

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E CONTROLE DE ENERGIA



Síntese de Controle para Sistemas Dinâmicos com Comutação

Grace Silva Deaecto

Engenheira Eletricista - FEIS/Unesp(2005)

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: **Automação**.

em 24 de agosto de 2007 perante a banca examinadora:

Prof. Dr. José C. Geromel (Orientador) DSCE/FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. Akebo Yamakami DT/FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. Liu Hsu COPPE/UFRJ
Prof. Dr. Marcelo C. M. Teixeira FEIS/UNESP

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

D34s Deaecto, Grace Silva
Síntese de Controle para sistemas dinâmicos com
comutação / Grace Silva Deaecto. –Campinas. SP: [s.n.],
2007.

Orientador: José Cláudio Geromel
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Sistemas de controle por realimentação. 2. Sistemas
lineares 3. Sistemas com comutação. I. Geromel, José
Cláudio. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade
de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título

Título em Inglês: Control synthesis for dynamic switched systems

Palavras-chave em Inglês: Feedback control systems, linear systems, switched systems

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora: Akebo Yamakami, Liu Hsu e Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Data da defesa: 24/08/2007

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidata: Grace Silva Deaecto

Data da Defesa: 24 de agosto de 2007

Título da Tese: "Síntese de Controle para Sistemas Dinâmicos com Comutação"

Prof. Dr. José Cláudio Geromel (Presidente):

Prof. Dr. Liu Hsu:

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira:

Prof. Dr. Akebo Yamakami:

The image shows four horizontal lines, each with a handwritten signature in blue ink. The signatures are: 1. José Cláudio Geromel (Presidente), 2. Liu Hsu, 3. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, and 4. Akebo Yamakami. The signatures are written in a cursive style.

Resumo

Neste trabalho, são propostas condições suficientes para a estabilidade assintótica de sistemas lineares, contínuos no tempo, com comutação que asseguram um custo garantido de desempenho. Estas condições dependem da solução de um conjunto de desigualdades de Lyapunov-Metzler, definidas em [Geromel & Colaneri, 2006], que possuem natureza não-convexa, sendo portanto, de difícil solução. Para contornar este problema, apresentamos condições de estabilidade mais conservadoras baseadas em uma subclasse de matrizes de Metzler com elementos iguais na diagonal principal, que podem ser resolvidas através de desigualdades matriciais lineares e busca unidimensional. Os resultados apresentados em [Geromel & Colaneri, 2006], que fornecem condições para a estabilidade de sistemas dinâmicos lineares com comutação, são generalizados para lidar com sistemas mais gerais, a saber, sistemas dinâmicos sujeitos a perturbações impulsivas. A proposta elaborada assegura a estabilidade assintótica inclusive na presença de possíveis modos deslizantes.

Palavras chave: Sistemas com comutação, Sistemas a tempo contínuo, Desigualdades de Lyapunov-Metzler, Desigualdades matriciais lineares.

Abstract

In this work, sufficient conditions are proposed for the study of asymptotic stability of continuous time linear systems with commutation, which assure a guaranteed cost of performance. These conditions depend on the solution of a set of Lyapunov-Metzler inequalities, defined in [Geromel & Colaneri, 2006], which are difficult to solve due to their non-convex nature. However, to circumvent this difficulty, we present more conservative stability conditions based on a subclass of Metzler matrices characterized by having equal elements on the main diagonal. Although these conditions are more conservative, they can be solved by Linear Matrix Inequalities (LMIs) and unidimensional search. The analysis done in [Geromel & Colaneri, 2006], which provides the stability conditions for linear dynamic systems with commutation is expanded to cover a more general class of systems with commutation and subject to impulsive disturbances. The conditions presented in this work assure the stability even in the presence of possible sliding modes.

Keywords: Systems with commutation, Continuous time systems, Lyapunov-Metzler inequalities, Linear matrix inequality (LMI).

*“Viva como se fosse morrer amanhã. Aprenda como se fosse viver
para sempre”.*

Mahatma Gandhi

Agradecimentos

Tentarei expressar nestas poucas linhas a minha gratidão a todos que me ajudaram no caminho até aqui. Em especial, gostaria de agradecer:

- A Deus, que me deu uma família maravilhosa e me proporcionou saúde, determinação e garra para lutar.
- Ao meu orientador, José Cláudio Geromel, pela oportunidade, paciência e pelos inúmeros ensinamentos. Ele é uma pessoa espetacular que me impressiona cada vez mais pelas idéias brilhantes e pelo seu senso de justiça.
- Aos meus pais, cujo amor incondicional, fez com que as lutas mais difíceis se tornassem pequenos obstáculos superáveis.
- A minha amiga Célia, que sempre me auxiliou nos momentos difíceis e, portanto, fez parte de todas as minhas conquistas: o ingresso na Unesp e o título de engenheira eletricista.
- Ao meu orientador da Unesp, Marcelo C. M. Teixeira, pelos ensinamentos, conselhos, convivência e pela amizade.
- Ao meu amigo Haroldo N. Nagashima, que me orientou durante uma parte da graduação e foi muito importante para mim, principalmente na minha escolha em seguir a carreira acadêmica. Te agradeço pela companhia, pela amizade, pela dedicação e pelos ensinamentos.
- Ao professor Rubén por acreditar em mim e pela amizade.
- Ao meu amigo Márcio Covacic, pela amizade.
- A todos os meus amigos e colegas da Unicamp, em especial: Anzai, pela companhia e amizade; Talía pela amizade.
- Aos meus colegas de laboratório que me proporcionaram um ambiente harmônico e agradável, em especial: Rubens pela companhia, amizade, pelos ensinamentos e pelas sugestões na elaboração da tese, André e Rafael pela amizade.
- Por fim, agradeço à FAPESP, que tem me financiado desde 2002.

Aos meus pais, Ozana e Mitsuo

Índice

1	Introdução	1
1.1	Apresentação da Dissertação	2
1.2	Notação	4
2	Conceitos Fundamentais	5
2.1	Sistemas Lineares Invariantes no Tempo	5
2.2	Estabilidade	6
2.3	Norma \mathcal{H}_2	7
2.3.1	Cálculo Através de Gramianos	8
2.3.2	Cálculo Utilizando LMIs	10
2.4	Derivada Direcional	11
2.5	Sistemas com comutação	13
2.6	Considerações Finais	14
3	Controle de Sistemas com Comutação	16
3.1	Sistemas Lineares com Comutação	16
3.2	Perturbações Impulsivas	30
3.3	Controle e Perturbações Impulsivas	37
3.4	Considerações Finais	44
4	Controle \mathcal{H}_2 multi-objetivo	46
4.1	Definição do Problema	46
4.2	Solução do Problema Multi-Objetivo	49
4.3	Considerações Finais	56
5	Conclusões e Perspectivas	57

Capítulo 1

Introdução

Atualmente, é crescente o interesse no estudo de sistemas que apresentam comutação. Isto ocorre pois estes sistemas são comumente encontrados na prática, onde foi percebido que a comutação pode melhorar o desempenho global dos mesmos, além de permitir o surgimento de propriedades importantes que não são encontradas isoladamente. Por exemplo, em [Narendra & Balakrishnan, 1997], [Morse, 1996] e [Kulkarni & Ramadge, 1996] é mostrado que a comutação entre diferentes controladores melhora a resposta transitória e, em [Brockett, 1983] e [Hespanha & Morse, 1999], é mostrado que o controle com comutação permite estabilizar sistemas que não podem ser assintoticamente estabilizáveis utilizando-se apenas um controle com realimentação fixo.

Para dar início ao estudo do tema é recomendável consultar [Liberzon & Morse, 1999], [Liberzon, 2003] e [DeCarlo et al., 2000], que são uns dos precursores neste estudo e oferecem uma revisão completa sobre o assunto em questão. O artigo [Hespanha, 2004] utiliza extensões do Princípio da Invariância de LaSalle e fornece uma discussão interessante sobre um conjunto de resultados referente à estabilidade uniforme de sistemas com comutação.

A princípio, estes sistemas podem ser divididos em dois grupos. Em um deles a regra de comutação $\sigma(t)$ é independente dos estados e corresponde a uma incerteza. Logo, as condições de estabilidade devem garantir a robustez para qualquer $\sigma(t) \in \{1, \dots, N\}$, em que N é a quantidade de subsistemas. Trata-se, portanto, de um problema de estabilidade robusta já resolvido na literatura, veja [Hespanha & Morse, 2002] para maiores detalhes. No outro grupo, $\sigma(t)$ é um sinal de controle dependente dos estados e que seleciona a cada instante de tempo o modo de operação atual $A_{\sigma(t)}$ dentre os N disponíveis $\{A_1, \dots, A_N\}$. Para este caso, o projeto consiste na determinação de uma regra de comutação $\sigma(t) = g(x(t))$ e de condições suficientes para a estabilidade assintótica global.

Dentro do contexto em que $\sigma(t)$ é um sinal de controle, esta dissertação tem como ob-

jetivo principal obter as condições para a estabilidade de sistemas dinâmicos lineares com comutação, bem como a determinação de um limitante superior para um custo funcional definido a partir de perturbações impulsivas. Em casos especiais, as variáveis de controle são a regra de comutação $\sigma(t)$ e um conjunto de ganhos de realimentação de estado $\{K_1, \dots, K_N\}$. Mostramos que as condições de estabilidade dependem da solução de um conjunto de desigualdades de Lyapunov-Metzler que foram definidas em [Geromel & Colaneri, 2006]. Estas desigualdades possuem natureza não-convexa devido ao produto de variáveis, um conjunto de matrizes simétricas definidas positivas $\{P_1, \dots, P_N\}$ e os elementos de uma matriz de Metzler Π . Assim sendo, não é possível resolvê-las utilizando as ferramentas disponíveis na literatura para a solução de LMIs. No entanto, apresentamos uma versão alternativa mais simples, embora mais conservadora, que é baseada nos resultados de [Geromel & Colaneri, 2006] e consiste na utilização de uma subclasse de matrizes de Metzler caracterizada por apresentar elementos iguais na diagonal principal. Utilizando esta versão, a solução de desigualdades não-convexas é substituída pela solução de LMIs e uma busca unidimensional.

Como já foi dito, o critério de desempenho é um custo funcional, que na ausência de comutação se confunde com a norma \mathcal{H}_2 do sistema. Este custo é muito difícil de ser expresso analiticamente devido a natureza complexa dos sistemas com comutação. Assim, para fins de otimização, minimizamos um limitante superior do mesmo, de tal forma que as condições de estabilidade são obtidas assegurando um custo garantido de desempenho. Uma maneira de analisar a qualidade do resultado obtido é determinar a distância entre o custo garantido e o custo real. No entanto, como este último é muito difícil de ser calculado, determinamos condições para o cálculo de limitantes inferiores para o mesmo. Ou seja, quanto menor a distância entre os limitantes, menor é a folga existente entre o custo real e o garantido e melhor é a qualidade do resultado obtido. Vale ressaltar que as condições apresentadas nesta dissertação garantem a estabilidade inclusive na presença de possíveis modos deslizantes e não exigem qualquer propriedade de estabilidade de nenhuma das matrizes $\{A_1, \dots, A_N\}$ que definem os subsistemas. A teoria desenvolvida é aplicada na solução de problemas de controle \mathcal{H}_2 multi-objetivo. É mostrado que a solução destes problemas, utilizando o método proposto nesta dissertação, oferece resultados melhores que os obtidos utilizando os métodos de [Khargonekar & Rotea, 1991] e de [Eker & Malmberg, 1999] selecionados da literatura.

1.1 Apresentação da Dissertação

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos. Este primeiro capítulo apresenta uma introdução ao estudo do tema e expõe a forma como foi organizado o texto desta dissertação.

O segundo capítulo apresenta alguns conceitos importantes como por exemplo o conceito de estabilidade segundo Lyapunov, o estudo da norma \mathcal{H}_2 e o teorema de Danskin, muito utilizado no cálculo de derivadas direcionais. Como a função de Lyapunov escolhida para o estudo da estabilidade não é diferenciável para todo $x \in \mathbb{R}^n$, em que x representa o estado do sistema e n representa a sua ordem, é importante a utilização de derivadas direcionais, o que justifica a importância do tópico referente ao teorema de Danskin.

O terceiro capítulo é dividido em três seções e trata do estudo da estabilidade de sistemas lineares, contínuos no tempo, com comutação de tal forma a assegurar um custo garantido de desempenho. Toda a teoria apresentada no capítulo é discutida e ilustrada através de exemplos. Os assuntos discutidos em cada seção são os seguintes:

- Na primeira seção, são apresentados alguns resultados de [Geromel & Colaneri, 2006] voltados para o estudo de sistemas lineares com comutação. É realizada uma comparação entre as condições de estabilidade obtidas utilizando a função de Lyapunov proposta em [Geromel & Colaneri, 2006] e a comumente utilizada na literatura. A função de Lyapunov proposta garante a estabilidade do sistema inclusive na presença de modos deslizantes, propriedade não assegurada pela outra.
- A segunda seção trata do estudo da estabilidade de sistemas com perturbações impulsivas. Nessa seção, é definido um custo funcional, que na ausência de comutação se confunde com a norma \mathcal{H}_2 do sistema. Para a análise da qualidade do resultado obtido, são propostas condições para o cálculo de um limitante inferior para o custo funcional.
- A terceira seção apresenta o estudo da estabilidade de sistemas com controle via realimentação de estado sujeitos à perturbações impulsivas. Para estes sistemas existem duas variáveis de controle, a saber, a regra de comutação $\sigma(t)$ e um conjunto de ganhos de realimentação $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_N\}$. Com estas duas variáveis é possível estabilizar sistemas que não podem ser estabilizáveis utilizando apenas uma das variáveis isoladamente. Por outro lado, se o sistema for estabilizável com apenas uma das regras, o custo obtido utilizando a interação de ambas é, geralmente, bem menor que o obtido utilizando uma delas isoladamente. Essa seção apresenta duas formas de obtenção das condições de estabilidade do sistema, obtendo K_i , $i \in \mathbb{N}$, através da resolução de um problema de otimização, ou alternativamente, através da solução de uma equação de Riccati.

No quarto capítulo, utilizamos a teoria desenvolvida no capítulo anterior para resolver problemas de controle \mathcal{H}_2 multi-objetivo. Os resultados obtidos são melhores que os existentes

na literatura. Nesse capítulo, provamos a superioridade do método proposto em relação aos métodos de [Khargonekar & Rotea, 1991] e de [Eker & Malmberg, 1999] comumente utilizados na literatura e, ilustramos esta superioridade resolvendo o problema de controle de um triplo integrador com dois critérios conflitantes.

Por fim, o quinto capítulo apresenta as conclusões e as perspectivas para trabalhos futuros.

1.2 Notação

A notação usada é padrão. Letras maiúsculas representam matrizes ou conjuntos e letras minúsculas representam vetores ou escalares. Neste trabalho, s denota o número complexo $j\omega$, sendo que ω é a frequência em rad/s e I_n denota a matriz identidade $n \times n$. Para matrizes reais ou vetores, (\prime) indica o seu transposto. Para matrizes quadradas, $\text{tr}(X)$ denota a função traço da matriz X . Matrizes simétricas definidas positivas (semidefinidas positivas) são denotadas por $P > 0$ ($P \geq 0$). Para facilitar a notação de matrizes simétricas particionadas, o símbolo (\bullet) denota genericamente cada bloco simétrico, ou seja

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ \bullet & D & E \\ \bullet & \bullet & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B' & D & E \\ C' & E' & F \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

O símbolo $\delta(t)$ representa o impulso unitário, e a norma \mathcal{H}_2 ao quadrado de uma trajetória $g(t)$ definida para $t \geq 0$ é igual a $\|g\|_2^2 := \int_0^\infty g(t)'g(t)dt$. O conjunto $\{1, \dots, N\}$ é denotado por \mathbb{N} . A convolução de dois sinais definidos para $t \geq 0$ é indicada por $g_1 * g_2$.

Capítulo 2

Conceitos Fundamentais

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns conceitos fundamentais que são utilizados nesta dissertação. Inicialmente, discutimos o critério de Lyapunov para o estudo da estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo e o cálculo da norma \mathcal{H}_2 . Em seguida, apresentamos o Teorema de Danskin, que é uma ferramenta básica para o cálculo de derivadas direcionais. Por fim, fazemos uma breve discussão sobre os sistemas dinâmicos com comutação, cujo estudo corresponde ao nosso objetivo principal.

2.1 Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Um sistema linear invariante no tempo pode ser representado pelas seguintes equações no espaço de estados

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t), \quad x(0) = 0 \quad (2.1)$$

$$z(t) = Cx(t) + Dw(t) \quad (2.2)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ é a entrada externa e $z(t) \in \mathbb{R}^p$ é a saída. A função de transferência deste sistema é dada por

$$H_{wz}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.3)$$

em que as matrizes A , B , C e D possuem dimensões apropriadas de acordo com as regras que definem o produto matricial. Se $D = 0$, o sistema é classificado como estritamente próprio, sendo chamado de próprio caso contrário.

2.2 Estabilidade

Esta seção tem como objetivo apresentar o critério de Lyapunov para o estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos contínuos no tempo e determinar as condições para a estabilidade do sistema (2.1) com $w(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Antes, no entanto, vamos definir o conceito de estabilidade assintótica global, apresentando primeiramente o conceito de ponto de equilíbrio, [Slotine & Li, 1991].

Definição 2.1 (*Ponto de Equilíbrio*) O vetor de estado $x = 0$ é um ponto de equilíbrio do sistema, se $x(t) = 0$ para algum $t = t_0 \geq 0$ implicar em $x(t) = 0$ para todo $t \geq t_0$.

Definição 2.2 (*Estabilidade Assintótica Global*) O ponto de equilíbrio $x = 0$ é globalmente assintoticamente estável se:

- ele for estável;
- para toda condição inicial $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ implicar em $x(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow +\infty$.

De acordo com Lyapunov, uma maneira de estudar a estabilidade de um sistema é analisar o comportamento de uma função $v(x(t))$ que pode ser interpretada como a distância entre a trajetória $x(t)$ e o ponto de equilíbrio $x = 0$. Esta função é chamada de função de Lyapunov e possui as seguintes propriedades, [Franklin et al., 1993], [Slotine & Li, 1991]:

- 1 . $v(0) = 0$ e $v(x) > 0$ para $x \neq 0$;
- 2 . $v(x)$ é contínua em relação a todas as componentes de $x \in \mathbb{R}^n$;
- 3 . $v(x)$ é ilimitada para todo $x \in \mathbb{R}^n$ ilimitado.

Se $v(x(t))$ decrescer monotonicamente e tender a 0, então $x(t)$ se aproxima cada vez mais do ponto de equilíbrio $x = 0$ até alcançá-lo, fazendo com que o sistema seja globalmente assintoticamente estável, de acordo com a Definição 2.2. O teorema a seguir apresenta o critério de Lyapunov para o estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos.

Teorema 2.3 *Seja uma função de Lyapunov $v(x)$ associada a um sistema dinâmico. Se*

- $\dot{v}(x) < 0$ para todo $x \neq 0$ e
- $\dot{v}(x) = 0$ para $x = 0$

então o ponto de equilíbrio $x = 0$ é globalmente assintoticamente estável.

Desejamos utilizar o Teorema 2.3 e determinar as condições para a estabilidade do sistema (2.1). Para atingir este objetivo, é necessário escolher uma função de Lyapunov adequada. Uma candidata à função de Lyapunov muito utilizada no estudo da estabilidade de sistemas lineares é a seguinte

$$v(x) = x'Px \quad (2.4)$$

em que $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica definida positiva. Utilizando a função (2.4) e considerando que $\dot{x} = Ax$, a derivada de $v(x)$ é dada por

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= \dot{x}'Px + x'P\dot{x} \\ &= x'(A'P + PA)x \end{aligned} \quad (2.5)$$

Logo, para atender as condições do Teorema 2.3 é necessário que

$$x'(A'P + PA)x < 0 \quad \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n \quad (2.6)$$

Podemos observar que a solução da desigualdade (2.6) não é única. Para a obtenção de uma única solução, podemos resolver a equação matricial linear $A'P + PA = -Q$, sendo Q uma matriz simétrica definida positiva dada. O seguinte lema expressa uma maneira clássica de estudar a estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo segundo o critério de Lyapunov, [Slotine & Li, 1991], [Vidyasagar, 2002].

Lema 2.4 *O sistema $\dot{x} = Ax$ é globalmente assintoticamente estável se e somente se para uma matriz Q , simétrica definida positiva dada, existir uma única matriz P , simétrica definida positiva, solução da equação $A'P + PA + Q = 0$.*

Assim, o Lema 2.4 apresenta as condições para a estabilidade do sistema (2.1), com $w(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. A equação $A'P + PA + Q = 0$ é chamada equação de Lyapunov para sistemas contínuos.

2.3 Norma \mathcal{H}_2

A norma \mathcal{H}_2 é um dos critérios mais usados na análise do desempenho de sistemas dinâmicos. Nesta seção, o seu cálculo é apresentado através de gramianos e, no contexto de programação convexa, através de desigualdades matriciais lineares.

Esta norma é definida para todas as funções de transferência $H(s)$ racionais, estritamente próprias, analíticas no semi-plano complexo direito, incluindo o eixo imaginário, e pode ser

calculada resolvendo a seguinte integral

$$\|H(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(H(-j\omega)'H(j\omega)) d\omega \quad (2.7)$$

Para calculá-la no domínio do tempo, podemos utilizar o teorema de Parseval em (2.7), obtendo

$$\|H(s)\|_2^2 = \int_0^{\infty} \text{tr}(h(t)'h(t)) dt \quad (2.8)$$

onde $h(t)$ é a transformada de Laplace inversa de $H(s)$. A seguir, apresentamos várias formas de calcular esta norma para o sistema (2.1)-(2.2), utilizando apenas gramianos e, posteriormente, utilizando LMIs.

2.3.1 Cálculo Através de Gramianos

A resposta ao impulso do sistema (2.1)-(2.2) é dada por

$$h_{wz}(t) = Ce^{At}B + D\delta(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (2.9)$$

De acordo com (2.8) e utilizando (2.9), temos

$$\begin{aligned} \|H_{wz}(s)\|_2^2 &= \int_0^{\infty} \text{tr}(h_{wz}(t)'h_{wz}(t)) dt \\ &= \int_0^{\infty} \text{tr}\left((B'e^{A't}C' + D'\delta(t))(Ce^{At}B + D\delta(t))\right) dt \\ &= \text{tr}\left(B'\left(\int_0^{\infty} e^{A't}C'Ce^{At}dt\right)B\right) + \text{tr}(B'C'D) + \\ &\quad + \text{tr}(D'CB) + \text{tr}(D'D) \int_0^{\infty} \delta(t)^2 dt \end{aligned} \quad (2.10)$$

Na equação (2.10), uma vez que $\int_0^{\infty} \delta(t)^2 dt \rightarrow \infty$, para que a norma seja finita, a matriz D deve ser nula e, adicionalmente, todos os autovalores da matriz A devem estar localizados no semiplano esquerdo aberto do plano complexo. De fato, como definido anteriormente, a função $H_{wz}(s)$ deve ser estritamente própria e analítica no semiplano complexo direito fechado.

Assim, utilizando a equação (2.10) e levando em conta que a função $H_{wz}(s)$ satisfaz as condições apresentadas, sua norma \mathcal{H}_2 é dada por

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \text{tr}(B'P_O B) \quad (2.11)$$

em que $P_O = \int_0^\infty e^{A't} C' C e^{At} dt$ é o gramiano de observabilidade e é obtido resolvendo-se a seguinte equação de Lyapunov

$$A' P_O + P_O A + C' C = 0 \quad (2.12)$$

Utilizando a propriedade de circularidade do operador traço ¹, também podemos calcular a norma \mathcal{H}_2 da seguinte forma

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \int_0^\infty \text{tr}(h_{wz}(t) h_{wz}(t)') dt \quad (2.13)$$

Neste caso, seguindo os mesmos passos descritos anteriormente, obtemos

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \text{tr}(C P_C C') \quad (2.14)$$

em que $P_C = \int_0^\infty e^{At} B B' e^{A't} dt$ é o gramiano de controlabilidade e é obtido resolvendo-se a seguinte equação de Lyapunov

$$A P_C + P_C A' + B B' = 0 \quad (2.15)$$

Desta forma, existem duas maneiras de calcular a norma \mathcal{H}_2 do sistema utilizando gramianos, a saber:

- Utilizando o gramiano de observabilidade:

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \{\text{tr}(B' P_O B) : (2.12)\} \quad (2.16)$$

- Utilizando o gramiano de controlabilidade:

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \{\text{tr}(C P_C C') : (2.15)\} \quad (2.17)$$

É importante ressaltar que os gramianos de observabilidade e de controlabilidade são matrizes simétricas definidas positivas, desde que os pares (A, C) e (A, B) sejam observáveis e controláveis, respectivamente.

A seguir, vamos apresentar o cálculo da norma \mathcal{H}_2 do sistema (2.1)-(2.2) através de LMIs.

¹propriedade em que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

2.3.2 Cálculo Utilizando LMIs

Para o cálculo utilizando LMIs, podemos explorar uma propriedade importante da equação de Lyapunov que nos permite converter as equações (2.16) e (2.17) em desigualdades matriciais lineares. Esta propriedade está enunciada no Lema 2.5 apresentado a seguir

Lema 2.5 [de Oliveira, 1999] *Seja A uma matriz Hurwitz². Se (P_1, Q_1) e (P_2, Q_2) satisfazem a equação $A'P + PA + Q = 0$, então $Q_1 > Q_2 > 0$ implica $P_1 > P_2 > 0$.*

Como toda solução definida positiva da desigualdade $A'P + PA + C'C < 0$ satisfaz a equação de Lyapunov $A'P + PA + C'C = -R$ para alguma matriz $R > 0$, utilizando o Lema 2.5, podemos concluir que $P > P_O$ e, conseqüentemente

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 < \text{tr}(B'PB) \quad (2.18)$$

Assim, a norma \mathcal{H}_2 pode ser calculada resolvendo-se o seguinte problema de programação convexa

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \inf_{P>0} \{\text{tr}(B'PB) \mid A'P + PA + C'C < 0\} \quad (2.19)$$

Uma outra forma de calcular a norma \mathcal{H}_2 é obtida a partir da desigualdade matricial $A'X + XA + C'C > 0$ a qual, para $X > 0$ implica, segundo o Lema 2.5, que $\|H_{wz}(s)\|_2^2 > \text{tr}(B'XB)$. Assim, a norma \mathcal{H}_2 do sistema pode ser calculada, alternativamente, pelo seguinte problema de programação convexa

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \sup_{X>0} \{\text{tr}(B'XB) \mid A'X + XA + C'C > 0\} \quad (2.20)$$

Note que as duas formas de calcular a norma \mathcal{H}_2 apresentadas em (2.19) e (2.20) levam em conta o cálculo através do gramiano de observabilidade. De forma equivalente, podemos calcular esta norma levando em conta o gramiano de controlabilidade. Para isto, basta substituir respectivamente (A, B, C) nas desigualdades (2.19) e (2.20) por (A', C', B') , obtendo, as seguintes LMIs

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \inf_{P>0} \{\text{tr}(CPC') \mid AP + PA' + BB' < 0\} \quad (2.21)$$

e

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \sup_{X>0} \{\text{tr}(CXC') \mid AX + XA' + BB' > 0\} \quad (2.22)$$

²matrizes cujos autovalores apresentam parte real negativa.

Assim, no contexto de programação convexa, as LMIs (2.19), (2.20), (2.21) e (2.22) apresentam as quatro formas de calcular a norma \mathcal{H}_2 de um sistema dinâmico assintoticamente estável, com função de transferência estritamente própria.

Vale ressaltar que todos os problemas envolvendo LMIs são expressos através de conjuntos abertos. Assim, poderíamos utilizar os operadores “min” no lugar de “inf” e “max” no lugar de “sup”, se entendermos que, geralmente, os métodos normalmente utilizados para a solução de LMIs permitem fechar o conjunto de restrições utilizando um escalar $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno a ser definido pelo usuário.

2.4 Derivada Direcional

Nesta seção, vamos apresentar o Teorema de Danskin [Lasdon, 1970], muito utilizado no cálculo de derivadas direcionais. Seja $f(x, i)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e para todo $i \in \mathcal{Z}$, com derivadas parciais $\partial f / \partial x_i$ contínuas, sendo que \mathcal{Z} é um conjunto compacto de índices. Neste contexto, podemos definir a função

$$\bar{v}(x) = \min_{i \in \mathcal{Z}} f(x, i) \quad (2.23)$$

que é contínua, porém não é diferenciável para todo $x \in \mathbb{R}^n$. De fato, esta função deixa de ser diferenciável para todo $x \in Z(x)$, onde

$$Z(x) = \{i \in \mathcal{Z} : \bar{v}(x) = f(x, i)\} \quad (2.24)$$

é composto por mais de um elemento. A derivada direcional à direita da função (2.23) no ponto x e na direção d é definida da seguinte forma

$$D^+ \bar{v}(x, d) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\bar{v}(x + hd) - \bar{v}(x)}{h} \quad (2.25)$$

O Teorema de Danskin [Lasdon, 1970], enunciado a seguir, apresenta uma forma simples de calcular derivadas direcionais como a definida em (2.25).

Teorema 2.6 *Para uma função $\bar{v}(x)$ definida em (2.23), com o conjunto $Z(x)$ dado por (2.24), a derivada direcional de $\bar{v}(x)$ existe em qualquer direção d , para qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^n$, e é dada por*

$$D^+ \bar{v}(x, d) = \min_{i \in Z(x)} \nabla f(x, i)' d \quad (2.26)$$

A prova deste teorema pode ser encontrada em detalhes em [Lasdon, 1970]. Nesta dissertação, vamos utilizar este teorema para o cálculo de derivadas em relação ao tempo de funções de Lyapunov associadas a sistemas lineares com comutação. Entretanto, no presente momento, vamos considerar um caso mais simples, que trata da determinação da derivada temporal da função $\bar{v}(x(t))$, onde

$$\bar{v}(x) = \min_{i \in \mathcal{Z}} f(x, i) \quad (2.27)$$

com $f(x, i) = x'P_i x$, sendo que $x(t)$ é uma trajetória genérica do sistema linear $\dot{x}(t) = Ax(t)$, para todo $t \geq 0$. Para $h \rightarrow 0^+$, temos $x(t+h) = x(t) + hx(t) = x(t) + hAx(t)$ e portanto

$$D^+ \bar{v}(x, Ax) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\bar{v}(x + hAx) - \bar{v}(x)}{h} \quad (2.28)$$

Considerando $Z(x)$ definido em (2.24) e aplicando o Teorema de Danskin, obtemos

$$\begin{aligned} D^+ \bar{v}(x, Ax) &= \min_{i \in Z(x)} \nabla f(x, i)' Ax \\ &= \min_{i \in Z(x)} x(t)' (A' P_i + P_i A) x(t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Logo, a equação (2.29) representa a derivada direcional à direita de $\bar{v}(x)$, sobre uma trajetória qualquer do sistema linear $\dot{x} = Ax$.

O exemplo a seguir ilustra a aplicação do Teorema de Danskin em um caso bastante simples que permite uma interpretação geométrica.

Exemplo 2.1 Para as funções $f(x, 1) = x^2$ e $f(x, 2) = 2(x - 3/2)^2 + 1/2$, definidas para todo $x \in \mathbb{R}^1$ e para todo $i \in \mathcal{Z} = \{1, 2\}$, deseja-se utilizar o Teorema de Danskin e calcular a derivada direcional de $\bar{v}(x)$ na direção $d > 0$, nos pontos $x = 0.5$ e $x = 1$.

A Figura 2.1 apresenta o gráfico da função $\bar{v}(x)$. Note que no ponto $x = 1$, onde desejamos calcular a derivada, $\bar{v}(x)$ não é diferenciável. Assim, utilizando o conjunto $Z(x)$ definido em (2.24), temos que $Z(0.5) = \{1\}$ e $Z(1) = \{1, 2\}$. De fato, como comentado anteriormente, no ponto $x = 1$ onde a função não é diferenciável, o conjunto $Z(1)$ contém mais de um elemento. Aplicando o Teorema de Danskin, temos que $D^+(0.5, d) = \min_{i \in Z(0.5)} \nabla f(x, i) d = d$ e de maneira similar, temos que $D^+(1, d) = \min_{i \in Z(1)} \nabla f(x, i) d = \min \{2d, -2d\} = -2d$. ■

Como pode ser observado neste exemplo, o Teorema de Danskin é muito útil no cálculo de derivadas direcionais, principalmente em pontos onde a função não é diferenciável.

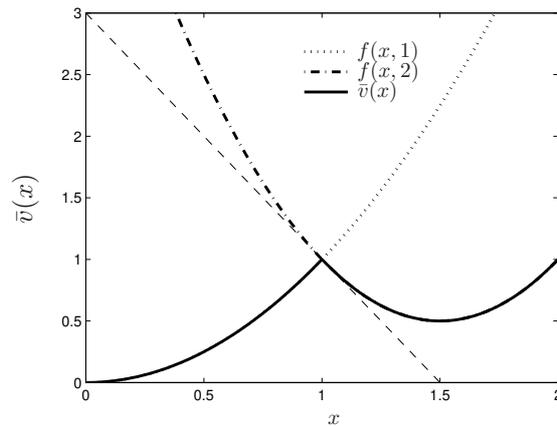


Figura 2.1: Ilustração do Teorema de Danskin.

2.5 Sistemas com comutação

Os sistemas dinâmicos, contínuos no tempo, com comutação são caracterizados pela interação entre subsistemas contínuos e eventos isolados discretos, de tal forma que estes últimos determinam a dinâmica do sistema global, uma vez que, a cada instante de tempo, posicionam a chave de comutação em um dos subsistemas. Um exemplo clássico de sistema com comutação é apresentado a seguir.

Exemplo 2.2 Este exemplo foi extraído de [Brockett, 1993]. O modelo simplificado do movimento de um automóvel é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(u, q)\end{aligned}$$

em que x_1 é a posição, x_2 é a velocidade, $q \in \{1, 2, 3, 4, 5, -1, 0\}$ é uma variável discreta que indica a marcha do automóvel nas posições de 1 a 5, ré e ponto morto, respectivamente. A variável de entrada $u \geq 0$ é a aceleração. Assim, quando $q = -1$ a função f é negativa e seu módulo cresce em função de u ; quando q é 0 a função f é decrescente e independente de u . Para cada valor de q de 1 a 5, a função f é positiva, cresce em função de u , mas decresce à medida que q aumenta.

Observe que os eventos discretos determinam a dinâmica do automóvel em cada instante de tempo, caracterizando um sistema com comutação. Estes eventos podem ser controlados

automaticamente, como é o caso de automóveis com câmbio automático em que a variável de controle depende da velocidade x_2 , caso contrário, são determinadas manualmente pelo motorista. ■

Como pode ser observado por este simples exemplo, os sistemas com comutação são bastante complexos cujos modelos envolvem equações diferenciais e controle discreto. Assim, as equações de estabilidade deduzidas para o sistema (2.1)-(2.2), e as equações para o cálculo da norma \mathcal{H}_2 obtidas para o mesmo sistema, não podem ser utilizadas neste caso. No entanto, para o estudo da estabilidade, podemos propor uma função de Lyapunov que seja monotonicamente decrescente para qualquer possível trajetória do sistema, incluindo transições discretas e, posteriormente, utilizá-la para encontrar condições suficientes que garantam a estabilidade do sistema global. Este procedimento é utilizado nesta dissertação, sendo apresentado no capítulo seguinte.

Uma outra dificuldade encontrada no estudo de sistemas com comutação consiste no cálculo da norma \mathcal{H}_2 . Devido à sua natureza, é bastante complicado calcular exatamente esta norma tanto analiticamente quanto utilizando LMIs. Porém se $\xi(t)$ for uma resposta estável do sistema para uma condição inicial dada, podemos calcular a referida norma utilizando uma rotina numérica de simulação. Ao calcularmos $\int_0^t \xi(\tau)' \xi(\tau) d\tau$ para um tempo t suficientemente grande de tal forma que a integral convirja, o valor obtido representa uma boa aproximação para a norma \mathcal{H}_2 do sistema. Devido à dificuldade no cálculo analítico desta norma, para fins de otimização, utilizamos um limitante superior de tal forma que o sistema seja levado para a estabilidade assintótica global, assegurando um custo garantido de desempenho. Estes aspectos são apresentados com detalhes no capítulo seguinte.

2.6 Considerações Finais

Neste capítulo foram apresentados alguns conceitos fundamentais utilizados no estudo de sistemas dinâmicos. Primeiramente, apresentamos o critério de estabilidade de Lyapunov e deduzimos as condições de estabilidade para um sistema linear invariante no tempo. Em seguida, definimos a norma \mathcal{H}_2 , que corresponde a um dos critérios de desempenho mais importantes no projeto de sistemas dinâmicos, e apresentamos várias formas de calculá-la para sistemas lineares invariantes no tempo, utilizando basicamente duas versões, a saber, a partir de gramianos e, alternativamente, através de problemas de programação convexa expressos por desigualdades matriciais lineares. O capítulo também apresentou o Teorema de Danskin, que corresponde a uma ferramenta muito útil no cálculo de derivadas direcionais.

Por último, foi apresentada uma pequena introdução sobre sistemas com comutação,

apontando basicamente, algumas dificuldades encontradas devido a sua complexidade. A escolha de uma função de Lyapunov adequada, bem como a obtenção de condições para o estudo da estabilidade e a determinação de um critério de desempenho foram considerados. O capítulo encerra com uma breve discussão a respeito de uma maneira alternativa de obter uma boa aproximação para a norma \mathcal{H}_2 de sistemas com comutação, utilizando um procedimento numérico de simulação.

Capítulo 3

Controle de Sistemas com Comutação

Neste capítulo são apresentadas condições suficientes para a estabilidade de sistemas lineares, contínuos no tempo, com comutação de tal forma a assegurar um custo garantido de desempenho. Este capítulo é dividido em três seções, a primeira delas dá início ao tratamento do tema, apresentando a classe de sistemas com comutação a ser estudada e expondo alguns dos resultados de [Geromel & Colaneri, 2006]. Este trabalho trata do estudo da estabilidade de sistemas lineares com comutação. Na segunda seção, são propostas condições para a estabilidade de sistemas lineares sujeitos a perturbações impulsivas. A terceira seção é dedicada ao estudo de sistemas lineares com controle via realimentação de estado e comutação, também sujeitos a perturbações impulsivas. A teoria apresentada em cada seção é ilustrada através de exemplos. Alguns dos resultados aqui obtidos foram submetidos para a publicação em [Deaecto & Geromel, 2007].

3.1 Sistemas Lineares com Comutação

Nesta seção, são apresentados alguns dos resultados introduzidos em [Geromel & Colaneri, 2006], referentes ao controle com comutação dependente dos estados. Estes resultados representam a base para a metodologia utilizada nesta dissertação. Considere o sistema

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (3.1)$$

definido para todo $t \geq 0$, em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado e é suposto disponível para a realimentação, $\sigma(t)$ é a regra de comutação e x_0 é a condição inicial. Em cada instante de tempo a regra de comutação $\sigma(t) \in \mathbb{N}$ seleciona uma matriz $A_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dentre aquelas pertencentes ao conjunto $\{A_1, \dots, A_N\}$.

Podemos definir a seguinte função de Lyapunov quadrática por partes

$$v(x) = \min_{i \in \mathbb{N}} x' P_i x = \min_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i x' P_i x \right) \quad (3.2)$$

em que $P_i > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica e pertence ao conjunto $\{P_1, \dots, P_N\}$ e $\lambda \in \mathbb{R}^N$ é um elemento do conjunto convexo

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\} \quad (3.3)$$

Um aspecto relevante a ser considerado na definição da função (3.2) é o fato de que ela não é diferenciável para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Definindo o seguinte conjunto $I(x) = \{i : v(x) = x' P_i x\}$, podemos observar que o mesmo contém mais de um elemento nos pontos onde a função (3.2) não é diferenciável, já que nestes pontos a minimização indicada em (3.2) não é única.

O objetivo principal deste capítulo consiste em encontrar $g(x(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}$, e as condições para que a regra de comutação dada por

$$\sigma(t) = g(x(t)) \quad (3.4)$$

faça com que a origem do sistema (3.1) seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. O teorema seguinte utiliza a função (3.2) e uma classe de matrizes de Metzler denotada por \mathcal{M} , consistindo de todas as matrizes $\Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}$, tais que

$$\pi_{ij} \geq 0, \forall i \neq j, \sum_{i=1}^N \pi_{ij} = 0, \forall j \quad (3.5)$$

de forma a encontrar condições suficientes para a estabilidade assintótica de (3.1) que assegurem um custo garantido de desempenho. Observe que para qualquer matriz de Metzler \mathcal{M} , todos os elementos da diagonal principal são não positivos.

Teorema 3.1 *Dado um conjunto de matrizes simétricas semidefinidas positivas $\{Q_1, \dots, Q_N\}$, se existir um conjunto de matrizes simétricas definidas positivas $\{P_1, \dots, P_N\}$ e $\Pi \in \mathcal{M}$ satisfazendo as seguintes desigualdades de Lyapunov-Metzler*

$$A_i' P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j + Q_i < 0, \quad i \in \mathbb{N} \quad (3.6)$$

então a lei de controle (3.4) com

$$g(x(t)) = \arg \min_{i \in \mathbb{N}} x(t)' P_i x(t) \quad (3.7)$$

faz com que a origem do sistema (3.1) seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e

$$\int_0^\infty x(t)' Q_{\sigma(t)} x(t) dt < \min_{i \in \mathbb{N}} x_0' P_i x_0 \quad (3.8)$$

Prova: A prova está apresentada em [Geromel & Colaneri, 2006]. Como a função (3.2) não é diferenciável para todo $x \in \mathbb{R}^n$, utilizamos a derivada de Dini [Garg, 1998] à direita. Por definição, a derivada de Dini à direita da função (3.2) é dada por

$$D^+ v(x(t)) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{v(x(t+h)) - v(x(t))}{h} \quad (3.9)$$

Em $t \geq 0$ arbitrário, com $\sigma(t) = i \in I(x(t))$, o Teorema de Danskin fornece

$$\begin{aligned} D^+ v(x(t)) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{v(x(t) + h A_i x(t)) - v(x(t))}{h} \\ &= \min_{l \in I(x(t))} x(t)' (A_l' P_l + P_l A_l) x(t) \\ &\leq x(t)' (A_i' P_i + P_i A_i) x(t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por outro lado, lembrando que $x(t)' P_j x(t) \geq x(t)' P_i x(t) = v(x(t))$ e que $\pi_{ji} \geq 0$ para todo $i \neq j \in \mathbb{N}$, utilizando (3.6), obtemos

$$\begin{aligned} D^+ v(x(t)) &< x(t)' \left(- \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j - Q_i \right) x(t) \\ &< - \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} \right) x(t)' P_i x(t) - x(t)' Q_i x(t) \\ &< -x(t)' Q_i x(t) \\ &< 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Logo (3.11) prova que a origem do sistema (3.1) é globalmente assintoticamente estável.

A determinação do limitante superior apresentado em (3.8) segue da desigualdade (3.11) lembrando que $\sigma(t) = i$, ou seja,

$$D^+ v(x(t)) < -x(t)' Q_{\sigma(t)} x(t) \quad (3.12)$$

Integrando ambos os lados de (3.12) de 0 a t e depois fazendo $t \rightarrow \infty$, obtemos (3.8), já que a estabilidade assintótica do sistema indica que $v(x(t))$ tende a zero quando t tende para o infinito. \blacklozenge

A validade da desigualdade (3.8) nos permite encontrar um outro limitante superior para o custo quadrático definido no Teorema 3.1, que embora seja mais conservador, pode ser mais vantajoso computacionalmente. Assim, se

$$P_i - \rho I_n < 0, \quad i \in \mathbb{N} \quad (3.13)$$

então

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x(t)' Q_{\sigma(t)} x(t) dt &< \min_{i \in \mathbb{N}} x_0' P_i x_0 \\ &< \rho x_0' x_0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Portanto, acrescentando as desigualdades (3.13) nas condições do Teorema 3.1, podemos utilizar o limitante (3.14) ao invés de (3.8). A utilização do limitante (3.14), embora pior, pode ser mais vantajosa computacionalmente, já que as LMIs apresentadas no Teorema 3.1 junto com (3.13) são calculadas apenas uma vez para cada condição inicial. Utilizando o limitante (3.8), o cálculo das desigualdades (3.6) deve ser realizado N vezes para cada condição inicial. Este aspecto está ilustrado através dos dois exemplos a serem discutidos em seguida nesta seção. Nestes exemplos, aplicamos as condições do Teorema 3.1 junto com as desigualdades (3.13) para várias condições iniciais localizadas sobre uma circunferência de raio 3 com centro na origem. Para qualquer condição inicial sobre esta circunferência, $x_0' x_0 = 9$ corresponde ao quadrado do raio e, portanto, o cálculo das desigualdades apresentadas no Teorema 3.1 junto com (3.13) é realizado apenas uma vez para todas as condições iniciais consideradas. Se, entretanto, utilizássemos o limitante (3.8) teríamos que realizar este cálculo N vezes para cada condição inicial dada. Desta forma, a utilização do limitante superior (3.14) representa uma grande vantagem em tempo de processamento quando comparada à utilização do limitante (3.8), embora seja importante salientar que, em geral, $\min_{i \in \mathbb{N}} x_0' P_i x_0 \ll \rho x_0' x_0$.

Um ponto relevante a ser levado em consideração no Teorema 3.1 é que as condições definidas em [Geromel & Colaneri, 2006] asseguram a estabilidade do sistema inclusive na presença de possíveis modos deslizantes, já que para cada $t \geq 0$, $I(x(t))$ pode conter mais de um elemento. Neste caso, $\sigma(t)$ utiliza apenas um deles selecionado arbitrariamente dentre os elementos de $I(x(t))$. Entretanto, quando o sistema opera em um modo deslizante, o

resultado clássico de Filippov estabelece que ele é governado pela equação diferencial $\dot{x} = (\sum_{i \in I(x)} \alpha_i A_i)x$ para algum vetor $\alpha \in \Xi(x)$ sendo que o conjunto $\Xi(x)$ é composto por todos os vetores com componentes $\alpha_i \geq 0$ para todo $i \in I(x)$ tais que $\sum_{i \in I(x)} \alpha_i = 1$. Adotando o mesmo procedimento de (3.10), para $t \geq 0$ arbitrário e denotando $x(t) = x$ para simplificar a notação, obtemos

$$\begin{aligned} D^+v(x) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{v\left(x + h(\sum_{i \in I(x)} \alpha_i A_i)x\right) - v(x)}{h} \\ &= \min_{l \in I(x)} \sum_{i \in I(x)} \alpha_i x'(A'_i P_l + P_l A_i)x \\ &\leq \max_{\alpha \in \Xi(x)} \min_{l \in I(x)} \sum_{i \in I(x)} \alpha_i x'(A'_i P_l + P_l A_i)x \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde a maximização indicada acima permite determinar a maior derivada direcional segundo o vetor $\alpha \in \Xi(x)$. Portanto, invertendo a ordem dos operadores max e min, temos

$$\begin{aligned} D^+v(x) &\leq \min_{l \in I(x)} \max_{\alpha \in \Xi(x)} \sum_{i \in I(x)} \alpha_i x'(A'_i P_l + P_l A_i)x \\ &\leq \min_{l \in I(x)} \max_{i \in I(x)} x'(A'_i P_l + P_l A_i)x \\ &\leq \max_{i \in I(x)} x'(A'_i P_i + P_i A_i)x \end{aligned} \quad (3.16)$$

Finalmente, como na prova do teorema anterior, o fato de $i \in I(x)$ faz com que $D^+v(x) < 0$ para todo $\alpha \in \Xi(x)$. É interessante notar que o pior caso, de todos os modelos possíveis, preconizados por Filippov, ocorre para algum $i \in I(x)$, isto é para algum vetor α correspondente a algum vértice do simplex $\Xi(x)$.

Outro ponto relevante é que as condições apresentadas no Teorema 3.1 não exigem nenhuma propriedade de estabilidade das matrizes $\{A_1, \dots, A_N\}$ tomadas individualmente. De fato, podemos escrever as desigualdades (3.6) da seguinte forma

$$\left(A_i + \frac{\pi_{ii}}{2} I_n\right)' P_i + P_i \left(A_i + \frac{\pi_{ii}}{2} I_n\right) + \sum_{i \neq j=1}^N \pi_{ji} P_j + Q_i < 0 \quad (3.17)$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Como $P_i > 0$, $Q_i \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $\pi_{ji} \geq 0$ para todo $i \neq j \in \mathbb{N}$, verificamos que uma condição necessária para a factibilidade de (3.17) é a estabilidade assintótica das matrizes $(A_i + (\pi_{ii}/2)I_n)$. Levando em conta que $\pi_{ii} = -\sum_{j \neq i}^N \pi_{ji} \leq 0$, $i \in \mathbb{N}$, não é necessário que as matrizes do conjunto $\{A_1, \dots, A_N\}$ sejam assintoticamente estáveis.

Vale ressaltar que a escolha da função de Lyapunov não é única. As condições para

a estabilidade do sistema (3.1) podem ser obtidas através da utilização de uma função de Lyapunov diferente. Uma função bastante utilizada na literatura [Liberzon, 2003] é

$$V(x) = \max_{i \in \mathbb{N}} x' P_i x = \max_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i x' P_i x \right) \quad (3.18)$$

em que P_i é uma matriz simétrica definida positiva pertencente ao conjunto $\{P_1, \dots, P_N\}$ e $\lambda \in \mathbb{R}^N$ corresponde a um elemento do conjunto Λ definido em (3.3). Neste caso, podemos definir $\mathcal{I}(x) = \{i : V(x) = x' P_i x\}$.

Utilizando a função (3.18), uma condição necessária para a estabilidade assintótica do sistema (3.1) (a ser discutida a seguir) é que não ocorra modos deslizantes¹. Sob esta hipótese, as condições para a estabilidade do sistema (3.1) são obtidas substituindo as desigualdades (3.6) do Teorema 3.1 por

$$A'_i P_i + P_i A_i - \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j + Q_i < 0, \quad i \in \mathbb{N} \quad (3.19)$$

e utilizando a regra de comutação (3.4) com

$$g(x(t)) = \arg \max_{i \in \mathbb{N}} x(t)' P_i x(t) \quad (3.20)$$

ao invés de (3.7). Para este caso, o limitante superior para o custo quadrático é dado por

$$\int_0^\infty x(t)' Q_{\sigma(t)} x(t) dt < \max_{i \in \mathbb{N}} x'_0 P_i x_0 \quad (3.21)$$

ao invés de (3.8).

De fato, para assegurar a estabilidade assintótica do sistema (3.1) utilizando a função (3.18) é necessário supor que o conjunto $\mathcal{I}(x(t))$ contenha apenas um elemento para todo $t \geq 0$, ou seja, o resultado da maximização indicada em (3.18) deve ser único. Assumindo esta hipótese, temos que a derivada de Dini da função (3.18) é

$$D^+ V(x(t)) = \max_{l \in \mathcal{I}(x(t))} x(t)' (A'_l P_l + P_l A_l) x(t) \quad (3.22)$$

e como $\sigma(t) = i \in \mathbb{N}$ é o único elemento de $\mathcal{I}(x(t))$, então

$$D^+ V(x(t)) = x(t)' (A'_i P_i + P_i A_i) x(t) \quad (3.23)$$

¹do inglês “sliding modes”

Por outro lado, lembrando que neste caso $x(t)'P_jx(t) \leq x(t)'P_ix(t) = V(x(t))$ e que $\pi_{ji} \geq 0$ para todo $i \neq j \in \mathbb{N}$, utilizando (3.19), obtemos

$$\begin{aligned}
 D^+V(x(t)) &< x(t)' \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji}P_j - Q_i \right) x(t) \\
 &< \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} \right) x(t)'P_ix(t) - x(t)'Q_ix(t) \\
 &< -x(t)'Q_ix(t) \\
 &< 0
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

o que comprova a estabilidade assintótica global do sistema em estudo. A determinação do limitante superior para o custo quadrático segue de (3.24). Nesta desigualdade, para $\sigma(t) = i$ temos $D^+V(x(t)) < -x(t)'Q_{\sigma(t)}x(t)$, cuja integração de 0 a t , para $t \rightarrow \infty$, uma vez que $V(x(\infty)) = 0$, leva a (3.21).

Note que, a utilização da função de Lyapunov (3.18), não garante a estabilidade diante da eventual existência de modos deslizantes. De fato, se porventura $\mathcal{I}(x(t))$ tiver mais de um elemento, mas for assegurada a inexistência de modos deslizantes, então a estabilidade ainda é garantida mesmo que a derivada (3.22) seja positiva no instante da comutação. Isto ocorre pois esta derivada torna-se negativa no instante imediatamente posterior e assim permanece por um determinado intervalo de tempo. Assim sendo, conclui-se que a estabilidade assintótica ainda pode ser garantida desde que testes suplementares garantam a não ocorrência de modos deslizantes [Ishii et al., 2005]. Infelizmente, estes testes são muito difíceis de serem realizados sobretudo quando o número de subsistemas é maior do que dois. Finalmente, note que a existência de modos deslizantes faz com que $\mathcal{I}(x(t))$ necessariamente contenha mais de um elemento, não sendo possível, portanto, assegurar a validade de (3.24).

De acordo com o Teorema 3.1, as condições para a estabilidade assintótica do sistema (3.1) dependem da solução das desigualdades de Lyapunov-Metzler. Estas desigualdades possuem natureza não-convexa devido ao produto das variáveis $(\Pi, \{P_1, \dots, P_N\})$ e não é possível resolvê-las através de softwares disponíveis na literatura para a solução de LMIs. No entanto, em [Geromel & Colaneri, 2006] foi proposta uma versão alternativa que pode ser resolvida utilizando LMIs e uma busca unidimensional. Esta condição, embora seja mais conservadora, é mais fácil de ser resolvida pois permite a utilização de softwares disponíveis na literatura. A condição baseia-se em uma subclasse de matrizes de Metzler com elementos iguais na diagonal principal.

Para sistemas com apenas dois modos de comutação ($N = 2$), as condições do Teorema

3.1 podem ser resolvidas sem um grande esforço computacional realizando-se uma busca bidimensional envolvendo duas variáveis independentes, que correspondem aos elementos fora da diagonal principal da matriz $\Pi \in \mathcal{M}$. Este ponto será ilustrado através do Exemplo 3.1. Se, entretanto, o sistema tiver mais de dois modos de comutação, sua solução através das condições do Teorema 3.1 torna-se bastante complicada, sendo oportuno utilizar as condições apresentadas no teorema a seguir.

Teorema 3.2 *Dado um conjunto de matrizes simétricas semidefinidas positivas $\{Q_1, \dots, Q_N\}$, se existir um conjunto de matrizes simétricas definidas positivas $\{P_1, \dots, P_N\}$ e um escalar positivo γ satisfazendo as desigualdades modificadas de Lyapunov-Metzler*

$$A'_i P_i + P_i A_i + \gamma(P_j - P_i) + Q_i < 0, \quad j \neq i \in \mathbb{N} \quad (3.25)$$

então a lei de controle definida por (3.4) e (3.7) faz com que a origem do sistema (3.1) seja globalmente assintoticamente estável e

$$\int_0^\infty x(t)' Q_{\sigma(t)} x(t) dt < \sum_{i=1}^N x'_0 P_i x_0 \quad (3.26)$$

Prova: A prova está apresentada em [Geromel & Colaneri, 2006]. Utilizamos uma subclasse de matrizes de Metzler com os mesmos elementos na diagonal principal, isto é, $\pi_{ii} = -\gamma$, $i \in \mathbb{N}$. Logo

$$\gamma^{-1} \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} = 1 \quad (3.27)$$

Levando em conta que $\pi_{ji} \geq 0$ para todo $i \neq j \in \mathbb{N}$, multiplicando (3.25) por π_{ji} , somando para todos os elementos $j \neq i \in \mathbb{N}$ e finalmente multiplicando por γ^{-1} , obtemos

$$\begin{aligned} A'_i P_i + P_i A_i + Q_i &< - \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} (P_j - P_i) \\ &< - \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j \end{aligned} \quad (3.28)$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Note que as desigualdades (3.28) são as mesmas que as apresentadas em (3.6), o que prova o teorema proposto.

A desigualdade (3.26) é satisfeita uma vez que representa uma condição pior que a apresentada no Teorema 3.1. Ou seja, como (3.26) é um limitante superior de (3.8), então se

(3.8) é satisfeita, (3.26) também é válida. \blacklozenge

De forma semelhante, se assegurarmos a inexistência de modos deslizantes e utilizarmos a função de Lyapunov (3.18), podemos obter condições mais conservadoras que as desigualdades (3.19). Estas condições são encontradas substituindo (3.25) por

$$A'_i P_i + P_i A_i + \gamma(P_i - P_j) + Q_i < 0, \quad i \neq j \in \mathbb{N} \quad (3.29)$$

e utilizando a regra de comutação (3.4) com (3.20). O limitante superior para o custo quadrático é (3.21). Os exemplos a seguir ilustram a teoria discutida nesta seção.

Exemplo 3.1 Este exemplo foi extraído de [Bacciotti, 2004]. Considere o sistema (3.1) com $N = 2$ e matrizes $\{A_1, A_2\}$, ambas instáveis, dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Para condições iniciais em torno da circunferência de raio 3, $x_0 = [3\cos(\vartheta) \quad 3\sin(\vartheta)]'$, com $\vartheta \in (0, 2\pi)$, e $Q_1 = Q_2 = I_2$, utilizamos as condições do Teorema 3.1 para fazer com que a origem do sistema seja globalmente assintoticamente estável. Como se trata de sistemas de segunda ordem, as propriedades das matrizes de Metzler nos permitem escrever que $\pi_{11} = -\pi_{21} \leq 0$ e $\pi_{22} = -\pi_{12} \leq 0$, de forma que as desigualdades (3.6) tornam-se

$$A'_1 P_1 + P_1 A_1 + \pi_{21}(P_2 - P_1) + Q_1 < 0 \quad (3.31)$$

$$A'_2 P_2 + P_2 A_2 + \pi_{12}(P_1 - P_2) + Q_2 < 0 \quad (3.32)$$

Neste exemplo, acrescentamos as desigualdades (3.13) nas condições do Teorema 3.1 e utilizamos a função objetivo (3.14) ao invés de (3.8). Após uma busca bidimensional, encontramos $\pi_{21} = 5$ e $\pi_{12} = 10$. Utilizando estes valores de π_{21} e π_{12} as LMIs (3.31), (3.32), ofereceram como resultado as seguintes matrizes simétricas definidas positivas

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2.1667 & 0.0000 \\ 0.0000 & 2.1072 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 2.8333 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.9575 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Utilizando as matrizes P_1 e P_2 , a regra de comutação (3.4) com (3.7) foi implementada. A Figura 3.1 representa o plano de fase do sistema com as superfícies de comutação destacadas. Estas superfícies foram obtidas lembrando que no instante da comutação $x'P_1x = x'P_2x$.

Desta forma, considerando que $x'(P_1 - P_2)x = x'U'\Upsilon Ux = 0$, em que Υ representa a matriz dos autovalores de $(P_1 - P_2)$ e U é uma matriz unitária formada pelos autovetores correspondentes, temos que uma condição necessária para que haja comutação é que os autovalores de Υ possuam sinais opostos. De fato, se a matriz Υ for definida positiva, então $\sigma(t) = 2$, uma vez que $x'P_1x > x'P_2x$ para qualquer $x(t)$, $t \geq 0$, caso contrário, $\sigma(t) = 1$ para todo $x(t)$, $t \geq 0$, e em ambos os casos não haveria comutação.

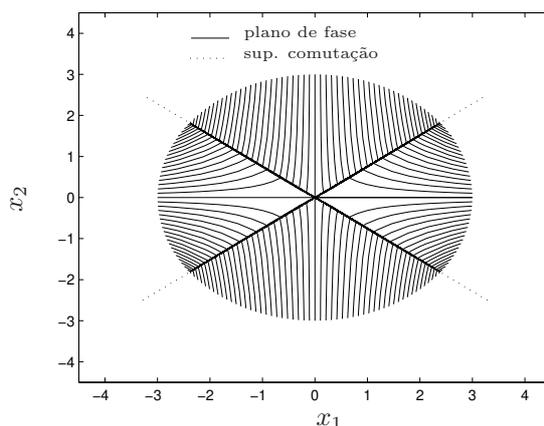


Figura 3.1: Plano de fase (Exemplo 3.1).

Neste contexto, podemos considerar $y = Ux$ e desta forma escrever a equação $x'U'\Upsilon Ux = y'\Upsilon y = 0$ como

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.34)$$

Resolvendo (3.34) obtemos $y_1 = \pm\sqrt{-\beta/\alpha} y_2$, em que $\sqrt{-\beta/\alpha}$ é um número real, já que β e α possuem sinais opostos, portanto

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{-\beta/\alpha} \\ 1 \end{bmatrix} \mu \quad (3.35)$$

para $\mu \in \mathbb{R}$. Lembrando que $y = Ux$, temos que as retas de comutação são as seguintes

$$x = U' \begin{bmatrix} \sqrt{-\beta/\alpha} \\ 1 \end{bmatrix} \mu \quad (3.36)$$

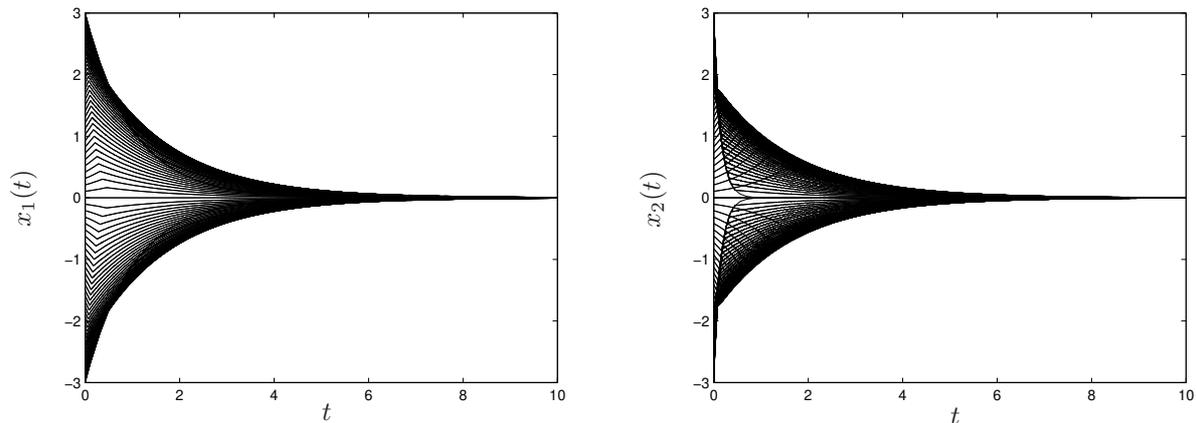


Figura 3.2: Trajetória dos estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$ (Exemplo 3.1).

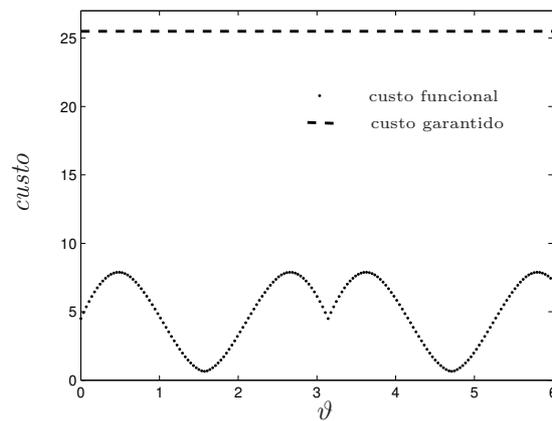


Figura 3.3: Custos para o sistema do Exemplo 3.1.

e

$$x = U' \begin{bmatrix} -\sqrt{-\beta/\alpha} \\ 1 \end{bmatrix} \mu \quad (3.37)$$

Para o caso deste exemplo $\alpha = -0.6667$ e $\beta = 1.1497$. A Figura 3.2 representa as trajetórias dos estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e a Figura 3.3 representa o custo funcional para cada condição inicial, bem como o custo garantido do sistema. Como pode ser observado, as condições impostas pelo Teorema 3.1, utilizando (3.14) ao invés de (3.8), asseguram que a origem do sistema seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, com custo garantido igual

a 25.5. ■

Para o Exemplo 3.1, se utilizássemos as condições apresentadas no Teorema 3.2, não seria possível encontrar um valor de γ que garanta a factibilidade das LMIs (3.25). De fato, as condições apresentadas no Teorema 3.2 são mais conservadoras que as apresentadas no Teorema 3.1. No entanto, como já foi ressaltado, quando o número de modos de comutação é maior do que dois, a utilização do Teorema 3.1 torna-se bastante difícil e o Teorema 3.2 representa uma boa opção. Para efeito de comparação, o exemplo a seguir ilustra a aplicação das condições do Teorema 3.2 para um sistema com dois modos de operação.

Exemplo 3.2 Este exemplo foi extraído de [Geromel & Colaneri, 2006]. Nosso objetivo consiste em verificar as condições de estabilidade propostas pelo Teorema 3.2 e, posteriormente, as condições obtidas através da utilização da função de Lyapunov (3.18).

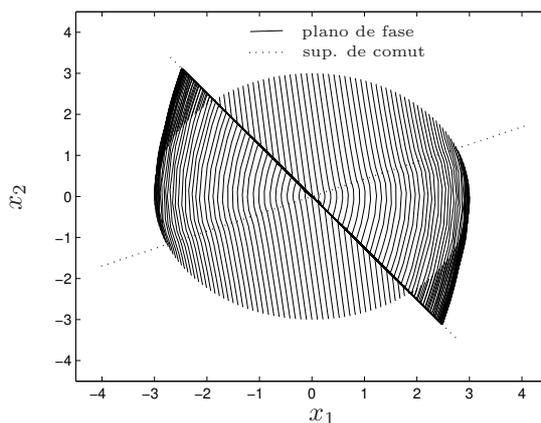


Figura 3.4: Plano de fase (Exemplo 3.2).

Considere o sistema (3.1) com $N = 2$ e matrizes $\{A_1, A_2\}$ dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Por simples inspeção nota-se que ambas as matrizes são instáveis. Para condições iniciais sobre a circunferência de raio 3, com $Q_1 = Q_2 = I_2$ e $\gamma = 11.8$, aplicamos as condições do Teorema 3.2, acrescentando as desigualdades (3.13) e utilizando como função objetivo (3.14), obtendo como resultado as seguintes matrizes simétricas definidas positivas

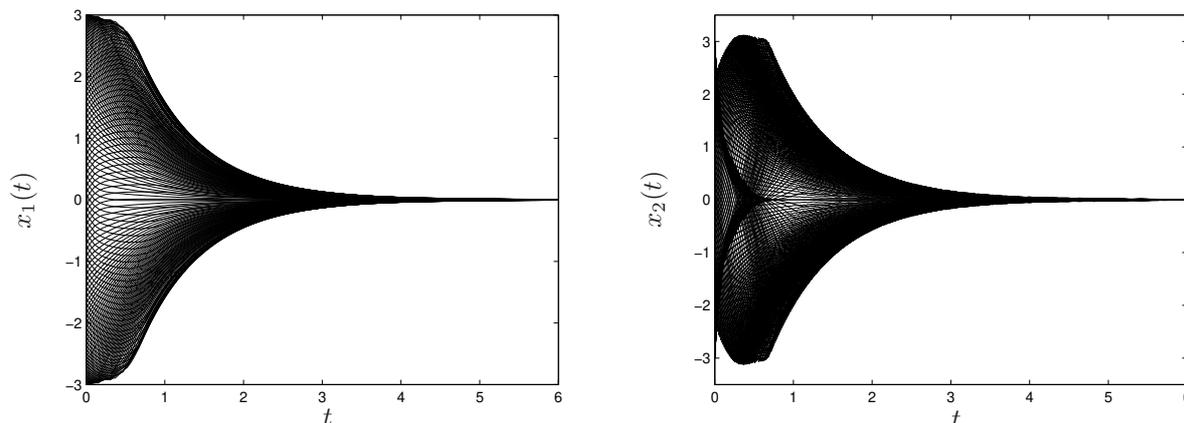


Figura 3.5: Trajetória dos estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$ (Exemplo 3.2).

$$P_1 = \begin{bmatrix} 6.7196 & 1.6293 \\ 1.6293 & 1.0222 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 6.0826 & 2.1293 \\ 2.1293 & 2.2206 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Utilizando as matrizes acima, a regra de comutação (3.4) com (3.7) foi implementada. A Figura 3.4 apresenta o plano de fase do sistema com as superfícies de comutação destacadas. Estas superfícies foram calculadas da mesma forma que no exemplo anterior, sendo que neste caso $\alpha = -1.3258$ e $\beta = 0.7644$. A Figura 3.5 representa as trajetórias dos estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$. A Figura 3.6 apresenta o custo funcional do sistema para cada condição inicial e os custos garantidos obtidos utilizando as condições dos Teoremas 3.1 e 3.2 com (3.14) ao invés de (3.8) e (3.26), respectivamente. Podemos notar que, de fato, as condições do Teorema 3.2, com (3.14), fizeram com que a origem seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável assegurando um custo garantido de 64.3739. Para fins de comparação, podemos observar na Figura 3.6, que o custo garantido obtido pelo Teorema 3.1 com a função objetivo (3.14) e com $\pi_{21} = 110$ e $\pi_{12} = 49$, é igual a 19.1831. Como esperado, este custo é menor que o obtido utilizando as condições mais conservadoras fornecidas pelo Teorema 3.2 com o mesmo limitante (3.14).

Estudamos o mesmo sistema, utilizando as condições de estabilidade obtidas através da função de Lyapunov (3.18). Podemos verificar que, para fins de estabilidade, as seguintes matrizes simétricas definidas positivas

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0573 & -0.5792 \\ -0.5792 & 5.9542 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.0177 & 0.1362 \\ 0.1362 & 4.3650 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

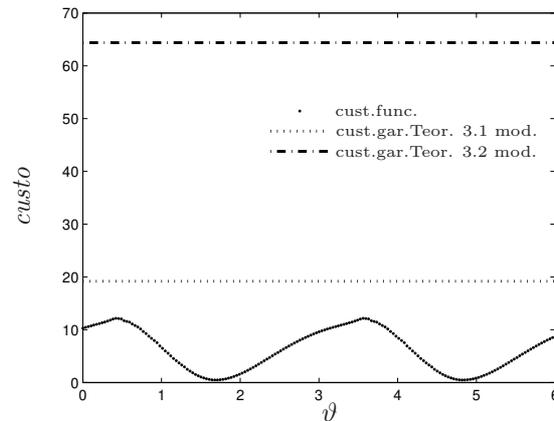


Figura 3.6: Custos para o sistema do Exemplo 3.2.

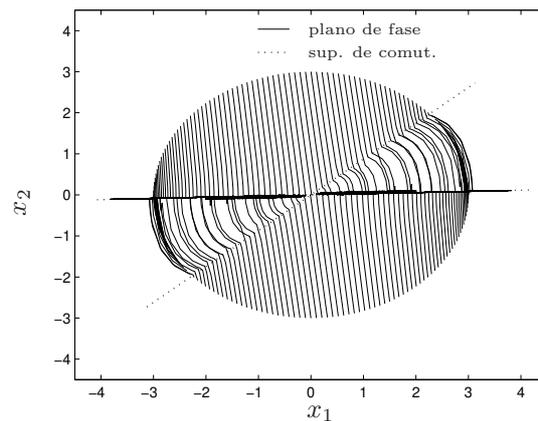


Figura 3.7: Plano de fase (Exemplo 3.2).

satisfazem as desigualdades $A_i'P_i + P_iA_i + \gamma(P_i - P_j) < 0 \forall i \in \mathbb{N}$.

Assim, com as mesmas condições iniciais e o mesmo valor de γ utilizado anteriormente, aplicamos a regra de comutação (3.20), obtendo o plano de fase apresentado na Figura 3.7. Nesta figura também estão destacadas as superfícies de comutação do sistema, sendo que para este caso $\alpha = -0.2402$ e $\beta = 1.8690$.

A Figura 3.8 representa as trajetórias $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Note que, assim como no caso anterior o sistema apresentou modos deslizantes, mas neste caso, como já foi discutido anteriormente,

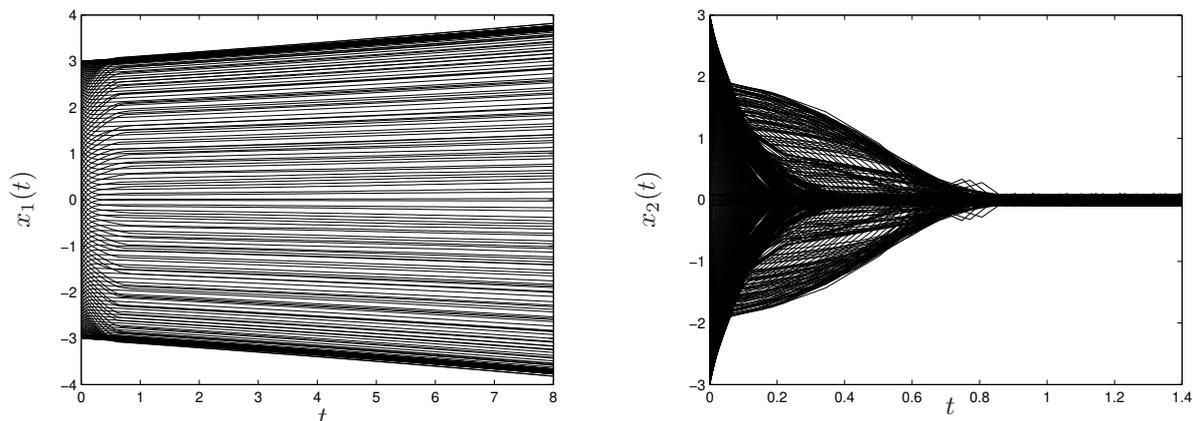


Figura 3.8: Trajetória dos estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$ (Exemplo 3.2).

não foi possível garantir a estabilidade assintótica da origem. ■

Os Exemplos 3.1 e 3.2 ilustram os mais diversos aspectos teóricos abordados até aqui. Na próxima seção, estes conceitos são generalizados para lidar com sistemas sujeitos a perturbações impulsivas, onde será definido um custo funcional e condições para o cálculo de um limitante inferior para este critério.

3.2 Perturbações Impulsivas

Nesta seção, desejamos estudar sistemas descritos pela seguinte equação de estado

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + G_{\sigma(t)}w(t), \quad x(0) = 0 \quad (3.41)$$

$$\xi(t) = C_{\sigma(t)}x(t) \quad (3.42)$$

em que a cada instante de tempo a regra de comutação $\sigma(t) \in \mathbb{N}$ determina um elemento $A_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ de cada conjunto $\{A_1, \dots, A_N\}$, $\{G_1, \dots, G_N\}$ e $\{C_1, \dots, C_N\}$, respectivamente. Para cada $\theta = 1, \dots, m$, uma entrada externa $w(t) = e_\theta \delta(t)$, com e_θ representando a θ -ésima coluna da matriz identidade I_m , é aplicada e a correspondente saída controlada $\xi^\theta(t)$ é obtida, de acordo com uma política de comutação $\sigma(t)$ considerada.

Levando em conta que o custo para cada canal $\theta = 1, \dots, m$ é igual a $\|\xi^\theta\|_2^2$, podemos definir o custo funcional do sistema (3.41)-(3.42), associado a uma regra de comutação $\sigma(t)$,

como a soma das contribuições dos custos de todos os canais, ou seja,

$$\Theta(\sigma) = \sum_{\theta=1}^m \|\xi^\theta\|_2^2 \quad (3.43)$$

É importante salientar que na ausência de comutação, $\Theta(\sigma)$ coincide com o quadrado da norma \mathcal{H}_2 da função de transferência entre a entrada $w(t)$ e a saída $\xi(t)$. O teorema a seguir apresenta as condições para a estabilidade assintótica global do sistema (3.41)-(3.42) de forma a assegurar um custo garantido de desempenho.

Teorema 3.3 *Para o sistema (3.41)-(3.42), se existir um conjunto de matrizes simétricas definidas positivas $\{P_1, \dots, P_N\}$ e $\Pi \in \mathcal{M}$ satisfazendo as seguintes desigualdades de Lyapunov-Metzler*

$$A_i'P_i + P_iA_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji}P_j + C_i'C_i < 0, \quad i \in \mathbb{N} \quad (3.44)$$

então a lei de controle definida por (3.4) e (3.7) faz com que a origem seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e

$$\Theta(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{N}} \text{tr}(G_{\sigma(0)}'P_iG_{\sigma(0)}) \quad (3.45)$$

Prova: Podemos observar que o sistema (3.41)-(3.42) é equivalente ao sistema (3.1), se forem feitas as seguintes modificações $w(t) = 0$ e $x(0) = G_{\sigma(0)}e_\theta$, sendo que θ corresponde a um dos canais $\theta = 1, \dots, m$. Esta equivalência pode ser comprovada integrando ambos os lados de (3.41), ou seja,

$$\int_0^t \dot{x}(\tau)d\tau = \int_0^t (A_{\sigma(\tau)}x(\tau) + G_{\sigma(\tau)}e_\theta\delta(\tau)) d\tau \quad (3.46)$$

Considerando que a condição inicial antes da aplicação do impulso é representada por $x(0)$ e que $x(0^+)$ representa a condição inicial imediatamente após a sua aplicação, temos

$$x(t) - x(0) = \int_0^t A_{\sigma(\tau)}x(\tau)d\tau + G_{\sigma(0)}e_\theta \quad (3.47)$$

Como $x(0) = 0$, o sistema (3.41)-(3.42) pode ser representado, alternativamente, pelas seguintes equações no espaço de estados

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad x(0^+) = G_{\sigma(0)}e_\theta \quad (3.48)$$

$$\xi(t) = C_{\sigma(t)}x(t) \quad (3.49)$$

A equivalência entre a equação (3.48) e o sistema (3.1) permite utilizar as condições de estabilidade propostas no Teorema 3.1, substituindo Q_i por $C_i' C_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, para assegurar a estabilidade do sistema (3.41)-(3.42). Para a obtenção do limitante superior (3.45) podemos fazer as seguintes considerações. Uma vez que a derivada de Dini (derivada direcional) satisfaz

$$D^+(v(x(t))) < -\xi(t)'\xi(t) \quad (3.50)$$

podemos representar o sistema (3.41)-(3.42) por (3.48)-(3.49), com $x_0 = G_{\sigma(0)} e_\theta \in \mathbb{R}^n$, para algum $\theta = 1, \dots, m$. Assim procedendo, temos que a saída correspondente satisfaz $\|\xi\|_2^2 < v(x_0) = \min_{i \in \mathbb{N}} x_0' P_i x_0$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \Theta(\sigma) &< \sum_{\theta=1}^m \min_{i \in \mathbb{N}} e_\theta' G_{\sigma(0)}' P_i G_{\sigma(0)} e_\theta \\ &< \min_{i \in \mathbb{N}} \sum_{\theta=1}^m e_\theta' G_{\sigma(0)}' P_i G_{\sigma(0)} e_\theta \\ &< \min_{i \in \mathbb{N}} \text{tr}(G_{\sigma(0)}' P_i G_{\sigma(0)}) \end{aligned} \quad (3.51)$$

o que prova o teorema proposto. \blacklozenge

Note que, assim como no caso da seção anterior, é bastante difícil encontrar uma solução para as desigualdades (3.44) devido ao produto das variáveis $(\Pi, \{P_1, \dots, P_N\})$. Para contornar esta dificuldade, podemos utilizar condições mais conservadoras que as obtidas no Teorema 3.3. O teorema a seguir apresenta estas condições e se baseia na utilização da subclasse de matrizes de Metzler com elementos iguais na diagonal principal.

Teorema 3.4 *Para o sistema (3.41)-(3.42), se existir um conjunto de matrizes simétricas definidas positivas $\{P_1, \dots, P_N\}$ e um escalar positivo γ satisfazendo as seguintes desigualdades modificadas de Lyapunov-Metzler*

$$A_i' P_i + P_i A_i + \gamma(P_j - P_i) + C_i' C_i < 0, \quad j \neq i \in \mathbb{N} \quad (3.52)$$

então a lei de controle definida por (3.4) e (3.7) faz com que a origem seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e

$$\Theta(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{N}} \text{tr}(G_{\sigma(0)}' P_i G_{\sigma(0)}) \quad (3.53)$$

Prova: A demonstração deste teorema segue o mesmo procedimento adotado na prova do

Teorema 3.2, ou seja, considerando $\pi_{ii} = -\gamma$ e levando em conta que $\pi_{ji} \geq 0$ para todo $i \neq j \in \mathbb{N}$, multiplicando (3.52) por π_{ji} , somando para todos os elementos $j \neq i \in \mathbb{N}$ e finalmente multiplicando por γ^{-1} , obtemos (3.44), o que prova o teorema proposto. \blacklozenge

Uma discussão relevante refere-se à determinação do valor de $\sigma(0)$. Note que no instante $t = 0$, imediatamente anterior à aplicação do impulso, a regra de comutação (3.4) com (3.7) é igual a

$$\sigma(0) = g(x(0)) = \arg \min_{i \in \mathbb{N}} x(0)' P_i x(0) \quad (3.54)$$

Como $x(0) = 0$ em (3.41)-(3.42), então $\sigma(0)$ pode assumir qualquer valor arbitrário $i \in \mathbb{N}$. Ou seja, podemos escolher $\sigma(0) \in \mathbb{N}$ de forma conveniente para reduzir o custo garantido que aparece no lado direito de (3.53). Assim procedendo, podemos limitar $\Theta(\sigma)$ da seguinte maneira

$$\Theta(\sigma) < \min_{i, j \in \mathbb{N}} \inf_{\gamma > 0} \inf_{P_i > 0 \in \Phi(\gamma)} \text{tr}(G_j' P_i G_j) \quad (3.55)$$

em que $\Phi(\gamma)$ representa o conjunto de soluções factíveis de (3.52) para $\gamma > 0$ fixado.

Uma vez que determinamos condições suficientes para a estabilidade assintótica da origem, precisamos analisar a qualidade do resultado obtido. Uma maneira de fazer isto, é determinando a distância entre ambos os lados da desigualdade (3.53). No entanto, esta determinação não é uma tarefa fácil, dada a natureza complexa do sistema dinâmico em questão. Assim, propomos condições para o cálculo de um limitante inferior para o custo $\Theta(\sigma)$, de tal forma que utilizando este limitante podemos ter uma idéia da proximidade entre o custo garantido e o valor real do custo funcional $\Theta(\sigma)$, sem a necessidade de calcular $\Theta(\sigma)$ explicitamente. Em [Spinelli et al., 2006] é apresentado o cálculo de um limitante inferior para o custo que aparece do lado esquerdo de (3.8) referente ao sistema (3.1).

Os próximos teoremas apresentam condições para o cálculo de um limitante inferior para $\Theta(\sigma)$ utilizando uma estratégia mais simples que a apresentada em [Spinelli et al., 2006].

Teorema 3.5 *Para o sistema (3.41)-(3.42), se existir um conjunto de matrizes simétricas definidas positivas $\{P_1, \dots, P_N\}$ e $\Pi \in \mathcal{M}$ satisfazendo as seguintes desigualdades de Lyapunov-Metzler*

$$A_q' P_i + P_i A_q + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j + C_q' C_q > 0, \quad i, q \in \mathbb{N} \quad (3.56)$$

então para qualquer lei de comutação estabilizante, a seguinte desigualdade é verdadeira

$$\Theta(\sigma) > \max_{i \in \mathbb{N}} \text{tr}(G_{\sigma(0)}' P_i G_{\sigma(0)}) \quad (3.57)$$

Prova: Utilizando a função de Lyapunov (3.18), lembrando que $\mathcal{I}(x) = \{i : V(x) = x'P_i x\}$ e considerando $\sigma(t) = q \in \mathbb{N}$ estabilizante, temos

$$D^+V(x(t)) = \max_{l \in \mathcal{I}(x(t))} x(t)'(A'_q P_l + P_l A_q)x(t) \quad (3.58)$$

a qual permite concluir que se $i \in \mathcal{I}(x(t))$, então $D^+V(x(t)) \geq x(t)'(A'_q P_i + P_i A_q)x(t)$. Por outro lado, levando em conta que $V(x(t)) = x(t)'P_i x(t) \geq x(t)'P_j x(t)$ e que $\pi_{ji} \geq 0$ para todo $i \neq j \in \mathbb{N}$, utilizando (3.56), obtemos

$$\begin{aligned} D^+V(x(t)) &> x(t)' \left(- \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j - C'_q C_q \right) x(t) \\ &> -x(t)' C'_q C_q x(t) \\ &> -\xi(t)' \xi(t) \end{aligned} \quad (3.59)$$

que após integração em ambos os lados fornece $V(x(0)) - V(x(\infty)) < \|\xi\|_2^2$. Considerando (3.41)-(3.42), representado alternativamente por (3.48)-(3.49), com $x_0 = G_{\sigma(0)} e_\theta$, para algum $\theta = 1, \dots, m$, e levando em conta que a regra de comutação $\sigma(t)$ estabiliza o sistema, temos que a correspondente saída satisfaz $\|\xi\|_2^2 > V(x_0) = \max_{i \in \mathbb{N}} x'_0 P_i x_0$, pois $V(x(\infty)) = 0$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \Theta(\sigma) &> \sum_{\theta=1}^m \max_{i \in \mathbb{N}} e'_\theta G'_{\sigma(0)} P_i G_{\sigma(0)} e_\theta \\ &> \max_{i \in \mathbb{N}} \sum_{\theta=1}^m e'_\theta G'_{\sigma(0)} P_i G_{\sigma(0)} e_\theta \\ &> \max_{i \in \mathbb{N}} \text{tr}(G'_{\sigma(0)} P_i G_{\sigma(0)}) \end{aligned} \quad (3.60)$$

o que prova o teorema proposto. ◆

Assim como foi observado nos teoremas anteriores, é muito difícil realizar o cálculo das desigualdades (3.56), devido ao produto das variáveis $(\Pi, \{P_1, \dots, P_N\})$. No entanto, o teorema seguinte propõe o cálculo de um limitante inferior utilizando uma versão mais conservadora das desigualdades de Lyapunov-Metzler apresentadas no teorema anterior.

Teorema 3.6 *Para o sistema (3.41)-(3.42), se existir um conjunto de matrizes simétricas definidas positivas $\{P_1, \dots, P_N\}$ e um escalar positivo γ satisfazendo as seguintes desigualdades*

modificadas de Lyapunov-Metzler

$$A'_q P_i + P_i A_q + \gamma(P_j - P_i) + C'_q C_q > 0, \quad i \neq j, q \in \mathbb{N} \quad (3.61)$$

então para qualquer lei de comutação estabilizante, a seguinte desigualdade é verdadeira

$$\Theta(\sigma) > \max_{i \in \mathbb{N}} \text{tr}(G'_{\sigma(0)} P_i G_{\sigma(0)}) \quad (3.62)$$

Prova: A demonstração deste teorema segue o mesmo procedimento adotado na prova do Teorema 3.2. Ou seja, considerando que $\pi_{ii} = -\gamma$ e levando em conta que $\pi_{ji} \geq 0$ para todo $i \neq j \in \mathbb{N}$, multiplicando (3.61) por π_{ji} , somando para todos os elementos $j \neq i \in \mathbb{N}$ e finalmente multiplicando por γ^{-1} , obtemos (3.56), o que prova o teorema proposto. \blacklozenge

Note que é possível maximizar o limitante inferior apresentado do lado direito de (3.62) através da seguinte desigualdade

$$\Theta(\sigma) > \max_{i \in \mathbb{N}} \sup_{\gamma > 0} \sup_{P_i > 0 \in \Omega(\gamma)} \text{tr}(G'_{\sigma(0)} P_i G_{\sigma(0)}) \quad (3.63)$$

em que $\Omega(\gamma)$ representa o conjunto de soluções factíveis de (3.56) para $\gamma > 0$ fixado. Para o cálculo do limitante inferior, o valor de $G_{\sigma(0)}$ é tomado igual àquele utilizado na determinação do limitante superior, por exemplo, o valor de G_j que ofereceu o menor custo do lado direito de (3.55). O exemplo seguinte ilustra a teoria apresentada nesta seção.

Exemplo 3.3 Este exemplo foi extraído de [Geromel et al., 2007]. Desejamos aplicar as condições apresentadas no Teorema 3.4 e fazer com que o ponto de equilíbrio $x = 0$ de (3.41)-(3.42), com

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad G_1 = G_2 = G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

seja globalmente assintoticamente estável, bem como utilizar as condições apresentadas no Teorema 3.6 para obter um limitante inferior para o custo funcional (3.43). Note que cada

subsistema isolado é instável. Para $\gamma = 200$, o seguinte problema de otimização foi resolvido

$$\min_{i \in \mathbb{N}} \inf_{P_i > 0 \in \Phi(200)} \{ \text{tr}(G' P_i G) : (3.52) \} \quad (3.64)$$

resultando nas seguintes matrizes simétricas definidas positivas

$$P_1 = \begin{bmatrix} 3.5511 & 3.5765 & 0.7500 \\ 3.5765 & 6.8926 & 2.0458 \\ 0.7500 & 2.0458 & 2.8212 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 3.5611 & 3.5867 & 0.7603 \\ 3.5867 & 6.8927 & 2.0358 \\ 0.7603 & 2.0358 & 2.7908 \end{bmatrix}$$

A partir das matrizes P_1 e P_2 , a regra de comutação (3.4) com (3.7) foi implementada. As trajetórias das variáveis de estado $x(t) \in \mathbb{R}^3$ em função do tempo considerando uma perturbação impulsiva no primeiro canal, ou seja, $w(t) = e_1 \delta(t)$, com e_1 sendo a primeira coluna da matriz identidade, estão apresentadas na Figura 3.9. As condições do Teorema 3.4 fizeram com que a origem seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e o custo garantido foi de 8.8925.

Utilizando as condições do Teorema 3.6 obtivemos um limitante inferior para o custo funcional $\Theta(\sigma)$ igual a 4.2503. Assim, a origem do sistema foi globalmente estabilizada com o custo funcional na faixa de $4.2503 \leq \Theta(\sigma) \leq 8.8925$. ■

Nesta seção, determinamos condições suficientes para o estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos lineares com comutação, sujeitos a perturbações impulsivas e definimos um critério de desempenho $\Theta(\sigma)$ para estes sistemas. Com a finalidade de analisar a qualidade do resultado obtido, propomos condições para o cálculo de um limitante inferior para $\Theta(\sigma)$, de tal forma que seja possível estimar a distância entre o valor real do custo funcional e o custo garantido, sem que seja necessário realizar explicitamente o cálculo de $\Theta(\sigma)$. Na próxima seção, utilizamos o mesmo procedimento para o estudo de sistemas dinâmicos com comutação e com uma entrada de controle via realimentação de estado da forma $u = K_{\sigma(t)} x(t)$, também sujeitos a perturbações impulsivas. Portanto, para estes sistemas existem duas variáveis de controle, a saber, a regra de comutação $\sigma(t)$ e a entrada $u = K_{\sigma(t)} x(t)$. Em cada instante de tempo a regra de comutação seleciona um elemento do conjunto $\{K_1, \dots, K_N\}$, sendo que cada K_i para $i \in \mathbb{N}$, representa um ganho de realimentação a ser determinado.

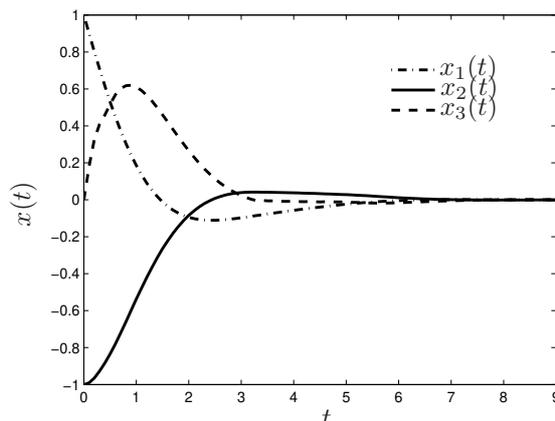


Figura 3.9: Estados do sistema (Exemplo 3.3).

3.3 Controle e Perturbações Impulsivas

Nesta seção, desejamos estudar sistemas descritos pelas seguintes equações no espaço de estados

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) + G_{\sigma(t)}w(t) \quad (3.66)$$

$$\xi(t) = C_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}u(t) \quad (3.67)$$

com condições iniciais nulas, em que a cada instante de tempo a regra de comutação $\sigma(t) \in \mathbb{N}$ determina um elemento $A_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $G_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{p \times r}$ de cada conjunto $\{A_1, \dots, A_N\}$, $\{B_1, \dots, B_N\}$, $\{G_1, \dots, G_N\}$, $\{C_1, \dots, C_N\}$ e $\{D_1, \dots, D_N\}$, respectivamente. Para cada $\theta = 1, \dots, m$ uma entrada externa $w(t) = e_{\theta}\delta(t)$ é aplicada e a correspondente saída controlada $\xi^{\theta}(t)$ é obtida segundo uma política de comutação $\sigma(t)$ considerada. A entrada de controle $u(t)$ é descrita por

$$u(t) = K_{\sigma(t)}x(t) \quad (3.68)$$

em que o ganho $K_{\sigma(t)}$, a cada instante de tempo $t \geq 0$, representa um elemento do conjunto $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_N\}$, sendo que cada $K_i \in \mathbb{R}^{r \times n}$ é uma variável de controle a ser determinada. A utilização da entrada de controle (3.68) junto com a regra de comutação $\sigma(t)$ permitem estabilizar sistemas que não são estabilizáveis utilizando apenas uma das variáveis individualmente. O Exemplo 3.4 apresentado no final desta seção ilustra bem este aspecto, uma vez

que a regra de comutação $\sigma(t)$, sem a utilização da entrada de controle $u(t)$ não é suficiente para levar a origem do sistema para a estabilidade assintótica global.

Considerando a entrada de controle (3.68), o sistema (3.66)-(3.67) pode ser representado pelas seguintes equações no espaço de estados

$$\dot{x}(t) = (A_{\sigma(t)} + B_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)})x(t) + G_{\sigma(t)}w(t) \quad (3.69)$$

$$\xi(t) = (C_{\sigma(t)} + D_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)})x(t) \quad (3.70)$$

com condições iniciais nulas. O teorema a seguir apresenta as condições para a estabilidade assintótica do sistema (3.66)-(3.67) de forma a assegurar um custo garantido de desempenho para o custo funcional definido em (3.43).

Teorema 3.7 *Para o sistema (3.66)-(3.67), se existirem conjuntos de matrizes simétricas definidas positivas $\{X_1, \dots, X_N\}$ e $\{W_1, \dots, W_N\}$, $\Pi \in \mathcal{M}$, matrizes $Z_{ji} \forall j \neq i \in \mathbb{N}$ e um conjunto de matrizes $\{L_1, \dots, L_N\}$, tais que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_i + \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} Z_{ji} & X_i C_i' + L_i' D_i' \\ \bullet & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \mathbb{N} \quad (3.71)$$

em que $\mathcal{L}_i = A_i X_i + B_i L_i + X_i A_i' + L_i' B_i'$,

$$\begin{bmatrix} Z_{ji} + X_i & X_i \\ \bullet & X_j \end{bmatrix} > 0, \quad i \neq j \in \mathbb{N} \quad (3.72)$$

e

$$\begin{bmatrix} W_i & G_{\sigma(0)}' \\ \bullet & X_i \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbb{N} \quad (3.73)$$

então considerando $P_i = X_i^{-1}$, a lei de controle definida por (3.4) com (3.7) e $K_i = L_i X_i^{-1}$ fazem com que a origem seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, satisfazendo

$$\Theta(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{N}} \text{tr}(W_i) \quad (3.74)$$

Prova: Admitindo que as desigualdades (3.71) sejam válidas, levando em conta que $K_i = L_i X_i^{-1}$, aplicando o Complemento de Schur em (3.71) e, posteriormente, multiplicando ambos

os lados por $P_i = X_i^{-1}$, obtemos

$$P_i \mathcal{L}_i P_i + \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} P_i Z_{ji} P_i + (C_i + D_i K_i)' (C_i + D_i K_i) < 0 \quad (3.75)$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Adicionalmente, admitindo que as desigualdades (3.72) sejam válidas, aplicando o Complemento de Schur e, posteriormente, multiplicando ambos os lados por P_i , obtemos

$$P_i Z_{ji} P_i > P_j - P_i \quad (3.76)$$

Utilizando as desigualdades (3.75) e (3.76), lembrando que $\pi_{ji} \geq 0$ para todo $i \neq j \in \mathbb{N}$ e que $\sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ij} = -\pi_{ii}$, temos

$$P_i \mathcal{L}_i P_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j + (C_i + D_i K_i)' (C_i + D_i K_i) < 0 \quad (3.77)$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Note que as desigualdades (3.77), com $P_i \mathcal{L}_i P_i = (A_i + B_i K_i)' P_i + P_i (A_i + B_i K_i)$, representam a aplicação do Teorema 3.3 no sistema (3.69)-(3.70). Logo, o sistema (3.66)-(3.67) também satisfaz o Teorema 3.3 levando a $\Theta(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{N}} \text{tr}(G'_{\sigma(0)} P_i G_{\sigma(0)})$ que junto com (3.73) permite obter (3.74), o que prova o teorema proposto. \blacklozenge

Uma outra forma de obter as condições para a estabilidade do sistema (3.66)-(3.67) está descrita no teorema seguinte e consiste no cálculo dos ganhos $\{K_1, \dots, K_N\}$ através da solução de uma equação de Riccati. Tratamos o caso mais simples caracterizado pelo fato de assumirmos as condições de ortogonalidade $C'_i D_i = 0$ e $D'_i D_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.8 *Para o sistema (3.66)-(3.67) com $C'_i D_i = 0$ e $D'_i D_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, admita que exista um conjunto de matrizes simétricas definidas positivas $\{P_1, \dots, P_N\}$, $\Pi \in \mathcal{M}$ tais que as seguintes equações de Riccati sejam satisfeitas*

$$A'_i P_i + P_i A_i - P_i B_i (D'_i D_i)^{-1} B'_i P_i + C'_i C_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j = 0, \quad i \in \mathbb{N} \quad (3.78)$$

então, para os ganhos de realimentação que minimizam o custo funcional do sistema

$$K_i = -(D'_i D_i)^{-1} B'_i P_i, \quad i \in \mathbb{N} \quad (3.79)$$

a lei de controle definida por (3.4) e (3.7) faz com que a origem seja um ponto de equilíbrio

globalmente assintoticamente estável e

$$\Theta(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{N}} \text{tr}(G'_{\sigma(0)} P_i G_{\sigma(0)}) \quad (3.80)$$

Prova: Utilizando as condições do Teorema 3.3 em (3.69)-(3.70), obtemos

$$\mathcal{J}_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j + (C_i + D_i K_i)' (C_i + D_i K_i) < 0, \quad i \in \mathbb{N} \quad (3.81)$$

com $\mathcal{J}_i = (A_i + B_i K_i)' P_i + P_i (A_i + B_i K_i)$. Aplicando a propriedade distributiva em (3.81) e rearranjando os termos, obtemos

$$A'_i P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j + \Omega_i < 0, \quad i \in \mathbb{N} \quad (3.82)$$

em que $\Omega_i = K'_i B'_i P_i + P_i B_i K_i + (C_i + D_i K_i)' (C_i + D_i K_i)$. Levando em conta que $C'_i D_i = 0$ e que $D'_i D_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, pode-se fatorar Ω_i da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Omega_i = & (K'_i + P_i B_i (D'_i D_i)^{-1}) (D'_i D_i) (K_i + (D'_i D_i)^{-1} B'_i P_i) - \\ & - P_i B_i (D'_i D_i)^{-1} B'_i P_i + C'_i C_i \end{aligned} \quad (3.83)$$

Para que o custo do sistema seja mínimo, as matrizes Ω_i , $i \in \mathbb{N}$, devem ser as menores possíveis, o que é conseguido escolhendo-se os ganhos de acordo com (3.79) e convertendo em igualdades as desigualdades dadas em (3.82). Desta forma, obtemos as equações de Riccati (3.78).

Finalmente, a partir da aplicação do Teorema 3.3, $\Theta(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{N}} \text{tr}(G'_{\sigma(0)} P_i G_{\sigma(0)})$, o que prova o teorema proposto. \blacklozenge

Note que as desigualdades (3.71) apresentadas no Teorema 3.7 são muito complicadas de serem resolvidas devido à natureza não-convexa imposta pelo produto de variáveis. Da mesma forma, as equações de Riccati (3.78) também são difíceis de serem resolvidas tendo em vista o acoplamento das diversas variáveis P_j , $j \in \mathbb{N}$. No entanto, assim como foi feito nas seções anteriores, podemos utilizar condições mais conservadoras que permitam resolver o problema, utilizando LMIs e uma busca unidimensional ou, alternativamente, resolvendo-se as equações de Riccati e também uma busca unidimensional. Os teoremas seguintes apresentam estas versões mais conservadoras dos Teoremas 3.7 e 3.8, respectivamente.

Teorema 3.9 Para o sistema (3.66)-(3.67), se existirem conjuntos de matrizes simétricas definidas positivas $\{X_1, \dots, X_N\}$, $\{W_1, \dots, W_N\}$, um conjunto de matrizes $\{L_1, \dots, L_N\}$ e um escalar positivo γ satisfazendo as seguintes desigualdades modificadas de Lyapunov-Metzler

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_i - \gamma X_i & X_i C_i' + L_i' D_i' & \gamma X_i \\ \bullet & -I & 0 \\ \bullet & \bullet & -\gamma X_j \end{bmatrix} < 0, \quad i \neq j \in \mathbb{N} \quad (3.84)$$

em que $\mathcal{L}_i = A_i X_i + B_i L_i + X_i A_i' + L_i' B_i'$ e

$$\begin{bmatrix} W_i & G_{\sigma(0)}' \\ \bullet & X_i \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbb{N} \quad (3.85)$$

então considerando $P_i = X_i^{-1}$, a lei de controle (3.4) com (3.7) e $K_i = L_i X_i^{-1}$ fazem com que a origem seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, satisfazendo

$$\Theta(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{N}} \text{tr}(W_i) \quad (3.86)$$

Prova: Assumindo que as desigualdades (3.84) sejam satisfeitas, aplicando o Complemento de Schur duas vezes e multiplicando o resultado de ambos os lados por X_i^{-1} , com $P_i = X_i^{-1}$ e $K_i = L_i X_i^{-1}$, verificamos que o sistema (3.69)-(3.70) satisfaz o Teorema 3.4, levando a $\Theta(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{N}} \text{tr}(G_{\sigma(0)}' P_i G_{\sigma(0)})$, que junto com (3.85) permite obter (3.86), o que prova o teorema proposto. \blacklozenge

Note que o menor valor do custo garantido pode ser obtido da seguinte maneira

$$\Theta(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{N}} \inf_{\gamma > 0} \inf_{X_i, W_i, L_i \in \Delta(\gamma)} \text{tr}(W_i) \quad (3.87)$$

em que $\Delta(\gamma)$ é o conjunto de soluções factíveis de (3.84) e (3.85) para $\gamma > 0$ fixado. O próximo teorema apresenta a versão mais conservadora do Teorema 3.8.

Teorema 3.10 Para o sistema (3.66)-(3.67) com $C_i' D_i = 0$ e $D_i' D_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, admita que exista um conjunto de matrizes simétricas definidas positivas $\{P_1, \dots, P_N\}$ e um escalar positivo γ tais que as seguintes equações de Riccati sejam satisfeitas

$$A_i' P_i + P_i A_i - P_i B_i (D_i' D_i)^{-1} B_i' P_i + C_i' C_i + \gamma (P_j - P_i) = 0, \quad j \neq i \in \mathbb{N} \quad (3.88)$$

então, para os ganhos de realimentação que minimizam o custo funcional do sistema

$$K_i = -(D'_i D_i)^{-1} B'_i P_i, \quad i \in \mathbb{N} \quad (3.89)$$

a lei de controle (3.4) com a função (3.7) faz com que a origem seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, satisfazendo

$$\Theta(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{N}} \text{tr}(G'_{\sigma(0)} P_i G_{\sigma(0)}) \quad (3.90)$$

Prova: A demonstração deste teorema segue o mesmo procedimento adotado na prova do Teorema 3.2. Ou seja, considerando que $\pi_{ii} = -\gamma$ e levando em conta que $\pi_{ji} \geq 0$ para todo $i \neq j \in \mathbb{N}$, multiplicando (3.88) por π_{ji} , somando para todos os elementos $j \neq i \in \mathbb{N}$ e finalmente multiplicando por γ^{-1} , obtemos (3.78), o que prova o teorema proposto. \blacklozenge

Para o caso do cálculo de K_i , $i \in \mathbb{N}$, através das equações de Riccati, o custo garantido mínimo pode ser obtido, alternativamente, da seguinte forma

$$\Theta(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{N}} \inf_{\gamma > 0} \text{tr}(G'_{\sigma(0)} P_i G_{\sigma(0)}) \quad (3.91)$$

onde, para cada $\gamma > 0$ dado, as matrizes P_1, \dots, P_N são soluções das equações de Riccati (3.88).

Pelo mesmo motivo comentado nas seções anteriores, desejamos calcular um limitante inferior para o custo funcional do sistema de forma a estimar a distância entre o custo real e o custo garantido. Quanto maior a proximidade entre estes dois limitantes, mais próximo é o custo garantido do custo real. Neste caso, o cálculo de limitantes representa uma boa estratégia para a análise da qualidade do resultado obtido. Para sistemas com comutação e controle via realimentação de estado, o cálculo do limitante inferior pode ser feito utilizando diretamente as condições dos Teoremas 3.5 ou 3.6. Isto é, as matrizes A_q e C_q devem ser substituídas pelas matrizes $A_q + B_q K_q$ e $C_q + D_q K_q$, já que após a aplicação dos teoremas anteriores, os valores dos ganhos $\{K_1, \dots, K_N\}$ são parâmetros conhecidos. Note que para este caso, a dificuldade de síntese está concentrada na determinação de $\Theta(\sigma)$ e não na determinação dos ganhos de realimentação que definem o controle linear $u(t) = K_{\sigma(t)} x(t)$.

O exemplo a seguir ilustra os resultados apresentados nesta seção.

Exemplo 3.4 Este exemplo foi inspirado no exemplo do artigo [Xie & Wang, 2005]. Desejamos aplicar as condições apresentadas pelo Teorema 3.9 ao sistema (3.66)-(3.67) definido a

partir das matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

de tal forma a assegurar que a origem seja globalmente assintoticamente estável, bem como determinar limitantes inferior e superior (custo garantido) para o custo funcional (3.43). Note que cada subsistema isolado é instável e não controlável.

Utilizando $\gamma = 500$ o problema de otimização

$$\min_{i \in \mathbb{N}} \inf_{X_i, L_i, W_i \in \Delta(500)} \{\text{tr}(W_i) : (3.84) - (3.85)\} \quad (3.92)$$

foi resolvido considerando $\sigma(0) = 1$ e $\sigma(0) = 2$. A solução ótima correspondente a $\sigma(0) = 2$ é dada por

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.6232 & -0.0001 \\ -0.0001 & 14.1500 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.6308 & -0.0001 \\ -0.0001 & 13.6972 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.6232 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.0001 & -6.8486 \end{bmatrix}$$

Utilizando estas matrizes, a lei de controle (3.4) com (3.7) levou a origem do sistema para a estabilidade assintótica global assegurando um custo garantido de 14.3278. A Figura 3.10 apresenta as trajetórias dos estados $x(t) \in \mathbb{R}^2$.

Para os ganhos de realimentação calculados, aplicamos diretamente as condições do Teorema 3.6 e obtivemos um limitante inferior igual a 7.2892. Assim, as condições do Teorema 3.9 fizeram com que a origem seja globalmente assintoticamente estável com o custo $\Theta(\sigma)$ pertencente à faixa $7.2892 \leq \Theta(\sigma) \leq 14.3278$.

Aplicando as condições do Teorema 3.9 com os ganhos de realimentação nulos e deixando atuar apenas a regra de comutação $\sigma(t)$, notamos que não é possível fazer com que a origem seja globalmente assintoticamente estável. Portanto, este exemplo mostra a importância da

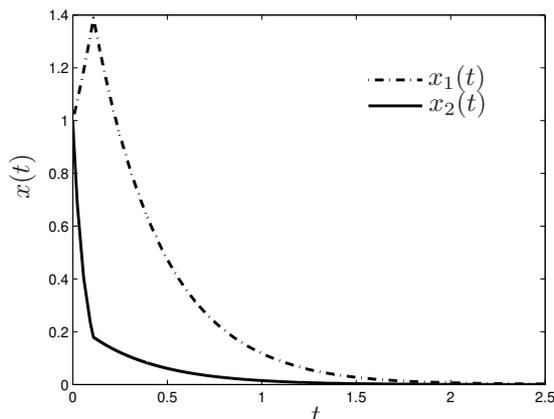


Figura 3.10: Estados do sistema (Exemplo 3.4).

síntese conjunta de ambas as variáveis de controle, $\sigma(t)$ e $u(t) = K_{\sigma(t)}x(t)$. ■

Como observado neste exemplo, para os casos em que as condições apresentadas nas seções anteriores não asseguram a estabilidade assintótica da origem, recomenda-se a utilização de uma entrada de controle adicional $u(t) = K_{\sigma(t)}x(t)$. Observe, entretanto, que todas as variáveis de estado devem ser conhecidas para cada $t \geq 0$.

3.4 Considerações Finais

Neste capítulo, foram apresentadas condições suficientes para o estudo da estabilidade de sistemas com comutação, contínuos no tempo, de forma a assegurar um custo garantido de desempenho. Estas condições dependem da solução de um conjunto de desigualdades de Lyapunov-Metzler, definidas em [Geromel & Colaneri, 2006], que possuem natureza não-convexa e, portanto, são difíceis de serem resolvidas utilizando as ferramentas disponíveis na literatura. Para contornar este problema, foram propostas condições mais conservadoras, baseadas em uma subclasse de matrizes de Metzler com elementos iguais na diagonal principal.

Na primeira seção, como introdução ao estudo do tema, foram reproduzidos alguns dos resultados de [Geromel & Colaneri, 2006]. A função de Lyapunov escolhida e a regra de comutação utilizada nesta dissertação foram aqui exibidas. Determinamos condições suficientes para o estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos com comutação, baseadas na mini-

mização de um limitante superior para o custo funcional, definido em [Geromel & Colaneri, 2006] e aqui rerepresentado. Vale ressaltar que as condições obtidas garantem a estabilidade inclusive na presença de modos deslizantes e não exigem que nenhuma das matrizes do conjunto $\{A_1, \dots, A_N\}$ seja assintoticamente estável. Nesta seção, também foram determinadas condições suficientes para a estabilidade utilizando a função de Lyapunov (3.18), comumente utilizada na literatura. Foi colocado em evidência que utilizando esta função, não é possível garantir a estabilidade em caso de modos deslizantes. Estes aspectos foram ilustrados através de exemplos.

A segunda seção apresentou condições para o estudo de sistemas dinâmicos sujeitos a perturbações impulsivas, sendo que um novo critério de desempenho, denotado por $\Theta(\sigma)$, foi definido. Vale ressaltar que na ausência de comutação, o custo funcional $\Theta(\sigma)$ é igual à norma \mathcal{H}_2 do sistema dinâmico em consideração. Para analisar a qualidade do resultado obtido, devido a dificuldade de calcular a regra de comutação ótima, foram propostas condições para a determinação de um limitante inferior para o critério a ser minimizado. Assim, quanto menor a folga entre os limitantes, menor é a distância entre o custo garantido e $\Theta(\sigma)$, indicando melhor qualidade do resultado obtido.

Por último, a terceira seção apresentou o estudo de sistemas lineares com comutação e sujeitos a perturbações impulsivas. Para estes sistemas, existem duas variáveis de controle, a saber, a regra de comutação $\sigma(t)$ e a entrada $u(t) = K_{\sigma(t)}x(t)$. Foram apresentadas duas maneiras alternativas de obter as condições de estabilidade para estes sistemas, a saber, calculando os ganhos K_i , $i \in \mathbb{N}$, utilizando programação convexa, ou obtendo-os através da solução de um conjunto de equações de Riccati acopladas. Para estes sistemas a utilização de duas variáveis de controle pode melhorar o desempenho, ou permitir que sistemas que não são estabilizáveis utilizando apenas um dos controles individualmente, possam tornar-se estabilizáveis pela interação de ambas as variáveis. O exemplo apresentado nesta seção ilustrou o caso de um sistema onde a regra de comutação determinada isoladamente e atuando sem a entrada de controle $u(t)$ não foi suficiente para garantir a estabilidade assintótica do mesmo.

Capítulo 4

Controle \mathcal{H}_2 multi-objetivo

Neste capítulo, desejamos utilizar a potencialidade oferecida pela teoria de sistemas com comutação, apresentada no capítulo anterior, para resolver problemas de controle \mathcal{H}_2 multi-objetivo. Primeiramente, apresentamos alguns métodos disponíveis na literatura para a solução destes problemas, como por exemplo, o método de [Khargonekar & Rotea, 1991] e de [Eker & Malmberg, 1999]. Em seguida, descrevemos o problema no contexto de sistemas com comutação e apresentamos a nossa proposta de solução. O método proposto é comparado com os métodos de [Khargonekar & Rotea, 1991] e de [Eker & Malmberg, 1999]. A teoria é ilustrada através de um exemplo que consiste no projeto de uma regra de comutação e de ganhos de realimentação para o controle de um triplo integrador com dois critérios conflitantes. Os resultados aqui obtidos foram submetidos para a publicação em [Deaecto & Geromel, 2007].

4.1 Definição do Problema

Considere o sistema linear invariante no tempo \mathcal{G} com múltiplas entradas e múltiplas saídas apresentado na Figura 4.1 e descrito pelas seguintes equações no espaço de estados

$$\dot{x} = Ax + Hw + Bu \quad (4.1)$$

$$z = Cx + Du \quad (4.2)$$

$$y = Ex + Gw \quad (4.3)$$

com condições iniciais nulas. Os vetores x , u , w , z e y representam o estado, a entrada de controle, a entrada externa, a saída controlada e a saída medida, respectivamente. As matrizes H , C e D são particionadas de acordo com a partição do vetor de entrada $w' =$

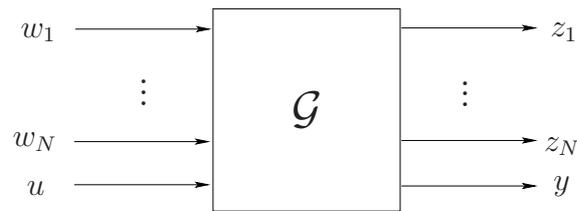


Figura 4.1: Estrutura do sistema multi-objetivo.

$[w'_1 \cdots w'_N]$ e do vetor de saída $z' = [z'_1 \cdots z'_N]$ da seguinte forma

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & \cdots & H_N \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

e

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_N \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

A saída medida y é conectada à entrada de controle u através de uma função de transferência $K(s)$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ existe uma função de transferência $T_i(s)$ da entrada w_i para a saída z_i . O problema \mathcal{H}_2 multi-objetivo consiste na determinação de uma única função de transferência $K(s)$ de forma a estabilizar o sistema em malha fechada e minimizar o vetor $J(K)$

$$J(K) = \begin{bmatrix} \|T_1\|_2^2 & \cdots & \|T_N\|_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Esta minimização não é fácil, uma vez que, geralmente, a minimização dos critérios $\|T_i\|_2^2$, para $i \in \mathbb{N}$, apresenta objetivos conflitantes, ou seja, a função de transferência $K(s)$ que minimiza cada um deles não é a mesma. A solução deste problema foi estudada por vários autores, veja [Khargonekar & Rotea, 1991] e suas referências. A estratégia utilizada por [Khargonekar & Rotea, 1991] é a parametrização de Youla que permite expressar as quantidades $\|T_i\|_2^2$ como funções afins de uma variável $Q \in RH_\infty$. Graças à convexidade de $\|T_i(Q)\|_2^2$ com relação a $Q \in RH_\infty$, o conjunto de todas as soluções ótimas de Pareto é obtido a partir do seguinte problema de otimização escalar

$$\inf_{Q \in RH_\infty} \sum_{i=1}^N \lambda_i \|T_i(Q)\|_2^2 \quad (4.7)$$

sendo que $\lambda \in \mathbb{R}^N$ corresponde a um elemento arbitrário do conjunto convexo Λ definido em (3.3).

Interpretando a solução do problema no domínio do tempo, temos que para cada valor de $\lambda = \lambda^0 \in \Lambda$ dado, o problema (4.7) fornece uma das soluções ótimas de Pareto $Q^o \in RH_\infty$ e, por conseqüência, o controlador ótimo K^o , tal que a conexão $u = K^o * y$ estabiliza o sistema em malha fechada e minimiza a função objetivo escalar $\sum_{i=1}^N \lambda_i^o \|z_i\|_2^2$, sendo que z_i é a resposta ao impulso do i -ésimo canal com entrada w_i e saída z_i , para todo $i \in \mathbb{N}$. O vetor $\lambda^0 \in \Lambda$ é escolhido de forma a selecionar umas das soluções ótimas de Pareto.

A proposta deste capítulo é resolver o problema especificado acima em um contexto diferente do abordado por [Khargonekar & Rotea, 1991]. Mais especificamente, pretendemos escrever o problema sob o ponto de vista de sistemas com comutação e aplicar a teoria desenvolvida no capítulo anterior para resolvê-lo. Assim, supondo que o sistema (4.1)-(4.3) possui apenas uma entrada externa e múltiplas saídas, propomos uma entrada de controle $u(t) = K_{\sigma(t)} * y(t)$, em que $\sigma(t) \in \mathbb{N}$ é uma regra de comutação que seleciona a cada instante de tempo um controlador $K_{\sigma(t)} \in \mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_N\}$. Diferente do método de [Khargonekar & Rotea, 1991], em que o vetor $\lambda \in \Lambda$ é invariante no tempo, para este caso, $\lambda(t) \in \mathcal{V}$ é variante no tempo, sendo que \mathcal{V} representa o conjunto de todos os vértices de Λ , e corresponde a uma variável de decisão a ser determinada de forma a minimizar a função objetivo $\sum_{i=1}^N \|\sqrt{\lambda_i} z_i\|_2^2$.

Para cada $t \geq 0$, associado ao vetor $\lambda(t)$, definimos a regra de comutação $\sigma(t) = i$, sempre que $\lambda_i(t) = i$ e $\lambda_j(t) = 0$, para todo $i \neq j \in \mathbb{N}$, e a nova saída controlada $\xi = C_\sigma x + D_\sigma u$. Uma vez que a igualdade $\sum_{j=1}^N \|\sqrt{\lambda_j(t)} z_j(t)\|_2^2 = \|\xi(t)\|_2^2$ é satisfeita, o problema multi-objetivo pode ser redefinido como

$$\min_{(\sigma, u) \in \mathcal{Y}} \|\xi\|_2^2 \quad (4.8)$$

sendo que \mathcal{Y} denota o conjunto de todas as informações disponíveis para a realimentação. O problema (4.8) não é simples de ser resolvido devido à natureza variante no tempo da regra de comutação $\sigma(t)$. Assim, em [Eker & Malmborg, 1999] foi proposta uma estratégia para resolver (4.8) composta de duas etapas. A primeira consiste em encontrar o valor de K_i para cada $\sigma(t) = i$ fixo em $t \geq 0$, isto é

$$K_i = \arg \min_{(\sigma, u) \in \mathcal{Y}} \{ \|\xi\|_2^2 : \sigma = i \} , \forall i \in \mathbb{N} \quad (4.9)$$

Note que o ganho K_i , para cada $i \in \mathbb{N}$, é obtido da solução do problema clássico de controle em norma \mathcal{H}_2 que também fornece a função custo $\nu_i(x)$. A segunda etapa consiste na determinação da regra de comutação

$$\sigma(t) = \arg \min_{i \in \mathbb{N}} \nu_i(x(t)) \quad (4.10)$$

utilizando a função custo $\nu_i(x)$ obtida da solução da primeira etapa. Note que a proposta de [Eker & Malmberg, 1999] simplifica consideravelmente o problema de controle (4.8).

Nossa estratégia consiste na substituição do problema de otimização (4.8), pela minimização de um limitante superior adequado para $\|\xi\|_2^2$, denotado $J(\sigma, u)$ para todo $(\sigma, u) \in \mathcal{Y}$, levando a um problema de controle mais simples de ser resolvido

$$J^o = \min_{(\sigma, u) \in \mathcal{Y}} J(\sigma, u) \quad (4.11)$$

Do que foi discutido no capítulo anterior, temos que o custo garantido $J(\sigma, u)$ deve verificar a igualdade $J(\sigma, u) = \|\xi\|_2^2$, sempre que $\sigma(t) = i \forall t \geq 0$. Em outras palavras, se não houver comutação, o custo garantido $J(\sigma, u)$ é igual à norma \mathcal{H}_2 do sistema.

O objetivo é definir um custo funcional garantido adequado $J(\sigma, u)$ de forma que o problema (4.11) seja expresso em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs) e uma busca unidimensional. Além disso, vamos mostrar que a solução sub-ótima de (4.11) é melhor que a solução obtida utilizando as duas etapas propostas por [Eker & Malmberg, 1999].

No presente contexto, as variáveis de decisão são a função de transferência de cada controlador e a regra de comutação expressa por $\sigma(t)$, ou equivalentemente, pelo vetor variante no tempo $\lambda(t) \in \mathcal{V}$ que, para cada $t \geq 0$, tem que ser definido pelas informações disponíveis no vetor de estado $x(t)$. Comparando com o problema de controle \mathcal{H}_2 multi-objetivo clássico, o número de variáveis de decisão é maior e, conseqüentemente, uma melhoria no desempenho do sistema é esperada. Mais especificamente, será mostrado teoricamente e ilustrado através de um exemplo simples que é possível determinar uma regra de comutação $\sigma(t)$ e um conjunto de controladores $\mathcal{K}^0 = \{K_1, \dots, K_N\}$ tal que o custo garantido para o sistema em malha fechada J^0 satisfaça

$$J^0 \leq \inf_{Q \in RH_\infty} \sum_{i=1}^N \lambda_i \|T_i(Q)\|_2^2, \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad (4.12)$$

A desigualdade (4.12) indica que a proposta aqui apresentada para a solução de problemas de controle \mathcal{H}_2 multi-objetivo é melhor que qualquer solução ótima de Pareto.

4.2 Solução do Problema Multi-Objetivo

O objetivo desta seção consiste em apresentar alguns dos resultados do capítulo anterior, uma vez que os mesmos correspondem à base para a metodologia deste capítulo, e exibir a nossa proposta para a solução do problema de controle \mathcal{H}_2 multi-objetivo. Considere o

sistema (4.1)-(4.3) e admita que todos os estados estão disponíveis para a realimentação, o que implica em $E_i = I_n$, em que n é a ordem do sistema, e $G_i = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$

$$\dot{x} = (A + BK_\sigma)x + Hw \quad (4.13)$$

$$\xi = (C_\sigma + D_\sigma K_\sigma)x \quad (4.14)$$

com condições iniciais nulas. Para cada $\theta = 1, \dots, m$, uma entrada externa da forma $w(t) = e_\theta \delta(t)$, em que e_θ é a θ -ésima coluna da matriz identidade, é aplicada e uma correspondente saída controlada ξ^θ é fornecida segundo uma política $\sigma(x)$ considerada.

Note que este sistema é bastante parecido com o sistema (3.69)-(3.70) apresentado na seção anterior, para o qual foi definido o custo funcional $\Theta(\sigma) = \sum_{\theta=1}^m \|\xi^\theta\|_2^2$. Como já foi discutido, este custo é bastante difícil de ser expresso analiticamente. Devido a semelhança, entre os sistemas (4.13)-(4.14) e (3.69)-(3.70), podemos utilizar as condições do Teorema 3.9 para estudar a estabilidade de (4.13)-(4.14). Assim, de acordo com o resultado daquele teorema, se existirem conjuntos de matrizes simétricas definidas positivas $\{X_1, \dots, X_N\}$, $\{W_1, \dots, W_N\}$, um conjunto de matrizes $\{L_1, \dots, L_N\}$ e um escalar positivo γ solução das desigualdades modificadas de Lyapunov-Metzler

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_i - \gamma X_i & X_i C'_i + L'_i D'_i & \gamma X_i \\ \bullet & -I & 0 \\ \bullet & \bullet & -\gamma X_j \end{bmatrix} < 0, \quad i \neq j \in \mathbb{N} \quad (4.15)$$

em que $\mathcal{L}_i = A_i X_i + B_i L_i + X_i A'_i + L'_i B'_i$ e

$$\begin{bmatrix} W_i & H' \\ \bullet & X_i \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbb{N} \quad (4.16)$$

então, considerando $P_i = X_i^{-1}$, a regra de comutação $\sigma(t) = \arg \min_{i \in \mathbb{N}} x' P_i x$ e os ganhos $K_i = L_i X_i^{-1}$ fazem com que a origem do sistema seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e

$$\Theta(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{N}} \text{tr}(W_i) \quad (4.17)$$

Levando em conta que γ é um escalar, a determinação numérica da solução acima pode ser obtida utilizando LMIs e uma busca unidimensional, sendo possível definir o custo garantido associado à política $\sigma(t)$, da seguinte forma

$$\Theta(\sigma) \leq J^\circ = \min_{i \in \mathbb{N}} \inf_{\gamma > 0} \inf_{X_i, W_i, L_i \in \Delta(\gamma)} \text{tr}(W_i) \quad (4.18)$$

onde $\Delta(\gamma)$ denota o conjunto de todas as triplas (X_i, W_i, L_i) , $i \in \mathbb{N}$, satisfazendo as desigualdades (4.15) e (4.16) para $\gamma > 0$ fixado. Note que J^0 é um custo garantido válido, uma vez que $\Theta(\sigma) < J^0$.

O teorema a seguir mostra que a estratégia proposta nesta dissertação é melhor que as apresentadas em [Khargonekar & Rotea, 1991] e [Eker & Malmberg, 1999] disponíveis na literatura.

Teorema 4.1 *As seguintes afirmações são verdadeiras*

- a) *A solução do problema multi-objetivo através da obtenção de J^0 oferece resultados melhores que os obtidos em [Eker & Malmberg, 1999];*
- b) *A solução do problema multi-objetivo através da obtenção de J^0 é melhor que qualquer solução de Pareto fornecida por [Khargonekar & Rotea, 1991].*

Prova: Para $\gamma > 0$ arbitrariamente pequeno, as restrições (4.15) são desacopladas e temos

$$J^0 \leq \min_{i \in \mathbb{N}} \inf_{P_i > 0, K_i} \text{Tr}(H' P_i H) \quad (4.19)$$

em que $P_i > 0$ e K_i são tais que

$$A'_{ki} P_i + P_i A_{ki} + C'_{ki} C_{ki} < 0 \quad (4.20)$$

onde $A_{ki} = A + B K_i$ e $C_{ki} = C_i + D_i K_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, de (4.19) obtemos

$$J^0 \leq \min_{i \in \mathbb{N}} \inf_{K_i} \|C_{ki}(sI - A_{ki})^{-1} H\|_2^2 \quad (4.21)$$

o que prova o item a), uma vez que a solução de (4.21) em função de K_i satisfaz (4.9) e $\nu_i(x) = x' P_i x$. Para provar o item b) considere K um ganho estabilizante qualquer e introduza no problema (4.18) as restrições adicionais $K X_i = L_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Para γ positivo arbitrariamente pequeno, (4.19) e (4.20) são válidas para $K = K_1 = \dots = K_N$ e, conseqüentemente, de (4.21), temos

$$J^0 \leq \inf_K \sum_{i=1}^N \lambda_i \|C_{ki}(sI - A_{ki})^{-1} H\|_2^2 \quad (4.22)$$

para todo $\lambda \in \Lambda$ provando o Teorema 4.1. ◆

É importante notar que os métodos propostos em [Khargonekar & Rotea, 1991] e [Eker &

Malmborg, 1999] são comparados ao deste artigo considerando o parâmetro γ arbitrariamente pequeno no Teorema 3.9. Logo, é de se esperar que com um grau de liberdade adicional, introduzido pelo parâmetro γ , o desempenho do sistema seja superior ao obtido utilizando os métodos de [Khargonekar & Rotea, 1991] e [Eker & Malmborg, 1999]. O exemplo a seguir ilustra os aspectos teóricos discutidos nesta seção.

Exemplo 4.1 Este exemplo foi extraído de [Geromel et al., 2007]. Considere o sistema (4.13)-(4.14), com $H = I_3$ e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Este sistema representa um triplo integrador com dois critérios conflitantes. Desejamos resolver o problema \mathcal{H}_2 multi-objetivo utilizando cada um dos métodos de síntese discutidos anteriormente, comparando-os em seguida.

Através do método de [Khargonekar & Rotea, 1991] obtivemos o conjunto de todas as soluções ótimas de Pareto que estão apresentadas no gráfico da Figura 4.2. Verificamos que estas soluções têm custos entre 51.33 para $\lambda = [1 \ 0]'$ e 139.49 para $\lambda = [0.4 \ 0.6]'$, sendo que a segunda solução fornece a matriz de ganho ótimo correspondente ao pior caso e, pode ser obtida resolvendo-se o seguinte problema

$$\max_{\lambda \in \Lambda} \inf_K \sum_{i=1}^N \lambda_i \|T_i(K)\|_2^2 \quad (4.23)$$

Para a utilização do método de [Eker & Malmborg, 1999], verificamos que a solução ótima para o primeiro critério apresentou um custo igual a 51.33, enquanto que o custo mínimo para o segundo critério foi de 95.40. Assim, o método de [Eker & Malmborg, 1999] fornece uma regra de controle $\sigma(t)$ com um custo garantido igual a 51.33. Note que utilizando ambos os métodos, é possível garantir um custo mínimo de 51.33.

A Tabela 4.1 apresenta o valor dos custos garantidos J_γ^0 , bem como dos limitantes inferi-

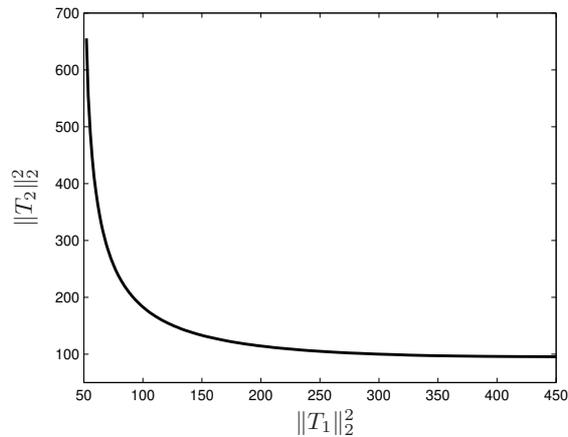


Figura 4.2: Soluções de Pareto (Exemplo 4.1).

ores J_{inf} de $\Theta(\sigma)$, obtidos a partir da utilização do método proposto nesta dissertação para vários valores de γ .

γ	J_{γ}^0	J_{inf}
10^{-5}	51.33	16.86
10^{-1}	56.39	14.56
1	57.70	15.12
2	51.89	15.02
10	42.16	13.56

Tabela 4.1: Limitantes do custo $\Theta(\sigma)$.

Podemos notar que para γ muito pequeno, o custo garantido é praticamente igual ao do método de [Eker & Malmberg, 1999]. Para γ superior a 2.2 a regra de comutação proposta é sempre melhor, uma vez que os custos garantidos são sempre menores que os obtidos pelos métodos de [Khargonekar & Rotea, 1991] e de [Eker & Malmberg, 1999]. Isto indica que o grau de liberdade adicional, devido ao parâmetro γ resulta, de fato, em um sistema em malha fechada com melhor desempenho.

O problema (4.18) também foi resolvido para os mesmos valores de γ , mas com as restrições adicionais $K_i X_i = L_i$ para $i = 1, 2$, com K_i sendo igual ao ganho ótimo de cada critério isolado, ou seja

$$K_1 = \begin{bmatrix} -4.0000 & -6.7351 & -3.6702 \end{bmatrix}$$

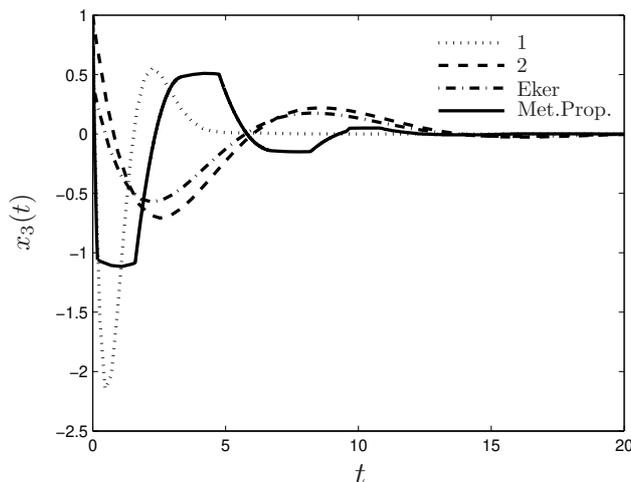


Figura 4.3: Simulação de $x_3(t)$ (Exemplo 4.1).

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.1250 & -0.5202 & -1.0200 \end{bmatrix}$$

Para este caso, obtivemos os valores apresentados na Tabela 4.2.

γ	J_γ	J_{inf}
10^{-5}	51.33	16.96
10^{-1}	58.87	17.09
1	92.26	17.07
2	93.37	17.00
10	89.91	16.97

Tabela 4.2: Limitantes do custo $\Theta(\sigma)$ utilizando restrições adicionais.

Como pode ser observado, o melhor resultado ocorre para $\gamma \approx 0$, sendo que para valores maiores de γ , os custos são piores que os obtidos pelos métodos anteriores indicando a importância de se projetar as duas variáveis de controle $K_{\sigma(t)}$ e $\sigma(t)$ conjuntamente.

A Figura 4.3 apresenta a trajetória da terceira variável de estado, $x_3(t)$ com condição inicial $x(0) = [1 \ 1 \ 1]'$. Os custos reais correspondentes são 102.16 e 194.31 para a solução ótima do primeiro e segundo critérios, respectivamente, 102.16 para o método de [Eker & Malmberg, 1999] e $\Theta(\sigma) = 57.25$ para a solução de (4.18) com $H = I_3$ e $\gamma = 10$. A solução

de (4.18) ofereceu como resultado as seguintes matrizes

$$P_1 = \begin{bmatrix} 16.9180 & 11.8374 & 4.0686 \\ 11.8374 & 19.1895 & 8.1105 \\ 4.0686 & 8.1105 & 6.0482 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 16.9733 & 13.4454 & 5.3457 \\ 13.4454 & 21.8000 & 10.6901 \\ 5.3457 & 10.6901 & 8.0841 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -4.0688 & -8.1113 & -6.0486 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.0835 & -0.1670 & -0.1263 \end{bmatrix}$$

Se o problema fosse resolvido com $\gamma = 10$ e $H = [1 \ 1 \ 1]'$, obteríamos um custo garantido de 90.19 que também é melhor que o obtido pelos métodos anteriores. A solução do problema (4.18) para este novo caso é a seguinte

$$P_1 = \begin{bmatrix} 16.9179 & 11.8373 & 4.0686 \\ 11.8373 & 19.1894 & 8.1105 \\ 4.0686 & 8.1105 & 6.0481 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 16.9733 & 13.4454 & 5.3456 \\ 13.4454 & 21.8000 & 10.6900 \\ 5.3456 & 10.6900 & 8.0841 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -4.0686 & -8.1105 & -6.0482 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.0835 & -0.1670 & -0.1263 \end{bmatrix}$$

O limitante inferior de $\Theta(\sigma)$ é igual a 40.16. Utilizando um método numérico de simulação, obtivemos $\Theta(\sigma) = 57.25$. Logo $40.16 \leq \Theta(\sigma) \leq 90.19$ mostra que, de fato, a utilização de limitantes representa um bom critério para análise do resultado obtido.

Vale ressaltar que os valores de J_γ^0 e J_γ calculados para $\gamma = 10^{-5}$ confirmam o resultado do Teorema 4.1. Na verdade, eles são ligeiramente maiores que 51.33, pois o problema (4.18) é resolvido por um método de pontos interiores que fornece uma solução factível próxima da solução ótima. ■

4.3 Considerações Finais

Neste capítulo, aplicamos a teoria desenvolvida no capítulo anterior para a solução de problemas de controle \mathcal{H}_2 multi-objetivo. Primeiramente, foram apresentados dois métodos comumente utilizados na literatura para a solução destes problemas, a saber, o método de [Khargonekar & Rotea, 1991] e o método de [Eker & Malmberg, 1999]. Em seguida, descrevemos o problema multi-objetivo sob o contexto de sistemas com comutação e apresentamos a nossa proposta de solução.

Esta proposta consiste na obtenção de condições para que a regra de comutação $\sigma(t) = \arg \min_{i \in \mathbb{N}} x' P_i x$ estabilize a origem do sistema realimentado, assegurando um custo garantido de desempenho. Foi mostrado teoricamente e ilustrado através de um exemplo, que a proposta apresentada é melhor que as duas selecionadas da literatura.

O exemplo ilustrativo, apresentado neste capítulo, consiste no controle de um triplo integrador com dois critérios conflitantes. De acordo com os resultados obtidos, o método proposto se apresentou melhor do que os métodos de [Khargonekar & Rotea, 1991] e [Eker & Malmberg, 1999] disponíveis na literatura. Além disso, para evidenciar a importância da atuação conjunta das duas variáveis de controle, a saber, a regra de comutação $\sigma(t)$ e os ganhos de realimentação $\{K_1, \dots, K_N\}$, resolvemos o problema (4.18), com restrições adicionais $K_i X_i = L_i$, em que K_i é o ganho ótimo do i -ésimo critério isolado. Os resultados encontrados foram piores que os apresentados pelos demais métodos e, portanto, a melhoria do desempenho do sistema multi-objetivo só foi conseguida graças à interação conjunta de ambas as variáveis de controle.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, determinamos as condições para a estabilidade de sistemas lineares com comutação sujeitos a perturbações impulsivas. Para estes sistemas, definimos um custo funcional que é bastante difícil de ser expresso analiticamente devido à presença de comutações que ocorrem em instantes de tempo não definidos a priori. Portanto, para fins de otimização, as condições de estabilidade foram obtidas minimizando-se um limitante superior para o custo citado.

A abordagem utilizada é o controle através de uma regra de comutação $\sigma(t)$ dependente dos estados. Como foi observado, as condições para a estabilidade destes sistemas dependem da solução de um conjunto de desigualdades de Lyapunov-Metzler que possuem natureza não-convexa e, portanto, são difíceis de serem resolvidas utilizando as ferramentas disponíveis na literatura para a solução de LMIs. No entanto, propomos um método alternativo baseado nos resultados apresentados em [Geromel & Colaneri, 2006], que substitui a solução de desigualdades não-convexas, por uma busca unidimensional e a solução de um conjunto de LMIs.

O método proposto faz com que a origem do sistema global seja globalmente assintoticamente estável, sem exigir que cada subsistema isolado seja estável ou mesmo estabilizável e garante a estabilidade em malha fechada, mesmo diante da possível ocorrência de modos deslizantes.

Um ponto interessante deste trabalho é o desenvolvimento de condições para o cálculo de limitantes inferiores para o custo funcional do sistema. Utilizando limitantes superiores e inferiores é possível concluir, com certa precisão, sobre a qualidade do resultado obtido, já que agora tem-se uma noção da folga existente entre o custo garantido e o custo real do sistema.

A teoria desenvolvida foi utilizada na solução de problemas de controle \mathcal{H}_2 multi-objetivo

e os resultados obtidos apresentaram-se melhores que aqueles selecionados da literatura para comparação. A superioridade do método proposto em relação aos métodos de [Khargonekar & Rotea, 1991] e [Eker & Malmberg, 1999], foi comprovada e ilustrada através da solução de um exemplo que visa o controle de um triplo integrador. Estes resultados constam do seguinte artigo científico [Geromel et al., 2007]

- J. C. Geromel, G. S. Deaecto and P. Colaneri, “Multiobjective \mathcal{H}_2 Control via Switched Linear Systems”, 3rd IFAC Symposium on Systems, Structure and Control, Foz do Iguaçu, Brazil, 2007.

a ser apresentado no referido congresso internacional.

Um tópico interessante para pesquisas futuras do ponto de vista prático e teórico consiste na obtenção de resultados similares para sistemas com comutação e realimentação de saída. Neste caso, o objetivo é determinar um conjunto de controladores dinâmicos e uma lei de comutação que sejam capazes de assegurar a estabilidade assintótica global da origem. A dificuldade central a ser superada é que, não sendo o estado $x(t)$ disponível, as regras de comutação anteriormente apresentadas não podem ser adotadas. Uma primeira abordagem deste problema foi feita em [Geromel et al., 2006]. Um outro tópico que pode ser abordado com os resultados preliminares desta dissertação é o controle LPV de sistemas dinâmicos sujeitos a incertezas paramétricas variantes no tempo.

Referências Bibliográficas

- A. Bacciotti. Stabilization by means of state space depending switching rules. *Systems and control letters*, 53: 195–201, 2004.
- R. W. Brockett. Hybrid models for motion control systems. In H. Trentelman and J. C. Willems, editors, *Essays on control: Perspectives in the Theory and Its Applications*, pages 29–53. Birkhäuser, Boston, 1993.
- Roger W. Brockett. Asymptotic stability and feedback stabilization. In R. W. Brockett, R. S. Millman and H. J. Sussmann, editors, *Differential Geometric Control Theory*, pages 181–191. Birkhäuser, Boston, 1983.
- M. C. de Oliveira. *Controle de Sistemas Lineares Baseado nas Desigualdades Matriciais Lineares*. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, 1999.
- G. S. Deaecto & J. C. Geromel. Controle de sistemas lineares chaveados contínuos no tempo e aplicação em problemas de controle \mathcal{H}_2 multi-objetivo. *Automação & Controle*. Submetido, 2007.
- R. A. DeCarlo, M. S. Branicky, S. Pettersson & B. Lennartson. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, 88: 1069–1082, 2000.
- J. Eker & J. Malmberg. Design and implementation of a hybrid control strategy. *IEEE Control Systems Magazine*, 19: 12–21, 1999.
- G. F. Franklin, J. D. Powell & A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, 3rd edition, Boston, 1993.
- K. M. Garg. *Theory of Differentiation: A Unified Theory of Differentiation Via New Derivate Theorems and New Derivatives*. Wiley-Interscience, 1998.

- J. C. Geromel & P. Colaneri. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45: 1915–1930, 2006.
- J. C. Geromel, P. Colaneri & P. Bolzern. Dynamic output feedback control of switched linear systems. Submetido, 2006.
- J. C. Geromel, G. S. Deaecto & P. Colaneri. Multiobjective \mathcal{H}_2 control via switched linear systems. *3rd IFAC Symposium on Systems, Structure and Control*, 2007. Aceito para publicação, 2007.
- J. P. Hespanha. Uniform stability of switched linear systems: extensions of LaSalle’s Invariance Principle. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 49: 470–482, 2004.
- J. P. Hespanha & A. S. Morse. Switching between stabilizing controllers. *Automatica*, 38: 1905–1917, 2002.
- J. P. Hespanha & A. S. Morse. Stabilization of nonholonomic integrators via logic-based switching. *Automatica*, 35: 385–393, 1999.
- H. Ishii, T. Basar & R. Tempo. Randomized algorithms for synthesis of switching rules of multimodal systems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 50: 754–767, 2005.
- P. P. Khargonekar & M. A. Rotea. Multiple objective optimal control of linear systems: the quadratic norm case. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 36: 14–24, 1991.
- S. R. Kulkarni & P. J. Ramadge. Model and controller selection policies based on output predictions errors. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 41: 1594–1604, 1996.
- L. S. Lasdon. *Optimization Theory for Large Systems*. Macmillan, New York, 1970.
- D. Liberzon. *Switching in Systems and Control*. Birkhäuser, Boston, 2003.
- D. Liberzon & A. S. Morse. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 19: 59–70, 1999.
- A. S. Morse. Supervisory control of families of linear set-point controllers - part1 : Exact matching. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 41: 1413–1431, 1996.
- K. S. Narendra & J. Balakrishnan. Adaptive control using multiple models. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 42: 171–187, 1997.

- J. J. E. Slotine & W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- W. Spinelli, P. Bolzern & Colaneri. Computation of lower bounds for the optimal quadratic cost of linear switched systems. *Proceedings of the 2006 American Control Conference*, page 6pp., 2006.
- M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. SIAM's Classics in Applied Mathematics, 2nd edition, Philadelphia, 2002.
- G. Xie & L. Wang. Periodical stabilization of switched linear systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 181: 176–187, 2005.