

Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Departamento de Comunicações

# **Uso de Filtragem em Métodos de Estimação de DOA Através de Arranjo de Sensores**

Autor: **Francislei José da Silva**  
Orientador: **Prof. Dr. Amauri Lopes**

**Dissertação de Mestrado** apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Telecomunicações e Telemática

Banca Examinadora:  
Prof. Dr. Amauri Lopes - UNICAMP  
Prof. Dr. Fernando Oscar Runstein - CPqD Campinas  
Prof. Dr. Paulo Cardieri - UNICAMP  
Prof. Dr. João Baptista Tadanobu Yabu-uti - UNICAMP

Campinas, SP  
Julho/2007

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Si28f Silva, Francislei José da  
Uso de Filtragem em Métodos de Estimção de DOA  
Atrvés de Arranjo de Sensores / Francislei José da Silva. –  
Campinas, SP: [s.n.], 2007.

Orientador: Amauri Lopes.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Processamento de sinais. 2. Discriminadores de  
freqüência. 3. Filtros digitais (Matemática). 4. Otimização  
matemática. I. Lopes, Amauri. II. Universidade Estadual de  
Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
Computação. III. Título.

Título em Inglês: Filtering on DOA estimation using array of sensors  
Palavras-chave em Inglês: Signal processing, Array of sensors, Direction of arrival  
estimation, Digital filters (mathematics).  
Área de concentração: Telecomunicações e Telemática  
Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica  
Banca Examinadora: Fernando Oscar Runstein, Paulo Cardieri e João Baptista Tadanobu  
Yabu-uti  
Data da defesa: 13/07/2007  
Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

## COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

**Candidato:** Francislei José da Silva

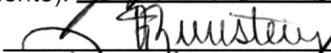
**Data da Defesa:** 13 de julho de 2007

**Título da Tese:** "Uso de Filtragem em Métodos de Estimação de DOA Através de Arranjo de Sensores"

Prof. Dr. Amauri Lopes (Presidente):



Dr. Fernando Oscar Runstein:



Prof. Dr. Paulo Cardieri:



Prof. Dr. João Baptista Tadanobu Yabu-uti:



# Resumo

Este trabalho aborda o problema de estimação da direção de chegada (DOA) de ondas planas usando arranjo de sensores. Existem diversos estimadores para DOA relatados na literatura. Dentre os estimadores de alta resolução, se destacam os métodos MODE e MODEX, que possuem como base o estimador de máxima verossimilhança (MLE). Este trabalho apresenta o desenvolvimento dos métodos MODE, MODEX e de uma versão melhorada do MODEX, o método *MODEX Modified*. Estes dois últimos estimadores produzem várias estimativas candidatas e usam o critério de máxima verossimilhança para selecionar aquelas que representam as melhores estimativas para os ângulos de chegada. Entretanto, para uma relação sinal-ruído baixa, estes métodos sofrem uma forte degradação na escolha das candidatas. Na busca de reduzir esta degradação, é apresentada uma proposta de filtragem nos sinais captados pelos sensores, com o objetivo de melhorar a relação sinal-ruído. São propostos dois projetos de filtro FIR: um por alocação de pólos e zeros, e outro por amostragem em frequência. Os resultados obtidos mostram que esta proposta de filtragem é válida e que se consegue reduzir significativamente a SNR do limiar de desempenho apresentado pelos métodos MODEX e *MODEX Modified*.

**Palavras-chave:** Arranjo de Sensores, ULA, DOA, estimador ML, MODE, MODEX, *MODEX Modified*, filtragem de *snapshots*.

# Abstract

This work deals with the estimation of the direction of arrival (DOA) of plane waves using array of sensors. There are various estimators for DOA reported in literature. The MODE and MODEX methods, based on the maximum likelihood criterion, are the best high resolution DOA estimators. This work presents the development of these methods as well as of an improved version of the MODEX, named *MODEX Modified*. MODEX and *MODEX Modified* produce some estimates that are candidates for the DOA estimation and use the maximum likelihood criterion to select the best ones. However, for low signal-to-noise ratio, the selection process suffers a strong performance degradation. In order to reduce this degradation, this work proposes to filter the received signals aiming to improve the signal-to-noise ratio. Two FIR filters are considered: one composed by poles and zeros and another obtained by sampling in the frequency domain. Simulation results show that this proposal improves significantly the performance of both MODEX and *MODEX Modified*.

**Keywords:** Sensor Array, ULA, DOA, ML estimator, MODE, MODEX, *MODEX Modified*, filtering *snapshots*.

*Aos meus amados pais,  
Odair e Eloisa.*

# Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por suas bênçãos e providências.

Ao Professor Amauri Lopes, pessoa a qual possuo profunda admiração tanto profissionalmente quanto pessoalmente. Agradeço-o pelo acolhimento, paciência, atenção e dedicação a mim dispensados, por sua compreensão sobre minhas decisões e por acreditar que eu seria capaz.

Aos meus pais, Odair e Eloisa, pela educação base em minha vida, por sempre me apoiarem e se esforçarem com muito amor, preocupação, carinho e dedicação para que eu chegasse até aqui.

Aos meus irmãos, Geovane e Tatiana, pelo apoio.

À minha noiva Andréa, pela paciência e compreensão das vezes que tive que sacrificar o nosso tempo para me dedicar aos estudos, mas, principalmente, por sua companhia e carinho.

Aos meus tios, Zezé e Isabel, que me acolheram em sua casa, durante um ano, como sendo um de seus filhos e me dedicando atenção e preocupação como tal.

Aos meus primos, Tiago e Lucas, que dividiram seus espaços comigo e me ajudaram a reduzir a saudade que eu tinha de casa.

Ao meu grande amigo Marcelo de Oliveira Gonçalves, que me incentivou em fazer o mestrado e foi um amigo confidente durante nossa adaptação na universidade.

Ao amigo Rafael Krummenaur, pela sincera amizade formada durante nossos estudos.

Aos professores, funcionários e amigos da FEEC, os quais contribuíram direta ou indiretamente para a realização desta dissertação.

Por fim, à todos os meus amigos e familiares que me incentivaram e torceram por esta minha conquista. **MUITO OBRIGADO!!!**

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>x</b>
<b>Nomenclaturas e Abreviaturas</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução ao Processamento de Arranjo e Estimação DOA</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Aplicações do Processamento de Arranjo . . . . .	1
1.3 Técnicas de Estimação de DOA . . . . .	2
1.3.1 Métodos Derivados do Estimador de Máxima-Verossimilhança . . . . .	4
1.4 Objetivo deste Trabalho . . . . .	5
1.5 Organização dos Capítulos . . . . .	5
1.6 Publicações . . . . .	6
<b>2 Modelo dos Sinais em ULA e Critérios de Avaliação de Métodos de Estimação de DOA</b>	<b>7</b>
2.1 Introdução . . . . .	7
2.2 Modelo de Onda e do Sinal Captado no Arranjo Linear Uniforme . . . . .	7
2.2.1 Considerações Sobre o Modelo de Sinal . . . . .	12
2.3 Critérios de Avaliação de Métodos de Estimação de DOA . . . . .	13
<b>3 O Estimador de Máxima-Verossimilhança</b>	<b>16</b>
3.1 Introdução . . . . .	16
3.2 O Estimador de Máxima Verossimilhança . . . . .	16
3.2.1 Critério de Máxima-Verossimilhança Determinístico . . . . .	17
3.2.2 Critério de Máxima-Verossimilhança Estocástico . . . . .	21
3.3 Consideração Final . . . . .	23
<b>4 Métodos MODE, MODEX e MODEX Modified</b>	<b>24</b>
4.1 Introdução . . . . .	24
4.2 Reparametrização da Função Custo DML . . . . .	25
4.3 Método MODE . . . . .	26
4.3.1 Minimização da Função Custo no Método MODE . . . . .	28
4.3.2 Implementação Computacional do Algoritmo MODE . . . . .	33
4.4 MODEX - <i>MODE with eXtra roots</i> . . . . .	34

4.4.1	Seleção das Raízes do MODEX . . . . .	36
4.4.2	Valor do Parâmetro $P$ . . . . .	36
4.4.3	O Esforço Computacional . . . . .	37
4.5	MODEX <i>Modified</i> . . . . .	37
4.6	Análise do Processo de Seleção MODEX . . . . .	38
4.7	Simulações e Resultados . . . . .	39
4.7.1	Métodos MODE, MODEX e MODEX <i>Modified</i> . . . . .	39
4.7.2	Análise da Seleção das Raízes Geradas nos Métodos MODEX e MODEX <i>Modified</i> . . . . .	42
4.8	Conclusão . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Aplicação de Filtragem no Método MODEX <i>Modified</i></b>	<b>45</b>
5.1	Introdução . . . . .	45
5.2	Procedimento de Filtragem . . . . .	45
5.3	Características do Filtro . . . . .	48
5.4	Filtro 1: Alocação de Pólos e Zeros . . . . .	49
5.5	Filtro 2: Amostragem em Frequência . . . . .	50
5.6	Simulações e Resultados . . . . .	53
5.6.1	Ambiente 1: $P = I$ , $\theta_1 = 10^\circ$ , $\theta_2 = 15^\circ$ e critério DML . . . . .	54
5.6.2	Ambiente 2: $P = 1$ , $\theta_1 = 10^\circ$ , $\theta_2 = 15^\circ$ e critério SML . . . . .	54
5.6.3	Ambiente 3: $P = I$ , $\theta_1 = 50^\circ$ , $\theta_2 = 55^\circ$ e critério DML. . . . .	55
5.6.4	Ambiente 4: $P = I$ , $\theta_1 = 10^\circ$ , $\theta_2 = 15^\circ$ , $\theta_3 = 20^\circ$ e critério DML . . . . .	55
5.6.5	Ambiente 5: $P = 1$ , $\theta_1 = 10^\circ$ , $\theta_2 = 15^\circ$ , $\theta_3 = 20^\circ$ e critério SML . . . . .	57
5.6.6	Ambiente 6: $P = I$ , $\theta_1 = 10^\circ$ , $\theta_2 = 65^\circ$ e critério DML . . . . .	57
5.6.7	Análise Geral dos Resultados . . . . .	57
5.7	Conclusão . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Conclusões e Sugestões para Prosseguimento do Trabalho</b>	<b>60</b>
6.1	Introdução . . . . .	60
6.2	Resultados e Conclusões . . . . .	60
6.3	Sugestões para Prosseguimento desse Trabalho . . . . .	61
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>63</b>

# Lista de Figuras

2.1	Arranjo Linear Uniforme com $N$ sensores e uma fonte de onda. . . . .	8
4.1	Desempenho dos métodos MODE, MODEX e MODEX <i>Modified</i> - fontes descorrelacionadas e critério DML. . . . .	40
4.2	Desempenho dos métodos MODE, MODEX e MODEX <i>Modified</i> - fontes descorrelacionadas e critério SML. . . . .	40
4.3	Desempenho dos métodos MODE, MODEX e MODEX <i>Modified</i> - fontes correlacionadas e critério DML. . . . .	41
4.4	Desempenho dos métodos MODE, MODEX e MODEX <i>Modified</i> - fontes correlacionadas e critério SML. . . . .	41
4.5	<i>best</i> MODEX e <i>best</i> MODEX <i>Modified</i> - fontes descorrelacionadas e critério DML. . . . .	43
4.6	<i>best</i> MODEX e <i>best</i> MODEX <i>Modified</i> - fontes correlacionadas e critério SML. . . . .	43
5.1	Resposta em Frequência - Filtro 1: Alocação de Pólos e Zeros. . . . .	50
5.2	Resposta em Frequência - Filtro 2: Amostragem em Frequência. . . . .	51
5.3	Resposta em Frequência - Filtro 2: Amostragem em Frequência, suavizado. . . . .	52
5.4	MODEX <i>Modified</i> com Filtragem - $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ , $\theta_1 = 10^\circ$ , $\theta_2 = 15^\circ$ e critério DML. . . . .	54
5.5	MODEX <i>Modified</i> com Filtragem - $\mathbf{P} = \mathbf{1}$ , $\theta_1 = 10^\circ$ , $\theta_2 = 15^\circ$ e critério SML. . . . .	55
5.6	MODEX <i>Modified</i> com Filtragem - $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ , $\theta_1 = 50^\circ$ , $\theta_2 = 55^\circ$ e critério DML. . . . .	56
5.7	MODEX <i>Modified</i> com Filtragem - $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ , $\theta_1 = 10^\circ$ , $\theta_2 = 15^\circ$ , $\theta_3 = 20^\circ$ e critério DML. . . . .	56
5.8	MODEX <i>Modified</i> com Filtragem - $\mathbf{P} = \mathbf{1}$ , $\theta_1 = 10^\circ$ , $\theta_2 = 15^\circ$ , $\theta_3 = 20^\circ$ e critério SML. . . . .	58
5.9	MODEX <i>Modified</i> com Filtragem - $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ , $\theta_1 = 10^\circ$ , $\theta_2 = 65^\circ$ e critério DML. . . . .	58

# Lista de Símbolos

- $\mathbf{a}(\omega_m)$  é o vetor direção ou vetor de transferência da frequência  $\omega_m$ .
- $\mathbf{A}$  é a matriz de transferência.
- $\mathbf{b}$  é o vetor de parâmetros após a reparametrização.
- $\bar{\mathbf{b}}$  é o vetor de parâmetros  $\mathbf{b}$  estendido.
- $\mathbf{B}$  é a matriz formada pelo vetor de coeficientes  $\mathbf{b}$ .
- $\bar{\mathbf{B}}$  é a matriz formada pelo vetor de coeficientes  $\bar{\mathbf{b}}$ .
- $d$  é o interespacamento entre os sensores adjacentes no arranjo linear de sensores.
- $E\{\mathbf{y}\}$  é a esperança estatística do vetor  $\mathbf{y}$ .
- $F_m(t)$  é a amplitude da m-ésima onda incidente.
- $F_{DML}$  é a função custo do critério ML Determinístico.
- $F_{SML}$  é a função custo do critério ML Estocástico.
- $F(\mathbf{b})$  é a função custo equivalente reparametrizada em função do vetor  $\mathbf{b}$ .
- $F_{MODE}(\mathbf{b})$  é a função custo do método MODE.
- $F_{MX}(\mathbf{b})$  é a função custo do método MODEX.
- $\mathbf{F}$  é a matriz de transferência do filtro proposto.
- $\mathbf{G}$  é o fator de Cholesky da matriz  $(\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}})^{-1}$ .
- $h(l)$  é a resposta ao impulso.
- $\mathbf{H}_f(\omega)$  é a resposta em frequência do filtro proposto.
- $K$  é o número total de *snapshots*.
- $k$  é o índice do k-ésimo *snapshot*.

- $\mathbf{K}$  é a matriz de transformação entre os vetores  $\mathbf{b}$  e  $\beta$ .
- $L_{DML}$  é a função de verossimilhança para modelo de sinal determinístico.
- $l_{DML}$  é o negativo do logaritmo natural de  $L_{DML}$ .
- $L_{SML}$  é a função de verossimilhança para modelo de sinal incondicional.
- $M$  é o número de fontes de sinais.
- $m$  é o índice da  $m$ -ésima fonte.
- $MX$  é o índice para denotar as expressões referentes ao método MODEX.
- $N$  é o número de sensores no arranjo de sensores.
- $n$  é o índice do  $n$ -ésimo sensor.
- $P$  é o número extra de raízes para o método MODEX.
- $\mathbf{P}$  é matriz de correlação dos sinais.
- $\mathbf{P}_A^\perp$  é o projetor ortogonal do espaço das colunas da matriz  $\mathbf{A}$ .
- $r_m$  é a distância até a origem de um sistema de coordenadas.
- $\mathbf{R}$  é a matriz covariância dos *snapshots*.
- $\hat{\mathbf{R}}$  é a matriz covariância estimada dos *snapshots*.
- $\hat{\mathbf{R}}_f$  é a versão filtrada da matriz covariância estimada  $\hat{\mathbf{R}}$ .
- $\mathbf{s}(k)$  é o vetor de sinais.
- $tr[\mathbf{P}]$  é o traço da matriz  $\mathbf{P}$ .
- $\mathbf{U}$  é a matriz unitária cujas colunas são os autovetores de  $\mathbf{R}$ .
- $\mathbf{x}$  é o vetor composto por amostras de sinal.
- $\hat{\mathbf{x}}$  é a estimativa de  $\mathbf{x}$ .
- $\mathbf{X}^*$  é o conjugado da matriz  $\mathbf{X}$ .
- $\mathbf{X}^H$  é o conjugado transposto da matriz  $\mathbf{X}$ .
- $\mathbf{X}^T$  é o transposto da matriz  $\mathbf{X}$ .
- $\mathbf{y}$  é o vetor de dados (*snapshot*) na saída do arranjo (sinal e ruído).
- $\mathbf{z}$  é o *snapshot* filtrado.

- $\beta$  é um vetor de coeficientes reais formado pela decomposição do vetor  $b$ .
- $\delta_{k,i}$  é a função delta de Kronecker.
- $\phi_m(t)$  é a fase da  $m$ -ésima onda incidente.
- $\lambda_i$  é o  $i$ -ésimo autovalor da matriz  $\hat{R}$ .
- $\theta_m$  é o ângulo de chegada (DOA) da  $m$ -ésima onda incidente.
- $\vartheta$  é o comprimento de onda da portadora do sinal.
- $\sigma^2$  é a variância do ruído.
- $\omega_m$  é o ângulo elétrico (frequência) equivalente da  $m$ -ésima onda incidente.
- $\omega$  é o vetor das frequências dos sinais.
- $\xi$  é o vetor de ruído.
- $\Phi$  é o conjunto de todas as combinações possíveis das estimativas candidatas geradas.
- $\Lambda$  é a matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de  $R$ .
- $\hat{\Psi}$  é a matriz diagonal dos  $\bar{M}$  maiores autovalores de  $\hat{R}$ .
- $\|\mathbf{X}\|$  é a norma Euclidiana de  $\mathbf{X}$ .

# Nomenclaturas e Abreviaturas

- *bestMODEX* é o limite teórico do MODEX
- CRB do inglês *Cramér-Rao Bound*
- DML do inglês *Deterministic Maximum Likelihood*
- DMLE do inglês *Deterministic MLE*
- DOA do inglês *Direction of Arrival*
- EC é o Esforço Computacional
- FBLP-M do inglês *Forward-Backward Linear Prediction Modified*
- FFT do inglês *Fast Fourier Transform*
- Filtro 1 é o filtro por alocação de pólos e zeros
- Filtro 2 é o filtro por amostragem em frequência
- FIR do inglês *Finite Impulse Response*
- IIR do inglês *Infinite Impulse Response*
- IQML do inglês *Iterative Quadratic Maximum Likelihood*
- ML do inglês *Maximum Likelihood*
- MLE do inglês *Maximum Likelihood Estimator*
- MODE do inglês *Method Of Direction Estimation*
- MODEX do inglês *MODE with eXtra roots*
- *MODEX Modified* é uma versão melhorada do MODEX

- 
- MSE do inglês *Mean Square Error*
  - MUSIC do inglês *Multiple Signal Classification*
  - RMSE do inglês *Root Mean Square Error*
  - SML do inglês *Stochastic Maximum Likelihood*
  - SMLE do inglês *Stochastic MLE*
  - SNR do inglês *Signal-to-Noise Ratio*
  - TLS-FBLP do inglês *Total Least Square - FBLP*
  - ULA do inglês *Uniform Linear Array*

# Capítulo 1

## Introdução ao Processamento de Arranjo e Estimação DOA

### 1.1. Introdução

O Processamento de Arranjo trata de processamento de sinais recebidos através de um arranjo de sensores localizados em diferentes pontos no espaço dentro de uma determinada região de interesse. Ele é freqüentemente utilizado em diversos campos da ciência e engenharia, particularmente onde o objetivo é estudar a propagação de ondas.

Seu objetivo é extrair algumas características úteis do sinal recebido; tais como a amplitude, fase e freqüência do sinal, a velocidade de propagação das ondas e a localização da fonte emissora, onde um dos parâmetros importante a ser obtido é o seu ângulo de chegada ou DOA (*Direction Of Arrival*).

O arranjo de sensores pode ser montado com diferentes formas geométricas, dependendo das características da aplicação. A configuração mais comumente utilizada é o arranjo linear uniforme ou ULA (*Uniform Linear Array*), onde os sensores, idênticos e omnidirecionais, são dispostos sobre uma reta uniformemente espaçados.

Os sinais captados pelos sensores são amostrados espacialmente de forma simultânea. Tem-se então, um vetor de amostras na saída do arranjo, chamado *snapshot*. Pode-se ainda gerar múltiplos *snapshots* realizando diversas amostragens uniformemente espaçadas no tempo. As ondas que atingem o arranjo podem ser geradas por fontes de irradiação ou resultam de reflexões de ondas transmitidas.

### 1.2. Aplicações do Processamento de Arranjo

O processamento de arranjo possui aplicações em várias áreas, dentre as quais citamos explorações geológicas, sonar, radar, radioastronomia, tomografia [1] e comunicações móveis [2] [3] [4]. A

seguir estas aplicações são brevemente comentadas.

Na exploração geológica, o processamento de arranjo é utilizado para revelar as características físicas de uma determinada região no interior da terra. Aqui são utilizados como sensores os geofones que capturam a energia acústica que se propaga pela terra após a aplicação de um impulso gerado por uma explosão de uma dinamite.

Em sonar passivo, o sinal recebido é gerado externamente, e o primeiro requisito do processamento de arranjo é estimar a estrutura espacial e temporal dos sinais recebidos. O arranjo de sensores consiste de hidrofones que são submersos no meio aquático.

No processamento de arranjo em radar, uma antena transmissora é utilizada para emitir um sinal particular na área de cobertura do radar, e um arranjo de elementos de antenas receptoras é utilizado para capturar o retorno deste sinal, o qual é causado por reflexões em alvos localizados no percurso de propagação das ondas eletromagnéticas.

Na radioastronomia, o interesse é a identificação das fontes de rádio-emissão celestes. Os arranjos utilizados aqui consistem de dezenas de elementos de antenas que se distanciam desde centenas de metros a quase o diâmetro da Terra.

Em tomografia, o processamento de arranjo é utilizado para obter imagens de objetos a partir da transmissão ou reflexão dos dados. Na maioria dos casos, o objeto é iluminado em diferentes direções, sequencialmente ou simultaneamente, e a imagem é reconstruída a partir dos dados coletados tanto na transmissão ou reflexão.

Em comunicações móveis, um dos objetivos do processamento de sinais de arranjo é obter o cancelamento de interferências através da formação de um padrão de irradiação adequado, que privilegia a recepção dos sinais vindos de uma determinada direção, simultaneamente anulando os sinais interferentes de outras direções [2].

Também se encontra outras aplicações de processamento de arranjos em medicina [5] [6] [7] e aplicações na indústria [8] [9].

### 1.3. Técnicas de Estimação de DOA

Este trabalho aborda o problema de estimação do parâmetro DOA no caso ULA, quando o arranjo é atingido por sinais contaminados por ruído aditivo e assumindo ser conhecida a quantidade de fontes emissoras. O ângulo de incidência de uma onda plana em ULA é definido como o ângulo entre a direção de propagação da onda e a normal ao arranjo.

As estimativas dos parâmetros em processamento de sinais contaminados por ruído aditivo são degradadas conforme se acentuam as seguintes condições:

- diminuição da relação sinal-ruído ou SNR (*Signal-to-Noise Ratio*);

- maior proximidade entre os ângulos de incidência;
- menor número de sensores e de *snapshots*.

Para a estimação do parâmetro DOA, existem na literatura várias técnicas ou métodos que utilizam diferentes ferramentas matemáticas como a transformada de Fourier, filtros de predição linear, decomposição em subespaços ou conceitos como o critério de Máxima-Verossimilhança [10]. E novas técnicas vêm sendo desenvolvidas visando melhoria da qualidade das estimativas sob condições críticas de SNR e de sinais correlacionados ou coerentes.

Os métodos de estimação de DOA podem ser classificados em duas categorias principais [10]: métodos espectrais e métodos paramétricos.

Os Métodos Espectrais apresentam como principal característica o uso de uma função espectral, resultante de um mapeamento adequado dos parâmetros DOA. Os picos espectrais dessa função fornecem as estimativas dos ângulos de incidência. Estes métodos são clássicos e bem descritos na literatura e possuem como vantagem a sua robustez, a não necessidade de estabelecer um modelo do sinal sob análise e fácil implementação através de algoritmos da transformada rápida de Fourier ou FFT (*Fast Fourier Transform*), demandando pouco esforço computacional, a qual é uma importante característica a se considerar dos algoritmos de estimação. Entretanto, estes métodos nem sempre produzem estimativas com a exatidão necessária. Em particular, para cenários envolvendo sinais altamente correlacionados ou fontes com ângulos de incidência muito próximos, a performance dos métodos espectrais podem ser insuficientes.

Os Métodos Paramétricos são, em geral, mais eficientes e robustos que os métodos espectrais, porém seus algoritmos exigem grande esforço computacional quando comparados aos últimos e suas implementações são mais complexas. Estes métodos assumem um modelo estatístico para os sinais, ou seja, uma determinada estrutura para a matriz covariância  $\mathbf{R}$  dos sinais de saída do arranjo ou *snapshots*. Neles, as estimativas não são obtidas através de uma função, mas sim através de um conjunto finito de parâmetros do modelo.

Alguns métodos desta classe são o MUSIC (*Multiple Signal Classification*) [11] [12], FBLP-M (*Forward-Backward Linear Prediction Modified*) [13], TLS-FBLP (*Total Least Square-FBLP*) [14] e Norma-mínima [15]. Estes métodos utilizam ferramentas que decompõem a matriz covariância estimada em uma parcela ou subespaço associado ao sinal, e outra parcela associada ao ruído. Apresentam bons desempenhos na estimação de sinais descorrelacionados e com SNR alta. Todavia, as estimativas são degradadas consideravelmente para SNR baixas.

Outros métodos paramétricos importantes são aqueles que utilizam o critério da Máxima-Verossimilhança ou critério ML (*Maximum-Likelihood*), descritos a seguir.

### 1.3.1. Métodos Derivados do Estimador de Máxima-Verossimilhança

O Estimador de Máxima-Verossimilhança ou MLE (*Maximum Likelihood Estimator*) [16] se asenta na maximização da função densidade de probabilidade de sinais contaminados por ruído branco Gaussiano. Após manipulações algébricas, este estimador leva à minimização de uma função custo que depende da matriz covariância estimada  $\hat{R}$  dos *snapshots*. O ponto de mínimo é determinado através de buscas multidimensionais e os parâmetros correspondentes fornecem as estimativas DOA. O MLE fornece estimativas precisas e robustas, porém o esforço computacional torna-se proibitivo devido à busca multidimensional.

Como resultado de um esforço para a superação desta dificuldade, em meados da década de 80 surge o método IQML (*Iterative Quadratic Maximum Likelihood*) [17] [18]. Este minimiza uma versão reparametrizada da função custo ML, através de um processo iterativo para solução de problemas intermediários de segunda ordem. O método IQML exige um esforço computacional menor que o do critério ML. Também, apresenta melhor desempenho que os métodos paramétricos anteriormente citados. Por outro lado, apresenta problemas de convergência para mínimos locais, principalmente em baixa SNR e também gera estimativas polarizadas. Diversos artigos analisam intensivamente este método, tanto sob o aspecto teórico como experimental.

Um método importante derivado do MLE é o MODE (*Method Of Direction Estimation*) [19], com destaque para o desempenho assintótico (calculado para grande números de *snapshots*). O MODE minimiza uma versão reparametrizada da função custo ML e emprega uma decomposição da matriz  $\hat{R}$  em subespaço de sinal e ruído. Sobre esta função custo é realizada a minimização, iterativamente. Sua convergência é mais rápida que a apresentada pelo IQML, sendo normalmente implementado com número de iterações fixo [20]. Seu esforço computacional também é menor que o do IQML e esse método foi considerado, em meados da década de 90 [10], como um dos melhores para a estimação de DOA em ULA.

Algumas modificações na estrutura básica do MODE deram origem ao método MODEX (*MODE with eXtra roots*) [21] que melhora o desempenho e classifica-se como um método de destaque para estimação de DOA. Este método gera várias estimativas candidatas que devem ser testadas por um critério de seleção para se determinar qual é a melhor. O desempenho é melhorado significativamente embora o esforço computacional seja mais que duas vezes maior que o MODE.

Recentemente, em [22], foi proposto uma alteração na forma de se obter as candidatas no método MODEX, gerando assim o método que será citado neste trabalho como *MODEX Modified*. Nele as candidatas basicamente são geradas a partir de três soluções distintas do método MODE. Este método, além de proporcionar um melhor desempenho geral, proporciona um menor esforço computacional que o MODEX.

## 1.4. Objetivo deste Trabalho

O objetivo deste trabalho é tratar de técnicas de estimação de DOA com alta resolução, ou seja, capazes de distinguirem DOAs próximos de si, para o caso de  $M$  ondas planas de faixa estreita contaminadas por ruído aditivo atingindo um arranjo linear uniforme de  $N$  sensores. Mais especificamente, tratar dos métodos MODE, MODEX e MODEX *Modified* que, conforme mencionado na seção anterior, apresentam desempenho e outras características equivalentes ou superiores aos demais métodos de estimação.

Será apresentada a formulação matemática dos Estimadores de Máxima-Verossimilhança ou MLE (*Maximum Likelihood Estimator*) baseados nos critérios determinístico ou DMLE (*Deterministic MLE*) e estocástico ou SMLE (*Stochastic MLE*). O DMLE é a base para se obter o MODE e, conseqüentemente, o MODEX e MODEX *Modified*, sendo que os critérios utilizados na seleção das estimativas candidatas geradas por estes dois últimos são os critérios ML determinístico e estocástico.

Será demonstrado que a redução de desempenho do processo de seleção de candidatas dos métodos MODEX e MODEX *Modified*, para pequenos valores da SNR, se deve ao ruído presente na matriz covariância  $\mathbf{R}$ . Assim, em busca de uma melhora de desempenho, é proposto neste trabalho reduzir a componente de ruído da matriz  $\mathbf{R}$  submetendo os *snapshots* a um filtro apropriado. Este se adapta aos ângulos de chegada das frentes de ondas, os quais são obtidos em uma primeira estimativa e utilizados no cálculo dos coeficientes do filtro.

## 1.5. Organização dos Capítulos

### Capítulo 2

Nesse capítulo são apresentados os modelos de sinal e ruído e a formulação matemática do problema DOA, considerando que sua estimação será feita a partir de amostras captadas num arranjo linear uniforme de sensores idênticos e omnidirecionais. A tarefa de estimação é simplificada se algumas considerações forem feitas sobre os elementos envolvidos, as quais são também descritas neste capítulo. São apresentados ainda alguns critérios de avaliação dos métodos de estimação de DOA.

### Capítulo 3

Este capítulo apresenta uma breve descrição sobre o Estimador de Máxima Verossimilhança e é apresentado o desenvolvimento matemático dos critérios de máxima-verossimilhança determinístico (DML) e estocástico (SML) referentes ao modelo de sinal apresentado no Capítulo 2.

#### Capítulo 4

Aqui é apresentado a reparametrização da função custo do critério DML, o desenvolvimento do método MODE através da função custo reparametrizada e da utilização da decomposição da matriz covariância em subespaços de sinal e de ruído. São descritos os métodos MODEX e MODEX *Modified*. São apresentadas simulações numéricas e resultados destes métodos. E é feita uma análise do processo de seleção das estimativas candidatas dos métodos MODEX e MODEX *Modified*.

#### Capítulo 5

Nesse capítulo é apresentada a proposta de submeter os *snapshots* do método MODEX *Modified* a uma filtragem apropriada para reduzir a componente ruído da matriz  $\hat{R}$ . É apresentado o procedimento para a realização de filtragem, as características desejáveis ao filtro e o projeto de dois filtros FIR: um por alocação de pólos e zeros, Filtro 1, e outro utilizando a técnica de amostragem em frequência, Filtro 2. Para cada filtro, é apresentado e analisado o módulo de sua resposta em frequência. Por fim, são apresentados os resultados obtidos para o método MODEX *Modified* com o uso de filtragem em diversos ambientes de simulação.

#### Capítulo 6

Este capítulo apresenta os principais resultados e conclusões obtidos nesse trabalho e são apresentadas algumas propostas para prosseguimento do mesmo.

### 1.6. Publicações

Durante o desenvolvimento desse trabalho foi apresentada a seguinte publicação:

- Krummenauer, R., Silva, F. J. e Lopes, A., "Modified MODEX method for direction finding with improved threshold performance" , *VI International Telecommunications Symposium - ITS 2006*, Fortaleza - CE - Brasil, CD-ROM, Setembro de 2006.

# Capítulo 2

## Modelo dos Sinais em ULA e Critérios de Avaliação de Métodos de Estimação de DOA

### 2.1. Introdução

Os métodos de estimação do parâmetro DOA (*Direction Of Arrival*) tratados nesse trabalho assumem um modelo estatístico para os sinais. Este modelo descreve as ondas incidentes baseado na geometria espacial do arranjo, nas características das fontes de ondas, dos sensores e do meio de propagação.

Estes métodos podem realizar a estimação de DOA em arranjos geométricos arbitrários [10]. Porém, tendo em vista a simplicidade do equacionamento e a larga utilização do arranjo linear uniforme ou ULA (*Uniform Linear Array*), será adotada esta configuração.

Este capítulo apresenta os modelos de sinal e ruído e a formulação matemática do problema DOA, considerando que sua estimação será feita a partir de amostras captadas num arranjo linear uniforme de sensores idênticos e omnidirecionais. A tarefa de estimação é simplificada se algumas considerações forem feitas sobre os elementos envolvidos, as quais são também descritas neste capítulo.

São apresentados ainda alguns critérios de avaliação dos métodos de estimação de DOA. Estes critérios serão utilizados como referência nas simulações numéricas demonstradas neste trabalho.

### 2.2. Modelo de Onda e do Sinal Captado no Arranjo Linear Uniforme

Na Figura 2.1 é apresentado um arranjo linear uniforme contendo  $N$  sensores, uma linha representando uma frente de onda gerada por uma fonte  $m$  e o ângulo de incidência (DOA),  $\theta_m$ .

A fonte de onda é pontual e se situa num local muito distante do arranjo. Assim, sua frente de onda pode ser considerada plana. Os sensores estão posicionados sobre uma reta vertical, com espaçamento uniforme  $d$ . O DOA  $\theta_m$  para o caso ULA é definido como ângulo entre a direção de

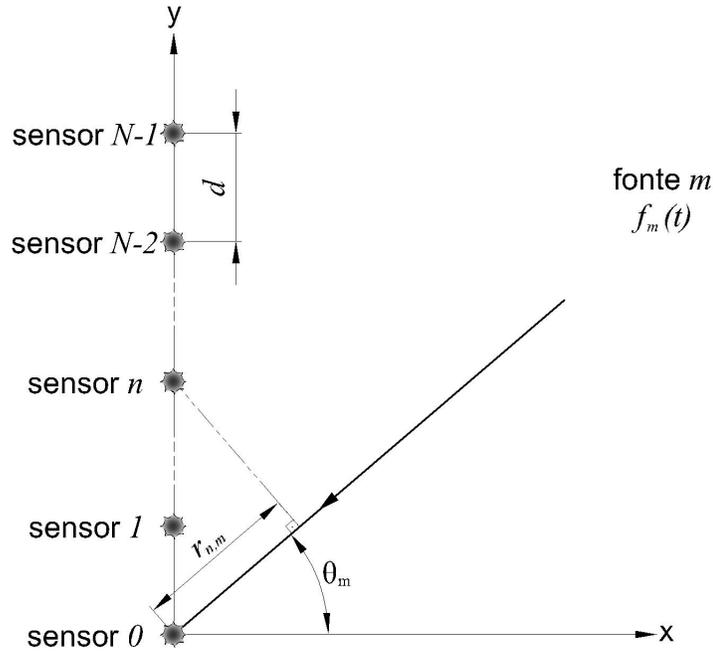


Figura 2.1. Arranjo Linear Uniforme com  $N$  sensores e uma fonte de onda.

propagação da onda e a normal ao arranjo.

O escalar  $r_{n,m}$  representa a distância percorrida entre o sensor  $n$  e o sensor 0 pela frente de onda da  $m$ -ésima fonte e é dado, conforme se observa na Figura 2.1, por

$$r_{n,m} = nd \operatorname{sen}(\theta_m). \quad (2.1)$$

Suponha que a  $m$ -ésima fonte produza uma onda plana dada por

$$f_m(t) = F_m(t) e^{j[\omega_c^m t - \frac{2\pi}{\vartheta_m} r_m + \phi_m(t)]}, \quad (2.2)$$

onde

- $F_m(t)$  é a amplitude de um sinal variando no tempo;
- $\omega_c^m$  é a frequência da onda portadora;
- $\vartheta_m$  é o comprimento de onda na direção de propagação;
- $r_m$  é a distância até a origem de um sistema de coordenadas;
- $\phi_m(t)$  é uma fase arbitrária.

Suponha ainda que  $F_m(t)$  e  $\phi_m(t)$  apresentam faixa estreita comparadas com  $\omega_c^m$ , isto é, ambas variem lentamente em relação ao termo  $e^{j\omega_c^m t}$ . Com isto, pode-se afirmar que tanto  $F_m(t)$  como  $\phi_m(t)$ , apesar das diferenças de percurso do sinal, apresentam os mesmos valores em todos os sensores a cada instante de tempo, uma vez que as distâncias entre eles são tipicamente da ordem de metade do comprimento de onda.

Define-se  $x_{i,m}$  como o sinal captado pelo *sensor*  $i$  devido à onda gerada pela  $m$ -ésima fonte. Assumindo-se sensores com ganhos unitários e omnidirecionais, obtém-se o seguinte sinal no *sensor* 0

$$x_{0,m}(t) = F_m(t)e^{j[\omega_c^m t + \phi_m(t)]}, \quad (2.3)$$

enquanto que, no *sensor*  $n$ , obtém-se

$$x_{n,m}(t) = F_m(t)e^{j[\omega_c^m t - \frac{2\pi}{\vartheta_m} r_{n,m} + \phi_m(t)]}. \quad (2.4)$$

Estas expressões mostram que a hipótese de onda plana, juntamente com aquelas referentes a  $F_m(t)$  e  $\phi_m(t)$ , asseguram que a diferença entre as fases de um sinal captado por dois sensores se deve apenas ao atraso sofrido pelo sinal entre os sensores.

Agora, supondo que o arranjo linear da Figura 2.1 seja atingido por  $M$  ondas planas de direções distintas, e considerando o princípio da superposição, obtém-se a seguinte expressão genérica para este caso:

$$x_n(t) = \sum_{m=1}^M x_{n,m}(t) = \sum_{m=1}^M F_m(t)e^{j[\omega_c^m t + \phi_m(t)]} e^{-j(\frac{2\pi}{\vartheta_m} r_{n,m})}. \quad (2.5)$$

Supondo o caso em que todas as ondas apresentam a mesma portadora (por exemplo, são sinais refletidos de um mesmo transmissor, ou sinais de transmissores co-canal), tem-se que  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \dots = \vartheta_M = \vartheta$ . Assim, o termo da segunda exponencial da expressão (2.5) pode ser simplificado para

$$\frac{2\pi}{\vartheta_m} r_{n,m} = \frac{2\pi}{\vartheta} nd \text{sen}(\theta_m). \quad (2.6)$$

Definindo-se

$$\omega_m = -\frac{2\pi}{\vartheta} d \text{sen}(\theta_m), \quad (2.7)$$

onde  $\omega_m$  é dado em radianos, a expressão (2.5) pode ser reescrita como

$$x_n(t) = \sum_{m=1}^M F_m(t)e^{j\omega_c^m t} e^{j\phi_m(t)} e^{jn\omega_m}. \quad (2.8)$$

O sinal é convertido à sua banda básica antes da amostragem, o que significa desconsiderar o termo  $e^{j\omega_e^m t}$ . Mantendo a mesma notação para o sinal captado em banda básica, a expressão (2.8) transforma-se em

$$x_n(t) = \sum_{m=1}^M F_m(t) e^{j\phi_m(t)} e^{jn\omega_m}. \quad (2.9)$$

A expressão (2.9) pode ser interpretada como um sinal composto de  $M$  exponenciais complexas com as freqüências normalizadas  $\omega_m$ , fases  $\phi_m(t)$  e amplitudes  $F_m(t)$ . Isso possibilita que sejam utilizadas as técnicas de estimação de DOA também em problemas de estimação de freqüência quando as condições de equivalência entre os problemas são adequadas [23], [17]. Ou, de modo inverso, os conceitos de resolução de freqüência podem ser aplicados no problema DOA.

Pode-se simplificar a expressão (2.9) para ter a seguinte forma:

$$x_n(t) = \sum_{m=1}^M a_n(\omega_m) s_m(t), \quad (2.10)$$

onde

$$a_n(\omega_m) = e^{jn\omega_m} \quad (2.11)$$

e

$$s_m(t) = F_m(t) e^{j\phi_m(t)}. \quad (2.12)$$

Expandindo a expressão (2.10) para o caso ULA contendo  $N$  sensores e agrupando os elementos em vetores coluna, obtém-se:

$$\mathbf{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{N-1}(t) \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^M \begin{bmatrix} a_0(\omega_m) \\ a_1(\omega_m) \\ \vdots \\ a_{N-1}(\omega_m) \end{bmatrix} s_m(t) \in C^{N \times 1}. \quad (2.13)$$

Em forma compacta, pode-se escrever a expressão (2.13) como

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^M \mathbf{a}(\omega_m) s_m(t). \quad (2.14)$$

O vetor  $\mathbf{a}(\omega_m)$  é chamado de vetor de direção, em analogia ao clássico método de conformação de feixe (*beam-forming*), onde o arranjo é ajustado para ter ganho pré-determinado em uma certa direção

ou ângulo de incidência [10]. A expressão (2.14) pode ser escrita em notação matricial como

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{s}(t), \quad (2.15)$$

onde

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ \cdots \ s_M(t)]^T \in \mathbb{C}^{M \times 1} \quad (2.16)$$

e é chamado de vetor das amplitudes complexas dos sinais,  $(\cdot)^T$  indica a operação transposição,  $\mathbf{x}(t)$  é o vetor de amostras do sinal captado,  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \cdots \ \omega_M]^T$  e  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})$  é a matriz dos vetores de direção, dada por

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}) = [\mathbf{a}(\omega_1) \ \mathbf{a}(\omega_2) \ \cdots \ \mathbf{a}(\omega_M)] \in \mathbb{C}^{N \times M}, \quad (2.17)$$

isto é, seus elementos, para ULA, são dados por

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ e^{j\omega_1} & \cdots & e^{j\omega_M} \\ e^{j2\omega_1} & \cdots & e^{j2\omega_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(N-1)\omega_1} & \cdots & e^{j(N-1)\omega_M} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

A matriz  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})$  tem estrutura de Vandermonde, sendo referida, daqui em diante, apenas como matriz  $\mathbf{A}$ .

Os dois casos limites de DOAs ocorrem quando a fonte está localizada sobre o eixo  $y$  da Figura 2.1, com  $\theta_m = -\pi/2$  rad ou  $\theta_m = \pi/2$  rad; caso  $\theta_m = 0$  rad a direção de propagação é ortogonal ao eixo dos sensores.

A frequência elétrica associada ao DOA entre esses extremos é, segundo a expressão (2.7), limitada por

$$-\frac{2\pi d}{\vartheta} \leq \omega_m \leq \frac{2\pi d}{\vartheta}. \quad (2.19)$$

Observa-se que quanto maior a relação  $d/\vartheta$ , maior é a excursão do parâmetro  $\omega_m$  e, portanto, maior será a resolução do arranjo de sensores. Para se determinar o limite superior da resolução do arranjo, deve-se observar que a correspondência biunívoca entre  $\theta$  e  $\omega$  é mantida enquanto  $\omega$  estiver limitado entre  $+\pi$  e  $-\pi$  e o DOA estiver entre  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ .

Tomando um dos casos extremos, quando  $\theta_m = -\pi/2$ , tem-se que  $\omega_m = (2\pi d/\vartheta)(-1)$ . O valor máximo de  $d$  sob a condição de biunivocidade é, portanto,  $d = \vartheta/2$ , quando então  $\omega_m = -\pi$  e o ULA tem máxima resolução. Este valor de  $d$ , de metade do comprimento de onda, é adotado na maioria da literatura e também neste trabalho, sempre que seja necessário fazer a conversão entre DOA e a

freqüência elétrica.

Deve-se ainda considerar a situação real, onde se dispõe de uma quantidade finita de amostras do sinal, obtidas nos instantes  $t = k\Delta t$ , para  $k = 0, \dots, K - 1$ , onde  $K$  é o número total de *snapshots*. Proceda-se da mesma forma para todos os demais vetores, trocando-se a variável  $t$  pela variável  $k$ .

Nos sistemas reais, o sinal  $\mathbf{x}(k)$  é contaminado por ruído aditivo e, portanto, a expressão geral do vetor de dados de saída do arranjo  $\mathbf{y}(k)$  é

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\xi}(k) \quad (2.20)$$

ou

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{s}(k) + \boldsymbol{\xi}(k), \quad (2.21)$$

onde  $\boldsymbol{\xi}(k)$  é o vetor de ruído aditivo.

### 2.2.1. Considerações Sobre o Modelo de Sinal

Nesta seção serão introduzidas algumas condições sobre o modelo da expressão (2.21) que serão assumidas em todo o trabalho.

Assume-se que a quantidade de fontes é conhecida e é menor que o número de sensores ( $M < N$ ). Esta condição deve ser de forma a garantir que o número de parâmetros desconhecidos na expressão (2.21), que é igual a  $M(K + 1)$ , seja menor que o número de amostras de dados, que é igual a  $NK$ . Caso o número de fontes não seja conhecido, há técnicas disponíveis na literatura para sua estimação [24], [25].

Considera-se que os modelos estatísticos de sinal e ruído são processos aleatórios Gaussianos, complexos, independentes, estacionários, de média zero com as seguintes características estatísticas de segunda ordem:

$$E \{ \mathbf{s}(k)\mathbf{s}^H(i) \} = \mathbf{P}\delta_{k,i} \quad (2.22)$$

$$E \{ \mathbf{s}(k)\mathbf{s}^T(i) \} = \mathbf{0} \quad (\text{para todo } k \text{ e } i) \quad (2.23)$$

$$E \{ \boldsymbol{\xi}(k)\boldsymbol{\xi}^H(i) \} = \sigma^2 \mathbf{I}_{N \times N} \delta_{k,i} \quad (2.24)$$

$$E \{ \boldsymbol{\xi}(k)\boldsymbol{\xi}^T(i) \} = \mathbf{0} \quad (\text{para todo } k \text{ e } i), \quad (2.25)$$

onde  $E\{\cdot\}$  representa o operador de esperança estatística,  $\delta_{k,i}$  é a função delta de Kronecker com

$\delta_{k,k} = 1$  e  $\delta_{k,i} = 0$  para  $k \neq i$ ,  $(\cdot)^H$  indica a operação de transposição e conjugado do vetor ou matriz (hermitiano),  $\mathbf{P}$  é a matriz de correlação dos sinais de um mesmo *snapshot* e  $\sigma^2$  é a variância ou potência média do ruído.

A matriz  $\mathbf{P}$  é hermitiana e seu posto assume valor entre 1 e  $M$ . Caso a matriz  $\mathbf{P}$  seja proporcional à matriz identidade, os sinais têm a mesma potência e são descorrelacionados, portanto,  $\text{posto}(\mathbf{P}) = M$ . Essa condição é obtida quando os vetores de amplitudes complexas dos sinais são independentes entre si no *snapshot*. Outra situação de destaque é quando os elementos do vetor dos sinais são uma versão escalonada e/ou defasada de um de seus componentes. Neste caso  $\mathbf{P}$  tem posto unitário e os sinais são chamados coerentes ou totalmente correlacionados.

Pode ser verificado que as expressões (2.22) e (2.23) implicam na total descorrelação entre as partes reais e imaginárias dos sinais e também na igualdade entre suas variâncias. Estas condições asseguram a descorrelação temporal entre os sinais.

A expressão (2.25) indica a ortogonalidade entre as partes real e imaginária do vetor de ruído. Também, não há correlação entre as amostras de um vetor de ruído nem entre os vetores de ruído de *snapshots* distintos, ou seja, existe completa descorrelação no espaço e no tempo.

### 2.3. Critérios de Avaliação de Métodos de Estimação de DOA

Nesta seção são descritos os principais índices de mérito ou de desempenho usados na avaliação de métodos para estimação de DOA e de frequência. Essa avaliação envolve comparação entre os índices obtidos pelos métodos e os limites teóricos de estimação do parâmetro. Também é possível avaliar métodos distintos, bem como detectar as condições onde cada método pode ser usado de forma mais adequada.

O Limite de Cramér-Rao ou CRB (*Cramér-Rao Bound*) é a referência teórica principal em estimação de parâmetros e representa o menor valor teórico que pode ser atingido pelo erro quadrático médio ou mse (*mean square error*) das estimativas geradas por um estimador não-polarizado. Este valor é calculado tendo como parâmetro o número de amostras (ou sensores, em DOA), número de sinais, espaçamento entre frequências, relação sinal-ruído, etc. As principais expressões para o cálculo do limite de Cramér-Rao para o caso DOA são demonstradas e analisadas em [23].

A curva do erro quadrático médio ou simplesmente curva de desempenho é uma das formas mais comuns de realizar a avaliação ou comparação entre métodos de estimação. Ela é obtida em função da SNR ou de algum outro parâmetro. Cada ponto dessa curva é calculado pela raiz do erro quadrático médio ou RMSE (*Root Mean Square Error*) do conjunto de estimativas obtidas em relação aos ângulos

de chegadas verdadeiros. O erro quadrático médio para o ângulo estimado  $\hat{\theta}_m$  é definido como

$$\text{mse} \langle \hat{\theta}_m \rangle \equiv \sqrt{\frac{1}{NC} \sum_{r=1}^{NC} [(\hat{\theta}_{rm} - \theta_m)]^2}, \quad (2.26)$$

onde a unidade dos ângulos e do erro quadrático médio é dada em graus, "NC" é o número de estimativas disponíveis ou o número de experimentos realizados e  $\hat{\theta}_{rm}$  é a r-ésima estimativa de  $\theta_m$ .

As curvas de desempenho de alguns métodos de estimação aproximam-se bastante da curva do CRB quando a SNR é alta. Entretanto, conforme a SNR é diminuída, mantendo-se fixos os demais parâmetros, atinge-se um valor onde o desempenho se afasta rapidamente do CRB, ou seja, o método falha na estimação das frequências abaixo dessa SNR. Esse valor de SNR é chamado de limiar de desempenho e representa outro índice de mérito importante na avaliação dos métodos.

Um dos objetivos do desenvolvimento dos métodos de estimação consiste em reduzir o limiar de desempenho, o que significa obter bom desempenho em condições cada vez mais severas de contaminação por ruído. Neste trabalho, a proposta de filtragem apresentada tem este objetivo e apresenta resultados significativos.

Outra propriedade desejada para um estimador é que o erro quadrático médio decresça continuamente conforme o número de *snapshots* e/ou a SNR cresçam, alcançando o CRB. O estimador que atende esta propriedade é dito ser eficiente assintoticamente em relação ao número de *snapshots* ou em relação à SNR. Este comportamento assintótico é outro índice de mérito importante num estimador. Todos os métodos de estimação de DOA apresentados neste trabalho são eficientes assintoticamente, tanto em relação ao número de *snapshots* como em relação à SNR.

O fator de correlação representa um parâmetro importante dos sinais, pois algumas categorias de métodos de estimação não mantêm bom desempenho quando os sinais são parcial ou totalmente correlacionados (coerentes). Os métodos abordados neste trabalho, quando aplicados em estimação de sinais coerentes, têm desempenhos semelhantes àqueles obtidos com sinais descorrelacionados. Esta semelhança pode ser observada nos resultados apresentados neste trabalho.

O esforço computacional (EC) é outro tópico importante, principalmente quando se verifica que os principais métodos de estimação de DOA são derivados de um estimador que tem EC significativo, o estimador ML. O EC está também associado ao tempo de processamento e, conseqüentemente, à viabilidade de aplicações em tempo real.

Neste trabalho é utilizado ainda um critério de avaliação específico para os métodos de estimação de DOA que geram várias estimativas candidatas. Consiste em analisar se o processo seleciona as melhores candidatas dentre aquelas produzidas. As melhores candidatas são as que minimizam a soma do erro quadrático entre cada parâmetro estimado e o parâmetro verdadeiro correspondente, ou

seja, as melhores candidatas  $\omega_{best}$  podem ser obtidas através do seguinte procedimento:

$$\omega_{best} = \arg \min_{\omega \in \Phi} \sum_{m=1}^M (\hat{\omega}_m - \omega_m)^2, \quad (2.27)$$

onde  $\Phi$  é o conjunto de todas as combinações possíveis das candidatas geradas,  $\hat{\omega}_m$  é o m-ésimo elemento de uma combinação  $\omega \in \Phi$  e  $\omega_m$  é o parâmetro verdadeiro. Ao desempenho atingido com as candidatas selecionadas pelo procedimento acima deu-se o nome de *bestMODEX* [26] e o mesmo será apresentado neste trabalho em todas as curvas de desempenho dos métodos *MODEX* e *MODEX Modified* para que se possa fazer as devidas comparações.

Analisando de modo geral, o método de estimação ideal deve gerar estimativas não polarizadas, o esforço computacional deve ser o menor possível e a curva de desempenho deve se aproximar o máximo possível da curva CRB para todas as situações relevantes dos DOAs em termos de fator de correlação, número de *snapshots*, relação SNR, etc. Conforme informado anteriormente, o tema principal deste trabalho é realizar melhorias nos métodos existentes, através de filtragem, objetivando uma melhora no limiar de desempenho.

# Capítulo 3

## O Estimador de Máxima-Verossimilhança

### 3.1. Introdução

O Estimador de Máxima Verossimilhança ou MLE (Maximum Likelihood Estimator) é um método de estimação de parâmetros clássico, com aplicações em vários campos da ciência [16], [27], [28], [29], [30]. Em arranjos de sensores, o MLE apresenta uma grande capacidade de resolução na aplicação em arranjos com qualquer geometria. Porém, tal procedimento exige um esforço computacional proibitivo [10], [31], [32].

Neste capítulo é apresentado o desenvolvimento matemático dos critérios de máxima-verossimilhança determinístico e estocástico referentes ao modelo de sinal apresentado no capítulo anterior. O MLE com base no critério determinístico é a base para derivação do método MODE. E os critérios ML determinístico e estocástico são utilizados para seleção das candidatas nos métodos MODEX e MODEX *Modified*.

Estes critérios consistem na minimização de uma função custo adequada que depende da matriz covariância estimada  $\hat{\mathbf{R}}$  dos vetores de dados  $\mathbf{y}(k)$ .

### 3.2. O Estimador de Máxima Verossimilhança

O MLE consiste na estimação de um vetor de parâmetros  $\hat{\omega}$  que maximize a função de verossimilhança  $L(\omega)$  do vetor de dados observado  $\mathbf{y}(k)$ , sendo  $\hat{\omega}$  pertencente ao conjunto de parâmetros  $\Omega$ . A função de verossimilhança,  $L(\omega)$ , é definida como sendo a função de densidade de probabilidade,  $p^K(\mathbf{y}(k); \omega)$ , dos  $K$  vetores  $\mathbf{y}(k)$ , vista como função do vetor de parâmetros desconhecido  $\omega$  [16]. Uma vez que tenha sido obtida uma amostra específica,  $\mathbf{y}(k)$  torna-se fixo e a função de densidade de probabilidade conjunta pode então ser reinterpretada como sendo uma função do vetor de parâmetros desconhecido, denominada função de verossimilhança  $L(\omega)$ , onde  $\omega$  se torna variável.

O critério ML consiste em escolher o vetor  $\hat{\omega}$  que maximize a probabilidade de obter os *snapshots*

já observados. Em outras palavras, deseja-se o vetor  $\hat{\omega}$  que maximiza a função de verossimilhança  $L(\omega)$ .

A forma habitual de encontrar uma estimativa de máxima-verossimilhança é através da solução de um sistema de equações denominado equações de verossimilhança. Estas equações são normalmente obtidas igualando a zero as derivadas parciais do logaritmo natural da função de verossimilhança em relação aos parâmetros a serem estimados. O logaritmo natural permite simplificar o processo de maximização em casos como o Gaussiano.

Dois diferentes considerações sobre o modelo de sinal apresentado no Capítulo 2 permitem a obtenção de dois critérios que podem ser utilizados numa estimativa de máxima-verossimilhança. O primeiro critério é o de Máxima-Verossimilhança Determinístico ou critério DML (*Deterministic Maximum Likelihood*), onde considera-se o modelo de sinal sendo determinístico. A segunda versão é o critério de Máxima-Verossimilhança Estocástico ou critério SML (*Stochastic Maximum Likelihood*), onde considera-se o modelo de sinal sendo incondicional.

### 3.2.1. Critério de Máxima-Verossimilhança Determinístico

Neste critério considera-se que o sinal  $s(k)$  da expressão (2.21) seja determinístico (arbitrário), ou seja, o vetor de sinais  $s(k)$  varia para cada *snapshot* numa mesma realização, porém o conjunto de vetores de sinais se mantém fixo para todas realizações, variando-se apenas o ruído aditivo. Assim, considerando o ruído gaussiano de média zero e variância  $\sigma^2$ , o *snapshot*  $\mathbf{y}(k)$  é uma variável aleatória também gaussiana de dimensão  $N$ , com média  $\mathbf{A}(\omega)s(k)$ , variância  $\sigma^2$ . A função densidade de probabilidade condicional de  $\mathbf{y}(k)$  para este caso, dado que  $\omega$  ocorreu, é dado por [16]

$$p(\mathbf{y}(k); \omega) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}(k) - \mathbf{A}(\omega)s(k)\|^2}{\sigma^2}}, \quad (3.1)$$

onde  $\|\cdot\|$  denota a norma euclidiana.

Considerando-se os  $K$  *snapshots* independentes uns dos outros, obtêm-se a seguinte função densidade de probabilidade conjunta

$$\begin{aligned} p^K(\mathbf{y}(k); \omega) &= \prod_{k=1}^K \frac{1}{(\pi\sigma^2)^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}(k) - \mathbf{A}(\omega)s(k)\|^2}{\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{KN}} e^{-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{y}(k) - \mathbf{A}(\omega)s(k)\|^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Esta função densidade de probabilidade conjunta vista em função dos parâmetros  $\omega$ ,  $s(k)$  e  $\sigma^2$ , considerando serem conhecidos os *snapshots*  $\mathbf{y}(k)$ , permite obter a seguinte função de verossimilhança

$$L_{DML}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}(k), \sigma^2) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{KN}} e^{-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{y}(k) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{s}(k)\|^2}, \quad (3.3)$$

que deve ser maximizada para obter as estimativas ML  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ ,  $\hat{\mathbf{s}}(k)$  e  $\hat{\sigma}^2$  dos parâmetros.

A dependência de  $\mathbf{A}$  com  $\boldsymbol{\omega}$  não será mostrada nas expressões seguintes. Por conveniência, as estimativas ML são definidas como os argumentos que minimizam o negativo do logaritmo natural da expressão (3.3), ou seja,

$$l_{DML} = -\ln [L_{DML}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}(k), \sigma^2)] \quad (3.4)$$

$$= KN \ln(\pi) + KN \ln(\sigma^2) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{y}(k) - \mathbf{A}\mathbf{s}(k)\|^2. \quad (3.5)$$

Ignorando-se o termo constante  $KN \ln(\pi)$ , obtém-se

$$l_{DML} = KN \ln(\sigma^2) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{y}(k) - \mathbf{A}\mathbf{s}(k)\|^2. \quad (3.6)$$

Uma estratégia sempre usada na minimização da expressão (3.6) é a fixação de  $\boldsymbol{\omega}$  e a minimização em relação aos dois outros parâmetros. Em seguida, substitui-se os valores mínimos em (3.6) e se realiza a minimização em relação a  $\boldsymbol{\omega}$ .

Verifica-se na expressão (3.6) que a contribuição do parâmetro  $\mathbf{s}(k)$  ocorre somente no termo

$$\|\mathbf{y}(k) - \mathbf{A}\mathbf{s}(k)\|^2. \quad (3.7)$$

Deriva-se esta função em relação a  $\mathbf{s}(k)$  utilizando a seguinte derivada tabelada [33]

$$\frac{d}{d\mathbf{x}} (\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{c})^H \mathbf{D} (\mathbf{E}\mathbf{x} + \mathbf{f}) = \mathbf{E}^T \mathbf{D}^T (\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{c})^* + \mathbf{B}^T \mathbf{D}^* (\mathbf{E}\mathbf{x} + \mathbf{f})^*, \quad (3.8)$$

onde  $(\cdot)^*$  denota conjugado,  $(\cdot)^T$  denota transposto e  $(\cdot)^H$  denota transposto conjugado. Fazendo-se a seguinte relação  $\mathbf{B} = \mathbf{E} = -\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{f} = \mathbf{y}(k)$  e  $\mathbf{x} = \mathbf{s}(k)$  e igualando a derivada a zero

obtem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial(\mathbf{s}(k))}(\mathbf{y}(k) - \mathbf{A}\mathbf{s}(k))^H(\mathbf{y}(k) - \mathbf{A}\mathbf{s}(k)) &= 0 \\
-\mathbf{A}^T(-\mathbf{A}\mathbf{s}(k) + \mathbf{y}(k))^* &= 0 \\
\mathbf{A}^T\mathbf{A}^*\mathbf{s}^*(k) - \mathbf{A}^T\mathbf{y}^*(k) &= 0 \\
(\mathbf{A}^T\mathbf{A}^*\mathbf{s}^*(k))^* &= (\mathbf{A}^T\mathbf{y}^*(k))^* \\
\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{s}(k) &= \mathbf{A}^H\mathbf{y}(k) \\
\mathbf{s}(k) &= (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{y}(k).
\end{aligned}$$

Assim, a estimativa do parâmetro  $\mathbf{s}(k)$  é dada por

$$\hat{\mathbf{s}}(k) = \mathbf{A}^+\mathbf{y}(k), \quad (3.9)$$

onde  $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H$  é a matriz pseudo-inversa de  $\mathbf{A}$ .

A estimação do parâmetro  $\sigma^2$  segue o mesmo procedimento: deriva-se a expressão (3.6) em relação a  $\sigma^2$  e iguala-se a zero para obter  $\hat{\sigma}^2$ . Assim,

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}l_{DML} = -\frac{KN}{\sigma^2} + \frac{1}{(\sigma^2)^2} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{y}(k) - \mathbf{A}\mathbf{s}(k)\|^2 = 0.$$

Substituindo  $\mathbf{s}(k)$  pelo seu valor estimado,  $\hat{\mathbf{s}}(k)$ , obtém-se

$$\begin{aligned}
-\frac{KN}{\hat{\sigma}^2} + \frac{1}{(\hat{\sigma}^2)^2} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{y}(k) - \mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{y}(k)\|^2 &= 0 \\
-\frac{KN}{\hat{\sigma}^2} + \frac{1}{(\hat{\sigma}^2)^2} \sum_{k=1}^K \|(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^+)\mathbf{y}(k)\|^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Fazendo  $\mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^+$ , onde  $\mathbf{P}_A^\perp$  é um operador que projeta um vetor no espaço ortogonal ao

espaço das colunas de  $\mathbf{A}$ , obtém-se

$$\begin{aligned}
 -\frac{KN}{\hat{\sigma}^2} + \frac{1}{(\hat{\sigma}^2)^2} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{P}_A^\perp \mathbf{y}(k)\|^2 &= 0 \\
 \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{NK} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{P}_A^\perp \mathbf{y}(k)\|^2 \\
 \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{NK} \sum_{k=1}^K [\mathbf{y}^H(k) (\mathbf{P}_A^\perp)^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{y}(k)] \\
 \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{NK} \sum_{k=1}^K [\mathbf{y}^H(k) \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{y}(k)].
 \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade do traço,  $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{y}\mathbf{x}^H) = \mathbf{x}^H \mathbf{A}\mathbf{y}$ , na equação acima, tem-se que

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{NK} \sum_{k=1}^K \text{tr}(\mathbf{P}_A^\perp \mathbf{y}(k) \mathbf{y}^H(k)) \\
 \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{N} \text{tr} \left[ \mathbf{P}_A^\perp \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}(k) \mathbf{y}^H(k) \right].
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

A matriz covariância estimada dos dados  $\mathbf{y}(k)$  sobre os  $K$  snapshots é dada por

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}(k) \mathbf{y}^H(k). \tag{3.11}$$

Portanto, utilizando a expressão (3.11) em (3.10), obtém-se a seguinte estimativa de  $\sigma^2$ :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \text{tr} \left[ \mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}} \right]. \tag{3.12}$$

Normalizando a expressão (3.6) por  $K$  e substituindo os parâmetros  $\mathbf{s}(k)$  e  $\sigma^2$  por suas respectivas estimativas das expressões (3.9) e (3.12), obtém-se

$$\begin{aligned}
 l_{DML} &= N \ln \left( \frac{1}{N} \text{tr}(\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}) \right) + \frac{N}{K \text{tr}(\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}})} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{y}(k) - \mathbf{A}\mathbf{A}^+ \mathbf{y}(k)\|^2 \\
 &= N \ln \left( \frac{1}{N} \text{tr}(\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}) \right) + \frac{N}{\text{tr}(\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}})} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{P}_A^\perp \mathbf{y}(k)\|^2 \\
 &= N \ln \left( \frac{1}{N} \text{tr}(\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}) \right) + N.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Na expressão (3.13) verifica-se que a estimativa do parâmetro  $\omega$  é obtida resolvendo-se o seguinte problema de minimização

$$\hat{\omega}_{DML} = \arg \min_{\omega} \{F_{DML}(\omega)\}, \quad (3.14)$$

onde

$$F_{DML}(\omega) = \text{tr}[\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}] \quad (3.15)$$

é a função custo do critério DML para o parâmetro  $\omega$ .

A interpretação deste resultado é que os sinais medidos  $\mathbf{y}(k)$  são projetados em um subespaço ortogonal a todas componentes do sinal, e é estimada uma medida da potência,  $\text{tr}[\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}]$ . Quando o projetor de fato remover todas componentes verdadeiras do sinal, isto é, quando  $\hat{\omega} = \omega$ , a potência certamente será a menor possível. Como somente se dispõe da matriz  $\mathbf{R}$  estimada de um número finito de *snapshots*, a potência não é perfeitamente estimada e  $\hat{\omega}$  será diferente de  $\omega$  [10].

Com o incremento do número de *snapshots*  $K$ , a tendência do erro é convergir para o limite inferior de Cramer-Rao ou CRB. Entretanto, conforme analisado e demonstrado em [34], se o número de sensores  $N$  for pequeno, isto é, for apenas pouco maior que o número de fontes, então o MLE não alcançará o CRB, mesmo com  $K$  tendendo ao infinito. Porém, nesta mesma referência, é demonstrado que para  $N$  tendendo ao infinito tem-se que o MLE é assintoticamente eficiente em relação ao número de *snapshots*. Em [34] e [35] são feitos estudos de performance analíticos e numéricos que reforçam esta conclusão.

Em [35], demonstra-se que o MLE é assintoticamente eficiente também em relação à SNR, pois com o aumento da SNR, o erro também converge para o CRB.

Para se obter a estimativa do parâmetro  $\omega$  pelo critério DML, o problema de otimização não-linear  $N$  dimensional da expressão (3.14) deve ser resolvido numericamente. Os algoritmos baseados na técnica de Gauss-Newton podem ser usados para esta finalidade. Sua convergência para o ponto mínimo geralmente é rápida, caso seja fornecida uma boa estimativa inicial. Se a estimativa inicial for inadequada, o procedimento de busca pode convergir para um mínimo local. Porém, independentemente da estimativa inicial, a convergência para o mínimo global não pode ser garantida [10]. Uma vez estimado  $\omega$ , as estimativas das amplitudes complexas e da variância do ruído podem ser obtidas diretamente pelas expressões (3.9) e (3.12).

### 3.2.2. Critério de Máxima-Verossimilhança Estocástico

Neste critério considera-se que o modelo de sinal apresentado no Capítulo 2 seja incondicional, ou seja, são mantidas a aleatoriedade no espaço e no tempo dos vetores de sinais e adicionalmente, em cada realização, uma nova seqüência de vetores  $\mathbf{s}(k)$  é gerada [36]. Os parâmetros dos sinais para este caso são modelados como variáveis aleatórias Gaussianas [10].

O conjunto de parâmetros a ser estimado é composto pelo vetor de frequência  $\boldsymbol{\omega}$ , pela matriz de correlação dos sinais  $\mathbf{P}$  e pela variância do ruído  $\sigma^2$ . A função de verossimilhança para este caso é dada por [37]

$$L_{SML}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{P}, \sigma^2) = \prod_{k=1}^K (\pi)^{-N} |\mathbf{R}|^{-N} e^{[\mathbf{y}^T(k) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}(k)]}, \quad (3.16)$$

onde a matriz covariância  $\mathbf{R}$  é dada por [10]

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{P} \mathbf{A}^H(\boldsymbol{\omega}) + \sigma^2 \mathbf{I}. \quad (3.17)$$

Seguindo as mesmas etapas aplicadas ao critério DML e considerando que os parâmetros são independentes, fixa-se  $\boldsymbol{\omega}$  de forma que as estimativas de  $\sigma^2$  e  $\mathbf{P}$  podem ser calculadas por [10]

$$\hat{\sigma}_{SML}^2(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{N - M} \text{tr}(\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}), \quad (3.18)$$

e

$$\hat{\mathbf{P}}_{SML}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{A}^+ \left[ \hat{\mathbf{R}} - \hat{\sigma}_{SML}^2(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{I} \right] (\mathbf{A}^+)^H. \quad (3.19)$$

Substituindo estas estimativas na função de verossimilhança modificada do critério SML e realizando algumas simplificações, mostra-se que as estimativas de frequências são obtidas resolvendo-se o seguinte problema de minimização [10]

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{SML} = \arg \min_{\boldsymbol{\omega}} \{F_{SML}(\boldsymbol{\omega})\}, \quad (3.20)$$

onde

$$F_{SML}(\boldsymbol{\omega}) = \log \det \left[ \mathbf{P}_A \hat{\mathbf{R}} \mathbf{P}_A^H + \frac{1}{N - M} \text{tr}(\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}) \mathbf{P}_A^\perp \right] \quad (3.21)$$

é a função custo do critério SML e  $\mathbf{P}_A = \mathbf{A} \mathbf{A}^+$  é um operador que projeta um vetor no espaço formado pelas colunas de  $\mathbf{A}$ .

A minimização exigida pela expressão (3.20) é um problema não-linear, como no caso do critério DML, e que pode apresentar diversos mínimos locais. Ela é usualmente realizada através de técnicas como o método de Gauss-Newton, redes neurais ou algoritmos genéricos [38], todos com esforço computacional considerável. As estimativas geradas pelo critério SML têm maior precisão que o critério DML. Tanto o critério DML quanto o critério SML fornecem estimativas assintoticamente eficientes em relação à SNR e ao número de *snapshots* para  $N$  grande, ou seja, o erro quadrático médio das estimativas tendem ao limite inferior de Cramer-Rao [35].

### 3.3. Consideração Final

Apesar dos Estimadores de Máxima-Verossimilhança baseados nos critérios DML e SML apresentarem desempenhos assintoticamente eficientes em relação à SNR e ao número de *snapshots* para  $N$  grande, o esforço computacional exigido para resolver os problemas de minimização apresentados nas expressões (3.14) e (3.20) é sabidamente elevado. Além disto, a convergência para mínimo global não é garantida.

Na busca em solucionar estes problemas de minimização, foram desenvolvidos métodos de estimação iterativos que obtêm as estimativas de uma versão modificada da função custo do critério DML. Alguns destes métodos serão detalhados no capítulo seguinte, sendo eles: MODE, MODEX e *MODEX Modified*. Os métodos MODEX e *MODEX Modified*, conforme comentado anteriormente, geram várias candidatas e baseiam-se nos critérios DML e SML para selecionar as consideradas melhores.

# Capítulo 4

## Métodos MODE, MODEX e MODEX *Modified*

### 4.1. Introdução

Verificou-se no capítulo anterior que o Estimador de Máxima-Verossimilhança ou MLE (*Maximum Likelihood Estimator*) para o problema DOA pode ser obtido através de dois critérios, um baseado no critério determinístico ou DML (*Deterministic Maximum Likelihood*) e outro baseado no critério estocástico ou SML (*Stochastic Maximum Likelihood*). Foi observado que o MLE possui um desempenho assintótico eficiente em relação à SNR e ao número de *snapshots* quando a quantidade de sensores é suficientemente grande em relação ao número de fontes [34]. Entretanto, a implementação direta do MLE é inviável devido ao esforço computacional requerido para a minimização das funções custo obtidas para os critérios DML e SML.

Um dos métodos desenvolvidos para solucionar este problema é o MODE (*Method Of Direction Estimation*) [19], um método iterativo de alta resolução obtido a partir de uma versão modificada da função custo do critério DML e que faz uso da decomposição da matriz covariância em subespaços de sinal e de ruído. Neste método, as estimativas de máxima-verossimilhança são obtidas a partir das raízes de um polinômio adequado  $b(z)$ . A performance do MODE, com número suficientemente grande de sensores, é muito próxima à atingida pelo MLE condicional, apresentando também eficiência assintótica em relação à SNR e ao número de *snapshots*, tanto para fontes descorrelacionadas quanto para fontes totalmente correlacionadas.

Baseados no método MODE, com o objetivo de melhorar a performance para SNR baixa, foram desenvolvidos outros dois métodos, o MODEX (*MODE with eXtra roots*) [21] e o MODEX *Modified* [22]. Estes métodos implementam a mesma técnica de minimização empregada no MODE, porém eles obtêm uma quantidade extra de raízes, formando um conjunto de estimativas candidatas. Estas

candidatas são testadas pelos critérios ou DML ou SML para selecionar as melhores estimativas.

Este capítulo apresenta a reparametrização da função custo  $F_{DML}(\omega)$ , o desenvolvimento do método MODE, derivando-o do MLE baseado no critério DML, a descrição dos métodos MODEX e MODEX *Modified* e são apresentadas simulações numéricas e resultados destes métodos.

## 4.2. Reparametrização da Função Custo DML

Conforme verificado no Capítulo 3, a função custo do critério DML para o parâmetro  $\omega$  é dada por

$$F_{DML}(\omega) = \text{tr}[\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}], \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H$ . A minimização desta função exige uma busca  $N$  dimensional, exigindo um elevado esforço computacional.

Esta função pode ser reparametrizada em termos de um vetor de parâmetros  $\mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_M]^T$ , onde os elementos  $b_m$  são os coeficientes do polinômio [17]

$$b(z) = b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_M = b_0 \prod_{m=1}^M (z - e^{j\omega_m}). \quad (4.2)$$

As raízes deste polinômio são  $e^{j\omega_m}$ , com  $m = 1, 2, \dots, M$ , e, portanto, se situam sobre a CRU (circunferência de raio unitário). Assim, tem-se que

$$\sum_{m=0}^M b_m e^{j(n-m)\omega_i} = 0, \quad (4.3)$$

onde  $n = 0, 1, \dots, N-1$  e  $i = 1, 2, \dots, M$ . Esta expressão pode ser reescrita como [18]

$$\mathbf{B}^H \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (4.4)$$

onde  $\mathbf{B}^H$  é uma matriz Toeplitz definida por

$$\mathbf{B}^H = \begin{bmatrix} b_M & \dots & b_1 & b_0 & \mathbf{0} \\ \ddots & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & b_M & \dots & b_1 & b_0 \end{bmatrix}_{(N-M) \times N}. \quad (4.5)$$

Considerando que o posto( $\mathbf{A}$ ) =  $M$  e posto( $\mathbf{B}$ ) =  $N - M$ , segue da expressão (4.4) que as colunas de  $\mathbf{B}$  pertencem ao espaço nulo de  $\mathbf{A}^H$ . Assim, tanto  $\mathbf{P}_A^\perp$  quanto  $\mathbf{B}(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H$  são projetores ortogonais do espaço nulo de  $\mathbf{A}^H$ , o que implica em

$$\mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{B}(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H. \quad (4.6)$$

Substituindo a expressão (4.6) em (4.1), obtém-se a seguinte função custo equivalente reparametrizada em função do vetor  $\mathbf{b}$

$$F(\mathbf{b}) = \text{Tr}[\mathbf{B}(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \hat{\mathbf{R}}]. \quad (4.7)$$

Assim, as estimativas do vetor de parâmetros  $\mathbf{b}$  são obtidas resolvendo-se o seguinte problema de minimização

$$\hat{\mathbf{b}} = \arg \min_{\mathbf{b} \in D} \{F(\mathbf{b})\}, \quad (4.8)$$

onde  $D = \left\{ \mathbf{b}_m | b(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{M-m} \neq 0 \text{ para } |z| \neq 1 \right\}$  é o conjunto que faz com que a correspondência entre o vetor de parâmetros  $\mathbf{b}$  e o vetor de frequências  $\boldsymbol{\omega}$  seja único, desde que seja evitada a solução trivial  $\mathbf{b} = 0$ . A forma de se impor que  $\mathbf{b}$  seja diferente de zero será descrita em detalhes na seção 4.3.1.

Não é possível obter uma expressão algébrica para a solução  $\hat{\mathbf{b}}$  do problema de minimização (4.8), pois, assim como a minimização da função custo (4.1), este problema é não-linear em relação ao vetor  $\mathbf{b}$ . Porém, a expressão (4.7) é mais adequada para ser manipulada algebricamente que a expressão (4.1) e constitui a base para o método MODE.

A minimização expressa em (4.8) produz as estimativas DML do vetor de parâmetros  $\hat{\mathbf{b}}$ . As frequências  $\boldsymbol{\omega}$  são estimadas extraindo-se os ângulos das raízes do polinômio  $b(z)$ .

### 4.3. Método MODE

A idéia básica do método MODE é aproximar a função custo localmente em torno de um vetor ótimo  $\mathbf{b}_o$  por uma função quadrática. Para tanto, é realizada uma aproximação assintótica na função custo, a qual é obtida substituindo-se a matriz  $\hat{\mathbf{R}}$  da expressão (4.7) por sua decomposição em autovalores e autovetores, dada por

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{\Lambda}} \hat{\mathbf{U}}^H, \quad (4.9)$$

onde  $\hat{\mathbf{U}}$  é uma matriz unitária cujas colunas são os autovetores de  $\hat{\mathbf{R}}$  e  $\hat{\mathbf{\Lambda}}$  é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de  $\hat{\mathbf{R}}$  ordenados em valores decrescentes. Considerando  $M$  fontes de ondas planas e ruído branco com variância  $\sigma^2$  em ULA com  $N$  sensores e  $N > M$ , têm-se que  $\hat{\mathbf{\Lambda}} = \text{diag}\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_{\bar{M}}, \hat{\lambda}_{\bar{M}+1}, \dots, \hat{\lambda}_N\}$  com  $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_{\bar{M}} > \hat{\lambda}_{\bar{M}+1} = \hat{\lambda}_{\bar{M}+2} = \dots = \hat{\lambda}_N = \hat{\sigma}^2$ , onde  $\bar{M} = \min\{M, \text{posto}(\mathbf{P})\}$  e  $\hat{\lambda}_i$  é o  $i$ -ésimo autovalor de  $\hat{\mathbf{R}}$ . Agrupando as  $\bar{M}$  primeiras colunas de autovetores correspondentes aos  $\bar{M}$  maiores autovalores numa matriz  $\hat{\mathbf{U}}_S$  e os autovetores

restantes na matriz  $\hat{\mathbf{U}}_N$ , pode-se reescrever (4.9) como

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\mathbf{\Lambda}}_S \hat{\mathbf{U}}_S^H + \hat{\mathbf{U}}_N \hat{\mathbf{\Lambda}}_N \hat{\mathbf{U}}_N^H, \quad (4.10)$$

onde  $\hat{\mathbf{U}}_S \in C^{N \times \bar{M}}$  e  $\hat{\mathbf{\Lambda}}_S = \text{diag}\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_{\bar{M}}\} \in R^{\bar{M} \times \bar{M}}$  são associados ao subespaço de sinal e  $\hat{\mathbf{U}}_N \in C^{N \times (N - \bar{M})}$  e  $\hat{\mathbf{\Lambda}}_N = \hat{\sigma}^2 \mathbf{I} \in R^{(N - \bar{M}) \times (N - \bar{M})}$  são interpretados como pertencentes ao subespaço de ruído da matriz  $\hat{\mathbf{R}}$ .

Supondo que todos os autovetores do subespaço de ruído, isto é, as colunas de  $\hat{\mathbf{U}}_N$ , são ortogonais à matriz  $\mathbf{A}$ , então estes vetores descrevem o espaço nulo de  $\mathbf{A}$ . Como conseqüência, as colunas de  $\hat{\mathbf{U}}_S$  descrevem o espaço da matriz  $\mathbf{A}$ . Neste caso, os projetores dos subespaços de sinal e ruído são dados por [10]

$$\mathbf{P}_A = \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H = \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\mathbf{U}}_S^H \quad (4.11)$$

$$\mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H = \hat{\mathbf{U}}_N \hat{\mathbf{U}}_N^H. \quad (4.12)$$

Disso segue que

$$\mathbf{I} = \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\mathbf{U}}_S^H + \hat{\mathbf{U}}_N \hat{\mathbf{U}}_N^H. \quad (4.13)$$

O interesse do método MODE está no comportamento local de  $F(\mathbf{b})$  no qual  $\|\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}_o\| \approx 0$  para  $K$  grande. Isso implica que  $\|\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}_o\| \approx 0$  e, conseqüentemente,  $\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{U}}_S = \hat{\mathbf{U}}_S^H \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$  para  $K$  grande [34]. Assim, substituindo a matriz  $\hat{\mathbf{R}}$  da expressão (4.7) pela sua decomposição em subespaços, conforme (4.10), e considerando a igualdade expressa em (4.13), a expressão da função custo do MODE é dada por [19]

$$F_{MODE}(\mathbf{b}) = \text{tr} \left[ \mathbf{B}(\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}})^{-1} \mathbf{B}^H \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\mathbf{\Psi}} \hat{\mathbf{U}}_S^H \right], \quad (4.14)$$

sendo que a matriz  $\hat{\mathbf{\Psi}}$  ótima, para minimizar a variância do erro de estimação, é dada por [10], [32]

$$\hat{\mathbf{\Psi}} = \text{diag} \left\{ \frac{(\hat{\lambda}_1 - \hat{\sigma}^2)^2}{\hat{\lambda}_1}, \frac{(\hat{\lambda}_2 - \hat{\sigma}^2)^2}{\hat{\lambda}_2}, \dots, \frac{(\hat{\lambda}_{\bar{M}} - \hat{\sigma}^2)^2}{\hat{\lambda}_{\bar{M}}} \right\}, \quad (4.15)$$

onde retirou-se a parcela de ruído, dada por  $\hat{\sigma}^2$ , dos autovalores do subespaço de sinal, pois este subespaço também é afetado pelo ruído e cada um de seus autovalores contém uma parcela do mesmo. A estimativa da variância do ruído,  $\hat{\sigma}^2$ , pode facilmente ser obtida calculando-se a média dos elementos da diagonal da matriz  $\hat{\mathbf{\Lambda}}_N$ , ou seja,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N - \bar{M}} \text{Tr}\{\hat{\Lambda}_N\} = \frac{1}{N - \bar{M}} [\text{Tr}\{\hat{\mathbf{R}}\} - \text{Tr}\{\hat{\Lambda}_S\}]. \quad (4.16)$$

A minimização da função custo (4.14) é realizada de forma iterativa, sendo necessário apenas poucas iterações para se obter a convergência requerida. A primeira iteração é realizada com  $\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}}$  sendo uma matriz definida positiva - normalmente faz-se  $\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{I}$  - e nas iterações seguintes, a estimativa de  $\mathbf{b}$ ,  $\hat{\mathbf{b}}$ , é usada para atualizar o valor de  $(\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}})^{-1}$ .

### 4.3.1. Minimização da Função Custo no Método MODE

A expressão (4.14) pode ser decomposta em

$$F_{MODE}(\mathbf{b}) = \text{tr} \left[ \mathbf{B} (\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}})^{-1} \mathbf{B}^H \hat{\mathbf{U}}_S \left( \hat{\Psi}^{1/2} \hat{\Psi}^{1/2} \right) \hat{\mathbf{U}}_S^H \right] \quad (4.17)$$

e transformada para

$$F_{MODE}(\mathbf{b}) = \text{tr} \left[ \left( \hat{\Psi}^{1/2} \right) \left( \hat{\mathbf{U}}_S^H \mathbf{B} \right) (\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}})^{-1} (\mathbf{B}^H \hat{\mathbf{U}}_S) \left( \hat{\Psi}^{1/2} \right) \right], \quad (4.18)$$

onde

$$\hat{\Psi}^{1/2} = \text{diag} \left\{ \frac{|\hat{\lambda}_1 - \hat{\sigma}^2|}{\sqrt{\hat{\lambda}_1}}, \frac{|\hat{\lambda}_2 - \hat{\sigma}^2|}{\sqrt{\hat{\lambda}_2}}, \dots, \frac{|\hat{\lambda}_{\bar{M}} - \hat{\sigma}^2|}{\sqrt{\hat{\lambda}_{\bar{M}}}} \right\}. \quad (4.19)$$

Pode-se demonstrar que  $(\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}})^{-1}$  possui simetria conjugada. Com isso, é possível obter uma matriz triangular diagonal superior utilizando a fatorização de Cholesky. Denotando por  $\mathbf{G}$  o fator de Cholesky de  $(\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}})^{-1}$ , tal que

$$(\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}})^{-1} = \mathbf{G}^H \mathbf{G}, \quad (4.20)$$

tem-se que

$$F_{MODE}(\mathbf{b}) = \text{tr} \left[ \left( \hat{\Psi}^{1/2} \right) \left( \hat{\mathbf{U}}_S^H \mathbf{B} \right) \mathbf{G}^H \mathbf{G} (\mathbf{B}^H \hat{\mathbf{U}}_S) \left( \hat{\Psi}^{1/2} \right) \right]. \quad (4.21)$$

Seja ainda

$$\hat{\mathbf{U}}_L = \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\Psi}^{1/2} = [\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_{\bar{M}}] = \begin{bmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,\bar{M}} \\ u_{2,1} & \cdots & u_{2,\bar{M}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{N,1} & \cdots & u_{N,\bar{M}} \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

e

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{B}}^H \mathbf{u}_k &= \begin{bmatrix} b_M & b_{M-1} & \cdots & b_0 & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & b_M & b_{M-1} & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,k} \\ u_{2,k} \\ \vdots \\ u_{N,k} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u_{M+1,k} & u_{M,k} & \cdots & u_{1,k} \\ u_{M+2,k} & u_{M+1,k} & \cdots & u_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{N,k} & u_{N-1,k} & \cdots & u_{N-M,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} \\
&= [\mathbf{S}_k \mathbf{b}]_{(N-\bar{M}) \times 1}; 1 \leq k \leq \bar{M}, \tag{4.23}
\end{aligned}$$

resultando em

$$\mathbf{B}^H \hat{\mathbf{U}}_L = [\mathbf{S}_1 \mathbf{b} \mid \mathbf{S}_2 \mathbf{b} \mid \cdots \mid \mathbf{S}_{\bar{M}} \mathbf{b}]_{(N-\bar{M}) \times \bar{M}}. \tag{4.24}$$

Portanto,

$$\mathbf{G} \mathbf{B}^H \hat{\mathbf{U}}_L = [(\mathbf{G} \mathbf{S}_1) \mathbf{b} \mid (\mathbf{G} \mathbf{S}_2) \mathbf{b} \mid \cdots \mid (\mathbf{G} \mathbf{S}_{\bar{M}}) \mathbf{b}]. \tag{4.25}$$

Reescrevendo a expressão (4.21) utilizando (4.25) obtém-se

$$\begin{aligned}
F_{MODE}(\mathbf{b}) &= Tr \left\{ \begin{bmatrix} \frac{(\mathbf{G} \mathbf{S}_1 \mathbf{b})^H}{(\mathbf{G} \mathbf{S}_{\bar{M}} \mathbf{b})^H} \\ \vdots \\ \frac{(\mathbf{G} \mathbf{S}_{\bar{M}} \mathbf{b})^H}{(\mathbf{G} \mathbf{S}_{\bar{M}} \mathbf{b})^H} \end{bmatrix} [\mathbf{G} \mathbf{S}_1 \mathbf{b} \mid \cdots \mid \mathbf{G} \mathbf{S}_{\bar{M}} \mathbf{b}] \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\bar{M}} (\mathbf{G} \mathbf{S}_k \mathbf{b})^H (\mathbf{G} \mathbf{S}_k \mathbf{b}) \\
&= \sum_{k=1}^{\bar{M}} \|\mathbf{G} \mathbf{S}_k \mathbf{b}\|^2 \\
&= [(\mathbf{G} \mathbf{S}_1 \mathbf{b})^H \mid \cdots \mid (\mathbf{G} \mathbf{S}_{\bar{M}} \mathbf{b})^H] \begin{bmatrix} \mathbf{G} \mathbf{S}_1 \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{G} \mathbf{S}_{\bar{M}} \mathbf{b} \end{bmatrix}. \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Utilizando a notação

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \mathbf{S}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{G} \mathbf{S}_{\bar{M}} \end{bmatrix}_{\bar{M}(N-\bar{M}) \times (\bar{M}+1)}, \tag{4.27}$$

tem-se que

$$F_{MODE}(\mathbf{b}) = (\mathbf{b}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{b}) = \|\mathbf{H}\mathbf{b}\|^2. \quad (4.28)$$

Agora, considere a restrição  $\mathbf{b} \in D$ . Esta restrição complica o problema de minimização indicado em (4.8) significativamente. É comum, na prática, substituí-la pela restrição simetria complexa conjugada sobre os coeficientes de  $b(z)$ , fazendo

$$b_m = b_{M-m}^* \quad \text{para } m = 0, 1, \dots, M. \quad (4.29)$$

Esta restrição não é necessária e nem suficiente para que as raízes do polinômio  $b(z)$  estejam sobre a CRU, porém todo polinômio  $b(z)$  com raízes sobre a CRU pode ser convertido, mediante um fator multiplicativo, em um polinômio com simetria complexa conjugada. Veja o exemplo abaixo:

Dado as raízes  $z_1 = e^{j\omega_1}$  e  $z_2 = e^{j\omega_2}$  têm-se o seguinte polinômio

$$b(z) = z^2 - (e^{j\omega_1} + e^{j\omega_2})z + e^{j(\omega_1+\omega_2)},$$

o qual não apresenta simetria complexa conjugada. Porém, se  $b(z)$  for multiplicado por  $e^{-j\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}}$ , obtêm-se

$$e^{-j\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}}b(z) = e^{-j\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}}z^2 - (e^{j\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}} + e^{-j\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}})z + e^{j\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}},$$

o qual possui a simetria complexa conjugada.

Quanto à suficiência da restrição (4.29), veja o contra-exemplo a seguir:

Dado as raízes  $z_1 = \rho e^{j\omega}$  e  $z_2 = \frac{1}{\rho} e^{-j\omega}$  têm-se o polinômio

$$b(z) = z^2 - (\rho e^{j\omega} + \frac{1}{\rho} e^{-j\omega})z + 1.$$

Portanto, há a simetria com  $b_0 = b_M = 1$  mesmo com  $\rho \neq 1$ .

Assim, conclui-se que uma estimativa de  $\mathbf{b}$  determinada sob a restrição simetria complexa conjugada não necessariamente pertencerá ao conjunto  $D$ . Mas a restrição (4.29) é conveniente por reduzir o número de incógnitas em  $b(z)$ , pois o polinômio possuirá, para  $M$  par, a seguinte forma

$$b(z) = b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_{\frac{M}{2}-1} z^{\frac{M}{2}+1} + b_{\frac{M}{2}} z^{\frac{M}{2}} + b_{\frac{M}{2}-1}^* z^{\frac{M}{2}-1} + \dots + b_0^*, \quad (4.30)$$

ou

$$b(z) = b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_{\frac{M-1}{2}} z^{\frac{M+1}{2}} + b_{\frac{M-1}{2}}^* z^{\frac{M-1}{2}} + \dots + b_0^*, \quad (4.31)$$

para  $M$  ímpar.

A seguir será considerada a minimização da expressão (4.28) sob a restrição (4.29). Para tanto, são definidas as seguintes matrizes e vetores

1. Para  $M$  par

$$\begin{aligned}
 \bullet \mathbf{I}_{k\text{par}} &= \mathbf{I}_{\frac{M}{2} \times \frac{M}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ & \ddots \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}_{\frac{M}{2} \times \frac{M}{2}} \\
 \bullet \text{rot}90(\mathbf{I}_{k\text{par}}) &= \mathbf{I}_{\frac{M}{2} \times \frac{M}{2}} \text{ girada de } 90^\circ = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \\ & \ddots \\ 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{\frac{M}{2} \times \frac{M}{2}} \\
 \bullet \mathbf{z}e &= [0 \cdots 0]_{\frac{M}{2} \times 1}^T \\
 \bullet \mathbf{K}_{\text{par}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k\text{par}} & \mathbf{z}e & j\mathbf{I}_{k\text{par}} \\ \mathbf{z}e^T & 1 & \mathbf{z}e^T \\ \text{rot}90(\mathbf{I}_{k\text{par}}) & \mathbf{z}e & -j\text{rot}90(\mathbf{I}_{k\text{par}}) \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)} \\
 \bullet \boldsymbol{\beta}_{\text{par}} &= [b_{0re} \ b_{1re} \ \cdots \ b_{(\frac{M}{2}-1)re} \ \mu \ b_{0img} \ b_{1img} \ \cdots \ b_{(\frac{M}{2}-1)img}]^T = [\beta_0 \ \cdots \ \beta_M]^T
 \end{aligned}$$

2. Para  $M$  ímpar

$$\begin{aligned}
 \bullet \mathbf{I}_{k\text{ímpar}} &= \mathbf{I}_{\frac{M+1}{2} \times \frac{M+1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ & \ddots \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}_{\frac{M+1}{2} \times \frac{M+1}{2}} \\
 \bullet \text{rot}90(\mathbf{I}_{k\text{ímpar}}) &= \mathbf{I}_{\frac{M+1}{2} \times \frac{M+1}{2}} \text{ girada de } 90^\circ = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \\ & \ddots \\ 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{\frac{M+1}{2} \times \frac{M+1}{2}} \\
 \bullet \mathbf{K}_{\text{ímpar}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k\text{ímpar}} & j\mathbf{I}_{k\text{ímpar}} \\ \text{rot}90(\mathbf{I}_{k\text{ímpar}}) & -j\text{rot}90(\mathbf{I}_{k\text{ímpar}}) \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)} \\
 \bullet \boldsymbol{\beta}_{\text{ímpar}} &= [b_{0re} \ b_{1re} \ \cdots \ b_{\frac{M-1}{2}re} \ b_{0img} \ b_{1img} \ \cdots \ b_{\frac{M-1}{2}img}]^T = [\beta_0 \ \cdots \ \beta_M]^T
 \end{aligned}$$

onde  $\mu$  é um número real.

Os vetores

$$\mathbf{b}_{\text{par}} = [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{\frac{M}{2}-1} \ b_{\frac{M}{2}} \ b_{\frac{M}{2}-1}^* \ \cdots \ b_0^*], \text{ para } M \text{ par}, \quad (4.32)$$

e

$$\mathbf{b}_{\text{ímpar}} = \left[ b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{\frac{M-1}{2}} \ b_{\frac{M-1}{2}}^* \ \cdots \ b_0^* \right], \text{ para } M \text{ ímpar}, \quad (4.33)$$

onde  $b_m = b_{mre} + jb_{mimg}$ , representam os coeficientes dos polinômios apresentados nas expressões (4.30) e (4.31), respectivamente. Estes vetores podem ser obtidos da seguinte forma

$$\mathbf{b}_{\text{par}} = \mathbf{K}_{\text{par}} \boldsymbol{\beta}_{\text{par}} \quad (4.34)$$

$$\mathbf{b}_{\text{ímpar}} = \mathbf{K}_{\text{ímpar}} \boldsymbol{\beta}_{\text{ímpar}}. \quad (4.35)$$

Fazendo  $\mathbf{b} = \mathbf{K} \boldsymbol{\beta}$  na expressão (4.28), obtém-se

$$\begin{aligned} F_{MODE}(\mathbf{b}) &= (\mathbf{b}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{b}) = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{K}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{K} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^T (\mathbf{H} \mathbf{K})^H (\mathbf{H} \mathbf{K}) \boldsymbol{\beta} \\ &= \boldsymbol{\beta}^T (\mathbf{H} \mathbf{K}_{re} + j \mathbf{H} \mathbf{K}_{img})^H (\mathbf{H} \mathbf{K}_{re} + j \mathbf{H} \mathbf{K}_{img}) \boldsymbol{\beta} \\ &= \boldsymbol{\beta}^T \left[ \mathbf{H} \mathbf{K}_{re}^T \mid \mathbf{H} \mathbf{K}_{img}^T \right] \begin{bmatrix} \mathbf{H} \mathbf{K}_{re} \\ \mathbf{H} \mathbf{K}_{img} \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde  $\mathbf{H} \mathbf{K}_{re}$  e  $\mathbf{H} \mathbf{K}_{img}$  são, respectivamente, as partes real e imaginária do produto matricial  $\mathbf{H} \mathbf{K}$ .

Fazendo

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{H} \mathbf{K}) \\ \text{Im}(\mathbf{H} \mathbf{K}) \end{bmatrix}_{2M(N-M) \times (M+1)}, \quad (4.37)$$

tem-se que

$$F_{MODE}(\mathbf{b}) = \|\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\beta}\|^2. \quad (4.38)$$

Será discutido agora como eliminar a solução trivial,  $\mathbf{b} = 0$ , induzida no problema de minimização de  $F_{MODE}(\mathbf{b})$  através da imposição de  $b_0 \neq 1$ .

Da expressão (4.2) tem-se que

$$b_M = b_0 e^{j(\Theta - M\pi)}, \text{ com } \Theta = \sum_{m=1}^M \omega_m. \quad (4.39)$$

Impondo a restrição simetria complexa conjugada e observando os polinômios das expressões (4.30) e (4.31), verifica-se que  $b_M = b_0^*$  tanto para  $M$  sendo um número par ou ímpar. Portanto, obtém-se que

$$b_M^* = b_0 = \alpha e^{j\left(\frac{M\pi - \Theta}{2}\right)}, \quad (4.40)$$

onde  $\alpha = |b_0| \neq 0$ . Assim, verifica-se que somente o módulo de  $b_0$  é arbitrário. Portanto, uma simples restrição sobre  $\boldsymbol{\beta}$ , fazendo  $\beta_0 = 1$ , ou seja, a parte real de  $b_0 = 1$ , evita a solução trivial mencionada.

Porém, esta restrição não é totalmente correta, pois ela elimina as situações em que o somatório dos parâmetros  $\omega_m$  é um múltiplo ímpar de  $\pi$ . Neste caso, o argumento de  $b_M$  será um múltiplo ímpar de  $\pi/2$ , o que implicará em  $\beta_0 = 0$ . Embora estas situações não sejam freqüentes, sua ocorrência faz com que alguns elementos obtidos na minimização da expressão (4.38) apresentem valores muito grandes. Neste caso, basta repetir a minimização de  $F_{MODE}(\mathbf{b})$  sob a restrição  $\beta_M = 1$  em  $\beta$ . O uso adequado destas duas restrições é suficiente para abarcar todas as situações práticas [19].

Para resumir, a minimização de  $F_{MODE}(\mathbf{b})$ , sob a restrição simetria complexa conjugada, envolve os seguintes passos:

PASSO 1: Computar  $u_{j,k}$  e  $\mathbf{G}$ . A estrutura especial da matriz  $\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}}$ , que é limitada e Toeplitz, torna possível utilizar algoritmos rápidos para o cálculo do fator de Cholesky  $\mathbf{G}$ .

PASSO 2: Computar  $\mathbf{H}$  e  $\Omega$ . A estrutura triangular de  $\mathbf{G}$  reduz o esforço computacional requerido para obter  $\mathbf{H}$ . O cálculo de  $\Omega$  a partir de  $\mathbf{H}$  utilizando a expressão (4.37) é simples.

PASSO 3: Determinar  $\beta$  minimizando a função quadrática  $F_{MODE}(\mathbf{b})$  definida na expressão (4.38). Para isso, faz-se o uso da decomposição QR como segue. Dado

$$\Omega = [\Omega_1 \ \Omega_2], \quad (4.41)$$

onde  $\Omega_1 \in C^{2\bar{M}(N-M) \times 1}$  e  $\Omega_2 \in C^{2\bar{M}(N-M) \times M}$ , a decomposição QR de  $\Omega_2$  conduz a

$$\Omega_2 = [Q_1 \ Q_2] \begin{bmatrix} R_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.42)$$

onde  $Q_1 \in C^{2\bar{M}(N-M) \times M}$  e  $R_1$  denota uma matriz triangular superior de ordem  $M \times M$ . Então a minimização é dada por

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -R_1^{-1} Q_1^H \Omega_1 \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

O valor final de  $\beta$  obtido é utilizado para calcular o vetor  $\mathbf{b}$  através das expressões (4.34) ou (4.35) e as freqüências são estimadas calculando-se as raízes do polinômio correspondente  $b(z)$ .

### 4.3.2. Implementação Computacional do Algoritmo MODE

A seguir segue o resumo dos passos a serem seguidos para implementar o algoritmo MODE.

**Passo 1)** Deve-se calcular a matriz covariância estimada  $\hat{\mathbf{R}}$  através de

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}(k) \mathbf{y}^H(k). \quad (4.44)$$

**Passo 2)** Decompõe-se a matriz  $\hat{\mathbf{R}}$  em autovetores e autovalores. Serão necessários apenas os  $\bar{M}$  primeiros autovetores de  $\hat{\mathbf{R}}$  e seus respectivos autovalores, ou seja,  $\hat{\mathbf{U}}_S$  e  $\hat{\mathbf{\Lambda}}_S$ . Isto pode ser verificado observando a expressão (4.14), que não depende de  $\hat{\mathbf{U}}_N$  nem de  $\hat{\mathbf{\Lambda}}_N$ .

**Passo 3)** Obtém-se uma estimativa consistente da variância do ruído,  $\hat{\sigma}^2$ , através da identidade expressa em (4.16), ou seja,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N - \bar{M}} [Tr\{\hat{\mathbf{R}}\} - Tr\{\hat{\mathbf{\Lambda}}_S\}]. \quad (4.45)$$

**Passo 4)** Realiza-se a minimização da expressão (4.38) seguindo os passos descritos na seção anterior com  $(\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}})^{-1} = \mathbf{I}$  para se obter uma primeira estimativa do vetor  $\mathbf{b}$ .

**Passo 5)** Realiza-se novamente a minimização de  $F_{MODE}(\mathbf{b})$ , agora utilizando a matriz  $\hat{\mathbf{B}}$  obtida através da primeira estimativa de  $\mathbf{b}$ . Este passo deve ser repetido algumas poucas vezes, devendo sempre utilizar-se da última estimativa de  $\mathbf{b}$  para atualizar  $(\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}})^{-1}$ . O número de iterações dependerá do critério de convergência requerido. Porém, este método apresenta uma convergência muito rápida, podendo ser implantado com um número de iterações fixas. Normalmente duas ou três iterações são suficientes.

**Passo 6)** Determina-se as raízes do polinômio  $\hat{\mathbf{b}}(z)$  da expressão (4.2), cujos coeficientes  $\hat{b}_m$  provêm do passo anterior. Estas raízes são as estimativas de máxima verossimilhança do vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\omega}$ .

**Passo 7)** Finalmente, obtém-se as estimativas DOA,  $\boldsymbol{\theta}$ , através da relação definida pela expressão (2.7) no Capítulo 2, sendo

$$\omega_m = -\frac{2\pi}{\vartheta} d \sin(\theta_m). \quad (4.46)$$

#### 4.4. MODEX - MODE with eXtra roots

Conforme poderá ser verificado nos resultados apresentados na seção 4.7, em situações que a SNR é baixa o MODE sofre do efeito de limiar de desempenho, o qual consiste em uma degradação rápida do desempenho quando a SNR é reduzida a partir de um certo valor. Qualitativamente, este efeito é causado pelo fato da matriz dos autovetores do subespaço de sinal estimada,  $\hat{\mathbf{U}}_S$ , possuir componentes

significantes do espaço nulo da matriz  $\mathbf{A}$ . Neste caso, o MODE, incorretamente, tende a alocar uma ou mais raízes em regiões distantes daquelas referentes aos ângulos desejados, em resposta a uma presença forte do ruído em contraste com o sinal das fontes. Neste caso, o desempenho do MODE sofre uma forte degradação e esta degradação pronunciada configura o efeito de limiar de desempenho.

A proposta principal do MODEX é utilizar  $P$  raízes extras para minimizar esta degradação, sendo  $P$  um inteiro tal que  $0 < P < N - M$ . Tais raízes extras configuram uma folga de modo a permitir que o MODE atenda simultaneamente às exigências de sinal (alocando raízes próximas aos ângulos DOA) e de ruído (alocando raízes em outros locais).

Para obter as  $P$  raízes extras utiliza-se a técnica “zero-padding” no dimensionamento da matriz  $\hat{\Psi}$  da expressão (4.15). Utilizando o índice  $MX$  para denotar as expressões referentes ao método MODEX, tem-se que a nova matriz  $\hat{\Psi}$ , com dimensão estendida  $(\bar{M} + P) \times (\bar{M} + P)$ , é dada por

$$\hat{\Psi}_{MX} = \text{diag} \left\{ \hat{\Psi}, 0, \dots, 0 \right\} = \begin{bmatrix} \hat{\Psi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

Utilizando essa matriz, a expressão (4.14) pode ser estendida para

$$F_{MX}(\bar{\mathbf{b}}) = \text{Tr} \{ \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{B}}} \hat{\mathbf{U}}_{MX} \hat{\Psi}_{MX} \hat{\mathbf{U}}_{MX}^H \}, \quad (4.48)$$

onde  $\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{B}}} = \bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{B}}^H \bar{\mathbf{B}})^{-1} \bar{\mathbf{B}}^H$ , o vetor

$$\bar{\mathbf{b}} = [\bar{b}_0, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{M+P}]^T \quad (4.49)$$

contém os coeficientes do polinômio de grau  $M + P$ , a matriz  $\bar{\mathbf{B}}$  é definida como

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{b}_0 & \dots & \bar{b}_{M+P} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \bar{b}_0 & \dots & \bar{b}_{M+P} \end{bmatrix}_{N \times (M+P)}, \quad (4.50)$$

e a matriz  $\hat{\mathbf{U}}_{MX}$  é dada por

$$\hat{\mathbf{U}}_{MX} = [\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{M+P}]. \quad (4.51)$$

A partir das expressões (4.47) e (4.51), obtém-se que

$$\hat{\mathbf{U}}_{MX} \hat{\Psi}_{MX} \hat{\mathbf{U}}_{MX}^H = \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\Psi} \hat{\mathbf{U}}_S^H. \quad (4.52)$$

Assim, a função estendida da expressão (4.48) é dada por

$$F_{MX}(\bar{\mathbf{b}}) = Tr\{\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{B}}}\hat{\mathbf{U}}_S\hat{\Psi}\hat{\mathbf{U}}_S^H\}, \quad (4.53)$$

e a única diferença em relação à expressão (4.14) é a matriz  $\bar{\mathbf{B}}$  estendida, montada com o vetor de parâmetros  $\bar{\mathbf{b}}$  de ordem  $M + P$ .

Para a minimização da expressão (4.53) são utilizados os passos apresentados na seção 4.3.1, e ao seu final obtém-se o vetor  $\bar{\mathbf{b}}$ , donde são extraídas as  $(M + P)$  raízes do polinômio formado por estes coeficientes.

Para garantir um desempenho assintótico similar àquele alcançado pelo MODE, as  $M$  raízes do MODE convencional são calculadas e agrupadas com as  $(M + P)$  novas raízes, levando a um conjunto de  $(2M + P)$  estimativas candidatas.

#### 4.4.1. Seleção das Raízes do MODEX

A seleção das melhores  $M$  estimativas de todas  $(2M + P)$  candidatas é feita analisando todas as possíveis combinações de  $M$  raízes via critério DML ou SML. Estes critérios, conforme apresentados no Capítulo 3, são dados, respectivamente, por

$$\hat{\omega}_{DML} = \arg \min_{\omega} \{F_{DML}(\omega)\}, \quad (4.54)$$

onde  $F_{DML}$  é dado pela expressão (4.1), e

$$\hat{\omega}_{SML} = \arg \min_{\omega} \{F_{SML}(\omega)\}, \quad (4.55)$$

onde

$$F_{SML}(\omega) = \log \det \left[ \mathbf{P}_A \hat{\mathbf{R}} \mathbf{P}_A + \frac{1}{N - M} \text{tr}(\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}) \mathbf{P}_A^\perp \right]. \quad (4.56)$$

Em ambos critérios  $\omega \subset \Phi$ , onde  $\Phi$  é o conjunto de todas as combinações possíveis das raízes MODEX.

#### 4.4.2. Valor do Parâmetro $P$

Apesar do fator  $P$  poder ser escolhido livremente, deve ser usado com critério, pois quanto maior, maior o número de raízes extras e a quantidade de combinações a serem analisadas. Em [21] é realizada uma breve análise experimental sobre este parâmetro de simulações e verifica-se que valores acima de quatro não melhoram significativamente a curva de desempenho do MODEX, quando o número de sinais é igual a dois.

O número de combinações,  $NC$ , a ser analisado é condicionado pelo fato de  $\mathbf{P}_A^\perp$  ser independente

da ordem de raízes de cada combinação. Portanto,  $NC$  é dado por

$$NC = \binom{2M + P}{M} = \frac{(2M + P)!}{M!(M + P)!}. \quad (4.57)$$

#### 4.4.3. O Esforço Computacional

O esforço computacional para o método MODEX é maior que o dobro que o apresentado pelo MODE. Pois além da minimização da função custo ser executada duas vezes, uma como no método MODE e outra utilizando o vetor estendido  $\bar{\mathbf{b}}$ , é necessário um esforço computacional extra para o processo de seleção das candidatas.

Apesar desse acréscimo no esforço computacional, o método MODEX apresenta uma melhora significativa em seu limiar de desempenho quando comparado com o MODE.

#### 4.5. MODEX *Modified*

O desenvolvimento do método MODEX *Modified* foi motivado por uma outra interpretação para a ação do MODEX [22]. A função custo DML possui muitos pontos mínimos locais nas vizinhanças do mínimo global, principalmente em SNR baixas. Assim, o limiar de desempenho do MODE ocorre se a solução do seu algoritmo convergir para um mínimo local distante do mínimo global. Para tentar contornar este problema, o método MODEX gera alguns novos pontos no espaço do parâmetro  $\omega$  e busca pelo melhor mínimo entre todas as candidatas. Com isso o MODEX é capaz de reduzir o valor da SNR onde se inicia o efeito de limiar do MODE.

Entretanto, apesar desse sucesso, nem todas as  $M + P$  raízes extras do MODEX são adequadas para a estimação DOA, pois o aumento da ordem do polinômio MODE leva, em princípio, a  $M$  raízes próximas das raízes verdadeiras  $\omega$  e  $P$  raízes são alocadas em posições distantes das verdadeiras raízes, atendendo à imposição do subespaço de ruído da matriz correlação dos dados [21]. Como consequência, estas  $P$  raízes não são, em geral, boas estimativas para os parâmetros.

O método MODEX *Modified* tem por finalidade obter estimativas candidatas melhores e em menor quantidade que as geradas pelo método MODEX. Basicamente, são geradas três soluções distintas do MODE, cada uma com uma restrição diferente para evitar a solução trivial  $\mathbf{b} = 0$ . Nesta proposta supõe-se que haverá pelo menos  $M$  boas raízes entre elas. Claro que o subespaço formado pela diferença entre os subespaços de sinal amostrado e exato, denominado *swap*, afetará as soluções MODE. Mas a ação *swap* nem sempre afetará as três soluções simultaneamente e/ou nem sempre afetará a mesma raiz em cada solução.

A seguir é descrito em detalhes como obter as raízes extras neste método.

Como primeiro passo, deve-se obter a solução MODE impondo-se uma restrição do tipo  $\|\beta\| = 1$  para evitar a solução trivial. Esta restrição é implementada modificando a solução MODE da ex-

pressão (4.43) e fazendo  $\beta$  igual ao autovetor correspondente ao menor autovalor da matriz  $\Omega^H \Omega$  [39].

Como segundo passo, duas outras soluções MODE são geradas usando-se outras restrições para eliminar a solução trivial. Referindo-se ao problema da expressão (4.38), as restrições empregadas são  $\beta_0 = 1$  e  $\beta_M = 1$ . Como mencionado na Seção 4.3.1, uma delas é sempre correta para todos possíveis valores dos parâmetros DOA.

Somente a solução correspondente à restrição de norma-unitária é obtida pelo algoritmo completo do MODE. As soluções referentes às restrições lineares são obtidas diretamente da expressão (4.43), ajustada para cada restrição linear e utilizando a última matriz  $\Omega$  obtida para a solução da norma-unitária.

Portanto, são utilizadas três restrições distintas, gerando três soluções MODE e, conseqüentemente,  $3M$  candidatas.

Comparando o esforço computacional do MODEX com o MODEX *Modified*, a primeira observação a ser feita é que ambos executam o algoritmo MODE. Entretanto, eles diferem-se significativamente na forma de gerarem as raízes extras: enquanto que o MODEX executa o algoritmo MODE novamente, utilizando o vetor estendido  $\bar{b}$ , o MODEX *Modified* somente calcula a solução para a expressão (4.43) duas vezes. Esses métodos também diferem no número de combinações a serem testadas:  $[(2M + P)! / ((M + P)! M!)]$  para o MODEX e  $[(3M)! / ((2M)! M!)]$  para o MODEX *Modified*. Portanto, o MODEX *Modified* gera um número menor de combinações se  $M < P < N - M$ , o que normalmente ocorre. Além disso, não é necessário encontrar o melhor valor de  $P$ .

#### 4.6. Análise do Processo de Seleção MODEX

Conforme mencionado no Capítulo 2, seção 2.3, nesse trabalho é utilizado um procedimento para avaliar um limite teórico de desempenho para os métodos MODEX e MODEX *Modified*. Este procedimento é denominado de *bestMODEX* e *bestMODEX Modified*, respectivamente, e consiste em escolher as candidatas que minimizam o erro quadrático entre suas estimativas dos ângulos e os verdadeiros valores dos ângulos a serem estimados. Tal seleção das melhores candidatas, a partir dos parâmetros verdadeiros, é dada por

$$\omega_{best} = \arg \min_{\omega \subset \Phi} \sum_{m=1}^M (\hat{\omega}_m - \omega_m)^2, \quad (4.58)$$

onde  $\Phi$  é o conjunto de todas as combinações possíveis das candidatas geradas,  $\hat{\omega}_m$  é o  $m$ -ésimo elemento de uma combinação  $\omega \subset \Phi$  e  $\omega_m$  é o parâmetro verdadeiro.

## 4.7. Simulações e Resultados

Nesta seção são apresentados os resultados das simulações numéricas dos métodos MODE, MODEX e MODEX *Modified*.

O caso a ser simulado [21] é um arranjo linear uniforme com dez sensores, omnidirecionais e interespaçamento de metade do comprimento de onda. Há dois sinais de banda estreita, com potências iguais e com DOAs em  $\theta_1 = 10^\circ$  e  $\theta_2 = 15^\circ$  em relação à normal ao arranjo, o que exige estimadores de alta resolução. Estes ângulos produzem  $\omega_1 = 0,5455$  rad e  $\omega_2 = 0,8131$  rad, respectivamente. O número de raízes extras geradas pelo MODEX é  $P = 4$ , o número de *snapshots* utilizado nas simulações é 100, o número de iterações empregado na minimização é 2 e a faixa de SNR varia de -15 a 15 dB, com passo de 1,25 dB. São utilizadas 1000 realizações independentes, simulações de Monte Carlo, para o cálculo do desempenho médio, dado em valores RMSE, conforme expresso em (2.26).

O modelo de sinal utilizado é o apresentado no Capítulo 2, considerando-o determinístico e que os valores da matriz de correlação são  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ , fontes totalmente decorrelacionados, e  $\mathbf{P} = \mathbf{1}$ , fontes totalmente correlacionadas, onde  $\mathbf{1}$  representa uma matriz quadrada, de ordem  $M$ , com seus elementos iguais a 1.

Os dados para simulações são gerados [19] calculando-se a matriz covariância teórica, que é função da potência do ruído, das frequências e da matriz de correlação dos sinais e é dada pela expressão (4.44). É extraída a raiz quadrada dessa matriz e o resultado é multiplicado por uma seqüência de vetores complexos compostos de variáveis aleatórias Gaussianas independentes.

Cada ponto da curva de desempenho é calculado como a média dos dois valores RMSE das estimativas DOA em graus. Quanto menor o valor da média, mais as estimativas se aproximam dos parâmetros reais.

O Limite de Cramér-Rao ou CRB (*Cramér-Rao Bound*) é mostrado em todas as figuras para a análise do desempenho assintótico dos métodos. As principais expressões para o cálculo do limite de Cramér-Rao para o caso DOA são demonstradas e analisadas em [23].

### 4.7.1. Métodos MODE, MODEX e MODEX *Modified*

Nas Figuras 4.1 e 4.2, as fontes tratadas são decorrelacionadas entre si, ou seja,  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ . Nestas Figuras são apresentadas as curvas de desempenho do método MODE, sob a restrição  $\beta_0 = 1$ , e dos métodos MODEX e MODEX *Modified*. A Figura 4.1 mostra os resultados quando se usa o critério DML para a seleção das candidatas, ao passo que a Figura 4.2 se refere ao critério SML.

Nas Figuras 4.3 e 4.4, as curvas de desempenho para os métodos MODEX e MODEX *Modified* são obtidas também através dos critérios DML e SML para seleção das candidatas, respectivamente. Porém, as fontes utilizadas são totalmente correlacionadas.

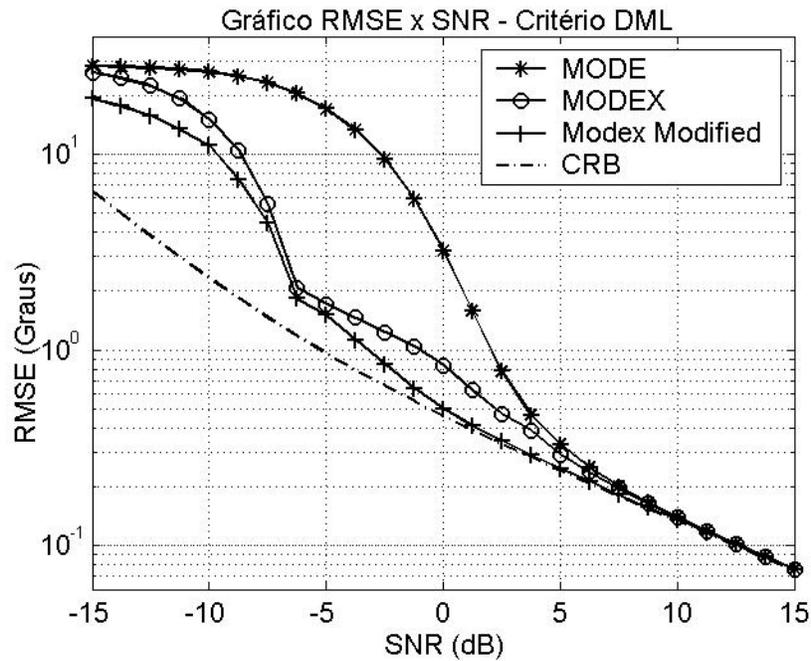


Figura 4.1. Desempenho dos métodos MODE, MODEX e MODEX *Modified* - fontes descorrelacionadas e critério DML.

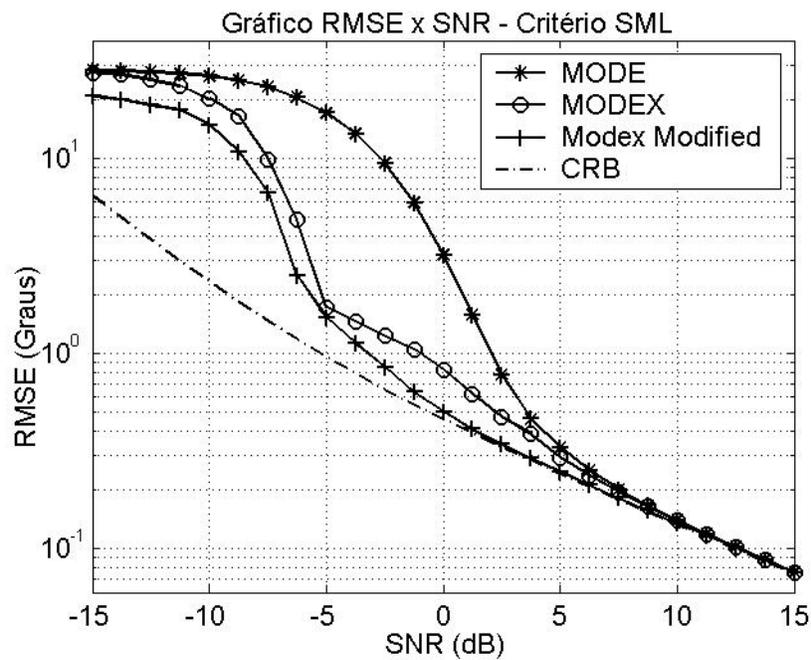


Figura 4.2. Desempenho dos métodos MODE, MODEX e MODEX *Modified* - fontes descorrelacionadas e critério SML.

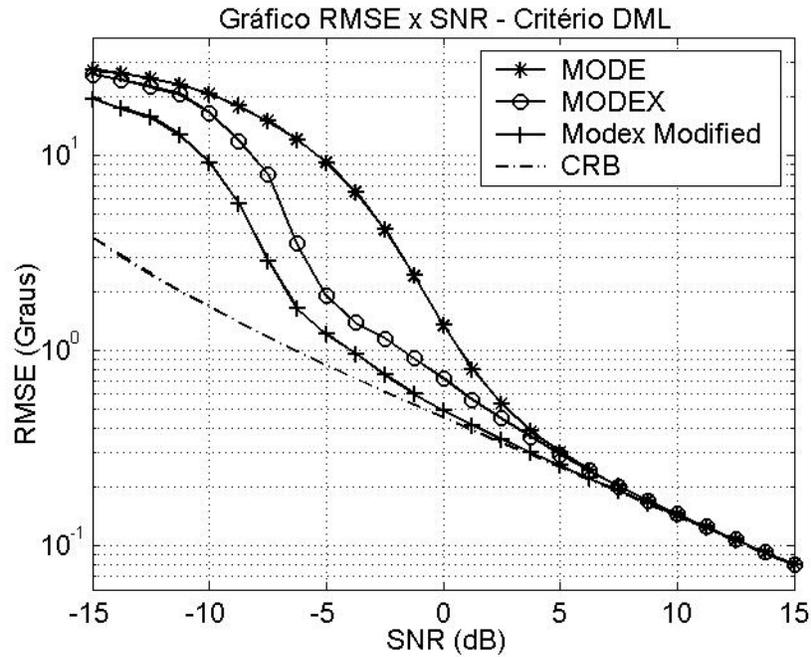


Figura 4.3. Desempenho dos métodos MODE, MODEX e MODEX *Modified* - fontes correlacionadas e critério DML.

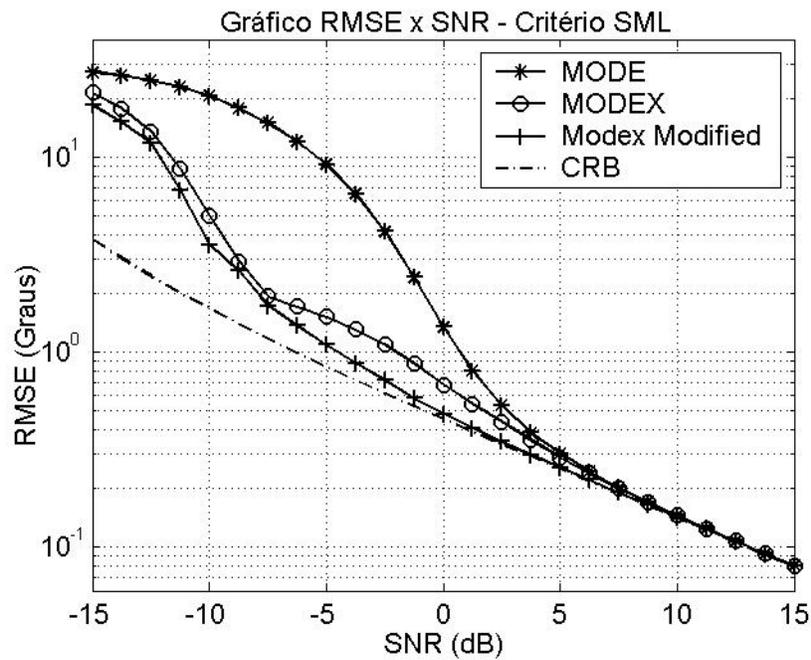


Figura 4.4. Desempenho dos métodos MODE, MODEX e MODEX *Modified* - fontes correlacionadas e critério SML.

Observa-se em todas as figuras que os métodos MODE, MODEX e MODEX *Modified* apresentam comportamento assintótico em relação à SNR, isto é, se aproximam do limite de Cramér-Rao à medida que a SNR cresce.

Analisando as curvas de desempenho do método MODE para fontes descorrelacionadas e totalmente correlacionadas, observa-se que este método possui um bom desempenho em ambas situações, sendo ainda um pouco mais eficiente para as fontes totalmente correlacionadas. Entretanto, em ambos os casos o MODE apresenta o efeito de limiar de desempenho para SNR de 3 dB aproximadamente. Ou seja, ocorre uma degradação rápida do desempenho para valores da SNR menores que 3 dB. E para SNRs muito menores que este limiar, o erro quadrático tende a se estabilizar em torno de 30°.

Observa-se nestas figuras que os resultados apresentados pelo método MODEX, com a utilização das raízes extras, é significativamente melhor que o método MODE, reduzindo seu limiar de desempenho para algo em torno de -6 dB para fontes descorrelacionadas e -7 dB para fontes correlacionadas.

Analisando o método MODEX *Modified* verifica-se que, além do ganho no esforço computacional mencionado anteriormente, este método supera o desempenho do MODEX. Assim, este método é considerado o melhor método de estimação dentre os três analisados e será o método utilizado como base para a proposta deste trabalho.

Comparando as curvas de desempenho dos métodos MODEX e MODEX *Modified* nas Figuras 4.1 e 4.2, verifica-se que a melhor seleção das candidatas em um ambiente de fontes descorrelacionadas é dada pelo critério DML. E comparando os resultados apresentados nas Figuras 4.3 e 4.4, verifica-se que a utilização do critério SML para seleção das candidatas é a melhor opção em um ambiente de fontes totalmente correlacionadas.

#### 4.7.2. Análise da Seleção das Raízes Geradas nos Métodos MODEX e MODEX *Modified*

Nas Figuras 4.5 e 4.6 são apresentadas as curvas de desempenho dos métodos MODEX e MODEX *Modified* juntamente com as curvas *bestMODEX* e *bestMODEX Modified*, as quais apresentam o desempenho obtido com a seleção ideal das raízes estimadas por estes métodos. Os ambientes de simulações das Figuras 4.5 e 4.6 são os mesmos apresentados nas Figuras 4.1 e 4.4, respectivamente.

A primeira observação a ser feita sobre estes resultados é uma comparação das curvas *bestMODEX* e *bestMODEX Modified*. Verifica-se que as raízes geradas pelo método MODEX *Modified* são melhores que as geradas pelo MODEX, além de ser, em geral, em menor quantidade, conforme demonstrado na seção 4.5.

Uma segunda observação é que não se pode comparar as curvas *bestMODEX* e *bestMODEX Modified* com a curva CRB, porque a seleção das raízes baseia-se nos parâmetros DOA verdadeiros.

Uma última observação é referente ao processo de seleção utilizado pelos métodos MODEX e MODEX *Modified*. Verifica-se que não são selecionadas as melhores estimativas dentre aquelas produzidas. Isto é facilmente observado comparando as curvas de desempenho obtidas pelos métodos MO-

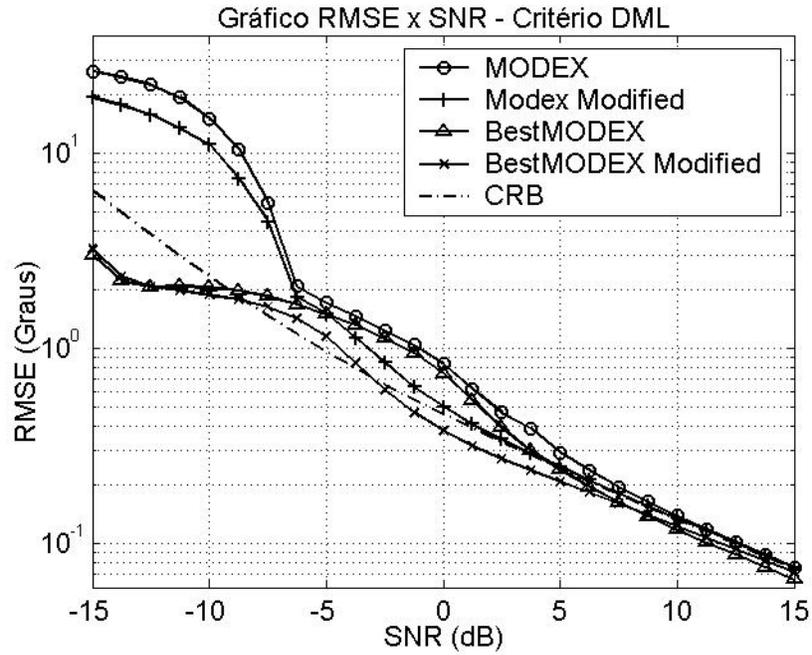


Figura 4.5. *bestMODEX* e *bestMODEX Modified* - fontes descorrelacionadas e critério DML.

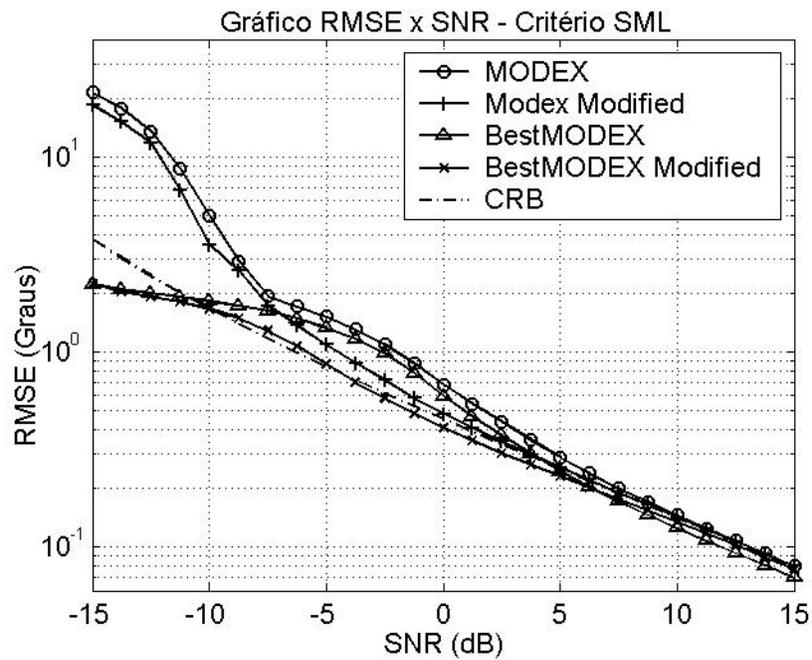


Figura 4.6. *bestMODEX* e *bestMODEX Modified* - fontes correlacionadas e critério SML.

DEX e MODEX *Modified* com as curvas obtidas pelos procedimentos *bestMODEX* e *bestMODEX Modified*, respectivamente.

Analisando as funções custo dos critérios DML e SML expressos em (4.1) e (4.56), respectivamente, verifica-se que ambas dependem das matrizes  $P_A^\perp$  e  $\hat{R}$ . A matriz  $P_A^\perp$  depende somente das combinações das raízes contidas no conjunto  $\Phi$ , que são as mesmas utilizadas para obter a curva *bestMODEX*. O mesmo ocorre em relação ao procedimento *bestMODEX Modified*. Portanto, o ruído presente na matriz de covariância estimada,  $\hat{R}$ , é o responsável pelo fato do processo de seleção das candidatas nos métodos MODEX e MODEX *Modified* não conseguir selecionar as melhores candidatas, como acontece nos procedimentos *bestMODEX* e *bestMODEX Modified*. Deve-se observar que esta falha na seleção das melhores candidatas se agrava com a redução da SNR.

#### 4.8. Conclusão

Este capítulo teve como objetivo apresentar e avaliar os métodos MODE, MODEX e MODEX *Modified*.

Foi apresentado detalhadamente o desenvolvimento do método MODE, desde a reparametrização da função custo do critério DML até o equacionamento para a implementação da minimização da função custo obtida para o MODE. E foram apresentados os métodos MODEX e MODEX *Modified*, que são versões modificadas do MODE.

Na análise dos resultados apresentados neste capítulo, pôde-se verificar o desempenho assintótico em relação à SNR e a alta resolução dos métodos aqui apresentados. Verificou-se que o limiar de desempenho do MODE ocorre nas proximidades da SNR 3dB e que a utilização de raízes extras nos métodos MODEX e MODEX *Modified* melhora significativamente este limiar.

Verificou-se que a melhor seleção das raízes para os métodos MODEX e MODEX *Modified*, quando as fontes são descorrelacionadas, é obtida através do critério DML. E para fontes totalmente correlacionadas, o critério SML apresenta o melhor resultado.

Porém, verificou-se também que ambos processos de seleção sofrem forte degradação para SNR baixa devido ao ruído presente na matriz covariância estimada  $\hat{R}$ . Com o objetivo de reduzir esta degradação e, conseqüentemente, obter uma melhora de desempenho, é proposto no capítulo seguinte a utilização de uma filtragem apropriada dos *snapshots*.

Constatou-se que o método MODEX *Modified* é o melhor método de estimação dentre os apresentados. Este método apresenta uma ótima performance em relação à SNR, obtendo um ganho em seu limiar de desempenho de aproximadamente 10 dB em relação ao limiar apresentado pelo método MODE, e seu esforço computacional é inferior à metade do esforço solicitado pelo MODEX. A partir deste resultado, o método MODEX *Modified* será a referência e a base para implementação da filtragem.

# Capítulo 5

## Aplicação de Filtragem no Método **MODEX Modified**

### 5.1. Introdução

No capítulo anterior, verificou-se que o método *MODEX Modified* apresenta o melhor desempenho entre os métodos simulados e que as raízes selecionadas pelo processo de seleção das candidatas não são as melhores dentre aquelas produzidas. Observou-se que esta degradação é causada pelo ruído presente na matriz covariância estimada,  $\hat{\mathbf{R}}$ . Esta falha no processo de seleção se agrava com a redução da SNR e faz com que o efeito de limiar do método *MODEX Modified* ocorra em uma SNR próxima de -7 dB.

Com base nestes resultados, é proposto nesse trabalho submeter os *snapshots*  $\mathbf{y}(k)$  a uma filtragem apropriada. Isto é feito com o propósito de melhorar a SNR dos *snapshots* e, conseqüentemente, da matriz  $\hat{\mathbf{R}}$ . Com isto espera-se melhorar o desempenho do processo de seleção de candidatas.

Neste capítulo é apresentado o procedimento para a realização de filtragem nos *snapshots*. São apresentadas as características desejáveis ao filtro, o desenvolvimento de um filtro obtido a partir da alocação de pólos e zeros, e a obtenção de um filtro utilizando a técnica de amostragem em frequência. Para cada filtro, é apresentado e analisado o módulo de sua resposta em frequência.

Por fim, são apresentados os resultados obtidos para o método *MODEX Modified* com o uso de filtragem.

### 5.2. Procedimento de Filtragem

Conforme apresentado no Capítulo 2, o parâmetro DOA,  $\theta_m$ , foi reparametrizado em termos do parâmetro  $\omega_m$  através da relação apresentada na expressão (2.7), onde  $\omega_m$  é dado em radianos e possui valores entre  $-\pi$  e  $\pi$ . Assim, o problema de estimação de DOA pode ser tratado como uma

estimação das frequências  $\omega_m$  com  $m = 1, 2, \dots, M$ .

A partir desta consideração, a redução do ruído presente na matriz  $\hat{\mathbf{R}}$  pode ser atingida através de um filtro multibanda com resposta ao impulso dada por  $h(l)$ , onde  $l = 0, 1, \dots, L$ . Para que seja atenuado o ruído e, simultaneamente, sejam preservados os sinais, tal filtro deve apresentar resposta em frequência,  $\mathbf{H}_f(\omega)$ , com ganho unitário nas frequências a serem estimadas e ganho menor que um ( $< 1$ ) nas demais frequências. Os valores das frequências a serem estimadas serão obtidos de forma aproximada através de uma estimativa preliminar.

Para facilitar a representação matemática, a partir deste ponto será alterada a notação de  $\mathbf{y}^{(k)}$  para  $\mathbf{y}_k$ . Cada *snapshot*  $\mathbf{y}_k$  é submetido ao filtro, produzindo um outro vetor, denominado *snapshot* filtrado, dado por

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{y}_k * h(l), \quad (5.1)$$

onde  $*$  indica a operação de convolução e  $\mathbf{y}_k = [y_k(0) \ y_k(1) \ \dots \ y_k(N-1)]^T \in C^{N \times 1}$ . Portanto, o vetor  $\mathbf{z}_k$  possuirá a seguinte forma

$$\mathbf{z}_k = [z_k(0) \ z_k(1) \ \dots \ z_k(L+N-1)]^T \in C^{(L+N) \times 1}. \quad (5.2)$$

A partir deste vetor, obtém-se uma nova versão da matriz covariância estimada dada por

$$\hat{\mathbf{R}}_f = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H, \quad (5.3)$$

a qual substituirá a matriz  $\hat{\mathbf{R}}$  nas expressões (3.15) e (3.21) dos critérios ML determinístico e estocástico, respectivamente, os quais são utilizados no processo de seleção das raízes do *MODEX Modified*.

Verifica-se na expressão (5.1) que a dimensão da resposta ao impulso determina a dimensão de  $\mathbf{z}_k$  e, conseqüentemente, as dimensões de  $\hat{\mathbf{R}}_f$ , as quais passam a ser  $(L+N) \times (L+N)$ . Estas novas dimensões são importantes pois, o esforço computacional para a seleção das candidatas aumenta com as mesmas, e, portanto, com  $L$ . Por outro lado, quanto menor o valor de  $L$ , menor o grau de liberdade para a conformação do filtro desejado. Portanto,  $L$  deve ser escolhido com cuidado. Nesse trabalho faz-se  $L = N$ , ou seja, o comprimento da resposta ao impulso  $h(l)$  é  $N+1$ . Este valor de  $L$  foi o melhor compromisso obtido em numerosas simulações realizadas com os tipos de filtros propostos neste trabalho.

Assim, o desenvolvimento da convolução expressa em (5.1) é dado por

$$\begin{aligned}
z_k(r) &= \sum_{i=0}^N h(i)y_k(r-i) & (5.4) \\
z_k(0) &= h(0)y_k(0) = [h(0) \ 0 \ \cdots \ 0]\mathbf{y}_k \\
z_k(1) &= h(1)y_k(0) + h(0)y_k(1) = [h(1) \ h(0) \ 0 \ \cdots \ 0]\mathbf{y}_k \\
&\vdots \\
z_k(N-1) &= h(N-1)y_k(0) + \cdots + h(0)y_k(N-1) = [h(N-1) \ h(N-2) \ \cdots \ h(0)]\mathbf{y}_k \\
z_k(N) &= h(N)y_k(0) + \cdots + h(1)y_k(N-1) = [h(N) \ h(N-1) \ \cdots \ h(1)]\mathbf{y}_k \\
z_k(N+1) &= 0y_k(0) + h(N)y_k(1) + \cdots + h(2)y_k(N-1) = [0 \ h(N) \ \cdots \ h(2)]\mathbf{y}_k \\
&\vdots \\
z_k(2N-1) &= 0y_k(0) + \cdots + 0y_k(N-2) + h(N)y_k(N-1) = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ h(N)]\mathbf{y}_k.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{F}\mathbf{y}_k, \quad (5.5)$$

onde

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \cdots & 0 \\ h(1) & h(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(N-1) & h(N-2) & \cdots & h(0) \\ h(N) & h(N-1) & \cdots & h(1) \\ 0 & h(N) & \cdots & h(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h(N) \end{bmatrix}_{2N \times N}. \quad (5.6)$$

Substituindo a expressão (5.5) em (5.3), a versão filtrada da matriz covariância estimada pode ser expressa como

$$\hat{\mathbf{R}}_f = \mathbf{F}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{F}^H. \quad (5.7)$$

Em busca de um melhor desempenho na redução do ruído, a matriz  $\hat{\mathbf{R}}$  da expressão (5.7) é substituída por sua versão restrita ao subespaço de sinal,  $\hat{\mathbf{U}}_S\hat{\mathbf{\Psi}}\hat{\mathbf{U}}_S^H$ , obtida no desenvolvimento do método MODE. Fazendo esta substituição, finalmente tem-se

$$\hat{\mathbf{R}}_f = \mathbf{F}\hat{\mathbf{U}}_S\hat{\mathbf{\Psi}}\hat{\mathbf{U}}_S^H\mathbf{F}^H. \quad (5.8)$$

### 5.3. Características do Filtro

Para que o filtro seja especificado, é necessário obter uma estimativa preliminar,  $\hat{\omega}_m$ , das frequências. A qualidade desta primeira estimativa é essencial para o sucesso do procedimento proposto, pois ela irá definir as frequências onde o filtro deverá apresentar ganho unitário. Assim, será utilizada a melhor opção disponível no contexto desse trabalho, ou seja, a estimativa MODE resultante do primeiro estágio do *MODEX Modified*, onde é imposta a restrição  $\|\beta\| = 1$ .

Para a escolha e obtenção da resposta em frequência,  $H_f(\omega)$ , do filtro, é necessário ponderar as seguintes restrições:

- 1 -  $|H_f(\omega)|$  deve ser igual a 1 nas frequências  $\hat{\omega}_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ .
- 2 -  $|H_f(\omega)|$  deve ser menor que 1 para  $\omega \neq \hat{\omega}_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ .
- 3 - A redução do ruído se torna mais efetiva à medida que  $|H_f(\omega \neq \hat{\omega}_m)|$  aproxima de zero. Por outro lado, o ruído na saída do filtro será correlacionado, afetando o desempenho do processo de seleção do *MODEX Modified*, porque este processo faz uso do critério ML baseado na suposição de ruído branco.
- 4 - O filtro para redução do ruído deve apresentar resposta ao impulso finita, ou seja, ser um filtro FIR (*Finite Impulse Response*). Além disso, conforme mencionado anteriormente, a dimensão da resposta ao impulso deve ser a menor possível para não aumentar excessivamente o esforço computacional.

A partir destas considerações, o problema a ser resolvido é o seguinte:

Otimizar um filtro FIR para maximizar o desempenho do processo de seleção das raízes do método *MODEX Modified* sujeito a:

- $|H_f(\hat{\omega}_m)| = 1$ ,  $m = 1, \dots, M$ .
- $|H_f(\omega \neq \hat{\omega}_m)| < 1$ .
- A resposta ao impulso  $h(l)$  deve ter a menor dimensão possível.

Este problema não é fácil de ser resolvido. Nos dois projetos de filtro apresentados e analisados a seguir, procurou-se satisfazer somente as restrições 1, 2 e 4.

#### 5.4. Filtro 1: Alocação de Pólos e Zeros

Em [26], é apresentado um filtro desenvolvido por alocação de pólos e zeros, cujos parâmetros foram ajustados através de simulações numéricas de forma a melhorar o desempenho da seleção das raízes.

Colocou-se um pólo em cada frequência  $\hat{\omega}_m$  para garantir o ganho adequado nestas frequências. Após simulações, evidenciou-se a necessidade de também colocar um zero a cada frequência  $(\hat{\omega}_m + \hat{\omega}_{m+1})/2$ ,  $m = 1, \dots, M - 1$ , para reduzir o ganho entre duas frequências sucessivas.

O filtro resultante é do tipo IIR (*Infinite Impulse Response*). Assim, sua resposta ao impulso deve ser truncada.

Os coeficientes dos pólos e zeros, bem como o comprimento da resposta ao impulso, foram ajustados utilizando simulações numéricas, buscando reduzir o erro quadrático médio da estimação do método *MODEX Modified*. Este processo de ajuste foi executado para vários valores de ângulos de chegada, várias quantidades de fontes, de sensores e de valores de SNR.

Concluiu-se que o seguinte conjunto de parâmetros representa um compromisso adequado para todas as situações testadas:

- 1 - Todos os módulos dos pólos iguais a  $\rho = 0,95$ ;
- 2 - Todos os módulos dos zeros iguais a  $z_e = 0,70$ ;
- 3 - A resposta ao impulso truncada com uma janela de Hamming  $w(l) = 0,52 - 0,4 \cos[(2\pi(l - N))/2N]$ ,  $l = 0, 1, \dots, N$ .

A seguir apresenta-se o desenvolvimento do filtro para o caso de duas fontes ( $M = 2$ ), como exemplo.

Considere a função do sistema

$$H(z) = \frac{1 - z_e e^{j\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} z^{-1}}{(1 - \rho e^{j\omega_1} z^{-1})(1 - \rho e^{j\omega_2} z^{-1})}. \quad (5.9)$$

Por frações parciais, têm-se que

$$H(z) = \frac{A}{1 - \rho e^{j\omega_1} z^{-1}} + \frac{A^*}{1 - \rho e^{j\omega_2} z^{-1}}, \quad (5.10)$$

onde

$$A = \frac{1 - z_e e^{j\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} \frac{1}{\rho} e^{-j\omega_1}}{1 - \rho e^{j(\omega_2 - \omega_1)} \frac{1}{\rho}} = \frac{1 - \frac{z_e}{\rho} e^{j\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}}}{1 - e^{j(\omega_2 - \omega_1)}}. \quad (5.11)$$

Portanto, a resposta ao impulso  $h(l)$  é dada por

$$h(l) = [Ae^{j\omega_1} + A^*e^{j\omega_2}] \rho^l w(l), \quad l = 0, 1, \dots, N. \quad (5.12)$$

A Figura 5.1 apresenta o módulo da resposta em frequência,  $|H(\omega)|$ , do filtro expresso em (5.12) para uma SNR 15 dB e fontes decorrelacionadas com ângulos de incidência de  $10^\circ$  e  $50^\circ$ , os quais correspondem a  $\omega_1 = 0.5455$  e  $\omega_2 = 2.4066$ , respectivamente. Foram utilizados estes ângulos de chegada, distantes um do outro, para uma melhor análise do filtro.

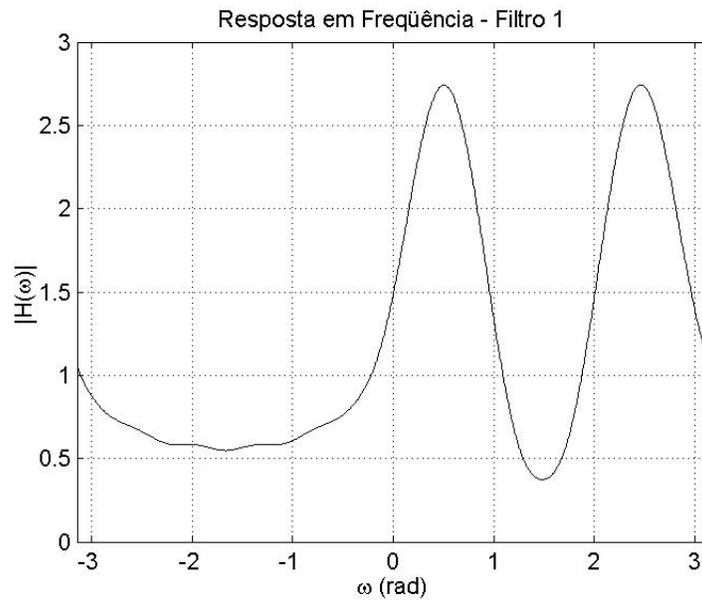


Figura 5.1. Resposta em Frequência - Filtro 1: Alocação de Pólos e Zeros.

Verifica-se na Figura 5.1, que o módulo da resposta em frequência em  $\omega_1$  e  $\omega_2$  não é igual 1. Este fato não é relevante, pois poderia ser corrigido ajustando-se o ganho do filtro, e o valor específico deste ganho não afeta o desempenho do método de seleção de raízes que emprega a filtragem.

## 5.5. Filtro 2: Amostragem em Frequência

Nesta seção, é apresentado um filtro obtido a partir da amostragem da resposta em frequência de um filtro ideal com as características apresentadas na seção 5.3. Esta técnica para projeto é clássica e é apresentada em [40].

A obtenção do filtro consiste em impor que sua resposta em frequência tenha ganho unitário nas frequências estimadas e ganho nulo nas demais frequências. Como este filtro ideal é irrealizável, obtém-se uma aproximação do mesmo.

Esta aproximação é obtida impondo as restrições 1 e 2, citadas na seção 5.3, sobre as frequências presentes na transformada discreta de Fourier ou DFT (*Discrete Fourier Transform*), isto é, nas frequências iguais à  $2\pi l/(N + 1)$ , com  $l = 0, 1, \dots, N$ . Em seguida, calcula-se a DFT inversa e obtém-se uma resposta ao impulso com comprimento  $N + 1$ , referente a uma aproximação da resposta em frequência ideal desejada.

Assim, deve-se calcular a aproximação  $2\pi k_m/(N + 1)$  para cada frequência estimada  $\hat{\omega}_m$ , onde  $k_m$  é o índice espectral correspondente à estimativa  $\hat{\omega}_m$ , dado por

$$k_m = \text{int} \left( \frac{(N + 1)\hat{\omega}_m}{2\pi} \right), \quad m = 1, \dots, M \quad (5.13)$$

e  $\text{int}(x)$  indica o arredondamento do valor de  $x$  para o número inteiro mais próximo. De posse destes índices, calcula-se a DFT inversa impondo ganho unitário nas frequências determinadas pelos mesmos e ganho nulo nas demais, obtendo a resposta ao impulso de um filtro FIR com comprimento  $N + 1$  que se aproxima das características desejadas. Ou seja,

$$h_f(l) = \frac{1}{N + 1} \sum_{m=1}^M e^{j2\pi k_m l/(N+1)}, \quad l = 0, 1, \dots, N. \quad (5.14)$$

A Figura 5.2 apresenta o módulo da resposta em frequência,  $|H_f(\omega)|$ , do filtro expresso em (5.14) para o mesmo ambiente simulado na obtenção da Figura 5.1, ou seja, SNR de 15 dB e ângulos de incidência de  $10^\circ$  e  $50^\circ$ , que correspondem a  $\omega_1 = 0.5455$  e  $\omega_2 = 2.4066$ , respectivamente.

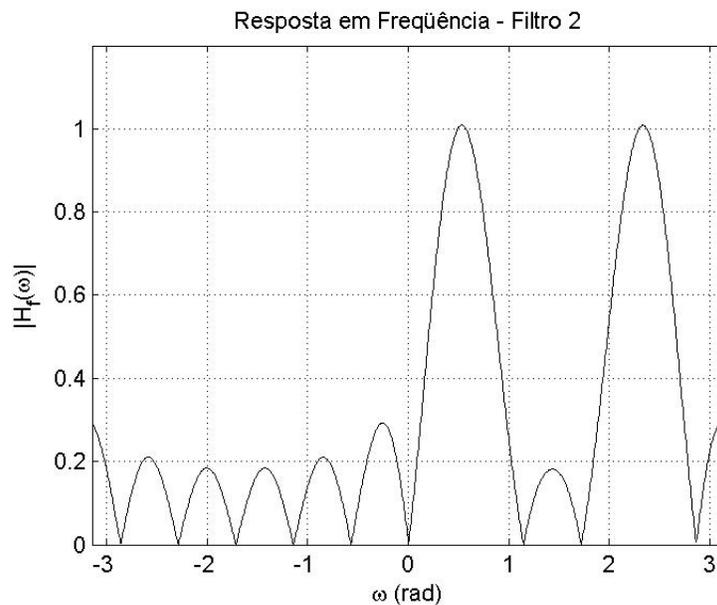


Figura 5.2. Resposta em Frequência - Filtro 2: Amostragem em Frequência.

Verifica-se na Figura 5.2 que o módulo da resposta em freqüência apresenta ganho unitário nas freqüências  $2\pi k_m/(N + 1)$ . E nas freqüências  $2\pi l/(N + 1)$ , com  $l \neq k_m$ , o ganho é nulo, aproximando-se do filtro ideal. Apesar deste comportamento adequado, estudos através de simulações mostraram que uma suavização da resposta em freqüência fora das faixas de passagem melhora o desempenho do método de seleção de candidatas que emprega tal filtro. A suavização empregada elimina as oscilações. Logo, é possível que tais oscilações afetem de forma inadequada o comportamento da densidade espectral de energia do ruído após o filtro, afastando-a ainda mais da característica branca inicial.

A suavização desejada foi obtida com a aplicação da janela de Hamming,  $w(l)$ , na resposta ao impulso expressa em (5.14), resultando em

$$h_{f2}(l) = h_f(l)w(l), \quad (5.15)$$

onde

$$w(l) = 0,52 - 0,4 \cos[(2\pi(l - N))/2N], \quad l = 0, 1, \dots, N. \quad (5.16)$$

A Figura 5.3 apresenta o módulo da resposta em freqüência após aplicação da janela de Hamming. Verifica-se que a suavização alterou os ganhos nas freqüências  $2\pi k_m/(N + 1)$ , reduzindo-os para valores inferiores a 0,6. Novamente, esta alteração de ganho não é relevante.

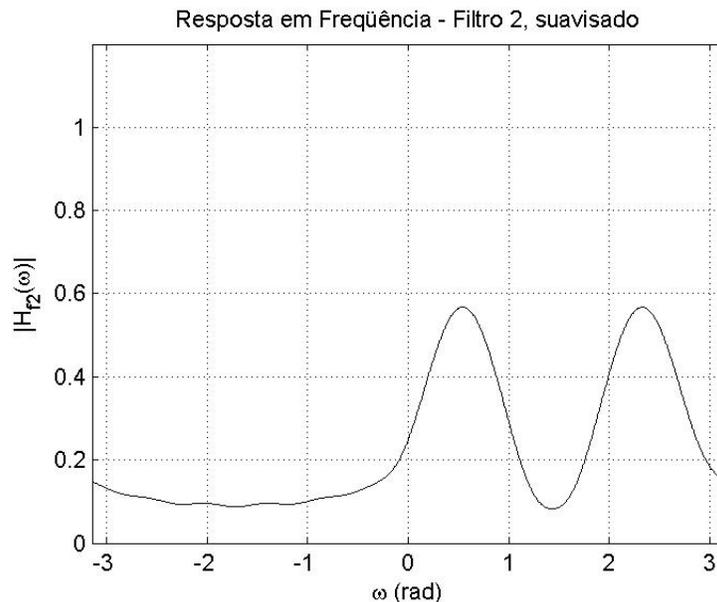


Figura 5.3. Resposta em Freqüência - Filtro 2: Amostragem em Freqüência, suavizado.

## 5.6. Simulações e Resultados

Para validar o método proposto e demonstrar a eficácia do uso de filtragem no processo de seleção das candidatas no método *MODEX Modified*, são apresentados nesta seção os resultados de várias simulações numéricas em diversos ambientes de simulações, denominados de Ambiente 1, Ambiente 2, etc.

Todos os casos foram simulados com um arranjo linear uniforme com dez sensores, omnidirecionais e interespçamento de metade do comprimento de onda, com sinais de banda estreita e potências iguais. O número de *snapshots* utilizado foi 100 e o número de iterações do método MODE, implícito no método *MODEX Modified*, foi 2. Foram utilizadas 1000 realizações independentes, simulações de Monte Carlo, para o cálculo do desempenho médio, dado em valores RMSE. O modelo de sinal utilizado é aquele apresentado no Capítulo 2.

Os ambientes simulados diferem-se entre si pela correlação dos sinais, onde os valores da matriz de correlação ora são  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ , fontes totalmente descorrelacionados, ora são  $\mathbf{P} = \mathbf{1}$ , fontes totalmente correlacionadas. Diferem entre si também pelos ângulos de chegada dos sinais,  $\theta_m$ , e pelo número de fontes presentes.

Conforme demonstrado na seção 4.7, o melhor critério para seleção das candidatas em ambientes onde as fontes são totalmente descorrelacionadas é o DML, ao passo que para fontes totalmente correlacionadas é o SML. Esta indicação foi respeitada nas simulações.

Nos Ambientes 1 e 2, que são os mesmos ambientes simulados na seção 4.7, são comparados os desempenhos de três versões do método *MODEX Modified*: sem a filtragem, com o emprego do Filtro 1 (com pólos e zeros) e com o Filtro 2 (amostragem em frequência) com suavização. Nos demais ambientes, usou-se apenas a versão com o Filtro 2, uma vez que este filtro apresenta resultados semelhantes ao Filtro 1 e possui a vantagem de poder ser mais facilmente adaptado à quantidade de fontes.

Os resultados obtidos são comparados com a curva *bestMODEX Modified*, que é o limite teórico de desempenho para o método *MODEX Modified* com e sem a filtragem. Daqui por diante, a curva *bestMODEX Modified* é nossa principal referência, uma vez que esta curva é obtida pela escolha das candidatas que minimizam o erro quadrático entre as estimativas DOAs e os verdadeiros DOAs a serem estimados. Portanto, o limiar de estimação para o Método *MODEX Modified* com filtragem é definido como sendo a região de transição onde a sua curva de desempenho começa a se afastar da curva *bestMODEX Modified*.

A curva do Limite de Cramér-Rao (CRB) também é apresentada nos resultados para análise do desempenho assintótico dos métodos em relação à SNR.

### 5.6.1. Ambiente 1: $P = I$ , $\theta_1 = 10^\circ$ , $\theta_2 = 15^\circ$ e critério DML

A Figura 5.4 apresenta as curvas de desempenho obtidas para o caso de duas fontes totalmente decorrelacionadas e com ângulos de chegada  $\theta_1 = 10^\circ$  e  $\theta_2 = 15^\circ$ , os quais produzem  $\omega_1 = 0,5455$  rad e  $\omega_2 = 0,8131$  rad, respectivamente.

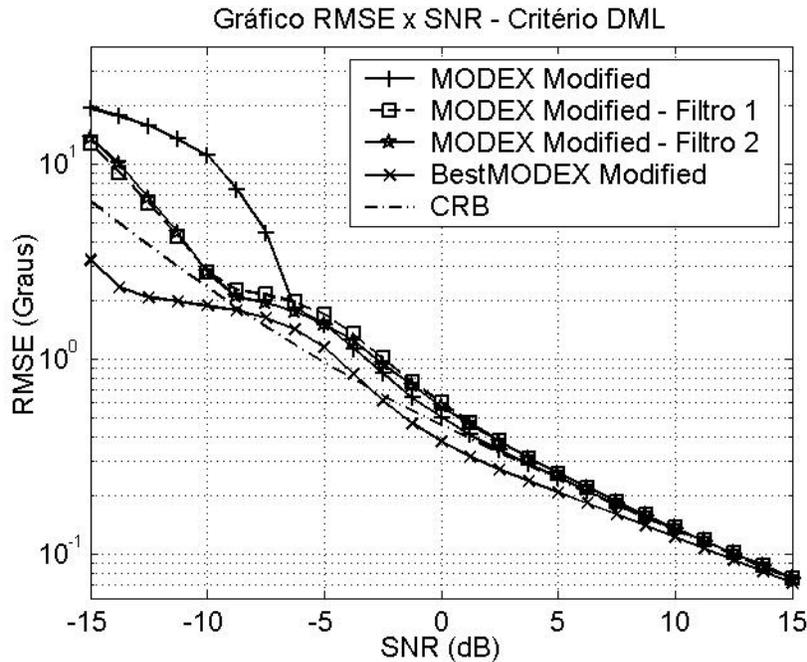


Figura 5.4. *MODEX Modified* com Filtragem -  $P = I$ ,  $\theta_1 = 10^\circ$ ,  $\theta_2 = 15^\circ$  e critério DML.

### 5.6.2. Ambiente 2: $P = 1$ , $\theta_1 = 10^\circ$ , $\theta_2 = 15^\circ$ e critério SML

Na Figura 5.5 são mostradas as curvas de desempenho para os Métodos *MODEX Modified* com e sem filtragem para o caso de duas fontes totalmente correlacionadas e com ângulos de chegada  $\theta_1 = 10^\circ$  e  $\theta_2 = 15^\circ$ .

Analisando as Figuras 5.4 e 5.5, verifica-se que o emprego da filtragem melhora o desempenho do método *MODEX Modified*. O seu limiar de desempenho no Ambiente 1 passa de uma SNR próxima de -6 dB, sem o uso de filtragem, para algo em torno de -9 dB, com o uso de filtragem. No Ambiente 2, o limiar de desempenho passa de uma SNR de -7 dB para uma SNR próxima de -13 dB. Observa-se também, que o uso da filtragem faz com que a curva de desempenho do *MODEX Modified* ultrapasse o limite inferior de Cramér-Rao. Estudos que estão sendo feitos mostram que o rompimento do CRB se deve à polarização do estimador, sendo esta uma linha de continuidade deste trabalho. Além disso, observa-se a semelhança entre as curvas de desempenho obtidas com o filtro com pólos e zeros, Filtro 1, e aquelas obtidas com o filtro por amostragem em frequência, Filtro 2. Portanto, a partir daqui será

usado apenas o Filtro 2.

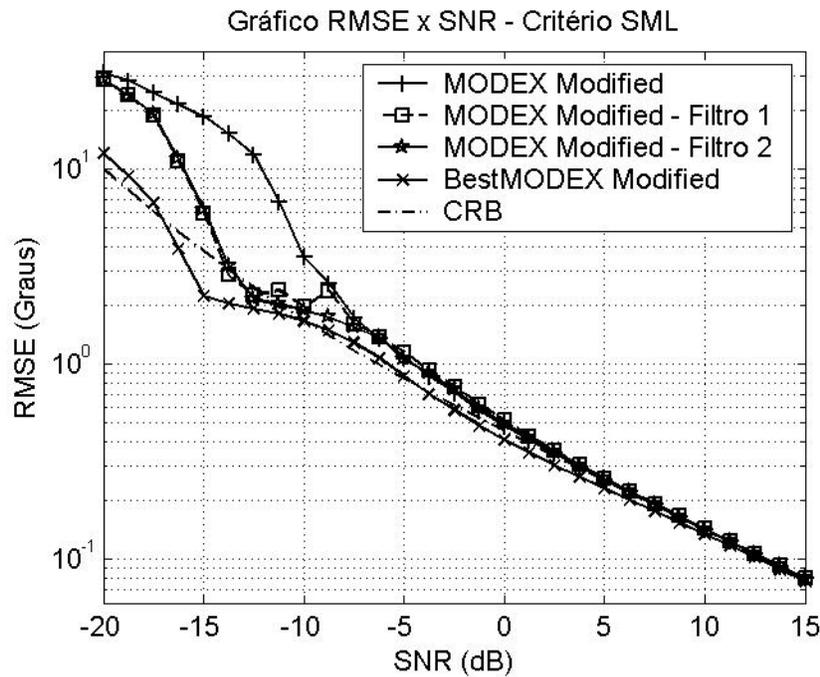


Figura 5.5. *MODEX Modified* com Filtragem -  $P = 1$ ,  $\theta_1 = 10^\circ$ ,  $\theta_2 = 15^\circ$  e critério SML.

### 5.6.3. Ambiente 3: $P = I$ , $\theta_1 = 50^\circ$ , $\theta_2 = 55^\circ$ e critério DML.

Neste ambiente a simulação é feita com fontes totalmente decorrelacionadas e com ângulos de chegada  $\theta_1 = 50^\circ$  e  $\theta_2 = 55^\circ$ , produzindo as frequências  $\omega_1 = 2.4066$  rad e  $\omega_2 = 2.5734$  rad, respectivamente. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 5.6.

Observa-se que o limiar de desempenho do método *MODEX Modified* sem filtragem ocorre para valores de SNR próximos de -1 dB. A filtragem reduz este limiar para valores próximos de -9 dB.

### 5.6.4. Ambiente 4: $P = I$ , $\theta_1 = 10^\circ$ , $\theta_2 = 15^\circ$ , $\theta_3 = 20^\circ$ e critério DML

Neste ambiente é feita uma simulação com três fontes totalmente decorrelacionadas e com DOAs próximos de si, exigindo uma alta resolução dos estimadores. Os ângulos de chegada adotados são  $\theta_1 = 10^\circ$ ,  $\theta_2 = 15^\circ$ ,  $\theta_3 = 20^\circ$ , resultando nas frequências  $\omega_1 = 0.5455$  rad,  $\omega_2 = 0.8131$  rad e  $\omega_3 = 1.0745$  rad, respectivamente. Na Figura 5.7 são apresentadas as curvas de desempenho obtidas, mostrando que a filtragem proporciona expressivo ganho de desempenho de 11 dB na região de limiar, resultado do deslocamento do efeito limiar de 1 dB para -10 dB.

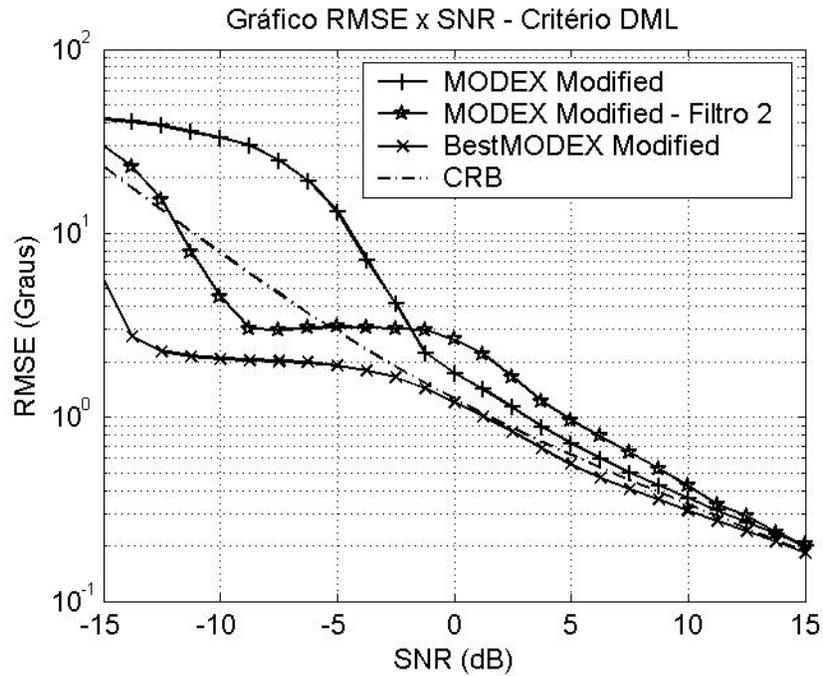


Figura 5.6. *MODEX Modified* com Filtragem -  $P = I$ ,  $\theta_1 = 50^\circ$ ,  $\theta_2 = 55^\circ$  e critério DML.

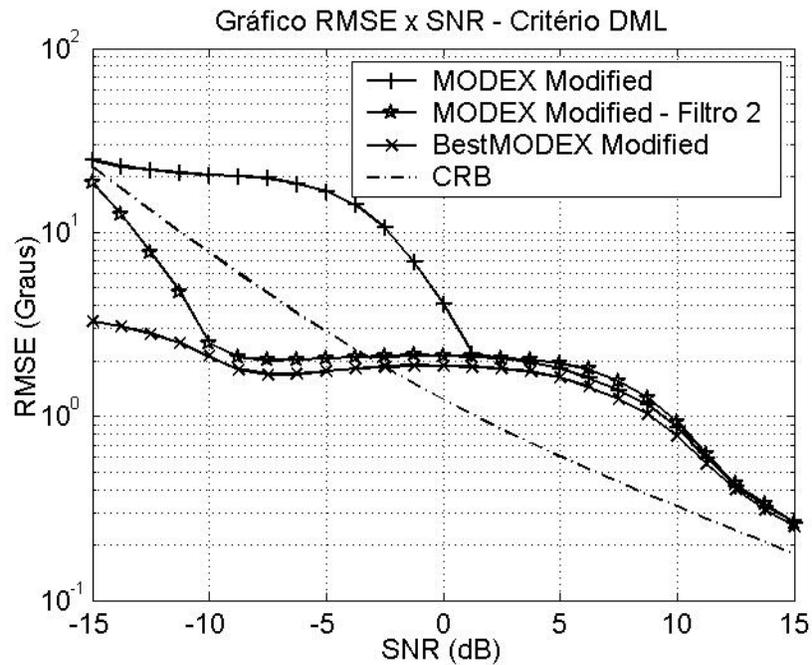


Figura 5.7. *MODEX Modified* com Filtragem -  $P = I$ ,  $\theta_1 = 10^\circ$ ,  $\theta_2 = 15^\circ$ ,  $\theta_3 = 20^\circ$  e critério DML.

### 5.6.5. Ambiente 5: $P = 1$ , $\theta_1 = 10^\circ$ , $\theta_2 = 15^\circ$ , $\theta_3 = 20^\circ$ e critério SML

Na Figura 5.8 são mostradas as curvas de desempenho obtidas em um ambiente mais severo, com as condições do Ambiente 4, exceto pelo fato das fontes serem totalmente correlacionadas. Observa-se que, com o uso da filtragem, o efeito de limiar do *MODEX Modified* desloca-se de uma SNR próxima de 12 dB para -6 dB, proporcionando excelente ganho de desempenho de 18 dB na região de limiar, o maior dentre as simulações apresentadas.

### 5.6.6. Ambiente 6: $P = I$ , $\theta_1 = 10^\circ$ , $\theta_2 = 65^\circ$ e critério DML

Este ambiente explora o caso de fontes com grande separação entre seus ângulos de chegada. Nesta situação, não se necessita de estimadores com alta resolução, conforme atestam os resultados da Figura 5.9. Pode-se observar que os métodos *MODEX Modified* com e sem filtragem, que são estimadores de alta resolução, apresentam praticamente o mesmo desempenho e suas curvas estão próximas da curva *bestMODEX Modified*.

### 5.6.7. Análise Geral dos Resultados

Numa análise geral de todos os resultados apresentados nesta seção, é importante destacar alguns aspectos.

O primeiro é a eficácia da filtragem proposta em melhorar o desempenho do processo de seleção de candidatas do método *MODEX Modified*, proporcionando ganhos significativos de SNR de limiar.

Também se destaca que o emprego da filtragem não altera o comportamento assintótico do método *MODEX Modified*, à medida que a SNR cresce.

Um outro aspecto é a semelhança entre os desempenhos dos dois tipos de filtros propostos, o que permitiu escolher o Filtro 2.

Por fim, apesar deste ganho de desempenho, ainda não se consegue selecionar as melhores candidatas do *MODEX Modified*, pois as curvas de desempenho ainda são diferentes daquela relativa ao caso *bestMODEX Modified*. Esta constatação sugere que ainda é possível alcançar novos melhoramentos de desempenho.

## 5.7. Conclusão

Neste capítulo foi apresentada uma proposta de submeter os *snapshots* do método *MODEX Modified* a uma filtragem para reduzir o ruído presente na matriz covariância estimada  $\hat{R}$ . Esta redução de ruído possibilitou uma melhor seleção das candidatas produzidas pelo método *MODEX Modified*.

Foi apresentado o procedimento para realização da filtragem, as características desejadas ao filtro e dois projetos de filtro FIR: um por alocação de pólos e zeros, e outro por amostragem em frequência.

Foram apresentados os resultados obtidos em vários ambientes de simulação. Em todos os ambientes constatou-se que o desempenho assintótico em relação à SNR do método *MODEX Modified* se

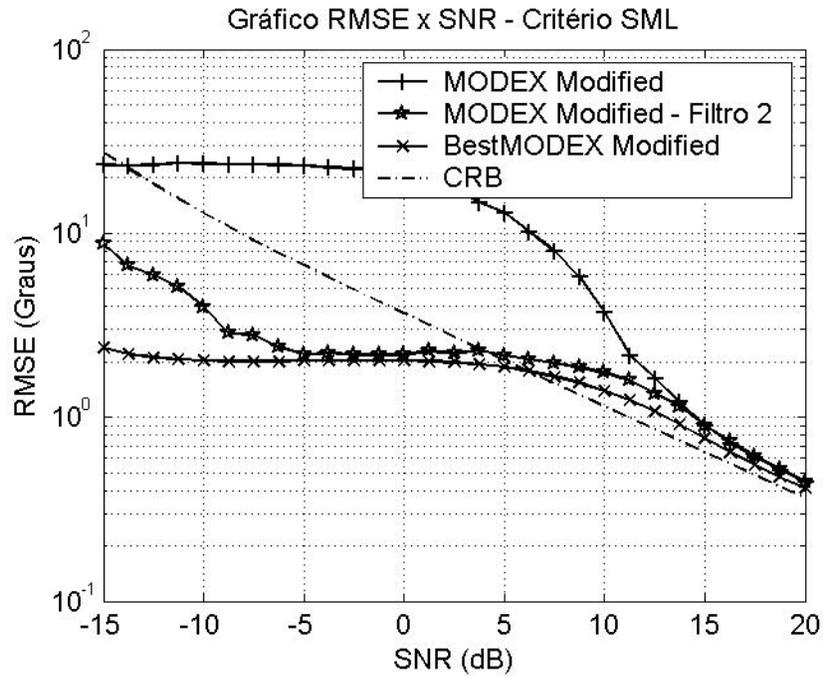


Figura 5.8. *MODEX Modified* com Filtragem -  $P = 1$ ,  $\theta_1 = 10^\circ$ ,  $\theta_2 = 15^\circ$ ,  $\theta_3 = 20^\circ$  e critério SML.

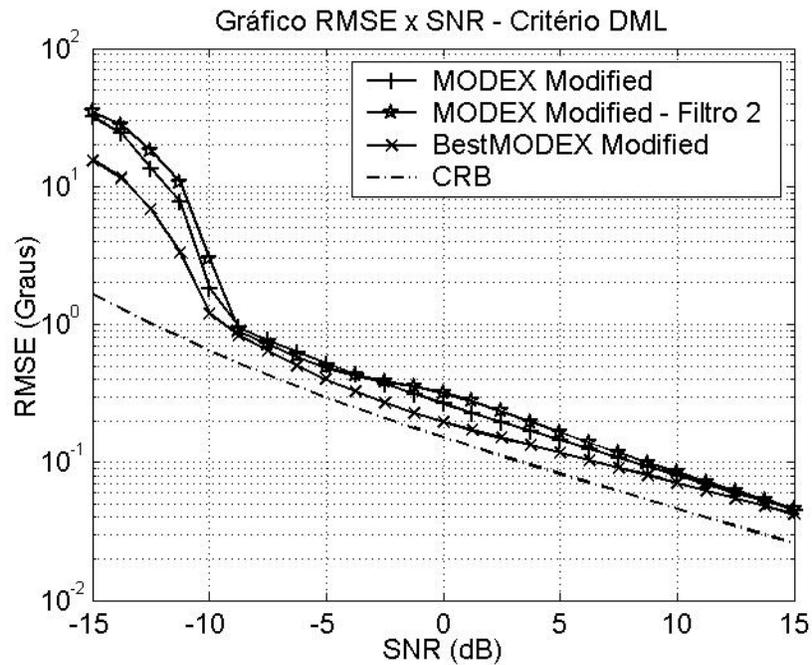


Figura 5.9. *MODEX Modified* com Filtragem -  $P = I$ ,  $\theta_1 = 10^\circ$ ,  $\theta_2 = 65^\circ$  e critério DML.

mantém com o uso da filtragem.

Nos ambientes que exigem uma alta resolução dos métodos de estimação, verificou-se que o efeito limiar de desempenho apresentado pelo método *MODEX Modified* é significativamente amenizado com o uso da filtragem, mas que ainda há margens para que novos melhoramentos de desempenho sejam alcançados, já que as curvas de desempenho ainda são diferentes daquela relativa ao caso *bestMODEX Modified*.

No ambiente que não exige uma alta resolução dos estimadores, os desempenhos apresentados pelos métodos *MODEX Modified* com e sem o uso de filtragem estão muito próximos entre si e são considerados satisfatórios.

É importante destacar que a eficácia da proposta de filtragem apresentada nesse trabalho representa um avanço significativo na teoria de estimação do ângulo de chegada por máxima-verossimilhança em arranjo de sensores. Assim, além de já ter sido parcialmente apresentada [26], ela deverá ser objeto de submissão de artigo na literatura internacional.

# Capítulo 6

## Conclusões e Sugestões para Prosseguimento do Trabalho

### 6.1. Introdução

Na literatura existem vários métodos para a estimação de frequência e do parâmetro DOA, classificados em duas categorias principais: métodos espectrais e métodos paramétricos. Dentre os métodos paramétricos destacam-se os métodos derivados do Estimador de Máxima-Verossimilhança (MLE).

Este trabalho se ateve com os métodos de estimação DOA paramétricos MLE de alta resolução, ou seja, capazes de distinguirem DOAs próximos de si, para o caso de  $M$  ondas planas de faixa estreita contaminadas por ruído aditivo atingindo um arranjo linear uniforme de  $N$  sensores. Mais especificamente com os métodos MODE, MODEX e *MODEX Modified*.

Como principal contribuição, foi proposto o emprego de uma filtragem dos dados recebidos visando melhorar a relação sinal-ruído. Esta filtragem consegue melhorar o desempenho dos métodos MODEX e *MODEX Modified*.

Os resultados apresentados nesse trabalho permitiram avaliar as principais características dos métodos de estimação apresentados e a eficácia da filtragem proposta.

### 6.2. Resultados e Conclusões

Nos resultados apresentados no Capítulo 4, pôde-se verificar que o desempenho assintótico dos métodos MODE, MODEX e *MODEX Modified* em relação à SNR alcança o limite de Crámer-Rao e que os mesmos apresentam alta resolução tanto para fontes descorrelacionadas, quanto para fontes totalmente correlacionadas. Verificou-se que o limiar de SNR do MODE é reduzido com a utilização de raízes extras nos métodos MODEX e *MODEX Modified*. Constatou-se que o método *MODEX Modified* é o melhor método dentre os apresentados, obtendo um ganho em seu limiar de desempenho

de aproximadamente 10 dB em relação ao limiar apresentado pelo método MODE, e seu esforço computacional é inferior à metade do esforço solicitado pelo MODEX, o que levou à escolha deste método para implementação da filtragem proposta.

Verificou-se que o melhor processo de seleção das raízes para os métodos MODEX e *MODEX Modified*, quando as fontes são descorrelacionadas, é obtido através do critério DML. E para fontes totalmente correlacionadas, o critério SML apresenta o melhor resultado. Porém, verificou-se também que ambos os processos de seleção sofrem forte degradação para SNR baixa devido ao ruído presente na matriz covariância estimada,  $\hat{R}$ .

No Capítulo 5 foram propostos dois tipos de filtros, um composto por pólos e zeros, com truncamento da sua resposta ao impulso, e outro obtido pela técnica de amostragem no domínio da frequência. Estes filtros atuam sobre os *snapshots* e têm a função de melhorar a SNR dos dados. Os resultados obtidos para o método *MODEX Modified* mostraram que os dois filtros produzem resultados semelhantes, o que possibilitou a escolha do Filtro 2 (por amostragem em frequência), pois sua adaptação ao número de fontes presentes é mais fácil que aquela do Filtro 1 (por alocação de pólos e zeros).

Resultados de simulação numérica de vários cenários de estimação DOA mostraram que a filtragem proposta melhorou o desempenho do processo de seleção de candidatas do método *MODEX Modified* e, portanto, do método MODEX. Esta melhora de desempenho se refletiu em ganhos significativos na região de SNR de limiar, a qual sofreu reduções que variaram da ordem de 3 dB, para um cenário com duas fontes totalmente descorrelacionadas, até 18 dB num cenário com três fontes totalmente correlacionadas.

Os resultados de simulação mostraram também que o desempenho assintótico do método *MODEX Modified*, à medida que a SNR cresce, é mantido, ou seja, o desempenho se iguala ao limite inferior de Crámer-Rao.

Estes resultados permitem concluir que esta proposta de filtragem representa um avanço significativo na teoria de estimação de DOA por máxima-verossimilhança em arranjo de sensores.

### 6.3. Sugestões para Prosseguimento desse Trabalho

O emprego da filtragem proposta no *MODEX Modified* fez com que sua curva de desempenho, em determinadas ocasiões, rompesse a curva CRB. Investigações sobre este fato mostram que há uma polarização dos estimadores de DOA para SNRs baixas.

Uma proposta para prosseguimento desse trabalho é a realização de estudos para uma análise da polarização dos estimadores em situações de SNR baixa e para que seja desenvolvido um limitante que considere esta polarização, como, por exemplo, o CRB polarizado.

Constatou-se que embora a filtragem proposta permita selecionar melhores candidatas que aquelas selecionadas pelo procedimento original, ainda assim não se consegue sempre selecionar as melhores

candidatas geradas pelo método *MODEX Modified*. Assim, uma outra proposta para a continuidade deste trabalho é a implementação de uma recursão sobre o estimador aqui proposto, usando as estimativas obtidas após o emprego da filtragem para melhorar o projeto do filtro, o que permitirá refinar tais estimativas, e assim por diante. Será necessário analisar a convergência deste processo, tendo em conta que o limite teórico para o mesmo é o desempenho obtido pelo procedimento *bestMODEX Modified*.

Por fim, uma proposta já em fase de investigação consiste em experimentar um novo tipo de filtro que maximiza a SNR na saída, o *eigenfilter*. Este filtro utiliza os elementos do autovetor da matriz de covariância, correspondente ao maior autovalor desta matriz.

# Referências Bibliográficas

- [1] Haykin, S. *Array Signal Processing*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1989.
- [2] Godara, L. C. Applications of antenna Arrays to Mobile Communications. 85(7), Julho 1997.
- [3] Anderson, S., Millnert, M., Viberg, M. e Wahlberg, B. An Adaptive Array for Mobile Communication Systems. *Trans. on veh. Tec.*, 40, 1991.
- [4] Swales, S. C., Beach, M. A. e Edwards, D. J. Multi-Beam Adaptive Base Station Antennas for Cellular Land Mobile Radio Systems. In *Proc. IEEE Veh. Technol. Conf.*, pages 341–348, 1989.
- [5] Fenn, A. J. e King, G. A. Adaptive Nulling in the Hyperthermia Treatment of Cancer. *The Lincoln Laboratory Journal*, 5(2):223–240, 1992.
- [6] Fenn, A. J. e King, G. A. Adaptive radio-frequency hyperthermia-phased array system for improved cancer therapy: phantom target measurements. *International Journal of Hyperthermia*, 10(2):189–208, Março-Abril 1994.
- [7] Mosher, J. S., Leahy, R. M. e Kewis, P. S. Biomagnetic Localization from Transient Quasi-Static Events. In *Proc. ICASSP 93*, pages 91–94, Minneapolis-MN-USA, 1993.
- [8] Härle, N. e Böhme, J. F. Detection of Knocking for Spark Ignition Engines Based on Structural Vibrations. In *Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Processing*, pages 1744–1747, 1987.
- [9] Aghajan, H. K. e Kailath, T. Sensor Array Processing Techniques for Super Resolution Multi-Line-Fitting and Straight Edge Detection. *IEEE Trans. on Image Proc.*, 2(4), Outubro 1993.
- [10] Krim, H. e Viberg, M. Two Decades of Array Signal Processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, pages 67–94, Julho 1996.
- [11] Schmidt, R. O. Multiple Emitter Location and Signal Parameters Estimation. *IEEE Trans. on Antenna and Propagations*, vol. 34:276–280, Março 1986.

- [12] Rao, B. D. e Hari, K. V. S. Statistical Performance Analysis of the Minimum-Norm Method. *IEEE Proceedings*, 136(3):125–134, Junho 1989.
- [13] Tufts, D. W. e Kumaresan, R. Estimation of Frequencies of Multiple Sinusoids: Making Linear Prediction Perform Like Maximum Likelihood. *Proceedings of the IEEE*, 70(9):975–989, Setembro 1982.
- [14] Lemos, R. P. Mínimos Quadrados Totais e Máxima Verossimilhança em Estimação de Frequências. Tese de doutorado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP, Junho 1997.
- [15] Kaveh, M. e Barabell, A. J. The Statistical Performance of the MUSIC and Minimum-Norm Algorithms in Resolving Plane Waves in Noise. *IEEE Trans. on Acoustic, Speech and Signal Processing*, vol. 34, Abril 1986.
- [16] Kay, S. M. *Fundamentals of Statistical Signal Processing*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1993.
- [17] Bresler, Y. e Macoski, A. Exact Maximum Likelihood Parameter Estimation of Superimposed Signals in Noise. *IEEE Trans. on Acoustic, Speech and Signal Processing*, 34(5):1081–1089, Outubro 1986.
- [18] Kumaresan, R., Scharf L. L. e Saw, A. K. An Algorithm for Pole-Zero Modeling and Spectral Analysis. *IEEE Trans. on Acoustic, Speech and Signal Processing*, 34(3):637–640, Junho 1986.
- [19] Stoica, P. e Sharman, K. C. Novel Eigenanalysis Method for Direction Estimation. *IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 137(1):19–26, Fevereiro 1990.
- [20] Li, J., Stoica, P. e Liu, Z. Comparative Study of IQML and MODE Direction-of-Arrival Estimators. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(1):149–160, Janeiro 1998.
- [21] Gershman, Alex B. e Stoica, Petre. New MODE-based techniques for direction finding with an improved threshold performance. *Signal Processing*, 76(3):221–235, 1999.
- [22] Lopes, A., Bonatti, I. S., Peres, P. L. D., Colares, R. F., Alves e C. A. Improving the MODEX Algorithm for Direction Finding. *Signal Processing*, 83(9):2047–2051, Setembro 2003.
- [23] Alves, C. A. Análise Teórica e Experimental de Métodos de Estimação de DOA e de Estimação de Frequência com Alta Resolução. Tese de doutorado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP, Julho 2004.

- [24] Wax, M. e Kailath, T. Determining the number of sources by information methods. *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing*, ASSP-34:387–392, Abril 1985.
- [25] Kaveh, M., Wang, H. e Hung, H. On the theoretical performance of a class of estimators of the number of narrow-band sources. *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing*, ASSP-35:1350–1352, Setembro 1987.
- [26] Krummenauer, Rafael, Silva, Francislei J. da e Lopes, Amauri. Modified MODEX method for direction finding with improved threshold performance. In *VI International Telecommunications Symposium - ITS 2006*, pages CD-ROM, Fortaleza - CE - Brasil, Setembro 2006.
- [27] Cramer, J. S. Econometric Applications of Maximum Likelihood Methods. *The Economic Journal*, 97(387):760–761, Setembro 1987.
- [28] Martínez-Espinosa, M., Calil Júnior, C. e Lahr, F. A. R. Métodos paramétricos e não paramétricos para determinar o valor característico em resultados de ensaio de madeira. *Scientia Forestalis*, (66):76–83, Dezembro 2004.
- [29] Carvalho, J. R. P. e Mead, R. Estimation of the population covariance coefficient for split-plot experiments. *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, 27(6):805–815, Junho 1992.
- [30] Yang, Z. Maximum-likelihood estimation of phylogeny from DNA sequences when substitution rates differ over sites. *Molecular Biology and Evolution*, 10(6):1396–1401, Novembro 1993.
- [31] Kay, S. M. *Modern Spectral Estimation - Theory and Application*. Prentice-Hall Signal Processing Series, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.
- [32] Stoica, P. e Sharman, K. C. Maximum Likelihood Methods for Direction-of-Arrival Estimation. *IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 38(7):1132–1143, Julho 1990.
- [33] Brooks, M. The Matrix Reference Manual. Página na internet, 2005. <http://www.ee.ic.ac.uk/hp/staff/dmb/matrix/intro.html>.
- [34] Stoica, P. e Nehorai, A. MUSIC, Maximum Likelihood, and Cramer-Rao Bound. *IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37(5):720–741, Maio 1989.
- [35] Stoica, P. e Nehorai, A. MUSIC, Maximum Likelihood and Cramér-Rao Bound: Further Results and Comparisons. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, 38(12):2140–2150, Dezembro 1990.

- [36] Stoica, P. e Nehorai, A. Performance study of conditional and unconditional direction-of-arrival estimation. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, 38(10):1783–1795, Outubro 1990.
- [37] Colares, R. F., Alves, C. A., Lopes, A. Proposta para Aplicação do método WTLS em DOA. In *XVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBT 2000*, pages CD-ROM, Gramado - RS - Brasil, Setembro 2000.
- [38] Otterson, Björn E. Parametric Subspace Fitting Methods for Array Signal Processing. Tese de doutorado, Stanford University, EUA, 1989.
- [39] Nagesha, V. e Kay, S. On Frequency Estimation with IQML Algorithm. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 42(9):2509–2513, Setembro 1994.
- [40] Oppenheim, A. V. e Schaffer, R. W. *Digital Signal Processing*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.