



Universidade Estadual de Campinas

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA

Análise de Desempenho de Constelações de Sinais em Variedades Riemannianas

Autor: Rodrigo Gusmão Cavalcante

Orientador: Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Júnior

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Júnior	FEEC/UNICAMP
Prof^a. Dr^a. Sueli Irene Rodrigues Costa	IMECC/UNICAMP
Prof. Dr. Enaldo Silva Vergasta	IM/UFBA

Tese apresentada na Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Campinas - SP

Maio de 2002

Análise de Desempenho de Constelações de Sinais em Variedades Riemannianas

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Rodrigo Gusmão Cavalcante e aprovada pela banca examinadora.

Campinas, 17 de maio de 2002.

Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Júnior
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Júnior
Prof^a. Dr^a. Sueli Irene Rodrigues Costa
Prof. Dr. Enaldo Silva Vergasta

Tese apresentada na Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

À minha esposa Conceição, que esteve ao meu lado em todos os momentos, bons ou ruins, e que através de seu amor e dedicação me deu toda a inspiração e força para concluir este trabalho.

À minha pequena filha Catarina, que com sua beleza, graça e inocência deu um novo sentido à minha vida.

Aos meus pais, que estão sempre me apoiando e amando. Sem eles nada aqui seria realidade.

Dedico

Agradecimentos ¹

Ao Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Jr. pela sua orientação, disposição, paciência e compreensão durante o desenvolvimento do trabalho. Em especial, à sua confiança depositada em mim e às inúmeras e agradáveis conversas que tivemos.

Aos professores membros da banca examinadora pela disponibilidade e atenção dispensada ao trabalho, bem como por suas valiosas sugestões.

À minha esposa Conceição pelo incentivo e apoio nos momentos difíceis que passei durante este período.

Ao companheirismo dos colegas com os quais convivi durante o programa de mestrado em Engenharia Elétrica.

Aos funcionários da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao parecerista FAPESP que acompanhou o desenvolvimento deste trabalho desde seu projeto inicial, pelas críticas construtivas, sugestões e competência que sempre demonstrou em seus pareceres.

¹Este trabalho foi financiada pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP, Processo nº 00/04203 - 3R.

Resumo

Nesta dissertação apresentamos e analisamos o desempenho de um sistema de comunicações digital quando da consideração de constelações de sinais em superfícies e em variedades riemannianas. Por se tratar de uma nova abordagem, foi necessário estender os conceitos de constelações de sinais, probabilidade de erro e energia média da constelação para a teoria das variedades diferenciáveis. Verificamos, também, que a curvatura seccional da variedade é um parâmetro de grande importância na construção e análise das constelações de sinais.

Abstract

In this work we consider the performance analysis of a digital communication system under the hypothesis that the signal constellations are on surfaces or on riemannian manifolds. As a consequence of this new approach, it was necessary to extend the concepts related to signal constellations, symbol error probability and average energy of the signal constellation to the theory of differentiable manifolds. The important result coming out of this formalism is that the sectional curvature of the variety is a relevant parameter in the design and in the analysis of signal constellations.

Conteúdo

Dedicatória	ii
Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	iv
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	ix
1 Introdução	1
2 Modelo do Sistema de Comunicações	4
2.1 Modulador: Constelações de Sinais	4
2.2 Processo de Demodulação	5
2.3 Constelações Geometricamente Uniformes	9
3 Introdução às Superfícies Mínimas	11
3.1 A Superfície Catenóide	13
3.2 A Superfície Helicóide	14
3.3 A Superfície de Scherk	15
3.4 Curvatura Média e Superfícies Mínimas	17
3.5 Existência de Parâmetros Isotérmicos	20
3.6 Representação Integral para as Superfícies Mínimas	21
3.7 Estudo das Propriedades de Simetria	23
3.8 A Representação de Weierstrass	27
3.9 Exemplos	29

4	Construção e análise de Constelações de Sinais em Superfícies	32
4.1	Constelações de Sinais em Superfícies	32
4.1.1	Modelo do sistema	32
4.1.2	Processo de demodulação	33
4.2	Análise da Probabilidade de Acerto	49
4.2.1	A primeira variação da probabilidade de acerto	49
4.2.2	Segunda variação da probabilidade de acerto	55
5	Constelações de Sinais em Variedades Riemannianas	56
5.1	Introdução à Geometria Riemanniana	56
5.1.1	Métrica riemanniana	58
5.1.2	Conexões riemannianas	60
5.1.3	Geodésicas	61
5.1.4	Curvaturas	62
5.1.5	Imersões isométricas	62
5.2	Constelações de Sinais	64
5.2.1	Modelo do sistema	64
5.2.2	Processo de demodulação	64
5.2.3	Constelações de sinais em espaços de curvatura constante	66
5.3	Primeira Variação da Probabilidade de Acerto	72
6	Conclusões	79
6.1	Desenvolvimento	79
6.2	Perspectivas Futuras	80
	Referências Bibliográficas	82

Lista de Figuras

1.1	Modelo de um Sistema de Comunicações.	2
2.1	Exemplo de constelações de sinais.	4
2.2	a) Bloco associado ao canal; b) Bloco associado ao demodulador.	6
2.3	Exemplo de ruído em constelações de sinais.	7
2.4	Exemplo de regiões de decisão em constelações de sinais com ruído gaussiano.	8
3.1	Superfície mínima catenóide.	13
3.2	Superfície mínima helicóide.	14
3.3	Superfície mínima de Scherk.	16
3.4	Reflexões da superfície de Scherk.	25
3.5	Família associada ao catenóide.	29
3.6	Superfície de Enneper.	31
4.1	Aplicação exponencial.	33
4.2	Geodésicas.	34
4.3	Região de decisão de um sinal 4-PSK na superfície de Enneper.	37
4.4	Região de decisão do sinal x_1 da constalação 4-PSK em \mathcal{X}_1	38
4.5	Região de decisão do sinal x_1 da constalação 4-PSK \mathcal{X}_2	39
4.6	Relação sinal ruído de uma constalação 4 – PSK na superfície de Enneper.	40
4.7	Constalação de sinais e curvatura gaussiana.	41
4.8	Sistema de coordenadas polares geodésicas.	44
4.9	a) densidades de probabilidade gaussiana valores de curvatura, 1, 0, -1 . b) diferença entre $P_{hip}(\rho, \theta)$ e $P_{euc}(\rho, \theta)$	47
4.10	Desempenho da constalação 4 – PSK em espaços com curvaturas 1, 0, -1	47
4.11	Constalação de sinais em um espaço bidimensional com métrica da catenóide.	48
4.12	Visualização da constalação sobre as superfícies.	49
4.13	Variação normal da superfície, $X^t(u, v)$	50
4.14	Variação das curvas, $h(s, t)$	50

5.1	Mudança de parâmetros.	57
5.2	Triângulo geodésico.	68
5.3	Polígono geodésico.	68
5.4	Constelação $\{3, 3\}$ no espaço bidimensional com curvatura 1.	70
5.5	Constelação $\{3, 4\}$ no espaço bidimensional com curvatura 1.	70

Lista de Tabelas

5.1	Recobrimientos da esfera por polígonos regulares.	69
5.2	Sinais da constelação $\{3, 3\}$	71
5.3	Sinais da constelação $\{3, 4\}$	71

Capítulo 1

Introdução

Os principais objetivos a serem alcançados quando da proposta de novos sistemas de comunicações é que esses sistemas apresentem um *melhor desempenho* sob o critério da probabilidade de erro, ou equivalentemente, fixada uma taxa de erro, a relação sinal-ruído seja menor do que aquela necessária pelos sistemas conhecidos, e uma *menor complexidade* quando comparadas com os sistemas já conhecidos.

Por outro lado, a informação a ser transmitida através de um sistema de comunicações estará sempre sujeita a um conjunto de interferências que no processo de modelagem serão alocadas ao canal de transmissão. Essa coletânea de interferências é denominada *ruído*. Devido à natureza do ruído, sua modelagem é probabilística. Dessa forma, a caracterização estatística do mesmo se realiza através do estabelecimento da função densidade de probabilidade. Essa modelagem é relevante pois através dela é que o receptor poderá ser projetado de maneira ótima.

Uma vez realizada essa modelagem, o passo seguinte está relacionado com o processamento do sinal, propriamente dito, a ser utilizado na transmissão da informação de tal forma que a ação do ruído possa ser melhor controlada. Existem várias formas de realizar esse processamento. Uma delas é através do uso de um esquema de modulação apropriado. Uma outra, é através do uso de um esquema de codificação específico. Ainda uma outra, através da combinação dos dois procedimentos anteriores, etc.

De modo a dar consistência e motivação ao assunto exposto, é que apresentaremos a interpretação que iremos fazer do modelo tradicional de um sistema de comunicações digital. A Figura 1.1 ilustra o modelo tradicional de um sistema de comunicações digital.

Cada um dos diagramas de bloco é constituído basicamente por um conjunto de “pontos” E_i , juntamente com uma métrica, d_i . Isto torna possível a interpretação de cada bloco como um espaço métrico (E_i, d_i) . Como exemplo, o codificador de fonte consiste de

um conjunto, finito ou não, de palavras-código, E_1 , com uma distância associada, d_1 , podendo esta ser a distância chi-quadrada, [3] e [4]. O codificador de canal tem associado um conjunto, finito ou não, de palavras-código, E_2 , e em geral a distância de Hamming, d_2 . O canal, subentendido o modulador e o canal propriamente dito, consiste de um conjunto, finito ou não, de pontos, E_3 , com uma distância euclidiana, d_3 , (caso do ruído aditivo ser gaussiano). Os decodificadores usam, em geral, as mesmas distâncias associadas aos correspondentes codificadores para que não ocorra um descasamento entre os respectivos pares codificador-decodificador.

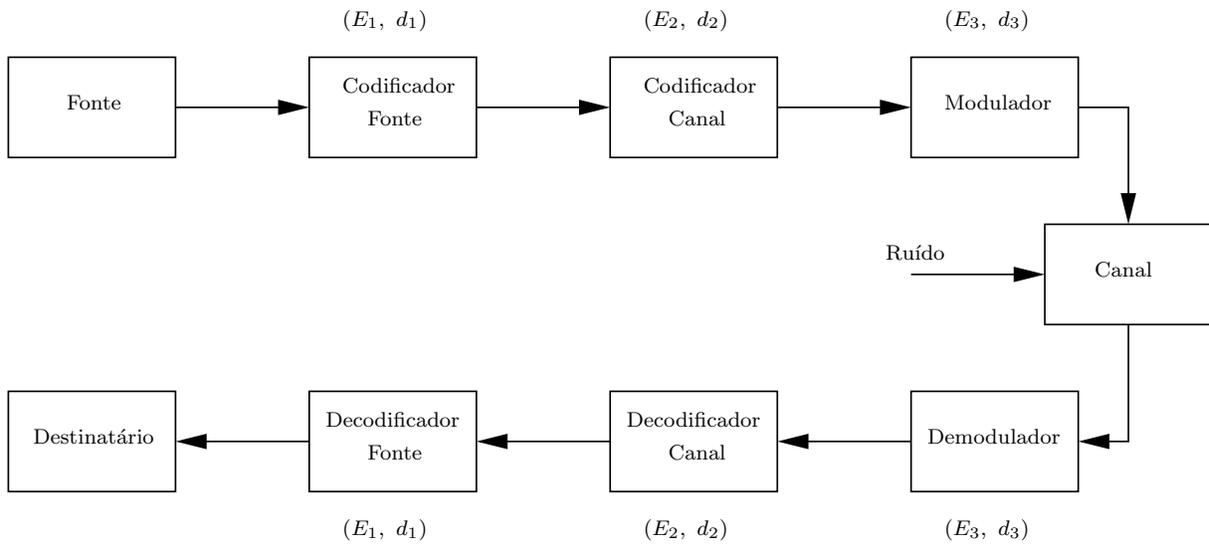


Figura 1.1: Modelo de um Sistema de Comunicações.

O que se busca então, é determinar as características geométricas e algébricas dos espaços métricos bem como as propriedades e condições que deverão ser satisfeitas pelas transformações que irão conectar os diferentes espaços métricos de tal forma que se consiga determinar o desempenho do sistema de comunicações sob a menor probabilidade de erro, maior taxa e menor potência de transmissão, etc.

Geralmente o espaço métrico (E_3, d_3) referente aos blocos modulador, canal, demodulador é associado ao espaço euclidiano com sua métrica usual. Em geral, no processo de modulação projetamos as constelações de sinais com uma estrutura geométrica euclidiana de tal forma que possamos minimizar, na demodulação, a ação do ruído, que geralmente é gaussiano.

Naturalmente surge então a pergunta: qual o desempenho das constelações de sinais quando sua estrutura geométrica não é mais a euclidiana? Uma abordagem desse problema foi feita em [2] e [1], para o caso particular de constelações de sinais em espaços

hiperbólicos.

Um dos objetivos desta pesquisa é analisar o desempenho de constelações de sinais em variedades riemannianas. Para tanto, foi necessário estender os conceitos de probabilidade de erro, energia média da constelação de sinais e de ruído para o contexto das variedades riemannianas.

Identificamos uma relação entre o desempenho de uma constelação de sinais em uma variedade e a sua curvatura seccional, a qual estabelece que o desempenho do sistema de comunicações para uma constelação de sinais em uma variedade M_1 com curvatura seccional constante K_1 é superior ao desempenho do sistema de comunicações para uma constelação de sinais equivalente em uma variedade M_2 com curvatura seccional constante K_2 se, e somente se, $K_1 < K_2$.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma.

No Capítulo 2 descrevemos, de forma sucinta, alguns tópicos do modelo tradicional de um sistema de comunicação digital, dando maior ênfase a estrutura euclidiana das constelações de sinais. Utilizamos nessa exposição a literatura [13] e o artigo [10].

No Capítulo 3 introduzimos as superfícies mínimas no contexto de projetar constelações de sinais. Na Seção 3.4 descrevemos alguns conceitos importantes sobre geometria diferencial, que são essenciais ao nosso trabalho de pesquisa, com o objetivo de tornar acessível a leitura deste trabalho. Na Seção 3.7 abordamos alguns resultados sobre as propriedades de simetria das superfícies mínimas, que são de grande relevância na construção das constelações de sinais em tais superfícies. Neste capítulo, optamos por não fazer muitas demonstrações dos resultados apontados, pois existem excelentes livros-texto, como [11], [9], [6] e [5].

No Capítulo 4 é realizada a análise e construção de constelações de sinais em superfícies, de modo geral, e em particular nas superfícies mínimas, visto que tais superfícies surgiram como uma condição necessária para identificar o ponto crítico (de máximo) da probabilidade de acerto, veja Seção 4.2.

No Capítulo 5 é realizada uma análise de desempenho de um sistema de comunicações quando as constelações de sinais estão em variedades riemannianas, dando ênfase maior às constelações de sinais em variedades de curvatura seccional constante. Cabe salientar que, para o leitor não familiarizado com a geometria riemanniana, é interessante a leitura de [12] e [7].

Finalmente, no Capítulo 6 apresentamos as conclusões e propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Modelo do Sistema de Comunicações

Neste capítulo descreveremos, de forma sucinta, alguns tópicos do modelo tradicional de um sistema de comunicação digital, dando maior ênfase a estrutura euclidiana das constelações de sinais e à classe das constelações geometricamente uniformes. Utilizamos nessa exposição a literatura [13] e o artigo [10].

2.1 Modulador: Constelações de Sinais

Uma constelação de sinais $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é um conjunto de pontos x_i cujas coordenadas consistem dos elementos do alfabeto de entrada do canal. Consideremos dois exemplos de constelações de sinais bastante conhecidas.

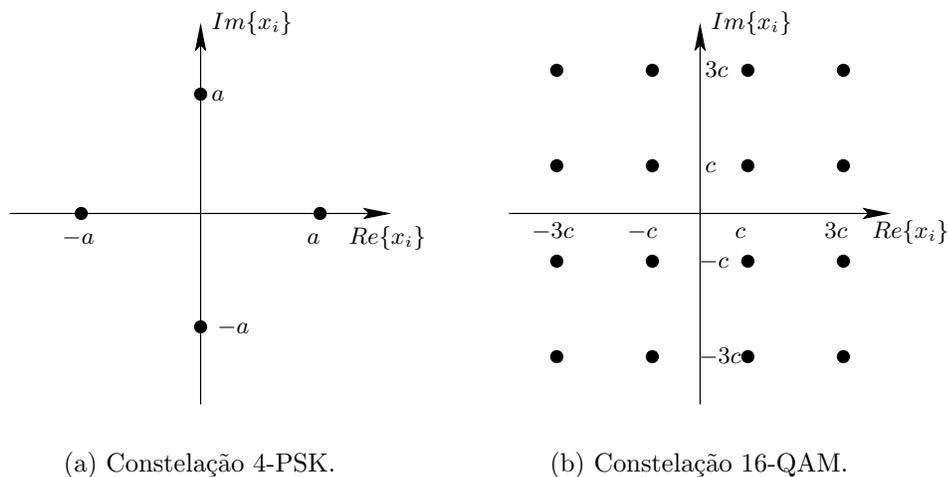


Figura 2.1: Exemplo de constelações de sinais.

Exemplo 2.1. A constelação 4-PSK é mostrada na Figura 2.1(a). Essa constelação de sinais consiste de quatro sinais de magnitude \mathbf{a} , cada um com fase diferente. Logo, os pontos podem ser escritos como

$$x_i = \mathbf{a}e^{j\theta_i} ,$$

onde θ_i assume valores no conjunto $\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$. Note que a informação está contida na fase do sinal, enquanto que a amplitude do sinal é constante. Isto justifica o termo modulação por chaveamento de fase (PSK, do inglês phase-shift keying). A constelação 4-PSK é também chamada de quadrature phase-shift keying (QPSK).

Exemplo 2.2. A constelação 16-QAM mostrada na Figura 2.1(b) possui 12 possíveis fases e três amplitudes. Observe que o sistema de coordenadas retangulares é o sistema natural dessa constelação que é preferível ao sistema de coordenadas polares que é o sistema natural da constelação PSK.

2.2 Processo de Demodulação

O canal de comunicação fornece a conexão física entre a fonte e o destinatário, podendo ser uma linha telefônica, uma fibra óptica, o espaço livre sobre o qual ondas eletromagnéticas podem ser radiadas, etc. Como, em geral, o canal de comunicação é limitado em faixa, uma certa distorção em amplitude e fase será sempre inevitável. Além disso, os sinais poderão sofrer atenuações e serem corrompidos por processos aleatórios denominados ruídos. Como consequência, a obtenção no receptor de uma réplica da informação que fora transmitida é, em geral, difícil de ser conseguida. O objetivo fundamental de um sistema de comunicações (Figura 1.1) passa a ser então o de contra-agir em relação ao efeito danoso do ruído e das distorções.

Devido a natureza do ruído, sua modelagem é probabilística. Dessa forma, a caracterização estatística do mesmo se realiza através do estabelecimento da função densidade de probabilidade.

Admita que o canal possa ser caracterizado como mostrado na Figura 2.2(a), ou seja, que possa ser plenamente especificado por $P(y/x_m)$, a probabilidade condicional de receber y dado que o sinal x_m foi transmitido. O demodulador, cujo bloco é mostrado na Figura 2.2(b), tem como objetivo “adivinhar” qual x_m foi transmitido, a partir da observação de y .

Logo, se $x'_m = x_m$, dado que x_m foi transmitido, então a decisão tomada pelo demodulador foi correta, caso contrário teremos um erro. Uma medida associada aos erros

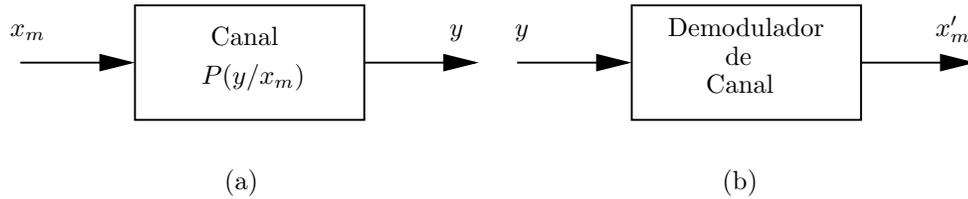


Figura 2.2: a) Bloco associado ao canal; b) Bloco associado ao demodulador.

cometidos na demodulação é a probabilidade de erro de símbolo, denotada por P_e , que será a medida de desempenho a ser adotada.

Como a probabilidade de erro é um parâmetro de grande interesse na determinação do desempenho de um sistema de comunicação digital, a regra de demodulação de maior interesse para o usuário é obviamente aquela que minimiza P_e .

Assim, se o sinal recebido y é decidido como x_m , então $1 - P(x_m/y)$ é a probabilidade de erro. Para que esta seja minimizada deve-se então maximizar $P(x_m/y)$, ou mais especificamente, deve-se escolher x_m que maximize $P(y/x_m)$. Pode-se, portanto, descrever a regra de decisão que minimiza P_e da seguinte maneira: dado o sinal recebido y decida por x'_m que satisfaz

$$P(x'_m/y) \geq P(x_m/y), \quad \forall x_m \neq x'_m,$$

ou, equivalentemente, pela regra de Bayes obtemos que

$$\frac{p(y/x'_m)p(x'_m)}{p(y)} \geq \frac{p(y/x_m)p(x_m)}{p(y)}, \quad \forall x_m \neq x'_m,$$

onde $p(x_m)$ é a probabilidade de ocorrência da mensagem x_m , e

$$p(y) = \sum_x p(x_m)p(y/x_m),$$

Como $p(y) > 0$ é independente de x_m , então o critério de decisão que minimiza P_e é dividido em dois casos, a saber,

1. **Decisão por Máxima Probabilidade a Posteriori (MAP):** Se pelo menos uma $p(x_m) \neq 1/n$ para $1 \leq m \leq n$, então dado o sinal recebido y , decida por x'_m que satisfaz

$$p(y/x'_m)p(x'_m) \geq p(y/x_m)p(x_m), \quad \forall x_m \neq x'_m.$$

2. **Decisão por Máxima Verossimilhança (ML):** Se $p(x_m) = 1/n$ para $1 \leq m \leq n$,

então dado o sinal recebido y , decida por x'_m que satisfaz

$$p(y/x'_m) \geq p(y/x_m), \forall x_m \neq x'_m .$$

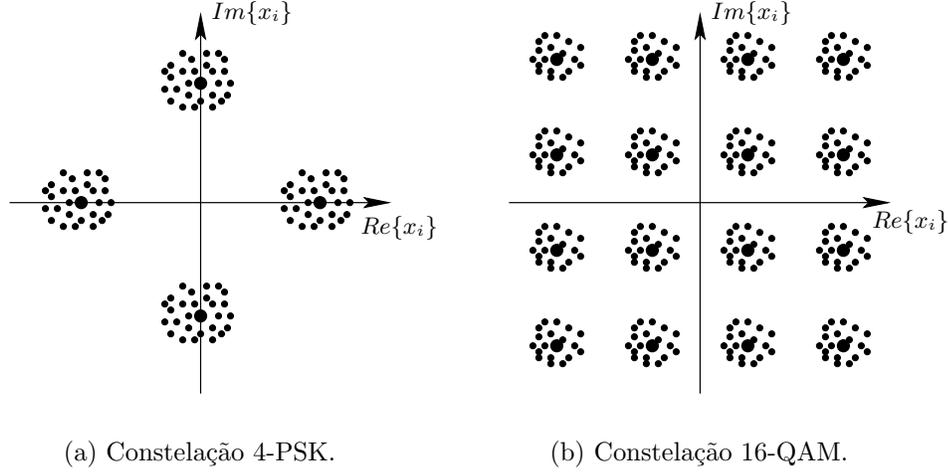


Figura 2.3: Exemplo de ruído em constelações de sinais.

Dos critérios MAP e ML, uma regra de decisão pode ser formalmente definida como sendo o mapeamento do conjunto Y de sinais na saída do canal para o conjunto dos M sinais da entrada do canal. Por exemplo, se os sinais forem representados por pontos em um espaço n -dimensional, então esta regra de decisão simplesmente estabelece uma maneira ótima de partição deste espaço em M regiões. Essa partição pode ser encontrada intuitivamente como mostrado na Figura 2.4, pois a probabilidade de erro de que o sinal recebido y , dado que o sinal x_i foi transmitido, depende da distância entre y e x_i . Portanto, dois pontos são mais facilmente confundidos se eles estiverem mais próximos. Assim, a *distância mínima* entre dois pontos da constelação, denotada por d_{min} , é um parâmetro importante em projetos de sinais. A Figura 2.4 ilustra uma partição ótima por ML das constelações 4-PSK e 16-QAM, para o caso do ruído ser branco gaussiano aditivo (AWGN, do inglês, *Additive White Gaussian Noise*).

Seja R_m , a região de decisão do sinal x_m , o conjunto consistindo de todos os pontos que são decididos como o sinal x_m , e R_m^c o seu conjunto complementar. Então, um erro ocorrerá se o sinal y recebido pertencer ao conjunto R_m^c .

A probabilidade de erro dado que x_m foi transmitido é então

$$P_{e,m} = 1 - P(x_m/y) = \sum_{y \in R_m^c} p(y/x_m) ,$$

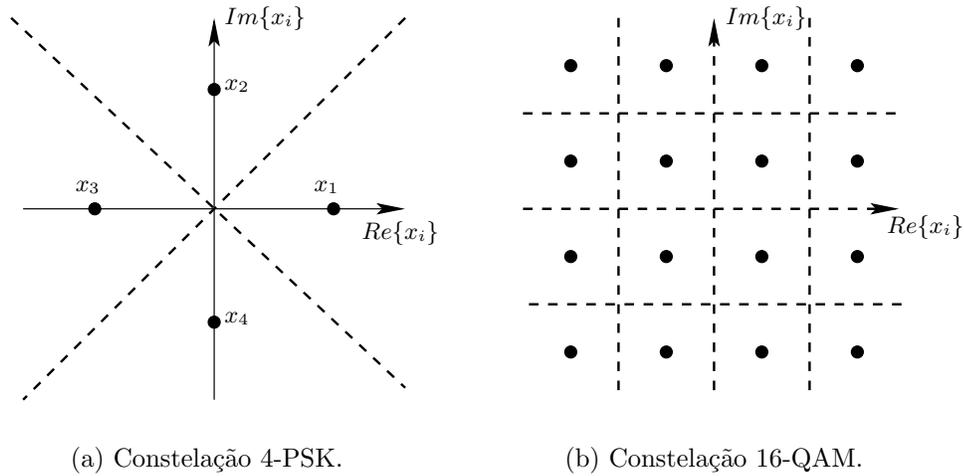


Figura 2.4: Exemplo de regiões de decisão em constelações de sinais com ruído gaussiano.

onde \sum denota a somatória ou a integral dependendo se a variável é discreta ou contínua.

A probabilidade de erro média da constelação é dada por

$$P_e = \sum_{\mathcal{X}} p(x_m) P_{e,m} .$$

Intuitivamente, o objetivo, quando do projeto de constelações de sinais, é maximizar a distância mínima entre sinais de maneira que a energia máxima permitida na transmissão não seja ultrapassada. Isto irá aumentar a imunidade ao ruído.

Como o desempenho do sistema de comunicação digital para uma dada constelação de sinais depende basicamente das distâncias entre os sinais, então o desempenho é invariante por translações. Podemos transladar a constelação de forma que a energia de transmissão seja minimizada.

A energia média de transmissão da constelação de sinais é dada por

$$E_t = \sum_{\mathcal{X}} p(x_m) |x_m - \bar{x}|^2 ,$$

onde \bar{x} é o baricentro da constelação, que minimiza a energia média, e é dado por

$$\bar{x} = \sum_{\mathcal{X}} p(x_m) x_m .$$

Como exemplo, calcularemos as energias médias das constelações 4-PSK (Figura 2.1(a)) e 16-QAM (Figura 2.1(b)). Observe que os centros de massa de ambas as constelações

são iguais a zero, $\bar{x} = 0$, e os sinais são supostos equiprováveis, $p(x_m) = 1/n$.

- Constelação 4-PSK:

$$E_t = \sum_{\mathcal{X}} p(x_m) |x_m - \bar{x}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 |x_i|^2 = a^2 .$$

- Constelação 16-QAM:

$$E_t = \sum_{\mathcal{X}} p(x_m) |x_m - \bar{x}|^2 = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} |x_i|^2 = \frac{1}{16} [8c^2 + 8 \times 10c^2 + 4 \times 18c^2] = 10c^2 .$$

2.3 Constelações Geometricamente Uniformes

As constelações de sinais geometricamente uniformes são importantes por possuírem propriedades de simetria bastante relevantes no processo de demodulação, tais como:

- i) o espectro de distância independe do sinal considerado;
- ii) as regiões de decisão são congruentes.

Essas propriedades impõem uma forte regularidade sobre a constelação. Portanto, uma constelação de sinais $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é geometricamente uniforme se, dados quaisquer dois pontos x_i e x_j em \mathcal{X} , existe uma isometria u_{x_j, x_i} levando x_i em x_j , mantendo \mathcal{X} invariante, isto é,

$$\begin{aligned} u_{x_i, x_j}(x_i) &= x_j , \\ u_{x_i, x_j}(\mathcal{X}) &= \mathcal{X} . \end{aligned}$$

Uma isometria em um espaço métrico é uma transformação que preserva distância. No caso particular do espaço euclidiano n -dimensional, \mathbb{R}^n , uma isometria u é uma transformação $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que preserva a distância euclidiana,

$$|u(x) - u(y)| = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n .$$

Uma isometria u que mantém a constelação \mathcal{X} invariante, $u(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$, é uma simetria de \mathcal{X} . Para $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$ as simetrias de \mathcal{X} formam um grupo cuja operação é a composição de translações, rotações e reflexões, o grupo de simetrias $\Gamma(\mathcal{X})$ de \mathcal{X} . Uma constelação de

sinais \mathcal{X} é dita geometricamente uniforme se a ação do grupo de simetrias $\Gamma(\mathcal{X})$ em \mathcal{X} é transitiva, ou, se a órbita de algum ponto $x_i \in \mathcal{X}$ sob a ação de $\Gamma(\mathcal{X})$ for \mathcal{X} .

As constelações de sinais geometricamente uniformes do tipo Slepian são aquelas onde os sinais encontram-se sobre uma hiperesfera.

Capítulo 3

Introdução às Superfícies Mínicas

A Teoria das Superfícies Mínicas teve sua origem relacionada com o seguinte problema proposto por Lagrange em 1762: *Dada uma curva fechada simples (sem auto-intersecções), determinar a superfície de área mínima que têm essa curva como fronteira.* Lagrange apresentou este problema como um exemplo de um método, por ele desenvolvido, para determinar curvas ou superfícies que minimizassem certas quantidades, tais como área, comprimento, energia, etc. Esses métodos constituem hoje o chamado Cálculo das Variações.

Inicialmente, trataremos esse problema de minimização de área para o caso particular em que a superfície é descrita como $z = f(x, y)$, com $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, uma função diferenciável. Nesse caso, a área da superfície é dada por

$$\mathcal{A} = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy ,$$

onde $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Sejam $\eta : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável que restrita à fronteira ∂D seja identicamente nula, e $f_t : D \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ uma *variação* de $f(x, y)$ em D definida por

$$f_t(x, y) = f(x, y) + t\eta(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon) .$$

Da mesma forma, podemos definir, para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, a área do gráfico da função f_t como

$$\mathcal{A}(t) = \iint_D \sqrt{1 + (f_t)_x^2 + (f_t)_y^2} \, dx \, dy, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon) ,$$

que é equivalente a

$$\mathcal{A}(t) = \iint_D \sqrt{(1 + f_x^2 + f_y^2) + 2t(f_x\eta_x + f_y\eta_y) + t^2(\eta_x^2 + \eta_y^2)} \, dx \, dy .$$

Se $z = f(x, y)$ é uma solução para esse problema, então $f(x, y)$ está entre os “pontos críticos” da função área, isto é, será tal que $\mathcal{A}'(0) = 0$, para toda função $\eta(u, v)$.

Usando esse fato podemos encontrar qual condição $f(x, y)$ deve satisfazer para ser solução do problema. Para tanto, devemos calcular a derivada da função área para $t = 0$, isto é,

$$\mathcal{A}'(0) = \iint_D \frac{f_x\eta_x + f_y\eta_y}{\sqrt{(1 + f_x^2 + f_y^2)}} \, dx \, dy . \quad (3.1)$$

Aplicando o Teorema de Green em (3.1), observamos que o termo com integração em ∂D é zero, pois $\eta(x, y)$ restrita à fronteira ∂D é identicamente nula, $\eta(x, y)|_{\partial D} = 0$, para toda função $\eta(x, y)$, então

$$\mathcal{A}'(0) = - \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{\sqrt{(1 + f_x^2 + f_y^2)}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{f_y}{\sqrt{(1 + f_x^2 + f_y^2)}} \right) \eta \, dx \, dy .$$

Finalmente, como $\mathcal{A}'(0) = 0$ para toda função $\eta(u, v)$, então

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{\sqrt{(1 + f_x^2 + f_y^2)}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{f_y}{\sqrt{(1 + f_x^2 + f_y^2)}} = 0 .$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0 . \quad (3.2)$$

Note que (3.2) fornece a condição necessária para resolver o problema proposto por Lagrange, e suas soluções são chamadas *superfícies mínimas*. A equação (3.2) é chamada *Equação de Euler-Lagrange* para este problema variacional, ou *Equação das Superfícies Mínimas* para superfícies do tipo gráfico.

Lagrange observou que as funções lineares $f(x, y) = ax + by + c$, com a, b, c constantes, representando gráficos planares, são soluções triviais de (3.2). Entretanto, foi Meusnier que identificou a existência de novos exemplos de tais superfícies, especificamente o catenóide e o helicóide.

3.1 A Superfície Catenóide

Para encontrar o catenóide, Meusnier verificou se existia uma superfície que, além de ser mínima, fosse de rotação, isto é, fosse gerada pela rotação de uma curva plana em torno de um eixo contido no plano da curva.

Neste caso, a solução é a superfície de rotação catenóide (Figura 3.1(b)), cuja geratriz é a curva catenária (Figura 3.1(a)), a curva de equilíbrio de um fio suspenso por suas extremidades e submetido a ação da gravidade.

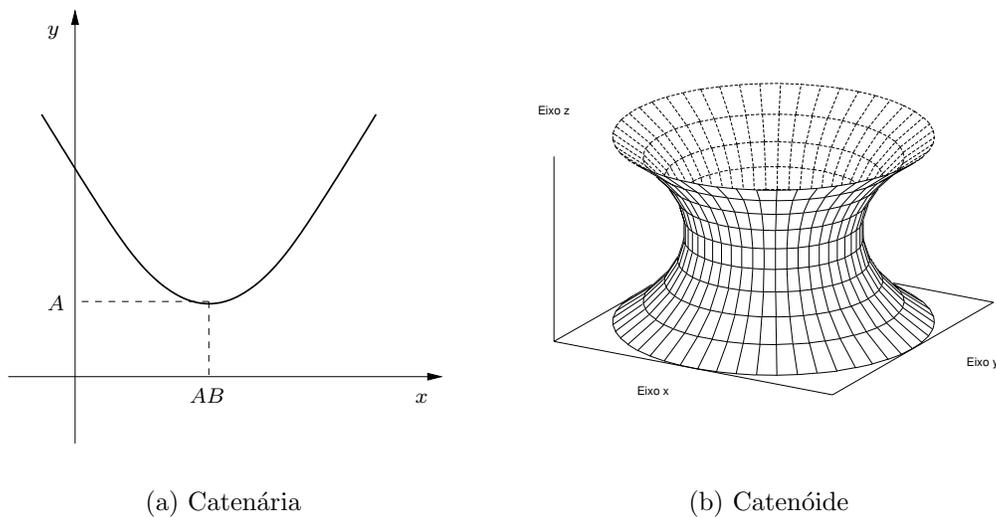


Figura 3.1: Superfície mínima catenóide.

Para mostrar este resultado devemos observar que a curva de nível representada implicitamente pela equação $f(x, y) = c$, c constante, tem curvatura dada por

$$k = \frac{-f_{xx}f_y^2 + 2f_xf_yf_{xy} - f_{yy}f_x^2}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.$$

Assim, (3.2) pode ser reescrita da seguinte forma

$$f_{xx} + f_{yy} = k(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}. \tag{3.3}$$

Mas, como as curvas de nível de uma superfície de revolução em torno do eixo z são circunferências de raio $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ então $k = 1/r$. Portanto, a solução deve satisfazer a equação

$$f_{xx} + f_{yy} = \frac{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

e é dada por

$$f(x, y) = A \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{A} \sqrt{x^2 + y^2} \right) + AB ,$$

onde A, B são constantes. Usando a mudança de coordenadas $x = A \cosh(v/A - B) \cos u$ e $y = A \cosh(v/A - B) \sin u$, a catenóide é dada parametricamente por

$$\begin{cases} x = A \cosh(v/A - B) \cos u \\ y = A \cosh(v/A - B) \sin u \\ z = v \end{cases} .$$

Um fato importante é que uma superfície mínima de revolução no \mathbb{R}^3 é, a menos de um movimento rígido, parte de um catenóide ou parte de um plano.

3.2 A Superfície Helicóide

Para encontrar uma outra superfície mínima, Meusnier introduziu em (3.2) a condição adicional de que as curvas de nível fossem retas. A solução, neste caso, é o helicóide, que pode ser descrita do seguinte modo. Considere uma hélice que se enrola em um cilindro circular reto, e em cada ponto do hélice, passe uma reta que encontra perpendicularmente o eixo do cilindro (Figura 3.2(a)). Quando o ponto percorre a hélice, esta reta descreve o helicóide (Figura 3.2(b)).

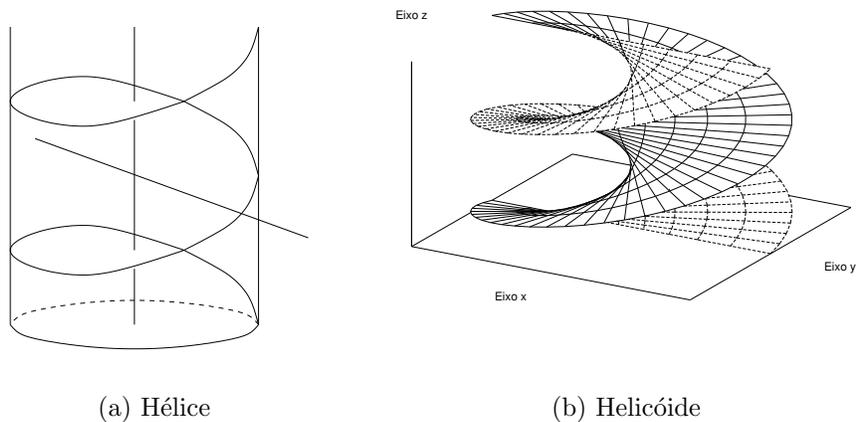


Figura 3.2: Superfície mínima helicóide.

Como as curvas de nível são retas então a curvatura é zero, isto é, $k = 0$. Assim, (3.3)

pode ser reescrita como

$$f_{xx} + f_{yy} = 0 ,$$

isto é, $f(x, y)$ é uma função harmônica, isto é, seu Laplaciano é nulo, $\Delta f = 0$. A única solução para essa equação, tal que as curvas de nível são retas, é dada por

$$f(x, y) = A \arctan \left(\frac{y - y_o}{x - x_o} \right) + B ,$$

onde A , B , x_o e y_o são constantes. É fácil verificar que o gráfico de tal função é um plano ou parte de um helicóide dado por

$$\begin{cases} x - x_o = v \cos u , \\ y - y_o = v \sin u , \\ z - B = Au . \end{cases}$$

O helicóide é também um exemplo de superfície regradada, isto é, por todos os pontos da superfície passa uma reta contida na superfície.

Um resultado demonstrado por Catalan em 1842 garante que uma superfície mínima regradada do \mathbb{R}^3 é, a menos de um movimento rígido, parte de um helicóide ou parte de um plano.

3.3 A Superfície de Scherk

Durante muito tempo, o plano, o catenóide e o helicóide foram os únicos exemplos conhecidos de superfícies mínimas. Mas, em 1835, Scherk descobriu um outro exemplo de superfície mínima, introduzindo em (3.2) a condição adicional de que $f(x, y) = g(x) + h(y)$, onde g é uma função de x e h é uma função de y . Nesse caso, as derivadas parciais são substituídas por derivadas ordinárias, e (3.2) é reduzida a

$$(1 + h'^2(y))g''(x) + (1 + g'^2(x))h''(y) = 0 ,$$

que é equivalente a

$$-\frac{g''(x)}{1 + g'^2(x)} = \frac{h''(y)}{1 + h'^2(y)} .$$

Como x e y são variáveis independentes, cada lado dessa equação é uma constante.

Portanto, se a é um valor constante, então

$$g(x) = \frac{1}{a} \log(\cos ax) \quad \text{e} \quad h(y) = -\frac{1}{a} \log(\cos ay),$$

e a menos de translações e dilatações, parte da superfície pode ser representada como o gráfico da função

$$f(x, y) = \log \left(\frac{\cos x}{\cos y} \right), \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \quad (3.4)$$

Esta superfície é conhecida como *superfície mínima de Scherk* (Figura 3.3(b)). Observe que apenas parte da superfície sobre o quadrado aberto $(-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi/2, \pi/2)$ pode ser representada pela função em (3.4). Entretanto, pela propriedade geral das superfícies mínimas (uma superfície mínima, que contém uma reta, é simétrica em relação a essa reta) a superfície de Scherk estende-se por simetria pelas retas verticais sobre os vértices desse quadrado, de modo a cobrir uma parte do plano constituído por quadrados não-consecutivos de lado π , como as casas pretas de um tabuleiro de xadrez, (Figura 3.3(a)).

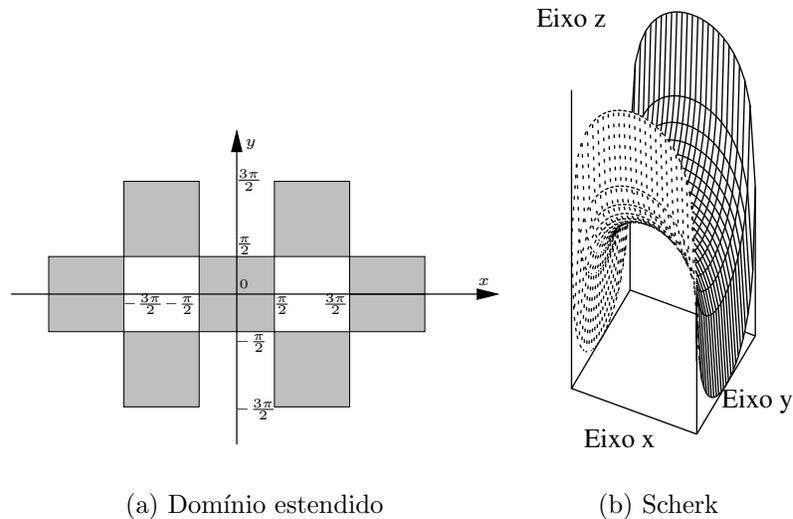


Figura 3.3: Superfície mínima de Scherk.

Scherk também provou que o catenóide e o helicóide, descobertas por Meusnier, são apenas dois elementos de uma família de superfícies mínimas, através da qual podemos deformar continuamente o catenóide, menos um meridiano, em uma volta completa do helicóide. Essa deformação é isométrica, logo os comprimentos das curvas são preservados ao longo da deformação. Essa família de superfícies mínimas é chamada a *família*

associada ao catenóide.

3.4 Curvatura Média e Superfícies Mínimas

Foi Meusnier quem identificou as superfícies mínimas como sendo as superfícies com curvatura média nula. Com isso, foi possível obter uma “interpretação geométrica” para as soluções da equação de Lagrange.

Para mostrar essa interpretação geométrica serão apresentadas algumas definições importantes.

Definição 3.1. *Uma superfície regular parametrizada, ou simplesmente, uma superfície parametrizada é uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ (classes das funções contínuas e diferenciáveis), cuja diferencial tem posto dois em todos os pontos do domínio U .*

Consequentemente, os vetores $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$ e $X_v = \frac{\partial X}{\partial v}$ são linearmente independentes em todo ponto $p = (u, v)$ do domínio U e o espaço vetorial gerado por esses dois vetores é chamado *plano tangente* à superfície nesse ponto, denotado por $T_p X$.

Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o *produto escalar* usual do \mathbb{R}^3 , $\|\cdot\|$ a *norma* correspondente e \wedge o *produto vetorial* em \mathbb{R}^3 , então um *vetor normal unitário* à superfície em p é dado por

$$N(p) = N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}.$$

Note que $|X_u \wedge X_v| \neq 0$, pois os vetores X_u e X_v são linearmente independentes.

Definição 3.2. *A primeira forma fundamental da superfície no ponto p é a forma quadrática definida no espaço tangente em p por*

$$I(w) = |w|^2 = a^2 E + 2abF + b^2 G, \quad w \in T_p X, \quad w = aX_u + bX_v,$$

onde $E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle$, $F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle$, e $G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle$ são os coeficientes da primeira forma fundamental.

Em termos dessas funções, a condição de regularidade da superfície pode ser reescrita como

$$|X_u \wedge X_v|^2 = E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v) > 0.$$

Definição 3.3. A segunda forma fundamental da superfície no ponto p é a forma quadrática definida no espaço tangente em p por

$$II(w) = a^2e + 2abf + b^2g, \quad w \in T_pX, \quad w = aX_u + bX_v,$$

onde $e(u, v) = \langle X_{uu}, N \rangle$, $f(u, v) = \langle X_{uv}, N \rangle$, e $g(u, v) = \langle X_{vv}, N \rangle$ são os coeficientes da segunda forma fundamental.

A função curvatura normal da superfície $X(u, v)$ em um ponto p é uma aplicação $k_n : T_p \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ que para cada vetor $w \in T_pX$ não nulo, associa

$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)}.$$

Esta função curvatura normal só depende da direção de w e, variando w em um círculo unitário de T_p , as curvaturas normais assumem um valor mínimo e um valor máximo denotados por $k_1 = k_n(w_1)$ e $k_2 = k_n(w_2)$, respectivamente. Esses valores mínimo e máximo são chamados *curvaturas principais* da superfície no ponto p .

A *curvatura média* da superfície no ponto p é dada por

$$H(p) = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \quad (3.5)$$

A *curvatura gaussiana* da superfície no ponto p é dada por

$$K(p) = k_1k_2 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular parametrizada. Escolha um domínio limitado $D \subset U$ e uma função diferenciável $\eta : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$, onde \bar{D} é a união do domínio D com sua fronteira ∂D . Uma *variação normal* de $X(\bar{D})$, determinada por η , é uma aplicação $X^t : \bar{D} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$X^t(u, v) = X(u, v) + t\eta(u, v)N(u, v), \quad (u, v) \in \bar{D}, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

onde N é o vetor normal unitário da orientação de $X(u, v)$.

Os coeficientes E^t , F^t , G^t da primeira forma fundamental de X^t , são dados por

$$\begin{aligned} E^t &= E + 2t\eta\langle X_u, N_u \rangle + t^2\eta^2\langle N_u, N_u \rangle + t^2\eta_u^2, \\ F^t &= F + t\eta(\langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle) + t^2\eta^2\langle N_u, N_v \rangle + t^2\eta_u\eta_v, \\ E^t &= G + 2t\eta\langle X_v, N_v \rangle + t^2\eta^2\langle N_v, N_v \rangle + t^2\eta_v^2. \end{aligned}$$

A área $\mathcal{A}(t)$ de $X^t(\bar{D})$ é, então, dada por

$$\mathcal{A}(t) = \iint_{\bar{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} \, du \, dv .$$

A derivada de $\mathcal{A}(t)$ em relação a t é dada por

$$\mathcal{A}'(t) = \iint_{\bar{D}} \frac{1}{2} \frac{E_t^t G^t + E^t G_t^t - 2F^t F_t^t}{\sqrt{E^t G^t - (F^t)^2}} \, du \, dv ,$$

onde $E_t^t = \frac{\partial E^t}{\partial t}$, $F_t^t = \frac{\partial F^t}{\partial t}$ e $G_t^t = \frac{\partial G^t}{\partial t}$.

Usando o fato de que

$$\langle X_u, N_u \rangle = -e, \quad \langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle = -2f, \quad \langle X_v, N_v \rangle = -g$$

tem-se, para $t = 0$, que

$$\mathcal{A}'(0) = \iint_{\bar{D}} \frac{-\eta(eG - 2fF + gE)}{\sqrt{EG - F^2}} \, du \, dv . \quad (3.6)$$

Fazendo uso de (3.5) em (3.6), podemos reescrever $\mathcal{A}'(0)$ em função da curvatura média H como

$$\mathcal{A}'(0) = \iint_{\bar{D}} -2\eta H \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv .$$

Portanto, a condição $\mathcal{A}'(0) = 0$, para qualquer η , é equivalente a $H = 0$ em $X(\bar{D})$. Consequentemente, se $H = 0$, então $\mathcal{A}'(0) = 0$ para todo η .

Definição 3.4. *Uma superfície que tem curvatura média nula, $H = 0$, em todos os seus pontos é chamada uma superfície mínima.*

Portanto, se existe uma superfície $X(\bar{D})$, de área mínima, com fronteira ∂D , então $H = 0$ em $X(\bar{D})$. Logo, as superfícies de área mínima são superfícies mínimas no sentido da Definição 3.4.

A recíproca, entretanto, é falsa. Pois, pelo que foi visto, as superfícies com $H = 0$ são pontos críticos (isto é, $\mathcal{A}'(0) = 0$) da função área para qualquer variação normal da superfície. Não se pode garantir, sem maiores restrições, que esse ponto crítico seja sequer um mínimo relativo para qualquer variação normal, e, muito menos, um mínimo absoluto da área.

Diz-se, então, que $X(\bar{D})$ é *estável* se $\mathcal{A}''(0) \geq 0$, para toda variação normal de $X(\bar{D})$ que fixa a fronteira ∂D . Isso significa que $X(\bar{D})$ é um ponto de mínimo relativo para essa variação. Diz-se que $X(\bar{D})$ é *minimizante* se sua área é menor ou igual a área de qualquer outra superfície que tenha a mesma fronteira ∂D .

3.5 Existência de Parâmetros Isotérmicos

Os estudos sobre superfícies mínimas seguiram na direção de encontrar uma solução para (3.2) dada por uma fórmula integral. Foi Legendre quem identificou e explorou convenientemente “o ponto chave” para a obtenção dessa fórmula integral para superfícies mínimas: uma mudança de parâmetros adequada.

Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto simplesmente conexo (isto é, toda curva fechada em U pode ser deformada continuamente em um ponto sem sair de U) e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada no \mathbb{R}^3 . Se

$$\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0,$$

então X é uma *aplicação conforme* (isto é, preserva ângulos) e os parâmetros $(u, v) \in U$ são chamados de *isotérmicos*.

Teorema 3.1 (Existência de parâmetros isotérmicos). *Sejam U um conjunto aberto simplesmente conexo e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada no \mathbb{R}^3 . Então existe uma mudança de coordenadas dada por um difeomorfismo $\varphi : U \rightarrow U$ (isto é, φ é diferenciável com inversa φ^{-1} diferenciável), tal que $\tilde{X} = X \circ \varphi$ é uma aplicação conforme.*

Nestas condições, as funções E , F e G da primeira forma fundamental são tais que

$$E(u, v) = G(u, v) = \lambda^2(u, v), \text{ e } F(u, v) = 0, \quad \forall (u, v) \in U,$$

e a condição de regularidade se exprime por $E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v) = \lambda^4(u, v) > 0$ e a

curvatura média H terá a seguinte expressão

$$H(u, v) = \frac{e(u, v) + g(u, v)}{2\lambda^2(u, v)}. \quad (3.7)$$

3.6 Representação Integral para as Superfícies Mínimas

A existência de parâmetros isotérmicos permite-nos mostrar que dada uma superfície regular parametrizada isotermicamente, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, então

$$\Delta X = 2\lambda^2(u, v)HN$$

onde H é a curvatura média, $N : U \rightarrow S^2(1)$ é a aplicação de Gauss e Δ é o operador Laplaciano dado por

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right).$$

A demonstração do fato acima decorre imediatamente da expressão para a curvatura média, (3.7), e das expressões

$$\begin{aligned} \Delta X &= X_{uu} + X_{vv}, \\ X_{uu} &= \frac{\lambda_u}{\lambda} X_u - \frac{\lambda_v}{\lambda} X_v + eN, \\ X_{vv} &= -\frac{\lambda_u}{\lambda} X_u + \frac{\lambda_v}{\lambda} X_v + gN, \end{aligned}$$

obtidas quando os parâmetros são isotérmicos.

Esse fato é extremamente importante no que se refere às superfícies mínimas parametrizadas isotermicamente, pois suas coordenadas são *funções harmônicas*, isto é, funções tais que $\Delta X = 0$.

Sabe-se da Teoria das Funções de Variáveis Complexas, que se uma função definida em um domínio simplesmente conexo U é harmônica, então ela corresponde à parte real de uma função analítica em U .

Desse modo, restrita a um domínio simplesmente conexo U , uma superfície mínima admite uma representação local da forma

$$X(u, v) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi(\zeta) d\zeta, \quad z_0 = u_0 + iv_0, \quad z = u + iv \in U, \quad (3.8)$$

onde Re denota a parte real e $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função analítica em \mathbb{C} tal que

$$\phi(z) = X_u - iX_v = 2\frac{\partial X}{\partial z}, \quad \text{onde } \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Estendendo linearmente o produto escalar do \mathbb{R}^3 a \mathbb{C}^3 , obtemos

$$\begin{aligned} |\phi(z)|^2 &= \langle \phi(z), \phi(\bar{z}) \rangle = \langle X_u - iX_v, X_u + iX_v \rangle = 2\lambda^2 > 0, \\ \langle \phi(z), \phi(z) \rangle &= \langle X_u - iX_v, X_u - iX_v \rangle \equiv 0, \end{aligned}$$

se a superfície for regular, e parametrizada por parâmetros isotérmicos. Essas observações fazem parte da demonstração da seguinte proposição.

Proposição 3.1. *Uma superfície mínima regular, localmente restrita a um domínio U simplesmente conexo, admite uma representação integral da forma*

$$X(u, v) = Re \int_{z_0}^z \phi(\zeta) d\zeta, \quad z_0 = u_0 + iv_0, \quad z = u + iv \in U,$$

com $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em \mathbb{C} tal que $|\phi(z)|^2 > 0$ e $\langle \phi(z), \phi(z) \rangle \equiv 0$. Reciprocamente, dada uma tripla de funções analíticas em um domínio simplesmente conexo U , $\phi(z) = (\phi_1(z), \phi_2(z), \phi_3(z))$ tal que $|\phi(z)|^2 > 0$ e $\langle \phi(z), \phi(z) \rangle \equiv 0$ em U , então, $X(u, v)$ define, a menos de translações no \mathbb{R}^3 , uma superfície mínima regular parametrizada por parâmetros isotérmicos.

Todos os “dados geométricos” da superfície podem ser obtidos em função de $\phi(z)$ considerando as extensões dos produtos escalar e vetorial ao corpo dos números complexos. Desta forma, o vetor normal unitário

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|},$$

tem a expressão

$$N(u, v) = -i \frac{\phi(z) \wedge \phi(\bar{z})}{|\phi(z) \wedge \phi(\bar{z})|}.$$

A partir de

$$\frac{\partial \phi(z)}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v} \right) \phi(z) = \frac{1}{2} (X_{uu} - X_{vv}) - iX_{uv},$$

encontramos os coeficientes e , f e g da segunda forma fundamental dados por

$$\left\langle \frac{\partial \phi(z)}{\partial z}, N \right\rangle = \frac{1}{2}(e - g) - if .$$

Se considerarmos uma superfície mínima parametrizada isotermicamente, isto é, $e = -g$, então podemos expressar a segunda forma fundamental em termos de $\phi(z)$, da seguinte forma

$$\varsigma(z) = \left\langle \frac{\partial \phi(z)}{\partial z}, N \right\rangle = e - if = -i \frac{\langle \phi'(z), \phi(z) \wedge \bar{\phi}(z) \rangle}{|\phi(z)|^2} .$$

Verifica-se facilmente que a função $\varsigma(z)$ é holomorfa, e conseqüentemente, se não nula, seus zeros são isolados.

3.7 Estudo das Propriedades de Simetria

Esta seção tem por objetivo expor, de modo conciso, algumas propriedades de simetria das superfícies mínimas, que são úteis no projeto das constelações de sinais. Para tanto, utilizamos o excelente livro-texto [9].

A representação integral local para as superfícies mínimas em domínios simplesmente conexos dada em (3.8) permite explorar, mais detalhadamente, as propriedades geométricas das superfícies decorrentes das propriedades das funções analíticas.

A função $X^* : U \rightarrow \mathbb{C}$, conjugada harmônica da função X , é dada por

$$X^*(u, v) = \text{Im} \int_{z_0}^z \phi(\zeta) d\zeta , \quad z_0 = u_0 + iv_0, \quad z = u + iv \in U ,$$

onde Im denota a parte imaginária.

Como $X + iX^*$ é uma função analítica, então das equações de Cauchy-Riemann segue que

$$X_u = X_v^* \quad \text{e} \quad X_v = -X_u^* . \tag{3.9}$$

A proposição a seguir utiliza as duas igualdades, (3.9), para obter informações sobre a geometria das superfícies X e X^* .

Proposição 3.2. *Seja $X : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma superfície mínima regular no \mathbb{R}^3 parametrizada isotermicamente e $X^* : U \rightarrow \mathbb{C}$ sua conjugada harmônica. Então*

- a) $X^* : U \rightarrow \mathbb{C}$ define uma superfície mínima;

- b) os planos tangentes T_pX e T_pX^* coincidem em todo ponto $p \in U$;
- c) os vetores normais $N(p)$ e $N^*(p)$ coincidem em todo ponto $p \in U$;
- d) as superfícies são isométricas, isto é, $\lambda(u, v) = \lambda^*(u, v)$ para todo ponto $p = (u, v) \in U$; conseqüentemente, as curvaturas gaussianas das duas superfícies coincidem em todo ponto;
- e) $\varsigma^*(z) = -i\varsigma(z)$;
- f) Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ uma curva em U , se $\gamma = X \circ \alpha$ e $\gamma^* = X^* \circ \alpha$, então os vetores tangentes de γ e γ^* são ortogonais;
- g) se $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ é uma curva em U tal que $\gamma = X \circ \alpha$ é uma reta (respec. uma geodésica plana), então $\gamma^* = X^* \circ \alpha$ é uma geodésica plana (respec. uma reta).

O próximo lema indica uma boa reparametrização para as superfícies mínimas que contêm retas em seu traço.

Lema 3.1. *Seja $X : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima regular. Se existe uma curva parametrizada $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ tal que o traço de $X \circ \alpha$ está contido em uma reta, então existe uma reparametrização local $h : U' \rightarrow U$, $(0, 0) \in U'$ tal que*

$$\{(X \circ h)(0, y), |y| < \epsilon\} \subset \{X(\alpha(t)), t \in I\}.$$

No contexto da teoria das funções analíticas tem-se o chamado *Princípio de Reflexão de Schwarz*: *Seja $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Se f transforma um segmento de reta (ou um segmento circular) em um segmento de reta (respec. em um segmento circular), então f transforma pontos do domínio U simétricos em relação à reta (respec. simétricos em relação ao círculo, pela inversão) em pontos simétricos em relação ao conjunto imagem.*

Utilizando esse princípio e o Lema 3.1, tem-se a primeira propriedade de simetria das superfícies mínimas:

Proposição 3.3. *Sejam $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima, $(u, v) \in U$ parâmetros isotérmicos, $z = u + iv$. Suponha que o conjunto imagem $\{X(u, 0), (u, 0) \in U\}$ está contido no eixo Oy . Nessas condições, tem-se que a superfície é invariante por uma*

rotação de π em torno desse eixo, isto é, se $r(z) = \bar{z}$, então

$$X \circ r = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Usando a Proposição 3.3 e o item (f) da Proposição 3.2, podemos provar o chamado *Teorema de Reflexão*.

Teorema 3.2. *Se uma superfície mínima contém uma reta (respec. uma geodésica plana), então a rotação de π em torno dessa reta (respec. a reflexão em relação ao plano da geodésica) é uma simetria da superfície.*

As reflexões da superfície de Scherk, Figura 3.4, são exemplos de aplicação desse teorema. Tal superfície pode ser rotacionada de um ângulo π em torno das retas verticais sobre os vértices do quadrado aberto de lado π , estendendo por simetria de modo a cobrir uma parte do plano constituída por quadrados não-consecutivos de lado π , Figura 3.3(a).

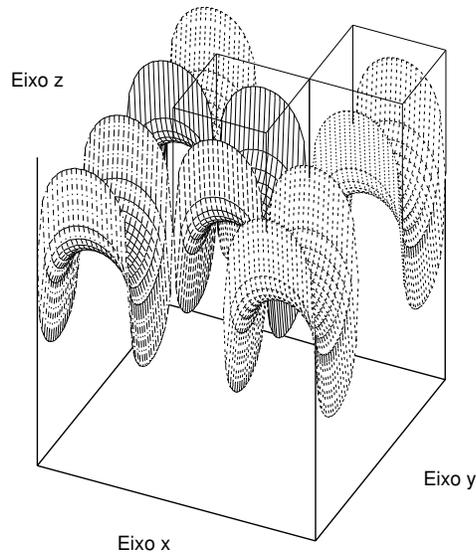


Figura 3.4: Reflexões da superfície de Scherk.

Para identificar retas e geodésicas planas em uma superfície mínima usamos o seguinte resultado clássico da Geometria Diferencial.

Proposição 3.4. *Seja $c(t) = X(\alpha(t))$, $t \in I$ uma curva regular contida em uma superfície parametrizada. Então,*

a) a curva $c(t)$ é uma geodésica e uma linha assintótica se, e somente se, $c(t)$ for uma reta;

b) seja $c(t)$ uma geodésica, então $c(t)$ é também uma linha de curvatura se, e somente se, $c(t)$ for uma curva plana.

Para estudar as simetrias de uma superfície mínima precisamos, de alguma forma, identificar retas ou geodésicas planas da superfície, ou ainda, distinguir entre as geodésicas da superfície, as que são linhas assintóticas ou linhas de curvatura.

As geodésicas de uma superfície são obtidas como soluções do seguinte sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem

$$\begin{cases} u''(t) + (u'(t))^2\Gamma_{11}^1 + 2u'(t)v'(t)\Gamma_{12}^1 + (v'(t))^2\Gamma_{22}^1 = 0, \\ v''(t) + (u'(t))^2\Gamma_{11}^2 + 2u'(t)v'(t)\Gamma_{12}^2 + (v'(t))^2\Gamma_{22}^2 = 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

onde Γ_{ij}^k são os *símbolos de Christoffel* da superfície $X(u, v)$, dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

No caso particular em que a superfície é uma superfície mínima parametrizada isotermicamente, as geodésicas são soluções do seguinte sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem

$$\begin{cases} u''(t) + [(u'(t))^2 - (v'(t))^2]E_u/2E + u'(t)v'(t)E_v/E = 0, \\ v''(t) + [(v'(t))^2 - (u'(t))^2]E_v/2E + u'(t)v'(t)E_u/E = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

As linhas assintóticas de uma superfície são dadas por $X(u(t), v(t))$ ou $X(z(t))$ com $(u(t), v(t))$ satisfazendo

$$e(u'(t))^2 + 2fu'(t)v'(t) + g(v'(t))^2 = 0,$$

e para as superfícies mínimas,

$$e[(u'(t))^2 - (v'(t))^2] + 2fu'(t)v'(t) = 0.$$

As linhas de curvatura, por sua vez, são dadas por $X(u(t), v(t))$, com $(u(t), v(t))$ tais que

$$2eu'(t)v'(t) - f[(u'(t))^2 - (v'(t))^2] = 0 .$$

Tomando a função $\varsigma(z)$, definida anteriormente, temos uma caracterização das linhas assintóticas e de curvatura, no sentido a seguir.

Proposição 3.5. *Seja $X(u(t), v(t))$, $t \in I$, uma curva contida em uma superfície mínima.*

a) $c(t)$ é uma linha assintótica se, e somente se,

$$\operatorname{Re}\{\varsigma(z(t))(z'(t))^2\} = 0, \quad t \in I;$$

b) $c(t)$ é uma linha de curvatura se, e somente se,

$$\operatorname{Im}\{\varsigma(z(t))(z'(t))^2\} = 0, \quad t \in I.$$

3.8 A Representação de Weierstrass

Uma solução completamente satisfatória da equação de Lagrange foi obtida por Weierstrass muitos anos depois. Para tanto, Weierstrass utilizou a representação integral local para superfícies mínimas em domínios simplesmente conexos dada pela Proposição 3.1, reescrevendo a equação $\langle \phi(z), \phi(z) \rangle = \phi_1^2(z) + \phi_2^2(z) + \phi_3^2(z) = 0$, como

$$\phi_3^2(z) = (\phi_1(z) + i\phi_2(z))(\phi_1(z) - i\phi_2(z)),$$

e chamando

$$f(z) = \phi_1(z) - i\phi_2(z), \quad g(z) = \frac{\phi_3(z)}{\phi_1(z) - i\phi_2(z)} .$$

Em termos de $g(z)$ e $f(z)$, podemos obter as funções analíticas $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ e $\phi_3(z)$ como

$$\begin{cases} \phi_1(z) = \frac{1}{2}(1 - g^2(z))f(z) , \\ \phi_2(z) = \frac{i}{2}(1 + g^2(z))f(z) , \\ \phi_3(z) = f(z)g(z) . \end{cases} \quad (3.13)$$

Observe que a condição de regularidade é verificada se os zeros de $f(z)$ coincidem com os pólos de $g(z)$, de forma que a ordem do zero seja igual ao dobro da ordem do pólo.

Com essa escolha, a representação integral local para superfícies mínimas em domínios simplesmente conexos, dada pela Proposição 3.1, fica da seguinte forma

$$X(u, v) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2} (f(\zeta)(1 - g^2(\zeta)), i(1 + g^2(\zeta)), f(\zeta)g(\zeta)) d\zeta, \quad z_0, z \in U. \quad (3.14)$$

A equação (3.14) é chamada *Representação de Weierstrass* ou de *Enneper-Weierstrass* para as superfícies mínimas, veja Proposição 3.1.

Além de permitir obter exemplos de superfícies mínimas, a representação de Weierstrass desempenha um papel essencial na investigação teórica de tais superfícies.

Por exemplo, define-se a família associada a uma superfície mínima X dada pelas funções holomorfas f e g como a família de superfícies mínimas X^t dada por $f^t = e^{it}f$ e $g^t = g$, $t \in [0, \pi/2]$. Essa deformação leva isometricamente a superfície mínima X em sua conjugada harmônica X^* . Isso decorre do fato de que o comprimento de uma curva $c(t)$ em X depende somente dos valores absolutos de f , $|f|$, e g , $|g|$. Como $|f^t| = |f|$ e $|g^t| = |g|$, na deformação de X através da família X^t , o comprimento de $c(t)$ é preservado, isto é, a deformação é isométrica.

O catenóide (Figura 3.5(a)) e o helicóide (Figura 3.5(f)), descobertos por Meusnier, são apenas dois elementos de uma família de superfícies mínimas, através da qual podemos deformar continuamente o catenóide menos um meridiano em uma volta completa do helicóide, veja Figura 3.5. Como foi visto, essa deformação é isométrica, e além disso, a imagem esférica de um domínio é preservada a menos de uma rotação.

Um fato extremamente importante, decorrente da Representação de Weierstrass, é a propriedade geométrica que tem a função $g(z)$. Ela descreve exatamente a projeção estereográfica da aplicação normal de Gauss da superfície mínima, exceto para os pólos de $g(z)$, ou seja,

$$\pi \circ N(u, v) = (\operatorname{Re} g(z), \operatorname{Im} g(z)),$$

onde $\pi : S^2(1) - \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a projeção estereográfica e $N(u, v)$ é o vetor normal dado por

$$N(u, v) = \left(\frac{2\operatorname{Re} g(z)}{1 + |g(z)|^2}, \frac{2\operatorname{Im} g(z)}{1 + |g(z)|^2}, \frac{|g(z)|^2 - 1}{1 + |g(z)|^2} \right).$$

Se \mathbb{R}^2 for identificado com o plano complexo \mathbb{C} e a aplicação π for estendida à aplicação $\tilde{\pi} : S^2(1) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ com $\tilde{\pi}((0, 0, 1)) = \infty$, então

$$\tilde{\pi} \circ N(u, v) = g(z).$$

Isto significa que $g(z)$ pode ser identificada com a aplicação de Gauss para todo ponto

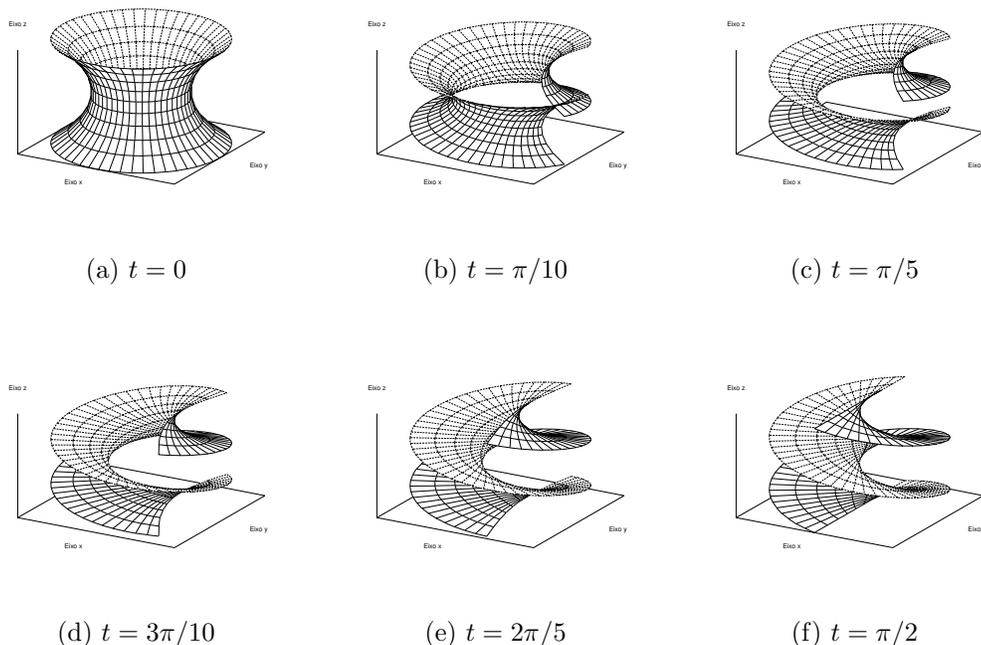


Figura 3.5: Família associada ao catenóide.

da superfície.

Um outro resultado importante, proveniente dessa representação, é que a expressão da curvatura gaussiana da superfície pode ser expressa por

$$K(u, v) = -\Delta \log \lambda(u, v) ,$$

onde Δ é o operador Laplaciano, e

$$\lambda^2(u, v) = E(u, v) = G(u, v) = \frac{|\phi(z)|^2}{2} = \frac{1}{4}|f(z)|^2(1 + |g(z)|^2)^2 .$$

Logo, através de um cálculo direto encontramos que o valor da curvatura gaussiana é

$$K(u, v) = - \left[\frac{4|g'(z)|}{|f(z)|(1 + |g(z)|^2)} \right]^2 . \quad (3.15)$$

3.9 Exemplos

A representação de Weierstrass permite obter uma infinidade de exemplos de superfícies mínimas. Por razões de interesse, serão consideradas as seguintes superfícies mínimas: catenóide, helicóide e Enneper.

O catenóide

Considere um domínio simplesmente conexo $D \subset \mathbb{C}$ com $f(z) = -e^{-z}$ e $g(z) = -e^z$. De (3.13), temos

$$\begin{cases} \phi_1(z) = \frac{1}{2}(1 - g^2(z))f(z) = \sinh z , \\ \phi_2(z) = \frac{i}{2}(1 + g^2(z))f(z) = -i \cosh z , \\ \phi_3(z) = f(z)g(z) = 1 . \end{cases}$$

De (3.14), temos

$$\begin{cases} x_1(u, v) = \operatorname{Re} \int_0^z \sinh \zeta d\zeta = \operatorname{Re}(\cosh z - 1) = \cosh u \cos v - 1 , \\ x_2(u, v) = \operatorname{Re} \int_0^z -i \cosh \zeta d\zeta = \operatorname{Re}(-i \sinh z) = \cosh u \sin v , \\ x_3(u, v) = \operatorname{Re} \int_0^z 1 d\zeta = \operatorname{Re}(z) = u . \end{cases}$$

Então, a catenóide é descrita por $X(u, v) = (\cosh u \cos v - 1, \cosh u \sin v, u)$. Uma outra forma de obter a catenóide é considerar um domínio simplesmente conexo $D \subset \mathbb{C} - \{0\}$ com $f(z) = 1/z^2$ e $g(z) = z$.

O helicóide

Considere um domínio simplesmente conexo $D \subset \mathbb{C}$ com $f(z) = e^{-z}$ e $g(z) = -ie^z$. De (3.13) temos

$$\begin{cases} \phi_1(z) = \cosh z , \\ \phi_2(z) = -i \sinh z , \\ \phi_3(z) = -i . \end{cases}$$

De (3.14), temos

$$\begin{cases} x_1(u, v) = \operatorname{Re} \int_0^z \cosh \zeta d\zeta = \operatorname{Re}(\sinh z) = \sinh u \cos v - 1 , \\ x_2(u, v) = \operatorname{Re} \int_0^z -i \sinh \zeta d\zeta = \operatorname{Re}(-i \cosh z + i) = \sinh u \sin v , \\ x_3(u, v) = \operatorname{Re} \int_0^z -i d\zeta = \operatorname{Re}(-iz) = v . \end{cases}$$

Então, a helicóide é descrita por $X(u, v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v)$.

A superfície de Enneper

Escolha $D = \mathbb{C}$, $f(z) = 1$ e $g(z) = z$. De (3.13), temos

$$\begin{cases} \phi_1(z) = (1 - z^2)/2 , \\ \phi_2(z) = i(1 + z^2)/2 , \\ \phi_3(z) = z . \end{cases}$$

De (3.14), temos

$$\begin{cases} x_1(u, v) = \operatorname{Re} \int_0^z (1 - \zeta^2)/2 d\zeta = \operatorname{Re}(z - z^3/3)/2 = (u - u^3/3 + uv^2)/2 , \\ x_2(u, v) = \operatorname{Re} \int_0^z i(1 + \zeta^2)/2 d\zeta = \operatorname{Re}(i(z + z^3/3))/2 = (-v + v^3/3 - u^2v)/2 , \\ x_3(u, v) = \operatorname{Re} \int_0^z \zeta d\zeta = \operatorname{Re}(z^2/2) = (u^2 - v^2)/2 . \end{cases}$$

Então, a superfície de Enneper é descrita por

$$X(u, v) = (u - u^3/3 + uv^2, -v + v^3/3 - u^2v, u^2 - v^2)/2 .$$

Note que a superfície de Enneper só envolve funções polinomiais. Observe, também, a simplicidade dessa superfície quando comparada com as superfícies mínimas apresentadas até agora, cujas representações são dadas por funções transcendentais, isto é, que envolvem de maneira essencial a função exponencial. Sua curvatura gaussiana, calculada através de (3.15), é dada por

$$K(u, v) = - \left[\frac{4}{(1 + |z|^2)} \right]^2 = - \frac{16}{(1 + u^2 + v^2)^2} . \quad (3.16)$$

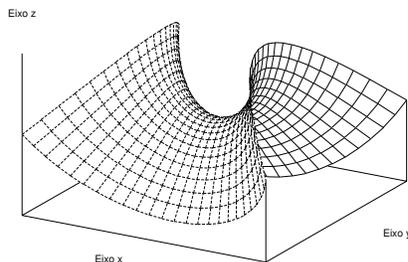


Figura 3.6: Superfície de Enneper.

Capítulo 4

Construção e análise de Constelações de Sinais em Superfícies

Para que seja possível construir e analisar constelações de sinais em superfícies é necessário estender os conceitos de constelações de sinais, probabilidade de erro e potência de transmissão para a teoria local de superfícies.

4.1 Constelações de Sinais em Superfícies

Na construção das constelações de sinais imersas em superfícies, deve-se considerar a métrica induzida desta superfície em cada um dos blocos modulador, canal e demodulador da Figura 1.1, interpretados como o espaço métrico (E_3, d_3) . Devemos ressaltar que essa métrica induzida deve ser a mesma em cada um dos blocos, pois queremos “casá-los” de maneira a aumentar o desempenho do sistema em consideração.

4.1.1 Modelo do sistema

Seja $X : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular parametrizada. A métrica de S induz de maneira natural uma métrica em D , isto é, se $p \in D$, $v_1, v_2 \in T_p D$, definimos $\langle v_1, v_2 \rangle_p = \langle dX_p(v_1), dX_p(v_2) \rangle_{X(p)}$, onde $dX_p(v_1)$ é a diferencial da aplicação X no ponto p segundo o vetor v_1 . Observe que, nessa situação, X passa a ser uma aplicação isométrica de D em S . De agora em diante, D_X denotará o espaço bidimensional com métrica induzida da superfície S .

Uma constelação de sinais $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é um conjunto de pontos bidimensionais $x_i = (u_i, v_i)$ em D_X . Portanto, a análise de desempenho de uma constelação de sinais

será feita utilizando a métrica do espaço D_X . Por exemplo, a distância entre quaisquer dois sinais, $d(x_i, x_j)$, é dada pela menor distância geodésica desses pontos em D_X , isto é

$$d(x_i, x_j) = \int_{t_i}^{t_j} \sqrt{(u'(t))^2 E(u, v) + 2u'(t)v'(t)F(u, v) + (v'(t))^2 G(u, v)} dt, \quad (4.1)$$

onde $E(u, v), F(u, v)$ e $G(u, v)$ são os coeficientes da primeira forma fundamental da superfície $X(u, v)$, que determinam a métrica de D_X , onde $x_i = (u(t_i), v(t_i))$, $x_j = (u(t_j), v(t_j))$ e $u(t), v(t)$ são soluções do sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem (3.10).

4.1.2 Processo de demodulação

Podemos relacionar a ação do ruído em um canal de transmissão como uma transformação $T(x_m) = y$, que leva o sinal transmitido x_m no sinal recebido $y \in D_X$. Consideraremos que essa transformação é dada por

$$y = T(x_m) = \exp(x_m, v), \quad v \in T_{x_m} X,$$

onde T_{x_m} denota o plano tangente da superfície $X(u, v)$ no ponto x_m , e $\exp(x_m, v)$ é a aplicação exponencial. Geometricamente, $\exp(x_m, v)$ é o ponto $y \in D_X$ obtido quando percorrermos um comprimento igual a $|v|$, a partir de x_m , sobre a geodésica que passa por x_m com velocidade igual a $\frac{v}{|v|}$, Figura 4.3.

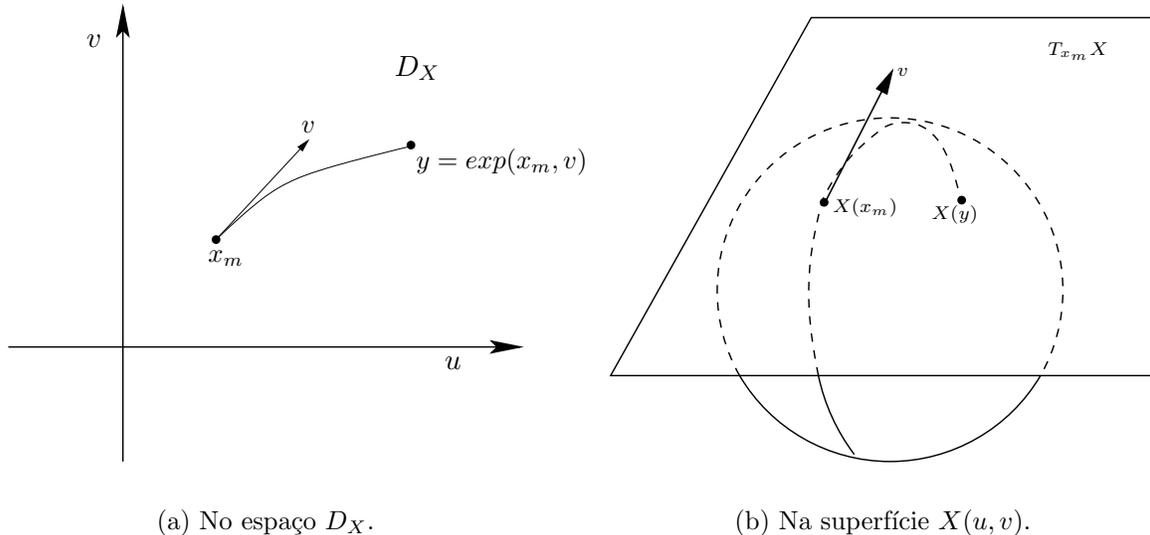
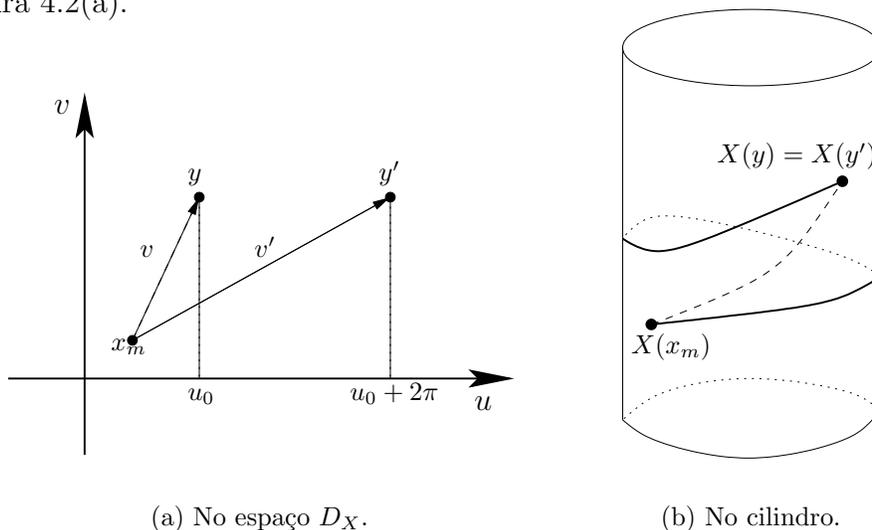


Figura 4.1: Aplicação exponencial.

Utilizamos a aplicação exponencial na definição da transformação $T(x_m) = y$ em um canal de transmissão, pois adotamos a geodésica como a curva que liga o sinal transmitido ao sinal recebido. Essa curva depende apenas da primeira forma fundamental e, localmente, minimiza a distância entre dois pontos.

Observe que existe apenas uma geodésica em D_X passando por x_m com velocidade v chegando até y , então existe uma relação entre o sinal recebido y e o vetor v . Podemos verificar que essa relação é um para um quando tomamos os pontos x_m e y “suficientemente próximos” em D_X . Entretanto, para pontos sobre a superfície não podemos garantir que essa relação é um para um. Por exemplo, tomemos a superfície do cilindro, Figura 4.2(b), observe que na superfície existem dois vetores v e v' diferentes associados ao ponto $X(y) = X(y')$, mas em D_X esses vetores estão associados a dois pontos distintos y e y' , Figura 4.2(a).



(a) No espaço D_X .

(b) No cilindro.

Figura 4.2: Geodésicas.

Dessa forma, quando o ruído age em D_X transformando o sinal enviado x_m no sinal recebido y , ele age em $T_{x_m}X$ transformando a origem $(0, 0)$, equivalente a x_m em D_X , no ponto v , que por sua vez, é equivalente a y em D_X . Consequentemente, a densidade de probabilidade condicional de recebermos y dado que x_m foi transmitido em D_X é igual à densidade de probabilidade condicional de recebermos v dado que $(0, 0)$ foi transmitido em $T_{x_m}X$, isto é

$$p(y/x_m) = p(v/(0, 0)) . \quad (4.2)$$

Observe que a igualdade em (4.2) é apenas em valor, pois as expressões são diferentes. Isto é, $p(y/x_m)$ é uma densidade de probabilidade condicional cuja expressão depende da

variável aleatória $y = (u, v)$ e do ponto x_m , enquanto que $p(v/(0, 0))$ depende da variável aleatória $v = (v_x, v_y)$, como veremos nos Exemplos 4.1 e 4.3.

Em outras palavras, o ruído em $T_{x_m}X$ possui a densidade de probabilidade da variável aleatória v , e será a mesma da variável aleatória y , pela unicidade das geodésicas que passam por x_m com velocidade v e chegam a y .

Por exemplo, quando a superfície for o plano (espaço euclidiano bidimensional), temos que seus símbolos de Christoffel são todos nulos e de (3.10) temos

$$\begin{cases} u''(t) = 0 & \Rightarrow u = u_m + u'(t_m)t, \\ v''(t) = 0 & \Rightarrow v = v_m + v'(t_m)t, \end{cases}$$

isto é,

$$y = \exp(x_m, v) = (u_m, v_m) + (u'(t_m), v'(t_m))t = x_m + v. \quad (4.3)$$

Neste caso, se v_x e v_y forem variáveis aleatórias gaussianas então, $v = (v_x, v_y)$ também será gaussiana, pois $T_{x_m}X$ é uma transformação linear em um espaço vetorial.

Na determinação da densidade de probabilidade para a variável aleatória v , definida em todo o espaço tangente, devemos supor que a superfície é completa, isto é, para todo $p \in X$, a aplicação exponencial, $\exp(p, v)$, está definida para todo $v \in T_pX$.

Observe que a transformação $T(x_m)$ só é da forma explicitada em (4.3) quando o espaço for vetorial. Mas, geralmente, o espaço D_X , com a métrica induzida da superfície $X(u, v)$, não é um espaço vetorial bidimensional, pois dados dois pontos $x_m = (u_m, v_m)$ e $v = (v_x, v_y)$ temos que $x_m + v \neq (u_m + v_x, v_m + v_y)$.

No caso particular que a variável aleatória $v = (v_x, v_y)$ é gaussiana circular, isto é, as variáveis v_x e v_y são gaussianas de mesmas variâncias, podemos obter a densidade de probabilidade da variável aleatória y como sendo dada por

$$p(y/x_m) = k_1 e^{-k_2 d^2(x_m, y)} \sqrt{EG - F^2}, \quad (4.4)$$

onde $d^2(y, \mu)$ é a distância geodésica ao quadrado entre y e sua média x_m , $\sqrt{EG - F^2}$ é o elemento de área da superfície, e k_1 e k_2 são constantes que devem satisfazer, para todo sinal x_m , a condição

$$\iint_D k_1 e^{-k_2 d^2(x_m, y)} \sqrt{EG - F^2} du dv = 1, \quad (4.5)$$

onde D é toda a região do espaço bidimensional onde a constelação está definida.

É importante observar que a expressão para a densidade de probabilidade condicional gaussiana circular dada em (4.4):

- i) não depende de uma particular parametrização da superfície (isto é, é invariante por isométries);
- ii) k_1 depende de k_2 e, se o espaço não for de curvatura gaussiana constante, também depende do ponto x_m .

O n -ésimo momento central da variável aleatória $y = (u, v)$ é definido como

$$\mathcal{M}^n(y) = \iint_D k_1 d^n(x_m, y) e^{-k_2 d^2(x_m, y)} \sqrt{EG - F^2} du dv . \quad (4.6)$$

Em particular, estamos interessados no momento central de ordem 2, que é chamado de variância da variável aleatória y e é denotado por σ^2 , pois o mesmo representa a energia do ruído.

Seja R_m a região de decisão do sinal x_m , ou seja, o conjunto representando todos os pontos que são decididos como x_m . Então, se o sinal x_m for transmitido, a probabilidade do demodulador decidir pelo sinal pertencente a R_m , isto é, decidir corretamente, é dada por

$$P_{a,m} = \iint_{R_m} k_1 e^{-k_2 d^2(x_m, y)} \sqrt{EG - F^2} du dv . \quad (4.7)$$

Portanto, $P_{e,m} = 1 - P_{a,m}$ é a probabilidade de decisão errônea. A probabilidade média de erro da constelação é dada por

$$P_e = \sum_{x_m} p(x_m) P_{e,m} , \quad (4.8)$$

onde $p(x_m)$ é a probabilidade de transmitirmos o sinal x_m .

Entretanto, observe que se o espaço não é de curvatura gaussiana constante as regiões de decisão e as constantes k_1 e k_2 vão ficar, em geral, difíceis de serem determinadas para cada um dos sinais da constelação. Contudo, se existir uma simetria que leve dois sinais quaisquer da constelação um no outro, então k_1 dependerá apenas de k_2 e as regiões de decisão serão congruentes. Este fato será usado no Exemplo 4.1.

A energia média da constelação é dada por

$$E_t = \sum_X p(x_m) d^2(x_m, \bar{x}) , \quad (4.9)$$

onde \bar{x} é o baricentro da constelação, que minimiza a energia média da constelação.

Para encontrar \bar{x} devemos calcular a primeira derivada da energia média em relação a x , e supor que a mesma seja zero para $x = \bar{x}$. Então \bar{x} satisfaz

$$\left. \frac{\partial E_t}{\partial u} \right|_{x=\bar{x}} = 2 \sum_X p(x_m) d(x_m, \bar{x}) \frac{\partial d(x_m, x)}{\partial u} \Big|_{x=\bar{x}} = 0, \quad (4.10)$$

$$\left. \frac{\partial E_t}{\partial v} \right|_{x=\bar{x}} = 2 \sum_X p(x_m) d(x_m, \bar{x}) \frac{\partial d(x_m, x)}{\partial v} \Big|_{x=\bar{x}} = 0. \quad (4.11)$$

A unicidade da solução das equações (4.10) e (4.11) fornece o valor de \bar{x} . O ponto \bar{x} é um ponto de mínimo local para a função energia média.

Exemplo 4.1. *Sejam $\mathcal{X}_1 = \{x_1 = (c_1, 0), x_2 = (0, c_1), x_3 = (-c_1, 0), x_4 = (0, -c_1)\}$ e $\mathcal{X}_2 = \{x_1 = (c_2, c_2), x_2 = (-c_2, c_2), x_3 = (-c_2, -c_2), x_4 = (c_2, -c_2)\}$ duas constelações de sinais do tipo 4-PSK no espaço bidimensional com métrica induzida da superfície mínima de Enneper dada por*

$$E(u, v) = G(u, v) = (1 + u^2 + v^2)^2/4, \quad F(u, v) = 0. \quad (4.12)$$

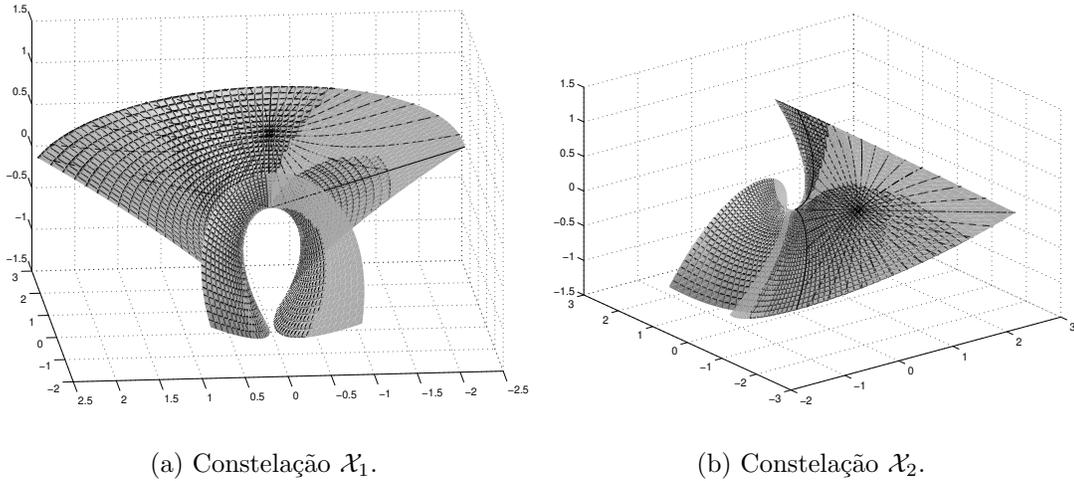


Figura 4.3: Região de decisão de um sinal 4-PSK na superfície de Enneper.

As geodésicas desse espaço devem satisfazer o sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem, (3.10), que para a métrica em (4.12) é dado por

$$\begin{cases} u''(t) + \frac{2u(t)(u'(t))^2}{1+u^2(t)+v^2(t)} + \frac{4u'(t)v'(t)v(t)}{1+u^2(t)+v^2(t)} - \frac{2u(t)(v'(t))^2}{1+u^2(t)+v^2(t)} = 0, \\ v''(t) - \frac{2v(t)(u'(t))^2}{1+u^2(t)+v^2(t)} + \frac{4u'(t)v'(t)u(t)}{1+u^2(t)+v^2(t)} + \frac{2v(t)(v'(t))^2}{1+u^2(t)+v^2(t)} = 0. \end{cases}$$

Nesse exemplo consideraremos o caso do ruído ser gaussiano circular com variância σ^2 , então a probabilidade de acerto do sinal x_i proveniente de (4.7) é dada por

$$P_{a,i} = \iint_{R_i} k_1 e^{-k_2 d^2(x_i,y)} (1 + u^2 + v^2)^2 / 4 \, du \, dv .$$

De (4.5) podemos encontrar, para cada sinal x_i , uma relação entre as constantes k_1 e k_2 , aplicando essa relação em (4.6) podemos encontrar a variância em função de k_2 , isto é $\sigma^2(k_2)$. Portanto, podemos escolher um valor para k_2 de tal forma que $\sigma^2(k_2) = \sigma^2$. Note, entretanto, que geralmente não dispomos de uma única fórmula para expressar a distância geodésica entre quaisquer dois pontos de D_X , e isso pode dificultar o cálculo das constantes k_1 e k_2 bem como da variância.

Contudo, observe que existe uma simetria na constelação \mathcal{X}_1 e uma outra simetria na constelação \mathcal{X}_2 levando dois sinais quaisquer de uma mesma constelação um no outro. Com isso, em uma mesma constelação, k_1 depende apenas de k_2 e as regiões de decisão são congruentes. Portanto, na análise de desempenho das constelações de sinais consideraremos apenas o sinal $x_1 = (1.273, 0)$ em \mathcal{X}_1 e apenas o sinal $x_1 = (0.911, 0.911)$ em \mathcal{X}_2 . Os valores das constantes $c_1 = 1.273$ e $c_2 = 0.911$ foram calculadas de forma que a energia média em cada uma das constelações fosse igual a 1.

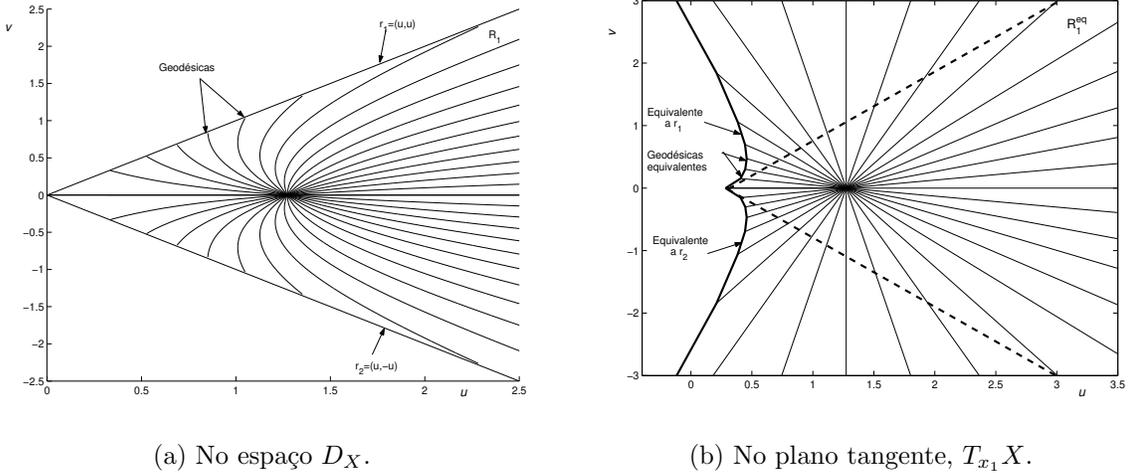


Figura 4.4: Região de decisão do sinal x_1 da constalação 4-PSK em \mathcal{X}_1 .

A região de decisão do sinal $x_1 \in \mathcal{X}_1$, em D_X , é a área limitada pelas retas $r_1 = (u, u)$ e $r_2 = (u, -u)$, para $u > 0$, Figura 4.4(a). Para $x_1 \in \mathcal{X}_2$ sua região de decisão, em D_X , é a área limitada pelas retas $r_1 = (0, u)$ e $r_2 = (u, 0)$, para $u > 0$, Figura 4.5(a).

Observe que a forma como definimos a ação do ruído permite-nos encontrar uma região de decisão equivalente para o sinal x_1 , R_1^{eq} , no plano tangente $T_{x_1}X$, Figuras 4.4(b) e

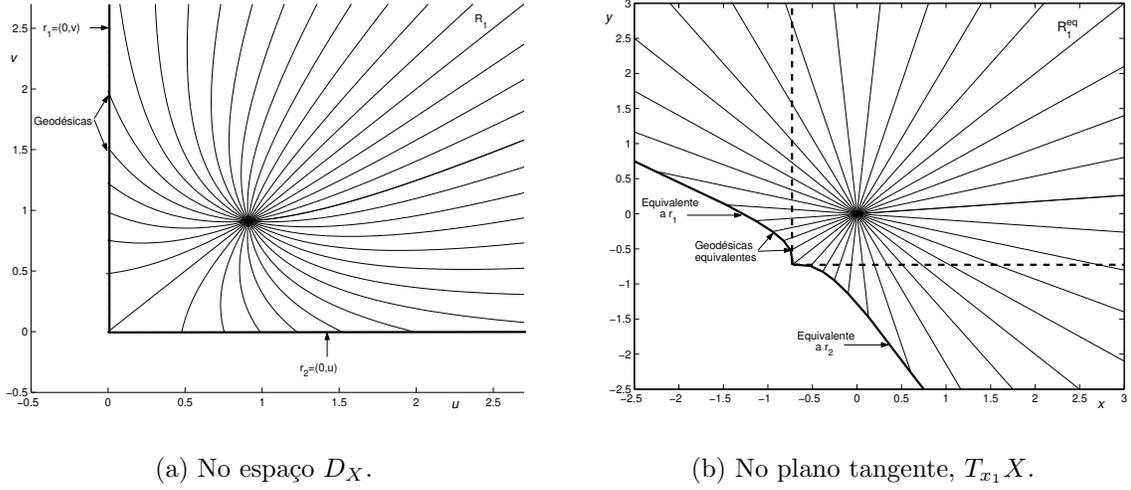


Figura 4.5: Região de decisão do sinal x_1 da constelação 4-PSK \mathcal{X}_2 .

4.5(b). Esse artifício é bastante importante, pois não precisamos calcular os valores das constantes k_1 e k_2 , e da variância $\sigma^2(k_2)$ em D_X , D_X . Isso significa que o cálculo da probabilidade de acerto poderá ser aproximada, no plano tangente $T_{x_1}X$, pela equação

$$P_{a,1} = \iint_{R_1^{eq}} \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-(x^2+y^2)/\sigma^2} dx dy .$$

A Figura 4.6 mostra as curvas da relação sinal ruído das constelações \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 no espaço bidimensional com métrica induzida da superfície de Enneper, D_X . Observe que as constelações \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 possuem desempenhos superiores ao da constelação 4-PSK no espaço euclidiano bidimensional. Esse fato pode ser melhor entendido quando observamos as Figuras 4.4(b) e 4.5(b), pois a região de decisão equivalente, R_1^{eq} , contém e é “maior” que a região de um mesmo sinal 4-PSK quando a superfície é o plano.

Como pode ser observado no Exemplo 4.1, o conceito de região de decisão equivalente é fundamental na análise de desempenho de uma constelação de sinais. Portanto, para comparar o desempenho de uma constelação de sinais em uma superfície, com a sua equivalente no espaço euclidiano bidimensional, devemos determinar suas regiões de decisão equivalentes.

Para comparar o desempenho de constelações de sinais equivalentes, podemos utilizar o Teorema de Rauch, [7], que, intuitivamente, exprime o fato de que se as curvaturas gaussianas aumentam, os comprimentos diminuem. Dessa forma podemos estimar se as regiões de decisão equivalentes vão “aumentar” ou “diminuir” quando comparadas com suas respectivas regiões de decisão de uma constelações de sinais equivalente no

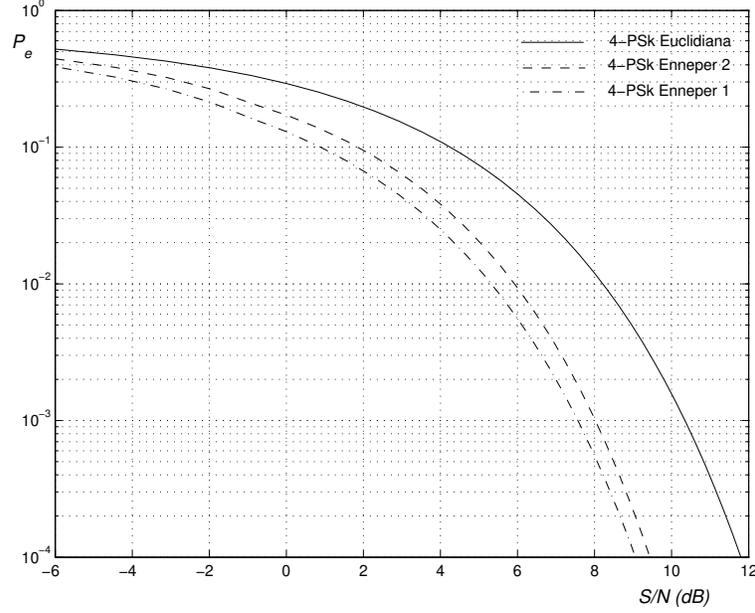


Figura 4.6: Relação sinal ruído de uma constelação 4 – PSK na superfície de Enneper.

espaço euclidiano. No Exemplo 4.1 podemos calcular a curvatura gaussiana dos sinais da constelações \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 por (3.16) e verificar que para o sinal x_1 as curvaturas são dadas por $K(\mathcal{X}_1) = -2.3299$ e $K(\mathcal{X}_2) = -2.2616$.

Podemos admitir que o canal pode ser plenamente especificado por $p(y/x_j)$, $j = 1, \dots, n$, a probabilidade condicional de receber y dado que o sinal x_j foi transmitido. No caso particular em que o ruído é gaussiano circular e o receptor é de máxima verossimilhança decidimos pelo sinal x_j que maximiza $p(y/x_j)$, isto é, pelo sinal x_j mais próximo a y , isto é,

$$\max_j \{p(y/x_j)\} = \max_j \{k_1 e^{-k_2 d^2(y, x_j)} \sqrt{EG - F^2}\},$$

que é equivalente a

$$\max_j \{\ln(k_1 e^{-k_2 d^2(y, x_j)} \sqrt{EG - F^2})\} = \max_j \{-k_2 d^2(y, x_j) + \ln k_1 \sqrt{EG - F^2}\},$$

que por sua vez, como k_1 é positivo, equivale a

$$\max_j \{p(y/x_j)\} = \min_j \{d^2(y, x_j)\}. \quad (4.13)$$

Utilizando o Teorema de Rauch, o conceito de regiões de decisão equivalente e o fato dado em (4.13) de que maximizar as distâncias entre os sinais diminui a probabilidade de erro, podemos concluir que o desempenho de uma constelação em um espaço D_{X_1} com

curvatura gaussiana K_1 é superior ao desempenho de uma constelação de sinais equivalente em um espaço D_{X_2} com curvatura gaussiana K_2 , se $K_1 < K_2$ em todos os pontos, isto é,

$$K_1 < K_2 \Rightarrow P_e(K_1) < P_e(K_2) . \quad (4.14)$$

De (4.14) podemos analisar a Figura 4.7 que representa uma mesma constelação de sinais \mathcal{X} em três diferentes espaços D_{X_i} , $i = 1, \dots, 3$, com curvaturas gaussianas K_i , $i = 1, \dots, 3$, da seguinte maneira.

- O desempenho da constelação \mathcal{X} no espaço com curvatura K_1 será inferior ao desempenho dessa mesma constelação nos espaços com curvatura K_2 e K_3 ;
- Não podemos afirmar, apenas por (4.14), que desempenho da constelação \mathcal{X} no espaço com curvatura K_2 será inferior ou superior ao desempenho dessa mesma constelação nos espaços com curvatura K_3 ;
- Para comparar $P_e(K_2)$ e $P_e(K_3)$ devemos necessariamente calcular os valores de $P_{e,m}(K_2)$ e $P_{e,m}(K_3)$, para cada sinal x_m levando em consideração os valores de $p(x_m)$.

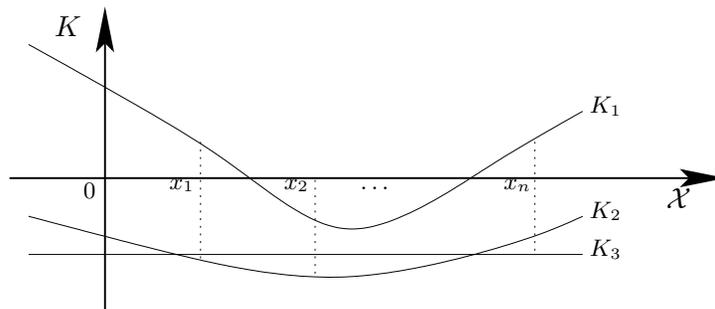


Figura 4.7: Constelação de sinais e curvatura gaussiana.

Como o espaço euclidiano bidimensional tem curvatura gaussiana nula, então uma constelação de sinais em uma superfície $X(u, v)$ com curvatura gaussiana $K(u, v)$, possui um desempenho, quando comparada com a sua “equivalente” no plano, superior se $K(u, v) < 0$ e inferior se $K(u, v) > 0$.

Utilizando esse resultado, podemos afirmar que o desempenho de uma constelação de sinais sobre uma superfície mínima é igual ou superior à sua equivalente no plano, pois sabemos, da teoria das superfícies mínimas, que elas possuem $K(u, v) \leq 0$, com igualdade em todos os pontos se, e somente se, a superfície é o plano.

Exemplo 4.2. Considere uma constelação de sinais bidimensional, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, definida no espaço D_X com métrica induzida da superfície planar, $X = (u/\sigma_u, v/\sigma_v, 0)$, com σ_u e σ_v constantes. Os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E(u, v) = 1/\sigma_u^2, \quad G(u, v) = 1/\sigma_v^2 \text{ e } F(u, v) = 0. \quad (4.15)$$

Do sistema de equações diferenciais (3.10), deduzimos que as geodésicas do plano são da forma

$$\begin{cases} u''(t) = 0 & \Rightarrow & u'(t) = \frac{u_i - u_j}{t_i - t_j} & \Rightarrow & u(t) = \frac{u_i - u_j}{t_i - t_j}(t - t_j) + u_j, \\ v''(t) = 0 & \Rightarrow & v'(t) = \frac{v_i - v_j}{t_i - t_j} & \Rightarrow & v(t) = \frac{v_i - v_j}{t_i - t_j}(t - t_j) + v_j. \end{cases}$$

Segue, portanto, que as geodésicas do plano são retas, e da equação do comprimento de arco, (4.1), temos

$$d^2(x_i, x_j) = (u_i - u_j)^2/\sigma_u^2 + (v_i - v_j)^2/\sigma_v^2. \quad (4.16)$$

Fazendo uso das equações (4.15) e (4.16) em (4.7), encontramos

$$P_{a,m} = \iint_{R_m} \frac{k_1}{\sigma_u \sigma_v} e^{-k_2((u-u_m)^2/\sigma_u^2 + (v-v_m)^2/\sigma_v^2)} du dv.$$

Como a probabilidade de acerto para todo o domínio da superfície é igual a 1, então usando a mudança de coordenadas $(u - u_m)/\sigma_u = r \cos(\theta)$ e $(v - v_m)/\sigma_v = r \sin(\theta)$, cujo jacobiano é $r\sigma_u\sigma_v$, encontramos que k_1 e k_2 devem satisfazer

$$\int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi k_1 e^{-k_2 r^2} r d\theta dr = 1,$$

logo $k_1 = k_2/\pi$. Podemos escolher $k_2 = 1/2\sigma^2$ e reescrever $P_{a,m}$ como

$$P_{a,m} = \iint_{R_m} \frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_v\sigma^2} e^{-(u-u_m)^2/2\sigma_u^2\sigma^2 - (v-v_m)^2/2\sigma_v^2\sigma^2} du dv.$$

Note que essa densidade de probabilidade é do tipo gaussiana circular com variância $2\sigma^2$ do “ponto de vista” da superfície planar $X(u, v)$, mesmo que σ_u e σ_v possuam valores diferentes. Esse fato deve ser ressaltado já que é comum relacionarmos a densidade de probabilidade gaussiana circular ao fato de $\sigma_u = \sigma_v = 1$, pois esse é o espaço em que normalmente trabalhamos.

Calculando a energia média da constelação, (5.7), encontramos

$$E_t = \sum_X p(x_m) \left((u_m - \bar{u})^2 / \sigma_u^2 + (v_m - \bar{v})^2 / \sigma_v^2 \right) ,$$

onde \bar{u} é calculado de (4.10) como segue

$$\begin{aligned} \sum_X p(x_m) \sqrt{(u_m - \bar{u})^2 / \sigma_u^2 + (v_m - \bar{v})^2 / \sigma_v^2} \frac{-2(u_m - \bar{u}) / \sigma_u^2}{\sqrt{(u_m - \bar{u})^2 / \sigma_u^2 + (v_m - \bar{v})^2 / \sigma_v^2}} = 0 \Rightarrow \\ \sum_X p(x_m) (u_m - \bar{u}) = 0 \Rightarrow \bar{u} \sum_X p(x_m) = \sum_X p(x_m) (u_m) \Rightarrow \bar{u} = \sum_X p(x_m) (u_m) , \end{aligned}$$

e de (4.11), temos

$$\begin{aligned} \sum_X p(x_m) \sqrt{(u_m - \bar{u})^2 / \sigma_u^2 + (v_m - \bar{v})^2 / \sigma_v^2} \frac{-2(v_m - \bar{v}) / \sigma_v^2}{\sqrt{(u_m - \bar{u})^2 / \sigma_u^2 + (v_m - \bar{v})^2 / \sigma_v^2}} = 0 \Rightarrow \\ \sum_X p(x_m) (v_m - \bar{v}) = 0 \Rightarrow \bar{v} \sum_X p(x_m) = \sum_X p(x_m) (v_m) \Rightarrow \bar{v} = \sum_X p(x_m) (v_m) . \end{aligned}$$

Como foi visto, o sistema de coordenadas polar é inerente às constelações de sinais $M - PSK$ em \mathbb{R}^2 . Quando consideramos esse tipo de constelação de sinais sobre uma superfície, uma generalização desse sistema para as coordenadas polares geodésicas, (ρ, θ) , no plano tangente à superfície se faz necessária. Nesse caso, os coeficientes $E(\rho, \theta)$, $F(\rho, \theta)$, e $G(\rho, \theta)$ da primeira forma fundamental devem satisfazer as condições

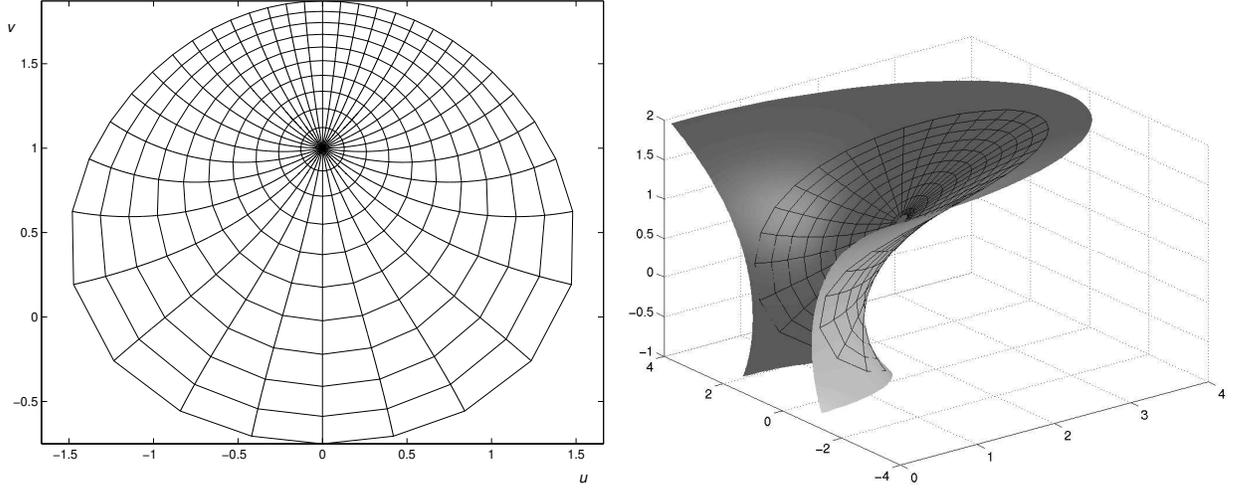
$$E(\rho, \theta) = 1, \quad F(\rho, \theta) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} G(\rho, \theta) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G(\rho, \theta)})_\rho = 0 .$$

Como exemplo, considere a superfície mínima catenóide, seu sistema de coordenadas polares geodésicas sobre o plano tangente $T_p X$ no ponto $p = (0, 1)$ é representado pela Figura 4.8(a), e sobre a superfície, é mostrada na Figura 4.8(b).

Exemplo 4.3. Considere uma constelação de sinais $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ num espaço bidimensional M^2 com curvatura gaussiana constante K . Seja $B_\delta(q)$ uma bola normal em um ponto $q \in M^2$, e considere a superfície parametrizada por

$$f(\rho, \theta) = \exp(q, \rho v(\theta)) , \quad 0 < \rho < \delta , \quad -\pi < \theta < \pi ,$$

onde $v(\theta)$ é um círculo em $T_q M^2$ parametrizado pelo ângulo central θ . As coordenadas (ρ, θ) em um aberto $U \subset M$ são as coordenadas polares em q . Os coeficientes da primeira



(a) Em $T_p X$, onde $p = (0, 1)$.

(b) Na Catenóide.

Figura 4.8: Sistema de coordenadas polares geodésicas.

forma fundamental são dadas por

$$E(\rho, \theta) = \left| \frac{\partial f}{\partial \rho} \right|^2 = |v(\theta)|^2 = 1, \text{ e } F(\rho, \theta) = 0,$$

$$G(\rho, \theta) = \left| \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|^2 = \begin{cases} \rho^2, & \text{se } K = 0 \\ \frac{1}{K} \sin^2(\sqrt{K}\rho), & \text{se } K > 0 \\ \frac{1}{-K} \sinh^2(\sqrt{-K}\rho), & \text{se } K < 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

A forma da curva $v(\theta)$ determina o tipo da densidade de probabilidade no ponto q . Por exemplo, se $v(\theta) = (\cos(\theta)/\sigma_x, \sin(\theta)/\sigma_y)$ temos uma densidade de probabilidade gaussiana dada por

$$p(\rho, \theta) = k_1 e^{-k_2 \rho^2 (\cos^2(\theta)/\sigma_x^2 + \sin^2(\theta)/\sigma_y^2)} \sqrt{G(\rho, \theta)}.$$

No caso particular em que $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, a densidade de probabilidade é gaussiana circular dada por

$$p(\rho, \theta) = k_1 e^{-k_2 \rho^2 / \sigma^2} \sqrt{G(\rho, \theta)},$$

onde k_1 e k_2 satisfazem

$$\int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi k_1 e^{-k_2 \rho^2 / \sigma^2} \sqrt{G} d\theta d\rho = 1 .$$

O n -ésimo momento central é dado por

$$\mathcal{M}^n = \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi k_1 \rho^n e^{-k_2 \rho^2 / \sigma^2} \sqrt{G} d\theta d\rho .$$

Para simplificações de cálculos suponha que $\sigma = 1$. A seguir, consideraremos os seguintes casos para a curvatura gaussiana constante, $K = 0$, $K < 0$ e $K > 0$. Devemos ressaltar que o caso $K = -1$ foi abordado nas teses de doutorado [1] e [2].

1. Para $K = 0$, a densidade de probabilidade é dada por

$$p(\rho, \theta) = k_1 e^{-k_2 \rho^2} \rho ,$$

onde $k_1 = k_2 / \pi$ e a variância $\sigma^2 = 1 / k_2$.

2. Para $K < 0$, a densidade de probabilidade é dada por

$$p(\rho, \theta) = \frac{k_1}{\sqrt{-K}} e^{-k_2 \rho^2} \sinh(\sqrt{-K} \rho) ,$$

com

$$k_1 = \frac{\pi^{-3/2} e^{K/4k_2} \sqrt{-K} k_2}{\operatorname{erf}(\sqrt{-K}/2\sqrt{k_2})} ,$$

onde $\operatorname{erf}(x)$ é a função erro definida para todo x positivo como

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt .$$

A variância é dada por

$$\sigma^2 = \frac{2\sqrt{-K} k_2 e^{K/4k_2} + \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-K}/2\sqrt{k_2}) (2k_2 - K)}{4k_2^2 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-K}/2\sqrt{k_2})} .$$

3. Para $K > 0$, a densidade de probabilidade é dada por

$$p(\rho, \theta) = \frac{k_1}{\sqrt{K}} e^{-k_2 \rho^2} |\sin(\sqrt{K} \rho)| ,$$

onde

$$k_1 = \frac{\sqrt{K}}{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} (-1)^i e^{-k_2 \rho^2} \sin(\sqrt{K}\rho) d\rho \right)^{-1}.$$

Para valores $k_2 \gg K$, então k_1 pode ser aproximada por

$$k_1 \approx \frac{i\pi^{-3/2} e^{-K/4k_2} \sqrt{Kk_2}}{\operatorname{erf}(i\sqrt{K}/2\sqrt{k_2})}.$$

Consequentemente a variância satisfaz

$$\sigma^2 \approx \frac{2i\sqrt{Kk_2} e^{K/4k_2} + \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(i\sqrt{K/4k_2})(2k_2 - K)}{4k_2^2 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(i\sqrt{K/4k_2})}.$$

Para mostrar que (4.4) está bem definida, explicitamos a densidade de probabilidade para os casos: $K = 1$, $K = 0$ e $K = -1$, quando a variância é igual a 1, isto é,

- $K = 1$ $p_{esf}(\rho, \theta) = 0.3124648430e^{-0.8007\rho^2} \sin(\rho)$,
- $K = 0$ $p_{euc}(\rho, \theta) = e^{-\rho^2} \rho/\pi$,
- $K = -1$ $p_{hip}(\rho, \theta) = 0.3157306071e^{-1.1491\rho^2} \sinh(\rho)$.

Como os gráficos das densidades de probabilidade são aproximadamente os mesmos, Figura 4.9(a), podemos verificar que (4.4) expressa com fidelidade a densidade de probabilidade gaussiana para diferentes espaços. Devemos ressaltar que existe uma diferença entre as densidades, na quarta casa decimal, por uma questão de precisão da função erro $\operatorname{erf}(x)$, Figura 4.9(b).

Exemplo 4.4. Neste exemplo descreveremos um método de construção de uma constelação de sinais, cujas regiões de decisão são triângulos equiláteros, em um espaço bi-dimensional com métrica induzida da superfície mínima catenóide, parametrizada por $X(u, v) = (\cos(u) \cosh(v), \sin(u) \cosh(v), v)$, com coeficientes da primeira forma fundamental dados por

$$E(u, v) = \cosh^2(u) = G(u, v) \text{ e } F(u, v) = 0.$$

As geodésicas desse espaço satisfazem o seguinte sistema de equações diferenciais,

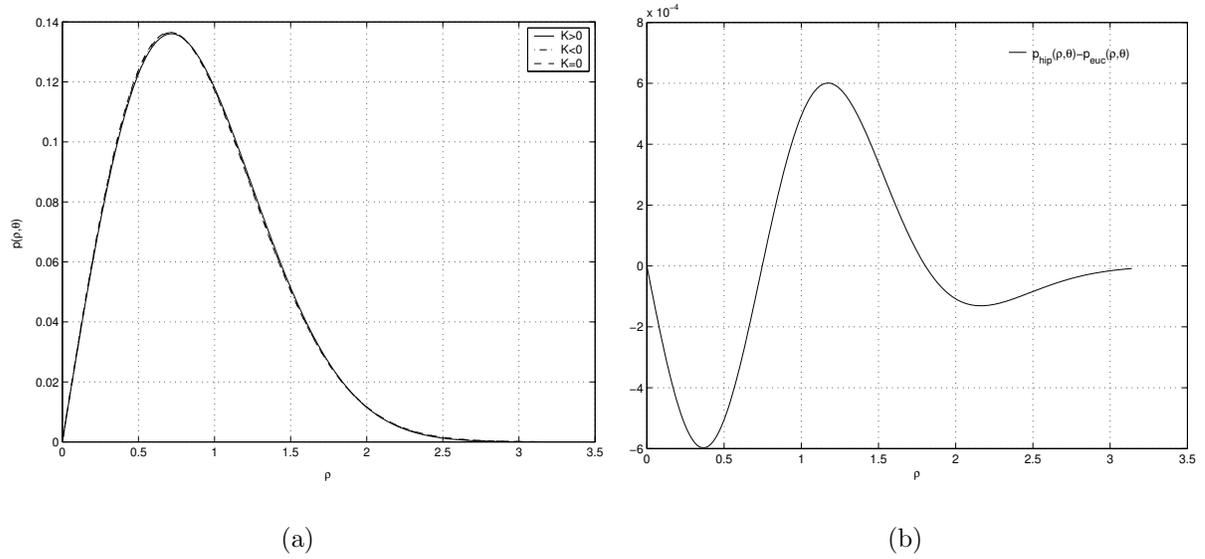


Figura 4.9: a) densidades de probabilidade gaussianas para valores de curvatura, 1, 0, -1 . b) diferença entre $P_{hip}(\rho, \theta)$ e $P_{euc}(\rho, \theta)$.

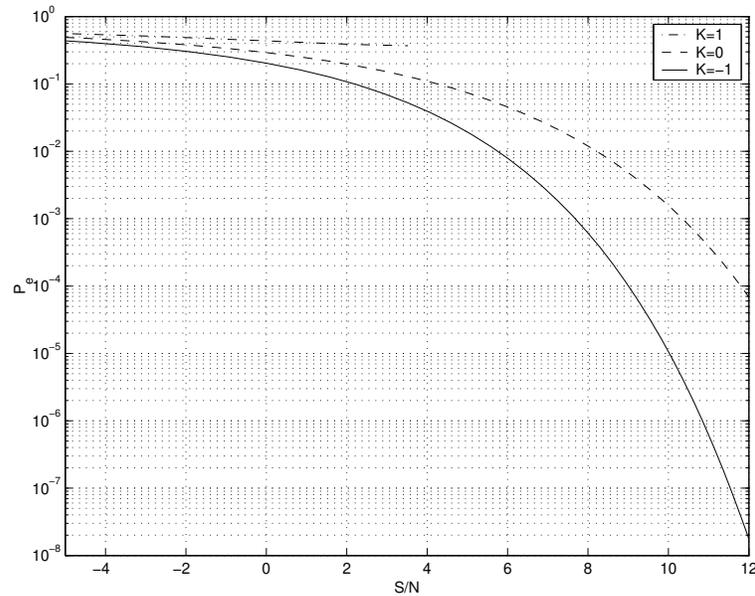


Figura 4.10: Desempenho da constelação 4-PSK em espaços com curvaturas 1, 0, -1 .

resultante de (3.10), dado por

$$\begin{cases} u''(t) + 2u'(t)v'(t) \tanh(v) = 0, \\ v''(t) + [(v'(t))^2 - (u'(t))^2] \tanh(v) = 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

Uma solução geral que forneça todas as geodésicas é, no momento, desconhecida. Sabe-se, a priori, que as catenárias descritas por $X(u = \text{const.}, v)$ e o círculo descrito por $X(u, 0)$ são geodésicas desse espaço. Portanto, foi necessário o desenvolvimento de um programa que resolvesse numericamente (4.18) e fornecesse as geodésicas necessárias para a construção dessa constelação de sinais.

A constelação de sinais da Figura 4.11 foi construída de forma que os sinais fossem os baricentros das regiões de decisão, que no caso particular são triângulos equiláteros. Nessa construção partimos de um triângulo inicial e por reflexões dessa região fundamental em torno de seus lados, geramos os outros triângulos congruentes ao inicial. Por exemplo, o vértice v_4 é gerado por uma geodésica saindo de v_3 percorrendo uma distância d até interceptar perpendicularmente a geodésica ligando v_1 e v_2 e depois percorrendo igual distância d até v_4 .

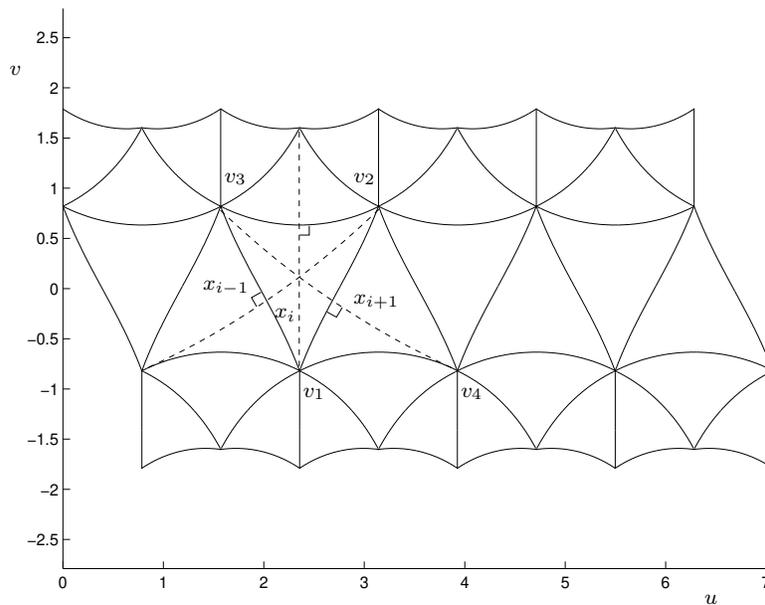


Figura 4.11: Constelação de sinais em um espaço bidimensional com métrica da catenóide.

Reflexões desse tipo não recobrem totalmente esse espaço. Isso decorre do fato da

catenóide não possuir curvatura gaussiana constante, e sim

$$K(u, v) = -\frac{1}{\cosh^2(v)}.$$

Esse fato ficará mais claro no próximo capítulo quando analisarmos constelações de sinais em espaços de curvatura constante. Contudo, observe que podemos aumentar infinitamente essa constelação no sentido do eixo u , refletindo-a em torno das geodésicas planas $X(u = \text{cte}, v)$ utilizando o Princípio da Reflexão de Schwarz, [9]. Devemos ressaltar que a constelação de sinais está no espaço bidimensional com métrica induzida da catenóide, D_X , e portanto, não é necessário que os sinais $X(x_i)$ sobre a superfície sejam sequer diferentes. Por exemplo, não é necessário que $X(v_1, u_1)$ e $X(v_1, u_1 + 2\pi)$ sejam distintos na superfície, mas que os sinais (v_1, u_1) e $(v_1, u_1 + 2\pi)$ o sejam em D_X . A Figura 4.12 ilustra tal constelação vista sobre as superfícies catenóide e helicóide.

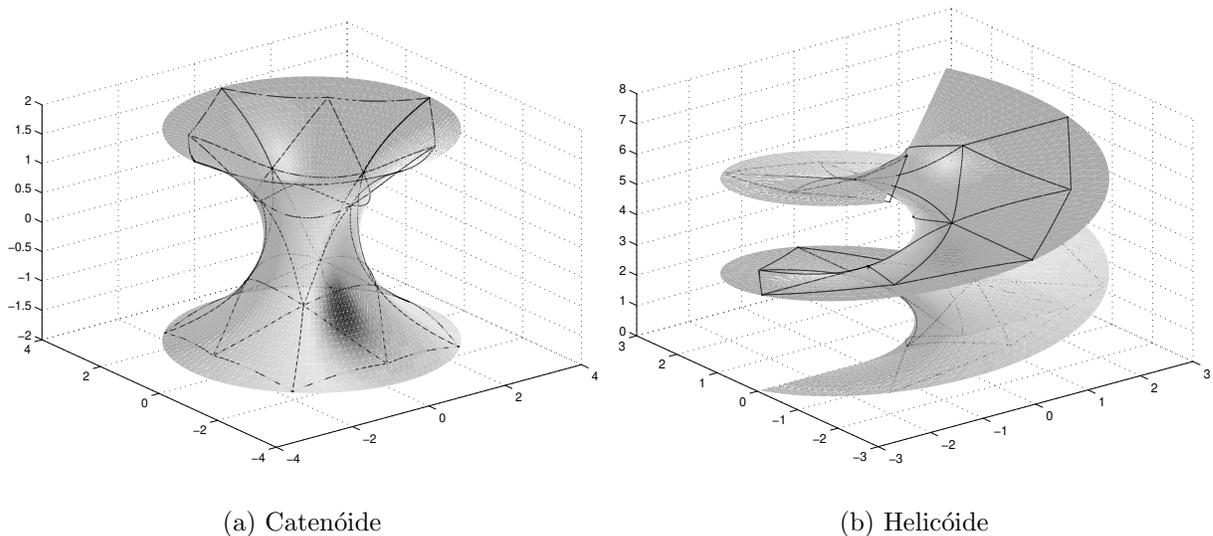


Figura 4.12: Visualização da constelação sobre as superfícies.

4.2 Análise da Probabilidade de Acerto

4.2.1 A primeira variação da probabilidade de acerto

Sejam $X : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular parametrizada e $\eta : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Uma variação normal de $X(D)$, determinada por η , é uma

aplicação $X^t : D \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida como

$$X^t(u, v) = X(u, v) + t\eta(u, v)N(u, v), \quad (u, v) \in D, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon), \quad (4.19)$$

onde $N(u, v)$ é o vetor normal unitário da superfície $X(u, v)$, veja Figura 4.13.

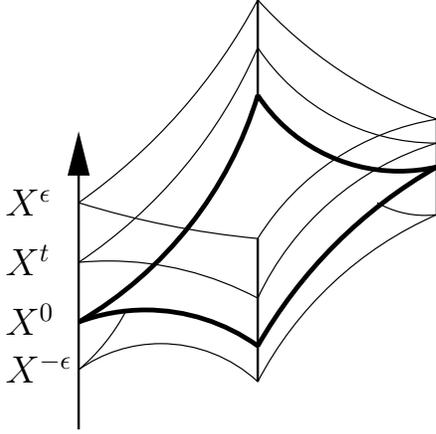


Figura 4.13: Variação normal da superfície, $X^t(u, v)$.

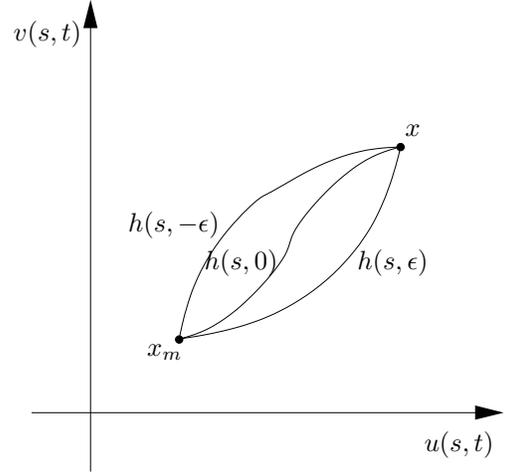


Figura 4.14: Variação das curvas, $h(s, t)$.

Os coeficientes E^t , F^t , G^t da primeira forma fundamental de $X^t(u, v)$, são dados por

$$\begin{aligned} E^t &= E + 2t\eta \langle X_u, N_u \rangle + t^2\eta^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2\eta_u^2, \\ F^t &= F + t\eta(\langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle) + t^2\eta^2 \langle N_u, N_v \rangle + t^2\eta_u\eta_v, \\ G^t &= G + 2t\eta \langle X_v, N_v \rangle + t^2\eta^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2\eta_v^2. \end{aligned}$$

Sejam D_{X^t} o espaço bidimensional com métrica induzida da variação X^t e $\mathcal{X} = \{x_1 = (u_1, v_1), x_2 = (u_2, v_2), \dots, x_n = (u_n, v_n)\}$ uma constelação de sinais no espaço bidimensional D_{X^t} . No caso particular em que a densidade de probabilidade do ruído é gaussiana circular, temos que a probabilidade de acerto, $P_{a,m}$, dado que o sinal x_m foi transmitido, é dada por

$$P_{a,m}(t) = \iint_{R_m} k_1(t)e^{-k_2(t)d^2(t)} \sqrt{E^tG^t - (F^t)^2} du dv, \quad (4.20)$$

onde R_m é a região de decisão do sinal x_m , $d(t) = d(x_m, x)$, $x = (u, v)$ é um ponto da região de decisão, R_m , e $k_1(t)$, $k_2(t)$ são constantes que dependem do sinal transmitido

x_m e que, para todo t , satisfazem

$$\iint_D k_1(t) e^{-k_2(t)d^2(t)} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} du dv = 1 .$$

A energia do ruído, σ^2 , é dada por

$$\sigma^2 = \iint_D k_1(t) d^2(t) e^{-k_2(t)d^2(t)} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} du dv . \quad (4.21)$$

Seja $h(s, t) = X^t(u(s), v(s))$ uma curva diferenciável ligando o sinal x_m ao ponto x , para cada $t \in (\epsilon, -\epsilon)$, Figura 4.14. Podemos escrever $d(t)$ como

$$\begin{aligned} d(t) &= \int_0^l \left\langle \frac{\partial h(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial h(s, t)}{\partial s} \right\rangle^{1/2} ds \\ &= \int_0^l \sqrt{(u'(s, t))^2 E^t + 2u'(s, t)v'(s, t)F^t + (v'(s, t))^2 G^t} ds , \end{aligned}$$

onde $x_m = (u(0, t), v(0, t))$ e $x = (u(l, t), v(l, t))$. Como o domínio permanece o mesmo na variação da superfície $X(u, v)$, então esses dois pontos ficam fixos no domínio, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, e isso implica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} &= 0 , & \frac{\partial u(l, t)}{\partial t} &= 0 , \\ \frac{\partial v(0, t)}{\partial t} &= 0 , & \frac{\partial v(l, t)}{\partial t} &= 0 . \end{aligned}$$

Teorema 4.1. *Para a variação $X^t(u, v)$ dada em (4.19), e tomando a energia do ruído constante, temos que derivada da probabilidade de acerto é um ponto crítico para $t = 0$ se, e somente se, $X^0(u, v)$ é o plano.*

Demonstração:

A derivada de $P_{a,m}(t)$ em relação a t é

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{a,m}(t)}{\partial t} &= - \iint_{R_m} 2k_2(t)k_1(t)d(t) \frac{\partial d(t)}{\partial t} e^{-k_2(t)d^2(t)} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} du dv \\ &+ \iint_{R_m} \frac{\frac{\partial E^t}{\partial t} G^t + E^t \frac{\partial G^t}{\partial t} - 2F^t \frac{\partial F^t}{\partial t}}{2\sqrt{E^t G^t - (F^t)^2}} k_1(t) e^{-k_2(t)d^2(t)} du dv \\ &- \iint_{R_m} k_1(t) d^2(t) \frac{\partial k_2(t)}{\partial t} e^{-k_2(t)d^2(t)} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} du dv \\ &+ \iint_{R_m} \frac{\partial k_1(t)}{\partial t} e^{-k_2(t)d^2(t)} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} du dv . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Para $t = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial E^t}{\partial t} \right|_{t=0} &= 2\eta \langle X_u, N_u \rangle = -2\eta e , \\ \left. \frac{\partial G^t}{\partial t} \right|_{t=0} &= 2\eta \langle X_v, N_v \rangle = -2\eta g , \\ \left. \frac{\partial F^t}{\partial t} \right|_{t=0} &= \eta (\langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle) = -2\eta f ,\end{aligned}$$

onde e, f, g são os coeficientes da segunda forma fundamental da superfície $X^0(u, v)$.

Assim, podemos reescrever o segundo termo de (4.22) como

$$\iint_{R_m} -k_1 e^{-k_2 d^2(t)} \eta \frac{eG - 2fF + gE}{\sqrt{EG - F^2}} du dv = \iint_{R_m} -k_1 e^{-k_2 d^2(t)} \eta H \sqrt{EG - F^2} du dv ,$$

onde H é curvatura média da superfície $X^0(u, v)$. Como o elemento de área $\sqrt{E^t G^t - (F^t)^2}$ e a distância $d(t)$ são sempre positivos, então esse segundo termo é nulo para toda função η se, e somente se, H é uma função nula, isto é, $X^0(u, v)$ é uma superfície mínima.

O primeiro termo de (4.22), em $t = 0$, é igual a

$$- \iint_{R_m} 2k_1(0)k_2(0)d(0)d'(0)e^{-k_2 d^2(0)} \sqrt{EG - F^2} du dv , \quad (4.23)$$

onde $d'(0)$ é derivada da distância em relação a t para $t = 0$.

Observe que (4.23) é zero se, e somente se, $d'(0) = 0$. Sabemos que a derivada de $d(t)$ em relação a t é dada por

$$\frac{\partial d(t)}{\partial t} = \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial h(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial h(s, t)}{\partial s} \right\rangle^{\frac{1}{2}} ds = \int_0^l \left\langle \frac{\partial^2 h(s, t)}{\partial t \partial s}, \frac{\partial h(s, t)}{\partial s} \right\rangle \left\langle \frac{\partial h(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial h(s, t)}{\partial s} \right\rangle^{-\frac{1}{2}} ds.$$

Caso a curva $h(s, 0)$ seja parametrizada pelo comprimento de arco, então

$$\left\langle \frac{\partial h(s, 0)}{\partial s}, \frac{\partial h(s, 0)}{\partial s} \right\rangle = 1 .$$

Portanto, podemos escrever $d'(0)$ como

$$d'(0) = \int_0^l \left\langle \frac{\partial^2 h(s, t)}{\partial t \partial s}, \frac{\partial h(s, t)}{\partial s} \right\rangle \Big|_{t=0} ds. \quad (4.24)$$

Como

$$\left\langle \frac{\partial^2 h(s, t)}{\partial s \partial t}, \frac{\partial h(s, t)}{\partial s} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial h(s, t)}{\partial t}, \frac{\partial h(s, t)}{\partial s} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial h(s, t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 h(s, t)}{\partial s^2} \right\rangle ,$$

podemos reescrever (4.24) como

$$\frac{\partial d(t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial h(s, t)}{\partial t}, \frac{\partial h(s, t)}{\partial s} \right\rangle \Big|_{t=0} ds - \int_0^l \left\langle \frac{\partial h(s, t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 h(s, t)}{\partial s^2} \right\rangle \Big|_{t=0} ds . \quad (4.25)$$

Usando as equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(s, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= X_u \frac{\partial u(s, t)}{\partial t} + X_v \frac{\partial v(s, t)}{\partial t} + \eta N , \\ \frac{\partial h(s, t)}{\partial s} \Big|_{t=0} &= X_u \frac{\partial u(s, t)}{\partial s} + X_v \frac{\partial v(s, t)}{\partial s} , \end{aligned}$$

e as condições em (4.22) no primeiro termo de (4.25) encontramos

$$\left\langle \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle (l, 0) - \left\langle \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle (0, 0) = 0 .$$

A segunda derivada de $h(s, t)$ em relação a s é

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h(s, t)}{\partial s^2} \Big|_{t=0} &= X_u u''(s) + X_{uu} (u'(s))^2 + 2X_{uv} u'(s)v'(s) + X_v (v'(s))^2 + X_v v''(s) \\ &= (u''(s) + (u'(s))^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'(s)v'(s)\Gamma_{12}^1 + (v'(s))^2 \Gamma_{22}^1) X_u \\ &\quad + (v''(s) + (u'(s))^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'(s)v'(s)\Gamma_{12}^2 + (v'(s))^2 \Gamma_{22}^2) X_v \\ &\quad + ((u'(s))^2 e + 2u'(s)v'(s)f + (v'(s))^2 g) N , \end{aligned}$$

onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel da superfície $X^0(u, v)$ dados em (3.11).

Observe que se os vetores $\partial h(s, t)/\partial t|_{t=0}$ e $\partial^2 h(s, t)/\partial s^2|_{t=0}$ forem ortogonais, então o segundo termo de (4.25) é zero. Uma possibilidade ocorre se $h(s, 0)$ for uma geodésica na superfície $h(s, t)$, pois $\partial^2 h(s, t)/\partial s^2|_{t=0}$ é normal a superfície $h(s, t)$. Porém, isso não implica que a curva $h(s, 0)$ seja uma geodésica na superfície $X^0(u, v)$, pois as superfícies $h(s, t)$ e $X^0(u, v)$ não são localmente isométricas.

Como

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial h(s, t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 h(s, t)}{\partial s^2} \right\rangle \Big|_{t=0} &= (u''(s) + (u'(s))^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'(s)v'(s)\Gamma_{12}^1 + (v'(s))^2 \Gamma_{22}^1) E \frac{\partial u(s, t)}{\partial t} \\ &+ (v''(s) + (u'(s))^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'(s)v'(s)\Gamma_{12}^2 + (v'(s))^2 \Gamma_{22}^2) G \frac{\partial v(s, t)}{\partial t} \\ &+ ((u'(s))^2 e + 2u'(s)v'(s)f + (v'(s))^2 g) \eta , \end{aligned}$$

então, uma outra possibilidade para que o segundo termo de (4.25) seja zero ocorre quando a curva $h(s, 0)$ for uma geodésica,

$$\begin{cases} u''(s) + (u'(s))^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'(s)v'(s)\Gamma_{12}^1 + (v'(s))^2 \Gamma_{22}^1 = 0 , \\ v''(s) + (u'(s))^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'(s)v'(s)\Gamma_{12}^2 + (v'(s))^2 \Gamma_{22}^2 = 0 , \end{cases} \quad (4.26)$$

e a segunda forma fundamental da superfície $X^0(u, v)$ sobre a curva $h(s, 0)$ seja zero, isto é, a curva $h(s, 0)$ é uma linha assintótica,

$$(u'(s))^2 e + 2u'(s)v'(s)f + (v'(s))^2 g = 0 .$$

Sabemos que se uma curva for simultaneamente uma geodésica e uma linha assintótica, então ela é uma reta. E se todas as geodésicas de uma superfície mínima forem retas, então essa superfície é o plano.

Para que os dois últimos termos de (4.22) sejam zero em $t = 0$, devemos usar o fato da energia do ruído ser constante na variação e encontrar a seguinte relação

$$\frac{\partial k_1(t)}{\partial t} \Big|_{t=0} - k_1(0) d^2(0) \frac{\partial k_2(t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 .$$

■

Do Exemplo 4.2 sabemos que se $X^0(u, v)$ é o plano, então a densidade de probabilidade condicional, $p(y/x_m)$, dado que o sinal x_m foi transmitido coincide com a densidade de probabilidade do ruído quando o canal for gaussiano. Esse resultado também era esperado em um sistema de comunicação digital, pois é comum utilizarmos o ruído gaussiano como fator de perturbação do sistema de transmissão quando analisamos o desempenho de uma constelação de sinais no espaço euclidiano n -dimensional.

No próximo capítulo será apresentado um resultado mais geral, que dentre outros, afirma que o ruído gaussiano n -dimensional usual é o ruído inerente do espaço euclidiano n -dimensional.

4.2.2 Segunda variação da probabilidade de acerto

Para garantirmos que o ponto crítico da probabilidade de acerto seja um ponto crítico de máximo para $t = 0$ devemos ter que a segunda derivada da probabilidade de acerto seja menor que zero em $t = 0$.

Se considerarmos que a primeira derivada em relação a t da probabilidade de acerto seja igual a zero para $t = 0$, então obtemos que sua segunda derivada para $t = 0$ é dada por

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 P_{a,m}(t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} &= - \iint_{R_m} 2k_2(0)k_1(0)d(0) \left. \frac{\partial^2 d(t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} e^{-k_2(0)d^2(0)} \sqrt{EG - F^2} du dv \\ &+ \iint_{R_m} \frac{\left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E^t G^t - (F^t)^2) \right|_{t=0}}{2\sqrt{EG - F^2}} k_1(0) e^{-k_2(0)d^2(0)} du dv . \end{aligned} \quad (4.27)$$

Como a distância $d(t)$ é calculada por geodésicas, e essas curvas minimizam localmente a distância entre dois pontos, então a segunda derivada de $d(t)$ em relação a t é localmente positiva. Usando esse fato, verifica-se facilmente que o primeiro termo de (4.27) é sempre negativo.

Como $X^0(u, v)$ é o plano, então

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E^t G^t - (F^t)^2) \right|_{t=0} &= \left[\frac{\partial^2 E^t}{\partial t^2} G^t + 2 \frac{\partial E^t}{\partial t} \frac{\partial G^t}{\partial t} + 2 \frac{\partial^2 G^t}{\partial t^2} E^t + \frac{\partial^2 F^t}{\partial t^2} F^t + 2 \left(\frac{\partial F^t}{\partial t} \right)^2 \right] \Big|_{t=0} \\ &= 2(\eta_u^2 + 4\eta_u^2 \eta_v^2 + \eta_v^2) . \end{aligned}$$

Observe que o segundo termo de (4.27) pode ser reescrito como

$$\iint_{R_m} (\eta_u^2 + 4\eta_u^2 \eta_v^2 + \eta_v^2) k_1 e^{-k_2 d^2(t)} du dv ,$$

que é sempre positivo. Entretanto, podemos escolher a função $\eta(u, v)$ de forma que esse termo seja suficientemente pequeno para que $\partial^2 P_{a,m}(t)/\partial t^2$ seja negativa em $t = 0$.

Portanto, o ponto crítico da probabilidade de acerto em $t = 0$ é um ponto crítico de máximo.

Capítulo 5

Constelações de Sinais em Variedades Riemannianas

Até onde é de nosso conhecimento, trataremos de uma proposta de construção de constelação de sinais em um contexto não considerado anteriormente na literatura científica. Então, para que seja possível construir e analisar as constelações de sinais em variedades riemannianas é necessário estender os conceitos de constelações de sinais, probabilidade de erro e energia de transmissão para a teoria de variedades diferenciáveis. Na Seção 5.1 introduzimos, de forma sucinta, alguns conceitos importantes sobre geometria riemanniana, que são essenciais ao entendimento desse capítulo, usamos para tanto as literaturas [7] e [12].

5.1 Introdução à Geometria Riemanniana

A noção de variedade diferenciável é necessária para estender os métodos do Cálculo Diferencial a espaços mais gerais que o \mathbb{R}^n .

Definição 5.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M tais que:*

1. $\cup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. Para todo par α e β , com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis (Figura 5.1).
3. A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima relativa às condições (1) e (2).

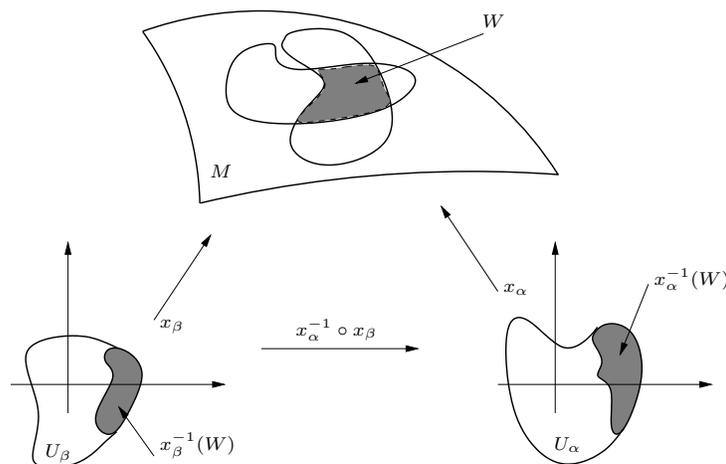


Figura 5.1: Mudança de parâmetros.

O primeiro exemplo de variedade acessível à nossa experiência é uma superfície regular do \mathbb{R}^3 . Um outro exemplo de variedade diferenciável é o *espaço projetivo real* $P^n(\mathbb{R})$, definido pelo conjunto das retas do \mathbb{R}^{n+1} que passam pela origem $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$; isto é, $P^n(\mathbb{R})$ é conjunto das “direções” de \mathbb{R}^{n+1} .

De agora em diante diferenciável significará sempre de classe C^∞ , e quando indicarmos uma variedade por M^n , o índice n indicará a dimensão de M .

Nesse momento é conveniente estender, a variedades diferenciáveis, a noção de vetor tangente.

Definição 5.2. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é chamada uma curva (diferenciável) em M . Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja D o conjunto das funções de M diferenciáveis em p . O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é uma função $\alpha'(0) : D \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{\partial(f \circ \alpha)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{t=0} \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{t=0} = \left(\sum_i x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f, \quad f \in D.$$

Da Definição 5.2 podemos afirmar que um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$, e definir o espaço tangente de M em p , T_pM , como o conjunto dos vetores tangentes a M em p .

Definição 5.3. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\phi : M \rightarrow N$ é uma imersão se $d\phi_p : T_pM \rightarrow T_{\phi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disto, ϕ é um homeomorfismo sobre $\phi(M) \subset N$, onde $\phi(M)$ tem a topologia induzida por N , dizemos que ϕ é um mergulho. Se a inclusão $i : M \subset N$ é um mergulho, dizemos que*

M é uma subvariedade de N .

O fibrado tangente é um outro exemplo de variedade diferenciável, e pode ser definido da seguinte maneira. Seja M^n uma variedade diferenciável e seja $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$. O conjunto TM , munido de uma estrutura diferenciável (de dimensão $2n$) será chamado *fibrado tangente* de M . Este é o espaço natural de se trabalhar quando estamos tratando de questões que envolvem posições e velocidades.

Definição 5.4. *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM . O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ é diferenciável.*

Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U e $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ é a base associada a x , $i = 1, \dots, n$. É claro que X é diferenciável se, e somente se, as funções a_i são diferenciáveis.

5.1.1 Métrica riemanniana

Definição 5.5. *Uma métrica riemanniana (ou estrutura riemanniana) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida no espaço tangente T_pM , que varia diferencialmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .*

É claro que esta definição não depende da escolha do sistema de coordenadas.

Uma outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica riemanniana é dizer que para todo par X e Y de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança V de M , a função $\langle X, Y \rangle$ é diferenciável em V . É imediato verificar que a definição é equivalente à anterior.

Definição 5.6. *Sejam M e N variedades riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ (isto é, f é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamado uma isometria*

se:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)} \quad \text{para todo } p \in M, \quad u, v \in T_p M .$$

É usual dizer que a variedade riemanniana M é localmente isométrica à variedade riemanniana N se para todo p em M existe uma vizinhança U de p em M e uma isometria local $f : U \rightarrow f(U) \subset N$.

Exemplo 5.1. *Seja $M = \mathbb{R}^n$ com $\frac{\partial}{\partial x_i}$, identificado com $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. A métrica é dada por $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$. \mathbb{R}^n é chamado espaço euclidiano de dimensão n e a geometria riemanniana deste espaço é a geometria da métrica euclidiana.*

Vamos mostrar agora como uma métrica riemanniana pode ser usada para calcular comprimentos de curvas.

Definição 5.7. *Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $V(t) \in T_{c(t)}M$. Dizemos que V é diferenciável se, para toda função diferenciável f em M , a função $t \rightarrow V(t)f$ é uma função diferenciável em I .*

A restrição de uma curva c a um intervalo fechado $[a, b] \subset I$ chama-se um segmento. Se M é riemanniana, definimos o comprimento de um segmento por

$$l_a^b(c(t)) = \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{1/2} dt ,$$

onde $\frac{dc(t)}{dt}$ é um campo vetorial ao longo de $c(t)$, chamado campo tangente de c .

Vamos mostrar como uma métrica riemanniana permite definir uma noção de volume em uma variedade riemanniana orientada M^n .

Seja $p \in M$ e seja $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ uma parametrização, com $p \in x(U)$, na orientação de M . Considere uma base ortogonal positiva $\{e_1, \dots, e_n\}$ em $T_p M$ e escreva $X_i(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(q)$ na base e_i : $X_i(p) = \sum_{ij} a_{ij} e_j$. Então,

$$g_{ik}(p) = \langle X_i, X_k \rangle(p) = \sum_{jl} a_{ij} a_{kl} \langle e_j, e_l \rangle = \sum_j a_{ij} a_{kj} .$$

Como o volume $\text{vol}(X_1(p), \dots, X_n(p))$ do paralelepípedo formado pelos vetores $X_1(p), \dots, X_n(p)$ em $T_p M$ é igual a $\text{vol}(e_1, \dots, e_n) = 1$ multiplicado pelo determinante da matriz (a_{ij}) , temos que

$$\text{vol}(X_1(p), \dots, X_n(p)) = \det(a_{ij}) = \sqrt{\det(g_{ij})(p)} .$$

Seja, agora, $R \subset M$ uma região (conjunto aberto e conexo), cujo fecho é compacto. Suporemos que R está contida em uma vizinhança coordenada $x(U)$, e que a fronteira de $x^{-1}(R) \subset U$ tem medida nula em \mathbb{R}^n . Definiremos o volume $vol(R)$ em R pela integral em \mathbb{R}^n

$$vol(R) = \int_{x^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_n. \quad (5.1)$$

5.1.2 Conexões riemannianas

Indicaremos por $\chi(M)$ o conjunto dos campos de classe C^∞ em M e $\mathcal{D}(M)$ o conjunto das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

Definição 5.8. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

$$i) \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ.$$

$$ii) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ.$$

$$iii) \nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y,$$

onde $X, Y, Z \in \chi(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Uma conexão ∇ em uma variedade riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se,

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_XY, Z \rangle + \langle Y, \nabla_XZ \rangle, \quad X, Y, Z \in \chi(M).$$

Uma conexão ∇ em uma variedade riemanniana M é dita simétrica quando

$$\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y], \quad X, Y \in \chi(M).$$

Definição 5.9. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é denominada Riemanniana se satisfaz as condições:*

$$i) \nabla \text{ é simétrica.}$$

$$ii) \nabla \text{ é compatível com a métrica riemanniana.}$$

A conexão riemanniana está univocamente determinada pela métrica \langle , \rangle . Portanto, caso exista, ela é única.

Os símbolos de Christoffel de uma conexão riemanniana de M são dados por

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km} ,$$

onde g^{km} é um elemento da matriz (g^{km}) , inversa da matriz (g_{km}) .

Em termos dos símbolos de Christoffel, a derivada covariante tem a expressão clássica

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v_j \frac{dx_i}{dt} \right\} X_k ,$$

onde $V = \sum_j v_j X_j$ é um campo de vetores.

5.1.3 Geodésicas

No caso de superfícies em \mathbb{R}^3 , a idéia de derivada covariante pode ser descrita da seguinte maneira. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, $c : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada em S , e $V : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vetores tangentes a S ao longo de c . O vetor $dV(t)/dt$, $t \in I$, não pertence, em geral, ao plano tangente $T_{c(t)}S$. A noção de derivada de um campo de vetores não é, portanto uma noção da geometria “intrínseca” de S . Para remediar este inconveniente, consideramos, em vez da derivada usual $dV(t)/dt$, a chamada derivada covariante $DV(t)/dt$ que é a projeção ortogonal de $dV(t)/dt$ sobre $T_{c(t)}S$; em outras palavras, $DV(t)/dt$ é a derivada de V como “vista de S ”.

Definição 5.10. *Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica se, e somente se, $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$. Se $[a, b] \subset I$ e $\gamma : I \rightarrow M$ for uma geodésica, a restrição de γ a $[a, b]$ será chamada segmento de geodésica ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.*

As equações locais satisfeitas por uma geodésica $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ em um sistema de coordenadas (U, x) em torno de $\gamma(t_o)$, $t_o \in I$, é o sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n . \quad (5.2)$$

As geodésicas tem a propriedade local de minimizar o comprimento de um segmento de geodésica. Convém observar que se considerarmos um segmento suficientemente grande

de geodésica ele pode deixar de ser minimizante. Por exemplo, as geodésicas de uma esfera que partem de um ponto p não são minimizantes depois que passam pelo antípoda de p .

5.1.4 Curvaturas

Apresentaremos uma definição de curvatura que, intuitivamente, mede o quanto uma variedade riemanniana deixa de ser euclidiana.

Definição 5.11. *A curvatura R de uma variedade riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \chi(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \chi(M),$$

onde ∇ é a conexão riemanniana de M .

Intimamente relacionado com o operador curvatura está a curvatura seccional (ou riemanniana), que passamos a definir.

Definição 5.12. *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\Sigma \subset T_p M$ o número real $K(x, y) = K(\Sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de Σ , é chamado curvatura seccional de Σ em M , definido por*

$$K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2},$$

onde $(x, y, x, y) = \langle R(x, y)x, y \rangle$ e $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$ representa a área do paralelogramo bidimensional determinado pelo par de vetores x, y .

5.1.5 Imersões isométricas

Seja $x : M \rightarrow \overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade riemanniana \overline{M} de dimensão $k = n + m$. A métrica riemanniana de \overline{M} induz, de maneira natural, uma métrica riemanniana em M , isto é, se $v_1, v_2 \in T_p M$, definimos $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle$. Observe que nessa situação, x passa a ser uma imersão isométrica de M em \overline{M} .

Denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a métrica em \overline{M} e por $\overline{\nabla}$ a conexão riemanniana associada a esta métrica. Identificaremos cada ponto $p \in M$ com a sua imagem $x(p)$ e cada vetor

$v \in T_p M$ com $dx_p \cdot v \in T_{x(p)} \overline{M}$. Com relação ao produto interno em $T_p \overline{M}$, consideremos a decomposição de $T_p \overline{M}$ na soma direta

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

onde $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \overline{M}$.

Se $v \in T_p \overline{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_p M, \quad v^N \in (T_p M)^\perp.$$

Denominamos v^T a componente tangente de v e v^N a componente normal de v .

Queremos definir a segunda forma fundamental da imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$. Para isto convém introduzir previamente a seguinte definição. Se X, Y são campos em M , então

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_X \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em \overline{M} normal a M , e a aplicação $B(X, Y)$ é bilinear simétrica.

Definição 5.13. A forma quadrática II_η definida em $T_p M$ por

$$II_\eta(x) = \langle B(x, y), \eta \rangle$$

é chamada a segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal η .

A expressão da aplicação linear associada à segunda forma fundamental em termos da derivada covariante é

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T,$$

onde N é uma extensão local de η normal a M .

Definição 5.14. Uma imersão é mínima, se para todo $p \in M$ e todo $\eta \in (T_p M)^\perp$, temos que o traço de $S_\eta = 0$.

O vetor normal dado por

$$H = \frac{1}{m} \sum_i (\text{traço } S_{n_i}) n_i,$$

não depende do referencial ortogonal $\{n_1, n_2, \dots, n_i\}$ escolhido. O vetor H é chamado o vetor curvatura média de f . É claro que f é mínima se, e somente se, $H(p) = 0$, para todo $p \in M$.

5.2 Constelações de Sinais

Na construção das constelações de sinais em uma variedade riemanniana, deve-se considerar a métrica riemanniana em cada um dos blocos modulador, canal e demodulador (Figura 1.1), interpretados como o espaço métrico (E_3, d_3) . Essa métrica deve ser a mesma em cada um dos blocos, pois queremos “casá-los” de maneira a aumentar o desempenho do sistema tratado.

5.2.1 Modelo do sistema

Definição 5.15. *Uma constelação de sinais $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\}$ em uma variedade riemanniana M^n com um sistema de coordenadas (U, y) é um conjunto de pontos n -dimensionais*

$$\mathcal{X} = \{x_1 = (y_{11}, y_{21}, \dots, y_{n1}), \dots, x_m = (y_{1m}, y_{2m}, \dots, y_{nm})\} \subset U.$$

A distância $d(x_i, x_j)$ utilizada na construção e análise de constelações de sinais em M^n é dada pela distância geodésica entre os sinais em M , isto é

$$d(x_i, x_j) = \int_{t_i}^{t_j} \left\langle \frac{d\gamma(t)}{dt}, \frac{d\gamma(t)}{dt} \right\rangle^{1/2} dt, \quad (5.3)$$

onde $\gamma(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ é uma geodésica, ou seja, satisfaz o sistema de equações diferenciais de segunda ordem dado por

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dy_i}{dt} \frac{dy_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel da conexão riemanniana de M .

5.2.2 Processo de demodulação

Podemos relacionar a ação do ruído em um canal de transmissão como uma transformação $T(x_m) = y$, que leva o sinal transmitido x_m no sinal recebido y . Consideraremos que essa transformação é dada por

$$y = T(x_m) = \exp(x_m, v), \quad v \in T_{x_m} M,$$

onde $\exp(x_m, v)$ é a aplicação exponencial. Geometricamente, $\exp(x_m, v)$ é o ponto de X obtido percorrendo um comprimento igual a $|v|$, a partir de x_m , sobre a geodésica que

passa por x_m com velocidade igual a $\frac{v}{|v|}$.

Considere que o vetor $v = (v_1, \dots, v_n)$ seja uma variável aleatória obtida das variáveis aleatórias v_j , $j = 1, \dots, n$. Por exemplo, se v_j , $j = 1, \dots, n$ forem variáveis aleatórias gaussianas então v também será gaussiana, pois $T_{x_m}M$ é um espaço vetorial n -dimensional, ou seja a transformação é linear. Caso não seja, v não será gaussiano. Estamos supondo que a variedade é completa, isto é, para todo $p \in X$, a aplicação exponencial, $\exp(p, v)$, está definida para todo $v \in T_pM$.

Podemos verificar que a densidade de probabilidade do ruído sobre a variedade M é a mesma da variável aleatória v . No caso particular que v é gaussiana circular, isto é, as variáveis v_x e v_y são gaussianas de mesmas variâncias, podemos definir a densidade de probabilidade da variável aleatória y , dado que x_m foi transmitido, como

$$p(y/x_m) = k_1 e^{-k_2 d^2(y, x_m)} \sqrt{\det(g_{ij})}, \quad (5.4)$$

onde $d^2(y, x_m)$ é distância geodésica ao quadrado entre o sinal recebido y e o sinal transmitido x_m , $\sqrt{\det(g_{ij})}$ é o elemento de volume da variedade, $g_{ij}(x_m) = \langle \frac{\partial}{\partial y_i}(x_m), \frac{\partial}{\partial y_j}(x_m) \rangle$ são os coeficientes da métrica de M , e k_1, k_2 são constantes que satisfazem, para todo sinal x_m , a condição

$$\int_D k_1 e^{-k_2 d^2(y, x_m)} \sqrt{\det(g_{ij})} dy_1 \dots dy_n = 1,$$

onde D é um subconjunto de M onde a constelação de sinais está definida.

Seja R_m a região de decisão do sinal x_m , ou seja, o conjunto representando todos os pontos que são decididos como x_m . Então, se o sinal x_m for transmitido, a probabilidade do demodulador decidir pelo sinal pertencente a R_m , isto é, decidir corretamente, é dada por

$$P_{a,m} = \int_{R_m} k_1 e^{-k_2 d^2(y, x_m)} \sqrt{\det(g_{ij})} dy_1 \dots dy_n, \quad (5.5)$$

O n -ésimo momento central é definido como

$$\mathcal{M}^n = \int_D d^n(y, x_m) p(y/x_m) dy_1 \dots dy_n.$$

A probabilidade de decisão errônea dado que x_m foi transmitido é igual a um menos a probabilidade de acerto, $P_{e,m} = 1 - P_{a,m}$. A probabilidade média de erro da constelação

será

$$P_e = \sum_{x_m} p(x_m) P_{e,m} , \quad (5.6)$$

onde $p(x_m)$ é probabilidade de transmitirmos o sinal x_m .

Utilizando o mesmo raciocínio do caso das superfícies podemos admitir que o canal possa ser plenamente especificado por $p(y/x_j)$, $j = 1, \dots, m$, a probabilidade condicional de receber y dado que o sinal x_j foi transmitido. No caso particular em que o receptor é de máxima verossimilhança devemos decidir pelo sinal x_j que maximize $p(y, x_j)$, isto é, pelo sinal x_j mais próximo de y .

A energia média da constelação é dada por

$$E_t = \sum_X p(x_m) d^2(x_m, \bar{x}) , \quad (5.7)$$

onde \bar{x} é o baricentro da constelação, que minimiza a potência média total.

Para encontrar \bar{x} devemos calcular a primeira derivada da energia média em relação a x , e supor que a mesma seja zero para $x = \bar{x}$. Então \bar{x} satisfaz para $j = 1, \dots, m$ a equação diferencial

$$\left. \frac{\partial E_t}{\partial y_j} \right|_{x=\bar{x}} = \sum_X p(x_m) d(x_m, \bar{x}) d_{y_j}(x_m, x)|_{x=\bar{x}} = 0 , \quad (5.8)$$

A unicidade da solução de (5.8), para $j = 1, \dots, m$, fornece o valor de \bar{x} .

5.2.3 Constelações de sinais em espaços de curvatura constante

Entre as variedades riemannianas, aquelas de curvatura seccional constante são as mais simples. Uma propriedade importante desses espaços de curvatura constante é o de possuírem um número suficientemente grande de isometrias locais. Isto significa que nestes espaços é sempre possível “deslocar” isometricamente dois triângulos pequenos colocados em posições diferentes e verificar que eles podem ser sobrepostos.

Uma variedade riemanniana completa M com curvatura seccional constante dá origem a um recobrimento regular $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$, onde Γ é um subgrupo do grupo das isometrias de M , e a ação de Γ é transitiva em M , isto é, a órbita $\Gamma x = \{gx; g \in \Gamma\}$ de um ponto $x \in M$ é M . Tal recobrimento induz de maneira natural constelações de sinais geometricamente uniformes em M . Os sinais dessa constelação são os baricentros das

regiões fundamentais associadas a Γ .

Em outras palavras, uma variedade riemanniana completa M junto com um grupo transitivo de isometrias G satisfazem o seguinte axioma:

Axioma de Mobilidade Livre: Sejam $p, \tilde{p} \in M$, γ_1, γ_2 segmentos geodésicos de M que começam em p e formam um ângulo α em p , e $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ segmentos de geodésicas com origem em \tilde{p} e formam um ângulo α em \tilde{p} . Então existe $g \in G$, com $g(p) = \tilde{p}$, $g(\gamma_1) = \tilde{\gamma}_1$, $g(\gamma_2) = \tilde{\gamma}_2$.

Este axioma corresponde à “igualdade de triângulos” na geometria euclidiana, e implica, evidentemente, que é possível construir constelações de sinais com espectro de distância independente do sinal considerado e regiões de decisão congruentes, isto é, constelações geometricamente uniformes.

Portanto, encontrar todas as constelações geometricamente uniformes nos espaços de curvatura constante, significa determinar todos os subgrupos que operam de modo transitivo nesses espaços. Porém, a determinação de tais subgrupos é um problema difícil.

Nesse momento será desenvolvido um método para a geração de algumas constelações de sinais geometricamente uniformes em espaços bidimensionais de curvatura constante, cujas regiões de decisão são polígonos regulares.

Como consequência do Teorema de Gauss-Bonnet, [5], sabe-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo formado por geodésicas em uma variedade bidimensional, M^2 , (Figura 5.2), é dada por

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \iint_{R_t} K(u, v) \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv, \quad (5.9)$$

onde $K(u, v)$ é a curvatura gaussiana, $\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$ é elemento de área, e R_t é região delimitada pelo triângulo em M^2 .

Podemos usar esse fato para encontrarmos a soma dos ângulos internos de um polígono de p lados. Para tanto, devemos inicialmente escolher qualquer ponto interior ao polígono e particionarmos o polígono em p triângulos geodésicos como mostrado na Figura 5.3. De (5.9), temos

$$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = \pi + \iint_{R_{t_i}} K(u, v) \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv,$$

onde R_{t_i} é a região delimitada pelo triângulo i .

Aplicando a somatória em ambos os lados da equação acima, encontramos

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{i=1}^p (\beta_i + \gamma_i) = \sum_{i=1}^p \pi + \sum_{i=1}^p \iint_{R_{t_i}} K(u, v) \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv.$$

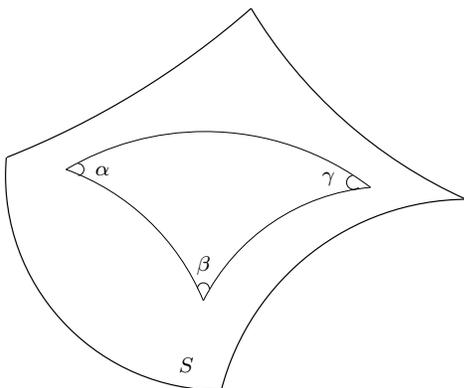


Figura 5.2: Triângulo geodésico.

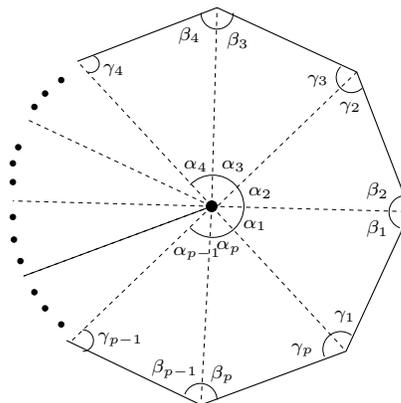


Figura 5.3: Polígono geodésico.

Como $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 2\pi$ e a somatória das integrais em todos os triângulos resulta na integral do polígono, então

$$\sum_{i=1}^p (\beta_i + \gamma_i) = (p-2)\pi + \iint_R K(u, v) \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv, \quad (5.10)$$

onde R é a região delimitada pelo polígono.

Se a curvatura gaussiana de M^2 for constante, então podemos construir um polígono regular de p lados, e encontrar um grupo de simetrias Γ desse polígono de forma que o quociente de M^2 por Γ recubra toda o espaço, e cada vértice seja recoberto por q polígonos.

Para uma variedade M^2 com curvatura gaussiana constante igual a K , temos que um polígono regular possui ângulos internos iguais a θ , logo a soma dos ângulos internos é $p\theta$. Como cada vértice é recoberto por q polígonos então $\theta = 2\pi/q$. Fazendo uso de (5.10) encontramos

$$\frac{2\pi p}{q} = (p-2)\pi + K\mathcal{A},$$

onde \mathcal{A} é a área do polígono.

Adicionando 4 a ambos os lados da equação e fazendo algumas manipulações algébricas, encontramos

$$(p-2)(q-2) = 4 - \frac{qK\mathcal{A}}{\pi}. \quad (5.11)$$

Quando $K \neq 0$ podemos encontrar a área do polígono A_p , em função de p , q e K , da

forma

$$A_p = \pi \frac{4 - (p - 2)(q - 2)}{qK} . \quad (5.12)$$

Portanto, podemos construir constelações geometricamente uniformes $\{p, q\}$, onde p e q satisfazem (5.11) em variedades riemannianas de curvatura constante K .

Exemplo 5.2. *Nesse exemplo analisaremos a construção de constelações de sinais no caso particular em que a curvatura seccional da variedade bidimensional é constante. Como ao multiplicarmos uma métrica riemanniana por uma constante positiva c a sua curvatura seccional é multiplicada por $1/c$, então analisaremos apenas os caso em que a curvatura é igual a 1, 0 ou -1 .*

- *Caso $K = 1$:*

A superfície associada nesse caso é a esfera. Tomemos a tesselação por polígonos regulares, em uma esfera, cuja área é igual a 4π . Nesse caso, a equação (5.11) se transforma em

$$(p - 2)(q - 2) = 4 - 4q ,$$

e suas soluções são os sólidos Platônicos dados pela Tabela 5.1.

$\{p, q\}$	\mathcal{A}	número de regiões	poliedro
$\{3, 3\}$	π	4	tetraedro
$\{3, 4\}$	$\pi/2$	8	octaedro
$\{3, 5\}$	$\pi/5$	20	icosaedro
$\{4, 3\}$	$2\pi/3$	6	cubo
$\{5, 3\}$	$\pi/3$	12	dodecaedro

Tabela 5.1: Recobrimentos da esfera por polígonos regulares.

Um exemplo de constelação de sinais usando o recobrimento $\{3, 3\}$ no espaço bidimensional com métrica $g_{11} = 1$, $g_{22} = \sin^2(\rho)$, $g_{12} = g_{21} = 0$ em um sistema de coordenadas polares, (ρ, θ) , é mostrada na Figura 5.4. As coordenadas polares dos sinais são mostradas na Tabela 5.2.

Um outro exemplo de constelação de sinais nesse mesmo espaço é dado pelo recobrimento $\{3, 4\}$, veja Figura 5.5. As coordenadas polares dos sinais são mostradas na Tabela 5.3.

- *Caso $K = 0$:*

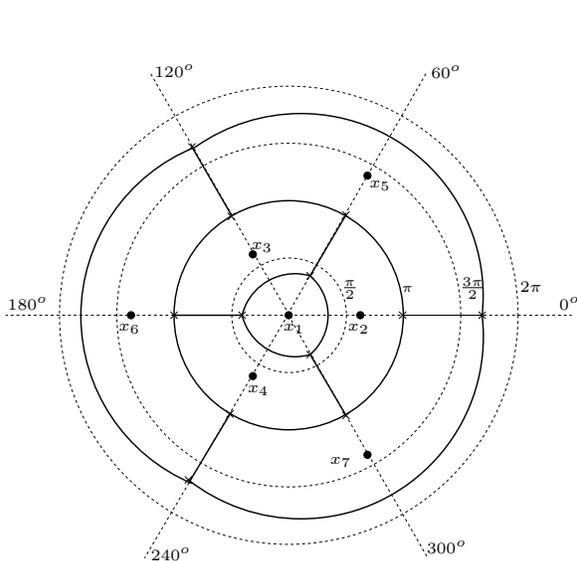


Figura 5.4: Constelação $\{3, 3\}$ no espaço bidimensional com curvatura 1.

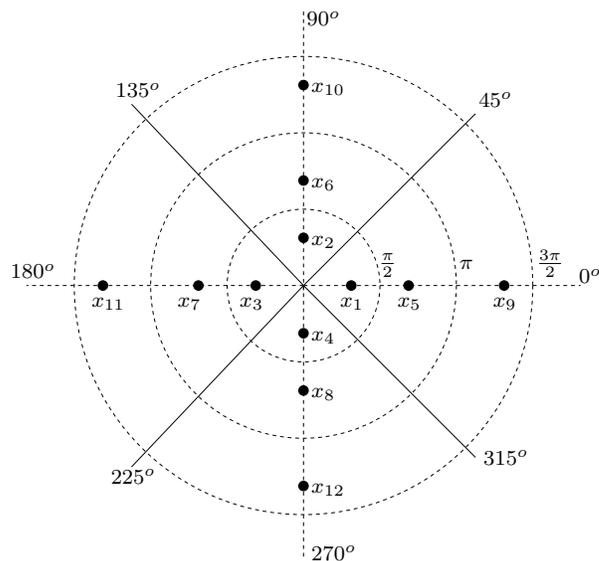


Figura 5.5: Constelação $\{3, 4\}$ no espaço bidimensional com curvatura 1.

A superfície associada nesse caso é o plano euclidiano bidimensional, e os recobrimentos por polígonos regulares satisfazem

$$(p - 2)(q - 2) = 4 .$$

As soluções são $\{3, 6\}$, $\{4, 4\}$ e $\{6, 3\}$. Observe que podemos recobrir o plano com polígonos do mesmo tipo sem que a área do polígono seja fixa, como acontece no caso onde $K = 1$.

- Caso $K = -1$:

Como dito anteriormente o caso $K = -1$ foi abordado nas teses de doutorado [1] e [2]. O espaço associado a essa curvatura é o espaço hiperbólico, e os seus recobrimentos por polígonos regulares satisfazem

$$(p - 2)(q - 2) > 4 .$$

As soluções são infinitas, porém existe uma restrição para a área de cada polígono dada por

$$A_p = \pi \frac{(p - 2)(q - 2) - 4}{q} .$$

x_i	ρ	θ
x_1	0	0
x_2	$\arccos(-1/3)$	0
x_3	$\arccos(-1/3)$	$2\pi/3$
x_4	$\arccos(-1/3)$	$4\pi/3$
x_5	$2\pi - \arccos(-1/3)$	$\pi/3$
x_6	$2\pi - \arccos(-1/3)$	π
x_7	$2\pi - \arccos(-1/3)$	$5\pi/3$
\vdots	\vdots	\vdots

Tabela 5.2: Sinais da constelação $\{3, 3\}$.

x_i	ρ	θ
x_1	$\arccos(\sqrt{3}/3)$	0
x_2	$\arccos(\sqrt{3}/3)$	$\pi/2$
x_3	$\arccos(\sqrt{3}/3)$	π
x_4	$\arccos(\sqrt{3}/3)$	$3\pi/2$
x_5	$\arccos(-\sqrt{3}/3)$	0
x_6	$\arccos(-\sqrt{3}/3)$	$\pi/2$
x_7	$\arccos(-\sqrt{3}/3)$	π
x_8	$\arccos(-\sqrt{3}/3)$	$3\pi/2$
x_9	$\pi + \arccos(\sqrt{3}/3)$	0
\vdots	\vdots	\vdots

Tabela 5.3: Sinais da constelação $\{3, 4\}$.

Exemplo 5.3. Seja $x : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$x(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta, \sin \theta, \cos \phi, \sin \phi)$$

uma imersão do \mathbb{R}^2 na esfera unitária $S^3(1) \subset \mathbb{R}^4$, cuja imagem $x(\mathbb{R}^2)$ é o toro T^2 , toro de Clifford. Esse toro possui curvatura seccional zero na métrica induzida, pois tem métrica produto de espaços de curvatura zero. A imersão do toro T^2 na esfera unitária $S^3(1)$ induzida por x é mínima. Para mostrar esse fato, tomemos os vetores

$$e_1 = (-\sin \theta, \cos \theta, 0, 0), \quad e_2 = (0, 0, -\sin \phi, \cos \phi),$$

como uma base ortonormal do espaço tangente, e os vetores

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta, \sin \theta, \cos \phi, \sin \phi), \quad n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos \theta, -\sin \theta, \cos \phi, \sin \phi),$$

como uma base ortonormal do espaço normal.

A aplicação linear associada à segunda forma fundamental, $S_\eta(x)$, para cada um dos vetores n_1 e n_2 é dada por

$$S_{n_1} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad S_{n_2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

O vetor curvatura média é dado por

$$H = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\text{traço } S_{n_i}) n_i ,$$

onde m é a codimensão da imersão.

Observe que o vetor n_1 não pertence ao espaço tangente de $S^3(1)$, portanto $H = \text{traço}\{S_{n_2}\}n_2 = 0$ e a imersão é mínima. Caso o toro de Clifford fosse imerso em \mathbb{R}^4 o vetor curvatura média seria $H = -\sqrt{2}/2n_1$ e a imersão não seria mínima.

Um possível recobrimento para esse espaço bidimensional de curvatura seccional zero foi apresentado no exemplo anterior. Observe que a partir desse exemplo podemos construir uma constelação de sinais QAM em \mathbb{R}^2 e transportamos isometricamente para a superfície da esfera $S^3(1)$. Portanto, essa imersão mínima leva uma constelação QAM em duas dimensões em sua equivalente do tipo Slepian em quatro dimensões.

5.3 Primeira Variação da Probabilidade de Acerto

Seja $x : M \rightarrow \overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade riemanniana \overline{M} de dimensão $k = n + m$. Será considerada em M a métrica induzida por x e denotaremos por ∇ a conexão riemanniana de M relativa a esta métrica. Lembramos que se Y e Z são campos locais em M , então

$$\nabla_Y Z = (\overline{\nabla}_Y \overline{Z})^T ,$$

onde \overline{Z} e \overline{Y} são, respectivamente, as extensões locais de X e Y a \overline{M} .

Definição 5.16. Uma variação da imersão x é uma aplicação $x : I \times M \rightarrow \overline{M}$ de classe C^∞ , onde $I = (-\epsilon, \epsilon)$, $\epsilon > 0$, que satisfaz:

i) cada aplicação $x_t : M \rightarrow \overline{M}$ definida por $x_t(p) = x(t, p)$ é uma imersão;

ii) $x_0 = x$.

Consideraremos o caso particular em que a variação é normal, isto é,

$$x^t(p) = x(p) + t \sum_{i=1}^k f_i(p) N_i(p) , \tag{5.13}$$

onde f_i é uma função diferenciável em \overline{M} e N_i é uma base para $(T_p M)^\perp$.

Seja $\alpha : [0, l] \rightarrow \overline{M}$ uma curva diferenciável por partes na variedade \overline{M} definida por $\alpha(s) = X(s, p)$. Uma variação de $\alpha(s)$ é uma aplicação contínua $h : [0, l] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \overline{M}$ tal que:

- i) $h(s, 0) = \alpha(s)$, $s \in [0, l]$,
- ii) existe uma subdivisão de $[0, l]$ por pontos $0 = s_0 < s_1 < \dots < t_{k+1} = l$, tal que a restrição de $h(s, t)$ a cada $(-\epsilon, \epsilon) \times [s_i, s_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, k$, é diferenciável.

Indicaremos as extensões (de maneira usual) ao produto $I \times M$ do campo $\frac{\partial}{\partial t}$ em I e um dado campo Y em M associado ao campo $\partial h(s, t)/\partial s$ simplesmente por $\frac{\partial}{\partial t}$ e Y , respectivamente. Sejam \overline{Z} e \overline{Y} extensões locais a \overline{M} dos campos $\frac{\partial}{\partial t}$ e Y , respectivamente.

Seja $R_m \subset M$ a região de decisão do sinal $x_m \in M$, ou seja, o conjunto representando todos os pontos que são decididos como x_m . Então, se o sinal x_m for transmitido, a probabilidade do demodulador decidir pelo sinal pertencente a R_m , isto é, decidir corretamente, é dada por

$$P_{a,m}(t) = \int_{R_m} k_1(t) e^{-k_2(t)d^2(t)} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} dy_1 \dots dy_n, \quad (5.14)$$

onde $\sqrt{\det(g_{ij}(t))}$ é o elemento de volume da variedade para cada t , $g_{ij}(t)$ são os coeficientes da métrica de M para cada t e $d(t)$ é a distância geodésica dada por

$$d(t) = \int_0^l \left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle^{1/2} ds = \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle^{1/2} ds.$$

As constantes $k_1(t)$, $k_2(t)$, de (5.14), devem satisfazer, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$,

$$\int_M k_1(t) e^{-k_2(t)d^2(t)} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} dy_1 \dots dy_n = 1.$$

A enegia do ruído é dada por

$$\sigma^2 = \int_M k_1(t) d^2(t) e^{-k_2(t)d^2(t)} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} dy_1 \dots dy_n.$$

Uma imersão $x : M \rightarrow \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se para todo $\eta \in (T_p M)^\perp$ a segunda forma fundamental H_η é identicamente nula em p . A imersão x é totalmente geodésica se ela é geodésica para todo $p \in M$. A razão dessa terminologia provém do fato de que toda geodésica γ de M partindo de p é uma geodésica de \overline{M} partindo de $x(p)$.

Teorema 5.1. *Para a variação $x^t(p)$ dada em (5.13), e tomando a energia do ruído constante durante a variação normal, temos que a derivada da probabilidade de acerto é um ponto crítico para $t = 0$ se, e somente se, a imersão $x : M \rightarrow \overline{M}$ for totalmente geodésica.*

Demonstração:

A derivada de $P_{a,m}(t)$ em relação a t é

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{a,m}(t)}{\partial t} = & - \int_{R_m} 2k_2(t)k_1(t)d(t) \frac{\partial d(t)}{\partial t} e^{-k_2(t)d^2(t)} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} dy_1 \dots dy_n \\ & + \int_{R_m} \frac{\frac{\partial \det(g_{ij}(t))}{\partial t}}{2\sqrt{\det(g_{ij}(t))}} k_1(t) e^{-k_2(t)d^2(t)} du dv \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{R_m} k_1(t)d(t)^2 \frac{\partial k_2(t)}{\partial t} e^{-k_2(t)d^2(t)} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} dy_1 \dots dy_n \\ & + \int_{R_m} \frac{\partial k_1(t)}{\partial t} e^{-k_2(t)d^2(t)} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} dy_1 \dots dy_n \end{aligned} \quad (5.16)$$

Se $x^0(p)$ for uma imersão mínima, então o segundo termo de (5.15) é zero. O primeiro termo dessa equação é zero se, e somente se, a derivada da distância em relação a t for zero em $t = 0$, $d'(0) = 0$.

Derivando $d(t)$ usando o campo \overline{Z} , obtemos

$$\overline{Z} \int_{s_i}^{t_{i+1}} \langle \overline{Y}, \overline{Y} \rangle^{1/2} ds = \int_{s_i}^{t_{i+1}} \langle \overline{\nabla}_{\overline{Z}} \overline{Y}, \overline{Y} \rangle \langle \overline{Y}, \overline{Y} \rangle^{1/2} ds .$$

Se a curva for parametrizada pelo comprimento de arco em $t = 0$ temos $\langle \overline{Y}, \overline{Y} \rangle^{1/2} = 1$ e usando a simetria da conexão riemanniana dado que $[\frac{\partial}{\partial t}, Y] = 0$ para a variação normal X^t , temos

$$d'(0) = \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{t_{i+1}} \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{Z}, \overline{Y} \rangle ds ,$$

onde $d'(0)$ é a derivada da distância para $t = 0$.

Sabemos que

$$\overline{Y} \langle \overline{Z}, \overline{Y} \rangle = \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{Z}, \overline{Y} \rangle + \langle \overline{Z}, \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{Y} \rangle .$$

Logo,

$$\begin{aligned} d'(0) &= \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{t_{i+1}} \bar{Y} \langle \bar{Z}, \bar{Y} \rangle ds - \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{t_{i+1}} \langle \bar{Z}, \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{Y} \rangle ds \\ &= \sum_{i=0}^k \langle \bar{Z}, \bar{Y} \rangle|_{s_i}^{t_{i+1}} - \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{t_{i+1}} \langle \bar{Z}, \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{Y} \rangle ds \end{aligned}$$

Usando o fato da variação $h(s, t)$ ser própria em M e o fato da curva $h(s, 0)$ ser regular em M , encontramos

$$\sum_{i=0}^k \langle \bar{Z}, \bar{Y} \rangle|_{s_i}^{t_{i+1}} = 0 .$$

Sabemos que a segunda forma fundamental, segundo o vetor normal \bar{Z} , é dada por

$$II_{\bar{Z}}(\bar{Y}, \bar{Y}) = \langle B(\bar{Y}, \bar{Y}), \bar{Z} \rangle = \langle \bar{Z}, \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{Y} \rangle .$$

Logo, se a segunda forma fundamental da imersão x for igual a zero, então $d'(0) = 0$. Mostrando, dessa forma, que a imersão deve ser geodésica. Os dois últimos termos de (5.15) são zero se a variação mantiver a energia do ruído constante, pois

$$\frac{\partial k_1(t)}{\partial t} - k_1(t) d(t)^2 \frac{\partial k_2(t)}{\partial t} = 0 .$$

■

Exemplo de subvariedades totalmente geodésicas são raros. No caso em que $M = \mathbb{R}^n$, os subespaços lineares são evidentemente subvariedades totalmente geodésicas. No caso em que $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, as intersecções Σ de subespaços lineares do \mathbb{R}^{n+1} com S^n são subvariedades totalmente geodésicas, Σ são esferas em dimensões menores que n . Isso provém do fato que, para todo $p \in \Sigma$, as geodésicas de S^n que partem de p e são tangentes a Σ são geodésicas de Σ .

Seja $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$, com métrica $g_{i,j} = \delta_{i,j}/x_n^2$, o espaço hiperbólico de dimensão n . Não é difícil verificar que as intersecções com \mathbb{H}^n dos hiperplanos de \mathbb{R}^n ortogonais a $\partial\mathbb{H}^n$, e as intersecções com \mathbb{H}^n das esferas de \mathbb{R}^n com centro em $\partial\mathbb{H}^n$ são subvariedades totalmente geodésicas de \mathbb{H}^n , pois essa intersecção gera uma subvariedade fechada M^k que é isométrica a \mathbb{H}^k .

O Teorema 5.1 estabelece uma condição para que exista um casamento entre o projeto de uma constelação de sinais em uma variedade M sujeita a ação de um ruído gaussiano circular e o projeto de uma constelação de sinais em uma variedade \bar{M} sujeita, também,

a ação de um ruído gaussiano circular. Isto é, se uma constelação de sinais \mathcal{X} em M é projetada de forma a minimizar o efeito do ruído gaussiano circular em M , então $x(\mathcal{X})$ também minimizará o efeito do ruído gaussiano em \overline{M} se, e somente se, a imersão $x : M \rightarrow \overline{M}$ for totalmente geodésica.

Este fato pode ser melhor entendido, pois quando a imersão $x : M \rightarrow \overline{M}$ é totalmente geodésica então a densidade de probabilidade gaussiana do ruído definida em $T_p M$ é igual à densidade de probabilidade gaussiana do ruído em \overline{M} , quando essa está definida apenas em $T_p M$, e não em $T_{x(p)} \overline{M}$.

Por exemplo, considere o ruído gaussiano circular em \mathbb{R}^3 com média no ponto p , observe que uma esfera de raio r nesse ponto p determina uma região onde todos os pontos possuem a mesma densidade de probabilidade. Considere, também, um ruído gaussiano circular em uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ com média no mesmo ponto $p \in S$. Observe que o círculo geodésico de raio r em p sobre S , determina a região onde todos os pontos de S que possuem a mesma densidade de probabilidade. Caso as intersecções de todas as esferas de raio r em p com a superfície S gerassem todos os círculos geodésicos de S com mesmo raio e centro p , então o ruído gaussiano circular de S é uma componente do ruído gaussiano circular em \mathbb{R}^3 . O Teorema 5.1 afirma que a única superfície em \mathbb{R}^3 que satisfaz essa condição, para todos os pontos, é o plano. Um exemplo não trivial é dado abaixo.

Exemplo 5.4. *Seja $x : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2(1) \times S^2(1)$ dada por*

$$x(\theta, \phi) = (\cos \theta, \sin \theta, 0, \cos \phi, \sin \phi, 0) ,$$

uma imersão de \mathbb{R}^2 em $S^2(1) \times S^2(1)$. Seja $\{e_1, e_2\}$, onde

$$e_1 = (-\sin \theta, \cos \theta, 0, 0, 0, 0) ,$$

$$e_2 = (0, 0, 0, -\sin \phi, \cos \phi, 0) ,$$

forma uma base de vetores ortonormais de $T_p x$. Uma extensão natural desse espaço tangente para o espaço tangente de $S^2(1) \times S^2(1)$ é dada pelos vetores

$$n_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0) ,$$

$$n_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 1) .$$

Os elementos das matrizes S_{n_1} e S_{n_2} na base $\{e_1, e_2\}$ são, respectivamente,

$$S_{n_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{n_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, essa imersão é totalmente geodésica. Uma parametrização $X(\rho, \theta, \eta, \phi)$ para $S^2(1) \times S^2(1)$ é dada por

$$X(\rho, \theta, \eta, \phi) = (\sin \rho \cos \theta, \sin \rho \sin \theta, \cos \rho, \sin \eta \cos \phi, \sin \eta \sin \phi, \cos \eta).$$

Sua métrica riemanniana é dada por

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = \sin^2 \rho, \quad g_{33} = 1, \quad g_{44} = \sin^2 \eta \quad e \quad g_{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Se o ruído for gaussiano circular, então a densidade de probabilidade condicional de receber $y = (\rho, \theta, \eta, \phi)$ dado que o sinal x_i foi transmitido é dada por

$$p(y/x_i) = k_1 e^{-k_2 d^2(y, x_i)} \sin \rho \sin \eta.$$

As geodésicas de $S^2(1) \times S^2(1)$ satisfazem o seguinte sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem

$$\begin{cases} \rho''(t) - (\theta'(t))^2 \sin \rho \cos \rho = 0, \\ \theta''(t) + 2\rho'(t)\theta'(t) \cos \rho / \sin \rho = 0, \\ \eta''(t) - (\phi'(t))^2 \sin \eta \cos \eta = 0, \\ \phi''(t) + 2\eta'(t)\phi'(t) \cos \eta / \sin \eta = 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

Observe que para $\rho = \eta = \pi/2$ temos que $x(\theta, \phi) = X(\pi/2, \theta, \pi/2, \phi)$. Com isso, podemos reescrever (5.17) como

$$\begin{cases} \theta''(t) = 0, \\ \phi''(t) = 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

Portanto, se o ponto $x_i = (\pi/2, \theta_i, \pi/2, \phi_i)$ é transmitido, então existe uma componente bidimensional de ruído gaussiano circular euclidiano, $p((\theta, \phi)/x_i)$, na densidade de probabilidade do ruído gaussiano circular, $p((\rho, \theta, \eta, \phi)/x_i)$, definido no espaço tangente

de $X((\rho, \theta, \eta, \phi))$ no ponto x_i , isto é,

$$p((\theta, \phi)/x_i) = p((\pi/2, \theta, \pi/2, \phi)/x_i) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{((\theta-\theta_i)^2 + (\phi-\phi_i)^2)}{2\sigma^2}} .$$

Capítulo 6

Conclusões

Este trabalho introduziu o uso da geometria riemanniana no projeto de constelações de sinais para um sistema de comunicações. Como esta abordagem está ainda em sua fase inicial no contexto de projetos de sistemas de comunicações, então a nossa principal preocupação foi sermos coerentes na definição dos conceitos teóricos necessários para o desenvolvimento do trabalho.

6.1 Desenvolvimento

Os Capítulos 2 e 3 são introdutórios, neles apresentamos de forma sucinta alguns tópicos relevantes para o trabalho referentes à Teoria da Informação, às superfícies mínimas e à geometria diferencial. O objetivo desses capítulos é introduzir o leitor com os temas de caráter interdisciplinar do trabalho.

Os resultados deste trabalho encontram-se, exclusivamente, nos Capítulos 4 e 5. Neles definimos a ação do ruído de um sistema de comunicações quando as constelações de sinais estão sobre superfícies e sobre variedades riemannianas. Certamente, esta definição é a base desse trabalho, pois todas as análises de desempenho das constelações de sinais foram feitas usando esta definição.

A introdução do conceito de aplicação exponencial surgiu de maneira natural na caracterização da ação desse ruído, buscando generalizar essa interferência em espaços mais gerais que o euclidiano. A aplicação exponencial permite-nos caracterizar uma densidade de probabilidade de ruído em uma vizinhança do sinal transmitido sobre a variedade, e transportá-la de forma equivalente para uma vizinhança do espaço tangente desse sinal.

Uma consequência importante desse fato, é que podemos transportar uma região de decisão de um sinal transmitido sobre a variedade para uma região de decisão equivalente

no espaço tangente à variedade no sinal transmitido. Portanto, essa região equivalente permite-nos comparar, de uma maneira menos trabalhosa, o desempenho de constelações de sinais em diferentes variedades riemannianas, e em particular com a euclidiana.

Um dos resultados principais desta dissertação é, certamente, a identificação de uma relação entre o desempenho de uma constelação de sinais em uma variedade e a sua curvatura seccional, a qual estabelece que o desempenho do sistema de comunicações para uma constelação de sinais em uma variedade M_1 com curvatura seccional constante K_1 é superior ao desempenho do sistema de comunicações para uma constelação de sinais equivalente em uma variedade M_2 com curvatura seccional constante K_2 se, e somente se, $K_1 < K_2$.

Este resultado explica uma das razões do porquê que em [2] e [1] foram encontrados desempenhos superiores das constelações de sinais em espaços hiperbólicos quando “comparadas” com suas equivalentes euclidianas.

Neste trabalho identificamos, também, que as variedades riemannianas de curvatura seccional constante são os espaços naturais para a construção de uma das classes de constelações de sinais mais importantes de um sistema de comunicações, que são as constelações de sinais geometricamente uniformes.

Um outro resultado decorrente dos Teoremas 4.1 e 5.1, estabelece uma condição para que exista um casamento entre o projeto de uma constelação de sinais em uma variedade M sujeita a ação de um ruído gaussiano circular e o projeto de uma constelação de sinais em uma variedade \overline{M} sujeita, também, a ação de um ruído gaussiano circular. Isto é, se uma constelação de sinais \mathcal{X} em M é projetada de forma a minimizar o efeito do ruído gaussiano circular em M , então $x(\mathcal{X})$, também, minimizará o efeito do ruído gaussiano em \overline{M} se, e somente se, a imersão $x : M \rightarrow \overline{M}$ for totalmente geodésica.

6.2 Perspectivas Futuras

Para finalizar, gostaríamos de citar alguns caminhos para uma possível continuidade deste trabalho.

- No contexto de modulação digital, uma busca por exemplos de sistemas de comunicações cujo modelo de canal encontra-se em um espaço não-euclidiano, para podermos utilizar os resultados aqui obtidos para uma implementação prática do canal em sistemas comerciais.
- Um estudo quantitativo de limitantes superiores e inferiores para a probabilidade de erro de constelações em variedades riemannianas.

- Identificação, dentre as imersões totalmente geodésicas $x : M \rightarrow \overline{M}$, que levam constelações de sinais de M para \overline{M} , as que possam simplificar os demoduladores.
- Uma análise algébrica das constelações de sinais em variedades riemannianas, já que o presente trabalho abordou apenas alguns aspectos geométricos das constelações de sinais.

Referências Bibliográficas

- [1] Augustini, E., *Constelações de Sinais em Espaços Hiperbólicos*, Tese de Doutorado, IMEC-UNICAMP, 2002.
- [2] Brandini, E., *Constelação de Sinais e Análise de Desempenho no Plano Hiperbólico*, Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2000.
- [3] B. R. M. Sosa, e R. Palazzo, Jr., “Casamento e rotulação de conjunto de sinais Slepian e grupos via análise de correspondência,” *13^o. Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Águas de Lindóia, Set. 1995.
- [4] B. R. M. Sosa, e R. Palazzo, Jr., “A new technique for efficient coding of patterns,” *VI Reunion de Trabajo en Processamiento de la Información y Control*, Bahia Blanca, Argentina, Nov. 1995.
- [5] Carmo M. P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1976.
- [6] Carmo, M. P., *Superfícies Mínimas*, *16^o colóquio Brasileiro de Matemática*, IMPA, Rio de Janeiro, 1987.
- [7] Carmo M. P., *Geometria Riemanniana*, Impa-Projeto Euclides, 1979.
- [8] Costa, S., Augustini, E., Palazzo, R. “On Knotted M-PSK Correct Reception Performance,” *Seventh Internacional Workshop on Algebraic and Combinational Coding Theory*, ACCT-2000, Bansko-Bulgária, June 18-24, 2000, pp. 103-106.
- [9] Dierkes, U., Hildebrandt, S., Kuster, A. Wohlrab, O. *Minimal Surfaces, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics*, vol. 295, Springer Verlag, 1992.
- [10] G. D. Forney, Jr., “Geometrically uniform codes,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-37, pp. 1241-1260, Setembro de 1991.

- [11] J. Lucas M. Barbosa, A. Gervásio Colares, *Minimal Surfaces in R^3* , *Lecture Notes in Mathematics*, No. 1195, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [12] Klingenberg, Wilhelm *A Course in Differential Geometry*, Springer, New York, 1978.
- [13] Proakis, J.G. *Digital Communications*, Segunda edição, McGraw-Hill, 1989.