

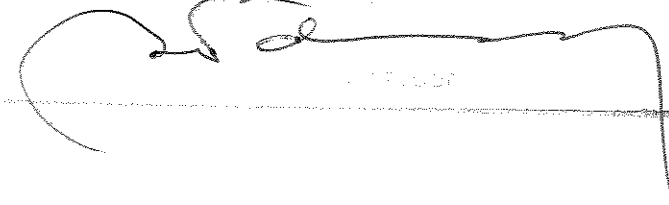
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E CONTROLE DE ENERGIA

Controle de Posição e Orientação de um Manipulador através de um Mouse Espacial

Autor: Reinaldo Gonçalves Nogueira

Orientador: Prof. Dr. Álvaro Geraldo Badan Palhares

Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por Reinaldo Gonçalves Nogueira
em defesa da Comissão
em 03/03/95



Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

3 de março de 1995



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica
Departamento de Sistemas e Controle de Energia

Tese : **Controle de Posição e Orientação de um Manipulador
através de um Mouse Espacial**

Autor : **Reinaldo Gonçalves Nogueira**

Orientador : **Álvaro Geraldo Badan Palhares**

Aprovada em 3 de março de 1995 pela banca examinadora

Prof. Dr. Álvaro Geraldo Badan Palhares (Presidente)

Prof. Dr. Edson Moschim - UNICAMP

Dr. Cesar de Souza Lima - PETROBRAS/CENPES

*Aos meus pais Jair e Anna Maria,
meus irmãos Eduardo, Cristina e Andrea,
meu sobrinho Luis Henrique
e minha esposa Maria Assima.*

Resumo

Sistemas robotizados tem sido cada vez mais utilizados nas indústrias, principalmente em se tratando de tarefas em que a operação humana torna-se perigosa. A Petrobras é uma empresa que vem utilizando esta tecnologia e, para tal, possui em seu Centro de Pesquisas e Desenvolvimento um manipulador que é utilizado para desenvolvimentos onde geralmente atua como um robô tele-operado visando a realização de tarefas submarinas em águas intermediárias e profundas.

O robô tele-operado é um sistema Master-Slave, onde o Master, que é um manipulador em escala reduzida, tem a função de enviar sinais de comando ao Slave, quando manipulado por um operador na sala de controle localizada na superfície. O sistema, entretanto, possui o inconveniente de necessitar de uma perfeita sincronização entre os ângulos das juntas do Master e do Slave no início de cada operação, o que demanda um certo tempo.

Este trabalho teve como objetivo desenvolver uma nova opção de controle para o manipulador, com a utilização de um Mouse Espacial em substituição ao Master, o que permitiu minimizar os tempos de inicialização de tarefas, visto não serem mais necessárias as correspondências angulares .

O sistema foi implementado em um microcomputador compatível com a linha IBM-PC-AT de forma modular, possibilitando alterações, como a substituição do manipulador ou do Mouse Espacial.

Abstract

Robotic systems have been more and more used in industries, mainly in tasks where human operations became dangerous. Petrobras, the Brazilian state owned petroleum industry, has been using this technology and, for that, has a manipulator in its Research & Development Center which is used like a tele-operated robot to perform underwater tasks in medium and deep seawaters.

A tele-operated robot is a Master-Slave system, where the Master, a manipulator in reduced scale, has the function of sending the command signals to the Slave, when manipulated by an operator in the control room on the surface. The system, however, has the necessity of a perfect synchronization between Master's and Slave's joint angles at the beginning of each operation as a great inconvenient, and this operation demands a certain time.

This work has the objective to develop a new control option to the manipulator, using a Spatial Mouse instead of the Master, which allows to minimize the initiation times of tasks, since no more angular correspondence is necessary.

The system was implemented in a microcomputer compatible with the IBM-PC-AT line in a modular form, making possible alterations such as the manipulator or the Spatial Mouse replacements .

Agradecimentos

- Ao professor Álvaro Geraldo Badan Palhares, pela orientação e incentivo em todas as etapas do trabalho.
- Ao professor João Maurício Rosário, pela colaboração paciente e elucidativa e pela estrutura cedida para o desenvolvimento deste trabalho.
- Ao CNPq, pelo apoio financeiro durante a maior parte do trabalho.
- À PETROBRAS, pelos equipamentos utilizados e pelo apoio financeiro na etapa final do trabalho.
- Aos amigos da FEE, por proporcionarem inúmeros e indispensáveis momentos de descontração.
- A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Conteúdo

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
AGRADECIMENTOS	iii
CONTEÚDO	iv
LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	ix
1 - Introdução	1
1.1 Introdução	1
2 - Análise de Deslocamento de Manipuladores Robóticos Industriais	6
2.1 Introdução	6
2.2 Trigonometria Esférica	7
2.2.1 Definições	7
2.2.2 Triângulos Esféricos	7
2.2.3 As Leis do Seno, Seno-cosseno e Cosseno para Triângulos Esféricos	9
2.2.4 As Leis do Seno, Seno-cosseno e Cosseno para Triângulos Polares	13
2.2.5 Algumas Propriedades dos Triângulos Esféricos e Polares	13
2.2.6 Equações para o Quadrilátero Esférico	15

2.2.7	Equações para o Polígono Esférico de n Lados	17
2.2.8	Equações Subsidiárias do Polígono Esférico de n Lados	18
2.2.9	Equações para o Quadrilátero Polar	19
2.2.10	Equações para o Polígono Polar de n Lados	20
2.2.11	Equações Subsidiárias do Polígono Polar de n Lados	21
2.3	Polígonos Espaciais	23
2.3.1	Equação de Malha Fechada para Polígonos Espaciais Ortogonais	23
2.3.2	Cadeia Espacial Ortogonal Aberta	25
2.3.3	Equações Secundárias para Polígonos Espaciais	26
2.3.4	Triângulo Espacial: Equações Secundárias do Cosseno	28
2.3.5	Quadrilátero Espacial: Equações Secundárias do Cosseno	28
2.3.6	Pentágono Espacial: Equações Secundárias do Cosseno	29
2.3.7	Hexágono Espacial: Equações Secundárias do Cosseno	30
2.3.8	Heptágono Espacial: Equações Secundárias do Cosseno	30
2.4	Manipuladores Robóticos	32
2.4.1	Fechamento do Mecanismo Espacial : Solução Inversa	34
2.4.2	Posicionamento da Garra: Solução do Problema Cinemático Direto	37
3	- Modelagem	38
3.1	Introdução	38
3.2	Problema Cinemático Inverso	39
3.2.1	Análise do Mecanismo Espacial RRRR-R-RR	45
3.2.2	Equação de Entrada-Saída ($\theta_7 \times \theta_1$)	45
3.3	Problema Cinemático Direto	51
4	- Interface Homem-Máquina	53
4.1	Master Slave	55
4.1.1	Calibração	55
4.1.2	Monitoramento	55

4.2	Micro Computador	57
4.2.1	Controle	57
4.2.2	Animação	61
4.2.3	Parâmetros	61
4.3	Teste de Hardware	61
5	- Resultados e Conclusões	63
5.1	Testes e Resultados	63
5.1.1	Controle Via Master	63
5.1.2	Controle Via Teclado	63
5.1.3	Controle no Modo Automático	64
5.1.4	Controle Via Mouse Espacial	64
5.2	Conclusões	65
5.3	Sugestões para Trabalhos Futuros	65
	BIBLIOGRAFIA	67
	APÊNDICE	68
A	- Características Técnicas do Manipulador Kraft	68
A.1	Especificações Gerais	68
A.2	Efetuator	68
A.3	Movimento das Juntas	69
B	- Listagem dos Modelos Implementados	70

Lista de Figuras

1.1	Manipulador Kraft.	2
1.2	Dispositivo de Controle Master.	3
1.3	Esquema do Mouse Espacial.	4
2.1	Eixo Polar e Pólos	7
2.2	Triângulos Esférico e Polar	8
2.3	Triângulos Anti-Polares	9
2.4	Triângulo Esférico	10
2.5	Obtenção do Sistema XYZ a partir do Sistema xyz	11
2.6	Triângulo Polar	14
2.7	Quadrilátero Esférico	16
2.8	Polígono Esférico de n Lados	17
2.9	Quadrilátero Esférico: Equações Fundamentais e Subsidiárias	19
2.10	Quadrilátero Polar	20
2.11	Polígono Polar de n Lados	21
2.12	Quadrilátero Polar: Equações Fundamentais e Subsidiárias	23
2.13	Polígono Espacial Ortogonal com n Lados	24
2.14	Cadeia Espacial Ortogonal Aberta	25
2.15	Triângulo Espacial	26
2.16	Manipulador Genérico	33
3.1	Representação Geométrica Genérica de um Manipulador	40

3.2	Parâmetros para a Representação Geométrica Genérica de um Manipulador	41
3.3	Representação Geométrica do Manipulador Kraft	42
3.4	Pentágonos Esférico e Polar	46
4.1	Configuração Inicial do Sistema	53
4.2	Primeiro Menu do Programa.	54
4.3	Diagrama de Blocos do Programa	54
4.4	Tela Inicial do Modo Master Slave.	55
4.5	Tela de Calibração	56
4.6	Tela de Monitoramento.	56
4.7	Tela Inicial do Controle Via Microcomputador.	58
4.8	Tela de Controle Via Mouse Espacial.	59
4.9	Tela de Controle Via Teclado.	60
4.10	Tela do Movimento Direto.	61
4.11	Tela de Animação Via Teclado.	62
A.1	Movimentos das Juntas do Manipulador Kraft.	69

Lista de Tabelas

3.1	Simplificações Inerentes ao Manipulador Kraft	43
-----	---	----

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução

A Automação Industrial é um assunto que tem despertado grande interesse em inúmeros profissionais envolvidos com a indústria brasileira, por exemplo, engenheiros, empresários e cientistas. Isto está ocorrendo devido à necessidade incontestável de modernização de massas industriais, visando um aumento significativo da produtividade e da qualidade. A automação já está sendo introduzida nas indústrias aqui no Brasil e não há dúvidas que sua utilização crescerá exponencialmente nos anos vindouros. Dentro deste contexto, a Robótica tem um papel fundamental devido à sua alta aplicabilidade na automação de indústrias manufatureiras.

A robotização de ambientes de difícil acesso, como o fundo do mar, e em tarefas hostis ao homem, como operações repetitivas, em ambientes poluídos ou com riscos de acidentes, tem sido cada vez mais objeto de interesse e pesquisa em todo o mundo e, no Brasil, a Petrobras tem sido a pioneira na utilização de sistemas robóticos em águas submarinas profundas.

Automatizar tarefas submarinas significa criar um sistema dedicado, remotamente controlado e capaz de realizar determinadas operações, como manobras ou reparos em equipamentos ou instalações. Por se tratarem de tarefas nem sempre repetitivas e realizadas em ambientes remotos, perigosos ou mesmo inacessíveis ao homem, surge a necessidade de utilização de robôs ou manipuladores submarinos tele-operados.

O manipulador Kraft, mostrado na figura 1.1 e cujas características técnicas [2] podem ser vistas no apêndice A, é projetado para executar tarefas gerais em ambiente submarino ou em outros ambientes hostis. Este sistema robótico é classificado como tele-operado, dado que seus movimentos são comandados à distância por um dispositivo de controle denominado "master" e localizado na base de controle, que envia sinais de movimentos a serem reproduzidos pelo manipulador e cujas trajetórias podem ser definidas em parte pela ação do operador, em parte por programações pré definidas na tarefas padrões de localização e fixação do manipulador ao seu ambiente de trabalho. O sistema completo robô tele-operado é denominado Sistema Robótico

Master-Slave.

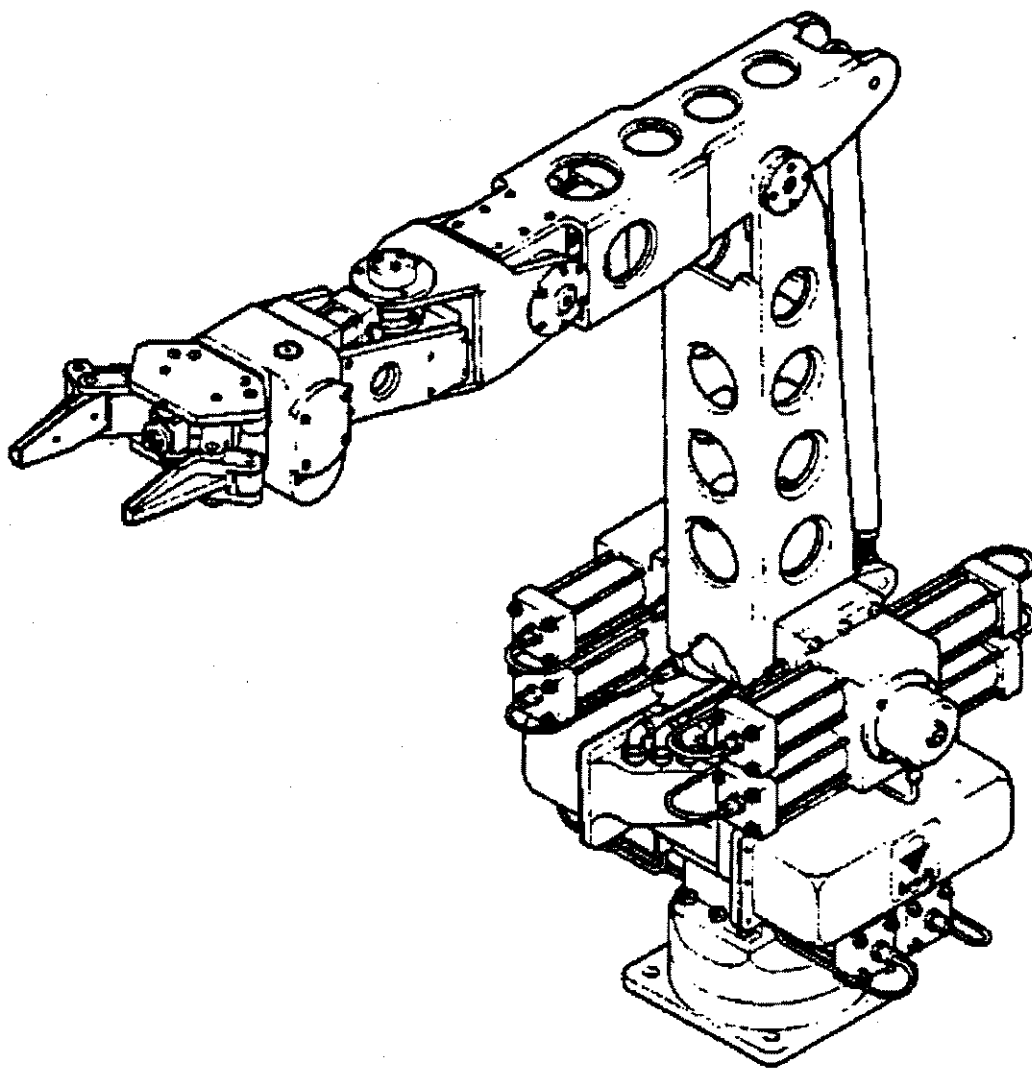


Figura 1.1: Manipulador Kraft.

No Sistema Kraft, o dispositivo de controle utilizado é um "minimaster" ou simplesmente "master" mostrado na figura 1.2, que é um modelo em escala reduzida do manipulador Kraft. Este modo de controle possui algumas vantagens, como o fato de trabalhar diretamente com os ângulos de juntas, ou seja, os ângulos lidos no "master" são enviados para o manipulador ("slave"). Mas uma grande dificuldade deste sistema é a inicialização: "master" e "slave" devem estar sincronizados, ou seja, devem possuir os mesmos ângulos de juntas no início de cada operação e esta sincronização demanda um certo tempo, o que pode ser indesejável quando a rapidez for um dos requisitos da tarefa executada.

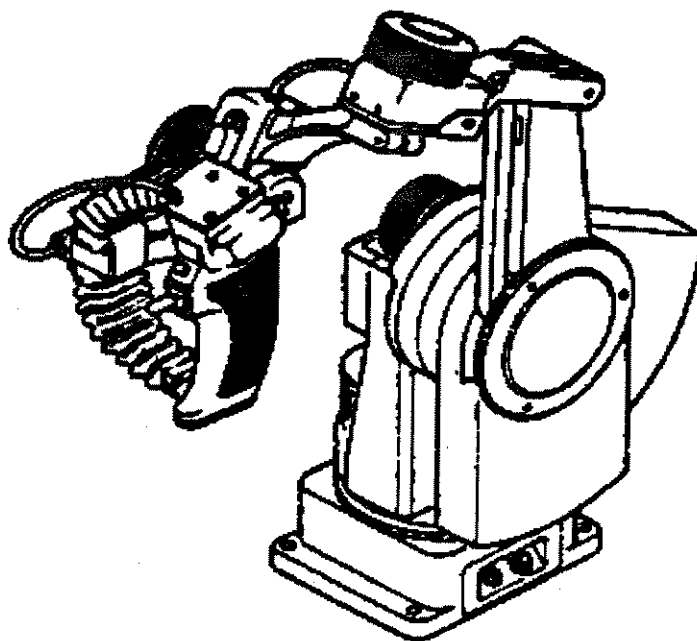


Figura 1.2: Dispositivo de Controle Master.

Com a preocupação de minimizar esta dificuldade, principalmente pelo fato de que as tarefas que exigem rapidez tem apresentado uma demanda cada vez maior, estamos propondo neste trabalho um método alternativo que viabilize o sistema sem que os problemas de inicialização prejudiquem o desempenho desejado, no que diz respeito ao tempo de resposta do sistema aos comandos do master.

Um sistema desenvolvido pelo CENPES - Centro de Pesquisas e Desenvolvimento da Petrobras, denominado Mouse Espacial, é mostrado esquematicamente na figura 1.3. É um sistema que gera sinais de deslocamentos em coordenadas cartesianas no espaço tridimensional, que são enviados a um microcomputador, a fim de controlar a posição e orientação do manipulador. A denominação Mouse Espacial é feita por analogia aos mouses bidimensionais tradicionalmente utilizados em microcomputadores. O sistema é composto, basicamente, de manípulo, fios, molas e potenciômetros, cujos valores de tensão chegam ao microcomputador através de uma porta serial. Estes valores, devidamente tratados, são transformados em posição e orientação do manípulo em relação a um sistema de coordenadas X_F, Y_F, Z_F , mostrado na mesma figura.

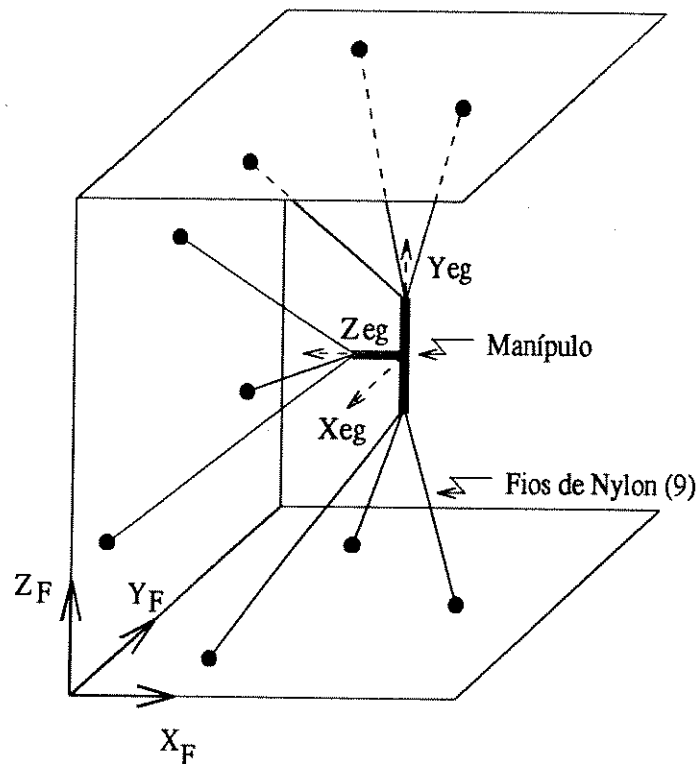


Figura 1.3: Esquema do Mouse Espacial.

O objetivo deste trabalho é contribuir para a viabilização de um sistema "master-slave" mais eficiente e amigável de inicialização instantânea, ou melhor, bem mais rápida que a atual, substituindo o mini manipulador "master" pelo Mouse Espacial acima descrito. Para isto, desenvolveremos uma interface de comunicação entre o Mouse Espacial e o manipulador Kraft, juntamente com um "software" de operação que permita ao usuário acessar facilmente todas as formas de comando do sistema. Este "software" é constituído de telas gráficas com menus oferecendo opções para cada tipo de tarefa a ser executada. Constam atualmente nos menus algumas das tarefas típicas solicitadas e utilizadas pela Petrobras, mas existe a possibilidade de ampliar o conjunto de funções, na medida em que surjam novas demandas de tarefas.

Para o desenvolvimento deste trabalho procuramos organizar um texto que contenha um estudo preliminar dos Fundamentos Matemáticos das relações geométricas e cinemáticas dos manipuladores quanto à sua orientação, posicionamento e velocidade de resposta, a fim de que o usuário possa compreender melhor como utilizar o sistema e eventualmente desenvolver novas funções para ampliar o menu principal. Este estudo está apresentado no capítulo 2 - Análise de Deslocamentos de Manipuladores Robóticos Industriais, onde são desenvolvidas expressões para as leis do seno, seno-cosseno e cosseno de polígonos esféricos e polares, as quais são também aplicáveis aos manipuladores robóticos, e no capítulo 3 - Modelagem, onde é feita a adaptação das equações encontradas no capítulo 2 para o caso do manipulador Kraft.

Após este estudo preliminar, apresentamos o desenvolvimento da interface proposta, descrita com detalhes no capítulo 4 - Interface Homem-Máquina e, finalmente, os resultados obtidos e conclusões, no capítulo 5.

Capítulo 2

Análise de Deslocamento de Manipuladores Robóticos Industriais

2.1 Introdução

Os robôs industriais são equipamentos multifuncionais reprogramáveis e oferecem grande flexibilidade de operação. A programação destes robôs atualmente é feita, na maioria das vezes, através de uma "caixa de ensino", que é usada de modo a conduzir o robô através das posições críticas do ciclo de operação. As informações sobre essas posições são armazenadas numa unidade de memória, possibilitando assim a repetição do movimento original quantas vezes for necessário.

A programação por caixa de ensino tem duas grandes limitações: ela utiliza o robô no período da programação - muitas vezes longos - quando ele poderia estar produzindo; e não permite um controle mais preciso sobre a trajetória da garra ou ferramenta de trabalho do manipulador robótico.

A programação "off-line", por sua vez, não apresenta as duas limitações anteriores por ser realizada em um computador digital, utilizando-se apenas um modelo matemático. A tendência é de que esse tipo de programação seja cada vez mais utilizado e, em se tratando de um robô "inteligente" (ou "sensorial"), a programação "off-line" torna-se obrigatória.

O modelo matemático contém informações sobre a geometria do sistema. Por isso, ele é chamado de modelo cinemático. Se as velocidades e acelerações envolvidas no movimento do robô forem suficientemente altas, caracterizando uma classe de robôs denominados robôs de alto desempenho, a utilização de um modelo dinâmico também se faz necessária para que se tenha uma operação mais precisa e estável.

Apresenta-se, a seguir, uma metodologia para se chegar ao modelo cinemático de qualquer manipulador robótico industrial. Para se obter tal modelo, a malha aberta formada pelos elos e juntas do manipulador é fechada acrescentando-se a ele mais uma junta e mais um elo imaginários, resultando em um mecanismo espacial que passa a servir de base para a derivação do modelo

cinemático desejado. Esta metodologia, apresentada neste capítulo e no seguinte, é baseada no trabalho de Duffy [4].

2.2 Trigonometria Esférica

2.2.1 Definições

- Plano central - plano que passa pelo centro de uma esfera;
- Grande-círculo - interseção de uma esfera com um plano central;
- Pequeno-círculo - interseção de uma esfera com um plano que não seja central;
- Esfera unitária - a que tem raio unitário. Nesta metodologia, a esfera considerada será sempre unitária;
- Eixo polar - reta orientada passando pelo centro de um pequeno ou grande círculo e perpendicular ao plano deste círculo;
- Pólos - as duas interseções entre um eixo polar e uma esfera (figura 2.1). Para a metodologia apresentada, o pólo P será sempre o considerado.

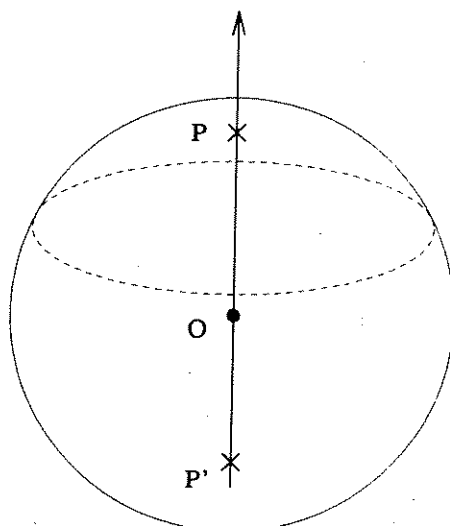


Figura 2.1: Eixo Polar e Pólos

2.2.2 Triângulos Esféricos

O triângulo esférico da figura 2.2 tem vértices 1, 2 e 3 e lados α_{12} , α_{23} e α_{31} que são arcos de grandes círculos. Portanto, esses lados definem três planos centrais. Os ângulos externos

θ_1 , θ_2 e θ_3 são considerados positivos quando orientados por uma rotação tipo parafuso pela mão direita, em torno e nos sentidos dos versores \underline{S}_1 , \underline{S}_2 e \underline{S}_3 , respectivamente. Os eixos polares \underline{a}_{12} , \underline{a}_{23} e \underline{a}_{31} , perpendiculares aos planos centrais definidos respectivamente por \underline{S}_1 e \underline{S}_2 , \underline{S}_2 e \underline{S}_3 , e \underline{S}_3 e \underline{S}_1 , interceptam a esfera nos pólos $1'$, $2'$ e $3'$ e possuem orientações definidas pelo produtos vetoriais entre \underline{S}_i e \underline{S}_j , formando assim um segundo triângulo, denominado triângulo polar, com lados θ_1 , θ_2 e θ_3 e ângulos externos α_{12} , α_{23} e α_{31} , os quais são considerados positivos quando orientados por uma rotação tipo parafuso pela mão direita, em torno e no sentido dos eixos polares \underline{a}_{12} , \underline{a}_{23} e \underline{a}_{31} , respectivamente. Qualquer teorema válido para triângulos esféricos valem também para os polares [4].

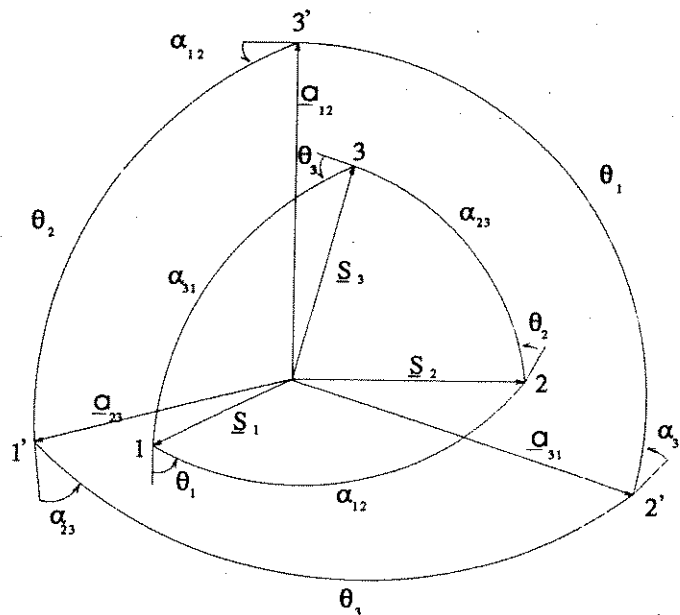


Figura 2.2: Triângulos Esférico e Polar

Os triângulos 123 e $1'2'3'$ (figura 2.3) cujos vértices são diametralmente opostos são chamados triângulos anti-polares. Todos os elementos dos dois triângulos são iguais mas eles não são congruentes, pois não podem se superpor um ao outro. Diz-se, portanto, que eles são "simetricamente iguais" ou "inversos".

É correto concluir-se que dois triângulos numa mesma esfera e com lados menores que π são congruentes ou inversos quando se souber que três determinados elementos de um dos triângulos são respectivamente iguais aos do outro. Tais elementos podem ser:

- Dois lados e o ângulo por eles formado;
- Os três lados;
- Dois ângulos e o lado a eles comum; ou

– Os três ângulos.

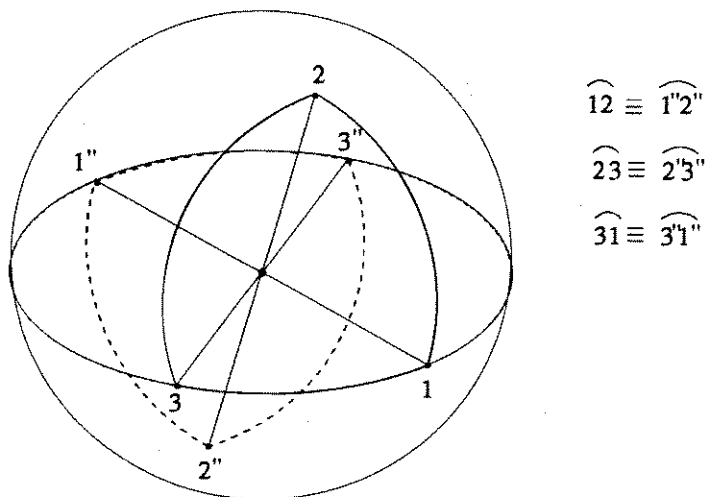


Figura 2.3: Triângulos Anti-Polares

É apropriado notar que o último caso não tem correspondência na geometria plana.

2.2.3 As Leis do Seno, Seno-cosseno e Cosseno para Triângulos Esféricos

Considere um sistema de coordenadas cartesianas XYZ tal que $X \equiv \underline{a}_{12}$ e, consequentemente, $Z \equiv \underline{S}_1$, visto que \underline{a}_{12} é perpendicular ao plano $\underline{S}_1\underline{S}_2$. As coordenadas dos vértices do triângulo esférico da figura 2.4, neste sistema cartesiano, podem ser descritas em termos dos ângulos θ_i e α_{ij} como mostrado.

Suponha que desejamos obter as coordenadas do vértice 3. Teremos, então, as componentes S_{3x} , S_{3y} e S_{3z} do vetor \underline{S}_3 , cujo módulo é unitário (o vértice 3 pertence a uma esfera unitária) dadas na seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_{3x} &= s_{31}s_1 \\ S_{3y} &= s_{31}c_1 \\ S_{3z} &= c_{31} \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde "s" e "c" representam o seno e o cosseno, respectivamente, do ângulo indicado pelo índice, ou seja, α_{31} ou θ_1 . É importante lembrar que o eixo X é perpendicular ao plano definido por \underline{S}_1 e \underline{S}_2 .

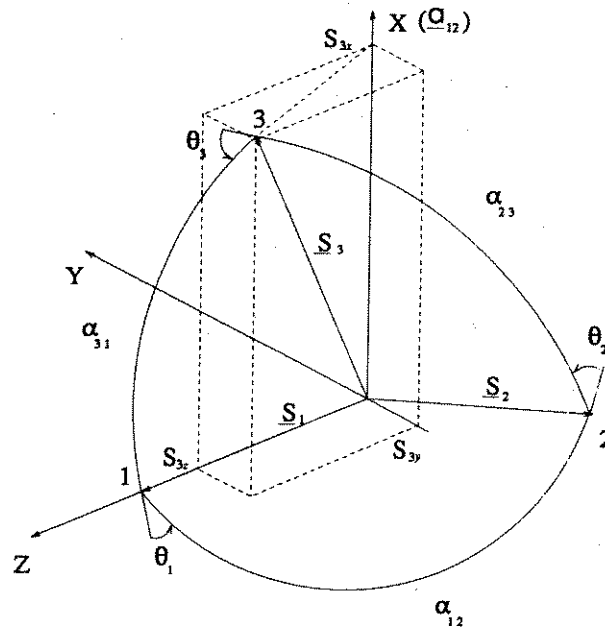


Figura 2.4: Triângulo Esférico

Obviamente as componentes de \underline{S}_3 também podem ser expressas em função de α_{12} , θ_2 e α_{23} . (É importante observar que o eixo Y está no plano definido por \underline{S}_1 e \underline{S}_2). Para isso, posiciona-se um sistema xyz de coordenadas de modo que sua origem coincida com a origem "O" de XYZ, seu eixo "z" tenha o mesmo sentido de \underline{S}_3 e o eixo "x" tenha o mesmo sentido de $\underline{S}_2 \times \underline{S}_3$. As projeções do vetor \underline{S}_3 nesse novo sistema são:

$$\begin{aligned} S_{3x} &= 0 \\ S_{3y} &= 0 \\ S_{3z} &= 1 \end{aligned}$$

Aplicando três rotações consecutivas ao sistema xyz pode-se fazê-lo coincidir com XYZ. Consideremos as seguintes rotações utilizando a regra da mão direita, as quais são ilustradas na figura 2.5:

- I - rotação de $-\alpha_{23}$ em torno de x : $xyz \rightarrow xy'z'$ (figura 2.5 a \rightarrow b);
- II - rotação de $-\theta_2$ em torno de z' : $xy'z' \rightarrow x'y''z'$ (figura 2.5 b \rightarrow c);
- III - rotação de $-\alpha_{12}$ em torno de x' : $x'y''z' \rightarrow x'y'''z'' \equiv XYZ$ (figura 2.5 c \rightarrow d).

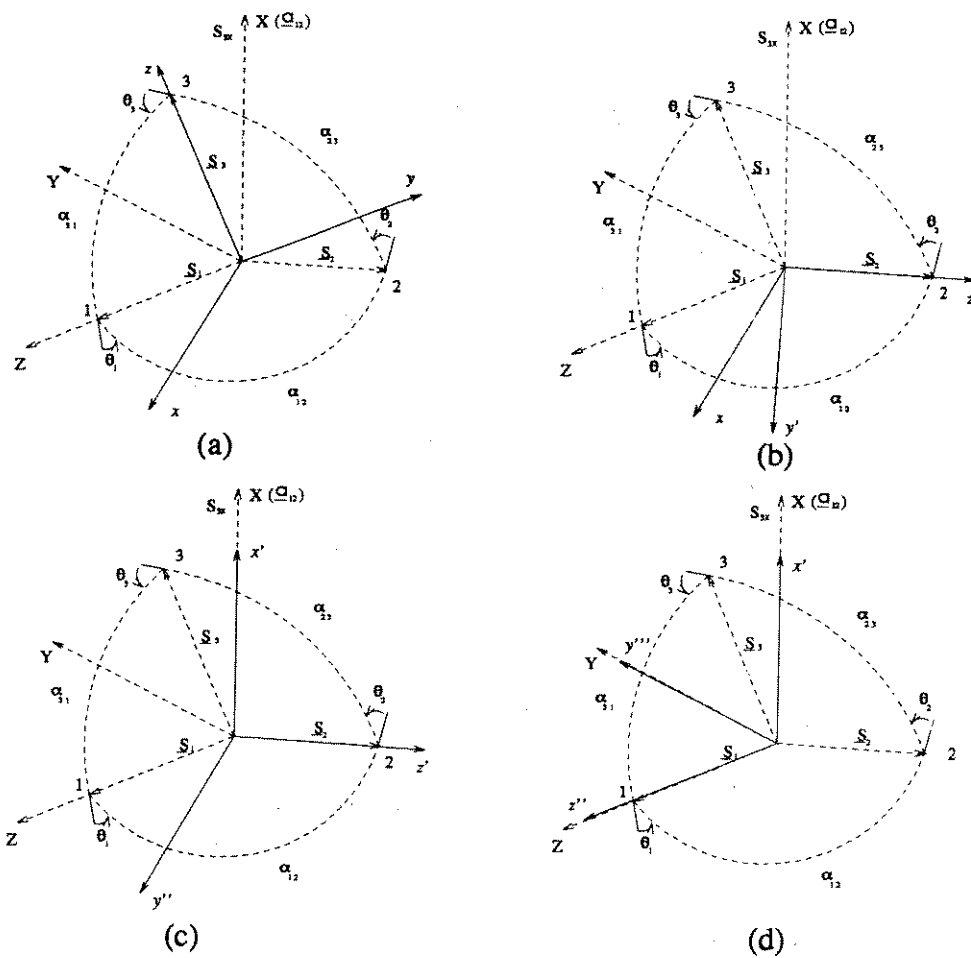


Figura 2.5: Obtenção do Sistema XYZ a partir do Sistema xyz

Portanto, as componentes do vetor \underline{S}_3 no sistema XYZ são:

$$\begin{bmatrix} S_{3x} \\ S_{3y} \\ S_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{12} & -s_{12} \\ 0 & s_{12} & c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & -s_{23} \\ 0 & s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo-se as multiplicações, obtém-se:

$$\begin{aligned} S_{3x} &= s_{23}s_2 \\ S_{3y} &= -(s_{12}c_{23} + c_{12}s_{23}c_2) \\ S_{3z} &= c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}c_2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Igualando-se a equação 2.1 à 2.2, tem-se:

$$\begin{aligned} S_{3x} &\Rightarrow s_{23}s_2 = s_{31}s_1 \\ S_{3y} &\Rightarrow -(s_{12}c_{23} + c_{12}s_{23}c_2) = s_{31}c_1 \\ S_{3z} &\Rightarrow c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}c_2 = c_{31} \end{aligned} \quad (2.3)$$

que são as equações do seno, seno-cosseno e cosseno, respectivamente. Essas equações podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \overline{X}_2 &= s_{31}s_1 \\ \overline{Y}_2 &= s_{31}c_1 \\ \overline{Z}_2 &= c_{31} \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde

$$\begin{aligned} \overline{X}_2 &= s_{23}s_2 \\ \overline{Y}_2 &= -(s_{12}c_{23} + c_{12}s_{23}c_2) \\ \overline{Z}_2 &= c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}c_2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Se aplicarmos uma rotação de α_{12} no sistema XYZ (figura 2.4) em torno do eixo X, então as coordenadas de \underline{S}_3 passam a ser, a partir das equações 2.4:

$$\begin{bmatrix} S_{3x} \\ S_{3y} \\ S_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{12} & s_{12} \\ 0 & -s_{12} & c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{X}_2 \\ \overline{Y}_2 \\ \overline{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{12} & s_{12} \\ 0 & -s_{12} & c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{31}s_1 \\ s_{31}c_1 \\ c_{31} \end{bmatrix}$$

Introduzindo-se as equações 2.5 acima, resulta:

$$\begin{aligned} S_{3x} &= s_{23}s_2 = s_{31}s_1 \\ -S_{3y} &= s_{23}c_2 = -(s_{12}c_{31} + c_{12}s_{31}c_1) \\ S_{3z} &= c_{23} = c_{12}c_{31} - s_{12}s_{31}c_1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

ou, rearranjando e pondo numa forma semelhante à das equações 2.4, tem-se:

$$\begin{aligned} \{ S_{3x} \} &\Rightarrow X_1 = s_{23}s_2 \\ \{ -S_{3y} \} &\Rightarrow Y_1 = s_{23}c_2 \\ \{ S_{3z} \} &\Rightarrow Z_1 = c_{23} \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde:

$$\begin{aligned} X_1 &= s_{31}s_1 \\ Y_1 &= -(s_{12}c_{31} + c_{12}s_{31}c_1) \\ Z_1 &= c_{12}c_{31} - s_{12}s_{31}c_1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

É fundamental observar que as barras em $\overline{X_2}$, $\overline{Y_2}$ e $\overline{Z_2}$ nas equações 2.5 indicam que no percurso do triângulo esférico a partir de $\underline{S_3}$ em direção ao eixo Z, passando por $\underline{S_2}$, a ordem dos vértices é *decrecente*. Em contraposição, X_1 , Y_1 e Z_1 não possuem as barras, pois a ordem dos vértices é *crescente* no percurso de $\underline{S_3}$ para Z ($\underline{S_2}$) que inclui $\underline{S_1}$.

2.2.4 As Leis do Seno, Seno-cosseno e Cosseno para Triângulos Polares

Na figura 2.6 vê-se o triângulo polar correspondente ao triângulo esférico da figura 2.4. Um sistema UVW de coordenadas é fixado ao triângulo polar de maneira que $W \equiv a_{12}$ e $U \equiv S_1$. Portanto, tem-se também $U \equiv Z$, $V \equiv -Y$ e $W \equiv X$.

Como o posicionamento do sistema UVW é equivalente ao posicionamento de XYZ para as equações 2.7 e 2.8, fica fácil escrever as equações do seno, seno-cosseno e cosseno para o triângulo polar:

$$\begin{aligned} \{a_{23U}\} &\Rightarrow U_{31} = s_2 s_{12} \quad (= a_{23Z}) \\ \{-a_{23V}\} &\Rightarrow V_{31} = s_2 c_{12} \quad (= a_{23Y}) \\ \{a_{23W}\} &\Rightarrow W_{31} = c_2 \quad (= a_{23X}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde:

$$\begin{aligned} U_{31} &= s_3 s_{31} \\ V_{31} &= -(s_1 c_3 + c_1 s_3 c_{31}) \\ W_{31} &= c_1 c_3 - s_1 s_3 c_{31} \end{aligned} \quad (2.10)$$

É importante notar que os alfas e os tetas foram intercambiados no triângulo polar e que os índices de U, V e W são formados por dois algarismos, tornando-se, assim, desnecessária a utilização de barras, uma vez que a ordem dos vértices já está explícita nos próprios índices. (Os índices procuram indicar a presença dos respectivos tetas na expressão: X_1 , Y_1 e Z_1 têm θ_1 ; V_{31} e W_{31} têm θ_3 e θ_1 ; U_{31} foge parcialmente à regra e só contém θ_3).

2.2.5 Algumas Propriedades dos Triângulos Esféricos e Polares

Para triângulos esféricos com $0 < \alpha_{ij} < \pi$, $ij = 12, 23, 31$, são válidas as seguintes desigualdades:

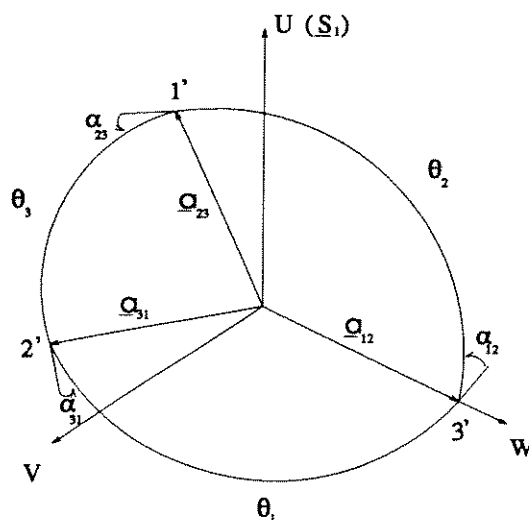


Figura 2.6: Triângulo Polar

$$\begin{aligned}
 \alpha_{12} + \alpha_{23} &> \alpha_{31} \\
 \alpha_{23} + \alpha_{31} &> \alpha_{12} \\
 \alpha_{12} + \alpha_{31} &> \alpha_{23}
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

Em outras palavras, a soma de dois lados quaisquer é sempre maior que o terceiro se $0 < \alpha_{ij} < \pi$.

Outra propriedade indica que a soma dos três lados é menor que 2π , ou seja:

$$\begin{aligned}
 \sum \alpha_{ij} &< 2\pi ; \quad ij = 12, 23, 31 \\
 0 &< \alpha_{ij} < \pi
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Naturalmente essas propriedades se aplicam de forma equivalente aos triângulos polares.

Uma vez que aqui os triângulos são sempre formados em esferas unitárias, tem-se que:

$$\bar{X}_2^2 + \bar{Y}_2^2 + \bar{Z}_2^2 = 1
 \tag{2.13}$$

e, similarmente,

$$U_{31}^2 + V_{31}^2 + W_{31}^2 = 1
 \tag{2.14}$$

De acordo com a notação que está sendo usada, temos:

$$Z_2 = c_{23}c_{12} - s_{23}s_{12}c_2
 \tag{2.15}$$

e, comparando-se as equações 2.15 e 2.5, pode-se concluir que:

$$Z_2 = \overline{Z}_2 \quad (2.16)$$

A notação utilizada também permite escrever:

$$W_{13} = c_3c_1 - s_3s_1c_{13} \quad (2.17)$$

e, comparando-se as equações 2.17 e 2.10, tem-se que:

$$W_{31} = W_{13} \quad (2.18)$$

2.2.6 Equações para o Quadrilátero Esférico

A figura 2.7 ilustra um quadrilátero esférico subdividido nos triângulos 124 e 234. Para o primeiro triângulo, pode-se escrever, por analogia às equações obtidas para o triângulo esférico (2.3), que:

$$\begin{aligned} s_{42}s_{2'} &= s_{11}s_1 \\ -(s_{12}c_{42} + c_{12}s_{42}c_{2'}) &= s_{41}c_1 \\ c_{12}c_{42} - s_{12}s_{42}c_{2'} &= c_{41} \end{aligned} \quad (2.19)$$

e para o triângulo 234, por analogia às equações 2.4, temos:

$$\begin{aligned} \overline{X}_3 &= s_{42}s_{2''} \\ \overline{Y}_3 &= s_{42}c_{2''} \\ \overline{Z}_3 &= c_{42} \end{aligned} \quad (2.20)$$

A partir da figura 2.7, pode-se concluir que $\pi - \theta'_2 = \theta''_2 - \theta_2$. Portanto,

$$\begin{aligned} s_{2'} &= (s_{2''}c_2 - c_{2''}s_2); \\ c_{2'} &= -(c_{2''}c_2 + s_{2''}s_2) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Substituindo 2.21 em 2.19 e reagrupando os termos, obtém-se:

$$\begin{aligned} (s_{42}s_{2''})c_2 - (s_{42}c_{2''})s_2 &= s_{41}s_1 \\ c_{12} \{ (s_{42}s_{2''})s_2 + (s_{42}c_{2''})c_2 \} - s_{12}c_{42} &= s_{41}c_1 \\ s_{12} \{ (s_{42}s_{2''})s_2 + (c_{42}c_{2''})c_2 \} + c_{12}c_{42} &= c_{41} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Substituindo 2.20 em 2.22, tem-se:

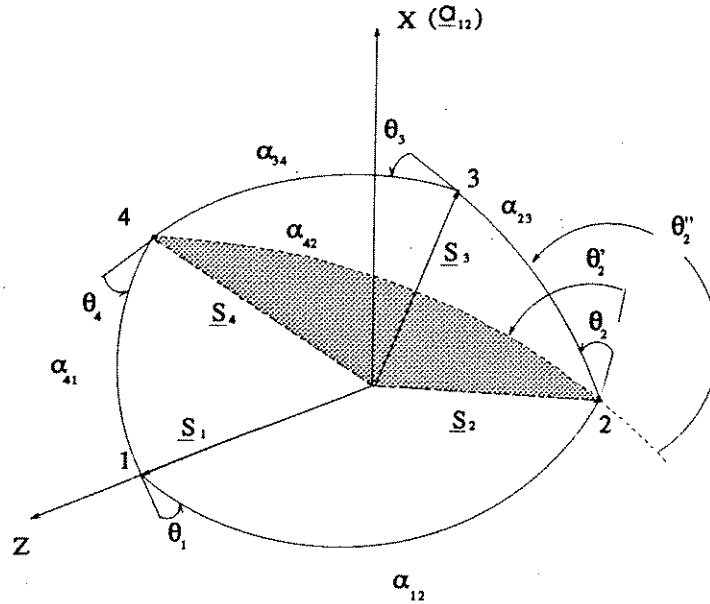


Figura 2.7: Quadrilátero Esférico

$$\begin{aligned}
 \overline{X}_3 c_2 - \overline{Y}_3 s_2 &= s_{41} s_1 \\
 c_{12}(\overline{X}_3 s_2 + \overline{Y}_3 c_2) - s_{12} \overline{Z}_3 &= s_{41} c_1 \\
 s_{12}(\overline{X}_3 s_2 + \overline{Y}_3 c_2) + c_{12} \overline{Z}_3 &= c_{41}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

que são as equações do seno, seno-cosseno e cosseno para o quadrilátero esférico, as quais podem ser expressas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \{S_{4x}\} &\Rightarrow X_{32} = s_{41} s_1 \\
 \{S_{4y}\} &\Rightarrow Y_{32} = s_{41} c_1 \\
 \{S_{4z}\} &\Rightarrow Z_{32} = c_{41}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Como está indicado, essas equações representam as coordenadas do vetor \overline{S}_4 no sistema XYZ. É importante enfatizar que X_{32} , Y_{32} e Z_{32} são apenas uma representação abreviada das expressões do lado esquerdo das equações 2.23.

Convém observar que:

$$\begin{aligned}
 \overline{X}_3 &= s_{34} s_3 \\
 \overline{Y}_3 &= -(s_{23} c_{34} + c_{23} s_{34} c_3) \\
 \overline{Z}_3 &= c_{23} c_{34} - s_{23} s_{34} c_3
 \end{aligned}$$

e também:

$$\begin{aligned} X_{32}^2 + Y_{32}^2 + Z_{32}^2 &= 1 \\ Z_{32} &= Z_{23} \end{aligned}$$

2.2.7 Equações para o Polígono Esférico de n Lados

Estabelecendo o procedimento da seção anterior para o polígono esférico de n lados da figura 2.8, tem-se as seguinte equação do seno, seno-cosseno e cosseno:

$$\begin{aligned} \{S_{nx}\} &\Rightarrow X_{(n-1)(n-2)...2} = s_{n1} s_1 \\ \{S_{ny}\} &\Rightarrow Y_{(n-1)(n-2)...2} = s_{n1} c_1 \\ \{S_{nz}\} &\Rightarrow Z_{(n-1)(n-2)...2} = c_{n1} \end{aligned} \tag{2.25}$$

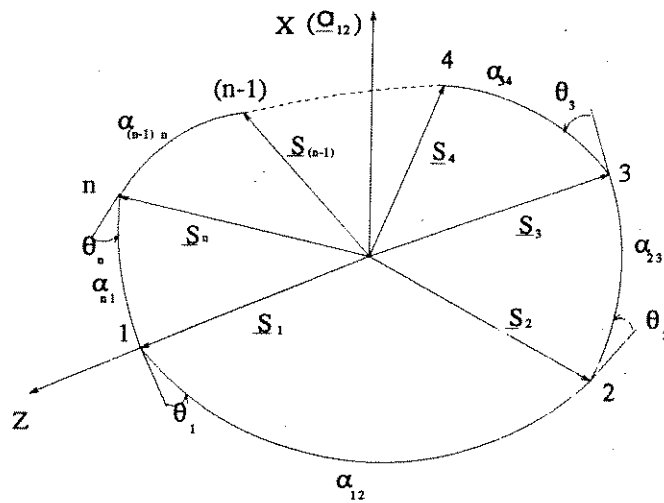


Figura 2.8: Polígono Esférico de n Lados

O desdobramento do lado esquerdo dessas equações dá-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} X_{(n-1)(n-2)...2} &= X_{(n-1)(n-2)...3} c_2 - Y_{(n-1)(n-2)...3} s_2 \\ X_{(n-1)(n-2)...3} &= X_{(n-1)(n-2)...4} c_3 - Y_{(n-1)(n-2)...4} s_3 \\ &\dots etc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{(n-1)(n-2)...2} &= c_{12}(X_{(n-1)(n-2)...3} s_2 + Y_{(n-1)(n-2)...3} c_2) - s_{12} Z_{(n-1)(n-2)...3} \\ Y_{(n-1)(n-2)...3} &= c_{23}(X_{(n-1)(n-2)...4} s_3 + Y_{(n-1)(n-2)...4} c_3) - s_{23} Z_{(n-1)(n-2)...4} \\ &\dots etc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{(n-1)(n-2)...2} &= s_{12}(X_{(n-1)(n-2)...3} s_2 + Y_{(n-1)(n-2)...3} c_2) + c_{12}Z_{(n-1)(n-2)...3} \\ Z_{(n-1)(n-2)...3} &= s_{23}(X_{(n-1)(n-2)...4} s_3 + Y_{(n-1)(n-2)...4} c_3) + c_{23}Z_{(n-1)(n-2)...4} \\ &\dots etc \end{aligned}$$

e, finalmente:

$$\begin{aligned} \bar{X}_{(n-1)} &= s_{(n-1)n} s_{(n-1)} \\ \bar{Y}_{(n-1)} &= -(s_{(n-2)(n-1)} c_{(n-1)n} + c_{(n-2)(n-1)} s_{(n-1)n} c_{(n-1)}) \\ \bar{Z}_{(n-1)} &= c_{(n-2)(n-1)} c_{(n-1)n} - s_{(n-2)(n-1)} s_{(n-1)n} c_{(n-1)} \end{aligned}$$

2.2.8 Equações Subsidiárias do Polígono Esférico de n Lados

As igualdades 2.25, que são as equações do seno, seno-cosseno e cosseno do polígono esférico de n lados e também chamadas de equações fundamentais, representam as coordenadas do vetor \underline{S}_n no sistema XYZ com eixo Z no sentido de \underline{S}_1 e eixo X no sentido de \underline{a}_{12} . Aplicando-se uma rotação de α_{12} em torno do eixo X no sistema XYZ obtém-se as equações subsidiárias 1, que representam as coordenadas de \underline{S}_1 no novo sistema de coordenadas. Aplicando-se uma segunda rotação de θ_2 em torno do eixo Z, obtém-se as equações subsidiárias 2. Uma rotação seguinte de α_{23} em torno de X conduz às equações subsidiárias 3, e assim por diante, até chegar-se ao conjunto de equações subsidiárias $(2n - 1)$. Os quatro primeiros conjuntos de equações subsidiárias são:

– Conjunto 1 (após a rotação de α_{12})

$$\begin{aligned} X_{(n-1)(n-2)...2} &= X_1 \\ X_{(n-1)(n-2)...2}^* &= -Y_1 \\ Z_{(n-1)(n-2)...3} &= Z_1 \end{aligned} \quad (2.26)$$

– Conjunto 2 (após as rotações de α_{12} e θ_2)

$$\begin{aligned} X_{(n-1)(n-2)...3} &= X_{12} \\ Y_{(n-1)(n-2)...3} &= -X_{12}^* \\ Z_{(n-1)(n-2)...3} &= Z_1 \end{aligned} \quad (2.27)$$

– Conjunto 3 (após a rotações de α_{12} , θ_2 e α_{23})

$$\begin{aligned} X_{(n-1)(n-2)...3} &= X_{12} \\ X_{(n-1)(n-2)...3}^* &= -Y_{12} \\ Z_{(n-1)(n-2)...4} &= Z_{12} \end{aligned} \quad (2.28)$$

– Conjunto 4 (após a rotações de α_{12} , θ_2 , α_{23} e θ_3)


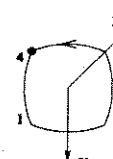
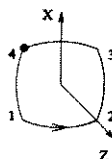
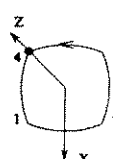
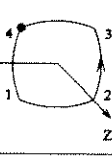
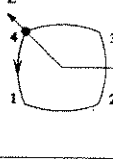
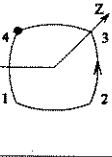
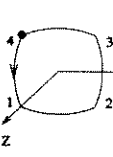
$$\begin{aligned} X_{(n-1)(n-2)...4} &= X_{123} \\ Y_{(n-1)(n-2)...4} &= -X_{123}^* \\ Z_{(n-1)(n-2)...4} &= Z_{12} \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde

$$X_{(n-1)(n-2)\dots 2}^* = X_{(n-1)(n-2)\dots 3} s_2 + Y_{(n-1)(n-2)\dots 3} c_2$$

$$X_{12}^* = X_1 s_2 + Y_1 c_2, \text{ e assim por diante.}$$

A figura 2.9 mostra os sete conjuntos de equações subsidiárias e o conjunto de equações fundamentais para o quadrilátero esférico.

<p>FUNDAMENTAIS</p>  $X_{32} = s_{41} s_1 (= X_1)$ $Y_{32} = s_{41} c_1 (= -X_1^*)$ $Z_{32} = c_{41}$	<p>SUBS. 4</p>  $0 = X_{123}$ $-s_{34} = -X_{123}^*$ $c_{34} = Z_{12}$
<p>SUBS. 1</p>  $X_{32} = X_1$ $X_{32}^* = -Y_1$ $\bar{Z}_3 = Z_1$	<p>SUBS. 5</p>  $0 = X_{123}$ $0 = Y_{123}$ $1 = Z_{123}$
<p>SUBS. 2</p>  $\bar{X}_3 = X_{12}$ $\bar{Y}_3 = -X_{12}^*$ $\bar{Z}_3 = Z_1$	<p>SUBS. 6</p>  $X_{321} = 0$ $Y_{321} = 0$ $Z_{321} = 1$
<p>SUBS. 3</p>  $(\bar{X}_3) s_{34} s_3 = X_{12}$ $(\bar{X}_3^*) - s_{34} c_3 = -Y_{12}$ $c_{34} = Z_{12}$	<p>SUBS. 7</p>  $X_{321} = 0$ $X_{321}^* = s_{41}$ $Z_{32} = c_{41}$

Obs.: Os números 1, 2, 3 e 4 nos vértices dos quadriláteros indicam a localização de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ e θ_4

Figura 2.9: Quadrilátero Esférico: Equações Fundamentais e Subsidiárias

2.2.9 Equações para o Quadrilátero Polar

O quadrilátero polar da figura 2.10 foi obtido a partir do quadrilátero esférico da figura 2.7. A posição do sistema de coordenadas UVW é determinada de maneira que $U \equiv Z, V \equiv -Y$ e $W \equiv X$. Através de um procedimento análogo ao utilizado na seção 2.2.6 para o quadrilátero esférico,

pode-se chegar às seguintes equações de seno, seno-cosseno e cosseno para o quadrilátero polar da figura 2.10:

$$\begin{aligned} U_{321} &= s_4 s_{41} \\ V_{321} &= s_4 c_{41} \\ W_{321} &= c_4 \end{aligned} \tag{2.30}$$

onde,

$$\begin{aligned} U_{321} &= U_{32} c_{12} - V_{32} s_{12} \\ V_{321} &= c_1(U_{32} s_{12} + V_{32} c_{12}) - s_1 W_{32} \\ W_{321} &= s_1(U_{32} s_{12} + V_{32} c_{12}) + c_1 W_{32} \end{aligned} \tag{2.31}$$

É importante entender que as equações (2.30) representam as componentes do vetor \underline{a}_{34} no sistema de coordenadas obtido pela rotação de UVW de $-\theta_1$ em torno de U, de modo que o eixo W passe a coincidir com \underline{a}_{41} .

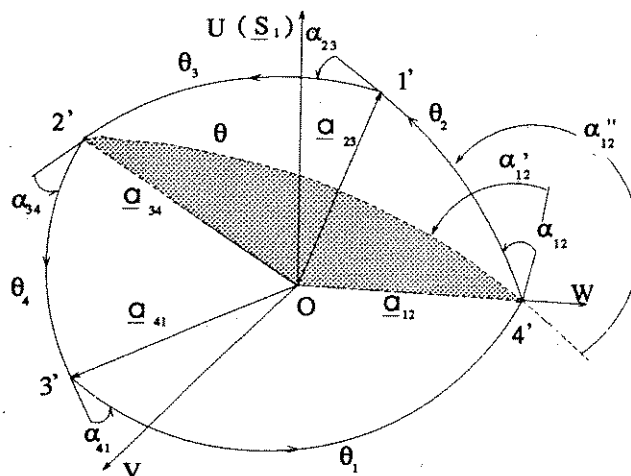


Figura 2.10: Quadrilátero Polar

2.2.10 Equações para o Polígono Polar de n Lados

Por indução, a partir da equação (2.30), pode-se chegar às seguintes equações do seno, seno-cosseno e cosseno para o polígono polar de n lados mostrado na figura 2.11:

$$\begin{aligned} U_{(n-1)(n-2)\dots 1} &= s_n s_{n1} \\ V_{(n-1)(n-2)\dots 1} &= s_n c_{n1} \\ W_{(n-1)(n-2)\dots 1} &= c_n \end{aligned} \tag{2.32}$$

onde,

$$\begin{aligned}
 U_{(n-1)(n-2)\dots 1} &= U_{(n-1)(n-2)\dots 2} c_{12} - V_{(n-1)(n-2)\dots 2} s_{12} \\
 V_{(n-1)(n-2)\dots 1} &= c_1(U_{(n-1)(n-2)\dots 2} s_{12} + V_{(n-1)(n-2)\dots 2} c_{12}) - s_1 W_{(n-1)(n-2)\dots 2} \\
 W_{(n-1)(n-2)\dots 1} &= s_1(U_{(n-1)(n-2)\dots 2} s_{12} + V_{(n-1)(n-2)\dots 2} c_{12}) + c_1 W_{(n-1)(n-2)\dots 2}
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

sendo que ambos os lados de (2.32) correspondem às componentes do vetor $\underline{a}_{(n-1)n}$ no sistema UVW da figura 2.11 rotacionado de $-\theta_1$ em torno de U, de modo que o eixo W coincida com \underline{a}_{n1} .

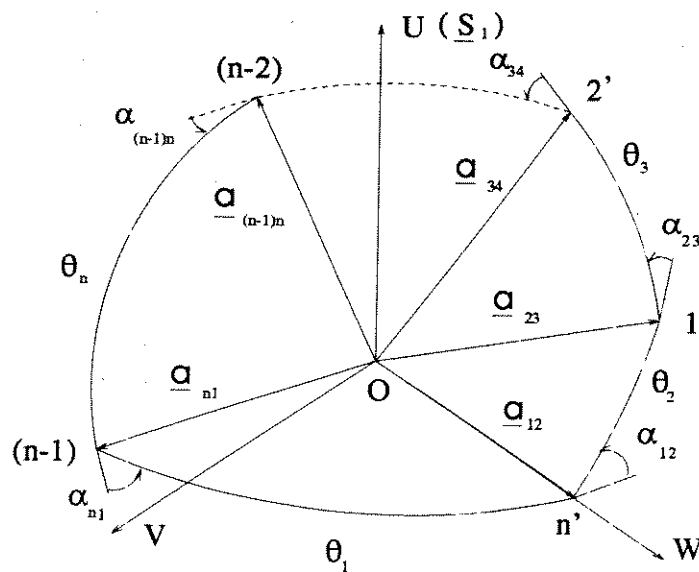


Figura 2.11: Polígono Polar de n Lados

2.2.11 Equações Subsidiárias do Polígono Polar de n Lados

De forma semelhante à descrita na seção 2.2.8 para polígonos esféricos, é possível obter-se as equações subsidiárias para o polígono polar de n lados através de rotações sucessivas do sistema UVW. Os quatro primeiros conjuntos são:

– Conjunto 1 (após a rotação de θ_1)

$$\begin{aligned} U_{(n-1)(n-2)\dots 1} &= U_{n1} \\ U_{(n-1)(n-2)\dots 1}^* &= -V_{n1} \\ W_{(n-1)(n-2)\dots 2} &= W_{n1} \end{aligned} \quad (2.34)$$

– Conjunto 2 (após as rotações de θ_1 e α_{12})

$$\begin{aligned} U_{(n-1)(n-2)\dots 2} &= U_{n12} \\ V_{(n-1)(n-2)\dots 2} &= -U_{n12}^* \\ W_{(n-1)(n-2)\dots 2} &= W_{n1} \end{aligned} \quad (2.35)$$

– Conjunto 3 (após as rotações de θ_1 , α_{12} e θ_2)

$$\begin{aligned} U_{(n-1)(n-2)\dots 2} &= U_{n12} \\ U_{(n-1)(n-2)\dots 2}^* &= -V_{n12} \\ W_{(n-1)(n-2)\dots 3} &= W_{n12} \end{aligned} \quad (2.36)$$

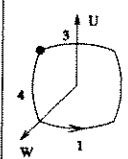
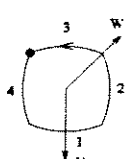
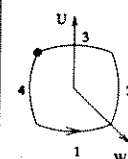
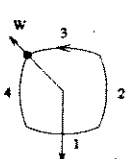
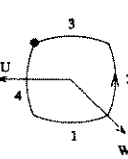
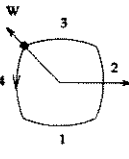
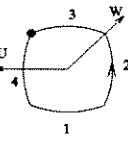
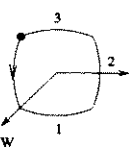
– Conjunto 4 (após as rotações de θ_1 , α_{12} , θ_2 e α_{23})

$$\begin{aligned} U_{(n-1)(n-2)\dots 3} &= U_{n123} \\ V_{(n-1)(n-2)\dots 3} &= -U_{n123}^* \\ W_{(n-1)(n-2)\dots 3} &= W_{n12} \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde,

$$\begin{aligned} U_{(n-1)(n-2)\dots 1}^* &= U_{(n-1)(n-2)\dots 2} s_{12} + V_{(n-1)(n-2)\dots 2} c_{12} \\ U_{n12}^* &= U_{n1} s_{12} + V_{n1} c_{12}, \text{ e assim por diante.} \end{aligned}$$

Na figura 2.12 estão apresentadas as equações fundamentais e subsidiárias para o quadrilátero polar.

<p>FUNDAMENTAIS</p>  $U_{321} = s_4 s_{41} (=U_{41})$ $V_{321} = s_4 c_{41} (= -U_{41}^*)$ $W_{321} = c_4$	<p>SUBS. 4</p>  $0 = U_{4123}$ $-s_3 = -U_{4123}^*$ $c_3 = W_{412}$
<p>SUBS. 1</p>  $U_{321} = U_{41}$ $U_{321}^* = -V_{41}$ $W_{321} = W_{41}$	<p>SUBS. 5</p>  $0 = U_{4123}$ $0 = -V_{4123}$ $1 = W_{4123}$
<p>SUBS. 2</p>  $U_{321} = U_{412}$ $V_{321} = -U_{412}^*$ $W_{321} = W_{41}$	<p>SUBS. 6</p>  $U_{3214} = 0$ $V_{3214} = 0$ $W_{3214} = 1$
<p>SUBS. 3</p>  $(U_{321}) s_3 s_{23} = U_{412}$ $(U_{321}^*) - s_3 c_{23} = -V_{412}$ $c_3 = W_{412}$	<p>SUBS. 7</p>  $U_{3214} = 0$ $U_{3214}^* = s_4$ $W_{321} = c_4$

Obs.: Os números 1, 2, 3 e 4 nos vértices dos quadriláteros indicam a localização de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ e θ_4

Figura 2.12: Quadrilátero Polar: Equações Fundamentais e Subsidiárias

2.3 Polígonos Espaciais

2.3.1 Equação de Malha Fechada para Polígonos Espaciais Ortogonais

Na figura 2.13 vê-se um polígono espacial ortogonal com n lados ($a_{12}, a_{23}, \dots, a_{n1}$) e n excentricidades (S_1, S_2, \dots, S_n), sendo que os vetores a_{ij} e S_i associados aos lados e excentricidades desse polígono são os mesmos vetores dos polígonos polar e esférico de n lados. Esse polígono é dito ortogonal porque uma excentricidade e um lado adjacentes são perpendiculares entre si. Como os ângulos α 's e θ 's são os mesmos dos polígonos esférico e polar correspondentes, as equações válidas para esses polígonos são também válidas para o polígono espacial ortogonal.

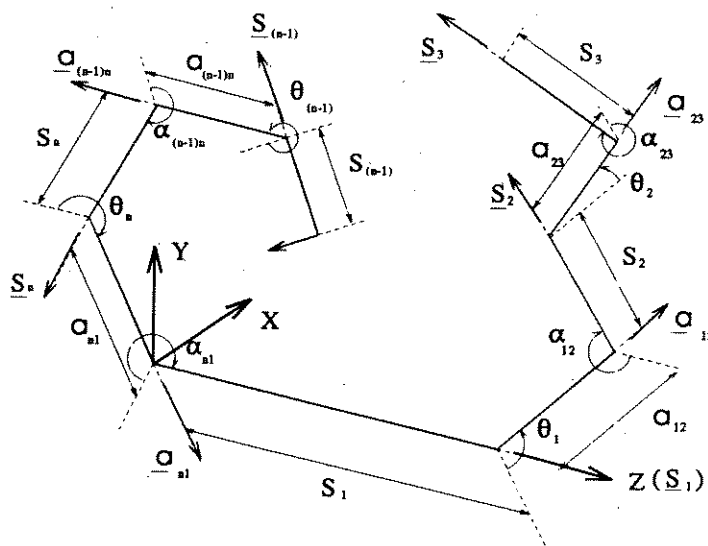


Figura 2.13: Polígono Espacial Ortogonal com n Lados

A equação de malha fechada para o polígono espacial da figura 2.13 é a seguinte:

$$(S_1 \underline{S}_1 + S_2 \underline{S}_2 + \dots + S_n \underline{S}_n) + (a_{12} \underline{a}_{12} + a_{23} \underline{a}_{23} + \dots + a_{(n-1)n} \underline{a}_{(n-1)n} + a_{n1} \underline{a}_{n1}) = 0 \quad (2.38)$$

Os cossenos diretores dos vetores unitários da equação 2.38 para alguns polígonos são mostradas a seguir:

- Triângulo Espacial ($n=3$)

$$\begin{aligned} \underline{S}_1 &= (0, 0, 1) & \underline{a}_{12} &= (1, 0, 0) \\ \underline{S}_2 &= (0, -s_{12}, c_{12}) & \underline{a}_{23} &= (c_2, -U_{21}^*, U_{21}) \\ \underline{S}_3 &= (\bar{X}_2, \bar{Y}_2, \bar{Z}_2) & \underline{a}_{31} &= (c_1, -s_1, 0) \end{aligned}$$

- Quadrilátero Espacial ($n=4$)

$$\begin{aligned} \underline{S}_1 &= (0, 0, 1) & \underline{a}_{12} &= (1, 0, 0) \\ \underline{S}_2 &= (0, -s_{12}, c_{12}) & \underline{a}_{23} &= (c_2, -U_{21}^*, U_{21}) \\ \underline{S}_3 &= (\bar{X}_2, \bar{Y}_2, \bar{Z}_2) & \underline{a}_{34} &= (W_{32}, -U_{321}^*, U_{321}) \\ \underline{S}_4 &= (X_{32}, Y_{32}, Z_{32}) & \underline{a}_{41} &= (c_1, -s_1, 0) \end{aligned}$$

- Pentágono Espacial ($n=5$)

$$\begin{aligned}
 \underline{S}_1 &= (0, 0, 1) & \underline{a}_{12} &= (1, 0, 0) \\
 \underline{S}_2 &= (0, -s_{12}, c_{12}) & \underline{a}_{23} &= (c_2, -U_{21}^*, U_{21}) \\
 \underline{S}_3 &= (\bar{X}_2, \bar{Y}_2, \bar{Z}_2) & \underline{a}_{34} &= (W_{32}, -U_{321}^*, U_{321}) \\
 \underline{S}_4 &= (X_{32}, Y_{32}, Z_{32}) & \underline{a}_{45} &= (W_{432}, -U_{4321}^*, U_{4321}) \\
 \underline{S}_5 &= (X_{432}, Y_{432}, Z_{432}) & \underline{a}_{51} &= (c_1, -s_1, 0)
 \end{aligned}$$

onde $U_{21}^* = -s_2 c_{12}$ e $U_{21} = s_2 s_{21}$.

Como a equação 2.38 é vetorial, pode ser desdobrada em três equações algébricas.

2.3.2 Cadeia Espacial Ortogonal Aberta

A cadeia da figura 2.14 foi obtida removendo-se o lado a_{n1} e a excentricidade S_n do polígono espacial da figura 2.13. O vetor posição $\underline{R}_{(n-1)n}$ da extremidade pode ser expresso por:

$$\begin{aligned}
 \underline{R}_{(n-1)n} &= (S_1 - S_{11})\underline{S}_1 + S_2 \underline{S}_2 + \dots + S_{(n-1)} \underline{S}_{(n-1)} + \\
 &+ a_{12} \underline{a}_{12} + a_{23} \underline{a}_{23} + \dots + a_{(n-1)n} \underline{a}_{(n-1)n}
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

A razão da introdução de S_{11} ficará clara posteriormente. A equação vetorial 2.39 também pode ser desdobrada em três equações algébricas.

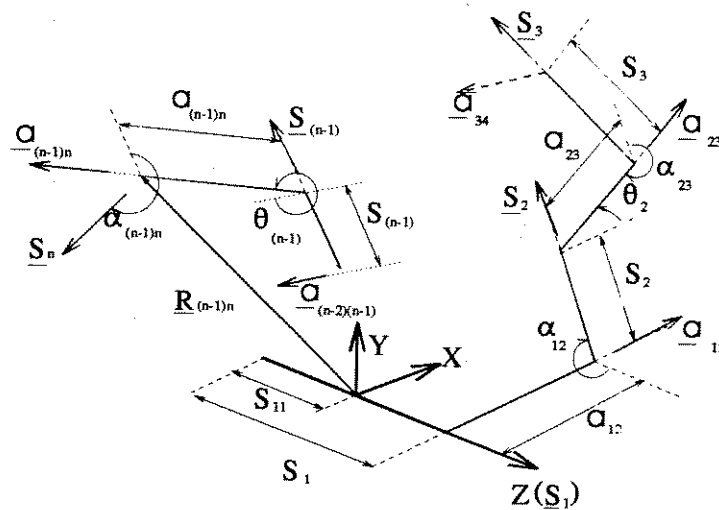


Figura 2.14: Cadeia Espacial Ortogonal Aberta

2.3.3 Equações Secundárias para Polígonos Espaciais

As equações secundárias do seno, seno-cosseno e cosseno para polígonos espaciais representam, respectivamente, os momentos em relação aos eixos X, Y e Z da reta orientada definida por qualquer uma das excentricidades. Aqui interessam apenas as equações secundárias do cosseno, as quais são muito importantes para a derivação das equações de entrada-saída para a grande maioria dos mecanismos espaciais.

Considerando-se o momento em relação ao eixo Z da reta que contém a excentricidade definida por \underline{S}_3 no triângulo espacial da figura 2.15, tem-se:

$$\begin{aligned} \underline{r}_1 \times \underline{S}_3 \cdot \underline{k} &= (-S_1 \underline{S}_1 - a_{31} \underline{a}_{31}) \times \underline{S}_3 \cdot \underline{k} \\ &= S_1 (\underline{S}_3 \times \underline{S}_1) \cdot \underline{k} + a_{31} (\underline{S}_3 \times \underline{a}_{31}) \cdot \underline{k} \end{aligned} \quad (2.40)$$

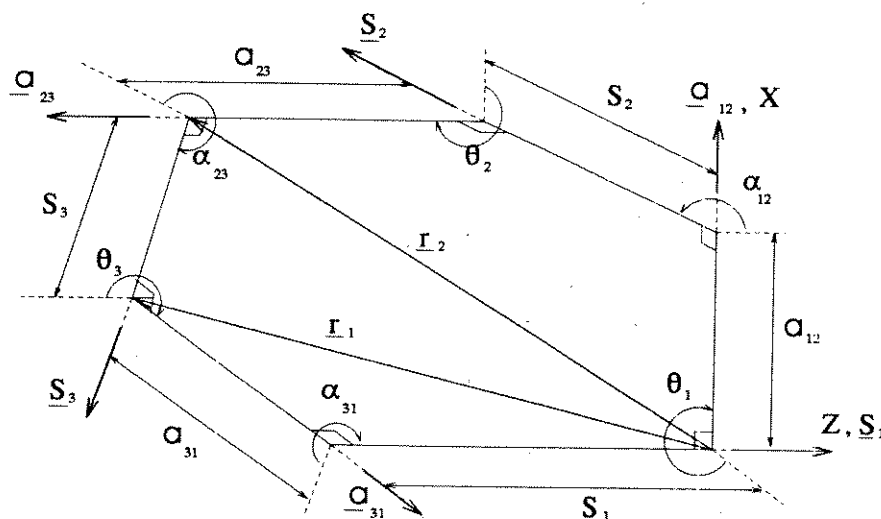


Figura 2.15: Triângulo Espacial

Os coeficientes de S_1 e a_{31} na equação 2.40 podem ser calculados da seguinte forma:

$$\tau(S_1) = (X_1, -X_1^*, c_{31}) \times (0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1) = 0;$$

Para o cálculo de $\tau(a_{31})$ é conveniente utilizar um novo sistema X'Y'Z' de coordenadas cujo eixo Z' seja paralelo a Z e \underline{S}_1 , e o eixo X' seja paralelo a \underline{a}_{31} . Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \tau(a_{31}) &= (\underline{S}_3)_{X'Y'Z'} \times (\underline{a}_{31})_{X'Y'Z'} \cdot (\underline{k})_{X'Y'Z'} = \\ &= (0, s_{31}, c_{31}) \times (1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) = -s_{31} \end{aligned}$$

Portanto, a equação 2.40 resume-se a:

$$\underline{r}_1 \times \underline{S}_3 \cdot \underline{k} = -a_{31} s_{31} \quad (2.41)$$

O momento expresso pela equação 2.40 também pode ser calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \underline{r}_2 \times \underline{S}_3 \cdot \underline{k} &= (a_{12} \underline{a}_{12} + S_2 \underline{S}_2 + a_{23} \underline{a}_{23}) \times \underline{S}_3 \cdot \underline{k} \\ &= a_{12} (\underline{a}_{12} \times \underline{S}_3) \cdot \underline{k} + S_2 (\underline{S}_2 \times \underline{S}_3) \cdot \underline{k} + a_{23} (\underline{a}_{23} \times \underline{S}_3) \cdot \underline{k} \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde $\tau(a_{12}) = (1, 0, 0) \times (\bar{X}_2, \bar{Y}_2, \bar{Z}_2) \cdot (0, 0, 1) = \bar{Y}_2$

Para o cálculo de $\tau(S_2)$ é conveniente utilizar um sistema X'Y'Z' cujo eixo Z' seja paralelo a \underline{S}_2 e o eixo X' seja paralelo a \underline{a}_{12} . Desta forma, tem-se:

$$\tau(S_2) = (0, 0, 1) \times (\bar{X}_2, \bar{X}_2^*, c_{23}) \cdot (0, s_{12}, c_{12}) = s_{12} \bar{X}_2$$

Para o cálculo de $\tau(a_{23})$ o sistema X'Y'Z' a ser utilizado tem o eixo Z' paralelo a \underline{S}_3 e o eixo X' paralelo a \underline{a}_{23} . Assim, obtém-se:

$$\tau(a_{23}) = (1, 0, 0) \times (0, 0, 1) \cdot (X_2, -Y_2, Z_2) = Y_2$$

A equação 2.42 resume-se agora a:

$$\underline{r}_2 \times \underline{S}_3 \cdot \underline{k} = a_{12} \bar{Y}_2 + S_2 s_{12} \bar{X}_2 + a_{23} Y_2 = \bar{Z}_{02} \quad (2.43)$$

Igualando-se as equações 2.41 e 2.43 chega-se à seguinte equação secundária do cosseno:

$$\bar{Z}_{02} = -a_{31} s_{31} \quad (2.44)$$

É oportuno ressaltar que $\bar{Z}_{02} = Z_{02}$. De forma geral, é óbvio que:

$$Z_{opqr\dots} = Z_{o\dots rqp} \quad (2.45)$$

Deve ser também observado o fato de que para o cálculo de um coeficiente há, geralmente, duas posições convenientes para o sistema X'Y'Z', podendo-se, portanto, obter duas expressões distintas para o coeficiente. Por exemplo, se para o cálculo de $\tau(S_2)$ o eixo X' for paralelo a \underline{a}_{23} , ao invés de \underline{a}_{12} , tem-se:

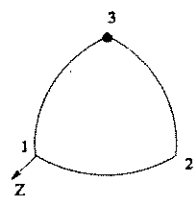
$$\tau(S_2) = (0, 0, 1) \times (0, -s_{23}, c_{23}) \cdot (X_2, -X_2^*, c_{12}) = s_{23} X_2$$

Deve ficar claro, no entanto, que $s_{23} X_2 = s_{12} \bar{X}_2$.

O procedimento para encontrar as equações 2.41 e 2.43 pode ser igualmente aplicado a qualquer polígono espacial ortogonal. É útil saber que o número de termos principais nas expressões dos momentos é sempre ímpar e que estes termos obedecem certa simetria em relação ao termo central. Este fato facilita bastante a derivação de expressões de momento mais complexas e pode ser observado na igualdade 2.43, onde $a_{12} \bar{Y}_2$ é simétrico de $a_{23} Y_2$ em relação a \underline{S}_2 .

2.3.4 Triângulo Espacial: Equações Secundárias do Cosseno

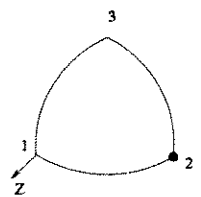
Para o triângulo espacial da figura 2.15, com a excentricidade S_1 no eixo Z, pode-se obter duas equações secundárias do cosseno: uma delas considera o momento da excentricidade S_2 em relação a Z, e a outra refere-se ao momento da excentricidade S_3 . Esta última, conforme demonstrado anteriormente, é a seguinte:



$$\bar{Z}_{02} = -\alpha_{31} S_{31}$$

$$\text{onde: } \bar{Z}_{02} = \alpha_{12} \bar{Y}_2 + S_2 s_{12} \bar{X}_2 + \alpha_{23} \bar{Y}_2$$
(2.46)

e a outra, que considera o momento da excentricidade S_2 , tem a seguinte forma:



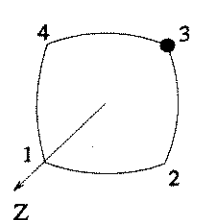
$$\bar{Z}_{03} = -\alpha_{12} S_{12}$$

$$\text{onde: } \bar{Z}_{03} = \alpha_{31} \bar{Y}_3 + S_3 s_{31} \bar{X}_3 + \alpha_{23} \bar{Y}_3$$
(2.47)

As igualdades 2.47 são muito semelhantes às igualdades 2.46. De fato, elas diferem apenas pelos índices. Para os polígonos nas próximas seções, apenas algumas equações secundárias do cosseno serão mostradas.

2.3.5 Quadrilátero Espacial: Equações Secundárias do Cosseno

Considerando-se o momento da excentricidade S_3 , tem-se:

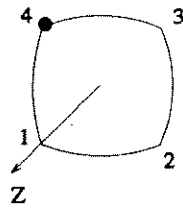


$$\bar{Z}_{04} = \bar{Z}_{02}$$

$$\text{onde: } \bar{Z}_{04} = \alpha_{41} \bar{Y}_4 + S_4 s_{41} \bar{X}_4 + \alpha_{34} \bar{Y}_4$$

$$\text{e } \bar{Z}_{02} = \alpha_{12} \bar{Y}_2 + S_2 s_{12} \bar{X}_2 + \alpha_{23} \bar{Y}_2$$
(2.48)

Considerando-se, agora, o momento da excentricidade S_4 , tem-se:

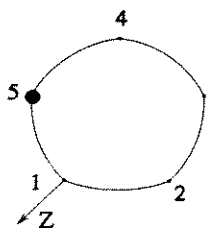


$$Z_{032} = - a_{41} s_{41}$$

$$\begin{aligned} \text{onde: } Z_{032} = & a_{12} Y_{32} + S_2 s_{12} X_{32} + \\ & + a_{23} (c_{12} \bar{Y}_3 + X_2^* \bar{Z}_3) + \\ & + a_{34} Y_{23} + S_3 s_{34} X_{23} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Pode-se observar na última igualdade de 2.49 a simetria entre os dois primeiros e os dois últimos termos em relação ao termo central referente ao lado a_{23} .

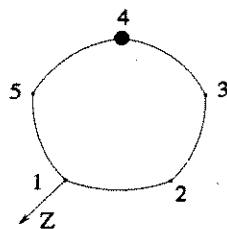
2.3.6 Pentágono Espacial: Equações Secundárias do Cosseno



$$Z_{0432} = - a_{51} s_{51}$$

$$\begin{aligned} \text{onde: } Z_{0432} = & a_{12} Y_{432} + S_2 s_{12} X_{432} + a_{23} (c_{12} Y_{43} + X_2^* Z_{43}) \\ & - S_3 (X_2 X_{43}^* + Y_2 X_{43}) + \\ & + a_{45} Y_{234} + S_4 s_{45} X_{234} + a_{34} (c_{45} Y_{23} + X_4^* Z_{23}) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Outra equação secundária do cosseno pode ser:

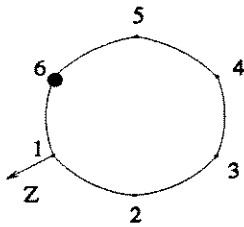


$$\begin{aligned} Z_{05} = Z_{032} = & a_{12} Y_{32} + S_2 s_{12} X_{32} + \\ & + a_{23} (c_{12} \bar{Y}_3 + X_2^* \bar{Z}_3) + \\ & + a_{34} Y_{23} + S_3 s_{34} X_{23} \end{aligned}$$

$$\text{onde: } Z_{05} = a_{51} Y_5 + S_5 s_{51} X_5 + a_{45} \bar{Y}_5 \quad (2.51)$$

2.3.7 Hexágono Espacial: Equações Secundárias do Cosseno

$$Z_{05432} = -\alpha_{61} s_{61}$$



$$\text{onde: } Z_{05432} = \alpha_{12} Y_{5432} + S_2 s_{12} X_{5432} + \alpha_{23} (c_{12} Y_{543} + X_2^* Z_{543})$$

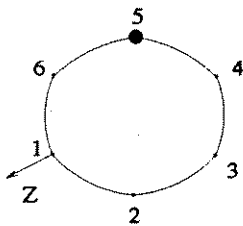
$$- S_3 (X_2 X_{543}^* + Y_2 X_{543})$$

$$+ \alpha_{34} (Z_2 Y_{54} + X_{23}^* Z_{54})$$

$$- S_4 (\bar{X}_5 X_{234}^* + \bar{Y}_5 X_{234})$$

$$+ \alpha_{56} Y_{2345} + S_5 s_{56} Y_{2345} + \alpha_{45} (c_{56} Y_{234} + \bar{X}_5^* Z_{234}) \quad (2.52)$$

A equação resultante quando o momento da excentricidade S_5 é considerado é o seguinte:



$$Z_{06} = Z_{0432} = \alpha_{12} Y_{432} + S_2 s_{12} X_{432} + \alpha_{23} (c_{12} Y_{43} + X_2^* Z_{43})$$

$$- S_3 (X_2 X_{43}^* + Y_2 X_{43}) +$$

$$+ \alpha_{45} Y_{234} + S_4 s_{45} X_{234} + \alpha_{34} (c_{45} Y_{23} + \bar{X}_4^* Z_{23})$$

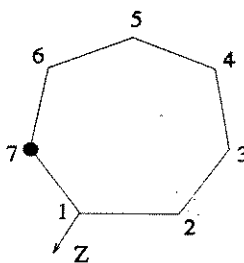
$$\text{onde: } Z_{06} = \alpha_{61} Y_6 + S_6 s_{61} X_6 + \alpha_{56} \bar{Y}_6 \quad (2.53)$$

2.3.8 Heptágono Espacial: Equações Secundárias do Cosseno

As seis equações secundárias do cosseno podem ser obtidas para o heptágono espacial quando o eixo Z é mantido fixo à excentricidade S_1 , são apresentadas a seguir.

– Momento da excentricidade S_7 :

$$Z_{065432} = -\alpha_{71} s_{71}$$



$$\text{onde: } Z_{065432} = \alpha_{12} Y_{65432} + S_2 s_{12} X_{65432} + \alpha_{23} (c_{12} Y_{6543} + X_2^* Z_{6543})$$

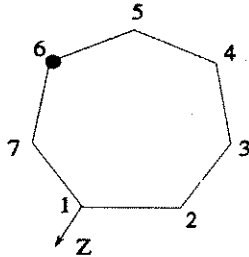
$$- S_3 (X_2 X_{6543}^* + Y_2 X_{6543}) + \alpha_{34} (Z_2 Y_{654} + X_{23}^* Z_{654})$$

$$- S_4 (X_{23} X_{654}^* + Y_{23} X_{654})$$

$$- S_5 (\bar{X}_6 X_{2345}^* + \bar{Y}_6 X_{2345}) + \alpha_{45} (\bar{Z}_6 Y_{234} + X_{65}^* Z_{234})$$

$$+ \alpha_{67} Y_{23456} + S_6 s_{67} X_{23456} + \alpha_{56} (c_{67} Y_{2345} + \bar{X}_6^* Z_{2345}) \quad (2.54)$$

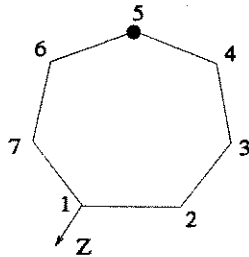
– Momento da excentricidade S_6 :



$$\begin{aligned}
 Z_{07} = Z_{05432} = & \alpha_{12} Y_{5432} + S_2 s_{12} X_{5432} + \alpha_{23} (c_{12} Y_{543} + X_2^* Z_{543}) \\
 & - S_3 (X_2 X_{543}^* + Y_2 X_{543}) \\
 & + \alpha_{34} (Z_2 Y_{54} + X_{23}^* Z_{54}) \\
 & - S_4 (\bar{X}_5 X_{234}^* + \bar{Y}_5 X_{234}) \\
 & + \alpha_{56} Y_{2345} + S_5 s_{56} Y_{2345} + \alpha_{45} (c_{56} Y_{234} + \bar{X}_5^* Z_{234})
 \end{aligned}$$

onde: $Z_{07} = \alpha_{71} Y_7 + S_7 s_{71} X_7 + \alpha_{67} \bar{Y}_7$ (2.55)

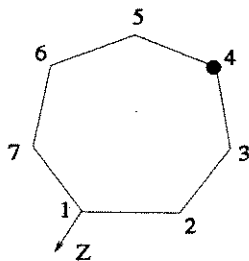
– Momento da excentricidade S_5 :



$$\begin{aligned}
 Z_{067} = Z_{0432} = & \alpha_{12} Y_{432} + S_2 s_{12} X_{432} + \alpha_{23} (c_{12} Y_{43} + X_2^* Z_{43}) \\
 & - S_3 (X_2 X_{43}^* + Y_2 X_{43}) + \\
 & + \alpha_{45} Y_{234} + S_4 s_{45} X_{234} + \alpha_{34} (c_{45} Y_{23} + \bar{X}_4^* Z_{23})
 \end{aligned}$$

onde: $Z_{067} = \alpha_{71} Y_{67} + S_7 s_{71} X_{67} + \alpha_{67} (c_{71} Y_6 + \bar{X}_7^* Z_6) + \alpha_{56} Y_{76} + S_6 s_{56} X_{76}$ (2.56)

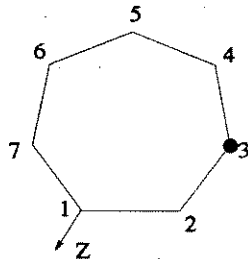
– Momento da excentricidade S_4 :



$$\begin{aligned}
 Z_{0567} = Z_{032} = & \alpha_{12} Y_{32} + S_2 s_{12} X_{32} + \\
 & + \alpha_{23} (c_{12} \bar{Y}_3 + X_2^* \bar{Z}_3) + \\
 & + \alpha_{34} Y_{23} + S_3 s_{34} X_{23}
 \end{aligned}$$

onde: $Z_{0567} = \alpha_{71} Y_{567} + S_7 s_{71} X_{567} + \alpha_{57} (c_{71} Y_{56} + \bar{X}_7^* Z_{56}) - S_6 (\bar{X}_7 X_{56}^* + \bar{Y}_7 X_{56}) + \alpha_{45} Y_{765} + S_5 s_{45} X_{765} + \alpha_{56} (c_{45} Y_{76} + X_5^* Z_{76})$ (2.57)

– Momento da excentricidade S_3 :

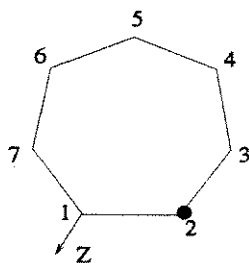


$$Z_{04567} = \bar{Z}_{02}$$

$$\begin{aligned} \text{onde: } Z_{04567} = & \alpha_{71} Y_{4567} + S_7 X_{4567} + \alpha_{67} (c_{71} Y_{456} + \bar{X}_7^* Z_{456}) \\ & - S_6 (\bar{X}_7 X_{456}^* + \bar{Y}_7 X_{456}) \\ & + \alpha_{56} (\bar{Z}_7 Y_{45} + X_{76}^* Z_{45}) \\ & - S_5 (X_4 X_{765}^* + Y_4 X_{765}) \\ & + \alpha_{34} Y_{7654} + S_4 X_{7654} + \alpha_{45} (c_{34} Y_{765} + X_4^* Z_{765}) \end{aligned}$$

$$\text{e: } \bar{Z}_{02} = \alpha_{12} \bar{Y}_2 + S_2 s_{12} \bar{X}_2 + \alpha_{23} Y_2 \quad (2.58)$$

– Momento da excentricidade S_2 :



$$Z_{034567} = -\alpha_{12} s_{12}$$

$$\begin{aligned} \text{onde: } Z_{034567} = & \alpha_{71} Y_{34567} + S_7 s_{71} X_{34567} + \alpha_{67} (c_{71} Y_{3456} + \bar{X}_7^* Z_{3456}) \\ & - S_6 (\bar{X}_7 X_{3456}^* + \bar{Y}_7 X_{3456}) + \alpha_{56} (\bar{Z}_7 Y_{345} + X_{76}^* Z_{345}) \\ & - S_5 (X_{76} X_{345}^* + Y_{76} X_{345}) \\ & - S_4 (X_3 X_{7654}^* + Y_3 X_{7654}) + \alpha_{45} (Z_3 Y_{765} + X_{34}^* Z_{765}) \\ & + \alpha_{23} Y_{76543} + S_3 s_{23} X_{76543} + \alpha_{34} (c_{23} Y_{7654} + X_3^* Z_{7654}) \end{aligned} \quad (2.59)$$

2.4 Manipuladores Robóticos

A figura 2.16 ilustra um manipulador robótico cujas juntas são movimentadas por atuadores, sendo que cada atuador controla e aciona um grau de liberdade em um par cinemático. A mobilidade M ou o número de graus de liberdade (g.d.l.) da garra em relação à base é igual à soma dos g.d.l. de todas as juntas.

Para que a garra possa ser posicionada de forma arbitrária no espaço, é necessário que M seja, no mínimo, igual a seis. Existem manipuladores com $M < 6$ e outros com $M > 6$. Os com $M < 6$ possuem uma capacidade de movimentação limitada. Por exemplo, o manipulador pode ser capaz apenas de realizar movimentos coplanares com a garra ($M = 3$). O número de graus de liberdade extras dos manipuladores com $M > 6$ pode ser chamado de manobrabilidade, uma vez que eles dão ao manipulador uma maior capacidade para evitar obstáculos.

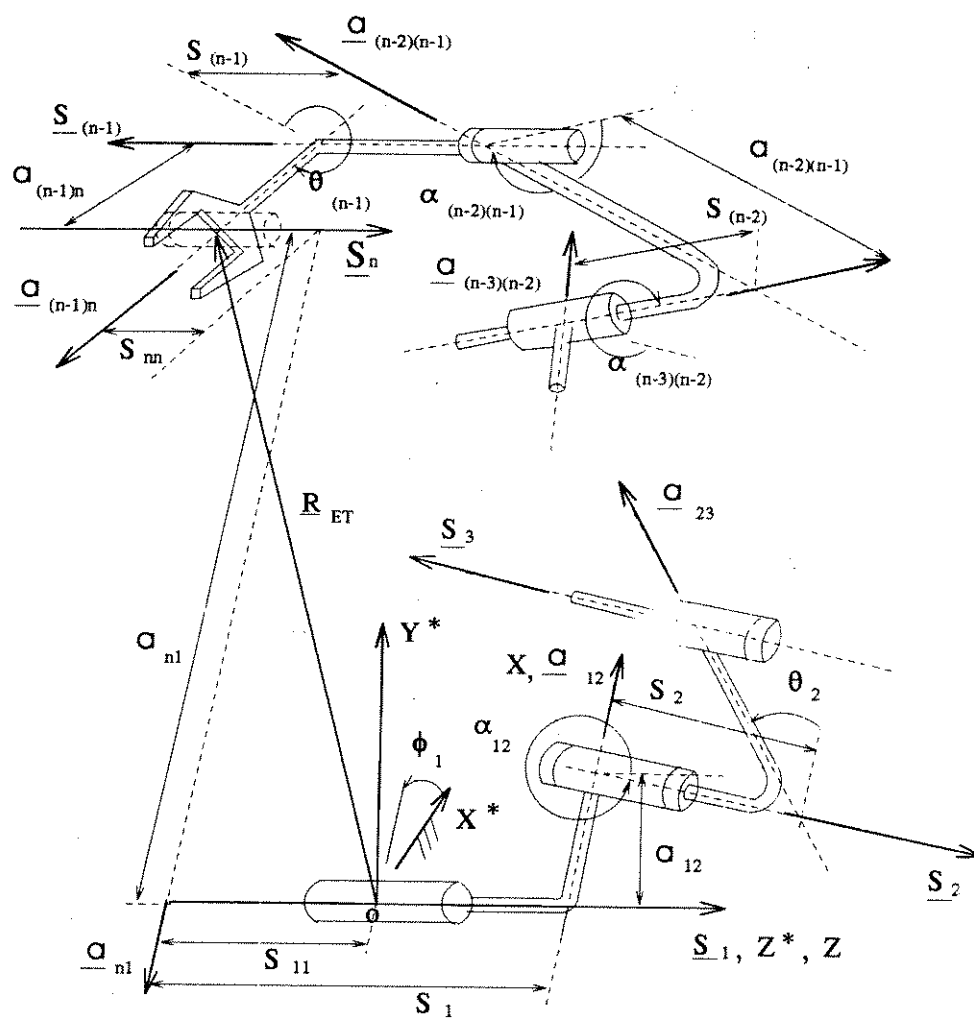


Figura 2.16: Manipulador Genérico

A capacidade de abrir e fechar a garra corresponde a mais um movimento que, contudo, não influencia no posicionamento e orientação da mesma, não sendo, por este motivo, considerado mais um g.d.l. da cadeia.

2.4.1 Fechamento do Mecanismo Espacial : Solução Inversa

A localização da garra ou da extremidade de trabalho de um manipulador pode ser especificada pelas coordenadas de um ponto da garra (figura 2.16) $\underline{R}_{ET} (X_{ET}^*, Y_{ET}^*, Z_{ET}^*)$, e pelos cossenos diretores $\underline{a}_{(n-1)n} (X_{(n-1)n}^*, Y_{(n-1)n}^*, Z_{(n-1)n}^*)$ e $\underline{S}_n (X_n^*, Y_n^*, Z_n^*)$. Na análise a seguir, assume-se que o valor numérico desses nove parâmetros são conhecidos e que o manipulador tem mobilidade $M = 6$.

Para qualquer posição e orientação da extremidade de trabalho do manipulador é possível obter um mecanismo espacial imaginando-se um lado a_{n1} e excentricidades S_{nn} e S_{11} que fecham a malha do mecanismo. Esse mecanismo possui mobilidade $M = 1$, ângulo de entrada θ_n e ângulo de saída θ_1 .

A transformação $\{(X_{ET}^*, Y_{ET}^*, Z_{ET}^*), (X_{(n-1)n}^*, Y_{(n-1)n}^*, Z_{(n-1)n}^*), (X_n^*, Y_n^*, Z_n^*)\} \Rightarrow \{\theta_n, \alpha_{n1}, (\theta_1 - \phi_1), S_{nn}, a_{n1}, S_{11}\}$ será mostrada detalhadamente. Conhecendo-se a equação de entrada e saída do mecanismo espacial resultante, é possível, então, computar um conjunto de valores para θ_1 (o número de soluções depende do grau da equação de entrada-saída) e conjuntos correspondentes de valores para as variáveis restantes $(\theta_2, \theta_3, \dots)$. Esse procedimento permite, geralmente, uma escolha de configurações geométricas alternativas do manipulador para uma dada posição qualquer da extremidade de trabalho. Isto é preferível a obter uma única configuração através de um processo numérico iterativo. Além disso, o processo iterativo pode tornar-se instável e requer um tempo computacional maior que o processo direto aqui considerado.

Primeiramente será derivada a seguinte transformação:

$$\{(X_{(n-1)n}^*, Y_{(n-1)n}^*, Z_{(n-1)n}^*), (X_n^*, Y_n^*, Z_n^*)\} \Rightarrow \{\theta_n, \alpha_{n1}, (\theta_1 - \phi_1)\}$$

Os sistemas de coordenadas $X^*Y^*Z^*$ e XYZ (figura 2.16) estão relacionados pela matriz de rotação $[M_\phi]$ da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} X^* \\ Y^* \\ Z^* \end{Bmatrix} = [M_\phi] \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

onde

$$M_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi_1 & -\text{sen}\phi_1 & 0 \\ \text{sen}\phi_1 & \cos\phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Substituindo em 2.60 as coordenadas de $\underline{a}_{(n-1)n}$ no sistema XYZ, tem-se:

$$X_{(n-1)n}^* = \cos(\theta_1 - \phi_1)\cos\theta_n - \text{sen}(\theta_1 - \phi_1)\text{sen}\theta_n\cos\alpha_{n1} \quad (2.62)$$

$$Y_{(n-1)n}^* = -[\text{sen}(\theta_1 - \phi_1)\cos\theta_n + \cos(\theta_1 - \phi_1)\text{sen}\theta_n\cos\alpha_{n1}] \quad (2.63)$$

$$Z_{(n-1)n}^* = \text{sen}\theta_n\text{sen}\alpha_{n1} \quad (2.64)$$

e substituindo-se em 2.60 as coordenadas de \underline{S}_n no sistema XYZ, resulta:

$$X_n^* = \text{sen}\alpha_{n1}\text{sen}(\theta_1 - \phi_1) \quad (2.65)$$

$$Y_n^* = \text{sen}\alpha_{n1}\cos(\theta_1 - \phi_1) \quad (2.66)$$

$$Z_n^* = \cos\alpha_{n1} \quad (2.67)$$

Multiplicando-se 2.63 por $\text{sen}(\theta_1 - \phi_1)$ e 2.62 por $\cos(\theta_1 - \phi_1)$ e fazendo-se a subtração dos dois resultados, obtém-se:

$$X_{(n-1)n}^* \cos(\theta_1 - \phi_1) - Y_{(n-1)n}^* \text{sen}(\theta_1 - \phi_1) = \cos\theta_n$$

Multiplicando-se a equação anterior por $\text{sen}\alpha_{n1}$ e subtraindo-se nela as equações 2.65 e 2.66, obtém-se:

$$|X_{(n-1)n}^* Y_n^*| = \cos\theta_n \text{sen}\alpha_{n1} \quad (2.68)$$

onde

$$|X_{(n-1)n}^* Y_n^*| = X_{(n-1)n}^* Y_n^* - Y_{(n-1)n}^* X_n^*$$

As equações 2.64 a 2.68 levam ao seguinte conjunto de equações:

$$\alpha_{n1} = \cos^{-1}(Z_n^*) \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta_1 - \phi_1)/2 &= X_n^*/(Y_n^* + \operatorname{sen}\alpha_{n1}) \\ &= -(Y_n^* - \operatorname{sen}\alpha_{n1})/X_n^* \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta_n/2) &= Z_{(n-1)n}^*/(|X_{(n-1)n}^*Y_n^*| + \operatorname{sen}\alpha_{n1}) \\ &= -(|X_{(n-1)n}^*Y_n^*| - \operatorname{sen}\alpha_{n1})/Z_{(n-1)n}^* \end{aligned} \quad (2.71)$$

Os valores de α_{n1} , $(\theta_1 - \phi_1)$ e θ_n podem ser computados pelas soluções seqüenciais das equações de 2.69 a 2.71, para qualquer orientação especificada da extremidade de trabalho.

O vetor \underline{R}_{ET} que localiza um ponto determinado da extremidade de trabalho (figura 2.16) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\underline{R}_{ET} = -(S_{nn}\underline{S}_n + a_{n1}\underline{a}_{n1} + S_{11}\underline{S}_1) \quad (2.72)$$

onde:

$$\underline{a}_{n1} = (X_{n1}^*, Y_{n1}^*, Z_{n1}^*) = (\cos(\theta_1 - \phi_1), -\operatorname{sen}(\theta_1 - \phi_1), 0) \text{ e}$$

$$\underline{S}_1 = (X_1^*, Y_1^*, Z_1^*) = (0, 0, 1)$$

Desta forma, as componentes de \underline{R}_{ET} são:

$$\begin{aligned} X_{ET}^* &= -(S_{nn}X_n^* + a_{n1}X_{n1}^*) \\ Y_{ET}^* &= -(S_{nn}Y_n^* + a_{n1}Y_{n1}^*) \\ Z_{ET}^* &= -(S_{nn}Z_n^* + S_{11}) \end{aligned} \quad (2.73)$$

Das expressões de $X_{(n-1)n}^*$ e $Y_{(n-1)n}^*$ da equação 2.73, tem-se que:

$$S_{nn} = |X_{ET}^*Y_{n1}^*|/|X_{n1}^*Y_n^*| \quad (2.74)$$

$$a_{n1} = -|X_{ET}^*Y_n^*|/|X_{n1}^*Y_n^*| \quad (2.75)$$

onde $|X_{ET}^*Y_n^*| = X_{ET}^*Y_n^* - Y_{ET}^*X_n^*$, ... etc.

e da expressão de Z_{ET}^* , tem-se:

$$S_{11} = -(S_{nn}Z_n^* + Z_{ET}^*) \quad (2.76)$$

É importante observar que na situação particular em que $\underline{S}_n // \underline{S}_1$, os valores de S_{nn} e S_{11} dados pelas equações anteriores ficam indeterminados. Neste caso, pode-se atribuir qualquer valor para S_{nn} , por exemplo 0, e calcular S_{11} .

2.4.2 Posicionamento da Garra: Solução do Problema Cinemático Direto

A solução do problema cinemático direto consiste no cálculo da posição e orientação da extremidade de trabalho quando são conhecidos os deslocamentos dos pares cinemáticos ou juntas. Esta solução é relativamente simples comparada à solução do problema cinemático inversa.

Utilizando-se a matriz de rotação 2.61, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} X_{(n-1)n}^* \\ Y_{(n-1)n}^* \\ Z_{(n-1)n}^* \end{Bmatrix} = [M_\phi] \begin{Bmatrix} X_{(n-1)n} \\ Y_{(n-1)n} \\ Z_{(n-1)n} \end{Bmatrix} \quad (2.77)$$

e

$$\begin{Bmatrix} X_n^* \\ Y_n^* \\ Z_n^* \end{Bmatrix} = [M_\phi] \begin{Bmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{Bmatrix} \quad (2.78)$$

Vale observar que X_n , Y_n e Z_n podem ser calculados pelo lado esquerdo das equações 2.25, e $X_{(n-1)n}$, $Y_{(n-1)n}$ e $Z_{(n-1)n}$ pelo lado esquerdo das equações 2.32.

O vetor posição do ponto referencial da extremidade de trabalho é dado por:

$$\underline{R}_{ET} = (S_1 - S_{11})\underline{S}_1 + \sum_{r=2}^{n-1} S_r \underline{S}_r + \sum_{r=2}^n a_{(r-1)r} \underline{a}_{(r-1)r} \quad (2.79)$$

Aqui também os versores \underline{S}_r e $\underline{a}_{(r-1)r}$ podem ser calculados no sistema XYZ através do lado esquerdo das equações 2.25 e 2.32, respectivamente.

Capítulo 3

Modelagem

3.1 Introdução

Para a implementação de um sistema de controle, faz-se necessário o conhecimento de uma relação que forneça a posição e orientação espacial da garra para uma dada configuração de juntas, assim como o inverso, ou seja, uma relação que forneça os ângulos de junta correspondentes a uma dada configuração espacial.

A execução de uma tarefa pré-programada por um manipulador depende do prévio conhecimento da localização do objeto a ser manipulado e da orientação que o elemento terminal deve ter em relação a este objeto. Isto torna necessária a determinação de um modelo completo para o manipulador.

O modelo direto consiste no cálculo da posição e orientação do elemento final (\bar{X}) como função das variáveis generalizadas (variáveis de juntas, $\bar{\theta}$), ou seja:

$$\bar{X} = F(\bar{\theta}) \quad (3.1)$$

onde: $\bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)^t$ é o vetor posição angular das juntas (variáveis generalizadas no caso de todas as juntas serem rotacionais);

$\bar{X} = (x, y, z, \psi, \theta, \phi)^t$ é o vetor posição/orientação do elemento terminal.

O problema cinemático inverso consiste na determinação de valores para as variáveis generalizadas (ângulos de juntas neste caso, $\bar{\theta}$) de modo que a garra do manipulador assuma uma dada posição e orientação (\bar{X}). A solução do problema cinemático inverso é bem mais complexa que o direto, e é expresso através de uma equação do tipo:

$$\bar{\theta} = F^{-1}(\bar{X}) \quad (3.2)$$

A solução da equação 3.2 pode não ser única, ou até mesmo nem existir. Geralmente é necessário a utilização de algoritmos que cheguem a uma única solução, em função dos limites físicos das juntas do manipulador.

Uma forma muito utilizada é a que trabalha com transformações homogêneas e a sistemática de Denavit-Hartenberg [1], que permite descrever a posição sucessiva das coordenadas de cada "link" através da utilização de determinados parâmetros pré-definidos.

Neste trabalho, fez-se a opção pela metodologia de Duffy [4], que transforma o manipulador em um mecanismo espacial de malha fechada. Tal metodologia foi escolhida pelo fato de não fazer uso de muitas operações matriciais e, conseqüentemente, demandar menor tempo computacional.

3.2 Problema Cinemático Inverso

A figura 3.1 mostra uma representação geométrica genérica de um manipulador com seis juntas rotativas. Com relação a esta figura, são oportunos os seguintes comentários:

1. Os versores \underline{S}_i ($i = 1 \dots 6$) representam a direção e o sentido dos eixos de rotação das juntas;
2. Os versores \underline{a}_{ij} representam a direção da perpendicular comum a \underline{S}_i e \underline{S}_j , ou seja, $\underline{a}_{ij} = \underline{S}_i \times \underline{S}_j$;
3. As constantes α_{ij} representam os ângulos entre \underline{S}_i e \underline{S}_j , medidos de \underline{S}_i para \underline{S}_j e satisfazendo a condição 2;
4. As variáveis θ_i representam os ângulos entre \underline{a}_{hi} e \underline{a}_{ij} , $h = i-1$ e $j = i+1$, medidos de \underline{a}_{hi} para \underline{a}_{ij} e satisfazendo $\underline{S}_i = \underline{a}_{hi} \times \underline{a}_{ij}$;
5. O sistema $X^o Y^o Z^o$ é fixo à base. O eixo Z^o tem o mesmo sentido de \underline{S}_1 e o eixo X^o (ou Y^o) pode ter um sentido apropriado qualquer. A origem deste sistema também é arbitrária ao longo do eixo \underline{S}_1 ;
6. A junta 7 é fictícia. Seu eixo, \underline{S}_7 , fica definido após a escolha de \underline{a}_{67} (que deve ser perpendicular a \underline{S}_6). Isto feito, \underline{a}_{71} pode ser determinado;
7. As constantes escalares a_{ij} correspondem ao "offset" entre as juntas i e j ;
8. As constantes escalares S_i correspondem ao comprimento do "link" i ;
9. Para facilitar a visualização, os parâmetros que representam comprimentos estão indicados na figura 3.2.

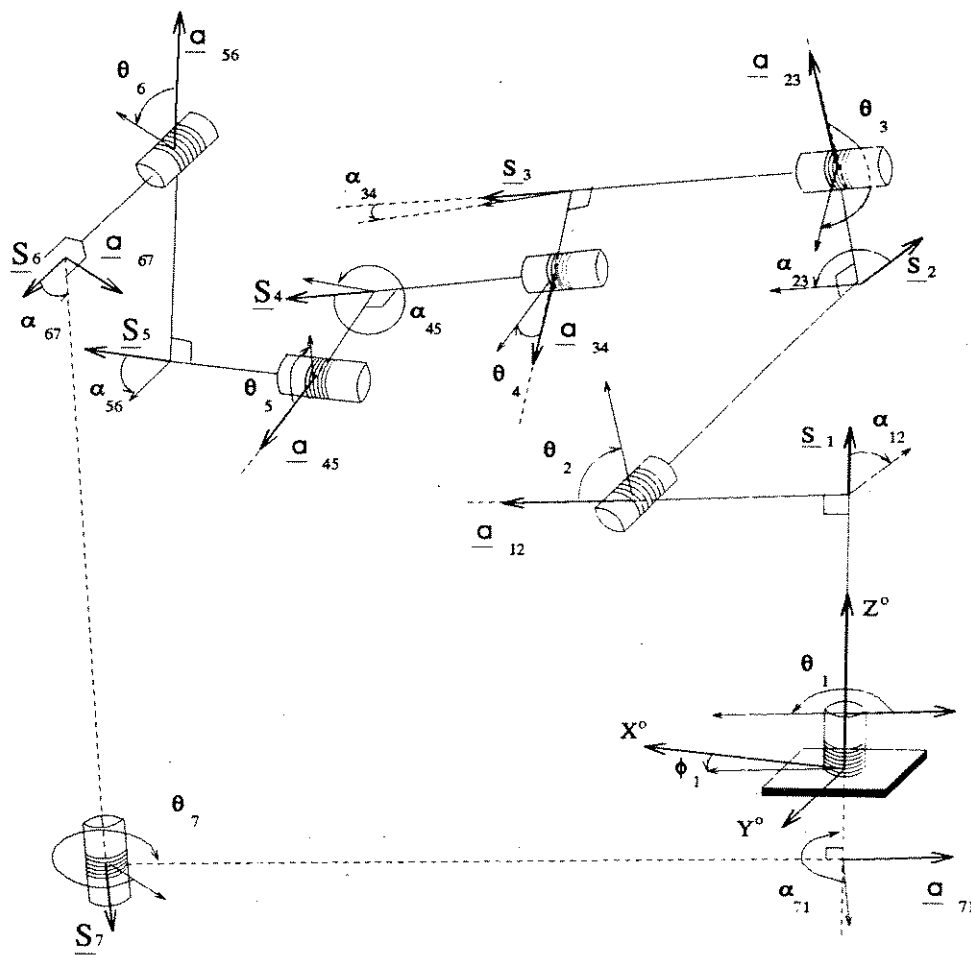


Figura 3.1: Representação Geométrica Genérica de um Manipulador

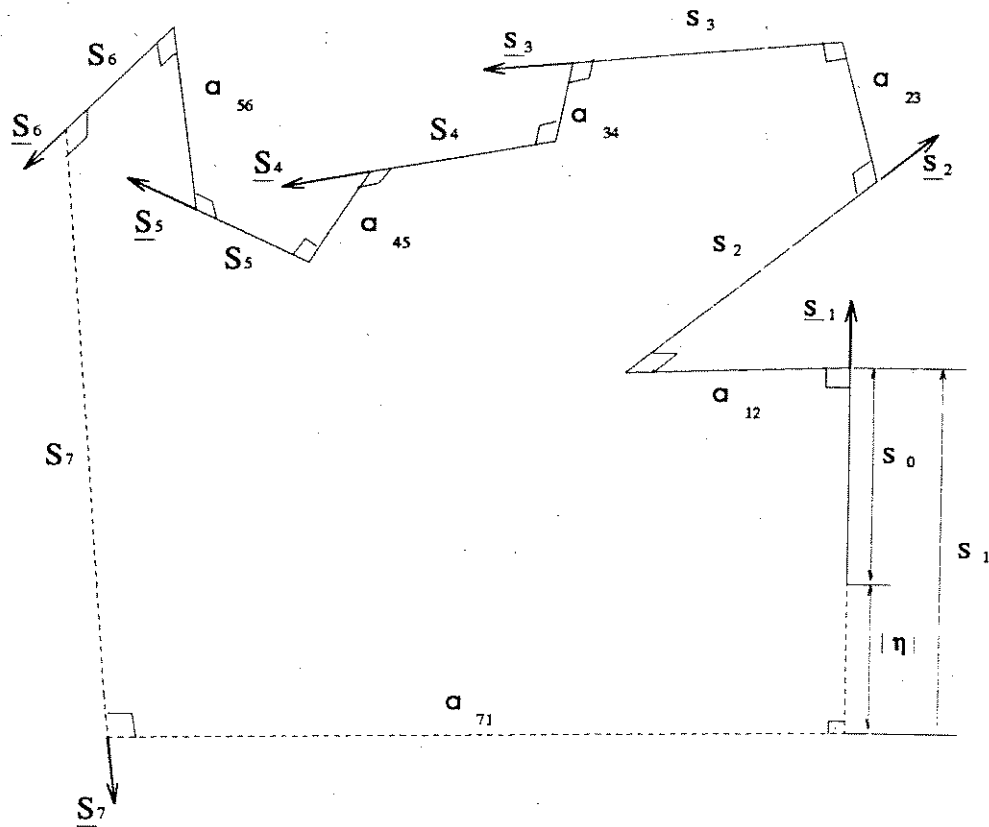


Figura 3.2: Parâmetros para a Representação Geométrica Genérica de um Manipulador

Nesta figura (3.2), S_1 pode ser negativo, mas S_2 a S_7 são todos não negativos, e a_{67} é nulo.

O objetivo da inclusão da junta fictícia (junta 7) é fechar a cadeia cinemática do manipulador de modo a obter, no instante considerado, um mecanismo espacial com um grau de liberdade. Isto feito, a próxima meta passa a ser a determinação da equação de entrada-saída que permitirá calcular o ângulo de saída do mecanismo (θ_1) para um dado valor do ângulo de entrada θ_7 . Para um manipulador genérico como o representado pela figura 3.1, a equação de entrada-saída é um problema muito difícil. Teoricamente, esta equação seria um polinômio de grau 32. Felizmente, o manipulador Kraft em estudo é um caso particular do manipulador da figura 3.1, pois alguns ângulos assumem valores 0 ou múltiplos de $\pi/2$, e alguns comprimentos também assumem valor nulo (figura 3.3). As simplificações conseguidas neste último caso são mostradas na tabela 3.1.

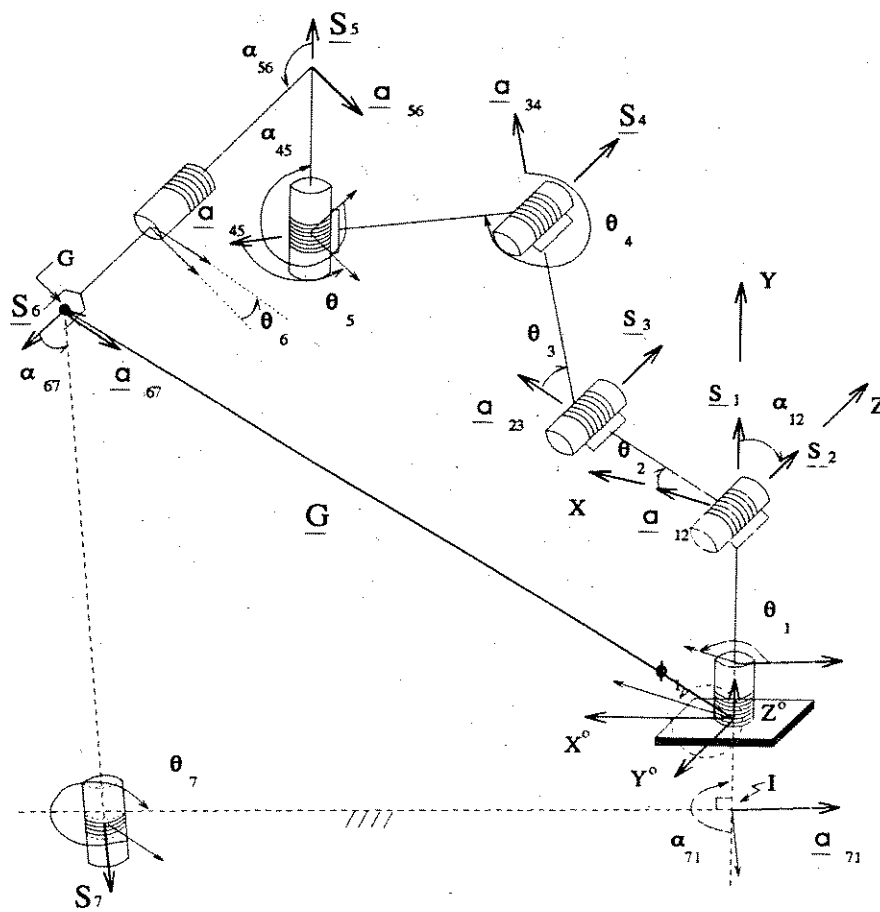


Figura 3.3: Representação Geométrica do Manipulador Kraft

O objetivo agora é encontrar expressões para os parâmetros fictícios α_{67} , θ_7 , α_{71} , $(\phi_1 - \theta_1)$, S_7 , a_{71} e S_1 , sendo que ϕ_1 é o ângulo que relaciona os dois sistemas cartesianos ($X^\circ Y^\circ Z^\circ$ e XYZ) mostrados na figura 3.3. Isto pode ser feito da seguinte forma:

Parâmetros conhecidos:

- \underline{S}_6 e \underline{S}_1 ;
- Vetor posição do ponto G da garra = (G_X, G_Y, G_Z)
- Versor $\underline{a}_{67} = (a_{67X}, a_{67Y}, a_{67Z})$
- Versor $\underline{S}_{7c} = (S_{7cX}, S_{7cY}, S_{7cZ}) = \underline{a}_{67} \times \underline{S}_6$

O versor \underline{S}_{7c} tem direção e sentido definidos pelo produto vetorial acima. Ele pode ou não ter o mesmo sentido de \underline{S}_7 . Na figura 3.1 \underline{S}_7 tem o mesmo sentido de \underline{S}_{7c} , mas poderia ter assumido o sentido contrário.

Ângulos	Comprimentos
$\alpha_{12} = \pi/2$	$S_2 = 0$
$\alpha_{23} = 0$	$S_3 = 0$
$\alpha_{34} = 0$	$S_4 = 0$
$\alpha_{45} = 3\pi/2$	$a_{12} = 0$
$\alpha_{56} = \pi/2$	$a_{56} = 0$
$\alpha_{67} = \pi/2$ ou $3\pi/2$	$a_{67} = 0$
α_{71} é variável	

Tabela 3.1: Simplificações Inerentes ao Manipulador Kraft

Como nesta seção somente o sistema $X^oY^oZ^o$ será considerado (figura 3.3), os índices das componentes vetoriais poderão ter sua notação simplificada. Por exemplo, $G_X \equiv G_{X^o}$.

Primeiramente, é necessário determinar a perpendicular comum entre a reta que passa pelo ponto "G" com direção \underline{S}_{7c} e a reta que passa pela origem O com direção Z (ou \underline{S}_1). Isto pode ser feito através do seguinte produto vetorial (ver também figura 3.2:

$$[(\underline{G} + \lambda \underline{S}_{7c}) - \eta \underline{S}_1] \times \underline{a}_{71c} = 0 \tag{3.3}$$

onde \underline{a}_{71c} é o produto vetorial entre os versores \underline{S}_{7c} e \underline{S}_1 , igual a $(S_{7cY}, -S_{7cX}, 0)$

Expandindo-se a equação vetorial 3.3, obtém-se as seguintes equações algébricas:

$$S_{7cX}(G_Z + \lambda S_{7cZ} - \eta) = 0 \tag{3.4}$$

$$S_{7cY}(G_Z + \lambda S_{7cZ} - \eta) = 0 \tag{3.5}$$

$$-S_{7cX}(G_X + \lambda S_{7cX}) - S_{7cY}(G_Y + \lambda S_{7cY}) = 0 \tag{3.6}$$

O valor de λ pode ser determinado através da equação 3.6, e η através das equações 3.4 e 3.5 da seguinte forma:

$$\lambda = -\frac{G_X S_{7cX} + G_Y S_{7cY}}{(S_{7cX})^2 + (S_{7cY})^2} \tag{3.7}$$

$$\eta = G_Z + \lambda S_{7cZ} \tag{3.8}$$

Estas duas últimas equações valem se o produto vetorial $\underline{S}_{7c} \times \underline{S}_1 \neq 0$. Quando \underline{S}_{7c} e \underline{S}_1 assumem a mesma direção, λ fica indeterminado, podendo assumir qualquer valor. Neste caso pode-se fazer $\lambda = 0$ e $\eta = G_z$.

É oportuno frisar que $S_7 = |\lambda|$ e $S_1 = S_0 - \eta$. Desta última igualdade pode-se concluir que S_1 pode ser negativo, quando o ponto de interseção I (figura 3.3) ficar acima da junta 2.

Uma vez conhecidos λ e η , pode-se calcular \underline{S}_7 , \underline{a}_{71} e a_{71} . Assim:

$$\underline{S}_7 = sg(\lambda) \cdot \underline{S}_{7c} \quad (3.9)$$

$$\text{onde } sg(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda \geq 0 \\ -1 & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

$$a_{71} = \|\underline{A}_{71}\| \quad (3.10)$$

$$\text{onde } \underline{A}_{71} = \eta \underline{S}_1 - (\underline{G} + \lambda \underline{S}_{7c})$$

e

$$\underline{a}_{71} = \frac{\underline{A}_{71}}{a_{71}}, \quad \text{se } \underline{A}_{71} \neq \underline{0} \quad (3.11)$$

Se $\underline{A}_{71} = \underline{0}$, então:

$$\underline{a}_{71} = \underline{S}_7 \times \underline{S}_1 \quad \text{se } \underline{S}_7 \times \underline{S}_1 \neq \underline{0} \quad (3.12)$$

ou

$$\underline{a}_{71} = \underline{a}_{67} \quad \text{se } \underline{S}_7 \times \underline{S}_1 = \underline{0} \quad (3.13)$$

Os ângulos α_{67} , θ_7 e $(\phi_1 - \theta_1)$ podem ser calculados utilizando-se as seguinte fórmulas:

$$\alpha_{67} = \frac{\pi}{2} + [1 - sg(\lambda)] \cdot \frac{\pi}{2} \quad (3.14)$$

$$\theta_7 = atan2(\underline{a}_{71} \cdot sg(\lambda) \cdot \underline{S}_6, \underline{a}_{71} \cdot \underline{a}_{67}) \quad (3.15)$$

onde $atan2(y,x)$ é o arco cuja tangente vale y/x , no intervalo semi-aberto $(-\pi, \pi]$, sendo que o único caso em que $atan2(x,y)$ fica indefinida é quando $x=y=0$ (zero).

$$(\phi_1 - \theta_1) = \text{atan2}(a_{71Y}, a_{71X}) \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{71} &= \text{atan2}(\underline{S}_1 \cdot (\underline{a}_{71} \times \underline{S}_7), \underline{S}_1 \cdot \underline{S}_7) \\ &= \text{atan2}(a_{71X} \cdot S_{7Y} - a_{71Y} \cdot S_{7X}, S_{7Z}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.2.1 Análise do Mecanismo Espacial RRRR-R-RR

O manipulador da figura 3.3 foi transformado no mecanismo espacial RRRR-R-RR pela inclusão de uma sétima junta rotativa (fictícia). Esse mecanismo possui três juntas paralelas, indicadas por R-R-R na notação acima, e apenas um grau de liberdade (mobilidade igual a um), conforme demonstrado abaixo

$$M = \sum_{i=1}^n f_i - 6 = 7 - 6 = 1 \quad (3.18)$$

onde,

M = Mobilidade de um mecanismo espacial com "single loop" e n juntas;

f_i = graus de liberdade da i -ésima junta.

Portanto, é possível encontrar a equação que relaciona o ângulo de entrada θ_7 com o ângulo de saída θ_1 , ou seja, dada uma posição e orientação da garra, pode-se determinar pela equação 3.15 o ângulo de entrada θ_7 do mecanismo espacial fictício associado à referida posição e orientação da garra e, então, pela equação de entrada e saída que será deduzida a seguir, determinar o valor do ângulo de saída θ_1 e, conseqüentemente, o valor de ϕ_1 . Serão também mostradas equações para os demais ângulos θ_i ($i=2...6$) que, juntamente com ϕ_1 , representam a solução para o problema cinemático inverso.

3.2.2 Equação de Entrada-Saída ($\theta_7 \times \theta_1$)

A equação de entrada-saída do mecanismo espacial RRRR-R-RR (figura 3.3) pode ser deduzida a partir da componente Z da equação vetorial para o "loop" do mecanismo. A localização deste sistema XYZ na junta 2 deve-se ao fato de termos as juntas 2, 3 e 4 com eixos de rotação paralelos, o que simplifica os cálculos a serem feitos. Portanto, utilizando-se o sistema XYZ indicado na figura 3.3, tem-se:

$$S_6 Z_{71} + S_7 Z_1 + a_{71} U_{12} = 0 \quad (3.19)$$

onde,

Z_{71} é a componente Z do versor \underline{S}_6 ;

Z_1 é a componente Z do versor \underline{S}_7 ;

U_{12} é a componente Z (ou U) do versor \underline{a}_{71} .

sendo que foram considerados os seguintes pentágonos esférico e polar:

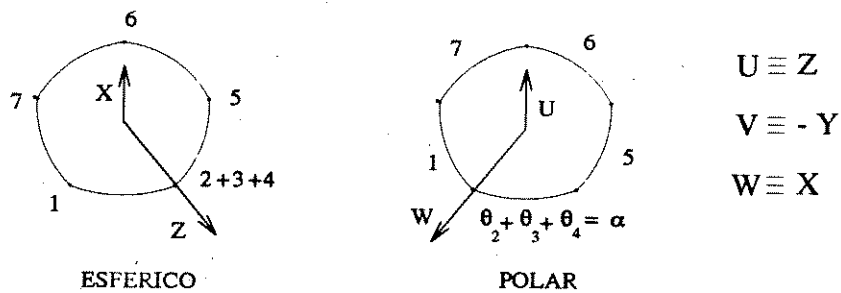


Figura 3.4: Pentágonos Esférico e Polar

Expandindo Z_{71} , Z_1 e U_{12} , tem-se:

$$Z_{71} = s_{12}(X_7s_1 + Y_7c_1) + c_{12}Z_7 = X_7s_1 + Y_7c_1 \quad (3.20)$$

onde $s_{ij} = \text{sen}(\alpha_{ij})$, $s_i = \text{sen}(\theta_i)$, $c_i = \text{cos}(\theta_i)$ e $\alpha_{12} = \pi/2$, conforme visto anteriormente na tabela 3.1.

$$Z_1 = c_{12}c_{71} - s_{12}s_{71}c_1 = -s_{71}c_1 \quad (3.21)$$

$$U_{12} = s_1s_{12} = s_1 \quad (3.22)$$

Substituindo-se as equações 3.20, 3.21 e 3.22 na equação 3.19, tem-se:

$$(s_6X_7 + a_{71})s_1 + (S_6Y_7 - S_7s_7)c_1 = 0$$

É possível, agora, calcular o ângulo θ_1 , através da seguinte expressão:

$$\theta_1 = \text{atan2}(S_7s_{71} - S_6Y_7, S_6X_7 + a_{71}) \quad (3.23)$$

onde $X_7 = s_{67}s_7$ e $Y_7 = -c_{71}s_{67}c_7$.

Utilizando-se o valor de $(\phi_1 - \theta_1)$ calculado pela equação 3.16, tem-se:

$$\phi_1 = (\phi_1 - \theta_1) + \theta_1 \quad (3.24)$$

Considerando novamente o pentágono esférico da figura 3.4, é possível obter-se três igualdades para as componentes X, Y e Z do versor S_6 :

$$\{S_{6X}\} \equiv X_{71} = X_{5\alpha} \quad (3.25)$$

onde $\alpha = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$.

$$\{S_{6Y}\} \equiv -Y_{71} = X_{5\alpha}^* \quad (3.26)$$

$$\{S_{6Z}\} \equiv Z_{71} = \bar{Z}_5 \quad (3.27)$$

sendo que X_{71} , Y_{71} e Z_{71} são funções de θ_7 e θ_1 , podendo ser calculados. Os demais elementos são dados por:

$$X_{5\alpha} = \bar{X}_5 c_\alpha - \bar{Y}_5 s_\alpha \quad (3.28)$$

onde $\bar{X}_5 = s_{56}s_5$ e $\bar{Y}_5 = -(s_{45}c_{56} + c_{45}s_{56}c_5)$. Substituindo-se os valores de α_{45} e α_{56} da tabela 3.1, tem-se:

$$X_{5\alpha} = s_5 c_\alpha \quad (3.29)$$

$$X_{5\alpha}^* = \bar{X}_5 s_\alpha + \bar{Y}_5 c_\alpha = s_5 s_\alpha \quad (3.30)$$

e, finalmente,

$$\bar{Z}_5 = c_{45}c_{56} - s_{45}s_{56}c_5 = c_5 \quad (3.31)$$

Pela substituição de 3.29, 3.30 e 3.31 em 3.25, 3.26 e 3.27, respectivamente, tem-se:

$$c_\alpha = X_{71}/s_5 \quad (3.32)$$

$$s_\alpha = -Y_{71}/s_5 \quad (3.33)$$

$$Z_{71} = c_5 \quad (3.34)$$

Posicionando agora o sistema XYZ no pentágono esférico conforme a seguir, obtém-se:

$$\begin{aligned} \{S_{2x}\} \quad X_{17} &= X_{56} \\ \{S_{2y}\} \quad Y_{17} &= -X_{56}^* \\ \{S_{2z}\} \quad Z_{17} &= Z_5 \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde,

$$\begin{aligned} X_{56} &= X_5 c_6 - Y_5 s_6 \\ &= s_{45} s_5 c_6 + (s_{56} c_{45} + c_{56} s_{45} c_5) s_6 \\ &= -s_5 c_6 \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$X_{56}^* = X_5 s_6 + Y_5 c_6 = -s_5 s_6 \quad (3.37)$$

e

$$Z_5 = c_{56} c_{45} - s_{56} s_{45} c_5 = c_5 \quad (3.38)$$

Substituindo 3.36, 3.37 e 3.38 em 3.35, resulta:

$$X_{17} = -s_5 c_6 \quad (3.39)$$

$$Y_{17} = s_5 s_6 \quad (3.40)$$

$$Z_{17} = c_5 \quad (3.41)$$

Dividindo-se Y_{17} por X_{17} , obtém-se:

$$\text{tg} \theta_6 = \frac{s_6}{c_6} = -\frac{Y_{17}}{X_{17}} \quad (3.42)$$

sendo que

$$\begin{aligned} X_{17} &= \bar{X}_1 c_7 - \bar{Y}_1 s_7 \\ &= s_{12} s_1 c_7 + (s_{71} c_{12} + c_{71} s_{12} c_1) s_7 \\ &= s_1 c_7 + c_{71} c_1 s_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{17} &= c_{67} (\bar{X}_1 s_7 + \bar{Y}_1 c_7) - s_{67} \bar{Z}_1 \\ &= s_{67} s_{71} c_1 \end{aligned}$$

Substituindo-se Y_{17} e X_{17} na equação 3.42, obtém-se o valor do ângulo θ_6 :

$$\theta_6 = \text{atan2}(-Y_{17}, X_{17}) \quad (3.43)$$

θ_5 pode agora ser calculado através das equações 3.39, 3.40 e 3.41:

$$\theta_5 = \text{atan2}(-X_{17}/c_6, Z_{17}), \text{ se } c_6 \neq 0 \quad (3.44)$$

$$\theta_5 = \text{atan2}(Y_{17}/s_6, Z_{17}), \text{ se } c_6 = 0$$

onde $Z_{17} = s_{67}(s_1 s_7 - c_{71} c_1 c_7)$.

Considerando a figura 3.3 e os pentágonos esférico e polar da figura 3.4, é possível obter as seguintes equações algébricas que representam as componentes em X e Y da equação vetorial da malha fechada para o mecanismo espacial da figura 3.3:

$$\begin{aligned} \underline{S}_1 &\equiv (0, s_{12}, c_{12}) & \underline{a}_{23} &\equiv (c_2, s_2, 0) \\ \underline{S}_5 &\equiv (s_{45} s_\alpha, -s_{45} c_\alpha, c_\alpha) & \underline{a}_{34} &\equiv (c_{2+3}, s_{2+3}, 0) \\ \underline{S}_6 &\equiv (X_{71}, -Y_{71}, Z_{71}) & \underline{a}_{45} &\equiv (c_\alpha, s_\alpha, 0) \\ \underline{S}_7 &\equiv (X_1, -Y_1, Z_1) & \underline{a}_{71} &\equiv (c_1, -s_1 c_{12}, s_1 s_{12}) \end{aligned}$$

onde $c_{2+3} = \cos(\theta_2 + \theta_3)$ e $s_{2+3} = \sin(\theta_2 + \theta_3)$.

– Componentes em X:

$$a_{23}c_2 + a_{34}c_{2+3} + a_{45}c_\alpha - S_5s_\alpha + S_6X_{71} + S_7X_1 + a_{71}c_1 = 0 \quad (3.45)$$

– Componentes em Y:

$$a_{23}s_2 + a_{34}s_{2+3} + a_{45}s_\alpha + S_5c_\alpha - S_6Y_{71} - S_7Y_1 + S_1 = 0 \quad (3.46)$$

Substituindo 3.32 e 3.33 em 3.45 e 3.46, tem-se:

$$a_{23}c_2 + a_{34}c_{2+3} = -P \quad (3.47)$$

$$a_{23}s_2 + a_{34}s_{2+3} = Q \quad (3.48)$$

Somando-se os quadrados de 3.47 e 3.48, chega-se ao valor de θ_3 :

$$\theta_3 = \pm \cos^{-1} \frac{P^2 + Q^2 - (a_{23}^2 + a_{34}^2)}{2a_{23}a_{34}} \quad (3.49)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{a_{45}}{s_5} + S_6 \right) X_{71} + \frac{S_5}{s_5} Y_{71} + S_7 X_1 + a_{71} c_1 \\
 Q &= \left(\frac{a_{45}}{s_5} + S_6 \right) Y_{71} - \frac{S_5}{s_5} X_{71} + S_7 Y_1 - S_1 \\
 X_{71} &= s_{67} s_7 c_1 + s_{67} c_7 c_7 s_1 \\
 Y_{71} &= s_{67} s_7 c_7 \\
 X_1 &= s_7 s_1 \\
 Y_1 &= -c_7
 \end{aligned}$$

Cabe aqui frisar que s_5 ($\text{sen}\theta_5$) é sempre $\neq 0$ e θ_3 é sempre < 0 , devido aos limites físicos para os ângulos do manipulador Kraft.

Expandindo-se c_{2+3} e s_{2+3} nas equações 3.47 e 3.48, chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
 (a_{23} + a_{34}c_3)c_2 - a_{34}s_3s_2 &= -P \\
 a_{34}s_3c_2 + (a_{23} + a_{34}c_3)s_2 &= Q
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Resolvendo-se este sistema de equações, resulta:

$$c_2 = \frac{Q a_{34} s_3 - P (a_{23} + a_{34} c_3)}{(a_{23} + a_{34} c_3)^2 + (a_{34} s_3)^2} \tag{3.51}$$

$$s_2 = \frac{P + (a_{23} + a_{34} c_3) c_2}{a_{34} s_3} \tag{3.52}$$

Das equações 3.51 e 3.52, tem-se a expressão para o cálculo de θ_2 :

$$\theta_2 = \text{atan2}(s_2, c_2) \tag{3.53}$$

Finalmente, através das equações 3.32 e 3.33, pode-se chegar a uma expressão para o cálculo de θ_4 , o último ângulo procurado:

$$\theta_4 = \text{atan2}(-Y_{71}, X_{71}) - (\theta_2 + \theta_3) \tag{3.54}$$

3.3 Problema Cinemático Direto

Como o próprio nome sugere, o problema aqui é obter a posição e orientação da garra, sendo dados os ângulos das juntas do manipulador, ou seja, com referência à figura 3.3, dados os ângulos $\phi_1, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ e θ_6 , procura-se obter as coordenadas do ponto G e os versores \underline{S}_6 e \underline{a}_{67} . Da referida figura, pode-se facilmente tirar as componentes dos versores \underline{a}_{23} , \underline{a}_{34} e \underline{a}_{45} , referentes ao sistema de coordenadas XYZ fixo na junta de número dois e mostradas a seguir:

$$\underline{a}_{23} = (c_2, s_2, 0)$$

$$\underline{a}_{34} = (c_{2+3}, s_{2+3}, 0)$$

$$\underline{a}_{45} = (c_\alpha, s_\alpha, 0)$$

onde $\alpha = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$.

Ainda no sistema XYZ, os versores \underline{S}_5 e \underline{S}_6 são calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_{5x} &= s_{\alpha_{45}} s_\alpha = -s_\alpha \\ S_{5y} &= -s_{\alpha_{45}} c_\alpha = c_\alpha \\ S_{5z} &= c_{\alpha_{45}} = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S_{6x} &= X_{5\alpha} = \bar{X}_5 c_\alpha - \bar{Y}_5 s_\alpha = \\ &= s_{\alpha_{56}} s_5 c_\alpha + [s_{\alpha_{45}} c_{\alpha_{56}} + \\ &\quad + c_{\alpha_{45}} s_{\alpha_{56}} c_5] s_\alpha = \\ &= s_5 c_\alpha \\ S_{6y} &= X_{5\alpha}^* = \bar{X}_5 s_\alpha + \bar{Y}_5 c_\alpha = \\ &= s_{\alpha_{56}} s_5 s_\alpha - [s_{\alpha_{45}} c_{\alpha_{56}} + \\ &\quad + c_{\alpha_{45}} s_{\alpha_{56}} c_5] c_\alpha = \\ &= s_5 s_\alpha \\ S_{6z} &= Z_5 = \\ &= c_{\alpha_{45}} c_{\alpha_{56}} - s_{\alpha_{45}} s_{\alpha_{56}} c_5 = \\ &= c_5 \end{aligned}$$

De posse dos versores \underline{a}_{23} , \underline{a}_{34} , \underline{a}_{45} , \underline{S}_5 e \underline{S}_6 , pode-se calcular as coordenadas do ponto G, também no sistema XYZ, como a seguir:

$$\begin{aligned} G_x &= a_{23} a_{23_x} + a_{34} a_{34_x} + a_{45} a_{45_x} + S_5 S_{5_x} + S_6 S_{6_x}; \\ G_y &= a_{23} a_{23_y} + a_{34} a_{34_y} + a_{45} a_{45_y} + S_5 S_{5_y} + S_6 S_{6_y}; \\ G_z &= a_{23} a_{23_z} + a_{34} a_{34_z} + a_{45} a_{45_z} + S_5 S_{5_z} + S_6 S_{6_z}; \end{aligned} \tag{3.55}$$

onde a_{ij} e S_i são parâmetros mostrados na figura 3.2.

Resta, agora, calcular o versor \underline{a}_{67} , para que a solução do problema cinemático direto esteja resolvido. As componentes deste versor em XYZ são dadas por:

$$\begin{aligned} a_{67x} &= s_\alpha(U_{65}s_{\alpha_{45}} + V_{65}c_{\alpha_{45}}) + W_{65}c_\alpha \\ a_{67y} &= -c_\alpha(U_{65}s_{\alpha_{45}} + V_{65}c_{\alpha_{45}}) + W_{65}s_\alpha \\ a_{67z} &= U_{65}c_{\alpha_{45}} - V_{65}s_{\alpha_{45}} \end{aligned}$$

Tem-se agora, as coordenadas do ponto G e os versores \underline{S}_6 e \underline{a}_{67} no sistema de coordenadas fixo na junta dois.

Para que se possa fazer uso destes elementos, deve-se tê-los em coordenadas do sistema fixo na base do manipulador $X^oY^oZ^o$, também mostrado na figura 3.3. Basta, então, montar a matriz que faça a transformação de rotação entre os dois sistemas, a qual é composta de duas rotações : a primeira de 90 graus em torno de X seguida de uma rotação de ϕ_1 graus em torno do novo Z. A matriz resultante R é mostrada a seguir:

$$[R] = \begin{bmatrix} c_{\phi_1} & -s_{\phi_1} & 0 \\ s_{\phi_1} & c_{\phi_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\phi_1} & 0 & s_{\phi_1} \\ s_{\phi_1} & 0 & -c_{\phi_1} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Os versores \underline{S}_6 e \underline{a}_{67} expressos acima no sistema XYZ podem, agora, ser transformados para o sistema $X^oY^oZ^o$, pré-multiplicando-os pela matriz [R] anterior. As coordenadas do ponto G no sistema $X^oY^oZ^o$ ficam determinados pela transformação :

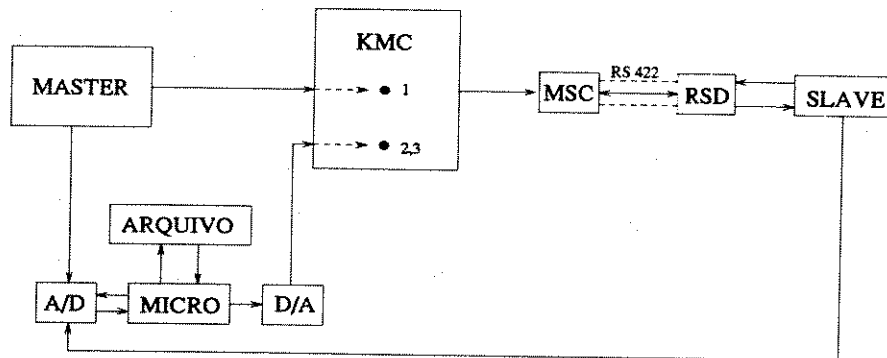
$$\{G\}_{X^oY^oZ^o} = [R] \{G_x, G_y, G_z\}_{XYZ}^T$$

Capítulo 4

Interface Homem-Máquina

Neste capítulo são descritos os módulos criados e/ou modificados a partir da configuração inicial do Sistema Kraft [3], cujo diagrama de blocos pode ser visto na figura 4.1, com a finalidade de viabilizar a utilização do microcomputador como opção de controle para o manipulador, tanto através do teclado quanto com a utilização do Mouse Espacial.

A estrutura e opções dos menus apresentados foram feitos de modo a possibilitar ao usuário um acesso mais rápido às funções necessárias e disponíveis.



onde : MSC : Módulo de Controle do Sistema do Master;
 RSD : Módulo Driver Remoto;
 KMC : Chassis da Eletrônica Kraft;
 A/D : Conversor Analógico/Digital;
 D/A : Conversor Digital/Analógico.

Figura 4.1: Configuração Inicial do Sistema

O diagrama de blocos da figura 4.3 mostra as opções disponíveis ao operador a partir do primeiro menu do programa, mostrado na figura 4.2.



Figura 4.2: Primeiro Menu do Programa.

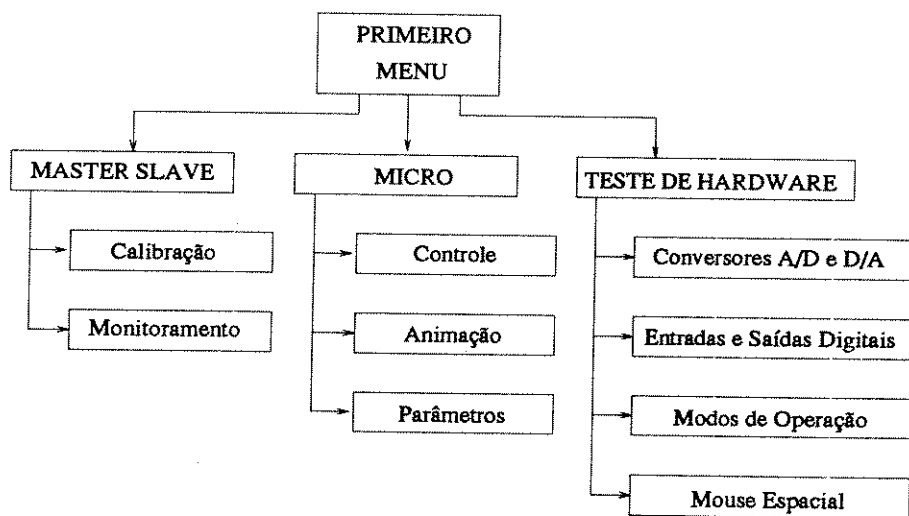


Figura 4.3: Diagrama de Blocos do Programa

4.1 Master Slave

Esta opção mantém a possibilidade de controlar o manipulador através do Master, como descrito no capítulo 1. A tela inicial deste modo de controle pode ser vista na figura 4.4.

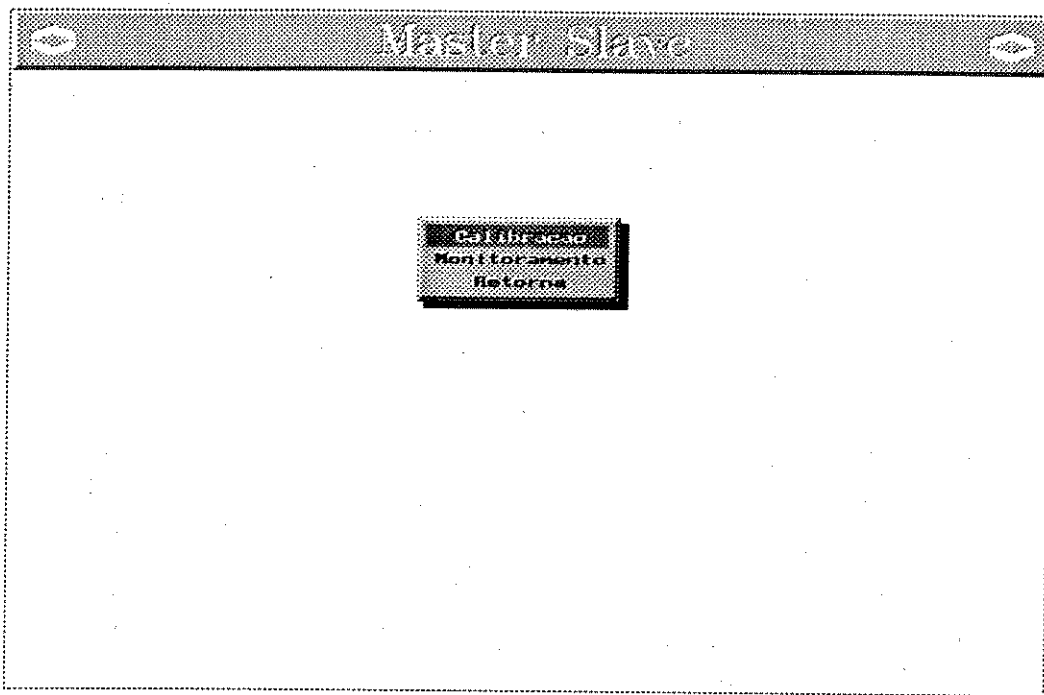


Figura 4.4: Tela Inicial do Modo Master Slave.

4.1.1 Calibração

Tem por finalidade fazer a correspondência entre os valores máximos e mínimos dos ângulos de junta do Master e do Slave. A calibração é feita junta por junta, conforme instruções mostradas na tela (figura 4.5), e armazenadas em um arquivo.

4.1.2 Monitoramento

Esta tela, mostrada na figura 4.6, monitora todas as tensões dos potenciômetros do master e do slave, os quais são mostrados através de gráficos. Apresenta ainda uma janela com os valores dos ângulos das juntas do manipulador e uma outra com a posição e orientação da garra, obtidos via modelo cinemático direto.

Apresenta ainda as seguintes funções :

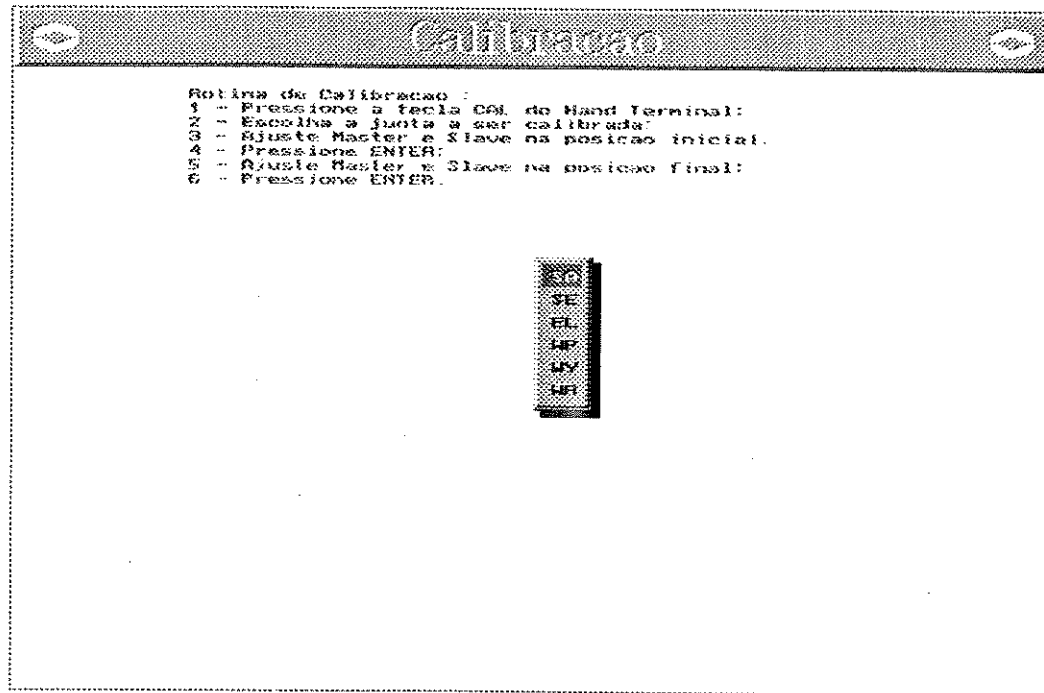


Figura 4.5: Tela de Calibração .

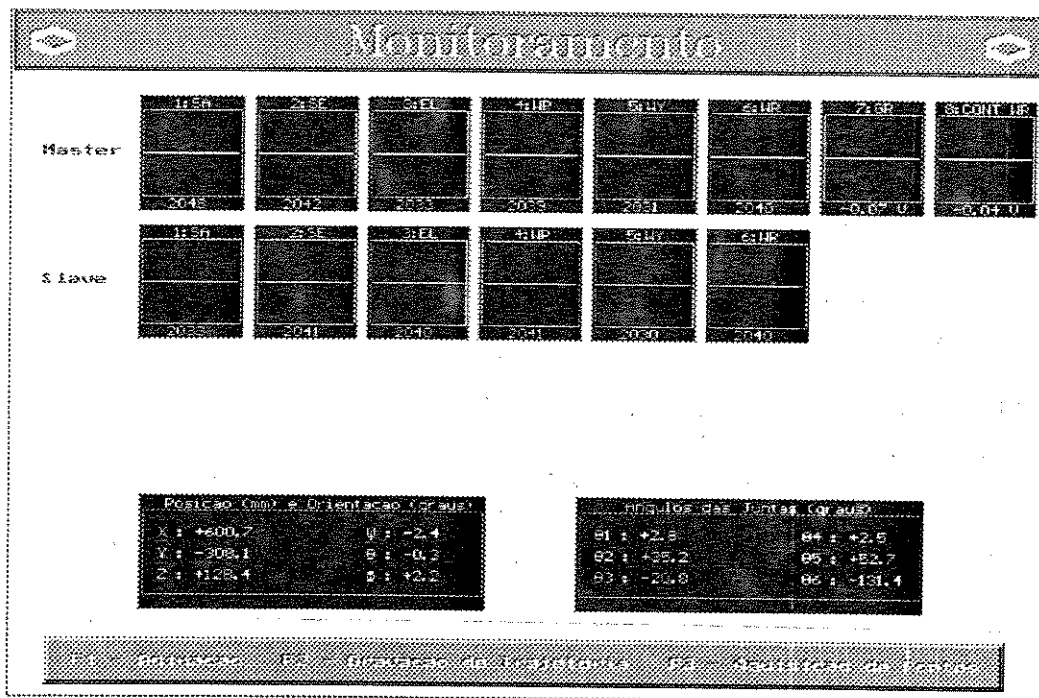


Figura 4.6: Tela de Monitoramento.

- F1 : Ativa a animação do master ou do slave, de acordo com os valores das tensões lidas dos potenciômetros.
- F2 : Ativa a gravação de trajetória. Quando acionada esta tecla, todos os pontos passam a ser guardados em um arquivo cujo nome é escolhido pelo operador. A gravação termina quando outra tecla é acionada.
- F3 : Ao primeiro toque, abre um arquivo cujo nome é escolhido pelo operador e grava a posição atual. A partir daí, a cada vez que F3 é acionada é feito o armazenamento da posição atual no mesmo arquivo.

4.2 Micro Computador

Esta opção passa o controle do manipulador do Master para o computador, e dá ao operador as seguintes opções :

- Controle;
- Animação ;
- Parâmetros.

4.2.1 Controle

São apresentadas três formas de operação para o manipulador, sendo que as duas primeiras, via teclado e via mouse espacial, são manuais, e a terceira, é o modo automático, conforme mostrado na figura 4.7.

Controle Via Mouse Espacial

Neste modo, o manipulador é controlado diretamente pelo Mouse Espacial. Assim que esta opção é acionada, o microcomputador lê os ângulos atuais das juntas do manipulador, os quais são enviados para o modelo cinemático direto. Deste modelo, descrito no capítulo 3, obtém-se a posição e orientação atuais da extremidade do manipulador (garra).

Quando o acoplamento do Mouse é feito, o sistema calcula e guarda os cossenos diretores (Xeg, Yeg e Zeg) e as coordenadas do ponto central do manípulo, mostrado na figura 1.3. Isto feito, sempre que o Mouse é acionado, é possível obter a matriz de transformação que leva o manípulo da posição inicial para a final, bem como a variação na posição do ponto central. Esta matriz é aplicada à matriz de orientação do manipulador, leva à nova orientação do mesmo. De posse da nova orientação e da nova posição da garra (posição inicial acrescida da variação das coordenadas do

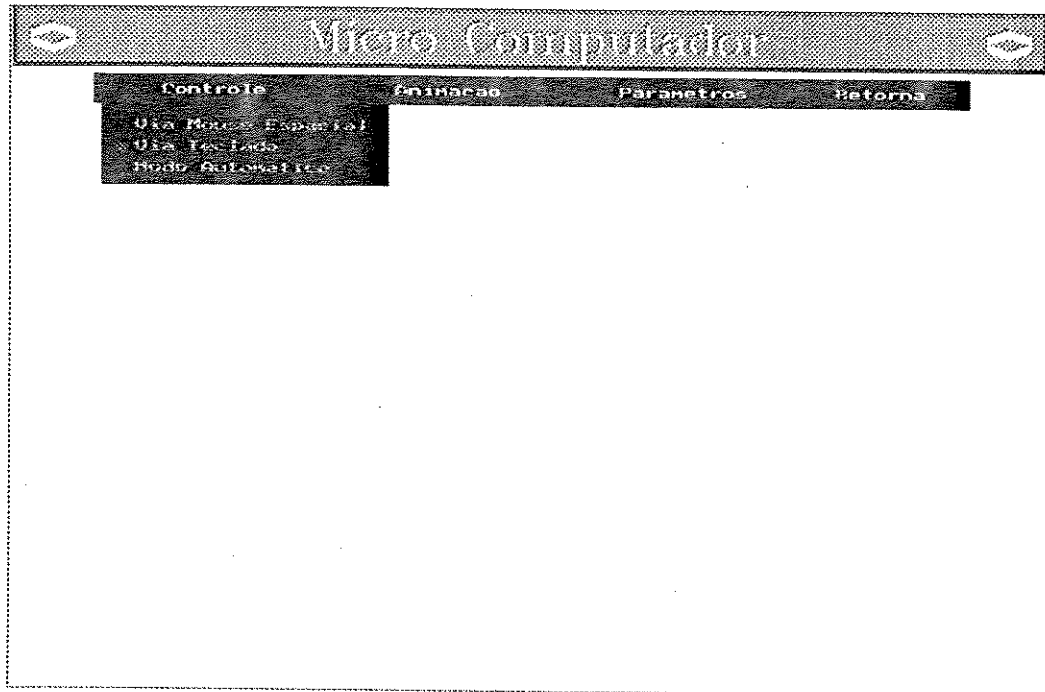


Figura 4.7: Tela Inicial do Controle Via Microcomputador.

ponto central do manípulo), pode-se enviar ao manipulador os novos ângulos das juntas, calculados através do modelo cinemático inverso.

A tela apresentada neste modo é mostrada na figura 4.8, e é composta dos seguintes itens:

- Seis gráficos mostrando as impulsões dos potenciômetros do manipulador;
- Uma janela mostrando a posição e orientação da garra;
- Uma janela mostrando os ângulos das juntas do manipulador.

Além disto, existe ainda um menu na parte superior da tela com as seguintes opções :

- Teclado: muda o controle do modo mouse espacial para o modo teclado;
- Grava Posição: grava em um arquivo, cujo nome é escolhido pelo operador, a posição atual do manipulador;
- Grava Trajetória: grava todas as mudanças de posição do manipulador a partir do momento em que é acionada até que outra opção seja ativada. O nome do arquivo é escolhido pelo operador;
- TV: mostra uma tela reservada para a imagem de uma câmera a ser instalada no manipulador.

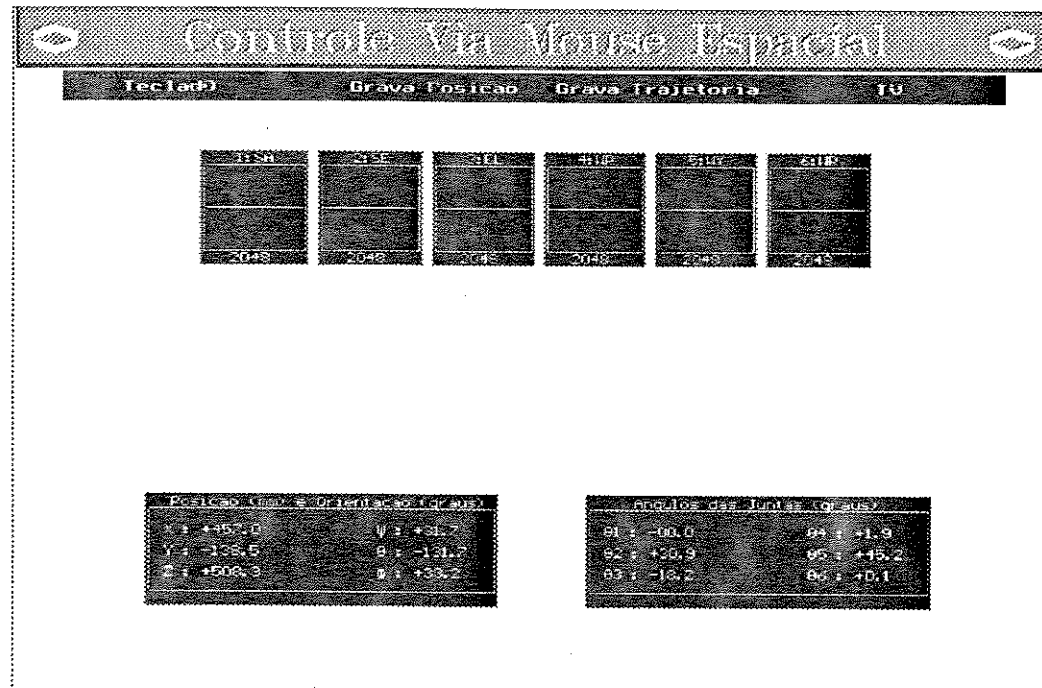


Figura 4.8: Tela de Controle Via Mouse Espacial.

Controle Via Teclado

Neste modo, o controle é feito diretamente através do teclado. Ao ser acionada, o sistema lê a posição atual do manipulador e fica aguardando algum comando via teclado. A tela montada para esta opção é mostrada na figura 4.9, e possui os seguintes itens:

- Seis gráficos mostrando as impulsões dos potenciômetros do manipulador;
- Uma janela mostrando a posição e orientação da garra;
- Uma janela mostrando os ângulos das juntas do manipulador.

Apresenta na parte superior da tela um menu com as seguintes opções :

- Mouse: muda o controle do modo teclado para o modo mouse espacial;
- Define Reta: define a reta entre dois pontos escolhidos pelo operador. Estes pontos, devidamente tratados, formam uma trajetória que é armazenada e pode ser enviada ao manipulador;
- Grava Posição: grava em um arquivo, cujo nome é escolhido pelo operador, a posição atual do manipulador;

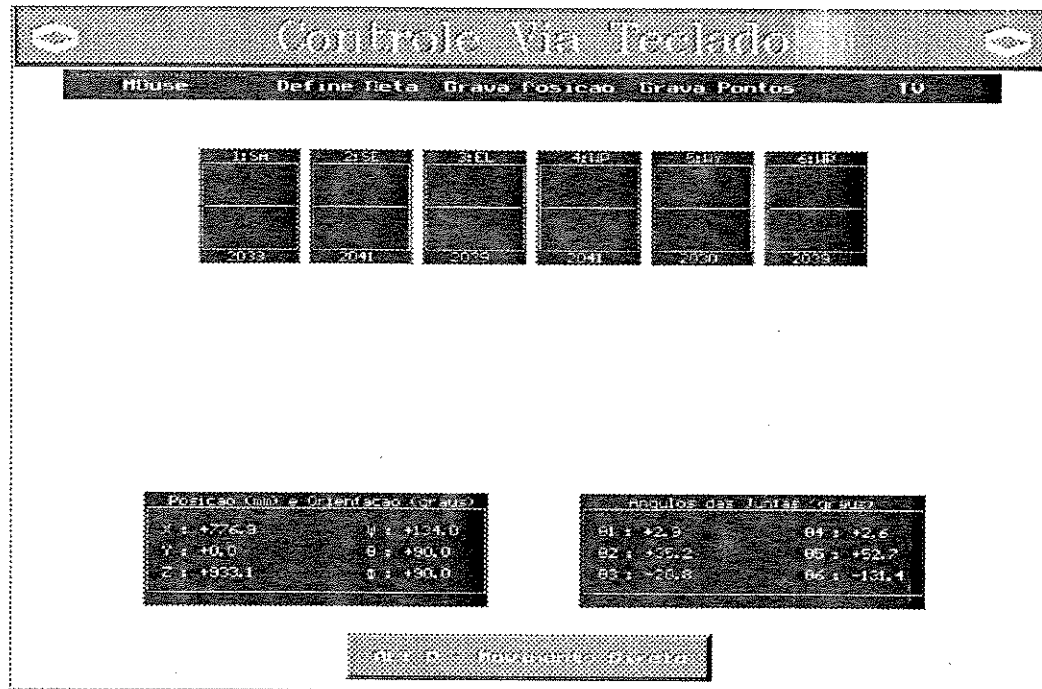


Figura 4.9: Tela de Controle Via Teclado.

- Grava Pontos: ao primeiro toque, abre um arquivo cujo nome é escolhido pelo operador, e guarda a posição do manipulador. Cada subsequente chamada da função armazena a posição atual no mesmo arquivo;
- TV: mostra uma tela reservada para a imagem de uma câmera a ser instalada no manipulador.

Apresenta ainda uma função acionada pelas teclas ALT D que ativa o Movimento Direto e desativa o menu acima descrito.

Uma vez ativado o Movimento Direto (figura 4.10), passa-se a ter a possibilidade de movimentar cada uma das juntas separadamente ou fazer movimentos nas direções X, Y ou Z da orientação da garra, conforme instruções na própria tela.

Controle Automático

Esta opção possibilita ao operador enviar ao manipulador trajetórias previamente tratadas e armazenadas, de forma a não causarem movimentos bruscos.

Podem ser enviadas trajetórias únicas ou um conjunto de trajetórias, formando uma tarefa específica. Esta possibilidade foi criada para suprir problemas em que a memória do com-

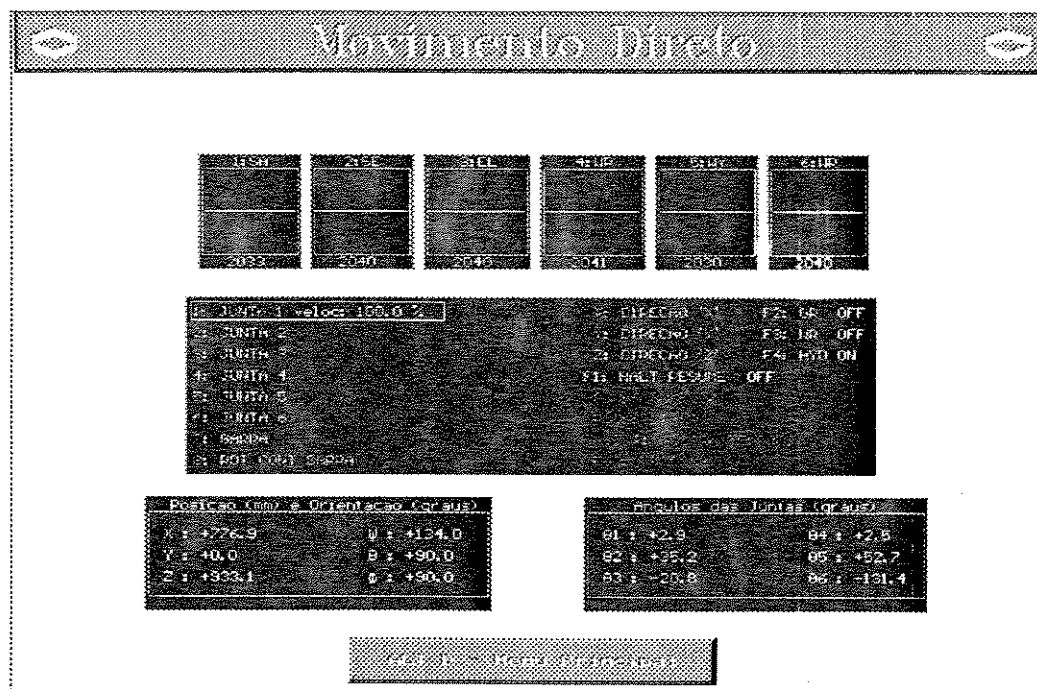


Figura 4.10: Tela do Movimento Direto.

putador não seja suficiente para armazenar todos os pontos de uma determinada trajetória a ser enviada.

4.2.2 Animação

Apresenta as mesmas opções do controle, sendo que as variações nos ângulos das juntas somente são usados na animação, sem afetar o manipulador. A figura 4.11 mostra a tela com a animação do manipulador no modo teclado.

4.2.3 Parâmetros

Opção criada para permitir a mudança nos valores tidos como "default" de alguns parâmetros do Mouse Espacial e do teclado.

4.3 Teste de Hardware

Permite testar elementos do hardware utilizado, tais como conversores analógicos/digitais e digitais/analógicos (A/D e D/A), entradas e saídas digitais, modos de operação e porta serial de conexão do Mouse Espacial.

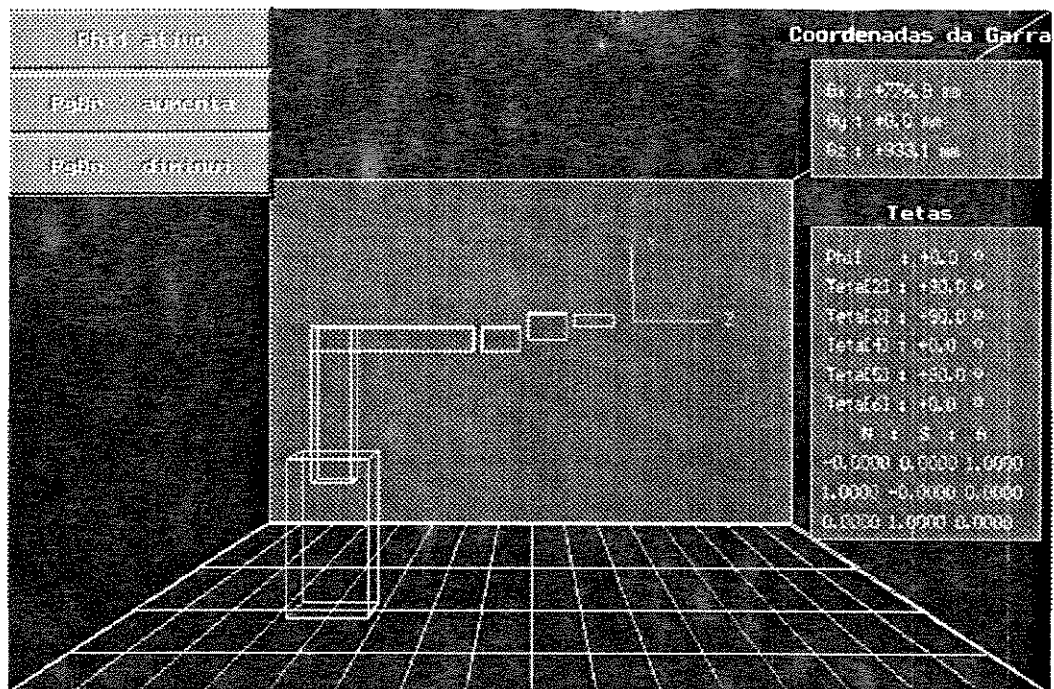


Figura 4.11: Tela de Animação Via Teclado.

Capítulo 5

Resultados e Conclusões

Para finalizar o presente trabalho, o programa foi testado usando o Sistema Kraft no CENPES - Centro de Pesquisas e Desenvolvimento da Petrobras. Descreve-se, a seguir, os principais testes realizados, os resultados obtidos e as conclusões finais do trabalho.

5.1 Testes e Resultados

5.1.1 Controle Via Master

Foi o primeiro modo a ser testado, devido a ser o mais conhecido e o único utilizado sem o uso do microcomputador.

Foram verificadas todas as funções do controle via "master" e as opções criadas para a aquisição de pontos e gravação de trajetórias.

5.1.2 Controle Via Teclado

Foram verificadas as opções de aquisição de pontos para geração de trajetórias "off line" (como no modo anterior) e, principalmente, o controle individual de cada junta via teclado, bem como da abertura, fechamento e rotação contínua da garra.

Neste modo de controle, o microcomputador faz o papel do "master", como descrito no capítulo 4. Por este motivo, foi necessário criar uma rotina que, no momento de transição do modo de controle via microcomputador para o modo de controle via "master", verifica se a posição do manipulador corresponde à do "master". Caso não seja, é executada uma trajetória que leva o manipulador para a posição atual do "master". Tal rotina foi criada e testada.

5.1.3 Controle no Modo Automático

Para testar este modo, foram criadas trajetórias "off line" a partir de arquivos de pontos obtidos através dos modos de controle via "master" e via teclado, bem como foram gravadas trajetória contínuas no modo "master". Além disto, para testar a possibilidade de enviar trajetórias consecutivas, foram criadas trajetórias que fossem continuação da anterior.

Estas trajetórias foram enviadas ao manipulador das duas formas possíveis (simples ou composta), sendo que na composta existe a possibilidade de abrir ou fechar a garra no final de cada pedaço da trajetória maior. Este modo de envio possibilitou a composição de tarefas a partir pequenas trajetórias gravadas em qualquer um dos modos de controle.

5.1.4 Controle Via Mouse Espacial

Objetivo principal do trabalho, foi o último modo a ser testado, uma vez que dependia do bom funcionamento das funções de controle via teclado.

Como os ângulos de junta são calculados a partir dos valores das tensões dos potenciômetros, foram necessários ajustes nos valores de tensão lidos do manipulador antes de transformá-los em ângulos e aplicá-los aos modelos direto e inverso, devido à dependência das juntas 2 e 3 (os potenciômetros destas duas juntas estão localizados no eixo de rotação da junta 2). Da mesma forma, transformação oposta é necessária para obter os valores de tensão a serem enviados ao manipulador a partir dos ângulos obtidos no modelo inverso.

As tensões lidas nos potenciômetros do manipulador são proporcionais às tensões enviadas pelo "master" ou microcomputador, e estas proporcionalidades são obtidas na calibração do sistema e armazenadas na caixa de controle de Kraft. Portanto, para cada calibração existe um conjunto de constantes diferentes.

Como o modelo inverso trabalha com ângulos (tensões) obtidas diretamente do manipulador, foi necessário descobrir a relação existente entre estes ângulos e a tensão enviada pelo microcomputador (na função de "master") para obtenção de tais ângulos, ou seja, obter os parâmetros K_i e C_i da seguinte equação :

$$\theta_i = K_i T_i + C_i \quad (5.1)$$

onde :

- θ_i = ângulo da i-ésima junta do manipulador; e
- T_i = tensão a ser enviada pelo microcomputador para a i-ésima junta.

Para isto, utilizando a rotina de calibração, foram obtidos dois valores distintos de tensão do "master" e do "slave" (índices 1 e 2 na equação 5.2) para cada junta, e as constantes puderam ser calculadas resolvendo os seguintes sistemas de equações:

$$\begin{cases} \theta_{inicial_i} = K_i T_{inicial_i} + C_i \\ \theta_{final_i} = K_i T_{final_i} + C_i \end{cases}, i = 1, 2, 3, \dots, 6. \quad (5.2)$$

Isto feito, foi possível calcular a tensão necessária para levar o manipulador para a posição desejada:

$$T_i = (\theta_i - C_i) / K_i \quad (5.3)$$

Feitas as devidas transformações, o sistema foi ligado e testado.

5.2 Conclusões

- O sistema no modo "master-slave" manteve todas as funções originais e ganhou a possibilidade de arquivar trajetórias inteiras ou pontos para criação de trajetórias "off line";
- O modo de controle via teclado mostrou-se bastante útil para movimentos nas proximidades do objeto, quando apenas determinada junta deve ser movimentada;
- O modo de controle automático mostrou ser possível e bastante útil armazenar trajetórias para posterior uso;
- O modo de controle via Mouse Espacial mostrou-se bastante útil e prático, principalmente em se tratando de movimentos com maior exigência de controle na orientação da garra;
- O modelo implementado mostrou-se bastante eficaz e rápido, não sendo fator limitante na questão de resposta em tempo real;
- O sistema Kraft tem uma grande dependência do "master", mas o controle via microcomputador mostrou-se viável e bastante útil, tanto no modo de controle via teclado quanto no modo de controle via Mouse Espacial.

5.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

- Um dos objetivos do trabalho foi a minimização do tempo de inicialização do sistema através do uso do Mouse Espacial. Uma possibilidade de melhorar ainda mais este tempo seria construir uma nova caixa de controle para o sistema, de forma que a dependência do "master" pudesse ser eliminada.

- Um dos motivos da escolha do modelo implementado foi o esforço computacional. Seria interessante uma comparação quantitativa entre este modelo e o modelo usando a sistemática de Denavit-Hartenberg, o qual ainda é bastante usado atualmente.
- Seria interessante a implementação de um Mouse Espacial com realimentação de força, o que seria muito útil para aplicações deste tipo.
- Seria interessante implementar um sistema no qual o Mouse Espacial fosse impedido de continuar o movimento quando algum ângulo de junta estivesse para sair do limite permitido pelo modelo inverso do manipulador. Isto evitaria desacoplamentos indesejados.

Bibliografia

- [1] **Spong, M. W.; Vidyasagar, M.;** *Robot Dynamics and Control*; John Wiley & Sons, Inc.; 1989.
- [2] *Underwater Manipulator System*; Kraft TeleRobotics, Inc.; 1985.
- [3] **Cruz, J.M.;** *Projeto e Desenvolvimento de um Sistema de Geração Automática de Trajetória para Manipuladores*; Tese de Mestrado; 1993.
- [4] **Duffy, J.;** *Analysis of Mechanisms and Robot Manipulators*; John Wiley & Sons, Inc.; 1980.

Apêndice A

Características Técnicas do Manipulador Kraft

A.1 Especificações Gerais

Máximo alcance	130 cm
Capacidade de carga com o braço estendido	34 kg
Graus de liberdade de movimento	6 (+ abrir/fechar garra)

A.2 Efetuador

Padrão	Garra paralela
Abertura máxima da garra	10 cm
Força de fechamento da garra	90 kg
Método de controle	Força proporcional

A.3 Movimento das Juntas

Eixos	Excursão (graus)	Velocidade (graus/s)
Shoulder azimuth	180	80
Shoulder elevation	120	65
Elbow pivot	110	50
Wrist pitch	100	100
Wrist yaw	105	115
Wrist rotate:		
Modo 1 (slaved)	180	200
Modo 2 (contínuo)	—	210

Estes movimentos são mostrados na figura A.1 a seguir.

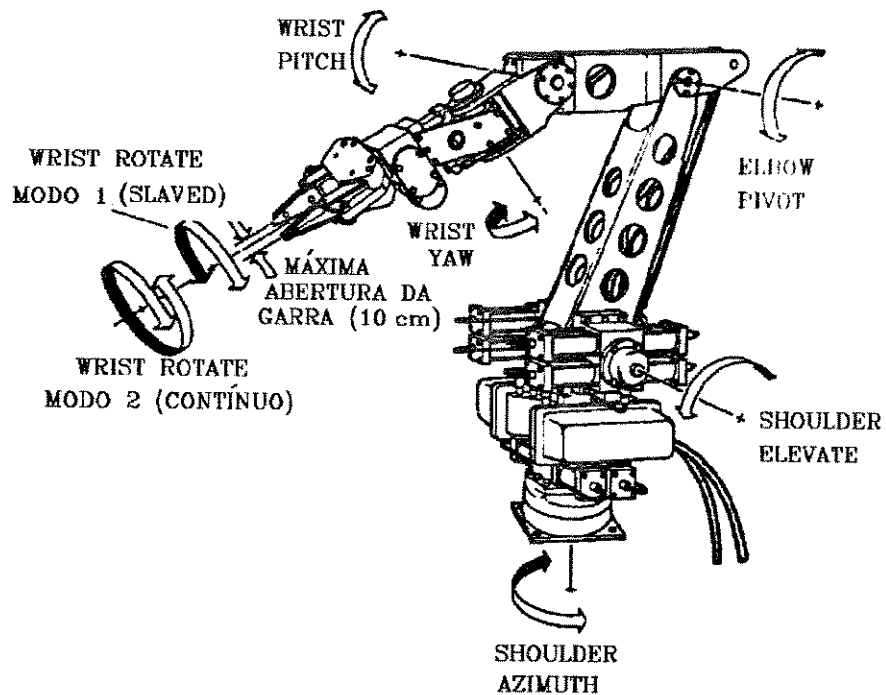


Figura A.1: Movimentos das Juntas do Manipulador Kraft.

Apêndice B

Listagem dos Modelos Implementados

```

#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#include <dos.h>
#include <math.h>
#include "begin1.h"

int KraftInv (double *G_, dcuble *S6_, double *a67_,double *phi_tetas);
void KraftDir (double *phi_tetas, double *G_, double *S6_, double *a67_);
void transforma(double teta, double X[3], double X0[3]);
void salva_phitetas(void);

double sup3,phi_tetas[8],G_[3],omi_[3];
double S6_[3],a67_[3],si[3];
int I;

/*****
* MODELO CINEMATICO INVERSO
*****/

#define DotProd(x,y) (x[0]*y[0] + x[1]*y[1] + x[2]*y[2])
#define sign(x) ((x>=0)-(x<0))
#define quad(x) ((x)*(x))

/*****
* - A funcao deve retornar um valor inteiro nao nulo se existir solucao.*
* - O array phi_tetas deve ter espaco para 8 componentes, ou seja:
*   phi_tetas[0] = phi1
*   phi_tetas[1...7] = teta1...teta7
*****/

```

```

int KraftInv (double *G_, double *S6_, double *a67_,
              double *phi_tetas)
{
    double /*ld_keep,*/keep,keep2; /* variavel de uso generico e temporario */

    double S7i_[3]; /* O underscore indica que a variavel e um vetor com
    componentes nos eixos x, y e z. O "i" substitui a
    interrogacao usada no desenvolvimento analitico,
    ou seja, S7i_ aqui = S7? la. */

    double DEN; /* denominador da eq.(5) */
    double S7, S1, a71, lambda, sig_lam;
    double S7_[3], a71_[3], ALFA71, ALFA67;
    double eta;
    double A71_[3];
    double /*X7, Y7,*/ X17, Y17, teta6, teta6_linha,teta5;
    double P,Q,c2,s2,/*X1,Y1,*/X71,Y71,Z17;

    S7i_[0] = a67_[1]*S6_[2] - S6_[1]*a67_[2];
    S7i_[1] = a67_[2]*S6_[0] - S6_[2]*a67_[0];
    S7i_[2] = a67_[0]*S6_[1] - S6_[0]*a67_[1];

    /******
    * Calculo de teta[7] => phi_tetas[7] *
    *****/

    DEN = quad(S7i_[0]) + quad(S7i_[1]);

    if ((0<=DEN) && (DEN<=3.OE-8)) /* conforme analise feita para a eq.(5) */
    {
        S7 = 0; /* comprimento do lado do poligono espacial ao longo do vetor S7_ */
        S7_[0] = S7i_[0];
        S7_[1] = S7i_[1];
        S7_[2] = S7i_[2];
        S1 = S0 - G_[2];
        a71 = sqrt( quad(G_[0]) + quad(G_[1]) );
        if (a71==0)
        {
            a71_[0] = a67_[0];
            a71_[1] = a67_[1];
            a71_[2] = a67_[2];
        }
        else
        {

```

```

a71_[0] = -G_[0]/a71;
a71_[1] = -G_[1]/a71;
a71_[2] = 0;
}
ALFA67 = PI_2;
keep = DotProd(a71_,a67_);
if (fabs(keep)<=1.0E-8)
  phi_tetas[7] = PI_2 * sign(DotProd(a71_,S6_));
else
  phi_tetas[7] = atan2(DotProd(a71_,S6_),keep);
if (S7_[2]<0)
  ALFA71 = PI;
else
  ALFA71 = 0;
}
else /* DEN fora do intervalo considerado zero */
{
lambda = -(G_[0]*S7i_[0] + G_[1]*S7i_[1])/DEN;
S7 = fabs(lambda);
sig_lam = sign(lambda);
S7_[0] = sig_lam*S7i_[0];
S7_[1] = sig_lam*S7i_[1];
S7_[2] = sig_lam*S7i_[2];
eta = G_[2] + lambda*S7i_[2]; /* eq.(6) */
S1 = S0 - eta; /* eq.(10) */
A71_[0] = -(G_[0] + lambda*S7i_[0]);
A71_[1] = -(G_[1] + lambda*S7i_[1]);
A71_[2] = eta - (G_[2] + lambda*S7i_[2]);
a71 = sqrt(quad(A71_[0])+quad(A71_[1])+quad(A71_[2])); /* eq.(13) */
if (a71<=1.0E-8)
{
a71_[0] = S7_[1]; /* eq.(15') */
a71_[1] = - S7_[0];
a71_[2] = 0;
}
else
{
a71_[0] = A71_[0]/a71; /* eq.(15) */
a71_[1] = A71_[1]/a71;
a71_[2] = A71_[2]/a71;
}
ALFA67 = PI_2 * (2 - sign(lambda)); /* eq.(16) */
keep = DotProd(a71_,a67_);
if (fabs(keep)<=1.0E-8)
  phi_tetas[7] = PI_2 * sign(lambda)*sign(DotProd(a71_,S6_)); /* eq.(17) */
else

```

```

    phi_tetas[7] = sign(lambda)*atan2(DotProd(a71_,S6_),keep);
    ALFA71 = atan2(a71_[0]*S7_[1] - a71_[1]*S7_[0],S7_[2]);    /* eq.(18) */
}

    /******
    * Calculo de phi => phi_tetas[0] *
    *****/

/* phi1-teta1 (eq.18) sera armazenado temporariamente em phi_tetas[0]
(lugar de phi1) ate que teta1 seja calculado */

phi_tetas[0] = atan2(a71_[1],a71_[0]); /* (-PI,PI) */
phi_tetas[0] = phi_tetas[0] + PI2*(phi_tetas[0]<0); /* [0,2PI) */

    /******
    * Calculo de teta[1] => phi_tetas[1] *
    *****/

    /******
    * Calculo de phi[1] *
    *****/

keep2 = S6*sin(ALFA67)*sin(phi_tetas[7])+a71;
keep = S7*sin(ALFA71)+S6*cos(ALFA71)*sin(ALFA67)*cos(phi_tetas[7]);

if((fabs(keep)<=1.0E-12)&&(fabs(keep2)<=1.0E-12))
    return 1;    /* Teta[1] indeterminado */

keep = atan2(keep,keep2);    /* teta1 (-PI,PI) */
keep2 = keep + phi_tetas[0];    /* phi1 (-PI,3PI) */
keep2 = keep2 - PI2*(keep2>PI);    /* phi1 (-PI,PI) */

if ((inf1>keep2) || (keep2>sup1)) /* teste dos limites */
{
    /* de phi[1] */
    keep2 = keep2 + PI; /* segunda solucao para phi1 (0,2PI) */
    phi_tetas[0] = keep2 - PI2*(keep2>PI);    /* phi1 (-PI,PI) */
    keep = keep + PI; /*teta1 (0,2PI) */
    phi_tetas[1] = keep - PI2*(keep>PI);    /* teta1 (-PI,PI) */
    if ((inf1>phi_tetas[0]) || (phi_tetas[0]>sup1))
        return 11;
}
else /* Primeira solucao boa. A segunda certamente esta fora dos limites*/
{
    phi_tetas[0] = keep2; /* phi1 (-PI,PI) */

```

```

phi_tetas[1] = keep; /* teta1 (-PI,PI) */
}

/*****
 * Calculo de teta[6] *
*****/

X17 = sin(phi_tetas[1])*cos(phi_tetas[7])+cos(ALFA71)*cos(phi_tetas[1])
    *sin(phi_tetas[7]);
Y17 = sin(ALFA67)*sin(ALFA71)*cos(phi_tetas[1]);

teta6 = atan2(Y17,-X17); /* teta6 (-PI,PI) */
teta6_linha = teta6 + PI; /* teta6_linha (0,2PI) */
teta6_linha = teta6_linha - PI2*(teta6_linha>PI); /* teta6_linha (-PI,PI)*/

Z17 = sin(ALFA67)*(sin(phi_tetas[1])*sin(phi_tetas[7])
    -cos(ALFA71)*cos(phi_tetas[1])*cos(phi_tetas[7]));

if(fabs(cos(teta6))>.71) /* |cos(teta6)|>|sen(teta6)| */
    teta5 = atan2(-X17/cos(teta6),Z17); /* (-PI,PI] (eq.55)*/
else
    teta5 = atan2(Y17/sin(teta6),Z17); /* (-PI,PI] (eq.56)*/

if ((teta6>=inf6) && (teta6<=sup6))
{
    /*****
     * Calculo de teta[5] *
     *****/

    if ((inf5<=teta5) && (teta5<=sup5)) /* teste dos limites */
    { phi_tetas[6] = teta6; phi_tetas[5]=teta5;} /* de teta[5] */
    else
        if ((inf6<=teta6_linha) && (teta6_linha<=sup6))
        {
            teta5 = -teta5; /* [-PI,PI) eq.58 */
            if((teta5>=inf5)&&(teta5<=sup5))
            { phi_tetas[6]=teta6_linha; phi_tetas[5]=teta5;}
            else
                return 55; /* teta[5] fora dos limites */
        }
        else
            return 66; /* teta[5] e teta[6] fora dos limites */
}

else
{

```

```

if((teta6_linha>=inf6)&&(teta6_linha<=sup6))
{
  teta5 = -teta5;
  if((teta5>=inf5)&&(teta5<=sup5))
  { phi_tetas[6]=teta6_linha; phi_tetas[5]=teta5;}
  else
    return 55;
}
else
  return 66;
}

/*****
 * Calculo de teta[3] *
*****/

X71 = sin(ALFA67)*sin(phi_tetas[7])*cos(phi_tetas[1])+
      sin(ALFA67)*cos(ALFA71)*cos(phi_tetas[7])*sin(phi_tetas[1]);
Y71 = sin(ALFA67)*sin(ALFA71)*cos(phi_tetas[7]);
keep = (a45/sin(phi_tetas[5]))+S6;
P = keep*X71+(S5/sin(phi_tetas[5]))*Y71+S7*sin(ALFA71)*sin(phi_tetas[1])
  +a71*cos(phi_tetas[1]);
Q = keep*Y71-(S5/sin(phi_tetas[5]))*X71-S7*cos(ALFA71)-S1;
keep=(P*P+Q*Q-a23*a23-a34*a34)/(2.0*a23*a34);
if((keep<-1)||(keep)>1)
  return 99;
phi_tetas[3] = -acos(keep);
if ((inf3>phi_tetas[3]) || (phi_tetas[3]>sup3_maior)) /* teste dos limites*/
  return 33;                                     /* de teta[3] */

/* Para sabermos se teta3 esta ok, precisamos saber o valor de teta2,
   pois o limite superior de teta3 depende de teta2*/

/*****
 * Calculo de teta[2] *
*****/

keep=a23+a34*cos(phi_tetas[3]);
keep2=a34*sin(phi_tetas[3]);
c2 = (Q*keep2-P*keep)/(quad(keep)+quad(keep2));
s2 = (P+keep*c2)/keep2;

/*****
 * ou :
 *

```

```

* s2 = (Q-keep2*c2)/keep;
*****/

phi_tetas[2] = atan2(s2,c2); /* (-PI,PI) */
if ((inf2>phi_tetas[2]) || (phi_tetas[2]>sup2)) /* teste dos limites */
    return 22; /* de teta[2] */

sup3 = sup3_maior-(phi_tetas[2]-inf2)*(sup3_maior-sup3_menor)/(sup2-inf2);

if(phi_tetas[3]>sup3)
    return 33;

    /******
    * Calculo de teta[4] *
    *****/

if((fabs(X71)<=1.0E-12)&&(fabs(Y71)<=1.0E-12))
    return 4; /* Teta[4] indeterminado */

phi_tetas[4] = atan2(-Y71,X71) - (phi_tetas[2]+phi_tetas[3]); /* (-PI,PI) */

if ((inf4>phi_tetas[4]) || (phi_tetas[4]>sup4)) /* teste dos limites*/
    return 44; /* de teta[4] */

return 8;
}

/******
* MODELO CINEMATICO DIRETO *
*****/

void KraftDir (double *phi_tetas, double *G_, double *S6_, double *a67_)
{
    double temp, temp1;
    double /*S1_[3],*/ a23_[3], a34_[3], a45_[3], S5_[3],
    a67_linha[3], G_linha[3], S6_linha[3];

/* S1_[0] = 0; S1_[1] = 0; S1_[2] = 1;*/

    a23_[0] = cos(phi_tetas[2]); a23_[1] = sin(phi_tetas[2]); a23_[2] = 0;

    temp1 = phi_tetas[2] + phi_tetas[3];

    a34_[0] = cos(temp1); a34_[1] = sin(temp1); a34_[2] = 0;

```



```
temp = temp1 + phi_tetas[4];

a45_[0] = cos(temp); a45_[1] = sin(temp); a45_[2] = 0;

S5_[0] = -sin(temp); S5_[1] = cos(temp); S5_[2] = 0;

S6_linha[0] = sin(phi_tetas[5])*cos(temp);
S6_linha[1] = sin(phi_tetas[5])*sin(temp);
S6_linha[2] = cos(phi_tetas[5]);

a67_linha[0] = -sin(temp)*sin(phi_tetas[6])+cos(temp)*cos(phi_tetas[5])
              *cos(phi_tetas[6]);
a67_linha[1] = cos(temp)*sin(phi_tetas[6])+sin(temp)*cos(phi_tetas[5])
              *cos(phi_tetas[6]);
a67_linha[2] = -sin(phi_tetas[5])*cos(phi_tetas[6]);

G_linha[0] = a23*a23_[0]+a34*a34_[0]+a45*a45_[0]+S5*S5_[0]
            +S6*S6_linha[0];
G_linha[1] = a23*a23_[1]+a34*a34_[1]+a45*a45_[1]+S5*S5_[1]
            +S6*S6_linha[1];
G_linha[2] = a23*a23_[2]+a34*a34_[2]+a45*a45_[2]+S5*S5_[2]
            +S6*S6_linha[2];

transforma(phi_tetas[0],a67_linha,a67_);
transforma(phi_tetas[0],S6_linha,S6_);
transforma(phi_tetas[0],G_linha,G_);

G_[2] = G_[2] + S0;

si[0] = - a67_[1]*S6_[2] + S6_[1]*a67_[2];
si[1] = - a67_[2]*S6_[0] + S6_[2]*a67_[0];
si[2] = - a67_[0]*S6_[1] + S6_[0]*a67_[1];

}

void transforma(double teta, double X[3], double X0[3])
{
  X0[0] = X[0]*cos(teta) + X[2]*sin(teta);
  X0[1] = X[0]*sin(teta) - X[2]*cos(teta);
  X0[2] = X[1];
}
```