

23.10.93

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

SETOR TELEMÁTICA

Este exemplar corresponde a redação
final da tese defendida por Akebo Yamakami
e aprovada pela comissão julgadora em 04/03/85



CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DE SISTEMAS DINÂMICOS
INTERCONECTADOS: ESTABILIDADE E OTIMIZAÇÃO

Akebo Yamakami 

Orientador:
Prof. Dr. José Cláudio Geromel 

005/85

Tese apresentada à Faculdade de
Engenharia da Universidade Esta-
dual de Campinas - UNICAMP como
parte dos requisitos exigidos
para obtenção do título de
DOUTOR em Engenharia Elétrica.

FEVEREIRO 1985

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

A meus pais,

ã Sônia, Kátia, Elder e Marcelo

AGRADECIMENTOS

Ao concluirmos este trabalho, não podemos deixar de registrar aqui agradecimentos a todos aqueles que de alguma maneira participaram dele. Em especial agradecemos a:

- José C. Geromel, pelo assunto da tese, pela excelente orientação e pela paciência,
- Jura e Espanhol, pelos incentivos e pelas suas presenças nas horas difíceis,
- todos os amigos da UNICAMP, em especial os pertencentes aos setores Telemática e POS pelos incentivos e agradável convivência,
- Elza M. Cotegepe pelo dedicado trabalho de datilografia,
- Sidney M. da Cunha pelos excelentes desenhos.

RESUMO

Este trabalho estuda sistemas dinâmicos chamados interconectados sobre dois aspectos: controle descentralizado, ou seja, local que mantém o sistema global estável e otimização destes controles.

Em relação ao primeiro aspecto, são sugeridos metodologias simples para determinar controles descentralizados estáveis, tanto para sistemas contínuos como para discretos, considerando sistemas lineares e também não lineares. Para este último são sugeridos métodos para estimar domínios de estabilidade.

Quanto ao segundo aspecto, são abordados problemas de otimização de funções matriciais com restrições matriciais, estabelecendo condições de otimalidade e dualidade. São sugeridos métodos numéricos, tanto primais como duais e exemplo de aplicações são comentados.

Como ilustrações numéricas dos resultados obtidos, são analisados o problema de carga-frequência considerando modelo linearizado e o modelo não-linear e o problema de um sistema de pêndulos acoplados.

INDICE

INTRODUÇÃO GERAL	1
CAPÍTULO I : CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES SOBRE ESTABILIDADE E OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS	
I.1 - Introdução	6
I.2 - Definições	8
I.3 - Segundo Método de Lyapunov	10
I.4 - Princípio de Comparação	12
I.5 - Otimização com Restrições de Estru- tura	16
I.6 - Problema Lineares Quadráticos com Ho- rizonte Infinito	19
I.7 - PLQ - Método de Newton Aproximado ...	35
I.8 - Conclusões	41
CAPÍTULO II : ESTABILIZAÇÃO DESCENTRALIZADA DE SISTEMAS DI- NÂMICOS CONTÍNUOS	
II.1 - Introdução	43
II.2 - Considerações Preliminares	44
II.3 - Controle Descentralizado Estabilizan- te para Sistemas Lineares	46
II.4 - Observadores de Estado e a Proprieda- de de Separação	53
II.5 - Extensão aos Sistemas Dinâmicos Não- Lineares e Estimação do Domínio de Estabilidade	57
II.6 - Exemplos e Comparações	64
II.7 - Conclusões	76
CAPÍTULO III: ESTABILIZAÇÃO DESCENTRALIZADA DE SISTEMAS DI- NÂMICOS DISCRETOS	
III.1 - Introdução	79

III.2 - Controle Descentralizado Estabilizante Linear	80
III.3 - Observadores Descentralizados	90
III.4 - Extensão a Sistemas Não-Lineares	92
III.5 - Exemplo	95
III.6 - Conclusões	96

CAPÍTULO IV : OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES MATRICIAIS

IV.1 - Introdução	99
IV.2 - Fundamentos Matemáticos	100
IV.3 - Condições de Otimalidade	103
IV.4 - Dualidade	111
IV.5 - Métodos Numéricos	117
IV.6 - Aplicações	124
IV.7 - Conclusões	131

CAPÍTULO V : APLICAÇÕES

V.1 - Introdução	134
V.2 - Problema Carga-Frequência em Sistemas de Potência	135
V.3 - Aplicação Numérica	141
V.4 - Controle Descentralizado para um Sistema de Dois Pêndulos Acoplados	157
V.5 - Conclusões	160

CONCLUSÕES GERAIS	162
-------------------------	-----

BIBLIOGRAFIA	165
--------------------	-----

NOTAÇÕES

$A, B, C, \dots$	-	Matrizes
$a, b, c, \dots$	-	vetores
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	-	escalares
$\Omega, \Phi, \dots$	-	conjuntos
$A = \{a_{ij}\}$	-	matriz de elementos a_{ij}
$\text{Tr } (A)$	-	$= \sum_{i=1}^n a_{ii}$
$\langle A, B \rangle$	-	$= \text{Tr } (A'B) = \text{produto escalar}$
$\lambda_{\max} (A)$	-	auto-valor máximo de A
$\lambda_{\min} (A)$	-	auto-valor mínimo de A
$\Delta_k (L)$	-	menor de ordem k da matriz L
$A \geq 0$	-	matriz semi-definida positiva
$\Lambda(A)$	-	conjunto dos auto-valores da matriz A
C^-	-	conjunto de números complexos com parte real negativa
$\theta(P)^2$	-	"condition number" de $P = \ P\ \ P^{-1}\ = \lambda_{\max} (P) / \lambda_{\min} (P)$
R^n	-	espaço dos números reais de dimensão n
$R^{n \times m}$	-	espaço dos números reais de dimensão $n \times m$

INTRODUÇÃO GERAL

Neste trabalho abordamos o estudo de sistemas dinâmicos interconectados, constituídos por sub-sistemas interligados entre si através de uma estrutura bem definida. Neste estudo, são considerados dois aspectos referentes à determinação de controles para estes sistemas, considerando que estes devem estar sujeitas às restrições do tipo estruturais, devendo, no caso, serem descentralizados:

- Estabilização descentralizada, onde se procura determinar controles que utilizam apenas os estados locais, mas que garantam a estabilidade global do sistema.
- Otimização descentralizada, quando são feitas considerações sobre índices de desempenho do sistema, procurando controles ótimos descentralizados.

Evidentemente restringimos a nossa abordagem a uma classe de sistemas dinâmicos, uma vez que a abordagem global, além de ser altamente complexa, não fornece resultados de interesse do ponto de vista prático. A classe de sistemas dinâmicos que aqui tratamos no entanto, não é muito restritiva, uma vez que é largamente encontrada na literatura, tanto como exemplos de aplicações numéricas, como aplicações a problemas reais.

Propomos métodos para resolvermos os dois problemas acima citados, que permitam decomposições nos cálculos, de tal forma que somente os sub-sistemas isolados de relativamente pequenas dimensões são manipulados. Isto representa diminuição considerável no volume de cálculos necessários para a obtenção das soluções dos problemas propostos em relação às metodologias que manipulam o sistema global, normalmente de grande dimensão, além da considerável diminuição também, na necessidade de memórias para tratamento de dados em computadores.

Os aspectos acima apontados possibilitam processamentos de alta velocidade, quando aliados ao evento micro-processadores que podem ser acionados em paralelo.

Subdividimos o trabalho em cinco capítulos, onde, em cada um deles, são estudados com profundidade diferentes aspectos

tos do problema. No primeiro capítulo definimos o contexto do nosso trabalho, como também colocamos definições, teoremas e princípios que serão largamente utilizados nos capítulos subsequentes e que, portanto, facilitarão a compreensão destes últimos.

O capítulo II é dedicado ao estudo de sistemas dinâmicos invariantes no tempo e contínuos para os quais, após definirmos completamente, sugerimos metodologias para determinar controles descentralizados globalmente estabilizantes a partir de um teorema básico de estabilidade. São estabelecidas condições suficientes que os controles descentralizados devem satisfazer para garantir a estabilidade global, tanto para sistemas lineares como para sistemas não lineares, sendo que para este último é sugerido metodologias de estimação do domínio de estabilidade. Os resultados são estendidos a observadores de estado.

O capítulo seguinte é semelhante ao capítulo II no seu conteúdo, sendo que aqui são tratados sistemas dinâmicos invariantes no tempo discretos. Esta divisão entre sistemas contínuos e discretos em capítulos distintos foi feita em função de o comportamento dos dois serem sensivelmente diferentes, o segundo caso trazendo inovações bastante atraentes em relação ao primeiro.

No capítulo IV estudamos o segundo problema relacionado no início desta introdução: otimização descentralizada de funções matriciais. A introdução de índices de desempenho a ser otimizado no problema de estabilização descentralizada nos fornece problemas de otimização do tipo acima referido. Estes problemas são estudados neste capítulo e são estabelecidas as condições de otimalidade, como também os aspectos da dualidade são analisados. Além disso, são sugeridos métodos numéricos para resolver estes problemas, além de enumerarmos possíveis aplicações em controle.

Finalmente, para avaliarmos as propriedades numéricas dos métodos apresentados e para fazermos algumas comparações, consideramos o chamado "problema de regulação descentralizada carga-frequência" num sistema multi-áreas interligadas por linhas de interconexão, tanto com modelo linearizado como também com

modelo não linear clássicos. Como um segundo exemplo de aplicação, consideramos o problema de determinar controles descentralizados para um sistema de pêndulos interconectados.

CAPÍTULO I

CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES SOBRE ESTABILIDADE E OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS

I.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos definições, princípios e resultados de estudos encontrados na literatura sobre controle de sistemas dinâmicos, que serão utilizados nos capítulos subsequentes. A natureza dos sistemas que estudamos neste trabalho são do tipo interconectados, que consistem em diversos sub-sistemas interligados entre si através de uma estrutura de interconecção, que genericamente podem ser apresentados da seguinte maneira:

$$\begin{cases} S = \bigcup_{i=1}^N S_i(x_i, y_i, u_i, z_i) \\ z_i = H_i(x) \end{cases} \quad i=1 \dots N$$

onde S_i representa o i -ésimo sub-sistema, $x_i \in R^{n_i}$ a variável de estado de S_i , $y_i \in R^{r_i}$ a variável de saída de S_i , $u_i \in R^{m_i}$ a variável de controle e $z_i \in R^{n_i}$ representa a variável de interconecção com $H_i(\cdot): R^n \rightarrow R^{n_i}$ sendo operador linear ou não linear, estacionário, onde $\sum_{i=1}^N n_i = n$. O controle que procuramos deve satisfazer restrições ditas estruturais que têm como caso particular, o chamado controle descentralizado, significando dependerem somente das variáveis locais. Podemos escrever:

$$u_i = F_i(y_i) \quad , \quad i=1 \dots N$$

onde $F_i: R^{r_i} \rightarrow R^{m_i}$ é um operador linear.

Dois aspectos são considerados: estabilização descentralizada, onde a preocupação é determinar u_i tal que S seja estável e otimização descentralizada, quando procuramos um comportamento ótimo de S em relação a um critério de desempenho escolhido.

Em relação ao primeiro aspecto, muitos trabalhos foram publicados e, segundo Sandell e outros (1978), podem ser classificados em duas grandes linhas: análise via método de

Lyapunov e análise via "input-output". Os trabalhos pertencentes à primeira linha fazem uso das chamadas "funções vetoriais de Lyapunov" (Bellman, 1962) e podemos evidenciar a de Bailey (1966) como pioneiro e que deu origem a muitos outros tais como Siljak (1978), Araki (1978), Geromel (1979), Kaszkurewics e Hsu (1979), etc. Como pertencentes à segunda linha podemos citar os trabalhos de Lasley e Michel (1976), Araki (1976), Michel e Miller (1977), etc. Neste trabalho seguimos a primeira linha de análise e, assim sendo, nas seções seguintes apresentamos os conceitos básicos de estabilidade segundo Lyapunov de uma maneira sucinta.

Quanto ao segundo aspecto, o trabalho de Levine e Athans (1970) estabelece condições necessárias algébricas para controle ótimo de sistemas lineares invariantes no tempo, com respeito a critério quadrático e com restrição de que seja função linear invariante no tempo da saída.

Kosut (1970) considerou o problema de controle ótimo como de otimização de parâmetro, sugerindo metodologias heurísticas para obter soluções aproximadas e, recentemente Milani (1980) especializou o procedimento para sistemas interconectados com características de acoplamento fraco entre sub-sistemas, utilizando método de Newton aproximado. Geromel (1979) apresentou uma maneira de determinar gradiente de funções matriciais numa forma compacta e propôs a determinação de controles ótimos descentralizados utilizando projeção de gradientes matriciais. Abordamos neste trabalho problemas de otimização de funções matriciais com restrições matriciais, estabelecendo condições de otimalidade e sugerimos métodos numéricos de resolução. Nas seções que seguem apresentamos resumidamente aspectos de gradientes matriciais aplicados a problemas lineares-quadráticos (PLQ).

O capítulo aborda os dois assuntos acima referidos, inicialmente definindo os conceitos necessários para as seções seguintes. Os conteúdos das duas seções que seguem podem ser encontrados amplamente na literatura (Hahn, 1967; Castrucci e Curti, 1981; etc.).

I.2 DEFINIÇÕES

Restringimos a nossa abordagem ao caso de sistemas invariantes no tempo, descritos por:

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) \quad ; \quad x(0) = x_0 \quad , \quad t \geq 0 \quad (1)$$

para caso contínuo e, para o caso discreto:

$$x(t+1) = F(x(t)) \quad ; \quad x(0) = x_0 \quad ; \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

onde $F(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua satisfazendo as condições de Lipschitz (Kalman e Bertran, 1960) e $x \in \mathbb{R}^n$.

Definição 1: Chama-se ponto de equilíbrio do sistema dinâmico (1) ou (2), aos valores de x tais que $F(x) = 0$.

Definição 2: Definimos Norma Euclídiana de um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ como sendo $\|x\| = (x'x)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$. Assumimos também ao longo deste trabalho que a norma de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é dada por $\|A\| = \lambda_{\max}^{1/2}(A'A)$, onde $\lambda_{\max}(\cdot)$ denota o autovalor máximo de $(\cdot)$, a não ser que se especifique diferentemente.

Definição 3: Seja $\phi(x_0, t) \in \mathbb{R}^n$ solução única de (1) ou (2). O ponto de equilíbrio $x = 0$ é estável se, $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que:

$$\|x_0\| \leq \delta(\epsilon) \rightarrow \|\phi(x_0, t)\| \leq \epsilon \quad \forall t \geq 0 \quad (3)$$

Definição 4: O ponto de equilíbrio $x = 0$ de (1) ou (2) é assintoticamente estável se ele é estável e além disso satisfaz:

$$\|x_0\| \leq \delta(\epsilon) \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(x_0, t)\| = 0 \quad (4)$$

Definição 5: O ponto de equilíbrio $x = 0$ de (1) ou (2) é dito ser exponencialmente estável, se existe $\sigma > 0$ tal que $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|x_0\| \leq \delta(\epsilon) \rightarrow \|\phi(x_0, t)\| \leq \epsilon e^{-\sigma t} \quad \forall t \geq 0 \quad (5)$$

Exemplo: Seja o sistema (2) com $F(x(t)) = A x(t)$, com A sendo matriz real com autovalores distintos. Então, fazendo transformação de similaridade em A , ou seja, $A = T^{-1} \Lambda T$, obtemos:

$$\begin{aligned} \|\phi(x_0, t)\| &= \|A^t x_0\| \leq \theta^2(T) \|x_0\| \|A\|^t \\ &\leq \theta^2(T) \|x_0\| \left[\max_i |\lambda_i(A)| \right]^t \end{aligned}$$

onde $\theta^2(T) = \|T^{-1}\| \|T\|$. Definindo:

$$\delta(\epsilon) = \epsilon / \theta^2(T)$$

temos que:

- Se $\max |\lambda_i(A)| = 1$, então $x = 0$ é um ponto de equilíbrio estável de (2).
- Se $\max |\lambda_i(A)| < 1$, então $x = 0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (2).

Definição 6: Dada uma função escalar $v(x): R^n \rightarrow R$ contínua ela é dita ser definida positiva em uma vizinhança $\Omega \subseteq R^n$ da origem se ela é definida nesta vizinhança Ω , se $v(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega$ e se $v(x) = 0$ se e somente se $x = 0$.

Definição 7: $v(x)$ é dita semi-definida positiva numa vizinhança $\Omega \subseteq R^n$ da origem, se é definida nesta vizinhança Ω e $v(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$.

Definição 8: Uma função $V(x): R^n \rightarrow R^m$ é dita definida positiva (semi-definida positiva) numa vizinhança $\Omega \subseteq R^n$ da origem se $\forall \alpha \in R^m, \alpha_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$, a função escalar $v(x) = \alpha' V(x)$ é definida positiva (semi-definida positiva).

Definição 9: Uma função contínua $\psi: [0, \infty) \rightarrow R^+$ é dita de classe

k , e denotamos $\psi \in k$, se $\psi(0) = 0$ e é estritamente crescente no intervalo em que é definida.

1.3 SEGUNDO MÉTODO DE LYAPUNOV

A análise de estabilidade de sistemas dinâmicos via segundo método de Lyapunov tem recebido atenção muito significativa devido sua característica bastante geral e de não ser necessário resolver as equações diferenciais. O procedimento requer a escolha de uma função escalar $v(x): R^n \rightarrow R$ que é testada para as condições que indicam estabilidade. Cabe lembrar que este método fornece condições apenas suficientes, significando que a falha na procura de $v(x)$ não implica na sua inexistência.

A seguir, definimos as condições que $v(x)$ deve satisfazer para ser considerada uma função de Lyapunov e, a partir disso, apresentamos teoremas sobre condições para ocorrência de certos tipos de estabilidade (Hahn, 1967), inicialmente para caso contínuo:

Definição 10: $v(x): R^n \rightarrow R$ com $x \in R^n$ é considerada uma função de Lyapunov se satisfaz às seguintes propriedades:

$$a) \psi_1(\|x\|) \leq v(x) \leq \psi_2(\|x\|) \quad (6)$$

$$b) \dot{v}(x) \leq 0$$

onde $\psi_1 \in k$ e $\psi_2 \in k$.

Teorema 1: O sistema (1) tem ponto de equilíbrio $x = 0$ estável se existe uma função de Lyapunov associada ao sistema.

Teorema 2: O ponto de equilíbrio $x = 0$ de (1) é assintoticamente estável se existe uma função de Lyapunov associada ao sistema e que satisfaz

$$\dot{v}(x) \leq -\psi_3(\|x\|) \quad (7)$$

com $\psi_3 \in k$.

Teorema 3: Se existem três constantes positivas tais que

$$\begin{aligned} \text{a) } \mu_1 \|x\| &\leq v(x) \leq \mu_2 \|x\| \\ \text{b) } \dot{v}(x) &\leq -\mu_3 \|x\| \end{aligned} \quad (8)$$

então o ponto de equilíbrio $x = 0$ de (1) é exponencialmente estável.

As provas dos teoremas acima podem ser encontrados em Gerome (1979). Para o caso discreto, a definição 10 e os teoremas 1, 2 e 3 continuam válidas na mesma forma, substituindo $\dot{v}(x)$ por $\Delta v(x) = v(x(t+1)) - v(x(t))$ que representa a derivada temporal da função de Lyapunov, para sistemas contínuos dada por:

$$\dot{v}(x) = \nabla v(x)' \cdot F(x) \quad (9)$$

onde $\nabla v(x)$ representa gradiente de $v(x)$ e, para sistemas discretos:

$$\begin{aligned} \Delta v(x) &= v(x(t+1), t+1) - v(x(t), t) \\ &= v(F(x), t+1) - v(x(t), t) \end{aligned} \quad (10)$$

A principal dificuldade na aplicação deste método está na determinação da função de Lyapunov correta e a literatura é bastante extensa nessa área (Hahn, 1967; Castrucci e Curti, 1981). Uma preocupação que devemos considerar, quando tratamos sistemas não lineares é sobre a magnitude das perturbações possíveis nos seus estados sem que perca a estabilidade. Essa questão leva ao conceito de domínio de estabilidade (La Salle e Lefschetz, 1961):

Definição 11: Dado um sistema dinâmico do tipo (1) ou (2) e uma função $v(x): R^n \rightarrow R$ associada, define-se um domínio de estabilidade como a região dos pontos $x \in R^n$ tal que $v(x)$ satisfaz as con

dições de função de Lyapunov.

As definições e os teoremas acima permitem estabelecer o princípio de comparação, na seção seguinte.

1.4 PRINCÍPIO DE COMPARAÇÃO

Na análise de estabilidade de sistemas dinâmicos do tipo (1) ou (2), a idéia básica do princípio de comparação é construir um outro sistema dinâmico com as seguintes características:

- a) O estudo da estabilidade do sistema de comparação deve implicar no do sistema original.
- b) O estudo de estabilidade do sistema de comparação deve ser de natureza simples.
- c) O sistema de comparação deve conter a estrutura do sistema global.

Alguns autores (Bellman, 1962; Matrosov, 1962) propuseram considerar uma função vetorial de Lyapunov $V(x) = [v_1(x_1) \ v_2(x_2) \dots v_n(x_n)]'$ onde cada $v_i(x_i)$ é uma função de Lyapunov escalar associada a cada sub-sistema. O teorema de Matrosov estabelece o princípio de comparação e é uma generalização dos teoremas de Corduneanu e Wazewski (Siljak, 1978).

Teorema 4 (Teorema de Wazewski): Seja a desigualdade diferencial (das diferenças):

$$\dot{x}(t) \leq G(x(t)) \quad ; \quad x(0) = x_0 \quad (11)$$

$$\{x(t+1) \leq G(x(t)) \quad ; \quad x(0) = x_0\}$$

onde $G(\cdot): R^n \rightarrow R^n$ é uma função monotônica que satisfaz as condições de Lipschitz e seja também a equação diferencial (das diferenças):

$$\dot{y}(t) = G(y(t)) \quad , \quad y(0) = y_0 \quad (12)$$

$$(y(t+1) = G(y(t)) \quad , \quad y(0) = y_0)$$

Então, $x_0 \leq y_0$ implica $x(t) \leq y(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (t=0,1,2,\dots)$.

Teorema 5 (Teorema de Corduneanu): Seja $v(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida positiva tal que sua derivada temporal em relação a uma trajetória de (1) (ou (2)) satisfaz:

$$\dot{v}(x) \leq h(v(x)) \quad (\text{ou } \Delta v(x) \leq h(v(x))) \quad (13)$$

Seja um sistema dinâmico escalar chamado "sistema de comparação"

$$\dot{\omega} = h(\omega) \quad (\text{ou } \Delta \omega = h(\omega)) \quad (14)$$

para o qual supõe-se existência e unicidade da solução $v\omega(0) = \omega_0 \geq 0$ e vamos supor que $\omega = 0$ é um ponto de equilíbrio isolado de (14). Então:

- a) Se existe ψ_1 e $\psi_2 \in K$ tais que $\psi_1(\|x\|) \leq v(x) \leq \psi_2(\|x\|)$ e se (14) é estável, então o ponto de equilíbrio de (1) (ou (2)), é também estável.
- b) Se existe ψ_1 e $\psi_2 \in K$ tais que $\psi_1(\|x\|) \leq v(x) \leq \psi_2(\|x\|)$ e se (14) é assintoticamente estável, então o ponto de equilíbrio de (1) (ou (2)) também é assintoticamente estável.
- c) Se existe $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ tal que $\mu_1\|x\| \leq v(x) \leq \mu_2\|x\|$ e se (14) é exponencialmente estável, então o ponto de equilíbrio de (1) (ou (2)) é igualmente exponencialmente estável.

Teorema 6 (Teorema de Matrosov - Sistema de comparação linear): Seja o sistema (1) ou (2) onde $F(\cdot)$ é uma função não linear que pode ser escrito como:

$$(S_i) \begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_i) + g_i(x) & , i=1, \dots, N \\ \text{ou} \\ x_i(t+1) = f_i(x_i(t)) + g_i(x(t)) & , i=1, \dots, N \end{cases} \quad (15)$$

onde $g_i(x)$ é uma função aditivamente separável que satisfaz:

$$g_i(x) = \sum_{j \neq i} g_{ij}(x_j) \quad (16)$$

$$\|g_i(x)\| \leq \sum_{j \neq i} \|g_{ij}(x_j)\| \leq \sum_{j \neq i} \beta_{ij} \|x_j\|$$

onde β_{ij} é um número real não negativo. Seja o i -ésimo sub-sistema isolado:

$$(\tilde{S}_i) \begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_i) \\ \text{ou} \\ x_i(t+1) = f_i(x_i) \end{cases} \quad (17)$$

onde $f(\cdot): \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$ é uma função tal que $x_i = 0$ é um ponto de equilíbrio isolado. Associado a (17) definimos uma função de Lyapunov tal que:

$$\mu_{i1} \|x_i\| \leq v_i(x_i) \leq \mu_{i2} \|x_i\|$$

$$\dot{v}_i(\tilde{S}_i) \leq -\mu_{i3} \|x_i\| \text{ ou } \Delta v_i(\tilde{S}_i) \leq -\mu_{i3} \|x_i\| \quad (18)$$

$$\|\nabla v_i\| \leq \mu_{i4} \text{ ou } \|v_i(\tilde{x}_i) - v_i(x_i)\| \leq \mu_{i4} \|\tilde{x}_i - x_i\|$$

com $\mu_{ik} > 0$, $i=1, \dots, N$, $k=1, 2, 3, 4$.

Considerando a variação temporal de $v_i(x)$ sobre uma trajetória de (S_i) , temos:

$$\begin{aligned} \dot{v}_i(S_i) &= \dot{v}_i(\tilde{S}_i) + \nabla v_i \sum_{j \neq i} g_{ij}(x_j) \\ &\leq -\mu_{i3} \|x_i\| + \mu_{i4} \sum_{j \neq i} \beta_{ij} \|x_j\| \\ &\leq -\frac{\mu_{i3}}{\mu_{i2}} v_i(\tilde{S}_i) + \mu_{i4} \sum_{j \neq i} \frac{\beta_{ij}}{\mu_{j1}} v_j(\tilde{S}_j) \end{aligned} \quad (19)$$

Para o caso discreto temos:

$$\begin{aligned}\Delta v_i(S_i) &= v_i(f(x_i) + g_i(x), t+1) - v_i(x_i, t) \\ &= v_i(f_i(x_i) + g_i(x), t+1) - v_i(f_i(x_i), t+1) + \\ &\quad + v_i(f_i(x_i), t+1) - v_i(x_i, t)\end{aligned}\quad (20)$$

Lembrando (10), (16) e (18) temos:

$$\begin{aligned}\Delta v_i(S_i) &\leq \mu_{14} \sum_{j \neq i} \|g_{ij}(x_j)\| + \Delta v_i(\tilde{S}_i) \\ &\leq \mu_{14} \sum_{j \neq i} \beta_{ij} \|x_j\| - \mu_{13} \|x_i\| \\ &\leq -\frac{\mu_{13}}{\mu_{12}} v_i(\tilde{S}_i) + \mu_{14} \sum_{j \neq i} \frac{\beta_{ij}}{\mu_{j1}} v_j(\tilde{S}_j)\end{aligned}\quad (21)$$

Definindo o vetor $V' = [v_1, v_2 \dots v_N]$, (19) ou (21) se escreve:

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq L V \\ \text{ou} \\ \Delta V &\leq L V\end{aligned}\quad (22)$$

onde os elementos da matriz L são:

$$L = \{l_{ij}\} = \begin{cases} -\frac{\mu_{13}}{\mu_{12}} & \text{se } i=j \\ \mu_{14} \frac{\beta_{ij}}{\mu_{j1}} & \text{se } i \neq j \end{cases}\quad (23)$$

Então, se o sistema de comparação dado como:

$$\begin{aligned}\dot{W} &= L W \\ \text{ou} \\ \Delta W &= L W\end{aligned}\quad (24)$$

satisfaz as definições 3, 4 ou 5, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema dinâmico (1) ou (2) satisfaz as mesmas definições.

Os teoremas 4, 5 e 6 sintetizam o método de análise de estabilidade através do chamado sistema de comparação. As provas dos teoremas podem ser encontradas por exemplo em Bitsoris (1978) e Geromel (1979).

1.5 OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÕES DE ESTRUTURA

Nesta sessão vamos considerar questões referentes a otimização de funções ditas matriciais, inicialmente aquela com restrições estruturais que, de uma maneira geral podem ser representados por:

$$\begin{aligned} \min_Q \quad & f(Q) \\ \text{s.t.} \quad & G(Q) \leq Y \end{aligned} \quad (25)$$

onde $Q \in R^{n \times m}$, $Y \in R^{k \times l}$, $f(\cdot): R^{n \times m} \rightarrow R$ e $G(Q) \leq Y$ é uma restrição de natureza matricial mas estática: $G(\cdot): R^{n \times m} \rightarrow R^{k \times l}$. O gradiente $df(Q)/dQ$ é definido como:

$$\frac{df(Q)}{dQ} = \left\{ \frac{\partial f(Q)}{\partial q_{ij}} \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m \quad (26)$$

e Kleinman (Geromel, 1979) apresentou uma maneira simples e compacta de determinar este gradiente, estabelecido pelo seguinte lema:

Lema 1: Seja $f(Q): R^{n \times m} \rightarrow R$ tal que $f(Q + \epsilon \delta Q) = f(Q) + \epsilon \text{Tr} \{M(Q) \cdot \delta Q\}$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Então:

$$\frac{df(Q)}{dQ} = M(Q)' \quad (29)$$

O lema acima permite enunciar o lema que segue, lem-

brando que a função Lagrangeana de (25) se escreve:

$$L(Q, Y, \Lambda) = f(Q) + \text{Tr} [\Lambda' (G(Q) - Y)] \quad (30)$$

Lema 2: (Geromel, 1979) A matriz gradiente da função composta $f(Q, G(Q))$ onde f é uma função escalar, é dada por:

$$\frac{d}{dQ} f(Q, G(Q)) = \frac{\partial}{\partial Q} L(Q, Y^*, \Lambda^*) \quad (31)$$

onde Y^* e Λ^* satisfazem as condições de estacionariedade:

$$\frac{\partial}{\partial Y} L(Q, Y, \Lambda) = \frac{\partial}{\partial \Lambda} L(Q, Y, \Lambda) = 0 \quad (32)$$

Considerando agora uma restrição do tipo dinâmica, temos:

$$J(K) = \int_0^T f(X(t), K) dt + g(X(T)) \quad (33)$$

$$\dot{X}(t) = F(X(t), K), \quad X(0) = X_0$$

onde $X \in R^{n \times m}$ é matriz das variáveis de estado e $K \in R^{m \times n}$ é matriz dos parâmetros de controle. Então o seguinte teorema pode ser enunciado (Geromel e Bernussou, 1982):

Teorema 7: A derivada matricial de $J(K)$ em relação a K se exprime como:

$$\frac{dJ(K)}{dK} = \int_0^T \frac{\partial}{\partial K} H(X, \Lambda, K) dt \quad (34)$$

onde $H(X, \Lambda, K) = f(X, K) + \text{Tr}(\Lambda' F(X, K))$, X e Λ sendo soluções fornecidas pelas condições de estacionariedade:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial X} + \dot{\Lambda} &= 0, & \Lambda(T) &= \frac{dg}{dX(T)} \\ \frac{\partial H}{\partial \Lambda} - \dot{X} &= 0, & X(0) &= X_0 \end{aligned} \quad (35)$$

O mesmo teorema pode ser extendida para sistemas discretos (Geromel, 1979):

Teorema 8: Dada a função

$$J(K) = \sum_{t=0}^{T-1} f(X(t), K) + g(X(T)) \quad (36)$$

$$X(t+1) = F(X(t), K), \quad X(0) = X_0$$

com $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, temos

$$\frac{dJ(K)}{dK} = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{\partial H}{\partial K}(X(t), \Lambda(t), K) \quad (37)$$

onde $H(X(t), \Lambda(t), K) = f(X(t), K) + \text{Tr}(\Lambda'(t) \cdot f(X(t), K))$ com $X(t)$ e $\Lambda(t)$ sendo soluções de condições de estacionariedade:

$$\frac{\partial H}{\partial X(t)} - \Lambda(t-1) = 0, \quad t=(T-1), \dots, 1, \quad \Lambda(T-1) = \frac{dg}{dX(T)} \quad (38)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \Lambda(t)} - X(t-1) = 0, \quad t=0, \dots, (T-1), \quad X(0) = X_0$$

O lema 2, teorema 7 e 8 permitem resolver problema de otimização matricial do tipo:

$$\min_{K \in \Phi(s)} J(K) \quad (39)$$

com $J(K)$ dado em (33) ou (36) e $\Phi(s)$ sendo restrição do tipo estrutural sobre o controle K , que, de uma maneira geral pode ser

escrito como:

$$\Phi(s) = \{K \in R^{m \times n} \mid C(K) = C_0\} \quad (40)$$

onde $C(K)$ é uma função linear de K , com $C(0) = 0$. Geromel e Bernussou (1982) sugeriram resolver o problema (39) utilizando o método das direções factíveis desenvolvido em Geromel e Baptista (1981), que basicamente consiste em utilizar como direção de otimização a matriz de projeção do gradiente D , dada pela solução ótima do problema:

$$\min_D \frac{1}{2} \left\| \frac{dJ}{dK} - D \right\|^2 \quad (41)$$

$$C(D) = 0$$

Definindo Λ como matriz das variáveis duais associadas à restrição $C(D) = 0$, temos:

$$\max_{\Lambda} \min_D \left\{ \frac{1}{2} \left\| \frac{dJ}{dK} - D \right\|^2 + \langle \Lambda, C(D) \rangle \right\} \quad (42)$$

e as condições de otimalidade fornecem:

$$D - \frac{dJ}{dK} + \frac{\partial}{\partial D} \text{Tr} \{ \Lambda' \cdot C(D) \} = 0 \quad (43)$$

$$C(D) = 0$$

Na próxima seção, vamos analisar os sistemas lineares e os problemas lineares quadráticos (PLQ) dentro deste contexto.

I.6 PROBLEMAS LINEARES QUADRÁTICOS COM HORIZONTE INFINITO

Seja (S) um sistema linear invariante descrito por:

$$(S) \quad \dot{x} = Ax \quad ; \quad x(0) = x_0 \quad (44)$$

onde $x \in R^n$, $A \in R^{n \times n}$ e com estrutura interconectada que permite re-escrever como sendo:

$$(S_i) \begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + \sum_{j \neq i}^N A_{ij} x_j \\ x_i(0) = x_{i0} \end{cases} \quad i=1 \dots N \quad (45)$$

com $x_i \in R^{n_i}$, $\sum_{i=1}^N n_i = n$. Vamos supor $(\hat{S}_i)$, o i -ésimo subsistema isolado, obtido de (S_i) fazendo $A_{ij} = 0$, $i \neq j = 1 \dots N$, assintoticamente estável:

$$(\hat{S}_i) \begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i \\ x_i(0) = x_{i0} \end{cases} \quad i=1 \dots N \quad (46)$$

Associando a $(\hat{S}_i)$ uma função de Lyapunov do tipo (Geromel e Bernussou, 1979):

$$v_i(x_i) = \{ \|P_i^{-1}\| x_i' P_i x_i \}^{1/2} \quad (47)$$

onde P_i é solução da equação algébrica de Lyapunov:

$$A_i' P_i + P_i A_i + Q_i = 0$$

com $Q_i > 0$ e simétrico, obtemos a derivada temporal de $v_i(x_i)$ ao longo da trajetória de $(\hat{S}_i)$ como sendo:

$$\dot{v}_i(\hat{S}_i) = - \frac{1}{2} \frac{x_i' Q_i x_i}{x_i' P_i x_i} v_i(x_i) \quad (48)$$

e portanto:

$$\dot{v}_i(S_i) = \dot{v}_i(\hat{S}_i) + (\nabla v_i)' \sum_{j \neq i}^N A_{ij} x_j \quad (49)$$

Definindo:

$$\alpha_i = \min_{x_i} \frac{1}{2} \frac{x_i' Q_i x_i}{x_i' P_i x_i} \quad \text{e} \quad \beta_{ij} = \|A_{ij}\| \quad (50)$$

e como:

$$\begin{aligned} \|x_i\| \leq v_i(x_i) \leq \theta_i(P_i) \|x_i\| \\ \forall x_i \in R^{n_i} \end{aligned} \quad (51)$$

$$\|\nabla v_i\| \leq \theta_i(P_i)$$

onde $\theta_i^2(P_i) = \|P_i\| \|P_i^{-1}\|$ obtemos:

$$\dot{v}_i \leq -\alpha_i v_i + \theta_i(P_i) \sum_{j \neq i}^N \beta_{ij} v_j \quad i=1 \dots N \quad (52)$$

que, com $V = [v_1 \dots v_N]'$, nos fornece:

$$\dot{V} \leq L V \quad (53)$$

onde $L \in R^{n \times n}$ é:

$$L = \{l_{ij} = -\alpha_i \delta_{ij} + \theta_i(P_i) \beta_{ij} \quad i,j=1 \dots N\} \quad (54)$$

sendo δ_{ij} símbolo de Kronecker. L é uma matriz de elementos fora da diagonal não-negativos que satisfaz as condições do teorema 4, e portanto, a estabilidade de (S) pode ser estudada a partir do sistema de comparação:

$$\dot{W} = L W \quad (55)$$

utilizando por exemplo a condição conhecida como de Sevastyanov Kotelyanski:

" L é estável se e somente se $(-1)^k \Delta_k(L) \geq 0$, $k=1 \dots N$, $\Delta_k(L)$ sendo menor principal de ordem k da matriz L ".

Ao sistema (S) em (44), vamos associar o problema de determinar um controle descentralizado estável ótimo do tipo,

$$u_i = -K_i x_i, \quad i=1 \dots N \quad (56)$$

onde $u_i \in R^{m_i}$, $K_i \in R^{m_i \times n_i}$ e $\sum_{i=1}^N m_i = m$. Definindo:

$$\Lambda(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det(A - \lambda I) = 0\} \quad (57)$$

e um critério quadrático, podemos definir o problema acima da seguinte maneira:

$$\min_{K \in \Omega(S)} J(K) = \int_0^{\infty} (x' Q x + u' R u) dt \quad (58)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u = -Kx \quad ; \quad x(0) = 0$$

onde $Q = Q' \geq 0$, $R = R' > 0$, $B = \text{bloc-diag}(B_1 \dots B_N)$ e $\Omega(S) = \{K \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid K = \text{bloc-diag}(K_1 \dots K_N), K_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i} \text{ e } \Lambda(A - BK) \subseteq \mathbb{C}^-\}$, $\mathbb{C}^-$ sendo o sub-conjunto dos números complexos com parte real negativa. Fazendo $X(t) = x(t)/x'(t)$, podemos re-escrever (58) na seguinte forma:

$$\min_{K \in \Omega(S)} J(K) = \int_0^{\infty} \text{Tr} \{(Q + K'RK) X(t)\} dt \quad (59)$$

$$\dot{X}(t) = (A - BK) X(t) + X(t)(A - BK)'$$

$$X(0) = X_0$$

O problema acima sem a restrição $K \in \Omega(S)$ e com hipóteses de controlabilidade e observabilidade fornece uma única solução, dada pela equação de Riccati e duas importantes características: estabilidade assintótica do sistema de malha fechada e independência da solução ótima da condição inicial. A introdução da restrição do controle ser descentralizado, faz com que se percam estas características. O lema que segue, no entanto, nos permite escrever um algoritmo para resolver (59), utilizando o método das direções factíveis descrito na seção anterior.

Lema 3: Seja $J(K): \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função matricial definida por:

$$J(K) = \text{Tr} \{F(K) X_0\}$$

$$F(K) = \int_0^{\infty} e^{(A-BK)'t} (Q + K'RK) e^{(A-BK)t} dt \quad (60)$$

diferenciável em relação a K tal que $\Lambda(A - BK) \subset C^-$. Então:

- a) Se $K \in \Omega(S)$, existe um passo $\alpha > 0$ tal que
 $J(K - \alpha D) < J(K)$, $D = \text{bloc-diag} \left(\frac{dJ}{dK} \right)$, $D \neq 0$
- b) Se o par (A, C) , $Q = C'C$ é observável e $X_0 > 0$, então para todo α tal que $J(K - \alpha D) < J(K) < \infty$, teremos $(K - \alpha D) \in \Omega(S)$.

O lema 3 garante que, inicializando com $K^0 \in \Omega(S)$, no método das direções factíveis tal que $J(K^2) < J(K^1)$ com $K_2 = K_1 - \alpha D$ nos fornece controles estáveis a cada iteração. Assim, o algoritmo pode ser do tipo:

- 1) Fazer $j = 0$ e achar $K^0 \in \Omega(S)$.
- 2) Achar $\frac{dJ}{dK^j}$ definido no teorema 7 com as condições de estacionariedade (35).
- 3) Achar a matriz de projeção do gradiente D , solução de (43) para $\phi(S) = \{K \in R^{m \times n}, K = \text{bloc-diag} (K_1 \dots K_N), K_1 \in R^{m_1 \times n_1}\}$ o que nos fornece $D = \text{bloc-diag} \left(\frac{dJ}{dK^j} \right)$.
- 4) Testar se $\|D^j\| \leq \epsilon$, $\epsilon > 0$ e pequeno. Se verdadeiro, final de otimização e caso contrário ir para 5).
- 5) Resolver:

$$\min_{\alpha \geq 0} J(K^j - \alpha D^j) \quad (61)$$
- 6) Fazer $K^{j+1} = K^j - \alpha D^j$ e $j = j+1$ e voltar para 2).

No passo 1), é necessário determinar $K^0 \in \Omega(S)$, o que muitas vezes não é uma tarefa fácil mesmo porque $\Omega(S)$ pode ser vazio. Além disso, diferentemente dos problemas lineares quadráticos clássicos, no nosso caso a solução ótima depende das condi

ções iniciais do sistema. O primeiro problema é de difícil solução, a não ser que se faça algumas hipóteses adicionais, como feito por Geromel e Bernussou (1982). A segunda dificuldade foi abordada também pelos mesmos autores no mesmo trabalho, estabelecendo um jogo entre o homem procurando K que minimiza um critério e a natureza procurando K que maximiza o mesmo critério (pior caso). Matematicamente o problema é escrito como segue:

$$\min_{K \in \Omega(S)} W(K) \quad (62)$$

onde $W(K): R^{m \times n} \rightarrow R$ é uma função matricial definida por:

$$W(K) = \max_{X_0} \{J(K, X_0), \|X_0\|^2 \leq 1\} \quad (63)$$

com $J(K, X_0)$ definido em (58). O teorema que segue fornece condições para resolver (62).

Teorema 9: Se a matriz das variáveis duais P é independente da matriz das condições iniciais X_0 , a função $W(K)$ em (62) é diferenciável e o seu gradiente é dado por:

$$\frac{dW(K)}{dK} = 2(RK - B'P)V \quad (64)$$

com P e V dados por:

$$\begin{aligned} (A - BK)'P + P(A - BK) + Q + K'RK &= 0 \\ (A - BK)V + V(A - BK)' + \frac{P}{\|P\|} &= 0 \end{aligned} \quad (65)$$

Os procedimentos de otimização apresentados acima foram estabelecidos para problemas de natureza mais geral pelos autores relacionados, estando particularizados aqui para problemas lineares quadráticos (PLQ). Recentemente Geromel e Peres (1984) desenvolveram uma metodologia alternativa específica para determinar $K \in \Omega(S)$, sem no entanto provar a convergência que podemos sintetizar no seguinte teorema:

Teorema 10: Dado um sistema linear dinâmico:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \quad ; \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= C x(t) \\ u &= -Ky(t)\end{aligned}\tag{66}$$

e $Q = Q' \geq 0$, $R = R' > 0$, $(A, Q^{1/2})$ completamente observável, a matriz $(A - BK)$ é assintoticamente estável para qualquer $G \in R^{m \times n}$ se:

$$K + G = R^{-1} B' P\tag{67}$$

$$A'P + P A - P B R^{-1} B' P + Q + G' R G = 0$$

e K é descentralizado se $G = F(R^{-1} B' P)$ onde:

$$F(K) = K - \text{bloc-diag} (K_1 \dots K_N)$$

Os resultados colocados nesta seção para sistemas contínuos podem ser estendidos para sistemas discretos sem grandes dificuldades, como feito em Geromel (1979). A seguir, vamos explorar o PLQ clássico, sem restrições estruturais de controle, para sistemas invariantes e de horizonte infinito.

Seja o problema:

$$\min_u J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x' Q x + u' R u] dt\tag{68}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A x + B u \quad ; \quad x(0) = x_0 \\ y &= C x\end{aligned}$$

com $Q = Q' \geq 0$, $R = R' > 0$, $[A, C]$ completamente observável e $[A, B]$ completamente controlável. O Hamiltoniano associado é (Athans e Falb, 1966):

$$H(x, p, u) = \frac{1}{2} (x' Q x + u' R u) + p' (A x + B u)\tag{69}$$

Para resolvermos o problema (68), vamos utilizar o

conhecido Princípio de Otimalidade, como em Geromel (1983):

Princípio de Otimalidade: Seja $x(t)$, $t \in [0, T]$ uma trajetória ótima qualquer da função:

$$v(\xi, \tau) \triangleq \min_u \int_{\tau}^T f(x, u) dt + g(x(T)) \quad (70)$$

$$\dot{x} = F(x, u) \quad ; \quad x(\tau) = \xi$$

com $(\xi, \tau) = (x(0), 0)$. Então, para qualquer $\tau \in [0, T]$ com $(\xi, \tau) = (x(\tau), \tau)$, a trajetória "restante", ou seja, $x(t)$, $t \in [\tau, T]$ é ótima para o problema que define $v(\xi, \tau)$.

Para determinar o comportamento de $v(\xi, \cdot)$ no tempo, vamos considerar um incremento δt infinitesimal:

$$v(x(t), t) = \min_u \{v(x(t+\delta t), t+\delta t) + f(x, u)\delta t\} \quad (71)$$

A primeira parcela na minimização corresponde ao valor ótimo do critério em relação a u entre $(t + \delta t)$ e T , lembrando que a condição inicial modificou para $\xi = x(t + \delta t)$ e a segunda parcela corresponde ao critério entre t e $t + \delta t$.

Considerando $v(\cdot, \cdot)$ de classe C^1 em relação às variáveis envolvidas e fazendo $\delta t \rightarrow 0$ temos:

$$v(x(t+\delta t), t+\delta t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \delta t + \frac{\partial v'(x, t)}{\partial x} F(x, u) \delta t + v(x, t) \quad (72)$$

que substituída em (71) e dividida por δt resulta:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \min_u \{f(x, u) + \frac{\partial v'(x, t)}{\partial x} F(x, u)\} = 0 \quad (73)$$

Este é a equação de Hamilton - Jacobi - Bellman que pode ser resolvida numericamente utilizando técnicas de programação dinâmica com a condição de contorno:

$$v(x, T) = g(x(T)) \quad (74)$$

A equação (73), por outro lado, pode ser colocada em função do Hamiltoniano (69):

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \min_u H(x,u, \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}) = 0 \quad (75)$$

No nosso caso específico, temos $g(x) = 0$ e dado que o critério é da forma quadrática, vamos por hipótese assumir que:

$$v(x,t) = \frac{1}{2} x' P x \quad (76)$$

onde $P \in R^{n \times n}$ é simétrica. A partir de (69), (75) e (76), obtemos:

$$\min_u \left\{ \frac{1}{2} (x' Q x + u' R u) + x' P (A x + B u) \right\} = 0 \quad (77)$$

que nos fornece como solução:

$$u = -R^{-1} B' P x \quad (78)$$

Substituindo em (77), vem:

$$x' \left\{ \frac{1}{2} (Q - P B R^{-1} B' P) + P A \right\} x = 0 \quad (79)$$

Lembrando que $P.A$ pode ser escrita como:

$$P A = \frac{1}{2} (P A + A' P) + \frac{1}{2} (P A - A' P) \quad (80)$$

e portanto, substituindo em (79), obtemos finalmente:

$$A' P + P A - P B R^{-1} B' P + Q = 0 \quad (81)$$

que é a equação algébrica de Riccati. Cabe colocar que a função $v(\cdot, \cdot)$ para $t = 0$, ou seja, $v(x(0), 0)$ representa de fato o valor mínimo da função objetivo do problema em questão e que pode ser escrita na forma $v(x(0), 0) = x_0' P x_0$.

Lema 4: A solução P da equação algébrica de Riccati (81) é simé-

trica.

Prova: Basta transpor a equação (81) e lembrar que Q e R são simétricas.

Lema 5: O controle dado por (78) onde P é solução de (81), é ótimo global em relação ao critério definido em (68).

Prova: Definindo $z = [x \ u]'$, como $\partial H / \partial z$ satisfaz as condições de estacionariedade, u em (78) é mínimo se $\partial^2 H / \partial z^2$ for semi-definida positiva. De (69), temos:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} & \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad (82)$$

Vamos explorar em seguida aspectos de existência e unicidade da solução da equação de Riccati. Para isso, vamos definir detectabilidade e enunciar cinco lemas auxiliares (Wonham, 1979).

Definição 12: O par $[A, C]$ é detectável se A é estável (ou seja $\Lambda(A) \subset C^-$) no sub-espço não-observável de $[A, C]$.

Lema 7: Dado o par $[A, C]$ detectável, A é estável se e somente se

$$\|w(t)\| = \left\| \int_0^T e^{tA'} C' C e^{tA} dt \right\| < \mu \quad (83)$$

μ sendo um escalar positivo finito.

Lema 8: Dado $M \geq 0$ e $[A, M^{1/2}]$ observável (ou detectável), então, para todo $Q \geq 0$, $R > 0$ e B e K, o par $[A + BK, (M + Q + K'RK)^{1/2}]$ é observável (ou detectável).

Lema 9: Se $Q \geq 0$ e $\Lambda(A) \subset C^-$ então, a equação linear:

$$A'P + P A + Q = 0 \quad (84)$$

tem uma única solução $P \geq 0$.

Prova: Se P é solução de (84) então:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} (e^{tA'} P e^{tA}) &= -e^{tA'} (A'P + P A) e^{tA} \\ &= e^{tA'} Q e^{tA}, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (85)$$

Integrando, obtemos:

$$P = \int_0^\infty e^{tA'} Q e^{tA} dt \geq 0 \quad (86)$$

e como a integral existe e é única, o lema está provado.

Lema 10: Dados $P \geq 0$, $Q \geq 0$, $[A, Q^{1/2}]$ detectável e a equação (84), então A é estável.

Prova: De (84) e (85), temos:

$$P = e^{tA'} P e^{tA} + \int_0^t e^{\tau A'} Q e^{\tau A} d\tau, \quad \forall t \geq 0 \quad (87)$$

Como $[A, Q^{1/2}]$ é detectável, do lema 7 temos que a integral em (87) é limitada se e só se A é estável. Como $0 \leq \int_0^t e^{\tau A'} Q e^{\tau A} d\tau \leq P$, a prova está concluída.

Lema 11: Seja $P = P' \geq 0$, $R > 0$ e $K^* = R^{-1} B'P$ e seja a função:

$$\Psi(K) = (A - BK)'P + P(A - BK) + K'R K + Q \quad (88)$$

Então:

$$\Psi(K) - \Psi(K^*) = (K - K^*)' R (K - K^*) \geq 0 \quad (89)$$

ou seja, K^* minimiza $\Psi(K)$.

Prova: Lembrando que $RK^* = B'P$, de (88) obtemos:

$$\begin{aligned} \Psi(K) - \Psi(K^*) &= (A - BK)'P + P(A - BK) + K'RK + Q \\ &\quad - [(A - BK^*)'P + P(A - BK^*) + K^{*'}RK^* + Q] \\ &= -K'B'P - P B K + K^{*'}B'P + P B K^* + \\ &\quad + K'RK - K^{*'}R K^* \\ &= (K - K^*)'R (K - K^*) \end{aligned} \quad (90)$$

e, portanto o lema está provado.

Teorema 11: Para o sistema (68), seja $[A, B]$ controlável, $[A, Q^{1/2}]$ detectável, $Q = Q' \geq 0$ e $R = R' > 0$. Então, a equação de Riccati (81) admite uma única solução $P = P' \geq 0$. Além disso a matriz $(A - B R^{-1} B' P)$ é estável.

Prova: Re-escrevendo (81) em vista de (78) para o sistema (68) obtemos:

$$(A - BK)'P + P(A - BK) + Q + K'RK = 0 \quad (91)$$

$$K = R^{-1} B' P$$

O sistema acima sugere construir uma sequência $\{K_k, P_k, k = 1, 2, \dots\}$ da seguinte forma:

a) escolher K_1 tal que $A - B K_1$ seja estável e fazer $k = 1$.

b) Calcular P_k tal que:

$$(A - B K_k)' P_k + P_k (A - B K_k) + Q + K_k' R K_k = 0 \quad (92)$$

c) Testar se $P_{k-1} - P_k \leq \epsilon > 0$. Caso positivo, parar e caso negativo, ir para d)

d) Calcular:

$$K_{k+1} = R^{-1} B' P_k \quad (93)$$

fazer $k = k + 1$ e ir para b).

No processo acima é gerado uma sequência $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ unicamente determinado e com $P_i \geq 0$, $i = 1 \dots k$, do lema 9. Do Lema 11, temos que:

$$\begin{aligned} (A - B K_{k+1})' P_k + P_k (A - B K_{k+1}) + Q + K_{k+1}' R K_{k+1} &= \\ &= (A - B K_k)' P_k + P_k (A - B K_k) + Q \\ &\quad + K_k' R K_k - (K_k - K_{k+1})' R (K_k - K_{k+1}) \\ &= - (K_k - K_{k+1})' R (K_k - K_{k+1}) \\ &= - Q_k \end{aligned} \quad (94)$$

com $Q_k \geq 0$, o que nos fornece:

$$\begin{aligned} (A - B K_{k+1})' P_k + P_k (A - B K_{k+1}) + Q + Q_k + \\ + K_{k+1}' R K_{k+1} = 0 \end{aligned} \quad (95)$$

Do lema 8, o par $[A - B K_{k+1}, (Q + Q_k + K_{k+1}' R K_{k+1})^{1/2}]$ é detectável e, portanto do lema 10, $(A - B K_{k+1})$ é estável. Fazendo $k = k + 1$ em (92) e subtraindo de (95), obtemos:

$$(A - B K_{k+1})' (P_k - P_{k+1}) + (P_k - P_{k+1}) (A - B K_{k+1}) + Q_k = 0 \quad (96)$$

que, novamente lembrando lema 9, podemos escrever:

$$P_k - P_{k+1} \geq 0 \quad (97)$$

ou seja, a sequência P_k é decrescente monotonicamente com k e é semi-definida positiva. Então o limite da sequência existe:

$$P^* = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k \quad (98)$$

e portanto $K^* = \lim_{k \rightarrow \infty} K_{k+1} = R^{-1} B' P^*$ existe e satisfazem (91). Do lema 8, o par $[A - B K^*, (Q + K^{*'} R K^*)^{1/2}]$ é detectável e portanto, do lema 10, $(A - B K^*)$ é estável.

Para provar a unicidade, seja $\tilde{P} \geq 0$ e $\tilde{K}$ satisfazendo (91). Do lema 11:

$$\Psi(\tilde{K}) - \Psi(K^*) = (\tilde{K} - K^*)' R (\tilde{K} - K^*) \geq 0 \quad (99)$$

e, portanto:

$$\begin{aligned} (A - B K^*)' \tilde{P} + \tilde{P} (A - B K^*) + Q + \\ + K^{*'} R K^* - (\tilde{K} - K^*)' R (\tilde{K} - K^*) = 0 \end{aligned} \quad (100)$$

Como também de (92) temos:

$$(A - B K^*)' P^* + P^* (A - B K^*) + Q + K^{*'} R K^* = 0 \quad (101)$$

subtraindo (100) de (101), obtemos:

$$\begin{aligned} (A - B K^*)' (P^* - \tilde{P}) + (P^* - \tilde{P}) (A - B K^*) + \\ + (\tilde{K} - K^*)' R (\tilde{K} - K^*) = 0 \end{aligned} \quad (102)$$

e $(A - B K^*)$ é estável, o lema 9 implica que $P^* \geq \tilde{P}$. Fazendo agora $\Psi(K^*) - \Psi(\tilde{K})$, concluímos que $\tilde{P} \geq P^*$. Portanto $P^* = \tilde{P}$ e o teorema está provado.

Resultados semelhantes aos obtidos para sistemas contínuos (68) podem ser conseguidos para problemas discretos:

$$\min_{u(t)} J(x(t), u(t)) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} (x'(t) Q x(t) + u'(t) R u(t))$$

$$x(t+1) = A x(t) + B u(t) \quad ; \quad x(0) = x_0 \quad (103)$$

$$y(t) = C x(t)$$

com as mesmas hipóteses feitas para (68). O Hamiltoniano associada é da forma:

$$H(x, p, u) = \frac{1}{2} x'(t) Q x(t) + \frac{1}{2} u'(t) R u(t) + p'(t+1)(A x(t) + B u(t)) \quad (104)$$

Novamente, vamos definir a função $v(\xi, k): R^n \rightarrow R$ que assume o valor ótimo da função objetivo de (103) considerando o estado inicial $x(k) = \xi$:

$$v(\xi, k) \triangleq \min_u \frac{1}{2} \sum_{t=k}^{\infty} (x'(t) Q x(t) + u'(t) R u(t)) \quad (105)$$

$$x(t+1) = A x(t) + B u(t) \quad ; \quad x(k) = \xi$$

Do princípio de otimalidade, podemos escrever:

$$v(x(k), k) = \min_u \left\{ \frac{1}{2} [x'(k) Q x(k) + u'(k) R u(k)] + v(x(k+1), k+1) \right\} \quad (106)$$

Como no caso contínuo, vamos assumir por hipótese $v(x, k)$ do tipo:

$$v(x, k) = \frac{1}{2} x'(k) P x(k) \quad (107)$$

Com isso, a equação (106) fica:

$$v(x(k), k) = \min_u \left\{ \frac{1}{2} [x'(k) Q x(k) + u'(k) R u(k) + x'(k+1) P x(k+1)] \right\} \quad (108)$$

levando em conta a equação dinâmica, temos:

$$v(x(k), k) = \min_u \frac{1}{2} \{x'(k) Q x(k) + u'(k) R u(k) + [A x(k) + B u(k)]' P [A x(k) + B u(k)]\} \quad (109)$$

Achando o mínimo, obtemos:

$$u(k) = -(R + B' P B)^{-1} B' P A x(k) \quad (110)$$

Substituindo a expressão acima em (109), lembrando que $v(x(k), k) = \frac{1}{2} x'(k) P x(k)$, podemos re-escrever (109) como segue:

$$P = A' P A - A' P B (R + B' P B)^{-1} B' P A + Q \quad (111)$$

que é a conhecida equação de Riccati discreta. A expressão (111) também pode ser escrita como:

$$P = A' (P^{-1} + B R^{-1} B')^{-1} A + Q \quad (112)$$

o que pode ser conseguido a partir do seguinte lema:

Lema 12: Se as matrizes P , $\tilde{P}$ e R não-singulares e B de rank máximo satisfazem a relação:

$$\tilde{P} = P - P B (R + B' P B) B' P \quad (113)$$

então, a seguinte identidade matricial é válida:

$$\tilde{P}^{-1} = P^{-1} + B R^{-1} B' \quad (114)$$

A prova deste lema pode ser encontrado em Sage e White (1977).

A existência e unicidade de solução de (111) pode ser provado à semelhança do caso contínuo com o auxílio dos lemas que enunciamos e que deixamos de provar por serem idênticos aos respectivos do caso contínuo.

Lema 13: Se $Q \geq 0$ e $\Lambda(A) \subset C^-$, então a equação linear

$$A'P A - P + Q = 0 \quad (115)$$

tem uma única solução $P \geq 0$.

Lema 14: Se $P \geq 0$, $Q \geq 0$, o par $[A, Q^{1/2}]$ é detectável e satisfaz (115), então A é estável.

Lema 15: Seja $P = P' \geq 0$, $R > 0$ e $K^* = (R + B'P B)^{-1} B'P A$ e seja a função:

$$\Psi(K) = (A - B K)' P (A - B K) - P + K' R K \quad (116)$$

Então:

$$\Psi(K) - \Psi(K^*) = (K - K^*)' (R + B'P B) (K - K^*) \geq 0 \quad (117)$$

Teorema 12: Para o sistema (103), seja $[A, B]$ controlável, $[A, Q^{1/2}]$ detectável, $Q = Q' \geq 0$ e $R = R' > 0$. Então a equação algébrica de Riccati (111) admite uma única solução $P = P' \geq 0$. Além disso, a matriz $(A - B(R + B'P B)^{-1} B'P A)$ é estável.

Com o teorema acima e o teorema 11 concluímos a existência e unicidade da solução semi-definida positiva da equação de Riccati e que fornece solução ótima para problemas lineares quadráticos (68) e (103), quando não estão sujeitas a restrições do tipo estruturais.

1.7 PROBLEMA LINEAR QUADRÁTICO - MÉTODO DE NEWTON APROXIMADO

O problema de encontrar um controle ótimo com restrições de estrutura para sistemas lineares com índice quadrático de desempenho foi abordado por alguns autores e dentre eles podemos evidenciar os trabalhos de Milani (1980) e Geromel e Bernussou (1982). Em particular o primeiro sugeriu método

Quasi - Newton utilizando matriz Hessiana aproximada obtida através da solução de três equações de Lyapunov da ordem do sistema global. Em contraste, o segundo utilizou método de direções factíveis utilizando projeção do gradiente matricial obtido na solução de duas equações de Lyapunov da ordem do sistema. Propomos um método Newton aproximado à semelhança de Milani (1980), mas mais simples na dedução e nos cálculos, sem necessidade de se manipular diretamente a Hessiana da função objetivo.

Para facilitar o desenvolvimento, vamos introduzir o operador $\Psi(\cdot)$ como definido em Geromel (1979):

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix} \rightarrow \Psi(X) = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{nm} \end{bmatrix} \quad (118)$$

com as propriedades:

P1 : $\Psi(\cdot)$ é uma aplicação linear

P2 : $\Psi(\cdot)$ é inversível

P3 : $\langle \Psi(A), \Psi(B) \rangle = \text{Tr}(A'B) = \langle A, B \rangle$, $A, B \in R^{n \times m}$

$$\|A\| = \|\Psi(A)\|$$

Seja então o problema:

$$\min_Q f(Q) \quad (119)$$

O método de Newton consiste em minimizar a aproximação da função em estudo por uma quadrática em cada "ponto" considerado. Seja $f(\cdot): R^{n \times m} \rightarrow R$ uma função escalar e a sua aproximação em torno de um ponto Q_k por uma série de Taylor truncada:

$$f(Q + \epsilon \Delta Q) \approx f(Q) + \epsilon \Psi' \left(\frac{\partial f}{\partial Q} \right) \Psi(\Delta Q) + \frac{\epsilon^2}{2} \Psi'(\Delta Q) \frac{\partial \Psi \left(\frac{\partial f}{\partial Q} \right)}{\partial \Psi(Q)} \Psi(\Delta Q) \quad (120)$$

e a sua minimização fornece:

$$\Psi(\Delta Q) = - \frac{1}{\epsilon} M \Psi \left(\frac{\partial f}{\partial Q} \right) \quad (121)$$

onde:

$$M = \left[\frac{\partial \Psi \left(\frac{\partial f}{\partial Q} \right)}{\partial \Psi(Q)} \right]^{-1} \quad (122)$$

Para melhorar a convergência, introduz-se normalmente um fator α_k para modificar o passo de otimização (Lumberger, 1973), onde k representa a iteração:

$$\Psi(\Delta Q_{k+1}) = - \alpha_k M_k \Psi \left(\frac{\partial f}{\partial Q_k} \right) \quad (123)$$

que substituindo em (120), fornece:

$$f(Q_{k+1}) \approx f(Q_k) - \epsilon \alpha_k \Psi' \left(\frac{\partial f}{\partial Q_k} \right) M_k \Psi \left(\frac{\partial f}{\partial Q_k} \right) \quad (124)$$

Da expressão acima, podemos notar que para a função decrescer, M_k deve ser definida-positiva. Além disso, fazendo $M_k = I$ (matriz identidade) teremos o método de gradiente e portanto $\Psi(\Delta Q)$ nos dá a direção de minimização. A seguir, vamos utilizar este fato para resolver o problema definido em (58) pelo método de Newton aproximado, modificando a terceira equação para $u = -K y(t)$, $y(t) = C x(t)$.

Lema 16: Seja A uma matriz estável. Então a solução da equação de Lyapunov (84) é dada por (86).

Com isso, como $u = -K y(t)$, então:

$$u = -K C x(t) \quad (125)$$

O critério de desempenho J pode ser escrito como segue, em vista do lema 16, considerando x_0 uma variável aleatória tal que $E[x_0, x_0'] = X_0 > 0$:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} x'(Q + C'K'RKC)x \, dt \\ &= x_0' P x_0 = \text{Tr}(P X_0) \end{aligned} \quad (126)$$

onde P é solução de:

$$(A - BK C)'P + P(A - BK C) + Q + C'K'RKC = 0 \quad (127)$$

Vamos supor uma perturbação no valor de $K_1 = K$ para $K_2 = K + \epsilon \Delta K$, $\epsilon > 0$, acarretando perturbação na solução de (127) de $P_1 = P$ para $P_2 = P + \epsilon \Delta P + \frac{\epsilon^2}{2} \Delta P^2$. Isto implica que:

$$J(K + \epsilon \Delta K) = J(K) + \epsilon \text{Tr}(\Delta P X_0) + \frac{\epsilon^2}{2} \text{Tr}(\Delta P^2 X_0) \quad (128)$$

Por outro lado:

$$(A - BK_2C)'P_2 + P_2(A - BK_2C) + Q + C'K_2'RK_2C = 0 \quad (129)$$

que pode ser re-escrita como:

$$\begin{aligned} &+ [(A - BK_1C)'\Delta P + \Delta P(A - BK_1C) \\ &\quad - (\Delta KC)'(B'P - RK_1C) - (B'P - RK_1C)'\Delta KC] \\ &+ \frac{\epsilon}{2} [(A - BK_1C)'\Delta P^2 + \Delta P^2(A - BK_1C) + C'\Delta K'R\Delta KC \\ &\quad - (\Delta P B \Delta KC)' - (\Delta P B \Delta KC)] \\ &+ \frac{\epsilon^2}{2} [(\Delta P^2 B \Delta KC)' + (\Delta P^2 B \Delta KC)] = 0 \end{aligned} \quad (130)$$

Lembrando lema 16 e desprezando termos em ϵ^2 de (130),

obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta P = \int_0^{\infty} \exp [(A - B K_1 C)t] &' [-(\Delta K C)' (B'P - R K_1 C) \\ &- (B'P - R K_1 C)' (\Delta K C)] \exp [(A - B K_1 C)t] dt \end{aligned} \quad (131)$$

$$\begin{aligned} \Delta P^2 = \int_0^{\infty} \exp [(A - B K_1 C)t] &' [C' \Delta K' R \Delta K C - (\Delta P B \Delta K C)' \\ &- (\Delta P B \Delta K C)] \exp [(A - B K_1 C)t] dt \end{aligned} \quad (132)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\Delta P X_0] &= 2 \text{Tr} \left\{ \int_0^{\infty} \exp [(A - B K_1 C)t] &' [-(B'P - R K_1 C)' \Delta K C] \right. \\ &\quad \left. \exp [(A - B K_1 C)t] dt X_0 \right\} \\ &= - 2 \text{Tr} \{ V(B'P - R K_1 C)' \Delta K C \} \end{aligned} \quad (133)$$

onde V é solução de:

$$(A - B K_1 C)' V + V(A - B K_1 C) + X_0 = 0 \quad (134)$$

Lembrando lema 1 e das expressões (128) e (133) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial K} &= 2 [C V (R K_1 C - B'P)]' \\ &= 2 (R K_1 C - B'P) V C' \end{aligned} \quad (135)$$

Além disso, de (132):

$$\text{Tr} (\Delta P^2 X_0) = \text{Tr} \{ \Delta K' (R \Delta K C - 2 B' \Delta P) V C' \} \quad (136)$$

Considerando que estamos analisando perturbações de segunda ordem em P devida a perturbação ΔK em torno de K, podemos fazer $\Delta P \approx 0$ e de (136) obtemos:

$$\text{Tr}(\Delta P^2 X_0) = \text{Tr}(C V C' \Delta K' R \Delta K) \quad (137)$$

Tomando agora somente termo de segunda ordem da expansão de $J(K + \epsilon \Delta K)$, temos:

$$\frac{\partial J}{\partial K} = \frac{\epsilon}{2} R \Delta K C V C' \quad (138)$$

Lembrando (135), (138) fornece:

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{2}{\epsilon} R^{-1} \frac{\partial J}{\partial K} (C V C')^{-1} \\ &= \frac{4}{\epsilon} [K_1 - R^{-1} B' P V C' (C V C')^{-1}] \end{aligned} \quad (139)$$

ou seja, numa iteração k e com $\alpha_k > 0$:

$$K_{k+1} = K_k - \alpha_k \Delta K_k = K_k - \alpha_k [K_k - R^{-1} B' P_k V_k C' (C V_k C')^{-1}] \quad (140)$$

Note que para $\alpha_k = 1$ obtemos:

$$K_{k+1} = R^{-1} B' P_k V_k C' (C V_k C')^{-1} \quad (141)$$

e que se $C = I$, obtemos o procedimento apresentado em Kleinman (1968). Cabe notar também que a expressão (136) corresponde a $H(\alpha)$ obtido por Milani (1980), sendo (137) equivalente a $H_2(\alpha)$.

Podemos sugerir finalmente o algoritmo que segue:

Passo 1: Determinar K_0 tal que $(A - B K_0 C)$ seja estável e fazer $k = 0$.

Passo 2: Calcular P_k e V_k , soluções de:

$$(A - B K_k C)' P_k + P_k (A - B K_k C) + Q + C' K_k' R K_k C = 0 \quad (142)$$

$$(A - B K_k C)' V_k + V_k (A - B K_k C) + X_0 = 0$$

Passo 3: Determinar $\frac{\partial J}{\partial K} = 2(R K_k C - B' P_k) V_k C'$ e testar se $\|\partial J / \partial K\| \leq \epsilon$. Caso afirmativo, K_k é solução e $J = \text{Tr}[P_k X_0]$. Caso contrário ir para Passo 4.

Passo 4: Calcular $\Delta K_k = K_k - R^{-1} B' P_k V_k C' (C V_k C')^{-1}$ e definir $D_k = \text{bloc-diag } \Delta K_k$.

Passo 5: Determinar:

$$\min_{\alpha_k \geq 0} J(K_k - \alpha_k D_k) = \text{Tr}[P(K_k - \alpha_k D_k) X_0] \quad (143)$$

tal que $(K_k - \alpha_k D_k) \in \Omega(S)$, definido em (58). Seja α_k^* a solução de (143).

Passo 6: Fazer $K_{k+1} = K_k - \alpha_k^* D_k$, $k = k+1$ e ir para Passo 2.

I.8 CONCLUSÕES

Procuramos neste capítulo abranger de uma maneira sucinta os conceitos, teoremas e definições que serão largamente utilizados no decorrer dos capítulos subsequentes.

Em primeiro lugar, abordamos os conceitos e definições sobre estabilidade de sistemas dinâmicos na ótica do segundo método de Lyapunov e, em seguida, extendemos para funções vectoriais de Lyapunov e princípio de comparação. Na seção 5 procuramos enumerar os resultados mais significativos encontrados na literatura nos últimos tempos, sobre a questão referente à otimização em sistemas de controle com restrições de natureza estrutural. Em seguida, analisamos com particular atenção o problema linear quadrático com horizonte infinito, onde deduzimos a equação de Riccati, contínua e discreta, e apresentamos as respectivas propriedades.

Na seção 7 desenvolvemos o método de Newton aproximado para problemas de controle ótimo com restrições estruturais.

CAPÍTULO II

ESTABILIZAÇÃO DESCENTRALIZADA DE SISTEMAS DINÂMICOS CONTÍNUOS

II.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo é inteiramente dedicado ao estudo de estabilidade de sistemas dinâmicos contínuos de grande porte, usando a metodologia proposta por Lyapunov (Siljak, 1978; Geromel, 1979). Mais especificamente, propomos estabelecer a estabilidade global do sistema dinâmico, aproveitando a estrutura particular de sistemas interconectados, caracterizados por um conjunto de sub-sistemas e uma determinada estrutura de interconexão. Portanto, procuramos determinar um conjunto de controles descentralizados suficientes para garantir a estabilidade do sistema global e que estejam sujeitos a restrições do tipo estruturais (Geromel e Yamakami, 1982).

Subdividimos o estudo em três partes. Em primeiro lugar, estabelecemos as condições de estabilidade para sistemas lineares contínuos com controladores descentralizados (Yamakami e Geromel, 1981 a,b). Encontramos na literatura, vários estudos sobre este assunto e dentre eles podemos citar os de Davison (1974), Ikeda e Siljak (1978), Sezer e Huseyin (1978) e Saberi e Khalil (1982). No final, fazemos algumas comparações de ordem numérica envolvendo os métodos aqui desenvolvidos e os existentes na literatura.

Numa segunda etapa, fazemos uma aplicação dos resultados anteriores aos observadores de estado. Nesta área, podemos citar os trabalhos pioneiros de Sanders e outros (1976) e Siljak e Vukcevic (1978) como referências que, entretanto apresentam resultados de difícil aplicação prática, como evidenciamos em alguns exemplos. Neste caso as propriedades são estabelecidas explorando os aspectos de dualidade e de separação entre estimação e controle.

Finalmente, consideramos os sistemas dinâmicos não lineares, invariantes no tempo. Como sub-produto deste estudo, deduzimos uma metodologia de estimação da região de estabilidade (Yamakami e Geromel, 1981 b). Fazemos comparações do nosso método com os de Siljak e Vukcevic (1977) e Saberi e Khalil (1982).

As aplicações numéricas e comparações envolvendo as diversas metodologias encontradas na literatura e as que aqui

propomos são feitas no item seguinte e os resultados são analisados.

II.2 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Antes de iniciarmos o estudo de estabilidade, fazemos nesta seção, a completa caracterização da classe de sistemas que estudamos neste capítulo.

Como comentado na introdução, os objetivos de nossa análise são sistemas dinâmicos interconectados sujeitos a restrições do tipo estruturais, ou seja, são sistemas dinâmicos formados por um número de sub-sistemas interligados entre si através de uma determinada estrutura de interconexão.

Aoki (1972) e mais tarde Sandell e outros (1978) identificaram alguns sistemas deste tipo, referindo-se especificamente a sistemas de grande porte. Certamente, para o sistema ser interconectado não é necessário que seja de grande porte. Entretanto os estudos nesta área se multiplicaram por ter como objetivo análise e determinação de controles descentralizados.

Seja S um tal sistema dinâmico composto de N sub-sistemas S_i , $i = 1, 2, \dots, N$, interconectados:

$$(S_i) \begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij}(x) x_j \\ y_i = C_i x_i \end{cases} \quad i=1, \dots, N \quad (1)$$

onde $x_i \in R^{n_i}$ representam os estados do i -ésimo sub-sistema, $u_i \in R^{m_i}$ representam os controles, $y_i \in R^{r_i}$ são as saídas e tais que $\sum_{i=1}^N n_i = n$, $\sum_{i=1}^N m_i = m$ e $\sum_{i=1}^N r_i = r$. As matrizes A_i , B_i , C_i e $A_{ij}(x)$ têm dimensões apropriadas. Além disso, por hipótese assumimos que todos os pares $[A_i, C_i]$ são completamente observáveis e todos os pares $[A_i, B_i]$ são completamente controláveis.

Nosso propósito é determinar um controle local para

cada sub-sistema S_i (chamado controle descentralizado) do tipo:

$$u_i = -K_i x_i \quad i=1, \dots, N \quad (2)$$

de tal forma que o sistema global S seja assintoticamente estável.

Apesar das hipóteses de controlabilidade e de observabilidade feitas, geralmente não é possível determinar estes ganhos descentralizados K_i , $i=1, \dots, N$ com esta propriedade, como mostrado em Aoki (1972) e mais tarde em Geromel (1979). Em vista disto, consideramos a seguinte hipótese adicional:

- as matrizes de interconexão entre quaisquer dois sub-sistemas i e j devem ser fatoráveis na forma:

$$A_{ij}(x) = B_i L_{ij}(x) C_j \quad i \neq j = 1, \dots, N \quad (3)$$

Portanto, $L_{ij}(x)$ deve satisfazer a igualdade: $L_{ij}(x) = B_i^+ A_{ij}(x) C_j^+$, onde B_i^+ e C_j^+ são matrizes pseudo-inversas de Moore-Penrose (Ben Noble, 1977). Isto gera uma classe de sistemas lineares invariantes no tempo, que podemos representar por:

$$C^* = \{S = \bigcup_{i=1}^N S_i \mid A_{ij}(x) - B_i B_i^+ A_{ij}(x) C_j^+ C_j = 0, i \neq j = 1, \dots, N\} \quad (4)$$

A partir de (1) e (3), podemos escrever:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + B L(x) C x(t) \quad (5)$$

ou, alternativamente, considerando (2):

$$(S) \begin{cases} \dot{x}(t) = (A + B L(x) C - B K) x(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (6)$$

onde as matrizes A , B , C e K são bloco-diagonais compostas de N blocos cada uma: $A = \text{bloc-diag} [A_1, A_2, \dots, A_N]$, $B = \text{bloc-diag} [B_1, B_2, \dots, B_N]$, $C = \text{bloc-diag} [C_1, C_2, \dots, C_N]$ e $K = \text{bloc-diag} [K_1,$

$K_2, \dots, K_N$). $L(x)$ é a matriz de interconexão dos sub-sistemas, de dimensão $(m \times r)$ e definida como:

$$L(x) = \begin{bmatrix} L_{11}(x) & L_{12}(x) & \dots & L_{1N}(x) \\ L_{21}(x) & L_{22}(x) & \dots & L_{2N}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{N1}(x) & L_{N2}(x) & \dots & L_{NN}(x) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Graficamente, podemos esquematizar o sistema (6) como na Figura 1:

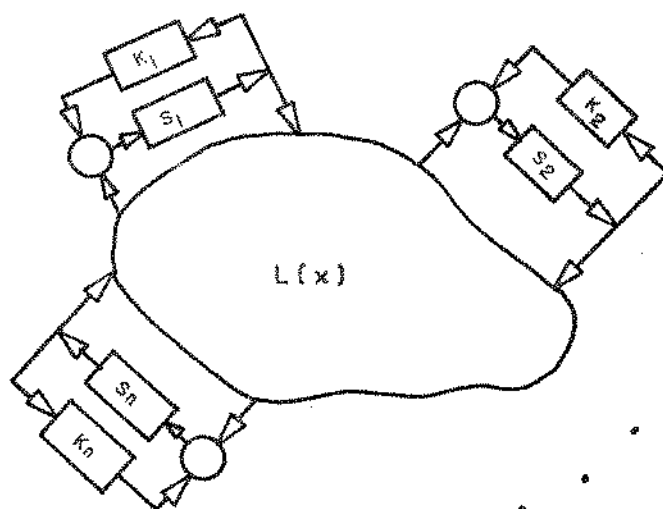


FIGURA 1 - Sistema interconectado

A seguir vamos estabelecer as condições que um sistema do tipo (6) deve satisfazer para que seja estabilizável através de controles locais.

II.3 CONTROLE DESCENTRALIZADO ESTABILIZANTE PARA SISTEMAS LINEARES

Nesta seção e na seguinte analisamos sistemas dinâmicos lineares. Portanto, a matriz de interconexão é independente

de estado, ou seja $L(x) = L$ (independe de x).

Devido a hipótese de controlabilidade e observabilidade de cada sub-sistema isolado, os pares $[A,B]$ e $[A,C]$ são completamente controláveis e completamente observáveis, respectivamente. Com isso, podemos dizer que os pares $[A + BLC, B]$ e $[A + BLC, C]$ são completamente controláveis e completamente observáveis para todo $L \in R^{m \times r}$ (Wonhan, 1974). Isto nos permite enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1: Sejam as matrizes Q e R simétricas e definidas positivas ($Q = Q' > 0$ e $R = R' > 0$). Então:

$$K = R^{-1}B'P \quad (8)$$

$$A'P + P A - P B R^{-1}B'P + C'Q C = 0$$

fornece o sistema (6) assintoticamente estável se Q e R satisfazem a seguinte restrição matricial:

$$Q - L'R L > 0 \quad (9)$$

Prova: Como $[A,B]$ é controlável e $[A,C]$ é observável a solução definida positiva da equação de Riccati (8) é única e nos fornece uma função de Lyapunov $v(x) = x'Px$. Desenvolvendo sua derivada em relação ao tempo e em vista de (6) e (8), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dv(x(t))}{dt} &= \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = \\ &= x'[(A + BLC - B R^{-1}B'P)'P + P(A + BLC - B R^{-1}B'P)]x \end{aligned} \quad (10)$$

Adicionando e subtraindo $C'L'RLC$ e tendo em vista (8), obtemos:

$$\frac{dv(x(t))}{dt} = - x'[C'QC - C'L'RLC + (LC - R^{-1}B'P)'R(LC - R^{-1}B'P)]x \quad (11)$$

Fazendo $G = LC - R^{-1}B'P$ e lembrando que $y = Cx$:

$$\begin{aligned} \frac{dv(x(t))}{dt} &= -y'(Q - L'RL)y - x'G'RGx \\ &\leq -y'(Q - L'RL)y \end{aligned} \quad (12)$$

Finalmente, levando em consideração (9), temos que $\dot{v}(x(t)) \leq 0$. Isto prova a estabilidade do sistema global. A estabilidade assintótica pode ser provada, lembrando que a solução de (6) é $x(t) = \exp \{(A + BG)t\}x_0$ e que um $x_0 \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\dot{v}(x(t)) = 0 \quad \forall t \geq 0$ não existe. Isto porque, caso ocorra, teríamos:

$$\begin{aligned} x_0' e^{(A+BG)'t} G'RG e^{(A+BG)t} x_0 &= 0 \\ x_0' e^{(A+BG)'t} C'(Q - L'RL)C e^{(A+BG)t} x_0 &= 0 \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

o que implica:

$$C e^{At} x_0 = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (14)$$

que é impossível pois o par $[A, C]$ é observável. Isto conclui a prova do teorema.

Este teorema prova a existência de um conjunto de ganhos que estabilizam o sistema global (6). Este conjunto é formado pelos ganhos K que satisfazem (8), determinados a partir de Q e R que satisfazem (9). Portanto, podemos selecionar estas matrizes satisfazendo (9) tal que o ganho fornecido por (8) tenha uma estrutura pré-especificada. Fornecemos, a seguir uma maneira de obter controle descentralizados, através do seguinte teorema:

Teorema 2: O sistema (6) é assintoticamente estável com o controle descentralizado:

$$K_i = B_i' P_i \quad i=1, \dots, N \quad (15)$$

$$A_i' P_i + P_i A_i - P_i B_i B_i' P_i + \beta C_i' C_i = 0$$

onde β é um escalar positivo tal que:

$$\beta > \max_x \frac{x' L' L x}{x' x} = \|L\|^2 \quad (16)$$

Demonstração: No teorema anterior, fazendo $Q = qI$ e $R = pI$, obtemos:

$$\frac{q}{p} = \beta > \|L\|^2 \quad (17)$$

e de (8) temos que $K = B'(\frac{\tilde{P}}{p})$ onde:

$$A'(\frac{\tilde{P}}{p}) + (\frac{\tilde{P}}{p})A - (\frac{\tilde{P}}{p})B B'(\frac{\tilde{P}}{p}) + (\frac{q}{p})C' C = 0 \quad (18)$$

Como em (18) todas as matrizes são bloco-diagonais, é fácil de ver que, fazendo $P = (\frac{\tilde{P}}{p})$, obtemos (15). Portanto o teorema está provado.

A expressão (16) define a condição necessária e suficiente para que se tenha $Q - L'RL > 0$ com $Q = qI$ e $R = pI$. No entanto, para determinar o valor de β é preciso manipular a matriz L de dimensão $(m \times r)$, o que dependendo da dimensão do sistema global pode ser uma tarefa bastante difícil. Relaxando a condição necessária, podemos obter uma maneira mais fácil para determinar controles que estabilizam o sistema global. O seguinte teorema estabelece o procedimento.

Teorema 3: O sistema (6) é assintoticamente estável com o controle descentralizado:

$$K_i = R_i^{-1} B_i' P_i \quad i=1, \dots, N \quad (19)$$

$$A_i' P_i + P_i A_i - P_i B_i R_i^{-1} B_i' P_i + C_i' Q_i C_i = 0$$

onde $Q_i \geq \beta_i I_i$ e β_i são escalares tais que a matriz

$$F = \{f_{ij} = -\beta_i \delta_{ij} + \|L_i' R L_j\|, i=1, \dots, N, j=1, \dots, N\} \quad (20)$$

onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker, satisfaz a condição de

Sevastyanov - Kotelyanski (Siljak, 1978).

Demonstração: Assumindo em (8) $R = \text{bloc-diag} (R_1, R_2, \dots, R_N)$ e $Q = \text{bloc-diag} (Q_1, \dots, Q_N)$ obtemos (19). Com isso, a condição (9) implica que o sistema linear $\dot{Z} = (-Q + L'RL)Z$ deve ser assin toticamente estável. Alternativamente pode-se escrever:

$$\dot{Z}_i = -Q_i Z_i + \sum_{j=1}^N L_i' R L_j Z_j \quad i=1 \dots N \quad (21)$$

onde $L_i \in R^{m \times r_i}$ são tais que $L = [L_1, L_2, \dots, L_N]$. Como Q_i são matrizes simétricas definidas positivas, podemos considerar $v_i(Z_i) = \|Z_i\|$ (Norma Euclidiana) como função de Lyapunov, para todos os sub-sistemas desacoplados $\dot{Z}_i = -Q_i Z_i$. Lembrando que $\|Z_i\| = (Z_i' Z_i)^{1/2}$, derivando $v_i(Z_i)$ em relação ao tempo, obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{v}_i(Z_i) &= - \frac{Z_i' Q_i Z_i}{Z_i' Z_i} v_i(Z_i) + \nabla v_i' \sum_{j=1}^N L_i' R L_j Z_j \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q_i) v_i(Z_i) + \|\nabla v_i\| \sum_{j=1}^N \|L_i' R L_j\| \|Z_j\| \end{aligned} \quad (22)$$

Como $\|\nabla v_i\| = 1$, podemos re-escrever (22) como:

$$\begin{aligned} \dot{v}_i(Z_i) &\leq -\lambda_{\min}(Q_i) v_i(Z_i) + \sum_{j=1}^N \|L_i' R L_j\| v_j \\ &\leq -\beta_i v_i + \sum_{j=1}^N \|L_i' R L_j\| v_j \quad i=1 \dots N \end{aligned} \quad (23)$$

Definindo $V' = [v_1, \dots, v_N]$ e considerando (20), a desigualdade (23) pode ser re-escrita como:

$$\dot{V} \leq F V \quad (24)$$

É sabido que a estabilidade assintótica do chamado sistema de comparação $\dot{W} = F W$, implica o mesmo para (21) (Germel, 1979). A matriz $F \in R^{N \times N}$ tem seus elementos fora da diago-

nal não negativos e é assintoticamente estável se e só se F satisfaz a condição de Sevastyanov - Kotelyanski:

$$(-1)^k \Delta_k(F) > 0 \quad (25)$$

onde $\Delta_k(F)$ é o menor de ordem k de F . Isto prova o teorema.

Corolário 4: O sistema global (6) é assintoticamente estável com o controle descentralizado (19), se $\beta_i > N \|R\| \|L_i\|^2$, onde $Q_i = \beta_i I_i$.

Demonstração: Como o vetor $V \in R^N$ é não-negativo, com (24) obtemos:

$$\dot{V} \leq F V \leq \tilde{F} V \quad (26)$$

onde

$$\tilde{F} = \{\tilde{f}_{ij} = -\beta_i \delta_{ij} + \|L_i\| \|R\| \|L_j\|, i, j=1 \dots N\} \quad (27)$$

Desta forma, a estabilidade assintótica do sistema de comparação $\dot{\tilde{W}} = \tilde{F} \tilde{W}$ implica o mesmo para (21) e será assintoticamente estável se e somente se existir um vetor positivo $\tilde{W} = [\tilde{w}_1 \dots \tilde{w}_N]$ tal que $\tilde{F} \tilde{W} < 0$, o que é equivalente à condição de Sevastyanov - Kotelyanski (25) (Fiedler e Ptak, 1962).

Escolhendo $\tilde{w}_j = 1/\|L_j\|$, $j=1, \dots, N$, obtemos:

$$\beta_i > N \|R\| \|L_i\|^2 \quad i=1 \dots N \quad (28)$$

o que prova o corolário.

Apesar do resultado acima fornecer uma condição apenas suficiente, ele é animador uma vez que calcular β_i em (28) é bem mais fácil do que calcular β em (16) pois, enquanto $\|L\|$ envolve uma matriz ($r \times r$), $\|L_i\|$ envolve o cálculo de apenas um auto-valor de uma matriz de dimensão ($r_i \times r_i$). O cálculo de $\|R\|$ também é fácil pois $R = \text{bloc-diag} \{R_1, R_2, \dots, R_N\}$ e $\|R\| = \max \{\|R_i\|, i = 1 \dots N\}$.

Do teorema 2, verificamos que existe um compromisso entre o ganho e o grau de estabilidade, pois P_i em (15) é função crescente de β e a condição de estabilidade é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{v} &\leq -y'(\beta I - L'L)y \\ &\leq -(\beta - \|L\|^2) \|y\|^2\end{aligned}\quad (29)$$

Ou seja, quanto menor o β , "menor" K_i mas por outro lado, isto deteriora o grau de estabilidade. O teorema seguinte fornece uma maneira de eliminar esta singularidade:

Teorema 4: O sistema global (6) será assintoticamente estável com um grau de estabilidade $\alpha > 0$, se fizermos:

$$K_i = B_i' P_i \quad i=1 \dots N \quad (30)$$

$$(A_i + \alpha I_i)' P_i + P_i (A_i + \alpha I_i) - P_i B_i B_i' P_i + \beta C_i' C_i = 0$$

com $\beta = \|L\|^2$.

Prova: Derivando a função de Lyapunov $v(x) = x'Px$ em relação ao tempo, onde P é dado por (30), temos:

$$\dot{v}(x) = x'[(A + BLC - BB'P)P + P(A + BLC - BB'P)]x \quad (31)$$

Somando e subtraindo $2\alpha P + C'L'LC$, obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{v} &= x'[-\beta C'C + C'L'LC - (LC - B'P)'(LC - B'P) - 2\alpha P]x \\ &= -y'(\beta I - L'L)y - x'G'Gx - 2\alpha x'Px\end{aligned}\quad (32)$$

onde $G = LC - B'P$. Portanto:

$$\dot{v} \leq -2\alpha v(x) \quad (33)$$

o que prova o teorema.

Alguns exemplos de aplicação numérica são feitas no final deste capítulo para compararmos os resultados obtidos com os encontrados na literatura.

A seguir estendemos os resultados anteriores para os observadores de estado.

II.4 OBSERVADORES DE ESTADO E A PROPRIEDADE DE SEPARAÇÃO

Neste item, mostramos que os resultados obtidos no item anterior, podem ser aplicados para a determinação de observadores de estado descentralizados, para um sistema contínuo e linear, dado em (1).

Suponhamos que desejamos determinar os estados de cada sub-sistema local S_i , $i = 1, \dots, N$, através de um observador local (Siljak e Vukcevic, 1978):

$$(\hat{S}_i) \begin{cases} \dot{\hat{x}}_i(t) = A_i \hat{x}_i(t) + B_i u_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij} \hat{x}_j(t) + H_i (y_i(t) - C_i \hat{x}_i(t)) \\ \hat{x}_i(0) = \hat{x}_{i0} \end{cases} \quad i=1 \dots N \quad (34)$$

A implementação de um observador local num sistema interconectado, pode ser esquematizado graficamente como na Figura 2.

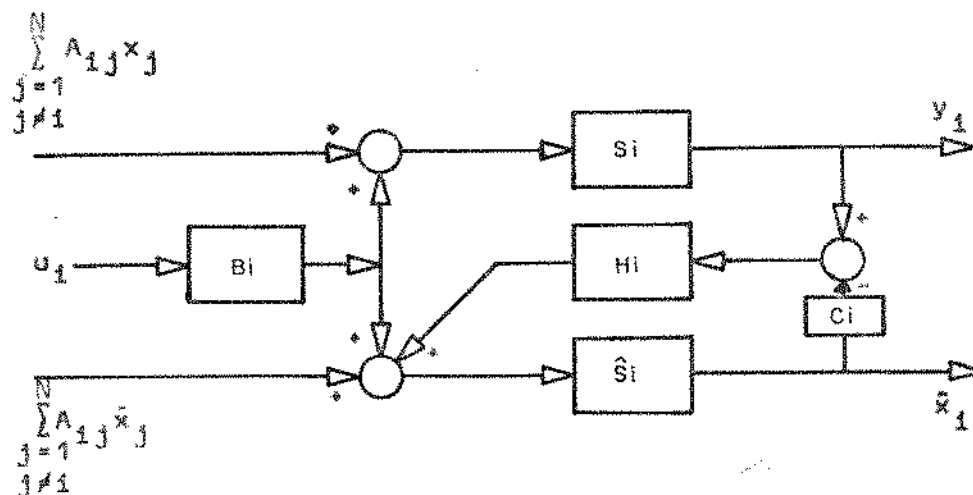


FIGURA 2 - A estrutura do observador local relativo ao sub-sistema i .

Definindo erro de observação como sendo $e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$, de (1) e (34), obtemos:

$$\dot{e}_1(t) = (A_1 - H_1 C_1) e_1(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^N A_{1j} e_j(t) \quad i=1 \dots N \quad (35)$$

$$e_1(0) = x_1(0) - \hat{x}_1(0)$$

Supondo que $S = \bigcup_{i=1}^N S_i$ pertence a C^* dado em (4), podemos então escrever o erro global como:

$$\dot{e}(t) = (A + BLC - HC)e(t)$$

$$e(0) = x(0) - \hat{x}(0) \quad (36)$$

e o problema é determinar o ganho H , bloco-diagonal $(H_1, \dots, H_N)$ tal que (36) seja assintoticamente estável. Para isso, pelos mesmos motivos indicados no início do item anterior, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5: Sejam Q e R matrizes simétricas e definidas positivas. Então:

$$H = W C' R^{-1} \quad (37)$$

$$A W + W A' - W C' R^{-1} C W + B Q B' = 0$$

fornece um observador assintoticamente estável se Q e R guardam entre si a relação:

$$Q - L R L' > 0 \quad (38)$$

Prova: O sistema dado em (36) será assintoticamente estável se o seu dual:

$$\dot{a}(t) = (A' + C' L' B' - C' H') a(t) \quad (39)$$

também for. Assim, como na prova do teorema 1, $v(a(t)) = a'Wa$ é função de Lyapunov, onde W é a única solução definida positiva de (37). Tomando a derivada em relação ao tempo de $v(a(t))$, temos:

$$\dot{v}(a) = -z'(Q - LRL')z - a'G'RGa \leq -z'(Q - LRL')z \quad (40)$$

onde $z = B'a$ e $G = L'B' - R^{-1}C'W$. Para provar a estabilidade assintótica basta lembrar que $a(t) = \exp\{(A' + C'G)t\}a(0)$ e que não pode existir $t \geq 0$ tal que $\dot{v}(a) = 0$ pois caso isto ocorra, teríamos:

$$a'(0) e^{(A'+C'G)'t} G'R G e^{(A'+C'G)t} a(0) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (41)$$

$$a'(0) e^{(A'+C'G)'t} B(Q - L'RL)B e^{(A'+C'G)t} a(0) = 0$$

o que implica que:

$$B' e^{(A'+C'G)t} a(0) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (42)$$

o que é impossível pois $[A, B]$ é completamente controlável. Isto conclui a prova do teorema.

É interessante notar que o teorema e a sua prova acima são bastante semelhantes ao teorema 1 e à prova deste. Todos os teoremas apresentados para o controle descentralizado podem ser generalizados para o observador descentralizado usando a idéia de correspondência dual de matrizes:

Primal	Dual
A	A'
B	C'
C	B'
L	L'
K	H'
controle descentralizado	observador descentralizado

Com esta tabela, todos os teoremas e as suas provas, duais aos fornecidos para o controle descentralizado, seguem imediatamente.

Com isto, dispomos de uma metodologia relativamente simples para estimação dos estados locais. No item II.3 desenvolvemos uma maneira de implementar controles descentralizados $u_i = -K_i x_i$, $i = 1 \dots N$ de tal forma que mantenha o sistema global estável. Em situações onde os estados não são disponíveis, torna-se necessário a adaptação de observadores locais que forneçam os estados para o controladores locais. Neste caso temos:

$$u_i = -K_i \hat{x}_i \quad i=1 \dots N \quad (43)$$

e o esquema pode ser colocado como na Figura 3. Para que o sistema conjunto, observadores e controles locais, seja viável é preciso garantir a estabilidade do sistema global. Isto é possível graças à propriedade de separação verificada pelo conjunto observador e controle locais. Podemos mostrar isto, a partir das equações dinâmicas. De (5) e (43) temos:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A + BLC)x(t) - BK \hat{x}(t) \quad (44)$$

e de (6) e (34) temos:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A + BLC - BK - HC)\hat{x}(t) + HCx \quad (45)$$

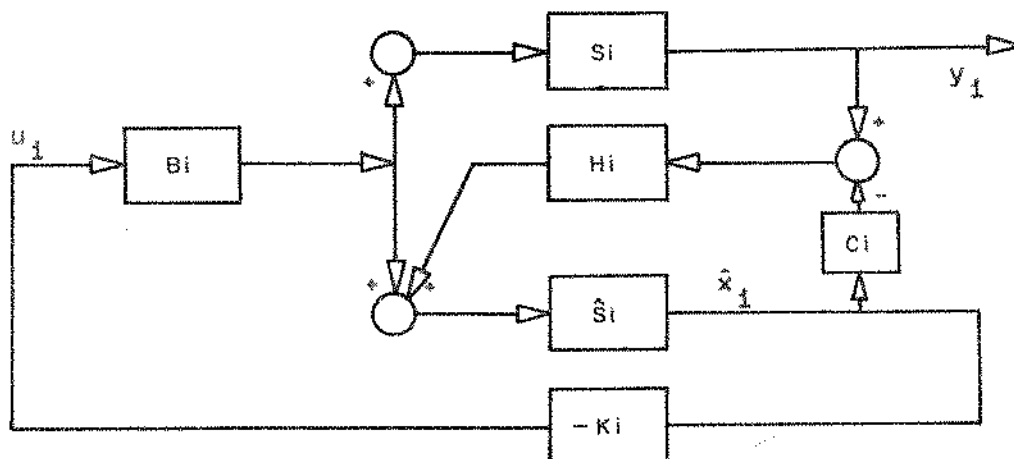


FIGURA 3 - Controle local utilizando um observador local.

Tomando a dinâmica do sistema e do observador simultaneamente obtemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BLC & -BK \\ HC & A + BLC - BK - HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (46)$$

Aplicando a transformação:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (47)$$

em (46), ficamos com:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BLC - BK & BK \\ 0 & A + BLC - HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (48)$$

Portanto, se garantirmos a estabilidade do controle e do observador, temos o sistema conjunto estável.

Da mesma forma como no caso de controles descentralizados na seção II.3, nesta seção deduzimos as condições para obtermos observadores descentralizados, numericamente fácil de serem satisfeitas. Mostramos que a implementação de um controle descentralizado utilizando observadores descentralizados é perfeitamente possível.

II.5 EXTENSÃO AOS SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES E ESTIMAÇÃO DO DOMÍNIO DE ESTABILIDADE

Nesta seção estudamos a estabilização descentralizada de uma classe de sistemas dinâmicos não-lineares e invariantes no tempo. A classe de sistemas aqui tratada é aquela definida na seção II.2, com a não linearidade localizada na matriz de

interconexão $L(x)$. Portanto, esta seção pode ser considerada com uma extensão dos resultados anteriores, obtidos para sistemas dinâmicos lineares. Como sub-produto do procedimento para determinar controle descentralizado que estabiliza o sistema global, propomos uma metodologia para estimar a região de estabilidade destes sistemas.

Neste caso, a equação dinâmica do estado é da forma como dado em (6) e a matriz de interconexão $L(x) \in R^{m \times r}$ é dada em (7). Cabe lembrar que as matrizes A , B , C e K são blocodiagonais como no caso linear e estudamos sistemas pertencentes à classe C^* definida em (4).

Assim sendo, devemos considerar dois problemas:

- a) determinação do controle linear descentralizado $u_i = -K_i x_i$, $i = 1 \dots N$, tal que $x_* = 0$ seja assintoticamente estável.
- b) estimação da região de estabilidade $x^* \in V^* \subseteq R^n$ para o controle determinado em a).

Vamos assumir que a matriz de interconexão $L(x)$ é tal que, para $E \in R_+$ tal que $E > \|L(0)\|^2$, o conjunto:

$$\Omega(E) = \{x \in R^n \mid \|L(x)\|^2 \leq E\} \quad (49)$$

não é vazio e define uma vizinhança fechada de $x_* = 0$. Então, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 6: O estado $x_* = 0$ do sistema global (S) é assintoticamente estável e tem uma região de estabilidade $\hat{V}_* \subseteq V_*$ se a matriz de ganho K é escolhida tal que $K = R^{-1}B'P$, onde P é a única solução simétrica e definida positiva da equação de Riccati:

$$A'P + P A - P B R^{-1}B'P + C'Q C = 0 \quad (50)$$

com $Q = Q' > 0$ e $R = R' > 0$ e

$$Q > L'(x)R L(x) \quad \forall x \in \hat{V}_* \quad (51)$$

Prova: Como na prova do teorema 1, escolhendo $v(x) = x'Px$ e derivando em relação ao tempo obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{v}(x) &= -y' [Q - L'(x)R L(x)] y - x' G'(x)R G(x)x \\ &\leq -y' [Q - L'(x)R L(x)] y\end{aligned}\quad (52)$$

onde $G(x) = L(x)C - R^{-1}B'P$. Portanto $\dot{v}(x) \leq 0$, $\forall x \in \hat{V}_*$. A solução de (6) é dada por:

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)B G(x(\tau)) x(\tau) d\tau \quad (53)$$

onde $\Phi(t) = \exp [At]$. Segue-se, portanto, que um $x_0 \neq 0$ tal que $\dot{v}(x(t)) = 0$, $\forall t \geq 0$ não pode existir, pois, caso contrário, de (52) teríamos que $G(x(t))=0$ implicando que:

$$C e^{At} x_0 = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (54)$$

o que não é possível desde que o par $[A,C]$ é observável.

A partir dos resultados deste teorema podemos fazer duas considerações. A primeira é sobre a estimação da região de estabilidade, ou seja, é preciso determinar uma região limitada tal que a estabilidade do sistema global seja possível de ser estabelecida. Isto porque a restrição (51) é função do estado e é necessário que seja satisfeita para toda trajetória. Podemos conseguir isto fazendo com que a região de estabilidade V_* seja estimada por $\hat{V}_*$ onde:

$$\hat{V}_* = \{x \in R^n \mid v(x) \leq v_0\} \quad (55)$$

sendo v_0 um escalar positivo a ser determinado tal que $\hat{V}_* \subseteq \Omega(E_*)$ onde E_* pode ser definido como:

$$\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(R)} = E_* > \|L(0)\|^2 \quad (56)$$

para um dado par (Q, R) escolhido, tal que a restrição (51) seja satisfeita. Isto é possível uma vez que (51) define uma vizinhança não vazia de $x_* = 0$. Com isto, asseguramos que para um dado $x_0 \in \hat{V}_*$, toda trajetória $x(t)$, $t \geq 0$ está contida em $\hat{V}_*$.

Podemos melhor visualizar estes aspectos, analisando os domínios de $Q > L'(x)R L(x)$ e de $\Omega(E_*)$. De (56) temos que $\lambda_{\min}(Q) \geq \|L(x)\|^2$ $\lambda_{\max}(R) \geq \|L'(x)R L(x)\|$ e portanto $\Omega(E_*)$ está contido no domínio da restrição (51). Como $\Omega(E_*)$ é independente da função de Lyapunov, o domínio real de estabilidade é dado por $\hat{V}_* \subseteq \Omega(E_*)$ definido em (55). Ilustramos na Figura 4 os domínios de $\Omega(E_*)$ e de $\hat{V}_*$.

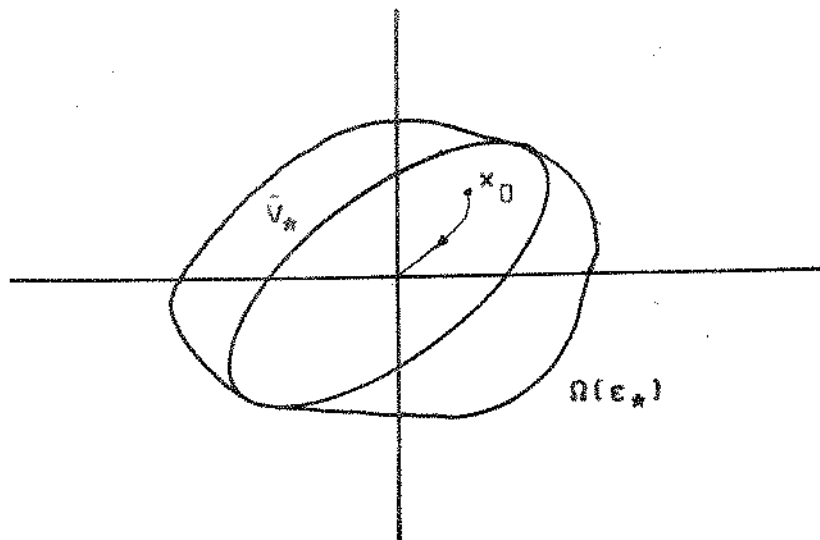


FIGURA 4 - Interpretação geométrica do teorema 6.

A segunda consideração é sobre a estrutura do ganho. Como queremos um controle descentralizado, podemos escolher Q e R tal que isto aconteça. O teorema que segue nos fornece estas condições:

Teorema 7: O estado $x_* = 0$ do sistema global S é assintoticamente estável, se a matriz de ganho descentralizado $K = \text{bloc-diag}(K_1, K_2, \dots, K_N)$ é escolhida como $K_i = B_i' P_i$ onde P_i é a única solução simétrica e definida positiva da equação de Riccati:

$$A_i' P_i + P_i A_i - P_i B_i B_i' P_i + \beta C_i' C_i = 0 \quad i=1 \dots N \quad (57)$$

e uma estimação do seu domínio de estabilidade é dado por $\tilde{V}_*$ em (55) com v_0 tal que:

$$v_0 = \max_x \{ \tau \mid \tilde{V}_*(\tau) \subseteq \Omega(\beta) \} \quad (58)$$

para qualquer $\beta > \|L(0)\|^2$ e $\tilde{V}_*(\tau) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^N x_i' P_i x_i \leq \tau\}$

Prova: Fazendo $Q = \beta I$ e $R = I$, (50) nos fornece P bloco diagonal (e portanto, K será também) obtendo facilmente (57). Além disso, a restrição (51) é satisfeita para qualquer $x \in \Omega(\beta)$ e portanto (58) nos fornece a melhor estimação da região de estabilidade de x_* , com a função de Lyapunov dada por:

$$v(x) = \sum_{i=1}^N v_i(x_i) = \sum_{i=1}^N x_i' P_i x_i \quad (59)$$

e o teorema está provado.

O teorema a seguir estabelece as condições para estabilidade exponencial do sistema global.

Teorema 8: O sistema global (6) será exponencialmente estável com um grau de estabilidade α se fizermos:

$$K_i = B_i' P_i \quad i=1 \dots N$$

$$(A_i + \alpha I_i)' P_i + P_i (A_i + \alpha I_i) - P_i B_i' B_i P_i + \beta C_i' C_i = 0 \quad (60)$$

e o domínio de estabilidade ainda é dado como no teorema 7.

Prova: A prova deste teorema segue imediatamente do teorema 6, fazendo como no teorema 7, $Q = \beta I$ e $R = I$. Além disto a região de estabilidade ainda é $\tilde{V}_*$ dado em (58), como no teorema 7.

A seguir, é interessante fazermos análises de dois casos particulares: o caso linear que é um caso particular com $L(x)$ constante e o caso bilinear, onde $L(x)$ é uma função linear

de x .

a) Caso linear: neste caso L independe de x e portanto (57) dá o controle descentralizado que estabiliza o sistema global, desde que se tome $\beta > \|L\|^2$, o que implica $\Omega(\beta) \equiv \mathbb{R}^n$ e portanto $v_0 = \infty$, implicando que $\tilde{V}_* \equiv \Omega(\beta) = \mathbb{R}^n$.

b) Caso bilinear: aqui, um sub-sistema pode ser escrito na forma:

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij}(x) x_j(t) \quad (61)$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t)$$

com $A_{ij}(x)$ decomponível na forma $A_{ij}(x) = B_i L_{ij}(x) C_j$, com $L_{ii}(x) = 0$ e $L_{ij}(x)$ sendo uma função linear de $x \in \mathbb{R}^n$.

Como no caso anterior, o teorema 7 fornece controle descentralizado $u_i = -B_i' P_i x_i$, $i = 1, \dots, N$, com P_i obtido em (57) e $\tilde{V}_*$ é dado por (58). A determinação de v_0 segundo (58), às vezes, pode ser bastante difícil. Uma maneira alternativa de estimar V_* pode ser como colocado a seguir:

$$\|L(x)\|^2 = \lambda_{\max} [L'(x) L(x)] \leq \text{Tr} [L'(x) L(x)] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (62)$$

podemos definir uma nova estimação:

$$\tilde{V}_* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^N x_i' P_i x_i \leq \tilde{v}_0\} \quad (63)$$

com $\tilde{v}_0$ dado pela solução de:

$$\tilde{v}_0 = \min_x \left\{ \sum_{i=1}^N x_i' P_i x_i \mid \text{Tr} [L'(x) L(x)] = \beta \right\} \quad (64)$$

Com isto obtemos $\tilde{V}_* \subset \bar{V}_* \subseteq \Omega(\beta)$. Escrevendo $L(x) = \{d_{ij}' x$, $d_{ij} \in \mathbb{R}^n$, $\forall i, j\}$ a expressão $\text{Tr} [L'(x) L(x)]$ fica:

$$\text{Tr} [L'(x) L(x)] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x' d_{ij} d'_{ij} x \quad (65)$$

o que permite reescrever (64) como:

$$\tilde{V}_0 = \min_x \{x' P x \mid x' W x = \beta\} \quad (66)$$

onde $P = \text{bloc diag} (P_1, P_2, \dots, P_N)$ e $W = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{ij} d'_{ij} \geq 0$. A equação (66) é um problema de otimização que podemos resolver usando o Lagrangeano:

$$L(x, \lambda) = x' P x + \lambda [\beta - x' W x] \quad (67)$$

Portanto:

$$2Px - 2\lambda Wx = 0 \quad (68)$$

$$x' W x = \beta$$

o que implica $(P - \lambda W)x = 0$, ou seja λ tal que $\det [P - \lambda W] = 0$. Por outro lado, como $Px = \lambda Wx$, podemos escrever:

$$x' P x = \lambda x' W x = \lambda \beta \quad (69)$$

ou seja, o problema agora é:

$$\tilde{V}_0 = \beta \min_{\lambda} \{\lambda \mid \det (P - \lambda W) = 0\} \quad (70)$$

Com isto, estabelecemos uma maneira de encontrar controles descentralizados para um sistema dinâmico não linear, tal que estabilize o sistema global (S). Como neste caso não podemos garantir a estabilidade global para todo $x \in R^n$, estimamos também uma região finita de estabilidade $\hat{V}_*$.

Na seção que segue, aplicamos os resultados teóricos obtidos a exemplos numéricos e fazemos análises e comparações frente a resultados obtidos por outros métodos encontrados na literatura.

II.6 EXEMPLOS E COMPARAÇÕES

Aplicamos os resultados teóricos obtidos nas seções anteriores em exemplos para mostrarmos as características numéricas dos métodos propostos e também para fazermos algumas comparações. Tratamos quatro exemplos.

Exemplo 1: É o exemplo fornecido em Sezer e Huseyin (1978), constituído de 2 sub-sistemas lineares interconectados:

$$(S_1) \begin{cases} \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [L_{12}] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x_2 \\ y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x_1 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [L_{21}] \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x_1 \\ y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x_2 \end{cases}$$

com $\|L_{12}\| < 1$ e $\|L_{21}\| < 1$. Seja a matriz de interconecção $L \in R^{2 \times 2}$ dada por:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & L_{12} \\ L_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,9 \\ 0,9 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} & L_2 \\ L_1 & \end{matrix}$$

Calculando os ganhos descentralizados através de 5 métodos obtemos:

- Método 1: proposto por Sezer e Huseyin (1978).

$$K_1 = [3,00 \quad 4,00]$$

$$K_2 = [32,00 \quad 45,00 \quad 13,00]$$

- Método 2: proposto por Ikeda e Siljak (1978). Usando $\alpha = 0$, $u_1 = 2,62$, $u_3 = 2,41$ e, portanto, garantindo apenas a estabilidade do sistema global (e não a estabilidade assintótica), obtemos:

$$K_1 = [0,96 \quad 4,06]$$

$$K_2 = [1,68 \quad 5,40 \quad 3,96]$$

- Método 3: pelo método proposto por Saberi e Khalil (1982)

$$K_1 = [3,69 \quad 3,69]$$

$$K_2 = [6,93 \quad 6,93 \quad 6,93]$$

- Método 4: pelo teorema 2 proposto neste capítulo, usando $\beta = 1 > \|L\|^2 = 0,81$

$$K_1 = [0,41 \quad 0,68]$$

$$K_2 = [1,00 \quad 3,36 \quad 2,78]$$

- Método 5: pelo corolário 4 proposto neste capítulo, usando $\beta_1 = 1$ e $\beta_2 = 1$ pois $\|L_1\|^2 = \|L_2\|^2 = 0,81$, obtemos a mesma solução do caso anterior:

$$K_1 = [0,41 \quad 0,68]$$

$$K_2 = [1,00 \quad 3,36 \quad 2,78]$$

Exemplo 2: Também é um exemplo fornecido por Sezer e Huseyin (1978), desta vez constituído de 3 sub-sistemas lineares interconectados.

$$(S_1) \begin{cases} \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [L_{12}] [1 \quad 0 \quad 1] x_2 \\ y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (S_2) \left\{ \begin{aligned} \dot{x}_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_2 + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ [L_{21}] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_1 + [L_{23}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_3 \right\}, \\ y_2 &= [1 \quad 0 \quad 1] x_2 \end{aligned} \right. \\
 (S_3) \left\{ \begin{aligned} \dot{x}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [L_{31}] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_1 \\ y_3 &= [1 \quad 0] x_3 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

com a matriz de interconexão $L \in R^{5 \times 4}$ dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 & L_{12} & 0 \\ L_{21} & 0 & L_{23} \\ L_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \underbrace{1 \quad 1}_{L_1} & \underbrace{0}_{L_2} & \underbrace{0}_{L_3} & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando os ganhos descentralizados segundo os 5 métodos usados no exemplo 1, temos:

- Método 1: proposto por Sezer e Huseyin (1978):

$$K_1 = \begin{bmatrix} 10 & 5 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0,82 & 16 & 74 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K_3 = \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Método 2: proposto por Ikeda e Siljak (1978), assumindo $\alpha = 0$, $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 13$ e $\mu_3 = 11$, garantindo apenas a estabilidade global:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0,97 & 0,59 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 2,76 & 2,50 & 2,33 \\ -0,81 & 4,56 & 9,54 \end{bmatrix} \quad K_3 = \begin{bmatrix} 8,78 & 1,12 \\ 1,12 & 3,93 \end{bmatrix}$$

- Método 3: Saberi e Khalil (1982), não é aplicável.

- Método 4: calculando a partir do teorema 2. Como $\|L\|^2 = 9,3$, usando $\beta = 10 > \|L\|^2$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1,74 & 3,16 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 1,23 & 0,26 & 1,23 \\ 2,45 & 0,52 & 2,45 \end{bmatrix} \quad K_3 = \begin{bmatrix} 2,94 & 0,53 \\ 0,53 & 0,19 \end{bmatrix}$$

- Método 5: calculando a partir do corolário 4. Como $\|L_1\|^2 = 8$, $\|L_2\|^2 = 1$ e $\|L_3\|^2 = 2$, assumimos $\beta_1 = 25$, $\beta_2 = 4$ e $\beta_3 = 7$. Então:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 3,38 & 5,48 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0,71 & 0,16 & 0,71 \\ 1,43 & 0,32 & 1,43 \end{bmatrix} \quad K_3 = \begin{bmatrix} 2,40 & 0,49 \\ 0,49 & 0,17 \end{bmatrix}$$

Fazemos, a seguir, uma análise comparativa dos resultados obtidos nos dois exemplos que acabamos de ver, apontando características numéricas de cada método.

Em primeiro lugar, é interessante comparar os ganhos obtidos através de 5 métodos acima. Para isso vamos considerar a norma traço: $\|K\| = \left\{ \sum_{i=1}^N \text{Tr}(K_i' K_i) \right\}^{1/2}$ e obtemos:

MÉTODO	K	
	EXEMPLO 1	EXEMPLO 2
I	57,21	113,3
II	8,06	15,1
III	12,00	—
IV	4,54	6,1
V	4,54	7,3

Podemos verificar que os métodos aqui propostos resultam em valores de $||K||$ sensivelmente menores que os métodos encontrados na literatura. O método proposto por Sezer e Huseyin (1978) além de fornecer ganhos grandes, é um procedimento bastante trabalhoso e heurístico. O método proposto por Ikeda e Siljak (1978) pode ser resumido por:

$$K_i = \frac{1}{2} \mu_i B_i' P_i \quad i=1 \dots N$$

$$A_i' P_i + P_i A_i - P_i B_i B_i' P_i + N I_i = 0$$

onde μ_i é tal que:

$$\mu_i \geq 1 + \sum_{j=1}^N ||L_{ij} C_j||^2 \quad i=1 \dots N$$

Notamos que os ganhos obtidos por este método cresce à medida que o número de sub-sistemas aumenta, mesmo que a norma da matriz de interconexão seja pequena.

O método proposto por Saberí e Khalil (1982) também fornecem resultados mais conservadores. Os autores justificam isto, apoiando-se no fato dos seus métodos serem apropriados para sistemas não lineares. Estendemos os nossos resultados para sistemas não lineares e então, no exemplo 4 fazemos nova compa-

ração.

Exemplo 3: Seja o sistema $S = \bigcup_{i=1}^2 S_i$ com:

$$(S_1) \begin{cases} \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u_1 \\ y_1 = [0 \quad 1 \quad 1] x_1 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_2 \\ y_2 = [0 \quad 1] x_2 \end{cases}$$

A equação dinâmica do observador de estado descentralizado é:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} e = \begin{bmatrix} H_1 C_1 & 0 \\ \hline 0 & H_2 C_2 \end{bmatrix} e$$

Utilizando a metodologia apresentada em Siljak e Vukcevic (1978), obtemos os seguintes valores para observadores descentralizados que mantêm o sistema S estável:

$$H_1 = [25152 \quad -5266 \quad 5377]$$

$$H_2 = [700 \quad 54]$$

Os auto-valores do observador realimentado com os ganhos acima são:

$$\lambda_1^1 = -78,41 \quad \lambda_2^1 = 0,0 \quad \lambda_3^1 = -0,03$$

$$\lambda_1^2 = -16,77 + j 15,62 \quad \lambda_2^2 = -16,77 - j 15,62$$

Aplicando o método aqui proposto, com:

$$L_{12} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad L_{21} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\|L\|^2 = 61$. Usando $\beta = 65 > \|L\|^2$, obtemos:

$$H_1 = [10,0 \quad 13,0 \quad 0,0]$$

$$H_2 = [5,6 \quad 7,0]$$

e os auto-valores relativos ao observador ficam:

$$\lambda_1^1 = -12,03 \quad \lambda_2^1 = -2,62 \quad \lambda_3^1 = -1,04$$

$$\lambda_1^2 = -6,52 \quad \lambda_2^2 = -0,79$$

Calculando $\|H\| = \left\{ \sum_{i=1}^N \text{Tr}(H_i' H_i) \right\}^{1/2}$, obtemos a seguinte tabela:

MÉTODO	$\ H\ $
Siljak e Vukcevic (1978)	≈ 26.000
nosso	18,69

A tabela acima mostra que os nossos resultados são bem melhores que os do Siljak e Vukcevic (1978). Além disso, o nosso método é bem simples de se implementar numericamente, em contraste com o método de Siljak e Vukcevic (1979) que é bastante trabalhoso.

Exemplo 4: Analisamos aqui um problema encontrado em Siljak e Vukcevic (1977) para exemplificarmos o método que propomos no item II.5, onde estudamos a estabilização de sistemas não-lineares e a estimação do respectivo domínio de estabilidade. Neste problema é abordado o controle de um telescópio de grande porte (LST - Large Scale Telescope).

A dinâmica do LST é representada como segue:

$$\dot{x} = Ax + Bu + B L(x)x$$

com $x' = [x_{11} \ x_{12} \ x_{21} \ x_{22} \ x_{31} \ x_{32}]$ e $u' = [u_1 \ u_2 \ u_3]$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 85,62 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13,69 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13,21 \end{bmatrix}$$

$$L(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0026x_{22} \\ 0 & 0,064x_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,061x_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obtemos imediatamente

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i=1,2,3$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 85,62 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 13,69 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 13,21 \end{bmatrix}$$

Considerando $Q = \text{bloc-diag} (\beta_1 I_1, \beta_2 I_2, \beta_3 I_3)$ com $\beta_1 = \beta_2 = 0,8$ e $\beta_3 = 0,01$ e $C_i = I_i$, $i = 1, 2, 3$, do teorema 7 obtemos:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0,81038 & 0,01045 \\ 0,01045 & 0,01058 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0,86286 & 0,06533 \\ 0,06533 & 0,07047 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0,01586 & 0,00757 \\ 0,00757 & 0,01200 \end{bmatrix}$$

o que implica:

$$K_1 = [0,8944 \quad 0,9060] \quad K_2 = [0,8944 \quad 0,9646]$$

$$K_3 = [0,1000 \quad 0,1586]$$

Saberl e Khalil (1982) abordou este mesmo problema, assim como Siljak e Vukcevic (1977). Para fazermos uma comparação, precisamos lembrar que existe um compromisso entre as magnitudes dos controles e os respectivos domínios de estabilidade. Assim, inicialmente comparamos os controles para, posteriormente, compararmos os domínios de estabilidade para os controles considerados.

Os valores obtidos por Siljak e Vukcevic (1977) foram:

$$K_1 = [2,82 \quad 0,3988] \quad K_2 = [17,64 \quad 2,5] \quad K_3 = [18,28 \quad 2,58]$$

e Saberi e Khalil, (1982) obtiveram:

$$K_1 = [0,0949 \quad 0,0949] \quad K_2 = [0,8923 \quad 0,8923]$$

$$K_3 = [0,8560 \quad 0,8560]$$

Portanto, usando norma traço, ficamos com a seguinte tabela:

Método	Siljak	Saberi	Nosso
$\ K\ $	25,81	1,75	1,84

Como $L'(x) L(x)$ é bloco-diagonal, é simples calcularmos $\hat{V}_*$ como em (58), do teorema 7: $\hat{V}_* = \{x \in R^n \mid v(x) \leq v_0\}$, onde:

$$v_0 = \min_x \{v(x) \mid \hat{V}_* \subseteq \Omega(\beta)\}$$

$$= \min \{v_{01}, v_{02}, v_{03}\}$$

com v_{0i} dado por:

$$v_{0i} = \{\min_{x_i} x_i' P_i x_i \mid |x_{i2}| = \theta_i\}$$

Os valores de θ_i são encontrados fazendo com que $\|L(x)\|^2 \leq \beta$, ou seja, $\|L_i(x_i)\|^2 \leq \beta_i$, $i = 1, 2, 3$. Com isso obtemos:

$$v_{01} = 2,25$$

$$v_{02} = 96,92$$

$$v_{03} = 1,64$$

o que nos fornece:

$$\tilde{V}_* = \{x \in R^6 \mid \sum_{i=1}^3 x_i' P_i x_i \leq 1,64\}$$

Utilizando a expressão dada em (63) e (70), devemos ter $\tilde{V}_* = \{x \in R^n \mid v(x) \leq \tilde{v}_0\}$ onde:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_0 &= \min_x \{x' P x \mid x' W x = \beta_{\min}\} \\ &= \beta_{\min} \min \{\tilde{v}_{01}, \tilde{v}_{02}, \tilde{v}_{03}\} \end{aligned}$$

com $\tilde{v}_{0i} = \min_{\lambda} \{\lambda \mid \det(P_i - \lambda \omega_i) = 0\}$ e $W = \text{bloc-diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ é tal que:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .061^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .0026^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .064^2 \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos:

$$\tilde{v}_{01} \approx 2,8 \quad \tilde{v}_{02} \approx 96,93 \quad \tilde{v}_{03} \approx 2$$

Como $\beta_{\min} = \min\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = 0,01$, $\tilde{v}_0 = 0,02$ e por-

tanto:

$$\tilde{V}_* = \{x \in R^6 \mid \sum_{i=1}^3 x_i' P_i x_i \leq 0,02\}$$

Siljak e Vukcevic (1977) encontraram o valor:

$$\tilde{X} = \{x \in R^6 \mid 4,80 \|x_1\| + 13,76 \|x_2\| + 4,30 \|x_3\| < 1,34\}$$

e Saberi e Khalil (1982) determinaram:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_* = \{x \in R^6 \mid x_{11}^2 + x_{21}^2 + x_{31}^2 + \frac{1}{9} (x_{11} + x_{12})^2 + \\ + \frac{1}{9} (x_{21} + x_{22})^2 + \frac{1}{9} (x_{31} + x_{32})^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

É fácil de perceber que $\tilde{X} \subset \tilde{L}_* \subset \tilde{V}_*$. Estes resultados foram obtidos utilizando ganhos descentralizados que comparamos neste exemplo. Portanto, com ganhos da ordem de grandeza dos obtidos em Saberl e Khalil (1982) e bem menores que obtidos em Siljak e Vukcevic (1977), obtemos a melhor estimacão do domínio de estabilidade. Para fazermos uma comparao numérica, incluindo $\tilde{V}_*$, definimos o conjunto:

$$\hat{O}_i = \{\hat{O} \mid x_j = 0 \quad \forall j \neq i\} \quad , \quad i=1,2,3$$

e obtemos a tabela abaixo:

	Área de $\hat{O}_1$	Área de $\hat{O}_2$	Área de $\hat{O}_3$
$\tilde{X}_*$	0,245	0,030	0,305
$\tilde{L}_*$	9,43	9,43	9,43
$\tilde{V}_*$	55,9	21,6	446,3
$\tilde{\tilde{V}}_*$	0,68	0,26	5,44

Percebe-se da tabela que $\tilde{\tilde{V}}_*$ fornece domínio várias vezes maior que de $\tilde{L}_*$, com ganhos descentralizados da mesma ordem de grandeza.

A estimacão utilizando as expressões (63) e (70), fornecem a estimacão dada em $\tilde{\tilde{V}}_*$ que é bem mais conservador que $\tilde{V}_*$.

Isto se justifica uma vez que neste caso utilizamos $\text{Tr} [L'(x) L(x)] \geq \|L(x)\|^2$.

II.7 CONCLUSÕES

Neste capítulo foram sugeridas novas maneiras de obter controles descentralizados que estabilizam o sistema global, para uma classe de sistemas invariantes no tempo, tanto lineares como não-lineares. Para o caso não-linear é proposto dois procedimentos simples de estimar a região de estabilidade. Também, os resultados são estendidos aos observadores descentralizados.

Analisando os resultados numéricos obtidos a partir de alguns exemplos, parece-nos que os métodos aqui propostos apresentam algumas vantagens em relação aos métodos existentes na literatura. Dentre elas podemos citar a facilidade de cálculo (simples de serem implementados em computadores e com metodologias simples de determinação de ganhos), resultados mais precisos (ganhos menores) e a independência do número de sub-sistemas que constituem o sistema global. O processo de estimação do domínio de estabilidade também produziu resultados bem menos conservativos que os de Siljak e Vukcevic (1977), onde foi utilizado o método de "função vetorial de Lyapunov e sistema de comparação".

A classe de sistemas que tratamos é razoavelmente geral e foram tratados por Sezer e Huseyin (1978) para o caso linear invariante, por Ikeda e Siljak (1978) para o caso linear variante no tempo e por Davison (1974) e Khalil e Saberi (1982) para o caso não-linear variante no tempo. Certamente é difícil dizermos exatamente quão geral é esta classe, mas para os sistemas pertencentes a ela, as metodologias aqui propostas mostrem ser as mais adequadas. Naturalmente, mesmo que não pertença a esta classe, pode-se utilizar os métodos aqui propostos, sendo que, neste caso, não é possível saber "a-priori" se os ganhos descentralizados gerados estabilizam o sistema global. Este fato deve ser testado "a-posteriori" como em alguns métodos encontrados na literatura (Kosut, 1970).

Uma alternativa para evitarmos este último aspecto é

utilizarmos a metodologia encontrada em Geromel e Peres (1984) que apresentamos no capítulo I, pois nela não existe restrição de pertencer à classe C^* . Nela resolve-se uma equação de Riccati de ordem do sistema, diferentemente dos métodos aqui propostos, quando resolvemos várias equações de Riccati de pequena ordem, uma para cada sub-sistema. Em vista do impulso que os métodos numéricos de resolução de equações de Riccati de ordens elevadas obteve nos últimos anos, esta metodologia é atraente. No entanto, para sistemas pertencentes à classe C^* , as técnicas aqui propostas são mais adequadas pela facilidade de obter controles descentralizados e por independender praticamente do número de sub-sistemas.

CAPÍTULO III

ESTABILIZAÇÃO DESCENTRALIZADA DE SISTEMAS

DINÂMICOS DISCRETOS

III.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, estendemos os resultados obtidos no capítulo anterior para sistemas lineares discretos pertencentes à classe C^* . Portanto, estabelecemos condições para existência de um controle descentralizado que estabiliza o sistema global discreto.

Contrariamente ao caso contínuo, onde muitos trabalhos foram desenvolvidos, este é um dos primeiros na literatura. Desta maneira, não são feitas comparações. Este capítulo é necessário na medida que os estudos mostraram que para o caso discreto, os resultados são sensivelmente diferentes aos do caso anterior, dando ramificações interessantes (Yamakami e Geromel, 1982, 1980).

A classe de sistemas que tratamos aqui é a mesma do capítulo anterior. Portanto, sendo S um sistema linear dinâmico e invariante no tempo formado pela interconexão de N sub-sistemas do tipo:

$$(S_i) \left\{ \begin{array}{l} x_i^{t+1} = A_i x_i^t + B_i u_i^t + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij}(x^t) x_j^t \\ y_i^t = C_i x_i^t \end{array} \right. \quad i=1 \dots N \quad (1)$$

onde $x_i^t \in R^{n_i}$, $y_i^t \in R^{r_i}$, $u_i^t \in R^{m_i}$ com $\sum_{i=1}^N n_i = n$, $\sum_{i=1}^N r_i = r$ e $\sum_{i=1}^N m_i = m$, assumimos que a matriz de interconexão $A_{ij}(x^t)$, $i, j = 1, \dots, N$ em (1) é tal que $S \in C^*$ como no caso contínuo, ou seja:

$$A_{ij}(x) = B_i L_{ij}(x) C_j \quad i \neq j = 1 \dots N \quad (2)$$

Ainda, por hipótese, todos os pares $[A_i, C_i]$ são observáveis e todos os pares $[A_i, B_i]$ são controláveis. Nosso propósito é determinar um controle local para cada sub-sistema:

$$u_i^t = -K_i x_i^t \quad i=1 \dots N \quad (3)$$

que estabiliza o sistema global. Com (2), podemos escrever:

$$\begin{aligned} x^{t+1} &= (A + B L(x^t) C - B K) x^t \\ y^t &= C x^t \end{aligned} \quad (4)$$

sendo $A = \text{bloc diag } (A_1, A_2, \dots, A_N)$; $B = \text{bloc diag } (B_1, \dots, B_N)$; $C = \text{bloc diag } (C_1, \dots, C_N)$; $K = \text{bloc diag } (K_1, \dots, K_N)$ e a matriz de interconexão $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$ definida como no capítulo anterior.

A seguir subdividimos o estudo em duas partes. Na primeira estabelecemos as condições para a existência de controles descentralizados para sistemas lineares discretos e propomos um algoritmo para calcular numericamente estes ganhos descentralizados. Na segunda parte, generalizamos os resultados para observadores descentralizados discretos, assim como para sistemas discretos não lineares.

No final, resolvemos um exemplo numérico para mostrar a convergência do algoritmo proposto e concluímos fazendo a análise dos resultados obtidos.

III.2 CONTROLE DESCENTRALIZADO ESTABILIZANTE LINEAR

Para o sistema dinâmico discreto linear pertencente à classe C^* , podemos enunciar o teorema a seguir.

Teorema 1: Sejam as matrizes Q e R simétricas e definidas positivas. Então:

$$K = (R + B' P B)^{-1} B' P A \quad (5)$$

$$P = A' P A - A' P B (R + B' P B)^{-1} B' P A + C' Q C$$

nos fornece um sistema global discreto (4) assintoticamente estável se Q e R satisfazem a restrição matricial:

$$Q - L' (R + B' P B) L > 0 \quad (6)$$

Prova: Com a hipótese de controlabilidade e de observabilidade dos sub-sistemas e, portanto, do sistema global, a solução da equação de Riccati (5) nos fornece uma função de Lyapunov $v^t = (x^t)' P x^t$. Definindo $S = (R + B' P B)$ e $G = L C - S^{-1} B' P A$ e de (4) e (5) obtemos:

$$\Delta v^{t+1} = v(x^{t+1}) - v(x^t) = (x^t)' [(A + B G)' P (A + B G) - P] x^t \quad (7)$$

e com (5) vem:

$$\Delta v^{t+1} = (x^t)' [-C' Q C + A' P B L C + G' B' P A + G' B' P B G] x^t \quad (8)$$

Como $L C = G + S^{-1} B' P A$ e $B' P A = S(L C - G)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta v^{t+1} &= (x^t)' [-C' Q C + (L C - G)' S (L C - G) + \\ &\quad + G' S (L C - G) + (L C - G)' S G + G' B' P B G] x^t \\ &= (x^t)' [-C' Q C + C' L' S L C - G' S G + G' B' P B G] x^t \end{aligned} \quad (9)$$

Levando em consideração que $y^t = C x^t$:

$$\begin{aligned} \Delta v^{t+1} &= -(y^t)' [Q - L' S L] y^t - (x^t)' G' R G x^t \\ &\leq -(y^t)' (Q - L' S L) y^t \end{aligned} \quad (10)$$

De (6) temos que $\Delta v^{t+1} \leq 0$. Isto prova a estabilidade do sistema global discreto. Para provar a estabilidade assintótica, basta levar em consideração a equação (10) e que $x^t = (A + B G)^t x^0$, o que nos leva a:

$$C A^t x^0 = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (11)$$

para um $x^0 \in R^n$, o que não é possível devido a hipótese de observabilidade do par $[A, C]$. Isto conclui a prova do teorema.

O teorema seguinte apresenta uma condição de estabilidade

dade sob a restrição de descentralização.

Teorema 2: O sistema global (4) é assintoticamente estável com o controle descentralizado.

$$K_i = (I_i + B_i' P_i B_i)^{-1} B_i' P_i A_i \quad i=1 \dots N \quad (12)$$

$$P_i = A_i' P_i A_i - A_i' P_i B_i (I_i + B_i' P_i B_i)^{-1} B_i' P_i A_i + \beta C_i' C_i$$

se o escalar β satisfaz

$$\beta I - L' (I + B' P B) L > 0 \quad (13)$$

com $P = \text{bloc-diag } (P_1, \dots, P_N)$.

Prova: No teorema anterior, fazendo $Q = qI$ e $R = \rho I$, obtemos, a partir de (6):

$$\beta I - L' [I + B' (\frac{\tilde{P}}{\rho}) B] L > 0 \quad (14)$$

e (5) fornece:

$$(\frac{\tilde{P}}{\rho}) = A' (\frac{\tilde{P}}{\rho}) A - A' (\frac{\tilde{P}}{\rho}) B [I + B' (\frac{\tilde{P}}{\rho}) B]^{-1} B' (\frac{\tilde{P}}{\rho}) A + \beta C' C = 0 \quad (15)$$

Lembrando que em (15) todas as matrizes são bloco-diagonais e fazendo $P = (\frac{\tilde{P}}{\rho})$, obtemos (12) e (13) o que prova o teorema.

Cabe colocar aqui duas observações. A primeira é que podemos obter facilmente uma condição suficiente para (13) em termos do parâmetro β :

$$\beta > \sigma(\beta) = \|L\|^2 (1 + \|B\|^2 \|P\|) \quad (16)$$

A segunda observação é que, ao contrário do caso contínuo, não é possível ver imediatamente se a condição (16), e, portanto, a condição (13) pode ser satisfeita para algum $\beta > 0$, uma vez que (16) é função de P e P_i , $i = 1 \dots N$ em (12) variam não linearmente

te com β . Portanto, para estabelecermos um algoritmo que determine os controles descentralizados, precisamos estudar o comportamento da condição (13) em relação à variação de β .

Lema 1: A matriz $\pi(\beta) = L'(I + B'PB)L$, onde $P = \text{bloc diag } (P_1 \dots P_N)$, com P_1 dada em (12), tem as seguintes propriedades, para todo $\beta_2 \geq \beta_1 > 0$:

a) $\pi(\beta_2) \geq \pi(\beta_1) \geq 0$

b) $\left. \frac{d\pi(\beta)}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_2} \leq \left. \frac{d\pi(\beta)}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_1}$

c) $\frac{d\pi(\beta)}{d\beta} \geq L'B'C'CBL \quad \forall \beta > 0$

d) Se $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{d\pi(\beta)}{d\beta}$ existe, então é igual a $L'B'P_*BL$, onde $P_* = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{P}{\beta} \right)$.

Prova: Para provarmos as partes a) e b), basta derivarmos a expressão em (5) em relação a β :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\beta} &= A' \frac{dP}{d\beta} A - A' \frac{dP}{d\beta} B S^{-1} B' P A - A' P B \frac{dS^{-1}}{d\beta} B' P A \\ &\quad - A' P B S^{-1} B' \frac{dP}{d\beta} A + C'C \end{aligned} \quad (17)$$

Como $S = R + B'PB$ e $S^{-1}B'PA = K$, obtemos:

$$(A - BK)' \frac{dP}{d\beta} (A - BK) - \frac{dP}{d\beta} + C'C = 0 \quad (18)$$

Derivando a expressão (18) em relação a β temos:

$$(A - BK)' \frac{d^2 P}{d\beta^2} (A - BK) - \frac{d^2 P}{d\beta^2} - 2(A - BK)' \frac{dP}{d\beta} B S^{-1} B' \frac{dP}{d\beta} (A - BK) = 0 \quad (19)$$

De (18) temos que $\frac{dP}{d\beta} \geq 0$ e de (19) concluímos que $\frac{d^2P}{d\beta^2} \leq 0$ pois $(A - BK)$ é assintoticamente estável. Portanto:

$$\frac{d\pi(\beta)}{d\beta} = L'B' \frac{dP}{d\beta} B L \geq 0 \quad (20)$$

$$\frac{d^2\pi(\beta)}{d\beta^2} = L'B' \frac{d^2P}{d\beta^2} B L \leq 0 \quad (21)$$

e os itens a) e b) estão provados. Para provarmos o item c) basta tomar a expressão (18) e (20):

$$\begin{aligned} \frac{d\pi(\beta)}{d\beta} &= L'B' \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} (A - BK)^t C' C (A - BK)^t \right\} B L \\ &\geq L'B' C' C B L \end{aligned} \quad (22)$$

De (12), podemos concluir que:

$$P_* = A' P_* A - A' P_* B (B' P_* B)^{-1} B' P_* A + C' C \quad (23)$$

onde $P_* = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{P}{\beta} \right)$. Como:

$$\frac{\pi(\beta)}{\beta} = \frac{L' L}{\beta} + L'B' \left(\frac{P}{\beta} \right) B L \quad (24)$$

para β suficientemente grande, podemos escrever:

$$\frac{\pi(\beta)}{\beta} \approx L'B' P_* B L \quad (25)$$

o que implica a condição d) do lema proposto.

O lema que acabamos de provar estabelece que a função matricial $\pi(\beta)$ é bem comportada (monotonicamente crescente), possibilitando determinar um β_* tal que para todo $\beta > \beta_*$, a condição (13) do teorema 2 é satisfeita, desde que satisfaça a condição de existência de β_* . Esse fato está esquematizado na Figu-

ra 1 abaixo, para o caso unidimensional.

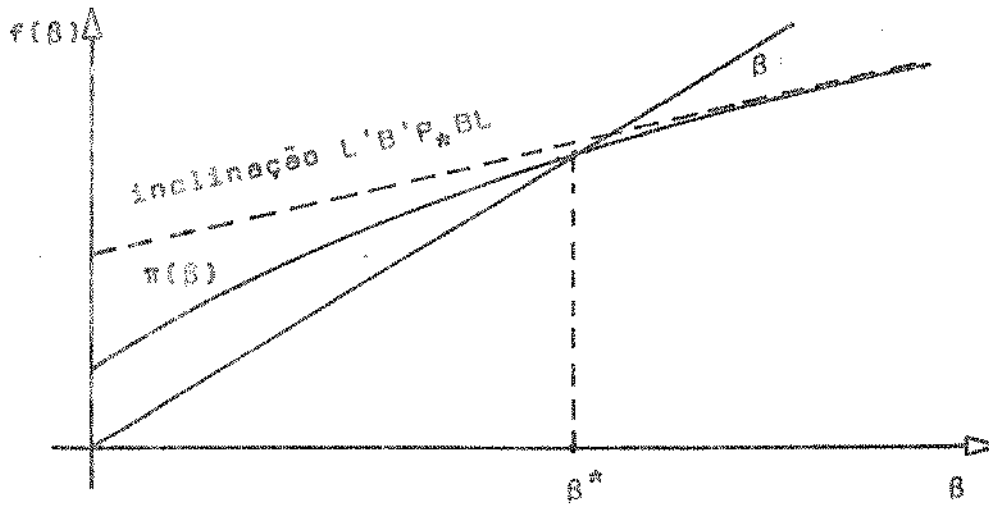


FIGURA 1 - Comportamento de $\pi(\beta)$

Para que β_* exista é preciso que a condição $I > L'B'C'CB$ seja satisfeita necessariamente, o que equivale dizer que deve ocorrer $1 > \|LB\|_{C'C}^2$. A condição suficiente é $I > L'B'P_*BL$, o que é equivalente a $1 > \|LB\|_{P_*}^2$.

Um procedimento simples e numericamente fácil de determinar β_* é através de um processo iterativo, inicializando com $\beta_0 = \|L\|^2$ que pode ser sintetizado como:

$$P_\ell = A P_\ell A - A' P_\ell B (I + B' P_\ell B)^{-1} B' P_\ell A + \beta_\ell C' C \quad (26)$$

$$\beta_{\ell+1} = \lambda_{\max} [\pi(\beta_\ell)] \quad \beta_0 = \|L\|^2$$

Como $\pi(\beta)$ é bem comportada, desde que as condições de existência de β_* sejam satisfeitas, o algoritmo converge. Ilustramos este fato num exemplo numérico no final deste capítulo.

A seguir exploramos a possibilidade de determinarmos β_i descentralizado, em função de características locais, tal que a estabilização global do sistema discreto seja ainda garantida, como foi feito no caso contínuo (teorema 3 e corolário 4 no ca-

pítulo II).

Teorema 3: O sistema discreto global (4) é assintoticamente estável com o controle descentralizado:

$$K_i = (R_i + B_i' P_i B_i)^{-1} B_i' P_i A_i \quad i=1 \dots N \quad (27)$$

$$P_i = A_i' P_i A_i - A_i' P_i B_i (R_i + B_i' P_i B_i)^{-1} B_i' P_i A_i + C_i' Q_i C_i$$

se $Q_i \geq \beta_i I_i$ e β_i são escalares tais que a matriz

$$F = \{f_{ij} = -\beta_i \delta_{ij} + \|L_i' (R + B' P B) L_j\| \quad i, j = 1 \dots N\} \quad (28)$$

onde δ_{ij} é símbolo de Kronecker, satisfaz a condição de Sevastyanov - Kotelyanski.

Prova: De (5), como R, B, A, Q e C são bloco-diagonais, P também é. Portanto obtemos (27) facilmente. A restrição (6) implica que o sistema linear $\dot{Z} = [-Q + L'(R + B'PB)L]Z$ deve ser assintoticamente estável. Com $L = [L_1, \dots, L_N]$ onde $L_i \in R^{m \times r_i}$, podemos escrever:

$$\dot{Z}_i = -Q_i Z_i + \sum_{j=1}^N L_i' (R + B' P B) L_j Z_j \quad i=1 \dots N \quad (29)$$

Como Q_i é simétrica e definida positiva, podemos escolher $v_i(Z_i) = \|Z_i\|$ como função de Lyapunov para cada sub-sistema $\dot{Z}_i = -Q_i Z_i$, desacoplado. Temos então que:

$$\begin{aligned} \dot{v}_i(Z_i) &= -\frac{Z_i' Q_i Z_i}{Z_i' Z_i} v_i(Z_i) + \nabla v_i \sum_{j=1}^N L_i' (R + B' P B) L_j Z_j \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q_i) v_i(Z_i) + \|\nabla v_i\| \sum_{j=1}^N \|L_i' (R + B' P B) L_j\| \|Z_j\| \end{aligned} \quad (30)$$

Com $\|\nabla v_i\| = 1$, obtemos:

$$\dot{v}_i(Z_i) \leq -\beta v_i(Z_i) + \sum_{j=1}^N \|L_i' (R + B' P B) L_j\| v_j(Z_j) \quad (31)$$

Definindo $V' = [v_1, \dots, v_N]$, lembrando-se de (28), (31) pode ser reescrita como:

$$\dot{V} \leq F V \quad (32)$$

Portanto, a estabilidade assintótica do sistema de comparação $\dot{W} = F W$ implica a estabilidade assintótica de (29). Como $F \in R^{N \times N}$ tem elementos fora da diagonal não negativos, deve satisfazer a condição de Sevastyanov - Kotelyanski:

$$(-1)^l \Delta_l(F) > 0 \quad (33)$$

onde $\Delta_l(F)$ é o menor de ordem l de F , para que $\dot{W} = F W$ seja assintoticamente estável. Portanto o teorema está provado.

Corolário 1: O sistema discreto (4) é assintoticamente estável com o controle descentralizado dado em (27), com $Q_i = \beta_i I_i$, se $\beta_i > N \|R + B'PB\| \|L_i\|^2$.

Prova: Como $V \in R^N$ é um vetor não negativo, de (32) podemos escrever:

$$\dot{V} \leq F V \leq \tilde{F} V \quad (34)$$

onde

$$\tilde{F} = \{\tilde{f}_{ij} = -\beta_i \delta_{ij} + \|L_i\| \|R + B'PB\| \|L_j\| \quad i, j = 1, \dots, N\} \quad (35)$$

Assim, a estabilidade assintótica do sistema de comparação $\dot{W} = \tilde{F} W$ implica o mesmo para (29), o que é possível se e somente se existe um vetor positivo $\tilde{W}' = [\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_N]$ tal que $\tilde{F} \tilde{W}' < 0$, o que é equivalente à condição de Sevastyanov - Kotelyanski (33).

Escolhendo $\tilde{w}_j = 1/(\|L_j\| \|R + B'PB\|)$, $j = 1, \dots, N$, obtemos:

$$\beta_i > N \|R + B'PB\| \|L_i\|^2 \quad i = 1, \dots, N \quad (36)$$

o que prova o corolário.

O resultado é interessante, como o foi no caso contínuo, uma vez que determinar $\|R + B'PB\|$ é simples pois R , B e P são blocos diagonais:

$$\|R + B'PB\| = \text{Max} \{ \|R_i + B_i' P_i B_i\| \quad i = 1 \dots N \} \quad (37)$$

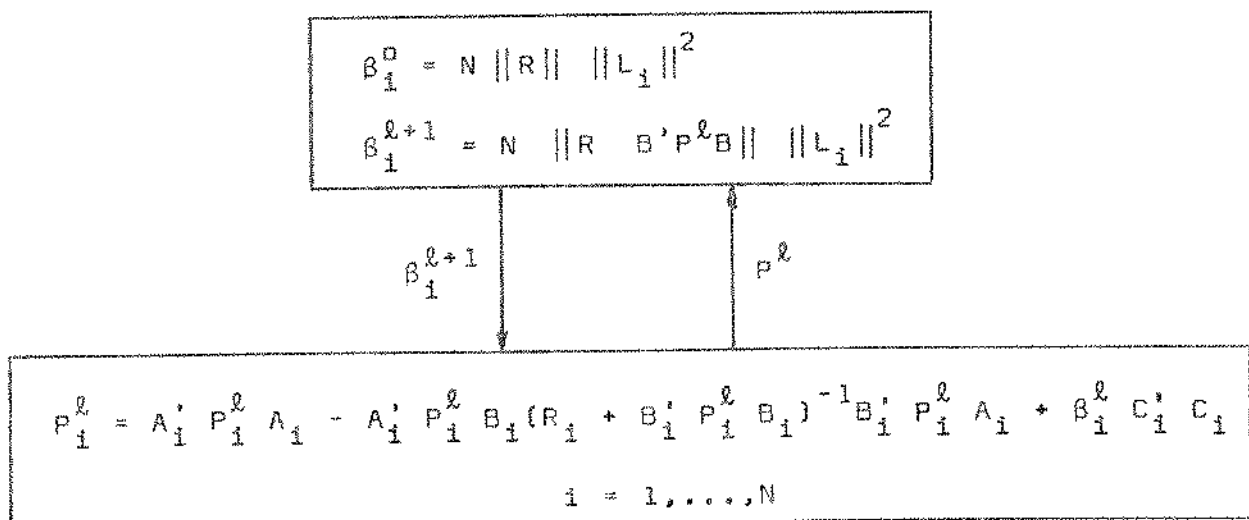
e $\|L_i\|$ equivale a determinar apenas um auto-valor de uma matriz de dimensão $(r_i \times r_i)$.

No entanto, a expressão (36) nos mostra que determinar β_i , $i = 1, \dots, N$ não é imediato, uma vez que é função de P . Mas, lembrando o lema 1 deste capítulo, podemos determinarmos $\beta_i^* > N \|R + B'PB\| \|L_i\|^2$, $i = 1, \dots, N$ fazendo uso de uma recorrência como em (26), utilizando (27):

$$P_i^\ell = A_i' P_i^\ell A_i - A_i' P_i^\ell B_i (R_i + B_i' P_i^\ell B_i)^{-1} B_i' P_i^\ell A_i + \beta_i^\ell C_i' C_i \quad (38)$$

$$\beta_i^{\ell+1} = N \|R + B'PB\| \|L_i\|^2 \quad \beta_i^0 = N \|R\| \|L_i\|^2, \quad i=1 \dots N$$

Note que $\beta_i^{\ell+1}$ é função de P e portanto o algoritmo itera da seguinte maneira:



Cabe notar ainda que podemos tirar um procedimento mais geral que o do corolário 1, a partir do teorema 3:

$$F^0 = \{f_{ij} = -\beta_i^0 \delta_{ij} + \|L_i' R L_j\|\}$$

$$\text{Min} \sum_{i=1}^N (\beta_i^{\ell+1})^2$$

$$\beta_i^{\ell+1} > 0$$

$$\text{s. a } F(\beta^{\ell+1})y \leq 0$$

$$y > 0 ; y \in R^N$$

$\beta_i^{\ell+1}$

P^ℓ

$$P_i^\ell = A_i' P_i^\ell A_i - A_i' P_i^\ell B_i (R_i + B_i' P_i^\ell B_i)^{-1} B_i' P_i^\ell A_i + \beta_i^\ell C_i' C_i$$

$$i = 1, \dots, N$$

O coordenador é o problema de determinar β_i , $i = 1 \dots N$ tal que as condições (36) sejam satisfeitas. Para resolvê-lo, podemos recorrer ao algoritmo proposto por Belloni (1982), onde y corresponde a variáveis "complicantes" e $f(\beta^{\ell+1}) = \sum_{i=1}^N (\beta_i^{\ell+1})^2$ é uma função estritamente convexa. Assim, na k -ésima iteração do processo de decomposição de Benders, para um y_k dado, a determinação de $\beta_{i,k}^{\ell+1}$ é analítica e y_{k+1} é calculado a partir de $\nabla v(y) = F'(\beta_k^{\ell+1}) \lambda_k^{\ell+1}$, onde $\lambda_k^{\ell+1}$ são multiplicadores duais ótimos associados a restrições $F(\beta_k^{\ell+1})y_k \leq 0$, e $v(y)$ é:

$$v(y) = \min_{\beta_k^{\ell+1} > 0} f(\beta_k^{\ell+1}) \text{ tal que } F(\beta_k^{\ell+1})y_k \leq 0, y_k > 0 \quad (39)$$

Este procedimento é possível, uma vez que para um y fixo, o problema restante é estritamente convexo em β e, além disso $\nabla f(0) = 0$.

Cabe ressaltar que, tanto para os sistemas discretos como para os contínuos, não é difícil estender os resultados obtidos se tivermos sistemas variantes no tempo e, dentre o con-

junto de ganhos descentralizados que estabilizam o sistema global obtidos, podemos selecionar aquele ou aqueles que satisfazem determinados critérios. Este último aspecto é explorado no capítulo seguinte.

III.3 OBSERVADORES DESCENTRALIZADOS

Como no caso contínuo, não é difícil estender os resultados do item anterior aos observadores discretos descentralizados.

Cada observador local pode ser escrito como:

$$\hat{x}_i^{t+1} = A_i \hat{x}_i^t + B_i u_i^t + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij} \hat{x}_j^t + H_i (y_i^t - C_i \hat{x}_i^t) \quad (40)$$

$$\hat{x}_i^0 = \hat{x}_{i0}$$

Definindo o erro de observação como $e_i^t = x_i^t - \hat{x}_i^t$, $i = 1, \dots, N$ e assumindo que o sistema (4) pertence à classe C^* , obtemos facilmente:

$$e_i^{t+1} = (A + BLC - HC)e_i^t \quad (41)$$

Assim podemos propor o teorema a seguir.

Teorema 4: Sejam as matrizes Q e R simétricas e definidas positivas. Então:

$$H = A W C' (R + C W C')^{-1} \quad (42)$$

$$W = A W A' - A W C' (R + C W C')^{-1} C W A' + B Q B'$$

nos fornece um observador assintoticamente estável se Q e R guardam a seguinte relação:

$$Q - L(R + C W C')L' > 0 \quad (43)$$

Prova: O sistema (41) é assintoticamente estável se o seu dual:

$$\xi^{t+1} = (A' + C'L'B' - C'H')\xi^t \quad (44)$$

o for. A solução de (42) nos fornece a função de Lyapunov $v^t(\xi^t) = (\xi^t)'W\xi^t$. Portanto, podemos escrever:

$$\Delta v^{t+1} = (\xi^t)'[(A' + C'G')'W(A' + C'G') - W]\xi^t \quad (45)$$

onde $G' = L'B' - H'$. Lembrando (41), ficamos com:

$$\Delta v^{t+1} = (\xi^t)'[-BQB' + AWC'L'B' + GCWA' + GCWC'G']\xi^t \quad (46)$$

e que nos fornece:

$$\begin{aligned} \Delta v^{t+1} &= (\xi^t)'[-BQB' + BLSL'B' - GSG' + GCWC'G']\xi^t \\ &\leq -(Z^t)'(Q - LSL')Z^t \end{aligned} \quad (47)$$

onde $S = R + CWC'$ e $Z^t = B'\xi^t$. Portanto, temos $\Delta v^{t+1} \leq 0$ se e somente se $Q - LSL' > 0$, o que prova a estabilidade do sistema global. Para provar a estabilidade assintótica basta lembrar que $\xi^t = (A' + C'G')^t\xi^0$ e levar em consideração a expressão (47) e a hipótese de observabilidade do par $[A', B']$.

É fácil notar que, como no caso contínuo, podemos generalizar os teoremas estabelecidos para o controle descentralizado discreto, para observadores descentralizados discretos usando a dualidade:

Primal	Dual
A	A'
B	B'
C	C'
L	L'
K	H'

Além disto a propriedade de separação mostrada no ca-

pítulo II para sistemas contínuos, pode ser igualmente estabelecida.

III.4 EXTENSÃO A SISTEMAS NÃO LINEARES

Nesta seção estendemos os resultados anteriores a sistemas discretos invariantes no tempo e não lineares, do tipo:

$$x^{t+1} = (A + B L(x^t)C - B K)x^t \quad (48)$$

com A, B, C e K bloco diagonais e $L(x^t) \in R^{m \times r}$. Novamente devemos considerar dois problemas:

- determinação do controle linear descentralizado $u_i^t = -K_i x_i^t$, $i = 1, \dots, N$, tal que $x_* = 0$ seja assintoticamente estável.
- estimação da região de estabilidade $V_* \subseteq R^N$ para o controle encontrado em a).

Para estudarmos estes dois problemas, vamos considerar inicialmente que a matriz de interconexão $L(x^t)$ é tal que, para todo $E > 0$, $E > \|L(0)\|^2$ o conjunto:

$$\Omega(E) = \{x^t \in R^N \mid \|L(x^t)\|^2 \leq E\} \quad (49)$$

é não vazio e define uma vizinhança fechada de $x_* = 0$, para todo t.

Teorema 5: $x_* = 0$ é assintoticamente estável e tem uma região de estabilidade $\tilde{V}_* \subseteq V_*$ se:

$$\begin{aligned} K &= (R + B'PB)^{-1}B'PA \\ P &= A'PA - A'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA + C'QC \end{aligned} \quad (50)$$

com $Q = Q' > 0$, $R = R' > 0$ e

$$Q > L'(x^t)(R + B'PB)L(x^t) \quad \forall x^t \in \tilde{V}_* \quad (51)$$

Prova: Como no caso linear, definindo $v^t(x^t) = (x^t)'P(x^t)$ e determinando $\Delta v^{t+1} = v^{t+1} - v^t$, obtemos:

$$\begin{aligned}\Delta v^{t+1} &= -(y^t)' [Q - L'(x^t)(R + B'PB) L(x^t)] y^t \\ &\quad - (x^t)' G'(x^t) R G(x^t) x^t \\ &\leq -(y^t)' [Q - L'(x^t)(R + B'PB) L(x^t)] y^t\end{aligned}\quad (52)$$

onde $G(x^t) = L(x^t)C - (R + B'PB)^{-1}B'PA$. Portanto $\Delta v^{t+1} \leq 0$ e o sistema é estável. A solução de (48) é dada por:

$$x^t = \psi(t, 0)x^0 + \sum_{j=0}^{t-1} \psi(t, j+1)B G(x^j)x^j\quad (53)$$

$$\psi(t, \ell) = A^{t-\ell}$$

Portanto, $\Delta v^{t+1} = 0 \quad \forall t \geq 0$ não pode existir para um $x^0 \neq 0$, pois assim teríamos $G(x^t)x^t = 0$, o que contraria a hipótese de observabilidade do par $[A, C]$.

É preciso, a seguir, estimar um domínio tal que a estabilidade do sistema global seja garantida. Este domínio é estabelecido pela restrição (51) que deve ser satisfeita em toda trajetória. Isto pode ser conseguido, fazendo:

$$\hat{V}_* = \{x^t \in R^n \mid v(x^t) \leq v_0\} \quad \forall t \geq 0\quad (54)$$

onde v_0 é um escalar a ser escolhido tal que $\hat{V}_* \subseteq \Omega(E_*)$ onde E_* é dado por

$$E_* = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(R + B'PB)} > \|L(0)\|^2\quad (55)$$

para um dado par (Q, R) satisfazendo (51). Isto é possível uma vez que supomos uma vizinhança não vazia de $x_* = 0$.

Por outro lado, podemos escolher Q e R tal que tenhamos uma estrutura descentralizada de controle.

Teorema 6: O estado $x_* = 0$ do sistema global (48) é assintoticamente estável, se temos:

$$K_i = (I_i + B_i' P_i B_i)^{-1} B_i' P_i A_i \quad i=1 \dots N \quad (56)$$

$$P_i = A_i' P_i A_i - A_i' P_i B_i (I_i + B_i' P_i B_i)^{-1} B_i' P_i A_i + \beta C_i' C_i$$

e a estimação do seu domínio de estabilidade é dada por $\hat{V}_*$ em (54), com v_0 tal que:

$$v_0 = \max_{x^t} \{ \tau \mid \hat{V}_*(\tau) \subseteq \Omega(\tilde{\beta}) \} \quad (57)$$

onde:

$$\tilde{\beta} = \frac{\beta}{\|I + B'PB\|} > \|L(0)\|^2 \quad (58)$$

e

$$\hat{V}_*(\tau) = \{x^t \in R^n \mid \sum_{i=1}^N (x_1^t)' P_i (x_1^t) < \tau\} \quad (59)$$

Prova: Com $Q = \beta I$ e $R = I$, obtemos (56) facilmente a partir de (50). Além disso (57) fornece uma boa estimação do domínio de estabilidade pois, para qualquer $x^t \in \Omega(\tilde{\beta})$ a restrição (51) é satisfeita:

$$\beta \geq \|L(x^t)\|^2 \|I + B'PB\| \geq \|L'(x^t)(I + B'PB)L(x^t)\| \quad (60)$$

desde que (58) nos fornece $\Omega(\tilde{\beta})$ não vazio. Portanto o teorema está provado.

Evidentemente, no teorema acima, β deve ser tal que $\beta > \beta_*$ obtido na recorrência (26), devendo portanto satisfazer as condições de existência.

Estabelecemos desta forma procedimentos para determinar controles descentralizados estabilizantes para sistemas discretos e com não linearidades localizadas nas interconexões.

A seguir, apresentamos uma aplicação dos resultados teóricos num exemplo.

III.5 EXEMPLO

Tomando o exemplo 1 apresentado na seção II.6, fazendo a aproximação $\hat{x}(t) = (x^{t+1} - x^t)/0,1$ e assumindo $\|L_{12}\| = 5$ e $\|L_{21}\| = 3$, obtemos:

$$(S_1) \begin{cases} x_1^{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 \\ -0,1 & 0,9 \end{bmatrix} x_1^t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix} u_1^t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix} [L_{12}] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x_2^t \\ y_1^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x_1^t \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} x_2^{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 1 \end{bmatrix} x_2^t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,1 \end{bmatrix} u_2^t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,1 \end{bmatrix} [L_{21}] \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x_1^t \\ y_2^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x_2^t \end{cases}$$

A expressão (23) nos fornece:

$$P_* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Neste caso particular, como $P_* = C'C$, as condições necessárias e suficientes de existência de β_* coincidem

($I > L'B'P_*B L = L'B'C'CBL$) e são satisfeitas. Na tabela a seguir relacionamos os valores de β encontrados durante a recorrência (26) até atingir β_* .

Iteração ℓ	β_ℓ	Polos do sistema em malha fechada para $\beta = \beta_*$
0	25,00	
1	40,65	
2	46,52	0,1196
3	48,56	$0,9466 + j 0,0828$
4	49,25	$0,9466 - j 0,0828$
5	49,49	$0,8997 + j 0,0266$
6	49,56	$0,8997 - j 0,0266$
7	49,59	
8	49,60	
9	49,60 (β_*)	

Usando este valor de β_* e o teorema 2, obtemos os seguintes ganhos descentralizados:

$$K_1 = [4,05 \quad 4,92] \quad K_2 = [4,79 \quad 6,93 \quad 5,96]$$

III.6 CONCLUSÕES

A semelhança do capítulo anterior, estabelecemos as condições de estabilidade de sistemas discretos, tanto lineares como não lineares, utilizando controles descentralizados e estendemos os resultados também para observadores discretos. Além disso, para o caso não linear propomos um método para estimar o do-

mínio de estabilidade.

Apesar deste trabalho para casos discretos, ser um dos pioneiros, acreditamos que os algoritmos aqui propostos são bastante satisfatórios pois são simples e fáceis de serem implementados.

Cabe lembrar que nem todos os elementos de C^* podem ser estabilizado através das técnicas aqui propostas, desde que algumas condições adicionais devem ser satisfeitas para garantir a convergência dos algoritmos. Essas condições, necessária e suficiente, simples de serem testadas são fornecidas.

Da mesma maneira que no caso contínuo, as considerações feitas sobre a generalidade da classe de sistemas que tratamos continuam válidas. Recentemente pudemos obter alguns resultados para sistemas discretos que permitem, a partir das idéias aqui descritas, eliminar a necessidade do sistema em consideração ser de classe C^* (Geromel, Yamakami e Melo, 1985).

CAPÍTULO IV

OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES MATRICIAIS

IV.1 INTRODUÇÃO

Os teoremas estabelecidos nos capítulos II e III mostraram que no processo de estabilização de sistemas dinâmicos pertencentes à classe C^* , obtemos uma família de duplas simétricas (Q, R) que satisfazem as exigências de estabilidade. Portanto, definindo-se um critério de otimalidade, é possível obter-se algum (ou alguns) par (Q, R) muito bem definido, pertencente àquela família e satisfazendo este critério. Obtemos assim um problema de otimização, sujeito às restrições de estabilidade. Mais ainda, fazendo $Q = \text{bloc diag } (Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$ e $R = \text{bloc diag } (R_1, R_2, \dots, R_N)$ recaímos num problema de otimização descentralizada, permitindo-nos abordar o problema utilizando técnicas de otimização voltadas aos sistemas de grande porte.

Um aspecto importante que devemos notar nestes problemas é que as restrições são do tipo matricial: $Q \leq 0$, significando a não definida positividade da matriz Q suposta simétrica.

De uma maneira geral podemos escrever estes problemas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{Q} \quad & f(Q) \\ \text{s. a} \quad & G(Q) \leq 0 \\ & Q \in \Phi \subset R^{n \times n} \end{aligned} \tag{1}$$

onde $f(Q): R^{n \times n} \rightarrow R$, $G(Q) \leq 0$ é uma restrição associada à estabilidade, significando a não definida positividade de $G(Q)$, sendo do tipo $G(Q): R^{n \times n} \rightarrow R^{m \times m}$ uma matriz simétrica e, finalmente Φ é um sub-conjunto de $R^{n \times n}$. Portanto temos um problema matricial para resolver, tal como o abordado em Geromel (1979), onde é utilizado o método de gradiente projetado para problemas estritamente convexos. Polak e Mayne (1976) também abordou um problema semelhante, otimizando funções sujeitas a restrições tipo funcionais, usando método das direções factíveis.

Neste capítulo vamos estabelecer condições necessárias e suficientes de otimalidade para problemas do tipo (1) e

desenvolvemos uma teoria da dualidade para ele. A seguir, propomos métodos numéricos para resolver (1), baseado nos estudos das seções anteriores. Na seção seguinte apresentamos alguns problemas de determinação de controles estabilizantes que recaem em problemas de otimização do tipo (1), como exemplificação das aplicações das teorias desenvolvidas neste capítulo.

IV.2 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Vamos estabelecer nesta seção algumas definições e conceitos indispensáveis ao desenvolvimento das seções posteriores. Em primeiro lugar, exploremos as questões referentes à convexidade.

Definição 1: Um conjunto Φ de matrizes é dito ser convexo se dados $Q_1 \in \Phi$ e $Q_2 \in \Phi$, implica que $Q = \alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2 \in \Phi$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Um exemplo de um conjunto convexo é $\Phi = \{Q \in R^{n \times n} \mid Q = Q' \leq 0\}$ pois neste caso, dados $Q_1 \in \Phi$ e $Q_2 \in \Phi$ temos, para todo $x \in R^n$, $x'Q_1x \leq 0$ e $x'Q_2x \leq 0$. Multiplicando a primeira relação por $0 \leq \alpha \leq 1$ e a segunda por $(1 - \alpha)$ e adicionando obtemos:

$$x'[\alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2]x \leq 0 \quad \forall x \in R^n \quad (2)$$

e portanto $Q = (\alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2) \in \Phi$. Cabe considerar que podemos substituir uma restrição do tipo $Q \leq 0$ por $\lambda_{\max}(Q) \leq 0$.

Definição 2: $f(Q)$, $Q \in R^{n \times n}$ é convexa em $\Phi \subseteq R^{n \times n}$ se $f(\alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2) \leq \alpha f(Q_1) + (1 - \alpha)f(Q_2)$, $\forall Q \in \Phi$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

A expressão $Q \leq 0$ está associada uma função $\lambda_{\max}(Q) \leq 0$ que é convexa pois, dados $\lambda_{\max}(Q_1) \leq 0$, $\lambda_{\max}(Q_2) \leq 0$, para $0 \leq \alpha \leq 1$ temos:

$$\lambda_{\max}(\alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2) \leq \alpha \lambda_{\max}(Q_1) + (1 - \alpha)\lambda_{\max}(Q_2) \leq 0$$

(3)

Nota: Para o nosso caso, temos um problema do tipo (1) que será convexo se $f(Q)$ satisfizer a definição 2 pois a restrição $G(Q) = L'RL - Q \leq 0$ define um conjunto convexo: dados $Q_1 \leq 0$ e $Q_2 \leq 0$ tal que $G(Q_1) = L'RL - Q_1 \leq 0$ e $G(Q_2) = L'RL - Q_2 \leq 0$, temos:

$$x' [L'RL - Q_1] x \leq 0, \quad \forall x \in R^n \quad (4)$$

$$x' [L'RL - Q_2] x \leq 0$$

o que implica, para $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$x' (\alpha L'RL) x - x' (\alpha Q_1) x \leq 0 \quad \forall x \in R^n \quad (5)$$

$$x' [(1 - \alpha) L'RL] x - x' [(1 - \alpha) Q_2] x \leq 0$$

ou seja:

$$x' [L'RL - (\alpha Q_1 + (1 - \alpha) Q_2)] x \leq 0 \quad (6)$$

o que quer dizer $G(\alpha Q_1 + (1 - \alpha) Q_2) \leq 0$.

Lema 1: Seja $f: R^{n \times n} \rightarrow R$ uma função convexa num conjunto convexo Φ . Então, se $\bar{Q} \in \Phi$ dá o mínimo local de f e $Q^* \in \Phi$ dá o mínimo global de f , $f(\bar{Q}) = f(Q^*)$.

Prova: Suponha que $\bar{Q}$ é mínimo local de f . Então $f(\bar{Q}) \leq f(Q)$ para todo $Q \in N_\epsilon(\bar{Q}) = \epsilon$ - vizinhança de $\bar{Q}$. Suponha, por contradição, que Q^* é tal que $f(Q^*) < f(\bar{Q})$. Como f é convexa:

$$\begin{aligned} f(\alpha Q^* + (1 - \alpha) \bar{Q}) &\leq \alpha f(Q^*) + (1 - \alpha) f(\bar{Q}) < \alpha f(\bar{Q}) + \\ &+ (1 - \alpha) f(\bar{Q}) = f(\bar{Q}) \end{aligned} \quad (7)$$

com $\alpha \in [0, 1]$. Tomando um α suficientemente pequeno tal que $Q = \alpha Q^* + (1 - \alpha) \bar{Q} \in N_\epsilon(\bar{Q})$, temos $f(Q) < f(\bar{Q})$ que contradiz (7). Portanto $f(\bar{Q}) = f(Q^*)$ e o lema está provado.

Definição 3: Neste capítulo, definimos produto escalar de duas matrizes $A \in R^{n \times m}$ e $B \in R^{n \times m}$ como:

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A'B) = \text{Tr}(B'A) \quad (8)$$

Definição 4: A função Lagrangeana para o problema do tipo (1) é dada como no caso vetorial:

$$L(\Lambda, Q) = f(Q) + \langle \Lambda, G(Q) \rangle \quad (9)$$

onde Λ é chamada "variável" dual do problema (1).

Lema 2: Seja $G(Q)$, $Q \in \Phi \subseteq R^{n \times n}$ da forma $A + B Q B'$ então a função $\langle \Lambda, G(Q) \rangle$ é convexa sobre Φ .

Prova: Dados $Q_1 \in \Phi$ e $Q_2 \in \Phi$, como Φ é convexa, para $0 \leq \alpha \leq 1$, $Q = \alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2 \in \Phi$. Como $\langle \Lambda, G(Q) \rangle = \text{Tr}(\Lambda' G(Q))$, temos:

$$\begin{aligned} \langle \Lambda, G(\alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2) \rangle &= \langle \Lambda, A + B[\alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2]B' \rangle \\ &= \langle \Lambda, A + \alpha B Q_1 B' + (1 - \alpha)B Q_2 B' \rangle = \langle \Lambda, A \rangle + \\ &+ \alpha \langle \Lambda, B Q_1 B' \rangle + (1 - \alpha) \langle \Lambda, B Q_2 B' \rangle = \alpha \langle \Lambda, A \rangle + \\ &+ \alpha \langle \Lambda, B Q_1 B' \rangle + (1 - \alpha) \langle \Lambda, A \rangle + \\ &+ (1 - \alpha) \langle \Lambda, B Q_2 B' \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

Portanto:

$$\langle \Lambda, G(Q) \rangle = \alpha \langle \Lambda, G(Q_1) \rangle + (1 - \alpha) \langle \Lambda, G(Q_2) \rangle \quad (11)$$

Lema 3: Sejam as funções $f(Q)$ e $g(Q)$ convexas em Φ , um conjunto convexo das matrizes $Q \in R^{n \times n}$. A função $h(Q) = f(Q) + g(Q)$ é convexa em Φ .

Prova: Dados $Q_1 \in \Phi$ e $Q_2 \in \Phi$, temos que para $0 \leq \alpha \leq 1$, $Q = \alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2 \in \Phi$. Então:

$$\begin{aligned} h(Q) &= f(Q) + g(Q) \leq \alpha f(Q_1) + (1 - \alpha) f(Q_2) + \\ &+ \alpha g(Q_1) + (1 - \alpha) g(Q_2) \end{aligned} \quad (12)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} h(Q) &\leq \alpha [f(Q_1) + g(Q_1)] + (1 - \alpha) [f(Q_2) + g(Q_2)] \\ &= \alpha h(Q_1) + (1 - \alpha) h(Q_2) \end{aligned} \quad (13)$$

Certamente, este estudo pode ser desenvolvido utilizando uma aplicação $\Psi(\cdot)$ que faz corresponder um vetor $x \in R^{n \times m}$ a toda matriz $Q \in R^{n \times m}$, como feito em Geromel (1979). Cabe lembrar também que a norma induzida pelo produto escalar (8) não satisfaz a desigualdade: $\|AB\| < \|A\| \|B\|$.

IV.3 CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE

Nesta seção estudamos as condições de otimalidade para problemas do tipo (1), estabelecendo as condições necessárias e suficientes, conhecidas na teoria de otimização clássica como de Kuhn-Tucker. Para facilitar o estudo, vamos reescrever o problema (1) como segue:

$$(P) \begin{cases} \min_Q f(Q) \\ \text{s. a } Q = Q' \leq 0 \end{cases} \quad (14)$$

Para este problema, o teorema a seguir nos fornece uma condição suficiente de otimalidade.

Teorema 1: Se $Q^* \leq 0$ e $\Lambda^* \geq 0$ são matrizes simétricas tais que

$$Q^* = \arg \min_{Q \leq 0} \{f(Q) + \langle \Lambda^*, Q \rangle\} \quad (15)$$

$$\langle \Lambda^*, Q^* \rangle = 0$$

então Q^* é solução de (P).

Prova: De (15) temos:

$$f(Q^*) + \langle \Lambda^*, Q^* \rangle \leq f(Q) + \langle \Lambda^*, Q \rangle \quad \forall Q \leq 0 \quad (16)$$

o que implica:

$$f(Q^*) \leq f(Q) + \langle \Lambda^*, Q \rangle \quad \forall Q \leq 0 \quad (17)$$

Como $\Lambda^* \geq 0$ é simétrica, podemos fazer $\Lambda^* = \Lambda^{*1/2} \Lambda^{*1/2}$, o que resulta:

$$\langle \Lambda^*, Q \rangle = \langle \Lambda^{*1/2} \Lambda^{*1/2}, Q \rangle = \langle I, \Lambda^{*1/2} Q \Lambda^{*1/2} \rangle \quad (18)$$

De (17) e (18), concluímos que $f(Q^*) \leq f(Q)$, $\forall Q \leq 0$, o que prova o teorema.

A seguir podemos estabelecer a condição necessária de otimalidade para (P).

Teorema 2: Se $Q^* \leq 0$ é solução de (P), então existe $\Lambda^* \geq 0$ tal que:

$$\frac{\partial L(Q, \Lambda)}{\partial Q} = M(Q^*)' + \Lambda^* = 0 \quad (19)$$

$$\langle \Lambda^*, Q^* \rangle = 0$$

$$\text{onde } L(Q, \Lambda) = f(Q) + \langle \Lambda, Q \rangle \text{ e } \frac{df(Q)}{dQ} \Big|_{Q^*} = M(Q^*)'$$

Prove: O problema (P) pode ser reescrito como:

$$(P') \begin{cases} \min_Q f(Q) \\ \text{s. a } x'Qx \leq 0 \quad \forall x \in R^n, \|x\| = 1 \end{cases} \quad (20)$$

O Lagrangeano associado a (P') se escreve:

$$\begin{aligned} L[Q, \mu(\xi)] &= f(Q) + \int_{\|\xi\|=1} \mu(\xi) \xi' Q \xi \, d\xi \\ &= f(Q) + \int_{\|\xi\|=1} \mu(\xi) \langle X(\xi), Q \rangle \, d\xi \\ &= f(Q) + \left\langle \int_{\|\xi\|=1} \mu(\xi) X(\xi) \, d\xi, Q \right\rangle \end{aligned} \quad (21)$$

onde $X(\xi) = \xi \xi'$, $\xi \in R^n$. Portanto, as condições de Kuhn-Tucker associados ao problema (P') se escrevem (Lasdon, 1970):

$$\begin{aligned} M(Q^*)' + \int_{\|\xi\|=1} \mu(\xi) X(\xi) \, d\xi &= 0 \\ \mu(\xi) &\geq 0 \\ \xi' Q^* \xi &\leq 0 \end{aligned} \quad \forall \xi \in R^n, \|\xi\| = 1 \quad (22)$$

$$\left\langle \int_{\|\xi\|=1} \mu(\xi) X(\xi) \, d\xi, Q^* \right\rangle = 0$$

Definindo:

$$\Lambda^* \triangleq \int_{\|\xi\|=1} \mu(\xi) X(\xi) \, d\xi \quad (23)$$

Como $\mu(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in R^n$, $\|\xi\| = 1$ e $X(\xi) \geq 0$, obtemos $\Lambda^* \geq 0$. Com isso, ficamos com:

$$\begin{aligned} M(Q^*)' + \Lambda^* &= 0 \\ \Lambda^* &\geq 0 \\ Q^* &\leq 0 \\ \langle \Lambda^*, Q^* \rangle &= 0 \end{aligned} \tag{24}$$

e o teorema está provado.

Tendo em vista que $\langle \Lambda^*, Q^* \rangle = 0$, podemos reescrever (23):

$$\Lambda^* = \int_{\xi \in \pi(Q^*)} \mu(\xi) X(\xi) d\xi \tag{25}$$

onde:

$$\pi(Q^*) = \{\xi \in R^n \mid \xi' Q^* \xi = 0, \|\xi\| = 1\} \tag{26}$$

Como $Q^* \leq 0$, existe uma matriz T tal que:

$$T' Q^* T = \text{diag} [\lambda_1(Q^*)] \quad , \quad T' T = I \tag{27}$$

onde $T = [t_1 \mid t_2 \mid \dots \mid t_n]$ é a matriz dos auto-vetores normalizados de Q^* e $\lambda_1(Q^*)$ são os auto-valores correspondentes. Portanto, $\xi' Q^* \xi = 0$ em (26) pode ser substituído por $\xi' T \text{diag} [\lambda_1(Q^*)] T' \xi = 0$ o que implica em:

$$t_i' \xi = 0 \quad \forall i \mid \lambda_i(Q^*) \neq 0 \tag{28}$$

Considerando que os auto-vetores que compõem a matriz T são orto-normais e definindo $T_I = [t_1 \mid \dots \mid t_i \mid \dots]$ onde $i \in I = \{1 \mid \lambda_1(Q^*) = 0\}$, obtemos:

$$\xi \in \text{Range} \{T_I\} = R\{T_I\} \tag{29}$$

Isso nos permite redefinir (26) como segue:

$$\pi(Q^*) = \{\xi \mid \xi \in R(T_I), \|\xi\| = 1\} \quad (30)$$

Lembrando novamente que $\langle \Lambda^*, Q^* \rangle = 0$ e com (25) podemos concluir que $\mu(\xi) = 0$ para qualquer $\xi \in \pi(Q^*)$ e que os vetores t_i , $i \in I$, embora não únicos, definem completamente $\pi(Q^*)$ e, portanto, devem definir completamente Λ^* .

Lema 4: Seja $Q \in R^{n \times n}$ uma matriz simétrica. Então:

$$\lambda_i(Q + \epsilon \Delta Q) = \lambda_i(Q) + \epsilon t_i' \Delta Q t_i, \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (31)$$

onde t_i é o auto-vetor normalizado associado a $\lambda_i(Q)$, $i = 1 \dots n$.

Prova: Como $Q t_i = \lambda_i(Q) t_i$, temos:

$$\begin{aligned} (Q + \epsilon \Delta Q)(t_i + \epsilon \Delta t_i) &= \lambda_i(Q + \epsilon \Delta Q)(t_i + \epsilon \Delta t_i) \\ &= (\lambda_i(Q) + \epsilon \Delta \lambda_i(Q))(t_i + \epsilon \Delta t_i) \end{aligned} \quad (32)$$

Desenvolvendo a expressão acima e tomando apenas os termos de primeira ordem em ϵ , vem:

$$Q \Delta t_i + \Delta Q t_i = \lambda_i(Q) \Delta t_i + \Delta \lambda_i(Q) t_i \quad (33)$$

Multiplicando (33) à esquerda por t_i' , obtemos:

$$t_i' Q \Delta t_i + t_i' \Delta Q t_i = \lambda_i(Q) t_i' \Delta t_i + \Delta \lambda_i(Q) t_i' t_i \quad (34)$$

Com $\|t_i\| = 1$ e lembrando que Q é simétrica, finalmente temos:

$$\Delta \lambda_i(Q) = t_i' \Delta Q t_i \quad (35)$$

Corolário 1: Se $\lambda_i(Q)$ tem multiplicidade 1, então:

$$\frac{d \lambda_1(Q)}{dQ} = t_1 t_1' \quad (36)$$

Prova: Se $\lambda_1(Q)$ tem multiplicidade 1, então t_1 associado a este auto-valor é único. Então, do lema anterior:

$$\lambda_1(Q + \epsilon \Delta Q) = \lambda_1(Q) + \epsilon t_1' \Delta Q t_1 + o(\epsilon^2) \quad (37)$$

que é equivalente a:

$$\lambda_1(Q + \epsilon \Delta Q) = \lambda_1(Q) + \epsilon \text{Tr}[\Delta Q t_1 t_1'] + o(\epsilon^2) \quad (38)$$

Como $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} o(\epsilon^2)/\epsilon = 0$, usando o lema de Kleiman, ficamos com:

$$\frac{d \lambda_1(Q)}{dQ} = t_1 t_1' \quad (39)$$

Quando λ_1 tem multiplicidade maior que um, $\lambda_1(Q)$ perde a diferenciabilidade. Para contornar este problema, enunciaremos o corolário que segue.

Corolário 2: Se $\lambda_1(Q)$ tem multiplicidade p , então:

$$\frac{d}{dQ} \sum_{i=1}^p \lambda_i(Q) = \frac{d}{dQ} \lambda(Q) = \sum_{i=1}^p t_i t_i' \quad (40)$$

onde $\lambda(Q) = \lambda_1(Q) = \lambda_2(Q) = \dots = \lambda_p(Q)$.

Prova: Se $\lambda_1(Q)$ tem multiplicidade p , então vários t_i podem ser associados a este auto-valor e isso faz perder a diferenciabilidade de $\lambda_1(Q)$ em relação a Q . No entanto, a soma $\sum_{i=1}^p t_i t_i'$ é constante, pois os t_i representam os auto-valores generalizados de $\lambda_1(Q)$ linearmente independentes. Assim sendo, aplicando o corolário 1 para $\sum_{i=1}^p \lambda_i(Q)$ e $\sum_{i=1}^p t_i t_i'$, este corolário é facilmente pro-

vado.

Estes dois corolários fornecem condições para analisarmos a estrutura da matriz Λ^* . O problema (P) pode ser colocado na sua forma equivalente:

$$(PE) \begin{cases} \min_Q f(Q) \\ \text{s. a } \lambda_i(Q) \leq 0, \quad i=1 \dots n \end{cases} \quad (41)$$

pois $Q \leq 0$ se e somente se $\lambda_i(Q) \leq 0, i=1 \dots n$. Supondo a diferenciabilidade de $\lambda_i(Q)$ em relação a Q , as condições de otimalidade de Kuhn-Tucker do problema (PE) se escrevem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Q} \{f(Q) + \sum_{j=1}^n \mu_j \lambda_j(Q)\} &= 0 \\ \mu_j &\geq 0 \quad j=1 \dots n \\ \lambda_j(Q^*) &\leq 0 \\ \sum_{j=1}^n \mu_j \lambda_j(Q^*) &= 0 \end{aligned} \quad (42)$$

Utilizando o corolário 1 na primeira expressão de (42), obtemos:

$$M(Q^*)' + \sum_{j=1}^n \mu_j t_j t_j' = 0 \quad (43)$$

Dado que $\lambda_i(Q^*) = t_i' Q^* t_i$, podemos escrever:

$$\sum_{j=1}^n \mu_j \lambda_j(Q^*) = \sum_{j=1}^n \mu_j t_j' Q^* t_j = \text{Tr} \left[\sum_{j=1}^n \mu_j t_j t_j' Q^* \right] \quad (44)$$

Portanto, definindo:

$$\Lambda^* \triangleq \sum_{j=1}^n \mu_j t_j t_j' \geq 0 \quad (45)$$

com (44) obtemos (24). De (25) e (45) vem:

$$\int_{\xi \in \pi(Q^*)} \mu(\xi) X(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^n \mu_j t_j t_j' \quad (46)$$

Como assumimos que $\lambda_j(Q^*)$ é diferenciável, apenas um único auto-valor de Q^* é nulo. Portanto, de $\langle \Lambda^*, Q^* \rangle = 0$, temos apenas um elemento diferente de zero na soma em (46). Além disso $\pi(Q^*)$ se resume à apenas um elemento ξ tal que $\xi' Q^* \xi = 0$:

$$\begin{aligned} \mu_j &= \mu(t_j) \quad \text{para algum} \quad 1 \leq j \leq n \\ \mu_i &= 0 \quad \forall i \neq j \end{aligned} \quad (47)$$

Caso temos $\lambda_j(Q^*)$ com multiplicidade $p > 1$, perdemos a diferenciabilidade. Apesar disto, mesmo neste caso podemos colocar as condições de otimalidade na forma (24) com Λ^* dado como em (45). Para mostrar isto, seja o espectro de Q^* dado por:

$$\lambda_1(Q^*) = \lambda_2(Q^*) = \dots = \lambda_p(Q^*) \neq \lambda_{p+1}(Q^*) \neq \lambda_{p+2}(Q^*) \neq \dots \neq \lambda_n(Q^*) \quad (48)$$

Reescrevendo o Lagrangeano associado ao problema (PE), para este caso, obtemos:

$$\begin{aligned} L(Q, \mu) &= f(Q) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(Q) \mu_i \\ &= f(Q) + \sum_{i=1}^p \lambda_i(Q) \mu_i + \sum_{i=p+1}^n \lambda_i(Q) \mu_i \end{aligned} \quad (49)$$

e as condições de otimalidade se escrevem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Q} \left\{ f(Q) + \sum_{i=1}^p \lambda_i(Q) \mu_i + \sum_{i=p+1}^n \lambda_i(Q) \mu_i \right\} &= 0 \\ \sum_{i=1}^p \lambda_i(Q^*) \mu_i + \sum_{i=p+1}^n \mu_i \lambda_i(Q^*) &= 0 \\ \mu_i &\geq 0 \quad ; \quad \lambda_i(Q^*) \leq 0 \quad i=1 \dots n \end{aligned} \quad (50)$$

A primeira expressão do conjunto (50) pode ser colocada na forma:

$$M(Q^*)' + \sum_{i=1}^p \mu_i t_i t_i' + \sum_{i=p+1}^n \mu_i t_i t_i' = 0 \quad (51)$$

pois, do corolário 2 podemos concluir facilmente que:

$$\frac{\partial}{\partial Q} \sum_{i=1}^p \mu_i \lambda_i(Q) = \sum_{i=1}^p \mu_i t_i t_i' \quad (52)$$

Portanto, a expressão (51) coincide com a (43). Isto nos permite escrever que:

$$\begin{aligned} \Lambda^* &= \sum_{i=1}^n \mu_i t_i t_i' \\ \mu_i \lambda_i(Q) &= 0, \quad i=1 \dots n \\ \mu_i &\geq 0, \quad i=1 \dots n \end{aligned} \quad (53)$$

e com isso, as condições de otimalidade de Kuhn-Tucker para o problema (P) ficam:

$$\left\{ \begin{array}{l} M(Q)' + \Lambda = 0 \\ Q \leq 0 \\ \Lambda = \sum_{i=1}^n \mu_i t_i t_i' \\ \mu_i \geq 0 \\ \mu_i \lambda_i(Q) = 0 \end{array} \right. \quad (54)$$

A seguir exploramos o aspecto da dualidade.

IV.4 DUALIDADE

Como colocado na introdução deste capítulo, pretendemos resolver o problema do tipo (P), gerando um controle descen-

tralizado estabilizante. Isto nos sugere a utilização de algoritmos de decomposição baseado em dualidade. Para isso é preciso mostrar que resolvendo um problema dual de (P), em certos casos, estaremos obtendo uma solução primal de (P).

O Lagrangeano foi definido em (9) e portanto a função dual ao problema (P) é dada por:

$$h(\Lambda) = \min_{Q \leq 0} \{ f(Q) + \langle \Lambda, Q \rangle \} \quad (55)$$

e o problema dual a (P) é:

$$(D) \begin{cases} \max h(\Lambda) \\ \text{s.t. } \Lambda \geq 0 \end{cases} \quad (56)$$

A seguir vamos estabelecer as relações existentes entre o problema primal (P) e o problema dual (D). Em primeiro plano vamos explorar as características do problema (D) e da função $h(\Lambda)$ e a seguir vamos estudar as condições para que a solução do primal coincida com a do dual.

Teorema 3: Seja Q uma solução factível de (P) e seja Λ uma solução factível de (D). Então:

$$f(Q) \geq h(\Lambda) \quad (57)$$

Prova: $h(\Lambda) = \min_{Q \leq 0} \{ f(Q) + \langle \Lambda, Q \rangle \} \leq f(Q) + \langle \Lambda, Q \rangle$,
 $\forall Q \in R^{n \times n}$. Portanto

$$h(\Lambda) \leq f(Q) + \langle \Lambda, Q \rangle \leq f(Q) \quad (58)$$

pois $\Lambda \geq 0$ e $Q \leq 0$.

O teorema acima fornece o limite inferior para $f(Q)$ em (P) e na teoria clássica de dualidade é conhecido como teorema fraco da dualidade (Bazaraa e Shetty, 1979). Este teorema nos

permite enunciar três corolários.

Corolário 3: Se $\max_{A \geq 0} f(A)$ tende para $+\infty$, então o primal é infactível.

Corolário 4: Se $\min_{Q \leq 0} f(Q)$ tende para $-\infty$, então o dual é infactível.

Corolário 5: Se existe Q^* factível para o primal e existe Λ^* factível para o dual tal que $f(Q^*) = h(\Lambda^*)$ então Q^* resolve o primal e Λ^* resolve o dual.

Prova: Vamos provar este corolário por absurdo. Se $f(Q^*) = h(\Lambda^*)$ e Λ^* não resolve o dual então existe $\tilde{\Lambda} \neq \Lambda^*$ tal que $h(\tilde{\Lambda}) > h(\Lambda^*)$. Mas isto implica que $f(Q^*) < h(\tilde{\Lambda})$ o que contradiz o teorema fraco da dualidade. Portanto Λ^* resolve o dual. Da mesma maneira, se Q^* não resolve o primal, existe $\tilde{Q} \neq Q^*$ tal que $f(\tilde{Q}) < f(Q^*)$ o que implica $f(\tilde{Q}) < h(\Lambda^*)$ o que também contradiz o teorema 3. Portanto Q^* resolve o primal.

Teorema 4: A função dual $h(\Lambda)$ é côncava sobre um domínio convexo $\Psi = \{\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \Lambda = \Lambda' > 0\}$

Prova: Seja $\Lambda_1 \in \Psi$ e $\Lambda_2 \in \Psi$. Se Ψ é convexo $\Lambda = \alpha \Lambda_1 + (1 - \alpha)\Lambda_2$, $0 \leq \alpha \leq 1$ pertence a Ψ .

$$\begin{aligned} h(\Lambda) &= \min_Q L(\Lambda, Q) = \min_Q \{f(Q) + \langle \Lambda, Q \rangle\} \\ &= \min_Q \{\alpha f(Q) + \alpha \langle \Lambda_1, Q \rangle + (1 - \alpha)f(Q) + (1 - \alpha) \langle \Lambda_2, Q \rangle\} \\ &\geq \min_Q \alpha \{f(Q) + \langle \Lambda_1, Q \rangle\} + \min_Q (1 - \alpha) \{f(Q) + \langle \Lambda_2, Q \rangle\} \\ &= \alpha h(\Lambda_1) + (1 - \alpha) h(\Lambda_2) \end{aligned} \quad (59)$$

Este teorema nos diz que se o domínio de Λ é convexo, então $h(\Lambda)$ é côncava. Portanto, o dual é um problema bem comportado e resolvendo, obtemos um máximo global. Resta estabelecer-

mos as condições tais que $\min_{Q \leq 0} f(Q) = \max_{\Lambda \geq 0} h(\Lambda)$. Vamos provar que esta igualdade é conseguida se e somente se existir um ponto de sela da função Lagrangeano.

Definição 5: Um ponto (Q^*, Λ^*) com $\Lambda^* \geq 0$ e $Q^* \leq 0$ é dito ser um ponto de sela para $L(\Lambda, Q)$, se:

$$\begin{aligned} L(Q^*, \Lambda^*) &\leq L(Q, \Lambda^*) & , & \quad \forall Q \leq 0 \\ L(Q^*, \Lambda^*) &\geq L(Q^*, \Lambda) & , & \quad \forall \Lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (60)$$

O teorema a seguir fornece as condições necessárias e suficiente para um ponto de sela de $L(Q, \Lambda)$. Seja $\Phi = \{Q \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid Q = Q^T \leq 0\}$:

Teorema 5: Seja $Q^* \leq 0$ e $\Lambda^* \geq 0$. Então (Q^*, Λ^*) é ponto de sela para $L(Q, \Lambda)$, se e somente se:

$$\begin{aligned} \text{a) } Q^* &\text{ minimiza } L(Q, \Lambda^*) \text{ sobre } \Phi \\ \text{b) } Q^* &\leq 0 \\ \text{c) } \langle \Lambda^*, Q^* \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (61)$$

Prova: Condição necessária:

Se (Q^*, Λ^*) é ponto de sela, então $L(Q^*, \Lambda^*) \leq L(Q, \Lambda^*)$, o que implica:

$$f(Q^*) + \langle \Lambda^*, Q^* \rangle \leq f(Q) + \langle \Lambda^*, Q \rangle \quad \forall Q \in \Phi \quad (62)$$

o que prova o item a). Como $L(Q^*, \Lambda^*) \geq L(Q^*, \Lambda)$, temos que:

$$f(Q^*) + \langle \Lambda^*, Q^* \rangle \geq f(Q^*) + \langle \Lambda, Q^* \rangle \quad \forall \Lambda \geq 0 \quad (63)$$

e portanto $\langle \Lambda, Q^* \rangle - \langle \Lambda^*, Q^* \rangle = \langle \Lambda - \Lambda^*, Q^* \rangle \leq 0$ para todo

$\Lambda \geq 0$. A desigualdade é assegurada para qualquer $\Lambda \geq 0$ somente se $Q^* \leq 0$, e portanto o item b) é estabelecido. Para chegarmos a c) basta tomarmos $\Lambda = 0$ em (63), obtendo $\langle \Lambda^*, Q^* \rangle \geq 0$. Mas com $\Lambda^* \geq 0$ e $Q^* \leq 0$, $\langle \Lambda^*, Q^* \rangle \leq 0$. Portanto $\langle \Lambda^*, Q^* \rangle = 0$.

Condição suficiente:

De a), se Q^* minimiza $L(Q, \Lambda^*)$, então $L(Q^*, \Lambda^*) \leq L(Q, \Lambda^*)$ $\forall Q \in \Phi$.

Por outro lado, como $Q^* \leq 0$ de b) e $\Lambda \geq 0$, $L(Q^*, \Lambda) = f(Q^*) + \langle \Lambda, Q^* \rangle \leq f(Q^*) = f(Q^*) + \langle \Lambda^*, Q^* \rangle$ pois $\langle \Lambda^*, Q^* \rangle = 0$ de c). Portanto:

$$L(Q^*, \Lambda^*) \geq L(Q^*, \Lambda) \quad , \quad \forall \Lambda \geq 0$$

Teorema 6: Se (Q^*, Λ^*) é um ponto de sela para $L(Q, \Lambda)$, então Q^* resolve o primal (P) em $Q \in \Phi$.

Prova: (Q^*, Λ^*) sendo ponto de sela para $L(Q, \Lambda)$, da definição 5 temos:

$$f(Q^*) + \langle \Lambda^*, Q^* \rangle \leq f(Q) + \langle \Lambda^*, Q \rangle \quad \forall Q \in \Phi \quad (64)$$

Do teorema anterior, $\langle \Lambda^*, Q^* \rangle = 0$, $\Lambda^* \geq 0$ e para todo $Q \in \Phi$ tal que o primal seja factível, temos $Q \leq 0$, o que implica $\langle \Lambda^*, Q \rangle \leq 0$. Portanto

$$f(Q^*) \leq f(Q) \quad , \quad \forall Q \in \Phi \quad (65)$$

ou seja, Q^* resolve o primal.

O lema 3 deste capítulo pode ser modificado como segue:

Lema 5: Seja Φ um conjunto convexo das matrizes $Q \in R^{n \times n}$. Sejam $f(Q)$ uma função convexa em Φ e $g(Q)$ uma função estritamente convexa em Φ . Então $h(Q) = f(Q) + g(Q)$ é estritamente convexa em Φ .

Teorema 7: Seja (P) um problema estritamente convexo ($f(Q)$ estritamente convexa em Q). Se $Q^* \leq 0$ é solução de (P), então existe $\Lambda^* \geq 0$ tal que (Q^*, Λ^*) é um ponto de sela, para $L(Q, \Lambda)$. Alternativamente, se neste caso, (Q^*, Λ^*) é ponto de sela para $L(Q, \Lambda)$, então Q^* resolve (P).

Prova: Se Q^* é solução de (P), então satisfaz as condições de otimalidade de Kuhn-Tucker. Portanto existe Λ^* tal que:

$$\left. \frac{\partial L(Q, \Lambda^*)}{\partial Q} \right|_{Q=Q^*} = 0 \quad (66)$$

Como $L(Q, \Lambda^*)$ é estritamente convexa (Lema 5), (66) implica que Q^* é um ponto de ótimo de $L(Q, \Lambda^*)$ em Q . Portanto Q^* minimiza $L(Q, \Lambda^*)$ em Q , o que implica que, com as outras condições de otimalidade, (Q^*, Λ^*) é ponto de sela.

Por outro lado, se (Q^*, Λ^*) é ponto de sela para $L(Q, \Lambda)$, então, pelo teorema 6, Q^* resolve (P).

O teorema acima nos fornece as condições de existência de ponto de sela. Resta verificarmos se é possível termos um ponto tal que $\max_{\Lambda \geq 0} h(\Lambda) = \min_{Q \leq 0} f(Q)$, pois desta forma podemos resolver o problema dual e obtermos a solução do primal. O teorema seguinte prova que essa igualdade é conseguida se e somente se existir um ponto de sela para o Lagrangeano.

Teorema 8: (Q^*, Λ^*) é um ponto de sela para $L(Q, \Lambda)$ se e somente se Q^* é uma solução factível para o primal, Λ^* é uma solução factível para o dual e $f(Q^*) = h(\Lambda^*)$.

Prova: Condição Suficiente:

Se (Q^*, Λ^*) é um ponto de sela, então, pelo teorema 5, Q^* é primal factível, Λ^* é dual factível e $\langle \Lambda^*, Q^* \rangle = 0$. Portanto:

$$h(\Lambda^*) = f(Q^*) + \langle \Lambda^*, Q^* \rangle = f(Q^*) \quad (67)$$

Condição necessária:

Q^* é primal factível e se Q^* não é solução do Lagrangeano sobre o domínio $Q \leq 0$, então existe um $\tilde{Q} \leq 0$ tal que:

$$h(\Lambda^*) = f(\tilde{Q}) + \langle \Lambda^*, \tilde{Q} \rangle < f(Q^*) + \langle \Lambda^*, Q^* \rangle \quad (68)$$

Como $h(\Lambda^*) = f(Q^*)$, temos de (68) que:

$$\langle \Lambda^*, Q^* \rangle > 0 \quad (69)$$

Mas $\Lambda^* \geq 0$ e $Q^* \leq 0$ e portanto (69) é uma contradição. Logo

$Q^* = \arg \min_{Q \leq 0} \{f(Q) + \langle \Lambda^*, Q \rangle\}$ e portanto:

$$h(\Lambda^*) = f(Q^*) = f(Q^*) + \langle \Lambda^*, Q^* \rangle \quad (70)$$

o que implica que $\langle \Lambda^*, Q^* \rangle = 0$. Como Q^* é primal factível, $Q^* \leq 0$ e portanto, pelo teorema 5, (Q^*, Λ^*) é ponto de sela para $L(Q, \Lambda)$.

IV.5 MÉTODOS NUMÉRICOS

Como descrito na introdução deste capítulo, existem famílias de pares (Q, R) que estabilizam os sistemas de controle do tipo (6) do capítulo II ou do tipo (4) do capítulo III, desde que Q e R guardem entre si uma relação do tipo (9) do capítulo II ou do tipo (6) do capítulo III, respectivamente. Portanto, de uma maneira geral, nossos problemas de otimização com restrições de estabilidade, podem ser escritos na forma:

$$(P) \begin{cases} \min_{Q} f(Q) \\ \text{s.a. } Q \geq 0 \\ L^* R L - Q \leq 0 \end{cases} \quad (71)$$

Considerando $f(Q)$ aditivamente separável em N partes (N subsistemas), Q e R bloco-diagonais, (71) pode ser reescrito

na forma:

$$\begin{aligned} \min_{Q_1} \quad & \sum_{i=1}^N f_i(Q_i) \\ \text{s. a} \quad & Q_i \geq 0, \quad i=1 \dots N \\ & L'RL - Q \leq 0 \end{aligned} \quad (72)$$

A matriz L é de interconexão dos N sub-sistemas e é não bloco-diagonal. O Lagrangeano associado ao problema (72) se escreve:

$$\begin{aligned} L(Q, \Lambda) &= \sum_{i=1}^N f_i(Q_i) + \text{Tr} \{ \Lambda', (L'RL - Q) \} \\ &= \sum_{i=1}^N f_i(Q_i) - \sum_{i=1}^N \langle \Lambda_i, Q_i \rangle + \text{Tr} \{ \Lambda', L'RL \} \end{aligned} \quad (73)$$

onde Λ_i é o i -ésimo bloco-diagonal da matriz Λ . O último termo do lado direito da igualdade (73) pode ser colocado na forma:

$$\text{Tr} \{ \Lambda', L'RL \} = \sum_{i=1}^N \text{Tr} (L_i' \Lambda_i' L_i, R_i) \quad (74)$$

onde:

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_N \end{bmatrix} \quad (75)$$

Portanto, $L(Q, \Lambda)$ se torna aditivamente separável para cada sub-sistema:

$$\begin{aligned} L(Q, \Lambda) &= \sum_{i=1}^N \{ f_i(Q_i) - \langle \Lambda_i, Q_i \rangle + \langle L_i' \Lambda_i' L_i, R_i \rangle \} \\ &= \sum_{i=1}^N L_i(Q_i, \Lambda) \end{aligned} \quad (76)$$

Assim, a função dual fica:

$$\begin{aligned} h(\Lambda) &= \min_{Q \geq 0} L(Q, \Lambda) = \min_{Q \geq 0} \sum_{i=1}^N L_i(Q_i, \Lambda) \\ &= \sum_{i=1}^N \min_{Q_i \geq 0} L_i(Q_i, \Lambda) \end{aligned} \quad (77)$$

e o problema dual associado ao problema (71) é da forma:

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \max_{\Lambda \geq 0} h(\Lambda) = \max_{\Lambda \geq 0} \sum_{i=1}^N \min_{Q_i \geq 0} L_i(Q_i, \Lambda) \end{array} \right. \quad (78)$$

Como Λ tem estrutura definida em (45), podemos reescrever (78) da seguinte maneira:

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \max_{\mu_i \geq 0} h(\mu) \end{array} \right. \quad (79)$$

onde μ_i são as variáveis duais associadas às restrições $\lambda_i(L'RL - Q) = 0$.

Baseado no que apresentamos até aqui propomos alguns algoritmos para resolver o problema (71).

MÉTODOS DUAIS

Do teorema 4, $h(\Lambda)$ é côncava e portanto bem comportada. Vamos explorar inicialmente a diferenciabilidade dessa função dual $h(\Lambda)$. A partir do teorema de Daskin (Daskin, 1966), podemos enunciar o lema que segue (Belloni e Geromel, 1984):

Lema 6: Seja F uma função que admite derivadas de 1ª ordem, e seja Z um conjunto compacto. Se:

$$\Psi(\lambda) \triangleq \min_{z \in Z} F(z, \lambda) \quad (80)$$

admite apenas uma solução primal z^* para um dado λ , então:

$$\nabla \Psi(\lambda) = \frac{\partial F(z^*, \lambda)}{\partial \lambda} \quad (81)$$

No nosso caso, vamos supor $f(Q)$ estritamente convexa e, portanto o problema $\min_{Q \geq 0} \{f(Q) + \langle \Lambda, L'RL - Q \rangle\}$ é estritamente convexo em Q para um dado Λ definido (lema 4). Assim, o lema 5 se aplica neste caso, Então:

$$\nabla h(\Lambda) = \frac{\partial \{f(Q) + \langle \Lambda', L'RL - Q \rangle\}}{\partial \Lambda} = L'RL - Q \quad (82)$$

Assim sendo, podemos utilizar métodos primais para resolver o problema (78) ou (79), utilizando por exemplo, gradiente projetado (Geromel e Baptistella, 1981). Esquematizamos um algoritmo, a seguir.

PASSO 1: Definir $\Lambda^0 = I$ e fazer $\ell = 0$.

PASSO 2: Resolver:

$$\min_{Q_1 \geq 0} \{f(Q_1) + \langle L_1 \Lambda L_1', R_1 \rangle - \langle \Lambda_1', Q_1 \rangle\}$$

PASSO 3: Verificar se $\{L'R L - Q^\ell\} \leq 0$. Se caso for verdade ir para PASSO 5. Caso contrário ir para PASSO 4.

PASSO 4: Calcular:

$$\Lambda^{\ell+1} = \Lambda^\ell + \gamma S$$

onde γ = escalar ≥ 0 e $S = \text{proj. } \nabla h(\Lambda^\ell), \Lambda \geq 0$. Fazer $\ell \leftarrow \ell + 1$ e voltar ao PASSO 2.

PASSO 5: Solução ótima: $Q^* = Q^\ell$.

Nota: No PASSO 4, a determinação de S é um problema complexo. Portanto o algoritmo só faz sentido desde que este problema seja resolvido.

Se relaxarmos a convexidade estrita de $f(Q)$ a função $f(Q)$ continua côncava, mas perde a sua diferenciabilidade para todo $A \in R^n$, $A \geq 0$. Para contornar esta dificuldade podemos utilizar o método dual generalizado, onde, no lugar de resolver [79], resolve-se:

$$\text{Max } \sigma$$

$$\sigma, \mu \geq 0$$

$$\sigma \leq h(\mu^k) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^k [L' R L - Q^k] (\mu_i - \mu_i^k) \quad (83)$$

numa iteração k (Lasdon, 1970). No procedimento que segue, apresentamos esta metodologia.

PASSO 1: Definir $\Lambda^0 = I$ e fazer $k = 0$.

PASSO 2: Resolver o problema:

$$\min_{Q_i \geq 0} \{ f(Q_i) - \langle \Lambda_i^k, Q_i \rangle + \langle L_i \Lambda_i^k L_i', R_i \rangle \}$$

PASSO 3: Determinar:

$$\lambda_i (L_i' R L_i - Q^k) = \lambda_i^k, \quad i=1 \dots N$$

e auto-vetores t_i^k associados.

PASSO 4: Resolver:

$$\text{max } \sigma$$

$$\sigma, \mu \geq 0$$

$$\sigma \leq h(\mu^k) + \sum_{i=1}^N \lambda_i^k (\mu_i - \mu_i^k)$$

PASSO 5: Testar se:

$$|\sigma - h(\mu^k)| < \epsilon, \quad \epsilon > 0$$

Caso sim, ir para PASSO 7 e caso não ir para PASSO 6.

PASSO 8: Achar: $\Lambda^k = \sum_{i=1}^N \mu_i t_i^k t_i^{k'} \geq 0$. Fazer $k \leftarrow k+1$ e voltar para PASSO 2.

PASSO 7: Solução ótima: $Q_1^* = Q_1^k$.

A convexidade estrita de $f(Q)$ garante a convergência dos algoritmos propostos.

MÉTODO PRIMAL

Propomos agora um método primal para resolver (72) baseado na relaxação da restrição $L'RL - Q \leq 0$. Isto é possível desde que o conjunto:

$$\Omega = \{Q \mid L'RL - Q \leq 0\} \quad (84)$$

é convexo. Assim, o problema (72) fica:

$$\begin{aligned} \min_{Q_1} \quad & \sum_{i=1}^N f_i(Q_1) \\ Q_1 \geq 0 \quad & , \quad i=1 \dots N \end{aligned} \quad (85)$$

$$\epsilon_j'(L'RL - Q)\epsilon_j \leq 0, \quad \epsilon_j' \|\epsilon_j\| = 1 \quad j=1 \dots 2$$

que pode facilmente ser resolvido por um método dual pois:

$$\begin{aligned}
 h(\mu) &= \min_{Q \geq 0} \left\{ \sum_{i=1}^N f(Q_i) + \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j \xi_j' (L'RL - Q) \xi_j \right\} \\
 &= \min_{Q \geq 0} \left\{ \sum_{i=1}^N f_i(Q_i) + \sum_{j=1}^{\ell} \text{Tr} [(L'RL - Q) \cdot \mu_j \xi_j \xi_j'] \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^N \min_{Q_i \geq 0} \{ f_i(Q_i) - \langle \Gamma_i, Q_i \rangle + \langle L_i \Gamma_i L_i', R_i \rangle \} \quad (86)
 \end{aligned}$$

onde μ_j são variáveis duais associadas as restrições $\xi_j' (L'RL - Q) \xi_j \leq 0$ e:

$$\Gamma_i = \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j \xi_j \xi_j' \quad (87)$$

O teste de otimalidade do problema (85) é feito sobre $\lambda_{\max} (L'RL - Q)$ que, no ótimo deve ser tal que:

$$\lambda_{\max} (L'RL - Q) \leq 0 \quad (88)$$

Caso contrário uma nova restrição deve ser gerada para (85), para eliminar a última solução. Isto é feito através de:

$$\xi_{\ell+1}' (L'RL - Q) \xi_{\ell+1} \leq 0 \quad (89)$$

onde $\xi_{\ell+1}$ é o auto-vetor associado a $\lambda_{\max} (L'RL - Q)$.

Abaixo, esquematizamos de uma forma geral o procedimento do algoritmo, que tem a convergência assegurada pela convexidade de Ω e pela estrita convexidade de $f(Q)$.

PASSO 1: Definir μ_j^0 para $j = 1, 2, \dots, \ell$ e fazer $k = 0$.

PASSO 2: Resolver:

$$\min_{Q_i \geq 0} \{ f_i(Q_i) - \langle \Gamma_i, Q_i \rangle + \langle L_i \Gamma_i L_i', R_i \rangle \}$$

$$r_1 = \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j^k \xi_j \xi_j'$$

PASSO 3: Resolver:

$$\max_{\sigma, \mu \geq 0} \sigma$$

$$\sigma \leq h(\mu^k) + \sum_{j=1}^{\ell} \xi_j' (L'RL - Q) \xi_j (\mu_j - \mu_j^k)$$

obtendo solução ótima μ^k e σ_k .

PASSO 4: Verificar se $\sigma_k = h(\mu^{k-1})$. Se for verdadeiro, ir para PASSO 5. Caso contrário, fazer:

$$\mu^{k+1} \leftarrow \mu^k$$

e ir para PASSO 2.

PASSO 5: Calcular $\lambda_{\max} (L'RL - Q) = \lambda^{\ell}$ e verificar se $\lambda^{\ell} \leq 0$. Caso sim ir para PASSO 6 e caso não, calcular $\xi^{\ell+1}$, fazer $\ell \leftarrow \ell + 1$ e ir para PASSO 1.

PASSO 6: Q_1^{ℓ} , $i = 1 \dots N$ resolvem o problema proposto.

Vamos explorar algumas possíveis aplicações dos algoritmos que desenvolvemos nesta seção, a seguir.

IV.6 APLICAÇÕES

Nesta seção apresentamos algumas aplicações da teoria desenvolvida nas seções anteriores deste capítulo. As aplicações são estabelecidas a partir da definição de algum critério a ser otimizado, observada a restrição de estabilidade do sistema. Vamos abordar inicialmente, o problema de determinar o controle descentralizado de norma mínima, e, a seguir, comentamos o problema de determinação de soluções diagonais da equação de

Lyapunov.

Teorema 9: (Yamakami e Geromel, 1981-a) O ganho K dado como:

$$K = R^{-1} B' P \quad (90)$$

$$A'P + P A - P B R^{-1} B' P + C' Q C = 0$$

$Q = Q' > 0$, $R = R' > 0$; satisfaz a relação:

$$\|K\| \leq \theta(R) \|B\| \|\tilde{P}\| \quad (91)$$

onde $\theta(R) = \|R\| \|R^{-1}\|$ é "condition number" de R e $\tilde{P}$ é a solução definida positiva da equação de Riccati:

$$A'\tilde{P} + \tilde{P} A - \tilde{P} B B'\tilde{P} + \gamma C' C = 0 \quad (92)$$

onde $\gamma = \|Q\| / \|R\|$

Prova: Para todo $x \in R^n$, $y = Cx$ e $u \in R^m$, a relação

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \{y' Q y + u' R u\} dt &\leq \int_0^\infty \{ \|Q\| y' y + \|R\| u' u \} dt \\ &\leq \|R\| \int_0^\infty \{ \gamma y' y + u' u \} dt \end{aligned} \quad (93)$$

é verdadeira. Isto implica que:

$$\begin{aligned} \min \int_0^\infty \{y' Q y + u' R u\} dt &\leq \|R\| \min \int_0^\infty \{ \gamma y' y + u' u \} dt \\ \text{s. a } \dot{x} &= Ax + Bu & \text{s. a } \dot{x} &= Ax + Bu \\ x(0) &= x_0 & x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (94)$$

o que equivale a:

$$x_0' P x_0 \leq \|R\| x_0' \tilde{P} x_0 \quad \forall x_0 \in R^n \quad (95)$$

Mas, como $\|K\| \leq \|R^{-1}\| \|B\| \|P\|$, obtemos:

$$\|K\| \leq O(R) \|B\| \|\tilde{P}\| \quad (96)$$

o que prova o teorema.

De (92), temos que:

$$(A - B R^{-1} B' \tilde{P})' \frac{d\tilde{P}}{dy} + \frac{d\tilde{P}}{dy} (A - B R^{-1} B' \tilde{P}) + C' C = 0 \quad (97)$$

o que implica que $\frac{d\tilde{P}}{dy} \geq 0$ e, portanto $\gamma_1 \geq \gamma_2$ nos fornece $\|\tilde{P}_1\| \geq \|\tilde{P}_2\|$. Escolhendo $R = I$ = matriz identidade, para achar o mínimo do limitante superior de $\|K\|$ devemos resolver o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min_{Q \geq 0} \quad & \frac{1}{2} \|Q\|^2 \\ \text{s. a} \quad & L' L - Q \leq 0 \end{aligned} \quad (98)$$

Lembrando que Q é simétrica, podemos reescrever (98) como segue:

$$\begin{aligned} \min_{Q_i \geq 0} \quad & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \text{Tr} (Q_i^2) \\ \text{s. a} \quad & L' L - \text{bloc-diag} (Q_1 \dots Q_N) \leq 0 \end{aligned} \quad (99)$$

Podemos utilizar qualquer dos métodos propostos há pouco, mas aquele baseado na linearização externa (relaxação da restrição) parece-nos mais adequado, como mostramos a seguir.

Sejam p vetores $\xi_j \in R^r$ de norma unitária, tal que $\xi_j' = [\xi_j^{1'}, \xi_j^{2'}, \dots, \xi_j^{N'}]$, $\xi_j^i \in R^{r_i}$ e seja o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min_{Q_i \geq 0} \quad & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \text{Tr} (Q_i^2) \\ \text{s. a} \quad & \xi_j' L' L \xi_j - \xi_j' \text{ bloc-diag} (Q_1 \dots Q_N) \xi_j \leq 0, \quad j=1 \dots p \end{aligned} \quad (100)$$

Chamando de $\pi \in R^p$ as variáveis duais associadas às p restrições de (100), obtemos o problema equivalente:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \min_{\pi \geq 0} L(Q, \pi) \\ & Q_i \leq 0 \end{aligned} \quad (101)$$

onde $L(\cdot)$ é a função Lagrangeana definida como:

$$L(Q, \pi) = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr} (Q_i^2) - \text{Tr} (Q_i, M_i) \right\} + \text{Tr} (LML') \quad (102)$$

M_i sendo o i -ésimo bloco da matriz $M = \sum_{j=1}^p \pi_j \xi_j \xi_j'$. O mínimo do Lagrangeano em Q é obtido para $Q_i = M_i$ e, portanto, (101) fica:

$$\max_{\pi \geq 0} - \frac{1}{2} \pi' S_p \pi + C_p' \pi \quad (103)$$

que é um problema quadrático côncavo, sendo $S_p \in R^{p \times p}$ e $C_p \in R^p$ definidos como:

$$\begin{aligned} \{S_p\}_{lj} &= \sum_{i=1}^N \langle \xi_l^i, \xi_j^i \rangle & l, j &= 1 \dots p \\ \{C_p\}_j &= \langle L\xi_j, L\xi_j \rangle & j &= 1 \dots p \end{aligned} \quad (104)$$

A partir dos resultados acima, podemos estabelecer o seguinte algoritmo:

PASSO 1: Definir p vetores ξ_j tais que $\|\xi_j\| = 1$.

PASSO 2: Calcular S_p e C_p dados em (104) e resolver (103), obtendo π^*

PASSO 3: Calcular $Q_i^* = \sum_{j=1}^p \pi_j^* \xi_j^i \xi_j^{i'}$, $i = 1 \dots N$

PASSO 4: Verificar se $\lambda_{\max} (L'L - Q^*) \leq 0$. Se não, achar ξ_{p+1} = auto-vetor associado a $\lambda_{\max} (L'L - Q^*)$, fazer $p \leftarrow p + 1$

e ir para PASSO 2. Caso sim, ir para PASSO 5.

PASSO 5: Resolver:

$$A_i' P_i + P_i A_i - P_i B_i B_i' P_i + C_i' Q_i C_i = 0 \quad i=1 \dots N$$

$$\text{onde } Q_i = Q_i^* + \epsilon I, \quad \epsilon > 0$$

PASSO 6: Calcular

$$K_i = B_i' P_i, \quad i=1 \dots N$$

e fim do algoritmo.

Uma outra aplicação encontramos em Khalil (1982) e Germei (1984), onde é analisado o seguinte problema: dada uma matriz quadrada $A \in R^{n \times n}$ real, encontrar a solução, se existir, da equação de Lyapunov:

$$A'P + P A + Q = 0, \quad Q = Q' > 0 \quad (105)$$

tal que:

- a) P seja diagonal ou
- b) P e Q sejam diagonais

Definindo $P \stackrel{\Delta}{=} \text{diag} (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$, o problema acima pode ser formulado como:

$$\min_x f(x) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j \neq i}^n q_{ij}^2 = x' R x \quad (106)$$

$$\text{s. a } A'P + P A < 0$$

onde $Q = \{q_{ij}\}$, $i, j = 1 \dots n$ e $R \in R^{n \times n}$ é tal que:

$$R = \{r_{ij}\} = \begin{cases} \sum_{k \neq i}^n a_{ik}^2 & \text{para } i=j \\ a_{ij}a_{ji} & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (107)$$

No seu trabalho, Geromel (1984) utilizou método primal para resolver o problema (106), relaxando a restrição $A'P + P A < 0$ e obtendo:

$$\xi_k' [A'P + P A] \xi_k < 0, \quad k=1 \dots p \quad (108)$$

$$\xi_k \in R^n$$

Através de um método dual, podemos resolver a parte a) do problema em questão, baseado no fato de que a solução existe se e somente se α^* , solução ótima do problema:

$$\begin{aligned} \min_{\alpha, x \in X} \quad & \alpha \\ \text{s. a} \quad & A'P + P A \leq \alpha I \end{aligned} \quad (109)$$

onde $X = \{x \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1 \dots n\}$, for negativa. O Lagrangeano de (109) se escreve como:

$$L(\alpha, x, \Lambda) = \alpha + \langle \Lambda, A'P + P A - \alpha I \rangle \quad (110)$$

e portanto a função dual é:

$$h(\mu) = \min_{\alpha, x \in X} \{ \alpha + \langle \Lambda, A'P + P A - \alpha I \rangle \} \quad (111)$$

O mínimo de (111) em relação a α deve satisfazer $\partial L / \partial \alpha = 0$, o que fornece:

$$\text{Tr} \{ \Lambda \} = 1 \quad (112)$$

e portanto o problema dual pode ser definido como sendo:

$$\begin{aligned} & \max_{\substack{\Lambda \geq 0 \\ \text{Tr}(\Lambda)=1}} \min_{x \in X} \tilde{L}(x, \Lambda) \end{aligned} \quad (113)$$

Por outro lado, a relação (112) pode ser traduzida como sendo $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$ uma vez que $\Lambda = \sum_{i=1}^n \mu_i t_i t_i'$ com auto-vetores orto-normalizados. Assim sendo, podemos reescrever (113) na forma:

$$\begin{aligned} & \max_{\substack{\mu \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n \mu_i = 1}} \min_{x \in X} \text{Tr} \{ \Lambda', A'P + P A \} \end{aligned} \quad (114)$$

Na expressão (114), traço pode ser substituído por:

$$\text{Tr} \{ \Lambda', A'P + P A \} = \text{Tr} \{ [AA' + AA']P \} = c'x \quad (115)$$

onde $c_i = \{ AA' + AA' \}_{ii}$. Portanto podemos esquematizar o procedimento como segue:

PASSO 1: Definir $\Lambda^0 = I$ e fazer $k = 0$

PASSO 2: Determinar:

$$h(\mu^k) = \min_{\substack{0 \leq x_i \leq 1 \\ i=1 \dots n}} c'x$$

PASSO 3: Calcular:

$$\lambda_i(A'P + P A) = \lambda_i^k, \quad i=1 \dots n$$

e t_i^k associados

PASSO 4 : Resolver:

$$\begin{array}{ll} \max & \sigma \\ \sigma, \mu \geq 0 \end{array}$$

$$\sigma \leq h(\mu^k) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^k (\mu_i - \mu_i^k)$$

$$\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$$

PASSO 5: Verificar se:

$$|\sigma - h(\mu^k)| < \epsilon$$

Caso afirmativo, ir para PASSO 7 e caso contrário ir para PASSO 6

PASSO 6: Fazer $A^k = \sum_{i=1}^n \mu_i t_i^k (t_i^k)'$, $k \leftarrow k+1$ e voltar ao PASSO 2.

PASSO 7: Verificar o sinal de σ .

Se $\sigma < 0$ então a solução é $P = \text{diag} \{x_i, i=1 \dots N\}$.

Se $\sigma \geq 0$, o problema não tem solução factível.

IV.7 CONCLUSÕES

Abordamos neste capítulo problemas com restrições de natureza matricial que podem ser colocados na forma geral (1). Dedicamo-nos inicialmente ao estabelecimento de conceitos e definições básicas necessárias para seções seguintes. Deduzimos a seguir as condições de otimalidade do problema proposto, definindo ao mesmo tempo a estrutura da matriz dual. Após analisarmos aspectos de dualidade, propomos alguns algoritmos para resolvermos estes problemas, tanto utilizando o procedimento primal como também utilizando o conceito de dualidade. Analisamos a seguir algumas aplicações possíveis das metodologias propostas com sugestões de algoritmos para solução.

Certamente não esgotamos a análise do problema em questão, principalmente no que se refere a métodos numéricos e aplicações. No entanto, o capítulo cumpre o objetivo de trazer uma nova metodologia para abordar problemas do tipo (1), sugerindo algoritmos e analisando procedimentos adequados para aplicações em problemas específicos.

CAPÍTULO V

APLICAÇÕES

V.1 INTRODUÇÃO.

Neste capítulo aplicamos os resultados teóricos obtidos anteriormente em exemplos numéricos para avaliarmos as características dos métodos de controle descentralizado propostos. Escolhemos dois problemas: o problema de controle Carga-Frequência (conhecido como controle p.f.) num sistema de Energia Elétrica multi-área e o problema de determinar controles descentralizados para um sistema de pêndulos interconectados.

A escolha do primeiro problema baseou-se no fato de que os sistemas de geração e distribuição de energia elétrica, devida às suas características de distribuição geográfica, apresentam atrativos para o controle descentralizado. A escolha do segundo exemplo baseou-se na sua semelhança com o primeiro, aliado ao fato de ser de natureza não-linear.

Vários trabalhos na linha de controle p.f. descentralizado foram publicados e dentre eles podemos citar como relevantes, os de Elgerd e Fosha (1970), Geromel (1979) e Geromel e Peres (1984). O primeiro estudou o controle p.f. para sistema de duas áreas apenas, usando técnica de simulação. Geromel (1979) utilizou um método baseado em gradiente matricial (Geromel e Baptistella, 1980) e estudou este problema para sistemas linearizados. Recentemente Geromel e Peres (1984) propuseram uma nova metodologia onde os controles descentralizados estáveis para sistemas linearizados são obtidos resolvendo iterativamente uma equação de Riccati da ordem do sistema:

$$G_{\ell+1} = R^{-1}B'P_{\ell} - \text{bloc diag } (K_1, K_2, \dots, K_N) \quad ; \quad G_0 = 0 \quad (1)$$

$$A'P_{\ell} + P_{\ell}A - P_{\ell}BR^{-1}B'P_{\ell} + Q + G_{\ell}'RG_{\ell} = 0$$

O procedimento apresenta seu interesse em vista das técnicas eficientes de que dispomos atualmente para resolver equações de Riccati de ordens elevadas.

Em contraste, abordamos aqui, o problema de uma maneira descentralizada, ou seja, resolvemos várias equações de Riccati da ordem de cada sub-sistema isolado como proposto nos

capítulos II e III. Além disso, tratamos também de sistemas não lineares.

O capítulo está subdividido em quatro partes. Na primeira, caracterizamos e analisamos o problema p.f. na sua forma não linear para, a seguir, estudarmos na forma linearizada. Na segunda parte utilizamos estes resultados para analisar um exemplo numérico encontrado em Elgerd e Fosha (1970). Dedicamos a terceira parte na formulação, simulação e análise do problema de pêndulos interligados encontrado em Lefevre e outros (1983) e finalmente na quarta parte colocamos as conclusões obtidas.

V.2 PROBLEMA CARGA-FREQUÊNCIA EM SISTEMAS DE POTÊNCIA

Os sistemas de geração e distribuição de energia elétrica podem ser caracterizados como compostos de N áreas interconectados entre si, cada área contendo n_i geradores. Sob condições normais de funcionamento, cada área deve seguir uma política de geração visando atender a demanda local, excetuando as quantidades a serem intercambiadas conforme programação prévia. Esta programação é obtida através de controladores de despacho econômico, baseado em estimativas da demanda.

Uma variação ΔP_{d_i} de carga demandada na área i em torno do valor nominal $P_{d_i}^*$, como a frequência está intimamente relacionada com o balanço de potência ativa da rede inteira, vai acarretar numa variação $\Delta \delta_{ij}$ na defasagem entre as tensões nas barras i e j , em torno do valor nominal δ_{ij}^* . O controle dessa variação $\Delta \delta_{ij}$, que é a integral da variação da frequência é importante, porque a ela está relacionada a estabilidade do sistema global, além de envolver questões de ordem econômica.

O problema de controle p.f. descentralizado procura encontrar um controle de malha fechada em cada sub-sistema, tal que para uma variação ΔP_d de demanda, leve o sistema a um estado de equilíbrio satisfazendo (Elgerd, 1970):

- a) A uma perturbação do tipo degrau de carga, em regime estacionário, o desvio de frequência deve ser nulo para cada área:

$$\Delta f_i(\infty) = 0, \quad i=1\dots N \quad (2)$$

- b) Em regime estacionário, o intercâmbio de energia entre áreas deve ir para um valor P_{ti}^* desejado:

$$P_{ti}(\infty) = P_{ti}^*, \quad i=1\dots N \quad (3)$$

Este valor P_{ti}^* pode ser, por exemplo, a solução do ótimo despacho considerando o incremento da demanda ΔP_{di} , $i=1\dots N$, em torno da demanda nominal P_{di}^* . Se escolhermos $P_{ti}^* = P_{ti}(0)$, $i=1\dots N$, estaremos assumindo que cada área é capaz de suprir sozinho o excesso de demanda local, recebendo auxílio de áreas adjacentes somente durante o transitório.

- c) A malha de controle deve ter um grau de estabilidade suficiente.
- d) A integral do erro de frequência não deve ultrapassar um valor máximo pré-estabelecido.
- e) Os geradores individuais de cada área de controle devem dividir a carga total de modo a obter economia ótima. Este requisito é de ordem secundária e com esquema de controle mais lento.

Vamos, a seguir, estudar com detalhes o problema de controle p.f. na sua forma não linear, procurando satisfazer as hipóteses acima citadas. Nessa análise vamos desprezar o acoplamento entre os canais de controle carga-frequência e de carga-tensão (controle Q-V), considerando que esta última tem tempo de resposta muito menor que o primeiro.

Para uma variação ΔP_d de demanda num sistema com N áreas interligadas, podemos escrever as equações dinâmicas de perturbações como segue (Elgerd, 1970, Xisto, 1984), se desprezarmos as perdas locais e de transmissão:

$$\frac{2H_i}{f^*} \dot{\Delta f}_i + D_i \Delta f_i = \Delta P_{gi} - \Delta P_{di} - \Delta P_{ti}$$

$$T_{gi} \dot{\Delta P}_{gi} + \Delta P_{gi} = \Delta X_i$$

$$T_{ti} \dot{\Delta X}_i + \Delta X_i = \Delta P_{ci} - \frac{1}{R_i} \Delta f_i \quad i=1 \dots N \quad (4)$$

$$P_{ti} = \sum_{j=1}^N \frac{|V_i| |V_j|}{X_{ij}} \{ \sin [(\delta_i^* + \Delta \delta_i) - (\delta_j^* + \Delta \delta_j)] - \sin (\delta_i^* - \delta_j^*) \}$$

onde:

H_i = constante de inércia da área i

f^* = frequência nominal

D_i = variação no consumo de carga = $\frac{\partial P_{di}}{\partial f}$, parâmetro empiricamente determinado

$\Delta \delta_i$ = variação de ângulo de fase da área i

ΔP_{gi} = variação na geração na área i

ΔP_{ti} = variação no intercâmbio de energia

T_{gi} = constante de tempo da turbina da área i

ΔX_i = variação na posição do governador (válvula)

T_{ti} = constante de tempo do governador

ΔP_{ci} = variação do controlador de velocidade

R_i = constante de regulação das máquinas da área i

V_i = tensão na barra i

X_{ij} = impedância reativa na linha (i, j)

δ_i^* = ângulo de fase nominal da área i (em regime permanente)

A primeira equação do conjunto (4) descreve o balanço de energia na área i. Em regime permanente, deve ocorrer:

$$\Delta P_{gi}^* = \Delta P_{di}^* + \Delta P_{ti}^* \quad , \quad i=1...N \quad (5)$$

A segunda equação descreve a dinâmica da turbina e a terceira, a dinâmica do governador. Finalmente, a última equação dá a relação de intercâmbio de energia entre áreas, em função das variações $\Delta\delta_i$.

Antes da perturbação, para cada área i , deve ocorrer:

$$P_{gi}^0 = P_{di}^0 + P_{ti}^0 \quad , \quad i=1...N \quad (6)$$

onde o super-escrito "o" significa valores iniciais. A partir de (4), lembrando que:

$$\Delta\delta_i = 2\pi \int_0^t \Delta f_i d\tau \quad , \quad i=1...N \quad (7)$$

e que na prática temos:

$$\frac{2H_i}{f_i \cdot D_i} \gg T_{gi} \approx T_{ti} \quad (8)$$

e definindo $\theta_{ij}^* = \delta_i^* - \delta_j^*$, onde o super-escrito * significa valores de regime após o transitório, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{2H_i}{f_i^*} \Delta \dot{f}_i + (D_i + \frac{1}{R_i}) \Delta f_i &= \Delta P_{ci} - \Delta P_{di} - \Delta P_{ti} \\ \Delta P_{ti} &= \sum_{j \neq i}^N T_{ij} \{ \sin(\Delta\delta_i - \Delta\delta_j + \theta_{ij}^*) - \sin \theta_{ij}^* \} \\ i &= 1...N \end{aligned} \quad (9)$$

onde $T_{ij} = \frac{|V_i| |V_j|}{X_{ij}}$.

Definindo vetor de estado do i -ésimo sub-sistema:

$$x_i = \begin{bmatrix} \int_0^t \Delta\delta_i dt \\ \Delta\delta_i \\ \Delta f_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \\ x_i^3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

podemos escrever (9) como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= A_i x_i + B_i Z_i \\ Z_i &= u_i - \sum_{j \neq i}^N T_{ij} \{ \sin(x_i^2 - x_j^2 + \theta_{ij}^*) - \sin \theta_{ij}^* \} \quad (11) \\ x_i(0) &= x_i^0 \quad i=1 \dots N\end{aligned}$$

com $u_i = \Delta P_{ci}$, x_i^0 as condições iniciais representando as diferenças dos estados entre o final e o inicial ($P_{ti}^* - P_{ti}(0)$, $\delta_i^* - \delta_i(0)$, etc.), e

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \\ 0 & 0 & -\lambda_i \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{f^*}{2H_i} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\lambda_i = \frac{f^*}{2H_i} (D_i + \frac{1}{R_i})$$

Escrevendo $[\sin(x_i^2 - x_j^2 + \theta_{ij}^*) - \sin \theta_{ij}^*]$ na forma:

$$\begin{aligned}[\sin(x_i^2 - x_j^2 + \theta_{ij}^*) - \sin \theta_{ij}^*] \\ = \frac{[\sin(x_i^2 - x_j^2 + \theta_{ij}^*) - \sin \theta_{ij}^*]}{x_i^2 - x_j^2} (x_i^2 - x_j^2) \\ = \psi_{ij}(x) (x_i^2 - x_j^2) \quad (13)\end{aligned}$$

as equações (11) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= A_i x_i + B_i Z_i \\ Z_i &= u_i + \sum_{j=1}^N L_{ij}(x) x_j\end{aligned} \quad (14)$$

onde $L_{ij}(x) = \bar{L}_{ij}(x)\bar{C}_j$, com $\bar{C}_j = [0 \quad 1 \quad 0]$ e:

$$\bar{L}_{ij}(x) = \begin{cases} - \sum_{j \neq i}^N T_{ij} \psi_{ij}(x) & \text{se } i=j \\ T_{ij} \psi_{ij}(x) & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (15)$$

Desta forma, definimos um sistema dinâmico que, desde que garantimos sua estabilidade assintótica, em regime estacionário alcança as condições desejadas $\Delta\delta_i = 0$ e $\Delta f_i = 0$, para entrada de grau. Portanto podemos utilizar resultados dos capítulos anteriores para propor controle descentralizado estável. Para que o sistema como um todo seja estável, é preciso que os sistemas rápidos também garantam a estabilidade, o que pode ser conseguido como feito em Khalil e Kokotovic (1978) e mais recentemente em Pares e Geromel (1984).

Na nossa análise, que tem como objetivo testar métodos para determinar controles estáveis de sistemas com estruturas de interconecção decomponíveis na forma BLC, podemos considerar somente os modos lentos, desde que os modos rápidos satisfaçam com rigor a hipótese assumida em (8): que sejam suficientemente rápidas.

A estimação do domínio de estabilidade pode ser feita usando os resultados do teorema 7 do capítulo II. Cabe comentar que esta estimação é importante uma vez que, para um controle dado, define a magnitude da perturbação permitida para manter o sistema estável.

Para perturbações pequenas em torno de valores nominais de operação, a última igualdade do conjunto (4) pode ser linearizada em torno de P_{ti}^* :

$$\Delta P_{ti} = \sum_{j \neq i}^N k_{ij} (\Delta\delta_i - \Delta\delta_j) \quad (16)$$

com $k_{ij} = T_{ij} \cdot \cos \theta_{ij}^*$. Isto nos fornece:

$$\frac{2H_1}{f^*} \Delta \dot{f}_i + (D_i + \frac{1}{R_1}) \Delta f_i = (\Delta P_{ci} - \Delta P_{di}) - \Delta P_{ti} \quad i=1 \dots N \quad (17)$$

$$P_{ti} = \sum_{j \neq i}^N k_{ij} (\Delta \delta_i - \Delta \delta_j)$$

que, lembrando (10) pode ser escrito como:

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i Z_i \quad i=1 \dots N \quad (18)$$

$$Z_i = u_i - \sum_{j \neq i}^N k_{ij} (x_i^2 - x_j^2)$$

com A_i e B_i dados em (12) e $u_i = \Delta P_{ci}$. Assim, a matriz de interconecção L é tal que $L_{ij} = \tilde{L}_{ij} \tilde{C}_j$

$$\tilde{L}_{ij} = \begin{cases} - \sum_{j \neq i}^N k_{ij} & \text{se } i=j \\ k_{ij} & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (19)$$

e, portanto, se assegurarmos a estabilidade assintótica, em regime permanente temos as hipóteses $\Delta \delta_i(\infty) = 0$ e $\Delta f_i(\infty) = 0$ satisfeitas.

V.3 APLICAÇÃO NUMÉRICA

Nesta seção fazemos uma ilustração numérica dos resultados obtidos nos capítulos anteriores. Analisamos três exemplos, sendo dois casos não-lineares e um linear. Para podermos comparar os resultados, tomamos o exemplo apresentado em Elgerd e Fosha (1970), onde é analisado o comportamento de duas áreas interconectadas sujeitas às perturbações. Os dados numéricos adotados são os seguintes:

$$\frac{2H_1}{f^*} = \frac{2H_2}{f^*} = \frac{1}{6}$$

$$\theta_{12}^* = -\theta_{21}^* = \delta_1^* - \delta_2^* = 30^\circ$$

$$D_1 = D_2 = 8.33 \times 10^{-3} \text{ pu Mw/Hz}$$

$$R_1 = R_2 = 2,4 \text{ Hz/pu Mw} \quad (20)$$

$$T_{g1} = T_{g2} = 0,08 \text{ seg}$$

$$T_{t1} = T_{t2} = 0,3 \text{ seg}$$

$$k_{12} = k_{21} = \frac{0,545}{2\pi} = 0,08674 \text{ pu Mw/rad}$$

O sistema está esquematizado na Figura 1, e a partir dos dados acima, lembrando (12), obtemos:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 6(8.33 \times 10^{-3} + \frac{1}{2,4}) = 2,55 \quad (21)$$

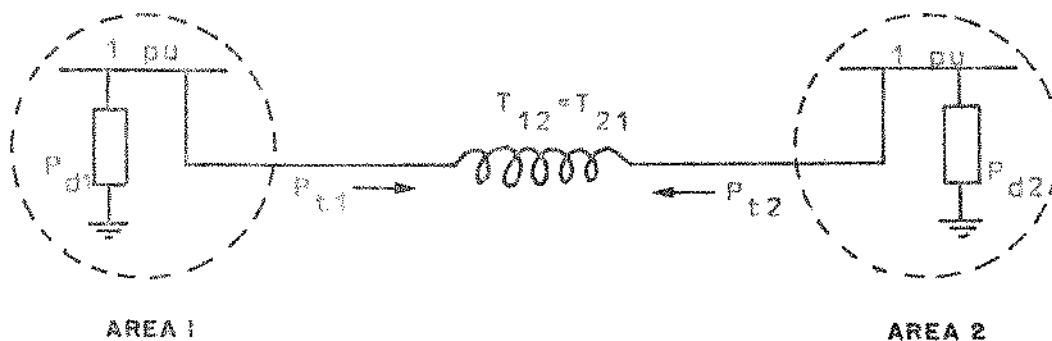


FIGURA 1 - 2 áreas interconectadas

e as matrizes:

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6,2832 \\ 0 & 0 & -2,55 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \quad C = I_6 \quad R = I_2$$

e $L = [L_1 \quad L_2]$ com:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & -T_{12} \frac{\sin(\Delta\delta_1 - \Delta\delta_2 + \theta_{12}^*) - \sin \theta_{12}^*}{\Delta\delta_1 - \Delta\delta_2} & 0 \\ 0 & T_{21} \frac{\sin(\Delta\delta_2 - \Delta\delta_1 + \theta_{21}^*) - \sin \theta_{21}^*}{\Delta\delta_2 - \Delta\delta_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

e $L_2 = -L_1$. Como $T_{12} = T_{21}$, $\theta_{12}^* = -\theta_{21}^*$ e $(\Delta\delta_1 - \Delta\delta_2) = -(\Delta\delta_2 - \Delta\delta_1)$, $\ell_{1,2}^1 = -\ell_{2,2}^1$, onde $L_1 = \{\ell_{1,j}^1\}$, $i=1, 2$; $j=1, 2, 3$.

Como $\psi_{ij}(0) = \cos \theta_{ij}^*$, obtemos a partir de (20) e (23):

$$L(0) = \begin{bmatrix} 0 & -0,08674 & 0 & 0 & 0,08674 & 0 \\ \hline 0 & 0,08674 & 0 & 0 & -0,08674 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

e, portanto, $\|L(0)\|^2 = 0,03$. Para obtermos sistema estável devemos fazer $\beta I = Q > L'(x) L(x)$. Dado que $\|L_1\| = \|L_2\|$, o domí-

nio de estabilidade fica definido pela relação $\|L_1(x)\|^2 < \beta/2$.
Como:

$$\begin{aligned}\|L_1(x)\|^2 &= 2 \left[T_{12} \frac{\text{sen}(\Delta\delta_1 - \Delta\delta_2 + \theta_{12}^*) - \text{sen } \theta_{12}^*}{\Delta\delta_1 - \Delta\delta_2} \right]^2 \\ &\leq 2 [T_{12}]^2 = 2 [k_{12}/\cos \theta_{12}^*]^2 \quad (25) \\ &= 0,02\end{aligned}$$

tomando $\beta \geq 0,04$ garantimos estabilidade assintótica do sistema para qualquer θ_{12}^* e portanto para qualquer $(\Delta\delta_1 - \Delta\delta_2)$. Em outras palavras, neste caso temos estabilidade global do sistema. Para $0,03 < \beta < 0,04$, temos uma região de estabilidade definida pela relação:

$$\tilde{D} = \{x \in R^6 \mid x'Px \leq \tilde{\pi}\} \quad (26)$$

onde:

$$\tilde{\pi} = \min_x \{x'Px \mid \|L_1(x)\|^2 = \beta/2\} \quad (27)$$

Para obtermos (27), lembrando (25), devemos ter:

$$\left| T_{12} \frac{\text{sen} [(\Delta\delta_1 - \Delta\delta_2) + \theta_{12}^*] - \text{sen } \theta_{12}^*}{(\Delta\delta_1 - \Delta\delta_2)} \right| = \frac{\sqrt{\beta}}{2} \quad (28)$$

Na expressão acima, com $\theta_{12}^* = 30^\circ$ e $T_{12} = 0,1$, escolhendo $\beta = 0,035$ obtemos como solução $(\Delta\delta_1 - \Delta\delta_2) = -20,19^\circ$. Como temos o módulo da expressão (28) menor que $(\sqrt{\beta}/2)$ para $(\Delta\delta_1 - \Delta\delta_2) \geq 0$, para assegurarmos estabilidade assintótica do sistema global devemos ter $(\Delta\delta_1 - \Delta\delta_2) > -20,19^\circ$. O domínio de estabilidade é dado pelas expressões (26), (27) e (28).

Utilizando o Teorema 7 do capítulo II, obtemos os seguintes ganhos descentralizados, para $\beta = 0,035$:

$$K_1 = K_2 = [0,19 \quad 0,3 \quad 0,49] \quad (29)$$

Com isso, para $x = 0$, os pólos do sistema que em malha aberta eram (aproximação linear):

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 &= -1,275 + j 2,217 \\ \lambda_5 &= -1,275 - j 2,217 \\ \lambda_6 &= -2,55\end{aligned}\quad (30)$$

foram para:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -2,514 + j 3,034 & \lambda_4 &= -2,188 - j 1,283 \\ \lambda_2 &= -2,514 - j 3,034 & \lambda_5 &= -1,113 \\ \lambda_3 &= -2,188 + j 1,283 & \lambda_6 &= -0,461\end{aligned}\quad (31)$$

Com o ganho (29) obtido, o sistema global com controle ficou sendo:

$$\dot{\bar{x}} = (A - BK)x + BL(x)x + Bd \quad (32)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi & 0 & 0 & 0 \\ -1,14 & -1,80 & -5,49 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\pi \\ 0 & 0 & 0 & -1,14 & -1,80 & -5,49 \end{bmatrix} x$$

$$-0,6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sin(x_2 - x_5 + \theta_{25}) - \sin(\theta_{25})}{0} \\ 0 \\ \frac{\sin(x_5 - x_2 + \theta_{52}) - \sin(\theta_{52})}{0} \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \\ 0 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

onde $\theta_{25} = 30 \pi / 180 = 0,5236 = -\theta_{52}$. Com $d_1 = 0,1$, ou seja uma variação de 10% da carga sobre a área 1, $x(0) = 0$ e $d_2 = 0$ obtemos as curvas apresentadas nas Figuras 2 (variações de frequência Δf_1 e Δf_2 , nas áreas 1 e 2 respectivamente), Figura 3 ($\Delta \delta_1$ e $\Delta \delta_2$, variações nas defasagens angulares na área 1 e 2 respectivamente, em torno dos valores de regime desejados δ_1^* e $\Delta \delta^*$) e Figura 4 ($\int_0^t \Delta \delta_1 d\tau$ e $\int_0^t \Delta \delta_2 d\tau$).

A solução da equação de Riccati forneceu a matriz:

$$P_1 = P_2 = \begin{bmatrix} 0,056 & 0,027 & 0,031 \\ 0,027 & 0,039 & 0,050 \\ 0,031 & 0,050 & 0,082 \end{bmatrix} \quad (33)$$

com $P = \text{bloc-diag} (P_1, P_2)$.

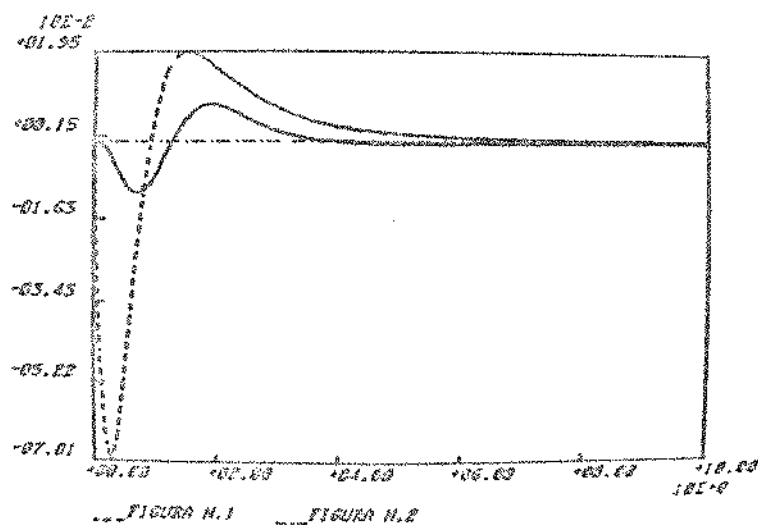


FIGURA 2 - Variações de frequências nas áreas 1 e 2 (Δf_1 e Δf_2) com $\Delta P_{d1} = 10\%$ e $\Delta P_{d2} = 0$

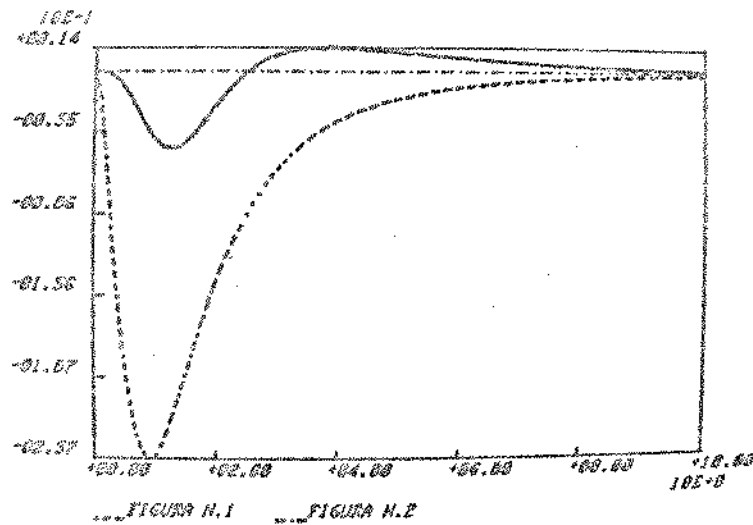


FIGURA 3 - Variações angulares $\Delta\delta_1$ e $\Delta\delta_2$ nas áreas 1 e 2 com $\Delta P_{d1} = 10\%$ e $\Delta P_{d2} = 0$

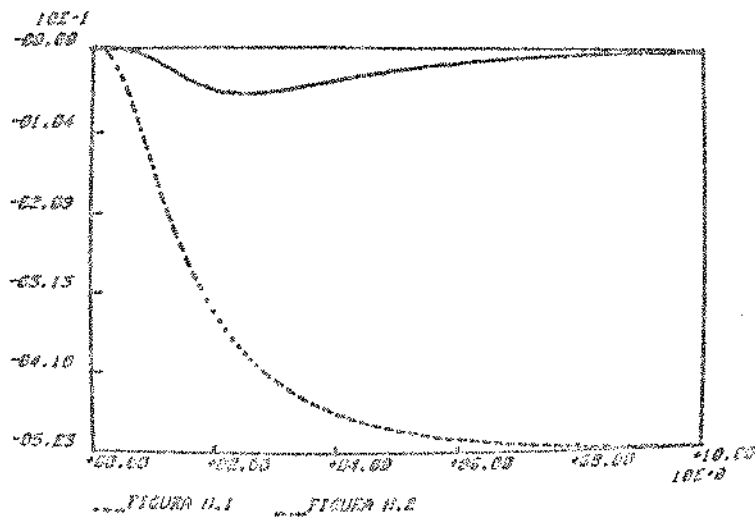


FIGURA 4 - Trajetória de $\int_0^t \Delta\delta_1 d\tau$ e $\int_0^t \Delta\delta_2 d\tau$ com $\Delta P_{d1} = 10\%$ e $\Delta P_{d2} = 0$

Para obter o domínio de estabilidade, devemos resolver o problema:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & x'Px = \hat{\pi} \\ \text{s. a} \quad & a'x = k \end{aligned} \quad (34)$$

com P dado em (33), $x' = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]$ e $a' = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0]$. O Lagrangeano do problema (34) é dado por:

$$L(\lambda, x) = x'Px - \lambda(a'x - k) \quad (35)$$

No mínimo devemos ter:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2 Px - \lambda a = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= a'x - k = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

e portanto de (34) e (36):

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \lambda P^{-1}a \\ \lambda &= \frac{2k}{a'P^{-1}a} \\ \hat{\pi} &= \frac{k^2}{a'P^{-1}a} \end{aligned} \quad (37)$$

Assim, o domínio de estabilidade fica definido como em (26), sendo k solução de (28) para um dado β . No nosso exemplo, como adotamos $\beta = 0,935$, $k = (-20,19^\circ \times \pi)/180^\circ = 0,3524$. De (33), obtemos $\hat{\pi} = 2,75 \times 10^{-5}$, o que nos fornece:

$$\hat{D} = \{x \in R^6 \mid x'Px \leq 2,75 \times 10^{-5}\} \quad (38)$$

Para efeito de análise, podemos definir um conjunto do tipo:

$$\hat{D}_j = \{\hat{D} \mid x_i^j = 0, \quad i=1,2; \quad j \neq l\} \quad (39)$$

onde l é o índice correspondente a um estado que se deseja observar. Para $l = 2$, significando as variáveis $\Delta\delta_i$, obtemos:

$$\bar{D}_2 = \{x \in R^6 \mid x'Px < 2,75 \times 10^{-5}, x_1^j = 0, i=1,2; j \neq 2\} \quad (40)$$

e que nos fornece a relação:

$$\Delta\delta_1^2 + \Delta\delta_2^2 \leq 0,0265^2 \quad (41)$$

e para $l = 3$, significando as variáveis Δf_i , obtemos:

$$\Delta f_1^2 + \Delta f_2^2 \leq 0,0183^2 \quad (42)$$

que nos fornecem regiões de estabilidade mostradas na Figura 5.

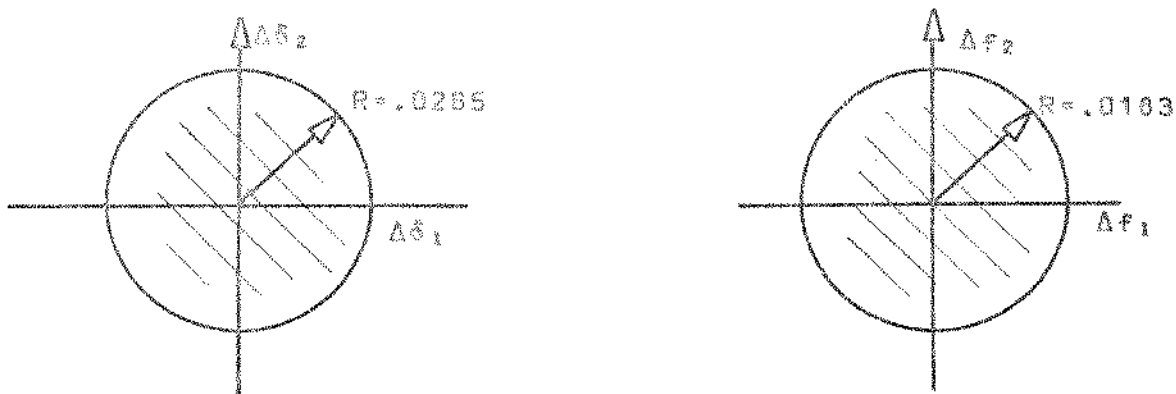


FIGURA 5 - Regiões de estabilidade estimadas

Introduzimos mais uma área no sistema acima, com as características que seguem, além das apresentadas em (20):

$$\frac{2H_3}{f^*} = \frac{1}{6}$$

$$D_3 = D_1 = D_2$$

$$\delta_1^* - \delta_3^* = \delta_3^* - \delta_2^* = -150$$

$$R_3 = 1,2 \text{ Hz/pu Mw}$$

$$T_{g3} = T_{g1} = T_{g2}$$

$$T_{t3} = T_{t1} = T_{t2}$$

$$k_{13} = k_{31} = \frac{0,272}{2\pi} = 0,04336 \text{ pu Mw/rad} \quad (43)$$

$$k_{23} = k_{32} = \frac{1,09}{2\pi} = 0,17348 \text{ pu Mw/rad}$$

Os dados acima fornecem $\lambda_3 = 5,05$ e as matrizes apresentadas em (20) e mais as seguintes:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \\ 0 & 0 & -5,05 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad C_3 = I_3 \quad (44)$$

$$R_3 = I_1$$

Com isso, a matriz de interconexão, na origem fica:

$$L(0) = \begin{bmatrix} 0 & -0,13010 & 0 & 0 & 0,08674 & 0 & 0 & 0,04336 & 0 \\ 0 & 0,08674 & 0 & 0 & -0,26022 & 0 & 0 & 0,17348 & 0 \\ 0 & 0,04336 & 0 & 0 & 0,17348 & 0 & 0 & -0,21684 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

e, portanto, $\|L(0)\|^2 \approx 0,175$. Como $\beta > N \max_i \|L_i\|^2 = 3 \|L_2\|^2 \approx 0,316$, escolhendo $\beta = 0,5$ e o domínio de estabilidade é dado por:

$$\tilde{D} = \{x \in R^9 \mid x'Px \leq \tilde{\pi}\} \quad (46)$$

$$\tilde{\pi} = \min_{x_1} \{x_1' P_1 x_1 \mid \|L_1(x_1)\|^2 = 0,167\}$$

Com o valor de β adotado, foi obtido o seguinte controle:

$$K = \begin{bmatrix} 0,71 & 0,93 & 1,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,71 & 0,93 & 1,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,71 & 0,95 & 0,95 \end{bmatrix}$$

(47)

que nos fornece o seguinte sistema para simulação:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4,26 & -5,58 & -9,75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4,26 & -5,58 & -9,75 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4,26 & -5,70 & -10,75 \end{bmatrix} x$$

(48)

$$\begin{matrix} -6 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{t1} \\ \hline 0 \\ 0 \\ P_{t2} \\ \hline 0 \\ 0 \\ P_{t3} \end{bmatrix} & -6 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ d_2 \\ \hline 0 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 P_{t1} &= T_{12} [\text{sen}(x_2 - x_5 + \theta_{12}) - \text{sen}(\theta_{12})] + \\
 &\quad + T_{13} [\text{sen}(x_2 - x_8 + \theta_{13}) - \text{sen}(\theta_{13})] \\
 P_{t2} &= T_{21} [\text{sen}(x_5 - x_2 + \theta_{21}) - \text{sen}(\theta_{21})] + \\
 &\quad + T_{23} [\text{sen}(x_5 - x_8 + \theta_{23}) - \text{sen}(\theta_{23})] \\
 P_{t3} &= T_{31} [\text{sen}(x_8 - x_2 + \theta_{31}) - \text{sen}(\theta_{31})] + \\
 &\quad + T_{32} [\text{sen}(x_8 - x_5 + \theta_{32}) - \text{sen}(\theta_{32})]
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

Os resultados da simulação estão apresentados nas Figuras 6, 7 e 8, onde foram adotados $x(0) = 0$, $d_2 = d_3 = 0$ e $d_1 = 0,1$.

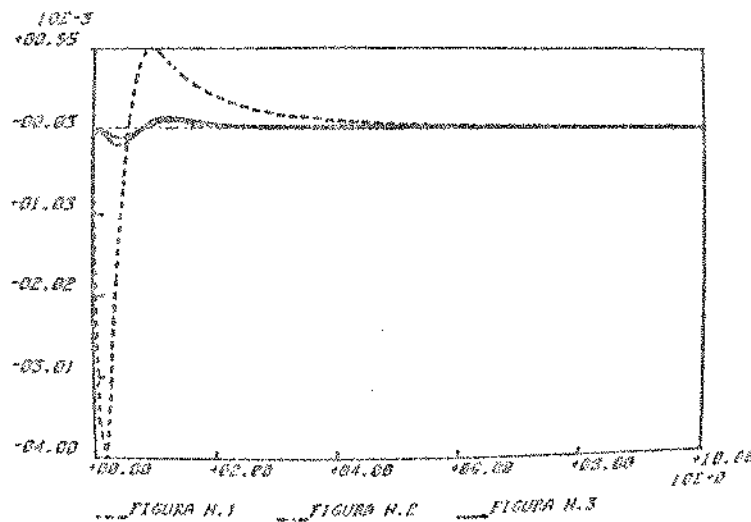


FIGURA 6 - Desvio de frequência das 3 áreas, com perturbação da demanda na área 1 de 10% da carga.

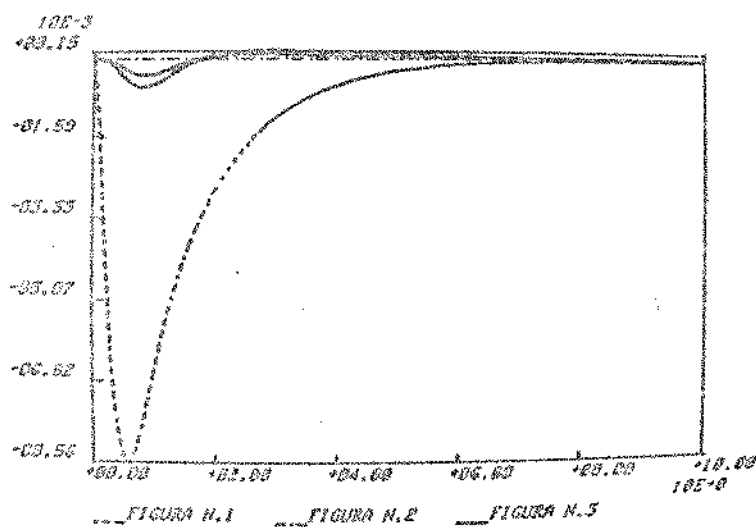


FIGURA 7 - Desvio angular das 3 áreas.

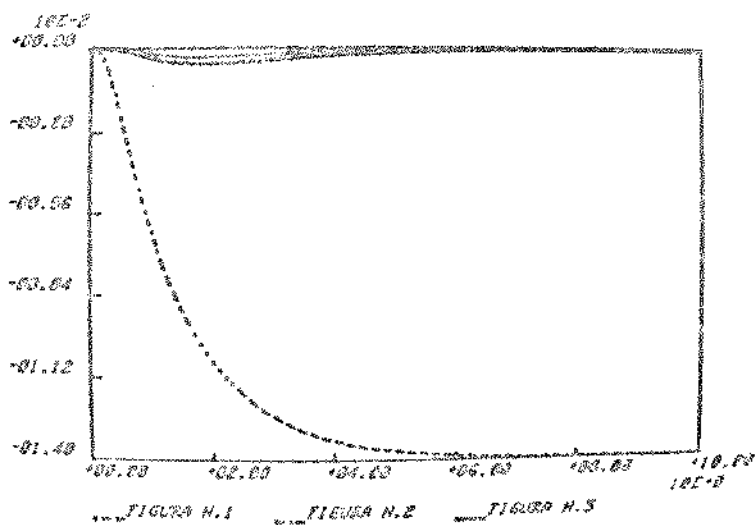


FIGURA 8 - $\int_0^t \Delta \delta_i d\tau, \quad i=1,2,3$

Para aplicar num caso linear, vamos utilizar o mesmo exemplo encontrado em Elgerd e Fosha (1970) para podermos comparar os resultados. Para isso basta tomarmos os mesmos valores fornecidos no primeiro exemplo não-linear.

Neste caso, a matriz de interconecção L , em vista de (17) e como $L = \tilde{L} \tilde{C}$, $\tilde{C} = \text{bloc diag} (\tilde{C}_1 \tilde{C}_2 \dots \tilde{C}_N)$, devemos ter:

$$L = [L_1 \mid L_2] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -0,08674 & 0 & 0 & 0,08674 & 0 \\ \hline 0 & 0,08674 & 0 & 0 & -0,08674 & 0 \end{array} \right] \quad (50)$$

Do corolário 4 do capítulo II, o controle descentralizado estável é obtido fazendo $\beta_1 > N \|R\| \|L_1\|^2$. Como $\|L_1\|^2 = \|L_2\|^2 = 0,01505$, vamos escolher $\beta_1 = \beta_2 = 0,05$, com o que obtemos:

$$K = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0,22 & 0,35 & 0,55 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0,22 & 0,35 & 0,55 \end{array} \right] \quad (51)$$

utilizando $A_1 = A_2$ e $B_1 = B_2$ fornecidos no caso não linear. $C = I_6$ e $R = I_2$. A matriz $A = \text{bloc diag} (A_1, A_2) + BL$ com auto-valores:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 &= -1,275 + j \, 2,217 \\ \lambda_5 &= -1,275 - j \, 2,217 \\ \lambda_6 &= -2,55 \end{aligned} \quad (52)$$

passou a ter os seguintes auto-valores, quando utilizamos o controle acima determinado:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2,68 + j \, 3,12 & \lambda_4 &= -2,40 - j \, 1,47 \\ \lambda_2 &= -2,68 - j \, 3,12 & \lambda_5 &= -1,06 \\ \lambda_3 &= -2,40 + j \, 1,47 & \lambda_6 &= -0,50 \end{aligned} \quad (53)$$

Com objetivo de verificarmos o comportamento do sistema quando o controle acima for implementado, reescrevemos (18):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 z_1 + B_1 d_1 \\ z_1 &= \Delta P_{c1} - \sum_{j=1}^N k_{1j} (x_1^2 - x_j^2) \\ d_1 &= -\Delta P_{d1}\end{aligned}\tag{54}$$

ou, na sua forma global fica:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + BL - BK)x + B d \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{55}$$

Assumindo $x'_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ e $d' = [0,01 \ 0]$, obtemos como resultado da simulação do sistema acima, utilizando o controle K determinado, as Figuras 9 e 10. A primeira apresenta o comportamento dos desvios das frequências Δf_1 e Δf_2 e a segunda, os comportamentos de desvio de fase $\Delta \delta_1$ e $\Delta \delta_2$. Também apresentamos a trajetória do estado $\int_0^t (\Delta \delta_1 - \Delta \delta_1^*) dt$, $i=1,2$ na Figura 11.

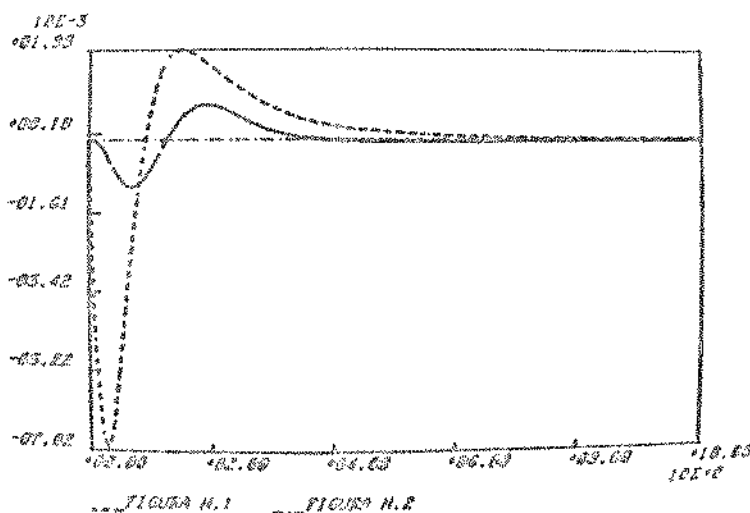


FIGURA 9 - Modelo linearizado, Δf_1 e Δf_2 para $\Delta P_{d1} = 0,01$

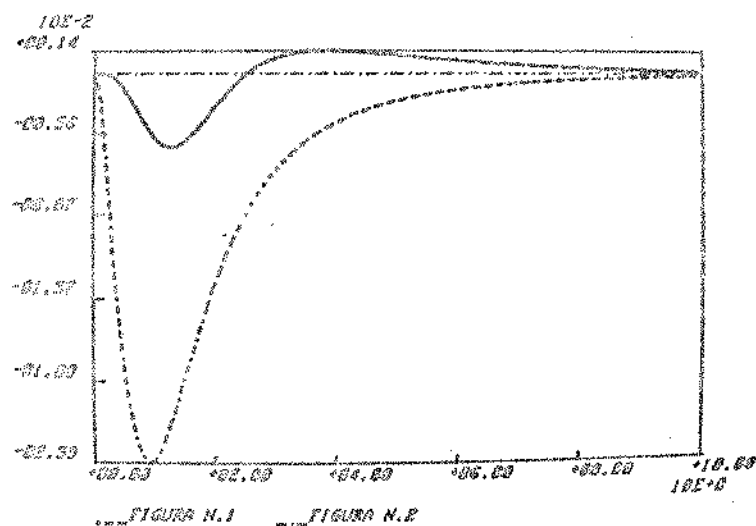


FIGURA 10 - Modelo linearizado, $\Delta\delta_1$ e $\Delta\delta_2$ com $\Delta P_{d1} = 0,01$

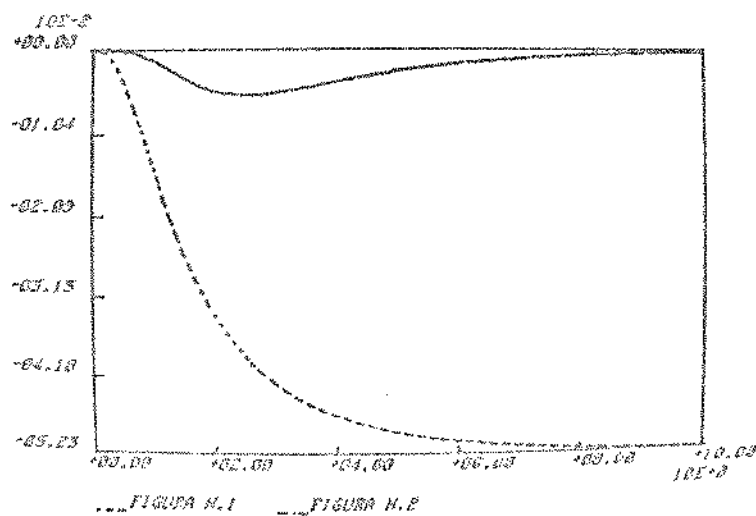


FIGURA 11 - $\int_0^t \Delta\delta_1 dt$, $\int_0^t \Delta\delta_2 dt$ para modelo linearizado
e $\Delta P_{d1} = 0,01$

V.4 CONTROLE DESCENTRALIZADO PARA UM SISTEMA DE DOIS PÊNDULOS ACOPLADOS

Vamos considerar nesta seção o sistema de dois pêndulos interconectados tratados em Lefevre e outros (1983). Definindo $x_1' = [\theta_1 \ \dot{\theta}_1]$ e $x_2' = [\theta_2 \ \dot{\theta}_2]$ onde θ_1 representa o desvio angular do pêndulo em torno do ponto de equilíbrio (Figura 12), o modelo não-linear tem as seguintes matrizes (ver igualmente Geromel e Yamakami, 1985):

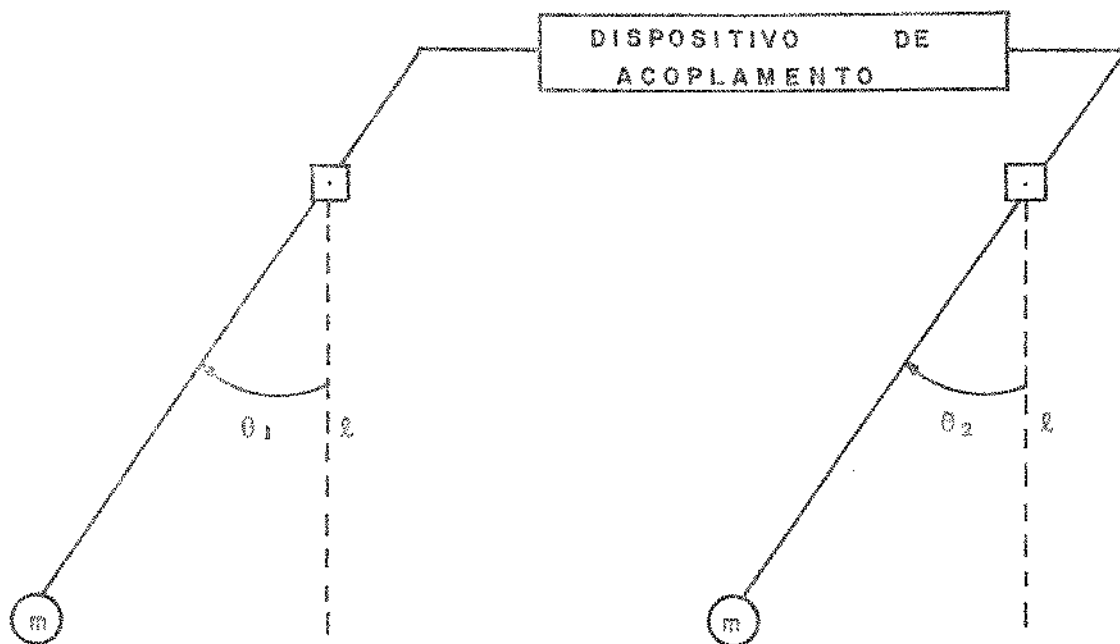


FIGURA 12 - Sistema de dois pêndulos acoplados

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(56)

$$L(x) = \begin{bmatrix} -\frac{\sin \theta_1}{\theta_1} & 0 & 0 & -0,1 \\ \hline 0 & -0,1 & -\frac{\sin \theta_2}{\theta_2} & 0 \end{bmatrix}$$

O nosso objetivo é encontrar controles descentralizados que levem os estados com comportamento senoidal quando estão sem controles e sofrem perturbações, para origem. Para garantir a estabilidade na origem, escolhemos $\beta = 2 > \|L(0)\|^2 = 1$ e utilizando resultados do capítulo II obtemos:

$$K_1 = K_2 = [1,4 \quad 2,2] \quad (57)$$

Com estes ganhos, o sistema realimentado global fica sendo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1,4 - \frac{\sin \theta_1}{\theta_1} & -2,2 & 0 & -0,1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,1 & -1,4 - \frac{\sin \theta_2}{\theta_2} & -2,2 \end{bmatrix} x \quad (58)$$

As trajetórias dos estados obtidos através da simulação de (58) estão colocadas nas Figuras 13 e 14. Inicialmente traçamos os estados sem controle considerando condições iniciais não nulas em $t = 0$, até $t = 40$ seg., quando os controles são conectados. Podemos notar que quando os controle são conectados os pêndulos alcançam os pontos de equilíbrio em menos de 5 segundos, sem apresentar erro de regime como em Lefevre e outros (1983). Na Figura 15 apresentamos as trajetórias de θ_1 e θ_2 somente quando os controles são conectados.

Finalmente salientamos que o valor do β que escolhemos para simulação é suficiente para garantir a estabilidade global do sistema, considerando que $\|L(x)\|^2 \leq \|L(0)\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Ou seja, $\tilde{V} \in \mathbb{R}^n$, o que implica que $v_0 = \infty$.

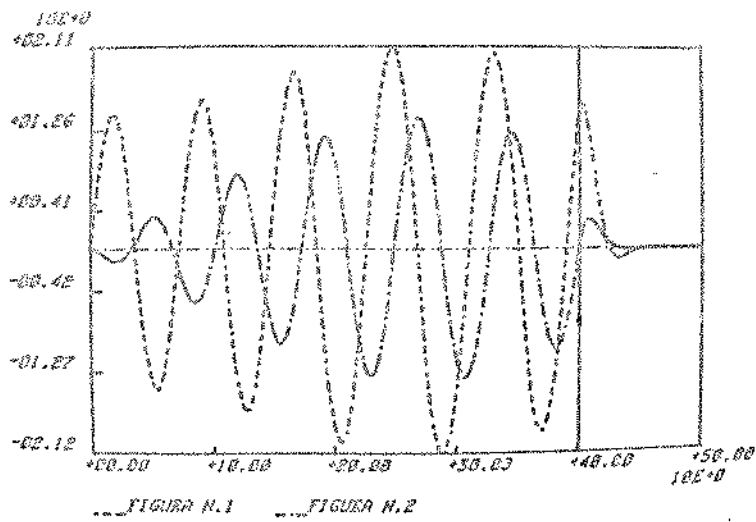


FIGURA 13 - Trajetórias de θ_1 e θ_2

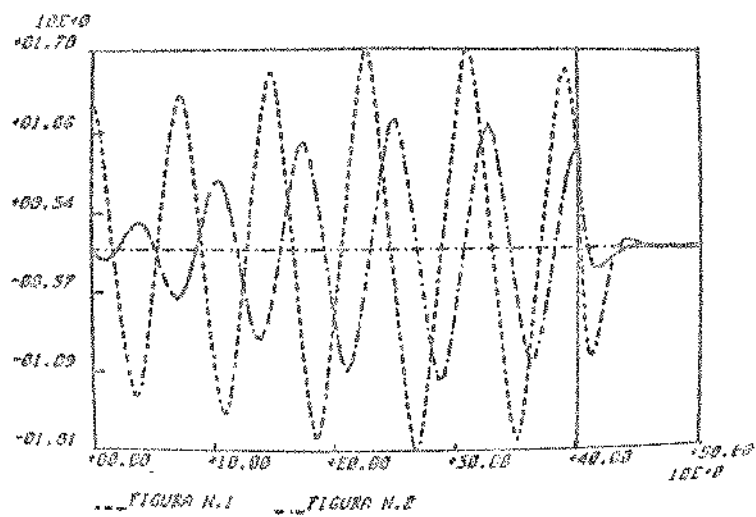


FIGURA 14 - Trajetórias de $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$

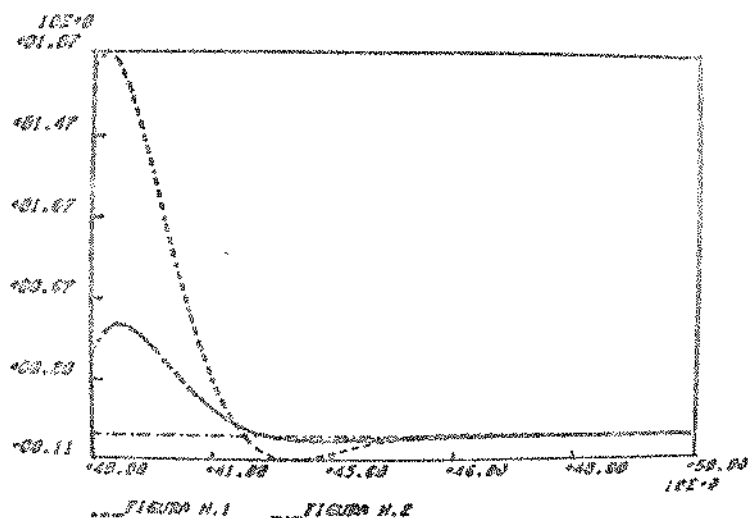


FIGURA 15 - Trajetória controlada de θ_1 e θ_2

V.5 CONCLUSÕES

Dentro deste capítulo analisamos o problema de controle de carga-frequência, simulando sistemas de geração e distribuição de energia elétrica e o problema de controle descentralizado para um sistema de pêndulos interconectados quando são utilizados os controles sugeridos neste trabalho.

Para o problema de carga e frequência as nossas simulações mostram que, no caso linear, os resultados aqui obtidos são melhores que obtidos em Elgerd e Foscha (1970) ou em Geronmel (1979), tanto do ponto de vista da duração do transitório, como do ponto de vista da magnitude de variações dos estados. No caso não linear, para uma perturbação de carga de 10% em torno do valor nominal, o tempo de estabilização continuou pequeno, assim como também as perturbações dos estados, quando usamos o valor de β igual a 0,035.

Para o primeiro exemplo não linear, foi estimado o domínio de estabilidade e apresentamos a projeção destes domínios nos respectivos planos. Certamente, este domínio pode ser aumen-

tado, aumentando o valor de β . Neste caso, para $\beta > 0,04$ garantimos que o sistema é globalmente assintoticamente estável.

Cabe lembrar que, por comodidade, simulamos situações com condições iniciais nulas, ou seja, supondo que após o transiente devido à perturbação de carga, o sistema volte às condições iniciais, a menos da geração na área que foi perturbada. No entanto, outras situações podem ser consideradas tal que os valores iniciais de δ_i e f_i não coincidam com os valores finais (ou seja $\Delta\delta_i(0) = \delta_i(0) - \delta_i^* \neq 0$).

A determinação dos ganhos são bastante rápidos uma vez que consiste em solução de N equações de Riccati de ordem igual à dimensão de cada sub-sistema isolado, além de ser possível fazer um processamento paralelo (solução simultânea de N equações de Riccati desacopladas).

Na simulação do sistema de dois pêndulos interligados, notamos que a nossa metodologia fornece resultados melhores que encontrados em Lefevre e outros (1983), não apresentando erros de regime como no trabalho referenciado. Além disso, o controle sugerido em Lefevre e outros (1983) é de natureza não linear em contraste com o nosso que é linear e, portanto, de fácil implementação. Cabe lembrar, finalmente, a simplicidade de cálculos na determinação dos controles quando utilizamos os resultados dos capítulos II e III e que o aumento da dimensão do sistema não traz dificuldades na nossa metodologia.

CONCLUSÕES GERAIS

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de estudar dois assuntos relacionados ao problema de controle descentralizado de sistemas dinâmicos: estabilidade do sistema dinâmico e controle ótimo descentralizado.

Para dar subsídio a estes estudos, colocamos no primeiro capítulo os conceitos e principais resultados encontrados na literatura sobre a estabilidade de sistemas dinâmicos segundo Lyapunov e sobre a otimização em sistemas de controle com restrições de estrutura. Em particular, demos uma atenção maior para o problema linear quadrático de horizonte infinito, para o qual sugerimos uma metodologia de otimização utilizando o método de Newton aproximado.

Os capítulos dois e três são inteiramente dedicados ao estudo de estabilidade de sistemas com controles descentralizados que admitem decomposição da matriz de interconexão. Para estes estabelecemos um teorema básico de estabilidade e a partir dele, analisamos e propomos métodos para encontrar controles descentralizados estáveis. Inicialmente estudamos sistemas lineares invariantes para depois estendermos os resultados a observadores e sistemas não lineares. O capítulo dois cobre sistemas contínuos e no capítulo três analisamos sistemas discretos. Através de exemplos numéricos mostramos a superioridade das nossas metodologias em relação aos encontrados na literatura.

Estudamos com profundidade o problema de otimização de funções matriciais (a "variável" independente é uma matriz e as restrições são de natureza matricial) no capítulo quatro, subdividido em quatro partes. Na primeira são estabelecidas as condições de otimalidade para problemas desta natureza, além de caracterizar completamente as "variáveis" duais. Na segunda parte estudamos aspectos de dualidade e na terceira sugerimos alguns métodos numéricos, primais e duais. Finalmente na quarta parte apresentamos aplicações possíveis das metodologias propostas.

No último capítulo analisamos o problema de carga-frequência em sistemas de potência, tanto com modelos não lineares como com modelos linearizados e o problema de um sistema de pêndulos interligados. Utilizando as metodologias desenvolvidas nos

capítulos anteriores, determinamos controles descentralizados es táveis para sistemas lineares e não lineares. Com estes, fizemos simulações em um terminal gráfico (GT-40) conectado ao computador PDP-10 da DEC (Digital Equipment Corporation), os quais reproduzimos neste trabalho.

Considerando os conteúdos dos cinco capítulos acima mencionados, acreditamos que trouxemos contribuições no estudo de sistemas dinâmicos interconectados, tanto no aspecto de estabilidade como no de otimização. Evidentemente, em vista da dimensão do problema abordado dedicamos ao estudo de uma classe de siste... dinâmicos interconectados. Como continuação deste traba lho, podemos enumerar algumas possíveis linhas de pesquisa, a saber:

- controle linear quadrático ótimo com realimentação de saída ou com restrições de natureza estrutural.
- métodos de determinar controles descentralizados es táveis para classes mais gerais que aqui abordadas.
- estudo dos problemas de otimização de funções matri ciais, tanto no sentido de generalização como de proposição de métodos numéricos.
- análise de problema de controle carga-frequência em sistemas de potência interconectados com demandas aleatórias e com acoplamento entre modos rápidos e lentos (Peres e Geromel, 1984).
- extensão dos resultados aqui obtidos a sistemas es tocásticos (Melo e Geromel, 1984).
- análise de robustez de reguladores ótimos (Geromel e Yamakami, 1985).

BIBLIOGRAFIA

1. ARAKI, M. (1976) - Input-Output Stability of Composite Feedback Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-21, N° 2, pg. 254-259.
2. ARAKI, M. (1978) - Stability of Large-Scale Non - Linear Systems - Quadratic-Order Theory of Composite - Systems: Method Using M-Matrices, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-23, N° 2, pg. 129-142.
3. ADKI, M. (1972) - On Feedback Stabilizability of Decentralized Dinamic Systems, Automática, Vol. 8, N° 2, pg 1963-1973.
4. ATHANS, M. e FALB, P.L. (1966) - Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications, McGraw-Hill.
5. BAILEY, F.N. (1968) - The Application of Lyapunov Second Method to Interconnected Systems, J. SIAM Control, Vol. 3, N° 3, pg. 443-462.
6. BAZARAA, M.S. e SHETTY, C.M. (1979) - Nonlinear Programming: Theory and Algorithms, John Wiley.
7. BELLMAN, R. (1962) - Vector Lyapunov Functions, J. SIAM Control, Vol. 1, N° 6, pg. 32-34.
8. BELLONI, M.R. (1982) - Decomposição em Programação Matemática Via Projeção - Análise e Aplicação, Tese de Mestrado, IMECC - UNICAMP.
9. BELLONI, M.R. e GERDMEL, J.C. (1984) - Nonlinear Programs with Complicating Variables: Theoretical Analysis and Numerical Experience, IEEE Transactions on S.M.C., aceito para publicação.
10. BEN NOBLE e DANIEL, J.W. (1977) - Applied Linear Algebra, Prentice-Hall Inc.

11. BITSORIS, G.S. (1978) - Principe de Comparaison et Stabilité des Systèmes Complexes, Thèse d'Etat, Universidade Paul Sabatier, Toulouse.
12. CASTRUCCI, P.B.L. e CURTI, R. (1981) - Sistemas Não-Lineares, Edgard Blücher Ltda., Vol. 2.
13. DASKIN, J.M. (1966) - The Theory of Max-Min with Applications, J. SIAM Appl. Math., Vol. 14, N° 4, pg. 641-664.
14. DAVISON, E.J. (1974) - The Decentralized Stabilization and Control of a Class of Unknown Nonlinear Time - Varying Systems, Automática, Vol. 10, N° 3, pg. 309-316.
15. ELGERD, O.I. e FOSCHA Jr., C.E. (1970) - Optimum Megawatt Frequency Control of Multiarea Electric Energy Systems, IEEE Power App. Systems, PAS-89, N° 4, pg. 556-563.
16. ELGERD, O.I. (1977) - Introdução à Teoria de Sistemas de Energia Elétrica, McGraw-Hill.
17. FIEDLER, M. e PTAK, V. (1962) - On Matrices with Non-Positive off Diagonal Elements and Positive Principal Minors, Czech. Math. Journal, Vol. 12.
18. GEROMEL, J.C. (1979) - Contribution a L'etude des Systèmes Dynamiques Interconnectes: Aspects de Decentralization, Thèse d'Etat, Universidade Paul Sabatier, Toulouse, França.
19. GEROMEL, J.C. (1983) - Controle Ótimo Determinístico, Apostila fornecida no mini-curso de IV Escola de Matemática Aplicada, Rio de Janeiro.
20. GEROMEL, J.C. (1984) - On the Determination of a Diagonal Solution of the Lyapunov Equation, IEEE Transactions on A. C., aceito para publicação.

21. GEROMEL, J.C. e BAPTISTELLA, L.F.B. (1981) - Feasible Direction Method for Large Scale Nonconvex Programs: Decomposition Approach, JOTA, Vol. 35, Nº 2, pg. 231-249.
22. GEROMEL, J.C. e BERNUSSOU, J. (1982) - Optimal Decentralized Control of Dynamic Systems, Autom., Vol. 18, Nº 5, pg. 545-557.
23. GEROMEL, J.C. e PERES, P.L.D. (1984) - Decentralized Load-Frequency Control, Subm. a IEE/D (CONTROL) para publicação.
24. GEROMEL, J.C. e YAMAKAMI, A. (1982) - Stabilization of Continuous and Discrete Linear Systems Subjected to Control Structure Constraints, Int. J. Control, Vol. 63, Nº 3, pg. 429-444.
25. GEROMEL, J.C. e YAMAKAMI, A. (1985) - On the Robustness of Nonlinear Regulators and Its Applications to Nonlinear Systems Stabilization, Subm. a IEEE Trans. Autom. Control.
26. GEROMEL, J.C., YAMAKAMI, A. e MELO, E.P. (1985) - Structural Constrained Controllers for Linear Discrete Dynamic Systems, Submetido a Automática.
27. HAHN, W. (1967) - Stability of Motion, Springer-Verlag.
28. IKEDA, M. e SILJAK, D.D. (1980) - Decentralized Stabilization of Linear Time - Varying Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 25, Nº 1, pg. 106-107.
29. KALMAN, R.E. e BERTRAN, J.E. (1960) - Control Systems Analysis and Design Via the Second Method of Lyapunov: I - Continuous Time Systems, Trans. of the ASME, pg. 371-400.
30. KASZKUREWICZ, E. e HSU, L. (1979) - Stability of Nonlinear Systems: A Structural Approach, Automática, 15:609-614.

31. KHALIL, H.K. (1982) - On the Existence of Positive Diagonal P Such that $PA + A^*P < 0$, IEEE Trans. Automatic Control, AC-27, N° 1, pg. 161-164.
32. KHALIL, H.K. e KOKOTOVIC, P.V. (1978) - Control Strategies for Decision Makers Using Different Models of the Same System, IEEE Trans. Aut. Cont., AC-23, N° 2, pg. 289-296.
33. KLEINMAN, D.L. (1968) - On An Iterative Technique for Riccati Equation Computations, IEEE Transaction on Automatic Control, AC-13, N° 1, pg. 114-115.
34. KOSUT, R.L. (1970) - Suboptimal Control of Linear Time - Invariant Systems Subjected to Control Structure Constraints, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-15, N° 5, pg. 557-563.
35. LA SALLE, J. e LEFSCHETZ, S. (1961) - Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications, Academic Press.
36. LASDON, L.S. (1970) - Optimization Theory for Large Systems, Macmillan Publishing Co. Inc.
37. LASLEY, S.L. e MICHEL, A.N. (1976) - Input-Output Stability of Interconnected Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-21, N° 1, pg. 84-89.
38. LEFEVRE, S.; RICHTER, S. e DE CARLO, R. (1983) - Decentralized Variable Structure Control Design for a Two Pendulum System, IEEE Trans. Automatic Control, AC-28, N° 12, pg. 1112-1114.
39. LEVINE, W.S. e ATHANS, M. (1970) - On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-15, N° 1, pg. 44-48.
40. LUENBERGER, D.G. (1973) - Introduction to Linear and Non-

linear Programming, Addison-Wesley.

41. MATROSOV, V.N. (1962) - On the Theory of Stability of Motion, Prikl. Math. Mekhan., Vol. 26.
42. MELLO, E.P. e GEROMEL, J.C. (1984) - Controle Descentralizado de Sistemas Estocásticos com Representação Entrada-Saída, Anais do 1º CLAA/5º CBA, Campina Grande, Paraíba, pg. 432-437.
43. MICHEL, A.M. e MILLER, R.K. (1977) - Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 134, Academic Press.
44. MILANI, B.E.A. (1980) - Contribuição a Solução de Problemas de Otimização de Parâmetros oriundos da Síntese de Reguladores L-Q e L-Q-G com Restrições de Estrutura, Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas.
45. PERES, P.L.D. e GEROMEL, J.C. (1984) - Controle Carga-Frequência de Sistemas Energéticos Interligados: Decomposição em Modos Rápidos e Lentos, Nota Interna DEE-FEC-UNICAMP, Campinas.
46. POLAK, E. e MAYNE, D.Q. (1976) - An Algorithm for Optimization Problems with Functional Inequality Constraints, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-21, Nº 2, pg. 184-193.
47. SABERI, A. e KHALIL, H. (1982) - Decentralized Stabilization of a Class of Non-Linear Interconnected Systems, Int. J. Control, Vol. 36, Nº 5, pg. 803-818.
48. SAGE, A.P. e WHITE, C.C. (1977) - Optimum Systems Control, Prentice-Hall, New Jersey.
49. SANDELL Jr., N.R.; VARAIYA, P.; ATHANS, M. e SDFONOV, M. G. (1978) - Survey of Decentralized Control Methods for

Large Scale Systems, IEEE Transactions on Aut. Control, AC-23, Nº 2, pg. 108-128.

50. SANDERS, C.W.; TACKER, E.C. e LINTON, T.D. (1976) - Stability and Performance of a Class of Decentralized Filters, Int. J. Control, Vol. 23, Nº 2, pg. 197-206.
51. SEZER, M.E. e HUSEYIN, O. (1978) - Stabilization of Linear Time - Invariant Interconnected Systems Using Local State Feedback, IEEE Transactions on S.M.C., SMC-8, Nº 10, pg. 751-756.
52. SILJAK, D.D. (1978) - Large Scale Dynamic Systems: Stability and Structure, North-Holland.
53. SILJAK, D.D. e VUKCEVIC, M.B. (1977) - Decentralized Stabilizable Linear and Bilinear Large-Scale Systems, Int. J. Control, Vol. 26, Nº 2, pg. 289-305.
54. SILJAK, D.D. e VUKCEVIC, M.B. (1978) - On Decentralized Estimation, Int. J. Control, Vol. 27, Nº 1, pg. 113-131.
55. XISTO, V.F. (1984) - Operação de Sistemas de Potência com Controle Automático de Geração, Editora Campus, Rio de Janeiro.
56. WONHAM, W.M. (1974) - Linear Multivariable Control, Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 101, Springer Verlag.
57. WONHAM, W.M. (1979) - Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, Springer-Verlag.
58. YAMAKAMI, A. e GEROMEL, J.C. (1980) - Estabilização Descentralizada para uma Classe de Sistemas Lineares Invariantes, Anais do 3º CBA, Rio de Janeiro, pg. 31-34.
59. YAMAKAMI, A. e GEROMEL, J.C. (1981 a) - Decentralized Stabi-

lization and Minimum Norm Optimization of Linear Systems
Proceedings of 8Th Triennial IFAC - World Congress,
Kyoto, Japan, pg. IX-21 - IX-26.

60. YAMAKAMI, A. e GEROMEL, J.C. (1981 b) - Decentralized Stabi-
lization and Stability Region Estimation for a Class of
Non-Linear Dynamic Systems, Proceedings of the 20Th
IEEE - CDC, San Diego, California, pg. 1225-1228.