

**Diego de Sousa Madeira**

**Condições suficientes de otimalidade para o problema  
de controle de sistemas lineares estocásticos**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Automação.

Orientador: Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val

Banca Examinadora:  
Prof. Dr. Marcelo Dutra Fragoso - LNCC/MCTI  
Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira - UNICAMP

Campinas, SP  
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

M264c Madeira, Diego de Sousa  
Condições suficientes de otimalidade para o problema de controle de sistemas lineares estocásticos / Diego de Sousa Madeira. --Campinas, SP: [s.n.], 2012.

Orientador: João Bosco Ribeiro do Val.  
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas Lineares. 2. Princípio de Máximo (Matemática). 3. Condições otimalidade. I. Val, João Bosco do. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Sufficient optimality conditions for the control problem of linear stochastic systems

Palavras-chave em Inglês: Linear systems, Maximum principle (Mathematical), Optimality conditions

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Marcelo Dutra Fragoso, Paulo Augusto Valente Ferreira

Data da defesa: 29-03-12

Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

## COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

**Candidato:** Diego de Sousa Madeira

**Data da Defesa:** 29 de março de 2012

**Título da Tese:** "Condições Suficientes de Otimalidade para o Problema de Controle de Sistemas Lineares Estocásticos"

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val (Presidente):

Prof. Dr. Marcelo Dutra Fragoso:

Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira:

# Resumo

As principais contribuições deste trabalho são a obtenção de condições necessárias e suficientes de otimalidade para o problema de controle de sistemas lineares determinísticos discretos e para certas classes de sistemas lineares estocásticos. Adotamos o método de controle por realimentação de saída, um horizonte de controle finito e um funcional de custo quadrático nas variáveis de estado e de controle. O problema determinístico é solucionado por completo, ou seja, provamos que para qualquer sistema MIMO as condições necessárias de otimalidade são também suficientes. Para tanto, uma versão do Princípio do Máximo Discreto é utilizada. Além disso, analisamos o caso estocástico com ruído aditivo e provamos que o princípio do máximo discreto fornece as condições necessárias de otimalidade para o problema, embora não garanta suficiência. Por fim, em um cenário particular com apenas dois estágios, empregamos uma técnica de parametrização do funcional de custo associado ao sistema linear estocástico com ruído aditivo e provamos que, no caso dos sistemas SISO com matrizes  $C$  (saída) e  $B$  (entrada) tais que  $CB = 0$ , as condições necessárias de otimalidade são também suficientes. Provamos que o mesmo também é válido para a classe dos Sistemas Lineares com Saltos Markovianos (SLSM), no contexto especificado. Com o objetivo de ilustrar numericamente os resultados teóricos obtidos, alguns exemplos numéricos são fornecidos.

**Palavras-chave:** Sistemas Lineares, Princípio do Máximo Discreto, Condições Necessárias de Otimalidade, Condições Suficientes de Otimalidade, Parametrização.

# Abstract

The main contributions of this work are that the necessary and sufficient optimality conditions for the control problem of discrete linear deterministic systems and some classes of linear stochastic systems are obtained. We adopted the output feedback control method, a finite horizon control and a cost function that is quadratic in the state and control vectors. The deterministic problem is completely solved, that is, we prove that for any MIMO system the necessary optimality conditions are also sufficient. To do so, a formulation of the Discrete Maximum Principle is used. Furthermore, we analyze the stochastic case with additive noise and prove that the discrete maximum principle provides the necessary optimality conditions, though they are not sufficient. Finally, in a particular two-stage scenario, we apply a parametrization technique of the cost function associated with the linear stochastic system with additive noise and prove that, for SISO systems with orthogonal matrices  $C$  (output) and  $B$  (input) so that  $CB = 0$ , the necessary optimality conditions are sufficient too. We prove that under the underlined context the previous statement is also valid in the case of the Markov Jump Linear Systems (MJLS). In order to illustrate the theoretical results obtained, some numerical examples are given.

**Keywords:** Linear Systems, Discrete Maximum Principle, Necessary Optimality Conditions, Sufficient Optimality Conditions, Parametrization.

# Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val. Agradeço por sua excelente supervisão, por sua paciência e generosidade.

Aos colegas do Departamento de Telemática (DT) da FEEC, encontrei no DT um ambiente bastante favorável à discussão de assuntos científicos.

A minha família pelo apoio incondicional e pelos valores que me transmitiu. Agradeço especialmente a minha mãe, Antonia, por ter feito da minha educação uma prioridade em sua vida.

A todos os meus amigos.

À FAPESP, pelo apoio financeiro. Processo 2009/12511-4.

*A minha mãe, avós, tios, primos e amigos*

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xi</b>
<b>Trabalhos Publicados Pelo Autor</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Controle por realimentação de saída . . . . .	1
1.2 O índice de desempenho quadrático . . . . .	2
1.3 A classe dos Sistemas Lineares com Saltos Markovianos . . . . .	3
1.4 Estrutura da dissertação . . . . .	5
<b>2 O princípio do máximo discreto</b>	<b>7</b>
2.1 Perspectiva histórica . . . . .	7
2.2 O princípio do máximo discreto como uma condição necessária de otimalidade . . . . .	9
2.3 O princípio do máximo como uma condição suficiente de otimalidade . . . . .	13
<b>3 Caso determinístico</b>	<b>17</b>
3.1 Formulação do problema . . . . .	17
3.2 Condições suficientes de otimalidade . . . . .	18
<b>4 Caso estocástico com ruído aditivo</b>	<b>23</b>
4.1 Formulação do problema . . . . .	23
4.2 Condições necessárias de otimalidade . . . . .	26
4.3 Condições suficientes de otimalidade . . . . .	30
<b>5 Controle de SLSMs</b>	<b>35</b>
5.1 Introdução . . . . .	35
5.1.1 Definição da estrutura matricial . . . . .	35
5.1.2 Os processos SLSMs sujeitos à realimentação de saída . . . . .	37
5.1.3 Resultados preliminares . . . . .	37
5.1.4 O índice de desempenho quadrático . . . . .	39
5.2 Definição de funcionais e operadores utilizados . . . . .	40
5.3 Funcional de custo em forma determinística equivalente . . . . .	42
5.4 Condições necessárias de otimalidade . . . . .	44

---

5.5	Condições suficientes de otimalidade . . . . .	45
<b>6</b>	<b>Aplicações</b>	<b>49</b>
6.1	Algoritmo baseado em método variacional . . . . .	49
6.2	Controle de horizonte retrocedente . . . . .	50
6.3	Caso determinístico . . . . .	51
6.4	Caso estocástico com ruído aditivo . . . . .	51
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>55</b>
7.1	Sumário dos resultados . . . . .	55
7.2	Trabalhos futuros . . . . .	56
	<b>Bibliografia</b>	<b>57</b>
<b>A</b>	<b>Definições e introdução de conceitos básicos</b>	<b>59</b>
A.1	Propriedades do traço de uma matriz . . . . .	59
A.2	Propriedades do produto de Kronecker . . . . .	60
A.3	Teorema do ponto de sela para otimização não linear . . . . .	60
A.4	Convexidade de uma classe de funções quadráticas . . . . .	61
<b>B</b>	<b>Procedimento para obtenção da equação (4.8) a partir da equação (4.7)</b>	<b>63</b>

# Lista de Figuras

6.1	Evolução das componentes $x_1$ , $x_2$ e $x_3$ do vetor de estados $x$ . . . . .	51
6.2	Evolução da componente $x_1$ do vetor de estados $x$ . . . . .	52
6.3	Evolução da componente $x_2$ do vetor de estados $x$ . . . . .	52
6.4	Evolução da componente $x_3$ do vetor de estados $x$ . . . . .	53



# Lista de Símbolos

$E[\cdot]$	- Esperança matemática
$Pr(A)$	- Probabilidade de ocorrência do evento A
$\mathcal{N}$	- Espaço de estados da Cadeia de Markov
$\theta(t)$	- Estado da Cadeia de Markov no instante $t$
$p_{ij}$	- Probabilidade de transição do estado $i$ para $j$
$\mathbb{P} = [p_{ij}], \forall i, j \in \mathcal{N}$	- Matriz de transição de probabilidade
$\mu_{t k} \in \mathcal{N}$	- Distribuição de probabilidade no instante $t$ dado o conhecimento até o instante $k$
$E_{x_k, \mu_{k k}}[\cdot]$	- Representação para $E[\cdot   x(k) = x_k, \theta(k) \sim \mu_{k k}]$
$V'$	- Transposta da matriz $V$
$V \geq 0$ ( $V > 0$ )	- Matriz semidefinida positiva (definida positiva)
$V^{-1}$	- Inversa da matriz $V$
$\ \cdot\ $ ( $\ V\ $ )	- Norma vetorial padrão no $\mathbb{R}^n$ (norma induzida da matriz $V$ )
$\mathbf{V}$	- Sequência ou conjunto $\{V_1, \dots, V_r\}$
$\mathcal{M}^{n \times s}$ ( $\mathcal{M}^n$ )	- Espaço linear normado de todas as matrizes reais $n \times s$ ( $n \times n$ )
$\mathcal{M}^{n0}$ ( $\mathcal{M}^{n+}$ )	- $\mathcal{M}^{n0} \subset \mathcal{M}^n$ ( $\mathcal{M}^{n+} \subset \mathcal{M}^n$ ) onde as matrizes $V_i \in \mathcal{M}^n$ são tais que $V_i - V'_i \geq 0$ ( $V_i - V'_i > 0$ ) para todo $i = 1, \dots, r$
$\mathbb{M}^{n \times s}$ ( $\mathbb{M}^n$ )	- Espaço linear das sequências $\mathbf{V}$ onde $V_i \in \mathcal{M}^{n \times s}$ ( $\mathcal{M}^n$ ) para $i = 1, \dots, r$
$\mathbb{M}^{n0}$ ( $\mathbb{M}^{n+}$ )	- $\mathbb{M}^{n0} \subset \mathbb{M}^n$ ( $\mathbb{M}^{n+} \subset \mathbb{M}^n$ ) onde a sequência $\mathbf{V} \in \mathbb{M}^n$ é tal que $V_i \in \mathcal{M}^{n0}$ ( $V_i \in \mathcal{M}^{n+}$ ) para $i = 1, \dots, r$
$\mathbf{U} \geq \mathbf{V}$ ( $\mathbf{U} > \mathbf{V}$ )	- Matriz $(U_i - V_i) \in \mathcal{M}^n$ semidefinida positiva (definida positiva) para $i = 1, \dots, r$
$tr\{\cdot\}$	- Traço de matriz
$\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$	- Função indicadora
$\varepsilon_i(\mathbf{V}) = \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ij} V_j$	- Operador sobre o conjunto $\mathbf{V}$
$\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle = \sum_{i \in \mathcal{N}} tr\{U'_i V_i\}$	- Produto interno



# Trabalhos Publicados Pelo Autor

1. Madeira, D. S., do Val, J. B. R. Condições necessárias e suficientes de otimalidade para o problema de controle de sistemas lineares determinísticos sujeitos à realimentação de saída. *Congresso Brasileiro de Automática*, Campina Grande, PB, 2012. (Submetido).



# Capítulo 1

## Introdução

Este primeiro capítulo será dedicado à apresentação dos sistemas dinâmicos lineares discretos no tempo, tanto os determinísticos quanto os estocásticos. Faremos, também, uma apresentação dos Sistemas Lineares com Saltos Markovianos (SLSMs), uma classe de sistemas estocásticos. Será introduzido o conceito de controle por realimentação de saída, visto que o objetivo maior do nosso trabalho é obter condições suficientes de otimalidade para o problema de controle ótimo de sistemas lineares submetidos a este tipo de realimentação. Na última seção deste capítulo, faremos uma breve exposição do modo como os demais capítulos da dissertação estão distribuídos, citando os tópicos abordados em cada um deles.

### 1.1 Controle por realimentação de saída

Suponha um sistema linear discreto no tempo governado pela seguinte dinâmica,  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + Hw(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

em que  $x$  é o vetor de estados,  $u$  é o controle aplicado,  $y$  é o vetor de saída e  $w$  é o ruído aditivo que atua em cada instante sobre o sistema. As matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $H$  são as matrizes do sistema e possuem dimensões apropriadas. Em conexão com os sistemas  $(A, B, C, H)$ , estudaremos um tipo particular de retroalimentação de absoluta relevância em teoria de controle: a realimentação de saída.

Muitas vezes, não temos acesso a todas as variáveis de estado, seja porque não é possível medi-las, seja porque elas sequer possuem significado físico. Faz sentido, então, utilizar um vetor de saída acessível para fins de controle. E este é exatamente o cenário no qual iremos atuar: o vetor de estados  $x$  não está acessível, de modo que esta variável aparece explicitamente nas equações e funcionais de custo apenas como um artifício matemático, uma vez que assumimos um modelo linear para o sistema; a variável a qual temos acesso é de fato a saída  $y$ .

Segundo (Mustafa, 1995), um controle por realimentação de saída é caracterizado pela aplicação

de uma ação de controle  $u(t)$  proporcional à saída  $y(t)$ , ou seja,  $u(t) = K(t)y(t)$ . Consequentemente:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + BK(t)y(t) + Hw(t) \\ &= (A + BK(t)C)x(t) + Hw(t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Esta formulação significa que em cada instante ( $t \geq 0$ ) um controle  $K(t)$  é aplicado e que esta ação leva o sistema dinâmico  $(A, B, C, H)$  de um estado  $x(t)$  a um estado  $x(t+1)$ . Ressaltamos aqui que, com o objetivo de nos manter em sintonia com a notação usual da área, adotaremos um ganho de controle sempre designado por  $u(t)$ . Logo, nosso sistema dinâmico assume a seguinte forma:

$$x(t+1) = (A + Bu(t)C)x(t) + Hw(t) \quad (1.2)$$

em que  $u(t)$  é uma matriz de dimensão apropriada a cada  $t \geq 0$ .

Utilizaremos esta notação durante toda a dissertação. Deve estar claro que, de agora em diante, sempre que nos referirmos à aplicação de uma ação de controle em um dado instante, estaremos atuando em um contexto definido por (1.2).

## 1.2 O índice de desempenho quadrático

Definido o tipo de sistema linear em questão, surge a necessidade de descrever o critério de desempenho a ser utilizado. Esta tarefa é relevante, pois temos interesse em controlar o sistema otimizando recursos. Tal critério assume, assim como em (Vargas, 2004), a forma de um funcional de custo quadrático envolvendo as variáveis de estado e de controle:

$$J_{\mathbf{U}}^N := E_{x_0} \left\{ \left[ \sum_{t=0}^{N-1} x(t)' Q x(t) + x(t)' C' u(t)' R u(t) C x(t) \right] + x(N)' F x(N) \right\} \quad (1.3)$$

Lembrando que  $E_{x_0}[\cdot] \equiv E[\cdot | x(0) = x_0]$ , em que  $x_0$  representa um estado inicial fixo, e que  $N > 0$  representa uma quantidade finita de estágios, um horizonte finito. As matrizes  $Q \geq 0$ ,  $R > 0$  e  $F \geq 0$  exercem uma função de ponderação. Por meio de tais matrizes, são penalizados os desvios dos estados  $x(t)$  com relação à origem e o esforço de controle ou energia utilizada no processo de regulação. É bastante intuitivo que este problema de otimização multi-estágios seja formulado deste modo, uma vez que nosso intuito é levar o estado  $x(t)$  à origem, realizando o menor esforço de controle possível. Evidentemente, ponderações para mais ou para menos das variáveis estado e controle podem ser reguladas ajustando adequadamente as matrizes  $Q$ ,  $R$  e  $F$ . Maiores informações sobre a estrutura e as propriedades de tais matrizes serão fornecidas no capítulo 3. Em resumo, desejamos minimizar o funcional:

$$J_{\mathbf{U}}^N = E_{x_0} \left[ \sum_{t=0}^{N-1} q(t) + \bar{q}(N) \right] \quad (1.4)$$

considerando uma sequência de ganhos de controle  $u(t)$ ,  $t = 0, \dots, N-1$ , e o seguinte conjunto de restrições na forma do processo estocástico  $\Upsilon$ :

$$\Upsilon : \begin{cases} x(t+1) = (A + Bu(t)C)x(t) + Hw(t), \\ q(t) = x(t)'Qx(t) + x(t)'C'u(t)'Ru(t)Cx(t), \\ \bar{q}(N) = x(N)'Fx(N), \\ t \geq 0, x(0) = x_0. \end{cases}$$

Os problemas discutidos nos capítulos 2, 3 e 4 desta dissertação podem ser incluídos neste grupo de sistemas. A classe dos sistemas determinísticos, logicamente, corresponde àqueles casos em que o ruído  $w$  é nulo. Como resultado, o funcional de custo (1.3) não envolve um valor esperado, mas um valor precisamente conhecido.

### 1.3 A classe dos Sistemas Lineares com Saltos Markovianos

Na prática, muitos sistemas dinâmicos não são adequadamente modelados pela classe dos sistemas lineares invariantes no tempo (1.2). No mundo real, a presença de ruídos, mudanças abruptas, falhas em componentes e eventuais alterações em interconexões de subsistemas, por exemplo, adicionam características estruturais importantes e que precisam ser levadas em consideração quando da construção de um modelo matemático, vide (Vargas, 2004). Os Sistemas Lineares com Saltos Markovianos (SLSMs) constituem uma classe de sistemas que tem encontrado grande aplicabilidade no contexto citado, tendo despertado crescente interesse tanto na comunidade acadêmica quanto na indústria. Uma série de problemas relacionados a este grupo de sistemas híbridos já foi solucionada, incluindo questões referentes à estabilidade e a condições de otimalidade em diferentes cenários. Importantes referências na área são (Costa et al., 2005) e (do Val e Başar, 1999).

Para fins de ilustração, consideremos uma situação prática bastante interessante analisada por (Lameiro and Duff, 1979). Os autores consideraram o caso de um sistema de aquecimento de água para fins domésticos utilizando energia solar. Além de variáveis tais como eficiência dos coletores solares empregados, aspectos arquitetônicos e localização geográfica, quatro itens mereceram destaque: temperatura ambiente ( $T_a$ ), temperatura de armazenamento ( $T_s$ ), nível de radiação solar ( $I_T$ ) e demanda de água quente ( $HW$ ). Estas variáveis foram modeladas por processos estocásticos e valores médios para diferentes períodos do dia foram coletados em um horizonte de até um ano, em intervalos de uma hora. O objetivo do trabalho consistia em obter um modelo matemático que permitisse prever, no longo prazo, a eficiência ou rendimento  $U_A$  do sistema como um todo, uma razão entre as quantidades fornecida e demandada de água aquecida, levando em consideração variações abruptas nos parâmetros ( $T_a, T_s, I_T, HW$ ).

Combinando as informações armazenados em um amplo banco de dados (modelos probabilísticos para as variáveis envolvidas) com uma série de equações que regem a dinâmica interna do sistema, os autores propuseram um modelo para a curva de eficiência do mesmo. Esta eficiência é, para cada combinação ( $T_a, T_s, I_T, HW$ ), dada por uma função  $U_A(T_a, T_s, I_T, HW)$  particular. Cada combinação de níveis de temperatura ambiente, temperatura de armazenamento de água, nível de radiação e demanda de água aquecida permite estabelecer uma curva de rendimento específica para o sistema. Supondo que exista um número finito  $\eta$  de combinações possíveis para tal quádrupla, temos que o sistema visita em cada instante algum estado num conjunto  $\mathcal{N} = \{1, \dots, \eta\}$ . Além disso, sendo a

probabilidade de transição de um estado  $i \in \mathcal{N}$  para um estado  $j \in \mathcal{N}$  designada por  $p_{ij}$ , a matriz de transição de probabilidade  $\mathbb{P}$  abaixo especifica todas as possibilidades de transição entre dois estados quaisquer do conjunto  $\mathcal{N}$ :

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1\eta} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2\eta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{\eta 1} & p_{\eta 2} & \cdots & p_{\eta\eta} \end{bmatrix}$$

Lameiro e Duff (1979) consideraram que o processo estocástico em questão constitui uma cadeia de Markov homogênea, com um número finito  $\eta$  de estados e uma matriz de transição  $\mathbb{P}$ . Deste modo, uma série de incertezas inerentes ao problema foi inserida no modelo. Empregando este raciocínio, os autores puderam tratar seu problema de otimização de um modo bastante simples e computacionalmente eficiente, obtendo excelentes resultados.

Por meio deste exemplo, introduzimos a idéia geral dos SLSMs, uma classe de sistemas estocásticos cuja dinâmica se altera de forma súbita em instantes aleatórios, mas que se comportam como sistemas lineares entre os saltos. Cada combinação define uma dinâmica linear governada pelos parâmetros  $(T_a, T_s, I_T, HW)$  e as probabilidades de realização dos *saltos* Markovianos entre dois estados quaisquer são determinadas pela matriz de transição  $\mathbb{P}$ . Resumindo:

$$U_{A,i}(T_{a,i}, T_{s,i}, I_{T,i}, HW_i) \rightarrow U_{A,j}(T_{a,j}, T_{s,j}, I_{T,j}, HW_j) \text{ com probabilidade } p_{ij}$$

A modelagem de sistemas lineares estocásticos por meio de SLSMs encontrou aplicabilidade em diversas áreas da ciência e da engenharia. Como exemplo, podemos citar a robótica (Saridis, 1993), a aeronáutica (Athans et al., 1977), o controle de receptores térmicos solares (Sworder e Rogers, 1977), as telecomunicações (Kitchin, 1986), a automação de veículos elétricos (Moura et al., 2011) e os sistemas macroeconômicos (do Val e Başar, 1999).

Suponha que desejamos otimizar um funcional de custo  $J_U^N$ , uma função da curva de rendimento  $U_A$  do sistema de aquecimento. Assumindo uma distribuição inicial  $\mu_0$  da cadeia de Markov e um estado inicial  $x_0$ , nosso problema de controle ótimo pode ser formulado do seguinte modo:

$$J_U^N = E_{x_0, \mu_0} \left[ \sum_{t=0}^{N-1} q(t) + \bar{q}(N) \right]$$

considerando um ganho de controle  $u(t)$  e o seguinte conjunto de restrições na forma do processo estocástico  $\Upsilon$ :

$$\Upsilon : \begin{cases} x(t+1) = f(T_a, T_s, I_T, HW, x(t)), \\ q(t) = g(U_A(T_a, T_s, I_T, HW), x(t)), \\ t \geq 0, x(0) = x_0, \theta(0) \sim \mu_0. \end{cases}$$

em que  $f$  representa a dinâmica do sistema,  $g$  um custo por estágio e  $\bar{q}(N)$  um custo final.

## 1.4 Estrutura da dissertação

No capítulo 2, introduzimos o princípio do máximo discreto como uma condição necessária de otimalidade. O princípio será apresentado inicialmente em sua forma clássica e será também feito um estudo sobre a classe de problemas a qual ele se aplica. Posteriormente, um princípio do máximo alternativo será apresentado a fim de que condições suficientes de otimalidade possam ser obtidas.

No capítulo 3, o princípio do máximo discreto, nos moldes do que foi introduzido no final do capítulo 2, será utilizado na obtenção de condições suficientes de otimalidade para o problema de controle de sistemas lineares determinísticos sujeitos à realimentação de saída.

No capítulo 4, provamos que o princípio do máximo garante otimalidade local para o problema de controle de sistemas lineares estocásticos (com ruído aditivo) sujeitos à realimentação de saída. Além disso, utilizando ferramentas de otimização pautadas em convexidade, condições suficientes de otimalidade são obtidas para um cenário restrito, a saber: sistemas SISO,  $N = 2$  estágios e matrizes  $C$  (saída) e  $B$  (entrada) ortogonais, ou seja,  $CB = 0$ .

O capítulo 5 será dedicado à extensão das ideias apresentadas no final do capítulo 5 ao problema de controle de SLSMs. O mesmo cenário particular considerado no capítulo anterior é analisado. Novamente, condições suficientes de otimalidade são obtidas.

O capítulo 6 contém algumas aplicações da teoria desenvolvida.

O capítulo 7 fornece um resumo das principais contribuições desta dissertação, bem como apresenta sugestões para trabalhos futuros na área.



# Capítulo 2

## O princípio do máximo discreto

O Princípio do Máximo de Pontryagin, em sua versão discreta, é introduzido como uma condição necessária de otimalidade para uma certa classe de problemas de otimização multi-estágios. Primeiramente, investigamos em quais casos a utilização do princípio é justificada. Em seguida, uma variação do princípio do máximo discreto é apresentada com o objetivo de se obter condições suficientes de otimalidade.

Ao longo deste capítulo, trataremos exclusivamente de problemas de otimização nos quais se deseja *maximizar* um determinado funcional de custo. Procederemos deste modo para manter a coerência com as referências consultadas quando da fase de revisão bibliográfica do nosso trabalho. Embora venhamos a abandonar esta idéia de maximização a partir do capítulo 3, este foi o contexto no qual o Princípio do Máximo foi desenvolvido e é importante que forneçamos esta perspectiva histórica. Do capítulo 3 em diante, passaremos a nos dedicar à *minimização* de funções custo, dado que este é o cenário no qual os problemas de controle que nos propomos a resolver estão definidos.

Destacamos, aqui, que o ferramental matemático a ser utilizado em capítulos futuros é absolutamente equivalente ao adotado neste (sobretudo seção 2.3) e que esta mudança não deve constituir dificuldade alguma para o leitor. No presente capítulo faremos referência sobretudo à concavidade e à maximização de funções, nos demais capítulos falaremos em convexidade e minimização. Vale lembrar que a maximização de funções côncavas é um procedimento equivalente à minimização de funções convexas. Em termos de condições de otimalidade, os problemas são similares.

### 2.1 Perspectiva histórica

O problema de controle ótimo de sistemas dinâmicos tem fundamental importância em engenharia, tanto do ponto de vista teórico quanto da perspectiva das aplicações. No caso dos sistemas discretos no tempo, esta tarefa envolve a otimização de critérios de desempenho em um certo horizonte ou quantidades de estágios. Como resultado, tal classe de problemas é rotineiramente chamada de problemas de otimização multi-estágios, em contraposição ao caso estático.

Historicamente, problemas de otimização multi-estágios têm sido resolvidos por uma série de métodos. Entre eles o cálculo variacional, uma gama de métodos heurísticos e o cálculo diferencial, por exemplo, podem ser utilizados dependendo do problema em questão. Todavia, os dois métodos gerais de resolução de problemas de otimização multi-estágios são a programação dinâmica e o

princípio do máximo, ambos desenvolvidos ainda na década de 60 do século XX, vide (Nahorski et al, 1984). Cada método possui suas vantagens e desvantagens, tendo sua aplicabilidade a depender sobremaneira da natureza do problema.

O método da programação dinâmica foi criado e desenvolvido principalmente por Bellman e encontra vasta aplicabilidade na solução de problemas multi-estágios, uma vez que faz pouquíssimas restrições com relação às funções envolvidas. Para se ter uma idéia da generalidade do método, não é exigido sequer que tais funções sejam diferenciáveis ou contínuas. Por outro lado, uma grande quantidade de combinações envolvendo estados, controles e custos precisa ser, em cada estágio, calculada e armazenada. Isto faz com que a resolução até mesmo de problemas simples se torne onerosa do ponto de vista computacional.

O princípio do máximo, por sua vez, divide o problema principal em uma série de problemas mais simples. Esta idéia é marcante e desempenhou papel central em teoria de controle, notadamente no caso dos sistemas contínuos, a partir do momento em que foi introduzida no final da década de 50 do século XX. A desvantagem é que sua aplicabilidade a uma dada situação exige das funções envolvidas uma série de propriedades, tais como continuidade, diferenciabilidade e, em muitos casos, convexidade ou linearidade. Adicionalmente, verificamos que sua extensão para o grupo dos sistemas discretos no tempo enfrentou sérias dificuldades ao longo dos últimos 60 anos.

O princípio do máximo foi inicialmente postulado por Pontryagin e colaboradores, no contexto de sistemas dinâmicos contínuos. A idéia chave do método reside na construção de uma função especial chamada Hamiltoniano que, em cada instante, depende das variáveis estado e controle. Dispondo da sequência de valores ótimos para os estados, o Hamiltoniano é otimizado em cada estágio pelo controle ótimo correspondente.

Embora não tenham sido encontradas grandes dificuldades para aplicar o princípio do máximo aos sistemas contínuos, a adaptação para os sistemas discretos no tempo produziu uma série de erros. Para muitos sistemas discretos a utilização do princípio do máximo é, de fato, injustificada e a principal razão para os resultados incorretos presentes na literatura reside no fato de o conceito de convexidade/concavidade ter sido muitas vezes ignorado ou negligenciado.

De acordo com a literatura, Halkin (1966) e Holtzmann (1966) foram os primeiros a reconhecer a importância da convexidade quando em conexão com o princípio do máximo. O primeiro autor mostrou que o princípio do máximo é válido quando o conjunto formado por todos os valores admissíveis de estado e custo acumulado em cada estágio é convexo, hipótese que acabou por comprometer a aplicabilidade de seus resultados. O segundo autor, por sua vez, exige do sistema dinâmico em questão uma propriedade mais branda que convexidade, chamada *convexidade direcional*. Como resultado dos trabalhos de Holtzman, o princípio do máximo teve sua aplicabilidade consideravelmente expandida. Apesar dos avanços, o princípio do máximo discreto conseguiu se estabelecer apenas como uma condição necessária de otimalidade e para uma classe restrita de problemas.

Vidal (1987) chegou, contudo, a propor um princípio do máximo discreto que fornece suficiência. Este autor não exige das funções em questão características eventualmente restritivas como concavidade conjunta nas variáveis estado e controle, separabilidade ou mesmo pseudo-concavidade. Todavia, a condição de otimalidade global em cada estágio proposta é algo bastante raro de se verificar na prática. Foi possível, todavia, tomar suas idéias como base para o raciocínio desenvolvido no capítulo 3 desta dissertação.

## 2.2 O princípio do máximo discreto como uma condição necessária de otimalidade

Considere o seguinte problema de maximizar o funcional de custo  $J_{\mathbf{U}}^N$  resultante da aplicação de uma sequência de ganhos de controle  $\mathbf{U} \in \{u(t) : t = 0, \dots, N-1\}$ :

$$J_{\mathbf{U}}^N = \sum_{t=0}^{N-1} q(t, x(t), u(t)) + \bar{q}(N, x(N)) \quad (2.1)$$

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)); \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (2.2)$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^{s \times m}; \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (2.3)$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n; \quad t = 0, \dots, N; \quad x(0) = x_0 \quad (2.4)$$

Os conjuntos domínio para as variáveis  $x$  e  $u$  são dados e o problema de otimização está sujeito, em cada instante, à restrição de igualdade (2.2). As funções  $q$ ,  $\bar{q}$  e  $f$  são supostas diferenciáveis com relação às suas respectivas variáveis nos instantes devidos. É importante ressaltar que, embora não seja comum na literatura, adotaremos um controle  $u$  de natureza matricial. Procederemos deste modo com o objetivo de tratar o problema de um ponto de vista multivariável, neste caso com um número  $s$  de entradas e um número  $m$  de saídas quaisquer. Ao longo deste e dos próximos capítulos, ficará claro que esta consideração não constituirá empecilho algum ao desenvolvimento do trabalho. Muito pelo contrário, ela nos permitirá analisar o problema de modo bem genérico.

Posto isto, adotando co-estados ou multiplicadores de Lagrange  $p^*(t) \in \{\mathbb{R}^n\}'$ ,  $t = 1, \dots, N$ , construímos a seguinte função Lagrangeana:

$$L_{\mathbf{U}}^N := \sum_{t=0}^{N-1} \{q(t, x(t), u(t)) + p^*(t+1) [f(t, x(t), u(t)) - x(t+1)]\} + \bar{q}(N, x(N)) \quad (2.5)$$

que pode ainda ser apresentada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{U}}^N = & [q(0, x(0), u(0)) + p^*(1)f(0, x(0), u(0))] \\ & + \sum_{t=1}^{N-1} [q(t, x(t), u(t)) + p^*(t+1)f(t, x(t), u(t)) - p^*(t)x(t)] \\ & + [\bar{q}(N, x(N)) - p^*(N)x(N)] \quad (2.6) \end{aligned}$$

É fácil ver que ao minimizar a função Lagrangeana  $L_{\mathbf{U}}^N$  nas variáveis  $\{x^*, u^*, p^*\}$  minimizamos também a função primal  $J_{\mathbf{U}}^N$  na dupla  $\{x^*, u^*\}$ . A segunda função assume os mesmos valores da primeira para cada combinação de variáveis, uma vez que as restrições de igualdade adicionadas em cada instante têm valor nulo. Com o objetivo de determinar uma sequência de pontos estacionários para a

função Lagrangeana, calculamos as derivadas de primeira ordem da função (2.6). Considerando um estado inicial  $x(0)$  fixo temos, em  $t = 0$ :

$$\frac{\partial L_{\mathbf{U}}^N}{\partial u(0)} = \frac{\partial [q(0, x(0), u(0))]}{\partial u(0)} + \frac{\partial [p^*(1)f(0, x(0), u(0))]}{\partial u(0)} \quad (2.7)$$

Nos instantes  $t = 1, \dots, N - 1$ , temos:

$$\frac{\partial L_{\mathbf{U}}^N}{\partial u(t)} = \frac{\partial [q(t, x(t), u(t))]}{\partial u(t)} + \frac{\partial [p^*(t+1)f(t, x(t), u(t)) - p^*(t)x(t)]}{\partial u(t)} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial L_{\mathbf{U}}^N}{\partial x(t)} = \frac{\partial [q(t, x(t), u(t))]}{\partial x(t)} + \frac{\partial [p^*(t+1)f(t, x(t), u(t)) - p^*(t)x(t)]}{\partial x(t)} \quad (2.9)$$

No instante final  $t = N$ :

$$\frac{\partial L_{\mathbf{U}}^N}{\partial x(N)} = \frac{\partial [\bar{q}(N, x(N)) - p^*(N)x(N)]}{\partial x(N)} \quad (2.10)$$

Dizemos, então, que três seqüências  $\{x^*, u^*, p^*\}$  constituem uma seqüência de pontos estacionários se anulam as derivadas de primeira ordem (2.7)–(2.10) em cada instante referido. Tais seqüências são candidatas a fornecerem um ótimo (global) para o problema. A depender das características do problema de otimização em questão, pode vir a ser possível provar que a tripla  $\{x^*, u^*, p^*\}$  garante condições necessárias e eventualmente suficientes de otimalidade.

Retomando, a representação (2.6) seria um modo bem genérico de tratar a questão. Encontra-se consolidado na literatura, todavia, uma abordagem alternativa formulada em termos de uma função especial  $H(t, x(t), u(t), p^*(t+1))$  conhecida como Hamiltoniano, definida do seguinte modo:

$$H(t, x(t), u(t), p^*(t+1)) := q(t, x(t), u(t)) + p^*(t+1)f(t, x(t), u(t)) \quad (2.11)$$

Como resultado, a função Lagrangeana  $L_{\mathbf{U}}^N$  é dada por:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{U}}^N &= H(0, x(0), u(0), p^*(1)) \\ &\quad + \sum_{t=1}^{N-1} [H(t, x(t), u(t), p^*(t+1)) - p^*(t)x(t)] \\ &\quad + [\bar{q}(N, x(N)) - p^*(N)x(N)] \end{aligned}$$

Feita esta substituição, conforme (Nahorski et al., 1984) e (Holtzman, 1966), o princípio do máximo discreto pode ser enunciado em sua forma clássica do seguinte modo:

**Teorema 2.1.** *Considere o problema (2.1)–(2.4) e a definição (2.11). Seja  $\{u^*(0), \dots, u^*(N-1)\}$  uma estratégia de controle e  $\{x^*(0), \dots, x^*(N)\}$  a seqüência de estados resultante. Suponha também que, juntamente com tais estados e ganhos de controle, exista uma seqüência de multiplicadores  $\{p^*(1), \dots, p^*(N)\}$  constituindo uma seqüência de pontos estacionários  $\{x^*, u^*, p^*\}$ . Então, em*

cada instante  $t = 0, \dots, N - 1$ , o ganho  $u^*(t)$  maximiza  $H(t, x^*(t), u(t), p^*(t + 1))$ .

$$H(t, x^*(t), u^*(t), p^*(t + 1)) \geq H(t, x^*(t), u(t), p^*(t + 1)), \quad \forall u(t) \quad (2.12)$$

A sequência  $\{x^*, u^*, p^*\}$  garante as condições necessárias de otimalidade.

Cabe, agora, tecer alguns comentários acerca desta formulação do princípio do máximo discreto. Primeiramente, a relação (2.12) não se aplica a todos os problemas do tipo (2.1)–(2.4). Ou seja, existe um série de problemas de otimização multi-estágios em que, dada uma tripla  $\{x^*, u^*, p^*\}$  conforme especificado, a função Hamiltoniano não é otimizada em cada instante  $t = 0, \dots, N - 1$  pelo controle  $u^*(t)$ . Além disso, deve estar claro que a aplicação ou validade da relação (2.12) a uma dada classe de problemas garante apenas as condições necessárias de otimalidade. O princípio do máximo discreto apresentado nesta seção não garante otimalidade global.

Faz-se necessário, então, um breve estudo sobre a aplicabilidade de tal princípio. Halkin (1966) provou que o princípio do máximo discreto se aplica a sistemas cujos conjuntos de estados expandidos admissíveis são convexos. Para melhor compreensão deste resultado, considere como em (Nahorski et al., 1984) um vetor de estados expandido da forma:

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} x^0(t) \\ x(t) \end{bmatrix}, \quad t = 0, \dots, N - 1 \quad (2.13)$$

em que

$$x^0(t + 1) = q(t, x(t), u(t)) + x^0(t), \quad x^0(0) = 0$$

Um valor para o ganho  $u(t)$  que pertença ao domínio estabelecido em (2.3) será chamado de *controle admissível*. O conjunto  $\vartheta_j = \{u(0), \dots, u(j)\}$  ( $0 \leq j \leq N - 1$ ) é chamado de uma *sequência de controle admissível*. O conjunto de todas as sequências de controle admissíveis será designado por  $S_j$ . Uma estratégia de controle  $\vartheta_{N-1}$  que minimiza o funcional  $J_U^N$  é chamada de *estratégia ótima*.

Agora, para um dado  $x(0) = x_0$ , tomamos todos os valores possíveis de  $u(0)$ . Como resultado, o estado  $x(1)$  toma valores em um conjunto que chamaremos de  $Y_1(x_0)$ , o conjunto dos estados admissíveis (ou atingíveis) a partir de  $x_0$ :

$$Y_1(x_0) = f(0, x_0, \mathbb{R}^{s \times m})$$

Para um estado inicial  $x_0$  fixo, o conjunto  $Y_1(x_0) = Y_1$  é também o conjunto de todos os estados admissíveis no instante  $t = 1$ , ou seja, no primeiro estágio. De modo análogo, para um dado estado  $x(1) \in Y_1$ , definimos o conjunto de estados admissíveis a partir deste estágio:

$$Y_2(x(1)) = f(1, x(1), \mathbb{R}^{s \times m}) \cap \mathbb{R}^n$$

Lembrando que  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , para  $t = 0, \dots, N$ , conforme estabelecido em (2.4). Fazendo  $x(1)$  tomar todos os valores possíveis em  $Y_1$ , o conjunto dos estados admissíveis no segundo estágio é:

$$Y_2 = \bigcup_{x(1) \in Y_1} Y_2(x(1)) = \bigcup_{x(1) \in Y_1} f(1, x(1), \mathbb{R}^{s \times m}) \cap \mathbb{R}^n$$

Logo, o conjunto de estados admissíveis a partir de um estado  $x(t)$ , ou seja, o conjunto  $Y_{t+1}(x(t))$ , pode ser obtido recursivamente como a seguir:

$$\begin{aligned} Y_1(x_0) &= f(0, x_0, \mathbb{R}^{s \times m}) \cap \mathbb{R}^n \\ Y_{t+1}(x(t)) &= f(t, x(t), \mathbb{R}^{s \times m}) \cap \mathbb{R}^n, \quad t = 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Por sua vez, o conjunto de estados admissíveis no estágio  $t+1$ ,  $Y_{t+1}$ , é dado por:

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_1(x_0) \\ Y_{t+1} &= \bigcup_{x(t) \in Y_t} Y_{t+1}(x(t)), \quad t = 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Tratada a questão do conjunto de estados admissíveis, investigaremos a partir de agora o efeito de uma estratégia de controle  $\vartheta_j$  no funcional de custo associado. Introduziremos neste momento, como uma função da sequência de controle admissível  $\vartheta_j = \{u(0), \dots, u(j)\}$ , o critério do custo acumulado:

$$R_{t+1}(\vartheta_t) = \sum_{j=0}^t q(j, x(j), u(j)), \quad t = 0, \dots, N-1$$

Este custo acumulado também pode ser apresentado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} R_0 &= 0 \\ R_{t+1} &= R_t + q(t, x(t), u(t)), \quad t = 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Temos então, conforme previamente introduzido em (2.13), o seguinte vetor de estados expandido:

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} R_t \\ x(t) \end{bmatrix}, \quad t = 0, \dots, N-1$$

O conjunto de estados expandidos admissíveis a partir de  $\hat{x}(t)$  pode ser definido recursivamente para  $t = 0, \dots, N-1$ :

$$\begin{aligned} \hat{Y}_1(\hat{x}(0)) &= \{q(0, x_0, u(0)), f_0(0, x_0, u(0)); u(0) \in \mathbb{R}^{s \times m}\} \cap \{(-\infty, +\infty) \times \mathbb{R}^n\} \\ \hat{x}(0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_0 \end{bmatrix} \\ \hat{Y}_{t+1}(\hat{x}(t)) &= \{R_t + q(t, x(t), u(t)), f(t, x(t), u(t)); u(t) \in \mathbb{R}^{s \times m}\} \cap \{(-\infty, +\infty) \times \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

Conseqüentemente, o conjunto de estados expandidos admissíveis no estágio  $t+1$  é:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_1 &= \hat{Y}_1(\hat{x}(0)) \\ \hat{Y}_{t+1} &= \bigcup_{\hat{x}(t) \in \hat{Y}_t} \hat{Y}_{t+1}(\hat{x}(t)), \quad t = 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Segundo Halkin (1966), se este conjunto  $\hat{Y}_{t+1}$  de estados expandidos admissíveis for convexo, o princípio do máximo discreto é válido. Tal condição de convexidade, infelizmente, acabou por reduzir consideravelmente a aplicabilidade do princípio. Foi com (Holtzman, 1966) que o princípio do máximo discreto encontrou aplicabilidade em uma série de problemas práticos. Isto se deve ao fato de este autor exigir, do conjunto  $\hat{Y}_{t+1}$  um tipo mais brando de convexidade, chamado de *convexidade direcional*.

Considere, além dos vetores  $y_1$  e  $y_2$ , e do escalar  $0 \leq \mu \leq 1$ , o escalar  $\beta \geq 0$ . Segundo Holtzman (1966) e Nahorski et al. (1984), dizemos que o conjunto  $\hat{Y}_{t+1}$  é direcionalmente convexo se

$$\mu y_1 + (1 - \mu)y_2 + \beta e \in \hat{Y}_{t+1}(\hat{x}(t)), \text{ para todo } 0 \leq \mu \leq 1, \beta \geq 0 \quad (2.14)$$

com

$$e = [1, 0, \dots, 0]^T$$

relaxando o requisito de convexidade, isto é:

$$\mu y_1 + (1 - \mu)y_2 \in \hat{Y}_{t+1}(\hat{x}(t)), \text{ para todo } 0 \leq \mu \leq 1$$

Por exemplo, sistemas cujas funções custo por estágio  $q(t, x(t), u(t))$  são côncavas no ganho de controle e cujas dinâmicas  $f(t, x(t), u(t))$  são lineares neste mesmo ganho (mesmo que a função como um todo seja não-linear) são, de acordo com (Holtzman, 1966) direcionalmente convexos. O princípio do máximo discreto, entendido em termos da otimização de uma função Hamiltoniana, garante condições necessárias de otimalidade para tais casos. Todo par de sequências  $\{x, u\}$  que é solução para o problema (2.1)–(2.4) satisfaz a relação (2.12).

O princípio do máximo discreto nos moldes do Teorema 2.1 falha, todavia, em garantir condições suficientes de otimalidade para o problema de controle de sistemas multi-estágios. Justamente por este motivo, abordaremos na seção 2.3 a seguir, uma formulação alternativa para o princípio do máximo discreto, mantendo a linearidade no multiplicador de Lagrange  $p^*$ .

## 2.3 O princípio do máximo como uma condição suficiente de otimalidade

Tomando a função Lagrangeana (2.6) e a definição (2.11) como referência, Vidal (1987) estabelece um princípio do máximo discreto em termos da otimização global, em cada estágio, de uma função composta não somente pelo Hamiltoniano, mas eventualmente por funções lineares dos vetores de estado, ganho de controle e multiplicadores de Lagrange. Tal princípio, caso verificado, fornece condições suficientes de otimalidade. Considere o teorema a seguir.

**Teorema 2.2.** *Suponha que existam sequências factíveis  $\{x^*, u^*, p^*\}$  satisfazendo simultaneamente*

as condições abaixo:

$$\begin{aligned} u^*(0) & \text{ maximiza } H(0, x(0), u(0), p^*(1)) \\ \{x^*(t), u^*(t)\} & \text{ maximiza } H(t, x(t), u(t), p^*(t+1)) \\ & -p^*(t)x(t), \quad t = 1, \dots, N-1 \\ x^*(N) & \text{ maximiza } \bar{q}(N, x(N)) - p^*(N)x(N) \end{aligned}$$

Então  $\{x^*, u^*\}$  é um ótimo global para o problema (2.1)–(2.4).

**Prova:** (Vidal, 1987) afirma que considerando o problema, em cada instante, como um problema estático em  $\{x(t), u(t)\}$ , verificamos a existência de um ponto de sela  $\{x^*(t), u^*(t), p^*(t+1)\}$  para a função Lagrangeana. E se tal ponto de sela existe, ele consitui um ótimo global para a função, vide Teorema A.1 conforme (Mangasarian, 1969).  $\square$

A condição de suficiência apresentada anteriormente é válida independentemente da natureza das funções envolvidas. As funções  $q(t, x(t), u(t))$  e  $f(t, x(t), u(t))$  não precisam nem mesmo ser contínuas. Além disso, é importante observar que não é estabelecida nenhuma exigência de concavidade ou negatividade das funções envolvidas. O teorema refere-se tão somente à existência de um ótimo global em cada estágio. Considere o exemplo a seguir, retirado de (Vidal, 1987).

**Exemplo:** Analisemos o seguinte problema em variáveis escalares conforme enunciado abaixo:

$$\max J_{\mathbf{U}}^N = - \sum_{t=0}^{N-1} u(t) e^{\alpha(x(t)+u(t))}, \quad \alpha < 0$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} x(t+1) & = x(t) + u(t), \quad t = 0, \dots, N-1 \\ x(0) & = x_0 \\ x(N) & = a > 0 \\ u(t) & \geq 0 \end{aligned}$$

O Hamiltoniano para  $t = 0, \dots, N-1$  vale:

$$H(t, x(t), u(t), p^*(t+1)) = -u(t)e^{\alpha(x(t)+u(t))} + p^*(t+1)(x(t) + u(t)).$$

O Hamiltoniano possui uma matriz Hessiana com a seguinte estrutura em notação simplificada:

$$\partial^2 H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H(t)}{\partial(x(t))^2} & \frac{\partial^2 H(t)}{\partial x(t)\partial u(t)} \\ \frac{\partial^2 H(t)}{\partial u(t)\partial x(t)} & \frac{\partial^2 H(t)}{\partial(u(t))^2} \end{bmatrix}$$

Fizemos  $H(t, x(t), u(t), p^*(t+1)) = H(t)$ . É fácil verificar que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H(t)}{\partial(x(t))^2} &= -u(t)e^{\alpha(x(t)+u(t))}\alpha^2 \\ \frac{\partial^2 H(t)}{\partial x(t)\partial u(t)} &= \frac{\partial^2 H(t)}{\partial u(t)\partial x(t)} = -e^{\alpha(x(t)+u(t))}\alpha - u(t)e^{\alpha(x(t)+u(t))}\alpha^2 \\ \frac{\partial^2 H(t)}{\partial(u(t))^2} &= -2\alpha e^{\alpha(x(t)+u(t))} - u(t)e^{\alpha(x(t)+u(t))}\alpha^2\end{aligned}$$

e que  $\partial^2 H$  é uma matriz semi-definida negativa, uma vez que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H(t)}{\partial(x(t))^2} &= -u(t)e^{\alpha(x(t)+u(t))}\alpha^2 \leq 0 \\ \det(\partial^2 H(t)) &= -\alpha^2 e^{2\alpha(x(t)+u(t))} \leq 0\end{aligned}$$

Consequentemente, o Hamiltoniano  $H(t)$  é conjuntamente côncavo na variável  $[x(t), u(t)]'$ . Se existe uma tripla  $\{x^*, u^*, p^*\}$  constituindo uma sequência de pontos estacionários

$$\begin{aligned}\frac{\partial H(t, x^*(t), u^*(t), p^*(t+1))}{\partial u(t)} &= 0, \quad t = 0, \dots, N-1 \\ \frac{\partial H(t, x^*(t), u^*(t), p^*(t+1))}{\partial x(t)} &= p^*(t), \quad t = 1, \dots, N-1\end{aligned}$$

então o Teorema 2.2 válido, tal tripla garante as condições necessárias e suficientes de otimalidade para o problema proposto. Como resultado:

$$\begin{aligned}u^*(t) &= (1/\alpha)\log[p^*(t)/p^*(t+1)], \quad t = 0, \dots, N-1 \\ x^*(t) &= (1/\alpha)\log[p^*(t-1)], \quad t = 1, \dots, N\end{aligned}$$

No caso específico deste exemplo numérico, foi possível provar que os termos individuais da função Lagrangeana são, em cada instante, conjuntamente côncavos em  $[x(t) \ u(t)]'$ . É importante ressaltar, entretanto, que esta característica não se faz necessária para que o Teorema 2.2 seja verificado. Esta idéia ficará bastante clara ao final do próximo capítulo, no qual condições suficientes de otimalidade serão obtidas para o problema de otimização multi-estágios de um sistema linear determinístico sujeito à realimentação de saída.

O leitor deve estar ciente que, a partir de agora, sempre que nos referirmos ao princípio do máximo discreto estaremos fazendo menção à forma como este foi apresentado na seção 2.3 desta dissertação, conforme especificamente o Teorema 2.2. O motivo para tanto é elementar. Estaremos, nos capítulos, subsequentes, investigando otimalidade global, condição que o princípio do máximo introduzido na seção 2.2 não garante. Nos capítulos que se seguem haverá também outra mudança de linguagem que merece ser destacada. Passaremos a tratar o problema de otimização multi-estágios não mais no contexto de maximização, mas no plano da minimização de um funcional de custo. Continuaremos, todavia, a utilizar a denominação *princípio do máximo*, em respeito à nomenclatura clássica já consolidada no meio científico.



# Capítulo 3

## Caso determinístico

O problema de controle de um sistema dinâmico determinístico linear a tempo discreto e sujeito à realimentação de saída é analisado. Provamos, neste capítulo, que as condições necessárias de otimalidade são também suficientes. O capítulo foi desenvolvido em conformidade com os conceitos e a notação introduzidos no capítulo 2.

### 3.1 Formulação do problema

O problema consiste em minimizar o seguinte funcional de custo  $J_{\mathbf{U}}^N$  em  $N$  estágios, resultante da aplicação de uma sequência de ganhos de controle  $\mathbf{U} \in \{u(t) : t = 0, \dots, N - 1\}$ :

$$J_{\mathbf{U}}^N = \sum_{t=0}^{N-1} q(t) + \bar{q}(N) \quad (3.1)$$

$$x(t+1) = (A + Bu(t)C)x(t); \quad t = 0, \dots, N - 1 \quad (3.2)$$

$$q(t) = x(t)'(Q + C'u(t)'Ru(t)C)x(t); \quad t = 0, \dots, N - 1 \quad (3.3)$$

$$\bar{q}(N) = x(N)'S_Nx(N) \quad (3.4)$$

Designamos  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t = 0, \dots, N$ ,  $x(0) = x_0$  o vetor de estados e  $u(t) \in \mathbb{R}^{s \times m}$ ,  $t = 0, \dots, N - 1$ , um ganho de controle aplicado em um instante  $t \geq 0$  ( $t \in \mathbb{N}$ ). Adotamos um custo por estágio quadrático  $q(t) \geq 0$ ,  $t = 0, \dots, N - 1$ , e um custo final  $\bar{q}(t) \geq 0$ ,  $t = N$ . As funções  $q$  e  $\bar{q}(N)$  são, em cada instante, diferenciáveis com relação a suas respectivas variáveis.

As matrizes  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{s \times s}$  e  $S_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são simétricas e  $Q \geq 0$ ,  $R > 0$  e  $S_N \geq 0$ . Além

disso,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times s}$  e  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Obtemos, então, a seguinte função Lagrangeana:

$$L_{\mathbf{U}}^N := \sum_{t=0}^{N-1} \{x(t)' (Q + C'u(t)'Ru(t)C) x(t) + p^*(t+1) [(A + Bu(t)C) x(t) - x(t+1)]\} + x(N)'S_N x(N) \quad (3.5)$$

Os multiplicadores  $p^*(t) \in \{\mathbb{R}^n\}'$ ,  $t = 1, \dots, N$  constituem, juntamente com algum par de seqüências  $\{x^*, u^*\}$ , uma seqüência de pontos estacionários. Como ficará claro a seguir, para  $t = 0, \dots, N-1$  temos a seqüência de pontos  $\{x^*(t), u^*(t), p^*(t+1)\}$ , e no instante  $t = N$  o par  $\{x^*(N), p^*(N)\}$  constitui um ponto estacionário neste estágio.

A seguir, realizamos uma divisão da função Lagrangeana em 3 partes: uma contendo o instante inicial  $t = 0$ , outra contendo os instantes intermediários  $t = 1, \dots, N-1$  e uma última dedicada ao instante final  $t = N$ . Tal procedimento foi proposto por Vidal (1987) para sistemas discretos no tempo. Seu trabalho foi baseado, contudo, em ideias desenvolvidas por Mangasarian (1966) para o caso dos sistemas contínuos (vide capítulo 2, seção 2.3).

Reescrevendo (3.5):

$$L_{\mathbf{U}}^N = \{x(0)' (Q + C'u(0)'Ru(0)C) x(0) + p^*(1) (A + Bu(0)C) x(0)\} + \sum_{t=1}^{N-1} \{x(t)' (Q + C'u(t)'Ru(t)C) x(t) + p^*(t+1) (A + Bu(t)C) x(t) - p^*(t)x(t)\} + \{x(N)'S_N x(N) - p(N)x(N)\} \quad (3.6)$$

e fazendo as seguintes substituições:

$$H(t) := x(t)' (Q + C'u(t)'Ru(t)C) x(t) + p^*(t+1) (A + Bu(t)C) x(t), \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (3.7)$$

$$F(N) := x(N)'S_N x(N) - p^*(N)x(N) \quad (3.8)$$

temos:

$$L_{\mathbf{U}}^N = H(0) + \sum_{t=1}^{N-1} [H(t) - p^*(t)x(t)] + F(N) \quad (3.9)$$

## 3.2 Condições suficientes de otimalidade

**Teorema 3.1.** *Considere o problema (3.1)–(3.4). Se existem controles  $u^*(t) \in \mathbb{R}^{s \times m}$ ,  $t = 0, \dots, N-1$ , estados  $x^*(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t = 0, \dots, N$ ;  $x(0) = x_0$ , multiplicadores  $p^*(t) \in \{\mathbb{R}^n\}'$ ,  $t = 1, \dots, N$ , constituindo uma seqüência de pontos estacionários  $\{x^*(t), u^*(t), p^*(t+1)\}$ ,  $t = 0, \dots, N-1$ , e vetores saída  $y^*(t) = Cx^*(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $t = 1, \dots, N-1$ , com pelo menos um elemento não nulo e produzindo um custo  $J_{\mathbf{U}^*}^N$ , então nenhuma outra combinação de seqüências  $\{x, u\}$  irá produzir um custo menor que  $J_{\mathbf{U}^*}^N$ . As condições necessárias de otimalidade são também suficientes.*

**Prova:** Seguiremos a proposta de Vidal (1987), conforme estabelecido no Teorema 2.2. A diferença  $\Delta$  entre uma Lagrangeana factível qualquer  $L_{\mathbf{U}}^N$  e uma Lagrangeana  $L_{\mathbf{U}^*}^N$  produzida por algum trio de sequências  $\{x^*, u^*, p^*\}$  é definida como:

$$\begin{aligned} \Delta := L_{\mathbf{U}}^N - L_{\mathbf{U}^*}^N &= \{H(0) - H^*(0)\} \\ &+ \sum_{t=1}^{N-1} \{[H(t) - p^*(t)x(t)] - [H^*(t) - p^*(t)x^*(t)]\} \\ &+ \{F(N) - F^*(N)\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Caso provemos que  $\Delta \geq 0$  para quaisquer sequências  $\{x, u\}$ , o Teorema 3.1 esta provado. Como primeiro passo, sabemos, utilizando (A.7) e (A.8), que a função  $H(0)$  é convexa na variável  $u(0)$  (para  $x(0) = x_0$  fixo) e que a função  $F(N)$  é convexa na variável  $x(N)$ , pois:

$$\frac{\partial^2 H(0)}{\partial \text{vec}(u(0)) \partial \text{vec}(u(0))'} = 2(Cx_0x_0'C') \otimes R \geq 0$$

$$\frac{\partial^2 F(N)}{\partial x(N) \partial x(N)'} = S_N \geq 0$$

Da convexidade das funções  $H(0)$  e  $F(N)$  em suas respectivas variáveis, temos:

$$\begin{aligned} H(0) - H^*(0) &\geq 0 \\ F(N) - F^*(N) &\geq 0 \end{aligned}$$

Como resultado:

$$\Delta \geq \sum_{t=1}^{N-1} \{[H(t) - p^*(t)x(t)] - [H^*(t) - p^*(t)x^*(t)]\} \quad (3.11)$$

Definimos então uma função  $\varphi(t)$ , para  $t = 1, \dots, N - 1$ , dada por:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &:= H(t) - p^*(t)x(t) \\ &:= x(t)'(Q + C'u(t)'Ru(t)C)x(t) + p^*(t+1)(A + Bu(t)C)x(t) - p^*(t)x(t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Logicamente:

$$\varphi(t) := x^*(t)'(Q + C'u^*(t)'Ru^*(t)C)x^*(t) + p^*(t+1)(A + Bu^*(t)C)x^*(t) - p^*(t)x^*(t)$$

Logo:

$$\Delta \geq \sum_{i=1}^{N-1} [\varphi(t) - \varphi^*(t)] \quad (3.13)$$

A fim de obter uma sequência de pontos estacionários  $\{x^*(t), u^*(t), p^*(t+1)\}$ , utilizamos as propriedades (A.5) e (A.6) e calculamos:

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial u(t)} = 2Ru(t)Cx(t)x(t)'C' + B'p^*(t+1)'x(t)'C' \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial x(t)} = 2(Q + C'u(t)'Ru(t)C)x(t) + (A + Bu(t)C)'p^*(t+1)' - p^*(t)' \quad (3.15)$$

As sequências  $\{x^*, u^*, p^*\}$  anulam, em cada instante  $t = 1, \dots, N-1$ , as derivadas de primeira ordem (3.14) e (3.15). Isto significa que as igualdades (3.16) e (3.17) abaixo são verificadas para  $t = 1, \dots, N-1$ :

$$Cx^*(t) [2x^*(t)'C'u^*(t)'R + p^*(t+1)B] = 0 \quad (3.16)$$

$$2x^*(t)'(Q + C'u^*(t)'Ru^*(t)C) + p^*(t+1)(A + Bu^*(t)C) - p^*(t) = 0 \quad (3.17)$$

As igualdades acima são simplesmente a transposta de (3.14) e (3.15) e a relevância de sua utilização ficará evidente ao longo desta seção. De (3.17), a seguinte relação de recorrência entre os multiplicadores de Lagrange é estabelecida:

$$p^*(t) = 2x^*(t)'(Q + C'u^*(t)'Ru^*(t)C) + p^*(t+1)(A + Bu^*(t)C), \quad t = 1, \dots, N-1 \quad (3.18)$$

Supomos, adicionalmente, a validade em  $t = N$  da seguinte relação:

$$p^*(N) = x^*(N)'S_N \quad (3.19)$$

Combinando (3.12) e (3.15), obtemos:

$$\varphi(t) = \left[ \frac{\partial \varphi(t)}{\partial x(t)} \right]' x(t) - x(t)'(Q + C'u(t)'Ru(t)C)x(t) \quad (3.20)$$

No ponto de ótimo  $\{x^*(t), u^*(t)\}$ , igualando (3.15) a zero, temos:

$$\begin{aligned} \varphi^*(t) &= \left[ \frac{\partial \varphi(t)}{\partial x(t)} \Big|_{x(t)=x^*(t)} \right]' x^*(t) - x^*(t)'(Q + C'u^*(t)'Ru^*(t)C)x^*(t) \\ &= -x^*(t)'(Q + C'u^*(t)'Ru^*(t)C)x^*(t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Uma condição suficiente para que  $\Delta \geq 0$  valha é que  $[\varphi(t) - \varphi^*(t)] \geq 0$  seja satisfeito. Ou seja, desejamos ter, em cada instante:

$$\begin{aligned} \Omega(t) &:= \varphi(t) - \varphi^*(t) \geq 0 \\ &:= \varphi(t) + x^*(t)'(Q + C'u^*(t)'Ru^*(t)C)x^*(t) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Substituindo (3.12) em (3.22), resulta:

$$\begin{aligned}\Omega(t) &= x^*(t)'(Q + C'u^*(t)'Ru^*(t)C)x^*(t) \\ &\quad + x(t)'(Q + C'u(t)'Ru(t)C)x(t) + p^*(t+1)(A + Bu(t)C)x(t) - p^*(t)x(t)\end{aligned}$$

Substituindo (3.18) na equação anterior, temos:

$$\begin{aligned}\Omega(t) &= x^*(t)'(Q + C'u^*(t)'Ru^*(t)C)x^*(t) \\ &\quad + x(t)'(Q + C'u(t)'Ru(t)C)x(t) + p^*(t+1)(A + Bu(t)C)x(t) \\ &\quad - [2x^*(t)'(Q + C'u^*(t)'Ru^*(t)C) + p^*(t+1)(A + Bu^*(t)C)]x(t)\end{aligned}$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned}\Omega(t) &= x^*(t)'(Q + C'u^*(t)'Ru^*(t)C)x^*(t) + x(t)'(Q + C'u(t)'Ru(t)C)x(t) \\ &\quad + p^*(t+1)[(A + Bu(t)C)x(t) - (A + Bu^*(t)C)x(t)] \\ &\quad - 2x^*(t)'(Q + C'u^*(t)'Ru^*(t)C)x(t)\end{aligned}\tag{3.23}$$

Sabemos, contudo, que a seguinte relação é válida:

$$\begin{aligned}-2x^*(t)'(Q + C'u^*(t)'Ru^*(t)C)x(t) &= (x(t) - x^*(t))'(Q + C'u^*(t)'Ru^*(t)C)(x(t) - x^*(t)) \\ &\quad - x^*(t)'(Q + C'u^*(t)'Ru^*(t)C)x^*(t) \\ &\quad - x(t)'(Q + C'u^*(t)'Ru^*(t)C)x(t)\end{aligned}\tag{3.24}$$

Consequentemente, combinando (3.23) e (3.24):

$$\begin{aligned}\Omega(t) &= x(t)'(Q + C'u(t)'Ru(t)C)x(t) - x(t)'(Q + C'u^*(t)'Ru^*(t)C)x(t) \\ &\quad + (x(t) - x^*(t))'(Q + C'u^*(t)'Ru^*(t)C)(x(t) - x^*(t)) \\ &\quad + p^*(t+1)Bu(t)Cx(t) - p^*(t+1)Bu^*(t)Cx(t)\end{aligned}$$

Rearranjando:

$$\begin{aligned}\Omega(t) &= x(t)'(C'u(t)'Ru(t)C)x(t) - x(t)'(C'u^*(t)'Ru^*(t)C)x(t) \\ &\quad + (x(t) - x^*(t))'(Q + C'u^*(t)'Ru^*(t)C)(x(t) - x^*(t)) \\ &\quad + p^*(t+1)Bu(t)Cx(t) - p^*(t+1)Bu^*(t)Cx(t)\end{aligned}$$

Convém, agora considerar mais um importante aspecto envolvendo as condições necessárias de primeira ordem. Aqui, o que precisamos garantir é que na equação (3.16) o termo entre colchetes  $[2x^*(t)'C'u^*(t)'R + p^*(t+1)B]$  seja nulo sempre que a condição como um todo seja verificada, ou seja:

$$Cx^*(t)[2x^*(t)'C'u^*(t)'R + p^*(t+1)B] = 0 \iff [2x^*(t)'C'u^*(t)'R + p^*(t+1)B] = 0\tag{3.25}$$

Chamamos o vetor  $Cx^*(t) \in \mathbb{R}^m$  de  $M$  e o vetor  $[2x^*(t)'C'u^*(t)'R + p^*(t+1)B] \in \{\mathbb{R}^s\}'$  de  $N$ ,

respectivamente coluna e linha, a fim de avaliar o resultado de seu produto:

$$MN = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & \dots & n_s \end{bmatrix}$$

$$MN = \begin{bmatrix} m_1 n_1 & m_1 n_2 & \dots & m_1 n_s \\ m_2 n_1 & m_2 n_2 & \dots & m_2 n_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_m n_1 & m_m n_2 & \dots & m_m n_s \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Para satisfazer a condição (3.16) é preciso obter uma matriz  $MN$  ( $\in \mathbb{R}^{m \times s}$ ) cujos elementos são todos nulos. Contudo que pelo menos um elemento de  $M$  seja não nulo, podemos afirmar que  $MN$  só será nula se  $N$  for. Ou seja, se o vetor de saída  $Cx^*(t)$  possuir pelo menos um elemento não nulo, o que de modo algum constitui uma restrição severa, teremos que a condição (3.25) necessariamente se aplica. Equivalentemente:

$$p^*(t+1)B = -2x^*(t)'C'u^*(t)'R$$

Logo:

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= x(t)'(C'u(t)'Ru(t)C)x(t) - x(t)'(C'u^*(t)'Ru^*(t)C)x(t) \\ &\quad + (x(t) - x^*(t))'(Q + C'u^*(t)'Ru^*(t)C)(x(t) - x^*(t)) \\ &\quad - 2x^*(t)'C'u^*(t)'Ru(t)Cx(t) + 2x^*(t)'C'u^*(t)'Ru^*(t)Cx(t) \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= (x(t) - x^*(t))'Q((x(t) - x^*(t)) + (x(t) - x^*(t))'(C'u^*(t)'Ru^*(t)C)(x(t) - x^*(t))) \\ &\quad + x(t)'(C'u(t)'Ru(t)C)x(t) - x(t)'(C'u^*(t)'Ru^*(t)C)x(t) \\ &\quad + 2x^*(t)'C'u^*(t)'Ru^*(t)Cx(t) - 2x^*(t)'C'u^*(t)'Ru(t)Cx(t) \end{aligned}$$

Por fim:

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= (x(t) - x^*(t))'Q((x(t) - x^*(t)) \\ &\quad + [u(t)Cx(t) - u^*(t)Cx^*(t)]'R[u(t)Cx(t) - u^*(t)Cx^*(t)]) \\ \Omega(t) &\geq 0 \end{aligned}$$

o que implica que  $\varphi(t) - \varphi^*(t) \geq 0$ , para  $t = 1, \dots, N - 1$ . Somando-se a isso a convexidade nos instantes inicial e final, resulta que  $\Delta \geq 0$ . Quaisquer sequências  $\{x^*, u^*\}$  que juntamente com uma sequência de multiplicadores  $p^*$  constituem um conjunto de pontos estacionários fornecem um ótimo global para o problema (3.1)–(3.4).

□

# Capítulo 4

## Caso estocástico com ruído aditivo

O problema de controle de um sistema dinâmico linear estocástico a tempo discreto sujeito à realimentação de saída é analisado. A existência de condições necessárias e suficientes de otimalidade é investigada. Desenvolveremos, neste capítulo, um raciocínio semelhante ao desenvolvido no capítulo 3, tanto em termos dos conceitos envolvidos quanto da notação utilizada.

### 4.1 Formulação do problema

Considere o problema de minimização do seguinte funcional de custo  $J_U^N$  em  $N$  estágios:

$$J_U^N = E_{x_0} \left[ \sum_{t=0}^{N-1} q(t) + \bar{q}(N) \right] \quad (4.1)$$

$$x(t+1) = (A + Bu(t)C)x(t) + Hw(t); \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (4.2)$$

$$q(t) = x(t)'(Q + C'u(t)'Ru(t)C)x(t); \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (4.3)$$

$$\bar{q}(N) = x(N)'S_N x(N) \quad (4.4)$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^{s \times m}; \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (4.5)$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n; \quad t = 0, \dots, N; \quad x(0) = x_0 \quad (4.6)$$

As matrizes  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{s \times s}$  e  $S_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são simétricas e  $Q \geq 0$ ,  $R > 0$  e  $S_N \geq 0$ . E também,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times s}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{n \times r}$  e  $w \in \mathbb{R}^r$  têm as dimensões especificadas. O ruído  $w$  é um vetor de variáveis aleatórias gaussianas com média nula e matriz de covariância  $\Sigma$ . Supomos, ainda, que as componentes do vetor de ruído são independentes entre si e que  $w(t_1)$  é

independente de  $w(t_2)$ , com  $t_1 \neq t_2$ . Utilizando uma sequência de multiplicadores  $P^*(t) \geq 0$  ( $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ ),  $t = 1, \dots, N$ , obtemos a seguinte função Lagrangeana  $L_{\mathbf{U}}^N$ :

$$L_{\mathbf{U}}^N := E_{x_0} \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} x(t)' (Q + C'u(t)'Ru(t)C) x(t) + x(N)'S_N x(N) \right\} \\ + E_{x_0} \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} [(A + Bu(t)C) x(t) + Hw(t) - x(t+1)]' P^*(t+1) \right. \\ \left. \cdot [(A + Bu(t)C) x(t) + Hw(t) - x(t+1)] \right\} \quad (4.7)$$

Ressaltamos que, doravante, utilizaremos multiplicadores  $P^*$  que são matrizes determinísticas simétricas e semidefinidas positivas, o que consitui uma mudança em relação ao tipo de multiplicador  $p^*$  adotado nos capítulos anteriores. Expandindo (4.7), calculando o valor esperado dos termos envolvendo os vetores de estado e ruído, resulta:

$$L_{\mathbf{U}}^N = \sum_{t=0}^{N-1} tr \{ (Q + C'u(t)'Ru(t)C) E_{x_0} [x(t)x(t)'] \} \\ + \sum_{t=0}^{N-1} tr \left\{ P^*(t+1) (A + Bu(t)C) E_{x_0} [x(t)x(t)'] (A + Bu(t)C)' \right. \\ \left. + P^*(t+1) H E_{x_0} [w(t)w(t)'] H' \right\} + \sum_{t=0}^{N-1} tr \left\{ 2P^*(t+1) (A + Bu(t)C) E_{x_0} [x(t)w(t)'] H' \right. \\ \left. - P^*(t+1) E_{x_0} [x(t+1)x(t+1)'] \right\} + tr \{ S_N E_{x_0} [x(N)x(N)'] \} \quad (4.8)$$

Os detalhes para obtermos (4.8) a partir de (4.7) encontram-se no Apêndice B. Dado que os vetores aleatórios  $x$  e  $w$  são independentes, temos também:

$$E_{x_0} [x(t)w(t)'] = 0 \quad (4.9)$$

Adicionalmente:

$$E_{x_0} [w(t)w(t)'] = \Sigma \quad (4.10)$$

Realizamos, em seguida, a seguinte substituição de variável considerando a matriz de segundo momento do estado condicionada ao instante inicial:

$$X(t) = E_{x_0} [x(t)x(t)'], \quad t = 0, \dots, N \quad (4.11)$$

Utilizando (4.9), (4.10) e (4.11) chegamos à seguinte expressão:

$$L_{\mathbf{U}}^N = \sum_{t=0}^{N-1} tr \{ (Q + C'u(t)'Ru(t)C) X(t) \} \\ + \sum_{t=0}^{N-1} tr \{ P^*(t+1) [(A + Bu(t)C) X(t) (A + Bu(t)C)' + H\Sigma H' - X(t+1)] \} \\ + tr \{ S_N X(N) \} \quad (4.12)$$

Ou seja, é possível formular um problema determinístico equivalente ao inicial e que consiste em minimizar o funcional de custo  $J_{\mathbf{U}}^e$  conforme especificado a seguir:

$$J_{\mathbf{U}}^e = E_{x_0} \left[ \sum_{t=0}^{N-1} q(t) + \bar{q}(N) \right] \quad (4.13)$$

$$X(t+1) = (A + Bu(t)C) X(t) (A + Bu(t)C)' + H\Sigma H'; \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (4.14)$$

$$q(t) = tr \{ (Q + C'u(t)'Ru(t)C) X(t) \}; \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (4.15)$$

$$\bar{q}(N) = tr \{ S_N X(N) \} \quad (4.16)$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^{s \times m}; \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (4.17)$$

$$X(t) \geq 0 \quad (\in \mathbb{R}^{n \times n}); \quad t = 0, \dots, N; \quad X(0) = X_0 \quad (4.18)$$

A função (4.12) pode ser rerepresentada como:

$$L_{\mathbf{U}}^e = tr \left\{ (Q + C'u(0)'Ru(0)C) X(0) \right. \\ \left. + P^*(1) [(A + Bu(0)C) X(0) (A + Bu(0)C)' + H\Sigma H'] \right\} \\ + \sum_{t=1}^{N-1} tr \left\{ (Q + C'u(t)'Ru(t)C) X(t) + P^*(t+1) [(A + Bu(t)C) X(t) (A + Bu(t)C)' \right. \\ \left. + H\Sigma H'] - P^*(t) X(t) \right\} + tr \{ S_N X(N) - P^*(N) X(N) \} \quad (4.19)$$

Supomos que a sequência de multiplicadores  $P^*(t)$ ,  $t = 1, \dots, N$ , constitui uma sequência de pontos estacionários juntamente com uma sequência de estados  $X^*(t)$ ,  $t = 0, \dots, N$  e ganhos  $u^*(t)$ ,  $t = 0, \dots, N-1$ . Além disso, com o objetivo de tornar a notação utilizada mais clara e compacta,

definiremos o seguinte grupo de operadores:

$$Q(t) := Q + C'u(t)'Ru(t)C; \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (4.20)$$

$$A(t) := A + Bu(t)C; \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (4.21)$$

Para uma sequência ótima de controle  $u^*$ , temos em cada instante:

$$Q^*(t) = Q + C'u^*(t)'Ru^*(t)C; \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (4.22)$$

$$A^*(t) = A + Bu^*(t)C; \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (4.23)$$

Utilizando (4.20) e (4.21), a função (4.19) pode ser reescrita como a seguir:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{U}}^e = & \operatorname{tr} \{Q(0)X(0) + P^*(1) [A(0)X(0)A(0)' + H\Sigma H']\} \\ & + \sum_{t=1}^{N-1} \operatorname{tr} \{Q(t)X(t) + P^*(t+1) [A(t)X(t)A(t)' + H\Sigma H'] - P^*(t)X(t)\} \\ & + \operatorname{tr} \{S_N X(N) - P^*(N)X(N)\} \quad (4.24) \end{aligned}$$

Em seguida, para  $t = 0, \dots, N-1$ , definimos o Hamiltoniano:

$$H(t, X(t), u(t), P^*(t+1)) := \operatorname{tr} \{Q(t)X(t) + P^*(t+1) [A(t)X(t)A(t)' + H\Sigma H']\} \quad (4.25)$$

No instante final, definimos:

$$F(N) := \operatorname{tr} \{S_N X(N) - P^*(N)X(N)\} \quad (4.26)$$

Logo:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{U}}^e = & H(0, X(0), u(0), P^*(1)) \\ & + \sum_{t=1}^{N-1} \{H(t, X(t), u(t), P^*(t+1)) - \operatorname{tr} [P^*(t)X(t)]\} + F(N) \quad (4.27) \end{aligned}$$

## 4.2 Condições necessárias de otimalidade

Por meio do Teorema 4.1 a seguir provaremos que o princípio do máximo discreto, na forma como foi utilizado no capítulo 3, fornece para o caso dos sistemas lineares estocásticos com ruído apenas as condições necessárias de otimalidade. A impossibilidade de obter por meio deste método também suficiência, ou seja, otimalidade global, será justificada e discutida em detalhes ao final da seção.

**Teorema 4.1.** *Considere o problema (4.13)–(4.18). Seja  $\{u^*(0), \dots, u^*(N-1)\}$  uma estratégia de controle e  $\{X^*(0), \dots, X^*(N)\}$  a sequência de estados resultante. Suponha ainda uma sequência de multiplicadores  $\{P^*(1), \dots, P^*(N)\}$  que juntamente com o par  $\{X^*, u^*\}$  constitui uma sequência de pontos estacionários  $\{X^*(t), u^*(t), P^*(t)\}$ ,  $t = 0, \dots, N-1$ . Então:*

$$\begin{aligned} u^*(0) & \text{ minimiza } H(0, X(0), u(0), P^*(1)) \\ u^*(t) & \text{ minimiza } H(t, X^*(t), u(t), P^*(t+1)) - \text{tr} \{P^*(t)X^*(t)\}, \quad t = 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

*O princípio do máximo discreto é válido, constituindo uma condição necessária de otimalidade para classe de problemas em questão.*

**Prova:** Com o objetivo de tornar o raciocínio desenvolvido nesta seção o mais genérico possível, de modo a possibilitar também uma discussão sobre suficiência, tomaremos  $X(t) = X^*(t)$  apenas no final da prova. Proseguiremos, até lá, utilizando controles  $u(t)$  e estados  $X(t)$  quaisquer. Dito isto, de (A.7) e (A.8), sabemos que a função  $H(0)$  é convexa na variável  $u(0)$  (para  $X(0)$  fixo) e a função  $F(N)$  é convexa na variável  $X(N)$ , já que  $S_N \geq 0$ . Na verdade, o Hamiltoniano é, em qualquer instante  $t = 0, \dots, N-1$ , convexo no ganho de controle  $u(t)$  para um estado  $X(t)$  fixo. Em notação simplificada (chamando de  $H(t)$  o Hamiltoniano (4.25)), temos, utilizando (A.3), (A.4), (4.20) e (4.21):

$$\begin{aligned} H(t) = \text{tr} \left\{ QX(t) + P^*(t+1) (AX(t)A' + H\Sigma H') \right. \\ \left. + u(t) (CX(t)C') u(t)' [R + B'P^*(t+1)B] \right\} \\ + \text{tr} \left\{ P^*(t+1) (AX(t)C' u(t)' B' + Bu(t)CX(t)A) \right\} \end{aligned}$$

A matriz Hessiana do Hamiltoniano  $H(t)$  com relação ao ganho de controle  $u(t)$  é dada por:

$$\frac{\partial^2 H(t)}{\partial \text{vec}(u(t)) \partial \text{vec}(u(t))'} = 2 (CX(t)C') \otimes [R + B'P^*(t+1)B]; \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (4.28)$$

A matriz (4.28) é sempre semi-definida positiva. O resultado acima nos permite afirmar que a função  $H(t)$  é convexa (para  $X(t)$  fixo) no controle  $u(t)$  nos instantes  $t = 0, \dots, N-1$ . Para o caso específico do instante  $t = N$ , a convexidade (na verdade, nulidade) da função  $F(N)$  é obtida fazendo  $P^*(N) = S_N$ .

A diferença  $\Delta$  entre uma Lagrangeana qualquer (factível)  $L_{\mathbf{U}}^e$  e uma Lagrangeana  $L_{\mathbf{U}^*}^e$  produzida por três sequências  $\{X^*, u^*, P^*\}$  de pontos estacionários é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta & := L_{\mathbf{U}}^e - L_{\mathbf{U}^*}^e \\ & = [H(0) - H^*(0)] \\ & \quad + \sum_{t=1}^{N-1} \left\{ [H(t) - \text{tr}(P^*(t)X(t))] - [H^*(t) - \text{tr}(P^*(t)X^*(t))] \right\} \\ & \quad + [F(N) - F^*(N)] \quad (4.29) \end{aligned}$$

Da convexidade de  $H(0)$  e nulidade de  $F(N)$ , temos:

$$\begin{aligned} H(0) - H^*(0) &\geq 0 \\ F(N) - F^*(N) &= 0 \end{aligned}$$

Como resultado:

$$\Delta \geq \sum_{t=1}^{N-1} \{ [H(t) - \text{tr}(P^*(t)X(t))] - [H^*(t) - \text{tr}(P^*(t)X^*(t))] \}$$

Agora, definimos uma função  $\varphi(t)$  do seguinte modo:

$$\varphi(t) := H(t) - \text{tr}(P^*(t)X(t)); \quad t = 1, \dots, N-1 \quad (4.30)$$

E calculamos suas derivadas de primeira ordem:

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial u(t)} = 2[R + B'P^*(t+1)B]u(t)(CX(t)C') + 2[B'P^*(t+1)AX(t)C'] \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial X(t)} = Q(t) + A(t)'P^*(t+1)A(t) - P^*(t) \quad (4.32)$$

De (4.30) e (4.32), obtemos:

$$\varphi(t) = \text{tr} \left[ \left( \frac{\partial \varphi(t)}{\partial X(t)} \right) X(t) + P^*(t+1)H\Sigma H' \right] \quad (4.33)$$

Nos pontos estacionários  $\{X^*(t), u^*(t), P^*(t+1)\}$ , temos:

$$\begin{aligned} \varphi^*(t) &= \text{tr} \left\{ \left[ \frac{\partial \varphi(t)}{\partial X(t)} \right]_{X(t)=X^*(t)} X^*(t) + P^*(t+1)H\Sigma H' \right\} \\ &= \text{tr} [P^*(t+1)H\Sigma H'] \end{aligned}$$

Mas:

$$\begin{aligned} \Delta &\geq \sum_{t=1}^{N-1} [\varphi(t) - \varphi^*(t)] \\ &= \sum_{t=1}^{N-1} \{ \varphi(t) - \text{tr} [P^*(t+1)H\Sigma H'] \} \end{aligned}$$

Logo, uma condição suficiente para termos  $\Delta \geq 0$  é termos  $\{ \varphi(t) - \text{tr} [P^*(t+1)H\Sigma H'] \} \geq 0$ ,

para  $t = 1, \dots, N - 1$ . Definindo:

$$\Omega(t) := \text{tr} [Q(t)X(t) + P^*(t+1)A(t)X(t)A(t)' - P^*(t)X(t)] \quad (4.34)$$

desejamos ter, em cada instante  $\Omega(t) \geq 0$ .

Utilizando (A.4), temos:

$$\text{tr} [Q(t)X(t) + P^*(t+1)A(t)X(t)A(t)'] = \text{tr} [Q(t)X(t) + A(t)'P^*(t+1)A(t)X(t)] \quad (4.35)$$

Além disso, definimos:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &:= \text{tr} \{ [Q(t) + A(t)'P^*(t+1)A(t)] X(t) \} \\ \beta(t) &:= \text{tr} \{ [Q^*(t) + A^*(t)'P^*(t+1)A^*(t)] X(t) \} \end{aligned}$$

Logo:

$$\Omega(t) := \gamma(t) - \beta(t) \quad (4.36)$$

Para um estado  $X(t)$  qualquer fixo, a função  $\gamma(t)$  é convexa na variável  $u(t)$  e a função  $\beta(t)$  é uma função constante, ou seja,  $\Omega(t)$  é uma função apenas do controle  $u(t)$ . Além disso, para um dado  $X(t)$ , a função  $\gamma(t)$  é minimizada pelo controle  $u(t) = u_q^*(t)$ :

$$u_q^*(t) = - [R + B'P^*(t+1)B]^{-1} [B'P^*(t+1)AX(t)C'] (CX(t)C')^{-1} \quad (4.37)$$

Em um ponto  $\{X^*(t), u^*(t), P^*(t+1)\}$ , sabemos que:

$$u^*(t) = - [R + B'P^*(t+1)B]^{-1} [B'P^*(t+1)AX^*(t)C'] (CX^*(t)C')^{-1} \quad (4.38)$$

Como resultado, substituindo (4.37) e (4.38) em (4.34), o mínimo valor admissível para a função  $\Omega(t)$  para cada estado  $X(t)$  vale:

$$\begin{aligned} \Omega^*(t) &:= \min(\gamma(t)) - \beta(t) \\ &= -\text{tr} \left\{ [R + B'P^*(t+1)B]^{-1} \rho(t) (CX(t)C')^{-1} \rho(t)' \right\} \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Em que:

$$\rho(t) = B'P^*(t+1)AX(t)C' - [B'P^*(t+1)AX^*(t)C'] (CX^*(t)C')^{-1} (CX(t)C')$$

Ou ainda:

$$\Omega^*(t) = -\text{tr} \left\{ [R + B'P^*(t+1)B] (u_q^*(t) - u^*(t)) (CX^tC') (u_q^*(t) - u^*(t))' \right\} \quad (4.40)$$

Concluimos então que  $\Omega^*(t) \leq 0$ . Ao fazermos  $X(t) = X^*(t)$ , obtemos  $\Omega^*(t) = 0$  e  $\Omega(t) \geq 0$ . O Teorema 4.1 está provado. O princípio do máximo discreto é válido para problemas da forma (4.13)–

(4.18). □

Por meio do Teorema 4.1, foi possível provar que a função (4.29) é não negativa para uma trajetória ótima  $X^* = \{X^*(t); t = 0, \dots, N\}$ . Entretanto, o mesmo não é válido para uma sequência  $X$  qualquer, o que nos garantiria condições também suficientes de otimalidade. Na verdade, de (4.39), sabemos que  $\Omega^*(t) = 0$  no melhor caso. Ou seja, não é possível assegurar por esta abordagem que  $\Delta \geq 0$  para qualquer par de sequências  $\{X, u\}$ . O princípio do máximo discreto não garante, diferentemente do verificado para o caso determinístico, condições suficientes de otimalidade para o problema estocástico com ruído aditivo. Não foi possível obter uma relação do tipo (3.25), por meio da qual provamos a positividade da função  $\Delta$  no caso determinístico.

Verificamos, todavia, que o raciocínio desenvolvido até aqui garante as condições necessárias de otimalidade, uma vez que de acordo com (4.40) ou mesmo da convexidade da função  $\varphi(t)$  no ganho  $u(t)$  para um estado  $X(t)$  fixo, o controle  $u^*(t)$  é aquele que otimiza esta função.

Do capítulo 3, entretanto, sabemos que para o caso dos sistemas determinísticos, qualquer ótimo local é também um ótimo global para o problema de controle em questão. Nos moldes da formulação (4.13)–(4.18), um sistema determinístico é caracterizado pelo fato de termos  $H\Sigma H' = 0$ . Logo, mesmo que o Teorema 4.1 não garanta as condições suficientes de otimalidade para um caso estocástico qualquer, sabemos que para o caso determinístico ele fornece condições tanto necessárias quanto suficientes de otimalidade, mesmo que a função  $\varphi(t)$  não seja otimizada em cada instante como ocorre no capítulo 3. Em resumo, da formulação (3.1)–(3.4) e Teorema 3.1 sabemos que as condições necessárias de otimalidade garantidas para a formulação (4.13)–(4.18) por meio do Teorema 4.1 são também suficientes quando  $H\Sigma H' = 0$ . Não foi possível, infelizmente, estender esta condição de suficiência para a classe dos sistemas estocásticos com ruído aditivo ( $H\Sigma H' \neq 0$ ).

### 4.3 Condições suficientes de otimalidade

O princípio do máximo discreto, conforme apresentado na seção anterior, fornece apenas as condições necessárias de otimalidade. Decidimos então tentar outra abordagem, outra formulação para o problema de controle ótimo de sistemas lineares estocásticos sujeitos à realimentação de saída. Mantivemos, contudo, a notação determinística equivalente (equações de segundo momento) utilizada até aqui. Foi possível estabelecer condições suficientes de otimalidade para o caso particular detalhado no Teorema 4.2 a seguir.

**Teorema 4.2.** *Considere o problema (4.13)–(4.18). Tome um caso particular com  $N = 2$  estágios, ou seja, o problema de minimizar, nas variáveis de controle  $\{u(0), u(1)\}$ , o seguinte funcional:*

$$J_U^e = \sum_{t=0}^1 tr[(Q + C'u(t)'Ru(t)C) X(t)] + tr[S_2 X(2)] \quad (4.41)$$

sujeito a

$$X(t+1) = (A + Bu(t)C) X(t) (A + Bu(t)C)' + H\Sigma H'; \quad t = 0, 1 \quad (4.42)$$

$$X(t) \geq 0 \ (\in \mathbb{R}^{n \times n}); \ t = 0, 1, 2; \ X(0) = X_0 \quad (4.43)$$

Considere o caso SISO e matrizes  $C$  e  $B$  tais que  $CB = 0$ . Então, controles  $\{u^*(0), u^*(1)\}$  tais que

$$\left. \frac{\partial J_{\mathbf{U}}^e}{\partial u(0)} \right|_{u(0)=u^*(0)} = 0$$

$$\left. \frac{\partial J_{\mathbf{U}}^e}{\partial u(1)} \right|_{u(1)=u^*(1)} = 0$$

forneem as condições necessárias e suficientes de otimalidade. O par  $\{u^*(0), u^*(1)\}$  constitui um ótimo global para o problema (4.41)–(4.43).

**Prova:** De (4.41) e (4.42), obtemos:

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{U}}^e = & \operatorname{tr} [(Q + C'u(0)'Ru(0)C) X(0)] \\ & + \operatorname{tr} \{ (Q + C'u(1)'Ru(1)C) [(A + Bu(0)C) X(0) (A + Bu(0)C)' + H\Sigma H'] \} \\ & + \operatorname{tr} \left\{ S_2 [(A + Bu(1)C) [(A + Bu(0)C) X(0) (A + Bu(0)C)' + H\Sigma H'] \right. \\ & \left. \cdot (A + Bu(1)C)' + H\Sigma H'] \right\} \end{aligned}$$

A expressão anterior pode, ainda, ser apresentada do seguinte modo:

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{U}}^e = & \operatorname{tr} \{ (Q + C'u(0)'Ru(0)C) X(0) \} \\ & + \operatorname{tr} \left\{ [(Q + C'u(1)'Ru(1)C) + (A + Bu(1)C)' S_2 (A + Bu(1)C)] \right. \\ & \left. \cdot [(A + Bu(0)C) X(0) (A + Bu(0)C) + H\Sigma H'] \right\} + \operatorname{tr} \{ S_2 H\Sigma H' \} \quad (4.44) \end{aligned}$$

Temos, agora, um novo problema de otimização nas variáveis de controle  $(u(0), u(1))$  sobre o qual nos debruçaremos, sem considerar formas duais ou funções Lagrangeanas. Utilizando (A.7) e (A.8) resulta que, para um ganho de controle  $u(0)$  e um estado inicial  $X(0)$  fixos, o custo  $J_{\mathbf{U}}^e$  é convexo no ganho de controle  $u(1)$ , pois:

$$\frac{\partial^2 J_{\mathbf{U}}^e}{\partial \operatorname{vec}(u(1)) \partial \operatorname{vec}(u(1))'} = 2 (CX(1)C') \otimes (R + B'S_2B) \geq 0$$

Sabemos, ainda, que para cada ganho  $u(0)$  fixo, o funcional de custo  $J_{\mathbf{U}}^e$  é minimizado pelo controle:

$$u(1)_{(u(0))} = - (R + B'S_2B)^{-1} (B'S_2AX(1)C') (CX(1)C')^{-1} \quad (4.45)$$

Substituindo (4.45) em (4.44) e utilizando (A.3) e (A.4), obtemos:

$$J_{\mathbb{U}}^e = tr \{ (Q + A'S_2A)X(1) \} \\ - tr \left\{ (R + B'S_2B)^{-1} (B'S_2AX(1)C') (CX(1)C')^{-1} (B'S_2AX(1)C')' \right\} \\ + tr \{ (Q + C'u(0)'Ru(0)C) X(0) \} + tr \{ S_2H\Sigma H' \} \quad (4.46)$$

Lembrando que  $X(1) = (A + Bu(0)C) X(0) (A + Bu(0)C) + H\Sigma H'$ , resulta que  $J_{\mathbb{U}}^e$  é uma função exclusivamente do ganho de controle  $u(0)$ . Caso esta função seja convexa na referida variável, encontra-se um mínimo global para o problema. Considere, tendo em mente a definição de  $X(1)$ , os seguintes termos constituintes da expressão (4.46):

$$B'S_2AX(1)C' = B'S_2AAX(0)A'C' + B'S_2AAX(0)C'u(0)'B'C' + B'S_2ABu(0)CX(0)A'C' \\ + B'S_2ABu(0)CX(0)C'u(0)'B'C' + B'S_2AH\Sigma H'C'$$

e

$$CX(1)C' = C [(A + Bu(0)C) X(0) (A + Bu(0)C)' + H\Sigma H'] C' \\ = CAX(0)A'C' + CAX(0)C'u(0)'B'C' + CBu(0)CX(0)A'C' \\ + CBu(0)CX(0)C'u(0)'B'C' + CH\Sigma H'C'$$

Com  $u(0) \in \mathbb{R}$  e  $CB = 0$ , temos:

$$B'S_2AX(1)C' = B'S_2AAX(0)A'C' + B'S_2ABu(0)CX(0)A'C' + B'S_2AH\Sigma H'C'$$

e

$$CX(1)C' = CAX(0)A'C' + CH\Sigma H'C'$$

Ou seja, o termo  $B'S_2AX(1)C'$  é de fato uma função linear da variável  $u(0)$  e o termo  $CX(1)C'$  é uma matriz constante e que não depende de  $u(0)$ . Como resultado, a função

$$tr \left\{ (R + B'S_2B)^{-1} (B'S_2AX(1)C') (CX(1)C')^{-1} (B'S_2AX(1)C')' \right\} \quad (4.47)$$

em (4.46) é quadrática e convexa em  $u(0)$ . O custo  $J_{\mathbb{U}}^e$  é, portanto, a diferença entre duas funções convexas, quadráticas e positivas. Mas este custo é, ele próprio, positivo. Sabemos, do Teorema A.2 (vide Apêndice A), que a diferença  $h(u(0)) \geq 0$  entre duas funções escalares  $f(u(0))$  e  $g(u(0))$  convexas, quadráticas e positivas é também uma função convexa e quadrática na variável  $u(0)$ . Logo, qualquer solução ótima  $u^*(0)$  é globalmente ótima.  $\square$

Para o caso de horizonte  $N = 2$  que estamos analisando, o problema é de fato convexo no ganho de controle  $u(0)$ . Este resultado é bastante importante, pois significa que a parametrização do funcional  $J_{\mathbb{U}}^e$  em função do controle inicial  $u(0)$ , para um controle  $u(1)$  ótimo, resulta em um problema que possui garantidamente um ótimo global. Garantimos, para este caso particular, que as condições

necessárias de otimalidade são também suficientes.

Não foi possível provar, todavia, que esta parametrização resulta em um problema convexo para uma quantidade de estágios de controle  $N$  genérica. Verificamos que ao tentar estender o raciocínio desenvolvido para mais estágios ( $N > 2$ ), as funções custo  $J_{\mathbf{U}}^N$  se tornam cada vez mais complexas. Com  $N = 3$ , por exemplo, o custo parametrizado em função do controle inicial  $u(0)$  envolve quocientes de funções quadráticas desta variável. Mais especificamente, temos neste cenário um termo envolvendo uma função do quarto grau em  $u(0)$  dividida por uma função do segundo grau em  $u(0)$ . Não sabemos se é possível obter convexidade para esta classe de funções. Além disso, conforme  $N$  aumenta, a análise de tais quocientes se torna cada vez mais desafiadora.



# Capítulo 5

## Controle de SLSMs

O problema de controle de Sistemas Lineares com Saltos Markovianos para um horizonte finito  $N$ , conforme introduzido no capítulo 1, foi estudado por do Val e Başar (1999) e Vargas (2004) no contexto de realimentação de estados. Condições necessárias de otimalidade são fornecidas por tais autores nos trabalhos citados. Nestes estudos, impõe-se que o controle seja definido por  $u(t) = K(t)x(t)$ , em que  $K(t)$  não depende diretamente da Cadeia de Markov  $\theta$ . Neste capítulo, entretanto, o respectivo problema de controle multi-estágios é formulado em termos de um sistema ou processo  $\Upsilon$  sujeito à realimentação de saída. Condições suficientes de otimalidade, ainda que para um cenário particular, são fornecidas.

### 5.1 Introdução

Os SLSMs são sistemas um pouco mais complexos que aqueles tratados até o momento. Faz-se necessário, para fins de clareza e compatibilidade com a nomenclatura já consolidada na área, utilizar uma notação diferente da que adotamos até aqui. As alterações pertinentes encontram-se detalhadas na presente seção.

#### 5.1.1 Definição da estrutura matricial

Assim como formulado em (do Val e Başar, 1999) e (Vargas, 2004), consideramos o conjunto  $\mathcal{N} := \{1, \dots, \eta\}$  composto por um número finito  $\eta$  de elementos,  $\eta \in \mathbb{N}$ . Chamamos de  $\mathcal{M}^{n,s}$  ( $\mathcal{M}^n$ ) a representação de um espaço linear formado por todas as matrizes reais de dimensão  $n \times s$  ( $n \times n$ ). Estabelecemos  $\mathbb{M}^{n,s}$  como sendo o espaço linear de todas as  $\mathcal{N}$ -sequências de matrizes tais que  $\mathbb{M}^{n,s} = \{V = (V_1, \dots, V_\eta) : V_i \in \mathcal{M}^{n,s}, i \in \mathcal{N}\}$ .

Seja  $\mathcal{S}^n$  a representação do subespaço linear normado de matrizes simétricas, ou seja,  $\mathcal{S}^n = \{V \in \mathcal{M}^n : V = V'\}$ , onde  $V'$  denota a matriz transposta de  $V$ . Considere também  $\mathcal{S}^{n0}$  ( $\mathcal{S}^{n+}$ ) o cone aberto (fechado) de matrizes semidefinidas (definidas) positivas de  $\mathcal{S}^n$ , ou seja,  $\mathcal{S}^{n0} = \{V \in \mathcal{S}^n : V \geq 0\}$  e  $\mathcal{S}^{n+} = \{V \in \mathcal{S}^n : V > 0\}$ . Definimos, ainda, o espaço  $\mathbb{S}^n$  como sendo o espaço linear de todas as  $\mathcal{N}$ -sequências de matrizes simétricas,  $\mathbb{S}^n = \{V = (V_1, \dots, V_\eta) : V_i \in \mathcal{S}^n, i \in \mathcal{N}\}$ . Também escrevemos  $\mathbb{S}^{n0}$  ( $\mathbb{S}^{n+}$ ) se  $V_i \in \mathcal{S}^{n0}$  ( $\in \mathcal{S}^{n+}$ ) para todo  $i \in \mathcal{N}$ .

Empregaremos relações de ordenamento do tipo  $V > W$  ( $V \geq W$ ) para elementos de  $\mathbb{S}^n$ , sempre

que tivermos  $V_i - W_i$  definido positivo (semi-definido positivo) para todo  $i \in \mathcal{N}$ . Para algum  $V \in \mathbb{S}^n$ , usaremos a norma  $\|\cdot\|_2$  definida a partir do operador traço do seguinte modo:

$$\|V\|_2^2 = \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr} \{V_i' V_i\}$$

O conjunto  $\mathbb{S}^n$  em conexão com a norma  $\|\cdot\|_2$  acima forma um espaço de Hilbert, com produto interno dado pela igualdade abaixo:

$$\langle V, W \rangle = \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr} \{V_i' W_i\}$$

Trataremos, agora, de enquadrar as matrizes e estruturas referentes aos sistemas dinâmicos lineares introduzidos no capítulo 1 aos conjuntos de matrizes e de seqüências de matrizes estabelecidos a pouco. Definimos, a propósito

$$\begin{aligned} A &:= \{A_i \in \mathcal{M}^{n,n} : i \in \mathcal{N}\} \\ B &:= \{B_i \in \mathcal{M}^{n,s} : i \in \mathcal{N}\} \\ C &:= \{C_i \in \mathcal{M}^{m,n} : i \in \mathcal{N}\} \\ H &:= \{H_i \in \mathcal{M}^{n,r} : i \in \mathcal{N}\} \\ Q &:= \{Q_i \in \mathcal{S}^{n_0} : i \in \mathcal{N}\} \\ R &:= \{R_i \in \mathcal{S}^{s^+} : i \in \mathcal{N}\} \\ F &:= \{F_i \in \mathcal{S}^{n_0} : i \in \mathcal{N}\} \end{aligned}$$

como um conjunto de matrizes associadas. As dimensões  $n$ ,  $r$ ,  $s$  e  $m$  garantem a compatibilidade necessária para que todas as operações matriciais pertinentes ao problema sejam possíveis. Além disso, tomamos  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k\}, P)$  como base estocástica. Definimos ainda uma cadeia de Markov homogênea a tempo discreto  $\Theta := \{\theta(k); k = 0, 1, \dots\}$ , tomando valores no conjunto  $\mathcal{N}$ . A matriz de transição de probabilidade referente à cadeia  $\Theta$  é dada por  $\mathbb{P} = [p_{ij}], \forall i, j \in \mathcal{N}$ .

Com base na teoria exposta em (Çinlar, 1975), o estado da Cadeia de Markov num certo instante  $t$ , dado o conhecimento do estado visitado num instante anterior  $k$ , é determinado conforme uma certa distribuição de probabilidade  $\mu_{t/k}$  em  $\mathcal{N}$ , a saber,  $\mu_{t/k}(i) := Pr(\theta(t) = i | \theta(k))$ . Uma vez que o conjunto  $\mathcal{N}$  possui  $\eta$  elementos, a distribuição de probabilidade  $\mu_{t/k}$  constitui um vetor coluna da forma  $\mu_{t/k} = [\mu_{t/k}(1), \dots, \mu_{t/k}(i), \dots, \mu_{t/k}(\eta)]'$  ( $i \in \mathcal{N}$ ), ou seja,  $\mu_{t/k} \in \mathcal{M}^{\eta,1}$ . Adicionalmente, esta distribuição é definida da seguinte forma:

$$\mu_{t/k} = (\mathbb{P}^{t-k}) \mu_{k/k}$$

Conforme os capítulos anteriores, utilizaremos  $k = 0$ , e assim denotaremos  $\mu_{t/0}$  pela forma simplificada  $\mu_t$ .

### 5.1.2 Os processos SLSMs sujeitos à realimentação de saída

Considere a seguinte representação:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t) + H_{\theta(t)}w(t) \\ y(t) &= C_{\theta(t)}x(t) \\ u(t) &= K(t)y(t) \\ t &\geq 0, \quad x(0) = x_0, \quad \theta(0) \sim \mu_0 \end{aligned}$$

Com  $t \in \mathbb{N}$ . Os vetores de estado, controle, ruído e saída são representados por  $x$ ,  $u$ ,  $w$  e  $y$ , respectivamente. As matrizes  $A_{\theta(t)}$ ,  $B_{\theta(t)}$ ,  $C_{\theta(t)}$  e  $H_{\theta(t)}$  possuem dimensões compatíveis e são funções do processo estocástico  $\Theta = \{\theta(t), t \geq 0\}$ . Para cada estado da Cadeia de Markov subjacente, o sistema evolui de acordo com uma determinada dinâmica linear dada pela combinação  $(A_{\theta(t)}, B_{\theta(t)}, C_{\theta(t)}, H_{\theta(t)})$ .

No contexto dos sistemas submetidos à realimentação de saída, conforme introduzido no capítulo 1, adotamos um controle do tipo  $u(t) = K(t)y(t)$ . Assumimos que, em cada instante  $t = 0, \dots, N-1$ , um ganho de controle  $K(t)$  que não depende diretamente da observação do estado  $\theta(t)$  da Cadeia de Markov é aplicado. O sistema retroalimentado resultante pode ser formulado do seguinte modo:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= (A_{\theta(t)} + B_{\theta(t)}K(t)C_{\theta(t)})x(t) + H_{\theta(t)}w(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) &= x_0, \quad \theta(0) \sim \mu_0 \end{aligned}$$

Assim como nos capítulos anteriores, utilizaremos, todavia, a notação  $u(t)$  para o ganho de controle, em substituição a  $K(t)$ . Logo, nosso sistema é governado pela seguinte dinâmica:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= (A_{\theta(t)} + B_{\theta(t)}u(t)C_{\theta(t)})x(t) + H_{\theta(t)}w(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) &= x_0, \quad \theta(0) \sim \mu_0 \end{aligned}$$

### 5.1.3 Resultados preliminares

Os resultados sumarizados a seguir foram introduzidos por (do Val e Başar, 1999) e utilizados também por (Vargas, 2004). Eles contêm conceitos e definições que serão repetidamente utilizados ao longo deste capítulo.

Definimos  $\mathbf{1}_\Upsilon$  como a função indicadora no conjunto  $\Upsilon$ . Considere

$$\begin{aligned} X_i^t &:= E_{x_0, \mu_0} [x(t)x(t)' \mathbf{1}_{\{\theta(t)=i\}}], \quad \forall i \in \mathcal{N} \\ \chi_i^t &:= E_{x_0, \mu_0} [x(t) \mathbf{1}_{\{\theta(t)=i\}}], \quad \forall i \in \mathcal{N} \end{aligned}$$

em que  $E_{x_0, \mu_0} [\cdot] \equiv E_{x_0, \mu_0} [\cdot | x(0) = x_0, \theta(0) \sim \mu_0]$ .

**Lema 2.1** Sejam quaisquer seqüências  $V = \{V_i \in \mathcal{M}^{n_0} : i \in \mathcal{N}\} \in \mathbb{S}^{n_0}$ ,  $\phi = \{\phi_i \in \mathcal{M}^{n_1} : i \in \mathcal{N}\} \in$

$\mathbb{M}^{n,1}$  e  $\alpha = \{\alpha_i \in \mathcal{M}^{1,1} : i \in \mathcal{N}\} \in \mathbb{M}^{1,1}$ . As seguintes relações são válidas:

$$\begin{aligned} (i) \quad E_{x_0, \mu_0} [x(t)' V_{\theta(t)} x(t)] &= \sum_{i \in \mathcal{N}} tr \{V_i X_i^t\} = \langle V, X^t \rangle \\ (ii) \quad E_{x_0, \mu_0} [\phi'_{\theta(t)} x(t)] &= \sum_{i \in \mathcal{N}} \phi'_i \chi_i^t = \langle \phi', (\chi^t)' \rangle \\ (iii) \quad E_{x_0, \mu_0} [\alpha_{\theta(t)}] &= \sum_{i \in \mathcal{N}} \alpha_i \mu_t(i) = \mu'_t \alpha \end{aligned}$$

**Prova:** De acordo com (Vargas, 2004), temos:

$$\begin{aligned} (i) \quad E_{x_0, \mu_0} [x(t)' V_{\theta(t)} x(t)] &= \sum_{i \in \mathcal{N}} E_{x_0, \mu_0} [x(t)' V_i x(t) \mathbf{1}_{\{\theta(t)=i\}}] \\ &= \sum_{i \in \mathcal{N}} E_{x_0, \mu_0} [tr \{V_i x(t) x(t)'\} \mathbf{1}_{\{\theta(t)=i\}}] \\ &= \sum_{i \in \mathcal{N}} tr \{V_i E_{x_0, \mu_0} [x(t) x(t)' \mathbf{1}_{\{\theta(t)=i\}}]\} \\ &= \sum_{i \in \mathcal{N}} tr \{V_i X_i^t\} \\ &= \langle V, X^t \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad E_{x_0, \mu_0} [\phi'_{\theta(t)} x(t)] &= \sum_{i \in \mathcal{N}} E_{x_0, \mu_0} [\phi'_i x(t) \mathbf{1}_{\{\theta(t)=i\}}] \\ &= \sum_{i \in \mathcal{N}} \phi'_i E_{x_0, \mu_0} [x(t) \mathbf{1}_{\{\theta(t)=i\}}] \\ &= \sum_{i \in \mathcal{N}} \phi'_i \chi_i^t \\ &= \langle \phi', (\chi^t)' \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii) \quad E_{x_0, \mu_0} [\alpha_{\theta(t)}] &= \sum_{i \in \mathcal{N}} E_{x_0, \mu_0} [\alpha_i \mathbf{1}_{\{\theta(t)=i\}}] \\ &= \sum_{i \in \mathcal{N}} \alpha_i \mu_t(i) \\ &= \mu'_t \alpha \end{aligned}$$

□

### 5.1.4 O índice de desempenho quadrático

Utilizaremos o seguinte funcional de custo quadrático:

$$J_{\mathbf{U}}^N := E_{x_0, \mu_0} \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} \left[ x(t)' Q_{\theta(t)} x(t) + x(t)' C'_{\theta(t)} u(t)' R_{\theta(t)} u(t) C_{\theta(t)} x(t) \right] + x(N)' F_{\theta(N)} x(N) \right\}$$

Lembrando que  $E_{x_0, \mu_0}[\cdot] \equiv E[\cdot | x(0) = x_0, \theta(0) = \mu_0]$  e que  $N > 0$  representa uma quantidade finita de estágios, um horizonte finito. Conforme ressaltado no capítulo 1, a utilização do vetor de estado  $x$  nas equações e funcionais constitui um artifício matemático. Sua utilização é justificada, pois supomos a existência de um modelo para o sistema, embora só tenhamos acesso a sua saída  $y$  e este modelo possa ser variante no tempo. As matrizes  $Q_{\theta(t)}$ ,  $R_{\theta(t)}$  e  $F_{\theta(N)}$  exercem uma função de ponderação e têm valores definidos para cada estado de Markov  $i \in \mathcal{N}$ .

Em outras palavras, desejamos minimizar o funcional:

$$J_{\mathbf{U}}^N = E_{x_0, \mu_0} \left[ \sum_{t=0}^{N-1} q(t) + \bar{q}(N) \right]$$

considerando um ganho de controle  $u(t)$  e o seguinte conjunto de restrições na forma do processo estocástico com saltos markovianos  $\Upsilon$  definido em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k\}, P)$ :

$$\Upsilon : \begin{cases} x(t+1) = (A_{\theta(t)} + B_{\theta(t)} u(t) C_{\theta(t)}) x(t) + H_{\theta(t)} w(t), \\ q(t) = x(t)' Q_{\theta(t)} x(t) + x(t)' C'_{\theta(t)} u(t)' R_{\theta(t)} u(t) C_{\theta(t)} x(t), \\ \bar{q}(N) = x(N)' F_{\theta(N)} x(N), \\ t \geq 0, x(0) = x_0, \theta(0) \sim \mu_0. \end{cases}$$

sendo  $x(t) \in \mathcal{M}^{n,1}$  um vetor de estados e  $u(t) \in \mathcal{M}^{s,m}$  um ganho de controle. O estado da Cadeia de Markov subjacente é  $\theta$  e o processo conjunto resultante  $(x, \theta)$  é um processo markoviano. O sistema evolui a partir de um instante inicial  $t = 0$ , um estado inicial  $x(0) = x_0$  e uma distribuição inicial da Cadeia de Markov  $\theta(0) \sim \mu_0$ . O estados da Cadeia de Markov  $\theta(t)$  não são observados, apenas a distribuição de probabilidades inicial  $\mu_0$  é conhecida. As variáveis  $q$  e  $\bar{q}$  representam, respectivamente, o custo por estágio e o custo final, ambos de natureza quadrática. O ruído aditivo  $w \in \mathcal{M}^{r,1}$  é constituído de uma sequência de vetores aleatórios de segunda ordem independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.), com média nula e matriz de covariância  $\Sigma$ . Resumidamente:

$$\begin{aligned} E[w(t)] &= 0, \quad t = 0, \dots, N-1 \\ \Sigma &= E[w(t)w(t)'] \in S^{r0}, \quad t = 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Desejamos determinar a estratégia de controle  $\{u(0), \dots, u(N-1)\}$  que minimiza o funcional  $J_{\mathbf{U}}^N$  sobre todas as estratégias possíveis, dado o conjunto de restrições de igualdade especificado. Sabemos que este problema possui natureza não linear e não é, em geral, convexo.

É importante ressaltar que assumimos desconhecidos os estados da Cadeia de Markov. Como consequência, adotamos um ganho de controle  $u(t)$  que, como a notação deixa claro, não depende do

estado  $\theta(t)$  da cadeia.

## 5.2 Definição de funcionais e operadores utilizados

Trataremos, agora, da definição de novos operadores e variáveis que resultarão em uma notação mais clara e compacta, fato que impactará positivamente ao longo do capítulo. Aqui, uma adequação do trabalho que (do Val e Başar, 1999) desenvolveram para o caso de realimentação de estados será feita para o problema de realimentação de saída.

Em substituição ao estado  $x$ , uma variável  $X^t := \{X_i^t \in \mathbb{S}^{n_0}\}$  é definida:

$$X_i^t := E_{x_0, \mu_0} [x(t)x(t)'\mathbf{1}_{\{\theta(t)=i\}}], \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad t = 0, \dots, N \quad (5.1)$$

O termo em destaque  $\mathbf{1}_{\{\theta(t)=i\}}$  representa a função indicadora do conjunto  $\theta(t) = i$ . Estabelecemos, ainda, a matriz  $A^t \in \mathbb{M}^n$  tal que:

$$A_i^t := A_i + B_i u(t) C_i, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad t = 0, \dots, N - 1 \quad (5.2)$$

Fazemos também  $\Psi^t \in \mathbb{S}^{r_0}$  dada por:

$$\Psi_i^t := \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ij} \mu_t(j) H_j \Sigma H_j', \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad t = 0, \dots, N - 1 \quad (5.3)$$

Além disso, para um dado  $\phi \in \mathbb{S}^{n_0}$ , definimos os operadores  $\varepsilon, \Gamma$  e  $\mathcal{T} : \mathbb{S}^{n_0} \rightarrow \mathbb{S}^{n_0}$ , válidos para  $t = 0, \dots, N$  e  $i = 0, \dots, \eta$ :

$$\varepsilon_i(\phi) := \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ij} \phi_j \quad (5.4)$$

$$\Gamma_i^t(\phi) := (A_i^t)' \varepsilon_i(\phi) A_i^t \quad (5.5)$$

$$\mathcal{T}_i^t(\phi) := \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ij} A_i^t \phi_j (A_i^t)' \quad (5.6)$$

A notação introduzida até aqui será utilizada para estabelecer uma relação de recorrência entre estados  $X_i^t$  consecutivos e para simplificar a expressão final do funcional de custo  $J_U^N$ . Seguindo um raciocínio semelhante ao desenvolvido no capítulo 4 para os sistemas estocásticos com ruído aditivo, temos:

### Lema 5.1

$$E_{x_0, \mu_0} [x(t+1)x(t+1)'\mathbf{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] = \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ij} \{A_j^t X_j^t (A_j^t)' + H_j \Sigma H_j' \mu_t(j)\}$$

**Prova:** A seguinte relação é válida:

$$E_{x_0, \mu_0} [x(t+1)x(t+1)'\mathbf{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] = \sum_{j \in \mathcal{N}} E_{x_0, \mu_0} [x(t+1)x(t+1)'\mathbf{1}_{\{\theta(t+1)=i, \theta(t)=j\}}] \quad (5.7)$$

Mas  $x(t+1)$  é independente do estado da cadeia  $\theta(t+1)$  e, além disso:

$$Pr[\theta(t+1) = i, \theta(t) = j] = Pr[\theta(t) = j] p_{ji} = E[\mathbf{1}_{\{\theta(t)=j\}}] p_{ji}$$

Prosseguindo, ao substituírmos a expressão da dinâmica  $x(t+1)$ , a equação (5.7) pode ser expandida do seguinte modo:

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} E_{x_0, \mu_0} \left\{ [(A_{\theta(t)} + B_{\theta(t)}u(t)C_{\theta(t)})x(t) + H_{\theta(t)}w(t)] [(A_{\theta(t)} + B_{\theta(t)}u(t)C_{\theta(t)})x(t) + H_{\theta(t)}w(t)]' \mathbf{1}_{\{\theta(t)=j\}} \right\} p_{ji}$$

Utilizando (5.2) e lembrando que os vetores aleatórios  $x$  e  $w$  são independentes, obtemos:

$$\begin{aligned} E_{x_0, \mu_0} [x(t+1)x(t+1)'\mathbf{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] &= \sum_{j \in \mathcal{N}} \{ p_{ji} A_j^t E_{x_0, \mu_0} [x(t)x(t)'\mathbf{1}_{\{\theta(t)=j\}}] (A_j^t)' \} \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{N}} \{ p_{ji} H_j E_{x_0, \mu_0} [w(t)w(t)'\mathbf{1}_{\{\theta(t)=j\}}] H_j' \} \end{aligned}$$

Sabemos, com  $w$  e  $\theta$  independentes, que:

$$\begin{aligned} E[w(t)w(t)'\mathbf{1}_{\{\theta(t)=j\}}] &= E[w(t)w(t)'] Pr(\theta(t) = j) \\ &= \Sigma \mu_t(j) \end{aligned}$$

Conseqüentemente, de (5.1):

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} \{ A_j^t E_{x_0, \mu_0} [x(t)x(t)'\mathbf{1}_{\{\theta(t)=j\}}] (A_j^t)' + H_j \Sigma H_j' \mu_t(j) \} = \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} \{ A_j^t X_j^t (A_j^t)' + H_j \Sigma H_j' \mu_t(j) \}$$

□

Utilizando os resultados obtidos a pouco, podemos definir a dinâmica equivalente  $X_i^t$  conforme a seguinte proposição:

**Proposição 5.1** A relação abaixo é válida para  $t = 0, \dots, N$ , com  $X_i^0 = \mu_0(i)x(0)x(0)'$ ,  $\forall i \in \mathcal{N}$

$$X_i^{t+1} = \mathcal{T}_i^t(X^t) + \Psi_i^t, \quad \forall i \in \mathcal{N}$$

**Prova:** No instante  $t = 0$  temos:

$$X_i^1 = \mathcal{T}_i^0(X^0) + \Psi_i^0, \quad \forall i \in \mathcal{N}$$

O resultado é, portanto, válido para o estágio  $t = 1$ . Ao supor que o mesmo é válido para um instante  $t$  qualquer e utilizando o Lema 5.1, chegamos à conclusão de que o resultado também é válido para  $t + 1$ , o que completa o argumento de indução.  $\square$

### 5.3 Funcional de custo em forma determinística equivalente

Conforme (Vargas, 2004), a fim de resolver o problema de minimização proposto, será desenvolvida uma representação determinística equivalente para o custo  $J_{\mathbf{U}}^N$ . Um raciocínio em termos de um processo de indução acabará por estabelecer uma nova formulação para este custo que será mais adequada para fins de otimização, nosso objetivo principal. Definimos, para cada instante  $t = 0, \dots, N - 1$ , a seguinte variável aleatória:

$$W(t, x(t), \theta(t)) = E \left[ \sum_{l=t}^{N-1} q(l) + \bar{q}(N) \middle| x(t), \theta(t) \right] \quad (5.8)$$

Em que:

$$W(N, x(N), \theta(N)) = \bar{q}(N) = x(N)' F_{\theta(N)} x(N)$$

Novamente, não temos acesso ao estado  $x$  nem ao estado da cadeia  $\theta$ . A equação (5.8) representa o custo acumulado entre os instantes  $l = t$  e  $l = N$  e pode ser reescrita do seguinte modo, usando a lei das esperanças condicionais sucessivas, (Çinlar, 1975):

$$\begin{aligned} W(t, x(t), \theta(t)) &= E \left[ q(t) + \sum_{l=t+1}^{N-1} q(l) + \bar{q}(N) \middle| x(t), \theta(t) \right] \\ &= q(t) + E \left[ \sum_{l=t+1}^{N-1} q(l) + \bar{q}(N) \middle| x(t), \theta(t) \right] \\ &= q(t) + E \left[ E \left[ \sum_{l=t+1}^{N-1} q(l) + \bar{q}(N) \middle| x(t+1), \theta(t+1) \right] \middle| x(t), \theta(t) \right] \end{aligned}$$

Como o processo conjunto  $\{x(t), \theta(t)\}$  é markoviano, temos:

$$W(t, x(t), \theta(t)) = q(t) + E \left[ W(t+1, x(t+1), \theta(t+1)) \middle| x(t), \theta(t) \right] \quad (5.9)$$

para todo  $t = 0, \dots, N$ . Seja  $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$ ,  $\mathcal{U} := \{u(t) \in \mathcal{M}^{s,m}; t = 0, \dots, N - 1\}$  uma sequência de ganhos de controle, considere o seguinte grupo de equações acopladas,  $t = 0, \dots, N - 1$ :

$$L_i^t = Q_i + C_i' u(t)' R_i u(t) C_i + \Gamma_i^t (L^{t+1}), \quad L_i^N = F_i, \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (5.10)$$

$$z_i^t = \varepsilon_i(z^{t+1}) + tr \{ \varepsilon_i(L^{t+1})H_i\Sigma H_i' \}, \quad z_i^N = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (5.11)$$

**Lema 5.2** O funcional de custo (5.8) possui a seguinte representação quadrática equivalente:

$$W(t, x(t), \theta(t)) = x(t)'L_{\theta(t)}^t x(t) + z_{\theta(t)}^t \quad (5.12)$$

em que  $L_{\theta(t)}^t$  e  $z_{\theta(t)}^t$  satisfazem as equações recorrentes (5.10) e (5.11), respectivamente. O estado da Cadeia de Markov é  $\theta(t) = i \in \mathcal{N}$ .

**Prova:** Um procedimento por indução é desenvolvido do seguinte modo. Sabemos que o resultado é válido para o instante  $t = N$ , pois:

$$W(N, x(N), \theta(N)) = x(N)'L_{\theta(N)}^N x(N)$$

Supondo que o mesmo também seja válido para um instante  $t + 1$  qualquer, obtemos:

$$W(t+1, x(t+1), \theta(t+1)) = x(t+1)'L_{\theta(t+1)}^{t+1} x(t+1) + z_{\theta(t+1)}^{t+1}$$

Utilizando o resultado (5.9) e a dinâmica  $\Upsilon$ , resulta:

$$W(t, x(t), \theta(t)) = q(t) + E \left[ x(t+1)'L_{\theta(t+1)}^{t+1} x(t+1) + z_{\theta(t+1)}^{t+1} \middle| \theta(t), x(t) \right]$$

Ou

$$\begin{aligned} W(t, x(t), \theta(t)) &= x(t)'Q_{\theta(t)}x(t) + x(t)'C_{\theta(t)}'u(t)'R_{\theta(t)}u(t)C_{\theta(t)}x(t) \\ &+ E \left[ [(A_{\theta(t)} + B_{\theta(t)}u(t)C_{\theta(t)})x(t) + H_{\theta(t)}w(t)]' L_{\theta(t+1)}^{t+1} \right. \\ &\quad \left. \cdot [(A_{\theta(t)} + B_{\theta(t)}u(t)C_{\theta(t)})x(t) + H_{\theta(t)}w(t)] + z_{\theta(t+1)}^{t+1} \middle| \theta(t), x(t) \right] \end{aligned}$$

Alternativamente:

$$\begin{aligned} W(t, x(t), \theta(t)) &= x(t)'Q_{\theta(t)}x(t) + x(t)'C_{\theta(t)}'u(t)'R_{\theta(t)}u(t)C_{\theta(t)}x(t) \\ &+ x(t)'(A_{\theta(t)}^t)' \varepsilon_{\theta(t)}(L^{t+1})A_{\theta(t)}^t x(t) + E \left[ (H_{\theta(t)}w(t))' L_{\theta(t+1)}^{t+1} (H_{\theta(t)}w(t)) + z_{\theta(t+1)}^{t+1} \middle| \theta(t), x(t) \right] \end{aligned}$$

Concluindo o argumento de indução:

$$\begin{aligned} W(t, x(t), \theta(t)) &= x(t)' [Q_{\theta(t)} + C'_{\theta(t)} u(t)' R_{\theta(t)} u(t) C_{\theta(t)} + (A^t_{\theta(t)})' \varepsilon_{\theta(t)} (L^{t+1}) A^t_{\theta(t)}] x(t) \\ &\quad + \varepsilon_{\theta(t)} (z^{t+1}) + \text{tr} \{ \varepsilon_{\theta(t)} (L^{t+1}) H_{\theta(t)} \Sigma H'_{\theta(t)} \} \\ &= x(t)' L^t_{\theta(t)} x(t) + z^t_{\theta(t)} \end{aligned}$$

□

**Definição 5.1** Seja  $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$ . Definimos o seguinte funcional de custo indexado no instante  $l = t$  a partir do qual a sequência de controle  $\mathbf{U}$  é aplicada até o instante  $l = N - 1$

$$J_{\mathbf{U}}^N(t) = E_{x_0, \mu_0} \left[ \sum_{l=t}^{N-1} q(l) + \bar{q}(N) \right] \quad (5.13)$$

A partir da igualdade acima, definimos uma expressão determinística equivalente para o funcional  $J_{\mathbf{U}}^N(t)$ .

**Proposição 5.2** Para cada  $t = (0, \dots, N - 1)$ , sejam  $L^t$  e  $w^t$  dadas por (5.10) e (5.11), temos:

$$J_{\mathbf{U}}^N(t) = E_{x_0, \mu_0} [x(t)' L^t_{\theta(t)} x(t) + z^t_{\theta(t)}] = \langle L^t, X^t \rangle + \mu'_t z^t$$

**Prova:** Da Definição 5.1, de (5.8) e do Lema 5.2 temos para cada  $t = 0, \dots, N$ :

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{U}}^N(t) &= E_{x_0, \mu_0} \left[ \sum_{l=t}^{N-1} q(l) + \bar{q}(N) \right] \\ &= E_{x_0, \mu_0} \left[ E \left[ \sum_{l=t}^{N-1} q(l) + \bar{q}(N) \middle| x(t), \theta(t) \right] \right] \\ &= E_{x_0, \mu_0} [W(t, x(t), \theta(t))] \\ &= E_{x_0, \mu_0} [x(t)' L^t_{\theta(t)} x(t) + z^t_{\theta(t)}] \end{aligned} \quad (5.14)$$

□

## 5.4 Condições necessárias de otimalidade

Trataremos, a partir de agora, da minimização do funcional de custo  $J_{\mathbf{U}}^N$ . A condição de otimalidade estabelecida a seguir vale para uma sequência de ganhos de controle  $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$ , tal que  $\mathcal{U} = \{u(t) \in \mathcal{M}^{s,m} : t = 0, \dots, N - 1\}$ .

**Teorema 5.1.** *Seja  $\mathbf{U} = \arg \min_{\mathbf{G} \in \mathcal{U}} J_{\mathbf{G}}^N$ , então esta sequência  $\mathbf{U}$  satisfaz a seguinte relação ( $\forall t =$*

$0, \dots, N - 1$ ):

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \{ (R_i + B'_i \varepsilon_i(L^{t+1}) B_i) u(t) (C_i X_i^t C'_i) + B'_i \varepsilon_i(L^{t+1}) A_i X_i^t C'_i \} = 0 \quad (5.15)$$

**Prova:** Para uma dada sequência de ganhos  $\mathbf{U}$ , utilizamos a Proposição 5.2 para investigar o efeito do ganho de controle  $u(t)$  no custo total  $J_{\mathbf{U}}^N$ . A seguinte relação se aplica:

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{U} \in \mathcal{U}} J_{\mathbf{U}}^N(t) &= \arg \min_{\mathbf{U} \in \mathcal{U}} \langle L^t, X^t \rangle + \mu'_t z^t \\ &= \arg \min_{\mathbf{U} \in \mathcal{U}} \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr} \{ [Q_i + C'_i u(t)' R_i u(t) C_i + (A_i + B_i u(t) C_i)' \varepsilon_i(L^{t+1}) (A_i + B_i u(t) C_i)] X_i^t \} \\ &\quad + [\varepsilon_i(z^{t+1}) + \text{tr} [\varepsilon_i(L^{t+1}) H_i \Sigma H'_i]] \mu_t(i) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Utilizando as propriedades (A.4) e (A.6) da diferenciação da função traço de uma matriz com relação à variável  $u(t)$ , obtemos (5.15). Logicamente, se tomarmos  $\mathbf{U} = \{u(0), \dots, u(N - 1)\}$  como uma sequência ótima de controle no conjunto  $\mathcal{U}$ , a equação (5.15) deve ser satisfeita em cada instante  $t = 0, \dots, N - 1$ .  $\square$

## 5.5 Condições suficientes de otimalidade

Dado que no capítulo anterior foi possível estabelecer condições suficientes de otimalidade para uma classe de problemas estocásticos com ruído aditivo, decidimos investigar a aplicabilidade do referido raciocínio ao controle de SLSMs.

**Teorema 5.2.** *Considere o problema de otimização em 2 estágios ( $N = 2$ ) e  $\eta$  estados da Cadeia de Markov. O funcional de custo  $J_{\mathbf{U}}^2$  depende dos ganhos de controle  $\{u(0), u(1)\}$ :*

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{U}}^2 &= \sum_{i=1}^{\eta} \text{tr} \{ [(Q_i + C'_i u(0)' R_i u(0) C_i) + (A_i + B_i u(0) C_i)' \xi_i(L^1) (A_i + B_i u(0) C_i)] X_i^0 \} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\eta} \{ \xi_i(z^1) + \text{tr} [\xi_i(L^1) H_i \Sigma H'_i] \} \mu_0(i) \end{aligned} \quad (5.17)$$

em que

$$\begin{aligned} \xi_i(L^1) &= \sum_{j=1}^{\eta} p_{ij} L_j^1 \\ &= \sum_{j=1}^{\eta} p_{ij} \left[ (Q_j + C'_j u(1)' R_j u(1) C_j) + (A_j + B_j u(1) C_j) \left( \sum_{l=1}^{\eta} p_{jl} F_l \right) (A_j + B_j u(1) C_j) \right] \end{aligned}$$

Considere o caso SISO e matrizes  $C$  e  $B$  tais que  $CB = 0$ . Então, quaisquer controles  $\{u^*(0), u^*(1)\}$

tais que a relação (5.15) seja verificada consitui uma condição necessária e suficiente de otimalidade para o problema proposto.

**Prova:** Para cada estado  $i \in \mathcal{N}$  da Cadeia de Markov temos um custo  $J_i$  associado:

$$J_i = tr \left\{ [(Q_i + C_i' u(0) R_i u(0) C_i) X_i^0 + (A_i + B_i u(0) C_i)' \xi_i(L^1) (A_i + B_i u(0) C_i)] X_i^0 \right\} \\ + \left\{ \xi_i(z^1) + tr [\xi_i(L^1) H_i \Sigma H_i'] \right\} \mu_0(i)$$

Logo, de (A.3) e (A.4):

$$J_i = tr \left\{ (Q_i + C_i' u(0)' R_i u(0) C_i) X_i^0 \right\} \\ + tr \left\{ \xi_i(L^1) [(A_i + B_i u(0) C_i) X_i^0 (A_i + B_i u(0) C_i)' + H_i \Sigma H_i' \mu_0(i)] \right\} \\ + \xi_i(z^1) \mu_0(i)$$

Além disso, sabemos de (5.4) que:

$$\xi_i(z^1) = \sum_{j=1}^{\eta} p_{ij} [\xi_j(z^2) + tr (\xi_j(L^2) H_j \Sigma H_j')] \\ = \sum_{j=1}^{\eta} p_{ij} \left[ tr \left( \sum_{l=1}^{\eta} p_{jl} L_l^2 H_j \Sigma H_j' \right) \right]$$

pois  $z^2 = 0$ . Os termos do tipo  $\xi_i(L^1)$  possuem uma dependência quadrática com relação ao controle  $u(1)$  e os termos da forma  $\xi_i(z^1)$  são números reais fixos. Da Proposição 5.1:

$$X_i^1 = (A_i + B_i u(0) C_i) X_i^0 (A_i + B_i u(0) C_i)' + H_i \Sigma H_i' \mu_0(i) \quad (5.18)$$

Além disso, definimos:

$$S_j := \left( \sum_{l=1}^{\eta} p_{jl} F_l \right) \quad (5.19)$$

O funcional  $J_i$  tem, então, a seguinte forma:

$$J_i = tr \left\{ (Q_i + C_i' u(0)' R_i u(0) C_i) X_i^0 \right\} \\ + tr \left\{ \left[ \sum_{j=1}^{\eta} p_{ij} [(Q_j + C_j' u(1)' R_j u(1) C_j) + (A_j + B_j u(1) C_j) S_j (A_j + B_j u(1) C_j)] \right] X_i^1 \right\} \\ + \xi_i(z^1) \mu_0(i)$$

Rearranjando, obtemos o seguinte custo  $J_i$  em função dos ganhos de controle  $u(0)$  e  $u(1)$ :

$$J_i = tr \left\{ (Q_i + C'_i u(0)' R_i u(0) C_i) X_i^0 + \sum_{j=1}^{\eta} p_{ij} [Q_j + A'_j S_j A_j] X_i^1 \right\} + \xi_i(z^1) \mu_0(i) \\ + tr \left\{ \sum_{j=1}^{\eta} p_{ij} [C'_j u(1)' (R_j + B'_j S_j B_j) u(1) C_j X_i^1] \right\} \\ + tr \left\{ \sum_{j=1}^{\eta} p_{ij} u(1) [B'_j S_j A_j X_i^1 C_j]' \right\} + tr \left\{ \sum_{j=1}^{\eta} p_{ij} u(1)' [B'_j S_j A_j X_i^1 C_j] \right\}$$

Considerando apenas os sistemas SISO, resulta:

$$J_i = tr \left\{ (Q_i + C'_i u(0)' R_i u(0) C_i) X_i^0 + \sum_{j=1}^{\eta} p_{ij} [Q_j + A'_j S_j A_j] X_i^1 \right\} + \xi_i(z^1) \mu_0(i) \\ + tr \left\{ \sum_{j=1}^{\eta} p_{ij} u(1) [(R_j + B'_j S_j B_j) (C_j X_i^1 C'_j)] u(1) \right\} \\ + 2tr \left\{ \sum_{j=1}^{\eta} p_{ij} u(1) [B'_j S_j A_j X_i^1 C_j] \right\}$$

O custo total é dado por:

$$J_{\mathbf{U}}^2 = \sum_{i=1}^{\eta} J_i \quad (5.20)$$

Logo:

$$J_{\mathbf{U}}^2 = \sum_{i=1}^{\eta} tr \left\{ (Q_i + C'_i u(0)' R_i u(0) C_i) X_i^0 + \sum_{j=1}^{\eta} p_{ij} [Q_j + A'_j S_j A_j] X_i^1 \right\} \\ + u(1) \sum_{i=1}^{\eta} \left\{ tr \left[ \sum_{j=1}^{\eta} p_{ij} (R_j + B'_j S_j B_j) (C_j X_i^1 C'_j) \right] \right\} u(1) \\ + u(1) \sum_{i=1}^{\eta} tr \left\{ \sum_{j=1}^{\eta} 2p_{ij} B'_j S_j A_j X_i^1 C_j \right\} + \sum_{i=1}^{\eta} \xi_i(z^1) \mu_0(i) \quad (5.21)$$

Tomando  $CB = 0$ , o mínimo da função  $J_i$  com relação ao ganho de controle  $u(0)$ , após substi-

tuirmos o ganho  $u(1)$  ótimo, vale:

$$J_U^2 = \sum_{i=1}^{\eta} tr \left\{ (Q_i + C_i' u(0)' R_i u(0) C_i) X_i^0 + \sum_{j=1}^{\eta} p_{ij} [Q_j + A_j' S_j A_j] X_i^0 \right\} \\ - tr \left\{ b \left\{ \sum_{i=1}^{\eta} tr \left[ \sum_{j=1}^{\eta} p_{ij} (R_j + B_j' S_j B_j) (C_j X_i^1 C_j') \right] \right\}^{-1} b \right\} + \sum_{i=1}^{\eta} \xi_i(z^1) \mu_0(i)$$

Em que:

$$b = \sum_{i=1}^{\eta} tr \left\{ \sum_{j=1}^{\eta} 2p_{ij} B_j' S_j A_j X_i^1 C_j \right\} \quad (5.22)$$

A função custo é, assim como no capítulo anterior, a diferença (resultando necessariamente em um valor positivo) entre uma função quadrática positiva e outra função quadrática e também positiva. O funcional  $J_U^2$  é, portanto, uma função convexa e quadrática na variável  $u(0)$ . Ou seja, o problema de controle ótimo de SLSMs apresenta, no cenário analisado, condições necessárias e suficientes de otimalidade. Determinado o ganho  $u(0)$  ótimo, o ganho  $u(1)$  é facilmente obtido, uma vez que este é uma função explícita do ganho de controle inicial.

Uma vez que a soma de funções convexas em uma variável  $u(0)$  resulta em uma função também convexa nesta variável (Mangasarian, 1969), é possível afirmar que o problema de controle de SLSMs no contexto investigado (SISO,  $N = 2$ ,  $CB = 0$ ) possui um ótimo global, independentemente do número de estados da Cadeia de Markov subjacente  $\eta$ .

□

# Capítulo 6

## Aplicações

Neste capítulo, serão apresentadas algumas aplicações para a teoria desenvolvida. Mais especificamente, analisaremos um caso determinístico (capítulo 3) e um sistema estocástico com ruído aditivo, conforme o conteúdo do capítulo 4.

### 6.1 Algoritmo baseado em método variacional

Com o objetivo de determinar, em cada caso, a sequência de controle ótima, utilizaremos uma adaptação do algoritmo proposto por do Val e Başar (1999) para o caso dos sistemas submetidos à realimentação de estados. Utilizaremos um método variacional para determinar uma sequência de controle que satisfaça a relação (5.15), dadas as relações (5.10), (5.11) e (5.12), num contexto de realimentação de saída. O algoritmo adaptado é apresentado a seguir.

Definimos  $\mathbf{G}(n) := \{G^0(n), \dots, G^{N-1}(n)\} \in \mathbb{M}^{s,m}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , como uma sequência de controles. Para cada instante  $t = 0, \dots, N - 1$ , associamos os seguintes operadores:

$$A_{i\mathbf{G}}^t(n) := A_i + B_i G^t(n) C_i, \quad \Lambda_i^t(n) := R_i + B_i' \varepsilon_i(L^t(n)) B_i, \quad \forall i \in \mathcal{N},$$

Associamos, também, para algum  $\phi \in \mathbb{S}^{n_0}$ , os operadores:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{in}^t(\phi) &:= \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ij} A_{j\mathbf{G}}^t(n) \phi_j A_{j\mathbf{G}}^t(n)', \quad \forall i \in \mathcal{N}, \\ \Gamma_{in}^t(\phi) &:= A_{j\mathbf{G}}^t(n)' \varepsilon_i(\phi) A_{j\mathbf{G}}^t(n), \quad \forall i \in \mathcal{N}, \end{aligned}$$

O algoritmo para obtenção das condições necessárias de otimalidade é apresentado abaixo:

- *Passo 1:* Gravamos um contador de iterações  $n = 0$ . Escolhemos alguma sequência inicial  $\mathbf{G}(0) \in \mathcal{U}$ .
- *Passo 2:* Para cada  $t = 0, \dots, N - 1$ , determinamos  $X^t(n) \in \mathbb{S}^{n_0}$ , solução do seguinte conjunto de equações:

$$X_i^t(n) = \mathcal{T}_{in}^{t-1}(X^{t-1}(n)) + \Psi_i^{t-1},$$

com  $X_i^0(n) = \mu_0(i)x(0)x(0)'$ ,  $\forall i \in \mathcal{N}$ . Após isto, fazemos  $n = n + 1$  e  $t = N - 1$  e seguimos para o próximo passo.

- *Passo 3:* Encontramos  $G^t(n)$  definido por

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} [\Lambda_i^{t+1}(n)G^t(n) + B'_i \varepsilon_i(L^{t+1})A_i X_i^t(n-1)C'_i] = 0 \quad (6.1)$$

Calculamos  $L_i^t(n) \in \mathbb{S}^{n_0}$  e  $z^t(n) \in \mathbb{M}^{1,1}$  através de

$$\begin{aligned} L_i^t(n) &= Q_i + C'_i G^t(n)' R_i G^t C_i + \Gamma_i^t(L^{t+1}(n)), \quad L_i^N(n) = F_i, \quad \forall i \in \mathcal{N} \\ z_i^t(n) &= \varepsilon_i(z^{t+1}(n)) + \text{tr} \{ \varepsilon_i(L^{t+1}(n)) H_i \Sigma H_i' \}, \quad z_i^N(n) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N} \end{aligned}$$

- *Passo 4:* Adotamos um critério de parada baseado na variação do custo entre  $J_{\mathbf{G}(n-1)}^N$  e  $J_{\mathbf{G}(n)}^N$ . Se o critério de parada não é satisfeito, então retornamos ao *Passo 2*.

As seqüências  $\mathbf{G}(n)$ , com  $n = 0, 1, \dots$ , são tais que  $J_{\mathbf{G}(n+1)}^N \leq J_{\mathbf{G}(n)}^N$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{G}(n)$  satisfaz o estabelecido no Teorema 5.1.

Mantivemos a denominação de  $G^t$  para os ganhos de controle apenas por esta ser a nomenclatura utilizada por (do Val e Başar, 1999) em seu trabalho. É lógico que, conforme previamente destacado nos capítulos anteriores, adotamos a notação  $u(t)$  para os controles. Logo, o algoritmo acima nos fornece uma seqüência de controle  $u^*(0), \dots, u^*(N-1)$  ótima.

A prova de que o método garante as condições necessárias de otimalidade será omitida, visto que esta constitui uma mera adequação do teorema provado por do Val e Başar (1999). Além disso, o estudo em detalhes dos métodos computacionais não está entre os objetivos do nosso trabalho.

## 6.2 Controle de horizonte retrocedente

Um controle por horizonte retrocedente é caracterizado pela seguinte lógica:

- *Passo 1:* Considere um horizonte finito  $N$  para o qual, por meio do algoritmo introduzido na seção 6.1, uma seqüência ótima  $\{u^*(k), \dots, u^*(k+N-1)\}$  é determinada ( $k$  constitui um instante inicial).
- *Passo 2:* Somente o controle  $u^*(k)$  é aplicado. Fazemos  $k = k + 1$  e uma nova seqüência de controle  $\{u^*(k), \dots, u^*(k+N-1)\}$  é calculada. Voltar ao início do *Passo 1* se  $k \leq M$ ,  $M \in \mathbb{N}$ . Caso contrário, parar.

A cada instante  $k$ , uma nova seqüência  $\{u^*(k), \dots, u^*(k+N-1)\}$  é calculada e apenas o controle  $u^*(k)$  é aplicado. Esta técnica tem sido bastante utilizada na prática, tanto em sistemas determinísticos quanto estocásticos, lineares e não lineares. Uma bibliografia sobre o assunto que podemos sugerir é (Camacho e Bordons, 1999).

### 6.3 Caso determinístico

Considere o seguinte sistema linear retirado de Mostafa (2007). Adote um horizonte finito  $N = 15$  e um custo final  $\bar{q}(N) = 0$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0,5447 & 0,8208 & 0 \\ -0,8208 & 0,5067 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 1],$$

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}, \quad R = 1,5, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0,12 \\ 0,09 \\ 0,06 \end{bmatrix}$$

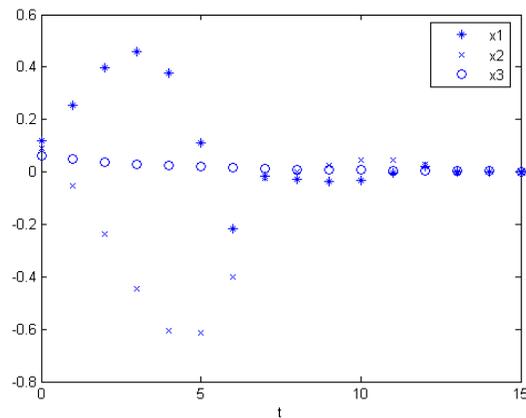


Fig. 6.1: Evolução das componentes  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  do vetor de estados  $x$ .

Utilizando o algoritmo introduzido na seção 6.1, foi obtida uma sequência de controle  $u^*$  que produz o resultado apresentado na Figura 6.1. Foi obtido um custo  $J_{U^*}^{15} = 185,2570$ . Do Teorema 3.1, sabemos que este é o menor custo que pode ser obtido para o sistema  $(A, B, C)$ , dado o estado inicial  $x_0$  escolhido e as matrizes  $(Q, R, S_N)$ .

### 6.4 Caso estocástico com ruído aditivo

Ao sistema tratado na seção anterior adicionamos um ruído  $w$  de média nula e variância  $E = 0,8$ . Adotamos, também, matrizes  $C$  e  $H$  da forma:

$$C = [0 \ 0 \ 1], \quad H = \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,01 \\ 0,01 \end{bmatrix},$$

Temos então um sistema SISO com  $CB = 0$ . Considerando um horizonte  $N = 2$ , podemos afirmar, do Teorema 4.2, que o algoritmo apresentado na seção 6.1 fornece as condições necessárias e

suficientes de otimalidade. Aplicamos o método do controle por horizonte retrocedente até o instante  $k = 100$ , obtemos as figuras 6.2, 6.3 e 6.4. Tais figuras contem os valores médios obtidos após 1000 realizações do processo ( $A, B, C, H$ ) no intervalo especificado.

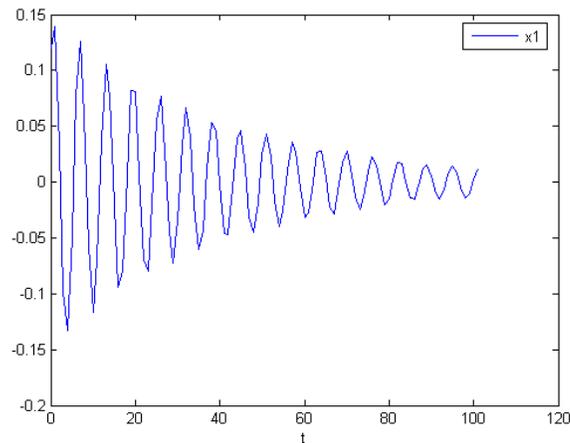


Fig. 6.2: Evolução da componente  $x_1$  do vetor de estados  $x$ .

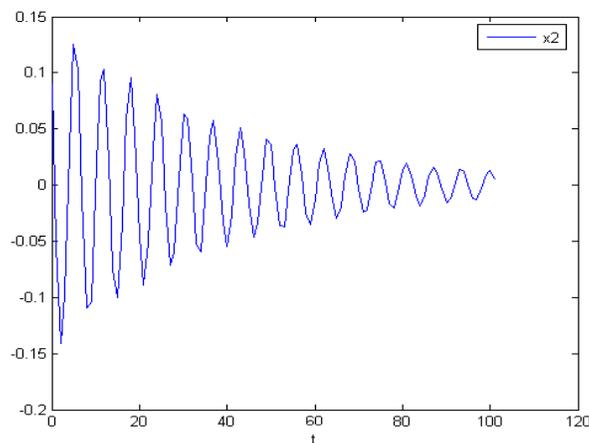


Fig. 6.3: Evolução da componente  $x_2$  do vetor de estados  $x$ .

Logicamente, o método do controle por horizonte retrocedente não fornece condições suficientes de otimalidade. Ele foi utilizado apenas para que pudéssemos apresentar um exemplo numérico envolvendo o Teorema 4.2.

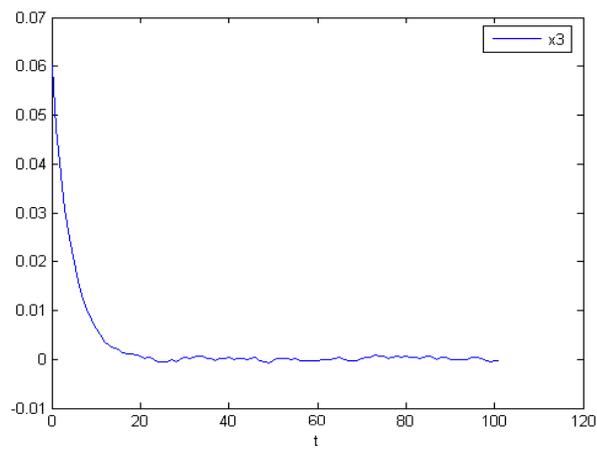


Fig. 6.4: Evolução da componente  $x_3$  do vetor de estados  $x$ .



# Capítulo 7

## Conclusões

Neste último capítulo, resumimos as principais contribuições do trabalho desenvolvido à sua área de concentração. Além disso, diante dos resultados alcançados, fazemos uma série de sugestões para trabalhos futuros na área de controle ótimo de sistemas lineares estocásticos e que possam vir a efetivamente fornecer uma solução final para o problema proposto.

### 7.1 Sumário dos resultados

Para este trabalho, traçamos como principal meta a obtenção de condições suficientes de otimalidade para o problema de controle de sistemas lineares sujeitos à realimentação de saída. Analisamos o caso determinístico, uma classe de sistemas estocásticos com ruído aditivo e um grupo particular de SLSMs. Assim como em (Vargas, 2004), supusemos que o estado  $\theta$  da Cadeia de Markov não é observado. Supusemos também que conhecemos a saída  $y$  em cada instante, o estado  $x$  não está acessível. Além disso, conforme estabelecido ainda no capítulo 1 desta dissertação, a distribuição inicial  $\mu_0$  da Cadeia de Markov e a matriz de transição de estados  $\mathbb{P}$  são conhecidas.

A fim de resolver o problema estocástico com saltos (SLSM), desenvolvemos um equivalente determinístico para o funcional de custo quadrático adotado. Esta abordagem foi utilizada por (do Val e Başar, 1999) e permite aplicar técnicas de otimização não linear ao problema de controle dado.

Em um primeiro momento, fizemos uma revisão bibliográfica sobre o Princípio do Máximo Discreto. Havia a expectativa de que tal técnica, definida em sua forma clássica em termos da maximização da função Hamiltoniano em cada instante, pudesse fornecer condições suficientes de otimalidade para o problema em estudo. O princípio mostrou-se, entretanto, incapaz de desempenhar tal tarefa. Diante de tal cenário, um princípio do máximo discreto alternativo foi apresentado, baseado principalmente no trabalho de (Vidal, 1987). Esta nova ferramenta faz referência à maximização de funções que envolvem o Hamiltoniano clássico, mas que não são compostas exclusivamente por ele. Em resumo, caso os termos da função Lagrangeana resultante possuam um ótimo global em cada estágio, então este princípio do máximo garante condições suficientes de otimalidade.

Utilizando as idéias relatadas acima, o problema de controle de sistemas lineares determinísticos sujeitos a realimentação de saída foi solucionado. Neste cenário, não havia, obviamente, ruído aditivo ou saltos markovianos. Além disso, adotamos uma estrutura de multiplicadores de Lagrange diferente da utilizada nos demais capítulos, onde os mesmos assumem a forma de matrizes simétricas

e semidefinidas positivas. O fato de utilizarmos multiplicadores  $p^* \in \{\mathbb{R}^n\}'$  foi fundamental para que pudéssemos afirmar que as condições necessárias de otimalidade são também suficientes para este cenário particular. O resultado é válido para qualquer caso determinístico, incluindo a classe dos sistemas multivariáveis. Outro aspecto importante, é que foi possível obter otimalidade global sem exigir das funções envolvidas convexidade conjunta, positividade ou qualquer outra característica eventualmente restritiva.

Em seguida, o caso estocástico com ruído aditivo foi analisado. Foi possível estabelecer o princípio do máximo discreto como uma condição apenas necessária de otimalidade, visto que a otimalidade global em cada instante não é garantida. Dadas as limitações do princípio do máximo no contexto estocástico, desenvolvemos um raciocínio alternativo e que foi capaz de garantir suficiência, ainda que para um cenário restrito. Tratamos o problema estocástico SISO, em um horizonte de 2 estágios e com matrizes  $CB = 0$ . Mostramos que tal problema é convexo no ganho de controle  $u(0)$ , após realizado um procedimento de parametrização do funcional de custo em termos dos ganhos  $u(1)$  ótimos.

Por fim, tratamos o problema de controle de SLSMs. Novamente, obtivemos condições suficientes de otimalidade apenas para o cenário restrito detalhado no final do parágrafo anterior. O problema de otimização resultante é convexo no ganho de controle  $u(0)$ , independentemente da quantidade de estados da Cadeia de Markov  $\Theta$ .

Para ilustrar a teoria desenvolvida, fornecemos, no capítulo 6, alguns exemplos numéricos. Os capítulos 3 e 4 foram contemplados com um exemplo ilustrativo cada. Procuramos enfatizar, nesta oportunidade, as principais contribuições de cada capítulo.

## 7.2 Trabalhos futuros

Permanece como desafio a extrapolação dos resultados obtidos nos capítulos 4 e 5 para uma quantidade qualquer  $N$  de estágios. Em um primeiro momento, seria interessante formalizar este resultado para o caso particular, porém representativo, dos sistemas SISO. Em seguida, poderíamos abordar o caso multivariável genérico.

É sabido que, conforme o número  $N$  de estágios aumenta, as parametrizações introduzidas no capítulo 5 resultam em funções cada vez mais complexas. Há evidências numéricas, entretanto, de que a convexidade do funcional de custo com relação ao controle  $u(0)$  é preservada conforme o horizonte considerado aumenta. Esta propriedade é fundamental e significa que, eventualmente, o mínimo valor que se pode obter é de fato ótimo, pois o custo é convexo com relação ao ganho  $u(0)$ , dado um estado inicial fixo.

No contexto da parametrização do critério de desempenho, uma característica despertou especial interesse: a representação do funcional parametrizado em termos da diferença entre duas funções quadráticas positivas. Verificamos também que, mesmo com a elevação da quantidade de estágios, continuamos a ter quocientes com numeradores cujos expoentes são exatamente 2 ordens maiores que os expoentes dos respectivos denominadores. Uma linha de raciocínio interessante seria investigar a convexidade de tal classe de funções e um modo de utilizar esta propriedade em conexão com o problema de obter condições suficientes de otimalidade para o controle de sistemas lineares estocásticos, entre os quais os SLSMs.

# Bibliografia

Athans, M., Castanon, D., Dunn, K. P., Greene, C. S., Lee, W. H., Sandell, N. R. e Willsky, A. S. (1977). The stochastic control of the F-8C aircraft using a multiple adaptive control (MMAC) method - Part i: Equilibrium flight, *IEEE Transactions on Automatic Control* (22): 768-780.

Camacho, E. F. e Bordons, C. (1999). *Model Predictive Control*, Springer Verlag, London.

Çınlar, E. (1975). *Introduction to stochastic processes*, Prentice Hall, New York.

Costa, O. L. V., Fragoso, M. D. e Marques, R. P. (2005). *Discrete-Time Markovian Linear Systems*, Springer Verlag, New York.

do Val, J. B. R., Başar, T. (1999). Receding horizon control of jump linear systems and a macro-economic policy problem, *Journal of Economics Dynamics and Control* 23: 1099-1131.

Halkin, H. (1966). A maximum principle of the Pontryagin type for systems described by nonlinear difference equations, *J. SIAM Control* 1 (4): 90-111.

Holtzman, J. M. (1966). Convexity and the Maximum Principle for Discrete Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* 1 (11): 30-35.

Kitchin, J. F. (1986). Approximate Markov Modeling of High-Reliability Telecommunications Systems, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications* (6): 1133-1137.

Lameiro, G. F., Duff, W. S. (1979). A Markov Model of Solar Energy Space and Hot Water heating Systems, *Solar Energy* (22): 211-219.

Lütkepohl, H. (1996). *Handbook of Matrices*, John Wiley & Sons, Chichester.

Mangasarian, O. L. (1969). *Nonlinear Programming*, SIAM, Philadelphia.

Mangasarian, O. L. (1966). Sufficient conditions for the optimal control of nonlinear systems, *J. SIAM Control* 1 (4): 139-152.

- Mostafa, E. M. E. (2007). Computational design of optimal discrete-time output feedback controllers. *Journal of the Operations Research*. **51** (1): 15-28.
- Moura, S. J., Fathy, H. K., Callaway, D. S., Stein, J. L. (2011). A Stochastic Optimal Approach for Power Management in Plug-In Hybrid Electric Vehicles. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **19** (3): 545-555.
- Mustafa, D. (1995). LQG optimal scalar static output feedback, *Systems & Control Letters* (27): 9-19.
- Nahorski, Z., Ravn, H. F., Vidal, R. V. V. (1984). The discrete-time maximum principle: a survey and some new results, *Int. J. Control* **3** (40): 533-554.
- Saridis, G. N. (1983). Intelligent robotic control, *IEEE Transactions on Automatic Control* (28): 547-557.
- Sworder, D. D. e Rogers, R. O. (1983). An L-Q-solution to a control problem associated with a solar thermal central receiver, *IEEE Transactions on Automatic Control* **10** (28): 971-978.
- Vargas, A. N. (2004). Controle por horizonte retrocedente de sistemas lineares com saltos markovianos e ruído aditivo. Tese de mestrado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP, Setembro de 2004.
- Vidal, R. V. V. (1987). On the Sufficiency of the Linear Maximum Principle for Discrete-Time Control Problems, *Journal of Optimization Theory and Applications* (54): 583-589.

# Apêndice A

## Definições e introdução de conceitos básicos

No capítulo 1, foram apresentadas as principais idéias e argumentos que motivam o estudo dos sistemas lineares sujeitos à realimentação de saída. Neste apêndice, uma série de definições e conceitos matemáticos básicos utilizados durante todo o trabalho é apresentada e discutida. A principal referência utilizada foi (Lütkepohl, 1996).

### A.1 Propriedades do traço de uma matriz

Seja uma matriz  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , o traço de  $A$  é definido como:

$$\text{tr}(A) := \sum_{i=0}^n a_{ii}. \quad (\text{A.1})$$

e

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(A') \quad (\text{A.2})$$

Sejam as matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \quad (\text{A.3})$$

e também

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad (\text{A.4})$$

Sejam  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , então:

$$\frac{\partial \text{tr}(AXB)}{\partial X} = A'B' \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial \text{tr}(XAX'B)}{\partial X} = B'X'A' + A'X'B' \quad (\text{A.6})$$

e

$$\frac{\partial^2 \text{tr}(XAX'B)}{\partial \text{vec}(X) \partial \text{vec}(X)'} = A \otimes B' + A' \otimes B \quad (\text{A.7})$$

em que  $\otimes$  representa o produto de Kronecker. As relações (A.6) e (A.7) se aplicam também a qualquer função real de uma variável multidimensional  $X$ .

## A.2 Propriedades do produto de Kronecker

Sejam  $A \geq 0$ ,  $B \geq 0$ , então:

$$A \otimes B \geq 0 \quad (\text{A.8})$$

## A.3 Teorema do ponto de sela para otimização não linear

Mangasarian (1966) formulou e provou um teorema sobre suficiência envolvendo a existência de um ponto de sela para a função Lagrangeana. Apresentamos, nesta seção, uma adaptação da prova desenvolvida por este autor.

Seja  $\mathcal{X}^0 \in \mathbb{R}^n$  um domínio,  $f$  uma função real e  $g$  uma restrição de desigualdade  $m$ -dimensional definida em  $\mathcal{X}^0$ . Considere o problema de otimização estático de encontrar o vetor  $x^* \in \mathcal{X}$  tal que:

$$f(x^*) = \min_{x \in \mathcal{X}} f(x) \quad (\text{A.9})$$

sujeito a

$$x^* \in \mathcal{X} = \{x | x \in \mathcal{X}^0, g(x) \leq 0\} \quad (\text{A.10})$$

O conjunto  $\mathcal{X}$  constitui uma *região factível*,  $x^*$  é dito uma *solução* e  $f(x^*)$  o *mínimo* do problema. Qualquer vetor  $x$  na região factível é chamado de um *ponto factível*. Definimos, além disso, a seguinte função Lagrangeana

$$L(x, u) := f(x) + pg(x) \quad (\text{A.11})$$

em que o multiplicador de Lagrange  $p \geq 0$  é tal que  $p \in \mathbb{R}^m$ . Considere então o teorema a seguir.

**Teorema A.1.** *Sejam  $x^* \in \mathcal{X}$ ,  $u^* \in \mathbb{R}^m$ ,  $u^* \geq 0$  tais que*

$$L(x^*, u) \leq L(x^*, u^*) \leq L(x, u^*) \quad (\text{A.12})$$

*então o par  $\{x^*, u^*\}$  é solução (global) do problema (A.9)–(A.10):  $f(x) \geq f(x^*)$ ,  $\forall x \in \mathcal{X}$ .*

**Prova:** De (A.11) e (A.12), temos:

$$f(x^*) + pg(x^*) \leq f(x^*) + p^*g(x^*) \leq f(x) + p^*g(x) \quad (\text{A.13})$$

Da primeira inequação:

$$(p - p^*)f(x^*) \leq 0, \quad \forall u \geq 0$$

Para um dado  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , fazemos:

$$\begin{aligned} p_i &= p_i^*, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, m \\ p_j &= p_j^* + 1 \end{aligned}$$

Como resultado,  $g_j(x^*) \leq 0$ . Repetindo este procedimento para todo  $j$ , obtemos  $g(x^*) \leq 0$ , ou seja,  $x^*$  é um ponto factível,  $x^* \in \mathcal{X}$ .

Como  $p^* \geq 0$  e  $g(x^*) \leq 0$ , resulta que  $p^*g(x^*) \leq 0$ . Da primeira inequação em (A.13), novamente, temos que ao tomarmos  $p = 0$ , obtemos  $p^*g(x^*) \geq 0$ . Logo,  $p^*g(x^*) = 0$ .

Tomando um  $x \in \mathcal{X}$  qualquer, temos da segunda desigualdade em (A.13) que:

$$\begin{aligned} f(x^*) &\leq f(x) + p^*g(x), \quad \text{pois } p^*g(x^*) = 0 \\ f(x^*) &\leq f(x), \quad \text{pois } u^* \geq 0, \quad g(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{A.14}$$

Logo,  $x^*$  é uma solução para o problema (A.9) e (A.10)

□

Repare que nenhuma hipótese de convexidade é utilizada para provar o Teorema A.1, o que permite tratar o caso das restrições de igualdade de modo igualmente simples. Basta, para tanto, substituir uma eventual restrição de igualdade  $h(x) = 0$ ,  $h(x) \in \mathbb{R}^q$ , por duas restrições de desigualdade,  $h(x) \leq 0$  e  $-h(x) \leq 0$ .

Em nosso trabalho, aplicamos o Teorema A.1 em um contexto mais amplo. Nosso problema possui uma natureza multivariável tanto no vetor de estados quanto no ganho de controle aplicado. O raciocínio, entretanto, mantém-se inalterado e a validade do teorema é garantida.

## A.4 Convexidade de uma classe de funções quadráticas

**Teorema A.2.** *Sejam duas funções  $f(x) \geq 0$  e  $g(x) \geq 0$  reais, escalares, convexas e quadráticas na variável  $x$ . Tome  $x \in \mathbb{R}$ . A função  $h(x) \geq 0$ , tal que  $h(x) = f(x) - g(x)$ , é também uma função convexa e quadrática.*

**Prova:** Sendo convexas e quadráticas, as funções  $f(x)$  e  $g(x)$  são do tipo (coeficientes reais):

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ g(x) &= dx^2 + ex + f \end{aligned}$$

Sabemos que  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$  e que  $a, d \geq 0$ . A diferença  $h(x)$  é dada por:

$$h(x) = (a - d)x^2 + (b - e)x + (c - f) \geq 0$$

O único modo de a função acima, que é quadrática, não violar a restrição de manter-se não negativa é termos  $(a - d) \geq 0$ . Conclui-se, então, que  $h(x)$  é convexa, além de ser quadrática. Pois:

$$\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2} = 2(a - d) \geq 0$$

□

## Apêndice B

### Procedimento para obtenção da equação (4.8) a partir da equação (4.7)

A função Lagrangeana (4.7) pode ser expandida do seguinte modo:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{U}}^N &= E \sum_{t=0}^{N-1} \{x(t)' (Q + C'u(t)'Ru(t)C) x(t) + [(A + Bu(t)C) x(t)]' P^*(t+1) [(A + Bu(t)C) x(t)]\} \\ &+ E \sum_{t=0}^{N-1} \{[(A + Bu(t)C) x(t)]' P^*(t+1)[Hw(t)] - [(A + Bu(t)C) x(t)]' P^*(t+1)x(t+1)\} \\ &\quad + E \sum_{t=0}^{N-1} \{[Hw(t)]' P^*(t+1) [(A + Bu(t)C) x(t)] + [Hw(t)]' P^*(t+1) [Hw(t)]\} \\ &\quad + E \sum_{t=0}^{N-1} \{-[Hw(t)]' P^*(t+1)x(t+1) - x(t+1)' P^*(t+1) [(A + Bu(t)C) x(t)]\} \\ &+ E \sum_{t=0}^{N-1} \{-x(t+1)' P^*(t+1) [Hw(t)] + x(t+1)' P^*(t+1)x(t+1)\} + E \{x(N)' S_N x(N)\} \end{aligned}$$

De (A.4) e (A.3), temos:

$$\begin{aligned}
L_{\mathbf{U}}^N &= E \sum_{t=0}^{N-1} tr \{ (Q + C'u(t)'Ru(t)C) x(t)x(t)' + P^*(t+1) (A + Bu(t)C) x(t)x(t)' (A + Bu(t)C)' \} \\
&+ E \sum_{t=0}^{N-1} tr \{ P^*(t+1)Hw(t)x(t)' (A + Bu(t)C)' - P^*(t+1)x(t+1)x(t)' (A + Bu(t)C)' \} \\
&+ E \sum_{t=0}^{N-1} tr \{ P^*(t+1) (A + Bu(t)C) x(t)w(t)'H' + P^*(t+1)Hw(t)w(t)'H' \} \\
&+ E \sum_{t=0}^{N-1} tr \{ -P^*(t+1)x(t+1)w(t)'H' - P^*(t+1) (A + Bu(t)C) x(t)x(t+1)' \} \\
&+ E \sum_{t=0}^{N-1} tr \{ -P^*(t+1)Hw(t)x(t+1)' + P^*(t+1)x(t+1)x(t+1)' \} + E \{ tr [S_N x(N)x(N)'] \}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
L_{\mathbf{U}}^N &= E \sum_{t=0}^{N-1} tr \{ (Q + C'u(t)'Ru(t)C) x(t)x(t)' + P^*(t+1)x(t+1)x(t+1)' \} \\
&+ E \sum_{t=0}^{N-1} tr \{ P^*(t+1) (A + Bu(t)C) x(t)x(t)' (A + Bu(t)C)' + P^*(t+1)Hw(t)w(t)'H' \} \\
&+ E \sum_{t=0}^{N-1} tr \{ P^*(t+1) (A + Bu(t)C) x(t)w(t)'H' + P^*(t+1)Hw(t)x(t)' (A + Bu(t)C)' \} \\
&+ E \sum_{t=0}^{N-1} tr \{ -P^*(t+1)x(t+1)x(t)' (A + Bu(t)C)' - P^*(t+1)x(t+1)w(t)'H' \} \\
&+ E \sum_{t=0}^{N-1} tr \{ -P^*(t+1) (A + Bu(t)C) x(t)x(t+1)' - P^*(t+1)Hw(t)x(t+1)' \} \\
&+ E \{ tr [S_N x(N)x(N)'] \}
\end{aligned}$$

Aplicando (A.2) e (A.4), obtemos:

$$\begin{aligned}
&tr \{ P^*(t+1)x(t+1) [(A + BK^tC) x(t) + Hw(t)]' \} \\
&= tr \{ P^*(t+1) [(A + BK^tC) x(t) + Hw(t)] x(t+1)' \}
\end{aligned}$$

Pelos mesmos motivos:

$$tr \{ P^*(t+1) (A + Bu(t)C) x(t)w(t)'H' \} = tr \{ P^*(t+1)Hw(t)x(t)' (A + Bu(t)C)' \}$$

Combinando as duas igualdades acima e o fato de que  $x(t+1) = (A + Bu(t)C)x(t) + Hw(t)$ , temos:

$$\begin{aligned}
L_{\mathbf{U}}^N &= E \sum_{t=0}^{N-1} \text{tr} \{ (Q + C'u(t)'Ru(t)C) x(t)x(t)' \} \\
&+ E \sum_{t=0}^{N-1} \text{tr} \{ P^*(t+1) (A + Bu(t)C) x(t)x(t)' (A + Bu(t)C)' + P^*(t+1)Hw(t)w(t)'H' \} \\
&+ E \sum_{t=0}^{N-1} \text{tr} \{ 2P^*(t+1) (A + Bu(t)C) x(t)w(t)'H' - P^*(t+1)x(t+1)x(t+1)' \} \\
&+ E \{ \text{tr} [S_N x_N x_N'] \}
\end{aligned}$$