência que o ganho K tenha uma estrutura bloco diagonal. Nesse sentido é suficiente ter as matrizes B_2 e W com estruturas bloco diagonal. Assumindo

$$B_{2D} = \text{bloco diag. } \{B_2^1, \dots, B_2^M\},$$

impõe-se então,

$$W_D = \text{bloco diag. } \{W^1, \dots, W^M\}$$

e portanto $K_D = -B_{2D}' W_D^{-1}$.

Como estas imposições dizem respeito apenas à estrutura da matriz de ganho do controle, o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ para o caso descentralizado pode ser visto como um sub-problema do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$, isto é, deseja-se encontrar:

$$(P \ 3.10) \quad \gamma_D^* = \inf \{ \gamma \mid K \in \mathcal{K}_{\gamma D} \}$$

com $\mathcal{K}_{\gamma D} \triangleq \{K_D \in \mathcal{K} \mid \|H\|_\infty \leq \gamma\}$.

Este problema (P 3.10) pode ser facilmente tratado com a abordagem convexa, bastando impor a W uma estrutura bloco diagonal. Todos os resultados obtidos para o caso de sistemas precisamente conhecidos e sistemas incertos podem ser reescritos, apenas com a restrição adicional sobre $W = W_D$. As demonstrações são inteiramente análogas.

Teorema 3.11 - *As seguintes afirmações são verdadeiras para $W = W_D$, supondo (A, C) observável e o par (A, B_2) estabilizável.*

- i) *Se $(W_D, \mu_D) \in \mathcal{G}^*$, então o sistema (3.1) é estabilizável com atenuação de distúrbios $\gamma = 1/\sqrt{\mu_D}$ e $K_D = -B'_{2D}W_D^{-1} \in \mathcal{K}$.*
- ii) *Se (W_{D^*}, μ_D^*) é a solução ótima do problema $\sup \{\mu \mid (W_D, \mu_D) \in \mathcal{G}^*\}$, então $K_D^* = -B'_{2D}W_{D^*}^{-1}$ e $\gamma_D^* = 1/\sqrt{\mu_D^*}$ solucionam o problema (P 3.10).*

Agora, definindo o conjunto

$$\mathcal{K}_{QD} \triangleq \{K_D \mid K_D \in \mathcal{K}_Q\},$$

então para sistemas incertos definidos por (3.1) e (3.7) com controle descentralizado, o problema de otimização é dado por: encontrar

$$(P \ 3.11) \quad \gamma_{QD}^* = \inf \{ \gamma \mid \|H\|_\infty \leq \gamma, K_D \in \mathcal{K}_{QD} \}$$

Teorema 3.12 - *As seguintes afirmações são verdadeiras*

- i) *Se existe $(W_D, \mu_D) \in \mathcal{G}_Q$, então o sistema incerto definido por (3.1), (3.7) é quadraticamente estabilizável com atenuação de distúrbios γ e ganho estabilizante descentralizado $K_D = -B'_{2D}W_D^{-1}$, soluções sub-ótimas do problema (P 3.11).*
- ii) *Se (W_{D^*}, μ_D) é a solução ótima do problema $\sup \{\mu \mid (W_D, \mu_D) \in \mathcal{G}_Q \text{ e } \mu_D \in [0; \mu_M]\}$, então $K_D^* = -B'_{2D}W_{D^*}^{-1}$ e $\gamma_{QD}^* = 1/\sqrt{\mu_D^*}$ solucionam (P 3.11).*

Note que este último teorema apresenta resultados idênticos aos dos Teoremas 3.9 e 3.10, com a restrição estrutural $W = W_D$.

3.5 Abordagem via LMIs

3.5.1 Sistemas Precisamente Conhecidos

Esta seção procura caracterizar a solubilidade do problema de otimização $\mathcal{H}_\infty$ em termos da solvabilidade de uma inequação matricial quadrática que representa uma restrição a norma $\mathcal{H}_\infty$, que posteriormente é convertida em LMI.

Teorema 3.13 - *Seja $\gamma > 0$ dado. Para (A, B_2) estabilizável e (A, C) observável, existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $\|H\|_\infty \leq \gamma$ se e somente se existe $(Z, Y) \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathcal{S}_n^+$ satisfazendo*

$$AY + YA' + B_2Z + Z'B_2' + B_1B_1' + \gamma^{-2}(CY + DZ)'(CY + DZ) \leq 0 \quad (3.14)$$

No caso afirmativo, o ganho estabilizante é dado por $K = ZY^{-1}$.

Prova: Assuma que existe $K \in \mathcal{K}$ tal que

$$\|(C + DK)(sI - A - B_2K)^{-1}B_1\| \leq \gamma$$

então pelo Teorema 2.5, a inequação de Riccati

$$(A + B_2K)Y + Y(A + B_2K)' + \gamma^{-2}Y(C + DK)'(C + DK)Y + B_1B_1' \leq 0 \quad (3.15)$$

tem uma solução $Y = Y' > 0$. Desenvolvendo a inequação (3.15), com a hipótese de ortogonalidade $C'D = 0$ tem-se

$$AY + B_2KY + YA' + YK'B_2' + B_1B_1' + \gamma^{-2}(YC'CY + YK'KY) \leq 0.$$

Definindo $Z = KY$, $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (transformação paramétrica também utilizada em [BGP89]), obtém-se finalmente

$$AY + YA' + B_2Z + Z'B_2' + B_1B_1' + \gamma^{-2}(CY + DZ)'(CY + DZ) \leq 0$$

ou seja, o par $(Z, Y) \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathcal{S}_n^+$ satisfaz (3.14).

Agora suponha que exista um par $(Z, Y) \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathcal{S}_n^+$, então

$$AY + YA' + B_2Z + Z'B_2' + B_1B_1' + \gamma^{-2}(CY + DZ)'(CY + DZ) \leq 0,$$

que pode ser reescrita

$$(A + B_2ZY^{-1})Y + Y(A + B_2ZY^{-1})' + B_1B_1' + \gamma^{-2}Y(C + DZY^{-1})'(C + DZY^{-1})Y \leq 0$$

implicando pelo Teorema 2.5 que $K = ZY^{-1}$ é um ganho que estabiliza assintoticamente o sistema (3.1) com atenuação de distúrbios γ . $\square$

Define-se o mapeamento $\Lambda : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathcal{S}_n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, dado por

$$\Lambda(Z, Y, \gamma^{-2}) \triangleq AY + YA' + B_2Z + Z'B_2' + B_1B_1' + \gamma^{-2}(CY + DZ)'(CY + DZ)$$

Reescrevendo a inequação matricial quadrática

$$\Lambda(Z, Y, \gamma^{-2}) \leq 0$$

na forma de uma LMI⁷, e definindo ainda a função $\Upsilon : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathcal{S}_n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, obtém-se

$$\Upsilon(Z, Y, \gamma^2) = \begin{bmatrix} -(AY + YA' + B_2Z + Z'B_2' + B_1B_1') & -YC' - Z'D' \\ -CY - DZ & \gamma^2 I \end{bmatrix} \geq 0$$

e tomando $\varrho \triangleq \gamma^2$ segue que

$$\Upsilon(Z, Y, \varrho) = \begin{bmatrix} -(AY + YA' + B_2Z + Z'B_2' + B_1B_1') & -YC' - Z'D' \\ -CY - DZ & \varrho I \end{bmatrix} \geq 0$$

Observe que o vetor de decisão é composto de $n(n+1)/2$ entradas livres da matriz simétrica Y , $(n \times m)$ da matriz Z e uma entrada livre correspondente ao escalar ϱ .

⁷Veja Apêndice A.

Definindo agora os conjuntos

$$\mathcal{V}_\infty(\varrho) \triangleq \{(Z, Y) \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathcal{S}_n \mid Y > 0, z' \Upsilon(Z, Y, \varrho) z \geq 0, \forall z \in \mathbb{R}^{n+q}\}$$

$$\mathcal{V}_\infty \triangleq \{(Z, Y, \varrho) \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathcal{S}_n \times \mathbb{R} \mid Y > 0, \varrho > 0, z' \Upsilon(Z, Y, \varrho) z \geq 0, \forall z \in \mathbb{R}^{n+q}\}$$

está claro que qualquer elemento $(Z, Y, \varrho) \in \mathcal{V}_\infty$ se e somente se $(Z, Y) \in \mathcal{V}_\infty(\varrho)$.

Teorema 3.14 - Dado $\varrho > 0$, para o sistema definido em (3.1) as seguintes afirmações são verdadeiras:

i) $\mathcal{V}_\infty(\varrho)$ é convexo.

ii) $\mathcal{V}_\infty(\varrho) \neq \emptyset$ se e somente se (A, B_2) é estabilizável e (A, C) é observável com $\|H\|_\infty \leq \sqrt{\varrho}$ e o ganho estabilizante é, neste caso, $K = ZY^{-1}$.

Prova: Para o caso (i) sejam $(Z_1, Y_1), (Z_2, Y_2) \in \mathcal{V}_\infty(\varrho)$, $\alpha \in [0; 1]$ e $(Z, Y) = \alpha(Z_1, Y_1) + (1 - \alpha)(Z_2, Y_2)$, e de forma equivalente ao desenvolvimento do Teorema 2.6, somando e subtraindo $\alpha B_1 B_1'$ de forma conveniente, chega-se ao seguinte resultado

$$\Upsilon(Z, Y, \varrho) = \alpha \Upsilon(Z_1, Y_1, \varrho) + (1 - \alpha) \Upsilon(Z_2, Y_2, \varrho) \geq 0$$

portanto $(Z, Y) \in \mathcal{V}_\infty(\varrho)$.

Para o item (ii) assuma que $\mathcal{V}_\infty(\varrho) \neq \emptyset$, então existe $(Z, Y) \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathcal{S}_n^+$ tal que

$$\Upsilon(Z, Y, \varrho) = \begin{bmatrix} -(AY + YA' + B_2 Z + Z' B_2' + B_1 B_1') & -YC' - Z' D' \\ -CY - DZ & \varrho I \end{bmatrix} \geq 0$$

que pode ser reescrita como uma inequação matricial quadrática (veja Apêndice A), lembrando que $\varrho \triangleq \gamma^2$, isto é,

$$AY + YA' + B_2Z + Z'B_2' + B_1B_1' + \gamma^{-2}(CY + DZ)'(CY + DZ) \leq 0$$

e, pelo Teorema 3.13, existe $K = ZY^{-1}$ que estabiliza o sistema com $\|H\|_\infty \leq \gamma = \sqrt{\bar{\rho}}$.

Agora, supondo que o par (A, B_2) é estabilizável e (A, C) é observável com $\|H\|_\infty \leq \gamma = \sqrt{\bar{\rho}}$, segue pelo mesmo Teorema 3.13, que existe $(Z, Y) \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathcal{S}_n^+$ de tal forma que

$$\Lambda(Z, Y, \gamma^{-2}) \leq 0$$

isto é,

$$\Upsilon(Z, Y, \rho) \geq 0$$

ou seja, $\mathcal{V}_\infty(\rho) \neq \emptyset$. □

É importante ressaltar que este último teorema assim como o Teorema 3.13 permitem estabelecer que se $\mathcal{V}_\infty(\rho) \neq \emptyset$, então a função $\phi : \mathcal{V}_\infty(\rho) \rightarrow \mathcal{K}_\gamma$ de tal forma que $\phi(Z, Y) = ZY^{-1}$ está bem definida e é injetiva, portanto o conjunto $\mathcal{K}_\gamma$ (pag. 36) contém os ganhos estabilizantes para o par (A, B_2) com atenuação de distúrbios $\gamma = \sqrt{\bar{\rho}}$.

Além disso, pelo Teorema 3.14 e pela forma como foi definido o conjunto $\mathcal{V}_\infty$, o problema de otimização proposto em (P 3.2) pode ser formulado de modo equivalente como: encontrar

$$(P \ 3.12) \quad \rho^* = \inf \{ \rho \mid (Z, Y, \rho) \in \mathcal{V}_\infty \}$$

Repare que, na forma como foi colocado, o problema (P 3.12) permite trabalhar, ao mesmo tempo, com o limitante ρ e com o ganho estabilizante K . Este último está relacionado com o par (Z, Y) como estabelecido no Teorema 3.14, caracterizando portanto um problema $\mathcal{H}_\infty$ ótimo, onde $(Z, Y, \rho)^*$ é a solução ótima de (P 3.12) e $K^* = Z^*Y_*^{-1}$ (se $Y_* > 0$) é o ganho ótimo com $\gamma^* = \sqrt{\rho^*}$.

Teorema 3.15 - *O problema (P 3.12) é um problema convexo.*

Prova: A convexidade do conjunto $\mathcal{V}_\infty$ segue imediatamente da convexidade do conjunto $\mathcal{V}_\infty(\varrho)$, e como a função objetivo do problema (P 3.12) é linear, o mesmo é convexo. $\square$

Defina o conjunto

$$\mathcal{V}_\infty^* \triangleq \{(Z, Y, \varrho) \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathcal{S}_n \times \mathbb{R} \mid (Z, Y, \varrho) \in \mathcal{V}_\infty, Y > \epsilon I, \varrho \geq 0\}$$

com $\epsilon > 0$ arbitrariamente “pequeno”. Considere então o problema de otimização

$$\begin{aligned} \text{(P 3.13)} \quad & \min \quad \varrho \\ \text{s.a} \quad & (Z, Y, \varrho) \in \mathcal{V}_\infty^* \end{aligned}$$

Observe que se (P 3.13) é factível logo (P 3.12) também é da mesma forma. Note ainda que o conjunto convexo $\mathcal{V}_\infty^*$ é um conjunto fechado. O problema (P 3.13) pode então ser solucionado utilizando o pacote computacional LMI-Lab [GN93a], [GN93b].

O Problema (P 3.13) da mesma forma como na seção 3.4.2 pode também ser solucionado via técnicas de planos de corte, considerando o mesmo algoritmo 3.2 e, onde se lê $\mathcal{G}^*$ e $\max \mu$, passa-se a anotar $\mathcal{V}_\infty^*$ e $\min \varrho$, respectivamente. Os hiperplanos separadores são então escolhidos como segue.

Suponha que na j -ésima etapa, $j \in \mathbb{N}$, tem-se $(Z_j, Y_j, \varrho_j) \notin \mathcal{V}_\infty^*$, com $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Y_j \in \mathcal{S}_n^+$, $\varrho_j \geq 0$ e um elemento qualquer $(Z, Y, \varrho) \in \mathcal{V}_\infty^*$. Então pode ocorrer que $Y_j \not\geq \epsilon I$ ou $\Upsilon(Z_j, Y_j, \varrho_j) \not\geq 0$, isto é, $\lambda_{\min}(Y_j) < \epsilon I$ ou $\lambda_{\min}(\Upsilon(Z_j, Y_j, \varrho_j)) < 0$, e ainda deseja-se:

- i) $\epsilon \leq \lambda_{\min}(Y) \leq v_j' Y v_j$, ou
- ii) $0 \geq \lambda_{\min}(\Upsilon(Z, Y, \varrho)) \geq z_j' (\Upsilon(Z, Y, \varrho)) z_j$

sendo, $v_j \in \mathbb{R}^n$ e $z_j \in \mathbb{R}^{n+q}$ os autovetores normalizados associados aos respectivos autovalores $\lambda_{\min}(Y_j)$ e $\lambda_{\min}(\Upsilon(Z_j, Y_j, \varrho_j))$. Usando as seguintes igualdades $\langle v_j, Y v_j \rangle = \text{tr}\{v_j(v_j' Y)\} = \text{tr}\{(v_j v_j') Y\} = \langle v_j v_j', Y \rangle$, segue que o item (i) pode ser então reescrito como

$$i) \quad \epsilon \leq \langle v_j v_j', Y \rangle = \langle (0, v_j v_j', 0), (Z, Y, \varrho) \rangle$$

mas desde que $(Z_j, Y_j, \varrho_j) \notin \mathcal{V}_\infty^*$, então o conjunto $\mathcal{V}_\infty^*$ está contido no semi-espaço gerado em (i) e o hiperplano separador V_j é aquela dado pela igualdade em (i).

Considerando agora a condição (ii), tem-se que

$$\text{tr}\{z_j' \Upsilon(Z, Y, \varrho) z_j\} = \text{tr}\{z_j z_j' \Upsilon(Z, Y, \varrho)\} \geq 0$$

que pode ser reescrito como

$$\text{tr} \left\{ \begin{bmatrix} z_j^{11} & z_j^{12} \\ z_j^{21} & z_j^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(AY + YA' + B_2 Z + Z' B_2' + B_1 B_1') & -YC' - Z'D' \\ -CY - DZ & \varrho I \end{bmatrix} \right\} \geq 0$$

e desenvolvendo esta última expressão (note que $z_j^{12} = u_j^{21}$) obtém-se

$$\begin{aligned} & \text{tr}\{-z_j^{11}AY - z_j^{11}YA' - z_j^{11}B_2Z - z_j^{11}Z'B_2' - z_j^{11}B_1B_1' \\ & - z_j^{12}YC' - z_j^{12}Z'D - z_j^{21}CY - z_j^{21}DZ + z_j^{22}\varrho I\} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{tr}\{(-z_j^{11}A - A'z_j^{11} - C'z_j^{12} - z_j^{21}C)Y + 2(-z_j^{11}B_2 - z_j^{21}D)Z + z_j^{22}\varrho\} \geq \text{tr}\{z_j^{11}B_1B_1'\}$$

e finalmente segue que

$$\begin{aligned} & \langle ((-2z_j^{11}B_2 - 2z_j^{21}D), (-z_j^{11}A - A'z_j^{11} - C'z_j^{12} - z_j^{21}C), z_j^{22}), (Z, Y, \varrho) \rangle \\ & \geq \text{tr}\{z_j^{11}B_1B_1'\}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Então se $(Z_j, Y_j, \varrho_j) \notin \mathcal{V}_\infty^*$, o conjunto $\mathcal{V}_\infty^*$ está contido no semi-espaço gerado por (3.16) e o hiperplano separador U_j é dado pela igualdade em (3.16).

Da mesma forma que em [KR91], o problema de minimização de um critério de desempenho $\mathcal{H}_2$ sujeito a restrições $\mathcal{H}_\infty$ na forma de LMIs poderia ser tratado com esta abordagem (problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$).

3.5.2 Sistemas Incertos

Os resultados da abordagem via LMIs podem ser estendidos para sistemas lineares como em (3.1), com A e B_2 incertos, ou seja, $A \in \mathcal{D}_A$ e $B_2 \in \mathcal{D}_B$, onde os conjuntos poliedrais convexos $\mathcal{D}_A$ e $\mathcal{D}_B$ são definidos em (3.7) e (3.8).

O problema (P 3.7) pode então ser reformulado no contexto dos domínios de incerteza $\mathcal{D}_A$ e $\mathcal{D}_B$ como:

$$(P \ 3.14) \quad \gamma_{ge} = \inf \{ \gamma \mid \|H\|_\infty \leq \gamma, K \in \mathcal{K}_{ge} \}$$

onde

$$\mathcal{K}_{ge} \triangleq \{ K \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid A + B_2 K \text{ é quadraticamente estável, } \forall A \in \mathcal{D}_A, \forall B_2 \in \mathcal{D}_B \}.$$

Considere os mapeamentos $\Lambda_{ij} : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathcal{S}_n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, dados por

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij}(Z, Y, \gamma^{-2}) &\triangleq A_i Y + Y A_i' + B_{2j} Z + Z' B_{2j}' + B_1 B_1' \\ &+ \gamma^{-2} (CY + DZ)' (CY + DZ), \quad i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, M\} \end{aligned}$$

As inequações matriciais quadráticas

$$\Lambda_{ij}(Z, Y, \gamma^{-2}) \leq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall j \in \{1, \dots, M\}$$

podem ser reformuladas como LMIs, definindo as funções $\Upsilon_{ij} : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathcal{S}_n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+q \times n+q}$, de tal forma que:

$$\begin{aligned} \Upsilon_{ij}(Z, Y, \varrho) &= \begin{bmatrix} -(A_i Y + Y A_i' + B_{2j} Z + Z' B_{2j}' + B_1 B_1') & -Y C' - Z' D' \\ -CY - DZ & \varrho I \end{bmatrix} \geq 0, \\ &\quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall j \in \{1, \dots, M\} \end{aligned}$$

onde $\varrho \triangleq \gamma^2$. Defina ainda os conjuntos

$$\mathcal{V}_{\infty ij} \triangleq \{(Z, Y, \varrho) \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathcal{S}_n \times \mathbb{R} \mid Y \geq \epsilon I, \varrho \geq 0, u' \Upsilon_{ij}(Z, Y, \varrho) u \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}^{n+q}\},$$

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall j \in \{1, \dots, M\}$$

e

$$\mathcal{V}_{ge} \triangleq \bigcap_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, M}} \mathcal{V}_{\infty ij}$$

A convexidade dos conjuntos $\mathcal{V}_{\infty ij}$, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, $\forall j \in \{1, \dots, M\}$ segue imediatamente do Teorema 3.15, e desta forma a interseção de conjuntos convexos gera o conjunto convexo $\mathcal{V}_{ge}$.

Teorema 3.16 - $\mathcal{V}_{ge} \neq \emptyset$ se e somente se o sistema incerto descrito por (3.1), (3.7) e (3.8) é quadraticamente estabilizável com atenuação de distúrbios γ . Em caso afirmativo, o ganho estabilizante é dado por $K = ZY^{-1}$.

Prova: Se $\mathcal{V}_{ge} \neq \emptyset$, logo existe $(Z, Y, \varrho) \in \mathcal{V}_{ge}$, e então

$$\Upsilon_{ij}(Z, Y, \varrho) \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall j \in \{1, \dots, M\}$$

que são equivalentes (Apêndice A) às inequações matriciais quadráticas,

$$\Lambda_{ij}(Z, Y, \gamma^{-2}) \leq 0, \forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall j \in \{1, \dots, M\} \quad (3.17)$$

com $\varrho \triangleq \gamma^2$. Desenvolvendo a inequação (3.17), lembrando que $C'D = 0$, tem-se

$$(A_i + B_{2j}ZY^{-1})Y + Y(A_i' + B_{2j}'ZY^{-1}) + B_1B_1' + \gamma^2 Y(C + DZY^{-1})'(C + DZY^{-1})Y \leq 0, \forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall j \in \{1, \dots, M\} \quad (3.18)$$

fazendo $P = Y^{-1}$, $K = ZY^{-1}$ e multiplicando (3.18) à direita e à esquerda por P chega-se a

$$(A_i + B_{2j}K)'P + P(A_i + B_{2j}K) + PB_1B_1'P + \gamma^{-2}(C + DK)'(C + DK) \leq 0, \\ \forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall j \in \{1, \dots, M\}.$$

Logo o sistema incerto é quadraticamente estável com atenuação de distúrbios $\gamma = \sqrt{\rho}$.

Suponha agora que existam $P = P' > 0$ e K tais que

$$(A + B_2K)'P + P(A + B_2K) + PB_1B_1'P + \gamma^{-2}(C + DK)'(C + DK) \leq 0, \quad (3.19) \\ \forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall j \in \{1, \dots, M\}.$$

Fazendo $Y = P^{-1}$ e multiplicando (3.19) à direita e à esquerda por Y e ainda definindo $Z = KY$, $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ implica que

$$AY + YA' + B_2Z + Z'B_2' + B_1B_1' + \gamma^{-2}(CY + DZ)'(CY + DZ) \leq 0$$

se verifica $\forall A \in \mathcal{D}_A$, $\forall B_2 \in \mathcal{D}_B$ e, em particular, nos vértices A_i , $\forall i \in \{1, \dots, N\}$; B_{2j} , $\forall j \in \{1, \dots, M\}$. Segue então que

$$v' \Lambda_{ij}(Z, Y, \gamma^{-2})v \leq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall j \in \{1, \dots, M\}, \forall v \in \mathbb{R}^n$$

que são equivalentes a (lembrando que $\rho \triangleq \gamma^2$):

$$z' \Upsilon_{ij}(Z, Y, \rho)z \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall j \in \{1, \dots, M\}, \forall v \in \mathbb{R}^{n+q},$$

logo $(Z, Y, \rho) \in \mathcal{V}_{qe}$. □

Note que este último teorema estabelece que cada elemento do conjunto $\mathcal{V}_{qe}$ permite determinar um ganho que estabiliza quadraticamente o sistema incerto. Assim o problema (P 3.14) pode ser reformulado como: encontrar

$$(P \ 3.15) \quad \rho^* = \inf \{ \rho \mid (Z, Y, \rho) \in \mathcal{V}_{qe} \}$$

Como $\mathcal{V}_{qe}$ é um conjunto convexo e a função objetivo do problema (P 3.15) é linear, o mesmo é um problema convexo. Repare ainda que (P 3.15) envolve ao mesmo tempo, no processo de otimização, o ganho $K = ZY^{-1} \in \mathcal{K}_{qe}$ e a atenuação de distúrbios $\gamma = \sqrt{\varrho}$. Da mesma forma que no Teorema 3.10, se $(Z, Y, \varrho)^* \in \mathcal{V}_{qe}$ é a solução ótima de (P 3.15), então $K^* = Z^*Y_*^{-1}$ é o ganho ótimo e $\gamma_{qe} = \sqrt{\varrho^*}$, e portanto resolver o problema convexo (P 3.15) é equivalente a resolver o problema (P 3.14).

3.5.3 Controle Descentralizado

Esta seção segue a mesma linha de apresentação da seção 3.4.4 (onde uma breve discussão foi realizada), isto é, visa-se construir um ganho K com estrutura bloco diagonal de tal forma que o sistema (3.1) seja estável. Assim, uma condição suficiente é exigir que as matrizes que compõem o ganho $K = ZY^{-1}$ também tenham estrutura bloco diagonal. Assim impõe-se

$$Y_D = \text{bloco diag. } \{Y^1, \dots, Y^M\}$$

e

$$Z_D = \text{bloco diag. } \{Z^1, \dots, Z^M\}$$

seguinte que $K_D = Z_D Y_D^{-1}$. Note que, neste caso, B_2 não necessariamente precisa ser bloco diagonal.

A imposição de uma estrutura descentralizada a matriz de ganho do controle, faz com que o problema de controle descentralizado $\mathcal{H}_\infty$ possa ser encarado como um “sub-problema” de controle $\mathcal{H}_\infty$, isto é, um pouco mais restrito. Portanto, o problema (P 3.10) permanece válido, transcrito novamente por conveniência como problema (P 3.16):

$$(P \ 3.16) \quad \gamma_D^* = \inf \{ \gamma \mid K \in \mathcal{K}_{\gamma_D} \}$$

com $\mathcal{K}_{\gamma_D} \triangleq \{K_D \in \mathcal{K} \mid \|H\|_\infty \leq \gamma\}$.

As demonstrações adotadas, nesta seção 3.5, são estendidas aos casos de sistemas precisamente conhecidos e incertos com estrutura descentralizada para a abordagem via LMIs.

Teorema 3.17 - *As seguintes afirmações são verdadeiras, supondo (A, B_2) estabilizável e (A, C) observável ⁸:*

i) *Se $(Z_D, Y_D, \varrho_D) \in \mathcal{V}_\infty^*$ (com $\varrho_D \triangleq \gamma^2$), então o sistema (3.1) é estabilizável com atenuação de distúrbios γ e o ganho é dado por $K_D = Z_D Y_D^{-1}$.*

ii) *Se $(Z_D, Y_D, \varrho_D)^*$ é a solução ótima do problema convexo*

$$\begin{aligned} \min \quad & \varrho \\ \text{s.a} \quad & (Z_D, Y_D, \varrho_D) \in \mathcal{V}_\infty^* \end{aligned}$$

então $K_D^ = Z_D^* Y_D^{*-1}$ é o ganho ótimo.*

Considere agora sistemas incertos descritos por (3.1), (3.7) e (3.8), então o problema de otimização é idêntico ao problema (P 3.11), modificando-se apenas o domínio de incerteza. Assim

$$(P \ 3.17) \quad \gamma_{qeD}^* = \inf \{ \gamma \mid \|H\|_\infty \leq \gamma, K_D \in \mathcal{K}_{qe} \}$$

Teorema 3.18 - *As seguintes afirmações são verdadeiras ⁹:*

i) *Se $(Z_D, Y_D, \varrho_D) \in \mathcal{V}_{qe}$ (com $\varrho_D \triangleq \gamma^2$), então o sistema incerto definido por (3.1), (3.7) e (3.8) é quadraticamente estabilizável com atenuação de distúrbios γ e o ganho estabilizante é dado por $K_D = Z_D Y_D^{-1}$.*

ii) *Se $(Z_D, Y_D, \varrho_D)^*$ é a solução ótima do problema convexo*

$$\begin{aligned} \min \quad & \varrho \\ \text{s.a} \quad & (Z_D, Y_D, \varrho_D) \in \mathcal{V}_{qe} \end{aligned}$$

então $K_D^ = Z_D^* Y_D^{*-1}$ é o ganho ótimo.*

Note que a estrutura desta seção não difere em muito da correspondente seção de controle descentralizado para a Abordagem Convexa. As demonstrações dos Teoremas 3.17, 3.18 seguem a mesma linha daquelas dos Teoremas 3.14, 3.16, respectivamente, com a imposição $Y = Y_D$ e $Z = Z_D$.

⁸O conjunto $\mathcal{V}_\infty^*$ é definido na pag. 59.

⁹O conjunto $\mathcal{V}_{qe}$ é definido na pag. 62.

3.6 Conclusão

Neste capítulo, são discutidas três abordagens para o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ ótimo e sub-ótimo por realimentação de estado, no sentido de encontrar formas de alcançar soluções para o mesmo e, ainda, caracterizar a otimalidade.

A princípio, o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ originalmente formulado em (P 3.1) se mostra muito difícil de ser solucionado diretamente no espaço de parâmetros dos ganhos admissíveis $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{m \times n}$. Uma formulação iterativa (P 3.3), baseada na solvabilidade de uma equação algébrica tipo Riccati e em propriedades de suavidade de uma função φ (Teorema 3.3), pode ser usada, contornando a limitação inicial. Esta formulação estabelece ainda que para um dado $\gamma = 1/\sqrt{\nu}$, $\nu \in [0; \mu_{max}]$, $\mu_{max} < \infty$, o conjunto de ganhos estabilizantes por realimentação de estado que assegura uma atenuação de distúrbios γ , quando $\varphi(\mu) > 0$, é caracterizado por

$$\mathcal{K}_s(\gamma) = \left\{ K \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid K = -B_2' \varphi(\mu)^{-1}, \mu \in [\nu; \mu_{max}] \right\}.$$

Por outro lado, a formulação convexa permite estabelecer que, no caso de um problema sub-ótimo, para uma atenuação de distúrbios $\gamma = 1/\sqrt{\mu}$ dada, qualquer ganho em

$$\mathcal{K}_c(\gamma) = \left\{ K \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid K = -B_2' W^{-1}, \text{ com } W \in \mathcal{G}_\infty(\mu), \mu \in [\nu; \mu_{max}] \right\}$$

é um ganho admissível, e além disso

$$\mathcal{K}_s(\gamma) \subset \mathcal{K}_c(\gamma),$$

já que $\{(\varphi(\mu), \mu) \mid \mu \in [0; \mu_{max}]\}$ é parte da fronteira do conjunto $\mathcal{G}$ (ilustrado na figura 3.1).

A abordagem convexa permite, sem fazer uso de uma representação aumentada do sistema, considerar também o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ com restrições adicionais, tais como incerteza e/ou descentralização, que não podem ser tratadas na abordagem iterativa.

A última abordagem discutida neste capítulo se assemelha em estrutura à abordagem convexa, diferindo, entretanto, no sentido de que o conjunto de ganhos admissíveis para um γ fixo mas arbitrário é gerado por

$$\mathcal{K}_l = \left\{ K \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid K = ZY^{-1}, (Z, Y) \in \mathcal{V}_\infty(\varrho), \varrho > 0 \right\}.$$

Ainda, esta abordagem se sobressai por estabelecer um problema de otimização $\mathcal{H}_\infty$ com restrições na forma de LMIs e pela escolha da estrutura do ganho de controle, permitindo também incorporar restrições do tipo incerteza e/ou descentralização. Como o ganho não depende explicitamente da matriz B_2 , esta pode também ser considerada incerta, e uma estrutura descentralizada para o controle não depende de B_2 bloco diagonal.

Capítulo 4

Exemplos Numéricos

4.1 Introdução

Este capítulo procura, através de exemplos, validar a teoria apresentada no capítulo anterior. Pensando assim, o primeiro exemplo, representando um sistema precisamente conhecido, mostra que o conjunto de ganhos estabilizantes da abordagem iterativa está contido em outro conjunto determinado pela abordagem convexa, para o caso no qual o valor ótimo é atingido na abordagem iterativa. No segundo exemplo, que representa também um sistema precisamente conhecido, ilustra-se a evolução de γ e da norma espectral do ganho estabilizante por realimentação de estado, quando o ótimo não é alcançado (Teorema 3.4), em função da variação de $\epsilon > 0$ (suficientemente “pequeno”).

Já o exemplo 4.3 trata de um sistema incerto (matriz dinâmica incerta) usando as abordagens convexa e via LMIs. No quarto exemplo, é discutido o caso de um sistema com estrutura descentralizada tanto para os parâmetros do modelo precisamente conhecidos como também incertos ($A \in \mathcal{D}_A$). E finalmente, o último exemplo é solucionado usando a abordagem via LMIs, considerando a matriz dinâmica A e a matriz B_2 pertencentes aos domínios de incerteza $\mathcal{D}_A$ e $\mathcal{D}_B$, respectivamente.

4.2 Exemplos Numéricos

Exemplo 4.1 - O primeiro exemplo é extraído de [Pet87c]. Consiste na estabilização do modo de período curto longitudinal de um avião de combate modelo F4E com número de mach 0.5 e altitude de 5000 pés como ponto de operação. Assume-se que o vetor de estado é completamente acessível para controle de realimentação. O modelo é dado por

$$A = \begin{bmatrix} -0.9896 & 17.41 & 96.15 \\ 0.2648 & -0.8512 & -11.39 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -97.78 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

e

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a abordagem iterativa (algoritmo 3.1), obtém-se $\mu_{max} = \mu^* = 4.4446$ (que consiste no cálculo de uma norma $\mathcal{H}_\infty$, permitindo então utilizar qualquer um dos algoritmos do Capítulo 2), com

$$W(\mu_{max}) = \begin{bmatrix} 133.6159 & -4.6459 & -41.0406 \\ -4.6506 & 1.0236 & 1.0084 \\ -41.0397 & 1.0017 & 13.1624 \end{bmatrix} > 0,$$

portanto, o algoritmo termina com $\gamma^* = 1/\sqrt{\mu^*} = 0.4743$ e o ganho de controle associado é dado por

$$K_I = [2.4372 \quad 6.3305 \quad 4.8350].$$

Agora, o mesmo exemplo é tratado com a abordagem convexa. Do Teorema 3.8 obtém-se $\mu_M = 26.1168$, onde a solução do problema (P 3.6) fornece o valor ótimo $\mu^* = 4.4446$, com $\gamma^* = 0.4743$ e

$$W_* = \begin{bmatrix} 124.2346 & -4.5672 & -38.1367 \\ -4.5672 & 1.0198 & 0.9799 \\ -38.1367 & 0.9799 & 12.2624 \end{bmatrix} > 0$$

com o respectivo ganho de controle dado por

$$K_C = [2.6297 \quad 6.7909 \quad 5.1895].$$

Neste problema, W_* foi obtido considerando em (P 3.6), o conjunto $\mathcal{G}^*$ definido com $W \geq \epsilon I$ e $\epsilon = 10^{-3}$. Observe que K_C e K_I são quase similares. E de fato, como pode ser visto, ambas as abordagens encontram o valor mínimo de γ , já que K_I produz $\|(C - DK_I)(sI - A + B_2K_I)^{-1}B_1\|_\infty = 0.4743$ e K_C fornece $\|(C - DK_C)(sI - A + B_2K_C)^{-1}B_1\|_\infty = 0.4743$.

A escolha particular de $\epsilon > 0$ (“arbitrariamente pequeno”), tal que $W \geq \epsilon I$ em $\mathcal{G}^*$, denotado por $(W_\epsilon, \mu^*) \in \mathcal{G}^*$, não afeta a solução ótima de (P 3.6) (veja figura 4.1). De fato, a abordagem iterativa gera um único ganho $K_I = B_2' W_{\mu_{\max}}^{-1}$ que alcança o valor ótimo μ^* , enquanto a abordagem convexa produz $K_C = B_2' W_\epsilon^{-1}$ (ϵ arbitrariamente pequeno) que assegura μ^* . Como na figura 3.1, $\varphi(\mu) = W(\mu)$, definida¹⁰ no Teorema 3.3, é não crescente e côncava em $[0; \mu_{\max}]$. O gráfico de φ é representado pela curva côncava na figura 4.1.

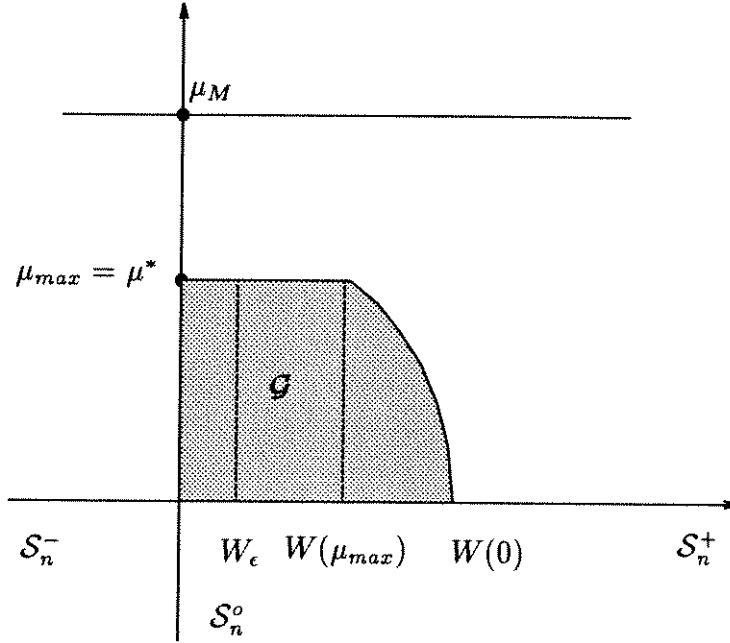


Figura 4.1: μ^* e suas matrizes definidas positiva associadas, $0 < W_\epsilon \leq W(\mu_{\max})$.

O mesmo exemplo pode, ainda, ser tratado através do problema (P 3.13), utilizando

¹⁰ $W(\mu)$ é, pelo Teorema 3.2, a solução maximal de $\Theta(W, \mu) \triangleq R_\mu(W) = 0$.

Abordagem	γ^*	iterações	cputime(s)	flops
Iterativa	0.4743	¹¹	0.5667	49677
Convexa	0.4743	95	4.6667	784710
via LMIs	0.4743	49	2.5667	¹²

Tabela 4.1: Comparação entre as abordagens iterativa, convexa e via LMIs.

o pacote computacional LMI-Lab [GN93a], [GN93b]), com o qual se obtém, $\varrho^* = 0.2250$, $\gamma^* = 0.4743$,

$$Y_* = \begin{bmatrix} 22.0545 & -0.9785 & -6.7584 \\ -0.9785 & 0.2297 & 0.2053 \\ -6.7584 & 0.2053 & 2.1963 \end{bmatrix} > 0$$

e

$$Z^* = [23.4270 \quad -0.0120 \quad -7.1909].$$

O ganho associado ($K_L = Z^*Y_*^{-1}$) é dado por

$$K_L = [3.4745 \quad 8.8576 \quad 6.5894].$$

Calculando a norma $\mathcal{H}_\infty$ para este ganho K_L chega-se a $\|(C - DK_L)(sI - A + B_2K_L)^{-1}B_1\|_\infty = 0.4743$. Utilizou-se em $Y \geq \epsilon I \in \mathcal{V}_\infty^*$, $\epsilon = 0.01$. A tabela 4.1 apresenta alguns resultados de comparação numérica entre as três abordagens. Note que todas as abordagens atingem o valor γ^* ; o esforço computacional é menor na abordagem iterativa (o ótimo é obtido no primeiro passo do algoritmo). As figuras 4.2 e 4.3 avaliam como μ e ϱ variam a cada iteração. No método de planos de corte, $\mu = \gamma^{-2}$ evolui de um valor máximo (isto é, $\gamma = 1/\sqrt{\mu}$ infactível) até o ponto no qual as restrições envolvendo a matriz W são satisfeitas. Já na figura 4.3, o método de pontos interiores caminha por valores de $\varrho = \gamma^2$ maiores que o valor ótimo, dentro do conjunto de soluções factíveis, até atingir ϱ^* .

¹¹O algoritmo iterativo termina no primeiro passo quando encontra o ótimo.

¹²O pacote computacional LMI-Lab utiliza executáveis externos ao Matlab, não contabilizados no número total de flops.

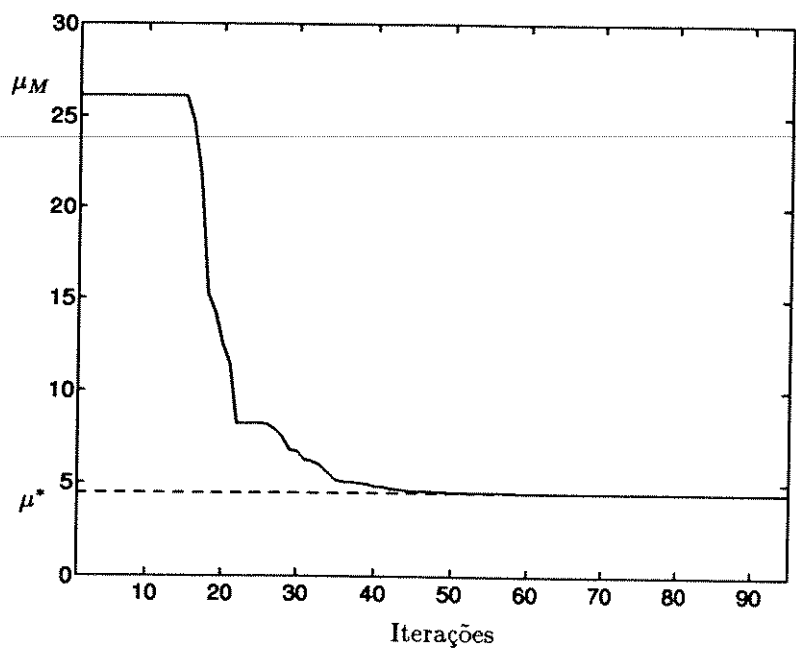


Figura 4.2: Evolução de μ (planos de corte) a cada iteração em um sistema precisamente conhecido.

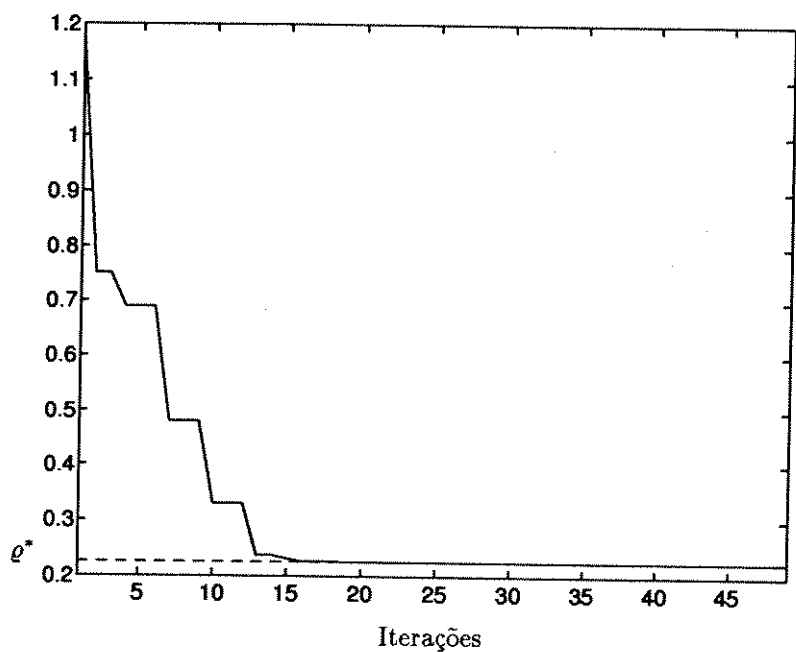


Figura 4.3: Evolução de ρ (LMI-Lab, pontos interiores) a cada iteração em um sistema precisamente conhecido.

ϵ	$\gamma = 1/\sqrt{\mu}$
10^{-2}	0.7790
10^{-3}	0.7774
10^{-4}	0.7772
10^{-5}	0.7772
10^{-6}	0.7772

Tabela 4.2: Evolução de γ variando ϵ na Abordagem Iterativa (exemplo 4.2).

Exemplo 4.2 - Considere o seguinte modelo extraído de [Pet87c] dado pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1.7020 & 50.7200 & 263.5000 \\ 0.2201 & -1.4180 & -31.9900 \\ 0 & 0 & -30.0000 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -97.78 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$
$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando a Abordagem Iterativa (Algoritmo 3.1) para solucionar este problema de estabilização com um critério $\mathcal{H}_\infty$ obtém-se $\mu_{max} = 2.6368$ e a respectiva solução maximal

$$W(\mu_{max}) = \begin{bmatrix} 173.2376 & -11.6157 & -35.7981 \\ -11.6157 & -8.3706 & 4.2507 \\ -35.7981 & 4.2507 & 7.4652 \end{bmatrix} \not\geq 0.$$

que não é definida positiva. Logo pelo Teorema 3.4, se faz necessário utilizar uma seqüência de altos ganhos para se aproximar do ótimo. A tabela 4.2 ilustra a evolução de $\gamma = 1/\sqrt{\mu}$ a medida que varia o valor do critério $\epsilon > 0$ (“suficientemente” pequeno) no Algoritmo 3.1, isto é, quanto menor o erro relativo entre os valores de μ a cada iteração, $\mu_\ell \rightarrow \mu^* = \mu_s$. Já a tabela 4.3 mostra a ocorrência de altos ganhos, a medida que diminui-se ϵ , isto é, $\|K_I\| \rightarrow \infty$ (norma espectral, definida na notação).

Aplicando o Teorema 3.8, obtém-se o limitante superior $\mu_M = 26.1168$ permitindo resolver o problema **(P 3.6)**. O papel de $\epsilon > 0$ (arbitrariamente “pequeno”) neste problema é importante, no sentido de limitar o valor da norma do ganho de realimentação

ϵ	$\ K_I\ $
10^{-2}	2.3739×10^3
10^{-3}	2.3533×10^4
10^{-4}	2.3306×10^5
10^{-5}	2.3078×10^6
10^{-6}	2.2853×10^7

Tabela 4.3: Ocorrência de altos ganhos próximo ao valor ótimo da norma $\mathcal{H}_\infty$ na Abordagem Iterativa (exemplo 4.2).

ϵ	$\ K_C\ $
10^{-2}	125.6799
10^{-3}	1.2837×10^3
10^{-4}	1.2869×10^4
10^{-5}	6.4489×10^4
10^{-6}	1.3316×10^6

Tabela 4.4: Evolução da norma do ganho variando ϵ na Abordagem Convexa (exemplo 4.2).

de estado K_C (que depende da inversa da matriz $W \geq \epsilon I$), como ilustrado na tabela 4.4. A evolução do valor da norma $\mathcal{H}_\infty$ em função da variação dos valores de ϵ é ilustrada na tabela 4.5.

Exemplo 4.3 - Reconsidere o mesmo exemplo em [Pet87c] como um sistema incerto, com três pontos de operação. Os dados são apresentados na tabela 4.6.

Cada ponto de operação, descrito por um par de matrizes (A_i, B_2) , é um vértice do domínio de incerteza $\mathcal{D}_A$. O modelo do sistema é dado por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -97.78 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

e

ϵ	$\gamma = 1/\sqrt{\mu}$
10^{-2}	0.8133
10^{-3}	0.7806
10^{-4}	0.7775
10^{-5}	0.7772
10^{-6}	0.7772

Tabela 4.5: Evolução de γ em função dos valores de ϵ na Abordagem Convexa (exemplo 4.2).

OP	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
1	-0.9896	17.41	96.15	0.2648	-0.8512	-11.39
2	-0.6607	18.11	84.34	0.08201	-0.6587	-10.81
3	-1.702	50.72	263.5	0.2201	-1.418	-31.99

Tabela 4.6: Pontos de operação de um caça modelo F4E (exemplo 4.3).

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pela abordagem convexa, com $\mu_M = 26.1168$, o problema (P 3.9) tem solução ótima $\mu^* = 0.3794$, $\gamma_C^* = 1.6235$ e

$$W_* = \begin{bmatrix} 17.1480 & -0.6285 & -3.9935 \\ -0.6285 & 0.0659 & 0.0371 \\ -3.9935 & 0.0371 & 1.2161 \end{bmatrix} > 0$$

com o respectivo ganho de controle ($K = B_2' W_*^{-1}$) dado por

$$K_C = [91.4515 \quad 729.3804 \quad 253.4060].$$

Utilizando agora a abordagem via LMIs, a solução do problema (P 3.15), para este exemplo, é dada por $\varrho^* = 2.6333$, $\gamma_L^* = 1.6227$,

Abordagem	γ^*	iterações	cputime(s)	flops
Convexa	1.6235	91	5.9333	796706
via LMIs	1.6227	86	5.9167	–

Tabela 4.7: Uma comparação entre as abordagens convexa e via LMIs para um sistema incerto (exemplo 4.3).

$$Y_* = \begin{bmatrix} 43.8602 & -1.6197 & -10.1521 \\ -1.6197 & 0.1680 & 0.0954 \\ -10.1521 & 0.0954 & 3.0919 \end{bmatrix} > 0,$$

$$Z^* = [257.4878 \quad -0.0000 \quad -79.0001]$$

e o ganho de controle correspondente é dado por

$$K_L = [94.1854 \quad 760.3245 \quad 260.2449]$$

Calculando a norma $\mathcal{H}_\infty$ em cada um dos três vértices para K_L e K_C obtidos, respectivamente, pelas abordagens convexa e via LMIs (veja o diagrama de valores singulares na figura 4.4, onde o valor de pico em cada curva corresponde ao valor da norma $\mathcal{H}_\infty$ para cada vértice), segue que $\gamma_L^* = 1.6227 \approx 4.2048\text{dB}$ e $\gamma_C^* = 1.6235 \approx 4.2090\text{dB}$ representam um custo garantido para os três vértices A_i e também para as suas combinações convexas. Note que o diagrama de valores singulares praticamente coincide para os dois ganhos utilizados, em cada um dos vértices. Observe que a abordagem iterativa não permite o tratamento de incertezas no modelo.

Alguns dados sobre tempo de máquina e esforço computacional são apresentados na tabela 4.7. Para este exemplo, o tempo de máquina é praticamente o mesmo nas duas abordagens.

Considerando agora, a título de comparação, um sistema nominal definido como a média aritmética de todos os vértices dado por

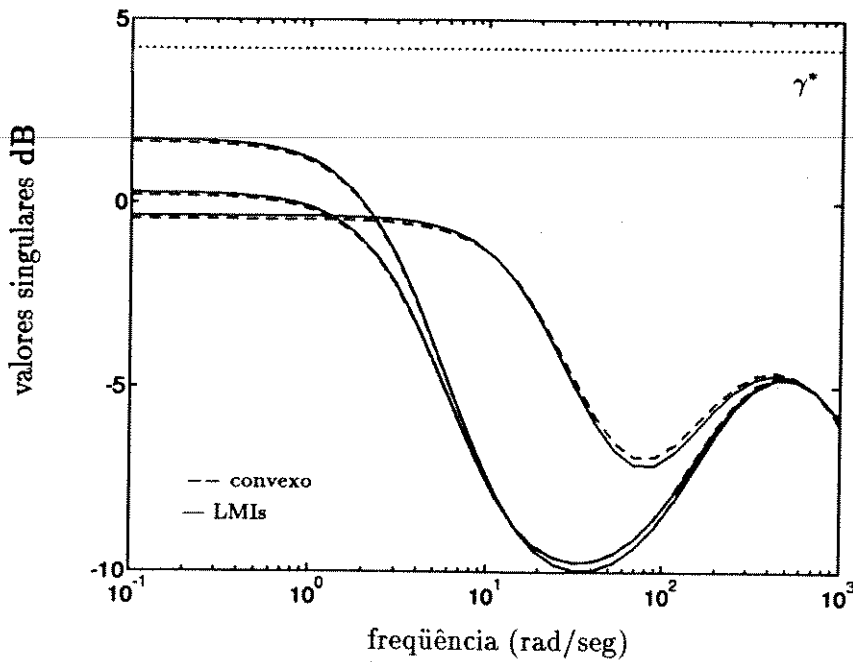


Figura 4.4: Diagrama de valores singulares comparativo para o exemplo 4.3 com matriz dinâmica incerta (três vértices).

$$A_n = \begin{bmatrix} -1.1174 & 28.7467 & 147.9967 \\ 0.1890 & -0.9760 & -18.0633 \\ 0 & 0 & -30.0000 \end{bmatrix}.$$

Calculando-se um ganho estabilizante através de um projeto de regulador linear quadrático (construído a partir da solução de uma equação de Riccati padrão de controle ótimo), obtém-se

$$K_{Riccati} = [0.8914 \quad 5.1752 \quad 0.0495].$$

A nuvem de raízes para o sistema em malha fechada (combinando os vértices dois a dois) com os ganhos estabilizantes K_L , K_C e $K_{Riccati}$ é mostrada na figura 4.5. Note então que parte dos pólos, usando os ganhos estabilizantes das abordagens convexa e via LMIs (projetos que utilizam um critério $\mathcal{H}_\infty$), tende a estar muito afastada do eixo imaginário. Neste exemplo, o ganho $K_{Riccati}$ estabiliza o sistema incerto em malha fechada.

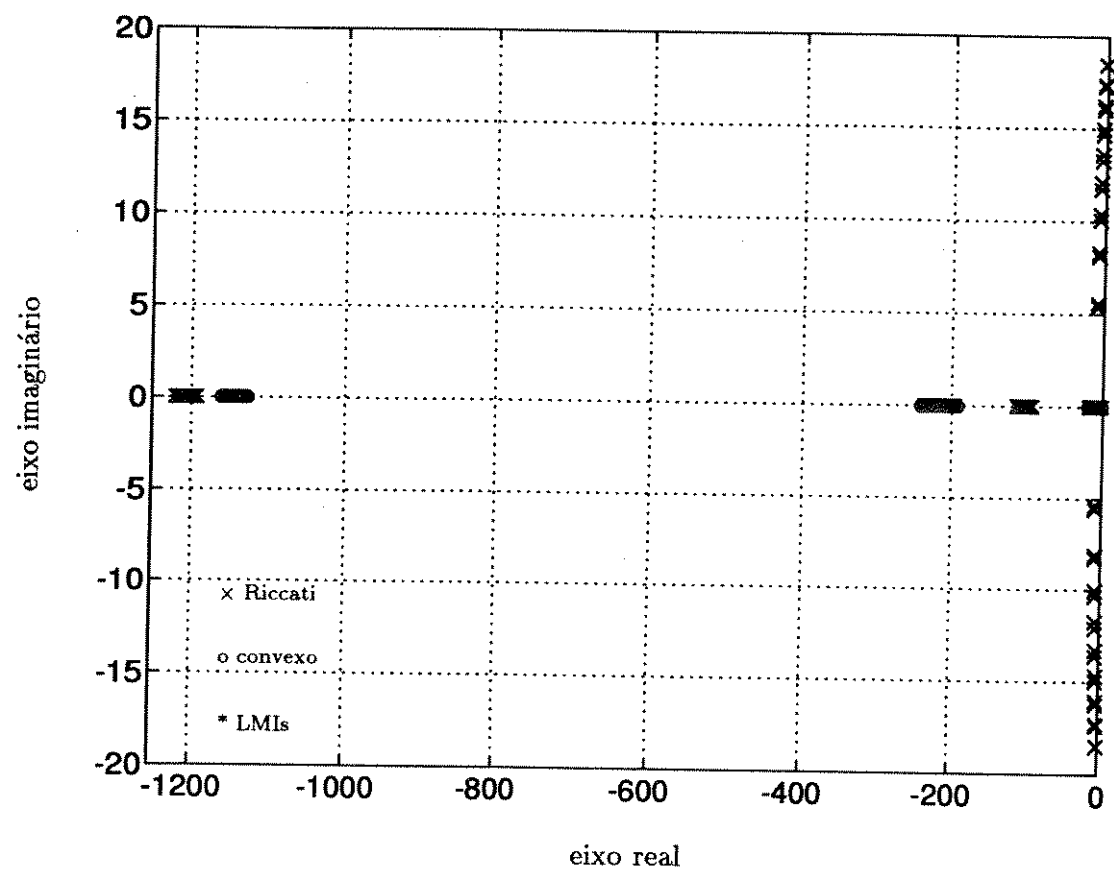


Figura 4.5: Nuvem de raízes em malha fechada para o exemplo 4.2 (matriz dinâmica incerta).

No entanto, o projeto de controle baseado no sistema nominal não garante a estabilidade para o sistema incerto.

Exemplo 4.4 - Considere o exemplo tratado em [ZLA87], onde, um problema de controle de um manipulador mecânico é considerado. Após uma mudança apropriada de variáveis, como em [Per89], afim de se aplicar um controle descentralizado, o modelo é dado por

$$A = \begin{bmatrix} -1/\tau_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{11} & -k_{11} & (c_1 - k_{12}) & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\tau_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c_3 & k_{21} & -k_{21} & -k_{22} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1/\tau_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/\tau_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$B_1 = I_{6 \times 6}, \quad C = \begin{bmatrix} I_{6 \times 6} \\ 0_{2 \times 6} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 2} \\ I_{2 \times 2} \end{bmatrix}.$$

Os valores nominais dos parâmetros são

$$k_{11} = k_{21} = 10, \quad k_{12} = k_{22} = 2,$$

$$\tau_1 = \tau_2 = 0.1, \quad c_1 = 0.2, \quad c_2 = c_3 = 0.1.$$

Do Teorema 3.8, tem-se $\mu_M = 1.0214$, e usando a abordagem convexa (Teorema 3.11) segue que $\mu_D^* = 0.9575$, $\gamma_D^* = 1.0220$ e

$$W_{D^*} = \begin{bmatrix} 19.2947 & 0.0394 & -10.5645 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0394 & 0.1910 & -0.9614 & 0 & 0 & 0 \\ -10.5645 & -0.9614 & 10.6800 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19.2629 & 0.0212 & -10.5680 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0212 & 0.1950 & -0.9774 \\ 0 & 0 & 0 & -10.5680 & -0.9774 & 10.8529 \end{bmatrix} > 0$$

com o ganho de controle descentralizado

$$K_{DC} = \begin{bmatrix} -11.2745 & -98.4083 & -20.0115 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11.3848 & -99.0249 & -20.0039 \end{bmatrix}.$$

Agora, aplicando a abordagem via LMIs, pelo Teorema 3.17 obtém-se $\varrho_D^* = 1.0443$, $\gamma_D^* = 1.0219$ e

$$Y_D = \begin{bmatrix} 20.1742 & 0.0411 & -11.0434 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0411 & 0.1992 & -1.0041 & 0 & 0 & 0 \\ -11.0434 & -1.0041 & 11.1518 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20.1568 & 0.0216 & -11.0558 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0216 & 0.2035 & -1.0212 \\ 0 & 0 & 0 & -11.0558 & -1.0212 & 11.3431 \end{bmatrix} > 0$$

e

$$Z_D^* = \begin{bmatrix} -10.4431 & 0.0000 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10.4432 & 0 & 0.0002 \end{bmatrix}$$

e o ganho descentralizado é então

$$K_{DL} = \begin{bmatrix} -11.7402 & -102.8327 & -20.8847 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11.8546 & -103.4798 & -20.8704 \end{bmatrix}.$$

Note que, sem a restrição de descentralização, o valor ótimo da norma $\mathcal{H}_\infty$ (usando, por exemplo, a abordagem via LMIs) é dado por $\gamma^* = 1.0177$,

$$Y_* = \begin{bmatrix} 19.8333 & 0.0262 & -10.7617 & -0.1118 & 0.0106 & 0.0529 \\ 0.0262 & 0.1885 & -1.0114 & 0.0106 & -0.0017 & 0.0099 \\ -10.7617 & -1.0114 & 11.1506 & 0.0529 & 0.0099 & -0.1411 \\ -0.1118 & 0.0106 & 0.0529 & 20.0569 & 0.0049 & -10.8675 \\ 0.0106 & -0.0017 & 0.0099 & 0.0049 & 0.1919 & -1.0312 \\ 0.0529 & 0.0099 & -0.1411 & -10.8675 & -1.0312 & 11.4329 \end{bmatrix} > 0,$$

$$Z^* = \begin{bmatrix} -10.3570 & 0.0000 & -0.0004 & 0.0005 & 0.0000 & -0.0002 \\ -0.0039 & -0.0000 & 0.0016 & -10.3597 & -0.0000 & 0.0007 \end{bmatrix}$$

com o respectivo ganho de controle centralizado

$$K^* = \begin{bmatrix} -86.3242 & -847.5769 & -160.1427 & 5.9495 & 60.6814 & 10.2870 \\ 5.9406 & 60.5963 & 10.2708 & -98.2268 & -968.9750 & -180.7233 \end{bmatrix}.$$

Portanto, neste exemplo, impor a estrutura descentralizada representa uma perda de apenas 4.1% (de fato, pode-se observar o pequeno grau de interconecção entre os dois subsistemas, isto é, a matriz dinâmica é quase uma matriz bloco diagonal). Na figura 4.6 é apresentado um diagrama de valores singulares comparativo entre o sistema em malha aberta (note que a matriz A é estável), e o obtido em malha fechada para o ganho centralizado estabilizante com atenuação de distúrbios γ^* , evidenciando o efeito da minimização da norma. E na figura 4.7 é ilustrado o diagrama de valores singulares para o sistema em malha fechada com o ganho centralizado e descentralizado. Observe a mudança na “frequência de corte” no caso descentralizado.

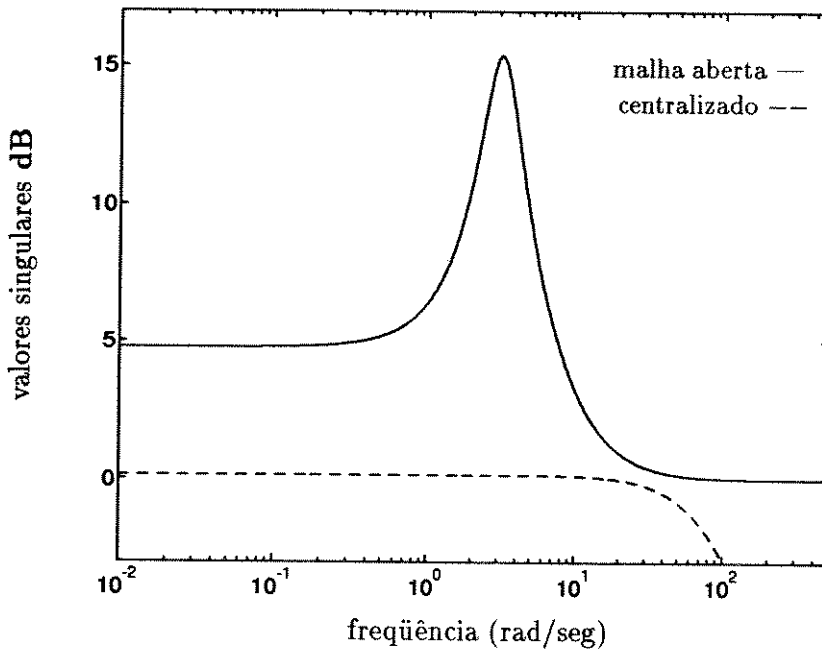


Figura 4.6: Diagrama de valores singulares comparativo; malha aberta e malha fechada com o ganho centralizado (exemplo 4.4).

Suponha agora que os coeficientes de acoplamento c_1 , c_2 e c_3 variem $\pm 100\%$ dos seus valores nominais, resultando em um sistema incerto, tal que

$$0.1 \leq c_1 \leq 0.3$$

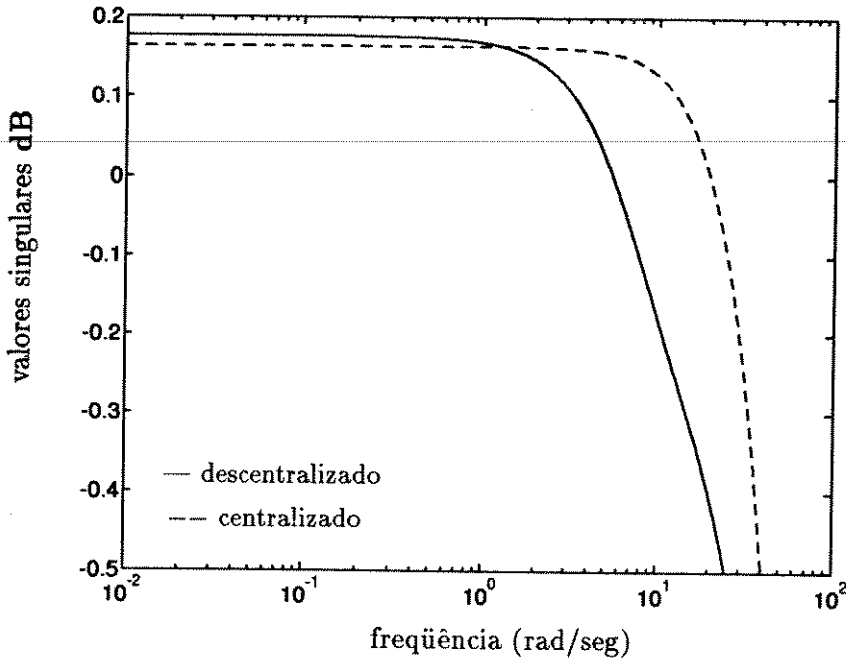


Figura 4.7: Diagrama de valores singulares comparativo; centralizado $\times$ descentralizado (exemplo 4.4).

$$0 \leq c_2 \leq 0.2$$

$$0 \leq c_3 \leq 0.2$$

A partir da abordagem convexa (Teorema 3.12), o valor ótimo, para este exemplo considerando incertezas, é dado por $\mu_D^* = 0.9498$, $\gamma_{QD}^* = 1.0261$,

$$W_{D^*} = \begin{bmatrix} 19.1154 & 0.0448 & -10.6598 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0448 & 0.1923 & -0.9512 & 0 & 0 & 0 \\ -10.6598 & -0.9512 & 10.4324 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19.0613 & 0.0296 & -10.6601 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0296 & 0.1965 & -0.9649 \\ 0 & 0 & 0 & -10.6601 & -0.9649 & 10.5646 \end{bmatrix} > 0$$

e ganho descentralizado

$$K_{DC} = 10^3 \times \begin{bmatrix} -0.1237 & -1.0859 & -0.2254 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1260 & -1.0975 & -0.2273 \end{bmatrix}.$$

Da mesma forma, usando a abordagem via LMIs (Teorema 3.18), segue que $\varrho_D^* = 1.0529$, $\gamma_{qeD}^* = 1.0261$,

$$Y_{D^*} = \begin{bmatrix} 20.1731 & 0.0478 & -11.2434 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0478 & 0.2021 & -1.0012 & 0 & 0 & 0 \\ -11.2434 & -1.0012 & 10.9926 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20.1465 & 0.0290 & -11.2630 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0290 & 0.2069 & -1.0171 \\ 0 & 0 & 0 & -11.2630 & -1.0171 & 11.1631 \end{bmatrix} > 0$$

e

$$Z_D^* = \begin{bmatrix} -10.5461 & -0.0015 & -0.0699 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10.5673 & -0.0035 & 0.1175 \end{bmatrix},$$

com ganho de controle descentralizado dado por

$$K_{DL} = 10^3 \times \begin{bmatrix} -0.1296 & -1.1401 & -0.2363 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1281 & -1.1174 & -0.2310 \end{bmatrix}.$$

Observe que calculando a norma $\mathcal{H}_\infty$ para os ganhos descentralizados K_{DL} e K_{DC} , em cada vértice do domínio de incerteza, ilustrado na figura 4.8, confirma-se que $\gamma_{QD}^* = \gamma_{qeD}^*$ é um custo garantido. Note ainda que sem a imposição de uma estrutura descentralizada para o controle, considerando apenas o sistema incerto, o valor ótimo do custo garantido é dado por $\gamma^* = 1.0237$. Uma diferença, portanto, de 0.23%.

Exemplo 4.5 - Considere o exemplo do problema de controle de um helicóptero VTOL, apresentado em [KBH88], em condições típicas de carga e vôo, e velocidade do vento de 135 nós. O modelo é dado como se segue

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0101 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & \varsigma_1 & -0.7070 & \varsigma_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ \varsigma_3 & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.4900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde os parâmetros incertos, ς_κ , $\kappa = 1, 2, 3$ são dados por

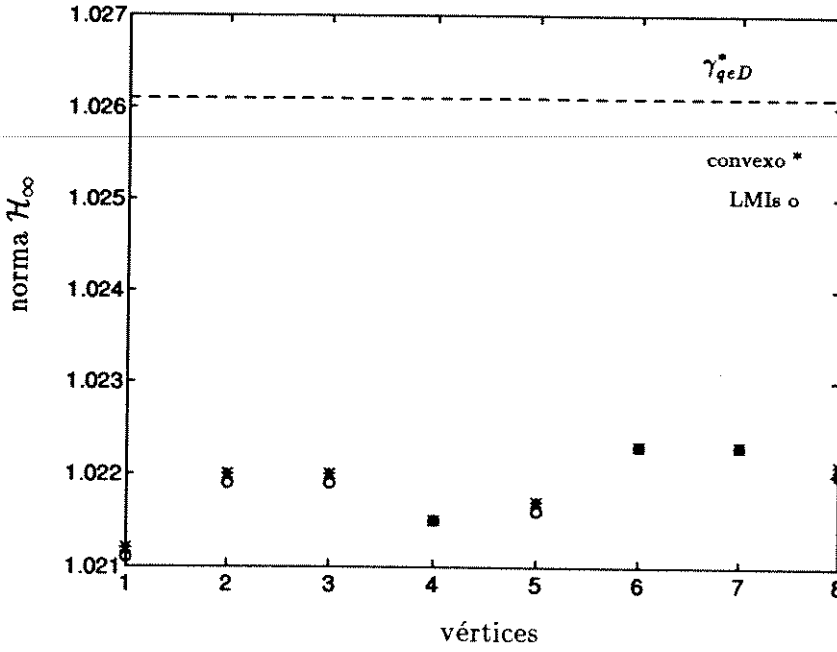


Figura 4.8: Norma $\mathcal{H}_\infty$ em malha fechada para cada vértice em um exemplo de estrutura descentralizada para o controle com incertezas na matriz dinâmica.

$$-0.6319 \leq \varsigma_1 \leq 1.3681$$

$$1.22 \leq \varsigma_2 \leq 1.62$$

$$2.7446 \leq \varsigma_3 \leq 4.3446$$

Observe que as incertezas consideradas nestes três parâmetros, isto é, $|\Delta_{\varsigma_1}| \leq 1$, $|\Delta_{\varsigma_2}| \leq 0.2$ e $|\Delta_{\varsigma_3}| \leq 0.8$ são 20 vezes maiores do que em [KBH88]. Sejam ainda

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 3.5446 & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.4900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A solução ótima do problema (P 3.15), usando a abordagem via LMIs, é dado por $\varrho^* = 1.3794$, $\gamma^* = 1.1745$,

$$Y_* = \begin{bmatrix} 0.3088 & -0.0908 & 0.2826 & 0.1343 \\ -0.0908 & 0.0685 & -0.0658 & 0.0742 \\ 0.2826 & -0.0658 & 1.1533 & -0.2549 \\ 0.1343 & 0.0742 & -0.2549 & 0.7409 \end{bmatrix} > 0$$

e

$$Z^* = \begin{bmatrix} -0.4419 & -0.7951 & 3.6253 & 0.4384 \\ -0.2429 & 10.4730 & -6.1937 & -0.0000 \end{bmatrix}$$

com o respectivo ganho de controle da forma

$$K^* = \begin{bmatrix} -66.9429 & -114.9828 & 19.8525 & 31.0774 \\ 423.4953 & 825.3742 & -105.2847 & -195.6871 \end{bmatrix}.$$

Observe que calculando a norma $\mathcal{H}_\infty$ nos vértices $(A_i, B_{2j})_\ell$, $\ell = 1, \dots, 8$, $i = 1, \dots, 4$, $j = 1, 2$, utilizando o ganho K^* e ilustrado nas figuras 4.9 e 4.10, segue que $\gamma^* = 1.1745$ é um custo garantido.

4.3 Conclusão

Os exemplos apresentados neste capítulo refletem a validade do desenvolvimento teórico apresentado no capítulo três. O primeiro deles ilustra o fato de que o conjunto de ganhos estabilizantes gerado pela abordagem iterativa está contido no conjunto de ganhos estabilizantes obtido da abordagem convexa. Além disso, para sistemas precisamente conhecidos, a abordagem iterativa apresenta um melhor desempenho em termos de esforço computacional.

Agora, observando-se as formulações adotadas para as abordagens convexa (sem o uso de uma representação aumentada do problema) e via LMIs, torna-se simples tratar problemas de controle $\mathcal{H}_\infty$ para os casos de controle descentralizado e/ou incerteza nos parâmetros do modelo, como evidenciado nos exemplos 4.2 e 4.3.

E finalmente, considerando o último exemplo, onde as matrizes A e B_2 pertencem, respectivamente, aos domínios de incerteza $\mathcal{D}_A$ e $\mathcal{D}_B$, totalizando 8 vértices, a formulação

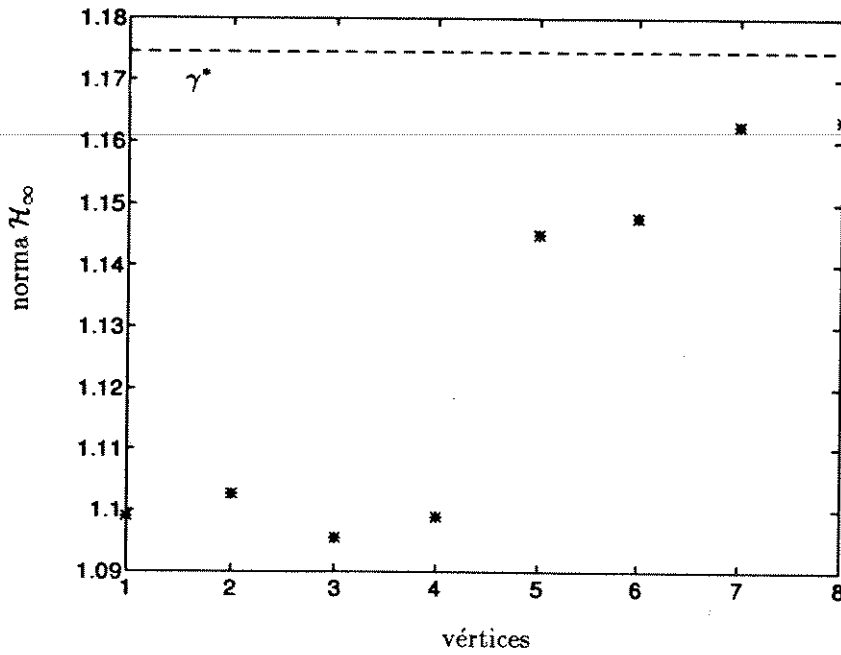


Figura 4.9: Norma $\mathcal{H}_\infty$ em malha fechada para cada vértice e custo garantido γ^* (exemplo 4.5).

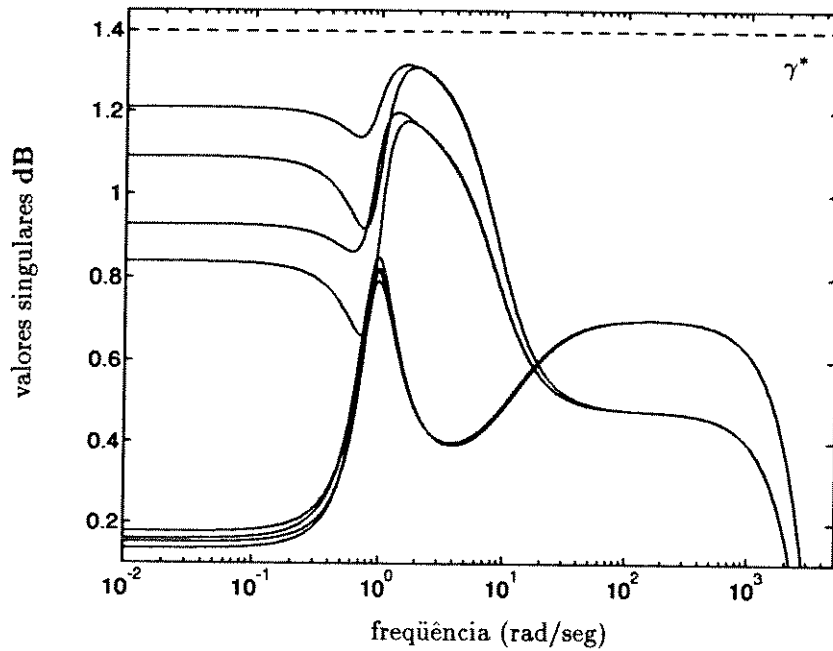


Figura 4.10: Diagrama de valores singulares para cada vértice; exemplo 4.5, com $A \in \mathcal{D}_A$ e $B_2 \in \mathcal{D}_B$.

do problema (P 3.15) da abordagem via LMIs permite determinar uma solução que, de fato, é um limitante superior mínimo sobre a norma $\mathcal{H}_\infty$ de todos os modelos possíveis em malha fechada com o ganho de realimentação de estado estabilizante encontrado, isto é, um custo garantido.

Capítulo 5

Conclusão Geral

Este trabalho centrou-se na solução do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estado, tanto para sistemas precisamente conhecidos quanto para incertezas nos parâmetros do modelo e ainda, estrutura descentralizada para o controle.

Em um primeiro momento, apresentou-se a definição da norma $\mathcal{H}_\infty$, e sua conexão com os diagramas de Bode e Nyquist para sistemas monovariáveis. Além disso estabeleceu-se a equivalência entre os valores singulares máximo de uma matriz de transferência com os autovalores puramente imaginários de uma matriz Hamiltoniana, que por sua vez está associada com a equação de Riccati, e que por fim, relaciona-se com a norma $\mathcal{H}_\infty$ (Teoremas 2.1, 2.2 e 2.4 e o Lema 2.1). Então, foram apresentados métodos de cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma matriz de transferência baseados em uma matriz Hamiltoniana que, a priori, dependem de como os limitantes inferior e superior calculados se aproximam do valor da norma $\mathcal{H}_\infty$, e além disso envolvem, a cada passo, o cálculo de uma matriz Hamiltoniana de ordem $2n$. Discutiu-se também um outro método no qual o cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma matriz de transferência foi formulado como um problema de otimização convexo, sujeito a restrições na forma de LMIs (que está associada à inequação de Riccati do Teorema 2.5).

Demonstrou-se, como proposto inicialmente, uma relação entre a abordagem iterativa, baseada na solvabilidade de equações de Riccati ($R_\mu(W) = 0$), e a convexa, formulada como um problema de otimização convexo sem fazer uso de uma representação aumentada do problema. Ou seja, o gráfico da função φ definida no Teorema 3.3, isto é, $\{(\varphi(\mu), \mu) \mid \mu \in [0; \mu_{max}]\}$ compõe parte da fronteira do conjunto convexo $\mathcal{G}$ (ou $\mathcal{G}^*$)

definido no problema de otimização (P 3.5) (ou (P 3.6)) da abordagem convexa. Implicando, portanto, que o conjunto de ganhos estabilizantes por realimentação de estado gerado pela abordagem iterativa está contido em outro obtido pela abordagem convexa. Tal relação foi evidenciada numericamente no exemplo 4.1.

Estabeleceu-se ainda uma formulação para o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ como um problema de otimização sujeito a restrições matriciais escritas como LMIs. Tal formulação permite tratar também, facilmente, sem representação aumentada do sistema, problemas onde as matrizes A e B_2 pertencem a conjuntos poliedrais convexos.

Já os exemplos numéricos discutidos, verificam as formulações teóricas propostas para as abordagens convexa e via LMIs.

Uma das contribuições deste estudo consiste, então, em compreender como se relacionam os conjuntos de ganhos estabilizantes da abordagem iterativa apresentada em [Sch89], [Sch90] e da abordagem convexa proposta neste trabalho. Além disso, a partir do Teorema 2.5, formulou-se um problema de otimização sujeito a restrições na forma de LMIs para o cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma matriz de transferência e para o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$.

Uma linha de continuidade seria estender a abordagem via LMIs, proposta para tratar o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estado, para a solução do problema de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, isto é, dado $\gamma > 0$, encontrar o controle de realimentação de estado que minimiza a norma $\mathcal{H}_2$ garantindo a restrição $\|H\|_\infty \leq \gamma$.

Outro ponto a ser investigado diz respeito ao uso de realimentação de saída e controladores dinâmicos.

Bibliografia

- [BB90] Boyd,S. and Balakrishnan,V., “A regularity result for the singular values of a transfer matrix and a quadratically convergent algorithm for computing its $\mathcal{L}_\infty$ -norm”, *Systems & Control Letters*, **15** (1990), pag. 1-7.
- [BBK89] Boyd,S., Balakrishnan,V. and Kabamba,P., “A bisection method for computing the $\mathcal{H}_\infty$ norm of a transfer matrix and related problems”, *Math. Control Signals Systems*, **2** (1989), pag. 207-219.
- [BEFB94] Boyd,S., El Ghaoui,L., Feron,E. and Balakrishnan,V., “Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory”. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [BGP89] Bernussou,J., Geromel,J.C. and Peres,P.L.D., “A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems”, *Systems & Control Letters*, **13** (1989), pag. 65-72.
- [BS79] Bazaraa,M.S. and Shetty,C.M., “Nonlinear Programming: Theory and Applications”. J. Willey & Sons, NY, 1979.
- [BS90] Bruinsma,N.A. and Steinbuch,M., “A fast algorithm to compute the $\mathcal{H}_\infty$ -norm of a transfer function matrix”, *Systems & Control Letters*, **14** (1990), pag. 287-293.
- [Che84] Chen,C.T., “Linear System Theory and Design”. Holt, Rinehart and Winston, NY, 1984.
- [CLYB90] Chang,B.C., Li,X.P., Yeh,H.H. and Banda,S.S., “Computation of the $\mathcal{H}_\infty$ norm of a transfer function” in Proceedings of the 1990 American Control Conference, San Diego, California, USA, 1990, pag. 2578-2582.

- [DGKF89] Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P.P. and Francis, B.A., "State-space solution to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems", *IEEE Trans. Automat. Control*, **34** (1989), pag. 831-847.
- [Dou72] Douglas, R.G., "Banach Algebra Techniques in Operator Theory". Academic Press, NY, 1972.
- [DTM93] Dorato, P., Tempo, R. and Muscato, G., "Bibliography on robust control", *Automatica*, **29**(1) (1993), pag. 201-214.
- [Dur70] Duren, P.L., "Theory of $\mathcal{H}_p$ Spaces". Academic Press, NY, 1970.
- [Fai87] Faibusovich, L.E., "Matrix Riccati inequality: existence of solutions", *Systems & Control Letters*, **9** (1987), pag. 59-64.
- [FD87] Francis, B.A. and Doyle, J.C., "Linear control theory with an $\mathcal{H}_\infty$ optimality control", *SIAM J. Control and Optimization*, **25** (1987), pag. 815-844.
- [Fra87] Francis, B.A., "A Course in $\mathcal{H}_\infty$ Control Theory". Springer-Verlag, NY, 1987.
- [Gah92] Gahinet, P., "A convex parametrization of $\mathcal{H}_\infty$ suboptimal controllers", in Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control, Tucson, Arizona, USA, 1992, pag. 937-942.
- [Gah94] Gahinet, P., "A new parametrization of $\mathcal{H}_\infty$ suboptimal controllers", *Internat. J. Control*, **59**(4) (1994), pag. 1031-1051.
- [GBP94] Geromel, J.C., Bernussou, J. and Peres, P.L.D., "Decentralized control through parameter space optimization", *Automatica*, **30**(10) (1994), pag. 1565-1578.
- [Glo84] Glover, K., "All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their $\mathcal{L}^\infty$ -error bounds", *Internat. J. Control*, **39** (1984), pag. 1115-1193.
- [GLR86] Gohberg, I., Lancaster, P. and Rodman, L., "On hermitian solutions of the symmetric algebraic Riccati equation", *SIAM J. Control and Optimization*, **24** (1986), pag. 1323-1334.
- [GN93a] Gahinet, P. and Nemirovskii, A., "LMI Lab: A Package for Manipulating and Solving LMI's", INRIA, versão 2.0, 1993.

- [GN93b] Gahinet, P. and Nemirovskii, A., "General-purpose LMI solvers with benchmarks", in Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control, San Antonio, Texas, USA, 1993, pag. 3162-3165.
- [HKL89] Hinrichsen, D., Kelb, B. and Linnemann, A., "An algorithm for the computation of the structured complex stability radius", *Automatica*, **25**(5) (1989), pag. 771-775.
- [Hof88] Hoffman, K., "Banach Spaces of Analytic Functions". Dover Publications, Inc., NY, 1988.
- [IS93] Iwasaki, T. and Skelton, R.E., "A complete solution to the general $\mathcal{H}_\infty$ control problem: LMI existence conditions and state space formulas", in Proceedings of the 1993 American Control Conference, San Francisco, California, USA, 1993, pag. 605-609.
- [IS94] Iwasaki, T. and Skelton, R.E., "All controllers for the general $\mathcal{H}_\infty$ control problem: LMI existence conditions and state space formulas", *Automatica*, **30**(8) (1994), pag. 1307-1317.
- [Kav94] Kavranoglu, D., " $\mathcal{H}_\infty$ -norm approximation of systems by constant matrices and related results", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **39**(5) (1994), pag. 1006-1009.
- [KBH88] Keel, L.H., Bhattacharyya, S.P. and Howze, J.W., "Robust control with structured perturbations", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **33**(1) (1988), pag. 68-77.
- [Kim89] Kimura, H., "Conjugation, interpolation and model-matching in $\mathcal{H}_\infty$ ", *Internat. J. Control*, **49** (1989), pag. 269-307.
- [KPR88] Khargonekar, P.P., Petersen, I.R. and Rotea, M.A., " $\mathcal{H}_\infty$ -optimal control with state-feedback", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **33** (1988), pag. 786-788.
- [KPZ90] Khargonekar, P.P., Petersen, I.R. and Zhou, K., "Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and $\mathcal{H}_\infty$ control theory", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **35** (1990), pag. 356-361.
- [KR91] Khargonekar, P.P. and Rotea, M.A., "Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control: a convex optimization approach", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **36**(7) (1991), pag. 824-837.

- [Kwa86] Kwakernaak, H., "A polynomial approach to minmax frequency domain optimization of multivariable feedback systems", *Internat. J. Control*, **41** (1986), pag. 117-156.
- [Lue84] Luenberger, D.G., "Linear and Nonlinear Programming", *Addison-Wesley Publishing Company*, 2nd. Ed., 1984.
- [NG94] Nemirovskii, A. and Gahinet, P., "The projective method for solving linear matrix inequalities", in *Proceedings of the American Control Conference*, Baltimore, Maryland, USA, 1994, pag. 840-844.
- [Per89] Peres, P.L.D., "Sur la robustesse des systemes lineaires: approche par programmation lineaire", Thèse de Doctorat de L'UPS-LAAS du CNRS, Toulouse, France, 1989.
- [Pet87a] Petersen, I.R., "Disturbance attenuation and $\mathcal{H}_\infty$ optimization: a design method based on the algebraic Riccati equation", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **32** (1987), pag. 427-429.
- [Pet87b] Petersen, I.R., "A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems", *Systems & Control Letters*, **8** (1987), pag. 351-357.
- [Pet87c] Petersen, I.R., "A procedure for simultaneously stabilizing a collection of single input linear systems using non-linear state feedback control", *Automatica*, **23** (1987), 33-40.
- [PGS93] Peres, P.L.D., Geromel, J.C. and Souza, S.R., " $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems", *Systems & Control Letters*, **20** (1993), pag. 413-418.
- [PGS94] Peres, P.L.D., Geromel, J.C. and Souza, S.R., "Optimal $\mathcal{H}_\infty$ state feedback control for continuous-time linear systems", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **82**(2) (1994), pag. 343-359.
- [POP94] Palhares, R.M., Oliveira, S.L.C. e Peres, P.L.D., "Considerações sobre o controle $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estado", nos *Anais do XVII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, Vitória, ES, Brasil, 1994, vol.1, pag. 189-193.

- [PSG94] Peres,P.L.D., Souza,S.R. e Geromel,J.C. "Controle $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas dinâmicos com restrições estruturais", *SBA Controle & Automação*, **4(1)** (1994), pag. 21-30.
- [Rob89] Robel,G., "On computing the infinity norm", *IEEE Trans. Automat. Control*, **34** (1989), pag. 882-884.
- [RR92] Ran,A.C.M. and Rodman,L., "Stable solutions of real algebraic matrix Riccati equations", *SIAM J. Control and Optimization*, **30(1)** (1992), pag. 63-81.
- [RV88] Ran,A.C.M. and Vreugdenhil,R., "Existence and comparison theorems for algebraic Riccati equations for continuous- and discrete-time systems", *Linear Algebra and Its Applications*, **99** (1988), pag. 63-83.
- [RW94] Raines III,A.C. and Watkins,D.S., "A class of Hamiltonian-symplectic methods for solving the algebraic Riccati equation", *Linear Algebra and Its Applications*, **205-206** (1994), pg 1045-1060.
- [Sch89] Scherer,C., " $\mathcal{H}_\infty$ -control by state-feedback: an iterative algorithm and characterization of high-gain occurrence", *Systems & Control Letters*, **12** (1989), pag. 383-391.
- [Sch90] Scherer,C., " $\mathcal{H}_\infty$ -control by state-feedback and fast algorithms for the computation of optimal $\mathcal{H}_\infty$ -norms", *IEEE Trans. Automat. Control*, **35** (1990), pag. 1090-1099.
- [Sch92] Scherer,C., " $\mathcal{H}_\infty$ -control by state-feedback for plants with zeros on the imaginary axis", *SIAM J. Control and Optimization*, **30** (1992), pag. 123-142.
- [Sch94] Scherer,C., "The state-feedback $\mathcal{H}_\infty$ -problem and optimality", *Automatica*, **30(2)** (1994), pag. 293-305.
- [SCL94] Saberi,A., Chen,B.M. and Lin,Z., "Closed-form solutions to a class of $\mathcal{H}_\infty$ -optimization problems", *Internat. J. Control*, **60(1)** (1994), pag. 41-70.
- [SF70] Sz.-Nagy,B. and Foias,C., "Harmonic Analysis of Operator on Hilbert Space". North-Holland Publishing Company, 1970.
- [Sha94] Shahruz,S.M., "A simple technique for computing the $\mathcal{H}_\infty$ -norm of polynomials", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **82(1)** (1994), pag. 169-172.

- [ST93] Stoorvogel, A.A. and Trentelman, H.L., "The finite-horizon singular $\mathcal{H}_\infty$ control problem with dynamic measurement feedback", *Linear Algebra and Its Application*, **187** (1993), pag. 113-161.
- [Wil71] Willems, J.C., "Least square stationary optimal control and the algebraic Riccati equation", *IEEE Trans. Automat. Control*, **16**(6) (1971), pag. 621-634.
- [XS90] Xie, L. and de Souza, C.E., "Robust $\mathcal{H}_\infty$ control for linear time-invariant systems with norm-bounded uncertainty in the input matrix", *Systems & Control Letters*, **14** (1990), pag. 389-396.
- [Zam81] Zames, G., "Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses", *IEEE Trans. Automat. Control*, **26** (1981), pag. 301-320.
- [ZK88] Zhou, K. and Khargonekar, P.P., "An algebraic Riccati equation approach to $\mathcal{H}_\infty$ optimization", *Systems & Control Letters*, **11** (1988), pag. 85-91.
- [ZLA87] Zohdy, M.A., Loh, N.K. and Abdul-Wahab, A.A., "A robust optimal model matching control", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **32**(5) (1987), pag. 410-414.

Apêndice A

Noções Básicas sobre LMIs

Uma LMI é qualquer inequação matricial linear da forma

$$J(x) > 0$$

onde $J(x)$ é uma matriz simétrica que depende de uma forma afim do vetor de decisão $x \in \mathbb{R}^p$. Em outras palavras, $J(x)$ pode ser reescrita como

$$J(x) = x_1 J_1 + \dots + x_n J_n + V$$

onde $J_1, \dots, J_n$ e $V \in \mathcal{S}_n$ são matrizes dadas e $x = (x_1, \dots, x_n)$. As entradas de x são chamadas de variáveis de decisão.

Usando-se complemento de Schur [BEFB94] é possível representar uma inequação não-linear na forma de uma LMI. De fato, através deste complemento a LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)' & R(x) \end{bmatrix} > 0$$

com $Q(x) = Q(x)'$, $R(x) = R(x)'$ e $S(x)$ dependendo de uma forma afim de $x \in \mathbb{R}^p$ é equivalente a inequação não-linear

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)' > 0$$

ou

$$Q(x) > 0, \quad R(x) - S(x)'Q(x)^{-1}S(x) > 0.$$

Note que o conjunto $\{x|J(x) > 0\}$ é convexo e que $J(x) > 0$, pela forma como foi escrito, pode representar um extenso grupo de expressões convexas em x , como por exemplo, inequações matriciais lineares e inequações matriciais quadráticas convexas.

Considere a seguinte LMI como ilustração do complemento de Schur:

$$P > 0, \quad \begin{bmatrix} A'P + PA & PB - C' \\ B'P - C & -(D' + D) \end{bmatrix} \leq 0$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, e $D \in \mathbb{R}^{p \times p}$ são matrizes dadas, e a matriz $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a variável. Agora se $D + D' > 0$, a LMI anterior é equivalente a inequação matricial quadrática dada por

$$A'P + PA + (PB - C')(D + D')^{-1}(PB - C')' \leq 0, \quad P > 0.$$