



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE ENG. DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

Discriminação de Contornos Naturais Através da Análise de Decomposições Tempo-Escala-Frequência

Dissertação de Mestrado

Autor: **Leandro Augusto Loss**

Orientador: **Prof.Dr. Clésio Luis Tozzi**

Banca Examinadora: **Prof.Dr. Fernando José Von Zuben (FEEC/Unicamp)**

Prof.Dr. Rafael Santos Mendes (FEEC/Unicamp)

Prof.Dr. Roberto Marcondes César Júnior (IME/USP)

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

07 de julho de 2004

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

L898d	Loss, Leandro Augusto Discriminação de contornos naturais através da análise de decomposições tempo-escala-frequência / Leandro Augusto Loss. --Campinas, SP: [s.n.], 2004. Orientador: Clésio Luis Tozzi. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. 1. Reconhecimento de padrões. 2. Transformações (Matemática) 3. Plantas-Identificação. I. Tozzi, Clésio Luis. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.
-------	---

Resumo

Este trabalho objetiva a avaliação do potencial discriminativo de decomposições tempo-escala-frequência para o reconhecimento de formas naturais a partir de seus contornos. Mais especificamente, ele provê a análise e a comparação de descritores obtidos com base na Transformada de Fourier (FT), na Transformada de Fourier de Curta Duração (STFT), nas Transformadas de Wavelet Contínua (CWT) e Discreta (DWT), e na Transformada de Fourier Multiresolução (MFT).

Para tal fim, contornos de formas naturais são extraídos e parametrizados pelas assinaturas de coordenadas complexas e distância contorno-centróide. As transformadas citadas são então aplicadas sobre os contornos parametrizados, permitindo-se que, das decomposições resultantes, conjuntos de atributos numéricos sejam medidos e normalizados para aquisição das invariâncias quanto a rotação, reflexão, translação, mudança de escala e do ponto inicial de amostragem dos contornos. Procedimentos para redução de dimensionalidade e seleção dos atributos mais significativos são empregados, respectivamente, através da técnica de Análise de Variáveis Canônicas (CVA) e do algoritmo de Seleção Sequencial Inversa, obtendo-se os descritores das formas. Os classificadores estatísticos Mínima Distância Mahalanobis e Bayesiano são utilizados para discriminação das classes e os erros de decisão são estimados pelo método *Leave-One-Out*. Visando-se o aumento da capacidade discriminativa das abordagens, o trabalho prevê ainda a possibilidade de classificação das amostras de modo hierárquico.

O custo, a precisão e o potencial discriminativo das abordagens são analisados e comparados considerando-se resultados de experimentos realizados com uma base de folhas digitalizadas pertencentes a diferentes espécies de plantas. Dentre as abordagens testadas, as baseadas na Transformada de Fourier Multiresolução apresentaram os melhores resultados.

Palavras Chaves: *Descrição de Formas Naturais, Transformadas de Sinais, Decomposições Tempo-Escala-Frequência, Análise de Variáveis Canônicas, Classificação de Folhas.*

Abstract

This work aims to evaluate the discriminative potential of time-scale-frequency decompositions for contour-based recognition of natural shapes. More specifically, it provides the analysis and comparison of descriptors derived from the Fourier Transform (FT), the Short-Time Fourier Transform (STFT), the Continuous (CWT) and Discrete (DWT) Wavelet Transforms, and the Multi-Resolution Fourier Transform (MFT).

For this purpose, natural shapes contours are extracted and parameterized by the complex coordinates and the contour-centroid distance signatures. The mentioned transforms are then applied over the parameterized contours, allowing that, from the resulted decompositions, attributes sets be measured and normalised for invariance acquisition for rotation, reflection, translation, scale and contour sampling initial point changes. Procedures for dimensionality reduction and selection of the most significant attributes are employed, respectively, through the Canonical Variate Analysis technique and the Backward Sequential Selection, obtaining the shape descriptors. The statistical classifiers Minimum Mahalanobis Distance and Bayesian are used for class discrimination and the decision errors are estimated by the Leave-One-Out method. For the improvement of discriminative capability of the approaches, this work also permits a hierarchical classification of the samples.

The cost, accuracy and discriminative potential of the approaches are analysed and compared considering results of experiments developed over a base of digitalized leaves of different plant species. Among all tested approaches, those based on the Multi-Resolution Fourier Transform showed the best results.

Key Words: *Natural Shapes Description, Signal Transforms, Time-Scale-Frequency Decompositions, Canonical Variate Analysis, Leaves Classification.*

“Apenas a insensibilidade espiritual pode facultar
ao tipo comum o pensar-se realizado...”

Newton Boechat

Sumário

SUMÁRIO	v
1 Introdução	1
1.1 Descrição de Formas	3
1.2 Classificação de Formas	4
1.3 Reconhecimento de Formas Naturais	5
1.4 Objetivos do Trabalho	6
1.5 Organização do Trabalho	7
2 Descrição de Formas	9
2.1 Descritores Escalares	11
2.2 Assinaturas	12
2.2.1 Assinatura de Coordenadas Complexas	13
2.2.2 Assinatura Distância Contorno-Centróide	13
2.2.3 Assinatura de Curvatura	14
2.2.4 Assinatura Angular Acumulativa	14
2.3 Descritores de Fourier	14
2.3.1 A Transformada de Fourier	15
2.3.2 Propriedades da Transformada de Fourier	17
2.3.2.1 Linearidade	17

2.3.2.2	Inversão	17
2.3.2.3	Translação	18
2.3.2.4	Simetria Conjugada	18
2.3.3	Normalizações	18
2.3.3.1	Ponto Inicial de Amostragem	19
2.3.3.2	Rotação	20
2.3.3.3	Reflexão	21
2.3.3.4	Translação	22
2.3.3.5	Escala	23
2.3.3.6	Normalização Completa	25
2.4	Descritores Baseados na Transformada de Fourier de Curta Duração	25
2.4.1	A Transformada de Fourier de Curta Duração	29
2.4.2	Normalizações	30
2.4.2.1	Normalização Completa	33
2.5	Descritores de Wavelet	33
2.5.1	A Transformada de Wavelet Contínua	36
2.5.2	A Transformada de Wavelet Discreta	38
2.5.3	Normalizações	39
2.5.3.1	Normalização Completa	40
2.6	Descritores Baseados na Transformada de Fourier Multiresolução	40
2.6.1	Normalizações	43
2.6.1.1	Normalização Completa	45
3	Classificação de Formas	47
3.1	Redução de Dimensionalidade	49
3.1.1	Análise de Componentes Principais	50
3.1.2	Análise de Variáveis Canônicas	53

3.2	Seleção de Características	56
3.3	Métodos de Decisão Teórica	57
3.3.1	Classificadores de Distância Mínima	58
3.3.1.1	Distância Euclidiana	59
3.3.1.2	Distância Mahalanobis	59
3.3.2	Classificador de Bayes	61
3.4	Estimação de Erro	63
4	Reconhecimento de Formas Naturais	65
4.1	Metodologia dos Experimentos	66
4.1.1	Descrição Geral	67
4.1.2	Parametrizações	68
4.1.3	Medição de Atributos	68
4.1.4	Redução de Dimensionalidade	69
4.1.5	Estimação de Erro	69
4.1.6	Seleção de Características	73
4.2	Resultados	74
4.2.1	Transformada de Fourier	75
4.2.2	Transformada de Fourier de Curta Duração	79
4.2.3	Transformada de Wavelet Contínua	86
4.2.4	Transformada de Wavelet Discreta	93
4.2.5	Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea	100
4.3	Análise dos Resultados	106
5	Conclusões	109
A	Base de Dados <i>Iris</i>	112

B Folhas Utilizadas	114
Referências Bibliográficas	117

Capítulo 1

Introdução

Nas diversas aplicações científicas que envolvem processamento de imagens ou visão computacional, o reconhecimento de objetos através de imagens é geralmente necessário para o êxito da tarefa. Presente em diversas áreas, as aplicações de reconhecimento de formas são tão numerosas quanto a imaginação e a necessidade podem conceber, enquanto sua importância e complexidade variam de acordo com a aplicação. Em robótica, o reconhecimento de formas possibilita desde o simples desvio de obstáculos por robôs navegáveis, até a precisa localização de alvos por braços mecânicos. Em linhas de montagem de qualquer espécie, as técnicas de reconhecimento permitem a detecção automática de erros e a separação entre diferentes produtos. Em aplicações médicas, o reconhecimento de formas é potencialmente capaz de identificar macro e micro lesões, além de destacar regiões específicas do corpo humano, como células e órgãos. Fundamental em muitas áreas da Biologia, etapas importantes de diversas aplicações podem ser eficientemente automatizadas, possibilitando, por exemplo, a determinação e discriminação de espécies de plantas ou animais.

A tarefa de reconhecimento de formas pode ser dividida em três etapas: (1) aquisição e pré-processamento dos objetos; (2) descrição da forma dos objetos; e (3) classificação das amostras. A etapa de aquisição e pré-processamento compreende, principalmente, a digitalização de amostras e o processamento das imagens, visando, por exemplo, a segmentação e extração dos

contornos. A descrição é a etapa em que um conjunto de medidas é extraído de amostras de classes com o objetivo de representar-se cada classe através de atributos idealmente capazes de parametrizar o comportamento de seus indivíduos. Após a descrição da população, indivíduos podem ter seus atributos descritores comparados para determinar-se a qual agrupamento ou classe pertencem, caracterizando, assim, a etapa de classificação das amostras. Nesta etapa, considera-se, também, as técnicas responsáveis por reduzir e selecionar o melhor conjunto de atributos descritores, visto estarem diretamente relacionadas com o resultado da classificação. A Figura 1.1 ilustra o diagrama para um sistema de reconhecimento de formas, dividindo as etapas de acordo com os modos de operação: aprendizado e reconhecimento. Operando-se no modo de aprendizado, o sistema é responsável por projetar cada etapa do reconhecimento, utilizando para isso amostras para o treinamento. No modo de reconhecimento, o sistema deve ser capaz de receber uma amostra desconhecida e classificá-la de acordo com as definições do modo de aprendizado.

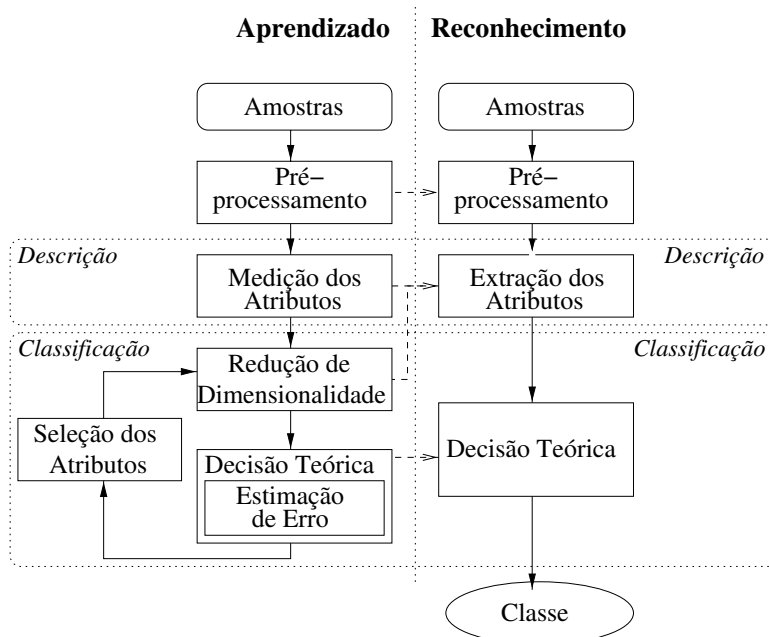


Figura 1.1: Diagrama para um sistema de reconhecimento de formas destacando as etapas de descrição e classificação das amostras e dividido de acordo com os modos de operação: aprendizado e reconhecimento.

1.1 Descrição de Formas

A descrição é a etapa do reconhecimento de formas responsável pela extração de características e representação dos objetos através de atributos numéricos. Em aplicações de reconhecimento de formas, esta representação numérica tem por objetivo possibilitar comparações e discriminações dos objetos. Descritores de formas são geralmente obtidos através da medição de um número adequado de características dos objetos, procurando-se representar de maneira única cada característica morfológica.

A complexidade da extração dos descritores de formas é fator que varia largamente. Descritores como área, perímetro, circularidade ($\text{perímetro}^2/\text{área}$), excentricidade (comprimento do maior eixo/comprimento do menor eixo), orientação do maior eixo, entre outros (Yong et al., 1974), apresentam-se como opções simples mas, geralmente, incapazes de discriminar além de formas muito distintas. Entretanto, esses descritores podem ser utilmente aproveitados como filtros para discriminação básica entre os objetos. Outros descritores, como momentos (Sonka et al., 1993) e energia (Costa e Júnior, 2000), permitem a extração de medidas globais ou locais, melhorando a eficiência da discriminação, mas sendo ainda insuficientes na maioria das aplicações. Apesar de ineficientes isoladamente, assim como os descritores mais simples citados, estes também são muito usados em conjunto com técnicas mais elaboradas.

As assinaturas de formas são métodos capazes de reduzir a complexidade do processo de reconhecimento de objetos bidimensionais, representando-os unidimensionalmente através da parametrização do contorno. Várias opções são encontradas na literatura, destacando-se, porém, as assinaturas distância contorno-centróide, de coordenadas complexas, de coordenadas polares, por curvatura, por ângulo tangente, por ângulo acumulativo e por comprimento de arco (Otterloo, 1991; Davies, 1997). Vantagens apresentadas pelas assinaturas estão relacionadas com a fácil normalização a translações e mudanças de escalas dos objetos. Entretanto, deslocamentos no eixo horizontal resultantes de rotações, reflexões e mudanças do ponto inicial de amostragem dos contornos, além da grande suscetibilidade à influência de ruídos, praticamente inviabilizam o uso

das assinaturas isoladamente, não impedindo, contudo, que se tornem base de vários descritores mais complexos, dentre eles, o Histograma de Assinatura (Squire e Caelli, 2000), o Espaço de Escala de Curvatura (Mokhtarian, 1996), os Descritores de Fourier (Zhang, 2002) e os Descritores de Wavelet (Antoine et al., 1997).

Especificamente através do uso de transformadas, diversas abordagens são propostas para extração de atributos descritores, seja aplicando-as no próprio objeto bidimensional segmentado, seja em algum tipo de parametrização do contorno. Dentre elas, as mais antigas e mais comentadas na literatura são, sem dúvida, as baseadas na Transformada de Fourier, cujos trabalhos de (Brill, 1968; Granlund, 1972; Persoon e Fu, 1977; Lin e Hwang, 1987; Rauber, 1994; Silva, 1996; Marine, 2000) são apenas alguns poucos exemplos de sua aplicação. Abordagens baseadas em outras transformadas, como a Transformada de Fourier de Curta Duração (Eichmann, 1990; Choi e Kim, 2000; Tzanetakis et al., 2001; Sepulveda, 2002) e, principalmente, a Transformada de Wavelet (Wunsch e Laine, 1995; Tieng e Boles, 1997; Yang et al., 1998; Ohm et al., 2000) também são dignas de destaque. Esta última por estar recebendo crescente atenção nos últimos anos.

1.2 Classificação de Formas

A classificação, como visto, é apenas uma das fases do reconhecimento de formas. Entretanto, é interessante ressaltar como ela é fundamental para o sucesso de todo o processo de reconhecimento. Se, por um lado, a etapa de determinação dos descritores inviabiliza o reconhecimento caso não sejam extraídas boas e suficientes características discriminantes das amostras, por outro lado, a escolha de uma abordagem de classificação inadequada às necessidades da aplicação e características da população pode prejudicar todo o empreendimento das fases anteriores de descrição, redução e seleção dos atributos, visto ser esta a etapa de decisão final em que uma amostra é rotulada como pertencente ou não a uma classe.

Dentre os diferentes métodos de classificação encontrados na literatura, os mais utilizados são os que empregam abordagens estatísticas. O objetivo geral destas abordagens é estabelecer

fronteiras de decisão entre as classes no espaço de atributos. Tais fronteiras são construídas, geralmente, com base em informações da localização dos centróides e dispersões de cada classe, que podem ser especificadas a priori ou determinadas por treinamento (Devroye et al., 1996). Alguns exemplos são os classificadores de mínima distância (Gonzalez e Woods, 1992) e o classificador Bayesiano (Duda e Hart, 1973). Outras informações, contudo, podem ser utilizadas para dedução das melhores fronteiras, como, por exemplo, critérios de erro médio (Vapnik, 1998) e correlação (Bajcsy e Kovacic, 1989).

Mais recentes e de interesse crescente nos últimos anos, as abordagens por redes neurais são caracterizadas pelo grande paralelismo de sistemas computacionais consistindo de um número de estruturas simples amplamente interconectadas. A família de redes neurais mais comumente utilizada em classificação de formas é a rede *feed-forward* (Jain et al., 1996), que inclui *perceptrons* multicamadas e redes de Funções de Base Radial (RBF), as quais são organizadas em camadas com conexões unidirecionais. Outras redes populares são os Mapas Auto-Organizáveis (Kohonen, 1995), cujo processo de aprendizado pode envolver atualizações da arquitetura de rede e dos pesos das conexões.

Apesar da aparente diferença de princípios entre as abordagens estatísticas e as redes neurais, muitos dos conhecidos modelos neurais são implicitamente equivalentes ou similares aos métodos de classificação estatística, assunto discutido em (Ripley, 1993).

1.3 Reconhecimento de Formas Naturais

Formas naturais são freqüentemente caracterizadas por grande variabilidade das amostras de uma mesma classe. Além disso, formas naturais são geralmente afetadas por essa variabilidade de modo imprevisível e ao longo de todo o contorno. Medidas descritoras desta variabilidade podem ser, de modo geral, representadas através de variáveis aleatórias. Com isso, sistemas para reconhecimento de formas naturais devem considerar, além de descritores adequados à separação das classes, abordagens de classificação capazes de tratar a característica aleatória dos atributos

medidos.

O reconhecimento de formas naturais tem sido objeto de interesse por muitos pesquisadores. Exemplos podem ser dados através dos trabalhos realizados para identificação de caracteres, classificação de plantas e reconhecimento de fala. Söderkvist (2001), por exemplo, objetiva a identificação de espécies de plantas do gênero *Acer* através de suas folhas pela aplicação dos métodos Espaço de Escala de Curvatura (CSS) e Transformada Circular Incremental (ICT). Silva (1996) busca a discriminação de folhas de plantas do gênero *Lonchocarpus* comparando a eficiência dos Descritores de Fourier com outras abordagens, como os Descritores Elípticos de Fourier e os Momentos. Wunsch e Laine (1995) utilizam os coeficientes da Transformada Discreta de Wavelet (DWT) para classificação de caracteres escritos à mão, destacando a dificuldade desta tarefa devido à grande variabilidade das formas, decorrentes dos diferentes estilos dos indivíduos. Rozman e Kodek (2003) pesquisam aplicações de reconhecimento de fala, utilizando a Transformada de Fourier de Curta Duração (STFT) para a classificação de fonemas pronunciados isoladamente e com interferência de ruídos.

1.4 Objetivos do Trabalho

Dado o imenso campo de pesquisa sobre reconhecimento de formas que, apesar de vastamente explorado há anos, ainda apresenta dificuldades e desafios que os sistemas computacionais apenas começam a desbravar, o objetivo deste trabalho é a aplicação e comparação dos resultados de algumas das técnicas conhecidas na literatura para discriminação de formas naturais. Mais especificamente, este trabalho visa a interpretação dos resultados obtidos por cinco transformadas, cujas decomposições “tempo-escala-frequência” dos contornos dos objetos permitem a medição de atributos em domínios potencialmente interessantes por explicitarem características antes não percebidas diretamente no domínio original dos objetos. As transformadas discutidas são a Transformada de Fourier, a Transformada de Fourier de Curta Duração, as Transformadas de Wavelet Contínua e Discreta e a Transformada de Fourier Multiresolução, abordagem adaptada para os

propósitos deste trabalho.

Conjuntos de atributos são medidos em cada domínio, reduzidos, selecionados e classificados por diferentes abordagens estatísticas, visando-se a obtenção de indicadores capazes de solucionar questões a respeito do custo e precisão de cada método. O custo está associado a questões computacionais e a precisão a taxas de classificações bem-sucedidas. Experimentos são realizados com conjuntos de folhas pertencentes a diferentes espécies de plantas, enquanto os resultados são comparados e comentados.

1.5 Organização do Trabalho

Este trabalho consiste em cinco capítulos, incluindo este. O capítulo corrente fez a introdução do tema a ser discutido nos capítulos seguintes, situando o leitor quanto aos principais problemas do reconhecimento de formas e apresentando uma pequena revisão dos principais métodos já propostos. O Capítulo 2 apresenta o processo de descrição de formas através do contorno, discutindo e exemplificando os descritores baseados em transformadas dos domínios “tempo-escala-frequência”. Métodos de redução de dimensionalidade, seleção de características, classificação das amostras e estimação do erro são apresentados no Capítulo 3, discutindo-se e exemplificando-se a classificação de padrões multivariados, isto é, com múltiplos atributos representativos para cada amostra. Ao Capítulo 4 são reservados os resultados da descrição e classificação de formas naturais através dos métodos apresentados nos capítulos anteriores. Os experimentos são realizados com amostras pertencentes a diferentes espécies de folhas. Nesse capítulo, os resultados dos diferentes domínios e abordagens são discutidos e comparados considerando-se o custo e a precisão de cada método testado. Finalmente, o Capítulo 5 faz um pequeno resumo dos resultados obtidos, concluindo o trabalho.

Apêndices foram incluídos com o intuito de amparar algumas discussões e resultados apresentados ao longo do trabalho. O Apêndice A replica a conhecida base de dados *Iris* (Fisher, 1936), a qual diversas vezes é utilizada a título de comparação entre as diferentes abordagens do Capítulo

3. Amostras das espécies de folhas utilizadas nos experimentos do Capítulo 4 são ilustradas, juntamente com a parametrização de seus contornos, no Apêndice B.

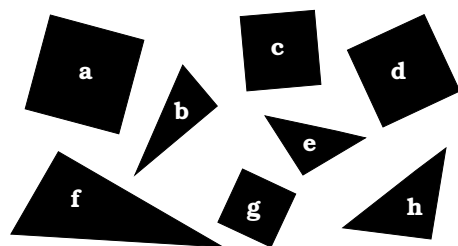
Capítulo 2

Descrição de Formas

Os *Descritores de Formas* permitem a representação dos objetos através de atributos numéricos. Em aplicações de reconhecimento de formas, esta representação numérica tem por objetivo possibilitar comparações e discriminações dos objetos. Os descritores de formas são geralmente obtidos através da medição de um número adequado de características dos objetos, procurando-se representar de maneira única suas características morfológicas. Um exemplo simples de descritor de forma é ilustrado na Figura 2.1. No exemplo, formas geométricas são descritas pelo número de lados. Como pode ser percebido, a informação sobre o número de lados do polígono é adequada para a discriminação entre triângulos e quadrados, porém, insuficiente para análises mais complexas de possíveis sub-grupos, como triângulos equiláteros e triângulos retângulos.

Além da adequabilidade em relação ao objetivo discriminatório, descritores de formas devem considerar a influência de possíveis transformações geométricas ou ruídos presentes nas imagens. A independência dos descritores de formas a tais transformações é conhecida por *invariância* e constitui-se a característica mais importante para a representação robusta de objetos.

As transformações geométricas potencialmente presentes em objetos digitalizados são a translação, rotação, reflexão e mudança de escala (Figura 2.2). No exemplo da Figura 2.1, o descritor de formas baseado nos lados das figuras geométricas pode ser considerado invariante a rotação, translação, reflexão e mudanças de escala que, por ventura, afetem os objetos.



Objeto	No. lados	Tipo
a	4	quadrado
b	3	triângulo
c	4	quadrado
d	4	quadrado
e	3	triângulo
f	3	triângulo
g	4	quadrado
h	3	triângulo

Figura 2.1: Exemplo de descritor para formas geométricas. O número de lados dos polígonos é usado para discriminação entre triângulos e quadrados.

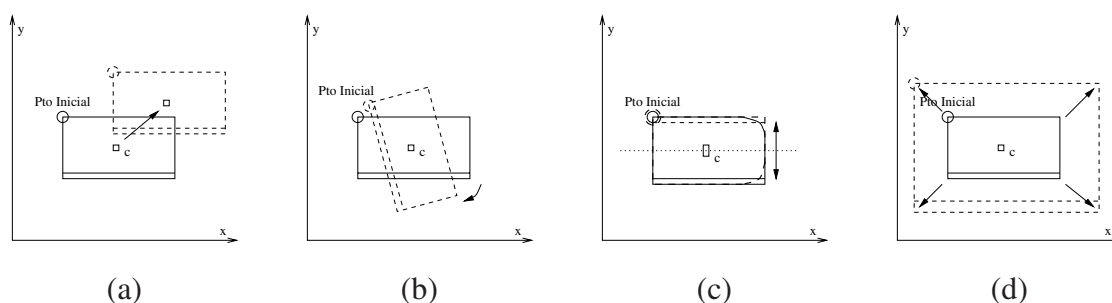


Figura 2.2: Transformações geométricas potencialmente presentes em objetos digitalizados. (a) Translação. (b) Rotação. (c) Reflexão. (d) Mudança de Escala.

Descritores de formas permitem duas possíveis abordagens: (1) representação de formas através da análise do interior, ou *conteúdo*, dos objetos; e (2) representação de formas através da análise da borda, ou *contorno*, dos objetos. Este trabalho considera apenas os descritores de formas baseados nos contornos dos objetos, ou simplesmente, *Descritores de Contornos*.

Descritores de contornos eficientes geralmente analisam contornos parametrizados, ou seja, representados por funções unidimensionais capazes de conservarem as características originais das bordas dos sinais bidimensionais. Tais funções unidimensionais, conhecidas por *Assinaturas*, embora preservem as informações locais dos contornos, são suscetíveis à influência de ruídos e geralmente difíceis de serem normalizadas quanto a rotação, reflexão e ponto inicial de amostragem

do contorno. A transformação dessas parametrizações em domínios distintos permite que as invariâncias sejam adquiridas e, principalmente, que características antes não percebidas diretamente no domínio original dos contornos sejam explicitadas. Os métodos de decomposição dos sinais em domínios diferentes são conhecidos por *Transformadas*. As Transformadas são largamente utilizadas em aplicações de reconhecimento de padrões. Diversos descritores baseiam-se em análises de domínios diferentes para aquisição de invariâncias e medição de características discriminativas dos objetos.

Neste capítulo são apresentados descritores de contornos baseados em quatro Transformadas utilizadas na literatura: a *Transformada de Fourier*, a *Transformada de Fourier de Curta Duração*, a *Transformada de Wavelet* e a *Transformada de Fourier Multiresolução*. Esta última foi adaptada visando-se maior eficiência em relação aos experimentos, sendo referenciada ao longo deste trabalho por *Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea*. Cada transformada analisada tem por característica um domínio específico decorrente da decomposição dos sinais por diferentes grandezas. Desta forma, os domínios da frequência, “tempo x frequência”, “tempo x escala” e “escala x frequência” são utilizados para medição de características e formação dos descritores. Abordagens comuns como as assinaturas e medidas escalares também são discutidas neste capítulo por serem geralmente combinadas aos descritores baseados em transformadas.

2.1 Descritores Escalares

Descritores escalares capturam as características globais dos objetos através de poucas medições imediatas. Entretanto, apesar de rápidos, eles são geralmente eficientes apenas na discriminação de formas muito diferentes, não sendo utilizados em objetos com diferenças mais sutis senão como filtros para posterior aplicação de descritores mais elaborados. Medidas como *área*, *perímetro*, *circularidade* ($\text{perímetro}^2/\text{área}$) e *excentricidade* (eixo maior/eixo menor), por exemplo, podem ser facilmente calculadas. Contudo, apesar de serem invariantes a rotação, reflexão, translação e ponto inicial de amostragem do contorno, falham por permitirem que objetos com

formas totalmente diferentes sejam representados com os mesmos atributos.

Medidas de *Energia* (equação (2.1)) ou *Entropia* (equação (2.2)) são, isoladamente, ineficientes na discriminação de formas, contudo úteis quando combinados, por exemplo, com alguns descritores baseados em transformadas, pois permitem o acompanhamento da quantidade de informação em cada etapa da decomposição. Nestas expressões, $x(t)$ representa um sinal e t sua parametrização.

$$Energia(x) = \sum_t |x(t)|^2 \quad (2.1) \quad Entropia(x) = - \sum_t x(t) \log x(t) \quad (2.2)$$

Os *Momentos Centrais*, definidos pela equação (2.3), são descritores globais que possuem interpretações físicas para cada ordem k calculada, caracterizando o centróide ($k = 1$) e a variância ($k = 2$) de um sinal, por exemplo. Novamente, $x(t)$ representa um sinal, t sua parametrização e $\bar{t}$ o ponto médio da parametrização. Por serem invariantes a escala, rotação e translação, são bastante populares, sendo, contudo, aplicados geralmente em conjunto com outros descritores devido à sua grande suscetibilidade a ruídos.

$$\mu^k = \sum_t (t - \bar{t})^k x(t) \quad (2.3)$$

2.2 Assinaturas

As *Assinaturas* são descritores caracterizados pelas representações unidimensionais obtidas pela parametrização de contornos bidimensionais. Além de preservarem as características locais da forma, as assinaturas podem tornar-se invariantes a mudanças de escala e translações dos objetos. Contudo, são difíceis de serem normalizadas quanto a rotação, reflexão e ponto inicial de amostragem dos contornos, além de apresentarem grande sensibilidade à presença de ruídos. Apesar de tais características inviabilizarem a utilização isolada das assinaturas em problemas mais complexos, esse descritor tem servido de base para várias outras abordagens, incluindo as baseadas em transformadas, justamente pela redução de complexidade e custo computacional resultante

da parametrização unidimensional.

Algumas abordagens para descrição de contornos através das assinaturas são ilustradas a seguir considerando-se que o contorno $[x(t), y(t)]$ ($t = 1, 2, 3, \dots, T$) já tenha sido extraído do objeto por algum algoritmo específico. Em muitos casos, o parâmetro t , referenciado simplesmente como *tempo* ao longo deste trabalho, pode representar o comprimento de arco, o ângulo ou a sequência de pixels amostrados do contorno.

2.2.1 Assinatura de Coordenadas Complexas

Uma das assinaturas mais simples e diretas é a Assinatura de Coordenadas Complexas, que requer simplesmente a composição do número complexo $z(t) = x(t) + y(t)j$. Contudo, para absorver variações de translação do objeto, essa assinatura é geralmente calculada em função de um ponto de referência, como, por exemplo, o centróide do objeto.

$$z(t) = [x(t) - x_c] + [y(t) - y_c]j \quad (2.4)$$

na qual

$$x_c = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x(t) \quad \text{e} \quad y_c = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y(t) \quad (2.5)$$

2.2.2 Assinatura Distância Contorno-Centróide

A Assinatura Distância Contorno-Centróide considera a distância Euclidiana entre a borda $[x(t), y(t)]$ e seu centróide (x_c, y_c) (equações (2.5)) para parametrização de contornos. Novamente, por ser obtida em função do centróide, esta abordagem é insensível a translações dos objetos.

$$d(t) = \sqrt{[x(t) - x_c]^2 + [y(t) - y_c]^2} \quad (2.6)$$

2.2.3 Assinatura de Curvatura

Definida como a diferença entre ângulos sucessivos, a Curvatura é utilizada como assinatura devido à sua insensibilidade a deslocamentos e rotações dos objetos. Desta forma, a curvatura $\kappa(t)$ em um ponto do contorno t é obtida por:

$$\kappa(t) = \theta(t) - \theta(t - 1) \quad (2.7)$$

na qual

$$\theta(t) = tg^{-1} \frac{y(t) - y(t - 1)}{x(t) - x(t - 1)} \quad (2.8)$$

2.2.4 Assinatura Angular Acumulativa

Embora a curvatura seja usualmente considerada, os próprios ângulos $\theta(t)$ (equação (2.8)) podem ser utilizados como assinatura. Contudo, descontinuidades de tamanho 2π ocorrem nesta função devido à limitação de valores assumidos por $\theta(t)$, que varia no intervalo $(-\pi, \pi)$. Com o intuito de resolver tal problema, Zahn e Roskies (1972) desenvolveram a Assinatura Angular Acumulativa, definida como a variação de direção do contorno $[x(t), y(t)]$ em relação a um ponto inicial $[x(0), y(0)]$.

$$\varphi(t) = [\theta(t) - \theta(0)] \bmod(2\pi) \quad (2.9)$$

2.3 Descritores de Fourier

A *Transformada de Fourier* é um operador matemático que decompõe um sinal espacial através de senóides e cossenóides, representando-o, assim, no domínio da frequência. A operação inversa existe de modo a combinar as senóides e cossenóides e reconstruir o sinal original. Os descritores baseados na Transformada de Fourier são comumente conhecidos por *Descritores de*

Fourier e sua idéia principal é a utilização dos componentes do sinal decomposto pela Transformada de Fourier para compor um vetor de características que represente unicamente cada sinal. Neste caso, a Transformada de Fourier é útil para reconhecimento de padrões visto que padrões distintos possuem diferentes espectros, enquanto padrões similares, mesmo quando afetados por ruídos, apresentam espectros semelhantes (Zhang, 2002).

A primeira definição para descritores baseados na Transformada de Fourier foi dada por Cosgriff (1960), sendo, contudo, refinada e desenvolvida posteriormente por Zahn e Groszky (1972), Granlund (1972) e Persoon e Fu (1977). Esses descritores podem ser utilizados na maioria das aplicações para reconhecimento de objetos baseado no contorno devido à possibilidade de representação da borda dos objetos por uma curva fechada, respeitando-se, assim, a condição de periodicidade para aplicação da Transformada de Fourier. Apesar de referir-se a um conjunto de métodos, é possível definir-se que, dado um sinal periódico e contínuo $x(t)$ que represente o contorno de um objeto, os coeficientes $X(\omega)$ de sua Transformada de Fourier podem ser considerados para a descrição deste objeto, sendo chamados, então, Descritores de Fourier (FD).

Apesar da Transformada de Fourier possibilitar a decomposição de formas bidimensionais diretamente, a parametrização de contornos em funções unidimensionais, reais ou complexas, são comuns entre os Descritores de Fourier devido à conseqüente redução de complexidade e custo computacional de obtenção dos coeficientes. A parametrização de contornos em funções unidimensionais ocorre em função das *Assinaturas*, discutidas na seção 2.2.

2.3.1 A Transformada de Fourier

Por definição, se um sinal temporal $x(t)$ tem energia finita¹, então $x(t)$ é unicamente determinado pela função transformada $X(\omega)$. O inverso é verdadeiro no sentido que, se a função transformada é conhecida, então $x(t)$ pode ser reconstruído. Esta correspondência única

¹Ou seja, $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ é finita.

$x(t) \iff X(\omega)$ é expressa pelo par de transformadas de Fourier direta e inversa:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.10)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.11)$$

A versão discreta da Transformada de Fourier é bastante útil para análise de sinais digitais e é definida, simplesmente, pela conversão das equações (2.10) e (2.11) em grandezas discretas. Para isso, $x(t)$ deve ser amostrada N vezes dentro do intervalo $[t_0, t_0 + T]$:

$$\begin{aligned} x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_{N-1}) = \\ x(t_0), x(t_0 + \Delta t), x(t_0 + 2\Delta t), \dots, x(t_0 + (N-1)\Delta t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

sendo $\Delta t = T/N$ o passo no domínio temporal. Assim, $x(t)$ pode ser amostrado por $x(n) = x(t_0 + n\Delta t)$ com $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ e a Transformada Discreta de Fourier para $x(n)$ será definida por:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2\pi j m n}{N}} \quad (2.13)$$

na qual $m = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Daí é possível deduzir que, inversamente:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) e^{\frac{2\pi j m n}{N}} \quad (2.14)$$

na qual $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Pode-se mostrar que, se o sinal $x(t)$ for identicamente nulo fora do intervalo $[t_0, t_0 + T]$ e o teorema da amostragem for respeitado, ou seja, se o sinal for limitado em frequência, a equação (2.13) constitui uma boa aproximação para as amostras do espectro, isto é, $X(m) \simeq X(m\Delta\omega)/\Delta t$. A relação entre o passo de amostragem $\Delta\omega$ no domínio da frequência e o passo de amostragem Δt no domínio temporal é dada pela expressão:

$$\Delta\omega = \frac{1}{N\Delta t} \quad (2.15)$$

A proporcionalidade inversa entre $\Delta\omega$ e Δt determina que, quanto maior for a resolução de um sinal no domínio temporal (Δt menor), menor será sua resolução no domínio da frequência ($\Delta\omega$ maior). É importante ressaltar-se também que quando se determina um deles, o outro será automaticamente calculado, não sendo possível variá-los independentemente.

2.3.2 Propriedades da Transformada de Fourier

Variações no sinal de entrada afetam seus componentes no domínio da frequência. Por tornarem algumas dessas variações previsíveis, as propriedades da Transformada de Fourier que permitem o estabelecimento de invariâncias para os descritores de formas são descritas nesta seção.

2.3.2.1 Linearidade

Seja a um escalar, a propriedade de *linearidade* da Transformada de Fourier é dada por:

$$ax(t) \Longleftrightarrow aX(\omega) \quad (2.16)$$

Essa propriedade indica que uma variação na amplitude do sinal no domínio temporal resulta em uma variação proporcional na amplitude dos componentes no domínio da frequência.

2.3.2.2 Inversão

A reflexão do sinal no domínio temporal é decorrente da operação $x(-t)$. Esta variação é referenciada como propriedade de *inversão* da Transformada de Fourier e é dada por:

$$x(-t) \Longleftrightarrow X(-\omega) \quad (2.17)$$

Disso resulta que a reflexão do sinal no domínio temporal causa a reflexão do espectro de frequência.

2.3.2.3 Translação

A propriedade de translação da Transformada de Fourier é dada por:

$$x(t - t_0) \iff X(\omega)e^{-j\omega t_0} \quad (2.18)$$

Isso significa que um deslocamento do sinal no domínio temporal resulta em mudança de fase no domínio da frequência.

2.3.2.4 Simetria Conjugada

A propriedade de simetria conjugada da Transformada de Fourier é dada por:

$$X(\omega) = X^*(-\omega) \quad (2.19)$$

no qual * corresponde à operação de complexo conjugado.

Desta forma, essa propriedade estabelece que coeficientes de Fourier simétricos entre si têm suas partes reais mantidas enquanto as partes imaginárias sofrem inversão de sinal.

2.3.3 Normalizações

O reconhecimento robusto de objetos exige que os descritores de contorno sejam *invariantes*, ou seja, insensíveis a potenciais transformações geométricas que afetam os objetos. Os procedimentos para tornarem os descritores independentes de tais transformações são chamados *Normalizações*. Através do conhecimento das propriedades da Transformada de Fourier, por exemplo, é possível tornar os descritores baseados nos coeficientes desta transformada invariantes às transformações geométricas de translação, rotação, reflexão, mudança de escala e do ponto inicial de amostragem dos contornos dos objetos.

Considerando-se a representação de um objeto digitalizado segundo as coordenadas de seu contorno $[x(t), y(t)]$ e seu centróide $[x_c, y_c]$, a assinatura distância contorno-centróide deste objeto

será dada por $d(t)^2 = [x(t) - x_c]^2 + [y(t) - y_c]^2$. O ponto inicial da amostragem do contorno ($t = 0$) é dependente da abordagem para extração da borda dos objetos. Ao longo deste trabalho, tal ponto foi atribuído à primeira coordenada, de cima pra baixo, da coluna de pixels mais à esquerda dos objetos. Dado que os Descritores de Fourier discutidos são obtidos através da decomposição dos contornos parametrizados, são mencionados, abaixo, as variações possivelmente presentes nas formas digitalizadas, as conseqüências de tais variações sobre as assinaturas distância contorno-centróide e os procedimentos para normalização dos coeficientes.

2.3.3.1 Ponto Inicial de Amostragem

Variações no ponto inicial de amostragem do contorno de objetos no espaço bidimensional, decorrentes das diferentes características morfológicas, resultam em um deslocamento temporal da assinatura (Figura 2.3).

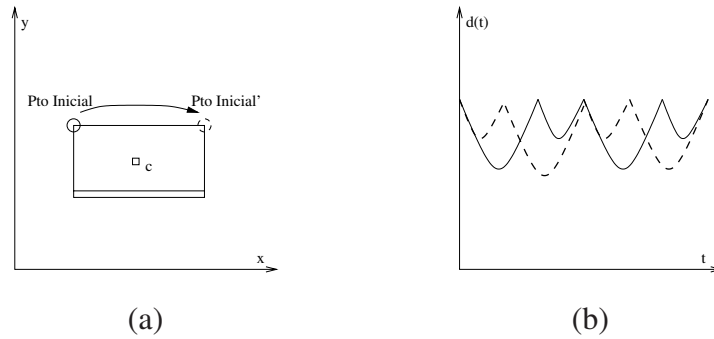


Figura 2.3: (a) Mudança do ponto inicial de amostragem do contorno do objeto no espaço bidimensional. (b) Assinatura Distância Contorno-Centróide do objeto.

Desta forma, a assinatura distância contorno-centróide do objeto nas novas coordenadas será dada por $d'(t - t_0)^2 = [x(t - t_0) - x_c]^2 + [y(t - t_0) - y_c]^2$. Ao observar-se a propriedade de Translação (ver seção 2.3.2.3) da Transformada de Fourier, que prevê $x(t - t_0) \iff X(\omega)e^{-j\omega t_0}$, é possível verificar-se que o deslocamento t_0 em $x(t)$ resulta no aparecimento do termo $e^{-j\omega t_0}$ em $X(\omega)$. Entretanto, expandindo-se este termo em seus componentes de magnitude e fase, obtém-se:

$$\begin{aligned}
|X(\omega)e^{-j\omega t_0}| &= |X(\omega)| \cdot |e^{-j\omega t_0}| & \angle X(\omega)e^{-j\omega t_0} &= \angle X(\omega) + \angle e^{-j\omega t_0} \\
&= |X(\omega)| & &= \angle X(\omega) - \omega t_0
\end{aligned}$$

Assim, é possível verificar-se que as magnitudes dos coeficientes da Transformada de Fourier não são alteradas pela influência de t_0 , concluindo-se que os descritores formados pelas magnitudes dos coeficientes da Transformada de Fourier são invariantes a mudanças do ponto inicial de amostragem dos contornos dos objetos.

2.3.3.2 Rotação

A rotação de um objeto no espaço bidimensional por um ângulo θ causará a transformação das coordenadas de seu contorno para $[x(t)\cos\theta - y(t)\sin\theta, x(t)\sin\theta + y(t)\cos\theta]$ e de seu centróide para $[x_c\cos\theta - y_c\sin\theta, x_c\sin\theta + y_c\cos\theta]$. Conseqüentemente, a assinatura distância contorno-centróide do objeto nas novas coordenadas será dada por $d'(t)^2 = [(x(t)\cos\theta - y(t)\sin\theta) - (x_c\cos\theta - y_c\sin\theta)]^2 + [(x(t)\sin\theta + y(t)\cos\theta) - (x_c\sin\theta + y_c\cos\theta)]^2$. Entretanto, expandindo-se esta expressão, obtém-se:

$$\begin{aligned}
d'(t)^2 &= x(t)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - y(t)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + x_c^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + y_c^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \\
&\quad -2x(t)x_c(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 2y(t)y_c(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 2x(t)y(t)\cos\theta\sin\theta - 2x(t)y(t)\cos\theta\sin\theta + \\
&\quad +2x(t)y_c\cos\theta\sin\theta - 2x(t)y_c\cos\theta\sin\theta + 2x_cy(t)\cos\theta\sin\theta - 2x_cy(t)\cos\theta\sin\theta + 2x_cy_c\cos\theta\sin\theta + \\
&\quad -2x_cy_c\cos\theta\sin\theta \\
d'(t)^2 &= x(t)^2 - 2x(t)x_c + x_c^2 + y(t)^2 - 2y(t)y_c + y_c^2 \\
d'(t)^2 &= (x(t) - x_c)^2 + (y(t) - y_c)^2 \\
d'(t)^2 &= d(t)^2
\end{aligned}$$

Através desse resultado, pode-se concluir que possíveis rotações que afetem o objeto no espaço bidimensional não influenciam sua assinatura distância contorno-centróide, desde que não sejam suficientes para alterar a posição do ponto inicial de amostragem do contorno. Caso isso ocorra, as normalizações quanto ao ponto inicial de amostragem, descritos na seção 2.3.3.1, devem também ser adotadas, tornando os descritores baseados nas magnitudes dos coeficientes da Transformada de Fourier invariantes a rotações dos objetos (Figura 2.4).

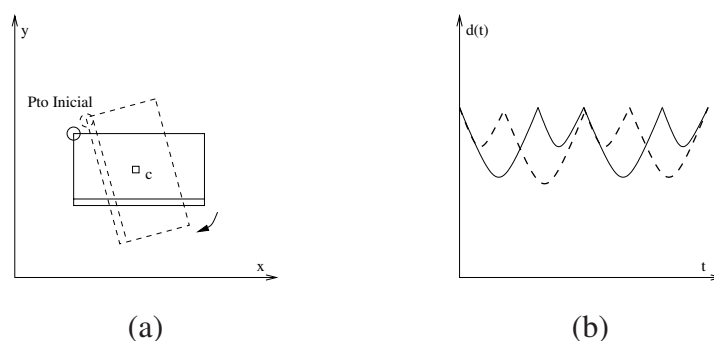


Figura 2.4: (a) Rotação do objeto no espaço bidimensional. (b) Assinatura Distância Contorno-Centróide do objeto.

2.3.3.3 Reflexão

A reflexão de objetos no espaço bidimensional ocorre frequentemente pela digitalização ou visualização da forma pelo lado reverso. Essa variação resulta em inversões das parametrizações e, possivelmente, em mudança do ponto inicial de amostragem do contorno (Figura 2.5).

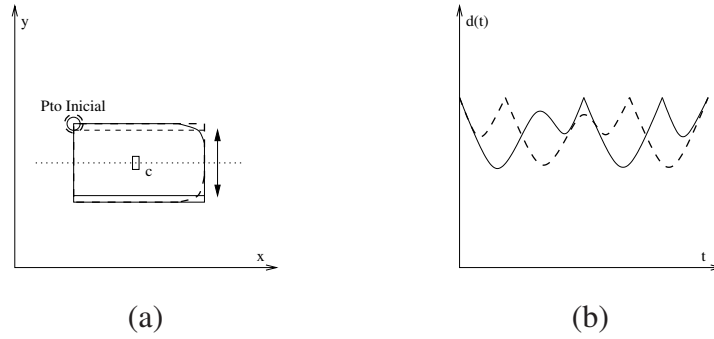


Figura 2.5: (a) Reflexão do objeto no espaço bidimensional. (b) Assinatura Distância Contorno-Centróide do objeto.

A influência da mudança do ponto inicial de amostragem do contorno já foi analisada na seção 2.3.3.1. A inversão da assinatura pode ser analisada através da propriedade de Inversão da Transformada de Fourier (ver seção 2.3.2.2). Essa propriedade estabelece que a inversão de um sinal $x(-t)$ causará a consequente inversão de seu espectro de Fourier $X(-\omega)$. Contudo, calculando-se a magnitude de $X(-\omega)$:

$$\begin{aligned}
 |X(-\omega)| &= \sqrt{\text{Re}(X)^2 + (-\text{Im}(X))^2} \\
 &= \sqrt{\text{Re}(X)^2 + \text{Im}(X)^2} \\
 &= |X(\omega)|
 \end{aligned}$$

verifica-se que os descritores baseados nas magnitudes dos coeficientes da Transformada de Fourier são invariantes à reflexão do objeto no espaço bidimensional.

2.3.3.4 Translação

A translação de um objeto no espaço bidimensional causará a transformação de suas coordenadas para $[x_t + \Delta_x, y_t + \Delta_y]$ e do seu centróide para $[x_c + \Delta_x, y_c + \Delta_y]$. Consequentemente, a assinatura distância contorno-centróide do objeto nas novas coordenadas será dada por $d'(t)^2 = [(x(t) + \Delta_x) - (x_c + \Delta_x)]^2 + [(y(t) + \Delta_y) - (y_c + \Delta_y)]^2$, de cuja expansão obtém-se:

$$d'(t)^2 = [(x(t) + \Delta_x) - (x_c + \Delta_x)]^2 + [(y(t) + \Delta_y) - (y_c + \Delta_y)]^2$$

$$d'(t)^2 = [x(t) - x_c + (\Delta_x - \Delta_x)]^2 + [y(t) - y_c + (\Delta_y - \Delta_y)]^2$$

$$d'(t)^2 = [x(t) - x_c]^2 + [y(t) - y_c]^2$$

$$d'(t)^2 = d(t)^2$$

Através desse resultado, pode-se concluir que possíveis translações que afetem o objeto no espaço bidimensional não influenciam sua assinatura distância contorno-centróide, tornando os descritores baseados nessa parametrização invariantes à translação, sem a necessidade de procedimentos subseqüentes (Figura 2.6).

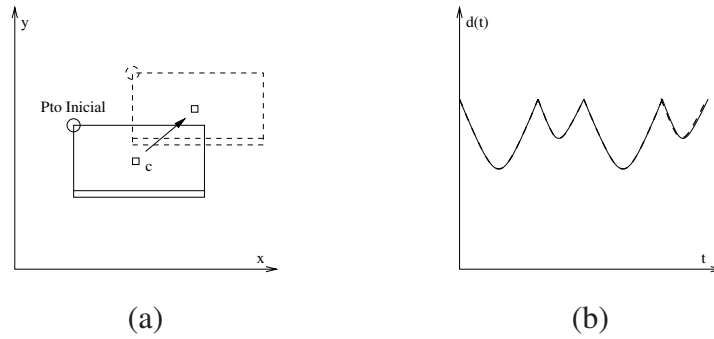


Figura 2.6: (a) Translação do objeto no espaço bidimensional. (b) Assinatura Distância Contorno-Centróide do objeto.

2.3.3.5 Escala

A mudança de escala do objeto no espaço bidimensional causará o deslocamento radial das coordenadas do contorno em relação ao centróide e , conseqüentemente, uma variação em amplitude da assinatura distância contorno-centróide do objeto. A assinatura do novo objeto será dada, assim, por $d'(t)^2 = \alpha d(t)^2$, sendo α o fator de escala aplicado ao objeto (Figura 2.7).

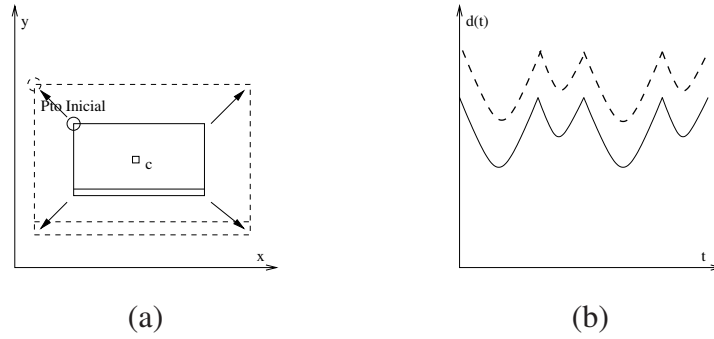


Figura 2.7: (a) Mudança de escala do objeto no espaço bidimensional. (b) Assinatura Distância Contorno-Centróide do objeto.

Existem duas formas para tornar os Descritores de Fourier aplicados sobre a assinatura distância contorno-centróide invariantes à mudança de escala do objeto:

– *Normalização da Parametrização*: Este método baseia-se na divisão da parametrização $\alpha d(t)^2$ por seu máximo valor ($\max\{\alpha d(t)^2\}$). Desta forma, através de

$$\dots, \frac{\alpha d(t-1)^2}{\max\{\alpha d(t)^2\}}, \frac{\alpha d(t)^2}{\max\{\alpha d(t)^2\}}, \frac{\alpha d(t+1)^2}{\max\{\alpha d(t)^2\}}, \dots$$

elimina-se a influência do fator de escala α , tornando os descritores baseados na assinatura distância contorno-centróide invariantes a mudanças de escala.

– *Normalização dos Coeficientes de Fourier*: O segundo método baseia-se na propriedade de Linearidade (ver seção 2.3.2.1) da Transformada de Fourier. Essa propriedade prevê que $ax(t) \iff aX(\omega)$. Desta forma, ao dividir-se todos os coeficientes de Fourier $\alpha X(\omega)$ pelo seu componente DC ($\alpha X(0)$), tem-se:

$$\dots, \frac{\alpha X(\omega-1)}{\alpha X(0)}, \frac{\alpha X(\omega)}{\alpha X(0)}, \frac{\alpha X(\omega+1)}{\alpha X(0)}, \dots$$

procedimento que elimina a influência do fator de escala α , tornando os Descritores de Fourier baseados na assinatura distância contorno-centróide invariantes a mudanças de escala. É importante

notar-se que, após este procedimento, o componente DC pode ser descartado por tornar-se igual a 1 em todos os descritores.

2.3.3.6 Normalização Completa

Dado que os procedimentos para normalização discutidos acima não são conflitantes, é possível tornar os descritores de Fourier baseados na assinatura distância contorno-centróide invariantes a todas as potenciais variações presentes nos objetos. O procedimento completo é:

- Para aquisição da invariância quanto à mudança de escala, dividem-se todos os coeficientes pelo componente $X(0)$, podendo-se descartar, conseqüentemente, esse componente da descrição;
- Para aquisição das invariâncias quanto a rotação, reflexão e mudança do ponto inicial de amostragem, basta utilizar-se as magnitudes dos coeficientes que, ao considerar-se a normalização à mudança de escala, tornam-se $|\frac{X(\omega)}{X(0)}|$.

2.4 Descritores Baseados na Transformada de Fourier de Curta Duração

A Transformada de Fourier é uma poderosa ferramenta de análise e interpretação de sinais espaciais no domínio da frequência. Entretanto, sua definição por todo o intervalo $(-\infty, \infty)$ do domínio temporal, não permite a determinação das relações tempo-componente espectral. Ou seja, a equação (2.10) descreve globalmente o conteúdo espectral de um sinal, não permitindo que sinais que apresentam conteúdo espectral semelhante, mas em locais distintos, sejam diferenciados.

Existem diversos sinais que apresentam tal característica. Seja como exemplo uma melodia. Uma análise deste sinal pela Transformada de Fourier permite que sejam determinados, no domínio da frequência, quais notas musicais foram tocadas. Contudo, a determinação do tempo e da duração de cada nota torna-se impossível.

A solução natural para tal problema é o isolamento de pequenas seções do sinal e a decom-

posição em frequências dessas seções de forma independente. Assim, se ao invés de se decompor toda a melodia de uma só vez for utilizada uma janela que isole pequenos trechos da melodia, eliminando ou atenuando drasticamente seu entorno, uma análise do espectro resultante permitiria que, além das notas musicais presentes na melodia, suas localizações e durações também pudessem ser determinadas de acordo com a posição e largura da janela. Esta abordagem é conhecida por Transformada de Fourier de Curta Duração (STFT).

A aplicação da Transformada de Fourier de Curta Duração consiste na sucessiva multiplicação do sinal por uma função janela, centrada em diferentes locais, que é, tipicamente, não-zero apenas em uma determinada região em torno de seu centro. A seleção da função janela, que também é conhecida por *filtro de análise* ou *janela de análise*, é o foco principal desta transformada. Além da característica de ser zero fora da região de interesse, é recomendável que a função janela seja de amplitude unitária dentro da região de interesse, de forma a não embutir mais energia na transformação. A função mais simples que satisfaz esta consideração é a função retangular. Entretanto, as transições bruscas entre os dois estados ($0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$) da função janela cortarão repentinamente o sinal, introduzindo componentes de alta frequência no espectro e influenciando demasiadamente o seu resultado (Figura 2.8).

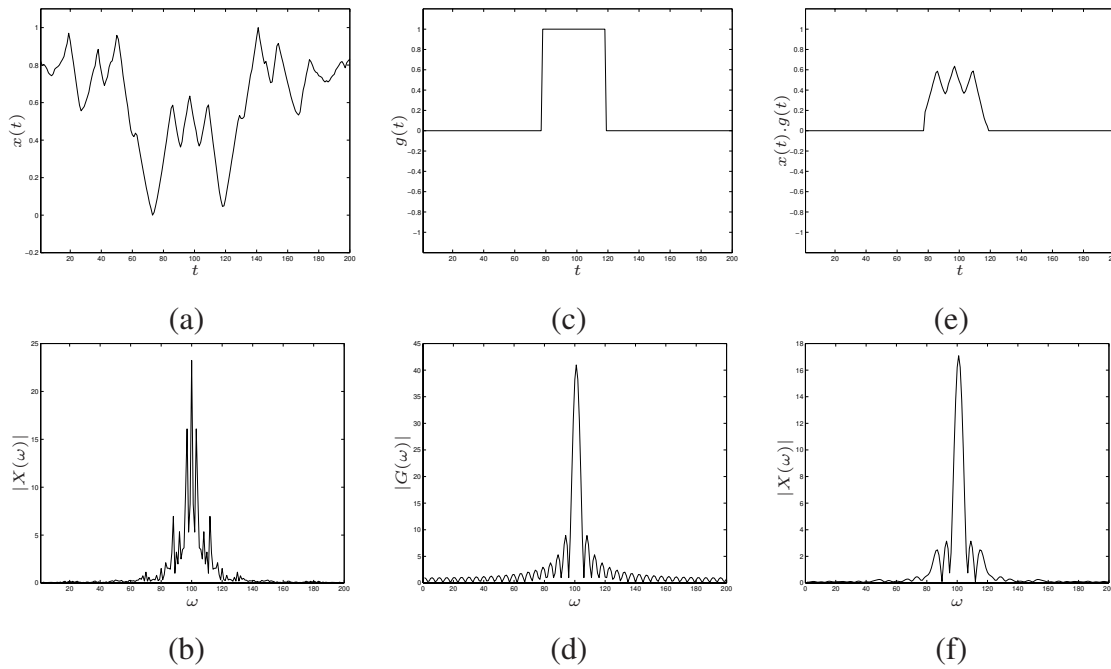


Figura 2.8: Transformada de Fourier de Curta Duração com janela retangular. A transição brusca entre os dois estados da janela retangular embute altas frequências no resultado da transformada. (a) Um sinal e (b) seu espectro de Fourier. (c) Uma janela retangular e (d) seu espectro de Fourier. (e) Trecho do sinal janelado e (f) seu espectro de Fourier.

A obtenção de resultados significativos através da Transformada de Fourier de Curta Duração inicia-se, assim, através da seleção de uma função janela que idealmente isole o trecho de interesse do sinal, mantendo-o inalterado, e, ao mesmo tempo, não introduza artefatos no resultado, o que geralmente significa a seleção de janelas com transições suaves nas bordas. Estas características são consideradas mutuamente antagônicas, dada a impossibilidade de se manter uma transição suave sem deformar as extremidades do trecho de interesse.

Porém, em 1946, Dennis Gabor provou o Princípio da Incerteza (Gabor, 1946) para a decomposição de sinais arbitrários no domínio temporal (ou espacial) e da frequência. O princípio de Gabor confirma que o produto de incertezas no domínio temporal e da frequência, que resultam da decomposição de quaisquer sinais desses domínios, não pode ser menor que um valor cons-

tante bem definido. A consequência desse princípio, no contexto das transformadas de sinais, é que nenhuma transformada pode atingir, simultaneamente, alta resolução em ambos os domínios discutidos. Gabor definiu, então, uma família de funções baseadas na função Gaussiana que atinge o mínimo valor de incerteza em ambos os domínios. Devido a esse fato, o uso da Transformada de Fourier de Curta Duração com uma função Gaussiana como janela é conhecida também por *Transformada de Gabor* (Figura 2.9).

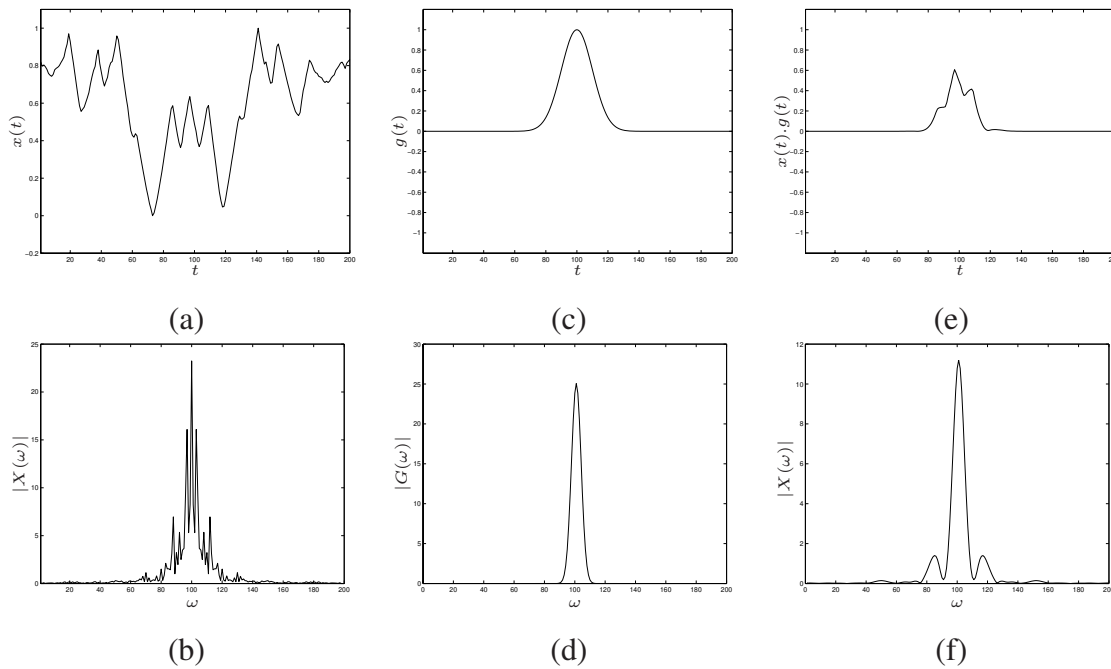


Figura 2.9: Transformada de Fourier de Curta Duração com janela Gaussiana. As transições suaves da janela evitam que altas frequências sejam embutidas no resultado da transformada. (a) Um sinal e (b) seu espectro de Fourier. (c) Uma janela Gaussiana e (d) seu espectro de Fourier. (e) Trecho do sinal janelado e (f) seu espectro de Fourier.

Da mesma forma que os Descritores de Fourier em relação à Transformada de Fourier (ver seção 2.3), os descritores baseados na Transformada de Fourier de Curta Duração exploram a decomposição do sinal, neste caso em componentes “tempo-frequência”, para extração de características antes não destacadas no espaço original do sinal. Por ser a aplicação sucessiva da

FT em trechos distintos do sinal, os descritores baseados na STFT também podem ser utilizados para representação de objetos através do contorno, com a característica adicional de possibilitarem análises locais. Também como a FT, a STFT pode ser aplicada em versões parametrizadas dos contornos (ver seção 2.2), reduzindo-se, assim, a complexidade da análise e do espaço resultante quando comparados com uma eventual aplicação da STFT sobre um sinal bidimensional.

2.4.1 A Transformada de Fourier de Curta Duração

A Transformada de Fourier de Curta Duração de um sinal espacial x_t é definida a partir da Transformada de Fourier (ver seção 2.3.1), através da introdução de uma função janela centrada na posição t_g :

$$X(t_g, \omega) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)g(t - t_g)e^{\frac{-2\pi j\omega t}{T}} dt \quad (2.20)$$

na qual $x(t)$ é o sinal de entrada, $g(t - t_g)$ é a função janela e t_g seu centro. Apesar da possibilidade teórica de utilização de qualquer função janela, utiliza-se geralmente a função gaussiana (equação (2.21)) como janela de análise devido à discussão da seção 2.4.

$$g(t - t_g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-t_g)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.21)$$

A equação (2.20) pode receber também diferente interpretação. Segundo Glassner (1995), o sinal $x(t)$ pode, por outra ótica, ser projetado sobre funções bases da forma $g(t - t_g)e^{-j\omega t}$ (Figura 2.10). Desta forma, enquanto a interpretação anterior deriva a Transformada de Fourier de Curta Duração a partir da Transformada de Fourier, esta nova visão aproxima a Transformada de Fourier de Curta Duração dos conceitos da Transformada de Wavelet, como será visto na seção 2.5.

Para definir-se a versão discreta da Transformada de Fourier de Curta Duração, devem ser aplicadas as mesmas considerações para discretização das grandezas apresentadas na seção 2.3.1. A equação (2.20) pode ser, desta forma, representada no espaço discreto por:

$$X(t_g, \omega) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x(t)g(t - t_g)e^{\frac{-2\pi j\omega t}{N}} \quad (2.22)$$

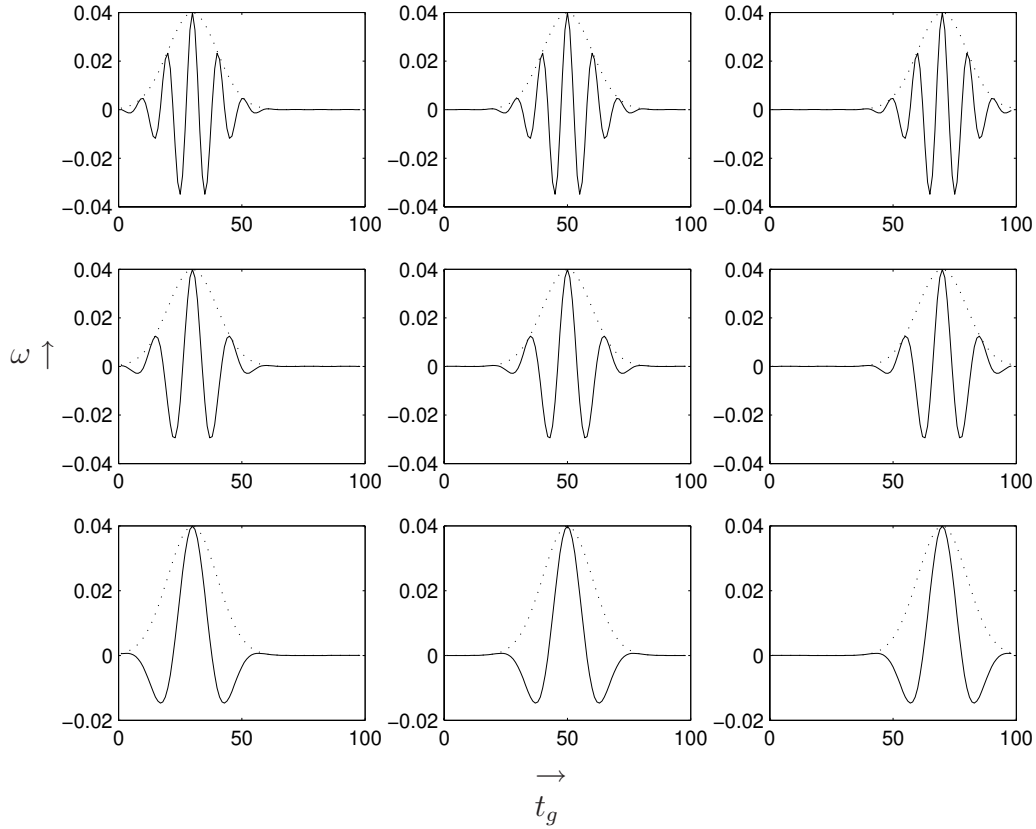


Figura 2.10: Ilustração de funções bases para a STFT. As funções em pontilhado indicam as gaussianas $g(t - t_g)$ e em traço contínuo as funções resultantes $g(t - t_g)e^{-j\omega t}$

na qual, $\omega, t = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

A Figura 2.11 mostra o processo e o resultado da aplicação da STFT sobre um sinal unidimensional com uma janela de largura σ .

2.4.2 Normalizações

A normalização dos coeficientes da STFT para aquisição das invariâncias aproveita, em grande parte, o procedimento descrito na seção 2.3.3 para os descritores de Fourier. Novamente, ao considerar-se a representação de um objeto digitalizado segundo as coordenadas $[x(t), y(t)]$ e centróide $[x_c, y_c]$, a assinatura distância contorno-centróide deste objeto será $d(t)^2 = [x(t) -$

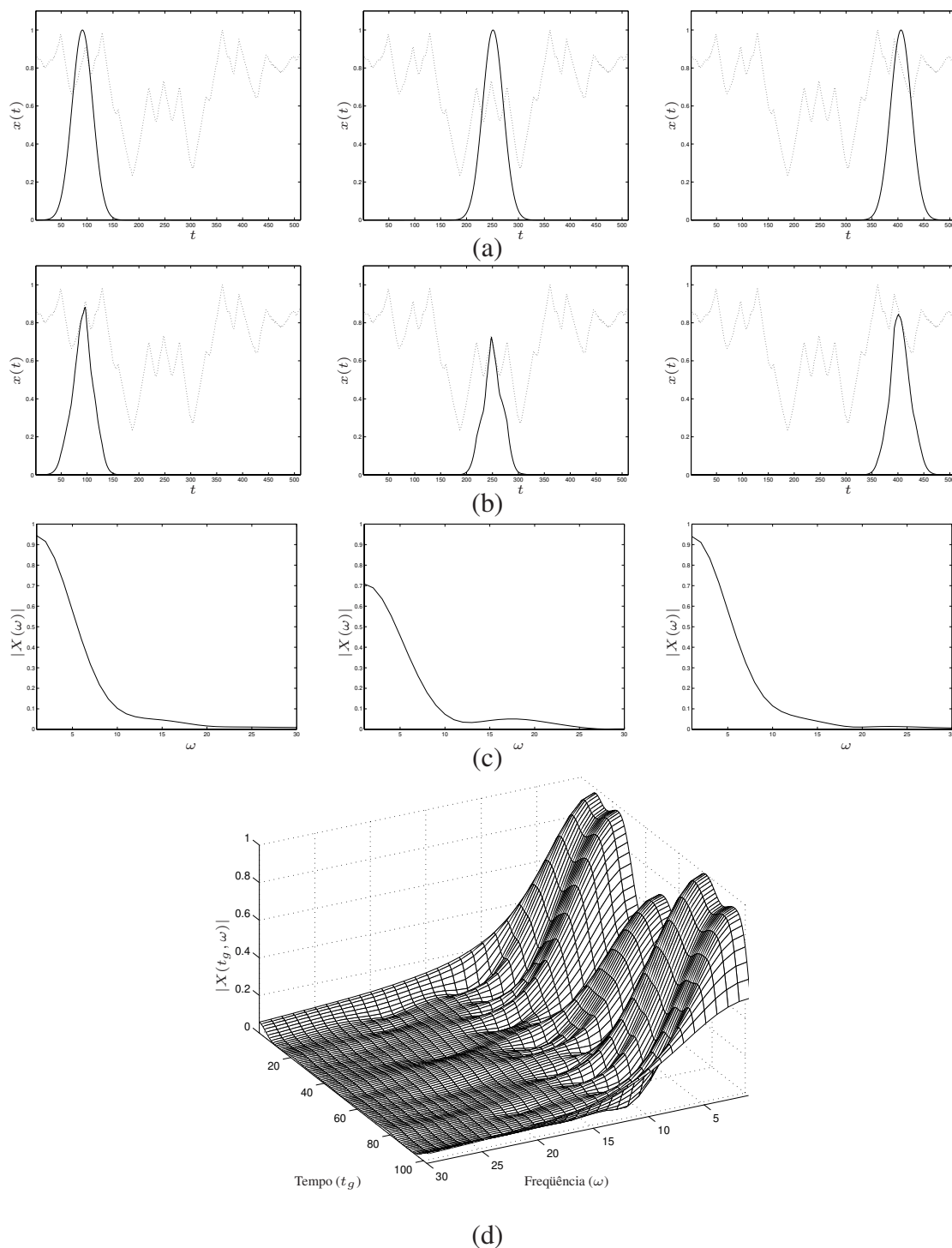


Figura 2.11: Etapas da aplicação da STFT. (a) Janelas para diferentes valores de t visualizados sobre um sinal unidimensional. (b) Resultado do janelamento para os diferentes valores de t . (c) Decomposição espectral dos sinais janelados. (d) Decomposição no espaço “tempo x frequência” resultante da STFT.

$x_c]^2 + [y(t) - y_c]^2$ e, como visto para os descritores de Fourier, deslocamentos do objeto no espaço bidimensional não afetam esta parametrização, tornando os descritores baseados na assinatura distância contorno-centróide invariantes a translações dos objetos.

Mudanças de escala também podem ser tratadas das mesmas formas discutidas para os descritores de Fourier, bastando dividir-se a parametrização por seu máximo valor ou, como segunda opção, todos os coeficientes da transformada pelo componente de máximo valor.

Como visto na seção 2.3.3.2, rotações, reflexões e mudanças no ponto inicial de amostragem de um sinal afetam a fase dos coeficientes da transformada de Fourier, mas não as magnitudes. Entretanto, apesar do uso das magnitudes ser suficiente para os descritores de Fourier, o possível deslocamento temporal causado pela mudança do ponto inicial de amostragem causará, na Transformada de Fourier de Curta Duração, uma modificação na seqüência dos coeficientes ao longo do eixo do tempo, devido à mudança na ordem de janelamento da assinatura. Existem duas formas para tornar os Descritores de Fourier de Curta Duração aplicados sobre a assinatura distância contorno-centróide invariantes ao deslocamento temporal da parametrização:

- *Normalização de $X(t, \omega)$* : Este método baseia-se em novo deslocamento temporal de toda a curva resultante da decomposição “tempo-frequência”, $X(t, \omega)$, considerando-se o tempo inicial t_0 para o valor máximo $X(t, \max\{\omega\})$. Desta forma, elimina-se a influência do deslocamento temporal da assinatura, tornando os descritores baseados na assinatura distância contorno-centróide invariantes a rotação, reflexão e mudança no ponto inicial de amostragem do sinal. Este procedimento, contudo, é suscetível a ambigüidades do valor máximo.

- *Utilização de Medidas Escalares*: O segundo método baseia-se na utilização de medidas calculadas ao longo do tempo, como energia ou entropia (ver seção 2.1). Esse procedimento elimina a influência do deslocamento temporal da parametrização por não considerar a seqüência dos coeficientes do eixo do tempo, tornando os Descritores de Fourier de Curta Duração baseados na assinatura distância contorno-centróide invariantes a rotação, reflexão e mudança no ponto inicial de amostragem do sinal.

2.4.2.1 Normalização Completa

Não sendo conflitantes os procedimentos para normalização discutidos acima, é possível tornar os Descritores de Fourier de Curta Duração baseados na assinatura distância contorno-centróide invariantes a todas as potenciais variações presentes nos objetos. O procedimento completo será:

- Para aquisição da invariância quanto à mudança de escala, dividem-se todos os coeficientes pelo componente de máximo valor, $\frac{X(t,\omega)}{X(t,\max\{\omega\})}$, ou diretamente a assinatura por seu máximo valor;
- Para aquisição das invariâncias quanto à rotação, reflexão e mudança do ponto inicial de amostragem, além de utilizar-se as magnitudes dos coeficientes $|\frac{X(t,\omega)}{X(t,\max\{\omega\})}|$, deve-se reposicionar o eixo do tempo ou utilizar-se medidas calculadas ao longo do eixo do tempo.

2.5 Descritores de Wavelet

Como visto na seção anterior, a decomposição espectral de sinais janelados permite a análise localizada dos componentes espectrais, o que colabora para a detecção de eventos semelhantes que ocorram em instantes distintos. Contudo, a utilização de janelas de largura fixa pode comprometer a análise de determinados sinais ao negligenciar-se a relação dos eventos locais com o conteúdo global do sinal. Portanto, a possibilidade de variação da largura da janela de análise seria uma solução imediata para tal problema.

Introduzida por J. Morlet e formalizada posteriormente por ele e A. Grossmann (Grossman e Morlet, 1984), a *Transformada de Wavelet* (WT), como é largamente conhecida atualmente, fundamenta-se na decomposição de sinais através de famílias de funções chamadas *wavelets*. Uma família *wavelet* é construída a partir de uma função limitada no tempo, denominada *wavelet mãe* (ψ), e dilatações e translações desta função, comumente denominadas *wavelets filhas*. Alguns exemplos de *wavelets mães* (ψ) podem ser vistas na Figura 2.12.

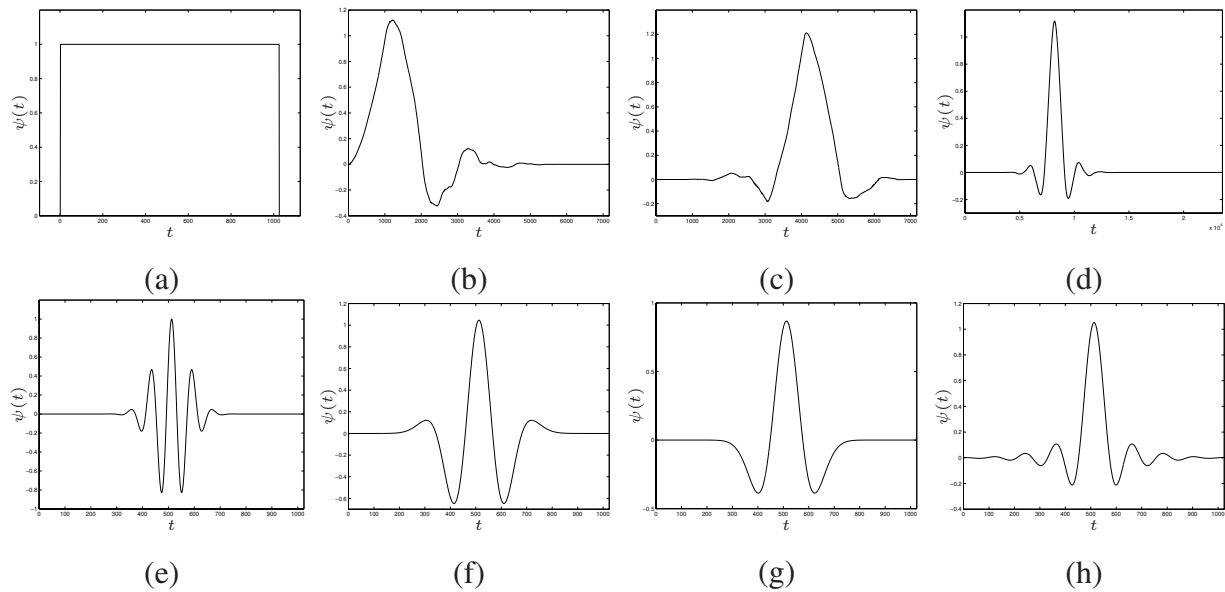


Figura 2.12: *Wavelets Mães* mais comuns em aplicações da Transformada de Wavelet. (a) Haar. (b) Daubechies. (c) Symlet. (d) Coiflet. (e) Morlet. (f) Gaussiana. (g) Chapéu Mexicano. (h) Meyers.

A relação entre a escala e a frequência obtida pela decomposição dos sinais pelas *wavelets filhas* é estabelecida de tal forma que as características de baixa frequência sejam analisadas com janelas mais largas enquanto as altas frequências são analisadas por janelas menores, permitindo sua melhor localização no tempo. Esta propriedade é conhecida por *Largura de Banda Relativa* ou *Constant-Q*, sendo uma das principais diferenças entre a Transformada de Wavelet e a Transformada de Fourier de Curta Duração (Rioul e Vetteri, 1991). A Figura 2.13 ilustra algumas *wavelets filhas* obtidas através da dilatação e da translação da *wavelet mãe* da família “Morlet” (Figura 2.12e). Nesta ilustração é possível perceber-se a correlação entre a largura (escala) de uma *wavelet* e sua frequência de análise.

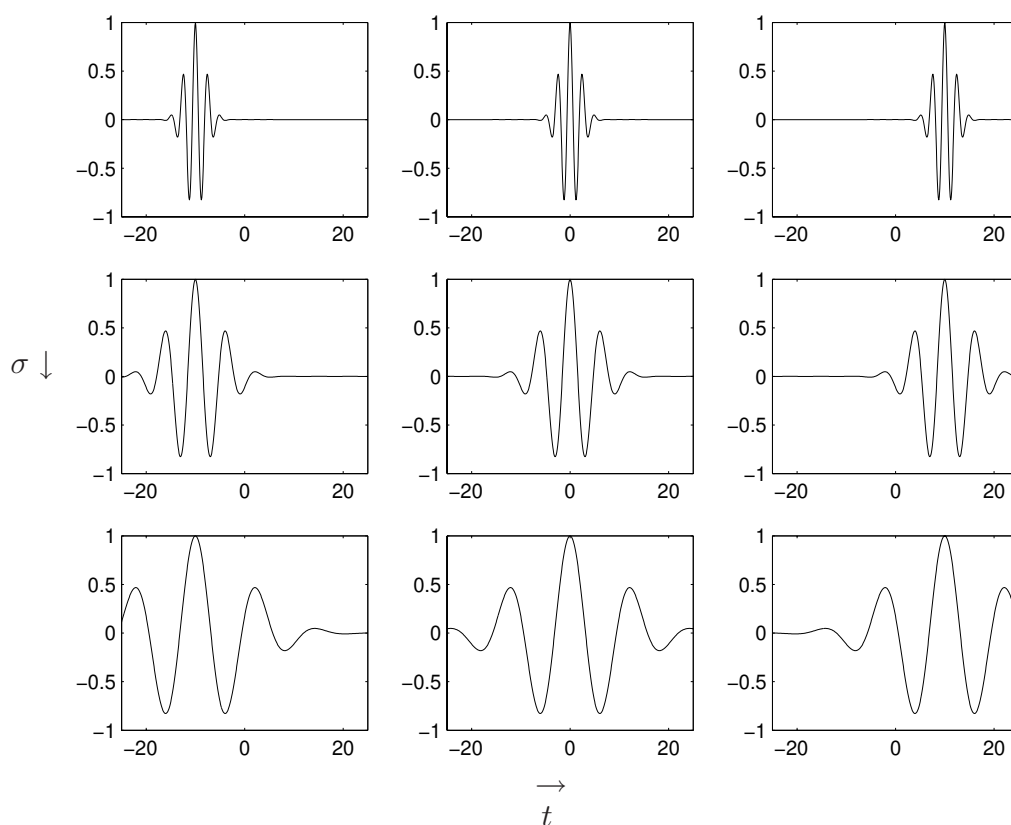


Figura 2.13: Funções bases da Transformada de Wavelet obtidas através da dilatação e translação da *wavelet mãe* da família “Morlet”. É possível perceber-se, nesta ilustração, a correlação entre a escala da *wavelet* e sua frequência de análise.

Referenciados como *Descritores de Wavelet* (WD), é possível dividir-se os descritores baseados na Transformada de Wavelet em duas abordagens: (1) os baseados na Transformada de Wavelet Contínua (CWT) e (2) os baseados na Transformada de Wavelet Discreta (DWT). Abaixo são apresentadas as principais questões relacionadas com as Transformadas de Wavelet Contínua e Discreta.

2.5.1 A Transformada de Wavelet Contínua

A Transformada de Wavelet Contínua (CWT) de um sinal espacial $x(t)$ consiste na integração de $x(t)$ multiplicado por versões dilatadas (a) e transladadas (b) de uma *Wavelet Mãe* (ψ):

$$X(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (2.23)$$

A Figura 2.14 mostra o resultado e o processo de decomposição de um sinal pela Transformada de Wavelet Contínua com bases da família “Morlet” (Figura 2.12e).

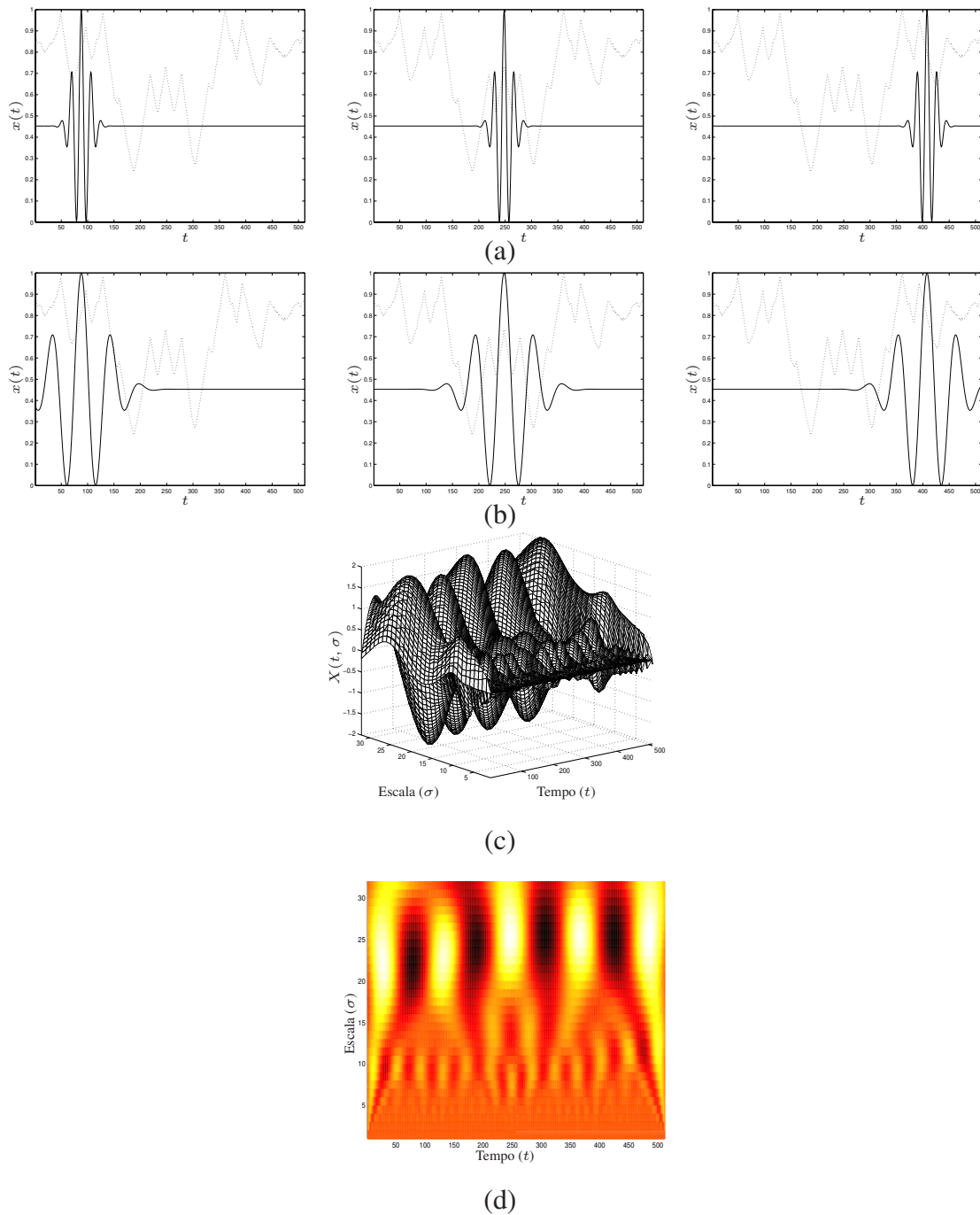


Figura 2.14: Etapas da aplicação da Transformada de Wavelet Contínua com bases Morlet. (a) Etapa de decomposição com janelas com mesma largura para diferentes instantes t . (b) Etapa de decomposição com as janelas dilatadas para diferentes instantes t . (c) Espaço “tempo x escala” resultante da CWT. (d) Vista superior do resultado da CWT.

2.5.2 A Transformada de Wavelet Discreta

Em teoria, a Transformada de Wavelet Discreta (DWT) consiste apenas na discretização dos parâmetros a e b da equação (2.23). Contudo, a potencialidade da DWT em aplicações diversas está na capacidade de explorar a redundância causada pela sucessiva mudança de escala, reduzindo a taxa de amostragem no tempo. Isso é possível pois, quando a DWT é realizada para altas escalas, ou seja, baixas frequências, a taxa de amostragem do sinal em questão pode ser reduzida observando-se a taxa de Nyquist, que é igual a duas vezes a frequência mais alta existente no sinal. A Figura 2.15 ilustra essa reamostragem.

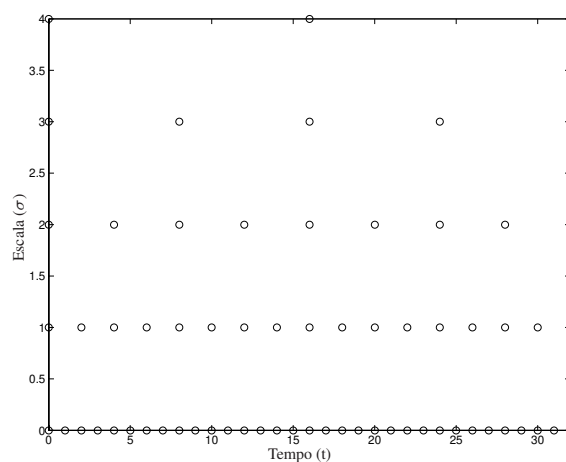


Figura 2.15: Reamostragem do resultado obtido pela decomposição pela Transformada de Wavelet respeitando-se a taxa de Nyquist.

Proposto por Mallat (1989), o *Codificador Sub-banda de Dois Canais* é uma forma eficiente de obtenção dos coeficientes da Transformada de Wavelet, estando para esta transformada assim como a *Fast Fourier Transform* está para a Transformada de Fourier². Através desta técnica, é possível analisar-se um sinal em diferentes bandas de frequência com diferentes resoluções espaciais, decompondo-se sequencialmente o sinal em informações “aproximadas”, baixas frequências,

²Por esta razão, o Codificador Sub-banda de Dois Canais também é conhecido, na literatura, por *Fast Wavelet Transform*

e informações “detalhadas”, altas frequências (Figura 2.16). Para isso, são utilizados dois conjuntos de funções ϕ e ψ (função de escalamento e função Wavelet) que, por sua vez, podem ser associados a filtros passa-baixa e passa-alta. A decomposição do sinal em diferentes bandas de frequência é então obtida por sucessivas filtragens passa-alta e passa-baixa do sinal no domínio do tempo, sendo que, após cada filtragem, metade das amostras pode ser desprezada (subamostragem com fator 2) devido à satisfação da taxa de Nyquist em cada nível da decomposição.

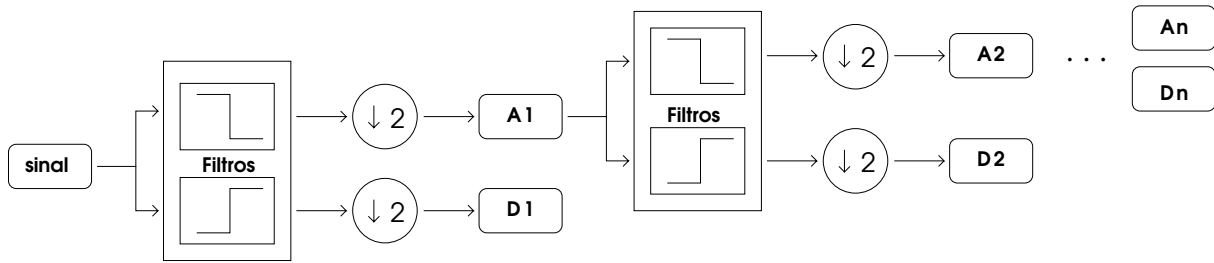


Figura 2.16: Diagrama da decomposição sucessiva de um sinal em aproximações e detalhes pela Transformada de Wavelet Discreta através de banco de filtros passa-alta e passa-baixa.

2.5.3 Normalizações

Se a representação de um objeto digitalizado é dada pelas coordenadas $[x(t), y(t)]$ e pelo centróide $[x_c, y_c]$, a assinatura distância contorno-centróide deste objeto será, novamente, $d(t)^2 = [x(t) - x_c]^2 + [y(t) - y_c]^2$. Como visto para os descritores de Fourier, deslocamentos do objeto no espaço bidimensional não afetam esta parametrização, tornando qualquer descritor baseado na assinatura distância contorno-centróide invariante a translações dos objetos.

Mudanças de escala afetam a assinatura distância contorno-centróide pela multiplicação de todos os pontos por uma constante. Desta forma, mudanças de escala podem ser tratadas da mesma maneira discutida para os descritores de Fourier e para os descritores baseados na STFT, ou seja, dividindo-se a parametrização por seu máximo valor.

Rotações, reflexões e mudanças do ponto inicial de amostragem causam o deslocamen-

to temporal da assinatura distância contorno-centróide. Este deslocamento, entretanto, influencia somente a seqüência dos coeficientes da Transformada de Wavelet ao longo de uma mesma escala. Contudo, medidas como energia e entropia (ver seção 2.1), calculadas a cada mudança de escala, desconsideram a ordem dos coeficientes, tornando os descritores baseados em tais medidas invariantes aos deslocamentos temporais da assinatura distância contorno-centróide e, conseqüentemente, a rotação, reflexão e mudança do ponto inicial de amostragem do contorno do objeto no espaço bidimensional.

2.5.3.1 Normalização Completa

Novamente, não sendo conflitantes os procedimentos para normalização discutidos acima, é possível tornar os Descritores de Wavelet baseados na assinatura distância contorno-centróide invariantes a todas as potenciais variações presentes nos objetos. O procedimento completo será:

- Para aquisição da invariância a mudanças de escala, divide-se toda a assinatura por seu valor máximo, $\frac{d(t)}{\max\{d(t)\}}$;
- Para aquisição das invariâncias a rotação, reflexão e mudança do ponto inicial de amostragem, basta utilizar-se medidas calculadas ao longo do eixo do tempo, como energia e entropia.

2.6 Descritores Baseados na Transformada de Fourier Multiresolução

A abordagem utilizada pela Transformada de Wavelet, apesar de relativamente recente, está consolidada e bem estabelecida em processamento e análise de imagens. Porém, a representação das características de um sinal em termos de sua decomposição por funções janelas de diferentes larguras e em distintas posições, relaciona de forma rígida as grandezas escala e frequência. Considerando a determinação dos componentes de frequência de acordo com a largura da região analisada particularmente restritiva, Calway (1989) desenvolveu uma nova forma da Transformada de Wavelet, na qual a interdependência da escala e da frequência é removida. Geralmente

visualizado como uma pilha de resultados da STFT (Figura 2.17), a Transformada de Fourier Multiresolução (MFT) permite que, pela equação (2.20), a largura σ da janela seja variada juntamente com a posição t_g e a frequência ω . Assim, a definição da MFT é dada pela equação (2.24), que é a mesma utilizada pela STFT, adicionando-se mais um grau de liberdade em σ :

$$X(t_g, \sigma, \omega) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)g(t - t_g, \sigma)e^{\frac{-2\pi j\omega t}{T}} dt \quad (2.24)$$

na qual t_g é o centro da janela, σ a largura da janela e ω a frequência de decomposição. Assim como na equação (2.20), os coeficientes da MFT correspondem à Transformada de Fourier do sinal janelado $x(t)g(\sigma(t - t_g))$ centrado em t_g , mas agora com extensão variável determinada por σ .

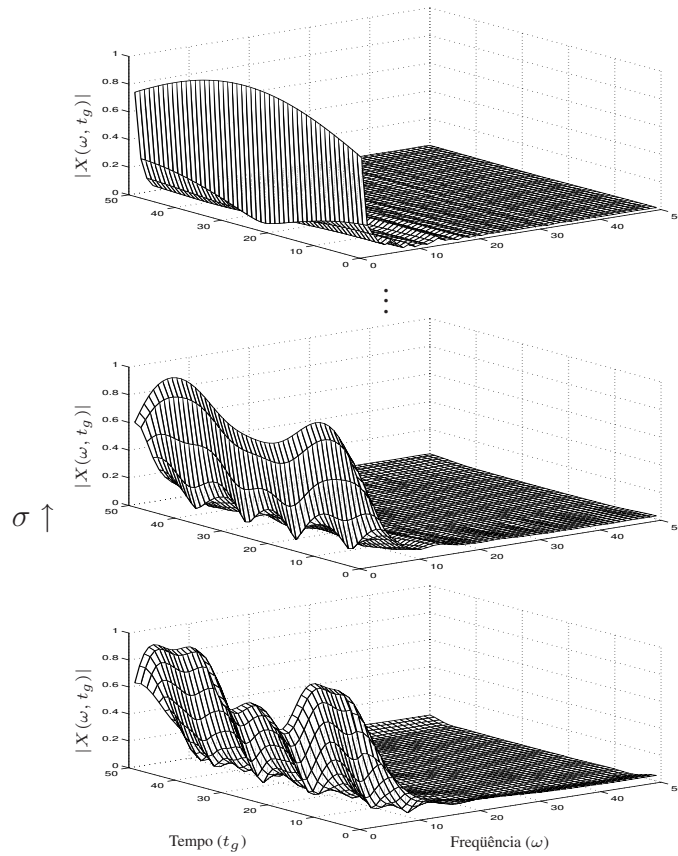


Figura 2.17: Analogia da Transformada de Fourier Multiresolução com a Transformada de Fourier de Curta Duração. A Transformada de Fourier Multiresolução pode ser visualizada como uma pilha de resultados da Transformada de Fourier de Curta Duração.

Segundo os mesmos critérios discutidos na seção 2.4 para a escolha da janela, a função Gaussiana da equação (2.21) é geralmente utilizada por possuir boa localização em ambos os domínios do tempo e da frequência. Desta forma, posição, escala e frequência são relacionadas para formarem um espaço de dimensão três, tornando este super-conjunto da Transformada de Wavelet e da Transformada de Fourier de Curta Duração potencialmente capaz de gerar decomposições completas de sinais arbitrários.

Apesar da potencialidade da Transformada de Fourier Multiresolução para a representação de características dos sinais, a alta dimensionalidade do espaço resultante desta transformada torna

sua análise complexa e dispendiosa computacionalmente.

Como alternativa, é proposto neste trabalho uma redução da dimensionalidade da Transformada de Fourier Multiresolução através da fixação de t_g . Isso é feito centrando-se a janela em alguma posição relevante do sinal $x(t)$ e variando-se σ e ω na equação (2.24), mantendo-se, com isso, a capacidade de análise local do descritor e, ainda, permitindo uma visualização progressiva “local→global” das características espaciais. Obtém-se então:

$$X(\sigma, \omega) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)g(t - t_g, \sigma)e^{\frac{-2\pi j\omega t}{T}} dt \quad (2.25)$$

na qual t_g é o centro fixo da janela, σ a largura da janela e ω a frequência de decomposição. Novamente, utiliza-se a função janela da equação (2.21) por atingir o menor valor de incerteza na transformação dos domínios temporal e espectral.

Devido à decomposição de sinais com janelas em posições ou instantes fixos, convencionou-se designar esta abordagem como *Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea* (IMFT). O resultado da IMFT é representado no espaço “escala x frequência”. A Figura 2.18 mostra o resultado e o processo de aplicação da IMFT sobre a assinatura distância centróide-contorno de uma folha em que a posição para o centro t_g da janela é o ápice principal.

Quando no espaço discreto, os dois eixos de coordenadas, escala e frequência, devem ser amostrados em intervalos apropriados. Aplicando-se as mesmas considerações apresentadas na seção 2.3.1, a equação (2.24) pode ser representada no espaço discreto por:

$$X(\sigma, \omega) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x(t)g(t - t_g, \sigma)e^{\frac{-2\pi j\omega t}{N}} \quad (2.26)$$

na qual $\omega = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, t_g é o centro fixo da janela e σ a largura da função janela.

2.6.1 Normalizações

A normalização do espaço “escala x frequência” gerado pela Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea é semelhante à descrita para a Transformada de Fourier de Curta

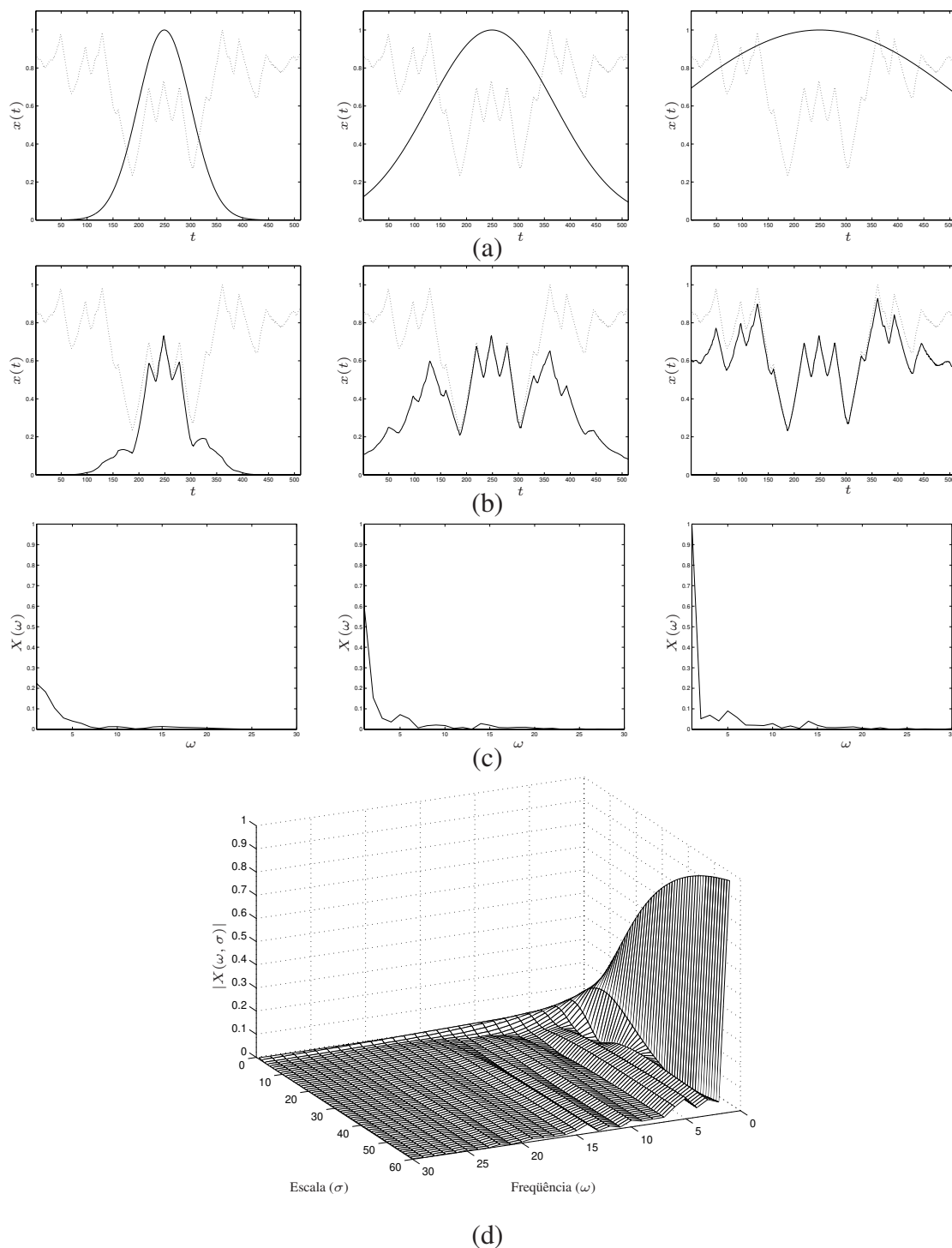


Figura 2.18: Etapas da aplicação da Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea. (a) Janelas para diferentes valores de σ . (b) Sinais janelados para diferentes valores de σ . (c) Decomposição espectral dos sinais janelados. (d) Decomposição no espaço “escala x frequência” resultante da Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea.

Duração (ver seção 2.4.2), visto ser também, esta transformada, apenas a aplicação sucessiva da Transformada de Fourier em trechos cada vez maiores do sinal.

Desta forma, considerando-se a representação de um objeto digitalizado dada pelas coordenadas $[x(t), y(t)]$ e centróide $[x_c, y_c]$, a assinatura distância contorno-centróide deste objeto também será $d(t)^2 = [x(t) - x_c]^2 + [y(t) - y_c]^2$. Como visto nas seções anteriores, translações dos objetos no espaço bidimensional não afetam essa parametrização, tornando os descritores baseados na assinatura distância contorno-centróide invariantes à translação.

Mudanças de escala produzem o deslocamento em amplitude na assinatura dos objetos, tornando possível a invariância dos descritores através dos métodos discutidos para os descritores de Fourier, ou seja, pela divisão da assinatura pelo seu valor máximo ou pela divisão dos coeficientes da transformada por um valor de máximo.

Rotações, reflexões e mudanças do ponto inicial de amostragem do contorno de um objeto produzem deslocamentos temporais em sua assinatura distância contorno-centróide, inviabilizando em parte o processamento automático do descritor. Este problema pode, contudo, ser resolvido através da aplicação de métodos de busca da posição estabelecida para o centro da janela por sobre a assinatura. Tais abordagens, no entanto, não foram investigadas por serem consideradas irrelevantes no escopo do trabalho, assumindo-se simplesmente que o usuário é responsável pela indicação do centro da janela de análise.

2.6.1.1 Normalização Completa

Novamente, não sendo conflitantes os procedimentos para normalização dos descritores, é possível tornar os Descritores de Fourier Multiresolução Instantânea baseados na assinatura distância contorno-centróide invariantes a todas as potenciais variações presentes nos objetos, apesar de nem todos os procedimentos sugeridos serem automáticos. O procedimento completo será:

– Para aquisição da invariância quanto à mudança de escala, dividem-se todos os coeficientes pelo componente de máximo valor, $\frac{X(\sigma, \omega)}{X(\sigma, \max\{\omega\})}$, ou a assinatura pelo seu valor máximo;

– Dada a impossibilidade de aquisição das invariâncias quanto a rotação, reflexão e mudança do ponto inicial de amostragem, deve-se escolher, manualmente, a posição t_0 correspondente ao centro da janela.

Capítulo 3

Classificação de Formas

A *Classificação de Formas* é a etapa do reconhecimento de padrões responsável pela identificação de objetos. Essa identificação, apesar das diversas abordagens existentes, é geralmente baseada na comparação e aproximação dos objetos com classes previamente definidas. A definição das classes, por sua vez, decorre da análise de um conjunto de amostras de treinamento, cujos atributos descritores devem ser idealmente capazes de parametrizar o comportamento dos indivíduos da classe. Esta forma de definição é particularmente importante para a classificação de formas pois possibilita que as comparações e aproximações entre objetos e classes sejam executadas por meio de medidas numéricas.

O processo de classificação de formas resume-se, assim, na comparação e associação de um objeto representado por seu vetor de atributos $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ a uma das classes $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d$ previamente definidas. A Figura 3.1 ilustra tal procedimento. O objeto O_x tem, devido aos seus atributos, mais chance de pertencer às classes ω_2 ou ω_3 do que às demais.

Neste capítulo são discutidas abordagens para a análise e classificação de formas, além de técnicas que podem aumentar o potencial discriminativo dos atributos medidos na etapa anterior de descrição das formas. As técnicas consideradas referem-se às abordagens para redução de dimensionalidade dos vetores de atributos, seleção dos atributos mais significativos, técnicas de decisão para a classificação das formas e, como parâmetro de comparação entre os classificadores,

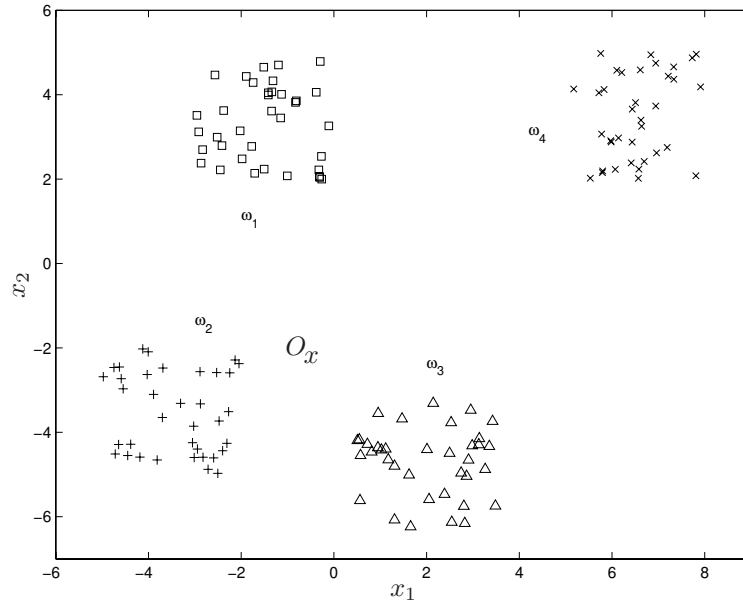


Figura 3.1: Exemplo do processo de classificação de formas. O objeto O_x , representado por atributos $\{x_1, x_2\}$, deve ser comparado e associado a uma das classes $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ou ω_4 .

técnicas de estimação do erro da classificação.

Para exemplificar as técnicas discutidas neste capítulo, é utilizado o tradicional conjunto de dados *Iris*, extraído de (Fisher, 1936). A população da base *Iris* é constituída por 150 amostras com 4 atributos cada (comprimento e largura da sépala e comprimento e largura da pétala), sendo que as amostras da população estão distribuídas igualmente em 3 espécies de flores (*setosa*, *virginica* e *versicolor*) (Apêndice A). A principal característica do conjunto de dados *Iris* é que a espécie *setosa* é linearmente discriminável das outras classes, enquanto as classes *virginica* e *versicolor* são impossíveis de serem separadas através de uma função de decisão linear. A Figura 3.2 mostra o espaço de atributos deste conjunto de dados plotado aos pares, possibilitando sua visualização bidimensional.

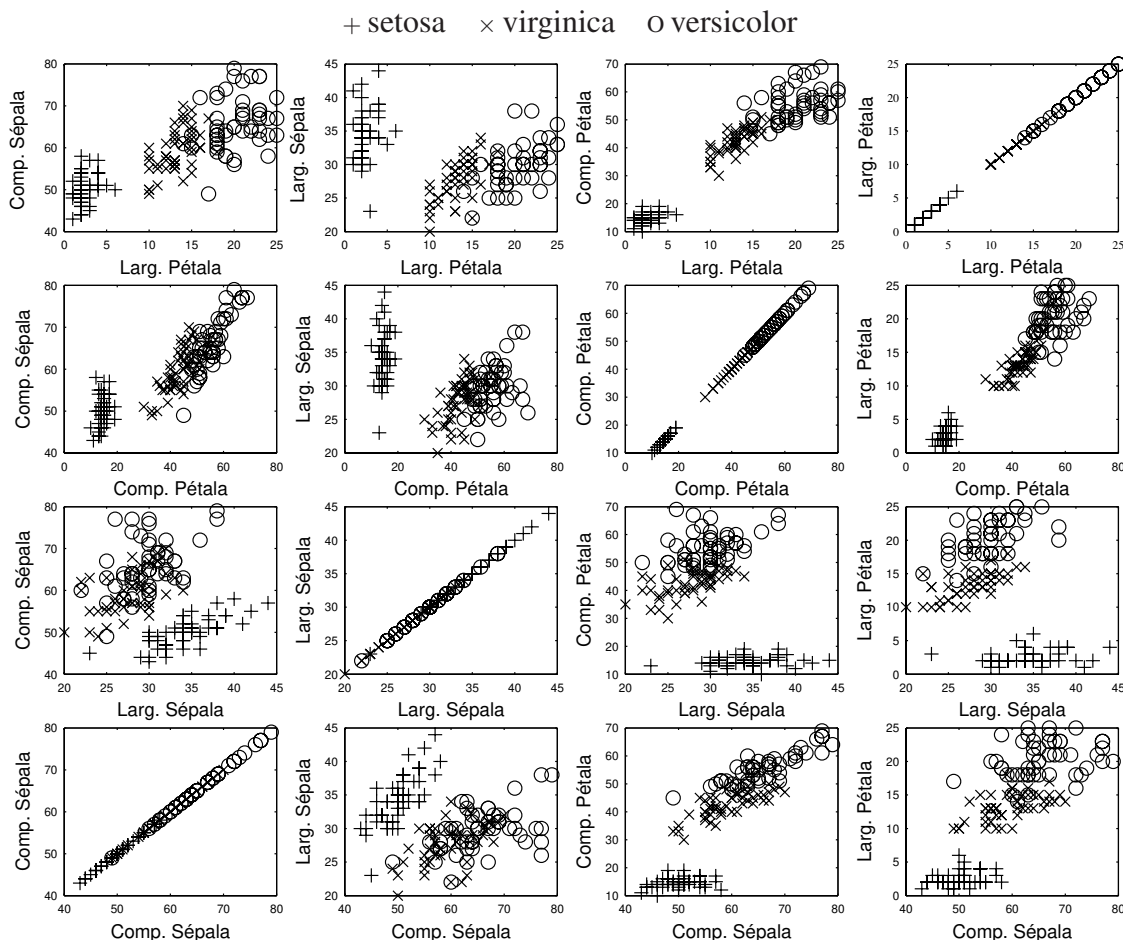


Figura 3.2: Espaço de atributos de *Iris* plotado aos pares, permitindo a visualização bidimensional. Característico destes dados, as espécies *virginica* e *versicolor* não são linearmente discrimináveis.

3.1 Redução de Dimensionalidade

Dimensionalidade é o termo atribuído ao número de características do descritor de um objeto, ou seja, à dimensão do espaço de atributos. Existem dois fatores principais para que se busque a menor dimensionalidade possível do espaço de atributos. São eles: o custo de obtenção e manipulação dos atributos e a precisão da classificação. Quando o espaço de atributos contém o conjunto mínimo de atributos necessário para a discriminação das classes definidas, o classificador será computacionalmente mais eficiente, devido ao menor número de dados a manipular, e poten-

cialmente mais confiável, devido ao uso somente de atributos significativos para a discriminação. Este segundo fator é assinalado pelo teorema de Watanabe (1997), que estabelece a possibilidade de dois descritores arbitrários apresentarem similaridades caso sejam constituídos de um número suficientemente grande de características redundantes. Esse fato enfatiza a necessidade da escolha cuidadosa dos atributos. Pode-se notar, porém, que se a redução da dimensionalidade for, por outro lado, excessiva, o classificador pode perder seu poder de discriminação. Por isso, é importante analisar-se a variação do comportamento do classificador em função da dimensionalidade e seleção dos descritores, visando-se o melhor compromisso entre o custo e a precisão do classificador.

Descritores geram, comumente, vetores com características correlacionadas que podem ser exploradas para redução do espaço de atributos. As técnicas conhecidas por *Análise de Componentes Principais* e *Análise de Variáveis Canônicas* são geralmente utilizadas para este fim e têm sido bastante utilizadas em reconhecimento de padrões, sendo o foco desta seção. As duas abordagens aplicam transformações no espaço de atributos multivariado original, objetivando a descorrelação das variáveis para posterior redução da dimensionalidade. Entretanto, a segunda abordagem diferencia-se por considerar, além da dispersão da população como um todo, informações relativas ao agrupamento das amostras.

3.1.1 Análise de Componentes Principais

Desenvolvida por Harold Hotelling (1933), após ser introduzida por Karl Pearson (1901), a *Análise de Componentes Principais* (PCA)¹ explora a correlação de características redundantes para definir uma transformação do espaço original que resulte em um sistema de eixos ortonormais em que a energia é concentrada em poucos componentes ou componentes principais. Este novo espaço, construído através da combinação linear das variáveis originais que resulta em máxima variância, é representado, enfim, por um número reduzido de eixos descorrelacionados entre si.

¹A técnica de Análise de Componentes Principais também pode ser encontrada na literatura segundo as denominações: Transformada de Hotelling e Decomposição Karhunen-Loève, entre outras.

Considerando-se uma população x contendo n indivíduos com p atributos cada:

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & & \ddots & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ x_{n1} & & & x_{np} \end{bmatrix}$$

é possível obter-se para x o vetor média e a matriz de covariância. Sendo $x_k = [x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kp}]^T$, com T indicando transposição, e calculando-se para a população x a média

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad (3.1)$$

e a covariância

$$C_x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k x_k^T - \bar{x} \bar{x}^T) \quad (3.2)$$

obtem-se:

$$\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p]^T \text{ e}$$

$$C_x = \begin{bmatrix} c_{x_{11}} & c_{x_{12}} & \dots & c_{x_{1p}} \\ c_{x_{21}} & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ c_{x_{p1}} & & & c_{x_{pp}} \end{bmatrix}$$

Visto que a matriz C_x é real e simétrica, é sempre possível encontrar-se um conjunto de p autovetores ortonormais (Noble, 1988). Assim, sendo A a matriz cujas linhas correspondem aos autovetores de C_x ordenados pelos autovalores, A é a matriz de transformação que mapeia a população original x no espaço de componentes principais y através da equação (3.3).

$$y = A(x - \bar{x}) \quad (3.3)$$

Propriedade importante do PCA para a redução de dimensionalidade de uma população é a possibilidade de reconstrução do conjunto original através dos k primeiros autovetores obtidos pelo “método da parcimônia” (Dempster, 1972). Assim, esta operação pode ser considerada ótima por minimizar o erro quadrático médio entre a população original e a reconstruída.

A Figura 3.3 mostra o espaço bidimensional formado pelos dois primeiros componentes principais para a base *Iris* (Apêndice A). Os eixos estão caracterizados pelas respectivas contribuições dos componentes principais. O primeiro eixo principal foi obtido através da transformação $[0,36 \ -0,08 \ 0,86 \ 0,36]$ e o segundo através de $[-0,66 \ -0,73 \ 0,17 \ 0,08]$.

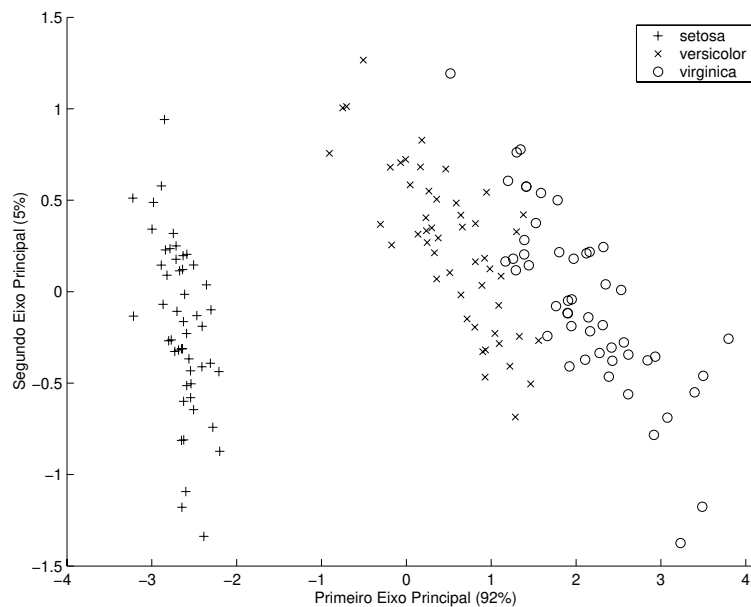


Figura 3.3: Análise de Componentes Principais para a base *Iris*. Os eixos do gráfico estão caracterizados pelas respectivas contribuições dos componentes principais.

3.1.2 Análise de Variáveis Canônicas

Derivada do termo geral *Análise Discriminante* (Fisher, 1936), a técnica conhecida por *Análise de Variáveis Canônicas* (CVA)² (Mardia et al., 1979) também explora a redundância entre os atributos de uma população multivariada. Esta considera, porém, a informação sobre os agrupamentos formados pelas amostras para executar a transformação do espaço original em um sistema de eixos ortonormais entre si, promovendo a maximização das relações intergrupos e minimização das relações intragrupos.

Considerando-se a população x contendo n indivíduos com p atributos cada, sendo que os indivíduos estão agrupados em g classes de tamanho n_i , com $i = 1, \dots, g$ e $\sum_{i=1}^g n_i = n$:

$$x = \begin{bmatrix} x_{11}^1 & x_{12}^1 & \dots & x_{1p}^1 \\ \vdots & & & \\ x_{n_1 1}^1 & & & x_{n_1 p}^1 \\ x_{11}^2 & x_{12}^2 & \dots & x_{1p}^2 \\ \vdots & & & \\ x_{n_2 1}^2 & & & x_{n_2 p}^2 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ x_{11}^g & x_{12}^g & \dots & x_{1p}^g \\ \vdots & & & \\ x_{n_g 1}^g & & & x_{n_g p}^g \end{bmatrix}$$

é possível obter-se a partir de x , vetores média de cada grupo e da população, além de duas matrizes de covariância, uma considerando as relações dos indivíduos com seus respectivos grupos (Matriz de Covariância Intragrupos) e outra considerando as relações dos grupos com a população (Matriz

²A técnica de Análise de Variáveis Canônicas também pode ser encontrada na literatura segundo as denominações: Análise Discriminante para Múltiplos Grupos, Análise Discriminante Generalizada e Coordenadas Discriminantes, entre outras.

de Covariância Intergrupos). Sendo $x_k^i = [x_{k1}^i, x_{k2}^i, \dots, x_{kp}^i]^T$, com T indicando transposição, e calculando-se a média do grupo (equação (3.4)) e a média da população (equação (3.5)):

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} x_k^i \quad (3.4)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^g \sum_{k=1}^{n_i} x_k^i \quad (3.5)$$

assim como a covariância intraclasse (equação (3.6)) e a covariância interclasse (equação (3.7)) de x :

$$C_x^W = \sum_{i=1}^g \sum_{k=1}^{n_i} (x_k^i - \bar{x}_i)(x_k^i - \bar{x}_i)^T \quad (3.6) \quad C_x^B = \sum_{i=1}^g n_i (\bar{x}_i - \bar{x})(\bar{x}_i - \bar{x})^T \quad (3.7)$$

obtem-se, respectivamente:

$$\bar{x}_i = [\bar{x}_1^i, \bar{x}_2^i, \dots, \bar{x}_p^i]$$

$$\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p]$$

$$C_x^W = \begin{bmatrix} c_{x11}^W & c_{x12}^W & \dots & c_{x1p}^W \\ c_{x21}^W & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ c_{xp1}^W & & & c_{xpp}^W \end{bmatrix} \quad C_x^B = \begin{bmatrix} c_{x11}^B & c_{x12}^B & \dots & c_{x1p}^B \\ c_{x21}^B & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ c_{xp1}^B & & & c_{xpp}^B \end{bmatrix}$$

Segundo Mardia et al. (1979), é possível deduzir-se uma transformação A tal que $A^T C_x^W A$ seja minimizado e $A^T C_x^B A$ seja maximizado, isto é, a variabilidade dos indivíduos de um mesmo grupo seja minimizada, enquanto a variabilidade entre os grupos seja maximizada. Ou seja, A deve ser adequadamente escolhido de modo a satisfazer a condição:

$$\max\left(\frac{A^T C_x^B A}{A^T C_x^W A}\right) \quad (3.8)$$

Em Seber (1984), é demonstrado que os valores de a que satisfazem a condição (3.8) devem ser os autovetores de $C_x^{W^{-1}} C_x^B$ normalizados na forma $A^T \left(\frac{C_x^W}{\sqrt{n-g}}\right) A = 1$ e ordenados por seus autovalores. Desta forma, assim como na Análise de Componentes Principais, os primeiros autovetores representarão a transformação dos componentes mais significativos, dada a compactação

da energia nesses eixos.

No CVA, cada novo componente y_r do vetor y , resultante da transformação acima, é obtida através da expressão:

$$y_r = a_r^T (x - \bar{x}) \quad (3.9)$$

na qual a_r é a r -ésima coluna de A e y_r é chamada de r -ésima *variável canônica*, cuja contribuição em relação ao conjunto de dados da população original pode ser medida por $\frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}$, sendo λ_r o r -ésimo autovalor da transformação.

A Figura 3.4 mostra o espaço bidimensional formado pelas duas primeiras variáveis canônicas para a base *Iris* (Apêndice A). Os eixos do gráfico estão caracterizados pelas respectivas contribuições das variáveis canônicas. O primeiro eixo canônico foi obtido através da transformação $[1,49 \ 2,32 \ -2,62 \ 28,67]$ e o segundo através de $[-0,72 \ -7,05 \ -7,95 \ -162,36]$.

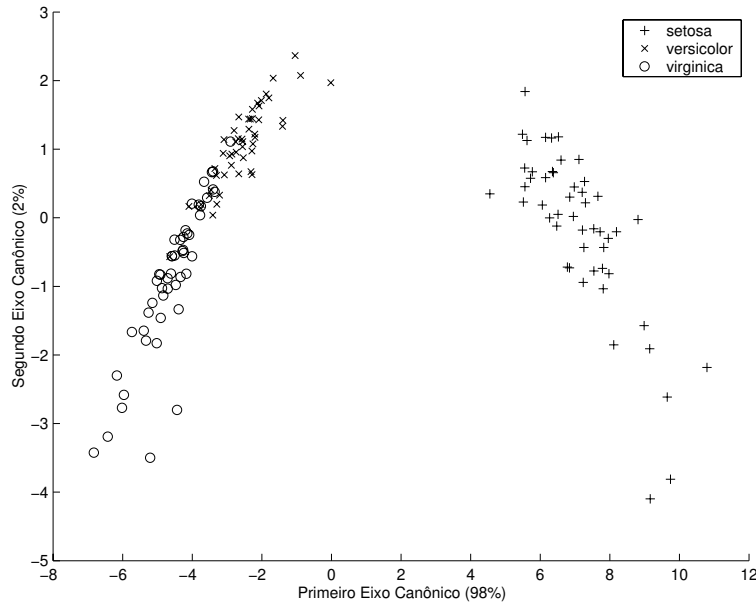


Figura 3.4: Análise de Variáveis Canônicas para a base *Iris*. Os eixos do gráfico estão caracterizados pelas respectivas contribuições das variáveis canônicas.

3.2 Seleção de Características

Um dos estágios principais para o bom desempenho de um classificador de amostras multivariadas é a seleção do subconjunto ótimo de atributos dentre todas as características disponíveis. Por *desempenho* deve-se entender tanto a eficiência computacional quanto a precisão do classificador, como visto na seção anterior. Desta forma, apesar das técnicas de redução de dimensionalidade descritas na seção 3.1 explorarem a redundância entre as características para obterem novos conjuntos de atributos com dimensão drasticamente minimizada, a composição do conjunto de características influencia diretamente o resultado obtido pela *Análise de Componentes Principais* ou pela *Análise de Variáveis Canônicas*, visto que estes métodos buscam combinações lineares dos atributos para a formação do novo espaço reduzido.

Para que a seleção de características seja executada, primeiramente é necessário estabelecer-se um critério de seleção para os atributos, ou seja, uma *função-objetivo*. Segundo Rauber (1994), critérios intuitivos para a função-objetivo envolvem alguma medida de separabilidade das classes, como a distância entre seus centróides, ou taxas de classificação, obtidas por estimadores de erro. Medidas de separabilidade das classes, entretanto, não indicam diretamente a ocorrência de ambigüidades na classificação.

Uma solução ótima para a seleção das características é a busca exaustiva, ou seja, a avaliação de todas as possíveis combinações de atributos analisando-se o comportamento da função-objetivo em relação a cada conjunto analisado. O principal obstáculo a esta técnica é a explosão combinatória que a torna impraticável até mesmo para quantidades moderadas de atributos. Outra solução ótima pode ser obtida através do método de Busca *Branch-and-Bound*, cuja busca heurística, baseada no algoritmo de *Branch-and-Bound*, permite que apenas uma fração dos subconjuntos possíveis de atributos sejam testados. Contudo, esta técnica também é suscetível à explosão combinatória causada pela utilização de um número elevado de atributos. Soluções sub-ótimas podem ser obtidas através dos métodos Melhores Características Individuais e Seleção Sequencial (Jain et al., 2000). O primeiro método avalia todas as características individualmente

em relação à função-objetivo, selecionando e agrupando as que apresentam os melhores resultados. A seleção individual, entretanto, não garante o melhor desempenho dos atributos quando agrupados. O segundo método deriva-se segundo as abordagens inversa e direta. A Seleção Sequencial Inversa avalia as melhores características em relação à função-objetivo, eliminando sequencialmente as que obtêm os piores resultados. A abordagem direta, ao contrário, adiciona sequencialmente os atributos ao conjunto já selecionado.

3.3 Métodos de Decisão Teórica

Os métodos de decisão teórica utilizam *funções de decisão*, ou *discriminantes*, para determinarem as melhores fronteiras de separação entre as classes da população e, por conseguinte, classificarem cada indivíduo dentro de sua respectiva classe. Formalizando, seja a população n -dimensional $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, na qual x_k são amostras representadas por vetores de atributos e distribuídas em g classes distintas (ver seção 3.1.2), o princípio básico dos métodos de decisão teórica é encontrar g funções de decisão $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$, ..., $\Delta_g(x)$, de tal forma que, se a amostra x_k pertencer à classe ω_i , então

$$\Delta_i(x_k) > \Delta_j(x_k) \quad (3.10)$$

para $j = 1, 2, \dots, g$ e $j \neq i$.

Desta forma, considera-se que uma amostra desconhecida x_d pertence à i -ésima classe da população x caso o valor numérico de $\Delta_i(x_d)$ seja o maior dentre as demais funções de decisão $\Delta_j(x_d)$. A Figura 3.5 ilustra a utilização de funções discriminantes, na qual as três classes ω_1, ω_2 e ω_3 são separadas pelas fronteiras de decisão Δ_{12}, Δ_{13} e Δ_{23} .

As diferentes abordagens para determinação das funções de decisão caracterizam o tipo de classificador utilizado. Dois classificadores são destacados: (1) *Classificadores de Distância Mínima*, que inferem a classe dos indivíduos pela proximidade ao centróide da classe; e (2) *Classificador de Bayes*, que determina a classe dos indivíduos pela probabilidade de ocorrência deste

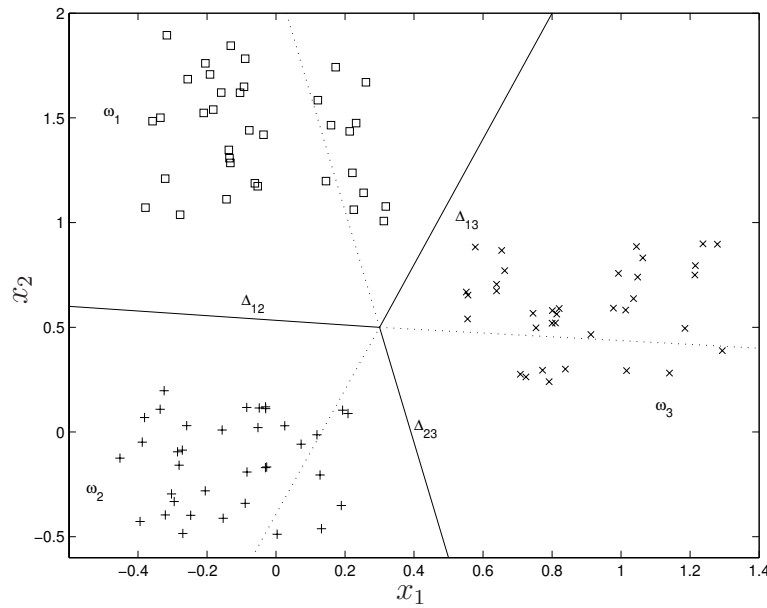


Figura 3.5: Exemplos de fronteiras de decisão separando as classes de uma população. Cada fronteira Δ_{pq} separa as classes ω_p e ω_q por distâncias iguais.

indivíduo no alcance da distribuição estatística da classe.

3.3.1 Classificadores de Distância Mínima

Esta abordagem é caracterizada pela classificação das amostras de acordo com a menor distância em relação às classes. Por isso, este tipo de classificador também é conhecido na literatura como *Classificador de Vizinhança Mais Próxima* (Duda e Hart, 1973). Segundo estes métodos, cada classe é representada por um protótipo que frequentemente é a própria média das amostras da classe:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} x_k^i$$

no qual, $i = 1, 2, \dots, g$, n_i é o número de amostras da classe i e x_k^i é a k -ésima amostra da classe i . Uma amostra desconhecida x é, então, considerada pertencente à classe que possui o protótipo mais próximo. Tais classificadores dependem exclusivamente da *métrica* utilizada para o cálculo

das distâncias no espaço de atributos. A métrica é, então, uma medida que representa a proximidade entre classes ou entre um indivíduo e uma classe. Várias abordagens são encontradas, na literatura, como métricas para a função de decisão. Dentre elas, destacam-se a *Distância Euclidiana* e a *Distância Mahalanobis*.

3.3.1.1 Distância Euclidiana

A métrica mais simples encontrada na literatura é a baseada na norma ou distância euclidiana:

$$D_i(x_k) = \|x_k - \bar{x}_i\| \quad (3.11)$$

para $i = 1, 2, \dots, n_i$ e, na qual, $\|a\| = (a \cdot a^T)^{1/2}$ é a norma euclidiana e a é um vetor linha.

Em termos de funções discriminantes, resolver a menor distância de uma amostra x_d à classe ω_i pela equação (3.11) é o mesmo que calcular o maior valor numérico da expressão:

$$\Delta_i(x_d) = x_d \bar{x}_i^T - \frac{1}{2} \bar{x}_i \bar{x}_i^T \quad (3.12)$$

para $i = 1, 2, \dots, n_i$ (Gonzalez e Woods, 1992).

A Figura 3.6 ilustra a função de decisão para duas espécies da base Iris (Apêndice A) caracterizadas apenas pelo comprimento e largura das pétalas. Amostras à esquerda da fronteira de decisão Δ são consideradas pertencentes a *Iris setosa* e à direita de Δ , pertencentes a *Iris versicolor*. Amostras sobre a fronteira são decididas arbitrariamente.

3.3.1.2 Distância Mahalanobis

Como pode ser notado pela equação (3.11), a distância euclidiana não considera, das classes, senão a localização de seus centróides. Problemas começam a surgir, entretanto, quando

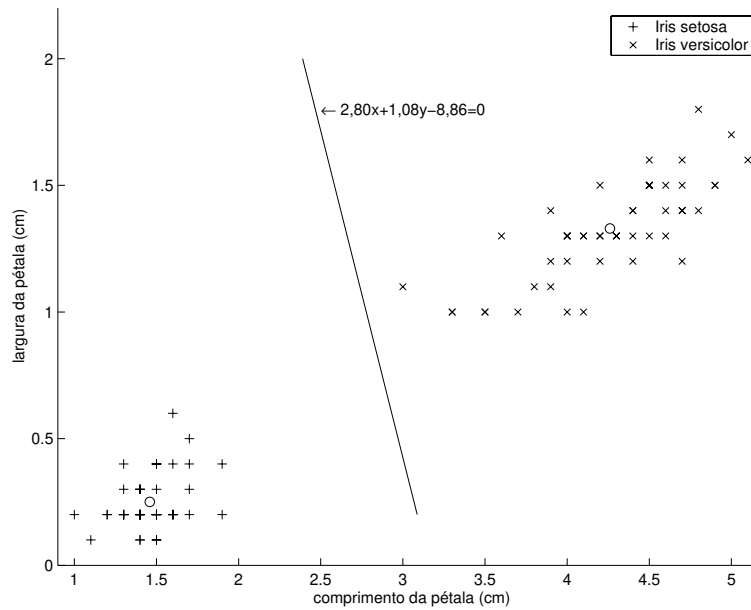


Figura 3.6: Método de Decisão Teórica com distância euclidiana. A fronteira de decisão separa as classes por igual distância euclidiana, considerando apenas os seus centróides, representados, no gráfico, por pequenos círculos.

as classes apresentam dispersões distintas, pois classes que apresentam dispersões grandes devem possuir fronteiras de decisão mais afastadas de seu centróide, enquanto as que apresentam as amostras concentradas próximas ao centróide sugerem fronteiras mais próximas.

A métrica

$$R_i(x_k)^2 = (x_k - \bar{x}_i)C_i^{-1}(x_k - \bar{x}_i)^T \quad (3.13)$$

é chamada de Distância de Mahalanobis (Mahalanobis, 1936) e apresenta, justamente, a medida de proximidade entre uma amostra x_k e o protótipo $\bar{x}_i$ de uma classe i , considerando-se a dispersão desta classe medida através da matriz de covariância C_i (ver equação (3.6)). Assim, para o classificador por vizinhança Mahalanobis, uma amostra é considerada pertencente a uma determinada classe se a medida $R_i(x_k)$ é menor do que para todas as outras classes. E, como deve-se esperar, para os casos em que os atributos são descorrelacionados e as dispersões são iguais para todas as

classes, a distância de Mahalanobis se equivale à distância euclidiana.

3.3.2 Classificador de Bayes

Considerado ótimo no sentido de minimizar a probabilidade de erros de classificação, o Classificador de Bayes interpreta as distribuições estatísticas das classes de uma população para inferir a probabilidade de uma amostra desconhecida pertencer a uma classe ou outra. Formalizando, sendo a probabilidade de que uma amostra x_k pertença à classe ω_i representada por $p(\omega_i|x_k)$ e L_{kj} representando a perda da classificação da amostra x_k na classe ω_j , tem-se a equação de *risco médio*:

$$S_j(x_k) = \sum_{i=1}^g L_{ij}p(\omega_i|x_k) \quad (3.14)$$

A partir da expressão básica de probabilidades $p(a|b) = [p(a)p(b|a)]/p(b)$, a equação (3.14) pode ser reescrita por:

$$S_j(x_k) = \frac{1}{p(x_k)} \sum_{i=1}^g L_{ij}p(x_k|\omega_i)P(\omega_i) \quad (3.15)$$

na qual $p(x_k|\omega_i)$ é a função densidade de probabilidade das amostras da classe ω_i e $P(\omega_i)$ é a probabilidade de ocorrência da classe ω_i . Sendo $1/p(x_k)$ constante para todos os $S_j(x_k)$, este termo pode ser eliminado da equação, por não afetar as comparações entre elas. Ainda, considerando-se a função de perda L_{ij} igual a 0, para decisões corretas, ou igual a 1, para decisões incorretas, a equação (3.15) reduz-se a:

$$S_j(x_k) = \sum_{i=1}^g (1 - \lambda_{ij})p(x_k|\omega_i)P(\omega_i) = p(x_k) - p(x_k|\omega_i)P(\omega_i) \quad (3.16)$$

na qual $\lambda_{ij} = 1$, se $i = j$, e $\lambda_{ij} = 0$, se $i \neq j$.

Novamente, como $p(x_k)$ é constante, pois independe da classe, este termo pode ser eliminado da expressão e tem-se, enfim, a Função Discriminante de Bayes:

$$S_j(x_k) = p(x_k|\omega_i)P(\omega_i) \quad (3.17)$$

Desta forma, diferentemente das métricas Mahalanobis e Euclidiana, a medida de Bayes representa a probabilidade de uma amostra desconhecida pertencer a uma determinada classe, considerando-se, assim, a amostra x_k pertencente à classe ω_i se $S_i(x_k)$ obtiver o maior valor numérico entre todas as outras classes.

Se forem inferidas dispersões n -dimensionais gaussianas e probabilidades iguais de ocorrência para todas as classes da população, é possível utilizar-se diretamente a equação (Gonzalez e Woods, 1992):

$$S_j(x_k) = \frac{1}{g} \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |C_i^{1/2}|} e^{[-\frac{1}{2}(x_k - \bar{x}_i)C_i^{-1}(x_k - \bar{x}_i)^T]} \quad (3.18)$$

A Figura 3.7 ilustra a função de decisão para duas classes com distribuições gaussianas de médias 6 e 12 e desvios padrões 1 e 2.5, respectivamente. Amostras à esquerda da fronteira de decisão Δ são consideradas pertencentes a ω_1 e à direita de Δ , pertencentes a ω_2 . Novamente, amostras sobre a fronteira são decididas arbitrariamente.

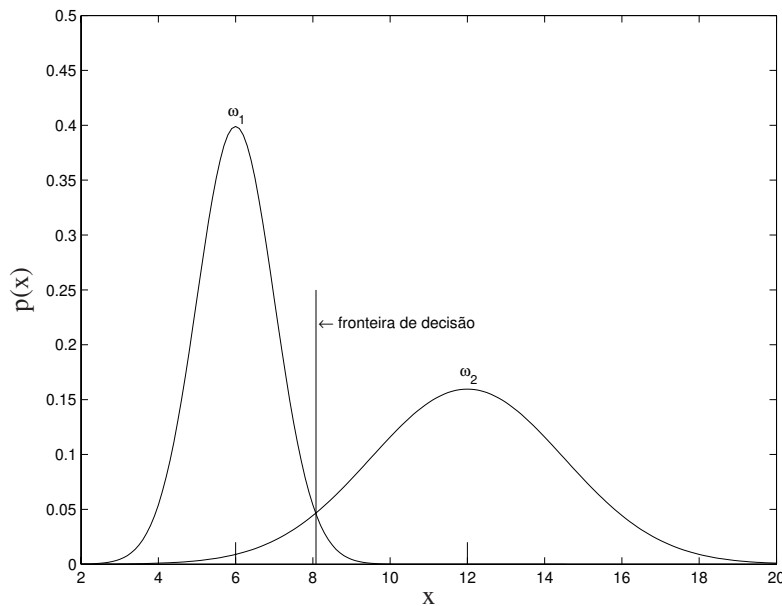


Figura 3.7: Exemplo do método de decisão teórica de Bayes. A fronteira de decisão indica o ponto no qual uma amostra teria igual probabilidade de pertencer às classes ω_1 e ω_2 .

3.4 Estimação de Erro

Dada a existência de diversos classificadores, uma avaliação quanto ao desempenho e precisão de cada classificador é comumente necessária. Para este fim, técnicas para estimação de erro são geralmente utilizadas por possibilitarem a predição da precisão e da adequabilidade de um classificador em relação à população considerada, utilizando, para isso, somente os dados disponíveis da população (Duda e Hart, 1973).

Na prática, a *taxa de erro* de um sistema de classificação é estimada através da divisão de todas as amostras disponíveis em conjuntos de treinamento e teste. Primeiramente, o classificador é projetado utilizando-se as amostras de treinamento para, posteriormente, ser avaliado com base nas amostras de teste. A porcentagem de classificações incorretas, baseadas no conhecimento prévio das amostras de teste e suas respectivas classes, é tomada como estimativa da taxa de erro. Entretanto, esta medida pode ser mais ou menos realística dependendo de dois fatores: (1) tamanho dos conjuntos de treinamento e teste; e (2) independência entre esses conjuntos (Jain et al., 2000).

Diversas abordagens são propostas na literatura para divisão dos conjuntos de treinamento e teste, visando o melhor aproveitamento do número de amostras. Contudo, para um número de amostras suficientemente grande, todas as abordagens tendem a convergir para resultados semelhantes. Quatro abordagens empíricas, ou experimentais, para a estimação de erro são discutidas em Devijver e Kittler (1982). São elas:

1. Resubstituição
2. Rotação
3. *Holdout*
4. *Leave-One-Out*

A Resubstituição é o mais simples dos preditores de erro. Através desta abordagem, toda a população é utilizada, primeiramente, como conjunto de treinamento e, em seguida, como de teste. Contudo, segundo Devijver e Kittler (1982), ela é considerada inapropriada para a maioria dos casos, visto utilizar o mesmo conjunto de amostras como treinamento e teste e, infringir, assim, o fator da independência entre os conjuntos. Melhores alternativas são as abordagens *Holdout* e

Rotação, principalmente para populações de tamanho médio e grande. Para o método de *Holdout*, a população total é particionada aleatoriamente nos conjuntos de treinamento e teste. O método de Rotação diferencia-se deste pela aplicação repetida do *Holdout*, calculando o erro através da média dos resultados de cada iteração e, por isso, melhorando sua estimativa para populações relativamente pequenas.

Caso especial do *Holdout* é a abordagem descrita pelo *Leave-One-Out* (Algoritmo 3.1). Nesta técnica, cada amostra é selecionada para constituir isoladamente o conjunto de teste, sendo todo o restante da população utilizado para o treinamento. Desta forma, todas as amostras são testadas e utilizadas no treinamento, sem infringir o fator da independência discutido acima. A estimativa do erro é obtida, neste caso, através do número de amostras classificadas incorretamente sobre o número total de amostras. Atribuído a Lachenbruch e Mickey (1968) a primeira formalização deste método, o *Leave-One-Out* permite a reprodução exata de experimentos por independência de seleções aleatórias do conjunto de teste. Vantagens associadas a esta técnica são seu aproveitamento de populações relativamente pequenas e sua capacidade de aproximação da taxa de erro real para populações altamente numerosas (Highleyman, 1962).

```
Seja  $n$  o tamanho da população;  
Seja  $e$  o erro do classificador;  
  
1.)  $e \leftarrow 0$ ;  
2.) Para  $i = 1, \dots, n$ :  
    2.1) Treinar o classificador com a população excetuando a amostra  $i$ ;  
    2.2) Testar amostra  $i$ ;  
    2.3) Se  $i$  foi classificada incorretamente,  $e \leftarrow e + 1$ ;  
3.) Taxa de erro estimada  $\leftarrow e/n$ ;
```

Algoritmo 3.1: Estimador de erro *Leave-One-Out*

Capítulo 4

Reconhecimento de Formas Naturais

Formas naturais são freqüentemente caracterizadas pela variabilidade das amostras de uma mesma classe. Medidas descritoras desta variabilidade podem ser, de modo geral, representadas através de variáveis aleatórias. Com isso, sistemas para reconhecimento de formas naturais devem considerar, além de descritores adequados à separação das classes, abordagens de classificação capazes de tratar a característica aleatória dos atributos medidos. A Figura 4.1 ilustra esta variabilidade das formas naturais através da sobreposição dos contornos e das suas assinaturas. Pode-se notar, por estes exemplos, que as variações dos indivíduos da mesma classe ocorrem de forma aleatória e ao longo de todo o contorno.

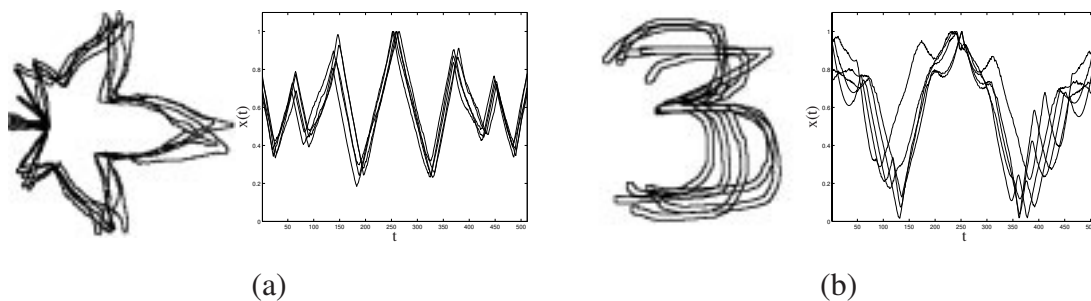


Figura 4.1: Exemplo da variabilidade das formas naturais. Variações nos indivíduos da mesma classe ocorrem de forma aleatória e ao longo de todo o contorno. (a) Contornos de folhas da mesma espécie e suas assinaturas. (b) Contornos do dígito “3” escrito à mão e suas assinaturas.

Este capítulo é reservado à ilustração e discussão dos experimentos desenvolvidos, da metodologia utilizada e dos resultados obtidos, objetivando-se a avaliação e identificação de atributos discriminativos para formas naturais. Tais atributos foram medidos das diferentes decomposições do contorno discutidas no Capítulo 2, selecionados e classificados segundo as abordagens descritas no Capítulo 3. Para avaliação da eficiência, robustez e precisão dos resultados obtidos, foi utilizado um conjunto de folhas pertencentes a diferentes espécies de plantas. O potencial discriminativo dos atributos medidos de cada decomposição foi analisado e comparado procurando-se o estabelecimento da relação custo-precisão de cada descritor, considerando-se a população utilizada para testes. O *custo* foi estimado de acordo com os tempos de processamento para obtenção dos descritores e para a classificação completa de amostras utilizadas nos testes, enquanto a *precisão* foi avaliada através das taxas de classificação bem-sucedida estimadas durante a fase de decisão teórica das amostras.

Folhas são formas naturais caracterizadas por grande variabilidade de suas configurações. Variações presentes nos contornos das folhas estão geralmente associadas às seguintes características: forma geral da lâmina (elíptica ou arredondada, longa ou curta, larga ou estreita, lobada ou não-lobada, etc.), aspecto do ápice e da base (curvaturas, ângulos, etc.) e tipo da margem (lisa, serrilhada, dentada, etc.). A identificação de espécies de plantas através das folhas é o meio mais viável não apenas pela abundância e disponibilidade constante de amostras, em comparação a frutos e flores, mas também por suas características morfológicas que, segundo (Ash et al., 1999), são suficientes para estabelecerem-se sistemas hierárquicos e taxonômicos. No Apêndice B podem ser vistas amostras de todas as espécies utilizadas nos experimentos.

4.1 Metodologia dos Experimentos

Vários experimentos foram realizados com a finalidade de verificar-se o potencial discriminativo dos atributos medidos nos espaços resultantes de cada transformada. Para isso, cada descritor foi analisado considerando-se abordagens para parametrização do contorno das for-

mas, redução da dimensionalidade e seleção dos atributos mais significativos e classificação bem-sucedida das amostras. Tais experimentos foram planejados de forma a proverem material suficiente para a análise e comparação do custo e da precisão das abordagens de acordo com os fatores: (1) influência das assinaturas; (2) influência das decomposições e janelas de análise; (3) quantidade e *qualidade* dos atributos; e (4) influência das métricas dos classificadores. A Figura 4.2 ilustra a metodologia aplicada aos experimentos, destacando os métodos utilizados em cada etapa.

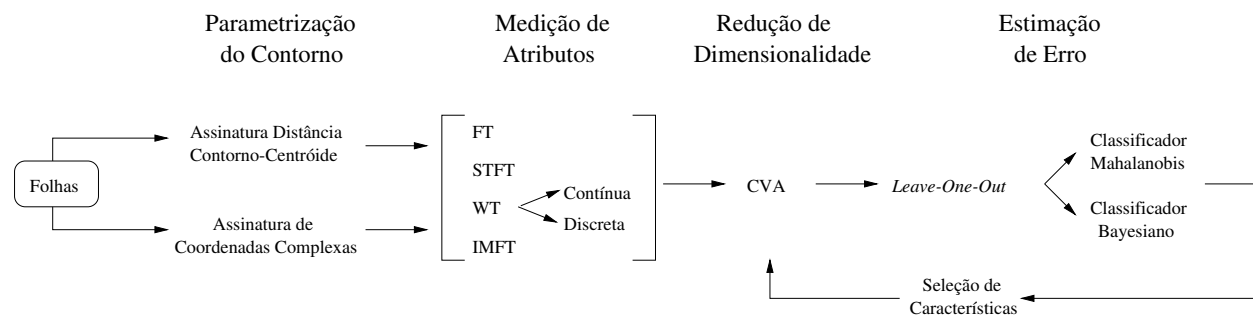


Figura 4.2: Diagrama da metodologia utilizada nos experimentos.

4.1.1 Descrição Geral

Uma população de folhas, contendo 15 espécies (Figura B.1) com 20 amostras cada, foi utilizada nos experimentos. As folhas foram coletadas e digitalizadas em um *scanner* de mesa na resolução de 100 pontos por polegada e em tons de cinza. Em seguida, as imagens das folhas foram binarizadas utilizando-se um aplicativo gráfico, possibilitando a extração do contorno das folhas através de um algoritmo sequencial com vizinhança 8 (Gonzalez e Woods, 1992). Os experimentos foram implementados na linguagem de programação *MATLAB*, utilizando-se nos algoritmos rotinas disponibilizadas pela própria linguagem, como *fft*, *cwt* e *wavedec* (MathWorks, 2003).

4.1.2 Parametrizações

As assinaturas distância contorno-centróide e de coordenadas complexas (ver seção 2.2) foram testadas na parametrização dos contornos das folhas. As assinaturas são utilizadas visando-se a redução da complexidade de um eventual processamento bidimensional das imagens, sem que as características discriminativas das formas sejam perdidas. Dadas possíveis variações de escala entre as amostras digitalizadas, as assinaturas são normalizadas em amplitude (0-1) e número de amostras (512).

Dentre as parametrizações testadas, entretanto, a assinatura de coordenadas complexas gera uma representação dupla dos contornos, duplicando também o processamento posterior sem, com isso, ter mostrado resultados superiores aos obtidos pela assinatura distância contorno-centróide para as classes e atributos testados. Assim, nos experimentos descritos abaixo, todo o processamento de decomposição dos contornos, medição de atributos e classificação das amostras é baseado na parametrização dos contornos das folhas pela assinatura distância contorno-centróide.

4.1.3 Medição de Atributos

A extração dos descritores foi feita a partir dos espaços gerados pela decomposição das assinaturas, segundo a Transformada de Fourier (FT), a Transformada de Fourier de Curta Duração (STFT), as Transformadas de Wavelet Contínua (CWT) e Discreta (DWT) e a Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea (IMFT), de acordo com as discussões do Capítulo 2. Os atributos medidos dos diversos métodos analisados foram selecionados visando-se a captura de características discriminativas presentes em cada espaço de decomposição. Por serem espaços com dimensões e grandezas distintas, atributos que obtêm bons resultados para uma das transformadas, podem eventualmente apresentar baixo desempenho ou, até mesmo, serem inviáveis em outras abordagens. As seções seguintes exibem os resultados obtidos pelos dois melhores conjuntos de atributos extraídos de cada abordagem. Na escolha dos atributos, a precisão da classificação foi considerada como critério chave, utilizando-se o critério custo apenas em casos de descritores com

resultados semelhantes. Fatores relacionados com a janela de análise, para as abordagens que utilizam tal recurso, também são discutidos e comparados.

4.1.4 Redução de Dimensionalidade

Para todas as abordagens, a redução de dimensionalidade dos vetores de atributos foi executada através da Análise de Variáveis Canônicas (CVA) (ver seção 3.1.2), cujo espaço bidimensional, formado pelos dois eixos de maior significação (primeiros eixos canônicos), foi utilizado para a classificação das amostras. Este espaço foi utilizado por mostrar-se o mais conveniente para a discriminação de padrões, ao propiciar a maximização das distâncias entre as classes, minimizando a dispersão das amostras em relação ao centro de suas classes.

4.1.5 Estimação de Erro

O Classificador de Distância Mínima Mahalanobis e o Classificador Bayesiano, aplicados sobre o espaço canônico bidimensional, foram utilizados para verificação do poder discriminativo dos diversos descritores experimentados. Esses classificadores diferenciam-se, basicamente, pelas métricas utilizadas para determinação das fronteiras de decisão, como visto na seção 3.3. Foi verificado, entretanto, que as métricas utilizadas pelos classificadores Bayesiano e distância mínima Mahalanobis para a decisão teórica apresentam resultados semelhantes, não influenciando nos resultados da seleção e discriminação das amostras. A Figura 4.3 exibe dois resultados da seleção de características para esses dois classificadores, mostrando que as taxas de classificação, estimadas pelo método *Leave-One-Out* (ver seção 3.4), variam similarmente nas duas abordagens. Desta forma, os experimentos descritos nas seções subseqüentes foram baseados apenas nos resultados obtidos pelo classificador Bayesiano.

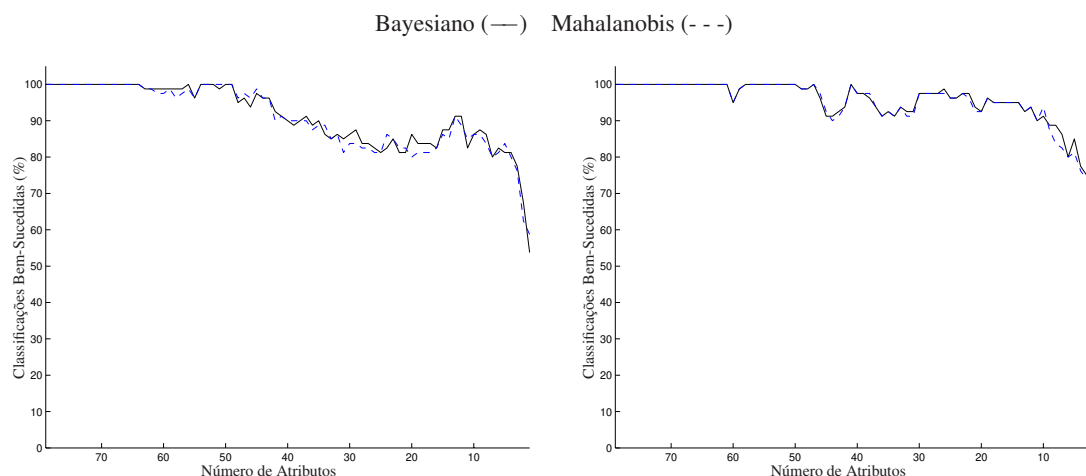


Figura 4.3: Dois exemplos da seleção de características utilizando-se as taxas de classificações bem-sucedidas pelos classificadores Bayesiano (contínuo) e de distância mínima Mahalanobis (tracejado). As métricas dos classificadores não influenciam de forma significativa o resultado da seleção e discriminação das amostras, visto apresentarem comportamentos similares.

A classificação de amostras em condições que envolvem um grande número de classes geralmente resulta em sobreposições e ambigüidades, reduzindo a separabilidade entre as classes e aumentando, conseqüentemente, a taxa de erro de identificação das amostras. Para minimizar tal problema e aumentar o poder discriminativo do sistema, a classificação das amostras ocorreu por etapas, de modo hierárquico e na forma de uma árvore montada através da subdivisão da população em conjuntos menores de classes sempre que sobreposições e ambigüidades ocorressem no espaço bidimensional canônico. Assim, a decisão teórica definitiva é executada apenas nas folhas das árvores, onde os subconjuntos são completamente discrimináveis, sendo as decisões intermediárias apenas temporárias, servindo como indicadoras do caminho (ramo) que uma amostra desconhecida deve percorrer para ser classificada corretamente. Através da árvore de classificação hierárquica é possível também fazer-se inferências sobre a maior ou menor similaridade das classes, observando-se a disposição das amostras nos ramos e folhas das árvores.

A Figura 4.4 ilustra o processo de geração da árvore de classificação hierárquica, formada através da decomposição sucessiva dos agrupamentos até a classificação completa das classes.

Pode ser percebido pela Figura 4.4a que as sobreposições observadas reduziriam significativamente a taxa de classificação das sete classes testadas. Entretanto, com o processo hierárquico, os dois agrupamentos destacados (o da esquerda composto por 3 classes e o da direita composto por 4 classes) são analisados isoladamente e têm suas classes discriminadas completamente (Figuras 4.4c e 4.4e). As Figuras 4.4b, 4.4d e 4.4f ilustram a formação da árvore, utilizando elementos gráficos para simbolizar cada etapa.

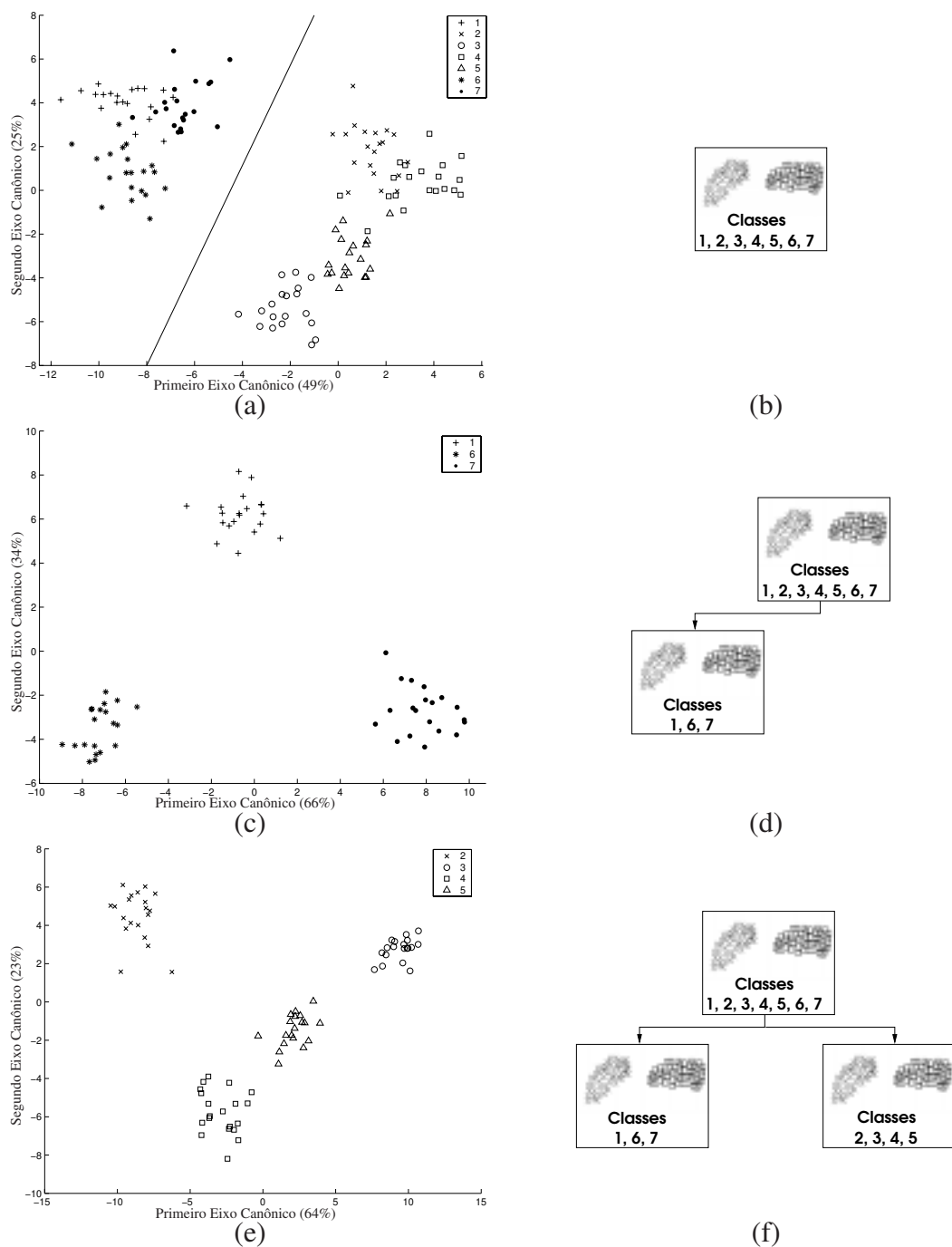


Figura 4.4: Processo de geração da árvore de classificação hierárquica. (a) Espaço bidimensional canônico das classes testadas rotuladas de 1 a 7, e (b) sua representação gráfica, (c) Espaço bidimensional canônico das classes 1, 6 e 7, pertencentes ao agrupamento da esquerda, e (d) representação gráfica da árvore resultante, (e) Espaço bidimensional canônico das classes 2, 3, 4 e 5, pertencentes ao agrupamento da direita, e (f) representação gráfica da árvore resultante.

4.1.6 Seleção de Características

Para cada nó da árvore de classificação hierárquica, a seleção dos atributos mais significativos para a discriminação dos subconjuntos foi feita através da seleção sequencial inversa dos atributos (ver seção 3.2), sendo a função-objetivo estabelecida através da análise das variâncias dos atributos originais nas relações inter e intraclases com as taxas de classificação bem-sucedida. Esse método de seleção é baseado na eliminação sequencial dos atributos que possuem as menores relações var^B/var^W , ou seja, os atributos que possuem as menores variâncias interclasses e as maiores variâncias intraclases (Algoritmo 4.1). Esta solução é utilizada devido ao processo de obtenção dos eixos canônicos basear-se na otimização da relação $\max(\frac{A^T C^B A}{A^T C^W A})$ (ver seção 3.1.2).

Seja $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ uma população com n amostras
e $x_i = [x_{i1}, \dots, x_{ip}]$ uma amostra com p atributos;

- 1.) $x' \leftarrow$ cópia de x ;
- 2.) $y \leftarrow \text{cva}(x')$;
- 3.) Enquanto $\text{leave_one_out}(y) = 100\%$:
 - 3.1) $x \leftarrow$ o estado anterior x' ;
 - 3.2) $[var_1^B, \dots, var_p^B] \leftarrow$ variâncias interclasses;
 - 3.3) $[var_1^W, \dots, var_p^W] \leftarrow$ variâncias intraclases;
 - 3.4) $j \leftarrow$ atributo com $\min(var^B/var^W)$;
 - 3.5) $x' \leftarrow x$ sem a coluna j ;
 - 3.6) $y \leftarrow \text{cva}(x')$;
- 4.) População selecionada $\leftarrow x$;

Algoritmo 4.1: Seleção sequencial inversa dos atributos baseada nas relações inter e intraclases com as taxas de classificação bem-sucedida.

Desta forma, a cada nó da árvore, simbolizados pelos elementos gráficos das Figuras 4.4b, 4.4d e 4.4f, são adicionados os resultados da seleção de atributos, como mostrado na Figura 4.5.

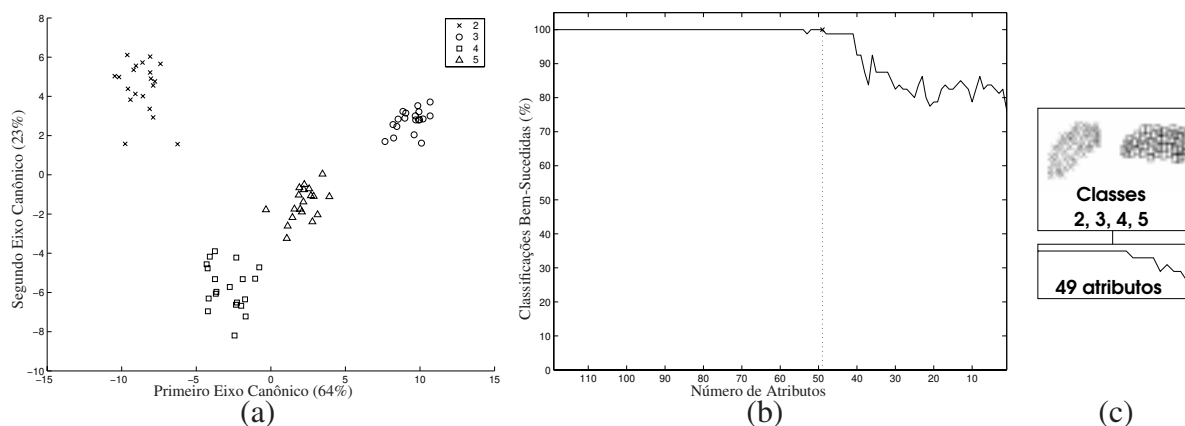


Figura 4.5: Seleção de atributos adicionada ao processo de decomposição dos agrupamentos na classificação hierárquica. (a) Espaço bidimensional canônico para quatro classes testadas, (b) Resultado da seleção de atributos, (c) Representação gráfica dos nós da árvore de classificação hierárquica.

4.2 Resultados

Esta seção objetiva o detalhamento dos resultados obtidos considerando-se os experimentos desenvolvidos segundo a metodologia descrita na seção anterior. Fatores que influenciam no custo e na precisão das diversas abordagens são comentados e comparados. O fator precisão é obtido através da taxa de classificações bem-sucedidas estimada pelo método *Leave-One-Out* para o classificador Bayesiano. O custo é a estimativa que reflete o consumo de recursos computacionais. Ele pode ser analisado de acordo com: (1) o número de subdivisões da população, visto estar diretamente relacionado com o número de aplicações do algoritmo de classificação; e (2) o número de atributos mínimos necessários para a discriminação das classes, fator que influencia no custo da extração dos atributos e da redução de dimensionalidade do espaço de atributos.

4.2.1 Transformada de Fourier

Segundo a metodologia ilustrada no diagrama da Figura 4.2, a Transformada de Fourier foi aplicada sobre as assinaturas distância contorno-centróide das folhas, decompondo-as em frequências. Atributos utilizados na literatura para os descritores de Fourier, os coeficientes de baixa ordem (baixa frequência) da Transformada de Fourier foram normalizados e utilizados como descritores das amostras de treinamento para posteriores análises do potencial discriminativo. O potencial discriminativo dos descritores, por sua vez, foi analisado considerando-se a taxa de classificação de Bayes, após a redução da dimensionalidade do espaço de atributos através das técnicas de Análise de Variáveis Canônicas e Seleção Sequencial Inversa dos atributos de acordo com seus pesos canônicos.

Inicialmente, foram utilizados como descritores os 120 coeficientes de baixa frequência normalizados $|X(\omega)/X(0)|$. A Figura 4.6 mostra os resultados das iterações dispostos em árvore de acordo com a classificação hierárquica. Cada nível da árvore representa a separação dos subconjuntos de amostras linearmente discrimináveis no nível anterior. Para cada nó da árvore, é apresentada a separação das classes em função da seleção de características, destacando-se o número mínimo de atributos necessários para discriminação completa entre dois agrupamentos, para os nós intermediários, e entre as classes, para as folhas da árvore.

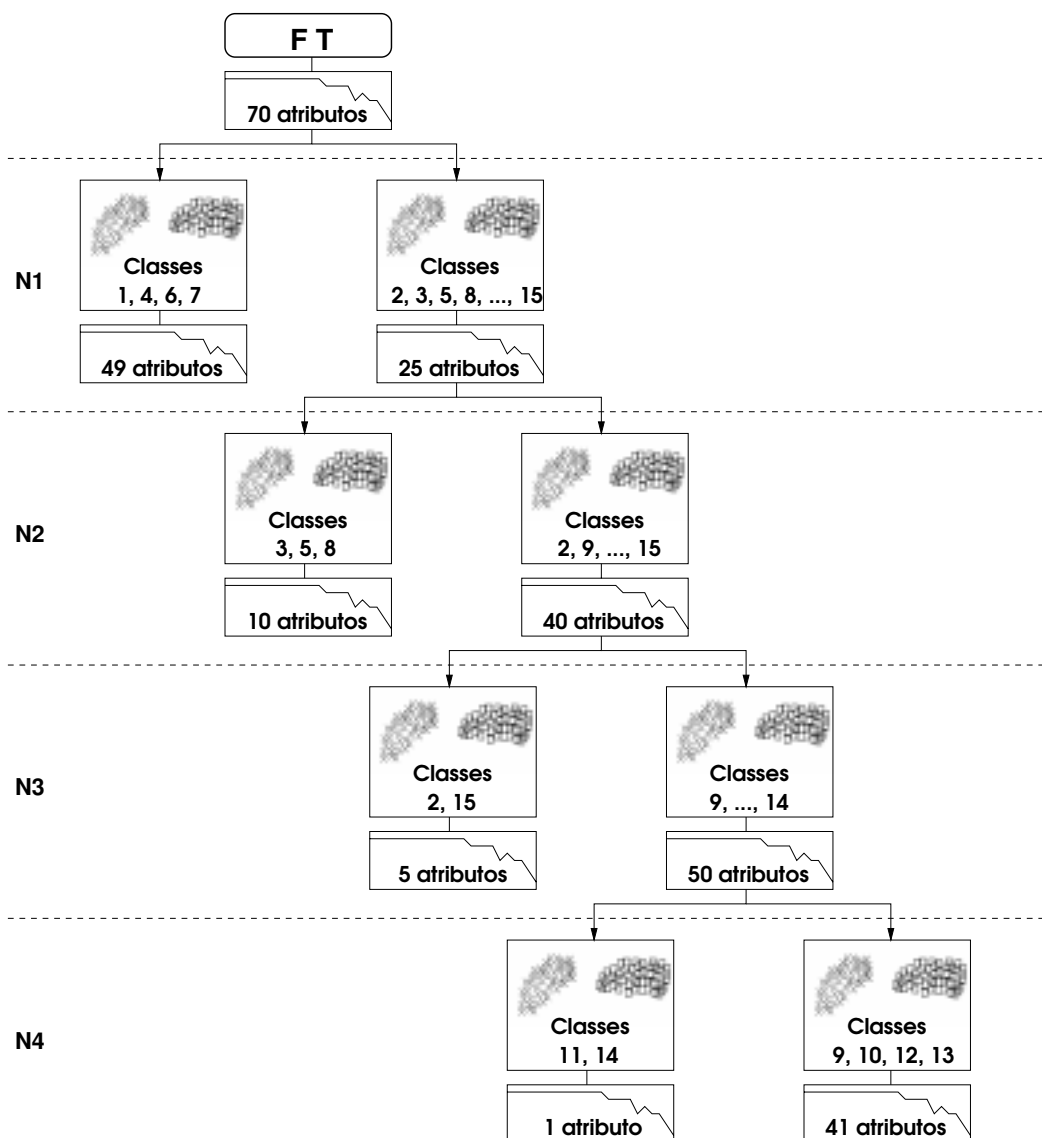


Figura 4.6: Árvore de classificação hierárquica para as amostras de treinamento considerando-se o descritor baseado nos coeficientes da Transformada de Fourier.

Os resultados mostram que a Transformada de Fourier é capaz de discriminar completamente as amostras testadas em uma árvore de 4 níveis, ou seja, no pior caso uma amostra desconhecida será identificada corretamente em 4 iterações do processo de classificação. Os resultados são dispostos abaixo:

Abordagem		Níveis(Nós)	Número Atributos ¹	Custo (seg.)		
				Descrição	Classificação	Total
FT	Coeficientes	4(8)	102	0,002	0,940	0,942

¹ União dos conjuntos de atributos de cada nó, ilustrados na Figura 4.7

O custo da transformação da amostra para o espaço canônico está diretamente relacionado com o número de atributos necessários para sua classificação, pois a utilização de um descritor de dimensão n requer manipulações de matrizes de covariância de tamanho n^2 . Considerando-se a união dos conjuntos de atributos mínimos necessários para a discriminação das amostras em cada nó, 102 coeficientes são necessários para esta abordagem. A Figura 4.7 exibe os atributos necessários por esta abordagem para descrição do conjunto de amostras de treinamento. Como os coeficientes da Transformada de Fourier são obtidos de uma só vez, o custo de extração dos atributos é reduzido ao tempo de processamento da função fft e da normalização $|X(\omega)/X(0)|$. O tempo conferido a essas operações foi 0,002 segundos¹. Já o tempo de processamento das 4 aplicações do CVA, referentes aos 4 níveis da árvore, somaram 0,940 segundos.

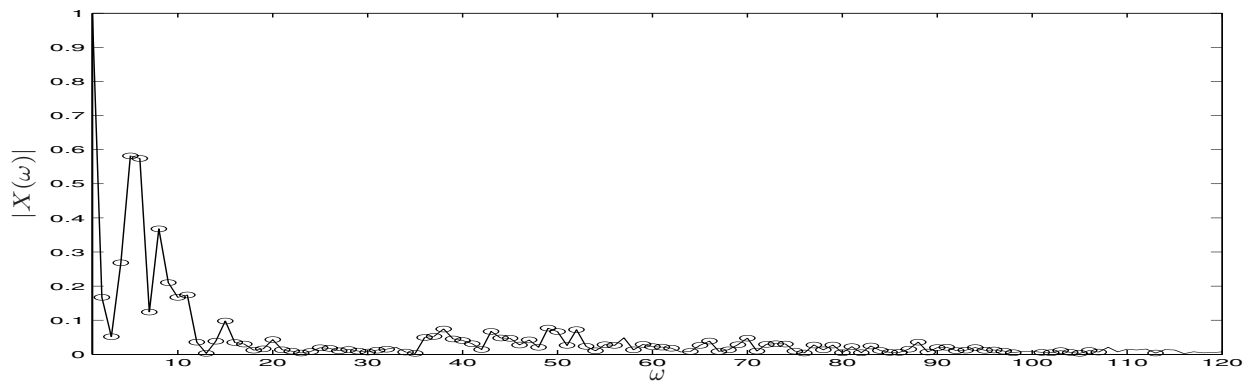


Figura 4.7: Visualização dos atributos da Transformada de Fourier necessários para descrição do conjunto de amostras de treinamento.

¹Resultados obtidos em uma estação SUN Ultra60-3D com clock de 333MHz e 512Mb de memória RAM.

ω	seq	ω	seq	ω	seq	ω	seq	ω	seq	ω	seq	ω	seq	ω	seq	ω	seq	ω	seq	ω	seq	ω	seq
1	118	11	110	21	78	31	96	41	89	51	77	61	60	71	49	81	43	91	34	101	30	111	9
2	116	12	100	22	88	32	90	42	69	52	55	62	50	72	22	82	48	92	36	102	27	112	13
3	119	13	97	23	76	33	17	43	98	53	68	63	15	73	54	83	84	93	19	103	42	113	21
4	120	14	103	24	75	34	67	44	59	54	41	64	74	74	18	84	40	94	23	104	12	114	7
5	117	15	104	25	83	35	107	45	82	55	62	65	58	75	47	85	53	95	35	105	29	115	3
6	111	16	109	26	87	36	94	46	66	56	46	66	63	76	24	86	33	96	20	106	6	116	8
7	114	17	99	27	86	37	65	47	57	57	81	67	95	77	52	87	39	97	31	107	16	117	1
8	112	18	105	28	80	38	93	48	85	58	45	68	106	78	38	88	25	98	70	108	28	118	4
9	115	19	108	29	73	39	102	49	91	59	44	69	79	79	32	89	26	99	14	109	37	119	2
10	113	20	101	30	72	40	92	50	71	60	64	70	61	80	56	90	51	100	10	110	11	120	5

Tabela 4.1: Seqüência de eliminação dos atributos do descritor baseado nos coeficientes da Transformada de Fourier durante a etapa de seleção de características. Valores em negrito são associados aos atributos utilizados como descritor.

4.2.2 Transformada de Fourier de Curta Duração

Outra abordagem analisada, a Transformada de Fourier de Curta Duração foi aplicada sobre as assinaturas distância contorno-centróide das folhas, decompondo-as no espaço “tempo x frequência” característico do janelamento feito por esse método. Foi utilizado $\sigma = 15$ para a janela de análise Gaussiana, verificando-se que valores de σ no intervalo de 8 a 32 não modificam significativamente os resultados obtidos. Foi constatado, contudo, que janelas com largura fora desse intervalo tendem a reduzir a capacidade discriminativa dos atributos, visto ocorrerem o negligenciamento do conteúdo global, quando $\sigma < 8$, e o negligenciamento do conteúdo local, quando $\sigma > 32$. Atributos foram extraídos do espaço característico dessa abordagem, formando-se dois conjuntos de descritores: o primeiro constituído de coeficientes da transformada que, devido à alta dimensionalidade resultante dessa decomposição, foram restritos aos primeiros componentes de frequência de cada janelamento, sendo o segundo conjunto formado pelas energias referentes aos conteúdos espectrais normalizados de cada janelamento.

Os descritores para a Transformada de Fourier de Curta Duração foram analisados quanto ao potencial discriminativo, considerando-se a taxa de classificação de Bayes, após a redução da dimensionalidade do espaço de atributos pelas técnicas de Análise de Variáveis Canônicas e Seleção Sequencial Inversa dos atributos de acordo com seus pesos canônicos.

Para o primeiro experimento da STFT, foram inicialmente utilizados como descritores 340 coeficientes normalizados $|X(t_g, \omega)/\max(X(t_g, 0))|$, com janelas de largura fixa $\sigma = 30$, centros $t_g = n\Delta t$, sendo $\Delta t = 30$ o passo de janelamento e $n = 0, \dots, 16$, e espectro limitado aos componentes de baixa frequência $\omega = 1, \dots, 20$.

A Figura 4.8 mostra o resultado das iterações dispostos em árvore de acordo com a classificação hierárquica proposta. Novamente, cada nível da árvore representa a separação dos subconjuntos de amostras linearmente discrimináveis no nível anterior. Para cada nó da árvore, é apresentada a separação das classes em função da seleção de características, destacando-se o número mínimo de atributos necessários para discriminação completa entre dois agrupamentos,

para os nós intermediários, e entre as classes, para as folhas da árvore.

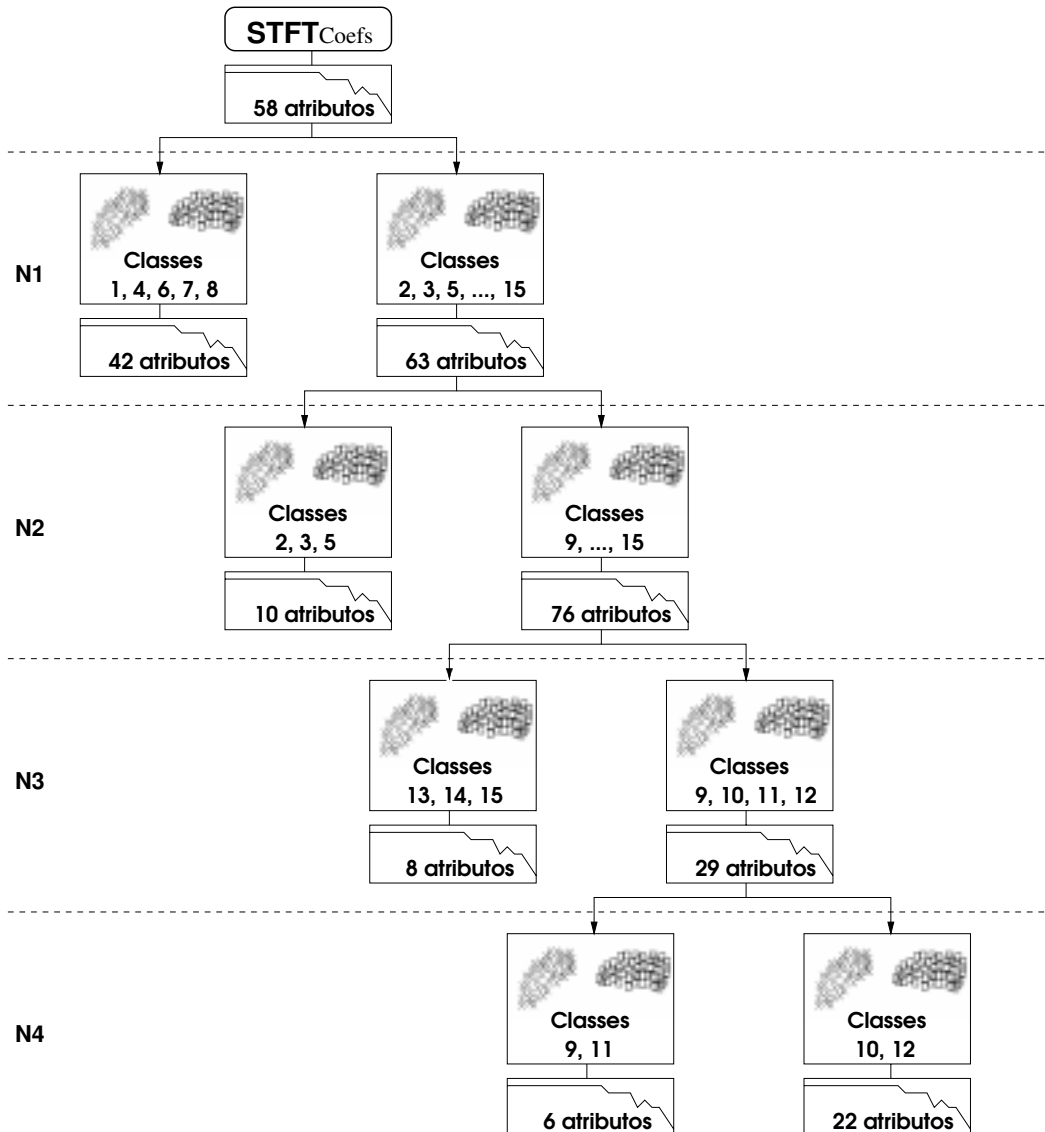


Figura 4.8: Árvore de classificação hierárquica para as amostras de treinamento considerando-se o descritor baseado nos coeficientes da Transformada de Fourier de Curta Duração.

Para o segundo experimento da STFT, foram inicialmente utilizados como descritores 64 medidas de energia referentes aos espectros de cada janelamento obtidos com janelas de largura

fixa $\sigma = 8$ e centros $n\Delta t$, sendo $\Delta t = 30$ o passo de janelamento e $n = 0, \dots, 63$:

$$E_n = \sum_{\omega} |X(n\Delta t, \omega)|^2$$

A Figura 4.9 mostra os resultados das iterações dispostos segundo a árvore de classificação hierárquica. Novamente, cada nível da árvore representa a separação de subconjuntos linearmente discrimináveis no nível anterior. Para cada nó da árvore, é apresentada a separação das classes em função da seleção de características, destacando-se o número mínimo de atributos necessários para discriminação completa entre dois agrupamentos, para os nós intermediários, e entre as classes, para as folhas da árvore.

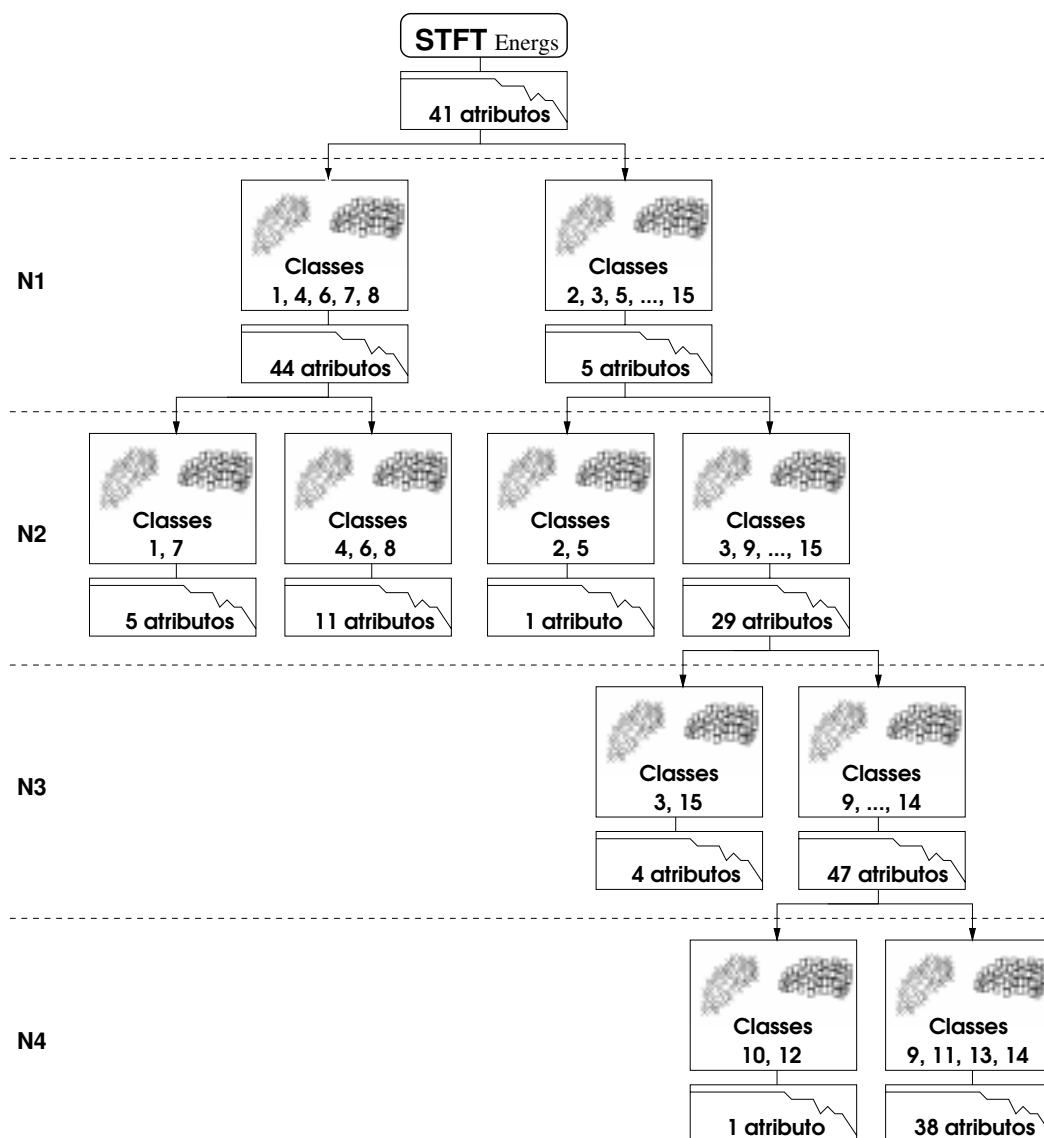


Figura 4.9: Árvore de classificação hierárquica para as amostras de treinamento considerando-se o descritor baseado nas energias dos coeficientes da Transformada de Fourier de Curta Duração.

Os resultados para os dois conjuntos de atributos mostram que a Transformada de Fourier de Curta Duração é capaz de discriminar completamente as folhas testadas, assim como a Transformada de Fourier, em uma árvore com 4 níveis. Desta forma, uma amostra desconhecida será classificada corretamente, no pior caso, em 4 iterações do processo, para ambos os descritores. Os

resultados são dispostos abaixo:

Abordagem		Níveis(Nós)	Número Atributos ¹	Custo (seg.)		
				Descrição	Classificação	Total
STFT	Coeficientes	4(8)	92	0,045	0,820	0,865
	Energias	4(10)	63	0,150	0,670	0,820

¹ União dos conjuntos de atributos de cada nó, ilustrados nas Figuras 4.10 e 4.11

Como o custo da transformação da amostra para o espaço canônico está diretamente relacionado com o número de atributos necessários para sua classificação, ao considerar-se a união dos conjuntos de atributos mínimos necessários para a discriminação das amostras em cada nó, 63 atributos foram necessários para o descritor formado pelas energias dos coeficientes e 92 atributos para o descritor constituído pelos coeficientes da STFT. O tempo de processamento das 4 aplicações do CVA, referentes aos 4 níveis da árvore, somaram 0,670 segundos, utilizando-se 63 atributos, e 0,820 segundos, considerando-se 92 atributos. As Figuras 4.10 e 4.11 exibem os atributos necessários por estas abordagens para descrição do conjunto de amostras de treinamento. Para análise dos custos de obtenção de tais atributos, é importante notar-se que, para o conjunto formado por energias, como a extração dessas medidas ocorre em cada mudança do centro da janela, sucessivas aplicações da Transformada de Fourier são necessárias, ou seja, para que n medidas da energia sejam computadas, n cálculos da *fft* são executadas. O tempo de processamento desse descritor, considerando-se 63 atributos (63 aplicações da *fft*) mais o cálculo da energia, foi 0,150 segundos. Já para o descritor formado por coeficientes, o custo de processamento engloba a normalização dos coeficientes e 17 deslocamentos da janela (17 aplicações da *fft*). O tempo de processamento desse descritor foi 0,045 segundos.

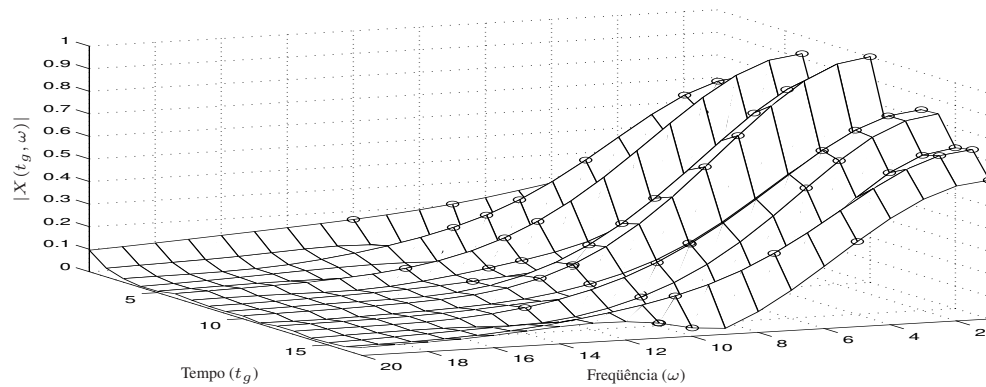


Figura 4.10: Atributos da Transformada Fourier de Curta Duração necessários para descrição por coeficientes do conjunto de amostras de treinamento.

		ω																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
t	1	335	207	242	194	310	213	246	165	274	112	129	253	154	169	21	103	34	56	121	48
	2	321	334	244	318	225	123	295	291	243	258	268	153	53	160	28	14	37	80	86	7
	3	328	327	319	206	247	296	202	280	283	252	161	144	100	152	134	54	44	71	38	30
	4	329	226	314	195	212	185	215	65	143	251	174	172	177	36	95	3	13	108	120	59
	5	339	309	304	235	307	229	294	271	158	273	50	128	135	139	79	140	85	35	97	8
	6	333	231	234	192	208	201	162	131	284	262	173	148	259	170	94	47	25	107	55	72
	7	338	238	240	222	299	250	276	122	149	270	278	151	178	113	78	6	115	167	17	33
	8	326	313	241	217	239	293	265	285	282	286	180	254	159	147	171	138	76	84	116	46
	9	320	233	317	306	221	228	267	163	255	125	111	43	66	106	22	73	24	31	119	16
	10	340	230	218	219	305	292	186	200	182	257	263	110	41	133	93	62	77	137	98	27
	11	324	223	312	209	245	204	290	157	156	269	63	127	142	168	117	90	2	19	96	75
	12	336	325	236	199	300	190	297	275	277	287	189	145	81	114	101	92	74	39	60	61
	13	337	322	302	308	237	184	197	288	281	132	183	69	249	42	67	109	5	10	102	83
	14	205	232	214	303	298	196	166	150	146	279	126	99	29	40	91	45	104	1	118	20
	15	330	248	315	198	220	301	256	260	164	272	51	155	130	141	136	12	82	4	15	32
	16	332	331	224	191	216	193	289	203	188	261	64	176	82	105	58	49	57	26	89	70
	17	323	211	227	210	316	124	187	179	181	266	264	175	52	78	11	23	88	18	87	9

Tabela 4.2: Sequência de eliminação dos atributos do descritor baseado nos coeficientes da Transformada de Fourier de Curta Duração durante a etapa de seleção de características. Valores em negrito são associados aos atributos utilizados como descritor.

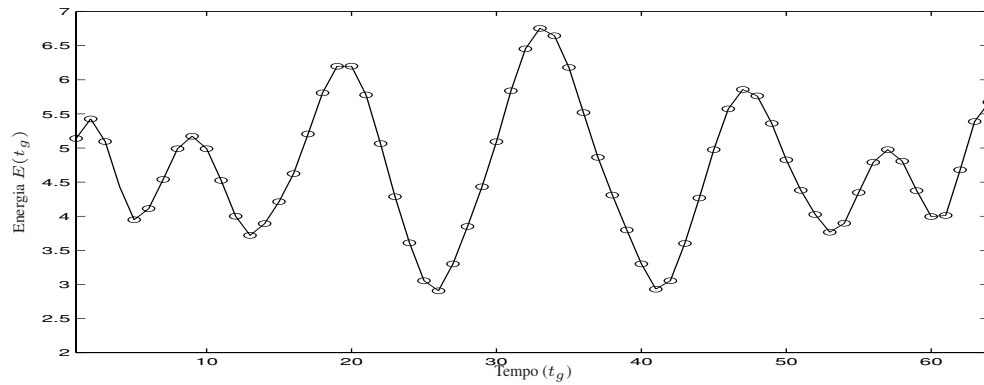


Figura 4.11: Atributos da Transformada de Fourier de Curta Duração necessários para descrição por energias do conjunto de amostras de treinamento.

ω	<i>seq</i>	ω	<i>seq</i>	ω	<i>seq</i>	ω	<i>seq</i>	ω	<i>seq</i>	ω	<i>seq</i>	ω	<i>seq</i>
1	35	11	52	21	54	31	51	41	48	51	9	61	12
2	30	12	44	22	39	32	38	42	60	52	24	62	8
3	17	13	45	23	34	33	64	43	26	53	11	63	7
4	1	14	23	24	18	34	63	44	6	54	15	64	13
5	22	15	31	25	62	35	58	45	14	55	29		
6	10	16	4	26	57	36	27	46	41	56	36		
7	19	17	2	27	16	37	2	47	56	57	42		
8	5	18	32	28	33	38	28	48	59	58	46		
9	43	19	40	29	25	39	20	49	53	59	50		
10	47	20	61	30	21	40	55	50	49	60	37		

Tabela 4.3: Sequência de eliminação dos atributos do descritor baseado em energias da Transformada de Fourier de Curta Duração durante a etapa de seleção de características. Valores em negrito são associados aos atributos utilizados como descritor.

4.2.3 Transformada de Wavelet Contínua

A Transformada de Wavelet Contínua foi aplicada sobre as assinaturas distância contorno-centróide das folhas, decompondo-as no espaço “tempo x escala” característico da análise feita por esse método. Visto que os coeficientes desta transformada não são invariantes à rotação, reflexão e mudança do ponto inicial de amostragem dos contornos (ver seção 2.5.3), não foram utilizados descritores formados pelos coeficientes desta transformada. Foram utilizados, para aquisição das invariâncias, descritores formados por medidas de energia referentes aos resultados da decomposição em cada mudança de escala. Além disso, para verificação da influência das bases, duas famílias de wavelets foram experimentadas: *Morlet* (Figura 4.12) e *Chapéu Mexicano* (Figura 4.13). Essas bases foram utilizadas pela similaridade com os sinais analisados.

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(5t)$$

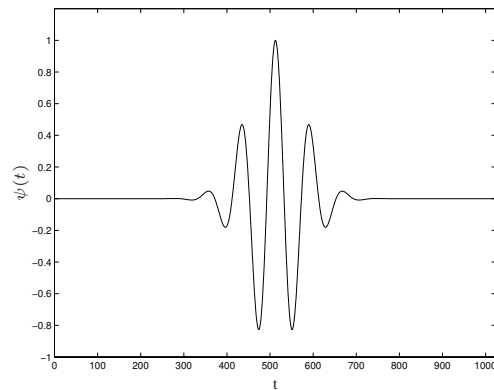


Figura 4.12: Equação e gráfico da *wavelet mãe* da família *Morlet*.

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{\frac{1}{4}} e^{\frac{-t^2}{2}} (1 - t^2)$$

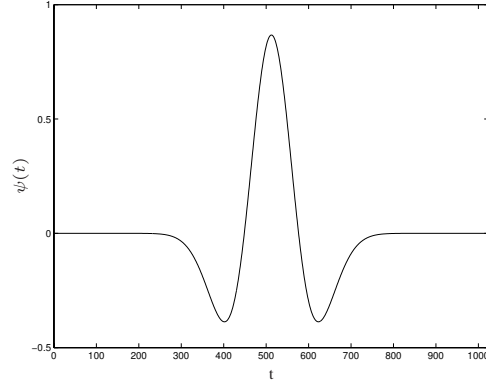


Figura 4.13: Equação e gráfico da *wavelet mãe* da família *Chapéu Mexicano*.

Para os dois experimentos da CWT foram inicialmente utilizados como descritores 60 medidas de energia referentes às decomposições em cada mudança de escala:

$$E_{\sigma} = \sum_t |X(t, \sigma)|^2; \sigma = 1, \dots, 60.$$

Os descritores para a Transformada de Wavelet Contínua também foram analisados quanto ao potencial discriminativo, considerando-se a taxa de classificação de Bayes, após a redução da dimensionalidade do espaço de atributos pelas técnicas de Análise de Variáveis Canônicas e Seleção Sequencial Inversa dos atributos de acordo com seus pesos canônicos.

Os resultados, dispostos segundo a árvore de classificação hierárquica, são mostrados nas Figuras 4.14 e 4.15. Cada nível da árvore representa a separação de subconjuntos linearmente discrimináveis no nível anterior. Para cada nó da árvore, é apresentada a separação das classes em função da seleção de características, destacando-se o número mínimo de atributos necessários para discriminação completa entre dois agrupamentos, para os nós intermediários, e entre as classes, para as folhas da árvore.

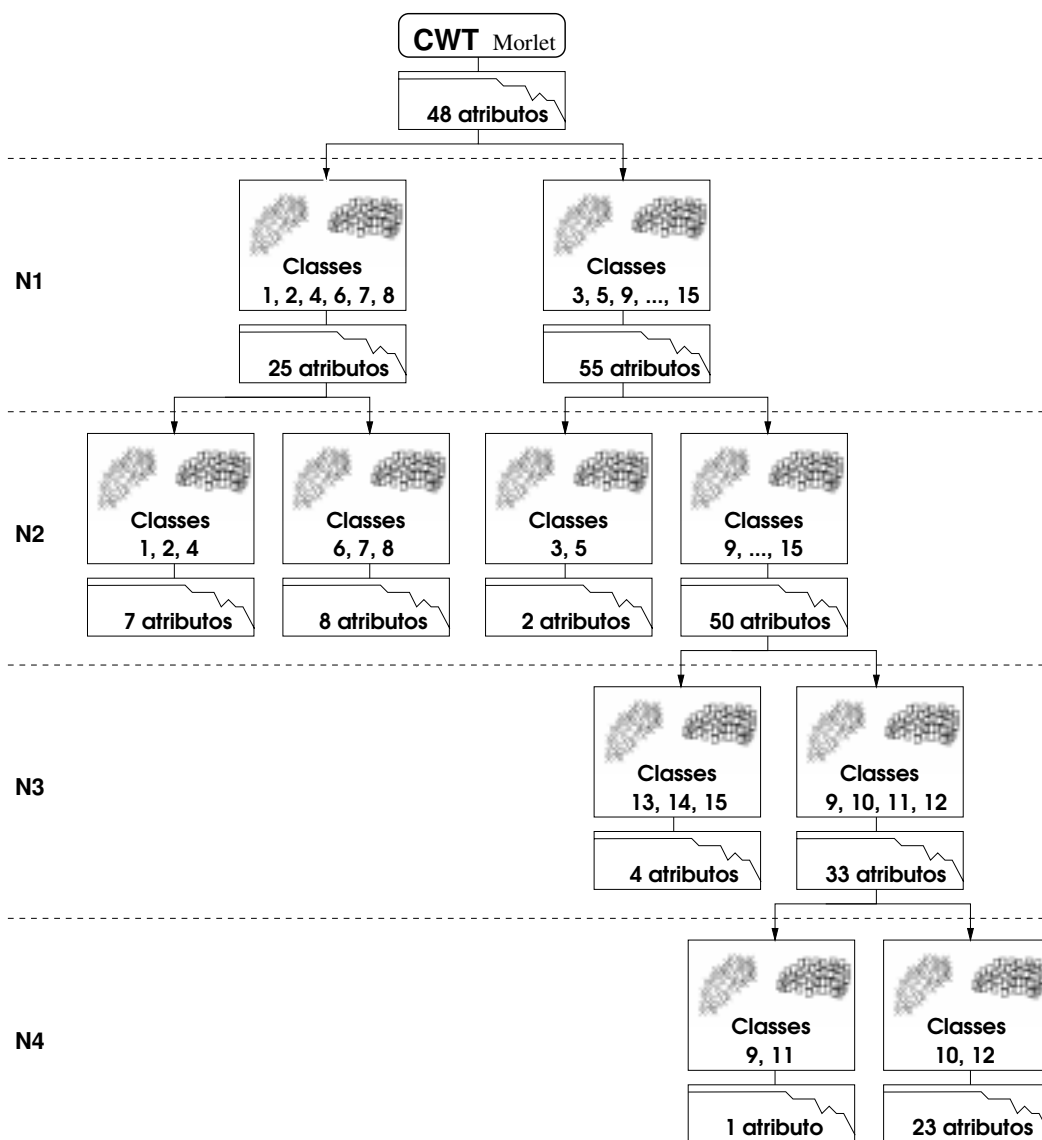


Figura 4.14: Árvore de classificação hierárquica para as amostras de treinamento considerando-se o descritor baseado nas energias dos coeficientes da Transformada de Wavelet Contínua com base *Morlet*.

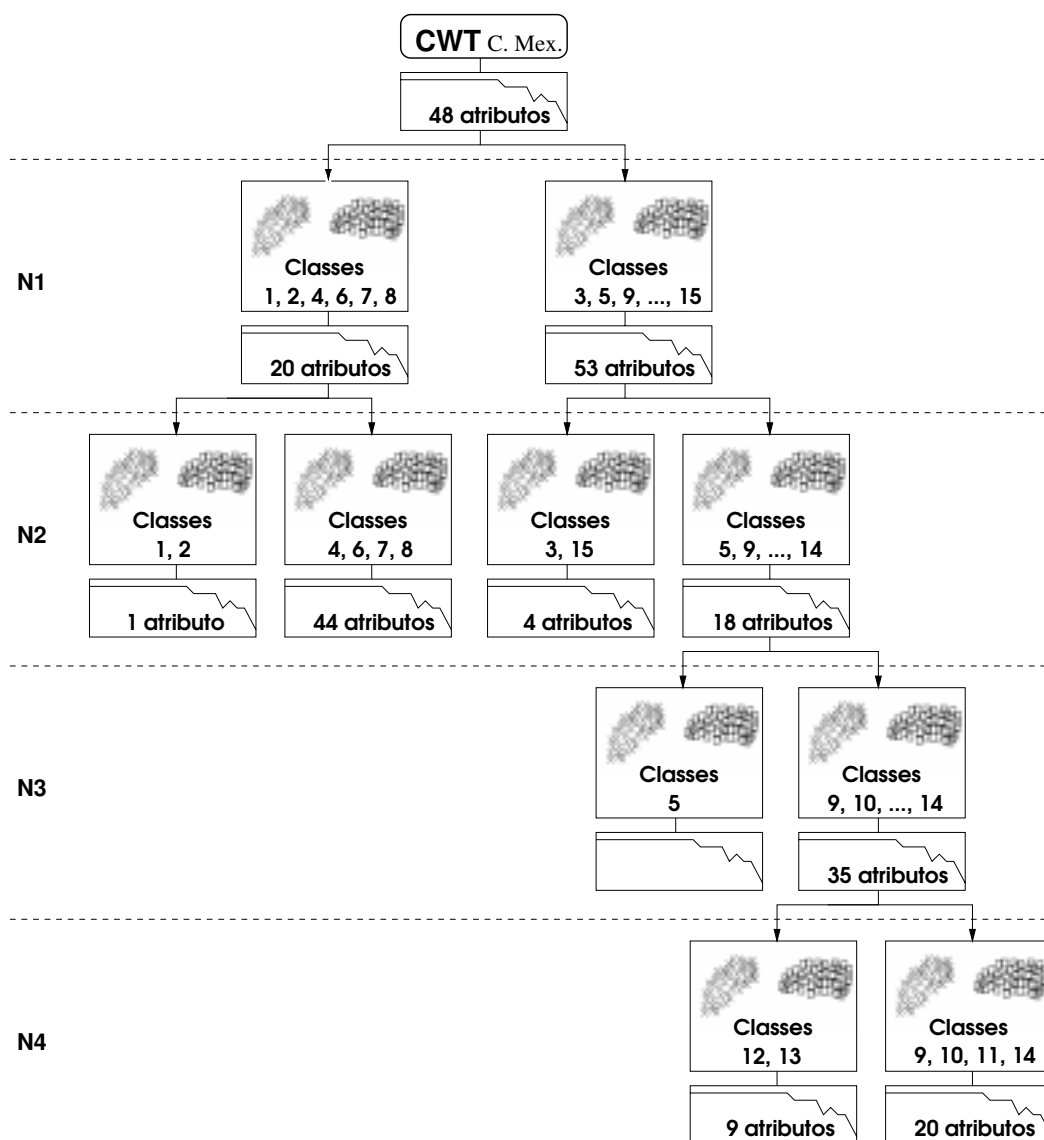


Figura 4.15: Árvore de classificação hierárquica para as amostras de treinamento considerando-se o descritor baseado nas energias dos coeficientes da Transformada de Wavelet Contínua com base *Chapéu Mexicano*.

Os resultados para os dois conjuntos de atributos mostram que a Transformada de Wavelet Contínua é capaz de discriminar completamente as folhas testadas em uma árvore de 4 níveis, ou seja, no pior caso, uma amostra desconhecida será classificada corretamente, através desses

atributos, em 4 iterações do processo. Os resultados são dispostos abaixo:

Abordagem		Níveis(Nós)	Número Atributos ¹	Custo (seg.)		
				Descrição	Classificação	Total
CWT	Morlet	4(10)	60	0,800	0,580	1,380
	C.Mexicano	4(10)	58	0,780	0,570	1,350

¹ União dos conjuntos de atributos de cada nó, ilustrados nas Figuras 4.16 e 4.17

Novamente, como o custo da transformação da amostra para o espaço canônico está diretamente relacionado com o número de atributos necessários para sua classificação, ao considerar-se a união dos conjuntos de atributos mínimos necessários para a discriminação das amostras em cada nó, 60 atributos foram necessários para o descritor baseado na decomposição por bases *Morlet* e 58 atributos para o descritor obtido pela decomposição por bases *Chapéu Mexicano*. O tempo de processamento das 4 aplicações do CVA, referentes aos 4 níveis da árvore, somaram 0,570 segundos, utilizando-se 58 atributos, e 0,580 segundos, utilizando-se os 60 atributos. As Figuras 4.16 e 4.17 exibem os atributos necessários por estas abordagens para descrição do conjunto de amostras de treinamento. Analisando-se os custos de obtenção dos atributos para cada experimento, verificou-se que o tempo de processamento é independente da base utilizada, resumindo-se o custo da descrição ao cálculo da energia e ao número de escalas processadas, já que cada atributo é extraído da decomposição da assinatura por uma escala, ou seja, para n atributos utilizados, n decomposições foram necessárias. Os tempos de processamento desses descritores foram 0,780 segundos, para 58 atributos (58 decomposições), e 0,800 segundos, considerando-se os 60 atributos (60 decomposições).

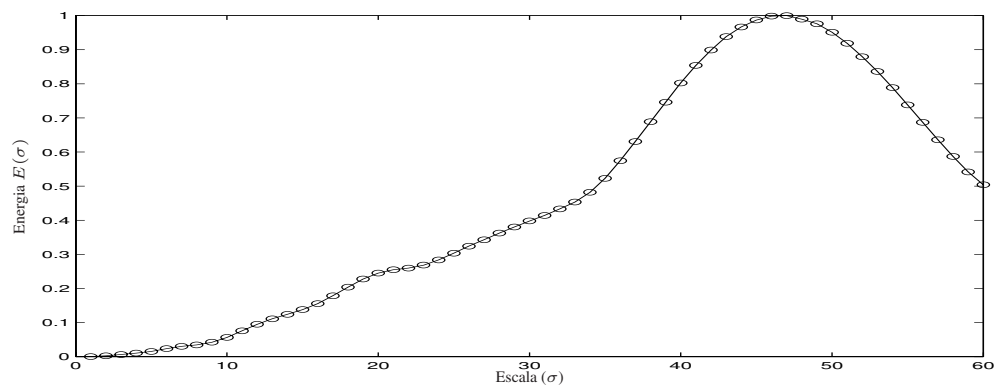


Figura 4.16: Atributos da Transformada de Wavelet Contínua com base *Morlet* necessários para descrição por energias do conjunto de amostras de treinamento.

σ	seq	σ	seq	σ	seq	σ	seq	σ	seq	σ	seq
1	36	11	48	21	60	31	38	41	23	51	30
2	41	12	26	22	59	32	51	42	18	52	1
3	37	13	14	23	40	33	47	43	11	53	2
4	16	14	4	24	10	34	54	44	46	54	12
5	25	15	8	25	6	35	58	45	29	55	19
6	3	16	5	26	20	36	44	46	33	56	22
7	13	17	15	27	32	37	57	47	56	57	27
8	42	18	24	28	28	38	45	48	7	58	31
9	53	19	39	29	35	39	34	49	9	59	43
10	55	20	52	30	50	40	17	50	21	60	49

Tabela 4.4: Sequência de eliminação dos atributos do descritor baseado em energias da Transformada de Wavelet Contínua com base *Morlet* durante a etapa de seleção de características.

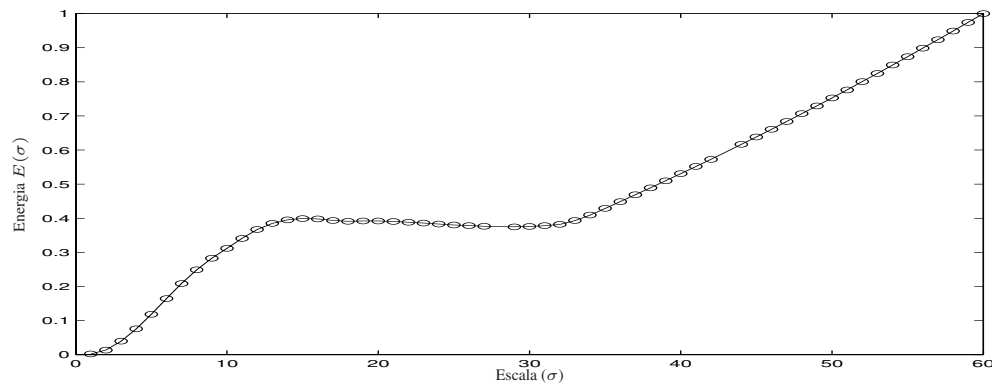


Figura 4.17: Atributos da Transformada de Wavelet Contínua com base *Chapéu Mexicano* necessários para descrição por energias do conjunto de amostras de treinamento.

σ	<i>seq</i>	σ	<i>seq</i>	σ	<i>seq</i>	σ	<i>seq</i>	σ	<i>seq</i>	σ	<i>seq</i>
1	22	11	40	21	30	31	25	41	3	51	17
2	14	12	50	22	12	32	58	42	33	52	10
3	55	13	59	23	24	33	48	43	2	53	7
4	44	14	60	24	32	34	57	44	29	54	15
5	26	15	56	25	52	35	53	45	45	55	37
6	43	16	51	26	31	36	34	46	36	56	5
7	21	17	47	27	46	37	19	47	39	57	11
8	27	18	23	28	1	38	42	48	6	58	18
9	9	19	28	29	49	39	8	49	4	59	38
10	13	20	41	30	20	40	35	50	16	60	54

Tabela 4.5: Sequência de eliminação dos atributos do descritor baseado em energias da Transformada de Wavelet Contínua com base *Chapéu Mexicano* durante a etapa de seleção de características. Valores em negrito são associados aos atributos utilizados como descritor.

4.2.4 Transformada de Wavelet Discreta

A Transformada de Wavelet Discreta também foi aplicada sobre as assinaturas distância contorno-centróide das folhas, gerando representações de *aproximações* e *detalhes* resultantes das sucessivas filtragens passa-baixa e passa-alta da assinatura. Foram utilizados, para aquisição das invariâncias, descritores formados por medidas de energia referentes às decomposições em aproximações (A) e detalhes (D) (Figura 4.18). Além disso, para verificação da influência das bases, duas famílias de wavelets foram experimentadas: *Coiflet* e *Daubechies* (Figura 4.19). Essas bases foram utilizadas pela similaridade com os sinais analisados.

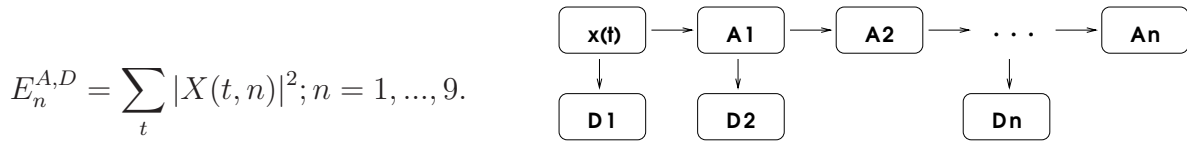


Figura 4.18: Equação de energia e diagrama de decomposição da DWT.

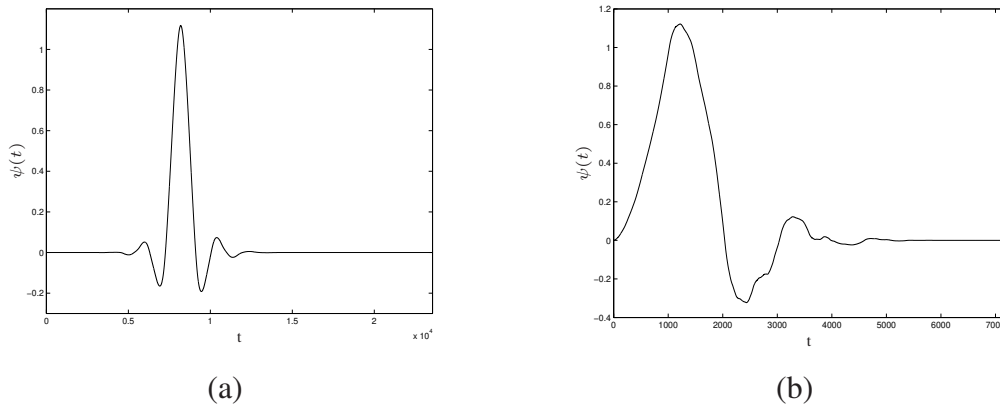


Figura 4.19: Wavelets das famílias (a) *Coiflet* e (b) *Daubechies*.

Os descritores para a Transformada de Wavelet Discreta foram analisados quanto ao potencial discriminativo, considerando-se a taxa de classificação de Bayes, após a redução da dimensionalidade do espaço de atributos pelas técnicas de Análise de Variáveis Canônicas e Seleção Sequencial Inversa dos atributos de acordo com seus pesos canônicos.

Os resultados, dispostos segundo a árvore de classificação hierárquica, são mostrados nas Figuras 4.20 e 4.21, respectivamente. Assim como nas abordagens anteriores, cada nível da árvore representa a separação de subconjuntos linearmente discrimináveis no nível anterior. Para cada nó da árvore, é apresentada a separação das classes em função da seleção de características, destacando-se o número mínimo de atributos necessários para discriminação completa entre dois agrupamentos, para os nós intermediários, e entre as classes, para as folhas da árvore.

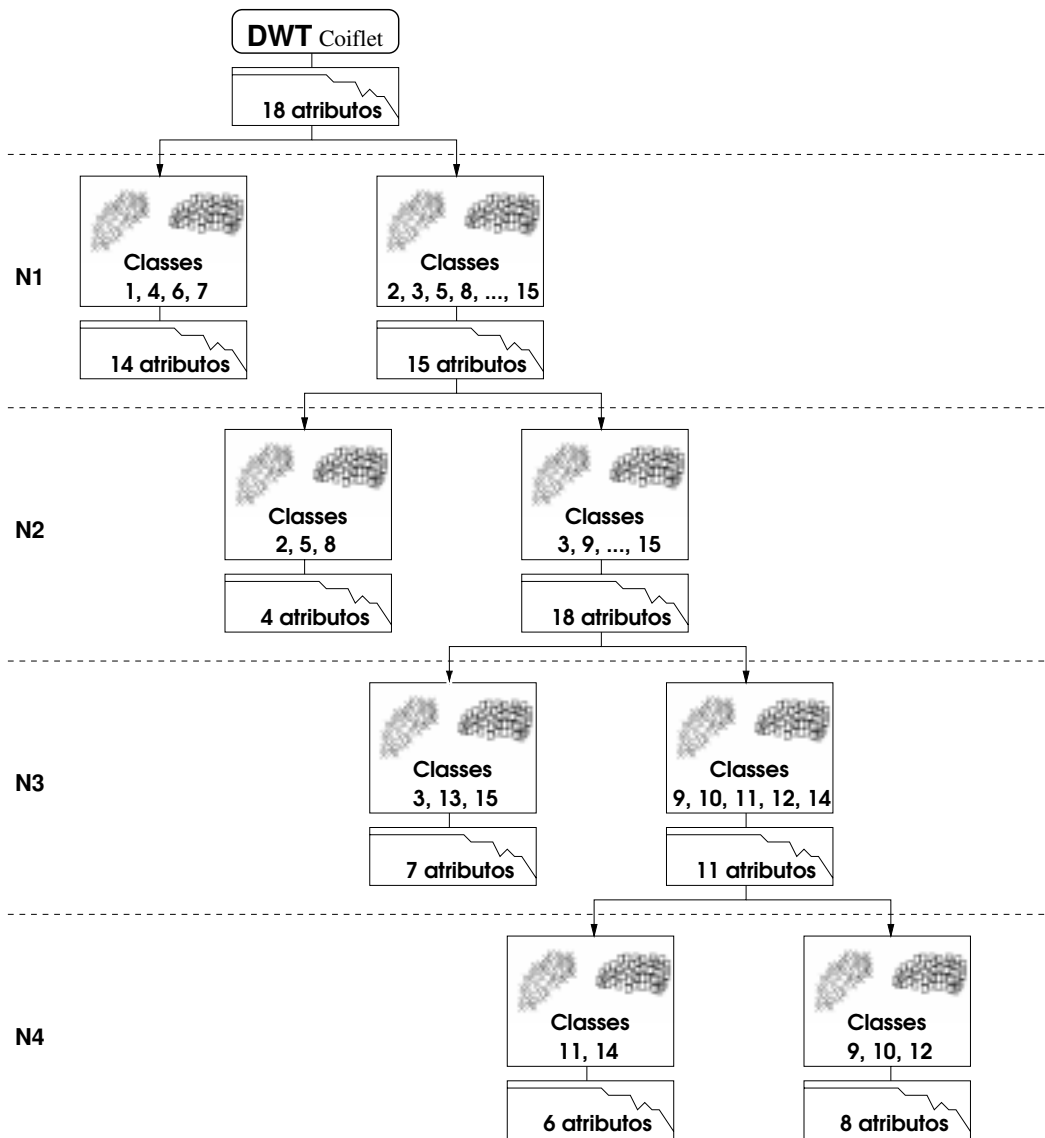


Figura 4.20: Árvore de classificação hierárquica para as amostras de treinamento considerando-se o descritor baseado nas energias dos coeficientes da Transformada de Wavelet Discreta com base *Coiflet 4*.

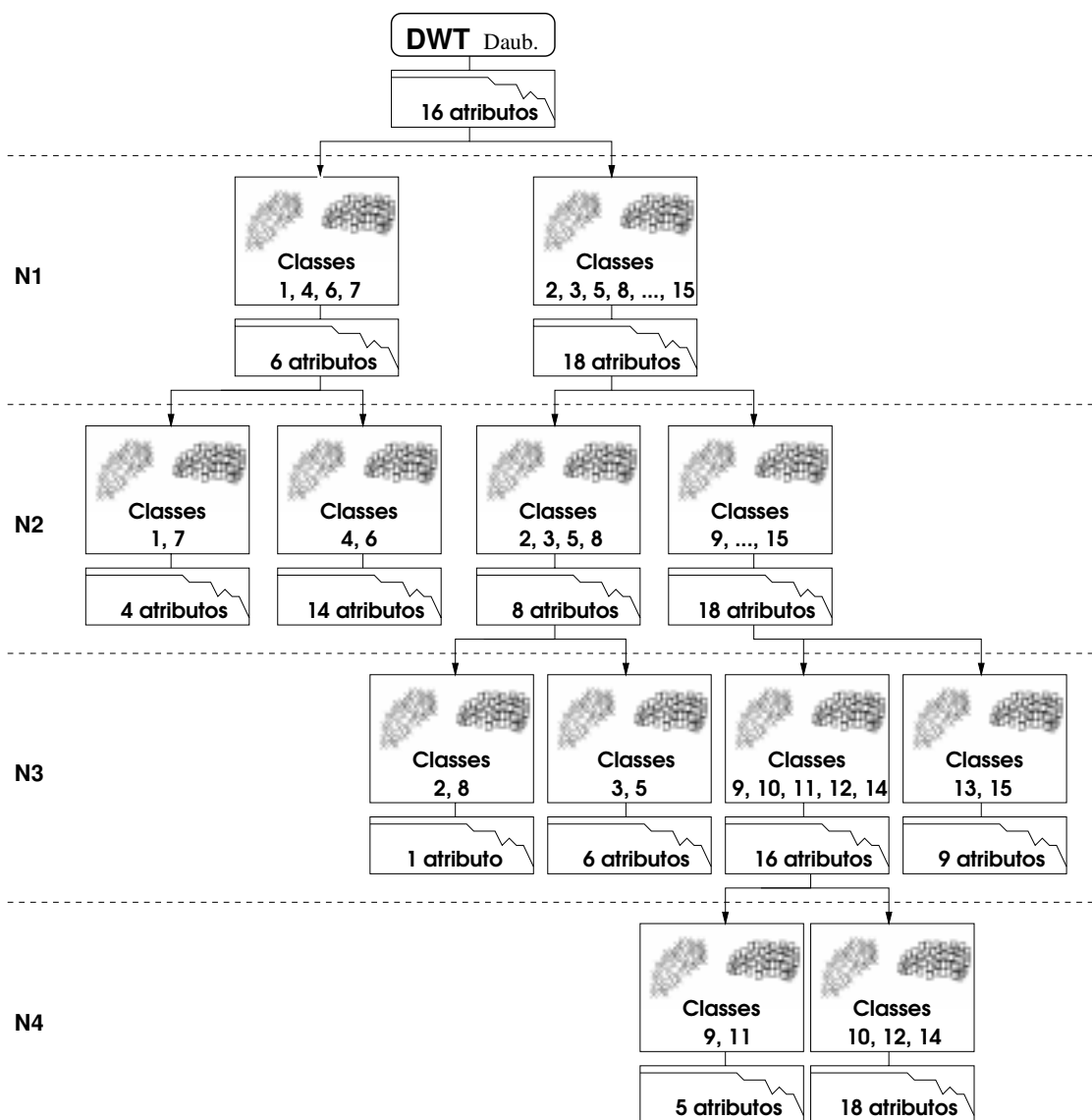


Figura 4.21: Árvore de classificação hierárquica para as amostras de treinamento considerando-se o descritor baseado nas energias dos coeficientes da Transformada de Wavelet Discreta com base *Daubechies 4*.

Os resultados para os dois conjuntos de atributos mostram que a Transformada de Wavelet Discreta é capaz de discriminar completamente as folhas testadas em uma árvore de 4 níveis, ou seja, no pior caso, uma amostra desconhecida será classificada corretamente, através desses

atributos, em 4 iterações do processo. Os resultados são mostrados abaixo:

Abordagem		Níveis(Nós)	Número Atributos ¹	Custo (seg.)		
				Descrição	Classificação	Total
DWT	Coiflet 4	4(8)	18	2,800	0,320	3,120
	Daubechies 4	4(12)	18	2,800	0,320	3,120

¹ União dos conjuntos de atributos de cada nó, ilustrados nas Figuras 4.23 e 4.22

Novamente, como o custo da transformação da amostra para o espaço canônico está diretamente relacionado com o número de atributos necessários para sua classificação, ao considerar-se a união dos conjuntos de atributos mínimos necessários para a discriminação das amostras em cada nó, os 18 atributos foram necessários tanto para o descritor baseado na decomposição por bases *Coiflet 4* quanto para o descritor obtido pela decomposição por bases *Daubechies 4*. O tempo de processamento das 4 aplicações do CVA, referentes aos 4 níveis da árvore, somaram 0,320 segundos, utilizando-se os 18 atributos. As Figuras 4.23 e 4.22 exibem os atributos necessários por estas abordagens para descrição do conjunto de amostras de treinamento. Analisando-se os custos de obtenção dos atributos para cada experimento, verificou-se que o tempo de processamento, novamente, é independente da base utilizada, resumindo-se o custo da descrição ao cálculo da energia e ao número de níveis processados, já que cada par de atributos é extraído da decomposição da assinatura por um nível, ou seja, para n atributos utilizados, $n/2$ filtragens foram necessárias. O tempo de processamento desses descritores foi 2,800 segundos, considerando-se os 18 atributos (9 níveis de filtragem). Os valores foram idênticos para as duas abordagens, visto ambas necessitarem do mesmo número de atributos.

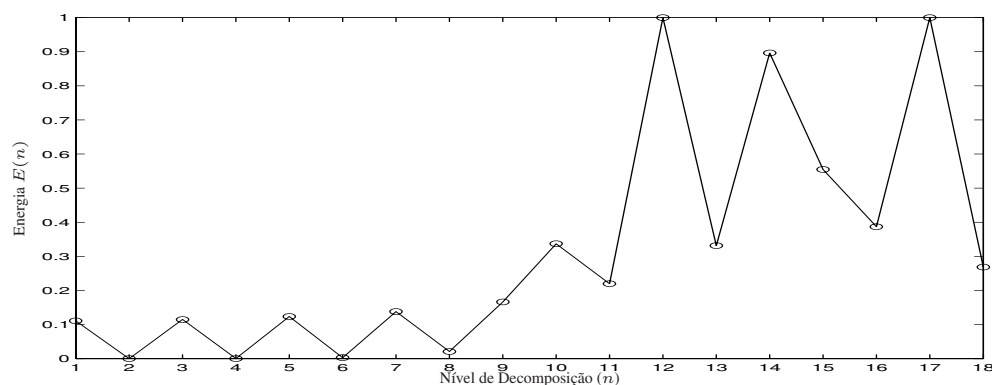


Figura 4.22: Atributos da Transformada de Wavelet Discreta com base *Coiflet 4* necessários para descrição por energias do conjunto de amostras de treinamento.

A_n	$A1$	$A2$	$A3$	$A4$	$A5$	$A6$	$A7$	$A8$	$A9$
seq	18	17	9	14	11	10	4	2	5
D_n	$D1$	$D2$	$D3$	$D4$	$D5$	$D6$	$D7$	$D8$	$D9$
seq	15	13	12	16	8	3	7	6	1

Tabela 4.6: Sequência de eliminação dos atributos do descritor baseado em energias da Transformada de Wavelet Discreta com base *Coiflet 4* durante a etapa de seleção de características.

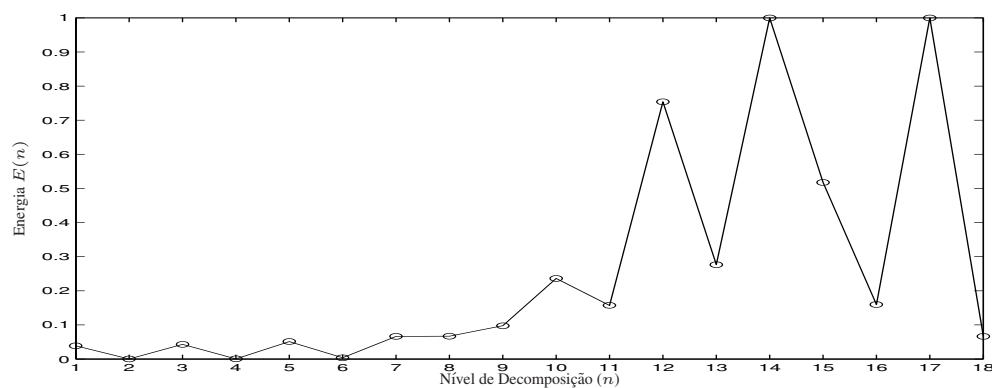


Figura 4.23: Atributos da Transformada de Wavelet Discreta com base *Daubechies 4* necessários para descrição por energias do conjunto de amostras de treinamento.

<i>An</i>	<i>A1</i>	<i>A2</i>	<i>A3</i>	<i>A4</i>	<i>A5</i>	<i>A6</i>	<i>A7</i>	<i>A8</i>	<i>A9</i>
<i>seq</i>	18	16	14	12	9	10	8	3	4
<i>Dn</i>	<i>D1</i>	<i>D2</i>	<i>D3</i>	<i>D4</i>	<i>D5</i>	<i>D6</i>	<i>D7</i>	<i>D8</i>	<i>D9</i>
<i>seq</i>	17	15	11	13	5	7	6	1	2

Tabela 4.7: Seqüência de eliminação dos atributos do descritor baseado em energias da Transformada de Wavelet Discreta com base *Daubechies 4* durante a etapa de seleção de características.

4.2.5 Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea

Última abordagem analisada, a Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea foi aplicada sobre as assinaturas distância contorno-centróide das folhas, decompondo-as no espaço “escala x frequência” característico do janelamento feito por esse método. Como visto na seção 2.6, essa transformada é baseada na sucessiva decomposição em frequências da assinatura através de seu janelamento por uma função de largura variável centrada sobre um único ponto. O local selecionado como centro para as janelas foi o ápice principal das folhas, região caracterizada por variações importantes para a discriminação das espécies (Ash et al., 1999). Variou-se a largura σ da janela de análise no intervalo de 1 a 300 pixels, permitindo o acompanhamento de características dos contornos do aspecto local ao global. Atributos foram extraídos do espaço característico da IMFT, formando-se dois descritores: o primeiro constituído por coeficientes da transformada que, devido à alta dimensionalidade resultante dessa decomposição, foram restritos aos primeiros componentes de frequência de cada janelamento, sendo o segundo descritor formado pelas energias referentes aos conteúdos espectrais normalizados de cada janelamento.

Os descritores para a Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea foram analisados quanto ao potencial discriminativo, considerando-se a taxa de classificação de Bayes, após a redução da dimensionalidade do espaço de atributos pelas técnicas de Análise de Variáveis Canônicas e Seleção Sequencial Inversa dos atributos de acordo com seus pesos canônicos.

Para o primeiro experimento da IMFT, foram inicialmente utilizados como descritores 200 coeficientes normalizados $|X(\sigma, \omega)/\max(X(\sigma, 0))|$, com janelas com centros fixos em $t_g = t_{apice}$, larguras $\sigma = n\Delta\sigma$, sendo $\Delta\sigma = 30$ o passo de janelamento e $n = 1, \dots, 10$, e espectro limitado aos componentes de baixa frequência $\omega = 1, \dots, 20$.

A Figura 4.24 mostra os resultados das iterações dispostos segundo a árvore de classificação hierárquica. Cada nível da árvore representa a separação de subconjuntos linearmente discrimináveis no nível anterior. Para cada nó da árvore, é apresentada a separação das classes em função da seleção de características, destacando-se o número mínimo de atributos necessários para

discriminação completa entre dois agrupamentos, para os nós intermediários, e entre as classes, para as folhas da árvore.

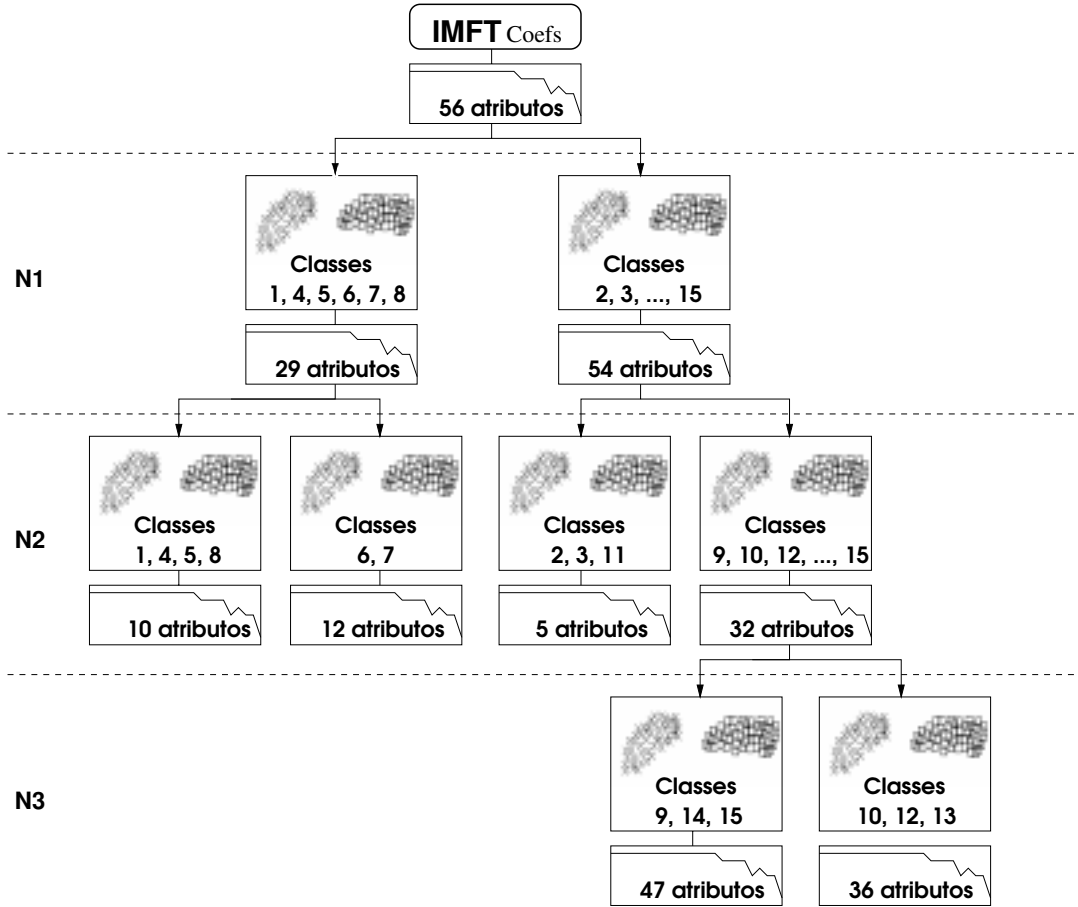


Figura 4.24: Árvore de classificação hierárquica para as amostras de treinamento considerando-se o descritor baseado nos coeficientes da Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea.

Para o segundo experimento da IMFT, foram inicialmente utilizados como descritores 60 medidas de energia referentes aos espectros de cada janelamento obtidos com janelas com centros fixos em $t_g = t_{apice}$ e larguras $\sigma = n\Delta\sigma$, sendo $\Delta\sigma = 5$ o passo de janelamento e $n = 1, \dots, 60$:

$$E_n = \sum_{\omega} |X(n\Delta\sigma, \omega)|^2$$

A Figura 4.25 mostra os resultados das iterações dispostos segundo a árvore de classificação hierárquica. Novamente, cada nível da árvore representa a separação de subconjuntos linearmente discrimináveis no nível anterior. Para cada nó da árvore, é apresentada a separação das classes em função da seleção de características, destacando-se o número mínimo de atributos necessários para discriminação completa entre dois agrupamentos, para os nós intermediários, e entre as classes, para as folhas da árvore.

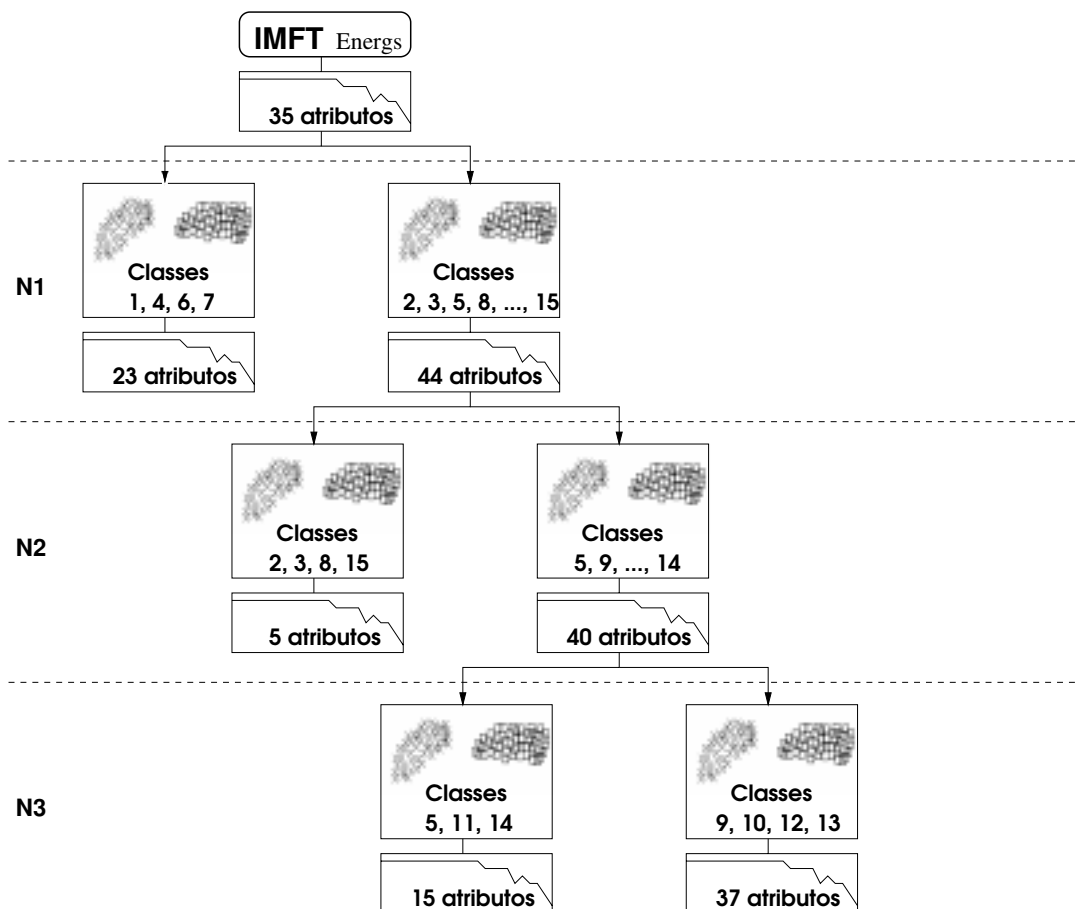


Figura 4.25: Árvore de classificação hierárquica para as amostras de treinamento considerando-se o descritor baseado nas energias dos coeficientes da Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea.

Os resultados para os dois conjuntos de atributos mostram que a Transformada de Fourier

Multiresolução Instantânea é capaz de discriminar completamente as folhas testadas em uma árvore de 3 níveis, ou seja, no pior caso, uma amostra desconhecida será classificada corretamente, através desses atributos, em 3 iterações do processo, sendo a mais eficiente sob esse aspecto dentre as transformadas testadas. Os resultados são mostrados abaixo:

Abordagem		Níveis(Nós)	Número Atributos ¹	Custo (seg.)		
				Descrição	Classificação	Total
IMFT	Coeficientes	3(8)	62	0,030	0,442	0,472
	Energias	3(6)	60	0,150	0,440	0,590

¹ União dos conjuntos de atributos de cada nó, ilustrados nas Figuras 4.26 e 4.27

Como o custo da transformação da amostra para o espaço canônico está diretamente relacionado com o número de atributos necessários para sua classificação, ao considerar-se a união dos conjuntos de atributos mínimos necessários para a discriminação das amostras em cada nó, os 60 atributos foram necessários tanto para o descritor formado pelas energias quanto para o descritor constituído por coeficientes da IMFT. O tempo de processamento das 3 aplicações do CVA, referentes aos 3 níveis da árvore, somaram 0,440 segundos, utilizando-se os 60 atributos, e 0,442 segundos, utilizando-se 62 atributos. As Figuras 4.26 e 4.27 exibem os atributos necessários por estas abordagens para descrição do conjunto de amostras de treinamento. Para análise dos custos de obtenção de tais atributos, é importante notar-se que, para o conjunto formado por energias, como a extração dessas medidas ocorre em cada mudança de largura da janela, sucessivas aplicações da Transformada de Fourier são necessárias, ou seja, para que n medidas da energia sejam computadas, n cálculos da *fft* são executadas. O tempo de processamento desse descritor, considerando-se 60 atributos (60 aplicações da *fft*) mais o cálculo da energia (equação (4.2.5)), foi 0,150 segundos. Já para o descritor formado por coeficientes, o tempo de processamento engloba a normalização dos coeficientes e 10 deslocamentos da janela (10 aplicações da *fft*). O tempo de processamento desse descritor foi 0,030 segundos.

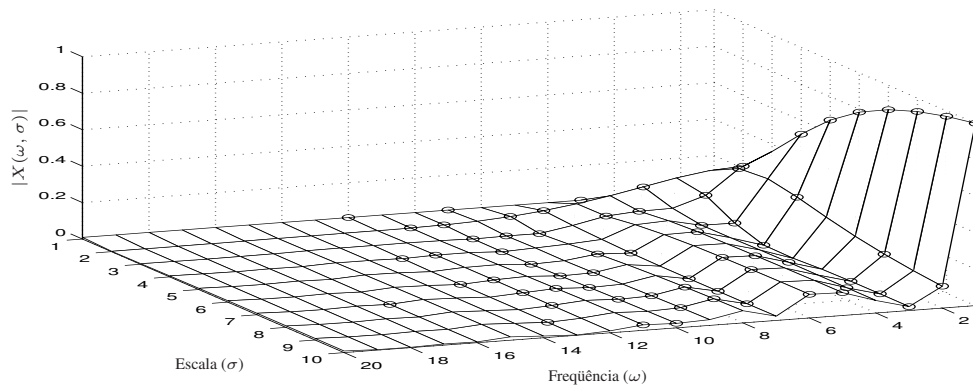


Figura 4.26: Atributos da Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea necessários para descrição por coeficientes do conjunto de amostras de treinamento.

		ω																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
σ	1	191	97	109	102	139	82	116	77	170	86	134	138	57	41	35	88	17	31	11	8
	2	189	108	124	183	101	111	194	151	66	163	147	132	131	91	74	113	49	33	18	9
	3	96	184	175	127	161	179	104	160	140	192	87	130	70	42	133	53	63	24	28	32
	4	196	126	174	169	123	119	125	117	76	154	48	164	144	112	89	34	54	26	10	4
	5	188	198	190	135	162	122	155	153	129	158	114	47	37	58	90	73	62	3	19	2
	6	185	121	128	99	103	81	115	118	172	142	69	146	143	71	25	55	29	61	27	30
	7	199	107	120	156	177	157	178	136	75	152	148	141	38	92	56	181	21	59	20	5
	8	193	186	195	98	100	173	168	149	159	171	84	165	68	93	64	72	43	22	15	1
	9	200	94	187	180	80	79	137	176	150	83	46	65	145	36	60	52	23	50	14	12
	10	95	197	110	85	182	105	106	67	78	166	167	45	39	40	44	16	6	7	51	13

Tabela 4.8: Sequência de eliminação dos atributos do descritor baseado nos coeficientes da Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea durante a etapa de seleção de características. Valores em negrito são associados aos atributos utilizados como descritor.

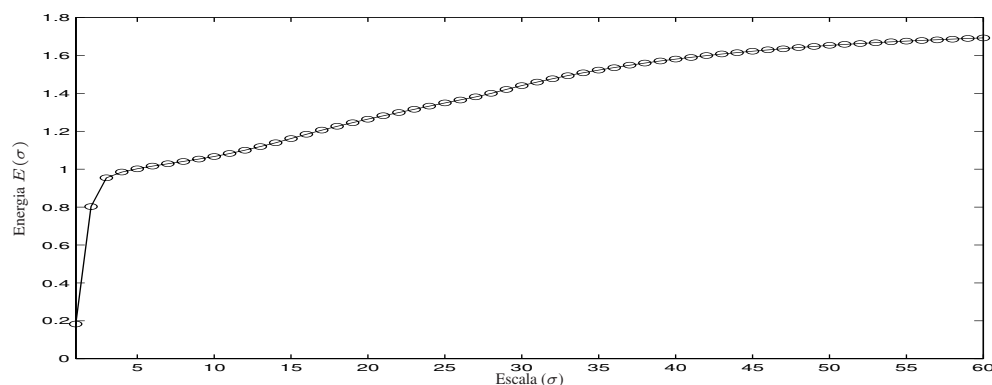


Figura 4.27: Atributos da Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea necessários para descrição por energias do conjunto de amostras de treinamento.

σ	seq	σ	seq	σ	seq	σ	seq	σ	seq	σ	seq
1	3	11	10	21	12	31	26	41	29	51	48
2	1	12	34	22	25	32	46	42	17	52	39
3	8	13	23	23	14	33	28	43	53	53	56
4	20	14	11	24	22	34	42	44	54	54	30
5	32	15	6	25	40	35	18	45	41	55	38
6	2	16	35	26	33	36	37	46	58	56	50
7	5	17	7	27	47	37	31	47	52	57	27
8	24	18	21	28	4	38	13	48	57	58	51
9	9	19	45	29	36	39	55	49	15	59	60
10	44	20	43	30	19	40	49	50	16	60	59

Tabela 4.9: Seqüência de eliminação dos atributos do descritor baseado em energias da Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea durante a etapa de seleção de características.

4.3 Análise dos Resultados

A Tabela (4.10) apresenta os resultados obtidos, considerando-se a aplicação das abordagens discutidas sobre a assinatura distância contorno-centróide dos contornos das amostras de treinamento (Figura B.1) identificadas segundo o classificador Bayesiano. Os tempos foram calculados com base em um programa em Matlab 6.0 executado em uma estação SUN Ultra3D com relógio de 333MHz e RAM com 512Mbytes.

Abordagens		Níveis(Nós)	Número Atributos ¹	Custo (seg.)		
				Descrição	Classificação	Total
FT	Coeficientes	4(8)	102	0,002	0,940	0,942
STFT	Coeficientes	4(8)	92	0,045	0,820	0,865
	Energias	4(10)	63	0,150	0,670	0,820
CWT	Morlet	4(10)	60	0,800	0,580	1,380
	C.Mexicano	4(10)	58	0,780	0,570	1,350
DWT	Coiflet 4	4(8)	18	2,800	0,320	3,120
	Daubechies 4	4(12)	18	2,800	0,320	3,120
IMFT	Coeficientes	3(8)	62	0,030	0,442	0,472
	Energias	3(6)	60	0,150	0,440	0,590

¹ União dos conjuntos de atributos de cada nó.

Tabela 4.10: Resultados dos experimentos com todas as Transformadas discutidas. Sendo: FT - Transformada de Fourier, STFT - Transformada de Fourier de Curta Duração, CWT - Transformada de Wavelet Contínua, DWT - Transformada de Wavelet Discreta e IMFT - Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea.

Os resultados mostram que, para o conjunto de amostras de treinamento utilizado, todas as abordagens analisadas são capazes de boa discriminação, apresentando taxas de classificações bem-sucedidas, segundo o estimador *Leave-One-Out*, iguais a 100%.

Variação larga, entretanto, ocorreu com o critério custo. Considerou-se para efeito de estimativa do custo de cada abordagem os tempos de processamento do descritor e do classificador. O tempo de processamento do descritor, como visto, é dependente das rotinas da linguagem utilizada e do número de aplicações das mesmas. Já o tempo de processamento do classificador depende

do número de subdivisões da árvore de classificação hierárquica e do número mínimo de atributos necessários para a identificação completa das amostras. Não foram considerados como custo os tempos de processamento do contorno e da geração de sua assinatura, visto serem idênticos para todas as abordagens. Contudo, o tempo de obtenção dos atributos foi considerado, dado que algumas abordagens foram baseadas nos próprios coeficientes das decomposições, não necessitando de processamentos posteriores.

Comparando-se, isoladamente, o custo de obtenção dos descritores da Transformada de Fourier, verifica-se que essa abordagem apresenta desempenho superior às demais, visto necessitar apenas de uma aplicação da rotina *fft* para extrair e processar seus atributos. Contudo, a Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea apresentou os menores tempos de processamentos (descrição e classificação) devido, principalmente, à minimização do número de subdivisões da árvore de classificação hierárquica das amostras de treinamento. Considerando-se, assim, o critério custo, as abordagens baseadas na Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea mostraram-se as mais eficientes, necessitando de menos níveis (3 níveis) e, considerando-se os descritores formados por energias multi-escala, menos subdivisões (6 subdivisões) para a classificação completa das amostras. A minimização da árvore de classificação hierárquica também revela o superior potencial de discriminação da Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea em relação às abordagens testadas, fato relacionado, basicamente, com a capacidade de análise progressiva dos aspectos locais aos globais dos contornos (Loss e Tozzi, 2003).

No extremo oposto, as abordagens baseadas na Transformada de Wavelet apresentaram os piores desempenhos, necessitando de mais subdivisões da árvore de classificação e, por conseguinte, maior tempo de processamento comparado às demais abordagens. O maior tempo de processamento dos seus descritores está relacionado também com o menor desempenho das funções *cwt* e *wavedec*, necessárias para o cálculo da Transformada de Wavelet Contínua e Discreta, respectivamente, em relação à função *fft*, necessária para a obtenção dos descritores das demais abordagens.

A desvantagem observada para a Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea, em relação aos demais métodos discutidos, é a dependência de interação do usuário, necessária

para determinação da posição adequada da janela de análise (ver seção 2.6). Este procedimento poderia, eventualmente, limitar a utilização dessa abordagem em sistemas automáticos. Entretanto, observa-se que a identificação do ponto de interesse pode ser realizada através de métodos de busca pelo contorno das amostras, questão não abordada neste trabalho.

Capítulo 5

Conclusões

O objetivo deste trabalho foi a aplicação e comparação dos resultados de algumas das técnicas conhecidas na literatura para discriminação de formas naturais. Mais especificamente, este trabalho visou a interpretação dos resultados obtidos por cinco transformadas, cujas decomposições “tempo-escala-frequência” dos contornos dos objetos permitiram a medição de atributos em domínios potencialmente interessantes por explicitarem características antes não percebidas diretamente no domínio original dos objetos. As transformadas discutidas foram a Transformada de Fourier, a Transformada de Fourier de Curta Duração, as Transformadas de Wavelet Contínua e Discreta e uma adaptação da Transformada de Fourier Multiresolução, denominada ao longo deste trabalho de Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea, devido às características de decomposição com janelas em instantes fixos.

Conjuntos de atributos foram medidos em cada domínio, reduzidos, selecionados e classificados por diferentes abordagens estatísticas, visando-se a obtenção de recursos capazes de solucionar questões a respeito do custo e precisão de cada método. O custo foi associado a questões computacionais e a precisão a taxas de classificações bem-sucedidas. Experimentos foram realizados com conjuntos de folhas pertencentes a diferentes espécies de plantas e, posteriormente, seus resultados foram comparados e comentados.

O processo de redução de dimensionalidade dos vetores de atributos descritores consistiu

na aplicação da Análise de Variáveis Canônicas, técnica que provê a transformação do espaço original de atributos, decorrelacionando os dados, minimizando as distâncias intraclases e maximizando as distâncias interclases. A seleção das características foi feita através da Seleção Sequencial Inversa dos atributos, baseada nas relações intra e interclases com as taxas de classificações bem-sucedidas.

Os experimentos consistiram na aplicação das diversas abordagens discutidas ao longo deste trabalho sobre uma população de folhas pertencentes a quinze espécies de plantas. As amostras foram escaneadas, binarizadas e tiveram seus contornos extraídos e parametrizados pelas assinaturas distância contorno-centróide e de coordenadas complexas. Em seguida, as parametrizações foram normalizadas em amplitude (0-1) e reamostradas em 512 pontos para serem decompostas pelas abordagens descritas.

Os resultados mostraram que boas taxas de precisão na classificação de formas naturais podem ser conseguidas por todas as transformadas, enquanto o custo de obtenção dos atributos varia largamente entre as abordagens. Fatores analisados que contribuíram para o tempo de processamento das abordagens foram o número de atributos e o número de níveis necessários para a classificação completa das espécies. As parametrizações foram os primeiros fatores a influenciarem o custo do descritor. A assinatura de coordenadas complexas, por gerar duas representações do contorno, obrigou o processamento dobrado das transformadas, enquanto, na média, necessitou do mesmo número de atributos e níveis da árvore de classificação hierárquica que a assinatura distância contorno-centróide. Outras análises foram feitas de acordo com as abordagens utilizadas pelos classificadores e constatado que o classificador Bayesiano obtém desempenho semelhante ao classificador de distância mínima Mahalanobis para as aplicações experimentadas.

Em seguida, foram analisados os tempos de processamento das transformadas, dos quais, a Transformada de Fourier Multiresolução Instantânea, apesar de ser formada por aplicações múltiplas da Transformada de Fourier, foi mais eficiente devido à melhor discriminabilidade das espécies, verificada no menor número de atributos e nós da árvore de classificação hierárquica. No outro extremo, as abordagens baseadas na Transformada de Wavelet foram as que obtiveram

o maior custo computacional. Com relação ao número de atributos utilizados, a Transformada de Fourier manteve um dos maiores valores em todas as abordagens testadas, enquanto a Transformada de Wavelet Discreta obteve os menores valores. Como foi verificado, entretanto, essa característica não é suficiente para minimizar o tempo de processamento dessas abordagens, dado o grande número de subdivisões necessárias para a discriminação completa das classes. Por fim, as vantagens e desvantagens das abordagens foram comentadas, levando-se em consideração, além dos fatores acima descritos, a facilidade de normalização quanto às variabilidades presentes nas imagens das amostras.

A continuidade deste trabalho deve focar, primeiramente, na automatização do processo de classificação hierárquica, adaptando-se técnicas de agrupamento (*clustering*) às etapas de divisão dos grupos que ocorre em cada nó da árvore. Em seguida, novos descritores podem ser compostos por atributos extraídos das múltiplas decomposições analisadas, relegando-se à fase de seleção de características a tarefa de identificação do espaço com melhor capacidade discriminativa, através da observação da seqüência de eliminação dos atributos. Por fim, funções de discriminação não-lineares ou lineares-por-partes podem ser incorporadas ao processo de classificação, aumentando-se o potencial discriminativo do sistema.

Apêndice A

Base de Dados *Iris*

<i>Iris setosa</i>				<i>Iris virginica</i>				<i>Iris versicolor</i>			
comp. sépalas	larg. sépalas	comp. pétala	larg. pétala	comp. sépalas	larg. sépalas	comp. pétala	larg. pétala	comp. sépalas	larg. sépalas	comp. pétala	larg. pétala
5,1	3,5	1,4	0,2	7,0	3,2	4,7	1,4	6,3	3,3	6,0	2,5
4,9	3,0	1,4	0,2	6,4	3,2	4,5	1,5	5,8	2,7	5,1	1,9
4,7	3,2	1,3	0,2	6,9	3,1	4,9	1,5	7,1	3,0	5,9	2,1
4,6	3,1	1,5	0,2	5,5	2,3	4,0	1,3	6,3	2,9	5,6	1,8
5,0	3,6	1,4	0,2	6,5	2,8	4,6	1,5	6,5	3,0	5,8	2,2
5,4	3,9	1,7	0,4	5,7	2,8	4,5	1,3	7,6	3,0	6,6	2,1
4,6	3,4	1,4	0,3	6,3	3,3	4,7	1,6	4,9	2,5	4,5	1,7
5,0	3,4	1,5	0,2	4,9	2,4	3,3	1,0	7,3	2,9	6,3	1,8
4,4	2,9	1,4	0,2	6,6	2,9	4,6	1,3	6,7	2,5	5,8	1,8
4,9	3,1	1,5	0,1	5,2	2,7	3,9	1,4	7,2	3,6	6,1	2,5
5,4	3,7	1,5	0,2	5,0	2,0	3,5	1,0	6,5	3,2	5,1	2,0
4,8	3,4	1,6	0,2	5,9	3,0	4,2	1,5	6,4	2,7	5,3	1,9
4,8	3,0	1,4	0,1	6,0	2,2	4,0	1,0	6,8	3,0	5,5	2,1
4,3	3,0	1,1	0,1	6,1	2,9	4,7	1,4	5,7	2,5	5,0	2,0
5,8	4,0	1,2	0,2	5,6	2,9	3,6	1,3	5,8	2,8	5,1	2,4
5,7	4,4	1,5	0,4	6,7	3,1	4,4	1,4	6,4	3,2	5,3	2,3
5,4	3,9	1,3	0,4	5,6	3,0	4,5	1,5	6,5	3,0	5,5	1,8
5,1	3,5	1,4	0,3	5,8	2,7	4,1	1,0	7,7	3,8	6,7	2,2
5,7	3,8	1,7	0,3	6,2	2,2	4,5	1,5	7,7	2,6	6,9	2,3
5,1	3,8	1,5	0,3	5,6	2,5	3,9	1,1	6,0	2,2	5,0	1,5

continua na próxima página

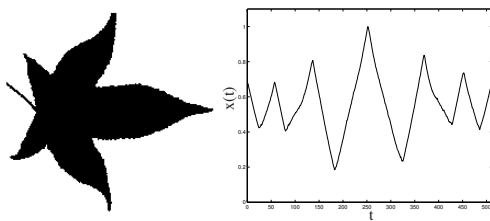
comp. sépala	larg. sépala	comp. pétala	larg. pétala	comp. sépala	larg. sépala	comp. pétala	larg. pétala	comp. sépala	larg. sépala	comp. pétala	larg. pétala
5,4	3,4	1,7	0,2	5,9	3,2	4,8	1,8	6,9	3,2	5,7	2,3
5,1	3,7	1,5	0,4	6,1	2,8	4,0	1,3	5,6	2,8	4,9	2,0
4,6	3,6	1,0	0,2	6,3	2,5	4,9	1,5	7,7	2,8	6,7	2,0
5,1	3,3	1,7	0,5	6,1	2,8	4,7	1,2	6,3	2,7	4,9	1,8
4,8	3,4	1,9	0,2	6,4	2,9	4,3	1,3	6,7	3,3	5,7	2,1
5,0	3,0	1,6	0,2	6,6	3,0	4,4	1,4	7,2	3,2	6,0	1,8
5,0	3,4	1,6	0,4	6,8	2,8	4,8	1,4	6,2	2,8	4,8	1,8
5,2	3,5	1,5	0,2	6,7	3,0	5,0	1,7	6,1	3,0	4,9	1,8
5,2	3,4	1,4	0,2	6,0	2,9	4,5	1,5	6,4	2,8	5,6	2,1
4,7	3,2	1,6	0,2	5,7	2,6	3,5	1,0	7,2	3,0	5,8	1,6
4,8	3,1	1,6	0,2	5,5	2,4	3,8	1,1	7,4	2,8	6,1	1,9
5,4	3,4	1,5	0,4	5,5	2,4	3,7	1,0	7,9	3,8	6,4	2,0
5,2	4,1	1,5	0,1	5,8	2,7	3,9	1,2	6,4	2,8	5,6	2,2
5,5	4,2	1,4	0,2	6,0	2,7	5,1	1,6	6,3	2,8	5,1	1,5
4,9	3,1	1,5	0,2	5,4	3,0	4,5	1,5	6,1	2,6	5,6	1,4
5,0	3,2	1,2	0,2	6,0	3,4	4,5	1,6	7,7	3,0	6,1	2,3
5,5	3,5	1,3	0,2	6,7	3,1	4,7	1,5	6,3	3,4	5,6	2,4
4,9	3,6	1,4	0,1	6,3	2,3	4,4	1,3	6,4	3,1	5,5	1,8
4,4	3,0	1,3	0,2	5,6	3,0	4,1	1,3	6,0	3,0	4,8	1,8
5,1	3,4	1,5	0,2	5,5	2,5	4,0	1,3	6,9	3,1	5,4	2,1
5,0	3,5	1,3	0,3	5,5	2,6	4,4	1,2	6,7	3,1	5,6	2,4
4,5	2,3	1,3	0,3	6,1	3,0	4,6	1,4	6,9	3,1	5,1	2,3
4,4	3,2	1,3	0,2	5,8	2,6	4,0	1,2	5,8	2,7	5,1	1,9
5,0	3,5	1,6	0,6	5,0	2,3	3,3	1,0	6,8	3,2	5,9	2,3
5,1	3,8	1,9	0,4	5,6	2,7	4,2	1,3	6,7	3,3	5,7	2,5
4,8	3,0	1,4	0,3	5,7	3,0	4,2	1,2	6,7	3,0	5,2	2,3
5,1	3,8	1,6	0,2	5,7	2,9	4,2	1,3	6,3	2,5	5,0	1,9
4,6	3,2	1,4	0,2	6,2	2,9	4,3	1,3	6,5	3,0	5,2	2,0
5,3	3,7	1,5	0,2	5,1	2,5	3,0	1,1	6,2	3,4	5,4	2,3
5,0	3,3	1,4	0,2	5,7	2,8	4,1	1,3	5,9	3,0	5,1	1,8

Tabela A.1: Base de dados *Iris*. Medidas extraídas de flores de três espécies de plantas do gênero *Iris* (Fisher, 1936).

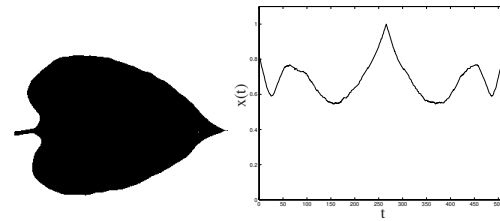
Apêndice B

Folhas Utilizadas

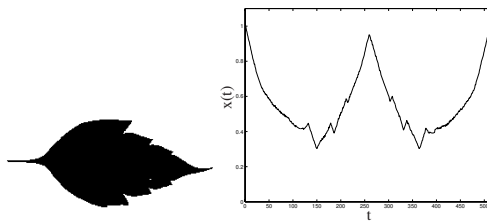
As folhas utilizadas nesta pesquisa foram dispostas abaixo juntamente com suas Assinaturas Distância Contorno-Centróide:



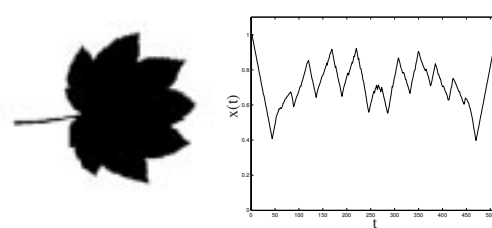
(1)



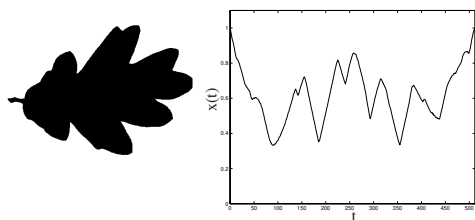
(2)



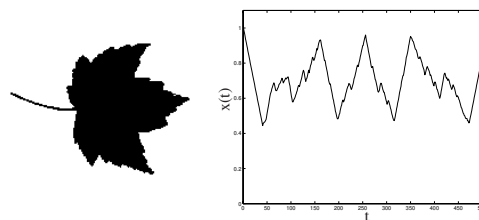
(3)



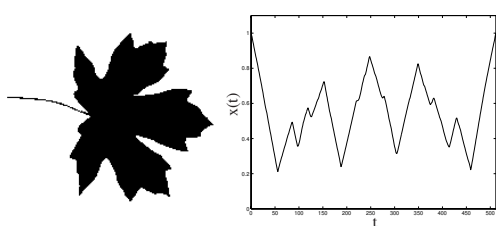
(4)



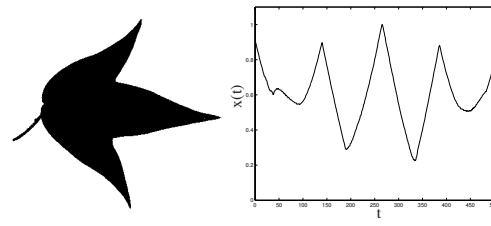
(5)



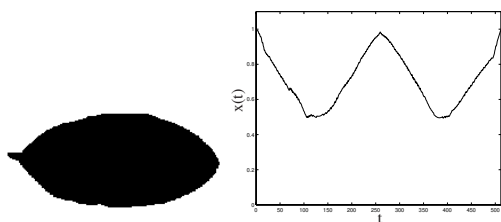
(6)



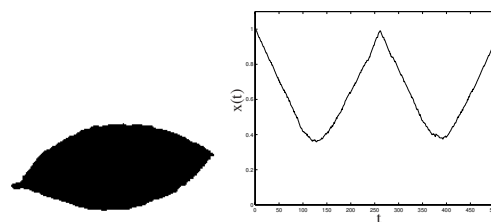
(7)



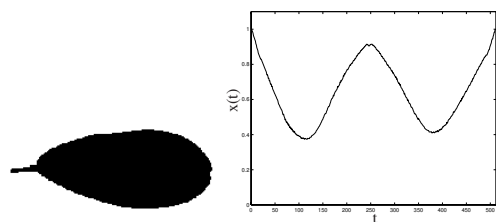
(8)



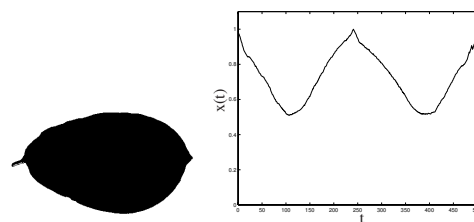
(9)



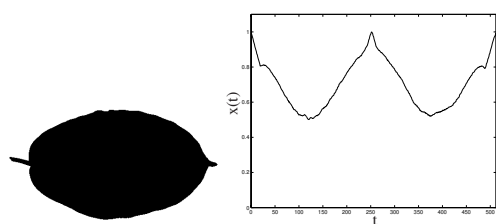
(10)



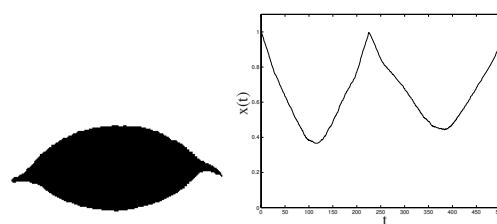
(11)



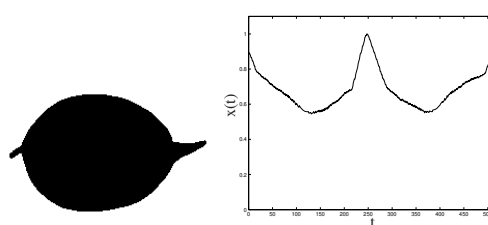
(12)



(13)



(14)



(15)

Figura B.1: Amostras das espécies de folhas utilizadas e suas assinaturas distância contorno-centróide.

Referências Bibliográficas

- Antoine, J., Barache, D., Júnior, R. e Costa, L. F. (1997). Shape characterization with the wavelet transform, *Signal Processing* **62**(3): 265–290.
- Ash, A., Ellis, B., Hickey, L. J., Johnson, K., Wilf, P. e Wing, S. (1999). *Manual of Leaf Architecture: Morphological Description and Categorization of Dicotyledonous and Net-Veined Monocotyledonous Angiosperms*, Leaf Architecture Working Group.
- Bajcsy, R. e Kovacic, S. (1989). Multiresolution elastic matching, *Computer Vision Graphics Image Processing* **46**: 1–21.
- Brill, E. L. (1968). Character recognition via fourier descriptors, *Qualitative Pattern Recognition Through Image Shaping* **25**(3): 1–10.
- Calway, A. D. (1989). *The Multiresolution Fourier Transform: A General Purpose Tool for Image Analysis*, Tese de Doutorado, Warlick University.
- Choi, I. e Kim, H. (2000). Efficient feature extraction from time-frequency analysis of transient response for target identification, *Microwave and Optical Technology Letters* **26**(6): 403–407.
- Cosgriff, R. (1960). *Identification of Shape*, Tese de Doutorado, Ohio State University Research Foundation, Columbus.
- Costa, L. F. e Júnior, R. M. C. (2000). *Shape Analysis and Classification: Theory and Practice*, Vol. 1, 1a. edição, CRC Press.

- Davies, E. R. (1997). *Machine Vision: Theory, Algorithms, Practicalities*, Academic Press.
- Dempster, A. P. (1972). Covariance selection, pp. 152–175.
- Devijver, R. A. e Kittler, J. (1982). *Pattern Recognition: A statistical approach*, Vol. 1, 1a. edição, Prentice Hall.
- Devroye, L., Györfi, L. e Lugosi, G. (1996). *A Probabilistic Theory of Pattern Recognition*, Berlin: Springer-Verlag.
- Duda, R. O. e Hart, P. E. (1973). *Pattern Recognition and Scene Analysis*, Vol. 1, 1a. edição, John Wiley & Sons.
- Eichmann, G. (1990). Shape representation by gabor expansion, *Hybrid Image and signal Processing II* pp. 86–94.
- Fisher, R. A. (1936). The use of multiple measurements in taxonomic problems, *Ann. Eugenics* **7**: 179–188.
- Gabor, D. (1946). Theory of communication, *IEE Journal* **93**: 429–457.
- Glassner, A. S. (1995). *Principles of Digital Image Synthesis*, Vol. 1 de 2, 1a. edição, Morgan Kaufmann Publishers, Inc.
- Gonzalez, R. C. e Woods, R. E. (1992). *Digital Image Processing*, 2a. edição, Addison-Wesley Publishing Company.
- Granlund, G. H. (1972). Fourier preprocessing for hand print character recognition, *IEEE Transactions on Computers* **21**: 195–201.
- Grossman, A. e Morlet, J. (1984). Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM J. Math. Anal.* **15**(4): 723–736.
- Highleyman, W. (1962). The design and analysis of pattern recognition experiments, *Bell System Technology Journal* **41**: 723–744.

- Hotelling, H. (1933). Analysis of a complex of statistical variables with principal components, *Journal of Educational Psychology* **24**: 498–520.
- Jain, A. K., Duin, R. P. e Mao, J. (2000). Statistical pattern recognition: A review, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **22**(1): 4–37.
- Jain, A., Mao, J. e Mohiuddin, K. (1996). Artificial neural networks: A tutorial, *Computer* pp. 31–44.
- Kohonen, T. (1995). *Self-Organizing Maps*, Vol. 30, Springer Series in Information Sciences.
- Lachenbruch, P. e Mickey, M. (1968). Estimation of error rates in discriminant analysis, *Technometrics* **10**: 1–11.
- Lin, C. S. e Hwang, C. L. (1987). New forms of shape invariants from elliptic fourier descriptors, *Pattern Recognition* **20**(5): 535–545.
- Loss, L. A. e Tozzi, C. L. (2003). Discriminação de contornos de formas naturais através de decomposições espectrais, *VI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente* pp. 266–271.
- Mahalanobis, P. C. (1936). On the generalized distance in statistics, *Proc. Natl. Inst. Sci. India* **2**(1): 49–55.
- Mallat, S. (1989). A theory of multiresolution signal decomposition: The wavelet representation, *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence* **11**: 674–693.
- Mardia, K. V., Kent, J. T. e Bibby, J. M. (1979). *Multivariate Analysis*, Vol. 1, 1a. edição, Academic Press.
- Marine, F. J. S. (2000). Automatic recognition of biological shapes with and without representation of shape, *Artificial Intelligence in Medicine* **18**: 173–186.
- MathWorks (2003). Matlab: the language of technical computing, [on-line], <http://www.mathworks.com/>.

- Mokhtarian, F. (1996). Silhouette-based isolated object recognition through curvature scale space, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **17**(5): 539–544.
- Noble, B. (1988). *Applied Linear Algebra*, Vol. 1, 3a. edição, Pearson Education.
- Ohm, J. R., Bunjamin, F. B., Liebsch, W., Makai, B., Somlic, K. M. e Zier, D. (2000). A set of visual feature descriptors and their combination in a low-level description scheme, *Signal Processing: Image Communication* **16**: 157–179.
- Otterloo, P. J. V. (1991). A contour-oriented approach to shape analysis, *Prentice Hall International* pp. 90–108.
- Pearson, K. (1901). On lines and planes of closest fit to points in space, *Philosophical Magazine* **2**: 559–572.
- Persoon, E. e Fu, K. S. (1977). Shape discrimination using fourier descriptors, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **7**(3): 170–179.
- Rauber, T. W. (1994). *Inductive Pattern Classification Methods - Features - Sensors*, Tese de Doutorado, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, Portugal.
- Rioul, O. e Vetterli, M. (1991). Wavelets and signal processing, *IEEE SP Magazine* pp. 14–38.
- Ripley, B. (1993). *Statistical Aspects of Neural Networks in Networks on Chaos: Statistical and Probabilistic Aspects*, O. E. Barndorff-Nielsen, J. Jensen and W. Kendal, eds. Chapman and Hall.
- Rozman, R. e M. Kodek, D. (2003). Improving speech recognition robustness using non-standard windows, *Eurocon - International Conference on Computer as a Tool*.
- Söderkvist, O. J. O. (2001). *Computer vision classification of leaves from swedish trees*, Tese de Mestrado, Linköping University, Suécia. Lith-ISY-EX-3132.
- Seber, G. A. F. (1984). *Multivariate Observations*, Vol. 1, 1a. edição, John Wiley & Sons.

- Sepulveda, F. (2002). *Pattern recognition of upper-body electromiography for control of lower-limb prostheses*, Tese de Mestrado, Aalborg University, Dinamarca.
- Silva, J. R. P. (1996). *Representação de objetos através de descritores do contorno e classificação por funções discriminantes lineares por partes*, Tese de Mestrado, FEEC/Universidade Estadual de Campinas.
- Sonka, M., Hlavac, V. e Boyle, R. (1993). *Image Processing, Analysis and Machine Vision*, Chapman & Hall Computing.
- Squire, D. M. e Caelli, T. M. (2000). Invariance signature: Characterizing contours by their departures from invariance, *Computer Vision and Image Understanding* **77**: 284–316.
- Tieng, Q. M. e Boles, W. W. (1997). Recognition of 2d object contours using the wavelet transform zero-crossing representation, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **19**(8): 910–916.
- Tzanetakis, G., Essl, G. e Cook, P. (2001). Automatic musical genre classification of audio signals, *In. Proc. International Symposium on Music Information Retrieval (ISMIR)* .
- Vapnik, V. (1998). *Statistical Learning Theory*, New York: John Wiley & Sons.
- Watanabe, H., Yamaguchi, T. e Katagiri, S. (1997). Discriminative metric design for robust pattern recognition, *IEEE Transactions on Signal Processing* **45**(11): 2655–2661.
- Wunsch, P. e Laine, A. (1995). Wavelet descriptors for multiresolution recognition of handprinted characters, *Pattern Recognition* **28**(8): 1237–1249.
- Yang, H. S., Lee, S. U. e Lee, K. M. (1998). Recognition of 2d object contours using starting-point-independent wavelet coefficient matching, *Journal of Visual Communication and Image Representation* **9**(2): 171–181.
- Yong, I., Walker, J. e Bowie, J. (1974). An analysis technique for biological shape, *Computer Graphics and Image Processing* **25**: 357–370.

- Zahn, C. T. e Roskies, R. Z. (1972). Fourier descriptors for plane closed curves, *IEEE Transactions on Computer* **21**(3): 269–281.
- Zhang, D. (2002). *Image Retrieval Based on Shape*, Tese de Doutorado, Faculty of Information Technology, Monash University.