

Indeui 17.961-BAE

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E ELETRÔNICA

*aguardar entrar na Base para  
corrigir 500 e 700*

SATURAÇÃO DE FLUXOS NO SISTEMA DE  
TRANSMISSÃO EM FUNÇÃO DA GERAÇÃO DE POTÊNCIA ATIVA

CARLOS RODRIGUES DE SOUZA<sup>(1)</sup>

*Coordenador Hermano de  
(1) Medeiros Ferreira Tavares*

TESE APRESENTADA À FACULDADE DE  
ENGENHARIA DE CAMPINAS DA UNI-  
VERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
COMO PARTE DOS REQUISITOS PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM  
CIÊNCIAS.

**UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL**

CAMPINAS  
1977

506

## RESUMO

Algoritmos de programação linear e de programação linear por partes foram preparados para a aplicação em alguns aspectos do planejamento da expansão dos sistemas de potência e, no que diz respeito à operação desses sistemas, em remanejamento de geração de potência ativa associado, quando necessário, a corte nas demandas (load shedding) ou à utilização da inércia térmica das linhas de transmissão, visando obter um modo de operação satisfatório.

### ABSTRACT

Upper bounded variables linear programming and piecewise linear programming algorithms have been prepared for application in some system planning aspects and for use in real power generation rescheduling related, if necessary, to load shedding or to the utilization of heat capacity of some transmission lines in order to get to a satisfactory operating condition.

## CONTEÚDO

### CAPÍTULO I

- Introdução
- O modelo do sistema de potência
- O fluxo de carga linearizado
- A formulação do problema

### CAPÍTULO II

- Parte I: Programação linear por partes
- Parte II: Programa de base inicial

### CAPÍTULO III

- Algoritmos de fase inicial e linear por partes

### CAPÍTULO IV

- Exemplos

### CAPÍTULO V

- Conclusões Gerais

### APÊNDICE PI

### COMENTÁRIOS SOBRE A NOTAÇÃO

### BIBLIOGRAFIA

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

O objetivo primordial dos sistemas de potência é satisfazer às demandas, isto é, satisfazer as restrições de carga, dentro de limites de operação especificados para as variáveis associadas com os componentes do sistema (satisfação das restrições de operação). [5]

As condições de operação de um sistema de potência podem ser caracterizadas em termos de três estados de operação. [8]

- normal quando são satisfeitas tanto as restrições de carga quanto as restrições de operação.
- emergência caracteriza-se pela não satisfação das restrições de operação embora as condições de carga possam estar sendo satisfeitas.
- restauração refere-se à não satisfação das restrições de carga enquanto que as restrições de operação estão sendo respeitadas.

Se um sistema de potência, quando em operação normal, tem habilidade para suportar uma série de contingências especificadas, sem entrar em operação de emergência, este sistema diz-se seguro; caso contrário diz-se inseguro.

Via de regra<sup>[8]</sup>, trabalha-se no sentido de evitar que o sistema opere em condições que possam levar à sobrecarga de seus componentes; entretanto, em certos casos, ante a possibilidade de sacrificar a economia de operação, pode-se suportar uma sobrecarga temporária, pela violação de limites térmicos. Também, o excesso de capacidade instalada tende a diminuir e isto faz com que a sobrecarga, a que são temporariamente submetidos os componentes que tem inércia térmica, seja prática comum, não só nas condições de emergência, como também apresenta-se como uma opção a que rotineiramente lança mão, o pessoal do despacho de carga, para satisfazer a picos de demanda de menor duração.

Neste trabalho, admite-se que inicialmente o sistema está em operação normal e como não se fez análise de contingência não se sabe se este modo de operação normal é seguro ou inseguro. Então, quando ocorre uma contingência, como por exemplo a perda de uma geração, conforme apresentado em exemplo no capítulo IV, o sistema pode entrar em operação de emergência, pois podem ocorrer violações de restrições operativas. A idéia do trabalho é utilizar-se da geração e capacidade de transmissão disponíveis para procurar fazer com que o sistema volte a operar em condições normais. Se isto não for possível procurar-se-á uma forma de operação de emergência aproveitando-se da inércia térmica das linhas de transmissão.

Em último caso estuda-se uma forma de realizar cortes nas demandas (load shedding), isto é, deixa-se de satisfazer as condições de carga para que possam ser satisfeitas as condições de operação ainda que com uma margem de utilização deliberada da inércia térmica das linhas.

Quando ocorre uma contingência, ou quando um aumento na demanda do sistema provoca um desvio das condições normais de operação, pela violação de restrições operativas, o objetivo inicial é realizar um remanejamento de geração ativa visando reassumir um outro estado de operação normal. Caso isto não seja possível, combina-se o remanejamento com a utilização da inércia térmica acima citada, visando obter uma condição temporária de operação em emergência. Como medida mais drástica, se necessário, realiza-se o corte nas demandas.

Nessas condições, entende-se que a economia de operação passa a ser um objetivo secundário, visto que, apenas

para citar um exemplo, o remanejamento de geração implica em aumento dos custos de operação.

A idéia de remanejamento de geração de potência ativa, utilizando-se as folgas de geração, antes de qualquer outra providência com relação a linhas de transmissão é uma das sugestões para trabalhos futuros apresentados na referência [4].

Dentro de uma perspectiva de planejamento do sistema de transmissão simulou-se um aumento na demanda global do sistema e estudou-se uma forma de realizar a alocação de geração complementar para satisfazer a este incremento na demanda, utilizando-se da mesma rede de transmissão. Para os casos em que não há capacidade de transmissão suficiente e que, conseqüentemente, ocorrem saturações em linhas de transmissão, procurou-se desenvolver uma maneira de combinar a alocação de geração ativa suplementar com uma forma de minimização da saturação total das linhas.

## O MODELO DO SISTEMA DE POTÊNCIA

Os problemas apresentados na introdução deste capítulo decidiu-se formulá-los como problemas de programação linear. Para isto o sistema de potência foi modelado através de equações de fluxo de carga linearizado (FCDC). Este fluxo de carga [4] apresenta erro típico para os fluxos nas linhas de 5%, quando comparado com o fluxo de carga exato. Este erro aumenta com o ângulo da linha e como restrições de estabilidade e limite térmico determinam que o sistema opere com ângulos de linhas menores que 30°, segue-se que o erro máximo é da ordem de 10%. Nessas condições a precisão do FCDC é muito boa. Além disso resolve-se apenas um sistema algébrico linear enquanto que, para o fluxo de carga exato, o sistema algébrico, além de não linear, deve ser resolvido por métodos iterativos.

## O FLUXO DE CARGA LINEARIZADO [4]

Seja um sistema de potência com  $NL$  linhas e  $N + 1$  barras. A cada barra  $K$  do sistema associam-se as grandezas  $\theta_k$  (

(ângulo da barra K) e  $P_k$  (injeção de potência ativa na barra K). A cada linha  $j$  associam-se:  $\gamma_j$  (capacidade da linha),  $\psi_j$  (ângulo da linha) e  $F_j$  (fluxo de potência ativa).

Seja K uma barra com tensão  $V_k \angle \theta_k$  conectada a  $n_l$  outras barras de tensões  $V_l \angle \theta_l$  e  $Z = \rho_{kl} \exp\left\{j\left(\frac{\pi}{2} - \delta_{kl}\right)\right\}$  a impedância da linha de extremidades K e l. A injeção de potência ativa nesta barra pode ser dada por

$$P_k(\theta, v) = \sum_{l=1}^{n_l} \left\{ \frac{V_k V_l}{\rho_{kl}} \sin(\theta_k - \theta_l - \delta_{kl}) + \frac{V_k^2}{\rho_{kl}} \sin \delta_{kl} \right\} \quad (1.1)$$

Admitindo-se as hipóteses

- todas as barras são de tensão controlada
- a reatância  $X_{kl}$  é muito maior que a resistência do ramo Kl
- os ângulos de linhas  $(\theta_k - \theta_l)$  são pequenos
- o perfil de tensões é uniforme

a linearização da expressão (1.1) pode ser feita, chegando-se à expressão

$$P_k(\theta) \cong \sum_{l=1}^{n_l} \frac{V_{kl}^2}{X_{kl}} (\theta_k - \theta_l) \quad (1.2)$$

em que  $V_{kl}$  é a tensão de operação da linha que liga os nós K e l.

Definindo-se os vetores  $\underline{P}, \underline{\theta}, \underline{F}$  e  $\underline{\psi}$ , os dois primeiros de dimensão N e os dois últimos de dimensão M, e a matriz C MxN de incidência de ramos em nó, em relação ao grafo que representa o sistema de potência em questão, pode-se escrever as expressões

$$\underline{P} = C \underline{\theta} \quad \text{e} \quad \underline{F} = \text{diag } \gamma \underline{\psi} \quad (1.3)$$

em que  $\text{diag } \gamma$  é uma matriz  $M \times M$  onde cada elemento da diagonal principal de índice  $(j, j)$  vale  $\gamma_j$ , os demais termos são nulos.

É fácil ver que  $\underline{P} = C^T \underline{F}$  de onde, considerando-se as equações (1.3), vem

$$\underline{P} = C^T \text{diag } \gamma C \underline{\theta} = Q \underline{\theta}$$

em que  $Q$  é a matriz capacidade do sistema de transmissão, uma matriz  $N \times N$  que pode ser obtida através do mesmo algoritmo de formação da matriz  $Y_{\text{BUS}}$

Obtida a matriz calculam-se os ângulos  $\underline{\theta}$  por

$$\underline{\theta} = \left[ C^T \text{diag } \gamma C \right]^{-1} \underline{P} = B \underline{P}$$

Das relações (1.3), finalmente, vem

$$\underline{F} = \text{diag } \gamma C B \underline{P} \quad (1.4)$$

ou definindo-se  $M = \text{diag } \gamma C B$

$$\underline{F} = M \underline{P} \quad (1.5)$$

## A FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Com relação ao problema de remanejamento de geração, na equação (1.5) o vetor de injeções de potência ativa pode ser decomposto em um vetor  $\underline{P}_f$ , das injeções de potência ativa antes da ocorrência de uma contingência, e em um  $\underline{P}_v$ , das folgas de geração disponíveis em cada barra. Com isto, da equação (1.5), vem

$$\underline{F} = M \underline{P} = M \underline{P}_f + M \underline{P}_v$$

chamando  $\underline{F}_f = -M \underline{P}_f$ , um valor constante, e especificando limites  $\underline{F}^{\min}$ ,  $\underline{F}^{\max}$  para as linhas de transmissão e  $\underline{P}_v^{\min}$ ,  $\underline{P}_v^{\max}$  para as gerações de potência ativa em torno do valor de geração antes da contingência, o problema de remanejamento de geração pode ser colocado sob a forma

$$M^J \underline{P}_{-vJ} - \underline{F} = \underline{F}_f$$

$$\underline{F}^{\min} \leq \underline{F} \leq \underline{F}^{\max} \quad (1.6)$$

$$\underline{P}_{-vJ} \leq \underline{P}_{-vJ} \leq \underline{P}_{-vJ}^{\max}$$

$$\underline{E} \cdot \underline{P}_{-vJ} = T$$

em que  $\underline{E}$  é um vetor linha com todos os seus elementos unitários,  $T$  o valor total da geração  $\underline{P}_v$  que fecha o balanço de potência e o índice  $J$  denota a partição do vetor  $\underline{P}_v$  com elementos não nulos, sendo, portanto  $\underline{P}_{-vJ}$  um vetor que tem, no máximo tantas componentes quantas são as barras de geração.  $M^J$  corresponde à partição correspondente na matriz  $M$ .

Entendendo-se  $\underline{P}_v$  como o vetor de geração complementar a ser alocada nas barras, e  $T$  o incremento na demanda a ser satisfeita por essa geração, as equações (1.6) aplicam-se aos aspectos de planejamento que interessa considerar.

O problema (1.6) corresponde à fase inicial de um problema de programação linear com variáveis limitadas inferior e superiormente e é discutido no capítulo III.

Na formulação do problema que consiste em minimizar a saturação da capacidade de transmissão, a cada linha  $j$  é associado um índice  $S_j$  de saturação sempre que o fluxo  $F_j$  nesta linha ultrapasse, num sentido ou em outro, o valor do fluxo máximo especificado. Define-se portanto a saturação  $S_j$  por

$$S_j = \begin{cases} -F_j - F_j^{\min} & ; F_j < F_j^{\min} \\ 0 & ; F_j^{\min} \leq F_j \leq F_j^{\max} \\ F_j - F_j^{\max} & ; F_j > F_j^{\max} \end{cases}$$

Formula-se, então, o problema

$$\text{minimizar } \phi_1 = \sum_{j=1}^{NL} \max \left\{ -F_j - F_j^{\min} ; 0 ; F_j - F_j^{\max} \right\}$$

sujeito a  $M^J \underline{P}_{-vJ} - \underline{F} = \underline{F}_f$

$$\underline{P}_{-vJ}^{\min} \leq \underline{P}_{-vJ} \leq \underline{P}_{-vJ}^{\max} \quad (1.7)$$

$$\underline{E} \underline{P}_{-vJ} = \underline{T}$$

em que a função objetivo  $\phi_1$  é linear por partes.

Trata-se de um problema de programação linear por partes nas variáveis  $\underline{F}$  e  $\underline{P}_{-vJ}$  e que está discutido no capítulo II.

Para inicializar este último problema uma solução pode ser obtida através do método descrito pelas equações (1.6).

Quanto ao problema de load shedding, o vetor  $\underline{P}$  na relação (1.5) pode ser escrito sob a forma

$$\underline{P} = \underline{G} - \underline{D}^0$$

$\underline{G}$ : vetor de geração de potência ativa

$\underline{D}^0$ : vetor de demandas constantes

sendo  $DT^0$  a demanda total, se o problema

$$\begin{aligned} M^J \underline{G}_J - \underline{F} &= M \underline{D}^0 \\ \underline{F}^{\min} &\leq \underline{F} \leq \underline{F}^{\max} \\ \underline{G}_J^{\min} &\leq \underline{G}_J \leq \underline{G}_J^{\max} \\ \underline{E} \underline{G}_J &= DT^0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

tiver solução não é necessário cortar demanda caso contrário será necessário passar de  $\underline{D}^0$  a  $\underline{D}^0 - \underline{D}$ ,  $D_i$  uma variável que indica que parcela da demanda  $D_i^0$  será cortada na barra  $i$ . De (1.5) vem

$$\underline{F} = M \left\{ \underline{G} - (\underline{D}^0 - \underline{D}) \right\}$$

e o problema de load shedding fica

minimizar  $\phi_2 = \underline{d} \underline{D}$

sujeito a  $M(\underline{G} + \underline{D}) - \underline{F} = M \underline{D}^0$

$\underline{F}^{\min} \leq \underline{F} \leq \underline{F}^{\max}$

$\underline{G}^{\min} \leq \underline{G} \leq \underline{G}^{\max}$  (1.9)

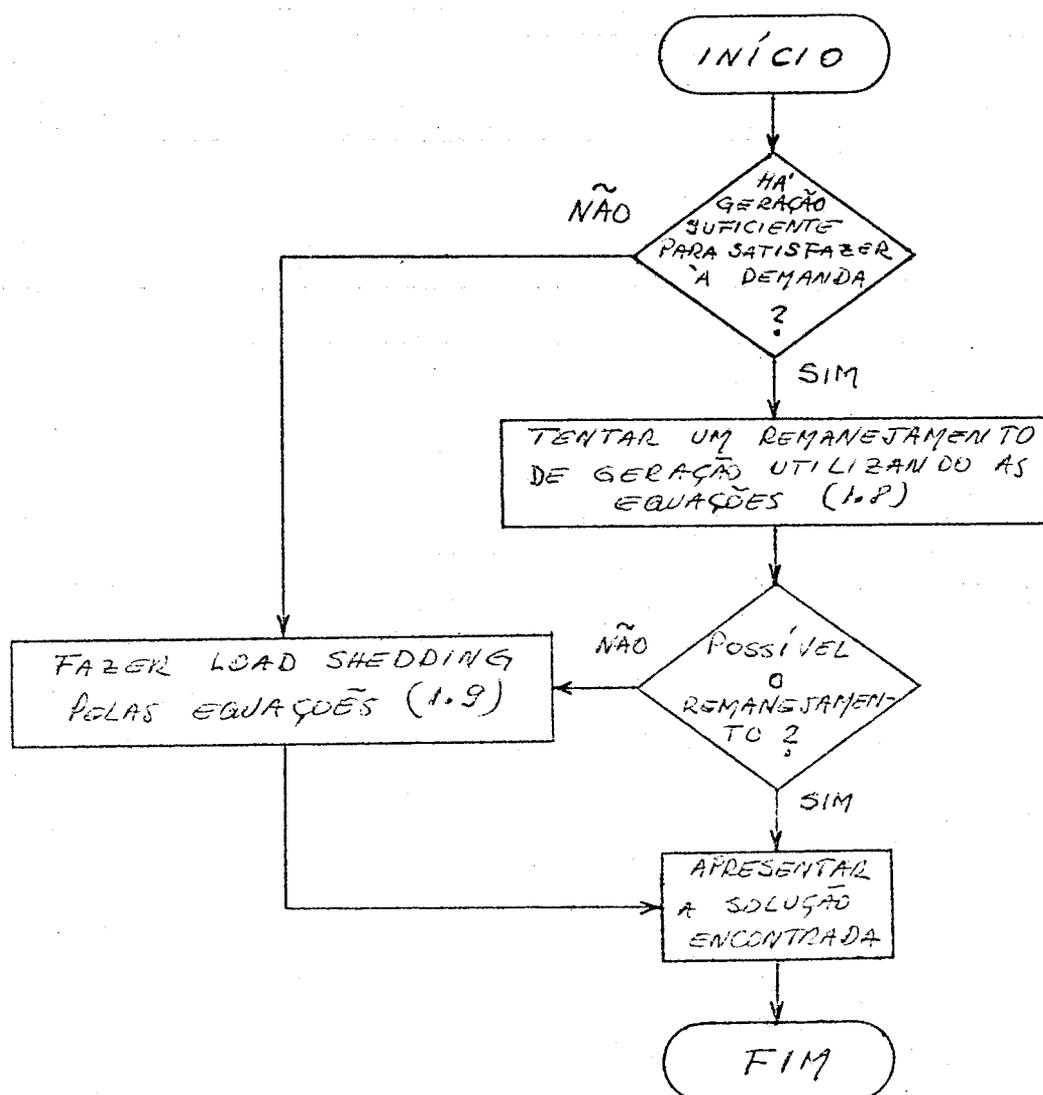
$0 \leq \underline{D} \leq \underline{D}^0$

$\underline{E}(\underline{G} + \underline{D}) = \underline{D}T^0$

em que  $\underline{d}$  é um vetor de ponderação da importância de cada carga.

Trata-se de um problema de programação linear nas variáveis  $\underline{F}$ ,  $\underline{G}$  e  $\underline{D}$ . A função objetivo é linear e corresponde à maximização da demanda atendida.

Apresenta-se a seguir um diagrama de blocos para load shedding.



Trabalhando-se com um modelo linear para o sistema de potência outros problemas podem ser formulados como problemas de programação linear ou linear por partes. O próprio problema de load shedding pode ser formulado com uma função objetivo linear por partes. Neste caso uma combinação das equações (1.7) e (1.8) pode resolver o problema.

## CAPÍTULO II

### INTRODUÇÃO

Este capítulo compõe-se de duas partes em que são discutidos os problemas de programação linear por partes e o problema da solução básica que inicializa o primeiro problema.

#### PARTE I

- A programação linear por partes.
- Uma formulação particular do problema.
- Análise do problema linear por partes na sua formulação particular.
- O novo programa de base.
- Conclusões.

#### PARTE II

- O programa de base factível inicial

## PARTE I

### A PROGRAMAÇÃO LINEAR POR PARTES

Entende-se por programação linear por partes <sup>[1]</sup> ao conjunto de métodos de obtenção do ótimo de uma função linear por partes, convexa ou côncava, conforme a procura seja de um mínimo ou de um máximo, e definida em um poliedro convexo.

#### Definição

Função linear por partes das variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  componentes do vetor  $\underline{x}$  é a função  $F(\underline{x})$  que pode ser colocada sob a forma

$$F(\underline{x}) = \max_{1 \leq i \leq s} \{ L_i(\underline{x}) \} \quad (2.1)$$

em que

$L_i(\underline{x}) = \underline{D}_i \underline{x} - b_i$  são funções lineares das variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

$\underline{D}_i$  é a  $i$ -ésima linha da matriz  $D$  de dimensão  $s \times n$

$b_i$  é o  $i$ -ésimo elemento do vetor  $\underline{b}$  de dimensão  $s$

No apêndice P1 demonstra-se que a função  $F(\underline{x})$  é convexa.

#### Definição

Ao problema que consiste em otimizar a função linear por partes  $F(\underline{x})$ , sob as condições

$$g_i(\underline{x}) \leq 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.2)$$

em que  $g_i(\underline{x})$  são funções lineares por partes, denomina-se problema geral da programação linear por partes.

Do sistema de equações (2.2) retirando-se as igualdades lineares ou outras restrições de tipo especial tais como, não negatividade de variáveis, restrições bilaterais de certas variáveis, etc., pode-se escrever o problema geral da programação linear sob a forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } F(\underline{x}) \\ &\text{sujeito a } G(\underline{x}) \leq \underline{0} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$A \underline{x} - \underline{B} = \underline{0}$$

$$\underline{x} \in R$$

$A$ , matriz de dimensão  $(m-m_1) \times n$

$\underline{B}$ , vetor de dimensão  $(m-m_1)$

$R$ , um certo poliedro convexo.

em que o sistema (2.2) foi colocado sob a forma de desigualdade vetorial  $G(\underline{x}) \leq \underline{0}$  com  $G(\underline{x}) = \{g_1(\underline{x}), \dots, g_{m_1}(\underline{x})\}$  uma função vetorial de argumento vetorial  $\underline{x}$ .

O vetor  $\underline{x}$  satisfazendo as restrições do problema formulado em (2.3) denomina-se programa do problema linear por partes.

A programação linear por partes constitui-se em um ramo intermediário entre a programação linear e a programação convexa. O método de programação por partes a ser estudado neste trabalho é uma generalização natural dos métodos de programação linear.

Objetivo deste capítulo é estudar um problema particularmente importante cujo fator de qualidade do programa deste problema é uma soma de funções lineares por partes, cada uma delas dependendo de uma única variável.

### UMA FORMULAÇÃO PARTICULAR DO PROBLEMA

De acordo com a conveniência de cada aplicação o problema linear por partes pode ser colocado sob formulações diferentes<sup>[1]</sup>. Para o tipo de problema que interessa abordar analisaremos a formulação.

$$\text{minimizar } F(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j)$$

$$\text{sujeito a } \underline{A}_i \underline{x} - B_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta}$$

em que  $f_j(x_j)$ , função linear por partes da variável  $x_j$ , é definida por

$$f_j(x_j) = \begin{cases} c_j x_j & \alpha_j \leq x_j \leq d_{1j} \\ (c_j + \sigma_{1j})(x_j - d_{1j}) + f_j(d_{1j}) & d_{1j} \leq x_j \leq d_{2j} \\ \dots \\ (c_j + \sum_{i=1}^{l_j} \sigma_{ij})(x_j - d_{l_j j}) + f_j(d_{l_j j}) & d_{l_j j} \leq x_j \leq \beta_j \end{cases}$$

onde os pontos  $d_{1j}, d_{2j}, \dots, d_{l_j j}$  em que se subdivide o intervalo  $[\alpha_j, \beta_j]$  da variável  $x_j$  (pontos críticos desta variável) são tais que

$$d_{0j} = \alpha_j < d_{1j} < \dots < d_{l_j j} < \beta_j = d_{l_j+1, j} \text{ e}$$

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - c_{i-1, j} \quad i = 1, 2, \dots, l_j$$

$$\sigma_{ij} > 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

A função  $f_j(x_j)$ , para todo  $j$ , é contínua sobre o intervalo  $[\alpha_j, \beta_j]$  e linear sobre qualquer um dos segmentos  $[d_{k_j j}, d_{k_j+1, j}]$  sendo que  $c_{k_j j}$  seu coeficiente angular neste segmento e  $k_j$  o número do ponto crítico da variável  $x_j$ .

Definindo

$$c_{0j} = c_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

pode-se reescrever o problema em sua forma particular como

$$\text{minimizar } F(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j)$$

$$\text{sujeito a } \underline{A}_i \underline{x} - B_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta}$$

em que

(2.4)

$$f_j(x_j) = \begin{cases} c_{0j} x_j & ; \quad \alpha_j \leq x_j \leq d_{1j} \\ c_{1j}(x_j - d_{1j}) + f_j(d_{1j}) & ; \quad d_{1j} \leq x_j \leq d_{2j} \\ \dots & \dots \\ c_{l_j j}(x_j - d_{l_j j}) + f_j(d_{l_j j}) & ; \quad d_{l_j j} \leq x_j \leq \beta_j \end{cases}$$

A soma de funções lineares por partes é uma função linear por partes. Entendeu-se dispensável esta prova.

### ANÁLISE DO PROBLEMA LINEAR POR PARTES NA SUA FORMULAÇÃO PARTICULAR

Seja  $\underline{x}$  um certo programa do problema linear por partes (2.4). Se  $\underline{x}$  satisfaz às restrições deste problema então  $\underline{x}$  é um programa factível (solução factível).

Sejam I e J conjuntos de m e n-m elementos, respectivamente, definidos por

$$I \oplus J = \{ 1, 2, \dots, n \} \quad , \quad n > m$$

Se a matriz  $A^I$  é regular o programa factível  $\underline{x}$  tal que

$$x_j = \bar{x}_j = d_{k_j j} \quad ; \quad j \in J$$

$$K_j = 0, 1, \dots, l_j, l_j + 1$$

$$x_i = \bar{x}_i \neq d_{k_i i} \quad ; \quad i \in I$$

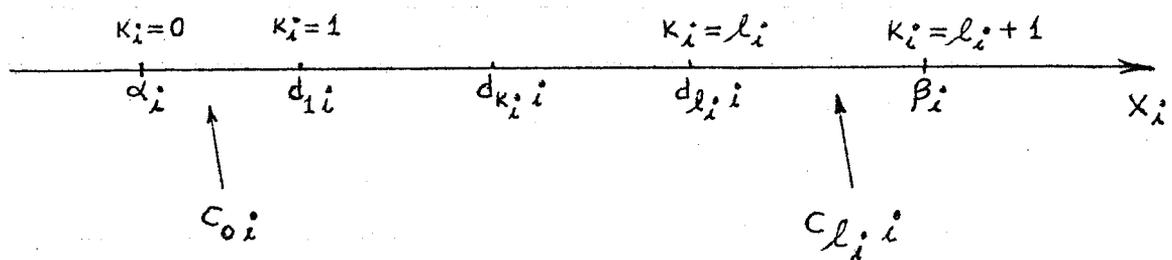
$$K_i = 0, 1, \dots, l_i, l_i + 1$$

dir-se-ã programa de base factível. O conjunto das  $m$  vetores  $A^i$ ,  $i \in I$  que são coluna da matriz  $A$  ã uma base do programa de base factível  $\underline{x}$ . Se algum  $\tilde{x}_i = d_{k_i, i}$ ,  $i \in I$  o programa de base ã dito degenerado. A fim de evitar o envolvimento com la boriosos pormenores matemãticos de pouca significação fõsica assumir-se-ã que todo programa de base do problema (2.4) ã nã degenerado.

O mãtodo de solução do problema (2.4) presupõee a existãncia de um programa de base factível inicial a partir do qual passa-se a outro programa do mesmo tipo para o qual a função objetivo  $F(\underline{x})$  resulta menor.

Se o problema (2.4) tiver alguma solução factível então <sup>2</sup> te rã alguma solução factível bãsica a partir da qual poderã evo luir atã atingir a solução que minimizar a função objetivo. Es ta solução factível bãsica inicial pode ser obtida atravẽs de programação linear ou atravẽs de algum outro mãtodo.

Conhecido o programa de base factível inicial, a cada elemento  $i$  do conjunto  $I$  associa-se um nũmero inteiro  $k_i$  tal que  $d_{k_i, i} < \tilde{x}_i < d_{k_i+1, i}$  e um certo  $c_{k_i, i}$  , coeficiente angular da função  $f_i(x_i)$  neste segmento.



Então ao conjunto  $I$  são associados os vetores  $\underline{k}^I$  e  $\underline{c}^I$  com e- lementos como explicado acima.

Ao conjunto  $J$  estã associado, analogamente, um vetor  $\underline{c}^I$ . A di reita de  $\beta_j$  e ã esquerda de  $\alpha_j$ , para toda variãvel  $x_j, j \in J$  associa-se, respectivamente, os coeficientes angulares  $c_{-1, j} = -\infty$  e  $c_{l_j + 1, j} = +\infty$

No programa de base factível  $\underline{x}$  as componentes  $x_j$  que in-

tegram a base são variáveis básicas e as demais  $x_j$  variáveis não básicas ou secundárias. A partir deste ponto supor-se-á que a base do programa  $\underline{x}$  de base factível se compõe dos  $m$  primeiros vetores  $A^i$  da matriz  $A$ . A particularização não compromete a generalidade da análise mas simplifica muito a formulação.

A restrição global em (2.4) pode ser escrita sob a forma

$$A^I \underline{x}_I + A^J \underline{x}_J = \underline{B} \quad (2.5)$$

onde o vetor  $\underline{x}_I$ , base do programa  $\underline{x}$  de base factível, tem componentes que correspondem às  $m$  primeiras colunas da matriz  $A$  e o vetor  $\underline{x}_J$ , cujas componentes são variáveis não básicas, corresponde às  $n-m$  restantes colunas de  $A$ .

Seja  $\underline{\lambda}$  um vetor linha  $m$  dimensional de componentes  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Prémultiplicando-se (2.5) por  $\underline{\lambda}$  vem

$$\underline{\lambda} A^I \underline{x}_I + \underline{\lambda} A^J \underline{x}_J = \underline{\lambda} \underline{B} \quad (2.6)$$

Por outro lado pode-se escrever

$$\sum_{j \in I} f_j(x_j) + \sum_{j \in J} f_j(x_j) = F(\underline{x}) \quad (2.7)$$

No intervalo  $d_{k_j, j} \leq x_j \leq d_{k_j+1, j}$  a função  $f_j(x_j)$

é dada por

$$f_j(x_j) = c_{k_j, j} x_j + f_j(d_{k_j, j}) - c_{k_j, j} d_{k_j, j} \quad (2.8)$$

Subtraindo-se da equação (2.7) a equação (2.6) vem

$$\sum_{j \in I} f_j(x_j) - \underline{\lambda} A^I \underline{x}_I + \sum_{j \in J} f_j(x_j) - \underline{\lambda} A^J \underline{x}_J = F(\underline{x}) - \underline{\lambda} \underline{B} \quad (2.9)$$

considerando-se (2.8), (2.9) se escreve sob a forma,

$$\begin{aligned} & (\underline{c}_I - \underline{\lambda} A^I) \underline{x}_I + \sum_{j \in I} \{f_j(d_{k_j, j}) - c_{k_j, j} d_{k_j, j}\} + \\ & + \sum_{j \in J} \{f_j(x_j) - \underline{\lambda} A^J \underline{x}_j\} = F(\underline{x}) - \underline{\lambda} \underline{B} \end{aligned} \quad (2.10)$$

em que o vetor  $\underline{c}_I$  é também uma função do vetor  $\underline{k}^I$ .

A idéia é obter  $\underline{\lambda}$  de modo a anular o coeficiente de  $\underline{x}_I$  nesta última equação. Vale dizer,

$$\underline{c}_I - \underline{\lambda} A^I = 0 \longrightarrow \underline{\lambda} = \underline{c}_I [A^I]^{-1} \quad (2.11)$$

Substituindo-se este valor de  $\underline{\lambda}$  encontrado na equação (2.10) vem:

$$F(\underline{x}) - \underline{\lambda} \underline{B} - \sum_{j \in I} \{f_j(d_{k_{jj}}) - c_{k_{jj}} d_{k_{jj}}\} = \quad (2.12)$$

$$= \sum_{j=m+1}^n \left\{ f_j(x_j) - \underline{c}_I [A^I]^{-1} A^j x_j \right\}$$

Definindo-se

$$z_j = \underline{c}_I [A^I]^{-1} A^j = \underline{\lambda} A^j; j \geq m+1 \quad (2.13)$$

Designando-se

$$CTE = - \sum_{j \in I} \{f_j(d_{k_{jj}}) - c_{k_{jj}} d_{k_{jj}}\} - \underline{\lambda} \underline{B}$$

a parte do primeiro membro da equação (2.12) esta última equação pode ser reescrita sob a forma

$$F(\underline{x}) + CTE = \sum_{j=m+1}^n f_j(x_j) - z_j x_j \quad (2.14)$$

#### Critério de Otimalidade

Antes de passar de uma solução factível básica para outra é necessário um critério de otimalidade, isto é, é necessário saber se a função objetivo pode ser melhorada. Quando a função objetivo não mais pode ser reduzida, a solução em questão é ótima.

Sendo não básicas, as variáveis  $x_j$ ,  $j \geq m+1$  coincidem com alguns de seus pontos críticos. Assumindo-se que uma dessas variáveis, a variável  $x_l$  é tal que  $x_l < \beta_l$ , isto é,

$$x_l = d_{k_l l} ; \quad k_l \neq l_l + 1 \quad \text{faz-se}$$

$$x_l = d_{k_l l} + \varepsilon ; \quad \varepsilon > 0$$

$$x_j = d_{k_j j} , \quad j \geq m+1 ; \quad j \neq l$$

Se a solução que se tem antes do acréscimo na variável  $x_l$  for ótima então, pela equação (2.14) tem-se

$$f_l(d_{k_l l}) - z_l d_{k_l l} \leq f_l(x_l) - z_l x_l \quad (2.15)$$

de onde resulta

$$f_l(d_{k_l l} + \varepsilon) - f_l(d_{k_l l}) \geq z_l \varepsilon$$

(2.16)

$$f_l^{(+)}(d_{k_l l}) \geq z_l \quad \text{ou} \quad c_{k_l l} \geq z_l$$

Por raciocínio análogo, para

$x_l > \alpha_l$ , isto é,  $x_l = d_{k_l l}$ ,  $k_l \neq 0$  fazendo-se

$$x_l = d_{k_l l} - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad \text{e} \quad x_j = d_{k_j j}, \quad j \geq m+1, \quad j \neq l$$

tendo em vista a equação (2.15) vem

$$f_l(d_{k_l l}) - f_l(d_{k_l l} - \varepsilon) \leq z_l \varepsilon$$

(2.17)

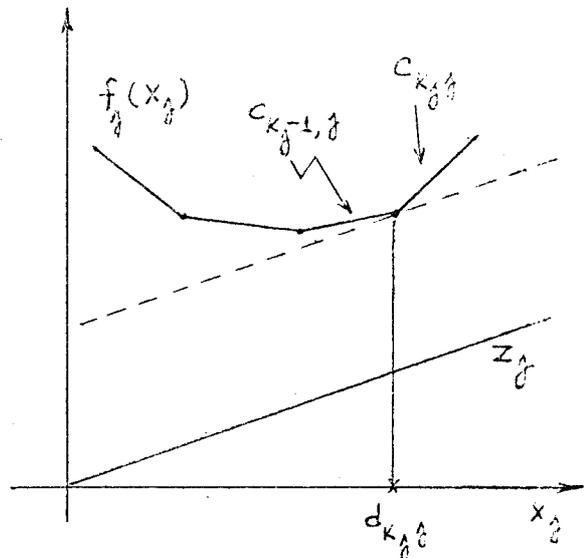
$$f_l^{(-)}(d_{k_l l}) \leq z_l \quad \text{ou} \quad c_{k_l - 1, l} \leq z_l$$

Das equações (2.16) e (2.17), em que  $f^{(+)}$  e  $f^{(-)}$  representam, respectivamente, as derivadas da função linear por partes à direita e à esquerda do ponto  $d_{k_l l}$ , vem

$$c_{k_j - 1, j} \leq z_j \leq c_{k_j j} ; \quad j \geq m+1 \quad (2.18)$$

Esta condição de otimalidade está mostrada na figura 1, ao lado

(fig.1)



Segue-se que para verificar a otimalidade do programa  $\underline{x}$  basta calcular os números  $z_j$ ,  $j \geq m+1$  e verificar se satisfazem ao critério (2.18). Satisfeitas t $\bar{o}$ das as desigualdades (2.18) a solu $\tilde{c}$ o $\tilde{a}$ o  $\underline{x}$   $\bar{e}$   $\bar{o}$ tima e o problema est $\bar{a}$  resolvido. Caso con\bar{a}rio entre os n $\bar{u}$ meros

$$\bar{\Delta}_{k_j, j} = c_{k_j, j} - z_j, \quad k_j \leq l_j, \quad j \geq m+1 \quad (2.19)$$

$$\bar{\bar{\Delta}}_{k_j, j} = z_j - c_{k_j-1, j}, \quad k_j \geq 1, \quad j \geq m+1$$

alguns s $\bar{a}$ o negativos

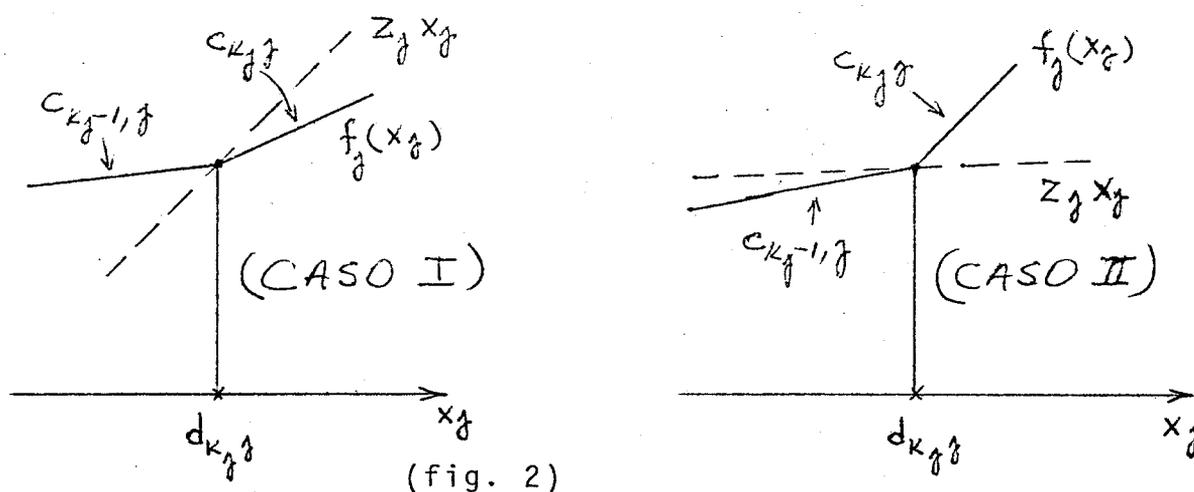
Escolhe-se o menor entre os  $\bar{\Delta}$  e  $\bar{\bar{\Delta}}$  designando-se o seu valor por  $\Delta$  e o  $\bar{i}$ ndice  $j$  da vari $\bar{a}$ vel  $x_j$  correspondente por  $r$ . A vari $\bar{a}$ vel  $x_r$   $\bar{e}$  aquela cuja entrada na base ser $\bar{a}$  investigada.

As possibilidades de n $\bar{a}$ o otimalidade s $\bar{a}$ o

CASO I - O segundo membro da  $r$ - $\bar{e}$ sima das desigualdades (2.18) deixa de se verificar.  $\bar{E}$  um caso de  $\bar{\Delta}_{k_j, j} < 0$  e a vari $\bar{a}$ vel n $\bar{a}$ o b $\bar{a}$ sica  $x_r$  deve crescer para diminuir o valor da fun $\tilde{c}$ o $\tilde{a}$ o objetivo.

CASO II- O primeiro membro da  $r$ - $\bar{e}$ sima das desigualdades (2.18) deixa de se verificar. Trata-se de um caso de  $\bar{\bar{\Delta}}_{k_j, j} < 0$  em que a vari $\bar{a}$ vel n $\bar{a}$ o b $\bar{a}$ sica  $x_r$  deve diminuir para que diminua o valor da fun $\tilde{c}$ o $\tilde{a}$ o objetivo.

Estes dois casos podem ser visualizados através das figuras abaixo:



De fato, para o primeiro caso, de acordo com a equação (2.14), a variação na função objetivo é

$$\Delta F = f_j(d_{k_j j} + \varepsilon) - z_j(d_{k_j j} + \varepsilon) - f_j(d_{k_j j}) - z_j d_{k_j j}$$

$$\Delta F = \varepsilon(c_{k_j j} - z_j), \quad \varepsilon > 0$$

como  $z_j > c_{k_j j}$  então  $\Delta F < 0$  logo a função objetivo pode ser melhorada aumentando-se o valor da variável  $x_j$ .

Para o outro caso,

$$\Delta F = f_j(d_{k_j j} - \varepsilon) - z_j(d_{k_j j} - \varepsilon) - f_j(d_{k_j j}) + z_j d_{k_j j}$$

$$\Delta F = -\varepsilon c_{k_j-1, j} + z_j \varepsilon = \varepsilon(z_j - c_{k_j-1, j})$$

como  $z_j < c_{k_j-1, j}$  então a função objetivo pode ser melhorada diminuindo-se o valor de  $x_j$ .

Das equações (2.19) vem que como

$$\bar{\Delta}_{k_j j} + \bar{\bar{\Delta}}_{k_j j} = c_{k_j j} - c_{k_j-1, j} = \sigma_{k_j j}, \quad \sigma_{k_j j} > 0$$

segue-se que não pode ocorrer que  $\bar{\Delta}_{k_j j}$  e  $\bar{\bar{\Delta}}_{k_j j}$  sejam não positivos simultaneamente.

O vetor  $\underline{A}^r$ , correspondente à variável não básica cuja entrada na base quer estudar, pode ser decomposto com relação à base do programa  $\underline{x}$  através da relação

$$\underline{A}^r = A^I \underline{x}^r$$

onde  $\underline{x}^r$  é um vetor cujos componentes  $x_j^r$ ,  $i \in I$ , são os coeficientes de decomposição do vetor  $\underline{A}^r$  em relação à base do programa.

### O NOVO PROGRAMA DE BASE

A partir do programa  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$  deseja-se obter um outro programa  $\underline{x}' = \underline{x}(\theta)$  cujas componentes  $x_j(\theta)$  são dadas por

$$x_j(\theta) = \begin{cases} x_j \mp \theta x_j^r & ; j = 1, 2, \dots, m \\ x_j \pm \theta & j = r \\ x_j & j \geq m+1; j \neq r \end{cases} \quad (2.20)$$

Este novo programa satisfaz às condições  $A \underline{x} = \underline{B}$  para qualquer valor de  $\theta$ ; para  $\theta$  suficientemente pequeno as componentes do novo programa satisfazem  $\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Na equação (2.20) os sinais superiores e inferiores correspondem, respectivamente aos casos I e II analisados.

O primeiro passo para a determinação de um novo programa consiste em obter o limite superior  $\theta'$  dos valores de  $\theta$  positivos. O objetivo final, no entanto, é encontrar o valor  $\theta = \theta_0$  que colocado nas equações (2.20) produz o novo programa.

#### Determinação de $\theta'$

Sejam  $I'$  e  $I''$  conjuntos de índices  $j \in I$  tais que  $x_j^r > 0$  e  $x_j^r < 0$ , respectivamente. Para o Caso I são calculados os números

$$\theta_j = \frac{x_j - \alpha_j(\beta_j)}{x_j^r} \quad (2.21)$$

em que  $\alpha_j(\beta_j)$  significa que se deve utilizar na expressão o limite inferior  $\alpha_j$ , se  $j \in I'$  ou o limite superior  $\beta_j$ , se  $j \in I''$ .

Para o segundo caso, são calculados

$$\theta_j = \frac{\beta_j (\alpha_j) - x_j}{x_j^r} \quad (2.22)$$

em que são usados os limites  $\beta_j$  se  $j \in I'$  e  $\alpha_j$  se  $j \in I''$ . Em ambos os casos são calculados também os valores de  $\theta_j, j=r$  e para que possam ser utilizadas as mesmas relações (2.21) e (2.22) também para estes casos define-se  $x_r^r = -1$ .

O limite superior  $\theta'$  dos valores positivos de  $\theta$  é, para o Caso I ou Caso II, o menor  $\theta_j, j \in I$  mais  $j=r$ , que ocorrer.

Isto decorre diretamente das relações (2.20).

Aumentando-se  $\theta$  desde  $\theta = 0$  até o seu limite superior  $\theta'$ , as componentes  $x_j$  do programa  $\underline{x}$ , exceto aquelas componentes  $x_j$  com  $j \geq m + 1, j \neq r$  podem passar por seus valores críticos não extremos, sendo necessário determinar todos os valores de  $\theta$  correspondentes a esses valores críticos.

#### Determinação dos $\theta_{\gamma_j}$

A cada variável  $x_j$  está associado um certo número  $l_j$  de pontos críticos não extremos  $d_{\gamma_j}, j = 1, 2, \dots, l_j$ . Tendo em vista as relações (2.20), trata-se de encontrar, para toda componente básica  $x_j$ , mais para a componente  $x_r$ , do programa  $\underline{x}$  todos os pontos  $\theta_j$  dados por

$$\theta_{\gamma_j} = \begin{cases} \frac{x_j - d_{\gamma_j}}{x_j^r} & \text{(Caso I)} \\ \frac{d_{\gamma_j} - x_j}{x_j^r} & \text{(Caso II)} \end{cases} \quad \begin{matrix} j = 1, 2, \dots, m, r \\ \gamma = 1, 2, \dots, l_j \end{matrix} \quad (2.23)$$

Em qualquer dos casos interessa considerar apenas os valores de  $\theta_{\gamma_j}$  que satisfazem  $0 \leq \theta_{\gamma_j} \leq \theta'$ . Obtidos os  $s$  possíveis valores  $\theta_{\gamma_j}$ , trata-se de obter a sequência.

$$\theta_{\gamma_1 \delta_1} \leq \theta_{\gamma_2 \delta_2} \leq \dots \leq \theta_{\gamma_s \delta_s}$$

a fim de sistematizar a procura do valor  $\theta_0$  de  $\theta$  a ser utilizado nas relações (2.20), de modo que os cálculos sã avanças enquanto a função objetivo puder ser reduzida.

### Comportamento da função objetivo

Estando  $\theta$  incluído no intervalo  $[0, \theta_{1,j}]$ , os argumentos da função  $F(\underline{x})$  variam dentro dos limites  $d_{k_j,j} \leq x_j(\theta) \leq d_{k_j+1,j}$ .

Também,  $f_j(x_j)$  é linear no segmento  $[d_{k_j,j}, d_{k_j+1,j}]$  onde seu coeficiente angular é  $C_{k_j,j}$ .

Das relações (2.20), para o Caso I, vem

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_I(\theta) \\ x_r(\theta) \\ \underline{x}_{J \setminus r}(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_I \\ x_r \\ \underline{x}_{J \setminus r} \end{bmatrix} - \theta \begin{bmatrix} \underline{x}^r \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$\underline{x}_{J \setminus r}$ , vetor de componentes  $x_j$ ,  $j \in J$ ,  $j \neq r$

Como interessa considerar a variação experimentada pela função objetivo  $F(\underline{x})$  quando da passagem de uma solução básica para outra em cujo processo as variáveis não básicas, a excessão da variável  $x_r$ , não variam, pode-se prescindir dos vetores  $\underline{x}_{J \setminus r}(\theta)$  e  $\underline{x}_{J \setminus r}$  e escrever as relações (2.24) sob a forma

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_I(\theta) \\ x_r(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_I \\ x_r \end{bmatrix} - \theta \begin{bmatrix} \underline{x}^r \\ -1 \end{bmatrix}$$

Prémultiplicando-se esta relação pelo vetor  $\underline{C}_I$  acrescido de mais uma componente  $C_{k_j,r}$  vem,

$$\Delta F = F[\underline{x}(\theta)] - F(\underline{x}) = \theta \left\{ C_{k_j,r} - \underline{C}_I \underline{x}^r \right\}$$

sendo  $z_j = \underline{C}_I [A^I]^{-1} \underline{A}^j$ ,  $j \geq m+1$

então  $z_r = \underline{C}_I [A^I]^{-1} \underline{A}^r$

como  $\underline{A}^r = A^I \underline{x}^r$  segue-se que

$$z_r = \underline{c}_I \underline{x}^r, \text{ logo}$$

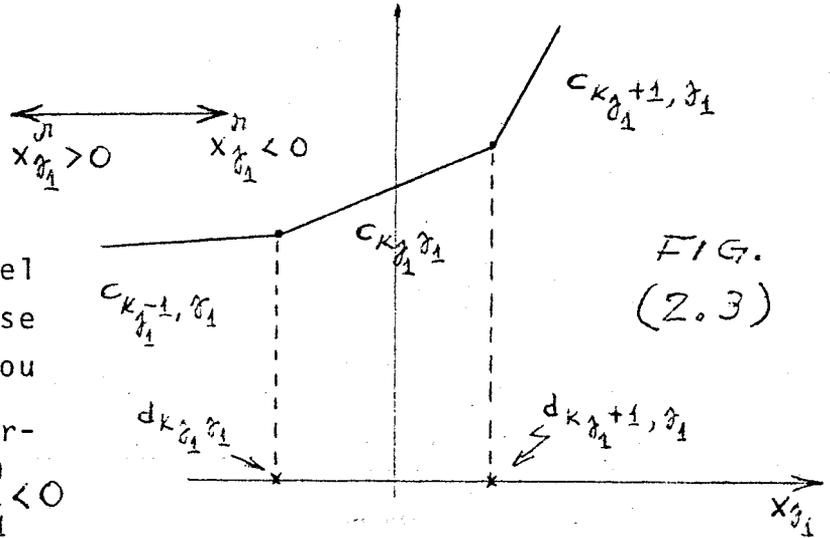
$$\Delta F = F[\underline{x}(\theta)] - F(\underline{x}) = \theta (c_{k_j}^r - z_{j_1}) = \theta \bar{\Delta}_{k_j, j_1}$$

Como  $\bar{\Delta}_{k_j, j_1}$  é negativo, e  $\theta$  sempre positivo, a função objetivo vai decrescer na passagem do programa  $\underline{x}$  para  $\underline{x}(\theta)$ .

Com relação ainda ao Caso I,

a medida que  $\theta$  vai aumentando desde  $\theta=0$  até

$\theta = \theta_{\delta_1 \delta_1}$  a variável básica  $x_{\delta_1}^j$  aproxima-se de  $d_{k_{\delta_1 \delta_1}^j}$  ou de  $d_{k_{\delta_1+1, \delta_1}^j}$ , conforme seja  $x_{\delta_1}^j > 0$  ou  $x_{\delta_1}^j < 0$



O parâmetro  $\theta$  deixando de variar em  $[0, \theta_{\delta_1 \delta_1}]$  para variar em  $[\theta_{\delta_2 \delta_2}, \theta_{\delta_2 \delta_2}]$ , nesta passagem, os argumentos das funções  $f_j$  situam-se dentro dos intervalos de linearidade dessas funções; os coeficientes angulares de todas as funções, menos da  $f_{j_1}$ , permanecem os mesmos. Como houve mudança de intervalo para a função  $f_{j_1}$ , seu coeficiente angular muda para  $c_{k_{j_1-1, j_1}^r}$  ou  $c_{k_{j_1+1, j_1}^r}$ , conforme seja  $x_{j_1}^r > 0$  ou  $x_{j_1}^r < 0$ . Então, observando-se a figura (2.3), percebe-se claramente que  $\gamma_1 = k_{j_1}$  para  $x_{j_1}^r$  positivo e  $\gamma_1 = k_{j_1} + 1$  para  $x_{j_1}^r$  negativo.

Sejam  $\underline{c}_{I \setminus j_1}$  e  $\underline{x} \setminus j_1$  respectivamente os vetores que são obtidos excluindo-se dos vetores  $\underline{c}_I$  e  $\underline{x}^r$  as respectivas componentes  $j_1$ . Essas componentes terão de ser tratadas em separado.

Para o intervalo  $[\theta_{\delta_1 \delta_1}, \theta_{\delta_2 \delta_2}]$  e para  $x_{j_1}^r > 0$ , ainda para o Caso I, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \Delta F = F[\underline{x}(\theta)] - F(\underline{x}) &= \left\{ F[\underline{x}(\theta_{\delta_1 \delta_1})] - F(\underline{x}) \right\} + \\ &+ \left\{ F[\underline{x}(\theta)] - F[\underline{x}(\theta_{\delta_1 \delta_1})] \right\} = \theta_{\delta_2 \delta_2} \bar{\Delta} + \\ &+ (\theta - \theta_{\delta_1 \delta_1}) \left\{ c_{k_j}^r - \underline{c}_{I \setminus j_1} \underline{x} \setminus j_1 - c_{k_{j_1-1, j_1}^r} x_{j_1}^r \right\} \end{aligned}$$

considerando-se que

$$\nabla_{k_{\gamma_1}, \gamma_1} = C_{k_{\gamma_1}, \gamma_1} - C_{k_{\gamma_1-1}, \gamma_1}$$

substituindo-se

$$C_{k_{\gamma_1-1}, \gamma_1}$$

na expressão

de  $\Delta F$  vem,

$$\Delta F = \theta_{\gamma_1, \gamma_1} \bar{\Delta} + (\theta - \theta_{\gamma_1, \gamma_1}) \left\{ C_{k_{\gamma_1}, \gamma_1} - C_{I \setminus \gamma_1} \frac{x \setminus \gamma_1}{x \setminus \gamma_1} - C_{k_{\gamma_1}, \gamma_1} x_{\gamma_1}^{\gamma_1} + \nabla_{k_{\gamma_1}, \gamma_1} x_{\gamma_1}^{\gamma_1} \right\} \quad (2.25)$$

$$\Delta F = \theta_{\gamma_1, \gamma_1} \bar{\Delta} + (\theta - \theta_{\gamma_1, \gamma_1}) (\bar{\Delta} + \nabla_{k_{\gamma_1}, \gamma_1} x_{\gamma_1}^{\gamma_1})$$

Para  $x_{\gamma_1}^{\gamma_1} < 0$  tem-se

$$\Delta F = \theta_{\gamma_1, \gamma_1} \bar{\Delta} + (\theta - \theta_{\gamma_1, \gamma_1}) \left\{ C_{k_{\gamma_1}, \gamma_1} - C_{I \setminus \gamma_1} \frac{x \setminus \gamma_1}{x \setminus \gamma_1} - C_{k_{\gamma_1+1}, \gamma_1} x_{\gamma_1}^{\gamma_1} \right\}$$

entretanto,

$$\nabla_{k_{\gamma_1+1}, \gamma_1} = C_{k_{\gamma_1+1}, \gamma_1} - C_{k_{\gamma_1}, \gamma_1}$$

Entrando com

$$C_{k_{\gamma_1+1}, \gamma_1}$$

desta última expressão na expressão de

$\Delta F$  vem,

$$\Delta F = \theta_{\gamma_1, \gamma_1} \bar{\Delta} + (\theta - \theta_{\gamma_1, \gamma_1}) \left\{ \bar{\Delta} - \nabla_{k_{\gamma_1+1}, \gamma_1} x_{\gamma_1}^{\gamma_1} \right\}$$

como

$x_{\gamma_1}^{\gamma_1} < 0$  pode-se escrever

$$\Delta F = \theta_{\gamma_1, \gamma_1} \bar{\Delta} + (\theta - \theta_{\gamma_1, \gamma_1}) \left\{ \bar{\Delta} + \nabla_{k_{\gamma_1+1}, \gamma_1} |x_{\gamma_1}^{\gamma_1}| \right\} \quad (2.26)$$

As equações (2.25) e (2.26) podem portanto ser colocadas sob a mesma forma.

Prosseguindo-se no mesmo raciocínio, para

$$\theta_{\gamma_t, \gamma_t} \leq \theta \leq \theta_{\gamma_{t-1}, \gamma_{t+1}}; \quad t = 1, 2, \dots, s-1$$

pode-se escrever

$$F[\underline{x}(e)] - F(\underline{x}) = \bar{\Delta} e + \sum_{i=1}^t \nabla_{k_{\gamma_i}, \gamma_i} |x_{\gamma_i}^{\gamma_i}| (\theta - \theta_{\gamma_i, \gamma_i}) \quad (2.27)$$

Para o Caso II pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} \underline{x}^I(\theta) \\ x_r(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}^I \\ x_r \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} \underline{x}^r \\ -1 \end{bmatrix}$$

de onde, de forma análoga ao que se fez anteriormente, vem

$$\Delta F = F[\underline{x}(\theta)] - F(\underline{x}) = \theta \left\{ c_I \underline{x}^n - c_{K_{j-1}, u} \right\} = \theta \bar{\Delta}_{K_{j-1}, u}$$

Verifica-se também, que para este caso, por raciocínio análogo, chegou-se à mesma relação (2.27) obtida para o caso anterior.

Do exposto conclue-se que, obtido  $\theta'$ , o novo programa  $\underline{x}(\theta)$  ainda não está determinado; apenas se sabe que o valor de  $\theta$  a ser utilizado nas relações (2.20) deve ser tal que obedeça  $0 \leq \theta \leq \theta'$ .

Do ponto de vista de factibilidade pode-se variar  $\theta$  até o seu limite superior  $\theta'$ ; do ponto de vista do comportamento da função objetivo, entretanto, percebe-se pela relação (2.27) que  $\theta$  deve variar desde  $\theta = 0$  até um certo valor a partir do qual a função objetivo deixa de decrescer. Importa, pois, calcular este valor de  $\theta$  que será chamado  $\theta = \theta_0$ .

#### Obtenção do parâmetro $\theta_0$

A partir da expressão (2.27) pode-se definir

$$\Delta_t = \Delta + \sum_{i=1}^t \sigma_i \sigma_i |x_i^r|$$

$t = 1, 2, \dots, s$

de onde pode-se perceber que para variações de  $\theta$  no intervalo considerado, a função  $F[\underline{x}(\theta)]$  vai decrescer somente enquanto  $\Delta_t$  for negativo. Então, como não tem sentido aumentar  $\theta$  se a função objetivo não decresce, define-se o limite superior  $\theta_0$  de variação de  $\theta$ .

Se  $\Delta_s < 0$ , por certo  $\theta_0 = \theta'$ .

Se  $\Delta_s \geq 0$ , determina-se o inteiro natural  $\nu$  tal que satisfaça

$$\Delta_{\nu-1} < 0 ; \Delta_{\nu} \geq 0 \quad (\Delta_0 = \Delta)$$

Define-se, então,  $\theta'' = \theta_{\gamma_j} \gamma_j$ . Como isto pode-se calcular  $\theta_0$  por

$$\theta_0 = \min \{ \theta', \theta'' \}$$

Se  $\theta_0$  encontrado não é finito  $\underline{x}(\theta)$  é solução do problema para qualquer  $\theta_0 > 0$ . Entretanto, sendo  $\alpha_j$  e  $\beta_j$  finitos, para qualquer variável  $x_j$ , obtem-se um novo programa  $\underline{x}(\theta)$  a que corresponde o menor valor de  $F$  com relação a todos os programas do tipo descrito pelas equações (2.20). Este programa será adotado como a nova aproximação para o método de solução do problema linear por partes.

Na equação (2.27) aqui reescrita

$$F(\underline{x}') - F(\underline{x}) = \bar{\Delta} \theta_0 + \sum_{i=1}^t \nabla_{\gamma_i \gamma_i} |x_{\gamma_i}^{\gamma_i}| (\theta_0 - \theta_{\gamma_i \gamma_i})$$

t deve ser entendido como o maior índice i tal que  $\theta_{\gamma_i \gamma_i} \leq \theta_0$ . Exceto para casos degenerados pode-se escrever  $\theta_0 \geq \theta_{\gamma_i \gamma_i} > 0$  de onde se conclui que  $F(\underline{x}') - F(\underline{x}) < 0$ .

A base do novo programa  $\underline{x}'$  é obtida a partir da base do programa  $\underline{x}$  acrescentando-se o vetor  $\underline{A}^r$  e retirando-se o vetor  $\underline{A}^k$ , o índice k sendo obtido no processo de determinação de  $\theta_0$ . Evidentemente, se  $k = r$  os programas  $\underline{x}$  e  $\underline{x}'$  tem a mesma base mas novos valores de  $\underline{\lambda}$  e  $z_j$  são calculados, antes de passar-se ao critério de otimalidade.

## CONCLUSÕES

Para os casos não degenerados, cada iteração (ã exceção da última) se completa pela construção de um novo programa de base factível. Todos os programas obtidos são distintos por quanto já se verificou que a função objetivo  $F(x)$  resulta reduzida a cada passo. Se o problema tiver solução finita é certo que se chega a essa solução pois o número de bases do problema não supera  $C_n^m$ . Também, o número de programas básicos associados a cada base não é superior a  $(l + 2)^{n-m}$  onde  $l = \max_{1 \leq j \leq n} l_j$ . Então o número total de programas básicos está limitado por  $(l + 2)^{n-m} C_n^m$  que representa, portanto, o número máximo de iterações para o problema em questão.

O critério de otimalidade discutido é um critério de ótimo local. Entretanto, tendo em vista a convexidade da função objetivo, o ótimo local é o ótimo global [2].

## PARTE II

Ressalve-se de início que a notação utilizada nesta parte pode coincidir, mas nada tem a ver com aquela utilizada na primeira parte, salvo menção em contrário.

### O PROGRAMA DE BASE FACTÍVEL INICIAL

O problema de programação linear

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad z &= \underline{c} \underline{x} \\ \text{sujeito a} \quad A\underline{x} - \underline{b} &= \underline{0} \\ \underline{0} &\leq \underline{x} \leq \underline{h} \end{aligned} \quad (2.28)$$

em que a matriz  $A$  é  $m \times n$ , o vetor  $\underline{b}$   $m \times 1$ , pode ser resolvido através de um algoritmo simplex generalizado que permite o tratamento das restrições  $\underline{0} \leq \underline{x} \leq \underline{h}$  vem explicitamente aumentar a dimensão do problema [2].

Define-se um programa de base factível extendido, correspondente ao problema (2.28), como sendo uma solução factível com  $n-m$  variáveis iguais a seu limite inferior (zero) ou ao seu limite superior e as restantes  $m$  variáveis (básicas) correspondendo a colunas de  $A$  linearmente independentes.

Seja  $I \cup J = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $I$  um conjunto de  $m$  índices e sendo  $A^I$  regular,  $I$  dir-se-á uma base do programa de base factível extendido. As variáveis  $\underline{x}_I$  serão variáveis básicas e  $\underline{x}_J$  variáveis não básicas. Então,

$$\begin{aligned} A^I \underline{x}_I + A^J \underline{x}_J &= \underline{b} \\ \underline{x}_I + [A^I]^{-1} A^J \underline{x}_J &= [A^I]^{-1} \underline{b} \end{aligned}$$

fazendo-se

$$\begin{aligned} \bar{A}^J &= [A^I]^{-1} A^J \\ \bar{\underline{b}} &= [A^I]^{-1} \underline{b} \end{aligned}$$

$$\underline{x}_I + \bar{A}^J \underline{x}_J = \bar{\underline{b}}$$

Separando-se as variáveis não básicas em variáveis no limite superior e variáveis no limite inferior, com relação a um programa de base factível extendido, e designando-se por  $\underline{x}_B$  as variáveis não básicas em seu limite inferior e por  $\underline{x}_H$  aquelas em seu limite superior vem,

$$J = B \oplus H$$

$$\underline{x}_I + \bar{A}^B \underline{x}_B + \bar{A}^H \underline{x}_H = \underline{b}$$

de onde vem a solução de base factível extendida,

$$\underline{x}_B = \underline{0}$$

$$\underline{x}_H = \underline{h}$$

$$\underline{x}_I = \underline{b} - \bar{A}^H \underline{h} = \underline{b}$$

Na obtenção do programa de base que inicializa o algoritmo de programação linear por partes será utilizado um algoritmo simplex, como definido acima, e cujos detalhes são discutidos no próximo capítulo. Trata-se de verificar se o sistema de restrições

$$A\underline{x} - \underline{B} = \underline{0}$$

(2.29)

$$\underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta}$$

das equações (2.4) é compatível e não redundante.

O sistema (2.29) será colocado sob a forma (2.28) através de mudanças de variáveis e da definição de uma função objetivo artificial a ser minimizada.

## CAPÍTULO III

### O ALGORÍTMO DA FASE INICIAL

Neste segmento estuda-se o algoritmo através do qual é obtido o programa de base factível que inicializa a solução do problema linear por partes. Baseia-se na idéia já bem conhecida de minimizar uma função objetivo construída a base de variáveis artificiais que, de início, constituem um programa básico de partida e que vão sendo, uma a uma, substituídas pelas variáveis do problema, a medida que o algoritmo é executado. O quadro deste algoritmo simplex generalizado sofreu apenas ligeiras modificações em relação ao quadro simplex convencional, de modo a facilitar o tratamento de variáveis com limitações inferiores e superiores.

#### Considerações Preliminares

Do sistema de restrições

$$\underline{A}x - \underline{B} = \underline{0} \quad ; \quad \underline{\alpha} \leq x \leq \underline{\beta}$$

deseja-se saber se este apresenta solução factível. Antes de fazer uma breve apresentação dos passos deste algoritmo seguem-se algumas providências preliminares.

- i - Após a entrada dos dados ( $\underline{\alpha}$ ,  $\underline{\beta}$ ,  $\underline{B}$ , A) as variáveis  $\underline{x}$  são referidas ao seu limite inferior  $\underline{\alpha}$ .

$$A\underline{x} - \underline{B} = \underline{0} \rightarrow A\underline{x} - A\underline{\alpha} = \underline{B} - A\underline{\alpha}$$

$$A(\underline{x} - \underline{\alpha}) = \underline{B} - A\underline{\alpha}$$

$$\text{Fazendo, } \underline{x}^+ = \underline{x} - \underline{\alpha}$$

$$\underline{\bar{B}} = \underline{B} - A\underline{\alpha}$$

$$\underline{\beta}' = \underline{\beta} - \underline{\alpha}$$

fica-se com o sistema,

$$A\underline{x}^+ - \underline{\bar{B}} = \underline{0} \quad ; \quad \underline{0} \leq \underline{x}^+ \leq \underline{\beta}' \quad (3.1)$$

Se algum elemento do vetor  $\underline{\bar{B}}$  resultar negativo troca-se o sinal da linha que lhe corresponde na matriz A.

- ii - Colocam-se agora as variáveis artificiais.

Das equações (3.1), introduzindo variáveis artificiais, fica-se com o problema,

$$\text{minimizar } \psi = \underline{E} \underline{v}$$

$$\text{sujeito a } A\underline{x}^+ + U\underline{v} = \underline{\bar{B}}, \quad \underline{\bar{B}} \geq \underline{0}$$

$$\underline{0} \leq \underline{x}^+ \leq \underline{\beta}' \quad , \quad \underline{v} \geq \underline{0}$$

em que o  $\underline{v}$  é um vetor coluna de dimensão m cujas componentes são variáveis artificiais;  $\psi$  é a função objetivo artificial; U uma matriz identidade de ordem m e  $\underline{E}$  um vetor linha com todos os elementos unitários.

Colocando a função objetivo em função de variáveis não básicas, vem

$$\underline{v} = \underline{\bar{B}} - A\underline{x}^+$$

$$\psi = \underline{E} \underline{v} = \underline{E} (\underline{\bar{B}} - A\underline{x}^+) = \underline{E} \underline{\bar{B}} - \underline{E} A\underline{x}^+$$

$$\text{chamando } \hat{\psi} = \underline{E} \underline{\bar{B}}, \quad \underline{y} = - \underline{E} A$$

o problema pode ser escrito

$$\text{minimizar } \psi = \hat{\psi} + \underline{y} \underline{x}^+ \quad (3.2)$$

$$\text{sujeito a } A\underline{x}^+ + U\underline{v} = \underline{\bar{B}}$$

$$\underline{0} \leq \underline{x}^+ \leq \underline{\beta}' ; \underline{v} \geq \underline{0}$$

e o quadro correspondente tem o aspecto mostra do na figura (3.1)

$x_1^+ \quad - \quad - \quad - \quad x_n$	$v_1 \quad - \quad - \quad - \quad v_m$	$\hat{B}$
$A_1^1 \quad - \quad - \quad - \quad A_1^n$   \quad \quad \quad     \quad \quad \quad   $A_1^m \quad - \quad - \quad - \quad A_m^n$	$1 \quad - \quad - \quad - \quad 0$   \quad \quad \quad     \quad \quad \quad   $0 \quad - \quad - \quad - \quad 1$	$\hat{B}_1$     $\hat{B}_m$
$y_1 \quad - \quad - \quad - \quad y_n$	$0 \quad - \quad - \quad - \quad 0$	$\psi - \hat{\psi}$
$\epsilon_1 \quad - \quad - \quad - \quad \epsilon_n$	$\epsilon_{n+1} \quad - \quad - \quad - \quad \epsilon_{n+m}$	

Figura 3.1

a  $(m+1)$ -ésima linha do quadro reserva-se para a função objetivo do problema; a função objetivo artificial ocupa a linha seguinte do quadro. Os parâmetros  $\epsilon_j$  da última linha do quadro podem assumir dois valores

$\epsilon_j = +1$ , indica que se trabalha com a variável  $x_j^+$

$\epsilon_j = -1$ , indica que se trabalha com a variável

$$x_j^- = \beta_j' - x_j^+$$

- iii - No capítulo anterior, visando estabelecer uma formulação mais simples, assumiu-se que as  $m$  componentes do programa de base correspondiam às  $m$  primeiras colunas da matriz  $A$ . A medida que o algoritmo se processa esta situação deixa de se verificar. Então, a nível de estudo dos algoritmos, estabelece-se um conjunto IBAS de índices que apresenta, ao início, o seguinte aspecto

$$\text{IBAS} = \left\{ \begin{array}{cccc} x_1^+ & \dots & x_n^+ & v_1 \dots v_m \\ 0 & \dots & 1 & 1 \dots m \end{array} \right\}$$

A idéia é estabelecer que no início do processo as variáveis básicas são as variáveis artificiais. Os números 1, ..., m do conjunto e que correspondem às variáveis artificiais  $v_i$ , indicam que a variável  $v_1$  é a variável básica da primeira linha da matriz A,  $v_2$  a variável básica da segunda linha, e assim por diante. Os zeros correspondem às variáveis não básicas.

### Breve discussão do Algoritmo [2,3]

1. Procura-se uma variável não básica  $x_j^{\varepsilon_j}$  para a qual  $y_j < 0$ . Se nenhuma variável satisfaz a essa condição, então verifica-se o valor de  $\psi' = \psi - \hat{\psi}$ . Se  $\psi'$  se anulou, e se nenhuma variável artificial com valor zero integra a base, então existe um programa de base factível extendido que pode ser utilizado para inicializar o algoritmo linear por partes. Caso  $\psi'$  se anule mas existe pelo menos uma variável artificial com valor nulo na base então deve-se verificar a possibilidade de redundância. Caso  $\psi'$  não tenha se anulado o sistema de restrições não é compatível e não existe solução factível para o problema.
2. Existindo alguma variável  $x_j^{\varepsilon_j}$ , com  $y_j < 0$  calculam-se os três números,

a)  $\beta_j'$

b)  $\min_{A_i^j > 0} \frac{\bar{B}_i}{A_i^j}$

c)  $\min_{A_i^j < 0} \frac{\bar{B}_i - \beta_{ii}'}{A_i^j}$

em que o índice  $i$  varre as primeiras  $m$  linhas do quadro.  $\beta_{ij}$  não corresponde ao limite superior da variável  $x_j^+$ ; refere-se ao limite superior da variável básica da  $i$ -ésima linha do quadro, que no caso geral não ocorre de ser  $x_j^+$ .

3. A atualização do quadro apresentado se faz segundo o ítem  $i$  do passo anterior para o qual se deu o menor dos três números. A saber,

a) A variável  $x_j^+$  atinge o seu limite superior. Subtrai-se da coluna  $\underline{B}$  a  $j$ -ésima coluna da matriz multiplicada por  $\beta_j'$ ; trocam-se os sinais dos elementos da coluna  $j$  e do parâmetro  $\epsilon_j$ . O pivoteamento não será necessário pois não houve mudança de base.

b) Seja  $i$  o índice que corresponde ao mínimo no ítem (b) do passo (2). A  $i$ -ésima variável básica atinge seu limite inferior (zero). Pivoteia-se no elemento  $(i,j)$ .

c) Seja  $i$  o índice que corresponde ao mínimo no ítem (c) do passo (2). A  $i$ -ésima variável básica atinge seu limite superior. Do elemento  $\bar{B}_i$  do vetor  $\underline{B}$  subtrai-se  $\beta_i'$  e trocam-se os sinais do elemento  $A_{ij}^i$  e  $\epsilon_i$  do parâmetro  $\epsilon_i$ . Pivoteia-se no elemento  $(i,j)$ .

Ao fim do processo, quando resultarem  $\psi_j \geq 0$  e  $\psi' = 0$  para todo  $x_j^{\epsilon_j}$ , a variável básica da  $i$ -ésima linha será dada por

$$\begin{aligned} \alpha_{ii} + \bar{B}_i & \quad \text{se} \quad \epsilon_i = +1 \\ \beta_{ii} - \bar{B}_i & \quad \text{se} \quad \epsilon_i = -1 \end{aligned}$$

em que  $\bar{B}_i$  refere-se ao último quadro obtido no processo e  $\alpha_{ij}$  e  $\beta_{ij}$  referem-se, respectivamente, aos limites inferior e superior da variável básica da  $i$ -ésima linha.

A  $j$ -ésima variável não básica será dada por

$$\alpha_j \quad \text{se} \quad \epsilon_j = +1$$

$$\beta_j \quad \text{se} \quad \epsilon_j = -1$$

Tem-se assim o programa de base inicial.

Devido às modificações introduzidas na matriz  $A$  original é necessário trocar os sinais das colunas  $A^j$  para os quais  $\epsilon_j = -1$ , para que a matriz possa ser utilizada no algoritmo de programação linear por partes.

# ALGORÍTMO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR POR PARTES

## INTRODUÇÃO

Ao fim da fase inicial, quando o sistema de restrições é compatível, um programa de base factível extendido é obtido, conforme já se discutiu anteriormente. No conjunto / IBAS de Índices, a essa altura, tem-se a informação a respeito de quais são as variáveis básicas e não básicas do programa de base que será utilizado para inicializar o algoritmo de programação linear por partes.

Para um programa de base  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , com  $m$  componentes básicas e  $n-m$  não básicas, IBAS contém  $m$  elementos distintos e não nulos, e  $n-m$  elementos nulos. Ao  $j$ -ésimo elemento do conjunto IBAS corresponde a variável  $x_j$ , e o número inteiro  $k'$  que ocupa a  $j$ -ésima posição no conjunto, se não nulo, indica que a variável  $x_j$  que lhe corresponde é a variável básica da  $k'$ -ésima linha da matriz  $A$ . Se  $k'$  é nulo então a variável  $x_j$  é não básica.

## Definição

Sejam IB e JB, respectivamente, o conjunto dos índices  $j$  das variáveis  $x_j$ , que correspondem a elementos não nulos no conjunto IBAS e o conjunto dos índices  $j$  das variáveis  $x_j$  às quais correspondem elementos nulos em IBAS.

Os conjuntos IB e JB tem  $m$  e  $n-m$  elementos, respectivamente, e no primeiro conjunto estão os índices das variáveis básicas que não coincidem (salvo degenerescência) com nenhum dos pontos críticos, isto é,

$$d_{k_j, j} < x_j < d_{k_j+1, j} \quad j \in IB$$

enquanto que no segundo estão os índices das componentes não básicas de  $\underline{x}$ , cada uma delas coincidindo com um ponto crítico, ou seja,

$$x_j = d_{k_j, j} \quad j \in JB$$

Estando os conjuntos IB e JB relacionados diretamente com os elementos do conjunto IBAS, e sabendo-se que este último é modificado a cada iteração, entende-se que os con -

juntos citados compõe-se de elementos que são funções de cada iteração.

## OS PASSOS DO ALGORÍTMO

### Entrada de dados e cálculos preliminares

São fornecidos os seguintes dados,

- i - número  $l_j$  de pontos críticos das variáveis  $x_j$ ;  
 $j = 1, 2, \dots, n$
- ii - pontos críticos  $d_{k_j, j}$   
 $k_j = 1, \dots, l_j$  ;  $j = 1, 2, \dots, n$
- iii - coeficientes  $C_{k_j, j}$  das secções lineares das funções  $f_j(x_j)$   
 $k_j = 1, 0, \dots, l_j, l_j + 1$  ;  $j = 1, 2, \dots, n$   
 Aos coeficientes  $C_{k_j, j}$ ,  $k_j = -1$  e  $k_j = l_j + 1$  são associados números muito maiores (em módulo) que os valores desses coeficientes para  $k_j \neq -1$  e  $k_j \neq l_j + 1$ .

Calculam-se, a seguir, os

$$\sigma_{k_j, j} = C_{k_j, j} - C_{k_j - 1, j} \begin{cases} k_j = 1, 2, \dots, l_j \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Antes de entrar no critério de otimalidade é necessário especificar a localização de cada componentes  $\bar{x}_j$  do programa  $x$ . Este programa, é aquele obtido pelo algoritmo que determina a base inicial, apenas na primeira iteração. A localização citada se faz através dos números inteiros  $k_j$ , conforme descrição na sub-rotina FIXKJ a ser discutida mais tarde.

### Critério de Otimalidade

O critério de otimalidade discutido no capítulo anterior será utilizado para que se decida se o programa de ba-

se factível nesta iteração é a solução do problema.

Apenas para a primeira iteração do algoritmo de programação por partes, define-se a matriz H como sendo a matriz cujos elementos são dados por

$$H_{j}^i = \left[ A^{-1} \right]_{j}^i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.3)$$

$$j \in IB$$

Nas próximas iterações as colunas da matriz H são modificadas segundo as relações (3.8) abaixo definidas.

Sendo  $\underline{C}_{IB}$  o vetor linha de dimensão m, cujas componentes são coeficientes angulares  $C_{k_j j}$ ,  $j \in IB$ , pode-se escrever uma relação análoga a (2.11) para

$$\underline{\lambda} = \underline{C}_{IB} H \quad (3.4)$$

Analogamente escreve-se uma relação para  $z_j$ .

$$z_j = \underline{C}_{IB} H \underline{A}^j = \underline{\lambda} \underline{A}^j \quad (3.5)$$

$$j \in JB$$

Calculados os números  $z_j$  verifica-se se o critério de otimalidade (2.18) é satisfeito.

Não sendo ótima a solução calculam-se, por relações análogas às (2.19)

$$\bar{\Delta}_{k_j j} = C_{k_j j} - z_j \quad k_j \leq l_j \quad (3.6)$$

$$\bar{\Delta}_{k_j j} = z_j - C_{k_j - 1, j} \quad k_j \geq 1$$

$j \in JB$  e  $z_j$  como definido em (3.5).

Define-se um indicador IFAC = 1 se o mínimo  $\Delta$  for  $\bar{\Delta}_{k_j j}$  ou IFAC = -1 caso este mínimo seja  $\bar{\Delta}_{k_j j}$ .

## O novo programa de base

Analogamente as relações (2.20) escreve-se

$$x_j(\theta) = \begin{cases} x_j - \text{IFAC}(\theta, x_j^r) & ; j \in \text{IB} \\ x_j + \text{IFAC}(\theta) & ; j = r \\ x_j & ; j \in \text{JB}, j \neq r \end{cases} \quad (3.7)$$

onde se percebe que IFAC foi feito +1 ou -1 apenas por conveniência em escrever as equações (3.7).

Através das subrotinas MININ, NYJTE E ORDEN obtém-se,

- i - o parâmetro  $\theta'$  e o índice  $s'$  a ele associado, da primeira subrotina,
- ii - os parâmetros  $\theta_{\gamma_j}$  e dois vetores indicando para quais variáveis  $j$  e em que pontos críticos  $\gamma$  foram calculados, da segunda subrotina,
- iii - a ordenação dos pares  $s$  pares  $(\gamma, j)$  obtidos na subrotina NYJTE, na ordem crescente dos  $\theta_{\gamma_j}$ , através da terceira subrotina.

De posse desses resultados obtém-se, como já se estudou no capítulo anterior, o valor de  $\theta_0$  que colocado nas equações (3.7) produz o novo programa de base.

O vetor  $\underline{A}^j$ , com  $j=r$  obtido a partir do critério de otimalidade, vai ser introduzido na base do novo programa, substituindo o vetor  $\underline{A}^j$ , com  $j=w$ . Para obter o índice  $w$  são calculados

$$\delta_t = \sigma_{\gamma_t} \gamma_t |x_{\gamma_t}^j|$$

$t = 1, 2, \dots, s$

$$\Delta_t = \Delta + \sum_{i=1}^t \delta_i$$

A cada  $\Delta_t$  calculado verifica-se o seu sinal.

Se  $\Delta_s \geq 0$ , então, como já se sabe do capítulo anterior, um certo  $\theta'' = \theta_{x_{j_{\nu}}}$ , com o índice  $\nu$  dado por  $\Delta_{\nu-1} < 0; \Delta_{\nu} \geq 0$ , é obtido; como, neste caso,  $\theta_0 = \min(\theta', \theta'')$ , segue-se que  $w = s'$ , se  $\theta_0 = \theta'$  ou  $w = j_{\nu}$  se  $\theta_0 = \theta''$ .

Pode ocorrer que  $\Delta_s < 0$ . Neste caso, já se sabe que  $w = s'$ , é este último o índice  $j$  da variável  $x_j$  para a qual resultou o menor  $\theta_j$  nos cálculos utilizando as equações (2.21) ou (2.22), conforme o caso.

Uma última subrotina (NEWX) calcula o novo programa de base.

Exceto para o caso em que o índice  $r$  da variável escolhida para entrar na base coincida com o índice  $w$  daquela que deve sair da base, para lhe dar lugar, os elementos  $H_j^i$  são atualizados por meio das relações,

$$H_j^i(l+1) = H_w^i(l) \frac{x_j^j}{x_w^j}$$

$j \in IB, j \neq w; i = 1, 2, \dots, m$  (3.8)

$$H_j^i(l+1) = H_w^{i(l)} \frac{1}{x_w^j}$$

$$j = r; i = 1, 2, \dots, m$$

em que  $l$  indica a iteração. É claro que, tendo em vista a equação (3.3) pode-se escrever,

$$H_j^i(l) = \left[ A^{-1} \right]_{j,i}$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$j \in IB \text{ e } l = 0$$

Antes de passar para a próxima iteração modifica-se o conjunto IBAS e calcula-se o valor da função objetivo através da relação (2.27).

## Descrição das subrotinas

### i - Subrotina FIXKJ

Presta-se à localização, a cada iteração, dos valores  $\bar{x}_j$  das variáveis,  $x_j$  em relação aos seus respectivos pontos críticos. Ao valor crítico  $d_{\gamma_j}$  da variável  $x_j$  corresponde  $k_j = \gamma$ ; ao valor crítico  $d_{\gamma+1,j}$  corresponde  $k_j = \gamma + 1$ . Para qualquer variável  $x_j$  associa-se  $k_j = \gamma$  ao valor  $\bar{x}_j$  situado entre  $d_{\gamma_j}$  e  $d_{\gamma+1,j}$  se esta for básica; se esta for não básica associa-se o valor  $k_j$  do ponto crítico correspondente a  $\bar{x}_j$ .

Na subrotina inicialmente são identificados os elementos dos conjuntos IB e JB e a coincidência de um certo valor  $\bar{x}_j$  com algum  $d_{k_j, \gamma}$  é detetada dentro de uma certa tolerância.

Nos casos degenerados, quando para a variável básica  $x_j$  seu valor  $\bar{x}_j$  coincide com  $d_{\gamma_j}$ , associa-se a esta variável  $k_j = \gamma - 1$ .

### ii - Subrotina MININ

Por meio desta calculam-se, inicialmente, os coeficientes  $x_j^r$ ,  $j \in \text{IB}$  através da relação  $\underline{x}^r = [A^T]^{-1} \underline{A}^r$ . Depois calculam-se os parâmetros  $\theta_j$  através das relações (2.21) e (2.22) obtendo-se  $\theta'$  e  $s'$  através da seleção do menor  $\theta_j$  e do índice  $j$  para o qual ocorrem este mínimo.

### iii - Subrotina NYJTE

Por esta são calculados os  $\theta_{\gamma_j}$  conforme relação (2.23). Sempre que um valor de  $\theta_{\gamma_j}$  satisfaz as condições das relações (2.23) um contador JCO é incrementado e em vetores JCX e NYCX são armazenados, respectivamente, o índice  $j$  da variável  $x_j$  correspondente e o ponto crítico  $\gamma$  de  $x_j$ .

### iv - Subrotina ORDEN

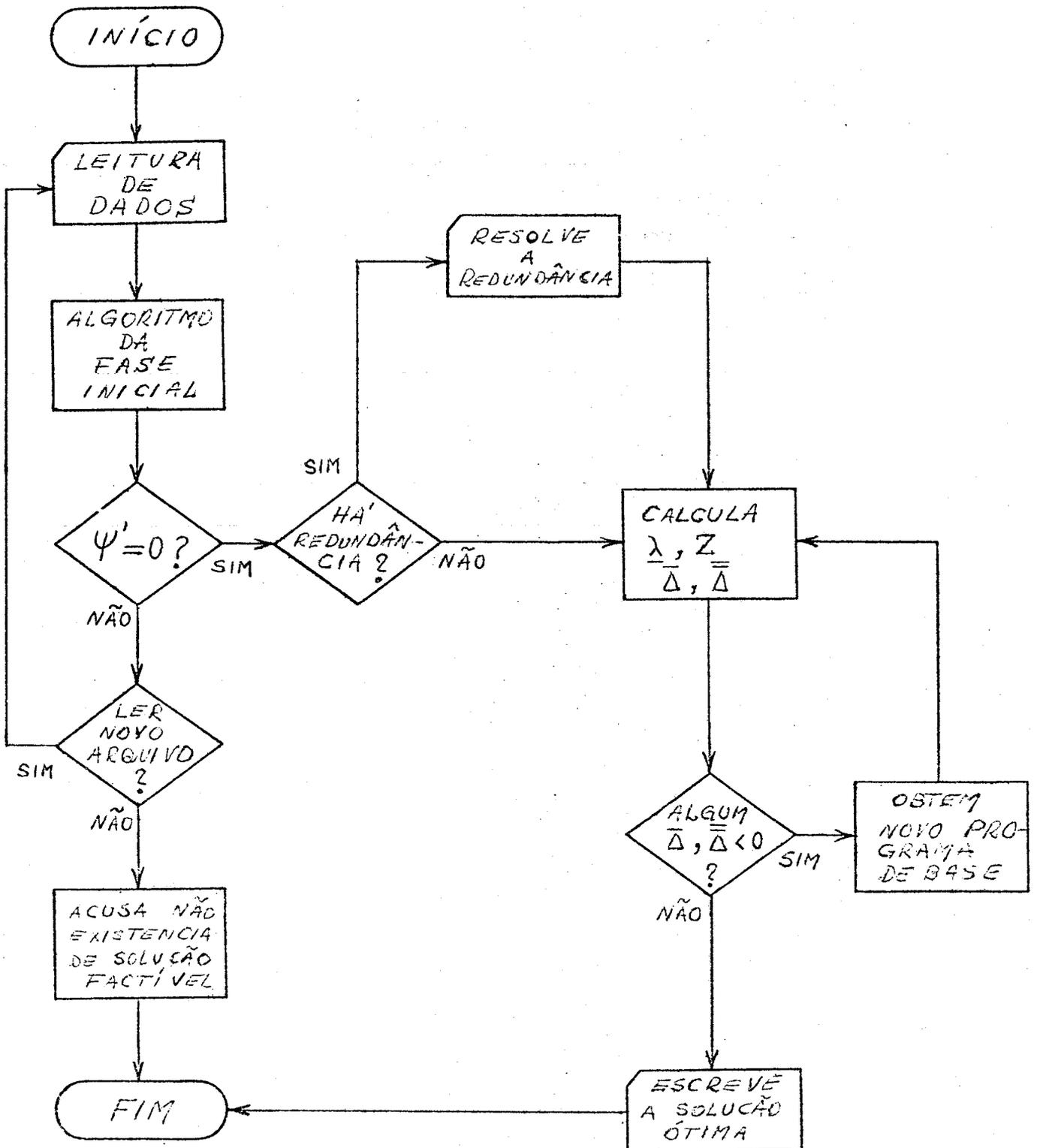
Para saber até onde se deve variar  $\theta$  é necessário que os vetores JCX e NYCX tenham seus elementos, respectivamente  $j$  e  $\gamma$ , colocados segundo a ordem crescente dos respectivos  $\theta_{\gamma_j}$ . Isto é feito nesta subrotina. Se JCO é inferior a 2 a subrotina não é acionada.

v - Subrotina NEWX

Simplesmente calcula um novo programa  $\underline{x}$ , através das equações (3.7).

Diagrama de blocos dos algoritmos

Os dois algoritmos foram implementados em um mesmo programa FORTAN cuja diagrama de blocos vem a seguir.



## CAPÍTULO IV

### TRATAMENTO DE EXEMPLOS

Com o fim de apresentar algumas das aplicações dos algoritmos estudados, discutidos no Capítulo I, adotou-se o sistema de potência<sup>[6]</sup>, com 10 barras e 13 linhas, que pode ser visto na figura (4.1) e cujos dados de barras e de linhas constam nas tabelas (4.1) e (4.2).

Tabela  
(4.1)

LINHA	BI	BF	REATÂNCIA	CALIM
1	3	4	0,242	0,844
2	2	4	0,242	0,844
3	3	6	0,618	0,759
4	6	7	0,319	0,844
5	2	3	0,390	0,844
6	3	8	0,277	0,844
7	2	5	0,099	0,844
8	1	2	0,244	0,844
9	2	8	0,958	0,607
10	2	7	0,326	0,844
11	1	9	0,314	0,844
12	0	9	0,390	0,844
13	8	9	0,958	0,607

BI, BF: barras inicial e final da linha; respectivamente

CALIM: carregamento limite da linha

O carregamento limite das linhas 3, 9 e 13 foi determinado a partir da curva de carregamento em por unidade (pu) do SIL em função do comprimento da linha [7]. O carregamento das demais linhas corresponde aos respectivos limites térmicos.

Para todas as linhas admite-se reatância de  $0,4 \Omega/\text{km}$  e uma "surge impedance" de  $300 \Omega$ .

Tabela  
(4.2)

BARRA	GERAÇÃO	DEMANDA
1	0,200	0,300
2	0,500	0,250
3	0,250	
4	0,750	
5	0,400	
6	0,800	0,300
7		0,750
8		0,250
9		0,500

As reatâncias e carregamentos que aparecem na tabela (4.1), bem como as potências ativas geradas e demandas constantes na tabela (4.2) estão em pu, referidas à base de 500 MVA.

O sistema, com os dados conforme a tabela (4.2) e fluxos de potência ativa conforme a figura (4.1) denominar-se-á, apenas para fácil referência, caso básico.

Em relação a este caso básico foram trabalhados exemplos de aplicação dos algoritmos em

- Remanejamento de geração ativa nos casos de perdas dessa geração
- Nos casos em que este remanejamento não foi possível
  - Remanejamento de geração ativa associado à utilização deliberada da capacidade térmica das linhas de transmissão
  - Load Shedding
- Alocação de unidades geradoras complementares com minimização da saturação global das linhas de transmissão

Os problemas tratados nos dois primeiros itens referem-se à operação de sistemas elétricos de potência enquanto que no terceiro item dispõe-se de uma ferramenta que pode dar indicações muito úteis no planejamento da expansão destes sistemas.

#### 4.1. Perdas de Geração

##### 4.1.1. Perda da geração da barra 4

Neste primeiro exemplo, em relação ao caso básico, simulou-se a perda da geração de 0,750 pu da barra 4. Admitiu-se folgas de geração de até 0,300 pu acima da geração dessas barras, no momento da perda do gerador, apenas para as barras 1, 2 e 3. Para as demais barras admite-se que não há nenhuma folga.

O problema que consiste em saber se é possível encontrar uma forma de distribuir os 0,750 pu perdidos pelas folgas de geração dos demais geradores é o problema descrito pelas equações (1.6), no capítulo I.

Para todas as linhas de transmissão os carregamentos estão especificados na tabela (4.1).

Aplicado o algoritmo da fase inicial para a solução deste problema resultou que uma solução é gerar 0,300 pu nas barras 1 e 2, mais 0,150 pu na barra 3. Os resultados / estão na figura (4.2).

Outras situações, com relação às folgas de geração dos demais geradores foram testados obtendo-se também uma condição de operação normal.

##### 4.1.2. Perda da geração da barra 1

No caso de perda da geração de 0,200 pu da barra 1, ainda que cada uma das demais barras de geração possa gerar até 0,300 pu acima de sua potência gerada no momento dessa contingência, não é possível encontrar uma forma de distribuir a geração perdida, sem que ocorram violações dos limites especificados para as linhas de transmissão, vale dizer, não foi possível encontrar um novo estado de operação normal.

#### 4.2. Remanejamento de geração ativa associado a load shedding ou utilização da capacidade térmica das linhas.

Para o caso de perda de geração discutido no item 4.1.1. um remanejamento de geração possibilitou chegar-se a um novo estado de operação normal. Para o caso discutido em 4.1.2, entretanto, isto não foi possível.

4.2.1. Para o caso de perda da geração da barra 1, tendo-se em vista que a operação sem violações dos limites de carregamento das linhas não é possível procurou-se alargar os limites das linhas (exceto para as linhas 3,9 e 13) em 27% com o fim de averiguar a possibilidade de operação, ainda que por tempo reduzido, com algumas poucas linhas operando pouco acima de seu carregamento especificado na tabela (4.1).

Na figura (4.3) apresenta-se uma solução encontrada dentro dos novos limites de carregamento de 1.070 pu para as linhas. Verifica-se que a linha 8 apresenta fluxo acima do fluxo máximo especificado na tabela (4.1). O algoritmo utilizado está descrito nas equações (1.6), no capítulo I.

Uma idéia é construir uma função objetivo linear por partes como modelo de utilização deliberada da capacidade térmica das linhas de transmissão. Assim, essa última solução obtida poderia ser tomada como solução inicial de um processo de minimização dessa função objetivo, isto é, de um processo que minimiza globalmente a utilização da capacidade térmica das linhas. Evidentemente, o problema pode ser resolvido através do algoritmo descrito pelas equações (1.7). De qualquer forma, para cada um dos exemplos apresentados, cada distribuição de geração encontrada pode ser entendida como solução inicial de um certo processo de otimização que visa encontrar uma distribuição que otimiza algum critério escolhido.

O algoritmo da fase inicial pretende-se apenas que indique a existência ou não de alguma solução para o problema. Nenhum aspecto relativo à economia de operação está envolvido no problema tratado.

4.2.2. Uma outra possibilidade para o caso da perda do gerador da barra 1 consiste no corte de algumas demandas visando a operação dentro das restrições operativas. Com relação aos modelos descritos pelas equações (1.8) e (1.9), considerando-se

- a) limites de geração para todos os geradores ( 2, 3,4,5 e 6)

$$0 \leq G_j \leq 0,600 \text{ pu}$$

- b) limites das linhas como na tabela (4.1),

- c) o total de demanda

$$DT^0 = 2,900 \text{ pu}$$

- d) os limites de cortes nas demandas de cada barra dados ( em pu ) por

BARRA	1	2	3	4	5	6	7	8	9
DE	0,05	0,10	0	0	0	0,10	0,20	0,10	0,10

- e) o vetor de ponderação dos cortes das demandas dado por

$$\underline{d} = (0,5 \quad 0,8 \quad 1,0 \quad 1,0 \quad 1,0 \quad 0,7 \quad 0,9 \quad 0,8 \quad 0,9)$$

trabalhou-se um exemplo de load shedding cujas soluções, a inicial está apresentada na figura (4.4), e a final, que minimiza a função objetivo do problema, na figura (4.5).

Neste último exemplo examinado, como se tem 3,00 pu de geração disponível e como a demanda que se deseja atender é 2,90 pu com o mínimo possível de corte, entendeu-se oportuno passar um novo exemplo com

$$0 \leq G_j \leq 0,700 \text{ pu}$$

para os geradores 2,3,4,5 e 6, as demais restrições permanecendo inalteradas.

O objetivo é observar que efeito tem sobre o sistema o fato de se dispor de uns 20% de geração acima da necessária para atender a demanda sem cortes. Os resultados inicial e final estão mostrados nos diagramas (4.6) e (4.7).

Verifica-se que é possível atender mais demanda do que no caso anterior porque existe maior maleabilidade com os geradores.

O corte nas demandas deve, entretanto, ser evitado sempre que for possível conseguir uma forma de operação de emergência em que se utiliza a inércia térmica das linhas e que se assegure, portanto a satisfação das restrições de carga.

#### 4.3. Aplicações ao planejamento

Em exemplo final simulou-se um aumento da ordem de 25% na demanda global, em relação ao caso básico, obtendo-se as novas demandas, conforme tabela 4.3.

BARRA	GERAÇÃO	DEMANDA
1	0,200	0,375
2	0,500	0,313
3	0,250	
4	0,750	
5	0,400	
6	0,800	0,375
7		0,938
8		0,313
9		0,625

Tabela (4.3)

Considerando-se que a demanda na barra de referência também subiu de 0,550 pu para 0,688 pu segue-se que é necessário gerar mais 0,727 pu para atender à nova demanda. O problema, inicialmente, é saber se é possível atender à essa demanda, sem que ocorram saturações em linhas de transmissão, alocando-se novas unidades geradoras de complementação, nas barras onde já existe geração de potência ativa. Admitindo-se limites de até 0,300 pu para essas gerações em cada barra, o problema, cujo modelo está representado pelas equações (1.6), não apresentou solução factível. Isto significa que só haverá solu -

ção para o problema em que os limites de carregamento das linhas sejam relaxados. Relaxando-se os limites em 27%, aplicando-se novamente o algoritmo de fase inicial, obteve-se a solução mostrada na figura (4.8).

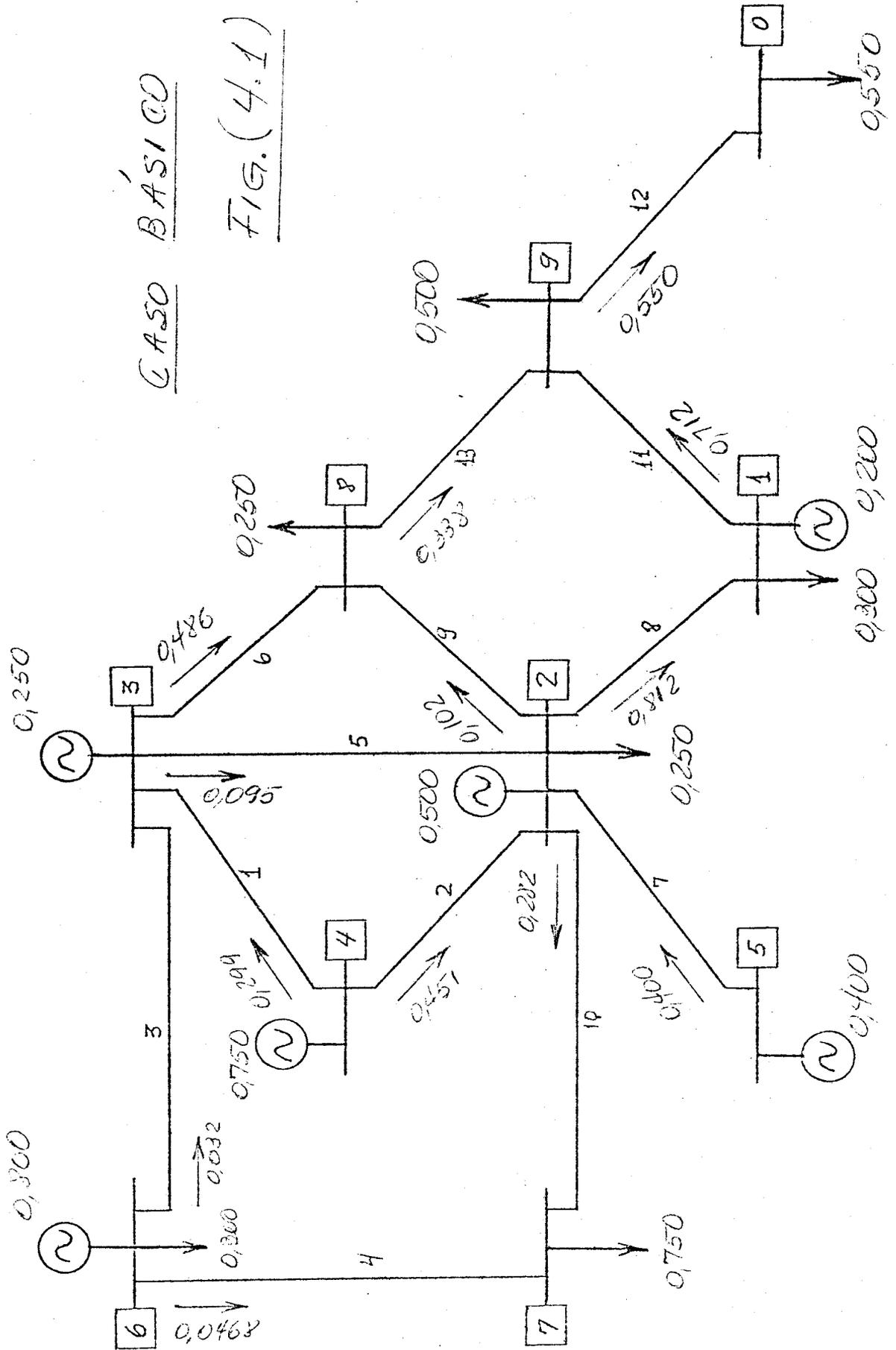
A seguir-se, tomou-se esta como solução inicial para o algoritmo que minimiza a saturação global e que está representado pelas equações (1.7) no capítulo I. A solução encontrada e que minimiza a saturação global está na figura (4.9).

Nesta solução nota-se que a linha 8 foi utilizada até o seu limite máximo para que a linha 11 tivesse o mínimo de saturação.

#### 4.4. Comentário

Nos itens 4.1 e 4.2 discutidos, uma contingência (perda de geração) provoca o afastamento das condições normais de operação. Nem sempre isto ocorre em função de uma contingência. Um exemplo pode ser apresentado em que um aumento na demanda do sistema leva a uma operação de emergência. Neste caso o problema é tratado da mesma forma.

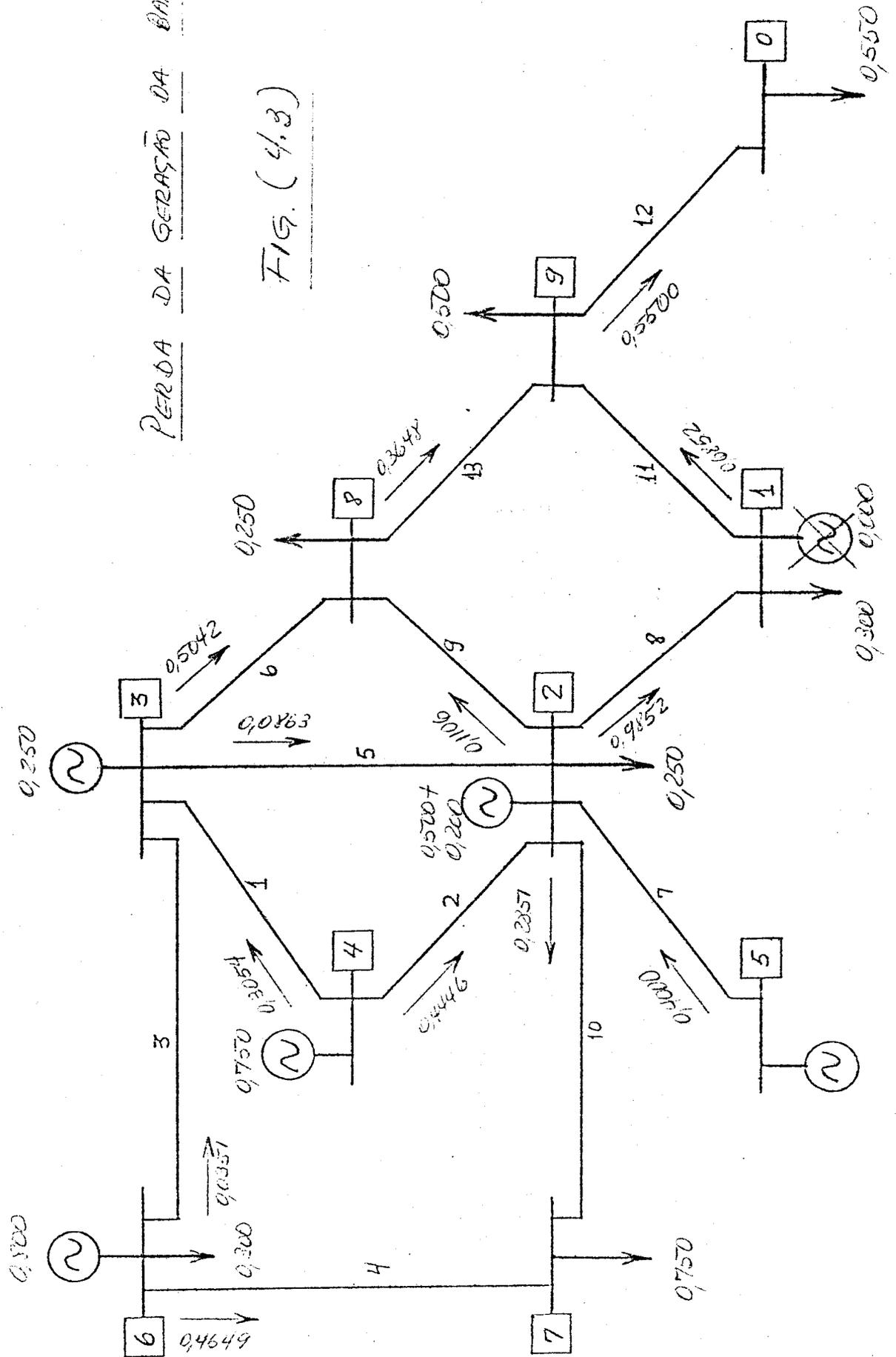
CASO BÁSICO  
FIG. (4.1)





PERDA DA GERAÇÃO DA BARRA 1

FIG. (4.3)

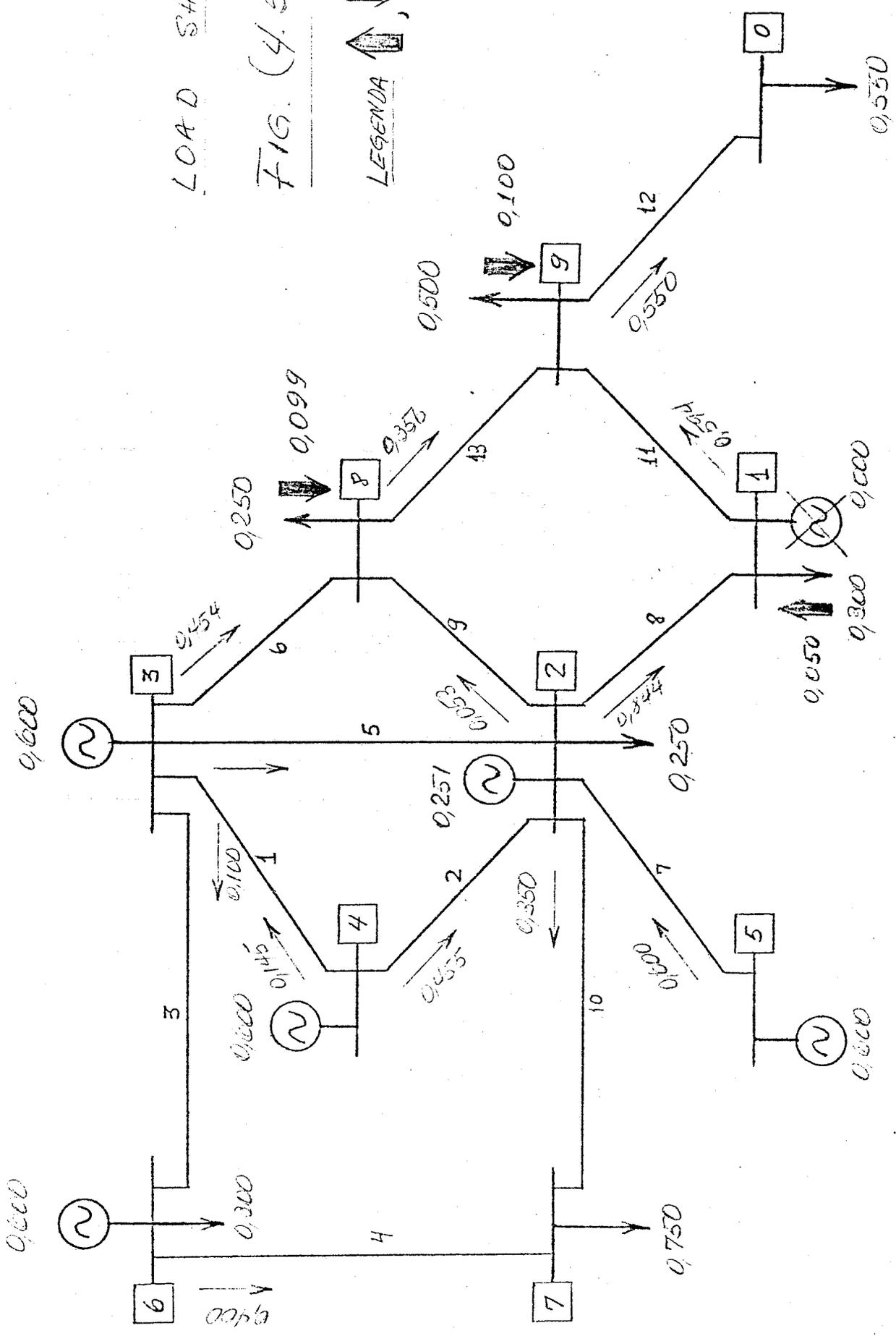




LOAD SHEDDING

FIG. (4.5)

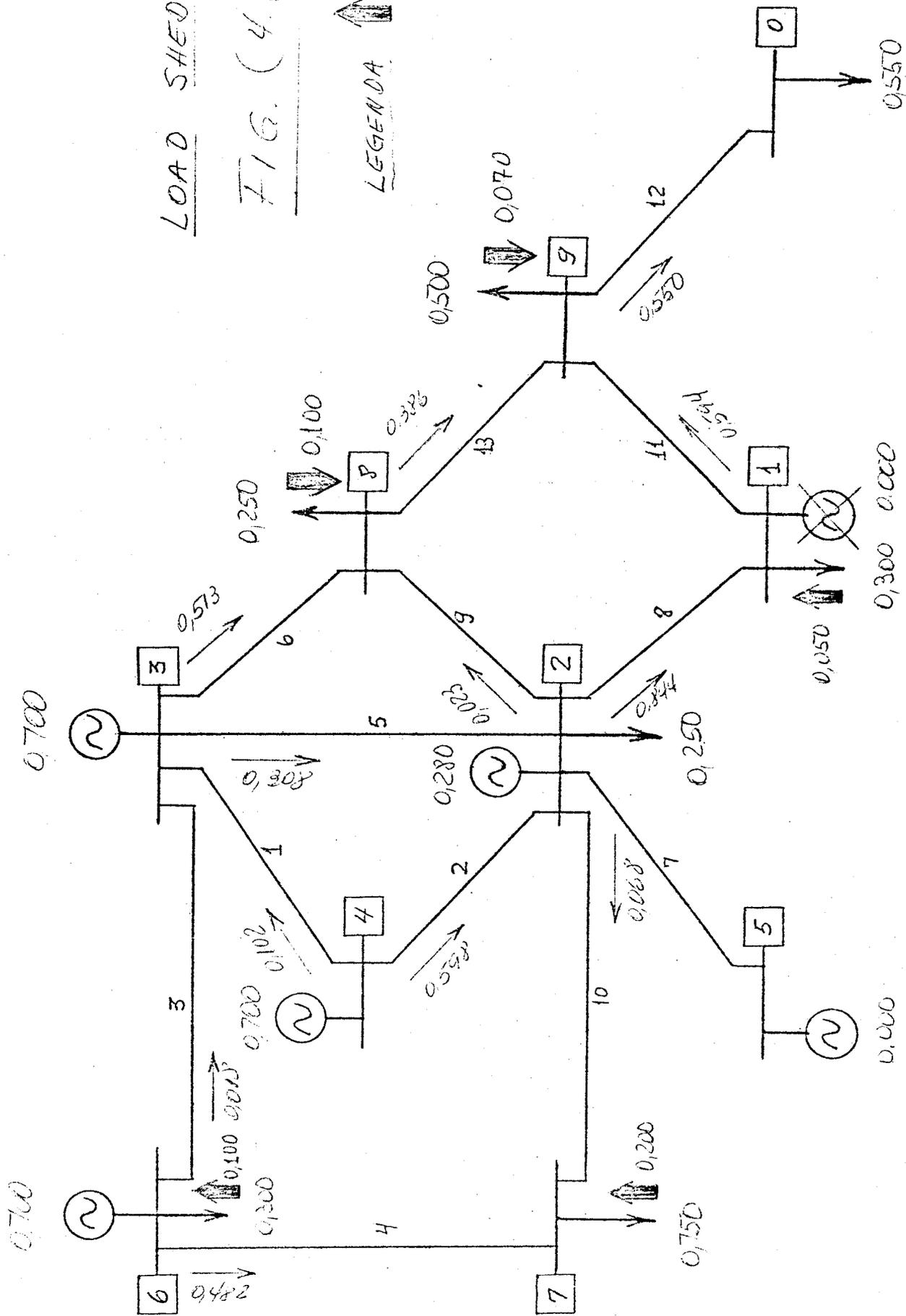
LEGENDA ↑, ↓ : CORTE  
 DEMANDA



LOAD SHEDDING

FIG. (4.6)

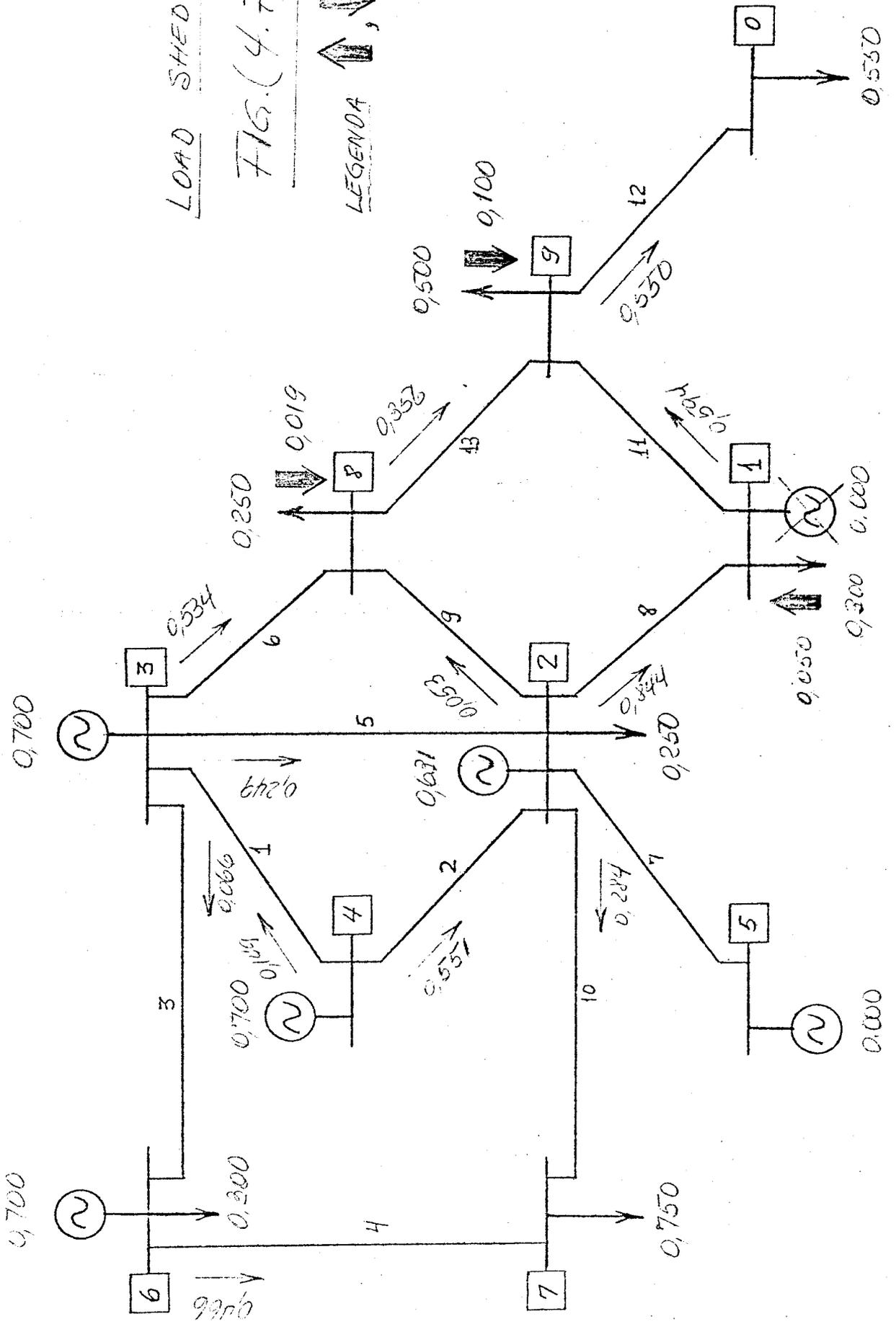
LEGENDA ↑ : CORT  
 ↓ : DEF



LOAD SHEDDING

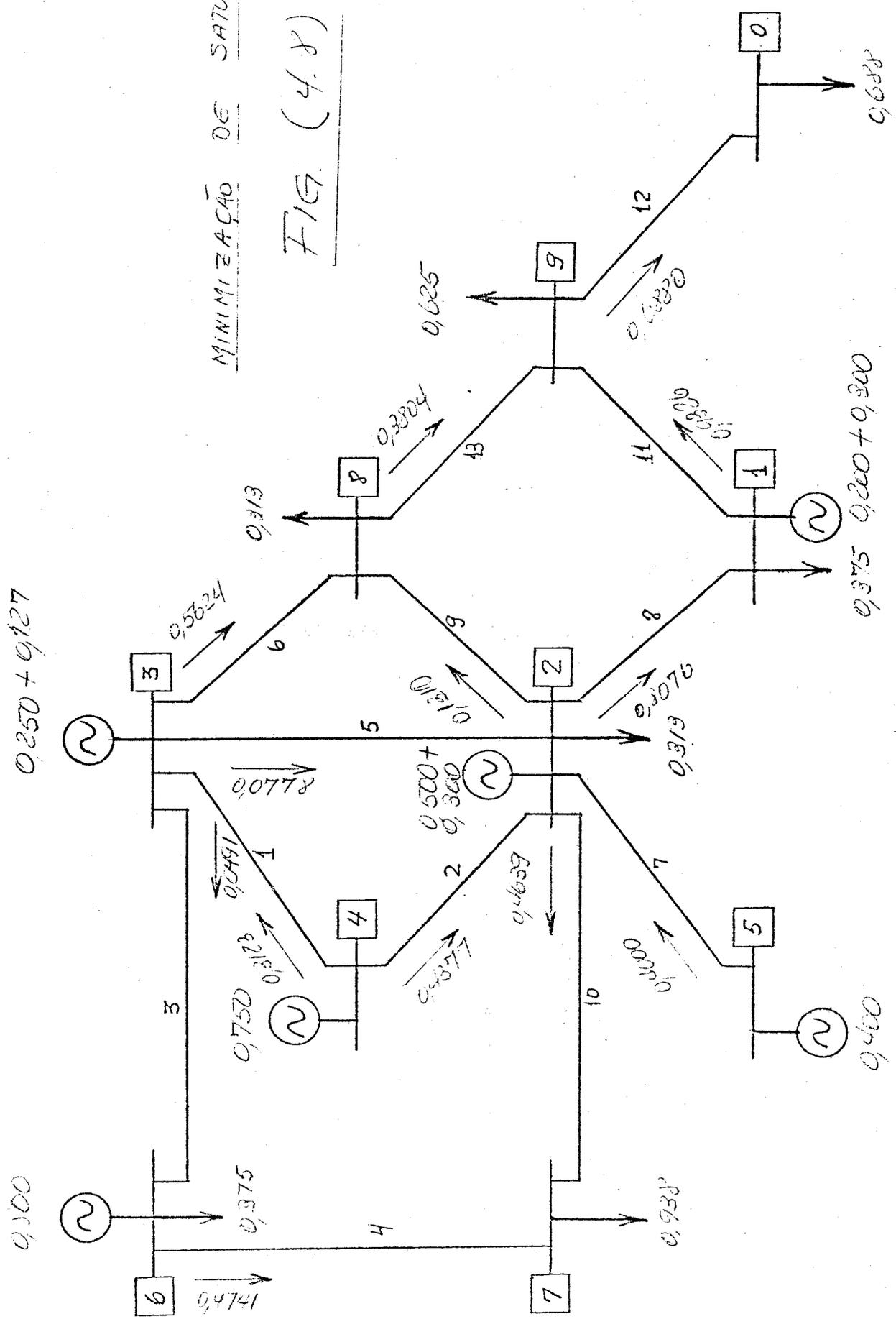
FIG. (4.7)

LEGENDA ↑, ↓ : CORTE A  
↓ : DEMANDA



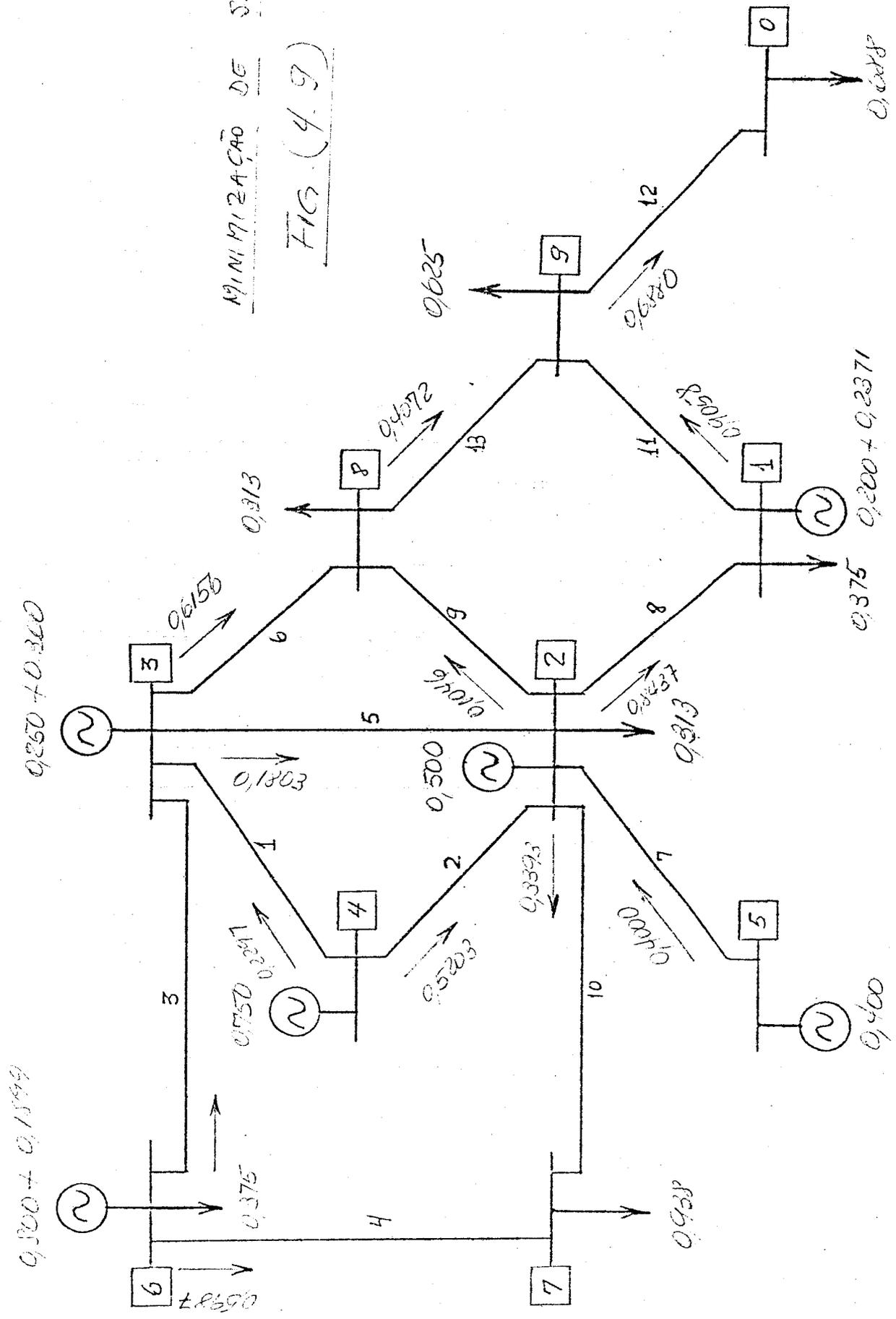
MINIMIZAÇÃO DE SATURAÇÃO

FIG. (4.8)



MINIMIZAÇÃO DE SATURACÃO

FIG. (4.9)



## CAPÍTULO V

### CONCLUSÕES GERAIS

O algoritmo descrito pelas equações (1.6), através do qual é obtida uma solução inicial para o outro algoritmo descrito pelas equações (1.7), constitui-se, por si, em uma forma de verificar a possibilidade de que um remanejamento de geração ativa possa permitir a operação normal, após a ocorrência de uma contingência, como aquela tratada nos exemplos considerados. Além de indicar os casos em que um simples remanejamento de geração, quando ocorre uma contingência, não reconduz a um estado de operação normal, nos casos em que isto é possível uma solução (um modo de operação normal) é apresentada e esta pode ser, como já se disse anteriormente, tomada como solução inicial de um outro processo que visaria de terminar se dessa solução pode-se passar a outra que otimiza algum critério escolhido, como por exemplo, o custo de operação. Este é um passo posterior e faz sentido porque a obtenção de uma solução inicial (um estado normal de operação) se faz a revelia de quaisquer considerações econômicas.

Através do uso do conjunto de equações (1.8)e(1.9) (no fundo a aplicação repetida do mesmo algoritmo) verifica-se que se pode realizar o corte nas demandas (load shedding) e apresentar uma solução, isto é, um modo de operação que satis-

faz às restrições operativas e que, se não satisfaz às restrições de carga, procura maximizar a demanda atendida.

Combinando-se as equações (1.6) e (1.7) verifica-se que se pode utilizar ambos os algoritmos para determinar onde, desde um ponto de vista de utilização da capacidade instalada, e para os casos de aumento de demanda, é conveniente instalar novas unidades geradoras e, nos casos de ocorrência de saturação dessa capacidade, como obter uma solução que minimize a saturação global do sistema. Os resultados obtidos dessa combinação apresentam indicações de providências que podem ser tomadas no sentido de atender a demanda fazendo-se alterações na topologia da rede.

## APÊNDICE P1

### 1. CONVEXIDADE DA FUNÇÃO F(x)

Seja  $F(x)$  uma função linear por partes, conforme definido em (2,1). Sejam  $\underline{x}^1$  e  $\underline{x}^2$  vetores pertencentes ao poliedro convexo  $R$  e  $\underline{x}$  com vetor definido por  $\underline{x} = \mu \underline{x}^1 + (1 - \mu) \underline{x}^2$ , onde  $0 \leq \mu \leq 1$ . Nessas condições

$$F[\mu \underline{x}^1 + (1 - \mu) \underline{x}^2] \leq \mu F(\underline{x}^1) + (1 - \mu) F(\underline{x}^2)$$

para todo  $0 \leq \mu \leq 1$ .

#### Demonstração

A partir da definição de função linear por partes pode-se escrever,

$$\mu F(\underline{x}^1) = \mu \max_{1 \leq i \leq s} (\underline{D}_i \underline{x}^1 - b_i)$$

$$(1 - \mu) F(\underline{x}^2) = (1 - \mu) \max_{1 \leq i \leq s} (\underline{D}_i \underline{x}^2 - b_i)$$

como  $0 \leq \mu \leq 1$  essas duas últimas equações podem ser reescritas

$$\mu F(\underline{x}^1) = \max_{1 \leq i \leq s} [\mu(D_i \underline{x}^1 - b_i)]$$

$$(1 - \mu) F(\underline{x}^2) = \max_{1 \leq i \leq s} [(1 - \mu)(D_i \underline{x}^2 - b_i)]$$

Somando-se membro a membro essas duas últimas equações vem

$$\begin{aligned} \mu F(\underline{x}^1) + (1 - \mu) F(\underline{x}^2) &= \\ &= \max_{1 \leq i \leq s} [\mu(D_i \underline{x}^1 - b_i)] + \max_{1 \leq i \leq s} [(1 - \mu)(D_i \underline{x}^2 - b_i)] \end{aligned}$$

Designando-se

$$f_1'(i) = \mu(D_i \underline{x}^1 - b_i) \quad (P1-1)$$

$$f_2'(i) = (1 - \mu)(D_i \underline{x}^2 - b_i)$$

$$\mu F(\underline{x}^1) + (1 - \mu) F(\underline{x}^2) = \max_{1 \leq i \leq s} \{f_1'(i)\} + \max_{1 \leq i \leq s} \{f_2'(i)\} \quad (P1-2)$$

Por outro lado

$$F[\mu \underline{x}^1 + (1 - \mu) \underline{x}^2] = \max_{1 \leq i \leq s} \left\{ D_i [\mu \underline{x}^1 + (1 - \mu) \underline{x}^2] - b_i \right\}$$

Utilizando-se da identidade  $b_i = \mu b_i + (1 - \mu) b_i$  e tendo em vista as relações (P1 - 1), vem

$$F[\mu \underline{x}^1 + (1 - \mu) \underline{x}^2] = \max_{1 \leq i \leq s} \left\{ f_1'(i) + f_2'(i) \right\} \quad (P1 - 3)$$

Sejam  $i_1$  e  $i_2$  os índices  $i$  que maximizam  $f_1'(i)$  e  $f_2'(i)$ , respectivamente, em (P 1-2), e seja  $i_3$  o índice  $i$  que maximiza  $f'(i) = f_1'(i) + f_2'(i)$  em (P 1-3).

Como  $f_1'(i_1) \geq f_1'(i)$  qualquer  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$

$f_2'(i_2) \geq f_2'(i)$  qualquer  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$

Segue-se que, em particular, para  $i=i_3$

$$f_1'(i_1) + f_2'(i_2) \geq f'(i_3) = f_1'(i_3) + f_2'(i_3)$$

e o teorema está demonstrado.

$$\text{A função } F(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j)$$

com que se trabalha é linear por partes e sendo cada função  $f_j(x_j)$  convexa, demonstra-se [2] que a soma de funções convexas é uma função convexa.

## COMENTÁRIOS SOBRE A NOTAÇÃO

Em capítulos diferentes, apenas para preservar a notação da referência, fez-se corresponder ao mesmo símbolo, em alguns casos, grandezas de significado físico completamente diferente. Apresenta-se abaixo, apenas para os símbolos em conflito, uma lista em que os números que aparecem entre parênteses relacionam o significado do símbolo com os capítulos em que aparecem.

- C
  - matriz de incidência de ramo em nó em relação ao grafo associado ao sistema de potência (1)
  - vetor de coeficientes das secções lineares da função linear por partes (2), (3)
- D
  - demanda de potência ativa (1)
  - uma relacionada com a função linear por partes (2)
- F
  - fluxo de potência ativa (1)
  - função linear por partes (2), (3)
- G
  - geração de potência ativa (1)
  - uma função vetorial (2)
- $\gamma$ 
  - capacidade da linha de transmissão (1)
  - ponto crítico de uma variável  $x$  (2), (3)
- $\theta$ 
  - ângulo de barra no sistema de potência (1)
  - número de um ponto crítico (2), (3)
- $\psi$ 
  - ângulo de linha no sistema de potência (1)
  - função objetivo artificial (3).

## BIBLIOGRAFIA

1. E. GOLSTEIN; D. YODINE  
"Problèmes particuliers de la programmation linéaire".  
Editions Mir - Moscou, 1973
2. DAVID G. LUENBERGER  
"Introduction to linear and nonlinear programming".  
Addison Wesley
3. M. SIMMONARD  
"Programacion lineal".  
Paraninfo, Madrid, 1972.
4. A. J. MONTICELLI  
"Expansão de sistemas elétricos de potência: Um algoritmo para planejamento do sistema de transmissão".  
(Tese de Doutorado)  
UNICAMP, 1973.
5. OLLE I. ELGERD  
"Electric energy systems theory: An introduction"  
Mc Graw - Hill Book Company, 1971
6. C. K. PANG et al  
"Security evaluation in power systems using pattern recognition".  
IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems ,  
Vol Pas-93, nº 3, 1974.
7. "Electrical transmission and distribution reference book".  
Westinghouse Electric Corporation, 1964.

8. L. P. HAJDU and R. PODMORE  
"Security enhancement for power systems"  
IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems.
  
9. M. SAKAROVITCH  
"Notes on Linear Programming"  
DUNOD - PARIS