UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS - UNICAMP
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA - FEE
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA - DT

UMA ABORDAGEM NUMÉRICA PARA PROBLEMAS DE VALOR DE CONTORNO DE DIRICHLET ENVOLVENDO A EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

Marinho Gomes de Andrade Filho.

Orientador:
Prof. Dr. João Bosco Ribeiro Do Val.

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por Marinho Gomes de Andrade Filho e aprovada pela Comissão Julgadora em 03 02 95

Tese submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

– janeiro de 1995 –

UNICAMP

"A Matemática é a única ciência em que alguém nunca sabe o que o outro está dizendo, nem se o que estamos falando é verdade"

Bertrand Russel (1872-1970)

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. João Bosco Ribeiro Do Val, orientador e amigo, por sua ajuda, incentivo e compreensão, sem as quais não seria possível a realização deste trabalho.

Ao meu amigo José Everardo Bessa Maia pela sua paciência, dedicação e objetividade sempre presente nas valiosas discussões.

Ao Prof. Dr. Secundino Soares Filho, com quem comecei o meu programa de doutorado, pelo incentivo e apoio, e ao pessoal do Laboratório de Otimização do DENSIS pelo suporte computacional.

A minha esposa Tania Quintella, pela cumplicidade na vida e pelo apoio e paciência na leitura dos manuscritos.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 – **A MOTIVAÇÃO DA TESE**

1.1 O problema de Dirichlet para a Equação de Helmholtz 1
1.2 Métodos a Diferenças Finitas para Equações Elipticas 3
1.3 A Proposta da Tese 11

CAPÍTULO 2 – **A FORMA CANÔNICA DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ E O MÉTODO ALTERNANTE DE SCHWARZ**

2.1 Problemas Elípticos Lineares com Coeficientes Constantes 14
2.2 Forma Canônica Para Equações Elípticas 15
2.3 O Método Alternante de Schwarz 17

CAPÍTULO 3 – **PRINCIPAIS RESULTADOS**

3.1 A Formulação do Problema 21
3.2 Resultados Para a Rede Triangular 23
3.3 Resultados Para a Rede Quadrada 26
3.4 Resultados Sobre a Convergência do Método 29
3.5 Avaliação Numérica do Valor Médio para Equação de Helmholtz 31

CAPÍTULO 4 – **O OPERADOR CONTRATIVO**

4.1 Resultados Auxiliares 33
4.2 Prova do Teorema 3.3 36
4.3 Prova do Corolário 3.3 38

CAPÍTULO 5 – **AVALIAÇÃO DO ERRO DA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA**

5.1 O Teorema do Valor Médio Para Equação de Helmholtz 40
5.2 Prova do Teorema 3.5 43

CAPÍTULO 6 – **PROVA DOS PRINCIPAIS RESULTADOS**

6.1 Avaliação do Erro de Precisão 48
6.2 Calculo dos Autovalores da Matriz A_n 52
6.3 Prova dos Teoremas 3.1, 3.2 e Corolários 55

CAPÍTULO 7 – ASPECTOS COMPUTACIONAIS, EXEMPLOS E APLICAÇÕES

7.1 Implementação Para a Rede Triangular 58
7.2 Implementação para a Rede Quadrada 59
7.3 Exemplo com Solução Analítica Conhecida 61
7.4 Aplicação a um Problema de Física dos Semicondutores 65

CAPÍTULO 8 – A PESPECTIVA DE CONTINUAÇÃO DA TESE

8.1 O Problema de Dirichlet Para a Equação de Helmholtz 71
8.2 Abordagem do Problema Pelo Teorema do Valor Médio 75
8.3 Abordagem ao Problema de Refinamento de Rede 78

CONCLUSÃO 80

APÊNDICE A – **TÓPICOS DA TEORIA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS ELÍPTICAS LINEARES DE 2ª ORDEM** 81

APÊNDICE B – **PROVA DA CONVERGÊNCIA DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA A EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ** 99

APÊNDICE C – **SOLUÇÃO ANALÍTICA DO EXEMPLO RESOLVIDO NO CAPÍTULO 7** 106

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 108

RESUMO:

Nesta Tese é proposta uma abordagem numérica para a classe de problemas de *Dirichlet* envolvendo a equação de *Helmholtz*. Esta abordagem mostra-se como uma generalização do método a diferenças finitas para esta classe de problemas. Os fundamentos teóricos do método que estamos propondo baseiam-se no Princípio do Máximo e no Teorema do Valor Médio. A implementação do algoritmo toma como base o Método Alternante de Schwarz o qual associado a um operador contrativo assegura a convergência do procedimento.

O método proposto dá origem a um sistema de equações lineares com a mesma estrutura dos sistemas encontrados nos métodos a diferenças finitas, porém com a vantagem de se ter uma avaliação do limitante superior do erro de aproximação, em função do passo de discretização h, inferior ao obtido por diferenças finitas tanto para a rede quadrada quanto para a rede triangular. Além disso, o sistema de equações obtido tem a dominância da diagonal principal superior à do sistema obtido por diferenças finitas levando a uma melhoria da taxa de convergência quando métodos iterativos de solução são adotados. O método aqui apresentado resulta em uma expressão para o erro do tipo $O(h^n)$ onde h é o passo de discretização e $n = 4$ quando estamos considerando a rede triangular, e $n = 2$ para a rede quadrada.

CAPÍTULO 1

A MOTIVAÇÃO DA TESE

Este capítulo apresenta a análise de algumas aproximações numéricas feitas por métodos a diferenças finitas para a solução do problema de valor de contorno do tipo *Dirichlet* envolvendo a equação de *Helmholtz*. Nesta análise destacamos como o erro de precisão é influenciado pelo número de pontos adotados e pelo passo da discretização h. Os métodos são classificados segundo a função $O(h^n)$ que representa o comportamento assintótico do erro de precisão. A revisão bibliográfica mostra o esforço realizado pelos diversos autores no sentido de melhorar a precisão dos métodos aumentando-se o valor do expoente n na função do erro. Na sequência descrevemos como proposta desta Tese, um método que além de vantajoso do ponto de vista do erro de precisão pode ser interpretado como generalização dos métodos a diferenças finitas para a equação estudada. Finalmente, apresentamos um resumo do conteúdo dos capítulos que se seguem.

1.1. O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

Seja Ω uma superfície aberta no $\mathbb{R}^2$, limitada pelo contorno $\partial\Omega$. Denotamos por $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, o fecho de Ω, e por (x,y) um ponto de $\overline{\Omega}$. Seja $(x,y) \mapsto u$ uma função real, cujo domínio de definição é $\overline{\Omega}$. Se $u(x,y)$ é contínua e possui derivadas contínuas até a ordem k em Ω, então esta função é dita de classe $\mathbb{C}^k(\Omega)$ e denotamos esta propriedade por $u(x,y) \in \mathbb{C}^k(\Omega)$ – essa notação continua válida mesmo quando $k = \infty$, no caso da classe das funções analíticas. O caso particular em que $u(x,y)$ é apenas uma função contínua [e limitada] será denotado por $u(x,y) \in \mathbb{C}(\Omega)$ [$u(x,y) \in \mathbb{C}^0(\Omega)$]. Agora, consideremos a função $u(x,y) \in \mathbb{C}^2(\Omega) \bigcap \mathbb{C}^0(\overline{\Omega})$ satisfazendo o seguinte problema de valor de contorno, conhecido como *Problema de Dirichlet*:

$$\Delta u(x,y) - \lambda^2 u(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \Omega \tag{1.1}$$

$$u(x,y) = \Psi(x,y) \qquad (x,y) \in \partial\Omega \tag{1.2}$$

onde Δ é o operador *Laplaciano* e λ^2 é uma constante positiva. Quando $\partial\Omega$ é uma região suave e $\Psi \in \mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega})$, o problema (1.1)-(1.2) possui uma única solução $u(x)$ de classe $\mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega})$ [Gilbarg e Trudinger-1983].

Esse tipo de problema está presente em várias aplicações da Física tais como: problemas de difusão de partículas [Shalímova-1975], equação de calor em regime permanente [Özişik-1968], problemas de deformação de membranas [Birkhoff e Lynch-1984], [Becker-1992]. No ramo da Engenharia conhecido como controle estocástico este problema aparece na formulação dos problemas de *parada ótima* [Øksendal-1992] e na teoria de filtragem não linear [Bennaton-1985]. Vários exemplos de aplicacões deste problema são mostrados no Capítulo 7 desta Tese. Contudo, a solução analítica destes problemas só pode ser obtida em casos particulares, os quais são inteiramente insuficientes para propósitos práticos, [Kantorovich e Krylov-1964], [Sobolev-1964], [Górowski-1986]. Assim, vários procedimentos numéricos são adotados para se aproximar à solução destes problemas. Apesar dos métodos numéricos serem bastante flexíveis quanto à forma geométrica dos domínios de definição dos problemas, nesta Tese adotaremos sempre, por questão de simplicidade, regiões retangulares.

No restante deste capítulo estaremos denotando por $\| \cdot \|_2$ a norma *Euclidiana* e por $\| \cdot \|_\infty$ a norma infinita. Para um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ estas normas são definidas como:

$$\| v \|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2} \qquad \text{e} \qquad \| v \|_\infty = \max_k | v_k |$$

Estas duas normas estão relacionadas pela seguinte desigualdade: $\| v \|_2 \leq \sqrt{n} \| v \|_\infty$ [Golub e Loan-1988]. Para uma matriz inversível e simétrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, a norma *Euclidiana* da inversa de A é definida por:

$$\| A^{-1} \|_2 = \max_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{1}{| \Lambda_k |} \right) = \frac{1}{\min\limits_{1 \leq k \leq n} | \Lambda_k |}$$

onde Λ_k são os autovalores da matriz A [Isaacson e Keller – 1966].

Seja W uma superfície aberta no $\mathbb{R}^2$, quando estivermos considerando uma função $f(x,y) \in \mathbb{C}^k(W)$ denotamos por $\| \cdot \|_W$ a norma definida por:

$$\| f \|_W = \sup_{(x,y) \in W} | f(x,y) |$$

Vamos denotar também por M_k, $k = 1,2,\cdots$, o limitante superior para as derivadas de ordem k, da função $u(x,y)$, no domínio de definição do problema:

$$M_k := \max \left\{ \sup \left\{ \left| \frac{\partial^k u(x,y)}{\partial x^{k-j} y^j} \right| : (x,y) \in \Omega \right\} : 0 \leq j \leq k \right\}$$

1.2. MÉTODOS A DIFERENÇAS FINITAS PARA EQUAÇÕES ELÍPTICAS

A idéia básica de qualquer método numérico para resolver equações diferenciais parciais é transformar o problema contínuo em um problema discreto e daí criar um sistema de equações com um número finito de incógnitas que possa ser resolvido computacionalmente. Obviamente, algumas justificativas matemática são necessárias para garantir que a solução do problema discretizado represente, de alguma forma, uma boa aproximação para a solução do problema contínuo. Isto é feito avaliando-se o erro de precisão da solução obtida. Esta avaliação depende do conhecimento da solução exata, em geral desconhecida. Sendo assim, a avaliação dos métodos se restringe a mostrar como a solução numérica se aproxima da solução exata à medida que o passo de discretização diminui.

O método a diferenças finitas é o método clássico para se fazer aproximações numéricas das soluções de equações diferenciais parciais [Mitchell e Griffiths-1987] isto se deve a sua simplicidade e ao grande número de problemas que podem ser tratados. Nesta abordagem toma-se como ponto de partida a discretização do operador diferencial e o problema de valor de contorno é substituído por um sistema de equações lineares equivalente. A precisão do método é fortemente dependente do número de pontos empregados para se fazer esta discretização. Para ilustrar a aplicação deste método na solução do problema de *Dirichlet* para a equação de *Helmholtz*, vamos considerar o seguinte exemplo:

$$\Delta u(x,y) - \lambda^2 u(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \Omega \tag{1.3}$$

$$u(x,y) = \Psi(x,y) \qquad (x,y) \in \partial\Omega \tag{1.4}$$

onde $\Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x \le L_x, 0 \le y \le L_y\}$ é o domínio no plano (x,y) e $\partial\Omega$ sua fronteira. Para se resolver este problema numericamente devemos adotar uma uma discretização da região $(\Omega \cup \partial\Omega)$. Seja $\delta x = L_x/(N+1)$, $\delta y = L_y/(M+1)$ e uma rede uniformemente espaçada, formada pelos pontos $x_i = i\delta x$, $y_j = j\delta x$, $i = 0,1,2,\cdots,N+1$, $j = 0,1,2,\cdots,M+1$. Se o passo de discretização adotado para x e y for igual, ou seja, $\delta x = \delta y = h$, a rede é chamada rede quadrada. O conjunto de pontos interiores a Ω é denotado por Ω_h, e o conjunto de pontos em $\partial\Omega$, excluindo-se os quatro vértices de $\partial\Omega$, é denotado por $\partial\Omega_h$. Assim, temos:

$$\Omega_h = \{(x_i,y_j) \mid 1 \le i \le N, 1 \le j \le M\}$$

$$\partial\Omega_h = \{(x_i,y_j) \mid i = 0 \text{ ou } i = N+1,\ 1 \le j \le M;\ j = 0\ j = M+1,\ 1 \le i \le N\}$$

Em cada ponto da rede $\Omega_h \cup \partial\Omega_h$ associamos um valor $U(x_i, y_j)$, com $U = \Psi$ em $\partial\Omega_h$, o qual deve ser uma aproximação da solução $u(x_i, y_j)$ no ponto correspondente. A função de rede $U(x_i, y_j)$ deve satisfazer uma equação a diferenças que represente uma aproximação para o *Laplaciano* – isto pode ser obtido substituindo-se cada uma das segundas derivadas do operador diferencial Δ por um quociente de diferenças centradas. Assim em cada ponto $(x_i, y_j) \in \Omega_h$, podemos definir:

$$\Delta_h U_{i,j} := \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} \tag{1.5}$$

O conjunto de pontos envolvidos nesta aproximação é chamado de "estrela" ou "molécula" associada ao operador diferença Δ_h definido acima. Com esta notação podemos recolocar o problema (1.3)-(1.4) de forma aproximada, por:

$$\Delta_h U(x,y) - \lambda^2 U(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \Omega_h \tag{1.6}$$

$$U(x,y) = \Psi(x,y) \qquad (x,y) \in \partial\Omega_h \tag{1.7}$$

A discretização adotada resulta em uma rede com $NM + 2(N+M)$ pontos, sendo NM pontos internos e $2(N+M)$ pontos na fronteira. Os $2(N+M)$ valores de U nos pontos de $\partial\Omega_h$ são especificados pelas condições de contorno dadas em (1.7). Portanto o problema numérico consiste em determinar os valores de $U(x,y)$ nos NM pontos interiores. Estes valores podem ser calculados resolvendo-se o sistema de NM equações lineares obtido ao se escrever a equação a diferenças (1.6) para cada ponto de Ω_h.

Denotando-se por u_z o valor de u, por U_z o valor de U, ambos em um ponto z da rede, e denotando-se por ΣU_b a soma dos valores de U em quatro pontos vizinhos de z a uma distância h deste ponto, a equação (1.6) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sum U_b - 4(1 + \frac{h^2\lambda^2}{4})U_z = 0 \tag{1.8}$$

Para avaliar o erro de aproximação, que em geral é definido por uma norma da diferença $(U_z - u_z)$, vamos supor que $u \in \mathbb{C}^4(\Omega)$ e que suas derivadas de quarta ordem sejam limitadas em Ω. Vamos denotar por $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$ o valor de u em um ponto qualquer da rede. Usando o teorema de *Taylor* temos:

$$u_{i\pm1,j} = u_z \pm h\frac{\partial u_z}{\partial x_i} + \frac{1}{2!}h^2\frac{\partial^2 u_z}{\partial x_i^2} \pm \frac{1}{3!}h^3\frac{\partial^3 u_z}{\partial x_i^3} + \frac{1}{4!}h^4\frac{\partial^4 u_z}{\partial x_i^4} + O(h^5)$$

$$u_{i,j\pm1} = u_z \pm h\frac{\partial u_z}{\partial y_j} + \frac{1}{2!}h^2\frac{\partial^2 u_z}{\partial y_j^2} \pm \frac{1}{3!}h^3\frac{\partial^3 u_z}{\partial y_j^3} + \frac{1}{4!}h^4\frac{\partial^4 u_z}{\partial y_j^4} + O(h^5)$$

Somando-se as expressões acima no ponto z, podemos definir o erro de truncamento por:

$$\tau\{u_z\} := \sum u_b - 4u_z - h^2\Delta u \mid_z = \frac{2}{4!}h^4\left(\frac{\partial^4 u_z}{\partial x_i^4} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y_j^4}\right) + O(h^5) \tag{1.9}$$

Para a equação de *Helmholtz*, temos a relação $\Delta u = \lambda^2 u$, que introduzida em (1.9) resulta na seguinte expressão:

$$\sum u_b - 4u_z(1 + \frac{h^2\lambda^2}{4}) = \frac{2}{4!}h^4\left(\frac{\partial^4 u_z}{\partial x_i^4} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y_j^4}\right) + O(h^5) \tag{1.10}$$

Subtraindo-se (1.10) de (1.8) obtemos a seguinte equação a diferenças:

$$\sum (u_b - U_b) - 4(1 + \frac{h^2\lambda^2}{4})(u_z - U_z) = \frac{2}{4!}h^4\left(\frac{\partial^4 u_z}{\partial x_i^4} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y_j^4}\right) + O(h^5) \tag{1.11}$$

Escrevendo-se a equação (1.11) para cada ponto da rede chega-se a um sistema de NM equações lineares. A solução deste sistema nos permite avaliar os vetores que denotamos por $\| u - U \|_2$ e $\| \tau\{u\} \|_2$ cujas componentes são as normas de $(u_z - U_z)$ e $\tau\{u_z\}$ em cada ponto desta rede, respectivamente. Os $2(N+M)$ valores de $(u_z - U_z)$ nos pontos de $\partial\Omega_h$ se anulam em virtude das condições de contorno dadas em (1.4) e (1.7). Para fazer esta avaliação vamos denotar por A_4 a matriz quadrada deste sistema, de dimensão $NM \times NM$, e escrevê-lo na forma matricial como se segue:

$$A_4(u - U) = \tau\{u\}$$

Usando-se a norma *Euclidiana* podemos então fazer uma avaliação para o limitante do erro de aproximação como se segue:

$$\| u - U \|_2 \leq \| A_4^{-1} \|_2 \| \tau\{u\} \|_2 = \frac{1}{\min\limits_{1 \leq k \leq MN} | \Lambda_k |} \| \tau\{u\} \|_2 \tag{1.12}$$

Para interpretar a avaliação na equação (1.12) em função do passo de discretização h, devemos substituir as derivadas de quarta ordem na equação (1.9) pelo limitante superior M_4. Isto nos leva a seguinte expressão:

$$| \tau\{u_z\} | \leq \frac{2}{4!}h^4\left(\left\|\frac{\partial^4 u_z}{\partial x_i^4}\right\| + \left\|\frac{\partial^4 u_z}{\partial y_j^4}\right\|\right) + O(h^6) \leq \frac{4}{4!}h^4 M_4 + O(h^5) \tag{1.13}$$

Por outro lado, a matriz A_4 tem a seguinte estrutura:

$$A_4 = \begin{bmatrix} B_1 & -\mathbb{I}_N & 0 & \cdots & 0 \\ -\mathbb{I}_N & B_2 & -\mathbb{I}_N & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -\mathbb{I}_N & B_{M-1} & -\mathbb{I}_N \\ 0 & \cdots & 0 & -\mathbb{I}_N & B_M \end{bmatrix}$$

onde $\mathbb{I}_N$ é uma matriz identidade de dimensão $N \times N$ e B_j, $j = 1,2,\cdots,M$ são matrizes da mesma dimensão de $\mathbb{I}_N$, definidas por:

$$B_j = 4\mathrm{T}_0(\lambda h)\mathbb{I}_N - D_N$$

Sendo $\mathrm{T}_0(\lambda h) = (1 + \frac{\lambda^2 h^2}{4})$ e D_N uma matriz de dimensão $N \times N$ dada por:

$$D_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O mínimo autovalor de A_4 pode ser calculado como [ver Lema 6.1 Cap. 6]:

$$\Lambda_{min} = 4\mathrm{T}_0(\lambda h) - 4 + 8sin^2(\frac{\pi h}{2}) \tag{1.14}$$

Usando-se a relação entre $\| \tau\{u\} \|_2$ e $\| \tau\{u\} \|_\infty$ e substituindo-se (1.14) em (1.12), temos a seguinte avaliação para o erro de aproximação:

$$\| u - U \|_2 \leq \frac{\sqrt{NM}}{4\mathrm{T}_0(\lambda h) - 4 + 8sin^2(\frac{\pi h}{2})} \left(\frac{4}{4!}h^4 M_4 + \mathrm{O}(h^5)\right) \tag{1.15}$$

Sendo $\Lambda_{min} = \mathrm{O}(h^2)$, podemos concluir de (1.15) que a equação (1.8) que reescrevemos aqui como:

$$U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - (4 + \lambda^2 h^2)U_{i,j} = 0 \tag{1.16}$$

é uma equação a diferenças finitas para uma discretização de cinco pontos que aproxima adequadamente a solução do problema de valor de contorno para a equação de *Helmholtz*, com um erro

de aproximação do tipo $O(h^2)$. É com respeito a este esquema, com erro de aproximação dado por (1.15), que iremos comparar o método proposto neste trabalho.

Redes triangulares:

Quando se adota uma rede triangular encontramos uma discretização em sete pontos, como está mostrado em [Kantorovich e Krylov-1964, pp.188, eq.35], dada por:

$$(\sum u_b + \sum u_c) - 6u_z - \frac{3h^2}{2}\Delta u|_z - \frac{3h^4}{32}\Delta^2 u_z = \tau\{u_z\} \tag{1.17}$$

onde $u_z = u(z)$ é o valor de u em um ponto $z = (x_i, y_j)$ da rede, Σu_b é a soma dos valores de u em dois pontos vizinhos de z, com coordenadas $(x_i \pm h,\ y_j)$ e Σu_c é a soma dos valores de u em quatro pontos vizinhos, com coordenadas $(x_i \pm h/2, y_j \pm h\sqrt{3}/2)$. Para a equação de *Helmholtz* homogênea, podemos substituir $\Delta u = \lambda^2 u$ e $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \lambda^4 u$ e obter uma aproximação para u com precisão do tipo $O(h^4)$. A expressão do erro nesta aproximação é dada por:

$$\tau\{u_z\} = \frac{h^6}{16 \times 6!}\left(33\frac{\partial^6 u_z}{\partial x_i^6} + 45\frac{\partial^6 u_z}{\partial x_i^4 \partial y_j^2} + 135\frac{\partial^6 u_z}{\partial x_i^2 \partial y_j^4} + 27\frac{\partial^6 u_z}{\partial y_j^6}\right) + O(h^7) \tag{1.18}$$

É com respeito a este erro de truncamento que o método proposto neste trabalho será comparado, no caso de redes triangulares. Para avaliar o erro de precisão neste caso podemos proceder da mesma forma como foi feito no caso da rede quadrada, aproximando a solução u pela função de rede U, satisfazendo uma equação a diferenças equivalente à equação (1.17) com $\tau\{u_z\} \equiv 0$. Substituindo-se $\Delta_h U = \lambda^2 U$, $\Delta_h^2 U = \lambda^4 U$ nesta equação, chegamos a seguinte relação para cada nó da rede:

$$(\sum U_b + \sum U_c) - 6U_z(1 + \frac{\lambda^2 h^2}{4} + \frac{\lambda^4 h^4}{64}) = 0 \tag{1.19}$$

Neste caso, o limitante do erro de aproximação pode ser calculado resolvendo-se o sistema de equações lineares proveniente da subtração das equações (1.17) e (1.19) e tomando-se a norma *Euclidiana* da solução. Aqui denotamos a matriz do sistema linear resultante por A_6, e $\tau\{u\}$ é o vetor cujas componentes são os termos $\tau\{u_z\}$ dados pela equação (1.18). Denotando-se por M_6 o limitante superior das derivadas de sexta ordem da função $u(x, y)$ no domínio de definição do problema e substituindo-se em (1.18) temos que:

$$|\tau\{u_z\}| \leq \frac{15h^6}{6!}M_6 + O(h^7) \tag{1.20}$$

A avaliação para o erro de precisão será dada por:

$$\| u - U \|_2 \leq \| A_6^{-1} \|_2 \| \tau\{u\} \|_2 = \frac{1}{\min\limits_{1 \leq k \leq MN} | \Lambda_k |} \| \tau\{u\} \|_2 \tag{1.21}$$

A matriz A_6 tem a seguinte estrutura:

$$A_6 = \begin{bmatrix} B_1 & -J_N & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -J_N^{\mathrm{T}} & B_2 & -J_N^{\mathrm{T}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -J_N & B_3 & -J_N & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -J_N^{\mathrm{T}} & B_{M-1} & -J_N^{\mathrm{T}} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -J_N & B_M \end{bmatrix}$$

onde B_j, $j = 1, 2, \cdots, M$ são matrizes de dimensão $N \times N$ definidas por:

$$B_j = 6\mathrm{T}_1(\lambda h) I_N - D_N$$

Sendo $\mathrm{T}_1(\lambda h) = (1 + \frac{\lambda^2 h^2}{4} + \frac{\lambda^4 h^4}{64})$. As matrizes J_N têm a seguinte estrutura:

$$J_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

portanto o mínimo autovalor de A_6, Λ_{min}, pode ser calculado, [ver Lema 6.1 Cap. 6], como:

$$\Lambda_{min} \geq 6\mathrm{T}_1(\lambda h) - 6\mu_6 + 8sin^2(\frac{h}{2}) \tag{1.22}$$

onde μ_6 é um escalar tal que $0 < \mu_6 \leq 1$. Usando a relação entre $\| \tau\{u\} \|_2$ e $\| \tau\{u\} \|_\infty$ e substituindo-se (1.22) em (1.21), temos a seguinte avaliação para o erro de aproximação:

$$\| u - U \|_2 \leq \frac{\sqrt{NM}}{6\mathrm{T}_1(\lambda h) - 6\mu_6 + 8sin^2(\frac{h}{2})} \Big(\frac{15h^6 M_6}{6!} + \mathrm{O}(h^7) \Big) \tag{1.23}$$

As avaliações feitas em (1.15) e (1.23) serão invocadas no Capítulo 3 para fins de comparação com as expressões resultantes da abordagem numérica que estamos propondo nesta Tese.

Outras Abordagens:

Apesar de existirem muitas variações dos métodos que utilizam aproximação por equações a diferenças finitas, pouco se consegue em termos de melhoria da precisão sem aumentar demasiadamente o esforço computacional. Por exemplo, [Collatz-1960, pp. 386] apresenta um método de aproximação denominado Método *Hermitiano*, onde se aproxima a solução do problema por polinômios. O erro de precisão depende do gráu do polinômio o qual por sua vez depende do número de pontos adotado na discretização, por exemplo: para discretização com 5 e 9 pontos podem ser adotados para a equação de *Helmholtz* polinômios de gráus 2, 4 e 6 com um erro de precisão máximo de ordem $O(h^2)$. Em [Kantorovich e Krylov-1964, pp.184, eq.32] se apresenta uma aproximação de diferenças finitas de nove pontos, para uma rede quadrada, dada por:

$$20u_z - 4\sum u_b - \sum u_c - (6h^2\Delta u|_z + \frac{12h^4}{4!}\Delta^2 u|_z + \frac{12h^6}{6!}\Delta^3 u|_z) = \frac{24h^6}{6!}\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}\Delta u|_z + O(h^8) \quad (1.24)$$

onde $u_z = u(z)$ é o valor de u em um pondo z da rede, Σu_b é a soma dos valores de u em quatro pontos vizinhos de z, a uma distancia h do ponto z e Σu_c é a soma dos valores de u em quatro pontos vizinhos, a uma distancia $\sqrt{2}h$ de z. Para a equação de *Helmholtz* homogênea, podemos substituir $\Delta u = \lambda^2 u$ e $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \lambda^4 u$ e obter da expressão acima uma aproximação para u com precisão do tipo $O(h^6)$. O limitante superior para o erro de truncamento é dado por:

$$|\tau\{u_z\}| \leq \frac{24h^6}{6!}M_4 + O(h^8) \quad (1.25)$$

Devemos observar que sendo o limitante para o erro de truncamento da discretização de nove pontos é do tipo $O(h^6)$ portanto a discretização em nove pontos tem precisão $O(h^4)$.

Em [Birkhoff e Gulati-1974, Teo. 7] os autores mostram que não há discretização de cinco pontos, para $\Delta u = 0$, em uma rede regular que leve a um erro de truncamento melhor que $O(h^4)$ e, portanto, a uma precisão $O(h^2)$. Neste mesmo trabalho [Birkhoff e Gulati-1974, Teo. 11], os autores também mostram que para discretizações de nove pontos, em uma rede quadrada, a melhor precisão que se pode atingir por métodos a diferenças para a equação de Poisson é do tipo $O(h^4)$, e para a equação de Laplace este erro é do tipo $O(h^6)$ – este resultado é obtido da análise direta da equação (1.24). Em {Manohar e Stephenson-1983] os autores, considerando a equação de *Helmholtz*, mostram que não é possível obter erro de truncamento de ordem superior a $O(h^4)$ para discretização de cinco pontos da mesma forma que não é possível obter erro de truncamento de ordem mais elevada que $O(h^6)$ para discretização de nove pontos.

Redes irregulares podem também ser usadas, no entanto isso nem sempre leva a uma melhoria no sentido de diminuir o erro de aproximação, [Laurie-1982], [Oliveira-1991]. Quando o problema de valor de contorno envolve equações diferenciais parciais elípticas lineares mais complexas, por exemplo, equações com coeficientes variáveis, a construção de equações a diferenças é mais trabalhosa. No entanto, em geral chega-se a aproximações de mesma ordem que as obtidas para equações com coeficientes constantes, naturalmente, com um esforço computacional muito maior que os dos casos mais simples. Em [Boisvert-1981] aplica-se o método Hermitiano para um operador elíptico com coeficientes variáveis. Este método supõe que a solução exata satisfaz uma aproximação polinomial local, que é substituída na equação diferencial, obtendo um conjunto de restrições relacionadas aos coeficientes da série de potência. Quando o esquema usado é de nove pontos as aproximações são do tipo $O(h^4)$. Em [Gupta at alli-1985] encontramos outra aproximação a diferenças, para equações elípticas com coeficientes variáveis. Neste método, a equação a diferenças envolve as derivadas parciais dos coeficientes e da parte não autônoma da equação, a função forçante $f(x,y)$. Quando estas derivadas são substituídas por diferenças finitas em um nó de nove pontos o método resulta em uma aproximação com erro do tipo $O(h^4)$. Em [Aanthakrishnaiah et alli-1987] os autores desenvolvem um método para equações elípticas com coeficientes variáveis baseado no truncamento da expansão em série de *Taylor*, tanto para a solução como para os coeficientes. Este trabalho apresenta uma aproximação de nove pontos com precisão do tipo $O(h^4)$ e uma aproximação de treze pontos com precisão do tipo $O(h^6)$. A aproximação de treze pontos é considerada pelos próprios autores extremamente trabalhosa. Em [Mitall e Gahlaut-1991] os autores apresentam uma classe de problemas de valor de contorno para domínios circulares bidimensionais, envolvendo a equação de Poisson em coordenadas polares. Neste trabalho, utilizam-se duas aproximações: uma delas envolvendo cinco pontos, com precisão do tipo $O(h^2)$, e outra de nove pontos com precisão de ordem $O(h^4)$. Em [Evans-1991], uma transformação de coordenadas é usada para a equação de Poisson em um domínio triangular, onde se utiliza uma rede triangular e obtendo-se uma aproximação a diferenças finitas de sete pontos, com erro do tipo $O(h^4)$.

Na literatura, o único método que se aproxima do que estamos propondo nesta Tese é o de [Gartland Jr.-1982]. Neste trabalho o método denominado como DWMA, "Discrete Weighted Mean Approximation", desenvolvido com base na identidade de Green e Teorema do Valor Médio, é aplicado para aproximar a solução de um problema de difusão – convecção. Este método envolve o cálculo das funções de Bessel $I_0(h/2\epsilon)$ e $I_1(h/2\epsilon)$, onde h é o passo de discretização e ϵ é um parâmetro do modelo. A avaliação do erro de aproximação é do tipo $O(h^2)$. A comparação deste método com o método a diferenças finitas de nove pontos com precisão $O(h^4)$ foi feita em [Gupta et alli-1985]; surpreendentemente o método DWMA é mais preciso. A explicação dada pelos autores foi que o

DWMA é um método desenvolvido especificamente para o problema de difusão-convecção. Na realidade o DWMA pode ser visto como um caso particular do método aqui desenvolvido, e uma análise mais refinada poderia mostrar que este método é mais preciso que o esquema tradicional a diferenças finitas. Outra particularidade do DWMA é ter adotado uma interpolação trigonométrica de quatro termos para resolver a integral proveniente do Teorema do Valor Médio a qual deve ser resolvida pelo metódo dos trapézios, conforme demostraremos.

O principal "ponto fraco" dos métodos que utilizam aproximações a diferenças finitas é a impossibilidade do tratar adequadamente os problemas com fronteiras irregulares. Nestes casos, o ideal seria adotar um passo de discretização variável. Pouco se tem conseguido mas podemos encontrar resultados neste sentido por exemplo em [Ewing et alli.-1991], onde se apresenta uma técnica de refinamento local. A análise deste método mostrou um erro de aproximação do tipo $O(h^{1/2})$ para um esquema simétrico de refinamento e $O(h^{3/2})$ para um esquema assimétrico. Este tipo de abordagem aumenta muito o esforço computacional, além de não possuir precisão elevada. Os autores [Abdullah-1991] e [Lindae-1993] apresentaram técnicas computacionalmente eficientes desta abordagem. Este "ponto fraco" dos métodos a diferenças finitas é o principal argumento utilizado pelos defensores de uma outra abordagem numérica, também muito utilizada, conhecida como métodos de elementos finitos [Ciarlet-1978]. Nestes métodos o "ponto fraco" mencionado acima é superado, porém outras questões tais como: a resolução de integrais envolvendo as funções de base e códigos computacionais mais complexos, dificultam a aplicação destes métodos.

Em [Birkhoff e Gulati-1974, Teo. 10] os autores mostram que é impossível deduzir, por técnica de elementos finitos, a aproximação a diferenças de cinco pontos, padrão, obtidas por diferenças finitas para a equação de *Poisson* e para a equação de *Helmholtz*, evidenciando uma complementaridade dos dois métodos.

1.3. A PROPOSTA DA TESE

A abordagem numérica desenvolvida neste trabalho mostra-se como uma generalização do método a diferenças finitas para a classe de problemas de *Dirichlet* envolvendo a equação de *Helmholtz*. Os fundamentos teóricos do método que estamos propondo baseiam-se no Princípio do Máximo e no Teorema do Valor Médio, [Courant e Hilbert-1962]. A implementação do algoritmo toma como base o Método Alternante de Schwarz [Kantorovich e Krylov-1964 cap. VII], [Mathew-1993] o qual associado a um operador contrativo assegura a convergência do procedimento.

O método proposto dá origem a um sistema de equações lineares com a mesma estrutura dos sistemas encontrados nos métodos a diferenças finitas. Porém a vantagem consiste em uma avaliação do limitante superior do erro de aproximação em função do parâmetro λ^2 da equação e do passo de discretização h, mais estrita do que a obtida tradicionalmente por diferenças finitas tanto para a rede quadrada quanto para a rede triangular. Além disso, o método introduz uma melhoria na taxa de convergência, facilmente verificado pelo fato do sistema de equações obtido ter a dominância da diagonal principal superior ao obtido por diferenças finitas. O método aqui apresentado resulta em uma expressão para o erro de precisão do tipo $O(h^n)$ onde h é o passo de discretização, e $n = 4$ quando estamos considerando uma rede triangular e $n = 2$ quando estamos considerando uma rede quadrada.

A avaliação do erro de precisão do método proposto é obtida a partir do erro causado pela aproximação numérica que se faz para a integral presente no Teorema do Valor Médio. Esta integral foi aproximada, nesta Tese, pelo Método dos Trapézios, o qual além de se mostrar bastante preciso quando se trata de funções periódicas, nos permite estabelecer uma relação com a expansão, em série de *Taylor*, da função a ser integrada. Quando esta relação não é feita a avaliação só pode ser obtida de através de um *imbeding* do espaço (x, y) no plano complexo $x + iy$ onde $i = \sqrt{-1}$, como mostramos em [Andrade e do Val-1994*a*,*b*]. A aplicação deste procedimento na avaliação do erro de precisão das soluções numéricas para equações elípticas é dada em [Andrade e do Val-1992] e [Andrade e do Val-1993].

Apresentamos os resultados desta Tese da seguinte forma: no Capítulo 2, mostramos como os problemas de contorno, envolvendo equações diferenciais parciais lineares elípticas com coeficientes constantes, podem ser postos na sua forma canônica – forma esta na qual o método é desenvolvido – e discutiremos de forma simplificada o método alternante de Schwarz.

No Capítulo 3, enunciamos sob a forma de teoremas e lemas, os principais resultados deste trabalho e as provas destes resultados serão apresentadas nos capítulos seguintes. Esta forma de apresentação tem como objetivo destacar os resultados do trabalho sem que o leitor se detenha em longas demonstrações matemáticas. No Capítulo 4, apresentamos a prova da convergência do procedimento proposto; esta prova utiliza o princípio do máximo e o método alternante de Schwarz.

No Capítulo 5, apresentamos o Teorema do Valor Médio para a equação de *Helmohltz* no $\mathbb{R}^2$, desenvolvido a partir das linhas mestras apresentadas no livro de Courant e Hilbert, para em seguida demonstrarmos alguns resultados intermediários, necessários à avaliação do erro de aproximação do método. No Capítulo 6 provamos os principais resultados apresentados no Capítulo 3.

No Capítulo 7 discutimos alguns aspectos da implementação computacional do método proposto, resolvemos exemplos com solução exata conhecida e fazemos aplicações a problemas de difusão de elétrons em uma placa semicondutora de silício. Comparamos nosso método com o de diferenças finitas adotando uma rede quadrada e uma rede triangular. Estas comparações são feitas avaliando o erro entre a solução numérica e a solução exata. A esta diferença denominamos erro de aproximação. No Capítulo 8 apresentamos as pespectivas de continuação desta Tese e sugerimos uma extensão do método proposto para os problemas de valor de contorno envolvendo a equação de *Helmholtz* não homogênea. Por fim, temos os apêndices onde se encontram tópicos que auxiliam o entendimento de algumas passagens. Destacamos o apêndice A onde se encontram detalhados vários tópicos da teoria das equações diferenciais parciais elípticas.

CAPÍTULO 2

A FORMA CANÔNICA DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ E O MÉTODO ALTERNANTE DE SCHWARZ

Neste capítulo mostramos como os operadores diferenciais parciais elípticos, lineares, de segunda ordem, com coeficientes constantes, podem ser colocados na forma canônica da equação de *Helmholtz* – esta possibilidade aumenta a abrangência do método proposto nesta Tese. Além disso formulamos as hipóteses H1, H2 e H3, necessárias ao desenvolvimento do método numérico que estamos propondo. Na segunda parte deste Capítulo fazemos a exposição do Método Alternante de Schwarz para o caso particular onde o domínio de definição do problema é a união de dois domínios sobrepostos.

2.1. PROBLEMAS ELÍPTICOS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Seja Ω uma superfície aberta no $\mathbb{R}^2$, limitada pelo contorno $\partial\Omega$ e, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ o fecho de Ω. Seja $(x,y) \mapsto u$ uma função real, cujo domínio de definição é $\overline{\Omega}$ e suponha que $u(x,y) \in \mathbb{C}^2(\Omega) \bigcap \mathbb{C}^0(\overline{\Omega})$ satisfaça o problema de valor de contorno de *Dirichlet*:

$$\mathcal{L}u(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \Omega \tag{2.1}$$

$$u(x,y) = \Psi(x,y) \qquad (x,y) \in \partial\Omega \tag{2.2}$$

onde o operador $\mathcal{L}$ é definido de forma geral por:

$$\mathcal{L} = a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2}{\partial y^2} + d\frac{\partial}{\partial x} + e\frac{\partial}{\partial y} + g \tag{2.3}$$

Vamos admitir as seguintes hipóteses:

H1) Todos os coeficientes do operador $\mathcal{L}$ são constantes e além disso $g \leq 0$.

H2) Para todo ponto $p = (x,y) \in \partial\Omega$ temos uma função $F_p(p) \in \mathbb{C}^\infty(\partial\Omega)$ com $\nabla F_p(p) \neq 0$ tal que $\partial\Omega$ possa ser descrito numa vizinhança de p por $F_p(p) = 0$.

H3) O operador $\mathcal{L}$ é estritamente elíptico em Ω, ou seja $ac - b^2 > 0$

As hipóteses H1, H2 e H3 garantem que o problema de *Dirichlet*, $\mathcal{L}u = 0$ em Ω e $u = \Psi$ em $\partial\Omega$ com $\Psi \in \mathbb{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$, possui uma única solução $u(x,y) \in \mathbb{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$ [Gilbarg e Trudinger – 1983] .

2.2. FORMAS CANÔNICAS PARA EQUAÇÕES ELÍPTICAS

O operador (2.3) pode ser colocado na forma canônica dos operadores elípticos através da escolha adequada de uma transformação de coordenadas [Garabedian-1964]. Para encontrar esta transformação vamos supor, sem perda de generalidade, que $a = 1$ e completar o quadrado em (2.3) de forma que possamos reescrevê-la como:

$$(\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y})^2 u + (c - b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + g = 0 \tag{2.4}$$

No caso de equações elípticas temos que $\delta = (ac - b^2)^{1/2} > 0$. Introduzindo as novas variáveis ξ e η relacionadas às variáveis x e y por:

$$x = \xi \quad , \quad y = b\xi + \delta\eta$$

Então:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = 1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \delta\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.6}$$

Substituindo (2.5) e (2.6) em (2.4), encontramos a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + d\frac{\partial u}{\partial \xi} + \rho\frac{\partial u}{\partial \eta} + gu = 0 \tag{2.7}$$

onde $\rho = (e - bd)/\delta$. Uma simplificação maior pode ser introduzida na equação (2.7) quando d, e e g são constantes. Neste caso, eliminamos os termos diferenciais de primeira ordem através da seguinte transformação:

$$w(\xi, \eta) = u(\xi, \eta)\exp\left(\frac{d\xi + \rho\eta}{2}\right) \tag{2.8}$$

Usando a regra da cadeia em (2.8) para calcular $\partial u/\partial\xi$, $\partial u/\partial\eta$, $\partial^2 u/\partial\xi^2$ e $\partial^2 u/\partial\eta^2$ em termos de $\partial w/\partial\xi$, $\partial w/\partial\eta$, $\partial^2 w/\partial\xi^2$ e $\partial^2 w/\partial\eta^2$ e substituindo os termos encontrados na equação (2.7), podemos reescrevê-la na seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \left(-g + \frac{d^2 + \rho^2}{4} \right) w = 0 \tag{2.9}$$

Devido à hipótese H1 podemos definir uma constante não negativa λ^2 dada por:

$$\lambda^2 = -g + \frac{d^2 + \rho^2}{4} \tag{2.10}$$

Exemplo : Consideremos aqui a função $u(x,y):\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + gu = 0$$

Desde que $ac - b^2 = 5 - 1 = 4 > 0$, estamos lidando com uma equação elíptica e portanto a forma canônica pode ser obtida através da transformação de coordenadas adequada:

$$x = \xi \qquad \text{e} \qquad y = \xi + 2\eta$$

Isto acarreta a seguinte transformação de variáveis:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Logo, a forma canônica para equação original do problema é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + d\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2}(e - d)\frac{\partial u}{\partial \eta} + gu = 0$$

Quando d, e e g são constantes, os termos diferenciais de primeira ordem podem ser eliminados pela transformação:

$$w(\xi, \eta) = u(\xi, \eta) exp\left(\frac{d\xi + \rho\eta}{2} \right)$$

onde $\rho = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$. Aplicando a regra da cadeia temos:

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \xi} exp\Big(\frac{d\xi + \rho\eta}{2}\Big) + u\frac{d}{2} exp\Big(\frac{d\xi + \rho\eta}{2}\Big)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} exp\Big(\frac{d\xi + \rho\eta}{2}\Big) + \frac{\partial u}{\partial \xi} d\, exp\Big(\frac{d\xi + \rho\eta}{2}\Big) + \Big(\frac{d}{2}\Big)^2 w$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \eta} exp\Big(\frac{d\xi + \rho\eta}{2}\Big) + u\frac{\rho}{2} exp\Big(\frac{d\xi + \rho\eta}{2}\Big)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} exp\Big(\frac{d\xi + \rho\eta}{2}\Big) + \frac{\partial u}{\partial \eta} \rho\, exp\Big(\frac{d\xi + \rho\eta}{2}\Big) + \Big(\frac{\rho}{2}\Big)^2 w$$

Introduzindo as expressões na equação diferencial, temos:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \Big(-g + \frac{d^2 + \rho^2}{4}\Big) w = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + d\frac{\partial u}{\partial \xi} + \rho\frac{\partial u}{\partial \eta} + g\,u\right) exp\Big(\frac{d\xi + \rho\eta}{2}\Big) = 0$$

ou de forma equivalente:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \lambda^2 w = 0 \qquad \text{com} \qquad \lambda^2 = -g + \frac{d^2 + \rho^2}{4}$$

2.3. MÉTODO ALTERNANTE DE SCHWARZ

O *Método Alternante de Schwarz* foi proposto em 1870 por *H. A. Schwarz* [apud Mathew-1993] como uma técnica para provar a existência de soluções para certos problemas elípticos definidos em domínios com geometria complicada. Este método é um procedimento iterativo que permite resolver problemas de valor de contorno para um domínio Ω, decompondo este domínio em sub-regiões [Courant e Hilbert-1962]. Vamos supor que o domínio Ω é decomposto em dois domínios entrelaçados $\mathbb{B}_1$ e $\mathbb{B}_2$ (ou em um número finito de tais domínios) nos quais podemos resolver o problema de valor de contorno atribuindo um valor arbitrário à solução no contorno de cada domínio. Desde que os problemas de valor de contorno possam ser resolvidos, por exemplo, para um círculo através da integral de Poisson, o método alternante imediatamente permite solucionar o problema para domínios que são a união de um número finito de círculos entrelaçados. A Figura 2.1 mostra a representação da região de definição do problema, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, pela união de duas bolas entrelaçadas $\overline{\mathbb{B}}_1(z_1) \cup \overline{\mathbb{B}}_2(z_2)$, centradas nos pontos z_1 e z_2 respectivamente e tais que $z_1 \in \partial\mathbb{B}_2$ e $z_2 \in \partial\mathbb{B}_1$.

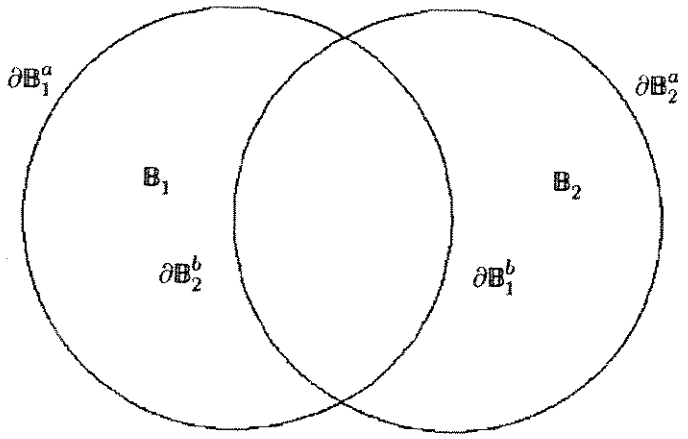

Figura 2.1 – Representação dos conjuntos $\Omega = \mathbb{B}_1(z_1) \cup \mathbb{B}_2(z_2)$ e $\partial\Omega = \partial(\mathbb{B}_1(z_1) \cup \mathbb{B}_2(z_2))$

Vamos considerar agora o problema de valor de contorno (2.1)-(2.2) com o operador elíptico (2.3) já colocado em sua forma canônica:

$$\Delta u(x,y) - \lambda^2 u(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \Omega \tag{2.11}$$

$$u(x,y) = \Psi(x,y) \qquad (x,y) \in \partial\Omega \tag{2.12}$$

A fronteira $\partial\mathbb{B}_1$ mostrada na Figura 2.1 é constituida por duas partes $\partial\mathbb{B}_1^a$ e $\partial\mathbb{B}_1^b$, onde $\partial\mathbb{B}_1^b \subset \mathbb{B}_2$. Da mesma forma, $\partial\mathbb{B}_2$ é constituída pelas partes $\partial\mathbb{B}_2^a$ e $\partial\mathbb{B}_2^b$, onde $\partial\mathbb{B}_2^b \subset \mathbb{B}_1$. Assumimos que a função $\Psi(x,y)$ que define o valor de contorno na fronteira $\partial\Omega$ é contínua e limitada em valor absoluto.

O Método Alternante consiste nos seguintes passos: estendemos arbitrariamente o valor de contorno em $\partial\mathbb{B}_1^a$ para $\partial\mathbb{B}_1^b$ de forma contínua e limitada. Denotando o valor de contorno assim definido por v^0, resolvemos o seguinte problema de valor de contorno:

$$\text{Problema } \mathcal{P}_1 = \begin{cases} \Delta v_1^1(x,y) - \lambda^2 v_1^1(x,y) = 0 & (x,y) \in \mathbb{B}_1 \\ v_1^1(x,y) = v^0 & (x,y) \in \partial\mathbb{B}_1 \end{cases}$$

A solução v_1^1 de $\mathcal{P}_1$ juntamente com v^0 nos permite definir a função $v^1(x,y)$ como se segue:

$$v^1 = \begin{cases} v_1^1 & \text{em} \quad \mathbb{B}_1 \\ v^0 & \text{em} \quad \overline{\Omega} \setminus \mathbb{B}_1 \end{cases}$$

A função $v^1(x,y)$ atribui valores ao contorno $\partial\mathbb{B}_2^b$ da bola $\mathbb{B}_2$ que junto com os valores definidos em $\partial\mathbb{B}_2^a$, fornecem condições de contorno contínuas para o seguinte problema:

$$\text{Problema } \mathcal{P}_2 = \begin{cases} \Delta v_2^1(x,y) - \lambda_2^2 v_2^1(x,y) = 0 & (x,y) \in \mathbb{B}_2 \\ v_2^1(x,y) = v^1 & (x,y) \in \partial\mathbb{B}_2 \end{cases}$$

Podemos então definir a função $v^2(x,y)$ por:

$$v^2 = \begin{cases} v_2^1 & \text{em} \quad \mathbb{B}_2 \\ v^1 & \text{em} \quad \overline{\Omega} \setminus \mathbb{B}_2 \end{cases}$$

A função $v^2(x,y)$ por sua vez, atribui valores à fronteira $\partial\mathbb{B}_1^b$ que junto com os valores definidos em $\partial\mathbb{B}_1^a$ resulta em novas condições de contorno contínuas para o problema $\mathcal{P}_1$. Assim podemos calcular a função $v_1^2(x,y)$. Isto nos permite definir uma função $v^3(x,y)$, que por sua vez será usada como condição de contorno para o problema $\mathcal{P}_2$, permitindo calcular a função $v_2^2(x,y)$ e assim por diante. Procedendo desta forma sucessivamente, podemos definir uma sequência de funções v^m, $m = 1,2,\cdots$ como:

$$v^{m+1} = \begin{cases} v_i^{m+1} & \text{em} \quad \mathbb{B}_i \\ v^m & \text{em} \quad \overline{\Omega} \setminus \mathbb{B}_i \end{cases}$$

onde v_i^{m+1} satisfaz o problema de valor de contorno $\mathcal{P}_i$ com a condição de contorno dada por:

$$v_i^{m+1}(x,y) = v^m(x,y) \qquad (x,y) \in \partial\mathbb{B}_i$$

Para o momento podemos assegurar que a sequência v^m, $m = 1,2,\cdots$ converge quando $m \longrightarrow \infty$ para uma função v^∞ que está relacionada as soluções dos problemas $\mathcal{P}_i$, $i = 1,2$ as quais são idênticas na região de interseção $(\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2)$. Podemos relacionar esta função à solução $u(x,y)$ do problema inicialmente proposto (2.11)-(2.12).

Note-se que o *Método Alternante de Schwarz* não exige que o domínio Ω seja recoberto por figuras geométricas regulares tais como bolas, retângulos, etc. O método também não exige que o problema original seja colocado na forma canônica ou qualquer outra forma. No entanto, o Método de *Schwarz* pressupõe que é possível resolver os problemas $\mathcal{P}_i$, $i = 1, 2$ de alguma forma. Porém, para condições de contorno gerais, tais problemas não possuem solução analítica conhecida. Assim, para imaginar o uso deste procedimento iterativo dentro do contexto de avaliação númerica da solução de problemas de valor de contorno mais gerais, é necessário que se saiba solucionar numericamente o problema em domínios regulares. É dentro deste contexto que mostramos ser vantajoso colocar o problema original na forma canônica, assim como adotar a utilização de bolas entrelaçadas como cobertura do domínio Ω.

CAPÍTULO 3

PRINCIPAIS RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos nossos principais resultados bem como a comparação com os métodos tradicionais a diferenças finitas. Para isto vamos considerar o problema de valor de contorno na forma canônica desenvolvida no Capítulo 2. As provas destes resultados serão apresentadas em capítulos subsequentes, com a intenção de permitir uma visão geral da potencialidade do método que estamos propondo, sem nos determos agora em demonstrações matemáticas prolongadas.

3.1. A FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ uma superfície aberta e limitada pelo contorno $\partial\Omega$ de classe $\mathbb{C}^\infty$ e, $\overline{\Omega} = (\Omega \cup \partial\Omega)$ o fecho de Ω. Consideremos a função $u(x,y)$ satisfazendo o seguinte problema de Dirichlet:

$$\text{Problema } (\Sigma): \quad \begin{aligned} \Delta u(x,y) - \lambda^2 u &= 0 && (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) &= \Psi(x,y) && (x,y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Supondo $\Psi(x,y) \in \mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega})$ e considerando as hipóteses H1, H2 e H3 feitas no Capítulo 2, este problema admite uma única solução tal que $u(x,y) \in \mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

Para resolver este problema numericamente se faz necessário introduzir uma rede discreta sobre o domínio de definiçao $\overline{\Omega}$ e avaliar a solução em cada ponto desta rede (nó). Abordaremos dois tipos de rede: a rede triangular e a rede retangular uniforme ou rede quadrada, a mais comum.

Definição 3.1

Denotamos por G_h uma rede uniforme triangular com passo h cobrindo a região $\overline{\Omega}$ como ilustra a Figura 3.1. Para algum N e M temos:

$$G_h = \{(x_i, y_j) \mid x_i = x_0 + ih + phcos(\tfrac{\pi}{3}),\ y_j = y_0 + jhsen(\tfrac{\pi}{3})\}$$

onde $i = 0,1,2,\cdots,N+1$, $j = 0,1,2,\cdots,M+1$ e $p = (j\ mod\ 2) - 1\}$. Um nó desta rede é denotado por $z_{i,j} = (x_i, y_j)$ e podemos associar a toda função $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função discreta $\hat{\phi}: G_h \rightarrow \mathbb{R}$ chamada função de rede tal que $\phi_{i,j} = \phi(z_{i,j})$. Um nó $z_{i,j}$ de G_h é interno se a distância de $z_{i,j}$ a $\partial\Omega$ é maior que h. O número total de pontos interiores é denotado por MN.

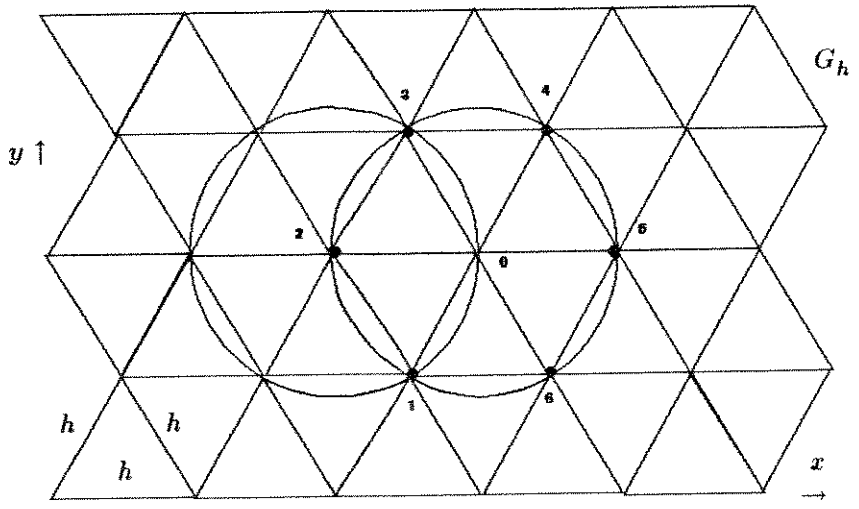

Figura 3.1. Rede Triangular

Definição 3.2

Denotamos por S_h uma rede uniforme retangular (rede quadrada) com passo h cobrindo a região $\overline{\Omega}$ como ilustra a Figura 3.2. Para algum N e M temos:

$$S_h = \{(x_i, y_j) \mid x_i = x_0 + ih,\ y_j = y_0 + jh\ \}$$

onde $i = 0,1,2,\cdots,N+1$ e $j = 0,1,2,\cdots,M+1$. Um nó desta rede é denotado por $z_{i,j} = (x_i, y_j)$ e podemos associar a toda função $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função discreta $\hat{\phi}: S_h \rightarrow \mathbb{R}$ chamada função de rede tal que $\phi_{i,j} = \phi(z_{i,j})$. Um nó $z_{i,j}$ de S_h é interno se a distância de $z_{i,j}$ a $\partial\Omega$ é maior que h. O número total de pontos interiores é denotado por MN.

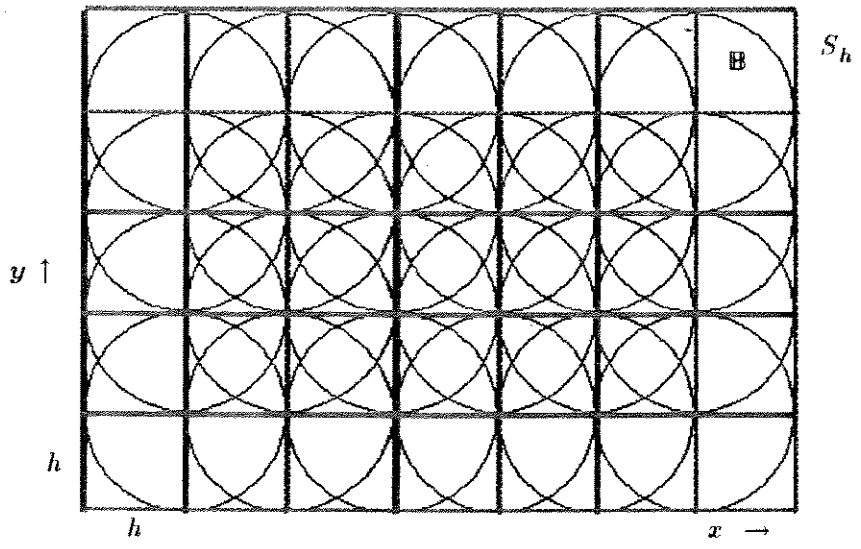

Figura 3.2. Rede Quadrada

Neste capítulo denotamos por $I_0(\lambda h)$ a função modificada de Bessel de ordem zero, representada por uma série infinita dada por:

$$I_0(\lambda h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda h)^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \tag{3.1}$$

3.2. RESULTADOS PARA A REDE TRIANGULAR

Teorema 3.1 Seja $u(x,y) \in C^{\infty}(\Omega)$ a solução do problema de valor de contorno Σ e seja G_h a rede dada na Definição 3.1. Seja $\{U_{i,j}\}$ uma função de rede, definida em G_h, satisfazendo a seguinte equação a diferenças para $i = 1, 2, \cdots, N$ e $j = 1, 2, \cdots, M$.

$$U_{i,j} = \frac{1}{6\,I_0(\lambda h)} \left(U_{i-1,j-1} + U_{i+1,j-1} + U_{i-2,j} + U_{i+2,j} + U_{i-1,j+1} + U_{i+1,j+1} \right) \tag{3.2}$$

Então:
$$\| u - U \|_p \leq \alpha(h,\lambda) \left[\frac{6h^6 M_6}{6!} + O(h^8) \right] \tag{3.3}$$

Com:
$$\alpha(h,\lambda) = \begin{cases} \sqrt{M_0 N_0} \,/ \left(6I_0(\lambda h) + 8\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi h}{2}\right) - 6\mu_6\right) & \text{if } d = 2 \\ 1/\left(I_0(\lambda h) - 1\right) & \text{if } d = \infty \end{cases}$$

onde μ_6 é um escalar e positivo e $\mu_6 \leq 1$.

Substituindo-se no denominador de (3.3) a série (3.1) que representa a função de Bessel $I_0(\lambda h)$, encontramos a seguinte relação:

$$6I_0(\lambda h) + 8sen^2(\frac{h\pi}{2}) - 6\mu_6 \geq 8sen^2(\frac{h\pi}{2}) + \frac{3\lambda^2 h^2}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{6(\lambda h)^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \approx O(h^2) \tag{3.4}$$

Assim, podemos enunciar o seguinte corolário:

Corolário 3.1 Seja $u(x,y) \in C^{\infty}(\Omega)$ a solução do problema de valor de contorno Σ e seja G_h a rede dada na Definição 3.1. Seja $\{U_{i,j}\}$ uma função de rede, definida em G_h, satisfazendo a equação a diferenças (3.2) para $i = 1, 2, \cdots, N$ e $j = 1, 2, \cdots, M$. Então:

$$\| u - U \|_{\infty} = O(h^4) \tag{3.5}$$

Nota: O resultado do Teorema 3.1 como extensão do método de diferenças finitas

A avaliação feita pelo Teorema 3.1, pode ser comparada à equação a diferenças encontrada em [Collatz-1966, pp.389] e [Kantorovich e Krylov-1964, pp.188, eq. (35)] quando se adota a rede triangular (este resultado está reproduzido no Capítulo 1 desta Tese, ver eq. (1.19)). Neste caso, a equação obtida se assemelha à (3.2).

$$U_{i,j} = \frac{1}{6T_1(\lambda h)} (U_{i-1,j-1} + U_{i+1,j-1} + U_{i-2,j} + U_{i+2,j} + U_{i-1,j+1} + U_{i+1,j+1}) \tag{3.6}$$

onde: $$T_1(\lambda h) = 1 + \frac{(\lambda h)^2}{4} + \frac{(\lambda h)^4}{64}$$

A principal diferença entre (3.2) e (3.6) é a função de Bessel, $I_0(\lambda h)$, presente no denominador do lado direito de (3.2). Esta função representa uma série, enquanto do lado direito de (3.6) aparece um polinômio com os três primeiros termos desta série. A comparação entre as equações (3.2) e (3.6) também pode ser feita através da avaliação do erro de precisão proveniente do uso destas equações. Para o caso da equação (3.6) calcula-se este erro desenvolvendo $u(x,y)$ em série de *Taylor* para os pontos da rede G_h e substituindo $\Delta u = \lambda^2 u$ e $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \lambda^4 u$, como feito no Capítulo 1, equação (1.17). Assim procedendo tem-se:

$$u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-2,j} + u_{i+2,j} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1} - 6T_1(\lambda h)u_{i,j} = \tau\{u_{i,j}\}$$

A expressão do erro de truncamento $\tau\{u_{i,j}\}$ foi calculado no Capítulo 1, equação 1.18. Obtem-se um limitante superior para este erro substituindo-se as derivadas de sexta ordem por M_6, conforme notação introduzida no Capítulo 1, resultando em:

$$\tau\{u_{i,j}\} = \frac{h^6}{16 \times 6!}\left(33\frac{\partial^6 u_{i,j}}{\partial x_i^6} + 45\frac{\partial^6 u_{i,j}}{\partial x_i^4 \partial y_j^2} + 135\frac{\partial^6 u_{i,j}}{\partial x_i^2 \partial y_j^4} + 27\frac{\partial^6 u_{i,j}}{\partial y_j^6}\right) + O(h^8) \leq \frac{15h^6}{6!}M_6 + O(h^8) \qquad (3.7)$$

Para avaliar o erro de precisão neste caso podemos proceder da mesma forma como feito no Capítulo 1, aproximando a solução u pela função de rede U. Neste caso o limitante para o erro de precisão é dado por:

$$\| u - U \|_2 \leq \| A_6^{-1} \|_2 \| \tau\{u\} \|_2 \leq \frac{\sqrt{MN}}{6\,\mathrm{T}_1(\lambda h) - 6\mu_6 + 8sen^2(\frac{h\pi}{2})}\left[\frac{15h^6 M_6}{6!} + O(h^8)\right] \qquad (3.8)$$

Deve-se notar que o termo $\mathrm{T}_1(\lambda h)$, que aparece no denominador de (3.8) corresponde exatamente aos três primeiros termos de $\mathrm{I}_0(\lambda h)$. Desta forma podemos interpretar a avaliação feita em (3.3) como uma extensão da expressão (3.8) obtida por diferenças finitas. Além disso, considerando-se somente o termo de quarta ordem nas equações (3.3) e (3.8), podemos concluir que este termo é menor em (3.3) que em (3.8). Uma das razões para isso é o fato de que $\mathrm{I}_0(\lambda h)$ é uma série. A razão entre estes dois coeficientes em (3.3) e (3.8) resulta na seguinte expressão:

$$R_{\mathrm{I}_0/\mathrm{T}_1} := \frac{15}{6}\left(\frac{6\mathrm{I}_0(\lambda h) - 6\mu_6 + 8sen^2(\frac{h\pi}{2})}{6\mathrm{T}_1(\lambda h) - 6\mu_6 + 8sen^2(\frac{h\pi}{2})}\right) = \frac{15}{6}\left[1 + \frac{1}{\mathrm{T}_1(\lambda h) - \mu_6 + \frac{4}{3}sen^2(\frac{h\pi}{2})}\left(\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(\lambda h)^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\right)\right]$$

fazendo $\mu_6 = 1$, tem-se:

$$R_{\mathrm{I}_0/\mathrm{T}_1} \geq \frac{15}{6}\left[1 + \frac{1}{\mathrm{T}_1(\lambda h) + \frac{4}{3}sen^2(\frac{h\pi}{2}) - 1}\left(\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(\lambda h)^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\right)\right]$$

A Figura 3.3 mostra o termo que envolve a série na expressão de $R_{\mathrm{I}_0/\mathrm{T}_1}$ para vários valores de h e λ – a série foi aproximada pela soma dos primeiros 500 termos. O gráfico utiliza uma escala Log-Log.

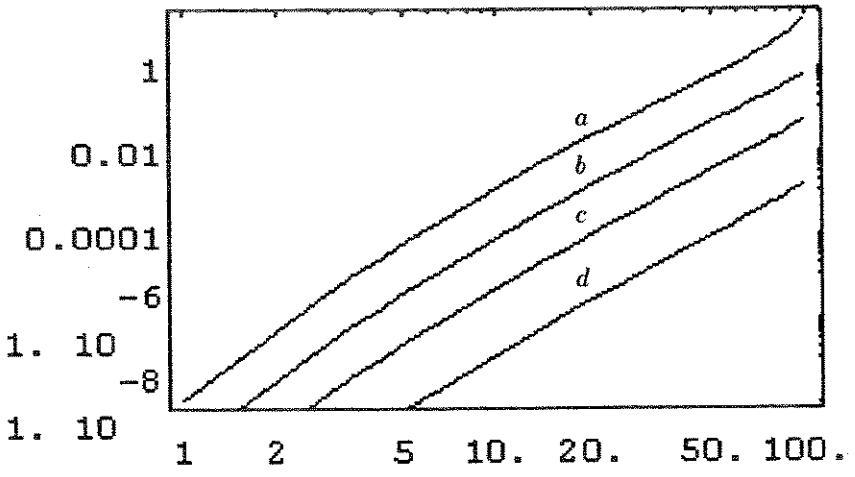

Figura 3.3 – Gráfico para $\sum_{k=3}^{N} \frac{(\lambda h)^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \Big/ \left(\mathrm{T}_1(\lambda h) + \frac{4}{3}\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi h}{2}\right) - 1\right)$, N=500

$-(a)\ h = 0.1$; $(b)\ h = 0.05$; $(c)\ h = 0.025$; $(d)\ h = 0.01$

3.3. RESULTADOS PARA A REDE QUADRADA

Teorema 3.2 Seja $u(x,y) \in \mathrm{C}^{\infty}(\Omega)$ a solução do problema de valor de contorno Σ e seja S_h a rede dada na Definição 3.2. Seja $\{U_{i,j}\}$ uma função de rede, definida em S_h, satisfazendo a seguinte equação a diferenças para $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N$ e $j = 1,\ 2,\ \cdots,\ M$.

$$U_{i,j} = \frac{1}{4\,\mathrm{I}_0(\lambda h)}\left(U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}\right) \tag{3.9}$$

Então:

$$\| u - U \|_p \leq \alpha(h,\lambda)\left[\frac{4h^4 M_4}{4!} + \mathrm{O}(h^6)\right] \tag{3.10}$$

Com:

$$\alpha(h,\lambda) = \begin{cases} \sqrt{M_0 N_0}\,/(\mathrm{I}_0(\lambda h) + 2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi h}{2}\right) - 1) & \text{if } p = 2 \\ 1/\,(\mathrm{I}_0(\lambda h) - 1) & \text{if } p = \infty \end{cases}$$

Corolário 3.2 Seja $u(x,y) \in \mathrm{C}^{\infty}(\Omega)$ a solução do problema de valor de contorno Σ e seja a rede S_h dada na Definição 3.2. Seja $\{U_{i,j}\}$ uma função de rede, definida em S_h satisfazendo a equação a diferenças (3.9) para $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N$ e $j = 1,\ 2,\ \cdots,\ M$. Então:

$$\| u - U \|_{\infty} = \mathrm{O}(h^2) \tag{3.11}$$

A mesma comparação feita para o caso da rede triangular pode ser feita para a rede quadrada. Neste caso, a equação (3.9) tem como correspondente, no método a diferenças finitas, a equação:

$$U_{i,j} = \frac{1}{4\,\mathrm{T}_0(\lambda h)}\,(U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}) \tag{3.12}$$

onde:

$$\mathrm{T}_0(\lambda h) = 1 + \frac{(\lambda h)^2}{4}$$

Para avaliar o erro de precisão proveniente do uso da equação (3.12) desenvolvemos $u(x,y)$ em série de *Taylor* para os pontos da rede S_h e substituimos $\Delta u = \lambda^2 u$. Então deduzimos o seguinte resultado:

$$u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4\,\mathrm{T}_0(\lambda h)u_{i,j} = \tau\{u_{i,j}\}$$

A expressão do erro de truncamento $\tau(u_{i,j}\}$ foi deduzida no Capítulo 1, equação 1.9. Um limitante superior para este erro pode ser obtido substituindo-se as derivadas de quarta ordem por M_4, conforme notação introduzida no Capítulo 1, resultando em:

$$\tau\{u_{i,j}\} = \frac{2h^4}{4!}\Big(\frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x_j^4} + \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial y_j^4}\Big) + \mathrm{O}(h^6) \leq \frac{4h^4 M_4}{4!} + \mathrm{O}(h^6) \tag{3.13}$$

Para avaliar o erro de precisão neste caso, procedemos da mesma forma como no Capítulo 1, aproximando a solução u pela função de rede U. Neste caso o limitante superior para o erro de precisão é dado por:

$$\| u - U \|_2 \leq \| A_4^{-1} \|_2 \| \tau\{u\} \|_2 \leq \frac{\sqrt{MN}}{4\mathrm{T}_0(\lambda h) - 4 + 8sen^2(\frac{h\pi}{2})}\left[\frac{4h^4 M_4}{4!} + \mathrm{O}(h^6)\right] \tag{3.14}$$

Nota: O resultado do Teorema 3.2 como extensão do método de diferenças finitas

A diferença básica entre as expressões (3.9) e (3.12) é a série que representa a função de Bessel presente no denominador de (3.9) enquanto no denominador de (3.12) temos um polinômio, $\mathrm{T}_0(\lambda h)$, contendo os dois primeiros termos da série. Esta diferença nos permite fazer uma avaliação numérica do erro de precisão distinta para cada uma das expressões, como pode ser visto nas equações (3.10) e (3.14). Neste caso, o método proposto também apresenta vantagens com respeito a forma tradicional dos métodos a diferenças finitas. Considerando somente o termo de quarta ordem nas equações (3.10) e

(3.14) podemos constatar que este termo é menor em (3.10) do que em (3.14). A razão entre estes dois termos resulta na seguinte expressão:

$$R_{I_0/T_0} := \frac{4I_0(\lambda h) - 4 + 8sen^2(\frac{h\pi}{2})}{4T_0(\lambda h) - 4 + 8sen^2(\frac{h\pi}{2})} = 1 + \frac{1}{T_0(\lambda h) + 2sen^2(\frac{h\pi}{2}) - 1} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda h)^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \right)$$

A Figura 3.4 mostra o termo que envolve a série na expressão de R_{I_0/T_0} para vários valores de h e λ – a série foi aproximada pela soma dos primeiros 500 termos. O gráfico utiliza uma escala Log-Log.

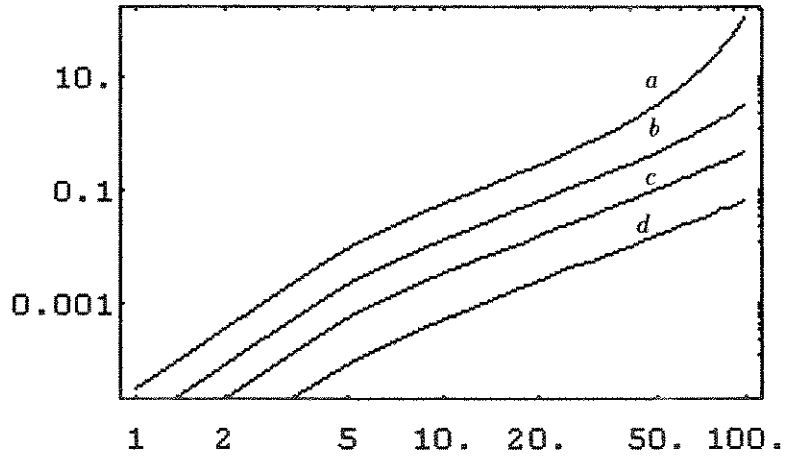

Figura 3.4 – Gráfico para $\sum_{k=2}^{N} \frac{(\lambda h)^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \Big/ \left(T_0(\lambda h) + 2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi h}{2}\right) - 1 \right)$, N=500

– (a) $h = 0.1$; (b) $h = 0.05$; (c) $h = 0.025$; (d) $h = 0.01$

Os resultados contidos nos Teoremas 3.1 e 3.2 não podem ser obtidos através das análises usuais de diferenças finitas ou outras. O desenvolvimento destas idéias é o resultado e o objetivo principal desta Tese.

A justificativa dos resultados apresentados nos Teoremas 3.1, 3.2 e Corolários, toma por base a resolução do problema (Σ) em um conjunto de bolas entrelaçadas, com centro em cada nó da rede. As bolas devem ser dispostas de modo que ao se escolher uma bola qualquer, o contorno da mesma passe pelo centro de todas as bolas vizinhas à ela. Com esta forma de construção obtemos uma sub-cobertura regular do domínio de definição do problema. Os resultados dos Teoremas 3.1 e 3.2 originam-se da aplicação do *Teorema do Valor Médio* para cada uma das bolas da sub-cobertura. A justificativa de tais resultados requer algumas definições e resultados adicionais.

3.4. RESULTADOS SOBRE A CONVERGÊNCIA DO MÉTODO

Definição 3.3

Seja $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto e $\mathbb{B}_i = \mathbb{B}_h(z_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$, bolas abertas de raio h e centro no ponto $z_i = (x, y) \in \Omega$, tal que $\overline{\mathbb{B}}_i \subset \overline{\Omega}$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$. Além disso, para todos índices i e j tal que $i \neq j$, se $\mathbb{B}_i \bigcap \mathbb{B}_j \neq \emptyset \Rightarrow z_i \in \partial\mathbb{B}_j$ e $z_j \in \partial\mathbb{B}_i$. Definimos assim uma cobertura parcial W para $\overline{\Omega}$, tal que $W = \bigcup_i \mathbb{B}_i$ como mostra a Figura 3.5. Supondo que a função Ψ definida em $\partial\Omega$ seja extendida de acordo com o problema Σ até o contorno ∂W, de forma que o problema Σ' definido a seguir, tenha solução idêntica ao problema Σ no domínio W:

$$\text{Problema } (\Sigma'): \quad \begin{cases} \Delta u(x,y) - \lambda^2 u(x,y) = 0 & (x,y) \in W \\ u(x,y) = \Psi(x,y) & (x,y) \in \partial W \end{cases}$$

Observamos que a fronteira ∂W não coincide obrigatoriamente com $\partial\Omega$ em todos os pontos, a Figura 3.5 ilustra um exemplo deste tipo. Neste caso é necessário transferir de alguma forma as condições de contorno de $\partial\Omega$ para ∂W.

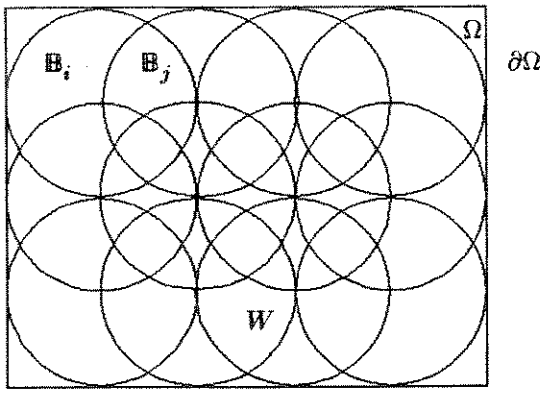

Figura 3.5. Cobertura regular de Ω

Definição 3.4

Seja $\psi(x,y)$ uma função de classe $\mathbb{C}^{\infty}(\overline{W})$ definida como extensão contínua arbitrária da função $\Psi(x,y)$ de classe $\mathbb{C}^{\infty}(\partial W)$. Definimos os operadores $\mathrm{T}_i:\mathbb{C}^{\infty}(\overline{W})\rightarrow\mathbb{C}^{\infty}(\overline{W})$, $i=1,2,\cdots,n$, tal que $\phi=\mathrm{T}_i(\psi)$ é definido como:

$$\phi=\begin{cases} \psi & \text{em} \quad W\backslash\mathbb{B}_i \\ u_i & \text{em} \quad \mathbb{B}_i \end{cases} \tag{3.15}$$

onde u_i satisfaz o seguinte problema de valor de contorno:

$$\Delta u_i(x,y)-\lambda^2 u_i(x,y)=0 \qquad (x,y)\in\mathbb{B}_i \tag{3.16}$$

$$u_i(x,y)=\psi(x,y) \qquad (x,y)\in\partial\mathbb{B}_i \tag{3.17}$$

Aplicando sucessivamente cada operador T_i ,i=1,2,$\cdots$,n teremos definido ao final, quando $i=n$, uma função $u^1=\mathrm{T}_n\circ\mathrm{T}_{n-1}\circ\cdots\circ\mathrm{T}_1(\psi)$ em $\overline{W}$. Denotando por $\mathbb{T}:\mathbb{C}^{\infty}(W)\mapsto\mathbb{C}^{\infty}(W)$ o operador definido pela composição $\mathbb{T}=[\mathrm{T}_1\circ\mathrm{T}_2\circ\cdots\circ\mathrm{T}_n]$, podemos gerar uma sequência de funções u^m, $m=1,2,\cdots$, através da relação recursiva $u^{m+1}=\mathbb{T}(u^m)$, com $u^0=\psi$.

Teorema 3.3

O operador $\mathbb{T}$ é uniformemente contrativo em $\mathbb{C}^{\infty}(\overline{W})$, ou seja:

$$\| \mathbb{T}(u^{m+1})-\mathbb{T}(u^m) \|_{\overline{W}} \leq \alpha \| u^{m+1}-u^m \|_{\overline{W}} \tag{3.18}$$

para um certo α positivo e $\alpha<1$.

Corolário 3.3

Seja $u^0(x,y)\in\mathbb{C}^{\infty}(\overline{W})$ definida como extensão contínua arbitrária da função de contorno $\Psi(x,y)$ do problema original Σ e, $u(x,y)$ a solução deste problema. Se $u^m=\mathbb{T}^m(u^0)$, então:

$$\| u(x,y)-u^m(x,y) \|_{\overline{W}}\rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \mathrm{m}\rightarrow\infty \tag{3.19}$$

Outra informação importante para a justificativa dos resultados que apresentamos é o *Teorema do Valor Médio* para equações elípticas de *Helmholtz* em um domínio definido por uma bola de raio h e centro no ponto $z = (x,y)$, $\mathbb{B}_h(z) \subset \Omega$.

3.5. AVALIAÇÃO NUMÉRICA DO VALOR MÉDIO PARA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

A base teórica para demonstração dos Teoremas (3.1) e (3.2) é o Teorema do Valor Médio para equação de *Helmholtz* desenvolvida em [Courant e Hilbert-1962]. Este resultado pode ser interpretado como uma generalização do Teorema do Valor Médio para funções harmônicas satisfazendo a equação de *Laplace* em uma bola $\mathbb{B}_h \subset \mathbb{R}^2$.

Teorema 3.4

Seja $\mathbb{B} = \mathbb{B}_h(z)$ uma bola aberta de raio h e centro no ponto $z \in \mathbb{R}^2$ e, $\partial\mathbb{B}$ o contorno de $\mathbb{B}$. Definimos por $\overline{\mathbb{B}} = \mathbb{B} \cup \partial\mathbb{B}$ o fecho de $\mathbb{B}$. Sejam $u(x,y), \psi(x,y) \in \mathbb{C}^{\infty}(\overline{\mathbb{B}})$ funções satisfazendo o seguinte problema de valor de contorno:

$$\Delta u(x,y) - \lambda^2 u(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \mathbb{B} \tag{3.20}$$

$$u(x,y) = \psi(x,y) \qquad (x,y) \in \partial\mathbb{B} \tag{3.21}$$

Então a relação entre o valor que u assume no contorno $\partial\mathbb{B}$ e o valor de u no centro de $\mathbb{B}$ é dada pela seguinte equação:

$$\frac{1}{2\pi h} \int_{\partial\mathbb{B}} u \, \mathrm{ds} = u(z) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{h}{2}\right)^{2k} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2} \right] \tag{3.22}$$

Reconhecendo a série do lado direito de (3.22) como a função modificada de Bessel de ordem zero e denotando-a por $\mathrm{I}_0(\lambda h)$, podemos escrever $u(z)$ como:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi h \mathrm{I}_0(\lambda h)} \int_{\partial\mathbb{B}} \psi \, ds \tag{3.23}$$

$\mathrm{I}_0(\lambda h)$ é uma função estritamente crescente e positiva na reta positiva e $\mathrm{I}_0(0) = 1$.

A aplicação deste resultado à bola $\mathbb{B} = \mathbb{B}_h(z)$ com centro no ponto $z = (x_i, y_j)$ e contorno $\partial\mathbb{B}$ permite definir a função de rede $u_{i,j}$ no ponto z, associada à solução do problema de valor de contorno (3.20)-(3.21), como:

$$u_{i,j} = \frac{1}{2\pi h \mathrm{I}_0(\lambda h)} \int_{\partial\mathbb{B}} u(x,y)\,ds \tag{3.24}$$

Conhecendo a função $u(x,y)$ em alguns pontos sobre o contorno da bola $\partial\mathbb{B}$, podemos utilizar esses valores para resolver a integral (3.24) numericamente. Para tanto, utilizamos as coordenadas polares em $\mathbb{B}$ definidas por $x = x_i + h\cos\theta$ e $y = y_i + h\,sen\,\theta$, onde podemos considerar sem perda de generalidade que $z = (0,0)$ e escrever a integral de contorno (3.24) como:

$$u_{i,j} = \frac{1}{2\pi \mathrm{I}_0(\lambda h)} \int_0^{2\pi} u(h,\theta)\,d\theta \tag{3.25}$$

onde $u(h,\theta) = u(h\cos\theta, h\,sen\theta)$ e $d\theta = h^{-1}ds$.

Para pontos regularmente espaçados, como definido nas redes triangulares e quadradas, é possível fazer uma avaliação da integral (3.25), através do método dos trapézios com grande precisão, justamente por termos $\theta \rightarrow u(h,\theta)$ como uma função periódica [Davis e Rabinowitz-1975].

Teorema 3.5

Seja $u(h,\theta)$ uma função de classe $\mathbb{C}^\infty$, conhecida em uma vizinhança de $\partial\mathbb{B}_h$ e consideremos a integral (3.25) em $\partial\mathbb{B}_h$. Então a seguinte avaliação é válida:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(h,\theta)d\theta - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u(h,\frac{2k\pi}{n}) \right| \leq |\,\tau_n\{u\}\,| \tag{3.26}$$

onde $|\,\tau_n\{u\}\,| \leq \frac{h^n M_n}{n!} + \mathrm{O}(h^{n+2})$ é o limitante superior para o erro de integração e M_n como definido no Capítulo 1. O parâmetro n representa o número de pontos igualmente espaçados no contorno $\partial\mathbb{B}_h$. Quando $n = 4$ significa que estamos considerando uma rede quadrada, quando $n = 6$, estamos considerando a rede triangular.

CAPÍTULO 4

O OPERADOR CONTRATIVO

Neste capítulo apresentamos a prova da convergência do método proposto, **Teorema 3.3.** Esta prova basea-se no Princípio do Máximo para equações elípticas [Gilbrag e Trundinger-1983] e no Método Alternante de *Schwarz.* Para esta prova devemos ter em mente a cobertura do domínio de definição $\overline{\Omega}$ por bolas entrelaçadas, conforme Definição 3.3 feita no Capítulo 3. Na sequência demostramos o **Corolário 3.3** relacionado à unicidade da solução.

4.1. RESULTADOS AUXILIARES:

Seja Ω uma superfície aberta no $\mathbb{R}^2$, limitada pelo contorno $\partial\Omega$ e $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, o fecho de Ω. Seja $(x,y) \mapsto u$ uma função real, cujo domínio de definição é $\overline{\Omega}$. Supondo que $u(x,y) \in \mathbb{C}^2(\Omega) \bigcap \mathbb{C}^0(\overline{\Omega})$ satisfaz a equação:

$$\mathcal{L}u(x,y) = 0 \qquad\qquad (x,y) \in \Omega \tag{4.1}$$

onde $\mathcal{L}$ é um operador estritamente elíptico definido por:

$$\mathcal{L} = a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2}{\partial y^2} + d\frac{\partial}{\partial x} + e\frac{\partial}{\partial y} + g \tag{4.2}$$

Supondo que são válidas as hipótese H1, H2 e H3, formuladas no Capítulo 2, podemos enunciar os seguintes Teoremas:

Teorema 4.1. Princípio do Máximo

Seja $\mathcal{L}$ um operador elíptico no domínio de definição Ω. Supondo que $\mathcal{L}u \geq 0$ e $g = 0$ em Ω, com $u \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}^0(\overline{\Omega})$. então o máximo de u em $\overline{\Omega}$ encontra-se em $\partial\Omega$, isto é:

$$\underset{\Omega}{Sup}\ u = \underset{\partial\Omega}{Sup}\ u \tag{4.3}$$

Prova: Mostraremos inicialmente que se $\mathcal{L}u > 0$ em Ω, então o princípio estrito do máximo é válido. Isto é, u não pode assumir o máximo em um ponto z_0 interior de $\overline{\Omega}$, pois para tal ponto o gradiente seria nulo, $Du(z_0) = 0$, e a matriz *Hessiana* $D^2u(z_0)$ seria semidefinida negativa. Porém, sendo o operador $\mathcal{L}$ estritamente elíptico, a matriz formada pelos coeficientes de $\mathcal{L}$ é positiva definida. Consequentemente:

$$\mathcal{L}u = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leq 0$$

contradizendo a hipótese de que $\mathcal{L}u > 0$. Denotando-se por λ_0 o mínimo autovalor da matriz dos coeficientes de $\mathcal{L}$, existe uma constante λ tal que $0 < \lambda < \lambda_0$. Fazendo a hipótese de que $|d|/\lambda \leq c_0$ e $|e|/\lambda \leq c_0$, então desde que $a \geq \lambda$, existe uma constante γ suficientemente grande para a qual:

$$\mathcal{L}e^{\gamma x} = (\gamma^2 a + \gamma d)e^{\gamma x} \geq \lambda(\gamma^2 - \gamma c_0)e^{\gamma x} > 0$$

Assim para qualquer $\varepsilon > 0$, temos $\mathcal{L}(u + \varepsilon e^{\gamma x}) > 0$ em Ω, tal que:

$$\sup_{\Omega}(u + \varepsilon e^{\gamma x}) = \sup_{\partial\Omega}(u + \varepsilon e^{\gamma x})$$

no limite quando $\varepsilon \to 0$, mostra-se que $\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$, como assegura o Teorema. □

Vamos supor o caso mais geral onde $g \leq 0$ em Ω. Considerando o subconjunto $\Omega^+ \subset \Omega$, no qual $u > 0$, vemos que se $\mathcal{L}u \geq 0$ em Ω, então $\mathcal{L}u \geq 0$ em Ω^+. Assim podemos escrever que:

$$\mathcal{L}_0 u = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} \geq -gu \geq 0 \qquad \text{em} \qquad \Omega^+$$

Logo o máximo de u em $\overline{\Omega}^+$ deve ocorrer em $\partial\overline{\Omega}^+$ e, por continuidade de u, o máximo de u em $\overline{\Omega}$ deve ocorrer também em $\partial\overline{\Omega}$. Definindo-se $u^+ = max(0, u)$ e $u^- = min(u, 0)$ podemos enunciar este resultado na forma de corolário como se segue:

Corolário 4.1.

Seja $\mathcal{L}$ elíptico em um domínio limitado $\overline{\Omega}$. Supondo-se que $\mathcal{L}u \geq 0$ e $g \leq 0$ em $\overline{\Omega}$. então: $\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$. Se $\mathcal{L}u = 0$ em $\overline{\Omega}$, então $\sup_{\overline{\Omega}} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u|$

Nota: O Princípio do Máximo para equação de *Helmholtz*

Uma observação importante que podemos fazer neste momento é que se $u(x,y) \in \mathbb{C}^2(\Omega) \bigcap \mathbb{C}^0(\overline{\Omega})$ e satisfaz a equação de *Helmholtz* $\Delta u - \lambda^2 u = 0$ em $\overline{\Omega}$, então pelo Corolário 4.1 podemos assegurar que: $\underset{\overline{\Omega}}{Sup}|u| \leq \underset{\partial\Omega}{Sup}|u|$.

Lema 4.1.

Seja $\mathbb{B}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ o conjunto de bolas que compõem a cobertura W, dada na Definição 3.1, e selecionemos uma bola $\mathbb{B}_i$ tal que $\partial\mathbb{B}_i \cap \partial W \neq \emptyset$. Seja D_i o subconjunto de W tal que $\mathrm{D}_i = \{\bigcup \mathbb{B}_j : \mathbb{B}_i \cap \mathbb{B}_j \neq \emptyset\}$, e seja uma função w suficientemente regular satisfazendo as seguintes condições:

(i) $\Delta w - \lambda^2 w = 0$ em $\overline{\mathrm{D}}_i$

(ii) $w = 0$ em $\partial\mathbb{B}_i \cap \partial W$

(iii) $\| w \|_{\overline{D}_i} \leq 1$

Então existe uma constante positiva $q < 1$ dependendo somente de $\mathbb{B}_i$, tal que w satisfaz a desigualdade $\| w \| \leq q$ em $\overline{\mathbb{B}}_i$. Se $\partial\mathbb{B}_i \cap \partial W = \emptyset$ então o resultado acima é válido com $q \leq 1$.

Prova:

Selecionando-se uma bola $\mathbb{B}_i$ tal que $\partial\mathbb{B}_i \cap \partial W \neq \emptyset$, como ilustra a Figura 4.1. Seja $\partial\mathbb{S}_i = \partial\mathbb{B}_i \cap \partial\mathrm{D}_i$ e pela definição de $\overline{\mathrm{D}}_i$ verifica-se que $\partial\mathbb{S}_i \neq \emptyset$. Como $\Delta w - \lambda^2 w = 0$ em $\overline{\mathrm{D}}_i$, pelo Princípio do Máximo, podemos afirmar que w assume o valor máximo na fronteira $\partial\mathrm{D}_i$. Desde que $w = 0$ em $\partial\mathbb{S}_i$ então o máximo valor de w ocorre em $\partial\mathrm{D}_i \backslash \partial\mathbb{S}_i$ a uma certa distância de $\partial\mathbb{S}_i$, devido a continuidade de w.

Uma vez que $w = 0$ em $\partial\mathbb{S}_i$ e desde que $\partial\mathbb{B}_i \backslash \partial\mathbb{S}_i$ tem apenas dois pontos em comum com $\partial\mathrm{D}_i \backslash \partial\mathbb{S}_i$ onde $w = 0$, o máximo valor de w ocorre a uma certa distância de $\partial\mathbb{B}_i$, externo à bola $\mathbb{B}_i$.

Podemos concluir, pelo Princípio do Máximo, que existe um número positivo $q < 1$ tal que $\| w \|_{\mathbb{B}_i} \leq q < 1$. Se $\partial\mathbb{S}_i = \emptyset$, então da condição (iii) e do Princípio do Máximo é óbvio que $q \leq 1$. □

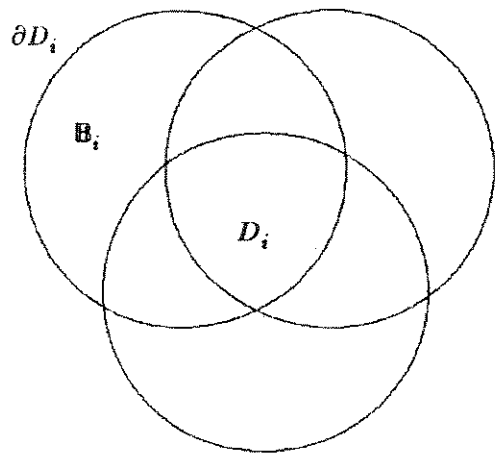

Figura 4.1 – Ilustração para o Lema 4.1

4.2. PROVA DO TEOREMA 3.3

Consideremos aqui as bolas $\mathbb{B}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Seja $u^0(x,y)$ uma extensão contínua arbitrária de classe $C^\infty(\bar{W})$ da função $\Psi(x,y) \in C^\infty(\partial\Omega)$ e os operadores T_i e $\mathbb{T} = [T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_n]$ dados na Definição 3.4. Seja a sequência de funções u^m, $m = 1, 2, \cdots$ tal que $u^{m+1} = \mathbb{T}(u^m)$. Consideremos então a função u_i^{m+1} definida por:

$$u_i^{m+1} = T_i(u^m) \text{ em } \mathbb{B}_i \quad \text{e} \quad u_i^{m+1} = u^m \text{ em } W/\mathbb{B}_i$$

De acordo com a definição de T_i, esta função satisfaz o seguinte problema de valor de contorno:

$$\Delta u_i^{m+1}(x,y) - \lambda^2 u_i^{m+1}(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \mathbb{B}_i \tag{4.4}$$

$$u_i^{m+1}(x,y) = u^m(x,y) \qquad (x,y) \in \partial\mathbb{B}_i \tag{4.5}$$

Podemos escrever, de forma geral, para duas soluções consecutivas u_i^m e u_i^{m+1} em $\mathbb{B}_i$ que:

$$u_i^m = T_i(u^{m-1}) \qquad \text{e} \qquad u_i^{m+1} = T_i(u^m) \tag{4.6}$$

De acordo com o Lema 4.1 consideremos o conjunto $D_i = \{\cup \mathbb{B}_i : \mathbb{B}_i \cap \mathbb{B}_j \neq \emptyset, \mathbb{B}_j \subseteq W\}$ e denotamos por:

$$M_i^m = \| u_i^{m+1} - u_i^m \|_{\bar{D}_i} \tag{4.7}$$

Note-se que ao definirmos uma função w: $\overline{D}_i \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$w = \frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{M_i^m}$$

verificamos pela linearidade do operador *Laplaciano* que:

$$\Delta w = \frac{1}{M_i^m}\left[\Delta\left(u_i^{m+1} - u_i^m\right)\right] = \lambda^2 w$$

Assim $\Delta w - \lambda^2 w = 0$ em $\overline{D}_i$ e, pelo Princípio do Máximo e (4.5), podemos escrever que:

$$\| w \|_{\overline{D}_i} = \| w \|_{\partial D_i} = \frac{1}{M_i^m} \| u^m - u^{m-1} \|_{\partial D_i} \leq 1$$

Além disto, se $\partial \mathbb{B}_i \cap \partial W \neq \emptyset$ segue-se que $w = 0$ em $\partial \mathbb{B}_i \cap \partial W$ portanto w satisfaz as condições (i) – (iii) do Lema 4.1, o que nos permite escrever:

$$\| u_i^{m+1} - u_i^m \|_{\mathbb{B}_i} \leq q_i M_i^m \quad \text{com} \quad 0 < q_i < 1$$

Substituindo as expressões (4.6) e (4.7) na expressão acima, obtemos:

$$\| T_i(u^m) - T_i(u^{m-1}) \|_{\mathbb{B}_i} \leq q_i \| u^m - u^{m-1} \|_{\overline{D}_i} \qquad 0 < q_i < 1 \tag{4.8}$$

Considerando agora a função u_{i+1}^{m+1} definida por:

$$u_{i+1}^{m+1} = T_{i+1} \circ T_i(u^m) \text{ em } \mathbb{B}_{i+1} \qquad \text{e} \qquad u_{i+1}^{m+1} = u_i^{m+1} \text{ em } W \backslash \mathbb{B}_{i+1} \tag{4.9}$$

De acordo com a definição de T_{i+1}, essa função satisfaz o seguinte problema de valor de contorno:

$$\Delta u_{i+1}^{m+1}(x,y) - \lambda^2 u_{i+1}^{m+1}(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \mathbb{B}_{i+1} \tag{4.10}$$

$$u_{i+1}^{m+1}(x,y) = u_i^{m+1}(x,y) \qquad (x,y) \in \partial \mathbb{B}_{i+1} \tag{4.11}$$

Então podemos escrever para duas soluções consecutivas u_{i+1}^m e u_{i+1}^{m+1} que:

$$u_{i+1}^m = T_{i+1} \circ T_i(u^{m-1}) \qquad \text{e} \qquad u_{i+1}^{m+1} = T_{i+1} \circ T_i(u^m) \tag{4.12}$$

Procedendo da mesma forma como feito na primeira iteração para a bola $\mathbb{B}_i$, chegamos à seguinte relação para todo ponto (x,y) no conjunto $\mathbb{B}_i \cup \mathbb{B}_{i+1}$:

$$| \mathrm{T}_{i+1} \circ \mathrm{T}_i(u^m)(x,y) - \mathrm{T}_{i+1} \circ \mathrm{T}_i(u^{m-1})(x,y) | \leq q_{i+1} \| \mathrm{T}_i(u^m) - \mathrm{T}_i(u^{m-1}) \|_{\bar{D}_{i+1}}$$

ou ainda, utilizando a relação (4.8), temos que :

$$| \mathrm{T}_{i+1} \circ \mathrm{T}_i(u^m)(x,y) - \mathrm{T}_{i+1} \circ \mathrm{T}_i(u^{m-1})(x,y) | \leq q_{i+1} q_i \| u^m - u^{m-1} \|_{\bar{D}_{i+1} \cup \bar{D}_i}$$

Esta expressão é válida para todo ponto (x,y) no conjunto $\mathbb{B}_i \cup \mathbb{B}_{i+1}$. Desde que $\partial\mathbb{B}_i \cap \partial W \neq \emptyset$ então, pelo Lema 4.1, $0 < q_i < 1$. Assim, podemos concluir que:

$$\| \mathrm{T}_{i+1} \circ \mathrm{T}_i(u^m) - \mathrm{T}_{i+1} \circ \mathrm{T}_i(u^{m-1}) \|_{\bar{\mathbb{B}}_i \cup \bar{\mathbb{B}}_{i+1}} \leq q_i \| u^m - u^{m-1} \|_{\bar{D}_i \cup \bar{D}_{i+1}}$$

Procedendo às sucessivas composições $\mathrm{T}_1 \circ \mathrm{T}_2 \circ \cdots \circ \mathrm{T}_k \circ \cdots$ que definem o operador $\mathbb{T}$ atingimos a alguma bola $\mathbb{B}_k$, com $\partial\mathbb{B}_k \cap \partial W \neq \emptyset$, para a qual $q_k < 1$. Neste caso, denotando-se por $\alpha = max\{q_k \mid q_k < 1,\ k = 1,2,\cdots,n\}$, podemos escrever que:

$$\| \mathbb{T}(u^{m+1}) - \mathbb{T}(u^m) \|_{\bar{W}} \leq \alpha \| u^{m+1} - u^m \|_{\bar{W}} \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{4.13}$$

e assim a prova do teorema fica concluida. □

4.3. PROVA DO COROLÁRIO 3.3

Considere $\mathbb{C}^0(W)$ e seja a sequência $\{v^m\}$ satisfazendo a relação $v^{m+1} = \mathbb{T}(v^m)$. Uma vez que $\mathbb{T}$ é um operador contrativo e $\mathbb{C}^0(W)$ é um espaço métrico completo com relação a norma do sup, a sequência $\{v^m\}$ converge quando m$\rightarrow\infty$ para uma função $v \in \mathbb{C}^0(W)$, o único ponto fixo de $\mathbb{T}$ em $\mathbb{C}^0(W)$, tal que $\mathbb{T}(v) = v$. Assim, conforme a Definição 3.4 do Capítulo 3, seja v_i uma função definida na bola $\mathbb{B}_i$ satisfazendo $v_i = \mathrm{T}_i(v)$. Como $v = \mathrm{T}_i(v)$ também vale, temos, pelas hipóteses H1, H2 e H3, a unicidade da solução do problema de *Dirichlet* em $\mathbb{B}_i$. Assim, $v_i = v$ em $\mathbb{B}_i$. Sendo $W = \cup \mathbb{B}_i$ e $\mathbb{B}_i \cap \mathbb{B}_j \neq \emptyset$ para algum j, e desde que as soluções v_i e v_j são idênticas na região de interseção $\mathbb{B}_i \cap \mathbb{B}_j$, então $v = \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{T}_2 \circ \cdots \circ \mathrm{T}_n(v) = \mathbb{T}(v)$ satisfaz o problema de contorno de *Dirichlet* Σ':

$$\Delta v(x,y) - \lambda^2 v(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in W$$
$$v(x,y) = \Psi(x,y) \qquad (x,y) \in \partial W$$

Agora, visto que $\overline{W} \subset \overline{\Omega}$, e a solução do problema Σ, $u(x,y) \in \mathbb{C}^\infty(\Omega)$, coincide por hipotese com a solução do problema Σ', visto ainda que v satisfaz também esse problema para $\forall (x,y) \in W$ e cosiderando agora $w = v - u$ e usando a propriedade da unicidade da solução, garantida pelas hipóteses H1, H2 e H3, temos que $u = v$, portanto $v \in \mathbb{C}^\infty(W)$. Desde que $v = \lim_{m \to \infty} v^m$ na norma do sup, podemos definir a sequência $\{w^m = v^m - u\}$, para concluir que:

$$\lim_{m \to \infty} \| v^m - u \|_{\overline{W}} = 0. \qquad \square$$

CAPÍTULO 5
AVALIAÇÃO DO ERRO DA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo provamos o **Teorema 3.5**, cujo o resultado é a avaliação do erro introduzido ao fazer-se uma aproximação numérica para a integral de contorno que aparece na expressão do Teorema do Valor Médio. Antes porém apresentamos a demonstração do Teorema do Valor Médio, encontrada em [Courant e Hilbert-1962], para a equação de *Helmholtz*.

5.1. O TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

Para maiores detalhes vide seção A.5.3 do Apêndice A. Em linhas gerais, pode-se desenvolver o Teorema do Valor Médio para a equação de *Helmholtz*, partindo-se da identidade de *Green*, como se segue:

$$\frac{1}{2\pi h}\int_{\partial\mathbb{B}} u ds = u(z) + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{B}} \ell n\,\frac{h}{r}\Delta u\, dx \tag{5.1}$$

onde considera-se a função $u \in \mathbb{C}^2(\overline{\mathbb{B}})$ e $\mathbb{B}$ uma bola de raio h. No entanto, é possível encontrar uma fórmula mais geral expandindo-se em série o termo do lado direito de (5.1). Para tanto, considera-se a segunda identidade de *Green* (equação (A.11) do apêndice A) e uma função $v(r)$ com uma singularidade em $r = 0$, satisfazendo as seguintes condições de contorno:

$$v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \qquad \text{em} \qquad \partial\mathbb{B} \tag{5.2}$$

Após se eliminar a singularidade em $r = 0$, procedendo da mesma forma como feito na dedução da equação (A.20) do Apêndice A, chega-se à seguinte identidade:

$$Cu(z) = \int_{\mathbb{B}} (u\Delta v - v\Delta u)\, dx \tag{5.3}$$

onde C é uma constante. Adotando-se uma função $v(r)$ dada por:

$$v(r) = \frac{C}{2\pi} \ell n \frac{1}{r} + g(r) \qquad r \in (0, R) \tag{5.4}$$

sendo $g(r)$ uma função de classe $\mathbb{C}^2(\overline{\mathbb{B}})$ que cresce menos rapidamente que r^{-1} quando $r \to 0$ e supondo-se que $u \in \mathbb{C}^{(2m+2)}(\overline{\Omega})$, $m \geq 0$, então para todo inteiro $k \leq m$, tem-se a identidade:

$$C\Delta^k u(z) = \int_{\mathbb{B}} (\Delta^k u \, \Delta v - v \Delta^{k+1} u) \, dx \tag{5.5}$$

Denotando por Δ^k a $k-$ésima aplicação do operador *Laplaciano*, tal que $\Delta^0 u = u$. Seja agora uma sequência de funções $\{v_k\}$ definidas pela equação diferencial:

$$\Delta v_{k+1} = v''_{k+1} + \frac{1}{r} v'_{k+1} = v_k \qquad (k = 1, 2, \cdots) \tag{5.6}$$

e satisfazendo a condição de contorno (5.2), onde a função v_0 é dada por:

$$v_0 = \frac{1}{2\pi} \ell n \frac{h}{r} \tag{5.7}$$

Verifica-se então que v_k pode ser calculada recursivamente por:

$$v_{k+1} = \int_r^h \rho v_k(\rho) \, \ell n \frac{\rho}{r} \, d\rho \tag{5.8}$$

A solução geral da equação (5.8) é dada por:

$$v_k = \frac{C_k}{2\pi} \ell n \, \frac{1}{r} + g(r) \qquad \text{com} \qquad C_k = \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{h}{2}\right)^{2k} \tag{5.9}$$

Substituindo-se v por v_k em (5.5) tem-se:

$$C_k \Delta^k u(z) = \int_{\mathbb{B}} (v_{k-1} \Delta^k u - v_k \Delta^{k+1} u) \, dx \tag{5.10}$$

Somando-se todas as sequências $k = 1, 2, \cdots, m$, chega-se à seguinte expressão:

$$\sum_{k=1}^{m} C_k \Delta^k u(z) = \int_{\mathbb{B}} (v_0 \, \Delta u - v_m \Delta^{m+1} u) \, dx \tag{5.11}$$

Substituindo v_0 em (5.11) e reagrupando seus termos tem-se a expressão:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{B}} \ell n\frac{h}{r}\Delta u\,dx = \sum_{k=1}^{m} C_k\Delta^k u(z) + \int_{\mathbb{B}} v_m\Delta^{m+1}u\,dx \tag{5.12}$$

comparando (5.12) com (5.1) e substituindo os valores de C_k em (5.12), tem-se:

$$\frac{1}{2\pi h}\int_{\partial\mathbb{B}} u\,ds = \sum_{k=0}^{m}\left(\frac{h}{2}\right)^{2k}\frac{\Delta^k u(z)}{(k!)^2} + \int_{\mathbb{B}} v_m\Delta^{m+1}u\,dx \tag{5.13}$$

Considerando que a função $u\in\mathbb{C}^{2m+2}(\mathbb{B})$ satisfaz a equação de *Helmholtz* $\Delta u-\lambda^2 u=0$, pode-se deduzir que $\Delta^m u=\lambda^{2m}u$. Substituindo esta identidade em (5.13) encontra-se que:

$$\frac{1}{2\pi h}\int_{\partial\mathbb{B}} u\,ds = \sum_{k=0}^{m}\left(\frac{h}{2}\right)^{2k}\frac{\lambda^{2k}u(z)}{(k!)^2} + \int_{\mathbb{B}} v_m\lambda^{2m+2}u\,dx \tag{5.14}$$

O último termo de (5.14) tende a zero quando $m\to\infty$, (ver prova no Apêndice B). Tem-se então a representação da integral do lado esquerdo de (5.14) por uma série infinita como se segue:

$$\frac{1}{2\pi h}\int_{\partial\mathbb{B}} u\,ds = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{h}{2}\right)^{2k}\frac{\lambda^{2k}u(z)}{(k!)^2} \tag{5.15}$$

Reconhecendo a série em (5.15) como a função modificada de Bessel de ordem zero, que se denota por $\mathrm{I}_0(\lambda h)$, pode-se reescrever (5.15) como:

$$\frac{1}{2\pi h}\int_{\partial\mathbb{B}} u\,ds = u(z)\,\mathrm{I}_0(\lambda h) \tag{5.16}$$

A expressão (5.16) é conhecida como o Teorema do Valor Médio para a equação de *Helmholtz*. □

Utilizando a representação em coordenadas polares na bola de raio h e centro no ponto z, podemos escrever a integral de contorno (5.16) como:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{I}_0(\lambda h)}\int_0^{2\pi} u(h,\theta)\,d\theta \tag{5.17}$$

onde $u(h,\theta)=u(h\cos\theta,h\,sen\theta)$ e $hd\theta=ds$.

5.2. PROVA DO TEOREMA 3.5

Seja $\overline{\mathbb{B}}$ uma bola de raio h e centro em um ponto $z=(x_i,y_j)$ limitada pela circunferência $\partial\mathbb{B}$. Seja $u(x,y)$ uma função de classe $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{B})$ e consideremos os seis pontos, vizinhos a z, dados pelas coordenadas cartesianas $(x_i\pm h, y_j)$ e $(x_i\pm h/2, y_j\pm h\sqrt{3}/2)$ em $\partial\mathbb{B}$. Denotemos por $u_z=u(z)$. Fazendo a expansão de $u(x,y)$ em série de *Taylor*, encontramos que:

$$u(x_i+\alpha,y_j+\beta)=u_z+\alpha\frac{\partial u_z}{\partial x_i}+\beta\frac{\partial u_z}{\partial y_i}+\frac{1}{2!}\left(\alpha^2\frac{\partial^2 u_z}{\partial x_i^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 u_z}{\partial x_i\partial y_j}+\beta^2\frac{\partial^2 u_z}{\partial y_j^2}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n\text{-}1!}\left\{\alpha^{n-1}\frac{\partial^{n-1}u_z}{\partial x_i^{n-1}}+\binom{n-1}{1}\alpha^{n-2}\beta\frac{\partial^{n-1}u_z}{\partial x_i^{n-2}\partial y_j}+\cdots+\binom{n-1}{n-2}\alpha\beta^{n-2}\frac{\partial^{n-1}u_z}{\partial x_i\partial y_j^{n-2}}+\beta^{n-1}\frac{\partial^{n-1}u_z}{\partial y_i^{n-1}}\right\}+R_n$$

onde R_n representa o resíduo da série a partir do termo $(n+1)$ da expansão de *Taylor*. Usando a notação:

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x_i}+\beta\frac{\partial}{\partial y_i}\right)^n u_z=\frac{1}{n!}\left\{\alpha^n\frac{\partial^n u_z}{\partial x_i^n}+\binom{n}{1}\alpha^{n-1}\beta\frac{\partial^{n-1}u_z}{\partial x_i^{n-1}\partial y_j}+\cdots+\binom{n}{n-1}\alpha\beta^{n-1}\frac{\partial^{n-1}u_z}{\partial x_i\partial y_j^{n-1}}+\beta^n\frac{\partial^n u_z}{\partial y_i^n}\right\}$$

podemos escrever sinteticamente que:

$$u(x_i+\alpha,y_j+\beta)=u_z+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)^k u_z+R_n$$

Adotando $\alpha=\pm h$, $\beta=0$, ou $\alpha=\pm h/2$, $\beta=\pm h\sqrt{3}/2$, faremos $(x_i+\alpha,y_j+\beta)$ representar os seis pontos vizinhos de (x_i,y_j) localizados sobre $\partial\mathbb{B}$ e igualmente espaçados. Denotamos por u_z o valor de u no ponto $z=(x_i,y_j)$ e por Σu_b, a soma dos valores de u nos seis pontos vizinhos de z, temos então:

$$\sum u_b=\sum_{k=1}^{6}u(h,\frac{k\pi}{3}) \tag{5.18}$$

$$\sum u_b=6u_z+\frac{3h^2}{2!}\Delta u\,|_z+\frac{3h^4}{32}\Delta^2 u\,|_z+\tau\{u_z\} \tag{5.19}$$

A expressão para o erro de truncamento $\tau\{u_z\}$ é apresentada em [Kantorovich e Krylov-1964]:

$$\tau\{u_z\}=\frac{h^6}{16\times 6!}\left(33\frac{\partial^6 u_z}{\partial x_i^6}+45\frac{\partial^6 u_z}{\partial x_i^4\partial y_j^2}+135\frac{\partial^6 u_z}{\partial x_i^2\partial y_j^4}+27\frac{\partial^6 u}{\partial y_j^6}\right)+O(h^8) \tag{5.20}$$

Substituindo as derivadas de sexta ordem de u por M_6, conforme definição dada no Capítulo 1, podemos escrever que:

$$|\,\tau\{u_z\}\,| \leq \frac{15h^6}{6!}M_6 + O(h^8) \tag{5.21}$$

Por outro lado, avaliando u_z pela equação (5.17), deduzida a partir do Teorema do Valor Médio para a equação de *Helmholtz*, temos:

$$I_0(\lambda h)u_z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(h,\theta)\,d\theta \tag{5.22}$$

Resolvendo a integral do lado direito de (5.22) pelo Método dos Trapézios encontramos que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(h,\theta)\,d\theta = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} u(h,\frac{k\pi}{3}) + \tau_6\{u\} \tag{5.23}$$

onde $\tau_6\{u\}$ representa o erro de integração introduzido pelo Método dos Trapezios. Substituindo (5.23) em (5.22), podemos reescrevê-la como:

$$6\,I_0(\lambda h)u_z = \sum u_b + 6\,\tau_6\{u\} \tag{5.24}$$

usando o valor de $\sum u_b$ deduzido em (5.19) e substituindo em (5.24), temos que:

$$6\tau_6\{u\} = 6\,I_0(\lambda h)u_z - 6\,u_z - \frac{3h^2}{2!}\Delta u\,|_z - \frac{3h^4}{32}\Delta^2 u\,|_z$$
$$- \frac{h^6}{16\times 6!}\Big(33\frac{\partial^6 u_z}{\partial x_i^6} + 45\frac{\partial^6 u_z}{\partial x_i^4\partial y_j^2} + 135\frac{\partial^6 u_z}{\partial x_i^2\partial y_j^4} + 27\frac{\partial^6 u}{\partial y_j^6}\Big) + O(h^8) \tag{5.25}$$

Substituindo em (5.25), $I_0(\lambda h)$ por sua representação na forma de série e levando em conta que para a equação de *Helmholtz* homogênea temos $\Delta u = \lambda^2 u$, $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \lambda^4 u$ e $\Delta^3 u = \Delta(\Delta^2 u) = \lambda^6 u$, obtemos a seguinte expressão:

$$6\tau_6\{u\} = \frac{3h^6}{16\times 6!}\Big(-\frac{\partial^6 u_z}{\partial x_i^6} - 15\frac{\partial^6 u_z}{\partial x_i^4\partial y_j^2} + 15\frac{\partial^6 u_z}{\partial x_i^2\partial y_j^4} + \frac{\partial^6 u_z}{\partial y_j^6}\Big) + O(h^8) \tag{5.26}$$

Substituindo as derivadas de sexta ordem de u por M_6, como definido no Capítulo 1, encontramos a seguinte avaliação em módulo:

$$|\,6\tau_6\{u\}\,| \leq \frac{6h^6 M_6}{6!} + O(h^8) \tag{5.27}$$

E substituindo (5.27) em (5.23), temos que:

$$\left| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(h,\theta)\,d\theta - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} u(h\,,\frac{k\pi}{3}) \right| \leq \frac{h^6 M_6}{6!} + O(h^8) \tag{5.28}$$

Assim a primeira parte da prova fica concluída.

No intuito de demonstrar a segunda parte do Teorema, para $n = 4$, vamos denotar por $(x_{i\pm1}, y_{j\pm1}) = (x_i \pm h, y_j \pm h)$ quatro pontos vizinhos, a uma distância h, do ponto $z = (x_i, y_j)$ e denotar $u_z = u(x_i, y_j)$. Por expansão de $u(x,y)$ em série de *Taylor*, temos que:

$$u_{i\pm1,\,j} = u_z \pm h\frac{\partial u_z}{\partial x_i} + \frac{1}{2!}h^2\frac{\partial^2 u_z}{\partial x_i^2} \pm \frac{1}{3!}h^3\frac{\partial^3 u_z}{\partial x_i^3} + \sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k!}(\pm h)^k\frac{\partial^k u_z}{\partial x_i^k}$$

$$u_{i,\,j\pm1} = u_z \pm h\frac{\partial u_z}{\partial y_j} + \frac{1}{2!}h^2\frac{\partial^2 u_z}{\partial y_j^2} \pm \frac{1}{3!}h^3\frac{\partial^3 u_z}{\partial y_j^3} + \sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k!}(\pm h)^k\frac{\partial^k u_z}{\partial y_j^k}$$

Somando as expressões e denotando por Σu_b a soma dos valores de u nos quatro pontos vizinhos de z, temos:

$$\sum u_b = \sum_{k=1}^{4} u(h,\frac{k\pi}{2}) \tag{5.29}$$

$$\sum u_b = 4u_z + h^2\Delta u\,|_z + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{2h^{2k}}{(2k)!}\Big(\frac{\partial^{2k}u_z}{\partial x_i^{2k}} + \frac{\partial^{2k}u_z}{\partial y_j^{2k}}\Big) \tag{5.30}$$

A expressão para o erro de truncamento $\tau\{u\}$ é dada por:

$$\tau\{u_z\} = \frac{2h^4}{4!}\Big(\frac{\partial^4 u_z}{\partial x_i^4} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y_j^4}\Big) + O(h^6)$$

Substituindo $\Delta u = \lambda^2 u$, temos:

$$\sum u_b = 4\Big(1+\frac{h^2\lambda^2}{4}\Big)u_z + \frac{2h^4}{4!}\Big(\frac{\partial^4 u_z}{\partial x_i^4}+\frac{\partial^4 u_z}{\partial y_j^4}\Big)+\mathrm{O}(h^6) \tag{5.31}$$

Por outro lado, usando a avaliação de u_z feita na equação (5.17), temos:

$$\mathrm{I}_0(\lambda h)u_z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(h,\theta)\,d\theta \tag{5.32}$$

Resolvendo a integral do lado direito de (5.32) pelo Método dos Trapézios, encontramos que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(h,\theta)\,d\theta = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} u(h,\frac{k\pi}{2}) + \tau_4\{u\} \tag{5.33}$$

onde $\tau_4\{u\}$ representa o erro de integração introduzido pelo Método dos Trapézios. Assim, substituindo (5.32) em (5.33), podemos reescrevê-la como:

$$4\,\mathrm{I}_0(\lambda h)u_z = \sum u_b + 4\,\tau_4\{u\} \tag{5.34}$$

retirando o valor de $\sum u_b$ de (5.31) e substituindo em (5.34), temos que:

$$4\tau_4\{u\} = 4\,\mathrm{I}_0(\lambda h)u_z - 4\Big(1+\frac{h^2\lambda^2}{4}\Big)u_z - \frac{2h^4}{4!}\Big(\frac{\partial^4 u_z}{\partial x_i^4}+\frac{\partial^4 u_z}{\partial y_j^4}\Big)+\mathrm{O}(h^6) \tag{5.35}$$

substituindo $\mathrm{I}_0(\lambda h)$ por sua representação em série, e usando o fato de que $\Delta^4 u = \lambda^4 u$, temos:

$$4\tau_4\{u\} = \frac{4h^4\Delta^4 u_z}{2^4(2!)^2} - \frac{2h^4}{4!}\Big(\frac{\partial^4 u_z}{\partial x_i^4}+\frac{\partial^4 u_z}{\partial y_j^4}\Big)+\mathrm{O}(h^6) \tag{5.36}$$

expandindo $\Delta^4 u$, podemos escrever que:

$$\Delta^4 u_z = \frac{\partial^4 u_z}{\partial x_i^4}+\frac{\partial^4 u_z}{\partial y_j^4}+2\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2\partial y^2} \tag{5.37}$$

substituindo (5.37) em (5.36), temos:

$$4\tau_4\{u\} = \Big(\frac{4h^4}{2^4(2!)^2}-\frac{2h^4}{4!}\Big)\Big(\frac{\partial^4 u_z}{\partial x_i^4}+\frac{\partial^4 u_z}{\partial y_j^4}\Big)+2\cdot\frac{4h^4}{2^4(2!)^2}\cdot\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2\partial y^2}+\mathrm{O}(h^6) \tag{5.38}$$

Tomando-se o módulo em (5.38) e substituindo as derivadas de quarta ordem por M_4, conforme notação dada no Capítulo 1, temos:

$$|\,4\tau_4\{u\}\,| \leq \frac{4h^4 M_4}{4!} + O(h^6) \tag{5.39}$$

Substituindo (5.37) em (5.33) temos

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(h,\theta)\, d\theta - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{4} u(h, \frac{k\pi}{2}) \right| \leq \frac{h^4 M_4}{4!} + O(h^6)$$

e a prova do teorema está concluída. □

CAPÍTULO 6

PROVA DOS PRINCIPAIS RESULTADOS

Neste capítulo provamos os principais resultados dessa Tese apresentados nos Teoremas 3.1 e 3.2 e nos Corolários 3.1 e 3.2 do Capítulo 3. Estes resultados destacam um erro de precisão do tipo $O(h^n)$, onde $n = 4$ quando consideramos uma rede triangular e $n = 2$ quando adotamos uma rede quadrada. Apesar do erro de precisão encontrado ser da mesma ordem dos que se encontram por métodos a diferenças finitas, notamos que o método aqui proposto resulta em um erro menor do que os obtidos pelos métodos clássicos a diferenças finitas.

6.1. AVALIAÇÃO DO ERRO DE PRECISÃO

Seja $\overline{\mathbb{B}}$ uma bola de raio h, centrada no ponto (x_i, y_j), limitada pelo contorno $\partial\mathbb{B}$. Consideremos o problema Σ definido no Capítulo 3. Aplicando-se o Teorema do Valor Médio para a bola $\overline{\mathbb{B}} \subset \Omega$, encontramos a equação (3.25), que reescrevemos aqui:

$$u_{i,j} = \frac{1}{2\pi h\, I_0(\lambda h)} \int_0^{2\pi} u(h,\theta)d\theta \tag{6.1}$$

Seja H_h um hexágono inscrito na bola $\overline{\mathbb{B}}$. Denotamos os pontos de intersecção dos vértices desse hexágono com o contorno $\partial\mathbb{B}$ através de suas coordenadas (x_{i+k}, y_{i+l}), onde $k = -2, -1, 1, 2$ e $l = -1, 0, 1$, tal que $|k| + |l| = 2$, e denotamos por $u_{i+k, j+l}$ o valor que a função $u(x,y)$ assume em cada um desses pontos. Utilizando coordenadas polares podemos escrever:

$$u_{i+k, j+l} = u(h, \frac{2k\pi}{n}) \quad \text{com} \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{6.2}$$

onde n representa o número de pontos no contorno $\partial\mathbb{B}$ igualmente espaçados. Quando $n = 4$ significa que estamos considerando uma rede quadrada, quando $n = 6$ estamos considerando a rede triangular. Adotando-se uma ordenação apropriada e utilizando-se estes valores para fazer uma aproximação de (6.1), temos:

$$I_0(\lambda h)u_{i,j} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(h,\theta)d\theta = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u(h,\frac{2k\pi}{n}) + \tau_{i,j} \tag{6.3}$$

onde $\tau_{i,j}$ é o erro de aproximação. Denotando por $\sum u_b$ o somatório do lado direito de (6.3) rescrevemos esta equação como:

$$nI_0(\lambda h)u_{i,j} = \sum u_b + n\tau_{i,j}$$

Utilizando o resultado do Teorema 3.5, podemos escrever que:

$$\left| nI_0(\lambda h)u_{i,j} - \sum u_b \right| = |\, n\tau_{i,j}\,| = n\,|\,\tau_n\{u\}\,| \tag{6.4}$$

onde $\tau_n\{u\}$ é um erro de truncamento dado no Teorema 3.5, que transcrevemos aqui:

$$|\,\tau_n\{u\}\,| \leq \frac{h^n M_n}{n!} + O(h^{n+2}) \tag{6.5}$$

Consideremos agora o problema Σ, definido no Capítulo 3 e aproximemos a função $u(x_i,y_j)$, solução de Σ, por uma função de rede $U_{i,j}$, definida em cada ponto (x_i,y_j), de forma que $U_{i,j} = \Psi_{i,j}$ nos pontos da fronteira ∂W e nos pontos internos $U_{i,j}$ satisfaz a seguinte equação:

$$U_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{1}{nI_0(\lambda h)}(U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1}) & , \quad n = 4 \\ \dfrac{1}{nI_0(\lambda h)}(U_{i-1,j-1} + U_{i+1,j-1} + U_{i-2,j} + U_{i+2,j} + U_{i-1,j+1} + U_{i+1,j+1}) & , \; n = 6 \end{cases} \tag{6.6}$$

Considerando a rede triangular G_h dada na Definição 3.1, podemos localizar NM pontos interiores em G_h ou equivalentemente o mesmo número de bolas centradas em pontos interiores de W. Definimos os vetores u e U, formados respectivamente pelos valores que as funções $u_{i,j}$ e $U_{i,j}$ assumem no centro de cada bola $\mathbb{B}$ ou equivalentemente em cada ponto interior da rede (x_i,y_j):

$$u = [u_{1,1},\cdots,u_{N,1};\; u_{1,2},\cdots,u_{N,2}\,;\,\cdots\,;\,u_{1,M},\cdots,u_{N,M}]^{\mathrm{T}}$$

$$U = [U_{1,1},\cdots,U_{N,1};\; U_{1,2},\cdots,U_{N,2}\,;\,\cdots\,;\,U_{1,M},\cdots,U_{N,M}]^{\mathrm{T}}$$

Definimos ainda o vetor b formado pelos elementos do vetor U associados a pontos que localizados na fronteira da rede, nestes pontos temos $u = U$, e o vetor de erros $\tau_n\{u\}$ dado por:

$$\tau_n\{u\} = [\tau_{1,1},\cdots,\tau_{N,1};\ \tau_{1,2},\cdots,\tau_{N,2}\ ;\ \cdots\ ;\ \tau_{1,M},\cdots,\tau_{N,M}]^{\mathrm{T}}$$

De (6.3) e (6.6) podemos formar os seguintes sistema de equações:

$$A_n u = b + n\tau_n\{u\} \tag{6.7}$$

$$A_n U = b \tag{6.8}$$

No caso da rede triangular ($n = 6$) a matriz A_n assume a seguinte forma:

$$A_6 = \begin{bmatrix} B_1 & -J_N & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -J_N^{\mathrm{T}} & B_2 & -J_N^{\mathrm{T}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -J_N & B_3 & -J_N & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -J_N^{\mathrm{T}} & B_{M-1} & -J_N^{\mathrm{T}} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -J_N & B_M \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

onde as matrizes B_j são definidas por:

$$B_j = 6\,\mathrm{I}_0(\lambda h)\mathbb{I}_N - D_N \qquad \text{para } j = 1,2,\cdots,M \tag{6.10}$$

e $\mathbb{I}_N$ é a matriz identidade de dimensão $N \times N$. As matrizes J_N e D_N são definidas por:

$$J_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Quando estamos considerando a rede quadrada, a matriz A_n tem a seguinte estrutura:

$$A_4 = \begin{bmatrix} C_1 & -\mathbb{I}_N & 0 & \cdots & 0 \\ -\mathbb{I}_N & C_2 & -\mathbb{I}_N & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -\mathbb{I}_N & C_{M-1} & -\mathbb{I}_N \\ 0 & \cdots & 0 & -\mathbb{I}_N & C_M \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

onde as matrizes C_j são definidas por:

$$C_j = 4\,\mathrm{I}_0(\lambda h)\mathbb{I}_N - D_N \qquad \text{para } j = 1,2,\cdots,M \tag{6.12}$$

Desde que a rede não tenha ambigüidade, a matriz A_n é inversível. Então, subtraindo-se (6.8) de (6.7) podemos escrever que:

$$(u - U) = nA_n^{-1}\tau_n\{u\}$$

Usando a norma euclidiana para o vetor $(u - U)$, temos:

$$\| u - U \|_2 \leq n \| A_n^{-1} \|_2 \; \| \tau_n\{u\} \|_2 \tag{6.13}$$

Denotando por Λ_k os autovalores da matriz A_n, podemos proceder a avaliação do limitante superior do erro de precisão:

$$\| u - U \|_2 \leq \frac{n}{\min\limits_{1 \leq k \leq MN} |\Lambda_k|} \| \tau_n\{u\} \|_2 \tag{6.14}$$

6.2. CÁLCULO DOS AUTOVALORES DA MATRIZ A_n

Lema 6.1:

Seja Λ_k, $k = 1, 2, \cdots, NM$ os autovalores da matriz A_n dada por (6.9) para $n = 6$ e (6.11) para $n = 4$. Então:

$$\min_{1 \leq k \leq MN} |\Lambda_k| \geq n\mathrm{I}_0(\lambda h) - n\mu_n + 8sen^2(\frac{h\pi}{2}) \tag{6.15}$$

onde μ_n é um escalar positivo com $\mu_n \leq 1$ se $n = 6$, e $\mu_n = 1$ se $n = 4$.

Prova:

Vamos considerar primeiramente o caso com $n = 4$. Seja A_4 a matriz bloco tridiagonal dada em (6.11) e C_j a matriz de dimensão $N \times N$ definida em (6.12). Sendo C_j uma matriz tridiagonal, seus autovalores, como demonstrado em [DuChateau e Zachmann-1986, pp.180], são:

$$\alpha_k = 4\mathrm{I}_0(\lambda h) - 2cos\,(kh\pi) \qquad , \qquad k = 1, 2, \cdots, N \tag{6.16}$$

Seja v^k um autovetor de C_j, correspondente a um autovalor α_k. Para resolver o problema de autovalor $A_4 v = \Lambda v$, vamos considerar o autovetor v na forma:

$$v = [\beta_1 (v^k)^{\mathrm{T}}, \beta_2 (v^k)^{\mathrm{T}}, \cdots, \beta_M (v^k)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

onde β_j, $j = 1, 2, \cdots, M$ são constantes não nulas. De $A_4 v = \Lambda v$ temos:

$$\begin{array}{ll}
\beta_1 C_1 v^k \quad - \beta_2 \mathbb{I}_N v^k & = \Lambda \beta_1 v^k \\
- \beta_1 \mathbb{I}_N v^k + \beta_2 C_2 v^k - \beta_3 \mathbb{I}_N v^k & = \Lambda \beta_2 v^k \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\qquad \beta_{M-1} \mathbb{I}_N v^k - \beta_M C_M v^k & = \Lambda \beta_M v^k
\end{array}$$

Por definição temos que $C_j v^k = \alpha_k v^k$ para $j = 1, 2, \cdots, M$. Verifica-se neste caso que $v^k \neq 0$. Então, podemos escrever que:

$$\begin{bmatrix} \alpha_k & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \alpha_k & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & \alpha_k & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \alpha_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{M-1} \\ \beta_M \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{M-1} \\ \beta_M \end{bmatrix}$$

Agora, usando novamente o resultado de [DuChateau e Zachmann-1986, pp.180] deduzimos que os autovalores de A_4, $\Lambda_{j,k}$, $j = 1,2,\cdots,M$, $k = 1,2,\cdots,N$, são dados por:

$$\Lambda_{j,k} = \alpha_k - 2\cos(jh\pi) \tag{6.17}$$

Substituindo (6.16) em (6.17), temos:

$$\Lambda_{j,k} = 4\mathrm{I}_0(\lambda h) - 2cos(kh\pi) - 2\cos(jh\pi) \tag{6.18}$$

no intuito de achar o mínimo autovalor de A_4, vamos fazer $k = j = 1$ em (6.18) e utilizando a identidade trigonométrica $cos(h\pi) = cos^2(h\pi/2) - sen^2(h\pi/2)$, temos então:

$$Min\,\Lambda_{j,k} = \Lambda_{1,1} = 4\mathrm{I}_0(\lambda h) - 4 + 8sen^2(\frac{h\pi}{2})$$

Tomando a ordenação inicial Λ_ℓ, $\ell = 1,2,\cdots,NM$ para os autovalores $\Lambda_{j,k}$ podemos escrever:

$$\underset{1 \le \ell \le MN}{Min} |\,\Lambda_\ell\,| = \Lambda_{1,1} = 4\mathrm{I}_0(\lambda h) - 4 + 8sen^2(\frac{h\pi}{2})$$

Concluimos assim a primeira parte da prova.

A prova do Teorema para $n = 6$, similarmente considera que os autovalores da matriz B_j definida em (6.10), são dados por:

$$\alpha_k = 6\mathrm{I}_0(\lambda h) - 2cos(kh\pi) \qquad , \qquad k = 1,2,\cdots,N \tag{6.19}$$

No entanto a matriz A_6 em (6.9) possui uma estrutura diferente daquela da matriz A_4 e, para que o restante da prova anterior seja utilizada, vamos escrever $A_6 = A + E$, onde A e E são matrizes simétricas definidas por:

$$A=\begin{bmatrix} B_1 & -\mathbb{I}_N & 0 & \cdots & 0 \\ -\mathbb{I}_N & B_2 & -\mathbb{I}_N & \cdots & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_N & B_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\mathbb{I}_N & B_M \end{bmatrix} \qquad \mathrm{E}=\begin{bmatrix} 0 & -F & 0 & \cdots & 0 \\ -F^{\mathrm{T}} & 0 & -F^{\mathrm{T}} & \cdots & 0 \\ 0 & -F & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -F & 0 \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

onde $\mathbb{I}_N$ é uma matriz identidade com a mesma dimensão da matriz J, sendo $F = J - \mathbb{I}_N$ uma matriz que tem a seguinte estrutura:

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sejam A e $A+E$ matrizes simétricas de dimensão $NM \times NM$. Denotando-se por $\Lambda_i(E)$ os autovalores da matriz E e adotando-se a seguinte ordenação $\Lambda_1(E) \leq \Lambda_2(E) \leq \cdots \leq \Lambda_{NM}(E)$, podemos utilizar o resultado em [Golub e Loan-1988, Cap. 8, p.p. 269, Corolário 8.1-3] para escrever:

$$\Lambda_\ell(A) + \Lambda_1(E) \leq \Lambda_\ell(A+E) \leq \Lambda_\ell(A) + \Lambda_{NM}(E) \qquad \ell = 1,2,\cdots,NM \tag{6.21}$$

A matriz A tem exatamente a mesma estrutura da matriz A_4 em (6.11), portanto procedendo da mesma forma como feito na primeira parte da prova, deduzimos que:

$$\Lambda_\ell(A) = 6\,\mathrm{I}_0(\lambda h) - 2cos\,(kh\pi) - 2cos\,(jh\pi)\ ,\ j = 1,2,\cdots,M \text{ e } k = 1,2,\cdots,N \tag{6.22}$$

Agora, analisando-se a estrutura da matriz E notamos que ela é simétrica e real, portanto E é uma matriz *Hermitiana*. Podemos verificar que E não é definida positiva, consequentemente $\Lambda_1(E) \leq 0$, assim $\Lambda_1(E) = -\,|\,\Lambda_1(E)\,|$. Por outro lado, usando o Teorema de *Gerschgorin* [Golub e Loan-1988], temos que $|\,\Lambda_1(E)\,| \leq 2$. Desta forma podemos escrever a primeira desigualdade de (6.21) como:

$$\Lambda_\ell(A_6) \geq 6\mathrm{I}_0(\lambda h) - 2cos\,(kh\pi) - 2cos\,(jh\pi) - |\,\Lambda_1(E)\,|\ ,\ j = 1,2,\cdots,M \text{ e } k = 1,2,\cdots,N \tag{6.23}$$

Fazendo $k = j = 1$ em (6.23)

$$\Lambda_{\ell}(A_6) \geq 6\mathrm{I}_0(\lambda h) - |\Lambda_1(E)| - 4cos(h\pi)\ ,\ j = 1,2,\cdots,M \text{ e } k = 1,2,\cdots,N \tag{6.24}$$

Substituindo $cos(h\pi) = cos^2(h\pi/2) - sen^2(h\pi/2) = 1 - 2sen^2(h\pi/2)$, temos:

$$\underset{1 \leq \ell \leq MN}{Min} |\Lambda_{\ell}| = \Lambda_{1,1} \geq 6\mathrm{I}_0(\lambda h) - (4 + |\Lambda_1|) + 8sen^2(\frac{h\pi}{2})$$

Denotando-se por μ_6 um escalar positivo tal que $\mu_6 \leq 1$, podemos escrever que:

$$\underset{1 \leq \ell \leq MN}{Min} |\Lambda_{\ell}| \geq 6\mathrm{I}_0(\lambda h) - 6\mu_6 + 8sen^2(\frac{h\pi}{2})$$

e portanto a prova do Lema fica concluída □

6.3 PROVA DOS TEOREMAS 3.1, 3.2 E COROLÁRIOS

Prova do Teorema 3.1

A prova para $p = 2$ é resultado imediato do Lema 6.1; bastando fazer $n = 6$ em (6.5) e (6.15), além de usar a relação $\| \tau_6\{u\} \|_2 \leq \sqrt{NM}\ \| \tau_6\{u\} \|_{\infty}$. Substituindo estes resultados em (6.14), temos:

$$\| u - U \|_2 \leq \frac{\sqrt{NM}}{6\mathrm{I}_0(\lambda h) - 6\mu_6 + 8sen^2(\frac{h\pi}{2})} \left[\frac{6h^6 M_6}{6!} + \mathrm{O}(h^8) \right] \tag{6.25}$$

A prova para $p = \infty$ segue-se da relação:

$$\| A_6(u - U) \|_{\infty} = 6 \| \tau_6\{u\} \|_{\infty} \tag{6.26}$$

sendo:

$$\| A_6(u - U) \|_{\infty} = sup_{i=1,\cdots,NM} \{ |6\mathrm{I}_0(\lambda h)(u - U)_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j}(u - U)_j| \}$$

onde: $A_6 = \{a_{i,j}\}$ e para $i \neq j$, $a_{i,j} = -1$ ou $a_{i,j} = 0$, além disso $\sum_{j \neq i} a_{i,j} \geq -6$.

Supondo que $\| u-U \|_\infty = (u-U)_{i_0}$ para algum i_0, podemos escrever que:

$$\| A_6(u-U) \|_\infty \geq | 6\mathrm{I}_0(\lambda h)(u-U)_{i_0} - \sum_{j \neq i_0} a_{i,j}(u-U)_j |$$

$$\| A_6(u-U) \|_\infty \geq (6\mathrm{I}_0(\lambda h) - 6)(u-U)_{i_0}$$

Agora, supondo que $\| u-U \|_\infty = -(u-U)_{i_0}$ podemos escrever que:

$$\| A_6(u-U) \|_\infty \geq -6\mathrm{I}_0(\lambda h)(u-U)_{i_0} - \sum_{j \neq i_0} a_{i,j}(u-U)_j$$

$$\| A_6(u-U) \|_\infty \geq -(6\mathrm{I}_0(\lambda h) - 6)(u-U)_{i_0}$$

substituindo $(u-U)_{i_0}$ por $\| u-U \|_\infty$ e levando em conta a relação (6.26) temos:

$$\| u-U \|_\infty \leq \frac{1}{(\mathrm{I}_0(\lambda h) - 1)} \| \tau_6\{u\} \|_\infty \tag{6.27}$$

e a prova para $p = \infty$ esta completa. □

Prova do Corolário 3.1

A prova é imediata a partir do Teorema 3.1; basta verificarmos que se $h \simeq 0$, então:

$$\mathrm{I}_0(\lambda h) - 1 = \mathrm{O}(h^2) \tag{6.28}$$

E portanto, substituindo (6.28) em (6.27), temos que:

$$\| u-U \|_\infty \leq \frac{1}{\mathrm{O}(h^2)} \left[\frac{h^6 M_6}{6!} + \mathrm{O}(h^8) \right] = \mathrm{O}(h^4)$$

□

Prova do Teorema 3.2

A prova para $p = 2$ é resultado direto do Lema 6.1; basta fazer $n = 4$ em (6.5) e (6.15), além de usar a relação $\| \tau_4\{u\} \|_2 \leq \sqrt{NM} \| \tau_4\{u\} \|_\infty$. Substituindo estes resultados em (6.14), temos:

$$\| u-U \|_2 \leq \frac{\sqrt{NM}}{4\mathrm{I}_0(\lambda h) - 4 + 8sen^2(\frac{h\pi}{2})} \left[\frac{4h^4 M_4}{4!} + \mathrm{O}(h^6) \right] \tag{6.29}$$

A prova para $p = \infty$ segue-se da relação:

$$\| A_4(u-U) \|_\infty = 4 \| \tau_4\{u\} \|_\infty \tag{6.30}$$

sendo:

$$\| A_4(u-U) \|_\infty = sup_{i=1,\cdots,NM}\{ |4I_0(\lambda h)(u-U)_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j}(u-U)_j| \}$$

onde:

$$A_4 = \{a_{i,j}\} \text{ e para } i \neq j,\ a_{i,j} = -1 \text{ ou } a_{i,j} = 0, \text{ além disso } \sum_{j \neq i} a_{i,j} \geq -4.$$

Supondo que $\| u-U \|_\infty = (u-U)_{i_0}$ para algum i_0, podemos escrever que:

$$\| A_4(u-U) \|_\infty \geq |4I_0(\lambda h)(u-U)_{i_0} - \sum_{j \neq i_0} a_{i,j}(u-U)_j|$$

$$\| A_4(u-U) \|_\infty \geq (4I_0(\lambda h) - 4)(u-U)_{i_0}$$

Agora, supondo que $\| u-U \|_\infty = -(u-U)_{i_0}$ podemos escrever que:

$$\| A_4(u-U) \|_\infty \geq -4I_0(\lambda h)(u-U)_{i_0} - \sum_{j \neq i_0} a_{i,j}(u-U)_j$$

$$\| A_4(u-U) \|_\infty \geq -(4I_0(\lambda h) - 4)(u-U)_{i_0}$$

substituindo $(u-U)_{i_0}$ por $\| u-U \|_\infty$ e levando em conta a relação (6.30) temos:

$$\| u-U \|_\infty \leq \frac{1}{(I_0(\lambda h) - 1)} \| \tau_4\{u\} \|_\infty \tag{6.31}$$

portanto a prova para $p = \infty$ está concluida □

Prova do Corolário 3.2

A prova é imediata a partir do Teorema 3.2; bastando verificar que:

$$I_0(\lambda h) - 1 = O(h^2) \tag{6.32}$$

E substituindo (6.32) em (6.31), temos:

$$\| u-U \|_\infty \leq \frac{1}{O(h^2)} \left[\frac{h^4 M_4}{4!} + O(h^6) \right] = O(h^2)$$ □

CAPÍTULO 7

ASPECTOS COMPUTACIONAIS, EXEMPLOS E APLICAÇÕES

Neste capítulo mostramos como se implementa computacionalmente o método proposto, e analisamos as características do sistema linear resultante da discretização do problema Σ. Em seguida, comparamos o novo método com o de diferenças finitas. Esta comparação se faz através da avaliação do erro de precisão encontrado ao se resolver numericamente alguns exemplos cuja solução analítica é conhecida. Resolvemos os exemplos empregando a rede quadrada e a rede triangular. Verificamos as vantagens do método proposto, principalmente do ponto de vista da precisão, ao empregar a rede triangular.

7.1. IMPLEMENTAÇÃO PARA A REDE TRIANGULAR

Visando apresentar uma sistemática de implementação computacional do método que estamos propondo, vamos considerar novamente o problema Σ e, por simplicidade, vamos supor que a região $\overline{\Omega}$ é um retângulo no $\mathbf{R}^2$. Considerando a rede triangular G_h, dada na Definição 3.1, escrevemos a expressão para um nó desta rede, equação (3.2), como se segue:

$$U_{i,j} = \frac{1}{6\,\mathrm{I}_0(\lambda h)}\,(\,U_{i-1,j-1} + U_{i+1,j-1} + U_{i-2,j} + U_{i+2,j} + U_{i-1,j+1} + U_{i+1,j+1}) \qquad (7.1)$$

onde $U_{i,j}$ representa a função de rede associada a função $u(x,y)$, solução do problema Σ .

Definição 7.1: Sejam o vetor $U \in \mathbf{R}^{NM}$ e a matriz $A_6 \in \mathbf{R}^{NM \times NM}$ definidos respectivamente como:

$$U = [U_{1,1},\cdots,U_{N,1};\ U_{1,2},\cdots,U_{N,2}\ ;\ \cdots\ ;\ U_{1,M},\cdots,U_{N,M}]^{\mathrm{T}}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} B_1 & -J_N & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -J_N^{\mathrm{T}} & B_2 & -J_N^{\mathrm{T}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -J_N & B_3 & -J_N & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -J_N^{\mathrm{T}} & B_{M-1} & -J_N^{\mathrm{T}} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -J_N & B_M \end{bmatrix}$$

onde B_j, $j = 1, 2, \cdots, M$ são matrizes de dimensão $N \times N$ definidas por:

$$B_j = 6\mathrm{I}_0(\lambda h)\mathbb{I}_N - D_N$$

sendo $\mathbb{I}_N$ a matriz identidade de dimensão $N \times N$ e sendo D_N e J_N são matrizes de dimensão $N \times N$ definidas por:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7.2. IMPLEMENTAÇÃO PARA A REDE QUADRADA

Adotando-se desta feita a rede quadrada S_h, dada na Definição 3.2 e escrevendo a expressão para um nó desta rede, equação (3.9), como se segue:

$$U_{i,j} = \frac{1}{4\mathrm{I}_0(\lambda h)}\left(U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}\right) \tag{7.2}$$

onde $U_{i,j}$ representa a função de rede associada à função $u(x,y)$, solução do problema Σ.

Definição 7.2:

Sejam o vetor $U \in \mathbf{R}^{NM}$ e a matriz $A_4 \in \mathbf{R}^{NM \times NM}$, definidos respectivamente como:

$$U = [U_{1,1}, \cdots, U_{N,1};\ U_{1,2}, \cdots, U_{N,2}\ ;\ \cdots\ ;\ U_{1,M}, \cdots, U_{N,M}]^{\mathrm{T}}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} C_1 & -\mathbb{I}_N & 0 & \cdots & 0 \\ -\mathbb{I}_N & C_2 & -\mathbb{I}_N & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -\mathbb{I}_N & C_{M-1} & -\mathbb{I}_N \\ 0 & \cdots & 0 & -\mathbb{I}_N & C_M \end{bmatrix}$$

onde C_j, $j = 1, 2, \cdots, M$ são matrizes de dimensão $N \times N$ definidas por:

$$C_j = 4\mathrm{I}_0(\lambda h)\mathbb{I}_N - D_N$$

sendo $\mathbb{I}_N$ a matriz identidade de dimensão $N \times N$ e sendo D_N uma matriz da mesma dimensão definida por:

$$D_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A rede G_h assim como a rede S_h, possui NM nós internos, escrevendo-se a equação (7.1) ou (7.2) para cada um destes nós encontra-se em sistema de de equações lineares colocados aqui na sua forma matricial:

$$A_6 U = b \text{ (para a rede } G_h) \qquad A_4 U = b \text{ (para a rede } S_h)$$

onde $U \in \mathbb{R}^{NM}$ e A_6, $A_4 \in \mathbb{R}^{NM \times NM}$, são dados na Definição 7.1 e 7.2 e $b \in \mathbb{R}^{NM}$, é um vetor que só depende dos valores que $u(x, y)$ assume na fronteira $\partial\Omega$.

Proposição 7.1

Cnosiderando as matrizes B_j e C_j dadas nas Definições 7.1 e 7.2 respectivamente. Se $\lambda > 0$, então as matrizes A_n, para $n = 4$ e $n = 6$, são diagonais estritamente dominantes.

Prova:

Sendo $\mathrm{I}_0(\lambda h)$ uma função estritamente crescente, temos que $|a_{ii}| \geq n\mathrm{I}_0(\lambda h)$, onde $n = 6$ quando estamos considerando a rede triangular G_h e, $n = 4$ quando adotamos a rede quadrada S_h. Desde que $\mathrm{I}_0(\lambda h) > 1$ para todo h no eixo real positivo, podemos assegurar que $|a_{ii}| > n$. Além disto analisando a estrutura da matriz A_n, observamos que:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{NM} |a_{ij}| \leq n \qquad \text{para todo } i$$

onde a igualdade ocorre para as linhas correspondente aos nós que não envolvem os valores de contorno. Sendo assim concluimos que:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{NM} |a_{ij}| \quad \text{para todo } i$$

Em adição, pode-se mostrar que para uma matriz A_n diagonal estritamente dominante, os métodos iterativos de Jacob e Gauss-Seidel têm convergência assegurada quando usados para obter a solução do sistema $A_nU = b$ [Ames-1977].

Vamos dedicar o restante deste capítulo a apresentação de exemplos de problemas de valor de contorno, para os quais conhecemos a solução analítica. O objetivo é resolvê-los numericamente pelo método proposto e por diferenças finitas afim de poder comparar estes dois métodos. A comparação será feita através do cálculo da diferença entre a solução analítica e a solução numérica, obtida com cada um dos métodos.Nestes exemplos a diferença é denominada erro de aproximação.

7.3. EXEMPLO COM SOLUÇÃO EXATA CONHECIDA

Consideremos o problema de valor de contorno para a equação elíptica abaixo, definido no quadrado $(0,0) \leq (x,y) \leq (1,1)$, com as seguintes condições de contorno: $u(0,y) = sen(\pi y)$ para $(0 < y < 1)$ e $u = 0$ nos outros lados do quadrado. Adotamos uma rede uniforme com passo de discretização $h = 1/30$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - k\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (k = 40) \tag{7.3}$$

A solução analítica de (7.3), sujeita as condições de contorno dadas acima, apresenta-se é dada em [Mitchell e Griffiths-1987], onde:

$$u(x,y) = \frac{e^{kx/2} senh\ \sigma(1-x)\ \ sen\ \pi y}{senh\ \sigma} \qquad \sigma = \frac{(k^2 + 4\pi^2)^{1/2}}{2}$$

Aplicando a tranformação $w = ue^{-kx/2}$ colocamos (7.3) na sua forma canônica, de acordo com o procedimento geral apresentado no Capítulo 2:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \lambda^2 w = 0 \quad (\ \lambda^2 = \frac{k}{2}\ ) \tag{7.4}$$

As condições de contorno ficam inalteradas com essa transformação. Agora denotando $x_i = ih$ e $y_j = jh$ $(i,j = 0,1,2,\cdots,30)$ e $w_{ij} = w(x_i, y_j)$ obtemos a equação à diferenças finita [ver Capítulo 1] dada por :

$$(4 + \lambda^2 h^2) w_{i,j} - w_{i-1,j} - w_{i+1,j} - w_{i,j+1} - w_{i,j-1} = 0 \tag{7.5}$$

Pela equação (3.9) do Teorema 3.2, para esse problema, temos:

$$4\mathrm{I}_0(\lambda h) w_{i,j} - w_{i-1,j} - w_{i+1,j} - w_{i,j+1} - w_{i,j-1} = 0 \tag{7.6}$$

Apresentamos graficamente o resultado da aplicação desses dois métodos da seguinte forma: a Figura 7.1-(a) mostra a solução analítica do exemplo proposto. As Figuras 7.1-(b) e 7.1-(c) trazem as soluções pelo Método a Diferenças Finitas e pelo Método do Valor Médio respectivamente, e a Figura 7.1-(d) evidencia o erro de aproximação para cada um desses métodos. O erro máximo obtido com Diferenças Finitas é 0.2465 enquanto o Método do Valor Médio apresenta um erro máximo de 0.0939.

Para o segundo exemplo adotamos uma rede triangular G_h com $h = \frac{1}{30}$ e denotamos $x_i = ih + phcos(\frac{\pi}{3})$ e $y_j = jhsen(\frac{\pi}{3})$, para $i = 1,2,\cdots,30$; $j = 0,1,\cdots,30$ com $p = (j\,mod\,2) - 1$ e $w_{i,j} = w(x_i, y_j)$. A equação a diferenças finitas é expressa por [ver Capítulo 1]:

$$6(1 + \frac{\lambda^2 h^2}{4} + \frac{\lambda^4 h^4}{64})\, w_{i,j} - w_{i-1,j-1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-2,j} - w_{i+2,j} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j+1} = 0 \tag{7.7}$$

onde pela equação (3.2) do Teorema 3.1, temos:

$$6\,\mathrm{I}_0(\lambda h)\, w_{i,j} - w_{i-1,j-1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-2,j} - w_{i+2,j} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j+1} = 0 \tag{7.8}$$

Na Figura 7.2, temos o resultado para estes dois métodos, juntamente com a solução analítica. Destacamos aqui que o uso da rede triangular leva a resultado mais preciso do que o da rede quadrada neste caso, a solução pelo Método do Valor Médio é incomparavelmente melhor que aquela obtida pelo Método a Diferenças Finitas. Observamos que, no caso da rede quadrada, a relação entre o erro máximo encontrado pelo método do Valor Médio e pelo método a Diferenças Finitas é de 1/2.5. Esta mesma relação, no caso da rede triangular, passa a ser de 1/5. Devemos notar que a vantagem do método proposto é superior a esperada pelos gráficos dados nas Fiuras 3.3 e 3.4 no Capítulo 3.

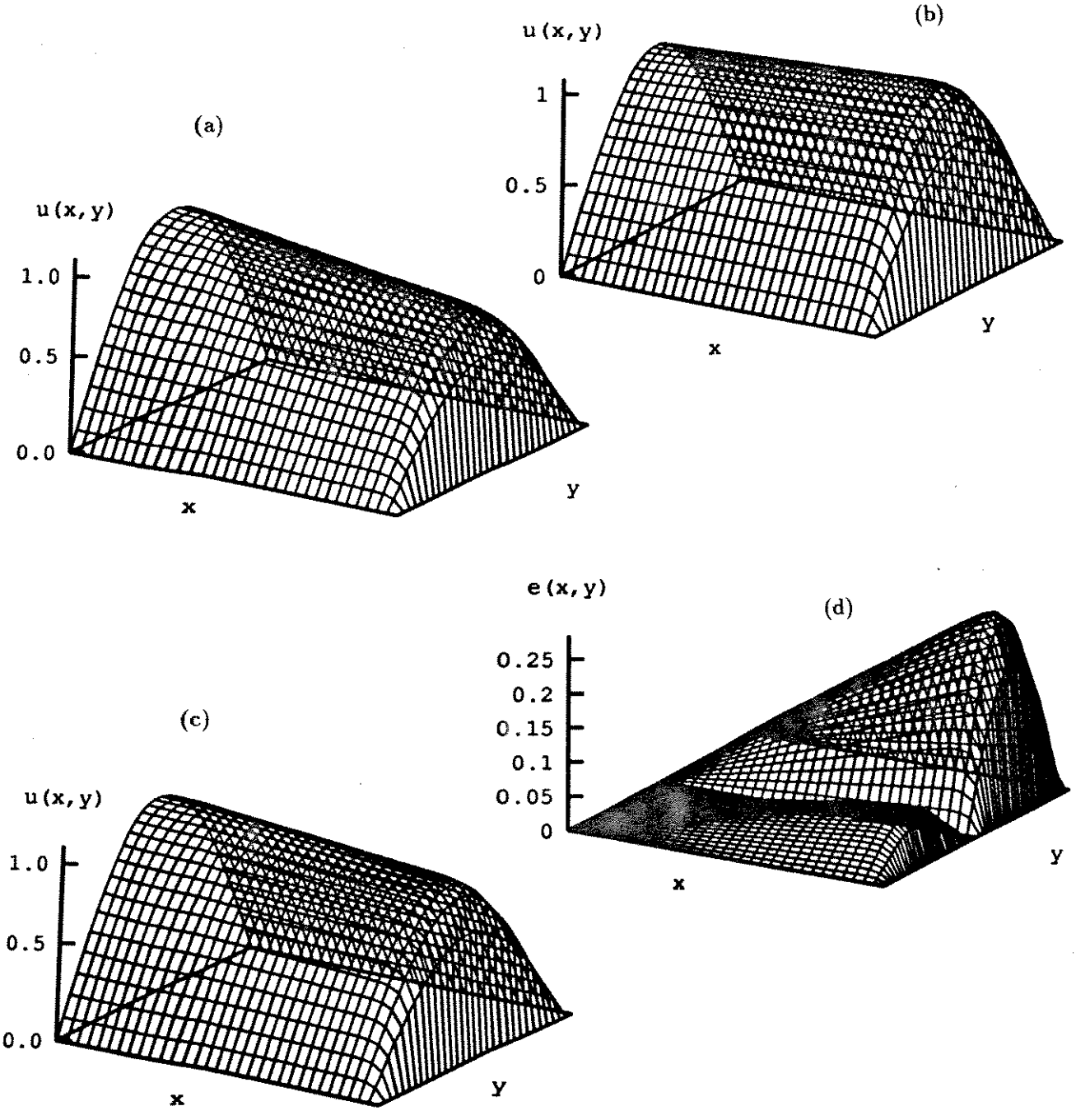

Figura 7.1. Resultado Numérico da solução da equação (7.3) com $\lambda = 20$ – Rede quadrada.

(a) – Solução Exata

(b) – Solução por Diferenças Finitas

(c) – Solução pelo Teorema do Valor Médio

(d) – Erro: (a) – (c) e (a) – (b)

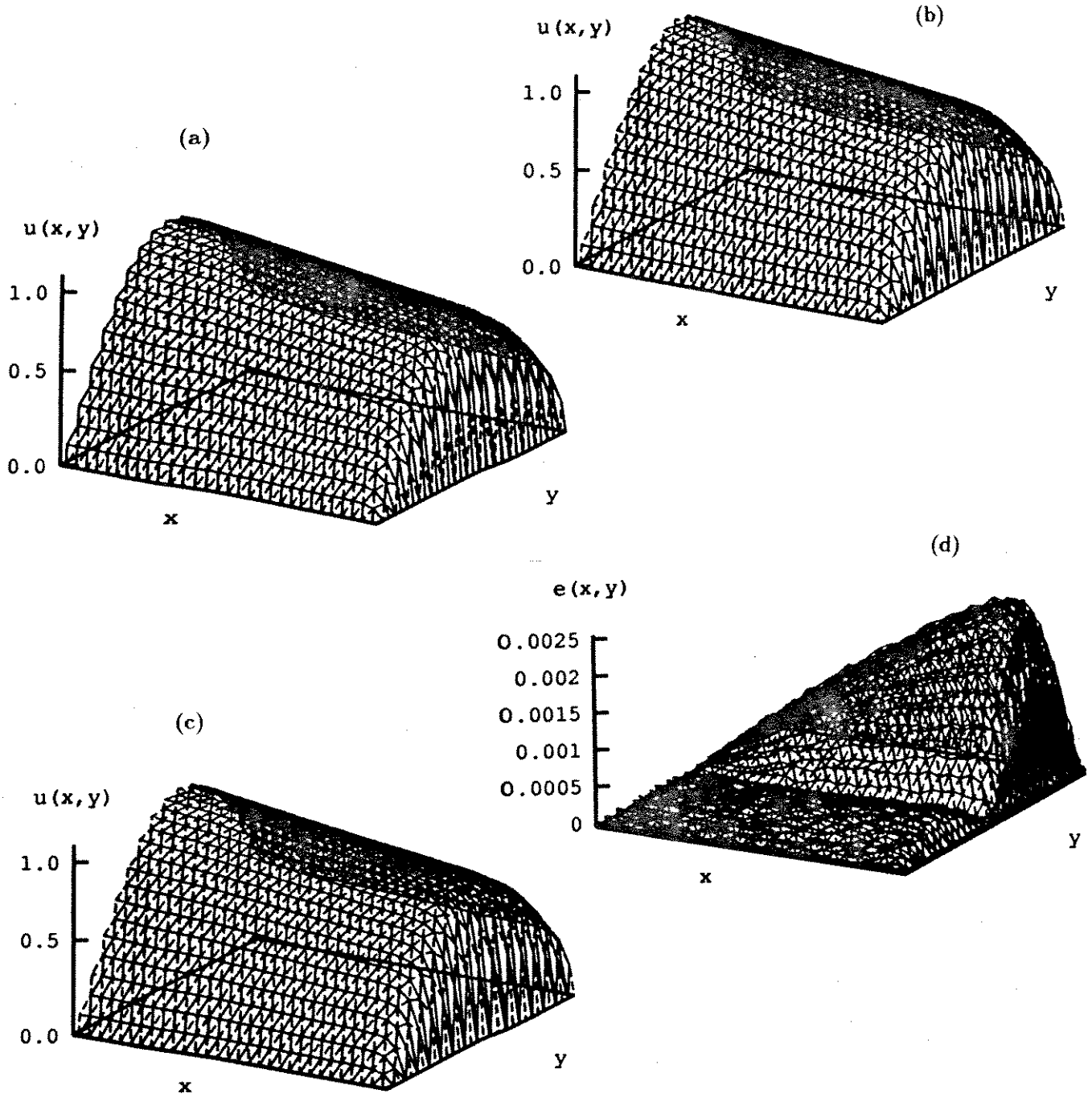

Figure 7.2. Solução numérica para a equação (7.3) com $\lambda^2 = 20$ – Rede triangular.

(a) - Solução Exata

(b) - Solução por Diferença Finita

(c) - Solução pelo Método Proposto

(d) - Erro: (a) – (c) e (a) – (b)

7.4. APLICAÇÃO A UM PROBLEMA DE FÍSICA DOS SEMICONDUTORES

Denotamos por $n(x,y)$ o número de elétrons livres em uma amostra plana de um semicondutor não homogêneo. Denominamos Ω a região definida por esta placa semicondutora e representamos por $\partial\Omega$ a região definida pelas bordas desta placa. Supondo ainda que a amostra está exposta a um campo elétrico externo $\mathcal{E}$ e, que uma fonte de luz externa gera elétrons uniformemente por toda superfície da amostra a uma taxa g. Denotamos por e, a carga e por τ, o tempo de vida de um elétron e seja J a densidade de corrente no corpo do semicondutor, provocada pelo campo elétrico externo $\mathcal{E}$ e por difusão de elétrons devida às características heterogêneas do material. Aplicando-se a equação de continuidade na área Ω, em estado de regime estacionário, temos:

$$-\frac{1}{e}\, div\ J = g - \frac{n - n_0}{\tau} \tag{7.9}$$

Sendo a corrente de difusão proporcional ao gradiente da concentração de elétrons então, $J_{\text{dif}} = eDgrad(n)$, onde D é a constante de difusão e, usando a lei de Ohm para expressar a corrente devido gerada pelo campo elétrico externo $J_{\text{elet}} = en\mu\mathcal{E}$, podemos escrever $J = eDgrad(n) + en\mu\mathcal{E}$. Denotando a concentração unitária de elétrons excessivos na amostra por $u(x,y) = (n(x,y) - n_0)/N$, onde n_0 e N são constantes que dependem do tipo de impureza presente na amostra, de forma que $0 \leq u \leq 1$, podemos reescrever (7.9) como:

$$-Ddiv(grad\ u(x,y)) - \mu\mathcal{E}div\ u(x,y) = \frac{g}{N} - \frac{u(x,y)}{\tau} \tag{7.10}$$

No intuito de encontrar as condições de contorno suponhamos que os elétrons excessivos, ao se aproximarem das bordas da amostra, recombinam-se de forma que a corrente nas bordas seja proporcional à concentração de elétrons nesta região [Shalímova-1975]. Então podemos escrever:

$$J = sNu(x,y) \qquad \text{para } (x,y) \in \partial\Omega$$

onde s é a taxa de recombinação. Assim podemos formular o problema que visa determinar a distribuição de elétrons excessivos em um plano semicondutor como um problema de valor de contorno elíptico:

$$\Delta u(x,y) + \frac{\mu\mathcal{E}}{D}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) - \frac{1}{\tau D}u(x,y) = -\frac{g}{ND} \qquad (x,y) \in \Omega$$

Problema $(\mathcal{T})$:

$$u(x,y) = \frac{1}{Ns}J(x,y) \qquad (x,y) \in \partial\Omega$$

Analisamos agora dois casos particulares do problema $(\mathcal{T})$:

Caso 1:

Neste primeiro caso, desprezamos a incidência de luz externa fazendo $g = 0$, e vamos supor uma condição de contorno dada por $\phi(x,y) = exp(\mu\mathcal{E}(x+y)/2D)\, sen\, \pi y$. Usando a transformação indicada no Capítulo 2, podemos reescrever o problema $(\mathcal{T})$ como:

$$\text{Problema } (\mathcal{T}'): \quad \begin{aligned} \Delta w(x,y) - \lambda^2 w(x,y) &= 0 \qquad && (x,y) \in \Omega \\ w(x,y) &= \Psi(x,y) && (x,y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

onde estamos fazendo:

$$\Psi(x,y) = sen\, \pi y$$

$$w(x,y) = u(x,y) exp\left(\frac{\mu\mathcal{E}(x+y)}{2D}\right)$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{\tau D} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu\mathcal{E}}{D}\right)^2$$

Para fins de ilustração do método proposto vamos considerar o domínio de definição Ω como sendo o quadrado $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, e as condições de fronteira são dadas por: $w(0,y) = sen\, \pi y$ para $0 \le y \le 1$ e $u = 0$ para as aresta restantes. A solução analítica é dada, [ver Apendice D], por :

$$w(x,y) = \frac{senh\ \sigma(1-x)\ \ sen\ \pi y}{senh\ \sigma} \qquad \text{com} \quad \sigma = (1/\tau D + \tfrac{1}{2}(\mu\mathcal{E}/D)^2 \ + \pi^2)^{1/2}$$

Adotando a rede quadrada S_h com $h = \frac{1}{30}$ e denotando por $x_i = ih$, $y_j = jh$ $(i,j = 1,2,\cdots,30)$ e $w_{i,j} = w(x_i, y_j)$. A equação a diferenças finita [ver Capítulo 1] é dada por:

$$(4 + \lambda^2 h^2)\, w_{i,j} - w_{i-1,j} - w_{i+1,j} - w_{i,j+1} - w_{i,j-1} = 0 \tag{7.11}$$

onde pela equação (3.9) do Teorema 3.2, temos:

$$4\mathrm{I}_0(\lambda h)\, w_{i,j} - w_{i-1,j} - w_{i+1,j} - w_{i,j+1} - w_{i,j-1} = 0 \tag{7.12}$$

A Figura 7.3 apresenta as soluções numéricas para esses dois métodos no caso de uma amostra padrão de silício à temperatura ambiente $T = 300^0K$, onde temos: $D = 35\,cm^2/s$, $\tau = 10^{-3}s$, $\mu = 1350\ cm^2/Vs$, [Condon e Odishaw-1964] e consideramos um campo elétrico $\mathcal{E} = 10\,mV/cm$.

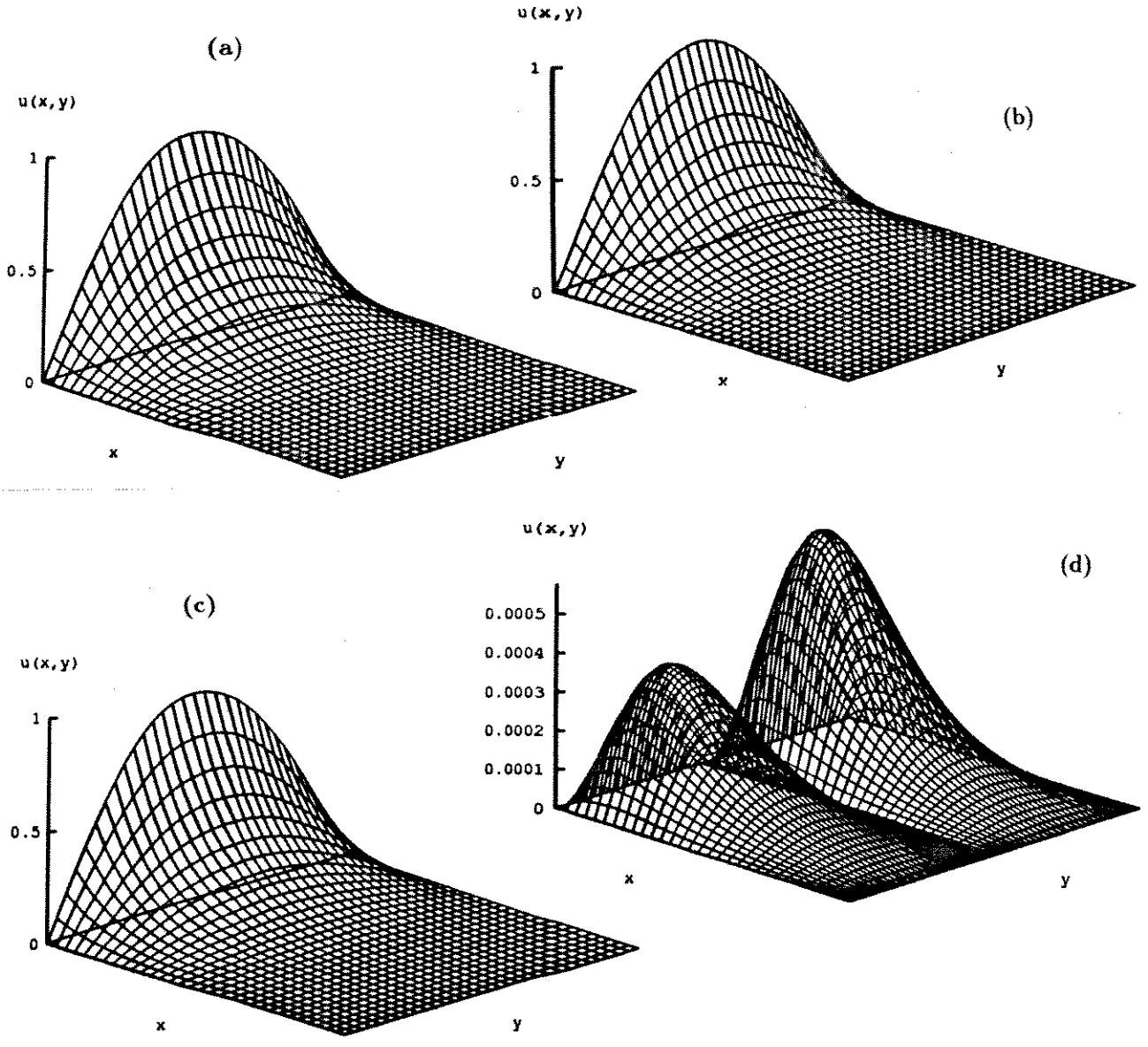

Figura 7.3. Solução numérica para o Problema $\mathcal{T}$' com $\lambda^2 = 5.352$ – Rede Retangular.

(a) - Solução Exata

(b) - Solução por Diferença Finita

(c) - Solução pelo Método Proposto

(d) - Erro: (a) – (c) e (a) – (b)

Para o segundo exemplo adotamos a rede triangular G_h com $h=\frac{1}{30}$ e denotamos $x_i = ih + phcos(\frac{\pi}{3})$ e $y_j = jhsen(\frac{\pi}{3})$, para $i = 1,2,\cdots,30$; $j = 0,1,\cdots,30$ com $p = (j \, mod \, 2) - 1$ e $w_{i,j} = w(x_i, y_j)$. Por diferenças finitas [ver Capítulo 1] chegamos a seguinte expressão:

$$6(1+\frac{\lambda^2 h^2}{4}+\frac{\lambda^4 h^4}{64})\, w_{i,j} - w_{i-1,j-1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-2,j} - w_{i+2,j} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j+1} = 0 \tag{7.13}$$

pela equação (3.2) do Teorema 3.1, temos:

$$6\,\mathrm{I}_0(\lambda h)\, w_{i,j} - w_{i-1,j-1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-2,j} - w_{i+2,j} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j+1} = 0 \tag{7.14}$$

Os resultados para estes dois métodos são apresentados na Figura 7.4 juntamente com a solução analítica. Observamos as mesmas características dos exemplos anteriores, ou seja, a superioridade do método proposto e as vantagens do uso da rede triangular frente à rede quadrada. Neste exemplo, em virtude da baixa ordem de grandeza dos números envolvidos, foi necessário se trabalhar com dupla precisão para assegurar que não estamos lidando com o erro de arredondamento da máquina.

Caso 2:

Supondo agora que $g = \beta\alpha I(1-R)$, independe de x e y, onde I é a intensidade da luz incidente, R é o coeficiente de reflexão da amostra, α é o fator de absorção do material e β é o coeficiente de rendimento quântico. Considerando o efeito do campo elétrico $\mathcal{E}$ suficientemente pequeno, podemos reescrever o problema $(\mathcal{T})$ como:

$$\text{Problema } (\mathcal{T}'') : \quad \begin{aligned} \Delta w(x,y) - \lambda^2 w(x,y) &= 0 \qquad && (x,y) \in \Omega \\ w(x,y) &= \psi(x,y) + g/\lambda^2 && (x,y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

onde definimos $w = u - g/\lambda^2$. Vamos supor ainda que todos os elétrons excessivos recombinam-se nas bordas da amostra, ou seja $u(x,y) = 0$ para $(x,y) \in \partial\Omega$. Neste caso a solução exata só pode ser expressa através de uma série infinita [Crank-1975]. Adotando uma rede triangular G_h com $h = 1/30$ e aplicando os resultados dos Teoremas 3.1, temos:

$$6\,\mathrm{I}_0(\lambda h)\, w_{i,j} - w_{i-1,j-1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-2,j} - w_{i+2,j} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j+1} = 0 \tag{7.15}$$

A Figura 7.5 apresenta a solução numérica deste caso para $g = 3.36\ W/cm^2$.

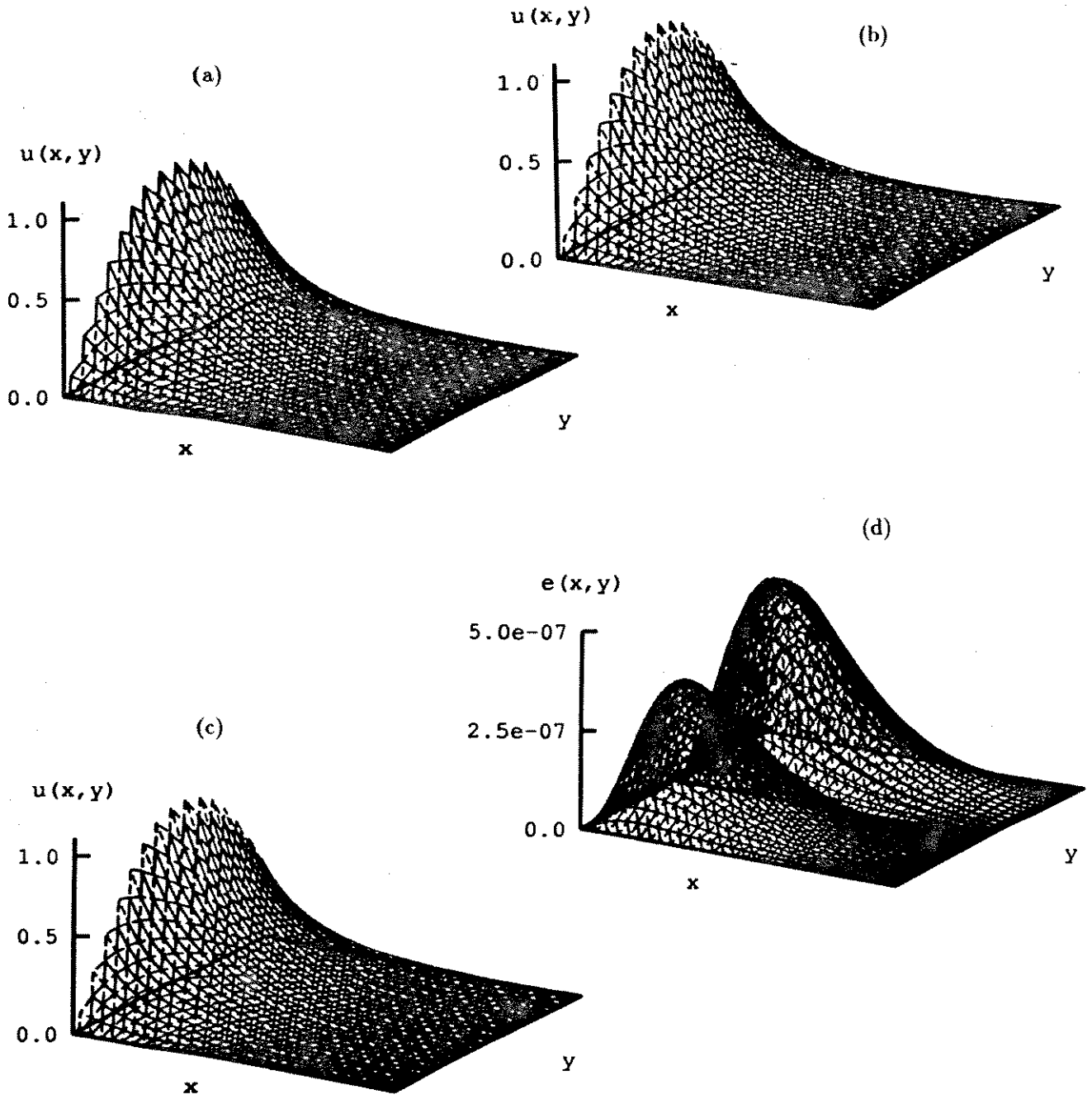

Figura 7.4. Solução Numérica para o Problema $\mathcal{T}'$ com $\lambda = 5.352$ – Rede triangular.

(a) - Solução Exata

(b) - Solução por Diferença Finita

(c) - Solução pelo Método Proposto

(d) - Erro: (a) – (c) e (a) – (b)

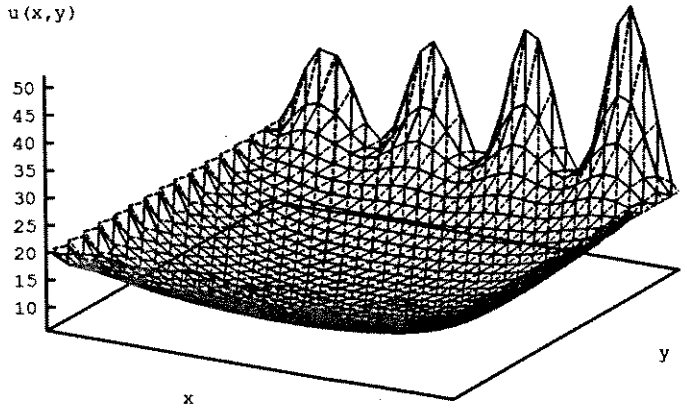

Figure 7.5. Solução Numérica para o Problema $\mathcal{T}''$ com a Rede triangular.

CAPÍTULO 8

A PESPECTIVA DE CONTINUAÇÃO DA TESE

Este capítulo discute as pespectivas de extensão do método proposto nesta Tese para problemas mais gerais do que os abordados no Capítulo 3. Consideramos aqui problemas de valor de contorno envolvendo a equação de *Helmholtz* não homogênea. A análise do erro de precisão para a solução destes problemas é feita por comparação entre as equações obtidas por métodos a diferenças finitas e aquelas obtidas através do Teorema do Valor Médio.

8.1. O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ NÃO HOMOGÊNEA:

Seja Ω uma superfície aberta no $\mathbb{R}^2$, limitada pelo contorno $\partial\Omega$. Consideremos a função $u(x,y) \in \mathbb{C}^2(\Omega) \bigcap \mathbb{C}^0(\overline{\Omega})$ satisfazendo o seguinte problema de valor de contorno de Dirichlet:

$$\Delta u(x,y) - \lambda^2 u(x,y) = f(x,y) \qquad (x,y) \in \Omega \tag{8.1}$$

$$u(x,y) = \Psi(x,y) \qquad (x,y) \in \partial\Omega \tag{8.2}$$

onde Δ é o operador *Laplaciano* e λ^2 é uma constante positiva. Quando $\partial\Omega$ é uma região suave e $f, \Psi \in \mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega})$, o problema (8.1)-(8.2) possui uma única solução $u(x)$ de classe $\mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega})$ [Gilbarg e Trudinger-1983].

Redes Quadradas:

Vamos considerar o domínio $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, representado por um retângulo no $\mathbb{R}^2$. Para resolver este problema numericamente vamos assumir uma rede quadrada, com passo de discretização h, conforme a Definição 3.1. Ao conjunto de pontos interiores a Ω chamamos Ω_h, e ao conjunto de pontos em $\partial\Omega$, excluídos os quatro vértices de $\partial\Omega$, denominamos $\partial\Omega_h$. A cada ponto da rede $\Omega_h \cup \partial\Omega_h$ associamos um valor $U(x_i, y_j)$ com $U = \Psi$ em $\partial\Omega_h$, o qual deve ser uma aproximação para a solução $u(x_i, y_j)$ no ponto correspondente. A função de rede $U(x_i, y_j)$ deve satisfazer uma equação a diferenças que aproxima o operador *Laplaciano* em cada ponto $(x_i, y_j) \in \Omega_h$, dada por:

$$\Delta_h U_{i,j} := \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} \tag{8.3}$$

Usando o operador diferença Δ_h, definido acima, podemos recolocar o problema (8.1)-(8.2) de forma aproximada como:

$$\Delta_h U(x,y) - \lambda^2 U(x,y) = f(x,y) \qquad (x,y) \in \Omega_h \tag{8.4}$$

$$U(x,y) = \Psi(x,y) \qquad (x,y) \in \partial\Omega_h \tag{8.5}$$

Denotando por u_z, f_z e U_z os valores de u, f e U respectivamente, em um ponto z da rede, e denotando por ΣU_b a soma dos valores de U em quatro pontos vizinhos de z, a uma distância h do ponto z, podemos reescrever a equação (8.4) da seguinte forma:

$$\sum U_b - 4(1 + \frac{h^2\lambda^2}{4})U_z - h^2 f_z = 0 \tag{8.6}$$

Denotando-se por $\mathrm{T}_0(\lambda h) = 1 + \frac{\lambda^2 h^2}{4}$ podemos reescrever (8.6) como:

$$4\mathrm{T}_0(\lambda h)U_z = \sum U_b - \frac{4f_z}{\lambda^2}[1 - \mathrm{T}_0(\lambda h)] \tag{8.7}$$

No intuito de avaliar o erro de aproximação $\| U_z - u_z \|_\infty$, vamos supor que $u \in \mathbb{C}^4(\Omega)$, e que suas derivadas de quarta ordem sejam limitadas em Ω. Usando o teorema de *Taylor* da mesma forma como foi feito no Capítulo 1, temos o erro de truncamento dado por:

$$\tau\{u_z\} := \sum u_b - 4u_z - h^2 \Delta u \mid_z = \frac{2}{4!}h^4\left(\frac{\partial^4 u_z}{\partial x_i^4} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y_j^4}\right) + \mathrm{O}(h^6) \tag{8.8}$$

Substituindo $\Delta u = \lambda^2 u + f$ em (8.8) e reagrupando os termos, temos que:

$$\tau\{u_z\} := \sum u_b - 4\mathrm{T}_0(\lambda h)u_z - h^2 f_z = \frac{2}{4!}h^4\left(\frac{\partial^4 u_z}{\partial x_i^4} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y_i^4}\right) + \mathrm{O}(h^6) \tag{8.9}$$

Substituindo as derivadas de quarta ordem por M_4, conforme notação introduzida no Capítulo 1, na equação (8.9), temos:

$$| \tau\{u_z\} | \leq \frac{2}{4!}h^4\left(\left\|\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4}\right\| + \left\|\frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4}\right\|\right) + \mathrm{O}(h^6) \leq \frac{4}{4!}h^4 M_4 + \mathrm{O}(h^6) \tag{8.10}$$

Subtraindo (8.7) de (8.9), deduzimos a seguinte equação a diferenças:

$$(\sum u_b - \sum U_b) - 4\mathrm{T}_0(\lambda h)(u_z - U_z) = \frac{2}{4!}h^4\left(\frac{\partial^4 u_z}{\partial x_i^4} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y_j^4}\right) + \mathrm{O}(h^6) \tag{8.11}$$

Vamos denotar por $(u-U)$ e por $\tau\{u\}$ os vetores cujas componentes são $(u_z - U_z)$ e $\tau\{u_z\}$ respectivamente. Podemos determinar $\| u-U \|_\infty$ resolvendo o sistema de equações lineares obtido ao se escrever a equação a diferenças (8.11) para cada ponto de Ω_h. Os valores de $(u_z - U_z)$ nos pontos de $\partial\Omega_h$, se anulam em virtude das condições de contorno expressas em (8.2) e (8.5) serem idênticas. Escrevendo este sistema de equações na forma matricial e denotando por A_4, a matriz do sistema cuja estrutura está dada no Capítulo 1, temos que:

$$A_4(u-U) = 4\tau_4\{u\}$$

Procedendo da mesma forma como foi feito no Capítulo 6, podemos escrever:

$$\| A_4(u-U) \|_\infty = 4 \| \tau_4\{u\} \|_\infty$$

A avaliação para o limitante superior do erro de precisão é dada por:

$$\| u-U \|_\infty \leq \frac{1}{\mathrm{T}_0(\lambda h) - 1} \| \tau_4\{u\} \|_\infty \tag{8.12}$$

sendo:

$$\mathrm{T}_0(\lambda h) - 1 = \mathrm{O}(h^2) \tag{8.13}$$

Substituindo (8.13) em (8.12), temos a seguinte avaliação para o erro de precisão:

$$\| u-U \|_\infty \leq \frac{1}{\mathrm{O}(h^2)}\left(\frac{h^4 M_4}{4!} + \mathrm{O}(h^6)\right) \tag{8.14}$$

Podemos concluir de (8.14) que a equação (8.7) é uma equação a diferenças finitas, para uma discretização de cinco pontos, que aproxima adequadamente a solução do problema de valor de contorno para a equação de *Helmholtz* não homogênea, com um erro de aproximação do tipo $\mathrm{O}(h^2)$.

Redes triangulares:

Ao adotar uma rede triangular, encontra-se uma discretização envolvendo sete pontos, como mostrado em [Kantorovich e Krylov-1964, pp.188, eq.35], dada por:

$$(\sum u_b + \sum u_c) - 6u_z - \frac{3h^2}{2}\Delta u \mid_z - \frac{3h^4}{32}\Delta^2 u \mid_z = \tau\{u_z\} \tag{8.16}$$

onde u_z é o valor de u em um ponto $z = (x_i, y_j)$ da rede, Σu_b é a soma dos valores de u nos pontos vizinhos de z, com coordenadas $(x_i \pm h, y_j)$ e Σu_c é a soma dos valores de u nos outros quatro pontos vizinhos de z, com coordenadas $(x_i \pm h/2, y_j \pm h\sqrt{3}/2)$. A equação de *Helmholtz* não homogênea satisfaz as seguintes igualdades: $\Delta u = \lambda^2 u + f$ e $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \Delta(\lambda^2 u + f) = \lambda^4 u + \Delta f$, substituindo em (8.16) podemos reescreve-la como:

$$(\sum u_b + \sum u_c) - 6u_z \mathrm{T}_1(\lambda h) - 6(\frac{h^2 f_z}{4} + \frac{h^4 \Delta_h f}{64}) = \tau\{u_z\} \tag{8.17}$$

onde $\mathrm{T}_1(\lambda h) = (1 + \frac{\lambda^2 h^2}{4} + \frac{\lambda^4 h^4}{64})$. A expressão do erro de truncamento $\tau\{u_z\}$ é dada em [Kantorovich e Krylov-1964] por:

$$\tau\{u_z\} = \frac{h^6}{16 \times 6!}\Big(33\frac{\partial^6 u_z}{\partial x_i^6} + 45\frac{\partial^6 u_z}{\partial x_i^4 \partial y_j^2} + 135\frac{\partial^6 u_z}{\partial x_i^2 \partial y_j^4} + 27\frac{\partial^6 u_z}{\partial y_j^6}\Big) + \mathrm{O}(h^8) \tag{8.18}$$

Substituindo as derivadas de sexta ordem por M_6 em (8.18), conforme notação introduzida no Capítulo 1, podemos escrever que:

$$|\tau\{u_z\}| \leq \frac{15h^6}{6!}M_6 + \mathrm{O}(h^8) \tag{8.19}$$

A avaliação do erro de precisão neste caso pode ser feita da mesma forma como no caso da rede quadrada, aproximando a solução u pela função de rede U, satisfazendo uma equação a diferenças para cada nó da rede, dada por:

$$6U_z \mathrm{T}_1(\lambda h) = (\sum U_b + \sum U_c) - 6(\frac{h^2 f_z}{4} + \frac{h^4 \Delta_h f}{64}) \tag{8.20}$$

Obtem-se esta equação trocando-se u por U em (8.17) e fazendo $\tau\{u_z\} = 0$.

Neste caso, calculamos o limitante do erro de precisão resolvendo o sistema de equações lineares obtido ao se subtrair a equação (8.17) da equação (8.19). Denotando por A_6 a matriz do sistema linear cuja estrutura está dada no Capítulo 1, e por $\tau_6\{u\}$ o vetor cujos elementos são os $\tau\{u_z\}$, da mesma forma como feito para rede quadrada, a avaliação do erro será dada por:

$$\| u-U \|_\infty \leq \frac{1}{\mathrm{T}_1(\lambda h)-1} \| \tau_6\{u\} \|_\infty \tag{8.21}$$

sendo:

$$\mathrm{T}_1(\lambda h)-1 = \mathrm{O}(h^2) \tag{8.22}$$

Substituindo (8.22) em (8.21) temos a seguinte avaliação para o erro de precisão:

$$\| u-U \|_\infty \leq \frac{1}{\mathrm{O}(h^2)}\left(\frac{15h^6 M_6}{6!}+\mathrm{O}(h^8)\right) \tag{8.23}$$

Podemos concluir de (8.23) que a equação (8.20) é uma equação a diferenças finitas para uma discretização de sete pontos, que aproxima a solução do problema de valor de contorno para a equação de *Helmholtz* não homogênea, com um erro de aproximação do tipo $\mathrm{O}(h^4)$

As equações (8.7) e (8.20) serão comparadas com as expressões resultante da abordagem numérica que estamos propondo neste capítulo para o problema não homogêneo.

8.2. ABORDAGEM DO PROBLEMA PELO TEOREMA DO VALOR MÉDIO:

Vamos considerar agora o problema (8.1)-(8.2) quando o domínio de definição é representado por uma bola de raio h, ou seja $\Omega = \mathbb{B}$, e $\partial\Omega = \partial\mathbb{B}$. Podemos reescrevê-lo como se segue:

$$\Delta u(x,y) - \lambda^2 u(x,y) = f(x,y) \qquad (x,y) \in \mathbb{B} \tag{8.24}$$

$$u(x,y) = \Psi(x,y) \qquad (x,y) \in \partial\mathbb{B} \tag{8.25}$$

Adotando uma discretização de cinco pontos em $\overline{\mathbb{B}}$, onde $\mathbb{B}_h = (x_i, y_j)$ representa as coordenadas do centro da bola $\mathbb{B}$ e $\partial\mathbb{B}_h = \{(x_i \pm h, y_j), (x_i, y_j \pm h)\}$ representa quatro pontos no contorno $\partial\mathbb{B}$, como mostra a Figura 8.1.

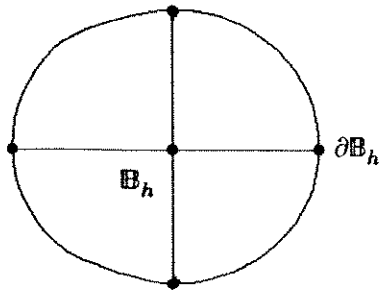

Figura 8.1. Discretização de cinco pontos na bola $\overline{\mathbb{B}}$

Vamos denotar por f_z o valor de $f(x,y)$ no centro da bola $\mathbb{B}_h$ e seja U uma função de rede definida em $\mathbb{B}_h \cup \partial\mathbb{B}_h$. Com esta notação podemos recolocar o problema (8.4)-(8.5) de forma aproximada por:

$$\Delta_h U(x,y) - \lambda^2 U(x,y) = f_z \qquad (x,y) \in \mathbb{B}_h \tag{8.26}$$

$$U(x,y) = \Psi(x,y) \qquad (x,y) \in \partial\mathbb{B}_h \tag{8.27}$$

Seja W uma função de rede definida em $\mathbb{B}_h \cup \partial\mathbb{B}_h$, por:

$$W = U + \frac{f_z}{\lambda^2}$$

onde temos que:

$$\Delta_h W - \lambda^2 W = \Delta_h U - \lambda^2 U - f_z = 0$$

Sendo assim podemos formular o seguinte problema de valor de contorno para W:

$$\Delta_h W(x,y) - \lambda^2 W(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \mathbb{B}_h \tag{8.28}$$

$$W(x,y) = \Psi(x,y) + \frac{f_z}{\lambda^2} \qquad (x,y) \in \partial\mathbb{B}_h \tag{8.29}$$

O problema discreto (8.28)-(8.29) inspira a formulação do seguinte problema de valor de contorno:

$$\Delta w(x,y) - \lambda^2 w(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \mathbb{B} \tag{8.30}$$

$$w(x,y) = \Psi(x,y) + \frac{f_z}{\lambda^2} \qquad (x,y) \in \partial\mathbb{B} \tag{8.31}$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio, ao problema (8.30)-(8.31), temos:

$$\frac{1}{2\pi h}\int_{\partial\mathbb{B}} w\,ds = w(z)\,\mathrm{I}_0(\lambda h) \tag{8.32}$$

onde estamos denotando por $z=(x_i,y_j)$ o centro da bola $\mathbb{B}$ e $\mathrm{I}_0(\lambda h)$ é a função de Bessel. Utilizando a rede quadrada e a função de rede W satisfazendo o problema (8.28)-(8.29), podemos aproximar (8.32) por:

$$W_{i,j}=\frac{1}{4\,\mathrm{I}_0(\lambda h)}(\,W_{i-1,j}+W_{i+1,j}+W_{i,j-1}+W_{i,j+1}) \tag{8.33}$$

Substituindo $W=U+\frac{f_z}{\lambda^2}$ e por ΣU_b a soma dos valores de U em quatro pontos vizinhos de z, a uma distância h do ponto z, podemos reescrever (8.33) como:

$$4\,\mathrm{I}_0(\lambda h)U_z=\sum U_b+\frac{4f_z}{\lambda^2}[1-\mathrm{I}_0(\lambda h)] \tag{8.34}$$

Comparando a equação (8.34) com a equação (8.7) proveniente do método a diferenças finitas para a rede quadrada, notamos que estas equações tornam-se idênticas quando truncamos a série que representa a função de Bessel $\mathrm{I}_0(\lambda h)$ no segundo termo. Destacamos também que a avaliação do erro de precisão entre $u(x,y)$ satisfazendo o problema (8.24)-(8.25), e a função de rede U satisfazendo a equação (8.34), pode ser feita de modo similar ao do caso homogêneo, resultando em um erro da mesma ordem de precisão, ou seja, um erro do tipo $\mathrm{O}(h^2)$ para o caso das redes quadradas.

Redes triangulares:

Ao adotar uma rede triangular encontramos no lugar da equação (8.34), a seguinte equação:

$$6\,\mathrm{I}_0(\lambda h)U_z=\sum U_b+\sum U_c+\frac{6f_z}{\lambda^2}\,[1-\mathrm{I}_0(\lambda h)] \tag{8.35}$$

Onde U_z é o valor de u no ponto $z=(x_i,y_j)$, ΣU_b é a soma dos valores de U nos pontos vizinhos de z, com coordenadas $(x_i\pm h,y_j)$ e ΣU_c é a soma dos valores de U nos outros quatro pontos vizinhos de z, com coordenadas $(x_i\pm h/2,y_j\pm h\sqrt{3}/2)$.

Neste caso a comparação se faz com a equação (8.20), proveniente do método a diferenças finitas. Aqui notamos que ao truncar a série que representa a função de Bessel no terceiro termo, a equação (8.35) apresenta um termo diferente da equação (8.20). Portanto, ao contrário da rede quadrada, o Teorema do Valor Médio aplicado à rede triangular para a equação não homogênea, não pode ser visto como uma extensão do método de diferenças finitas. A análise do método proposto, neste caso, precisa ser aprofundada afim de permitir uma estimativa do erro de precisão decorrente do uso da equação (8.35). A avaliação do erro de precisão provavelmente será feita a partir do erro de integração numérica, de modo similar ao do caso homogêneo, no Capítulo 5. Por fim, devemos notar que se não fizermos a substituição de $\Delta^2 u = \lambda^4 u + \Delta f$ em (8.16), encontraremos uma expressão semelhante a (8.35) quando $\mathbf{I}_0(\lambda h)$ é truncado no segundo termo – porém esta expressão resulta em um erro de precisão de ordem $O(h^2)$, inferior à ordem do erro comumente obtido para o caso de redes triangulares, que é $O(h^4)$.

8.3. ABORDAGEM AO PROBLEMA DE REFINAMENTO DA REDE:

O problema de refinamento da rede de discretização surge quando se deseja uma avaliação mais precisa da solução em determinado subconjunto da região onde o problema está definido. Nestes casos resolver o problema na íntegra com um pequeno passo de discretização levaria a um esforço computacional muito grande e muitas vezes desnecessário. Portanto adota-se um procedimento de refinamento da rede somente na região onde se deseja uma avaliação mais precisa.

Usando o método que estamos propondo este procedimento poderia ser implementado, para uma rede quadrada, com os seguintes passos:

Passo 1: Resolve-se o problema em toda região Ω com um passo de rede h.
Passo 2: Resolve-se o problema para um subconjunto de Ω com um passo $\sqrt{2}h/2$.
Passo 3: Resolve-se o problema para um subconjunto de Ω com um passo $h/2$.
Passo 4: Repete-se os passos $1-3$ com $h' = h/2$.

Estes passos estão ilustrados na Figura 8.2. Obeserve que não é necessário fazer interpolação. Quando a rede triangular está sendo adotada o refinamento só pode ser feito passando-se diretamente de um passo de discretização h para um passo $h/2$. No entanto, algum critério deve ser adotado para avaliar pontos interiores que farão parte da rede triangular refinada. Isto constituirá uma das maiores dificuldades na avaliação do erro de precisão do método. Este caso está ilustrado na Figura 8.3.

O método alternante de *Schwarz* deve desempenhar um papel fundamental na implementação dos algoritmos de refinamente de rede, assim como na implementação de algoritmos que usam processamento em paralelo. A junção destas duas abordagens (refinamento de rede e processamento em paralelo) pode resultar em uma excelente abordagem para problemas que exigem refinamento de rede, em subconjuntos disjuntos, na região de definição do problema.

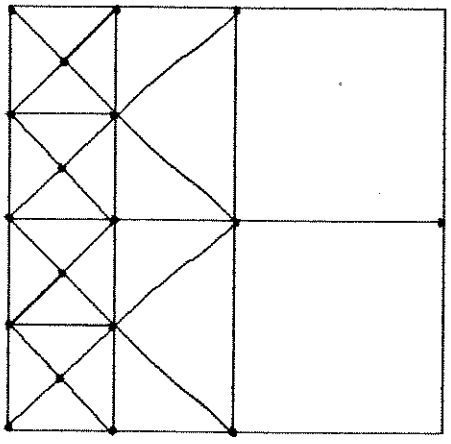

Figura 8.2 – Refinamento da rede quadrada

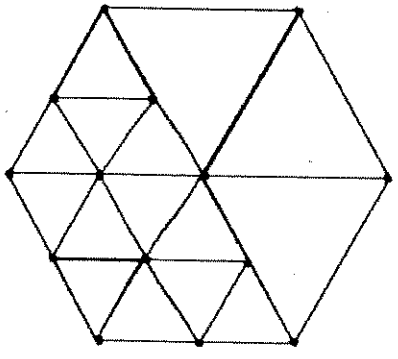

Figura 8.3 – Refinamento da rede triangular

CONCLUSÃO

Nesta Tese apresentamos um método de solução numérica para problemas de valor de contorno de *Dirichlet* envolvendo a equação de *Helmholtz* homogênea. O método proposto adota uma cobertura do domínio de definição do problema formada por bolas entrelaçadas. Aplicando o Teorema do Valor Médio em cada uma destas bolas calculamos a solução do problema no centro de cada bola como uma integral do valor que esta solução assume na fronteira da bola. O método proposto assume carater numérico quando se resolve de forma aproximada a integral de contorno proveniente do Teorema do Valor Médio. Com este objetivo, adotamos o método numérico de integração conhecido como método dos trapézios, que apesar de muito simples, mostra-se bastante preciso quando o integrando é uma função periódica. Visando aplicar este procedimento sistematicamente em toda a cobertura do domínio de definição do problema adotamos duas redes regulares: a rede triangular, que resultou em um erro de integração de ordem $O(h^6)$, e a rede quadrada que resultou em um erro de integração $O(h^4)$.

Para avaliar o erro de precisão do método proposto nesta Tese, escrevemos um sistema de equação linear do tipo $Au = b + \tau$, resultante da aplicação numérica do Teorema do Valor Médio, onde τ é o vetor de erro de integração em cada bola. Comparamos a solução deste sistema com uma função de rede U, satisfazendo o mesmo sistema limear com $\tau = 0$. Avaliamos o erro de precisão através de um limitante superior para a diferença $(u - U)$, encontrando um limitante do tipo $O(h^4)$ quando a rede era triangular e um limitante do tipo $O(h^2)$ para o caso da rede quadrada.

Fizemos a comparação do método proposto com o método a diferenças finitas envolvendo os mesmos tipos de redes. Concluimos após a análise que o método proposto possui um limitante para o erro de precisão inferior ao limitante do erro proveniente do método a diferenças finitas em ambas as redes, triangular e quadrada. As figuras 3.3 e 3.4 no Capítulo 3 mostram que esta vantagem do método proposto aumenta quando o parâmetro λ da equação de *Helmholtz* cresce, para o mesmo passo de discretização. Outro resultado importante a ressaltar é que nas equações provenientes do método proposto está presente a função de Bessel $I_0(\lambda h)$, a qual corresponde uma série infinita – quando esta série é truncada no segundo ou terceiro termo, as expressões propostas se reduzem às já conhecidas expressões do método a diferenças finitas para as redes triangular e quadrada, respectivamente. Isto sugere a interpretação das expressões propostas como sendo uma extensão daquelas obtidas por diferenças finitas. Os exemplos resolvidos no Capítulo 7 servem de ilustração para estes resultados teoricamente deduzidos.

APÊNDICE - A

TÓPICOS DA TEORIA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS ELÍPTICAS LINEARES DE 2ª ORDEM

O objetivo deste apêndice é apresentar alguns tópicos da teoria de equações diferenciais parciais elípticas lineares de segunda ordem, empregados nesta Tese, tais como: o Teorema do Valor Médio, o Princípio do Máximo e o conceito de Função de *Green*. Iniciamos pela apresentação de algumas definições básicas necessárias ao desenvolvimento desta teoria.

A.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS:

Seja Ω uma superfície aberta no $\mathbb{R}^2$, limitada pelo contorno $\partial\Omega$. Denotamos por $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ o fecho de Ω. Seja $u(x, y)$ uma função real cujo domínio de definição é $\overline{\Omega}$. Se $u(x,y)$ é contínua e possui derivadas contínuas até a ordem k em Ω, então essa função é dita de classe $\mathbb{C}^k(\Omega)$ e denotamos essa propriedade por $u(x,y) \in \mathbb{C}^k(\Omega)$ – essa notação continuará válida mesmo quando $k = \infty$. O caso particular em que $u(x,y)$ é apenas uma função contínua [e limitada] será denotado por $u(x,y) \in \mathbb{C}(\Omega)$ $[u(x,y) \in \mathbf{C}^0(\Omega)]$. Agora, consideremos a função $u(x,y) \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}^0(\overline{\Omega})$ satisfazendo o seguinte problema de valor de contorno:

$$\mathcal{L}u(x,y) = f(x,y) \qquad (x,y) \in \Omega \tag{A.1}$$

$$u(x,y) = \Psi(x,y) \qquad (x,y) \in \partial\Omega \tag{A.2}$$

onde o operador $\mathcal{L}$ é definido de forma geral por:

$$\mathcal{L} = a(x,y)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + g(x,y) \tag{A.3}$$

A elipticidade do operador $\mathcal{L}$ se traduz através de propriedades da matriz formada pelos coeficientes dos termos de segunda ordem, como mostramos a seguir.

Definição: $\mathcal{L}$ é elíptico em um ponto $(x,y) \in \overline{\Omega}$ se a matriz A dos coeficientes é definida positiva.

$$A = \begin{bmatrix} a(x,y) & b(x,y) \\ b(x,y) & c(x,y) \end{bmatrix}$$

Isto é, se λ e Λ são o mínimo e o máximo autovalores de A respectivamente, e A é definida positiva para o operador elíptico, temos que:

$$0 \leq \lambda|\xi|^2 \leq \xi^T A \xi \leq \Lambda|\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^2 - \{0\} \tag{A.4}$$

Definição: $\mathcal{L}$ é elíptico em $\overline{\Omega}$ se $\lambda > 0$, e $\mathcal{L}$ é estritamente elíptico em $\overline{\Omega}$ se $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ para alguma constante λ_0.

Definição: Se Λ/λ é limitado em $\overline{\Omega}$, chamamos $\mathcal{L}$ de uniformemente elíptico em $\overline{\Omega}$.

Muitos resultados relacionados a operadores elípticos exigem hipóteses adicionais, limitando a importância relativa dos termos de ordem inferior $d(x,y)\frac{\partial}{\partial x}$, $e(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ e $g(x,y)$ com respeito aos termos principais $a(x,y)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $2b(x,y)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ e $c(x,y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Aqui assumimos as seguintes condições:

$$\frac{|d(x,y)|}{\lambda} \leq constante < \infty \qquad \text{e} \qquad \frac{|e(x,y)|}{\lambda} \leq constante < \infty \tag{A.5}$$

Considerando $\mathcal{L}' = \lambda^{-1}\mathcal{L}$, podemos reduzir a análise ao caso onde $\lambda = 1$ e, como consequência, a condição (A.5) se reduz à exigência de que $d(x,y)$ e $e(x,y)$ sejam limitados. Note-se que se os coeficientes $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $d(x,y)$ e $e(x,y)$ são contínuos em Ω, então $\mathcal{L}$ é uniformemente elíptico em qualquer subdomínio limitado $\Omega' \subset \Omega$ e, portanto, (A.5) é válida.

Além do operador $\mathcal{L}$ usaremos também os símbolos $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ para representar o operador *Laplaciano*, o símbolo $\nabla = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ para o operador *gradiente* de u. Usaremos também a notação ***div*** para representar o operador *divergente*. Eventualmente, uma função $u \in C^2(\Omega)$, que é solução da equação de *Laplace* $\Delta u = 0$ em Ω, será chamada de função harmônica.

A.2 O TEOREMA DO VALOR MÉDIO:

Aqui, nosso ponto de partida é o teorema da divergência de *Gauss* [Courant e John - 1974]. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, um domínio limitado e compacto, com contorno $\partial\Omega$ suficientemente regular, e, seja $\vec{n}$ um vetor normal apontando para fora do contorno $\partial\Omega$ – para qualquer campo vetorial $\vec{w}$ em $\overline{\Omega}$. Então podemos escrever:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{div}\, \vec{w}\, ds = \int_{\partial\Omega} \vec{w} \cdot \vec{n}\, d\ell \tag{A.6}$$

onde ds é um elemento da superfície Ω e $d\ell$ é um elemento do contorno $\partial\Omega$. No caso particular de $u \in \mathbb{C}^2(\overline{\Omega})$, podemos definir o campo vetorial $\vec{w} = \nabla u$ de forma que $\boldsymbol{div}\ \vec{w} = \Delta u$, então reescrever (A.6) como:

$$\int_{\Omega} \Delta u\, ds = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \vec{n}\, d\ell \tag{A.7}$$

Temos duas identidades associadas ao teorema da divergência conhecidas como primeira e segunda identidade de *Green*.

Primeira Identidade de *Green*:

Sejam u e v funções de classe $\mathbb{C}^2(\overline{\Omega})$. Podemos então aplicar o teorema da divergência ao campo vetorial $\vec{w} = u(\nabla v)$, tal que $\boldsymbol{div}\ \vec{w} = u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v$:

$$\int_{\Omega} (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)\, ds = \int_{\partial\Omega} u \nabla v \cdot \vec{n}\, d\ell \tag{A.8}$$

Outra forma de escrever essa equação é adotar $\nabla v = \dfrac{\partial v}{\partial n}\vec{n}$, neste caso temos:

$$\int_{\Omega} (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)\, ds = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} d\ell \tag{A.9}$$

Segunda Identidade de *Green*:

Considerando o campo vetorial $\vec{w} = v(\nabla u)$ e aplicando a primeira identidade de *Green* temos:

$$\int_{\Omega} (v\Delta u + \nabla v \cdot \nabla u)\, ds = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} d\ell \tag{A.10}$$

Subtraindo (A.10) de (A.9), temos a segunda identidade de *Green*:

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) ds \tag{A.11}$$

O Teorema do Valor Médio é uma consequência direta do Teorema da Divergência de *Gauss* e das identidades de *Green*. Demonstraremos este teorema primeiramente para a equação de *Laplace*; em seguida generalizaremos esses resultados para as equações de *Poisson* e *Helmholtz*.

Teorema A.1 (Teorema do Valor Médio)

Seja $u \in \mathbb{C}^2(\Omega)$ satisfazendo $\Delta u = 0$ em Ω. Então, para qualquer bola $\mathbb{B} = \mathbb{B}_R(z) \subset \Omega$, temos:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial \mathbb{B}} u \, ds \tag{A.12}$$

Prova: Seja $\rho \in (0, R)$ e aplicando a equação (A.7) para a bola $\mathbb{B}_\rho = \mathbb{B}_\rho(z)$, temos:

$$\int_{\mathbb{B}_\rho} \Delta u \, ds = \int_{\partial \mathbb{B}_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} d\ell = 0$$

Considerando as coordenadas do centro $z = (x_0, y_0)$ e um ponto qualquer $p = (x, y)$, na superfície da bola $\mathbb{B}_\rho(z)$, podemos definir as coordenadas radial e angular como:

$$\rho = |p - z| \quad \text{e} \quad \omega = (cos\,\theta, sen\,\theta) \quad \text{onde:} \quad cos\,\theta = \frac{x - x_0}{\rho} \quad \text{e} \quad sen\,\theta = \frac{y - y_0}{\rho}$$

Então, podemos escrever que:

$$\int_{\partial \mathbb{B}_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} d\ell = \int_{\partial \mathbb{B}_\rho} \frac{\partial u(z + \rho\omega)}{\partial \rho} d\ell = \int_{|w| = 1} \frac{\partial u(z + \rho\omega)}{\partial \rho} \rho \, d\omega = 0$$

portanto:

$$\int_{|w| = 1} \frac{\partial u(z + \rho\omega)}{\partial \rho} \rho d\omega = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{|w| = 1} u(z + \rho\omega) \, d\omega = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^{-1} \int_{\partial \mathbb{B}_\rho} u \, d\ell \right] = 0$$

Consequentemente, para qualquer $\rho \in (0, R)$, temos:

$$\rho^{-1} \int_{\partial \mathbb{B}_\rho} u \, d\ell = R^{-1} \int_{\partial \mathbb{B}_R} u \, d\ell$$

e desde que:

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^{-1} \int_{\partial \mathbb{B}_\rho} u \, d\ell = 2\pi u(z) = R^{-1} \int_{\partial \mathbb{B}_R} u \, d\ell \tag{A.13}$$

a relação (A.12) é imediata.

Outra forma de apresentar o Teorema do Valor Médio é escrevendo (A.13) como:

$$2\pi\rho u(z) = \int_{\partial \mathbb{B}_\rho} u \, d\ell$$

E integrando, com relação a ρ, de 0 a R, a equação (A.13) torna-se:

$$u(z) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{\mathbb{B}_R} u \, ds \tag{A.14}$$

representando um valor médio sobre a área da bola $\mathbb{B}_R(z)$. □

A.3 REPRESENTAÇÃO DE GREEN:

Seja u uma função de classe $\mathbb{C}^2(\overline{\Omega})$ satisfazendo a equação de *Poisson* $\Delta u = f$ em Ω. Utilizando as coordenadas polares r e θ, podemos escrever:

$$\frac{1}{r}\Big(\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})\Big) + \frac{\partial}{r\,\partial\theta}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\Big) = f \quad \text{em} \quad \Omega \tag{A.15}$$

Define-se uma solução fundamental para esse problema como uma função $\Gamma(r)$ que satisfaz as seguintes condições:

i) $\Gamma(r)$ é uma função de classe $\mathbb{C}^2(\overline{\Omega})$ e satisfaz a equação $\Delta\Gamma(r) = 0$ para toda região Ω, exceto no ponto caracterizado por $r = 0$, onde $\Gamma(r)$ apresenta uma sigularidade.

ii) Para $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$, $\Gamma(r)$ é dada por:

$$\Gamma(r) = \frac{1}{2\pi} \ell n \frac{1}{r} \tag{A.16}$$

Claramente, $\Gamma(r)$ é harmônica quando $r > 0$. No entanto, a singularidade em $r = 0$ exige algumas considerações para o uso dessa função no lugar da função v, na segunda identidade de *Green* (A.11). Uma forma de contornar esta dificuldade é substituir Ω por $\Omega - \mathbb{B}_\rho(z)$ [Gilbrag e Trundinger-1983], onde $\mathbb{B}_\rho(z)$ é uma bola com centro no ponto z e raio ρ suficientemente pequeno. Podemos então concluir de (A.11) que:

$$\int_{\Omega - \mathbb{B}_\rho} \Gamma \Delta u ds = \int_{\partial\Omega} (\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial n}) d\ell + \int_{\partial\mathbb{B}_\rho} (\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial n}) d\ell \tag{A.17}$$

Observe-se que o segundo termo de (A.17) permite escrever:

$$\int_{\partial\mathbb{B}_\rho} \Gamma \frac{\partial u}{\partial n} d\ell = \Gamma(\rho) \int_{\partial\mathbb{B}_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} d\ell \leq 2\pi\rho\Gamma(\rho) \underset{\mathbb{B}_\rho}{Sup} |\nabla u| \to 0 \quad \text{quando } \rho \to 0 \tag{A.18}$$

$$\int_{\partial\mathbb{B}_\rho} u \frac{\partial \Gamma}{\partial n} d\ell = \Gamma'(\rho) \int_{\partial\mathbb{B}_\rho} u \, d\ell = \frac{-1}{2\pi\rho} \int_{\partial\mathbb{B}_\rho} u \, d\ell \to -u(z) \quad \text{quando } \rho \to 0 \tag{A.19}$$

Substituindo as equações (A.18) e (A.19) em (A.17), temos a *Fórmula de Representação de Green*:

$$u(z) + \int_\Omega \Gamma(\rho) \Delta u \, ds = \int_{\partial\Omega} \Big(\Gamma(\rho) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \Gamma(\rho)}{\partial n} \Big) d\ell \qquad \text{para } (z \in \Omega) \tag{A.20}$$

Outra forma de obter uma representação integral, semelhante à (A.20) da solução u, é definir uma função $G(r) = \Gamma(r) + w(r)$, onde a função $w(r)$ é uma função de classe $\mathbf{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathbf{C}^2(\Omega)$ satisfazendo $\Delta w = 0$ em Ω. Com o propósito de verificar que $G(r)$ satisfaz todos os requisitos de uma solução fundamental, tomemos novamente a segunda identidade de *Green* para a função $w(r)$:

$$\int_\Omega w(\rho) \Delta u \, ds = \int_{\partial\Omega} \Big(w(\rho) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial w(\rho)}{\partial n} \Big) d\ell \tag{A.21}$$

Somando (A.20) e (A.21), chegamos a uma generalização da *Fórmula de Representação de Green*:

$$u(z) + \int_\Omega G(\rho) \Delta u \, ds = \int_{\partial\Omega} \Big(G(\rho) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G(\rho)}{\partial n} \Big) d\ell \qquad \text{para } (z \in \Omega) \tag{A.22}$$

É vantajoso usar a solução fundamental $G(r)$ em lugar de $\Gamma(r)$ em (A.22), dado que a presença do

termo regular $w(r)$ na definição de $G(r)$ nos permite escolher as condições de contorno para $G(r)$. Por exemplo, considerando o problema de *Dirichlet*: $\Delta u = f$ em Ω $u = \Psi$ em $\partial\Omega$. Não podemos usar imediatamente (A.20) porque não conhecemos $\frac{\partial u}{\partial n}$ em $\partial\Omega$. No entanto, optando por $G(r) = \Gamma(r) + w(r)$ com uma função $w(r)$ tal que: $\Delta w(r) = 0$ em Ω e $w(r) = -\Psi$ em $\partial\Omega$, vemos que $G(r) = 0$ em $\partial\Omega$. Assim, podemos escrever a representação (A.22) para este problema como:

$$u(z) + \int_{\Omega} G(\rho)\,\Delta u\,ds = -\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial G(\rho)}{\partial n}d\ell \qquad \text{para } (z \in \Omega) \tag{A.23}$$

A função $G(r)$ é chamada função de *Green* para o domínio Ω, e o Teorema (A.3) garante a unicidade de $G(r)$. A equação (A.23) proporciona uma representação para uma função harmônica de classe $\mathbb{C}^1(\bar{\Omega}) \cap \mathbb{C}^2(\Omega)$ em termos de seus valores de contorno.

Outras representações importantes podem ser obtidas diretamente da equção (A.22) tais como:

1. Se u tem suporte compacto em $\mathbb{R}^2$ e $u = 0$ em $\partial\Omega$, então:

$$u(z) = -\int_{\Omega} G(r)\,\Delta u\,ds \tag{A.24}$$

Nota: *Para uma função integrável $f(x,y)$ a integral $\int_{\Omega} G(x,y)f(x,y)\,ds$ é chamada potencial newtoniano [Courant e Hilbert-1962], e u satisfaz a equação de Poisson $\Delta u = f$.*

2. Se u é uma função harmônica então $\Delta u = 0$, e temos:

$$u(z) = \int_{\partial\Omega} \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right)ds \quad \text{para } (z \in \Omega) \tag{A.25}$$

Nota: *A primeira integral em (A.25) é conhecida como a lei de potencial simples. A segunda integral em (A.25) é conhecida como a lei de potencial dupla (ou potencial de um dipolo)*

Os resultados expostos acima, denominados representação de *Green* para a solução de problemas de valor de contorno do primeiro tipo (Problema de *Dirichlet*), foram desenvolvidos para o operador diferencial de *Laplace* Δ. No entanto, é possível estender estes resultados aos problemas envolvendo os operadores elípticos auto-adjuntos do tipo $\mathcal{L} = \Delta - \lambda^2(r,\theta)$. Além disto, podemos definir a função de *Green* $G(r)$ de forma a satisfazer o problema de valor de contorno: $\mathcal{L}G(r) = \delta(r)$ em Ω e $G(r) = 0$ em $\partial\Omega$. Assim como em [Roach-1970], a solução do problema de *Dirichlet* $\mathcal{L}u(r,\theta) = f(r,\theta)$

para $(r,\theta) \in \Omega$ e $u(r,\theta) = \Psi$ para $(r,\theta) \in \partial\Omega$, é dada por:

$$u(z) + \int_{\Omega} G(\rho)\, f(\rho,\theta)\, ds = -\int_{\partial\Omega} u(r,\theta) \frac{\partial G(\rho)}{\partial n} d\ell \qquad \text{para } (z \in \Omega)$$

A.4 A FUNÇÃO DE GREEN PARA CÍRCULOS E ESFERAS:

Apesar desta Tese tratar somente de problemas no $\mathbb{R}^2$, com caráter ilustrativo, vamos abrir uma exceção apresentando a função de *Green* para esferas n-dimensionais. Seja $\Gamma(r)$ a solução fundamental da equação de *Laplace* $\Delta u = 0$, dada por:

$$\Gamma(r) = \frac{1}{2\pi} \ell n \frac{1}{r} \qquad (n = 2) \tag{A.26}$$

$$\Gamma(r) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} r^{2-n} \qquad (n > 2) \tag{A.27}$$

com:

$$\omega_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma^*\left(\frac{n}{2}\right)}$$

onde ω_n representa a área da esfera de raio unitário n-dimensional [Courant e Hilbert-1962] e Γ^* é a função Gama.

A função de *Green* para a esfera de raio R pode ser determinada pelo método da imagem refletida. Denotando por $\mathbb{B}_R(z)$ uma esfera de raio R e centrada no ponto $z \in \mathbb{R}^n$. Seja um ponto $p \in \mathbb{B}_R(0)$ com $p \neq 0$, então $\overline{p}$ representa o ponto inverso (ou imagem refletida de p) com relação a $\mathbb{B}_R(0)$ e podemos escrever:

$$\overline{p} = \frac{R^2}{|p|^2} p \tag{A.28}$$

se $p = 0$, então $\overline{p} = \infty$.

Tomando dois pontos, p e q, na esfera $\mathbb{B}_R(0)$ – sendo p na superfície da esfera e um ponto interior $q \neq 0$. Definindo esses pontos por suas coordenadas cartesianas temos:

$$p = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad q = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

A função de *Green* pode então ser escrita como:

$$G(p,q) = \Gamma(r) - \Gamma\left(\frac{k}{R}\rho\right) \tag{A.29}$$

onde: $k^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ $\quad r^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = \| p - q \|_2^2$ $\quad \rho^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \frac{R^2}{k^2} y_i)^2$

ρ denota a distância do ponto p ao ponto $\overline{q}$ (imagem refletida do ponto q) e r é a distância do ponto p ao ponto q. No caso do círculo ($n = 2$), temos a seguinte expressão para $G(p,q)$:

$$G(p,q) = \frac{1}{2\pi} \ell n \frac{k\rho}{Rr} \tag{A.30}$$

Propriedade-PA.1: A função de *Green* $G(p,q)$ tem a propriedade de simetria, ou seja:

$$G(p,q) = G(q,p) \qquad \forall\, p,q \in \overline{\mathbb{B}}_R$$

Prova: Surge imediatamente da equação (A.29)).

Tomando o ponto $p = 0$, centro de $\mathbb{B}_R(0)$, e usando a Propriedade PA.1 que estabelece $G(0,q) = G(q,0)$, temos a equação (A.29) reduzida a seguinte expressão:

$$G(q,0) = \Gamma(r) - \Gamma(R) \tag{A.31}$$

substituindo (A.26) e (A.27) em (A.31), temos:

$$\Gamma(r) - \Gamma(R) = \frac{1}{2\pi} \ell n \frac{R}{r} \qquad (n = 2) \tag{A.32}$$

$$\Gamma(r) - \Gamma(R) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} (r^{2-n} - R^{2-n}) \qquad (n > 2) \tag{A.33}$$

Devemos notar que $G = 0$ em $\partial\mathbb{B}_R$, e que a derivada de G na direção normal pode ser obtida diretamente das equações (A.32) e (A.33). Após algumas simplificações, chega-se ao seguinte resultado para $p,q \in \partial\mathbb{B}_R$:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \Gamma'(r) \frac{R^2 - k^2}{rR} \qquad \text{para } n = 2 \tag{A.34}$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{R^2 - k^2}{n\omega_n R} r^{-n} \qquad \text{para } n > 2 \tag{A.35}$$

Usando novamente a propriedade de simetria e fazendo $p = 0$ e $q \in \partial\mathbb{B}_R$, ou seja, fazendo $k = 0$ e $r = R$ podemos reescrever (A.34) como:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi R} \qquad (n = 2) \qquad \text{(A.36)}$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \qquad (n > 2) \qquad \text{(A.37)}$$

A.5 APLICAÇÃO DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO A PROBLEMAS DE DIRICHLET:

Vamos retomar o problema de contorno originalmente definido pelas equações (A.1)-(A.2) – porém, colocando o operador diferencial $\mathcal{L}$ em sua forma canônica e sendo o domínio Ω uma bola $\mathbb{B}_R(0)$, de raio R e centro no ponto $z = (0,0)$. Denotando por $\mathbb{B} = \mathbb{B}_R(0)$, temos:

$$\Delta u(x,y) - \lambda(x,y)u(x,y) = f(x,y) \qquad (x,y) \in \mathbb{B} \qquad \text{(A.38)}$$

$$u(x,y) = \Psi(x,y) \qquad (x,y) \in \partial\mathbb{B} \qquad \text{(A.39)}$$

Abordaremos em seguida alguns casos particulares do problema (A.38)-(A.39), e nosso interesse será estabelecer a solução destes problemas no centro da bola $\mathbb{B}$. Isto se fará através da fórmula de representação de *Green* (A.22) e da função de *Green* em (A.32).

A.5.1 Problema de *Laplace*:

Seja a função $u \in \mathbb{C}^2(\mathbb{B}) \cap \mathbb{C}^0(\partial\mathbb{B})$, satisfazendo o seguinte problema de contorno:

$$\Delta u(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \mathbb{B} \qquad \text{(A.40)}$$

$$u(x,y) = \psi(x,y) \qquad (x,y) \in \partial\mathbb{B} \qquad \text{(A.41)}$$

Aqui o nosso objetivo é determinar uma expressão para o valor de u no centro da bola $\mathbb{B}$. Sendo u uma função harmônica podemos utilizar a representação (A.25) e por substituição direta das equações (A.36) e (A.41), chegamos ao resultado já apresentado como Teorema do Valor Médio (Teorema A.1)

$$u(0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial\mathbb{B}} \psi(x,y)\, ds \qquad \text{(A.42)}$$

A.5.2 Problema de Poisson :

Este problema difere do anterior por considerar a equação de Poisson. Desta forma, seja a função $u \in \mathbb{C}^2(\mathbb{B}) \cap \mathbb{C}^0(\partial\mathbb{B})$ satisfazendo o seguinte problema de contorno:

$$\Delta u(x,y) = f(x,y) \qquad (x,y) \in \mathbb{B} \tag{A.43}$$

$$u(x,y) = \psi(x,y) \qquad (x,y) \in \partial\mathbb{B} \tag{A.44}$$

Substituindo $G(r)$ dada em (A.32), na fórmula de representação de *Green* (A.22), obtemos a solução no centro da bola $\mathbb{B}$, dada por:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial\mathbb{B}} \psi(x,y)\, d\ell - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{B}} \ell n \frac{R}{\rho} f(x,y)\, ds \tag{A.45}$$

A equação (A.45) é uma versão do teorema do valor médio para a equação de Poisson. Tem-se um caso particular desse problema quando $\psi(x,y) = 0$; e aí a equação (A.45) é reescrita como:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{B}} \ell n \frac{R}{\rho} f(x,y)\, ds \tag{A.46}$$

Neste caso particular a integral (A.46) recebe o nome de *Potencial Newtoniano* com densidade $f(x,y)$.

A.5.3 O Teorema do Valor Médio Para Equação de *Helmholtz*

A generalização do Teorema do Valor Médio para problemas de contorno mais complexos, como o problema descrito por (A.38) e (A.39), também pode ser obtida utilizando a fórmula de representação de *Green* (A.22). Para tanto vamos substituir (A.32) e (A.36) em (A.22) e sendo $G = 0$ em $\partial\mathbb{B}$, podemos escrever:

$$\frac{1}{2\pi R} \int_{\partial\mathbb{B}} u\, d\ell = u(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{B}} \ell n \frac{R}{\rho} \Delta u\, ds \tag{A.47}$$

Considerando agora a segunda identidade de *Green*, com o cuidado de evitar a singularidade da função v no centro da bola $\mathbb{B}$, temos:

$$\int_{\mathbb{B}-\mathbb{B}_\rho} (v\Delta u - u\Delta v)\, ds = \int_{\partial\mathbb{B}} (v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n})\, d\ell + \int_{\partial\mathbb{B}_\rho} (v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n})\, d\ell \tag{A.48}$$

Adotando uma função $v(r)$ que tem a singularidade em um ponto z:

$$v(r) = \frac{C}{2\pi} \ell n \frac{1}{r} + w(r) \qquad r \in (0, R) \tag{A.49}$$

e supondo que $w(r) \in \mathbb{C}^2(\overline{\mathbb{B}})$ é uma função que cresce menos rapidamente que r^{-1} quando $r \to 0$. Semelhante às equações (A.18) e (A.19), temos:

$$\int_{\partial \mathbb{B}_\rho} v \frac{\partial u}{\partial n} d\ell = v(\rho) \int_{\partial \mathbb{B}_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} d\ell \leq 2\pi \rho v(\rho) \underset{\mathbb{B}_\rho}{Sup} |\nabla u| \to 0 \quad \text{quando } \rho \to 0$$

$$\int_{\partial \mathbb{B}_\rho} u \frac{\partial v}{\partial n} d\ell = v'(\rho) \int_{\partial \mathbb{B}_\rho} u \, d\ell = \left(\frac{-C}{2\pi\rho} + w'(\rho) \right) \int_{\partial \mathbb{B}_\rho} u \, d\ell \to -Cu(z) \quad \text{quando } \rho \to 0$$

portanto, no limite $\rho \to 0$, temos:

$$Cu(0) + \int_{\mathbb{B}} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx = \int_{\partial \mathbb{B}} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) \, ds \tag{A.50}$$

Adotando para v, as seguintes condições de contorno:

$$v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \qquad \text{em } \partial \mathbb{B} \tag{A.51}$$

chegamos à seguinte identidade:

$$Cu(0) = \int_{\mathbb{B}} (u \Delta v - v \Delta u) \, \mathrm{dx} \tag{A.52}$$

Supondo que $u \in \mathbb{C}^{(2m+2)}(\overline{\Omega})$, onde $m \geq 0$, e aplicando a identidade (A.52) à função $\Delta^k u$ para todo $k \leq m$, temos a identidade:

$$C\Delta^k u(0) = \int_{\mathbb{B}} (\Delta^k u \, \Delta v - v \Delta^{k+1} u) \, dx \tag{A.53}$$

Estamos denotamos por Δ^k a k-ésima iteração do *Laplaciano*, tal que $\Delta^0 u = u$. Seja agora uma sequência de funções do tipo (A.49), satisfazendo a equação diferencial:

$$\Delta v_{k+1} = v''_{k+1} + \frac{1}{r} v'_{k+1} = v_k \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{A.54}$$

e a condição de contorno (A.51). A primeira função da sequência é:

$$v_0(r) = \frac{1}{2\pi} \ell n \frac{R}{r} \tag{A.55}$$

Para $k > 0$ as funções v_k satisfazem a seguinte equação recursiva:

$$v_{k+1} = \int_r^R \rho v_k(\rho)\, \ell n \frac{\rho}{r}\, d\rho \qquad (k = 0,1,2,\cdots) \tag{A.56}$$

que nos leva a uma solução geral do tipo:

$$v_k = \frac{C_k}{2\pi} \ell n \frac{1}{r} + w(r) \qquad \text{com} \quad C_k = \frac{1}{(k!)^2}\Big(\frac{R}{2}\Big)^{2k} \tag{A.57}$$

Substituindo v por v_k em (A.53) temos:

$$C_k \Delta^k u(0) = \int_{\mathbb{B}} (v_{k-1} \Delta^k u - v_k \Delta^{k+1} u)\, dx \tag{A.58}$$

Somando todas as sequências $k = 1, 2, \cdots, m$, chegamos a seguinte expressão:

$$\sum_{k=1}^{m} C_k \Delta^k u(0) = \int_{\mathbb{B}} (v_0 \Delta u - v_m \Delta^{m+1} u)\, dx \tag{A.59}$$

comparando (A.59) com (A.47) temos:

$$\frac{1}{2\pi R} \int_{\partial \mathbb{B}} u\, ds = \sum_{k=0}^{m} \Big(\frac{R}{2}\Big)^{2k} \frac{\Delta^k u(0)}{(k!)^2} + \int_{\mathbb{B}} v_m \Delta^{m+1} u\, dx \tag{A.60}$$

onde estamos denotando $\Delta^0 u(0) = u(0)$. Essa identidade é válida para toda função $u \in \mathbb{C}^{2m+2}(\mathbb{B})$. Se u é arbitrariamente diferenciável e o último termo de (A.60) tende a zero quando $m \to \infty$, então (A.60) resulta em uma série infinita dada por:

$$\frac{1}{2\pi R} \int_{\partial \mathbb{B}} u\, ds = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{R}{2}\Big)^{2k} \frac{\Delta^k u(0)}{(k!)^2} \tag{A.61}$$

A.5.4 O Problema de *Helmholtz*

Nesta abordagem vamos supor que $u \in \mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{B}) \cap \mathbb{C}^{0}(\partial\mathbb{B})$ e u satisfaz o seguinte problema de contorno:

$$\Delta u(x,y) - \lambda^2 u(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \mathbb{B}_R(0) \tag{A.62}$$

$$u(x,y) = \Psi(x,y) \qquad (x,y) \in \partial\mathbb{B}_R \tag{A.63}$$

Além disso vamos considerar que λ seja constante em $\mathbb{B}$. Neste caso podemos deduzir que:

$$\Delta^m u = \lambda^{2m} u \tag{A.64}$$

Substituindo (A.64) em (A.61) temos:

$$\frac{1}{2\pi R}\int_{\partial\mathbb{B}} u\,ds = u(0)\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{R}{2}\right)^{2k}\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}\right] \tag{A.65}$$

Usando agora a definição da função de Bessel modificada de ordem n [Courant e John-1974], dada por:

$$\mathrm{I}_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{n+2k}}{(k!)\Gamma^*(n+k+1)} \tag{A.66}$$

Onde $\Gamma^*(\cdot)$ é a função Gama, fazendo $n = 0$ em (A.66), temos:

$$\mathrm{I}_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$$

note que $\mathrm{I}_0(x)$ é uma função estritamente crescente para $x \geq 0$ e que $\mathrm{I}_0(0) = 1$. Reconhecendo a expressão de $\mathrm{I}_0(x)$ em (A.65), temos:

$$\frac{1}{2\pi R}\int_{\partial\mathbb{B}} u\,ds = u(0)\,\mathrm{I}_0(R\lambda) \tag{A.67}$$

Substituindo u no integrando de (A.67) pelo seu valor de contorno (A.63) podemos afirmar que a solução do problema (A.62)-(A.63) satisfaz a relação de valor médio dada por:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi R\,\mathrm{I}_0(R\lambda)}\int_{\partial\mathbb{B}} \Psi(x,y)\,ds \tag{A.68}$$

A.4 O PRINCÍPIO DO MÁXIMO PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS ELÍPTICAS:

Teorema A.2: (Princípio do Máximo) [Gilbrag e Trundinger-1983]

Seja a função harmônica $u \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}^0(\partial\Omega)$, então seu máximo (ou mínimo) estão sempre localizados na fronteira. O máximo (ou mínimo) estarão localizados no interior, se e somente se, u for constante.

Prova: Definindo-se: $M = \underset{\Omega}{Sup}\, u$ e $\Omega_M = \{x \in \overline{\Omega} \mid u = M\}$

por suposição Ω_M é não vazio e desde que u é contínua, Ω_M é fechado com relação a Ω. Agora se Ω_M contém um ponto interior z de Ω, deve existir uma família de bolas (círculos ou esferas) com centro em z, todas contidas em Ω e aplicando o teorema do valor médio para cada uma dessas bolas $\mathbb{B}_R(z) \subset \Omega$, temos que :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial \mathbb{B}_R} u\, ds = M$$

Desde que $u \leq M$, isso só é possível se $u = M$ para todas as bolas de centro z contidas inteiramente em Ω. Assim Ω_M contém pelo menos todos os pontos pertencentes a maior esfera com centro em z e contida inteiramente em $\overline{\Omega}$. O mesmo argumento pode agora ser repetido para qualquer outro ponto interior de Ω_M, então Ω_M pode coincidir com $\overline{\Omega}$ – mas isso significaria que u é constante ($u = M$). Assim para qualquer u que não seja constante, Ω_M deve coincidir somente com os pontos da fronteira $\partial\Omega$. Um argumento semelhante pode ser usado para o mínimo. □

Corolário A.1: Se $u \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}^0(\partial\Omega)$ é constante em $\partial\Omega$, então u é constante em toda região Ω.

Prova: (Consequência direta do Teorema A.2 ver [Gilbrag e Trundinger-1983]).

Teorema A.3: (Unicidade da Solução)

Sejam $u, v \subset \mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}^0(\partial\Omega)$ satisfazendo $\nabla u = \nabla v$ em Ω e $u = v$ em $\partial\Omega$. Então $u = v$ em Ω.

Prova: Seja $w = u - v$, como $\Delta w = 0$ em Ω e $w = 0$ em $\partial\Omega$ então pelo princípio do máximo $w = 0$ em Ω. □

Estendemos agora o princípio do máximo, demonstrado no Teorema (A.2) para o operador *Laplaciano*, aos operadores diferencial elípticos mais gerais como os dados em (A.3).

Teorema A.4 (Princípio do Máximo no Sentido Fraco) [Gilbrag e Trundinger-1983]

Seja $\mathcal{L}$ um operador elíptico no domínio de definição Ω. Supondo que $\mathcal{L}u \geq 0$ e $g(x,y) = 0$ em Ω, com $u \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}^0(\overline{\Omega})$, então o máximo de u em $\overline{\Omega}$ encontra-se em $\partial\Omega$, isto é:

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \tag{A.69}$$

Vamos fazer a hipótese de que $|d(x,y)|/\lambda \leq c_0$ e $|e(x,y)|/\lambda \leq c_0$. No entanto, a conclusão desse Teorema permanece válida mesmo que $|d(x,y)|/\lambda$ e $|e(x,y)|/\lambda$ sejam somente localmente limitados, por exemplo: se $A = \{a_{ij}(x,y)\}$, $d(x,y)$ e $e(x,y) \in \mathbb{C}^0(\Omega)$. Além disto se não for feita a hipótese de que u seja contínua em $\overline{\Omega}$, o teorema continua válido desde que a equação (A.69) seja recolocada como:

$$\sup_{\Omega} u = \lim_{x \to \partial\Omega} \sup u(x) \tag{A.70}$$

Prova:

Mostraremos inicialmente que se $\mathcal{L}u > 0$ em Ω. então o princípio estrito do máximo é válido – isto é, u não pode assumir o máximo em um ponto interior de $\overline{\Omega}$, pois para tal ponto x_0 teríamos:

$$Du(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad D^2u(x_0) = \{D_{ij}u(x_0)\} \leq 0$$

Mas a matriz dos coeficientes $A = \{a_{ij}\}$ é definida positiva desde que $\mathcal{L}$ é elíptico. Consequentemente:

$$\mathcal{L}u(x_0) = a_{ij}\mathrm{D}_{ij}u(x_0) \leq 0$$

o que contradiz a hipótese de que $\mathcal{L}u > 0$. Fazendo a hipótese de que $|d(x,y)|/\lambda \leq c_0$ e $|e(x,y)|/\lambda \leq c_0$. Então desde que $a(x,y) \geq \lambda$, existe uma constante γ suficientemente grande para a qual:

$$\mathcal{L}e^{\gamma x} = (\gamma^2 a(x,y) + \gamma d(x,y))e^{\gamma x} \geq \lambda(\gamma^2 - \gamma c_0)e^{\gamma x} > 0$$

Assim para qualquer $\varepsilon > 0$, temos $\mathcal{L}(u + \varepsilon e^{\gamma x}) > 0$ em Ω, tal que:

$$\underset{\Omega}{Sup}(u+\varepsilon e^{\gamma x}) = \underset{\partial\Omega}{Sup}(u+\varepsilon e^{\gamma x})$$

Fazendo agora $\varepsilon \to 0$, segue que $\underset{\Omega}{Sup}\, u = \underset{\partial\Omega}{Sup}\, u$, como assegura o Teorema. □

Vamos supor o caso mais geral onde $g(x,y) \leq 0$ em Ω. Considerando o subconjunto $\Omega^+ \subset \Omega$, no qual $u > 0$, vemos que se $\mathcal{L}u \geq 0$ em Ω então $\mathcal{L}u \geq 0$ em Ω^+. Definindo $u^+ = max(0,u)$, temos:

$$\mathcal{L}_0 u^+ = a\frac{\partial^2 u^+}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u^+}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u^+}{\partial y^2} + d\frac{\partial u^+}{\partial x} + e\frac{\partial u^+}{\partial y} = -g(x,y)u^+ \geq 0$$

portanto o máximo de u em $\Omega^+ \cup \partial\Omega^+$ deve ocorrer em $\partial\Omega^+$, por continuidade de u então, o máximo de u em Ω deve ocorrer também em $\partial\Omega$. Esse resultado pode ser enunciado no seguinte Corolário.

Corolário A.2:

Seja $\mathcal{L}$ elíptico em um domínio limitado $\overline{\Omega}$. Supondo que $\mathcal{L}u \geq 0$ e $g(x,y) \leq 0$ em $\overline{\Omega}$, então:

$$\underset{\overline{\Omega}}{Sup}\, u \leq \underset{\partial\Omega}{Sup}\, u^+$$

Se $\mathcal{L}u = 0$ em $\overline{\Omega}$ e definindo $u^- = min(u,0)$, então: $\underset{\overline{\Omega}}{Sup}|u| \leq \underset{\partial\Omega}{Sup}|u|$

Do Corolário A.2 segue-se imediatamente o resultado que garante a unicidade do problema de *Dirichlet* para o operador $\mathcal{L}$, ou seja:

Teorema A.5: (Unicidade da Solução)

Seja $\mathcal{L}$ elíptico em $\overline{\Omega}$ com $g(x,y) \leq 0$ supondo que u e v são funções em $\mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}^0(\overline{\Omega})$, satisfazendo $\mathcal{L}u = \mathcal{L}v$ em Ω e $u = v$ em $\partial\Omega$. Então $u = v$ em Ω.

Prova: Seja $w = u - v$, se $\mathcal{L}w \geq 0$ em Ω e $w = 0$ em $\partial\Omega$ então pelo Príncipio do Máximo $w = 0$ em Ω. □

Vamos considerar agora o Princípio do Máximo para problemas de valores de contorno do tipo *Dirichlet*, envolvendo o operador diferencial elíptico não homogêneo de acordo com (A.1) e (A.2):

$$\mathcal{L}u(x,y) = f(x,y) \qquad (x,y) \in \Omega \tag{A.71}$$

$$u(x,y) = \Psi(x,y) \qquad (x,y) \in \partial\Omega \tag{A.72}$$

onde f, Ψ são funções de contorno dadas. O operador diferencial $\mathcal{L}$ é dado por (A.3)

Teorema A.6 (Princípio do Máximo para Problema de *Dirichlet* não Homogêneo)

Se $g(x,y) \leq 0$ então a solução $u(x,y)$ do problema de *Dirichlet* (A.71)-(A.72) satisfaz a desigualdade $|u| \leq max|\phi| + Mmax|f|$, onde $M > 0$ é uma constante que depende somente do domínio $\Omega \cup \partial\Omega$.

Prova. Para provar o teorema, vamos assumir sem perda de generalidade, que Ω é a faixa $0 \leq x \leq D$. Seja $w(x) = e^{\alpha D} - e^{\alpha x}$. Na faixa considerada, temos que $(e^{\alpha D} - 1) \geq w \geq 0$, seja $0 < \lambda \leq min|a(x,y)|$ e $\beta = min|d(x,y)|/\lambda$, e seja $\alpha \geq \beta + 1$, então:

$$\mathcal{L}w(x) = -(a(x,y)\alpha^2 + d(x,y)\alpha)e^{\alpha x} + g(x,y)w(x) \leq -\lambda(\alpha^2 + \beta\alpha) \leq -\lambda$$

A seguir seja $h(x) = max|\phi| + w(x)max|f|$. Então $\mathcal{L}h = g(x,y)max|\phi| + max|f|\mathcal{L}w(x) \leq -\lambda max|f|$ e $h \geq max|\phi|$. Assim, $v = u - h \leq 0$ em $\partial\Omega$ e $\mathcal{L}v = f - \mathcal{L}h \geq f + \lambda max|f| \geq 0$ em Ω. Mas, pelo Princípio do Máximo, se $g(x,y) \leq 0$, $\mathcal{L}v(x,y) \geq 0$, e $v(x,y)$ atinge seu máximo em um ponto interior e, pelo Corolário A.2, o máximo é positivo, portanto $v(x,y)$ é uma constante. Então, $v \leq 0$ em Ω. Similarmente, $u(x,y) \geq -h$. Assim $|u(x,y)| \leq max|\phi| + w(x) \cdot max|f|$. A prova está completa.

Devemos notar que esta desigualdade não depende de $g(x,y)$, nem das propriedades de continuidade dos coeficientes ou tão pouco da forma geométrica do domínio. Um corolário imediato deste resultado é a unicidade da solução do Problema de *Dirichlet*. Se $f \equiv \phi \equiv 0$, $g(x,y) \leq 0$, e (A.71)-(A.72) é válido, então $u(x,y) \equiv 0$. Evidentemente, este resultado também pode ser obtido diretamente do Princípio do Máximo.

APÊNDICE - B

PROVA DA CONVERGÊNCIA DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA A EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

O objetivo deste apêndice é apresentar a prova da convergência da série que representa o Teorema do Valor Médio, desenvolvida no Capítulo 5. Destacamos que apesar do desenvolvimento em forma de série ter sido apresentado em [Courant e Hilbert-1962], nesta referência não se discute a prova da convergência desta série. Neste apêndice provamos a convergência especificamente para funções que satisfazem a equação de *Helmholtz*. Esta prova está dividida em dois lemas: o Lema B.1 que se refere à prova da convergência para problemas no $\mathbb{R}^2$, e o Lema B.2 que apresenta a prova para problemas no $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 3$.

Lema B.1

Seja Ω um subconjunto aberto compacto do $\mathbb{R}^2$, limitado pelo contorno $\partial\Omega$ e denotamos o fecho de Ω por $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Seja $v_k(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \cdots$, uma sequência de funções satisfazendo a seguinte forma recorrente:

$$v_{m+1}(R,r) = \int_r^R \rho v_m(R,\rho) K(\rho,r) d\rho \tag{B.1}$$

com:

$$v_0(R,r) = \frac{1}{2\pi} ln \frac{R}{r}$$

$$K(\rho,r) = ln \frac{\rho}{r}$$

Então existe uma constante $C > 0$ tal que: $\lim_{m\to\infty} | v_{m+1}(R,r) | \leq \lim_{m\to\infty} \frac{C^m}{(m!)^{1/2}} \rightarrow 0$

Prova: Escrevendo (B.1) para $m = 0$, temos:

$$v_1(R,r) = \int_r^R \rho v_0(R,\rho)K(\rho,r)d\rho$$

Tomando o módulo ao quadrado e aplicando a desigualdade de Schwarz podemos escrever que:

$$|v_1(R,r)|^2 = \left| \int_r^R \rho v_0(R,\rho)K(\rho,r)d\rho \right|^2 \leq \left| \int_r^R \rho v_0^2(R,\rho)d\rho \right| \left| \int_r^R \rho K^2(\rho,r)d\rho \right|$$

sendo:

$$\left| \int_r^R \rho v_0^2(R,\rho)d\rho \right| \leq \left| \int_0^R \rho v_0^2(R,\rho)d\rho \right| \leq A^2(R) \tag{B.2}$$

$$\left| \int_r^R \rho K^2(\rho,r)d\rho \right| \leq \left| \int_0^R \rho K^2(\rho,r)d\rho \right| \leq B^2(r) \tag{B.3}$$

Portanto:

$$|v_1(R,r)|^2 \leq A^2(R)B^2(r) \tag{B.4}$$

Escrevendo (B.1) para $m = 1$, tomando o módulo ao quadrado e aplicando a desigualdade de Schwarz podemos escrever que:

$$|v_2(R,r)|^2 = \left| \int_r^R \rho v_1(R,\rho)K(\rho,r)d\rho \right|^2 \leq \left| \int_r^R \rho v_1^2(R,\rho)d\rho \right| \left| \int_r^R \rho K^2(\rho,r)d\rho \right|$$

substituindo (B.3) e (B.4), temos:

$$|v_2(R,r)|^2 \leq B^2(r) \int_r^R \rho A^2(R)B^2(\rho)d\rho$$

$$|v_2(R,r)|^2 \leq A^2(R)B^2(r) \int_r^R \rho B^2(\rho)d\rho \tag{B.5}$$

Definindo-se agora a função $F_1(R,r)$ por:

$$F_1(R,r) = \int_r^R \rho B^2(\rho)\, d\rho \leq M^2 < \infty \tag{B.6}$$

Substituindo (B.6) em (B.5), temos:

$$| v_2(R,r) |^2 \leq A^2(R)B^2(r)F_1(R,r) \tag{B.7}$$

Escrevendo (B.1) para $m = 2$ e repetindo o procedimento, temos:

$$| v_3(R,r) |^2 = \left| \int_r^R \rho v_2(R,\rho)K(\rho,r)d\rho \right|^2 \leq \left| \int_r^R \rho v_2^2(R,\rho)d\rho \right| \left| \int_r^R \rho K^2(\rho,r)d\rho \right|$$

Substituindo (B.3) e (B.7), temos:

$$| v_3(R,r) |^2 \leq A^2(R)B^2(r) \int_r^R \rho B^2(\rho)\, F_1(R,\rho)\, d\rho \tag{B.8}$$

Definindo-se agora a função $F_2(R,r)$ por:

$$F_2(R,r) = \int_r^R \rho B^2(\rho)\, F_1(R,\rho) d\rho \tag{B.9}$$

Substituindo (B.9) em (B.8), temos:

$$| v_3(R,r) |^2 \leq A^2(R)B^2(r)F_2(R,r) \tag{B.10}$$

Procedendo desta forma sucessivamente, chegamos por indução que:

$$| v_{m+1}(R,r) |^2 \leq A^2(R)B^2(r)F_m(R,r) \tag{B.11}$$

com:

$$F_m(R,r) = \int_r^R \rho B^2(\rho)\, F_{m-1}(R,\rho) d\rho \tag{B.12}$$

Retomando agora a definição de $F_1(R,r)$, e diferenciando sobre o sinal de integração em relação a r, podemos escrever:

$$F_1(R,r) = \int_r^R \rho B^2(\rho)\, d\rho \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial F_1(R,r)}{\partial r} = -rB^2(r) \tag{B.13}$$

Substituindo (B.13) em (B.9), temos:

$$F_2(R,r) = \int_r^R F_1(R,\rho)\, \frac{\partial F_1(R,\rho)}{\partial \rho} d\rho \tag{B.14}$$

Integrando (B.14) por partes, chega-se em:

$$F_2(R,r) = \frac{1}{2} F_1^2(R,\rho)\Big|_{\rho=r}^{\rho=R} = \frac{1}{2} F_1^2(R,r)$$

Procedendo assim para $m = 3,4,\cdots$, chegamos por indução que:

$$F_m(R,r) = \frac{1}{m!} F_1^m(R,r) \leq \frac{1}{m!} M^{2m} \tag{B.15}$$

Substituindo (B.15) em (B.11), temos:

$$| v_{m+1}(R,r) | \leq \frac{A(R)B(r)M^m}{(m!)^{1/2}} \tag{B.16}$$

Desde que: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^n}{n!}\right) \to 0$, para qualquer $a > 0$, a prova fica concluida. □

Nota: Seja $n_0 \in \mathbb{N}$, e $a > 0$, tal que $a < \frac{n_0}{2}$, e seja $k = \frac{a^{n_0}}{n_0!}$. Então para algum $n > n_0$ temos:

$$\frac{a^n}{n!} = k\left(\frac{a}{n_0+1}\right)\left(\frac{a}{n_0+2}\right)\cdots\left(\frac{a}{n}\right) < k\left(\frac{n_0/2}{n_0+1}\right)\left(\frac{n_0/2}{n_0+2}\right)\cdots\left(\frac{n_0/2}{n}\right) < 2^{n_0} k \frac{1}{2^n}$$

portanto $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^n}{n!}\right) \to 0$, para qualquer $a > 0$.

Ampliaremos agora a prova da convergência do Lema B.1 para problema definidos no $\mathbf{R}^n$. A prova neste caso difere da anterior proque não podemos fazer a hipótese de que a função v_0 seja quadrado integrável.

Lema B.2

Seja Ω um subconjunto aberto compacto do $\mathbb{R}^n$, limitado pelo contorno $\partial\Omega$ e seja o fecho de Ω denotado por $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Seja $v_k(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \cdots$, uma sequência de funções satisfazendo a seguinte forma recorrente:

$$v_{m+1}(R,r) = \frac{1}{(n-2)\,r^{n-2}} \int_r^R \rho v_m(R,\rho) K(\rho,r) d\rho \tag{B.17}$$

com:

$$v_0(R,r) = \frac{1}{(n-2)w_n}\left(\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}\right) \quad , \quad n \geq 3$$

$$K(\rho,r) = \rho^{n-2} - r^{n-2} \quad , \quad n \geq 3$$

Onde w_n é a área da esfera n – dimensional de raio unitário. Então existe uma constante $C > 0$ tal que: $\lim_{m\to\infty} |v_{m+1}(R,r)| \leq \lim_{m\to\infty} \frac{C^m}{(m!)^{1/2}} \to 0$

Prova:

Escrevendo (B.17) para $m = 0$, temos:

$$v_1(R,r) = \frac{1}{(n-2)\,r^{n-2}} \int_r^R \rho v_0(R,\rho) K(\rho,r) d\rho \tag{B.18}$$

sendo $r < R$ e $r \leq \rho \leq R$, podemos concluir que:

$$v_0(R,r) = \frac{1}{(n-2)w_n}\left(\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}\right) < \frac{1}{(n-2)w_n}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) \tag{B.19}$$

$$K(\rho,r) = \rho^{n-2} - r^{n-2} < \rho^{n-2} \tag{B.20}$$

Substituindo (B.19) e (B.20) em (B.18) temos:

$$v_1(R,r) \leq \frac{1}{(n-2)^2 w_n r^{n-2}} \int_r^R \rho \frac{1}{\rho^{n-2}} \rho^{n-2} d\rho = \frac{F_1(R,r)}{(n-2)^2 w_n r^{n-2}} \tag{B.21}$$

onde estamos definindo:

$$F_1(R,r) = \int_r^R \rho d\rho \tag{B.22}$$

Escrevendo agora (B.17) para $m = 2$ e substituindo (B.21), temos:

$$v_2(R,r) = \frac{1}{(n-2)r^{n-2}} \int_r^R \rho v_1(R,\rho) K(\rho,r) d\rho \leq \frac{1}{(n-2)^3 w_n^2 r^{n-2}} \int_r^R \rho \Big(\frac{F_1(R,\rho)}{\rho^{n-2}} \Big) \rho^{n-2} d\rho$$

$$v_2(R,r) \leq \frac{1}{(n-2)^3 w_n^2 r^{n-2}} \int_r^R \rho F_1(R,\rho) d\rho = \frac{F_2(R,r)}{(n-2)^3 w_n^2 r^{n-2}}$$

onde estamos definindo:

$$F_2(R,r) = \int_r^R \rho F_1(R,\rho) d\rho \tag{B.23}$$

Escrevendo (B.17) para $m = 3$ e repetindo o procedimento, temos:

$$v_3(R,r) = \frac{1}{(n-2)r^{n-2}} \int_r^R \rho v_2(R,\rho) K(\rho,r) d\rho \leq \frac{1}{(n-2)^4 w_n^3 r^{n-2}} \int_r^R \rho F_2(R,\rho) d\rho$$

$$v_3(R,r) \leq \frac{F_3(R,r)}{(n-2)^4 w_n^3 r^{n-2}}$$

onde estamos definindo:

$$F_3(R,r) = \int_r^R \rho F_2(R,\rho) d\rho \tag{B.24}$$

Procedendo desta forma sucessivamente, chegamos por indução que:

$$v_{m+1}(R,r) \leq \frac{F_m(R,r)}{(n-2)^{m+1} w_n^m r^{n-2}} \tag{B.25}$$

com:

$$F_m(R,r) = \int_r^R \rho F_{m-1}(R,\rho) d\rho \tag{B.26}$$

Retomando agora a definição de $F_1(R,r)$, e diferenciando sobre o sinal de integração em relação a r podemos escrever:

$$F_1(R,r) = \int_r^R \rho \, d\rho \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial F_1(R,r)}{\partial r} = -r \tag{B.27}$$

Substituindo (B.27) em (B.22), temos:

$$F_2(R,r) = \int_r^R F_1(R,\rho) \frac{\partial F_1(R,\rho)}{\partial \rho} d\rho \tag{B.28}$$

Integrando (B.28) por partes, chega-se em:

$$F_2(R,r) = \frac{1}{2} F_1^2(R,\rho) \Big|_{\rho=r}^{\rho=R} = \frac{1}{2} F_1^2(R,r)$$

Procedendo assim para $m = 3,4,\cdots$, chegamos por indução que:

$$F_m(R,r) = \frac{1}{m!} F_1^m(R,r) \tag{B.29}$$

Substituindo (B.29) em (B.25), temos:

$$v_{m+1}(R,r) \leq \frac{M^m(R,r)}{(n-2) r^{n-2} (m!)} \tag{B.30}$$

onde estamos definindo aqui:

$$M(R,r) = \frac{F_1(R,r)}{(n-2) w_n} \tag{B.31}$$

Desde que: $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a^n}{n!} \right) \to 0$, para qualquer $a > 0$, a prova fica concluída □

APÊNDICE - C

SOLUÇÃO ANALÍTICA DO EXEMPLO RESOLVIDO NO CAPÍTULO 7

Apresentamos aqui a solução analítica exata para o problema de valor de contorno de *Dirichlet* dado por:

$$\Delta u(x,y) - \lambda^2 u(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \Omega \tag{D.1}$$

$$u(x,y) = \Psi(x,y) \qquad (x,y) \in \partial\Omega \tag{D.2}$$

Como exemplo ilustrativo, vamos considerar o domínio de definição Ω, representado por um quadrado $\Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, e a condição de fronteira dada por $u(0,y) = sen\,\pi y$ para $0 \le y \le 1$, e $u(\cdot,\cdot) = 0$ para as arestas restantes. Neste caso, a solução analítica exata pode ser obtida escrevendo-se u com o produto de duas funções: $u(x,y) = X(x)Y(y)$. O método de separação de variáveis pode ser empregado substituindo-se u em (D.1):

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \lambda^2 u(x,y) = \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) + \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} X(x) - \lambda^2 X(x) Y(y) = 0$$

Reagrupando os termos, e supondo que $u(x,y) \neq 0$ em Ω, temos:

$$\Big(\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - \lambda^2 X(x)\Big) Y(y) + \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} X(x) = 0$$

ou

$$\frac{1}{X(x)}\Big(\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - \lambda^2 X(x)\Big) = -\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = k^2$$

onde k^2 é uma constante positiva qualquer. Desta forma, resolver o problema original é equivalente a resolver as duas equações diferenciais ordinárias com as condições de contorno adequadas:

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} - (\lambda^2 + k^2)X(x) = 0 \qquad \text{with } X(0) = 1;\ X(1) = 0 \tag{D.3}$$

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + k^2Y(y) = 0 \qquad \text{with } Y(0) = Y(1) = 0 \tag{D.4}$$

As soluções gerais de (D.3) e (D.4) são:

$$X(x) = ae^{-\alpha x} + be^{\alpha x} \ ;\ Y(y) = senky \tag{D.5}$$

onde estamos denotando por $\alpha^2 = (\lambda^2 + k^2)$. Agora, introduzindo as condições de contorno, temos:

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ ae^{-\alpha} + be^{\alpha} &= 0 \end{aligned}$$

que resulta nos seguintes valores para a e b:

$$a = -\frac{e^{2\alpha}}{1 - e^{2\alpha}} \qquad\qquad b = \frac{1}{(1 - e^{2\alpha})}$$

Substituindo a e b na expressão (D.5), temos:

$$X(x) = \frac{e^{\alpha}(-e^{\alpha(1-x)} + e^{-\alpha(1-x)})}{(1 - e^{2\alpha})} = \frac{senh\ \alpha(1-x)}{senh\ \alpha}$$

A condição de contorno para $Y(y)$ implica que $k = \pi$, assim $Y(y) = sen\,\pi y$. Finalmente, podemos obter a expressão para $u(x,y) = X(x)Y(y)$. E a solução analítica para (D.1)-(D.2) é dada por:

$$u(x,y) = \frac{senh\ \alpha(1-x)\ \ sen\ \pi y}{senh\,\alpha} \qquad \text{com} \quad \alpha = (\lambda^2 + \pi^2)^{1/2}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abdullah, A.R. – 1991; "The Four Point Explicit Decoupled Group (EDG) Method: A fast Poisson Solver", Intern. J. Computer Math., Vol. 38, 61-70.

Ames, W.F. – 1977; "*Numerical Methods for Partial Differential Equations*"; Academic Press Inc.; Gr. Brit.

Ananthakrishnaiah, U.; Manohar, R.; Stephenson, J.W. – 1987; "High-Order Methods for Elliptic Equations With Variable Coefficients", Numer. Meth. for Part. Diff. Equat., Vol. 3, 219-227.

Andrade Fo., M.G. e Do Val, J.B.R. – 1992*a*; "*Uma Abordagem Numérica Para Equações Diferenciais Parciais Elípticas no* $\mathbf{R}^2$ *Utilizando o Teorema do Valor Médio*", XV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional – CNMAC, São Carlos – SP.

Andrade Fo., M.G. e Do Val, J.B.R. – 1993; "*The Mean Value Theorem Approach For Linear Elliptic Dirichlet Problem*", SIAM – Annual Meeting, Philadelphia – PA.

Andrade Fo., M.G. e Do Val, J.B.R – 1994*a*, "*Uma Aplicação de Um Procedimento Numérico Preciso ao Problema de Difusão de Elétrons em Uma Placa de Silício*", XVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional – CNMAC, Uberlândia – MG.

Andrade Fo., M.G. e Do Val, J.B.R. – 1994*b*; "*Avaliação Numérica Para Integrais em Contornos Circulares e Elípticos*", XVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional – CNMAC, Uberlândia – MG.

Becker, A.A. – 1992; "*The Boundary Element Method in Engineering*", MecGraw Hill, Int. Ed.,London.

Bennaton, J.F. – 1985; "*Discret Time Galerkin Approximations to the Nolinear Filtering Solution*", Journ. of Math. Analysis and Applic., Vol. 110, No. 2, pp. 364-383.

Birkhoff, G.; Lynch, R.E. – 1984; *Numerical Solution of Elliptic Problems*; SIAM Studies in Applied Mathematics; Philadelphia.

Birkhoff, G.; Gulati, S. – 1974; "Optimal Few-Point Discretizations of Linear Source Problems"; SIAM J. Numer. Anal., Vol 11, No. 4, 700-728.

Boisvert, R.F. – 1981; "Families of High Order Accurate Discretization of Some Elliptic Equations", SIAM J. Numer. Anal., Vol. , No. 2, 268-284.

Budak, B.M., Samarski, A.A., Tíjonov, A.N. – 1984; *Problems in Mathematical Physics*, Vols. I, II, (in spanish), Mir Moscow.

Ciarlet, P.G. – 1978; *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdan.

Collatz, L. – 1966; *The Numerical Treatment of Differential Equations*, 3rd. Ed., Springer Verlag, N.Y.

Condon, E.U.; Odishaw, H. – 1964; "*Handbook of Physicis*"; Sec. Edition, McGraw-Hill.

Courant, R.; Hilbert, D. – 1962; "*Methods of Mathematical Physics (Partial DifferentialEquations)*" Vol II, John Wiley & Sons, N.York.

Courant, R.; John, F. – 1974; "*Introduction to Clculus and Analysis*" Vol II, John Wiley & Sons, N.Y.

Craki, J. – 1989; "*The Mathematics of Diffusion*" Sec. Edition, Oxford Science Publication, Gran-Britain.

Davis, P.J.; Rabinowitz, P. – 1975; "Methods of Numerical Integration", Academic Press, N.Y.

DuChateau, P.; Zachmann D.W. – 1986; "Partial Differential Equations", MacGraw-Hill, N.Y.

Evans, D.J. – 1991; "The Solution of Poisson's Equation in a Triangular Region", Intern. J. Computer Math., Vol. 39, 81-89.

Ewing, R.E.; Lazarov, R.D.; Vassilevski, P.S. – 1991; "Local Refinemente Techniques for Elliptic Problems on Cell-Centred Grids I. Error Analysis", Math. of Comp., Vol. 56, No. 194, 437-461.

Garabedian, P.R. – 1964; "*Partial Differential Equations*", John Wiley & Sons - N. York.

Gartland Jr., E.C. – 1982; "Discret Weighted Mean Approximation of a Model Convection-Diffusion Equation", SIAM Sci. Stat. Comput., Vol. 3, No. 4, 460-472.

Gilbrag, D. e Trundinger, N.S. – 1983; "*Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*", Spring-Verlag - N. York.

Golub, G.H.; Loan, C.F.V. – 1988; "*Matrix Computations*", The John Hopkins Univ. Press, Baltimore.

Górowski, J. — 1986; "On Some Properties of The Solution of The Dirichet Problem for The Helmholtz Equation in the Interior and Exterior of a Circle", Demonstration Math., Vol.XIX, No.2, 303-315.

Gupta M.M.; Manohar, R.P.; Stephenson, J.W. – 1985; "High-Order Difference Schemes for Two-Dimensional Elliptic Equations", Numer. Meth. for Pat. Diff. Equat., Vol. 1, 71-80.

Isaacson, E.; Keller, H.B. – 1966; "*Analysis of Numerical Methods*", John Wiley and Sons, N.Y.
Kantorovich, L.V.; Krylov, V.I. – 1964; "*Approximate Methods of Higher Analysis*"; Intersc. Publish. Inc., N.Y.

Lidae, A. – 1993; "On Shooting Method for the Discret Helmholtz Equation With Constant Coefficients", Numer. Math., No. 64, 127-145.

Laurie, D.P. – 1983; "*Basic Principles of Discretization Methods*", Numerical Solution of Partial Differential Equation: theory, tools and case studies; Intern. Series of Num. Math.; Cap 2, 52-75.

Mathew, T.P. – 1993*a*; "Schwarz Alternating and Iterative Refinement Methods for Mixed Formulations of Elliptic Problems, Part I: Algorithms and Numerical Results", Numer. Math., Vol. 65, No. 4, 445-468.

Mathew, T.P. – 1993*b*; "Schwarz Alternating and Iterative Refinement Methods for Mixed Formulations of Elliptic Problems, Part II: Convergence Theory", Numer. Math., Vol. 65, No. 4, 469-492.

Mitchell, A.R.; Griffiths, D.F. – 1987; "*The Finite Difference Method in Partial Differential Equations*", John Wiley & Sons.

Mittal, R.C.; Gahlaut, S. – 1991; "High-Order Finite-Difference Scheme to Solver Poisson's Equation in Polar Coordinates, IMA J. of Numer. Anal., No. 11, 261-270.

Oliveira, P. – 1991; "On the characterization of finite differences *Optima* meshe", J. of Comput. and Appl. Math., Vol. 36, 137-148.

Øksendal, B. — 1992; "*Stochastic Diferential Equation – An Introduction with Application*", Sppring-Verlag, USA.

Özişik, M.N. — 1968; "*Boundary Value Problems of Heat Conduction*", Dover Public. Inc., N.Y.

Roach, G.F. — 1970; "*Green's Functions: Introductory Theory with Applications*" Van Nostrand Reinhold Comp., London.

Shalímova, K.V. — 1975; "*Physic of the Semicontuctor*", (in spahish), Ed. Mir, Moscow.

Sobolev, S.L. — 1964; "*Partial Differential Equations of Mathematical Physics*", Dover Public.Inc., N.Y.

REFERÊNCIAS COMPLEMENTARES

Atikinson, K.E. – 1982; "*The Numerical Solution of Laplace Equation in Three Dimensions*"; SIAM Numer. Anal., 19, 263-274.

Babuška, I.; Szabó, B.A.; Katz, I.N. – 1981; "The p – Version of the Finite Element Method, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 18, 551-545.

Babuška, I.; Suri, M. – 1987; "The $h-p$ Version of the Finite Element Methodo With Quasiuniform Meshes" Math. Model. Numer. Anal., 21, 199-238.

Babuška, I.; Craig, A.; Mandel, J.; Pitkäranta, J. – 1991; "Efficient Preconditioning for the p – Version Finite Element Method in Two Dimensions, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 28, No. 3, 624-661.

Baker, C. – 1977; "*The Numerical Treatment of Integral Equations*"; Oxford Press, Cambridge.

Baker, C. – 1987; "The State of the Art in the Numeriacal Treatment of Integral Equations", Proc. of the Joint IMA/SIAM conference on The State of the Art in Numer. Anal., Edited by Iserles, A.; Powell, M.J.D, 14-18 April, Univ. of Birmingham, Calaredon Press-Oxford, 17, 473-509.

Bennaton, J.F. – 1992; "General Solution for Semilinear Elliptic Equation With Electric-Thermal Coupling", SIAM Appl. Math, Vol. 52, No. 4, 989-997.

Blum, E.K.; Reid, G.J. – 1988; "On the Numerical Solution of Three-Dimensional Boudary Value Problem by Separation of Variables", SIAM J. Numer. Anal., Vol. 25, No. 1, 75-90.

Cooper, K.D.; Prenter, P.M. – 1991; "Alternating Direction Collocation for Separable Elliptic Partial Differential Equations", SIAM J. Numer. Anal., Vol. 28, No. 3, 711-727.

Figueiredo, D.G. – 1977; "*Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*", Inst. de Mat. Pura e Aplicada – IMPA-CNPq, (Projeto Euclides), Ed. Edgard Blücher, São Paulo.

Gustafson, K.E. – 1987; "*Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods*", Sec. Ed., John Wiley & Sons, N. York.

Hadjidimos, A.; Houstis, E.N.; Rice, J.R.; Vavalis, E.A. – 1993; "Iterative Line Cubic Spline Collocation Methods for Elliptic Partial Differential Equations in Several Dimensions", SIAM J. Sci. Comput., Vol. 14, No. 3, 715-734.

Han, W. – 1991; "Note on A Separaqtion of the Variables Method for Solving Coupled Systems of Second-Order Partial Differential Equations: Exact, Approximate Solutions and Error Bounds", J. of Comp. and Appl. Math., Vol. 36, 259-263.

Houstis, E.N.; Vavalis, E.A.; Rice, J.R. – 1988; "Convergence of $O(h^4)$ Cubic Spline Collocation Methods for Elliptic Partial Differential Equations", SIAM J. Numer. Anal. Vol. 25, No.1. 54-74.

Iório Jr., R.; Iório, V.M. – 1988; "*Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*", Instituto de Matemática Pura e Aplicada-IMPA - R. J.

Jai, M.; Bayada, G.; Chambat – 1992; "The L.P.D.E.M., a mixed finite difference method for elliptic problem", Numer. Mathem., Vol. 63, No. 2, 195-211.

Jódar, L. – 1990; "A Separaqtion of the Variables Method for Solving Coupled Systems of Second-Order Partial Differential Equations: Exact, Approximate Solutions and Error Bounds", J. of Comp. and Appl. Math., Vol. 31, 243-251.

Korman, P. – 1989; "On computational of solutions of elliptic systems"; Numer. Funct. Anal. and Optimiz., No. 9&10, 977-990.

O'Leary, D.P.; Widlund, O. – 1979; "Capacitance Matrix Methods for the Helmholtz Equation on General Three-Dimensional Regions, Math. of Comput., Vol. 33, No. 147, 849-879.

Patrício, F. – 1991; "A Class of Methods for Diffusion-Convection Equations", Applic. Anal., Vol. 42, 113-126.

Pinsky M.A. – 1991; "*Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications*", 2nd. Ed., McGraw-Hill, N.Y.

Richter, G.R. – 1991; "An Explicit Finit Element Method for Convection-Dominated Steady State Convection-Diffusion Equations", SIAM J. Numer. Anal., Vol. 28, No. 3, 744-759.

Samarski, A.A.; Andréiev, V.B. – 1979; "*Métodos en Diferencias Para Las Ecuaciones Elípticas*"; Ed. Mir, Moscou.

Stevenson, R. – 1991; "Discrete Sobolev Space and Regularity of Elliptic Difference Schemes", RAIRO Math. Modell. and Numer. Anal./Modél. Math. et Anal. Numér, Vol.25, No. 5, 607-640.

Urbach, H.P. – 1991; "Convergence of the Gaerkin Method for Two-Dimensional Electromagnetic Problem", SIAM J. Numer. Anal., Vol. 28, No.3, 697-710.

Zlotnik, A.A. – 1991; "Some Finite-Elemente and Finite-Difference Methods for Solving Mathematical Physics Problems With Non-Smooth Data in an n-Dimensional Cube. Part I", Sov. J. Numer. Anal. Math. Modeling, Vol.6, No. 5, 421-451.