



Universidade Estadual de Campinas

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Departamento de Comunicações

“PROPOSTA DE UM MÉTODO SUB-ÓTIMO PARA
ESTIMAÇÃO ESPECTRAL DO MODELO ARMA”

Manoel Ivanildo Silvestre Bezerra

Orientador: Prof. Dr. Yuzo Iano

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: **Telecomunicações e Telemática.**

Banca Examinadora

Prof. Dr. Yuzo Iano	Decom/ Feec/ Unicamp
Prof. Dr. Leonardo Lorenzo Bravo Roger	FT/ Unicamp
Prof. Dr. Edson Luiz Ursini	FT/ Unicamp
Prof. Dr. Carlos Eduardo Câmara	FT/ UniAnchieta
Prof. Dr. David Bianchini	Ceatec/ PUC

Campinas – SP
Maio/ 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Si39p Silvestre Bezerra, Manoel Ivanildo
Proposta de um método sub-ótimo para estimação
espectral do modelo ARMA / Manoel Ivanildo Silvestre
Bezerra. --Campinas, SP: [s.n.], 2012.

Orientador: Yuzo Iano.
Tese de Doutorado - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Análise espectral. 2. Processamento de sinais. 3.
Espectro de potência. 4. Processo estocástico - Modelos
matemáticos. 5. Mínimos quadrados. I. Yuzo Iano. II.
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Proposal of a sub-optimal method to spectral estimation of the
ARMA model

Palavras-chave em Inglês: Spectral analysis, Signal processing, Power spectral,
Stochastic process - Mathematical models, Least squares

Área de concentração: Telecomunicações e Telemática

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Leonardo Lorenzo Bravo Roger, Edson Luiz Ursini, Carlos
Eduardo Câmara, David Bianchini

Data da defesa: 31-05-2012

Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

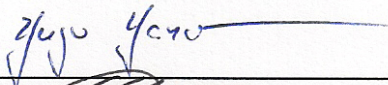
COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidato: Manoel Ivanildo Silvestre Bezerra

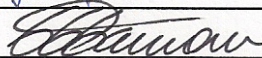
Data da Defesa: 31 de maio de 2012

Título da Tese: "Proposta de um Método Sub-Ótimo para Estimação Espectral do Modelo ARMA"

Prof. Dr. Yuzo Iano (Presidente):



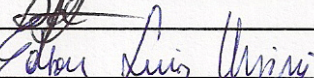
Prof. Dr. Carlos Eduardo Câmara:



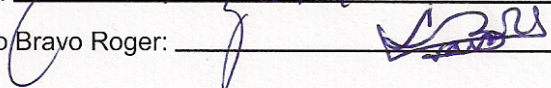
Prof. Dr. David Bianchini:



Prof. Dr. Edson Luiz Ursini:



Prof. Dr. Leonardo Lorenzo Bravo Roger:



Agradecimentos

A Deus por tudo que tenho.

À minha esposa Miriam, e meus filhos: André Luiz e Beatriz, pelo apoio durante essa longa jornada que chegou ao fim, sem eles eu não teria conseguido.

Ao meu orientador Prof. Yuzo Iano, sou muito grato pelo apoio e incentivo, que fez com que eu não desistisse desse desafio.

Ao meu ex-orientador Prof. Amauri Lopes, pelas contribuições no início do trabalho.

Ao Prof. Rangel Arthur e Prof. Luiz César Martini, pelas sugestões no exame de qualificação.

Aos colegas do Departamento de Estatística que me deram apoio, principalmente ao amigo e Prof. Fernando Antonio Moala pelas contribuições no trabalho.

Aproveito a oportunidade para fazer um agradecimento especial ao casal José Ramos e Nadir pela amizade de longos anos, pelos momentos de alegria compartilhados e pelo acolhimento sempre generoso durante minhas estadias em Campinas. Obrigado amigos.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro.

À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo).

Ao programa CAPES RH-TVD.

Ao CNPq (Conselho Nacional Desenvolvimento Científico e Tecnológico).

À FUNDUNESP (Fundação para Desenvolvimento da Unesp), pelo apoio financeiro.

À memória dos meus pais: José e Aida.

"Tudo corre tão depressa se você tropeça não vai levantar!..."
(Alceu Valença)

"A gente espera do mundo, e o mundo espera de nós,
um pouco mais de paciência..."
(Lenine/Dudu Falcão)

Resumo

Neste trabalho é proposto um novo método de estimação separada (sub-ótimo) para o processo (modelo) espectral ARMA. Os métodos sub-ótimos utilizam-se das equações de Yule-Walker e do método de mínimos quadrados para as estimativas AR, e geralmente do método de Durbin para as estimativas MA. Dado que os parâmetros AR e MA já foram estimados, no método proposto é feita uma nova filtragem AR do sinal de interesse utilizando-se as estimativas da parte MA. A partir deste novo sinal estimado, determinam-se as novas estimativas das partes AR e MA do processo ARMA, e em seguida obtém-se a estimativa da densidade espectral de potência. Os resultados dependem muito do espectro de interesse, e da parametrização que foi utilizada, mas de um modo geral os resultados fornecidos foram muito bons. Um estudo descrevendo os principais métodos de estimação espectral paramétrica dos processos ARMA também é realizado neste trabalho. Esses métodos são comparados medindo a precisão através do erro relativo e do coeficiente de variação médio das estimativas dos parâmetros.

Palavras-chave: estimação espectral paramétrica, processos autorregressivos médias-móveis, equações de Yule-Walker, método de mínimos quadrados.

Abstract

This work proposes a new method of estimating separate (sub-optimal) for the spectrum ARMA process (model). The sub-optimal methods use the Yule-Walker equations and the method of least squares estimates for the AR, and usually the method of Durbin estimates for MA. Since AR and MA parameters have been estimated, in the method it is made a new AR filtering of the signal of interest using the estimates of the MA. From this new estimated signal, the new AR and MA estimates of parts from the ARMA process are obtained, and then the power spectral density is estimated. The results depend so much on the spectrum of interest and the parameterization used in the process, but generally the final results were very good. A study describing the main methods of parametric spectral estimation of ARMA processes is also performed in this work. These methods are compared by measuring their accuracy through the relative error and the average coefficient of variation of the parameter estimates.

Keywords: *parametric spectral estimation, processes autoregressive moving average, equations of Yule-Walker, least squares method.*

Sumário

Lista de Figuras	xvi
Lista de Tabelas	xxii
Lista de Abreviaturas	xxiii
Lista de Símbolos	xxiv
Lista de Publicações	xxv
1 Introdução	1
1.1 Introdução	1
1.2 Motivações e Objetivos	2
1.3 Organização da Tese	3
2 Processos AR e MA	4
2.1 Processo autorregressivo Espectral	4
2.1.1 Algoritmo de Levinson	8
2.2 Métodos de Estimação Espectral Autorregressiva	8
2.2.1 Método da Autocorrelação	8
2.2.2 Método da Covariância	12
2.2.3 Método da Covariância Modificada	14
2.2.4 Método de Burg	16
2.3 Processo Média-Móvel Espectral	17
2.4 Método de Estimação Espectral Média-Móvel	18
2.4.1 Método de Estimação de Durbin	19
3 Processos ARMA	22
3.1 Processo Autorregressivo Média-Móvel Espectral	22
3.2 Propriedades e Características dos Processos ARMA	23
3.3 Critério de Informação de Akaike (CIA)	24
3.4 Propriedades das Estimativas do Vetor de Parâmetros	25
3.5 O Limite de Cramér-Rao Assintótico para o Processo ARMA	31

3.5.1	Cálculo do Limite de Cramér-Rao Assintótico	34
3.6	Métodos de Estimação Espectral Simultânea para o Processo ARMA	35
3.6.1	Método de Máxima Verossimilhança	36
3.6.2	Estatísticas das Estimativas de Máxima Verossimilhança	37
3.6.3	Método de Akaike	38
3.6.4	Método de Estimação de Steiglitz - McBride	40
3.7	Métodos de Estimação Espectral Separada para o Processo ARMA	42
3.7.1	Equações Modificadas de Yule-Walker (EMYW)	44
3.7.2	Método dos Mínimos Quadrados - (MQYW)	45
3.7.3	Método dos Mínimos Quadrados Ponderados - (MQYWP)	48
3.7.4	Método de Estimação ARMA Linear	49
3.7.5	Método de Estimação Separada Via Cepstrum	53
4	Método de Estimação Espectral Proposto para o Processo ARMA	56
4.1	Descrição do Novo Método (MQYWS)	56
4.2	Implementação do Algoritmo	60
5	Simulações	62
5.1	Exemplos de Processos ARMA	62
5.1.1	Processo ARMA(4,4)	63
5.1.2	Processo ARMA(4,3)	64
5.1.3	Processo ARMA(4,2)	65
5.2	Simulações de Monte Carlo	66
5.2.1	Procedimentos das Simulações	66
5.2.2	Comparação dos Métodos via Erro Relativo e Coeficiente de Variação Médio	67
5.3	Análise dos Resultados via ER e CVM	69
5.3.1	Análise dos Resultados para o Processo ARMA(4,4) (Tabela 5.1)	70
5.3.2	Análise dos Resultados para o Processo ARMA(4,3) (Tabela 5.2)	71
5.3.3	Análise dos Resultados para o Processo ARMA(4,2) (Tabela 5.3)	72
5.4	Esforço Computacional dos Métodos	72
5.4.1	Análise do Esforço Computacional	73
5.5	Convergência do Método Proposto	73
5.5.1	Convergência do Método Proposto para o ARMA(4,4)	74
5.5.2	Convergência do Método Proposto para o modelo ARMA(4,3)	77
5.5.3	Convergência do Método Proposto para o ARMA(4,2)	79
6	Conclusões	82
6.1	Descrição do Trabalho	82
6.2	Conclusão	83
6.3	Resumo das Contribuições	84
6.4	Trabalhos Futuros	85

A	Desvios-Padrões; EMR e CVM, das Estimativas dos Parâmetros dos Processos ARMA	92
B	Estimativas Médias dos Espectros, Polos e Zeros, e Valores Teóricos	105
C	Alguns Programas Utilizados	160
C.1	Programa 1	160
C.2	Programa 2	163
C.3	Programa 3	167
C.4	Programa 4	168
C.5	Programa 5	172
D	Estimação Bayesiana	176
D.1	Estimação Bayesiana para o Modelo ARMA	176

Lista de Figuras

3.1	Interpretação geométrica do limite de Cramer-Rao (Figura adaptada de [8]).	29
3.2	Interpretação dos métodos de estimação separada para o processo ARMA utilizando diagramas em bloco.	43
4.1	Sinal passando através de um filtro MA para a obtenção do processo residual.	58
4.2	Filtragem do sinal através de um filtro AR para obtenção de uma nova estimativa.	59
5.1	Polos (x) e zeros (o) e densidade espectral de potência - ARMA(4,4). . . .	63
5.2	Polos (x) e zeros (o) e densidade espectral de potência - ARMA(4,3). . . .	64
5.3	Polos (x) e zeros (o) e densidade espectral de potência - ARMA(4,2). . . .	65
5.4	Histograma das estimativas de a2 - modelo ARMA(4,4).	76
5.5	Histograma da estimativas de b3 - modelo ARMA(4,4).	76
5.6	Histograma das estimativas a3 - modelo ARMA(4,3).	78
5.7	Histograma das estimativas b3 - modelo ARMA(4,3).	79
5.8	Histograma das estimativas de a4 - modelo ARMA(4,2).	81
5.9	Histograma das estimativas de b1 - modelo ARMA(4,2).	81
B.1	Estimativas dos espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - EMYW - N=256 - L=125 - M=p+q.	106
B.2	Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - EMYW - N=256 - L=125 - M=p+q	106
B.3	Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - EMYWP - N=256 - L=125 - M=p+q.	107
B.4	Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - EMYWP - N=256 - L=125 - M=p+q.	107
B.5	Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYW - N=256 - L=125 - M=20.	108
B.6	Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYW - N=256 - L=125 - M=20.	108
B.7	Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWP - N=256 - L=125 - M=20.	109

B.8	Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWP - N=256 - L=125 - M=20.	109
B.9	Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWS - N=256 - L=125 - M=20.	110
B.10	Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWS - N=256 - L=125 - M=20	110
B.11	Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWSP - N=256 - L=125 - M=20.	111
B.12	Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWSP - N=256 - L=125 - M=20	111
B.13	Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MosesYW - N=256 - L=125 - M=p+q+nz.	112
B.14	Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MosesYW - N=256 - M=p+q+nz.	112
B.15	Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWCp - N=256 - M=20.	113
B.16	Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWCp - N=256 - M=20.	113
B.17	Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWCpP - N=256 - M=20.	114
B.18	Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWCpP - N=256 - M=20.	114
B.19	Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - EMYW - N=1024 - L=500 - M=p+q.	115
B.20	Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - EMYW - N=1024 - L=500 - M=p+q.	115
B.21	Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - EMYWP - N=1024 - L=500 - M=p+q.	116
B.22	Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - EMYWP - N=1024 - L=500 - M=p+q.	116
B.23	Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYW - N=1024 - L=500 - M=80.	117
B.24	Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYW - N=1024 - L=500 - M=80.	117
B.25	Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWP - N=1024 - L=500 - M=80.	118
B.26	Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWP - N=1024 - L=500 - M=80.	118
B.27	Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWS - N=1024 - L=500 - M=80.	119
B.28	Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWS - N=1024 - L=500 - M=80.	119

B.29 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWSP - N=1024 - L=500 - M=80.	120
B.30 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWSP - N=1024 - L=500 - M=80.	120
B.31 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MosesYW - N=1024 - M=p+q+nz.	121
B.32 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MosesYW - N=1024 - M=p+q+nz.	121
B.33 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWCp - N=1024 - M=80.	122
B.34 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWCp - N=1024 - M=80.	122
B.35 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWCpP - N=1024 - M=80.	123
B.36 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWCpP - N=1024 - M=80.	123
B.37 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - EMYW - N=256 - L=125 - M=p+q.	124
B.38 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - EMYW - N=256 - L=125 - M=p+q.	124
B.39 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - EMYWP - N=256 - L=125 - M=p+q.	125
B.40 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - EMYWP - N=256 - L=125 - M=p+q.	125
B.41 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYW - N=256 - L=125 - M=10.	126
B.42 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYW - N=256 - L=125 - M=10.	126
B.43 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWP - N=256 - L=125 - M=10.	127
B.44 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWP - N=256 - L=125 - M=10.	127
B.45 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWS - N=256 - L=125 - M=10.	128
B.46 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWS - N=256 - L=125 - M=10.	128
B.47 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWSP - N=256 - L=125 - M=10.	129
B.48 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWSP - N=256 - L=125 - M=10.	129
B.49 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MosesYW - N=256 - M=p+q+nz.	130

B.50 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MosesYW - N=256 - M=p+q+nz.	130
B.51 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWC _p - N=256 - M=10.	131
B.52 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWC _p - N=256 - M=10.	131
B.53 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWC _{pP} - N=256 - M=10.	132
B.54 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWC _{pP} - N=256 - M=10.	132
B.55 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - EMYW - N=1024 - L=500 - M=p+q.	133
B.56 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - EMYW - N=1024 - L=500 - M=p+q.	133
B.57 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - EMYWP - N=1024 - L=500 - M=p+q.	134
B.58 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - EMYWP - N=1024 - L=500 - M=p+q.	134
B.59 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYW - N=1024 - L=500 - M=10.	135
B.60 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYW - N=1024 - L=500 - M=10.	135
B.61 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWP - N=1024 - L=500 - M=10.	136
B.62 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWP - N=1024 - L=500 - M=10.	136
B.63 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWS - N=1024 - L=500 - M=10.	137
B.64 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWS - N=1024 - L=500 - M=10.	137
B.65 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWSP - N=1024 - L=500 - M=10.	138
B.66 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWSP - N=1024 - L=500 - M=10.	138
B.67 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MosesYW - N=1024 - M=p+q+nz.	139
B.68 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MosesYW - N=1024 - M=p+q+nz.	139
B.69 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWC _p - N=1024 - M=10.	140
B.70 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWC _p - N=1024 - M=10.	140

B.71 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWCpP - N=1024 - M=10.	141
B.72 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWCpP - N=1024 - M=10	141
B.73 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - EMYW - N=256 - L=85 - M=p+q.	142
B.74 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - EMYW - N=256 - L=85 - M=p+q.	142
B.75 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - EMYWP - N=256 - L=85 - M=p+q.	143
B.76 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - EMYWP - N=256 - L=85 - M=p+q.	143
B.77 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYW - N=256 - L=85 - M=10.	144
B.78 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYW - N=256 - L=85 - M=10.	144
B.79 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWP - N=256 - L=85 - M=10.	145
B.80 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWP - N=256 - L=85 - M=10.	145
B.81 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWS - N=256 - L=85 - M=10.	146
B.82 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWS - N=256 - L=85 - M=10.	146
B.83 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWSP - N=256 - L=85 - M=10.	147
B.84 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWSP - N=256 - L=85 - M=10.	147
B.85 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MosesYW - N=256 - M=p+q+nz.	148
B.86 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MosesYW - N=256 - M=p+q+nz.	148
B.87 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWCp - N=256 - M=10.	149
B.88 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWCp - N=256 - M=10.	149
B.89 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWCpP - N=256 - M=10.	150
B.90 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWCpP - N=256 - M=10.	150
B.91 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - EMYW - N=1024 - L=340 - M=p+q.	151

B.92 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - EMYW - N=1024 - L=340 - M=p+q.	151
B.93 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - EMYWP - N=1024 - L=340 - M=p+q.	152
B.94 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - EMYWP - N=1024 - L=340 - M=p+q.	152
B.95 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYW - N=1024 - L=340 - M=10.	153
B.96 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYW - N=1024 - L=340 - M=10.	153
B.97 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWP - N=1024 - L=340 - M=10.	154
B.98 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWP - N=1024 - L=340 - M=10.	154
B.99 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWS - N=1024 - L=340 - M=10.	155
B.100 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWS - N=1024 - L=340 - M=10.	155
B.101 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWSP - N=1024 - L=340 - M=10.	156
B.102 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWSP - N=1024 - L=340 - M=10.	156
B.103 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MosesYW - N=1024 - M=p+q+nz.	157
B.104 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MosesYW - N=1024 - M=p+q+nz.	157
B.105 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWC _p - N=1024 - M=10.	158
B.106 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWC _p - N=1024 - M=10.	158
B.107 Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWC _p P - N=1024 - M=10.	159
B.108 Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWC _p P - N=1024 - M=10.	159

Lista de Tabelas

5.1	Erro relativo e coeficiente de variação médio para o modelo ARMA(4,4). . .	68
5.2	Erro relativo e coeficiente de variação médio para o modelo ARMA(4,3). . .	69
5.3	Erro relativo e coeficiente de variação médio para o modelo ARMA(4,2). . .	70
5.4	Esforço computacional dos métodos (FLOPS).	73
5.5	Convergência do método proposto para o modelo ARMA(4,4).	75
5.6	Estatísticas AR, N=1024 e B=3000, modelo ARMA(4,4).	75
5.7	Estatísticas MA, N=1024 e B=3000, modelo ARMA(4,4).	75
5.8	Convergência do método proposto para o modelo ARMA(4,3).	77
5.9	Estatísticas AR, N=1024 e B=3000, modelo ARMA(4,3).	78
5.10	Estatísticas MA, N=1024 e B=3000, modelo ARMA(4,3).	78
5.11	Convergência do método proposto para o modelo ARMA(4,2).	80
5.12	Estatísticas AR, B=3000 e N=1024, modelo ARMA(4,2).	80
5.13	Estatísticas MA, B=3000 e N=1024, modelo ARMA(4,2).	80
A.1	Média, (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,4). . . .	93
A.2	Média e (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,4). . . .	94
A.3	Média e (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,4). . . .	95
A.4	Média e (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,4). . . .	96
A.5	Média e (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,3). . . .	97
A.6	Média e (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,3). . . .	98
A.7	Média e (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,3). . . .	99
A.8	Média e (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,3). . . .	100
A.9	Média e (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,2). . . .	101
A.10	Média e (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,2). . . .	102
A.11	Média e (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,2). . . .	103
A.12	Média e (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,2). . . .	104

- AR - Autoregressivo (*autoregressive*)
ARMA - Autoregressivo médias-móveis (*autoregressive moving-average*)
CIA - Critério de informação de Akaike
COVAS - Covariância assintótica
CRU - Circunferência de raio unitário
CVM - Coeficiente de variação médio
DEP - Densidade espectral de potência
EMV - Estimador de máxima verossimilhança
EMR - Erro médio relativo
EMYW - Equações modificadas de Yule-Walker
EMYWP - Equações modificadas de Yule-Walker ponderado
ER - Erro relativo
ESA - Estacionário no sentido amplo
FEP - Filtro de erro de predição
FLOPS - Floating point operation count
fdp - função de densidade de probabilidade
LCR - Limite de Cramer-Rao
MA - médias móveis (*moving average*)
MQYW - Mínimos quadrados Yule-Walker
MQYWP - Mínimos quadrados Yule-Walker ponderado
MQYWS - Mínimos quadrados Yule-Walker - método proposto
MQYWSP - Mínimos quadrados Yule-Walker - método proposto ponderado
MQYWM - Mínimos quadrados Yule-Walker proposto por Moses
MQYWCp - Mínimos quadrados Yule-Walker cepstrum
MQYWCpP - Mínimos quadrados Yule-Walker cepstrum ponderado
MV - Máxima verossimilhança
RII - Resposta impulsiva infinita
RIF - Resposta impulsiva finita
SAC - Sequência de autocorrelação
TIF - Transformada inversa de Fourier

- $H(z)$ - Função de transferência do sistema ARMA
 $X(z)$ - Função de transferência do sistema AR
 $Y(z)$ - Função de transferência do sistema MA
 $S_{AR}(z)$ - Densidade espectral de potência do processo AR no plano- z
 $S_{AR}(f)$ - Densidade espectral de potência do processo AR na frequência
 $S_{MA}(z)$ - Densidade espectral de potência do processo MA no plano- z
 $S_{MA}(f)$ - Densidade espectral de potência do processo MA na frequência
 $S_{ARMA}(z)$ - Densidade espectral de potência do processo ARMA no plano- z
 $S_{ARMA}(f)$ - Densidade espectral de potência do processo ARMA na frequência
 $\rho(a)$ - Erro de predição
 $\rho_{MIN}(a)$ - Erro de predição mínimo
 $r_x(k)$ - Função de autocorrelação de x
 σ_a^2 - Variância do ruído branco
 I_θ - Matriz de informação de Fischer
 C_θ - Matriz de covariâncias
 $\hat{\theta}$ - Estimativas do vetor de parâmetros
 $N(\theta, I_\theta^{-1})$ - Distribuição Gaussiana com média θ e covariância I_θ^{-1}
 R - Matriz das autocorrelações de x
 r - Vetor das autocorrelações de x
 R_{xy} - Matriz das autocorrelações de x e y
 $f(x, a, b, \sigma^2)$ - Função de verossimilhança do processo ARMA
 $H(a, b)$ - Matriz hessiana com relação aos vetores a e b
 $y_r(n)$ - Processo residual
 $\hat{x}(n)$ - Estimativa do sinal $x(n)$
 $\partial\rho/\partial a_k$ - Derivadas parciais de ρ com relação a_k
 $\bar{\theta}_i$ - é a média das estimativas do i -ésimo parâmetro.
 $\hat{\sigma}_i(\hat{\theta}_i)$ - desvio-padrão das estimativas do i -ésimo parâmetro
 $\hat{\theta}_i^{(j)}$ - é a i -ésima estimativa da j -ésima estimativa das B repetições
 ER_θ - Erro relativo de θ
 $EQMR_\theta$ - Erro quadrático médio relativo
 $CV M_\theta$ - Coeficiente de variação médio
 ER_j - j -ésimo Erro relativo

-
- BEZERRA, M. I. S., MOALA, F.A., IANO, Y. A Bayesian analysis of spectral ARMA model. Mathematical Problems in Engineering, Hindawi Publishing Corporation. Aceito em Abril de 2012.
 - BEZERRA, M. I. S., IANO, Y., TARUMOTO, Mário H. Evaluating some Yule-Walker methods with the maximum-likelihood estimator for the spectral ARMA model. TEMA. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional. V.2, p.175 - 184, 2008.
 - BEZERRA, M. I. S., IANO, Y., TARUMOTO, Mário H. Comparison among some Yule-Walker methods with maximum-likelihood estimator for the model spectral ARMA In: 7th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications, Presidente Prudente. Conference Proceeding of the DINCON, 2008, p. 760-768.
 - BEZERRA, M. I. S., IANO, Y., TARUMOTO, Mário H. Evaluating some Yule-Walker methods with maximum-likelihood estimator for the model spectral ARMA. Relatório Técnico do DMEC/FCT/Unesp - Presidente Prudente. 2009 - p.1-9.
 - BEZERRA, M. I. S. Precision of Yule-Walker methods for the ARMA spectral model In: International Conference on Circuits, Signals, and Systems, 2004, Clearwater Beach. IASTED, 2004. p.54 - 59.
 - BEZERRA, M. I. S., ANDRADE, M. G., LOPES, A. Precisão de estimadores de Yule-Walker para o modelo espectral ARMA In: 15 o. SINAPE - Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística, 2002, Águas de Lindóia - SP. Cadernos de Resumos. , 2002. v.v.l. 1. p.137 - 137.
 - BEZERRA, M. I. S. Avaliação de alguns métodos de Yule-Walker para estimação do modelo espectral ARMA. In: Seminário de Pesquisa do DMEC/FCT/Unesp, Presidente Prudente - SP, 2007.
 - BEZERRA, M. I. S. Precisão de métodos de estimação do modelo espectral ARMA utilizando as equações de Yule-Walker. In: Seminário de Pesquisa do DMEC/FCT/Unesp, Presidente Prudente - SP, 2005.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução

A análise espectral tem como objetivo descrever as características de um sinal no domínio da frequência. Sua aplicação abrange todas as áreas da Engenharia Elétrica e das ciências em geral, tais como: Economia, Astronomia, Meteorologia, Medicina, etc. As ferramentas básicas utilizadas para este estudo são a transformada de Fourier, que relaciona um sinal ou modelo matemático com sua representação no domínio da frequência e os métodos estatísticos que são utilizados devido à aleatoriedade de uma grande variedade de sinais.

Os métodos atuais de estimação espectral se subdividem em duas categorias : *i*) estimação clássica ou não-paramétrica, e *ii*) estimação paramétrica. No primeiro caso nenhum modelo matemático é utilizado na formulação do problema. O caso de estimação espectral não-paramétrico não será abordado neste texto.

Os principais estimadores não-paramétricos são: 1) periodograma; 2) periodograma de Welch; 3) correlograma; e 4) o estimador de Blackman-Tukey [1]. Esses métodos utilizam como base a transformada de Fourier e a sequência de autocorrelação (SAC) do conjunto de observações de um sinal aleatório. A densidade espectral de potência (DEP) é a transformada de Fourier da SAC estimada [2], [3], [4] e [5].

No segundo caso, temos os métodos paramétricos que modelam um sinal pela resposta de um filtro linear causal cuja excitação é um ruído branco. A densidade espectral de potência do processo $x(n)$ é obtida da relação entre os espectros de potência do processo de entrada e saída. Uma das principais vantagens dos métodos paramétricos é que esses fornecem melhores resultados do que os não-paramétricos, pois esses métodos possuem técnicas de estimação que têm a capacidade de tirar mais informações das observações

disponíveis.

Os modelos paramétricos de séries temporais utilizados na análise espectral são os processos: autorregressivo (AR), média-móvel (MA) e o autorregressivo média-móvel (ARMA), ou modelos de Box-Jenkins [6]. Esses modelos ou processos são importantes ferramentas utilizadas no estudo da análise espectral [6], [2], [7], [8], e [9].

O processo AR tem como principal característica, a de ser um filtro composto somente de polos, que correspondem a picos agudos na curva da densidade espectral de potência (DEP). Já o processo MA se caracteriza como um filtro composto somente de zeros, que correspondem a vales abruptos na curva da densidade espectral de potência. Sendo assim, o processo ARMA é um filtro composto de polos e zeros, ou seja, picos e vales na curva de sua densidade espectral de potência.

Dentre esses processos o de maior destaque é o estimador AR em virtude das suas estimativas poderem ser encontradas facilmente por meio da resolução de equações lineares. Por outro lado, para estimação exata dos parâmetros, no caso dos processos MA e ARMA, é preciso resolver equações não-lineares. Se a suposição do processo AR é satisfeita, o estimador espectral encontrado terá menor vício e menor variabilidade do que os estimadores espectrais clássicos. O estimador espectral AR é também denominado estimador de máxima entropia ou estimador espectral de predição linear [2], [10] e [11]. Os três procedimentos básicos da estimação espectral paramétrica são: *i*) seleção de um ou mais modelo(s) adequado(s); *ii*) estimação dos parâmetros desse(s) modelo(s) e *iii*) obtenção da estimativa da curva da densidade espectral de potência, utilizando os parâmetros encontrados.

1.2 Motivações e Objetivos

O presente trabalho tem como um dos objetivos apresentar um estudo sobre estimação espectral paramétrica dos modelos ou processos ARMA citados acima e seus principais métodos de estimação. Assim como propor um novo método estimação separada (sub-ótimo) para o modelo espectral ARMA, e comparar a precisão das suas estimativas com os outros métodos dessa classe de estimadores. O método que vamos propor, utiliza-se das equações de Yule-Walker e do método de mínimos quadrados, que é o caso quando as equações citadas são expandidas. Além disso, a proposta do método é que, dado que já foram estimados os parâmetros AR e MA, procura-se através de uma nova filtragem AR, do sinal de interesse, estimá-lo via esse filtro e utilizando-se das estimativas MA encontradas pelo método de Durbin (1959), e repetir esse procedimento até obtermos

estimativas satisfatórias da densidade espectral de potência do processo ARMA.

1.3 Organização da Tese

No Capítulo 2, inicialmente são apresentadas as propriedades e principais características do processo (modelo) AR, e os principais métodos de estimação espectral AR: autocorrelação, covariância, covariância modificada e o método de Burg. Na seção 2.3 apresentaremos o processo MA (modelo), também com suas principais propriedades e características, seguindo-se do método de Durbin para estimação MA.

No Capítulo 3, é apresentado um estudo completo do processo (modelo) ARMA incluindo: principais características e propriedades, critério de informação de Akaike [12], [9], propriedades das estimativas do vetor de parâmetros e qualidades das estimativas de máxima verossimilhança [15], [16] e o limite de Cramér-Rao assintótico proposto por [17].

Na seção 3.6 são apresentados alguns métodos de estimação espectral simultânea: máxima verossimilhança, Akaike e Steiglitz-McBride, e na seção 3.7 são estudados os métodos de estimação espectral separada para o processo ARMA, em que são considerados os métodos sub-ótimos, são eles: equações modificadas de Yule-Walker (EMYW), mínimos quadrados das equações modificadas de Yule-Walker (MQYW) não-ponderado e ponderado [19], [20], [22], [23], [24], [2], [7] e [8]. Vamos estudar também um método proposto por [28], utilizando a técnica de MQYW, mas com uma matriz de covariância modificada [29]. E também o método recursivo utilizando o cepstrum proposto por [21]. Alguns métodos mais recentes são citados no texto, mas não farão parte do estudo, pois têm um enfoque diferenciado.

No Capítulo 4 é apresentado o método de estimação espectral proposto para o modelo ARMA, com sua descrição e implementação do algoritmo.

No Capítulo 5 são apresentadas as simulações, utilizando três processos (modelos) ARMA teóricos como exemplo. São feitas simulações de Monte Carlo para estimativas dos parâmetros dos processos (médias, desvios-padrões), fornecidas pelos métodos de estimação espectral separada, assim como, os espectros de potência estimados (Apêndice B). As comparações são feitas por meio do erro relativo e o coeficiente variação médio das estimativas dos parâmetros. Foi medido também, o esforço computacional por meio dos *FLOPS*. As simulações foram feitas no aplicativo MATLAB. Na seção 5.4 é feita a análise dos resultados fornecidos pelos métodos utilizados na estimação dos três processos ARMA simulados e estimados nesse Capítulo.

E finalmente no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões gerais do trabalho, as

contribuições e algumas propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Processos AR e MA

Neste capítulo é apresentado um estudo sobre estimação espectral paramétrica autoregressiva e médias-móveis, definindo-se inicialmente o processo AR e suas propriedades, assim como sua densidade espectral de potência. E em seguida é apresentado o algoritmo de Levinson, e os principais métodos de estimação AR: autocorrelação, covariância, covariância modificada e Burg. É feito também um estudo introdutório sobre estimação espectral paramétrica MA, definindo-se as principais características e propriedades do processo MA, e em seguida foi feita a descrição do método de estimação de Durbin [25], [2].

2.1 Processo autorregressivo Espectral

Seja $x(n)$ um processo aleatório estacionário no sentido amplo (ESA). Se $x(n)$ satisfaz a equação de diferenças

$$x(n) + a_1x(n-1) + \dots + a_px(n-p) = \varepsilon(n), 1 \leq n \leq N \quad (2.1)$$

então $x(n)$ é um processo autorregressivo de ordem p , $AR(p)$, onde $a_i, i = 1, \dots, p$, são os parâmetros do processo a serem estimados, $\varepsilon(n)$ é um suposto ruído branco, com média 0 e variância σ^2 . A partir do processo $x(n)$ da equação 2.1, pode-se definir a SAC (sequencia de autocorrelação) de $x(n)$ como

$$r_x(k) = E[x(n)x^*(n-k)] \quad (2.2)$$

onde $r_x(0) \geq |r_x(k)|$ e $r_x(-k) = r_x^*(k)$, e $'*$, denota o complexo conjugado.

A função de transferência do sistema é definida como sendo a transformada- z

$$H(z) = \frac{1}{X(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}} \quad (2.3)$$

Este filtro é composto somente de polos, todos situados dentro da circunferência de raio unitário (CRU) do plano- z , já que o processo $x(n)$ é ESA. A partir da função de transferência do sistema podemos definir a densidade espectral de potência do processo AR no plano- z , como sendo

$$S_{AR}(z) = \frac{\sigma^2}{A(z)A^*(1/z^*)} \quad (2.4)$$

ou

$$S_{AR}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x(k) z^{-k}$$

onde $A(z) = \prod_{i=1}^p (1 - \mathbf{p}_i z_i^{-1})$ e $A^*(1/z^*) = \prod_{i=1}^p (1 - \mathbf{p}_i^* z_i^*)$, e os $\mathbf{p}_i, i = 1, \dots, p$, são os polos, e $'*$, denota o complexo conjugado.

Podemos agora definir a densidade espectral de potência do processo AR no domínio da frequência. Substituindo $z = \exp(j2\pi fT)$ na expressão (2.4)

$$S_{AR}(f) = \frac{T\sigma^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_k \exp(-j2\pi f k T) \right|^2}, \quad -\frac{0.5}{T} \leq f \leq \frac{0.5}{T} \quad (2.5)$$

ou simplesmente,

$$S_{AR}(f) = \frac{T\sigma^2}{|A(f)|^2} \quad (2.6)$$

a função $S_{AR}(f)$ é supostamente não-negativa e periódica em frequência com período $1/T$ Hz, e supomos ser de faixa limitada em $\pm 0.5/T$ Hz, onde T é o intervalo de amostragem do processo $x(n)$. Os polos do filtro correspondem a picos, que predominam na curva do espectro de potência do processo AR. Supondo $T = 1$ para equação (2.6) temos

$$S_{AR}(f) = \frac{\sigma^2}{|A(f)|^2} \quad (2.7)$$

ou

$$S_{AR}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x(k) \exp(-j2\pi f k)$$

Os parâmetros a_1, \dots, a_p , do processo AR, devem ser determinados de tal maneira que a potência do erro de predição, $\rho(\mathbf{a})$, definida a seguir, seja minimizada

$$\rho(\mathbf{a}) = E [|e(n)|^2] = E [|x(n) - \hat{x}(n)|^2]; \quad (2.8)$$

onde E denota o operador esperança matemática,

$$\hat{x}(n) = - \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) \quad (2.9)$$

é o preditor linear progressivo (*forward*) de ordem p do processo $x(n)$ e $e(n)$ é o erro de predição. Para minimizar a expressão acima utiliza-se o princípio de ortogonalidade [2], ou seja:

$$E \{x^*(n-k) [x(n) - \hat{x}(n)]\} = 0, \quad k = 1, \dots, p. \quad (2.10)$$

Desenvolvendo a expressão acima, tem-se

$$E [x^*(n-k)x(n)] - E [x^*(n-k)\hat{x}(n)] = 0 \quad (2.11)$$

$$E [x^*(n-k)x(n)] + E \left[x^*(n-k) \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) \right] = 0. \quad (2.12)$$

Aplicando o operador esperança em (2.12) obtém-se

$$r_x(k) + a_1 r_x(k-1) + \dots + a_p r_x(k-p) = 0. \quad (2.13)$$

A expressão (2.13) é conhecida como equações de Yule-Walker. Fazendo $k = 0$ na expressão (2.10), obtém-se a potência mínima do erro de predição, que é justamente a excitação da variância do ruído branco ou a variância mínima, dada pela expressão a seguir[2]

$$\rho_{MIN}(\mathbf{a}) = E [x^*(n) (x(n) - \hat{x}(n))]. \quad (2.14)$$

Desenvolvendo a expressão (2.14) acima como em (2.10), (2.11) e (2.12), chega-se à seguinte expressão [2]

$$\rho_{MIN}(\mathbf{a}) = r_x(0) + a_1 r_x(-1) + \dots + a_p r_x(-p) \quad (2.15)$$

onde o vetor das estimativas $\hat{\mathbf{a}} = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p]$ é composto pelos coeficientes de predição linear ótimos para o processo AR(p), resultando em $\hat{\sigma}^2 = \rho_{MIN}(\hat{\mathbf{a}})$ (variância do ruído branco). Entretanto, isso será verdade se a ordem do processo AR for igual à ordem do preditor linear. Além disso, o erro de predição $e(n)$ será a saída $\varepsilon(n)$, desde que

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) - \left[- \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) \right] = \varepsilon(n). \quad (2.16)$$

O filtro de erro de predição (FEP) ótimo, com entrada $x(n)$ e saída $\varepsilon(n)$ será dado pelo filtro linear inverso:

$$X(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p} \quad (2.17)$$

com função de transferência do sistema $H(z) = 1/X(z)$. Tem-se então o erro de predição $\varepsilon(n)$ e o filtro FEP que pode ser visto como um filtro branqueador de um processo AR. Pode-se então definir o processo AR, como

$$x(n) = \hat{x}(n) + \varepsilon(n) \quad (2.18)$$

onde

$$\hat{x}(n) = - \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) \quad (2.19)$$

é a predição linear progressiva ótima de $x(n)$, baseada nas prévias p observações.

O FEP será de fase-mínima se todos os polos estiverem dentro da CRU. Para garantir esta condição, a matriz de autocorrelação de dimensão $(p+1) \times (p+1)$ deve ser positiva definida. Para obter-se esta propriedade de fase-mínima na resolução das equações de Yule-Walker, deve-se utilizar o estimador de autocorrelação viciado (polarizado), $\hat{r}_x(k)$, de $r_x(k)$, [2], dado pela expressão

$$\hat{r}_x(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-k} x^*(n)x(n+k), & k = 1, \dots, N \\ \hat{r}_x^*(-k), & k = -N, -(N-1), \dots, 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

onde $'^*$ denota o complexo conjugado. Pode-se ainda definir o estimador não-viciado (não-polarizado) da SAC como sendo

$$\tilde{r}_x(k) = \begin{cases} \frac{1}{N-k} \sum_{n=1}^{N-k} x^*(n)x(n+k), & k = 1, \dots, N \\ \tilde{r}_x^*(-k), & k = -N, -(N-1), \dots, 0 \end{cases} .$$

Existe uma relação entre esses dois estimadores que é dada pela expressão:

$$\hat{r}_x(k) = \left(1 - \frac{k}{N} \right) \tilde{r}_x(k).$$

2.1.1 Algoritmo de Levinson

Por meio do algoritmo de Levinson pode-se resolver recursivamente as equações de Yule-Walker obtendo-se os seguintes conjuntos de parâmetros [2]

$$\{a_1(1), \rho_1\}, \{a_2(1), a_2(2), \rho_2\}, \dots, \{a_p(1), a_p(2), \dots, a_p(p), \rho_p = \hat{\sigma}^2\} \quad (2.21)$$

onde o conjunto final de parâmetros de ordem p é a solução desejada para as equações de Yule-Walker. A seguir será descrito o algoritmo recursivo de Levinson

$$\begin{aligned} & \text{Algoritmo de Levinson} & (2.22) \\ \textit{passo 1} & : a_1(1) = r_x(1)/r_x(0) \\ & \rho_1 = (1 - |a_1(1)|^2)r_x(0) \\ \textit{passo 2} & : k = k + 1 \\ & a_k(k) = -\frac{r_x(k) + \sum_{l=1}^{k-1} a_{k-1}(l)r_x(k-l)}{\rho_{k-1}} \\ & a_k(i) = a_{k-1}(i) + a_k(k)a_{k-1}^*(k-i), i = 1, \dots, k-1 \\ & \rho_k = (1 - |a_k|^2)\rho_{k-1} \\ \textit{passo 3} & : \text{Se } k = p + 1, \text{ pare. Caso contrário, passo 2} \end{aligned}$$

Um algoritmo mais recente de Levinson é baseado numa transformação isométrica de Durbin, e foi proposto por [31], e que também pode ser utilizado para resolver recursivamente as equações de Yule-Walker para estimação dos parâmetros do modelo AR.

2.2 Métodos de Estimação Espectral Autorregressiva

Nesta seção é apresentado um estudo sobre estimação espectral paramétrica autoregressiva, com a descrição dos principais métodos de estimação AR: autocorrelação, covariância, covariância modificada e Burg.

2.2.1 Método da Autocorrelação

Seja $x(n)$ um processo aleatório ESA. Define-se o método da autocorrelação, ou aproximação das equações de Yule-Walker, para estimação dos parâmetros do processo AR, a partir da minimização da estimativa da potência do erro de predição [2] dado por:

$$\widehat{\rho}(\mathbf{a}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| x(n) + \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) \right|^2. \quad (2.23)$$

Decompondo a expressão (2.23) em partes reais (R) e imaginárias (I), tem-se

$$\widehat{\rho}(\mathbf{a}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| x_R(n) + jx_I(n) + \sum_{k=1}^p (a_{Rk} + ja_{Ik}) (x_R(n-k) + jx_I(n-k)) \right|^2 \quad (2.24)$$

escrevendo a expressão (2.24) na forma de uma variável complexa, $\alpha + \beta j$, tem-se

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}(\mathbf{a}) = & \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| x_R(n) + \sum_{k=1}^p (a_{Rk}x_R(n-k) + a_{Ik}x_I(n-k)) + \right. \\ & \left. + j \left[x_I(n) + \sum_{k=1}^p (a_{Rk}x_I(n-k) + a_{Ik}x_R(n-k)) \right] \right|^2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

calculando o módulo fica-se com

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}(\mathbf{a}) = & \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left\{ \left[x_R(n) + \sum_{k=1}^p (a_{Rk}x_R(n-k) + a_{Ik}x_I(n-k)) \right]^2 + \right. \\ & \left. + \left[x_I(n) + \sum_{k=1}^p (a_{Rk}x_I(n-k) + a_{Ik}x_R(n-k)) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

A minimização de $\widehat{\rho}(\mathbf{a})$ é obtida igualando a zero as derivadas parciais $\partial \widehat{\rho} / \partial a_k$, com relação as partes reais e imaginárias, obtendo o gradiente complexo

$$\frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial a_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial a_{Rk}} - j \frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial a_{Ik}} \right), k = 1, \dots, p. \quad (2.27)$$

Desenvolvendo a expressão (2.27) acima tem-se que as derivadas parciais com relação ao vetor $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_p]$, são dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial a_{R1}} &= \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N \left[x_R(n) + \sum_{k=1}^p (a_{Rk} x_R(n-k) - a_{Ik} x_I(n-k)) + \right. \\
&\quad \left. + x_I(n) + \sum_{k=1}^p (a_{Rk} x_I(n-k) + a_{Ik} x_R(n-k)) \right] (x_I(n-1) + x_R(n-1)) \\
&\quad \vdots \\
\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial a_{Rp}} &= \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N \left[x_R(n) + \sum_{k=1}^p (a_{Rk} x_R(n-k) - a_{Ik} x_I(n-k)) + \right. \\
&\quad \left. + x_I(n) + \sum_{k=1}^p (a_{Rk} x_I(n-k) + a_{Ik} x_R(n-k)) \right] (x_I(n-p) + x_R(n-p))
\end{aligned} \tag{2.28}$$

e a parte imaginária:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial a_{I1}} &= \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N \left[x_R(n) + \sum_{k=1}^p (a_{Rk} x_R(n-k) - a_{Ik} x_I(n-k)) + \right. \\
&\quad \left. + x_I(n) + \sum_{k=1}^p (a_{Rk} x_I(n-k) + a_{Ik} x_R(n-k)) \right] (-x_I(n-1) + x_R(n-1)) \\
&\quad \vdots \\
\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial a_{Ip}} &= \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N \left[x_R(n) + \sum_{k=1}^p (a_{Rk} x_R(n-k) - a_{Ik} x_I(n-k)) + \right. \\
&\quad \left. + x_I(n) + \sum_{k=1}^p (a_{Rk} x_I(n-k) + a_{Ik} x_R(n-k)) \right] (-x_I(n-p) + x_R(n-p))
\end{aligned} \tag{2.29}$$

utilizando as expressões (2.28) e (2.29) pode-se obter os gradientes complexos da expressão (2.27).

Aplicando o operador esperança E , em (2.27), tem-se

$$E \left(\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial a_k} \right) = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial a_{Rk}} - j \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial a_{Ik}} \right), \quad k = 1, \dots, p. \tag{2.30}$$

e desenvolvendo a expressão (2.30) acima, tem-se o seguinte conjunto de equações

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_x(0) & \hat{r}_x(-1) & \cdots & \hat{r}_x(-(p-1)) \\ \hat{r}_x(1) & \hat{r}_x(0) & \cdots & \hat{r}_x(-(p-2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_x(p-1) & \hat{r}_x(p-2) & \cdots & \hat{r}_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{r}_x(1) \\ \hat{r}_x(2) \\ \vdots \\ \hat{r}_x(p) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

ou

$$\mathbf{R}_{(p \times p)} \hat{\mathbf{a}}_{(p \times 1)} = \hat{\mathbf{r}}_{(p \times 1)} \quad (2.32)$$

onde $\hat{r}_x(k)$, $k = 1, \dots, p$, é o estimador da autocorrelação viciado (polarizado) e $\hat{\mathbf{a}} = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p]$ é o vetor das estimativas dos parâmetros, que será obtido resolvendo as equações (2.32). A matriz $\mathbf{R}_{(p \times p)}$ é Hermitiana, Toeplitz e positiva definida [2]. Quando utiliza-se o estimador de autocorrelação viciado (polarizado), esse método equivale ao método de estimação das equações de Yule-Walker. Sendo assim podemos utilizar o algoritmo recursivo de Levinson, e os resultados das estimativas nos garante que os polos estarão dentro da CRU satisfazendo o teorema de fase-mínima [2].

A estimativa da variância do ruído branco, $\hat{\sigma}^2$, pode ser encontrada quando $\hat{\rho}(\mathbf{a})$ é minimizada, ou seja, de (2.23) tem-se

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\rho}_{MIN}(\mathbf{a}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| x(n) + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k x(n-k) \right|^2 \quad (2.33)$$

e calculando o módulo obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left[\left(x(n) + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k x(n-k) \right) x^*(n) + \right. \\ &\quad \left. + \left(x(n) + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k x(n-k) \right) \sum_{l=1}^p \hat{a}_l^* x^*(n-l) \right]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

O segundo termo da soma acima, sobre n é igual a zero, então resulta que

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{r}_x(0) + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k \hat{r}_x(-k). \quad (2.35)$$

Pode-se também encontrar $\hat{\sigma}^2$, por meio da expressão recursiva do algoritmo de Levinson, dada pela forma abaixo

$$\hat{\sigma}^2 = \rho_{MIN} = \hat{r}_x(0) \prod_{k=1}^p \left(1 - |\hat{k}_i|^2\right) \quad (2.36)$$

onde \hat{k}_i é a estimativa do i -ésimo coeficiente de reflexão obtido a partir das estimativas dos parâmetros $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p$ geradas pelo algoritmo recursivo de Levinson.

O método da autocorrelação fornece uma estimativa pobre da resolução do espectro, se comparado com outros métodos na literatura [7]. Por essa razão esse método, geralmente, não é recomendado para pequenos conjuntos de observações. Utilizando-se nesse método o estimador não-viciado (não-polarizado) da função de autocorrelação, não se pode garantir que a matriz de autocorrelação seja positiva definida, podendo ser uma matriz singular, gerando assim uma estimativa relativamente pobre da variância.

2.2.2 Método da Covariância

O método da covariância é uma aproximação do estimador de máxima verossimilhança, onde a minimização da estimativa da variância do erro de predição é dada por [2]

$$\hat{\rho}(\mathbf{a}) = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p+1}^N \left| x(n) + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k x(n-k) \right|^2. \quad (2.37)$$

A diferença entre esse método e o da autocorrelação é que, nesse caso utilizam-se os $N-p$ valores $e(p+1), \dots, e(N)$ do conjunto de erros de predição $\{e(1), \dots, e(N)\}$. Esse procedimento permite que o filtro do erro de predição esteja completo, ou seja, cada observação $x(n)$, para $p+1 \leq n \leq N$ é prevista em termos das observações já disponíveis, fazendo com que os erros de predição tendam a ser pequenos e forneçam estimativas espectrais AR com resolução significativamente melhor do que o método da autocorrelação, principalmente quando tem-se um número pequeno de observações. A minimização de $\hat{\rho}(\mathbf{a})$ é obtida igualando a zero as derivadas parciais $\partial \hat{\rho} / \partial a_k$, com relação as partes reais e imaginárias, obtendo o gradiente complexo, da mesma maneira da que foi obtida no método da autocorrelação. Para esse método será utilizado o mesmo desenvolvimento matemático das expressões (2.27) à (2.29), com a matriz de autocorrelações dada por

$$\mathbf{C} = \mathbf{X}_p^T \mathbf{X}_p \quad (2.38)$$

onde \mathbf{X}_p é uma matriz retangular, de ordem $(N-p) \times (p+1)$:

$$\mathbf{X}_p = \begin{bmatrix} x(p+1) & x(p) & \dots & x(1) \\ x(p+2) & x(p+1) & \dots & x(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N) & x(N-1) & \dots & x(N-p) \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Constrói-se agora um conjunto de equações semelhante a (2.31)

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_x(0) & \hat{r}_x(-1) & \dots & \hat{r}_x(1-p) \\ \hat{r}_x(1) & \hat{r}_x(0) & \dots & \hat{r}_x(2-p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_x(p-1) & \hat{r}_x(p-2) & \dots & \hat{r}_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{r}_x(1) \\ \hat{r}_x(2) \\ \vdots \\ \hat{r}_x(p) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

onde o $\hat{r}_x(l)$ é o estimador da autocorrelação viciado (polarizado) na posição $l = j - k$.

Pode-se simplificar as equações (2.40), na seguinte forma matricial

$$\mathbf{C}_{(p \times p)} \hat{\mathbf{a}}_{(p \times 1)} = -\hat{\mathbf{c}}_{(p \times 1)} \quad (2.41)$$

onde a matriz \mathbf{C} é Hermitiana, positiva semi-definida e não-Toeplitz, podendo ser uma matriz singular se o conjunto de valores for gerado segundo $p - 1$ senóides complexas [2].

A estimativa da variância do ruído branco, $\hat{\sigma}^2$, pode ser encontrada quando $\hat{\rho}(\mathbf{a})$ é minimizada, ou seja, de (2.37) tem-se

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\rho}_{MIN}(\mathbf{a}) = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p+1}^N \left| x(n) + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k x(n-k) \right|^2 \quad (2.42)$$

e calculando o módulo obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{N-p} \sum_{n=p+1}^N \left[\left(x(n) + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k x(n-k) \right) x^*(n) + \right. \\ &\quad \left. + \left(x(n) + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k x(n-k) \right) \sum_{l=1}^p \hat{a}_l^* x^*(n-l) \right]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

O segundo termo da soma acima, sobre n é igual a zero, resultando em

$$\hat{\sigma}^2 = \rho_{MIN} = r_x(0) + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k r_x(k) \quad (2.44)$$

Para valores $N \gg p$, o método da covariância produz resultados semelhantes ao método da autocorrelação. Uma outra característica do método da covariância é que para o caso de processos compostos por senóides, esse método pode ser utilizado na detecção de frequências. Métodos para estimar frequências são geralmente baseados nos métodos da covariância e da covariância modificada. Essas técnicas são discutidas com mais detalhes em [2]. Esses procedimentos de estimação são apresentados com mais detalhes e discussões, assim como a implementação do algoritmo em [7], (cap.11). O método da covariância é idêntico a uma versão moderna do método de Prony para o caso de estimação dos polos [7].

2.2.3 Método da Covariância Modificada

No método da covariância modificada, a minimização da variância do ruído branco é obtida da média aritmética das estimativas do erro de predição progressivo (*forward*), $\hat{\rho}_f$, e regressivo (*backward*), $\hat{\rho}_b$, definido como

$$\bar{\rho}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} (\hat{\rho}_f + \hat{\rho}_b) \quad (2.45)$$

onde

$$\hat{\rho}_f = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p+1}^N \left| x(n) + \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) \right|^2 \quad (2.46)$$

$$\hat{\rho}_b = \frac{1}{N-p} \sum_{n=1}^{N-p} \left| x(n) + \sum_{k=1}^p a_k^* x(n+k) \right|^2. \quad (2.47)$$

Para minimizar $\bar{\rho}(\mathbf{a})$, toma-se o gradiente complexo a partir das derivadas parciais $\partial \hat{\rho} / \partial a_k$, o qual produz expressões idênticas às equações (2.40) do método da covariância, exceto pela definição do estimador de autocorrelação de $r_x(k)$. As equações podem ser representadas na forma matricial

$$\mathbf{C}_{(p \times p)} \hat{\mathbf{a}}_{(p \times 1)} = -\hat{\mathbf{c}}_{0 \times 1}. \quad (2.48)$$

O estimador de autocorrelação de $r_x(k)$ é definido como

$$\hat{r}_x(k) = \frac{1}{2(N-p)} \left(\sum_{n=p+1}^N x^*(n-j)x(n-k) + \sum_{n=1}^{N-p} x(n+j)x^*(n+k) \right) \quad (2.49)$$

ou simplesmente igual a

$$\hat{r}_x(k) = \frac{1}{2} (\hat{r}_x(j-k) + \hat{r}_x(j+k)) \quad (2.50)$$

onde $\hat{r}_x(j-k)$ e $\hat{r}_x(j+k)$ são os estimadores de autocorrelação não-viciados (não-polarizados), nas posições $(j-k)$ e $(j+k)$, respectivamente, como apresentado na expressão (2.50).

A estimativa da variância do ruído branco, $\hat{\sigma}^2$, pode ser encontrada quando $\bar{\rho}(\mathbf{a})$ é minimizada, ou seja, de (2.45) tem-se

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\rho}_{MIN}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} (\hat{\rho}_f(\mathbf{a})_{MIN} + \hat{\rho}_b(\mathbf{a})_{MIN}) \quad (2.51)$$

utilizando os mesmos procedimentos das equações (2.33) e (2.42), para o desenvolvimento das potências dos erros de predição progressiva (*forward*) e regressiva (*backward*) mínimas, tem-se

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 = & \frac{1}{2(N-p)} \sum_{n=p+1}^N \left[\left(x(n) + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k x(n-k) \right) x^*(n) + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{N-p} \left(x^*(n) + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k x(n+k) \right) x(n) \right] \end{aligned} \quad (2.52)$$

resultando na expressão

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{r}_x(0) + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k \hat{r}_x(k) \quad (2.53)$$

Neste método a matriz \mathbf{C} é hermitiana e positiva definida. Esse método não garante que todos os polos se situem no interior da CRU. Segundo [32], que propôs este método e o definiu como método *forward* e *backward*. Já [33], o consideram como sendo uma aproximação de mínimos quadrados.

Segundo [23], [32], e [34], o método da covariância modificada produz estimativas espectrais estatisticamente estáveis com alta resolução. Observou-se ainda que esse estimador tem apresentado boas propriedades para o caso de valores gerados a partir de senóides com ruído branco, como por exemplo para detectar a posição exata dos picos das frequências, do espectro do processo AR, sendo mais estável do que outros estimadores AR [2]. Segundo [35] o melhor desempenho é atingido quando a ordem do processo AR é $p = N/3$, mas os resultados dependem muito do espectro em estudo.

2.2.4 Método de Burg

Ao contrário dos outros métodos apresentados anteriormente, nos quais os parâmetros AR são estimados diretamente, no caso do método de Burg estimamos os coeficientes de reflexão, e então utiliza-se o algoritmo recursivo de Levinson para obter as estimativas dos parâmetros AR [2]. As estimativas dos coeficientes de reflexão são obtidas minimizando-se a variância do erro de predição para diferentes ordens do preditor, de maneira recursiva. Pode-se, então, resumir o algoritmo do método de Burg nos seguintes passos:

Algoritmo de Burg

$$\textit{passo 1} : \textit{Obter } \hat{r}_x(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |x(n)|^2 \quad (2.54)$$

$$\textit{passo 2} : \textit{fazer } \hat{\rho}_0 = \hat{r}_x(0);$$

$$e_0^f(n) = x(n), n = 2, \dots, N$$

$$e_0^b(n) = x(n), n = 1, \dots, N - 1$$

$$\textit{passo 3} : \textit{para } k = 1, 2, \dots, p$$

$$\hat{k}_k = \frac{-2 \sum_{n=k+1}^N \hat{e}_{k-1}^f(n) \hat{e}_{k-1}^{b*}(n-1)}{\sum_{n=k+1}^N \left(|\hat{e}_{k-1}^f(n)|^2 + |\hat{e}_{k-1}^b(n-1)|^2 \right)} \quad (2.55)$$

$$\hat{\rho}_k = \left(1 - |\hat{k}_k|^2 \right) \hat{\rho}_{k-1} \quad (2.56)$$

$$\hat{a}_k(i) = \hat{a}_{k-1}(i) + \hat{k}_k \hat{a}_{k-1}^*(k-i), i = 1, \dots, k-1$$

$$\hat{e}_k^f(n) = \hat{e}_{k-1}^f(n) + \hat{k}_k \hat{e}_{k-1}^b(n-1), n = k+1, \dots, N-1$$

$$\hat{e}_k^b(n) = \hat{e}_{k-1}^b(n-1) + \hat{k}_k^* \hat{e}_{k-1}^f(n), n = k, \dots, N-2$$

passo 4: Se $k = p$, pare. Caso contrário, passo 3.

onde $\hat{e}_k^f(n)$ e $\hat{e}_k^b(n)$ são os erros de predição progressivo (*forward*) e regressivo (*backward*), respectivamente. Em geral o método de Burg fornece boas estimativas para o espectro do processo AR. Para o caso de senóides, algumas dificuldades têm sido observadas, como

por exemplo: a posição dos picos depende da fase, e essa dependência pode ser reduzida utilizando as estimativas dos coeficientes de reflexão numa versão modificada [2]. Este método fornece estimativas tal que, os polos estão dentro da CRU, produzindo filtros de fase mínima, quando $|\widehat{k}_k| \leq 1$, sendo esta uma condição necessária e suficiente para que a matriz de autocorrelação seja positiva semi-definida [7].

Os coeficientes de reflexão $-\widehat{k}_k$ são conhecidos na literatura estatística como a correlação parcial [6], porque eles representam a correlação normalizada entre $x(n)$ e $x(n-k)$ com a correlação de $x(n-1), \dots, x(n-k+1)$, removida. Portanto, os coeficientes de reflexão podem também ser interpretados como o coeficiente de correlação normalizado negativo entre $\widehat{e}_k^f(n)$ e $\widehat{e}_k^b(n)$ [7].

2.3 Processo Média-Móvel Espectral

Seja $x(n)$ um processo aleatório estacionário no sentido amplo (ESA). Se $x(n)$ satisfaz a equação de diferenças

$$x(n) = \varepsilon(n) + b_1\varepsilon(n-1) + \dots + b_q\varepsilon(n-q), \quad 1 \leq n \leq N \quad (2.57)$$

então $x(n)$ é um processo média-móvel de ordem q , MA(q), onde b_i , $i = 1, \dots, q$, são os parâmetros do processo MA(q) a serem estimados, e $\varepsilon(n)$ é um suposto ruído branco, com média 0 e variância σ^2 .

A função de transferência do sistema é definida como sendo a transformada- z

$$H(z) = Y(z) = 1 + b_1z^{-1} + \dots + b_qz^{-q}. \quad (2.58)$$

Esse filtro é composto somente de zeros, todos situados dentro da CRU do plano- z , já que o processo $x(n)$ é ESA. A partir da função de sistema podemos definir a DEP do processo MA no plano- z , como sendo

$$S_{MA}(z) = \sigma^2 B(z) B^*(1/z^*) \quad (2.59)$$

ou

$$S_{MA}(z) = \sum_{k=-q}^q r_x(k) z^{-k}$$

onde $B(z) = \prod_{i=1}^q (1 - \mathbf{q}_i z_i^{-1})$ e $B^*(1/z^*) = \prod_{i=1}^q (1 - \mathbf{q}_i^* z_i^*)$, e os \mathbf{q}_i , $i = 1, \dots, q$, são os *zeros*, e $'*$, denota o complexo conjugado [30].

Substituindo $z = \exp(j2\pi fT)$ na expressão (2.59), vamos ter a DEP do processo MA(q) no domínio da frequência

$$S_{MA}(f) = T\sigma^2 \left| 1 + \sum_{k=1}^q b_k \exp(-j2\pi f kT) \right|^2, \quad -\frac{0,5}{T} \leq f \leq \frac{0,5}{T} \quad (2.60)$$

ou simplesmente,

$$S_{MA}(f) = T\sigma^2 |B(f)|^2 \quad (2.61)$$

a função $S_{MA}(f)$ é supostamente não-negativa e periódica em frequência com período $1/T$ Hz, e assume-se ser de faixa limitada em $\pm 0.5/T$ Hz, onde T é o intervalo de amostragem do processo $x(n)$. Na DEP de um processo MA(q), o que predomina na curva do seu espectro são os vales, os quais correspondem aos zeros do filtro [7]. Supondo $T = 1$ em (2.61), tem-se

$$S_{MA}(f) = \sigma^2 |B(f)|^2 \quad (2.62)$$

ou

$$S_{MA}(f) = \sum_{k=-q}^q r_x(k) \exp(-j2\pi f k)$$

As estimativas do conjunto de parâmetros $\mathbf{b} = \{b_1, \dots, b_q\}$, do processo MA, devem ser determinadas minimizando a potência do erro de predição

$$\rho(\mathbf{b}) = E [|e(n)|^2] = E [|x(n) - \hat{x}(n)|^2] \quad (2.63)$$

onde $e(n)$ é o erro de predição e $\hat{x}(n)$ é o preditor linear ótimo de $x(n)$. Para minimizar a expressão (2.63), em termos de estimativas de máxima verossimilhança, utiliza-se um conjunto de equações não-lineares para obter-se a solução [6], [2]. Para evitar esse tipo de problema, pode-se utilizar o método de Durbin, para obter as estimativas dos parâmetros do processo MA [25], [2].

2.4 Método de Estimação Espectral Média-Móvel

Nesta seção foi feito um estudo introdutório sobre estimação espectral paramétrica MA. Inicialmente foram apresentadas algumas características e propriedades do processo MA, e em seguida será descrito o método de estimação de Durbin [25], [2].

2.4.1 Método de Estimação de Durbin

O método de Durbin [25] é uma aproximação do estimador máxima verossimilhança (MV) [2]. Esse método pode ser uma alternativa para contornar as dificuldades na estimação dos parâmetros do modelo $MA(q)$, quando utiliza-se o método de MV, pois, nesse caso, as soluções são obtidas por meio de equações não-lineares. O primeiro passo do método de Durbin seria substituir o processo $MA(q)$ por uma aproximação do processo $AR(L)$, de ordem muito elevada ($L \gg q$). Logo, pode-se observar que a base do método de Durbin é a relação entre o processo $MA(q)$ e um processo $AR(\infty)$. Observou-se também que a expressão (2.58) é a função de transferência do sistema para o processo $MA(q)$.

Seja

$$\frac{1}{X_\infty(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k}} \quad (2.64)$$

a função de transferência do sistema do processo $AR(\infty)$, que é equivalente a função de transferência do sistema do processo $MA(q)$

$$Y(z) = \frac{1}{X_\infty(z)} \quad (2.65)$$

Se a resposta ao impulso de $X_\infty(z)$ decresce exponencialmente com $n > L$, pode-se truncá-la neste ponto gerando um polinômio de ordem L , ou seja, um filtro $AR(L)$. Podemos observar que quanto mais próximos estiverem os zeros de $Y(z)$ da CRU, maior será o valor de L , garantindo, assim, uma boa aproximação para o processo $MA(q)$. Sabe-se ainda que os zeros do processo $MA(q)$ representam vales no espectro de potência a ser estimado. Quanto mais abruptos os vales, mais próximos da CRU estarão os zeros e conseqüentemente maior será a ordem L , do processo AR longo, de modo a garantir uma boa aproximação do processo $MA(q)$ [2]. Da expressão (2.65) tem-se que

$$Y(z)X_\infty(z) = 1. \quad (2.66)$$

Tomando a inversa da transformada- z na expressão (2.66), tem-se

$$a_n + \sum_{k=1}^q b_k a_{n-k} = \delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}, 1 \leq n \leq \infty \quad (2.67)$$

onde, $\delta(n)$ é uma sequência de impulso unitário, e a expressão (2.67) é a relação entre os processos AR e MA . Por definição $a_0 = 1$ e $a_k = 0$, para $k < 0$. Além disso, os parâmetros

MA podem ser determinados dos parâmetros do processo $AR(\infty)$, para um subconjunto de q equações formadas a partir da equação (2.67). Na prática, obtém-se as estimativas: $1, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_L$, de um processo $AR(L)$, tal que $q \ll L$. Baseado nestas estimativas pode-se obter o seguinte conjunto de equações dos erros

$$e(n) = \hat{a}_n + \sum_{k=1}^q b_k \hat{a}_{n-k}, 0 \leq n \leq L \quad (2.68)$$

onde o erro $e(n)$ é igual a zero para todo n exceto $n = 0$. Pode-se observar que $e(n) \neq 0$ para um certo número finito de observações, portanto, estima-se os parâmetros MA minimizando a variância do erro quadrático

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{L+q} \frac{|e(n)|^2}{L}. \quad (2.69)$$

A expressão (2.69) corresponde ao método da autocorrelação, e quando $q \leq n \leq L$ corresponderá ao método da covariância. O método de Durbin pode ser resumido nos seguintes passos [2]:

Algoritmo do Método de Durbin

Passo 1: Dado um conjunto de valores $x(1), \dots, x(N)$, estima-se os parâmetros, a_1, \dots, a_L , de um processo $AR(L)$ utilizando o método da autocorrelação, tal que: $q \leq n \leq L \leq N$. (Obs.: Pode-se utilizar qualquer método de estimação AR apresentado na seção 2.2)

Passo 2: Se as estimativas dos parâmetros são obtidas utilizando o método da autocorrelação, pode-se encontrar a variância do ruído branco, $\hat{\sigma}^2$, da mesma maneira que foi encontrada na equação (2.33), ficando

$$\hat{\sigma}^2 = r_x(0) + \sum_{k=1}^L \hat{a}_k r_x(k), \quad (2.70)$$

Passo 3: Utilizando os parâmetros estimados do processo $AR(L)$, obtido no *passo 1*, como um conjunto de valores $\{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_L\}$. Para esse conjunto de valores utiliza-se novamente o métodos da autocorrelação com ordem q , para encontrar as estimativas $\{\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_q\}$ do processo $MA(q)$. Estas estimativas podem ser obtidas recursivamente segundo o método de Levinson, com base na expressão

$$\hat{\mathbf{b}} = -\mathbf{R}_a^{-1} \mathbf{r}_a \quad (2.71)$$

onde matricialmente tem-se

$$\hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_q \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

$$\mathbf{R}_a = \frac{-1}{L+1} \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^L \hat{a}_k^2 & \sum_{k=0}^{L-1} \hat{a}_k \hat{a}_{k+1} & \cdots & \sum_{k=0}^{L-|1-q|} \hat{a}_k \hat{a}_{k+|1-q|} \\ \sum_{k=0}^{L-1} \hat{a}_k \hat{a}_{k+1} & \sum_{k=0}^L \hat{a}_k^2 & \cdots & \sum_{k=0}^{L-|2-q|} \hat{a}_k \hat{a}_{k+|2-q|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{L-|q-1|} \hat{a}_k \hat{a}_{k+|q-1|} & \sum_{k=0}^{L-|q-2|} \hat{a}_k \hat{a}_{k+|q-2|} & \cdots & \sum_{k=0}^L \hat{a}_k^2 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

$$\mathbf{r}_a = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{L-1} \hat{a}_k \hat{a}_{k+1} \\ \sum_{k=0}^{L-1} \hat{a}_k \hat{a}_{k+2} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{L-1} \hat{a}_k \hat{a}_{k+q} \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

Para estimar os parâmetros $\hat{\mathbf{b}} = \{b_1, \dots, b_q\}$, pode-se utilizar qualquer método de estimação AR, de preferência aqueles que podem ser resolvidos pelo algoritmo recursivo de Levinson, que fornece estimativas com a propriedade de fase mínima, ou seja, os zeros do polinômio $Y(z)$ dentro da CRU, mesmo que o processo AR, encontrado, não seja de fase mínima [2].

Outros métodos para estimação dos parâmetros do modelo MA têm surgido na literatura como por exemplo dois métodos propostos por [36], que segundo os autores, esses dois métodos dependem de duas específicas parametrizações da sequência de covariância MA, cujo o uso faz com que o critério de minimização da covariância seja um problema convexo. Segundo os autores, esses algoritmos são computacionalmente rápidos, estatisticamente precisos e confiáveis.

Capítulo 3

Processos ARMA

Os modelos ou processos ARMA são bastante estudados na literatura estatística, e podem ser aplicados em várias áreas, tais como: Economia, Engenharia, Climatologia, Oceanografia, Econometria, Meteorologia, Astronomia, Sismologia, Medicina, etc. Neste caso a aplicação seria mais especificamente na Engenharia Elétrica, com ênfase em Processamento de Sinais Aleatórios, dando um enfoque mais abrangente no estudo da análise espectral paramétrica [2], [7], [9], [8], [5] e [4]. O modelo ARMA é bastante utilizado para o tratamento de sinais de voz, uma vez que o trato vocal exige um modelo de polos e zeros para representação adequada de certos sons, como, por exemplo: os nasalados.

A seção a seguir foi dedicada ao processo ARMA, apresentando suas principais propriedades e características, assim como: o critério de informação de Akaike; o limite de Cramér-Rao [37], [38]; as propriedades das estimativas do vetor de parâmetro; as qualidades das estimativas de máxima verossimilhança e o limite de Cramér-Rao assintótico. Nas últimas seções são apresentados os principais métodos de estimação simultânea e separada para o modelo espectral ARMA, respectivamente.

3.1 Processo Autorregressivo Média-Móvel Espectral

Nesta seção fez-se um estudo dos principais métodos de estimação espectral paramétrica para os processos autorregressivos médias-móveis (ARMA), os quais estão divididos em duas categorias: métodos ótimos e sub-ótimos. Para os métodos ótimos tem-se os estimadores de máxima verossimilhança (MV) [8], [63], e para os métodos sub-ótimos temos os estimadores de Akaike [13], e o método de Steiglitz-McBride [18] com estimação simultânea dos parâmetros.

Ainda para os métodos sub-ótimos, mas para o caso de estimação separada, tem-se os estimadores baseados nas equações modificadas de Yule-Walker (EMYW), e os estimadores de mínimos quadrados das equações modificadas de Yule-Walker (MQYW) [2], [24], [7], [8] e [5].

Inicialmente é apresentada as propriedades e características dos processos ARMA, o critério de informação de Akaike [12], as propriedades das estimativas do vetor de parâmetros [15], [16] e o limite de Cramér-Rao assintótico para o processo ARMA [17].

3.2 Propriedades e Características dos Processos ARMA

Seja $x(n)$ um processo aleatório estacionário no sentido amplo (ESA). Se $x(n)$ satisfaz a seguinte equação de diferenças

$$x(n) + a_1x(n-1) + \dots + a_px(n-p) = \varepsilon(n) + b_1\varepsilon(n-1) + \dots + b_q\varepsilon(n-q), \quad 1 \leq n \leq N \quad (3.1)$$

então $x(n)$ é um processo autorregressivo média-móvel de ordem p e q , ARMA(p, q), onde $a_i, i = 1, \dots, p$; $b_i, i = 1, \dots, q$, são parâmetros do processo a serem estimados e $\varepsilon(n)$ é um suposto ruído branco, com média 0 e variância σ^2 . A função de transferência do sistema é definida como sendo

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_qz^{-q}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_pz^{-p}} \quad (3.2)$$

Este filtro RII (Resposta Impulsiva Infinita) é composto de polos e zeros que estão dentro da CRU do plano- z , de acordo com a suposição que o processo $x(n)$ é ESA. Sendo assim, esse filtro RII é também causal e estável [30].

A partir da função de transferência do sistema pode-se definir a densidade espectral de potência (DEP) do processo ARMA, no plano- z , como sendo

$$S_{ARMA}(z) = \frac{\sigma^2 B(z)B^*(1/z^*)}{A(z)A^*(1/z^*)} \quad (3.3)$$

ou

$$S_{ARMA}(z) = \frac{S_{MA}(z)}{S_{AR}(z)}.$$

onde $A(z) = \prod_{i=1}^p (1 - \mathbf{p}_i z_i^{-1})$ e $A^*(1/z^*) = \prod_{i=1}^p (1 - \mathbf{p}_i^* z_i^*)$, e os $\mathbf{p}_i, i = 1, \dots, p$, são os *polos*. E o $B(z) = \prod_{i=1}^q (1 - \mathbf{q}_i z_i^{-1})$ e $B^*(1/z^*) = \prod_{i=1}^q (1 - \mathbf{q}_i^* z_i^*)$, e os $\mathbf{q}_i, i = 1, \dots, q$, são os *zeros*, e $'*'$, denota o complexo conjugado.

Pode-se agora definir a densidade espectral de potência (DEP) no domínio da frequência fazendo $z = \exp(j2\pi fT)$ na expressão (3.3), ou seja

$$S_{ARMA}(f) = \frac{T\sigma^2 \left| 1 + \sum_{k=1}^q b_k \exp(-j2\pi f k T) \right|^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_k \exp(-j2\pi f k T) \right|^2}, \quad -\frac{0.5}{T} \leq f \leq \frac{0.5}{T} \quad (3.4)$$

ou simplesmente

$$S_{ARMA}(f) = \frac{\sigma^2 T |B(f)|^2}{|A(f)|^2} \quad (3.5)$$

a função $S_{ARMA}(f)$ é supostamente não-negativa e periódica em frequência com período $1/T$ Hz, e assumimos ser de faixa limitada em $\pm 0.5T$ Hz, onde T é o intervalo de amostragem do processo $x(n)$. Na DEP de um processo ARMA(p, q) temos picos e vales na curva do seu espectro, que correspondem aos polos e zeros do filtro RII, respectivamente. Supondo $T = 1$ fica-se com

$$S_{ARMA}(f) = \frac{\sigma^2 |B(f)|^2}{|A(f)|^2} \quad (3.6)$$

ou

$$S_{ARMA}(f) = \frac{S_{MA}(f)}{S_{AR}(f)}.$$

3.3 Critério de Informação de Akaike (CIA)

A determinação da ordem dos modelos de séries temporais (AR, MA e ARMA), na estimação espectral pode ser bastante complicada. Se determina-se uma ordem muito pequena para o modelo, a curva do espectro poderá ficar muito suave, não detectando possíveis picos. Ao contrário, determina-se uma ordem muito grande, podem aparecer mais picos espectrais do que realmente existem, e geralmente, as estatísticas não são estáveis. Sendo assim, na determinação da ordem deve-se escolher vários modelos de diferentes tamanhos, e depois seleciona-se o mais adequado. Neste texto não faremos a fase de identificação dos modelos, foram fixados o número de parâmetros.

O critério mais conhecido, e geralmente mais utilizado, é o critério de informação de Akaike (CIA) [12] definido como

$$\text{CIA}(i, j) = N \ln \hat{\sigma}_{ij}^2 + 2(i + j) \quad (3.7)$$

onde i é a ordem do processo AR, j é a ordem do processo MA, e $\hat{\sigma}_{ij}^2$ é o EMV (Estimador de Máxima Verossimilhança) de σ^2 , obtido supondo $x(n)$ um processo ARMA(i, j). Outros critérios podem ser utilizados como por exemplo: critério de informação Bayesiano; critério de Hannan e Quinn; critério FPE (*Final Predictor Error*); critério de CAT (*Criterion Autoregressive Transfer Function*) ou método de Parzen, podem ser encontrados em [9].

O CIA tem como objetivo encontrar os valores de i e j que minimizem a expressão (3.7). Esse critério é uma estimativa da distância de Kullback-Leibler [14], entre função de densidade de probabilidade (fdp) hipotética e a verdadeira fdp do processo $x(n)$. Se a ordem do processo ARMA(i, j) está correta, a estatística abaixo [6]

$$Q = N \sum_{k=1}^M \left(\frac{\hat{r}_\varepsilon(k)}{\hat{r}_\varepsilon(0)} \right)^2 \quad (3.8)$$

segue uma distribuição qui-quadrado com $M - i - j$ graus de liberdade denotada por χ_{M-i-j}^2 , onde $\hat{r}_\varepsilon(k)$ é o estimador viciado (polarizado) da SAC (sequência de autocorrelação) de $\varepsilon(n)$, e M é o tamanho da resposta ao impulso do filtro. Se o valor da estatística Q é muito grande, o modelo é incorreto. Outro teste para validade do modelo, como por exemplo verificar se o ruído é branco, é o teste do Box-Pierce semelhante a estatística (3.8), [3], [6] e [9].

3.4 Propriedades das Estimativas do Vetor de Parâmetros

Seja θ um vetor parâmetros real ou complexo a ser estimado de um conjunto de N observações $X = \{x(1), x(2), \dots, x(N)\}$. Se $\theta = \{a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q, \sigma^2\}$, é um conjunto do vetor de parâmetros do modelo ARMA(p, q), então o estimador desse vetor será:

$$\hat{\theta} = \{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_q, \hat{\sigma}^2\}.$$

Definiu-se a seguir as principais propriedades do estimador $\hat{\theta}$ do vetor de parâmetro θ :

PI. Um estimador $\hat{\theta}$ é não-viciado (não-polarizado) se

$$E \{ \hat{\theta} \} = \theta$$

caso contrário, o estimador é viciado (polarizado) com vício $\mathbf{b}(\theta) = E \{ \hat{\theta} \} - \theta$. Um estimador é assintoticamente não-viciado (não-polarizado) se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \{ \hat{\theta} \} = \theta.$$

PII. Um estimador $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é consistente se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr \left[\left\| \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \right\| < \epsilon \right] = 1$$

para algum $\epsilon > 0$ (pequeno). Então, a sequência de estimadores $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\}$ converge em probabilidade para o vetor de parâmetro $\boldsymbol{\theta}$ [8], [15] e [16].

PIII. Um estimador $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ será eficiente com respeito a outra estimativa $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ se a diferença das matrizes de covariâncias $\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} - \mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ é positiva definida. Isto implica que, a variância de cada componente de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ precisa ser menor do que a variância do correspondente componente de $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$. Se a sequência $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$, é não-viciada e eficiente com respeito a $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N-1}$, para todo N , então $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é uma estimador consistente.

Uma maneira de medir a qualidade de um vetor de estimadores $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, é calculando o erro quadrático médio (EQM)

$$EQM = E \left[\left| \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \right) \right|^2 \right]. \quad (3.9)$$

O EQM pode ser decomposto pela soma da variância do estimador mais o vício do estimador, ou seja,

$$EQM = E \left\{ \left| \left[\hat{\boldsymbol{\theta}} - E(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right] \right|^2 \right\} + \{\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta})\}^2. \quad (3.10)$$

Quando um estimador não é viciado (polarizado) o vício $\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}) = 0$, e o EQM reduz-se a variância do estimador de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Podemos também definir um intervalo de confiança para $\boldsymbol{\theta}$, onde temos dois casos:

I- Se $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é distribuído de acordo com uma distribuição Normal (Gaussiana), tal que $\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim N(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}^2)$, então a probabilidade abaixo [56]

$$\begin{aligned} \Pr \left[-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\sigma}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}} \leq z_{\alpha/2} \right] &= 1 - \alpha \\ \Pr \left[\hat{\boldsymbol{\theta}} - z_{\alpha/2} \boldsymbol{\sigma}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \leq \boldsymbol{\theta} \leq \hat{\boldsymbol{\theta}} + z_{\alpha/2} \boldsymbol{\sigma}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \right] &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

determina um intervalo de confiança $100(1 - \alpha)\%$ para $\boldsymbol{\theta}$, dado por:

$$\left[\hat{\boldsymbol{\theta}} - z_{\alpha/2} \boldsymbol{\sigma}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}, \hat{\boldsymbol{\theta}} + z_{\alpha/2} \boldsymbol{\sigma}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \right]$$

onde $z_{\alpha/2}$ é quantil da função de distribuição da $N(0, 1)$.

II- Se $\boldsymbol{\sigma}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}^2$ é um parâmetro desconhecido, de um conjunto de N observações, então a estimativa $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}^2$ terá uma distribuição Qui-Quadrado com N graus de liberdade, ou seja,

χ_N^2 , então a probabilidade associada é dada por [56]

$$\begin{aligned} \Pr \left[\chi(\alpha/2) \leq \frac{\hat{\sigma}_\theta^2}{\sigma_\theta^2} \leq \chi(1 - \alpha/2) \right] &= 1 - \alpha \\ \Pr \left[\frac{\hat{\sigma}_\theta^2}{\chi(1 - \alpha/2)} \leq \sigma_\theta^2 \leq \frac{\hat{\sigma}_\theta^2}{\chi(\alpha/2)} \right] &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

determinando um intervalo de confiança $100(1 - \alpha)\%$ para θ , dado por

$$\left[\frac{\hat{\sigma}_\theta^2}{\chi(1 - \alpha/2)}, \frac{\hat{\sigma}_\theta^2}{\chi(\alpha/2)} \right]$$

Um estimador ideal seria aquele que satisfaz todas as propriedades PI, PII e PIII. Observa-se ainda que, pela propriedade PIII a variância atinge o limite de Cramér-Rao (LCR), que é calculado da função de densidade de probabilidade (fdp) do vetor aleatório $\mathbf{x} = [x(1), \dots, x(N)]$. Então, um estimador acima do LCR não é eficiente, ou seja, o LCR assegura que [16], [8] e [63]

$$\mathbf{C}_{\hat{\theta}} \geq \mathbf{I}_\theta^{-1} \quad (3.11)$$

onde $\mathbf{C}_{\hat{\theta}}$ é a matriz de covariâncias de $\hat{\theta}$, e a diferença deve ser $\mathbf{C}_{\hat{\theta}} - \mathbf{I}_\theta^{-1} \geq 0$ é positiva semi-definida. O \mathbf{I}_θ é obtido para o verdadeiro valor de θ . Se a matriz é positiva semi-definida, todos os elementos da diagonal são não-negativos, implicando que

$$\text{Var}(\hat{\theta}_i) \geq [\mathbf{I}_\theta^{-1}]_{ii} \quad i = 1, \dots, n = p + q + 1. \quad (3.12)$$

\mathbf{I}_θ é denominado como a matriz de informação de Fisher e é definida como [16]

$$\mathbf{I}_\theta = E \left[\left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta} \right)^T \right] \quad (3.13)$$

onde $\partial \ln p(\mathbf{x}; \theta) / \partial \theta$ é o gradiente de $\ln p(\mathbf{x}; \theta)$ com respeito a θ . O $[i, j]$ -ésimo elemento da matriz de informação de Fisher é [16]

$$\begin{aligned} [\mathbf{I}_\theta]_{ij} &= E \left[\left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta_i} \right) \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta_j} \right) \right] \\ &= -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Se a matriz de covariância dos estimadores $\hat{\theta}$, de θ , são dadas por \mathbf{I}_θ^{-1} , então, estes estimadores são eficientes.

Se a estimativa é uma função do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ ($n \times 1$), ou seja, $g(\boldsymbol{\theta})$, onde g é $p \times 1$, então o limite de Cramér-Rao será [16],

$$\mathbf{C}_{\hat{g}} \geq \vartheta \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1} \vartheta^T. \quad (3.15)$$

onde ϑ é a matriz Jacobiano de dimensão $p \times n$ das transformações e é definido como

$$[\vartheta]_{ij} = \frac{\partial g_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}.$$

A interpretação do limite de Cramér-Rao em termos de elipsóides de concentração é mostrada na Figura 3.1. Se o desvio do estimador $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é definido como:

$$\delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}$$

então o vício do estimador, $\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta})$, é o desvio médio (isto é, o valor esperado). A elipsóide de concentração para o desvio, com matriz de covariância $\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ é mostrada na Figura 3.1, que foi adaptada de [8]. Se esse desvio é Gaussiano, então representará o contorno da densidade. A matriz de covariância do limite de Cramér-Rao, $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}$, tem o menor desvio, e é representada pela menor elipsóide. Geometricamente, podemos observar que a elipsóide relacionada com $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}$ está posicionada dentro da elipsóide de $\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$. No melhor dos casos, quando $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é o estimador de máxima verossimilhança, as duas elipsóides coincidem [8].

Os dois principais métodos para encontrar as estimativas dos parâmetros são: o método dos momentos (semelhante às estimativas das equações de Yule-Walker), que geralmente não fornecem estimativas eficientes, mas são mais fáceis de serem calculados e implementados. O segundo é o método de máxima verossimilhança (MV), que é eficiente quando o tamanho da amostra N , é grande, mas pode-se encontrar dificuldades para obtê-lo. Se o estimador de MV pode ser implementado, em alguns casos, deve-se dar preferência ao mesmo. O método dos momentos estima os parâmetros desconhecidos para obter os momentos amostrais, utilizando a equação teórica dos momentos.

O estimador MV tem muitas propriedades desejáveis, pode-se destacar a seguinte: se existe um estimador não-viciado (não-polarizado) que atinge o limite de Cramér-Rao, então o método de MV fornecerá este estimador. Para um número grande de observações (N grande) o estimador MV é [57]

1. não-viciado (não-polarizado), $E \{ \hat{\boldsymbol{\theta}} \} \longrightarrow \boldsymbol{\theta}$
2. Eficiente, $\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \longrightarrow \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}$
3. Normalmente distribuído (Gaussiano).

Podem-se sumarizar estas propriedades no seguinte teorema:

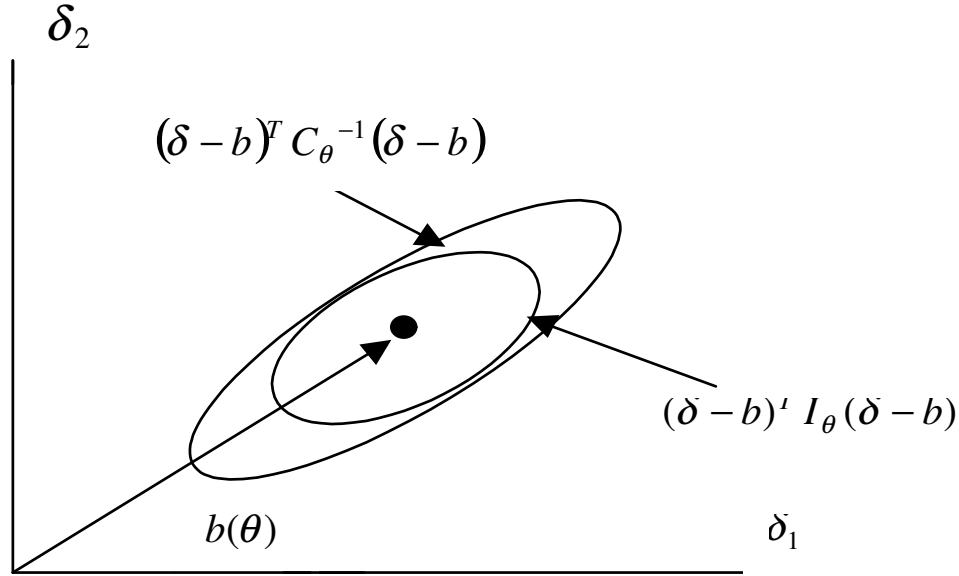


Figura 3.1: Interpretação geométrica do limite de Cramer-Rao (Figura adaptada de [8]).

Teorema 1: (Propriedades Assintóticas) Se a fdp $p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ de \mathbf{x} satisfaz algumas condições de regularidades, então o estimador de MV do vetor de parâmetros desconhecidos $\boldsymbol{\theta}$, ou seja, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, é assintoticamente distribuído segundo

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim N(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1})$$

onde $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}}$ é a matriz de informação de Fischer do verdadeiro vetor de parâmetros desconhecidos.

Prova: ver Hoel, Port e Stone (1971) [57].

Essas propriedades são referentes às propriedades assintóticas do estimador de MV. Outra importante característica do estimador de MV num ponto de vista prático é a propriedade de invariância. Se o estimador de MV de $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ é desejado, onde $\mathbf{g}(p \times 1)$, então o estimador de MV é [16]

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}).$$

Podemos sumarizar esta propriedade no seguinte teorema:

Teorema 2: (Propriedades de Invariância) O estimador de MV do parâmetro $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$, onde \mathbf{g} é uma função $p \times 1$ parâmetros de $\boldsymbol{\theta}$, e a fdp $p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ é parametrizada por $\boldsymbol{\theta}$, é dado por:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}),$$

para $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, estimador de MV de $\boldsymbol{\theta}$. Se \mathbf{g} é uma função inversível, então $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ maximiza a função de verossimilhança modificada, definida como

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = \max_{\{\boldsymbol{\theta}: \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})\}} p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$$

O estimador de MV de \mathbf{g} é encontrado pela transformação do estimador de MV de $\boldsymbol{\theta}$. O cálculo de verossimilhança pode ser simplificado utilizando o conceito de estatística suficiente [15], [16]. Uma estatística $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é suficiente para $\boldsymbol{\theta}$ se FDP $p(\mathbf{x}|\hat{\boldsymbol{\theta}})$ não depende de $\boldsymbol{\theta}$. Esse conceito nos diz que a estatística suficiente sumariza todas as informações sobre os dados, desde que a FDP $p(\mathbf{x}|\hat{\boldsymbol{\theta}})$ não dependa de $\boldsymbol{\theta}$. Pode-se mostrar que a estatística é suficiente se e somente se a fdp pode ser descrita como

$$p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}; \boldsymbol{\theta}) \mathbf{h}(\mathbf{x}).$$

\mathbf{g} e \mathbf{h} são funções que dependem somente das variáveis indicadas. Essa fatoração é conhecida como o teorema da fatoração de Neyman-Fisher [15], [16]. Consequentemente, se existe uma estatística suficiente, a função de verossimilhança dos dados originais pode ser substituída pela função de verossimilhança da estatística suficiente $p(\hat{\boldsymbol{\theta}}; \boldsymbol{\theta})$, e esse último termo é maximizado sobre $\boldsymbol{\theta}$ para encontrar o estimador de máxima verossimilhança.

Prova: ver [16].

Teorema 3: (Otimidade do Estimador de MV para o modelo linear) Se os dados observados são representados segundo um modelo linear geral

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

onde \mathbf{Y} é uma matriz conhecida $N \times p$, com $N > p$ e de posto p , $\boldsymbol{\theta}$ é um vetor de parâmetros $p \times 1$, a ser estimado, e $\boldsymbol{\epsilon}$ é um vetor de ruído branco Gaussiano com média $\mathbf{0}$ e matriz de covariância \mathbf{C} , ou seja, $N(\mathbf{0}, \mathbf{C})$, então o estimador de MV de $\boldsymbol{\theta}$ é

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{Y}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{X}.$$

Então $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ também é um estimador eficiente e atinge o LCR e portanto é um estimador não-viciado (não-polarizado) de variância mínima, e fdp de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim N\left(\boldsymbol{\theta}, (\mathbf{Y}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Y})^{-1}\right).$$

Prova: ver [16].

3.5 O Limite de Cramér-Rao Assintótico para o Processo ARMA

Um resultado de extrema importância para avaliar a eficiência de um estimador, em termos de variância mínima é o limite de Cramér-Rao, como foi colocado na seção anterior. Nesta seção iremos abordar o limite de Cramér-Rao assintótico para estimação dos parâmetros do processo ARMA.

O limite de Cramér-Rao assintótico (LCRA) para estimação dos parâmetros ARMA foi proposto por [17], onde os processos estudados são supostamente estacionários e normais (Gaussianos). Essa técnica está baseada num teorema proposto por [58], teorema 9.

Seja $x(n)$ um processo estacionário Gaussiano com média zero e variância σ^2 , e função autocorrelação $r_x(k)$ e DEP, $S_x(f)$, como definidas na seção 3.2. Será apresentado a seguir uma maneira de calcular o limite de Cramér-Rao assintótico, baseado na definição da matriz de informação de Fisher [37], [38].

Suponha X um vetor aleatório, com f.d.p. $f(X; \theta)$ e que depende do vetor de parâmetros θ . Supõe-se que f é contínua e diferenciável com relação a θ . Então a matriz de informação de Fisher associada a estimação de θ de X , é dada por

$$I = E \{ L_\theta L_\theta^T \}$$

onde $L = \log f(X; \theta)$ e L_θ é o gradiente de L com respeito a θ . Se $f(X; \theta)$ é duas vezes diferenciável com respeito a θ , obtém-se de I o resultado

$$E \{ L_\theta L_\theta^T \} = -E \{ L_{\theta\theta} \}$$

onde $L_{\theta\theta}$ denota a matriz das derivadas parciais de segunda ordem.

A função logarítmica de verossimilhança assintótica associada com o problema de estimação para o processo ARMA é dada por [17]

$$L = -0,5 \sum_{n=1}^N \varepsilon^2(n; \theta) + cte \quad (3.16)$$

onde $\varepsilon(n; \theta)$ é o erro de predição associado ao processo ARMA(p, q) e $\theta = \{a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q, \sigma^2\}$.

Diferenciando (3.16) com respeito a σ^2 temos

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2} = -\frac{2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \varepsilon^2(n) \quad (3.17)$$

Derivando com relação aos outros parâmetros do processo ARMA, temos

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_k \partial \theta_l} = - \sum_{n=1}^N \frac{\partial \varepsilon(n) \partial \varepsilon(n)}{\partial \theta_k \partial \theta_l} - \sum_{n=1}^N \varepsilon(n) \frac{\partial^2 \varepsilon(n)}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_k \partial \sigma} = \frac{2}{\sigma} \sum_{n=1}^N \varepsilon(n) \frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial \theta_k} \quad (3.19)$$

A seguir deriva-se a expressão (3.16), obtida a partir da expressão (3.1), com respeito aos parâmetros a_k e b_k ,

$$\sum_{i=0}^q b_i \frac{\partial \varepsilon(n-i)}{\partial a_k} = \frac{1}{\sigma} x(n-k), \quad (3.20)$$

$$\sum_{i=0}^q b_i \frac{\partial \varepsilon(n-i)}{\partial b_k} = -\varepsilon(n-k) \quad (3.21)$$

Pode-se notar que $\frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial a_k}$, $\frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial b_k}$ dependem somente de valores passados de $x(n)$ e $\varepsilon(n)$. Tomando os valores esperados de (3.17), (3.18) e (3.19), tem-se

$$E \left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2} \right\} = \frac{2N}{\sigma^2} \quad (3.22)$$

$$E \left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \right\} = NE \left\{ \frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial \theta_k} \frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial \theta_l} \right\} \quad (3.23)$$

$$E \left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_k \partial \sigma} \right\} = 0. \quad (3.24)$$

Lembrando que $\varepsilon(n)$ é ruído branco. Será preciso agora calcular $E \left\{ \frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial \theta_k} \frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial \theta_l} \right\}$. Nota-se que as variáveis aleatórias $\partial \varepsilon(n)/\partial a_k$ e $\partial \varepsilon(n)/\partial b_k$ são obtidas filtrando $(1/\sigma)x(n-k)$ e $\varepsilon(n-k)$ por meio de $1/B(z)$. Podendo-se agora reescrever as expressões (3.20) e (3.21) como

$$\frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial a_k} = \frac{1}{B(z)} \frac{1}{\sigma} x(n-k) \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial b_k} = -\frac{1}{B(z)} \varepsilon(n-k). \quad (3.26)$$

É conveniente introduzir os processos AR: $y(n)$ e $z(n)$ da seguinte forma

$$y(n) = \frac{1}{B(z)} \frac{1}{\sigma} x(n) = \frac{1}{A(z)} \varepsilon(n) \quad (3.27)$$

$$z(n) = \frac{1}{B(z)} \varepsilon(n). \quad (3.28)$$

Então fica-se com

$$\frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial a_k} = y(n-k) \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial b_k} = -z(n-k) \quad (3.30)$$

Utilizando as expressões (3.22)-(3.24), (3.25)-(3.26), e (3.27)-(3.28) define-se agora a matriz de informação de Fisher:

$$I = N \begin{bmatrix} R_{yy} & -R_{yz} & 0 \\ -R_{zy} & R_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 2/\sigma^2 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

onde

$$R_{yy} = E \left\{ \begin{bmatrix} y(n-1) \\ \vdots \\ y(n-k) \end{bmatrix} [y(n-1) \cdots y(n-k)] \right\} \quad (3.32)$$

$$R_{yz} = E \left\{ \begin{bmatrix} y(n-1) \\ \vdots \\ y(n-k) \end{bmatrix} [z(n-1) \cdots z(n-k)] \right\} = R_{zy} \quad (3.33)$$

$$R_{zz} = E \left\{ \begin{bmatrix} z(n-1) \\ \vdots \\ z(n-k) \end{bmatrix} [z(n-1) \cdots z(n-k)] \right\} \quad (3.34)$$

Podemos definir agora o limite de Cramér-Rao utilizando a matriz de informação de Fisher I , separando os parâmetros a_k e b_k de σ^2 ,

$$E \left\{ \begin{bmatrix} \epsilon \\ \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon & \eta \end{bmatrix} \right\} \geq \frac{1}{N} \begin{bmatrix} R_{yy} & -R_{yz} \\ -R_{zy} & R_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.35)$$

$$E \{ \hat{\sigma}^2 \} \geq \frac{\sigma^2}{2N} \quad (3.36)$$

onde $\epsilon = A - \widehat{A}$ e $\eta = B - \widehat{B}$ são os erros dos parâmetros $A = [a_1, \dots, a_p]^T$ e $B = [b_1, \dots, b_q]^T$.

3.5.1 Cálculo do Limite de Cramér-Rao Assintótico

Para cálculo do limite de Cramér-Rao o interesse inicial é obter a matriz de covariância dos erros, ou seja, $E\{\epsilon\epsilon^T\}$ e $E\{\eta\eta^T\}$, (os elementos da diagonal principal), mas não $E\{\epsilon\eta^T\}$. Utilizando-se o resultado [17], [39], [40]

$$\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}C\Delta^{-1}DA^{-1} & -A^{-1}C\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}DA^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

onde $\Delta = B - DA^{-1}C$. Desse resultado segue-se que

$$E\{\epsilon\epsilon^T\} \geq \frac{1}{N} [R_{yy} - R_{yz}R_{zz}^{-1}R_{zy}]^{-1} \quad (3.38)$$

$$E\{\eta\eta^T\} \geq \frac{1}{N} [R_{zz} - R_{zy}R_{yy}^{-1}R_{yz}]^{-1}. \quad (3.39)$$

Serão calculadas agora as matrizes R_{yy} , R_{yz} , e R_{zz} , dos processos AR, $y(n)$ e $z(n)$. Seja $m \geq \max\{p, q\}$ e utilizando a condição $a_i = 0$ para $i > p$, e $b_i = 0$ para $i > q$. Utilizando-se o resultado geral, da expressão (3.37), na matriz de covariância dos processos estacionários autorregressivos, obtém-se as seguintes fórmulas para os processos AR: $y(n)$ e $z(n)$

$$\overline{R}_{yy} = [A_1A_1^T - A_2A_2^T]^{-1} \quad (3.40)$$

$$\overline{R}_{zz} = [B_1B_1^T - B_2B_2^T]^{-1} \quad (3.41)$$

$$\overline{R}_{zy} = [A_1B_1^T - B_2A_2^T]^{-1} \quad (3.42)$$

onde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1} & \cdots & a_1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_m & 0 & \cdots & 0 \\ a_{m-1} & a_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \cdots & a_{m-1} & a_m \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

e

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m-1} & \cdots & b_1 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} b_m & 0 & 0 & 0 \\ b_{m-1} & b_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

As matrizes de covariância R_{yy}, R_{zz}, R_{zy} necessárias para calcular a matriz de informação de Fisher são partes das matrizes expandidas $\bar{R}_{yy}, \bar{R}_{zz}, \bar{R}_{zy}$. Se $p = q = m$ simplesmente tem-se $R_{yy} = \bar{R}_{yy}$, $R_{zz} = \bar{R}_{zz}$ e $R_{zy} = \bar{R}_{zy}$. Se $p \neq q$ então R_{yy} e \bar{R}_{zy} terão dimensões diferentes. Sendo assim o limite de Cramér-Rao assintótico pode ser obtido utilizando as expressões (3.38-3.39) e (3.40-3.42).

Pela forma da estrutura especial das matrizes envolvidas, técnicas eficientes para calcular as matrizes de covariância são avaliadas em [39] e [40].

Pode-se também calcular o limite de Cramér-Rao assintótico para o processo AR puro

$$E \{ \epsilon \epsilon^T \} \geq \frac{1}{N} R_{yy}^{-1} = \frac{1}{N} [A_1 A_1^T - A_2 A_2^T] \quad (3.45)$$

e também para o modelo MA puro

$$E \{ \eta \eta^T \} \geq \frac{1}{N} R_{zz}^{-1} = \frac{1}{N} [B_1 B_1^T - B_2 B_2^T] \quad (3.46)$$

Na literatura encontram-se outros procedimentos para calcular a matriz de covariância do LCR, mas com maior esforço computacional, como por exemplo em: [41], [44], [42] e [43].

3.6 Métodos de Estimação Espectral Simultânea para o Processo ARMA

Nesta seção são apresentados alguns métodos de estimação simultânea, tendo-se inicialmente o método estimação de máxima verossimilhança (MV), que é considerado ótimo, e estima simultaneamente os parâmetros do processo ARMA(p, q). Porém as soluções são obtidas por meio de equações não-lineares e, exigem um esforço computacional muito grande, além disso, nem sempre convergem [22]. Em seguida tem-se os métodos de estimação simultânea considerados sub-ótimos, que são: Método de Akaike [13], (que é uma aproximação do MV) e o método de Steiglitz-Mcbride [18]. Outro método mais recente é o método Steiglitz-McBride no domínio da frequência, que foi apresentado em [46], e

que tem uma abordagem diferente, visando outras aplicações, não sendo, portanto, abordado nesse texto. Um outra abordagem seria trabalhar a estimação considerando sinais aleatórios no tempo contínuo, que podem ser representados por um modelo ARMA, e uma proposta da aproximação da matriz de covariância para tornar as estimativas dos parâmetros mais consistentes, como foi proposto por [47].

3.6.1 Método de Máxima Verossimilhança

Seja $x(n)$ um processo ARMA como definido na seção 3.2. Define-se a sua função de verossimilhança como sendo

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \sigma^2) = \mathbf{f}(x_1, \dots, x_N; a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; \sigma^2) \quad (3.47)$$

onde \mathbf{f} é a função de densidade de probabilidade (*fdp*) conjunta dos $x_i, i = 1, \dots, N$, que são supostamente variáveis aleatórias Normais (Gaussianas) com média zero e variância σ^2 , e \mathbf{a} e \mathbf{b} são os vetores de parâmetros desconhecidos dos processos AR e MA, respectivamente.

Para obter o estimador de máxima verossimilhança (EMV) precisa-se maximizar a função \mathbf{f} , e para esta solução de maximização tem-se um conjunto de soluções não-lineares [6].

Se $x(n)$ é um processo ARMA pode-se descrever sua função de verossimilhança a partir de um processo AR(∞) com coeficientes $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots)$ [6]. Supondo um processo AR(L), tal que $c_i \approx 0$ para $i > L$, tem-se uma boa aproximação. Isto equivale dizer que a resposta impulsiva do filtro $1/B(z)$ será aproximadamente zero para $i > L$ [2].

Dado que a fdp do processo ARMA pode ser escrita como a fdp condicional [6]

$$\mathbf{f}(x(L+1), \dots, x(N) \mid x(1), \dots, x(L); \mathbf{a}, \mathbf{b}, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{(N-L)/2}} \exp(\mathbf{G}) \quad (3.48)$$

onde

$$\mathbf{G} = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=L+1}^N \left(x(n) + \sum_{j=1}^L c_j x(n-j) \right)^2 \quad (3.49)$$

e os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} são os coeficientes dos processos AR e MA, respectivamente, que dependem do vetor \mathbf{c} . Maximizar a função de verossimilhança \mathbf{f} , com relação a (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , é equivalente a minimizar

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{n=L+1}^N \left(x(n) + \sum_{j=1}^L c_j x(n-j) \right)^2 \quad (3.50)$$

onde as componentes do vetor $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_L)$ são definidas como

$$c_j = - \sum_{k=1}^q b_k c_{j-k} + \sum_{k=0}^p a_k \delta(j-k). \quad (3.51)$$

Onde $\delta(j-k) = 1$, para $j = k$ e $\delta(j-k) = 0$, para $j \neq k$. Tomando as derivadas parciais $\partial S/\partial \mathbf{a}$ e $\partial S/\partial \mathbf{b}$ e igualando-as a zero, podemos encontrar as estimativas dos vetores de parâmetros, $\hat{\mathbf{a}}$ e $\hat{\mathbf{b}}$, e $\hat{\sigma}^2$, a variância do ruído branco é dada por

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-L} \sum_{n=L+1}^N \left(x(n) + \sum_{j=1}^L \hat{c}_j x(n-j) \right)^2 \quad (3.52)$$

onde as estimativas $\hat{c}_j, j = 1, \dots, L$ são encontradas como a resposta impulsiva de um filtro com função de transferência do sistema $\hat{H}(z) = \hat{Y}(z)/\hat{X}(z)$, produzindo equações semelhantes às de Yule-Walker, mas de solução mais complexa. A variância $\hat{\sigma}^2$ pode ser também representada no domínio da frequência, para $N \gg L$, como sendo

$$\hat{\sigma}^2 = \int_{-0,5/T}^{0,5/T} I(f) \frac{|\hat{Y}(f)|^2}{|\hat{X}(f)|^2} df \quad (3.53)$$

onde $I(f)$ é o periodograma espectral, que será considerado uma função dos valores observados e não necessariamente como um estimador espectral [2].

3.6.2 Estatísticas das Estimativas de Máxima Verossimilhança

Para um conjunto finito de observações, as estatísticas de máxima verossimilhança, dos estimadores dos parâmetros do processo ARMA e sua densidade espectral de potência, não estão bem definidas. Portanto, para o caso de $N \rightarrow \infty$, os EMV do processo ARMA, são assintoticamente distribuídos segundo uma distribuição Normal (Gaussiana) multivariada, com média dada por

$$\boldsymbol{\mu} = E \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\sigma}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \sigma^2 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

e a matriz de covariância é o inverso da matriz de informação de Fisher [6], ou seja,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{N} \mathbf{R}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & 2 \frac{\sigma^4}{N} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

onde

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_y & -\mathbf{R}_{yz} \\ -\mathbf{R}_{zy} & \mathbf{R}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \times p & p \times q \\ q \times p & q \times q \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

com

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_y]_{ij} &= r_y(i-j), i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, p \\ [\mathbf{R}_{yz}]_{ij} &= r_{yz}(i-j), i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q \\ [\mathbf{R}_z]_{ij} &= r_z(i-j), i = 1, \dots, q; j = 1, \dots, q \end{aligned} \quad (3.57)$$

e $\mathbf{0}$ é um vetor $(p+q) \times 1$ de zeros, $y(n)$ é um processo AR(p) com um conjunto de parâmetros $\{a_1, \dots, a_p, \sigma^2\}$ e $z(n)$ é um processo AR(q) com um conjunto de parâmetros $\{b_1, \dots, b_q, \sigma^2\}$.

3.6.3 Método de Akaike

Esse método foi proposto por Akaike [13] e consiste de um problema de otimização não-linear iterativo e é uma aproximação do EMV, porém não tem sua convergência garantida. Se ocorre convergência, o ponto de mínimo encontrado pode não ser global. Deve-se começar a primeira iteração com um valor próximo ao verdadeiro valor do parâmetro (quando for conhecido), que certamente o mínimo global será encontrado. Para um número grande de observações o ponto de mínimo local será facilmente encontrado. O EMV aproximado do processo ARMA(p, q), é obtido por meio de valores das estimativas de \mathbf{a} e \mathbf{b} que minimizam [2]

$$\mathbf{Q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{N} S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_{-0.5/T}^{0.5/T} I(f) \frac{|A(f)|^2}{|B(f)|^2} df \quad (3.58)$$

onde \mathbf{Q} é a variância do ruído branco dada na expressão (3.53), e $I(f)$ é o periodograma espectral do conjunto de observações.

Por meio do método iterativo de Newton-Raphson, é possível encontrar os zeros do vetor

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{a}} \\ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{b}} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{k+1} \\ \mathbf{b}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_k \\ \mathbf{b}_k \end{bmatrix} - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) \mathbf{d} \Big|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_k, \mathbf{b}=\mathbf{b}_k} \quad (3.60)$$

onde \mathbf{a}_k e \mathbf{b}_k são a k -ésima iteração do vetor de parâmetro dos processos AR e MA, respectivamente, e $\mathbf{H}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ é a hessiana de \mathbf{Q} , definida como

$$\mathbf{H}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{a} \partial \mathbf{a}^T} & \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{a} \partial \mathbf{b}^T} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{b} \partial \mathbf{a}^T} & \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{b} \partial \mathbf{b}^T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \times p & p \times q \\ q \times p & q \times q \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Pode-se mostrar que as derivadas parciais são aproximadamente iguais a [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial a_k} &= 2 \sum_{i=0}^p a_i r_w(k-i), \quad k = 1, \dots, p \\ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial b_l} &= -2 \sum_{i=0}^q b_i r_v(l-i), \quad l = 1, \dots, p \\ \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial a_k \partial a_l} &= 2r_w(k-l), \quad k, l = 1, \dots, p \\ \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial b_k \partial b_l} &= 2r_v(k-l), \quad k, l = 1, \dots, q \\ \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial a_k \partial b_l} &= -2r_{wv}(k-l), \quad k = 1, \dots, p; l = 1, \dots, q \end{aligned} \quad (3.62)$$

onde

$$r_w(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-k} w(n)w(n+k) \quad (3.63)$$

$$r_v(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-k} v(n)v(n+k) \quad (3.64)$$

e

$$r_{wv}(k) = \begin{cases} r_{wv}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-k} w(n)v(n+k), & k \geq 0 \\ r_{wv}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-k+1}^{N-k} w(n)v(n+k), & k < 0 \end{cases}. \quad (3.65)$$

As seqüências $w(n)$ e $v(n)$ são definidas como as inversas das transformadas- z

$$w(n) = Z^{-1} \left(\frac{\mathbb{H}(z)}{Y(z)} \right) \quad (3.66)$$

$$v(n) = Z^{-1} \left(\frac{\mathbb{H}(z) X(z)}{Y(z) Y(z)} \right) \quad (3.67)$$

onde $\mathbb{H}(z) = \sum_{n=1}^N x(n)z^{-n}$, $X(z) = \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}$ e $Y(z) = \sum_{n=1}^N b_n z^{-n}$.

O estimador de Akaike pode não fornecer um filtro de fase-mínima. Sendo assim, se para alguma iteração os zeros do processo MA estão fora da CRU, ou seja, $|\mathbf{q}_i| \geq 1$, pode-se substituir aqueles zeros pelo inverso do seu conjugado, $|1/\mathbf{q}_i^*| \leq 1$, contornando o problema. Entretanto, segundo [2], estas deficiências do método podem produzir resultados não satisfatórios.

3.6.4 Método de Estimação de Steiglitz - McBride

Esse método de estimação fornece simultaneamente as estimativas de ambos os parâmetros dos processos AR e MA e foi proposto por Steiglitz-McBride [18]. O método se baseia na resolução de um problema linear iterativo, com o objetivo de obter estimativas dos parâmetros dos processos AR e MA de tal maneira que converjam para os verdadeiros valores dos parâmetros. No aplicativo MATLAB encontra-se uma subrotina para obter as estimativas dos parâmetros do modelo ARMA, utilizando esse método.

Supondo que a entrada do filtro ARMA tenha sido estimada como uma seqüência $\hat{\varepsilon}(n)$ e a equação do modelo de saída do erro seja

$$x(n) = \left(\frac{Y(z)}{X(z)} \right) \varepsilon(n) + e(n) \quad (3.68)$$

onde $Y(z) = \sum_{n=1}^q b_n z^{-n}$ e $X(z) = \sum_{n=1}^p a_n z^{-n}$. Então aproxima-se a equação do erro, $e(n)$, para um processo ARMA(p, q)

$$e(n) = x(n) + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k x(n-k) - \sum_{k=1}^q \hat{b}_k \hat{\varepsilon}(n-k) \quad (3.69)$$

onde as estimativas $\hat{\varepsilon}(n)$ serão utilizadas no lugar do ruído branco $\varepsilon(n)$. O erro torna-se, portanto, linear com relação aos parâmetros desconhecidos a_k e b_k . A seqüência de valores está definida no intervalo $1 \leq M \leq n \leq L \leq N$, e os valores M e L dependerão do

algoritmo a ser utilizado para estimar $\varepsilon(n)$ [7]. O conjunto de $L - M + 1$ equações dos erros apresentadas na expressão (3.69), tem a seguinte forma matricial

$$\mathbf{e} = \mathbf{X}\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{b}} \quad (3.70)$$

onde

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_M \\ e_{M+1} \\ \vdots \\ e_L \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x(M) & x(M-1) & \cdots & x(M-p) \\ x(M+1) & x(M) & \cdots & x(M-p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(L) & x(L-1) & \cdots & x(L-p) \end{bmatrix}, \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

e

$$\hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}(M-1) & \hat{\varepsilon}(M-2) & \cdots & \hat{\varepsilon}(M-q) \\ \hat{\varepsilon}(M) & \hat{\varepsilon}(M-1) & \cdots & \hat{\varepsilon}(M-q+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\varepsilon}(L-1) & \hat{\varepsilon}(L-2) & \cdots & \hat{\varepsilon}(L-q) \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_q \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Por meio do método dos mínimos quadrados, pode-se minimizar a variância do processo ARMA

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{n=M}^L |e(n)|^2. \quad (3.73)$$

Resolvendo o conjunto de equações simultâneas (3.70), pode-se encontrar as estimativas dos vetores de parâmetros dos processos AR e MA, podendo ser tomadas da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{X} & \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{U}} \\ \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{X} & \hat{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{U}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \hat{\mathbf{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^2 \\ \mathbf{0}_{p+q} \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

Obtém-se as estimativas dos vetores de parâmetros $\hat{\mathbf{a}}$ e $\hat{\mathbf{b}}$ por intermédio de (3.74), e utilizam-se estas estimativas para filtrar o processo $x(n)$ como o inverso do filtro $\hat{X}(z)/\hat{Y}(z)$ fornecendo as estimativas da sequência de entrada $\hat{\varepsilon}(n)$. As equações normais (3.74) são resolvidas iterativamente de tal maneira que alcance um grau de convergência.

A resposta impulsiva $h(n)$ do filtro $1/\hat{Y}(z)$, é, em geral, de duração infinita e precisa ser truncada para poder operar com a sequência $x(n)$, gerando uma fonte de erro no

procedimento de estimação. Esse truncamento permite determinar os valores de M e L . O procedimento se inicia fazendo-se uma estimativa de $\varepsilon(n)$ baseada na aproximação do processo AR longo e utilizando algum método de estimação AR apresentado na seção 2.2.

Pode-se resumir o método de Steiglitz-McBride nos seguintes passos:

Algoritmo de Steiglitz-McBride

Passo 1: Aplicar o método dos mínimos quadrados no modelo:

$$x(n) + \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) = \sum_{k=1}^q b_k \varepsilon(n) + e(n) \quad (3.75)$$

e estimam-se os parâmetros $\hat{\mathbf{a}} = \{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p\}$ e $\hat{\mathbf{b}} = \{\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_q\}$.

Passo 2: Fazer as seguintes filtrações:

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{\hat{X}(z)} x(n) \quad (3.76)$$

e

$$\hat{\varepsilon}(n) = \frac{1}{\hat{X}(z)} \varepsilon(n) \quad (3.77)$$

Passo 3: Aplicar o método dos mínimos quadrados para o modelo

$$x(n) + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k x(n-k) = \sum_{k=1}^q \hat{b}_k \hat{\varepsilon}(n) + e(n) \quad (3.78)$$

e repetir o passo 2 com o novo $\hat{\mathbf{a}}$ estimado. O processo para quando $\hat{\mathbf{a}}$ e $\hat{\mathbf{b}}$ convergem.

Esse procedimento iterativo não garante a convergência do método. As condições de convergência em geral não são conhecidas. O filtro inverso $\hat{X}(z)/\hat{Y}(z)$ gerado pelas estimativas dos processos AR e MA, não é garantido ser de fase mínima, podendo até ser instável, sendo necessário algumas modificações no algoritmo para produzir um filtro inverso de fase mínima, tal como refletir os polos/zeros de fora para dentro da CRU do plano- z [7]. Uma versão modificada deste algoritmo esta implementada como o método de Mayne-Firoozan em [2].

3.7 Métodos de Estimação Espectral Separada para o Processo ARMA

Esses métodos se caracterizam pelo fato de apresentarem soluções por meio de equações lineares, exigindo um menor esforço computacional, com relação aos métodos ótimos. Na estimação separada, estima-se o numerador (função de transferência do sistema composta de zeros), e o denominador (função de transferência do sistema composta de polos) do processo ARMA separadamente.

Pode-se escrever a equação das diferenças, (3.1), do processo ARMA(p, q), da seguinte forma

$$u(n) = x(n) + \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) \quad (3.79)$$

$$\varepsilon(n) + \sum_{k=1}^q b_k \varepsilon(n-k) = u(n) \quad (3.80)$$

onde a equação (3.79) pode ser interpretada como a equação diferenças de um filtro RIF (resposta impulsiva finita), com parâmetros iguais aos parâmetros do processo AR(p) do filtro ARMA. Na entrada do filtro tem-se o processo $x(n)$ e na saída um processo residual $u(n)$. Este processo residual é um MA(q) com os parâmetros do processo MA do filtro ARMA, apresentado na equação (3.80).

Nas estimativas dos parâmetros do processo ARMA, primeiro obtêm-se as estimativas dos parâmetros do processo AR, a partir da equação (3.79) utilizando uma das técnicas de estimação AR, apresentadas na seção 2.2. Em seguida obtêm-se um processo residual, dado pela equação (3.80), a partir da qual estimam-se os parâmetros desse processo utilizando-se de uma técnica de estimação MA, sendo estas as estimativas do processo MA gerado. Esta interpretação seria a base dos métodos de estimação separada para os modelos ARMA, como é apresentado na figura 3.2.

Nos métodos de estimação separada a qualidade das estimativas AR é muito importante pois, quanto mais exatas forem elas, mais o processo residual $u(n)$ se aproximará do processo MA(q) caracterizado pela variância σ^2 e pelo conjunto de parâmetros $\{b_1, \dots, b_q\}$.

3.7.1 Equações Modificadas de Yule-Walker (EMYW)

Seja $x(n)$ um processo aleatório ARMA, como definido na seção 3.2 Multiplicando a expressão (3.1) por $x^*(n-k)$ e tomando o seu valor esperado, tem-se como resultado

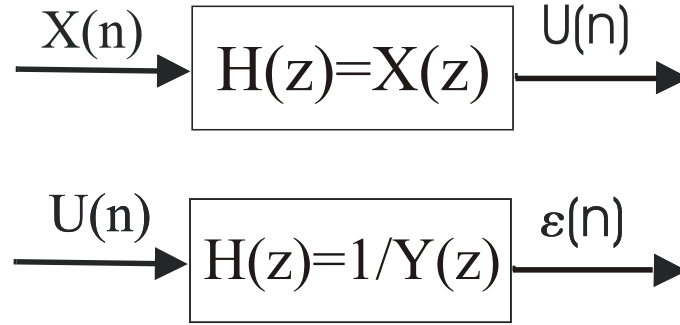


Figura 3.2: Interpretação dos métodos de estimação separada para o processo ARMA utilizando diagramas em bloco.

$$E[x(n)x^*(n-k)] = -\sum_{i=1}^p a_i E[A] + \sum_{i=0}^q b_i E[B] \quad (3.81)$$

onde $A = x(n-i)x^*(n-k)$ e $B = \varepsilon(n-i)x^*(n-k)$, e $'*$ denota o complexo conjugado. Com relação a SAC (sequência de autocorrelação), temos

$$r_x(k) = -\sum_{i=1}^p a_i r_x(k-i) + \sum_{i=0}^q b_i r_{\varepsilon x}(k-i). \quad (3.82)$$

A correlação cruzada, $r_{\varepsilon x}(i)$ pode ser representada em termos dos parâmetros $h(k)$ (resposta impulsiva), ou seja, dado que $x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h^*(k)\varepsilon(n-k)$ [7] e

$$r_{\varepsilon x}(i) = E[\varepsilon(n+i)x(n)] \quad (3.83)$$

substituindo $x(n) = \varepsilon^*(n) + \sum_{k=1}^{\infty} h^*(k)\varepsilon(n-k)$ em (3.83), resulta em

$$r_{\varepsilon x}(i) = E\left[\varepsilon(n+i)\left(\varepsilon^*(n) + \sum_{k=1}^{\infty} h^*(k)\varepsilon(n-k)\right)\right]. \quad (3.84)$$

Calculando os valores esperados tem-se

$$r_{\varepsilon x}(i) = r_{\varepsilon}(i) + \sum_{k=1}^{\infty} h^*(k)r_{\varepsilon}(i+k). \quad (3.85)$$

Como $\varepsilon(k)$ é um suposto ruído branco, então

$$r_{\varepsilon x}(i) = \begin{cases} 0, & i > 0 \\ \sigma^2, & i = 0 \\ \sigma^2 h^*(-i), & i < 0 \end{cases} . \quad (3.86)$$

Sendo assim, a relação entre os parâmetros do processo ARMA e SAC do processo $x(n)$ é

$$r_x(k) = \begin{cases} r_x^*(-k), & k < 0 \\ -\sum_{i=1}^p a_i r_x(k-i) + \sigma^2 \sum_{i=k}^q b_i h^*(k-i), & 0 \leq k \leq q \\ -\sum_{i=1}^p a_i r_x(k-i), & k > q \end{cases} \quad (3.87)$$

onde $h(0) = 1$ por definição.

Os parâmetros AR do processo ARMA estão relacionados com a SAC como um conjunto de equações lineares. Supondo a equação (3.87) com $q+1 \leq k \leq q+p$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} r_x(q) & r_x(q-1) & \cdots & r_x(q-p+1) \\ r_x(q+1) & r_x(q) & \cdots & r_x(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(q+p-1) & r_x(q+p-2) & \cdots & r_x(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_x(q+1) \\ -r_x(q+2) \\ \vdots \\ -r_x(q+p) \end{bmatrix} . \quad (3.88)$$

As equações acima são conhecidas como equações modificadas de Yule-Walker (EMYW). A matriz de autocorrelação de (3.88) é Toeplitz, mas não garante sua não-singularidade. Por meio dessas equações podem-se encontrar separadamente os parâmetros dos processos AR e MA.

Inicialmente estimam-se os parâmetros do AR para $q-p+1 < n < q+p$ e as EMYW podem ser resolvidas por meio de uma extensão do algoritmo recursivo de Levinson. Em geral essas estimativas não produzem filtros de fase-mínima. Para estimação dos parâmetros do processo MA pode-se aplicar o método de Durbin [25], [2] sobre o processo residual $u(n)$ gerado de $x(n)$ [7], [8].

Em diversos trabalhos sobre estimação espectral ARMA constatou-se que, em geral, este método não produz estimativas de boa qualidade para os parâmetros do processo AR, do modelo ARMA, para os casos em que estes modelos possuem polos afastados e zeros próximos à CRU, porém ambos em posições angulares próximas entre si [35].

3.7.2 Método dos Mínimos Quadrados - (MQYW)

Este método é uma tentativa de reduzir a variância do estimador EMYW e melhorar a qualidade de suas estimativas. Inicialmente, sabe-se que a SAC de um processo ARMA(p, q) é definida como

$$r_x(k) = - \sum_{i=1}^p a_i r_x(k-i), k \geq q+1. \quad (3.89)$$

Como forma de melhorar a qualidade das estimativas das EMYW foi sugerido a escolha de mais de p equações, onde a solução do sistema de equações é obtida por meio do método dos mínimos quadrados. Este algoritmo é conhecido como método de mínimos quadrados das EMYW (MQYW), [2], [19].

A motivação desse procedimento vem da observação de que, se a SAC teórica do processo $x(n)$ fosse conhecida, as p equações mencionadas acima forneceriam os valores corretos dos parâmetros do processo AR e os demais valores de $r_x(k)$, para $M > p + q$, poderiam ser calculados por recorrência por meio da equação (3.89). Logo toda a informação de $r_x(k)$ para $M > p + q$ estaria contida nos parâmetros a_i , e na SAC, $r_x(k)$ no intervalo $q+1 \leq M \leq q+p$.

Porém utilizando-se as estimativas das autocorrelações para obter os parâmetros a_i , do processo AR, as relações exatas não mais se verificam. Com isto, a extrapolação de $r_x(k)$ para $M > p + q$, com base nos a_i obtidos, conterà erros em relação a $r_x(k)$ estimada. Por outro lado quando se utiliza mais que p equações para estimar os parâmetros AR, se estará dando maior precisão nas estimativas destes parâmetros. Nesse caso, a extrapolação de $r_x(k)$ será mais próxima da SAC estimada a partir das observações $x(n)$ disponíveis.

Considerando o intervalo $p+q < M < N$, e a partir daí utilizar essas informações da $r_x(k)$ para estimar os parâmetros do processo considerando o seguinte sistema de equações

$$\begin{bmatrix} r_x(q+1) \\ r_x(q+2) \\ \vdots \\ r_x(M) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_x(q) & r_x(q-1) & \cdots & r_x(q-p+1) \\ r_x(q+1) & r_x(q) & \cdots & r_x(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(M-1) & r_x(M-2) & \cdots & r_x(M-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

ou

$$\mathbf{r} = -\mathbf{R}\mathbf{a} \quad (3.91)$$

onde \mathbf{R} é uma matriz $(M - q) \times p$. Como $M - q > p$ existem mais equações do que incógnitas. Para estimar as autocorrelações deve-se introduzir um erro, \mathbf{e} , de dimensão $(M - q) \times 1$, nas equações acima resultando no seguinte sistema de equações

$$\hat{\mathbf{r}} = -\hat{\mathbf{R}}\mathbf{a} + \mathbf{e} \quad (3.92)$$

onde $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\mathbf{R}}$ correspondem aos estimadores de \mathbf{r} e \mathbf{R} , respectivamente. É conveniente utilizar a $r_x(k)$ não-viciada para estimá-los, para que o vício do erro de aproximação seja nulo

$$E[\mathbf{e}] = E[\hat{\mathbf{r}}] + E[\hat{\mathbf{R}}\mathbf{a}] = \mathbf{r} + \mathbf{R}\mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (3.93)$$

Sendo assim, pode-se aplicar o método dos mínimos quadrados encontrando o vetor que minimiza a soma de quadrados dos erros

$$\rho = \sum_{n=q+1}^M |e(n)|^2 \quad (3.94)$$

que é o estimador dos parâmetros do processo AR dado por

$$\hat{\mathbf{a}} = -\left(\hat{\mathbf{R}}^T \hat{\mathbf{R}}\right)^{-1} \hat{\mathbf{R}}^T \hat{\mathbf{r}} \quad (3.95)$$

onde a matriz $\hat{\mathbf{R}}^T \hat{\mathbf{R}}$ geralmente é positiva definida, hermitiana e o estimador $\hat{\mathbf{a}}$ geralmente não é de fase-mínima. A fatoração espectral pode ser utilizada para criar um estimador AR de fase-mínima, refletindo os polos de fora para dentro da CRU. Segundo [49], os melhores resultados ocorrem quando os polos do AR estão próximos a CRU e os piores resultados quando os zeros do processo MA estão próximos e os polos do AR estão afastados da CRU. A estimação dos parâmetros AR do modelo ARMA por meio do método dos mínimos quadrados EMYW pode ser interpretada como uma aplicação do método da covariância considerando o conjunto de valores $(\hat{r}_x(q - p + 1), \hat{r}_x(q - p + 2), \dots, \hat{r}_x(M))$ [2].

O desempenho desse método é, em geral, superior ao EMYW que somente utiliza p equações e depende do tipo de espectro a ser estimado [7].

O número de equações, $M - q$, a ser utilizado também depende das características espectrais de $x(n)$. Entretanto, a qualidade fornecida pelo estimador não-viciado (não-polarizado) decai com o aumento do deslocamento de $x(n)$. Logo, à medida que aumentasse o número de equações, passa-se a utilizar valores de $\hat{r}_x(k)$ cada vez menos confiáveis. Isso mostra a existência de um compromisso, o qual depende das características espectrais do processo $x(n)$.

Para compreender essa dependência, deve-se considerar que a função de sistema do filtro gerador de um processo ARMA é formada por polos e zeros. Assim, quanto mais próximos da CRU se localizarem os polos, ou seja, quanto mais agudos forem os picos espectrais de $x(n)$, maior será o comprimento da resposta impulsiva do filtro. Isto significa que o decaimento das amplitudes da $\hat{r}_x(k)$, ao longo do eixo k será tanto mais lento quanto mais agudos forem os picos espectrais. Admitindo que os erros de estimação da $r_x(k)$ não dependem desse comportamento, pode-se concluir que a escolha do número de equações dependerá das características espectrais a serem analisadas e que, para espectros com picos agudos, deve-se utilizar um número maior de equações do que no caso de espectros suaves [35].

Esse comportamento da qualidade das estimativas da $r_x(k)$ se reflete nos erros das equações, $e(n)$, fazendo com que a qualidade desses erros decresça à medida que o índice k aumenta. Uma maneira de mostrar essa participação dos erros referentes a valores de k próximos à ordem do processo MA(q) em relação àqueles referentes a k próximo de M , é a utilização de uma janela de ponderação, $w(k)$, na minimização dos erros quadráticos [7]. A pressuposição do ruído branco no modelo ARMA, é que seja Gaussiano, caso contrário, ou seja, ruído branco não-Gaussiano, pode-se utilizar o método recursivo para estimação do modelo ARMA, que utiliza estatísticas de alta ordem, e é baseada numa solução de mínimos quadrados, proposto por [48], mas que não será abordado neste texto.

3.7.3 Método dos Mínimos Quadrados Ponderados - (MQYWP)

Nesta seção é apresentado o método dos mínimos quadrados ponderado, que é uma variante do método dos MQYW e tem como objetivo reduzir a variância do estimador. Nesse método é minimizada a soma dos quadrados dos erros ponderados que é dada por

$$\rho = \sum_{n=q+1}^M w(n) |e(n)|^2 \quad (3.96)$$

ou na forma matricial

$$\rho = \mathbf{e}^T \mathbf{W} \mathbf{e} \quad (3.97)$$

onde $w(n)$ é uma sequência positiva, monotônica decrescente, de forma a atribuir pesos cada vez menores à medida que k aumenta e \mathbf{W} é uma matriz de dimensão $(M - q) \times (M - q)$.

Substituindo a equação dos erros

$$\mathbf{e} = \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{R}}\mathbf{a} \quad (3.98)$$

na equação (3.97) tem-se

$$\rho = \left(\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{R}}\mathbf{a} \right)^T \mathbf{W} \left(\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{R}}\mathbf{a} \right). \quad (3.99)$$

Fazendo-se os produtos na equação acima tem-se os seguintes resultados

$$\rho = \mathbf{a}^T \hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{R}} \mathbf{a} + \hat{\mathbf{r}}^T \mathbf{W} \mathbf{R}^T \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.100)$$

Tomando-se as derivadas parciais em (3.100)

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{a}} = 2\hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{R}} \mathbf{a} + 2\hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.101)$$

e igualando a expressão (3.101) a zero, tem-se que o estimador dos parâmetros do modelo AR é dado por

$$\hat{\mathbf{a}} = - \left(\hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{R}} \right)^{-1} \hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.102)$$

A matriz $\hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{R}}$ é Hermitiana e geralmente positiva definida. Se a matriz W for igual à matriz identidade (pesos unitários), as equações (3.95) e (3.102) serão idênticas. O problema agora seria escolher o tipo de janela de ponderação adequada para corrigir o efeito da variância das estimativas de autocorrelação. Uma sugestão seriam as janelas $(N-k)^3$ e $(N-k)^4$ utilizadas por [35], onde observou-se que a janela de ponderação atenua o compromisso na escolha do número de equações, uma vez que ela automaticamente reduz a importância da participação dos erros $e(n)$ conforme k aumenta.

3.7.4 Método de Estimação ARMA Linear

Esse método de estimação espectral ARMA foi proposto por [28], e combina a simplicidade dos métodos baseados nas equações de Yule-Walker com a precisão dos métodos de máxima verossimilhança fornecendo estimativas assintoticamente eficientes. Nesse método obtém-se estimativas iniciais das autocorrelações e dos parâmetros espectrais ARMA. Essas estimativas iniciais são utilizadas para corrigir e melhorar a precisão das estimativas de autocorrelações e da matriz de covariâncias. As operações para corrigir essas estimativas são lineares, e as estimativas corrigidas são assintoticamente eficientes com a matriz de covariância atingindo o limite de Cramér-Rao [28].

Nesse método parametriza-se a densidade espectral por meio de

$$\theta = [r_x(0), \dots, r_x(p+q)]' \quad (3.103)$$

Pode-se notar primeiro que as $r(k)$ do processo ARMA satisfaz as equações de Yule-Walker

$$r_x(k) + \sum_{i=1}^p a_i r_x(k-i) = 0, \quad k \geq q+1 \quad (3.104)$$

As estimativas dos coeficientes a_i podem ser determinadas de θ resolvendo-se as primeiras p equações lineares de (3.104)

$$\begin{bmatrix} r_x(q) & r_x(q-1) & \cdots & r_x(q-p+1) \\ r_x(q+1) & r_x(q) & \cdots & r_x(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(q+p-1) & r_x(q+p-2) & \cdots & r_x(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_x(q+1) \\ -r_x(q+2) \\ \vdots \\ -r_x(q+p) \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

ou equivalentemente

$$\mathbf{r} = -\mathbf{R}\mathbf{a} \quad (3.106)$$

A matriz de autocorrelações de (3.106) é não-singular sob as seguintes suposições: *i)* $A(z)B(z) = 0 \Rightarrow |z| > 1$; *ii)* $a_p b_q \neq 0$ e *iii)* $A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}$, $B(z) = 1 + b_1 z^{-1} + \dots + a_q z^{-q}$ são polinômios no plano- z .

Comportamento Assintótico

Segundo os autores, esse método as estimativas dos parâmetros terão as mesmas propriedades estatísticas dos estimadores de máxima verossimilhança [29].

Para um dado conjunto de observações $\{x(1), \dots, x(N)\}$, θ pode ser estimado utilizando as autocorrelações não-viciadas

$$\tilde{r}_x(k) = \begin{cases} \frac{1}{N-k} \sum_{n=1}^{N-k} x^*(n)x(n+k), & k = 1, \dots, N \\ \tilde{r}_x^*(-k), & k = -N, -(N-1), \dots, 0 \end{cases} \quad (3.107)$$

As estimativas obtidas por (3.107) são, em geral, estatisticamente não-eficientes, podendo ter um precisão muito ruim [50]. Porém, pode-se obter uma precisão melhor desse estimador como mostrado a seguir.

Considere uma variável aleatória $\tilde{\theta}$ com média desconhecida θ . Supondo um vetor aleatório y com média zero e correlacionado com $\tilde{\theta}$

$$COVAS \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{\theta} - \theta \\ y \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \quad (3.108)$$

onde $COVAS$ denota a covariância assintótica, ou seja,

$$COVAS(\mathbf{a}) = \lim_{N \rightarrow \infty} N COV(\mathbf{a}). \quad (3.109)$$

Na expressão (3.108), assume-se que $W_{12} \neq 0$, e W_{22} é positiva definida. Então uma estimativa melhorada de θ é dada por

$$\hat{\theta} = \tilde{\theta} - \widehat{W}_{12} \widehat{W}_{22}^{-1} y \quad (3.110)$$

onde \widehat{W}_{12} e \widehat{W}_{22} são estimativas consistentes de W_{12} e W_{22} , respectivamente [29]. Note que a covariância assintótica normalizada de $\tilde{\theta}$ é W_{11} . A covariância assintótica normalizada de $\hat{\theta}$ é dada por

$$COVAS(\hat{\theta}) = W_{11} - W_{12} W_{22}^{-1} W_{12}^T. \quad (3.111)$$

Se y é escolhida apropriadamente, então a covariância assintótica de $\hat{\theta}$ pode ser muito menor do que $\tilde{\theta}$.

Os vetores $\tilde{\theta}$ e y são dados por

$$\tilde{\theta} = [\tilde{r}(0), \tilde{r}(1), \dots, \tilde{r}(p+q)]^T \quad (3.112)$$

e

$$y = [y_1, \dots, y_{ny}]^T \quad (3.113)$$

onde

$$y_k = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \tilde{a}_i \tilde{a}_j \tilde{r}_{p+q+k-i-j}, \quad k = 1, \dots, ny \quad (3.114)$$

Nas equações acima, os $\{\tilde{a}_i\}$ são estimativas consistentes dos $\{a_i\}$, então pode-se utilizar o conjunto de equações de Yule-Walker para encontrá-los. Com estas definições, as matrizes de covariâncias W_{12} e W_{22} são dadas por [29]

$$\begin{aligned}
[W_{12}]_{ij} &= \alpha_{j+i} + \alpha_{j-i}, \quad i = 0, \dots, p+q, \quad j = 1, \dots, nz & (3.115) \\
\alpha_s &= \text{os coeficientes de } z^s \text{ em } z^{-(p+q)} \frac{\left[\sum_{k=-q}^q b_k z^{-k} \right]^2}{A^2(z^{-1})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[W_{22}]_{ij} &= \beta_{i-j}, \quad i, j = 1, \dots, nz & (3.116) \\
\beta_s &= \text{os coeficientes de } z^s \text{ em } B^2(z)
\end{aligned}$$

Pode-se observar que

$$[W_{12}]_{ij} = 0, \quad j > q - p + i \quad (3.117)$$

Isto implica que $[W_{12}]_{ij} = 0$ para $j > 2q$. Além disso, W_{22} é uma matriz de Toeplitz, simétrica e de faixa limitada com largura de $2q + 1$.

Seja $\{\tilde{a}_k\}$ e $\{\tilde{b}_k\}$ estimativas consistentes de $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$, e definindo \widehat{W}_{12} e \widehat{W}_{22} como em (3.115)-(3.117). Então, as estimativas $\widehat{\theta}$ dadas pela expressão (3.110) junto com as expressões (3.112)-(3.114) tem as seguintes propriedades [29]:

P.1 - O estimador $\widehat{\theta}$ é de variância mínima entre todos os estimadores baseados nas autocorrelações amostrais $\{\tilde{r}(0), \dots, \tilde{r}(p+q+ny)\}$. Para o caso de grandes amostras, essas estimativas são uma aproximação das estimativas de máxima verossimilhança de θ , nas quais utilizam-se $p+q+ny+1$ autocorrelações amostrais como dados estatísticos.

P.2 - Seja \mathbf{P}_{ny} a matriz de covariância assintótica de $\widehat{\theta}$ (para $N \rightarrow \infty$). Então $\mathbf{P}_{ny} \geq \mathbf{P}_{ny+1}$. Em outras palavras, $\{\mathbf{P}_{ny}\}$ para $ny = 1, 2, \dots$ forma uma sequência de matrizes monotonicamente não-crescente, positiva definida.

P.3 - Seja \mathbf{P}_{CR} o limite de Cramér-Rao para a matriz de covariância de algum estimador consistente de θ sobre uma hipótese Gaussiana. Então

$$\lim_{ny \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{ny} = \mathbf{P}_{CR} \quad (3.118)$$

P.4 - A razão de convergência de (3.118) depende da posição dos zeros de $B(z)$. Se os zeros estão próximos da CRU, a razão de convergência $\frac{\mathbf{P}_{ny}}{\mathbf{P}_{CR}}$ é mais lenta. A posição dos polos de $A(z)$ tem pouca influência na razão de convergência de \mathbf{P}_{ny} .

Algoritmo

Passo 1. Calcular as autocorrelações $\{\tilde{r}(k)\}$ segundo (3.107), para $k = 0, \dots, K$, onde $K = p + q + ny$. Calcular as estimativas iniciais $\tilde{\mathbf{a}}$ do processo AR utilizando o método dos mínimos quadrados das equações modificadas de Yule-Walker (MQYW)

$$\begin{bmatrix} \tilde{r}_x(q+1) \\ \tilde{r}_x(q+2) \\ \vdots \\ \tilde{r}_x(M) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{r}_x(q) & \tilde{r}_x(q-1) & \cdots & \tilde{r}_x(q-p+1) \\ \tilde{r}_x(q+1) & \tilde{r}_x(q) & \cdots & \tilde{r}_x(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{r}_x(M-1) & \tilde{r}_x(M-2) & \cdots & \tilde{r}_x(M-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_p \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

onde $\tilde{\mathbf{a}} = [\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_p]^T$. Utilizar $\tilde{\mathbf{a}}$ e $\{\tilde{r}(k)\}$ para obter as estimativas iniciais $\tilde{\mathbf{b}}$ por meio de

$$\tilde{b}_k = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \tilde{a}_i \tilde{a}_j \tilde{r}(k+j-i), \quad k = 0, 1, \dots, q \quad (3.120)$$

Passo 2. Utilizar $\tilde{r}(k)$, \tilde{b}_k , e $\tilde{\mathbf{a}}$ em (3.114)-(3.116) para calcular y , \widehat{W}_{12} e \widehat{W}_{22} . Calcular as estimativas melhoradas $\hat{r}(k)$, $k = 0, \dots, p+q$, utilizando (3.110).

Passo 3. Calcular o estimador $\hat{\mathbf{a}}$ de $\hat{r}(k)$, $k = 0, \dots, p+q$ utilizando (3.106), e as estimativas \hat{b}_k , $k = 0, \dots, q$ utilizando a expressão (3.120), substituindo $\tilde{r}(k)$ e $\tilde{\mathbf{a}}$, por $\hat{r}(k)$ e $\hat{\mathbf{a}}$, respectivamente. Obter a densidade espectral $\widehat{S}_{ARMA}(z)$ utilizando $\hat{\mathbf{a}}$ de $\hat{\mathbf{b}}$ em (3.3).

No passo 1, utiliza-se o método dos MQYW para estimar $\tilde{\mathbf{a}}$, considerando $p+q+nz+1$ autocorrelações não-viciadas. Utilizando o método das EMYW ($K = p+q$), as estimativas iniciais dos parâmetros AR não terão uma boa precisão, influenciando nas demais estimativas iniciais, e conseqüentemente prejudicando as estimativas e os resultados finais fornecidos pelo método. Porém, nem sempre as estimativas dos MQYW fornece melhor precisão do que as estimativas das EMYW. Entretanto, nesse método foi proposto utilizar o método dos MQYW, nas estimativas iniciais, principalmente nos casos em que os modelos possuem zeros próximos da CRU, esse método fornece melhor resultado do que o método das EMYW.

Os passos 2 e 3 acima são repetidos para melhorar as estimativas da densidade espectral e a precisão dos parâmetros, principalmente quando se tem um pequeno número de observações. No caso de um grande número de observações a repetição desses dois passos não melhora significativamente a precisão dos resultados [28].

3.7.5 Método de Estimação Separada Via Cepstrum

Neste método, proposto por [21], o estimador de mínimos quadrados das equações modificadas de Yule-Walker, é utilizado para as estimativas dos parâmetros AR, do modelo ARMA. A estimação dos parâmetros MA é considerada de acordo com os procedimentos descritos a partir de uma recursão derivada da função de transferência do modelo ARMA, $H(z)$, definida em (3.2), e o $\ln H(z)$, causal e estável, é uma função analítica no CRU e portanto pode ser representada como uma expansão Laurent [30]

$$\ln H(z) = \ln \left(\frac{\sum_{i=0}^q b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=0}^p a_j z^{-j}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}. \quad (3.121)$$

Depois fazendo uma mudança de variável $u = z^{-1}$ e tomando as derivadas de ambos os lados de (3.121) com respeito a u , obtém-se

$$\sum_{i=1}^{\infty} k c_k u^{k-1} = \frac{\sum_{i=1}^q i b_i u^{i-1}}{\sum_{i=0}^q b_i u^i} - \frac{\sum_{j=1}^p j a_j u^{j-1}}{\sum_{j=0}^p a_j u^j}. \quad (3.122)$$

Equacionando os denominadores do lado direito e multiplicando ambos os lados que resultam em

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^q \sum_{j=0}^p k c_k b_i a_j u^{k+i+j-1} = \sum_{i=1}^q \sum_{j=0}^p i b_i a_j u^{i+j-1} - \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^q j a_j b_i u^{i+j-1}. \quad (3.123)$$

finalmente equacionando os coeficientes de igual potência de u chega-se à seguinte equação recursiva para c_k :

$$c_k = \frac{1}{k b_0} \left[\sum_{j=1}^k (j b_j a_{k-j} - j a_j b_{k-j}) - \sum_{i=1}^{k-1} i c_i \sum_{j=0}^{k-i} a_j b_{k-i-j} \right] \quad (3.124)$$

Explicitando o termo correspondente a $j = k$ na primeira soma tem-se

$$c_k = \frac{1}{k b_0} \left[k (b_k a_0 - a_k b_0) + \sum_{j=1}^{k-1} (j b_j a_{k-j} - j a_j b_{k-j}) - \sum_{i=1}^{k-1} i c_i \sum_{j=0}^{k-i} a_j b_{k-i-j} \right]. \quad (3.125)$$

Resolvendo para b_k obtém-se

$$b_k = \frac{1}{k} \left[k c_k b_0 - \sum_{j=1}^{k-1} j b_j a_{k-j} + \sum_{j=1}^k j a_j b_{k-j} - \sum_{i=1}^{k-1} i c_i \sum_{j=0}^{k-i} a_j b_{k-i-j} \right] \quad (3.126)$$

$$b_0 = 1, \quad 1 \leq k \leq q.$$

Supondo $b_0 = 1$, no modelo, e utilizando (3.126), obtêm-se os parâmetros MA (iniciando com $k = 1$) recursivamente, com a condição de que os parâmetros da parte AR e os coeficientes cepstrais são conhecidos. Por isso, para utilizar (3.126) para a estimação dos parâmetros MA, precisa-se de uma estimativa do cepstrum do processo. Uma estimativa do cepstrum pode ser obtida usando

$$\hat{c}_k = F^{-1} \left[\ln \hat{S}(e^{j2\pi w}) \right] \quad (3.127)$$

onde $\hat{S}(e^{jf})$ é uma estimativa não-paramétrica do espectro (pode ser o periodograma) de $x(n)$, e $F^{-1}[\cdot]$ é a transformada inversa de Fourier. Portanto, utilizando as estimativas dos coeficientes cepstrais \hat{c}_k 's e as estimativas AR dos parâmetros \hat{a}_k em (3.126), pode-se estimar os parâmetros MA do modelo. Esses coeficientes cepstrais são utilizados para descreverem a envoltória espectral do sinal de voz a curtos intervalos de tempo.

A estimativa da variância do ruído branco, σ^2 , considerando a frequência $w = w_0$, pode ser obtida da seguinte maneira

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{S}(e^{j2\pi w_0})}{\left| \hat{H}(e^{j2\pi w_0}) \right|^2} \quad (3.128)$$

onde

$$\hat{H}(e^{jf_0}) = \frac{\left| \hat{B}(e^{j2\pi w_0}) \right|}{\left| \hat{A}(e^{j2\pi w_0}) \right|}.$$

Segundo [21], esse método proposto depende principalmente da estimativa do cepstrum, que é obtido do periodograma. O periodograma, entretanto, não é um bom estimador para processos com espectro de picos acentuados. Por isso, o método requer uma modificação, quando os polos do processo ARMA estão próximo do CRU. Essa modificação engana o fraco desempenho do periodograma para estimação do cepstrum do resíduo MA, antes do cepstrum do processo ARMA. O método modificado pode ser sumarizado a seguir.

- 1) Aplicar o filtro inverso $x(n)$ utilizando as estimativas dos parâmetros AR para obter o processo residual MA, $z(n)$.
- 2) Estimar o cepstrum de $z(n)$.
- 3) Estimar os parâmetros MA utilizando (3.126) com $a_0 = 1$ e $a_k = 0$, $k > 0$.

Recentemente foi revisto por [51], o método baseado no cepstrum, que segundo os autores tem uma vantagem por ser um método não-iterativo, mas menos utilizado que o

método de Durbin. O mais recente método é o proposto por [61], mas esse método é semi-paramétrico, também chamado de *SPICE* (*semiparametric/sparse iterative covariance-based estimation method*), e segundo os autores é computacionalmente muito eficiente e converge, e é utilizado na análise espectral de dados irregularmente amostrados.

Capítulo 4

Método de Estimação Espectral Proposto para o Processo ARMA

Neste capítulo é apresentada a proposta de um novo método de estimação espectral linear para o processo ARMA. Este método é baseado nos métodos de estimação separada utilizando-se das equações de Yule-Walker, mais especificamente no método mínimos quadrados das equações modificadas de Yule-Walker (MQYW) apresentado anteriormente no Capítulo 3.

4.1 Descrição do Novo Método (MQYWS)

Nesse método de estimação separada inicialmente considera-se o método de mínimos quadrados das equações modificadas de Yule-Walker (MQYW) [2], [8], [35] e [20], para estimar os parâmetros do processo AR. Dado que as equações expandidas de Yule-Walker para o processo ARMA podem ser representadas como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_B \\ \mathbf{R}_E \end{bmatrix} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

onde \mathbf{R}_B é a matriz de autocorrelação $q \times (p + 1)$

$$\mathbf{R}_B = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(-1) & \cdots & r_x(-p) \\ r_x(1) & r_x(0) & \cdots & r_x(1-p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(q-1) & r_x(q-2) & \cdots & r_x(q-(p-1)) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

e \mathbf{R}_E é a matriz de autocorrelação expandida que é dada por

$$\mathbf{R}_E = \begin{bmatrix} r_x(q) & r_x(q-1) & \cdots & r_x(q-p+1) \\ r_x(q+1) & r_x(q) & \cdots & r_x(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(M-1) & r_x(M-2) & \cdots & r_x(M-p) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

O método MQYW é conhecido também como equações de alta-ordem de Yule-Walker [8], [20], [19] e [4]. As estimativas consistentes do vetor de parâmetros AR, podem ser obtidas utilizando

$$\begin{bmatrix} r_x(q) & r_x(q-1) & \cdots & r_x(q-p+1) \\ r_x(q+1) & r_x(q) & \cdots & r_x(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(M-1) & r_x(M-2) & \cdots & r_x(M-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_x(q+1) \\ -r_x(q+2) \\ \vdots \\ -r_x(M) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

ou

$$\mathbf{r} = -\mathbf{R}_E \mathbf{a} \quad (4.5)$$

onde \mathbf{R}_E é uma matriz $(M-q) \times p$. Como $M-q > p$ existem mais equações do que incógnitas. Para estimar as autocorrelações deve-se introduzir um erro, \mathbf{e} , de dimensão $(M-q) \times 1$, tal que

$$\hat{\mathbf{r}} = -\hat{\mathbf{R}}_E \mathbf{a} + \mathbf{e} \quad (4.6)$$

onde $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\mathbf{R}}_E$ correspondem aos estimadores de \mathbf{r} e \mathbf{R}_E , respectivamente. É conveniente utilizar as $r(k)$ não-viciadas para estimá-los, para que o vício do erro de aproximação seja nulo. Sendo assim, pode-se aplicar o método dos mínimos quadrados ponderado encontrando o vetor que minimiza a soma de quadrados dos erros

$$\rho = \sum_{n=q+1}^M w(n) |e(n)|^2, \quad (4.7)$$

que é o estimador dos parâmetros do processo AR, dado por

$$\hat{\mathbf{a}} = -\left(\hat{\mathbf{R}}_E^T W \hat{\mathbf{R}}_E\right)^{-1} \hat{\mathbf{R}}_E^T \hat{\mathbf{r}} \quad (4.8)$$

onde a matriz $\widehat{\mathbf{R}}_E^T W \widehat{\mathbf{R}}_E$ geralmente é positiva definida, hermitiana e o estimador $\widehat{\mathbf{a}}$ geralmente não é de fase-mínima. Se a matriz de ponderação W for a matriz identidade as equações (3.95) e (4.8) serão idênticas. As características iniciais são as mesmas citadas para o estimador MQYW, apresentadas no Capítulo 3, entre elas a fatoração espectral pode ser utilizada para criar um estimador AR de fase-mínima, refletindo os polos de fora para dentro da CRU. Os melhores resultados ocorrem quando os polos estão próximos da CRU, e os piores resultados quando os zeros estão próximos e os polos estão afastados da CRU, como já citado anteriormente [7]. Para esse método, a estimação dos parâmetros AR, no método dos MQYW também pode ser interpretada como uma aplicação do método da covariância considerando o conjunto de valores $(\widehat{r}_x(q-p+1), \widehat{r}_x(q-p+2), \dots, \widehat{r}_x(M))$ [20].

Depois de estimar os parâmetros do processo AR é feita uma filtragem do sinal de interesse por meio de um filtro MA obtendo um processo residual, ou seja, de acordo com a figura 4.1.

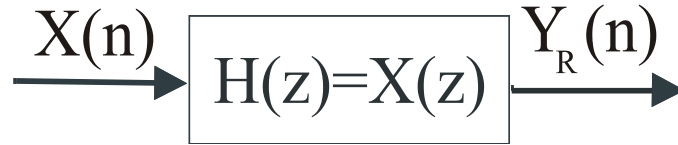


Figura 4.1: Sinal passando através de um filtro MA para a obtenção do processo residual.

Onde a função de transferência do sistema é dada por $H(z) = X(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}$, e o processo residual é igual a

$$y_R(n) = x(n) + \widehat{a}_1^{(i)} x(n-1) + \dots + \widehat{a}_p^{(i)} x(n-p),$$

$$y_R(n) = x(n) + \sum_{k=1}^p \widehat{a}_k^{(i)} x(n-k), \quad p/ n = 1, \dots, N \text{ e } i = 1, \dots, N1. \quad (4.9)$$

a partir desse resultado é utilizado o método de Durbin, para estimar os parâmetros do processo MA.

Depois de estimado os parâmetro do processo MA, será feita uma nova filtragem AR do sinal $x(n)$ utilizando as estimativas dos parâmetros MA, e obtendo-se um novo sinal $\widehat{x}(n)$. Como mostra a figura 4.2.

Com função de transferência do sistema, $H(z) = 1/Y(z)$, onde $Y(z) = 1 + \widehat{b}_1^{(i)} z^{-1} +$

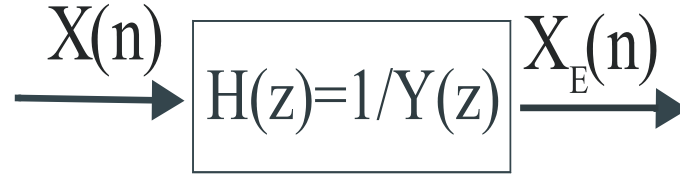


Figura 4.2: Filtragem do sinal através de um filtro AR para obtenção de uma nova estimativa.

... + $\widehat{b}_q^{(i)} z^{-q}$, e o sinal estimado é dado por

$$\begin{aligned}\widehat{x}^{(i)}(n) &= x(n) - \widehat{b}_1^{(i)} x(n-1) - \dots - \widehat{b}_q^{(i)} x(n-q), \\ \widehat{x}^{(i)}(n) &= x(n) - \sum_{k=1}^q \widehat{b}_k^{(i)} x(n-k), \quad p/ \quad n = 1, \dots, N \text{ e } i = 1, \dots, N1.\end{aligned}\quad (4.10)$$

Na forma matricial temos,

$$\begin{bmatrix} \widehat{x}(1) \\ \widehat{x}(2) \\ \vdots \\ \widehat{x}(n) \\ \vdots \\ \widehat{x}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x(2) & -x(1) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(n) & -x(n-1) & -x(n-2) & \cdots & -x(n-q) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N) & -x(N-1) & -x(N-2) & \cdots & -x(N-q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{b}_0 \\ \widehat{b}_1 \\ \vdots \\ \widehat{b}_k \\ \vdots \\ \widehat{b}_q \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Esse procedimento equivale a repetir o último passo do método de Durbin, que é um dos procedimentos utilizados nos métodos de estimação separada. Sabe-se que um processo AR(∞) (ordem longa) pode ser uma boa aproximação para o processo MA [6], [20], ou seja,

$$Y(z) \approx \frac{1}{X_\infty(z)} \quad (4.12)$$

A nova estimativa do sinal $\widehat{x}(n)$ será utilizada para obter-se uma nova estimativa AR utilizando-se o método MQYW, para em seguida obter-se uma nova estimativa MA por meio do método de Durbin. A idéia inicial do método era repetir esse procedimento várias vezes ($N1$), até se obter um grau de convergência para os parâmetros do processo ARMA, mas por meio das simulações comprovou-se que os resultados na maioria dos casos não foram satisfatórios nas repetições da filtragem, portanto, optou-se nas simulações por

$N1 = 2$, sendo este o melhor resultado de um modo geral, para os vários casos estudados. Na maioria dos casos observou-se que: as estimativas ou mantinham-se constantes ou distanciavam-se do verdadeiro valor do parâmetro, a partir de um certo número de iterações, mostrando que o vício das estimativas não tendia a zero.

Na etapa final do método calcula-se a estimativa final da densidade espectral de potência do processo a partir das últimas estimativas dos vetores estimados, ou seja, $\hat{\mathbf{a}}^{(N1)}$ e $\hat{\mathbf{b}}^{(N1)}$. A idéia do método consiste de que a partir da filtragem AR obtém-se um novo sinal, que fornecerá estimativas melhores, a cada nova filtragem, ou seja, um sinal estimado mais eficiente, para estimar os parâmetros do processo ARMA, a cada nova iteração, para obtenção do espectro de potência.

4.2 Implementação do Algoritmo

Passo A: Dado: $x(1), \dots, x(N)$; $e(1), \dots, e(N)$, p (ordem do processo AR), q (ordem do processo MA), N (número de observações), $M-q$ (número de equações), L (ordem do processo AR longo) e $N1$ (número de filtrações AR).

Passo B.1: Obter as $\hat{r}(k)$ $k = 0, \pm 1, \dots, \pm N - 1$ não-viciadas.

Passo B.2: Obter as estimativas $\hat{\mathbf{a}}$ utilizando as equações (4.8). (Se necessário utilizar um ponderação na soma de quadrados dos erros).

Passo B.3: De acordo com os conceitos de estimação separada: filtrar o sinal $x(n)$ por meio de um filtro MA (FIR) para obter o processo residual $y_R(n)$, ou seja,

$$\begin{aligned} y_R(n) &= x(n) + \hat{a}_1^{(i)} x(n-1) + \dots + \hat{a}_p^{(i)} x(n-p) \\ y_R(n) &= x(n) + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k^{(i)} x(n-k), n = 1, \dots, N, i = 1, \dots, N1. \end{aligned}$$

Passo B.4: Obter as estimativas $\hat{\mathbf{b}}^{(i)}$ utilizando o método de Durbin, ou seja, $y_a = [\hat{a}_1^{(i)}, \dots, \hat{a}_L^{(i)}]$, estimativas do AR(L).

Passo B.5: Filtrar $x(n)$ por meio de um filtro AR, utilizando as estimativas $\hat{\mathbf{b}}^{(i)}$ para obter um novo sinal $\hat{x}^{(i)}(n)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(i)}(n) &= x(n) - \hat{b}_1^{(i)} x(n-1) - \dots - \hat{b}_q^{(i)} x(n-q). \\ \hat{x}^{(i)}(n) &= x(n) - \sum_{k=1}^q \hat{b}_k^{(i)} x(n-k), n = 1, \dots, N, i = 1, \dots, N1. \end{aligned}$$

Passo B.6: Retornar ao passo B.1 utilizando o novo sinal $\hat{x}^{(i)}(n)$, e repetir os procedimentos do passo B. O procedimento iterativo para quando se obtém um grau de convergência dos parâmetros.

Passo C: Obter a densidade espectral de potência a partir das últimas estimativas $\hat{\mathbf{a}}^{(N1)}$ e $\hat{\mathbf{b}}^{(N1)}$ fornecidas.

Capítulo 5

Simulações

Neste capítulo são apresentadas algumas aplicações utilizando os métodos de estimação separada para o processo ARMA estudados na Seção 3.7, e também o método proposto estudado no Capítulo 4. Os processos ARMA teóricos gerados e estimados são utilizados com frequência na literatura.

Neste capítulo são feitas as simulações de Monte Carlo para estimação: dos parâmetros dos processos; dos espectros e dos polos e zeros, e depois comparou-se entre si o desempenho dos métodos de estimação separada medindo a precisão das estimativas dos parâmetros por meio do erro relativo e do coeficiente de variação médio. Além disso, é verificada a convergência do método proposto com relação aos três processos ARMA apresentados. É medido também o esforço computacional dos métodos por meio dos *FLOPS*, via aplicativo MATLAB. Na implementação dos programas, foram utilizadas várias sub-rotinas que estão nos *toolbox*: *Signal Processing* e *System Identification*, e também descritas nos manuais [62], [64].

5.1 Exemplos de Processos ARMA

Nesta seção são apresentados três processos ARMA com diferentes características, principalmente com relação à posição dos polos, que estão relacionados com a parte AR do processo ARMA, e são representados pelos picos agudos, no espectro de potência. Enquanto que os zeros que estão relacionados com a parte MA do processo ARMA, e são representados pelos vales abruptos no espectro de potência. Sendo ainda que polos e zeros podem estar próximos ou afastados da CRU, e os três processos também apresentam um número de parâmetros diferentes.

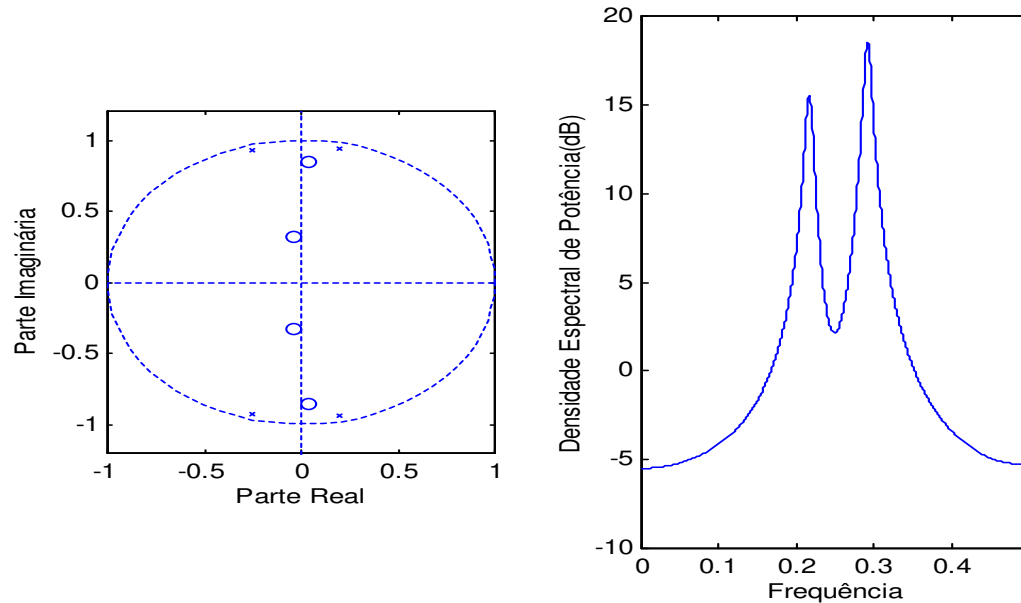


Figura 5.1: Polos (x) e zeros (o) e densidade espectral de potência - ARMA(4,4).

5.1.1 Processo ARMA(4,4)

É considerado o seguinte processo ARMA(4,4):

$$\begin{aligned}
 & x(n) + 0,1x(n-1) + 1,66x(n-2) + 0,093x(n-3) + 0,8649x(n-4) \\
 & = \varepsilon(n) + 0,0226\varepsilon(n-1) + 0,8175\varepsilon(n-2) + 0,0595\varepsilon(n-3) + 0,0764\varepsilon(n-4)
 \end{aligned}$$

Os polos (picos) desse processo são: $0,9644 \exp(\pm j0,4335\pi)$ e $0,9644 \exp(\pm j0,5835\pi)$; que estão próximos da CRU (Circunferência de Raio Unitário), e os zeros (vales) são: $0,8471 \exp(\pm j0,4867\pi)$ e $0,3263 \exp(\pm j0,5457\pi)$, sendo um dos zeros mais próximo, e outro mais afastado da CRU. A sua densidade espectral teórica e os polos e zeros são mostrados na Figura 5.1.

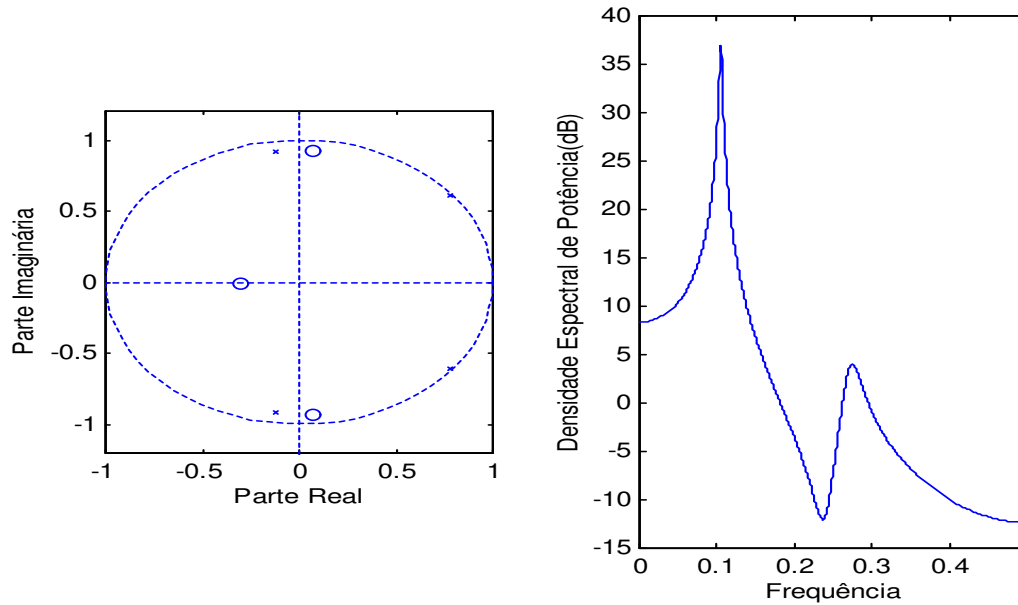


Figura 5.2: Polos (x) e zeros (o) e densidade espectral de potência - ARMA(4,3).

5.1.2 Processo ARMA(4,3)

É considerado o seguinte processo ARMA(4,3):

$$\begin{aligned}
 & x(n) - 1,3136x(n-1) + 1,4401x(n-2) - 1,0919x(n-3) + 0,83527x(n-4) \\
 & = \varepsilon(n) + 0,1792\varepsilon(n-1) + 0,8202\varepsilon(n-2) + 0,2676\varepsilon(n-3)
 \end{aligned}$$

Os polos (picos) desse processo são: $0,9245 \exp(\pm j0,5433\pi)$ e $0,9886 \exp(\pm j0,2095\pi)$; que estão próximos da CRU, e os zeros (vales) são: $-0,3110$ e $0,9283 \exp(\pm j0,4773\pi)$, sendo um dos zeros afastado e outro próximo da CRU. A densidade espectral teórica e os polos e zeros são mostrados na Figura 5.2.

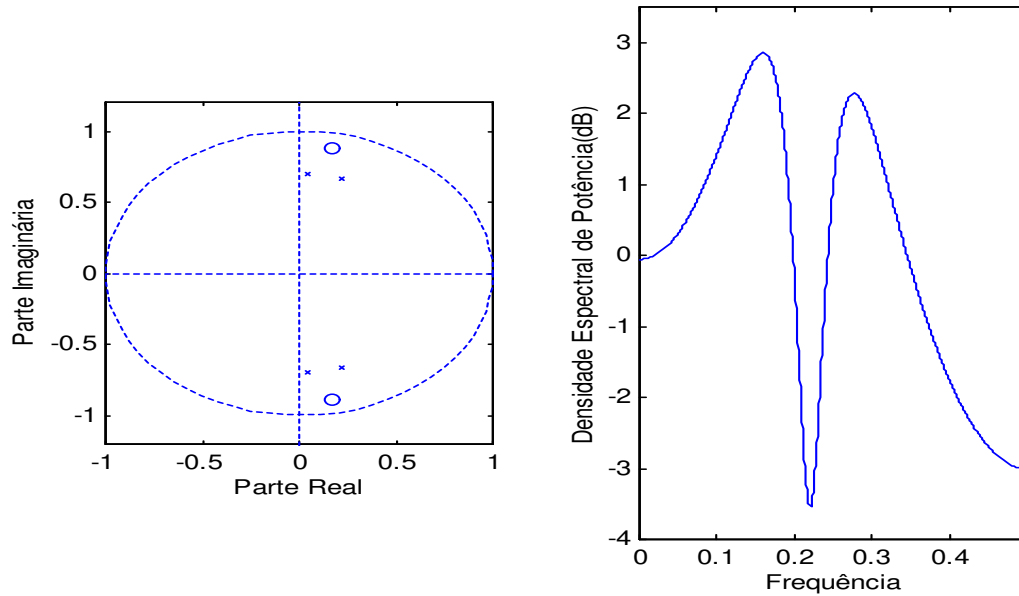


Figura 5.3: Polos (x) e zeros (o) e densidade espectral de potência - ARMA(4,2).

5.1.3 Processo ARMA(4,2)

É considerado o seguinte processo ARMA(4,2):

$$\begin{aligned} x(n) - 0,52x(n-1) + 1,018x(n-2) - 0,255x(n-3) + 0,24x(n-4) \\ = \varepsilon(n) - 0,337\varepsilon(n-1) + 0,810\varepsilon(n-2) \end{aligned}$$

Os polos (picos) desse processo são: $0,70 \exp(\pm j0,40\pi)$ e $0,70 \exp(\pm j0,48\pi)$; e os zeros (vales) é $0,90 \exp(\pm j0,44\pi)$. Neste exemplo temos os polos mais afastados e os zeros próximo da CRU. A densidade espectral teórica e os polos e zeros são mostrados na Figura 5.3.

5.2 Simulações de Monte Carlo

Nesta seção são descritas as simulações de Monte Carlo para obter as estimativas dos espectros dos processos ARMA, assim como os seus respectivos parâmetros, utilizando cada um dos métodos de estimação separada estudados Seção 3.7 e o método proposto no Capítulo 4. As simulações e os programas foram implementados no aplicativo MATLAB. Alguns desses programas são colocados no Apêndice C.

5.2.1 Procedimentos das Simulações

Os dados foram gerados a partir de uma mesma semente, que varia de acordo com índice das sequências, ou seja, $i = 1, \dots, n$, segundo estudos de Monte Carlo de [53] e [52].

Inicialmente foram geradas 30 sequências de dados, com dois tamanhos de amostras diferentes, para aplicação dos métodos estudados. Essas sequências foram geradas a partir de um vetor de ruído branco Normal (Gaussiano), com 3.000 observações, de média zero ($\mu_\varepsilon = 0$) e variância 1 ($\sigma_\varepsilon^2 = 1$), onde as primeiras 1.000 observações foram desprezadas, para a estabilização da sequência (processo aleatório gerado). A partir daí gerou-se um processo ARMA sem tendência (estacionário).

A ponderação (P) utilizada nos métodos, foi $w_k = (N - k)^3$ [35], e o tamanho das amostras foram fixados em: $N = 256$ e $N = 1024$.

No método de Durbin, o critério utilizado foi o da covariância modificada, e a ordem do processo AR longo foi $L = \frac{N-p}{2}$ para os exemplos 1 e 2, e $L = \frac{N-p}{3}$ para o exemplo 3.

Para o número de equações de Yule Walker, $M - q$, foram considerados dois casos para cada exemplo, no exemplo 1: $M = 20$ ($N = 256$) e $M = 80$ ($N = 1024$); exemplo 2: $M = 10$ ($N = 256$ e $N = 1024$) e no exemplo 3: $M = 10$ ($N = 256$) e $M = 10$ ($N = 1024$).

Finalmente foram obtidas as estimativas média dos espectros, e as estimativas média dos polos e zeros com relação às 30 sequências estimadas, os resultados referentes as médias e os desvios-padrões das estimativas estão no Apêndice A, enquanto que os gráficos das estimativas médias dos espectros e dos polos e zeros, juntamente com os espectro e polos e zeros do modelo teórico, são apresentados no Apêndice B.

Os métodos utilizados para as simulações foram:

- (1) Equações modificadas de Yule-Walker (**EMYW**);
- (2) EMYW ponderado (**EMYWP**);
- (3) Mínimos quadrados equações modificadas de Yule-Walker (**MQYW**);
- (4) MQYW ponderado (**MQYWP**);

- (5) Mínimos quadrados equações modificadas Yule-Walker com filtragem AR (**MQYWS** - Método Proposto);
- (6) MQYWS ponderado (**MQYWSP** - Método proposto ponderado);
- (7) Estimacão linear utilizando mínimos quadrados - Yule-Walker (**MosesYW**);
- (8) MQYW via cepstrum - (**MQYWCp**) e
- (9) MQYW via cepstrum ponderado (**MQYWCpP**).

Para identificar os métodos nas próximas seções serão utilizadas as siglas em negrito acima (nas tabelas), e os números (nos gráficos). Vale salientar que, nas simulações de Monte Carlo, foram considerados outros modelos vistos na literatura, assim como outros tamanhos de amostras, outros parâmetros (N, M, L, p, q), e também outras ponderações, w_k , mas optou-se por escolher os melhores resultados fornecidos pelos métodos estudados. Se fossem colocados todos os resultados das simulações o texto ficaria muito longo.

5.2.2 Comparação dos Métodos via Erro Relativo e Coeficiente de Variação Médio

Nesta seção são utilizados os exemplos numéricos da seção 5.1, para ilustrar o desempenho do método de estimacão proposto comparando-o com outros métodos de estimacão separada do processo ARMA. As comparações são feitas utilizando a raiz quadrada do erro quadrático médio relativo ($EQMR_\theta$), ou seja, o erro relativo (ER_θ) com relação aos verdadeiros parâmetros dos processos ARMA teóricos, ou seja, a variação em torno do verdadeiro parâmetro. Foi calculado também o coeficiente de variação médio (CVM_θ), com relação às estimativas dos parâmetros, ou seja, a variação em torno da média das estimativas, obtidas das 30 sequências aleatórias. Utilizaram-se essas estatísticas para medir a precisão das estimativas AR e MA, que serão definidas a seguir:

$$ER_\theta = \sqrt{EQMR_\theta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\theta_i - \bar{\theta}_i)^2}{\sum_{i=1}^n \theta_i^2}}$$

e o CVM_θ

$$CVM_\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\sigma}_i(\bar{\theta}_i)}{|\bar{\theta}_i|}$$

onde θ_i , é o i -ésimo parâmetro do verdadeiro vetor $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_n]$, e $\bar{\theta}_i = \sum_{j=1}^m \hat{\theta}_{ij}/m$ é a média das estimativas do i -ésimo parâmetro, e $\hat{\sigma}_i(\bar{\theta}_i)$ é o desvio padrão dessas

Tabela 5.1: Erro relativo e coeficiente de variação médio para o modelo ARMA(4,4).

Modelo	$N = 256, M = 20$				$N = 1024, M = 80$			
	AR(4)		MA(4)		AR(4)		MA(4)	
	ER %	CVM %	ER %	CVM %	ER %	CVM %	ER %	CVM %
EMYW	2,65	58,40	14,00	$2,95 \times 10^3$	0,36*	33,19	14,78	559,67
EMYWP	2,75	58,44	12,37*	$5,93 \times 10^3$	0,69	33,20	14,05	572,02
MQYW	1,49	17,50	15,69	515,59	0,48	11,53	10,42	282,05
MQYWP	2,95	17,46*	15,07	495,98	0,54	11,38*	9,73*	286,27
MQYWS	0,86*	34,51	17,52	384,99	1,63	28,07	12,34	218,52
MQYWSP	2,30	34,06	16,72	377,85	1,62	28,11	11,43	221,95
MosesYW	5,53	44,41	42,86	214,22*	2,75	21,38	38,11	81,33
MQYWCp	1,49	17,50	56,49	340,53	0,48	11,53	53,20	77,14*
MQYWCpP	2,95	17,46	57,52	340,85	0,54	11,38	53,49	77,36

estimativas. Quando $n = p$ tem-se os resultados com relação às estimativas AR, e quando $n = q$ tem-se os resultados para as estimativas MA. O $m = 30$ é o número de sequências a serem estimadas.

Os resultados das simulações de Monte Carlo são apresentados em tabelas contendo: a média e o desvio-padrão das estimativas dos parâmetros, o erro relativo (ER_θ) com relação aos parâmetros reais, e o coeficiente de variação médio (CVM_θ) com relação às estimativas médias obtidas, que estão no Apêndice A. Nesta seção são mostradas apenas as tabelas com o erro relativo e o coeficiente de variação médio.

Essas medidas são calculadas para as estimativas dos três exemplos de processos ARMA apresentados na Seção 5.1. Os melhores resultados estão assinalados com: *!**. As análises dos resultados fornecidos encontram-se na próxima seção.

Exemplo 1: Considere o modelo **ARMA(4,4)** com

$$\begin{aligned}
 & x(n) + 0,1x(n-1) + 1,66x(n-2) + 0,093x(n-3) + 0,8649x(n-4) \\
 = & \varepsilon(n) + 0,0226\varepsilon(n-1) + 0,8175\varepsilon(n-2) + 0,0595\varepsilon(n-3) + 0,0764\varepsilon(n-4)
 \end{aligned}$$

Foram simulados dois casos, no primeiro fixamos: $N = 256$, $L = 125$ e $M = 20$; e no segundo: $N = 1024$, $L = 500$, e $M = 80$. Estes resultados estão na Tabela 5.1. As estimativas dos parâmetros estão no Apêndice A e as estimativas dos espectros, polos e zeros, estão no Apêndice B.

Exemplo 2: Considere o modelo **ARMA(4,3)** com

Tabela 5.2: Erro relativo e coeficiente de variação médio para o modelo ARMA(4,3).

Modelo	$N = 256, M = 10$				$N = 1024, M = 10$			
	AR(4)		MA(3)		AR(4)		MA(3)	
	ER %	CVM %	ER %	CVM %	ER %	CVM %	ER %	CVM %
EMYW	5,02*	23,77	16,24	129,91	2,28	10,74	5,15	52,96
EMYWP	6,39	23,88	15,00*	121,60	2,62	10,74	4,91*	52,38
MQYW	6,68	21,03	22,62	$1,46 \times 10^3$	4,96	13,36	9,43	73,41
MQYWP	6,99	20,81	21,79	703,43	4,96	13,37	9,10	72,19
MQYWS	6,06	19,51*	20,98	612,53	6,10	10,91	11,16	85,95
MQYWSP	6,72	19,58	20,09	459,75	6,00	10,89	10,79	84,00
MosesYW	7,77	20,89	52,06	176,69	1,53*	5,77*	44,56	25,27*
MQYWC _p	6,68	21,03	61,43	101,79	4,96	13,36	56,04	53,27
MQYWC _{pP}	6,99	20,81	61,20	95,64*	4,96	13,37	56,06	52,41

$$\begin{aligned}
& x(n) - 1,3136x(n-1) + 1,4401x(n-2) - 1,0919x(n-3) + 0,83527x(n-4) \\
& = \varepsilon(n) + 0,1792\varepsilon(n-1) + 0,8202\varepsilon(n-2) + 0,2676\varepsilon(n-3)
\end{aligned}$$

No primeiro caso temos: $N = 256$, $L = 125$ e $M = 10$, e para o segundo temos: $N = 1024$, $L = 500$ e $M = 10$. Os resultados das simulações estão na Tabela 5.2. As estimativas dos parâmetros estão no Apêndice A e as estimativas dos espectros, polos e zeros, estão no Apêndice B.

Exemplo 3: Considere o modelo **ARMA(4,2)** com

$$\begin{aligned}
& x(n) - 0,52x(n-1) + 1,018x(n-2) - 0,255x(n-3) + \\
& + 0,24x(n-p) = \varepsilon(n) - 0,337\varepsilon(n-1) + 0,810\varepsilon(n-2)
\end{aligned}$$

No primeiro caso temos: $N = 256$, $L = 85$ e $M = 10$, e para o segundo caso: $N = 1024$, $L = 340$ e $M = 10$. Os resultados das simulações estão na Tabela 5.3. As estimativas dos parâmetros estão no Apêndice A e as estimativas dos espectros, polos e zeros, estão no Apêndice B.

5.3 Análise dos Resultados via ER e CVM

Nesta seção é feita uma análise geral dos resultados fornecidos pelos métodos de estimação separada, apresentados nesse Capítulo, e que estão nas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3.

Tabela 5.3: Erro relativo e coeficiente de variação médio para o modelo ARMA(4,2).

Modelo	$N = 256, M = 10$				$N = 1024, M = 10$			
	AR(4)		MA(2)		AR(4)		MA(2)	
	ER %	CVM %	ER %	CVM %	ER %	CVM %	ER %	CVM %
EMYW	31,39	171,77	24,34	105,85	18,48	104,35	12,58	88,18
EMYWP	31,49	171,79	24,57	105,95	18,56	104,35	12,63	88,19
MQYW	23,15	42,83	14,31	65,13	13,02	21,62	6,22*	23,34
MQYWP	23,92	42,61*	14,69	64,76	13,25	20,62*	6,27	23,35
MQYWS	8,41	61,31	5,95*	58,84	9,57	51,37	10,99	15,79
MQYWSP	8,10*	60,12	6,38	57,94*	9,58	50,80	10,85	15,67*
MosesYW	14,41	111,31	48,23	258,66	5,45*	41,29	42,43	161,58
MQYWC _p	23,15	42,83	68,10	63,28	13,02	21,62	60,84	30,00
MQYWC _{pP}	23,92	42,61*	68,48	63,20	13,25	20,62*	60,97	30,03

5.3.1 Análise dos Resultados para o Processo ARMA(4,4) (Tabela 5.1)

Analisando inicialmente as estimativas AR, no exemplo 1, verificou-se que o método proposto forneceu o melhor resultado em termos de ER (0,86%), enquanto que o maior ER (5,53%) foi fornecido pelo MosesYW. O menor CVM foi o do método MQYW e o do método MQYWC_p ponderados (17,46%), que obteve um ER de 2,95%, e o maior CVM (58,44%) ficou com o método EMYW Ponderado.

Analisando as estimativas MA, ($N = 256$), observou-se que o melhor resultado, foi fornecido pelo método EMYWP com ER (12,37%), mas por outro lado este método obteve o maior CVM (5,93x10³%). O método MQYWC_p que obteve o maior ER (57,52%), e o método MosesYW forneceu o menor CVM (214,22%).

Analisando o segundo caso ($N = 1024$), para as estimativas AR, observa-se que o menor ER foi fornecido pelo método EMYW (onde foi utilizado o menor número de equações $M = p + q = 8$), mas novamente, esse método com ponderação, obteve o maior CVM (33,20%), contra o menor que ficou com os métodos MQYWP e MQYWC_{pP} (11,38%). O maior ER (2,75%) foi fornecido pelo o método de MosesYW. Considerando as duas medidas, o método que forneceu o melhor resultado foi o MQYWP, 0,54% (ER) e 11,38% (CVM). Observando que quando aumenta-se o N os resultados melhoraram significativamente.

Para o caso $N = 1024$, enquanto que as estimativas AR melhoraram bastante, principalmente em termos de ER, não ocorreu o mesmo com as estimativas MA (melhorando apenas em alguns casos), mas quanto ao CVM, melhorou significativamente. O melhor resultado do ER foi fornecido pelo método MQYWP (9,73%), e o pior pelo método de

MQYWC_p (53,49%). Sendo que esse último método forneceu o menor CVM (77,14%), e o método que apresentou o maior CVM, foi o método EMYW ponderado (572,02%).

5.3.2 Análise dos Resultados para o Processo ARMA(4,3) (Tabela 5.2)

Neste exemplo verificou-se que, no caso $N = 256$, o melhor resultado, para as estimativas AR, em termos de ER, ficou com o método EMYW (5,02%), seguido do método proposto MQYWS (6,06%). Enquanto que o pior resultado do ER ficou com o método MosesYW (7,77%). Quanto ao CVM, o melhor resultado foi do método proposto, sem ponderação (19,51%), já o pior resultado foi fornecido pelo método EMYWP (23,88%), mas vimos que esse método forneceu o melhor ER.

Analisando o caso $N = 256$ observou-se que, as estimativas MA não foram tão boas quanto as estimativas AR, principalmente para o CVM. Para este caso, os melhores resultados ficaram com o método EMYWP e MQYWC_p, ou seja, 15,00% para o ER, e 95,64% para o CVM. O pior resultado, do ER ficou com o método MQYWC_p (61,43%), e o pior CVM ficou com o método MQYW ($1,46 \times 10^3$), para este último caso quando utilizamos a ponderação o CVM reduziu-se significativamente (703,4%), ou seja, em aproximadamente 50%, mas ainda é um valor muito grande.

Analisando o caso $N = 1024$, verificou-se que as estimativas com relação aos parâmetros AR, melhorou significativamente com relação às duas estatísticas, o que já era esperado, quando aumenta-se o valor de N . O melhor resultado foi obtido pelo método de MosesYW (que no caso anterior obteve o pior resultado), com ER igual a 1,53%, e CVM de 5,77%, nota-se que esse método apresenta um bom comportamento assintótico, como asseguram os autores [28]. O maior valor do ER ficou com método proposto MQYWS (6,10%), que não melhorou com relação ao caso anterior, embora tenha reduzido significativamente o CVM (de 19,51 para 10,91%). Vale ressaltar, nesse caso, quando aumentamos o valor do M , o método proposto melhora seu desempenho. O maior CVM ficou com os métodos MQYW e MQYWC_p, ponderado e não ponderado (13,36% e 13,37%), que mostraram-se melhor, quando comparado com o caso anterior. Nesse caso a ponderação não mostrou melhoras significativas.

No caso $N = 1024$, analisando-se as estimativas MA, observou-se que os resultados melhoraram significativamente, para as duas estatísticas, principalmente para CVM, que reduziu-se em torno de 50%, ou mais, para todos os métodos. O melhor resultado para o ER ficou com o método EMYW ponderado (4,91%). O método MosesYW reduziu significativamente o CVM de 176,69% para 25,27%, sendo o menor dentre todos os métodos.

5.3.3 Análise dos Resultados para o Processo ARMA(4,2) (Tabela 5.3)

No Exemplo 3, os zeros estão próximos e os polos afastados da CRU. Examinando o caso $N = 256$, o melhor resultado do ER para as estimativas AR, ficou com o método proposto MQYWPS (8,10%), enquanto que o menor CVM ficou com os métodos MQYWP e MQYWCp (42,61%). Já os piores resultados do ER e CVM, foram fornecidos pelo método EMYW ponderado: 31,49% e 171,79%, respectivamente.

No caso $N = 256$ observou-se que, o melhor resultado das estimativas MA, para as duas estatísticas, ficou com o método proposto MQYWS: ER igual a 5,95% e o CVM igual a 57,94% (com ponderação). Os maiores valores para as duas estatísticas foram fornecidos pelo método MosesYW, ER igual a 48,23% e CVM igual a 258,66%.

Comparando as estimativas AR nos casos $N = 256$ e $N = 1024$, observou-se que os resultados de um modo geral melhoraram em termos de ER e CVM. Os melhores resultados foram do método proposto para ER, 9,57%, e o melhor resultado para o CVM foi dos métodos MQYW e MQYWCp, 20,62%. Os piores resultados dessas medidas foi do método EMYW, 18,48% e 104,35%.

Nesse exemplo utilizou-se $M = p + q = 6$ para o método EMYW. Nos outros métodos usou-se $M = 10$ (exceto no método de MosesYW, onde $M = 9$ e 13), os quais não melhoraram o valor do ER.

No caso $N = 1024$ observou-se que as estimativas MA melhoraram significativamente, para todos os métodos, em termos de CVM. Já o maior valor do ER (60,97%), foi fornecido pelo método MQYWCp. O método MQYW forneceu o menor valor do ER, enquanto que o método proposto MQYWPS forneceu o menor valor do CVM (15,64%), e o método MosesYW forneceu o maior CVM (161,58%).

5.4 Esforço Computacional dos Métodos

Nesta seção é apresentado o esforço computacional dos métodos simulados na Seção 5.2. Os métodos de estimação separada para o modelo ARMA são considerados de média complexidade computacional, enquanto que os métodos ótimos de estimação simultânea são considerados de alta complexidade computacional, exigindo um maior esforço computacional. O esforço foi medido por meio do número de *FLOPS* no aplicativo MATLAB. *FLOPS* é o número de operações de ponto flutuante, esse comando retorna o número acumulado de operações de ponto flutuante. A adição e subtração conta um *FLOP* se o número é real, dois se o número é complexo. A multiplicação e divisão também conta um

Tabela 5.4: Esforço computacional dos métodos (FLOPS).

Modelos Métodos	ARMA	(4,2)	ARMA	(4,3)	ARMA	(4,4)
	N=256	N=1024	N=256	N=1024	N=256	N=1024
EMYW	34678364	1,243E+10	405084019	2,478E+10	405663515	2,479E+10
EMYWP	34678288	1,243E+10	405084237	2,478E+10	405664096	2,479E+10
MQYW	346816670	1,243E+10	405103478	2,478E+10	405732773	2,479E+10
MQYWP	346816749	1,243E+10	405102538	2,478E+10	405737058	2,479E+10
MQYW(S)	686874452	2,484E+10	802696668	4,955E+10	803728568	4,955E+10
MQYWP(S)	686873777	2,484E+10	802694231	4,955E+10	803734996	4,955E+10
YWMOSES	13247547	18232894	13686849	18734090	14311902	19405187
MQYWCp	8108763	15059233	8388010	15393102	8754178	16433608
MQYWCpP	8108939	15059327	8388620	15393348	8755838	16438950

FLOP para cada resultado se o número é real e seis *FLOPS* se for complexo.

A Tabela 5.4 mostra o esforço computacional para cada método com relação aos três processos ARMA estimados, os respectivos número de observações gerados. As análises desses resultados estão descritas na seção a seguir.

5.4.1 Análise do Esforço Computacional

Na Tabela 5.4 tem-se o esforço computacional dos métodos por meio do número de *FLOPS*, considerando os modelos e os tamanhos das amostras. Observa-se nesta tabela que os métodos EMYW e MQYW, apresentam um esforço computacional semelhante. Fixado o tamanho da amostra, e o modelo, o método proposto (MQYWS) apresentou maior esforço computacional, em virtude de trabalhar com repetições de alguns procedimentos (rotinas), o que provavelmente levou ao aumento do esforço computacional. Talvez seja possível reduzi-lo, por meio de uma otimização mais eficiente. O método que forneceu o menor esforço computacional foi o método de MQYW utilizando o cepstrum. A importância de medir o esforço computacional, no caso de aplicação prática, vai depender se a prioridade dessa aplicação é *off-line* ou *on-line*.

5.5 Convergência do Método Proposto

Nesta seção é feito um estudo de simulação para verificar a convergência do método proposto com relação aos três modelos apresentados, utilizando de simulações de Monte Carlo [54] e [55]. É importante verificar a convergência dos métodos para saber se são estáveis, ou seja, as estimativas dos parâmetros não divergem.

5.5.1 Convergência do Método Proposto para o ARMA(4,4)

Vamos mostrar inicialmente a convergência do método proposto para o processo ARMA(4,4). Nas simulações de Monte Carlo considerou-se: $B = 100, 200, 400, 1000, 2000$ e 3000 , como sendo o número de repetições das estimativas dos parâmetros para os seguintes tamanhos de amostra: $N = 256, 512$ e 1024 . Inicialmente calculamos erro relativo (ER_j) para cada estimativa e a partir daí calculou-se o erro médio relativo (EMR), ou seja,

$$ER_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_i^{(j)} - \theta_i)^2}{\sum_{i=1}^n \theta_i^2}}$$

e

$$EMR = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B ER_j$$

onde, θ_i é o i -ésimo valor do verdadeiro parâmetro, $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_n]$, $\hat{\theta}_i^{(j)}$ é a i -ésima estimativa da j -ésima estimativa das B repetições, adotando $n = p$ para as estimativas AR e $n = q$, para as estimativas MA. Os resultados da convergência do método proposto em termos de EMR estão dispostos na Tabela 5.5.

Analisando a Tabela 5.5 observou-se que o EMR decresce à medida que o tamanho de amostra aumenta de $N = 256$ até $N = 1024$. Por outro lado, à medida que aumentamos o número de repetições o EMR convergiu para um certo valor, tanto nas estimativas AR como MA, mostrando que o método proposto converge.

A partir destes resultados obtidos considerou-se a maior amostra ($N = 1024$) e $B = 3000$ repetições, para o cálculo das estatísticas dos parâmetros AR e MA. A seguir foram calculados o erro quadrático médio (EQM); a média; o desvio-padrão (DP) e o vício = $\bar{\theta} - \theta$ (tendência), para cada uma das estimativas dos parâmetros, como mostram as Tabelas 5.6 e 5.7. Além disso, foram construídos os gráficos dos histogramas para os melhores resultados dessas estimativas AR e MA.

Nas Tabelas 5.6 e 5.7, analisando as estatísticas para estimativas AR e MA e comparando-as, observou-se que as estimativas AR apresentam melhor desempenho, mas ambos os estimadores forneceram um pequeno vício para suas estimativas. Na Figura 5.4 e 5.5 têm-se os gráficos dos histogramas das estimativas de a_2 e b_3 , respectivamente, mostrando o comportamento das funções de distribuição dos estimadores dos parâmetros, que têm aproximadamente uma distribuição Normal (Gaussiana).

Tabela 5.5: Convergência do método proposto para o modelo ARMA(4,4).

EMR	$N = 256$		$N = 512$		$N = 1024$	
B	AR	MA	AR	MA	AR	MA
100	0,0636	0,4814	0,0556	0,4177	0,0324	0,3231
200	0,0666	0,4858	0,0529	0,4083	0,0312	0,3195
400	0,0710	0,5173	0,0529	0,4051	0,0298	0,3200
1000	0,0706	0,5066	0,0545	0,4055	0,0300	0,3173
2000	0,0706	0,5132	0,0542	0,4026	0,0301	0,3193
3000	0,0713	0,5142	0,0537	0,4011	0,0299	0,3178

Tabela 5.6: Estatísticas AR, N=1024 e B=3000, modelo ARMA(4,4).

Parâmetros AR	EQM	Média	DP	Vício
$a_1 = 0,1$	0,0020	0,1081	0,0444	0,0081
$a_2 = 1,66$	0,0007	1,6635	0,0272	0,0035
$a_3 = 0,093$	0,0012	0,0987	0,0349	0,0056
$a_4 = 0,8649$	0,0010	0,8569	0,0301	0,0080

Tabela 5.7: Estatísticas MA, N=1024 e B=3000, modelo ARMA(4,4).

Parâmetros MA	EQM	Média	DP	Vício
$b_1 = 0,0226$	0,0223	0,0264	0,1494	0,0038
$b_2 = 0,8175$	0,0229	0,9030	0,1250	0,0855
$b_3 = 0,0595$	0,0190	0,0611	0,1380	0,0017
$b_4 = 0,0764$	0,0188	0,0872	0,1368	0,0108

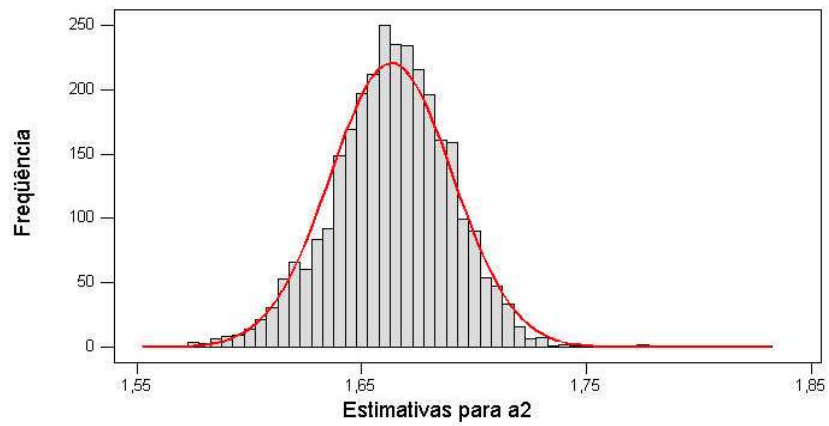


Figura 5.4: Histograma das estimativas de a_2 - modelo ARMA(4,4).

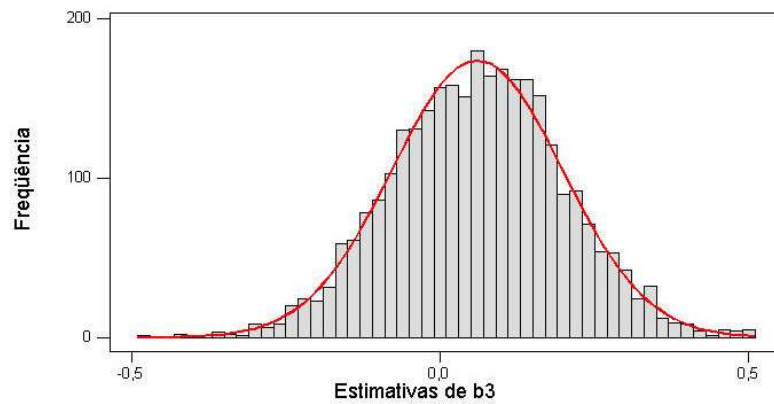


Figura 5.5: Histograma das estimativas de b_3 - modelo ARMA(4,4).

Tabela 5.8: Convergência do método proposto para o modelo ARMA(4,3).

<i>EMR</i>	$N = 256$		$N = 512$		$N = 1024$	
B	AR	MA	AR	MA	AR	MA
100	0,1937	0,4413	0,2664	0,5171	0,0909	0,2455
200	0,2092	0,4452	0,2490	0,4964	0,0861	0,2338
400	0,2080	0,4661	0,2587	0,5049	0,0889	0,2368
1000	0,1976	0,4572	0,2664	0,5083	0,0877	0,2365
2000	0,1991	0,4624	0,2702	0,5142	0,0854	0,2335
3000	0,2003	0,4660	0,2683	0,5112	0,0841	0,2316

5.5.2 Convergência do Método Proposto para o modelo ARMA(4,3)

Para mostrar a convergência do método proposto com relação ao processo ARMA(4,3) considerou-se as mesmas condições do exemplo anterior, ou seja, com $B = 100, 200, 400, 1000, 2000$ e 3000 repetições das estimativas dos parâmetros AR e MA e os tamanhos de amostra $N = 256, 512$ e 1024 . Os resultados do cálculo do erro médio relativo (*EMR*) são mostrados na Tabela 5.8 e as estatísticas para as estimativas dos parâmetros AR e MA, isto é, o erro quadrático médio (EQM); a média; o desvio-padrão (DP) e o vício, considerando $N = 1024$ e $B = 3000$, são mostradas nas Tabelas 5.9 e 5.10.

Neste exemplo observou-se que as estimativas AR e MA, embora tenham tido um pequeno acréscimo no *EMR*, nos casos $N = 256$ para $N = 512$ este erro decresceu para os dois estimadores quando passou de $N = 512$ para $N = 1024$. Quanto ao número de repetições, verificamos que o *EMR* convergiu para um certo valor, considerando os três tamanhos de amostra, mostrando mais uma vez que o método proposto converge.

Analisando as estatísticas dos parâmetros, nas Tabelas 5.9 e 5.10, observou-se que novamente os estimadores tiveram uma boa precisão em termos de EQM, apresentando um pequeno vício, embora no caso anterior (modelo ARMA(4,4)) as estimativas AR e MA tenham apresentado um menor vício (exceto para um dos parâmetros MA).

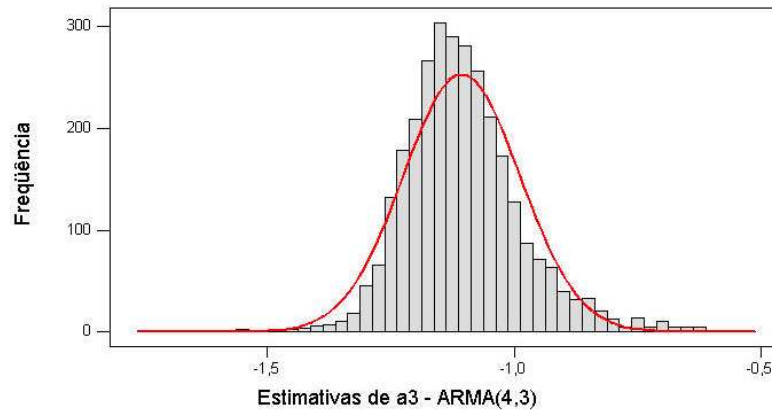
Para verificar o comportamento das estimativas de alguns parâmetros foram construídos os gráficos dos histogramas para as melhores estimativas em termos de vício, ou sejam, para a_3 e b_3 , como mostram as Figuras 5.6 e 5.7, respectivamente. Observou-se que a função de distribuição dos histogramas das estimativas dos parâmetros apresentam comportamento aproximadamente com distribuição Normal (Gaussiana).

Tabela 5.9: Estatísticas AR, N=1024 e B=3000, modelo ARMA(4,3).

Parâmetro AR	EQM	Média	DP	Vício
$a_1 = -1,3136$	0,0158	-1,3955	0,0955	0,0819
$a_2 = 1,4401$	0,0233	1,5260	0,1263	0,0858
$a_3 = -1,0919$	0,0141	-1,1052	0,1182	0,0134
$a_4 = 0,8353$	0,0092	0,7928	0,0864	0,0425

Tabela 5.10: Estatísticas MA, N=1024 e B=3000, modelo ARMA(4,3).

Parâmetro MA	EQM	Média	DP	Vício
$b_1 = 0,1792$	0,0307	0,1072	0,1598	0,0719
$b_2 = 0,8202$	0,0069	0,8650	0,0699	0,0448
$b_3 = 0,2676$	0,0205	0,2421	0,1409	0,0254

Figura 5.6: Histograma das estimativas a_3 - modelo ARMA(4,3).

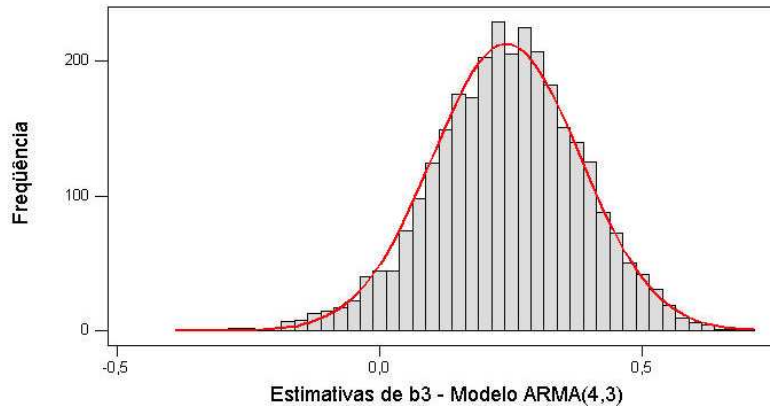


Figura 5.7: Histograma das estimativas b_3 - modelo ARMA(4,3).

5.5.3 Convergência do Método Proposto para o ARMA(4,2)

Considerando agora a convergência do método proposto para o modelo ARMA(4,2), nas mesmas condições dos exemplos anteriores, ou seja, com $B = 100, 200, 400, 1000, 2000$ e 3000 repetições das estimativas dos parâmetros AR e MA e os tamanhos de amostra $N = 256, 512$ e 1024 . Os resultados do cálculo do erro médio relativo (EMR) são mostrados na Tabela 5.11 e as estatísticas das estimativas dos parâmetros AR e MA, ou seja, o erro quadrático médio (EQM); a média; o desvio-padrão (DP) e o vício, são mostrados nas tabelas 5.12 e 5.13.

Analisando a convergência do método por meio da Tabela 5.11, podemos verificar que o EMR decresce quando aumenta-se o tamanho da amostra para ambos os estimadores, sendo mais expressivo para o estimador MA. Mas em ambos os casos, em $B = 3000$ repetições, o método proposto converge para um certo valor.

Quanto às estatísticas calculadas para ambos os estimadores, nota-se que, neste caso, os resultados não foram muito satisfatórios, pois os estimadores apresentaram um vício grande (tendência), principalmente as estimativas AR. O melhor resultado ficou com parâmetro b_1 em termos de vício. Nas Figuras 5.8 e 5.9 os gráficos mostram o comportamento das funções de distribuições das estimativas dos parâmetros a_4 e b_1 . Embora essas distribuições tenham um comportamento aproximadamente Gaussiano (Normal), e

Tabela 5.11: Convergência do método proposto para o modelo ARMA(4,2).

EMR	$N = 256$		$N = 512$		$N = 1024$	
B	AR	MA	AR	MA	AR	MA
100	0,4913	0,4243	0,5157	0,3106	0,4655	0,2226
200	0,5094	0,4287	0,5040	0,3072	0,4673	0,2233
400	0,5452	0,4783	0,5078	0,3122	0,4626	0,2316
1000	0,5431	0,4777	0,4883	0,3018	0,4525	0,2306
2000	0,5417	0,4670	0,4879	0,3046	0,4495	0,2296
3000	0,5400	0,4689	0,4891	0,3057	0,4487	0,2297

Tabela 5.12: Estatísticas AR, B=3000 e N=1024, modelo ARMA(4,2).

Parâmetro AR	EQM	Média	DP	Vício
$a_1 = -0,52$	0,1285	-0,5250	0,1152	0,0050
$a_2 = 1,018$	0,0904	1,0226	0,0834	0,0046
$a_3 = -0,255$	0,0970	-0,2157	0,0891	0,0393
$a_4 = 0,24$	0,1071	0,2558	0,0976	0,0158

o desvio-padrão da estimativa de a_4 seja reduzido, o seu vício ainda é muito grande.

Para esse modelo o método proposto forneceu estimativas viciadas; talvez esse problema pudesse ser resolvido se fosse encontrada uma ponderação $w(k)$ mais adequada (para verificar a convergência, pois foi utilizado $w(k) = 1$). Algumas sugestões que são utilizadas na literatura foram testadas, mas não se mostraram satisfatórias [35].

Tabela 5.13: Estatísticas MA, B=3000 e N=1024, modelo ARMA(4,2).

Parâmetro MA	EQM	Média	DP	Vício
$b_1 = -0,337$	0,0826	-0,4283	0,0767	0,0913
$b_2 = 0,810$	0,0391	0,8864	0,0377	0,0764

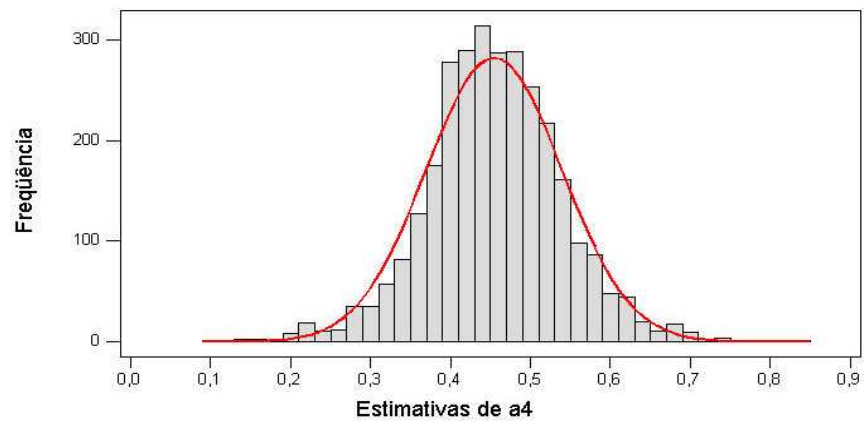


Figura 5.8: Histograma das estimativas de a_4 - modelo ARMA(4,2).

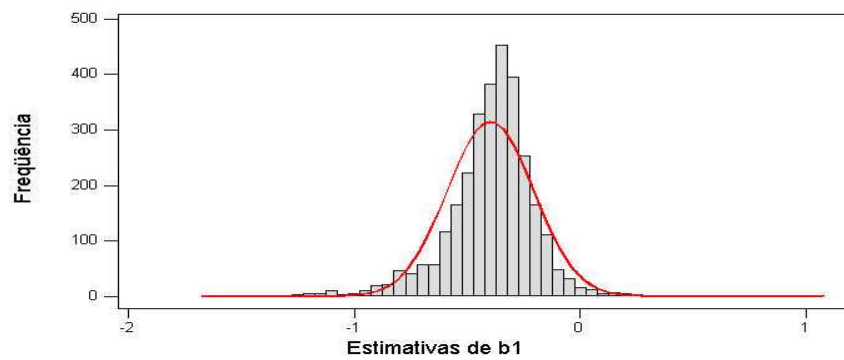


Figura 5.9: Histograma das estimativas de b_1 - modelo ARMA(4,2).

Capítulo 6

Conclusões

6.1 Descrição do Trabalho

A finalidade principal deste trabalho é propor um método de estimação separada para o modelo (processo) espectral ARMA, utilizando-se do método de mínimos quadrados e das equações de Yule-Walker. Além desta proposta fez-se um estudo detalhado dos principais métodos de estimação espectral para os modelos AR, MA e ARMA, dando uma maior importância ao modelo ARMA.

No Capítulo 3 apresentamos um estudo dos principais métodos de estimação simultânea e separada, para o modelo ARMA, e mostrou-se também as características e o desenvolvimento dos métodos para a estimação espectral AR, MA.

Para o modelo ARMA, fez-se um estudo completo das suas características e propriedades, inclusive a relação das estimativas do vetor de parâmetros com o limite de Cramér-Rao.

Foram apresentadas também as propriedades e as qualidades dos estimadores de máxima verossimilhança, tais como: consistência, eficiência, invariância e suficiência.

Foi visto também a importância do erro quadrático médio (EQM) e a sua relação com a variância e o limite de Cramér-Rao (LCR), com relação a um vetor de parâmetros. Foi descrito também, o limite de Cramér-Rao assintótico (LCRA) para o modelo ARMA, destacando sua importância no estudo da precisão dos estimadores.

No Capítulo 4 foi apresentado o novo método, baseado no método de mínimos quadrados das equações modificadas de Yule-Walker, e numa filtragem AR do sinal gerado utilizando as estimativas MA obtidas por meio do método de Durbin. Nas simulações apresentadas no Capítulo 5 os resultados mostraram-se muito bons em vários casos, se

comparado com os outros métodos.

No Capítulo 5 foram apresentadas as simulações de Monte Carlo, considerando três processos ARMA teóricos, com as posições de polos e zeros diferentes. Além das estimativas dos parâmetros, foram estimados a média dos espectros de potência e dos polos e zeros, para as 30 sequências aleatórias estimadas. Para as comparações utilizou-se o erro relativo (ER) e o coeficiente de variação médio (CVM), e mediu-se o esforço computacional dos métodos em *FLOPS*. Estudou-se ainda a convergência do método proposto em termos de erro relativo, para cada um dos processos estudados, utilizando-se o método de simulações de Monte Carlo.

6.2 Conclusão

Dos resultados fornecidos nas simulações foi possível extrair algumas conclusões importantes, tais como:

- No processo onde os polos estão próximos e os zeros afastados (exemplos 1 e 2), pôde-se confirmar com relação ao ER, o que diz a literatura sobre estimação espectral, ou seja, neste caso os métodos de estimação fornecem melhores resultados. Para o Exemplo 3, pôde-se verificar outro fato, se os polos e zeros estão em posições diferentes, ou seja, polos afastados e zeros próximos da CRU, os resultados fornecidos pelo o ER foram os piores. Entretanto, nesse caso, o método proposto forneceu os menores ERs, obtendo melhores resultados com relação aos outros métodos.

- Dos três processos simulados observou-se que as melhores estimativas AR em termos de ER foram do processo ARMA(4,4), e os valores foram fornecidos pelos métodos: proposto MQYWS (N=256) e o método EMYW (N=1024), respectivamente.

- Observou-se que a qualidade das estimativas AR, em termos de ER, são sempre melhores do que as MA, o que já era esperado, devido as aproximações para estimar os parâmetros MA.

- Observou-se também que o CVM dos métodos, na maioria dos casos, é bem maior do que ER, isso mostra o quanto as estimativas são viciadas, refletindo-se na estimação do espectro de potência, ou seja, aquelas estimativas espectrais com menor variabilidade tiveram melhor estimativa média, mas graficamente, em alguns casos, não percebe-se essas diferenças entre os métodos, quando observam-se as curvas médias dos espectros de potência estimados.

- Observou-se ainda que os CVM das estimativas MA são sempre maiores do que os CVM das estimativas AR, isso se deve ao fato das aproximações para estimá-las, já

mencionada anteriormente.

- Viu-se que a hipótese (métodos de estimação separada) de que supondo que o processo residual é um processo MA (a ordem do modelo pode não ser adequada), essa aproximação leva a erros, acarretando vícios nas inferências e uma maior variabilidade das estimativas MA, isso justifica o porquê dos CVM das estimativas MA serem maiores do que das estimativas AR, na maioria dos casos estudados.

- Observou-se no método de MosesYW que, quando aumenta-se o tamanho amostral de N , o CVM das estimativas AR é menor com relação aos outros métodos. Isso é, devido às propriedades assintóticas citadas pelos autores [28]. Percebeu-se também, que para o caso $q = 2 < 3$, esse método não forneceu bons resultados.

- Com relação ao método Cepstrum, esperava-se melhores resultados, pois o espectro apresentado no artigo, no qual o método é proposto [21], obteve um resultado melhor se comparado com os resultados aqui fornecidos. Acredita-se que cada método tem suas particularidades, levando ao melhor ou pior desempenho, dependendo do espectro que está sendo estimado. Outro fato é que, foi mantida a mesma parametrização para todos os métodos, talvez seja preciso mudar essa parametrização, nesse método e para cada tipo de espectro estudado.

- Por último mediu-se o esforço computacional e observou-se que o menor valor ficou com o método de MQYWCp, e o maior com o método proposto. Os maiores esforços ocorreram nos métodos de Yule-Walker que utilizam o método de Durbin para estimar os parâmetros MA. Enquanto que no método de Moses o procedimento para as estimativas MA, é um outro que leva ao menor esforço computacional. Quanto ao método proposto, além de utilizar o método de Durbin, repete-se o último passo desse método, levando-o a um esforço computacional, ainda maior. Talvez uma otimização mais eficiente possa produzir um menor esforço computacional.

6.3 Resumo das Contribuições

Com relação às contribuições do trabalho destacam-se:

- O método proposto de estimação espectral para o modelo ARMA mostrando-se eficiente em vários casos.
- Descrição detalhada das principais propriedades da estimação do vetor de parâmetros para o modelo ARMA.
- Apresentação das principais qualidades das estimativas de máxima verossimilhança para o vetor de parâmetros do modelo ARMA.

- Estudo dos principais métodos de estimação espectral paramétrica separada para o modelo ARMA em termos de precisão das estimativas, em relação ao erro relativo e coeficiente de variação médio.
- As relações do erro quadrático médio com a variância e o limite de Cramér-Rao, e a sua importância quando desejamos medir a qualidade dos estimadores espectrais, em termos de precisão e consistência. A comparação existente entre o LCR (teórico) a variância (estimada) e também o erro quadrático médio relativo (estimado).
- Descrição do limite de Cramér-Rao assintótico para o modelo ARMA.
- A importância de analisar com precisão as estimativas dos parâmetros, e não somente a visualização gráfica das estimativas dos espectros de potência.
- Um amplo estudo de simulações de Monte Carlo para medir a precisão dos métodos de estimação estudados utilizando o erro relativo e coeficiente de variação médio das estimativas dos parâmetros.
- Verificação da convergência do método proposto com relação aos modelos estudados por meio de simulações de Monte Carlo.
- Comparação do desempenho computacional dos métodos estudados.

6.4 Trabalhos Futuros

- Fazer um estudo mais detalhado para identificar o ponto ótimo dos principais parâmetros utilizados, ou seja, N , M , L , p , q . Com relação ao L , existe um estudo proposto por [67].
 - Procurar reduzir o esforço computacional nas simulações, do método proposto.
 - Fazer uma aplicação dos métodos utilizando dados reais (por exemplo: sinal de TV - HDTV) e comparar os resultados encontrados, verificando desempenho de cada método.
 - Verificar se a influência da precisão dos métodos de estimação num problema prático, ou seja, o quanto pode ser significativo, ou não.
 - Fazer comparações dos métodos paramétricos com os métodos não-paramétricos, embora já existam alguns estudos que mostram que para algumas aplicações os métodos paramétricos são mais eficientes.
 - Fazer um estudo de simulações para analisar o comportamento do LCR assintótico das estimativas dos parâmetros com relação aos métodos estudados.
 - Comparar o método proposto, que é considerado estimação paramétrica clássica com outros métodos de estimação bayesiana (ver apêndice D), que estão sendo bastante utilizados na literatura ultimamente [68].
 - Estudar a seleção e ordem do modelo ARMA, [6], [9] e [69].

Referências Bibliográficas

- [1] BLACKMAN, R.B. e TUKEY, J.W. **The Measurement of Power Spectra from the Point of view of Communications Engineering**. Dover, New York, 1958.
- [2] KAY, S. M., **Modern Spectral Estimation Theory and Applications**. 2ed. Printice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1999.
- [3] JENKINS, G.M. and WATTS, D.G. **Spectral Analysis and its Applications**. Holden-Day, San Francisco, 1968.
- [4] WEI, W.W.S. **Time Series Analysis - Univariate and Multivariate Methods**. Pearson Education - Addison Wesley. 2nd. Edition, Boston, 2006.
- [5] BROERSEN, P.M.T., **Automatic Autocorrelation and Spectral Analysis**. 1rd. Edition. Sprienger-Verlag, London, 2010.
- [6] BOX, G.E.P., JENKINS, G.M. and REINSEL, G.C. **Time Series Analysis: Forecasting and Control**, Four Edition. Wiley Series in Probability and Statistics, New York, 2008.
- [7] MARPLE, S.L.Jr. **Digital Spectral Analysis**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987.
- [8] THERRIEN, C.W. **Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1992.
- [9] MORETTIN, P.A. e TOLOI, C. M. C. **Análise de Séries Temporais**. ABE - Projeto Fischer, Editora Edgard Blucher LTDA, São Paulo, 2004.
- [10] HAYKIN, S., **Modern Filters**. Macmillan Publishing Company, New York, 1989.

- [11] HAYKIN, S., **Adaptive Filter Theory**, Second Edition. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1991.
- [12] AKAIKE, H., A New Look at the Statistical Model Identification. **IEEE Trans. Autom. Control**, vol. AC19, pp. 716-723, Dec. 1974B.
- [13] AKAIKE, H. Maximum Likelihood Identification of Gaussian Autoregressive Moving Average Models. **Biometrika**. Vol. 60, p. 255-265, 1973.
- [14] KULLBACK, S. **Information Theory and Statistics**. JohnWiley, New York, 1959.
- [15] MOOD, A.M., GRAYBILL, F.A. e BOES, D.C. **Introduction to the Theory of Statistics**. McGraw-Hill, Box Company, N.Y., 1986.
- [16] ZACKS, S. **The Theory of Statistical Inference**. John Wiley & Sons, Inc., N.Y., 1971.
- [17] FRIEDLANDER, B. On the Computation of the Cramer-Rao Bound for ARMA Parameter Estimation. **IEEE Trans. on acoustics, speech, and signal processing**. Vol. ASSP-32, N^o4, p.721-727, 1984.
- [18] STEIGLITZ, K. e MCBRIDE, L.E. A technique for the identification of linear systems. **IEEE Trans. on Automatic Control**, p. 461-464, 1965.
- [19] CADZOW, J. A. High performance spectral estimation - a new ARMA method. **IEEE Trans. on acoustics, speech and signal processing**, vol. ASSP-28, N^o5, p. 524-529, 1980.
- [20] FRIEDLANDER, B. e PORAT, B. The modified Yule-Walker method of ARMA spectral estimation. **IEEE Trans. on aerospace and electronic systems**. vol. AES-20, N^o2, p. 158-172, 1984.
- [21] KARDERLI, A. and KAYHAN, S. Spectral Estimation of ARMA Processing Using ARMA-Cepstrum Recursion. *IEEE Signal Processing Letters*, VOL. 7, NO.9, p. 259-261, 2000.
- [22] FRIEDLANDER, BENJAMIN. A Recursive Maximum Likelihood Algorithm for ARMA Spectral Estimation. **IEEE Trans. on Information Theory**, v.IT-28, n.4, p.639-646, 1982.

- [23] KAY, S. M., A new ARMA spectral estimator. **IEEE Trans. on acoustics, speech, and signal processing**, vol.ASSP-28, N^o5, p. 585-588, 1988.
- [24] KAY, S. M. **Fundamentals of Statistical Signal Processing - Estimation Theory**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1993.
- [25] DURBIN, J. Efficient Estimation of Parameters in Moving-Average Models. **Biometrika**, vol. 46, p.306-316, 1959.
- [26] FRIEDLANDER, B. e PORAT, B. A General Lower Bound for Parametric Spectrum Estimation. **IEEE Trans. on acoustics, speech, and signal processing**. vol. ASSP-32, n.4, p.728-733, 1984.
- [27] FRIEDLANDER, B. e SHARMAN, K. C. Performance Evaluation of the Modified Yule-Walker Estimator. **IEEE Trans. acoustics, speech, and signal processing**, vol. ASSP-33, n.3, p.719-725, 1985.
- [28] MOSES, R. L., SIMONYTE, V., STOICA, P. and SODERSTROM T., An Efficient Linear Method for ARMA Spectral Estimation. **International Journal Control**, 59, NO. 2, p. 337-356, 1994.
- [29] STOICA, P., FRIEDLANDER, B. e SODERSTROM, T., Aproximate Maximum-Likelihood approach to ARMA Spectral Estimation. **International Journal of Control**, 45, n.4, p.1281-1310, 1987.
- [30] OPPENHEIM, A.V. and SCHAFER, R.W. **Digital Signal Processing - discrete time**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1989.
- [31] RAMIREZ, M.A. A Levinson Algorithm Based on Isometric Transform of Durbin's. **IEEE Signal Processing Letters**, VOL.15, 2008.
- [32] NUTTALL, A. H., Spectral Analysis of a Univariate Process with Bad Data Points, via Maximum Entropy and Linear Predictive Techniques. **Tech. Rep. TR-5303, Naval Underwater Systems Center**, New London, Conn., Mar. 26, 1976.
- [33] ULRYCH, T. J., e CLAYTON, R. W. Time Series Modeling and Maximum Entropy. **Phys. Earth Planet. Inter.** Vol. 12, p.188-200, Aug., 1976.
- [34] SHON, S. e MEHROTA, K. Performance Comparisons of Autoregressive Estimation Methods. **Rec. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process.**, p. 14.3.1-14.3.4, 1984.

- [35] BATISTA, A.S.W. **Métodos de Estimação dos Parâmetros dos Modelos ARMA para Análise Espectral**. Campinas, 1992. 155pg. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - FEE - UNICAMP.
- [36] STOICA, P., MCKELVEY, T. and MARI, J. MA Estimation in Polynomial Time. **IEEE Transactions on Signal Processing**". VOL.48, NO. 7, 2000.
- [37] CRAMÉR, H. **Mathematical Methods of Statistics**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1966.
- [38] RAO, C.R. **Linear Statistical Inference and Its Applications**. New York, John Wiley & Sons, 1965.
- [39] HADIDI, M.T., MORF, M. e PORAT, B. Efficient construction of Canonical ladder forms for vector Autoregressive Process. **IEEE Trans. Automatic. Contr.**, Vol. AC-27, p. 1222-1233, Dec., 1982.
- [40] FRIEDLANDER, B., MORF, M., K KAILATH e LJUNG, L. New inversion formulas for matrices classified in terms of their distance from Toeplitz matrices. **Linear Algebra Appl.**, vol. 27, p.31-60, 1979.
- [41] DUGRÉ, J.P., BEECH, A.A.L., e SCHARF, L.L. Generating Covariance Sequences and Calculation of Quantization and Rounding Error Variances in Digital Filters. **IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing**, vol. ASSP-28, p.102-104, Feb., 1980.
- [42] DUGRÉ, J. P. & JURY, E.I. A Note on the Evaluation of Complex Integrals using Filtering Interpretations. **IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing**, vol. ASSP-30, p. 804-807. Oct. 1982.
- [43] MULLIS, C.T. & ROBERTS, R.A. The use of Second-Order Information in the Approximation of Discrete-Time Linear Systems. **IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing**, vol. ASSP-24, p. 226-238, June 1976.
- [44] SCHARF, L.L. & LUBY, J.C. Statistical Design of Autoregressive Moving-Average Digital Filters. **IEEE Trans. Acoustic., Speech, Signal Processing**, vol. ASSP-27, p. 240-247, June 1979.
- [45] GAVEL, D. T. Solution to the Problem of Instability in Banded Toeplitz Solvers. **IEEE Trans.on Signal Processing**, v. 40, n.2, p.464-466, 1992.

- [46] JACKSON, B. L. Frequency-Domain Steiglitz-McBride Method for Least-Squares IIR Filter Design, ARMA Modeling, and Periodogram Smoothing. **IEEE Signal Processing Letters**, VOL.15, pp. 49-52, 2008.
- [47] MOSSBERG, M. Estimation of Continuous-Time Stochastic Signals from Sample Covariances, **IEEE Transactions on Signal Processing**, VOL. 56, NO.2, 2008.
- [48] AL-SMADI, A. A Least-Squares-Based Algorithm for Identification of Non-Gaussian ARMA Models. **Circuits and Systems Signal Processing**, VOL.26, NO.5, pp. 715-731, 2007.
- [49] KAVEH, M. e BRUZZONE, S. P. A Comparative Overview of ARMA Spectral Estimators. **Proc. Ist ASSP Spectrum Estimation Workshop**, p. 2.4.1-2.4.8, Aug. 1981.
- [50] PORAT, BOAZ e FRIEDLANDER, B. Bounds on the Accuracy of Gaussian ARMA Parameter Estimation Methods Based on Sample Covariances. **IEEE Trans. on automatic control**, vol. AC-31, n.6, p.579-582, 1986.
- [51] M. LAGUNAS, P Stoica and M Rojas, Arma parameter estimation: revisiting a cepstrum-based method. **ICASSP 2008, the 33rd International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing**, Las Vegas, USA, 2008.
- [52] BEZERRA, M. I. S. e STANGHENHAUS, G. Uma Comparação entre L-Estimadores de Regressão. In: **X Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística**. Caxambú, MG. Anais de Resumos, p. 76, 1996.
- [53] PINHEIRO, H. P. **Um estudo Comparativo de L-Estimadores de Regressão**. Campinas, 1992. 110p. Dissertação (Mestrado em Estatística) - IMECC, UNICAMP.
- [54] POLITIS, D.N. Computer Intensive Methods in Statistical Analysis. **IEEE Signal Processing Magazine**, 15:39-55, 1998.
- [55] ZOUBIR, A.M. and BOASHASH, B. The Bootstrap and its Application in Signal Processing. **IEEE Signal Processing Magazine**, 15:56-76, 1998.
- [56] ROUSSAS, GEORGE G. **A First Course in Mathematical Statistics**. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1973.
- [57] HOEL, P.G., PORT, S.C., STONE, C.J. **Introduction to Statistical Theory**. Houghton Mifflin, Boston, 1971.

- [58] WHITTLE, J. The Analysis of Multiple Stationary Time Series. **Journal Royal Statistics Sociate**, vol. 15, p.125-139, 1953.
- [59] BRUZZONE, S. e KAVEH, M. On some suboptimum ARMA Spectral Estimators. **IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing**. Vol. 28, p. 753-755, 1980.
- [60] CHAN, Y. T. e LANGFORD, R. P. Spectral Estimation via High-Order Yule-Walker equations. **IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing**. Vol. 30, p. 689-698, 1982.
- [61] STOICA, P BABU and J LI, New method of sparse parameter estimation in separable models and its use for spectral analysis of irregularly sampled data. **IEEE Trans Signal Process**, vol 59, 35-47, 2011.
- [62] KRAUSS, T.P., SHURE, L. and LITTLE, J.N. **Signal Processing Toolbox User's Guide**, The Math Works, Inc., 24 Prime Park Way, Natick, M.A., 1994.
- [63] LJUNG, L., **System Identification - Theory for the User**, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987.
- [64] LJUNG, L., **System Identification Toolbox User 's Guide**, The Math Works, Inc., 24 Prime Park Way, Natick, M.A., 1993.
- [65] NAVARRO-MORENO, J. ARMA Prediction of Widely Linear Systems by Using the Innovations Algorithm. **IEEE Transctions on Signal Processing**. VOL.56, NO. 7, 2008.
- [66] PRIESTLEV, M.B. **Spectral Analysis and Time Series**. Academic Press, London, 2001.
- [67] BROERSEN, P.M.T. Autoregressive Model Orders for Durbin's MA and ARMA Estimators. **IEEE Trans. on Signal Processing**, 48, NO.8, p. 2454-2457, 2000.
- [68] PHILIPPE, A. Bayesian Analysis of Autoregressive Moving Average processes with unknown Orders. **Computational Statistics & Data Analysis**, Vol. 51, pp. 1904-1923, 2006.
- [69] CHOI, B. **ARMA Model Identification**. Probability an Applications. 1rd. Edition. Sprienger Series in Statistics -Verlag, London, 1992.

Apêndice A

Desvios-Padrões; EMR e CVM, das Estimativas dos Parâmetros dos Processos ARMA

Neste apêndice temos as tabelas com as estimativas dos parâmetros e os respectivos desvios-padrões, os erros relativos e os coeficientes de variação médios. A partir desses valores pode-se construir os intervalos de confiança dos parâmetros utilizando a expressão: $\hat{\theta} \pm z(\alpha/2) dp(\hat{\theta})$, como visto no Capítulo 3.

Tabela A.1: Média, (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,4).

N=256; M=20 Métodos	Parâmetros Reais AR				ER	CVM
	0,1	1,66	0,093	0,8649	%	%
EMYW	0,1361 (0,1688)	1,6707 (0,1179)	0,1254 (0,1179)	0,8644 (0,0646)	2,65	58,40
EMYWP	0,1352 (0,1678)	1,6506 (0,1165)	0,1230 (0,1171)	0,8439 (0,0630)	2,75	58,44
MQYW	0,1054 (0,0299)	1,6438 (0,0483)	0,0978 (0,0323)	0,8432 (0,0472)	1,49	17,50
MQYWP	0,1048 (0,0299)	1,6241 (0,0474)	0,0960 (0,0315)	0,8231 (0,0462)	2,95	17,46
MQYWS	0,1038 (0,0706)	1,6537 (0,0528)	0,0995 (0,0600)	0,8522 (0,0555)	0,86	34,51
MQYWPS	0,1037 (0,0698)	1,6335 (0,0506)	0,0979 (0,0582)	0,8315 (0,0530)	2,30	34,06
MosesYW ($nz = 9$)	0,1658 (0,1524)	1,7137 (0,1494)	0,1492 (0,0970)	0,8851 (0,1063)	5,53	44,41
MQYWCp	0,1054 (0,0299)	1,6438 (0,0483)	0,0978 (0,0323)	0,8432 (0,0472)	1,49	17,50
MQYWCpP	0,1048 (0,0299)	1,6241 (0,0474)	0,0960 (0,0315)	0,8231 (0,0462)	2,95	17,46

Tabela A.2: Média e (desvio-padrão) das estimativas , ER e CVM do ARMA(4,4).

N=256; M=20 Métodos	Parâmetros Reais MA				ER	CVM
	0,0226	0,8175	0,0595	0,0764	%	%
EMYW	-0,0244 (0, 2514)	0,8848 (0, 2227)	-0,0020 (0, 2106)	0,1291 (0, 2222)	14,00	2,95x10 ³
EMYWP	-0,0278 (0, 2542)	0,8689 (0, 2184)	-0,0009 (0, 2115)	0,1157 (0, 2212)	12,37	5,93x10 ³
MQYW	-0,0649 (0, 1701)	0,8739 (0, 2205)	-0,0137 (0, 2112)	0,0982 (0, 2342)	15,69	515,59
MQYWP	-0,0652 (0, 1714)	0,8622 (0, 2181)	-0,0147 (0, 2115)	0,0906 (0, 2320)	15,07	495,98
MQYWS	-0,0681 (0, 1914)	0,8879 (0, 2236)	-0,0224 (0, 2262)	0,1070 (0, 2403)	17,52	384,99
MQYWPS	-0,0685 (0, 1897)	0,8750 (0, 2223)	-0,0235 (0, 2266)	0,0983 (0, 2389)	16,72	377,85
MosesYW (nz = 9)	0,1108 (0, 1273)	0,4852 (0, 0530)	0,0100 (0, 0917)	0,0486 (0, 0860)	42,31	304,46
MQYWC _p	0,0057 (0, 0354)	0,3750 (0, 0438)	0,0068 (0, 0438)	-0,0563 (0, 0461)	56,49	340,53
MQYWC _{pP}	0,0053 (0, 0354)	0,3655 (0, 0437)	0,0073 (0, 0439)	-0,0540 (0, 0461)	57,52	340,85

Tabela A.3: Média e (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,4).

N=1024; M=80 Métodos	Parâmetros Reais AR				ER	CVM
	0,1	1,66	0,093	0,8649	%	%
EMYW	0,0963 (0,0714)	1,6566 (0,0729)	0,0954 (0,0475)	0,8612 (0,0380)	0,36	33,19
EMYWP	0,0961 (0,0713)	1,6517 (0,0727)	0,0950 (0,0473)	0,8561 (0,0378)	0,69	33,20
MQYW	0,1067 (0,0245)	1,6619 (0,0241)	0,0986 (0,0186)	0,8656 (0,0250)	0,48	11,53
MQYWP	0,1063 (0,0240)	1,6565 (0,0240)	0,0981 (0,0183)	0,8600 (0,0247)	0,54	11,38
MQYWS	0,1212 (0,0661)	1,6697 (0,0418)	0,1119 (0,0575)	0,8587 (0,0331)	1,63	28,07
MQYWPS	0,1208 (0,0658)	1,6628 (0,0420)	0,1110 (0,0572)	0,8523 (0,0333)	1,62	28,11
MosesYW (nz = 9)	0,1164 (0,0600)	1,7020 (0,0481)	0,1148 (0,0303)	0,8777 (0,0416)	2,75	21,38
MQYWCp	0,1067 (0,0245)	1,6619 (0,0241)	0,0986 (0,0186)	0,8656 (0,0250)	0,48	11,53
MQYWCpP	0,1063 (0,0240)	1,6565 (0,0240)	0,0981 (0,0183)	0,8600 (0,0247)	0,54	11,38

Tabela A.4: Média e (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,4).

N=1024; M=80 Métodos	Parâmetros Reais MA				ER	CVM
	0,0226	0,8175	0,0595	0,0764	%	%
EMYW	0,0081 (0, 1547)	0,9206 (0, 1381)	0,0706 (0, 1630)	0,1385 (0, 1291)	14,78	559,67
EMYWP	0,0080 (0, 1553)	0,9158 (0, 1374)	0,0706 (0, 1619)	0,1347 (0, 1285)	14,05	572,02
MQYW	0,0222 (0, 1559)	0,9000 (0, 0962)	0,0504 (0, 1485)	0,0982 (0, 1177)	10,42	282,05
MQYWP	0,0218 (0, 1558)	0,8950 (0, 0964)	0,0502 (0, 1484)	0,0943 (0, 1170)	9,73	286,27
MQYWS	0,0374 (0, 1717)	0,9155 (0, 1114)	0,0603 (0, 1695)	0,0989 (0, 1208)	12,34	218,52
MQYWPS	0,0370 (0, 1716)	0,9088 (0, 1105)	0,0596 (0, 1696)	0,0943 (0, 1197)	11,43	221,95
MosesYW ($nz = 9$)	0,0822 (0, 0732)	0,5106 (0, 0237)	0,0413 (0, 0443)	0,0322 (0, 0469)	38,40	86,61
MQYWCp	0,0156 (0, 0239)	0,4004 (0, 0239)	0,0249 (0, 0243)	-0,0531 (0, 0272)	53,20	77,14
MQYWCpP	0,0154 (0, 0237)	0,3970 (0, 0238)	0,0251 (0, 0244)	-0,0526 (0, 0273)	53,49	77,36

Tabela A.5: Média e (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,3).

N=256; M=10 Métodos	Parâmetros Reais AR				ER	CVM
	-1,3136	1,4401	-1,0919	0,8353	%	%
EMYW	-1,2679 (0, 2487)	1,3568 (0, 3764)	-1,0214 (0, 2942)	0,8167 (0, 1546)	5,02	23,77
EMYWP	-1,2544 (0, 2487)	1,3357 (0, 3732)	-1,0041 (0, 2892)	0,8017 (0, 1518)	6,39	23,88
MQYW	-1,3937 (0, 1917)	1,4631 (0, 2292)	-1,0053 (0, 2603)	0,7308 (0, 2104)	6,68	21,03
MQYWP	-1,3862 (0, 1912)	1,4528 (0, 2291)	-0,9973 (0, 2539)	0,7193 (0, 2030)	6,99	20,81
MQYWS	-1,3928 (0, 2389)	1,4730 (0, 2559)	-1,0222 (0, 1887)	0,7421 (0, 1861)	6,06	19,51
MQYWPS	-1,3859 (0, 2338)	1,4565 (0, 2452)	-1,0038 (0, 1890)	0,7238 (0, 1864)	6,72	19,58
MosesYW (nz = 3)	-1,2906 (0, 1170)	1,3376 (0, 2339)	-0,9574 (0, 3030)	0,7631 (0, 1937)	7,77	20,89
MQYWCp	-1,3937 (0, 1917)	1,4631 (0, 2292)	-1,0053 (0, 2603)	0,7308 (0, 2104)	6,68	21,03
MQYWCpP	-1,3862 (0, 1912)	1,4528 (0, 2291)	-0,9973 (0, 2539)	0,7193 (0, 2030)	6,99	20,81

Tabela A.6: Média e (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,3).

N=256; M=10 Métodos	Parâmetros Reais MA			ER	CVM
	0,1792	0,8202	0,2676	%	%
EMYW	0,1169 (0, 2819)	0,8140 (0, 1253)	0,1389 (0, 1851)	16,24	129,91
EMYWP	0,1277 (0, 2835)	0,8116 (0, 1269)	0,1461 (0, 1859)	15,00	121,60
MQYW	0,0054 (0, 2291)	0,7916 (0, 1375)	0,1744 (0, 1772)	22,62	1,46x10 ³
MQYWP	0,0113 (0, 2247)	0,7923 (0, 1356)	0,1789 (0, 1758)	21,79	703,43
MQYWS	0,0164 (0, 2803)	0,7991 (0, 1350)	0,1825 (0, 1906)	20,98	612,53
MQYWPS	0,0220 (0, 2772)	0,7952 (0, 1405)	0,1903 (0, 1888)	20,09	459,75
MosesYW (nz = 3)	0,4524 (1, 1414)	0,4525 (0, 1389)	0,2423 (0, 5985)	52,06	176,69
MQYWCp	0,0440 (0, 2291)	0,3224 (0, 1375)	0,1035 (0, 1772)	61,43	101,79
MQYWCpP	0,0482 (0, 0958)	0,3237 (0, 0978)	0,1031 (0, 0597)	61,20	95,64

Tabela A.7: Média e (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,3).

N=1024; M=10 Métodos	Parâmetros Reais AR				ER	CVM
	-1,3136	1,4401	-1,0919	0,8353	%	%
EMYW	-1,3020 (0,1362)	1,4052 (0,1844)	-1,0555 (0,1117)	0,8178 (0,0718)	2,28	10,74
EMYWP	-1,2997 (0,1361)	1,4008 (0,1839)	-1,0509 (0,1112)	0,8132 (0,0714)	2,62	10,74
MQYW	-1,3912 (0,1194)	1,4961 (0,1488)	-1,0665 (0,1776)	0,7704 (0,1407)	4,96	13,36,
MQYWP	-1,3890 (0,1191)	1,4919 (0,1488)	-1,0623 (0,1773)	0,7663 (0,1399)	4,96	13,37
MQYWS	-1,4106 (0,0977)	1,5309 (0,1064)	-1,0930 (0,1471)	0,7761 (0,1264)	6,10	10,91
MQYWPS	-1,4085 (0,0972)	1,5270 (0,1075)	-1,0872 (0,1457)	0,7710 (0,1241)	6,00	10,89
MosesYW (nz = 3)	-1,3157 (0,0403)	1,4248 (0,0784)	-1,0654 (0,0855)	0,8153 (0,0528)	1,53	5,77
MQYWCp	-1,3912 (0,1194)	1,4961 (0,1488)	-1,0665 (0,1776)	0,7704 (0,1407)	4,96	13,36,
MQYWCpP	-1,3890 (0,1191)	1,4919 (0,1488)	-1,0623 (0,1773)	0,7663 (0,1399)	4,96	13,37

Tabela A.8: Média e (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,3).

N=1024; M=10 Métodos	Parâmetros Reais MA			ER	CVM
	0,1792	0,8202	0,2676	%	%
EMYW	0,1841 (0,1708)	0,8578 (0,0493)	0,2426 (0,1464)	5,15	52,96
EMYWP	0,1858 (0,1712)	0,8569 (0,0491)	0,2458 (0,1458)	4,91	52,38
MQYW	0,1064 (0,1582)	0,8491 (0,0847)	0,2400 (0,1479)	9,43	73,41
MQYWP	0,1082 (0,1580)	0,8483 (0,0847)	0,2431 (0,1474)	9,10	72,19
MQYWS	0,0923 (0,1707)	0,8554 (0,0902)	0,2379 (0,1484)	11,16	85,95
MQYWPS	0,0945 (0,1704)	0,8544 (0,0893)	0,2414 (0,1478)	10,79	84,00
MosesYW (<i>nz</i> = 3)	0,3643 (0,1379)	0,4835 (0,0163)	0,1866 (0,0645)	44,56	25,27
MQYWC _p	0,0530 (0,0563)	0,3673 (0,0630)	0,1167 (0,0425)	56,04	53,27
MQYWC _{pP}	0,0541 (0,0562)	0,3668 (0,0630)	0,1167 (0,0424)	56,06	52,41

Tabela A.9: Média e (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,2).

N=256; M=10 Métodos	Parâmetros Reais AR				ER	CVM
	-0,520	1,018	-0,255	0,240	%	%
EMYW	-0,8394 (2, 1903)	0,8236 (1, 8329)	-0,2752 (0, 2346)	0,2145 (0, 2539)	31,39	171,77
EMYWP	-0,8344 (2, 1775)	0,8138 (1, 8114)	-0,2704 (0, 2305)	0,2095 (0, 2479)	31,49	171,79
MQYW	-0,4057 (0, 2012)	0,7724 (0, 2699)	-0,2002 (0, 1018)	0,2252 (0, 0809)	23,15	42,83
MQYWP	-0,4042 (0, 1990)	0,7639 (0, 2652)	-0,1968 (0, 0995)	0,2198 (0, 0790)	23,92	42,61
MQYWS	-0,5952 (0, 4266)	1,008 (0, 3257)	-0,3210 (0, 2656)	0,2405 (0, 1406)	8,41	61,31
MQYWPS	-0,5915 (0, 4158)	0,9904 (0, 3153)	-0,3140 (0, 2566)	0,2349 (0, 1331)	8,10	60,12
MosesYW (nz = 3)	-0,4005 (0, 5575)	1,1391 (0, 5254)	-0,2568 (0, 5417)	0,2670 (0, 1306)	14,41	111,31
MQYWCp	-0,4057 (0, 2012)	0,7724 (0, 2699)	-0,2002 (0, 1018)	0,2252 (0, 0809)	23,15	42,83
MQYWCpP	-0,4042 (0, 1990)	0,7639 (0, 2652)	-0,1968 (0, 0995)	0,2198 (0, 0790)	23,92	42,61

Tabela A.10: Média e (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,2).

N=256; M=10	Parâmetros Reais MA		ER	CVM
Métodos	-0,337	0,810	%	%
EMYW	-0,2712 (0,4057)	0,6068 (0,3770)	24,34	105,85
EMYWP	-0,2709 (0,4046)	0,6047 (0,3781)	24,57	105,95
MQYW	-0,3132 (0,3061)	0,6867 (0,2234)	14,31	65,13
MQYWP	-0,3145 (0,3045)	0,6831 (0,2233)	14,69	64,76
MQYWS	-0,3888 (0,3754)	0,8040 (0,1698)	5,95	58,84
MQYWPS	-0,3918 (0,3707)	0,7984 (0,1697)	6,38	57,94
MosesYW (nz = 3)	-0,2225 (0,3583)	0,4038 (0,0952)	48,23	258,66
MQYWCp	-0,1202 (0,1026)	0,2532 (0,1045)	68,10	63,28
MQYWCpP	-0,1197 (0,1016)	0,2499 (0,1038)	68,48	63,20

Tabela A.11: Média e (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,2).

N=1024; M=10 Métodos	Parâmetros Reais AR				ER	CVM
	-0,520	1,018	-0,255	0,240	%	%
EMYW	-0,3013 (0,8392)	1,0001 (0,4661)	-0,2333 (0,1212)	0,2254 (0,0909)	18,48	104,35
EMYWP	-0,3009 (0,8379)	0,9971 (0,4648)	-0,2323 (0,1206)	0,2241 (0,0904)	18,56	104,35
MQYW	-0,4988 (0,1109)	0,8675 (0,1603)	-0,2295 (0,0494)	0,2180 (0,0441)	13,02	20,62
MQYWP	-0,4980 (0,1108)	0,8650 (0,1609)	-0,2285 (0,0492)	0,2168 (0,0438)	13,25	20,62
MQYWS	-0,5831 (0,1875)	0,9565 (0,1515)	-0,2525 (0,1708)	0,1671 (0,1449)	9,57	51,37
MQYWPS	-0,5811 (0,1854)	0,9537 (0,1490)	-0,2512 (0,1766)	0,1677 (0,1431)	9,58	50,80
MosesYW (nz = 7)	-0,4734 (0,1962)	1,0356 (0,1782)	-0,2134 (0,1833)	0,2339 (0,0483)	5,45	41,29
MQYWCp	-0,4988 (0,1109)	0,8675 (0,1603)	-0,2295 (0,0494)	0,2180 (0,0441)	13,02	21,62
MQYWCpP	-0,4980 (0,1108)	0,8650 (0,1609)	-0,2285 (0,0492)	0,2168 (0,0438)	13,25	20,62

Tabela A.12: Média e (desvio-padrão) das estimativas, ER e CVM do ARMA(4,2).

N=1024; M=10	Parâmetros Reais MA		ER	CVM
Métodos	-0,337	0,810	%	%
EMYW	-0,2530 (0,3807)	0,7385 (0,1910)	12,58	88,18
EMYWP	-0,2529 (0,3806)	0,7377 (0,1913)	12,63	88,19
MQYW	-0,3836 (0,1132)	0,7815 (0,1343)	6,27	23,35
MQYWP	-0,3833 (0,1129)	0,7804 (0,1347)	6,22	23,34
MQYWS	-0,4112 (0,1026)	0,8718 (0,0578)	10,99	15,79
MQYWPS	-0,4108 (0,1014)	0,8701 (0,0580)	10,85	15,67
MosesYW ($nz = 7$)	-0,2677 (0,2321)	0,4451 (0,0321)	42,43	161,58
MQYWCp	-0,1572 (0,0518)	0,3075 (0,0830)	60,84	30,00
MQYWCpP	-0,1568 (0,0518)	0,3064 (0,0828)	60,97	30,03

Apêndice B

Estimativas Médias dos Espectros, Polos e Zeros, e Valores Teóricos

Neste apêndice tem-se, os gráficos das médias das estimativas das densidades espectrais estimadas (*cor verde*) versus a densidade espectral de potência teórica (*cor azul*) dos três processos ARMA, relacionados com as tabelas do Apêndice A, e também as médias dos polos e zeros estimados (*cor verde*) versus os polos e zeros teóricos (*cor azul*) dos processos ARMA(4,4), ARMA(4,3) e ARMA(4,2) para $N=256$, $N=1024$.

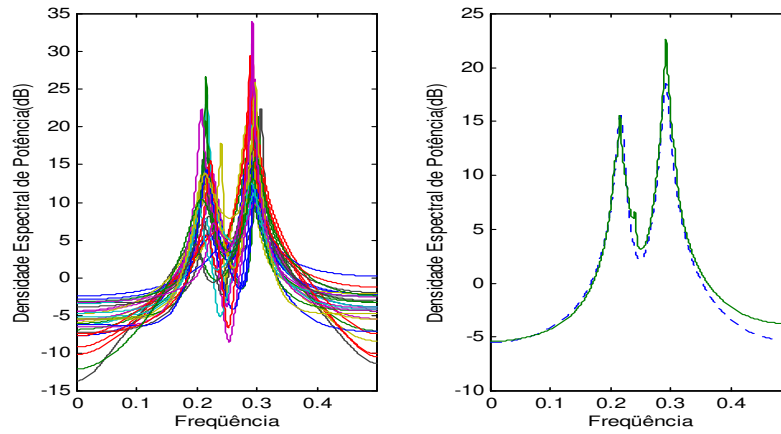


Figura B.1: Estimativas dos espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - EMYW - $N=256$ - $L=125$ - $M=p+q$.

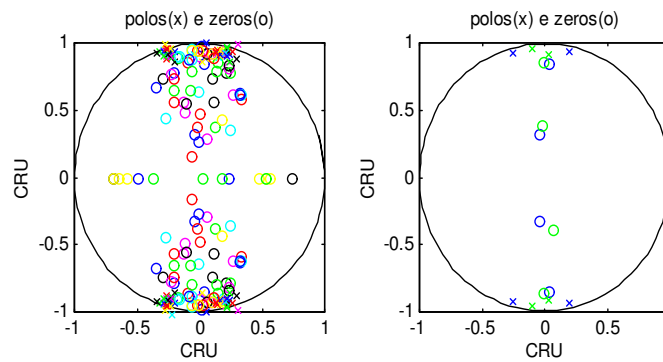


Figura B.2: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - EMYW - $N=256$ - $L=125$ - $M=p+q$

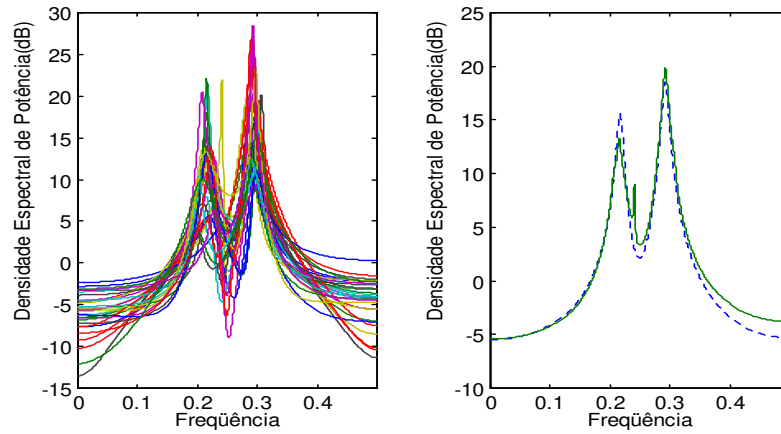


Figura B.3: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - EMYWP - N=256 - L=125 - M=p+q.

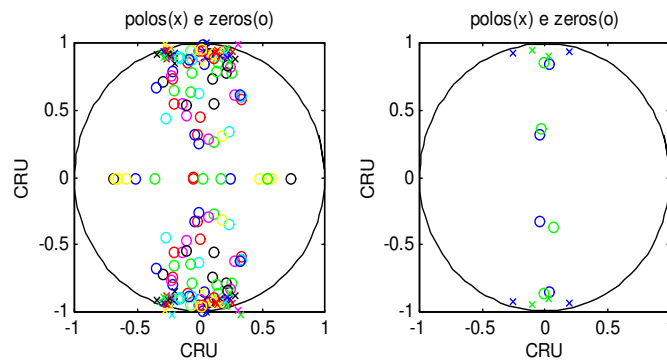


Figura B.4: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - EMYWP - N=256 - L=125 - M=p+q

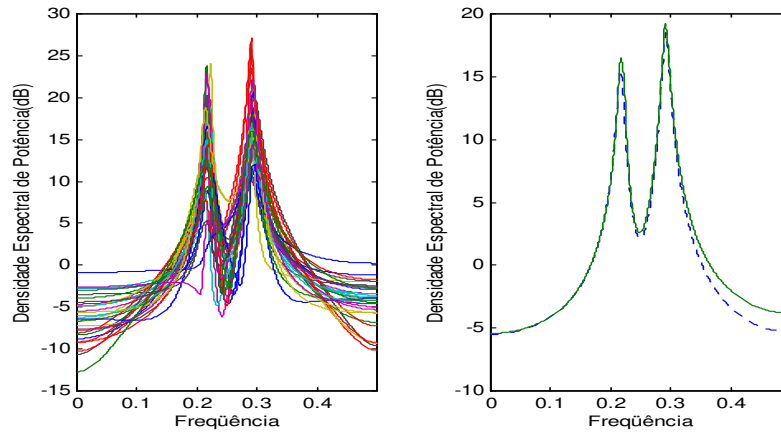


Figura B.5: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYW - N=256 - L=125 - M=20.

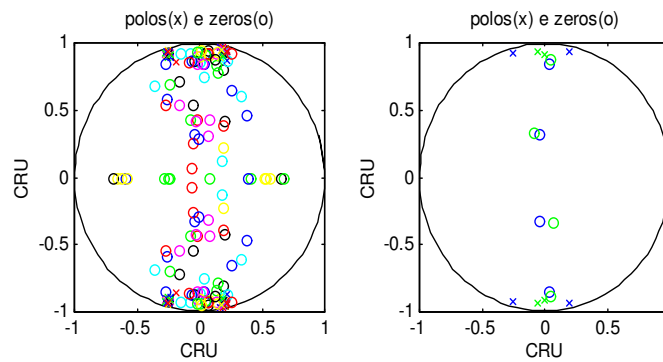


Figura B.6: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYW - N=256 - L=125 - M=20.

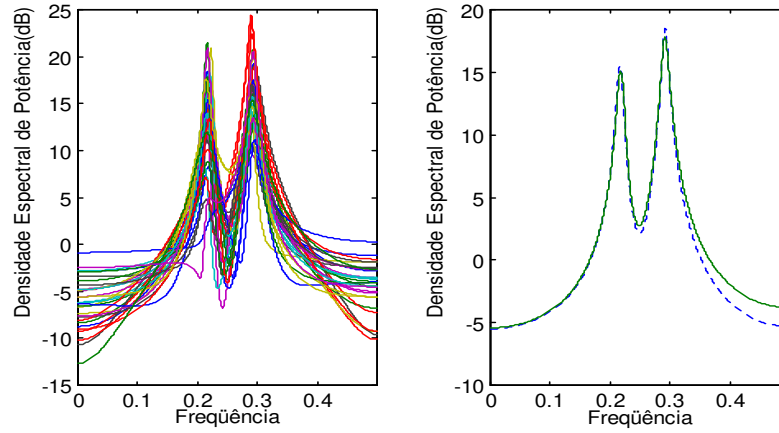


Figura B.7: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWP - N=256 - L=125 - M=20.

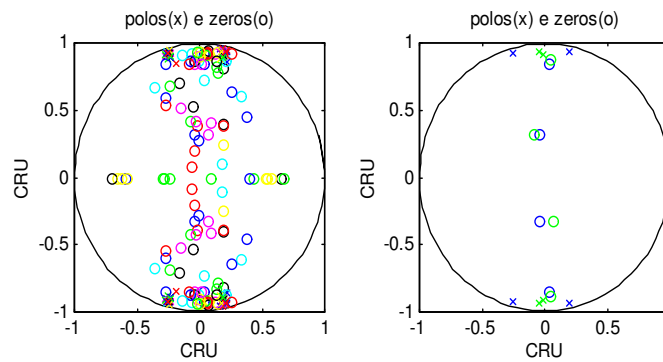


Figura B.8: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWP - N=256 - L=125 - M=20.

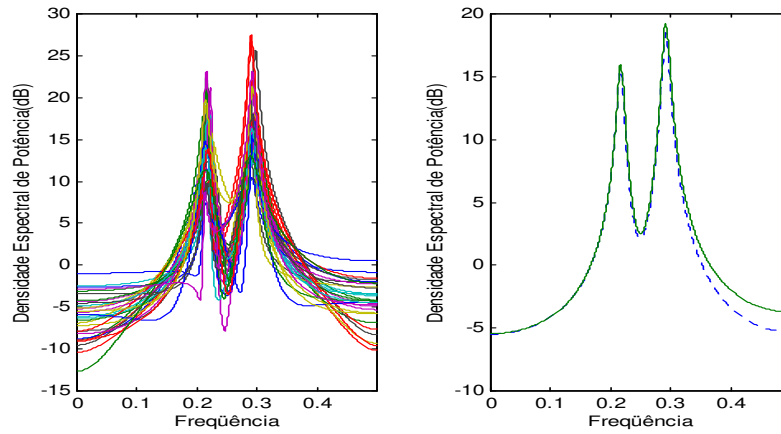


Figura B.9: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWS - N=256 - L=125 - M=20.

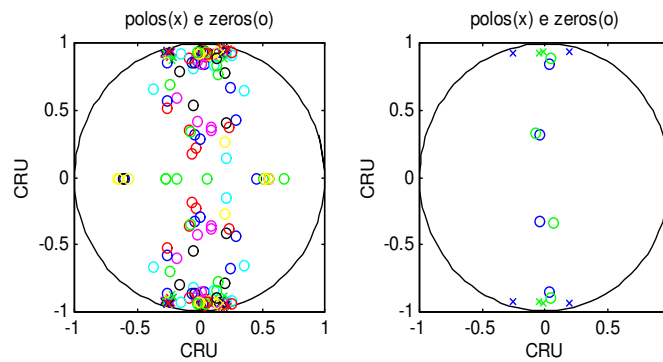


Figura B.10: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWS - N=256 - L=125 - M=20

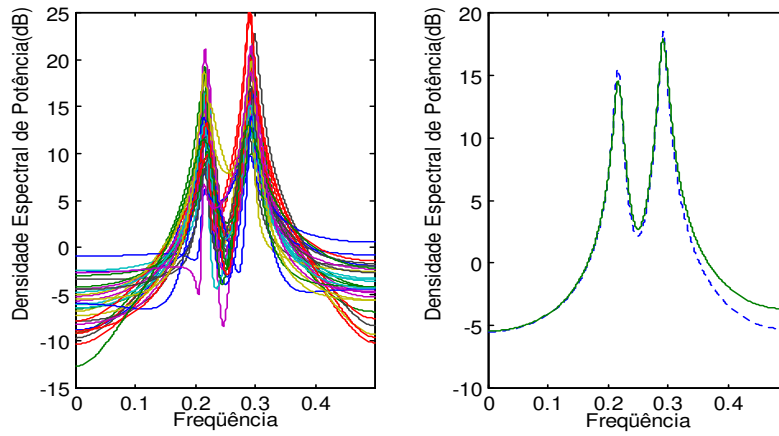


Figura B.11: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWSP - N=256 - L=125 - M=20.

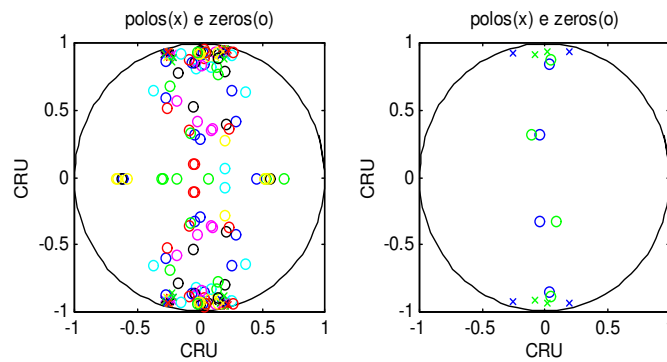


Figura B.12: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWSP - N=256 - L=125 - M=20

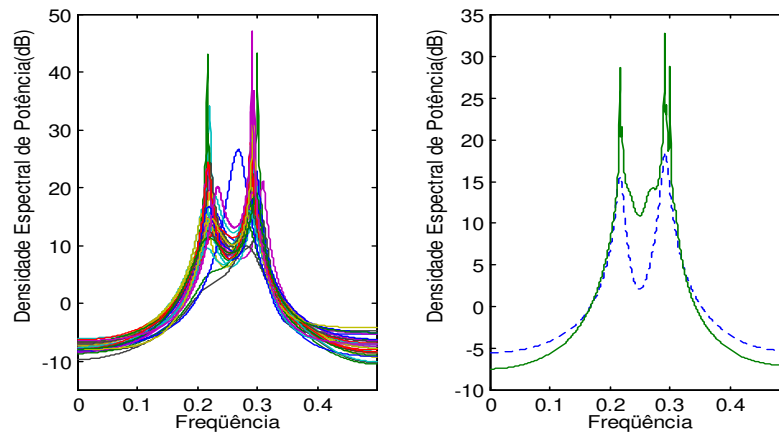


Figura B.13: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MosesYW - $N=256$ - $L=125$ - $M=p+q+nz$.

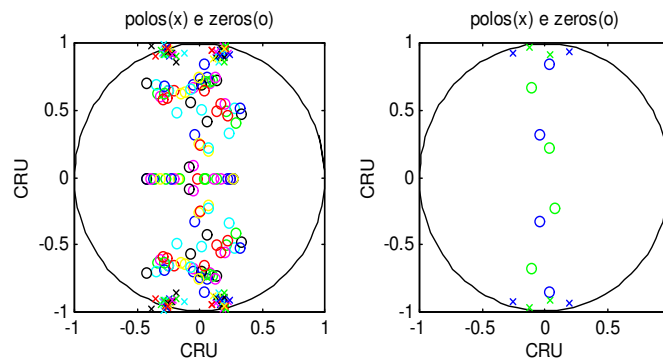


Figura B.14: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MosesYW - $N=256$ - $M=p+q+nz$.

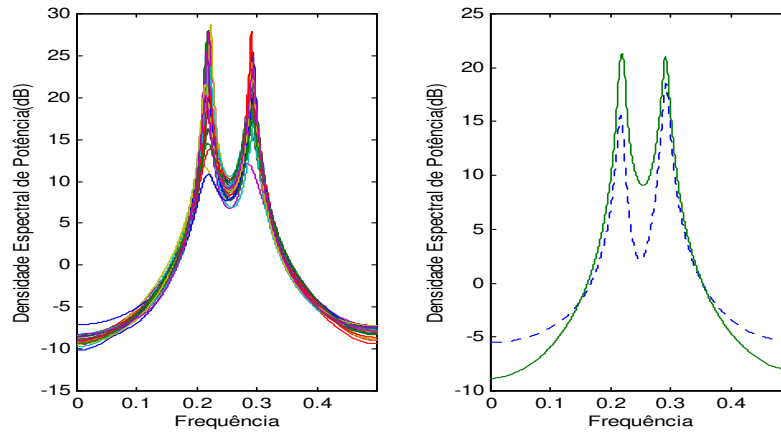


Figura B.15: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWC_p - N=256 - - M=20.

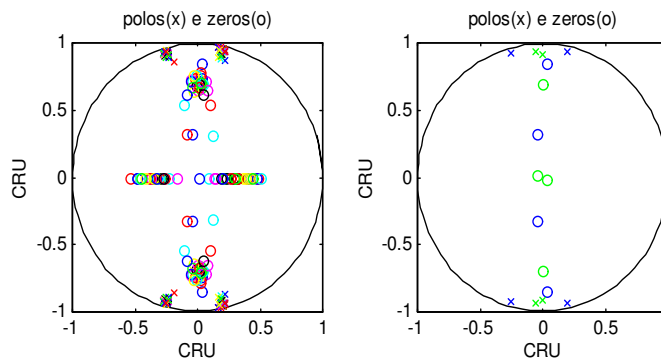


Figura B.16: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWC_p - N=256 - M=20.

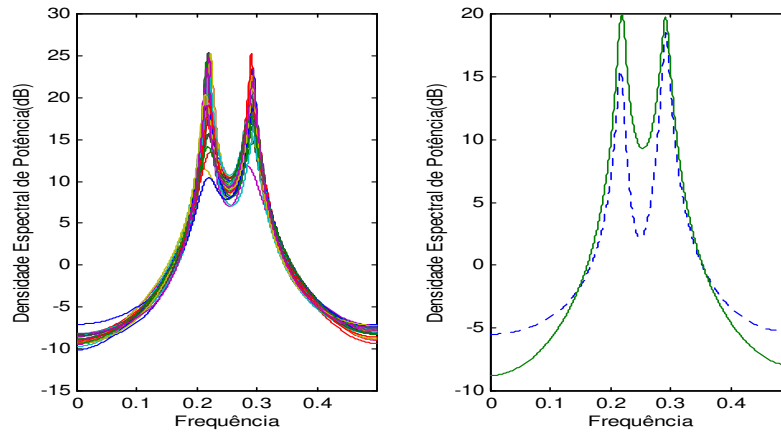


Figura B.17: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWC_pP - N=256 - M=20.

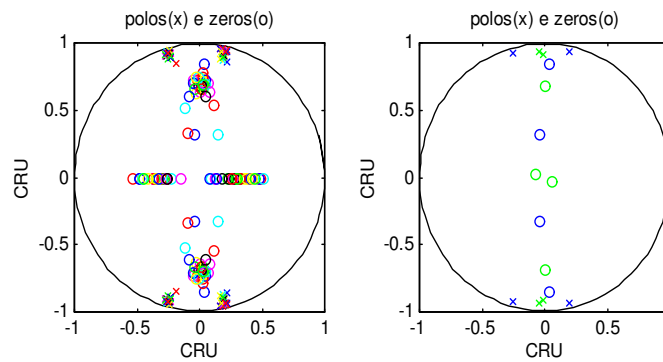


Figura B.18: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWC_pP - N=256 - M=20.

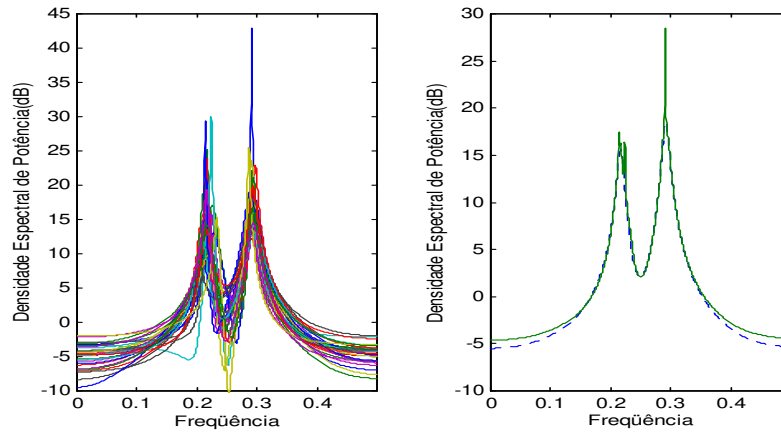


Figura B.19: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - EMYW - $N=1024$ - $L=500$ - $M=p+q$.

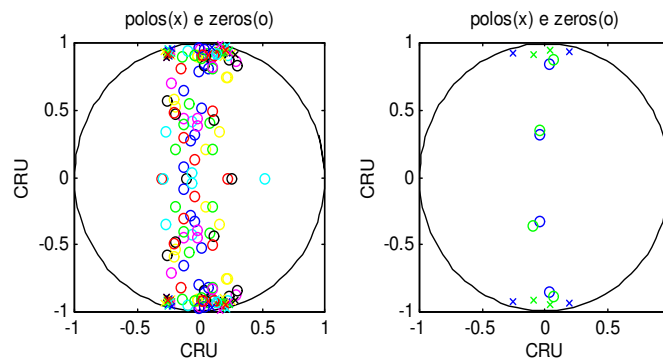


Figura B.20: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - EMYW- $N=1024$ - $L=500$ - $M=p+q$.

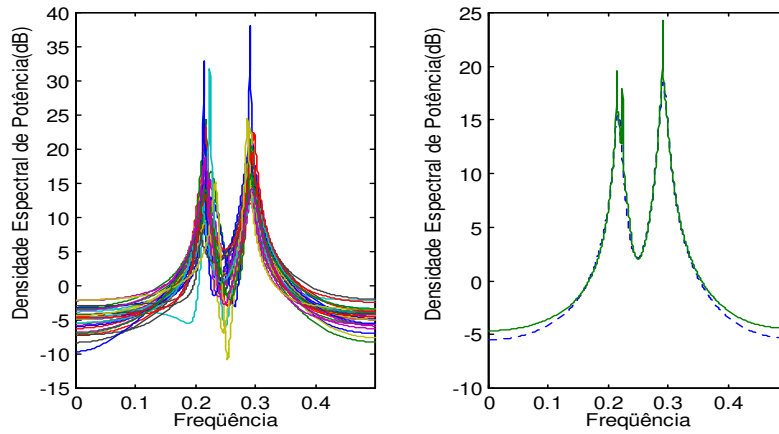


Figura B.21: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - EMYWP - N=1024 - L=500 - M=p+q.

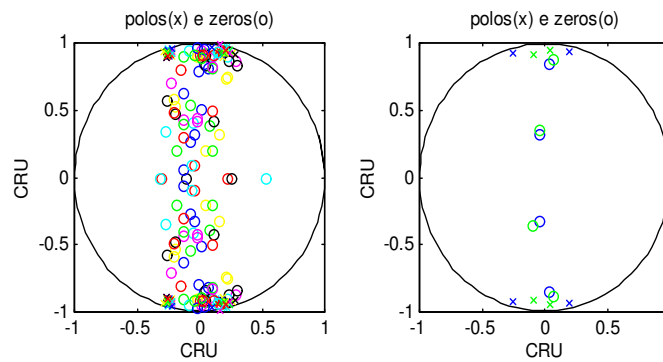


Figura B.22: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - EMYWP - N=1024 - L=500 - M=p+q.

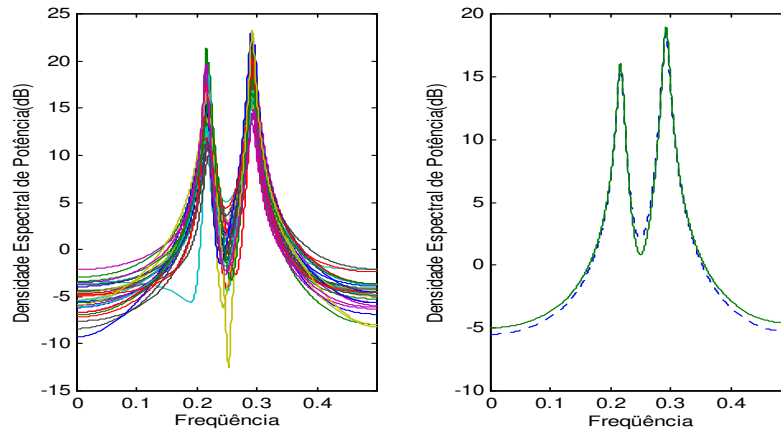


Figura B.23: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYW - N=1024 - L=500 - M=80.

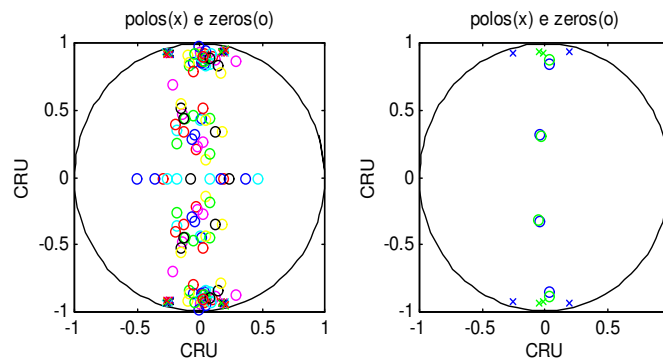


Figura B.24: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYW - N=1024 - L=500 - M=80.

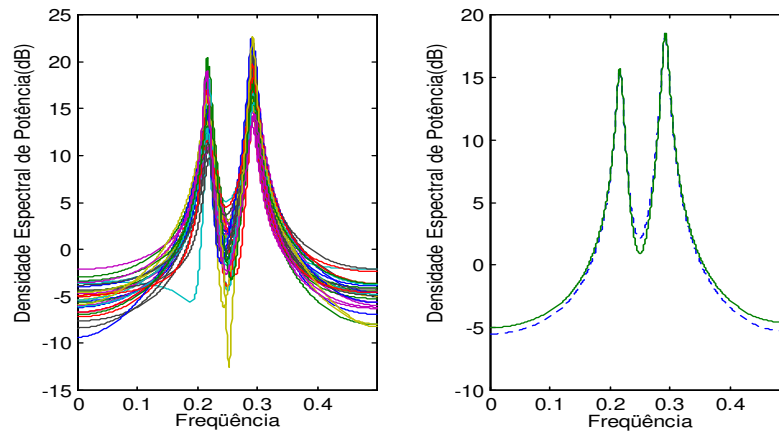


Figura B.25: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWP - N=1024 - L=500 - M=80.

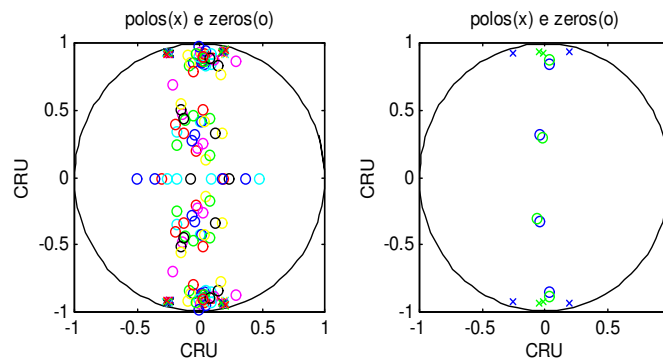


Figura B.26: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWP - N=1024 - L=500 - M=80.

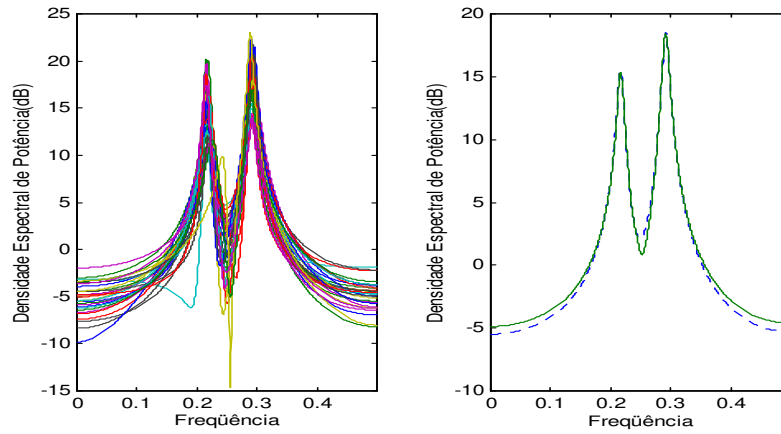


Figura B.27: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWS - N=1024 - L=500 - M=80.

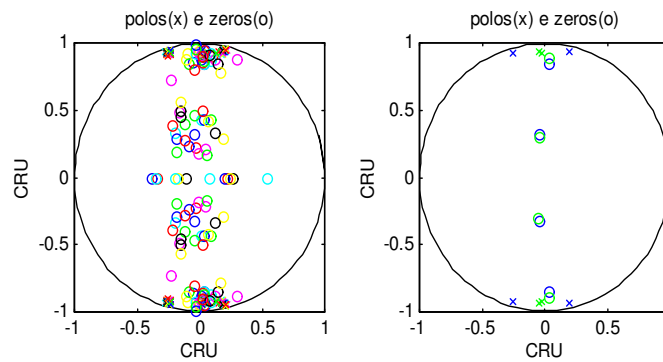


Figura B.28: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWS - N=1024 - L=500 - M=80.

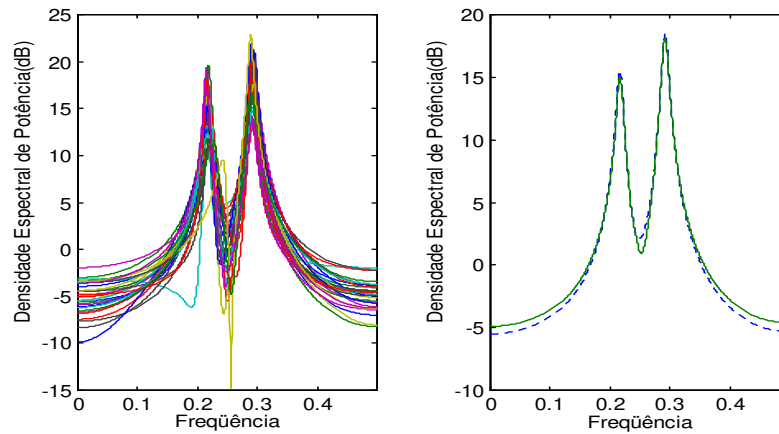


Figura B.29: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWSP - N=1024 - L=500 - M=80.

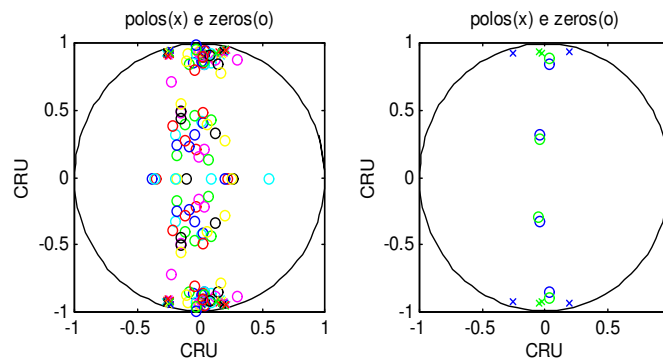


Figura B.30: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWSP - N=1024 - L=500 - M=80.

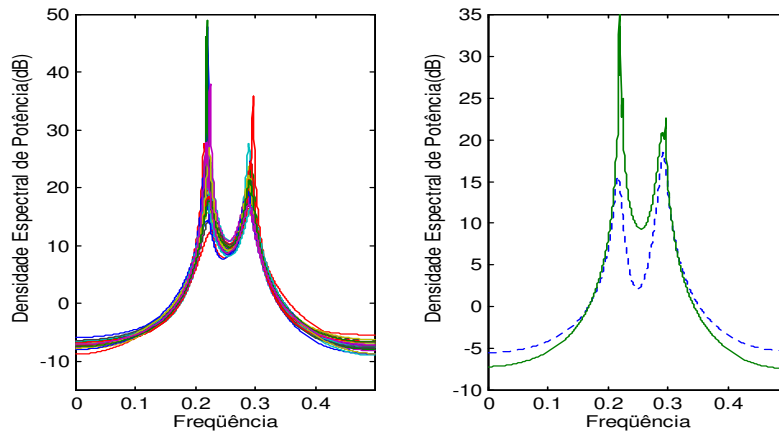


Figura B.31: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MosesYW - $N=1024$ - $M=p+q+nz$.

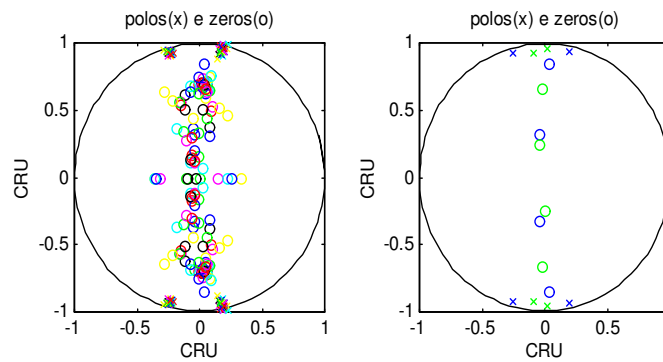


Figura B.32: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MosesYW - $N=1024$ - $M=p+q+nz$.

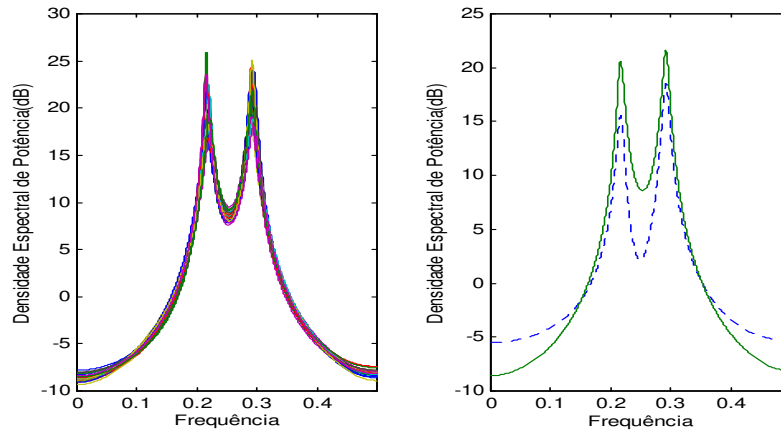


Figura B.33: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWC_p - N=1024 - M=80.

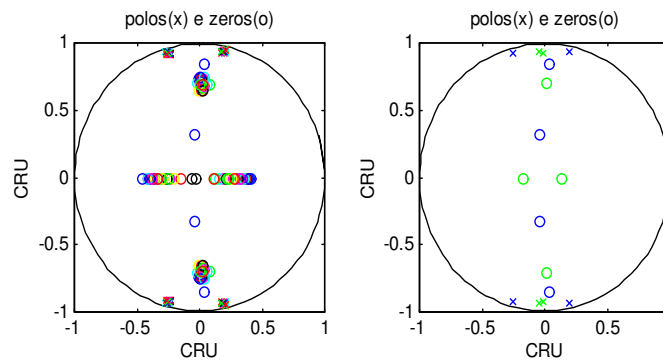


Figura B.34: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWC_p - N=1024 - M=80.

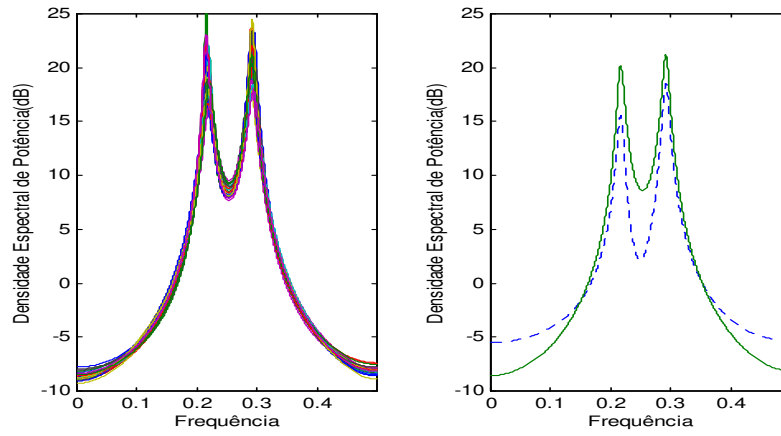


Figura B.35: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWC_pP - N=1024 - M=80.

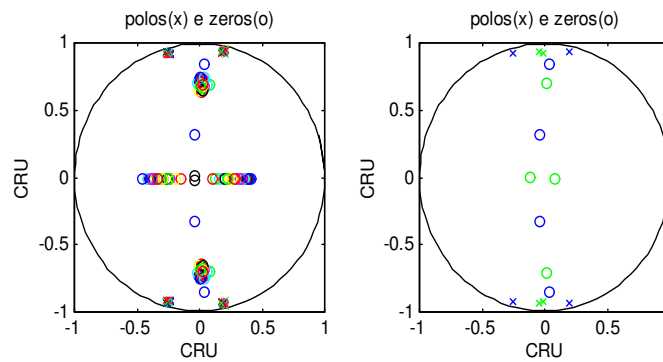


Figura B.36: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,4) - MQYWC_pP - N=1024 - M=80.

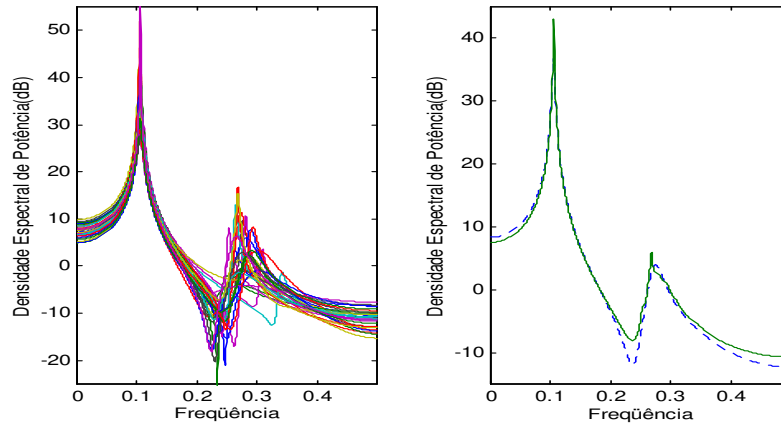


Figura B.37: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - EMYW - $N=256$ - $L=125$ - $M=p+q$.

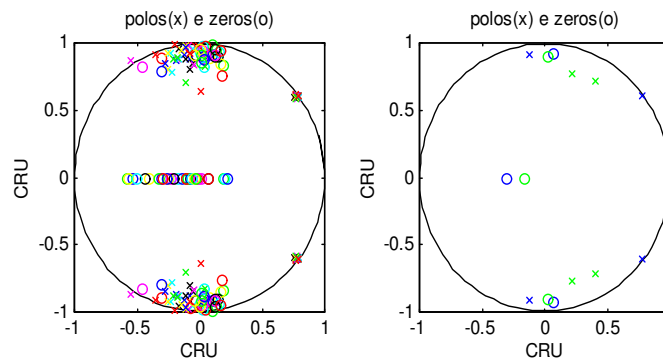


Figura B.38: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - EMYW - $N=256$ - $L=125$ - $M=p+q$.

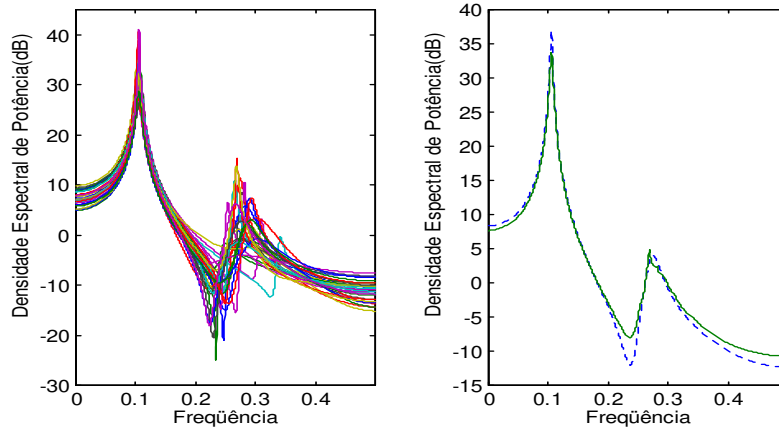


Figura B.39: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - EMYWP - $N=256$ - $L=125$ - $M=p+q$.

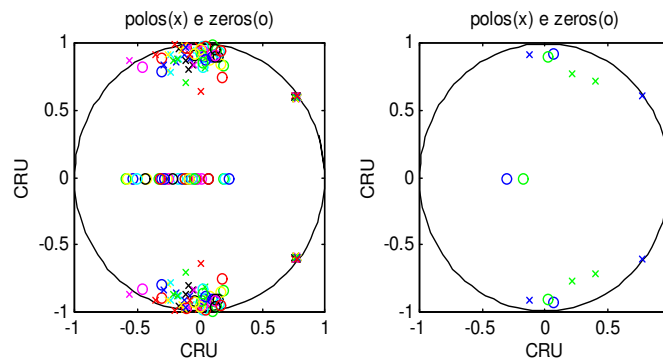


Figura B.40: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - EMYWP - $N=256$ - $L=125$ - $M=p+q$.

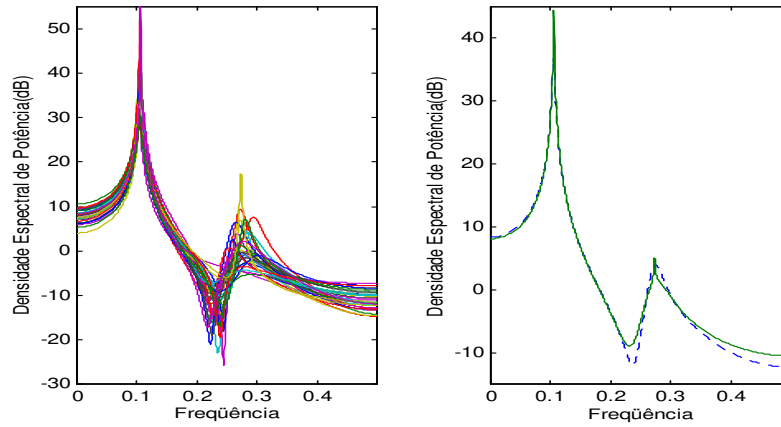


Figura B.41: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYW - N=256 - L=125 - M=10.

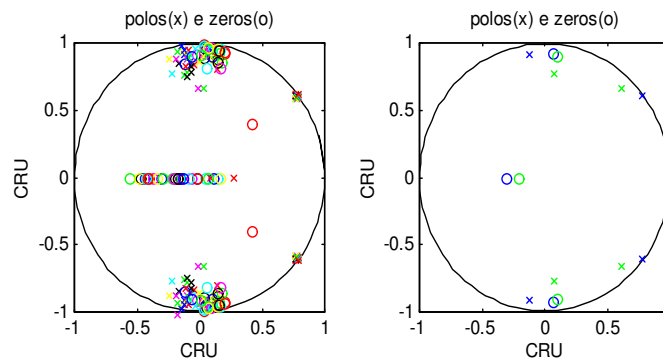


Figura B.42: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYW - N=256 - L=125 - M=10.

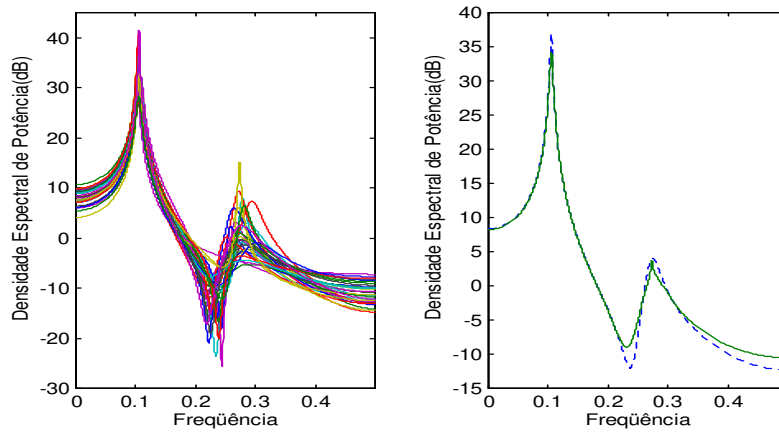


Figura B.43: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWP - N=256 - L=125 - M=10.

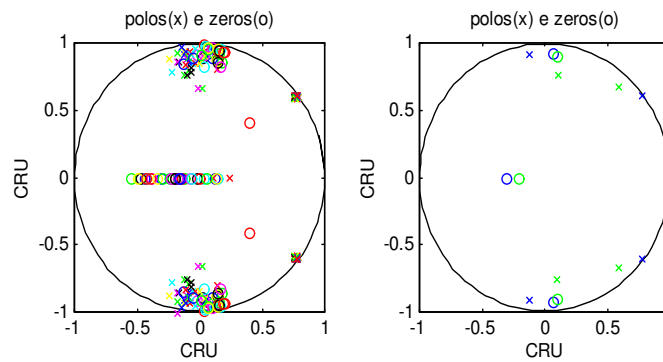


Figura B.44: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWP - N=256 - L=125 - M=10.

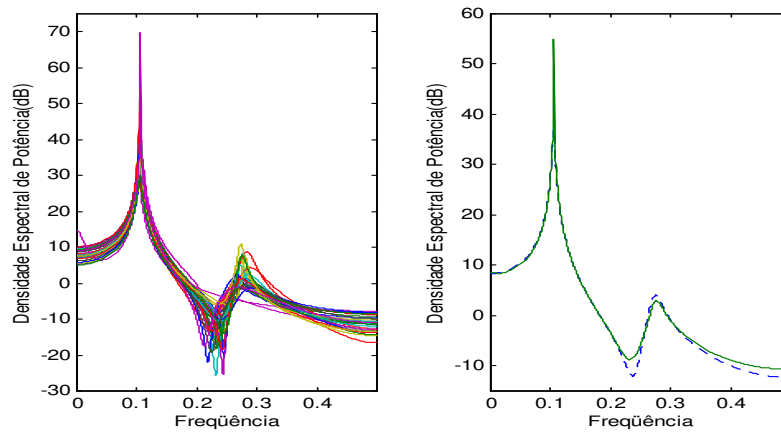


Figura B.45: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWS - N=256 - L=125 - M=10.

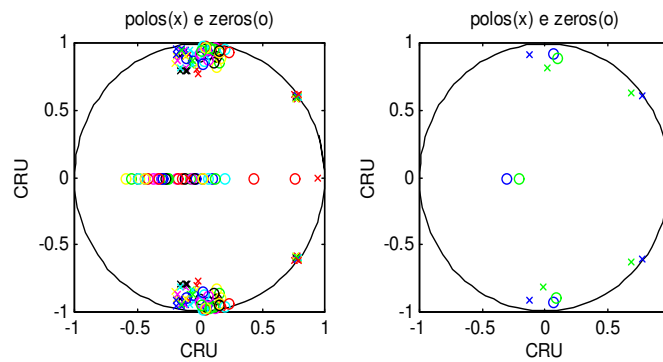


Figura B.46: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWS - N=256 - L=125 - M=10.

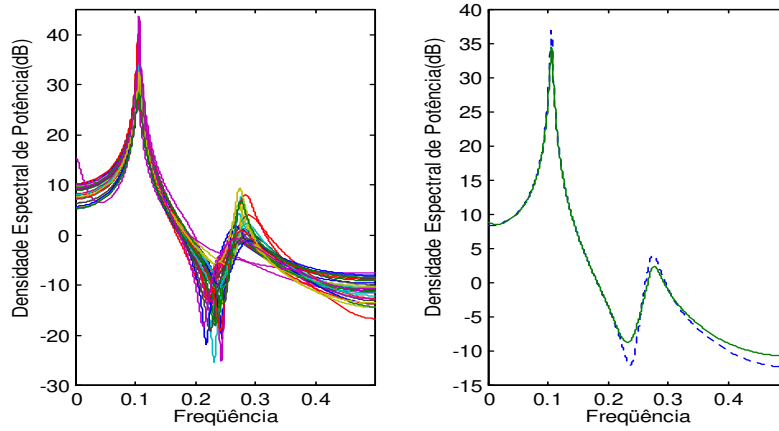


Figura B.47: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWSP - N=256 - L=125 - M=10.

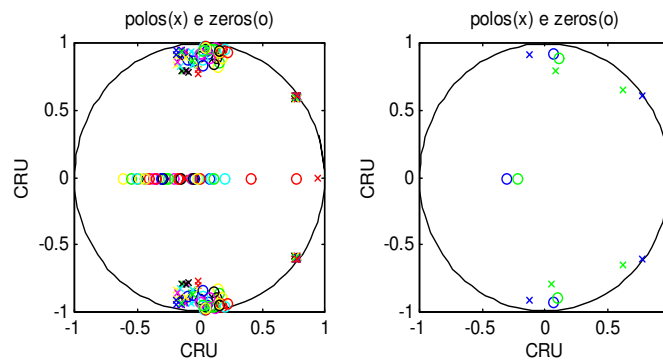


Figura B.48: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWSP - N=256 - L=125 - M=10.

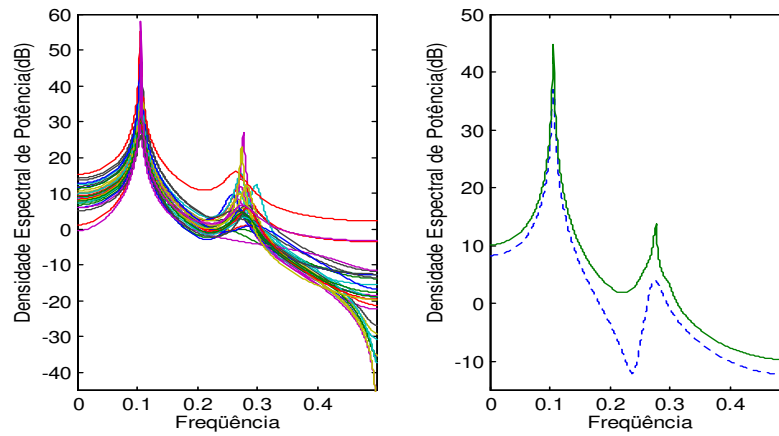


Figura B.49: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MosesYW - $N=256$ - $M=p+q+nz$.

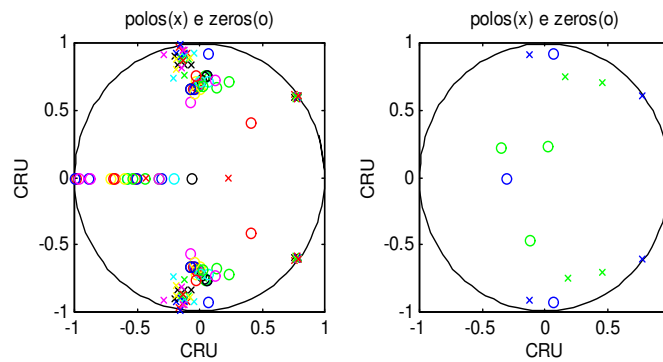


Figura B.50: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MosesYW - $N=256$ - $M=p+q+nz$.

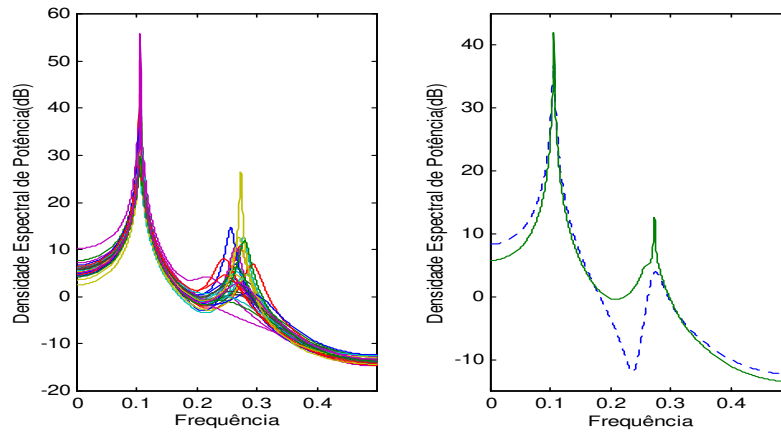


Figura B.51: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWC_p - N=256 - M=10.

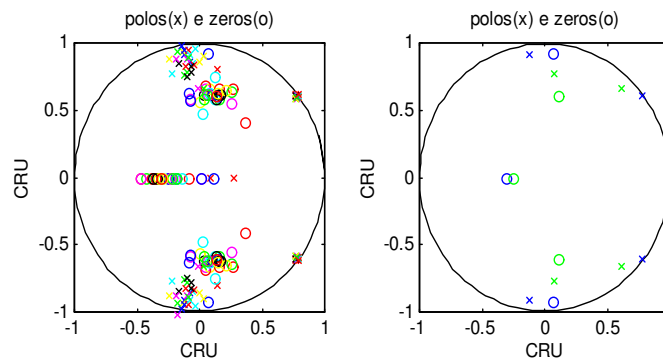


Figura B.52: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWC_p - N=256 - M=10.

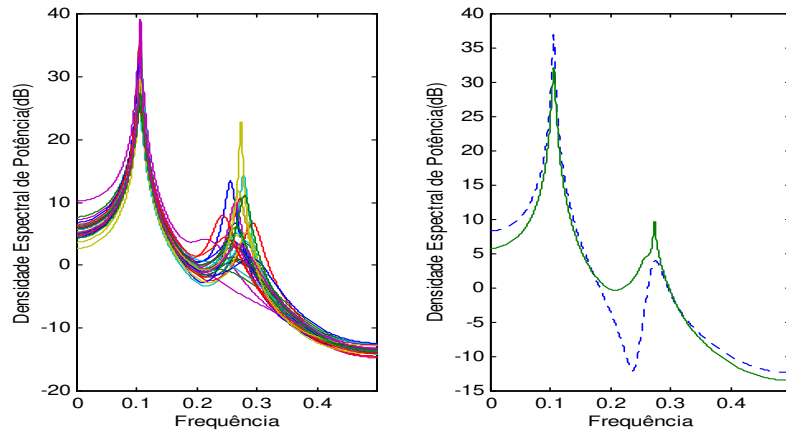


Figura B.53: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWC_pP - N=256 - M=10.

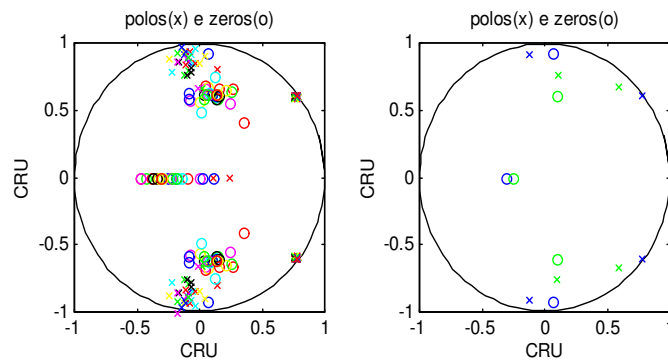


Figura B.54: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWC_pP - N=256 - M=10.

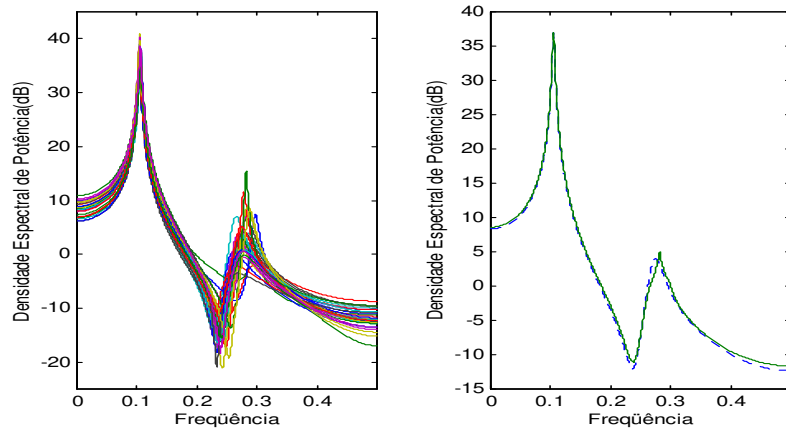


Figura B.55: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - EMYW - $N=1024$ - $L=500$ - $M=p+q$.

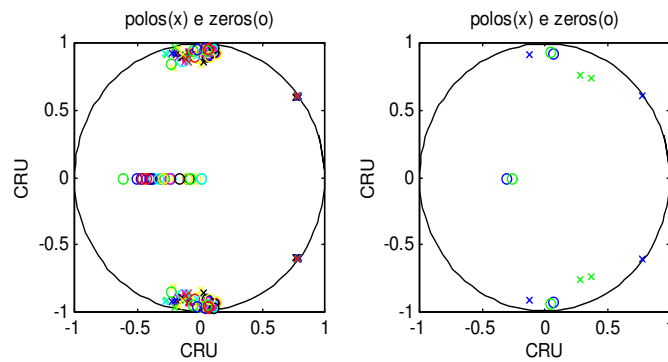


Figura B.56: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - EMYW - $N=1024$ - $L=500$ - $M=p+q$.

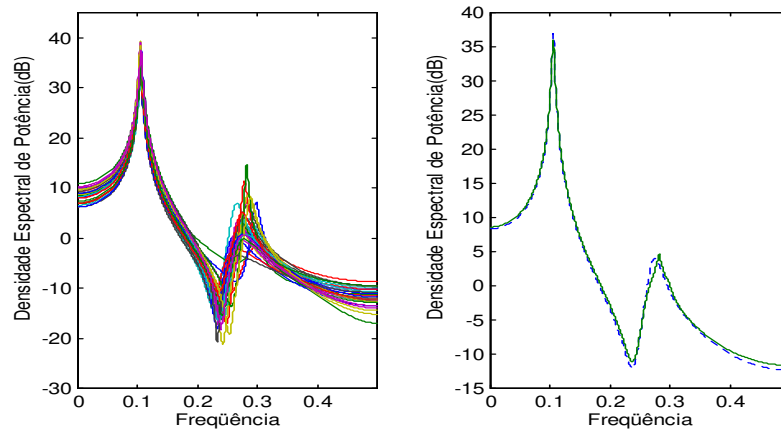


Figura B.57: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - EMYWP - N=1024 - L=500 - M=p+q.

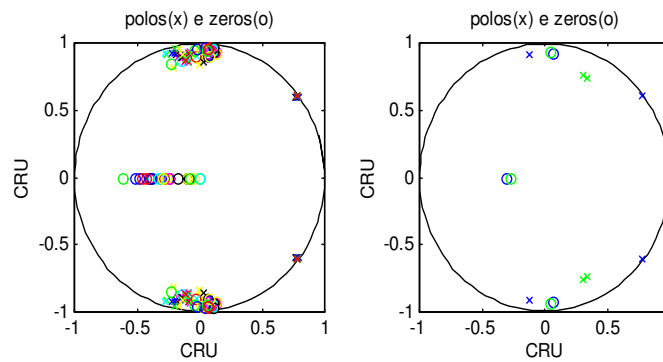


Figura B.58: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - EMYWP - N=1024 - L=500 - M=p+q.

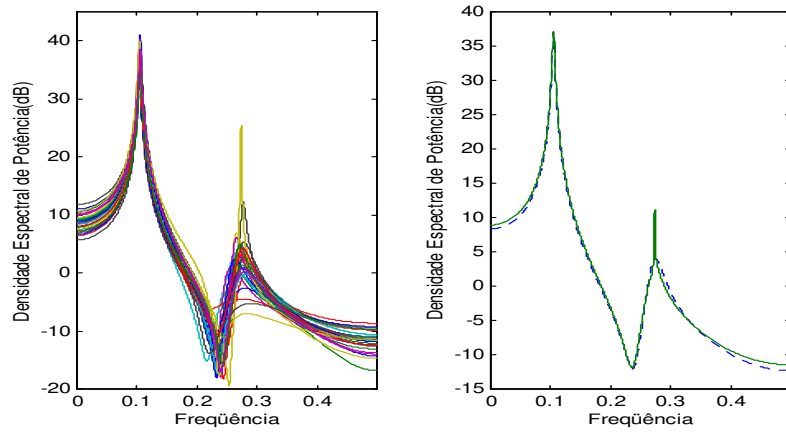


Figura B.59: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYW - N=1024 - L=500 - M=10.

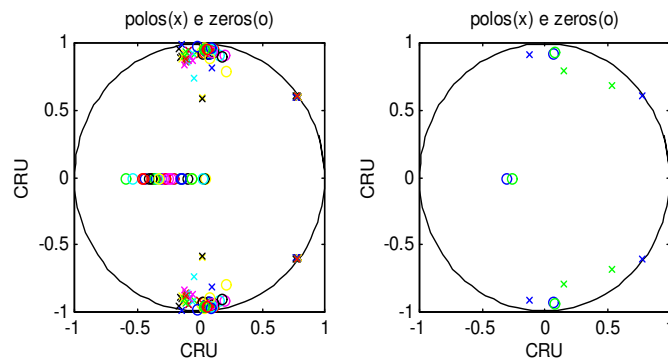


Figura B.60: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYW - N=1024 - L=500 - M=10.

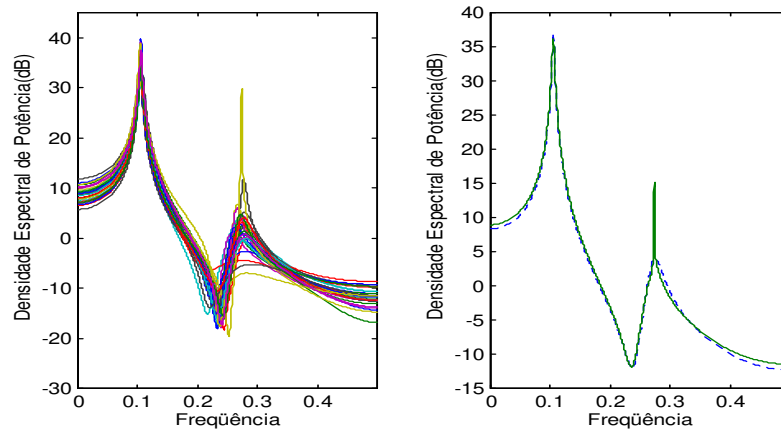


Figura B.61: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWP - N=1024 - L=500 - M= 10.

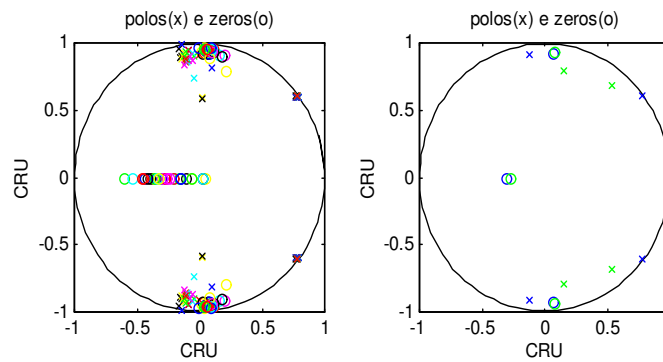


Figura B.62: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWP - N=1024 - L=500 - M=10.

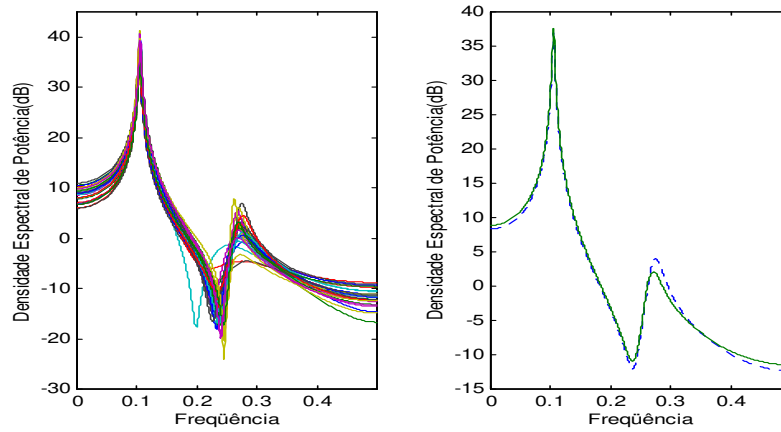


Figura B.63: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWS - N=1024 - L=500 - M= 10.

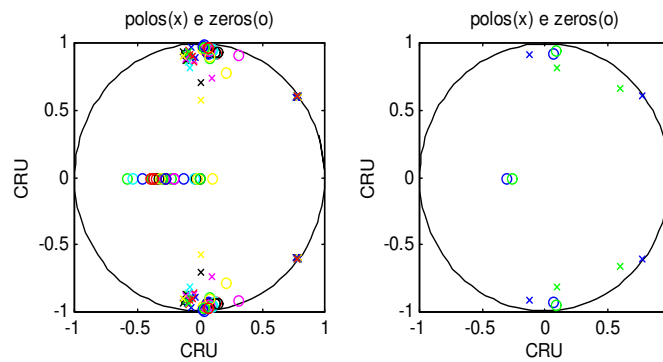


Figura B.64: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWS - N=1024 - L=500 - M=10.

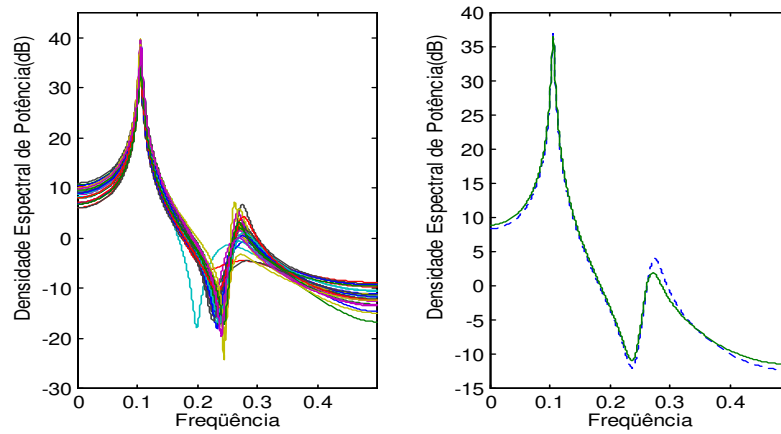


Figura B.65: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWSP - N=1024 - L=500 - M=10.

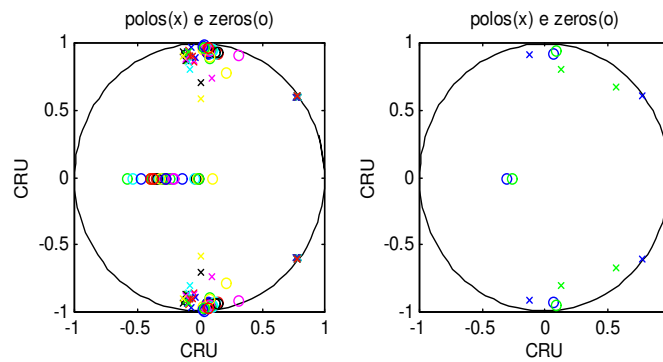


Figura B.66: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWSP - N=1024 - L=500 - M=10.

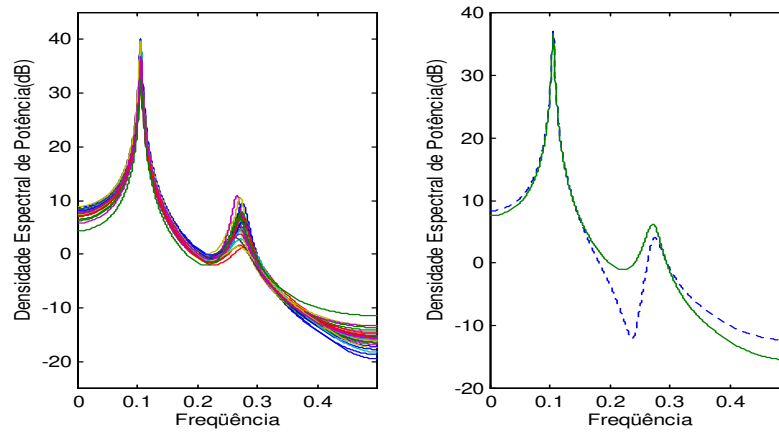


Figura B.67: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MosesYW - $N=1024$ - $M=p+q+nz$.

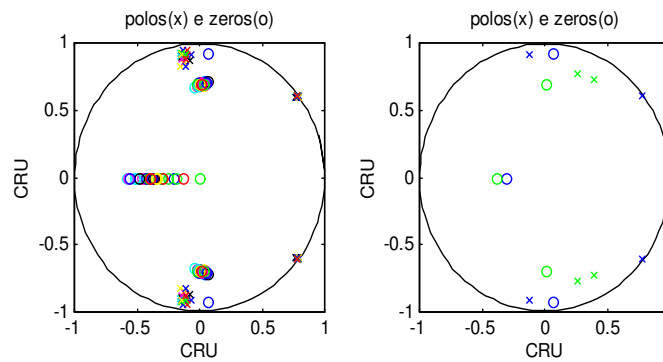


Figura B.68: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MosesYW - $N=1024$ - $M=p+q+nz$.

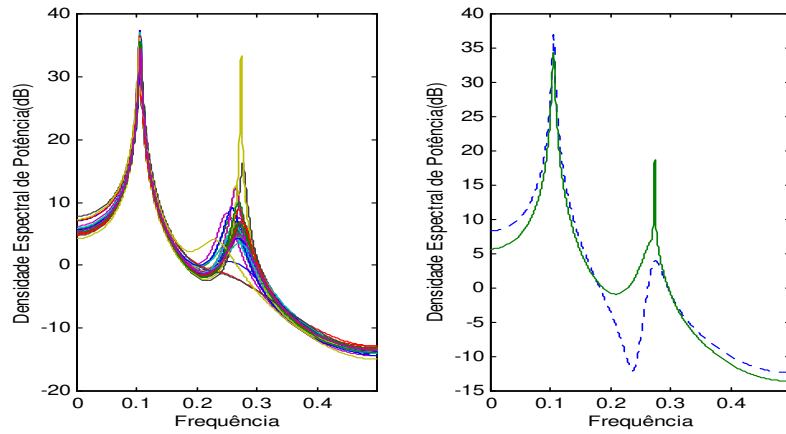


Figura B.69: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWC_p - N=1024 - M=10.

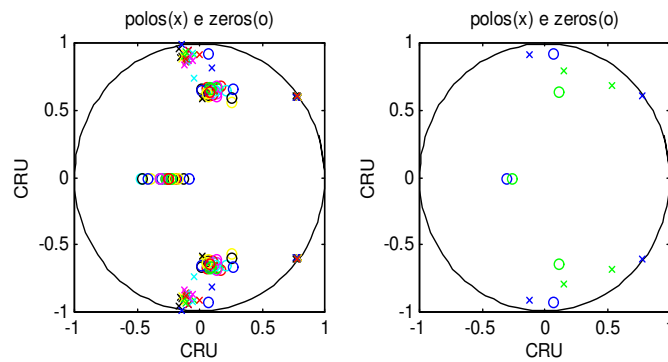


Figura B.70: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWC_p - N=1024 - M=10.

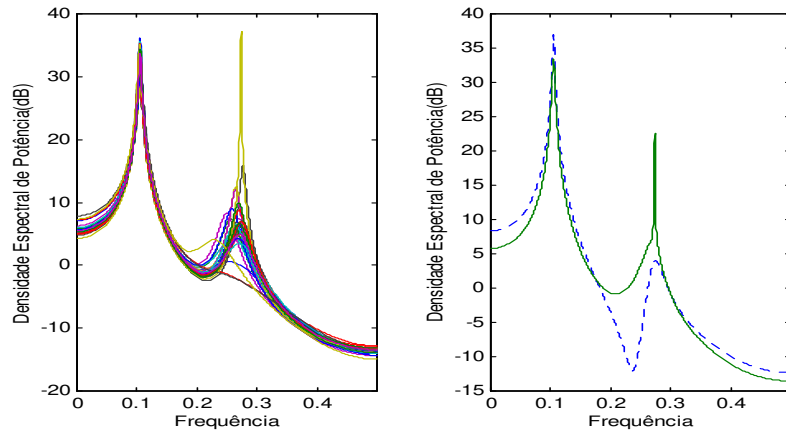


Figura B.71: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWC_pP - N=1024 - M=10.

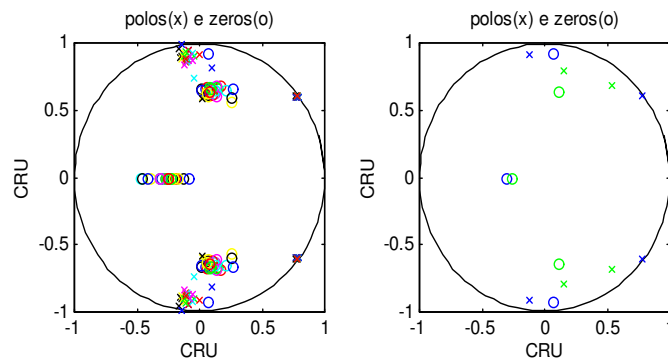


Figura B.72: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,3) - MQYWC_pP - N=1024 - M=10

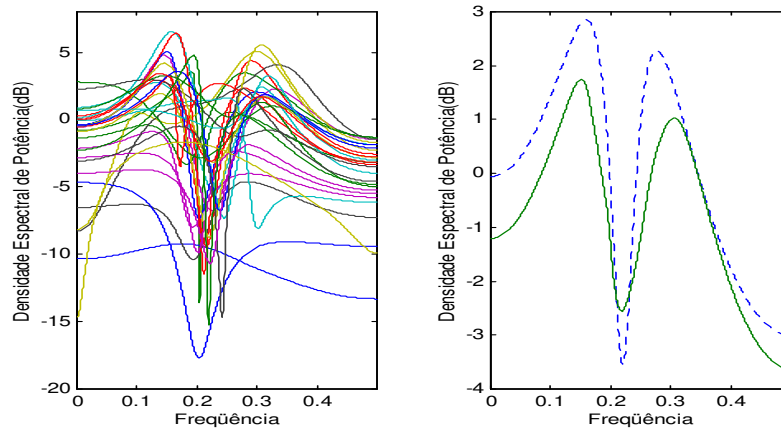


Figura B.73: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - EMYW - N=256 - L=85 - M=p+q.

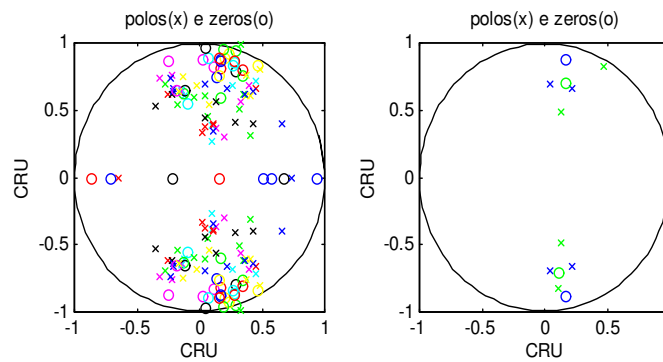


Figura B.74: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - EMYW - N=256 - L=85 - M=p+q.

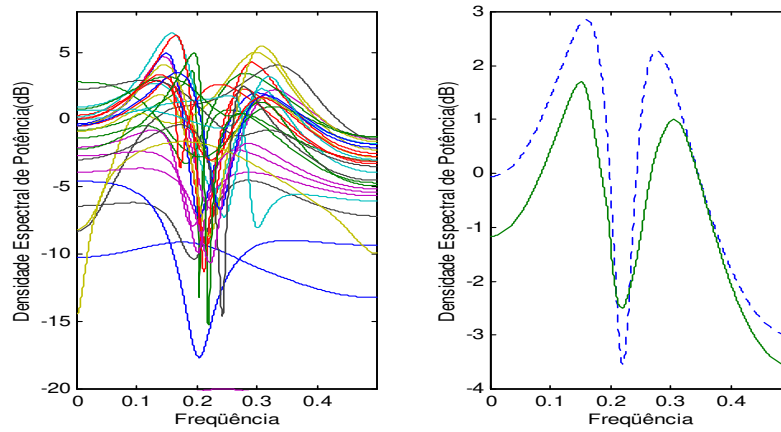


Figura B.75: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - EMYWP - N=256 - L=85 - M=p+q.

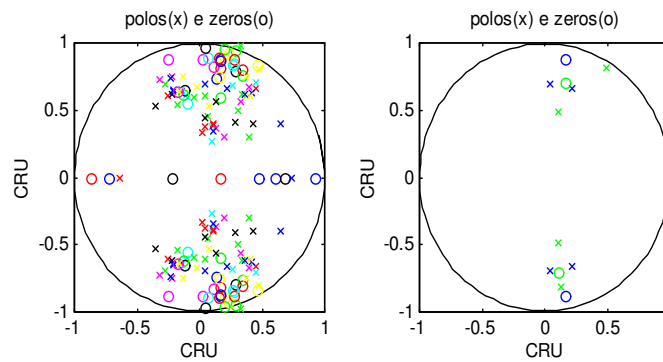


Figura B.76: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - EMYWP - N=256 - L=85 - M=p+q.

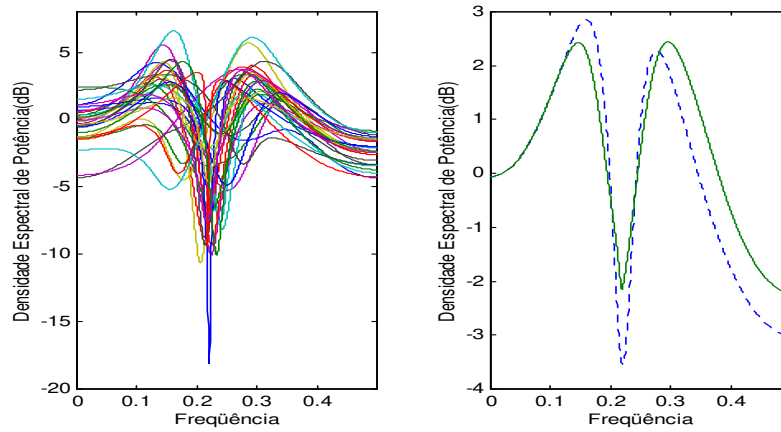


Figura B.77: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYW - N=256 - L=85 - M=10.

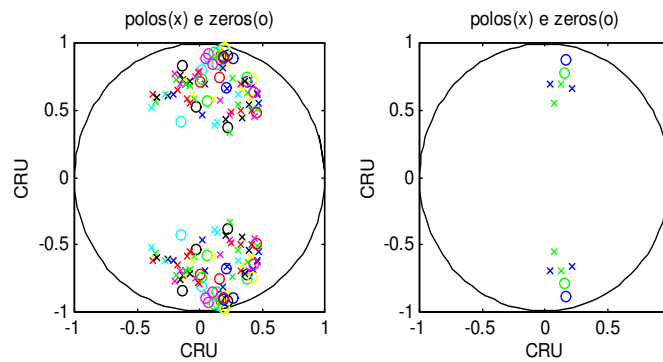


Figura B.78: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYW - N=256 - L=85 - M=10.

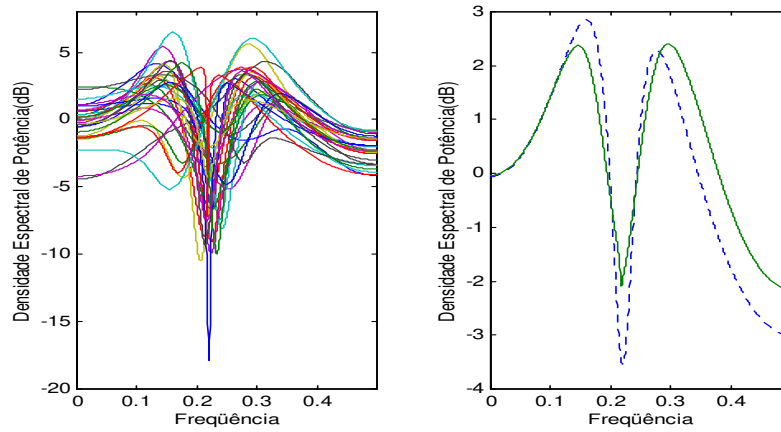


Figura B.79: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWP - N=256 - L=85 - M=10.

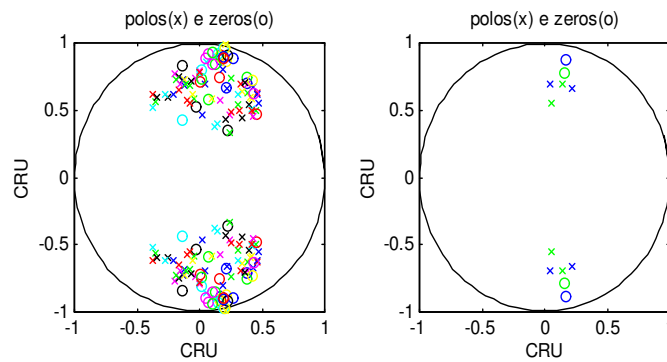


Figura B.80: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWP - N=256 - L=85 - M=10.

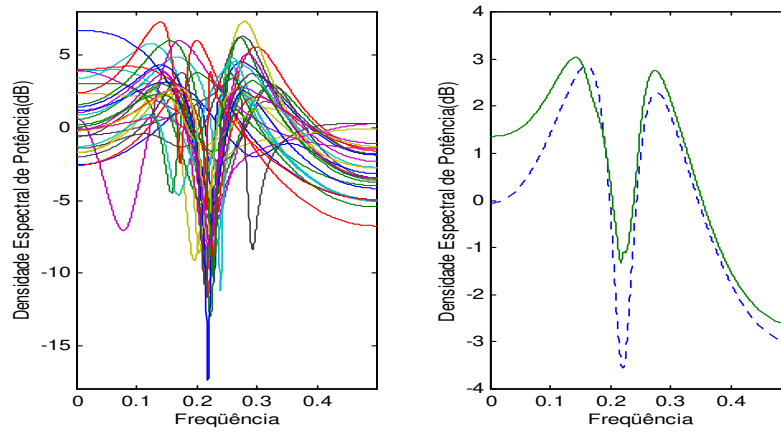


Figura B.81: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWS - N=256 - L=85 - M=10.

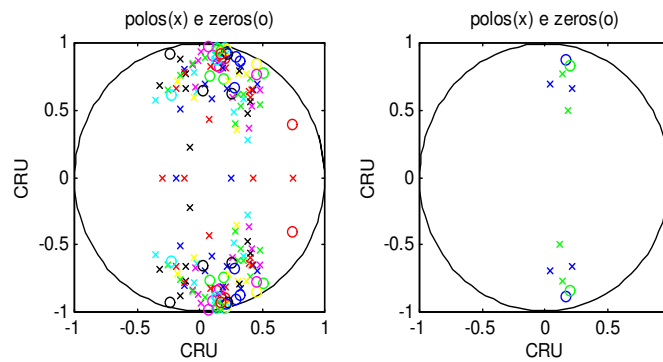


Figura B.82: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWS - N=256 - L=85 - M=10.

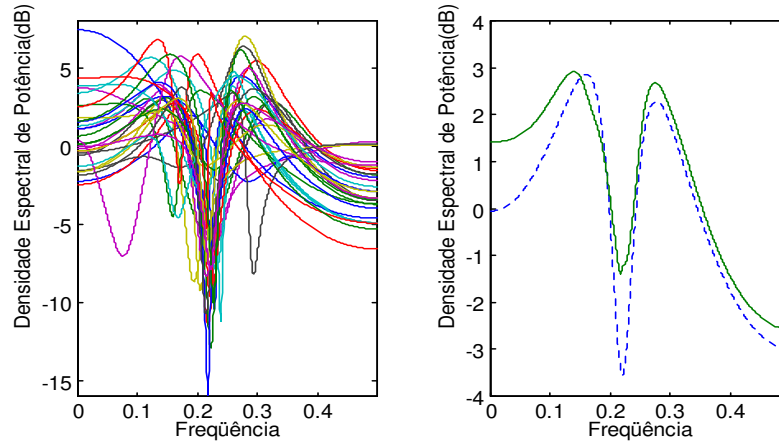


Figura B.83: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWSP - N=256 - L=85 - M=10.

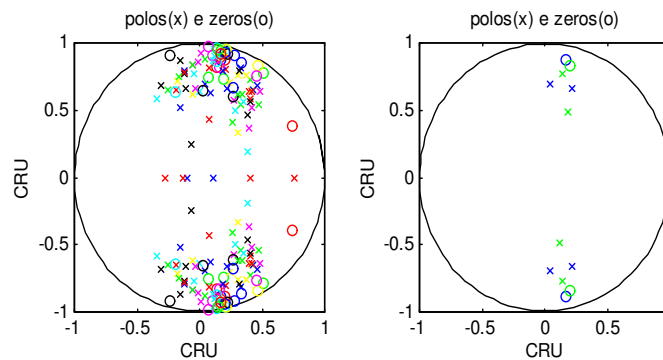


Figura B.84: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWSP - N=256 - L=85 - M=10.

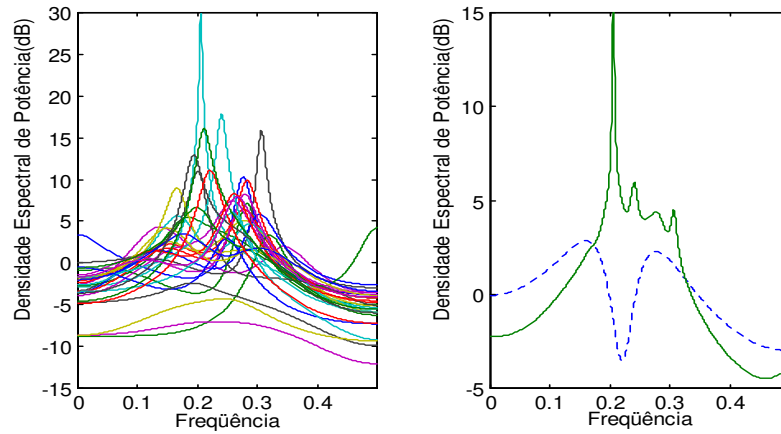


Figura B.85: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MosesYW - $N=256$ - $M=p+q+nz$.

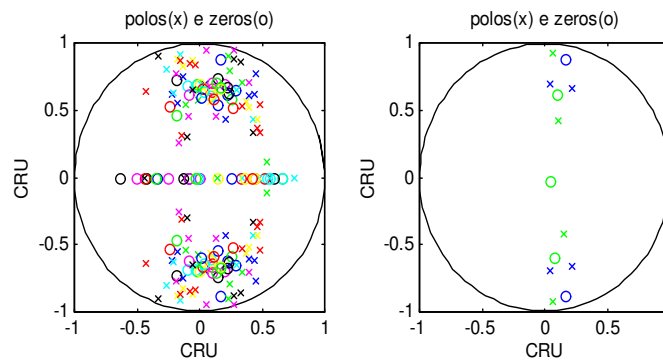


Figura B.86: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MosesYW - $N=256$ - $M=p+q+nz$.

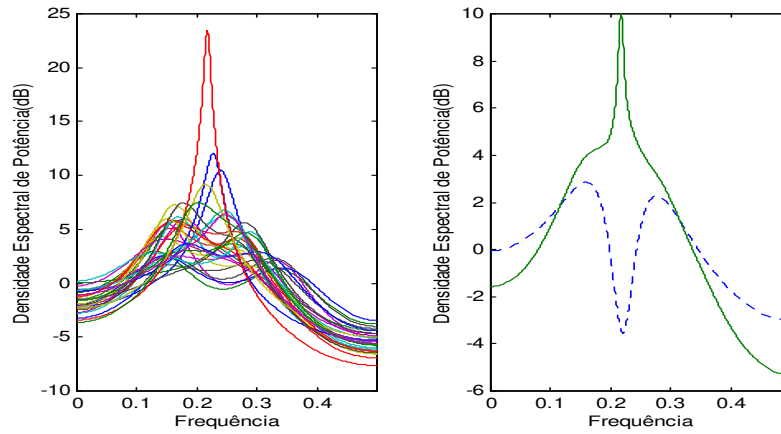


Figura B.87: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWC_p - N=256 - M=10.

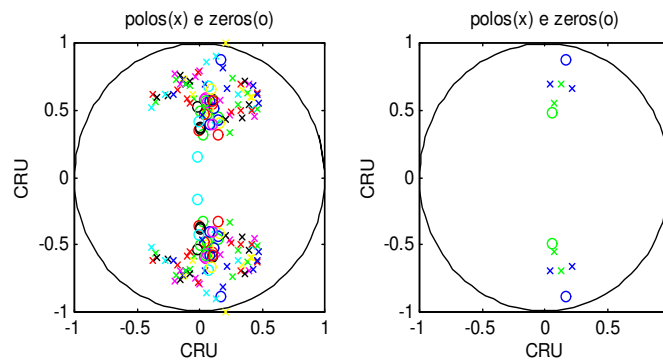


Figura B.88: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWC_p - N=256 - M=10.

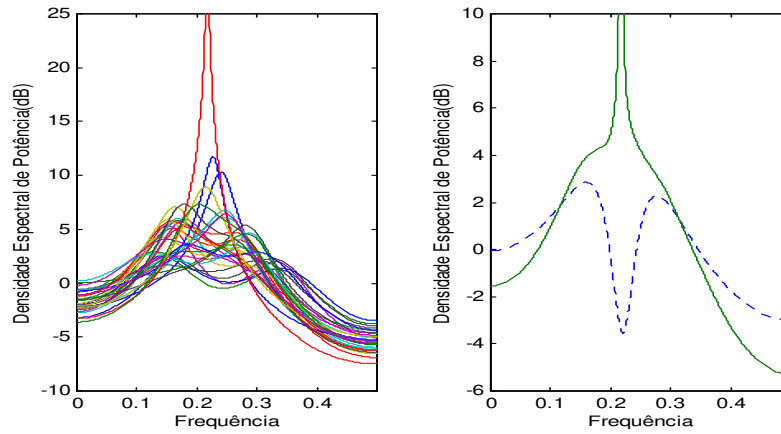


Figura B.89: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWC_pP - N=256 - M=10.

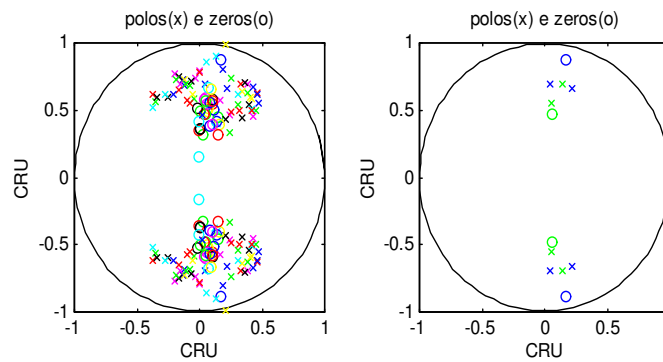


Figura B.90: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWC_pP - N=256 - M=10.

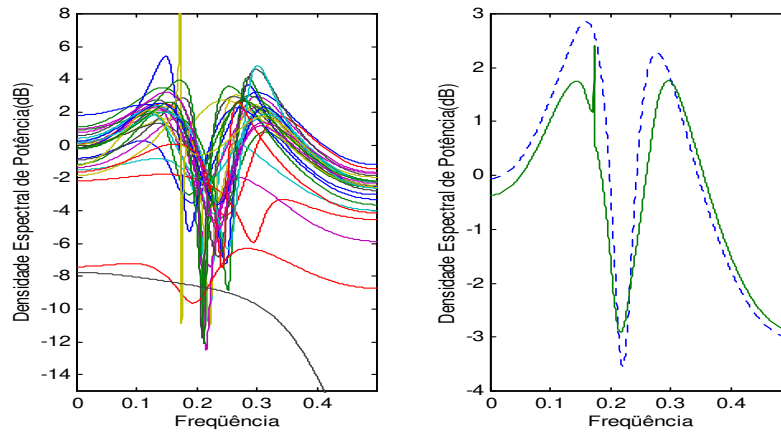


Figura B.91: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - EMYW - $N=1024$ - $L=340$ - $M=p+q$.

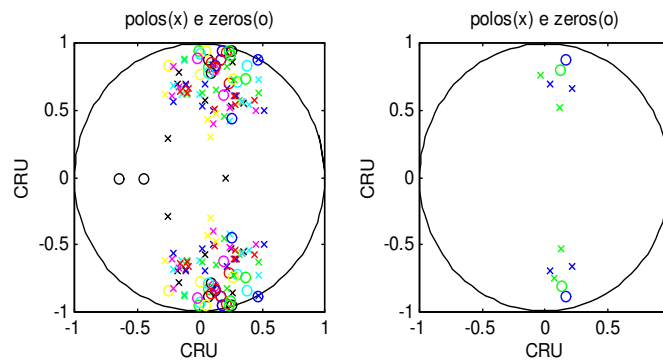


Figura B.92: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - EMYW - $N=1024$ - $L=340$ - $M=p+q$.

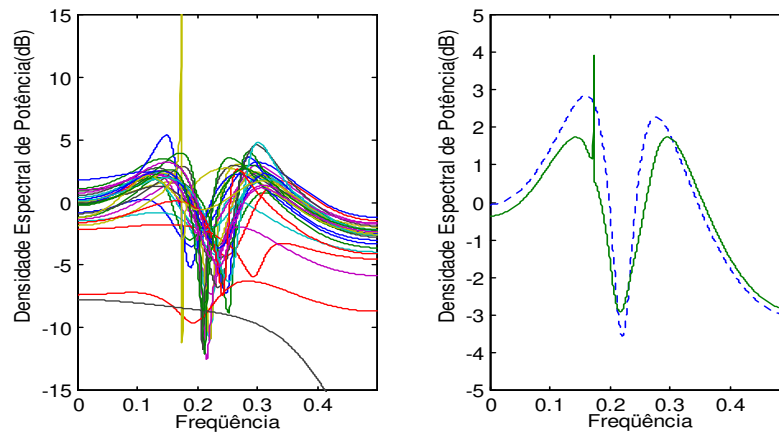


Figura B.93: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - EMYWP - N=1024 - L=340 - M=p+q.

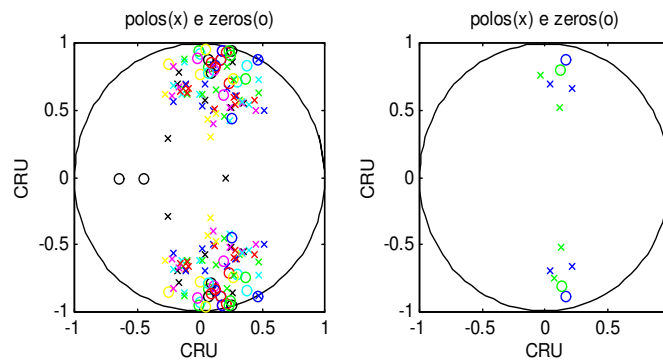


Figura B.94: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - EMYWP - N=1024 - L=340 - M=p+q.

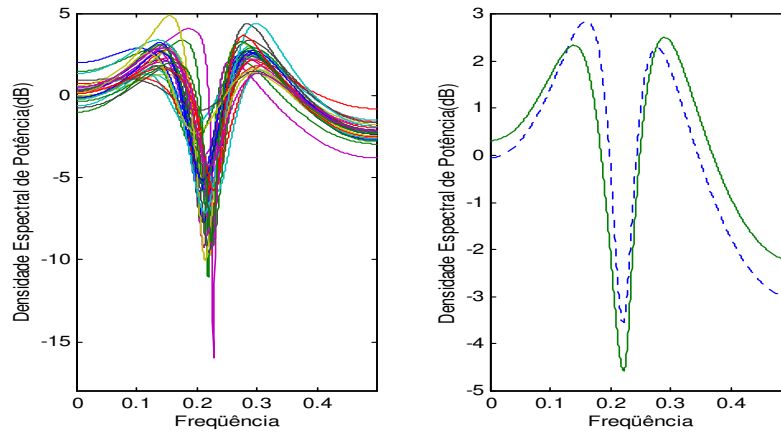


Figura B.95: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYW - N=1024 - L=340 - M=10.

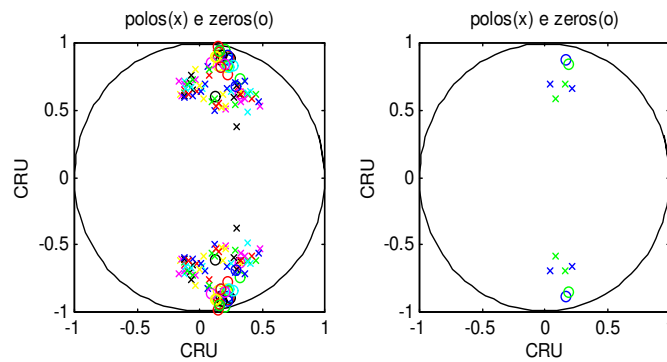


Figura B.96: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYW - N=1024 - L=340 - M=10.

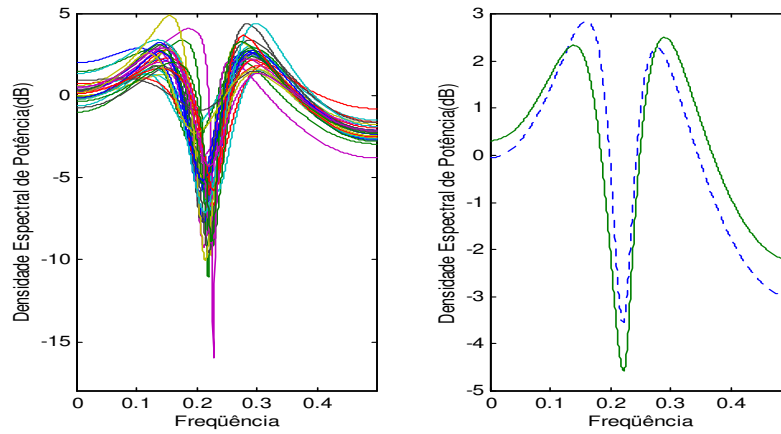


Figura B.97: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWP - N=1024 - L=340 - M=10.

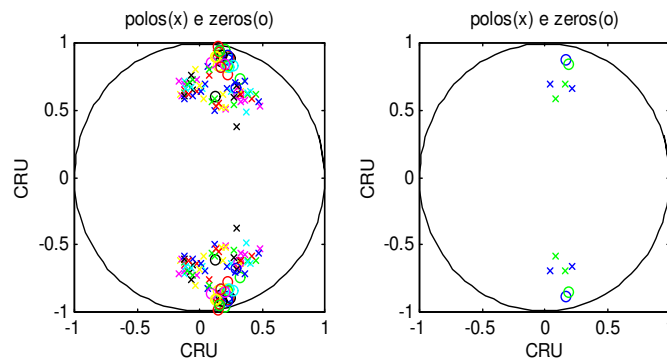


Figura B.98: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWP - N=1024 - L=340 - M=10.

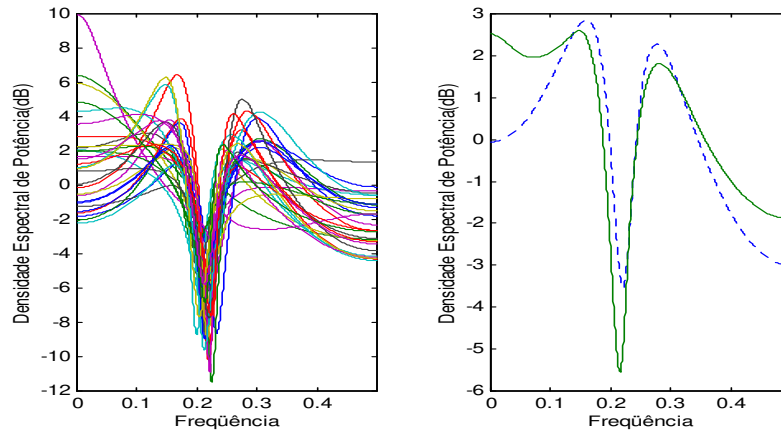


Figura B.99: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWS - N=1024 - L=340 - M=10.

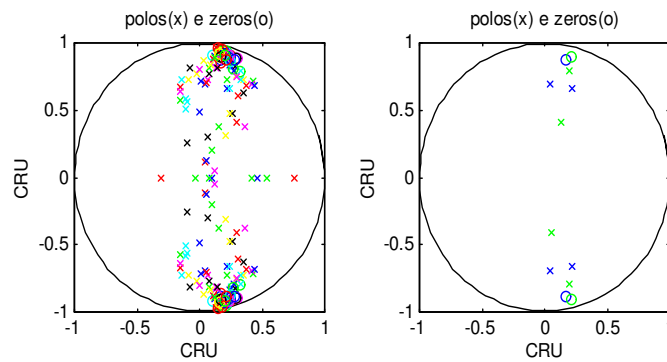


Figura B.100: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWS - N=1024 - L=340 - M=10.

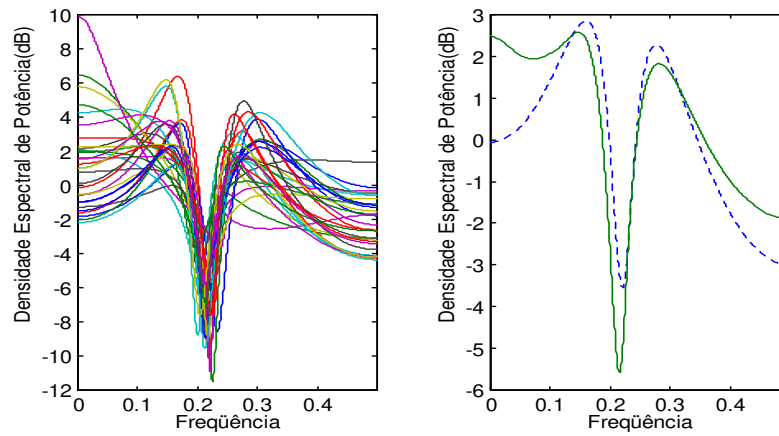


Figura B.101: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWSP - N=1024 - L=340 - M=10.

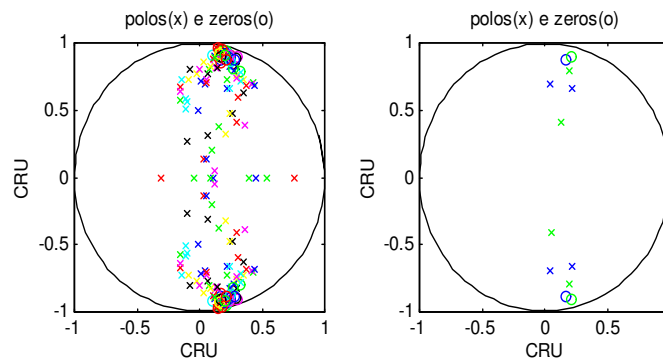


Figura B.102: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWSP - N=1024 - L=340 - M=10.

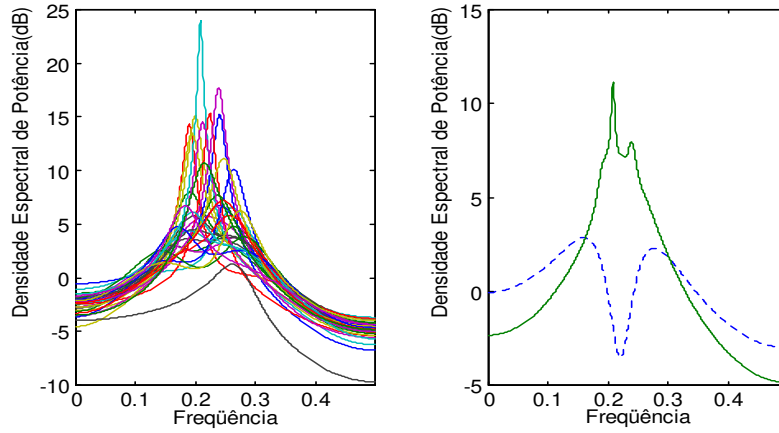


Figura B.103: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MosesYW - $N=1024$ - $M=p+q+nz$.

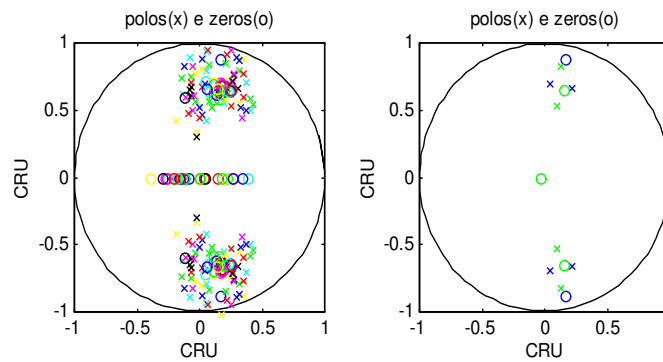


Figura B.104: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MosesYW - $N=1024$ - $M=p+q+nz$.

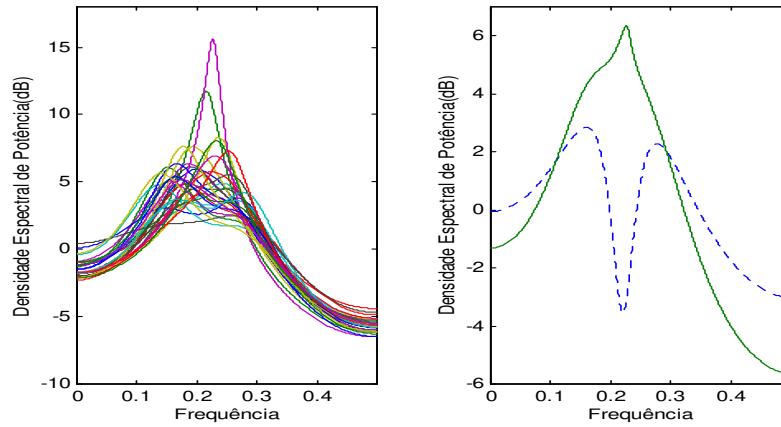


Figura B.105: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWC_p - N=1024 - M=10.

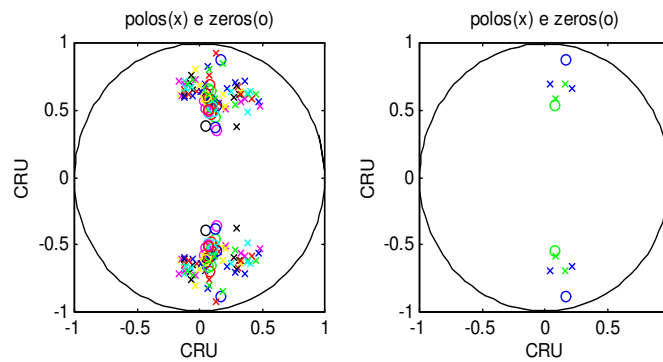


Figura B.106: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWC_p - N=1024 - M=10.

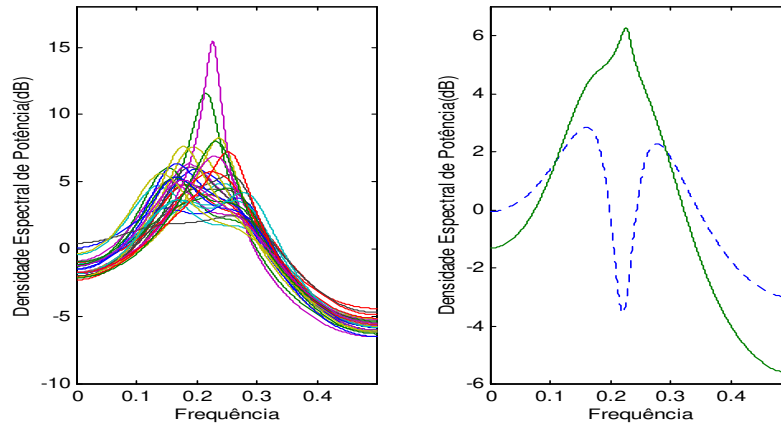


Figura B.107: Estimativas dos Espectros - Espectro teórico e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWC_pP - N=1024 - M=10.

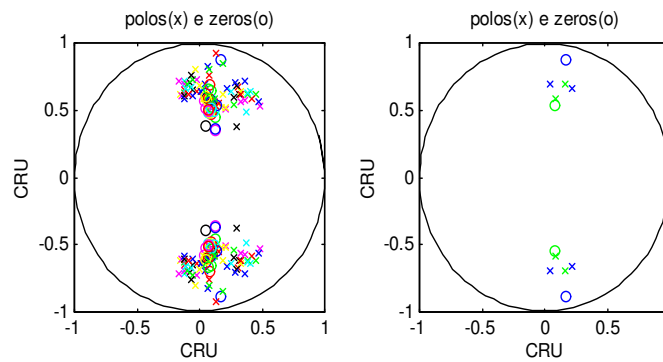


Figura B.108: Estimativas dos polos e zeros - Polos e zeros teóricos e média das estimativas - ARMA(4,2) - MQYWC_pP - N=1024 - M=10.

Apêndice C

Alguns Programas Utilizados

Neste apêndice temos alguns dos programas utilizados no MATLAB para obtenção dos resultados de algumas simulações.

C.1 Programa 1

```
%Estimação dos Parâmetros do modelo ARMA p/  
%Métodos: EMYW e MQEMYW - Cálculo do Erro Quadrático Médio  
clear global; clear all; x1=clock;  
%Modelo ARMA1 do Stoica  
a1=[1 -1.3136 1.4401 -1.0919 0.83527];  
b1=[1 0.17921 0.8202 0.26764];  
%Modelo ARMA do Stoica  
a2=[1 0.1 1.66 0.093 0.8649];  
b2=[1 0.0226 0.8175 0.0595 0.0764];  
%Modelo ARMA3 do Stoica  
a3=[1 -2.7607 3.8106 -2.6535 0.9238];  
b3=[1 -2.1398 2.3672 -1.3729 0.3930];  
%Modelo ARMA3 da tese do Adrian  
Aa=[1 -0.52 1.018 -0.255 0.240];  
Bb=[1 -0.337 0.810];  
%Parâmetros;  
N=1024; %número de amostras  
Np=1024;
```

```

p=6; %ordem AR
q=4; %ordem MA
M=10; %número de equações = M-q
L=510; %ordem do AR longo
N1=30;
N2=(N1/3); %número de sequências
k=1;
kz=1;
for j=1:N2,
randn('seed',(3467*j*N-1)+1);
e0=randn(3000,1);
e=e0(1001:1000+N);
thy=poly2th(a1,[],b1,1,[]);
ysi=idsim(e,thy);
yst=dtrend(ysi);
xco=xcorr(yst,'unbiased');
rx=xco(N+q-p+1:N+M);
w=(N+1:-1:N-M+q-p+2);
w3=w.^3;
W=(diag(sqrt(w3)));
rxp=W*rx;
thm=arx(rxp,p);
yf=filter([1 conj(thm(3,1:p))],1,yst);
%Mét. Durbin utilizando Covariância Modificada(fb,now)
thd=ar(yf,L,'fb0','now');
%Segundo passo
yl=[1 thd(3,1:L)]';
thd1=ar(yl,q,'fb0','now');
%Parâmetros estimados para o modelo ARMA
A(j,:)= [1 conj(thm(3,1:p))];
B(j,:)= [1 conj(thd1(3,1:q))];
%Polinômio do modelo ARMA
thdb=poly2th(A(j,:),[],B(j,:),1,[]);
%polos e Zeros
[zepo(:,kz:kz+1)]=th2zp(thdb);

```

```

%Densidade espectral de potência
wf=[1:Np]/Np*pi;
[g(:,k:k+2)]=trf(thdb,[],wf);
gd=g;
k=k+3;
kz=kz+2;
end;
%Média, desvio-padrão e coeficiente de variação dos parâmetros AR
MediA=mean(A)
DPA=std(A)
CVA=DPA(:,2:p+1)./abs(MediA(:,2:p+1));
CVRA=(sum(CVA)/p)*100
%Erro relativo dos parâmetros AR
ERA=(norm(MediA(:,2:p+1)-a2(:,2:p+1))/norm(a2(:,2:p+1)))*100
%Média, desvio-padrão e coeficiente de variação dos parâmetros AR
MediB=mean(B)
DPB=std(B)
CVB=DPB(:,2:q+1)./abs(MediB(:,2:q+1));
CVRB=(sum(CVB)/q)*100
%Erro relativo dos parâmetros MA
ERB=(norm(MediB(:,2:q+1)-b2(:,2:q+1))/norm(b2(:,2:q+1)))*100
%Cálculo da Média n=1 frequência, n=2 espectro e n=3 desvio-padrão;
for m=1:1025, % linhas
for n=1:3, %colunas
soma(m,n)=0;
for k=n:3:N1-3+n,
soma(m,n)=gd(m,k)+soma(m,n);
media(m,n)=soma(m,n)/N2;
end % para k;
end % para n;
end %para m;
%Gráfico das curvas de DEP
for k=2:3:N1-1;
f=[1:Np]/Np/2;
gn(:,k)=gd(2:Np+1,k);

```

```

gx(:,k)=max(gn(:,k));
gm(:,k)=gn(:,k)/gx(:,k);
end;
plot(f,10*log10(gn))
title('MQEMYW(c/pond.)-ARMA')
xlabel('FREQUENCY')
ylabel('POWER SPECTRAL DENSITY(dB)')
figure;
%Gráfico da média
med=media(2:Np+1,2);
medx=max(med);
medn=med/medx;
f=[1:Np]/Np/2;
%curva teórica
ths=poly2th(a1,[],b1,1,[]);
spte=trf(ths,[],wf);
spteo=spte(2:(Np+1),2);
plot(f,10*log10(spteo),'-',f,10*log10(med))
title('Método MQEMYW1 - ARMA3 - Média')
xlabel('FREQUENCY')
ylabel('POWER SPECTRAL DENSITY(dB)')
%Gráficos da Dep. teórica e da média das curvas estimadas
plot(f,10*log10(Sr),'-',f,10*log10(medn))
title('MQEMYW(S/pond.)-ARMA2-')
xlabel('FREQUENCY')
ylabel('POWER SPECTRAL DENSITY(dB)')
x2=etime(clock,x1)
xf2=flops

```

C.2 Programa 2

```

%Estimação dos Parâmetros do modelo ARMA
%p/ Métodos de Máxima Verossimilhança - Cálculo do Erro Quadrático Médio
clear global; clear all; x1=clock;
%Modelo ARMA1 do Stoica

```

```

a1=[1 -1.3136 1.4401 -1.0919 0.83527];
b1=[1 0.17921 0.8202 0.26764];
%Modelo ARMA do Stoica
a2=[1 0.1 1.66 0.093 0.8649];
b2=[1 0.0226 0.8175 0.0595 0.0764];
%Modelo ARMA3 da tese do Adrian
Aa=[1 -0.52 1.018 -0.255 0.240];
Bb=[1 -0.337 0.810];
%Parâmetros;
N=256; %número de amostras
Np=1024;
p=4; %ordem AR
q=4; %ordem MA
N1=90;
N2=(N1/3); %número de sequências
k=1;
kz=1;
for j=1:N2,
randn('seed',(3467*j*N-1)+1);
e0=randn(3000,1);
e=e0(1001:1000+N);
thy=poly2th(a2,[],b2,1,[]);
ysi=idsim(e,thy);
yst=dtrend(ysi);
% Método de Máxima Verossimulhança
pq=[p q];
thv=armax(yst,pq);
%Matriz de Covariância
VaA=thm(4:3+p,1:p);
VdA(1:p,j)=diag(VaA)/thm(1,1);
VbB=thd1(4:3+q,1:q);
VdB(1:q,j)=diag(VbB)/thd1(1,1);
%Parâmetros estimados para o modelo ARMA
A(j,:)= [1 conj(thv(3,1:p))];
B(j,:)= [1 conj(thv(3,p+1:p+q))];

```



```

%Polinômio do modelo ARMA
thdb=poly2th(A(j,:),[],B(j,:),1,[]);
%polos e Zeros
[zepo(:,kz:kz+1)]=th2zp(thdb);
%Densidade espectral de potência
wf=[1:Np]/Np*pi;
[g(:,k:k+2)]=trf(thdb,[],wf);
gd=g;
k=k+3;
kz=kz+2;
end;
%Média, desvio-padrão e coeficiente de variação dos parâmetros AR
MediA=mean(A)
DPA=std(A)
CVA=DPA(:,2:p+1)./abs(MediA(:,2:p+1));
CVRA=(sum(CVA)/p)*100
%Erro relativo dos parâmetros AR
ERA=(norm(MediA(:,2:p+1)-Aa(:,2:p+1))/norm(Aa(:,2:p+1)))*100
%Média, desvio-padrão e coeficiente de variação dos parâmetros AR
MediB=mean(B)
DPB=std(B)
CVB=DPB(:,2:q+1)./abs(MediB(:,2:q+1));
CVRB=(sum(CVB)/q)*100
%Erro relativo dos parâmetros MA
ERB=(norm(MediB(:,2:q+1)-Bb(:,2:q+1))/norm(Bb(:,2:q+1)))*100
%Cálculo da Média n=1 frequência, n=2 espectro e n=3 desvio-padrão;
for m=1:1025, % linhas
for n=1:3, %colunas
soma(m,n)=0;
for k=n:3:N1-3+n,
soma(m,n)=gd(m,k)+soma(m,n);
media(m,n)=soma(m,n)/N2;
end % para k;
end % para n;
end %para m;

```

```

%Gráfico das curvas de DEP
for k=2:3:N1-1;
f=[1:Np]/Np/2;
gn(:,k)=gd(2:Np+1,k);
gx(:,k)=max(gn(:,k));
gm(:,k)=gn(:,k)/gx(:,k);
end;
subplot(1,2,1)
plot(f,10*log10(gn)), axis([0 0.5 -30 45])
plot(f,10*log10(gm))
title('MQEMYW(c/pond.)-ARMA0-Adrian(N=64 M=20 CovM')
xlabel('FREQUENCY')
ylabel('POWER SPECTRAL DENSITY(dB)')
figure;
%Gráfico da média
med=media(2:Np+1,2);
medx=max(med);
medn=med/medx;
f=[1:Np]/Np/2;
%curva teórica
ths=poly2th(a2,[],b2,1,[]);
spte=trf(ths,[],wf);
spteo=spte(2:(Np+1),2);
%title('Método MQEMYW1 - ARMA - Média')
xlabel('FREQUENCY')
ylabel('POWER SPECTRAL DENSITY(dB)')
%Gráficos da Dep. teórica e da média das curvas estimadas
plot(f,10*log10(Sr),'-',f,10*log10(medn))
xlabel('FREQUENCY')
ylabel('POWER SPECTRAL DENSITY(dB)')
x2=etime(clock,x1)
xf2=flops

```

C.3 Programa 3

```
%Estimação dos Parâmetros do modelo ARMA p/  
  %Métodos: EMYW e MQEMYW - OBS: Modificado -Cálculo do Erro Quadrático  
Médio  
  clear global; clear all; x1=clock;  
  %Modelo ARMA1 do Stoica  
  a1=[1 -1.3136 1.4401 -1.0919 0.83527];  
  b1=[1 0.17921 0.8202 0.26764];  
  %Modelo ARMA do Stoica  
  a2=[1 0.1 1.66 0.093 0.8649];  
  b2=[1 0.0226 0.8175 0.0595 0.0764];  
  %Modelo ARMA Enqvist (2004)  
  a5=[1 -0.8713 -1.539 1.371 0.6451 -0.5827];  
  b5=[1 -1.051 0.0718 0.05164 0.5322 -0.5735];  
  %Modelo LINX  
  a8=[1 -1.55 0.94];  
  b8=[1 0.59];  
  %Parâmetros;  
  N=256; %número de amostras  
  Np=1024;  
  p=2; %ordem AR  
  q=1; %ordem MA  
  M=10; %número de equações = M-q  
  L=128; %ordem do AR longo  
  N1=6000;  
  N2=(N1/3); %número de sequências  
  N2=50  
  k=1;  
  kz=1;  
  for j=1:N2,  
  randn('seed',(3467*j*N-1)+1);  
  e0=randn(3000,1);  
  e=e0(1001:1000+N);  
  thy=poly2th(a8,[],b8,1,[]);
```

```

ysi=idsim(e,thy);
yst=dtrend(ysi);
thm=ar(yst,p,'yw','ppw');
yf=filter([1 conj(thm(3,1:p))],1,yst);
%Matriz de Covariância
VaA=thm(4:3+p,1:p);
VdA(1:p,j)=diag(VaA)/thm(1,1);
%Mét. Durbin utilizando Método de Autocorrelação(yw,ppw);
%Mét. Durbin - Covariância Modificada(fb,now)
thd=ar(yf,L,'fb0','now');
%Segundo passo
yl=[1 thd(3,1:L)];
thd1=ar(yl,q,'fb0','now');
%VbB=thd1(4:3+q,1:q);
%VdB(1:q,j)=diag(VbB)/thd1(1,1);
%Parâmetros estimados para o modelo ARMA
A(j,:)= [1 conj(thm(3,1:p))];
B(j,:)= [1 conj(thd1(3,1:q))];
%Polinômio do modelo ARMA
thdb=poly2th(A(j,:),[],B(j,:),1,[]);
polos e Zeros
[zepo(:,kz:kz+1)]=th2zp(thdb);
%Densidade espectral de potência
wf=[1:Np]/Np*pi;
[g(:,k:k+2)]=trf(thdb,[],wf);
gd=g;
k=k+3;
kz=kz+2;
ERa(j,:)=norm(A(j,2:p+1)-a8(:,2:p+1))/norm(a8(:,2:p+1));
ERb(j,:)=norm(B(j,2:q+1)-b8(:,2:q+1))/norm(b8(:,2:q+1));
end;

```

C.4 Programa 4

%Estimação dos Parâmetros do modelo ARMA p/

```
%Métodos: Cepstrum paramétrico- Cálculo do Erro Quadrático Médio
clear global; clear all; x1=clock;xf2=flops;
%Modelo ARMA(6,4) do Kardeli(2000)
a1=[1 1.1842 3.090 2.2285 2.9074 1.0484 0.833];
b1=[1 0.1519 0.0644 0.0137 0.0081];
%modelo ARMA(3,2) do Broersen (2000)
a5=[1 -0.2 0.4 -0.3];
b5=[1 0.4 0.5];
%modelo ARMA(5,5)
a6=[1 -0.8713 -1.539 1.371 0.6451 -0.5827];
b6=[1 -1.051 0.0718 0.05164 0.5322 -0.5735];
%modelos da tese
%Modelo ARMA3 da tese do Adrian
Aa=[1 -0.52 1.018 -0.255 0.240];
Bb=[1 -0.337 0.810];
%Modelo ARMA do Stoica
a3=[1 0.1 1.66 0.093 0.8649];
b3=[1 0.0226 0.8175 0.0595 0.0764];
%Parâmetros;
N=256 %número de amostras
Np=1024;
p=6; %ordem AR
q=4; %ordem MA
M=20; %número de equações = M-q
N1=90;
N2=(N1/3) %número de sequências
kz=1;
ki=1
for j=1:N2,
randn('seed',(3467*j*N-1)+1);
e0=randn(3000,1);
e=e0(1001:1000+N);
thy=poly2th(a1,[],b1,1,[]);
ysi=idsim(e,thy);
yst=dtrend(ysi);
```

```

xco=xcorr(yst,'unbiased');
rx=xco(N+q-p+1:N+M);
w=(N+1:-1:N-M+q-p+2);
w3=w.^3;
W=(diag(sqrt(w3)));
%W=eye(length(rx));
rxp=W*rx;
thm=arx(rxp,p);
%Processo residual
yf=filter([1 conj(thm(3,1:p))],1,yst);
% Calcular os coeficientes cepstrais
cps=real(iff(fft(abs(fft(ysi)))));
cps=rceps(yf);
cps=cps(2:N,:);
%Estimativas dos parâmetros do modelo MA
for k=2:q,
sb(k)=0;
for i=1:k-1,
B1(1)=cps(1);
sb(k)=sb(k)+i*cps(i)*B1(k-i);
B1(k)=cps(k)+(1./k)*sb(k);
end,
end,
%Parâmetros estimados para o modelo ARMA
A(j,:)= [1 conj(thm(3,1:p))];
B(j,:)= [1 B1];
%Polinômio do modelo ARMA
thdb=poly2th(A(j,:),[],B(j,:),1,[]);
%Densidade espectral de potência
wf=[1:Np]/Np*pi;
[g(:,kz:kz+2)]=trf(thdb,[],wf);
gd=g;
kz=kz+3;
%polos e Zeros
[zepo(:,ki:ki+1)]=th2zp(thdb);

```

```

ki=ki+2;
end; %para j
%Cálculo da Média n=1 frecuencia, n=2 espectro e n=3 desvio-padrao;
for m=1:1025, % linhas
for n=1:3, %colunas
som(m,n)=0;
for k=n:3:N1-3+n,
som(m,n)=som(m,n)+g(m,k);
media(m,n)=som(m,n)/N2;
end % para k;
end % para n;
end %para m;
%Gráfico das curvas de DEP
for k=2:3:N1-1;
f=[1:Np]/Np/2;
gn(:,k)=gd(2:Np+1,k);
gx(:,k)=max(gn(:,k));
gm(:,k)=gn(:,k)/gx(:,k);
end;
subplot(1,2,1)
plot(f,10*log10(gn)),axis([0 0.5 -20 30])
title("")
xlabel('FREQUENCY')
ylabel('POWER SPECTRAL DENSITY(dB)')
figure;
%Gráfico da média
med=media(2:Np+1,2);
medx=max(med);
medn=med/medx;
f=[1:Np]/Np/2;
%curva teórica
ths=poly2th(a1,[],b1,1,[]);
spte=trf(ths,[],wf);
spteo=spte(2:(Np+1),2);
%subplot(1,2,2)

```

```

plot(f,10*log10(spteo),'-',f,10*log10(med))
%title('Método MQEMYW1 - ARMA3 - Média')
xlabel('Frequência normalizada')
ylabel('Densidade Espectral (dB)')
figure;
%Gráficos dos polos e zeros
for m1=1:5,
for l=1:2,
soma(m1,l)=0;
for k1=1:2:2*N2-2+1,
soma(m1,l)=soma(m1,l)+zepo(m1,k1);
medpz(m1,l)=soma(m1,l)/N2;
end; %p/ k
end; %p/l
end; %p/j
%gráfico da média
zpplot(zpform(medpz))
zepov=zp(ths);
zpplot(zpform(zepov,medpz))
title('x-polos e zeros teóricos e estimados')
xlabel('Circunferência de Raio Unitário (CRU)')
ylabel('CRU')
figure;
x2=etime(clock,x1)
xf2=flops

```

C.5 Programa 5

```

%Programa para fazer a comparação entre os métodos utilizando o
%Erro Quadrático Médio dos parâmetros do modelo - Método Proposto
clear global; clear all; x1=clock;
%Modelo ARMA1 do Stoica
a1=[1 -1.3136 1.4401 -1.0919 0.83527];
b1=[1 0.17921 0.8202 0.26764];
%Modelo ARMA do Stoica

```



```
a2=[1 0.1 1.66 0.093 0.8649];
b2=[1 0.0226 0.8175 0.0595 0.0764];
%Modelo ARMA3 da tese do Adrian
Aa=[1 -0.52 1.018 -0.255 0.240];
Bb=[1 -0.337 0.810];
%Modelo ARMA do artigo do Stoica(2006)
a4=[1 -1.6408 2.2044 -1.4808 0.8145];
b4=[1 1.5857 0.9604];
%Valores dos Parâmetros
p=4; %número de parâmetro do AR
q=2; %número de parâmetro do MA
N=256; %número de amostras
Np=1024; %número de pontos da dep
M=10; %número de equações M-q
L=126; %AR longo para o método de Durbin
N1=2; %número de iterações
N2=30;
N3=(N2/3); %número de sequências
sem1=3675*i*N-1;
sem2=(3467*i*N-1)+1;%melhor semente
%Simulação do processo ARMA
for i=1:N3,
%clear e0 e thy ysi;
randn('seed',(3467*(i)*N-1)+1);
e0=randn(3000,1);
e=e0(1001:(1000+N));
thy=poly2th(a4,[],b4,1,[]);
ysi=idsim(e,thy);
yg(:,i)=dtrend(ysi);
end;
%calculo do MQEMYW1
k=1;
kz=1;
for L=1:round((N-p)/2), %para AR(L)
for i=1:N3,
```

```

yst=yg(:,i);
for j=1:N1,
xco=xcorr(yst,'unbiased');
rx=xco(N+q-p+1:N+M);
w=(N+1:-1:N-M+q-p+2);
%w3=(w.^3);
%W=diag(sqrt(w3)); % sem sqrt
%rxp=W*rx;
rxp=rx;
thm=arx(rxp,p);
%filtro FIR
yf=filter([1 conj(thm(3,1:p))],1,yg(:,i));
%Método de Durbin, podendo utilizar: Método da Cov-Mod(fb,now)
%Primeiro passo
thd=ar(yf,L,'fb','now'); %AR de ordem longa
%Segundo passo
ya=[1 thd(3,:)]; %parâmetros estimados do AR longo
thd1=ar(ya,q,'fb','now'); %estimativas MA dos dados ya
%Estimativas dos parâmetros ARMA
A=[1 conj(thm(3,1:p))];
B=[1 conj(thd1(3,1:q))];
%Filtrar o processo por meio do filtro AR-(IIR)
yst=filter(1,B,yg(:,i));
end; %para j
AA(i,:)=A;
BB(i,:)=B;
%Polinômio do modelo ARMA
thdb=poly2th(A,[],B,1,[]);
%Densidade espectral de potência
f=[1:Np]/Np/2;
wf=[1:Np]/Np*pi;
[g(:,k:k+2)]=trf(thdb,[],wf);
gd=g;
k=k+3;
kz=kz+2;

```

```
end; %para i
%Erro quadrático Médio dos parâmetros AR
MediA=mean(AA);
DPA=std(AA);
CVA=DPA(:,2:p+1)./abs(MediA(:,2:p+1));
CVRA=(sum(CVA)/p)*100;
Erro relativo
ERA=(norm(MediA(:,2:p+1)-a4(:,2:p+1)))/norm(a4(:,2:p+1))*100;
ErelatA(L,:)=ERA;
%Erro Quadrático Médio dos parâmentros MA
MediB=mean(BB);
DPB=std(BB);
CVB=DPB(:,2:q+1)./abs(MediB(:,2:q+1));
CVRB=(sum(CVB)/q)*100;
ERB=(norm(MediB(:,2:q+1)-b4(:,2:q+1)))/norm(b4(:,2:q+1))*100;
ErelatB(L,:)=ERB;
end;
x2=etime(clock,x1)
xf2=flops
```

Apêndice D

Estimação Bayesiana

Neste apêndice foi feito um breve estudo sobre estimação bayesiana para estimação do modelo ARMA, que servirão para trabalhos futuros e que foi utilizado no artigo: "*A Bayesian Analysis of Spectral ARMA Model*", aceito na revista "*Mathematical Problems in Engineering*", *Hindawi Publishing Corporation*.

D.1 Estimação Bayesiana para o Modelo ARMA

A inferência Bayesiana para a estimação de parâmetros é uma atraente ferramenta para ser utilizada em problemas práticos e tem crescido muito em popularidade nos últimos anos. Além disso, a inferência Bayesiana permite incorporar o conhecimento a priori de um especialista, sobre o problema em estudo, na análise estatística, obtendo-assim melhores estimativas para os parâmetros e resultados mais confiáveis quando há pouco dados na amostra.

Devido à dificuldade algébrica de se determinar as densidades marginais de cada parâmetro do modelo ajustado aos dados, usamos as técnicas MCMC (*Monte Carlo Markov Chain*). Será empregado o Amostrador Metropolis-Hastings para obter-se uma amostra grande da distribuição a posteriori dos parâmetros.

Em uma análise Bayesiana a inferência baseia-se na distribuição a posteriori dos parâmetros β , denotada por $p(\beta | y)$, que por sua vez é utilizada para inferências e decisões envolvendo β .

A distribuição a posteriori $p(\beta | y)$ é obtida a partir da combinação da informação a priori fornecida por uma distribuição de probabilidade $f(\beta)$ do parâmetro β e da informação fornecida pelos dados y através da função de verossimilhança $L(\beta | y)$. Assim,

usando-se o teorema de Bayes, a distribuição a posteriori é dada por

$$p(\beta | \mathbf{y}) \propto f(\beta)L(\beta | \mathbf{y}). \quad (\text{D.1})$$

A distribuição a priori representa o conhecimento ou o estado de incerteza sobre o parâmetro β antes do experimento ser realizado e a distribuição a posteriori descreve a informação atualizada sobre β após os dados \mathbf{y} serem observados.

Para um modelo ARMA(p, q) necessitamos estimar os parâmetros β e σ onde $\beta = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$. A função de verossimilhança $L(\beta | \mathbf{y})$ proposta em Marriot, at al. (1996) para as observações Z dado o vetor de parâmetros (β, σ) pode ser escrita como segue

$$L(\beta, \sigma | \mathbf{Z}) \propto \frac{1}{\sigma^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^n (z_t - \mu_t)^2 \right\} \quad (\text{D.2})$$

onde $\mu_t = \sum_{i=1}^p \phi_i z_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i e_{t-i}$,

$$\begin{aligned} \mu_t &= \sum_{i=1}^p \phi_i z_{t-i} + \sum_{i=1}^{t-1} \theta_i (z_{t-i} - \mu_{t-i}) + \sum_{i=t}^q \theta_i e_{t-i}, \quad t = 2, \dots, q, \\ \mu_t &= \sum_{i=1}^p \phi_i z_{t-i} + \sum_{i=1}^{t-1} \theta_i (z_{t-i} - \mu_{t-i}) + \sum_{i=t}^q \theta_i e_{t-i}, \quad t = q+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

A função de verossimilhança acima combinada com a de distribuição a priori resulta na distribuição a posteriori dada por

$$p(\beta, \sigma | \mathbf{y}) \propto \frac{1}{\sigma^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^n e_t^2 \right\} f(\beta). \quad (\text{D.4})$$

Os valores das variáveis z_{i-p} , $i = 1, \dots, p$ e os termos do erro e_{i-q} , $i = 1, \dots, q$ são arbitrariamente fixado.

Para prosseguir com a análise Bayesiana é necessário especificar uma distribuição a priori sobre o espaço paramétrico. Diferentes distribuições a priori podem ser utilizadas em nosso estudo de acordo com todas as informações disponíveis no momento da análise.

Se a informação a priori sobre os parâmetros em estudo não está disponível ou não existe para a análise, então a incerteza inicial sobre os parâmetros pode ser quantificada com uma distribuição a priori não-informativa. Isto é o mesmo que incluir na análise apenas a informação fornecida pelos dados.

Portanto, para os coeficientes do modelo ARMA supusemos que pouco se sabe sobre estes parâmetros tal que uma distribuição uniforme pode ser usada como uma distribuição a priori. Supusemos também a priori que os componentes de β são independentes e, conseqüentemente, a priori para o vetor β é o produto das prioris para as suas componentes. Além disso, uma distribuição a priori não-informativa convencional para a variância σ^2 do modelo pode ser representada por

$$f(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}. \quad (\text{D.5})$$

Daí a distribuição a priori conjunta de β e σ^2 tem a forma

$$f(\beta, \sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}. \quad (\text{D.6})$$

onde $-\infty < \beta_i < \infty$ e $0 < \sigma^2 < \infty$.

Outras especificações a priori também podem ser consideradas, como distribuições a priori informativas normais e independentes para as componentes de β , isto é,

$$\beta_j \sim N(\mu, \sigma_\beta^2), j = 1, \dots, k, \quad (\text{D.7})$$

com média μ e variância σ_β^2 especificada a priori e uma priori informativa como a distribuição gama inversa para o parâmetro σ^2 , isto é,

$$\sigma^2 \sim IG(a_\sigma, b_\sigma) \quad (\text{D.8})$$

com um hiperparâmetros a_σ e b_σ conhecidos. Então, fazendo similarmente como para a distribuição conjunta a priori para β e σ^2 , e seria dada por

$$f(\beta, \sigma^2) \propto f(\beta)f(\sigma^2). \quad (\text{D.9})$$

Para se obter a distribuição marginal a posteriori para cada parâmetro do modelo é necessário calcular integrais envolvendo a densidade a posteriori conjunta que não são tratáveis analiticamente e cujas aproximações integrais padrão podem produzir aproximações muito ruins.

Nesse caso, usamos o procedimento das cadeias de Markov Monte Carlo (MCMC) para realizar a inferência Bayesiana a posteriori. Especificamente, podemos executar um algoritmo para simular uma longa cadeia de amostra a partir da distribuição a posteriori, e basear as inferências nos sumários a posteriori dos parâmetros ou funcionais dos parâmetros avaliados a partir das amostras. O método MCMC é essencialmente uma integração de Monte Carlo com cadeias de Markov.

A construção de tal cadeia de Markov não é difícil. Primeiramente descreveremos o algoritmo de Metropolis-Hastings. Este algoritmo é devido a Hastings (1970), que é uma generalização do método proposto pela primeira vez por Metropolis et al. (1953).

Seja $g(\phi)$ a distribuição de interesse. Suponhamos que para o instante t , ϕ_{t+1} é escolhido primeiramente por amostragem de um candidato η a partir de uma distribuição proposta $q(\cdot|\phi)$. O candidato η é aceito com probabilidade,

$$\alpha(\phi, \eta) = \min\left(1, \frac{g(\eta)q(\phi_t|\eta)}{g(\phi)q(\eta|\phi_t)}\right) \quad (\text{D.10})$$

Se o valor candidato η for aceito, o próximo estado torna-se $\phi_{t+1} = \eta$. Se for rejeitado, então $\phi_{t+1} = \phi_t$ e a cadeia não se move. A distribuição proposta é arbitrária e, desde que a cadeia é irredutível e aperiódica, a distribuição de equilíbrio da cadeia será $g(\phi)$.

Após a obtenção de uma amostra aleatória a partir do algoritmo MCMC para cada componente de β , é importante investigar questões tais como a convergência e mistura da cadeia, para determinar se a amostra pode ser razoavelmente tratada como um conjunto de realizações aleatórias da distribuição a posteriori de interesse. Observar o gráfico dos traços marginais é a maneira mais simples para examinar a saída da cadeia além dos procedimentos formais. Desta forma, todos os valores da cadeia têm uma distribuição marginal dada pela distribuição de equilíbrio.

Para mais detalhes do MCMC da mais variadas formas para construir essas cadeias veja, por exemplo, Smith e Roberts (1993), Gelfand e Smith (1990) e Gilks et al (1993).

Descrevemos agora a implementação do MCMC utilizado em nosso procedimento de séries temporais. Geramos uma amostra da posteriori simulando uma cadeia do Monte Carlo e Markov descrita como segue:

i) escolher valores iniciais $\beta^o = (\beta_0^o, \beta_1^o, \dots, \beta_k^o)$ e σ_0^2 .

Na etapa $i + 1$, retiramos uma nova amostra $(\beta_{i+1}, \sigma_{i+1}^2)$ condicional a amostra atual (β_i, σ_i^2) usando as seguintes distribuições propostas (e a usual regra de aceitação do Metropolis-Hastings):

ii) amostra-se um novo vetor β_{i+1} da distribuição normal multivariada $N_k(\beta_i; V)$ onde V é uma matriz diagonal;

iii) o candidato para β_{i+1} , denotado por β_{prop} , será aceito com uma probabilidade dada pela razão Metropolis

$$\alpha(\beta_i, \beta_{\text{prop}}) = \min\left\{1, \frac{p(\beta_{\text{prop}}, \sigma_i^2 | Z)}{p(\beta_i, \sigma_i^2 | Z)}\right\}; \quad (\text{D.11})$$

iv) amostra-se a nova variância σ_{i+1}^2 da distribuição inversa Gama

$$IG(d, (d-1)\sigma_i^2). \quad (\text{D.12})$$

v) devido a essa distribuição proposta não ser simétrica, encontramos

$$\alpha(\sigma_i^2, \sigma_{\text{prop}}^2) = \min\left\{1, \frac{IG(\sigma_i^2)p(\boldsymbol{\beta}_{i+1}, \sigma_{\text{prop}}^2 | Z)}{IG(\sigma_{\text{prop}}^2)p(\boldsymbol{\beta}_{i+1}, \sigma_i^2 | Z)}\right\}. \quad (\text{D.13})$$

A distribuição proposta para os parâmetros V e d foram escolhidos para se obter uma boa mistura das cadeias.