Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Sistemas e Controle de Energia
UNICAMP

Filtragem Ótima Robusta em Sistemas Dinâmicos

Dissertação apresentada na Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Luiz Augusto Vitoria Regis Filho
Engenheiro Eletricista — FEEC/UNICAMP(2003)

em 27 de maio de 2004 perante a banca examinadora:

José Cláudio Geromel
Orientador

Roberto Kawakami Harrop Galvão - ITA
João Marcos Travassos Romano - FEEC/UNICAMP

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

R263f

Regis Filho, Luiz Augusto Vitoria
Filtragem ótima robusta em sistemas dinâmicos / Luiz Augusto Vitoria Regis Filho. --Campinas, SP: [s.n.], 2004.

Orientador: José Cláudio Geromel.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Kalman, Filtragem de. 2. Teoria dos sistemas. 3. Programação (Matemática). I. Geromel, José Claúdio. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

FILTRAGEM ÓTIMA ROBUSTA EM SISTEMAS DINÂMICOS

Autor: Luiz Augusto Vitoria Regis Filho
Orientador: Prof. Dr. José Claudio Geromel

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do título de
Mestre em Engenharia Elétrica.

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Roberto Kawakami Harrop Galvão - ITA
Prof. Dr. João Marcos Travassos Romano - FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. José Cláudio Geromel - FEEC/UNICAMP

Resumo

Neste trabalho, é proposta uma nova estratégia para a síntese de filtros robustos em norma $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$. O filtro em questão é obtido a partir da solução de equilíbrio de um problema de otimização minimax, onde a norma do erro de estimação é maximizada em relação ao domínio de incertezas e minimizada em relação a todos os filtros causais e racionais. Como contribuição principal, é mostrado que, para a classe de incertezas considerada, a solução de equilíbrio do problema minimax mencionado pode ser determinada de forma exata para o problema em norma $\mathcal{H}_2$, isto é, sem a introdução de restrições adicionais que levem à perda de otimalidade.

Abstract

In this work, a new design procedure for $\mathcal{H}_2$ or $\mathcal{H}_\infty$ optimal robust filtering is presented. The robust filter is determined from the equilibrium solution of a minimax programming problem where the norm of the estimation error is maximized with respect to the feasible uncertainties and minimized with respect to all rational and causal filters. As the main contribution, it is shown that for the class of parameter uncertainty considered, the equilibrium solution to the aforementioned minimax problem can be exactly determined for the $\mathcal{H}_2$ norm case. In contrast to the design methods available in the literature to date, the one presented in this work does not include any degree of conservatism.

“Óbvio é o que você já sabe”.

Agradecimentos

Ao final deste trabalho, gostaria de prestar meus mais sinceros agradecimentos a todas as pessoas que participaram direta ou indiretamente, para a sua concretização. Dentre elas, agradeço particularmente:

– ao professor José Cláudio Geromel, pela dedicação, capacidade e principalmente motivação durante esses anos de trabalho. Desde eliminação de dúvidas simples até idéias geniais sobre este trabalho de pesquisa. Ainda lhe devo uma nota melhor em EA721. Mestre é mestre!

– ao professor Mauricio Carvalho de Oliveira, por me dar as diretrizes iniciais do projeto, pela paciência das primeiras dúvidas e por me ensinar como debater com o temido Prof. Geromel!

– ao programa PIF-UNICAMP, que me proporcionou realizar parte deste projeto de mestrado durante a graduação;

– à todos os professores da FEEC-UNICAMP, pelos anos de estudos e profissionalismo . Em especial aos Profs. Yaro, Pedro Peres, Ivanil, Romano, Michel, Wagner, Madrid, Rafael, Ivan...

– à FAPESP e ao CNPq pelo apoio financeiro durante parte do trabalho;

– aos amigos do “Projeto Geroma!”: Fernando, Levin e Reinaldo, pela convivência quase que familiar durante todos esses anos!

– aos companheiros do DT e DSCE: Renato, Rubens, Juzzo, Ricardo e Igor, pela paciência com a turma;

– aos Plutocratas (em ordem alfabética) Adeilto (Junior), André, Bruno, Cadu, Felipe, Marcio, Protásio (Protásio), Rafa e Wagner, pela morada, companheirismo, churrascos e baladas nesses anos todos;

– aos grandes amigos e amigas Leo (Francisleo), Jés, Ananda, Flávia, Pedro, Lésnir, Eudemario (Eudemônio), Fabio (Carioba), Rafael, Álvaro e Baco;

– à Juliana pelo carinho e companheirismo que comigo tem compartilhado;

– á minha amada família, obviamente! Sem ela dificilmente chegaria aqui. Ainda conto com ela para dividir minhas alegrias e tristezas. Para meu pai, minha mãe, Paulo, Lorena, Lais, minha tia(Ivone), minha tia (Cota) e toda sua família, minha tia (Lícia) e toda sua família um grande beijo e abraço;

– à Deus, fonte de inspiração e alegria na minha vida.

Índice

Lista de Exemplos

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Nas últimas décadas, surgiu um grande interesse no estudo dos denominados métodos robustos para processamento de sinais. Tais métodos são aplicáveis em esquemas de detecção de sinais, estimação, filtragem e exemplos práticos podem ser vistos em processamento de sinais em radares e sonares. Também há aplicação em sistemas de comunicação, reconhecimento de padrões e processamento de imagens e fala (Kassam e Poor 1985).

Os últimos estudos em processamento de sinais dão uma ênfase no desenvolvimento de esquemas ótimos para uso em meios precisamente conhecidos de sinal e de ruído. Como nas aplicações de processamento de sinais o ruído e o sinal são geralmente modelados como processos estocásticos, as medidas de desempenho envolvem, conseqüentemente, quantidades probabilísticas como variância do erro ou probabilidade de erro (Kassam e Poor 1985). Um exemplo clássico é o filtro casado, que é ótimo para minimização da relação sinal/ruído (Haykin 1994).

Suponha o seguinte problema em processamento de sinais: um receptor para um sinal num meio com ruído aditivo deve ser projetado para oferecer um desempenho ótimo segundo um determinado critério, considerando que o ruído e o sinal possuem uma descrição estatística conhecida. Eis uma pergunta importante: quão sensível é o desempenho deste receptor ótimo às variações das características do sinal e do ruído? Essa pergunta é importante porque, na prática, raramente as características dos sinais e ruídos são perfeitamente conhecidas. Infelizmente, em muitos casos o esquema ótimo nominal pode sofrer uma degradação considerável no desempenho, mesmo para variações aparentemente pequenas das características nominais. É esta observação que motiva o estudo de técnicas robustas de processamento de sinais. São técnicas que oferecem bons desempenhos para condições nominais e desempenho aceitável para as condições de sinal e ruído diferentes das nominais, mas que se encontram dentro de uma classe de possíveis variações. Assim, no estudo de métodos robustos é reconhecido que informações precisas a respeito das características das grandezas envolvidas é irreal e que classes de variações dessas características devem ser formuladas e consideradas no desenvolvimento destes métodos (Kassam e Poor 1985). Alguns modelos de recepção e filtragem de sinais podem ser vistas em Geromel e Palhares (2004).

Muito do que se discute em processamento de sinais pode ser encontrado de forma equivalente em sistemas de controle. Algumas técnicas bem sucedidas em controle ótimo podem ser úteis para resolver alguns problemas de processamento de sinais. Neste contexto, a otimização convexa com restrições baseadas nas desigualdades lineares matriciais (LMIs[1]) nos confere duas grandes vantagens para tratar os problemas de controle ótimo. A primeira é que o conjunto das restrições é convexo, ou seja, oferece soluções ótimas globais para os problemas. A segunda é a difusão de métodos eficientes para a solução deste tipo de restrição (Boyd, Ghaoui, Feron e Balakrishnan 1994).

Propomos, nesta dissertação, o estudo de esquemas robustos ótimos em processamento de sinais, baseados em LMIs. Mais precisamente, estudamos o problema de filtragem robusta, num contexto ainda não visto na literatura. Estudamos uma nova classe de variações, que confere para o critério de mínima variância, a otimalidade global do problema. Como um estudo particular, resolvemos também o problema de aproximação linear robusta.

1.1 Apresentação da dissertação

Esta dissertação foi dividida em cinco capítulos e um apêndice. Em especial o primeiro capítulo é a introdução do texto e a descrição dos demais capítulos.

Os próximos capítulos estão estruturados da seguinte forma:

Capítulo 2: Faz uma revisão nos fundamentos matemáticos básicos para o desenvolvimento do texto. Nele estão os princípios fundamentais em análise de sistemas dinâmicos, desde a caracterização das condições necessárias e suficientes para a estabilidade assintótica de um sistema dinâmico, incluindo as definições das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, as condições estendidas de estabilidade até a análise de desempenho robusto. Já é suposto que o leitor tenha conhecimentos em álgebra linear, teoria de sistemas lineares, otimização não linear e em processos estocásticos.

Capítulo 3: Apresentamos o problema de filtragem robusta ótima em norma $\mathcal{H}_2$. Inicialmente, estudamos o problema de aproximação linear robusta, caso particular do problema de filtragem robusta, num contexto de otimização minimax. Em seguida resolvemos o problema

[1] Do termo em inglês: Linear Matrix Inequality

de filtragem robusta para sistemas a tempo contínuo e discreto. É mostrado que, para a classe de incertezas estudada, a solução deste problema é ótima global.

Capítulo 4: Como um estudo complementar do capítulo 3, o problema de filtragem robusta em norma $\mathcal{H}_\infty$ é abordado. Novamente, resolvemos o problema de aproximação linear robusta e o problema de filtragem robusta para sistemas a tempo contínuo e discreto. Para este critério conseguimos parametrizar filtros robustos subótimos.

Capítulo 5: Por fim, neste capítulo, fazemos as devidas conclusões e as perspectivas futuras dos problemas estudados nesta dissertação.

Apêndice A: Neste único apêndice procuramos mostrar os fundamentos do estudo das desigualdades lineares matriciais, sua caracterização, métodos de solução e exemplos. Mostramos também neste apêndice dois teoremas utilizados ao longo do texto: o complemento de Schur e o teorema de Parseval.

1.2 Notação

Ao longo do texto procuramos manter uma notação que é padrão na literatura.

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais;
$(')$	transposição;
$(\bullet)$	respectivo bloco simétrico;
$\mathcal{H}_p$	espaço vetorial de funções complexas, racionais e analíticas no semi-plano direito (sistemas contínuos) ou na parte externa do círculo unitário (sistemas discretos);
s	variável complexa da transformada de Laplace;
ζ	variável complexa da transformada $\mathcal{Z}$;
$\hat{z}$	transformada de Laplace ou transformada $\mathcal{Z}$ do sinal contínuo $z(t)$ ou do sinal discreto $z(k)$;
$h(t)$ ou $h(k)$	respostas ao impulso de sistemas a tempo contínuo ou discreto, respectivamente;
$\Vert z(t)\Vert$	norma $\mathcal{L}_2$ de uma função contínua $z(t)$. $\Vert z(t)\Vert^2 = \int_0^\infty \mathrm{tr}\,(z(t)'z(t))\,dt$;
$\Vert z(k)\Vert$	norma $\mathcal{L}_2$ de uma função discreta $z(k)$. $\Vert z(k)\Vert^2 = \sum_0^\infty \mathrm{tr}\,(z(k)'z(k))$;
$H_{wz}(\zeta)$ ou $H_{wz}(s)$	função de transferência entre a entrada $\hat{w}$ e a saída $\hat{z}$. Genericamente pode ser representada por $H(\zeta)$ ou $H(s)$;
$H(\omega)$	para sistemas a tempo contínuo é igual a $H(s)$ calculado em $s = j\omega$. Para sistemas a tempo discreto $H(\omega) = H(\zeta)$ para $\zeta = e^{j\omega}$;
$>\ (<)$	quando aplicados às matrizes significa positividade (negatividade) de seus autovalores;
$\mathrm{tr}(.)$	soma dos elementos da diagonal principal da matriz (.);
$H(s) = \left[\begin{array}{c\|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$	forma compacta para representar uma função de transferência a partir de uma possível realização no espaço de estados, sendo $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Para sistema a tempo discreto a notação é equivalente;
$\mathrm{diag}(A,B)$	construção de uma matriz bloco diagonal, onde as submatrizes A e B compõem sua diagonal principal;
$\lambda_{\max}(.)$	autovalor máximo da matriz (.);
$\bar{\sigma}(A)$	valor singular máximo da matriz A, $\bar{\sigma}(A) = \sqrt{\lambda_{\max}(AA')}$;
$\blacksquare$	fim de prova;
$*$	operador de convolução.

Capítulo 2

Análise de sistemas dinâmicos

Neste capítulo, apresentamos alguns fundamentos teóricos em análise de sistemas dinâmicos, os quais constituem a base para os capítulos seguintes. Visando tornar o trabalho mais claro incluímos os conceitos fundamentais e algumas provas. Obviamente todo o conteúdo deste capítulo encontra-se explicitado com mais detalhes na literatura, que será apropriadamente citada ao longo do texto.

2.1 Definições preliminares

Para o modelo de um sistema dinâmico a tempo discreto, linear e invariante no tempo

$$x(k+1) = \mathcal{A}x(k) + \mathcal{B}w(k); x(0) = 0, \tag{2.1}$$

$$z(k) = \mathcal{C}x(k) + \mathcal{D}w(k), \tag{2.2}$$

no qual $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada, $z(k) \in \mathbb{R}^p$ é a saída do sistema e todas as matrizes são de dimensões apropriadas, definimos sua função de transferência como sendo

$$H_{wz}(\zeta) = \mathcal{C}(\zeta I - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}. \tag{2.3}$$

Do mesmo modo, para o modelo de um sistema dinâmico a tempo contínuo

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}w(t); x(0) = 0, \tag{2.4}$$

$$z(t) = \mathcal{C}x(t) + \mathcal{D}w(t), \tag{2.5}$$

definimos sua função de transferência como sendo

$$H_{wz}(s) = \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}. \tag{2.6}$$

Para ambos os modelos, denotamos como sendo estritamente próprios se suas matrizes $\mathcal{D}$ forem identicamente nulas e próprios caso contrário. O modelo é dito mínimo quando o número de autovalores da matriz $\mathcal{A}$ se iguala ao número de pólos de sua respectiva função de transferência.

2.2 Estabilidade

Para o sistema definido pelas equações (2.1–2.2) ou (2.4–2.5), definimos o conceito de estabilidade assintótica a partir do estudo de Lyapunov (Ogata 1990, Ogata 1995). Note que este conceito de estabilidade é definido simplesmente a partir da matriz $\mathcal{A}$ do sistema, de acordo com o seguinte lema

Lema 2.1 *O sistema a tempo discreto (2.1–2.2) é assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz $P = P'$ tal que*

$$\begin{bmatrix} P & \mathcal{A}'P \\ P\mathcal{A} & P \end{bmatrix} > 0 \tag{2.7}$$

Esta condição de estabilidade pode ser escrita em uma forma algébrica, aplicando o complemento de Schur (A.1) na desigualdade (2.7) e completando-a com uma matriz definida positiva Q.

Lema 2.2 *O sistema definido pelas equações (2.1–2.2) é assintoticamente estável se e somente se*

$$\mathcal{A}'P\mathcal{A} - P + Q = 0, \tag{2.8}$$

$$P = P' > 0, \tag{2.9}$$

para qualquer $Q = Q' > 0$.

A condição "para qualquer $Q = Q' > 0$" implica num importante corolário que viabiliza uma análise de sensibilidade das matrizes P e Q.

Corolário 2.1 *Se o sistema (2.1–2.2) for estável, para duas escolhas da matriz Q tais que $Q_1 > Q_2$ implica que $P_1 > P_2$.*

Prova: Subtraindo as duas respectivas equações algébricas de Lyapunov

$$\mathcal{A}'(P_1 - P_2)\mathcal{A} - (P_1 - P_2) + (Q_1 - Q_2) = 0,$$
$$\mathcal{A}'\Delta_P\mathcal{A} - \Delta_P + \Delta_Q = 0,$$

notamos que $Q_1 > Q_2$ implica $\Delta_Q = Q_1 - Q_2 > 0$. Pelo Lema 2.2 temos que $\Delta_P > 0$, portanto $P_1 - P_2 > 0$. ■

Para sistemas a tempo contínuo podemos estudar sua estabilidade pelo seguinte lema

Lema 2.3 *Com relação a estabilidade do sistema (2.4–2.5) as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) O sistema é assintoticamente estável se e somente se todos os seus autovalores possuírem parte real estritamente negativa;

ii) O sistema é assintoticamente estável se existir uma matriz $P = P' > 0$ *tal que* $\mathcal{A}'P + P\mathcal{A} < 0$*;*

iii) O sistema é assintoticamente estável se existir uma matriz $P = P' > 0$ *tal que* $\mathcal{A}'P + P\mathcal{A} + Q = 0$*, para qualquer* $Q = Q' > 0$*.*

2.3 Medidas de desempenho em sistemas dinâmicos

Controle ótimo é o foco central deste trabalho e, no que se diz respeito a otimização, critérios de desempenho devem ser estabelecidos conforme o interesse e aplicação de um determinado problema. Nesta seção estudamos os dois critérios de desempenho mais conhecidos. Maiores detalhes sobre as definições e o formalismo matemático podem ser encontrados em Colaneri, Geromel e Locatelli (1997) ou em K. Zhou and J. C. Doyle (1998).

2.3.1 Norma $\mathcal{H}_2$

Sistemas a tempo discreto

Dado um sistema assintoticamente estável, descrito pela função de transferência (2.3), pertencente ao espaço $\mathcal{H}_2$, a norma $\mathcal{H}_2$ é definida como sendo

$$\|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{tr}\left(H_{wz}(e^{-j\omega})' H_{wz}(e^{j\omega})\right) d\omega. \tag{2.10}$$

Em princípio esta norma pode ser calculada por integração simples.

A norma $\mathcal{H}_2$ pode ser interpretada como a soma dos custos quadráticos (norma $\mathcal{L}_2$) das respostas $z_i(k)$ de um experimento determinístico hipotético, que consiste em aplicar um impulso $w_i(k) = e_i\delta(k)$[1], $i = 1\cdots m$, em cada canal de entrada do sistema. Dado que no tempo a resposta ao impulso é

$$h(k) = \begin{cases} \mathcal{D}, & k = 0 \\ \mathcal{C}\mathcal{A}^{k-1}\mathcal{B}, & k = 1\cdots\infty \end{cases},$$

a norma $\mathcal{H}_2$ pode ser computada mediante a soma desses m custos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \|z_i(k)\|^2 &= \sum_{i=1}^{m}\left[\mathcal{D}_i'\mathcal{D}_i + \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{B}_i'(\mathcal{A}')^{k-1}\mathcal{C}'\mathcal{C}\mathcal{A}^{k-1}\mathcal{B}_i\right], \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left[\mathcal{D}_i'\mathcal{D}_i + \mathcal{B}_i'\left(\sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{A}')^{k}\mathcal{C}'\mathcal{C}\mathcal{A}^{k}\right)\mathcal{B}_i\right], \\ &= \mathrm{tr}\left[\mathcal{D}'\mathcal{D} + \mathcal{B}'\left(\sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{A}')^{k}\mathcal{C}'\mathcal{C}\mathcal{A}^{k}\right)\mathcal{B}\right], \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{tr}\left(h(k)'h(k)\right) \end{aligned} \tag{2.11}$$

em que $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}e_i$ e $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}e_i$. Esta equação temporal equivale à equação (2.10) graças ao teorema de Parseval (A.1), que é válido para sistemas assintoticamente estáveis.

Portanto, o cálculo desta norma pode ser feito utilizando a equação temporal (2.11). O termo em parênteses $\sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{A}')^k\mathcal{C}'\mathcal{C}\mathcal{A}^k = P_o$, é a solução da seguinte equação matricial, vide Kwakernaak e Sivan (1972):

$$\mathcal{A}'P_o\mathcal{A} - P_o + \mathcal{C}'\mathcal{C} = 0, \tag{2.12}$$

na qual $P_o = P_o' > 0$.

[1] e_i é o vetor canônico no $\mathbb{R}^m$.

Sendo assim, a norma $\mathcal{H}_2$ pode ser calculada desta forma:

$$\|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 = \mathrm{tr}\left(\mathcal{D}'\mathcal{D} + \mathcal{B}'P_o\mathcal{B}\right). \tag{2.13}$$

Utilizando as propriedades da função traço, a norma $\mathcal{H}_2$ pode ser calculada alternativamente por uma formulação dual, ou seja

$$\begin{aligned}
\|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 &= \mathrm{tr}\left[\mathcal{D}'\mathcal{D} + \mathcal{B}'\left(\sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{A}')^k\mathcal{C}'\mathcal{C}\mathcal{A}^k\right)\mathcal{B}\right], \\
&= \mathrm{tr}\left[\mathcal{D}\mathcal{D}' + \mathcal{C}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{A})^k\mathcal{B}\mathcal{B}'(\mathcal{A}')^k\right)\mathcal{C}'\right], \\
&= \mathrm{tr}\left(\mathcal{D}\mathcal{D}' + \mathcal{C}P_c\mathcal{C}'\right),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

na qual $P_c = \sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{A})^k\mathcal{B}\mathcal{B}'(\mathcal{A}')^k > 0$ é a solução de

$$\mathcal{A}P_c\mathcal{A}' - P_c + \mathcal{B}\mathcal{B}' = 0. \tag{2.15}$$

As matrizes P_o e P_c são denominadas gramianos de observabilidade e de controlabilidade, respectivamente. Com este conjunto de equações é possível calcular a norma $\mathcal{H}_2$ resolvendo um problema de otimização expresso em termos de LMIs encontrando um limitante superior e minimizando-o, conforme o Lema 2.4.

Lema 2.4 *Considere o sistema descrito pelas equações (2.1–2.2) e a função de transferência (2.3). As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 < \gamma$;

ii) Existem matrizes $P = P'$ e $W = W'$ tais que

$$\mathrm{tr}(W) < \gamma, \tag{2.16}$$

$$\begin{bmatrix} W & \mathcal{B}'P & \mathcal{D}' \\ P\mathcal{B} & P & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} P & \mathcal{A}'P & \mathcal{C}' \\ P\mathcal{A} & P & 0 \\ \mathcal{C} & 0 & I \end{bmatrix} > 0; \tag{2.17}$$

iii) Existem matrizes $P = P'$ e $W = W'$ tais que

$$\mathrm{tr}(W) < \gamma, \tag{2.18}$$

$$\begin{bmatrix} W & \mathcal{C}P & \mathcal{D} \\ P\mathcal{C}' & P & 0 \\ \mathcal{D}' & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} P & \mathcal{A}P & \mathcal{B} \\ P\mathcal{A}' & P & 0 \\ \mathcal{B}' & 0 & I \end{bmatrix} > 0. \tag{2.19}$$

Prova: Para a equivalência entre $i)$ e $ii)$: supondo uma matriz $P > 0$ que satisfaça a desigualdade

$$\mathcal{A}'P\mathcal{A} - P + \mathcal{C}'\mathcal{C} < 0,$$

pelo Corolário 2.1, $P > P_o$, aplicando o complemento de Schur (A.1), temos a LMI à direita de (2.17). Com isto

$$\|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 = \mathrm{tr}\left(\mathcal{D}'\mathcal{D} + \mathcal{B}'P_o\mathcal{B}\right) < \mathrm{tr}\left(\mathcal{D}'\mathcal{D} + \mathcal{B}'P\mathcal{B}\right) < \mathrm{tr}\,(W) < \gamma,$$

aplicando novamente o complemento de Schur temos a outra LMI de (2.17) e (2.16). A prova para a equivalência entre $i)$ e $iii)$ segue o mesmo princípio. A equivalência entre $ii)$ e $iii)$ é imediata. ∎

Minimizando γ em relação a $P > 0$ e a W podemos calcular a norma $\mathcal{H}_2$ a menos de um número muito pequeno definido pela rotina numérica utilizada, pois as LMIs são estritas.

Sistematizando, a norma $\mathcal{H}_2$ pode ser calculada resolvendo um dos seguintes problemas de otimização

$$\|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 = \min_{\gamma,P,W} \{\gamma : (2.16–2.17)\} = \min_{\gamma,P,W} \{\gamma : (2.18–2.19)\}. \tag{2.20}$$

Sistemas a tempo contínuo

Para sistemas a tempo contínuo a norma $\mathcal{H}_2$ é definida de forma muito parecida ao caso discreto. Dado um sistema assintoticamente estável, descrito pela função de transferência (2.6), pertencente ao espaço $\mathcal{H}_2$, a norma $\mathcal{H}_2$ é definida como sendo

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{tr}\left(H_{wz}'(-j\omega)H_{wz}(j\omega)\right) d\omega. \tag{2.21}$$

Note que para esta norma ser válida, a função de transferência (2.6) deve ser estritamente própria, ou seja, $\mathcal{D} = 0$, pois a integral em (2.21) é imprópria. Vale ressaltar que para sistemas a tempo discreto esta restrição não é necessária. Novamente, podemos computar esta norma resolvendo um problema de otimização expresso em termos de LMIs de acordo com o seguinte lema

Lema 2.5 *Considerando o sistema descrito pelas equações (2.4–2.5), nas quais $\mathcal{D} = 0$, e a função de transferência (2.6), as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\|H_{wz}(s)\|_2^2 < \gamma$;

ii) Existem matrizes $P = P'$ e $W = W'$ tais que

$$\mathrm{tr}(W) < \gamma, \tag{2.22}$$

$$\begin{bmatrix} W & \mathcal{B}'P \\ P\mathcal{B} & P \end{bmatrix} > 0, \tag{2.23}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}'P + P\mathcal{A} & \mathcal{C}' \\ \mathcal{C} & -I \end{bmatrix} < 0; \tag{2.24}$$

iii) Existem matrizes $P = P'$ e $W = W'$ tais que

$$\mathrm{tr}(W) < \gamma, \tag{2.25}$$

$$\begin{bmatrix} W & \mathcal{C}P \\ P\mathcal{C}' & P \end{bmatrix} > 0, \tag{2.26}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}P + P\mathcal{A}' & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}' & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{2.27}$$

Prova: A prova segue passos semelhantes à prova do Lema (2.4). Detalhes são fornecidos em K. Zhou and J. C. Doyle (1998). ■

A norma $\mathcal{H}_2$ pode ser calculada resolvendo um dos seguintes problemas de otimização

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \min_{\gamma,P,W} \{\gamma : (2.22\text{–}2.24)\} = \min_{\gamma,P,W} \{\gamma : (2.25\text{–}2.27)\}. \tag{2.28}$$

2.3.2 Interpretação estocástica da norma $\mathcal{H}_2$

Naturalmente um sistema linear quando excitado por sinais estocásticos terá uma resposta estocástica. Por exemplo: considere o sistema linear (2.1–2.2). Se este sistema for excitado por um ruído branco, estacionário, de média nula, variância $E[w(k)w(k)'] = V$ constante, o valor quadrático médio estacionário do vetor de estado, definido como $Q = \lim_{k\to\infty} E[x(k)x(k)']$ é obtido pela solução da equação (2.29), demonstrada em Kwakernaak e Sivan (1972).

$$Q = \mathcal{A}Q\mathcal{A}' + \mathcal{B}V\mathcal{B}'. \tag{2.29}$$

O valor quadrático médio estacionário da saída é dado pela relação

$$\lim_{k\to\infty} E[y(k)y(k)'] = \lim_{k\to\infty} E[\mathcal{C}x(k)x(k)'\mathcal{C}' + \mathcal{D}w(k)w(k)'\mathcal{D}'], \tag{2.30}$$
$$= \mathcal{C}\lim_{k\to\infty} E[x(k)x(k)']\mathcal{C}' + \mathcal{D}E[w(k)w(k)']\mathcal{D}',$$
$$= \mathcal{C}Q\mathcal{C}' + \mathcal{D}V\mathcal{D}'. \tag{2.31}$$

Na primeira passagem utilizamos a equação (2.2) e consideramos que os sinais $w(k)$ e $x(k)$ são descorrelacionados.

Analisando as equações (2.29) e (2.31) podemos notar a semelhança com as equações (2.14) e (2.15) a menos da matriz V, da variância do ruído. Portanto, em um sistema sujeito a um ruído de variância unitária ($V = I$), o valor quadrático médio estacionário da saída é a própria norma $\mathcal{H}_2$ ao quadrado. De fato, quando o sinal de entrada $\hat{w}$ não for um ruído branco de variância unitária, ainda é possível fazer o cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ se a densidade espectral de potência do sinal $\hat{w}$ puder ser decomposta via fatoração espectral (ver apêndice Lema A.3). Desta forma podemos incorporar a "dinâmica" do sinal $\hat{w}$ no sistema e calcular a norma.

2.3.3 Norma $\mathcal{H}_\infty$

Sistemas a tempo discreto

Para a função de transferência (2.3), pertencente ao espaço $\mathcal{H}_\infty$, a norma $\mathcal{H}_\infty$ é definida como sendo

$$\|H_{wz}(\zeta)\|_\infty = \max_{\omega\in[-\pi,\pi]} \overline{\sigma}[H_{wz}(e^{j\omega})]. \tag{2.32}$$

Para sistemas SISO (uma entrada e uma saída), esta norma equivale ao pico do diagrama de Bode de módulo. Em princípio, podemos calcular esta norma via uma busca unidimensional em

ω.

Assim como a norma $\mathcal{H}_2$, a norma $\mathcal{H}_\infty$ possui uma equivalência no domínio do tempo

$$\|H_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 = \sup_{\|w(k)\|\neq 0} \frac{\|z(k)\|^2}{\|w(k)\|^2} = \sup_{\|w(k)\|\neq 0} \frac{\|h(k)*w(k)\|^2}{\|w(k)\|^2}. \tag{2.33}$$

Com esta equação temporal, podemos interpretar a norma $\mathcal{H}_\infty$ como sendo o maior ganho de energia do sistema, que é a situação de pior caso, relativamente à escolha da perturbação, pois a norma $\mathcal{L}_2$ da saída é perturbada de forma mais intensa. Veja de Souza (1994) para maiores detalhes. Se nenhuma característica estatística de $w(k)$ for conhecida, podemos interpretar essa norma como sendo o máximo ganho para uma entrada com característica estatística desconhecida. A única informação que é disponível é que sua densidade espectral de potência é limitada (Shaked e Theodor 1992a, Khargonekar, Rotea e Baeyens 1996, Grigoriadis e Watson 1997).

Podemos calcular um limitante superior para esta norma via equações de Ricati. Utilizando o Corolário 2.1 e o complemento de Schur podemos calcular um limitante da norma resolvendo um problema convexo de otimização expresso em termos de LMIs, de acordo com o lema seguinte

Lema 2.6 *Dado o sistema (2.1–2.2) as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\|H_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 < \gamma$;

ii) Existe uma matriz $P = P' > 0$ *tal que*

$$\mathcal{A}'P\mathcal{A} - P + (\mathcal{A}'P\mathcal{B} + \mathcal{C}'\mathcal{D})(\gamma I - \mathcal{D}'\mathcal{D} - \mathcal{B}'P\mathcal{B})^{-1}(\mathcal{B}'P\mathcal{A} + \mathcal{D}'\mathcal{C}) + \mathcal{C}'\mathcal{C} = 0; \tag{2.34}$$

iii) Existe uma matriz $P = P' > 0$ *tal que*

$$\mathcal{A}P\mathcal{A}' - P + (\mathcal{A}P\mathcal{C}' + \mathcal{B}\mathcal{D}')(\gamma I - \mathcal{D}\mathcal{D}' - \mathcal{C}P\mathcal{C}')^{-1}(\mathcal{C}P\mathcal{A}' + \mathcal{D}\mathcal{B}') + \mathcal{B}\mathcal{B}' = 0; \tag{2.35}$$

iv) Existe uma matriz $P = P'$ *tal que*

$$\begin{bmatrix} P & \mathcal{A}'P & 0 & \mathcal{C}' \\ P\mathcal{A} & P & P\mathcal{B} & 0 \\ 0 & \mathcal{B}'P & \gamma I & \mathcal{D}' \\ \mathcal{C} & 0 & \mathcal{D} & I \end{bmatrix} > 0; \tag{2.36}$$

v) Existe uma matriz $P = P'$ tal que

$$\begin{bmatrix} P & \mathcal{A}P & \mathcal{B} & 0 \\ P\mathcal{A} & P & 0 & P\mathcal{C}' \\ \mathcal{B}' & 0 & I & \mathcal{D}' \\ 0 & \mathcal{C}P & \mathcal{D} & \gamma I \end{bmatrix} > 0. \tag{2.37}$$

Prova: Antes de começarmos a prova, notemos que a equivalência entre (2.34) e (2.36) e entre (2.35) e (2.37), é feita mediante o Corolário 2.1 e ao complemento de Schur (A.1).

Nesta prova vamos nos ater apenas à suficiência. Mostraremos apenas que ii) implica i). Inicialmente, vamos definir uma função de Lyapunov quadrática

$$v(x(k)) = x(k)'Px(k).$$

Considerando (2.34) como uma desigualdade estrita e aplicando o complemento de Schur, obtemos a forma equivalente

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}'P\mathcal{A} - P + \mathcal{C}'\mathcal{C} & \mathcal{A}'P\mathcal{B} + \mathcal{C}'\mathcal{D} \\ \mathcal{B}'P\mathcal{A} + \mathcal{D}'\mathcal{C} & \mathcal{D}'\mathcal{D} + \mathcal{B}'P\mathcal{B} - \gamma I \end{bmatrix} < 0. \tag{2.38}$$

Multiplicando ambos os lados desta desigualdade por

$$\eta(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix}$$

à direita e por $\eta(k)'$ à esquerda, obtemos

$$\begin{aligned} x(k)'A'PAx(k) - x(k)'Px(k) + x(k)'A'PBw(k) + w(k)'B'PAx(k) + \\ + w(k)'B'PBw(k) - \gamma w(k)'w(k) + z(k)'z(k) < 0. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Notemos que os primeiros cinco termos dessa desigualdade são, de fato, $v(x(k+1)) - v(x(k)) = \Delta(v(k))$. Como o sistema é assintoticamente estável, sabemos que $\Delta(v(k)) < 0$ e, além disso, a inequação (2.39) se torna

$$v(x(k+1)) - v(x(k)) - \gamma w(k)'w(k) + z(k)'z(k) < 0.$$

Somando em ambos os lados desta inequação, obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty}[v(x(k+1))-v(x(k))]-\gamma\sum_{k=0}^{\infty}w(k)'w(k)+\sum_{k=0}^{\infty}z(k)'z(k)<0.$$

Como o sistema é assintoticamente estável e $x(0)=0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty}[v(x(k+1))-v(x(k))]=\lim_{k\to\infty}v(x(k))=0.$$

Portanto, temos a desigualdade i)

$$0-\gamma\|w(k)\|^2+\|z(k)\|^2<0\to\frac{\|z(k)\|^2}{\|w(k)\|^2}<\gamma\to\sup_{w\neq 0}\frac{\|z(k)\|^2}{\|w(k)\|^2}<\gamma.$$

A prova mais detalhada pode ser encontrada em K. Zhou and J. C. Doyle (1998) ou em de Oliveira (1999). ■

Podemos calcular a norma $\mathcal{H}_\infty$ minimizando γ por um dos seguintes problemas convexos de otimização expressos em termos de LMIs, a menos de um número muito pequeno,

$$\|H_{wz}(\zeta)\|_\infty^2=\min_{\gamma,P}\{\gamma:(2.36)\}=\min_{\gamma,P}\{\gamma:(2.37)\}. \tag{2.40}$$

Sistemas a tempo contínuo

Para sistemas a tempo contínuo a norma $\mathcal{H}_\infty$ é definida na forma frequencial como sendo

$$\|H_{wz}(s)\|_\infty=\sup_{\omega\neq 0}\overline{\sigma}[H_{wz}(j\omega)], \tag{2.41}$$

e na forma temporal como sendo

$$\|H_{wz}(s)\|_\infty^2=\sup_{\|w(t)\|\neq 0}\frac{\|z(t)\|^2}{\|w(t)\|^2}=\sup_{\|w(t)\|\neq 0}\frac{\|h(t)*w(t)\|^2}{\|w(t)\|^2}. \tag{2.42}$$

De maneira semelhante aos sistemas a tempo discreto, a norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser calculada resolvendo um problema convexo de otimização expresso em termos de LMIs.

Lema 2.7 *Dado o sistema (2.4–2.5) as seguintes afirmações são equivalentes* *i)* $\|H_{wz}(s)\|_\infty^2 < \gamma$;

ii) *Existe uma matriz* $P = P' > 0$ *tal que*

$$\mathcal{A}'P + P\mathcal{A} + (P\mathcal{B} + \mathcal{C}'\mathcal{D})(\gamma I - \mathcal{D}'\mathcal{D})^{-1}(P\mathcal{B} + \mathcal{C}'\mathcal{D})' + \mathcal{C}'\mathcal{C} = 0; \tag{2.43}$$

iii) *Existe uma matriz* $P = P' > 0$ *tal que*

$$\mathcal{A}P + P\mathcal{A}' + (P\mathcal{C}' + \mathcal{B}\mathcal{D}')(\gamma I - \mathcal{D}\mathcal{D}')^{-1}(P\mathcal{C}' + \mathcal{B}\mathcal{D}')' + \mathcal{B}\mathcal{B}' = 0; \tag{2.44}$$

iv) *Existe uma matriz* $P = P' > 0$ *tal que*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}'P + P\mathcal{A} & P\mathcal{B} & \mathcal{C}' \\ \mathcal{B}'P & -\gamma I & \mathcal{D}' \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & -I \end{bmatrix} < 0; \tag{2.45}$$

v) *Existe uma matriz* $P = P' > 0$ *tal que*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}P + P\mathcal{A}' & \mathcal{B} & P\mathcal{C}' \\ \mathcal{B}' & -I & \mathcal{D}' \\ \mathcal{C}P & \mathcal{D} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \tag{2.46}$$

Prova: A prova pode ser vista em K. Zhou and J. C. Doyle (1998) e também em de Oliveira (1999). ■

A norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser calculada resolvendo um dos seguintes problemas

$$\|H_{wz}(s)\|_\infty^2 = \min_{\gamma,P} \{\gamma : (2.45)\} = \min_{\gamma,P} \{\gamma : (2.46)\}. \tag{2.47}$$

2.4 Estabilidade estendida para sistemas discretos

Nesta seção apresentamos novas condições de estabilidade apresentadas em de Oliveira, Bernussou e Geromel (1999). Essas condições são válidas somente para sistemas a tempo discreto.

Com esta abordagem podemos criar novas condições para o cálculo das normas e resolver problemas mais complicados de síntese sem muito conservadorismo nas restrições. Vale ressaltar que esta condição de estabilidade generaliza aquela anteriormente discutida. Detalhes sobre esta abordagem se encontram em de Oliveira, Geromel e Bernussou (2002) e em de Oliveira (1999).

Podemos analisar estabilidade do sistema (2.1–2.2) pelo seguinte lema

Lema 2.8 (Estabilidade estendida) *O sistema (2.1–2.2) é assintoticamente estável se e somente se existirem matrizes $P = P'$ e G tais que a LMI*

$$\begin{bmatrix} P & \mathcal{A}'G' \\ G\mathcal{A} & G+G'-P \end{bmatrix} > 0, \tag{2.48}$$

seja factível.

Prova: Podemos provar a necessidade verificando que para o sistema ser estável ele deve satisfazer

$$\begin{bmatrix} P & \mathcal{A}'P \\ P\mathcal{A} & P \end{bmatrix} > 0, \tag{2.49}$$

tal que uma escolha particular da matriz $G = G' = P$ na LMI (2.48) seja factível.

Para provar a suficiência, devemos nos ater à seguinte desigualdade

$$(P-G)P^{-1}(P-G)' \geq 0 \Rightarrow GP^{-1}G' \geq G+G'-P,$$

já que $P > 0$.

De posse desta desigualdade podemos substituir $G+G'-P$ em (2.48) obtendo

$$\begin{bmatrix} P & \mathcal{A}'G' \\ G\mathcal{A} & GP^{-1}G' \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} P & \mathcal{A}'G' \\ G\mathcal{A} & G+G'-P \end{bmatrix} > 0. \tag{2.50}$$

Como $G+G'-P > 0$ implica que G seja inversível, podemos definir a transformação

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P(G')^{-1} \end{bmatrix}. \tag{2.51}$$

Multiplicando a desigualdade mais à esquerda de (2.50) por T à esquerda e por T' à direita recuperaremos a desigualdade (2.7). ■

De maneira semelhante podemos estender o conceito da norma $\mathcal{H}_2$, de acordo com o lema seguinte

Lema 2.9 (Norma $\mathcal{H}_2$ estendida) *Considere o sistema descrito pelas equações (2.1–2.2) e a função de transferência definida em (2.3). As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 < \gamma$;

ii) Existem matrizes $P = P'$, $W = W'$ e G tais que

$$\mathrm{tr}(W) < \gamma, \tag{2.52}$$

$$\begin{bmatrix} W & \mathcal{B}'G' & \mathcal{D}' \\ G\mathcal{B} & G+G'-P & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} P & \mathcal{A}'G' & \mathcal{C}' \\ G\mathcal{A} & G+G'-P & 0 \\ \mathcal{C} & 0 & I \end{bmatrix} > 0; \tag{2.53}$$

iii) Existem matrizes $P = P'$, $W = W'$ e G tais que

$$\mathrm{tr}(W) < \gamma, \tag{2.54}$$

$$\begin{bmatrix} W & \mathcal{C}G & \mathcal{D} \\ G'\mathcal{C}' & G+G'-P & 0 \\ \mathcal{D}' & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} P & \mathcal{A}G & \mathcal{B} \\ G'\mathcal{A}' & G+G'-P & 0 \\ \mathcal{B}' & 0 & I \end{bmatrix} > 0. \tag{2.55}$$

A norma $\mathcal{H}_2$ pode ser calculada resolvendo um dos seguintes problemas de otimização

$$\|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 = \min_{\gamma,P,G,W} \{\gamma : (2.52\text{–}2.53)\} = \min_{\gamma,P,G,W} \{\gamma : (2.54\text{–}2.55)\}. \tag{2.56}$$

Para o cômputo da norma $\mathcal{H}_\infty$ sob as novas condições de estabilidade devemos nos ater ao lema a seguir

Lema 2.10 (Norma $\mathcal{H}_\infty$ estendida) *Dado o sistema (2.1–2.2) e a função de transferência (2.3), as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\|H_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 < \gamma$;

ii) *Existem matrizes* $P = P' > 0$ *e* G *tais que*

$$\begin{bmatrix} P & \mathcal{A}'G' & 0 & \mathcal{C}' \\ G\mathcal{A} & G+G'-P & G\mathcal{B} & 0 \\ 0 & \mathcal{B}'G' & \gamma I & \mathcal{D}' \\ \mathcal{C} & 0 & \mathcal{D} & I \end{bmatrix} > 0; \tag{2.57}$$

iii) *Existem matrizes* $P = P' > 0$ *e* G *tais que*

$$\begin{bmatrix} P & \mathcal{A}G & \mathcal{B} & 0 \\ G'\mathcal{A} & G+G'-P & 0 & G'\mathcal{C}' \\ \mathcal{B}' & 0 & I & \mathcal{D}' \\ 0 & \mathcal{C}G & \mathcal{D} & \gamma I \end{bmatrix} > 0. \tag{2.58}$$

Podemos calcular norma $\mathcal{H}_\infty$ minimizando o valor de γ por um dos seguintes problemas

$$\|H_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 = \min_{\gamma,P,G}\{\gamma : (2.57)\} = \min_{\gamma,P,G}\{\gamma : (2.58)\}. \tag{2.59}$$

2.5 Desempenho robusto

Uma das características mais importantes de um sistema de controle diz respeito a sua robustez. Robustez é a capacidade de um sistema manter uma determinada característica na presença de perturbações e distúrbios que possam vir a ocorrer durante seu funcionamento. Nosso estudo de robustez se concentra na manutenção de uma característica muito importante aos sistemas de controle que é seu desempenho.

Para podermos analisar o desempenho robusto do sistema temos que primeiro classificar e analisar algumas dessas fontes de distúrbio ou perturbações, as quais denominamos de incertezas.

Nesta seção estudaremos os dois modelos de incertezas mais conhecidos na literatura.

2.5.1 Sistemas com incertezas politópicas

A primeira classe de perturbações se refere as incertezas politópicas. Sistemas dinâmicos podem ter certos parâmetros que são incertos, isto é, desconhecidos, mas a sua faixa de variação pode ser conhecida ou estimada. Causas destas incertezas seriam: a variação de parâmetros já previstos no projeto, simplificação de não-linearidades ou efeitos físicos inerentes ao meio. Em Egas, Levin, Regis e Geromel (n.d.), encontram-se mais exemplos de causas de incertezas, no contexto de processamento de sinais. Nesses casos, denominamos esses tipos de incertezas como sendo incertezas politópicas, pois para cada valor destes parâmetros incertos, no respectivo domínio de variação, podemos definir um sistema dinâmico diferente, sendo que as matrizes que definem o espaço de estados encontram-se dentro de um politopo convexo.

Sistemas a tempo discreto

Considerando o sistema a tempo discreto, definido pelas equações no espaço de estados

$$x(k+1) = \mathcal{A}(\lambda)x(k) + \mathcal{B}(\lambda)w(k); x(0) = 0, \tag{2.60}$$

$$z(k) = \mathcal{C}(\lambda)x(k) + \mathcal{D}(\lambda)w(k), \tag{2.61}$$

nas quais $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada, $z(k) \in \mathbb{R}^p$ é a saída e todas as matrizes são de dimensões compatíveis, definimos o conjunto de todos os sistemas possíveis através de

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(\lambda) & \mathcal{B}(\lambda) \\ \mathcal{C}(\lambda) & \mathcal{D}(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{2.62}$$

A matriz $M(\lambda) \in \mathcal{M}_p$ tal que

$$\mathcal{M}_p = \left\{ M(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i M_i, \quad \lambda \in \Lambda \right\}, \tag{2.63}$$

no qual denotamos como sendo M_i os valores de $M(\lambda)$ que se encontram nos vértices do domínio de incerteza, ou seja, $M_i = M(\lambda)$ para $\lambda = e_i$ [2]

$$M_i = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_i & \mathcal{B}_i \\ \mathcal{C}_i & \mathcal{D}_i \end{bmatrix},$$

e

$$\Lambda = \left\{ \lambda = [\lambda_1 \cdots \lambda_N] : \quad \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \right\}, \tag{2.64}$$

[2] e_i é o vetor canônico no $\mathbb{R}^N$.

é o simplex unitário. Com esta caracterização, as incertezas do sistema estão concentradas no parâmetro λ.

Denotamos a função de transferência entre a entrada $w(k)$ e a saída $z(k)$ de (2.60–2.61) para cada vértice $M(e_i) = M_i$ como sendo $H_i(\zeta)$, $i = 1, \cdots, N$. Para qualquer $\lambda \in \Lambda$, denotamos a função de transferência do sistema deste sistema como sendo $H(\zeta, \lambda)$.

Podemos estudar a estabilidade deste sistema (ou deste conjunto de sistemas) simplesmente analisando a estabilidade dos sistemas que compõem os vértices, de acordo com o lema seguinte

Lema 2.11 *Com relação ao sistema (2.60–2.61) se as LMIs*

$$\begin{bmatrix} P_i & \mathcal{A}_i' G' \\ G\mathcal{A}_i & G + G' - P_i \end{bmatrix} > 0, \tag{2.65}$$
$$i = 1 \cdots N,$$

forem factíveis, o sistema é assintoticamente estável para todo $\lambda \in \Lambda$.

Prova: Podemos provar este lema se multiplicarmos cada restrição pelo respectivo λ_i e somá-las, obtendo[3]

$$\begin{bmatrix} P(\lambda) & \mathcal{A}(\lambda)' G' \\ G\mathcal{A}(\lambda) & G + G' - P(\lambda) \end{bmatrix} > 0, \tag{2.66}$$

em que $P(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} P_i \lambda_i$, garantindo, assim, sua estabilidade. ■

Note que a condição de estabilidade do Lema 2.11 é apenas suficiente, pois há um acoplamento entre as restrições pela matriz G. Neste caso a função de Lyapunov é dependente dos parâmetros λ_i (Geromel, de Oliveira e Bernussou 2002),

$$v(x(k)) = x(k)' P(\lambda) x(k). \tag{2.67}$$

Com a função de Lyapunov definida desta forma, podemos encontrar condições menos conservadoras do que no caso da função de Lyapunov quadrática, em que $P_i = P$, $i = 1 \cdots N$ e $G = G' = P$ (Boyd et al. 1994). Daí a importância de se utilizar as condições de estabilidade estendida.

Utilizando esta mesma estratégia, podemos calcular limitantes superiores das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, denominados custos garantidos.

[3] Note que como a matriz G não depende de λ_i. $\sum_{i=1}^{N} G\lambda_i = G$, pois $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$.

Lema 2.12 *Para o sistema descrito pelas equações (2.60–2.61) as seguintes afirmações são verdadeiras (de Oliveira et al. 2002):*

i) Se existirem matrizes G, $W_i = W_i'$, $P_i = P_i'$, tais que as LMIs

$$\mathrm{tr}(W_i) < \gamma, \tag{2.68}$$

$$\begin{bmatrix} W & \mathcal{B}_i' G' & \mathcal{D}_i' \\ G\mathcal{B}_i & G + G' - P_i & 0 \\ \mathcal{D}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} P_i & \mathcal{A}_i' G' & \mathcal{C}_i' \\ G\mathcal{A}_i & G + G' - P_i & 0 \\ \mathcal{C}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \tag{2.69}$$

forem factíveis para todo $i = 1, \cdots, N$, então $\|H_{wz}(\zeta,\lambda)\|_2^2 < \gamma$ para todo $\lambda \in \Lambda$;

ii) Se existirem matrizes G, $P_i = P_i'$, tais que as LMIs

$$\begin{bmatrix} P_i & \mathcal{A}_i' G' & 0 & \mathcal{C}_i' \\ G\mathcal{A}_i & G + G' - P_i & G\mathcal{B}_i & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_i' G' & \gamma I & \mathcal{D}_i' \\ \mathcal{C}_i & 0 & \mathcal{D}_i & I \end{bmatrix} > 0, \tag{2.70}$$

forem factíveis para todo $i = 1, \cdots, N$, então $\|H_{wz}(\zeta,\lambda)\|_\infty^2 < \gamma$ para todo $\lambda \in \Lambda$.

Podemos calcular o menor limitante superior destas normas simplesmente minimizando o valor de γ pelos problemas de otimização expressos em termos de LMIs

$$\|H_{wz}(\zeta,\lambda)\|_2^2 = \min_{\gamma, P_i, G, W_i} \{\gamma : (2.68\text{–}2.69)\}, \tag{2.71}$$

$$\|H_{wz}(\zeta,\lambda)\|_\infty^2 = \min_{\gamma, P_i, G} \{\gamma : (2.70)\}. \tag{2.72}$$

Sistemas a tempo contínuo

Para sistemas a tempo contínuo a análise é semelhante. Considere o sistema

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}(\lambda)x(t) + \mathcal{B}(\lambda)w(t); \, x(0) = 0 \tag{2.73}$$

$$z(t) = \mathcal{C}(\lambda)x(t) + \mathcal{D}(\lambda)w(t), \tag{2.74}$$

no qual $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ é a saída e todas as matrizes são de dimensões compatíveis e definidas em (2.62). O conjunto de todos os sistemas possíveis é definido através de (2.63) e (2.64).

Denotamos a função de transferência entre a entrada $w(t)$ e a saída $z(t)$ do sistema (2.73–2.74) para cada vértice $M(\lambda) = M_i$ como sendo $H_i(s)$, $i = 1, \cdots, N$. Para qualquer $\lambda \in \Lambda$, denotamos a função de transferência do sistema como sendo por $H(s, \lambda)$.

As condições para a estabilidade, custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ para (2.73–2.74) estão apresentadas no lema a seguir.

Lema 2.13 *Com relação ao sistema dinâmico incerto (2.73–2.74), as seguintes afirmações são verdadeiras (Geromel 1999):*

i) O sistema é assintoticamente estável se as seguintes desigualdades

$$\mathcal{A}_i' P + P\mathcal{A}_i < 0 \tag{2.75}$$

forem satisfeitas para todo $i = 1, \cdots, N$;

ii) Considerando que $\mathcal{D}(\lambda) = 0$, se existirem matrizes $P = P'$ e $W_i = W_i'$ tais que as desigualdades

$$\mathrm{tr}(W_i) < \gamma, \tag{2.76}$$

$$\begin{bmatrix} W_i & \mathcal{B}_i' P \\ P\mathcal{B}_i & P \end{bmatrix} > 0, \tag{2.77}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_i' P + P\mathcal{A}_i & \mathcal{C}_i' \\ \mathcal{C}_i & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{2.78}$$

forem satisfeitas para todo $i = 1, \cdots, N$, então é garantido que $\|H_{wz}(s,\lambda)\|_2^2 < \gamma$ para todo $\lambda \in \Lambda$;

iii) Se existir uma matriz $P = P' > 0$ tal que as desigualdades

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_i' P + P\mathcal{A}_i & P\mathcal{B}_i & \mathcal{C}_i' \\ \mathcal{B}_i' P & -\gamma I & \mathcal{D}_i' \\ \mathcal{C}_i & \mathcal{D}_i & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{2.79}$$

forem satisfeitas para todo $i = 1, \cdots, N$, então é garantido que $\|H_{wz}(s,\lambda)\|_\infty^2 < \gamma$ para todo $\lambda \in \Lambda$.

Neste caso não há condições que relaxem as restrições adicionais $P_i = P$, como no caso discreto. Portanto a severidade das restrições é muito grande e pode ser evidenciada por simulações.

Podemos calcular o menor limitante superior destas normas simplesmente minimizando o valor de γ pelos problemas de otimização expressos em termos de LMIs

$$\|H_{wz}(s,\lambda)\|_2^2 = \min_{\gamma,P,W_i} \{\gamma : (2.76\text{–}2.78)\}, \tag{2.80}$$

$$\|H_{wz}(s,\lambda)\|_\infty^2 = \min_{\gamma,P} \{\gamma : (2.79)\}. \tag{2.81}$$

2.5.2 Sistemas com incertezas limitadas em norma

Outra classe de perturbações se refere a incertezas limitadas em norma. O motivo desta denominação está no fato que a única informação que temos da incerteza está na sua norma. Esta incerteza atua nas matrizes que definem as equações do espaço de estado do sistema e, a princípio, não é conhecido o quanto seus elementos são afetados. Referimos a matriz deste tipo de incerteza simplesmente pela letra Δ. Podemos calcular a norma $\mathcal{H}_\infty$ da perturbação através de

$$\|\Delta\|_\infty = \overline{\sigma}(\Delta) = \sqrt{\lambda_{max}(\Delta'\Delta)} \tag{2.82}$$

Incertezas não-estruturadas

Uma incerteza é dita não-estruturada quando, de fato, não podemos inferir nada a respeito da forma como ela perturba o sistema e quanto o perturba, apenas conhecemos sua norma. Em geral a matriz de perturbações Δ é cheia.

Podemos caracterizar este sistema incerto da seguinte forma: considere o sistema (2.1–2.2) ou (2.4–2.5). Podemos agrupar suas matrizes na forma

$$M = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix}, \tag{2.83}$$

em que a matriz $M \in \mathcal{M}_n$, sendo

$$\mathcal{M}_n = \{M = M_0 + H\Delta J, \quad \|\Delta\|_\infty < \gamma\}, \tag{2.84}$$

em que M_0 denota um sistema dito nominal e H e J são matrizes conhecidas. Já que $\Delta'\Delta < \gamma I$ é um conjunto convexo (mas não necessariamente politópico), o modelo de incertezas também o será, pois M é uma relação afim de Δ (Geromel e de Oliveira 2001).

Incertezas estruturadas

Para incertezas estruturadas, porém, é conhecido qual a parte do sistema que é perturbada, mas não é conhecido o quanto, novamente só a norma é conhecida. Neste caso Δ possui uma estrutura pré-definida. Um exemplo de incertezas estruturadas são as incertezas politópicas.

Claramente podemos escrever uma incerteza estruturada como uma não-estruturada, por simples construção. De fato, ao fazermos isto estamos perdendo informação sobre a incerteza, podendo até obter resultados não muito satisfatórios na análise. No exemplo a seguir mostraremos a diferença entre incertezas estruturadas e não-estruturadas.

Exemplo 2.1 Considere o seguinte sistema

$$x(k+1) = (\mathcal{A} + \Delta_{\mathcal{A}})x(k) + \mathcal{B}w(k); x(0) = 0, \tag{2.85}$$

$$z(k) = \mathcal{C}x(k) + \mathcal{D}w(k), \tag{2.86}$$

no qual

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 100 & 0,2 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix},$$

e $\Delta_{\mathcal{A}}$ é tal que $\|\Delta_{\mathcal{A}}\|_\infty < 0,5$ indica o grau de incerteza e o modelo com $\Delta_{\mathcal{A}} = 0$ é dito nominal.

Consideremos, inicialmente, que $\Delta_{\mathcal{A}}$ não é estruturada. Notamos que para uma matriz $\Delta_{\mathcal{A}}$ cheia, por exemplo

$$\Delta_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 \end{bmatrix},$$

cuja norma $\|\Delta_{\mathcal{A}}\|_\infty = 0,4303$, o sistema (2.85–2.86) é instável.

Consideremos, agora, a estrutura da matrix $\Delta_{\mathcal{A}}$ como sendo diagonal

$$\Delta_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \delta_{\mathcal{A}_{11}} & 0 \\ 0 & \delta_{\mathcal{A}_{22}} \end{bmatrix},$$

podemos verificar que para qualquer $\Delta_{\mathcal{A}}$ tal que $\|\Delta_{\mathcal{A}}\|_\infty < 0,5$, o sistema (2.85–2.86) permanece estável. ♦

2.5.3 Incertezas limitadas em norma versus incertezas politópicas

Nesta subseção estamos interessados em relacionar os dois modelos de incertezas estudados (Geromel 1999). Como foi mencionado na Seção 2.5.2, podemos escrever uma incerteza estruturada em uma não-estruturada. Veremos, agora, mais formalmente as relações entre estes modelos.

Se considerarmos a estrutura de $\Delta'\Delta$ em (2.84) como sendo diagonal, o modelo de incertezas limitadas em norma é o modelo de incertezas politópicas, ou seja, é sempre possível determinar um número finito de matrizes M_i, $i = 1, \cdots, N$ tal que $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_p$. Com isto fica claro que as incertezas politópicas são do tipo estruturadas.

No caso geral, porém, a igualdade $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_p$ não é válida. Entretanto é sempre possível determinar um número finito de matrizes Δ_i, $i = 1, \cdots, N$ na fronteira de $\Delta'\Delta < \gamma I$ tal que, com $M_i = M_0 + H\Delta_i J$, $i = 1, \cdots, N$, a relação $\mathcal{M}_p \subset \mathcal{M}_n$ é válida. À medida que o número N aumenta, o conjunto $\mathcal{M}_p$ tende ao conjunto $\mathcal{M}_n$. Portanto, para um número N suficientemente grande, o conjunto $\mathcal{M}_n$ pode ser substituído pelo conjunto $\mathcal{M}_p$ correspondente, com certa precisão. A vantagem de se fazer esta troca está na possibilidade de se utilizar as estruturas e as condições de estabilidade e norma para o sistema incerto modelado pelo conjunto $\mathcal{M}_p$, o que não é facilmente obtido pelo conjunto $\mathcal{M}_n$ sem introduzir um alto grau de conservadorismo (Geromel e de Oliveira 2001).

Capítulo 3

Filtragem robusta ótima em norma $\mathcal{H}_2$

3.1 Introdução

O projeto de filtros lineares é a ferramenta básica para a estimação de sinais. O problema de filtragem ótima é tratado classicamente por um de dois métodos, a depender das hipóteses feitas pelo projetista. O primeiro método, que dá origem ao filtro de Wiener, trabalha no domínio da freqüência. No segundo, o problema é tratado no domínio do tempo com base na representação de estados, e o filtro projetado recebe o nome filtro de Kalman. Se o projeto restringe-se a filtros estacionários e causais, os dois métodos tornam-se equivalentes. Em ambos os casos, os parâmetros que definem o sistema, por exemplo: parâmetros do sinal, ruído e funções de tranferência, são precisamente conhecidos (Anderson e Moore 1979, Haykin 1989).

O problema de filtragem robusta é mais recente e mais complexo. Nele, o modelo do sistema não é conhecido exatamente. Em Poor (1980), discute-se o projeto de um filtro de Wiener robusto. Trabalhos posteriores (Cortelazzo 1986, Moustakides e Kassam 1983, Chen e Kassam 1984) o complementam, aumentando a complexidade do modelo. Jain (1975), Shaked e de Souza (1995) e Xie e Soh (1994) propõem a síntese de filtros robustos com desempenho garantido frente a incertezas limitadas em norma nas realizações do sinal e do ruído no espaço de estados. Em Geromel (1999), Geromel, Bernoussou, Garcia e de Oliveira (2000) e Geromel et al. (2002), o problema de filtragem robusta com incertezas politópicas e custo garantido é formulado em termos de desigualdades matriciais lineares, (Boyd et al. 1994), e resolvido via programas específicos de otimização. Artigos mais recentes (Liu, Wang e Yang 2003, Wang e Balakrishnan 2003) seguem esta mesma linha.

Os métodos acima apresentam limitações significativas. No domínio da freqüência, quando o problema se restringe a filtros causais, as manipulações algébricas se tornam muito complexas

(Kassam e Poor 1985). No domínio do tempo, os autores citados trabalham com um limitante superior do erro de estimação – e não com o próprio erro – a fim de manter o problema convexo. O filtro obtido nestes casos é obviamente subótimo. Apesar destas limitações, em diversos casos resultados satisfatórios são obtidos.

Este capítulo introduz um novo modelo de incertezas paramétricas inspirado no modelo ε-*contaminated*, bem conhecido na área de processamento de sinais e de dados (Kassam e Poor 1985). Mostra-se que, para este modelo de incertezas, o filtro robusto, obtido da solução de um problema minimax (Martin e Mintz 1983), é ótimo. Exemplos ilustrarão sua eficácia.

3.2 Definição do problema e modelo de incertezas proposto

A Figura 3.1 mostra a estrutura básica do problema de filtragem. Consideremos que o sinal $\hat{w}$ é um ruído branco e estacionário, de média nula e variância unitária. A partir deste sinal $\hat{w}$, a função de transferência $H(\omega)$ gera o sinal transmitido $\hat{y}$ e o sinal a ser estimado $\hat{z}$. O filtro $F(\omega)$, cuja entrada é o sinal transmitido $\hat{y}$, deve ser projetado de forma que sua saída $\hat{z}_f$ seja a melhor estimativa possível de $\hat{z}$, do ponto de vista estatístico. No caso, o filtro $F(\omega)$ deve minimizar a variância do erro de estimação $\hat{e}$. Adotando a partição

$$H(\omega) = \begin{bmatrix} T(\omega) \\ S(\omega) \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

o problema, a partir do Teorema de Parseval, pode ser formulado como

$$\min_{F \in \mathcal{F}} \|S(\omega) - F(\omega)T(\omega)\|_2^2, \tag{3.2}$$

em que $\|\cdot\|_2$ indica a norma $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{F}$ indica o conjunto dos filtros sob consideração. Este modelamento é genérico e engloba desde esquemas de recepção e equalização de sinais sujeitos a ruídos e distorções de canal até servir de modelo para estimação de estado, se forem definidas apropriadamente as funções de transferência $S(\omega)$ e $T(\omega)$. No caso clássico, $H(\omega)$ é conhecida e a solução de (3.2) é o filtro de Wiener (Kassam e Poor 1985) ou o filtro de Kalman (Anderson e Moore 1979).

No caso robusto, as funções de transferência $T(\omega)$ e $S(\omega)$ não são conhecidas. A única informação disponível sobre $H(\omega)$ é que esta função de transferência pertence a um conjunto $\mathcal{H}$

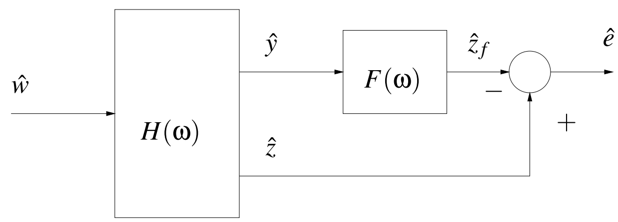

Figura 3.1: Estrutura do problema de filtragem

dado. Este problema, mais complexo, pode ser descrito formalmente como

$$\min_{F \in \mathcal{F}} \max_{H \in \mathcal{H}} \|S(\omega) - F(\omega)T(\omega)\|_2^2, \tag{3.3}$$

que permite a seguinte interpretação: o filtro a ser determinado é aquele que garante, frente a todo o conjunto de incertezas, o mínimo erro de estimação. Vale observar que a solução de (3.3) depende do modelo de incertezas implícito na definição do conjunto $\mathcal{H}$.

Na literatura, dois modelos de incertezas foram amplamente estudados: incertezas limitadas em norma (Shaked e de Souza 1995) e incertezas politópicas (Geromel 1999), abordados na Seção 2.5. Em ambos os casos, não foi possível determinar a solução ótima de (3.3).

Nossa proposta consiste em adotar um terceiro modelo de incertezas, dado por

$$\mathcal{H} := co\{H_1, H_2, \cdots, H_N\}, \tag{3.4}$$

em que $co\{\cdot\}$ indica a combinação convexa e as funções de transferência $H_i(\omega)$, $i = 1, \cdots, N$ são conhecidas e assintoticamente estáveis. A função de transferência $H(\omega) \in \mathcal{H}$ pode ser descrita, portanto, por

$$H(\omega) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i H_i(\omega), \tag{3.5}$$

com $\lambda := [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_N]' \in \Lambda$ e

$$\Lambda := \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N \ : \ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \ , \ \ \lambda_i \geq 0 \right\}. \tag{3.6}$$

Como será mostrado posteriormente, a ordem de cada um dos vértices $H_1(\omega), \cdots, H_N(\omega)$ pode ser definida arbitrariamente.

Exemplo 3.1 Juntamente com o modelos de incertezas politópicas, vamos representar grafica-

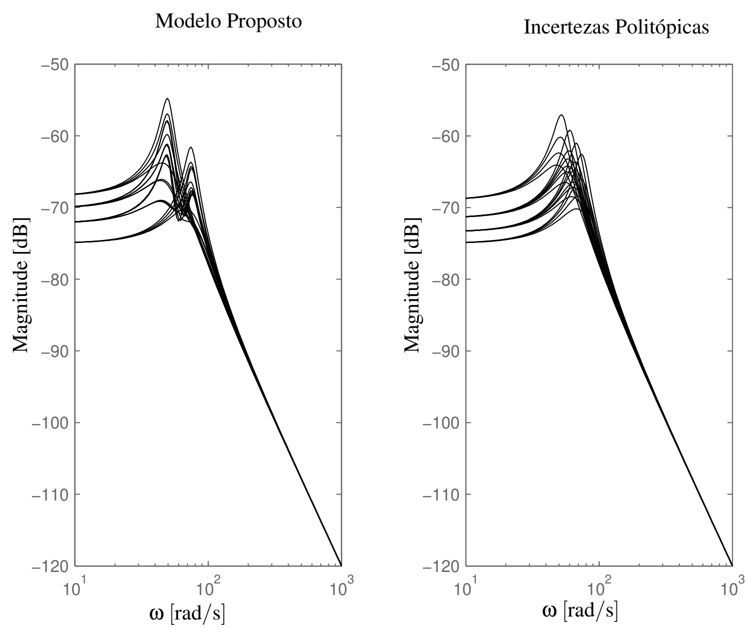

Figura 3.2: Modelos de incertezas

mente o modelo (3.4) com o objetivo de evidenciar suas diferenças.

Considere o seguinte modelo incerto

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

com $0,1 < \xi < 0,3$ e $50 < \omega_n < 75$. Este sistema possui dois parâmetros incertos e quatro sistemas extremos. Considerando o descrito na seção anterior e na Seção 2.5, a Figura 3.2 mostra o diagrama de Bode de $H(s)$ para algumas incertezas factíveis.

O diagrama à direita representa o modelo de incertezas politópicas, formado pela combinação convexa das matrizes que definem uma representação no espaço de estados, e o diagrama à esquerda representa o modelo de incertezas proposto, formado pela combinação convexa das funções de transferência dos sistemas extremos.

Por estas figuras vemos que, no modelo proposto, o espectro torna-se ligeiramente diferente daquele apresentado pelas incertezas politópicas. ♦

Ao longo deste capítulo iremos propor um método para o cálculo da solução ótima do problema minimax (3.3), com $\mathcal{H}$ definido por (3.4).

3.3 Aproximação linear robusta

Esta seção aborda o problema de aproximação linear, a fim de preparar a discussão do problema formulado em (3.3), completando os resultados apresentados em Hindi e Boyd (1998). O problema clássico de aproximação linear é formalmente descrito por

$$\min_F \|S - FT\|_2^2, \tag{3.7}$$

em que $F \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $T \in \mathbb{R}^{r\times m}$, $S \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $\|E\|_2^2 := \mathrm{tr}\,(E'E)$ para qualquer matriz E real. Se a inversa indicada existir, a solução de (3.7) é dada por

$$F^* = ST'(TT')^{-1}, \tag{3.8}$$

e o erro de estimação associado, por

$$\|S - F^*T\|_2^2 = \mathrm{tr}\left[S(I - T'(TT')^{-1}T)S'\right]. \tag{3.9}$$

Este é o resultado clássico do problema de mínimos quadrados lineares. A versão robusta deste problema é análoga a (3.3). Sua descrição formal é dada por

$$\min_F \max_{H\in\mathcal{H}} \|S - FT\|_2^2, \tag{3.10}$$

em que $\mathcal{H}$ é definido como o conjunto das combinações convexas das matrizes $H_i' := [T_i' \ S_i']$, $i = 1,\cdots,N$. Partindo do fato de que toda norma é uma função convexa e de que o máximo de qualquer função convexa em um conjunto politópico ocorre em um dos seus vértices, é possível reescrever o problema max em (3.10). De fato,

$$\begin{aligned}
\max_{H\in\mathcal{H}} \|S - FT\|_2^2 &= \max_{\lambda\in\Lambda} \left\| \sum_{i=1}^N \lambda_i (S_i - FT_i) \right\|_2^2 \\
&= \max_i \left\{ \|S_i - FT_i\|_2^2 \right\} \\
&= \min_\gamma \left\{ \gamma : \ \|S_i - FT_i\|_2^2 \le \gamma\,,\ i = 1,\cdots,N \right\}.
\end{aligned}$$

O resultado acima garante que o problema (3.10) é equivalente a

$$\min_{\gamma,F} \left\{ \gamma : \ \|S_i - FT_i\|_2^2 \le \gamma\,,\ i = 1,\cdots,N \right\}. \tag{3.11}$$

Como (3.11) é convexo em relação a ambas as variáveis γ e F, o que implica em não haver *gap* de dualidade, é possível representá-lo em uma formulação dual (Luenberger 1969). De fato, escrevendo o lagrangeano de (3.11) (em que $\lambda_i \geq 0$)

$$\mathcal{L}(\gamma, F, \lambda) = \gamma + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (\|S_i - FT_i\|_2^2 - \gamma) \tag{3.12}$$

e derivando em relação a γ e a F temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} = 1 - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 0 \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F} = 2\left(\sum_{i=1}^{N} F\lambda_i T_i T_i'\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i S_i T_i'\right) = 0. \tag{3.14}$$

Resolvendo a primeira equação em λ obtemos o problema dual

$$\max_{\lambda \in \Lambda} \min_{F} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \|S_i - FT_i\|_2^2. \tag{3.15}$$

A solução ótima do problema min em (3.15) é dada explicitamente por

$$F^*(\lambda) := \left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i S_i T_i'\right)\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i T_i T_i'\right)^{-1}. \tag{3.16}$$

Substituindo (3.16) em (3.15), obtém-se a formulação dual equivalente expressa em termos de LMIs

$$\max_{W, \lambda \in \Lambda} \left\{ \operatorname{tr}(W) \ : \ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \begin{bmatrix} T_i \\ S_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i' & S_i' \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \right\}. \tag{3.17}$$

Note que as variáveis duais (λ_i) são, de fato, os parâmetros incertos do problema original. Vale observar que (3.15) não é obtida pela simples inversão da ordem dos operadores min e max de (3.10). Reescrevendo o problema (3.10) na forma alternativa

$$\min_{F} \max_{\lambda \in \Lambda} \left\| \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (S_i - FT_i) \right\|_2^2 \tag{3.18}$$

e comparando esta formulação com a formulação equivalente (3.15), fica claro que, quando são invertidos os operadores min e max de (3.10), o problema maxmin resultante não é equivalente ao problema minimax original. Em Kassam e Poor (1985) é possível fazer esta troca, pois a função objetivo apresentada, escrita em termos das funções de transferência, é côncava-convexa, condição suficiente para haver um ponto de sela e ser possível inverter a ordem os operadores (Rockafellar 1970).

3.4 Sistemas a tempo contínuo

O objetivo principal desta seção é apresentar a solução do problema de filtragem robusta (3.3) com domínio de incertezas $\mathcal{H}$ definido por (3.4). De acordo com os resultados da seção anterior, o problema (3.3) pode ser descrito pela formulação primal

$$\min_{\gamma, F\in\mathcal{F}} \left\{\gamma \,:\, \|S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)\|_2^2 \leq \gamma\,,\ i = 1, \cdots, N\right\} \tag{3.19}$$

e por sua correspondente formulação dual

$$\max_{\lambda\in\Lambda} \min_{F\in\mathcal{F}} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \|S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)\|_2^2, \tag{3.20}$$

em que $\mathcal{F}$ é o conjunto das funções de transferência causais e racionais.

Uma estratégia possível para solucionar o problema primal (Geromel 1999, Liu et al. 2003, Shaked e de Souza 1995, Wang e Balakrishnan 2003) parte da descrição do erro de estimação no espaço de estados e limita a ordem do filtro à maior entre as ordens das funções de transferência $H_i(\omega)$, $i = 1, \cdots, N$. Para contornar a não convexidade própria desta estratégia, adota-se o conhecido *Lyapunov Shaping Paradigm* (Scherer, Gahinet e Chilali 1997), que introduz restrições adicionais ao problema e implica, portanto, na subotimalidade da solução.

Propomos uma abordagem diferente. Os modelos definidos em (3.4) podem ser escritos alternativamente como

$$H_i(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_{yi} & D_{yi} \\ C_{zi} & 0 \end{array}\right], \quad i = 1, \cdots, N, \tag{3.21}$$

de forma que cada $H \in \mathcal{H}$ é dada por

$$H(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B(\lambda) \\ \hline C_y & D_y(\lambda) \\ C_z & 0 \end{array}\right], \tag{3.22}$$

para algum $\lambda \in \Lambda$. As matrizes indicadas em (3.22) são dadas por $A := \text{diag}[A_1, \cdots, A_N]$, $C_y := [C_{y1} \ \cdots \ C_{yN}]$, $C_z := [C_{z1} \ \cdots \ C_{zN}]$ e

$$B(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda_1 B_1' & \cdots & \lambda_N B_N' \end{bmatrix}', \ D_y(\lambda) := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i D_{yi}.$$

Cabem aqui alguns comentários sobre a expressão (3.22) para a função de transferência $H(s)$. Apenas as matrizes B e D são funções do parâmetro incerto λ e, para $\lambda = e_i$, em que e_i é o i-ésimo vetor canônico do $\mathbb{R}^N$, a equação (3.22) equivale a $H(s) = H_i(s)$. Por outro lado, partindo dos resultados apresentados em Geromel (1999), verifica-se que a ordem do filtro, agora, não está restrita à maior entre as ordens de $H_i(s)$, $i = 1, \cdots, N$, mas à soma das ordens de $H_i(s)$, $i = 1, \cdots, N$, o que implica em melhoria de desempenho, como será mostrado posteriormente por meio de um exemplo.

O lema a seguir é de central importância para a solução do problema (3.19).

Lema 3.1 *Com base no diagrama de blocos da Figura 3.1, considere o filtro racional e causal descrito por*

$$F(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & 0 \end{array}\right] \tag{3.23}$$

e a função de transferência de $\hat{w}$ para $\hat{e}$ dada por

$$\begin{aligned} E(s) &:= \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B}(\lambda) \\ \hline \mathcal{C} & 0 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B(\lambda) \\ B_f C_y & A_f & B_f D_y(\lambda) \\ \hline C_z & -C_f & 0 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

A restrição $\|S(\omega) - F(\omega)T(\omega)\|_2^2 < \gamma$ é satisfeita para todo $\lambda \in \Lambda$, se e somente se existir uma matriz simétrica e definida positiva $\mathcal{P}$ tal que

$$\text{tr}\left(\mathcal{B}(\lambda)'\mathcal{P}\mathcal{B}(\lambda)\right) < \gamma, \ \ \mathcal{A}'\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{A} + \mathcal{C}'\mathcal{C} < 0. \tag{3.24}$$

Prova: Decorre do Lema 2.5. ∎

É importante observar que a matriz $\mathcal{P}$ é invariante em relação ao parâmetro incerto λ. Isto acontece porque a restrição em $\mathcal{P}$ não é dependente de λ. Se calculássemos a norma $\mathcal{H}_2$ pela formulaç˜

transformação T como sendo (Geromel 1999)

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} X & U \\ U' & \hat{X} \end{bmatrix} \qquad \mathcal{P}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \hat{Y} \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & V'Y^{-1} \end{bmatrix},$$

podemos multiplicar a desigualdade mais à esquerda de (3.30) por $\hat{T} = diag(I,T)$ à direita e por $\hat{T}'$ à esquerda, e a desigualdade mais à direita por $\hat{T} = diag(T,I)$ à direita e por $\hat{T}'$ à esquerda, obtendo as desigualdades mencionadas em uma maneira alternativa

$$\begin{bmatrix} W_i & B(e_i)'X + D_y(e_i)'L' & B(e_i)'Z \\ \bullet & X & Z \\ \bullet & \bullet & Z \end{bmatrix} > 0 \tag{3.31}$$

e

$$\begin{bmatrix} A'X + XA + C_y'L' + LC_y & C_z' & A'Z + XA + LC_y + Q \\ \bullet & -I & C_z - G \\ \bullet & \bullet & A'Z + ZA \end{bmatrix} < 0 \tag{3.32}$$

com respeito as variáveis $W_i, X, Z = Y^{-1}, L = UB_f, G = C_fV'Y^{-1}$ e $Q = UA_fV'Y^{-1}$, que definem a função de transferência do filtro $F(s)$. Aplicando o Lema A.2 na inequação (3.32), podemos impor as escolhas $Q = -A'Z - XA - LC_y$ e $G = C_z$ para simplificar as restrições, preservando, ainda, a otimalidade[1]. Podemos ainda fazer $Z \to 0$, pois como $A'Z + ZA < 0$ é a única restrição em Z, sempre existirá algum Z_0 factível, já que A é assintoticamente estável e, podemos definir um escalar α tal que $Z = \alpha Z_0$ tenda a zero. Com estas manipulações temos (3.28) e (3.29). ■

Verifica-se que, para sistemas precisamente conhecidos ($N = 1$), a solução de (3.28) é o filtro de Kalman. Entretanto, quando as funções de transferência do sinal e do ruído são corrompidas pelas incertezas paramétricas (3.4), o filtro (3.29) ainda garante o desempenho ótimo do sistema, porém não sendo este um filtro de Kalman, por causa das restrições (3.25) - (3.26) necessárias para manter a robustez. Além disto, se não ocorrem cancelamentos de pólos e zeros, a ordem do filtro robusto é igual à soma das ordens das funções de transferência dos vértices $H_i(s)$, $i = 1, \cdots, N$. Vale notar, finalmente, que as funções de transferência (3.21) e (3.23) podem ser próprias. Neste caso, é necessário impor as restrições $D_{zi} - D_f D_{yi} = 0$, $i = 1, \cdots, N$, para que a norma $\mathcal{H}_2$ do erro de estimação permaneça finita. Estas restrições são muito severas e, em geral, impõem que D_f e D_{zi} sejam nulas.

[1]Note que, sem perda de generalidade, podemos impor $V = Y = Z^{-1}$ o que implica $U = -X$ e torna possível a igualdade $C_f = C_z$.

3.5 Sistemas a tempo discreto

Esta seção discute o problema de filtragem robusta para sistemas a tempo discreto. O modelo de incertezas considerado é análogo a (3.21). Neste caso, no entanto, $H(s)$ pertence a um politopo convexo cujos vértices são N funções de transferência com matrizes D_{zi} não necessariamente nulas, isto é,

$$H(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} A & B(\lambda) \\ \hline C_y & D_y(\lambda) \\ C_z & D_z(\lambda) \end{array}\right], \tag{3.33}$$

em que $D_z(\lambda) := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i D_{zi}$. A realização no espaço de estados do filtro robusto é definida por

$$F(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array}\right], \tag{3.34}$$

em que todas as matrizes têm dimensões apropriadas. O próximo lema, que constitui a base para a solução do problema de filtragem robusta, mostra que, como no caso contínuo, é possível considerar filtros e sistemas próprios sem dificuldade adicional. Entretanto, a diferença está em que, no caso discreto, a matriz de transmissão direta D_f tem um importante papel no cômputo da norma $\mathcal{H}_2$ do erro de estimação.

Lema 3.3 *Partindo do diagrama de blocos da Figura 3.1, considere o filtro racional e causal descrito no espaço de estados por (3.34), e a função de transferência da entrada $\hat{w}$ para a saída $\hat{e}$ dada por*

$$\begin{aligned} E(\zeta) := & \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B}(\lambda) \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D}(\lambda) \end{array}\right] \\ = & \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B(\lambda) \\ B_f C_y & A_f & B_f D_y(\lambda) \\ \hline C_z - D_f C_y & -C_f & D_z(\lambda) - D_f D_y(\lambda) \end{array}\right]. \end{aligned}$$

A restrição $\|S(\omega) - F(\omega)T(\omega)\|_2^2 < \gamma$ é satisfeita para todo $\lambda \in \Lambda$, se e somente se existir uma matriz simétrica e definida positiva $\mathcal{P}$ tal que

$$\operatorname{tr}\left(\mathcal{B}(\lambda)'\mathcal{P}\mathcal{B}(\lambda) + \mathcal{D}(\lambda)'\mathcal{D}(\lambda)\right) < \gamma\,, \quad \mathcal{A}'\mathcal{P}\mathcal{A} - \mathcal{P} + \mathcal{C}'\mathcal{C} < 0. \tag{3.35}$$

Prova: Decorre decorre do Lema 2.4. ■

As versões primal e dual do problema de filtragem robusta (3.19) e (3.20) também são válidas para norma $\mathcal{H}_2$ definida no Lema 3.3. Assim, o próximo teorema, que constitui a versão para sistemas a tempo discreto do Teorema 3.2, converte o problema primal (3.19) em um problema convexo de otimização expresso em termos de LMIs.

Teorema 3.4 *Para todo $i = 1, \cdots, N$, considere as desigualdades matriciais lineares*

$$\operatorname{tr}(W_i) < \gamma, \tag{3.36}$$

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ XB(e_i) + LD_y(e_i) & X & \bullet \\ D_z(e_i) - KD_y(e_i) & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \tag{3.37}$$

$$\begin{bmatrix} X & \bullet & \bullet \\ XA + LC_y & X & \bullet \\ C_z - KC_y & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \tag{3.38}$$

em que $X = X'$, $W_i = W_i'$, L e K têm dimensões compatíveis. O problema de filtragem robusta (3.19) é equivalente ao problema convexo de otimização

$$\min_{\gamma, W_i, X, L, K} \{\gamma \,:\, (3.36) - (3.38)\}, \tag{3.39}$$

cuja solução leva ao filtro ótimo

$$F(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + X^{-1}LC_y & -X^{-1}L \\ \hline C_z - KC_y & K \end{array}\right]. \tag{3.40}$$

Prova: Como no teorema anterior, a prova segue da conexão do filtro (3.34) como indicado na Figura 3.1. Pelos Lemas 3.3 e 2.12(com as restrições adicionais $G = G' = P_i$, $i = 1, \cdots, N$), fica claro que o problema (3.19) é equivalente à minimização de γ sujeito às desigualdades matriciais

$\mathrm{tr}(W_i) < \gamma$ e

$$\begin{bmatrix} W_i & \mathcal{B}(e_i)'\mathcal{P} & \mathcal{D}(e_i)' \\ \bullet & \mathcal{P} & 0 \\ \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0\,, \quad \begin{bmatrix} \mathcal{P} & \mathcal{A}'\mathcal{P} & \mathcal{C}' \\ \bullet & \mathcal{P} & 0 \\ \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0 \tag{3.41}$$

para todo $i = 1, \cdots, N$. Os próximos passos, referentes à mudança de variáveis, e às escolhas de Z, Q e L são equivalentes aos descritos no teorema anterior, exceto pela escolha de $K = D_f$, sendo assim omitidas (Geromel et al. 2000). ■

Notemos que para o caso estático, este problema é equivalente ao tratado na Seção 3.3. Para $N = 1$, a solução de (3.39) é o filtro de Kalman. Para $N > 1$, o filtro ótimo possui uma estrutura interna que, a menos de cancelamentos de pólos e zeros, tem ordem igual à soma das ordens das funções de transferência geradas pela combinação convexa (3.4). É importante ressaltar que o fato de a ordem do filtro ser maior que aquela do filtro de Kalman pode compensar a incerteza que atua no sistema, diminuindo o erro de estimação.

3.6 Exemplos

Antes de apresentar os exemplos, é importante fixar um paradigma de qualidade do projeto. Considere $F_i(\omega)$ como sendo o filtro de Kalman (que é o ótimo) associado à função de transferência $H_i(\omega)$, para todo $i = 1, \cdots, N$ e J_{ij} como sendo o custo associado à conexão do j-ésimo filtro atuando na i-ésima função de transferência:

$$J_{ij} := \|S_i(\omega) - F_j(\omega)T_i(\omega)\|_2^2. \tag{3.42}$$

O próximo lema mostra como determinar um limitante superior e inferior do valor ótimo do problema primal (3.19).

Lema 3.5 *Sendo γ^* o valor ótimo do problema primal (3.19), então*

$$\gamma_{inf} := \max_i \min_j J_{ij} \leq \gamma^* \leq \min_j \max_i J_{ij} =: \gamma_{sup}. \tag{3.43}$$

Prova: Como, neste caso, não há *gap* de dualidade, pelo problema dual (3.20) temos

$$\begin{aligned}\gamma^* &\geq \max_{\lambda\in\Lambda}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i \min_{F\in\mathcal{F}} \|S_i(\omega)-F(\omega)T_i(\omega)\|_2^2\\ &\geq \max_{i=1,\cdots,N}\|S_i(\omega)-F_i(\omega)T_i(\omega)\|_2^2\\ &\geq \max_{i=1,\cdots,N}\min_{j=1,\cdots,N}\|S_i(\omega)-F_j(\omega)T_i(\omega)\|_2^2,\end{aligned} \tag{3.44}$$

em que a última desigualdade é válida por definição, já que o mínimo em relação à j ocorre para $j=i$ para todo $i=1,\cdots,N$. Por outro lado, se atendo ao fato de que cada $F_j(\omega)$ é factível, mas não necessariamente ótimo, temos também

$$\begin{aligned}\gamma^* &\leq \max_{\lambda\in\Lambda}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\|S_i(\omega)-F_j(\omega)T_i(\omega)\|_2^2\\ &\leq \max_{i=1,\cdots,N}\|S_i(\omega)-F_j(\omega)T_i(\omega)\|_2^2,\end{aligned} \tag{3.45}$$

o qual produz o limitante superior γ_{sup}, que corresponde a melhor escolha dentre todos os filtros factíveis. ■

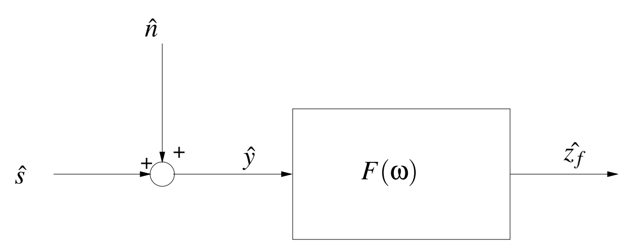

Figura 3.3: Esquema de recepção.

Exemplo 3.2 Para ilustração, considere o projeto de um filtro robusto a tempo contínuo. Com base no diagrama de blocos da Figura 3.3, o sinal transmitido é representado por $\hat{y}=\hat{s}+\hat{n}$, em que $\hat{s}$ é gerado pela saída da função de transferência

$$H_s(s)=\frac{2}{s^2+0,05s+1} \tag{3.46}$$

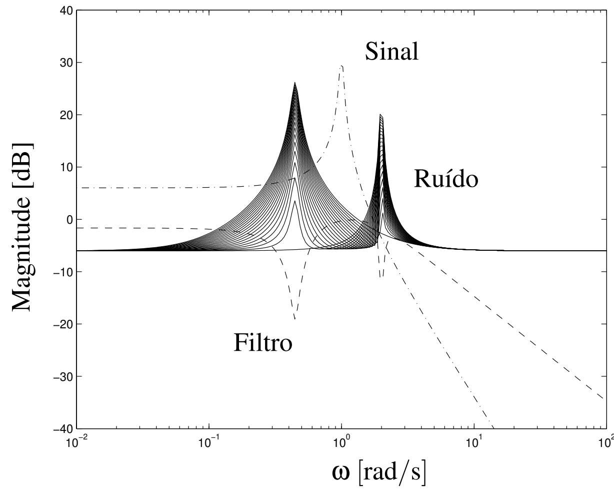

Figura 3.4: Magnitude do Sinal, Ruído e Filtro

Zeros	Pólos	Ganho
$-1,8711$	$-1,4601 \pm j1,0965$	$1,8302$
$-0,0250 \pm j1,9998$	$-0,1559 \pm j1,9750$	
$-0,0250 \pm j0,4465$	$-0,2301 \pm j0,4471$	
$-0,0250 \pm j0,9997$	$-0,0250 \pm j0,9997$	

Tabela 3.1: Filtro Robusto Ótimo

e a função de transferência do ruído $\hat{n}$ pertence ao conjunto $\mathcal{H}_n = co\{H_{n1}, H_{n2}\}$, em que

$$H_{n1}(s) = \frac{s}{s^2 + 0,05s + 0,20} + 0,5, \quad H_{n2}(s) = \frac{s}{s^2 + 0,05s + 4} + 0,5.$$

O sinal a ser estimado é exatamente o sinal gerado pela saída de $H_s(s)$. Este exemplo ilustra a recepção de um sinal transmitida por um canal sem distorção, mas com um ruído aditivo. As funções de transferência indicadas são obtidas pela fatoração espectral das densidades de potência do sinal e do ruído (vide Lema A.3). Com esses dados, duas funções de transferência de quarta ordem, que definem os vértices $H_1(s)$ e $H_2(s)$, são determinadas. Neste caso, o objetivo do filtro robusto é separar o sinal do ruído, levando em consideração a existência de incertezas no modelo do ruído. De acordo com o Lema 3.5, a matriz $J \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ é dada por

$$J = \begin{bmatrix} 2,4344 & 5,8124 \\ 7,7155 & 1,6842 \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

e, junto com (3.43), determina o limitante inferior $\gamma_{inf} = 2,4344$ e o limitante superior $\gamma_{sup} = 5,8124$ para o custo ótimo. Finalmente, o Teorema 3.2 permite determinar o filtro robusto ótimo e o seu custo associado $\gamma^* = 2,4996$.

A Figura 3.4 mostra o diagrama de Bode do sinal, de vários ruídos factíveis e do filtro robusto ótimo. Já que o valor de γ^* é muito próximo a γ_{inf}, o desempenho do filtro ótimo é bastante satisfatório. O filtro em questão é capaz de atenuar os picos de intensidade do ruído. Isto é possível, porque, como indicado na Tabela 3.1, o filtro ótimo é de oitava ordem, podendo ser reduzido até ordem seis, realizando um cancelamento de pólos e zeros. Entretanto, a ordem do filtro é maior que a ordem do sinal transmitido. É interessante pôr em evidência, a partir da Tabela 3.1, que quatro zeros do filtro ótimo correspondem exatamente aos pólos dos ruídos $H_{n1}(s)$, $H_{n2}(s)$ e os pI

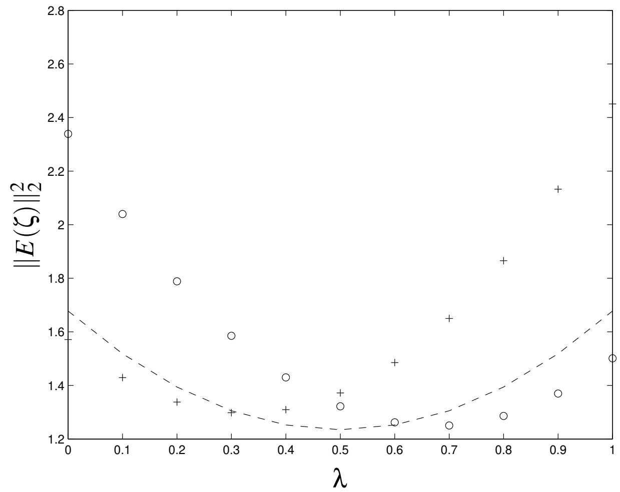

Figura 3.5: Norma do erro de estimação

Zeros	Pólos	Ganho
-0.2452	0.0497	0.51682
-0.9739	-0.9737	
$-0.3605 \pm j0.8803$	$0.4555 \pm j0.7875$	
$-0.4025 \pm j0.6812$	$0.2377 \pm j0.8177$	

Tabela 3.2: Filtro Robusto $\mathcal{H}_2$

e um ruído aditivo $\hat{n}$ com função de transferência

$$H_n(\zeta) = \frac{0,7446\zeta - 0,7446}{\zeta^2 - 0,7209\zeta + 0,9048}. \tag{3.49}$$

A matriz J associada ao problema de filtragem é

$$J = \begin{bmatrix} 1,5013 & 2,4505 \\ 2,3388 & 1,5713 \end{bmatrix},$$

e os limitantes $\gamma_{inf} = 1,5713$ e $\gamma_{sup} = 2,3388$. O filtro ótimo obtido está descrito na Tabela 3.2.

Calculamos os filtros de Kalman associados aos dois sistemas extremos, conforme o Lema 3.5, obtendo os valores dos custos da diagonal principal de J. Aplicando os resultados do Teorema 3.4, obtemos o filtro robusto com o valor ótimo igual à $\gamma^* = 1,6777$. Para efeito comparativo, a Figura 3.5 nos mostra o comportamento destes três filtros sob a variação do parâmetro λ, já que a combinação convexa das funções de transferência extremas definem $H(\omega) = \lambda H_1(\omega) + (1-\lambda)H_2(\omega)$. Fazendo $0 < \lambda < 1$, podemos analisar o comportamento dos filtros ao longo da faixa de variação das incertezas. No gráfico, os pontos marcados com "+" representam a evolução do erro do filtro de Kalman para o sistema com o sinal $H_{s1}(\omega)$ e com "o" a evolução do filtro de Kalman para o sinal $H_{s2}(\omega)$. Finalmente, em linha pontilhada, representa o comportamento do erro do filtro robusto ao longo de variação das incertezas.

Pela Figura 3.5, podemos notar que o desempenho do filtro robusto ao longo da faixa de variação de incerteza é melhor que os filtros de Kalman calculados. Em uma faixa de variação, o desempenho do filtro robusto é melhor que ambos os filtros de Kalman, o que atesta a eficácia do método proposto. ♦

Capítulo 4

Filtragem robusta em norma $\mathcal{H}_\infty$

4.1 Introdução

Há muito tempo, os métodos desenvolvidos para estimação de sinais têm sido baseados em minimizar a norma $\mathcal{H}_2$ do correspondente erro de estimação. Este tipo de estimação assume que todas as características estatísticas (densidade espectral de potência) dos sinais e dos ruídos são conhecidas exatamente (Kwakernaak e Sivan 1972). Quando existem incertezas nos parâmetros do sistema a ser estimado, técnicas de filtragem robusta, como aquelas vistas no capítulo anterior, podem ser utilizadas para garantir o desempenho da estimação frente às incertezas. Infelizmente, essas hipóteses sobre os sinais e ruídos limitam a utilização de filtros de mínima variância em situações nas quais essas características estatísticas não são exatamente conhecidas (Shaked e Theodor 1992a, Xie e de Souza 1995). Nas últimas décadas, uma medida de desempenho diferente da norma $\mathcal{H}_2$ tem sido estudada no contexto de controle ótimo. Esta medida é a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema, que relaciona seus sinais de entrada com os sinais de saída e introduz o conceito de ganho de energia do sistema. No problema de filtragem em norma $\mathcal{H}_\infty$, os sinais de entrada são considerados arbitrários, porém de energia limitada, e o objetivo é projetar um filtro que assegure um limite para o ganho de energia entre os sinais de entrada e o erro de estimação (Xie e de Souza 1995). Quando existem incertezas no sistema de estimação, técnicas robustas de filtragem devem ser adotadas.

Este capítulo é devotado ao estudo de filtros robustos em norma $\mathcal{H}_\infty$. Basicamente, existem duas abordagens para resolver este problema. A primeira é a própria filtragem em norma $\mathcal{H}_\infty$, que minimiza o pior ganho de energia entre a entrada e o erro de estimação. Este filtro, quando comparado ao filtro de Kalman, possui pouca sensibilidade frente as variações de parâmetros, mesmo não lidando diretamente com elas. A desvantagem deste método é que não é possível determinar *a priori* um limitante superior do erro ou custo garantido. A outra abordagem é a filtragem robusta em norma $\mathcal{H}_\infty$. Esta abordagem é que, de fato, lida diretamente com as incertezas do modelo, minimizando o ganho de energia para todas as incertezas factíveis e fornecendo um custo garantido para o erro de estimação (Shaked, Xie e Soh 2001).

Na literatura, este problema foi resolvido utilizando métodos frequenciais, como em Shaked e Theodor (1992b), ou com métodos temporais. Geromel e de Oliveira (2001) e Geromel et al. (2000) resolveram este problema considerando o modelo de incertezas politópicas. Já de Souza, Shaked e Fu (1992), Xie e de Souza (1995) e Shaked et al. (2001) adotam o modelo de incertezas limitadas em norma. Khargonekar et al. (1996) faz uma extensão dos problemas de filtragem $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ resolvendo o problema de filtragem mista, separando entradas com estatísticas conhecidas das entradas com estatísticas arbitrárias.

Nossa proposta está em resolver o problema de filtragem robusta em norma $\mathcal{H}_\infty$ com o modelo de incertezas apresentado no capítulo anterior. Novamente, este problema de filtragem robusta foi resolvido através de um problema de otimização minimax. Ao contrário do caso $\mathcal{H}_2$, não é possível calcular o o filtro robusto de maneira exata, ou seja, o filtro encontrado para essa norma é subótimo. Entretanto, a grande contribuição desta técnica está em sintetizar filtros robustos de ordem maior que a do sinal transmitido. Para facilitar a leitura iremos repetir as definições cabíveis a este problema.

4.2 Definição do problema

A Figura 4.1 esboça o problema de estimação de sinais, em termos das funções de transferência indicadas. O sinal $\hat{w}$ é considerado, agora, somente de energia finita. A saída do sistema $H(\omega)$ gera o sinal transmitido $\hat{y}$ e, ao mesmo tempo, o sinal a ser estimado $\hat{s}$. O nosso objetivo é projetar o filtro $F(\omega)$ capaz de minimizar o ganho de energia entre sinal de entrada e o erro de estimação $\hat{e}$, ou seja, a norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro. O único dado de entrada para o filtro $F(\omega)$ é o sinal transmitido $\hat{y}$. Adotando a partição

$$H(\omega) = \begin{bmatrix} T(\omega) \\ S(\omega) \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

e assumindo $H(\omega)$ conhecida, este problema é definido formalmente como

$$\min_{F \in \mathcal{F}} \|S(\omega) - F(\omega)T(\omega)\|_\infty^2, \tag{4.2}$$

em que $\|\cdot\|_\infty$ indica a norma $\mathcal{H}_\infty$. O conjunto $\mathcal{F}$ restringe os filtros em consideração.

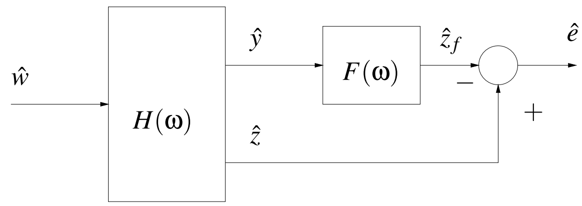

Figura 4.1: Esquema de recuperação de sinal

Como já mencionado no capítulo anterior, o problema de filtragem robusta é mais complicado que o anterior. A dificuldade está no fato de que a função de transferência $H(\omega)$ não é conhecida. Entretanto, a única informação é que $H(\omega)$, dada em (4.1), pertence a um conjunto conhecido $\mathcal{H}$. Portanto, definimos o problema de filtragem robusta desta forma

$$\min_{F\in\mathcal{F}} \max_{H\in\mathcal{H}} \|S(\omega) - F(\omega)T(\omega)\|_\infty^2, \tag{4.3}$$

o qual garante o desempenho do filtro frente a todas as incertezas factíveis. É claro que a solução de equilíbrio do problema (4.3) depende da definição do conjunto $\mathcal{H}$. Como explicado na Seção 2.5, dois modelos de incertezas foram apresentados na literatura até hoje: incertezas limitadas em norma (Xie e de Souza 1995, Theodor, Shaked e de Souza 1994) e incertezas politópicas (Geromel e de Oliveira 2001). Em ambos os casos, não foi possível determinar a solução ótima de (4.3). Felizmente, mesmo resolvendo este problema via minimização de um limitante superior da norma do erro de estimação, em alguns casos esta estratégia forneceu bons resultados.

Utilizaremos modelamento das incertezas do capítulo anterior, dado por

$$\mathcal{H} := co\{H_1, H_2, \cdots, H_N\}, \tag{4.4}$$

no qual $co\{\cdot\}$ representa a combinação convexa de $\{\cdot\}$. Portanto, cada $H(\omega) \in \mathcal{H}$ pode sempre ser escrito como

$$H(\omega) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i H_i(\omega), \tag{4.5}$$

para algum $\lambda := [\lambda_1\ \lambda_2\ \cdots\ \lambda_N]' \in \Lambda$, em que Λ representa o simplex unitário

$$\Lambda := \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N \ :\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1\ ,\ \ \lambda_i \geq 0 \right\}. \tag{4.6}$$

Este modelo de incertezas é inspirado no modelo ε-*contaminated* (Kassam e Poor 1985). Como pôde ser percebido, as funções de transferência $H_1(\omega), \cdots, H_N(\omega)$, incluindo suas ordens, são completamente arbitrárias. A única propriedade que elas devem compartilhar é a estabilidade assintótica.

4.3 Aproximação linear robusta

Nesta seção resolveremos o problema de aproximação linear robusta em norma $\mathcal{H}_\infty$. Este problema é um caso particular do problema (4.3). O objetivo é determinar uma matriz F em que $F \in \mathbb{R}^{n\times r}$ tal que

$$\min_F \max_{H\in\mathcal{H}} \|S - FT\|_\infty^2, \tag{4.7}$$

em que $T \in \mathbb{R}^{r\times m}$, $S \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $\|E\|_\infty^2 := \overline{\sigma}(E)^2 = \lambda_{max}(EE')$.

De acordo com (4.1) e (4.4), o conjunto $\mathcal{H}$ é definido como sendo a combinação convexa das matrizes $H_i' := [T_i' \; S_i']$ for $i = 1, 2, \cdots, N$. Para alguma matriz $H \in \mathcal{H}$ dada, podemos calcular a matriz F ótima do problema min se a inversa indicada existir

$$F^* = ST'(TT')^{-1}, \tag{4.8}$$

e sua correspondente norma do erro de aproximação é dada por

$$\|S - F^*T\|_\infty^2 = \lambda_{max}\left(S(I - T'(TT')^{-1}T)S'\right). \tag{4.9}$$

Note que o resultado obtido em (4.8) é o mesmo que o do caso $\mathcal{H}_2$, em que $\|E\|_2^2 := \mathrm{tr}\,(E'E)$.

A versão robusta do problema (4.7) corresponde à determinação da matriz de aproximação F associada à pior incerteza dentro do conjunto convexo $\mathcal{H}$. A solução ótima do problema minimax (4.7) é obtida a partir de duas propriedades importantes. A primeira é que toda norma é uma função convexa e a segunda é que toda função convexa, num conjunto politópico, obtém seu máximo em um de seus vértices. Portanto, de posse destas propriedades, para F fixa, podemos reescrever o problema max de (4.7) em função dos parâmetros $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$, obtendo

$$\begin{aligned}
\max_{H\in\mathcal{H}} \|S - FT\|_\infty^2 &= \max_{\lambda\in\Lambda} \left\| \sum_{i=1}^N \lambda_i (S_i - FT_i) \right\|_\infty^2 \\
&= \max_i \left\{ \|S_i - FT_i\|_\infty^2 \right\} \\
&= \min_\gamma \left\{ \gamma \, : \, \|S_i - FT_i\|_\infty^2 \le \gamma \, , \, i = 1, 2, \cdots, N \right\}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

A versão primal do problema (4.7) pode ser escrita como

$$\min_{\gamma,F} \left\{ \gamma \; : \; \|S_i - FT_i\|_{\infty}^2 \leq \gamma \; , \; i = 1, 2, \cdots, N \right\}, \tag{4.11}$$

sendo este um problema convexo de otimização em relação a ambas as variáveis (γ, F). Como já sabemos, este problema é convexo, portanto podemos calcular o seu respectivo problema dual. Para lidar com problemas relacionados à formulação dual, em termos da definição da norma $\mathcal{H}_{\infty}$, expressamos o problema dual a partir de uma forma equivalente do problema primal

$$\min_{\gamma,F} \left\{ \gamma \; : \; (S_i - FT_i)(S_i - FT_i)' \leq \gamma I \; , \; i = 1, \cdots, N \right\}. \tag{4.12}$$

A partir do problema (4.12), podemos associar cada restrição a uma variável dual matricial W_i. Escrevendo o lagrangeano de (4.12) (com $W_i \geq 0$)

$$\mathcal{L}(\gamma, F, W_1, \cdots, W_N) = \gamma + \sum_{i=1}^{N} \operatorname{tr}\left(W_i (S_i - FT_i)(S_i - FT_i)' - \gamma \, W_i \right), \tag{4.13}$$

e derivando em relação a γ e a F obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} = 1 - \sum_{i=1}^{N} \operatorname{tr}(W_i) = 0 \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F} = 2 \left(\sum_{i=1}^{N} W_i F T_i T_i' \right) - 2 \left(\sum_{i=1}^{N} W_i S_i T_i' \right) = 0. \tag{4.15}$$

Resolvendo a primeira equação em W_i obtemos o problema dual

$$\max_{W_i \in \mathcal{W}} \min_{F} \sum_{i=1}^{N} \operatorname{tr}\left(W_i (S_i - FT_i)(S_i - FT_i)' \right), \; i = 1 \cdots N, \tag{4.16}$$

no qual $\mathcal{W}$ é o domínio das variáveis duais W_i, dado por

$$\mathcal{W} := \left\{ W_i \in \mathbb{R}^{nxn} \; : \; \sum_{i=1}^{N} \operatorname{tr}(W_i) = 1 \; , \;\; W_i = W_i' \geq 0 \right\}. \tag{4.17}$$

Comparado com (4.7), o problema dual teve seus operadores min/max invertidos. Entretanto, como podemos observar na equação (4.15), não é possível determinar a solução explícita do problema min em (4.16). Ao contrário do problema (3.15), a variável dual é uma matriz e não pôde ser manipulada como os coeficientes λ_i em (3.15). Felizmente podemos expressar o problema primal (4.12) como um problema convexo de otimização em termos de LMIs

$$\min_{\gamma,F}\left\{\gamma: \quad \begin{bmatrix} \gamma I & (S_i - FT_i) \\ (S_i - FT_i)' & I \end{bmatrix} > 0\right\}, \quad i = 1, \cdots, N, \tag{4.18}$$

que nos fornece o custo ótimo γ^* e a matriz de aproximação linear robusta ótima F^*.

4.4 Sistemas a tempo contínuo

Nesta seção, temos como objetivo resolver o problema de filtragem robusta em norma $\mathcal{H}_\infty$, definido em (4.3), para o modelo de incertezas definido em (4.4). Com isto, seremos capazes de sintetizar filtros robusto de ordem maior que o sinal transmitido. Inicialmente, as versões primal e dual do problema (4.3) são dadas por

$$\min_{\gamma, F\in\mathcal{F}} \left\{\gamma \,:\, \|S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)\|_\infty^2 \leq \gamma \,,\; i = 1, \cdots, N\right\} \tag{4.19}$$

e

$$\max_{\lambda\in\Lambda} \min_{F\in\mathcal{F}} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \|S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)\|_\infty^2, \tag{4.20}$$

respectivamente. Note que, assim como no problema (3.20), a variável dual λ em (4.20) é, de fato, os parâmetros incertos em (4.5). O conjunto $\mathcal{F}$ restringe o filtro a ser racional e causal. Assim como na Seção 3.4, poderíamos solucionar o problema primal adotando o conhecido *Lyapunov Paradigm*, como em Geromel e de Oliveira (2001) e Xie e de Souza (1995).

No presente caso, entretanto, os modelos factíveis definidos em (4.5) podem ser reescritos em uma maneira mais conveniente. Considerando a realização no espaço de estados das funções de transferências

$$H_i(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_{yi} & D_{yi} \\ C_{zi} & D_{zi} \end{array}\right], \quad i = 1, 2, \cdots, N, \tag{4.21}$$

cada função de transferência factível $H \in \mathcal{H}$ é dada por

$$H(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B(\lambda) \\ \hline C_y & D_y(\lambda) \\ C_z & D_z(\lambda) \end{array}\right], \tag{4.22}$$

para algum $\lambda \in \Lambda$, em que $A := \mathrm{diag}[A_1, \cdots, A_N]$, $C_y := [C_{y1} \ \cdots \ C_{yN}]$, $C_z := [C_{z1} \ \cdots \ C_{zN}]$ e

$$B(\lambda)' := \left[\begin{array}{ccc} \lambda_1 B_1' & \cdots & \lambda_N B_N' \end{array} \right], \ D_y(\lambda) := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i D_{yi}, \ D_z(\lambda) := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i D_{zi}. \tag{4.23}$$

Dessa forma, apenas as matrizes $B(\cdot)$ e $D(\cdot)$ dependem do parâmetro incerto λ. Para o valor de $\lambda = e_i \in \Lambda$[1], temos $H(s) = H_i(s)$ para todo $i = 1, \cdots, N$. Com este modelamento, adotando a estratégia desenvolvida em Geromel e de Oliveira (2001) a ordem do filtro robusto não é mais restrita a maior ordem dentre as funções de transferência $H_i(s)$. Ao invés disto, a ordem deste filtro pode ser aumentada até a soma das ordens das funções de transferências $H_i(s)$. Considerando uma realização no espaço de estados do filtro robusto desta forma

$$F(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array}\right], \tag{4.24}$$

o resultado seguinte é de central importância para a solução do problema primal (4.19)

Lema 4.1 *Com relação ao diagrama de blocos da Figura 4.1, considere um filtro causal e racional, definido por (4.24), e a seguinte função de transferência, entre $\hat{w}$ e $\hat{e}$*

$$E(s) := \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B}(\lambda) \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D}(\lambda) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B(\lambda) \\ B_f C_y & A_f & B_f D_y(\lambda) \\ \hline C_z - D_f C_y & -C_f & D_z(\lambda) - D_f D_y(\lambda) \end{array}\right]. \tag{4.25}$$

Se existir, para todo $\lambda \in \Lambda$, uma matriz simétrica e definida positiva $\mathcal{P}$ tal que

$$\mathcal{A}'\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{A} + \mathcal{C}'\mathcal{C} + (\mathcal{P}\mathcal{B}(\lambda) + \mathcal{C}'\mathcal{D}(\lambda))(\gamma I - \mathcal{D}(\lambda)'\mathcal{D}(\lambda))^{-1}(\mathcal{B}(\lambda)'\mathcal{P} + \mathcal{D}(\lambda)'\mathcal{C}) < 0, \tag{4.26}$$

então a restrição $\|S(\omega) - F(\omega)T(\omega)\|_\infty^2 < \gamma$ é satisfeita para todo $\lambda \in \Lambda$.

[1] e_i é o i-ésimo vetor canônico no $\mathbb{R}^N$.

Prova: A prova segue da suficiência do Lema (2.7). ∎

É importante ressaltarmos que a matriz $\mathcal{P}$ em (4.26) não é invariante com relação aos parâmetros $\lambda \in \Lambda$, como no caso $\mathcal{H}_2$. Com isto, não existe uma única matriz $\mathcal{P}$ de tal forma que esta restrição de norma seja satisfeita para todo $\lambda \in \Lambda$. Portanto o procedimento para calcular o filtro robusto em norma $\mathcal{H}_\infty$, apresentado no próximo teorema, será subótimo.

Teorema 4.1 *Para todo $i = 1, \cdots, N$ defina as seguintes desigualdades matriciais lineares em relação as variáveis $X = X' > 0$, L e K de dimensões compatíveis*

$$\begin{bmatrix} A'X + XA + C_y'L' + LC_y & \bullet & \bullet \\ B(e_i)'X + D_y(e_i)'L' & -\gamma I & \bullet \\ C_z - KC_y & D_z(e_i) - KD_y(e_i) & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{4.27}$$

Uma solução subótima do problema primal de filtragem robusta (4.19) pode ser expressa de forma alternativa pelo seguinte problema convexo de otimização

$$\min_{\gamma, X, L} \{\gamma \, : \, (4.27)\}. \tag{4.28}$$

O filtro em questão é obtido na forma

$$F(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + X^{-1}LC_y & -X^{-1}L \\ \hline C_z - KC_y & K \end{array}\right]. \tag{4.29}$$

Prova: Conectando o filtro (4.24) como indicado no diagrama de blocos da Figura 4.1, pelos Lemas 4.1 e 2.7, uma solução subótima[2] para o problema (4.19) é determinada, minimizando γ sujeito às desigualdades matriciais

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}'\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{A} & \bullet & \bullet \\ \mathcal{B}(e_i)'\mathcal{P} & -\gamma I & \bullet \\ \mathcal{C} & \mathcal{D}(e_i) & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \mathcal{P} > 0, \tag{4.30}$$

para todo $i = 1, 2, \cdots, N$. Particionando a matriz $\mathcal{P}$, sua inversa e definindo uma transformação

[2] Pois, como no Lema 4.1, $\mathcal{P}$ está sendo considerada independente de $\lambda \in \Lambda$.

de variáveis de forma equivalente a indicada no Teorema 3.2 (e vista em Geromel e de Oliveira (2001)), as desigualdades anteriores podem ser reescritas na forma equivalente

$$\begin{bmatrix} A'X+XA+C_y'L'+LC_y & \bullet & \bullet & \bullet \\ B(e_i)'X+D_y(e_i)'L' & -\gamma I & \bullet & \bullet \\ C_z-KC_y & D_z(e_i)-KD_y(e_i) & -I & \bullet \\ Q'+C_y'L'+A'X+ZA & ZB(e_i) & C_z'-G'-C_y'K' & A'Z+ZA \end{bmatrix} < 0 \tag{4.31}$$

com relação as variáveis X, Z, L, G e Q, nas quais a função de transferência do filtro $F(s)$ é definida. Pelo Lema A.2, a desigualdade (4.31) pode ser simplificada impondo $Q = -A'Z - XA - LC_y$ e $G = C_z - KC_y$, sem perda de generalidade. Podemos ainda fazer $Z \to 0$, pois como $A'Z + ZA < 0$ é a única restrição em Z, sempre existirá algum Z_0 factível, já que A é assintoticamente estável e, podemos definir um escalar α tal que $Z = \alpha Z_0$ tenda à zero. Com isto, obtemos (4.27) e (4.29). ∎

Com este resultado podemos perceber que a ordem do filtro robusto é igual a soma das ordens das funções de transferência $H_i(s)$, $i = 1, 2, \cdots, N$, sendo geralmente bem maior que a ordem do sinal transmitido. A menos de cancelamentos de pólos e zeros, a ordem do filtro é igual a máxima ordem dentre os sistema factíveis $H \in \mathcal{H}$, que são gerados pela combinação convexa (4.5) com $\lambda \in \Lambda$. Note que o filtro obtido é subótimo no conjunto de filtros considerado. O filtro (4.29) pertence ao conjunto $\mathcal{F}_p \in \mathcal{F}$ que corresponde a todos os filtros causais e racionais que são obtidos pela mesma matriz $\mathcal{P}$ do Lema 4.1, para todo $\lambda \in \Lambda$. Neste sub-conjunto $\mathcal{F}_p$ o filtro robusto é ótimo global.

4.5 Sistemas a tempo discreto

Como estudo complementar do problema de filtragem robusta em norma $\mathcal{H}_\infty$, estudaremos este problema para sistemas a tempo discreto. O modelo é composto por N funções de transferência como em (4.21) e o modelo do filtro robusto em consideração é definido de maneira similar a (4.24).

O próximo lema introduz a norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de estimação.

Lema 4.2 *Com relação ao diagrama de blocos da Figura 4.1, considere um filtro causal e* *racional, definido em (4.24), e a seguinte função de transferência entre $\hat{w}$ e $\hat{e}$*

$$E(\zeta) := \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B}(\lambda) \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D}(\lambda) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B(\lambda) \\ B_f C_y & A_f & B_f D_y(\lambda) \\ \hline C_z - D_f C_y & -C_f & D_z(\lambda) - D_f D_y(\lambda) \end{array}\right]. \tag{4.32}$$

Se existir, para todo $\lambda \in \Lambda$, uma matriz simétrica e definida positiva $\mathcal{P}$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} & \mathcal{A}'\mathcal{P} & 0 & \mathcal{C}' \\ \mathcal{P}\mathcal{A} & \mathcal{P} & \mathcal{P}\mathcal{B}(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{B}(\lambda)'\mathcal{P} & \gamma I & \mathcal{D}(\lambda)' \\ \mathcal{C} & 0 & \mathcal{D}(\lambda) & I \end{bmatrix} > 0, \tag{4.33}$$

então, a restrição $\|S(\omega) - F(\omega)T(\omega)\|_\infty^2 < \gamma$ é satisfeita para todo $\lambda \in \Lambda$.

Prova: A prova segue do Lema (2.6). ■

Já que as versões primal e dual do problema de filtragem robusta são válidas para sistemas a tempo discreto, o teorema a seguir, que constitui a versão discreta do teorema 4.1, converte o problema (4.19) para um problema convexo de otimização expresso em termos de desigualdades lineares matriciais.

Teorema 4.2 *Para todo $i = 1, 2, \cdots, N$ defina as seguintes desigualdades lineares matriciais nas variáveis $X = X' > 0$, L e K de dimensões compatíveis*

$$\begin{bmatrix} X & \bullet & \bullet & \bullet \\ XA + LC_y & X & \bullet & \bullet \\ 0 & B(e_i)'X + D_y(e_i)'L' & \gamma I & \bullet \\ C_z - KC_y & 0 & D_z(e_i) - KD_y(e_i) & I \end{bmatrix} > 0. \tag{4.34}$$

O problema primal de filtragem robusta (4.19) pode ser expresso alternativamente pelo seguinte problema convexo de otimização

$$\min_{\gamma, X, L, K} \{\gamma \,:\, (4.34)\}. \tag{4.35}$$

O filtro subótimo é obtido na forma

$$F(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} A + X^{-1}LC_y & -X^{-1}L \\ \hline C_z - KC_y & K \end{array}\right]. \tag{4.36}$$

Prova: Como no teorema anterior, a prova segue da conexão do filtro com o sistema (4.24) como indicado na Figura 4.1. Pelo Lema 4.2 e adotando as mesmas partições e mudança de variáveis vistas no Teorema 4.1, temos que o problema (4.19) é equivalente a minimização de γ sujeito às desigualdades lineares matriciais

$$\begin{bmatrix} Z & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z & X & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ ZA & ZA & Z & \bullet & \bullet & \bullet \\ XA + LC_y + Q & XA + LC_y & Z & X & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & B(e_i)'Z & B(e_i)'X + D_y(e_i)'L' & \gamma I & \bullet \\ C_z - KC_y - G & C_z - KC_y & 0 & 0 & D_z(e_i) - KD_y(e_i) & I \end{bmatrix} > 0,$$

para todo $i = 1, 2, \cdots, N$.

Os próximos passos, referentes às escolhas de Q, G e Z, são muito similares àqueles mostrados no Teorema 4.1 (e são apresentados também em Geromel et al. (2000)), sendo assim omitidos. ■

Como já foi comentado sobre o Lema 4.1, no caso discreto a matriz $\mathcal{P}$ também não é invariante com os parâmetros λ. Por conta disto, o problema de filtragem robusta em norma $\mathcal{H}_\infty$ é subótimo.

No caso discreto em particular podemos melhorar o resultado anterior adicionando mais graus de liberdades às restrições, adotando a estratégia apresentada em Geromel et al. (2002), relaxando as restrições impostas pelo *Lyapunov Paradigm*. Esta estratégia baseia-se nas condições de estabilidade estendida, vistas na Seção 2.4.

Teorema 4.3 *Considere a conexão do filtro robusto como na Figura 4.1. Para todo* $i = 1, \cdots, N$ *defina as seguintes desigualdades matriciais lineares nas variáveis* $E_i = E_i', H_i = H_i'$, L, K, G_i, S, *Q, F, Z, Y, F de dimensões compatíveis*

$$\begin{bmatrix} E_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ G_i & H_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ ZA & ZA & Z+Z'-E_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ YA+LC_y+Q & YA+LC_y & Z'+Y+S-G_i & Y+Y'-H_i & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & B(e_i)'Z' & B(e_i)'Y'+D_y(e_i)'L' & \gamma_e I & \bullet \\ C_z-KC_y-F & C_z-KC_y & 0 & 0 & D_z(e_i)-KD_y(e_i) & I \end{bmatrix} > 0. \tag{4.37}$$

O problema primal (4.19) pode ser expresso alternativamente pelo seguinte problema convexo de otimização

$$\min\{\gamma_e \ : \ (4.37)\}. \tag{4.38}$$

O filtro robusto subótimo é obtido desta forma

$$F_e(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} S^{-1}Q & S^{-1}L \\ \hline F & K \end{array}\right]. \tag{4.39}$$

Prova: A prova segue da definição da norma $\mathcal{H}_\infty$ estendida (vide Lema 2.12). Veja Geromel et al. (2002) para mais detalhes. ∎

Com este teorema podemos obter filtros com desempenho melhor do que o obtido via Teorema 4.2, ou seja $\gamma_e \leq \gamma$. Entretanto, o problema de otimização terá um número de variáveis bem maior, aumentando a complexidade do problema. Para $N > 1$ o filtro ótimo possui uma estrutura que, salvo a cancelamentos de pólos e zeros, é igual à máxima ordem dentre todas funções de transferência geradas a partir da combinação convexa (4.4). Essa é característica importante deste filtro, pois este pode compensar as incertezas do modelo.

4.6 Exemplos

Como um contraponto do Lema 3.5, vamos fixar um paradigma de qualidade do projeto, por meios de um limitante inferior.

Considere $F_i(\omega)$ como sendo o filtro ótimo $\mathcal{H}_\infty$ associado à função de transferência $H_i(\omega)$, para todo $i = 1, \cdots, N$ e J_{ij} como sendo o custo associado à conexão do j-ésimo filtro atuando na i-ésima função de transferência:

$$J_{ij} := \|S_i(\omega) - F_j(\omega)T_i(\omega)\|_\infty^2. \tag{4.40}$$

O próximo lema mostra como determinar um limitante superior e inferior do valor ótimo γ^* do problema primal (4.19).

Lema 4.3 *Sendo γ^* o valor ótimo global do problema primal (4.19), então*

$$\gamma_{inf} := \max_i \min_j J_{ij} \leq \gamma^* \leq \min_j \max_i J_{ij} =: \gamma_{sup}. \tag{4.41}$$

Este lema é válido porque este é definido para qualquer norma. No caso do problema de filtragem robusta em norma $\mathcal{H}_\infty$ o filtro encontrado é subótimo, ou seja, o custo mínimo associado a este filtro γ satisfaz $\gamma^* \leq \gamma$, fazendo com que o limitante superior do Lema 4.3 não seja válido para este custo γ. Em contrapartida, como o conjunto dos filtros no qual o problema em questão é ótimo $\mathcal{F}_p$ está contido no conjunto $\mathcal{F}$, o limitante inferior γ_{inf} ainda é válido, pois qualquer filtro factível no conjunto $\mathcal{F}_p$ é também factível no conjunto $\mathcal{F}$.

Lema 4.4 *Sendo γ o valor subótimo do problema primal (4.19), então*

$$\gamma_{inf} := \max_i \min_j J_{ij} \leq \gamma^* \leq \gamma \tag{4.42}$$

Prova: Como, neste caso, não há *gap* de dualidade, pelo problema dual (4.20) temos

$$\begin{aligned}
\gamma^* &\geq \max_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \min_{F \in \mathcal{F}} \|S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)\|_\infty^2 \\
&\geq \max_{i=1,\cdots,N} \|S_i(\omega) - F_i(\omega)T_i(\omega)\|_\infty^2 \\
&\geq \max_{i=1,\cdots,N} \min_{j=1,\cdots,N} \|S_i(\omega) - F_j(\omega)T_i(\omega)\|_\infty^2,
\end{aligned} \tag{4.43}$$

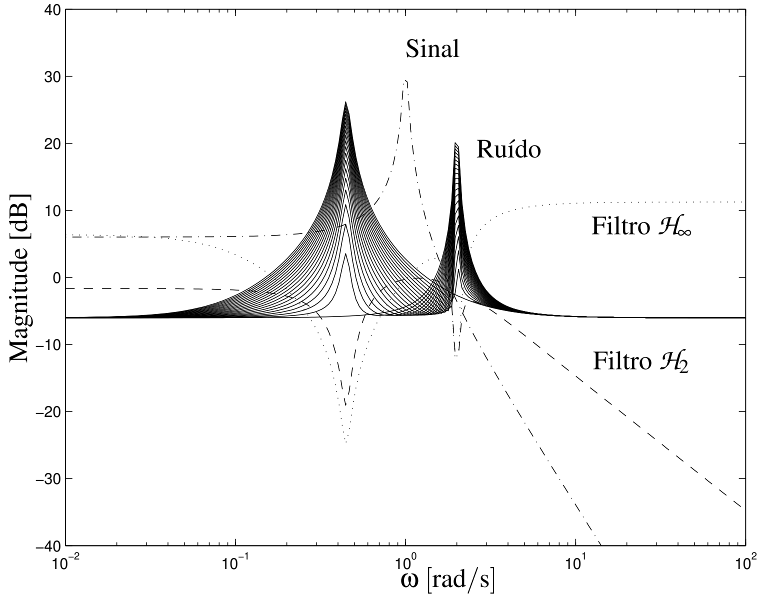

Figura 4.2: Magnitude do Sinal, Ruído e Filtros

em que a última desigualdade é válida por definição, já que o mínimo em relação a j ocorre para $j = i$ para todo $i = 1, \cdots, N$. Como γ é um limitante superior do custo, então $\gamma^* \leq \gamma$ ■

Exemplo 4.1 Para o filtro robusto em norma $\mathcal{H}_\infty$, trabalharemos com os dados do Exemplo 3.2 do Capítulo 3. Note que, no caso $\mathcal{H}_\infty$, a matriz D_f não é nula, possibilitando a síntese de filtros próprios.

Para o modelo do sinal e dos ruídos factíveis descritos no Exemplo 3.2, pelo Teorema 4.1, obtemos o seguinte filtro robusto e o seu custo associado $\gamma = 7,0180$. Utilizando os resultados dos Lemas 4.3 e 4.4, obtemos a matriz J como sendo

$$J = \begin{bmatrix} 6,6710 & 62,7033 \\ 3116,2 & 1,0762 \end{bmatrix},$$

e os limitantes $\gamma_{inf} = 6,6710$ e $\gamma_{sup} = 62,7033$. Como podemos observar o valor de γ_{sup} é maior que o valor de γ obtido, mas este fato não necessariamente ocorre, como previsto no Lema 4.3.

Analisando os pólos e zeros da transferência do filtro $F(s)$, mostrados na Tabela 4.1, podemos notar que sua ordem pode ser reduzida à seis mediante a um cancelamento de pólos e zeros. Mesmo assim sua ordem ainda é maior que a do sinal transmitido. Podemos notar que um pólo

Zeros	Pólos	Ganho
$7.812e4$	-5993	0.28003
1.501	-0.1113	
$-0.0250 \pm j1.9998$	$-1.9094 \pm j1.1034$	
$-0.0250 \pm j0.9997$	$-0.4545 \pm j1.9176$	
$-0.0250 \pm j0.4465$	$-0.0250 \pm j0.9997$	

Tabela 4.1: Filtro Robusto do Exemplo 4.1

Zeros	Pólos	Ganho
3.6045		0.18463
-0.001	$-0.3298 \pm j0.3134$	
$0.0904 \pm j1.5064$	$-0.0006 \pm j0.0055$	
$0.3605 \pm j0.8803$	$0.3605 \pm j0.8803$	
$0.3604 \pm j0.8803$	$0.3578 \pm j0.7451$	

Tabela 4.2: Filtro Robusto $F(\zeta)$ do Exemplo 4.2

e um zero estão no infinito e que o filtro é próprio.

Na Figura 4.2 estão representados o sinal, alguns ruídos factíveis, o filtro ótimo $\mathcal{H}_2$ e o filtro subótimo $\mathcal{H}_\infty$. Como podemos perceber, o filtro $\mathcal{H}_\infty$ atenua mais o pico do ruído, e em contrapartida deteriora um pouco o sinal na sua faixa. O fato do filtro $\mathcal{H}_\infty$ ser próprio permite um desempenho satisfatório em alta freqüência. ♦

Exemplo 4.2 Para o Exemplo 3.3 do Capítulo 3, calculamos através do Teorema 4.2 o filtro robusto subótimo em norma $\mathcal{H}_\infty$. A descrição dos pólos, zeros e o ganho do filtro subótimo obtido está na Tabela 4.2, com $\gamma = 11.2222$.

Utilizando os resultados do Teorema 4.3 podemos obter um filtro robusto, também subótimo, com um desempenho melhor do que o filtro anterior, $\gamma_e = 10.4240$, cuja os pólos, zeros e o ganho se encontram na Tabela 4.3.

Calculamos o filtro ótimo para cada sistema extremo, conforme o Lema 4.3, obtendo os valores dos a matriz J associada

$$J = \begin{bmatrix} 9,3143 & 101,7466 \\ 59,2662 & 9,8514 \end{bmatrix},$$

que determina os limitantes $\gamma_{inf} = 9,8514$ e $\gamma_{sup} = 59,2662$. Novamente, o valor de γ_{sup} é

Zeros	Pólos	Ganho
-1.08	0.3927	-0.22715
-0.1626	-0.0139	
$0.5474 \pm j1.6590$	$0.3403 \pm j0.8331$	
$0.3604 \pm j0.8803$	$-0.277 \pm j0.5643$	
$0.3403 \pm j0.8331$	$0.3533 \pm j0.7598$	

Tabela 4.3: Filtro Robusto $F_e(\zeta)$ do Exemplo 4.2

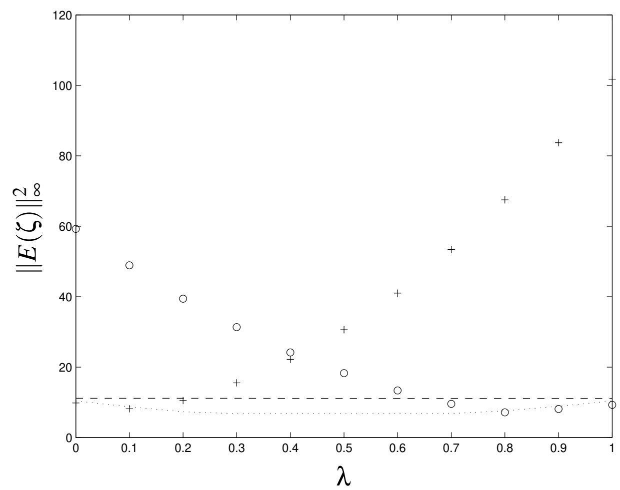

Figura 4.3: Norma do erro de estimação

superior aos valores de γ e γ_e, o que não necessariamente deve acontecer. Os elementos J_{11} e J_{22} representam os custos associados aos filtros ótimos dos respectivos vértices.

Para efeito comparativo, a Figura 4.3 nos mostra o comportamento destes filtros sob a variação do parâmetro λ. No gráfico, os pontos marcados com "+" representam a evolução do erro do filtro ótimo para o sistema com o sinal $H_{s1}(\omega)$ e com "o" a evolução do filtro ótimo para o sinal $H_{s2}(\omega)$. A linha tracejada representa o comportamento do erro do filtro robusto $F(\zeta)$ e a linha pontilhada o filtro $F_e(\zeta)$ ao longo de variação das incertezas.

Pela Figura 4.3, podemos notar que o desempenho de ambos os filtros robustos ao longo da faixa de variação da incerteza é muito melhor que os filtros $\mathcal{H}_\infty$ dos respectivos vértices calculados. O filtro $F_e(\zeta)$ tem um desempenho muito melhor que o filtro $F(\zeta)$, que permaneceu com um erro quase constante ao longo da faixa de variação. ♦

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Ao concluir nosso trabalho, reapresentamos sucintamente as suas principais contribuições:

- Proposta de um novo modelo de incertezas politópicas, que permitiu obter a solução global do problema minimax que caracteriza o filtro robusto ótimo em norma $\mathcal{H}_2$.
- Solução ótima do problema de aproximação linear robusta.
- Obtenção do filtro robusto subótimo em norma $\mathcal{H}_\infty$.
- Parametrização de filtros com ordem maior que a função de transferência do sinal transmitido.
- Os resultados aqui apresentados permitiram a elaboração de três artigos científicos já submetidos para publicação, a saber: Egas et al. (n.d.), Geromel e Regis (n.d.b) e Geromel e Regis (n.d.a).

A seguir listamos algumas idéias para complementar o trabalho realizado:

- Encontrar novas formas de parametrizar filtros robustos ótimos em norma $\mathcal{H}_\infty$, que possam envolver funções de Lyapunov dependentes de parâmetros.
- Estudar novas aplicações de filtragem robusta.

Referências Bibliográficas

Anderson, B. D. O. and Moore, J. B. (1979). *Optimal Filtering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Boyd, S., Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelfia.

Chen, C. and Kassam, S. A. (1984). Robust Wiener filtering for multiple inputs with channel distortion, *IEEE Transactions on Information Theory* **30**(4): 674–677.

Churchill, R. V. and Brown, J. W. (1990). *Complex Variables and Applications*, 5th edn, McGraw-Hill.

Colaneri, P., Geromel, J. C. and Locatelli, A. (1997). *Control Theory and Design: an RH_2 and RH_∞ viewpoint*, Academic Press.

Cortelazzo, G. (1986). On the role of input signals in deterministic linear filtering, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signl Processing* **34**(1): 203–205.

de Oliveira, M. C. (1999). *Controle de Sistemas Lineares Baseado nas Desigualdades Matriciais Lineares*, Tese de doutorado, FEEC-Universidade Estadual de Campinas, SP-Brasil.

de Oliveira, M. C., Bernussou, J. and Geromel, J. C. (1999). A new discrete-time robust stability condition, *Systems and Control Letters* **37**: 261–265.

de Oliveira, M. C., Farias, D. P. and Geromel, J. C. (1997). LMISol – user's guide. http://www.dt.fee.unicamp.br/ mauricio/lmisol10.html.

de Oliveira, M. C., Geromel, J. C. and Bernussou, J. (2002). Extended $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems, *International Journal of Control* **75**(9): 666–679.

de Souza, C. C. (1994). *Controle ótimo de estruturas flexíveis via realimentação de saída*, Tese de doutorado, FEEC-Universidade Estadual de Campinas, SP-Brasil.

de Souza, C. E., Shaked, U. and Fu, M. (1992). Robust $\mathcal{H}_\infty$ filtering with parametric uncertainty and deterministic input signal, *Proceedings of the* 31^{th} *Conference on Decision and Control* pp. 2305–2310.

Egas, R. G., Levin, G. L. S., Regis, L. A. V. and Geromel, J. C. (n.d.). Robust Wiener filter design under parameter uncertainty. Submetido para publicação, 2004.

Geromel, J. C. (1999). Optimal linear filtering under parameter uncertainty, *IEEE Transactions on Signal Processing* **47(2)**: 168–175.

Geromel, J. C., Bernoussou, J., Garcia, G. and de Oliveira, M. C. (2000). $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ robust filtering for discrete time linear systems, *SIAM Journal on Control and Optimization* **38**(5): 1353–1368.

Geromel, J. C. and de Oliveira, M. C. (2001). $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ robust filtering for convex bounded uncertain systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**(1): 100–107.

Geromel, J. C., de Oliveira, M. C. and Bernussou, J. (2002). Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent Lyapunov functions, *SIAM Journal on Control and Optimization* **41**(3): 700–711.

Geromel, J. C. and Palhares, A. G. B. (2004). *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos*, 1º edn, Editora Edgard Blücher, São Paulo.

Geromel, J. C. and Regis, L. A. V. (n.d.a). Filtragem robusta Ótima em norma $\mathcal{H}_2$. Aceito para publicação no XV Congresso Brasileiro de Automática, Gramado, RS, Brasil, 2004.

Geromel, J. C. and Regis, L. A. V. (n.d.b). $\mathcal{H}_2$ optimal robust filtering. Submetido para publicação, 2004.

Grigoriadis, K. and Watson, J. T. (1997). Reduced-order $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{L}_2$ - $\mathcal{L}_\infty$ filtering via linear matrix inequalities, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **33**(4): 1326–1338.

Haykin, S. (1989). *Modern Filters*, 1st. edn, MacMillan Publishing Company, NY.

Haykin, S. (1994). *Communications Systems*, 3rd. edn, John Wiley.

Hillier, F. S. and Lieberman, G. J. (1990). *Introduction to operations research*, 6th edn, McGraw-Hill.

Hindi, H. A. and Boyd, S. P. (1998). Robust solutions to $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ and $\mathcal{L}_\infty$ uncertain linear approximation problems using convex optimization, *Proceedings of the American Control Conference* pp. 3487–3490.

Jain, B. N. (1975). Guaranteed error estimation in uncertain systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **20**: 230–232.

K. Zhou and J. C. Doyle (1998). *Essentials of Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Kassam, S. A. and Poor, H. V. (1985). Robust techniques for signal processing : A survey, *Proceedings of the IEEE* **73**(3): 433–481.

Khargonekar, P. P., Rotea, M. A. and Baeyens, E. (1996). Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filtering, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **6**: 313–330.

Kwakernaak, H. and Sivan, R. (1972). *Linear Optimal Control Systems*, 1st. edn, Jonh Wiley and Sons, Montreal, Canada.

Liu, J., Wang, J. L. and Yang, G.-H. (2003). Reliable guaranteed variance filtering against sensor failures, *IEEE Transactions on Signal Processing* **51**(5): 1403–1411.

Luenberger, D. G. (1969). *Optimization By Vector Space Methods*, Series in Decision and Control, John Wiley & Sons, New York.

Martin, C. J. and Mintz, M. (1983). Robust filtering and prediction for linear systems with uncertain dynamics : A game - theoretic approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **28**(9): 888–896.

Moustakides, G. and Kassam, S. A. (1983). Robust Wiener filters for ramdom signals in correlated noise, *IEEE Transactions on Information Theory* **29**(4): 614–619.

Ogata, K. (1990). *Modern control engineering*, 2nd edn, Prentice Hall.

Ogata, K. (1995). *Discrete-time control systems*, 2nd edn, Prentice Hall.

Poor, H. V. (1980). On robust Wiener filtering, *IEEE Transactions on Automatic Control* **25**(3): 531–536.

Rockafellar, R. T. (1970). *Convex Analysis*, Princeton University Press.

Scherer, C., Gahinet, P. and Chilali, M. (1997). Multiobjective output-feedback control via LMI optimization, *IEEE Transactions on Automatic Control* **42**(7): 896–911.

Shaked, U. and de Souza, C. E. (1995). Robust minimum variance filtering, *IEEE Transactions on Signal Processing* **43**(11): 2474–2483.

Shaked, U. and Theodor, T. (1992a). $\mathcal{H}_\infty$ optimal estimation: a tutorial, *Proceedings of the 31st CDC* pp. 2278–2286.

Shaked, U. and Theodor, Y. (1992b). A frequency domain approach to the problems of $\mathcal{H}_\infty$-minimum error state estimation and deconvolution, *IEEE Transactions on Signal Processing* **40**(12): 3001–3011.

Shaked, U., Xie, L. and Soh, Y. C. (2001). New approaches to robust minimum variance filter design, *IEEE Transactions on Signal Processing* **49**(11): 2620–2629.

Theodor, Y., Shaked, U. and de Souza, C. E. (1994). A game theory approach to robust discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ estimation, *IEEE Transactions on Signal Processing* **42(6)**: 1486–1495.

Wang, F. and Balakrishnan, V. (2003). Robust steady-state filtering for systems with deterministic and stochastic uncertainties, *IEEE Transactions on Signal Processing* **51**(10): 2550–2558.

Xie, L. and de Souza, C. E. (1995). On robust filtering for linear systems with parameter uncertainty, *Proceedings of the* 34^{th} *Conference on Decision and Control* pp. 2087–2092.

Xie, L. and Soh, Y. C. (1994). Robust kalman filtering for uncertain systems, *Systems and Contol Letters* **22**: 132–129.

Yacoub, M. D. (1993). *Foundations of Mobile Radio Engineering*, CRC Press.

Apêndice A

Desigualdades lineares matriciais e teoremas auxiliares

A.1 Desigualdades lineares matriciais

Como definido em Boyd et al. (1994), uma Desigualdade Matricial Linear (LMI) é uma função afim positiva ou estritamente positiva de matrizes simétricas reais

$$F(x) \stackrel{\Delta}{=} F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i Fi > 0, \tag{A.1}$$

onde x representa o vetor de variáveis do problema e F_i, com $i = 1 \cdots m$, são matrizes simétricas reais constantes. O significado da expressão matricial $F(x) > 0$ é equivalente a $u'F(x)u > 0$, $\forall x \neq 0 \in R^n$ para qualquer vetor u real não identicamente nulo.

A.1.1 Caracterização

Da definição (A.1), algumas propriedades e equivalências podem ser evidenciadas . A primeira delas, fundamental para uma compreensão mais profunda sobre LMI's está relacionada com os autovalores de $F(x)$. Como $F(x)$ é simétrica, sempre é possível diagonalizá-la na forma $F(x) = T(x)'D(x)T(x)$, com $D(x)$ diagonal e $T(x)$ ortogonal. Logo, para qualquer $g = T(x)u$ é possível obter u satisfazendo $g'D(x)g = u'F(x)u > 0$. Assim, conclui-se que dizer que $F(x) > 0$ é equivalente a dizer que os autovalores de $F(x)$ são positivos.

Para deixar a notação mais clara, todas as matrizes são consideradas dependentes de x. Logo, onde estiver escrito F entenda-se $F(x)$.

A.1.2 Complemento de Schur

Talvez a maior ferramenta utilizada durante todo o trabalho seja o complemento de Schur. O seu objetivo é mapear uma desigualdade matricial não linear em uma linear.

Lema A.1 *Considerando que as matrizes A_{11} e A_{22} são simétricas, o conjunto,*

$$\left\{A_{11} > 0, A_{22} > A_{12}' A_{11}^{-1} A_{12}\right\},$$

é equivalente ao conjunto descrito pela LMI

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}' & A_{22} \end{bmatrix} > 0. \tag{A.2}$$

Prova: A prova segue os passos de de Oliveira (1999).

A matriz

$$R = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{12}' A_{11}^{-1} A_{12} \end{bmatrix}, \tag{A.3}$$

é definida positiva se, e somente se $A_{11} > 0$ e $A_{22} - A_{12}' A_{11}^{-1} A_{12} > 0$.

Definindo uma matriz inversível T

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{12}' A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}, \tag{A.4}$$

cujos autovalores são todos iguais a um, temos que

$$R = T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}' & A_{22} \end{bmatrix} T'. \tag{A.5}$$

Portanto, podemos concluir que (A.2) é verdadeira se, e somente se $R > 0$. ■

De uma maneira similar podemos reescrever o lema acima para satisfazer a equivalência entre

$$\left\{A_{22} > 0, A_{11} > A_{12} A_{22}^{-1} A_{12}'\right\},$$

e a desigualdade (A.2). Como extensão podemos definir o complemento de Schur para desigualdades não estritas, como em Boyd et al. (1994).

A.1.3 Exemplos

Nesta subseção serão vistos alguns exemplos de LMIs, aplicando as definições e propriedades mostradas na Seção A.1.1.

Exemplo A.1 Primeiramente, considere a desigualdade $x^{-1} < 1$, com $x > 0$. Aplicando diretamente o complemento de Schur, temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{bmatrix} > 0.$$

Note, entretanto, que a desigualdade $x^{-1} > 1$ não pode ser transformada em LMI aplicando-se diretamente o complemento de Schur. Veja:

$$x^{-1} > 1 \Rightarrow -x^{-1} < -1 \not\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -x \end{bmatrix} > 0.$$

Note que, apesar da desigualdade inicial ser válida, a LMI obtida aplicando-se o complemento de Schur não possui nenhum x que a torne verdadeira. Para poder aplicar corretamente o mesmo, o termo *'inverso'* deve estar no lado *'menor'* da desigualdade.

Uma outra abordagem para transformar tal desigualdade em LMI é a de multiplicar os dois lados por $x > 0$, resultando em $1 > x$. Repare que o sentido da desigualdade só é preservado para valores positivos de x e que a desigualdade obtida já é uma LMI de dimensão 1. Ainda assim, pode-se expandi-la da seguinte forma:

$$1 > x \Leftrightarrow 1 > xx^{-1}x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x \end{bmatrix} > 0.$$

Um segundo exemplo de LMI é a linearização da desigualdade $x^2 < 1$. Esta pode ser escrita como $x1^{-1}x < 1$ e então aplicar diretamente o complemento de Schur:

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{bmatrix} > 0.$$

♦

Exemplo A.2 Agora alguns exemplos matriciais, na variável $X = X' > 0 \in R^{n \times n}$. Para a desigualdade $A'X^{-1} + X^{-1}A + C'C < 0$, deve-se pré e pós-multiplicá-la por X e então aplicar o complemento de Schur em relação a $XC'CX$:

$$\begin{aligned} A'X^{-1} + X^{-1}A + C'C &< 0 \\ \Leftrightarrow XA' + AX + XC'CX &< 0 \\ \Leftrightarrow -(XA' + AX) &> XC'CX \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -(XA' + AX) & XC' \\ CX & I \end{bmatrix} &> 0. \end{aligned}$$

Um segundo exemplo matricial seria $A'X^{-1}A - X + Q < 0$, que pode ser transformado em LMI aplicando-se o complemento de Schur em $A'X^{-1}A$. Obtém-se:

$$\begin{bmatrix} X - Q & A' \\ A & X \end{bmatrix} > 0.$$

Por fim, considerando a desigualdade $A'X^{-1}A - X^{-1} + C'C < 0$. Desenvolvendo:

$$A'X^{-1}A - X^{-1} + C'C < 0$$

$$\overset{Schur}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} X^{-1} - C'C & A' \\ A & X \end{bmatrix} > 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{-1} - C'C & A' \\ A & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} X & XA' \\ AX & X \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} XC' \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CX & 0 \end{bmatrix} \overset{Schur}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} X & XA' & XC' \\ AX & X & 0 \\ CX & 0 & I \end{bmatrix} > 0.$$

♦

A.1.4 Eliminação de variáveis

Uma técnica muito útil quando houver muitas variáveis nas restrições é a eliminação de variáveis. Esta consiste em, dado uma restrição em termos de LMI, encontrar outras restrições equivalentes e uma equação algébrica que elimina uma variável do problema.ri

Teorema A.1 (Teorema de Parseval) *Denomine $\hat{x}(\zeta)$ como sendo a transformada $\mathcal{Z}$ do sinal $x(k)$ definida para uma dada região de convergência $R_{1x} < |\zeta| < R_{2x}$. Denomine $\hat{y}(\zeta)$ como sendo a transformada $\mathcal{Z}$ do sinal $y(k)$ definida para uma dada região de convergência $R_{1y} < |\zeta| < R_{2y}$. Os pares $x(k)$, $\hat{x}(\zeta)$ e $y(k)$, $\hat{y}(\zeta)$ satisfazem a transformada $\mathcal{Z}$ inversa (Churchill e Brown 1990)*

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \hat{x}(\zeta)\zeta^k \frac{d\zeta}{\zeta}, \qquad\qquad y(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \hat{y}(\zeta)\zeta^k \frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{A.7}$$

onde C é algum contorno de Jordan dentro da região de convergência. O Teorema de Parseval garante que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \hat{x}(\zeta)\hat{y}(\zeta^{-1})\frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{A.8}$$

Para o caso particular de $\hat{y}(\zeta) = \hat{x}(\zeta)$, e $\hat{x}(\zeta)$ possuir pólos somente no interior do círculo unitário (convergência de $x(k)$), então podemos reescrever (A.8) definindo o contorno de Jordan C como sendo o círculo unitário, impondo $|\zeta| = 1$. Portanto, temos

$$\zeta = e^{j\omega},$$

e

$$d\zeta = je^{j\omega}d\omega,$$

o que nos leva a concluir que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\hat{x}(e^{j\omega})|^2 d\omega. \tag{A.9}$$

A.3 Fatoração espectral

Uma ferramenta muito útil para o modelamento de sinais estocásticos é a fatoração espectral. Com ela podemos representar um sinal estocástico com densidade espectral de potência dada como sendo a saída de um sistema linear conhecido excitado por um ruído branco de variância unitária. Apresentaremos a fatoração espectral para sinais discretos, maiores detalhes podem ser vistos em Kwakernaak e Sivan (1972), em Haykin (1989) e em Khargonekar et al. (1996).

Dada uma matriz racional e quadrada $G(\zeta)$, define-se $G(\zeta)^*$, como a matriz conjugada transposta, obtida pela transposição de $G(\zeta)$ e troca de todos seus elementos por seus complexos conjugados. No caso discreto, onde $\zeta = e^{j\omega}$ temos:

$$G(\zeta)^* = G(\zeta^{-1})'.$$

Uma matriz quadrada, racional $\Phi(\omega)$ é dita *hermitiana* quando $\Phi(\omega)^* = \Phi(\omega)$. Uma matriz hermitiana pode ser fatorada de tal forma que

$$\Phi(\omega) = G(\zeta)^* G(\zeta)$$

com G racional se e somente se Φ for semi-definida positiva. Este resultado é conhecido na literatura como *Fatoração Espectral* (Anderson e Moore 1979). O nome tem origem no fato da densidade espectral de um processo aleatório e estacionário ser uma matriz própria, racional, hermitiana semi-definida positiva.

No caso discreto temos

$$\Phi(\omega) = G(\zeta^{-1})' G(\zeta) \tag{A.10}$$

Interpretação da função $G(\zeta)$ A função $G(\zeta)$ e sua inversa são analíticas na parte externa ao círculo unitário, definido por $|\zeta| \leq 1$. Ou seja, todos os pólos e zeros de $G(\zeta)$ estão contidos no círculo unitário. Por isso, $G(\zeta)$ representa a função de transferência do filtro de fase-mínima. Este filtro é causal, estável e sua função de transferência é inversível.

Interpretação da função $G(\zeta^{-1})$ A função $G(\zeta^{-1})$ e sua inversa são analíticas no interior do círculo definido por $|\zeta| \leq 1$. Ou seja, $G(\zeta)$ não tem pólos ou zeros internos ao círculo unitário. Por isso, tanto $G(\zeta^{-1})$ quanto seu recíproco $G^{-1}(\zeta^{-1})$ representam filtros não-causais.

Este conceito pode ser sintetizado pelo seguinte lema

Lema A.3 *Considere $p(k)$ como sendo um processo estocástico estacionário com uma função de densidade espectral de potência racional $S_p(e^{j\omega})$. As seguinte afirmações são verdadeiras:*

i) Existe uma função de transferência racional $H_p(\zeta)$ tal que $S_p(e^{j\omega}) = H_p(e^{j\omega})H_p'(e^{-j\omega})$.

ii) Quando $H_p(z)$, obtida pelo item i), é excitada por um ruído branco de variância unitária, a sua saída têm $S_p(e^{j\omega})$ como sua densidade espectral de potência.