

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE COMUNICAÇÕES

Este exemplar corresponde à versão final da tese
defendida por **LEILA DO CANTO ZURBA**
em defesa pública perante a Comissão
Julgadora em **12 07 95**
Jaime Portugheis
Orientador

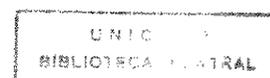
MODULAÇÃO CODIFICADA PARA UM RÁDIO DIGITAL SÍNCRONO A 51 Mbits/s

LEILA DO CANTO ZURBA
Engenheira Eletricista

Orientador: Prof. Dr. JAIME PORTUGHEIS

Tese apresentada à Faculdade de
Engenharia Elétrica da Universidade
Estadual de Campinas para obtenção
do título de Mestre em Engenharia
Elétrica.

Campinas, 12 de Julho de 1995.



*“Todos os dias quando acordo
Não tenho mais o tempo que passou
Mas tenho muito tempo
Temos todo o tempo do mundo...”*
(Renato Russo)

Agradecimentos

A *Deus* pela força e pela fé.

Ao meu orientador, *Prof. Dr. Jaime Portugheis*, pela sabedoria, compreensão, paciência e carinho.

Aos integrantes da banca, *Prof. Dr. Walter Godoy Júnior* e *Prof. Dr. Walter Borelli*, pela atenção e esforços dispensados.

À minha *família*, pelo amor e pelo estímulo nos momentos de crise.

A *todos os meus amigos*, pelo apoio, moral e intelectual, e pela amizade, de todas as horas.

RESUMO

Este trabalho propõe um esquema de modulação codificada para um sistema rádio digital com taxa de transmissão de 51 Mbits/seg. A principal restrição imposta ao projeto é a máxima redundância permitida, que é de 5%. Foi adotada a técnica de Modulação Codificada de Bloco (BCM), com códigos binários e decodificação multiestágio com decisão suave. Os canais foram supostos sujeitos a ruído aditivo Gaussiano branco (AWGN). Uma análise prévia dos ganhos esperados e considerações sobre a forte restrição de redundância levaram à escolha do esquema de codificação, que utiliza códigos de Reed Muller de comprimento 32 em 2 dos 5 níveis, sobre uma constelação 32-QAM e apresentam a propriedade de serem códigos invariantes à rotação de fase. Um modelo teórico de cálculo da probabilidade de erro para esquemas BCM permitiu a previsão dos ganhos esperados para este esquema. Finalmente, são apresentados resultados de simulações que caracterizam considerável ganho de codificação às custas de um moderado custo extra de implementação e baixa redundância, quando comparado a esquemas 32-QAM não codificados.

Índice Analítico

1. Introdução	1
2. Conceitos Básicos	5
2.1. Codificação	5
2.2. Modulação Digital	10
2.3. Canal com Ruído Aditivo Gaussiano Branco	15
2.4. Invariância à Rotação de Fase	17
2.5. Modulação Codificada	18
3. Construção Multinível e Decodificação Multiestágio	23
3.1. Construção Multinível	23
3.2. Exemplo	23
3.3. Decodificação Ótima - MLD	26
3.4. Decodificação sub-ótima: Multiestágio	30
4. Configuração do projeto	34
4.1. Considerações e restrições	34
4.2. Cálculo de probabilidade de erro em esquemas BCM multinível	36
4.3. Exemplos de Esquemas Estudados	40
4.4. Comentários	57
5. Avaliações e Simulações	58
5.1. O esquema adotado	58
5.2. Sistema de codificação utilizado no primeiro nível	59
5.3. Previsão de desempenho	61
5.4. Avaliação da Complexidade	64
5.5. Resultados de Simulações	67
5.6. Análise e Discussão dos Resultados	68
6. Conclusões e Sugestões	70
6.1. Conclusões	70
6.2. Sugestões para trabalhos futuros	71

Índice de Figuras

FIGURA 1-1 : DIAGRAMA ESQUEMÁTICO DE UM SISTEMA DE COMUNICAÇÃO DIGITAL	1
FIGURA 2-1 CONSTELAÇÕES DE SINAIS QAM RETANGULARES	14
FIGURA 2-2 CANAL COM RUÍDO ADITIVO GAUSSIANO BRANCO	16
FIGURA 2-3 TAXA DE CORTE (BITS/SINAL) PARA DIVERSOS ESQUEMAS PSK	21
FIGURA 2-4 TAXA DE CORTE (BITS/SINAL) PARA ESQUEMAS QAM	21
FIGURA 3-1 EXEMPLO DE MAPEAMENTO POR PARTIÇÕES	23
FIGURA 3-2 ESQUEMA GENÉRICO DE MODULAÇÃO CODIFICADA MULTINÍVEL	24
FIGURA 3-3 ESQUEMA DE UM DECODIFICADOR MULTI-ESTÁGIO PARA O EXEMPLO APRESENTADO NESTA SEÇÃO	32
FIGURA 4-1 ESQUEMA 1: SISTEMA 16-QAM, CÓDIGOS RM DE COMPRIMENTO 8	40
FIGURA 4-2: PROBABILIDADE DE ERRO PREVISTA EM CADA UM DOS NÍVEIS DO ESQUEMA 1: (A)NÍVEL 4;(B) NÍVEL 2; (C) NÍVEL 3; (D) NÍVEL 1.	41
FIGURA 4-3: PROBABILIDADES DE ERRO DE BIT PREVISTAS PARA O ESQUEMA 1: (A) LIMITANTE INFERIOR; (B) VALOR ESPERADO; (C) LIMITANTE SUPERIOR	42
FIGURA 4-4 ESQUEMA 2: SISTEMA BCM - 16QAM, CÓDIGOS RM DE COMPRIMENTO 8	43
FIGURA 4-5 PROBABILIDADE DE ERRO NOS DIVERSOS NÍVEIS DO ESQUEMA 2: (A) NÍVEL 4; (B) NÍVEL 3; (C) NÍVEL 2; (D) NÍVEL 1	44
FIGURA 4-6 PROBABILIDADES DE ERRO DE BIT PREVISTAS PARA O ESQUEMA 2: (A) LIMITANTE INFERIOR; (B) VALOR ESPERADO; (C) LIMITANTE SUPERIOR	44
FIGURA 4-7 ESQUEMA 3: SISTEMA BCM - 16QAM, CÓDIGOS RM DE COMPRIMENTO 16	45
FIGURA 4-8 PROBABILIDADE DE ERRO NOS DIVERSOS NÍVEIS DO ESQUEMA 3: (A) NÍVEL 4; (B) NÍVEL 3; (C) NÍVEL 2; (D) NÍVEL 1	46
FIGURA 4-9 PROBABILIDADES DE ERRO DE BIT PREVISTAS PARA O ESQUEMA 3: (A) LIMITANTE INFERIOR; (B) VALOR ESPERADO; (C) LIMITANTE SUPERIOR	47
FIGURA 4-10 ESQUEMA 4: SISTEMA 8QAM NÃO CODIFICADO (REFERÊNCIÂ)	48
FIGURA 4-11 COMPARAÇÃO DOS ESQUEMAS 1 A 4: (A) ESQUEMA 2; (B) ESQUEMA 3; (C) ESQUEMA 1, (D) ESQUEMA 4	49
FIGURA 4-12 ESQUEMA 5: SISTEMA BCM - 32QAM, CÓDIGOS RM DE COMPRIMENTO 16	50
FIGURA 4-13 PROBABILIDADE DE ERRO NOS DIVERSOS NÍVEIS DO ESQUEMA 5: (A) NÍVEL 5; (B) NÍVEL 4; (C) NÍVEL 3; (D) NÍVEL 2; (E) NÍVEL 1	51
FIGURA 4-14 PROBABILIDADES DE ERRO DE BIT PREVISTAS PARA O ESQUEMA 5: (A) LIMITANTE INFERIOR; (B) VALOR ESPERADO; (C) LIMITANTE SUPERIOR	52
FIGURA 4-15 ESQUEMA 6: SISTEMA BCM - 32QAM, CÓDIGOS RM DE COMPRIMENTO 32	53
FIGURA 4-16 PROBABILIDADE DE ERRO NOS DIVERSOS NÍVEIS DO ESQUEMA 6: (A) NÍVEL 5; (B) NÍVEL 4; (C) NÍVEL 3; (D) NÍVEL 2; (E) NÍVEL 1	54
FIGURA 4-17 PROBABILIDADES DE ERRO DE BIT PREVISTAS PARA O ESQUEMA 6: (A) LIMITANTE INFERIOR; (B) VALOR ESPERADO; (C) LIMITANTE SUPERIOR	55
FIGURA 4-18 PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT PARA UM ESQUEMA 32QAM NÃO CODIFICADO	56

FIGURA 4-19 COMPARAÇÃO DOS ESQUEMAS PARA 32-QAM: (A) ESQUEMA 5; (B) ESQUEMA 6; (C) ESQUEMA 7	57
FIGURA 5-1 MAPEAMENTO DE UMA CONSTELAÇÃO 32-QAM (32-CROSS) COM INVARIÂNCIA À ROTAÇÃO EM 3 BITS	58
FIGURA 5-2 PROBABILIDADES DE ERRO ESTIMADAS PARA: (A) ESQUEMA PROPOSTO; (B) ESQUEMA DE REFERÊNCIA NÃO CODIFICADO	63
FIGURA 5-3 TRELIÇA REPRESENTANDO O CÓDIGO DO NÍVEL 1, RM:(32,26,4), CONFORME DESCRITA EM [FORNEY]	66
FIGURA 5-4 PARALELISMO DE 16 TRANSIÇÕES EM CADA RAMO DA TRELIÇA APRESENTADA	66
FIGURA 5-5 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO PARA: (A) ESQUEMA PROPOSTO; (B)ESQUEMA NÃO CODIFICADO	68
FIGURA 5-6 COMPARAÇÃO ENTRE VALORES PREVISTOS E OBTIDOS EM SIMULAÇÃO PARA O ESQUEMA ESCOLHIDO:(A)LIMITE INFERIOR PREVISTO (B) SIMULAÇÃO REALIZADA (B)VALORES MÉDIOS ESTIMADOS (C)SIMULAÇÃO DE ESQUEMA 32-QAM NÃO CODIFICADO	69

1. Introdução

Em um sistema de comunicação digital distingue-se três operações básicas: codificação de fonte, codificação de canal e modulação. A Figura 1-1 ilustra um sistema típico com seus elementos principais na forma de diagramas de blocos. Na operação de codificação de fonte, o codificador adapta o sinal digital oriundo da fonte de forma a reduzir sua redundância, reduzindo também sua largura de faixa. A codificação de canal recebe este sinal digital e agora introduz redundâncias previamente planejadas, de acordo com alguns padrões, visando fornecer informações extra que auxiliem o trabalho do decodificador de canal na reconstrução do sinal. Assim, o trabalho do decodificador de canal é eliminar redundâncias recuperando o sinal original da fonte digital. Ao conjunto modulador-canal-demodulador dá-se o nome de canal discreto. Os projetos dos elementos de codificação da fonte e de canal podem ser realizados isoladamente ou de maneira conjunta. Também o projeto da modulação pode ser acoplado ao projeto dos codificadores, o que traz benefícios quanto à ocupação de banda de frequência necessária para acomodar a redundância acrescentada.

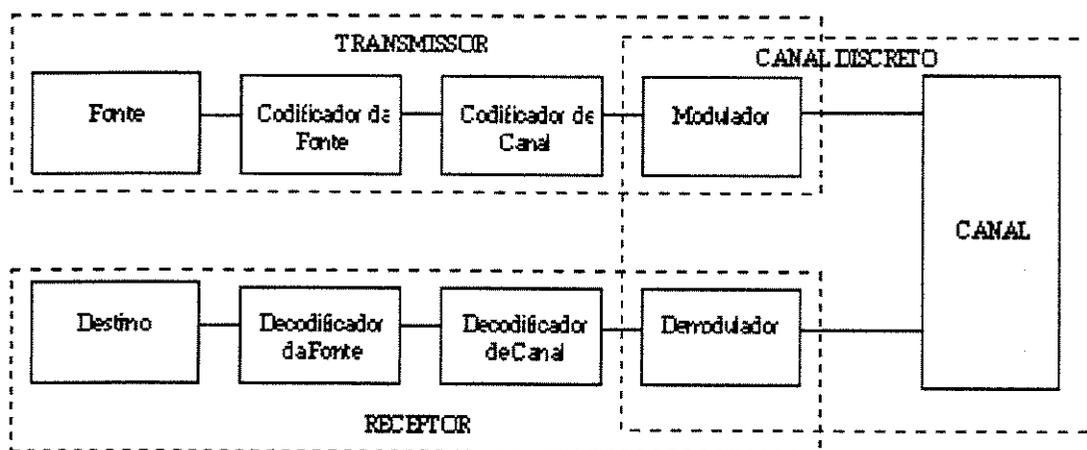


Figura 1-1 : Diagrama esquemático de um sistema de comunicação digital

Os sistemas de comunicação digital até pouco tempo atrás tinham suas funções de codificação e modulação projetadas isoladamente. O processo de

codificação (entenda-se aqui como a codificação de canal) tinha o objetivo de introduzir redundância a nível de bits, permitindo correção ou detecção de alguns dos possíveis erros provocados pelo canal discreto equivalente. Para compensar esta redundância aumentava-se a taxa de transmissão, e com isso, a ocupação do espectro. Não havendo excesso de espectro disponível para essa operação, a tarefa de codificação tinha como efeito negativo a redução da taxa de informação. Na etapa de modulação, independente da codificação, selecionava-se então o sinal a ser enviado dependendo do bloco de bits codificados recebido. Este forte compromisso entre eficiência espectral e taxa de dados perdurou enquanto as duas tarefas citadas acima permaneceram como estágios completamente isolados entre si nos sistemas de comunicação digital.

A idéia de combinar os projetos de codificação de canal com modulação como uma tarefa única, compensando vantagens e desvantagens mutuamente, teve suas origens com o começo da teoria da informação, mas apesar disso, pouco ou nada foi feito para convergir estas duas tarefas até meados da década de 1970. Em 1974 Massey previu que um aumento considerável no desempenho dos sistemas poderia ser obtido através desta convergência [BIGLIE].

Comprovando a previsão de Massey, Ungerboeck apresentou em 1982 um método para realizar esta união, que resultou num aumento surpreendente na eficiência dos sistemas de transmissão digital [BIGLIE]. Esta técnica consiste em projetar-se conjuntamente os blocos codificador e modulador, fazendo com que este último “absorva” a redundância introduzida pelo primeiro, através de expansão da constelação inicial (eventualmente sem aumento de sua energia média) e um mapeamento adequado desta. Com a utilização desta técnica obteve-se ganhos significativos de codificação sobre sistemas de modulação não codificados, sem correspondente crescimento da ocupação espectral nem diminuição da taxa de informação, mantidas as potências de transmissão constantes, e às custas de um pequeno aumento da complexidade de implementação. Esta publicação foi o estopim de uma nova fase na evolução dos sistemas de comunicação digital.

O esquema de Ungerboeck utilizava códigos convolucionais e ficou conhecido como TCM (Trellis Coded Modulation). Esquemas de modulação codificada aplicados a códigos de bloco foram introduzidos por Cusak, em 1984, e são

conhecidos como BCM (Block Coded Modulation). Posteriormente estudos de Sayegh [SAYEGH] explorando outros tipos de constelações mostraram várias potencialidades dos esquemas BCM.

Paralelamente ao desenvolvimento das técnicas de modulação codificada, Imai e Hirakawa desenvolviam, em 1977, esquemas de codificação multinível. Neste caso, vários códigos são utilizados em diferentes níveis, e a decodificação pode ser realizada por estágios, sendo sub-ótima.

Em sistemas de detecção coerente usando modulação com portadora suprimida, faz-se necessário ainda que os códigos sejam invariantes à rotação de fase, que pode assumir valores discretos. Assim, técnicas de combate à rotação de fase vêm sendo desenvolvidas para os esquemas de modulação codificada, sejam eles BCM [PORTGH] ou TCM [HENKEL].

Este trabalho tem como objetivo estudar técnicas de modulação codificada com codificação multinível e decodificação multi-estágio, e propor sua aplicação para o projeto de um rádio digital síncrono de média capacidade (51,84 Mbits/s) [SOUZA]. Esta tarefa se insere em um projeto mais amplo, em desenvolvimento no Centro de Pesquisa e Desenvolvimento da Telebrás (CPqD) em Campinas, São Paulo. As disponibilidades de banda de frequência neste projeto impõem uma limitação da redundância a um máximo de 5%.

O esquema de modulação a ser considerado é a Modulação por Amplitude em Quadratura, ou QAM, que permite um aproveitamento razoável do espectro de frequência. Como consequência deste tipo de modulação, surge a necessidade, já citada, de transparência do sistema às rotações de fase no receptor.

Optou-se neste trabalho pelos esquemas BCM, onde a faixa ocupada não é exatamente a mesma de um sistema de referência não codificado, como os propostos em [PESSOA]. Diversos códigos de bloco foram estudados, numa busca limitada ao conjunto de códigos de Reed-Muller por serem eles os melhores códigos binários de comprimento 2^m e distâncias mínimas 2^{m-r} para $2^m \leq 32$, com m e r inteiros [FORNEY]. Estes códigos possuem ainda uma estrutura de treliça com complexidades moderadas, o que nos permite uma decodificação utilizando o algoritmo de Viterbi.

O **capítulo 2** apresenta uma revisão teórica dos principais conceitos envolvidos neste trabalho. Nele são apresentados noções sobre: *Codificação*, com atenção particular aos Códigos de Reed Muller; *Modulação Digital*, com ênfase nos esquemas QAM e uma breve discussão sobre *Proteção contra a Rotação de Fase* destas constelações; *Canal AWGN* (canal com Ruído Aditivo Gaussiano Branco), que é o tipo de canal a ser considerado no sistema em questão; *Modulação Codificada*, com uma descrição geral de suas características, e uma discussão sobre o que se pode esperar de seu desempenho, a partir da análise de grandezas como capacidade de canal e taxa de corte.

O **capítulo 3** destina-se basicamente a descrever e exemplificar a técnica de *Construção Multinível* e sua decodificação, onde são apresentados dois métodos, um deles ótimo, que é a *Decodificação por Máxima Verossimilhança* (MLD), e um sub-ótimo, que é a *Decodificação Multiestágio*.

O **capítulo 4** consiste da *Configuração do Projeto* propriamente dita. Inicialmente são estudadas as restrições e pré-requisitos do sistema. Um método de *análise de probabilidade de erro* em esquemas multinível é apresentado, e baseado nele realiza-se uma pesquisa sobre diversos esquemas, que permitem uma visualização do desempenho esperado de esquemas deste tipo a partir da variação de seus parâmetros.

O **capítulo 5** apresenta a proposta geral do projeto, em sua *Configuração Final*. Nesta seção são apresentados os *Resultados de Simulação* para esta configuração. Os mesmos são comparados com valores previstos teoricamente pelo método proposto no capítulo anterior. Compara-se estes resultados ainda com os resultados de simulação de um esquema não codificado.

O **capítulo 6**, finalmente, apresenta as *Conclusões e Sugestões* que se pode inferir a partir dos resultados e análises obtidos no decorrer deste trabalho.

2. Conceitos Básicos

2.1. Codificação

A codificação de canal ou simplesmente codificação, como será referida aqui, consiste em acrescentar-se certas redundâncias a um sinal, de maneira controlada, de modo que na recepção, com o conhecimento da estrutura dessas redundâncias, seja possível detectar e/ou corrigir erros e/ou apagamentos no sinal recebido. Um codificador pode gerar códigos de bloco ou convolucionais.

No caso de os sinais em questão serem binários, um *codificador de blocos* recebe uma sequência de informação à sua entrada, divide-a em sequências (blocos) de k bits e gera para cada uma dessas sequências uma sequência correspondente de n bits, com $n > k$, onde a diferença $(n-k)$ corresponde à redundância introduzida pelo codificador. Um *codificador convolucional*, por outro lado, não divide a sequência de informação em blocos, mas sim “varre-a”. Os dados são admitidos em pequenos blocos (de k bits em paralelo), e produzem na saída blocos de n bits, que são função dos k bits atuais e de uma certa quantidade v de bits anteriores (não necessariamente consecutivos) da entrada, aos quais chamamos de memória. Sendo $m = k + v$, afirma-se que a saída de um codificador convolucional é completamente determinada por m símbolos de entrada. Se $v = 0$, o comportamento de codificadores convolucionais e de blocos é análogo.

A relação entre o número de bits de informação (k) e o número de bits da palavra código (n) é denominada Taxa de Codificação [BLAHUT], que é definida pela expressão abaixo:

$$R_c = \frac{k}{n} \quad \text{bits / bits codificados}$$

Equação 2-1

2.1.1. Conceitos de Álgebra

Para melhor compreensão de códigos e suas estruturas, serão definidos aqui alguns conceitos importantes da álgebra de grupos [BLAHUT].

Definição 2-1

Um grupo \mathcal{G} é um conjunto de elementos, para o qual existe uma operação (denotada aqui por “ \oplus ”) definida sobre pares de elementos deste conjunto em que valem as seguintes propriedades:

1. Fechamento: $a, b \in \mathcal{G} \Rightarrow c = a \oplus b \in \mathcal{G}$
2. Associatividade: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
3. Elemento Identidade: Existe um elemento e chamado *elemento identidade*, que satisfaz:

$$a \in \mathcal{G} \Rightarrow a \oplus e = e \oplus a = a$$

4. Elemento Inverso: Para um dado elemento a existe um elemento a_i chamado *elemento inverso de a* , que satisfaz:

$$a \oplus a_i = a_i \oplus a = e$$

Grupos com um número finito de elementos são chamados *grupos finitos* e seu número de elementos é conhecido como sua *ordem*. Se além destas propriedades o grupo satisfaz a propriedade extra abaixo, então o grupo é chamado de *comutativo* ou *Grupo Abeliano*:

$$\text{Comutatividade: } \forall a, b \in \mathcal{G} \Rightarrow a \oplus b = b \oplus a$$

Nesse caso a operação pode ser chamada de “adição” (e representada por “+”), o elemento identidade é chamado de “zero” e representado por “0”, e o inverso de a pode ser escrito como $-a$.

Definição 2-2

Um corpo F é um conjunto onde estão definidas duas operações, adição e multiplicação, denotadas por “+” e por justaposição, respectivamente, e que satisfaz os seguintes axiomas:

1. F é um grupo abeliano sob a operação de adição (“+”).

2. Fechamento: $a, b \in F \Rightarrow c = ab \in F$
3. O conjunto de todos os elementos não nulos de F ($a \in F \mid a \neq 0$) é um grupo abeliano sob multiplicação.
4. Distributividade: $a(b+c) = ab + ac$
 $(b+c)a = ba + ca$

Convenciona-se, também aqui, denotar o elemento identidade da adição por “0”, e o inverso de a por $-a$. Da mesma forma, o elemento identidade sob a multiplicação é chamado “um” e denotado por “1”, enquanto o inverso de a na multiplicação é denotado por a^{-1} .

Os corpos com número q finito de elementos são chamados de *corpos finitos* ou *Corpos de Galois*, e denotados por $GF(q)$. Os corpos de Galois são o principal objeto de interesse quando se estuda códigos lineares.

O conjunto de n -uplas (ou vetores) de elementos de $GF(q)$ é um espaço vetorial, denotado $GF(q)^n$, sob as operações de adição e multiplicação componente a componente. Um caso particular de especial importância é o espaço vetorial $GF(2)^n$ de todas as palavras binárias de comprimento n .

Definição 2-3

Um *código linear* é um *subespaço* de $GF(q)^n$.

Em outras palavras, um código linear é um subconjunto de n -uplas (palavras-código) de $GF(q)^n$ que caracteriza um Grupo Abelian sob a operação de adição componente a componente, e em cujo produto de uma n -upla por um elemento de $GF(q)$ resulta também numa n -upla pertencente a este conjunto. Em um código linear, portanto, a n -upla cujos elementos são “zeros” sempre pertence ao código, sendo a origem do espaço vetorial.

A notação que será utilizada aqui para caracterizar os códigos consiste de três elementos entre parêntesis: (n, k, d_{min}) , onde:

k = número de bits de informação

n = número de bits da palavra código

d_{min} = distância de Hamming mínima entre duas palavras quaisquer pertencentes ao código

2.1.2. Códigos de Reed-Muller

2.1.2.1. Descrição

Códigos de Reed-Muller são uma classe de códigos lineares sobre corpos de Galois de ordem 2 (GF(2)), que apresentam construção e decodificação muito simples. Por essa simplicidade são muito utilizados, apesar de não possuírem as melhores distâncias mínimas para os seus comprimentos de código. Para cada inteiro m e para cada inteiro r , onde $r < m$, existe um código de Reed-Muller de comprimento $n = 2^m$ e de distância mínima $d_{min} = 2^{m-r}$.

O comprimento da informação, k , é dado pela expressão abaixo:

$$k = 1 + \binom{m}{1} + \dots + \binom{m}{r}$$

Equação 2-2

mas, por questão de simplicidade, pode-se optar pela fórmula:

$$n - k = 1 + \binom{m}{1} + \dots + \binom{m}{m-r-1}$$

Equação 2-3

Observa-se, por estas fórmulas, que, quando $r = m-1$, temos $k=n-1$, e ainda, $d_{min}=2$, ou seja, temos o código de verificação de paridade [BLAHUT].

2.1.2.2. Construção:

Vamos definir inicialmente o produto de dois vetores como sendo um terceiro vetor de igual tamanho, tendo como componentes o produto termo a termo das componentes dos vetores que são fatores dessa multiplicação. Assim, dados os vetores:

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$$

temos que o produto $c = a.b$ é

$$c = (a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1})$$

A matriz geradora de um código de RM de r -ésima ordem e comprimento 2^m , é um conjunto de submatrizes:

$$G = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \vdots \\ G_r \end{bmatrix}$$

Equação 2-4

onde G_0 é um vetor-linha de comprimento $n=2^m$, contendo apenas "uns", G_1 é uma matriz m por n , onde todas as m -uplas binárias possíveis aparecem como colunas, iniciando, por convenção pela m -upla toda nula, em ordem crescente até a m -upla toda "uns". Cada matriz G_i é construída a partir de G_1 , tendo como linhas todos os produtos (conforme a definição de produto feita anteriormente) possíveis de i linhas da matriz G_1 . Assim, cada matriz G_i tem ${}^1C_{m,i}$ linhas e n colunas. Uma interpretação para esta construção é a de que cada conjunto de submatrizes de G_0 até G_i equivaleria a um subcódigo de ordem i . Então, o subcódigo de ordem 0 ($r=0$) seria um código de repetição $(n,1,n)$, formado pela matriz G_0 ; e o código de ordem $m-1$ ($r=m-1$) seria um código de verificação de paridade $(n,n-1,2)$.

Resumidamente temos:

G_0 : matriz $[1 \times n]$ (vetor-linha composto apenas por "uns")

G_1 : matriz $[m \times n]$ (cada coluna é uma m -upla em ordem crescente, por convenção)

:

G_i : matriz $[C_{m,i} \times n]$ (cada linha é um produto diferente de i linhas da matriz G_1)

:

G_r : matriz $[C_{m,r} \times n]$ (cada linha é um produto diferente de r linhas da matriz G_1)

¹ A notação $C_{m,i}$ equivale à "combinação de m elementos tomados i a i ".

2.1.2.3.Exemplos:

Apresentamos aqui um exemplo de um código de Reed-Muller onde $m = 3$, portanto $n = 2^m = 8$, e de ordem $r = 2$. A matriz geradora deste código é, portanto:

$$G = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Equação 2-5

e isto nos fornece um código (8,7,2), que é, na verdade, um código de verificação de paridade.

Se, ao invés de $r = 2$ tivermos $r = 1$, a nova matriz geradora é obtida da matriz anterior, retirando-se dela a submatriz G_2 . Temos agora $k=4$, ou seja, um código (8,4,4), com a matriz geradora abaixo:

$$G = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Equação 2-6

2.2.Modulação Digital

Quando existe a necessidade de se transmitir dados digitais sobre canais passa-faixa, isto é, canais de banda limitada e que não admitem frequências baixas, é necessário modular tais sinais sobre uma onda portadora com limitações de frequência fixas, impostas pelo próprio canal. O processo de modulação envolve, então, um chaveamento da amplitude, frequência ou fase desta portadora de acordo com os dados a serem transmitidos. Em função da grandeza que é chaveada:

amplitude, frequência ou fase, existem três técnicas básicas de modulação digital: ASK (do inglês: “Amplitude Shift Keying”), FSK (do inglês: “Frequency Shift Keying”) e PSK (do inglês: “Phase Shift Keying”), respectivamente. Na modulação digital, o sinal modulador consiste de uma sequência de dados binários ou M-ários, e a onda portadora normalmente é senoidal. Por serem discretos os valores assumidos por uma sequência binária de tamanho finito, também é finito o conjunto de diferentes sinais que podem ser obtidos da modulação da onda portadora. Assim, se o sinal modulador é uma sequência de q bits, o sinal modulado pertence a um conjunto de $M=2^q$ sinais distintos e bem definidos de acordo com a variável modulada na portadora. A este conjunto denomina-se constelação de sinais. Assim, na modulação digital, ao contrário do caso analógico, o conjunto de frequências, fases ou amplitudes dos sinais recebidos é finito, completamente conhecido e assume valores discretos. Um sinal modulado pode ser representado da maneira abaixo [PROAKI]:

$$s_m(t) = \text{Re}[u_m(t) \cdot e^{j\omega_c t}]$$

Equação 2-7

com $m=1,2,\dots,M$ e $0 \leq t \leq T$

onde: M =tamanho da constelação utilizada

T =período de tempo considerado na transmissão do sinal

$u_m(t)$ representa o sinal equivalente em banda-base

ω_c =frequência da portadora, escolhida como um múltiplo de π/T , para garantir que cada período de transmissão de um sinal, correspondente a um bloco de informação, contenha um número inteiro de ciclos da onda portadora. Embora esta restrição na prática seja dispensável, ela é necessária aqui para permitir a representação dos sinais sobre uma base ortonormal como será visto adiante [BENEDE].

Estes mesmos M sinais podem ser representados vetorialmente como uma combinação linear sobre uma base de N funções ortonormais, onde $N \leq M$. Isto é, podemos representar um dado conjunto de sinais de energia finita e de duração T segundos da maneira apresentada a seguir. Tal representação é conhecida como Ortogonalização de Gram-Schmidt [HAYKIN]:

$$s_m(t) = \sum_{n=1}^N s_{mn} \cdot f_n(t)$$

Equação 2-8

com $m=1,2,..M$

$n=1,2,..N$

N =dimensão da base ortonormal utilizada

s_{mn} são as coordenadas do sinal $s_m(t)$ sobre a base utilizada.

$f_n(t)$ são as funções ortonormais que compreendem esta base. O termo ortonormais implica que:

$$\int_0^T f_i(t) \cdot f_j(t) \cdot dt = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Equação 2-9

Quando $i=j$, a Equação 2-9 representa a energia do sinal $f(t)$ sobre o período T . Observa-se, portanto, que todas as funções são normalizadas para possuírem energia unitária, e são ortogonais entre si no intervalo de tempo relevante, $0 \leq t \leq T$.

O sinal $s_m(t)$ pode ser representado vetorialmente, portanto, através de suas coordenadas sobre a base N -dimensional de funções utilizada:

$$s_m = [s_{m1}, s_{m2}, \dots, s_{mN}]$$

Equação 2-10

Define-se vetorialmente a energia E_m do sinal s_m como sendo:

$$E_m = |s_m|^2$$

Equação 2-11

A distância Euclidiana d_{Emk} entre dois sinais s_m e s_k fica definida por:

$$d_{Emk} = \sqrt{|s_m - s_k|^2}$$

Equação 2-12

2.2.1. Modulação QAM:

Merece destaque aqui um esquema particular de modulação digital, que será utilizado no desenvolvimento desse trabalho. É a *modulação por amplitude em quadratura*, ou QAM, como é usualmente conhecida (“quadrature amplitude modulation”), que consiste basicamente de uma associação entre *modulação de amplitude* e a *modulação de fase*. Este esquema permite um aproveitamento mais racional da distribuição dos sinais no plano, uma vez que permite aumento da eficiência do plano sem diminuição da distância mínima em relação aos dois outros esquemas que lhe dão origem (PSK e ASK).

Seja a base ortonormal dada pelas funções

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_c t$$

Equação 2-13

$$f_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_c t$$

Equação 2-14

Definiremos como ε a energia associada a cada uma dessas componentes

As constelações utilizadas aqui serão todas M-QAM, isto é, os sinais transmitidos pertencem a constelações de M sinais, onde M é uma potência de 2, e os sinais apresentam a seguinte forma de onda:

$$s_m(t) = A_{m1} \cdot \sqrt{\frac{2\varepsilon}{T}} \cos \omega_c t - A_{m2} \cdot \sqrt{\frac{2\varepsilon}{T}} \sin \omega_c t$$

Equação 2-15

onde:

A_{m1} , A_{m2} : são valores de amplitude do sinal, dependentes da informação por ele transportada, que permitem a sua representação vetorial sobre a base apresentada na Equação 2-13 e na Equação 2-14. Esta representação vetorial é mostrada a seguir.

$$s_m = [\sqrt{\varepsilon} \cdot A_{m1}, \sqrt{\varepsilon} \cdot A_{m2}],$$

Equação 2-16

e a energia de um sinal numa constelação QAM, a partir da Equação 2-11 é dada por:

$$Em = \varepsilon \cdot (A_{m1}^2 + A_{m2}^2).$$

Equação 2-17

A distância euclidiana entre um par qualquer de sinais QAM, sejam eles s_m e s_k , é obtida a partir da Equação 2-12 e é apresentada abaixo:

$$d_{E_{m,k}} = \sqrt{\varepsilon \cdot [(A_{m1} - A_{k1})^2 + (A_{m2} - A_{k2})^2]} \quad k, m = 1, 2, \dots, M.$$

Equação 2-18

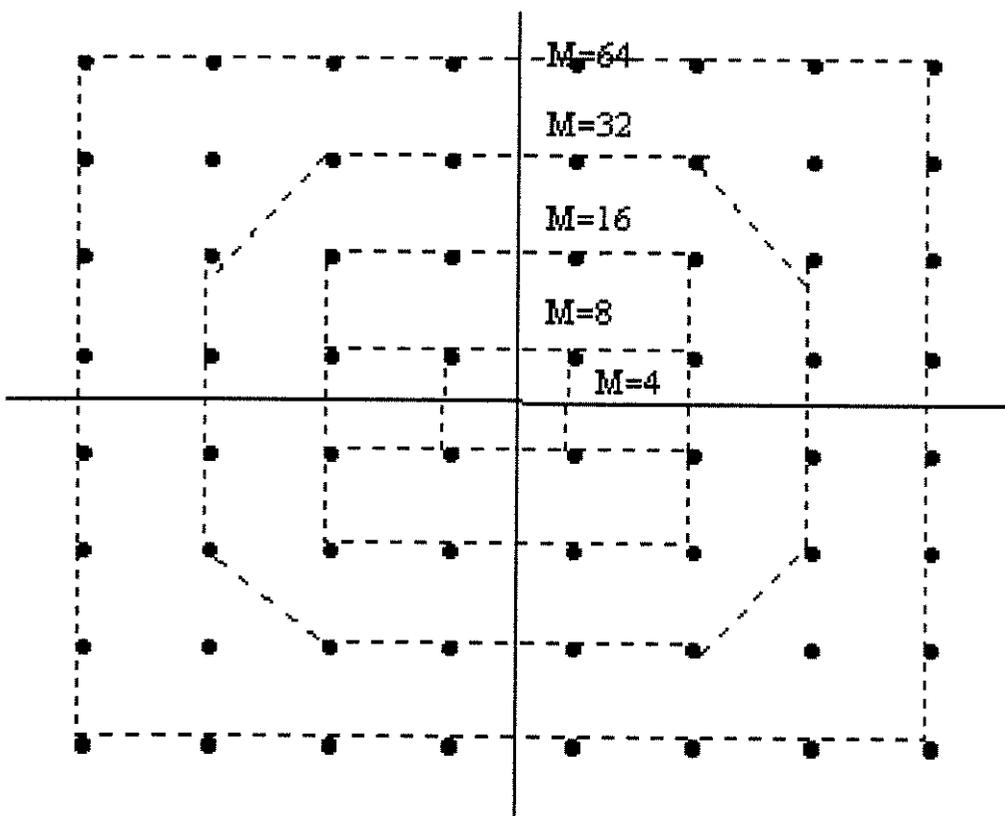


Figura 2-1 Constelações de sinais QAM retangulares

Quando as amplitudes dos sinais A_{m1} e A_{m2} assumem os valores discretos $\{2m-1-q; m=1,2,\dots,q\}$, e $q=\log_2 M$, a representação espacial destas constelações se torna retangular, como mostra a Figura 2-1. Neste caso, a distância Euclidiana entre pontos adjacentes, i.e., a distância mínima da constelação é dada por :

$$d_{E_{min}} = 2 \cdot \sqrt{\epsilon}.$$

Equação 2-19**Demodulação**

O método de recepção adotado no demodulador pode ser coerente ou não coerente.

Na detecção coerente ideal existem réplicas dos possíveis sinais de chegada disponíveis no receptor, ou seja, o receptor tem o conhecimento exato da referência de fase da portadora, situação em que podemos afirmar que o receptor é “casado em fase” ou coerente ao transmissor. Neste caso, a detecção é realizada comparando-se entre si as distâncias do sinal recebido a cada uma das réplicas dos sinais existentes, e escolhendo-se a menor delas.

A detecção não coerente, por outro lado, não exige o conhecimento da fase da portadora, o que permite uma redução de complexidade, às custas, no entanto, de uma proteção ao erro inferior ao caso coerente.

Existe uma grande diversidade de esquemas de modulação digital. Cada esquema oferece diferentes situações de compromisso entre os dois recursos primários de qualquer sistema de comunicação: potência de transmissão e largura de banda de canal. De maneira geral, a escolha do esquema adequado deve procurar atender da melhor maneira possível os objetivos, muitos deles conflitantes, de qualquer projeto de comunicação digital: máxima taxa de dados, mínima probabilidade de erro, mínima potência transmitida, mínima ocupação de banda de frequência, máxima resistência a sinais interferentes e mínima complexidade de circuito.

2.3. Canal com Ruído Aditivo Gaussiano Branco

Um canal com ruído aditivo caracteriza-se por acrescentar ao sinal que por ele transita um outro sinal indesejável (por isso conhecido como ruído). Quando este acréscimo é homogêneo para todas as frequências relevantes ao sinal transmitido, utiliza-se o termo “branco” para caracterizar este ruído. Se este sinal tem ainda distribuição Gaussiana de suas componentes, podemos chamar este sinal de

Gaussiano. Um ruído com as características acima é conhecido também como AWGN (do inglês: “Additive White Gaussian Noise”). Um canal ruidoso tipo AWGN pode ser representado por:

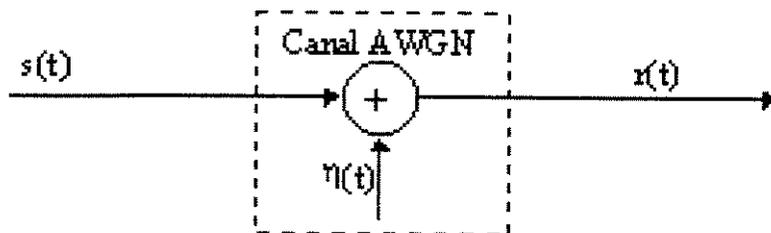


Figura 2-2 Canal com Ruído Aditivo Gaussiano Branco

O que permite escrever a equação abaixo:

$$r(t) = s(t) + \eta(t),$$

Equação 2-20

Onde: $s(t)$ é o sinal transmitido,

$r(t)$ é o sinal recebido,

$\eta(t)$ é o ruído.

Considerando o período T de duração de cada um dos sinais $s_i(t)$, $i \in \{1, 2, \dots, M\}$, podemos nos referir a $s(t)$ como o sinal transmitido durante todo o período de transmissão, ou seja, $s(t)$ é uma sequência de sinais $s_i(t)$, cada um deles com duração T segundos. Isto permite que representemos o sinal $s(t)$ para cada período de duração T no formato apresentado na Equação 2-15 sobre uma base bi-dimensional composta pelas funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ (conforme a Equação 2-13 e a Equação 2-14 respectivamente). Esta representação vetorial é apresentada abaixo:

$$\mathbf{r} = \mathbf{s} + \boldsymbol{\eta}$$

Equação 2-21

As coordenadas dos canais sobre esta base serão referidas como as coordenadas x e y dos sinais, respectivamente. Temos, então, as seguintes representações vetoriais dos sinais \mathbf{s} , \mathbf{r} e do ruído $\boldsymbol{\eta}$:

$$s_i = (s_x, s_y) = (\sqrt{\mathcal{E}} \cdot A_{ix}, \sqrt{\mathcal{E}} \cdot A_{iy})$$

Equação 2-22

, com $i \in \{1, 2, \dots, M\}$

$$\eta = (\eta_x, \eta_y)$$

Equação 2-23

$$r = (r_x, r_y) = (s_x + \eta_x, s_y + \eta_y)$$

Equação 2-24

onde η_x e η_y são variáveis aleatórias independentes, de densidade gaussiana, com média nula e variância $\sigma^2 = N_0/2$, sendo N_0 a densidade espectral de potência unilateral do ruído.

2.4. Invariância à Rotação de Fase

As constelações da modulação a ser utilizada, a Modulação em Quadratura e Amplitude (QAM), normalmente apresentam problemas de rotação de fase no receptor, devido à sua simetria.

Os circuitos de demodulação, normalmente compostos por PLL's, podem ter pontos de estabilidade diferentes daquele correspondente à fase original. Isto ocorre porque as constelações, com determinados valores de rotação de fase, se sobrepõem à própria constelação original. Por exemplo, uma constelação 4-QAM, quando rodada de $\pi/2$ se sobrepõe a ela própria, gerando uma detecção errada de sua fase. Percebe-se, portanto, que essas ambiguidades de fase são discretas, assumindo valores de $k\pi/2$ para os esquemas QAM e de $2k\pi/M$ para os esquemas PSK, com k sendo um inteiro qualquer.

No sentido de compensar a ambiguidade de fase adota-se a prática de enviar referências fixas e conhecidas no início da comunicação a fim de detectar a ocorrência e corrigir eventuais rotações. Uma outra técnica pode ser utilizada caso as *perdas de fase durante a transmissão* também devam ser evitadas. Ela consiste em projetar esquemas de codificação que sejam transparentes aos valores de rotação possíveis. Pretende-se neste projeto, considerar a segunda estratégia apresentada.

A implementação da proteção dos sistemas quanto à ambiguidade de fase requer que os esquemas de codificação sejam "transparentes" aos valores de rotação possíveis. Um código é dito **invariante à rotação** se, dada uma palavra código transmitida, e que sofre rotação de fase, a palavra resultante também pertence ao

código. A condição para que isto ocorra, em códigos lineares, parte do **requisito de que a palavra formada apenas por "uns" seja uma palavra do código**. Satisfeita esta condição, deve-se proceder à proteção do código propriamente dita. Esta tarefa foge ao escopo deste projeto, tendo-se tomado apenas a precaução de escolher códigos que satisfaçam a condição de invariância citada acima.

Em esquemas de codificação multinível, espera-se ainda que não exista a necessidade de proteger cada um dos códigos (nos diferentes níveis) contra a rotação de fase. Espera-se, sim, que uma condição muito menos restritiva seja satisfeita, que é a proteção apenas do código equivalente do sistema como um todo (considerando-se o código resultante de todos os níveis).

2.5. Modulação Codificada

A técnica de modulação codificada consiste em projetar-se os blocos modulador e codificador conjuntamente. Basicamente o que se faz é aplicar um conjunto de sinais binários (blocos) de k bits de informação a uma constelação maior que a originalmente prevista para transmiti-lo (onde teríamos $M=2^k$ sinais), e utilizar esta expansão para acomodar bits de redundância introduzidos por um codificador, de modo que os blocos possuam agora n bits. Normalmente a expansão citada consiste em utilizar-se uma constelação “dobrada” em relação à original (com $M=2^{k+1}$ sinais). Visto de outra maneira, podemos dizer que utilizaremos uma constelação de $M=2^n$ para transmitir blocos com $k < n$ bits de informação, onde $k = n \cdot R_c$ e R_c é a taxa de codificação. A expansão da constelação permite que os bits de redundância acrescentados por bloco não interfiram na taxa de transmissão de informação, nem aumentem a banda de frequência utilizada. A compensação disto está na complexidade adicionada a sistemas deste tipo.

Esquemas que unem modulação codificada com técnicas de modulação multinível apresentam uma estrutura mais complexa que será discutida posteriormente.

2.5.1. Avaliações de sistemas de modulação codificada:

Um exemplo simples de avaliação das vantagens da modulação codificada pode ser demonstrado se tomarmos como referência um esquema de transmissão não codificado, com modulação 4-PSK, onde a cada dois bits de informação transmite-se um sinal pertencente à constelação citada. Se desejarmos uma redução da probabilidade de erro, podemos introduzir um sistema de codificação de taxa, por exemplo, $R_c=2/3$ (ou seja, a cada 2 bits de informação acrescenta-se um de redundância). Percebemos que a ocupação espectral deve ser expandida para 3/2 da ocupação anterior, se não quisermos perder em taxa de transmissão (quantidade de informação efetivamente transmitida no tempo). Adotando-se, porém, a técnica de modulação codificada, passaríamos a utilizar, neste caso, uma constelação 8-PSK em lugar da 4-PSK original, para acomodar agora as palavras de 3 bits produzidas pelo codificador a cada 2 bits de informação recebidos pelo mesmo. Consegue-se, portanto, a proteção desejada sem prejudicar a ocupação espectral do sistema.

Um parâmetro simples de avaliação do desempenho dos sistemas de comunicação é a taxa de corte (Cutoff Rate) R_0 (bits/sinal) do canal [BIGLIE] que será apresentada a seguir:

O segundo teorema de Shannon, ou “Teorema da Codificação de Canal”, afirma que sempre que estivermos trabalhando com taxas de transmissão de bits abaixo da capacidade do canal, existem códigos que permitem que se atinja uma probabilidade de erro tão pequena quanto se queira na transmissão de dados sobre este canal.

Por este teorema observa-se que, para uma dada taxa de transmissão $R=k/n$, a probabilidade de erro é dada por :

$$P(e) \leq e^{-nR_0}$$

Equação 2-25

onde, n é o tamanho das palavras códigos utilizadas e R_0 é a taxa de corte, ou seja, a taxa a partir da qual uma transmissão confiável tornaria-se muito cara. R_0 é, portanto, um limitante superior para a taxa de transmissão R .

Para canais AWGN ela pode ser obtida pela expressão [BIGLIE]:

$$R_0 = -\log_2 \left(\min_{q_i} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M q_i q_j \exp \left(-\frac{|s_i - s_j|^2}{4N_0} \right) \right) \quad (\text{bits/sinal})$$

Equação 2-26

onde: s_i é o i -ésimo sinal da constelação de M sinais;

$|s_i - s_j|$ é a distância euclidiana entre os sinais s_i e s_j ;

$N_0/2$ é a variância dos componentes do vetor ruído; e

q_i é a probabilidade do sinal s_i ser enviado.

Com sinais equiprováveis, q_i assume valor constante de $1/M$ para qualquer i , tornando a minimização sobre os valores de q_i desnecessária, o que simplifica o cálculo de R_0 .

A título de comparação, calculou-se aqui as taxas de corte para sistemas PSK (Figura 2-3) e para sistemas QAM (Figura 2-4). Os sinais pertencentes às constelações apresentadas foram considerados equiprováveis.

Observa-se na Figura 2-3, por exemplo, que a utilização de uma constelação 8-PSK para transmissão de 2 bits de informação com correção de erros proporciona um ganho significativo de aproximadamente 4 dB para a mesma probabilidade de erro ($P_e \cong 10^{-4}$), se comparada à transmissão de 2 bits de informação não codificados com modulação 4-PSK (mesma comparação feita no exemplo citado anteriormente). Isto pode ser observado se prolongarmos a linha de $R_0=2$ bits/sinal do esquema 4-PSK até atingirmos a curva do esquema 8-PSK nesta mesma taxa de corte ($R_0=2$ bits/sinal). A diferença entre as relações sinal ruído necessárias para se atingir esta taxa nos fornece o ganho atingível com esta técnica no exemplo apresentado.

Observe-se, agora, que uma nova duplicação da constelação, desta vez para 16-PSK transmitindo ainda os mesmos 2 bits de informação por sinal, não acrescenta um ganho significativo sobre aquele já obtido com a primeira duplicação (para 8-PSK). Em virtude do acréscimo de complexidade implicado nesta operação, percebe-se que a expansão de constelações na modulação codificada justifica-se até sua duplicação, e não mais do que isto. Salienta-se aqui, que todas as constelações foram calculadas como tendo mesma energia média de sinal.

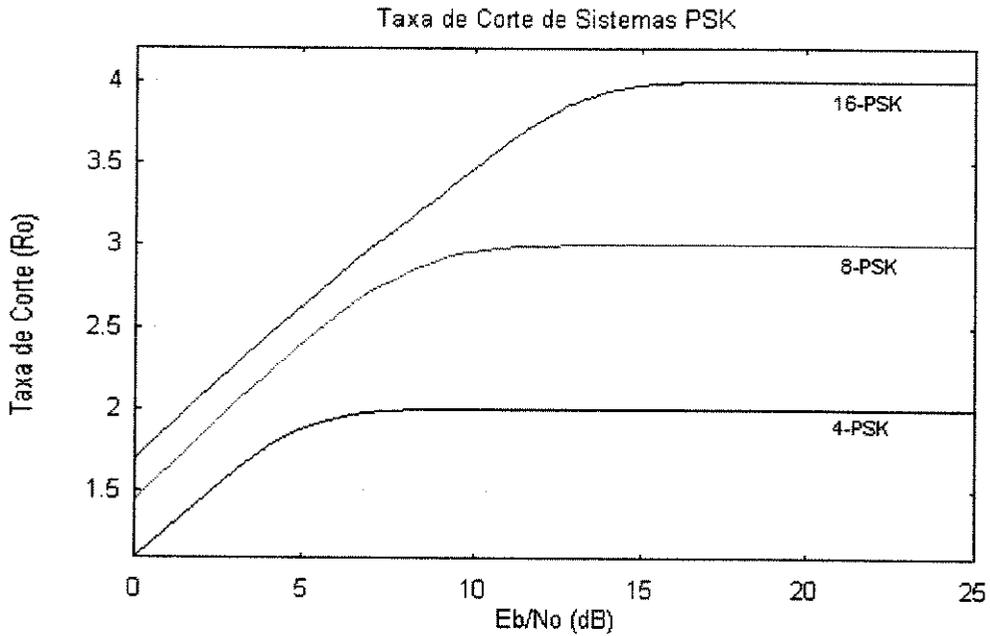


Figura 2-3 Taxa de corte (bits/sinal) para diversos esquemas PSK

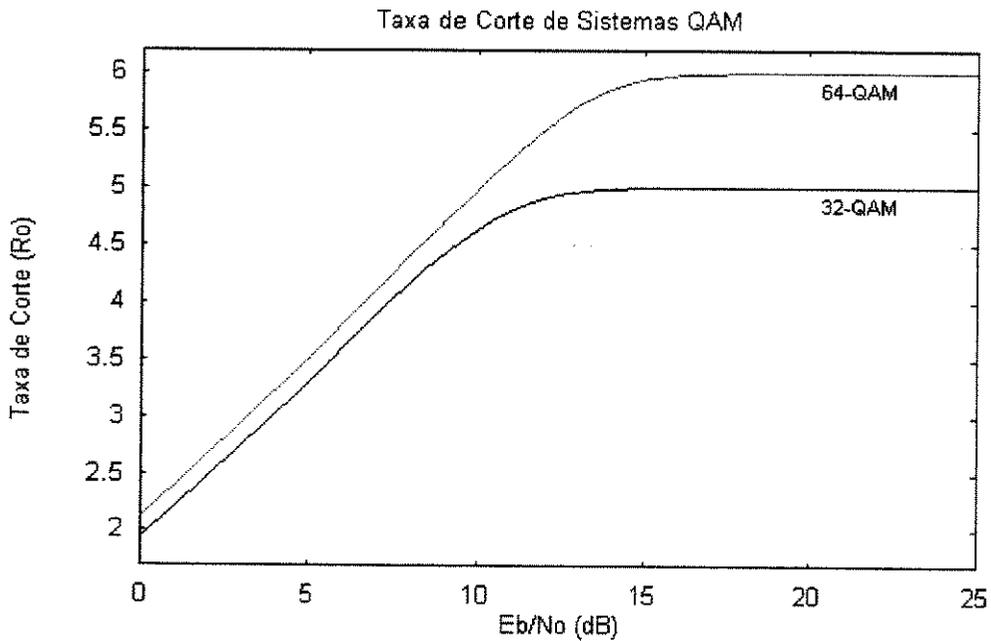


Figura 2-4 Taxa de Corte (bits/sinal) para esquemas QAM

A Figura 2-4 compara dois esquemas QAM, técnica de modulação a ser utilizada neste trabalho. Se tomarmos como referência a curva 32-QAM transmitindo palavras de 5 bits não codificados, podemos escolher uma relação sinal ruído (E_b/N_o) adequada para que tenhamos um valor de probabilidade de erro admissível (no caso do 32-QAM, para $P_e \leq 10^{-6}$, devemos ter $E_b/N_o \geq 17$ dB) , e compara-se este valor

com a curva de 64-QAM para transmissão do mesmo número de bits de informação ($E_b/N_0 \cong 10$ dB) , agora codificados. Percebe-se então que é possível atingir-se um ganho de até 7 dB com esta troca.

3. Construção Multinível e Decodificação Multiestágio

3.1. Construção Multinível

O princípio da construção multinível baseia-se no particionamento de uma constelação inicial sucessivamente, aumentando assim a distância mínima entre dois sinais em cada nível deste particionamento.

Se o número de níveis adotado é N (que também é o número de bits necessários para determinar o sinal a ser enviado), utiliza-se $N-1$ bits para selecionar sucessivamente, uma subconstelação em cada partição, até o último nível. O N -ésimo bit serve então para selecionar um sinal dentro do último nível [ZURBA].

3.2. Exemplo

Um exemplo que torna clara a explanação feita acima é apresentado a seguir:

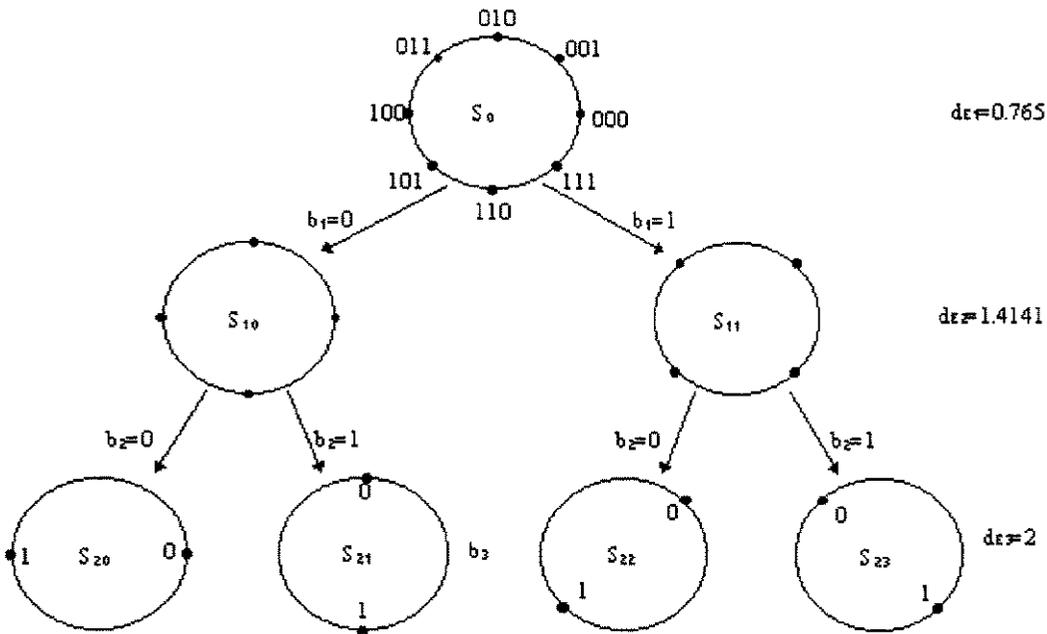


Figura 3-1 Exemplo de mapeamento por partições

Seja a constelação S_0 :8-PSK, sua partição pelo bit b_1 resulta nas subconstelações S_{10} e S_{11} , que são particionadas em quatro outras subconstelações,

S_{20} , S_{21} , S_{22} e S_{23} , selecionadas pelo bit b_2 . O bit b_3 , por fim, seleciona um dos sinais dentro das constelações do último nível. A partir da palavra formada pelos bits $b_3:b_2:b_1$, realiza-se um mapeamento dos sinais existentes na constelação inicial. Um diagrama mostrando o particionamento desta constelação em todos os seus níveis, bem como seu mapeamento, é mostrado na Figura 3-1.

Considerando-se a constelação original S_0 como tendo energia média unitária, e portanto raio unitário para este esquema, percebe-se que a distância euclidiana mínima entre dois sinais é $d_{E1}=0.765$. No próximo nível, esta distância aumenta para $d_{E2}=1.4142$, e no terceiro nível esta distância é $d_{E3}=2$.

Com base nesta observação, conclui-se que o bit b_1 , que seleciona uma subconstelação dentro da constelação original S_0 necessita de mais proteção que o bit b_2 , e este mais que o bit b_3 . Em outras palavras, como em cada nível as distâncias euclidianas mínimas são diferentes, as probabilidades de erro em cada um destes níveis também variam, implicando na necessidade de uma proteção adequada para cada nível.

Assim, para os diversos níveis associa-se diferentes **códigos** com diferentes capacidades corretoras, ou seja, em cada nível, os bits que o mapeiam fazem parte de palavras protegidas diferentemente.

Um esquema proposto para atender aos requisitos citados é apresentado na Figura 3-2. Neste esquema, d_{H1} , d_{H2} e d_{H3} são, respectivamente as distâncias de Hamming mínimas dos códigos C_1 , C_2 e C_3 e satisfazem a desigualdade $d_{H1} \geq d_{H2} \geq d_{H3}$.

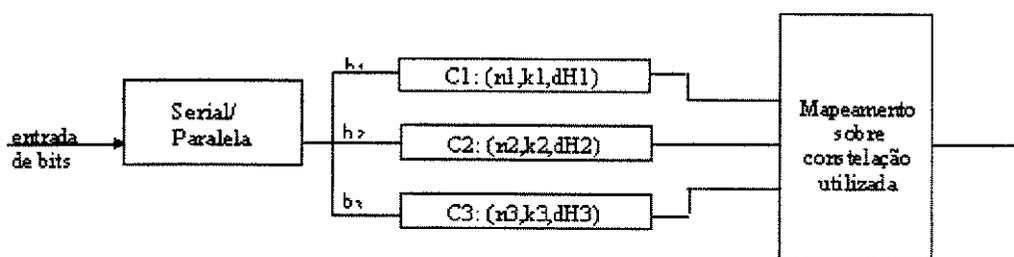


Figura 3-2 Esquema genérico de modulação codificada multinível para a partição da Figura3-1

Em virtude de a probabilidade de erro ser definida pelo nível que tiver a proteção resultante mais frágil, de nada vale o esforço de superproteger um nível deixando outros mais susceptíveis a erros. Assim, intui-se que a proteção ideal é aquela que torna todos os níveis aproximadamente homogêneos em relação à

proteção da informação. Como em termos de distância Euclidiana conhecemos a ordem desta proteção, a decisão sobre as distâncias de Hamming dos códigos utilizados deve ser tal que atenda da melhor maneira possível a expressão abaixo:

$$d_{H_1} \cdot d_{E_1}^2 \cong d_{H_2} \cdot d_{E_2}^2 \cong d_{H_3} \cdot d_{E_3}^2$$

Equação 3-1

Assumindo-se que a distância Euclidiana obtida na segunda partição (S_{20} a S_{23}) forneça um grau de proteção aceitável para este nível, uma solução para o esquema de codificação a ser escolhido neste exemplo é que este nível (nível 3) não receba nenhuma proteção extra de codificação. Teríamos então definida a distância de Hamming mínima do “código” C3, $d_{H3}=1$ (na verdade, este seria um esquema não codificado). A partir da definição deste nível, e utilizando-se a Equação 3-1, é possível definir os códigos dos outros níveis:

$$d_{H_1} \cdot 0,586 \cong d_{H_2} \cdot 2 \cong 4$$

Equação 3-2

Temos então $d_{H1}=7$ e $d_{H2}=2$, e o esquema proposto utilizaria códigos de comprimento 7, na configuração abaixo:

$C_1:(7,1,7) = \text{Código de repetição simples}$

$C_2:(7,6,2) = \text{Código de paridade}$

$C_3:(7,7,1) = \text{Esquema não codificado}$

Assim, o que poderíamos chamar de código geral equivalente teria: $k_{eq}=k_1+k_2+k_3=14$ bits de informação por palavra código de comprimento $n_{eq}=n_1+n_2+n_3=21$ bits, e a taxa do código equivalente seria portanto $R_c=2/3$, associado a uma distância euclidiana mínima equivalente a [PESSOA]:

$$d_{Emn}^2 = \min(d_{H_1} \cdot d_{E_1}^2, d_{H_2} \cdot d_{E_2}^2, d_{H_3} \cdot d_{E_3}^2) = 4$$

Equação 3-3

o que equivale a uma capacidade de correção razoável, sem aumento de banda em relação ao caso não codificado.

Neste exemplo foram adotados códigos de bloco, mas vale ressaltar que códigos convolucionais também se adequariam à situação apresentada.

A redundância total acrescentada é a relação entre o número de bits adicionados aos bits de informação transmitidos a cada bloco de sinais e todos os bits efetivamente transmitidos. Ou seja, a redundância total acrescentada é dada por:

$$Red = \left[\left(\frac{n_{eq} - k_{eq}}{k_{eq}} \right) \cdot 100\% \right]$$

Equação 3-4

onde: k_{eq} = número total de bits de informação transmitidos em um bloco de sinais.

n_{eq} = número total de bits efetivamente transmitidos em um bloco de sinais.

3.3. Decodificação Ótima - MLD

Esta técnica, conhecida como Máxima Verossimilhança (MLD = Maximum Likelihood Decoding), consiste em um teste de todas as sequências possíveis verificando, através de métricas, qual é aquela que tem maior probabilidade de ter sido transmitida, dada uma sequência recebida. As métricas citadas podem ser distâncias de Hamming, quando o termo “sequência” refere-se a palavras códigos (sequências de bits) ou distâncias Euclidianas, quando falamos de sequências de sinais. Uma descrição do procedimento de detecção por Máxima Verossimilhança é apresentada a seguir.

Seja s o vetor (sinal) transmitido, η o vetor ruído acrescentado ao sinal no canal e r o vetor recebido, num período T de transmissão. Estes vetores atendem a Equação 2-21 apresentada na seção anterior e repetida aqui por conveniência:

$$r = s + \eta$$

Equação 3-5

Seja r o vetor observado na recepção, toma-se a decisão $\underline{s} = s_i$, onde \underline{s} é a estimativa do vetor enviado que corresponde a este sinal recebido, ou seja, é a decisão tomada para associar o sinal recebido r a um dos sinais da constelação utilizada. A probabilidade média de erro de símbolo nesta decisão é denotada por:

$$P_{erro} = 1 - \sum_{i=1}^M \int_{R_i} p_r(r / s_i) p_s(s_i) dr$$

Equação 3-6

onde R_i é a região de decisão do vetor s_i .

Como nosso critério é minimizar a probabilidade de erro na decisão quanto ao vetor que pode ter originado \mathbf{r} , é possível deduzir uma regra de decisão ótima como segue:

\Rightarrow Escolhe-se $\underline{s} = s_i$ quando a expressão abaixo é maximizada para $k=i$:

$$p_s(s_k) p_r(\mathbf{r} / s_k)$$

Equação 3-7

onde: $p_s(s_k)$ é a probabilidade a priori de ocorrência do símbolo s_k ;

$p_r(\mathbf{r}/s_k)$ é a probabilidade condicional de obtermos o vetor \mathbf{r} na recepção uma vez que foi transmitido s_k , sendo portanto dependente do canal de transmissão;

Considerando que os símbolos transmitidos são equiprováveis (isto é, $p_s(s_k)$ é idêntico para qualquer sinal pertencente à constelação), percebe-se que resta apenas um fator relevante nesta maximização, o que simplifica a Equação 3-7, e permite-nos reescrever esta regra da forma a seguir:

\Rightarrow Escolhe-se $\underline{s} = s_i$ quando a expressão abaixo é maximizada para $k=i$:

$$p_r(\mathbf{r} / s_k)$$

Equação 3-8

Usualmente, trabalha-se com o logaritmo da função de densidade de probabilidade, ao invés de trabalhar-se com seu valor absoluto. Para canais sem memória, o logaritmo da função de densidade de probabilidade é chamado de *métrica*. Como estas densidades são sempre não-negativas, uma maneira conveniente de apresentar esta mesma regra é:

\Rightarrow Escolhe-se $\underline{s} = s_i$ quando a expressão abaixo é maximizada para $k=i$:

$$\log \left[p_r(r / s_k) \right]$$

Equação 3-9

Esta regra é conhecida como de “Máxima Verossimilhança”. Um dispositivo que a utiliza é um decodificador por Máxima Verossimilhança. Sua tarefa é computar a métrica para cada uma das mensagens transmitidas, compará-las e decidir pelo máximo. Uma interpretação gráfica para esta regra pode ser feita considerando-se um espaço N-dimensional Z , de todos os vetores s_i possíveis, referido como espaço de observação. Este espaço pode ser particionado em M regiões de decisão, denotadas por Z_1, Z_2, \dots, Z_M , onde M é o número de diferentes sinais s_i existentes na constelação. Temos então a regra:

\Rightarrow O vetor r encontra-se na região Z_i quando a expressão abaixo é máxima para $k=i$:

$$\log \left[p_r(r / s_k) \right]$$

Equação 3-10

Para um canal AWGN, temos, em cada uma das dimensões uma variável aleatória de média s_{kj} ($j=1,2,\dots,N$) e variância $N_0/2$, o que nos fornece N variáveis aleatórias Gaussianas independentes com a seguinte função densidade de probabilidade:

$$p_{r_j}(r_j / s_{kj}) = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot N_0}} \cdot \exp \left(-\frac{(r_j - s_{kj})^2}{N_0} \right)$$

Equação 3-11com $\{j=1,2,\dots,N\}$ e $\{k=1,2,\dots,M\}$ onde: $N_0/2$ é a variância do ruído aditivo Gaussiano no canal considerado

$(r_j - s_{kj})$ é a diferença entre as j -ésimas componentes do sinal recebido e o ponto da constelação considerado

Para o processo estocástico composto pelas N variáveis aleatórias referidas anteriormente, temos:

$$p_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} / \mathbf{s}_k) = \prod_{j=1}^N p_{r_j}(r_j / s_{k_j})$$

Equação 3-12

para $\{k=1, 2, \dots, M\}$.

Associando as Equação 3-11 e Equação 3-12, temos então:

$$p_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} / \mathbf{s}_k) = (\pi \cdot N_0)^{-N/2} \cdot \exp\left[-\frac{1}{N_0} \cdot \sum_{j=1}^N (r_j - s_{k_j})^2\right], \quad k = 1, 2, \dots, M$$

Equação 3-13

Pode-se, então, calcular a métrica correspondente, o que nos fornece:

$$\ln\left[p_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} / \mathbf{s}_k)\right] = -\frac{N}{2} \ln(\pi \cdot N_0) - \frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^N (r_j - s_{k_j})^2, \quad k = 1, 2, \dots, M$$

Equação 3-14

A aplicação da Equação 3-10 juntamente com a expressão acima nos permite obter uma nova regra, específica para canais AWGN, apresentada abaixo:

\Rightarrow O vetor \mathbf{r} encontra-se na região Z_i quando a expressão abaixo é mínima para $k=i$:

$$\frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^N (r_j - s_{k_j})^2, \quad k = 1, 2, \dots, M$$

Equação 3-15

Observe-se que a grandeza apresentada na Equação 3-15 corresponde ao quadrado da distância Euclidiana entre o vetor recebido e o vetor \mathbf{s}_k pertencente à constelação. Isto confirma um resultado que poderíamos sugerir intuitivamente: a regra de máxima verossimilhança para canais AWGN equivale a escolher o ponto da constelação que se encontra mais próximo do vetor recebido. Esta afirmação é apresentada formalmente na expressão abaixo:

\Rightarrow O vetor \mathbf{r} encontra-se na região Z_i quando a expressão abaixo é mínima para $k=i$:

$$\|r - s_k\|, \quad k = 1, 2, \dots, M$$

Equação 3-16

Do que foi dito acima, vale salientar que os vetores referidos aqui podem ser tanto sinais como blocos de n sinais, como no caso da modulação codificada, onde então, pode-se considerar uma pesquisa numa constelação $(S_0)^n$. Nesse caso, deve-se comparar a distância do bloco de sinais recebido com todas as $2^{\sum k_i}$ seqüências possíveis de terem sido transmitidas. Continua valendo, no entanto, o critério da distância Euclidiana, com a ressalva que esta agora não é mais simplesmente a distância entre sinais da constelação, mas sim uma distância composta entre estas e as distâncias de Hamming dos códigos utilizados, o que proporciona “*distâncias Euclidianas equivalentes*”, que serão discutidas posteriormente.

A decodificação MLD é um processo simples quando o número de bits de informação que compõem o código é pequeno, mas se torna proibitiva devido a sua complexidade, à medida que os comprimentos dos códigos crescem. O motivo desta complexidade é que, dada uma seqüência de sinais recebida como resultado de uma transmissão, teríamos que correlacionar esta seqüência com cada uma das $2^{\sum k_i}$ seqüências possíveis de terem sido transmitidas.

Voltando ao exemplo apresentado na seção anterior, teríamos que analisar uma seqüência $R=(r_1, r_2, \dots, r_7)$ de sinais correlacionando-a cada uma das $2^{14}=16384$ possíveis seqüências transmitidas ($k_{eq}=14$) no universo de $(S_0)^7=8^7=2.097.152$ seqüências existentes ($n_{eq}=21$). Aplicada a códigos maiores, como é o usual, este cálculo se tornaria impraticável. Utiliza-se então um esquema sub-ótimo de decodificação, apresentado a seguir.

3.4. Decodificação sub-ótima: Multiestágio

Este método baseia-se na decodificação de cada nível a partir do sinal recebido e da informação obtida dos níveis decodificados anteriormente.

A decodificação de cada nível i é composta de duas etapas: a **primeira etapa** consiste na avaliação de todas as subconstelações resultantes da partição da subconstelação considerada naquele nível. Para cada uma delas, escolhe-se o sinal

que está mais próximo do sinal recebido. Isto é realizado através da comparação de distâncias euclidianas. A distância do sinal recebido a este sinal mais próximo é armazenada (métrica armazenada). Armazena-se também, entre as subconstelações avaliadas, aquela que contém este sinal mais próximo. Dependendo da subconstelação em que se encontra este sinal, estima-se o bit enviado neste nível. Na **segunda etapa**, de posse de um bloco de n_1 bits estimados realiza-se a decodificação da palavra-código recebida neste nível. Os bits assim decodificados servirão para definir as subconstelações a serem consideradas na etapa de estimação do nível seguinte. O procedimento é o mesmo em todos os níveis, selecionando-se em cada nível i uma subconstelação dentro da partição correspondente, e, de posse de n_i bits nesse nível, decodifica-se a palavra recebida. A esse processo denomina-se **decodificação multiestágio**.

Um esquema detalhado deste método é apresentado a seguir:

Retornemos agora à **Figura 3-1** e suponhamos tamanhos de blocos contantes para todos os níveis ($n_1=n_2=n_3=n$). Utilizaremos uma notação na qual os blocos codificados compõem-se de palavras binárias com seus bits representados da seguinte maneira: a palavra codificada no nível 1, B_1 , é composta pelos bits $(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n})$, do mesmo modo, temos $B_2 = (b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n})$ no nível 2, etc. Genericamente, os bits que compõem o bloco completo de saída serão representados por b_{ij} , com $i=1..N$, representando o nível onde este bit se encontra (no exemplo, $N=3$ é o número total de níveis), e $j=1, 2, \dots, n$ representando a posição deste bit dentro de uma palavra código. A cada período de sinal, um bloco de bits composto por um bit de cada nível, define o sinal a ser enviado, segundo o mapeamento feito na Equação 3-1. Assim, o bloco de bits $s_j = (b_{1j}, b_{2j}, b_{3j})$ define o sinal s_j a ser enviado. O mesmo ocorre para as outras posições, resultando num bloco (sequência) $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, de sinais transmitidos.

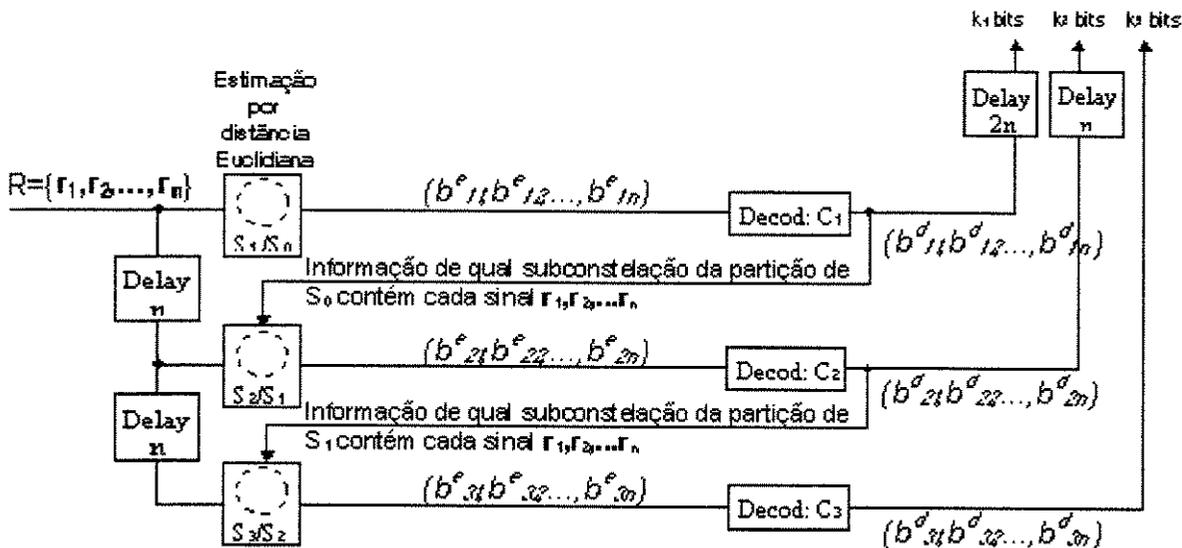


Figura 3-3 Esquema de um decodificador multi-estágio para o exemplo apresentado nesta seção

Seja a sequência de sinais transmitidos $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ e uma sequência de sinais recebidos $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ na saída do canal. A Figura 3-3 mostra o esquema de demodulação/decodificação destes sinais apresentado em um só bloco, utilizando a decodificação multiestágio. Após n delays a partir da recepção do primeiro sinal, obtém-se um bloco de sinais, podendo-se então iniciar a avaliação das palavras código.

O primeiro nível correspondente ao código C_1 , é composto de duas etapas: a primeira delas consiste de uma pré-seleção, onde, tomado a sequência R seleciona-se, através de avaliação das distâncias euclidianas, em qual subconstelação da primeira partição encontra-se cada um dos sinais pertencentes a esta sequência. Assim, toma-se r_i ($i=1$ a n) e atribui-se a cada um destes sinais um bit estimado b^e_{i1} , escolhido entre 0 ou 1 dependendo de qual subconstelação nesta partição (S_{10} ou S_{11}) contém um sinal mais próximo deste sinal recebido. As menores distâncias Euclidianas deste sinal recebido a cada uma das subconstelações são armazenadas na forma de métricas. De posse de n bits pré-estimados compõe-se o bloco pré-estimado do primeiro nível $B^e_1 = (b^e_{11}, b^e_{12}, \dots, b^e_{1n})$, e procede-se então à decodificação desta palavra segundo o código C_1 . Esta decodificação é realizada com decisão suave, isto é, tomando-se em consideração as métricas armazenadas no estágio de pré-seleção. A partir da decodificação obtém-se a palavra decodificada do nível 1: $B^d_1 = (b^d_{11}, b^d_{12}, \dots, b^d_{1n})$, de onde é possível obter o bloco de informação contido neste

nível. Com estes bits decodificados obtem-se, também, a indicação de qual subconstelação (S_{10} ou S_{11}) contém cada um dos sinais r_1 a r_n , informação que será utilizada na etapa de pré-seleção do próximo nível.

No **nível 2**, onde o decodificador toma à entrada, novamente, os sinais $r_1..r_n$, bem como suas localizações na primeira partição (os bits $b_{il}^d, i=1..n$), procedendo-se da mesma maneira que no nível anterior, ou seja, selecionando através de distâncias euclidianas as suas localizações correspondentes na segunda partição. Assim, se, por exemplo temos $b_{11}^d=1$, sabemos que o sinal r_1 se encontra na subconstelação S_{11} , e vamos procurar entre suas duas descendentes (S_{22} ou S_{23}), qual delas contém um sinal mais próximo deste. Desta estimativa obtemos b_{21}^e , e o mesmo ocorre para os outros sinais: $r_2..r_n$. Com a palavra estimada no nível 2: $B_2^e=(b_{21}^e, b_{22}^e, \dots, b_{2n}^e)$, procede-se à decodificação do código C2, chegando-se à palavra decodificada $B_2^d=(b_{21}^d, b_{22}^d, \dots, b_{2n}^d)$, que fornece tanto os bits de informação transmitidos neste bloco quanto a localização dos sinais $r_1..r_n$ na segunda partição.

O procedimento é o mesmo em todos os níveis, selecionando-se em cada nível uma subconstelação dentro da partição correspondente, e, de posse de n bits nesse nível, decodificando-se a palavra.

4. Configuração do projeto

4.1. Considerações e restrições

Os dois recursos básicos disponíveis a um projeto de comunicação digital são a potência do sinal transmitido e a banda ocupada em frequência. Estes dois parâmetros, junto com a densidade espectral do ruído na recepção, compõem a relação “Energia de bit do sinal” por “Densidade espectral de ruído”, E_b/N_0 , que é uma forma de expressar a relação sinal-ruído de operação do sistema.

Este parâmetro determina a taxa de erro para um esquema de modulação não codificado, conforme visto na seção anterior. Portanto, se um esquema de modulação está escolhido e *existe um limite estabelecido para a relação E_b/N_0* , o único meio de melhorar a qualidade da transmissão, em termos de confiabilidade, é acrescentar um esquema de codificação ou aprimorar o mesmo, se existente.

Por outro lado, se temos a *taxa de erros como parâmetro fixo*, o esquema de codificação pode ser escolhido como meio de reduzir a relação E_b/N_0 necessária para obtenção desta taxa, reduzindo assim a potência necessária à transmissão, e seus custos implicados (hardware, antenas, etc).

A adição de redundância na codificação dos dados, implica na redução da velocidade da transmissão dos mesmos ou no aumento da banda de frequência necessária para manter esta velocidade. A realização de um projeto conjunto para os esquemas de modulação e codificação evita o desperdício de espectro, maximizando a taxa de dados transmitidos por largura de banda para uma dada relação sinal ruído, e aproximando a utilização do canal de sua capacidade máxima.

Além disso, o uso de codificação adiciona complexidade ao sistema, especialmente no que se refere às operações de decodificação no receptor. Assim, os compromissos do projeto para a satisfação de determinada taxa de erros, incluem considerações sobre a banda disponível e a complexidade a ser adicionada ao sistema.

Neste projeto, partiu-se da escolha de esquemas QAM, por apresentarem, conforme já comentado no Capítulo 2, constelações econômicas em termos de energia de sinal para a manutenção de distâncias euclidianas razoáveis.

Admitimos, como restrição de projeto, que o máximo de redundância permitida seja 5%. Esta restrição limitará em muito o grau de proteção a ser acrescentado por processos de codificação, obrigando também a um aumento dos comprimentos dos códigos (para que se atinja taxas próximas de 1).

No que tange ao esquema de codificação, conforme já afirmado, buscou-se garantir a condição necessária (porém não suficiente) para implementação de proteção contra a rotação de fase nesta etapa (codificação). A definição de tais métodos foge ao escopo desta tese, no entanto é de interesse que o sistema proposto apresente a possibilidade de implementação desta característica sem que haja a necessidade de um grande esforço de alterações.

Para que a transparência a rotação de fase, seja uma propriedade de um sistema de codificação, é conveniente que haja um mapeamento adequado das palavras código sobre a constelação utilizada de modo que as rotações possíveis desta constelação proporcionem uma variação mínima das palavras código que mapeiam os sinais que se sobrepõem. No caso de constelações QAM, as mesmas podem assumir apenas quatro posições de estabilidade, sendo uma delas a posição correta, e as outras três correspondendo às rotações de ângulos múltiplos de $\pi/2$, para os quais os sinais se “encaixam” na posição de outros sinais da constelação, permitindo a estabilidade errônea dos sistemas de detecção de fase tais como PLL's (do inglês, Phase Locked Loops). Em virtude deste número de posições ser pequeno e fixo para constelações QAM, pode-se mapear os sinais da constelação de maneira que apenas 2 bits (o suficiente para as 4 posições possíveis) variem quando se “roda” a constelação de múltiplos de $\pi/2$. Este tipo de mapeamento foi preocupação quando da configuração deste projeto.

Ainda sobre a rotação de fase, observa-se que a classe de códigos escolhida, os códigos de Reed-Muller, atendem à definição de códigos invariantes à rotação de fase apresentada no Capítulo 2, isto é, todos os códigos de Reed Muller possuem a palavra código toda “um”.

Para a configuração do projeto, diversos esquemas de modulação e codificação foram estudados. Um método para avaliar a performance de esquemas

com modulação codificada e demodulação multiestágio é apresentado. Com a utilização deste método, o desempenho dos diversos esquemas é avaliado e comparado, permitindo a delimitação do esquema a ser proposto.

No que se refere à decodificação, foi escolhido o **método de decodificação multiestágio**, um método sub-ótimo com probabilidade de erro muito próxima à do método ótimo conhecido (MLD) e que apresenta uma redução considerável da complexidade de decodificação em relação a este último. Desta maneira, optou-se por atender ao compromisso Complexidade x Desempenho da melhor maneira possível.

Diversos esquemas utilizando diferentes combinações de códigos de Reed-Muller e constelações QAM foram estudados quanto à probabilidade de erro esperada (método descrito a seguir), e não se perdendo de vista as restrições de redundância impostas ao projeto [ZURBA2].

4.2.Cálculo de probabilidade de erro em esquemas BCM multinível

O método apresentado aqui foi sugerido em [POTTIE], e obtém uma aproximação razoável para valores de probabilidade de erro de sequência para a decodificação multiestágio. A probabilidade de erro será função dos tipos de códigos que estão sendo utilizados e suas distâncias de Hamming, bem como da constelação e partições adotadas no esquema de modulação, considerando as distâncias Euclidianas implicadas neste esquema.

Dado um sistema onde são gerados sinais ou seqüências, com distância d_j a outros sinais ou seqüências e multiplicidade $N(d_j)$, pode-se afirmar que a probabilidade de se interpretar uma dada seqüência ou sinal enviado como sendo uma outra seqüência, é limitada por [POTTIE]:

$$P(e) \leq \sum_{(d_j \geq d_{\min})} N(d_j) \cdot P(d_j, SNR),$$

Equação 4-1

onde

$$P(d, SNR) = Q(d / 2\sigma) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sigma\sqrt{2}}\right),$$

Equação 4-2

com $\sigma^2 = N_0/2 =$ variância do ruído Gaussiano aditivo no canal considerado.

Temos, portanto:

$$P(d, SNR) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}}\right).$$

Equação 4-3

Para relações sinal/ruído altas, isto é, quando o argumento da função “*error-function*” apresentada acima for relativamente alto ($d_{\min}^2/(4N_0) > 3$), vale a seguinte aproximação:

$$P(d, SNR) \cong \frac{1}{d_{\min}} \sqrt{\frac{N_0}{\pi}} \exp\left(\frac{d_{\min}}{4N_0}\right).$$

Equação 4-4

Para um sistema com modulação codificada, existem distâncias de Hamming e distâncias Euclidianas em um mesmo sistema, e define-se portanto, para cada nível uma “distância Euclidiana equivalente” d_j para aquele nível,

$$d_j = d_{Hj} \cdot d_{Ej}^2$$

Equação 4-5

onde d_{Hj} é uma distância de Hamming do código do nível j , e d_{Ej} é uma distância Euclidiana da j -ésima partição da constelação em questão.

Da mesma maneira, uma forma genérica de calcular a multiplicidade, $N(d_j)$, para o sistema misto utilizado aqui é usar um limitante superior para essa grandeza.

Assim:

$$N(d_j) \leq N(d_{Hj}) \cdot x_j^{d_{Hj}}$$

Equação 4-6

onde: $N(d_{Hj})$ é a multiplicidade da distância de Hamming d_{Hj} no código de nível j ;

x_j é o número médio de sinais na j -ésima partição da constelação que estão a uma distância d_j de um sinal qualquer da constelação.

Assim, x_j pode ser calculado com a seguinte fórmula:

$$x_j = \frac{\sum_i (i * \text{numero de elementos na particao } j \text{ que tem } i \text{ vizinhos a distancia } d_{E_j})}{\text{numero total de elementos na partiç ao } j+1}$$

Equação 4-7

Aplicando-se a Equação 4-6 na Equação 4-1, temos um limitante superior da probabilidade de erro para sistemas com modulação codificada:

$$Pe(\text{nível } j) \leq \sum_{(d \geq d_{\min})} N(d_H) \cdot x^{d_H} \cdot P(d, SNR).$$

Equação 4-8

O cálculo acima deve ser realizado para cada estágio j do decodificador, onde então, d_H é a distância de Hamming entre duas palavras do código C_j , d é a distância genérica neste nível, obtida da Equação 4-5 e d_{\min} é a distância mínima neste nível. O cálculo acima gera algumas dificuldades na obtenção de todas as distâncias d_H possíveis e no cálculo de suas multiplicidades. Por simplicidade, utiliza-se ao invés do somatório, apenas o fator mais significativo neste cálculo:

$$Pe(\text{nível } j) \cong N(d_{H_{\min}}) \cdot x^{d_{\min}} \cdot P(d_{\min}, SNR)$$

Equação 4-9

Temos, portanto, um método simples de cálculo de limitantes aproximados para probabilidade de erro em sistemas BCM multinível. A probabilidade de erro do sistema como um todo pode ser aproximada pelo limitante superior:

$$Pe \leq Pe(\text{nível } 1) + \dots + Pe(\text{nível } i) + \dots + Pe(\text{nível } N)$$

Equação 4-10

onde N é o número de níveis do sistema.

Podemos também obter um valor esperado aproximado para probabilidade de erro de bit, levando-se em conta o número de bits de informação transmitidos em cada nível. Esta aproximação é feita supond-se erro de um bit por cada nível errado:

$$Peb \cong \frac{Pe(\text{nível } 1)}{k_1} + \frac{(Pe(\text{nível } 1) + Pe(\text{nível } 2))}{k_2} + \dots + \frac{\sum_{j=1}^N Pe(\text{nível } j)}{k_N}$$

Equação 4-11

Numa estimativa mais grosseira, poderíamos utilizar o próprio limitante superior da Equação 4-10 (probabilidade de erro de sequência) e assumir a melhor situação, onde a cada palavra errada (considerando todos os bits transmitidos num

bloco de sinais), existe apenas um bit errado. Teríamos então um “limitante inferior” para a probabilidade de erro de bit:

$$P_{eb} \geq \frac{Pe}{k_{eq}},$$

Equação 4-12

onde k_{eq} é o número total de bits de informação transmitido num bloco de sinais, e corresponde a soma de todos os k_i , com $\{i=1,\dots,N\}$

Foram estudados vários esquemas utilizando técnicas de BCM multinível com diferentes esquemas de codificação (todos com códigos de Reed-Muller) [BLAHUT]. Os diferentes esquemas foram comparados no que se refere à probabilidade de erro. Resumindo o que foi apresentado nesta seção, a probabilidade de erro em cada estágio pode ser aproximada pela expressão mostrada abaixo:

$$Pe(\text{nível } j) \cong n_j \cdot x_j^{d_{Hj}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \left(\frac{d_j^2}{N_0}\right)}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{d_j^2}{N_0}\right)\right]$$

Equação 4-13

onde: d_{Hj} = distância de Hamming mínima no código C_j do nível j ;

n_j = multiplicidade da distância de Hamming mínima d_{Hj} no código C_j do nível j , o que na prática é considerado como o número de palavras de peso de Hamming igual a d_{Hj} existentes no código;

d_j = distância Euclidiana no nível j , resultante da associação da distância mínima do código deste nível, com a distância Euclidiana mínima na j -ésima partição (ver Equação 4-5);

x_j = número médio de sinais na j -ésima partição da constelação que estão a uma

distância d_j de um sinal qualquer da constelação.

Todas estas grandezas foram obtidas para cada nível de cada um dos esquemas, permitindo assim o cálculo da probabilidade de erro de cada esquema em função da relação sinal-ruído expressa na forma de energia de bit por densidade espectral de potência do ruído (E_b/N_0) [BLAHUT].

4.3.Exemplos de Esquemas Estudados

Serão apresentados aqui sete esquemas, cinco deles utilizando técnicas de BCM multinível com diferentes esquemas de codificação (todos com códigos de Reed-Muller), e dois deles não codificados, e que servirão como referência. O primeiro grupo, composto de quatro esquemas, utiliza constelações 16-QAM comparadas a um esquema de referência utilizando constelação 8-QAM. No segundo grupo, dois esquemas BCM com constelações 32-QAM e baixa quantidade de redundância, são comparados a um esquema de referência 32-QAM não codificado.

4.3.1.Esquema 1

Este esquema compõe-se de três blocos básicos. No *primeiro estágio*, os bits de informação, oriundos da saída de uma fonte digital, são agrupados e enviados em blocos para os diversos níveis do estágio codificador. No *segundo estágio*, composto de quatro níveis, temos apenas dois níveis onde os bits sofrem codificação efetivamente. São os níveis 1 e 2, com códigos de Reed-Muller (RM) idênticos: (8,4,4). Os outros dois níveis apenas agrupam os bits em blocos também de comprimento 8. Estes quatro blocos são apresentados à saída do codificador na forma de “colunas”, isto é, a cada período de transmissão de um sinal, são apresentados à saída do codificador um bit de cada bloco, o que resulta numa palavra de 4 bits na entrada do modulador. No *estágio modulador*, estas palavras de 4 bits selecionam um sinal sobre uma constelação QAM composta de 16 sinais mapeada adequadamente. A taxa de informação é de 3 bits/símbolo.

Este esquema é mostrado na figura abaixo:

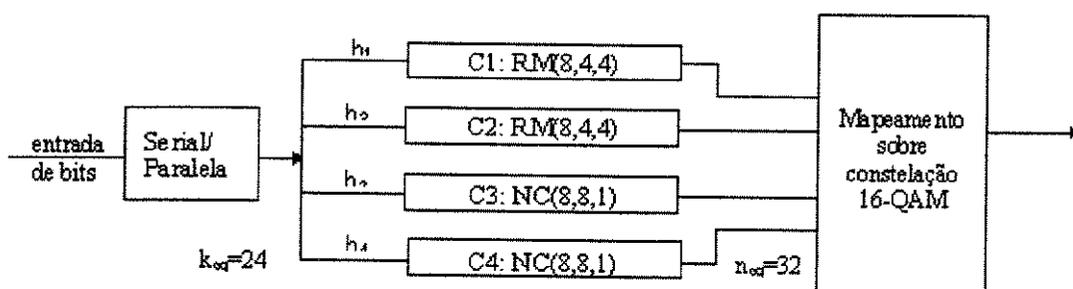


Figura 4-1 Esquema 1: Sistema 16-QAM, códigos RM de comprimento 8

As siglas RM e NC apresentadas na descrição de cada código indicam Código de Reed-Muller e sistema Não Codificado, respectivamente.

Para esse esquema foram obtidas as grandezas envolvidas na sua avaliação conforme o método sugerido na seção anterior deste capítulo. Os parâmetros de interesse no cálculo de probabilidade de erro teórica deste esquema são mostrados na tabela abaixo:

Nível j	n_j	x_j	d_{Hj}	d_{Ej}^2	$d_j^2/N_0=K.(Eb/N_0)$
1	14	3	4	0.4=1.2 Eb	4.8 Eb/No
2	14	2.25	4	0.8=2.4 Eb	9.6 Eb/No
3	8	2	1	1.6=4.8 Eb	4.8 Eb/No
4	8	1	1	3.2=9.6 Eb	9.6 Eb/No

Tabela 4-1: Valores relevantes para o cálculo de probabilidade de erro do Esquema 1

O gráfico abaixo apresenta as probabilidades de erro em cada nível para este esquema:

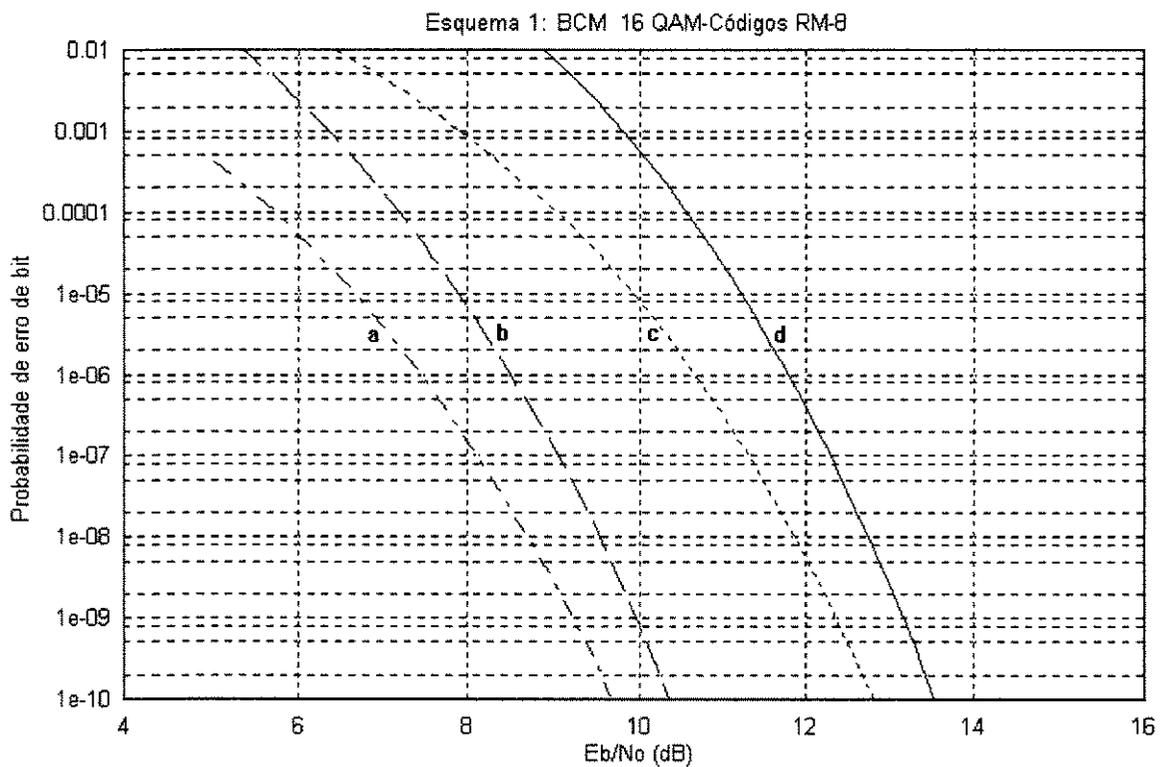


Figura 4-2: Probabilidade de erro prevista em cada um dos níveis do Esquema 1: (a) nível 4; (b) nível 2; (c) nível 3; (d) nível 1.

A partir da Figura 4-2 pode-se prever que a probabilidade de erro mais alta (nível 1) vai impor, na prática, a probabilidade de erro do sistema, uma vez que em valores absolutos, são somadas probabilidades de ordens de grandeza diferentes. Segundo a Equação 3-1, o projeto de um esquema de modulação codificada deve procurar equilibrar ao máximo as distâncias equivalentes em cada nível, pois elas determinam a probabilidade de erro deste nível que deve ser equilibrada com os demais. Como a maior destas probabilidades determinará esta grandeza para o sistema, observa-se que houve um “excesso de proteção” para o nível 2, uma vez que o esquema de codificação nele aplicado proporciona uma taxa de erros abaixo mesmo da taxa de erros do nível 3. Esta proteção extra encarece o sistema desnecessariamente, e pode ser dispensada.

As três diferentes formas de estimar-se a probabilidade de erros deste sistema como um todo são apresentadas a seguir. Estas curvas foram obtidas a partir das probabilidades de erro estimadas em cada nível, e utilizando as equações Equação 4-10, Equação 4-11 e Equação 4-12, para o cálculo do limitante superior, valor esperado (média), e limitante inferior, respectivamente.

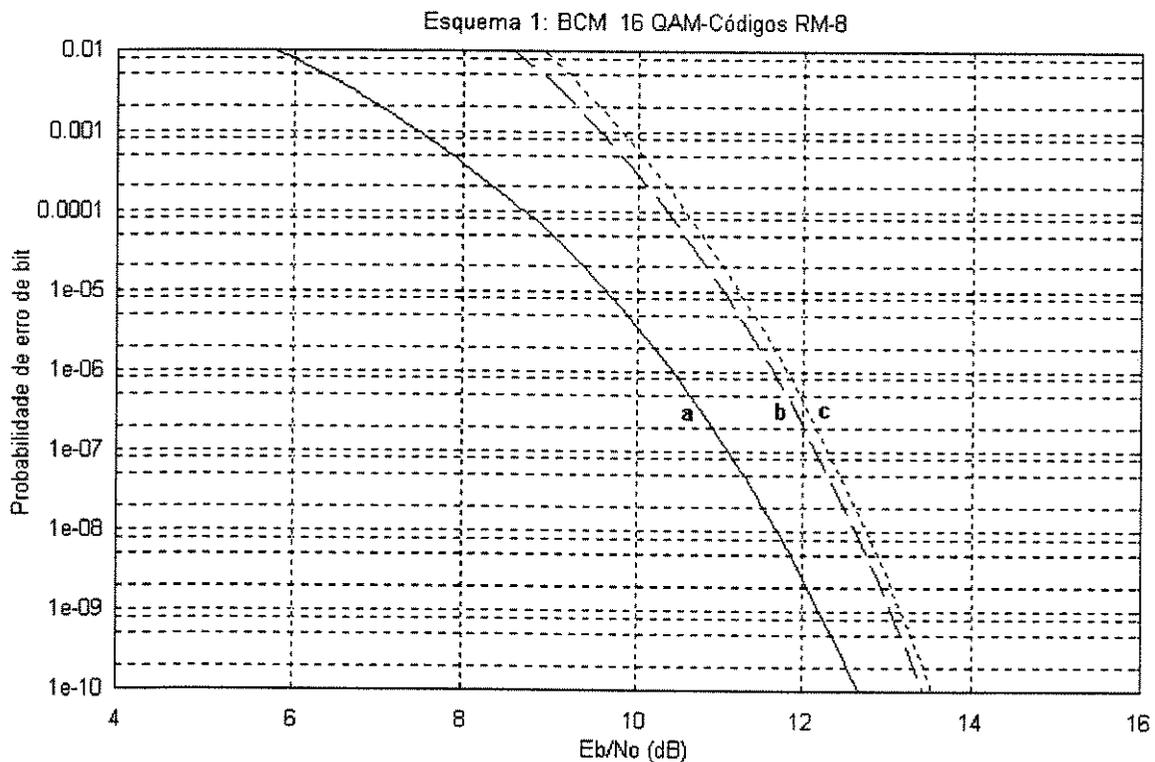


Figura 4-3: Probabilidades de erro de bit previstas para o Esquema 1: (a) limitante inferior (Equação 4-12); (b) valor esperado (Equação 4-11); (c) limitante superior (Equação 4-10)

4.3.2. Esquema 2

O esquema 2 difere do esquema 1 em apenas um sentido: O código sugerido para o segundo nível é mais “fraco” que o código deste mesmo nível no esquema anterior. Esta diferença de código permite uma taxa de informação maior que a do esquema anterior. Aqui ela é de 3.375 bits/símbolo. Um diagrama deste sistema é apresentado na figura a seguir:

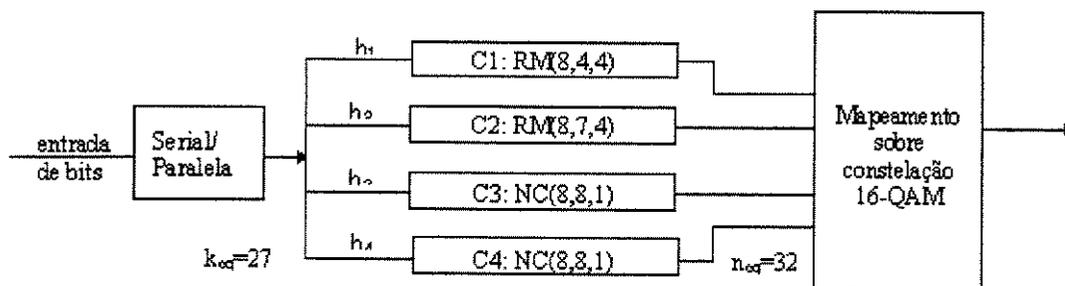


Figura 4-4 Esquema 2: Sistema BCM - 16QAM, Códigos RM de comprimento 8

Para esse esquema podemos obter a tabela -resumo abaixo, utilizada no cálculo de probabilidade de erro.

Nível j	n _j	x _j	d _{Hj}	d _{Ej} ²	d _j ² /No=K.(Eb/No)
1	14	3	4	0.4=1.35 Eb	5.4 Eb/No
2	28	2.25	2	0.8= 2.7 Eb	5.4 Eb/No
3	8	2	1	1.6= 5.4 Eb	5.4 Eb/No
4	8	1	1	3.2=10.8 Eb	10.8 Eb/No

Tabela 4-2 Valores relevantes para o cálculo de probabilidade de erro no Esquema 2.

Os gráficos representando as probabilidades de erro em cada nível para este esquema são mostrados na Figura 4-5.

Como pode se observar, as probabilidades de erro neste sistema estão mais homogêneas que no esquema anterior. Uma redução da complexidade do código de nível 2, associada ao aumento de sua taxa, permitiu a aproximação das curvas dos três primeiros níveis. A curva do nível 4 é a única que tem, ainda, probabilidade de erro destoante (menor) das demais. Este fato, no entanto, não se deve a nenhum esforço de codificação, e sim à

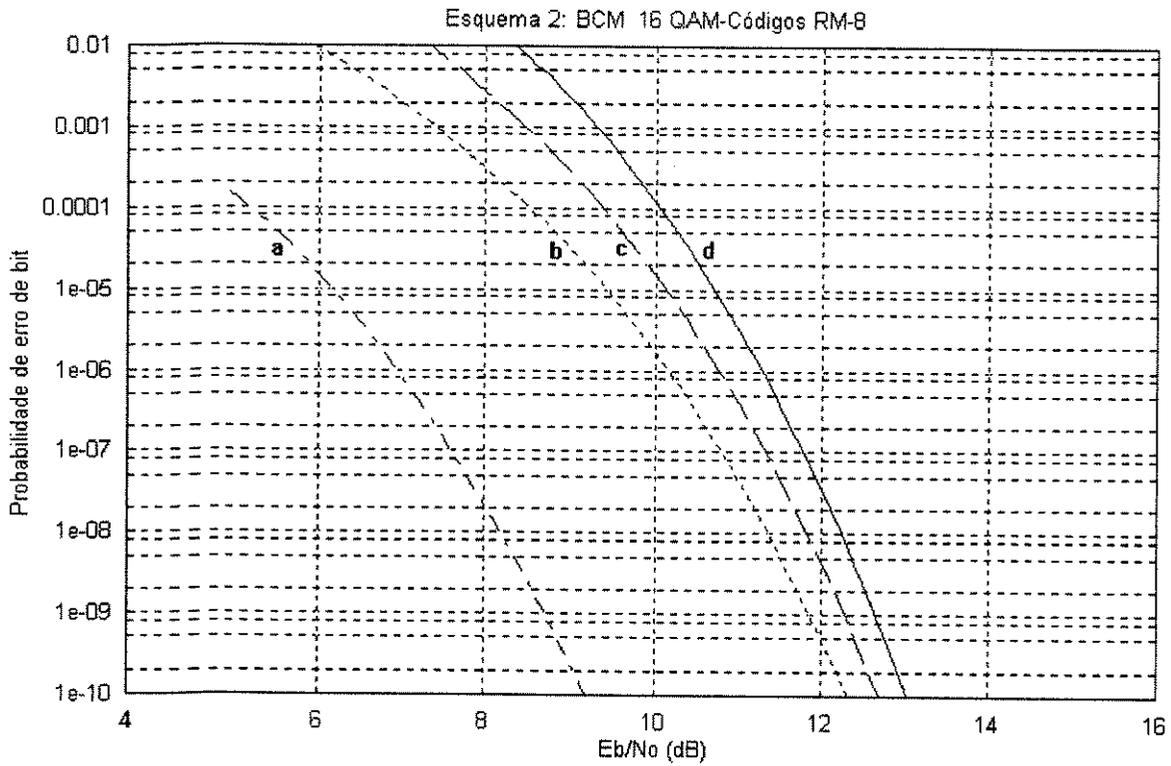


Figura 4-5 Probabilidade de erro nos diversos níveis do Esquema 2: (a) nível 4; (b) nível 3; (c) nível 2; (d) nível 1

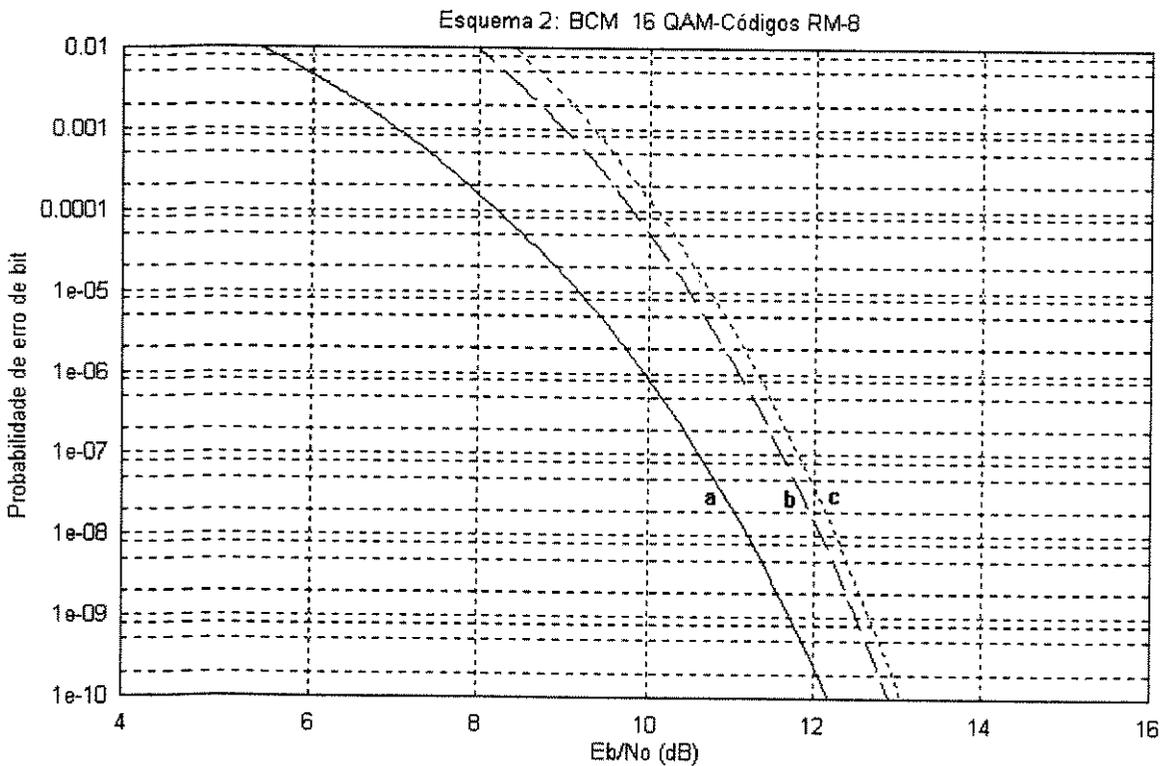


Figura 4-6 Probabilidades de erro de bit previstas para o Esquema 2: (a) limitante inferior; (b) valor esperado; (c) limitante superior

natureza da partição da subconstelação QAM, que a cada nível duplica a distância euclidiana entre os sinais, reduzindo a probabilidade de erro em aproximadamente 3dB.

4.3.3. Esquema 3

Este esquema foi estudado com o objetivo de comparar sistemas semelhantes porém com comprimentos de código diferentes. Assim, como no esquema anterior (Esquema 2), teremos probabilidades de erro as mais homogêneas possíveis para os diversos níveis, com a utilização de diferentes códigos de comprimento 16 nos níveis 1 e 2, e dos níveis 3 e 4 não codificados. Um diagrama representando este sistema é mostrado na figura a seguir:

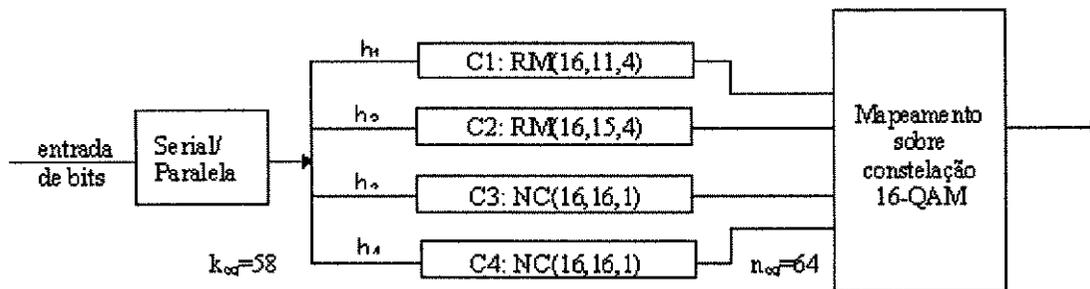


Figura 4-7 Esquema 3: Sistema BCM - 16QAM, Códigos RM de comprimento 16

Para esse esquema podemos obter a tabela-resumo abaixo, utilizada no cálculo de probabilidade de erro.

Nível j	n _j	x _j	d _{Hj}	d _{Ej} ²	d _j ² /No=K.(Eb/No)
1	140	3	4	0.4=1.45 Eb	5.8 Eb/No
2	120	2.25	2	0.8=2.9 Eb	5.8 Eb/No
3	16	2	1	1.6=5.8 Eb	5.8 Eb/No
4	16	1	1	3.2=11.6 Eb	11.6 Eb/No

Tabela 4-3: Valores relevantes para o cálculo de probabilidade de erro no Esquema 2.

As curvas representando as probabilidades de erro em cada nível para este esquema são traçadas no gráfico a seguir:

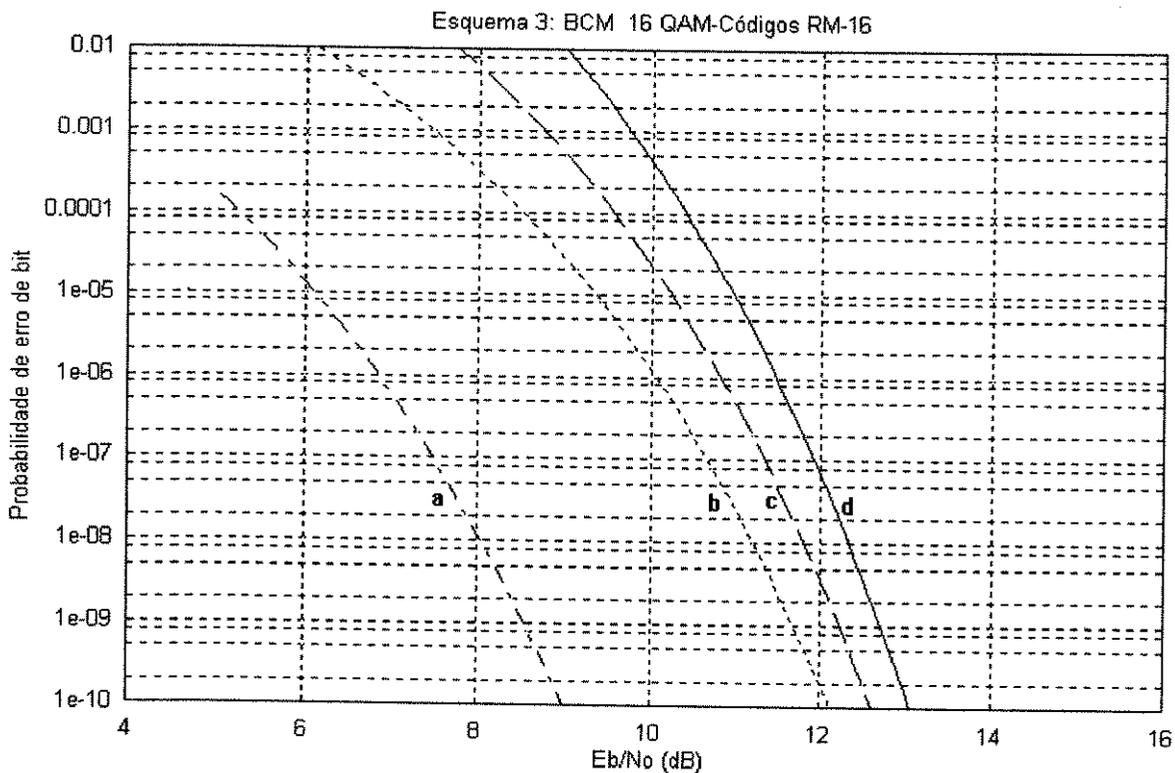


Figura 4-8 Probabilidade de erro nos diversos níveis do Esquema 3: (a) nível 4; (b) nível 3; (c) nível 2; (d) nível 1

Como se pode observar, também neste esquema as curvas para os diversos níveis estão muito próximas, à exceção do último nível, conforme já comentado. As curvas de estimação para este esquema são apresentadas na Figura 4-9.

4.3.4. Esquema 4

Este é um sistema não codificado com modulação 8-QAM, estudado aqui com a finalidade de comparar seu desempenho com o dos sistemas citados até aqui, que transmitem com taxas próximas de 3.

Para um sistema M-QAM, a probabilidade de erro de símbolo pode ser calculada da seguinte maneira [BIGLI2]:

$$Pe(simbolo) \cong 2erfc\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{2(M-1)} \cdot \frac{\epsilon_b}{N_0}}\right)$$

Equação 4-14

onde M é a dimensão da constelação QAM utilizada (neste caso, M=8)

No/2 = variância do ruído aditivo Gaussiano

Para este esquema, vale a aproximação da função “Error function”, citada anteriormente (Equação 4-4.)

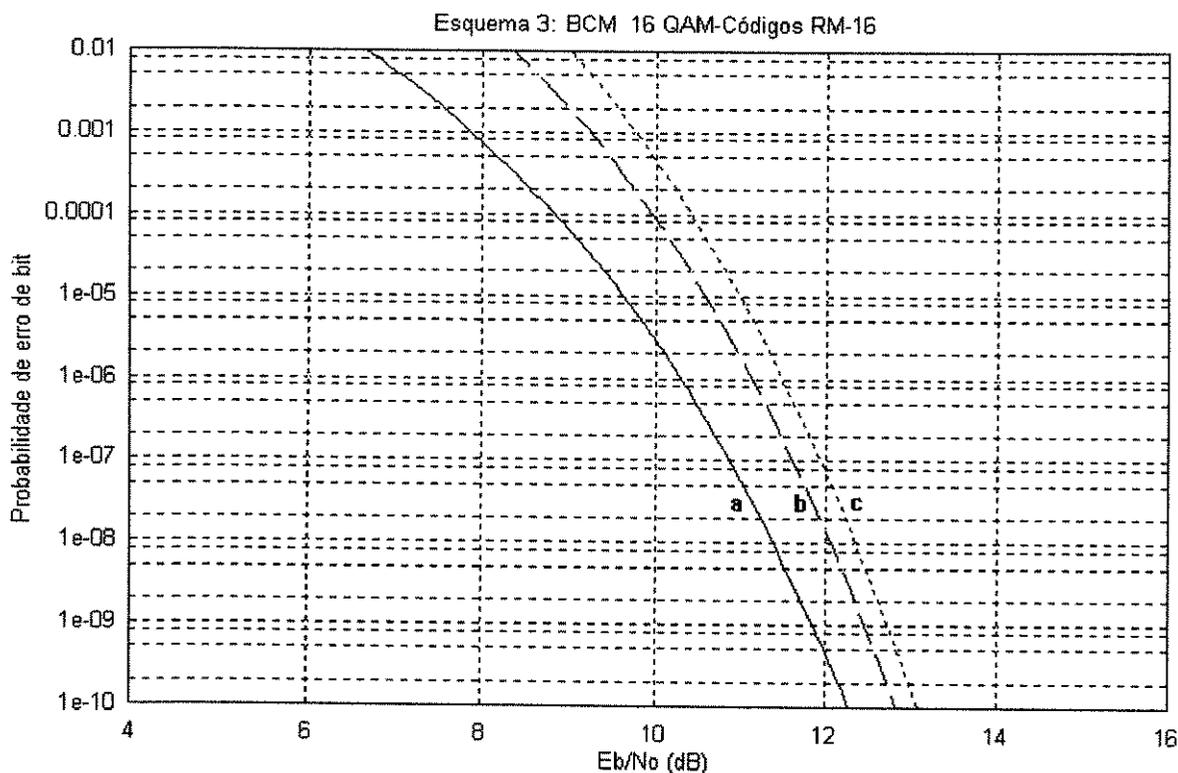


Figura 4-9 Probabilidades de erro de bit previstas para o Esquema 3: (a) limitante inferior; (b) valor esperado; (c) limitante superior

A fórmula apresentado na Equação 4-14 refere-se a probabilidade de erro de símbolo. Como estamos tratando com probabilidades de erro de bit, é conveniente obtermos uma aproximação para esta grandeza. Isto pode ser realizado se considerarmos a média de vizinhos que estão localizados à distância mínima dos sinais na constelação em questão. Para este caso específico de 8-QAM, esta média é $18/8=2.25$. O número de bits necessários para distingui-los é $\log_2(2.25)=1.17$. Temos, portanto, que para símbolos adjacentes (cuja distância entre si corresponde à distância mínima entre sinais da constelação), são necessários, **em média**, e desde que haja um mapeamento adequado, 1.17 bits diferentes entre suas palavras códigos. Assumimos, portanto, que a cada sinal errado estamos recebendo uma palavra de três bits com uma média de 1.17 bits errados. Isto nos permite estimar a probabilidade de erro de bit para o sistema 8-QAM como sendo:

$$P_{erro}(bit) \cong \frac{1.17}{3} P_{erro}(simbolo)$$

Equação 4-15

A figura abaixo apresenta a previsão de desempenho deste esquema:

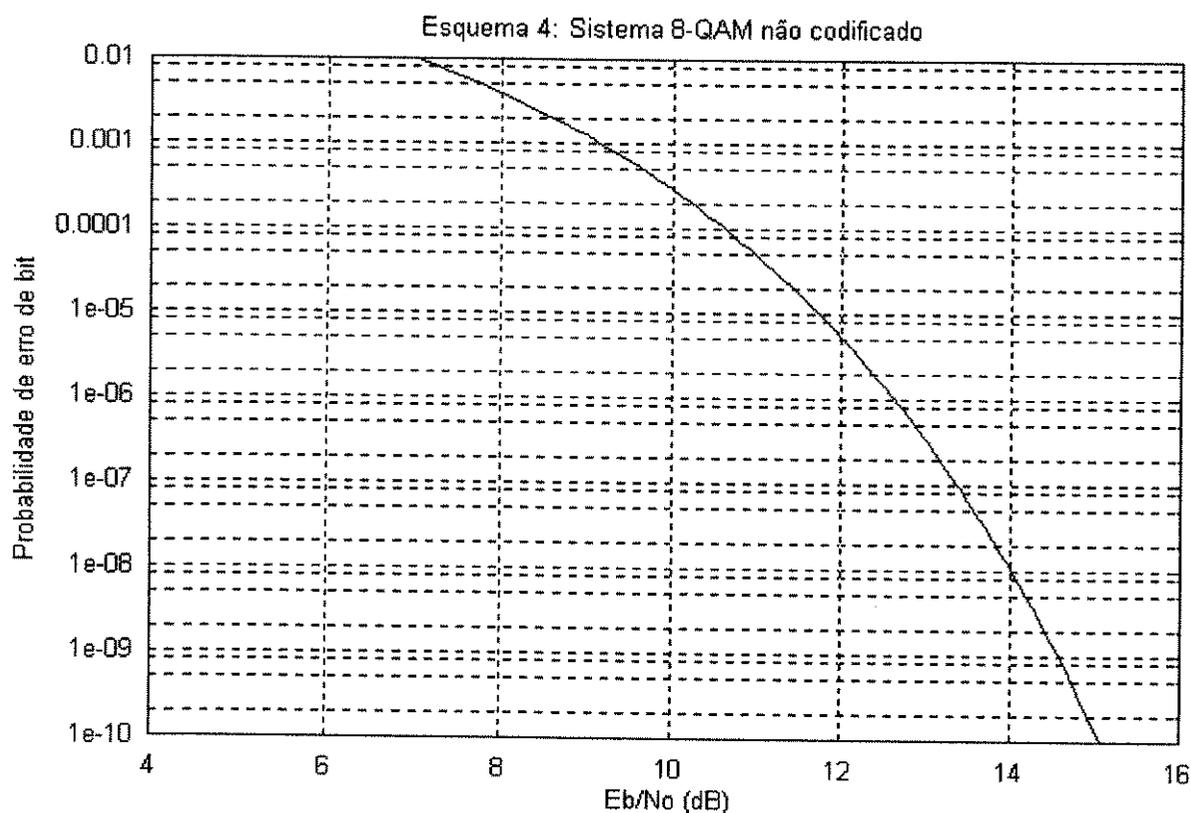


Figura 4-10 Esquema 4: Sistema 8QAM não codificado (referência)

4.3.5. Comparação entre os esquemas de 1 a 4

A figura a seguir mostra os diferentes resultados obtidos na previsão de probabilidade de erro nos quatro esquemas apresentados até aqui. As curvas apresentadas correspondem ao valor médio esperado de probabilidade de erro de bit, isto é, são aquelas obtidas através da Equação 4-11 e já apresentadas quando da apresentação isolada de cada esquema.

Sua apresentação comparativa aqui nos faz ponderar sobre os diversos fatores que devem ser levados em consideração quando da realização de um projeto de modulação codificada.

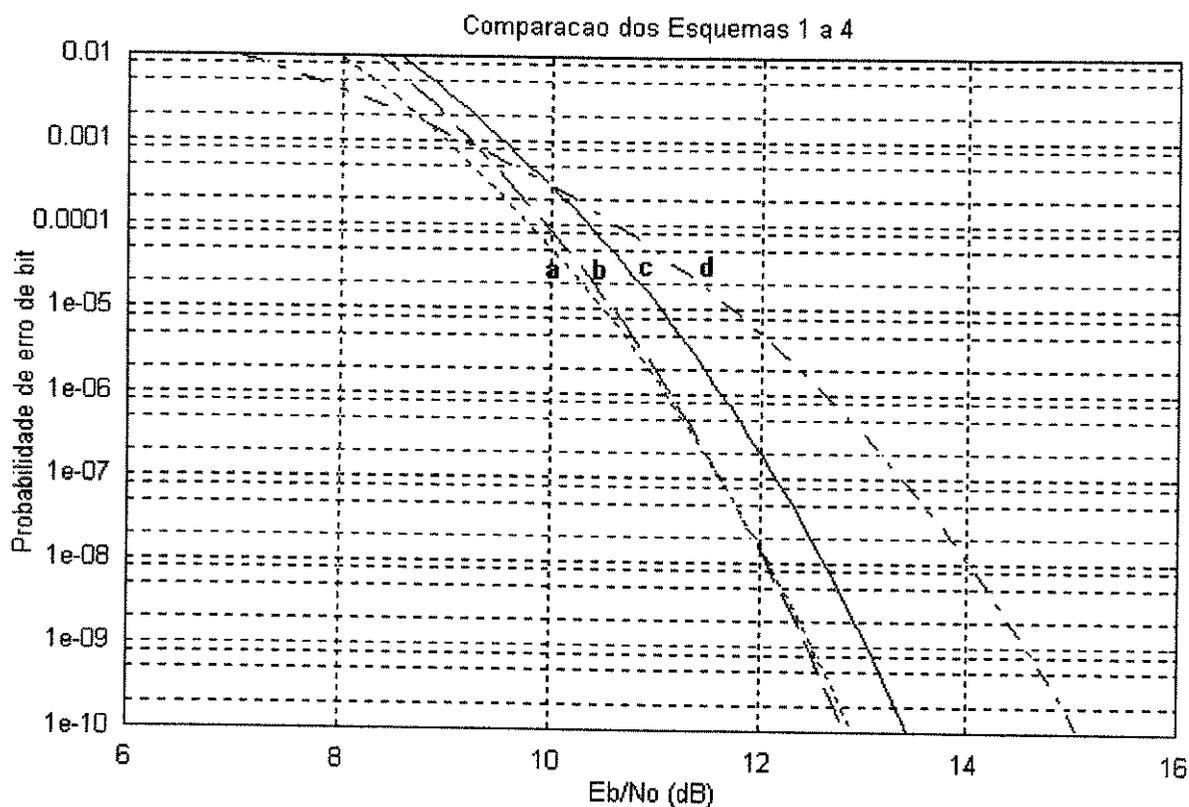


Figura 4-11 Comparação dos esquemas 1 a 4: (a) Esquema 2; (b) Esquema 3; (c) Esquema 1, (d) Esquema 4

Como pode ser observado, os três esquemas BCM propostos (Esquemas 1, 2 e 3) apresentam um ganho razoável em relação ao esquema não codificado. Este ganho está em torno de 2 dB para probabilidade de erro na ordem de 10^{-6} .

Observa-se ainda que os Esquemas 2 e 3 apresentam desempenho praticamente idêntico, com um ganho em relação ao esquema 1. Isto é explicável se lembrarmos que o Esquema 1 não está otimizado em relação ao aproveitamento dos sinais, trabalhando com taxa mais baixa que o Esquema 2 sem nenhum benefício advindo deste fato. A proximidade de desempenho entre os esquemas 2 e 3 deve-se ao fato de as distâncias Euclidianas equivalentes serem idênticas em todos os níveis para os dois esquemas. No entanto, deve-se chamar à atenção o fato de que o Esquema 3 possui, como vantagem extra, uma maior taxa de transmissão (3.635 bits/símbolo) em relação à do Esquema 2 (3.375 bits/símbolo). Isto equivale a dizer que o Esquema 3 sofreu acréscimo de redundância (10,34%) menor do que aquele recebido pelo Esquema 2 (18,51%). Esta vantagem de desempenho se deu, no entanto, às custas de um aumento na complexidade do sistema, traduzido pela utilização de codificadores e

decodificadores muito mais custosos; e no aumento também do atraso na transmissão, visto que os blocos são maiores.

Apesar do preço desta menor redundância ser relativamente alto, é exatamente este o fator mais restritivo deste projeto. Lembrando que a redundância máxima admitida aqui seria de 5%, percebe-se que seria quase impraticável a utilização de constelações 16-QAM como as dos esquemas de 1 a 4 apresentados anteriormente. Partimos então para a utilização de constelações maiores, visando atingir uma configuração adequada para o sistema desejado, com a melhor relação custo-benefício possível.

4.3.6. Esquema 5

Este esquema está baseado numa constelação 32QAM, como mostra a Figura 4-12. Seu codificador utiliza códigos de Reed Muller nos dois primeiros níveis e blocos não codificados nos níveis restantes. Sua taxa de informação é de 4.625 bits/símbolo e a redundância de 8,1% (6 bits de redundância para cada 74 bits de informação).

Um diagrama deste esquema é apresentado a seguir:

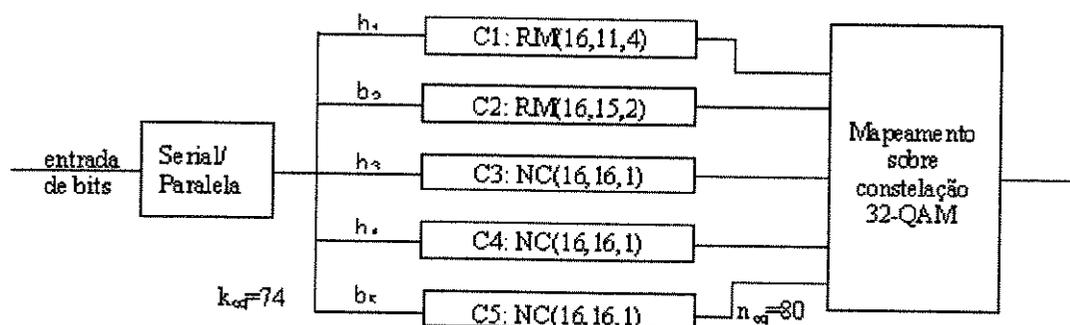


Figura 4-12 Esquema 5: Sistema BCM - 32QAM, Códigos RM de comprimento 16

Da mesma maneira realizada nos outros esquemas, realizou-se o cálculo da probabilidade de erro em cada nível deste sistema. A Tabela 4-4 apresenta um resumo dos parâmetros utilizados neste cálculo. Um gráfico apresentando os resultados é mostrado na Figura 4-13.

Nível j	n_j	x_j	d_{Hj}	d_{Ej}^2	$d_j^2/N_0=K.(Eb/N_0)$
1	140	3.293	4	$0.2=0.925 Eb$	3.7 Eb/No
2	120	3	2	$0.4= 1.85Eb$	3.7 Eb/No
3	16	2.586	1	$0.8= 3.7Eb$	3.7 Eb/No
4	16	2	1	$1.6= 7.4 Eb$	7.4 Eb/No
5	16	1.172	1	$3.2= 14.8 Eb$	14.8 Eb/No

Tabela 4-4 Valores relevantes para o cálculo de probabilidade de erro no Esquema 5.

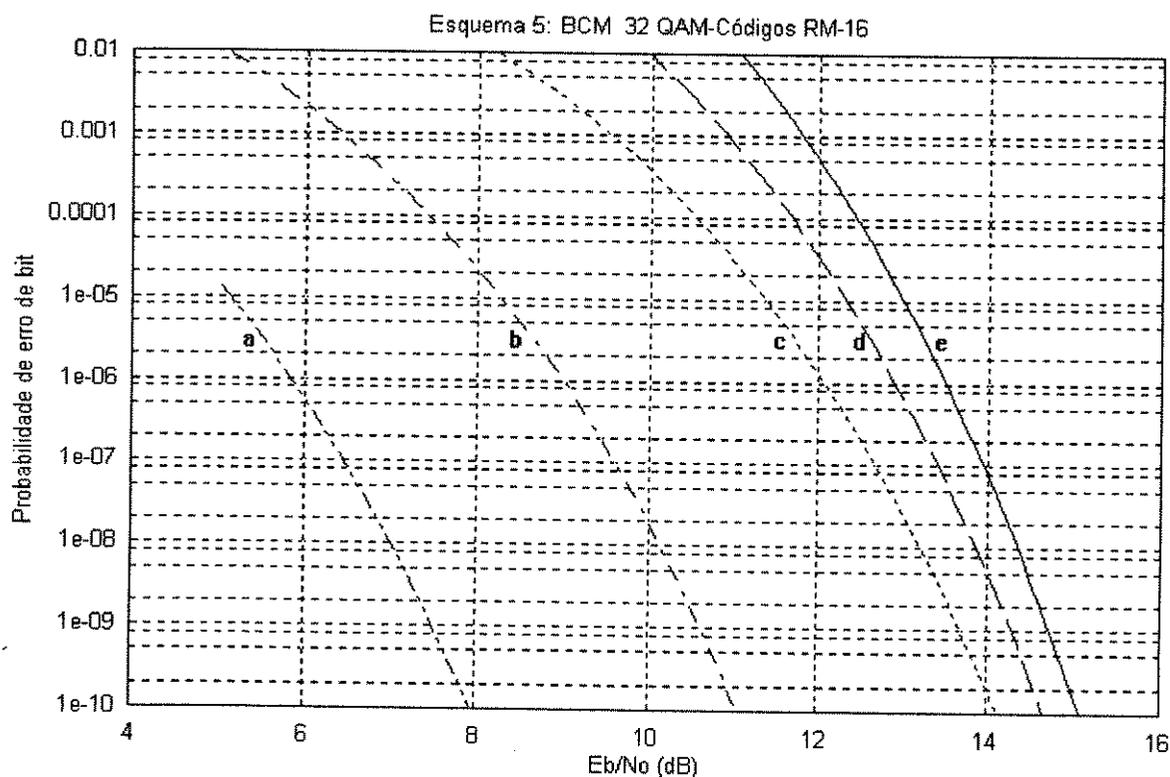


Figura 4-13 Probabilidade de erro nos diversos níveis do Esquema 5: (a) nível 5; (b) nível 4; (c) nível 3; (d) nível 2; (e) nível 1

As previsões de desempenho do sistema como um todo (segundo a Equação 4-10, Equação 4-11 e Equação 4-12) também foram obtidas para o Esquema 5. Um gráfico contendo esta informação é mostrado na Figura 4-14.

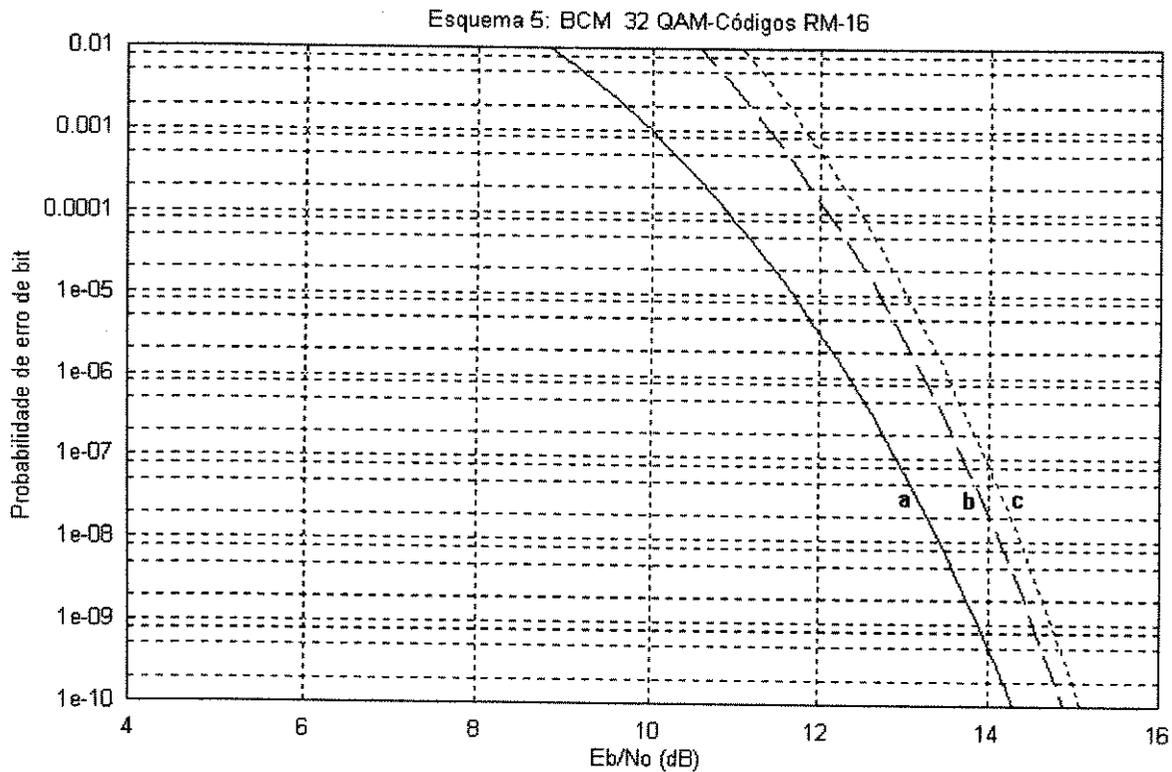


Figura 4-14 Probabilidades de erro de bit previstas para o Esquema 5: (a) limitante inferior; (b) valor esperado; (c) limitante superior

Este esquema tem seu processo de decodificação de baixa complexidade, considerando-se os comprimentos relativamente longos (16 bits) de seus códigos. Isto se deve à utilização da técnica de treliças sobre os códigos de bloco de Reed-Muller. No entanto, sua redundância ainda não é aceitável para as restrições deste projeto. Passaremos a um novo esquema, que procura atender a esta limitação.

4.3.7. Esquema 6

Este esquema, como o anterior, está baseado numa constelação 32-QAM. Seu codificador utiliza, da mesma maneira, códigos de Reed Muller nos dois primeiros níveis e blocos não codificados nos níveis restantes. O comprimento destes códigos, no entanto, é diferente. Aqui utiliza-se blocos de 32 bits. Isto permite uma taxa de informação de 4.78 bits/símbolo e a redundância de 4.57% (7 bits de redundância para cada 153 bits de informação).

Um diagrama deste esquema é apresentado a seguir:

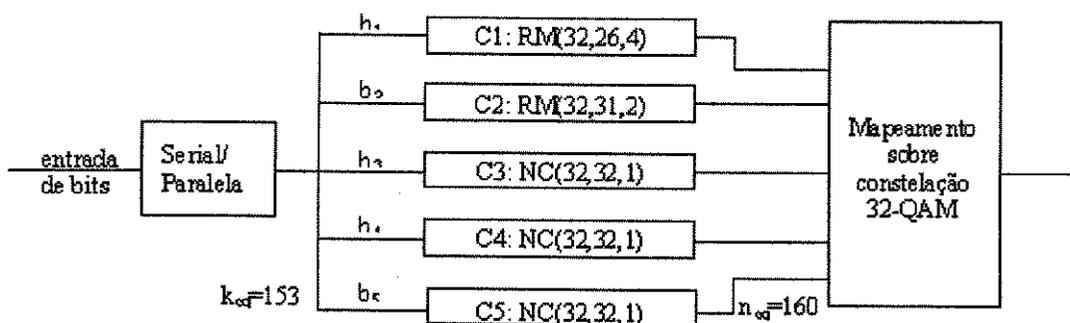


Figura 4-15 Esquema 6: Sistema BCM - 32QAM, Códigos RM de comprimento 32

A Tabela 4-5 apresenta um resumo dos parâmetros utilizados para calcular a probabilidade de erros deste sistema.

Nível j	n _j	x _j	d _{Hj}	d _{Ej} ²	d _j ² /No=K.(Eb/No)
1	1240	3.293	4	0.2=0.95625 Eb	3.825 Eb/No
2	496	3	2	0.4=1.9125Eb	3.825Eb/No
3	32	2.586	1	0.8=3.825 Eb	3.825 Eb/No
4	32	2	1	1.6=7.65 Eb	7.65 Eb/No
5	32	1.172	1	3.2=15.3 Eb	15.3 Eb/No

Tabela 4-5 Valores relevantes para o cálculo de probabilidade de erro no Esquema 5.

As curvas representando os resultados destes cálculos foram plotadas em gráficos apresentados na sequência.

A Figura 4-16 mostra a probabilidade de erro calculada para cada um dos níveis. A Figura 4-17 mostra as probabilidades de erro estimadas para o sistema completo. São apresentadas as curvas de limitante inferior, valor esperado e limitante superior.

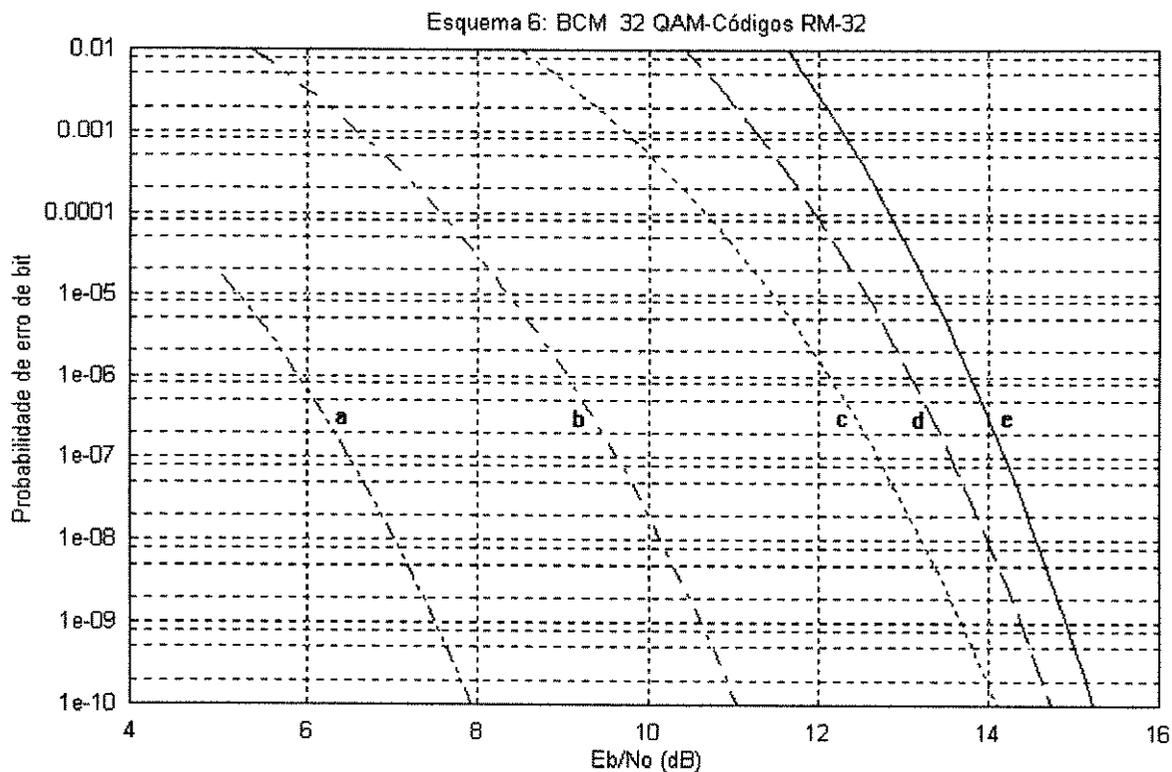


Figura 4-16 Probabilidade de erro nos diversos níveis do Esquema 6: (a) nível 5; (b) nível 4; (c) nível 3; (d) nível 2; (e) nível 1

Percebe-se novamente que as probabilidades de erro dos níveis 1 e 2 se aproximaram, através do processo de codificação, da probabilidade de erro do primeiro nível não codificado (nível 3). Estas três curvas determinam, aproximadamente os valores de probabilidade de erro do sistema global.

Este esquema atende à restrição de redundância exigida neste projeto, às custas de códigos bastante extensos, cuja decodificação acrescenta uma certa complexidade ao sistema. No entanto, notaremos adiante que ganhos de codificação consideráveis podem ser obtidos com baixíssima quantidade de redundância quando se paga o preço desta complexidade.

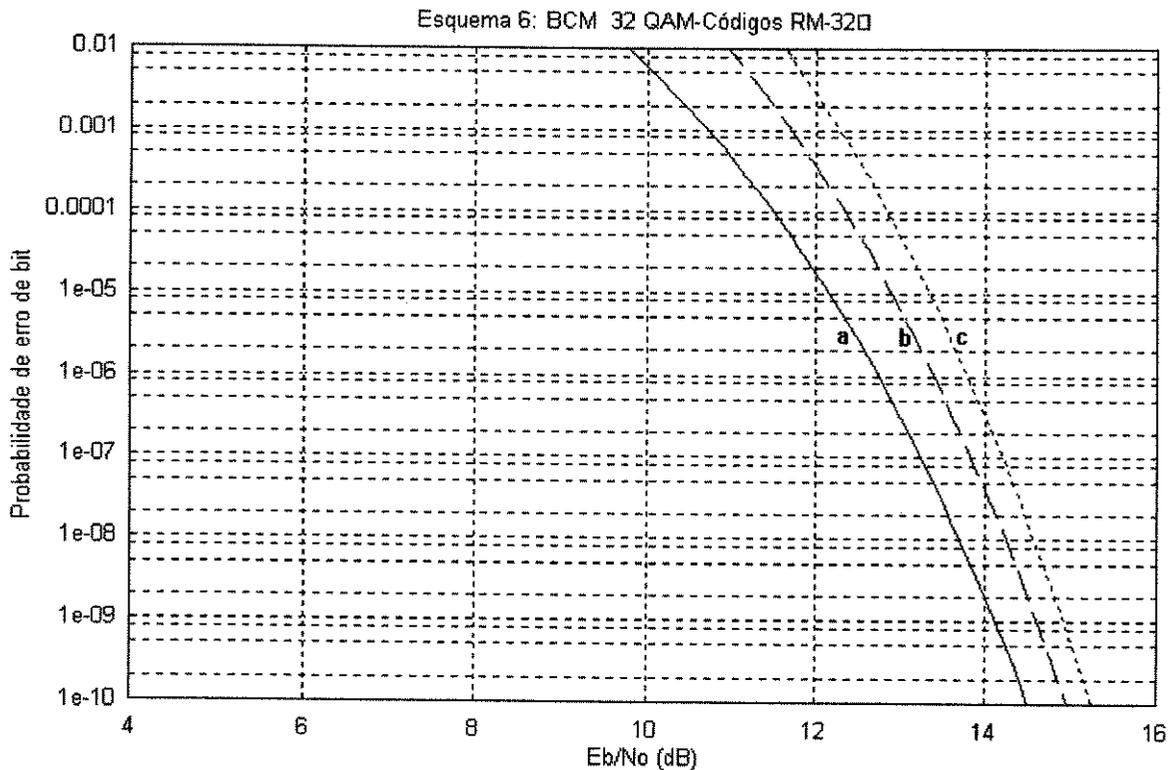


Figura 4-17 Probabilidades de erro de bit previstas para o Esquema 6: (a) limitante inferior; (b) valor esperado; (c) limitante superior

4.3.8. Esquema 7

Da mesma forma que no Esquema 4, este esquema é apresentado aqui com o objetivo de avaliar o ganho de codificação obtido com os dois esquemas anteriores.

Este é um esquema 32-QAM não codificado, que também tem sua probabilidade de erro de símbolo calculada pela Equação 4-14. Para o cálculo da probabilidade de erro de bit, devemos considerar que o número médio de vizinhos à distância mínima numa constelação 32-QAM (Cross) é 3.293, conforme pode ser observado na coluna “ x_j ” da Tabela 4-5, o que significa que são necessários no mínimo uma média de $\log_2(3.293)=1,932$ bits para distinguir sinais adjacentes. Admitindo novamente que a probabilidade de erro é quase que totalmente imposta por erros entre sinais adjacentes, afirmamos que é possível um mapeamento onde haja pelo menos 3 bits numa palavra de 5 que não variem nesta situação. Portanto, afirma-se que, em média, a cada sinal errado recebido que corresponde a 5 bits de informação, teremos 2 bits interpretados erroneamente. Isto nos permite escrever a probabilidade

de erro de bit em função da probabilidade de erro de símbolo da maneira mostrada abaixo.

$$P_{erro}(bit) \cong \frac{2}{5} P_{erro}(simbolo)$$

Equação 4-16

A Figura 4-18 apresenta a probabilidade de erro de bit estimada para este esquema.

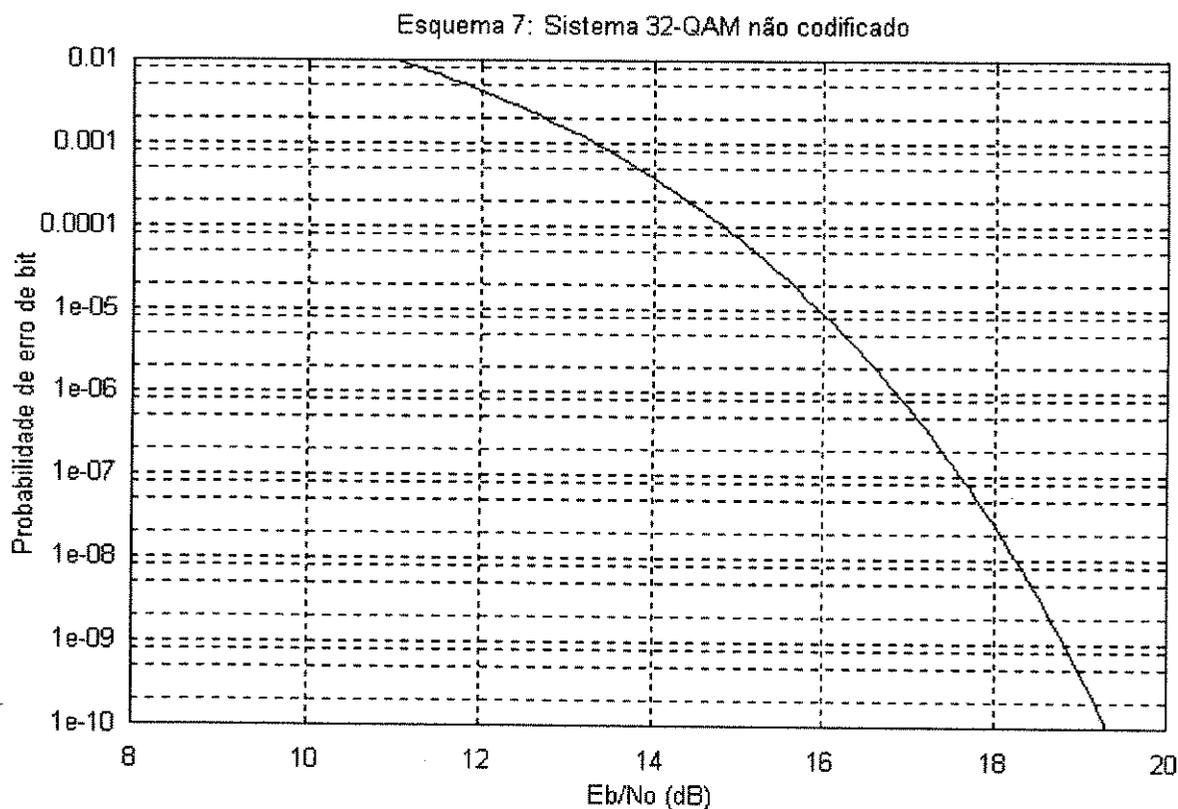


Figura 4-18 Probabilidade de erro de bit para um esquema 32QAM não codificado

4.3.9. Comparação dos Esquemas 5, 6 e 7

Com o objetivo de avaliar o ganho de codificação que pode ser proporcionado pelos três últimos esquemas, traçou-se aqui um gráfico comparativo, onde constam as curvas de probabilidade de erro média esperada para cada um destes esquemas. Estas curvas são apresentadas na Figura 4-19.

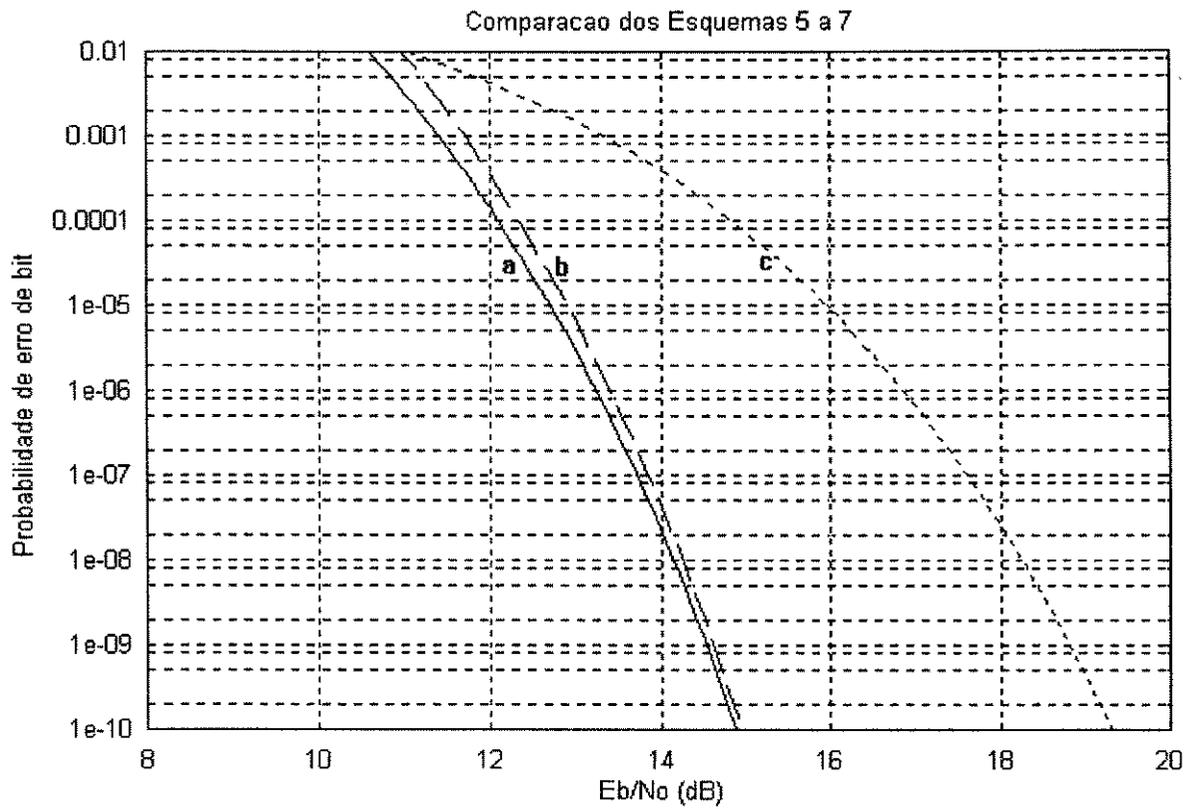


Figura 4-19 Comparação dos esquemas para 32-QAM: (a) Esquema 5; (b) Esquema 6; (c) Esquema 7

4.4.Comentários

Os esquemas estudados neste capítulo permitiram a observação de diversas características e parâmetros relevantes ao projeto de um sistema de modulação codificada. Consideradas as restrições existentes, estamos aptos a configurar uma proposta completa de esquema a ser adotado. Este será o objeto de estudo da próxima seção.

5. Avaliações e Simulações

5.1.O esquema adotado

Entre todos os esquemas avaliados no capítulo anterior, escolheu-se o **Esquema 6**, por atender à restrição de redundância imposta e pelo fato de seus códigos possuírem uma estrutura de treliça com simetrias que facilitam sua decodificação e permite decisão suave através do algoritmo de Viterbi.

O diagrama mostrando todos os elementos deste esquema consta da Figura 4-15 do capítulo anterior. Este sistema é composto por cinco níveis, sendo que aos níveis 1 e 2 aplica-se códigos de Reed-Muller (32,26,4) e (32,31,2), respectivamente. Os três últimos níveis não são codificados.

A Figura 5-1 mostra a partição adotada neste projeto, para uma constelação 32-QAM (em cruz). Neste caso $N=5$ e o mapeamento segundo os bits de cada nível (1o. nível correspondendo ao bit menos significativo) é apresentado.

	0	0	0	0	0
	29	16	9	12	
0	0	0	0	0	0
15	22	27	2	23	30
0	0	0	0	0	0
8	1	4	5	24	17
0	0	0	0	0	0
19	26	7	6	3	10
0	0	0	0	0	0
28	21	0	25	20	13
	0	0	0	0	
	14	11	18	31	

Figura 5-1 Mapeamento de uma constelação 32-QAM com invariância à rotação nos 3 bits MSB

Observe-se que, em conformidade com o que foi dito anteriormente, os três bits mais significativos de todos os sinais são protegidos contra rotação de fase, isto é, não variam se o sinal rodar de ângulos múltiplos de $\pi/2$. Por exemplo: O sinal de

rótulo 24, correspondente à palavra binária 11000, quando rodado de 90° à esquerda incide sobre o sinal de rótulo 27 que corresponde à palavra 11011. Os três bits mais significativos destas palavras não variaram, o que significa que apenas os dois bits restantes deveriam receber proteção contra a rotação de fase. Esta característica aliada à invariância dos códigos componentes (que normalmente serão aplicados justamente nos dois primeiros níveis), é a condição necessária para aplicação do método de combate à rotação de fase proposto em [PORTUG].

5.2.Sistema de Codificação utilizado no Primeiro Nível

O sistema de codificação do primeiro nível apresenta algumas peculiaridades quanto ao método utilizado nesta codificação. O código utilizado foi, na verdade, um código *equivalente* ao código de Reed Muller (32,26,4), que não apresenta, no entanto, o mesmo método de construção descrito no Capítulo 2 (através da matriz geradora composta por r submatrizes, sendo r a ordem do código. O método de codificação utilizado aqui foi descrito em [PORTG2].

Segundo este método, utiliza-se uma matriz geradora correspondente à matriz G(8,8) apresentada em [FORNEY], para gerar 4 palavras de 8 bits que, juntas constituirão uma palavra código de 32 bits. Ainda segundo [FORNEY], afirma-se que a geração de um código (32,26,4) pelo método que será descrito a seguir proporciona códigos de Reed-Muller (ou equivalentes) com estruturas de treliças muito interessantes para o processo de decodificação.

Como primeira etapa da tarefa de codificação, toma-se a informação na entrada do codificador e divide-se a mesma em blocos de 26 bits. A seguir realiza-se um mapeamento sobre estes 26 bits de modo que todos os bits desta palavra pertençam a um dos 8 vetores de tamanho 4 **b**₀ a **b**₇ que serão usados na codificação propriamente dita. Este mapeamento é mostrado na tabela a seguir:

i ₀	i ₁	i ₂	i ₃	i ₄	i ₅	i ₆	i ₇	i ₈	i ₉	i ₁₀	i ₁₁	i ₁₂	i ₁₃	i ₁₄	i ₁₅	i ₁₆	i ₁₇	i ₁₈	i ₁₉	i ₂₀	i ₂₁	i ₂₂	i ₂₃	i ₂₄	i ₂₅
b ⁰ ₀	b ⁰ ₁	b ⁰ ₂	b ⁰ ₃	b ¹ ₁	b ¹ ₂	b ¹ ₃	b ² ₁	b ² ₂	b ² ₃	b ⁰ ₄	b ⁰ ₅	b ⁰ ₆	b ⁰ ₇	b ¹ ₄	b ¹ ₅	b ¹ ₆	b ¹ ₇	b ² ₄	b ² ₅	b ² ₆	b ² ₇	b ³ ₄	b ³ ₅	b ³ ₆	b ³ ₇

Tabela 5-1 Mapeamento de uma palavra de informação (26 bits) para constituir os vetores **b**₀ a **b**₇ onde os bits {i₀,i₁,...i₂₅} compõem uma palavra (bloco) de informação de 26 bits.

Cada um dos vetores \mathbf{b}_0 a \mathbf{b}_7 possui 4 bits e faz parte de um código de tamanho

4. Assim, temos:

$\mathbf{b}_0 \in$ Código de Repetição (4,1,4);

$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ e $\mathbf{b}_3 \in$ Códigos de Paridade (4,3,2);

$\mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6$ e $\mathbf{b}_7 \in$ Conjunto de todas as 4-uplas (quádruplas), não codificado.

Desta descrição dos vetores, associado com o mapeamento apresentado na Tabela 5-1, os vetores \mathbf{b}_0 a \mathbf{b}_7 são diretamente obtidos (com volume de processamento insignificante). Esta obtenção é mostrada abaixo:

$$\mathbf{b}_0 = (b^0_0, b^1_0, b^2_0, b^3_0) = (i_0, i_0, i_0, i_0)$$

$$\mathbf{b}_1 = (b^0_1, b^1_1, b^2_1, b^3_1) = (i_1, i_4, i_7, p)$$

$$\mathbf{b}_2 = (b^0_2, b^1_2, b^2_2, b^3_2) = (i_2, i_5, i_8, p)$$

$$\mathbf{b}_3 = (b^0_3, b^1_3, b^2_3, b^3_3) = (i_3, i_6, i_9, p)$$

$$\mathbf{b}_4 = (b^0_4, b^1_4, b^2_4, b^3_4) = (i_{10}, i_{14}, i_{18}, i_{22})$$

$$\mathbf{b}_5 = (b^0_5, b^1_5, b^2_5, b^3_5) = (i_{11}, i_{15}, i_{19}, i_{23})$$

$$\mathbf{b}_6 = (b^0_6, b^1_6, b^2_6, b^3_6) = (i_{12}, i_{16}, i_{20}, i_{24})$$

$$\mathbf{b}_7 = (b^0_7, b^1_7, b^2_7, b^3_7) = (i_{13}, i_{17}, i_{21}, i_{25})$$

onde p é um bit de paridade obtido pela avaliação dos três bits que o antecedem, no caso dos vetores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ e \mathbf{b}_3 .

A codificação, propriamente dita, é o próximo passo e consiste em obter-se, para o conjunto de vetores acima, 4 conjuntos de 8 bits, que correspondem, cada um deles, ao produto de uma coluna (Ex. todos os bits da primeira posição nos vetores \mathbf{b}_0 a \mathbf{b}_7) pela matriz universal geradora $G(8,8)$ de [Forney]. Esta matriz é apresentada na Equação 5-1.

$$G(8,8) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Equação 5-1

Cada palavra código é obtida, portanto, a partir da seguinte expressão:

$$c = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0].b_0 + [1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0].b_1 + [1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0].b_2 + [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0].b_3 \\ + [1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0].b_4 + [1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0].b_5 + [1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0].b_6 + [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1].b_7$$

Equação 5-2

Os produtos apresentados na Equação 5-2 são definidos conforme equação abaixo:

$$\mathbf{u.v} = (v_0.\mathbf{u}, v_1.\mathbf{u}, \dots, v_n.\mathbf{u}) \quad \text{com} \quad v_i.\mathbf{u}: \begin{cases} \mathbf{0} & \text{se } v_i=0 \\ \mathbf{u} & \text{se } v_i=1 \end{cases}$$

Temos então palavras códigos de 32 bits geradas a partir dos 26 bits de informação originais, e com as propriedades de um código de Reed-Muller (32,26,4).

5.3. Previsão de desempenho

O esquema escolhido teve sua estrutura avaliada na seção anterior. A Tabela 4-5 apresenta um resumo com seus principais parâmetros de interesse, que foram utilizados no cálculo da probabilidade de erro em cada nível e no sistema global, através de método apresentado também naquela seção.

Estes resultados encontram-se na Figura 4-16 e na Figura 4-17, com resultados de probabilidades de erro de bit esperados em cada nível e no sistema global, respectivamente.

Pode-se prever o ganho de codificação esperado observando o gráfico da Figura 5-2, calculado também através do método proposto no Capítulo 4. Este gráfico compara a probabilidade de erro de bit esperada para o sistema a ser adotado e para

um sistema referência não codificado. Pode-se observar, por exemplo, quando a probabilidade de erro é de 10^{-4} que temos um ganho de codificação de aproximadamente 2.7dB. Este ganho aumenta para probabilidades de erro menores.

Para termos uma idéia de até quanto este ganho aumenta, vamos fazer um breve estudo sobre o ganho assintótico de codificação deste sistema.

Para um sistema de modulação 32-QAM (Cross) não codificado pode-se obter a distância Euclidiana mínima em função da energia transmitida por bit de informação, através de estudos apenas da estrutura da constelação. Esta relação é expressada por:

$$d_{min}^2 = E_b ; \quad (\text{esquema não codificado})$$

Equação 5-3

onde d_{min} é a distância Euclidiana mínima entre dois sinais da constelação

E_b é a energia transmitida por bit de informação

Para o esquema codificado proposto a distância Euclidiana equivalente mínima pode ser obtida na última coluna da Tabela 4-5, e seu valor é:

$$d_{min}^2 = 3.825E_b \quad (\text{esquema codificado})$$

Equação 5-4

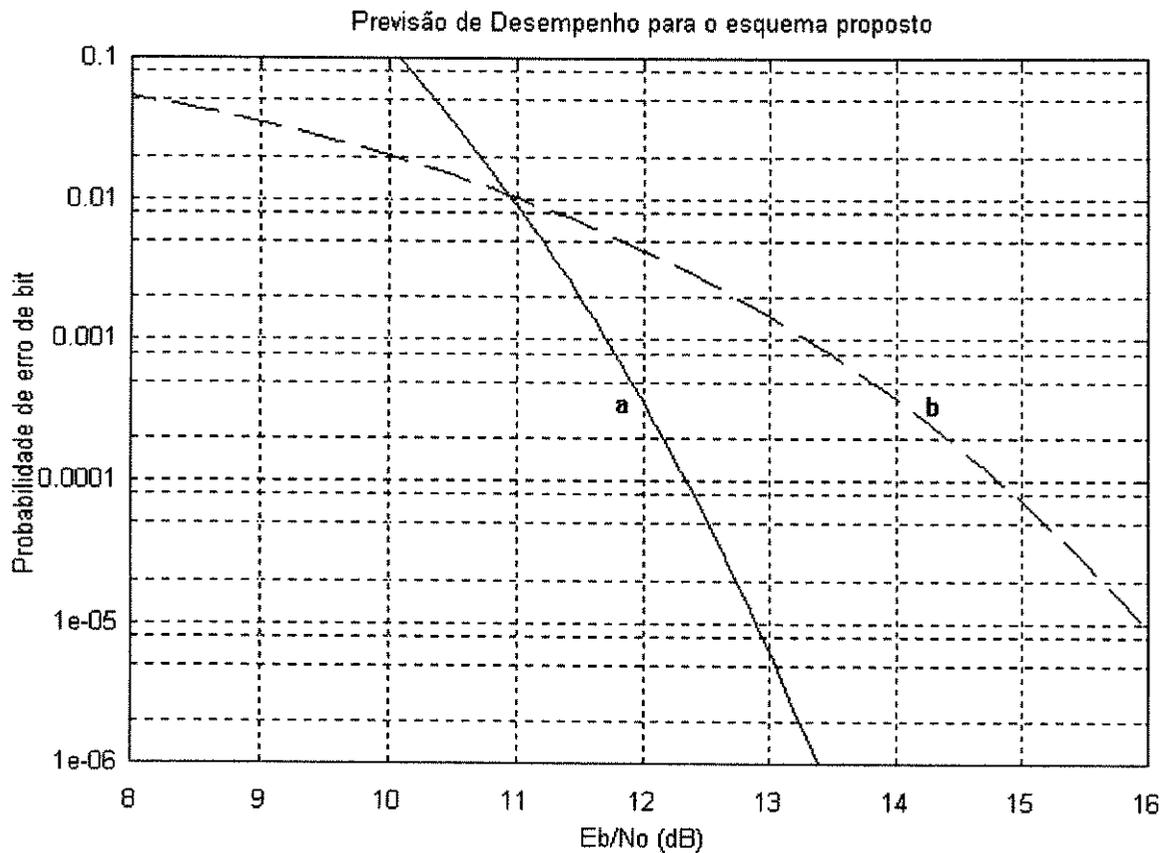


Figura 5-2 Probabilidades de erro estimadas para: (a) esquema proposto; (b) esquema de referência não codificado

Podemos fazer uma avaliação do ganho assintótico esperado a partir das relações obtidas da Equação 5-3, da Equação 5-4 e da expressão que define Ganho Assintótico (ganho de codificação do qual o sistema se aproxima à medida que a relação sinal-ruído tende a infinito):

$$g_{\infty} = 10 \log_{10} \left\{ \frac{\log M_c}{\log M_n} R_c \frac{d_c}{d_n} \right\}$$

Equação 5-5

onde: M_c e M_n são as dimensões das constelações utilizadas nos sistemas codificado e não codificado, respectivamente (neste caso, $M_c=M_n=32$);

R_c é a taxa de codificação global para o esquema ($R_c=153/160=0.95625$);

d_c e d_n são respectivamente as distâncias euclidianas mínimas do esquema codificado e não codificado. ($d_c=3.825E_b$ e $d_n=E_b$);

A partir dos valores obtidos, conclui-se que o ganho assintótico deste sistema, que é :5,6 dB.

5.4. Avaliação da Complexidade

A complexidade de implementação da decodificação (número de adições/comparações necessárias) do sistema proposto pode ser obtida das complexidades de implementação do primeiro e segundo estágios (ou níveis), já que nos estágios restantes não foi introduzida redundância e a decisão sobre os bits de informação transmitidos é obtida no pré-processamento (determinação do sinal mais próximo do sinal recebido para os subconjuntos da partição) feito nos estágios anteriores.

Como no segundo estágio temos um código de verificação de paridade, o algoritmo de Wagner [MICHEL] pôde ser utilizado. Segundo este algoritmo, é feita uma decisão abrupta para cada símbolo da palavra código, e se a paridade não for verificada, troca-se o bit menos confiável. A complexidade deste algoritmo é desprezível em relação à decodificação do código (32,26,4) do primeiro estágio.

Resta-nos, portanto, caracterizar a complexidade de implementação do primeiro estágio.

5.4.1. Complexidade do primeiro nível

O código (32,26,4) possui uma estrutura de treliça que foi descrita em [FORNEY]. Um estudo detalhado desta treliça reduz a complexidade de implementação através da exploração de simetrias inerentes à construção de um código de Reed-Muller [FORNEY]. Esta treliça consiste de duas treliças conectadas em paralelo, cada qual com 4 seções e oito estados (nós) por seção intermediária. A Figura 5-3 apresenta uma representação gráfica desta treliça. São utilizados 8 bits, $\{b_0, b_1, \dots, b_7\}$, para descrever completamente um ramo desta treliça. Como esta é composta de 4 seções, são utilizadas 4 palavras de 8 bits para descrever um caminho inteiro dentro desta treliça. Estas 4 palavras ou 32 bits são exatamente a palavra do código de Reed-Muller (32,26,4) utilizado, descrito de maneira adequada.

Segundo esta descrição, temos que o conjunto de bits b_0 destas palavras faz parte de um código de repetição (4,1,4), ou seja, é composto sempre de *uns* ou de

zeros. Os bits b_1, b_2 e b_3 fazem parte de códigos de paridade (4,3,2), isto é, constituem eles próprios um código de paridade em GF(8). Os bits b_4 a b_7 não apresentam codificação, sendo eles os elementos de GF(16). A treliça conforme apresentada na Figura 5-3 tem os seus ramos diferenciados para os diferentes valores de b_0, b_1, b_2 e b_3 . Cada um desses ramos é composto ainda de 16 transições paralelas determinadas pelos bits b_4 a b_7 . Esta composição é mostrada na Figura 5-4.

Para a decodificação deste nível, numa primeira etapa, realiza-se, em cada seção, a escolha da melhor métrica entre as 16 transições paralelas de cada ramo. Determina-se assim, os bits b_4 a b_7 mais prováveis de cada ramo, ou seja, os bits b_4 a b_7 mais prováveis para cada diferente combinação b_0 a b_3 (cada diferente ramo). O critério utilizado é a maximização da métrica equivalente de cada uma dessas transições paralelas. Este resultado é obtido com a escolha da subsequência de 8 sinais que apresentam maior métrica acumulada (soma) entre as 16 subsequências disponíveis em cada um dos ramos. Nesta etapa são realizados, portanto, 16 avaliações de métrica em cada um dos dezesseis ramos de cada uma das 4 seções da treliça, o que resulta num total de $16 \times 16 \times 4 = 1024$ comparações de métricas compostas cada uma pela soma de 8 métricas de sinais.

Na etapa seguinte temos então a treliça exatamente conforme o esquema mostrado na Figura 5-3, com os paralelismos de cada ramo já resolvidos. Agora a treliça comporta-se como se composta por transições simples, cujas métricas foram obtidas na etapa anterior.

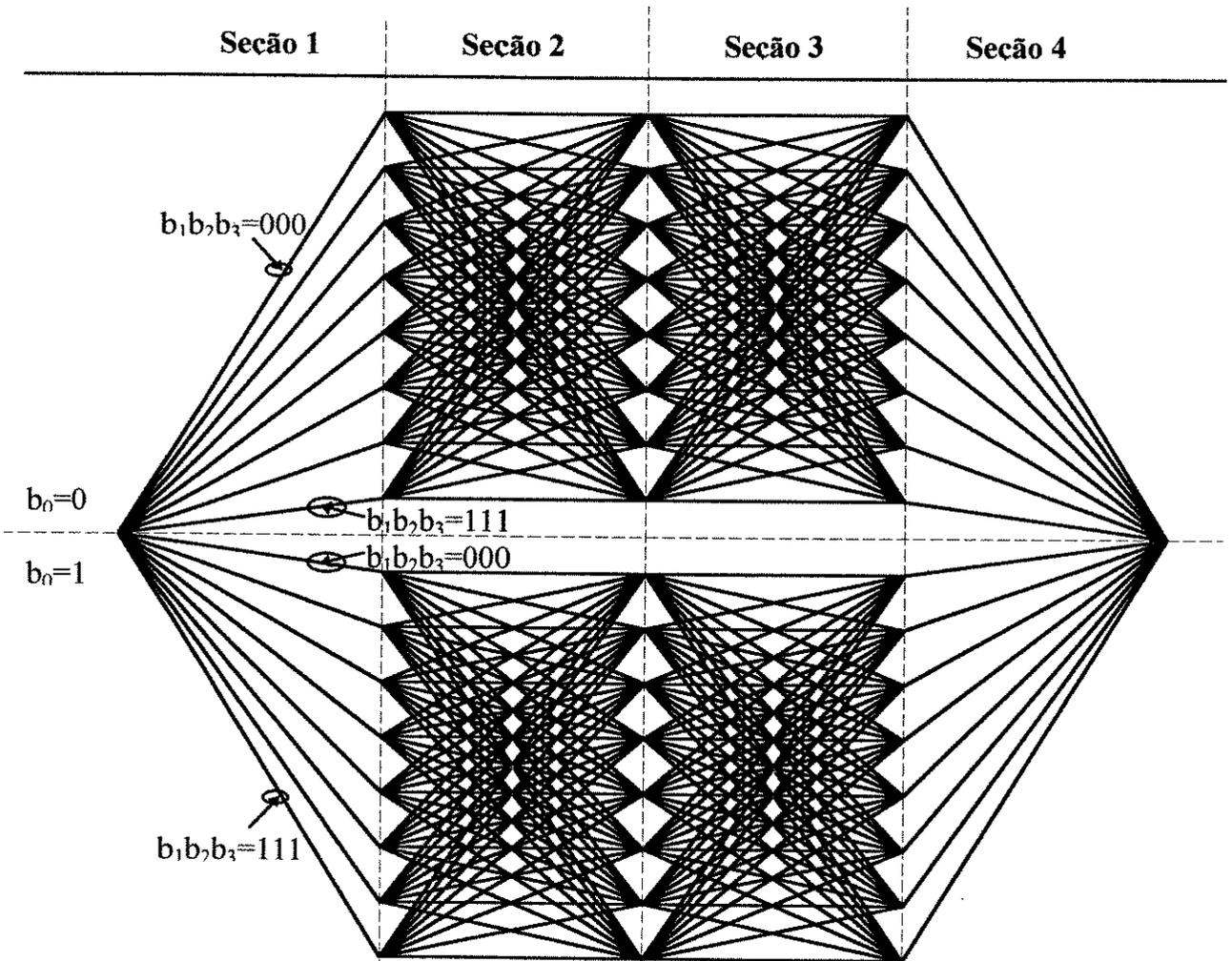


Figura 5-3 Treliça representando o código do nível 1, RM:(32,26,4), conforme descrita em [FORNEY]

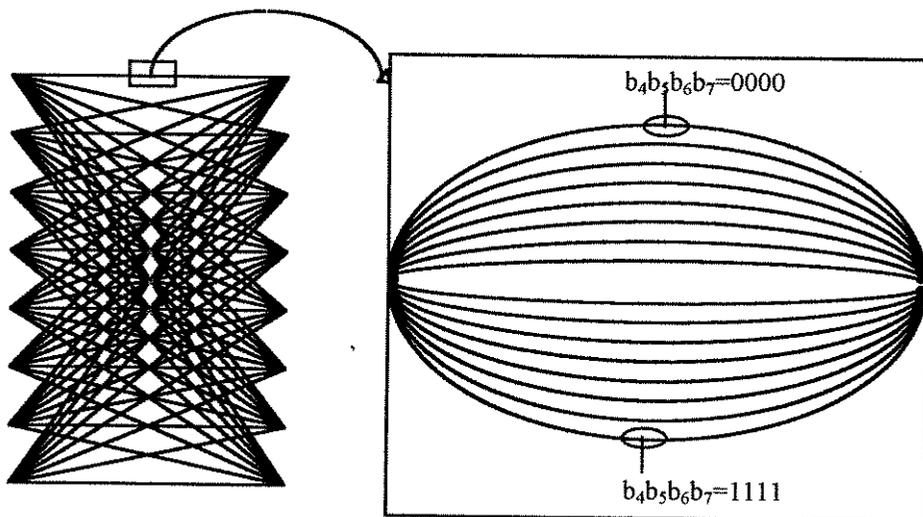


Figura 5-4 Paralelismo de 16 transições em cada ramo da treliça apresentada

Trabalha-se, então com duas treliças independentes, que são as metades inferior e superior da treliça apresentada. Para cada uma destas treliças realiza-se a decodificação dos códigos (4,3,2) que compoem os bits b_1, b_2 e b_3 das 4 seções,

comparando-se a métrica resultante de todas as combinações permitidas destes bits nesta treliça ou utilizando-se o algoritmo de Viterbi. Como resultado desta etapa, obtem-se, portanto, dois conjuntos de 12 bits (b_1 a b_3 para as 4 seções), acompanhados de suas métricas resultantes. Estes bits foram os escolhidos como mais prováveis para as seções superior e inferior da treliça. Associados aos 4 bits (b_4 a b_7) por seção já determinados na etapa anterior, temos até aqui 28 bits decodificados, ou, retirando-se as redundâncias, 25 bits de informação. Nesta etapa, temos um total de avaliações determinado pelo tamanho do código de paridade sobre GF(8) utilizado em cada subtreliça. Assim, utilizando-se a técnica de comparação de todas as sequências teríamos $2^9=512$ métricas comparadas, cada uma delas composta pela soma de 4 métricas (as métricas acumuladas para cada 8 sinais, calculadas na etapa anterior). Com o algoritmo de Viterbi haveria uma redução deste número de métricas para 273, para estes mesmos resultados (MLD para esta treliça).

De posse das palavras e métricas escolhidas para as seções superior e inferior, determina-se, finalmente os bits b_0 , em função da maior métrica encontrada. Este conjunto de bits (b_0 a b_7 para as 4 seções), determina de maneira única a palavra código e a informação enviadas, uma vez que, retirando-se as redundâncias de b_0 (3 bits), b_1 (1 bit), b_2 (1 bit) e b_3 (1 bit), temos exatamente os 26 bits de informação originais, sem a necessidade de qualquer processamento adicional.

Análises adicionais da complexidade de esquemas similares podem ser encontradas em [ZYABLOV], onde é feito um estudo completo da decodificação rápida por Máxima Verossimilhança (MLD) dos códigos de Reed-Muller. Alguns algoritmos subótimos são considerados, cuja perda em relação à MLD é desprezível.

5.5. Resultados de Simulações

O esquema conforme proposto na Figura 4-15 foi simulado em computador para diversos valores de relação sinal ruído. Também um sistema de modulação 32-QAM não codificado foi simulado. Os resultados são apresentados na Figura 5-5.

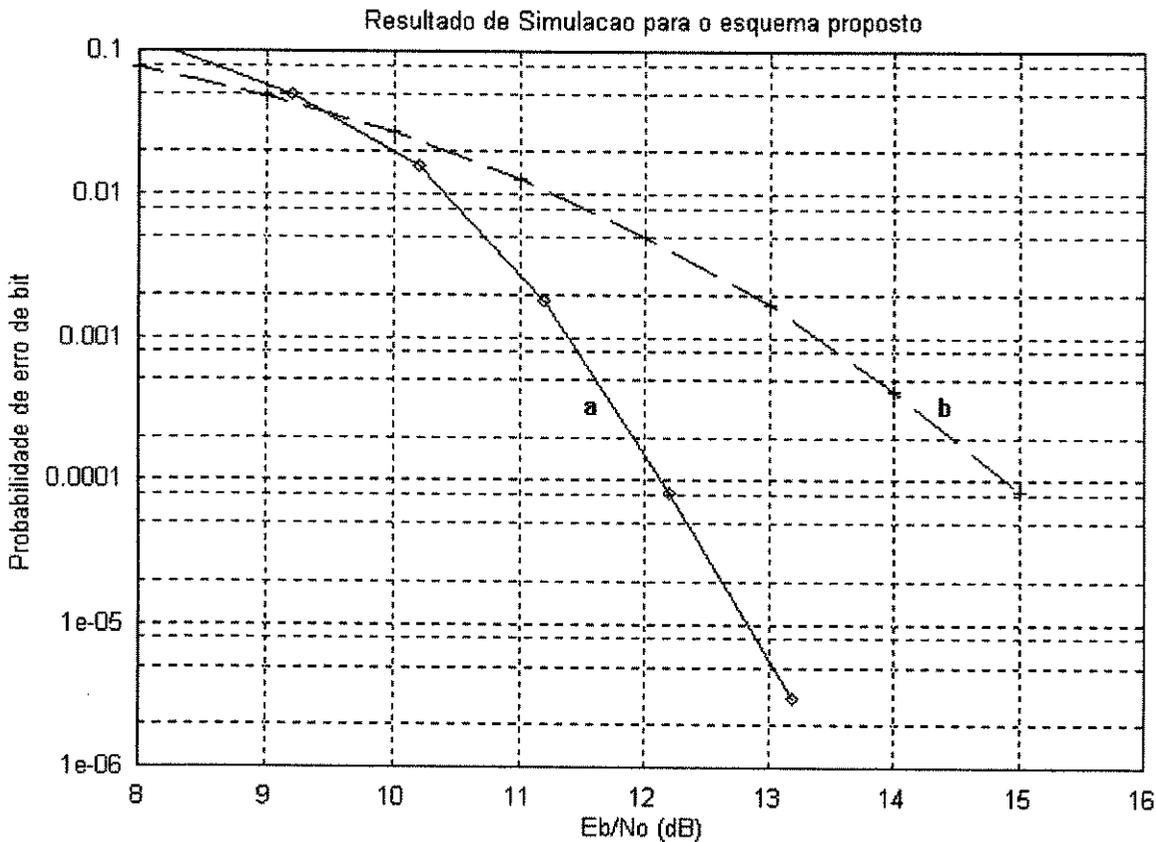


Figura 5-5 Resultados de Simulação para: (a) esquema proposto; (b) esquema não codificado

A partir destes resultados percebemos um ganho de codificação de aproximadamente 2.8 dB quando a probabilidade de erro está em 10^{-4} . Este ganho continua aumentando à medida que a probabilidade de erro diminui.

Um outro resultado importante da simulação é a comparação com as probabilidades de erro teóricas obtidas no capítulo anterior. Com essa comparação podemos avaliar o modelo desenvolvido no naquele capítulo, e confirmar a evolução teórica ali realizada.

5.6. Análise e Discussão dos Resultados

Na análise da Figura 5-6 chama à atenção o fato de que a curva de probabilidade estimada de erro de bit tem comprimento bem próximo ao da a curva de taxa de erro do sistema simulado. Esta importante observação nos permite afirmar que um modelo satisfatório de análise de desempenho de sistemas BCM foi desenvolvido.

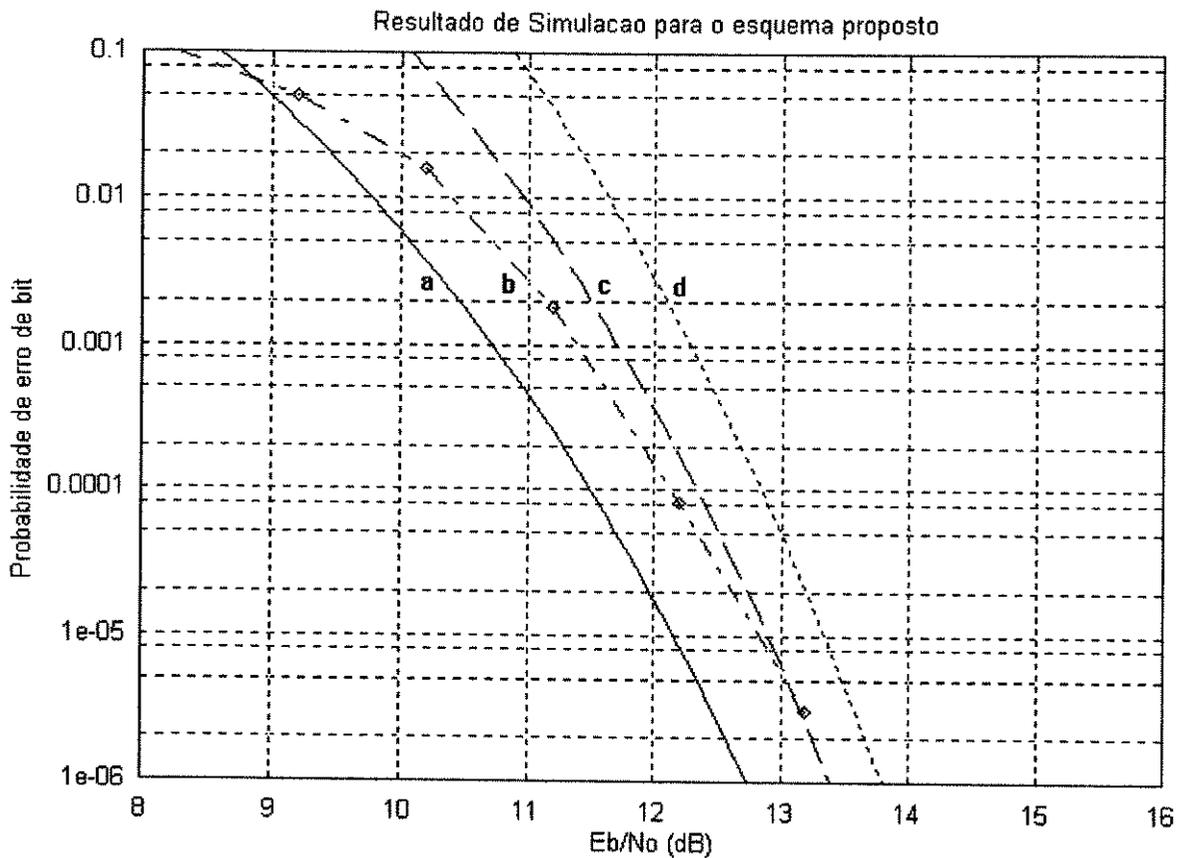


Figura 5-6 Comparação entre valores previstos e obtidos em simulação para o esquema escolhido: (a) limite inferior previsto (b) Simulação realizada (c) Valores médios estimados (d) Simulação de esquema 32-QAM não codificado

Este tipo de formulação é fundamental na viabilização de otimização do desenvolvimento de sistemas com modulação codificada.

A baixa redundância acrescentada permitiu, ainda assim, um ganho de codificação razoável, sem aumento da ocupação espectral.

O método de decodificação simulado procurou implementar todas as simplificações proporcionadas pela estrutura do código que estava sendo usado. Isto proporcionou uma economia de esforço computacional de fundamental importância na viabilização deste trabalho. Ao mesmo tempo, as propriedades e características da treliça simulada podem ser usadas na implementação do decodificador real, reduzindo em muito sua complexidade e por consequência seu custo.

6. Conclusões e Sugestões

6.1. Conclusões

Os sistemas de modulação codificada com códigos de bloco têm se tornado cada vez mais uma opção na busca pela eficiência de utilização dos canais de comunicação digital.

O projeto aqui desenvolvido e apresentado destina-se à configuração de modems via rádio, principalmente para transmissão de dados, motivo pelo qual não é essencial que se evite atrasos na recepção dos sinais. Isto permitiu a utilização de códigos de comprimento bastante longos, que seriam inadmissíveis em situações de transmissão de voz, por exemplo.

Uma outra consequência da aplicação deste projeto ser fundamentalmente transmissão de dados, é que as probabilidades de erro admissíveis estão na faixa de 10^{-6} . O ganho de codificação do projeto obtido nesta taxa de erros foi de aproximadamente 3,5 dB, o que é um resultado valioso se considerarmos o baixíssimo acréscimo de redundância com que se operou.

Como contribuições deste trabalho, vale salientar alguns itens:

- **Importância do método de cálculo de probabilidade de erro apresentado:**

Um modelo teórico de previsão de desempenho proposto inicialmente em literatura, foi estudado, adaptado e aplicado no decorrer deste trabalho. Este modelo mostrou-se confiável e de fácil aplicação, requisitos que tornam viáveis análises teóricas de esquemas de modulação codificada multinível, permitindo decisões fundamentais em etapas iniciais de projetos.

- **Previsibilidade das probabilidades de erro de bit:**

Foram obtidas, também neste trabalho, algumas aproximações para valores esperados de probabilidade de erro de bit, seja em sistemas com modulação codificada multinível (extensão do método mencionado no item anterior), seja em sistemas QAM não codificados (considerações de vizinhança para estimação de número médio de bits errados por símbolo).

- **Facilidade de implementação de algoritmos de invariância à rotação de fase:**

O conhecimento prévio da necessidade de implementação de proteção contra rotação de fase em etapas futuras deste projeto permitiu que fossem tomadas diversas providências no sentido de facilitar ao máximo esta tarefa. Para isto, um mapeamento adequado foi realizado e foram escolhidos códigos lineares e invariantes à rotação de fase (isto é, com a palavra toda “uns”) para os níveis não atingidos por este mapeamento. O custo extra necessário para implementação desta característica tornaria-se, então, mínimo.

A familiarização com os principais compromissos, limitações e vantagens envolvidos com os sistemas BCM foi um dos maiores produtos deste trabalho. Um modelamento teórico simples e preciso, como aquele apresentado aqui para avaliação de desempenho de tais sistemas, é ferramenta fundamental ao entendimento, aplicação e evolução desta técnica, que vem conquistando espaço dia-a-dia pelo seu desempenho inquestionável.

6.2. Sugestões para trabalhos futuros

Acredita-se que algum ganho extra pode ser obtido com **pequenas alterações na técnica de decodificação multi-estágio** “tradicional” utilizada aqui. Como exemplo pode-se citar os **algoritmos iterativos**, [SUNDBE], em que existe uma espécie de “realimentação” da informação decodificada nos níveis que necessitam de maior proteção. Existem diversas maneiras de se realizar estas iterações, e a exploração destas técnicas pode gerar resultados compensadores em termos de desempenho “versus” complexidade.

A **implementação da proteção de fase** em sistemas BCM também é outro ponto a ser explorado. Progressos incríveis têm sido alcançados na área de codificação de sinais, no entanto ainda hoje existem problemas de perda de fase após estabelecida a comunicação. A solução sugerida baseia-se em esquemas de codificação diferencial nos níveis não protegidos por mapeamento.

Bibliografia

- [BIGLIE] Biglieri, E., Divsalar, D., McLane, P. J. & Simon, M. K., "Introduction to Trellis-Coded Modulation with Applications", Macmillan Publishing Company, 1991.
- [PORTGH] Portugheis, J. & Hofmann, K. H., "Decomposable Block M-PSK Modulation Codes: An Approach to Handle the Phase Ambiguity Problem", Anais do 11º Simp. Bras. Telec., 6-10 setembro, 1993, Natal, RN, pp.192-196.
- [HENKEL] Henkel, W., & Koch, M., "90° Rotationally Invariant Multilevel Convolutionally Encoded QAM", European Trans. on Telecommun., vol. 4, no. 2, março-abril, 1993, pp. 141-147.
- [SOUZA] de Souza, A.H.M. e Bahamonde, I.R.A., "Possíveis Aplicações de Rádio Síncrono nas Faixas de Frequência normalmente utilizadas no Brasil", Anais do 11º Simp. Bras. de Telec., 6-10 setembro, 1993, Natal, RN, pp.772-777.
- [PESSOA] Pessoa, A.C.F. e Arantes, D.S., "Códigos de Bloco Multiestágios para Modulação Codificada Generalizada: Projeto e Resultados", Anais do 11º Simp. Bras. de Telec., 6-10 setembro, 1993, Natal, RN, pp.200-205.
- [FORNEY] Forney Jr., G.D. "Coset Codes - Part II: Binary Lattices and related Codes", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-34, Setembro, 1988, pp. 1152-1187, Parte II.
- [ZURBA1] Zurba, L.C., "Rádio Digital Síncrono a 51 Mbits/s", 1º Relatório, Convênio CPqD-Unicamp, fevereiro, 1994.
- [BLAHUT] Blahut, R.E., "Theory and Practice of Error Control Codes", Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1983.
- [ZURBA2] Zurba, L.C., "Rádio Digital Síncrono a 51 Mbits/s", 2º Relatório, Convênio CPqD-Unicamp, agosto, 1994.
- [POTTIE] Pottie, G.J. & Taylor, D. P., "Multilevel Codes based on Partitioning", IEEE Trans. on Inform. Theory, Vol. IT-35, janeiro, 1989, pp.87-98.

- [MICHEL] Michelson, A.M. e Levesque, A.H., "Error-Control Techniques for Digital Communication", John Wiley, 1985, p. 55.
- [ZYABLO] Zyablov, V.V. e Portnoi, S.L., "Fast Maximum - Likelihood Decoding of Reed-Muller Codes", PPI, vol.27, No.4, outubro-dezembro, 91, pp.39-50. Em Inglês: 1992, pp.307-317.
- [SUNDBE] SundBerg, C.-E. W., Seshadri, "Coded Modulations for Fading Channels: An Overview", European Trans. Telecommun., vol. 4, no. 3, , maio-junho, 1993, pp.309-324.
- [SAYEGH] Sayegh, S., " A Class of Optimum Block codes in Signal Space", IEEE Trans. on Comm., vol. COM-34, no.10, pp1043-1044, Oct. 1986.
- [PORTG2] Portugheis, Jaime, "Generalized Concatenated Codes for M-PSK Modulation", Tese de Doutorado, TH Darmstadt, Agosto, 1992.