

Este exemplar corresponde à redação
final da tese defendida por Renato Borges
Guerra e aprovada pela Comissão Julgadora
em 20/3/87

fmm

MÉTODOS DE PROJEÇÃO DE CON-
VERGÊNCIA FINITA PARA SISTE
MAS LINEARES E QUADRADOS MÍ
NIMOS.

TESE DE DOUTORADO
apresentada a
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

por

RENATO BORGES GUERRA

MÉTODOS DE PROJEÇÃO DE CON-
VERGÊNCIA FINITA PARA SISTEME
MAS LINEARES E QUADRADOS MÍN
NIMOS.

Orientador: JOSÉ MÁRIO MARTÍNEZ

Março/87

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Ao Professor

PAULO ROBERTO O. DE SOUZA

AGRADECIMENTOS

- A todos os Professores e colegas da FEC e do IMECC que de al
guma forma me incentivaram.
- Agradeço profundamente a MÁRIO MARTÍNEZ pela orientação e
apoio que tornaram possível a realização deste trabalho.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO I - MÉTODOS DE PROJEÇÃO ACELERADOS PARA SISTEMAS LINEA <u>R</u> RES CONSISTENTES.....	7
CAPÍTULO II - MÉTODOS DE PROJEÇÃO DE CONVERGÊNCIA FINITA PARA SISTEMAS LINEARES CONSISTENTES.....	33
CAPÍTULO III - MÉTODOS DE PROJEÇÃO DOS RESÍDUOS DE CONVERGÊNCIA FINITA PARA SISTEMAS GERAIS DE EQUAÇÕES LINEA- RES.....	55
CAPÍTULO IV - APLICAÇÃO A UM PROBLEMA DE ENGENHARIA HIDRÁULICA ..	80
CONCLUSÃO.....	94
BIBLIOGRAFIA.....	95

I N T R O D U Ç Ã O

A resolução de sistemas algébricos lineares é provavelmente o problema de Matemática numérica que aparece mais frequentemente nas aplicações.

Com efeito, muitos problemas de Física, Economia e Engenharia são modelados como sistemas lineares, em geral, de grande porte. Mas, ao mesmo tempo, muitos outros problemas precisam da resolução de sistemas lineares como subalgoritmos. É o caso da resolução numérica de equações diferenciais parciais [38], dos problemas de fluxo de potência [32], e da maioria dos problemas de Otimização.

Os métodos mais populares para resolver sistemas (quadrados não singulares) derivam da fatoração LU de uma matriz. Com efeito, se A é uma matriz de $N \times N$ não singular, é bem sabido que alguma permutação PA de A pode ser escrita

$$PA = LU \quad (1)$$

onde L é triangular inferior com 1's na diagonal, e U é triangular superior.

Em consequência, a resolução de $Ax = b$ se reduz a resolver dois sistemas triangulares.

Quando n é grande e A é esparsa (ou seja, poucos elementos de A são não nulos), os fatores L e U são também "pro-

vavelmente" esparsos. Esse fato é naturalmente aproveitado pelos programas que resolvem sistemas lineares. De uma outra maneira somente os elementos diferentes de zero de A, L e U são armazenados.

Porém, no processo de calcular L e U aparecem elementos diferentes de zero em posições em que A tinha zeros. Este fenômeno é chamado "enchimento" (fill-in). A matriz de permutação P é selecionada nos algoritmos modernos, de maneira de minimizar o enchimento sem prejudicar a estabilidade numérica na solução do sistema. De fato, também são permutadas as colunas de A com esse fim, de maneira que (1) é substituída por

$$PAQ = LU \quad (2)$$

Mas determinados problemas são muito grandes ou tem uma estrutura muito complexa de maneira que não é possível reduzir o enchimento a níveis admissíveis. Devemos acrescentar também que, quando o enchimento é grande, não só a memória necessária para armazenamento de L e U aumenta, mas também o tempo computacional necessário para calcular L e U ou resolver os sistemas triangulares.

Portanto, é necessária a existência de métodos onde, de alguma maneira, a eliminação do enchimento seja radical, ou seja,

onde o processo de calcular a solução do sistema não precise mais memória que a necessária para colocar o próprio sistema. Esse é o lugar dos métodos iterativos. Nesses tipos de método, a passagem da aproximação x_k para a aproximação x_{k+1} é feita com a informação "estática" contida em A e em b .

Muitos métodos iterativos convergem condicionalmente, isto é, dependendo das características da matriz A . Esse não é o caso dos chamados "métodos de projeção", derivados do método de Kaczmarz [22]

Brevemente um método de projeção consiste no seguinte (ver [21])

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k A^T z_k, \quad \alpha_k = \langle z_k, b - Ax_k \rangle / \|A^T z_k\|^2 \quad (3)$$

onde z_k é um vetor não nulo, previamente definido. As diferentes definições de z_k levam a diferentes métodos e em particular se z_k é tomado como vetores unitários e_i em ordem cíclica, obtêm-se o método de Kaczmarz, ou seja

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k a_{ik}, \quad \alpha_k = \frac{b_{ik} - a_{ik}^T x_k}{\|a_{ik}\|^2} \quad (4)$$

onde $ik = (k \bmod m) + 1$, sendo m o número de linhas da matriz A e a_i a i -ésima linha de A .

Os métodos de projeção foram usados com sucesso para outros problemas, além de sistemas lineares, como factibilidade convexa [15], Reconstrução de Imagens ([10], [17]) sistemas não lineares ([26], [27], [28], [29], [30]), etc.

Porém, como é o caso de outros métodos iterativos, os métodos de projeção podem ser extremamente lentos. Com efeito, qualquer método baseado na iteração

$$x_{k+1} = Tx_k + C \quad (5)$$

pode ser pensado na forma

$$x_{k+1} - x^* = T(x_k - x^*) \quad (6)$$

e em consequência o vetor erro $x_k - x^*$ tende a possuir a direção do autovetor correspondente ao raio espectral de T ([39], pp. 84-89). Portanto, a taxa de convergência tende a ser o próprio raio espectral. Isto é, converge assintoticamente da maneira mais lenta possível.

Portanto, faz sentido se perguntar por formas eficientes de

aceleração(ou modificações aceleradas) dos métodos de projeção.

A resposta a essa pergunta tem sido objeto de estudo de vários autores(ver por exemplo: [2], [9], [15], [31], [35], [36], [37]). Em particular, Bjorck e Elfving [2] introduziram em 1979, um método estreitamente relacionado com o método de Kaczmarz e outro com o método de Garza [16] que apresentam a propriedade de convergirem em número finito e conhecido de passos; esses métodos consistem na aplicação dos gradientes conjugados [20] à matriz obtida a partir da matriz de iteração do método SSOR([39], pg. 462).

Neste trabalho, mostramos de forma mais geral que é possível obtermos métodos de projeção com a mesma propriedade dos métodos propostos por Bjorck e Elfving. Em particular, estabelecemos versões modificadas dos métodos de Kaczmarz, Cimmino [5] e Garza que apresentam a propriedade anteriormente citada. Isto é mostrado como segue.

Os capítulos 1 e 2 são dedicados a resolução numérica de sistemas algébricos de equações lineares consistentes. No capítulo 1, apresentamos uma versão bloco acelerada do método de Kaczmarz e outra, também bloco acelerada, do método de Cimmino que serão úteis para o desenvolvimento dos capítulos posteriores.

No capítulo 2, estabelecemos de forma geral, um algoritmo

do tipo projeção e demonstramos que a convergência é atingida em um número finito e conhecido de passos. É mostrado que as versões dos métodos de Kaczmarz e Cimmino, apresentadas no capítulo 1, convenientemente modificadas, são do tipo do algoritmo estabelecido.

O capítulo 3 é dedicado a resolução numérica do problema de Quadrados Mínimos Lineares. De forma similar ao capítulo 2, são estabelecidas as versões aceleradas dos métodos de Garza e Cimmino para a resolução desse problema.

No capítulo 4, mostramos uma aplicação desses tipos de algoritmos, através da resolução de um problema de Engenharia Hidráulica.

CAPÍTULO I

MÉTODOS DE PROJEÇÃO ACELERADOS PARA SISTEMAS LINEARES CONSISTENTES

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos dois algoritmos para a resolução numérica de sistemas de equações algébricas lineares que servirão de base para o desenvolvimento dos capítulos posteriores. O primeiro algoritmo é uma versão por bloco, convenientemente acelerada, do algoritmo inicialmente proposto por Kaczmarz [22]. O segundo, do mesmo modo que o primeiro, é uma versão bloco acelerada do algoritmo de Cimmino [5], que pode ser visto como uma "versão paralela" do processo de Kaczmarz. Em ambos os casos, a técnica de aceleração utilizada é a do tipo proposta por De Pierro [9].

Aqui, admitiremos que o problema

$$Ax = b \tag{1}$$

é consistente, ou seja, tem pelo menos uma solução e que A é uma matriz $M \times N$ não necessariamente de posto completo. Admitiremos ainda, que A não tem linhas (ou bloco de linhas) nulas. Antes de apresentarmos os algoritmos, definimos a seguir a notação a ser utilizada.

Denotaremos por $N(A)$ e $R(A)$ o núcleo e a imagem do operador A respectivamente. A^T denotará a transposta de A e I

a matriz identidade no espaço que estiver sendo considerado. Se S é um subespaço vetorial $A|_S$ denotará a restrição do operador A em S , S^\perp complemento ortogonal de S e P_S a projeção ortogonal sobre S . Dados dois vetores de mesma dimensão X e Y , $\langle X, Y \rangle$ denotará o produto interno (escalar) no espaço considerado, ou seja

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y$$

e conseqüentemente definimos

$$\|X\| = (\langle X, X \rangle)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\|A\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

A^+ denotará a matriz X que satisfaz as condições de Moore-Penrose, ou seja

$$AXA = A \tag{2}$$

$$XAX = X \tag{3}$$

$$(AX)^T = AX \tag{4}$$

$$(XA)^T = XA \quad (5)$$

2. ALGORITMO(1-1)

Consideremos o problema original, dividindo as linhas de A em blocos, não necessariamente disjuntos, A_1, A_2, \dots, A_m .

Dado os parametros w_1, w_2, \dots, w_m , com $0 < w_j < 2$ para $j = 1, 2, \dots, m$, e um vetor inicial x_0 e em geral x_n e $r_n = b - A_n$ definimos

$$(i) \quad y_1 = x_n ; z = 0 \quad \text{e para } k = 1, 2, \dots, (2m-1)$$

$$i(k) = \min(K, 2m-K) \quad (6)$$

$$y_{k+1} = y_k + w_{i(k)} A_{i(k)}^T v_k \quad (7)$$

$$z_{i(k)} = z_{i(k)} + w_{i(k)} v_k \quad (8)$$

onde v_k é solução do sistema

$$i) \quad A_{i(k)} A_{i(k)}^T v_k = b_{i(k)} - A_{i(k)} y_k \quad (9)$$

$$ii) \quad d_n = y_{2m} - y_1 = \sum_{k=1}^m A_k^T z_k \quad (10)$$

iii) Calcule

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n d_n \quad (11)$$

onde α_n é um parametro tal que

$$\langle d_n, x_{n+1} - \bar{x} \rangle = 0 \quad (12)$$

sendo \bar{x} uma solução do sistema (1), ou seja

$$\alpha_n = - \frac{\langle d_n, x_n - \bar{x} \rangle}{\langle d_n, d_n \rangle} = \frac{\langle r_n, Z \rangle}{\langle d_n, d_n \rangle} \quad (13)$$

onde $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$ é o vetor do R^m definido em (8) .

$$\text{iv) } r_{n+1} = r_n - \alpha_n A d_n$$

A condição (12) estabelece que x_{n+1} é a projeção de \bar{x} sobre a reta definida pelo vetor x_n e direção d_n , ou equivalentemente

$$\|x_{n+1} - \bar{x}\| = \text{Min}_{\alpha} \|x_n + \alpha d_n - \bar{x}\| \quad (14)$$

Observe que (6) estabelece a ordem em que as "projeções" que definem os y_k devem ser realizadas. Fazendo k variar de 1 a $(2m-1)$, é fácil ver que as projeções são realizadas na ordem $\{1, 2, \dots, m-1, m, m-1, \dots, 1\}$, ou seja, é feita uma varredura na ordem usual e outra em ordem inversa a partir da variedade $(m-1)$. Em geral, qualquer ciclo que contenha os índices $\{1, 2, \dots, m\}$ pode ser considerado e em particular se $w_j = 1$ ($j = 1, 2, \dots, m$) e o ciclo usual for utilizado, o algoritmo reduz-se ao algoritmo XPBA proposto por De Pierro[9]. Desta forma se considerarmos o problema equivalente

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{m-1} \\ A_m \\ A_{m-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{m-1} \\ b_m \\ b_{m-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

e aplicamos o algoritmo XPBA, obtemos o algoritmo anterior, com $w_j = 1$ $j = 1, 2, \dots, m$, e portanto o estudo de convergências pode ser estabelecido sem dificuldades, com pequenas modificações devido aos parâmetros w_j 's. Entretanto consideraremos o

algoritmo na forma como foi apresentado para atender o nosso propósito nos próximos capítulos.

3. CONVERGÊNCIA E PROPRIEDADE DO ALGORITMO

À seguir mostraremos as principais propriedades do algoritmo, antes porém, precisamos obter a forma geral das iterações. Para isto, começamos observando que se as linhas do j -ésimo bloco são linearmente independentes, com $j = i_{(k)}$ para algum $1 \leq k \leq (2m-1)$, a solução do sistema (9) será

$$v_k = (A_j \ A_j^T)^{-1} [b_j - A_j y_k]$$

e então

$$y_{k+1} = [I - w_j A_j^T (A_j A_j^T)^{-1} A_j] y_k + w_j A_j^T (A_j A_j^T)^{-1} b_j$$

que no caso geral é equivalente a

$$y_{k+1} = Q_j y_k + w_j A_j^+ b_j \quad (16)$$

sendo

$$Q_j = [(1 - w_j)I + w_j P_j] \quad (17)$$

com

$$P_j = I - A_j^+ A_j \quad j = i(k) \quad (18)$$

Antes de darmos continuidade, demonstraremos as principais propriedades de P_j e Q_j que serão úteis para a obtenção de resultados posteriores.

LEMA 1: P_j é um operador projeção ortogonal cuja imagem é $N(A_j)$.

Dem.: Segue diretamente das condições de Moore-Penrose que P_j é simétrico, idempotente e $A_j P_j = 0$. É óbvio que se $x \in N(A_j)$, $P_j x = x$. Reciprocamente se $P_j x = x$, então $A_j^+ A_j x = 0$ e portanto, pela condição (2), $A_j x = 0$ de onde segue o lema.

Corolário 1.1: $Q_j x = x$ sse $x \in N(A_j)$

Dem.: (imediato)

Corolário 1.2: $\|Q_j x\| \leq \|x\|$ e a igualdade é verificada sse $x \in N(A_j)$

Dem.: Se $x \in N(A_j)$ é óbvio que $Q_j x = x$ e portanto $\|Q_j x\| = \|x\|$. Agora, de (17) obtemos

$$\begin{aligned} \|Q_j x\|^2 &= \langle (1-w_j)x + w_j P_j x, (1-w_j)x + w_j P_j x \rangle \\ &= \|x\|^2 - w_j(2-w_j) \langle x, (I-P_j)x \rangle \leq \|x\|^2 \end{aligned}$$

já que $0 < w_j < 2$. Além disto, a igualdade é verificada somente se $\langle x, (I-P_j)x \rangle = 0$. Assu-
mindo que $x \neq 0$, isto sô é possível se $P_j x = x$
o que conclui a demonstração.

Continuando o processo de obtenção de forma geral das ite-
rações definimos:

$$F_j = Q_m \cdot Q_{m-1} \cdots Q_{j+1} \quad j = 0, 1, \dots, m-2$$

$$F_{m-1} = Q_m$$

$$F_m = I$$

$$B_0 = I$$

$$B_1 = Q_1$$

$$B_j = Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_j \quad j = 2, 3, \dots, m$$

e adicionalmente

$$C_0 = B_{m-1} F_0 \quad (19)$$

$$C_j = B_{m-1} F_j + B_{j-1} \quad j = 1, 2, \dots, (m-1)$$

$$C_m = B_{m-1} F_m$$

obtemos

$$Y_{2m} = GY_1 + Hb \quad (20)$$

onde $G = C_0$ e H a matriz que tem por colunas as matrizes $w_j C_j A_j^+$ com $j = 1, 2, \dots, m$ e portanto

$$Hb = \sum_{j=1}^m w_j C_j A_j^+ b_j \quad (21)$$

agora definindo

$$G_n = (1 - \alpha_n) I + \alpha_n G \quad (22)$$

$$H_n = \alpha_n H \quad (23)$$

temos que

$$x_{n+1} = G_n x_n + H_n b \quad (24)$$

LEMA 2: $G = I - HA$

Dem.: Da definição de H e C_j segue

$$\begin{aligned} HA &= \sum_{j=1}^m W_j C_j A_j^+ A_j = \sum_{j=1}^m C_j (I - Q_j) \\ &= \sum_{j=1}^m [(B_{m-1} F_j + B_{j-1}) - (B_{m-1} F_{j-1} + B_j)] = I - G \end{aligned}$$

$$\text{já que } C_j Q_j = (B_{m-1} F_j + B_{j-1}) Q_j = B_{m-1} F_{j-1} + B_j.$$

Corolário 2.1: $G_n = I - H_n A$ (imediato)

LEMA 3: $\|Gx\| = \|x\|$ sse $x \in N(A)$

Dem.: Se $x \notin N(A)$, então existe um $j < m$ tal que $Q_j x \neq x$. Agora usando a definição de G e aplicando sucessivamente o corolário(1.2) temos

$$\begin{aligned} \|Gx\| &= \|(B_{m-1})(Q_m Q_{m-1} \dots Q_{j+1} Q_j \dots Q_1)x\| \\ &= \|(B_{m-1})(Q_m Q_{m-1} \dots Q_j)x\| \leq \|Q_j x\| < \|x\| \end{aligned}$$

Agora se $x \in N(A)$, então $x \in N(A_j)$ para $j = 1, 2, \dots, m$ e portanto $Q_j x = x$ para todo $1 \leq j \leq m$, de onde obtemos $Gx = x$ o que

conclui a demonstração.

Corolário 3.1: $Gx = x$ sse $x \in N(A)$

Dem.: Segue diretamente do Lema 3 e da segunda parte da demonstração desse Lema.

LEMA 4: $\|G_n\| < \|G\| < 1.$

Dem.: Se \bar{x} é uma solução de (1), então de definição de G e G_n obtemos

$$\bar{x} = G\bar{x} + Hb = G_n\bar{x} + H_n b$$

e por (14) temos

$$\|G_n x + H_n b - \bar{x}\| < \|Gx + Hb - \bar{x}\|$$

ou equivalentemente

$$\|G_n(x - \bar{x})\| < \|G(x - \bar{x})\|$$

para todo $x \in R^n$ e portanto

$$\|G_n\| \leq \|G\|$$

Agora pelo Lema 3, é fácil ver que $\|G\| \leq 1$ o que conclui a demonstração.

LEMA 5: a) $G = P_{N(A)} + \tilde{G}$ e $P_{N(A)} \tilde{G} = \tilde{G} P_{N(A)} = 0$

onde

$$\tilde{G} = GP_{R(A^T)}$$

b) $\|\tilde{G}\| = \sup_{x \in R(A^T)} \|Gx\| < 1$

$$x \in R(A^T)$$

$$\|x\| = 1$$

Dem.: Pelo corolário 3.1 $G|_{N(A)} = I$ e portanto

$N(A)$ é invariante pela transformação G . Da definição de G , temos que $G = G^T$ e portanto $R(A^T) = N(A)^\perp$, também é invariante.

Tendo em vista que $R^n = N(A) + R(A^T)$ segue que

$$x = P_{N(A)} x + P_{R(A^T)} x, \quad x \in R^n \quad (25)$$

com

$$P_{N(A)} + P_{R(A^T)} = I \text{ e } P_{N(A)} \cdot P_{R(A^T)} = P_{R(A^T)} \cdot P_{N(A)} = 0$$

Agora aplicando G em (25), obtemos

$$GX = GP_{N(A)}x + GP_{R(A^T)}x = P_{N(A)}x + GP_{R(A^T)}x$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e portanto

$$G = P_{N(A)} + GP_{R(A^T)} = P_{N(A)} + \tilde{G}$$

o que conclui a demonstração da primeira parte do Lema.

Da definição de \tilde{G} e do Lema 4 temos

$$\|\tilde{G}\| \leq \|G\| < 1$$

Se $\|\tilde{G}\| = 1$, então pela continuidade de $\|Gx\|$ existe $\tilde{x} \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ tal que

$$\|\tilde{G}\tilde{x}\| = \|\tilde{x}\|.$$

Mas pelo Lema 3, $\tilde{x} \in N(A)$ de onde implica que $\tilde{x} = 0$, contrariando a hipótese.

Corolário 5.1: $G_n = P_{N(A)} + \tilde{G}_n$ e $P_{N(A)} \cdot \tilde{G}_n = \tilde{G}_n P_{N(A)} = 0$

onde

$$\tilde{G}_n = G_n P_{R(A^T)}$$

Dem.: A demonstração é similar à demonstração da primeira parte do Lema 5.

Corolário 5.2: $\|\tilde{G}_n\| < \|\tilde{G}\| < 1$

Dem.: Este resultado é facilmente obtido através do Lema 4.

Vejamos agora, a forma geral do algoritmo em função do vetor inicial x_0 . Definindo

$$T_n = G_n \cdot G_{n-1} \cdot \dots \cdot G_0 \quad (26)$$

$$R_j = G_n \cdot G_{n-1} \cdot \dots \cdot G_{j+1} \quad j = 0, 1, \dots, n-2$$

$$R_{n-1} = G_n$$

$$R_n = I$$

e

$$U_n = \sum_{j=0}^n R_j H_j \quad (27)$$

obtemos

$$x_{n+1} = T_n x_0 + U_n b \quad (28)$$

LEMA 6:

$$T_n = I - U_n A$$

Dem.: Pelo corolário 2.1 temos $H_j A = I - G_j$ e portanto

$$U_n A = \sum_{j=0}^n R_j (I - G_j) = I - R_0 G_0 = I - T_n$$

já que $R_j G_j = R_{j-1}$ para $j = 1, 2, \dots, n$.

Teorema 1:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = P_{N(A)}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = S$ existe

c) A matriz S satisfaz as seguintes condições

$$ASA = A, \quad SAS = S, \quad SA = P_{R(A^T)}$$

Dem.: A parte (a) do teorema decorre diretamente do Lema (5) e dos corolários 5.1 e 5.2.

Para demonstrarmos a parte (b), observamos primeiro que as colunas de H , e portanto de H_j , pertencem ao $R(A^T)$. De fato, se $x \in N(A)$, então $Q_j x = x$ para $j = 1, 2, \dots, m$ e portanto

$$(w_j C_j A_j^+)^T x = 2w_j (A_j^+)^T x \quad j = 1, 2, \dots, m$$

onde $0 < w_j < 2$

Pelas condições de Moore-Penrose, obtemos

$$A_j^T (A_j^+)^T x = (A_j^+ A_j)^T x = A_j^+ A_j x = 0$$

De onde segue que

$$(A_j^+)^T A_j^T (A_j^+)^T x = (A_j^+)^T x = 0$$

ou seja

$$(w_j C_j A_j^+)^T x = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, m.$$

Da definição de G_n , segue que os parâmetros α_n são limitados, ou seja

$$|\alpha_n| = \frac{\|I - G_n\|}{\|HA\|} < \frac{2}{\|HA\|} < \alpha$$

tendo em vista que $\|HA\| \neq 0$, já que $HA = I - G$.

De (27) temos

$$U_n = \sum_{j=0}^{n-2} R_j H_j + G_n H_{n-1} + H_n$$

ou equivalentemente

$$U_n = \sum_{j=0}^{n-2} (\tilde{G}_n \dots \tilde{G}_{j+1}) H_j + \tilde{G}_n H_{n-1} + H_n$$

visto que as colunas de H_j pertencem ao $R(A^T)$

De onde segue

$$\|U_n\| \leq \alpha \left[\sum_{j=0}^{n-2} (\|\tilde{G}_n\| \dots \|\tilde{G}_{j+1}\|) + \|\tilde{G}_n\| + 1 \right] \|H\| \quad (29)$$

Pelo corolário 5.2, (29) é a soma parcial de uma série convergente e portanto o

$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = S$ precisa existir, o que demonstra a parte (b) do teorema.

Pelo Lema 6, temos

$$T_n = I - U_n A$$

Fazendo n tender ao infinito, obtemos

$$P_{N(A)} = I - SA \quad (30)$$

de onde concluimos

$$SA = P_{R(A^T)} \quad (31)$$

Agora, aplicando A à esquerda de ambos os membros de (30), resulta

$$A - ASA = 0$$

ou seja

$$ASA = A \quad (32)$$

observando que

$$P_{N(A)} U_n = \sum_{j=0}^{n-2} P_{N(A)} (\tilde{G}_n \dots \tilde{G}_{j+1}) H_j + P_{N(A)} \tilde{G}_n H_{n-1} + P_{N(A)} H_n = 0$$

temos que

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{N(A)} U_n = P_{N(A)} S$$

Logo aplicando S à direita de (30), temos

$$P_{N(A)} S = S - SAS = 0$$

e portanto

$$SAS = S \tag{33}$$

o que conclui a demonstração.

Teorema 2: Com $b \in R(A)$, o algoritmo converge para uma solução de (1) com qualquer aproximação inicial x_0 .

Dem.: Se $b \in R(A)$, então existe $z \in R^n$ tal que

$$Az = b$$

e além disto

$$A A^+ b = A A^+ A z = A z = b \quad (34)$$

ou seja $\bar{x} = A^+ b$ é solução de (1).

Pelo teorema 1, temos

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} (T_n x_0 + U_n b) = P_{N(A)} x_0 + S b$$

e de (34) vem que

$$x^* = P_{N(A)} x_0 + S A A^+ b$$

usando a terceira parte do teorema (1), obtemos

$$x^* = P_{N(A)} x_0 + P_{R(A^T)} A^+ b$$

ou ainda

$$x^* = P_{N(A)} x_0 + A^+ b \quad (35)$$

já que $A^+ b \in R(A^T)$, e portanto

$$Ax^* = b.$$

4. ALGORITMO (1-2)

Nesta seção apresentamos o algoritmo de Cimmino bloco acelerado, o qual difere do algoritmo anterior no modo em que as "projeções" são realizadas. Aqui as projeções são feitas independentes uma das outras, permitindo uma economia de operações por iteração como também a utilização de processadores paralelos. Para apresentarmos o algoritmo, consideremos o problema (1) do modo descrito na seção anterior, ou seja

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_m \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} \quad 1 \leq m \leq M$$

e os parâmetros w_j e λ_j com

$$0 < w_j < 2 ; \lambda_j > 0 \quad j = 1, 2, \dots, m$$

e

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1. \text{ Assim, dado um vetor inicial } x_0, \text{ e em}$$

geral x_n e $r_n = b - Ax_n$, definimos

a) Para $j = 1, 2, \dots, m$, calcule

$$y_j = x_n + w_j A_j^T v_j \quad (36)$$

$$z_j = \lambda_j w_j v_j \quad (37)$$

onde v_j é a solução do sistema

$$A_j A_j^T v_j = b_j - A_j x_n \quad (38)$$

$$b) d_n = y - x_n, \text{ onde } y = \sum_{j=1}^m \lambda_j y_j \quad (39)$$

$$c) x_{n+1} = x_n + \alpha_n d_n \quad (40)$$

onde α_n é calculado de modo que

$$\langle d_n, x_{n+1} - \bar{x} \rangle = 0 \quad (41)$$

sendo \bar{x} uma solução (1), e então

$$\alpha_n = \frac{-\langle d_n, x_n - \bar{x} \rangle}{\langle d_n, d_n \rangle} = \frac{\langle r_n, z \rangle}{\langle d_n, d_n \rangle} \quad (42)$$

onde

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_m \end{bmatrix}$$

$$d) \quad r_{n+1} = r_n - \alpha_n A d_n$$

Observe que a condição (41) é definida do mesmo modo que no processo iterativo (1-1) da seção anterior e portanto

$$\|x_{n+1} - x\| = \underset{\alpha}{\text{Min}} \|x_n + \alpha d - \bar{x}\|$$

Vejamos agora a forma geral das iterações do presente algoritmo. Para isto, observe que o sistema (38) é da forma dada em (9) para o algoritmo anterior e portanto podemos concluir que

$$Y_j = Q_j x_n + w_j A_j^+ b_j \quad j = 1, 2, \dots, m$$

onde $Q_j = (1-w_j)I + w_j P_j$ sendo $P_j = I - A_j^+ A_j$. Assim se definirmos

$$G = \sum_{j=1}^m \lambda_j Q_j \quad (43)$$

obtemos

$$y = Gx_n + Hb \quad (44)$$

onde H é matriz que tem por colunas as matrizes $\lambda_j w_j A_j^+$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Agora definindo

$$G_n = (1 - \alpha_n)I + \alpha_n G \quad (45)$$

$$H_n = \alpha_n H \quad (46)$$

temos

$$x_{n+1} = G_n x_n + H_n b \quad (47)$$

Mostraremos agora as principais propriedades de G e G_n .

LEMA 7: $G = I - HA$

Dem.: Da definição de H , obtemos

$$HA = \sum_{j=1}^m \lambda_j w_j A_j^+ A_j = \sum_{j=1}^m \lambda_j (I - Q_j) = I - \sum_{j=1}^m \lambda_j Q_j = I - G$$

$$\text{já que } \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$$

Corolário 7.1: $G_n = I - H_n A$

Dem.: (imediato)

LEMA 8: $\|Gx\| = \|x\|$ sse $x \in N(A)$

Dem.: Se $x \notin N(A)$, existe um $j \leq m$ tal que $Q_j x \neq x$ e portanto

$$\begin{aligned} \|Gx\| &= \|\lambda_1 Q_1 x + \dots + \lambda_j Q_j x + \dots + \lambda_m Q_m x\| \\ &< \lambda_1 \|Q_1 x\| + \dots + \lambda_j \|Q_j x\| + \dots + \lambda_m \|Q_m x\| \\ &< \lambda_1 \|x\| + \dots + \lambda_j \|Q_j x\| + \dots + \lambda_m \|x\| < \|x\| \end{aligned}$$

tendo em vista que $\|Q_j x\| < \|x\|$ e

$\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$. Agora se $x \in N(\tilde{A})$, temos que

$x \in N(A_j)$ ($j = 1, \dots, m$) e portanto $Q_j x = x$ para todo $1 \leq j \leq m$, de onde segue que

$$Gx = \sum_{j=1}^m \lambda_j Q_j x = \sum_{j=1}^m \lambda_j x = x$$

o que conclui a demonstração.

Corolário 8.1: $Gx = x$ sse $x \in N(A)$

Dem.: Segue diretamente do Lema anterior.

LEMA 9: $\|G_n\| \leq \|G\| \leq 1.$

Dem.: Similar a demonstração do Lema 4 da seção anterior, tendo em vista que a condição (41) é a mesma definida no algoritmo da seção 2.

Como pode ser verificado, as matrizes G e G_n do presente processo iterativo tem as mesmas propriedades das matrizes de iteração do algoritmo anterior de onde segue que todos os resultados obtidos na seção 3 também são válidos para este algoritmo. Isto garante portanto, que se $b \in R(A)$ então a sequência gerada pelo algoritmo converge para uma solução de (1) do tipo dado em (35).

CAPÍTULO II

MÉTODOS DE PROJEÇÃO DE CONVERGÊNCIA FINI- TA PARA SISTEMAS LINEARES CONSISTENTES

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos dois novos algoritmos para a resolução numérica do problema

$$Ax = b \tag{1}$$

onde A é uma matriz $M \times N$ não necessariamente de posto completo. Estes novos algoritmos são obtidos a partir dos algoritmos apresentados no capítulo anterior e apresentam a vantagem teórica de convergirem em número finito de iterações não superior ao posto da matriz A . A condição de convergência é que $b \in R(A)$ e portanto admitiremos que (1) sempre tem solução.

Tendo em vista que as matrizes de iteração dos algoritmos apresentados no capítulo anterior possuem propriedades em comum, apresentamos primeiramente a forma geral dos algoritmos de onde é feito o estudo de convergência e nas seções seguintes, particularizamos para cada caso onde são obtidos os algoritmos desejados.

2. FORMA GERAL DOS ALGORITMOS E CONVERGÊNCIA

Consideremos o problema (1) e o seguinte processo iterativo

associado

$$x_{n+1} = x_n + Hr_n$$

onde $r_n = b - Ax_n$ e H é tal que a matriz

$$G = I - HA$$

satisfaz as seguintes propriedades

$$(I) \quad G = G^T$$

$$(II) \quad \|G\| < 1 \quad \text{e} \quad \|Gx\| = \|x\| \quad \text{sse} \quad x \in N(A)$$

É fácil ver que se $b \in R(A)$ e $y \in R^n$ é um ponto fixo do operador definido por G , ou seja

$$y = Gy + Hb$$

então y é solução de (1). De fato, se $b \in R(A)$ então $b = Az$ para algum $z \in R^n$ e portanto

$$0 = (I-G)y - Hb = (I-G)y - HAz = (I-G)(y-z)$$

ou seja

$$G(y-z) = (y-z)$$

De onde segue, por(II), que

$$(y-z) \in N(A)$$

ou seja, $Ay = b$.

Isto quer dizer que se $b \in R(A)$, então o sistema relacionado

$$HAX = Hb \tag{2}$$

tem o mesmo conjunto solução de (1) e além disso, por(I) e (II), HA é simétrica e semi-positiva definida. É natural portanto, pensarmos em considerar o problema (2) em vez de (1), visto que as matrizes simétricas apresentam a propriedade de permitir, de modo simples, a geração de vetores ortogonais a partir de um vetor inicial arbitrário(veja por exemplo [7], [13], [14]), de onde são obtidos diferentes algoritmos para a resolução de sistemas lineares. Em particular propomos o seguinte algoritmo.

ALGORITMO 2

Dado x_0 , $r_0 = b - Ax_0$ e $d_0 = Hr_0$, definimos

$$(a) \quad x_{n+1} = x_n + \alpha_n d_n$$

onde α_n é calculado de forma que

$$\langle d_n, x_{n+1} - \bar{x} \rangle = 0 \quad (3)$$

sendo \bar{x} uma solução de (1), ou seja

$$\alpha_n = \frac{-\langle d_n, x_n - \bar{x} \rangle}{\langle d_n, d_n \rangle} \quad (4)$$

$$(b) \quad r_{n+1} = r_n - \alpha_n A d_n$$

$$(c) \quad d_{n+1} = H r_{n+1} - \beta_n d_n$$

onde β_n é calculado de modo que

$$\langle d_n, d_{n+1} \rangle = 0 \quad (5)$$

ou melhor

$$\beta_n = \frac{\langle d_n, H r_{n+1} \rangle}{\langle d_n, d_n \rangle} \quad (6)$$

Observe que neste algoritmo, o parâmetro α_n é calculado do mesmo modo que nos algoritmos apresentados no capítulo 1 e portanto

$$\|x_{n+1} - \bar{x}\| = \min_{\alpha} \|x_n + \alpha d_n - \bar{x}\| \quad (7)$$

É óbvio que tal algoritmo só pode ser implementado se for possível o cálculo de α_n de modo a satisfazer (7). Por ora admitiremos que isto é possível. Vejamos agora as propriedades do presente algoritmo.

LEMA 1: Se $r_n = b - Ax_n \neq 0$, então $d_n \neq 0$.

Dem.: Começamos observando que se \bar{x} é uma solução de (1), então

$$\bar{x} = Gx + Hb$$

e portanto se y é tal que

$$y = Gx_n + Hb = x_n + Hr_n$$

temos

$$y - \bar{x} = G(x_n - \bar{x})$$

Deste modo, se $d_n = 0$ temos

$$0 = Hr_n - \beta_{n-1} d_{n-1}$$

de onde obtemos

$$\|G(x_n - \bar{x})\|^2 = \|x_n - \bar{x}\|^2 + \beta_{n-1}^2 \|d_{n-1}\|^2 \geq \|x_n - \bar{x}\|^2$$

jã que $\langle d_{n-1}, x_n - \bar{x} \rangle = 0$ por (3). Mas por

(II) segue que

$$\|G(x_n - \bar{x})\| \leq \|x_n - \bar{x}\|$$

e portanto $\|G(x_n - \bar{x})\| = \|x_n - \bar{x}\|$. Agora, novamente por (II) segue que

$$(x_n - \bar{x}) \in N(A) \quad \text{ou} \quad r_n = b - Ax_n = 0$$

o que contradiz a hipótese.

LEMA 2: Se $d_n \neq 0$, então $\langle d_n, d_j \rangle = \langle \epsilon_n, H A \epsilon_j \rangle = 0$

$j = 0, 1, 2, \dots, n-1$, com $\varepsilon_j = X_j - \bar{X}$ sendo \bar{X} uma solução de (1)

Dem.: Pelas condições (3) e (5) temos, respectivamente, que

$$\langle d_j, \varepsilon_{j+1} \rangle = 0$$

$$\langle d_j, d_{j+1} \rangle = 0$$

Visto que $b \in R(A)$, segue que

$$HA\varepsilon_j = HA(X_j - \bar{X}) = -Hr_j$$

e portanto

$$\alpha_j = \frac{-\langle d_j, \varepsilon_j \rangle}{\langle d_j, d_j \rangle} = \frac{-\langle Hr_j, \varepsilon_j \rangle}{\langle d_j, d_j \rangle} = \frac{\langle \varepsilon_j, HA\varepsilon_j \rangle}{\langle d_j, d_j \rangle}$$

como $x_{j+1} = x_j + \alpha_j d_j$ temos

$$\varepsilon_{j+1} = \varepsilon_j + \alpha_j d_j$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle \varepsilon_{j+1}, HA\varepsilon_j \rangle &= \langle \varepsilon_j, HA\varepsilon_j \rangle + \alpha_j \langle d_j, HA\varepsilon_j \rangle \\
 &= \langle \varepsilon_j, HA\varepsilon_j \rangle - \frac{\langle \varepsilon_j, HA\varepsilon_j \rangle}{\langle d_j, d_j \rangle} \langle d_j, Hr_j \rangle = 0
 \end{aligned}$$

já que $\langle d_j, d_j \rangle = \langle Hr_j, d_j \rangle - \beta_{j-1} \langle d_j, d_{j-1} \rangle = \langle d_j, Hr_j \rangle$

de onde segue que

$$\langle \varepsilon_{j+1}, HA\varepsilon_j \rangle = \langle d_j, d_{j+1} \rangle = 0$$

$$j = 0, 1, \dots, n-1$$

e portanto

$$\langle \varepsilon_1, HA\varepsilon_0 \rangle = \langle d_1, d_0 \rangle = 0$$

Agora, supondo que $\langle d_{n-1}, d_j \rangle = \langle \varepsilon_{n-1}, HA\varepsilon_j \rangle = 0$

para $j = 0, 1, \dots, n-2$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle \varepsilon_n, HA\varepsilon_j \rangle &= \langle \varepsilon_{n-1}, HA\varepsilon_j \rangle + \alpha_{n-1} \langle d_{n-1}, HA\varepsilon_j \rangle \\
 &= -\alpha_{n-1} \langle d_{n-1}, Hr_j \rangle = 0 \quad j \leq n-2
 \end{aligned}$$

tendo em vista que $Hr_j = d_j + \beta_{j-1} d_{j-1}$.

Além disso, temos

$$\begin{aligned} \langle d_n, d_j \rangle &= \langle Hr_n, d_j \rangle - \beta_{n-1} \langle d_{n-1}, d_j \rangle \\ &= - \langle \epsilon_n, HAd_j \rangle = 0 \quad j \leq n-2 \end{aligned}$$

$$\text{já que } HAd_j = \frac{1}{\alpha_j} [HA\epsilon_{j+1} - HA\epsilon_j]$$

como $\langle d_n, d_{n-1} \rangle = \langle \epsilon_n, HA\epsilon_{n-1} \rangle = 0$ segue

$$\langle d_n, d_j \rangle = \langle \epsilon_n, HA\epsilon_j \rangle = 0$$

para $j = 0, 1, \dots, n-1$, o que conclui a demonstração.

LEMA 3: Se d_0, d_1, \dots, d_n são direções não nulas geradas pelo algoritmo, então

$$d_1 = -\alpha_0 (HAd_0 - \mu_0 d_0)$$

e

$$d_{j+1} = -\alpha_j (HAd_j - \mu_j d_j - \theta_j d_{j-1}) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

onde

$$\mu_j = \frac{\langle d_j, HAd_j \rangle}{\langle d_j, d_j \rangle}$$

$$\theta_j = \frac{\langle d_j, HAd_{j-1} \rangle}{\langle d_{j-1}, d_{j-1} \rangle}$$

Dem.: Do lema 2, segue que

$$\langle HA\varepsilon_{j+1}, d_{j-1} \rangle = \langle HA\varepsilon_j, d_{j-1} \rangle + \alpha_j \langle HAd_j, d_{j-1} \rangle = 0$$

de onde obtemos

$$\langle Hr_j, d_{j-1} \rangle = \alpha_j \langle HAd_j, d_{j-1} \rangle$$

Visto que por hipótese $\langle d_j, d_j \rangle \neq 0 \quad j=0, 1, \dots, n$

temos

$$\beta_{j-1} = \frac{\langle Hr_j, d_{j-1} \rangle}{\langle d_{j-1}, d_{j-1} \rangle} = \alpha_j \frac{\langle HAd_j, d_{j-1} \rangle}{\langle d_{j-1}, d_{j-1} \rangle}$$

ou seja

$$\beta_{j-1} = \alpha_j \theta_j.$$

Alternativamente, temos

$$\beta_j = \frac{\langle Hr_{j+1}, d_j \rangle}{\langle d_j, d_j \rangle} = \frac{\langle Hr_j - \alpha_j HAd_j, d_j \rangle}{\langle d_j, d_j \rangle}$$

ou ainda

$$\beta_j = \frac{\langle Hr_j, d_j \rangle}{\langle d_j, d_j \rangle} - \alpha_j \frac{\langle HAd_j, d_j \rangle}{\langle d_j, d_j \rangle}$$

ou melhor

$$\beta_j = 1 - \alpha_j \mu_j$$

Agora, utilizando a definição d_{j+1} , obtemos

$$d_{j+1} = Hr_{j+1} - \beta_j d_j = Hr_{j+1} - (1 - \alpha_j \mu_j) d_j$$

ou ainda

$$d_{j+1} = -\alpha_j (HAd_j - \mu_j d_j) + (Hr_j - d_j)$$

Observando que $Hr_j - d_j = \beta_{j-1} d_{j-1} - \alpha_j \theta_j d_{j-1}$,
 $j > 1$ e que $Hr_0 = d_0$, obtêm-se o resultado
desejado.

A recorrência trinomial definida no Lema 3 não é nada menos que o processo de Lanczos [23] aplicado a matriz HA com vetor inicial $d_0 = Hr_0$. A demonstração que tal recorrência gera uma sequência de vetores ortogonais a partir de vetor inicial arbitrário e uma dada matriz simétrica pode ser encontrada na referência [13]. Do Lema 3, obtemos os seguintes resultados imediatos

Corolário 3.1: Se $d_j \neq 0$, então $\langle d_j, HAd_i \rangle = 0 \quad i \leq j - 2$

Dem.: (imediato)

Corolário 3.2: Se $S_n = [d_0, d_1, \dots, d_n]$ é o subespaço gerado pelas direções não nulas d_0, d_1, \dots, d_n , então

$$S_n = [d_0, (HA)d_0, \dots, (HA)^n d_0]$$

Dem.: (imediato)

LEMA 4: Se $d_0 \neq 0$ e K é o número de autovalores não nu-

los e distintos de HA , então existe um inteiro $1 \leq K_0 \leq K$ tal que os vetores $d_0, (HA)d_0, \dots, (HA)^{(K_0-1)}d_0$ são linearmente independentes e além disso

$$S_n = S_{(K_0-1)}, \quad n \geq K_0$$

onde S_n é o subespaço gerado pelos vetores $d_0, (HA)d_0, \dots, (HA)^n d_0$.

Dem.: Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$) os autovalores não nulos de AH com multiplicadores m_1, m_2, \dots, m_K respectivamente.

Como $d_0 = H r_0 = HA \epsilon_0$, temos que $d \in R(HA)$ e portanto ele pode ser escrito na forma

$$d_0 = U_1 + U_2 + \dots + U_K$$

onde U_j ($j = 1, 2, \dots, K$) é um vetor do subespaço gerado pelos autovetores associados a λ_j . Tendo em vista que algum U_j pode ser nulo, podemos assumir, sem perda de generalidade, que d_0 é de forma

$$d_0 = U_1 + \dots + U_K$$

onde $U_j \neq 0$ para $j = 1, 2, \dots, K_0$ e $K_0 \leq K$. Desta forma, se definirmos $(HA)^0 = I$ e $\lambda_j^0 = 1$, temos

$$(HA)^n d_0 = \lambda_1^n U_1 + \dots + \lambda_{K_0}^n U_{K_0}$$

para todo n inteiro não negativo. Assim, fazendo n variar de 0 a $(K_0 - 1)$ é fácil ver que os vetores $d_0, (HA)d_0, \dots, (HA)^{(K_0 - 1)}d_0$ são linearmente independentes, já que o determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \dots & \lambda_1^{(K_0 - 1)} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \dots & \lambda_2^{(K_0 - 1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_{K_0} & \dots & \dots & \lambda_{K_0}^{(K_0 - 1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

visto que $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $j \neq i$. Ou ainda K_0 é o menor inteiro

tal que os vetores $d_0, (HA)d_0, \dots, (HA)^{K_0}d_0$ são linearmente dependentes, o que conclui a demonstração.

Teorema: Com $b \in R(A)$, x_n é solução de (1) para algum $n \leq K$, onde K é o número de autovalores não nulos e distintos de HA .

Dem.: Pelo Lema 4, existe $K_0 \leq K$ tal que

$$S_{K_0} = S_{(K_0 - 1)}$$

fazendo $n = K_0$ e utilizando o Lema 3 e o Corolário (3.2), obtemos

$$d_n \in S_{K_0} = S_{(K_0 - 1)} = [d_0, d_1, \dots, d_{(K_0 - 1)}]$$

mas pelo Lema 2, $\langle d_n, d_j \rangle = 0$ para todo $j < n$ e portanto

$$d_n = 0$$

Agora pelo Lema 1, vem que

$$r_n = b - Ax_n = 0$$

o que conclui a demonstração.

3. OBTENÇÃO DOS ALGORITMOS

O algoritmo apresentado na seção anterior foi estabelecido de forma geral, e portanto para diferentes definições de H , obtêm-se diferentes versões. Aqui apresentamos duas versões que podem ser vistas como versões modificadas dos algoritmos (1-1) e (1-2) apresentados no capítulo anterior. Para isto, começamos observando que os processos iterativos (1-1) e (1-2) descritos no capítulo I, podem ser estabelecidos na forma

- (i) $x_{n+1} = x_n + \alpha_n d_n$
- (ii) $r_{n+1} = r_n - \alpha_n Ad_n$
- (iii) $y = Gx_{n+1} + Hb = x_{n+1} + Hr_{n+1}$
- (iv) $d_{n+1} = y - x_{n+1} = Hr_{n+1}$

onde $d_0 = (Gx_0 + Hb) - x_0 = Hr_0$ e α_n é calculado de modo que

$$\langle d_n, x_{n+1} - \bar{x} \rangle = 0 \quad (8)$$

ou seja

$$\alpha_n = \frac{\langle d_n, x_n - \bar{x} \rangle}{\langle d_n, d_n \rangle} \quad (9)$$

observe que em ambos os casos (Kaczmarz(1-1) ou Cimmino(1-2)) o parâmetro α_n que satisfaz (8) pode ser calculado facilmente, visto que o vetor $d_n = y - x_n$ é da forma

$$d_n = (y - x_n) = A^T z_n \quad (10)$$

onde z_n está bem definido para cada processo no capítulo anterior. Deste modo, se modificarmos o passo (iv) para

$$(iv-1) \quad d_{n+1} = (y - x_{n+1}) - \beta_n d_n$$

com
$$\beta_n = \frac{\langle d_n, y - x_{n+1} \rangle}{\langle d_n, d_n \rangle}, \quad \text{teremos}$$

$$\langle d_n, x_n - \bar{x} \rangle = \langle (y - x_n) - \beta_{n-1} d_{n-1}, x_n - \bar{x} \rangle$$

$$\langle d_n, x_n - \bar{x} \rangle = \langle y - x_n, x_n - \bar{x} \rangle = \langle A^T z_n, x_n - \bar{x} \rangle = \langle z_n, r_n \rangle$$

já que, pela condição (8), $\langle d_{n-1}, x_n - \bar{x} \rangle = 0$. Isto mostra que o parâmetro α_n também pode ser calculado sem dificuldade neste caso. Agora, observando que a matriz de iteração G dos processos iterativos dados no capítulo 1 satisfazem as propriedades

$$(I) \quad G = G^T$$

$$(II) \quad \|G\| \leq 1 \quad \text{e} \quad \|Gx\| = \|x\| \quad \text{sse} \quad x \in N(A)$$

Segue que o algoritmo modificado é do tipo (2-0) apresentado na seção anterior e portanto convergem para uma solução de (1) em número finito de iterações não superior ao posto de A visto que $d_n \in R(A^T)$ para todo n .

Descreveremos a seguir os algoritmos. Antes, lembramos que estamos admitindo que as linhas da matriz A foram divididas em blocos não necessariamente disjuntos A_1, A_2, \dots, A_m .

3.1 ALGORITMO 2.1

Dados os parâmetros w_1, w_2, \dots, w_m , com $0 < w_j < 2$ para $j = 1, 2, \dots, m$, e um vetor inicial x_0 e $r_0 = b - Ax_0$, calcule

para $n = 0, 1, \dots$

$$(a) \quad y_1 = x_n; \quad Z = 0$$

$$(b) \quad \text{Para } k = 1, 2, \dots, (2m-1)$$

$$j = \min(k, 2m-k)$$

$$Y_{k+1} = Y_k + A_j^T v_k$$

$$z_j = z_j + W_j v_k$$

onde v_k é a solução do sistema

$$A_j A_j^T v_k = b_j - A_j y_k \quad (11)$$

$$(c) \quad \text{Se } n = 0, \text{ então faça } d_0 = y_{2m} - x_0$$

caso contrário

$$d_n = (y_{2m} - x_n) - \beta_{n-1} d_{n-1}$$

onde

$$\beta_{n-1} = \frac{\langle y_{2m} - x_n, d_{n-1} \rangle}{\langle d_{n-1}, d_{n-1} \rangle}$$

$$(d) \quad x_{n+1} = x_n + \alpha_n d_n$$

onde

$$\alpha_n = \frac{\langle z, r_n \rangle}{\langle d_n, d_n \rangle}$$

e

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_m \end{pmatrix}$$

$$(e) \quad r_{n+1} = r_n - \alpha_n A d_n$$

3.2 ALGORITMO 2.2

Dados os parâmetros $w_1, w_2, \dots, w_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, com $0 < w_j < 2$ e $\lambda_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$) e $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$, e um vetor inicial x_0 e $r_0 = b - Ax_0$, calcule para $n = 0, 1, 2, \dots$

(a) $Z = 0$

(b) Para $k = 1, 2, \dots, m$

$$Y_k = x_n + w_k A_k^T v_k$$

$$z_k = \lambda_k w_k v_k$$

onde v_k é solução do sistema

$$A_k A_k^T v_k = b_k - Ax_k \quad (12)$$

(c) Se $n = 0$, então faça $d_0 = \sum_{j=1}^m \lambda_j Y_j$ caso contrário,

$$d_n = \sum_{j=1}^m \lambda_j Y_j - \beta_{n-1} d_{n-1}$$

com

$$\beta_{n-1} = \frac{\langle \sum_{j=1}^m \lambda_j Y_j, d_{n-1} \rangle}{\langle d_{n-1}, d_{n-1} \rangle}$$

(d) $x_{n+1} = x_n + \alpha_n d_n$

onde

$$\alpha_n = \frac{\langle z, r_n \rangle}{\langle d_n, d_n \rangle}$$

e

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_m \end{bmatrix}$$

$$(e) \quad r_{n+1} = r_n - \alpha_n d_n$$

A utilização de diferentes métodos para resolver os sistemas (11) e (12) levam a diferentes versões dos algoritmos (2.1) e (2.2) respectivamente.

MÉTODOS DE PROJEÇÃO DOS RESÍDUOS DE CONVERGÊNCIA
FINITA PARA SISTEMAS GERAIS DE EQUAÇÕES LINEARES

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo estaremos interessados na resolução numérica do problema

$$\text{Min } \| b - Ax \|^2 \quad (1)$$

onde A é uma matriz $M \times N$ não necessariamente de posto completo. Para isto, consideraremos dois processos iterativos definidos a partir das projeções dos resíduos ($r = b - Ax$) nos subespaços definidos pelas colunas da matriz A . O primeiro é uma versão bloco acelerada do processo inicialmente proposto por Garza [16] que pode ser visto como uma aplicação do processo de Kaczmarz ao problema

$$A^T (b - Ax) = A^T r = 0$$

Deste modo, obtemos o segundo algoritmo, também bloco acelerado, com base no processo de Cimmino. Os algoritmos apresentam a vantagem teórica de convergirem em número finito de iterações não superior ao posto da matriz A .

De modo análogo ao capítulo anterior, apresentamos primeiro

a forma geral dos algoritmos de onde é feito o estudo de convergência e em seguida particularizamos para cada caso onde são obtidos os algoritmos desejados.

2. FORMA GERAL DO ALGORITMO E CONVERGÊNCIA

Consideremos o problema (1) e o seguinte processo iterativo associado

$$x_{n+1} = x_n + Hr_n$$

onde $r_n = b - Ax_n$ e H é tal que a matriz

$$Q = I - AH$$

satisfaz as seguintes propriedades

$$(I) \quad Q = Q^T$$

$$(II) \quad \|Q\| \leq 1 \quad \text{e} \quad \|Q\| = \|u\| \quad \text{sse} \quad u \in N(A^T)$$

Da definição de x_{n+1} segue que

$$r_{n+1} = r_n - AHr_n = (I - AH)r_n = Qr_n$$

e pela condição (II), temos

$$\|r_{n+1}\| \leq \|r_n\|$$

o que mostra que este processo reduz o resíduo ($r_n = b - Ax_n$) a cada iteração. Além disso se $y \in R^n$ é tal que

$$y = y + H(b - Ay)$$

então y é solução do problema $A^T Ax = A^T b$, ou seja

$$\|b - Ay\|^2 = \text{Min } \|b - Ax\|^2$$

De fato, se $r(y) = b - Ay$, então

$$r(y) = Qr(y)$$

que pela condição (II) implica

$$A^T r(y) = A^T (b - Ay) = 0$$

Isto mostra que toda solução do sistema relacionado

$$HAX = Hb$$

é solução do problema (1). Visto que a matriz HA não é necessariamente simétrica o algoritmo dado no capítulo anterior não pode ser aplicado neste caso. Entretanto, por (I) e (II) a matriz AH é simétrica e semipositiva definida, o que nos permite definir o seguinte processo iterativo:

ALGORITMO 3-0:

Dado x_0 , $r_0 = b - Ax_0$ e $d_0 = Hr_0$ definimos

$$(a) \quad x_{n+1} = x_n + \alpha_n d_n$$

onde α_n é calculado de modo que

$$\langle r_{n+1} - r^*, Ad_n \rangle = 0 \quad (3)$$

Sendo $r^* = b - Ax^*$, tal que $A^T r^* = 0$ e portanto

$$\alpha_n = \frac{\langle Ad_n, r_n \rangle}{\langle Ad_n, Ad_n \rangle} \quad (4)$$

$$(b) \quad r_{n+1} = r_n - \alpha_n Ad_n$$

$$(c) \quad d_{n+1} = Hr_{n+1} - \beta_n d_n$$

onde β_n é calculado de modo que

$$\langle Ad_{n+1}, Ad_n \rangle > 0 \quad (5)$$

ou seja

$$\beta_n = \frac{\langle AHr_{n+1}, Ad_n \rangle}{\langle Ad_n, Ad_n \rangle} \quad (6)$$

Observe que a condição (3) estabelece que

$$\|r_{n+1} - r^*\| = \min_{\alpha} \|r_n - \alpha Ad_n - r^*\| \quad (7)$$

ou seja, r_{n+1} é a projeção de r^* sobre a reta determinada pelo vetor r_n e a direção Ad_n . O parâmetro α_n que satisfaz (7), como foi visto, pode ser obtido sem dificuldades. Vejamos agora as propriedades do presente algoritmo.

LEMA 1: Se $A^T r_n \neq 0$, então $Ad_n \neq 0$.

Dem.: Da definição de d_n , obtemos

$$Ad_n = AHr_n - \beta_{n-1} Ad_{n-1}$$

de onde resulta

$$\langle r_n, Ad_n \rangle = \langle r_n, Ahr_n \rangle - \beta_{n-1} \langle r_n, Ad_{n-1} \rangle$$

mas pela condição (3), $\langle r_n, Ad_{n-1} \rangle = 0$ e

portanto

$$\langle r_n, Ad_n \rangle = \langle r_n, Ahr_n \rangle$$

Assim, se $Ad_n = 0$ temos

$$\langle r_n, Ahr_n \rangle = 0$$

que pelas condições (I) e (II) implica em

$$A^T r_n = 0$$

o que contradiz a hipótese.

LEMA 2: Se $A^T r_n \neq 0$, então $\langle r_n, Ahr_j \rangle = \langle Ad_n, Ad_j \rangle = 0$

$$j = 0, 1, \dots, (n-1)$$

Dem.: De (3) e (5), segue que

$$\langle r_j, Ad_{j-1} \rangle = \langle Ad_j, Ad_{j-1} \rangle = 0$$

e por (4), temos

$$\alpha_{j-1} = \frac{\langle r_{j-1}, Ad_{j-1} \rangle}{\|Ad_{j-1}\|^2} = \frac{\langle r_{j-1}, Ahr_{j-1} \rangle}{\|Ad_{j-1}\|^2}$$

por (c) resulta que

$$\langle r_j, Ahr_{j-1} \rangle = \langle r_{j-1}, Ahr_{j-1} \rangle - \alpha_{j-1} \langle Ad_{j-1}, Ahr_{j-1} \rangle = 0$$

$$\text{j\~{a} que } \langle Ad_{j-1}, Ad_{j-1} \rangle = \langle Ahr_{j-1}, Ad_{j-1} \rangle$$

e portanto

$$\langle Ad_j, Ad_{j-1} \rangle = \langle r_j, Ahr_{j-1} \rangle = 0$$

$$j = 1, 2, \dots, (n - 1)$$

Agora, supondo que $\langle r_{n-1}, Ahr_j \rangle = \langle Ad_{n-1}, Ad_j \rangle = 0$

$j = 0, 1, 2, \dots, (n-2)$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle r_n, \text{A}Hr_j \rangle &= \langle r_{n-1}, \text{A}Hr_j \rangle - \alpha_{n-1} \langle \text{Ad}_{n-1}, \text{A}Hr_j \rangle \\ &= -\alpha_{n-1} \langle \text{Ad}_{n-1}, \text{Ad}_j \rangle + \beta_{j-1} \langle \text{Ad}_{j-1} \rangle = 0 \quad (j \leq n-2) \end{aligned}$$

Além disto, temos

$$\begin{aligned} \langle \text{Ad}_n, \text{Ad}_j \rangle &= \langle \text{A}Hr_n, \text{Ad}_j \rangle - \beta_{n-1} \langle \text{Ad}_{n-1}, \text{Ad}_j \rangle \\ &= \langle \text{A}Hr_n, \text{Ad}_j \rangle = \frac{1}{\alpha_j} \langle \text{A}Hr_n, r_j - r_{j+1} \rangle = 0 \quad (j \leq n-2) \end{aligned}$$

como $\langle \text{Ad}_n, \text{Ad}_{n-1} \rangle = \langle r_n, \text{A}Hr_{n-1} \rangle = 0$ segue
que

$$\langle \text{Ad}_n, \text{Ad}_j \rangle = \langle r_n, \text{A}Hr_j \rangle = 0$$

para $j = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$, o que conclui a
demonstração.

LEMA 3:

Se $A^T r_j \neq 0$ e $q_j = \text{Ad}_j$ para $j = 0, 1, 2, \dots, n$,
então

$$q_1 = \alpha_1 (AHq_0 - \mu_0 q_0)$$

e

$$q_{j+1} = \alpha_j (AHq_j - \mu_j q_j - \theta_j q_{j-1}) \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

onde

$$\mu_j = \frac{\langle q_j, AHq_j \rangle}{\langle q_j, q_j \rangle}$$

$$\theta_j = \frac{\langle q_j, AHq_{j-1} \rangle}{\langle q_{j-1}, q_{j-1} \rangle}$$

Dem.: Da definição de d_j , obtemos

$$Ad_j = Ahr_j - \beta_{j-1} Ad_{j-1}$$

e portanto

$$q_j = Ahr_j - \beta_{j-1} q_{j-1}$$

Pelo Lema 2, temos

$$\langle \text{A}r_{j+1}, q_{j-1} \rangle = \langle \text{A}r_j, q_{j-1} \rangle - \alpha_j \langle \text{A}Hq_j, q_{j-1} \rangle = 0$$

ou seja

$$\langle \text{A}r_j, q_{j-1} \rangle = \alpha_j \langle \text{A}Hq_j, q_{j-1} \rangle$$

Visto que $\text{A}^T r_j \neq 0$ $j = 0, 1, 2, \dots, n$, segue pelo Lema 1 que $q_j \neq 0$ $0 \leq j \leq n$ e portanto

$$\beta_{j-1} = \frac{\langle \text{A}r_j, q_{j-1} \rangle}{\langle q_{j-1}, q_{j-1} \rangle} = \alpha_j \frac{\langle \text{A}Hq_j, q_{j-1} \rangle}{\langle q_{j-1}, q_{j-1} \rangle} = \alpha_j \theta_j$$

Agora, observando que

$$\beta_j = \frac{\langle \text{A}r_{j+1}, q_j \rangle}{\langle q_j, q_j \rangle}$$

e $\text{A}r_{j+1} = \text{A}r_j - \alpha_j \text{A}Hq_j$, obtemos

$$\beta_j = \frac{\langle \text{A}r_j, q_j \rangle}{\langle q_j, q_j \rangle} - \alpha_j \frac{\langle \text{A}Hq_j, q_j \rangle}{\langle q_j, q_j \rangle}$$

ou ainda

$$\beta_j = 1 - \alpha_j \mu_j$$

De onde segue que

$$q_{j+1} = \text{Ahr}_{j+1} - \beta_j q_j = \text{Ahr}_{j+1} - (1 - \alpha_j \mu_j) q_j$$

ou ainda

$$q_{j+1} = -\alpha_j (\text{AH}q_j - \mu_j d_j) + \text{Ahr}_j - q_j$$

visto que $\text{Ahr}_j - q_j = \beta_{j-1} q_{j-1} = \alpha_j \theta_j q_{j-1}$ ($j > 1$)

e $q_0 = \text{Ad}_0 = \text{Ahr}_0$, obtemos o resultado desejado.

Como foi observado no capítulo anterior, a recorrência trinomial definida no Lema 3 anterior corresponde ao processo de Lanczos [23] aplicado a matriz AH com o vetor inicial $q_0 = \text{Ahr}_0$. Deste Lema decorre os seguintes resultados

Corolário 3.1: Se $q_j \neq 0$, então $\langle q_j, \text{AH}q_i \rangle = 0$ $i \leq j-2$

Dem.: (imediato)

Corolário 3.2: Se $S_n = [q_0, q_1, \dots, q_n]$ é o subespaço gera-

do pelos vetores q_0, q_1, \dots, q_n , onde
 $q_j = Ad_j$ ($j = 0, 1, \dots, n$), então

$$S_n = [q_0, (AH)q_0, \dots, (AH)^n q_0]$$

Dem.: (imediato)

LEMA 4:

Se $q_0 = Ad_0 \neq 0$ e K é o número de autovalores não nulos e distintos de AH , então existe um inteiro $1 \leq K_0 \leq K$ tal que os vetores $q_0, (AH)q_0, \dots, (AH)^{(K_0-1)}q_0$ são linearmente independentes e além disso

$$S_n = S_{(K_0 - 1)} \quad n \geq K_0$$

onde S_n é o subespaço gerado pelos vetores $q_0, (AH)q_0, \dots, (AH)^n q_0$.

Dem.: (similar ademonstração do Lema 4 do capítulo anterior).

Teorema:

x_n é solução do problema (1) para algum $n \leq K$,

onde K é o número de autovalores não nulos e distintos de AH .

Dem.: Pelo Lema 4, existe $K_0 \leq K$ tal que

$$S_{K_0} = S_{(K_0 - 1)}$$

Fazendo $n = K_0$ e utilizando o Lema 3 e corolário (3.2), obtemos

$$Ad_n \in S_{K_0} = S_{(K_0 - 1)} = [Ad_0, Ad_1, \dots, Ad_{(K_0 - 1)}]$$

mas pelo Lema 2, $\langle Ad_n, Ad_j \rangle = 0$ para todo $j < n$ e portanto

$$Ad_n = 0$$

De onde segue, pelo Lema 1, que

$$A^T r_n = A^T (b - Ax_n) = 0$$

o que conclui a demonstração.

3. OBTENÇÃO DO PRIMEIRO ALGORITMO

Considere que as colunas da matriz A foram divididas em blocos A_1, A_2, \dots, A_m ($1 \leq m \leq N$) não necessariamente disjuntos e sejam as matrizes I_1, I_2, \dots, I_m que tem por colunas vetores de base canônica de modo que

$$AI_j = A_j \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Assim, dados os parâmetros w_1, w_2, \dots, w_m , com $0 < w_j < 2$ para $1 \leq j \leq m$, e um vetor x_0 e em geral x_n e $r_n = b - Ax_n$, definimos

$$(a) \quad y_1 = x_n \quad ; \quad \bar{r}_1 = r_n \quad e$$

$$(b) \quad \text{Para } k = 1, 2, \dots, (2m-k)$$

$$i(k) = \text{Min}(k, 2m-1)$$

$$y_{k+1} = y_k + w_{i(k)} I_{i(k)} v(k)$$

$$\bar{r}_{k+1} = \bar{r}_k - w_{i(k)} A_{i(k)} v_k$$

onde v_k é solução do sistema

$$A_{i(k)}^T A_{i(k)} v_k = A_{i(k)}^T \bar{r}_k \quad (8)$$

$$(c) \quad x_{n+1} = y_{2m} \quad ; \quad r_{n+1} = \bar{r}_{2m}$$

Mostraremos agora, que este processo iterativo satisfaz as condições (I) e (II) da seção anterior. Para isto, observe que se as colunas do j -ésimo bloco são linearmente independentes, com $j = i(k)$ e $1 \leq k \leq 2m-1$, então a solução do sistema (8) será

$$v_k = (A_j^T A_j)^{-1} A_j^T \bar{r}_k$$

e então

$$y_{k+1} = [I - w_j I_j (A_j^T A_j)^{-1} A_j^T A_j] y_k + w_j I_j (A_j^T A_j)^{-1} A_j^T b$$

que no caso geral, é equivalente a

$$y_{k+1} = T_j y_k + w_j I_j A_j^+ b$$

$$\text{onde} \quad T_j = (1 - w_j) I + w_j S_j \quad (9)$$

$$\text{sendo} \quad S_j = I - I_j A_j^+ A \quad (10)$$

Da definição de S_j , temos que

$$A S_j = A(I - I_j A_j^+ A) = A - A_j A_j^+ A = (I - A_j A_j^+) A = P_j A$$

com
$$P_j = I - A_j A_j^+ \quad (11)$$

Assim, se definirmos

$$Q_j = (1-w_j)I + w_j P_j \quad (12)$$

temos

$$AT_j = Q_j A \quad (13)$$

Deste modo, se definirmos

$$F_j = T_m \cdot T_{m-1} \cdots T_{j+1} \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-2$$

$$F_{m-1} = T_m$$

$$F_0 = I$$

$$B_0 = I$$

$$B_1 = T_1$$

$$B_j = T_1 \cdot T_2 \cdots T_j \quad j = 2, 3, \dots, m$$

Teremos por (13) que

$$AF_j = A(T_m \cdots T_{j+1}) = (Q_m \cdots Q_{j+1})A = \tilde{F}_j A$$

$$AB_j = A(T_1 \cdots T_j) = (Q_1 \cdots Q_j)A = \tilde{B}_j A$$

onde \tilde{F}_j e \tilde{B}_j são definidos através das matrizes Q_j de modo análogo a F_j e B_j respectivamente.

Agora definindo

$$\begin{aligned} C_0 &= B_{m-1}F_0 \\ C_j &= B_{m-1}F_j + B_{j-1} \quad j = 1, 2, \dots, (m-1) \\ C_m &= B_{m-1}F_m \end{aligned}$$

obtemos

$$x_{n+1} = Gx_n + Hb \quad (14)$$

$$\text{onde } G = C_0 \quad \text{e} \quad H = \sum_{j=1}^m w_j C_j I_j A_j^+ \quad (15)$$

Da definição de H , obtemos

$$HA = \sum_{j=1}^m w_j C_j I_j A_j^+ A = \sum_{j=1}^m C_j (I - T_j) = I - G$$

$$\text{além disso, se } Q = \tilde{C}_0 = \tilde{B}_{m-1} \tilde{F}_0 \quad \text{e} \quad \tilde{C}_j = \tilde{B}_{m-1} \tilde{F}_j + \tilde{B}_{j-1} \quad (j \geq 1) \quad (16)$$

temos,

$$AC_j = \tilde{C}_j A \quad (17)$$

de onde obtemos

$$AH = \sum_{j=1}^m w_j AC_j I_j A_j^+ = \sum_{j=1}^m \tilde{C}_j (I - Q_j) = I - Q$$

e portanto, de (14) segue que

$$b - Ax_{n+1} = b - A(Gx_n + Hb) = (I - HA)b - QAx_n$$

ou melhor

$$r_{n+1} = Q(b - Ax_n) = Qr_n \quad (18)$$

onde $Q = I - AH = \tilde{B}_{m-1} \tilde{F}_0 = Q_1 \cdots Q_{m-1} \cdot Q_m \cdot Q_{m-1} \cdots Q_1 = Q^T$. já que $Q_j^T = Q_j$ para $j = 1, 2, \dots, m$. Portanto a condição (I) está verificada. Agora observe, através da definição (12) ($j=1, \dots, m$), que este processo iterativo é equivalente ao processo de Kaczmarz aplicado ao problema

$$A^T r = 0$$

com ciclo dado na forma $\{1, \dots, m-1, m, m-1, \dots, 1\}$ e portanto, pelo capítulo 1, a matriz de iteração Q satisfaz

- (i) $\|Q\| \leq 1$
- (ii) $\|Qu\| = \|u\|$ sse $u \in N(A^T)$

o que mostra que a condição (II) também é verificada.

Desta forma, podemos aplicar o processo iterativo da seção anterior de onde resulta o seguinte algoritmo

ALGORITMO 3.1

Dado os parâmetros w_1, w_2, \dots, w_m , com $0 < w_j < 2$ para $j = 1, 2, \dots, m$, e um vetor inicial x_0 e $r_0 = b - Ax_0$, calcule para $n = 0, 1, 2, \dots$

$$(1) \quad \bar{r}_1 = r_n \quad ; \quad y_1 = x_n$$

$$(2) \quad \text{Para } k = 1, 2, \dots, (2m-1)$$

$$j = \min(k, 2m-k)$$

$$y_{k+1} = y_k + w_j I_j v_k$$

$$\bar{r}_{k+1} = \bar{r}_k - w_j A_j v_k$$

onde v_k é solução do sistema

$$A_j^T A_j v_k = A_j^T \bar{r}_k \quad (19)$$

$$(3) \quad \text{Se } n=0, \text{ então faça } d_0 = y_{2m} - x_0 \text{ e } q_0 = r_0 - \bar{r}_{2m}$$

caso contrário,

$$(a) \quad q_n = (r_n - \bar{r}_{2m}) - \beta_{n-1} q_{n-1}$$

$$(b) \quad d_n = (y_{2m} - x_n) - \beta_{n-1} d_{n-1}$$

onde

$$\beta_{n-1} = \frac{\langle r_n - \bar{r}_{2m}, q_{n-1} \rangle}{\langle q_{n-1}, q_{n-1} \rangle}$$

$$(4) \quad x_{n+1} = x_n + \alpha_n d_n$$

$$\text{onde } \alpha_n = \frac{\langle q_n, r_n \rangle}{\langle q_n, q_n \rangle} = \frac{\langle r_n - \bar{r}_{2m}, r_n \rangle}{\langle q_n, q_n \rangle}$$

$$(5) \quad r_{n+1} = r_m - \alpha_n q_n$$

4. OBTENÇÃO DO SEGUNDO ALGORITMO

Admitindo que as colunas de A foram divididas em blocos não necessariamente disjuntos A_1, A_2, \dots, A_m , ($1 \leq m \leq N$) e que as matrizes I_1, \dots, I_m são definidas de modo que $AI_j = A_j$ para $j = 1, 2, \dots, m$, definimos o seguinte processo iterativo

Dado os parâmetros w_1, w_2, \dots, w_m e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ com $0 < w_j < 2$, $\lambda_j > 0$ para $j = 1, 2, \dots, m$, $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$ e um vetor inicial x_0 e $r_0 = b - Ax_0$, calcule para $n=0, 1, \dots$

(1) Para $k = 1, 2, \dots, m$

$$y_k = x_n + w_k I_k v_k$$

$$\bar{r}_k = r_n - w_k A_k v_k$$

onde v_k é solução do sistema

$$A_k^T A_k v_k = A^T r_n \quad (20)$$

$$(2) \quad x_{n+1} = \sum_{k=1}^m \lambda_k y_k$$

$$(3) \quad r_{n+1} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \bar{r}_k$$

Observe que o sistema (20) é da forma dada em (8) e portanto

$$y_k = T_k x_n + w_k I_k A_k^+ b \quad (21)$$

onde $T_k = (1 - w_k) I + w_k S_k \quad (22)$

Sendo
$$S_k = I - I_k A_k^+ A \quad (23)$$

Assim, se $P_k = I - A_k A_k^+$ então

$$AS_k = P_k A \quad (24)$$

de onde resulta

$$AT_k = Q_k A \quad (25)$$

sendo
$$Q_k = (1-w_k)I + w_k P_k \quad (26)$$

Definindo
$$G = \sum_{k=1}^m \lambda_k T_k \quad e \quad H = \sum_{k=1}^m \lambda_k w_k I_k A_k^+ \quad (27)$$

obtemos

$$x_{n+1} = Gx_n + Hb \quad (28)$$

Da definição de H , (27) segue

$$HA = \sum_{k=1}^m \lambda_k w_k I_k A_k^+ A = \sum_{k=1}^m \lambda_k (I - T_k) = I - G$$

e ainda

$$AH = \sum_{k=1}^m \lambda_k w_k A_k A_k^+ = \sum_{k=1}^m \lambda_k (I - Q_k) = I - Q$$

onde

$$Q = \sum_{k=1}^m \lambda_k Q_k$$

De (28) obtemos

$$r_{n+1} = b - A(Gx_n + Hb) = (I - AH)b - AGx_n$$

usando (25), temos que $AG = QA$ e portanto

$$r_{n+1} = (I - AH)r_n = Qr_n$$

onde

$$Q = I - AH = \sum_{k=1}^m \lambda_k Q_k = \sum_{k=1}^m \lambda_k Q_k^T = Q^T$$

Agora de (26), é fácil ver que este processo é equivalente ao processo de Cimmino aplicado ao problema

$$A^T r = 0$$

de onde segue, pelo capítulo 1, que a matriz de iteração Q satisfaz as propriedades

- (i) $\|Q\| \leq 1$
- (ii) $\|Qu\| = \|u\|$ sse $u \in N(A^T)$

e portanto, o algoritmo dado na seção 2 pode ser aplicado neste caso. O seguinte algoritmo é então obtido.

ALGORITMO 3.2

Dados os parâmetros w_1, \dots, w_m , $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, com $0 < w_j < 2$, $\lambda_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$) e $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$, e um vetor inicial x_0 e $r_0 = b - Ax_0$, calcule para $n=0, 1, \dots$

$$(1) \quad y_1 = x_n; \quad \bar{r}_1 = r_n$$

$$(2) \quad \text{Para } k = 1, 2, \dots, m$$

$$y_{k+1} = y_k + \lambda_k w_k I_k v_k$$

$$\bar{r}_{k+1} = \bar{r}_k - \lambda_k w_k A_k v_k$$

onde v_k é solução do sistema

$$A_k^T A_k v_k = A_k^T r_n \quad (29)$$

$$(3) \quad \text{Se } n=0, \text{ então faça } d_0 = y_{m+1} - y_0 \quad e$$

$$q_0 = r_0 - \bar{r}_{m+1} \quad \text{caso contrario}$$

$$(a) \quad d_n = (y_{m+1} - x_n) - \beta_{n-1} d_{n-1}$$

$$(b) \quad q_n = (r_n - \bar{r}_{m+1}) - \beta_{n-1} q_{n-1}$$

$$\text{onde} \quad \beta_{n-1} = \frac{\langle q_{n-1}, r_n - \bar{r}_{m+1} \rangle}{\langle q_{n-1}, q_{n-1} \rangle}$$

$$(4) \quad x_{n+1} = x_n + \alpha_n d_n$$

$$\text{onde} \quad \alpha_n = \frac{\langle q_n, r_n \rangle}{\langle q_n, q_n \rangle} = \frac{\langle r_n - \bar{r}_{m+1}, r_n \rangle}{\langle q_n, q_n \rangle}$$

$$(5) \quad r_{n+1} = r_n - \alpha_n q_n$$

A utilização de diferentes métodos para resolver os subsistemas (19) e (29) levam a diferentes versões dos algoritmos (3.1) e (3.2).

APLICAÇÃO A UM PROBLEMA DE ENGENHARIA HIDRÁULICA

1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é mostrar uma aplicação dos algoritmos apresentados nos capítulos anteriores. Para isto, consideramos um problema de Engenharia Hidráulica que pode ser estabelecido como um sistema de equações não lineares $n \times n$, onde n pode assumir valores relativamente grandes (ex: $n=5000$) dependendo da dimensão do problema.

Para resolver esses sistemas, utilizamos um método tipo Newton Inexato o qual consiste basicamente em obter, a cada iteração, uma aproximação da solução exata de um sistema linear de equações. Dessa forma, o algoritmo 2.1, do capítulo 2, é tomado como exemplo para a resolução desses sistemas lineares.

Na seção 2, apresentamos o problema e mostramos como ele pode ser reduzido a um sistema de equações não lineares. Nas seções seguintes, descrevemos o método de Newton Inexato utilizado na resolução e mostramos os resultados obtidos.

2. O PROBLEMA

Consideremos um encanamento na forma dada pelo grafo abaixo (Fig. 1)

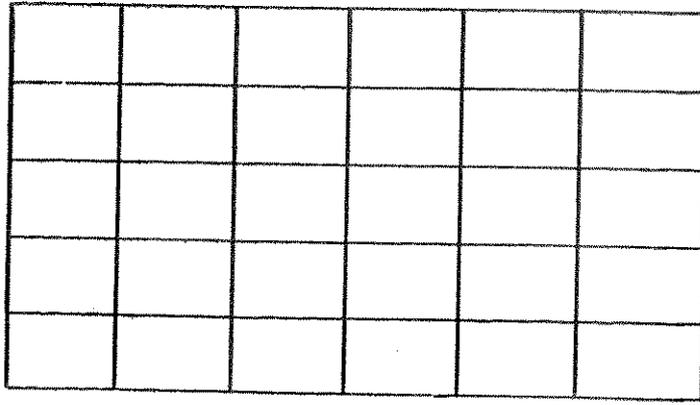


Fig. 1

Suponhamos que em alguns vértices há entrada ou saída de água e que a vazão nessas entradas ou saídas é conhecida. Desejamos conhecer as vazões em cada aresta do grafo.

Se denotarmos por Q_j a vazão na aresta j , temos para cada vértice i uma "Equação de continuidade" do tipo

$$\sum_j \pm Q_j \pm q_i = 0 \quad (1)$$

onde q_i é a vazão de entrada ou saída no vértice i , e as variáveis Q_j as vazões nas arestas j 's que concorrem nesse vértice. O sinal é considerado positivo se a vazão é de entrada e negativo se é de saída. Para exemplificar, considere o exemplo reduzido dado pela figura 2 a seguir

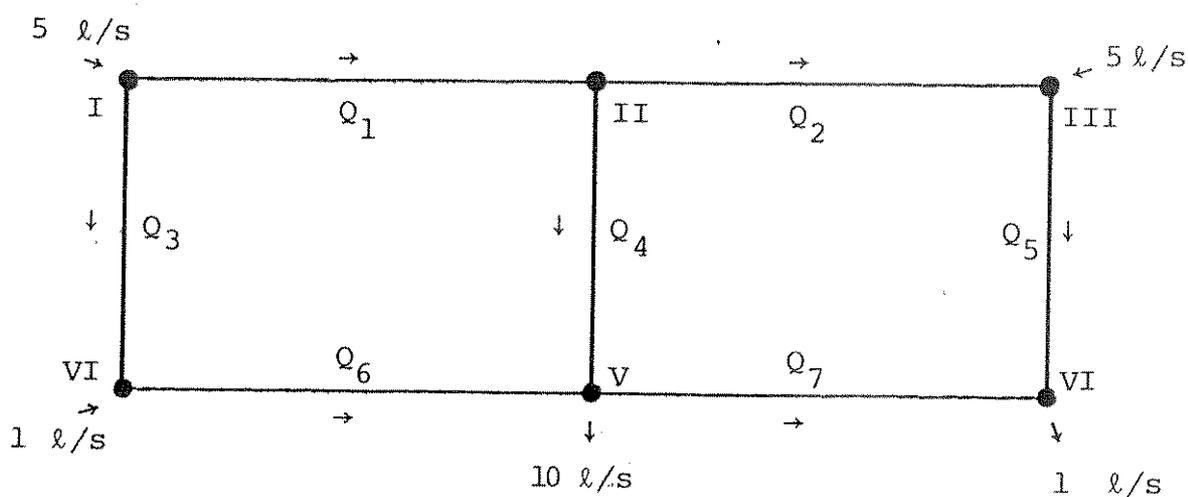


Fig. 2

É fácil ver que as equações de continuidade são dadas por

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & -Q_1 - Q_3 + 5 = 0 \\
 \text{(II)} \quad & Q_1 - Q_2 - Q_4 = 0 \\
 \text{(III)} \quad & Q_2 - Q_5 + 5 = 0 \\
 \text{(IV)} \quad & Q_3 - Q_6 + 1 = 0 \\
 \text{(V)} \quad & Q_4 + Q_6 - Q_7 - 10 = 0 \\
 \text{(VI)} \quad & Q_5 + Q_7 - 1 = 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

Estas equações constituem um sistema linear não homogêneo cujo grau de liberdade é 2, já que a sexta equação, como pode ser verificado, é combinação linear das anteriores. Em geral po

de-se mostrar que o grau de liberdade do sistema definido em (1) é igual ao número de malhas elementares do grafo.

Analisando o sistema (2) acima, é fácil ver que os vetores dados abaixo, formam uma base do conjunto solução do sistema homogêneo associado

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

isto significa que se Q^0 é uma solução particular e Q é uma solução genérica, então

$$Q = Q^0 + \begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ 0 \\ -\Delta Q_1 \\ \Delta Q_1 \\ 0 \\ -\Delta Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta Q_2 \\ 0 \\ -\Delta Q_2 \\ -\Delta Q_2 \\ 0 \\ \Delta Q_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

De (4) se observa que na passagem de uma solução para outra, as variáveis de Q correspondentes a mesma malha sofrem o mesmo incremento. Desta forma, conhecida uma solução particular, o problema reduz-se a determinação do incremento de cada malha (ΔQ_1 e ΔQ_2). No caso geral, temos que determinar $\Delta Q_1, \dots, \Delta Q_n$, onde n é o número de malhas elementares do grafo.

Agora, se P_i denota a pressão no vértice i , então temos para cada aresta j , com origem em i e destino em k (Fig. 3), uma "Equação de Perda de Carga" do tipo

$$P_k = P_i - f(Q_j) \quad (5)$$

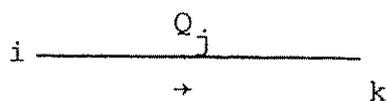


Fig. 3

onde f denota a função perda de carga. Para muitos tipos de problemas (ver [1]) a fórmula de Hazen-Williams é recomendada, e neste caso f é dada por

$$f(Q_j) = \frac{1000^{4.87}}{D_j^{4.87}} \frac{1}{278.5C_j^{1.85}} L_j \text{Sgn}(Q_j) |Q_j|^{1.85} + E_j \quad (6)$$

onde

D_j = diâmetro do trecho j (em milímetros)

C_j = Constante que depende do material

L_j = Comprimento do trecho j (em metros)

E_j = diferença de cota entre i e k (em metros)

Q_j = Vazão (em litros por segundo)

Aplicando (5) ao exemplo considerado, obtemos as seguintes equações de perda de carga

(a) Para a primeira malha

$$P_{II} = P_I - f(Q_1)$$

$$P_V = P_{II} - f(Q_4)$$

$$P_{IV} = P_V + f(Q_6)$$

$$P_I = P_{IV} + f(Q_3)$$

(7)

(b) Para a segunda malha

$$P_V = P_{II} - f(Q_4)$$

$$P_{VI} = P_V - f(Q_7)$$

$$P_{III} = P_{VI} + f(Q_5)$$

$$P_{II} = P_{III} + f(Q_2)$$

(8)

Eliminando as variáveis pressão em (7), e (8), obtemos

$$\begin{aligned} -f(Q_1) - f(Q_4) + f(Q_6) + f(Q_3) &= 0 \\ f(Q_2) + f(Q_5) - f(Q_4) - f(Q_7) &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

substituindo as variáveis Q_j em (9) por sua expressão correspondente em (4) ($Q^0 + \Delta Q$), obtemos um sistema de equações não lineares (2x2) em ΔQ_1 e ΔQ_2 . Isto mostra que o problema fica reduzido a resolução do sistema não linear (9).

Para um grafo com n malhas elementares, obtemos de forma análoga um sistema não linear $n \times n$, onde cada equação corresponde uma malha particular e contém como variáveis o incremento correspondente e os incrementos das malhas vizinhas.

Formulação mais geral desse tipo de problema, juntamente com método de resolução, são dados por Martínez [25].

3. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA: MÉTODO DE NEWTON INEXATO

A simplicidade do cálculo da derivada de f , torna recomendável o uso do método de Newton. Como sabemos, tal método aplicado a um sistema não linear denotado por

$$F(X) = 0 \tag{10}$$

consiste basicamente em resolver, a cada iteração, o sistema linear

$$J(x_k) d_k = -F(x_k) \quad (11)$$

onde $J(x_k)$ denota o Jacobiano de F em x_k . Entretanto, a obtenção da solução exata de (11) a cada iteração pode tornar-se indesejável. Para mostrar isto, considere o exemplo dado pela fig. 4

ΔQ_1	ΔQ_6	ΔQ_{11}	ΔQ_{16}	ΔQ_{21}	ΔQ_{26}
ΔQ_2	ΔQ_7	ΔQ_{12}	ΔQ_{17}	ΔQ_{22}	ΔQ_{27}
ΔQ_3	ΔQ_8	ΔQ_{13}	ΔQ_{18}	ΔQ_{23}	ΔQ_{28}
ΔQ_4	ΔQ_9	ΔQ_{14}	ΔQ_{19}	ΔQ_{24}	ΔQ_{29}
ΔQ_5	ΔQ_{10}	ΔQ_{15}	ΔQ_{20}	ΔQ_{25}	ΔQ_{30}

Fig. 4

onde a estrutura do Jacobiano após a fatoração LU sem pivota-mento é dado pela figura 5, a seguir

descrito em [8], esse tipo de método consiste em obter, a partir de um processo iterativo, uma aproximação da solução exata de (11), estabelecendo um compromisso entre a precisão da aproximação e o esforço computacional necessário. Para resumir, um método de Newton Inexato pode ser descrito como segue

Se x_k é uma aproximação da solução, então a nova aproximação é obtida nos seguintes passos

- I) Encontre uma aproximação \tilde{d}_k da solução exata do sistema

$$J(x_k)\tilde{d}_k = -F(x_k)$$

de modo que

$$\|J(x_k)\tilde{d}_k + F(x_k)\| \leq \eta_k \|F(x_k)\| \quad (12)$$

$$\text{II) } x_{k+1} = x_k + \tilde{d}_k$$

Observe que (12) estabelece o critério de parada para o processo iterativo utilizado na resolução de (11). Portanto, se $\eta_k=0$ o processo reduz-se ao Método de Newton.

Sob as hipóteses que F tem derivadas contínuas e que existe x^* de modo que $F(x^*) = 0$ e $J(x^*)$ é não singular, é de-

monstrado em [8] que este método converge localmente se a sequência $\{\eta_k\}$ é uniformemente menor que um. No caso de convergência deste processo, demonstra-se também em [8], que a taxa de convergência é superlinear se η_k converge para zero.

Para a resolução do problema, aplicamos o método descrito acima, utilizando no passo(I) o algoritmo 2-1, descrito no capítulo 2, com a sequência η_k definida por

$$\eta_k = \min \{ \|F(x_k)\|, \frac{1}{2^k} \}$$

A seção seguinte mostra os resultados obtidos com esta aplicação.

4. EXPERIÊNCIAS NUMÉRICAS

Foram realizados quatro testes computacionais para diferentes valores de n (número de malhas elementares). Para simplificar, todas as arestas foram consideradas com um comprimento de 10 metros, todos os diâmetros de 50 milímetros, e a constante do material igual a 100 em todos os casos.

Os exemplos testes considerados admitem ainda que

- (1) As vazões nos sentidos \downarrow e \rightarrow são positivas

- (2) Em todos os vértices há entrada ou saída de água, de maneira que as vazões definidas por
- Vazão na aresta vertical $i = (-1)^{i+1} \times 5 \text{ l/s}$
- Vazão na aresta horizontal $j = (-1)^{j+1} \times 8 \text{ l/s}$
- são factíveis para as equações de continuidade.

Os testes foram realizados no computador VAX-11/VMS da UNICAMP, tomando como ponto inicial para os incrementos em cada malha igual a zero. As tabelas abaixo mostram os resultados obtidos, onde a primeira coluna fornece a iteração, a segunda o número de iterações realizadas na obtenção da direção, e a terceira mostra a norma Euclidiana de F no ponto obtido. Em todos os casos o critério de convergência utilizado foi

$$\|F(x_k)\| \leq \text{TOL} = 1.E - 04$$

-PRIMEIRO TESTE: $N = 100$

ITER.	NSIT	$\ F(x_k)\ $
0	-	7.073718
1	1	1.433043
2	8	0.8552704
3	6	0.1202633
4	8	0.72079226E-02
5	12	0.9529971E-04

CPU = 1"

SEGUNDO TESTE: N = 1000

ITER.	NSIT	$\ F(x_k)\ $
0	-	22.36900
1	1	3.352564
2	12	1.858177
3	18	0.3022012
4	24	0.2029926E-01
5	31	0.3480247E-03
6	8	0.9459316E-04

CPU = 22"

TERCEIRO TESTE: N = 2500

ITER.	NSIT	$\ F(x_k)\ $
0	-	35.36837
1	1	5.296412
2	32	3.624718
3	43	0.6527398
4	43	0.4585799E-01
5	60	0.1348173E-02
6	39	0.9521973E-04

CPU = 1'58"

QUARTO TESTE: N = 5000

CPU = 4'26"

ITER.	NSIT	$\ F(x_k)\ $
0	-	50.01947
1	1	7.033253
2	26	3.854979
3	43	0.7110192
4	55	0.5246272E-01
5	70	0.1608255E-02
6	49	0.9706662E-04

As tabelas acima, mostram um comportamento regular do problema. No primeiro caso a convergência é atingida na quinta iteração e nos demais casos na sexta. Observe que em todos os casos existe uma efetiva redução da norma Euclidiana de F na primeira iteração com apenas uma sub-iteração no sistema linear. Nas iterações seguintes, o número de sub-iterações é pequeno com relação a N . Isto mostra que o algoritmo 2-1 constitui uma boa alternativa para a aplicação do método de Newton Inexato.

C O N C L U S ã O

Através da aplicação no capítulo 4, pode ser observada a eficiência da versão acelerada do método de Kaczmarz proposto no capítulo 2. Este método, em geral, tem se mostrado mais eficiente que os métodos de Craig [7] e dos gradientes conjugados para sistemas não simétricos.

Comportamento semelhante foram observados para as versões aceleradas dos métodos de Cimmino e Garza.

O algoritmo (2-0) apresentado no capítulo 2 foi estabelecido de forma geral. Portanto para diferentes definições de H obtêm-se diferentes versões do algoritmo. Em particular se $H=A^T S$, com S simétrica positiva definida, os resultados demonstrados ainda permanecem válidos.

Neste caso, a escolha de S é de fundamental importância, já que o número de passos para a convergência depende do número de autovalores distintos de matriz $A^T S A$. Portanto, um estudo de obtenção ótima (ou quase ótima) de S precisa ser feito.

As mesmas considerações acima podem ser feitas para o algoritmo (3-0) apresentado no capítulo 3.

REFERÊNCIAS

- [1] J.M. AZEVEDO e G. ALVAREZ: "Manual de Hidráulica". Edgard Blucher Ltda, São Paulo. 1977.
- [2] Å. BJÖRCK, T. ELFVING: "Accelerated projection methods for computing pseudoinverse solutions of systems of linear equations". BIT, 19, 1979, pp. 145-163
- [3] Y. CENSOR: "Row-Action Methods for Huge and Sparse Systems and their Applications". SIAM Review, 23, 1981, pp. 444-466
- [4] Y. CENSOR, P.P.B. EGGERMONT, D. GORDON: "Strong Underrelaxation in Kaczmarz's Method for Inconsistent Systems". Numer. Math., 41, 1983, pp. 83-92
- [5] G. CIMMINO: "Calcolo approssimato per risoluzioni dei sistemi di equazioni lineari". Ricerca Scien. Roma, 2, 1938, 9, pp. 326-338
- [6] E. J. CRAIG: "Iteration Procedures for Simultaneous Equations". Sc. D. Thesis, Mass. Inst. of Tech., 1954
- [7] E. J. CRAIG: "The N-step iteration procedures". J. Math. and Phys., 34, 1955, pp. 64-73
- [8] R. DEMBO, S. EISENSTAT, T. STEIHAUG: "Inexact Newton Methods". SIAM J. Numer. Anal., 19, 1982, pp. 400-408
- [9] A. De PIERRO: "Métodos de Projeção para Sistemas Lineares e Quadrados Mínimos". Tese de Doutorado, Instituto de Matemática, UFRJ, 1982

- [10] P.P.B. EGGERMONT, G. T. HERMAN, A. LENT: "Iterative Algorithms for Large Partitioned Linear Systems, with Applications to Image Reconstruction". Lin. Algebra Appl., 40, 1981, pp. 37-67
- [11] T. ELFVING: "Block-Iterative Methods for Consistent and Inconsistent Linear Equations". Numer. Math., 35, 1980, pp. 1-12
- [12] S. ERLANDER: "Entropy in linear programs-an approach to planning". Report LiTH - MAT - R - 1977-3, Linkoping, 1977
- [13] D. K. FADDEEV, V. N. FADDEEVA: "Computational Methods of Linear Algebra". Freeman, London, 1963
- [14] G. E. FORSYTHE, M. R. HESTENES, J. B. ROSSER: "Iterative methods for solving linear equations". Bul. Amer. Math. Soc., 57, 1951, pp. 480
- [15] L. G. GUBIN, B. T. POLYAK, E. V. RAIK: "The methods of projections for finding the common point of convex sets". USSR. Comp. Math. and Math. Phys., 7, 1967, pp. 1-24
- [16] A. de la GARZA: "An iterative method for solving systems of linear equations". Union Carbide, Oak Ridge, Report K-731, Tennessee, 1951
- [17] G. T. HERNAN, A. LENT, S. W. ROWLAND: "ART: Mathematics and Applications". J. Theor. Biol., 42, 1973, pp. 1-32

- [18] G. T. HERMAN, A. LENT: "A Storage-Efficient Algorithm for Finding the Regularized Solution of a Large, Inconsistent Systems of equations". J. Inst. Maths. Applics., 25 , 1980, pp. 361-366
- [19] M. R. HESTENES: "Pseudoinverses and Conjugate Gradients" Comm. of the ACM, 18, 1975, pp. 40-43
- [20] M. R. HESTENES, E. STIEFEL: "Methods of conjugate gradients for solving linear systems". J. Res. N. B. S., 49 , 1952, pp. 409-436
- [21] A. S. HOUSEHOLDER, F. L. BAUER: "On certain iterative methods for solving linear systems". Numer. Math., 2 , 1960, pp. 55-59
- [22] S. KACZMARZ: "Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen". Bull. Acad. Polon. Sci. Lett., A35, 1937, pp. 355-357
- [23] C. LANCZOS: "An iteration method for solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators". J. Res. N.B.S., 45, 1950, pp. 255-288
- [24] C. LANCZOS: "Solution of linear equations by minimized iteration". J. Res. N.B.S., 49, 1952, pp. 33-53
- [25] J. M. MARTÍNEZ: "Sistemas não Lineares em Grafos e Cálculo de Encanamentos Usando Microcomputador". Aceito para publicação em Revista Brasileira de Computação

- [26] J. M. MARTÍNEZ: "The method of Successive Orthogonal Projections for solving Nonlinear Simultaneous Equations". Aceito para publicação em Calcolo
- [27] J. M. MARTÍNEZ: "Parallel and sequential Kaczmarz methods for solving underdetermined nonlinear equations". International Journal of Computational and applied Mathematics, 15, 1986, pp. 311-321
- [28] J. M. MARTÍNEZ: "The Projection methods for solving nonlinear systems of equations under the "most violated constraint control". International Journal of Computers and Mathematics with Applications, 11, 1985, pp. 987-993
- [29] J. M. MARTÍNEZ: "Solving systems of nonlinear equations by means of an accelerated successive orthogonal projections method". International Journal of computational and applied Mathematics, 16, 1986, pp. 169-179
- [30] J. M. MARTÍNEZ: "Solution of Nonlinear Systems of Equations by Optimal Projection Method". Computing, 37, 1986, pp. 59-70
- [31] S. F. McCORMICK: "The Methods of Kaczmarz and Row Orthogonalization for Solving Linear Equations and Least Square Problems in Hilbert Space". Indiana University Mathematics Journal, 26, 1977, pp. 1137-1150
- [32] M. MOROZOWSKI FILHO: "Matrizes Esparsas em Redes de Potência". Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1981

- [33] G. W. STEWART: "Conjugate Direction Methods for Solving Systems of Linear Equations". Numer. Math., 21, 1973 , pp. 285-297
- [34] K. TANABE: "Projection Methods for Solving a Singular of Linear Equations and its Applications". Numer. Math. , 17, 1971, pp. 203-204
- [35] R. L. WAINWRIGHT: "Accelerated techniques for a class of x-projection methods for solving systems of linear equations". Comp. Math. Applics., 5, 1979, pp. 59-73
- [36] R. L. WAINWRIGHT: "Three dimensional x-projection method (with accelerated techniques) for solving systems of linear equations ". Comp. Math. Applics., 7, 1981 , pp. 211-223
- [37] R. L. WAINWRIGHT: "Four dimensional x-projection method (with accelerated techniques) for solving systems of linear equations". Comp. Math. Applics. , 8, 1982 , pp. 329-337
- [38] E. L. WACHSPRESS: "Iterative Solution of Elliptic Systems". Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1966
- [39] D. M. YOUNG: "Iterative Solution of Large Linear Systems". Academic Press, New York, 1971