



**Universidade Estadual de Campinas**  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO  
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA

---

# **Análise e Projeto de Controladores Robustos por Alocação de Pólos via Análise Intervalar**

## **Doutorado**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

por

**Alfredo Del Sole Lordelo**

**Engenheiro Eletricista — FEIS/UNESP**  
**Mestre em Engenharia Elétrica — FEIS/UNESP**

8 de Julho de 2004 - 9:00 horas

Orientador: **Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira** FEEC/UNICAMP

## **Banca Examinadora**

<b>Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira</b>	FEEC/UNICAMP (Orientador)
<b>Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres</b>	FEEC/UNICAMP
<b>Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val</b>	FEEC/UNICAMP
<b>Prof. Dr. Antonio Augusto Rodrigues Coelho</b>	DAS/UFSC
<b>Prof. Dr. Ely Carneiro de Paiva</b>	USF/CENPRA

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

L884a Lordelo, Alfredo Del Sole  
Análise e projeto de controladores robustos por  
alocação de pólos via análise intervalar / Alfredo Del  
Sole Lordelo.– Campinas, SP:[s.n.], 2004.

Orientador: Paulo Augusto Valente Ferreira.  
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
Computação.

1. Teoria de Controle. 2. Sistemas lineares. 3.  
Análise de intervalos (Matemática). 4. Otimização  
matemática. I. Ferreira, Paulo Augusto Valente. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

## Resumo

Esta Tese aborda o problema de projeto de controladores robustos para sistemas lineares e invariantes no tempo, cujos parâmetros pertençam a intervalos fechados. A metodologia proposta é baseada na técnica de *alocação de pólos*. Demonstra-se que quando as especificações para a alocação regional de pólos são representadas como o espectro de polinômios intervalares adequadamente selecionados, o projeto do controlador pode ser formulado e solucionado através de *Análise Intervalar*. Vários aspectos do projeto de controladores robustos por Análise Intervalar são integrados dentro de uma formulação de *Programação Alvo Linear*, cujo objetivo é minimizar o desvio total do desempenho desejado para o sistema em malha fechada. Para sistemas descritos no domínio da frequência, três tópicos principais conectados pelo conceito de *equação Diofantina intervalar* são tratados: uma investigação sobre *coprímo-robustez* de polinômios intervalares, uma abordagem computacional para o projeto de controladores via alocação de pólos na presença de incertezas do tipo intervalar e o projeto de controladores robustos face a especificações envolvendo alocação regional de pólos. Os controladores por alocação robusta de pólos são vistos como *soluções internas* da equação Diofantina intervalar. Caracterizações simples e computacionalmente eficientes do conjunto de todos os controladores por alocação robusta de pólos são obtidas e algumas de suas propriedades geométricas discutidas. Para sistemas descritos através de variáveis de estado, são obtidas representações poliedrais convexas explícitas para uma classe de controladores robustos por realimentação de estado satisfazendo a *equação de Ackermann intervalar*. A verificação da controlabilidade (observabilidade) de sistemas intervalares é tratada numericamente através da implementação do método da fatoração  $[Q][R]$  intervalar. Após caracterizar explicitamente um sub-conjunto convexo de controladores robustos, o problema de projeto de controladores *não-frágeis* é formulado como um problema de *centralização*, que pode ser resolvido por algoritmos de *Otimização Global*.

### Abstract

This Thesis addresses the problem of robust controller design for linear time-invariant systems, whose parameters belong to closed intervals. The proposed methodology is based on the *pole placement* technique. It is shown that when the regional pole placement specifications are represented as spectrum of properly selected interval polynomials, the robust controller design can be formulated and solved by *Interval Analysis*. Many aspects of robust controller design through Interval Analysis are integrated in a *Goal Programming* framework, whose objective is the minimization of the overall deviation from the desired closed-loop system. For frequency domain representation, three main topics connected by the concept of *interval Diophantine equation* are treated: an investigation about *robust coprimeness* of interval polynomials, a reliable computing approach for the design of pole placement controllers in the presence of inaccuracies of interval type and the design of robust controllers with regional pole placement specifications. Robust pole placement controllers are viewed as *inner solutions* of the interval Diophantine equation. Simple computationally efficient characterizations of the set of all robust pole placement controllers are obtained and some of its geometric properties discussed. For state space representation, explicit convex polyhedral representations of a class of robust state feedback controllers satisfying the *interval Ackermann's equation* are derived. The related problem of checking controllability (observability) of interval systems is addressed numerically by means of an interval implementation of the  $[Q][R]$  factorization method. After explicitly characterizing a convex subset of robust controllers, the problem of designing *non-fragiles* controllers is formulated as a *centering* problem, that can be solved by a *Global Optimization* algorithm.

*Aos meus pais Alfredo e Vera Lúcia, à minha esposa Alessandra Marnie e ao nosso filho Vinícius, dedico esta Tese.*

*“Eu poderia viver recluso numa casca de noz e me considerar rei do espaço infinito...”*

– Shakespeare, Hamlet, Ato 2, Cena 2

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, fonte de vida e sabedoria infinita.

Aos meus pais Alfredo e Vera Lúcia, às minhas irmãs e à minha família, pelo apoio e incentivo em tudo o que faço.

À minha esposa Alessandra Marnie, pelo seu amor, carinho e compreensão e ao nosso filho Vinícius pela motivação.

Ao meu orientador Professor Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira, por participar diretamente da minha formação científica, pela amizade, humildade, competência, empenho e, também, pelo seu espírito nobre, correto e altruísta, que me deram muitos ensinamentos humanos.

Ao meu país, que através do ensino gratuito e de qualidade me fez crescer.

Aos Professores Dr. Pedro Luis Dias Peres e Dr. João Bosco Ribeiro do Val da FEEC/UNICAMP, Dr. Antonio Augusto Rodrigues Coelho do DAS/UFSC e Dr. Ely Carneiro de Paiva da USF/CENPRA, por suas participações, sugestões e críticas pertinentes.

Aos demais professores, técnicos e funcionários do Departamento de Telemática - DT e da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - FEEC/UNICAMP, que propiciaram a infra-estrutura necessária para a realização deste trabalho.

Aos meus amigos da pós-graduação, pela amizade, companheirismo e saudável convivência.

Aos Professores Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira e Dr. Edvaldo Assunção da FEIS/UNESP, pela longa amizade.

Finalmente, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq e ao Fundo de Apoio ao Ensino e à Pesquisa - FAEP, pelos auxílios financeiros dados a este trabalho.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>ii</b>
<b>1 Introdução Geral</b>	<b>1</b>
<b>2 Fundamentos de Análise Intervalar</b>	<b>5</b>
2.1 Introdução . . . . .	5
2.2 Intervalos Reais . . . . .	5
2.3 Vetores Reais Intervalares . . . . .	10
2.4 Matrizes Reais Intervalares . . . . .	12
2.5 Imagem de Funções Reais Intervalares . . . . .	13
2.6 Equações Lineares Intervalares . . . . .	15
2.7 Conclusão . . . . .	21
<b>3 Equação Diofantina Intervalar</b>	<b>22</b>
3.1 Introdução . . . . .	22
3.2 Alocação de Pólos e a Equação Diofantina . . . . .	22
3.3 Não-Singularidade Robusta da Resultante de Sylvester Intervalar . . . . .	25
3.4 Coprimo-Robustez de Polinômios Intervalares . . . . .	34
3.5 Solução da Equação Diofantina Intervalar . . . . .	36
3.6 Conclusão . . . . .	41
<b>4 Projeto de Controladores Robustos</b>	<b>42</b>
4.1 Introdução . . . . .	42
4.2 Alocação de Pólos via Programação Alvo . . . . .	42
4.3 Controladores Robustos: Soluções Internas de $\Sigma$ . . . . .	48
4.4 Alocação Robusta de Pólos via Programação Alvo . . . . .	55
4.5 Controladores PID Robustos . . . . .	57
4.6 Não-fragilidade de Controladores Robustos . . . . .	58
4.7 Conclusão . . . . .	61

---

<b>5</b>	<b>Projeto de Controladores Robustos por Realimentação de Estado</b>	<b>63</b>
5.1	Introdução . . . . .	63
5.2	Alocação Robusta de Pólos . . . . .	63
5.3	Projeto do Controlador . . . . .	66
5.4	Projeto do Observador de Estado . . . . .	70
5.5	Sistemas Multivariáveis . . . . .	74
5.6	Projeto de Controladores Não-Frágeis . . . . .	76
5.7	Conclusão . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Conclusão Geral</b>	<b>78</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>80</b>

## Notação

$\emptyset$	Conjunto vazio
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	Conjunto dos vetores reais de dimensão $n$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto das matrizes reais de dimensão $n \times m$
$\mathbb{I}\mathbb{R}$	Conjunto dos intervalos reais fechados
$\mathbb{I}\mathbb{R}^n$	Conjunto dos vetores intervalares de dimensão $n$
$\mathbb{I}\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto das matrizes intervalares de dimensão $n \times m$
$a$	Escalar
$[a] = [a^-, a^+]$	Intervalo fechado
$a^-$	Limitante inferior de $[a]$
$a^+$	Limitante superior de $[a]$
$a_w$	Largura de $[a]$
$a_c$	Ponto central de $[a]$
$\delta$	Raio de $[a]$
$ [a] $	Valor absoluto de $[a]$
$\mathbf{a}$	Vetor
$\mathbf{a}^T$	Transposto de $\mathbf{a}$
$[\mathbf{a}] = [\mathbf{a}^-, \mathbf{a}^+]$	Vetor intervalar
$[a_i] = [a_i^-, a_i^+]$	$i$ -ésimo elemento de $[\mathbf{a}]$
$\mathbf{a}^-$	Limitante inferior de $[\mathbf{a}]$
$\mathbf{a}^+$	Limitante superior de $[\mathbf{a}]$
$\mathbf{a}_w$	Largura de $[\mathbf{a}]$
$\mathbf{a}_c$	Ponto central de $[\mathbf{a}]$
$\delta$	Raio de $[\mathbf{a}]$
$  [\mathbf{a}]  $	Valor absoluto de $[\mathbf{a}]$
$\mathbf{A}$	Matriz
$\mathbf{A}^T$	Transposto de $\mathbf{A}$
$\mathbf{0}_n$	Matriz de zeros de dimensão $n \times n$
$\mathbf{I}_n$	Matriz Identidade de dimensão $n \times n$
$[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}^-, \mathbf{A}^+]$	Matriz intervalar
$[A_{ij}] = [A_{ij}^-, A_{ij}^+]$	$ij$ -ésimo elemento de $[\mathbf{A}]$
$\mathbf{A}^-$	Limitante inferior de $[\mathbf{A}]$
$\mathbf{A}^+$	Limitante superior de $[\mathbf{A}]$
$\mathbf{A}_w$	Largura de $[\mathbf{A}]$
$\mathbf{A}_c$	Ponto central de $[\mathbf{A}]$
$\Delta$	Raio de $[\mathbf{A}]$
$  [\mathbf{A}]  $	Valor absoluto de $[\mathbf{A}]$

# Lista de Figuras

3.1	Sistema SISO com realimentação unitária. . . . .	23
3.2	Espectros de $[c(s, \epsilon)]$ (cinza) e $[d(s, \epsilon)]$ (preto). . . . .	28
3.3	Espectros de $[c(s, \epsilon^*)]$ (cinza) e $[d(s, \epsilon^*)]$ (preto). . . . .	36
3.4	Sistema SISO intervalar com realimentação unitária. . . . .	36
3.5	Espectro de $[d_P(s)][d_C(s)] + [n_P(s)][n_C(s)]$ . . . . .	40
3.6	Espectro de $[d_P(s)]d_{C_{cen}}(s) + [n_P(s)]n_{C_{cen}}(s)$ . . . . .	41
4.1	Controle proporcional para o Exemplo 4.2.1. . . . .	45
4.2	Espectro de $[b(s)]$ . . . . .	48
4.3	Espectros de $[d_P(s)]d_{C_1}(s) + [n_P(s)]n_{C_1}(s)$ (preto) e $[b(s)]$ (cinza). . . . .	54
4.4	Espectros de $[d_P(s)]d_{C_2}(s) + [n_P(s)]n_{C_2}(s)$ (preto) e $[b(s)]$ (cinza). . . . .	57
4.5	Espectros de $[d_P(s)]d_{C_3}(s) + [n_P(s)]n_{C_3}(s)$ (preto) e $[b(s)]$ (cinza). . . . .	60
4.6	Espectros de $[d_P(s)]d_{C_{cen}}(s) + [n_P(s)]n_{C_{cen}}(s)$ (preto) e $[b(s)]$ (cinza). . . . .	61
5.1	Espectros de $\det(s\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + \mathbf{b}\mathbf{k}^*)$ (preto) e $[d_c(s)]$ (cinza). . . . .	73
5.2	Espectros de $\det(s\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + \mathbf{l}^*\mathbf{c})$ (preto) e $[d_o(s)]$ (cinza). . . . .	73
5.3	Resposta temporal ao degrau unitário (tempo em segundos). . . . .	74

# Capítulo 1

## Introdução Geral

O PROBLEMA de projeto de controladores para sistemas lineares e invariantes no tempo, destinados a garantir respostas transiente e de estado estacionário satisfatórias em malha fechada, tem uma solução prática através de *alocação de pólos*. A técnica é baseada no fato de que muitas especificações de desempenho podem ser satisfeitas utilizando-se realimentação dinâmica da saída para alocar adequadamente os pólos de malha fechada.

Uma extensão do problema clássico de alocação de pólos é o problema de alocação regional de pólos, cujo objetivo é alocar os pólos de malha fechada em uma região adequada do plano complexo  $s$ . O problema de alocação regional de pólos é quase sempre tratado em conexão com o problema mais geral de *alocação robusta de pólos*, de acordo com o qual, o controlador robusto deve alocar os pólos de malha fechada em uma região específica do plano complexo  $s$  face a incertezas com respeito ao modelo matemático da planta. Em muitas situações reais, as incertezas se refletem nos parâmetros da planta, o que tem motivado extensos esforços de pesquisa em *Teoria de Controle Robusto Paramétrico* (Ackermann 1993), (Barmish 1994), (Bhattacharyya, Chapellat e Keel 1995).

Na presente Tese, plantas incertas são representadas por funções de transferência próprias com coeficientes pertencentes a intervalos reais. O problema de alocação robusta de pólos é formulado como o problema de se alocar robustamente os pólos de malha fechada em uma região especificada através das raízes de um polinômio característico intervalar. Condições semelhantes são adotadas em (Soh, Evans, Petersen e Betz 1987), (Rotstein, Peña, Bandoni, Desages e Romagnoli 1991) e (Keel e Bhattacharyya 1997a).

A abordagem proposta para o problema de alocação robusta de polinômios característicos é semelhante às apresentadas em (Soh et al. 1987) e (Keel e Bhattacharyya 1999a). Em (Soh et al. 1987), após se caracterizar explicitamente o conjunto de todos os controladores por alocação robusta de pólos, a distância de um controlador nominal a este conjunto é minimizada utilizando-se uma técnica de *Programação Não-Linear*. Um método baseado em sensibilidade aplicado a um polinômio característico nominal é utilizado para especificar o polinômio característico intervalar.

Em (Rotstein et al. 1991), a distância a um controlador nominal e o tamanho da região de incertezas são relacionados através de uma técnica de projeto por alocação robusta de pólos baseada em *Otimização Semi-infinita*. Em (Keel e Bhattacharyya 1997a), alguns

desenvolvimentos importantes das últimas duas décadas na área de controle robusto são empregados para tratar o problema de alocação robusta de pólos em uma estrutura de *Programação Linear*. Em particular, o *Teorema das Arestas* (Bartlett, Hollot e Lin 1988) é utilizado para obter o *espaço de raízes* de polinômios intervalares, permitindo especificações de desempenho para o sistema em malha fechada em termos de critérios comuns no domínio da frequência como, por exemplo, taxa de amortecimento e grau de estabilidade (Bhattacharyya et al. 1995).

O ponto de partida para todas as técnicas por alocação robusta de pólos mencionadas é a técnica de projeto clássica de alocação de pólos. Como amplamente discutido em (Åström e Wittenmark 1997) e (Chen 1999), entre outros, a solução do problema clássico de alocação de pólos pode ser reduzida, sob condições apropriadas, à solução da conhecida *equação Diofantina*, cuja versão matricial assume a forma de um sistema linear,  $Ax = b$ , na qual  $A$  é a *matriz de Sylvester* associada a uma dada planta de ordem  $n$ ,  $x$  é o vetor com os coeficientes de um controlador de ordem  $r$  a ser projetado e  $b$  é o vetor com os coeficientes de um dado polinômio característico de grau  $n + r$ . Dadas  $A$  e  $b$ , existe um controlador  $x$ , tal que  $Ax = b$  se e somente se os dois polinômios que descrevem a planta forem *coprímos* e  $r \geq n - 1$ . Dois polinômios são *coprímos* se e somente se a *resultante de Sylvester* associada é não-singular (Chen 1999).

O principal objetivo desta Tese é abordar a técnica de projeto de alocação de pólos de maneira sistematizada dentro de conceitos e métodos de *Análise Intervalar* (Alefeld e Herzberger 1983), (Moore 1979). A motivação é levar em conta possíveis representações intervalares, tanto para os coeficientes da planta quanto para os coeficientes do polinômio característico de malha fechada, o que leva à introdução de uma *equação Diofantina intervalar*, e propor métodos de projeto de controladores baseados nos conceitos de *Análise Intervalar*. A versão matricial da equação Diofantina intervalar assume a forma de um sistema linear intervalar  $[A]x = [b]$ , na qual  $[A]$  e  $[b]$  são a *matriz de Sylvester intervalar* e o vetor intervalar associados a uma dada planta intervalar e a um dado polinômio característico intervalar, respectivamente. A *Análise Intervalar* tem se tornado útil para lidar com importantes problemas na área de controle, o que tem se refletido no crescente número de publicações sobre suas aplicações em *Sistemas de Controle*. Em (Jaulin, Kieffer, Didrit e Walter 2001) é apresentada uma discussão mais detalhada do assunto.

O problema de projeto de controladores robustos por realimentação de estado para sistemas lineares e invariantes no tempo intervalares, de maneira a estabilizar ou garantir um desempenho desejado em malha fechada, também é abordado nesta Tese. Em (Chen 1999), são apresentadas condições de estabilidade através da realimentação de estado a ganhos constantes, assim como soluções para problemas de alocação de pólos através de realimentação de estado para sistemas cujos parâmetros são precisamente conhecidos. Da mesma forma que no caso anterior, modelos lineares de sistemas reais podem incluir parâmetros cujos valores são desconhecidos, mas limitados em conjuntos compactos, geralmente descritos na forma de intervalos fechados. Neste caso, estabilização e desempenho através de realimentação de estado devem ser formulados no sentido da robustez. O problema de controle robusto consiste em encontrar um ganho de realimentação de estado, de maneira a posicionar todos os pólos do sistema em malha fechada no semi-plano esquerdo do plano

complexo  $s$  (estabilização robusta) ou em uma determinada região do semi-plano esquerdo do plano complexo  $s$  (desempenho robusto) para cada conjunto de parâmetros do sistema.

O problema de estabilização robusta tem sido tratado na literatura através de duas metodologias distintas (Wei 1994). Na primeira, o sistema incerto é visto como um sistema nominal sujeito a perturbações. O problema é então decomposto em subproblemas de estabilização do sistema nominal e prova-se que o sistema em malha fechada permanece estável com respeito a todas as possíveis perturbações. Métodos que se encaixam nesta categoria foram propostos em (Yedavali 1985) e (Zhou e Khargonekar 1987), por exemplo. De acordo com a segunda metodologia, a estabilidade do sistema é inicialmente determinada e então, um controlador estabilizante é projetado. Condições de estabilidade para sistemas incertos e os seus respectivos métodos de projeto foram propostos em (Wei 1994) e (Wei e Barmish 1989), entre outros.

Como no caso descrito anteriormente através de funções de transferência e apresentado em (Keel e Bhattacharyya 1999a), as especificações regionais para alocação de pólos são formuladas como *conjuntos espectrais de polinômios intervalares* que podem ser obtidos de forma eficiente através do Teorema das Arestas (Bartlett et al. 1988). A existência e o projeto de controladores robustos por realimentação de estado são baseados nos conceitos e métodos de Análise Intervalar (Alefeld e Herzberger 1983) para a representação matricial intervalar do sistema. A metodologia proposta nesta Tese foi motivada pelo desenvolvimento apresentado em (Smagina e Brewer 2002) para o problema de estabilização robusta. O objetivo do método aqui proposto é encontrar as *soluções internas* (Rohn 1986) para a chamada *equação de Ackermann intervalar* formuladas de maneira a representar controladores robustos por realimentação de estado. São obtidas representações poliedrais convexas do conjunto de todos os controladores robustos por realimentação de estado, permitindo investigar a existência de controladores robustos de estado observado através de Programação Linear.

A Tese está organizada como se segue.

O Capítulo 2 apresenta definições relacionadas a conjuntos intervalares fechados e a operações com *Álgebra Intervalar*, seguidas de exemplos. O objetivo é introduzir noções suficientes para o entendimento dos métodos apresentados nos capítulos seguintes. Detalhes adicionais são descritos em (Alefeld e Herzberger 1983), (Jaulin et al. 2001), (Moore 1966) e (Moore 1979).

O Capítulo 3 apresenta inicialmente a técnica de alocação de pólos e a caracterização da equação Diofantina. Em seguida, é apresentada uma análise da *não-singularidade robusta* da *resultante de Sylvester intervalar* associada a dois polinômios intervalares. O método é baseado no *Algoritmo da Bisseção* aplicado à solução de certos problemas de Programação Linear e permite estimar o *raio de não-singularidade robusta* de uma matriz intervalar. Também é tratado o problema da *coprímidade robusta* de polinômios intervalares a partir dos resultados anteriores sobre não-singularidade robusta. Finalmente, é apresentado um método computacional para o projeto de controladores por alocação robusta de pólos, na presença de incertezas do tipo intervalar, através da solução da equação Diofantina intervalar. O projeto de controladores robustos é obtido na forma de um *controlador intervalar*, ou seja, um controlador com coeficientes intervalares que contém todas as soluções possí-

veis do problema de alocação de pólos. Através do Teorema das Arestas (Bhattacharyya et al. 1995), caracteriza-se então a região do plano complexo  $s$  atingível pelo controlador intervalar que, deste modo, fornece um desempenho garantido para o sistema em malha fechada. Exemplos numéricos ilustram os principais resultados apresentados.

O Capítulo 4 é dedicado à caracterização, análise e projeto dos controladores robustos como soluções internas de equações Diofantinas intervalares. Caracterizações simples e computacionalmente eficientes do conjunto de todos os controladores por alocação robusta de pólos são obtidas e algumas das suas propriedades geométricas discutidas. É apresentada uma abordagem computacional, baseada em otimização, para o projeto de controladores de ordem fixa. O método envolve técnicas clássicas de projeto por alocação de pólos para plantas lineares e invariantes no tempo, com ou sem incertezas do tipo intervalar, dentro de uma estrutura de *Programação Alvo*. O uso de Programação Alvo com coeficientes intervalares (Inuiguchi e Kume 1991) permite uma solução substancialmente mais simples para o problema de alocação robusta do que as apresentadas em (Soh et al. 1987) e (Keel e Bhattacharyya 1999a), e como em (Keel e Bhattacharyya 1999a), todos os problemas de projeto de controladores podem ser reduzidos a problemas de Programação Linear. O objetivo do projeto é a minimização do desvio total do desempenho desejado para o sistema em malha fechada, especificado por um espectro de polinômios característicos. Finalmente, após caracterizar explicitamente um subconjunto convexo de controladores robustos, o problema de projeto de *controladores não-frágeis* é formulado como um *problema de centralização*, que é então resolvido por um algoritmo de *Otimização Global*. Exemplos numéricos ilustram os principais resultados apresentados.

O Capítulo 5 apresenta uma metodologia baseada em Análise Intervalar para o projeto de controladores robustos por realimentação de estado para sistemas lineares e invariantes no tempo intervalares. De forma semelhante à metodologia de projeto de controladores anteriormente apresentada para sistemas descritos no domínio da frequência, é demonstrado que quando o problema de alocação robusta de pólos é representado através do espectro de polinômios intervalares adequadamente selecionados, este pode ser totalmente formulado e resolvido em um contexto de Análise Intervalar. O problema de controle robusto consiste em encontrar um ganho de realimentação de estado de maneira a alocar todos os pólos de malha fechada numa região previamente especificada no semi-plano esquerdo do plano  $s$ , para todos os possíveis conjuntos de parâmetros do sistema. São obtidas representações poliedrais convexas explícitas para uma classe de controladores robustos por realimentação de estado satisfazendo a equação de Ackermann intervalar. Também é proposto um procedimento de projeto baseado em Programação Não-Linear que objetiva a maximização da *não-fragilidade* do controlador robusto. Problemas relacionados à verificação da controlabilidade e da observabilidade de sistemas intervalares são tratados numericamente através da implementação do método da fatoração  $[Q][R]$  intervalar. Também são apresentadas extensões relativamente simples, para sistemas intervalares, de resultados conhecidos em projeto por realimentação de estado. Exemplos numéricos ilustram os principais resultados apresentados.

O Capítulo 6 apresenta as conclusões e expõe as perspectivas para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Fundamentos de Análise Intervalar

### 2.1 Introdução

Este Capítulo 2 apresenta definições relacionadas a conjuntos intervalares fechados e a operações com *Álgebra Intervalar*, seguidas de exemplos. O objetivo é introduzir noções suficientes para o entendimento dos métodos apresentados nos capítulos seguintes. Detalhes adicionais são descritos em (Alefeld e Herzberger 1983), (Jaulin et al. 2001), (Moore 1966) e (Moore 1979).

### 2.2 Intervalos Reais

O conjunto dos números reais é definido por  $\mathbb{R}$  e os elementos de  $\mathbb{R}$  por letras minúsculas  $a, b, c, \dots, x, y, z$ . Um subconjunto conexo de  $\mathbb{R}$ , representado como  $[a]$

$$[a] := [a^-, a^+] := \{x \text{ de maneira que } a^- \leq x \leq a^+ \text{ para todo } a^- \text{ e } a^+ \in \mathbb{R}\}$$

é chamado de *intervalo real* ou, simplesmente, de *intervalo*. O *limitante inferior*  $a^-$  e o *limitante superior*  $a^+$  de  $[a]$  são definidos, respectivamente, como

$$\begin{aligned} a^- &:= \sup\{x \in \{\mathbb{R} \cup [-\infty, \infty]\} \text{ de maneira que, para todo } a \in [a], x \leq a\}, \\ a^+ &:= \inf\{y \in \{\mathbb{R} \cup [-\infty, \infty]\} \text{ de maneira que, para todo } a \in [a], a \leq y\}, \end{aligned}$$

ou seja,  $a^-$  é o maior número a esquerda de  $[a]$  e  $a^+$  é o menor número a sua direita.

**Exemplo 2.2.1** Considere o intervalo  $[a] = [-3, 7]$ , então  $a^- = -3$ ,  $a^+ = 7$ .

O conjunto de todos os intervalos reais fechados é representado por  $\mathbb{IR}$  e os elementos de  $\mathbb{IR}$  por letras minúsculas entre colchetes  $[a], [b], [c], \dots, [x], [y], [z]$ . Os números reais

$x \in \mathbb{R}$  são um caso particular em que  $[x, x] \in \mathbb{IR}$  e são denominados intervalos degenerados ou pontuais. Desde que  $\mathbb{R}$  e  $\emptyset$  são simultaneamente abertos e fechados, ambos pertencem a  $\mathbb{IR}$ , embora ainda seja assunto de discussão se o conjunto vazio  $\emptyset$  deveria ou não ser considerado um intervalo. A seguir, são apresentadas algumas definições relevantes sobre Análise Intervalar, envolvendo intervalos fechados.

**Definição 2.2.1** *Dois intervalos  $[a] = [a^-, a^+]$  e  $[b] = [b^-, b^+]$ , ambos  $\in \mathbb{IR}$ , são iguais, ou seja,  $[a] = [b]$ , se e somente se,  $a^- = b^-$  e  $a^+ = b^+$ .  $\square$*

**Definição 2.2.2** *A largura  $a_w$ , o ponto central  $a_c$ , o raio  $\delta$  e o valor absoluto de qualquer intervalo limitado e não-vazio  $[a] = [a^-, a^+] \in \mathbb{IR}$  são definidos, respectivamente, por*

$$a_w := a^+ - a^-, \quad a_c := \frac{a^- + a^+}{2}, \quad \delta := \frac{a^+ - a^-}{2} \quad e \quad |[a]| := \max\{|a^-|, |a^+|\}.$$

$\square$

**Definição 2.2.3** *Considere  $\diamond \in \{+, -, \cdot, /\}$  uma operação binária em  $\mathbb{R}$ . Se  $[a]$  e  $[b]$ , ambos  $\in \mathbb{IR}$ , então a operação binária correspondente em  $\mathbb{IR}$  é definida por*

$$[a] \diamond [b] := \{a \diamond b \text{ para todo } a \in [a] \text{ e } b \in [b]\}.$$

$\square$

Deve-se notar que os símbolos utilizados para as operações em  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{IR}$  são os mesmos. Isto não deve gerar confusão, desde que sempre ficará claro a partir do contexto se a operação é em  $\mathbb{R}$  ou em  $\mathbb{IR}$ .

Para intervalos fechados não-vazios, as operações sobre os intervalos  $[a] = [a^-, a^+]$  e  $[b] = [b^-, b^+]$  são calculadas explicitamente em termos dos seus extremos, como descrito em (2.1). Isto segue do fato de que  $z = f(x, y)$ , na qual  $f(x, y) = x \diamond y$ , com  $\diamond \in \{+, -, \cdot, /\}$  ser uma função contínua sobre um conjunto compacto. Portanto, a função  $f(x, y)$  corresponde ao maior e menor valor, assim como a todos os valores intermediários.

$$\begin{aligned}
[a] + [b] &:= [a^- + b^-, a^+ + b^+], \\
[a] - [b] &:= [a^- - b^+, a^+ - b^-] = [a] + [-1, -1] \cdot [b], \\
[a] \cdot [b] &:= [\min\{a^-b^-, a^-b^+, a^+b^-, a^+b^+\}, \max\{a^-b^-, a^-b^+, a^+b^-, a^+b^+\}], \\
\alpha \cdot [a] &:= [\alpha \cdot a^-, \alpha \cdot a^+] \quad \text{se } \alpha \geq 0, \\
&:= [\alpha \cdot a^+, \alpha \cdot a^-] \quad \text{se } \alpha < 0, \\
[a]/[b] &:= [a] \cdot (1/[b]), \\
1/[b] &:= \emptyset \quad \text{se } [b] = [0, 0], \\
&:= [1/b^+, 1/b^-] \quad \text{se } 0 \notin [b], \\
&:= [1/b^+, \infty[ \quad \text{se } b^- = 0 \text{ e } b^+ > 0, \\
&:= ] - \infty, 1/b^-] \quad \text{se } b^- < 0 \text{ e } b^+ = 0, \\
&:= ] - \infty, \infty[ \quad \text{se } b^- < 0 \text{ e } b^+ > 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Logo,  $[a] \diamond [b]$  é também um intervalo real fechado e as expressões em (2.1) fornecem o menor e o maior valor de  $f(x, y)$ , sendo que  $\mathbb{IR}$  é fechado para estas operações. Certamente, quando aplicadas em intervalos degenerados  $[a]$  e  $[b]$ , as regras descritas em (2.1) são simplificadas para as regras conhecidas das operações da aritmética pontual, que é um caso particular da aritmética intervalar.

**Exemplo 2.2.2** *Exemplos de tais operações em  $\mathbb{IR}$  são*

$$\begin{aligned}
([1, 2.2] \cdot [0, 2]) + [1, 3] &= [0, 4.4] + [1, 3] = [1, 7.4], \\
1/[2, 4] &= [0.25, 0.5], \\
[3, 4]/[0, 0] &= \emptyset.
\end{aligned}$$

Por simplicidade, o símbolo  $\cdot$  referente a multiplicação será omitido deste ponto em diante. Além das operações descritas na Definição 2.2.3, existem outras operações, a maioria unária, isto é, operações de um único argumento, com intervalos tais como as relacionadas a seguir.

**Definição 2.2.4** *Se  $r(x)$  é uma operação unária contínua em  $\mathbb{R}$ , então uma operação unária em  $\mathbb{IR}$  é definida por*

$$r([x]) = \{[\min r(x), \max r(x)], \text{ para todo } x \in [x]\}.$$

□

**Exemplo 2.2.3** Exemplos de tais operações em  $\mathbb{IR}$  são

$$\begin{aligned} [-1, 3]^2 &= [0, 9], \\ \exp([0, 1]) &= [\exp(0), \exp(1)] = [1, e], \\ \sqrt{[4, 25]} &= [\sqrt{4}, \sqrt{25}] = [2, 5] \\ \sqrt{[-25, -4]} &= \emptyset, \\ \sqrt{[-50, 1]} &= \sqrt{[0, 1]} = [0, 1]. \end{aligned}$$

Para funções não-monotônicas, a situação é mais complicada e exige certa atenção.

**Exemplo 2.2.4** A operação  $\text{sen}([0, \pi]) = [0, 1]$  é diferente de  $[\text{sen}(0), \text{sen}(\pi)] = [0, 0]$ . Da mesma forma,  $\text{sen}([2.6, 7.2]) = [-1, 0.7937]$  é diferente de  $[\text{sen}(2.6), \text{sen}(7.2)] = [0.5155, 0.7937]$ .

O seguinte teorema apresenta algumas propriedades das operações algébricas em  $\mathbb{IR}$ .

**Teorema 2.2.1** Considere os intervalos  $[a]$ ,  $[b]$  e  $[c] \in \mathbb{IR}$ . Então as seguintes propriedades são verdadeiras:

- $[a] + [b] = [b] + [a]$  e  $[a][b] = [b][a]$  (comutatividade);
- $([a] + [b]) + [c] = [a] + ([b] + [c])$  e  $([a][b])[c] = [a]([b][c])$  (associatividade);
- $[x] = [0, 0]$  e  $[y] = [1, 1]$  são os únicos elementos neutros para a adição e multiplicação intervalares, respectivamente, ou seja

$$\begin{aligned} [a] &= [x] + [a] = [a] + [x] \text{ para todo } [a] \in \mathbb{IR} \text{ se e somente se } [x] = [0, 0]; \\ [a] &= [y][a] = [a][y] \text{ para todo } [a] \in \mathbb{IR} \text{ se e somente se } [y] = [1, 1]; \end{aligned}$$

- $\mathbb{IR}$  não possui divisores por zero;
- Também é verificado que

$$\begin{aligned} a([b] + [c]) &= a[b] + a[c], \quad a \in \mathbb{R}; \\ [a]([b] + [c]) &= [a][b] + [a][c] \text{ se } bc \geq 0, \text{ para todo } b \in [b] \text{ e } c \in [c]. \end{aligned}$$

**Prova:** Veja (Alefeld e Herzberger 1983).  $\square$

Desta forma, as propriedades das operações básicas em  $\mathbb{IR}$  são diferentes das propriedades em  $\mathbb{R}$ . Por exemplo,  $[a] - [a]$  não é necessariamente igual a  $[0, 0]$ . Isto se deve ao fato de que  $[a] - [a] = \{a - b \mid a \in [a], b \in [a]\}$  e não  $\{a - a \mid a \in [a]\}$ . Portanto, a subtração não leva em conta a multi-incidência das duas ocorrências em  $[a]$ . A adição e a multiplicação permanecem associativas e comutativas, mas a multiplicação não é mais distributiva com respeito a adição. Ao invés disso,  $[a]([b] + [c]) \subset [a][b] + [a][c]$ , propriedade esta, conhecida como subdistributividade, que é uma consequência direta do efeito da multi-incidência, já que  $[a]$  aparece apenas uma vez no lado esquerdo, mas duas vezes no lado direito. Desta forma, é importante fatorar as formas expandidas o máximo possível.

**Exemplo 2.2.5** A expressão  $x^2 - x = (x - 1/2)^2 - 1/4$  não é verdadeira quando aplicada na variável  $[x] \in \mathbb{IR}$ . Isto é verificado para  $[x] = [-1, 3]$ , pois

$$\begin{aligned} [x]^2 - [x] &= [-1, 3]^2 - [-1, 3] = [0, 9] + [-3, 1] = [-3, 10], \\ ([x] - 1/2)^2 - 1/4 &= [-3/2, 5/2]^2 - 1/4 = [0, 25/4] - 1/4 = [-1/4, 6]. \end{aligned}$$

O primeiro resultado é uma aproximação pessimista da imagem do conjunto de  $x^2 - x$  em  $[-1, 3]$  e o segundo é a imagem deste conjunto.

As operações com conjuntos podem ser redefinidas, no contexto de intervalos fechados, como operações com os seus limites, ou seja, os limitantes resultantes de uma operação intervalar são expressos como funções dos seus argumentos intervalares.

**Definição 2.2.5** A interseção de dois intervalos  $[a]$  e  $[b]$ , ambos  $\in \mathbb{IR}$ , é definida por

$$\begin{aligned} [a] \cap [b] &:= \{c \in \mathbb{R} \text{ de maneira que } c \in [a] \text{ e } c \in [b]\}, \\ &:= \{[\max\{a^-, b^-\}, \min\{a^+, b^+\}]\} \text{ se } \max\{a^-, b^-\} \leq \min\{a^+, b^+\}, \\ &:= \emptyset \text{ caso contrário.} \end{aligned}$$

$\square$

**Definição 2.2.6** A casca intervalar de um subconjunto  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{R}$  é o menor intervalo de  $\mathbb{IR}$  que o contenha e é denotado por  $[\mathcal{A}]$ .  $\square$

**Definição 2.2.7** A união de dois intervalos  $[a]$  e  $[b]$ , ambos  $\in \mathbb{IR}$ , é definida por

$$[a] \cup [b] := \{c \in \mathbb{R} \text{ de maneira que } c \in [a] \text{ ou } c \in [b]\}.$$

□

Como a união de dois intervalos não resulta necessariamente em um intervalo fechado, define-se a *união intervalar* como a *casca intervalar da união*. Assim,

**Definição 2.2.8** A união intervalar de dois intervalos não-vazios  $[a]$  e  $[b]$ , ambos  $\in \mathbb{IR}$ , é definida por

$$[a] \sqcup [b] := [[a] \cup [b]] := \{[\min\{a^-, b^-\}, \max\{a^+, b^+\}] \text{ para todo } [a] \text{ e } [b] \in \mathbb{IR}\}.$$

□

## 2.3 Vetores Reais Intervalares

Um *vetor intervalar*  $[a]$  é um subconjunto de  $\mathbb{IR}^n$ , que pode ser definido como o produto cartesiano de  $n$  intervalos fechados. Assim,

$$[a] = [a_1] \times [a_2] \times \dots \times [a_n], \quad \text{na qual} \quad [a_i] = [a_i^-, a_i^+] \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

O seu  $i$ -ésimo *componente intervalar*  $[a_i]$  é a projeção de  $[a]$  sobre o  $i$ -ésimo eixo. O conjunto vazio de  $\mathbb{R}^n$  é descrito por  $\emptyset \times \dots \times \emptyset$ , pois todos os seus componentes intervalares são vazios. Assim, expressões como  $[a] = \emptyset \times [0, 1]$  não fazem sentido, pois  $[0, 1]$  não é uma projeção de  $[a]$  sobre o segundo eixo. Isto garante a unicidade de notação de um determinado vetor intervalar. O conjunto de todos os vetores intervalares de dimensão  $n$  é denotado por  $\mathbb{IR}^n$ .

Muitas das definições introduzidas anteriormente para intervalos são estendidas para vetores intervalares. Por exemplo, um vetor intervalar é degenerado se todos os seus componentes intervalares forem degenerados. Qualquer vetor com pelo menos um componente degenerado possui volume nulo, no entanto, um vetor intervalar com volume nulo não é necessariamente degenerado.

O *limitante inferior*  $a^-$  e o *limitante superior*  $a^+$  de um vetor intervalar são vetores degenerados que consistem dos limitantes inferiores e superiores, respectivamente, dos seus componentes intervalares. Assim,

$$a^- := [a_1^- \ a_2^- \ \dots \ a_n^-]^T \quad \text{e} \quad a^+ := [a_1^+ \ a_2^+ \ \dots \ a_n^+]^T.$$

**Definição 2.3.1** Dois vetores intervalares  $[\mathbf{a}] = [\mathbf{a}^-, \mathbf{a}^+]$  e  $[\mathbf{b}] = [\mathbf{b}^-, \mathbf{b}^+]$ , ambos  $\in \mathbb{IR}^n$ , são iguais, ou seja,  $[\mathbf{a}] = [\mathbf{b}]$ , se e somente se,  $\mathbf{a}^- = \mathbf{b}^-$  e  $\mathbf{a}^+ = \mathbf{b}^+$ .  $\square$

**Definição 2.3.2** A largura  $\mathbf{a}_w$ , o ponto central  $\mathbf{a}_c$ , o raio  $\delta$  e o valor absoluto de qualquer vetor intervalar limitado e não-vazio  $[\mathbf{a}] = [\mathbf{a}^-, \mathbf{a}^+] \in \mathbb{IR}^n$  são definidos, respectivamente, por

$$\mathbf{a}_w := \mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-, \quad \mathbf{a}_c := \frac{\mathbf{a}^- + \mathbf{a}^+}{2}, \quad \delta := \frac{\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-}{2} \quad e \quad |[a]| := \max\{|\mathbf{a}^-|, |\mathbf{a}^+|\}.$$

$\square$

**Definição 2.3.3** A interseção de dois vetores intervalares  $[\mathbf{a}]$  e  $[\mathbf{b}]$ , ambos  $\in \mathbb{IR}^n$ , é definida por

$$[\mathbf{a}] \cap [\mathbf{b}] := ([a_1] \cap [b_1] \times [a_2] \cap [b_2] \times \dots \times [a_n] \cap [b_n]).$$

$\square$

**Definição 2.3.4** A casca intervalar de um subconjunto  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{R}^n$  é o menor vetor intervalar de  $\mathbb{IR}^n$  que o contenha e é denotado por  $[\mathcal{A}]$ .  $\square$

Como a união de dois vetores intervalares não resulta necessariamente em um vetor intervalar fechado, define-se a *união intervalar* de dois vetores intervalares como a *casca intervalar da união* de dois vetores intervalares. Assim,

**Definição 2.3.5** A união intervalar de dois vetores intervalares não-vazios  $[\mathbf{a}]$  e  $[\mathbf{b}]$ , ambos  $\in \mathbb{IR}^n$ , é definida por

$$[\mathbf{a}] \sqcup [\mathbf{b}] := [[\mathbf{a}] \cup [\mathbf{b}]]_n := ([a_1] \sqcup [b_1] \times [a_2] \sqcup [b_2] \times \dots \times [a_n] \sqcup [b_n]).$$

$\square$

Também é verdadeiro que  $[\mathbf{a}] \subset [\mathbf{b}]$  se e somente se  $[a_1] \subset [b_1]$  e  $[a_2] \subset [b_2]$  e  $\dots$  e  $[a_n] \subset [b_n]$ , assim como  $\mathbf{a} \in [\mathbf{b}]$  se e somente se  $a_1 \in [b_1]$  e  $a_2 \in [b_2]$  e  $\dots$  e  $a_n \in [b_n]$ .

Operações clássicas para vetores intervalares são extensões diretas das operações para vetores degenerados. Assim, se  $[\mathbf{a}]$  e  $[\mathbf{b}] \in \mathbb{IR}^n$  e se  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então para  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} \alpha[\mathbf{a}] &:= (\alpha[a_1]) \times (\alpha[a_2]) \times \dots \times (\alpha[a_n]), \\ [\mathbf{a}]^T[\mathbf{b}] &:= [a_1][b_1] + [a_2][b_2] + \dots + [a_n][b_n], \\ [\mathbf{a}] + [\mathbf{b}] &:= ([a_1] + [b_1]) \times ([a_2] + [b_2]) \times \dots \times ([a_n] + [b_n]). \end{aligned}$$

## 2.4 Matrizes Reais Intervalares

Uma *matriz intervalar*  $[A]$  de dimensão  $n \times m$  é um subconjunto de  $\mathbb{IR}^{n \times m}$  definido como o produto cartesiano de  $nm$  intervalos fechados. Assim, para  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $j = 1, 2, \dots, m$

$$[A] := \begin{bmatrix} [a_{11}] & [a_{12}] & \dots & [a_{1m}] \\ [a_{21}] & [a_{22}] & \dots & [a_{2m}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [a_{n1}] & [a_{n2}] & \dots & [a_{nm}] \end{bmatrix} := [a_{11}] \times [a_{12}] \times \dots \times [a_{nm}] = [[a_{ij}]]$$

na qual,  $[a_{ij}] = [a_{ij}^-, a_{ij}^+]$  é a projeção de  $[A]$  sobre os  $(i, j)$ -ésimos eixos. Esta definição torna única a representação da matriz vazia. Por exemplo,

$$[A] = \begin{bmatrix} \emptyset & [0, 1] \\ \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}$$

não faz sentido, pois a projeção da matriz representada pelo produto cartesiano  $\emptyset \times [0, 1] \times \emptyset \times \emptyset$  sobre os eixos  $(i, j) = (1, 2)$  é vazia e, portanto, diferente de  $[0, 1]$ . O conjunto de todas as  $n \times m$  matrizes intervalares é denotado por  $\mathbb{IR}^{n \times m}$ .

O *limitante inferior*  $A^-$  e o *limitante superior*  $A^+$  de uma matriz intervalar são matrizes degeneradas que consistem dos limitantes inferiores e superiores, respectivamente, dos seus componentes intervalares. Assim,

$$A^- := \begin{bmatrix} a_{11}^- & a_{12}^- & \dots & a_{1m}^- \\ a_{21}^- & a_{22}^- & \dots & a_{2m}^- \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^- & a_{n2}^- & \dots & a_{nm}^- \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^+ := \begin{bmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^+ & \dots & a_{1m}^+ \\ a_{21}^+ & a_{22}^+ & \dots & a_{2m}^+ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^+ & a_{n2}^+ & \dots & a_{nm}^+ \end{bmatrix}.$$

**Definição 2.4.1** Duas matrizes  $[A] = [A^-, A^+]$  e  $[B] = [B^-, B^+]$ , ambas  $\in \mathbb{IR}^{n \times m}$ , são iguais, ou seja,  $[A] = [B]$ , se e somente se,  $A^- = B^-$  e  $A^+ = B^+$ .  $\square$

**Definição 2.4.2** A largura  $A_w$ , o ponto central  $A_c$ , o raio  $\Delta$  e o valor absoluto de qualquer matriz intervalar limitada e não-vazia  $[A] = [A^-, A^+] \in \mathbb{IR}^{n \times m}$  são definidos, respectivamente, por

$$A_w := A^+ - A^-, \quad A_c := \frac{A^- + A^+}{2}, \quad \Delta := \frac{A^+ - A^-}{2} \quad \text{e} \quad |[A]| := \max\{|A^-|, |A^+|\}.$$

$\square$

Para  $[A]$  e  $[B] \in \mathbb{IR}^{n \times m}$  e  $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $j = 1, 2, \dots, m$  é verdadeiro que  $[A] \subset [B]$  se e somente se  $[a_{ij}] \subset [b_{ij}]$ , assim como  $C \in [B]$  se e somente se  $c_{ij} \in [b_{ij}]$ .

Se  $[A]$  e  $[B]$  são matrizes intervalares de dimensões apropriadas e se  $\diamond$  é um operador binário, então

$$[A] \diamond [B] = \{A \diamond B \text{ para toda } A \in [A] \text{ e } B \in [B]\}.$$

Se  $[A]$  e  $[B] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ ,  $[c] \in \mathbb{IR}^n$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então para  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \alpha[A] &= (\alpha[a_{11}]) \times (\alpha[a_{12}]) \times \dots \times (\alpha[a_{nn}]), \\ [A] + [B] &= ([a_{ij}] + [b_{ij}]), \\ [A][B] &= \left( \sum_{k=1}^n [a_{ik}][b_{kj}] \right), \\ [A][c] &= \left( \sum_{j=1}^n [a_{ij}][c_j] \right). \end{aligned}$$

O produto de duas matrizes intervalares não é associativo ou comutativo com respeito a escalares, ou seja,  $([A][B])[C] \neq [A]([B][C])$  e  $\alpha([A][c]) \neq [A](\alpha[c])$ .

## 2.5 Imagem de Funções Reais Intervalares

Nesta seção, são consideradas funções reais contínuas  $f$  com argumentos intervalares. Uma expressão  $f(x)$  pertencente a  $f$  é um procedimento que determina o valor da função  $f$  para todo argumento  $x$ . Se uma expressão pertencente a  $f$  também é formada por constantes  $a^{(0)}, \dots, a^{(m)}$ , então, isso é especificado por  $f(x; a^{(0)}, \dots, a^{(m)})$ . Por simplicidade, assume-se que cada constante  $a^{(k)}$ , para  $0 \leq k \leq m$ , ocorre uma única vez em cada expressão. Se este não for o caso, pode-se introduzir novas constantes equivalentes às múltiplas ocorrências de maneira a transformá-las para a forma padrão.

**Definição 2.5.1** *O intervalo de todos os valores da função  $f$  é denotado por*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(f, [x]; [a]^{(0)}, \dots, [a]^{(m)}) &:= \{f(x; a^{(0)}, \dots, a^{(m)}) \mid x \in [x], a^{(k)} \in [a]^{(k)}, 0 \leq k \leq m\}, \\ &:= \left[ \begin{array}{l} \min / \max \quad \{f(x; a^{(0)}, \dots, a^{(m)})\} \\ x \in [x] \\ a^{(k)} \in [a]^{(k)} \\ 0 \leq k \leq m \end{array} \right]. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.5.1** Considere a expressão definida por

$$g([x]; [a]) = \frac{[a][x]}{1 - [x]} \quad x \neq 1.$$

na qual  $[a] = [0, 1]$  e  $[x] = [2, 3]$ . Da Definição 2.5.1

$$\mathcal{W}(g, [2, 3]; [0, 1]) = \left\{ \frac{[a][x]}{1 - [x]} \mid 2 \leq x \leq 3, 0 \leq a \leq 1 \right\} = [-2, 0].$$

**Definição 2.5.2** O intervalo obtido de uma função  $f$  é definido por  $f([x]; [a]^{(0)}, \dots, [a]^{(m)})$ .  $\square$

O intervalo obtido de uma função  $f$  depende da escolha da expressão para  $f$ .

**Exemplo 2.5.2** Uma expressão equivalente para a função  $g$  do Exemplo 2.5.1 é definida por

$$h([x]; [a]) = \frac{[a]}{1/[x] - 1} \quad x \neq 1, \quad x \neq 0.$$

Para  $[a] = [0, 1]$ ,  $[x] = [2, 3]$ , são encontrados dois valores intervalares distintos. Assim,

$$g([2, 3]; [0, 1]) = \frac{[0, 1][2, 3]}{1 - [2, 3]} = [-3, 0] \neq h([2, 3]; [0, 1]) = \frac{[0, 1]}{1/[2, 3] - 1} = [-2, 0].$$

As notações descritas nas Definições 2.5.1 e 2.5.2 também podem ser aplicadas para funções de várias variáveis. A expressão  $f(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; a^{(0)}, \dots, a^{(m)})$  tem, então, o intervalo  $\mathcal{W}(f, [x]^{(1)}, \dots, [x]^{(n)}; [a]^{(0)}, \dots, [a]^{(m)})$ , quando ambos  $x^{(k)} \in [x]^{(k)}$ ,  $1 \leq k \leq n$  e  $a^{(j)} \in [a]^{(j)}$ ,  $0 \leq j \leq m$  são considerados independentes. O intervalo obtido de  $f([x]^{(1)}, \dots, [x]^{(n)}; [a]^{(0)}, \dots, [a]^{(m)})$  é definido de forma semelhante.

**Teorema 2.5.1** Considere  $f(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; a^{(0)}, \dots, a^{(m)})$  como a expressão de uma função contínua e assuma que o intervalo obtido de  $f([y]^{(1)}, \dots, [y]^{(n)}; [b]^{(0)}, \dots, [b]^{(m)})$  é definido por intervalos  $[y]^{(1)}, \dots, [y]^{(n)}; [b]^{(0)}, \dots, [b]^{(m)}$ . Desta forma, para todo  $[x]^{(k)} \subseteq [y]^{(k)}$  e  $[a]^{(j)} \subseteq [b]^{(j)}$ ,  $1 \leq k \leq n$  e  $1 \leq j \leq m$ , é verdadeiro que

$$\mathcal{W}(f, [x]^{(1)}, \dots, [x]^{(n)}; [a]^{(0)}, \dots, [a]^{(m)}) \subseteq f([x]^{(1)}, \dots, [x]^{(n)}; [a]^{(0)}, \dots, [a]^{(m)})$$

e

$$f([x]^{(1)}, \dots, [x]^{(n)}; [a]^{(0)}, \dots, [a]^{(m)}) \subseteq f([y]^{(1)}, \dots, [y]^{(n)}; [b]^{(0)}, \dots, [b]^{(m)}).$$

**Prova:** Veja (Alefeld e Herzberger 1983)

□

**Exemplo 2.5.3** Considere a função  $f$  definida pela expressão

$$f([x], [a]) = [a] - \frac{[x]}{1 + [x]} \quad x \neq -1.$$

Escolhendo  $[x] = [-1/2, 1]$  e  $[a] = [2, 3]$ , obtêm-se as seguintes relações

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(f, [-1/2, 1]; [2, 3]) &= [3/2, 4] \subset f([-1/2, 1]; [2, 3]) = [0, 4], \\ f([-1/2, 1]; [2, 3]) &= [0, 4] \subset f([-1/2, 2]; [2, 3]) = [-2, 4]. \end{aligned}$$

## 2.6 Equações Lineares Intervalares

Considere agora a solução de equações lineares intervalares do tipo  $[a][x] = [b]$ , para  $[a]$ ,  $[b]$  e  $[x] \in \mathbb{IR}$ , quando  $[a] \neq [0, 0]$ . Para isso, define-se a função auxiliar

$$\mathcal{X}_{[a]} = \begin{cases} a^-/a^+ & \text{se } |a^-| \leq |a^+|, \\ a^+/a^- & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Teorema 2.6.1** A equação linear intervalar  $[a][x] = [b]$  é satisfeita por  $[x] \in \mathbb{IR}$  se e somente se  $\mathcal{X}_{[a]} \geq \mathcal{X}_{[b]}$ . A solução não é única se e somente se  $\mathcal{X}_{[a]} = \mathcal{X}_{[b]} \leq 0$ .

**Prova:** Veja (Alefeld e Herzberger 1983)

□

**Exemplo 2.6.1** Considere a equação linear intervalar  $[a][x] = [b]$ , na qual  $[a] = [1, 2]$ ,  $[b] = [-1, 3]$  e  $[x] \in \mathbb{IR}$ . Esta equação é unicamente satisfeita por  $[x] = [-1/2, 3/2]$ , dado que  $\mathcal{X}_{[a]} = 1/2 > \mathcal{X}_{[b]} = -1/3$ . Por outro lado, considere o conjunto de soluções das equações  $ax = b$ , para  $a \in [1, 2]$  e  $b \in [-1, 3]$ . Assim, a solução

$$\{x = b/a \mid a \in [1, 2] \text{ e } b \in [-1, 3]\} = [-1, 3]/[1, 2] = [-1, 3] \supset [x].$$

Neste sentido,  $[x]$  é chamado de *solução algébrica* de  $[a][x] = [b]$ . Suponha que  $0 \notin [a]$  seja satisfeito por um  $[x] \in \mathbb{IR}$ , então  $[x] \subseteq [b]/[a]$ . Isto é verdadeiro, pois se existir  $a \in [a]$  e  $b \in [b]$ , na qual  $ax = b$ , de maneira que  $x = b/a \in [b]/[a]$ , então  $x \in [x]$ .

**Exemplo 2.6.2** Considere o sistema de equações lineares intervalares de segunda ordem  $[\mathbf{A}][\mathbf{x}] = [\mathbf{b}]$ ,  $[\mathbf{A}] \in \mathbb{IR}^{2 \times 2}$ ,  $[\mathbf{x}]$  e  $[\mathbf{b}] \in \mathbb{IR}^2$ , definido como

$$\begin{aligned} [a_{11}][x_1] + [a_{12}][x_2] &= [b_1], \\ [a_{21}][x_1] + [a_{22}][x_2] &= [b_2]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Assim, utilizando-se o processo de *Eliminação de Gauss* (Barnett 1990), o sistema (2.2) pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned} [a_{11}][x_1] + [a_{12}][x_2] &= [b_1], \\ ([a_{11}][a_{22}] - [a_{21}][a_{12}])[x_2] &= [a_{11}][b_2] - [a_{21}][b_1]. \end{aligned}$$

Se  $0 \notin [a_{11}][a_{22}] - [a_{21}][a_{12}]$ , então

$$[x_2] = \frac{[a_{11}][b_2] - [a_{21}][b_1]}{[a_{11}][a_{22}] - [a_{21}][a_{12}]}$$

e se  $0 \notin [a_{11}]$ , então

$$[x_1] = \frac{[b_1] - [a_{12}][x_2]}{[a_{11}]}.$$

Um rearranjo em (2.2) pode assegurar que  $0 \notin [a_{11}]$  se a matriz  $[\mathbf{A}]$ , formada pelos coeficientes  $[a_{ij}]$  para  $i, j = 1, 2$ , for não-singular, ou seja,  $0 \notin \det([\mathbf{A}])$ . Assim, a condição  $0 \notin [a_{11}]$  não é essencialmente restritiva.

De forma alternativa, utilizando-se a *Regra de Cramer* (Barnett 1990),

$$\begin{aligned} [x_1] &= \frac{[b_1][a_{22}] - [b_2][a_{12}]}{[a_{11}][a_{22}] - [a_{12}][a_{21}]}, \\ [x_2] &= \frac{[b_2][a_{11}] - [b_1][a_{21}]}{[a_{11}][a_{22}] - [a_{12}][a_{21}]}. \end{aligned}$$

O conjunto solução para este sistema de equações intervalares é descrito por

$$\begin{aligned} [x_1] &= \left\{ \frac{[b_1][a_{22}] - [b_2][a_{12}]}{[a_{11}][a_{22}] - [a_{12}][a_{21}]} \text{ para todo } a_{ij} \in [a_{ij}] \text{ e } b_j \in [b_j] \right\}, \\ [x_2] &= \left\{ \frac{[b_2][a_{11}] - [b_1][a_{21}]}{[a_{11}][a_{22}] - [a_{12}][a_{21}]} \text{ para todo } a_{ij} \in [a_{ij}] \text{ e } b_j \in [b_j], \right\}. \end{aligned}$$

Para o caso em que  $[a_{11}] = [a_{21}] = [1, 1]$ ,  $[a_{12}] = [2, 2]$ ,  $[a_{22}] = [10, 12]$ ,  $[b_1] = [1, 1]$  e  $[b_2] = [0, 0]$ ,

$$\begin{aligned} [x_1] &= \left\{ \frac{[a_{22}]}{[a_{22}] - [2, 2]} \text{ para todo } a_{22} \in [10, 12] \right\}, \\ [x_2] &= \left\{ \frac{-1}{[a_{22}] - [2, 2]} \text{ para todo } a_{22} \in [10, 12] \right\}. \end{aligned}$$

Utilizando álgebra intervalar, obtêm-se  $[x_1] = [1.0000, 1.5000]$  e  $[x_2] = [-0.1250, -0.1000]$ . O resultado obtido através do INTLAB (Rump 1999), um programa de aritmética intervalar desenvolvido como uma toolbox do MATLAB, é dado por  $[x_1] = [1.1941, 1.2503]$  e  $[x_2] = [-0.1252, -0.0970]$ .

A análise de sistemas de equações lineares intervalares pode ser colocada em termos mais gerais.

**Definição 2.6.1** O conjunto-solução para equações lineares intervalares na forma  $[A]\mathbf{x} = [b]$  é definido como

$$\Sigma := \{\mathbf{x} : [A]\mathbf{x} = [b] \text{ para alguma } A \in [A] \text{ e algum } b \in [b]\}.$$

□

A seguinte relação é usada para evitar o uso de valores absolutos.

**Definição 2.6.2** Considere

$$\mathcal{Z} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i = +1 \text{ ou } x_i = -1, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

composto de  $2^n$  vetores, de maneira que para cada  $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ ,

$$\mathbf{T}_{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_n \end{bmatrix} = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

e para cada  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\text{sign}(x)_i = \begin{cases} +1 & \text{se } x_i \geq 0, \\ -1 & \text{se } x_i < 0. \end{cases}$$

Logo,  $\text{sign}(\mathbf{x}) \in \mathcal{Z}$  qualquer que seja  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Como  $\mathbf{z} = \text{sign}(\mathbf{x})$ , então  $\mathbf{T}_{\mathbf{z}}\mathbf{x} = |\mathbf{x}|$ . □

A seguinte caracterização de  $\Sigma$  em termos dos centros e raios de  $[A]$  e  $[b]$  foi introduzida em (Oettli e Prager 1964) e (Oettli 1965).

**Teorema 2.6.2 (Desigualdade de Oettli-Prager)** *Considere a equação intervalar  $[A]x = [b]$ , na qual  $[A] = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$  e  $[b] = [b_c - \delta, b_c + \delta]$ . Então*

$$\Sigma = \{x : |A_c x - b_c| - \Delta|x| \leq \delta\}.$$

**Prova:** Em (Oettli e Prager 1964) e (Oettli 1965) é calculado o vetor residual  $r(x) = A_c x - b_c$  e demonstrado que  $x \in \Sigma$  se e somente se  $\Delta|x| + \delta \geq |r(x)|$ .

A demonstração a seguir é baseada em (Rohn 1989).

*Necessidade:* Se  $x \in \Sigma$ , então  $Ax = b$  para alguma  $A \in [A]$  e algum  $b \in [b]$ , o que leva a  $|A_c x - b_c| = |(A_c - A)x + b - b_c| \leq \Delta|x| + \delta$ , pois  $|A_c x - b_c| = |A_c x - Ax + b - b_c| \Rightarrow 0 = -Ax + b \Rightarrow Ax = b$ .

*Suficiência:* Considere  $[A] = [A_c - \Delta, A_c + \Delta] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  uma matriz intervalar e  $[b] = [b_c - \delta, b_c + \delta] \in \mathbb{IR}^n$  um vetor intervalar. Defina, para quaisquer vetores  $y$  e  $z \in \mathcal{Z}$

$$\begin{aligned} A_{yz} &= A_c - T_y \Delta T_z, \\ b_y &= b_c + T_y \delta. \end{aligned}$$

Assim, para cada  $i$  e  $j = 1, 2, \dots, n$ , defina

$$\begin{aligned} (A_{yz})_{ij} &:= \begin{cases} (A_c - \Delta)_{ij} & \text{se } y_i z_j = 1, \\ (A_c + \Delta)_{ij} & \text{se } y_i z_j = -1, \end{cases} \\ (b_y)_i &:= \begin{cases} (b_c + \delta)_i & \text{se } y_i = 1, \\ (b_c - \delta)_i & \text{se } y_i = -1, \end{cases} \end{aligned}$$

de maneira que  $A_{yz} \in [A]$  e  $b_y \in [b]$ . Considere

$$|A_c x - b_c| \leq \Delta|x| + \delta, \quad (2.3)$$

para algum  $x$  e defina  $y = \text{sign}(A_c x - b_c)$ , então  $y \in \mathcal{Z}$  e

$$|A_c x - b_c| = T_y(A_c x - b_c) = \Delta|x| + \delta.$$

Como  $T_y^{-1} = T_y$ , tem-se que

$$A_c x - b_c = T_y(\Delta|x| + \delta). \quad (2.4)$$

Do mesmo modo, se  $x$  satisfaz a equação (2.4), para algum  $y \in \mathcal{Z}$ , então, tomando o valor absoluto da equação (2.4) em ambos os lados, tem-se que  $x$  soluciona a desigualdade (2.3).

Defina um  $y \in \mathbb{R}^n$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  por

$$y_i = \begin{cases} (A_c x - b_c)_i / (\Delta |x| + \delta)_i & \text{se } (\Delta |x| + \delta)_i > 0 \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

então  $|y| \leq e$  e  $A_c x - b_c = T_y(\Delta |x| + \delta)$ . Definindo  $z = \text{sign}(x)$  e substituindo  $|x| = T_z x$  na desigualdade (2.4), obtém-se

$$A_c x - b_c = T_y(\Delta T_z x + \delta)$$

ou seja,

$$A_c x - b_c = T_y \Delta T_z x + T_y \delta$$

que implica em

$$A_c x - T_y \Delta T_z x = b_c + T_y \delta.$$

Colocando  $x$  em evidência, tem-se que

$$(A_c - T_y \Delta T_z)x = b_c + T_y \delta$$

e portando, é verdadeiro que

$$A_{yz}x = b_y.$$

Desde que  $|T_y \Delta T_z| \leq \Delta$  e  $|T_y \delta| \leq \delta$ , de maneira que  $A_{yz} \in [A]$  e  $b_y \in [b]$ , tem-se que  $x \in \Sigma$ .  $\square$

Como  $\Sigma$  é um conjunto poliedral não-convexo (Rohn 1989), busca-se caracterizar a casca de  $\Sigma$ .

**Definição 2.6.3** (Neumaier 1990) A casca intervalar de  $\Sigma$  é o vetor intervalar com o menor raio contendo  $\Sigma$ , definido como

$$\Sigma_c := \{x : \min \Sigma \leq x \leq \max \Sigma\},$$

na qual  $\min$  e  $\max$  denotam o mínimo e máximo componente-a-componente sobre todos os vetores de  $\Sigma$ .  $\square$

**Exemplo 2.6.3** Defina  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-3}$ ,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad e \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \cdots & \gamma_{1,m} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & \cdots & \gamma_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n,1} & \gamma_{n,2} & \cdots & \gamma_{n,m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

na qual  $\gamma_{i,j} \in [0, 1]$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $j = 1, 2, \dots, m$ , são escolhidos de forma aleatória e considere o sistema de equações lineares intervalares  $[\mathbf{A}]\mathbf{x} = [\mathbf{b}]$ , apresentado em (Bentbib 2002), no qual  $[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}_c - \Delta, \mathbf{A}_c + \Delta] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{n \times m}$  e  $[\mathbf{b}] = [\mathbf{b}_c - \delta, \mathbf{b}_c + \delta] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{n \times 1}$ , com

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{R} + 4\mathbf{E} - 2\mathbf{I}, \quad \Delta = \epsilon_1 \mathbf{E}, \quad \mathbf{b}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{e}_1 \quad e \quad \delta = \epsilon_2 \mathbf{e}_2.$$

A solução

$$[\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} 0.9945 & 1.0055 \\ 0.9931 & 1.0069 \\ 0.9938 & 1.0062 \\ 0.9944 & 1.0056 \\ 0.9936 & 1.0064 \\ 0.9931 & 1.0069 \end{bmatrix} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{m \times 1}$$

foi obtida para  $n = 10$  e  $m = 6$  através do INTLAB, cujo programa está descrito a seguir:

```
n=10;m=6;
epsilon1=1e-3;epsilon2=1e-3;
E=ones(n,m);R=rand(n,m);I=eye(n,m);
e1=ones(m,1);e2=ones(n,1);
A_c=R+4*E-2*I;b_c=A_c*e1;
A_low=A_c-epsilon1*E;A_up=A_c+epsilon1*E;
b_low=b_c-epsilon2*e2;b_up=b_c+epsilon2*e2;
A=infsup(A_low,A_up);b=infsup(b_low,b_up);
x_intlab=verifylss(A,b);infsup(x_intlab)
```

## 2.7 Conclusão

As definições apresentadas sobre conjuntos intervalares, álgebra intervalar e a caracterização e a solução de equações lineares intervalares introduzidas no Capítulo 2 permitem um entendimento dos conceitos e metodologias apresentados nos próximos capítulos e que compõem os principais resultados desta Tese.

# Capítulo 3

## Equação Diofantina Intervalar

### 3.1 Introdução

Este Capítulo 3 apresenta inicialmente a técnica de alocação de pólos e a caracterização da *equação Diofantina*. Em seguida, é apresentada uma análise da *não-singularidade robusta* da *resultante de Sylvester intervalar* associada a dois polinômios intervalares. O método é baseado no *Algoritmo da Bisseção* aplicado à solução de certos problemas de Programação Linear e permite estimar o *raio de não-singularidade robusta* de uma matriz intervalar.

Também é tratado o problema da *coprímo-robustez* de polinômios intervalares a partir dos resultados anteriores sobre não-singularidade robusta.

Finalmente, é apresentado um método computacional para o projeto de controladores por alocação robusta de pólos, na presença de incertezas do tipo intervalar, através da solução da *equação Diofantina intervalar*. O projeto de controladores robustos é obtido na forma de um *controlador intervalar*, ou seja, um controlador com coeficientes intervalares que contém todas as soluções possíveis do problema de alocação dos pólos. Através do *Teorema das Arestas* (Bhattacharyya et al. 1995), caracteriza-se então a região do plano complexo  $s$  atingível pelo controlador intervalar que, deste modo, fornece um desempenho garantido para o sistema em malha fechada. Exemplos numéricos ilustram os principais resultados apresentados.

### 3.2 Alocação de Pólos e a Equação Diofantina

O problema de projeto de controladores para sistemas lineares e invariantes no tempo, de maneira a garantir respostas transiente e de estado estacionário satisfatórias em malha fechada, tem uma solução prática através de *alocação de pólos*. A suposição básica é que estabilidade e várias especificações de desempenho podem ser satisfeitas usando-se a realimentação dinâmica da saída para alocar os pólos de malha fechada do sistema em posições apropriadas do plano complexo  $s$ . Considere o sistema de controle contínuo com realimentação unitária, linear e invariante no tempo, com uma entrada e uma saída (SISO: *Single-Input Single-Output*), representado na Figura 3.1.

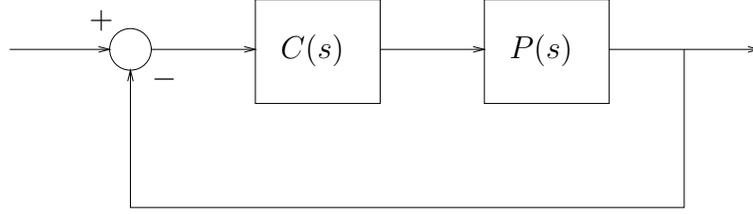


Figura 3.1: Sistema SISO com realimentação unitária.

As funções de transferência de uma dada planta  $P(s)$  de ordem  $n$ , estritamente própria, a ser controlada, e de um controlador série  $C(s)$  de ordem  $r$ , a ser projetado, são representadas por

$$P(s) := \frac{n_P(s)}{d_P(s)} \quad \text{e} \quad C(s) := \frac{n_C(s)}{d_C(s)},$$

nos quais

$$\begin{aligned} n_P(s) &:= a_1 s^n + a_2 s^{n-1} + \dots + a_{n+1}, \\ d_P(s) &:= a_{n+2} s^n + a_{n+3} s^{n-1} + \dots + a_{2n+2}, \quad a_{n+2} \neq 0, \\ n_C(s) &:= x_1 s^r + x_2 s^{r-1} + \dots + x_{r+1}, \\ d_C(s) &:= x_{r+2} s^r + x_{r+3} s^{r-1} + \dots + x_{2r+2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Inicialmente, assume-se que os coeficientes da planta  $(a_1, a_2, \dots, a_{2n+2})$  são precisamente conhecidos. Os parâmetros de projeto do controlador  $(x_1, x_2, \dots, x_{2r+2})$  devem ser selecionados de maneira que as especificações de desempenho, traduzidas em localizações dos pólos do sistema em malha fechada, sejam satisfeitas com um controlador de menor ordem possível para que o sistema resultante, em malha fechada, tenha um conjunto de  $n + r$  pólos desejados. O sistema em malha fechada é representado por

$$F(s) = \frac{n_F(s)}{d_F(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{\frac{n_C(s)}{d_C(s)} \frac{n_P(s)}{d_P(s)}}{1 + \frac{n_C(s)}{d_C(s)} \frac{n_P(s)}{d_P(s)}} = \frac{n_C(s)n_P(s)}{d_P(s)d_C(s) + n_P(s)n_C(s)}. \quad (3.2)$$

O objetivo desta técnica é alocar os pólos de  $F(s)$ , ou de forma equivalente, as raízes de  $d_F(s)$ . Note, pela equação (3.2), que o projeto, além de não ter nenhum efeito sobre os zeros da planta (raízes de  $n_P(s)$ ), introduz novos zeros na função de transferência de malha fechada (raízes de  $n_C(s)$ ). Por outro lado, os pólos de  $P(s)$  e  $C(s)$  são deslocados de  $d_P(s)$  e  $d_C(s)$  para as raízes de  $d_F(s)$ . Também deve-se notar que os pólos complexos conjugados devem ser alocados sempre em pares, para que as funções de transferência possuam coeficientes reais. A caracterização da função de transferência em malha aberta

$C(s)P(s)$  como um sistema tipo 1, tipo 2, ... , tipo N, ou seja, pelo número de integrações indicadas pela função de transferência de malha aberta, garante erro de regime nulo para entradas degrau, rampa ou parábola, respectivamente. Para um tratamento completo sobre alocação de pólos, veja por exemplo (Chen 1999).

O problema de alocação de pólos se resume na solução da *equação Diofantina*

$$d_P(s)d_C(s) + n_P(s)n_C(s) = d_F(s) \quad (3.3)$$

para todos os possíveis  $d_F(s)$ , na qual

$$\begin{aligned} d_F(s) &:= (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_{n+r}), \\ &:= b_1 s^{n+r} + b_2 s^{n+r-1} + \dots + b_{n+r+1}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

No entanto, ao invés de resolver a equação (3.3) diretamente, convém transformá-la num sistema de equações algébricas lineares. Assim, substituindo-se (3.1) e (3.4) em (3.3) e associando os coeficientes com as potências semelhantes em  $s$ , obtém-se um sistema de  $n + r + 1$  equações lineares da forma

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_{n+2} x_{r+2} &= b_1, \\ a_2 x_1 + a_1 x_2 + \dots + a_{n+3} x_{r+2} + a_{n+2} x_{r+3} &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n+1} x_{r+1} + a_{n+2} x_{2r+2} &= b_{n+r+1}. \end{aligned}$$

Por conveniência, define-se  $m := n + r + 1$  e  $q := 2r + 2$ . Desta forma, (3.3) pode ser reescrita como uma equação linear da forma

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (3.5)$$

na qual

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_1 & & & a_{n+2} & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ a_2 & & a_1 & a_{n+3} & & a_{n+2} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ a_{n+1} & & a_2 & a_{2n+2} & & a_{n+3} \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & a_{n+1} & & & a_{2n+2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times q},$$

$$\mathbf{x} := [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_q]^T \in \mathbb{R}^q \quad \text{e} \quad \mathbf{b} := [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]^T \in \mathbb{R}^m.$$

A matriz  $\mathbf{A}$  em (3.5) é a *matriz de Sylvester* associada à planta  $P(s)$ . A primeira coluna de  $\mathbf{A}$  é composta pelos coeficientes de  $n_P(s)$  em disposição descendente das potências de  $s$ . A segunda coluna é formada pela primeira coluna deslocada uma posição para baixo e assim, sucessivamente, para as  $r + 1$  primeiras colunas de  $\mathbf{A}$ . O procedimento para a formação da  $(r + 2)$ -ésima coluna de  $\mathbf{A}$  em diante é idêntico ao descrito anteriormente, porém estas colunas são compostas pelos coeficientes de  $d_P(s)$ .

Dado que qualquer planta, controlador ou polinômio característico é unicamente especificado por  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{x}$  ou  $\mathbf{b}$ , os termos *planta*  $\mathbf{A}$ , *controlador*  $\mathbf{x}$  e *polinômio característico*  $\mathbf{b}$ , respectivamente, são também utilizados.

**Teorema 3.2.1** *Considere uma matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times q}$  e um vetor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ . Existe um vetor solução  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{q \times 1}$  em  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , para cada  $\mathbf{b}$ , se e somente se  $\mathbf{A}$  tem rank  $m$ , ou seja, rank completo de linhas.*

**Prova:** Veja (Chen 1999). □

Pelo Teorema 3.2.1, conclui-se que (3.5) tem uma solução para cada  $d_F(s)$  se e somente se  $\mathbf{A}$  tiver rank completo de linhas. Se  $r < n - 1$ , então  $\mathbf{A}$  não tem rank completo de linhas e não é possível garantir que a equação (3.3) tenha uma solução para qualquer conjunto desejado de pólos de malha fechada  $p_1, p_2, \dots, p_{n+r}$  ou, equivalentemente, para qualquer polinômio característico desejado, especificado por  $b_1, b_2, \dots, b_{n+r+1}$ , não sendo possível fazer alocação arbitrária de pólos. Sem perda de generalidade, se  $r = n - 1$ , então  $\mathbf{A}$  torna-se uma matriz quadrada de ordem  $2n$  e será não-singular se e somente se  $n_P(s)$  e  $d_P(s)$  forem coprimos. Portanto, se  $n_P(s)$  e  $d_P(s)$  forem coprimos,  $\mathbf{A}$  terá rank  $2n$  (rank completo de linhas), satisfazendo a condição do Teorema 3.2.1. Se  $r$  aumentar em 1, o número de linhas aumenta em 1, mas o número de colunas aumenta em 2. Pelo fato de que  $a_{n+2} \neq 0$ , a nova coluna de  $d_P(s)$  será linearmente independente das demais e, portanto, a matriz  $\mathbf{A}$  de ordem  $2n + 2 \times 2n + 2$  terá rank  $2n + 2$  (rank completo de linhas).

Assim, a equação (3.3) terá solução se e somente se  $r \geq n - 1$  e  $n_P(s)$  e  $d_P(s)$  forem coprimos.

### 3.3 Não-Singularidade Robusta da Resultante de Sylvester Intervalar

Nesta seção, analisa-se a *resultante de Sylvester intervalar* associada a quaisquer dois polinômios intervalares (Juzzo, Lordelo e Ferreira 2003).

Considere um polinômio com coeficientes intervalares de grau  $n$ , na forma

$$[c(s)] = [c_1]s^n + [c_2]s^{n-1} + \dots + [c_n]s + [c_{n+1}], \quad (3.6)$$

na qual,  $[c_i] := [c_i^-, c_i^+] \in \mathbb{IR}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n + 1$  e  $0 \notin [c_1]$ . Desta forma, considere

dois polinômios intervalares dados

$$[c(s)] = \sum_{i=0}^n [c_{i+1}]s^{n-i} \quad \text{e} \quad [d(s)] = \sum_{i=0}^n [d_{i+1}]s^{n-i},$$

com  $0 \notin [c_1]$ , mas possivelmente  $[d_1] = [d_2] = \dots = [d_l] = [0, 0]$ , para algum  $l \leq n$ , com  $[d_{l+1}] \neq [0, 0]$ .

A resultante de Sylvester intervalar  $[\mathbf{A}] \in \mathbb{IR}^{2n \times 2n}$ , associada a  $[c(s)]$  e  $[d(s)]$ , é definida como

$$[\mathbf{A}] := \begin{bmatrix} [d_1] & & & [c_1] & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ [d_2] & & [d_1] & [c_2] & & [c_1] & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & & \\ [d_{n+1}] & & [d_2] & [c_{n+1}] & & [c_2] & \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ & & [d_{n+1}] & & & [c_{n+1}] & \end{bmatrix}.$$

É importante destacar que a resultante de Sylvester intervalar contém outras matrizes que não são do tipo Sylvester, assim como uma matriz simétrica intervalar contém matrizes não-simétricas (Blondel e Tsitsiklis 2000).

**Definição 3.3.1** *Uma matriz quadrada intervalar  $[\mathbf{A}] \in \mathbb{IR}^{2n \times 2n}$  é robustamente não-singular (ou regular) se todas as matrizes  $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$  são não-singulares.*  $\square$

A seguir, são apresentadas duas condições suficientes para a verificação da não-singularidade robusta de uma determinada matriz intervalar  $[\mathbf{A}]$ . A primeira, descrita em (Beck 1975), assegura que  $[\mathbf{A}]$  é robustamente não-singular se

$$\rho(|\mathbf{A}_c^{-1}| \Delta) < 1, \quad (3.7)$$

na qual,

$$\rho(\mathbf{A}) := \max\{|\lambda| : \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \text{ para algum } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}.$$

A segunda, descrita em (Rump 1993) e (Rump 1994), assegura a não-singularidade robusta de  $[\mathbf{A}]$  se

$$\frac{\sigma_{max}(\Delta)}{\sigma_{min}(\mathbf{A}_c)} < 1,$$

na qual  $\sigma_{max}(\Delta)$  e  $\sigma_{min}(\mathbf{A}_c)$  são os valores singulares máximo de  $\Delta$  e mínimo de  $\mathbf{A}_c$ , respectivamente.

**Definição 3.3.2** O raio de não-singularidade robusta de uma matriz intervalar  $[A]$  é definido como

$$\epsilon^* := \inf \{ \epsilon \geq 0 : A_c - \epsilon \Delta \leq A \leq A_c + \epsilon \Delta, \text{ para alguma } A \in [A] \text{ não-singular} \}$$

e o seu valor é dado por

$$\epsilon^* = \left\{ \max_{\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{Z}} \{ \rho_0(A_c^{-1} T_y \Delta T_z) \} \right\}^{-1}$$

na qual,

$$\rho_0(A) := \max \{ |\lambda| : A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \text{ para algum } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ e } \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

□

O cálculo de  $\epsilon^*$  é um problema NP-difícil, como demonstrado em (Blondel e Tsitsiklis 2000). A condição (3.7) estabelece um limitante inferior para  $\epsilon^*$ . Uma melhor aproximação para o limitante inferior de  $\epsilon^*$  é obtido através do seguinte Algoritmo da Bisseção. Por conveniência, define-se  $\rho(\epsilon) := \rho(|A_c^{-1}|(\epsilon\Delta))$ , para um  $\epsilon > 0$ .

**Passo 0:** Encontre  $\epsilon_1 > 0$  e  $\epsilon_2 > 0$ , de maneira que  $\rho(\epsilon_1) < 1$  e  $\rho(\epsilon_2) > 1$ , respectivamente;

**Passo 1:** Se  $|\epsilon_2 - \epsilon_1| < \tau$ , na qual,  $\tau > 0$  é uma tolerância suficientemente pequena, então pare: um limitante inferior para  $\epsilon^*$  é  $\epsilon_1$ . Caso contrário, calcule

$$\epsilon := \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2);$$

**Passo 2:** Defina  $\epsilon_1 := \epsilon$  se  $\rho(\epsilon) < 1$  ou  $\epsilon_2 := \epsilon$  se  $\rho(\epsilon) > 1$  e volte para o Passo 1.

**Exemplo 3.3.1** Considere os polinômios intervalares

$$[c(s)] = s^3 + [c_1]s^2 + [c_2]s + [c_3] \quad e \quad [d(s)] = [d_1]s^2 + [d_2]s + [d_3],$$

conforme definido em (Keel e Bhattacharyya 1999a), nos quais  $[c_1] = [-3.1, -2.9]$ ,  $[c_2] = [-5.1, -4.9]$ ,  $[c_3] = [-1.1, -0.9]$ ,  $[d_1] = [1.9, 2.1]$ ,  $[d_2] = [-3.1, -2.9]$ ,  $[d_3] = [1.9, 2.1]$ .

Como  $\rho(|A_c^{-1}|\Delta) = 0.159$ , a resultante de Sylvester intervalar é robustamente não-singular e  $[c(s)]$  e  $[d(s)]$  são robustamente coprimos. O limitante inferior para o raio de coprimo-robustez encontrado através do Algoritmo da Bisseção, baseado na condição (3.7) é  $\epsilon = 6.281$ . A Figura 3.2 ilustra os espectros de  $[c(s, \epsilon)]$  (cinza) e  $[d(s, \epsilon)]$  (preto).

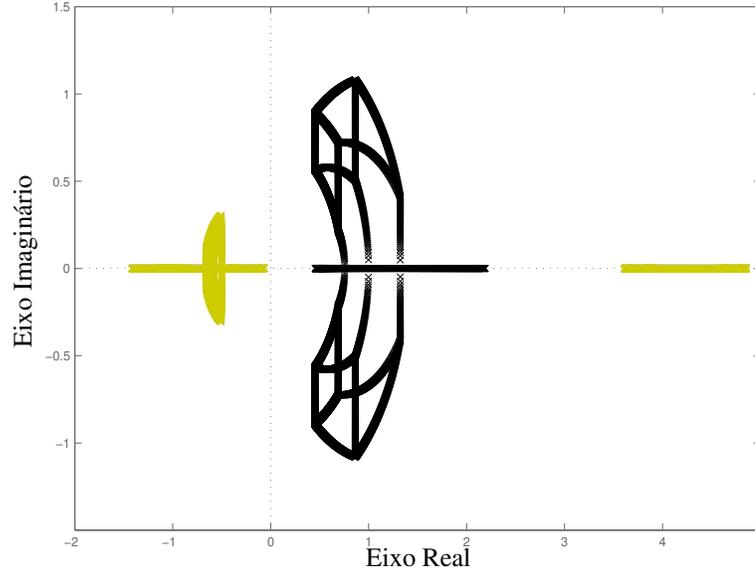


Figura 3.2: Espectros de  $[c(s, \epsilon)]$  (cinza) e  $[d(s, \epsilon)]$  (preto).

A questão da determinação da não-singularidade robusta de matrizes intervalares tem sido amplamente tratada na literatura (Blondel e Tsitsiklis 2000). No entanto, todas as condições necessárias e suficientes para a determinação da não-singularidade robusta apresentam um comportamento exponencial, ou seja, há a necessidade de se solucionar pelo menos  $2^{2n}$  problemas de algum tipo.

A seguir, são apresentados alguns resultados utilizados no Teorema 3.3.2, para a verificação da não-singularidade robusta de matrizes intervalares baseada na análise de problemas de Programação Linear.

**Teorema 3.3.1** *Uma matriz intervalar  $[A] = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$  é singular se e somente se a inequação*

$$|A_c x| \leq \Delta |x|$$

*tiver uma solução não-trivial.*

**Prova:**  $[A]$  é singular se e somente se  $0 \in Ax$ , para toda  $A \in [A]$ , para algum  $x \neq 0$ , e pelo Teorema 2.6.2, é equivalente a

$$A_c x - \Delta |x| \leq 0 \leq A_c x + \Delta |x|$$

e, portanto,  $|A_c x| \leq \Delta |x|$ . □

O Teorema 3.3.2, derivado de (Jansson e Rohn 1999), leva a condições necessárias e suficientes para a verificação da não-singularidade robusta de matrizes intervalares.

**Teorema 3.3.2** *Uma matriz intervalar  $[A] = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$  é robustamente não-singular se e somente se o problema de Programação Linear*

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}}{\text{maximizar}} && \mathbf{z}^T \mathbf{x} \\ & \text{sujeito a} && (\mathbf{A}_c - \Delta \mathbf{T}_z) \mathbf{x} \leq \mathbf{0}, \\ & && (\mathbf{A}_c + \Delta \mathbf{T}_z) \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \\ & && \mathbf{T}_z \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

é limitado para todo  $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ .

**Prova:** Se  $[A]$  é singular, pelo Teorema 3.3.1 existe  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  de maneira que

$$-\Delta |\mathbf{x}| \leq \mathbf{A}_c \mathbf{x} \leq \Delta |\mathbf{x}|. \quad (3.8)$$

Como  $\mathbf{z} = \text{sign}(\mathbf{x})$ , tem-se que  $|\mathbf{x}| = \mathbf{T}_z \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  e, da expressão (3.8),  $(\mathbf{A}_c - \Delta \mathbf{T}_z) \mathbf{x} \leq \mathbf{0}$  e  $(\mathbf{A}_c + \Delta \mathbf{T}_z) \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ , implicando que  $\mathbf{x}$  é factível. Como  $\alpha \mathbf{x}$  também é factível para cada  $\alpha > 0$ , o valor

$$\mathbf{z}^T(\alpha \mathbf{x}) = \alpha \sum_{i=1}^n |x_i|$$

pode ser arbitrariamente grande e o problema é ilimitado. Por outro lado, se o problema é ilimitado para algum  $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ , então existe um  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  que satisfaz  $(\mathbf{A}_c - \Delta \mathbf{T}_z) \mathbf{x} \leq \mathbf{0}$ ,  $(\mathbf{A}_c + \Delta \mathbf{T}_z) \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{T}_z \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ , com  $\mathbf{z}^T \mathbf{x} > 0$ . Como  $\mathbf{T}_z \mathbf{x} = |\mathbf{x}|$  para  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ,  $[A]$  é singular.  $\square$

Assim, se para algum  $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$  a solução do problema de Programação Linear associado é ilimitada,  $[A]$  é singular. O Teorema 3.3.2 implica que  $2^{2n}$  problemas de Programação Linear devem ser testados de maneira a provar que a resultante de Sylvester intervalar  $[A]$  é robustamente não-singular. Não é possível descartar nenhum problema, porque  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  é factível para cada um deles. No entanto, o algoritmo apresentado em (Jansson e Rohn 1999) não é, *a-priori*, exponencial, ou seja, o problema apresentado no Teorema 3.3.2 normalmente precisa ser solucionado apenas para um determinado subconjunto  $\mathcal{Y}$  de  $\mathcal{Z}$ .

Uma aproximação suficientemente precisa para  $\epsilon^*$  é obtida através do seguinte Algoritmo da Bisseção, implementado com base no Teorema 3.3.2. Para isso,  $\Delta$  é substituído por  $\epsilon \Delta$  e é definido  $\text{flag}(\epsilon) := 1$ , se o problema de Programação Linear for limitado para todo  $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$  e  $\text{flag}(\epsilon) := 0$ , caso contrário.

**Passo 0:** Encontre  $\epsilon_1 > 0$  e  $\epsilon_2 > 0$ , de maneira que  $\text{flag}(\epsilon_1) = 1$  e  $\text{flag}(\epsilon_2) = 0$ , respectivamente;

**Passo 1:** Se  $|\epsilon_2 - \epsilon_1| < \tau$ , na qual,  $\tau > 0$  é uma tolerância suficientemente pequena, então pare, pois  $\epsilon^* \approx \epsilon_1$ . Caso contrário, calcule

$$\epsilon := \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2);$$

**Passo 2:** Defina  $\epsilon_1 := \epsilon$  se  $\text{flag}(\epsilon) = 1$  ou  $\epsilon_2 := \epsilon$  se  $\text{flag}(\epsilon) = 0$  e volte para o Passo 1.

Este algoritmo foi implementado através da *toolbox* de otimização do MATLAB, utilizando-se a função `linprog`, que reconhece de maneira eficiente quando um problema de Programação Linear é limitado ou não.

A seguir, é apresentada uma condição necessária e suficiente para a análise do *rank* de uma matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , sendo  $n \geq m$ .

Considere uma matriz ortogonal  $\bar{\mathbf{Q}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , de maneira que,  $\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{A} = \mathbf{R}$ , na qual  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é uma matriz trapezoidal superior na forma

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}} \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

e  $\bar{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é uma matriz triangular superior. Como  $\bar{\mathbf{Q}}$  opera nas linhas de  $\mathbf{A}$ , a independência linear das colunas de  $\mathbf{A}$  é preservada nas colunas de  $\mathbf{R}$ , ou seja, se uma coluna de  $\mathbf{R}$  é linearmente dependente das colunas à sua esquerda, então a coluna correspondente em  $\mathbf{A}$  também é linearmente dependente. Como  $\mathbf{R}$  é uma matriz trapezoidal superior, a sua  $i$ -ésima coluna, para  $i = 1, 2, \dots, m$ , é linearmente independente das suas colunas à esquerda se e somente se o  $i$ -ésimo elemento na diagonal de  $\bar{\mathbf{R}}$  é diferente de zero. Portanto, através de  $\mathbf{R}$ , as colunas linearmente independentes de  $\mathbf{A}$  podem ser obtidas por inspeção. Como  $\bar{\mathbf{Q}}$  é ortogonal,  $\bar{\mathbf{Q}}^{-1} = \bar{\mathbf{Q}}^T = \mathbf{Q}$  e portanto,  $\bar{\mathbf{Q}}^{-1}\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{A} = \bar{\mathbf{Q}}^{-1}\mathbf{R}$ , ou seja,  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$  e obtém-se a chamada fatoração  $\mathbf{QR}$  de  $\mathbf{A}$ .

A seguir, é apresentada uma condição suficiente para a análise da não-singularidade robusta de uma matriz intervalar  $[\mathbf{A}] \in \mathbb{IR}^{n \times m}$ , sendo  $n \geq m$ .

Considere uma matriz ortogonal intervalar  $[\mathbf{Q}] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  e uma matriz trapezoidal superior intervalar  $[\mathbf{R}] \in \mathbb{IR}^{n \times m}$ , de maneira que  $[\mathbf{A}] = [\mathbf{Q}][\mathbf{R}]$ , significando que para cada  $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$  existem matrizes  $\mathbf{Q} \in [\mathbf{Q}]$  e  $\mathbf{R} \in [\mathbf{R}]$ , de maneira que  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ . Assim, o  $\text{rank}([\mathbf{A}]) = m$  se o  $\text{rank}([\mathbf{R}]) = m$ . Desde que  $[\mathbf{R}]$  apresenta a forma trapezoidal superior intervalar

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{R}}] \\ \dots \\ [\mathbf{0}] \end{bmatrix},$$

na qual  $[\bar{\mathbf{R}}] \in \mathbb{IR}^{m \times m}$  é uma matriz triangular superior intervalar, o  $\text{rank}([\mathbf{R}]) = m$  se e somente se  $0 \notin [\bar{r}_{ii}]$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Note que esta condição é apenas suficiente, pois o método da decomposição  $[Q][R]$  intervalar envolve expressões intervalares, de maneira que o elemento nulo pode pertencer a algum intervalo na diagonal de  $[\bar{R}]$  sem que, necessariamente,  $[A]$  tenha *rank* incompleto para alguma  $A \in [A]$ .

O método apresentado a seguir para a fatoração  $[Q][R]$  intervalar é baseado em sucessivas transformações de Householder (Bentbib 2002).

**Definição 3.3.3** Considere o vetor intervalar  $[v] \in \mathbb{IR}^n$  e a sua norma

$$\|[v]\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n [v_k]^2},$$

de maneira que para um intervalo  $[x]$ ,  $[x]^2 = \{x^2 | x \in [x]\}$  e se  $[x] \geq 0$ , ou seja,  $x \geq 0$  para qualquer  $x \in [x]$ , então  $\sqrt{[x]} = \{\sqrt{x} | x \in [x]\}$ . Assim, a raiz quadrada da norma de  $[v]$  é definida por

$$\|[v]\|^2 = \sum_{k=1}^n [v_k]^2.$$

Define-se o vetor intervalar da norma 2 unitária na direção de  $[v]$  como

$$[w_i] = \begin{cases} \frac{[v_i]}{\|[v]\|} & \text{se } 0 \in [v_i], \\ \text{sign}(v_{c_i}) \left[ \frac{\sum_{j \neq i}^n [v_j]^2}{1 + \frac{\sum_{j \neq i}^n [v_j]^2}{[v_i]^2}} \right]^{-\frac{1}{2}} & \text{se } 0 \notin [v_i], \end{cases}$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ , na qual  $v_c \in \mathbb{R}^n$  é o vetor com os valores centrais de  $[v]$ .  $\square$

**Definição 3.3.4** Considere o vetor intervalar  $[v] \in \mathbb{IR}^n$ , de maneira que  $0 \notin [v]$ . Define-se a matriz de Householder associada a  $[v]$  como  $[H] = I_n - 2([w][w]^T) \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ , em que a diagonal da matriz simétrica intervalar  $[w][w]^T$  é calculada como  $[w_i]^2 = [(w)(w)^T]_{i,i}$ , ao invés de  $[w]_i[w]_i^T$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ .  $\square$

Assim,  $[H]$  é simétrica e contém matrizes simétricas e ortogonais reais  $H$ , associadas a quaisquer vetores reais  $v \in [v]$ .

Considere uma matriz intervalar de *rank* completo  $[A] = [A^{(1)}] = [[a_1^{(1)}] [a_2^{(1)}] \dots [a_m^{(1)}]] \in \mathbb{IR}^{n \times m}$ , na qual  $n \geq m$  e defina  $e_1^{(p)} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T \in \mathbb{R}^p$ . Supondo que  $0 \notin [a_1^{(1)}]$  e considerando  $[H] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  a matriz de Householder intervalar associada a

$$[v] = [a_1^{(1)}] + (\text{sign}([a_{11}^{(1)}]) \|[a_1^{(1)}]\|) e_1^{(n)},$$

obtém-se que

$$[\mathbf{A}^{(1)}] \subseteq [\mathbf{H}]((\alpha \mathbf{e}_1^{(n)}) [g_2^{(1)}] \dots [g_m^{(1)}]),$$

na qual  $\alpha = -\text{sign}(a_{c_{11}}^{(1)}) \|[a_1^{(1)}]\|$  e  $[g_i^{(1)}] = [\mathbf{H}][a_i^{(1)}]$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ .

A primeira linha de  $[\mathbf{R}^*]$  é calculada como

$$[R_{11}^*] = -\text{sign}(a_{c_{11}}^{(1)}) \|[a_1^{(1)}]\| \quad \text{e} \quad [\mathbf{R}_{1j}^*] = [w_{1j}^{(1)}], \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, m.$$

Em seguida, define-se  $[\mathbf{H}^{(1)}] = [\mathbf{H}]$  e na próxima iteração, define-se a matriz intervalar

$$[\mathbf{A}^{(2)}] = \begin{bmatrix} [w_{22}^{(1)}] & [w_{23}^{(1)}] & \dots & [w_{2m}^{(1)}] \\ [w_{32}^{(1)}] & [w_{33}^{(1)}] & \dots & [w_{3m}^{(1)}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [w_{n2}^{(1)}] & [w_{n3}^{(1)}] & \dots & [w_{nm}^{(1)}] \end{bmatrix} \in \mathbb{IR}^{(n-1) \times (n-1)},$$

cujos elementos são denotados por  $[a_{ij}^{(2)}]$ , para  $i = 1, 2, \dots, n-1$  e  $j = 1, 2, \dots, m-1$ .

Suponha que  $\mathbf{0} \notin [a_1^{(2)}]$  e considere  $[\mathbf{H}] \in \mathbb{IR}^{(n-1) \times (n-1)}$  a matriz de Householder intervalar associada a

$$[\mathbf{v}] = [a_2^{(1)}] + (\text{sign}([a_{11}^{(2)}]) \|[a_1^{(2)}]\|) \mathbf{e}_1^{(n-1)},$$

obtém-se que

$$[\mathbf{A}^{(2)}] \subseteq [\mathbf{H}]((\alpha \mathbf{e}_1^{(n-1)}) [g_2^{(2)}] \dots [g_m^{(2)}]),$$

na qual  $\alpha = -\text{sign}(a_{c_{11}}^{(2)}) \|[a_1^{(2)}]\|$  e  $[g_i^{(2)}] = [\mathbf{H}][a_i^{(2)}]$ , para  $i = 2, 3, \dots, m-1$ .

A segunda linha de  $[\mathbf{R}^*]$  é calculada como

$$[R_{22}^*] = -\text{sign}(a_{c_{11}}^{(2)}) \|[a_1^{(2)}]\| \quad \text{e} \quad [\mathbf{R}_{2(j+1)}^*] = [w_{1j}^{(2)}], \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, m-1.$$

Em seguida, define-se

$$[\mathbf{H}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix}.$$

O procedimento deve ser repetido até a obtenção da matriz triangular superior intervalar  $[\mathbf{R}^*] \in \mathbb{IR}^{n \times m}$  e a matriz intervalar  $[\mathbf{Q}^*] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  calculada como

$$[\mathbf{Q}^*] = [\mathbf{H}^{(1)}]([\mathbf{H}^{(2)}](\dots([\mathbf{H}^{(m-1)}]))).$$

Em (Zarowski, Ma e Fairman 2000) é explorada uma outra estrutura para a matriz de

Sylvester quadrada intervalar associada a polinômios mônicos

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{S}_1] & \vdots & [\mathbf{S}_3] \\ \dots\dots\dots \\ [\mathbf{S}_2] & \vdots & [\mathbf{S}_4] \end{bmatrix} \in \mathbb{IR}^{2n \times 2n},$$

na qual

$$[\mathbf{S}_1] = \begin{bmatrix} 1 & [c_1] & \dots & [c_{n-2}] & [c_{n-1}] \\ 0 & 1 & \dots & [c_{n-3}] & [c_{n-2}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & [c_1] \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{S}_2] = \begin{bmatrix} [c_n] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ [c_{n-1}] & [c_n] & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [c_2] & [c_3] & \dots & [c_n] & 0 \\ [c_1] & [c_2] & \dots & [c_{n-1}] & [c_n] \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{S}_3] = \begin{bmatrix} 0 & [d_1] & \dots & [d_{n-2}] & [d_{n-1}] \\ 0 & 0 & \dots & [d_{n-3}] & [d_{n-2}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & [d_1] \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{S}_4] = \begin{bmatrix} [d_n] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ [d_{n-1}] & [d_n] & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [d_2] & [d_3] & \dots & [d_n] & 0 \\ [d_1] & [d_2] & \dots & [d_{n-1}] & [d_n] \end{bmatrix},$$

são matrizes triangulares Toeplitz intervalares de dimensão  $n \times n$ .

Aplicando a fórmula de Schur para o determinante da matriz particionada intervalar  $[\mathbf{S}]$  (Postlethwaite 1996), obtém-se

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} [\mathbf{S}_1] & \vdots & [\mathbf{S}_3] \\ \dots\dots\dots \\ [\mathbf{S}_2] & \vdots & [\mathbf{S}_4] \end{bmatrix} \right\} \subseteq \det\{[\mathbf{S}_1]\} \det\{[\mathbf{S}_4] - [\mathbf{S}_3][\mathbf{S}_1]^{-1}[\mathbf{S}_2]\}.$$

Deve-se notar que  $\det\{\mathbf{S}_1\} = [1, 1]$  para quaisquer coeficientes de  $[c(s)]$ . Desta forma, a fatoração  $[\mathbf{Q}][\mathbf{R}]$  intervalar pode ser aplicada apenas em  $\{[\mathbf{S}_4] - [\mathbf{S}_3][\mathbf{S}_1]^{-1}[\mathbf{S}_2]\}$ , que tem dimensão  $n \times n$ , pois se  $0 \notin \det\{[\mathbf{S}_4] - [\mathbf{S}_3][\mathbf{S}_1]^{-1}[\mathbf{S}_2]\}$ , então  $0 \notin \det\{[\mathbf{S}]\}$ .

**Exemplo 3.3.2** Considere a função de transferência da planta de segunda ordem com coeficientes intervalares apresentada em (Soh et al. 1987)

$$[P(s)] = \frac{s + [c_3]}{s^2 - 2.2s + [d_3]},$$

na qual  $[c_3] = [0.8, 1.2]$  e  $[d_3] = [-2.45, -2.35]$ . Aplicando a fatoração  $[\mathbf{Q}][\mathbf{R}]$  intervalar

ao complemento de Schur da matriz  $[S]$  correspondente, obtém-se

$$[\bar{R}] = \begin{bmatrix} [4.1306, 4.2122] & [0.0647, 0.5111] & [-2.3424, -1.3396] \\ [0.0000, 0.0000] & [4.0341, 4.3939] & [2.2275, 3.3957] \\ [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] & [0.0440, 1.0459] \end{bmatrix}.$$

Como  $0 \notin [\bar{r}]_{i,i}$ , para  $i = 1, 2, 3$ , então  $[S]$  é robustamente não-singular e, conseqüentemente, a planta intervalar  $[P(s)]$  é robustamente coprima para os coeficientes incertos  $[c_3]$  e  $[d_3]$ .

### 3.4 Coprimo-Robustez de Polinômios Intervalares

Considere polinômios com coeficientes intervalares, como descritos em (3.6).

**Definição 3.4.1** O espaço de raízes ou espectro de  $[c(s)]$ , denotado por  $\mathcal{S}([c(s)])$ , é definido como o conjunto de todas as raízes de  $[c(s)] = 0$ , quando os coeficientes de  $[c(s)]$  assumem valores em  $[c] := [c^-, c^+]$ .  $\square$

**Definição 3.4.2** Considere dois polinômios intervalares quaisquer

$$[c(s)] = \sum_{i=0}^n [c_{i+1}]s^{n-i} \quad e \quad [d(s)] = \sum_{i=0}^n [d_{i+1}]s^{n-i},$$

nos quais,  $[c_i] := [c_i^-, c_i^+]$  e  $[d_i] := [d_i^-, d_i^+] \in \mathbb{IR}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n+1$ . Então,  $[c(s)]$  e  $[d(s)]$  são robustamente coprimos se  $\mathcal{S}([c(s)]) \cap \mathcal{S}([d(s)]) = \emptyset$ .  $\square$

**Teorema 3.4.1** (Teorema das Arestas) O espaço de raízes  $\mathcal{S}([c(s)])$  de um polinômio intervalar  $[c(s)]$  é limitado pelas raízes de suas arestas  $[c^-, c^+]$ .

**Prova:** Veja (Bhattacharyya et al. 1995).  $\square$

Assumindo que  $0 \notin [c_1]$ , o Teorema 3.4.1 estabelece que  $\mathcal{S}([c(s)])$  é limitado pelo espectro das arestas expostas de um politopo de polinômios  $[c(s)]$  (Bhattacharyya et al. 1995).

Um procedimento empírico para a verificação da *coprimo-robustez* de polinômios intervalares, baseado em tentativa-e-erro, é descrito em (Bhattacharyya et al. 1995). O procedimento utiliza o Teorema das Arestas (Bartlett et al. 1988) para o cálculo dos espectros dos polinômios intervalares e, através de uma análise visual, verifica-se se os espectros dos polinômios se interceptam.

A seguir, é apresentada uma condição suficiente para a coprimo-robustez baseada nos resultados de Análise Intervalar.

**Proposição 3.4.1** *Dois polinômios intervalares  $[c(s)]$  e  $[d(s)]$  são robustamente coprimos se a resultante de Sylvester intervalar  $[A]$  associada é robustamente não-singular.*

**Prova:** Suponha que  $[A]$  seja robustamente não-singular. Então todas as resultantes de Sylvester em  $[A^-, A^+]$  são não-singulares, implicando que  $[c(s)]$  e  $[d(s)]$  são polinômios robustamente coprimos.  $\square$

Em contraste com o caso não-intervalar (Chen 1999), o inverso não é necessariamente verdadeiro, ou seja, a coprimo-robustez de  $[c(s)]$  e  $[d(s)]$  não implica na não-singularidade robusta da resultante de Sylvester intervalar  $[A]$ . Isto se deve ao fato de que  $[A]$  contém também inúmeras outras matrizes que não são do tipo Sylvester, o que ocorre devido ao problema da *dependência* em Análise Intervalar, ou seja, cada ocorrência de um coeficiente intervalar em  $[A]$  é tratada como se fosse um coeficiente diferente.

**Definição 3.4.3** *Considere a seguinte representação alternativa para polinômios intervalares*

$$[c(s)] = \sum_{i=0}^n [c_{i+1}(\epsilon)] s^{n-i},$$

na qual,  $[c_i(\epsilon)] := [c_i^0 - \epsilon\delta, c_i^0 + \epsilon\delta]$ , sendo  $\epsilon \geq 0$  e

$$c_i^0 = \frac{1}{2}(c_i^+ + c_i^-) \quad e \quad \delta_i = \frac{1}{2}(c_i^+ - c_i^-).$$

A quantidade  $c_i^0$  representa o valor nominal do coeficiente intervalar, enquanto que  $\epsilon\delta_i$  representa o seu raio variável. Considere também o raio de coprimo-robustez de dois polinômios intervalares, definido como

$$\epsilon_0^* := \inf\{\epsilon \geq 0 : \mathcal{S}([c(s, \epsilon)]) \cap \mathcal{S}([d(s, \epsilon)]) \neq \emptyset\}.$$

$\square$

A Proposição 3.4.1 garante que  $\epsilon_0^* \geq \epsilon^*$ , ou seja, o raio de coprimo-robustez de dois polinômios intervalares é limitado inferiormente pelo raio de não-singularidade robusta da resultante de Sylvester intervalar associada.

**Exemplo 3.4.1** *Considere os polinômios intervalares apresentados no Exemplo 3.3.1. O raio de não-singularidade robusta obtido através do Algoritmo da Bisseção, implementado com base no Teorema 3.3.2, é  $\epsilon^* = 8.875$ , significando que  $[c(s, \epsilon^*)]$  e  $[d(s, \epsilon^*)]$  permanecem robustamente coprimos para  $\epsilon < 8.875$ . Neste exemplo em particular, o raio de não-singularidade robusta leva a uma boa estimativa para o raio de coprimo-robustez, como ilustrado na Figura 3.3. Deve-se notar que os espectros de  $[c(s, \epsilon^*)]$  (cinza) e  $[d(s, \epsilon^*)]$  (preto), tendem à interseção na região indicada pela seta na Figura 3.3.*

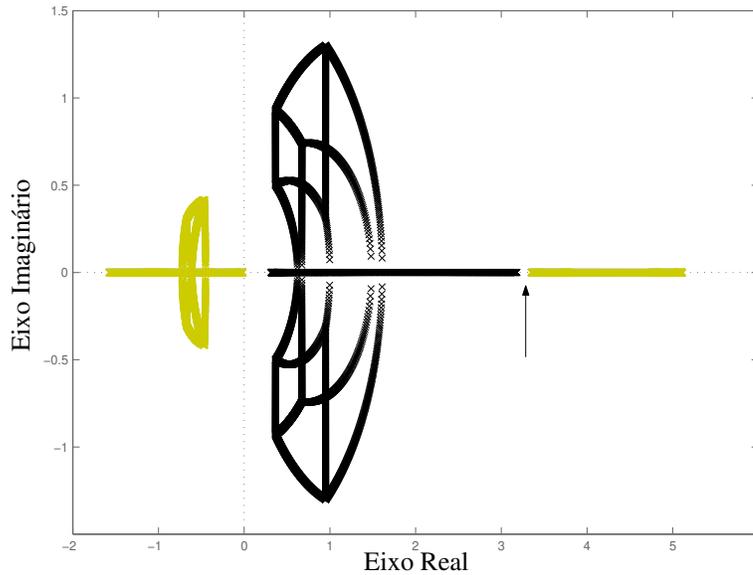


Figura 3.3: Espectros de  $[c(s, \epsilon^*)]$  (cinza) e  $[d(s, \epsilon^*)]$  (preto).

Experiências adicionais mostram que, assim como ocorrem em outras classes de matrizes intervalares (Jansson e Rohn 1999), a condição suficiente (3.7) produz uma boa estimativa para o raio de não-singularidade robusta da resultante de Sylvester intervalar. Entretanto, em alguns casos, o raio de não-singularidade robusta da resultante de Sylvester intervalar pode ser uma estimativa conservadora para o raio de coprimo-robustez de polinômios intervalares.

### 3.5 Solução da Equação Diofantina Intervalar

Considere o sistema de controle com realimentação unitária linear e invariante no tempo, com uma entrada e uma saída (SISO), representado na Figura 3.4 (Lordelo, Juzzo e Ferreira 2004a), (Lordelo, Juzzo e Ferreira 2004b), (Lordelo e Ferreira 2004).

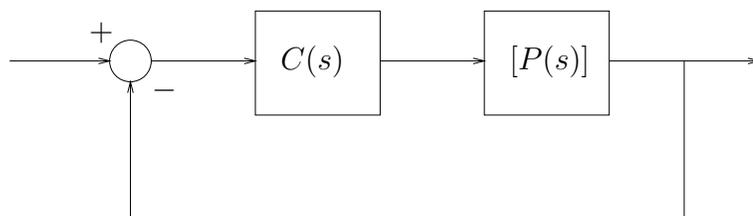


Figura 3.4: Sistema SISO intervalar com realimentação unitária.

As funções de transferência de uma determinada planta intervalar  $[P(s)]$ , de ordem  $n$ , estritamente própria, a ser controlada, e de um controlador série  $C(s)$ , de ordem  $r$ , a ser projetado, são representadas como

$$[P(s)] := \frac{[n_P(s)]}{[d_P(s)]} \quad \text{e} \quad C(s) := \frac{n_C(s)}{d_C(s)}, \quad (3.9)$$

nas quais,  $[n_P(s)]$  e  $[d_P(s)]$  são polinômios intervalares dados, de maneira que

$$\begin{aligned} [n_P(s)] &:= [a_1]s^n + [a_2]s^{n-1} + \dots + [a_{n+1}], \\ [d_P(s)] &:= [a_{n+2}]s^n + [a_{n+3}]s^{n-1} + \dots + [a_{2n+2}], \quad 0 \notin [a_{n+2}]. \end{aligned}$$

Os polinômios  $n_C(s)$  e  $d_C(s)$  estão na forma

$$\begin{aligned} n_C(s) &:= x_1s^r + x_2s^{r-1} + \dots + x_{r+1}, \\ d_C(s) &:= x_{r+2}s^r + x_{r+3}s^{r-1} + \dots + x_{2r+2} \end{aligned}$$

e os parâmetros de projeto do controlador  $(x_1, x_2, \dots, x_{2r+2})$  devem ser selecionados de maneira que as especificações de desempenho, traduzidas em localizações dos pólos do sistema em malha fechada, sejam satisfeitas com um controlador de menor ordem possível para que o sistema resultante, em malha fechada, tenha um conjunto de  $n + r$  pólos desejados.

Os coeficientes incertos da planta intervalar  $[P(s)]$  são descritos por intervalos fechados  $[a_i] := [a_i^-, a_i^+]$ , para  $i = 1, 2, \dots, 2n + 2$  e define-se  $[\mathbf{a}] := [\mathbf{a}^-, \mathbf{a}^+]$ . Note que a descrição de incerteza adotada não assume simetria com respeito aos *coeficientes nominais* da planta  $[P(s)]$ . Um coeficiente  $[a_i]$  é chamado de *propriamente incerto* se  $a_i^- < a_i^+$ , para  $i = 1, 2, \dots, 2n + 2$ .

A equação Diofantina intervalar associada ao sistema realimentado, ilustrado na Figura 3.4, é definida como

$$[d_P(s)]d_C(s) + [n_P(s)]n_C(s) = [b(s)],$$

na qual

$$[b(s)] := [b_1]s^{n+r} + [b_2]s^{n+r-1} + \dots + [b_{n+r+1}]$$

é, em geral, um polinômio intervalar que descreve quantidades incertas com respeito ao polinômio característico do sistema em malha fechada. Deve-se notar que  $[b(s)]$  é descrito unicamente pelo vetor intervalar  $[\mathbf{b}] := [\mathbf{b}^-, \mathbf{b}^+] = [\mathbf{b}_c - \boldsymbol{\delta}, \mathbf{b}_c + \boldsymbol{\delta}]$ .

Percebe-se claramente que  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  pode ser reescrita como uma equação linear intervalar na forma

$$[\mathbf{A}]\mathbf{x} = [\mathbf{b}] \quad (3.10)$$

e, desta forma, incertezas de natureza intervalar associadas aos polinômios intervalares  $[n_P(s)]$  e  $[d_P(s)]$  levam a uma *matriz de Sylvester intervalar*  $[\mathbf{A}] := [\mathbf{A}^-, \mathbf{A}^+] \in \mathbb{IR}^{m \times q}$ , na qual  $m := n + r + 1$  e  $q := 2r + 2$ , cujos limitantes inferior  $\mathbf{A}^-$  e superior  $\mathbf{A}^+$  são obtidos quando os coeficientes de  $[\mathbf{A}]$  são substituídos por seus valores inferiores e superiores, respectivamente. Assuma também que a região desejada para os pólos de malha fechada é delimitada por  $\mathcal{S}([b(s)])$ , o *espaço de raízes* do vetor intervalar  $[\mathbf{b}]$ , que especifica o polinômio característico intervalar. Assim,

$$[\mathbf{A}] := \begin{bmatrix} [a_1] & & & [a_{n+2}] & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ [a_2] & & [a_1] & [a_{n+3}] & & [a_{n+2}] & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & & \\ [a_{n+1}] & & [a_2] & [a_{2n+2}] & & [a_{n+3}] & \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ & & [a_{n+1}] & & & [a_{2n+2}] & \end{bmatrix} \in \mathbb{IR}^{m \times q},$$

$$\mathbf{x} := [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_q]^T \in \mathbb{R}^q \quad \text{e} \quad [\mathbf{b}] := [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_m]^T \in \mathbb{IR}^m.$$

O conjunto-solução de  $[\mathbf{A}]\mathbf{x} = [\mathbf{b}]$ , descrito na Definição 2.6.1, descreve todos os controladores para o qual existe uma planta  $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$  e um polinômio característico  $\mathbf{b} \in [\mathbf{b}]$  de maneira que  $[\mathbf{A}]\mathbf{x} = [\mathbf{b}]$ . A representação de  $\Sigma$  em termos dos valores do centro e do raio é descrita no Teorema 2.6.2.

Como o conjunto-solução de uma equação linear intervalar é geralmente um conjunto poliedral não-convexo (Rohn 1989), é importante encontrar um *fecho convexo intervalar* de  $\Sigma$ . Restringindo a análise aos sistemas de equações lineares quadradas intervalares, em que  $r = n - 1$ , e supondo que  $[\mathbf{A}]$  é robustamente não-singular, segue que  $\Sigma$  é limitado. A *casca* de  $\Sigma$ , denotada por  $\Sigma_c$ , apresentada na Definição 2.6.3 é o vetor intervalar com o menor raio contendo  $\Sigma$ .

Em vista disso, é possível pensar no seguinte método *a-posteriori* para o projeto de controladores baseado em alocação de pólos. Dados  $[\mathbf{A}]$  e  $[\mathbf{b}]$ , calculamos  $\Sigma_c$ , que caracteriza um controlador intervalar

$$[C(s)] = \frac{[n_C(s)]}{[d_C(s)]}$$

e as arestas expostas de

$$[d_P(s)][d_C(s)] + [n_P(s)][n_C(s)] = [d_F(s)], \quad (3.11)$$

que por sua vez limita as localizações de todos os possíveis conjuntos de  $n + r$  pólos de malha fechada. Se  $\mathcal{S}([d_F(s)])$  está contido numa região onde as especificações de desempenho em malha fechada ainda são satisfeitas, então qualquer controlador em  $[\mathbf{x}]$  pode ser selecionado.

**Exemplo 3.5.1** (Jaulin et al. 2001) Considere a planta de terceira ordem com coeficientes incertos

$$[P(s)] = \frac{p_1 p_3^2}{(p_2 s + 1)(s^2 + p_3 s + p_3^2)}, \text{ na qual } p_i \in [0.99, 1.01] \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Através de um controlador de segunda ordem, deseja-se alocar o polinômio característico de malha fechada ( $\delta = 0$ )

$$b_c(s) = s^5 + 10s^4 + 42s^3 + 96s^2 + 112s + 64,$$

que corresponde aos pólos em  $-4$ ,  $-2 \pm j2$  e  $-1 \pm j$ . Os polinômios  $[n_P(s)]$  e  $[d_P(s)]$  são obtidos através de álgebra intervalar (Alefeld e Herzberger 1983). A matriz de Sylvester intervalar correspondente é não-singular para qualquer  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  em  $[0.99, 1.01]$ , pois  $\rho(|\mathbf{A}_c^{-1}| \Delta) = 0.0299$ , significando que  $\Sigma$  é limitado. Utilizando o INTLAB, encontramos

$$[\mathbf{x}] = [\mathbf{x}^-, \mathbf{x}^+] = \begin{bmatrix} 28.01, & 33.96 \\ 51.79, & 60.17 \\ 37.54, & 42.43 \\ 1.000, & 1.000 \\ 7.878, & 8.122 \\ 23.33, & 24.67 \end{bmatrix}$$

e portanto,

$$[C(s)] = \frac{[28.01, 33.96]s^2 + [51.79, 60.17]s + [37.54, 42.43]}{s^2 + [7.878, 8.122]s + [23.33, 24.67]}.$$

A solução verdadeira para o problema de alocação de pólos está contida em  $[\mathbf{x}]$ . A Figura 3.5 ilustra o espectro de (3.11) quando o controlador intervalar  $[C(s)]$  é utilizado. Os pólos na região delimitada pelas arestas expostas levam a um desempenho garantido para o sistema em malha fechada. O coeficiente de amortecimento e a frequência natural dos pólos em malha fechada são limitados inferiormente por  $\xi = 0.401$  e  $\omega_n = 0.841$  rad/s, respectivamente.

Um aspecto importante no projeto de controladores por alocação de pólos é evitar que pequenas variações nos coeficientes do controlador projetado, devido a problemas de implementação, por exemplo, deteriore o desempenho do sistema em malha fechada de forma significativa (Keel e Bhattacharyya 1997a). Aqui, o problema da fragilidade é solucionado através da seleção do controlador central  $\mathbf{x}_c = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^+ + \mathbf{x}^-)$ , cujos coeficientes admitem a maior variação entre todos os controladores que levam a um desempenho garantido para o sistema em malha fechada. Assim,

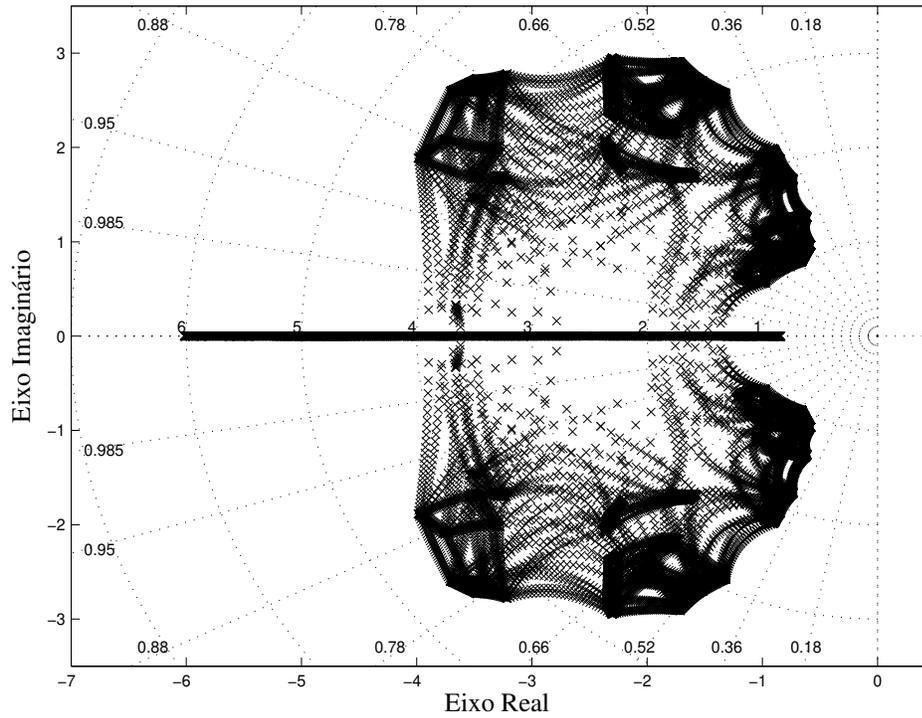


Figura 3.5: Espectro de  $[d_P(s)][d_C(s)] + [n_P(s)][n_C(s)]$ .

$$\mathbf{x}_c = \begin{bmatrix} 30.99 \\ 55.98 \\ 39.99 \\ 1.000 \\ 8.000 \\ 24.00 \end{bmatrix}$$

e portanto,

$$C_{cen}(s) = \frac{30.99s^2 + 55.98s + 39.99}{s^2 + 8.000s + 24.00}.$$

A Figura 3.6 ilustra o espectro de  $[d_P(s)]d_{C_{cen}}(s) + [n_P(s)]n_{C_{cen}}(s)$  quando o controlador central  $C_{cen}(s)$  é utilizado. O coeficiente de amortecimento e a frequência natural dos pólos em malha fechada são limitados inferiormente por  $\xi = 0.604$  e  $\omega_n = 1.23$  rad/s, respectivamente.

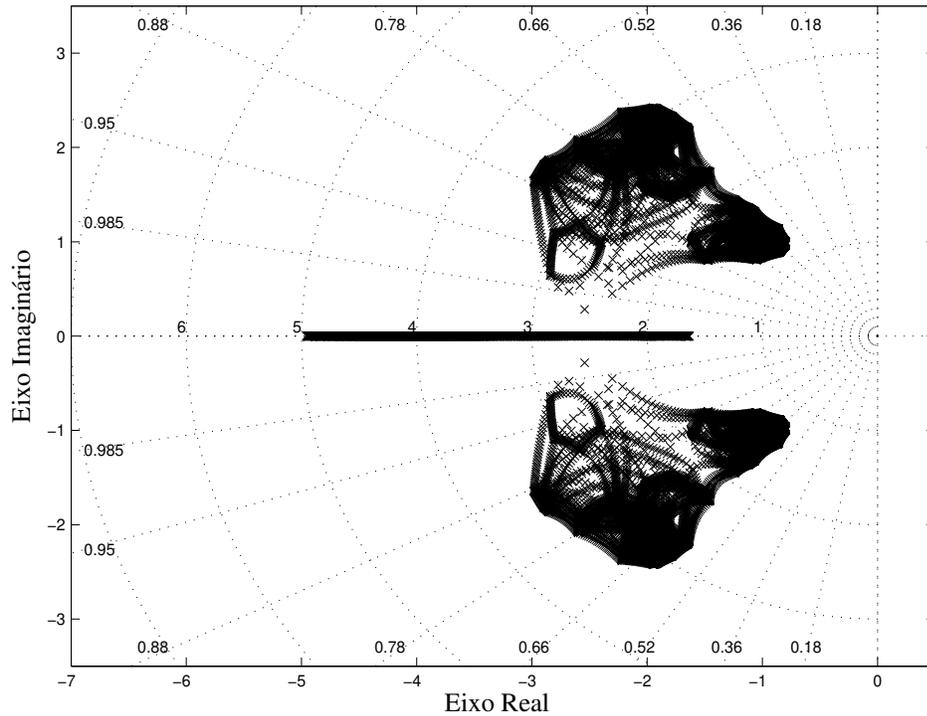


Figura 3.6: Espectro de  $[d_P(s)]d_{C_{cen}}(s) + [n_P(s)]n_{C_{cen}}(s)$ .

### 3.6 Conclusão

Neste Capítulo 3 foram investigadas algumas propriedades interessantes relacionadas ao conceito de equação Diofantina intervalar através de novos métodos para a análise da não-singularidade robusta da matriz de Sylvester intervalar e da determinação do raio de não-singularidade robusta de uma matriz intervalar. Estes resultados se mostraram bem adequados ao problema da análise da coprím-robustez de polinômios intervalares.

A Análise Intervalar leva a soluções confiáveis em problemas numéricos sujeitos a informações incertas, erros de arredondamento ou aproximações. O assunto é abordado através da utilização dos resultados de Análise Intervalar no projeto de *controladores realizáveis* para plantas lineares intervalares e invariantes no tempo. O objetivo é encontrar soluções confiáveis para o problema de alocação de pólos, quando os coeficientes da planta são intervalos de pequenos raios. No entanto, o método proposto se aplica mesmo quando os coeficientes da planta são quantidades precisamente conhecidas e há o interesse nos efeitos do erro de arredondamento na solução do problema de alocação de pólos.

# Capítulo 4

## Projeto de Controladores Robustos

### 4.1 Introdução

Este Capítulo 4 é dedicado à caracterização, análise e projeto dos controladores robustos como *soluções internas* de equações Diofantinas intervalares. Caracterizações simples e computacionalmente eficientes do conjunto de todos os controladores por alocação robusta de pólos são obtidas e algumas das suas propriedades geométricas discutidas.

É apresentada uma abordagem computacional, baseada em otimização, para o projeto de controladores de ordem fixa. O método envolve técnicas clássicas de projeto por alocação de pólos para plantas lineares e invariantes no tempo, com ou sem incertezas do tipo intervalar, dentro de uma estrutura de *Programação Alvo*. O uso de Programação Alvo com coeficientes intervalares (Inuiguchi e Kume 1991) permite uma solução substancialmente mais simples para o problema de alocação robusta, do que as apresentadas em (Soh et al. 1987) e (Keel e Bhattacharyya 1999a). E como em (Keel e Bhattacharyya 1999a), todos os problemas de projeto de controladores podem ser reduzidos a problemas de Programação Linear. O objetivo do projeto é a minimização do desvio total do desempenho desejado para o sistema em malha fechada, especificado por um espectro de polinômios característicos.

Finalmente, após caracterizar explicitamente um subconjunto convexo de controladores robustos, o problema de projeto de *controladores não-frágeis* é formulado como um *problema de centralização*, que é então resolvido por um algoritmo de *Otimização Global*. Exemplos numéricos ilustram os principais resultados apresentados.

### 4.2 Alocação de Pólos via Programação Alvo

Nesta seção, a técnica de alocação de pólos é analisada no contexto da *Programação Alvo* (Lordelo e Ferreira 2002c), (Lordelo e Ferreira 2002d). A Programação Alvo é uma metodologia tradicional de projeto em diferentes áreas da Engenharia (Ignizio 1982). O objetivo é obter um controlador de menor ordem possível que aloque um polinômio característico alvo ou aloque robustamente polinômios característicos em uma família politópica de

polinômios-alvos.

Uma vez que os alvos podem ou não ser atingidos por um controlador robusto de ordem fixa, uma informação relevante para o projetista seria que alvo é atingível por um controlador de uma determinada ordem. Ajustes são um aspecto importante no processo de decisão baseado no conceito de alvo. Assim, um polinômio característico qualquer  $\mathbf{b}^0$  é visto como um alvo, que pode ou não ser atingido por um controlador de uma dada ordem  $r$ .

**Definição 4.2.1** Considere  $[\mathbf{A}] \in \mathbb{R}^{m \times q}$  a matriz de Sylvester associada a uma dada planta  $P(s)$ . Os vetores

$$\boldsymbol{\eta} := [\eta_1 \ \eta_2 \ \cdots \ \eta_m]^T \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\rho} := [\rho_1 \ \rho_2 \ \cdots \ \rho_m]^T$$

representam variáveis de desvio em relação ao polinômio característico alvo

$$\mathbf{b}^0 := [b_1^0 \ b_2^0 \ \cdots \ b_m^0]^T,$$

no sentido de que  $\mathbf{Ax} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\rho} = \mathbf{b}^0$ , com  $\eta_i \geq 0$ ,  $\rho_i \geq 0$  e  $\eta_i \rho_i = 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ .  $\square$

A técnica de projeto por alocação de pólos é então reformulada através do seguinte problema de Programação Alvo clássico (Yu 1985).

**Problema 4.2.1**

$$\text{minimizar} \quad \left[ \sum_{i=1}^m \alpha_i (\eta_i + \rho_i)^p \right]^{1/p}$$

$$\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}$$

$$\text{sujeito a} \quad \begin{aligned} \mathbf{Ax} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\rho} &= \mathbf{b}^0, \\ \boldsymbol{\eta} &\geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\rho} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

no qual  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  são pesos associados aos desvios e  $p \geq 1$ , usualmente  $p = 1$ ,  $p = 2$  ou  $p = \infty$ .  $\square$

O Problema 4.2.1 é sempre factível e é reduzido a um programa linear se  $p = 1$  ou  $p = \infty$ , e a um programa quadrático se  $p = 2$ . Como em qualquer formulação de Programação Alvo, o objetivo é minimizar o desvio total de um alvo pré-estabelecido  $\mathbf{b}^0$ , que por sua vez deve refletir o desempenho desejado para o sistema em malha fechada.

**Lema 4.2.1** Considere  $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\rho}^*)$  qualquer solução ótima do Problema 4.2.1. Então  $n_i^* \rho_i^* = 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ .  $\square$

A seguir, é estabelecida uma condição necessária e suficiente para a existência de um controlador  $\mathbf{x}$  de ordem  $r$  que aloque o polinômio característico em  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^0$ , com base no Lema 4.2.1.

**Teorema 4.2.1** *Considere  $v_p^*(\mathbf{b}^0)$  o valor ótimo do Problema 4.2.1 e  $\mathbf{x}^*$  o controlador correspondente. Então  $\mathbf{x}^*$  aloca o polinômio característico do sistema de malha fechada em  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^0$  se e somente se  $v_p^*(\mathbf{b}^0) = 0$ .*

**Prova:** (Yu 1985) Considere  $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\rho}^*)$  uma solução ótima do Problema 4.2.1 e defina  $\mathbf{b}^* := \mathbf{A}\mathbf{x}^*$ . Se  $v_p^*(\mathbf{b}^0) = 0$ , então  $\boldsymbol{\eta}^* = \boldsymbol{\rho}^* = \mathbf{0}$  e obtém-se  $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}^0$ . Se  $v_p^*(\mathbf{b}^0) > 0$ , ao menos uma variável de desvio é positiva e pelo Lema 4.2.1, o controlador  $\mathbf{x}^*$  aloca  $b_i^*$  abaixo ou (ou exclusivo) acima de  $b_i^0$ , dependendo de qual variável de desvio é positiva.  $\square$

O Teorema 4.2.1 pode ser interpretado em termos da análise clássica de alocação de pólos. Assim, considere

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}\}$$

o espaço formado por todos os possíveis polinômios característicos atingíveis por um controlador de ordem  $r$ . De acordo com o Teorema 4.2.1,  $v_p^*(\mathbf{b}^0) = 0$  se  $\mathbf{b}^0 \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ , o que sempre acontece quando  $n_P(s)$  e  $d_P(s)$  são coprimos e  $r \geq n - 1$ . Se  $v_p^*(\mathbf{b}^0) > 0$ , então  $\mathbf{b}^0 \notin \mathcal{R}(\mathbf{A})$ . Em resumo, o controlador  $\mathbf{x}^*$  aloca o polinômio característico em  $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}^0 + \boldsymbol{\eta}^* - \boldsymbol{\rho}^*$ , e  $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}^0$  se  $\mathbf{b}^0 \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ .

**Exemplo 4.2.1** *Considere a função de transferência da planta de segunda ordem apresentada em (Soh et al. 1987)*

$$P(s) = \frac{s + 1}{s^2 - 2.2s - 2.4}.$$

*Deseja-se alocar os pólos de malha fechada em  $-1 \pm j0.7$  e  $-10$ . O polinômio característico alvo correspondente é*

$$\mathbf{b}^0 = [ 1.000 \quad 12.00 \quad 21.49 \quad 14.90 ]^T.$$

*Dado que a solução da equação Diofantina é única quando  $r = n - 1$ , o valor ótimo do Problema 4.2.1 é  $v_p^*(\mathbf{b}^0) = 0$  para todo  $p \geq 1$  e  $\alpha > 0$ . O alvo  $\mathbf{b}^0$  é atingido e o controlador de primeira ordem correspondente é*

$$C(s) = \frac{7.688s + 30.53}{s + 6.513},$$

*que é o mesmo apresentado em (Soh et al. 1987). É interessante investigar se os pólos dominantes de malha fechada  $-1.0 \pm j0.7$ , ou de forma equivalente*

$$\mathbf{b}^0 = [ 1.00 \quad 2.00 \quad 1.49 ]^T,$$

podem ser alocados usando-se um controlador proporcional, ou seja,  $r = 0$ .

Uma análise simples do lugar das raízes mostra que nenhum ganho proporcional é capaz de realizar esta tarefa, conforme ilustra na Figura 4.1.

Os dados numéricos relacionados à solução do Problema 4.2.1 para  $p = 1$ ,  $p = 2$  e  $p = \infty$  estão resumidos na Tabela 4.2.1.

**Tabela 4.2.1** Soluções da Programação Alvo.

$p$	$v_p$	$\mathbf{b}^*$	Ganho	$\xi$	$\omega_n$ (rad/s)
1	0.310	(1.000, 1.850, 1.650)	4.05	0.72	1.22
2	0.217	(1.030, 1.848, 1.642)	4.00	0.71	1.28
$\infty$	0.141	(1.141, 1.859, 1.631)	3.83	0.68	1.20

O fator de amortecimento e a frequência natural dos pólos em malha fechada desejados  $-1.0 \pm j0.7$  são  $\xi = 0.82$  e  $\omega_n = 1.22$  rad/s, respectivamente.

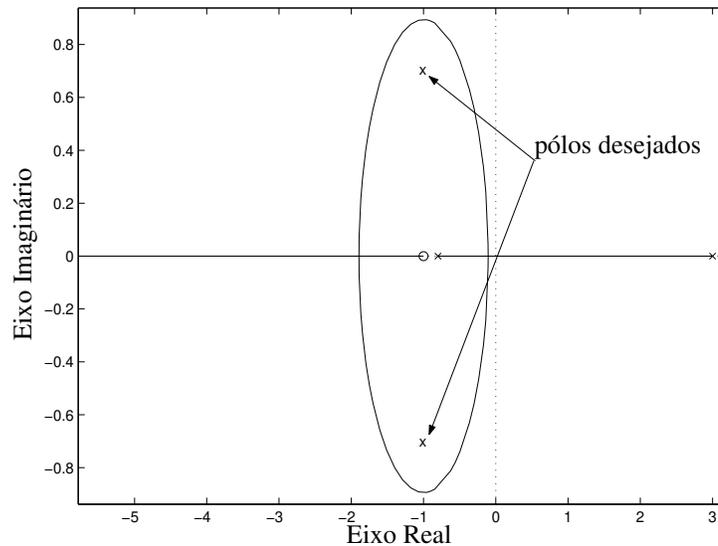


Figura 4.1: Controle proporcional para o Exemplo 4.2.1.

Em princípio, nada pode ser dito sobre o desempenho ou mesmo sobre a estabilidade do sistema em malha fechada quando  $v_p^*(\mathbf{b}^0) > 0$ . Para associar desempenho e estabilidade às soluções do Problema 4.2.1, considere a família de polinômios com coeficientes dentro

da bola ponderada pela norma  $l_p$ , de raio  $\mu > 0$  (Bhattacharyya et al. 1995):

$$\mathcal{B}_p(\mathbf{b}^0, \mu) = \left\{ \mathbf{b}^0 : \left[ \sum_{i=1}^m \beta_i |b_i - b_i^0|^p \right]^{1/p} \leq \mu \right\},$$

na qual  $\beta_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  são pesos dados e  $p \geq 1$ . O conjunto  $\mathcal{B}_p(\mathbf{b}^0, \mu)$  representa uma bola de raio  $\mu$  no espaço  $l_p$  quando  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m$ . Uma bola  $l_p$  de polinômios  $\mathcal{B}_p(\mathbf{b}^0, \mu)$  é Hurwitz se e somente se  $\mathcal{B}_p(\mathbf{b}^0, \mu)$  contém somente polinômios Hurwitz, ou seja, polinômios cujas todas as raízes estiverem no semi-plano esquerdo (aberto) do plano  $s$ . A margem de estabilidade  $l_p$  de um dado polinômio  $\mathbf{b}^0$ , definida como o maior raio  $\mu$  para o qual  $\mathcal{B}_p(\mathbf{b}^0, \mu)$  é Hurwitz, pode ser obtida, por exemplo, através do Lugar de Tsyypkin-Polyak (Bhattacharyya et al. 1995). Outros procedimentos têm sido propostos na literatura (Barmish 1994), (Bhattacharyya et al. 1995). Uma conexão entre margens de estabilidade e as soluções ótimas do Problema 4.2.1 é estabelecida no Teorema 4.2.2.

**Teorema 4.2.2** *Assuma que  $\alpha_i = \beta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , e considere  $\mu^*$  o raio máximo para o qual  $\mathcal{B}_p(\mathbf{b}^0, \mu)$  é Hurwitz. Se  $v_p^*(\mathbf{b}^0) \leq \mu^*$ , então  $\mathbf{b}^* \in \mathcal{B}_p(\mathbf{b}^0, \mu^*)$  e o sistema em malha fechada associado é estável.*

**Prova:** A prova reside no fato de que  $\eta_i + \rho_i = |b_i - b_i^0|$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ , em que  $b_i$  é a  $i$ -ésima componente de  $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . Conseqüentemente,  $v_p^*(\mathbf{b}^0)$  é a norma  $l_p$  mínima entre  $\mathbf{b}^0$  e  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ . Portanto, se  $v_p^*(\mathbf{b}^0) \leq \mu^*$ , então  $\mathbf{b}^* \in \mathcal{B}_p(\mathbf{b}^0, \mu^*)$  e o sistema resultante em malha fechada é estável.  $\square$

O aspecto fundamental do Teorema 4.2.2 é que  $v_p^*(\mathbf{b}^0)$  é uma medida de proximidade entre  $\mathbf{b}^*$  e  $\mathbf{b}^0$ . Também é sabido que, assumindo-se grau invariante, as raízes de um polinômio variam continuamente em relação aos seus coeficientes (Barmish 1994). Portanto, para  $v_p^*(\mathbf{b}^0)$  suficientemente pequeno, o sistema em malha fechada associado a  $\mathbf{b}^*$  será estável e o seu desempenho será semelhante ao especificado por  $\mathbf{b}^0$ . Se  $v_p^*(\mathbf{b}^0)$  for grande o suficiente para invalidar o uso do controlador correspondente, uma alternativa é considerar o problema de alocação regional de polinômios característicos. Por simplicidade, todas as formulações de Programação Alvo seguintes serão apresentadas em termos de  $p = 1$  e  $\alpha_i = 1$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Uma extensão do problema de alocação de pólos pontual, em que os pólos de malha fechada são alocados em pontos específicos, é o problema de alocação regional de pólos, cujo objetivo é alocar os pólos de malha fechada em uma região adequada do plano complexo  $s$ . O problema de alocação regional de pólos é quase sempre tratado em conexão com o problema mais geral de alocação robusta de pólos: o controlador deve alocar os pólos de malha fechada em uma dada região apesar da existência de incertezas com respeito ao modelo matemático da planta.

Suponha que o problema de alocação de um polinômio característico alvo seja substituído pelo problema de alocar um polinômio característico em uma região politópica intervalar. O problema é encontrar  $\mathbf{b}^-$  e  $\mathbf{b}^+$  ( $\mathbf{b}^- \leq \mathbf{b}^+$ ) de maneira que todas as raízes da

família de polinômios intervalares  $[\mathbf{b}] := [\mathbf{b}^-, \mathbf{b}^+]$  estejam na região desejada para os pólos de malha fechada. Em (Soh et al. 1987), a determinação de  $[\mathbf{b}]$  é realizada através de um método baseado em sensibilidade. Outra possibilidade envolve o conceito de *espaço de raízes* de uma família politópica. O Teorema das Arestas (Bartlett et al. 1988) estabelece que o espaço de raízes do hiper-retângulo  $[\mathbf{b}]$  é limitado pelas raízes das suas arestas. A idéia de selecionar  $[\mathbf{b}]$ , ou seja, arestas, de maneira a confinar seu espaço de raízes em uma região adequada do plano complexo  $s$  é proposta em (Keel e Bhattacharyya 1999a) e adotada nesta seção.

Uma condição necessária e suficiente para a existência de um controlador de ordem  $r$  que aloque um polinômio característico em  $[\mathbf{b}]$  é estabelecida em termos do seguinte problema de *Programação Alvo intervalar* (Ignizio 1982):

### Problema 4.2.2

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \sum_{i=1}^m (\eta_i^- + \rho_i^+) \\ & \mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}^-, \boldsymbol{\rho}^-, \boldsymbol{\eta}^+, \boldsymbol{\rho}^+ && \\ & \text{sujeito a} && \begin{aligned} & \mathbf{Ax} + \boldsymbol{\eta}^- - \boldsymbol{\rho}^- = \mathbf{b}^-, \\ & \mathbf{Ax} + \boldsymbol{\eta}^+ - \boldsymbol{\rho}^+ = \mathbf{b}^+, \\ & \boldsymbol{\eta}^- \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\rho}^- \geq \mathbf{0}, \\ & \boldsymbol{\eta}^+ \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\rho}^+ \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \end{aligned}$$

□

**Teorema 4.2.3** *Considere  $v^*([\mathbf{b}])$  o valor ótimo do Problema 4.2.2, e  $\mathbf{x}^*$  o controlador correspondente. Então  $\mathbf{x}^*$  aloca o polinômio característico do sistema em malha fechada em  $[\mathbf{b}] := [\mathbf{b}^-, \mathbf{b}^+]$  se e somente se  $v^*([\mathbf{b}]) = 0$ .*

**Prova:** Considere  $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\eta}^{-*}, \boldsymbol{\rho}^{-*}, \boldsymbol{\eta}^{+*}, \boldsymbol{\rho}^{+*})$  uma solução ótima para o Problema 4.2.2 e  $\mathbf{b}^* = \mathbf{Ax}^*$ . Se  $v^*([\mathbf{b}]) = 0$ , então  $\boldsymbol{\eta}^{-*} = \boldsymbol{\rho}^{+*} = \mathbf{0}$  e obtém-se  $\mathbf{b}^* \in [\mathbf{b}]$ . Se  $v^*([\mathbf{b}]) > 0$ , então ao menos um dos valores  $\eta_i^{-*}, \rho_i^{+*}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  é positivo e o controlador  $\mathbf{x}^*$  aloca  $b_i^*$  abaixo de  $b_i^-$  ou acima de  $b_i^+$ , dependendo de qual variável de desvio é positiva. □

O Problema 4.2.2 exhibe as mesmas propriedades básicas do Problema 4.2.1 ( $p = 1$ ): é um problema de Programação Linear simples e sempre possui uma solução factível. O controlador  $\mathbf{x}^*$  aloca o polinômio característico em  $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}^- - \boldsymbol{\eta}^{-*} + \boldsymbol{\rho}^{-*}$  ou  $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}^+ - \boldsymbol{\eta}^{+*} + \boldsymbol{\rho}^{+*}$ . Quando  $v^*([\mathbf{b}]) > 0$ , significando que  $\mathbf{b}^* \notin [\mathbf{b}]$ , o controlador correspondente aloca um polinômio característico com desvio mínimo, no sentido da norma  $l_1$ , em relação ao intervalo  $[\mathbf{b}]$ .

**Exemplo 4.2.2** Considere a função de transferência da planta de segunda ordem do Exemplo 4.2.1 e o problema de alocar os pólos de malha fechada em uma região desejada usando-se um controlador de ordem zero. A região desejada é ilustrada na Figura 4.2 e corresponde ao espectro de  $[b] = [b^-, b^+]$  definido por

$$b^- = [ 1.00 \quad 1.40 \quad 1.04 ]^T \quad e \quad b^+ = [ 1.00 \quad 2.60 \quad 1.94 ]^T .$$

A solução ótima do Problema 4.2.2,  $v^*([b]) = 0$  e

$$b^* = [ 1.00 \quad 1.82 \quad 1.62 ]^T ,$$

indica que a alocação em  $[b]$  é possível. O controlador  $C(s) = 4.02$  aloca os pólos de malha fechada em  $-0.910 \pm j0.890$ .

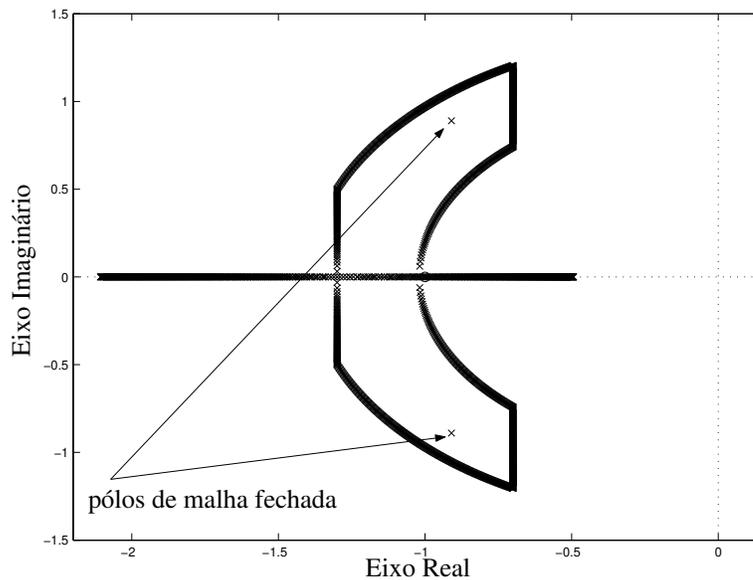


Figura 4.2: Espectro de  $[b(s)]$ .

### 4.3 Controladores Robustos: Soluções Internas de $\Sigma$

Considere  $[A]$  a matriz de Sylvester intervalar associada a uma planta intervalar  $[P(s)]$  e  $[b]$  o polinômio característico intervalar especificado. Um vetor  $x$  é uma *solução interna*

do sistema de equações lineares intervalares  $[A]x = [b]$  se  $Ax \in [b]$  para toda  $A \in [A]$  (Rohn 1986). De outra forma, conforme o Teorema 2.6.2

$$\Sigma = \{x : |A_c x - b_c| - \Delta|x| \leq \delta\}.$$

**Definição 4.3.1** *O conjunto de todas as soluções internas de  $[A]x = [b]$  é dado por*

$$\Sigma_0 := \{x : Ax \in [b] \text{ para toda } A \in [A]\}.$$

□

As propriedades de  $\Sigma_0$  são de particular interesse, pois  $\Sigma_0$  é precisamente o conjunto de todos os controladores robustos por alocação de pólos. Uma consequência importante quando se trata este problema em um contexto de Análise Intervalar é a existência de representações explícitas para  $\Sigma_0$ . A seguir, são apresentadas caracterizações simples e computacionalmente eficientes dos controladores robustos como soluções internas de equações Diofantinas intervalares.

**Teorema 4.3.1 (Representações de  $\Sigma_0$ )** *Considere  $\Sigma_0$  o conjunto de todas as soluções internas da equação linear intervalar  $[A]x = [b]$ , na qual  $[A] = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$  e  $[b] = [b_c - \delta, b_c + \delta]$ . Defina*

$$\Sigma_1 := \{x : |A_c x - b_c| + \Delta|x| \leq \delta\};$$

$$\Sigma_2 := \{x : x = y - z, \\ A^- y - A^+ z \geq b^-, \\ A^+ y - A^- z \leq b^+, \\ y \geq 0, z \geq 0\};$$

$$\Sigma_3 := \{(x, y) : A_c x - \Delta y \geq b^-, \\ A_c x + \Delta y \leq b^+, \\ -y \leq x \leq y\}.$$

Então  $\Sigma_0 = \Sigma_1 = \Sigma_2$  e  $x \in \Sigma_0$  se e somente se existir um  $y$  de maneira que  $(x, y) \in \Sigma_3$ .

**Prova:**

**Equivalência entre  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_1$**

Tem-se que  $\Sigma_1 \subset \Sigma$ , como esperado da definição de  $\Sigma_1$  (ou seja,  $\Sigma_0$ ) como o conjunto das soluções internas de  $\Sigma$  (observe a semelhança com o Teorema 2.6.2).

**Equivalência entre  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_2$** 

(Necessidade) Considere  $x \in \Sigma_0$  e  $|A_c x - b_c| + \Delta|x| \leq \delta$ . Assim,

$$|A_c x - b_c| \leq -\Delta|x| + \delta$$

ou seja,

$$\Delta|x| - \delta \leq A_c x - b_c \leq -\Delta|x| + \delta.$$

Portanto,

$$\begin{cases} A_c x + \Delta|x| \leq b_c + \delta \\ A_c x - \Delta|x| \geq b_c - \delta \end{cases}$$

que implica em

$$\begin{cases} A_c x + \Delta|x| \leq b^+ \\ A_c x - \Delta|x| \geq b^- \end{cases} \quad (4.1)$$

Definindo  $x = y - z$  e  $|x| = y + z$  e substituindo em (4.1), verifica-se que

$$\begin{cases} A_c(y - z) + \Delta(y + z) \leq b^+ \\ A_c(y - z) - \Delta(y + z) \geq b^- \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} A_c y - A_c z + \Delta y + \Delta z \leq b^+ \\ A_c y - A_c z - \Delta y - \Delta z \geq b^- \end{cases}$$

resultando em

$$\begin{cases} (A_c + \Delta)y - (A_c - \Delta)z \leq b^+ \\ (A_c - \Delta)y - (A_c + \Delta)z \geq b^- \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} A^+ y - A^- z \leq b^+ \\ A^- y - A^+ z \geq b^- \end{cases}$$

e  $\Sigma_2$  é verificado.

(Suficiência) Considere  $y$  e  $z$  soluções para  $\Sigma_2$  e defina um  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  por  $\alpha_i = \min\{y_i, z_i\}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Então  $\alpha \geq 0$  para  $x = (y - \alpha) - (z - \alpha) = y - z$  e  $|x| = (y - \alpha) + (z - \alpha) = y + z - 2\alpha$ . Assim,

$$\begin{cases} A_c x + \Delta|x| = A_c(y - z) + \Delta(y + z - 2\alpha) \leq b^+ \\ A_c x - \Delta|x| = A_c(y - z) - \Delta(y + z - 2\alpha) \geq b^- \end{cases}$$

que implica em

$$\begin{cases} A_c y - A_c z + \Delta y + \Delta z - 2\Delta\alpha \leq b^+ \\ A_c y - A_c z - \Delta y - \Delta z - 2\Delta\alpha \geq b^- \end{cases}$$

e portanto,

$$\begin{cases} (\mathbf{A}_c + \Delta)\mathbf{y} - (\mathbf{A}_c - \Delta)\mathbf{z} - 2\Delta\alpha \leq \mathbf{b}^+ \\ (\mathbf{A}_c - \Delta)\mathbf{y} - (\mathbf{A}_c + \Delta)\mathbf{z} + 2\Delta\alpha \geq \mathbf{b}^- \end{cases}$$

resultando em

$$\begin{cases} \mathbf{A}^+\mathbf{y} - \mathbf{A}^-\mathbf{z} - 2\Delta\alpha \leq \mathbf{b}^+ \\ \mathbf{A}^-\mathbf{y} - \mathbf{A}^+\mathbf{z} + 2\Delta\alpha \geq \mathbf{b}^-. \end{cases}$$

Assim,  $[\mathbf{A}_c\mathbf{x} - \Delta|\mathbf{x}|, \mathbf{A}_c\mathbf{x} + \Delta|\mathbf{x}|] \subset [\mathbf{b}]$ , implicando que  $\mathbf{x} \in \Sigma_0$ .

**Equivalência entre  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_3$**

(Necessidade) Considere  $\mathbf{x} \in \Sigma_0$ , de maneira que  $\mathbf{x} \in \Sigma_0$  se e somente se  $|\mathbf{A}_c\mathbf{x} - \mathbf{b}_c| + \Delta|\mathbf{x}| \leq \delta$ . Se  $\mathbf{y} = |\mathbf{x}|$ , então

$$|\mathbf{A}_c\mathbf{x} - \mathbf{b}_c| + \Delta|\mathbf{x}| \leq \delta$$

ou seja,

$$|\mathbf{A}_c\mathbf{x} - \mathbf{b}_c| \leq \delta - \Delta|\mathbf{x}|$$

e portanto,

$$-\delta + \Delta\mathbf{y} \leq \mathbf{A}_c\mathbf{x} - \mathbf{b}_c \leq \delta - \Delta\mathbf{y}.$$

Desta forma,

$$\begin{cases} \mathbf{A}_c\mathbf{x} - \mathbf{b}_c \leq \delta - \Delta\mathbf{y} \\ \mathbf{A}_c\mathbf{x} - \mathbf{b}_c \geq -\delta + \Delta\mathbf{y} \end{cases}$$

que implica em

$$\begin{cases} \mathbf{A}_c\mathbf{x} - \mathbf{b}^+ + \delta \leq \delta - \Delta\mathbf{y} \\ \mathbf{A}_c\mathbf{x} - \mathbf{b}^- - \delta \geq -\delta + \Delta\mathbf{y}. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} \mathbf{A}_c\mathbf{x} + \Delta\mathbf{y} \leq \mathbf{b}^+ \\ \mathbf{A}_c\mathbf{x} - \Delta\mathbf{y} \geq \mathbf{b}^- \end{cases}$$

e  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Sigma_3$ .

(Suficiência) Considere  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Sigma_3$  e, portanto,  $|\mathbf{x}| \leq \mathbf{y} \Rightarrow -\mathbf{y} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ . Então,

$$\delta \geq |\mathbf{A}_c\mathbf{x} - \mathbf{b}_c| + \Delta\mathbf{y} \geq |\mathbf{A}_c\mathbf{x} - \mathbf{b}_c| + \Delta|\mathbf{x}|$$

e  $\mathbf{x} \in \Sigma_0$ . □

A primeira equivalência no Teorema 4.3.1,  $\Sigma_0 = \Sigma_1$ , pode ser vista como uma demonstração baseada em Análise Intervalar da condição necessária e suficiente para alocação robusta de pólos, estabelecida em (Soh et al. 1987). Uma diferença sutil é que em (Soh et al. 1987), as notações equivalentes para  $\Delta$  e  $\delta$  descrevem os desvios de uma *planta nominal*

$A_c$  e um polinômio característico nominal  $b_c$ , enquanto que no Teorema 4.3.1,  $\Delta$  e  $\delta$  são simplesmente quantidades calculáveis a partir de  $A^-$ ,  $A^+$ ,  $b^-$  e  $b^+$ . De fato, a segunda equivalência do Teorema 4.3.1,  $\Sigma_0 = \Sigma_2$ , mostra que valores nominais não são necessários para descrever controladores robustos. Note finalmente que a equivalência  $\Sigma_0 = \Sigma_2$  e a correspondência entre  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_3$  são especialmente adequadas para manipulações numéricas.

Muitas propriedades geométricas úteis relacionadas a  $\Sigma_0$  e suas representações equivalentes podem ser analisadas e interpretadas em termos de projeto por alocação robusta de pólos. As proposições seguintes são consequências imediatas do Teorema 4.3.1.

**Proposição 4.3.1 (Convexidade)**  $\Sigma_0$  é um conjunto convexo poliedral.  $\square$

A natureza convexa e poliedral de  $\Sigma_0$  (como o conjunto de soluções internas) é evidenciada em (Rohn 1986) através da equivalência  $\Sigma_0 = \Sigma_2$ . A convexidade de  $\Sigma_0$  (como o conjunto de controladores robustos) também é citada em (Soh et al. 1987).

**Proposição 4.3.2 (Existência)**  $\Sigma_0$  é um conjunto não-vazio se e somente se os sistemas de inequações lineares indicados em  $\Sigma_2$  ou  $\Sigma_3$  têm uma solução.  $\square$

A existência de controladores robustos pode ser testada pela Fase I do Algoritmo Simplex quando aplicada às desigualdades lineares em  $\Sigma_2$  ou  $\Sigma_3$ . Quando  $\Sigma_0$  é não-vazio, pode-se proceder à seleção de um controlador robusto que satisfaça um dado critério, por exemplo. Deve-se notar que a infactibilidade de  $\Sigma_0$  seria causada por uma incompatibilidade entre a descrição intervalar da planta,  $[A] = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$  e a especificação intervalar do polinômio característico  $[b] = [b^-, b^+]$ . Assumindo que exista um  $x$  de maneira que  $A_c x \in [b]$  e que  $\Delta$  é escalonado por um fator não-negativo  $\sigma$ , a seguinte relação entre a magnitude da incerteza da planta e a existência de controladores robustos pode ser estabelecida.

**Proposição 4.3.3 (Máxima incerteza)** Considere o problema de Programação Não-Linear:

$$\begin{aligned} & \text{maximizar} && \sigma \\ & \sigma, \mathbf{x}, \mathbf{y} \\ & \text{sujeito a} && \mathbf{A}_c \mathbf{x} - (\sigma \Delta) \mathbf{y} \geq \mathbf{b}^-, \\ & && \mathbf{A}_c \mathbf{x} + (\sigma \Delta) \mathbf{y} \leq \mathbf{b}^+, \\ & && -\mathbf{y} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{y}, \\ & && \sigma \geq 0. \end{aligned}$$

Considere  $\sigma^*$  o valor ótimo de  $\sigma$ . Então  $\Sigma_0$  é não-vazio se e somente se  $\sigma^* \geq 1$  e o máximo intervalo de incertezas contendo um controlador robusto é  $[A_c - \sigma^* \Delta, A_c + \sigma^* \Delta]$ .  $\square$

**Proposição 4.3.4 (Limitação)**  $\Sigma_0$  é limitado se ao menos um coeficiente de  $[n_P(s)]$  e um coeficiente de  $[d_P(s)]$  são não-degenerados.

**Prova:** Note que  $\mathbf{x} \in \Sigma_0$  implica  $\Delta|\mathbf{x}| \leq \delta$  (porque  $\mathbf{x} \in \Sigma_1$ ). Um  $\mathbf{x}$  ilimitado não pode verificar  $\Delta|\mathbf{x}| \leq \delta$  se cada coluna de  $\Delta \geq \mathbf{0}$  tem ao menos um elemento diferente de zero. Uma vez que  $\Delta$  também é uma matriz do tipo Sylvester, conclui-se que  $\Sigma_0$  é limitado se ao menos um coeficiente de  $[n_P(s)]$  e um coeficiente de  $[d_P(s)]$  são não-degenerados.  $\square$

**Proposição 4.3.5 (Limites sobre  $\Sigma_0$ )** Suponha que  $\Sigma_0$  é um conjunto limitado não-vazio. Para cada  $i = 1, 2, \dots, q$ , defina  $x_i^-$  como o valor mínimo do problema linear

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}}{\text{minimizar}} && x_i \\ & && \mathbf{x} \\ & \text{sujeito a} && \mathbf{x} \in \Sigma_2. \end{aligned}$$

Defina  $x_i^+$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$  de maneira semelhante, substituindo minimizar por maximizar. Então o menor vetor intervalar  $[\mathbf{x}]$  contendo  $\Sigma_0$  é dado por  $[\mathbf{x}] := [\mathbf{x}^-, \mathbf{x}^+]$ .  $\square$

Note que o conhecimento de  $[\mathbf{x}]$  determina completamente a faixa de variação dos coeficientes de todos os controladores robustos possíveis e constitui uma informação útil para o projeto. De fato, seja  $[\mathbf{x}]$  particionado da seguinte forma

$$[\mathbf{x}] := \begin{bmatrix} [\mathbf{x}_z] \\ \dots \\ [\mathbf{x}_p] \end{bmatrix},$$

na qual  $[\mathbf{x}_z]$  e  $[\mathbf{x}_p]$  denotam vetores intervalares de mesma dimensão,  $r+1$ . Então os zeros e pólos de todos os possíveis controladores por alocação robusta de pólos serão limitados pelo espaço de raízes dos polinômios intervalares definidos por  $[\mathbf{x}_z]$  e  $[\mathbf{x}_p]$ , respectivamente. Um exemplo numérico é utilizado para ilustrar este e todos os resultados anteriores relacionados a  $\Sigma_0$ .

**Exemplo 4.3.1** Considere a função de transferência da planta de segunda ordem com coeficientes intervalares apresentada em (Soh et al. 1987) e (Rotstein et al. 1991)

$$[P(s)] = \frac{s + [a_3]}{s^2 - 2.2s + [a_6]},$$

na qual  $[a_3] = [0.5, 1.5]$  e  $[a_6] = [-2.6, -2.2]$ . Deseja-se projetar um controlador de primeira ordem ( $r = 1$ ) para alocar de forma robusta os pólos de malha fechada do sistema no espaço de raízes determinado pelo intervalo  $[b] = [b^-, b^+]$ , com

$$\mathbf{b}^- = [1.000 \quad 9.600 \quad 12.81 \quad 5.120]^T \quad e \quad \mathbf{b}^+ = [1.000 \quad 14.40 \quad 30.17 \quad 24.68]^T.$$

A matriz de Sylvester intervalar  $[A] = [A^-, A^+]$  é facilmente calculada, assim como  $A_c$ ,  $\Delta$ ,  $b_c$  e  $\delta$ . Existe um controlador por alocação robusta de pólos ( $\Sigma_0$  é não-vazio): a Fase I do método Simplex (Proposição 4.3.2) aplicada em  $\Sigma_2$  fornece

$$C_1(s) = \frac{13.83s + 6.256}{s - 1.852}.$$

O espectro do polinômio característico  $[d_P(s)]d_{C_1}(s) + [n_P(s)]n_{C_1}(s)$  (preto), ilustrado na Figura 4.3, está inteiramente contido no espectro de  $[b(s)]$  (cinza).

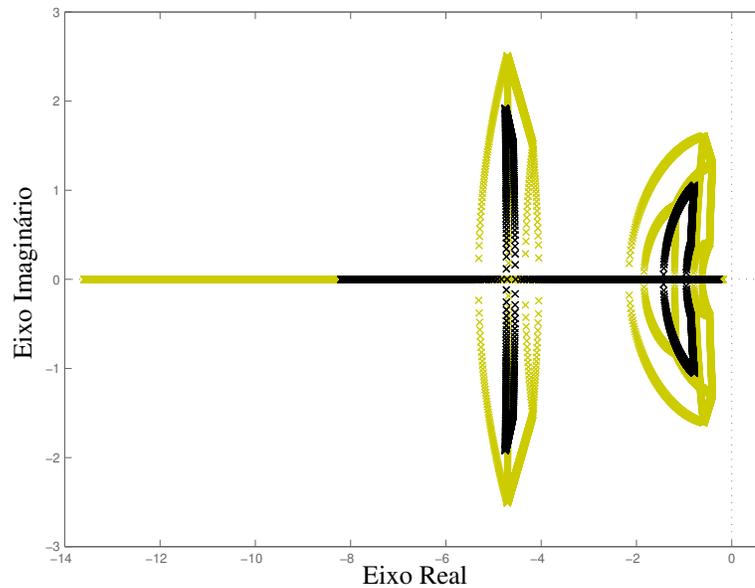


Figura 4.3: Espectros de  $[d_P(s)]d_{C_1}(s) + [n_P(s)]n_{C_1}(s)$  (preto) e  $[b(s)]$  (cinza).

Uma investigação adicional através da Proposição 4.3.3 mostra que  $\sigma^* = 1.319$ , implicando que o intervalo máximo de incertezas para a planta pode ser feito cerca de 32% maior do que o inicialmente especificado. Uma vez que  $[P(s)]$  satisfaz as condições da

Proposição 4.3.4, é possível obter o vetor intervalar  $[\mathbf{x}]$  utilizando a Proposição 4.3.5:

$$[\mathbf{x}] = [\mathbf{x}^-, \mathbf{x}^+] = \begin{bmatrix} [\mathbf{x}_z] \\ \dots \\ [\mathbf{x}_p] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 10.13, 16.96 \\ -3.979, 18.89 \end{bmatrix} \\ \dots \\ \begin{bmatrix} 1.000, 1.000 \\ -5.040, 1.664 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Depois de se calcularem as raízes reais das quatro arestas de  $[\mathbf{x}_z]$  e da única aresta de  $[\mathbf{x}_p]$ , conclui-se que os zeros e pólos de todos os controladores robustos estão contidos nos intervalos  $[-1.865, 0.393]$  e  $[-1.664, 5.040]$ , respectivamente. Os pólos de malha fechada podem ser robustamente alocados por controladores estáveis ou instáveis, com zeros de fase mínima ou de fase não-mínima. Neste ponto, não é possível assegurar a existência de um controlador robusto estável e de fase mínima.

## 4.4 Alocação Robusta de Pólos via Programação Alvo

Nesta seção, a existência e o projeto de controladores por alocação robusta de pólos são simultaneamente tratados em uma estrutura de Programação Alvo intervalar com coeficientes intervalares. Convém lembrar que de acordo com o Teorema 4.3.1, um vetor  $\mathbf{x}$  é um elemento do conjunto de controladores robustos  $\Sigma_0$  se e somente se  $\mathbf{x} \in \Sigma_2$ .

**Teorema 4.4.1** De  $\Sigma_2$ , tem-se que  $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$ . Defina  $\boldsymbol{\xi} := [\mathbf{y}^T; \mathbf{z}^T]^T$ , de maneira que  $\mathbf{x} = \mathbf{T}\boldsymbol{\xi}$ , na qual  $\mathbf{T} := [\mathbf{I}_q; -\mathbf{I}_q]$ , e qualquer especificação adicional  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  sobre os coeficientes do controlador pode ser transformada em uma especificação equivalente  $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$  sobre os componentes de  $\boldsymbol{\xi}$ . Assim, considere o seguinte problema de Programação Alvo Linear:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \sum_{i=1}^m (\eta_i^- + \rho_i^+) \\ & \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}^-, \boldsymbol{\rho}^-, \boldsymbol{\eta}^+, \boldsymbol{\rho}^+ && \\ & \text{sujeito a} && \begin{aligned} & \mathbf{M}^- \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}^- - \boldsymbol{\rho}^- = \mathbf{b}^-, \\ & \mathbf{M}^+ \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}^+ - \boldsymbol{\rho}^+ = \mathbf{b}^+, \\ & \boldsymbol{\eta}^- \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\rho}^- \geq \mathbf{0}, \\ & \boldsymbol{\eta}^+ \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\rho}^+ \geq \mathbf{0}, \\ & \boldsymbol{\xi} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\xi} \in \Xi, \end{aligned} \end{aligned}$$

no qual

$$\mathbf{M}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^- & \vdots & -\mathbf{A}^+ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^+ & \vdots & -\mathbf{A}^- \end{bmatrix}$$

e  $\Xi$  é um conjunto poliedral não-vazio. Considere  $v^*$  o valor ótimo deste problema,  $\xi^*$  o valor ótimo de  $\xi$  e  $x^* = T\xi^*$ . Então  $x^* \in \Sigma_0 \cap \mathcal{X}$  se e somente se  $v^* = 0$ .

**Prova:** Seja  $(\xi^*, \eta^{-*}, \rho^{-*}, \eta^{+*}, \rho^{+*})$  qualquer solução ótima para o problema do Teorema 4.4.1. Note que otimalidade e a equivalência entre  $\Xi$  e  $\mathcal{X}$  implicam que  $x^* = T\xi^* \in \mathcal{X}$ . Falta mostrar que  $x^* \in \Sigma_0$  se e somente se  $v^* = 0$ .

(Suficiência) Se  $v^* = 0$ , então  $\eta^{-*} = \rho^{+*} = \mathbf{0}$ ; portanto

$$\begin{aligned} A^- y^* - A^+ z^* &\geq b^-, \\ A^+ y^* - A^- z^* &\leq b^+, \\ y^* &\geq \mathbf{0}, z^* \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

As desigualdades acima possuem uma solução  $(y^*, z^*)$  e, de acordo com o Teorema 4.3.1,  $x^* \in \Sigma_0$ . (Necessidade) Qualquer solução ótima para o problema do Teorema 4.4.1 é tal que somente um dos  $\eta_i^{-*}$  e  $\rho_i^{-*}$  ( $\eta_i^{+*}$  e  $\rho_i^{+*}$ ) é positivo (veja (Yu 1985)). Se  $v^* > 0$ , então pelo menos uma componente de  $\eta^{-*}$  ou  $\rho^{+*}$  é positiva e a componente associada a  $\rho^{-*}$  ou  $\eta^{+*}$  é nula. Como conseqüência, pelo menos uma das desigualdades acima é violada e, novamente pelo Teorema 4.3.1,  $x^* \notin \Sigma_0$ .  $\square$

O problema do Teorema 4.4.1 sempre possui uma solução factível e o seu valor ótimo  $v^*$  fornece o desvio total de  $x^* \in \mathcal{X}$  em relação a  $\Sigma_0$ . Se  $v^* > 0$ , então  $\eta^{-*}$  e  $\rho^{+*}$  indicam quais componentes do alvo intervalar  $[b] = [b^-, b^+]$  não podem ser alcançadas. Quando  $v^* = 0$  ( $\eta^{-*} = \rho^{+*} = \mathbf{0}$ ), as variáveis de desvio  $\eta^{+*}$  e  $\rho^{-*}$  atuam como variáveis de folga e excesso para as desigualdades que descrevem os controladores robustos.

**Exemplo 4.4.1** Considere a função de transferência da planta incerta de segunda ordem descrita no Exemplo 4.3.1. Pode-se verificar que o problema de alocação robusta de polinômios característicos proposto pode ser resolvido por um controlador estável de fase mínima. A restrição  $[I_2; -I_2]z \geq \mathbf{0}$ , impondo um controlador com coeficientes não-negativos é adicionada ao problema do Teorema 4.4.1. O controlador resultante

$$C_2(s) = \frac{11.61s + 14.24}{s + 0.428}$$

é uma solução para o problema de alocação robusta de polinômios, pois  $v^* = 0$ . O espectro do polinômio característico  $[d_P(s)]d_{C_2}(s) + [n_P(s)]n_{C_2}(s)$  (preto), ilustrado na Figura 4.4, está inteiramente contido no espectro de  $[b(s)]$  (cinza).

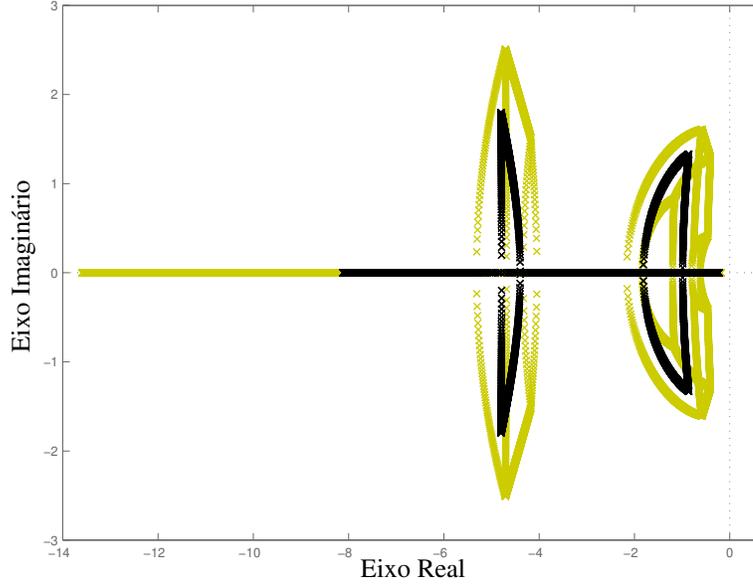


Figura 4.4: Espectros de  $[d_P(s)]d_{C_2}(s) + [n_P(s)]n_{C_2}(s)$  (preto) e  $[b(s)]$  (cinza).

## 4.5 Controladores PID Robustos

Especificações relacionadas à estrutura dos controladores robustos introduzem restrições adicionais em  $x$ . Uma especificação popular é a de que o controlador robusto deva apresentar uma estrutura PID na forma paralela

$$C_{PID}(s) = \frac{k_D s^2 + k_P s + k_I}{s},$$

na qual  $k_D, k_P, k_I$  são os ganhos derivativo, proporcional e integral, respectivamente. É comum introduzir limitantes para estes valores:  $k_D \in [k_D^-, k_D^+]$ ,  $k_P \in [k_P^-, k_P^+]$ ,  $k_I \in [k_I^-, k_I^+]$ . Comparando-se  $C_{PID}(s)$  com  $C(s)$  definido em (3.9) para  $r = 2$ , observa-se que a especificação PID impõe restrições de desigualdade em  $x_1, x_2, x_3$  e restrições de igualdade em  $x_4, x_5, x_6$ . Claramente,  $r = 2$  é um artifício para a caracterização de um controlador PID e não à sua ordem. A especificação PID correspondente em  $\xi$  seria

$$\xi \in \Xi_{PID} := \{\xi : G\xi \leq h, E\xi = f\},$$

na qual

$$G := \begin{bmatrix} -I_3 & \vdots & 0_3 & \vdots & I_3 & \vdots & 0_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_3 & \vdots & 0_3 & \vdots & -I_3 & \vdots & 0_3 \end{bmatrix}, \quad E := \begin{bmatrix} 0_3 & \vdots & I_3 & \vdots & 0_3 & \vdots & -I_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{h} := \begin{bmatrix} -\mathbf{k}^- \\ \dots \\ \mathbf{k}^+ \end{bmatrix}, \mathbf{k}^- := \begin{bmatrix} k_D^- \\ k_P^- \\ k_I^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 31 \end{bmatrix}, \mathbf{k}^+ := \begin{bmatrix} k_D^+ \\ k_P^+ \\ k_I^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 19 \\ 39 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 4.5.1** *O controle PID robusto da planta de terceira ordem*

$$[P(s)] = \frac{[a_3]s + [a_4]}{s^3 + [a_6]s^2 + [a_7]s + [a_8]}$$

é considerado em (Keel e Bhattacharyya 1997a). Todos os coeficientes incertos são iguais a  $[0.99, 1.01]$ . Deseja-se que os pólos de malha fechada sejam robustamente alocados no espaço de raízes de  $[\mathbf{b}] = [\mathbf{b}^-, \mathbf{b}^+]$ , com

$$\mathbf{b}^- = [1.000 \quad 6.000 \quad 31.25 \quad 57.00 \quad 38.25]^T$$

e

$$\mathbf{b}^+ = [1.000 \quad 14.00 \quad 45.25 \quad 77.00 \quad 54.25]^T.$$

Os ganhos PID estão restritos aos intervalos  $[k_D] \in [6, 14]$ ,  $[k_P] \in [11, 19]$  e  $[k_I] \in [31, 39]$ . Para respeitar as condições  $r = 2$  e  $x_4 = 0$ , as componentes de  $\mathbf{b}^-$  e  $\mathbf{b}^+$  são deslocadas para a direita e zeros são incluídos nas primeiras posições de vetores aumentados  $\mathbf{b}^-$  e  $\mathbf{b}^+$ . Então fazendo  $\Xi = \Xi_{PID}$ , a solução ótima do problema do Teorema 4.4.1 fornece  $v^* = 0$ , e o controlador PID robusto correspondente

$$C_{PID_1}(s) = \frac{12.43s^2 + 18.76s + 38.87}{s}.$$

A abordagem por Análise Intervalar mostra que somente dois vértices de  $\mathbf{A}$  são necessários para formular problemas de alocação robusta de pólos. O número de desigualdades lineares na formulação por Programação Alvo é  $2n + 2r + 2$  e aumenta linearmente com  $n$  e  $r$ . Na abordagem por Programação Linear proposta em (Keel e Bhattacharyya 1997a), o número de desigualdades lineares, que resulta de uma operação combinatorial com todos os vértices de  $\mathbf{A}$ , aumenta exponencialmente com  $n$  e  $r$ . O controlador PID encontrado por este método foi

$$C_{PID_2}(s) = \frac{12.5s^2 + 17.75s + 38.25}{s}.$$

## 4.6 Não-fragilidade de Controladores Robustos

Um objetivo importante no projeto de controladores em sistemas realimentados é evitar projetos frágeis, nos quais pequenas variações nos coeficientes do controlador projetado

podem deteriorar o desempenho do sistema em malha fechada de forma significativa (Keel e Bhattacharyya 1997b). Nesta seção é proposto um procedimento para o projeto de controladores baseado na solução de um *problema de centralização*, de maneira a obter o máximo desvio nos coeficientes do controlador a partir dos seus valores nominais. Problemas de centralização clássicos na área de Otimização Global são apresentados em (Horst e Pardalos 1994). No presente contexto, a idéia é determinar um controlador central  $\mathbf{x}$  e o máximo raio  $\theta$ , tais que

$$\mathbf{x} + \theta\mathcal{C} \in \Sigma_0,$$

sendo  $\mathcal{C}$  um determinado conjunto convexo que descreve como os coeficientes do controlador podem variar e  $\mathbf{x} + \theta\mathcal{C} := \{\mathbf{x} + \theta\mathbf{v}, \mathbf{v} \in \Sigma_0\}$ .

O raio  $\theta$  representa uma medida da *não-fragilidade* do controlador robusto  $\mathbf{x}$  quando os seus coeficientes variam de acordo com  $\mathcal{C}$ . Assumindo que  $\mathcal{C}$  é um hiper-retângulo, ou seja, um vetor intervalar em  $\mathbb{I}\mathbb{R}^q$ , o problema de projeto do controlador assume a seguinte forma:

#### Problema 4.6.1

$$\begin{aligned} & \text{maximizar} && \theta \\ & \theta, \mathbf{x}, \mathbf{y} \\ & \text{sujeito a} && \mathbf{A}_c(\mathbf{I}_q + \theta\mathbf{T})\mathbf{x} - \Delta\mathbf{y} \geq \mathbf{b}^-, \\ & && \mathbf{A}_c(\mathbf{I}_q - \theta\mathbf{T})\mathbf{x} - \Delta\mathbf{y} \geq \mathbf{b}^-, \\ & && \mathbf{A}_c(\mathbf{I}_q + \theta\mathbf{T})\mathbf{x} + \Delta\mathbf{y} \leq \mathbf{b}^+, \\ & && \mathbf{A}_c(\mathbf{I}_q - \theta\mathbf{T})\mathbf{x} + \Delta\mathbf{y} \leq \mathbf{b}^+, \\ & && -\mathbf{y} \leq (\mathbf{I}_q + \theta\mathbf{T})\mathbf{x} \leq \mathbf{y}, \\ & && -\mathbf{y} \leq (\mathbf{I}_q - \theta\mathbf{T})\mathbf{x} \leq \mathbf{y}, \\ & && \theta \geq 0, \end{aligned}$$

na qual,  $\mathbf{T} := \text{diag}(t_1, t_2, \dots, t_q)$ , com  $t_i = 1$ , se a variação no  $i$ -ésimo componente de  $\mathbf{x}$  é considerada, e  $t_i = 0$ , caso contrário.  $\square$

A solução do Problema 4.6.1 determina o centro  $\mathbf{x}^*$  e o raio  $\theta^*$  do maior hiper-retângulo  $\mathcal{C}$  contido em  $\Sigma_0$ , o que maximiza as possíveis variações de  $\mathbf{x}^*$ . Para resolver o Problema 4.6.1, foi utilizado o software GloptiPoly (Henrion e Lasserre 2002), baseado em Matlab/SeDuMi, o qual constrói e soluciona relaxações convexas de problemas de otimização não-convexos, descritas como desigualdades lineares matriciais convexas.

**Exemplo 4.6.1** Considere novamente a função de transferência da planta de segunda ordem com coeficientes intervalares apresentada no Exemplo 4.3.1 ((Soh et al. 1987) e (Rotstein et al. 1991))

$$[P(s)] = \frac{s + [a_3]}{s^2 - 2.2s + [a_6]},$$

na qual  $[a_3] = [0.5, 1.5]$  e  $[a_6] = [-2.6, -2.2]$ . Deseja-se alocar robustamente os polinômios característicos em  $[\mathbf{b}] = [\mathbf{b}^-, \mathbf{b}^+]$ , com

$$\mathbf{b}^- = [1.000 \quad 9.600 \quad 12.81 \quad 5.120]^T \quad e \quad \mathbf{b}^+ = [1.000 \quad 14.40 \quad 30.17 \quad 24.68]^T.$$

Deve-se notar que  $[n_P(s)]$  e  $[d_P(s)]$  não são robustamente coprimos, pois compartilham uma raiz comum em  $a_3 = 0.8$  e  $a_6 = -2.4$ , por exemplo. Portanto, a matriz de Sylvester intervalar resultante não é robustamente não-singular, o que não impede de tentar projetar um controlador robusto.

A Figura 4.5 ilustra os espectros de  $[d_P(s)]d_{C_3}(s) + [n_P(s)]n_{C_3}(s)$  (preto) e  $[b(s)]$  (cinza), na qual

$$C_3(s) = \frac{10.14s + 18.89}{s + 1.664}$$

é o controlador robusto obtido em (Soh et al. 1987).

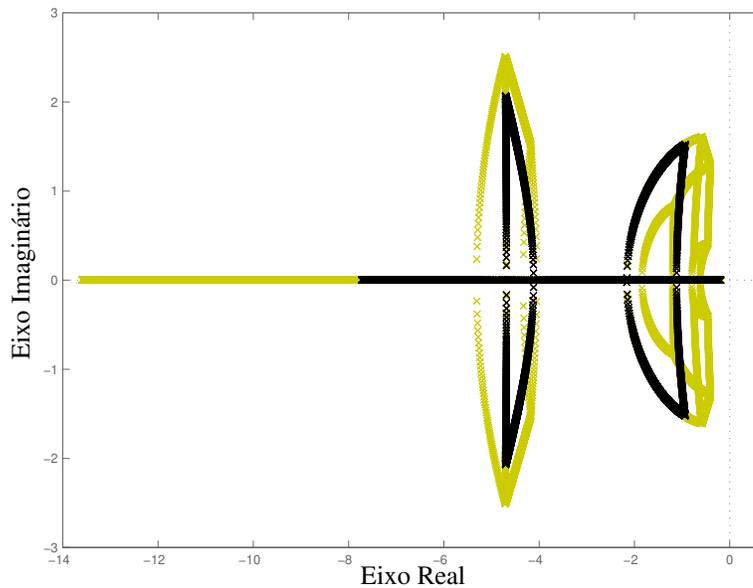


Figura 4.5: Espectros de  $[d_P(s)]d_{C_3}(s) + [n_P(s)]n_{C_3}(s)$  (preto) e  $[b(s)]$  (cinza).

Utilizando-se o GloptiPoly para a solução do Problema 4.6.1 com  $\mathbf{T} = \text{diag}(1, 1, 0, 1)$ , obtém-se  $\theta^* = 0.061$ , significando que os parâmetros do controlador

$$C_{cen}(s) = \frac{13.24s + 9.170}{s - 0.673}$$

podem variar cerca de 6% em relação aos seus valores nominais.

A Figura 4.5 ilustra os espectros de  $[d_P(s)]d_{C_{cen}}(s) + [n_P(s)]n_{C_{cen}}(s)$  (preto) e  $[b(s)]$  (cinza). Fica evidente que  $C_{cen}(s)$  admite maiores variações nos seus parâmetros, sem perda de robustez.

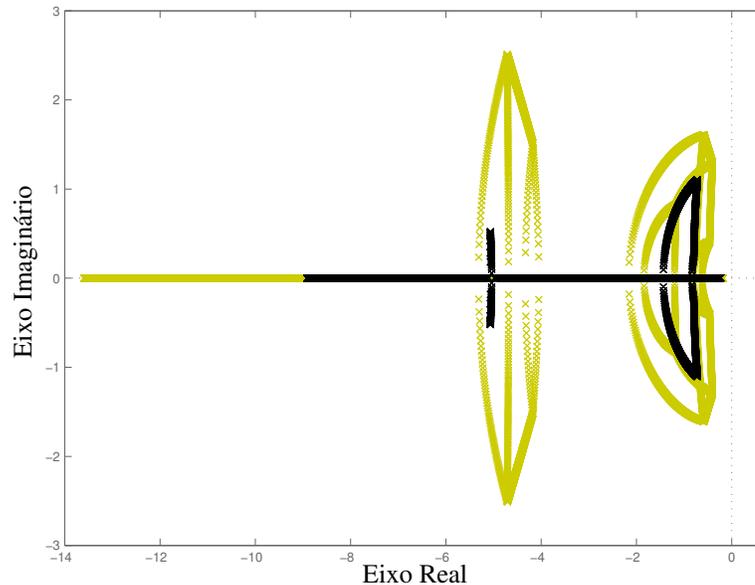


Figura 4.6: Espectros de  $[d_P(s)]d_{C_{cen}}(s) + [n_P(s)]n_{C_{cen}}(s)$  (preto) e  $[b(s)]$  (cinza).

## 4.7 Conclusão

A conclusão mais importante deste Capítulo 4 é que a análise e o projeto de controladores por alocação robusta de pólos podem ser sistematizados através de Análise Intervalar.

A caracterização do conjunto dos controladores robustos como soluções internas de uma equação Diofantina intervalar criou condições para se obter muitas propriedades úteis relacionadas ao problema de alocação robusta de pólos. Como consequência da utilização dos conceitos de Análise Intervalar e suas interpretações em termos de alocação robusta de pólos, o projeto de controladores robustos foi realizado através de uma abordagem por Programação Alvo Linear, que combina a facilidade de implementação e eficiência dos algoritmos de Otimização Linear com uma representação linear adequada dos aspectos de tomada de decisão envolvidos. Em particular, a utilização dos resultados de Análise Intervalar permitiu uma solução mais simples para o problema de alocação robusta de pólos, quando comparada com as metodologias apresentadas em (Soh et al. 1987) e (Keel e

Bhattacharyya 1999a).

A caracterização de um sub-conjunto convexo de controladores robustos permitiu a formulação do problema de projeto de controladores não-frágeis como um problema de centralização, o qual foi resolvido por um algoritmo de Otimização Global. Os procedimentos de projeto propostos são facilmente implementados com base em programas computacionais existentes.

# Capítulo 5

## Projeto de Controladores Robustos por Realimentação de Estado

### 5.1 Introdução

Neste Capítulo 5 é apresentada uma metodologia baseada em Análise Intervalar para o projeto de controladores robustos por realimentação de estado para sistemas lineares e invariantes no tempo intervalares. De forma semelhante à metodologia de projeto de controladores anteriormente apresentada para sistemas descritos no domínio da frequência, é demonstrado que quando o problema de alocação robusta de pólos é representado através do espectro de polinômios intervalares adequadamente selecionados, este pode ser totalmente formulado e resolvido em um contexto de Análise Intervalar. O problema de controle robusto consiste em encontrar um ganho de realimentação de estado de maneira a alocar todos os pólos de malha fechada numa região previamente especificada no semi-plano esquerdo do plano  $s$ , para todos os possíveis conjuntos de parâmetros do sistema.

São obtidas representações poliedrais convexas explícitas para uma classe de controladores robustos por realimentação de estado satisfazendo a chamada *equação de Ackermann intervalar*. Também é proposto um procedimento de projeto baseado em Programação Não-Linear que objetiva a maximização da *não-fragilidade* do controlador robusto.

Problemas relacionados à verificação da controlabilidade e da observabilidade de sistemas intervalares são tratados numericamente através da implementação do método da fatoração  $[Q][R]$  intervalar. Também são apresentadas extensões relativamente simples, para sistemas intervalares, de resultados conhecidos em projeto por realimentação de estado. Exemplos numéricos ilustram os principais resultados apresentados.

### 5.2 Alocação Robusta de Pólos

Considere o sistema linear e invariante no tempo intervalar, com uma entrada e uma saída

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}]\mathbf{x} + [\mathbf{b}]u, \quad (5.1)$$

$$y = [\mathbf{c}]\mathbf{x}, \quad (5.2)$$

no qual  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $u = u(t) \in \mathbb{R}$  e  $y = y(t) \in \mathbb{R}$  são o vetor de variáveis de estado, a entrada de controle e a saída do sistema, respectivamente. A matriz característica intervalar  $[\mathbf{A}] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  e os vetores intervalares de entrada  $[\mathbf{b}] \in \mathbb{IR}^{n \times 1}$  e de saída do sistema  $[\mathbf{c}] \in \mathbb{IR}^{1 \times n}$  são introduzidos de maneira a modelar incertezas nos parâmetros do sistema na forma de intervalos limitados. O princípio adotado neste capítulo para o projeto de controladores por alocação robusta de pólos é semelhante ao discutido anteriormente e consiste em alocar robustamente polinômios característicos de malha fechada em uma determinada família de polinômios característicos intervalares

$$[d(s)] := s^n + [d_{n-1}]s^{n-1} + \cdots + [d_0],$$

na qual  $[d_i] := [d_i^-, d_i^+]$ , para  $i = 0, 1, \dots, n-1$  são coeficientes intervalares. A idéia básica é gerar uma especificação para a alocação regional de pólos na forma de um conjunto espectral de um polinômio característico intervalar, baseado no fato de que os conjuntos espectrais de polinômios intervalares podem ser obtidos de forma eficiente através do Teorema 3.4.1 (Teorema das Arestas (Bartlett et al. 1988)). Assumindo que os polinômios característicos intervalares de malha fechada possam ser previamente especificados de forma adequada, pode-se formular os seguintes problemas para o projeto de sistemas de controle robusto para plantas intervalares descritas através de variáveis de estado (Prado, Lordelo e Ferreira 2004).

**Problema 5.2.1 (Controlador)** *Dado um polinômio característico intervalar de malha fechada  $[d_c(s)]$ , determinar um ganho constante de realimentação de estado  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , de maneira que*

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}) \in [d_c(s)]$$

para cada  $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$  e  $\mathbf{b} \in [\mathbf{b}]$ . □

**Problema 5.2.2 (Observador)** *Dado um polinômio característico intervalar de malha fechada  $[d_o(s)]$ , determinar um ganho constante do observador  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , de maneira que*

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{l}\mathbf{c}) \in [d_o(s)]$$

para cada  $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$  e  $\mathbf{c} \in [\mathbf{c}]$ . □

Assumindo que os pólos em  $\mathcal{S}([d_o(s)])$ , ou seja, o conjunto espectral de  $[d_o(s)]$  conforme a Definição 3.4.1, sejam suficientemente mais rápidos do que os pólos em  $\mathcal{S}([d_c(s)])$  e substituindo as variáveis de estado  $\mathbf{x}$  pelo seu valor observado  $\hat{\mathbf{x}}$ , obtém-se um controlador robusto por realimentação de estado observado  $u = -k\hat{\mathbf{x}}$ .

É evidente que a existência de um controlador robusto que aloque os pólos de malha fechada em localizações arbitrárias do plano complexo  $s$  requer uma análise de controlabilidade e de observabilidade no sentido robusto.

**Proposição 5.2.1** *Um sistema intervalar  $([\mathbf{A}], [\mathbf{b}], [\mathbf{c}])$  é controlável se o rank da matriz de controlabilidade*

$$\mathbf{M} := \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

é igual a  $n$ , para cada par  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \in ([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$ . Diz-se neste caso que o par intervalar  $([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$  é controlável.  $\square$

Utilizando o *Princípio da Dualidade* em projeto de sistemas de controle (Chen 1999), chega-se a um resultado semelhante para observabilidade em sistemas intervalares.

**Proposição 5.2.2** *Um sistema intervalar  $([\mathbf{A}], [\mathbf{b}], [\mathbf{c}])$  é observável se o par intervalar  $([\mathbf{A}]^T, [\mathbf{c}]^T)$  é controlável.*  $\square$

**Definição 5.2.1** *A extensão intervalar para a matriz de controlabilidade é definida por*

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{b}] & [\mathbf{A}][\mathbf{b}] & \dots & [\mathbf{A}]^{n-1}[\mathbf{b}] \end{bmatrix} \in \mathbb{IR}^{n \times n}.$$

$\square$

Deve-se observar que  $[\mathbf{M}]$  contém todas as possíveis matrizes de controlabilidade do sistema intervalar, mas nem todas as matrizes em  $[\mathbf{M}]$  são matrizes de controlabilidade. No entanto, se o  $\text{rank}([\mathbf{M}]) = n$ , para cada  $\mathbf{M} \in [\mathbf{M}]$ , então o par intervalar  $([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$  é controlável. Denotando como  $[\det(\mathbf{M})]$  a extensão intervalar de  $\det(\mathbf{M})$ , para  $\mathbf{M} \in [\mathbf{M}]$ , segue que o par intervalar  $([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$  é controlável se  $0 \notin [\det([\mathbf{M}])]$ . No entanto, obter a extensão intervalar  $[\det([\mathbf{M}])]$  implica num custo computacional elevado. Um procedimento alternativo para a análise da controlabilidade do par intervalar  $([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$  baseado na fatoração  $[\mathbf{Q}][\mathbf{R}]$  intervalar é descrito no Capítulo 3.

## 5.3 Projeto do Controlador

Nesta seção é apresentada uma extensão para sistemas intervalares da técnica clássica de projeto de controladores por realimentação de estado. No caso pontual, dado o polinômio característico de  $\mathbf{A}$ ,

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0,$$

e o polinômio característico para os pólos desejados de malha fechada

$$d_c(s) = s^n + d_{c,n-1}s^{n-1} + \cdots + d_{c,1} + d_{c,0},$$

um ganho constante de realimentação de estado  $\mathbf{k} := [k_0 \ k_1 \ \dots \ k_{n-1}]$ , de maneira a alocar  $d_c(s)$ , pode ser obtido através da equação de Ackermann (Ogata 1997)

$$\mathbf{k}M\mathbf{W} + \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{d}_c,$$

na qual

$$\mathbf{d}_c := [d_{c,0} \ d_{c,1} \ \cdots \ d_{c,n-1}], \quad \boldsymbol{\alpha} := [\alpha_0 \ \alpha_1 \ \cdots \ \alpha_{n-1}]$$

e

$$\mathbf{W} := \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dado que os coeficientes do polinômio característico de  $\mathbf{A}$  são funções multilineares dos seus elementos, no caso intervalar pode-se calcular as extensões intervalares destes coeficientes  $[\alpha_i]$ , para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , e obter  $[\mathbf{W}] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ , a extensão intervalar de  $\mathbf{W}$  considerando  $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ . Assim, a extensão intervalar para a equação de Ackermann é dada por

$$\mathbf{k}[\mathbf{M}][\mathbf{W}] + [\boldsymbol{\alpha}] = [\mathbf{d}_c], \quad (5.3)$$

na qual  $[\mathbf{d}_c] \in \mathbb{IR}^{1 \times n}$  representa o polinômio característico intervalar de malha fechada. Uma condição necessária para a existência de uma solução para o sistema de equações lineares intervalares (5.3) é que  $(\mathbf{d}_c)_w \geq \alpha_w$ , em que o índice  $w$  representa a largura de um vetor intervalar, conforme a Definição 2.3.2. O próximo passo é remover  $[\boldsymbol{\alpha}]$  do lado esquerdo da equação (5.3), o que não pode ser feito através da definição padrão da subtração intervalar, pois em geral,  $[\boldsymbol{\alpha}] - [\boldsymbol{\alpha}] \neq [\mathbf{0}, \mathbf{0}]$ . Aplica-se então, a subtração intervalar estendida (Inuiguchi e Kume 1991)

$$[d_{c,i}] \ominus [\alpha_i] := [d_{c,i}^- - \alpha_i^-, d_{c,i}^+ - \alpha_i^+],$$

para  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Nota-se que  $[\alpha] \ominus [\alpha] = [0, 0]$  e  $[d_c] \ominus [\alpha] \subset [d_c] - [\alpha]$  e obtém-se o sistema de equações lineares intervalares

$$k[T] = [f_c], \quad (5.4)$$

no qual  $[T] := [M][W]$  e  $[f_c] := [d_c] \ominus [\alpha]$ .

Em (Smagina e Brewer 2002) demonstra-se que o problema de estabilização robusta pode ter uma solução na forma  $k = (f_c)_c T_c^{-1}$ , em que o índice  $c$  representa o valor central de um vetor ou de uma matriz intervalar, conforme as Definições 2.3.2 e 2.4.2, respectivamente, e que  $[d_c(s)]$  é um polinômio intervalar Hurwitz que satisfaz  $(d_c)_c > \alpha_c$ . Usando os conceitos e resultados de Análise Intervalar aplicados em sistemas de equações lineares intervalares, caracteriza-se todo o conjunto de controladores robustos por alocação de pólos que podem ser encontrados através da *equação de Ackermann intervalar*.

O conjunto-solução de (5.4) é definido (Rohn 1989) como

$$\mathcal{K} := \{k : kT = f_c, \text{ para alguma } T \in [T] \text{ e algum } f_c \in [f_c]\}.$$

O subconjunto das *soluções internas* de  $\mathcal{K}$ , descrito por (Rohn 1986)

$$\mathcal{K}_0 := \{k : kT \in [f_c], \text{ para toda } T \in [T]\},$$

caracteriza todos os controladores robustos por realimentação de estado associados com (5.4). As seguintes representações para  $\mathcal{K}_0$  são conseqüências da aplicação dos resultados de Análise Intervalar.

**Teorema 5.3.1 (Representações de  $\mathcal{K}_0$ )** *Considere  $\mathcal{K}_0$  o conjunto de todas as soluções internas da equação de Ackermann intervalar  $k[T] = [f_c]$ , na qual  $[T] = [T_c - \Delta, T_c + \Delta]$  e  $[f_c] = [(f_c)_c - \delta, (f_c)_c + \delta]$ . Defina*

$$\mathcal{K}_1 := \{k : |k T_c - (f_c)_c| + |k| \Delta \leq \delta\};$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2 := \{k : k = k^1 - k^2, \\ k^1 T^- - k^2 T^+ \geq f_c^-, \\ k^1 T^+ - k^2 T^- \leq f_c^+, \\ k^1 \geq 0, k^2 \geq 0\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_3 := \{(k, \bar{k}) : \\ k T_c - \bar{k} \Delta \geq f_c^-, \\ k T_c + \bar{k} \Delta \leq f_c^+, \\ -\bar{k} \leq k \leq \bar{k}\}. \end{aligned}$$

Então  $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$  e  $k \in \mathcal{K}_0$  se e somente se existir um  $\bar{k}$  de maneira que  $(k, \bar{k}) \in \mathcal{K}_3$ .

**Prova:** As provas envolvendo as equivalências entre  $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$  são derivadas dos resultados de (Rohn 1986). A correspondência entre  $\mathcal{K}_0$  e  $\mathcal{K}_3$  é baseada em (Kelling 1994). Veja a prova do Teorema 4.3.1 para detalhes sobre as demonstrações.  $\square$

Da equivalência  $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_1$  pode-se concluir que  $\mathcal{K}_0$  é um conjunto convexo, e se todas as colunas de  $\Delta$  tiverem pelo menos um elemento diferente de zero, então  $\mathcal{K}_0$  é limitado. A existência de um controlador robusto por realimentação de estado pode ser verificada aplicando-se a Fase I do método Simplex às desigualdades lineares presentes nas representações para  $\mathcal{K}_2$  e  $\mathcal{K}_3$ . Dado que  $\mathcal{K}_0$  é um conjunto limitado, a Programação Linear pode ser usada para obter a *casca intervalar* de  $\mathcal{K}_0$ , definida como  $[\mathcal{K}_0] = [\mathbf{k}^-, \mathbf{k}^+]$ , com

$$k_i^- := \arg \min_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}_0} k_i, \quad k_i^+ := \arg \max_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}_0} k_i$$

para  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ . Do ponto de vista de projeto, caracterizações explícitas de  $\mathcal{K}_0$  simplificam a formulação de problemas de controle ótimo, no sentido de que se  $\Xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é qualquer critério particular (por exemplo, distância mínima de um ganho alvo  $\mathbf{k}^0$ ) e  $\mathcal{K}_{\text{add}}$  representa qualquer especificação adicional sobre  $\mathbf{k}$  (por exemplo, limitantes inferior e superior) então um problema de minimização na forma

$$\min \Xi(\mathbf{k}) \text{ sujeito a } \mathbf{k} \in \mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}_{\text{add}}$$

pode ser resolvido para obter um ganho robusto ótimo por realimentação de estado  $\mathbf{k}^*$  com respeito ao critério  $\Xi$ . Neste capítulo, é adotada a formulação por Programação Alvo Linear para o projeto de controladores robustos, proposta em (Lordelo e Ferreira 2002a) e (Lordelo e Ferreira 2002b) e apresentada no Capítulo 4. A idéia básica é introduzir variáveis de desvio ( $\eta^-, \eta^+, \rho^-, \rho^+$ ) e então minimizar o desvio total ao alvo intervalar  $[\mathbf{f}_c] = [\mathbf{f}_c^-, \mathbf{f}_c^+]$ .

### Problema 5.3.1

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \sum_{i=1}^m (\eta_i^- + \rho_i^+) \\ & \mathbf{k}^1, \mathbf{k}^2, \eta^-, \rho^-, \eta^+, \rho^+ && \\ & \text{sujeito a} && \begin{aligned} \mathbf{k}^1 \mathbf{T}^- - \mathbf{k}^2 \mathbf{T}^+ + \eta^- - \rho^- &= \mathbf{f}_c^-, \\ \mathbf{k}^1 \mathbf{T}^+ - \mathbf{k}^2 \mathbf{T}^- + \eta^+ - \rho^+ &= \mathbf{f}_c^+, \\ \eta^- &\geq \mathbf{0}, \quad \rho^- \geq \mathbf{0}, \\ \eta^+ &\geq \mathbf{0}, \quad \rho^+ \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \end{aligned}$$

$\square$

**Teorema 5.3.2** Considere  $v^*([\mathbf{f}_c])$  o valor ótimo do Problema 5.3.1 e  $\mathbf{k}^* = \mathbf{k}^{1*} - \mathbf{k}^{2*}$  o ganho de realimentação de estado correspondente. Então  $\mathbf{k}^* \in \mathcal{K}_0$  se e somente se  $v^*([\mathbf{f}_c]) = 0$ .

**Prova:** Considere  $(\mathbf{k}^{1*}, \mathbf{k}^{2*}, \boldsymbol{\eta}^{-*}, \boldsymbol{\rho}^{-*}, \boldsymbol{\eta}^{+*}, \boldsymbol{\rho}^{+*})$  uma solução ótima do Problema 5.3.1. (Suficiência) Se  $v^*([\mathbf{f}_c]) = 0$ , então  $\boldsymbol{\eta}^{-*} = \boldsymbol{\rho}^{+*} = 0$  e obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{1*}T^- - \mathbf{k}^{2*}T^+ &\geq \mathbf{f}_c^-, \\ \mathbf{k}^{1*}T^+ - \mathbf{k}^{2*}T^- &\leq \mathbf{f}_c^+, \\ \mathbf{k}^{1*} &\geq 0, \mathbf{k}^{2*} \geq 0. \end{aligned}$$

De acordo com o Teorema 5.3.1,  $\mathbf{k}^* = \mathbf{k}^{1*} - \mathbf{k}^{2*} \in \mathcal{K}_0$ . (Necessidade) A solução ótima do Problema 5.3.1 obtida através do algoritmo Simplex estabelece que  $\eta_i^{-*} \rho_i^{-*} = \eta_i^{+*} \rho_i^{+*} = 0$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n-1$  (Inuiguchi e Kume 1991). Se  $v^*([\mathbf{f}_c]) > 0$ , então ao menos um componente de  $\boldsymbol{\eta}^{-*}$  ou  $\boldsymbol{\rho}^{+*}$  é positivo e o componente associado a  $\boldsymbol{\rho}^{-*}$  ou  $\boldsymbol{\eta}^{+*}$  é nulo. Portanto, ao menos uma das desigualdades acima é violada e, novamente pelo Teorema 5.3.1,  $\mathbf{k}^* = \mathbf{k}^{1*} - \mathbf{k}^{2*} \notin \mathcal{K}_0$ .  $\square$

As conclusões do Teorema 5.3.2 permanecem válidas se uma especificação adicional  $\mathbf{k}^1 - \mathbf{k}^2 \in \mathcal{K}_{\text{add}}$ , na qual  $\mathcal{K}_{\text{add}}$  é qualquer conjunto poliedral não-vazio, é incorporada ao conjunto de restrições do Problema 5.3.1, que sempre possui uma solução factível. Quando  $v^*([\mathbf{f}_c]) = 0$ , o conjunto solução do Problema 5.3.1 é equivalente a  $\mathcal{K}_0$ , ou seja, o conjunto de todos os ganhos robustos por realimentação de estado.

Através do método Simplex, pode-se explorar outras alternativas e escolher um ganho de realimentação que satisfaça uma propriedade adicional, como a não-fragilidade contra variações nos ganhos (Keel e Bhattacharyya 1997a), por exemplo. Uma formulação padrão de Programa Linear não permitiria a mesma flexibilidade para a caracterização dos ganhos robustos por realimentação de estado. O projeto de controladores não-frágeis é discutido com mais detalhes na Seção 5.6, na qual o problema da não-fragilidade é tratado como um problema de projeto via centralização.

Assim como no caso pontual, o projeto do controlador possui uma solução muito mais simples quando a equação de estado está na *forma controlável intervalar*, na qual

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -[\alpha_0] & -[\alpha_1] & -[\alpha_2] & \cdots & -[\alpha_{n-1}] \end{bmatrix}$$

e

$$[\mathbf{b}] = \mathbf{b} = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T.$$

Observa-se que o par intervalar  $([A], [b])$  acima é sempre controlável. Representações controláveis intervalares são facilmente obtidas através de sistemas representados por funções de transferência intervalares. Dadas as estruturas de  $[A]$  e  $[b]$ , segue que

$$\det(sI - [A] + [b]k) = s^n + ([\alpha_{n-1}] + k_{n-1})s^{n-1} + \cdots + ([\alpha_1] + k_1) + ([\alpha_0] + k_0)$$

e a solução do problema do controlador robusto é simplesmente

$$k \in [f_c] = [d_c] \ominus [\alpha]. \quad (5.5)$$

Claramente, a fórmula (5.5) generaliza a solução do problema de projeto do controlador robusto baseado em alocação de pólos, no sentido de que se  $d_c^- = d_c^+ = d_c$  e  $\alpha^- = \alpha^+ = \alpha$ , então  $k = d_c - \alpha$ . Embora qualquer ganho de realimentação satisfazendo (5.5) solucione o problema de alocação robusta de pólos,  $k = (f_c)_c$  parece ser preferível devido à sua máxima não-fragilidade com respeito a variações nos ganhos.

## 5.4 Projeto do Observador de Estado

O projeto de um observador de estado de ordem completa

$$\dot{\hat{x}} = ([A] - l[c])\hat{x} + [b]u + ly$$

no qual,  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  é o vetor de variáveis de estado estimadas para o sistema intervalar descrito em (5.2), consiste em encontrar um ganho robusto para o observador de estado  $l \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , de maneira que

$$\det(sI - A + lc) \in [d_o(s)]$$

para cada  $A \in [A]$  e  $c \in [c]$ , sendo que  $[d_o(s)]$  é um dado polinômio característico intervalar de malha fechada. O ganho do observador de estado  $l$  pode ser calculado como  $l = k^T$ , na qual  $k$  é o ganho de realimentação de estado associado ao *sistema dual intervalar*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= [A]^T z + [c]^T v, \\ w &= [b]^T z. \end{aligned}$$

A técnica de Análise Intervalar proposta na Seção 5.3 para o projeto de controladores robustos por realimentação de estado pode ser usada no projeto de observadores de estado robustos. O *Teorema da Separação* também se aplica a sistemas intervalares  $([A], [b], [c])$ , como a seguinte representação em variáveis de estado do sistema em malha fechada sugere:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bk & bk \\ 0 & A - lc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix},$$

na qual  $e := \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ .

O polinômio característico de malha fechada é determinado por

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{cl}) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}) \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{l}\mathbf{c}),$$

e de acordo com a metodologia proposta, os ganhos  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{l}$  são tais que

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}) \in [d_c(s)]$$

e

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{l}\mathbf{c}) \in [d_o(s)]$$

para cada  $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ ,  $\mathbf{b} \in [\mathbf{b}]$  e  $\mathbf{c} \in [\mathbf{c}]$ . Portanto, os pólos em malha fechada do sistema intervalar devem estar contidos em

$$\mathcal{S}([d_c(s)]) \cup \mathcal{S}([d_o(s)])$$

ou seja, a metodologia proposta não cria pólos que não estejam contidos em  $\mathcal{S}([d_c(s)]) \cup \mathcal{S}([d_o(s)])$ .

Argumentos semelhantes aos apresentados no final da Seção 5.3 permitem obter a solução do problema de projeto do observador robusto como  $\mathbf{l} \in [\mathbf{f}_o] = [\mathbf{d}_o]^T \ominus [\boldsymbol{\alpha}]^T$  se o sistema é representado na *forma observável intervalar*, com considerações análogas com respeito ao ganho final do observador de estado.

Um aspecto importante no projeto de controladores por realimentação de estado, através da metodologia de Análise Intervalar proposta, é o uso de conjuntos espectrais de polinômios intervalares como especificações regionais para alocação de pólos. O seguinte procedimento heurístico para determinar regiões adequadas de alocação no plano complexo  $s$  pode ser adotado.

Considere os coeficientes do polinômio característico associado a um conjunto de pólos nominais de malha fechada, dados por  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ . Os pólos nominais de malha fechada são os zeros de

$$d(s) = s^n + \alpha_{n-1}\omega_0 s^{n-1} + \alpha_{n-2}\omega_0^2 s^{n-2} + \dots + \alpha_0\omega_0^n$$

quando  $\omega_0 = 1$ . Aumentando (diminuindo) o valor de  $\omega_0$  acima (abaixo) de um, consegue-se o efeito de mover os zeros de  $d(s)$  para a esquerda (direita) em relação às posições nominais. Permitindo que  $\omega_0 \in [\omega_0^-, \omega_0^+]$ , na qual  $0 \leq \omega_0^- \leq 1 \leq \omega_0^+$ , obtém-se um polinômio intervalar  $[d(s)]$  com coeficientes intervalares  $[\alpha_i] = \alpha_i[\omega_0]^{n-i}$ , para  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Os limitantes  $\omega_0^-$  e  $\omega_0^+$  devem ser escolhidos de maneira que a condição necessária  $d_w \geq \alpha_w$  seja satisfeita. O conjunto espectral resultante  $\mathcal{S}([d(s)])$  contém os pólos nominais de malha fechada e a existência de um ganho robusto por realimentação de estado pode ser eficientemente verificada pelo Teorema 5.3.2.

**Exemplo 5.4.1** Considere a descrição em variáveis de estado na forma controlável associada à função de transferência apresentada no Exemplo 3.5.1 e discutida em (Jaulin et al. 2001):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -[\alpha_0] & -[\alpha_1] & -[\alpha_2] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [ [\beta_0] \ 0 \ 0 ],$$

na qual

$$[\alpha_0] = \frac{[p_3]^2}{[p_2]}, \quad [\alpha_1] = [p_3]^2 + \frac{[p_3]}{[p_2]}, \quad [\alpha_2] = [p_3] + \frac{1}{[p_2]}, \quad [\beta_0] = \frac{[p_1][p_3]^2}{[p_2]}.$$

Assumindo que  $[p_1] = [p_2] = [p_3] = [0.97, 1.03]$  e usando aritmética intervalar, obtém-se o sistema intervalar  $([\mathbf{A}], [\mathbf{b}], [\mathbf{c}])$  caracterizado por

$$\begin{aligned} [\alpha_0] &= [0.9134, 1.0937], & [\alpha_1] &= [1.8826, 2.1227], \\ [\alpha_2] &= [1.9408, 2.0609], & [\beta_0] &= [0.8860, 1.1265]. \end{aligned}$$

O procedimento heurístico anteriormente citado foi aplicado para gerar o polinômio característico intervalar

$$[d_c(s)] = s^3 + [7.469, 8.536]s^2 + [20.89, 27.32]s + [25.98, 38.87],$$

que contém o polinômio característico nominal  $d_c(s) = s^3 + 8s^2 + 24s + 32$ , correspondendo aos pólos  $-4, -2 \pm j2$ . Como o sistema está na forma controlável intervalar, uma solução possível para o problema de alocação robusta de pólos é  $\mathbf{k} = (\mathbf{f}_c)_c = [31.42 \ 22.10 \ 6.001]$ . A solução do Problema 5.3.1 é  $\mathbf{k}^* = [31.42 \ 19.67 \ 5.527]$ . Os espectros de  $\det(s\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + \mathbf{b}\mathbf{k}^*)$  (preto) e  $[d_c(s)]$  (cinza) são ilustrados na Figura 5.1. Os pólos de malha fechada permanecem contidos no espectro de  $[d_c(s)]$  para todos os possíveis valores de  $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ .

O projeto do observador de estado foi desenvolvido com base no fato de que os pólos do observador devem ser aproximadamente duas vezes mais rápidos do que os obtidos com o espectro de  $\det(s\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + \mathbf{b}\mathbf{k}^*)$ . Um polinômio característico intervalar adequado para o projeto do observador de estado é

$$[d_o(s)] = s^3 + [50.050, 79.950]s^2 + [836.58, 2134.7]s + [4672.6, 19045]$$

e após solucionar o Problema 5.3.1 para o sistema dual, foi encontrado o ganho robusto do observador de estado  $\mathbf{l}^* = 10^3 \cdot [0.062 \ 1.312 \ 8.945]^T$ . Os espectros de  $\det(s\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + \mathbf{l}^*[\mathbf{c}])$  (preto) e  $[d_o(s)]$  (cinza) são ilustrados na Figura 5.2. Note que a separação desejada entre os pólos de malha fechada alocados por  $\mathbf{k}^*$  e  $\mathbf{l}^*$  é alcançada.

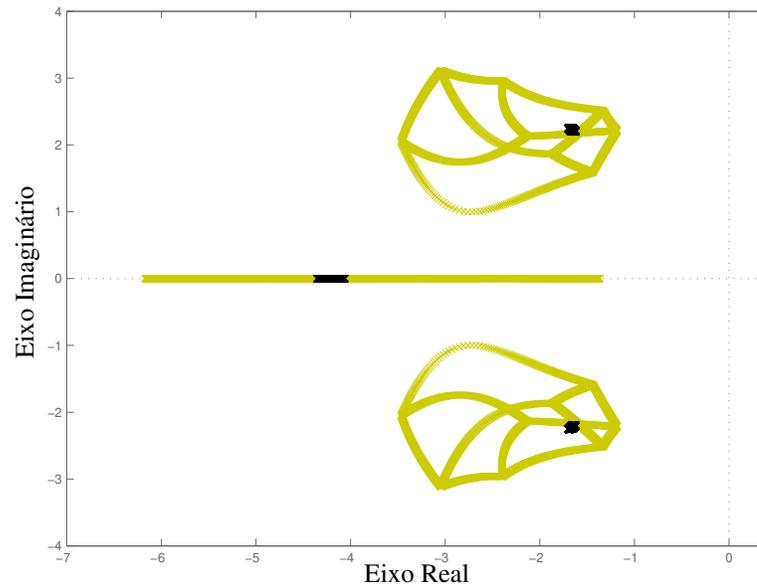


Figura 5.1: Espectros de  $\det(s\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + \mathbf{b}\mathbf{k}^*)$  (preto) e  $[d_c(s)]$  (cinza).

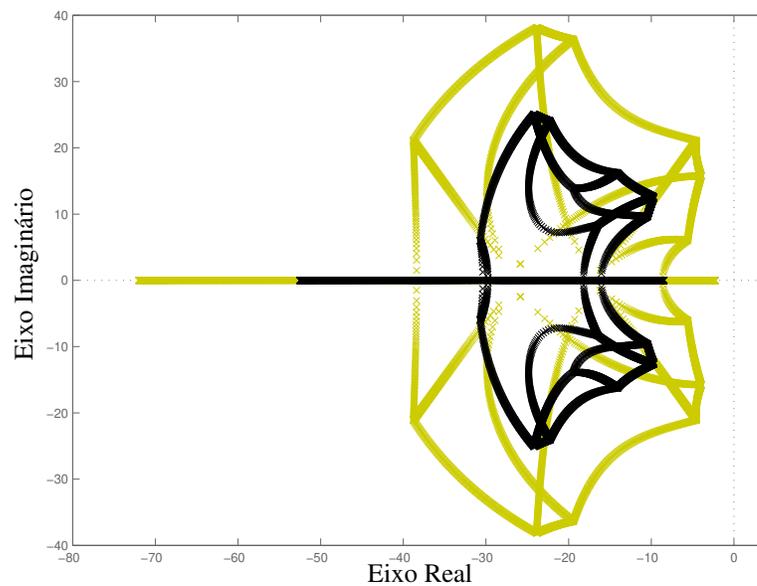


Figura 5.2: Espectros de  $\det(s\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + \mathbf{l}^*\mathbf{c})$  (preto) e  $[d_o(s)]$  (cinza).

A Figura 5.3 apresenta as respostas ao degrau unitário do sistema em malha fechada obtido com o controlador baseado no observador de estado

$$C(s) = -\mathbf{k}^*(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^* + \mathbf{l}^*\mathbf{c})^{-1}\mathbf{l}^*$$

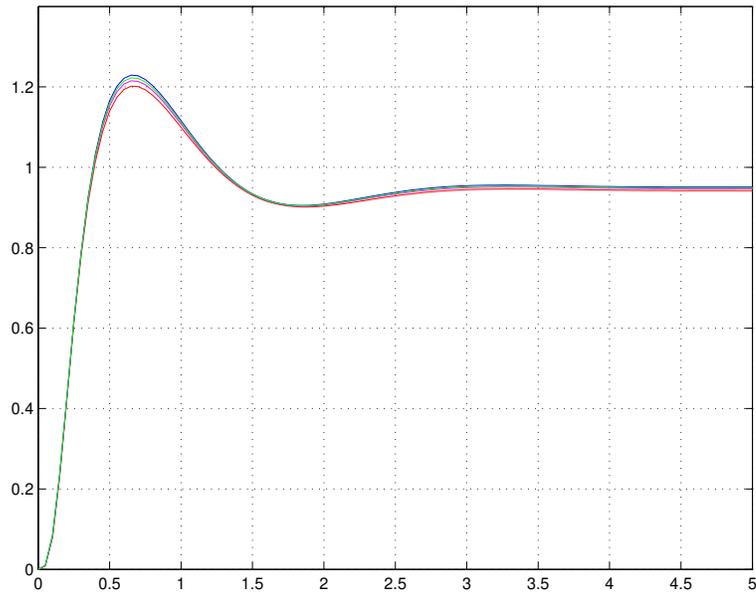


Figura 5.3: Resposta temporal ao degrau unitário (tempo em segundos).

para alguns valores críticos de  $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$  e  $\mathbf{c} \in [\mathbf{c}]$ . A saída exibe pequenas variações porque o ganho do controlador foi capaz de restringir o movimento dos pólos contidos em  $\mathcal{S}([d_c(s)])$  e o ganho do observador mantém os pólos do observador em  $\mathcal{S}[d_o(s)]$  suficiente mais rápidos do que em  $\mathcal{S}([d_c(s)])$ .

## 5.5 Sistemas Multivariáveis

O projeto de controladores por realimentação de variáveis de estado para o sistema linear e invariante no tempo com múltiplas entradas e saídas (MIMO: *Multiple-Input Multiple-Output*)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x},\end{aligned}$$

pode ser reduzido ao projeto de um sistema SISO se  $\mathbf{A}$  é uma matriz cíclica. Uma matriz quadrada é cíclica se o seu polinômio característico é igual ao seu polinômio mínimo. Se o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  é controlável e  $\mathbf{A}$  é cíclica, então o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{q})$  é controlável para quase qualquer  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ , sendo que  $m$  é o número de entradas do sistema (Chen 1999).

Uma extensão deste princípio de projeto para sistemas intervalares é proposto em (Smagina e Brewer 2002). Uma matriz quadrada intervalar  $[\mathbf{A}]$  é cíclica se todas as matrizes em  $[\mathbf{A}]$  são cíclicas; o par intervalar  $([\mathbf{A}], [\mathbf{B}]\mathbf{q})$  é controlável para quase qualquer  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$  se o par intervalar  $([\mathbf{A}], [\mathbf{B}])$  é controlável e  $[\mathbf{A}]$  é uma matriz cíclica. O ganho robusto de realimentação de estado para o sistema MIMO assume a forma  $\mathbf{K} = \mathbf{q}\mathbf{k}$ , na qual  $\mathbf{k}$  pode ser

obtido definindo-se  $[\mathbf{b}] := [\mathbf{B}]\mathbf{q}$ . Aplicam-se então os procedimentos de projeto baseados em Análise Intervalar discutidos nas Seções 5.3 e 5.4.

A utilização da estratégia discutida anteriormente requer a verificação da controlabilidade para sistemas multivariáveis. Como os testes baseados em extensões intervalares para os menores (determinantes) da matriz de controlabilidade têm um custo computacional elevado, é utilizado o procedimento numérico baseado na fatoração  $[\mathbf{Q}][\mathbf{R}]$  intervalar descrito na Seção 3.3.

**Exemplo 5.5.1** *Para ilustrar alguns aspectos do projeto de controladores robustos por realimentação de estado para sistemas multivariáveis, considere a equação de estado linearizada para a velocidade longitudinal de um helicóptero, discutida em (Smagina e Brewer 2002) na qual*

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [a_{11}] & [a_{12}] & -9.8 \\ [a_{21}] & [a_{22}] & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} [b_{11}] & 0 \\ 0 & [b_{12}] \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com  $[a_{11}] = [-0.031, -0.0128]$ ,  $[a_{12}] = [-3.4, -0.1]$ ,  $[a_{21}] = [-0.00077, -0.0007]$ ,  $[a_{22}] = [-0.32, -0.31]$ ,  $[b_{11}] = [-18, -15]$  e  $[b_{22}] = [-3.3, -3]$ . O método da fatoração  $[\mathbf{Q}][\mathbf{R}]$  intervalar foi utilizado para a verificação da controlabilidade do par intervalar  $([\mathbf{A}], [\mathbf{B}])$ . Por conveniência, o algoritmo foi aplicado a  $[\mathbf{M}]^T \in \mathbb{IR}^{6 \times 3}$ . A matriz relevante para a análise é

$$[\bar{\mathbf{R}}] = \begin{bmatrix} [29.7, 38.7] & [-0.40, 0.24] & [-0.73, 1.21] \\ & [0, 0] & [3.11, 3.52] & [-1.55, -0.47] \\ & [0, 0] & [0, 0] & [-3.81, -2.43] \end{bmatrix}.$$

Como  $0 \notin [\bar{r}_{ii}]$ , para  $i = 1, 2, 3$ , conclui-se que o  $\text{rank}([\bar{\mathbf{R}}]) = n$  e portanto, o par intervalar  $([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$  é controlável.

Dada a família de polinômios Hurwitz

$$[d_c(s)] = s^3 + [3, 4]s^2 + [2, 8]s + [0.5, 5.5],$$

deseja-se encontrar o ganho robusto de realimentação de estado  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$  de maneira que  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) \in [d_c(s)]$  para cada  $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$  e  $\mathbf{B} \in [\mathbf{B}]$ , assegurando-se assim a estabilidade robusta para o sistema intervalar de malha fechada. Adotando  $\mathbf{q}^T = [0.8 \ 1.2]$  e solucionando o Problema 5.3.1, obtém-se o ganho robusto de realimentação de estado  $\mathbf{k} = [0.0424 \ -0.9807 \ -1.2604]$ , o que leva a

$$\mathbf{K} = \mathbf{qk} = \begin{bmatrix} 0.0339 & -0.7846 & -1.0083 \\ 0.0509 & -1.1768 & -1.5125 \end{bmatrix}.$$

## 5.6 Projeto de Controladores Não-Frágeis

Um aspecto importante relacionado ao projeto de controladores robustos por realimentação de estado é evitar que pequenas variações nos coeficientes do controlador projetado, devido a questões ligadas a implementação, por exemplo, deteriore significativamente o desempenho do sistema em malha fechada (Keel e Bhattacharyya 1997a).

Para evitar *fragilidade*, propõe-se um procedimento de projeto de controladores robustos por realimentação de estado baseado na solução de um *problema de centralização*, um problema clássico de Programação Não-Linear (Luemberger 1989). A idéia é semelhante à discutida anteriormente na Seção 4.6 e consiste em encontrar um ganho central  $\mathbf{k}$  e o máximo raio  $\theta \geq 0$ , de maneira que

$$\mathbf{k} + \theta \mathcal{C} \in \mathcal{K}_0,$$

na qual  $\mathcal{C}$  é um dado conjunto convexo especificando como os coeficientes do controlador podem variar e  $\mathbf{k} + \theta \mathcal{C} := \{\mathbf{k} + \theta \mathbf{v}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}\}$ . O raio  $\theta$  representa uma medida da *não-fragilidade* do controlador robusto  $\mathbf{k}$  quando os seus coeficientes variam como especificado em  $\mathcal{C}$ . Assumindo que  $\mathcal{C}$  é um hiper-retângulo, ou seja, um vetor intervalar, o problema assume a seguinte forma:

### Problema 5.6.1

$$\begin{aligned} & \underset{\theta, \mathbf{k}, \bar{\mathbf{k}}}{\text{maximizar}} && \theta \\ & \text{sujeito a} && \begin{aligned} (\mathbf{I} + \theta \mathbf{E})\mathbf{k}\mathbf{T}_c - \bar{\mathbf{k}}\Delta &\geq \mathbf{f}_c^-, \\ (\mathbf{I} + \theta \mathbf{E})\mathbf{k}\mathbf{T}_c + \bar{\mathbf{k}}\Delta &\leq \mathbf{f}_c^+, \\ (\mathbf{I} - \theta \mathbf{E})\mathbf{k}\mathbf{T}_c - \bar{\mathbf{k}}\Delta &\geq \mathbf{f}_c^-, \\ (\mathbf{I} - \theta \mathbf{E})\mathbf{k}\mathbf{T}_c + \bar{\mathbf{k}}\Delta &\leq \mathbf{f}_c^+, \\ -\bar{\mathbf{k}} &\leq (\mathbf{I} + \theta \mathbf{E})\mathbf{k} \leq \bar{\mathbf{k}}, \\ -\bar{\mathbf{k}} &\leq (\mathbf{I} - \theta \mathbf{E})\mathbf{k} \leq \bar{\mathbf{k}}, \\ \theta &\geq 0, \end{aligned} \end{aligned}$$

na qual  $\mathbf{E} := \text{diag}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , com  $e_i = 1$ , se a variação no  $i$ -ésimo componente do ganho  $\mathbf{k}$  é considerada, e  $e_i = 0$ , caso contrário.  $\square$

A solução do Problema 5.6.1 determina o centro  $\mathbf{k}^*$  e o raio  $\theta^*$  do maior hiper-retângulo  $[\mathbf{k}^* - \theta^* \mathbf{E}, \mathbf{k}^* + \theta^* \mathbf{E}]$  contido em  $\mathcal{K}_0$ , o que maximiza as possíveis variações nos coeficientes de  $\mathbf{k}^*$ . O Problema 5.6.1 pode ser resolvido com o auxílio do Toolbox de Otimização do Matlab, ou de *softwares* voltados para problemas de otimização Global.

## 5.7 Conclusão

Neste Capítulo, foi apresentada uma nova metodologia para o projeto de controladores robustos para sistemas intervalares descritos por variáveis de estado, baseada em princípios de projeto por alocação robusta de pólos. A formulação do problema de projeto de controladores robustos no contexto dos conceitos e métodos de Análise Intervalar foi conseguida a partir de especificações regionais para alocação de pólos na forma de conjuntos espectrais de polinômios intervalares. Foram obtidas condições simples para a existência de controladores robustos por realimentação de estado e apresentadas extensões igualmente simples de resultados conhecidos em projeto clássico de controladores por realimentação de estado. A questão da análise da controlabilidade e da observabilidade em sistemas intervalares foi tratada através do método da fatoração  $[Q][R]$  intervalar, apresentado no Capítulo 3.

# Capítulo 6

## Conclusão Geral

Esta Tese abordou o uso de Análise Intervalar na análise e projeto de controladores robustos baseados em alocação de pólos para sistemas de controle com plantas intervalares.

Foram investigadas propriedades importantes relacionadas ao conceito de equação Diofantina intervalar através da análise da não-singularidade robusta da matriz de Sylvester intervalar e da determinação do raio de não-singularidade robusta de uma matriz intervalar. Os resultados se mostraram adequados ao problema da análise da coprimo-robustez de polinômios intervalares.

A Análise Intervalar leva a soluções confiáveis para problemas numéricos sujeitos a incertezas, erros de arredondamento ou aproximações. Essa metodologia foi aplicada ao problema de projeto de controladores para plantas lineares intervalares e invariantes no tempo. O objetivo foi encontrar soluções confiáveis para o problema de alocação de pólos quando os coeficientes da planta são intervalos fechados. No entanto, o método proposto se aplica mesmo quando os coeficientes da planta são quantidades precisamente conhecidas e há interesse nos efeitos dos erros de arredondamento na solução do problema de alocação de pólos.

Demonstra-se que a análise e o projeto de controladores por alocação robusta de pólos podem ser sistematizados através de Análise Intervalar. A caracterização do conjunto dos controladores robustos como soluções internas de uma equação Diofantina intervalar criou condições para se obter muitas propriedades úteis relacionadas ao problema de alocação robusta de pólos. Como consequência da utilização dos conceitos de Análise Intervalar e suas interpretações em termos de alocação robusta de pólos, o projeto de controladores robustos foi realizado através de abordagens em Programação Matemática. A utilização dos resultados de Análise Intervalar permitiu uma solução mais simples para o problema de alocação robusta de pólos, quando comparada com as metodologias apresentadas em (Soh et al. 1987) e (Keel e Bhattacharyya 1999b). A caracterização de um sub-conjunto convexo de controladores robustos permitiu a formulação do problema de projeto de controladores não-frágeis como um problema de centralização, o qual foi resolvido por um algoritmo de Otimização Global. Os procedimentos de projeto propostos são facilmente implementados com base em programas computacionais existentes.

Uma nova metodologia para o projeto de controladores robustos para sistemas intervalares

lares descritos por variáveis de estado, baseada no princípio de projeto por alocação robusta de pólos, foi introduzida. Foram obtidas condições simples para a existência de controladores robustos por realimentação de estado e apresentadas extensões igualmente simples de resultados conhecidos em projeto clássico de controladores por realimentação de estado. A questão da análise da controlabilidade e da observabilidade em sistemas intervalares foi tratada através de um método de fatoração  $[Q][R]$  intervalar, desenvolvido numa etapa preliminar do trabalho.

O trabalho iniciado nesta Tese pode ser estendido em várias direções para tratar problemas como a redução de ordem de modelos intervalares (lineares e invariantes no tempo) e as soluções de outras equações típicas em Controle como as equações de Lyapunov e Riccati. Análise Intervalar é uma área emergente dentro da Teoria de Controle e oferece inúmeras possibilidades para pesquisas futuras.

# Referências Bibliográficas

- Ackermann, J. (1993). *Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters*, Springer-Verlag, New York, NY.
- Alefeld, G. e Herzberger, J. (1983). *Introduction to Interval Computations*, Academic Press, New York, NY.
- Åström, K. J. e Wittenmark, B. (1997). *Computer-Controlled Systems: Theory and Design, 3rd. edition*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Barmish, B. R. (1994). *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan Publishing Co., New York, NY.
- Barnett, S. (1990). *Matrices: Methods and Applications*, Oxford Applied Mathematics and Computing.
- Bartlett, A. C., Hollot, C. V. e Lin, H. (1988). Root location of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges, *Mathematics of Controls, Signals and Systems* **1**: 61–71.
- Beeck, H. (1975). Zur problematik der hüllenbestimmung von intervallgleichungssystemen, *Lecture Notes in Computer Science* **29**: 150–159.
- Bentbib, A. H. (2002). Solving the full rank interval least squares problem, *Applied Numerical Mathematics* **41**: 283–294.
- Bhattacharyya, S. P., Chapellat, H. e Keel, L. H. (1995). *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Blondel, V. D. e Tsitsiklis, J. N. (2000). A survey of computational complexity results in systems and control, *Automatica* **36**: 1249–1274.
- Chen, C. T. (1999). *Linear System Theory and Design, 3rd. edition*, Oxford University Press, Inc., New York.
- Henrion, D. e Lassere, J. B. (2002). *GloptiPoly: Global optimization over polynomials with Matlab and SeDuMi, Version 2.1*, [www.lass.fr/henrion/software/gloptipoly](http://www.lass.fr/henrion/software/gloptipoly).

- Horst, R. e Pardalos, P. M. (1994). *Hand-book of Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Ignizio, J. P. (1982). *Linear Programming in Single and Multiple-Objective Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Inuiguchi, M. e Kume, Y. (1991). Goal programming problems with interval coefficients and target intervals, *European Journal of Operational Research* **52**: 345–360.
- Jansson, C. e Rohn, J. (1999). An algorithm for checking regularity of interval matrices, *SIAM Journal on Mathematical Analysis and Applications* **20**: 756–776.
- Jaulin, L., Kieffer, M., Didrit, O. e Walter, E. (2001). *Applied Interval Analysis*, Springer-Verlag, London.
- Juzzo, E. A., Lordelo, A. D. S. e Ferreira, P. A. V. (2003). Condições suficientes para ir-reduzibilidade de plantas intervalares via análise intervalar, *Anais do XXVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, São José do Rio Preto, Brasil, p. 105.
- Keel, L. H. e Bhattacharyya, S. P. (1997a). A linear programming approach to controller design, *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, USA, pp. 2139–2148.
- Keel, L. H. e Bhattacharyya, S. P. (1997b). Robust, fragile or optimal?, *IEEE Transactions on Automatic Control* **42**: 1098–2005.
- Keel, L. H. e Bhattacharyya, S. P. (1999a). Robust stability and performance with fixed-order controllers, *Automatica* **35**: 1717–1724.
- Keel, L. H. e Bhattacharyya, S. P. (1999b). Robust stability and performance with fixed-order controllers, *Automatica* **35**: 1717–1724.
- Kelling, B. (1994). Geometric analysis of bounded solution sets of systems of linear interval equations, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **74**: 625–628.
- Lordelo, A. D. S. e Ferreira, P. A. V. (2002a). Alocação robusta de pólos: uma abordagem intervalar, *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Automática*, Natal, Brasil, pp. 2469–2473.
- Lordelo, A. D. S. e Ferreira, P. A. V. (2002b). Interval analysis and design of robust pole assignment controllers, *Proceedings of the 41th IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, USA, pp. 1461–1467.
- Lordelo, A. D. S. e Ferreira, P. A. V. (2002c). Linear controller design by goal programming, *Proceedings of the IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design*, Glasgow, Escócia, pp. 145–150.

- Lordelo, A. D. S. e Ferreira, P. A. V. (2002d). Projeto de controladores lineares via programação alvo, *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Automática*, Natal, Brasil, pp. 2409–2414.
- Lordelo, A. D. S. e Ferreira, P. A. V. (2004). Analysis and design of robust pole placement controllers using the interval diophantine equation, (*em preparação*) .
- Lordelo, A. D. S., Juzzo, E. A. e Ferreira, P. A. V. (2004a). On the design of robust controllers using the interval diophantine equation, *Proceedings of the IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design (aceito)*, Taipei, Taiwan.
- Lordelo, A. D. S., Juzzo, E. A. e Ferreira, P. A. V. (2004b). Projeto de controladores robustos através da equação diofantina intervalar, *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática (aceito)*, Gramado, Brasil.
- Luemberger, D. G. (1989). *Linear and Nonlinear Programming*, 2nd. Edition, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts.
- Moore, R. E. (1966). *Interval Analysis*, Prentice Hall, inc., Englewood Cliffs, N.J.
- Moore, R. E. (1979). *Methods and Applications of Interval Analysis*, SIAM, Philadelphia.
- Neumaier, A. (1990). *Interval Methods for Systems of Equations*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Oettli, W. (1965). On the solution of a linear system with inaccurate coefficients, *SIAM Journal of Numerical Analysis* **2**: 115–118.
- Oettli, W. e Prager, W. (1964). Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides, *Numer. Math.* **6**: 405–409.
- Ogata, K. (1997). *Modern Control Engineering*, 3rd. Edition, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Postlethwaite, S. S. I. (1996). *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, John Wiley and Sons , West Sussex, England.
- Prado, M. L. M., Lordelo, A. D. S. e Ferreira, P. A. V. (2004). An interval analysis approach for the design of robust state feedback controllers, (*em preparação*) .
- Rohn, J. (1986). Inner solutions of linear interval equations, *Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg* **212**: 157–158.
- Rohn, J. (1989). Systems of linear interval equations, *Linear Algebra and Applications* **126**: 39–78.

- Rotstein, H., Peña, R. S., Bandoni, J., Desages, A. e Romagnoli, J. (1991). Robust characteristic polynomial assignment, *Automatica* **27**: 711–715.
- Rump, S. M. (1993). *Validated Solution of Large Linear Systems*, Computing Supplementum 9, Springer-Verlag.
- Rump, S. M. (1994). *Verification methods for dense and sparse systems of equations*, Topics in Validated Computations, J. Herzberger, Amsterdam.
- Rump, S. M. (1999). *INTLAB - INTERVAL LABORATORY*, in *Developments in Reliable Computing*, T. Csendes, Kluwer Academic Publishers. URL: <http://www.ti3.tu-harburg.de/%7Erump/intlab/>.
- Smagina, Y. e Brewer, I. (2002). Using interval arithmetic for robust state feedback design, *Systems & Control Letters* **46**: 187–194.
- Soh, Y. C., Evans, R. J., Petersen, I. e Betz, R. E. (1987). Robust pole assignment, *Automatica* **23**: 601–610.
- Wei, K. (1994). Stabilization of linear time-invariant interval systems via constant state feedback control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**: 22–32.
- Wei, K. e Barmish, B. R. (1989). Making a polynomial hurwitz-invariant by choice of feedback gains, *International Journal of Control* **50**: 1025–1038.
- Yedavali, R. K. (1985). Perturbation bounds for robust stability in linear state space models, *International Journal of Control* **42**: 1507–1517.
- Yu, P. L. (1985). *Multiple Criteria Decision Making-Concepts, Techniques and Extensions*, Plenum Press, New York, NY.
- Zarowski, C. J., Ma, X. e Fairman, F. W. (2000). Qr - factorization method for computing the greatestcommon divisor of polynomials with inexact coefficients, *IEEE Transactions on Signal Processing* **48**(11): 3042–3051.
- Zhou, K. e Khargonekar, P. P. (1987). Stability robustness bounds for linear state-space models with structured uncertainty, *IEEE Transactions on Automatic Control* **32**: 621–623.