



Avaliação da Acústica de Recintos pelo Método dos Elementos Finitos

Tese submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica da
Universidade Estadual de Campinas, Departamento de
Comunicações, como requisito parcial para a obtenção
do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Autor

Jugurta Rosa Montalvão Filho
Engenheiro Eletricista - UFPB - 1992

Orientador

Prof. Dr. José Geraldo Chiquito
Doutor em Engenharia Elétrica - UNICAMP

Campinas, 5 de Março de 1995.

Este exemplar compreende a versão final da tese
defendida por JUGURTA ROSA MONTALVÃO FILHO
e aprovada pela Comissão
Julgadora em 31 / 03 / 95
José Geraldo Chiquito
Orientador

Abstract

The two-dimensional acoustic waves behavior is calculated in rooms with parallel ceiling and floor using the finite element approximation. Programs are developed in order to find the finite element matrices and to calculate the resonance frequencies of the modes and decay rates from the matrices. The results are analyzed having in mind the acoustic quality of the rooms.

Sumário

O comportamento das ondas acústicas é calculado aproximadamente para recintos com teto e piso paralelos, pelo método dos elementos finitos. Um conjunto de programas é concebido e implementado para encontrar as matrizes de elementos finitos e, por meio dessas, calcular as frequências de ressonância dos modos e respectivas constantes de atenuação. Os resultados são analisados considerando a qualidade acústica dos recintos.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Motivação	3
1.2	Um Pouco de História	4
2	Acústica geométrica	7
2.1	O começo da acústica geométrica	8
2.2	Outras fórmulas estatísticas	9
3	O Som	11
3.1	Equação de onda: um apelo à intuição	12
3.1.1	O caso unidimensional	12
3.1.2	Em três dimensões	14
4	Acústica ondulatória	16
4.1	Impedância acústica	17
4.2	Constante de atenuação	18
4.3	Estratégias para se melhorar a acústica de um recinto	19
5	Método dos elementos finitos	21
5.1	Aplicação do método	22
6	Implementação dos programas	33

7 Resultados	40
7.1 Teste de convergência	40
7.2 Comparação com resultados experimentais	46
7.3 Avaliação e melhoramento da qualidade acústica de um recinto	53
7.4 Utilização de absorventes de teste	63
8 Conclusões e propostas	69

Lista de Figuras

3.1	Planos transversais no instante de tempo t_1	12
3.2	Alteração sofrida por um cubo de ar.	14
5.1	Elemento triangular linear.	25
6.1	Planta baixa descrita por quatro elementos.	35
6.2	Diagrama simplificado para o programa interp.	36
6.3	Diagrama simplificado para o programa matrizes.	37
6.4	Diagrama simplificado para o programa modos.	38
6.5	Relação entre os programas.	39
7.1	Direção de propagação das ondas que formam o modo (0,1).	41
7.2	Direção de propagação das ondas que formam o modo (1,0).	41
7.3	Direção de propagação das ondas que formam o modo (1,1).	42
7.4	Teste de convergência para a frequência do modo (0,1).	43
7.5	Teste de convergência para a frequência do modo (1,0).	43
7.6	Teste de convergência para a frequência do modo (1,1).	44
7.7	Teste de convergência para a constante de atenuação do modo (0,1).	44
7.8	Teste de convergência para a constante de atenuação do modo (1,0).	45
7.9	Teste de convergência para a constante de atenuação do modo (1,1).	45
7.10	Malha de elementos finitos com 32 elementos para o modelo A.	47
7.11	Malha de elementos finitos com 200 elementos para o modelo A.	48
7.12	Outra possível malha com 200 elementos para o modelo A.	49

7.13	Malha de elementos finitos com 29 elementos para o modelo B.	50
7.14	Malha de elementos finitos com 232 elementos para o modelo B.	51
7.15	Outra possível malha com 232 elementos para o modelo A.	52
7.16	Sala número zero.	54
7.17	Sala número um.	56
7.18	Sala número dois.	58
7.19	Sala número três.	60
7.20	Sala número quatro.	62
7.21	Teste um.	64
7.22	Teste dois.	65
7.23	Teste três.	66
7.24	Teste quatro.	67
7.25	Teste cinco.	68

Lista de Tabelas

7.1	Resultados para o modelo A com 32 elementos.	47
7.2	Resultado para o modelo A com 200 elementos.	48
7.3	Resultado para o modelo A com outra malha de elementos finitos. . .	49
7.4	Resultado para o modelo B com 29 elementos.	50
7.5	Resultado para o modelo B com 232 elementos.	51
7.6	Resultado para o modelo B com outra malha de elementos finitos. . .	52
7.7	Resultados para a sala número zero.	54
7.8	Resultados para a sala número um.	56
7.9	Resultados para a sala número dois.	58
7.10	Resultados para a sala número três.	60
7.11	Resultados para a sala número quatro.	62
7.12	Resultados para o teste um.	64
7.13	Resultados para o teste dois.	65
7.14	Resultados para o teste três.	66
7.15	Resultados para o teste quatro.	67
7.16	Resultados para o teste cinco.	68

Capítulo 1

Introdução

O tratamento sonoro de recintos onde é importante a comunicação sonora — teatros, estúdios de gravação, cinemas ou salas de aula, por exemplo — tem por finalidade favorecer esse tipo de comunicação. A informação sonora pode ser deteriorada por ruídos externos ao recinto, que penetram através de suas paredes, ou por defeitos acústicos relativos ao formato do próprio recinto, tais como excesso de reverberação, ecos, ressonâncias ou muito pouca reverberação. Nos três primeiros casos, as informações ficam confusas pela superposição de sons. Por outro lado, no caso de baixa reverberação, o nível sonoro cai sensivelmente com a distância a partir da fonte sonora.

Em conseqüência dessas duas fontes mais evidentes de deterioração da informação sonora dentro de recintos — ruídos externos e defeitos acústicos — costuma-se dividir os projetos arquitetônicos de tais recintos em duas etapas [1]:

1. defesa contra ruídos;
2. controle de sons no recinto.

Esse trabalho concentra sua atenção na segunda etapa, onde se busca uma distribuição homogênea do som dentro do recinto, que preserve a qualidade e a inteligibilidade da comunicação, evitando os defeitos acústicos.

No decorrer desse trabalho, é feita primeiramente uma menção da abordagem estatística tradicionalmente utilizada em projetos arquitetônicos de recintos com finalidades acústicas [12] [2] [1] [13]. São também discutidas as limitações dessa abordagem

tradicional, em contraste com os benefícios de uma nova abordagem, que vem a ser a motivação para esse trabalho.

A abordagem estatística tradicional é devidamente apresentada no capítulo dedicado à *acústica geométrica*, onde são citadas e discutidas as fórmulas estatísticas mais comumente utilizadas. Da mesma forma, ainda nesse mesmo capítulo, também é apresentada uma outra fórmula estatística, proposta em uma publicação bastante recente, o que evidencia o interesse ainda atual por desenvolvimentos dentro da acústica geométrica.

No capítulo dedicado à análise do som como fenômeno físico, é feita uma dedução informal da equação de onda. Essa falta de formalidade tem por objetivo enfatizar os aspectos intuitivos que se sucedem nas etapas da dedução.

Cabe explicar aqui o porquê da ordenação do capítulo dedicado à acústica geométrica antes do capítulo dedicado ao som. Essa ordem, aparentemente inversa, posto que o som é o fenômeno fundamental em estudo na acústica, está de acordo com a forma como o assunto é tratado na acústica geométrica, onde são levadas em conta apenas as dimensões dos recintos, a área superficial dos absorventes acústicos e seus respectivos coeficientes de absorção, que são medidos experimentalmente e tabelados. Dessa forma, a dedução da equação de onda para o som fica melhor colocada antes do capítulo dedicado à acústica ondulatória que, como o próprio nome indica, leva em consideração as características ondulatórias do som.

Ainda no final do capítulo 4, são discutidas algumas estratégias para se melhorar a acústica de um recinto. Essas melhorias são justificadas à luz da acústica ondulatória, mas sem perder de vista a utilização da acústica geométrica e sua estreita relação com a boa qualidade acústica de um recinto.

Um breve apanhado geral sobre o método dos elementos finitos é feito no início do capítulo 5. Depois de apresentadas as diversas variantes do método, a primeira seção desse capítulo já introduz a aplicação do método de Galerkin, com funções elementares lineares, ao problema específico da acústica. Essa abordagem direcionada se mantém até o final do capítulo, onde é feito um paralelo entre os autovetores da matriz que descreve aproximadamente o sistema acústico e os modos de ressonância desse sistema.

No capítulo relativo à implementação dos programas, tenta-se enfatizar o caráter modular das tarefas executadas por cada um dos programas, bem como a relação de troca de informações entre eles.

Há diversos programas disponíveis para uso comum que lidam com análises por elementos finitos. Nesse trabalho, contudo, optou-se pelo desenvolvimento dos programas. A motivação para isso está, obviamente, no interesse didático da lida com

cada detalhe relativo à aplicação do método dos elementos finitos.

Por fim, o capítulo de resultados apresenta-se dividido em quatro seções . As duas primeiras proporcionam uma avaliação da precisão das soluções aproximadas obtidas numericamente, enquanto que, nas duas últimas, são propostas duas possibilidades de utilização dos resultados numéricos na avaliação e melhoria da acústica de recintos. Vale enfatizar que os resultados experimentais utilizados na segunda seção foram extraídos de um artigo [7] de Richard H. Bolt, de 1939. Nesse artigo, relata-se que foram utilizadas pequenas cavidades ressonantes de formatos irregulares (o que dificulta o cálculo analítico das frequências de ressonância dessas cavidades) e com paredes bastante duras. Para a obtenção dos resultados numéricos foram levadas em conta apenas as dimensões da planta baixa de cada cavidade. Não obstante essa simplificação na modelagem dessas cavidades, os resultados obtidos se mostraram bastante satisfatórios, sob o ponto de vista da aplicação em acústica arquitetônica.

1.1 Motivação

É bastante comum entre projetistas de auditórios, teatros e outros recintos com finalidades semelhantes a utilização de fórmulas baseadas em modelos semi-empíricos, nas quais o efeito da absorção acústica é aproximado estatisticamente. Essas fórmulas, tais como a de Sabine, Eyring ou Millington e Sette [14] , são bastante fáceis de se utilizar, o que, em parte, justifica a sua popularidade.

No entanto, apesar do inegável valor dessas fórmulas, elas só proporcionam resultados precisos sob determinadas condições de comportamento do som dentro do recinto. São essas condições que viabilizam a aplicação de um modelo estatístico ao problema da acústica.

Tais condições normalmente são obtidas com a quebra das simetrias nos formatos do recinto e/ou qualquer outro artifício que leve as ondas sonoras a se propagarem em todas as direções dentro do recinto com mesma probabilidade. Essa distribuição uniforme de probabilidade para a direção de propagação das ondas de som é uma das condições de validação do modelo estatístico.

Obviamente, na prática são apenas obtidas aproximações dessas condições . Além disso, a confirmação de que o modelo estatístico foi corretamente aplicado, normalmente só é obtida depois do recinto construído. Mais comuns ainda são os casos nos quais a acústica do recinto já construído tem que ser corrigida com artifícios que vão dos absorventes acústicos aos difusores de som fractais [28].

Essa incerteza com relação ao sucesso da aplicação das fórmulas estatísticas torna-se ainda maior para recintos pequenos. Nesses recintos, que podem ser vistos como cavidades ressonantes, os modos de ressonância com frequências mais baixas podem cair dentro da faixa de áudio do espectro sonoro. Como as ondas de som que constituem esses modos são as que mais dificilmente se aproximam das condições de validação do modelo estatístico, geralmente o tratamento acústico de recintos pequenos usando esse modelo implica riscos maiores de insucessos.

Não obstante essas limitações associadas à aplicação do modelo estatístico, as condições que validam esse modelo são desejáveis não somente por possibilitarem a simples aplicação das fórmulas estatísticas em projetos arquitetônicos, mas, principalmente, porque essas condições coincidem com o que é desejável sob o ponto de vista da qualidade acústica dos recintos. Isso acontece porque a condição de ergodicidade¹ na distribuição da energia sonora dentro de um auditório, por exemplo, assegura que um ouvinte receba a mesma intensidade de energia sonora em qualquer posição no interior desse auditório [11]. Essa condição de ergodicidade está diretamente relacionada com as duas primeiras condições de Sabine, vistas no capítulo 2.

Um modelo mais abrangente para o comportamento do som dentro de uma cavidade é o modelo analítico, fornecido pela acústica ondulatória, discutida no capítulo 4. Esse modelo não sofre as restrições do modelo estatístico. No entanto, o modelo analítico é quase sempre de difícil resolução, e, muitas vezes, impraticável mesmo pelo método da perturbação [19].

Portanto, o presente trabalho teve como motivação inicial a utilização de um método numérico para a solução aproximada da equação diferencial correspondente ao modelo analítico de uma dada cavidade. O método dos elementos finitos foi escolhido pela sua flexibilidade. Dessa forma, cavidades com formatos e condições de contorno bastante diferentes foram analisadas com facilidade pelo mesmo conjunto de programas. Os resultados numéricos assim obtidos foram avaliados e confrontados com os resultados dos modelos estatísticos correspondentes. Isso foi feito com o objetivo de se investigar um procedimento geral para a melhoria (ou correção) de um projeto arquitetônico, antes mesmo desse projeto “sair do papel”.

¹A ergodicidade aqui pode ser entendida como um movimento completamente aleatório de ondas sonoras. Ver [14] nas páginas 83 e 141.

1.2 Um Pouco de História

A preocupação com o desempenho acústico de ambientes vem de longa data. Na Grécia antiga, por exemplo, onde os teatros eram montados a céu aberto, fazia-se uso de ânforas de tamanhos variados e devidamente posicionadas, que funcionavam como ressonadores em diversas frequências, no intuito de melhorar a audibilidade. Artificio semelhante também foi usado em igrejas medievais escandinavas, com o objetivo de absorver seletivamente energia sonora em algumas frequências específicas. Para tanto, eram utilizadas jarras com cinzas no seu interior [1] [2].

Mas, apesar dessas e de outras soluções acústicas encontradas na antiguidade, atribui-se ao professor Wallace C. Sabine o mérito de ter elevado a Acústica Arquitetônica ao nível de Ciência, com sua série de artigos publicados no início do século (1900–1915) [12].

Foi também nesse período que surgiram os circuitos a válvula triodo (1907), que impulsionaram o crescimento dessa nova ciência, na medida em que possibilitaram a geração e medição eletrônica de sons para testes acústicos. É curioso ressaltar que nos seus primeiros experimentos W. C. Sabine chegou a utilizar cronômetro manual para medir o tempo de reverberação².

Entre 1920 e 1940, como consequência natural dos avanços na Acústica, foi desenvolvida a ciência da Psicoacústica e dentro dela os conceitos de *loudness* e mascaramento foram quantizados. Além disso, os avanços na Eletrônica possibilitaram a entrada da Acústica no campo da Medicina e da Química, com o uso do ultra-som.

Em 1934, V. O. Knudsen escreveu um artigo [15] de grande efeito na comunidade científica da época. Nesse artigo, publicado na “Reviews of Modern Physics”, foi delineado o estado evolutivo da Acústica na época. Knudsen enfatizou a inadequação de alguns conceitos em voga até então, e sugeriu a direção na qual novos avanços deveriam ser realizados. Nos dez anos que se seguiram à data dessa publicação, os avanços foram tão extensivos e interessantes que levaram à publicação, em 1944, do artigo “Sound Waves in Rooms” [14], escrito por Philip M. Morse e Richard H. Bolt. Nesse artigo, foram ponteadas diversas abordagens para a acústica de recintos. Numa dessas abordagens, a Acústica já se mostrava como uma área densa e vasta da física ondulatória, expandida para além das fórmulas estatísticas e suas limitações.

Com a Segunda Guerra Mundial, a Acústica foi novamente impulsionada. Grandes laboratórios foram montados na Inglaterra, Alemanha, França e Estados Unidos.

²Ver definição para o termo tempo de reverberação na seção 2.1

Nesse mesmo ritmo, a Acústica aplicada à Arquitetura acompanhou e contribuiu para a evolução da Ciência Acústica, na qual está inserida, da mesma forma que se beneficiou e trouxe benefícios a outros ramos da Física Ondulatória.

Com o fim da Segunda G. G., o “cultural boom”[17] que teve lugar na América motivou a reformulação de *velhos* conceitos em Acústica. As novas salas — com múltiplos propósitos, dentro dos novos padrões de conforto e com maior capacidade de público — representaram um desafio à melhor compreensão dos fenômenos acústicos.

Nos dias de hoje, como consequência natural da relação direta que sempre manteve com as atividades culturais das sociedades, pode-se notar que a Acústica tornou-se bastante popular e presente em projetos arquitetônicos de vários portes. É comum, por exemplo, a preocupação com a qualidade acústica de recintos que vão de pequenos estúdios de gravação a grandes salas de concertos.

Capítulo 2

Acústica geométrica

Não obstante a observação por Sabine¹ de resultados experimentais influenciados pelos fenômenos de difração e interferência, os primeiros trabalhos realizados no estudo da Acústica negligenciaram as propriedades ondulatórias do som [14]. Em muitos desses trabalhos, a propagação do som foi aproximada por trajetórias retilíneas e reflexões equivalentes àquelas utilizadas no estudo dos fenômenos óticos. Na Acústica, porém, essas aproximações são menos válidas posto que o comprimento de onda do som audível é muitas vezes da mesma ordem de grandeza das dimensões dos objetos refletoras, o que torna o modelagem pelo método das imagens (*image method*) [20], ou pelo método do traçado de raios (*ray tracing method*) [21] — ou mesmo pela combinação destes métodos [22] — válido apenas em certos casos onde os fenômenos de onda podem ser desprezados.

A despeito de tais limitações, esses modelos proporcionam resultados de fácil obtenção que, aliados ao “bom senso”, podem levar a aplicações práticas bastante satisfatórias. E foi justamente graças à sua característica de praticidade que a Acústica Geométrica “inaugurou” o estudo da Acústica e permanece até os dias atuais como instrumento de uso comum entre projetistas², bem como ainda constitui objeto de estudos mais aprofundados, como pode ser notado no artigo datado de 1988, citado na referência [13].

¹W. C. Sabine, *Collected Papers on Acoustics*, Harvard University Press 1922

²Um bom exemplo é o artigo informal intitulado Tratamento Acústico de um Auditório, publicado em 1992 no periódico bimestral *Música & Tecnologia*.

2.1 O começo da acústica geométrica

O professor Wallace Sabine, nos seus primeiros experimentos, estudou a relação entre as características acústicas de um ambiente fechado e as dimensões das superfícies absorventes de energia acústica encontradas no interior desse ambiente — a referência utilizada por Sabine como máxima absorção acústica para uma dada área de material absorvente foi uma janela aberta de mesma área.

Ele observou que a qualidade acústica desse ambiente estava vinculada ao intervalo de tempo entre a extinção da fonte sonora e a extinção correspondente do som remanescente dentro deste ambiente. A esse intervalo de tempo ele atribuiu o termo *tempo de reverberação* — T . Mais tarde, esse parâmetro foi melhor definido como o intervalo de tempo no qual a intensidade sonora cai para a milionésima parte de intensidade original (queda de 60db), que corresponde, na prática, à extinção dos sons habituais de média intensidade.

Sabine também elaborou o conceito de *absorção total*: $A = S_1\alpha_1 + S_2\alpha_2 + \dots + S_n\alpha_n$ no qual a área de cada superfície de material absorvente interna à sala — S_1, S_2, \dots, S_n — é multiplicada por um coeficiente de absorção correspondente — $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — para se obter como resultado a área — A — de superfície totalmente absorvente que proporcionaria o mesmo efeito em termos de decaimento da energia sonora interna à sala.

Sabine observou também que o tempo de reverberação é inversamente proporcional à absorção total, e que a constante de proporcionalidade está relacionada com o volume da sala:

$$A \cdot T = k \cdot V. \quad (2.1)$$

Inicialmente foi adotado $k = 0,174$ (no sistema MKS). Esse valor obtido empiricamente sofreu correções até chegar a $k = 0,161$, que coincide com o valor calculado teoricamente³.

Para um melhor entendimento da aproximação de Sabine e de algumas de suas limitações, pode-se imaginar um recinto com placas de materiais absorventes distribuídas aleatoriamente sobre suas paredes internas. Paralelamente, pode-se imaginar também um segundo recinto de mesmas dimensões, com superfícies internas perfeitamente refletoras — não absorvem energia sonora — e um “buraco” em uma das paredes com área igual à absorção total A calculada para o primeiro recinto. Segun-

³A dedução teórica que leva a esse valor para k pode ser encontrada nas páginas 300 em [11] e 77 em [14]

do a aproximação de Sabine, para duas fontes sonoras idênticas nos dois recintos, a energia absorvida no primeiro recinto em um dado intervalo de tempo deve ser igual à energia sonora que atravessa a janela do segundo recinto nesse mesmo intervalo de tempo.

Surge aqui uma pergunta evidente: como os dois recintos podem ser equivalentes independentemente da posição relativa das placas absorventes e da janela? A resposta é que a aproximação de Sabine só é válida sob determinadas condições [14], a saber:

1. distribuição difusa uniforme da energia sonora dentro do recinto em qualquer instante;
2. igual probabilidade de propagação do som em todas as direções ;
3. absorção contínua do som pelas paredes do recinto.

A primeira condição assegura que um dado absorvente acústico tenha a mesma influência sobre a absorção de energia sonora em qualquer posição dentro do recinto.

De acordo com a segunda condição , a quantidade de energia sonora que incide em um segundo sobre uma unidade de área de qualquer superfície interna é dada por $\frac{Wc}{4}$, onde W é a densidade de energia sonora dentro do recinto (assumida uniforme) e c é a velocidade de propagação do som.

A terceira condição possibilita o cálculo da taxa de absorção de energia sonora simplesmente por $(\frac{Wc}{4})(\alpha S)$, sendo α definido como a fração de energia incidente absorvida pela área de superfície S .

2.2 Outras fórmulas estatísticas

A partir da fórmula de Sabine vieram outras melhoradas, mas igualmente atadas a condições semelhantes às enumeradas na seção anterior. A fórmula de Eyring, por exemplo, parte das mesmas condições , com exceção da terceira — em Eyring é assumida uma perda de energia em “degraus”(não contínua no tempo). Nesse caso é estimado o comprimento do caminho médio percorrido pelos *raios de som*, e é assumida uma absorção de energia em porções , em intervalos correspondentes ao tempo que o som leva para percorrer esse caminho médio. A fórmula resultante é

$$T = k \frac{V}{-S \ln(1 - \alpha)}, \quad (2.2)$$

onde $\alpha = \frac{A}{S_1+S_2+\dots+S_n}$ é o coeficiente de absorção médio, e S é a área total das superfícies absorventes.

Essa fórmula, contudo, não fornece bons resultados quando os absorventes estão distribuídos de forma assimétrica. Para suprir essa deficiência, Millington e Sette [14] propuseram uma outra fórmula:

$$T = k \frac{V}{-\sum_i S_i \ln(1 - \alpha_i)}. \quad (2.3)$$

Nessa fórmula leva-se em conta a hipótese de que, em média, um dado “raio de som” incide sobre uma dada superfície um número de vezes proporcional à área dessa superfície. Isso está implícito na média geométrica usada no denominador da fórmula.

Mais recentemente, um trabalho fortemente recomendável [13] de 1988, foi realizado dentro dessa mesma abordagem estatística, baseado em algumas hipóteses inéditas, e obtendo melhores resultados que as fórmulas anteriores. A fórmula para T proposta nesse trabalho é dada por:

$$T = \left[\frac{0,161V}{-S \ln(1 - \bar{\alpha}_x)} \right]^{\frac{x}{3}} \left[\frac{0,161V}{-S \ln(1 - \bar{\alpha}_y)} \right]^{\frac{y}{3}} \left[\frac{0,161V}{-S \ln(1 - \bar{\alpha}_z)} \right]^{\frac{z}{3}}, \quad (2.4)$$

onde $\bar{\alpha}_x$, $\bar{\alpha}_y$ e $\bar{\alpha}_z$ são os coeficientes de absorção médios das paredes perpendiculares aos eixos correspondentes, e as variáveis x , y e z são as dimensões da sala.

Capítulo 3

O Som

O som, como fenômeno físico, pode ser entendido como um distúrbio mecânico se propagando em um meio elástico. O comportamento das ondas de som está fortemente relacionado, portanto, às características mecânicas desse meio.

Neste trabalho o foco das atenções foi voltado para os meios gasosos, mais especificamente o ar. O som se manifesta nos gases através de compressões e descompressões que se alternam na direção de propagação da onda, ou seja, são ondas longitudinais.

A compressão de um gás tem um comportamento bem conhecido para dois casos extremos: isotérmica — ou seja, lenta o suficiente para que todo o volume de gás comprimido tenha a mesma temperatura todo o tempo — e adiabática — rápida o suficiente para que não haja troca de calor. Para uma dada temperatura de equilíbrio a relação entre pressão e volume para uma compressão *isotérmica* é

$$\Delta P = -K \cdot \Delta V, \quad (3.1)$$

onde K é uma constante.

Para gases diatômicos e para a mistura gasosa que compõe o ar atmosférico, as compressões *adiabáticas* são regidas pela equação

$$\Delta P = -1.4K \cdot \Delta V. \quad (3.2)$$

Devido à baixa condutividade térmica do ar, o calor gerado por uma compressão resultante da passagem de uma onda sonora não consegue se dissipar antes da próxima expansão. Dessa forma, as compressões que ocorrem na propagação do som no ar são *adiabáticas* [12] e a força restauradora, responsável pela manutenção do movimento ondulatório, é, justamente, a oposição que o gás oferece à compressão ou expansão.

3.1 Equação de onda: um apelo à intuição

Nas considerações que se seguem, um dos principais objetivos é a obtenção de uma compreensão mais intuitiva da propagação do som nos gases. Para tanto é desprezada a agitação térmica das moléculas.

3.1.1 O caso unidimensional

Em primeiro lugar, por ser o mais simples dos casos, será analisada a propagação de ondas paralelas de som em uma única direção, dentro de um tubo de área transversal uniforme S , como mostrado na figura 3.1. Centrando-se a atenção nas moléculas que se encontram num dado plano transversal à distância x_1 da origem, é fácil imaginar que a onda sonora, ao passar por esse plano, desloca-o para frente e para trás da sua posição de equilíbrio. Esse deslocamento ξ varia com o tempo e, para um dado instante de tempo, é diferente para os diversos planos ao longo de x , ou seja, também é função de x .

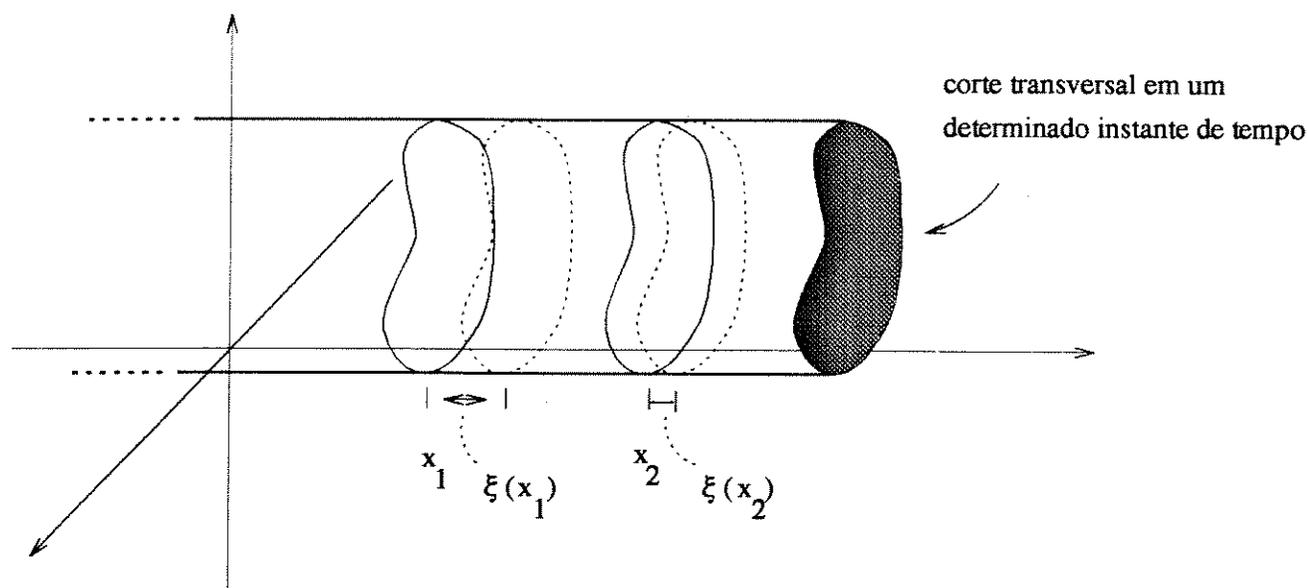


Figura 3.1: Planos transversais no instante de tempo t_1 .

A equação que descreve a relação entre ξ , x e t é resultante da combinação de três

equações básicas [11] que serão introduzidas nos parágrafos seguintes.

A equação de continuidade:

$$\delta = -\frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad (3.3)$$

onde δ é a variação relativa na densidade do gás. Esta equação nos informa que o deslocamento desigual de dois “planos” transversais consecutivos — ou seja, alteração do volume entre eles — provoca alteração na densidade do gás contido entre esses dois planos. Para se chegar a tal resultado, é assumida uma propagação da onda de forma não turbulenta, o que significa que os planos transversais compostos de moléculas de gás não são destruídos com a passagem da onda. Evidentemente essa é uma simplificação que despreza, inclusive, a agitação térmica das moléculas do gás.

A segunda equação diz respeito à propriedade de compressibilidade do gás:

$$p = \gamma P_0 \delta; \quad (3.4)$$

onde γ é a razão entre os calores específicos a pressão e a volume constantes, respectivamente ($\frac{C_p}{C_v}$), P_0 é a pressão de equilíbrio do gás e p é a diferença entre a pressão efetiva e a de equilíbrio. Esta equação comunica que uma alteração na densidade do gás é acompanhada de uma alteração proporcional na pressão deste.

Por fim, a terceira equação :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}; \quad (3.5)$$

onde ρ_0 é a densidade de equilíbrio do gás. Esta terceira equação relaciona a aceleração de um dado plano transversal com a diferença de pressão entre os dois lados desse plano.

Da combinação dessas equações chega-se a

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (3.6)$$

onde c é a velocidade de propagação do som no gás. A equação 3.6 corresponde à equação de onda para o caso unidimensional, e estabelece a relação que se desejava entre ξ , x e t .

3.1.2 Em três dimensões

No intuito de se estabelecer uma relação equivalente à da equação 3.6 para uma onda sonora se propagando em três direções mutuamente ortogonais, pode-se partir da equação $\gamma P_0 = \rho_0 c^2$ (Referência [11] na página 187), que combinada à equação 3.4, fornece

$$p = -\rho_0 c^2 \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (3.7)$$

ainda para o caso unidimensional.

Sem perda de generalidade, pode-se aceitar a sugestão intuitiva da equação 3.7 e estabelecer-se que a alteração de pressão p em um dado “cubo de ar” com paredes paralelas aos três eixos cartesianos, como mostra a figura 3.2

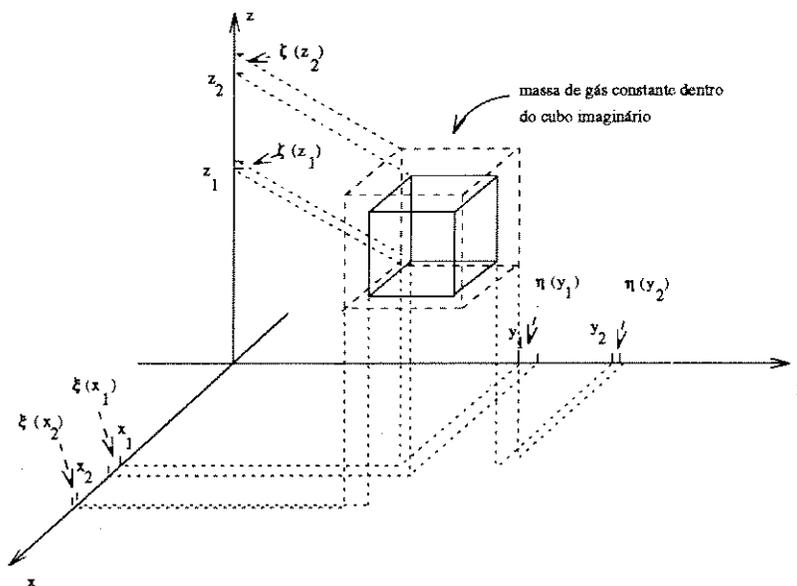


Figura 3.2: Alteração sofrida por um cubo de ar.

é dado por

$$p = -\rho_0 c^2 \left(\frac{\xi(x_2) - \xi(x_1)}{x_2 - x_1} + \frac{\eta(y_2) - \eta(y_1)}{y_2 - y_1} + \frac{\zeta(z_2) - \zeta(z_1)}{z_2 - z_1} \right). \quad (3.8)$$

Reduzindo-se então esse cubo até um diferencial de volume, chega-se finalmente à equação [11]

$$p = -\rho_0 c^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right). \quad (3.9)$$

Tomando-se a derivada parcial dupla de p em relação ao tempo, pela equação anterior, obtém-se

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho_0 c^2 \left(\frac{\partial^3 \xi}{\partial t^2 \partial x} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial t^2 \partial z} \right). \quad (3.10)$$

Introduzindo-se agora as equações $\rho_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial y}$ e $\rho_0 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial z}$, equivalentes à equação 3.5 para as direções y e z , e aplicando-as em 3.10, obtém-se

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (3.11)$$

ou, de forma mais geral, usando-se o operador Laplaciano,

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (3.12)$$

que equivale à equação 3.11 para o caso de coordenadas retangulares. A equação 3.12 é conhecida como equação de Helmholtz.

Capítulo 4

Acústica ondulatória

Ainda nos tempos pioneiros de suas primeiras formulações, Sabine notou que as dimensões dos materiais absorventes acústicos influenciavam na eficiência de absorção da energia sonora incidente: uma pequena área de material fortemente absorvente é mais eficiente que áreas maiores de materiais menos absorventes. Esse fenômeno foi explicado pelo efeito de difração.

Na Acústica Geométrica, esse e outros efeitos típicos da física ondulatória foram desprezados em favor da simplicidade dos modelos propostos. Essas simplificações, contudo, impuseram fortes restrições a tais modelos, levando ao uso quase obrigatório do “bom senso” na avaliação dos resultados obtidos.

Uma abordagem muito mais completa — e complexa — dos fenômenos acústicos pode ser feita por meio da Acústica Ondulatória — *Wave Acoustics*. Nessa nova abordagem introduzida por Morse [11] em 1930, o som é devidamente tratado como um fenômeno ondulatório. São estudados os modos normais de reverberação de uma dada cavidade, — sala ou auditório, por exemplo — suas frequências características correspondentes, bem como a constante de atenuação associada a cada um dos modos.

Para tanto recorre-se à equação de onda para excesso de pressão 3.12, introduzida na seção 3.1.2, que, conjuntamente com as condições de contorno correspondentes às reações das paredes e superfícies absorventes ao impacto das ondas, modelam a cavidade sob o ponto de vista acústico.

Para o estudo dos modos normais dentro de uma cavidade, uma possível abordagem simplificada é considerar que não há perda de energia, isto é, as paredes são

refletore ideais e, conseqüentemente, para o ar contíguo a essas paredes, a variação da pressão na direção normal a cada uma delas é nula ¹:

$$\vec{n} \cdot \nabla p = 0, \quad (4.1)$$

onde \vec{n} é o vetor normal às paredes e que aponta para o interior da cavidade.

Assumida esta condição de contorno, nota-se que, quando $p(x, y, z, t)$ assume certos “formatos característicos” $\psi_N(x, y, z)$ como condições iniciais num dado instante $t_0=0$, desse instante em diante p pode ser dado por

$$p_N(x, y, z, t) = \psi_N(x, y, z)e^{j\omega_N t}. \quad (4.2)$$

A essas funções especiais ψ_N dá-se o nome de *funções características* [14], e cada função característica de uma dada cavidade possui sua frequência própria ω_N de oscilação .

Além disso, o conjunto de todas as funções características de uma dada cavidade constitui uma base ortogonal de funções . Dessa forma, o comportamento da pressão p pode ser decomposto na soma ponderada dos p_N dessa cavidade, desde que p descreva o estado permanente da pressão .

4.1 Impedância acústica

Para se estudar o fenômeno de reflexão das ondas sonoras ao se chocarem com uma dada superfície, sob o ponto de vista da Acústica Ondulatória, deve-se recorrer ao conceito de impedância acústica. Uma questão pertinente aqui é: por que não continuar utilizando apenas o *coeficiente de absorção* (α), posto que ele também caracteriza a superfície sobre a qual a onda incide? A resposta é que ele não depende apenas da superfície absorvente. O coeficiente de absorção de uma dada superfície pode ser encontrado para um dado ângulo de incidência da onda — nesse caso ele depende do ângulo — ou pode ser encontrado em média para todos os possíveis ângulos de incidência — e, nesse caso, a média vai depender da distribuição de probabilidade desses ângulos de incidência, ou seja, depende do tamanho e do formato do recinto em questão [8]. Vê-se portanto que o coeficiente de absorção depende tanto das características físicas do absorvente acústico quanto das características e do formato do recinto.

¹As partículas de ar que ficam em contato com paredes rígidas são imobilizadas na direção normal a essas paredes, e essa ausência de movimento leva à ocorrência de máximos e mínimos de pressão nessa mesma direção .

Alguns resultados experimentais de 1938² apontaram para a *impedância acústica normal* (Z) como uma propriedade física adequada para medir as qualidades absorventes de um dado material [8]. Esses experimentos indicaram que a impedância acústica normal depende somente do material absorvente.

Esta impedância Z é definida como a razão entre pressão e velocidade do ar na superfície do material. A velocidade do ar é tomada na direção perpendicular à superfície, e Z pode assumir valores complexos:

$$Z = \left(\frac{p}{u_n}\right)_{\text{superfície}} = R_0 + jX_0, \quad (4.3)$$

onde R_0 é geralmente muito maior que X_0 . A impedância acústica é dada no MKS em N.s/m³.

Não é difícil imaginar que há situações em que se pode estabelecer uma ponte entre Z e α . Uma dessas situações é quando todas as superfícies de uma cavidade são atingidas pelas ondas sonoras, por todas as direções possíveis, com a mesma probabilidade — condição de ergodicidade [14]. Quando essa situação se estabelece — e quase sempre ela é desejável para uma boa qualidade acústica dos ambientes — torna-se válida a seguinte equação [11]:

$$Z = \frac{2\rho c}{\tanh\left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\right]}, \quad (4.4)$$

ou ainda

$$z = \frac{Z}{\rho c} = \frac{2}{\tanh\left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\right]}, \quad (4.5)$$

para X_0 desprezado. Uma equação mais completa, para quando X_0 não pode ser desprezado, é deduzida em [14], na página 141.

4.2 Constante de atenuação

Deixando-se de lado a simplificação implícita na equação 4.1 e recorrendo-se à impedância acústica para se estabelecer condições de contorno que modelem apropriadamente a presença de materiais absorventes acústicos nas paredes internas de uma

²F. J. Willing, J. Acous. Soc. Am. 10, 257(A)(1938);

F. V. Hunt, J. Acous. Soc. Am. 10, 216(1938).

dada cavidade, a nova condição de contorno pode ser dada por:

$$\vec{n} \cdot \nabla p = \frac{\rho}{Z(\Gamma_{3d})} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (4.6)$$

onde Γ_{3d} é a superfície que delimita a cavidade.

Ao contrário da condição de contorno estabelecida pela equação 4.1, essa nova condição de contorno estabelece que há algum movimento das partículas de ar na direção normal à parede absorvente, o que está de acordo com a relativa ausência de rigidez mecânica dos absorventes acústicos. Além disso, a nova condição de contorno estabelece também que o gradiente de pressão na direção normal às superfícies absorventes é proporcional à velocidade de variação dessa pressão. Como o gradiente de pressão está relacionado com o movimento de partículas na direção do gradiente, fica implícita a relação entre esse movimento das partículas contíguas às superfícies de absorventes acústicos e a taxa de variação da pressão do ar nessas regiões.

Como consequência da inclusão das condições de contorno que modelam os absorventes de energia acústica, todas as soluções para a equação 3.12, com tais condições podem ser dadas pelas possíveis combinações lineares das soluções amortecidas

$$p_N = P_N(x, y, z)e^{-(j\omega_N + k_N)t}, \quad (4.7)$$

onde k_N é a *constante de atenuação* do N-ésimo modo de ressonância.

4.3 Estratégias para se melhorar a acústica de um recinto

De acordo com o que já foi discutido, a condição de ergodicidade na distribuição da energia sonora é uma das condições que conferem ao recinto uma boa acústica.

Para se atingir um comportamento das ondas sonoras próximo ao ergódico, é necessário se espalhar as ondas no maior número de direções possíveis. Isso pode ser feito com irregularidades de formatos nas fronteiras, ou seja, nas paredes internas ao recinto. As ondas estacionárias em cavidades com dimensões regulares possuem regularidades e simetrias correspondentes que são responsáveis por diferenças entre as constantes de atenuação dos diversos modos ressonantes. Por outro lado, nenhuma componente de onda estacionária move-se paralelamente a uma parede suficientemente irregular.

Uma outra forma menos eficiente de se espalhar as ondas sonoras é através de absorventes acústicos posicionados de forma aleatória. Esses absorventes alteram as direções de propagação das ondas que passam nas suas proximidades e “deformam” os modos de ressonância normais do recinto.

Mas a capacidade de espalhamento desses artifícios está relacionada com as dimensões desses espalhadores. Para se espalhar a onda estacionária que corresponde a um dado modo, os espalhadores utilizados devem possuir dimensões comparáveis ao comprimento dessa onda. Isso explica porque é mais fácil corrigir defeitos acústicos relativos às altas frequências. Nesses casos até pequenas irregularidades acidentais nas formas do recinto, bastante comuns em construções civis, ajudam a espalhar as ondas sonoras que possuem pequenos comprimentos de onda.

Os experimentos cujos resultados são apresentados na seção 7.3 foram realizados de forma a evidenciar os efeitos dos espalhadores sobre as constantes de atenuação dos modos de baixas frequências. O acréscimo de espalhadores é feito de forma gradual, e a medida de espalhamento das ondas estacionárias é feita pelo desvio padrão do tempo de queda em 60 db para a intensidade de cada modo. A justificativa para o uso do desvio padrão mora no fato de que as ondas estacionárias espalhadas experimentam mais ângulos de incidência sobre os absorventes. Dessa forma, quanto melhor for o espalhamento dessas ondas, mais semelhantes serão as atenuações sofridas pelos modos.

Num caso limite, onde o espalhamento das ondas pode ser considerado perfeito, o tempo de queda em 60 db é igual para todos os modos, e o caimento logarítmico da intensidade sonora dentro do recinto é sempre a linha reta prevista no modelo estatístico.

O tempo de queda em 60 db na intensidade de cada modo de um recinto é determinado pelo envelope exponencial correspondente a cada constante de atenuação. Ou seja, quando não se estabelece a condição de ergodicidade, os absorventes acústicos do recinto absorvem de forma diferenciada a energia acústica de cada modo. Dessa forma, esses tempos de queda na intensidade dos modos podem ser vistos como tempos de reverberação para tons puros gerados nas frequências de ressonância desses modos da cavidade.

Capítulo 5

Método dos elementos finitos

Entre os métodos convencionais para obtenção da solução aproximada de uma dada equação diferencial, três grupos básicos de classificação são comumente assumidos [3]:

- método das diferenças finitas;
- método variacional e
- método dos resíduos ponderados.

Cabe observar que o método das diferenças finitas pode ser visto como um caso particular do *collocation method* (Ver página 215 em [4]), uma subdivisão do método dos resíduos ponderados, subdivisão esta referente ao tipo de função usada como função ponderante (*weighting functions*). As funções ponderantes mais comumente utilizadas no método dos resíduos ponderados levam às seguintes subdivisões:

- método do subdomínio — cada função ponderante é constante em uma região definida dentro do domínio;
- *collocation method* — usa impulsos estrategicamente posicionados dentro do domínio como funções ponderantes;
- método dos mínimos quadrados — utiliza como função ponderante o próprio resíduo gerado na aproximação da solução ;

- método de Galerkin — o mais popular de todos, usa como funções ponderantes o mesmo conjunto de funções usadas para aproximar a solução da equação diferencial.

É ainda dentro das formulações integrais (i.e., variacional ou resíduos ponderados [3]) que se encaixa o método dos elementos finitos, no qual as soluções são aproximadas de uma forma computacionalmente mais cômoda. Dessa forma, o que diferencia o método dos elementos finitos dos demais métodos numéricos que utilizam a formulação integral é que, no primeiro, as funções usadas na aproximação das soluções são localmente definidas — ou seja, são diferentes de zero apenas em sub-regiões do domínio no qual a equação diferencial deve ser resolvida.

Do ponto de vista matemático, o método dos elementos finitos é uma extensão da aproximação de Ritz [5], que é aplicável a uma grande classe de equações diferenciais parciais. Essa aproximação consiste em escolher um número finito de funções conhecidas e, através de combinações lineares dessas funções, encontrar a combinação que minimiza a diferença entre a função obtida e a função que satisfaz à equação diferencial, para uma determinada condição de contorno.

5.1 Aplicação do método

Por simplicidade, o comportamento acústico de uma cavidade será analisado levando-se em conta apenas duas dimensões. Os resultados, contudo, são interessantes sob o ponto de vista prático, pois, em cavidades — auditórios, por exemplo — onde a altura é bem menor que as demais dimensões, os principais defeitos acústicos estão geralmente associados ao formato da planta baixa e à posição dos absorventes e espalhadores acústicos. Além disso, para cavidades onde o teto e o piso são paralelos e com impedâncias acústicas relativamente altas — paredes do teto e do piso aproximadamente rígidas — as frequências de ressonância dos modos cujas ondas se propagam numa direção *não paralela* ao teto podem ser calculadas por [16]

$$f_{i,n}^{3d} = \left\{ (f_i^{2d})^2 + \left[\left(\frac{n}{L_z} \right) \left(\frac{c}{2} \right) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (5.1)$$

onde $i = 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$, L_z é a menor distância entre o teto e o piso e f_i^{2d} são as frequências de ressonância dos modos cujas ondas se propagam em direções paralelas ao teto, ou seja, os modos que podem ser investigados a partir da planta baixa.

Dessa forma, o domínio dentro do qual se deseja resolver a equação de onda é a própria planta baixa da cavidade. Nesse domínio o excesso de pressão (excesso em relação à pressão ambiente) satisfaz à equação de Helmholtz

$$\nabla^2 p(x, y, t) = \left(\frac{1}{c^2}\right) \frac{\partial^2 p(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (5.2)$$

e as condições de contorno

$$\vec{n} \cdot \nabla p = -\frac{\rho}{Z(\Gamma_{2d})} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (5.3)$$

onde Z é a impedância acústica normal às paredes, ρ é a densidade do ar e Γ_{2d} é a curva que delimita a planta baixa. Note-se que quando a impedância Z tende para infinito, a equação 5.3 tende para

$$\vec{n} \cdot \nabla p = 0, \quad (5.4)$$

que corresponde à condição de contorno para paredes perfeitamente rígidas, onde não há absorção de energia acústica.

Uma aproximação da solução $p(x, y, t)$ pode ser dada por

$$p(x, y, t) \approx \phi(x, y, t), \quad (5.5)$$

onde $\phi(x, y, t)$ corresponde a uma combinação linear de funções localmente definidas — $N_n(x, y)$ — ponderadas por coeficientes que variam com o tempo — $\Phi_n(t)$:

$$\phi(x, y, t) = \sum_n \Phi_n(t) N_n(x, y). \quad (5.6)$$

As funções $N_n(x, y)$ (funções elementares lineares ou *linear shape functions* [3] [4]) são definidas de forma que os coeficientes $\Phi_n(t)$ correspondam aos excessos de pressão em determinados pontos espaçados do domínio, pontos esses chamados de nós, e correspondentes aos vértices dos elementos finitos. Para tanto, parte-se de um elemento finito, conforme mostrado na figura 5.1. No caso de interesse aqui, um elemento finito equivale a um segmento de plano triangular que deve aproximar, naquela região do domínio, a superfície de pressão que satisfaz à equação de Helmholtz, e à condição de contorno dada pela equação 5.3.

Cada elemento finito, ou seja, cada segmento de plano, é definido por três nós, i, j, k , e por um contorno formado por três segmentos de reta que ligam esses nós. A equação de interpolação para o plano que contém esses nós é

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad (5.7)$$

onde α_1 , α_2 e α_3 são coeficientes reais. Além disso, a função ϕ assume os valores Φ_i , Φ_j e Φ_k nos pontos (X_i, Y_i) , (X_j, Y_j) e (X_k, Y_k) , respectivamente. Ou seja,

$$\Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i, \quad (5.8)$$

$$\Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j, \quad (5.9)$$

$$\Phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k. \quad (5.10)$$

Resolvendo-se esse sistema de equações para α_1 , α_2 e α_3 , e substituindo-se o resultado na equação 5.7, a função aproximante ϕ pode ser dada, na região do domínio correspondente a um único elemento, como

$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k, \quad (5.11)$$

onde

$$N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y],$$

$$N_j = \frac{1}{2A} [a_j + b_j x + c_j y],$$

$$N_k = \frac{1}{2A} [a_k + b_k x + c_k y],$$

dentro do elemento e $N_i = N_j = N_k = 0$ fora do elemento, e ainda

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, \quad b_i = Y_j - Y_k, \quad c_i = X_k - X_j,$$

$$a_j = X_k Y_i - X_i Y_k, \quad b_j = Y_k - Y_i, \quad c_j = X_i - X_k,$$

$$a_k = X_i Y_j - X_j Y_i, \quad b_k = Y_i - Y_j, \quad c_k = X_j - X_i,$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix}, \quad (5.12)$$

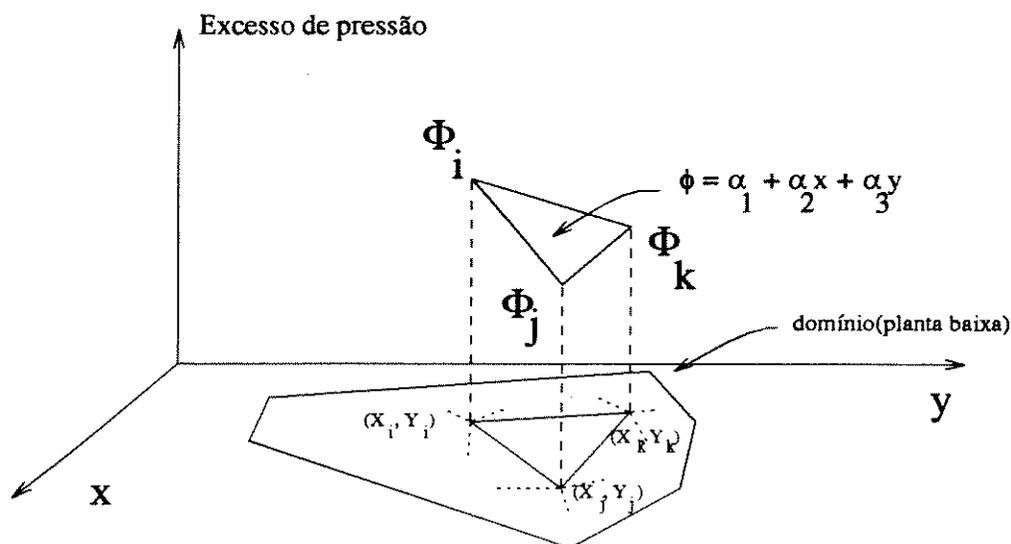


Figura 5.1: Elemento triangular linear.

onde A é a área do triângulo definido pelos pontos (X_i, Y_i) , (X_j, Y_j) e (X_k, Y_k) .

Dessa forma, cada elemento finito — segmento de plano triangular — fica associado a três funções elementares lineares — N_i , N_j e N_k — sendo que cada uma delas é igual a um em seu respectivo nó, e igual a zero nos outros dois, como pode ser facilmente constatado nas equações anteriores.

Olhando novamente para a equação 5.6, pode-se perceber que a função aproximante ϕ é formada por vários segmentos de planos triangulares justapostos de modo a formarem uma superfície contínua¹ que aproxima a superfície de pressão p . Essa aproximação de p por um somatório de funções localmente definidas proporciona vantagens, sob o ponto de vista computacional. Além disso, para o problema específico da propagação de ondas sonoras, que leva a uma equação diferencial parcial hiperbólica, sabe-se de antemão que se chegará a um problema típico de autovalores e autovetores.

Retornando-se agora para a equação de Helmholtz, pode-se substituir nela a solução aproximada $\phi(x, y, t)$. Mas, como essa função não satisfaz exatamente à equação diferencial, um termo residual deve ser considerado — i.e. $(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}) \neq 0$.

Nos desenvolvimentos a seguir, tem-se como meta obter as equações de elementos finitos e, através delas, os coeficientes Φ_n . O primeiro passo nesse sentido é ponderar,

¹Uma prova dessa continuidade pode ser encontrada em [3].

pelo método de Galerkin [3], o resíduo encontrado para cada elemento:

$$-\int_A [N]^T \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) dA = 0, \quad (5.13)$$

onde $[N]^T$ é o vetor coluna que contém as funções elementares lineares relativas a um elemento, e A é a região do domínio coberta por esse elemento.

A integral 5.13 impõe que o resíduo encontrado seja ortogonal às funções elementares, N_n , utilizadas na aproximação $\phi(x, y, t)$. Essa imposição, que caracteriza o método de Galerkin, leva à obtenção dos coeficientes Φ_n que minimizam o resíduo médio quadrático. Em outras palavras, se o resíduo encontrado é ortogonal às funções N_n utilizadas na aproximação da solução p , isso significa que não há nenhuma outra combinação linear dessas funções que reduza ainda mais o resíduo.

Cabe observar que o uso de funções elementares lineares proporciona derivadas descontínuas entre os elementos. Assim sendo, as derivadas duplas, dentro da integral, devem ser modificadas pela regra do produto para diferenciação

$$\frac{\partial}{\partial x} ([N]^T \frac{\partial \phi}{\partial x}) = [N]^T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad (5.14)$$

ou seja

$$[N]^T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} ([N]^T \frac{\partial \phi}{\partial x}) - \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad (5.15)$$

Fazendo-se o mesmo para $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$, a integral 5.13 torna-se

$$-\int_A \frac{\partial}{\partial x} ([N]^T \frac{\partial \phi}{\partial x}) dA - \int_A \frac{\partial}{\partial y} ([N]^T \frac{\partial \phi}{\partial y}) dA + \quad (5.16)$$

$$\int_A \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dA + \int_A \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dA + \int_A [N]^T \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) dA = 0;$$

onde as duas primeiras integrais sobre A podem ser substituídas por integrais de contorno sobre a fronteira de A , de acordo com o teorema de Green ², resultando em

$$-\int_{\Gamma_e} [N]^T \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \theta d\Gamma_e - \int_{\Gamma_e} [N]^T \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \theta d\Gamma_e + \quad (5.17)$$

²Olmstead, John M. H., 1961. Advanced Calculus, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

$$\int_A \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dA + \int_A \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dA + \int_A [N]^T \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) dA = 0;$$

onde θ é o ângulo que o vetor normal ao contorno do elemento — e que aponta para fora deste — faz com o eixo das abscissas, no sentido anti-horário, e Γ_e é o contorno do elemento.

Aplicando-se $\phi(t) = [N][\Phi(t)]^T$ à integral anterior, resulta

$$- \int_{\Gamma_e} [N]^T \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \theta \right) d\Gamma_e + \left(\int_A \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) dA [\Phi(t)]^T + \left(\frac{1}{c^2} \int_A [N]^T [N] dA \right) \frac{\partial^2 [\Phi(t)]^T}{\partial t^2} = 0; \quad (5.18)$$

Note-se que apenas na primeira integral não foi feita a substituição de $\phi(t)$. Isso acontece porque as derivadas $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ nas fronteiras entre os elementos — contorno Γ_e — são usadas apenas para impor as condições de contorno derivativas, como será visto adiante. Fora isso, a primeira integral, também referida como *interelement requirement*³, é desprezada como um termo de erro. Esse termo de erro pode ser interpretado como uma indicação de que quanto menores os elementos, ou seja, quanto menores as diferenças de gradientes entre os elementos vizinhos, menor o erro de aproximação da solução.

Em decorrência desse termo desprezado, fica evidente que o resíduo gerado não é mais ortogonal às funções elementares, como se pretendia com a integral 5.13. Mas isso não invalida o método, posto que esse termo desprezado pode ser feito tão pequeno quanto se queira.

Para o desenvolvimento da equação 5.18 de uma forma computacionalmente adequada, através da construção de equações algébricas a partir da contribuição de cada elemento individualmente, é utilizada a equação 5.11, onde

$$[N] = [N_i \ N_j \ N_k], \quad (5.19)$$

³De acordo com discussão encontrada na página 32 em Larry J. Segerlind. (1984). *Applied Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons.

que leva a

$$\frac{\partial[N]}{\partial x} = \frac{1}{2A} [b_i \ b_j \ b_k]; \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial[N]}{\partial y} = \frac{1}{2A} [c_i \ c_j \ c_k]; \quad (5.21)$$

dessa forma

$$\frac{\partial[N]^T}{\partial x} \frac{\partial[N]}{\partial x} = \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

e

$$\frac{\partial[N]^T}{\partial y} \frac{\partial[N]}{\partial y} = \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

e a integral $\int_A \left(\frac{\partial[N]^T}{\partial x} \frac{\partial[N]}{\partial x} + \frac{\partial[N]^T}{\partial y} \frac{\partial[N]}{\partial y} \right) dA = [K^{(e)}]$ pode ser calculada dentro de um dado elemento e :

$$[K^{(e)}] = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

e da mesma forma, a integral $\frac{1}{c^2} \int_A [N]^T [N] dA = [M^{(e)}]$, calculada para um dado elemento e :

$$[M^{(e)}] = \frac{1}{c^2} \int_A \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k \\ N_i N_j & N_j^2 & N_j N_k \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k^2 \end{bmatrix} dA. \quad (5.25)$$

A integral acima pode ser mais comodamente calculada através de uma mudança no sistema de coordenadas utilizado [3] e o resultado é

$$[M^{(e)}] = \frac{A}{12c^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

Das parcelas da equação 5.18, falta resolver apenas a integral — $-\int_{\Gamma_e} [N]^T \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \theta \right) d\Gamma_e$. Essa integral é calculada apenas para os elementos do contorno do domínio, onde há condição de contorno dada pela equação 5.3. Como já foram discutidas, as condições de contorno em estudo, aqui, correspondem às características acústicas das paredes que limitam a cavidade, ou dos absorventes acústicos aí colocados. Ou seja, $\vec{n} \cdot \nabla p = -\frac{\rho}{Z} \frac{\partial p}{\partial t}$ onde há absorventes com impedância Z e $\vec{n} \cdot \nabla p = 0$ onde as paredes são perfeitamente rígidas. Tem-se então, para os elementos de fronteira onde as paredes não são perfeitamente rígidas, a seguinte condição de contorno para a solução aproximada $\phi(x, y, t)$:

$$\vec{n} \cdot \nabla \phi = -\frac{\rho}{Z} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (5.27)$$

que pode ser aplicada à integral de *interelement requirement* da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} -\int_{\Gamma_e} [N]^T \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \theta \right) d\Gamma_e &= \\ -\int_{\Gamma_e} [N]^T (\vec{n} \cdot \nabla \phi) d\Gamma_e &= \\ -\int_{\Gamma_e} [N]^T \left(-\frac{\rho}{Z} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) d\Gamma_e, & \end{aligned} \quad (5.28)$$

ou ainda

$$\frac{\rho}{Z} \int_{\Gamma_e} [N]^T [N] d\Gamma_e \frac{\partial [\Phi(t)]^T}{\partial t}. \quad (5.29)$$

A integral acima deve ser calculada em torno de cada elemento da fronteira onde $\vec{n} \cdot \nabla \phi \neq 0$. Essa integral ainda pode ser dividida em três, cada uma correspondente a um lado do elemento triangular. Dessas três integrais, apenas deve ser calculada aquela ou aquelas correspondentes aos lados nos quais as condições de fronteira são especificadas. Seja um desses lados denotado por Γ_{ab} e $Z = Z_{ab}$ então a integral a ser calculada é

$$\frac{\rho}{Z_{ab}} \int_{\Gamma_{ab}} [N]^T [N] d\Gamma \frac{\partial [\Phi(t)^{(e)}]^T}{\partial t} = [B^{(e)}] \frac{\partial [\Phi(t)^{(e)}]^T}{\partial t}, \quad (5.30)$$

onde

$$[B^{(e)}] = \frac{\rho}{Z_{ab}} \int_{\Gamma_{ab}} \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k \\ N_i N_j & N_j^2 & N_j N_k \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k^2 \end{bmatrix} d\Gamma_e. \quad (5.31)$$

Mas se, por exemplo, o lado ab corresponde ao lado ij , então, sobre esse lado $N_k = 0$ ⁴, e a integral se torna

$$[B^{(e)}] = \frac{\rho}{Z_{ij}} \int_{\Gamma_{ij}} \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & 0 \\ N_i N_j & N_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\Gamma_e. \quad (5.32)$$

Considerações semelhantes para os lados jk e kj levam aos seguintes possíveis resultados para a integral:

$$[B^{(e)}] = \frac{L_{ij}}{6 c Z_{ij}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ para o lado } ij, \quad (5.33)$$

$$[B^{(e)}] = \frac{L_{jk}}{6 c Z_{jk}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ para o lado } jk, \quad (5.34)$$

$$[B^{(e)}] = \frac{L_{ik}}{6 c Z_{ik}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ para o lado } ik, \quad (5.35)$$

onde L_{ab} é o comprimento do lado ab e c a velocidade do som.

Depois de obtidas as matrizes $[M^{(e)}]$, $[B^{(e)}]$ e $[K^{(e)}]$ para cada elemento — com a ressalva de que as matrizes $[B^{(e)}]$ só são calculadas para os elementos que formam o contorno do domínio, como já foi discutido — pode-se montar as matrizes gerais que descrevem o sistema aproximado numericamente: $[M]$, $[B]$ e $[K]$, onde cada matriz é quadrada e de ordem nn , onde nn é o número de nós (i.e., junções entre elementos vizinhos) utilizados.

Dessa forma, o modelo físico descrito em termos da equação de Helmholtz mais condições de contorno derivativas é aproximado pelo método dos elementos finitos por

⁴De acordo com a equação 5.11, a contribuição da função de interpolação N_k é nula para o segmento de reta que corresponde ao lado ij do segmento de plano triangular correspondente ao elemento finito.

$$[M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\Phi(t)]^T + [B] \frac{\partial}{\partial t} [\Phi(t)]^T + [K] [\Phi(t)]^T = 0, \quad (5.36)$$

ou mais compactamente

$$[M] \ddot{\Phi} + [B] \dot{\Phi} + [K] \Phi = 0, \quad (5.37)$$

onde $\ddot{\Phi} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\Phi(t)]^T$, $\dot{\Phi} = \frac{\partial}{\partial t} [\Phi(t)]^T$ e $\Phi = [\Phi(t)]^T$.

Para conversão dessa equação em um sistema de equações de primeira ordem, uma nova variável $\Phi_{aux} = \dot{\Phi}$ é utilizada:

$$\ddot{\Phi} = -[M]^{-1}[B]\dot{\Phi} - [M]^{-1}[K]\Phi, \quad (5.38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Phi}_{aux} = -[M]^{-1}[B]\Phi_{aux} - [M]^{-1}[K]\Phi, \\ \dot{\Phi} = \Phi_{aux}; \end{array} \right\} \quad (5.39)$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi}_{aux} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[M]^{-1}[B] & -[M]^{-1}[K] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{aux} \\ \Phi \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

onde [I] é a matriz identidade e [0] é uma matriz de zeros, ambas quadradas e de ordem nn .

Fazendo-se

$$[A] = \begin{bmatrix} -[M]^{-1}[B] & -[M]^{-1}[K] \\ [I] & [0] \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

$$Y = \begin{bmatrix} \Phi_{aux} \\ \Phi \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

obtem-se

$$\dot{Y} = [A]Y, \quad (5.43)$$

onde a matriz [A] contém informações de interesse, que podem ser extraídas através de seus autovalores e autovetores, por exemplo.

Uma boa analogia para isso pode ser encontrada na solução da equação simples $\dot{y} = Ay$, sendo $y(t)$ uma função escalar e A uma constante. A solução para esta

equação é dada por $y(t) = \exp(At)$. E se A é um número complexo, $y(t)$ é um cossenóide de frequência dada pela parte imaginária de A , e envelope dado pela parte real. De forma análoga, desde que exista uma matriz não-singular $[S]$, tal que $[S][A][S]^{-1} = [D]$, onde $[D]$ é uma matriz diagonal, pode-se fazer a seguinte manipulação da equação 5.43:

$$[S]\dot{Y} = [S][A][S]^{-1}[S]Y, \quad (5.44)$$

e fazendo-se $Z = [S]Y$, a equação se reduz a:

$$\dot{Z} = [D]Z, \quad (5.45)$$

que pode ser separado em nn equações

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i, \quad 1 \leq i \leq nn \quad (5.46)$$

onde λ_i são os elementos da matriz diagonal $[D]$, correspondentes aos autovalores de $[A]$. Considerando-se ainda que os autovetores $[6]$ de $[A]$, que formam a matriz de transformação $[S]$, são compostos por números que representam os excessos de pressão nos nós (Φ) e as velocidades de variação desses excessos ($\dot{\Phi}$), pode-se concluir que a solução da equação 5.43 para qualquer condição inicial Y_0 pode ser dada pela soma ponderada dos nn autovetores de $[A]$, cada um com uma frequência de oscilação e um envelope próprios, dados respectivamente pelas partes imaginárias e reais dos autovalores correspondentes.

Posto isso, fica evidente que os autovetores de $[A]$ correspondem aproximadamente aos modos de ressonância do som dentro da cavidade, da mesma forma que os autovalores complexos associados a esses autovetores correspondem às suas frequências e constantes de atenuação respectivas.

Capítulo 6

Implementação dos programas

Para a implementação do método dos elementos finitos de uma forma razoavelmente flexível, foram desenvolvidos quatro programas em linguagem de programação C:

- `interp.c` — interpreta um arquivo texto que descreve a planta baixa da cavidade e gera um arquivo numérico — extensão `itp` — com essas informações organizadas;
- `exib.c` — a partir do arquivo gerado por `interp.c`, desenha, no terminal de vídeo, a planta baixa da cavidade com os elementos e os absorventes acústicos indicados respectivamente por retas pontilhadas e retas duplas. Esse programa tem como principal finalidade a visualização e correção de eventuais erros nas malhas de elementos finitos;
- `matrizes.c` — monta, a partir do arquivo gerado por `interp.c`, as matrizes $[M]$, $[B]$ e $[K]$. Em seguida esse programa manipula essas matrizes e gera um arquivo numérico — extensão `maz` — contendo as matrizes $-[M]^{-1}[B]$ e $-[M]^{-1}[K]$;
- `maz_mlab.c` — lê o arquivo gerado por `matrizes.c` e gera um arquivo em um formato compatível com o programa `MATLABTM`. Dessa forma as matrizes $-[M]^{-1}[B]$ e $-[M]^{-1}[K]$ podem ser manipuladas comodamente:

Esses programas trabalham em *linha de comando*. Eles são *chamados* junto com um arquivo de *entrada* e geram um outro arquivo como *saída*. O arquivo de saída recebe o mesmo nome do que foi utilizado como entrada, alterando apenas sua extensão.

Além dos programas em C, foi desenvolvido, também, um programa para ser executado dentro do MATLABTM. Esse programa lê o arquivo gerado por maz_mlab.c (i.e., as matrizes $-[M]^{-1}[B]$ e $-[M]^{-1}[K]$) e monta a matriz $[A]$, conforme a equação 5.41. Além disso, essa rotina calcula os autovalores de $[A]$ e, a partir destes, calcula as frequências em ciclos por segundo e o fator de atenuação em s^{-1} para cada modo. Esses resultados são escritos em forma de tabela num arquivo texto gerado pelo programa.

As figuras 6.2, 6.3 e 6.4 mostram diagramas em blocos para os programas interp, matrizes e modos, respectivamente. A figura 6.5 mostra a relação entre os programas implementados.

O programa interp.c exige que os arquivos texto de entrada obedeçam a uma certa gramática na descrição da cavidade, isto é, há certas palavras-chaves que devem ser usadas para indicar início de um determinado conjunto de dados. Esse programa pode gerar uma série de mensagens de erro que possibilitam a correção da gramática do arquivo texto.

Como exemplo, a descrição da cavidade da figura 6.1, modelada por apenas quatro elementos seria:

```
>titulo Trapezio *comentarios entre asteriscos*

>elementos  *i   j   k*

    1         1   5   4
    2         1   2   5
    3         5   2   3
    4         5   3   4 < * a '<' indica final do bloco de dados *

>nos  *x(metros)  y(metros)*
1      0.0         0.0
2     25.65         0.0
3     23.44        19.43
4      1.85        19.43
5     12.7         10.55 <

>absorventes
* elemento  no a   no b   Z/(Q.c) *
    3         2     3     20 <
```

```
>temperatura 27 * graus Celsius *  
>fim
```

onde a impedância do absorvente que cobre uma das paredes é dada de forma adimensional: $z = \frac{Z}{\rho_0 c}$. Além disso, a impedância acústica das demais paredes não é discriminada no arquivo texto. Isso significa que tais paredes são consideradas perfeitamente rígidas — impedância infinita.

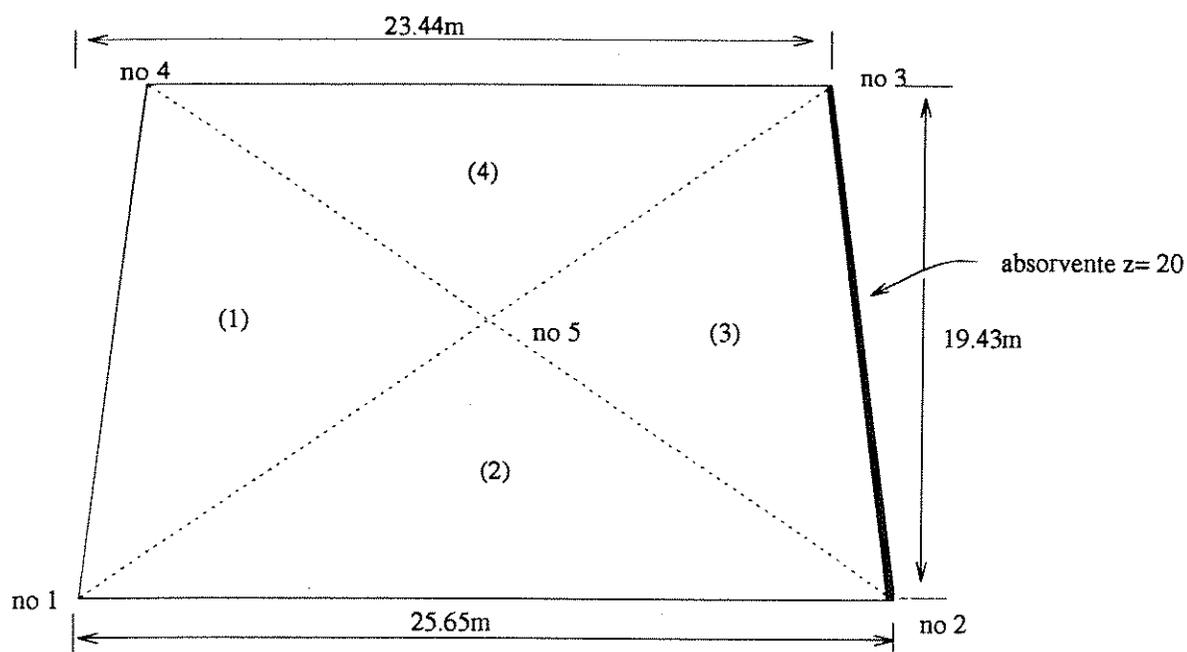


Figura 6.1: Planta baixa descrita por quatro elementos.

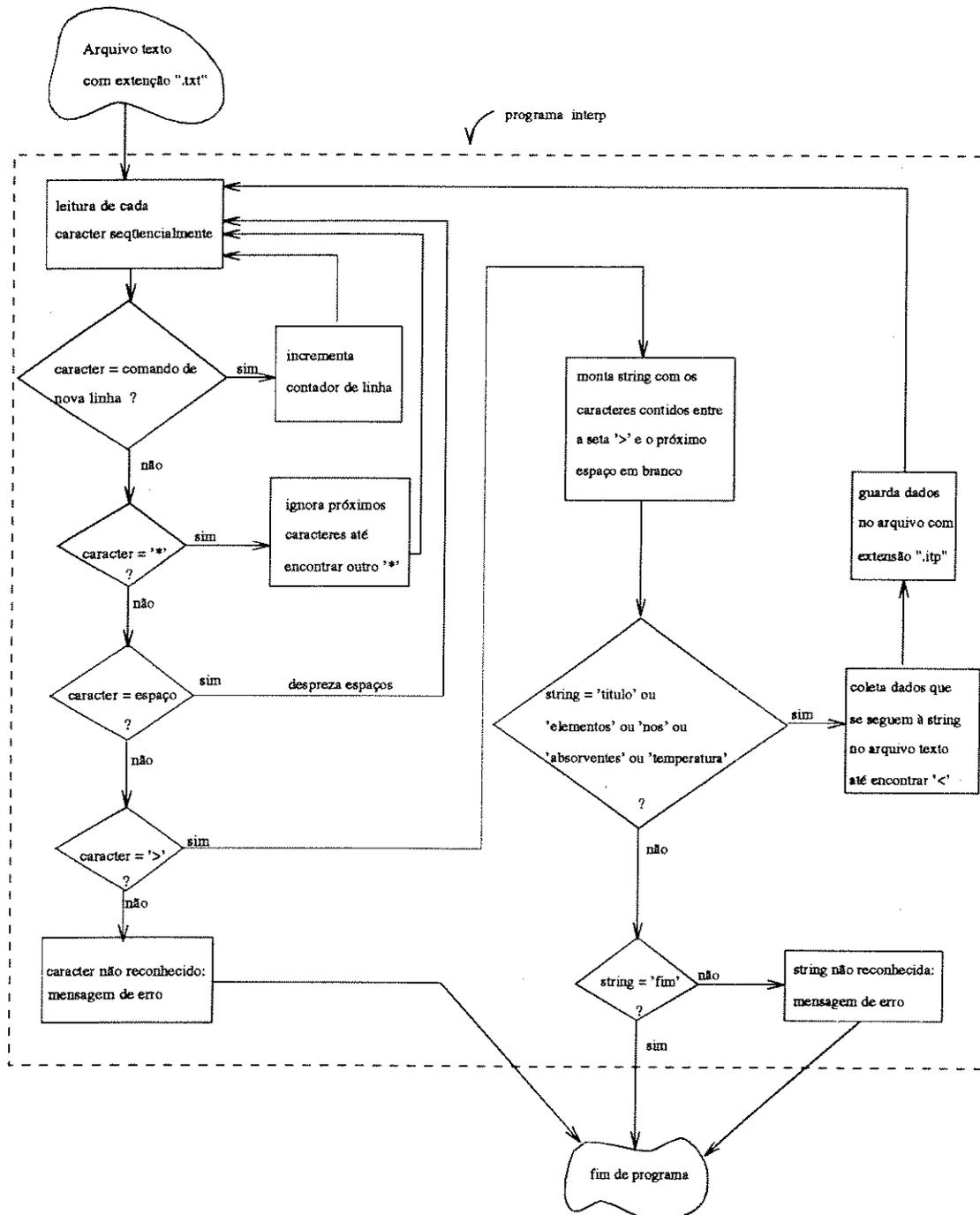


Figura 6.2: Diagrama simplificado para o programa interp.

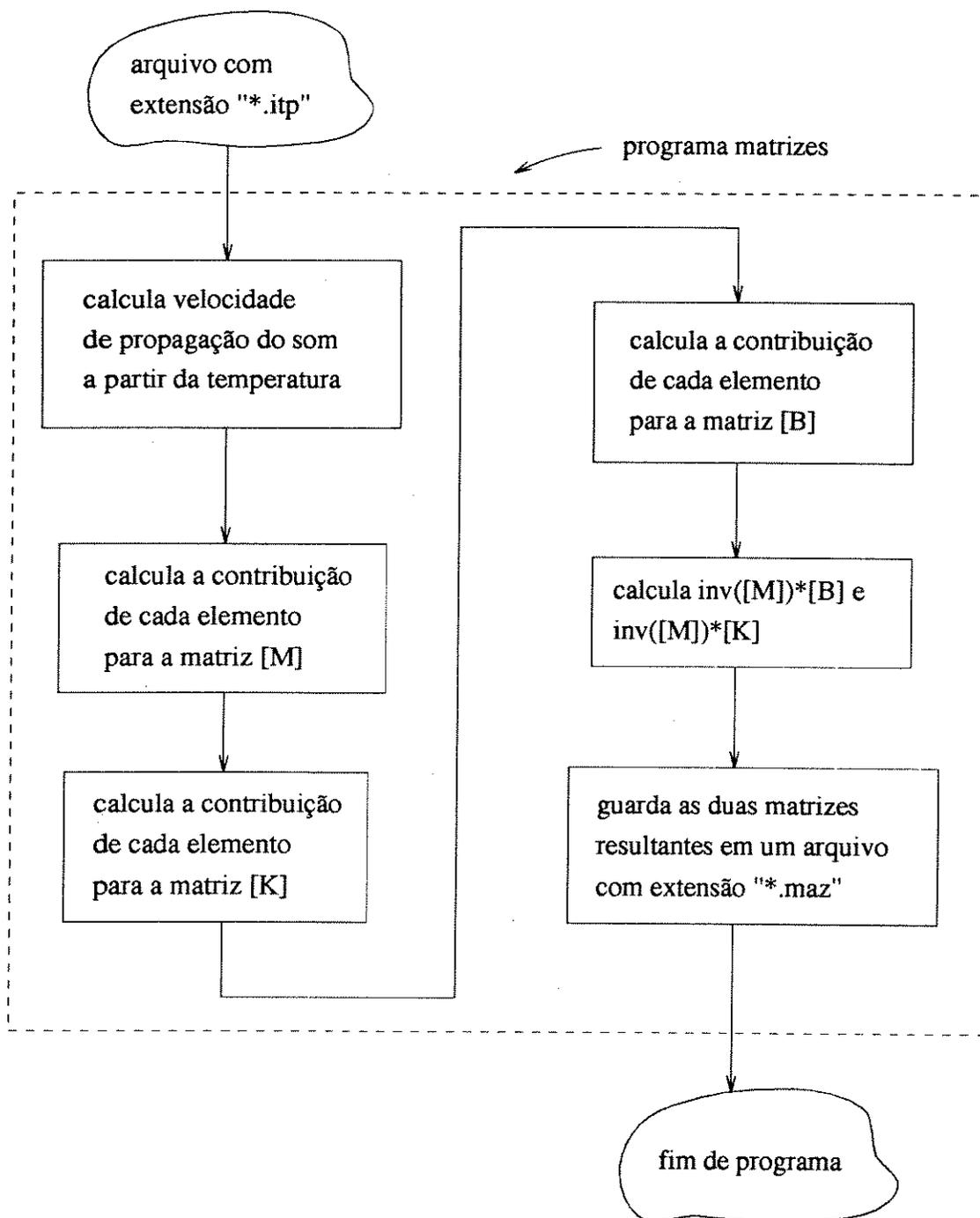


Figura 6.3: Diagrama simplificado para o programa matrizes.

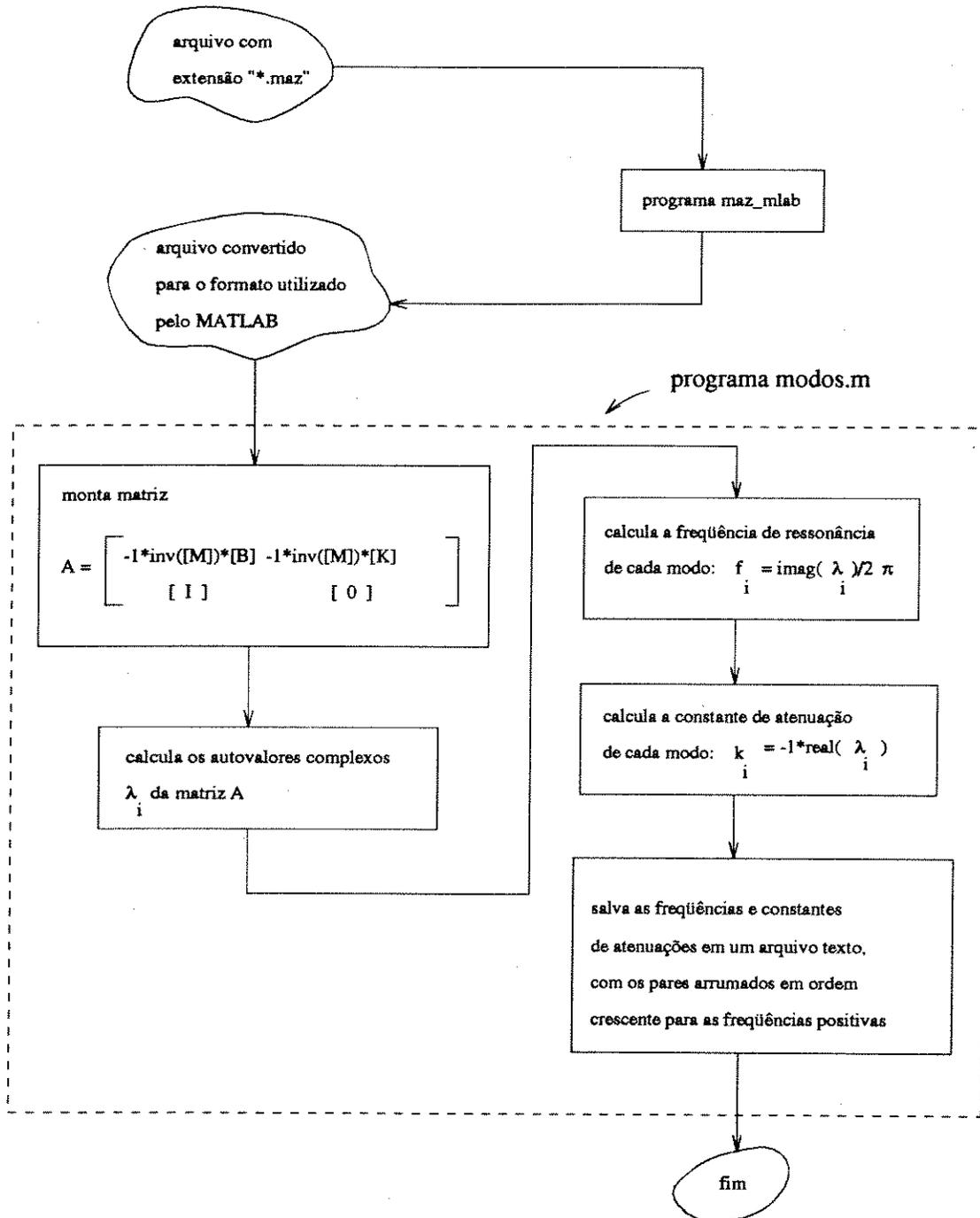


Figura 6.4: Diagrama simplificado para o programa modos.

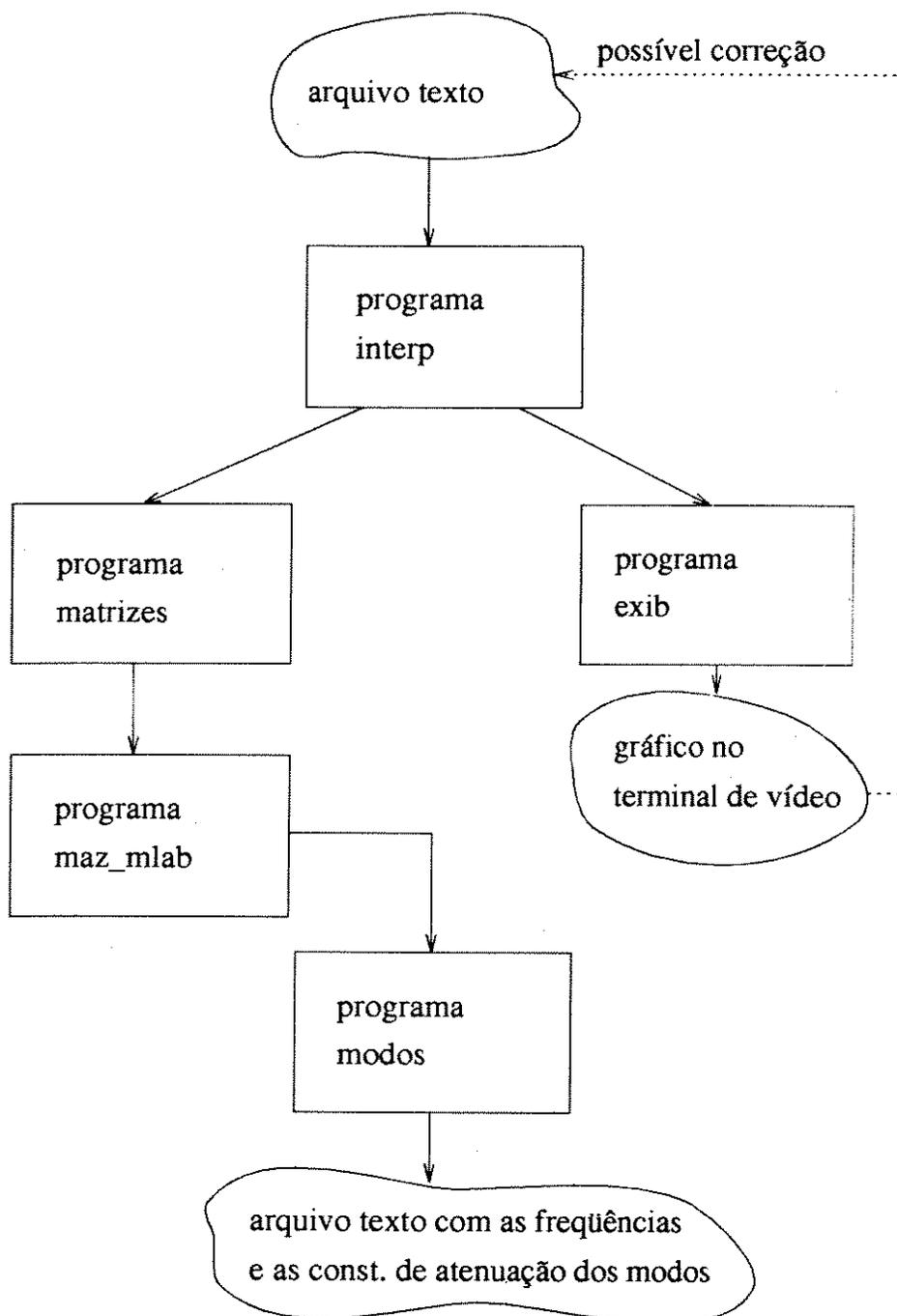


Figura 6.5: Relação entre os programas.

Capítulo 7

Resultados

7.1 Teste de convergência

Para se avaliar a precisão das soluções numéricas obtidas pelo método dos elementos finitos, são apresentadas a seguir testes de convergência para três modos de ressonância das ondas de som e respectivas constantes de atenuação. Como a planta baixa do recinto utilizado nesse teste possui forma retangular, dois modos foram escolhidos de forma a representarem as ondas com direções de propagação perpendiculares a cada par de paredes paralelas — modos (0,1) e (1,0). Da mesma forma, o terceiro modo foi escolhido como um representante das ondas que se propagam numa direção oblíqua às paredes — modo(1,1). As figuras 7.1, 7.2 e 7.3 mostram um esboço das direções de propagação das ondas sonoras que formam cada um dos três modos de ressonância, respectivamente.

No cálculo teórico da frequência característica de cada modo, é assumido que a atenuação sobre eles é suficientemente pequena para que se possa usar [11]

$$f^{2d} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2}, \quad (7.1)$$

onde f^{2d} é a frequência característica do modo em Hz, $n_x, n_y = 0, 1, 2, 3, \dots$, e l_x, l_y são respectivamente o comprimento e a largura do recinto. Essa equação decorre da solução analítica da equação de onda em um domínio retangular, levando-se em conta apenas duas dimensões, e paredes perfeitamente rígidas.

O cálculo teórico das constantes de atenuação é feito a partir da impedância

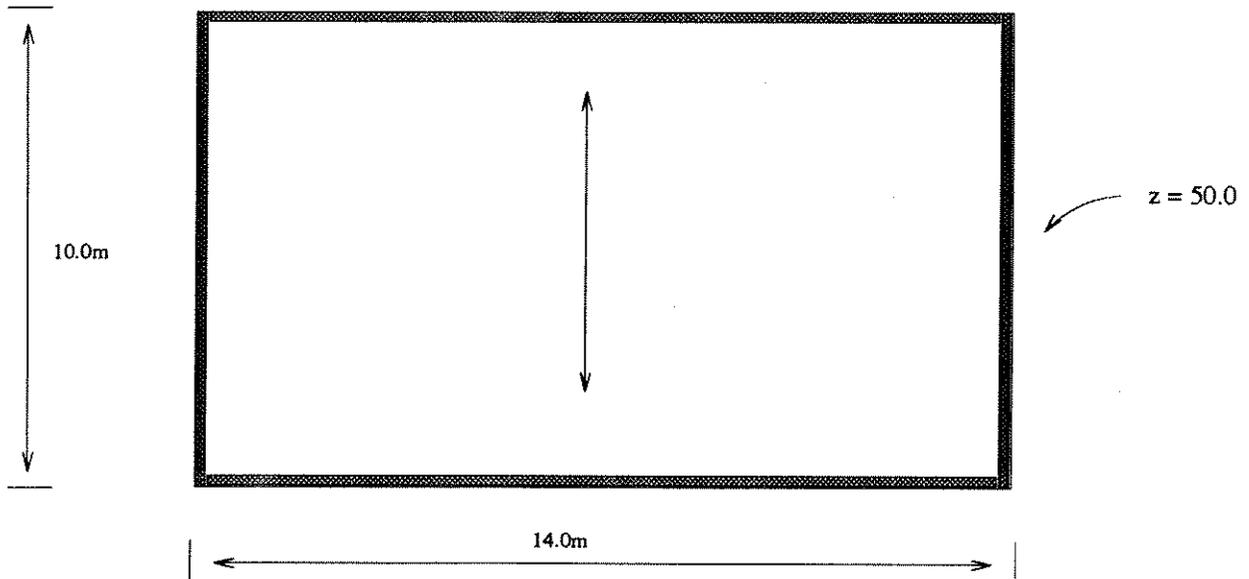


Figura 7.1: Direção de propagação das ondas que formam o modo (0,1).

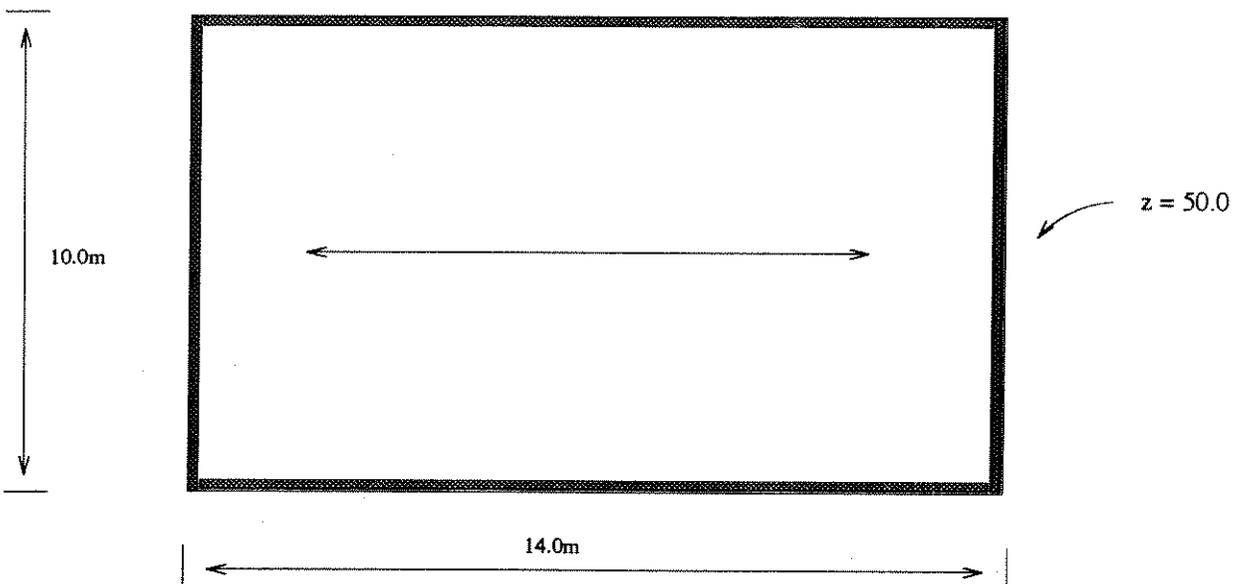


Figura 7.2: Direção de propagação das ondas que formam o modo (1,0).

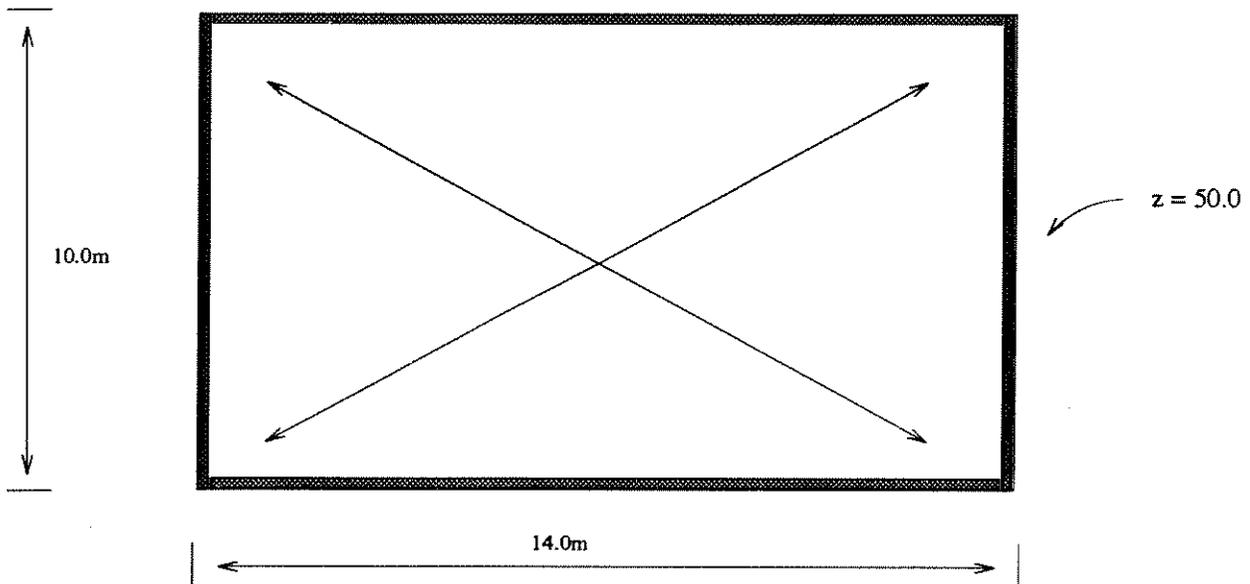


Figura 7.3: Direção de propagação das ondas que formam o modo (1,1).

acústica dos absorventes nas paredes, por meio da teoria das ondas no espaço livre (*free wave theory*) [9]. Esse procedimento é especialmente aplicável quando $z \cos \theta > 1$, onde θ é o ângulo que a onda incidente faz com a normal ao plano do absorvente, e z é a impedância acústica dada na forma adimensional: $z = \frac{Z}{\rho_0 c}$. O coeficiente obtido por esse meio coincide com o fornecido pela análise ondulatória [27]. As equações usadas foram, portanto

$$k_n = -\frac{c}{2} \left[\frac{\delta_x}{l_x} + \frac{\delta_y}{l_y} \right], \quad (7.2)$$

onde $\delta_x = \ln |R_x|^2$, e

$$R_x = \left[\frac{z \cos \theta_x - 1}{z \cos \theta_x + 1} \right]^{\cos \theta_x}.$$

Pode-se notar que, pelas equações acima, para os modos de ressonância paralelos aos absorventes, i. e. $\theta = 90$ graus, a absorção devida a esses absorventes seria nula. Como isso não corresponde à realidade [8], para tais modos δ deve ser corrigido para $\frac{\delta_n}{2}$, onde δ_n é o valor de δ para a onda incidindo normalmente.

O menor erro apresentado em cada uma dos testes de convergência é dado a seguir em termos percentuais, juntamente com os resultados calculados analiticamente:

- erro para a frequência do modo (1,0): 0.41% (12.40 Hz) ;

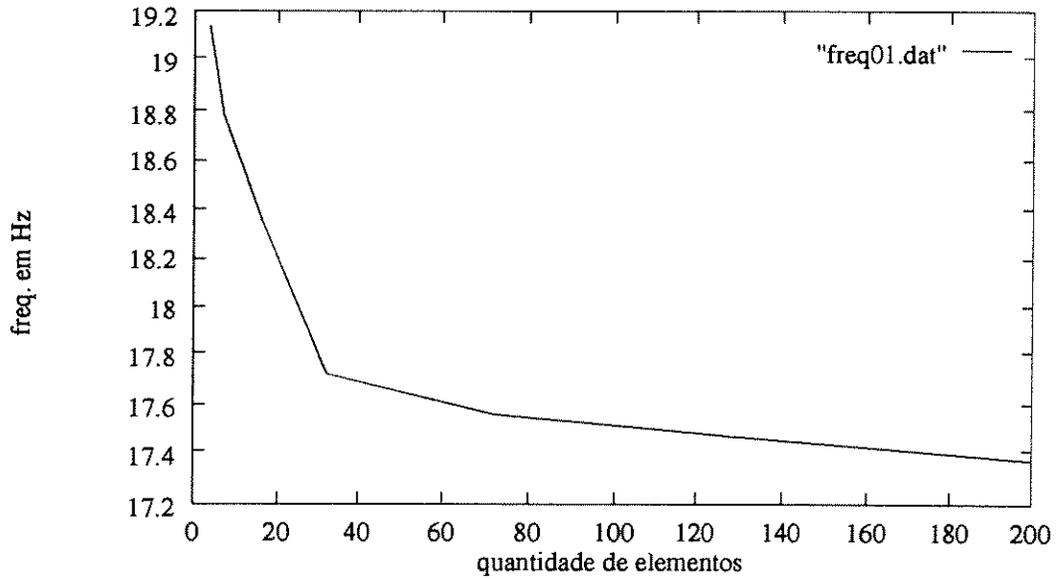


Figura 7.4: Teste de convergência para a frequência do modo (0,1).

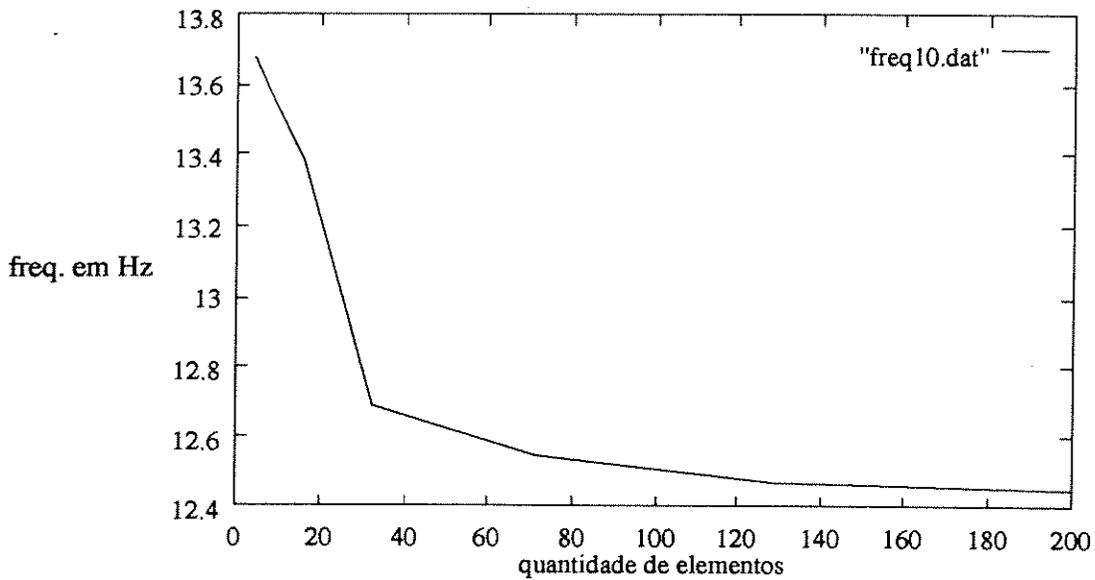


Figura 7.5: Teste de convergência para a frequência do modo (1,0).

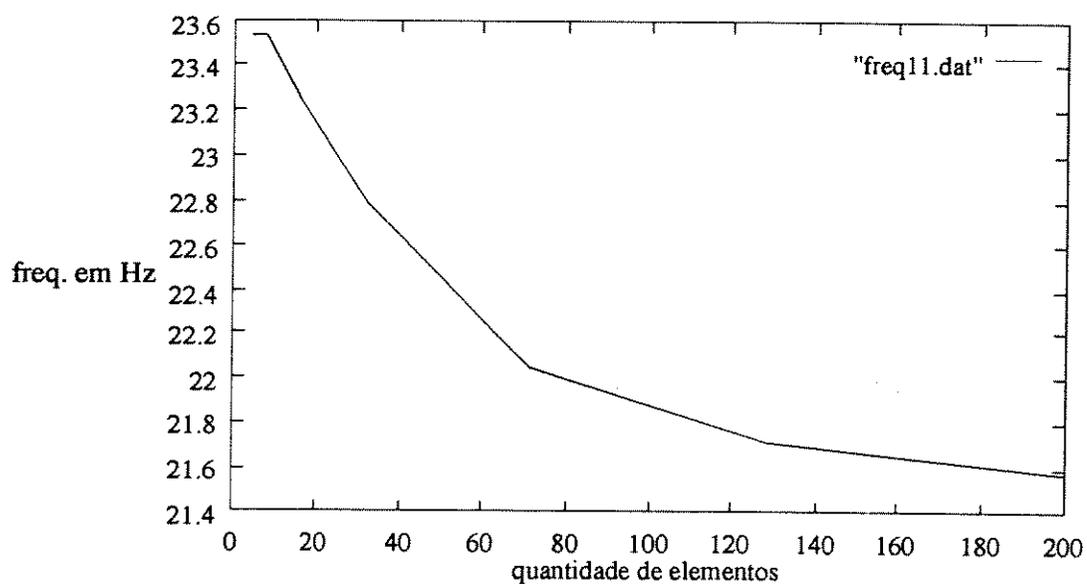


Figura 7.6: Teste de convergência para a frequência do modo (1,1).

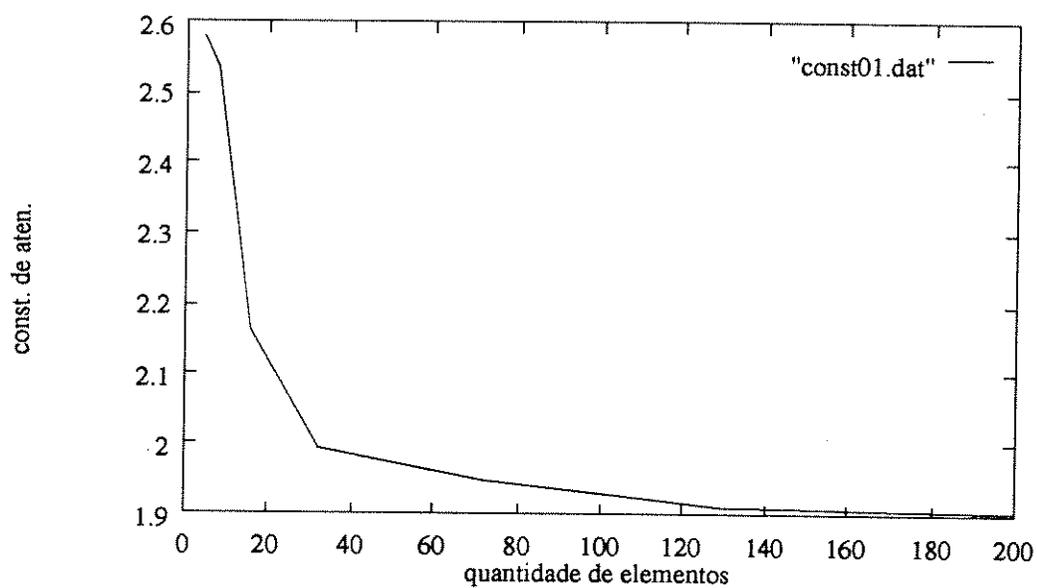


Figura 7.7: Teste de convergência para a constante de atenuação do modo (0,1).

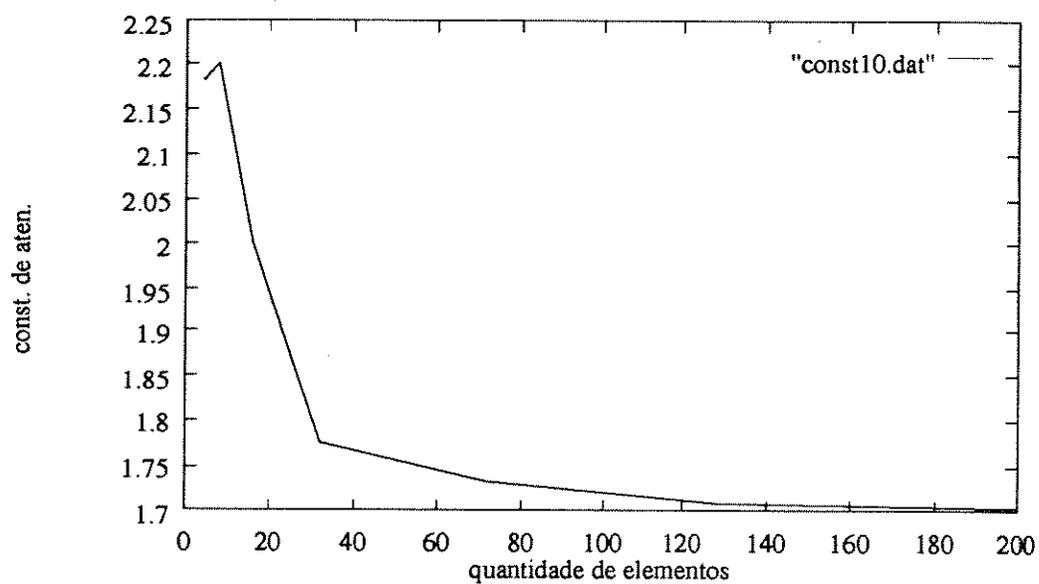


Figura 7.8: Teste de convergência para a constante de atenuação do modo (1,0).

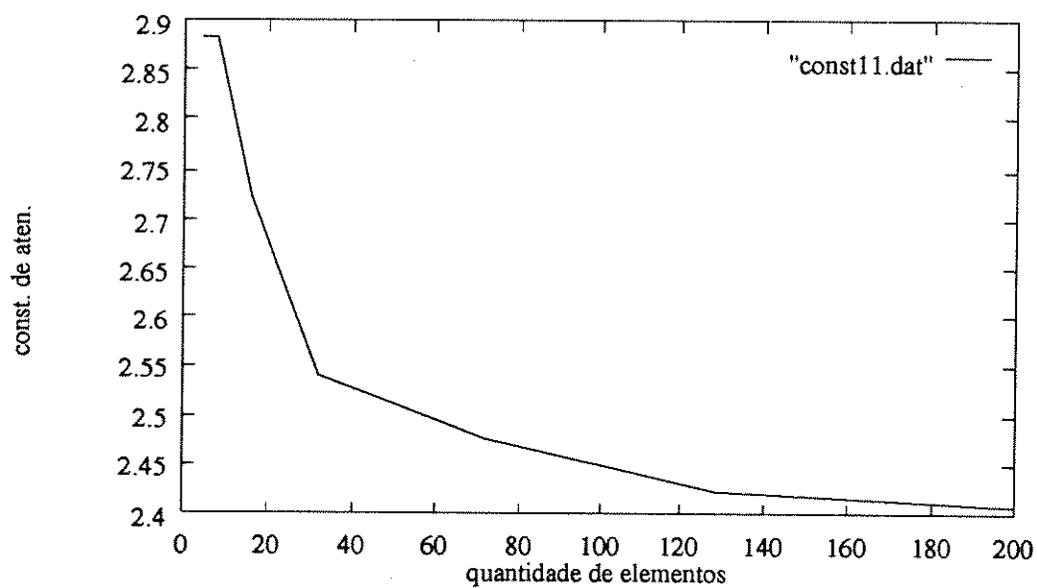


Figura 7.9: Teste de convergência para a constante de atenuação do modo (1,1).

- erro para a constante de atenuação do modo (1,0): 1.36% ($1.69 s^{-1}$);
- erro para a frequência do modo (0,1): 0.32% (17.37 Hz);
- erro para a constante de atenuação do modo (0,1): 0.87% ($1.89 s^{-1}$);
- erro para a frequência do modo (1,1): 1.13% (21.34 Hz);
- erro para a constante de atenuação do modo (1,1): 1.11% ($2.38 s^{-1}$);

As curvas anteriores apresentam uma convergência mais rápida para os modos mais graves. Isto é esperado, pois, para uma boa aproximação dos resultados, o *formato* de cada modo reverberante deve ser aproximado pelos elementos finitos e, como os modos mais graves apresentam uma variação espacial mais lenta, esses podem ser melhor aproximados, para uma dada malha de elementos finitos, que os modos mais agudos.

7.2 Comparação com resultados experimentais

Outra avaliação da precisão das respostas numéricas obtidas foi feita levando-se em conta resultados experimentais obtidos para pequenos modelos de cavidades ressonantes [7].

Dois níveis de refinamento das malhas de elementos finitos são usadas em cada um dos modelos: para o modelo A, uma com 32 elementos e outras duas com 200, e para o modelo B, uma com 29 e outras duas com 232 elementos. Os resultados para cada uma das malhas são apresentados nas respectivas tabelas, juntamente com as frequências de ressonância obtidas experimentalmente.

Para essas simulações, a impedância acústica das paredes que limitam essas cavidades ressonantes é considerada infinita. Essa simplificação do modelo está de acordo com a intenção original do experimento de Richard H. Bolt, onde foram utilizados materiais bastante rígidos, para que a influência da absorção acústica sobre a frequência dos modos de ressonância fosse desprezível.

Tabela 7.1: Resultados para o modelo A com 32 elementos.

modo	freqüência experimental(Hz)	freqüência calculada	erro
01	886	911	2.8%
11	1153	1242	7.7%

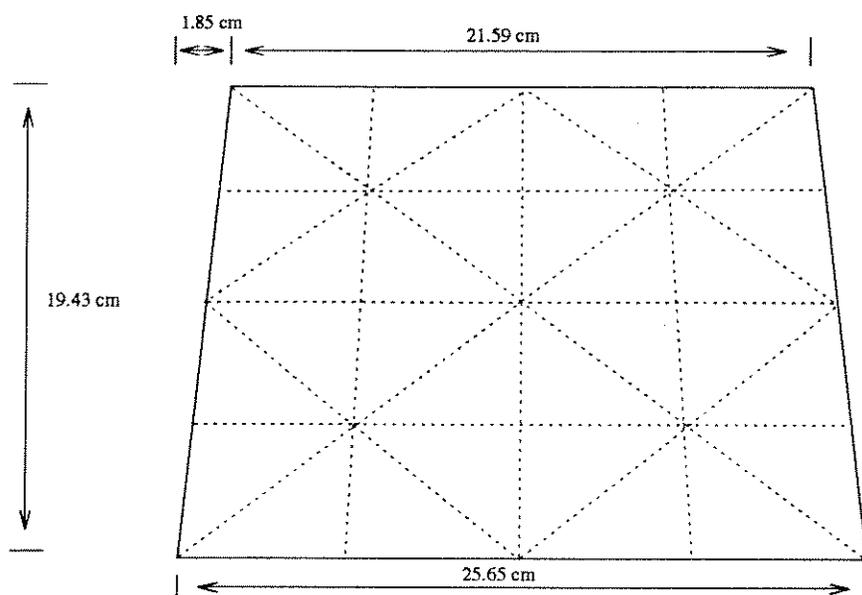


Figura 7.10: Malha de elementos finitos com 32 elementos para o modelo A.

Tabela 7.2: Resultado para o modelo A com 200 elementos.

modo	freqüência medida(Hz)	freqüência calculada	erro percentual
01	886	896	1.1%
11	1153	1176	2.0%

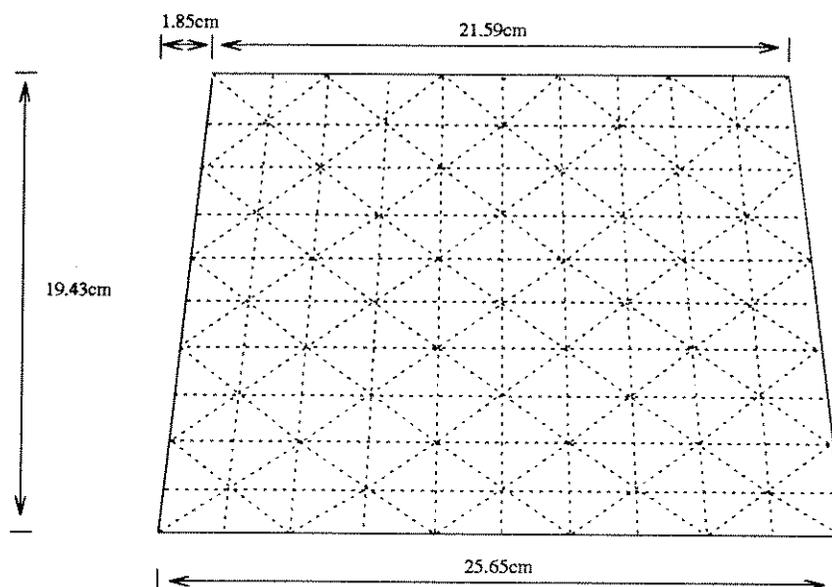


Figura 7.11: Malha de elementos finitos com 200 elementos para o modelo A.

Tabela 7.3: Resultado para o modelo A com outra malha de elementos finitos.

modo	freqüência medida(Hz)	freqüência calculada	erro percentual
01	886	897	1.2%
11	1153	1177	2.1%

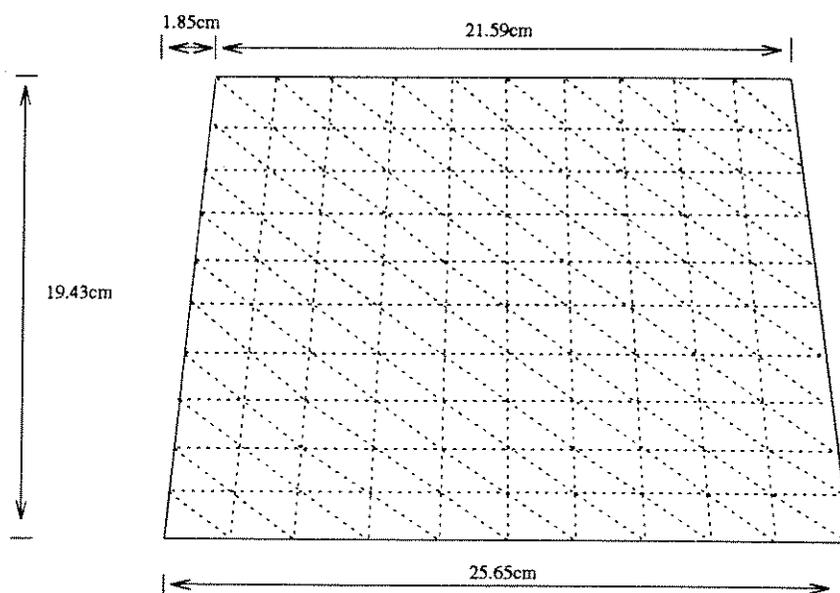


Figura 7.12: Outra possível malha com 200 elementos para o modelo A.

Tabela 7.4: Resultado para o modelo B com 29 elementos.

modo	freqüência medida(Hz)	freqüência calculada	erro pectual
10	825	878	6.8%
01	900	955	6.1%
20	1300	1475	13%
11	1400	1540	10%
02	1800	1977	9.8%

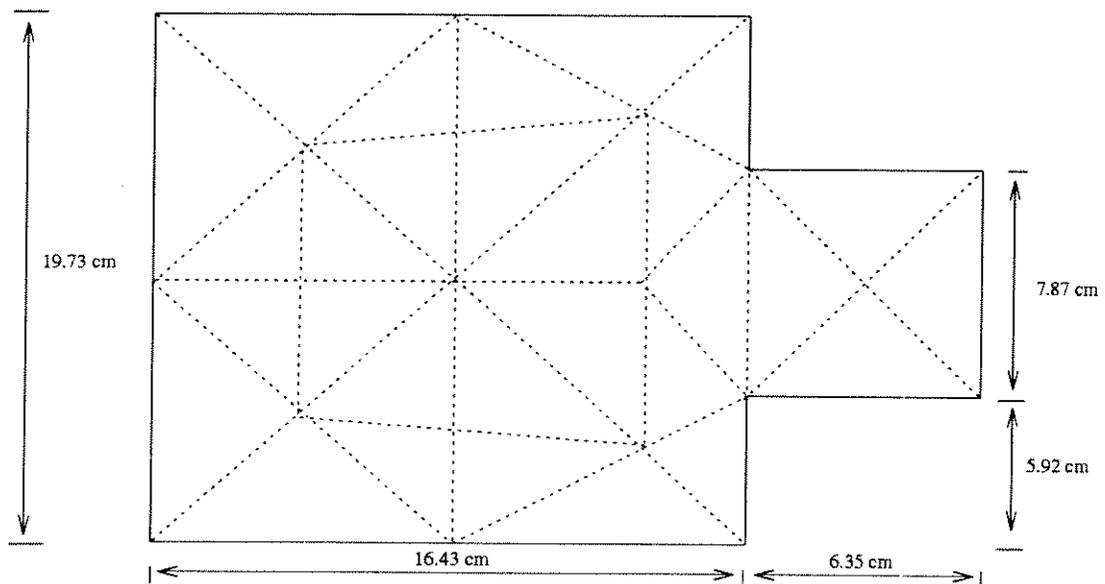


Figura 7.13: Malha de elementos finitos com 29 elementos para o modelo B.

Tabela 7.5: Resultado para o modelo B com 232 elementos.

modo	freqüência medida(Hz)	freqüência calculada	erro percentual
10	825	833	1.0%
01	900	911	1.2%
20	1300	1336	2.8%
11	1400	1425	1.8%
02	1800	1833	1.8%

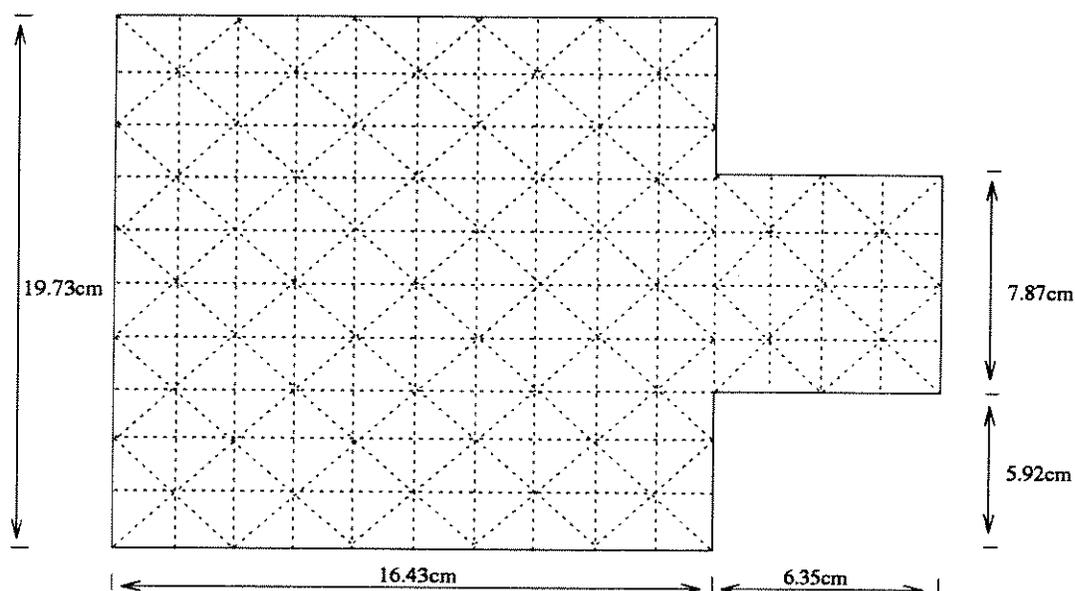


Figura 7.14: Malha de elementos finitos com 232 elementos para o modelo B.

Tabela 7.6: Resultado para o modelo B com outra malha de elementos finitos.

modo	freqüência medida(Hz)	freqüência calculada	erro percentual
10	825	831	0.7%
01	900	911	1.2%
20	1300	1331	2.4%
11	1400	1427	1.9%
02	1800	1835	1.9%

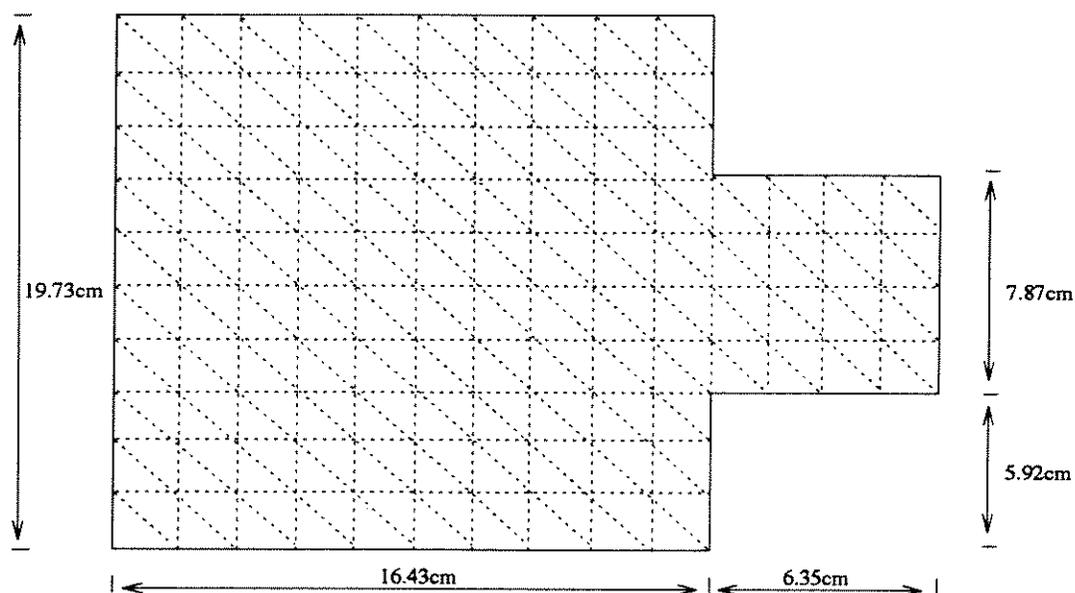


Figura 7.15: Outra possível malha com 232 elementos para o modelo A.

7.3 Avaliação e melhoramento da qualidade acústica de um recinto

Nos experimentos seguintes, são alterados gradativamente o formato e a distribuição de absorventes sobre as paredes internas de uma planta baixa de um recinto. As alterações são sempre no sentido de tornar o movimento das ondas sonoras mais próximo do ergódico. Os volumes dos recintos resultantes dessas alterações, no entanto, são aproximadamente iguais ao do recinto original. ¹

¹Supondo-se a mesma distância do teto ao piso em todos os recintos.

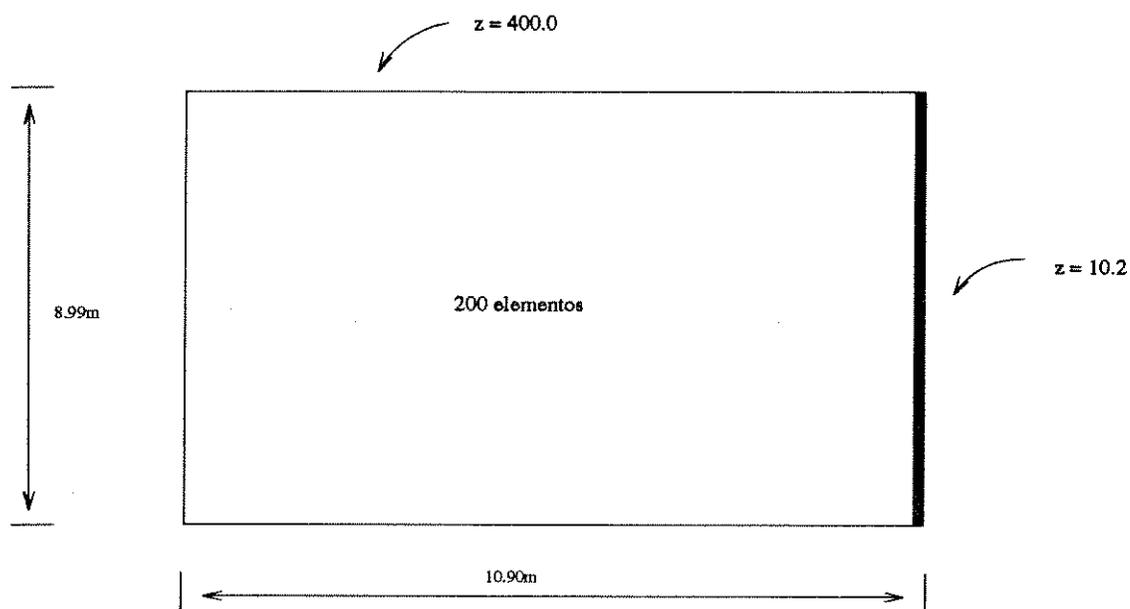


Figura 7.16: Sala número zero.

Tabela 7.7: Resultados para a sala número zero.

frequência(Hz)	constante de atenuação (1/s)	queda de 60 db (s)
(1,0) 15.98	3.35	2.06
(0,1) 19.42	1.78	3.88
(1,1) 25.33	3.45	2.00
(2,0) 32.32	3.50	1.97
(2,1) 38.20	3.59	1.92
39.22	1.73	3.98
42.77	3.45	2.00
49.35	3.76	1.84
52.28	3.56	1.94
53.85	3.84	1.80
59.80	1.69	4.09
62.55	3.43	2.01
65.74	3.79	1.82
67.48	4.16	1.66

Nesse primeiro caso apenas uma das paredes é coberta com material absorvente

acústico — $z = 10.2$ — enquanto que as outras paredes estão nuas — $z = 400.0$. Se o movimento de ondas fosse ergódico, pela fórmula de Millington e Sette (equação 2.3), o tempo de reverberação seria $T_{MS} = 2.39$ segundos. A média dos tempos de queda de 60 db para os modos — terceira coluna — é $\bar{T} = 2.36$ segundos, e o desvio padrão em torno dessa média é de 0.89 segundos. Os resultados tabelados confirmam a fraca atenuação sofrida pelos modos paralelos ao absorvente. O primeiro representante desses modos é o (0,1), com frequência 19.42 Hz.

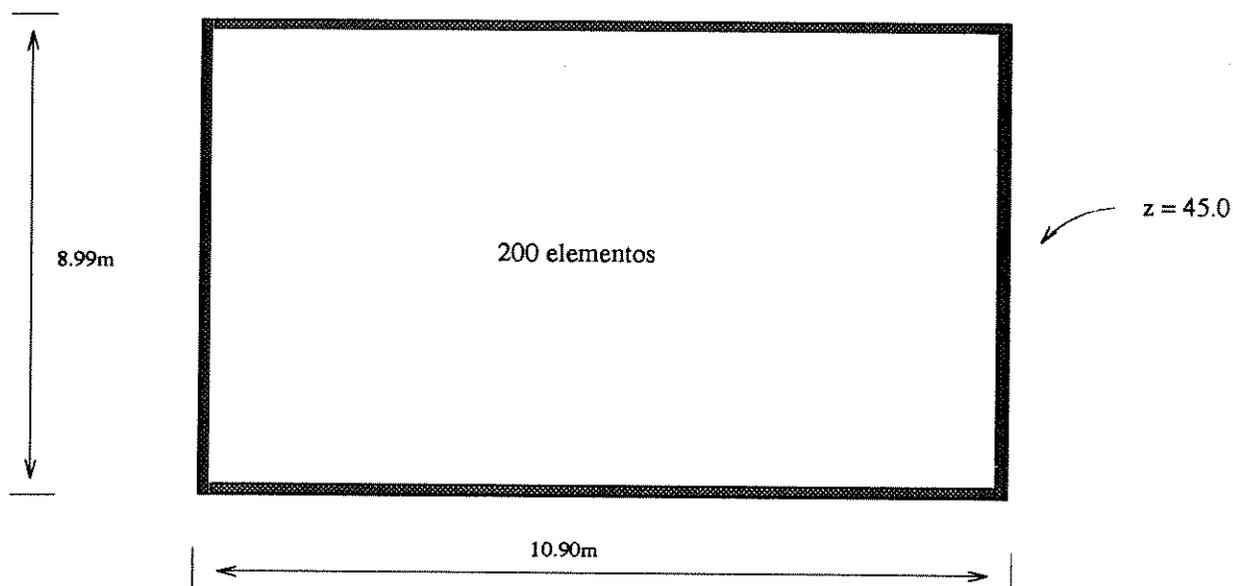


Figura 7.17: Sala número um.

Tabela 7.8: Resultados para a sala número um.

freqüência(Hz)	constante de atenuação (1/s)	queda de 60 db (s)
(1,0) 15.98	2.29	3.01
(0,1) 19.39	2.45	2.82
(1,1) 25.32	3.17	2.18
(2,0) 32.32	2.35	2.94
(2,1) 38.20	3.22	2.14
39.17	2.51	2.75
42.76	3.22	2.14
49.36	2.46	2.81
52.28	3.27	2.11
53.86	3.31	2.08
59.74	2.63	2.63
62.53	3.33	2.07
65.74	3.35	2.06
67.48	2.63	2.63

A alteração para o segundo caso consiste na troca do material absorvente concentrado numa única parede por outro material menos absorvente — $z = 45$ —

distribuído sobre todas as paredes internas. A nova impedância do material absorvente é escolhida de forma a se obter o mesmo tempo de reverberação pela fórmula de Millington e Sette (i.e., $T_{MS} = 2.39$ segundos). A média dos tempos de queda de 60 db para os modos é $\bar{T} = 2.36$ segundos, e o novo desvio padrão em torno dessa média é de 0.37 segundos. A principal causa para essa queda no desvio padrão é a inexistência dos modos fracamente atenuados, encontrados na sala anterior. Em contrapartida, os modos oblíquos como o (1,1) e o (2,1), com frequências de ressonância 25.32 Hz e 38.20 Hz, respectivamente, sofrem atenuações sensivelmente maiores que os demais modos não oblíquos.

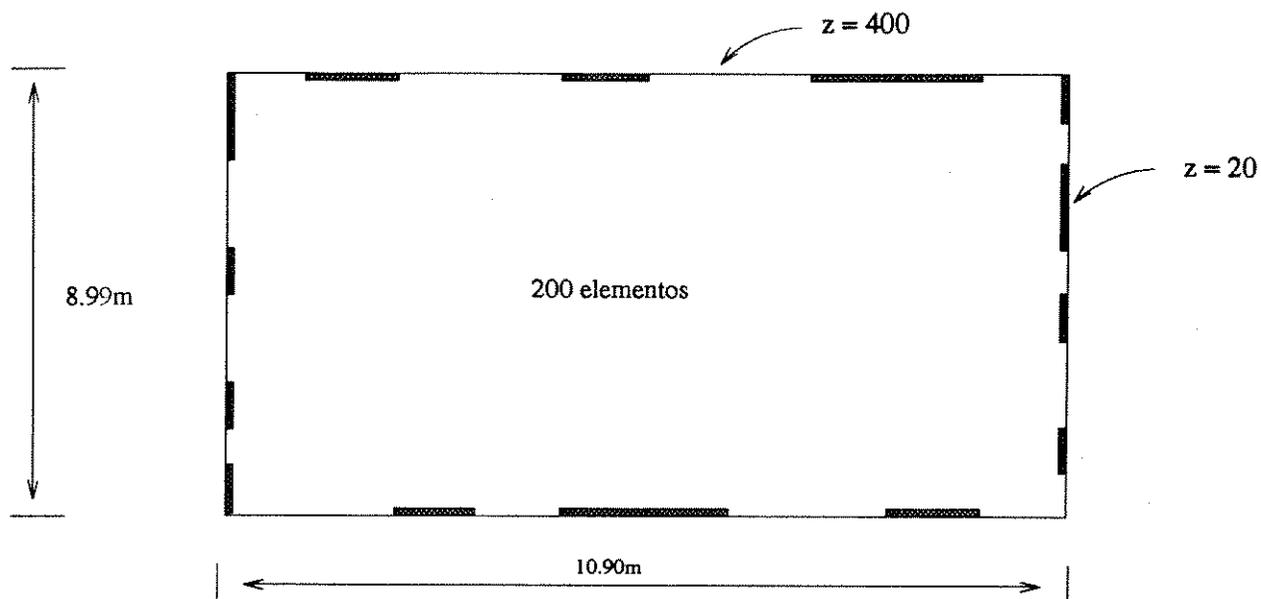


Figura 7.18: Sala número dois.

Tabela 7.9: Resultados para a sala número dois.

freqüência(Hz)	constante de atenuação (1/s)	queda de 60 db (s)
(1,0) 15.99	2.43	2.84
(0,1) 19.39	2.63	2.62
(1,1) 25.32	3.41	2.03
(2,0) 32.32	2.55	2.71
(2,1) 38.21	3.59	1.93
39.16	2.65	2.61
42.76	3.37	2.05
49.36	2.37	2.91
52.28	3.53	1.96
53.86	3.10	2.23
59.74	2.67	2.59
62.54	3.26	2.12
65.74	3.02	2.29
67.48	2.95	2.34

Mais uma vez as impedâncias dos novos materiais absorventes foi escolhida de

forma a não alterar muito T_{MS} . Para esse caso $T_{MS} = 2.33$, $\bar{T} = 2.36$ segundos e o desvio padrão cai para 0.34 segundos.

A posição dos absorventes para esse caso foi escolhida arbitrariamente e, embora a quantidade de absorventes seja muito menor do que seria necessário para estabelecer um comportamento completamente difuso do som ², o desvio padrão dos tempos na coluna da direita caiu, de acordo com o que era esperado.

O formato da próxima planta baixa é aproximadamente igual ao proposto em [16], resultante de um processo de otimização da distribuição modal num recinto com planta baixa limitada por quatro paredes.

²Conforme discussão sobre o *index of randomness* na página 124 da referência [14]

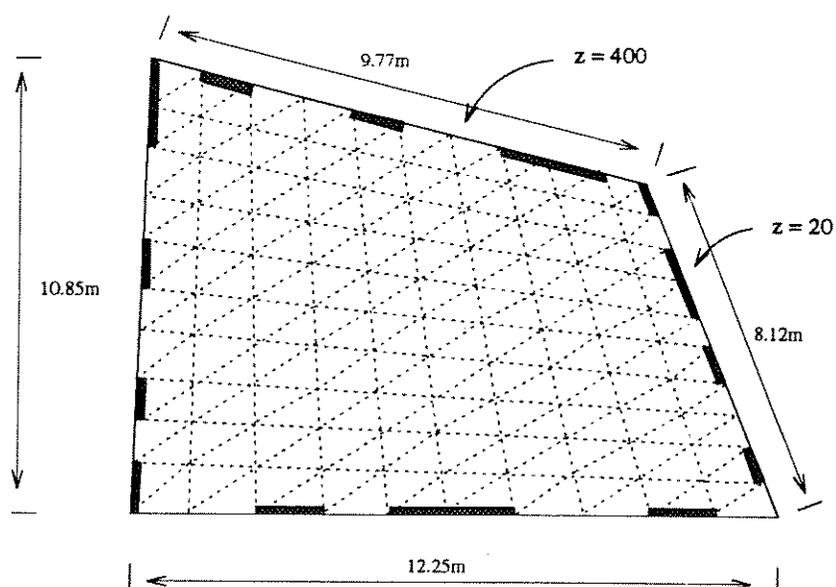


Figura 7.19: Sala número três.

Tabela 7.10: Resultados para a sala número três.

frequência(Hz)	constante de atenuação (1/s)	queda de 60 db (s)
(1,0) 15.30	2.48	2.79
(0,1) 19.01	2.72	2.54
(1,1) 25.15	3.34	2.07
(2,0) 32.54	3.04	2.07
(2,1) 35.90	3.57	1.93
37.80	2.84	2.43
45.60	3.27	2.11
47.41	3.24	2.13
49.88	3.77	1.83
54.60	2.84	2.43
58.36	2.81	2.46
60.54	3.08	2.25
64.69	3.98	1.74
66.70	3.55	1.95

Para esse caso $T_{MS} = 2.26$ segundos e $\bar{T} = 2.21$ segundos com desvio padrão aproximado de 0.30 segundos.

A queda do desvio padrão para esse caso está de acordo com a expectativa de um campo sonoro mais próximo do difuso que o do caso anterior. Além disso, segundo os resultados apresentados em [16], esse é o formato com planta baixa limitada por quatro paredes que proporciona um campo sonoro mais próximo possível do que seria um campo difuso.

Por fim, no último caso analisado, as ondas são espalhadas por algumas irregularidades no formato da planta baixa. Deve-se levar em conta que o corte correspondente à planta baixa apresenta o mesmo contorno, seja qual for a altura do corte.

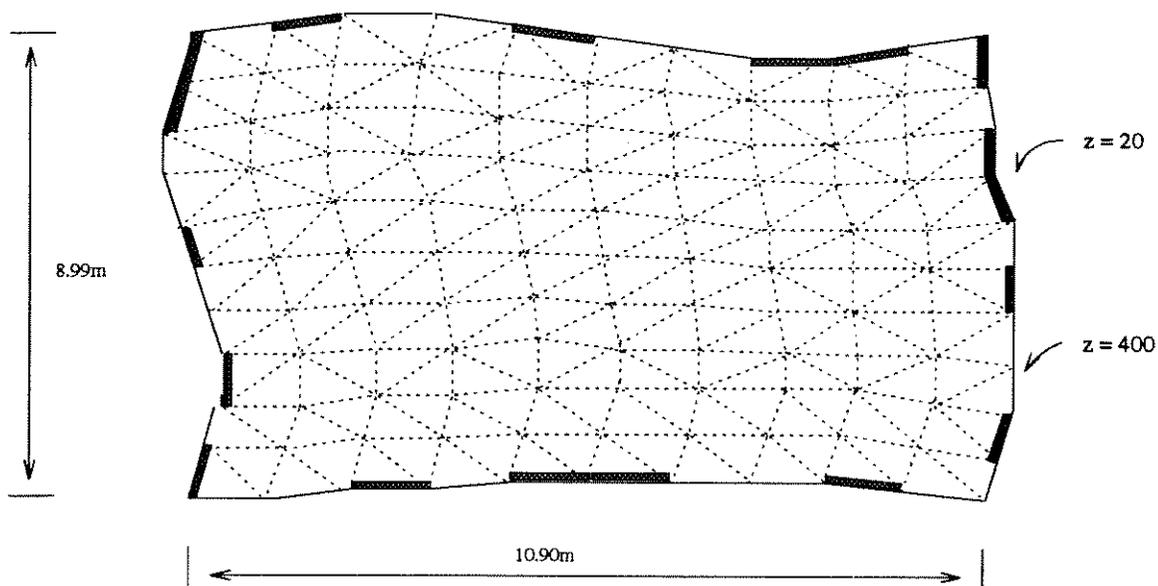


Figura 7.20: Sala número quatro.

Tabela 7.11: Resultados para a sala número quatro.

frequência(Hz)	constante de atenuação (1/s)	queda de 60 db (s)
(1,0) 15.34	2.39	2.89
(0,1) 20.07	2.77	2.49
(1,1) 25.51	3.41	2.03
(2,0) 31.43	2.55	2.71
(2,1) 37.60	3.16	2.19
40.02	2.96	2.33
43.84	3.56	1.94
47.81	2.57	2.69
52.49	3.01	2.30
53.24	3.17	2.18
59.83	2.64	2.61
64.26	3.04	2.27
65.24	3.50	1.97
66.48	3.27	2.12

Os resultados para essa última alteração são $T_{MS} = 2.29$ segundos e $\bar{T} = 2.34$ segundos com desvio padrão aproximado de 0.30 segundos. Esse resultado é bastante

semelhante ao do caso anterior. Isso leva a crer que os dois recintos são equivalentes em termos de qualidade acústica. Contudo, é interessante observar que a sala número três seria construída com maior facilidade que a de número quatro.

7.4 Utilização de absorventes de teste

As placas de materiais absorventes acústicos proporcionam uma atenuação seletiva para os modos, de acordo com a sua posição nas superfícies internas ao recinto. A atenuação para um dado modo será tanto menor quanto mais próximo o absorvente estiver de um *nó de pressão* desse modo.

Uma proposta interessante de aplicação desse fenômeno é utilização de absorventes de prova. As constantes de atenuação assim obtidas para cada modo fornecem uma estimativa da influência que um absorvente definitivo nessa posição irá exercer sobre cada modo.

Esse procedimento corresponde aproximadamente a analisar os autovetores da matriz $[A]$ da seção 5.1. A vantagem desses testes é que os resultados obtidos a partir dos absorventes de prova já levam em consideração a deformação dos autovalores (ou dos campos de pressão) provocada justamente pela presença do absorvente.

Nas simulações a seguir, absorventes são colocados em algumas posições determinadas no intuito de evidenciar a absorção seletiva de energia em relação aos modos.

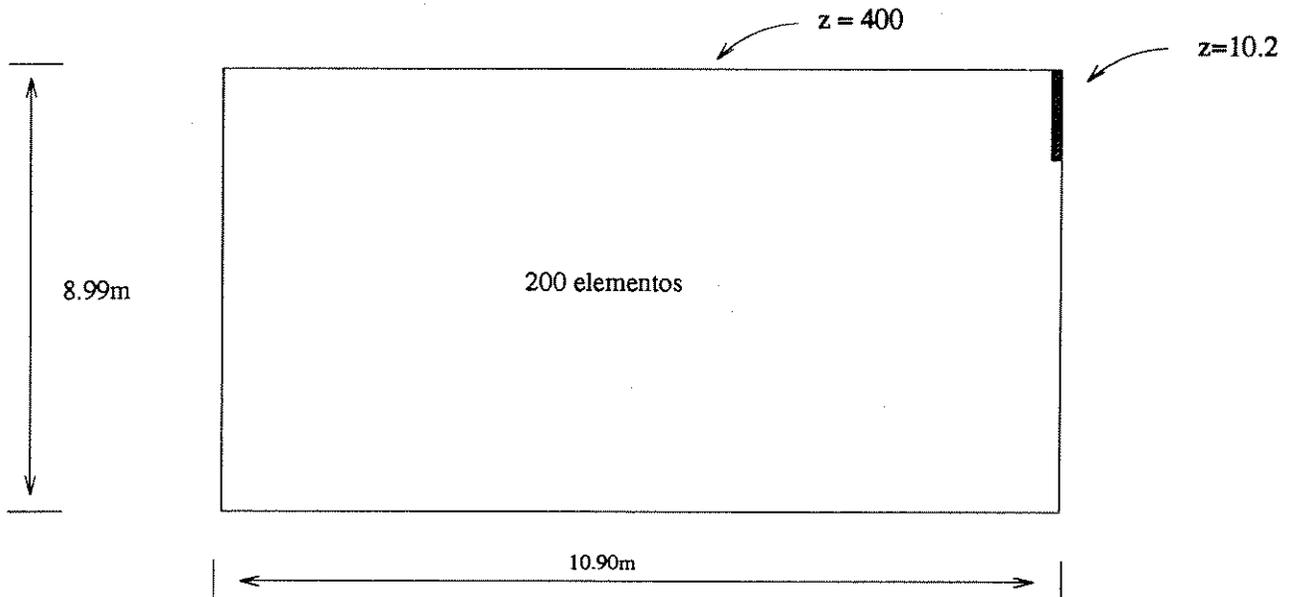


Figura 7.21: Teste um.

Tabela 7.12: Resultados para o teste um.

modo	freqüência(Hz)	constante de atenuação (1/s)
10	15.99	0.87
01	19.39	0.81
11	25.33	1.44
20	32.32	0.91
21	38.22	1.49
02	39.16	0.65

O resultado desse teste está coerente com a existência de um antinó de pressão para todos os modos, no canto da sala. Contudo, a posição do absorvente desfavorece a absorção da energia dos modos paralelos ao lado menor da sala. Isso acontece porque apenas a ponta do absorvente, que está no canto superior, recebe o pico máximo de pressão, relativo a esses modos.

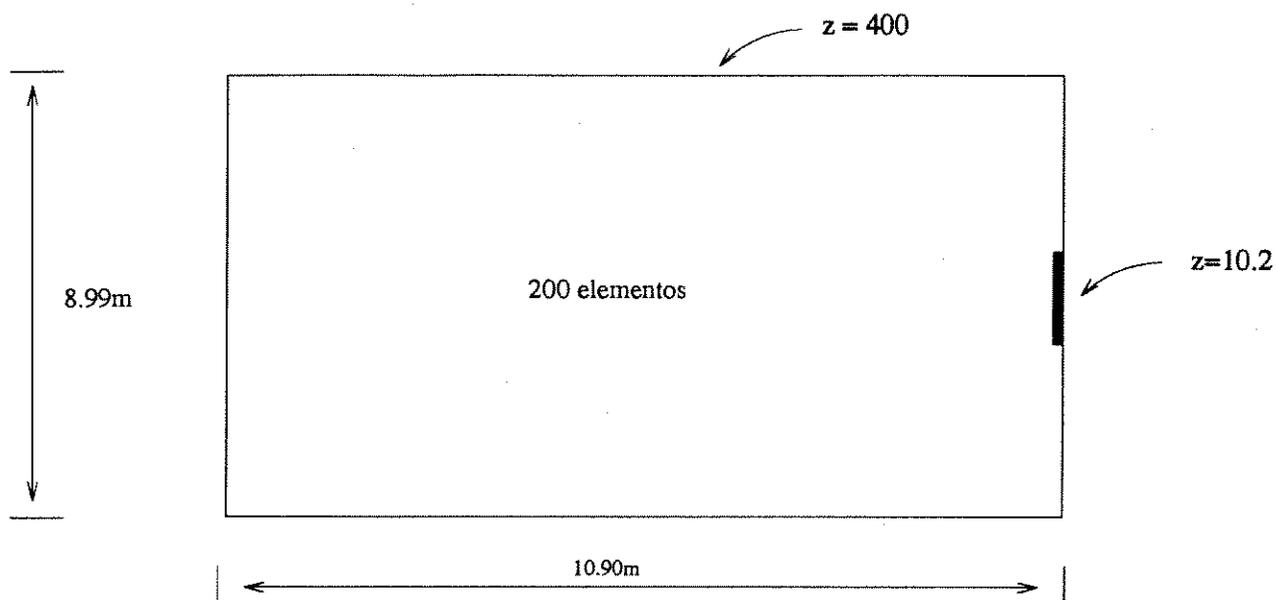


Figura 7.22: Teste dois.

Tabela 7.13: Resultados para o teste dois.

modo	frequência(Hz)	constante de atenuação (1/s)
10	15.99	0.88
01	19.39	0.29
11	25.32	0.40
20	32.32	0.91
21	38.20	0.41
02	39.18	0.80

Nesse segundo teste, o absorvedor foi propositalmente colocado numa posição onde existe um nó de pressão para os modos (0,1), (1,1) e (2,1). Conforme o esperado, a atenuação sofrida por esses modos é inferior àquela sofrida pelos demais modos verificados. É pertinente observar que apenas o centro do absorvedor coincide com o nó de pressão dos modos citados.

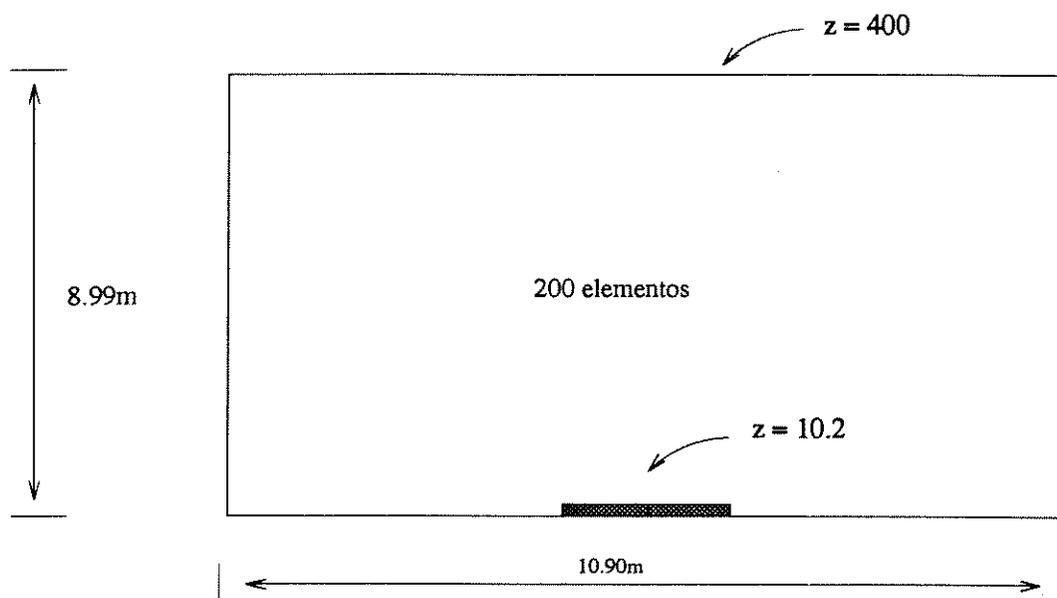


Figura 7.23: Teste três.

Tabela 7.14: Resultados para o teste três.

modo	freqüência(Hz)	constante de atenuação (1/s)
10	15.99	0.28
01	19.39	1.02
11	25.32	0.41
20	32.32	0.90
21	38.23	1.67
02	39.15	1.05

O teste três é análogo ao teste dois. Nesse caso, contudo, o absorvente foi colocado nas imediações do nó de pressão para os modos (1,0) e (1,1), como pode ser constatado pelos resultados.

O formato utilizado nos testes quatro e cinco é o mesmo utilizado e comentado na seção anterior para a sala de número três.

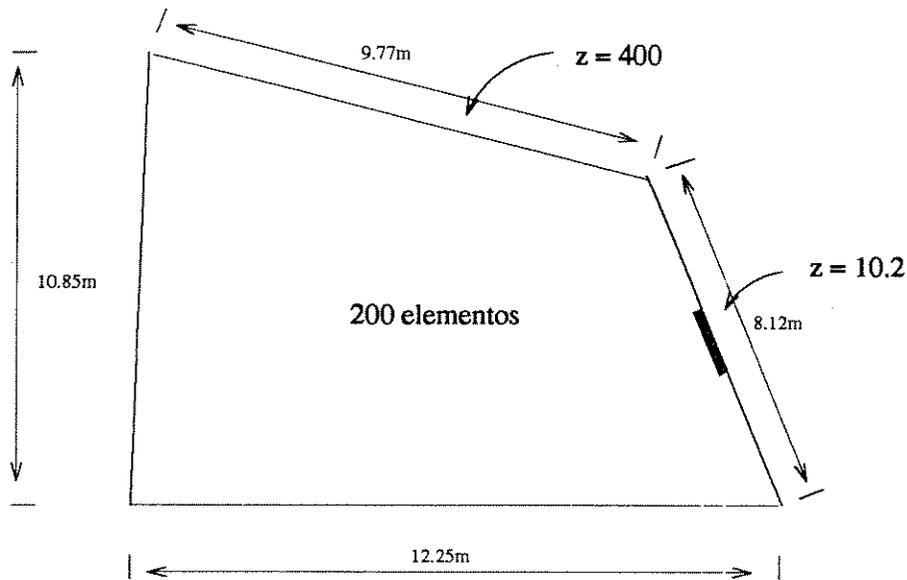


Figura 7.24: Teste quatro.

Tabela 7.15: Resultados para o teste quatro.

modo	freqüência(Hz)	constante de atenuação (1/s)
10	15.30	0.90
01	19.01	0.36
11	25.24	0.41
20	32.54	0.77
21	35.99	0.37
02	38.01	0.76

Comparando-se os resultados do teste quatro com os do teste dois, é possível se notar alguma semelhança. Isso indica que esse novo formato não afetou sensivelmente a posição dos nós e antinós nas proximidades do absorvente de teste.

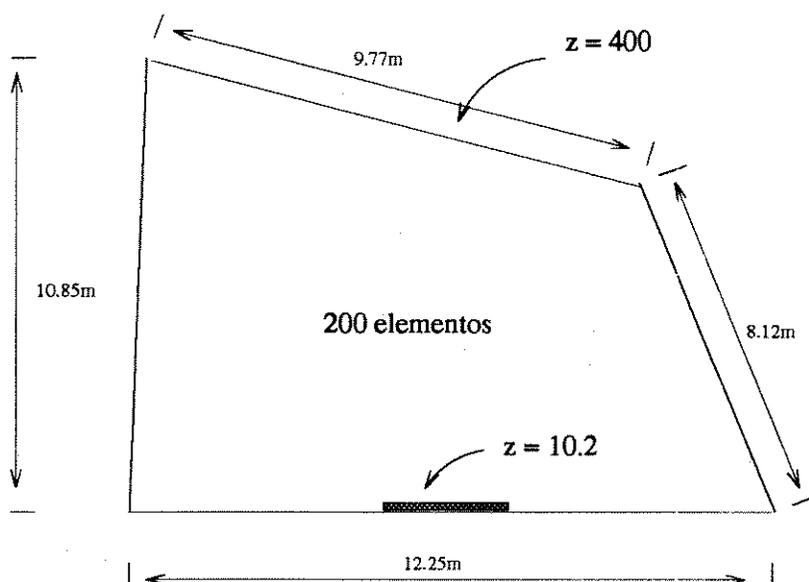


Figura 7.25: Teste cinco.

Tabela 7.16: Resultados para o teste cinco.

modo	freqüência(Hz)	constante de atenuação (1/s)
10	15.30	0.50
01	19.01	0.66
11	25.24	0.43
20	32.55	2.29
21	35.99	0.58
02	38.00	0.34

Ao contrário do que aconteceu para o teste quatro, a comparação dos resultados do teste cinco com os do teste três mostra uma sensível diferença, principalmente para o modo (2,0). Esse surpreendente pico de absorção na freqüência de 32.55 Hz informa que os nós de pressão relativos ao modo (2,0) estão mais afastados do absorvente para o formato do teste cinco que para o formato do teste três.

Capítulo 8

Conclusões e propostas

Os testes de convergência e as comparações com resultados experimentais realizados nas seções 7.1 e 7.2, respectivamente, dão uma idéia da precisão dos resultados numéricos, e do quanto esses resultados podem ser melhorados através da alteração da malha de elementos finitos. Em seguida, estabelecida uma certa confiança em relação à precisão desses resultados, as seções 7.3 e 7.4 exemplificam, respectivamente, como interpretar e como direcionar as análises.

A partir dos resultados obtidos por aproximação numérica nesse trabalho, pode-se concluir que o método dos elementos finitos, aplicado conforme foi relatado, constitui uma boa ferramenta de análise para os modos com frequências de ressonância mais baixas. A extensão da aplicação desse método aos modos de frequências mais altas, contudo, exige um refinamento cada vez maior da malha de elementos finitos. Esse refinamento pode aumentar a carga computacional, relativa à implementação prática do método, a níveis impraticáveis.

Mas isso que parece ser uma severa limitação pode ser contornado por uma “divisão de tarefas”, pois os modos de frequências mais baixas são os que menos se adequam à análise por meio da acústica geométrica, ao mesmo tempo em que se adequam bem à análise por meio do método dos elementos finitos, conforme foi visto. Por outro lado, o comportamento dos sons de alta frequência pode ser tratado de forma satisfatória por meio da acústica geométrica, dada a relativa facilidade de se espalhar essas ondas, e se obter uma distribuição difusa da energia sonora dentro do recinto (ver capítulo 2 e seção 4.3).

Diante disso, o estudo detalhado de como pode ser realizada essa concatenação entre acústica ondulatória e acústica geométrica é apresentado como uma primeira

proposta de continuidade de trabalho.

Ainda dentro dessa mesma tendência de divisão de tarefas, pode ser analisada a possibilidade de criação de camaras de reverberação artificiais, simuladas computacionalmente. Nesse caso, um sistema acústico é definido pela cavidade ressonante e pelas posições respectivas da fonte sonora e do receptor. A resposta impulsiva de cada um desses sistemas pode ser determinada por análise modal, para as baixas frequências, enquanto que, para o restante do espectro, essa resposta impulsiva pode ser aproximada estatisticamente (para o caso de um espalhamento satisfatório dos sons agudos) ou por outro método, tal como o método do traçado de raios (*ray tracing method*) [21] .

Em qualquer trabalho de continuidade a esse, duas melhorias devem ser levadas em conta. Uma delas consiste em acrescentar aos programas a capacidade de lidar com impedâncias acústicas complexas. A utilização de impedâncias acústicas puramente reais satisfaz grande parte dos casos práticos, onde, muitas vezes, essa impedância é real [8], ou possui uma parte real muito maior que a imaginária [11]. Além disso, para superfícies onde $|\frac{Z}{\rho c}| \geq 15$ [9], a informação de fase pode ser desprezada, sem alterar significativamente os resultados em termos de constantes de atenuação dos modos. Apesar disso, há aqueles absorventes cujas impedâncias acústicas complexas devem ser consideradas para uma modelagem adequada.

A outra melhoria a ser considerada corresponde à expansão do método para problemas em três dimensões. Essa melhoria é favorecida pelo uso do método dos elementos finitos, e possibilitaria a análise de recintos com teto e piso não paralelos.

Algumas outras sugestões para trabalhos de continuidade a esse estão implícitas nas duas últimas seções do capítulo de resultados. Uma delas consiste na investigação mais detalhada do uso do desvio padrão, conforme o que foi feito na seção 7.3, como uma medida numérica da qualidade acústica de um recinto. A outra sugestão para continuidade de trabalho parte da idéia apresentada na seção 7.4. Ali, o tipo de teste evidenciado, realizado com placas de materiais absorventes, pode servir como ponto de partida para algoritmos de otimização na distribuição de absorventes pelas paredes internas de um recinto.

Não obstante essas sugestões para prosseguimento do trabalho, espera-se que, mesmo no atual estado de desenvolvimento, esse trabalho contribua para se estabelecer uma ponte entre o cotidiano de um projetista de recintos onde a acústica deve ser levada em consideração , e a análise numérica computacional como ferramenta de projeto.

Bibliografia

- [1] Conrado Silva De Marco. (1982). *Elementos de Acústica Arquitetônica*. São Paulo: Nobel.
- [2] L. Cintra do Prado. (1962). *Acústica Arquitetônica*. Texto conforme o Curso desenvolvido na Faculdade de Arquitetura e Urbanismo da Universidade de São Paulo.
- [3] Larry J. Segerlind. (1984). *Applied Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons.
- [4] O. C. Zienkiewicz. (1967). *The Finite Element Method*. Vol.1. London: McGraw-Hill.
- [5] Strang, Gilbert. (1973). *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice - Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.
- [6] B. P. Demidovich. (1973). *Computational Mathematics*. Moscow: Mir Publishers.
- [7] Richard H. Bolt. (1939). Normal Modes of Vibration in Room Acoustics: Experimental Investigations in Nonrectangular Enclosures in *J. Acoust. Soc. Am.*, 11, 184-197.
- [8] Philip M. Morse. (1939). Some Aspects of the Theory of Room Acoustics in *J. Acoust. Soc. Am.*, 11, 56-66.
- [9] F. V. Hunt, L. L. Beranek and D. Y. Maa. (1939). Analysis of Sound Decay in Rectangular Rooms in *J. Acoust. Soc. Am.*, 11, 80-94.
- [10] F. V. Hunt (1939). Absorption Coefficient Problem in *J. Acoust. Soc. Am.*, 11, 38-40.
- [11] Philip M. Morse.(1948). *Vibration and Sound*. New York: McGraw-Hill.
- [12] L. L. Beranek.(1954). *Acoustics*. New York: McGraw-Hill.
- [13] H. Arau-Puchades. (1988). An Improved Reverberation Formula in *Acustica*, 65, 164.
- [14] Philip M. Morse and Richard H. Bolt. (1944). Sound Waves in Rooms in *Rev. of Modern Physics*, 65, 69-147.
- [15] V. O. Knudsen. (1934). Recent Developments in Architectural Acoustics in *Rev. of Modern Physics*, 6, 1.

-
- [16] Joseph R. Milner and Robert J. Bernhard. (1989). An Investigation of the Modal Characteristics of Nonrectangular Reverberation Rooms in *J. Acoust. Soc. Am.*, 85, 772–779.
- [17] Leo L. Beranek. (1973). Acoustics and the Concert Hall in *J. Acoust. Soc. Am.*, 57, 1258–1262.
- [18] François Santon. (1976). Numerical Prediction of Echograms and of the Intelligibility of Speech in Rooms in *J. Acoust. Soc. Am.*, 59, 1399–1405.
- [19] I. J. Cooper and H. F. Pollard. (1978). Low-Frequency Resonances in Unsymmetrical Enclosures in *Acustica*, 41, 86–93.
- [20] Y. Hirata. (1979). Geometrical Acoustics for Rectangular Rooms in *Acustica*, 43, 247–252.
- [21] P. Dämmig. (1991). Model Investigations into Sound Fields in Reverberation Rooms in *Acustica*, 75, 105–120.
- [22] Michael Vorländer. (1989). Simulation of the Transient and Steady-state Sound Propagation in Rooms Using a New Combined Ray-tracing/image-source Algorithm in *J. Acoust. Soc. Am.*, 86, 172–178.
- [23] Paul E. Sabine (1939). Measurement of Sound Absorption Coefficients from the Viewpoint of the Testing Laboratory in *J. Acoust. Soc. Am.*, 11, 41–44.
- [24] G. T. Stanton (1939). Correlation of Sound Absorption Coefficients with Field Measurements in *J. Acoust. Soc. Am.*, 11, 45–47.
- [25] C. C. Potwin and J. P. Maxfield (1939). Modern Concept of Acoustical Design in *J. Acoust. Soc. Am.*, 11, 48–55.
- [26] N. B. Bhatt (1939). Effect of an Absorbing Wall on Decay of Normal Frequencies in *J. Acoust. Soc. Am.*, 11, 67–73.
- [27] B. Yegnanarayana (1972). Wave Analysis of Sound Decay in Rectangular Rooms in *J. Acoust. Soc. Am.*, 56, 534–541.
- [28] P. D'Antonio, J. Konner. (1992). The QRD Diffractal: A New One- or Two-Dimensional Fractal Sound Diffusor in *J. Audio Eng. Soc.*, Vol. 40, No. 3, 117–129.