



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Comunicações - DECOM

Análise Teórica e Experimental de Métodos de Estimação de DOA e de Estimação de Frequência com Alta Resolução

Tese submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da
Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Comunicações, como parte
dos requisitos exigidos para a obtenção do título de

Doutor em Engenharia Elétrica.

Autor

Carlos Antonio Alves

Engenheiro Eletricista – DEE - FEIS-UNESP - 12/1989
Mestre em Engenharia Elétrica –FEIS-UNESP – 12/1995

02 de Julho de 2004

Orientador:

**Prof. Doutor Amauri Lopes
DECOM - FEEC - UNICAMP**

Banca Examinadora

Prof. Dr. Amauri Lopes	FEEC / UNICAMP – Presidente
Prof. Dr. Rodrigo Pinto Lemos	EEE / UFG – Goiânia - GO
Prof. Dr. Aparecido Augusto de Carvalho	FE / UNESP - Ilha Solteira - SP
Prof. Dr. Yuzo Iano	FEEC / UNICAMP
Prof. Dr. João Baptista Tadanobu Yabu-uti	FEEC / UNICAMP
Prof. Dr. Jaime Portugheis	FEEC / UNICAMP

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

AL87a Alves, Carlos Antonio
Análise teórica e experimental de método de
estimação de DOA e de estimação de frequência com
alta resolução / Carlos Antonio Alves.--Campinas, SP:
[s.n.], 2004.

Orientador: Amauri Lopes.

Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Processamento de sinais – Técnicas digitais. 2.
Detecção de sinais. 3. Otimização matemática. 4.
Discriminadores de frequência. I. Lopes, Amauri. II.
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Resumo

Estimação de frequência e de ângulo de incidência (DOA) com alta resolução são problemas equivalentes e que encontram uma vasta gama de aplicações em campos como radar, sonar, medicina, astrofísica, processos industriais e, mais recentemente, em comunicações móveis. Neste trabalho são realizadas as análises teóricas e experimentais dos métodos de estimação IQML e MODE, derivados do Estimador de Máxima-Verossimilhança (MLE), e de suas versões mais modernas, o M-IQML e o MODEX. É apresentada uma proposta de descrição unificada destes métodos e seu algoritmo computacional, o qual é inserido em um programa de simulação em ambiente Matlab[®]. As análises teóricas dos métodos são realizadas comparando-se suas expressões na descrição unificada. São propostos uma nova forma de restrição linear para o processo de otimização associado à estimação e um novo método de estimação derivado do estimador ML. As análises experimentais dos métodos de estimação são realizadas comparando-se figuras de mérito como a variância das estimativas, limiar de estimação e comportamento assintótico. As duas propostas deste trabalho apresentam desempenhos melhores do que aqueles encontrados na literatura.

Abstract

Frequency and direction-of-arrival (DOA) estimation with high resolution are equivalent problems and they are used in several applications in fields such as radar, sonar, medicine, astrophysics, industrial process, and more recently, in mobile communications. This work presents the theoretical and experimental analysis of the IQML and MODE estimation methods, which are derived from the Maximum Likelihood Estimator (MLE), as well as their modern versions, the M-IQML and MODEX. It is proposed an unified description of these methods and its computational algorithm, which is implemented in Matlab[®] environment. The theoretical analyses of the methods are realized comparing their expressions in the unified description. A new model of linear restriction for the optimization process associated to estimation, along with a new estimation method based on the ML estimator, is proposed. The experimental analysis of the estimation methods are performed comparing index figures such as variance of the estimates, estimation threshold and assintotic behavior. Both proposed approaches show better performances than those presented in the literature.

Agradecimentos

Terminando um período de aprendizado tão longo, impossível deixar de lado algumas reflexões sobre isso e as pessoas que tiveram influência significativa nesse processo e em todo o ambiente que me cercou.

Na Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp a pessoa primeira foi o professor Amauri Lopes, orientador de porte e ao mesmo tempo figura modesta, humilde, um exemplo de pessoa humana. Mesmo assoberbado com atividades administrativas e com os cuidados de pai e de filho, sempre esteve disponível, foi sereno e ponderado em suas observações. Sem dúvida alguma, enxergo a vida, a profissão de pesquisador e de professor de uma maneira muito mais nobre em consequência da herança que recebi dele. Com os diversos outros professores que me deparei, Pedro Peres, Michel, Fábio e João Marcos entre outros, aprendi muito, tanto quanto aluno como professor, aprendi a aprender e a melhor ensinar.

No meu local permanente de trabalho, o Departamento de Engenharia Elétrica, recebi toda estrutura, apoio material e incentivo das chefias e de todos colegas de trabalho, principalmente Edvaldo, colega desde a graduação, com quem divido a sala e muitas boas idéias.

No lar, a minha esposa Cristina que sempre me apoiou e confortou nos aparentes fracassos, mas que sempre nos uniram e fizeram crescer cada vez mais, e a sua dupla função que exerceu junto aos nossos meninos Alexandre e Alex nas minhas ausências.

Por fim, a todos, amigos e parentes que sempre torceram por mim nesta conquista pessoal e que imagino ser mais importante pelos frutos que já colhi e aqueles que virão.

Sobre o tempo dilatado, de fato, gostaria que tivesse sido menor, mas tenho certeza que não transferi o ônus da demora sobre ninguém exceto minha família, não me exclui das coisas relevantes, não posterguei outros compromissos que acreditava serem importantes, mas principalmente, sinto que não repousei sobre o trabalho de outrem. Importa sentir que cresci sempre e que este tempo foi muito produtivo em minha vida pessoal e profissional.

Conteúdo

Resumo e Abstract	i
Agradecimentos	iii
Lista de Figuras	ix
Notação e Definições	xi
Nomenclatura e Abreviações	xiii

Capítulo 1 – Visão Geral da Área, do Problema e das Técnicas de Estimação de DOA

1.1 – Introdução	01
1.2 – Técnicas de Estimação de DOA e Estado da Arte	03
1.2.1 – Estimação de DOA e Estimação de Frequência	03
1.2.2 – Classificação das Técnicas de Estimação de DOA	04
1.2.2.1 – Métodos Espectrais	05
1.2.2.2 – Métodos Paramétricos	05
1.2.2.3 – Métodos Derivados do Critério da Máxima-Verossimilhança	06
1.2.3 – Estado de Arte	07
1.3 – Objetivos deste Trabalho	07
1.3.1 – Descrição Unificada dos Métodos Derivados do ML	08
1.3.2 – Métodos Derivados do ML: IQML, MODE, M-IQML e MODEX	08
1.3.3 – Algoritmo Geral, Implementação e Critérios de Desempenho	08
1.3.4 – Novas Propostas	09
1.4 – Organização dos Capítulos	09
1.5 - Publicações	11

Capítulo 2 – Modelos de Sinais e de Ruído, Definições Gerais e Critérios de Avaliação de Métodos de Estimação de DOA

2.1 – Introdução	13
2.2 – Modelos de Sinais para DOA	13
2.2.1 – Modelo de Onda e o Sinal Captado no Arranjo	14
2.2.2 – O Arranjo Linear Uniforme	16
2.2.3 – Modelos de Sinais para ULA	17
2.2.3.1 - Modelos de Sinais Estocásticos	20
2.2.3.1.1 - Modelo Condicional	21
2.2.3.1.2 - Modelo Incondicional	21
2.2.4 – Modelo de Ruído	21
2.3 – Matriz de Correlação Espacial	22

2.4 – Critérios de Avaliação de Métodos de Estimação de DOA	24
Capítulo 3 – Limites de Cramér-Rao para Estimação de Frequência	
3.1 – Introdução	27
3.2 – CRBs para o Modelo de Sinal Determinístico	28
3.2.1 – Duas Exponenciais Complexas	29
3.2.2 – Uma Exponencial Complexa	29
3.3 – CRBs para o Modelo Condicional	30
3.3.1 – Expressão Exata	30
3.3.2 – Expressão Assintótica	31
3.4 – CRB Assintótico Para o Modelo Incondicional	32
3.5 – Variância das Estimativas dos DOA	32
3.6 – Simulações Numéricas e Análise de Resultados	33
3.6.1 – CRB Determinístico - Uma Exponencial Complexa	33
3.6.2 – CRB de Sinal Determinístico: Duas Exponenciais Complexas	34
3.6.3 – CRBs Assintóticos: Duas Exponenciais Complexas	36
3.6.3.1 – Superfícies de crb_{ca} e crb_i	36
3.6.3.2 – CRBs em Função da SNR	39
3.7 – Conclusões	40
Capítulo 4 – A Estimação de Máxima-Verossimilhança	
4.1 – Introdução	41
4.2 – O Estimador MLE	41
4.3 – O Estimador MLE Determinístico (DMLE)	42
4.4 – O Estimador MLE Estocástico (SMLE)	45
4.5 – Simulações Numéricas	46
4.5.1 – Análise da Função de Verossimilhança	46
4.5.2 – Comparação de Desempenho do MLE Determinístico e o CRB	50
4.6 – Conclusões	51
Capítulo 5 – Uma Estrutura Unificada para Métodos de Estimação Derivados do DMLE	
5.1 – Introdução	53
5.2 – Equacionamento Básico dos Métodos Derivados do DMLE	54
5.3 – Análise do Conjunto de Restrições do Vetor de Parâmetros $\mathbf{b}_K$	56
5.3.1 – Restrição de Não-Trivialidade	56
5.3.2 – Restrição Quanto ao Tipo de Sinal	56
5.3.3 – Estruturando a Simetria Complexa Conjugada	57

5.4 – Descrição Unificada para os Métodos Baseados no DMLE	58
5.5 – Proposta de um Algoritmo para a Descrição Unificada	59
5.6 – Restrições de Não-Trivialidade Aplicadas ao Vetor de Parâmetros $\mathbf{b}_K$ para o Algoritmo Unificado	61
5.6.1 – Restrição Linear Real (RLR) e Restrição Linear Imaginária (RLI)	61
5.6.2 – Restrição Linear Central (RLC) – Caso K par	62
5.6.3 – Restrição Quadrática ou de Norma (RN)	63
5.6.4 – Conclusões Sobre as Restrições de Coeficientes	64
5.7 – Implementação Computacional do Algoritmo Unificado	64
5.8 – Conclusões	65

Capítulo 6 - Métodos de Estimação Derivados do DMLE – Parte I: IQML e M-IQML

6.1 – Introdução	67
6.2 – Método IQML	67
6.2.1 – Método IQML - Algoritmo Unificado	68
6.2.2 – Método IQML - Algoritmo Original	69
6.2.2.1 – Implementação Computacional do Método IQML : Algoritmo Original	70
6.2.3 – Principais Características e Problemas do Método IQML	71
6.3 – Método M-IQML	72
6.3.1 – O Algoritmo M-IQML	72
6.3.2 – Matriz de Transformação $\mathbf{W}_N$ no Método M-IQML	73
6.4 – Simulações Numéricas e Análise de Resultados	75
6.4.1 – Descrição Geral do Programa de Simulação dos Métodos de Estimação de Frequência e de DOA	76
6.4.2 – Análise das Superfícies de Desempenho do Método IQML sob Restrições Lineares Real e Imaginária	77
6.4.3 – Análise das Superfícies de Desempenho do Método IQML sob Restrição Linear Central e Restrição de Norma	78
6.4.4 – Comportamento Assintótico dos Métodos IQML e M-IQML	81
6.4.4.1 – Métodos IQML_{RLC} e IQML_{RN}	82
6.4.4.2 – Comportamento Assintótico do Método M-IQML	84
6.4.4.2.1 – M-IQML sob Restrição Linear Central e de Norma	84
6.4.4.2.2 – Método $\text{M-IQML}_{\text{RN}}$ e Matriz $\mathbf{W}_N$	85
6.4.4.3 – Comparação entre o Desempenho Assintótico do Método IQML e do M-IQML	86
6.5 – Conclusões	88

Capítulo 7 - Métodos de Estimação Derivados do DMLE - Parte II: MODE e MODEX

7.1 – Introdução	91
7.2 – Método MODE	91
7.2.1 – Algoritmo para o Método MODE	93
7.3 – Método MODEX	94
7.3.1 – Obtenção dos Conjuntos de Estimativas	94
7.3.2 – Procedimento para Seleção de Raízes do MODEX	96
7.3.3 – Valor do Parâmetro Q e suas Implicações	97
7.4 – Simulações e Resultados	97
7.4.1 – Método MODE	98
7.4.2 – Método MODEX	99
7.4.3 – Métodos MODE_{RLC} e $\text{MODEX}_{\text{RLR}}$	101
7.4.4 – Métodos MODE e MODEX sob Restrição Linear Central	102
7.4.5 – Métodos MODEX e M-IQML sob Restrição Linear Central	104
7.5 – Conclusões	106

Capítulo 8 – Proposta de Extensão do Método MODE: O MODE-ES

8.1 – Introdução	109
8.2 – Considerações sobre o MODEX	109
8.3 – Proposta de um Novo Método de Estimação: MODE-ES	110
8.3.1 – Comparação entre os Métodos MODE-ES e MODEX	111
8.4 – Simulações e Resultados	112
8.4.1 – Desempenho dos Métodos MODE-ES e $\text{MODEX}_{\text{RLR}}$	112
8.4.2 – Desempenho dos Métodos $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ e $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$	114
8.4.3 – Desempenho do Método $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ e Novas Restrições	115
8.5 – Conclusões	118

Capítulo 9 – Conclusões e Sugestões para Prosseguimento desse Trabalho

9.1 – Introdução	119
9.1 – Resultados e Conclusões	120
9.2 – Sugestões Para Prosseguimento	124

Referências Bibliográficas	125
-----------------------------------	------------

Lista de Figuras

Capítulo 2 - Modelos de Sinais e de Ruído, Definições Gerais e Critérios de Avaliação de Métodos de Estimação e de DOA

2.1	Representação bidimensional de uma fonte de onda, dois sensores e o DOA θ_k	14
2.2	Arranjo Linear Uniforme (ULA) com M Sensores e uma fonte de onda	16

Capítulo 3 - Limites de Cramér-Rao para Estimação de Frequências

3.1	crb_1 em função do número de sensores (M) – SNR = 0 dB e N=1	34
3.2	crb_d em função da diferença de fase – SNR = 0 dB	35
3.3	Curvas de crb_d - $0,03\pi \leq \Delta\omega \leq 0,35\pi$ e $0 \leq \varphi < -\pi$ rad - SNR = 0 e M = 10	36
3.4	Curva de crb_{ca} - $0,03\pi \leq \Delta\omega \leq 0,35\pi$ e $0 \leq \rho < 1$ - SNR = 0 dB e M = 10	37
3.5	Curvas de crb_i - $0,03\pi \leq \Delta\omega \leq 0,35\pi$ e $0 \leq \rho < 1$ - SNR = 0 dB e M = 10	37
3.6	Curvas da Diferença dos CRBs entre $\rho = 1$ e $\rho = 0$, em função de $\Delta\omega$	38
3.7	crb_{ca} e crb_i em função da SNR, $\omega_1 = 0.174\pi$, N = 100, M = 10 e ω_2 indicado	39

Capítulo 4 - A Estimação de Máxima-Verossimilhança

4.1	Superfície da Função de Verossimilhança: Caso 3.1 – Sem ruído	47
4.2	Curvas de Níveis da Figura 4.1 – Sem ruído	48
4.3	Função de Verossimilhança: Caso 3.1 – SNR = -10 dB	49
4.4	Função de Verossimilhança: Caso 3.1 – SNR = -2 dB	49
4.5	Função de Verossimilhança: Caso 3.1 – SNR = 4 dB	50
4.6	Curvas de crb_{ca} e ML_D em função do espaçamento entre as frequências ($\Delta\omega$)	51

Capítulo 6 - Métodos de Estimação Derivados do MLE – Parte I: IQML e M-IQML

6.1	Superfícies de Desempenho do IQML _{RLR} e IQML _{RLI}	78
6.2	Superfícies de Desempenho do IQML _{RLC}	79
6.3	Superfícies de Desempenho do IQML _{RN}	80
6.4	Curvas de Desempenho Médio: IQML _{RLC} e IQML _{RN}	80
6.5	Número Médio de Iterações dos Métodos IQML _{RLC} e IQML _{RN}	81
6.6	Desempenho Assintótico: IQML _{RLC} e IQML _{RN} – três iterações	83
6.7	Desempenho Assintótico: IQML _{RLC} e IQML _{RN} – 20 iterações	83

6.8	Desempenho Assintótico: IQML_{RLC} – três e 20 iterações	84
6.9	Desempenho Assintótico: $\text{M-IQML}_{\text{RLC}}$ e $\text{M-IQML}_{\text{RN}}$ com três iterações fixas	85
6.10	Desempenho Assintótico: $\text{M-IQML}_{\text{RN}}$ e matrizes $\mathbf{W}$ e $\mathbf{W}_N$ - três iterações	86
6.11	Desempenho Assintótico: IQML_{RLC} e $\text{M-IQML}_{\text{RLC}}$ com três iterações - $\rho = 0$	87
6.12	Desempenho Assintótico: IQML_{RLC} e $\text{M-IQML}_{\text{RLC}}$ com três iterações - $\rho = 1,0$	88

Capítulo 7 - Métodos de Estimação Derivados do MLE - Parte II: MODE e MODEX

7.1	Desempenho do método MODE – duas iterações e $\rho = 0$	98
7.2	Desempenho do método MODE – duas iterações e $\rho = 1,0$	99
7.3	Desempenho do método MODEX – duas iterações e $\rho = 0$	100
7.4	Desempenho do método MODEX – duas iterações e $\rho = 1,0$	100
7.5	Desempenho dos métodos MODE_{RLC} e $\text{MODEX}_{\text{RLR}}$ – $\rho = 0$	101
7.6	Desempenho dos métodos MODE_{RLC} e $\text{MODEX}_{\text{RLR}}$ – $\rho = 1,0$	102
7.7	Desempenho dos métodos MODE e MODEX – restrição RLC e $\rho = 0$	103
7.8	Desempenho dos métodos MODE e MODEX – restrição RLC e $\rho = 1,0$	103
7.9	Desempenho dos métodos M-IQML e MODEX – restrição RLC e $\rho = 0$	105
7.10	Desempenho dos métodos M-IQML e MODEX – restrição RLC e $\rho = 1,0$	105

Capítulo 8 – Proposta de Extensão do Método MODE: O MODE-ES

8.1	Desempenho dos métodos MODE-ES e $\text{MODEX}_{\text{RLR}}$ - $\rho = 0$	113
8.2	Desempenho dos métodos MODE-ES e $\text{MODEX}_{\text{RLR}}$ - $\rho = 1,0$	113
8.3	Desempenho dos métodos MODE-ES e MODEX – restrição RLC - $\rho = 0$	114
8.4	Desempenho dos métodos MODE-ES e MODEX – restrição RLC - $\rho = 1,0$	115
8.5	Desempenho dos métodos $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ - $\rho = 0$	116
8.6	Desempenho dos métodos $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ – $\rho = 1,0$	117

Notação e Definições

- $\mathbf{a}(\omega_k)$ é o vetor direção ou vetor de transferência da frequência ω_k
- $\mathbf{A}(\omega)$ é a matriz de transferência
- $\mathbf{b}$ é o vetor de parâmetros
- $\mathbf{B}$ é a matriz formada pelo vetor de coeficientes $\mathbf{b}$
- $\mathbf{D}_\omega$ é a derivada da matriz $\mathbf{A}$
- d é o espaçamento entre antenas adjacentes no arranjo linear de antenas
- $\mathbf{E}\{\mathbf{y}\}$ é a esperança estatística do vetor $\mathbf{y}$
- $F_k(t)$ é a amplitude da k -ésima onda incidente
- F_{DMLE} Função custo do Estimador ML Determinístico (DMLE)
- F_{SMLE} Função custo do Estimador ML Estocástico (SMLE)
- F_U Função custo equivalente reparametrizada (unificada)
- F_{UG} Função custo equivalente reparametrizada (unificada e geral)
- $\mathbf{I}_p$ matriz de permutação
- $\mathbf{J}$ é a matriz de informação de Fisher
- K é número de fontes de sinais
- k é índice do k -ésimo sinal
- $\mathbf{y}$ é o vetor de dados de saída do arranjo (sinal e ruído)
- L_{DMLE} Função de Verossimilhança para modelo de sinal condicional
- L_{SMLE} Função de Verossimilhança para modelo de sinal incondicional
- M é número de sensores no arranjo de sensores
- m é o índice do m -ésimo sensor
- MC é número de realizações
- $\mathbf{ML}_D$ matriz de covariância do DMLE (assintótica)
- $\mathbf{ML}_S$ matriz de covariância do SMLE (assintótica)
- N é número total de *snapshots*
- n é índice do n -ésimo *snapshot*
- $\mathbf{P}$ é a matriz de correlação dos sinais
- $\hat{\mathbf{P}}$ é a matriz de correlação dos sinais estimada
- $\mathbf{P}_A^\perp$ é o projetor ortogonal do espaço das colunas da matriz $\mathbf{A}$

- Q é número de zeros extras (MODEX)
- s_k é a amplitude complexa da k -ésima onda incidente
- $\mathbf{s}(n)$ é o vetor de sinais
- $\text{tr}[\mathbf{P}]$ é o traço da matriz $\mathbf{P}$
- $\mathbf{U}$ é a matriz unitária cujas colunas são os autovetores de $\mathbf{R}$
- $\mathbf{x}$ é o vetor do sinal
- $(\hat{\mathbf{x}})$ é a estimativa da variável $\mathbf{x}$
- $\mathbf{X}^*$ é o conjugado transposto da matriz $\mathbf{X}$
- $\mathbf{X}^T$ é o transposto da matriz $\mathbf{X}$
- $\mathbf{W}$ é a matriz de transformação entre os vetores $\mathbf{b}$ e $\boldsymbol{\beta}$
- $\boldsymbol{\xi}$ é o vetor de ruído
- σ^2 é a variância do ruído
- θ_k é o DOA da k -ésima onda incidente
- ω_k é a frequência do k -ésimo sinal ou ângulo elétrico equivalente da k -ésima onda incidente
- $\boldsymbol{\omega}$ é o vetor das frequências dos sinais
- ω_C^k é a frequência da onda portadora
- $\Delta\omega_{ik}$ é a diferença entre as frequências ω_i e ω_k
- $\varphi_k(t)$ é a fase da k -ésima onda incidente
- $\Delta\varphi_{ik}$ é a diferença entre as fases φ_i e φ_k
- ϑ_C é o comprimento de onda da portadora do sinal
- λ é o autovalor
- $\delta_{i,j}$ é o operador delta de Dirac
- $\|\mathbf{P}\|$ é a norma Euclidiana de $\mathbf{P}$
- $\boldsymbol{\Lambda}$ é a matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de $\mathbf{R}$

Nomenclatura e Abreviaturas

- crb_d é o CRB para modelo determinístico
 - crb_1 é o CRB para sinal com uma exponencial complexa
 - crb_c é o CRB para o modelo condicional
 - crb_{ca} é o CRB assintótico para o modelo aleatório condicional
 - crb_i é o CRB assintótico para o modelo aleatório incondicional
 - CRU é o círculo de raio unitário
 - DMLE é o MLE do modelo aleatório condicional
 - EC é o esforço computacional
 - EF é estimação de frequência
 - fdp é a função densidade de probabilidade
 - MC Modelo condicional
 - MI Modelo Incondicional
 - SMLE é o MLE do modelo aleatório incondicional
-
- CRB do inglês Cramér-Rao Bound
 - DOA do inglês *Direction Of Arrival*
 - EVD do inglês *Eigenvalue Decomposition*
 - IQML do inglês *Iterative Quadratic Maximum Likelihood*
 - M-IQML do inglês *Modified IQML*
 - MLE do inglês *Maximum Likelihood Estimator*
 - MODE do inglês *Method Of Direction Estimation*
 - MODEX do inglês *MODE with eXtra roots*
 - MUSIC do inglês *Multiple Signal Classification*
 - mse do inglês *mean square error*
 - rmse do inglês *root mean square error*
 - SNR do inglês *Signal to Noise Ratio*
 - SVD do inglês *Singular Value Decomposition*
 - TLS do inglês *Total Least Squares*

-
- ULA do inglês *Uniform Linear Array*
 - WSF do inglês *Weighted Subspace Fitting*

Capítulo 1

Visão Geral da Área, do Problema e das Técnicas de Estimação de DOA

1.1 – Introdução

A estimação de parâmetros de sinais é um tema importante dentro da área de Processamento de Sinais. É um campo de pesquisa extenso e multidisciplinar e tem aplicações em modernas áreas tecnológicas. Este trabalho aborda o problema estimação de DOA (*Direction Of Arrival*), ou seja, estimação de ângulos de incidência de ondas planas, usando arranjo de sensores.

O arranjo de sensores consiste num conjunto de sensores com uma determinada configuração geométrica no espaço. É composto por sensores idênticos e omnidirecionais, ou seja, sensores com mesmo ganho, qualquer que seja a direção de incidência da onda. Há várias configurações de arranjos, porém, a mais utilizada é o arranjo linear uniforme ou ULA (*Uniform Linear Array*). Nele, os sensores são posicionados sobre uma reta imaginária e as distâncias entre sensores adjacentes são iguais. As ondas que atingem o arranjo podem ser geradas por fontes de irradiação ou resultam de reflexões de ondas transmitidas. No caso ULA, o DOA θ é definido como o ângulo entre a direção de propagação da onda e a normal ao arranjo.

Os sinais captados pelos sensores são amostrados espacialmente de forma simultânea. Tem-se, então, um vetor de amostras na saída do arranjo, chamado *snapshot*. Pode-se ainda gerar múltiplos *snapshots* realizando-se diversas amostragens uniformemente espaçadas no tempo.

O objetivo da estimação de parâmetros em processamento de sinais contaminados por ruído aditivo, provenientes de arranjo de sensores, é estimar parâmetros como o DOA, a velocidade de propagação das ondas portadoras ou as propriedades temporais e espectrais dos sinais como a amplitude, a fase e a frequência [Pillai89]. Neste procedimento supõe-se conhecido o número de fontes de ondas, a geometria do arranjo e modelos estatísticos do sinal e do ruído. Essas estimativas são degradadas conforme se acentuam as seguintes condições:

- diminuição da relação sinal-ruído ou SNR (*signal-to-noise ratio*);
- maior proximidade entre os ângulos de incidência;
- menor número de sensores e de *snapshots*.

Além dessas condições críticas, o esforço computacional dos algoritmos é outra importante característica.

O processamento de arranjo encontra aplicações em radar, comunicações móveis, tomografia, geofísica, sonar, radioastronomia [Haykin85], etc. Essas aplicações são comentadas brevemente a seguir.

Em radar, uma antena de transmissão emite um tipo particular de onda e o arranjo de sensores é usado para captar o eco da onda refletida por um alvo. As técnicas de estimação obtêm os parâmetros que caracterizam o alvo, entre eles, o ângulo DOA.

Em comunicações móveis, um dos objetivos do processamento de sinais de arranjo é obter o cancelamento de interferências através da formação de um padrão de irradiação adequado, que privilegia a recepção dos sinais vindos de uma determinada direção, simultaneamente anulando os sinais interferentes de outras direções [Godara97]. Diversos artigos têm mostrado que as técnicas de estimação também auxiliam na melhoria do desempenho do sistema, aumentando sua capacidade e a eficiência do espectro.

Na tomografia, o processamento de arranjo é usado para se obter imagens de objetos. O objeto é iluminado em diversas direções e a sua imagem é reconstruída através dos sinais refletidos e captados em arranjo de sensores [Haykin85]. Outros tipos de processamento de sinais biomédicos são também apresentados em [Baillet01].

Na exploração geológica, o processamento é usado para revelar as características físicas de uma determinada região no interior da Terra, que pode, por exemplo, conter uma reserva potencial de hidrocarbonetos em quantidade comercial. Uma fonte de energia acústica é disparada, aplicando um impulso na superfície; um conjunto de geofones grava os sinais refletidos, difratados ou refratados de volta à superfície [Haykin85].

Em sonar passivo, o sinal é captado por um arranjo de hidrofones, com o intuito de se determinar sua estrutura espacial e temporal.

Na radioastronomia, o interesse é a identificação das fontes de rádio-emissão celestes. Um conjunto de antenas é utilizado para avaliar os espectros das fontes.

Outras aplicações do processamento de arranjo são encontradas em detecção automática de falhas em máquinas e motores, controle de qualidade [Krim96], etc.

1.2 – Técnicas de Estimação de DOA e Estado da Arte

Apresenta-se nesta seção um breve resumo tratando do problema DOA, da evolução e do estado da arte das técnicas de estimação de DOA.

É importante distinguir as técnicas de estimação daquelas de detecção. As primeiras tratam da obtenção de estimativas dos parâmetros dos sinais, enquanto que as técnicas de detecção tratam da determinação de quantos sinais estão presentes. Há diversas técnicas eficientes de detecção e são usadas ainda na fase de pré-processamento. Os métodos descritos neste trabalho realizam a estimação de DOA no cenário em que o número de sinais é conhecido.

O termo alta resolução refere-se, normalmente, à capacidade dos métodos de estimação de distinguirem DOAs próximos entre si. As técnicas tratadas neste trabalho são consideradas de alta resolução por não apresentarem resolução limitada pelo número de sensores. Porém, sob algumas das condições críticas citadas na Seção 1.1, podem gerar estimativas com variância exagerada. Pode-se, então, afirmar que este trabalho aborda algumas técnicas de estimação de DOA com alta resolução.

1.2.1 – Estimação de DOA e Estimação de Frequência

O problema de estimação de DOA com ULA, conforme será mostrado no Capítulo 2, pode ser transformado em um problema formalmente semelhante à estimação de frequências de sinais. Os pontos importantes proporcionados por esta equivalência são:

- ampliar o campo de aplicação das técnicas de estimação de DOA e de estimação de frequência, desde que corretamente interpretadas;
- aplicar os conceitos clássicos de resolução de frequência no problema DOA análogo, e vice-versa.

Algumas semelhanças e contrastes entre a estimação de frequência (EF) e o problema DOA são estabelecidas a seguir.

A estimação de frequência decorre do problema clássico de estimação de parâmetros (EP) de sinais contaminados por ruído, captados e amostrados por um único sensor. O objetivo da EP é extrair parâmetros como frequência, fase e amplitude de cada um dos sinais componentes. A estimação DOA, como citada anteriormente, obtém estimativas desse parâmetro a partir das amostras provenientes de um arranjo de sensores.

A resolução, em estimação de frequência, é limitada pelo tempo de observação do sinal, ou seja, pelo número de amostras consideradas. Já a resolução do ULA, no problema DOA, é limitada por sua configuração física, envolvendo o interespacamento e o número de sensores. Observa-se, portanto, que desenvolver técnicas de estimação com alta resolução atende, em princípio, aos dois tipos de estimação.

O número de amostras do sinal em EF pode ser aumentado arbitrariamente e é equivalente ao número de sensores do ULA em estimação de DOA. Porém, no problema DOA, o número de sensores é fixo e, usualmente, pequeno. Essa distinção é uma forte restrição para a aplicação das técnicas de estimação de DOA na estimação de frequência e vice-versa. Por outro lado, caso as fontes de ondas incidentes estejam fixas, suas direções de propagação podem ser consideradas estacionárias e novos *snapshots* podem ser obtidos. Quanto maior a quantidade de *snapshots*, melhor a qualidade das estimativas dos parâmetros, o que é semelhante ao processo de se aumentar o número de amostras em EF. Porém, tratam-se de dois processos conceitualmente distintos, além do que os *snapshots* permitem a realização de uma média temporal.

1.2.2 – Classificação das Técnicas de Estimação de DOA

As técnicas ou métodos de estimação de DOA utilizam diferentes ferramentas matemáticas como a transformada de Fourier, filtros de predição linear, decomposição em subespaços ou conceitos como o critério da Máxima-Verossimilhança. Novas técnicas têm sido desenvolvidas e visam a melhoria da qualidade das estimativas sob condições críticas de SNR e espaçamento entre os ângulos de incidência. Podem, conseqüentemente, substituir técnicas antigas ou atender um número cada vez maior de novas aplicações. Os métodos de estimação de DOA podem ser classificados em duas categorias principais: métodos espectrais e métodos paramétricos.

1.2.2.1 - Métodos Espectrais

Apresentam como principal característica o uso de uma função espectral, resultante de um mapeamento adequado dos parâmetros DOA. Os picos espectrais dessa função são as estimativas dos ângulos de incidência.

A transformada de Fourier é a ferramenta normalmente utilizada em estimação de frequência e suas vantagens são: não necessita que se estabeleça um modelo do sinal sob análise; é robusta; é facilmente implementada através da transformada rápida de Fourier (FFT). Seu problema principal é que sua resolução em frequência é limitada pelo tempo de observação: conforme se diminui o espaçamento entre as frequências, mantendo o tempo de observação, os métodos de estimação baseados nessa técnica não apresentam resolução suficiente e geram estimativas com grande variância. No caso da aplicação em DOA, a resolução depende do tamanho físico do arranjo, independente da relação sinal-ruído e o desempenho é pobre na presença de sinais correlacionados. Os métodos dessa categoria são considerados clássicos e bem descritos na literatura. Entretanto, seus desempenhos são superados pelos modernos métodos paramétricos.

1.2.2.2 - Métodos Paramétricos

Estes métodos assumem um modelo estatístico para os sinais, ou seja, uma determinada estrutura para a matriz de autocorrelação dos sinais de saída do arranjo. Neles, as estimativas não são obtidas através de uma função mas sim através de um conjunto finito de parâmetros do modelo. Os métodos paramétricos são, em geral, mais eficientes e robustos que os métodos espectrais, porém seus algoritmos exigem alto esforço computacional quando comparados aos últimos e suas implementações são mais complexas.

Os métodos mais destacados desta classe são o MUSIC (*Multiple Signal Classification*) [Schmidt86, Rao89], FBLP-M (*Forward-Backward Linear Prediction Modified*) [Tufts82], TLS-FBLP (*Total Least Square-FBLP*) [Lemos97] e Norma-mínima [Kaveh86]. Estes métodos utilizam ferramentas que decompõem a matriz de autocorrelação estimada em uma parcela ou subespaço associado ao sinal, e outra parcela associada ao ruído. Apresentam bons desempenhos na estimação de sinais não-correlacionados e com SNR alta. Todavia, as estimativas são degradadas consideravelmente para SNR baixas.

Outra classe importante de métodos paramétricos é aquela que utiliza o critério da Máxima-Verossimilhança, descrita a seguir.

1.2.2.3 - Métodos Derivados do Critério da Máxima-Verossimilhança

O critério da Máxima-Verossimilhança ou critério ML (*Maximum Likelihood*) [Kay93] se assenta na maximização da função densidade de probabilidade de sinais contaminados por ruído branco Gaussiano. Após manipulações algébricas, este critério leva à minimização de uma função custo que depende da matriz de autocorrelação $\mathbf{R}$ das amostras. O ponto de mínimo é determinado através de buscas multidimensionais e os parâmetros correspondentes fornecem as estimativas DOA. O ML fornece estimativas precisas e mais robustas aos efeitos do ruído que outros critérios. Porém, o esforço computacional torna-se proibitivo devido à busca multidimensional.

Como resultado de um esforço para a superação desta dificuldade, em meados da década de 80 surge o método IQML (*Iterative Quadratic Maximum Likelihood*) [Bresler86, Kumaresan86]. Este minimiza uma versão reparametrizada da função custo ML, através de um processo iterativo para solução de problemas intermediários de segunda ordem. Apesar do método IQML ser iterativo, o esforço computacional é menor que o do critério ML. Também, apresenta melhor desempenho que os métodos paramétricos anteriormente citados. Por outro lado, apresenta problemas de convergência para mínimos locais, principalmente em baixas SNR e também gera estimativas polarizadas. Diversos artigos analisaram intensivamente este método, tanto sob o aspecto teórico como experimental. O IQML é um marco importante em estimação de DOA e de sua estrutura básica foram desenvolvidos diversos outros métodos.

Um método importante derivado do IQML é o MODE (*Method Of Direction Estimation*) [Stoica90a], com destaque para o desempenho assintótico (calculado para grande número de *snapshots*). O MODE minimiza uma função custo semelhante à do IQML, porém emprega uma matriz de autocorrelação modificada via restrição ao subespaço de sinal da matriz $\mathbf{R}$ original. Sobre esta função custo é realizada a minimização, iterativamente, semelhante ao IQML. Sua convergência é mais rápida, sendo normalmente implementado com número de iterações fixas [Li98]. Seu esforço computacional é, sob algumas condições, menor que o do IQML e esse método foi considerado, em meados da década de 90 [Krim96], como um dos melhores para a estimação de DOA em ULA. Outro método que tem expressão semelhante à do MODE é o WSF (*Weighted Subspace Fitting*) [Viberg91], o qual, porém, não tem origem no critério ML: esse método é derivado de um critério baseado na ortogonalidade entre subespaços. O desempenho do WSF é equivalente ao do MODE e não será tratado neste trabalho.

Dentro da categoria dos métodos de estimação derivados do ML encontram-se ainda dois outros que se baseiam no IQML e no MODE e que são descritos a seguir.

1.2.3 - Estado da Arte

Algumas modificações na estrutura básica do IQML e do MODE deram origem a dois novos métodos que melhoram o desempenho e classificam-se, portanto, como métodos de destaque para estimação de DOA.

O primeiro é o M-IQML (*Modified IQML*) [Kristensson99]. Esse método utiliza a mesma iteração inicial do IQML, porém nas iterações seguintes corrige a matriz de autocorrelação dos dados, subtraindo dela uma estimativa da potência do ruído. Como consequência, seu processo de convergência é acelerado em relação ao método original. Adicionalmente, o desempenho é melhorado em diversas situações e as estimativas geradas não são mais polarizadas, como ocorria no IQML.

O segundo método é o MODEX (*MODE with eXtra roots*) [Gershman99]. Este método gera várias estimativas candidatas que devem ser testadas por um critério de seleção para se determinar qual é a melhor. O desempenho é excelente embora o esforço computacional seja mais que duas vezes maior que o MODE.

1.3 – Objetivos deste Trabalho

Destacou-se na seção anterior que os métodos de estimação de DOA baseados no critério ML apresentam desempenho e outras características equivalentes ou superiores às demais classes de métodos paramétricos. São, por estes motivos, o tema da análise teórica e experimental desta tese. Baseada numa revisão desses métodos, verificou-se a possibilidade de se desenvolver uma descrição unificada. Esta, além do interesse da unificação, oferece diversas vantagens entre as quais destacamos a implementação de um algoritmo básico sobre o qual podem ser realizadas simulações e comparações.

A descrição individual e unificada dos métodos de DOA baseados no critério ML, a implementação de um algoritmo correspondente, as simulações e análises de desempenho propiciadas pelo mesmo, bem como propostas de novos critérios ou técnicas constituem os objetivos gerais desta tese, detalhados a seguir.

1.3.1 - Descrição Unificada dos Métodos Derivados do ML

Essa descrição foi desenvolvida conjuntamente em [Colares00b], onde foram incluídas ainda duas outras categorias de métodos paramétricos: uma abordando os métodos baseados na predição linear e outra categoria chamada “estimadores totalmente baseados em subespaço”. A análise realizada naquele trabalho restringiu-se aos aspectos teóricos das categorias, visando obter uma generalização das formulações, tendo em vista a vastidão do tema. Este trabalho pretende realizar uma complementação em termos de simulações, avaliações e contribuições no campo experimental para a melhoria do desempenho dos métodos.

A descrição detalhada do critério ML é também apresentada e permite compreender os conceitos, limitações e potencialidades de seus métodos derivados.

1.3.2 - Métodos Derivados do ML: IQML, MODE, M-IQML e MODEX

Os métodos de estimação tratados especificamente nesta tese são o IQML, MODE, M-IQML e MODEX. Restringiram-se as análises apenas a esses quatro métodos por serem freqüentemente citados na literatura e terem uma base semelhante, facilitando a descrição unificada. Porém, alguns dos resultados, conclusões e novas propostas podem ser prontamente estendidos aos métodos das demais categorias.

1.3.3 - Algoritmo Geral, Implementação e Critérios de Desempenho

Além da descrição teórica unificada dos métodos citados, apresenta-se uma proposta de algoritmo geral e sua implementação computacional. A implementação desse algoritmo geral foi realizada em ambiente Matlab®, desenvolvendo-se um programa avançado, porém de fácil utilização, genérico e que engloba os principais métodos de estimação derivados do ML. Os recursos desse programa são todos acessíveis a partir de uma entrada principal, que permite amplo controle sobre os parâmetros e variáveis dos sinais e ruído, seleção do método de estimação, tipos de restrições de não-trivialidade no processo de otimização, etc. As saídas numéricas e gráficas permitem observar diversos índices de desempenho usados em estimação de DOA.

Analisa-se teórica e experimentalmente um critério de desempenho importante: o limite de Cramér-Rao ou CRB (*Cramér-Rao Bound*) [Kay93]. Este é um índice de mérito que serve de referência absoluta para avaliar o desempenho dos métodos de estimação de DOA.

Outros índices de méritos analisados são o erro quadrático médio em função da SNR e do número de snapshots, o desempenho assintótico e o esforço computacional.

1.3.4 – Novas Propostas

As análises e simulações realizadas com o programa desenvolvido indicaram claramente alguns problemas dos métodos de estimação atuais, conforme relatado em [Nagesha94, Alves99a]. Para contorná-los, foram desenvolvidas alternativas competitivas em relação às apresentadas na literatura.

Concluindo a parte de simulação e comparações entre métodos, apresentam-se algumas propostas que, com pequeno esforço computacional extra, permitem melhorar a qualidade das estimativas de todos os métodos tratados. É proposto um novo método de estimação baseado no MODE e que proporciona melhor desempenho geral e menor esforço computacional que o do método MODEX.

1.4 – Organização dos Capítulos

Capítulo 2

Neste capítulo são apresentados os modelos de sinais e de ruído e as expressões que fornecem a equivalência entre o DOA (*Direction Of Arrival*) e uma frequência elétrica, o que torna possível a aplicação de conceitos de estimação de frequência no problema DOA e vice-versa. São apresentados ainda alguns índices de mérito relevantes em estimação de parâmetros.

Capítulo 3

Apresenta os principais resultados e equacionamento do Limite de Cramér-Rao, o limite teórico de desempenho para os métodos de estimação, nos casos de um ou mais sinais determinístico e aleatórios. Obtêm-se diversos resultados numéricos que permitem avaliar e comparar os métodos de estimação, estabelecer índices de desempenho dos métodos de estimação.

Capítulo 4

Este capítulo apresenta algumas expressões do MLE para estimação de DOA para os modelos de sinais estocásticos. O objetivo é analisar algumas características deste estimador, o que possibilitará uma melhor compreensão dos métodos de estimação que são derivados do MLE e que serão apresentados nos capítulos seguintes. Estes métodos obtêm desempenho próximo ao MLE com EC consideravelmente menor, devido aos equacionamentos mais simplificados.

São também mostrados os resultados de algumas simulações numéricas do MLE aplicados aos exemplos do Capítulo 3. Por fim, o desempenho assintótico dos MLEs são comparados com os respectivos CRBs.

Capítulo 5

Este capítulo apresenta uma descrição unificada para os métodos de estimação derivados do DMLE pois apresentam um equacionamento básico comum ou que podem ser descritos de forma semelhante através de manipulações algébricas. Tal descrição permite que sejam analisadas algumas figuras de mérito importantes, como o limiar de estimação, o desempenho, o esforço computacional, etc.. Seu uso simplifica as diversas expressões de cada método e permite a elaboração de um programa de simulação compacto. Adicionalmente, facilita a proposição e implementação de novos métodos de estimação baseados naqueles já existentes. Este capítulo também aborda aspectos importantes e inéditos da implementação computacional dessa descrição unificada, a qual será utilizada intensamente nas simulações numéricas dos métodos abordados nesse trabalho.

Capítulo 6

Este capítulo apresenta o equacionamento, as características principais e os detalhes da implementação computacional de dois importantes métodos derivados do DMLE, o IQML e o M-IQML. Os métodos derivados têm como objetivo manter a boa qualidade das estimativas do estimador original, porém, diminuindo o elevado esforço computacional de sua implementação direta. Simulações numéricas são realizadas para avaliação e comparação das restrições de não-trivialidade e comparação de desempenho entre os dois métodos

apresentados possibilitando análises e comparações de seus comportamentos frente ao limiar de estimação e o desempenho assintótico.

Capítulo 7

Nesse capítulo são apresentados os métodos MODE e o MODEX. O método MODE apresenta algumas modificações na expressão da função custo em relação ao IQML. O objetivo é aproximar suas curvas de desempenho dos CRBs e manter o esforço computacional baixo. Já o método MODEX usa o método MODE mais um conjunto de procedimentos para geração, combinação e seleção de estimativas. As restrições linear central e de norma são apresentadas como alternativas que melhoram significativamente o desempenho desses métodos. São avaliados também sob o enfoque experimental.

Capítulo 8

Nesse capítulo é apresentado um novo método de estimação de DOA, o MODE-ES, que também gera frequências candidatas extras como o MODEX. Entretanto, não há a necessidade de se executar a segunda etapa do MODEX, na qual o vetor $\mathbf{b}$ tem sua ordem estendida. Além desta vantagem, as candidatas geralmente apresentam melhor qualidade que aquelas do MODEX, pois se situam mais próximas das verdadeiras frequências e conferem melhor desempenho que o do MODEX.

Capítulo 9

Apresentamos neste capítulo a conclusão envolvendo todos os resultados obtidos capítulo a capítulo, um panorama geral dos avanços obtidos e propostas para prosseguimento de trabalhos.

1.5 – Publicações

As publicações que foram apresentadas como decorrência do desenvolvimento desse trabalho são listadas a seguir.

C. A. Alves e A. Lopes, “Comportamento Assintótico de Métodos DOA com Alta Resolução”, *XVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBT 99*, Vila Velha - ES - Brasil, 173-178, Setembro de 1999.

C. A. Alves e A. Lopes, “Métodos de Estimação DOA Baseados no Critério TLS”, *XVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBT 99*, Vila Velha - ES - Brasil, 175-184, Setembro de 1999.

C. A. Alves, R. F. Colares e A. Lopes, “Análise de Métodos Para DOA em Função das Restrições de Otimização”, *XVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBT 2000*, Gramado – RS - Brasil, CD-ROM, Setembro de 2000.

C. A. Alves, R. F. Colares e A. Lopes, “Constraints Implementation for IQML and MODE Direction-of-Arrival Estimators”, *The 43rd. Midwest Symposium on Circuits and Systems – MWSCAS 2000*, Lansing, Michigan, EUA, Agosto de 2000.

R. F. Colares, C. A. Alves e A. Lopes, “Descrição Unificada dos Métodos Modernos de Estimação DOA em Arranjos de Sensores”, *Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações* – volume 16, número 2, 101-121, Dezembro de 2001.

A. Lopes, I. S. Bonatti, P. L. D. Peres, R. F. Colares e C. A. Alves, “A DOA Estimator Based on Linear Prediction and Total Least Squares”, *XIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBT 2001*, Fortaleza – Ceará - Brasil, CD-ROM, 2001.

A. Lopes, I. S. Bonatti, P. L. D. Peres, R. F. Colares e C. A. Alves, “A DOA Estimator Based on Linear Prediction and Total Least Squares”, *Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações, Brasil*, v.17, no. 1, 71 - 78, Junho de 2002.

A. Lopes, I. S. Bonatti, P. L. D. Peres e C. A. Alves, “Improving the MODEX Algorithm for Direction Finding”, *Signal Processing*, vol. 83, no. 9, 2047 - 2051, 2003.

Capítulo 2

Modelos de Sinais e Ruído, Definições Gerais e Critérios de Avaliação de Métodos de Estimação de DOA

2.1 – Introdução

Os métodos modernos de processamento de sinais de arranjo de sensores usam alguns modelos que descrevem as ondas incidentes, baseado na geometria espacial do arranjo, nas características das fontes de ondas, dos sensores e do meio de propagação. Neste capítulo são apresentados os modelos de sinais e de ruído e as expressões que fornecem a equivalência entre o DOA (*Direction Of Arrival*) e uma frequência elétrica, o que torna possível a aplicação de conceitos de estimação de frequência no problema DOA e vice-versa. São apresentados ainda alguns índices de mérito relevantes em estimação de parâmetros.

2.2 – Modelos de Sinais para DOA

Esta seção trata da formulação matemática do problema DOA, considerando que este parâmetro será estimado a partir das amostras captadas num arranjo de sensores com uma configuração geométrica definida. A quantidade de fontes é assumida ser conhecida e é menor que o número de sensores.

A fonte de onda pode ser acústica, eletromagnética, tectônica ou outras e os tipos de sensores utilizados para captá-la podem ser microfones, antenas dipólo, acelerômetros ou sismógrafos etc. [Sorelius99]. A tarefa de estimação é simplificada se algumas considerações forem feitas sobre os elementos envolvidos e que são descritas nessa seção.

2.2.1 - Modelo de Onda e do Sinal Captado no Arranjo

Apresenta-se na Figura 2.1 o esquema de um arranjo genérico contendo dois sensores, uma linha representando uma frente de onda gerada por uma fonte (não mostrada) e o ângulo de incidência (DOA), θ_k .

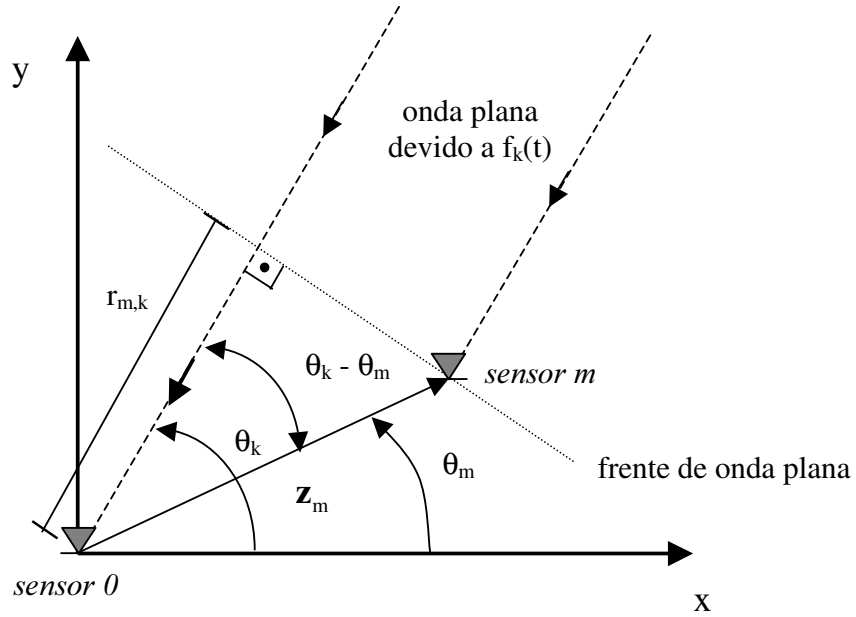


Figura 2.1 – Representação bidimensional de uma fonte de onda, dois sensores e o DOA θ_k .

A fonte de onda é pontual e se situa num local fora da região ilustrada, muito distante do arranjo. Assim, sua frente de onda pode ser considerada plana. Os sensores são representados pelo *sensor 0*, situado na origem do sistema de coordenadas, e pelo *sensor m*, num ponto qualquer do plano. O DOA é definido como o ângulo entre a direção de propagação da onda e a horizontal ao *sensor 0* do arranjo, no sentido anti-horário.

O vetor $\mathbf{z}_m$ é posicionado entre os sensores m e 0 , com referência na origem e seu módulo é a distância entre os dois sensores, ou seja, $\mathbf{z}_m = |\mathbf{z}_m|e^{j\theta_m}$.

O escalar $r_{m,k}$ representa a distância percorrida entre os dois sensores pela frente de onda da k -ésima fonte e é dado, conforme se observa na Figura 2.1, por:

$$r_{m,k} = |\mathbf{z}_m| \cos(\theta_k - \theta_m) \quad (2.1)$$

Suponha que a k -ésima fonte produza uma onda plana dada por:

$$f_k(t) = F_k(t) e^{j \left[\omega_C^k t - \frac{2\pi}{\vartheta_k} r_k + \varphi_k(t) \right]} \quad (2.2)$$

onde:

- $F_k(t)$ é a amplitude de um sinal variando no tempo;
- ω_C^k é a frequência da onda portadora;
- ϑ_k é o comprimento de onda na direção de propagação;
- r_k é a distância até a origem de um sistema de coordenadas;
- $\varphi_k(t)$ é uma fase arbitrária.

Suponha ainda que $F_k(t)$ e $\varphi_k(t)$ variem lentamente em relação ao termo $e^{j\omega_C^k t}$, isto é, ambas apresentam faixa estreita comparadas com ω_C^k . Com isto, pode-se afirmar que tanto $F_k(t)$ como $\varphi_k(t)$ apresentam os mesmos valores em todos os sensores, uma vez que as distâncias entre eles são tipicamente da ordem do comprimento de onda.

Define-se $x_{i,k}$ como o sinal captado pelo *sensor i* devido à onda gerada pela fonte “k”. Assumindo-se sensores com ganhos unitários e omnidirecionais, obtém-se o seguinte sinal no *sensor 0*:

$$x_{0,k}(t) = F_k(t) e^{j[\omega_C^k t + \varphi_k(t)]} \quad (2.3)$$

enquanto que, no *sensor m*, obtém-se:

$$x_{m,k}(t) = F_k(t) e^{j \left[\omega_C^k t - \frac{2\pi}{\vartheta_k} r_{m,k} + \varphi_k(t) \right]} \quad (2.4)$$

Estas expressões mostram que a hipótese de onda plana, juntamente com aquelas referentes a $F_k(t)$ e $\varphi_k(t)$, asseguram que a diferença entre as fases de um sinal captado por dois sensores se deve apenas ao atraso sofrido pelo sinal entre os sensores.

A expressão genérica para o caso de K fontes de sinais, considerando o princípio da superposição, é:

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^K x_{m,k}(t) = \sum_{k=1}^K F_k(t) e^{j[\omega_C^k t + \varphi_k(t)]} e^{-j \left(\frac{2\pi}{\vartheta_k} r_{m,k} \right)} \quad (2.5)$$

Algumas particularizações envolvendo a geometria do arranjo e as propriedades dos sinais, permitem que as expressões anteriores sejam modificadas e que se obtenham modelos simplificados, onde se destaca o parâmetro DOA ou uma frequência elétrica equivalente.

2.2.2 - O Arranjo Linear Uniforme

Define-se nesse tópico, uma configuração geométrica específica para o arranjo de sensores. Os métodos espectrais e os critérios de estimação como MLE e “*Subspace Fitting*” podem realizar a estimação de DOA em arranjos de geometria arbitrária [Krim96]. Porém, tendo em vista a simplicidade do equacionamento e a larga utilização do arranjo linear uniforme ou ULA (*Uniform Linear Array*), adotaremos esta configuração. Um ULA com M sensores e uma fonte de onda é mostrado na Figura 2.2.

Os sensores estão posicionados sobre uma reta vertical, com inter espaçamento uniforme “ d ”. Neste caso, o DOA θ_k é definido simplesmente como o ângulo entre a direção de propagação da onda e a normal ao arranjo.

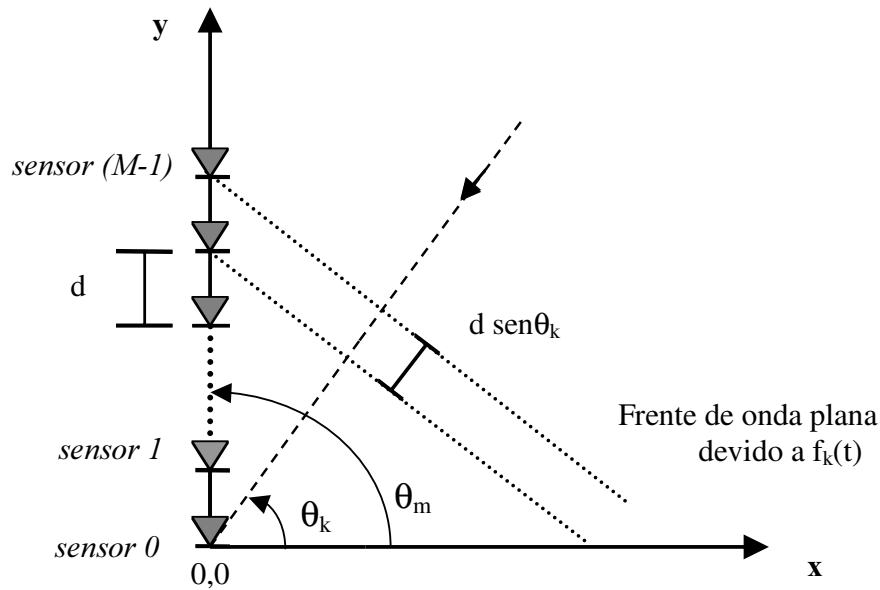


Figura 2.2 – Arranjo Linear Uniforme (ULA) com M sensores e uma fonte de onda.

Para um ULA posicionado na vertical e situado sobre o eixo y , tem-se $\theta_m = \pi/2$ e, portanto, a expressão (2.1) resulta em $r_{m,k} = m d \sin \theta_k$. Supondo o caso em que todas as ondas apresentam a mesma portadora (sinais refletidos) ou sinais interferentes co-canal ω_C^k , temos

$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \dots = \vartheta_K = \vartheta$. Assim, o termo da segunda exponencial da expressão (2.5) pode ser simplificado para:

$$\frac{2\pi}{\vartheta_k} r_{m,k} = \frac{2\pi}{\vartheta} md \sin \theta_k \quad (2.6)$$

Definindo-se:

$$\omega_k = -\frac{2\pi}{\vartheta} d \sin \theta_k \quad [\text{rad}] \quad (2.7)$$

e a expressão (2.5) pode ser reescrita como:

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^K F_k(t) e^{j\omega_c^k t} e^{j\varphi_k(t)} e^{jm\omega_k} \quad (2.8)$$

O sinal é convertido à sua banda básica antes da amostragem, o que significa desconsiderar o termo $e^{j\omega_c^k t}$. Mantendo a mesma notação para o sinal captado em banda básica, a expressão (2.8) transforma-se em:

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^K F_k(t) e^{j\varphi_k(t)} e^{jm\omega_k} \quad (2.9)$$

A expressão (2.9) pode ser interpretada como um sinal composto de K exponenciais complexas com as frequências normalizadas ω_k , fases $\varphi_k(t)$ e amplitudes $F_k(t)$. Isso possibilita que sejam utilizadas as técnicas de estimação de DOA também em problemas de estimação de frequência, quando as condições de equivalência entre os problemas forem adequadas. Ou, de modo inverso, os conceitos de resolução de frequência podem ser aplicados no problema DOA.

2.2.3 - Modelos de Sinais para ULA

Pode-se simplificar a expressão (2.9) para ter a seguinte forma:

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^K a_m(\omega_k) s_k(t) \quad (2.10)$$

onde

$$a_m(\omega_k) = e^{jm\omega_k} \quad (2.11)$$

e

$$s_k(t) = F_k(t) e^{j\varphi_k(t)} \quad (2.12)$$

Expandindo a expressão (2.10) para o caso de um ULA contendo M sensores e agrupando os elementos em vetores coluna, obtém-se:

$$\mathbf{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{M-1}(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} a_0(\omega_k) \\ a_1(\omega_k) \\ \vdots \\ a_{M-1}(\omega_k) \end{bmatrix} s_k(t) \in \mathbb{C}^{M \times 1} \quad (2.13)$$

Em forma compacta, pode-se reescrever a expressão (2.13) como:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(\omega_k) s_k(t) \quad (2.14)$$

O vetor $\mathbf{a}(\omega_k)$ é chamado de vetor de direção, em analogia ao clássico método de conformação de feixe (*beam-forming*), onde o arranjo é ajustado para ter ganho pré-determinado em uma certa direção ou ângulo de incidência [Krim96]. A expressão (2.14) pode ser escrita em notação matricial como:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{s}(t) \quad (2.15)$$

onde

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ \dots \ s_K(t)]^T \in \mathbb{C}^{K \times 1} \quad (2.16)$$

e é chamado de vetor das amplitudes complexas dos sinais, $\mathbf{x}(t)$ é o vetor de amostras do sinal captado, $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_K]^T$ e $\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})$ é a matriz dos vetores de direção, dada por:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}) = [\mathbf{a}(\omega_1) \ \mathbf{a}(\omega_2) \ \dots \ \mathbf{a}(\omega_K)] \in \mathbb{C}^{M \times K} \quad (2.17)$$

isto é, seus elementos, para o ULA, são dados por:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ e^{j\omega_1} & \dots & e^{j\omega_K} \\ e^{j2\omega_1} & \dots & e^{j2\omega_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(M-1)\omega_1} & \dots & e^{j(M-1)\omega_K} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

A matriz $\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})$ tem a estrutura de Vandermonde, sendo referida, daqui em diante, apenas como matriz $\mathbf{A}$. Caso as fontes de ondas incidentes sejam totalmente independentes, as colunas de $\mathbf{A}$ são linearmente independentes e o posto desta matriz é cheio e igual ao número de fontes de sinais, K , uma vez que, por hipótese, $M > K$.

Os dois casos limites de DOAs ocorrem quando a fonte está localizada sobre o eixo y, com $\theta_k = -\pi/2$ ou $\theta_k = \pi/2$ rad; caso $\theta_k = 0$ rad a fonte de onda está situada sobre o eixo x.

A frequência elétrica associada ao DOA entre esses extremos é, segundo a expressão (2.7), limitada por:

$$-\frac{2\pi d}{\vartheta} \leq \omega_k \leq \frac{2\pi d}{\vartheta} \quad (2.19)$$

Observa-se que quanto maior a relação d/ϑ , maior é a excursão do parâmetro ω_k e, portanto, maior será a resolução do arranjo de sensores. Para se determinar o limite superior da resolução do arranjo, deve-se observar que a correspondência biunívoca entre θ e ω é mantida enquanto ω estiver limitado entre $+\pi$ e $-\pi$ e o DOA estiver entre $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

Tomando um dos casos extremos, quando $\theta_k = -\pi/2$, tem-se que $\omega_k = (2\pi d/\vartheta)(-1)$. O valor máximo de “d” sob a condição de biunicidade é, portanto, $d = \vartheta/2$, quando então $\omega_k = -\pi$ e o ULA tem a máxima resolução. Este valor de “d”, de metade do comprimento de onda, é adotado na maioria da literatura e também nesse trabalho, sempre que seja necessário fazer a conversão entre o DOA e a frequência elétrica.

Considerando o ULA, passe-se a tratar de estimação de frequência e estimação de DOA indistintamente. Também nos modelos de sinais, índices de mérito e nos métodos de estimação a serem apresentados, usa-se o parâmetro frequência por comodidade, sem se perder de vista o objetivo geral desse trabalho que é a análise de métodos de estimação de DOA.

Deve-se ainda considerar a situação real, onde se dispõe de uma quantidade finita de amostras do sinal, obtidas nos instantes $t = n\Delta t$, para $n = 0, \dots, N-1$, onde N é o número total de *snapshots* e Δt é o intervalo de tempo entre as amostragens sucessivas no ULA. Adota-se a notação simplificada $\mathbf{x}(n)$ para designar estes *snapshots*. Procede-se da mesma forma para todos os demais vetores, trocando-se a variável “t” pela variável “n”.

Nos sistemas reais, o sinal $\mathbf{x}(n)$ é contaminado por ruído aditivo e, portanto, a expressão geral do vetor de dados de saída do arranjo $\mathbf{y}(n)$ é:

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{x}(n) + \boldsymbol{\xi}(n) \quad (2.20)$$

ou,

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{s}(n) + \boldsymbol{\xi}(n) \quad (2.21)$$

onde $\boldsymbol{\xi}(n)$ é o vetor de ruído que será discutido e modelado na seção 2.2.4.

2.2.3.1 – Modelos de Sinais Estocásticos

Nestes modelos de sinais, os elementos dos vetores de sinais $\mathbf{s}(n)$ nos *snapshots* são variáveis aleatórias com média zero [Stoica90c], ou seja:

$$E \{ \mathbf{s}(n) \} = \mathbf{0}, \quad (2.22)$$

onde $E\{.\}$ representa o operador esperança estatística. Além disso, obedecem às relações:

$$E \{ \mathbf{s}(n) \mathbf{s}^* (i) \} = \mathbf{P} \delta_{n,i} \quad \det(\mathbf{P}) \neq 0 \quad (2.23)$$

$$E \{ \mathbf{s}(n) \mathbf{s}^T (i) \} = \mathbf{0} \quad (\text{para todo } n \text{ e } i) \quad (2.24)$$

onde δ_{ni} é a função delta de Kronecker com $\delta_{nn} = 1$ e $\delta_{ni} = 0$ para $n \neq i$, $()^*$ indica a operação de transposição e conjugado do vetor ou matriz (hermitiano) e $()^T$ representa a operação de transposição. Pode ser verificado que as expressões (2.23) e (2.24) implicam na total decorrelação entre as partes reais e imaginárias dos sinais e também na igualdade entre suas variâncias. Estas condições asseguram a decorrelação temporal entre os sinais.

$\mathbf{P}$ é a matriz de correlação dos sinais de um mesmo *snapshot*. É hermitiana e seu posto tem valor entre 1 e K . O elemento $P_{i,j} = \rho_{i,j}$ fora da diagonal dessa matriz, indica a correlação cruzada entre os sinais “i” e “j” e é chamado de fator de correlação. Caso a matriz $\mathbf{P}$ seja proporcional à matriz identidade, os sinais têm a mesma potência e são decorrelacionados. Consequentemente, $\text{posto}(\mathbf{P}) = K$. Essa condição é obtida quando os vetores de amplitudes complexas dos sinais são independentes entre si no *snapshot*. Há outra situação em que $0 < \rho_{i,j} < 1$, a qual corresponde a sinais parcialmente correlacionados, com fator de correlação $\rho_{i,j}$. Por fim, uma terceira situação que merece destaque é aquela onde os sinais são chamados coerentes ou totalmente correlacionados, isto é, os elementos do vetor dos sinais são uma versão escalonada e/ou defasada de um de seus componentes. Neste caso $\mathbf{P}$ tem posto unitário.

Os modelos de sinais estocásticos são classificados como condicional ou incondicional [Stoica90c], conforme descritos a seguir.

2.2.3.1.1 – Modelo Condicional (MC)

Nesse modelo, as amplitudes dos sinais em um dado *snapshot* são variáveis aleatórias independentes. Também, os vetores de *snapshots* distintos são independentes, ou seja:

$$\mathbf{s}(i) \neq \mathbf{s}(j) \quad \text{para todo } i \neq j \quad (2.25)$$

Portanto, o vetor $\mathbf{s}(n)$ é estocástico no espaço (no *snapshot*) e no tempo (nos diferentes *snapshots*). Nas demais realizações, esta seqüência de vetores é mantida fixa, variando-se apenas o ruído aditivo. O termo “condicional” surge do fato de que as propriedades estatísticas dos vetores de dados $\mathbf{y}(n)$ são condicionadas pelos vetores de sinais $\mathbf{s}(n)$ [Stoica90c].

Um caso específico desse modelo é o **modelo determinístico**, o qual emprega um mesmo vetor de sinais em todos os *snapshots*. É freqüentemente utilizado em estimação de freqüências, quando se utiliza apenas uma seqüência de amostras. O sinal nesse caso é considerado desconhecido e fixo em todas as realizações [Kumaresan86] [Hua94]. Em função disso, o MC é usualmente referido como modelo determinístico mesmo em artigos que tratam de estimação de DOA e usam mais que um *snapshot*, nomenclatura que será evitada por ser inapropriada. Porém, este modelo de sinal é usado por estimadores clássicos, como o critério da Máxima-Verossimilhança, levando o nome do modelo, ou seja, Máxima-Verossimilhança Determinística. Independente disso, deve se enfatizar que se trata de um estimador obtido usando-se o MC.

2.2.3.1.2 – Modelo Incondicional (MI)

Nesse modelo são mantidas a aleatoriedade no espaço e no tempo dos vetores de sinais e adicionalmente, em cada realização, uma nova seqüência de vetores $\mathbf{s}(n)$ é gerada [Stoica90c]. O termo “incondicional” é usado devido ao fato de que as propriedades estatísticas dos vetores de dados $\mathbf{y}(n)$ são incondicionais, uma vez que a seqüência $\mathbf{s}(n)$ varia de realização para realização.

Nas simulações a serem realizadas utilizar-se-á preferencialmente o MI, em função de seu uso generalizado em referências bibliográficas mais recentes e por ser o modelo de sinal mais realístico.

2.2.4 – Modelo de Ruído

O ruído, no sistema real, tem várias origens como, por exemplo, a influência ambiental, etapas de captação, pré-processamento e amostragem e fontes não-distinguíveis de baixa intensidade [Pillai89]. É representado como sendo gerado por diversas fontes idênticas e independentes e a aplicação do Teorema Central do Limite permite modelá-lo como uma variável aleatória Gaussiana de média zero. Deste modo, os vetores de ruído satisfazem às expressões:

$$E\{\xi(n)\xi^*(i)\} = \sigma^2 \mathbf{I}_{M \times M} \delta_{n,i} \quad (2.26)$$

$$E\{\xi(n)\xi^T(i)\} = \mathbf{0} \quad (\text{para todo } n \text{ e } i) \quad (2.27)$$

onde σ^2 é a variância do ruído. A expressão (2.27) indica a ortogonalidade entre as partes real e imaginária do vetor de ruído. Também, não há correlação entre as amostras de um vetor de ruído nem entre os vetores de ruído de *snapshots* distintos, ou seja, existe completa decorrelação no espaço e no tempo.

2.3 – Matriz de Correlação Espacial

A matriz de correlação espacial é a base dos métodos de estimação tratados nesse trabalho. Ela é obtida a partir dos vetores de saída do arranjo, expressão (2.21):

$$\mathbf{R}(n,i) = E\{\mathbf{y}(n)\mathbf{y}^*(i)\} \quad (2.28)$$

que pode ser transformada em:

$$\mathbf{R}(n,i) = \mathbf{A}E\{\mathbf{s}(n)\mathbf{s}^*(i)\}\mathbf{A}^* + E\{\xi(n)\xi^*(i)\} \quad (2.29)$$

com $n, i = 1, 2, \dots, N$.

Considerando-se a expressão (2.23) do modelo de sinal e a expressão (2.26), do ruído, além da decorrelação entre os vetores de sinais e de ruído, a matriz $\mathbf{R}$ só será diferente de zero para $n = i$, quando então assume a seguinte forma:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^* + \sigma^2 \mathbf{I} \quad \in \mathbb{C}^{M \times M} \quad (2.30)$$

Há também a possibilidade de se realizar a decomposição espectral da matriz $\mathbf{R}$, através da decomposição em autovalores ou EVD (*eigen value decomposition*):

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^* \quad (2.31)$$

onde $\mathbf{U}$ é uma matriz unitária cujas colunas são os autovetores de $\mathbf{R}$ e $\mathbf{\Lambda}$ é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de $\mathbf{R}$ ordenados em valores decrescentes. Considerando K fontes de ondas independentes e ruído branco com variância σ^2 em um ULA com M sensores e $M > K$, tem-se que $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \lambda_{K+1}, \dots, \lambda_M\}$ com $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_K > \lambda_{K+1} = \lambda_{K+2} = \dots = \lambda_M = \sigma^2$. Agrupando as K primeiras colunas de

autovetores correspondentes aos K maiores autovalores numa matriz $\mathbf{U}_S$ e os autovetores restantes na matriz $\mathbf{U}_N$, pode-se reescrever (2.31) como:

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}_S \mathbf{\Lambda}_S \mathbf{U}_S^* + \mathbf{U}_N \mathbf{\Lambda}_N \mathbf{U}_N^* \quad (2.32)$$

onde $\mathbf{U}_S \in \mathbb{C}^{M \times K}$ e $\mathbf{\Lambda}_S = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K\} \in \mathbb{R}^{K \times K}$ são associados ao subespaço de sinal e $\mathbf{U}_N \in \mathbb{C}^{M \times (M-K)}$ e $\mathbf{\Lambda}_N = \sigma^2 \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{(M-K) \times (M-K)}$ são interpretados como pertencentes ao subespaço de ruído.

Comparando-se as expressões (2.30) e (2.32) observa que se o posto de $\mathbf{P}$ e de $\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^*$ forem cheios, os autovetores de ruído serão ortogonais ao subespaço de sinal e também às colunas de $\mathbf{A}$. Isto porque cada autovetor de ruído está associado a um autovalor σ^2 . Há $(M-K)$ autovetores linearmente independentes com esta propriedade. Os demais K autovalores são associados ao subespaço de sinal. Portanto, as colunas de $\mathbf{U}_S$ geram o mesmo espaço que as colunas da matriz $\mathbf{A}$, enquanto que as colunas de $\mathbf{U}_N$ geram o seu complemento ortogonal, denominado de espaço nulo de $\mathbf{A}^*$.

No caso de um número finito de *snapshots*, as esperanças estatísticas são substituídas por médias algébricas, originando a matriz de correlação estimada. Para N *snapshots*, tem-se:

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{y}(n) \mathbf{y}^*(n) = \mathbf{A} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{s}(n) \mathbf{s}^*(n) \right] \mathbf{A}^* + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi(n) \xi^*(n) \quad (2.33)$$

É possível realizar a decomposição dessa matriz de forma semelhante àquela da expressão (2.32).

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\mathbf{\Lambda}}_S \hat{\mathbf{U}}_S^* + \hat{\mathbf{U}}_N \hat{\mathbf{\Lambda}}_N \hat{\mathbf{U}}_N^* \quad (2.34)$$

onde $\hat{\mathbf{U}}_S$, $\hat{\mathbf{U}}_N$, $\hat{\mathbf{\Lambda}}_S$ e $\hat{\mathbf{\Lambda}}_N$ são os autovetores e autovalores associados ao subespaço de sinal (S) e de ruído (N), respectivamente.

Um método de estimação analisado nesse trabalho minimiza uma função custo baseada diretamente nessa matriz. As estimativas geradas, porém, são de baixa qualidade quando o nível de ruído é elevado. Outros métodos alteram a função custo e atenuam a parte de ruído através de restrições ao subespaço de sinal estimado.

O termo entre colchetes da expressão (2.33) pode também ser interpretado como uma estimativa da matriz de correlação dos sinais.

A relação sinal-ruído para o k -ésimo sinal é definida como [Degroat93] [Pillai89]:

$$\text{SNR}_k = 10 \log_{10} \left\{ \frac{E[|s_k(n)|^2]}{\sigma^2} \right\} \quad [\text{dB}] \quad (2.35)$$

2.4 – Critérios de Avaliação de Métodos de Estimação de DOA

Nesta seção são descritos os principais índices de mérito ou de desempenho usados na avaliação experimental de métodos para estimação de DOA e de frequência. Essa avaliação envolve a comparação entre os índices obtidos pelos métodos e os limites teóricos de estimação do parâmetro. Também é possível avaliar métodos distintos, bem como detectar as condições onde cada método pode ser usado de forma mais adequada.

O **Limite de Cramér-Rao** ou CRB (*Cramér-Rao Bound*) é a referência teórica principal em estimação de parâmetros e representa o valor teórico mínimo que a variância das estimativas geradas por um estimador não-polarizado pode atingir. Este valor é calculado tendo como parâmetros o número de amostras (ou sensores, em DOA), número de sinais, espaçamento entre frequências, relação sinal-ruído, etc. Devido à equivalência entre a frequência e o DOA, é necessário calcular o CRB para apenas um desses parâmetros, adotando-se preferencialmente o primeiro. O CRB é apresentado no Capítulo 3, onde se condensam as principais expressões e curvas para os modelos de sinais apresentados na seção 2.2.

A curva da variância das estimativas ou simplesmente curva de desempenho é uma das formas mais comuns de realizar a avaliação ou comparação entre métodos de estimação. É obtida em função da SNR ou de algum outro parâmetro. Cada ponto dessa curva é calculado pelo erro quadrático médio ou *mse* (*mean square error*) do conjunto de estimativas obtidas em relação às frequências verdadeiras. O erro quadrático médio para a frequência ω_k é definido como:

$$\text{mse}(\hat{\omega}_k) \equiv \frac{1}{\text{MC}} \sum_{r=1}^{\text{MC}} [(\hat{\omega}_{rk} - \omega_k)]^2 \quad [\text{rad}^2] \quad (2.36)$$

onde “MC” é o número de estimativas disponíveis ou o número de experimentos realizados e $\hat{\omega}_{rk}$ é a *r*-ésima estimativa de ω_k .

As curvas de desempenho de alguns métodos de estimação aproximam-se bastante da curva do CRB quando a SNR é alta. Entretanto, conforme a SNR é diminuída, mantendo-se fixos os demais parâmetros, atinge-se um valor onde o desempenho se afasta rapidamente do

CRB, ou seja, o método falha na estimação das frequências abaixo dessa SNR. Esse valor de SNR é chamado de **limiar de estimação** e representa outro índice de mérito importante na avaliação dos métodos. Um dos objetivos do desenvolvimento dos métodos de estimação consiste em reduzir o limiar de estimação, o que significa obter bom desempenho em condições cada vez mais severas de contaminação por ruído.

As curvas de desempenho podem ser agrupadas em função de um segundo parâmetro, além da SNR, para gerarem **superfícies de desempenho**. Algumas dessas superfícies foram utilizadas em [Lemos95, Lemos97] nas avaliações de métodos de estimação baseados na predição linear onde serviram de subsídio para uma proposta para a ordem ótima do filtro de predição. Possibilitaram ainda comparações entre métodos semelhantes. O segundo parâmetro da superfície de desempenho pode ser a diferença entre as frequências, a diferença entre as fases, o fator de correlação, etc.. Neste trabalho, as superfícies de desempenho dos métodos de estimação são geradas em função da SNR e da diferença entre as frequências.

Outro índice de mérito é o **comportamento assintótico** do estimador, definido como o desempenho em função do número de *snapshots*. Uma propriedade desejada para um estimador é que a variância decresça continuamente conforme o número de *snapshots* tende a infinito. O estimador que atende esta propriedade é dito ser consistente.

O **fator de correlação** representa um parâmetro importante dos sinais pois algumas categorias de métodos de estimação não mantêm bom desempenho quando os sinais são parcial ou totalmente correlacionados (coerentes). Os métodos paramétricos, quando aplicados em estimação de sinais coerentes, têm desempenhos semelhantes comparados com aqueles que são obtidos caso os sinais sejam descorrelacionados.

O **esforço computacional** (EC) é outro tópico importante, principalmente quando se verifica que os principais métodos de estimação de DOA são derivados de um estimador que tem EC significativo, o critério ML. O EC está também associado ao tempo de processamento e, conseqüentemente, à viabilidade de aplicações em tempo real. A inserção de um algoritmo unificado facilita consideravelmente a avaliação e comparação desse índice em métodos distintos. Nesse trabalho são apresentadas algumas observações sobre o EC dos principais estimadores propostos.

Analisado de modo geral, o **método de estimação ideal** deve gerar estimativas não-polarizadas e apresentar o menor limiar de estimação possível. A curva de desempenho deve estar a mais próxima possível da curva do CRB para todas as situações relevantes dos DOAs,

fator de correlação, número de *snapshots* etc. Por fim, o esforço computacional deve ser o menor possível, ou seja, igual ou inferior ao dos métodos atuais.

Os métodos de estimação atuais atendem apenas parcialmente às características de um estimador ideal. Torna-se importante, portanto, desenvolver métodos novos ou realizar melhorias nos métodos existentes para atender à crescente demanda de aplicações. Este é o tema principal deste trabalho.

Capítulo 3

Limites de Cramér-Rao para Estimação de Frequência

3.1 – Introdução

O limite de Cramér-Rao ou CRB (*Cramér-Rao Bound*) é um índice de mérito aplicável aos estimadores não-polarizados. O CRB representa o menor valor teórico que pode ser atingido pelo erro quadrático médio ou mse (*mean square error*) das estimativas de um parâmetro, obtidas por um estimador a partir de amostras de sinal com ruído. Para o parâmetro frequência tem-se:

$$\text{mse}(\hat{\omega}) \geq \text{crb}(\omega)$$

onde $\hat{\omega}$ é a estimativa do parâmetro ω e “mse” é o erro quadrático médio ou a variância dessas estimativas, definido pela expressão (2.36).

O método de estimação ideal frente a este índice seria aquele que apresentasse curva de desempenho próxima ou igual à curva do CRB numa ampla gama de valores de parâmetros como a diferença entre frequências, relação sinal-ruído, número de sensores e *snapshots*, etc..

Neste capítulo são apresentadas as expressões dos CRBs para os modelos de sinais apresentados no capítulo anterior. O parâmetro adotado é a frequência, cuja relação com o DOA se faz através da expressão (2.7). Adota-se o caso de máxima resolução para o ULA, ou seja, assume-se que a distância “d” entre os sensores é igual à metade do comprimento de onda.

O CRB para o modelo determinístico com um e dois sinais são apresentados na seção seguinte. Na Seção 3.3 são apresentadas duas expressões de CRB para o modelo condicional, sendo uma expressão para o cálculo exato e a outra o cálculo aproximado ou assintótico.

Na Seção 3.4 apresenta-se o CRB assintótico para o modelo incondicional. Na Seção 3.5 é deduzido um limitante para a variância das estimativas dos parâmetros DOAs em função dos CRBs das frequências.

Na Seção 3.6 são apresentados os resultados gráficos, onde os CRBs são calculados em função de parâmetros como a SNR e o número de amostras (ou de sensores). No caso de mais de um sinal, os parâmetros podem ser o número de *snapshots*, a diferença entre as frequências, a diferença entre as fases dos sinais (modelo determinístico) ou do fator de correlação (modelos condicional e incondicional). Os parâmetros dos sinais usados nessa seção são aqueles tipicamente encontrados na literatura.

3.2 – CRBs para o Modelo Determinístico

Apresenta-se nessa seção as expressões analíticas dos CRBs para o modelo determinístico. O sinal nesse modelo pode ser representado por exponenciais complexas não-amortecidas, cujos parâmetros amplitude e fase, são desconhecidos e fixos nos *snapshot* e constante em todas as realizações. Este modelo é encontrado tanto na simulação de métodos de estimação de frequência como na estimação de DOA. A expressão do CRB para o caso de dois sinais e modelo determinístico, crb_d , é apresentada no item 3.2.1 e o caso para um sinal, crb_1 , em 3.2.2.

As expressões dos CRBs são obtidas a partir do vetor de dados $\mathbf{y}(n)$, expressão (2.21), cujos parâmetros são a amplitude complexa, a frequência e a potência do ruído. Monta-se a chamada matriz de informação de Fisher [Rife76] tomando-se a esperança do logaritmo da função densidade de probabilidade do vetor de ruído embutido em $\mathbf{y}(n)$. O CRB de cada parâmetro é obtido dos elementos diagonais da inversa dessa matriz. Trata-se nesse trabalho, especificamente, do CRB do parâmetro frequência, pois é o que exige métodos de estimação mais elaborados, notadamente sob condições em que as frequências estejam muito próximas entre si. Os demais parâmetros dos sinais podem ser obtidos diretamente a partir da estimativa da frequência [Stoica90c].

3.2.1 – Duas Exponenciais Complexas

Em [Lemos97], apresenta-se uma expressão geral para o CRB da frequência do modelo determinístico. O caso de vetor de dados composto de dois sinais é detalhado, por ser o de uso mais freqüente. A expressão do CRB para a k -ésima frequência ω_k é:

$$\text{crb}_d(\omega_k) = \frac{\sigma^2}{2F_k^2} \mathbf{Q}_{11} \quad k = 1, 2 \quad [\text{rad}^2] \quad (3.1)$$

onde F_k é a amplitude do k -ésimo sinal. $\mathbf{Q}_{11}$ é o elemento da primeira linha e primeira coluna da matriz $\mathbf{Q}$, dada por:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{12} \mathbf{P}_{11}^{-1} \mathbf{P}_{12}^T]^{-1} \in \mathbf{R}^{3 \times 3} \quad (3.2)$$

onde

$$\mathbf{P}_{ik} = \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{M-1} m^2 \cos \Delta_{ik}(m) & - \sum_{m=0}^{M-1} m \sin \Delta_{ik}(m) & \sum_{m=0}^{M-1} m \cos \Delta_{ik}(m) \\ \sum_{m=0}^{M-1} m \sin \Delta_{ik}(m) & \sum_{m=0}^{M-1} \cos \Delta_{ik}(m) & \sum_{m=0}^{M-1} \sin \Delta_{ik}(m) \\ \sum_{m=0}^{M-1} m \cos \Delta_{ik}(m) & - \sum_{m=0}^{M-1} \sin \Delta_{ik}(m) & \sum_{m=0}^{M-1} \cos \Delta_{ik}(m) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

e

$$\Delta_{ik}(m) = (\omega_i - \omega_k)m + (\varphi_i - \varphi_k) \quad (3.4)$$

Das expressões (3.1), (3.3) e (3.4) observa-se que crb_d depende das amplitudes e das diferenças entre as frequências $\Delta\omega_{ik} = (\omega_i - \omega_k)$ e entre as fases $\Delta\varphi_{ik} = (\varphi_i - \varphi_k)$ das exponenciais e não dos seus valores individuais. A variação desse CRB em função de $\Delta\varphi$, supondo $\Delta\omega$ constante, pode ser significativa e deve ser adequadamente considerada, conforme mostrado nas simulações do item 3.6.2.

3.2.2 - Uma Exponencial Complexa

A expressão do CRB do parâmetro frequência para o caso de sinal com uma única exponencial, crb_1 , é obtida a partir da definição do CRB e é dada por [Lemos97]:

$$\text{crb}_1(\omega) = \frac{6\sigma^2}{F^2 M(M^2 - 1)} \quad [\text{rad}^2] \quad (3.5)$$

Este CRB é inversamente proporcional à relação sinal-ruído e diminui cubicamente com o número de sensores, indicando a importância desses parâmetros para a estimação. O

valor crb_1 é também um limite inferior para sinais com mais de uma exponencial conforme mostrado na referência citada, onde é analisado o comportamento das expressões (3.2), (3.3) e (3.4) para $K = 1$. Quanto maior a diferença entre as freqüências das exponenciais, mais seu crb_d aproxima-se de crb_1 , ou, colocado de outra forma, os CRBs para sinais compostos por duas exponenciais complexas serão sempre maiores ou iguais que crb_1 .

3.3 – CRBs para o Modelo Condicional

As expressões dos CRBs para o modelo condicional são apresentadas nessa seção. Elas geram uma matriz quadrada de dimensão K , o número de exponenciais complexas, e os CRBs são os elementos de sua diagonal principal. Caso as variâncias das amplitudes das exponenciais sejam iguais, seus CRBs também o são. O destaque é para a expressão assintótica, devido à facilidade de cálculo do valor do CRB e à possibilidade de comparação com a única expressão disponível do CRB para o modelo incondicional.

3.3.1 – Expressão Exata

Em [Stoica90c] demonstra-se que a expressão exata do CRB para o modelo condicional, crb_c , é dada por:

$$\text{crb}_c(\omega) = \frac{\sigma^2}{2N} \left\{ \text{Re} \left[\mathbf{D}_\omega^* \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D}_\omega \otimes \hat{\mathbf{P}}^T \right] \right\}^{-1} \in \mathbb{R}^{K \times K} \quad [\text{rad}^2] \quad (3.6)$$

onde $\otimes$ indica multiplicação matricial elemento a elemento. $\hat{\mathbf{P}}$ denota a matriz de correlação dos sinais estimada e é dada por:

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left\{ \mathbf{s}(n) \mathbf{s}^*(n) \right\} \quad (3.7)$$

sendo $\mathbf{s}(n)$ o vetor de sinais, definido no item 2.2.3.1. $\mathbf{P}_A^\perp$ é dada por:

$$\mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{I}_M - \mathbf{A}(\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^* \in \mathbb{C}^{M \times M} \quad (3.8)$$

e é um operador que projeta um vetor no espaço ortogonal ao espaço das colunas de $\mathbf{A}$. $\mathbf{D}_\omega$ é a derivada da matriz $\mathbf{A}$, expressão (2.18), em relação às freqüências ω . Para o caso $K = 2$, será dada por:

$$\mathbf{D}_\omega = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{a}(\omega_1)}{d\omega_1} & \frac{d\mathbf{a}(\omega_2)}{d\omega_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ j e^{j\omega_1} & j e^{j\omega_2} \\ j 2 e^{j2\omega_1} & j 2 e^{j2\omega_2} \\ \vdots & \vdots \\ j(M-1)e^{j(M-1)\omega_1} & j(M-1)e^{j(M-1)\omega_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{M \times 2} \quad (3.9)$$

Os elementos da diagonal principal da expressão (3.6) para dois sinais e $N = 1$ são equivalentes ao CRB calculado por (3.1) apesar das expressões terem sido deduzidas de forma diferente. A matriz $\hat{\mathbf{P}}$ condensa a informação sobre a correlação entre os sinais. O valor de CRB obtido com esta expressão é exato, no sentido que expressa o CRB em função das amplitudes complexas dos sinais, geradas aleatoriamente, e que serão usadas na simulação. Porém sua utilização nem sempre é possível quando se dispõe, por exemplo, apenas dos sinais contaminados pelo ruído. A expressão (3.5), para crb_1 , pode também ser obtida a partir de (3.6) [Stoica89].

3.3.2 – Expressão Assintótica

A expressão assintótica do CRB para o modelo condicional, crb_{ca} , é obtida a partir da expressão exata (3.6), substituindo-se a estimativa da matriz de correlação dos sinais $\hat{\mathbf{P}}$, pela matriz $\mathbf{P}$. É assintótica no sentido de que é válida para número de *snapshots* grande ($N \gg 0$), pois $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}$, conforme a definição dos modelos de sinais. Sua expressão é [Stoica90c]:

$$\text{crb}_{ca}(\omega) = \frac{\sigma^2}{2N} \left\{ \text{Re} \left[\mathbf{D}_\omega^* \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D}_\omega \otimes \mathbf{P}^T \right] \right\}^{-1} \in \mathbb{R}^{K \times K} \quad [\text{rad}^2] \quad (3.10)$$

Resumindo, as expressões (3.6) e (3.10) têm finalidades distintas, apesar de serem usadas para o cálculo do CRB do mesmo modelo de sinal. Para o cálculo do valor exato, em função dos vetores de sinais, usa-se a expressão (3.6) sob qualquer condição. Para se obter um valor aproximado do CRB desse modelo, em função de um determinado fator de correlação, utiliza-se a expressão (3.10), de cálculo mais simples e direto. Em função dessa simplicidade, esta última expressão é usada preferencialmente, destacando-se, porém, que o valor de CRB obtido através dela só deve ser usado como referência para a variância das estimativas quando $\hat{\mathbf{P}}$, obtida das amostras, puder ser adequadamente modelada por $\mathbf{P}$, ou seja, assintoticamente. Outro motivo de se utilizar tal expressão refere-se à expressão obtida no item seguinte.

3.4 – CRB Assintótico para o Modelo Incondicional

O CRB para o modelo incondicional não apresenta uma expressão analítica para o caso exato, em função do número de *snapshots*. Há apenas uma expressão assintótica, ou seja, para $N \gg 0$. Esta expressão, crb_i , é deduzida em [Stoica90c] e é dada por:

$$\text{crb}_i(\omega) = \frac{\sigma^2}{2N} \left\{ \text{Re} \left[\mathbf{D}_\omega^* \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D}_\omega \otimes \left(\mathbf{P}_A^* \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} \right)^T \right] \right\}^{-1} \in \mathbb{R}^{K \times K} \quad [\text{rad}^2] \quad (3.11)$$

A expressão (3.11) é função não-linear da SNR, devido à presença da matriz $\mathbf{R}$ no termo à direita dentro dos colchetes. Portanto, este CRB deve ser calculado ponto a ponto e não simplesmente extrapolado a partir de um valor de SNR de referência, como ocorre nas expressões para o cálculo de crb_d e crb_e e crb_{ca} .

3.5 – Variância das Estimativas dos DOA

As expressões de CRBs apresentadas nos itens anteriores são funções das frequências elétricas ω . É possível também obter limitantes para as variâncias das estimativas θ dos DOAs. Em [Kay93] é dada a expressão que relaciona esta variância com o CRB expresso em função de ω :

$$\text{var}(\hat{\theta}) - \frac{\partial \mathbf{g}(\omega)}{\partial \omega} \text{crb}(\omega) \frac{\partial \mathbf{g}(\omega)^T}{\partial \omega} \geq 0 \quad (3.12)$$

onde $\mathbf{g}(\omega)$ é uma função vetorial de transformação de parâmetros, cujos elementos expressam os parâmetros θ em função das frequências ω e é dada por:

$$\theta = \mathbf{g}(\omega) = \begin{bmatrix} \arcsin(\omega_1 / \pi) \\ \arcsin(\omega_2 / \pi) \\ \vdots \\ \arcsin(\omega_K / \pi) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

e $\partial \mathbf{g}(\omega) / \partial \omega \in \mathbb{R}^{K \times K}$ é o Jacobiano, definido como as derivadas parciais em relação às frequências. Estas derivadas são dadas por:

$$\frac{\partial g_i(\omega)}{\partial \omega_k} = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 - \omega_k^2}} \quad \text{para } i = k \quad (3.14)$$

e

$$\frac{\partial g_i(\omega)}{\partial \omega_k} = 0 \quad \text{para } i \neq k \quad (3.15)$$

Portanto, o limitante para a variância do k -ésimo DOA em função do $\text{crb}(\omega_k)$ é:

$$\text{var}(\hat{\theta}_k) \geq \frac{1}{(\pi^2 - \omega_k^2)} \text{crb}(\omega_k) \quad [\text{rad}^2] \quad (3.16)$$

Baseado nessa última expressão, conclui-se que é mais fácil estimar o DOA quando $\theta = 0^0$ ($\omega = 0$ rad) e impossível quando $\theta = 90^0$ ($\omega = \pi$ rad), situação em que a variância em função do DOA assume, teoricamente, um valor infinito.

Dado que o $\text{crb}(\omega)$ é igual para as K frequências e dependente apenas das diferenças de frequências, adota-se esta forma de expressão dos limitantes ao longo deste trabalho.

3.6 – Simulações Numéricas e Análise de Resultados

Nesta seção são exibidos os resultados gráficos dos CRBs em função da frequência elétrica angular normalizada. As curvas de CRB são calculadas obtendo-se a raiz quadrada dos valores dados pelas respectivas expressões, sendo, portanto, um limitante inferior para os valores *rmse* ou eficazes das estimativas.

As expressões crb_c e crb_{ca} e crb_i geram uma matriz quadrada de dimensão igual ao número de sinais. Impondo-se variância unitária para as amplitudes complexas dos sinais, os K CRBs das frequências serão iguais entre si. Devido a isso, toma-se apenas um dos valores da diagonal principal dessas matrizes como o valor desse índice de mérito.

Inicialmente é apresentada a curva de crb_i para um sinal com uma exponencial complexa, calculada em função do número de sensores. Posteriormente, são explorados dois casos comuns na literatura, ambos compostos de duas exponenciais e diferentes números de sensores e espaçamento entre as frequências. São mostradas as variações nos valores dos CRBs em função da diferença entre as fases ou do fator de correlação dos sinais e traçadas as respectivas superfícies dos CRBs em função desses parâmetros. São apresentadas também as curvas dos CRBs assintóticos em função da diferença entre as frequências, da SNR e do número de sensores.

3.6.1 – CRB Determinístico - Uma Exponencial Complexa

A expressão (3.5) é usada para obter a curva de crb_i em função do número de sensores. Os valores apresentados são dados em radianos, extraindo-se a raiz quadrada dos valores obtidos da expressão citada. Esta curva é mostrada na Figura 3.1, sob $\text{SNR} = 0$ dB e 1 *snapshot*.

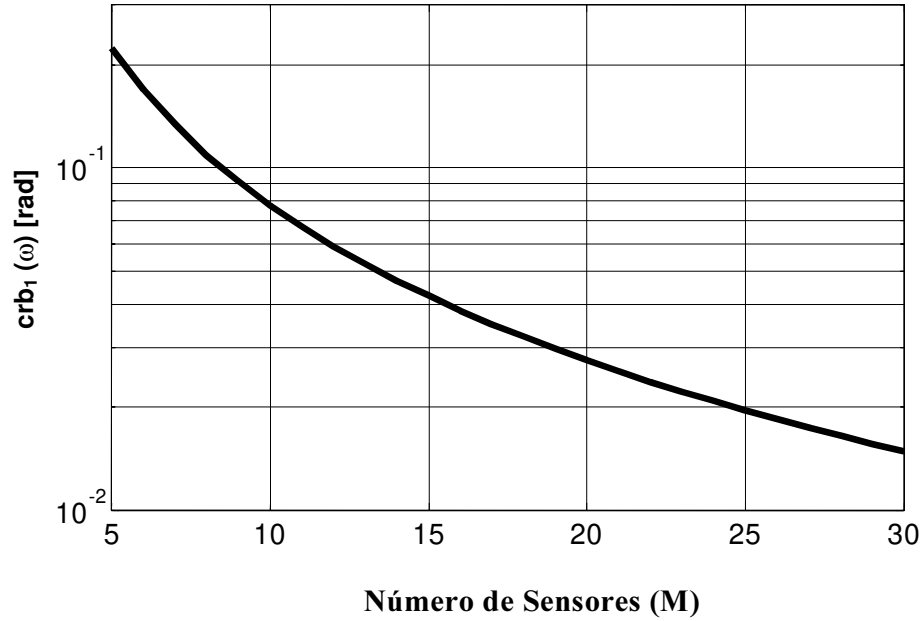


Figura 3.1 – crb_1 em função do número de sensores (M) – SNR = 0 dB e N = 1.

O número de sensores é um parâmetro significativo na expressão (3.5), conforme se observa na curva anterior. Seu aumento causa uma significativa melhoria (diminuição) dos valores do CRB, por um fator cúbico, caso crb_1 seja expresso em rad^2 . Por outro lado, sempre haverá restrições práticas para o aumento do número de sensores.

Esta curva é um limitante inferior para o CRB de sinais que tenham mais de uma exponencial, sob condição N = 1. Analisado dentro do conceito de estimação de frequência, para dois sinais, quanto maior for o espaçamento entre as frequências, maior será a proximidade entre as curvas dos CRB desses sinais e a de crb_1 .

3.6.2 – CRB Determinístico: Duas Exponenciais Complexas

Nesse tópico é calculado o CRB do modelo determinístico, crb_d , para um sinal composto por duas exponenciais complexas. O objetivo é mostrar a variação significativa no CRB desse índice em função da diferença de fase ($\Delta\phi$), sob diferença de frequência constante.

Dois casos muito utilizados como referências na literatura especializada de estimação de frequência e de estimação DOA são analisados e que têm os seguintes parâmetros:

Caso 3.1: M = 10, $\omega_1 = 0,174\pi$, $\omega_2 = 0,259\pi$ [Gershman99];

Caso 3.2: M = 25, $\omega_1 = -1,00\pi$, $\omega_2 = -0,96\pi$ [Bresler86] e [Kumaresan82] .

Na Seção 3.2.1 observou-se que crb_d é função das diferenças entre as frequências e entre as fases dos sinais. As curvas desse CRB para as condições de frequências e número de *snapshots* dados no Caso 3.1 e 3.2, são mostradas na Figura 3.2. $\Delta\phi$ é variada entre $-\pi$ e 0 rad e a SNR é de 0 dB. Usa-se a expressão $20\log_{10}[\text{crb}_d(\omega)]$ para realçar a influência dos parâmetros do sinal na função.

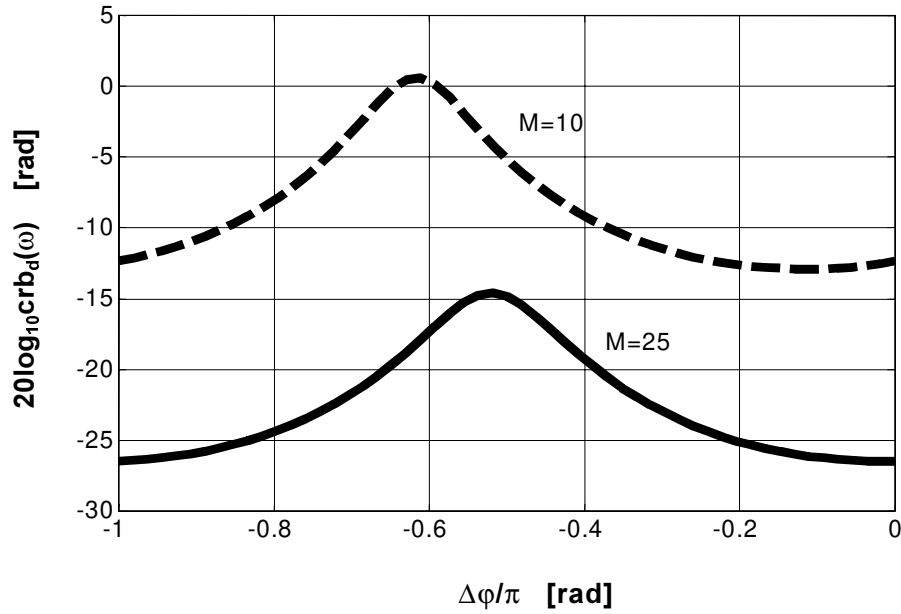


Figura 3.2 – crb_d em função da diferença de fase - SNR = 0 dB.

Observa-se na Figura 3.2 uma variação significativa desse CRB em função de $\Delta\phi$, em ambos os casos. Caso $\Delta\phi$ seja especificado, pode-se calcular o valor exato desse CRB. Caso $\Delta\phi$ seja desconhecida, usualmente adota-se o menor valor de CRB obtido sobre toda a faixa possível desse parâmetro, de $-\pi$ a 0 rad, pois representa o caso mais crítico. Nesta situação, a variância das estimativas obtidas sob $\Delta\phi$ desconhecido mas constante, pode ser consideravelmente maior que este CRB mínimo, não indicando, necessariamente, desempenho precário do estimador.

A expressão de crb_d pode gerar um conjunto de curvas ou uma superfície em função das diferenças entre as fases ou entre as frequências dos sinais. A Figura 3.3 mostra a superfície obtida por esta expressão para o Caso 3.1, para a ULA com 10 sensores. $\Delta\phi$ é variada entre $-\pi$ e 0 rad, pois a função é periódica. $\Delta\omega$ é variada de $0,03\pi$ a $0,35\pi$ rad, valores que impõem consideráveis flutuações nesse CRB. A SNR é de 0 dB e $N = 1$.

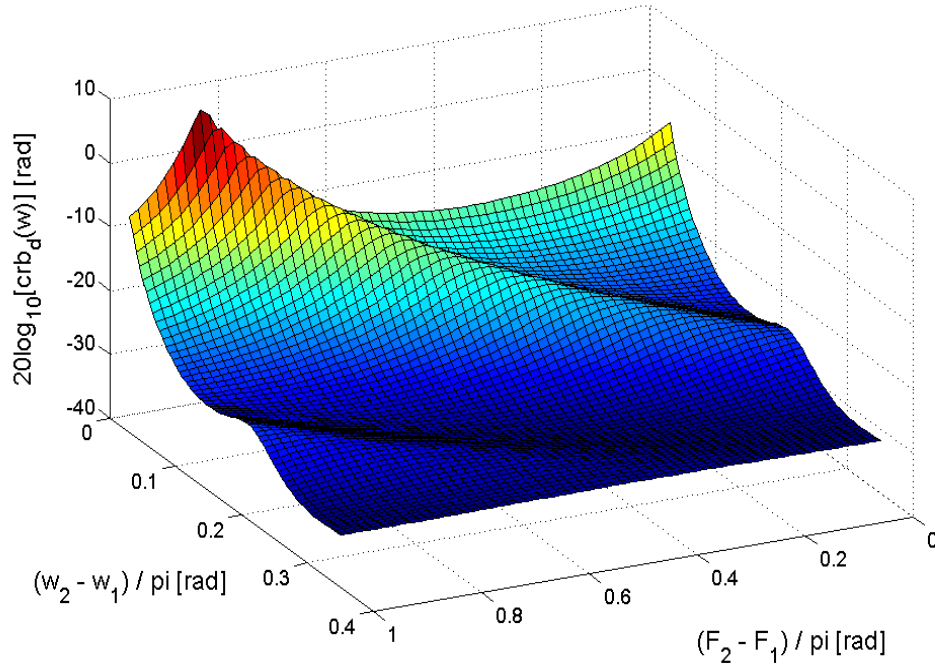


Figura 3.3 – Curvas de crb_d – $0,03\pi \leq \Delta\omega \leq 0,35\pi$ rad, $0 \leq \Delta\phi < -\pi$ rad –
SNR = 0 dB e $M = 10$.

Observa-se que para $\Delta\omega$ mínimo, a influência de $\Delta\phi$ é mais acentuada, atingindo uma variação de cerca de 22 dB no pior caso. Conforme $\Delta\omega$ aumenta, essa influência diminui, até atingir uma região em que se torna muito pequena como em $\Delta\omega$ próximo de $0,35\pi$ rad. A Figura 3.2, no caso $M = 10$, é uma das curvas que compõem a Figura 3.3, para $\Delta\omega = 0,085\pi$.

3.6.3 – CRBs Assintóticos: Duas Exponenciais Complexas

3.6.3.1 - Superfícies de crb_{ca} e crb_i

As expressões crb_{ca} e crb_i , (3.10) e (3.11), respectivamente, são funções do fator de correlação ρ , presente na matriz $\mathbf{P}$. A influência desse fator é mostrada na Figura 3.4 e 3.5, através das superfícies dos CRBs assintóticos para os modelos condicional e incondicional. O segundo parâmetro dessas superfícies é a diferença entre as frequências, $\Delta\omega$. A SNR é de 0 dB, há um snapshot e o número de sensores é igual a 10. $\Delta\omega$ varia entre $0,03\pi$ e $0,35\pi$ rad e o fator de correlação $0 \leq \rho < 1$. As figuras são traçadas em escala logarítmica, semelhantes à Figura 3.3.

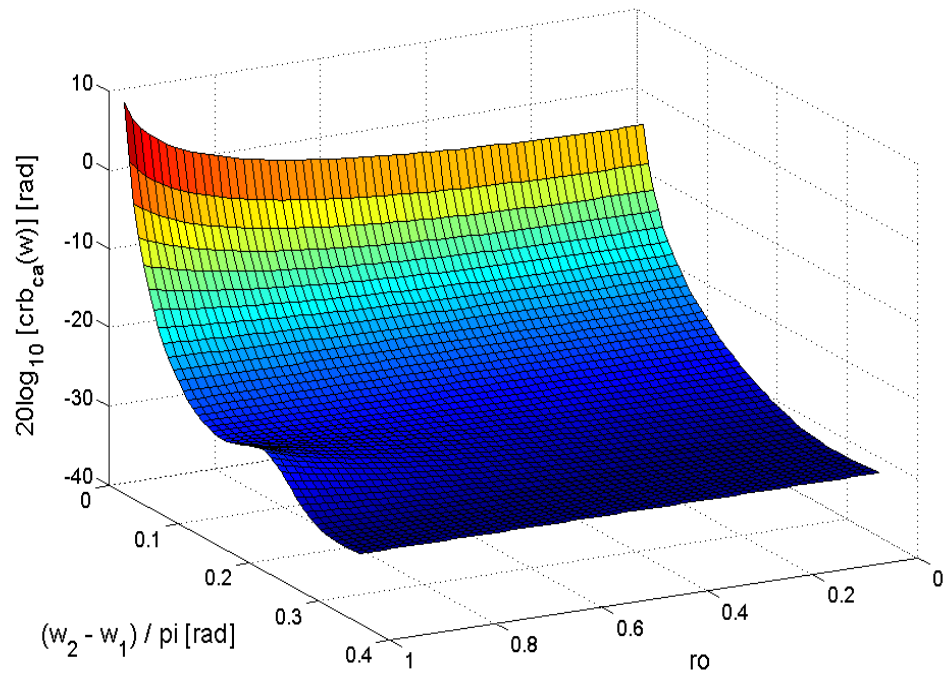


Figura 3.4 – Curvas de crb_{ca} – $0,03\pi \leq \Delta\omega \leq 0,35\pi$ e $0 \leq \rho < 1$ - SNR = 0 dB e $M = 10$.

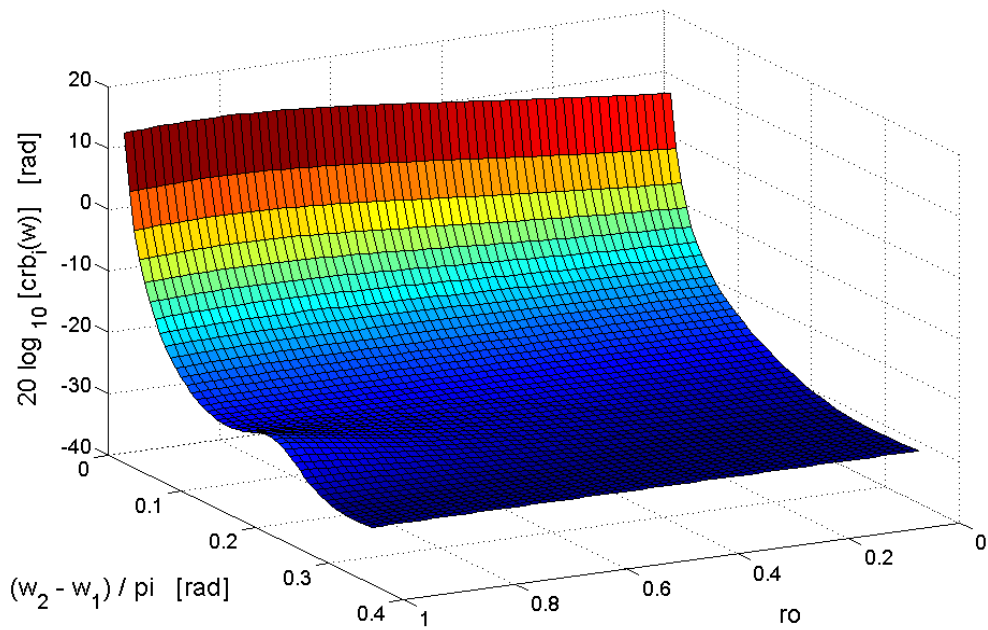


Figura 3.5 – Curvas de crb_i – $0,03\pi \leq \Delta\omega \leq 0,35\pi$ e $0 \leq \rho < 1$ - SNR = 0 dB e $M = 10$.

Observa-se que os CRBs das duas superfícies anteriores apresentam variações em função do fator de correlação, sob $\Delta\omega$ constante. Para obter maior detalhamento, calcula-se a curva da diferença entre as curvas extremas, sob fator de correlação fixo, ou seja, subtraindo-se ponto a ponto a curva obtida com $\rho = 1,0$ da curva com $\rho = 0$. Valores positivos indicam CRB maior para fator de correlação unitário comparado com o caso de correlação zero e vice-versa. A curva resultante é apresentada na figura seguinte.

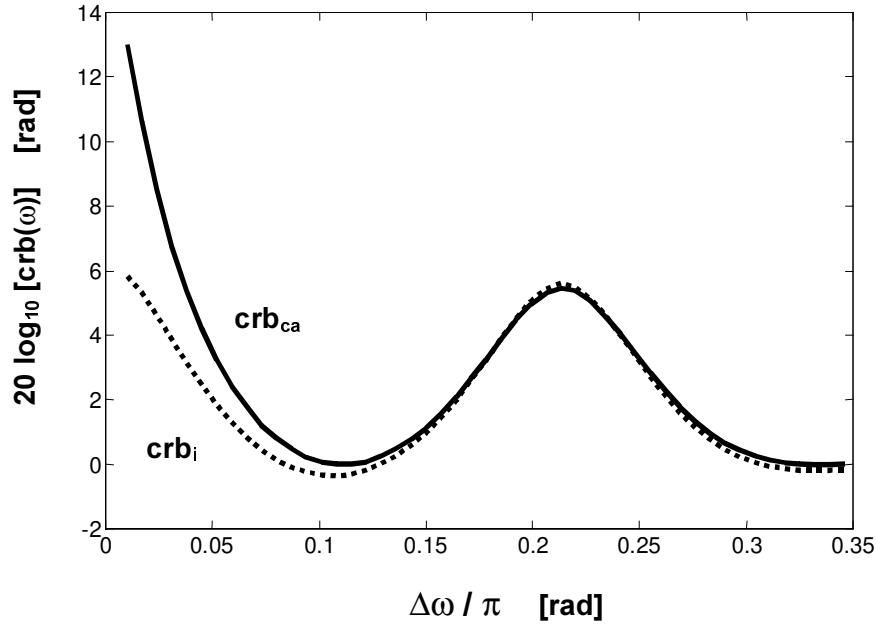


Figura 3.6 – Curvas da Diferença dos CRBs entre $\rho = 1,0$ e $\rho = 0$ em função de $\Delta\omega$.

A diferença máxima é de cerca de 13 dB para crb_{ca} e de quase 6 dB para crb_i e ocorrem na região onde $\Delta\omega$ é mínimo. Há também um lóbulo destacado próximo de $\Delta\omega = 0,22\pi$ rad. Nos dois vales das curvas, a diferença é próxima de zero ou mesmo negativa, porém é predominante o caso em que o valor do CRB sob $\rho = 1$ é maior que sob $\rho = 0$. Isso destaca um aspecto importante, indicando a maior facilidade teórica de se realizar a estimação de sinais descorrelacionados, que apresentam menor CRB, em geral, comparados aos CRBs dos sinais correlacionados. A curva da diferença para o Caso 3.2 apresenta comportamento semelhante. Os CRBs também apresentam grande variação em função de $\Delta\omega$, sob ρ fixo. Estes dois parâmetros portanto, são objetos de uma análise experimental detalhada para avaliar o desempenho dos métodos de estimação.

As figuras 3.3, 3.4 e 3.5 não são encontradas na literatura e condensam informações qualitativas importantes sobre os comportamentos gerais desses CRBs. No item seguinte obtém-se comparações quantitativas dos CRBs assintóticos.

3.6.3.2 – CRBs em Função da SNR

Conforme observado no item 3.3.3, crb_i é função não-linear da SNR, devido à presença da matriz $\mathbf{R}$ na expressão (3.11). A Figura 3.7 mostra a curva de crb_{ca} (curva contínua) e crb_i (curva pontilhada) de 2 sinais (duas exponenciais complexas). A SNR é variada entre -10 a 15 dB e o número de *snapshots* é igual a 100. As curvas são calculadas das expressões (3.10) e (3.11). A frequência é escolhida como $\omega_1 = 0,174\pi$ rad, que equivale a um DOA de 10° . Para a frequência ω_2 usa-se dois valores distintos, $0,259\pi$ e $0,342\pi$ rad, que correspondem a DOAs iguais a 15° e 20° , respectivamente. O fator de correlação é $\rho = 0$.

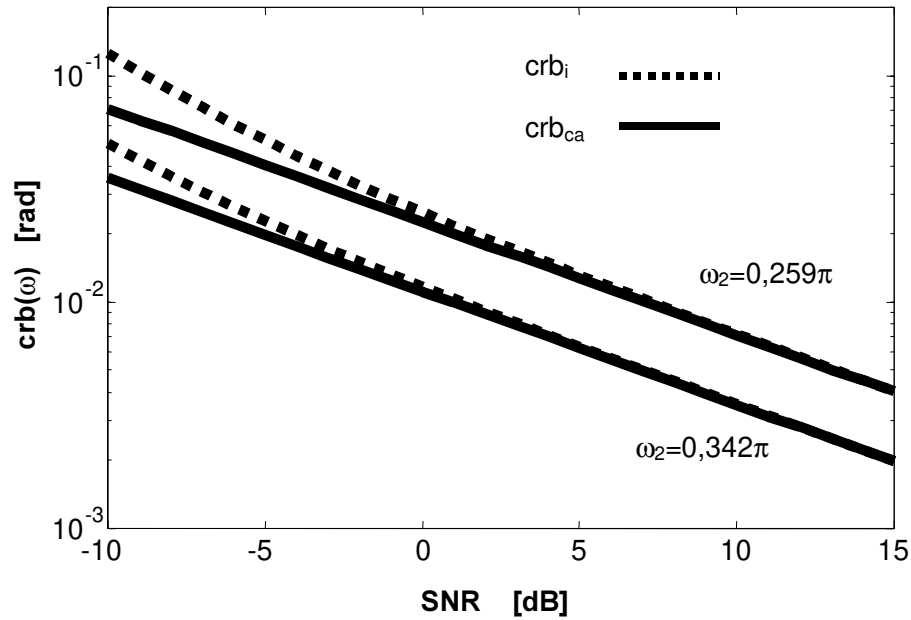


Figura 3.7 – crb_{ca} e crb_i em função da SNR, $\omega_1 = 0,174\pi$, $N = 100$, $M = 10$ e ω_2 indicado.

Destas curvas observa-se que o aumento da SNR produz uma redução significativa do CRB. Também, conforme já ilustrado anteriormente, quanto maior o espaçamento entre as frequências, menor é o valor do CRB. O crb_i apresenta maiores valores que o crb_{ca} devido ao número de parâmetros que podem ser estimados de forma consistente em cada um desses modelos [Stoica90c]. Quanto menor o espaçamento entre as frequências, maior a diferença entre os dois CRBs para uma mesma SNR. Estas curvas serão utilizadas como referências nas simulações dos métodos apresentados nos capítulos posteriores.

3.7 – Conclusões

Apresentamos neste capítulo as principais expressões para o cálculo do limite de Cramér-Rao para estimação de frequência, dos três modelos de sinais apresentados no Capítulo 2. Para os modelos aleatórios condicional e incondicional foram mostradas também as expressões assintóticas. Nas simulações numéricas, obteve-se as curvas e superfícies desses CRBs para diversos tipos e valores dos parâmetros do sinal e da ULA.

Observou-se que, de forma geral, todos os CRBs apresentados nesse capítulo são afetados positivamente pelo aumento dos seguintes parâmetros: número de sensores, relação sinal-ruído e o espaçamento entre as frequências. Verificou-se também nas simulações que os CRBs podem ser significativamente afetados pela diferença de fase, no modelo determinístico, ou pelo fator de correlação, no caso dos modelos aleatórios. Estas variações devem ser cuidadosamente analisadas quando se avalia o desempenho dos métodos de estimação frente a este índice.

A influência do fator de correlação no CRB para o caso de 2 sinais foi analisado qualitativa e quantitativamente, permitindo concluir pela degradação que este índice sofre quando se compara sinais descorrelacionados e sinais coerentes.

Capítulo 4

O Estimador de Máxima-Verossimilhança

4.1 - Introdução

O Estimador de Máxima-Verossimilhança ou MLE (*Maximum Likelihood Estimator*) é um método de estimação de parâmetros clássico. As estimativas dos parâmetros são obtidas diretamente das amostras dos sinais contaminados por ruído, porém demandam elevado esforço computacional (EC), razão pela qual sua implementação direta não é uma alternativa comumente utilizada.

Este capítulo apresenta algumas expressões do MLE para estimação de DOA para os modelos de sinais estocásticos. O objetivo é analisar algumas características deste estimador, o que possibilitará uma melhor compreensão dos métodos de estimação que são derivados do MLE e que serão apresentados nos capítulos seguintes. Estes métodos obtêm desempenho próximo ao MLE com EC consideravelmente menor, devido aos equacionamentos mais simplificados.

São também mostrados os resultados de algumas simulações numéricas do MLE aplicados aos exemplos do Capítulo 3. Por fim, o desempenho assintótico dos MLEs são comparados com os respectivos CRBs.

4.2 – O Estimador ML (MLE)

O MLE é obtido a partir da função densidade de probabilidade do vetor das amostras ou de dados $\mathbf{y}(n)$. Sua vantagem é que pode ser usado em diversos problemas de estimação considerados complicados [Kay93], pois explora os dados de modo relativamente eficiente. Em aplicações específicas de estimação de frequências ou de DOA em ULA, seu desempenho

é ótimo assintoticamente, ou seja, aproxima-se do CRB quando o número de *snapshots* cresce. Adicionalmente, não apresenta deficiência nas estimativas de parâmetros de sinais coerentes, onde outras categorias de métodos de estimação geralmente falham, como nos métodos paramétricos baseados em subespaços.

A estimativa do vetor de parâmetros é calculada através de uma busca K-dimensional, procurando-se o ponto de mínimo de uma função custo. O esforço computacional exigido por esta busca é proibitivo.

O MLE apresenta duas versões [Ottersten89], baseadas nos modelos dos sinais estocásticos apresentados no Capítulo 2. A primeira versão é o Estimador de Máxima-Verossimilhança Determinístico ou DMLE (*Deterministic Maximum Likelihood Estimator*), para o modelo condicional. A segunda versão é o Estimador de Máxima-Verossimilhança Estocástico ou SMLE (*Stochastic Maximum Likelihood*) ou Estimador ML Estocástico, para o modelo incondicional.

4.3 – Estimador ML Determinístico (DMLE)

Este estimador supõe que o sinal é adequadamente representado pelo modelo condicional, onde os parâmetros dos sinais são aleatórios nos *snapshots*, porém, nas diferentes realizações, usa-se sempre a mesma sequência.

A expressão do DMLE é obtida da função densidade de probabilidade do vetor de amostras e de um vetor de parâmetros, na chamada função de verossimilhança, $L(\boldsymbol{\tau})$. Esta função é maximizada, i.e., obtém-se um vetor de parâmetros $\boldsymbol{\tau}$ que faça com que ela tenha o maior valor possível [Bresler86]. Esta expressão pode ser obtida, alternativamente, a partir da função erro quadrático médio [Kumaresan86], da qual se obtém uma estimativa da amplitude complexa. Esta estimativa é substituída na função erro original, resultando numa função erro modificada, igual à função custo do DMLE.

No modelo aqui adotado, o ruído presente no vetor de dados é modelado como branco e gaussiano de média zero. Como consequência, o vetor de dados $\mathbf{y}(n)$ é também um processo aleatório Gaussiano, com média $\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{s}(n)$ e a matriz de correlação dada por $\sigma^2 \mathbf{I}$. A função de verossimilhança para este caso é dada por [Krim96]:

$$L_{\text{DMLE}}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}(n), \sigma^2) = \prod_{n=1}^N (\pi \sigma^2)^{-M} e^{-\|\mathbf{y}(n) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{s}(n)\|^2 / \sigma^2} \quad (4.1)$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana, $\boldsymbol{\omega}$ é o vetor com as frequências dos sinais, $\mathbf{s}(n)$ é o vetor com as amplitudes complexas para o n -ésimo snapshot e σ^2 é a variância do ruído. A dependência de $\mathbf{A}$ com $\boldsymbol{\omega}$ não será mostrada nas expressões seguintes. Por conveniência, as estimativas do ML são definidas como os argumentos que minimizam o logaritmo da expressão (4.1), ou seja:

$$l_{\text{DMLE}}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}(n), \sigma^2) = -\log[L_{\text{DMLE}}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}(n), \sigma^2)] \quad (4.2)$$

Normalizando por N e ignorando o termo constante $M \log(\pi)$, obtém-se:

$$l_{\text{DMLE}}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}(n), \sigma^2) = M \log \sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2 N} \sum_{n=1}^N \|\mathbf{y}(n) - \mathbf{A}\mathbf{s}(n)\|^2 \quad (4.3)$$

Os parâmetros são σ^2 , $\mathbf{s}(n)$ e $\boldsymbol{\omega}$. Suas estimativas ML são os valores que minimizam a expressão (4.3).

Uma estratégia sempre usada nesta minimização é a fixação de $\boldsymbol{\omega}$ e a minimização em relação aos dois outros parâmetros, uma vez que os três são independentes. Em seguida, substitui-se os valores mínimos em (4.3) e se realiza a minimização em relação a $\boldsymbol{\omega}$. Este procedimento produz [Krim96]:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{M} \text{tr}[\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}] \quad (4.4)$$

e

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^* \mathbf{y}(n) \quad (4.5)$$

respectivamente, onde “tr” denota traço da matriz, $\hat{\mathbf{R}}$ é a matriz de covariância das amostras e $\mathbf{P}_A^\perp$ é um projetor ortogonal dado pela expressão (3.8). Substituindo as expressões (4.4) e (4.5) em (4.3), e observando-se que $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|\mathbf{P}_A^\perp \mathbf{y}(n)\|^2 = \text{tr}(\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}})$, mostra-se que as estimativas das frequências são obtidas resolvendo-se o seguinte problema de minimização [Krim96]:

$$\hat{\omega}_{\text{DMLE}} = \arg \min_{\boldsymbol{\omega}} \{ F_{\text{DMLE}}(\boldsymbol{\omega}) \} \quad (4.6)$$

onde

$$F_{\text{DMLE}}(\boldsymbol{\omega}) = \text{tr}[\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}] \quad (4.7)$$

é a função custo do DMLE para o parâmetro frequência.

O termo “desempenho” é utilizado neste trabalho como sinônimo do erro quadrático médio das estimativas geradas pelos métodos de estimação. Conforme foi destacado no

Capítulo 3, o CRB é o limite teórico inferior que o desempenho pode atingir. O desempenho do MLE, assim como o de outros métodos, pode, portanto, ser comparado com o CRB no intuito de avaliar sua eficiência frente a este índice. Porém, a quantidade de parâmetros e suas faixas de variações são muito diversificadas e podem exigir simulações computacionais extensas para se poder observar os aspectos mais relevantes de cada método.

Para contornar este problema, expressões analíticas podem ser obtidas para detalhar o comportamento assintótico (quando o número de *snapshots* é grande) dos estimadores. Nesse caso, a referência teórica são as expressões assintóticas dos CRBs. Isso simplifica as simulações numéricas consideravelmente e podem ser utilizadas numa análise prévia dos métodos.

A expressão de desempenho assintótico do MLE é condensada na matriz de covariância. A variância de cada uma das frequências é dada pelos elementos da diagonal principal dessa matriz. Para o DMLE, a matriz de covariância é dada por [Stoica90c]:

$$\mathbf{ML}_D = \frac{\sigma^2}{2N} [\text{Re}(\mathbf{H} \otimes \mathbf{P}^T)]^{-1} \{ \text{Re}[(\mathbf{H} \otimes \mathbf{P} \mathbf{H}_A^* \mathbf{P}^T)] \} [\text{Re}(\mathbf{H} \otimes \mathbf{P}^T)]^{-1} \quad (4.8)$$

com

$$\mathbf{H} = \mathbf{D}_\omega^* \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D}_\omega \quad (4.9)$$

e

$$\mathbf{H}_A = \mathbf{P}^{-1} + \sigma^2 \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{P}^{-1} \quad (4.10)$$

onde $\mathbf{D}_\omega$ e $\mathbf{A}$ são calculados pelas expressões (3.9) e (2.18) respectivamente. A expressão (4.8) pode ser decomposta em duas parcelas [Stoica90d], de forma que:

$$\mathbf{ML}_D = \mathbf{crb}_{ca} + \mathbf{M}_D \quad (4.8a)$$

onde $\mathbf{crb}_{ca}$ é dado pela expressão (3.10) e

$$\mathbf{M}_D = \frac{\sigma^4}{2N} [\text{Re}(\mathbf{H} \otimes \mathbf{P}^T)]^{-1} \{ \text{Re}[\mathbf{H} \otimes (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-T}] \} [\text{Re}(\mathbf{H} \otimes \mathbf{P}^T)]^{-1} \quad (4.11)$$

Além disso, seja $\mathbf{a}(\omega_k)$ a k-ésima coluna da matriz $\mathbf{A}$. Se:

$$\mathbf{a}^*(\omega_k) \mathbf{a}(\omega_k) \rightarrow \infty \text{ conforme } M \rightarrow \infty \quad (4.12)$$

mostra-se que [Stoica89]:

$\mathbf{a} - \mathbf{M}_D$ é semi-definida positiva e, portanto, $\mathbf{ML}_D \geq \mathbf{crb}_{ca}$;

- b** - para vetores $\mathbf{a}(\omega)$ que não satisfazem a expressão (4.12) e SNR finita, $\mathbf{M}_D$ é estritamente limitada por zeros;
- c** - para vetores $\mathbf{a}(\omega)$ que satisfazem (4.12), $\mathbf{M}_D$ aproxima-se de zero mais rápido que $\mathbf{crb}_{ca}$ quando M aumenta e, portanto, este estimador é assintótico e eficiente estatisticamente. Esta situação ocorre em aplicações como estimação de DOAs usando ULA e em estimação de parâmetros de sinais exponenciais não-amortecidos.

A expressão (4.6) deve ser resolvida numericamente para se obter as estimativas das frequências do DMLE, uma vez que a minimização é um problema de otimização não-linear K dimensional. Os algoritmos baseados na técnica de Gauss-Newton podem ser usados para esta finalidade. Sua convergência para o ponto de mínimo geralmente é rápida, caso seja fornecida uma boa estimativa inicial. Se a estimativa inicial for inadequada, o procedimento de busca pode convergir para um mínimo local e não atingir o mínimo global desejado. Porém, independentemente da estimativa inicial, a convergência para o mínimo global não pode ser garantida [Krim96]. Uma vez estimadas as frequências, as estimativas das amplitudes complexas e da variância do ruído são obtidas diretamente das expressões (4.4) e (4.5).

4.4 – Estimador MLE Estocástico (SMLE)

O SMLE é obtido quando os parâmetros dos sinais são modelados como variáveis aleatórias Gaussianas, para o modelo incondicional.

O conjunto de parâmetros a ser estimado é composto pelas frequências ω , pela matriz de correlação dos sinais $\mathbf{P}$ e pela variância do ruído σ^2 . A função de verossimilhança para este modelo é dada por [Colares00a]:

$$L_{\text{SMLE}}(\omega, \mathbf{P}, \sigma^2) = \prod_{n=1}^N (\pi)^{-M} |\mathbf{R}|^{-M} e^{-[\mathbf{y}^T(n) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}(n)]} \quad (4.13)$$

Seguindo as mesmas etapas aplicadas ao DMLE e considerando que os parâmetros são independentes, fixa-se ω de forma que as estimativas de σ^2 e $\mathbf{P}$ podem ser calculadas por [Krim96]:

$$\hat{\sigma}_{\text{SMLE}}^2(\omega) = \frac{1}{M - K} \text{tr}(\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}) \quad (4.14)$$

e

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{SMLE}}(\omega) = (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^* [\hat{\mathbf{R}} - \hat{\sigma}_{\text{SMLE}}^2(\omega) \mathbf{I}] [(\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^*]^* \quad (4.15)$$

Substituindo-se estas estimativas na função de verossimilhança modificada do SMLE e realizando-se algumas simplificações, as estimativas de frequências são obtidas da seguinte expressão [Krim96]:

$$\hat{\omega}_{\text{SMLE}} = \arg \min_{\omega} \{ F_{\text{SMLE}}(\omega) \} \quad (4.16)$$

onde

$$F_{\text{SMLE}}(\omega) = \log_{10} \det \left[\mathbf{A} \hat{\mathbf{P}}_{\text{SMLE}}(\omega) \mathbf{A}^* + \hat{\sigma}_{\text{SMLE}}^2(\omega) \mathbf{I} \right] \quad (4.17)$$

é a função custo do SMLE.

A minimização exigida por (4.16) é um problema não-linear, como no caso do DMLE, e que pode apresentar diversos mínimos locais. Ela é usualmente realizada através de técnicas como o método de Gauss-Newton, *simulated annealing*, redes neurais ou algoritmos genéticos [Ottersten89], todos com esforço computacional considerável. As estimativas geradas pelo SMLE têm maior precisão que o caso DMLE. Também fornece estimativas assintoticamente eficientes, ou seja, a variância das estimativas do SMLE acompanham o CRB do modelo incondicional [Stoica90d]. A matriz de covariância do SMLE ($\mathbf{ML}_S$) tem, portanto, a mesma expressão que $\mathbf{crb}_i$, (3.11), reproduzida a seguir:

$$\mathbf{ML}_S = \mathbf{crb}_i = \frac{\sigma^2}{2N} \left\{ \text{Re} \left[\mathbf{D}_{\omega}^* \mathbf{P}_A^{\perp} \mathbf{D}_{\omega} \otimes (\mathbf{P} \mathbf{A}^* \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P})^T \right] \right\}^{-1} \quad (4.18)$$

4.5 – Simulações Numéricas

Apresenta-se nesta seção a ilustração do desempenho obtido com a função de verossimilhança para o DMLE para o exemplo do Caso 3.1, composto de duas exponenciais complexas. No item seguinte é realizada a comparação entre o desempenho assintótico do DMLE para o parâmetro frequência e o CRB equivalente.

4.5.1 - Análise da Função de Verossimilhança

Considere a função de verossimilhança $L(\omega)$, expressão (4.7), desenvolvida para um *snapshot* [Kay88]:

$$\mathbf{L}(\omega) = \mathbf{y}^* \mathbf{A} (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^* \mathbf{y} \quad (4.19)$$

Caso o sinal seja composto por duas exponenciais complexas, esta expressão assume a seguinte forma [Kay88, Tufts82]:

$$L(\omega) = \frac{M \left[|Y(\omega_1)|^2 + |Y(\omega_2)|^2 \right] - 2 \operatorname{Re} \left[Y^*(\omega_1) Y(\omega_2) \beta(\omega_1, \omega_2) \right]}{M^2 - |\beta(\omega_1, \omega_2)|^2} \quad (4.20)$$

onde

$$Y(\omega) = \sum_{m=0}^{M-1} y_m e^{-j\omega m} \quad (4.21)$$

e as amostras do sinal y_m são dadas por:

$$y_m = e^{j(\omega_1 m + \phi_1)} + e^{j(\omega_2 m + \phi_2)} + \xi_m \quad 0 \leq m \leq M-1 \quad (4.22)$$

e

$$\beta(\omega_1, \omega_2) = \mathbf{a}^*(\omega_1) \mathbf{a}(\omega_2) \quad (4.23)$$

O Caso 3.1, apresentado no capítulo anterior, é simulado a seguir.

4.5.1.1 – Superfícies Geradas pela Função de Verossimilhança

Este caso apresenta $M = 10$, $\omega_1 = 0,547$ rad, $\omega_2 = 0,814$ rad e se impõe $\phi_1 = \phi_2 = 0$. As faixas de variações para as frequências são iguais entre si e vão de 0,1 rad até 1,25 rad.

A superfície gerada pela expressão $L(\omega)$ em função das frequências ω_1 e ω_2 e SNR infinita (sem ruído), é apresentada na figura seguinte:

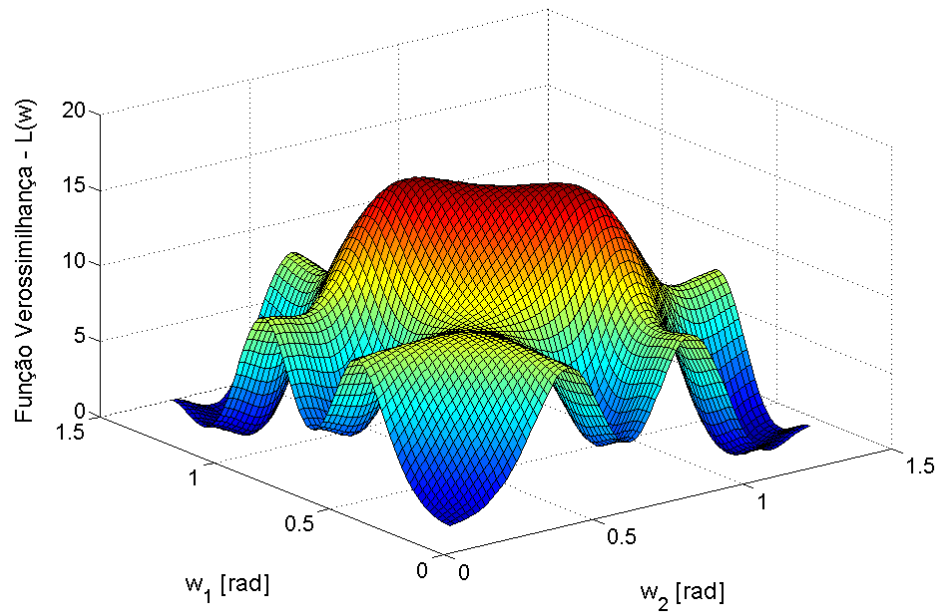


Figura 4.1 – Superfície da Função de Verossimilhança: Caso 3.1 – Sem ruído

As curvas de níveis dessa superfície são apresentadas na Figura 4.2, onde as frequências verdadeiras são destacadas pelo sinal ‘+’.

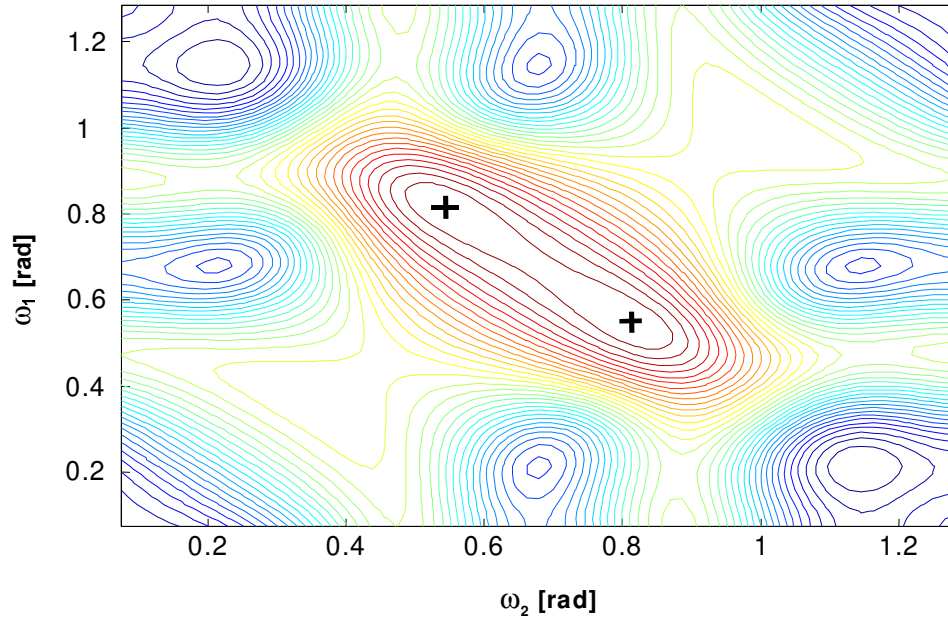


Figura 4.2 – Curvas de Níveis da Figura 4.1 – Sem ruído

As curvas de níveis são simétricas em relação a um eixo ligando a origem ao ponto de valor máximo de ω_1 e ω_2 . Observa-se que as frequências verdadeiras situam-se na região mais plana e elevada da superfície. Portanto, mesmo com SNR elevada, a obtenção de uma estimativa precisa fica condicionada a uma busca muito lenta, em função da superfície ser muito plana nessa região.

A superfície da função de verossimilhança e as curvas de níveis associadas para este mesmo caso são apresentadas nas figuras seguintes, para diferentes valores de SNRs.

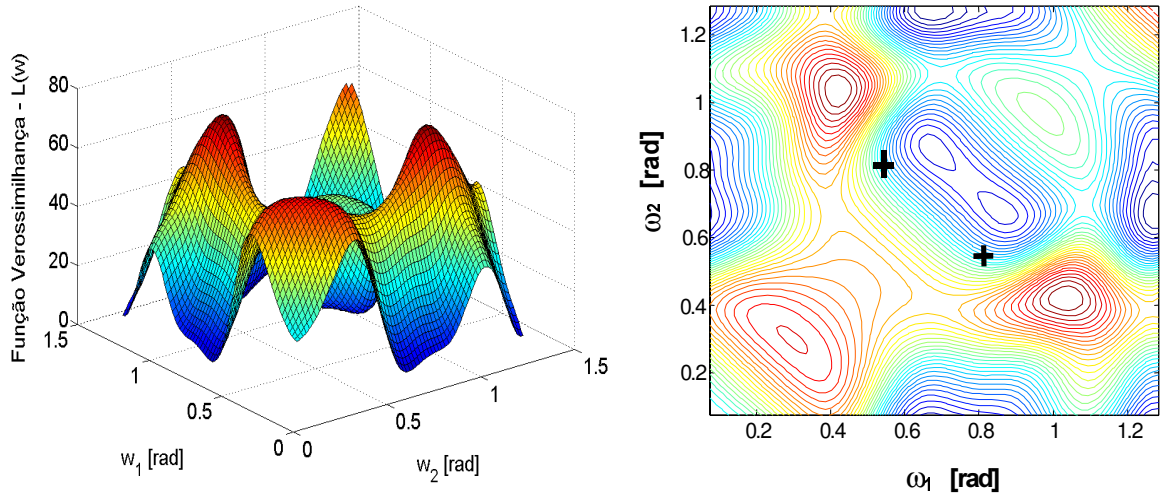


Figura 4.3 – Função de Verossimilhança: Caso 3.1 – SNR = -10 dB

Na Figura 4.3, com SNR de -10 dB, observa-se que o máximo global da função está próximo das frequências 0,42 e 1,05 rad, distante, portanto, das frequências reais. Há ainda um outro máximo local, situado próximo das frequências 0,35 e 0,35 rad, que poderia ser indicado como as estimativas de frequências num algoritmo cuja estimativa inicial fosse um vetor de frequências inadequado.

A Figura 4.4 seguinte apresenta $L(\omega)$ para o mesmo caso, com SNR de -2 dB.

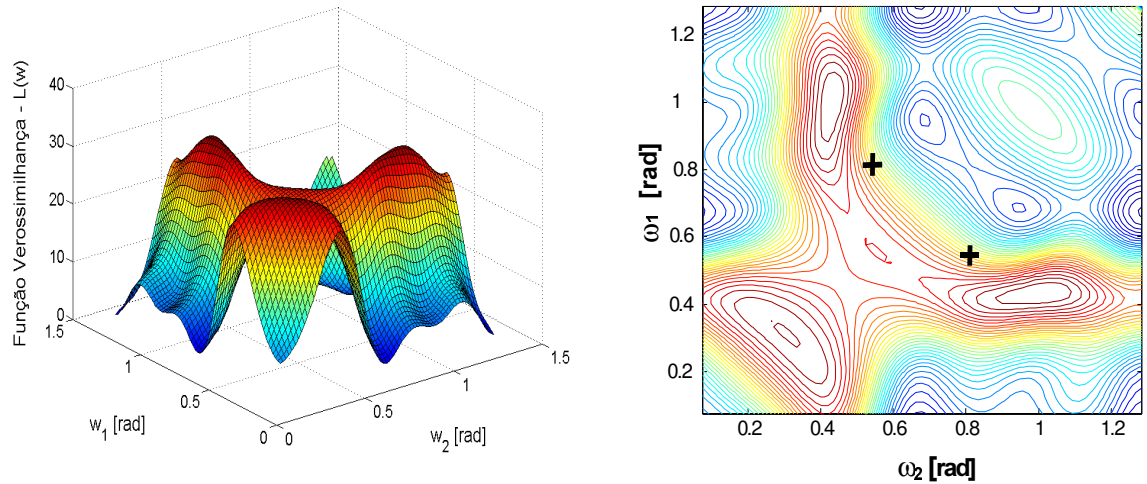


Figura 4.4 – Função de Verossimilhança: Caso 3.1 – SNR = -2 dB

Nesta situação, a estimativa MLE deve ainda apresentar resultado precário pois o máximo global se encontra na região de 0,42 e 0,98 rad, bem distante das frequências reais. Ainda apresenta um máximo local na região em que as frequências são iguais a 0,35 rad.

A Figura 4.5 mostra a função de verossimilhança desse caso com SNR de 4 dB.

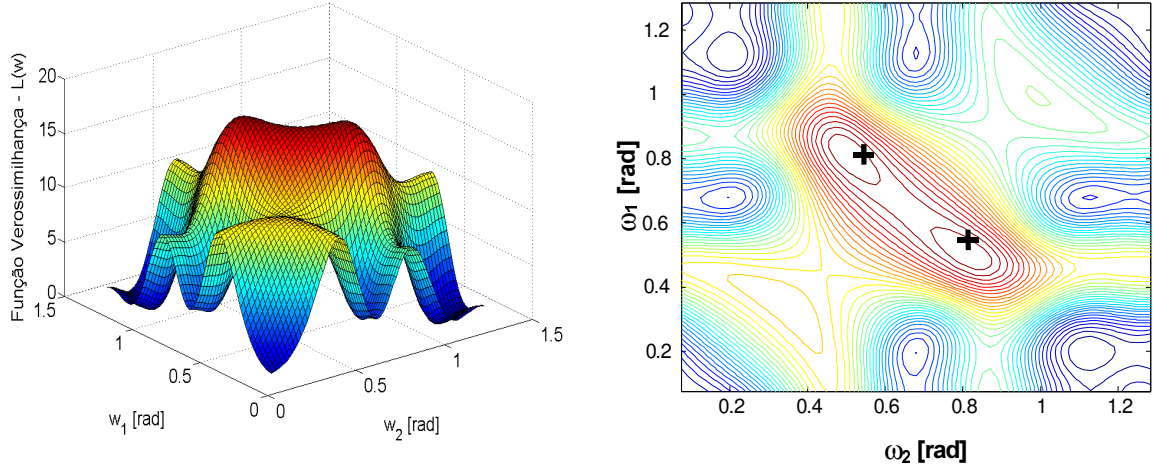


Figura 4.5 – Função de Verossimilhança: Caso 3.1 – SNR = 4 dB

Esta situação apresenta uma melhor definição das frequências, semelhante ao caso de SNR infinita (Figura 4.1 e 4.2). Pode-se inferir que a partir desta SNR em diante, o desempenho das estimativas do MLE deve atingir valores próximos do respectivo CRB.

Note que as faixas de frequências ω_1 e ω_2 escolhidas para se calcular as superfícies anteriores, de 0 a 1,25 rad foram definidas em função de se conhecer as frequências verdadeiras; num caso mais realístico, com frequências desconhecidas, a busca deve ser realizada para todos os valores possíveis destes parâmetros, principalmente para baixas SNR, quando podem haver múltiplos máximos locais. A busca multidimensional, nessa condição, exigiria grande esforço computacional.

4.5.2 - Comparação de Desempenho do MLE Determinístico e o CRB

O desempenho assintótico do DMLE, expressão (4.8), foi desenvolvido objetivando simplificar as análises numéricas qualitativas. O CRB que serve de referência para o desempenho assintótico, foi obtido no Capítulo 3 e é dado pela expressão (3.10), crb_{ca} . Nesse item, é realizada a comparação entre estas duas grandezas.

Para situações que obedecem (4.12), $\mathbf{M}_D$ tende a zero quando M aumenta e, portanto, o DMLE é eficiente assintoticamente (M grande). Para pequenos e médios valores de M , $\mathbf{M}_D$ é diferente de zero e assim o DMLE é estatisticamente ineficiente. Adicionalmente, $\mathbf{M}_D$ é

inversamente proporcional ao quadrado da SNR e portanto o DMLE é também eficiente em altas SNR.

Estes resultados podem ser observados na Figura 4.6, que apresenta as curvas do DMLE e a do CRB, obtidos para o modelo condicional. As curvas são obtidas para dois diferentes números de amostras (10 e 25), em função do espaçamento angular entre os sinais e $\text{SNR} = 0 \text{ dB}$. Como ocorre com a matriz crb_{ca} , o valor do desempenho assintótico do DMLE é dado pelos valores da diagonal principal da matriz $\mathbf{ML}_D$. Para sinais com mesma variância nas amplitudes, os valores de desempenho para as frequências são iguais e, portanto, basta tomar um dos elementos da diagonal para se traçar tal curva.

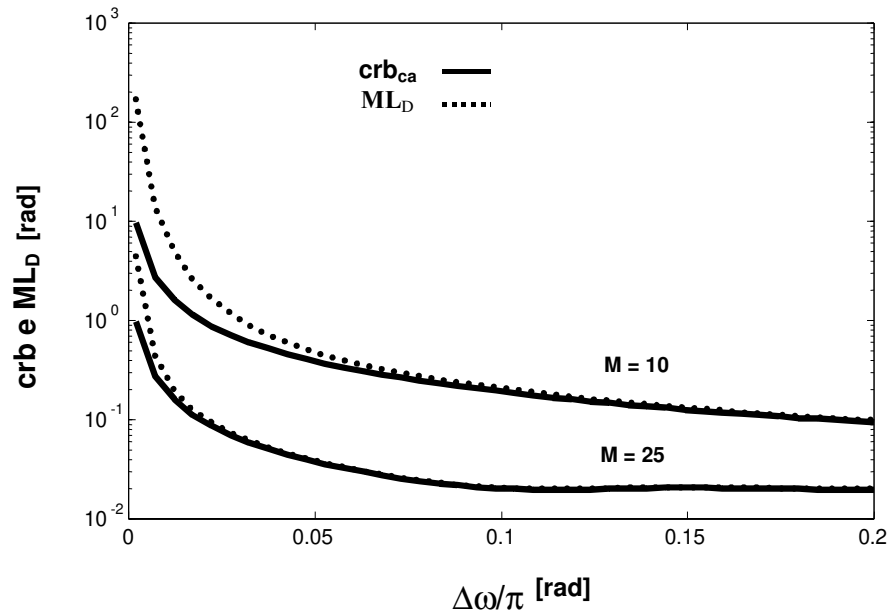


Figura 4.6 – Curvas de crb_{ca} e $\mathbf{ML}_D$ em função do espaçamento entre as frequências ($\Delta\omega$)

A curva representando o $\mathbf{ML}_D$, para o caso $M = 10$, apresenta uma diferença significativa do CRB para pequenos valores de $\Delta\omega$. Já no caso $M = 25$, as curvas estão próximas ao longo de uma faixa maior de valores de $\Delta\omega$. Observa-se, portanto, que o número de sensores representa um parâmetro importante na eficiência do DMLE.

4.6 – Conclusões

O objetivo deste capítulo foi apresentar as principais expressões do MLE e algumas simulações numéricas.

Foram apresentados dois tipos de estimadores ML, cada um derivado de um modelo de sinal: o MLE Determinístico e o MLE Estocástico.

A função DMLE foi analisada quantitativamente para um caso importante da área, possibilitando inferir as limitações que este critério pode sofrer quanto ao número de sensores, espaçamento entre as frequências e a SNR. Não foi realizada nenhuma tentativa de quantificar o EC exigido por este método, sabidamente elevado.

Observou-se nas simulações numéricas que a função de verossimilhança pode apresentar diversos pontos de mínimos globais e locais, que estão longe das frequências verdadeiras. Nesse caso, nenhum estimador baseado nesse critério consegue realizar a estimação de forma precisa. Em condições menos severas de SNR, a estimação pode ser mais eficiente, mesmo que o ponto de mínimo do método não fique próximo das frequências reais. Isso é conseguido caso sejam inseridas frequências candidatas extras que podem, eventualmente, serem melhores que as estimativas obtidas diretamente pela função custo. Este fato será explorado nos métodos de estimação descritos nos Capítulos 7 e 8.

Capítulo 5

Uma Descrição Unificada para Métodos de Estimação Derivados do DMLE

5.1 - Introdução

O Estimador ML Determinístico (DMLE) foi apresentado no Capítulo 4 como um método de estimação com grande capacidade de resolução e que não apresenta dificuldade de aplicação em arranjos de sensores de qualquer geometria. Sob o enfoque experimental, foi observado que a sua curva de desempenho assintótico está próxima do respectivo CRB, porém, a implementação direta dessa técnica exige esforço computacional considerável. Para superar este problema, foram desenvolvidos métodos de estimação iterativos, que obtêm as estimativas dos parâmetros através da minimização de uma versão modificada da função custo do DMLE. Estes métodos são chamados genericamente de métodos derivados do DMLE. Os esforços computacionais requeridos em suas implementações são bem menores que o do método original e, de forma geral, seus desempenhos estão muito próximos daquele obtido com o DMLE.

Dentre esses métodos derivados podem ser citados o IQML [Bresler86] [Kumaresan86], um método clássico, o MODE [Stoica90a], mais moderno e, mais recentemente, o M-IQML [Kristensson99] e MODEX [Gershman99]. Estes métodos serão descritos detalhadamente nos dois capítulos seguintes.

Este capítulo apresenta uma descrição unificada para os métodos de estimação derivados do DMLE pois apresentam um equacionamento básico comum ou que podem ser descritos de forma semelhante através de manipulações algébricas. Ela pode ser estendida também de forma a envolver outros métodos ou categorias que dependem de algum tipo de

minimização quadrática, o que ocorre nos métodos baseados na predição linear, em subespaços ou na distância entre subespaços [Colares01].

Essa descrição unificada permite que sejam analisadas algumas figuras de mérito importantes, como o limiar de estimação, o desempenho, o esforço computacional, etc.. Seu uso simplifica as diversas expressões de cada método e permite a elaboração de um programa de simulação compacto. Adicionalmente, facilita a proposição e implementação de novos métodos de estimação baseados naqueles existentes conforme propostos em [Alves00a], [Alves00b], [Lopes01] e [Lopes03].

Este capítulo também aborda aspectos importantes e inéditos da implementação computacional dessa descrição unificada, a qual será utilizada intensamente nas simulações numéricas dos métodos abordados nesse trabalho.

5.2 – Equacionamento Básico dos Métodos Derivados do DMLE

No Capítulo 4 foi deduzida a expressão da função custo do DMLE das frequências de sinais composto de múltiplas exponenciais, expressão (4.7), transcrita a seguir:

$$F_{\text{DMLE}}(\boldsymbol{\omega}) = \text{tr} \left[\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}} \right] \quad (5.1)$$

com $\mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{I}_M - \mathbf{A}(\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^*$ e a matriz $\mathbf{A}$ definida no Capítulo 2.

Porém, esta expressão é não-linear em relação às frequências desconhecidas e não há uma expressão algébrica para se obter o vetor $\boldsymbol{\omega}$ que minimiza a função custo (5.1). As estimativas desse vetor são obtidas através de uma busca sobre o espaço K -dimensional das frequências, o que exige elevado esforço computacional.

Os métodos derivados do DMLE citados neste capítulo apresentam uma estrutura básica comum. Têm como motivação a obtenção de estimativas das frequências com esforço computacional menor do que aquele exigido pela minimização direta de $F_{\text{DMLE}}(\boldsymbol{\omega})$.

Para simplificar o equacionamento do DMLE, sua função custo é reparametrizada utilizando-se um vetor de parâmetros $\mathbf{b}_K = [b_K^{(0)}, b_K^{(1)}, \dots, b_K^{(K)}]^T$, onde os elementos $b_K^{(k)}$ são os coeficientes do seguinte polinômio [Bresler86, Kumaresan86]:

$$p_K(z) = b_K^{(0)} z^K + b_K^{(1)} z^{K-1} + \dots + b_K^{(K)} = b_K^{(0)} \prod_{k=1}^K (z - e^{j\omega_k}) \quad (5.2)$$

As raízes de $p_K(z)$ são $e^{j\omega_k}$, com $k = 1, \dots, K$, e se situam sobre a CRU. Portanto:

$$\sum_{k=0}^K b_K^{(k)} e^{j(m-k)\omega_i} = 0 \quad (5.3)$$

com $m = 0, 1, \dots, M-1$ e $i = 1, \dots, K$. Esta expressão pode ser reescrita como [Kumaresan86]:

$$\mathbf{B}^* \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (5.4)$$

sendo $\mathbf{B}$ uma matriz Toeplitz formada pelos elementos de $\mathbf{b}_K$ da seguinte forma:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_K^{(0)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_K^{(K)} & \dots & b_K^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & b_K^{(K)} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{M \times (M-K)} \quad (5.5)$$

A expressão (5.4) indica que o espaço gerado pelas linhas de $\mathbf{B}^*$ é ortogonal ao espaço gerado pelas colunas de $\mathbf{A}$ [Bresler86] e é chamado de espaço nulo de $\mathbf{A}^*$. Para expressar $F_{\text{DMLE}}(\boldsymbol{\omega})$ em função do vetor de parâmetros $\mathbf{b}_K$, é necessário enunciar a seguinte propriedade:

Propriedade 5.1 – Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ matrizes quaisquer, com o mesmo número de linhas M e sejam r_C e r_D os postos das matrizes $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$, respectivamente.

Se $r_C + r_D = M$ e se $\mathbf{C}^* \mathbf{D} = \mathbf{0}$ então $\mathbf{I} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^* \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^* + \mathbf{D}(\mathbf{D}^* \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^*$, onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem M (demonstração na referência [11] de [Kumaresan86]). •

As matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ atendem as condições da Propriedade 5.1 ($r_A = K$ e $r_C = M-K$) e portanto pode-se escrever:

$$\mathbf{B}(\mathbf{B}^* \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^* = \mathbf{I}_{(M \times M)} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^* \quad (5.6)$$

Substituindo a expressão (5.6) em (5.1), obtém-se a função custo equivalente $F_R(\mathbf{b})^1$, reparametrizada em função do vetor $\mathbf{b}_K$ e dada por:

$$F_R(\mathbf{b}) = \text{tr}[\mathbf{B}(\mathbf{B}^* \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^* \hat{\mathbf{R}}] \quad (5.7)$$

¹ A rigor, seria $F_R(\mathbf{b}_K)$ mas adota-se a notação anterior para simplificar as expressões.

Transformando a expressão (5.7) numa minimização, com um conjunto de restrição genérica D sobre o vetor de parâmetros $\mathbf{b}_K$, obtém-se:

$$\hat{\mathbf{b}}_K = \arg \min_{\mathbf{b}_K \in D} [F_R(\mathbf{b})] \quad (5.8)$$

Como ocorreu com a minimização da função custo (5.1), não há uma expressão algébrica para $\hat{\mathbf{b}}_K$, solução da expressão (5.8), devido à não-linearidade da minimização em relação ao vetor $\mathbf{b}_K$. Porém, a expressão (5.7) é mais adequada para ser manipulada algebricamente que a expressão (5.1) e constitui a base comum dos métodos derivados.

A minimização expressa em (5.8) produz as estimativas DML do vetor de parâmetros $\mathbf{b}_K$. As frequências $\boldsymbol{\omega}$ são obtidas extraíndo-se os ângulos das raízes do polinômio $p_K(z)$.

5.3 – Análise do Conjunto de Restrições do Vetor de Parâmetros $\mathbf{b}_K$

A expressão (5.8) impõe que os elementos do vetor $\mathbf{b}_K$ estejam sujeitos a algumas restrições, condensadas no conjunto D . Dois tipos de restrições devem ser utilizadas para estimação de parâmetros de sinais: restrição de não-trivialidade e restrição quanto ao tipo de sinal.

5.3.1 – Restrição de Não-Trivialidade

Impõe-se $\{\mathbf{b}_K: \mathbf{b}_K \neq \mathbf{0}\}$, fazendo com que a correspondência entre $\mathbf{b}_K$ (vetor de parâmetros) e $\boldsymbol{\omega}$ (vetor de frequências) seja única e garantindo a invertibilidade de $\mathbf{B}^*\mathbf{B}$ [Bresler86]. As restrições de não-trivialidade são obtidas da análise das expressões dos elementos do vetor $\mathbf{b}_K$ em função das frequências e são apresentadas na Seção 5.6. Simplificadamente, estas restrições são feitas ou através de uma relação linear, impondo-se que um dos elementos de $\mathbf{b}_K$ seja unitário, ou através de uma relação quadrática na qual se impõe que o vetor $\mathbf{b}_K$ tenha norma unitária.

5.3.2 – Restrição Quanto ao Tipo de Sinal

É escolhida de acordo com o tipo de sinal tratado e é fundamental para a obtenção da solução ótima. Para o sinal composto de exponenciais complexas não-amortecidas (que

equivale ao problema de estimação de DOA em ULA) é usada a restrição de que o polinômio $p_K(z)$ tenha suas raízes sobre a CRU.

Em [Kumaresan86] avalia-se que exigir que as raízes de $p_K(z)$ estejam sobre a CRU equivale a se impor que os elementos de $\mathbf{b}_K$ tenham simetria complexa conjugada, ou seja, $\{\mathbf{b}_K : \mathbf{b}_K^{(i)} = [\mathbf{b}_K^{(K-i)}]^*, i=0, \dots, K\}$ e também que a derivada do polinômio $p_K(z)$ tenha todas as raízes sobre a CRU. Esta última condição não é utilizada, pois os resultados numéricos indicam a suficiência da simetria conjugada. Em [Stoica90a] mostra-se que a simetria complexa conjugada é uma condição necessária, porém não é suficiente para que as raízes de $p_K(z)$ se situem sobre a CRU, porém ressalta também que a perda de desempenho causada por isso é pequena. Em [Kristensson99] observa-se que a simetria complexa conjugada do vetor $\mathbf{b}_K$ permite também que sejam gerados polinômios com raízes espelhadas em relação à CRU. Apesar dessas observações, todos os métodos derivados usam a simetria complexa conjugada pois o número de elementos de $\mathbf{b}_K$ a serem estimados é reduzido à metade.

O modo como a simetria complexa conjugada é incorporada na expressão do vetor $\mathbf{b}_K$ é apresentada no item seguinte.

5.3.3 – Estruturando a Simetria Complexa Conjugada

Para incorporar a simetria complexa conjugada no vetor de parâmetros $\mathbf{b}_K$, o mesmo é decomposto em um vetor de coeficientes reais $\boldsymbol{\beta}_K = [\beta_K^{(0)} \ \beta_K^{(1)} \ \dots \ \beta_K^{(K)}]^T \in \mathbb{R}^{(K+1)}$, de forma que:

$$\mathbf{b}_K = \mathbf{W}\boldsymbol{\beta}_K \in \mathbb{C}^{K+1} \quad (5.9)$$

com $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{(K+1) \times (K+1)}$ denotando uma matriz construída com valores 0, 1 e $\pm j$. Para o caso de K ímpar, $\mathbf{W}$ tem a seguinte expressão:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & j\mathbf{I} \\ \mathbf{I}_p & -j\mathbf{I}_p \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

e para K par,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & j\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & -j\mathbf{I}_p \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade e $\mathbf{I}_P$ é chamada matriz de permutação, que apresenta valores “1” na sua anti-diagonal e “0” nos demais elementos. As expressões são distintas, pois o coeficiente central é real quando K é par.

5.4 – Descrição Unificada dos Métodos Baseados no DMLE

A minimização da expressão (5.8), com modificações adequadas, é a base de vários métodos iterativos de estimação de frequência e de DOA.

As diferenças entre os métodos resultam do uso de restrição a subespaço da matriz $\hat{\mathbf{R}}$, da dimensão escolhida para o vetor de parâmetros $\mathbf{b}_K$ e outras considerações. Apesar destas diferenças, é possível fazer uma descrição unificada e um algoritmo que abranjam as características comuns dos métodos derivados. A base de uma descrição unificada é apresentada, apenas sob o aspecto teórico, em [Colares00b] e [Colares01]. Nesse trabalho, uma descrição unificada é desenvolvida, implementada e avaliada para alguns dos principais métodos de estimação de DOA, configurando uma importante contribuição.

No Capítulo 2 foram definidas a matriz de correlação $\mathbf{R}$ e sua estimativa, $\hat{\mathbf{R}}$. Adicionalmente, uma versão modificada de $\hat{\mathbf{R}}$ pode também ser definida e será chamada de $\tilde{\mathbf{R}}$. A sua decomposição em autovalores é dada por:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{\Psi}}\hat{\mathbf{T}}^* \cong \hat{\mathbf{R}} \quad (5.12)$$

onde $\hat{\mathbf{\Psi}} \in \mathbb{C}^{\tilde{K} \times \tilde{K}}$ é a matriz diagonal dos $\tilde{K}$ maiores autovalores de $\hat{\mathbf{R}}$ e $\hat{\mathbf{T}} \in \mathbb{C}^{M \times \tilde{K}}$ a matriz composta dos respectivos autovetores, com $\tilde{K} \leq M$. Esta aproximação é válida desde que os subespaços de sinal e ruído possam ser estimados corretamente sendo, portanto, ortogonais [Colares01].

Substituindo a expressão (5.12) em (5.7), obtém-se:

$$F'_{UG}(\mathbf{b}) = \text{tr} \left[\mathbf{B}(\mathbf{B}^* \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^* (\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{\Psi}}\hat{\mathbf{T}}^*) \right] \quad (5.13)$$

onde o subscrito “UG” é abreviação de Unificado e Geral. O cálculo do vetor $\mathbf{b}_K$ que fornece o ponto de mínimo da função custo $F'_{UG}(\mathbf{b})$ requer a solução numérica de uma otimização não-linear K -dimensional. Os métodos derivados do DMLE realizam uma transformação heurística ou uma aproximação assintótica nessa expressão e a reduzem numa outra de segunda ordem, em função dos parâmetros $\mathbf{b}_K$, trocando o termo $(\mathbf{B}^* \mathbf{B})^{-1}$ por uma matriz constante $(\hat{\mathbf{B}}^* \hat{\mathbf{B}})^{-1}$.

Incluindo essa modificação em (5.13), a expressão geral será dada por:

$$F_{UG}(\mathbf{b}) = \text{tr} \left\{ \left[\mathbf{B}(\hat{\mathbf{B}}^* \hat{\mathbf{B}})^{-1} \mathbf{B}^* (\hat{\mathbf{T}} \hat{\Psi} \hat{\mathbf{T}}^*) \right] \right\} \quad (5.14)$$

A minimização de (5.14) é realizada de forma iterativa.

Normalmente, a primeira iteração é realizada com $\hat{\mathbf{B}}^* \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{I}$ e nas iterações seguintes, a estimativa de $\mathbf{b}_k$, $\hat{\mathbf{b}}_k$, é usada para atualizar o valor de $(\hat{\mathbf{B}}^* \hat{\mathbf{B}})^{-1}$. A expressão (5.14) é uma função quadrática do vetor $\mathbf{b}_k$ e, após algumas manipulações algébricas e inclusão das restrições no vetor de parâmetros, permite que a estimativa $\hat{\mathbf{b}}_k$ seja obtida através de uma expressão algébrica simples.

As funções custo $F_R(\mathbf{b})$ e $F_{UG}(\mathbf{b})$ são distintas e o processo iterativo é utilizado para refinar as estimativas. Disso resulta que alguns dos métodos derivados podem ter problemas como instabilidade e dificuldade de convergência [Bresler86, Stoica90a].

5.5 – Proposta de um Algoritmo para a Descrição Unificada

O algoritmo para a descrição unificada é obtido a partir da expressão (5.14), que pode ser decomposta em:

$$F_{UG}(\mathbf{b}) = \text{tr} \left[\mathbf{B}(\hat{\mathbf{B}}^* \hat{\mathbf{B}})^{-1} (\mathbf{B}^* \hat{\mathbf{T}}) (\hat{\Psi}^{1/2} \hat{\Psi}^{1/2}) \hat{\mathbf{T}}^* \right] \quad (5.15)$$

e transformada para:

$$F_{UG}(\mathbf{b}) = \text{tr} \left[(\hat{\Psi}^{1/2}) (\hat{\mathbf{T}}^* \mathbf{B}) (\hat{\mathbf{B}}^* \hat{\mathbf{B}})^{-1} (\mathbf{B}^* \hat{\mathbf{T}}) (\hat{\Psi}^{1/2}) \right] \quad (5.16)$$

Seja ainda:

$$\hat{\mathbf{T}} \hat{\Psi}^{1/2} \equiv \begin{bmatrix} t_{1,1} & \cdots & t_{1,\tilde{K}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{M,1} & \cdots & t_{M,\tilde{K}} \end{bmatrix} \equiv [\tilde{\mathbf{t}}_1 \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{t}}_{\tilde{K}}] \in C^{M \times \tilde{K}} \quad (5.17)$$

Substituindo a expressão (5.17) em (5.16) e considerando-se a expressão (5.9), têm-se as seguintes equivalências [Li98]:

$$\mathbf{B}^* \tilde{\mathbf{t}}_k = \tilde{\mathbf{T}}_k \mathbf{b}_k = \tilde{\mathbf{T}}_k \mathbf{W} \boldsymbol{\beta}_k \quad (5.18)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{T}}_k = \begin{bmatrix} t_{K+1,k} & \cdots & t_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{M,k} & \cdots & t_{M-K,k} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(M-K) \times (K+1)} \quad (5.19)$$

com $\tilde{\mathbf{T}}_k$ Toeplitz, de forma que a expressão (5.16) é transformada em:

$$F_{UG}(\mathbf{b}) = \left\{ \boldsymbol{\beta}_K^* \mathbf{W}^* \left[\sum_{k=1}^{\tilde{K}} \tilde{\mathbf{T}}_k^* (\hat{\mathbf{B}}^* \hat{\mathbf{B}})^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_k \right] \mathbf{W} \boldsymbol{\beta}_K \right\} \quad (5.20)$$

A expressão (5.20) pode ser modificada definindo-se a seguinte matriz:

$$\mathbf{H}_p = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{\text{chol}}^{-1} & \tilde{\mathbf{T}}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{B}}_{\text{chol}}^{-1} & \tilde{\mathbf{T}}_{\tilde{K}} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{\tilde{K}(M-K) \times (K+1)} \quad (5.21)$$

onde $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{chol}}$ é a decomposição Cholesky do produto matricial $\hat{\mathbf{B}}^* \hat{\mathbf{B}}$. Considerando (5.21) e $\boldsymbol{\beta}_K$ real, a expressão (5.20) pode ser reescrita em forma compacta por [Stoica90a] [Li98]:

$$F_{UG}(\mathbf{b}) = \left\| \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{H}_p \mathbf{W}\} \\ \text{Im}\{\mathbf{H}_p \mathbf{W}\} \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_K \right\|^2 \quad (5.22)$$

onde $\|\cdot\|$ denota norma Euclidiana. Adicionalmente, considere as seguintes definições:

$$\boldsymbol{\Omega}_p = \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{H}_p \mathbf{W}\} \\ \text{Im}\{\mathbf{H}_p \mathbf{W}\} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

e

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_p^* \boldsymbol{\Omega}_p \quad (5.24)$$

Com isso, a expressão (5.22) assume a forma:

$$F_{UG}(\mathbf{b}) = \left[\boldsymbol{\beta}_K^T \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\beta}_K \right] \quad (5.25)$$

Transformando esta expressão numa minimização, com restrição genérica D sobre o vetor de coeficientes $\boldsymbol{\beta}_K$, obtém-se finalmente:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_K = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}_K \in D} [F_{UG}(\mathbf{b})] \quad (5.26)$$

O processo é iterativo por natureza, uma vez que o vetor $\hat{\boldsymbol{\beta}}_K$ depende das estimativas anteriores, embutidas na matriz $\boldsymbol{\Omega}$. A convergência do processo é avaliada através da norma

do erro entre estimativas sucessivas do vetor $\hat{\mathbf{b}}_K$, até ser atingida uma precisão pré-determinada. As estimativas das frequências são obtidas calculando-se os ângulos das raízes do polinômio $p_K(z)$ formado com o vetor $\hat{\mathbf{b}}_K$ estimado.

A ordem do vetor $\hat{\mathbf{b}}_K$ é igual ao número de sinais K , mas pode ser ampliada para se tentar obter melhoria no desempenho do estimador. Nesse caso, algum tipo de critério para realizar a seleção das estimativas resultantes deve ser usado.

As expressões apresentadas nessa seção constituem o cerne do algoritmo da descrição unificada, ou simplesmente, do algoritmo unificado. Uma versão dele foi apresentada especificamente para o método MODE [Li98]; nessa seção foi apresentada uma versão generalizada e inédita e que permite incluir outros métodos que podem ser interpretados como baseados no DMLE. Os detalhes de cada método frente a este algoritmo generalizado são apresentados nos Capítulos 6 e 7.

5.6 – Restrições de Não-Trivialidade Aplicadas ao Vetor de Parâmetros $\mathbf{b}_K$ para o Algoritmo Unificado

Os dois tipos principais de restrições de não-trivialidade que são impostas sobre o vetor de coeficientes $\boldsymbol{\beta}_K$ na expressão (5.26), são as restrições lineares e a restrição de norma. O uso de uma dessas restrições, mais a restrição de simetria complexa conjugada, permite que sejam obtidas expressões algébricas simples para o vetor solução da minimização quadrática e que são apresentadas a seguir.

5.6.1 - Restrição Linear Real (RLR) e Restrição Linear Imaginária (RLI)

A estimativa do vetor de coeficientes correspondente ao ponto de mínimo da função custo $F_{UG}(\mathbf{b})$ é obtida derivando-se a expressão (5.25) em relação ao vetor $\boldsymbol{\beta}_K$ e igualando a derivada a zero, ou seja:

$$\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\beta}_K = \mathbf{0} \quad (5.27)$$

A restrição linear consiste em se impor que um dos elementos do vetor $\boldsymbol{\beta}_K$ tenha valor unitário, ou seja, impondo-se $\mathbf{u}^T \boldsymbol{\beta}_K = 1$, com $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{K+1}$ e com todos elementos exceto um iguais a zero. O elemento não-nulo do vetor $\mathbf{u}$ tem valor unitário.

A solução geral da expressão (5.27) com restrição linear é dada por [Gorokhov00]:

$$\boldsymbol{\beta}_K = \frac{(\boldsymbol{\Omega})^{-1} \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T (\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{u}} \quad (5.28)$$

Normalmente, duas alternativas de restrições lineares são apresentadas na literatura da área. A primeira alternativa é chamada **restrição linear real (RLR)** e é obtida impondo-se valor unitário para a parte real de $b_K^{(0)}$, ou seja, fazendo-se $\beta_K^{(0)} = 1$ e $\mathbf{u} = [1 \dots 0 \ 0]^T$ na expressão (5.28). A segunda alternativa é a **restrição linear imaginária (RLI)** que é obtida impondo-se valor unitário para a parte imaginária de $b_K^{(0)}$ ou seja, $\beta_K^{(K)} = 1$ e fazendo-se $\mathbf{u} = [0 \dots 0 \ 1]^T$.

As expressões analíticas dos elementos do vetor $\mathbf{b}_K$ em função dos parâmetros dos sinais são obtidas desenvolvendo-se a expressão (5.2) do polinômio $p_K(z)$. Considerando-se a simetria complexa conjugada nos seus elementos, pode-se facilmente demonstrar que $b_K^{(0)}$ tem a seguinte expressão geral:

$$b_K^{(0)} = \beta_K^{(0)} + j\beta_K^{(K)} = e^{j\frac{K\pi}{2}} e^{-j\frac{\Gamma}{2}} \quad (5.29)$$

onde

$$\Gamma = \sum_{k=1}^K \omega_k \quad (5.30)$$

Desenvolvendo-se a expressão (5.29) e considerando (5.30), verifica-se que os elementos real e imaginário do vetor $\boldsymbol{\beta}_K$ presentes no elemento $b_K^{(0)}$ dependem da somatória das frequências. Portanto, apresentam valor zero sob certas combinações de frequências, porém nunca simultaneamente. Nessas condições específicas e em suas vizinhanças podem ocorrer erros numéricos nas etapas da minimização e o processo iterativo pode não convergir. Este problema é contornado realizando-se duas minimizações sobre o mesmo conjunto de dados, cada uma sob uma das restrições lineares citadas [Stoica90a]. Adicionalmente é proposto um critério para selecionar o melhor entre os dois conjuntos de estimativas geradas.

5.6.2 - Restrição Linear Central (RLC) - Caso K Par

Uma outra restrição linear é chamada restrição linear central (RLC) [Alves00a]. Ela é obtida como as duas restrições lineares apresentadas no item anterior, porém pode ser utilizada apenas quando K é par. Nessa condição, o elemento central do vetor $\mathbf{b}_K$, $b_K^{(K/2)}$, é um valor real devido à imposição da simetria complexa conjugada. Pode ser demonstrado que sua expressão geral em função dos parâmetros dos sinais é dada por:

$$b_K^{(K/2)} = 2(-1)^{K/2} \sum_{i=1}^{L/2} \cos\left(\frac{\Gamma - \bar{\omega}_i}{2}\right) \quad (5.31)$$

onde L é o número de combinações fatoriais das K frequências em grupos de $K/2$ elementos, agrupados em $\bar{\omega}_i$. Desenvolvendo a expressão anterior, verifica-se que este elemento é a somatória dos cossenos das diferenças das frequências e, portanto, apresenta maior valor quanto maior for a proximidade entre as frequências, ou seja, quanto mais próximos entre si estiverem os DOAs. Por outro lado, este elemento central terá valor zero somente quando a diferença entre todos os pares de frequências forem iguais à π , numa situação que não é considerada de alta resolução e na qual as frequências podem ser estimadas de forma mais simples. Esta característica é mantida para todos valores pares de K e, portanto, de forma geral, não há problemas numéricos associados à esta restrição linear sobre o vetor β_K na minimização da função quadrática. A estimativa do vetor de parâmetros correspondente ao ponto de mínimo da função $F_{UG}(\mathbf{b})$ com restrição linear central é obtida fazendo $\mathbf{u} = [0 \dots 1 \dots 0]^T$, onde o elemento com valor unitário está na linha $[(K/2)+1]$.

Destaca-se que a RLC é uma restrição linear inédita, não tendo sido citada ou usada em nenhuma referência anteriormente.

5.6.3 - Restrição Quadrática ou de Norma (RN)

Em [Naghessa94] a discussão sobre as restrições lineares é retomada devido aos problemas numéricos da RLR e RLI citados anteriormente, concluindo-se que tais restrições são inapropriadas para uso em estimação de frequência. A solução proposta em [Stoica90a], de realizar a seleção entre os dois conjuntos de estimativas, falha experimentalmente em alguns casos, além de se ter que realizar duas minimizações diferentes. Como alternativa, é proposto um outro tipo de restrição sobre o vetor de parâmetros na expressão (5.26), chamada restrição de norma (RN), onde tal restrição impõe que o vetor $\hat{\beta}_K$, solução da expressão (5.27), tenha norma unitária.

A estimativa do vetor de parâmetros que corresponde ao ponto de mínimo da função custo $F_{UG}(\mathbf{b})$ com restrição de norma é obtida considerando-se a seguinte decomposição em valores singulares da matriz Ω :

$$\Omega = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^* \quad (5.32)$$

onde $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ são os vetores singulares à esquerda e à direita, respectivamente e $\mathbf{S}$ é a matriz diagonal com os $K+1$ valores singulares de Ω . O vetor β_K de norma unitária corresponde ao

vetor singular de $\mathbf{\Omega}$ à direita, associado ao menor valor singular [Lemos97], ou seja, a estimativa do vetor de coeficientes é dada por:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{V}_{(1:K+1, K+1)} \quad (5.33)$$

Resultado semelhante é obtido caso seja utilizada a decomposição em autovalores de $\mathbf{\Omega}$.

5.6.4 - Conclusões Sobre as Restrições de Coeficientes

As restrições de não-trivialidade apresentadas nessa seção podem ser utilizadas em todos os métodos derivados do DMLE assim como nas demais categorias, devido à descrição unificada proposta nesse capítulo.

As restrições RLR e RLI apresentam considerável limitação quanto à utilização, decorrente dos problemas numéricos analisados.

A restrição de norma, do ponto de vista de generalidade, é a opção preferencial para a solução do problema de minimização quadrática, pois não apresenta as limitações de utilização quanto ao número de sinais nem dependência dos valores das frequências.

A restrição linear central é uma nova alternativa promissora, passível de ser utilizada quando o número de sinais é par. Seu uso generalizado, para qualquer número de sinais, é possível estendendo-se a ordem do vetor $\mathbf{b}_K$ e utilizando-se algum tipo de critério de seleção das estimativas após a convergência do processo ser alcançada. Este é um método que será apresentado no Capítulo 7.

De uma forma geral, a restrição linear central ou a restrição de norma é utilizada para garantir a convergência do algoritmo unificado; posteriormente, as restrições RLR e RLR podem ser usadas para ampliar o número de estimativas candidatas. Esta também é uma proposta inédita a ser apresentada no Capítulo 8.

As simulações numéricas dos métodos de estimação sob estas restrições serão realizadas nos capítulos seguintes.

5.7 - Implementação Computacional do Algoritmo Unificado

A expressão (5.26) pode ser adaptada a um procedimento iterativo. Acrescentando-se o índice “r” para indicar o número da iteração, a expressão (5.26) é alterada para:

$$\hat{\beta}_K^{r+1} = \arg \min_{\beta_K \in D} \beta_K^T \Omega^r \beta_K \quad (5.35)$$

onde $\Omega^r \in \mathbb{C}^{(K+1) \times (K+1)}$ é obtido baseado na expressão (5.24) e anteriores.

A implementação iterativa da expressão (5.35) é dada a seguir [Li98]:

Passo 1) Inicialize fazendo $r = 0$, faça $(\hat{\mathbf{B}}_0^* \hat{\mathbf{B}}_0) = \mathbf{I}$, calcule Ω^0 ;

Passo 2) Determine $\hat{\beta}_K^{r+1}$, considerando algum tipo de restrição sobre o vetor dos coeficientes, conforme descrito na Seção 5.6;

Passo 3) Verifique a convergência; considera-se que o algoritmo convergiu quando $\|\hat{\beta}_K^{r+1} - \hat{\beta}_K^r\| \leq \varepsilon$, onde ε é uma precisão pré-estabelecida. Caso o algoritmo não tenha convergido. Monte o vetor $\hat{\mathbf{b}}_K^{r+1}$, recalcule Ω^{r+1} , incremente “r” e retorne ao passo 2.

Passo 4) O vetor de estimativas dos parâmetros $\hat{\mathbf{b}}_K$ final é obtido após o passo 3 ter convergido. As estimativas das frequências $\hat{\omega}$ são obtidas calculando-se os zeros do polinômio $p_K(z)$ da expressão (5.2).

As iterações têm o objetivo de fazer com que as estimativas sejam sucessivamente melhoradas, aproximando-se do ponto de mínimo global da função custo.

5.8 - Conclusões

Este capítulo teve por objetivo apresentar o equacionamento e a descrição unificada dos métodos de estimação derivados do DMLE.

Foram enfocados a reparametrização e as manipulações algébricas para se obter uma descrição unificada envolvendo os métodos de estimação citados nesse capítulo. Foi desenvolvido um algoritmo e uma proposta de implementação computacional para a descrição unificada. Analisaram-se detalhadamente as restrições que devem ser impostas ao vetor de coeficientes, a fim de se obter expressões algébricas simples para as estimativas dos parâmetros que correspondem ao ponto de mínimo da função custo. Uma nova restrição linear foi proposta.

Nos capítulos seguintes, estas expressões gerais serão particularizadas para cada um dos métodos de estimação a serem analisados.

Capítulo 6

Métodos de Estimação Derivados do DMLE

Parte I: Métodos IQML e M-IQML

6.1 - Introdução

Uma proposta de descrição unificada envolvendo alguns métodos de estimação derivados do (DMLE) foi apresentada no capítulo anterior. Os métodos derivados têm como objetivo manter a boa qualidade das estimativas do estimador original, porém, diminuindo o elevado esforço computacional de sua implementação direta.

Este capítulo apresenta o equacionamento, as características principais e os detalhes da implementação computacional de dois importantes métodos derivados do DMLE, o IQML [Bresler86] [Kumaresan86] e o M-IQML [Kristensson99].

Nas simulações numéricas, primeiramente o método IQML é utilizado para avaliação e comparação das restrições de não-trivialidade sobre o vetor de coeficientes β_k . A seguir, diversas simulações são realizadas sobre os métodos IQML e M-IQML possibilitando análises e comparações de seus comportamentos frente ao limiar de estimação e o desempenho assintótico.

6.2 – Método IQML

O método IQML (*Iterative Quadratic ML*) [Bresler86, Kumaresan86] é um dos mais antigos métodos de estimação derivado do DMLE e, portanto, um dos mais simples. Representa um marco importante, pois nele é utilizado e difundido o conceito segundo o qual

este estimador é usado como base de um algoritmo iterativo, porém com esforço computacional significativamente menor que o da busca multidimensional. Outros dois pontos de destaque são: 1) seu desempenho não é afetado pela presença de sinais coerentes; 2) o limiar de estimação obtido é menor que o de outros métodos de estimação da época.

No capítulo anterior foi mostrado que o problema de minimização da função $F_{\text{DMLE}}(\boldsymbol{\omega})$ equivale à minimização da função custo $F_{\text{R}}(\mathbf{b})$. Ambas requerem uma busca multidimensional sobre o espaço das frequências ou dos parâmetros, respectivamente. O método IQML minimiza uma função custo semelhante à $F_{\text{R}}(\mathbf{b})$, estimando o vetor de coeficientes $\boldsymbol{\beta}_{\text{K}}$, através da seguinte expressão iterativa:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IQML}}^{r+1} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}_{\text{K}} \in \text{D}} \text{tr}[\mathbf{B}(\hat{\mathbf{B}}^r \hat{\mathbf{B}}^r)^{-1} \mathbf{B}^* \hat{\mathbf{R}}] \quad (6.1)$$

onde r é o índice da iteração e ‘arg’ é o argumento ou vetor $\boldsymbol{\beta}_{\text{K}}$ que faz com que o traço da expressão dentro dos colchetes tenha valor mínimo. D é um conjunto de restrições imposto ao vetor $\boldsymbol{\beta}_{\text{K}}$. O produto matricial $(\hat{\mathbf{B}}^* \hat{\mathbf{B}})$ na expressão (6.1) substitui o termo $(\mathbf{B}^* \mathbf{B})$ da expressão (5.7), que é função do vetor $\mathbf{b}_{\text{K}}$. Na primeira iteração do algoritmo, faz-se $(\hat{\mathbf{B}}^* \hat{\mathbf{B}}) = \mathbf{I}$ e nos passos seguintes a matriz $\hat{\mathbf{B}}$ é construída usando-se o vetor $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{K}}$ obtido no passo anterior.

O método IQML, sintetizado pela expressão (6.1), pode ser resolvido de duas formas distintas, seja com o algoritmo unificado ou através de sua formulação original. Cada uma delas tem uma demanda diferenciada de esforço computacional e são apresentadas a seguir.

6.2.1 – Método IQML – Algoritmo Unificado

A descrição unificada proposta no capítulo anterior é também aplicável ao método IQML simplesmente fazendo-se $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{M}$ na expressão (5.12), ou seja, utilizando-se todos os autovalores e os autovetores da EVD da matriz $\hat{\mathbf{R}}$. O esforço computacional exigido por essa descrição é bem menor do que aquele do algoritmo da implementação original do IQML, a ser apresentada a seguir, quando a quantidade de *snapshots* é grande. Esta versão do método IQML não foi encontrada nem utilizada na literatura da área e representa uma contribuição desse trabalho.

6.2.2 - Método IQML - Algoritmo Original

Esta implementação do método IQML [Bresler86] é obtida substituindo-se a matriz $\hat{\mathbf{R}}$ por sua expressão em (6.1) e desprezando o termo $1/N$, o que resulta em:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IQML}}^{r+1} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}_K \in D} \text{tr} \left\{ \mathbf{B}(\hat{\mathbf{B}}^r)^* \hat{\mathbf{B}}^r)^{-1} \mathbf{B}^* \sum_{n=1}^N (\mathbf{y}[n] \mathbf{y}^*[n]) \right\} \quad (6.2)$$

Estendendo-se a somatória da expressão (6.2) sobre todos os termos dentro das chaves e substituindo-se o operador traço pela expressão equivalente, com o termo $\mathbf{y}^*[n]$ pré-multiplicando o produto matricial, obtém-se:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IQML}}^{r+1} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}_K \in D} \left\{ \sum_{n=1}^N \mathbf{y}^*[n] \mathbf{B}(\hat{\mathbf{B}}^r)^* \hat{\mathbf{B}}^r)^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{y}[n] \right\} \quad (6.3)$$

Como a convolução é uma operação comutativa, pode-se escrever que:

$$\mathbf{B}^* \mathbf{y}[n] = \mathbf{Y}[n] \mathbf{b}_K \quad \text{para } n = 1, 2, \dots, N \quad (6.4)$$

onde

$$\mathbf{Y}[n] = \begin{bmatrix} y_K[n] & \cdots & y_0[n] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{M-1}[n] & \cdots & y_{M-K-1}[n] \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(M-K) \times (K+1)} \quad (6.5)$$

e $y_m[n]$ é o m -ésimo elemento do vetor $\mathbf{y}$ no n -ésimo *snapshot*. Considerando a expressão (6.4), a expressão (6.3) pode ser reescrita como:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IQML}}^{r+1} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}_K \in D} \left\{ \sum_{n=1}^N \mathbf{b}_K^* \mathbf{Y}^*[n] (\hat{\mathbf{B}}^r)^* \hat{\mathbf{B}}^r)^{-1} \mathbf{Y}[n] \mathbf{b}_K \right\} \quad (6.6)$$

Substituindo a expressão (5.9) em (6.6) e considerando apenas a parte real do termo dentro das chaves dessa expressão, para forçar o vetor $\boldsymbol{\beta}_K$ a ser real, obtém-se:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IQML}}^{r+1} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}_K \in D} \boldsymbol{\beta}_K^* \text{Re} \left\{ \mathbf{W}^* \sum_{n=1}^N \left[\mathbf{Y}^*[n] (\hat{\mathbf{B}}^r)^* \hat{\mathbf{B}}^r)^{-1} \mathbf{Y}[n] \right] \mathbf{W} \right\} \boldsymbol{\beta}_K \quad (6.7)$$

Definindo-se a seguinte matriz:

$$\tilde{\mathbf{C}}_Y^r = \text{Re} \left\{ \mathbf{W}^* \sum_{n=1}^N \left[\mathbf{Y}^*[n] (\hat{\mathbf{B}}^r)^* \hat{\mathbf{B}}^r)^{-1} \mathbf{Y}[n] \right] \mathbf{W} \right\} \quad (6.8)$$

a expressão (6.7) é transformada em:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IQML}}^{r+1} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}_K \in D} \boldsymbol{\beta}_K^* \tilde{\mathbf{C}}_Y^r \boldsymbol{\beta}_K \quad (6.9)$$

A estimativa $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IQML}}$ é obtida usando uma das expressões apresentadas na Seção 5.6, aplicando-se as restrições quanto ao tipo de sinal e de não-trivialidade. A minimização quadrática iterativa expressa por (6.9) geralmente converge num pequeno número de iterações. O critério de convergência desse algoritmo é dado pela norma da diferença entre estimativas de vetores de coeficientes $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IQML}}$ sucessivas, até que seja atingido um valor pré-estabelecido.

Pelo princípio da invariância das estimativas MLE, os ângulos das raízes do polinômio $p_K(z)$, formado pelo vetor de parâmetros $\hat{\mathbf{b}}_K$, são as estimativas MLE das frequências dos sinais exponenciais presentes nos vetores de dados. Tendo sido calculadas as estimativas de frequência, as estimativas da potência do ruído e das amplitudes complexas $\hat{\mathbf{s}}$ são obtidas através das expressões (4.4) e (4.5).

6.2.2.1 - Implementação Computacional do Método IQML - Algoritmo Original

A expressão (6.9) pode ser implementada iterativamente através dos seguintes passos [Li98]:

Passo 1) Inicialize fazendo $r = 0$ e faça $(\hat{\mathbf{B}}^{0*} \hat{\mathbf{B}}^0) = \mathbf{I}$;

Passo 2) Caso $r > 0$, monte a matriz $\hat{\mathbf{B}}^r$ a partir de $\hat{\mathbf{b}}_K^r$ obtido no passo 7. Calcule $\mathbf{C} = (\hat{\mathbf{B}}^{r*} \hat{\mathbf{B}}^r)$;

Passo 3) Faça a decomposição Cholesky de $\mathbf{C}$, ou seja, obtenha $\mathbf{C} = \mathbf{G}\mathbf{G}^H$;

Passo 4) Calcule $\mathbf{Z}[n] = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{Y}[n]$ para $n = 1, 2, \dots, N$;

Passo 5) Calcule $\boldsymbol{\Psi}[n] = \mathbf{Z}^H[n] \mathbf{Z}[n]$ para $n = 1, 2, \dots, N$;

Passo 6) Calcule $\tilde{\mathbf{C}}_Y^r = \text{Re} \left\{ \mathbf{W}^* \sum_{n=1}^N \boldsymbol{\Psi}[n] \mathbf{W} \right\}$

Passo 7) Obtenha a estimativa do vetor de coeficientes $\hat{\boldsymbol{\beta}}_K^r$ da expressão (6.9), usando um dos tipos de restrições de não-trivialidade (restrições lineares ou de norma);

Passo 8) Verifique a convergência; considera-se que o algoritmo convergiu quando $\|\hat{\mathbf{p}}_K^{r+1} - \hat{\mathbf{p}}_K^r\| \leq \varepsilon$, onde ε é uma precisão pré-estabelecida. Caso o algoritmo não tenha convergido, calcule $\hat{\mathbf{b}}_K^{r+1}$, incremente “r” e volte ao Passo 2;

Passo 9) A estimativa $\hat{\mathbf{p}}_K^r$ final é aquela obtida após o passo anterior ter convergido. Calcula-se os ângulos das raízes do polinômio $p_K(z)$ formado pelo vetor $\hat{\mathbf{b}}_K^r$ para obter o vetor de estimativa das frequências $\hat{\boldsymbol{\omega}}$.

6.2.3 – Principais Características e Problemas do Método IQML

Uma característica de destaque dos métodos de estimação derivados do DMLE e, conseqüentemente do método IQML, é a sua aplicabilidade em sinais coerentes. Esta situação é muito comum em estimação de DOA e as estimativas desse método não sofrem degradação de desempenho significativa sob esta condição.

Na Seção 5.6 foram apresentadas quatro opções de restrição de não-trivialidade para a minimização da expressão (5.26) ou sua equivalente, expressão (6.9). Cada uma destas restrições tem influência diferenciada sobre os índices de mérito, como o limiar de estimação e o desempenho assintótico, mesmo para um determinado método e um mesmo conjunto de parâmetros. Isso exige uma análise experimental meticulosa para se determinar qual é a restrição que apresenta melhor desempenho global na solução da minimização quadrática. Esta análise é realizada na Seção 6.4.

A versão do método IQML sob algoritmo unificado permite que este método seja avaliado adequadamente em condições onde as análises numéricas demandariam tempo de simulação elevado, devido ao esforço computacional exigido pela versão original. Isso ocorre basicamente quando a quantidade de *snapshots* é muito grande.

Algumas objeções à utilização do método IQML devem ser destacadas. A primeira é que o método não tem a convergência garantida, ou seja, há diversas situações em que a precisão estabelecida para avaliar se o método convergiu nunca será atingida [Stoica97]. Apesar disso, há uma vasta literatura com evidências empíricas que o IQML converge na maioria dos casos analisados. A convergência do IQML é, portanto, uma questão aberta [Kristensson99].

A segunda objeção é que as estimativas geradas pelo método são, em geral, inconsistentes [Stoica97], ou seja, os valores verdadeiros dos parâmetros não são obtidos mesmo se a matriz de correlação estimada $\hat{\mathbf{R}}$ for substituída pela matriz $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^* + \sigma^2\mathbf{I}$.

Para isso, considere a seguinte expressão, onde é realizada a alteração citada na função custo embutida na expressão (6.1), obtendo-se [Kristensson99]:

$$F_{\text{IQML}}(\boldsymbol{\beta}) = \text{Tr}\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\beta}_K)(\hat{\mathbf{B}}^* \hat{\mathbf{B}}) \mathbf{B}^*(\boldsymbol{\beta}_K) \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^*\} + \sigma^2 \text{Tr}\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\beta}_K)(\hat{\mathbf{B}}^* \hat{\mathbf{B}}) \mathbf{B}^*(\boldsymbol{\beta}_K)\} \quad (6.10)$$

onde $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_K)$. Apenas a minimização do primeiro termo da expressão (6.10) resulta nos parâmetros verdadeiros. O segundo termo dessa expressão é proporcional ao valor $(M - K)\sigma^2$, de acordo com o critério DMLE e, portanto, independe do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta}_K$. Em resumo, quando se minimiza a função custo do método IQML, o segundo termo é dependente dos parâmetros do sinal, do ruído e do arranjo, produzindo uma polarização ou inconsistência [Kristensson99]. Esta inconsistência pode fazer com que o ponto de mínimo global não seja encontrado mesmo com uma quantidade de iterações elevadas. Por isso, a quantidade de iterações deve ser limitada por um número máximo e caso a realização não atinja a precisão pré-estabelecida, pode-se determinar que o vetor $\hat{\boldsymbol{\beta}}_K$ obtido na última iteração seja descartado ou considerado a estimativa do método. Realizando-se algumas pequenas alterações na função custo desse método, esta inconsistência das estimativas é parcialmente corrigida. Isso resulta, porém, num outro método de estimação, o M-IQML.

6.3 - Método M-IQML

O método M-IQML (*Modified-IQML*) [Kristensson99] propõe uma modificação no método IQML, com o objetivo de se obter estimativas de frequências consistentes e esforço computacional inferior ao dispendido pelo método original.

6.3.1 - O Algoritmo M-IQML

O M-IQML é idêntico ao método IQML no seu primeiro passo iterativo, no qual obtêm as estimativas do vetor de parâmetros inicial e da potência do ruído. A estimativa de $\hat{\boldsymbol{\beta}}_K$ na primeira iteração é obtida pela seguinte expressão:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_K^1 = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}_K \in \mathcal{D}} \boldsymbol{\beta}_K^* \tilde{\mathbf{C}}_Y^0 \boldsymbol{\beta}_K \quad (6.11)$$

onde $\tilde{\mathbf{C}}_Y^0$ é a matriz obtida no passo 6 do algoritmo apresentado no item 6.2.2 do método IQML, com $(\hat{\mathbf{B}}^0)^* \hat{\mathbf{B}}^0 = \mathbf{I}$. Obtém-se também a estimativa da potência do ruído, $\hat{\sigma}^2$, através da seguinte expressão:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{F^1(\hat{\boldsymbol{\beta}}_K^1)}{(M - K)} \quad (6.12)$$

onde

$$F^1(\hat{\boldsymbol{\beta}}_K^1) = \text{Tr}[\mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_K^1) \mathbf{B}^*(\hat{\boldsymbol{\beta}}_K^1) \hat{\mathbf{R}}] \quad (6.13)$$

A partir da segunda iteração do método M-IQML, a expressão a ser minimizada é dada por:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{M-IQML}^{r+1} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}_K \in D} \text{Tr}[\mathbf{B}(\hat{\mathbf{B}}^r)^* \hat{\mathbf{B}}^r)^{-1} \mathbf{B}^*(\hat{\mathbf{R}} - \hat{\sigma}^2 \mathbf{I})] \quad (6.14)$$

A expressão (6.14) difere de (6.1.) pela subtração da matriz $\hat{\sigma}^2 \mathbf{I}$ da matriz de correlação estimada e é motivada pela análise realizada na expressão (6.10). A aplicação da restrição de norma sobre o vetor de coeficientes $\boldsymbol{\beta}_K$ em (6.14) garante que a matriz $(\hat{\mathbf{R}} - \hat{\sigma}^2 \mathbf{I})$ seja semi-definida positiva e, portanto, a função custo embutida nessa expressão será sempre limitada e há um ponto de mínimo. Além da restrição de norma, a expressão de minimização desse método pode também ser resolvida utilizando-se as restrições lineares, conforme verificado através de simulações numéricas. A presença da matriz $(\hat{\mathbf{R}} - \hat{\sigma}^2 \mathbf{I})$ na expressão do método M-IQML impossibilita que o mesmo possa ser resolvido como o método IQML sob a formulação original. Assim, os demais passos do método M-IQML são realizados utilizando-se somente o algoritmo unificado.

Como ocorre com o IQML, também o M-IQML não tem convergência garantida, porém as estimativas são sempre consistentes [Kristensson99]. Outro ponto relevante do método M-IQML é usar apenas três iterações sempre [Kristensson99].

6.3.2 – Matriz de Transformação $\mathbf{W}_N$ no Método M-IQML

Um último ponto de destaque do método M-IQML é a presença do fator $1/\sqrt{2}$ multiplicando as matrizes de transformação $\mathbf{W}$, expressões (5.10) e (5.11) e utilizado na

expressão (5.23) do algoritmo unificado ou no passo 6 do algoritmo original do IQML. Quando o número de sinais (K) é ímpar, tem-se:

$$\mathbf{W}_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{jI} \\ \mathbf{I}_p & -\mathbf{jI}_p \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

onde $\mathbf{I}_p$ é chamada matriz de permutação e é definida no capítulo anterior.

Para número de sinais pares, o elemento central de $\mathbf{W}_N$, na posição (K, K), tem valor $\sqrt{2}$ e a expressão desta matriz é:

$$\mathbf{W}_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{jI} \\ \mathbf{0} & \sqrt{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & -\mathbf{jI}_p \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Esta alteração é imposta como uma condição necessária para que $\mathbf{W}_N^* \mathbf{W}_N = \mathbf{I}$ e a norma dos vetores de parâmetros $\mathbf{b}_K$ e de coeficientes $\boldsymbol{\beta}_K$ sejam iguais. Como consequência, tem-se que:

$$\mathbf{b}_K^* \mathbf{b}_K = \boldsymbol{\beta}_K^* \boldsymbol{\beta}_K \quad (6.17)$$

para qualquer valor de K .

Porém, substituindo o vetor $\mathbf{b}_K$ por sua expressão em termos do vetor $\boldsymbol{\beta}_K$ e considerando a simetria complexa conjugada, para K par, tem-se:

$$\mathbf{b}_K^* \mathbf{b}_K = [2\beta_K^{(0)}]^2 + \dots + [\beta_K^{(K/2)}]^2 + \dots + [2\beta_K^K]^2 = \boldsymbol{\beta}_K^* \begin{bmatrix} 2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_K \quad (6.18)$$

e

$$\mathbf{b}_K^* \mathbf{b}_K = [2\beta_K^{(0)}]^2 + \dots + [2\beta_K^K]^2 = \boldsymbol{\beta}_K^* \begin{bmatrix} 2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_K = 2\boldsymbol{\beta}_K^* \boldsymbol{\beta}_K \quad (6.19)$$

para K ímpar.

Portanto, para K ímpar a transformação (6.15) não apresenta nenhuma diferença em relação àquela proposta pela expressão (5.10), exceto pelo fator 2. As raízes do polinômio $p_K(z)$ são, portanto, iguais.

O mesmo não ocorre para K par e torna-se, então, necessária uma análise comparativa dos métodos M-IQML e IQML usando-se as matrizes de transformação $\mathbf{W}$ e $\mathbf{W}_N$.

Na seção seguinte, as curvas de desempenho dos métodos M-IQML e IQML sob a matriz $\mathbf{W}_N$ são analisadas e comparadas com aquelas obtidas com a matriz de transformação $\mathbf{W}$, definida no capítulo anterior, para o caso de número de sinal par. É também avaliado o impacto de cada restrição de não-trivialidade.

6.4 – Simulações Numéricas e Análise de Resultados

Nesta seção são apresentadas as simulações numéricas dos métodos IQML e M-IQML e são realizadas avaliações das restrições de não-trivialidade aplicadas à eles.

Inicialmente, no item 6.4.1, é dada uma breve descrição do programa desenvolvido para realizar todas as simulações numéricas e gráficos apresentados neste trabalho, como curvas e superfícies de desempenho dos métodos de estimação, curvas de CRBs e superfícies da função MLE.

Nos dois itens seguintes, o método IQML é analisado sob as restrições de não-trivialidade apresentadas e o modelo de sinal determinístico. As curvas e superfícies de desempenho são obtidas em função da diferença entre os valores das frequências. As restrições lineares real (RLR) e imaginária (RLI) são analisadas no item 6.4.2. No item 6.4.3, as restrições linear central (RLC) e de norma (RN) são analisadas e comparadas mais detalhadamente.

Nos itens 6.4.4 e 6.4.5 são analisados os comportamentos assintóticos dos métodos IQML e M-IQML, respectivamente. Por fim, no item 6.4.6, os dois métodos são comparados entre si.

O método IQML original é iterativo e sua convergência é determinada pela norma da diferença entre dois vetores de coeficientes estimados $\hat{\boldsymbol{\beta}}_K^r$ consecutivos. O algoritmo é interrompido quando:

$$\left\| \hat{\boldsymbol{\beta}}_K^{r+1} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_K^r \right\| \leq 10^{-3} \quad (6.20)$$

Devido a não ter sua convergência garantida, o número máximo de iterações do IQML é limitado e o vetor $\hat{\boldsymbol{\beta}}_K^r$ final é assumido como a estimativa do método mesmo que não seja alcançada a convergência.

O método M-IQML é concebido como não-iterativo e, portanto, utiliza um número fixo de iterações.

Resumindo estes dois casos, as estimativas desses métodos são obtidas com um dos seguintes critérios: 1) a precisão da expressão (6.21) seja atendida ou o número máximo de iterações é atingido e 2) algoritmo usa uma quantidade fixa de iterações.

6.4.1 – Descrição Geral do Programa de Simulação dos Métodos de Estimação de Frequência e de DOA

As simulações e gráficos apresentados neste trabalho foram realizados por um programa de nossa autoria desenvolvido em ambiente Matlab 5.3. Este programa é bastante versátil e oferece diversos recursos que são descritos brevemente a seguir.

Entrada de Dados

É realizada através de menus onde os diversos valores dos parâmetros podem ser visualizados e alterados. Os menus são separados em menu de parâmetros dos sinais e de parâmetros da simulação. Os parâmetros dos sinais são: valores das frequências, fator de correlação ou valores das fases. Os parâmetros de simulação são: o modelo e número dos sinais, tipo de restrição de não-trivialidade, quantidade de sensores, de *snapshots* e de realizações independentes, etc.. Estes parâmetros são exibidos num gráfico facilitando a visualização.

Métodos Implementados

Os métodos de estimação disponíveis nesse programa são IQML, M-IQML, MODE e MODEX, sendo estes dois últimos descritos no Capítulo 7. Há também a implementação de novas propostas de métodos e critérios a serem apresentadas no Capítulo 8. Para cada método pode ser ajustado um entre os quatro tipos de restrições de não-trivialidade. O programa é organizado num conjunto de diversas subrotinas e permite que novas implementações ou métodos sejam incorporados com pequenas adaptações.

Resultados Gráficos e Numéricos

O programa realiza diversos tipos de simulações e fornece resultados gráficos e numéricos em função da SNR, do número de *snapshots*, do espaçamento entre as frequências ou dos valores das frequências.

Além desses recursos, estão disponíveis rotinas que traçam as superfícies do MLE, as curvas de CRB e as estimativas de número de flops teóricos.

6.4.2 – Análise das Superfícies de Desempenho do Método IQML sob Restrições Lineares Real e Imaginária

Neste tópico são analisadas as curvas de desempenho do método IQML usando as restrições lineares real e imaginária. Inicialmente são apresentadas algumas definições das figuras de mérito e detalhamento do modelo e dos parâmetros dos sinais.

As curvas de desempenho são obtidas utilizando-se sinais exponenciais com um espaçamento fixo entre as frequências, porém variando seus valores individuais.

O caso a ser simulado [Gershman99] é o de um ULA com dez sensores, omnidirecionais, com espaçamento de metade do comprimento de onda. Há dois sinais de banda estreita, potências iguais e com DOAs em $\theta_1 = 10^\circ$ e $\theta_2 = 15^\circ$ em relação à normal ao arranjo. Para realizar a varredura nas frequências e obter as superfícies de desempenho é calculado apenas o espaçamento entre os DOAs desse caso, porém, convertidos em frequência. Usando-se a expressão (2.7) resulta: $\omega_1 = 0,1736\pi$ rad e $\omega_2 = 0,2588\pi$ rad e portanto $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 0,2676$ rad.

A varredura é realizada com a frequência ω_1 variando desde $-0,2\pi$ até $0,7\pi$ rad, com passo de $0,01\pi$ rad e $\omega_2 = \omega_1 + 0,2676$ rad. As fases dos sinais são fixas e têm valores $\phi_1 = 0$ e $\phi_2 = \pi/2$. Utiliza-se apenas 1 *snapshot*. Em cada valor do par de frequências, o método IQML é simulado variando-se a SNR com passo de 1 em 1 dB e com 20 realizações independentes do ruído para cada ponto da curvas. O valor de cada ponto da curva de desempenho é calculado como:

$$\text{Desempenho} = 10\log_{10}(1/\text{MSE})$$

onde MSE é o erro quadrático médio das 20 estimativas da frequência, dadas em radianos. Esta forma de representação do desempenho é adequada para a visualização da superfície que será gerada, porém nos demais itens tratando do comportamento assintótico, o desempenho será a raiz quadrada do erro quadrático médio das estimativas (RMSE), como usualmente apresentado na literatura. Duas curvas são obtidas, uma para cada frequência, adotando-se a da frequência ω_1 por apresentar melhor desempenho médio. As superfícies de desempenho são obtidas agrupando-se as curvas de desempenho geradas.

Na Figura 6.1 são mostradas as superfícies de desempenho do método IQML sob a restrição linear real (RLR) e a restrição linear imaginária (RLI), chamadas respectivamente de IQML_{RLR} e IQML_{RLI} . Nessas superfícies, as regiões de desempenho ruim, representadas por vales, estão na cor azul escuro. As regiões de melhor desempenho, formando as partes altas, estão na cor vermelha.

Para o método IQML_{RLR} , o vale tem como centro a frequência $\pi/2$, enquanto que para o método IQML_{RLI} , o vale situa-se em torno de 0 rad. Esta degradação de desempenho foi observada em [Nagesha94], detalhada em [Alves99a] e comentada na Seção 5.6. Observa-se, portanto, que estas restrições são inadequadas para serem utilizadas em estimação de frequência, uma vez que existem determinados valores de parâmetros dos sinais nos quais os erros de estimação são muito grandes.

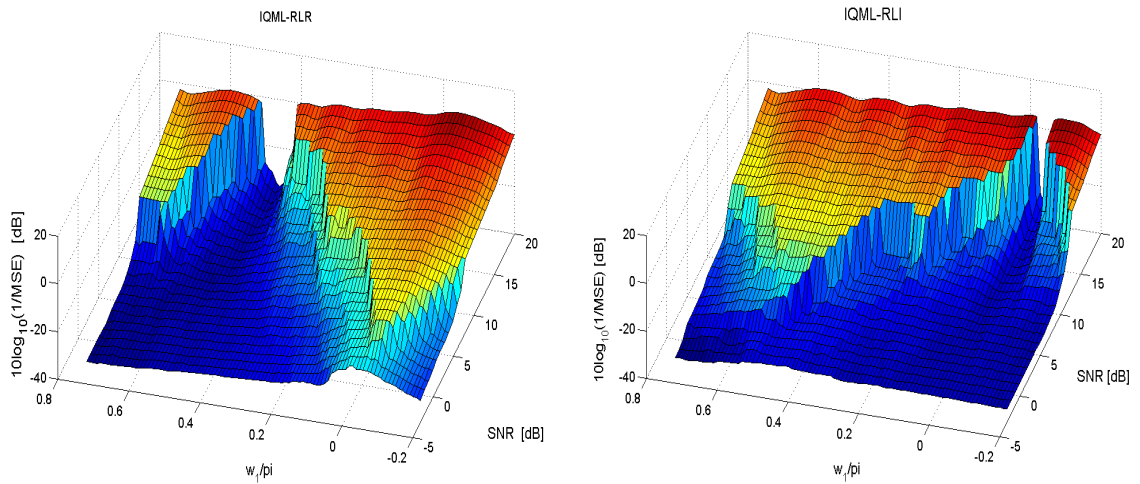


Figura 6.1 – Superfícies de desempenho do método IQML_{RLR} e IQML_{RLI} .

6.4.3 – Análise das Superfícies de Desempenho do Método IQML sob Restrição Linear Central e Restrição de Norma

Neste item, o método IQML é simulado sob a restrição linear central (IQML_{RLC}) e de norma (IQML_{RN}) nas mesmas condições do item anterior, para a obtenção das suas superfícies de desempenho. Na Figura 6.2 é apresentada a superfície de desempenho do IQML_{RLC} e na Figura 6.3 é mostrada a superfície do IQML_{RN} .

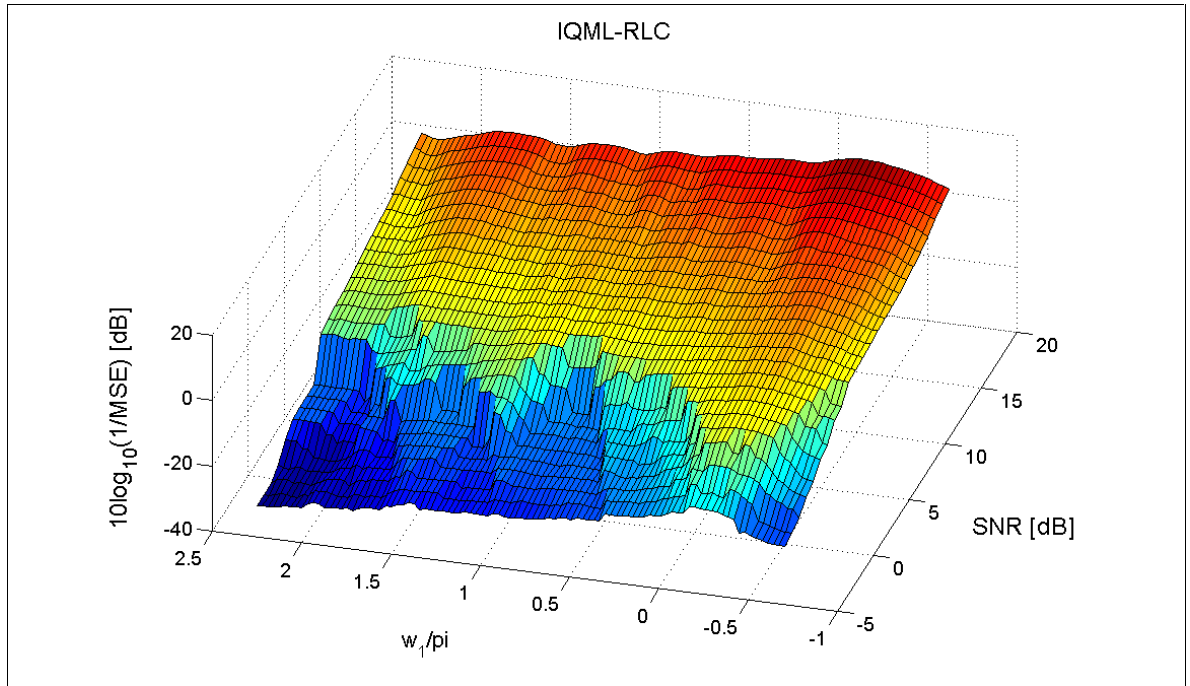


Figura 6.2 – Superfície de desempenho do método IQML_{RLC} .

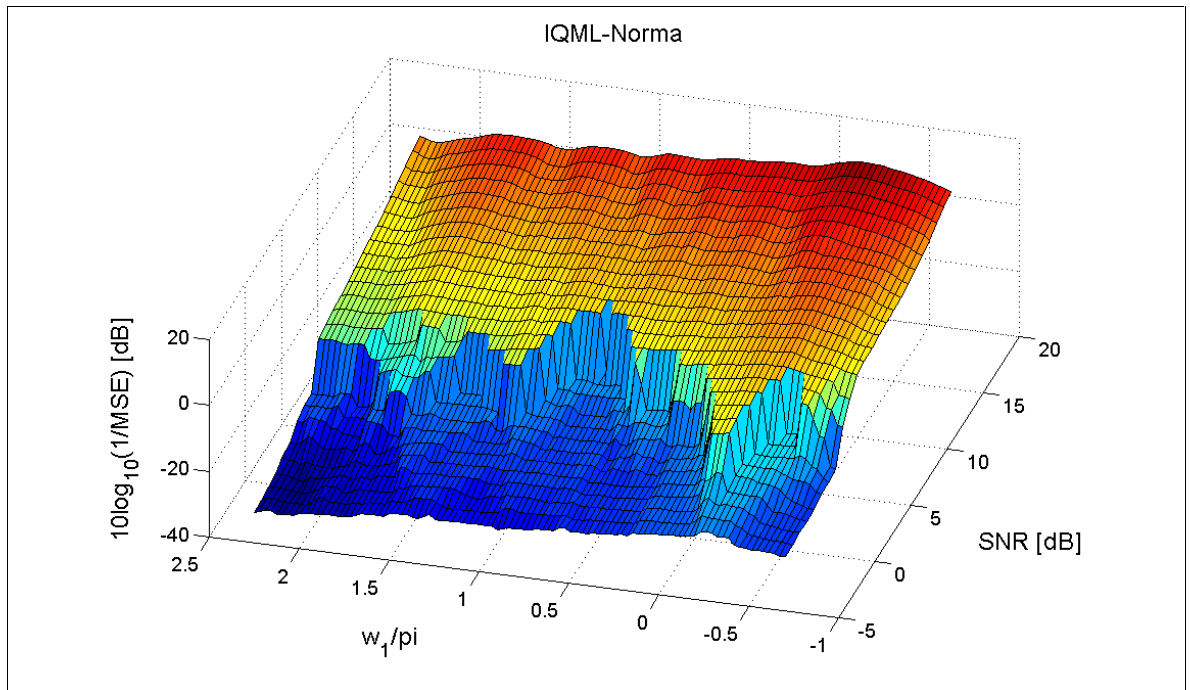


Figura 6.3 – Superfície de desempenho do método IQML_{RN} .

Nas Figuras 6.2 e 6.3 não há vales e, portanto, as curvas de desempenho do método IQML sob estas duas restrições não estão degradadas em nenhuma região como ocorre nas superfícies da Figura 6.1. Entretanto, as curvas apresentam algumas diferenças entre si na

região próxima ao limiar de estimação, na qual os valores de SNR variam desde -1 dB até cerca de 8 dB nos piores casos. Uma análise mais detalhada na superfície de desempenho do método IQML_{RLC} , Figura 6.2, indica que suas curvas são mais suaves na região próxima aos limiares de estimação, indicando possivelmente melhores estimativas que as do método IQML_{RN} mostradas na Figura 6.3.

As superfícies de desempenho fornecem uma indicação subjetiva da qualidade do conjunto composto pelo método IQML mais a restrição de não-trivialidade. Para se obter um resultado quantitativo, duas curvas médias são calculadas usando-se parte das superfícies das Figuras 6.2 e 6.3. A faixa de frequência escolhida vai desde $-0,15\pi$ rad até 0 rad, região onde ambas as superfícies apresentam visualmente um bom desempenho. Esta faixa permite que sejam extraídas 16 curvas que compõem a parte da superfície indicada. A SNR é variada entre -10 dB até 20 dB e passo de 1 dB.

A Figura 6.4 mostra as curvas de desempenho médio do IQML em função da SNR, para as duas restrições analisadas.

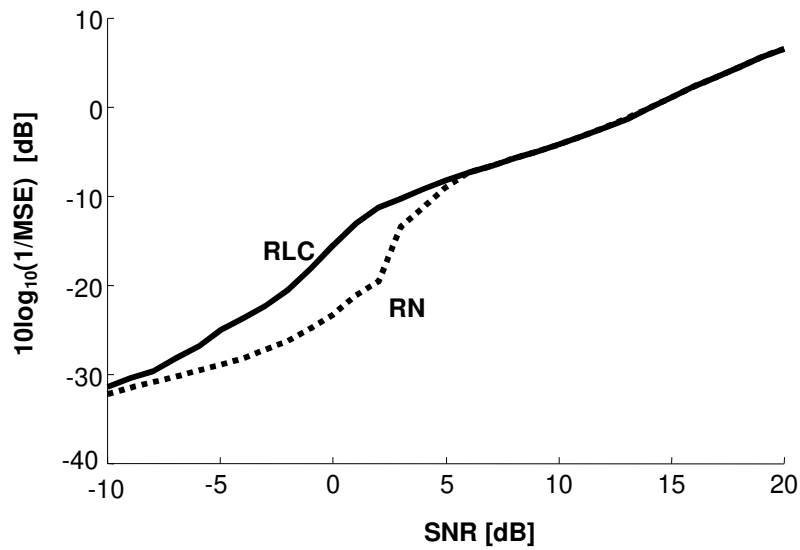


Figura 6.4 – Curvas de desempenho médio: IQML_{RLC} e IQML_{RN} .

Observa-se que o desempenho médio do método IQML_{RLC} é melhor que o do método IQML_{RN} para SNR entre -10 e 5 dB. A partir desse valor maior de SNR, ambos os métodos têm desempenhos médios semelhantes.

Outra importante figura de mérito é o número médio de iterações para que a convergência seja atingida, também em função da SNR, conforme mostrado na Figura 6.5.

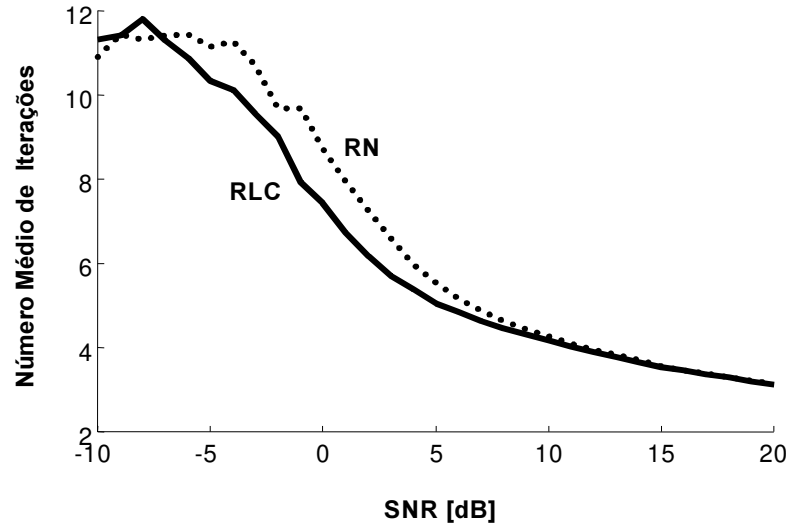


Figura 6.5 – Número médio de iterações dos métodos IQML_{RLC} e IQML_{RN} .

Observa-se que a curva do método IQML_{RLC} apresenta valores do número médio de iterações menores que o do método IQML_{RN} para SNR abaixo de 10 dB.

De forma geral, o desempenho e o número de iterações são grandezas correlacionadas. Com melhores estimativas em cada iteração, o número de iterações necessárias para que a convergência seja atingida, diminui. A consequência direta disso é que o método IQML_{RLC} demanda esforço computacional médio menor que aquele exigido pelo método IQML_{RN} .

Dessas duas figuras pode-se concluir que a restrição linear central é uma opção competitiva com a restrição de norma quando aplicadas ao método IQML sob sinais determinísticos e poucos *snapshots*. O impacto dessas restrições no desempenho assintótico do método IQML e no método M-IQML será apresentada na seção seguinte.

6.4.4 – Comportamento Assintótico dos Métodos IQML e M-IQML

Neste item são apresentadas as curvas do desempenho assintótico dos métodos IQML e M-IQML, obtidas em função da SNR e do número de *snapshots*. São utilizadas duas restrições de não-trivialidade, a restrição linear central e a restrição de norma, tendo em vista os problemas gerados pelas demais restrições lineares.

O método IQML na sua versão original utiliza o critério 1 para avaliar se a convergência foi atingida e, portanto, uma dada realização pode convergir antes que o número máximo de iterações seja alcançado. O método M-IQML [Kristensson99] emprega o Critério 2, com o número de iterações igual a três.

A matriz de transformação $\mathbf{W}_N$ é introduzida no equacionamento do método M-IQML e deve ser comparada com os resultados obtidos com a matriz $\mathbf{W}$. As curvas de desempenho do M-IQML sob restrição linear central não são afetadas pela utilização da matriz $\mathbf{W}_N$, uma vez que as raízes do polinômio $p(z)$ formado pelas estimativas têm apenas seu módulo alterado, não havendo mudança na fase. Já a restrição de norma utiliza a decomposição em valores singulares da matriz $\mathbf{\Omega}$, expressão (5.24), o que implica na alteração dos coeficientes e, portanto, nas fases das raízes.

O caso a ser simulado [Gershman99] para avaliar o desempenho assintótico é o mesmo da seção anterior, ou seja, um ULA com dez sensores, omnidirecionais e inter espaçamento de metade do comprimento de onda. Há dois sinais de banda estreita, potências iguais e com DOAs em $\theta_1 = 10^\circ$ e $\theta_2 = 15^\circ$ em relação à normal ao arranjo. Isso equivale às frequências $\omega_1 = 0,1736\pi$ rad e $\omega_2 = 0,2588\pi$ rad. Os números de *snapshots* utilizados nas simulações são 10, 100 e 1000, os quais podem ser classificados genericamente como pequeno, médio e grande. A faixa de SNR varia de -15 a 10 dB, com passo de 1 em 1 dB. São utilizadas 1000 realizações independentes para o cálculo do desempenho médio, dado em valores RMSE. Na maioria dos casos dessa seção, o modelo de sinal utilizado é o aleatório incondicional com fator de correlação $\rho = 0$. No item 6.4.4.3 é realizada a simulação usando sinais coerentes.

Os dados para simulação são gerados [Stoica90a] calculando-se a matriz de covariância teórica, que é função da potência do ruído, das frequências e da matriz de correlação dos sinais e é dada pela expressão (2.33). É extraída a raiz quadrada dessa matriz e o resultado é multiplicado por uma sequência de vetores complexos compostos de variáveis aleatórias Gaussianas independentes.

Cada ponto da curva de desempenho é calculado como a média dos dois valores RMSE das estimativas das frequências elétricas em radianos. Isto difere da definição de desempenho utilizada nos itens 6.4.2 e 6.4.3, que eram mais adequadas à visualização das superfícies de desempenho. Quanto menor o valor do desempenho, mais as estimativas se aproximam dos parâmetros reais.

As curvas de CRB, calculadas pelas expressões do Capítulo 4, são mostradas em linhas contínuas em todas as figuras de desempenho assintótico desta seção.

6.4.4.1 – Métodos IQML_{RLC} e IQML_{RN}

Na Figura 6.6 são apresentadas as curvas de desempenho assintótico dos métodos IQML_{RLC} e IQML_{RN}, utilizando-se o Critério 2, com 3 iterações fixas. Na Figura 6.7 são apresentadas as curvas para os mesmos métodos, porém utilizando-se o Critério 1 com 20 iterações máximas.

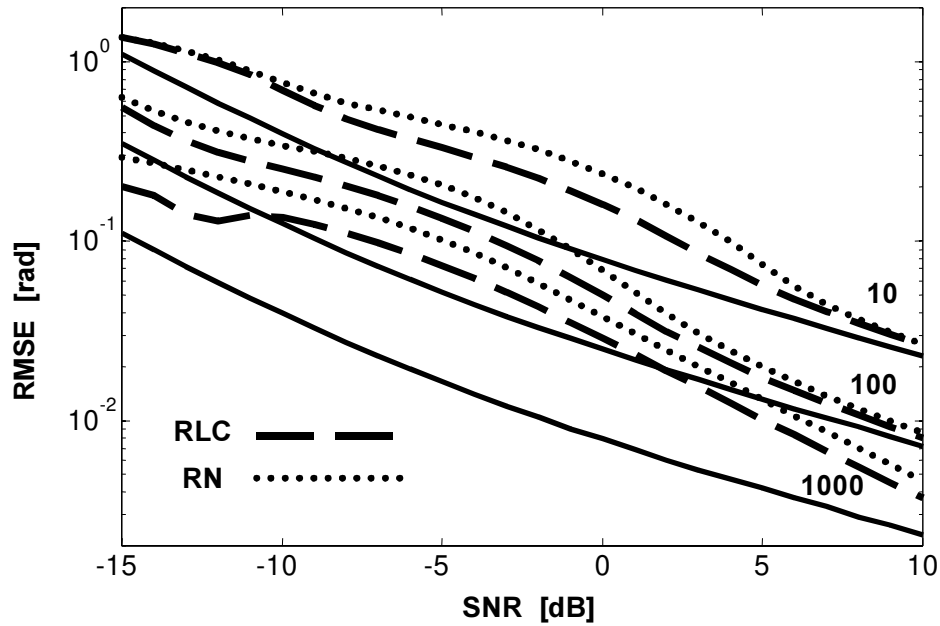


Figura 6.6 – Desempenho assintótico: IQML_{RLC} e IQML_{RN} – três iterações.

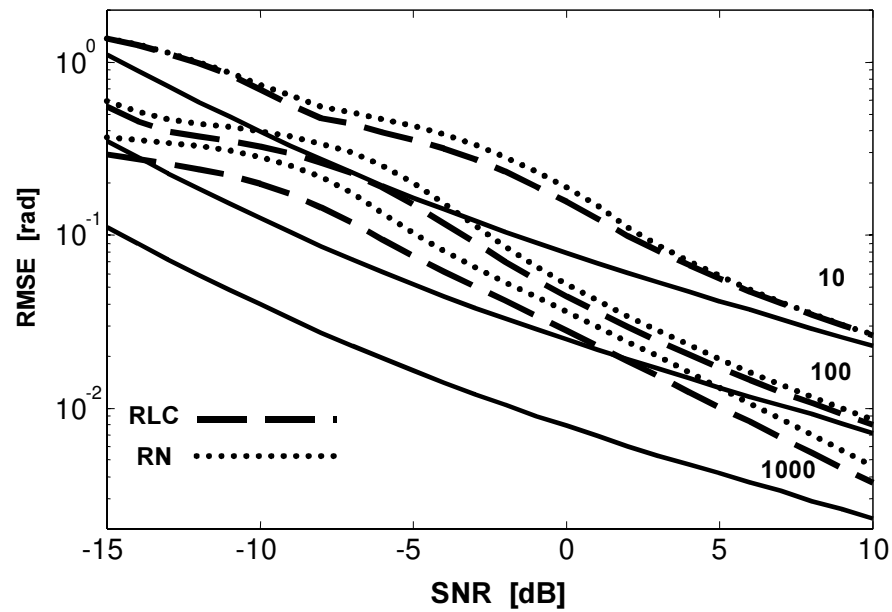


Figura 6.7 – Desempenho assintótico: IQML_{RLC} e IQML_{RN} – 20 iterações.

Em ambas as figuras observa-se que o desempenho do IQML_{RLC} é igual ou melhor que o do IQML_{RN} . Também o desempenho assintótico do IQML_{RN} melhora com o aumento no número de iterações, aproximando-se das curvas do IQML_{RLC} em todos os casos.

Para verificar o comportamento do IQML_{RLC} frente aos dois critérios de convergência, na Figura 6.8 são agrupadas as curvas de desempenho desse método exibidas nas duas últimas figuras.

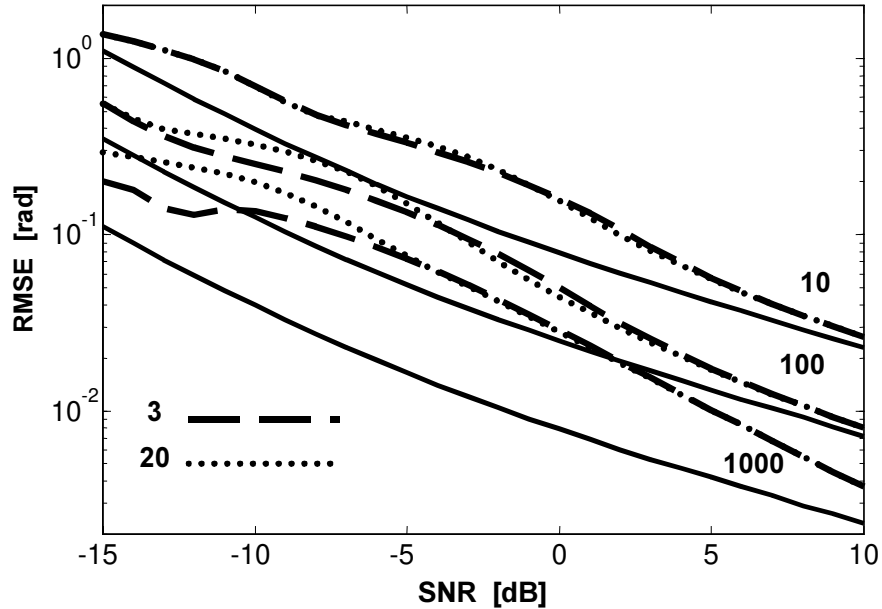


Figura 6.8 – Desempenho assintótico: IQML_{RLC} - três e 20 iterações.

Da Figura 6.8 observa-se que o aumento do número de iteração não alterou o desempenho do método IQML_{RLC} de forma significativa.

Estes resultados indicam que o método IQML_{RLC} pode fazer uso do Critério 2, com número de iterações fixas, sem perda perceptível no desempenho. A consequência imediata é uma redução no esforço computacional pois normalmente o critério original de convergência exige mais que três iterações.

6.4.4.2 – Comportamento Assintótico do Método M-IQML

Neste item é analisado o desempenho assintótico do método M-IQML sob as restrições linear central e de norma e as matrizes $\mathbf{W}$ e $\mathbf{W}_N$. O modelo de sinal e os parâmetros são os mesmos apresentados na Seção 6.4.4.

6.4.4.2.1 – M-IQML sob Restrição Linear Central e de Norma

Na Figura 6.9 são apresentadas as curvas de desempenho do método $\text{M-IQML}_{\text{RLC}}$ e $\text{M-IQML}_{\text{RN}}$, ambos com matriz de transformação $\mathbf{W}$. É utilizado o Critério 2, com três iterações.

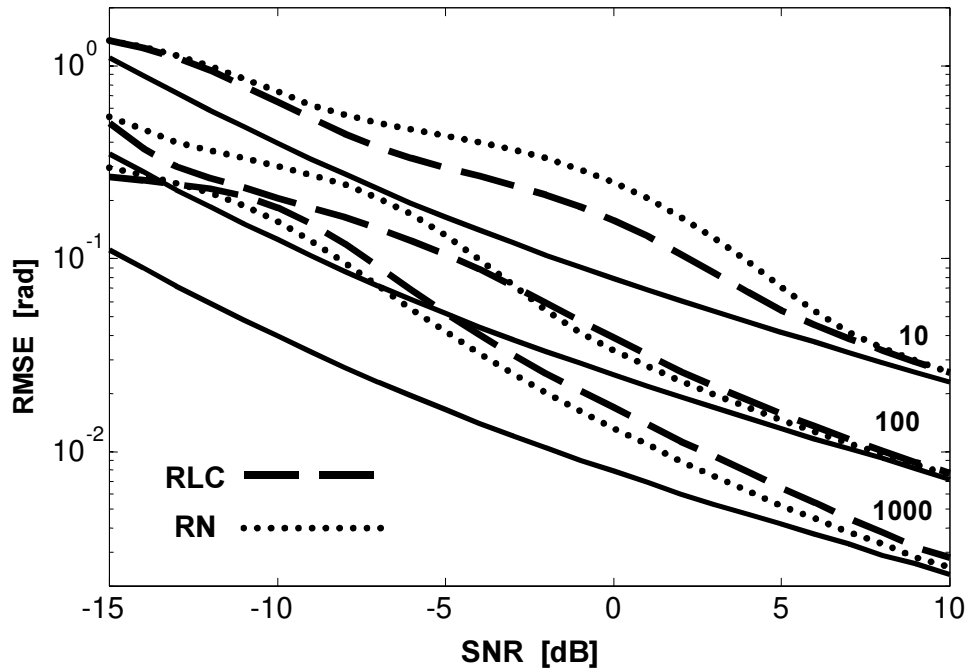


Figura 6.9 – Desempenho assintótico: M-IQML_{RLC} e M-IQML_{RN} com três iterações fixas.

Podemos observar que a curva de desempenho do M-IQML_{RLC} com 10 *snapshots* é melhor que a do M-IQML_{RN}. Por outro lado, para os casos com 100 e 1000 *snapshots*, os desempenhos de ambos os métodos são semelhantes.

Com estes resultados, a RLC mostra-se competitiva com a RN também para este método. O método M-IQML_{RLC} não apresenta melhoria destacada caso se utilize 20 iterações máximas e as curvas de desempenho não são alteradas caso seja utilizada a matriz de transformação $\mathbf{W}_N$.

6.4.4.2.2 – Método M-IQML_{RN} e Matriz $\mathbf{W}_N$

Neste item são obtidas as curvas de desempenho do M-IQML_{RN} com a matriz $\mathbf{W}_N$ e comparadas com aquelas obtidas no item anterior, com a matriz $\mathbf{W}$.

Na Figura 6.10 são mostradas as curvas de desempenho do método M-IQML_{RN} com a matriz $\mathbf{W}_N$ e a matriz $\mathbf{W}$, ambas sob o Critério 2, com três iterações.

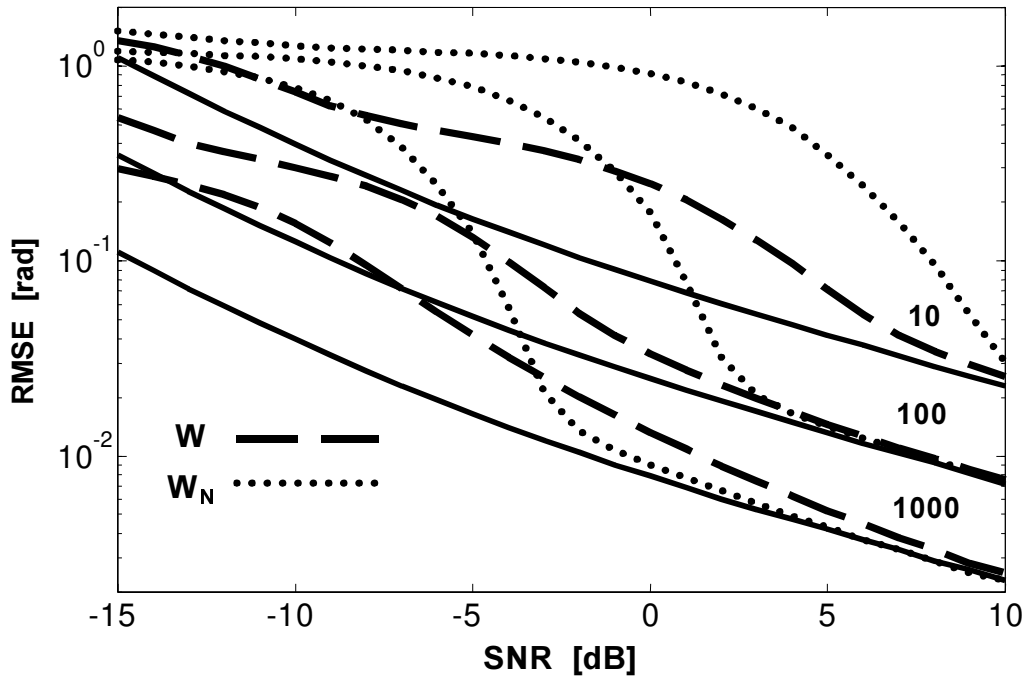


Figura 6.10 – Desempenho assintótico: M-IQML_{RN} e matriz $\mathbf{W}$ e $\mathbf{W}_N$ - três iterações

As curvas do M-IQML_{RN} com matriz $\mathbf{W}$ da Figura 6.10 apresentam melhor desempenho que as curvas obtidas com a matriz $\mathbf{W}_N$ para os casos com 10 e 100 *snapshots*. Apenas para o caso com 1000 *snapshots* e numa faixa estreita de SNR, o M-IQML_{RN} com a matriz $\mathbf{W}_N$ apresenta melhor desempenho. Ainda nesse caso, o desempenho do método pode ser melhorado com o uso do Critério 1, aumentando o número máximo de iterações, porém sem superar o desempenho do método M-IQML_{RN} com a matriz $\mathbf{W}$. Sob o ponto de vista geral, os resultados do M-IQML_{RN} com a matriz $\mathbf{W}$ serão considerados como os melhores usando este tipo de restrição.

Considerando os resultados obtidos da Figura 6.10 e as conclusões do item anterior, tem-se que o método M-IQML_{RLC} apresenta o melhor desempenho geral comparado com o M-IQML_{RN} sob restrição de norma, seja com a matriz $\mathbf{W}$ ou $\mathbf{W}_N$.

6.4.4.3 – Comparação entre o Desempenho Assintótico do Método IQML e do M-IQML

Nos itens anteriores foram selecionadas as melhores versões dos métodos IQML e M-IQML, indicando-se a utilizando da restrição linear central, a matriz $\mathbf{W}$ e usando-se o critério

2, com três iterações fixas. As curvas de desempenho desses dois métodos são mostradas na Figura 6.11, para o caso em que os dois sinais recebidos são descorrelacionados ($\rho = 0$).

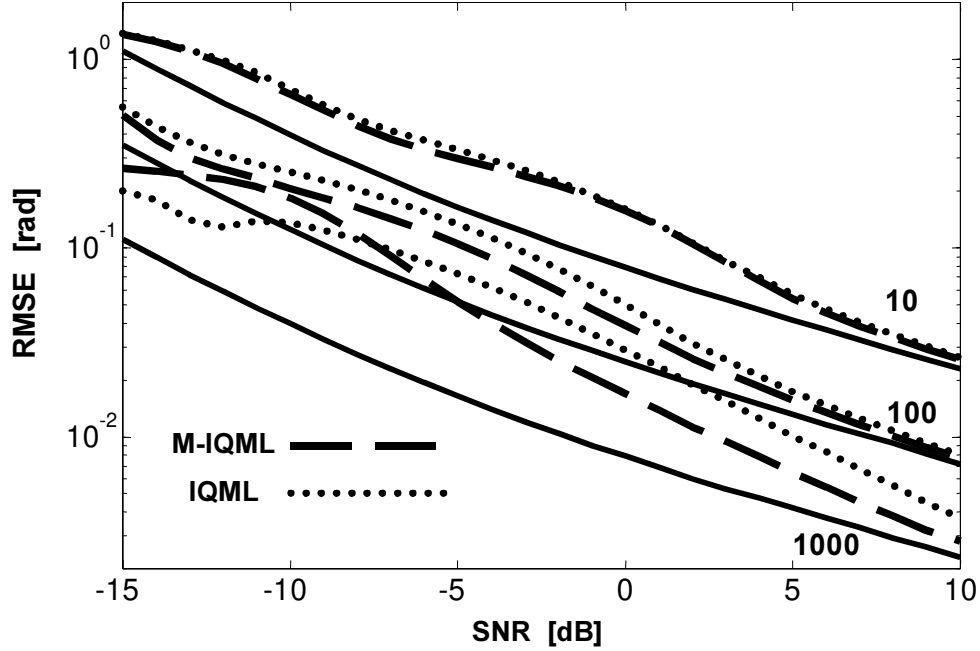


Figura 6.11 – Desempenho assintótico: IQML_{RLC} e $\text{M-IQML}_{\text{RLC}}$ com três iterações - $\rho = 0$.

Observa-se na Figura 6.11 que o $\text{M-IQML}_{\text{RLC}}$ apresenta vantagem significativa sobre o IQML_{RLC} , principalmente para o caso de 1000 *snapshots*. A correção inserida na expressão da função custo do M-IQML estima melhor o ruído conforme aumenta o número de *snapshots*.

Na Figura 6.12 são simulados os mesmos métodos da Figura 6.11, porém com fator de correlação igual a 1,0.

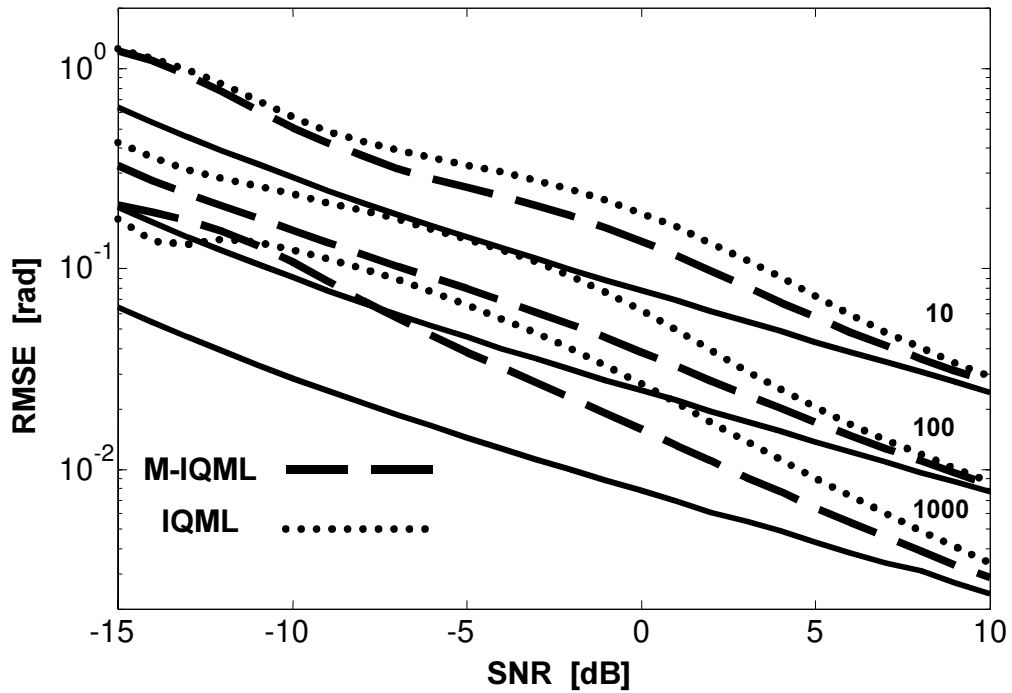


Figura 6.12 – Desempenho assintótico: IQML_{RLC} e $\text{M-IQML}_{\text{RLC}}$ com três iterações e $\rho = 1,0$.

Também nesse caso com sinais coerentes, o $\text{M-IQML}_{\text{RLC}}$ apresenta melhor desempenho que o IQML_{RLC} na maior parte das curvas. Dessa forma, tendo em vista estes resultados, o método $\text{M-IQML}_{\text{RLC}}$ é selecionado como o melhor dentre os métodos e as restrições tratadas nesse capítulo.

6.5 – Conclusões

Neste capítulo foram apresentados e avaliados os métodos IQML e M-IQML.

As restrições lineares, real e imaginária, foram avaliadas qualitativamente para o método IQML. Foi observada uma forte degradação no desempenho desse método devido aos problemas numéricos que ocorrem para determinados valores das frequências dos sinais. Isso constitui uma característica extremamente indesejada, de forma que tais restrições não podem ser utilizadas diretamente na solução da minimização quadrática. Por outro lado, as restrições linear central e de norma mostraram-se robustas a este problema. A RLC mostrou-se uma alternativa competitiva à RN, tanto na melhoria do limiar de estimação quanto na diminuição do número médio de iterações.

Para o IQML sugere-se a possibilidade de utilização de um número fixo de iterações uma vez que não há perda significativa de desempenho e o esforço computacional é reduzido.

O método $M\text{-IQML}_{\text{RLC}}$ corrige, em parte, a inconsistências das estimativas do método IQML_{RLC} e atinge melhor desempenho, principalmente quando o sinal é correlacionado. Adicionalmente, verificou-se o comportamento do desempenho desses métodos com a matriz de transformação $\mathbf{W}$ em comparação com a matriz $\mathbf{W}_N$, optando-se pela primeira.

As curvas de desempenho assintótico mostraram que, de forma geral, a restrição linear central melhora o desempenho dos dois métodos e que bons resultados são obtidos com poucas iterações, mesmo para o IQML, um método originalmente tratado como iterativo.

O método de estimação o $M\text{-IQML}_{\text{RLC}}$ é indicado como o que apresenta melhor desempenho geral nesse capítulo.

Capítulo 7

Métodos de Estimação Derivados do DMLE

Parte II: MODE e MODEX

7.1 - Introdução

Nesse capítulo são apresentados dois outros métodos de estimação de DOA derivados do DMLE, o MODE e o MODEX. O método MODE apresenta algumas modificações na expressão da função custo em relação ao IQML. O objetivo é aproximar suas curvas de desempenho dos CRBs e manter o esforço computacional baixo. Já o método MODEX usa o método MODE mais um conjunto de procedimentos para geração, combinação e seleção de estimativas.

Ambos os métodos são implementados originalmente utilizando as restrições linear real ou imaginária, com ressalvas para os problemas numéricos que estas restrições apresentam. As restrições linear central e de norma são apresentadas como alternativas que melhoram significativamente o desempenho desses métodos.

As descrições desses dois métodos são realizadas nas duas próximas seções. Na Seção 7.4 são apresentadas as simulações de desempenho assintótico do MODE e MODEX sob as diversas restrições de não-trivialidade.

7.2 - Método MODE

O método MODE (*Method Of Direction Estimation*) [Stoica90a] foi desenvolvido especificamente para a estimação dos ângulos de incidência de ondas planas de banda estreita incidindo num arranjo de antenas ou sensores. Seu equacionamento é apresentado a seguir.

Considere a função custo do DMLE reparametrizada, expressão (5.7), transcrita a seguir:

$$F_R(\mathbf{b}) = \text{tr}[\mathbf{B}(\mathbf{B}^* \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^* \hat{\mathbf{R}}] \quad (7.1)$$

A idéia básica do método MODE é aproximar a função custo localmente em torno de $\mathbf{b}_0$, o vetor ótimo, por uma função quadrática. Tal função é obtida substituindo-se a matriz $\hat{\mathbf{R}}$ por sua decomposição em autovalores e autovetores, o que resulta em:

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\mathbf{\Lambda}}_S \hat{\mathbf{U}}_S^* + \hat{\mathbf{U}}_N \hat{\mathbf{\Lambda}}_N \hat{\mathbf{U}}_N^* \quad (7.2)$$

onde $\hat{\mathbf{U}}_S$ e $\hat{\mathbf{\Lambda}}_S$ são os autovetores e autovalores do subespaço de sinal e $\hat{\mathbf{U}}_N$ e $\hat{\mathbf{\Lambda}}_N$ são os autovetores e autovalores do subespaço de ruído, respectivamente.

Substituindo (7.2) na expressão (7.1), considerando a situação assintótica (N grande) e que, idealmente, $\mathbf{B}^* \hat{\mathbf{U}}_S = \mathbf{0}$, a expressão da função custo do MODE é dada por [Stoica90a]:

$$F_{\text{MODE}}(\mathbf{b}) = \text{tr} \left[\mathbf{B}(\hat{\mathbf{B}}^* \hat{\mathbf{B}})^{-1} \mathbf{B}^* \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\mathbf{\Psi}}_{\text{MODE}} \hat{\mathbf{U}}_S^* \right] \quad (7.3)$$

e a matriz $\hat{\mathbf{\Psi}}_{\text{MODE}}$ ótima, para que o parâmetro variância do estimador seja mínimo, é dada por:

$$\hat{\mathbf{\Psi}}_{\text{MODE}} = \text{diag} \left\{ \frac{(\hat{\lambda}_1 - \hat{\sigma}^2)^2}{\hat{\lambda}_1}, \frac{(\hat{\lambda}_2 - \hat{\sigma}^2)^2}{\hat{\lambda}_2}, \dots, \frac{(\hat{\lambda}_{\bar{K}} - \hat{\sigma}^2)^2}{\hat{\lambda}_{\bar{K}}} \right\} \quad (7.4)$$

onde $\bar{K} = \min\{K, \text{posto}(\mathbf{P})\}$ e $\hat{\lambda}_i$ é o i -ésimo autovalor de $\hat{\mathbf{R}}$ e

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{M - \bar{K}} \left\{ \text{tr}(\hat{\mathbf{R}}) - \sum_{k=1}^{\bar{K}} \hat{\lambda}_k \right\} \quad (7.5)$$

é uma estimativa da variância do ruído.

Fazendo as devidas substituições na função custo (7.3), semelhante às aquelas apresentadas na Seção 5.5, tem-se que a expressão a ser minimizada é dada por [Stoica90a]:

$$\hat{\mathbf{\beta}}_{\text{MODE}} = \arg \min_{\mathbf{\beta} \in D} \left[\mathbf{\beta}^T \mathbf{\Omega}_{\text{MODE}} \mathbf{\beta} \right] \quad (7.6)$$

onde $\mathbf{\Omega}_{\text{MODE}}$ é obtido de forma semelhante à matriz $\mathbf{\Omega}$, expressão (5.24) e D é um conjunto de restrições imposto ao vetor $\hat{\mathbf{\beta}}$. Em relação à descrição unificada apresentada no Capítulo 5, deve fazer $\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{S}}$ e $\hat{\mathbf{\Psi}} = \hat{\mathbf{\Psi}}_{\text{MODE}}$ e impor que $\tilde{K} = \bar{K}$.

Comparando-se as funções custo do MODE e do IQML, a primeira se diferencia do método IQML por utilizar apenas os subespaços de sinais da matriz de correlação estimada, $\hat{\mathbf{R}}$. Além disso, é realizada uma correção nessa matriz modificada para atenuar a influência do ruído estimado.

Observa-se que o MODE e o M-IQML são semelhantes pois corrigem a matriz $\hat{\mathbf{R}}$ retirando uma parcela da potência estimada do ruído. A diferença entre eles está no fato do MODE retirar, adicionalmente, a parcela de $\hat{\mathbf{R}}$ referente ao subespaço de ruído.

É mostrado em [Li98] que o MODE é um estimador que, assintoticamente, produz estimativas consistentes para o modelo de sinais aleatórios e que seu esforço computacional é menor que o do método IQML e M-IQML. Para a obtenção do vetor das estimativas $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MODE}}$ utiliza-se o algoritmo apresentado a seguir.

7.2.1 – Algoritmo para o Método MODE

O MODE obtém as estimativas das frequências através dos seguintes passos [Stoica90a]:

Passo 1) Calcule $\hat{\mathbf{R}}$, os K autovalores dominantes ($\hat{\Lambda}_s$) e seus autovetores ($\hat{\mathbf{U}}_s$). Obtenha $\hat{\sigma}^2$ e forme $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\text{MODE}}$ através da expressão (7.4).

Passo 2) Determine a estimativa inicial $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0$ minimizando a seguinte função custo:

$$F_{\text{MODE}}^0 = \text{tr}[\mathbf{B}^* \hat{\mathbf{S}} \hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\text{MODE}} \hat{\mathbf{S}}^* \mathbf{B}] \quad (7.7)$$

que pode ser calculada por:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_0 = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\beta}^* \mathbf{W}^* \left[\sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{S}}_k^* \tilde{\mathbf{S}}_k \right] \mathbf{W} \boldsymbol{\beta} \quad (7.8)$$

com $\tilde{\mathbf{S}}_k$ calculada por (5.19) e (5.17), realizando-se as substituições citadas no parágrafo seguinte após a expressão (7.6).

Passo 3) Determine uma estimativa de $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MODE}}$ para a expressão (7.6), com o produto $(\hat{\mathbf{B}}^* \hat{\mathbf{B}})$ formado pela estimativa inicial $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0$ obtida no Passo 2.

Passo 4) Obtenha a estimativa de frequência $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ calculando os ângulos das raízes do polinômio $p(z)$, com seus coeficientes formados por $\hat{\mathbf{b}}$ obtido de $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MODE}}$ no Passo 3.

É possível ainda repetir o passo 3 algumas vezes atualizando a matriz $\hat{\mathbf{B}}$ com a estimativa mais recente do vetor $\hat{\mathbf{b}}$, visando melhorar as estimativas. Porém, valores acima de três são irrelevantes [Li98].

As minimizações nos passos 2 e 3 se referem a funções quadráticas, uma vez que $(\mathbf{B}^* \mathbf{B})$ foi substituída por uma estimativa independente do vetor $\mathbf{b}$. Dessa forma, estas minimizações podem ser resolvidas utilizando-se restrição de norma ou as restrições lineares.

Apesar de apresentar uma estrutura mais elaborada que o IQML e M-IQML, o método MODE também apresenta alguns problemas como desempenho relativamente pobre quando a quantidade de *snapshots* é pequena e limiar de estimação afetado pela estimação inadequada dos subespaços de sinais e de ruído. Para minorar estas deficiências, foi desenvolvido outro método baseado no MODE, apresentado a seguir.

7.3 - Método MODEX

O método MODEX (*MODE with eXtra roots*) [Gershman99] baseia-se no MODE, porém, é consideravelmente mais complexo. Suas vantagens sobre o MODE são um menor limiar de estimação, em baixíssimas SNRs, e um bom desempenho também na condição de poucos *snapshots*.

O MODEX tem como princípio a obtenção de dois conjuntos de estimativas. Um desses conjuntos é formado pelas estimativas obtidas com o método MODE. O segundo conjunto é obtido com uma versão modificada desse mesmo método, porém com a ordem do vetor de parâmetros $\mathbf{b}$ igual a $(K+Q)$, sendo Q um inteiro tal que $0 < Q < M-K$. As K raízes do MODE e as $(K+Q)$ da versão modificada são agrupadas, formando um conjunto de $(2K+Q)$ raízes. Em seguida, formam-se combinações de K raízes distintas e que serão denominadas de estimativas candidatas. A melhor candidata é aquela que minimiza um critério de seleção das estimativas, a ser apresentado.

A utilização das estimativas do método MODE tem como objetivo dotar o MODEX de seu excelente desempenho assintótico. A introdução do vetor com ordem $(K+Q)$ estende o grau de liberdade para a obtenção das raízes, o que pode evitar o uso inadequado do subespaço de ruído no lugar do subespaço de sinal. Este processo é detalhado a seguir, onde as matrizes e vetores de ordem $(K+Q)$ usam o índice **EX** de *EXTENDED*.

7.3.1 – Obtenção dos Conjuntos de Estimativas

O primeiro conjunto de estimativas do MODEX são os ângulos das raízes do polinômio formado pelo vetor $\hat{\mathbf{b}}_{\text{MODE}}$ e descrito na Seção 7.2. Estas estimativas das frequências são armazenadas para comporem o vetor de subconjunto de frequências candidatas.

O segundo conjunto de estimativas é obtido como descrito a seguir.

Define-se um vetor de parâmetros estendido $\mathbf{b}_{EX}$, que tem a seguinte expressão:

$$\mathbf{b}_{EX} = [b_0, b_1, \dots, b_{K+Q}]^T \quad (7.9)$$

A matriz dos autovalores corrigidos deve ser ampliada e é dada por:

$$\hat{\Psi}_{MODEX} = \text{diag}\{\hat{\Psi}_{MODE}, 0, \dots, 0\} = \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{MODE} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(K+Q) \times (K+Q)} \quad (7.10)$$

A matriz $\mathbf{B}_{EX}$, montada com o vetor de parâmetros $\mathbf{b}_{EX}$, tem a seguinte expressão:

$$\mathbf{B}_{EX} = \begin{bmatrix} b_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{K+Q} & \dots & b_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & b_{K+Q} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{M \times (M-K+Q)} \quad (7.11)$$

Devido aos elementos extras de $\hat{\Psi}_{MODEX}$, a matriz dos autovetores passa a ter $(K+Q)$ colunas, sendo expressa por:

$$\hat{\mathbf{U}}_{SEX} = [\hat{s}_1 \quad \dots \quad \hat{s}_K \quad \hat{g}_1 \quad \dots \quad \hat{g}_Q] \in \mathbb{C}^{M \times (K+Q)} \quad (7.12)$$

Dessa forma, a expressão final do vetor de parâmetros é dada por:

$$\hat{\beta}_{EX} = \arg \min_{\beta \in D} \{ \text{tr}[(\hat{\mathbf{U}}_{SEX}^* \mathbf{B}_{EX})(\hat{\mathbf{B}}_{EX}^* \hat{\mathbf{B}}_{EX})^{-1} (\mathbf{B}_{EX}^* \hat{\mathbf{U}}_{SEX}) \hat{\Psi}_{MODEX}] \} \quad (7.13)$$

Porém verifica-se que:

$$\hat{\mathbf{U}}_{SEX} \hat{\Psi}_{MODEX} \hat{\mathbf{U}}_{SEX}^* = \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\Psi}_{MODE} \hat{\mathbf{U}}_S^* \quad (7.14)$$

e portanto (7.13) pode ser reescrita simplesmente como:

$$\hat{\beta}_{EX} = \arg \min_{\beta \in D} \{ \text{tr}[(\hat{\mathbf{U}}_S^* \mathbf{B}_{EX})(\hat{\mathbf{B}}_{EX}^* \hat{\mathbf{B}}_{EX})^{-1} (\mathbf{B}_{EX}^* \hat{\mathbf{U}}_S) \hat{\Psi}_{MODE}] \} \quad (7.15)$$

e a única diferença em relação à expressão (7.3) é a matriz $\mathbf{B}_{EX}$ estendida, montada com o vetor de parâmetros $\mathbf{b}_{EX}$ de ordem $(K+Q)$.

Em resumo, esta etapa do método MODEX permite que o polinômio $p(z)$ forneça um número de raízes maior que o número de frequências a serem estimadas. O excesso de raízes assegura um grau maior de liberdade para a acomodação das mesmas na CRU. Com isto,

pretende-se ter uma maior liberdade para o posicionamento das raízes que estimam as frequências e, portanto, estimativas melhores.

A minimização da expressão (7.15) é realizada através do mesmo procedimento usado no MODE. A convergência é rápida, necessitando também de poucas iterações. O passo seguinte é selecionar as melhores K raízes do conjunto de $2K+Q$ dos polinômios formados pelos vetores $\hat{\mathbf{b}}_{\text{MODE}}$ e $\hat{\mathbf{b}}_{\text{EX}}$, que serão consideradas as estimativas finais do método MODEX.

7.3.2 – Procedimento para Seleção de Raízes do MODEX

O procedimento inicia-se com a criação do vetor $\hat{\mathbf{w}}_{\text{TOT}}$ composto do vetor $\hat{\mathbf{w}}_{\text{MODE}}$ com as K raízes obtidas pelo método MODE, mais o vetor $\hat{\mathbf{w}}_{\text{EX}}$ com as $K+Q$ raízes geradas pelo MODE estendido, de forma que:

$$\hat{\mathbf{w}}_{\text{TOT}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_{\text{MODE}}^T & \hat{\mathbf{w}}_{\text{EX}}^T \end{bmatrix}^T \quad (7.16)$$

Monta-se a seguir subconjuntos do vetor $\hat{\mathbf{w}}_{\text{TOT}}$, chamado Φ_{CAND} , realizando a combinação dos $(2K+Q)$ elementos em grupos de K elementos distintos.

O subconjunto escolhido como a estimativa final do método MODEX, $\hat{\mathbf{w}}_{\text{MODEX}}$, é aquele que resulta num menor valor para a função custo do critério ML determinístico ou estocástico. As expressões dessas funções custos são dadas pelas expressões (4.7) e (4.17) reproduzidas a seguir:

$$F_{\text{DMLE}}(\omega) = \text{Tr}[\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}] \quad (4.7)$$

e

$$F_{\text{SMLE}}(\omega) = \log_{10} \det[\mathbf{A} \hat{\mathbf{P}}_{\text{SMLE}}(\omega) \mathbf{A}^* + \hat{\sigma}_{\text{SMLE}}^2(\omega) \mathbf{I}] \quad (4.17)$$

onde $\hat{\mathbf{P}}_{\text{SMLE}}(\omega)$ e $\hat{\sigma}_{\text{SMLE}}^2(\omega)$ são calculados pelas expressões:

$$\hat{\sigma}_{\text{SMLE}}^2(\omega) = \frac{1}{M-K} \text{Tr}(\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}) \quad (4.14)$$

e

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{SMLE}}(\omega) = (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^* [\hat{\mathbf{R}} - \hat{\sigma}_{\text{SMLE}}^2(\omega) \mathbf{I}] [(\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^*]^* \quad (4.15)$$

O procedimento para a seleção de raízes pode, portanto, ser formulado como:

$$\hat{\mathbf{w}}_{\text{MODEX}} = \arg \min_{\omega \in \Phi_{\text{CAND}}} \{F_{\text{DMLE}}(\omega)\} \quad (7.17)$$

ou alternativamente, como:

$$\hat{\omega}_{\text{MODEX}} = \arg \min_{\omega \in \Phi_{\text{CAND}}} \{F_{\text{SMLE}}(\omega)\} \quad (7.18)$$

Em [Gershman99] observa-se que ambos os critérios de seleção produzem o mesmo resultado para sinais descorrelacionados. Porém, para sinais coerentes, o desempenho obtido com o critério estocástico é melhor.

Esta seleção dos subconjuntos de estimativas exige um esforço computacional extra em relação àquele do método MODE. Como a segunda etapa do MODEX consiste em executar o MODE novamente, verifica-se que todo o conjunto vai necessitar de um esforço computacional maior que o dobro daquele do MODE.

7.3.3 – Valor do Parâmetro Q e suas Implicações

Apesar do fator Q poder ser escolhido livremente, deve ser usado com critério, pois quanto maior, maior o número de raízes extras e a quantidade de subconjuntos a serem formados. Em [Gershman99] é realizada uma breve análise experimental sobre este parâmetro de simulação e verifica-se que valores acima de quatro não melhoram significativamente a curva de desempenho do MODEX, quando o número de sinais é igual a dois. O número de subconjuntos formado é dado por:

$$N_k = \frac{(2K + Q)!}{K!(K + Q)!} \quad (7.19)$$

O MODEX é recomendado quando o número de sinais é pequeno, uma vez que sua complexidade cresce consideravelmente conforme o número de sinais aumenta.

7.4 – Simulações e Resultados

Nesta seção são apresentados os resultados das simulações numéricas dos métodos MODE e MODEX sob as restrições lineares real (RLR) e central (RLC) e a restrição de norma (RN). A inclusão da RLR deve-se ao fato de que os métodos MODE e MODEX, conforme apresentados na literatura, utilizam tal restrição com ressalvas para o uso eventual da restrição linear imaginária, caso o valor do coeficiente a ser normalizado seja muito pequeno [Stoica90a]. Esta proposta é comentada no Capítulo 5 e representa um problema extra desses métodos em suas versões originais.

O caso simulado nesse capítulo [Gershman99] é o mesmo descrito na Seção 6.4.4, um ULA com dez sensores, omnidirecionais, com espaçamento de metade do comprimento de onda. Há dois sinais de banda estreita de mesma potência, com DOAs em $\theta_1 = 10^\circ$ e $\theta_2 = 15^\circ$ em relação à normal ao arranjo o que resulta em $\omega_1 = 0,1736\pi$ rad e $\omega_2 = 0,2588\pi$

rad. O número de *snapshots* simulados são 10, 100 e 1000 e a faixa de SNR de -15 a 10 dB, com passo de 1 em 1 dB. O modelo usado é o aleatório incondicional e os fatores de correlação são $\rho = 0$ e $\rho = 1.0$. São utilizadas 1000 realizações independentes para o cálculo do desempenho médio, definido como a raiz quadrada do erro quadrático médio das estimativas (RMSE). As curvas de desempenho são calculadas em valores RMSE da frequência elétrica, em radianos.

Com o objetivo de possibilitar comparações diretas com os resultados mostrados na literatura, o número de iterações é fixo e igual a dois para ambos os métodos e no método MODEX é utilizado o fator $Q = 4$. O critério de seleção das estimativas do MODEX é o que usa a função custo do DMLE para sinais descorrelacionados e o critério SMLE para sinais coerentes.

7.4.1 - Método MODE

Nas Figuras 7.1 e 7.2 são apresentadas as curvas de desempenho do método MODE sob as restrições lineares real e central e a restrição de norma, para sinais descorrelacionados e coerentes, respectivamente.

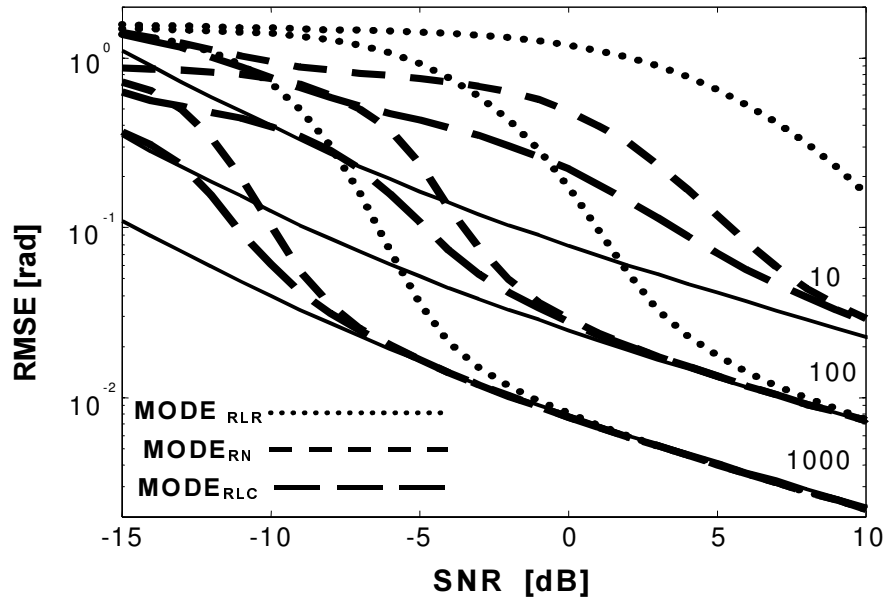


Figura 7.1 – Desempenho do método MODE – duas iterações e $\rho = 0$.

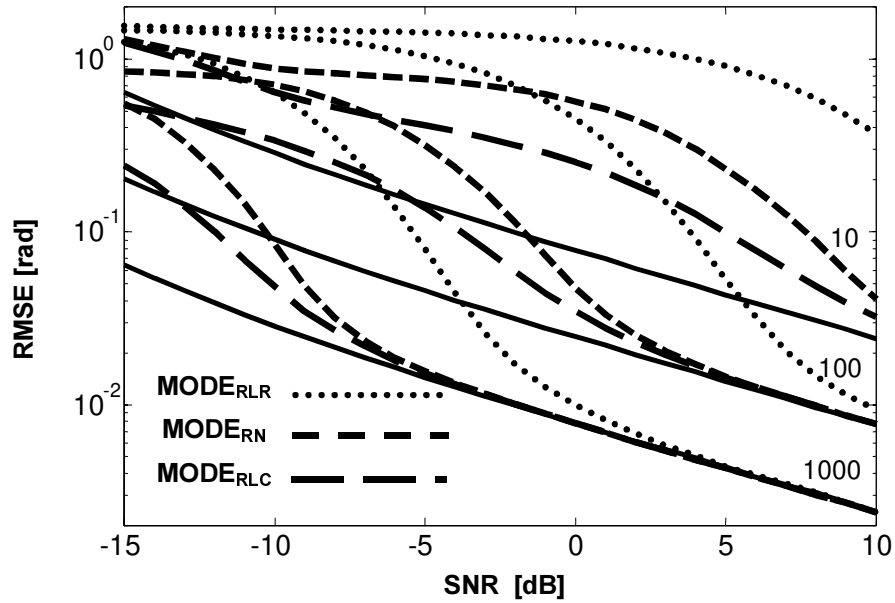
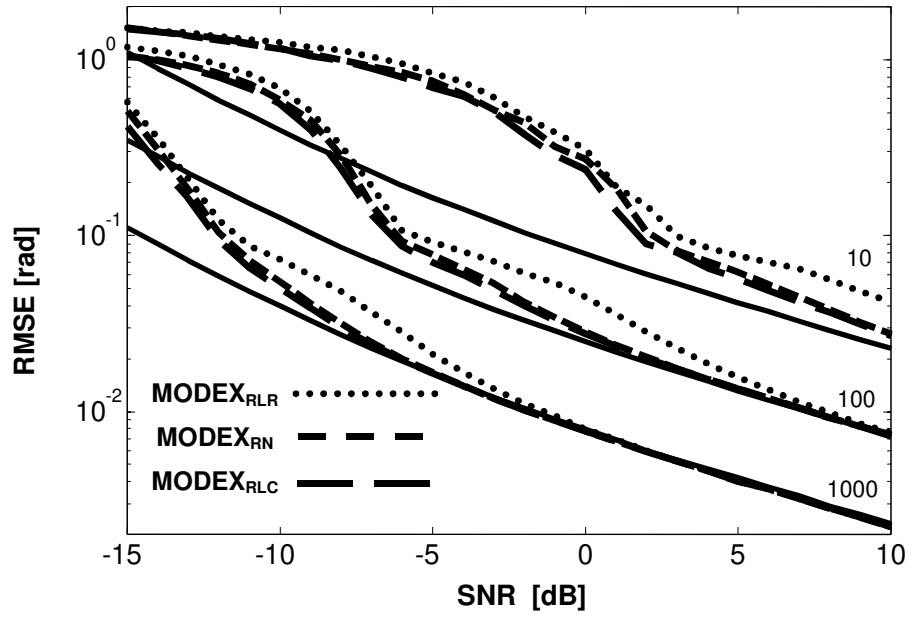
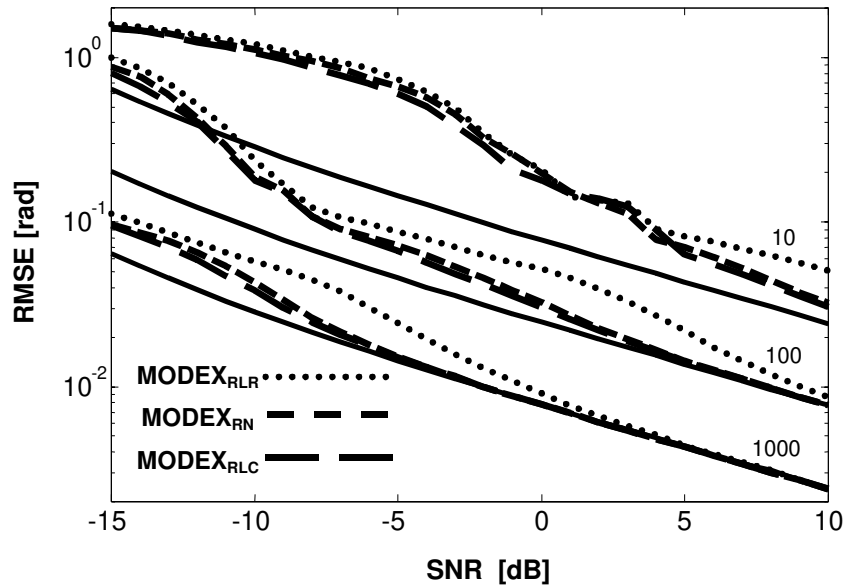


Figura 7.2 – Desempenho do método MODE – duas iterações e $\rho = 1,0$.

Observa-se que em ambas as figuras anteriores o desempenho do MODE_{RLC} é o melhor, com menores limiares de estimação e curvas de desempenho mais próximas dos CRBs. A restrição linear real, além dos problemas comentados nos dois capítulos anteriores, apresenta desempenho bastante inferior ao das duas outras restrições. Portanto, para o MODE, a RLC produz um ganho de desempenho significativo em relação aos resultados desse método apresentados na literatura. A restrição linear central é, portanto, a opção preferencial para esse método.

7.4.2 – Método MODEX

Neste item são apresentadas as curvas de desempenho assintótico do método MODEX sob as restrições linear real e central e a restrição de norma. As curvas são apresentadas nas Figuras 7.3 e 7.4 para $\rho = 0$ e $\rho = 1,0$, respectivamente.


 Figura 7.3 – Desempenho do método MODEX – duas iterações e $\rho = 0$.

 Figura 7.4 – Desempenho do método MODEX - duas iterações e $\rho = 1,0$.

O $\text{MODEX}_{\text{RLR}}$ é um dos métodos de estimação de DOA mais avançado apresentado na literatura. Nas Figuras 7.3 e 7.4 observa-se que seu desempenho é igual ou pior que aqueles obtidos com a restrição de norma e a restrição linear central. As curvas de desempenho do $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$ e do MODEX_{RN} estão próximas entre si, com vantagem, porém, para o primeiro. O $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$ é, portanto, indicado como a melhor implementação do método MODEX.

7.4.3 – Métodos MODE sob RLC e MODEX sob RLR

O método MODE_{RLC} foi indicado no item 7.4.1 como a implementação mais eficiente do MODE. No item 7.4.2 foram apresentadas as curvas de desempenho de três implementações do método MODEX, sendo o $\text{MODEX}_{\text{RLR}}$ a implementação padrão da literatura. Estes dois métodos são comparados nas Figuras 7.5 e 7.6, para sinais descorrelacionados e coerentes, respectivamente.

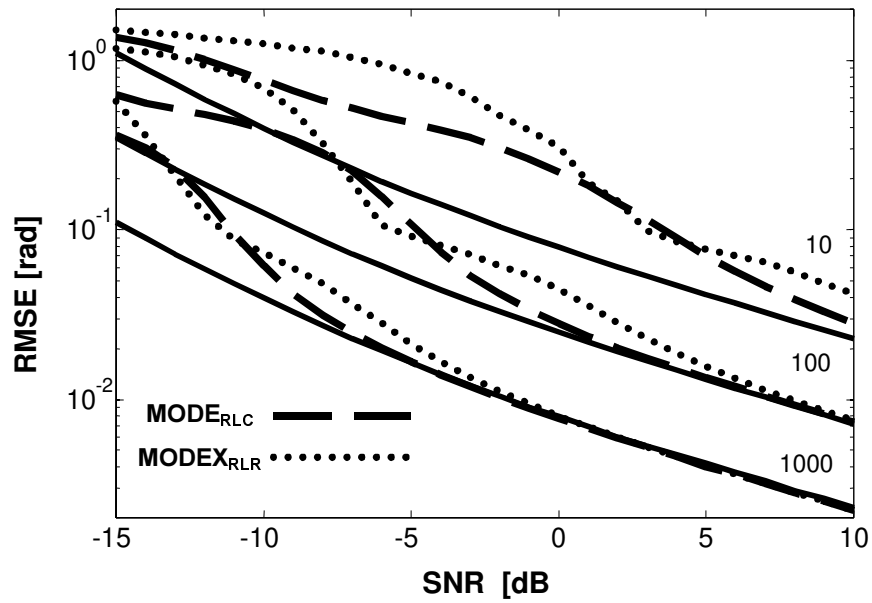


Figura 7.5 – Desempenho dos métodos MODE_{RLC} e $\text{MODEX}_{\text{RLR}}$ - $\rho = 0$.

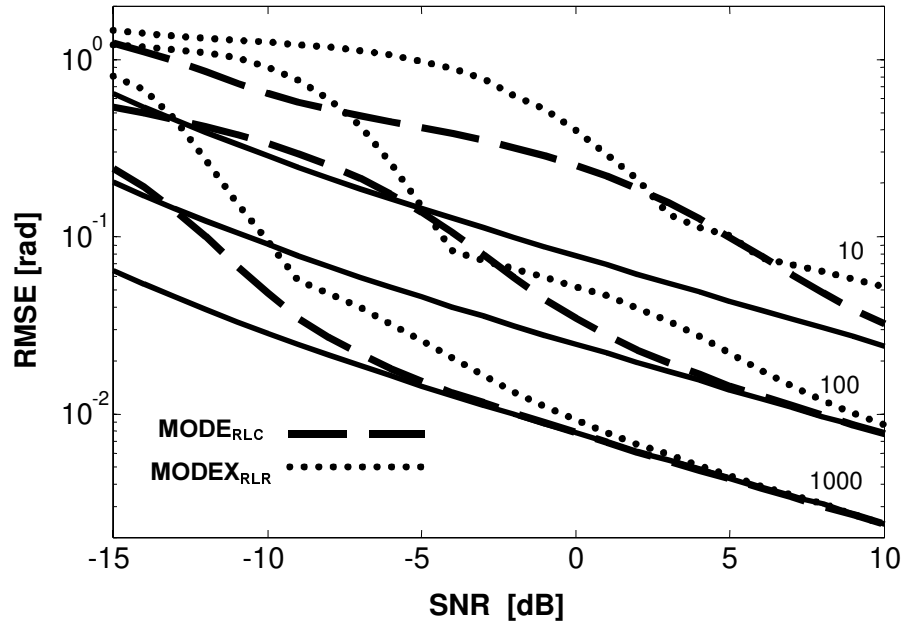


Figura 7.6 – Desempenho dos métodos MODE_{RLC} e $\text{MODEX}_{\text{RLR}}$ - $\rho = 1,0$.

Nestas figuras observa-se que o método MODE_{RLC} apresenta desempenho geral melhor que o $\text{MODEX}_{\text{RLR}}$, com suas curvas de desempenho mais próximas dos CRBs. Apenas em alguns poucos pontos seu desempenho é igualado ou superado pelo $\text{MODEX}_{\text{RLR}}$. Como o método MODEX necessita de esforço computacional maior que o dobro daquele exigido pelo MODE, a implementação MODE_{RLC} representa uma importante contribuição desse trabalho.

7.4.4 – Métodos MODE e MODEX sob Restrição Linear Central

Nesse item são comparadas as curvas de desempenho dos métodos MODE e MODEX, ambos sob RLC, que apresentaram os melhores resultados nos três itens anteriores.

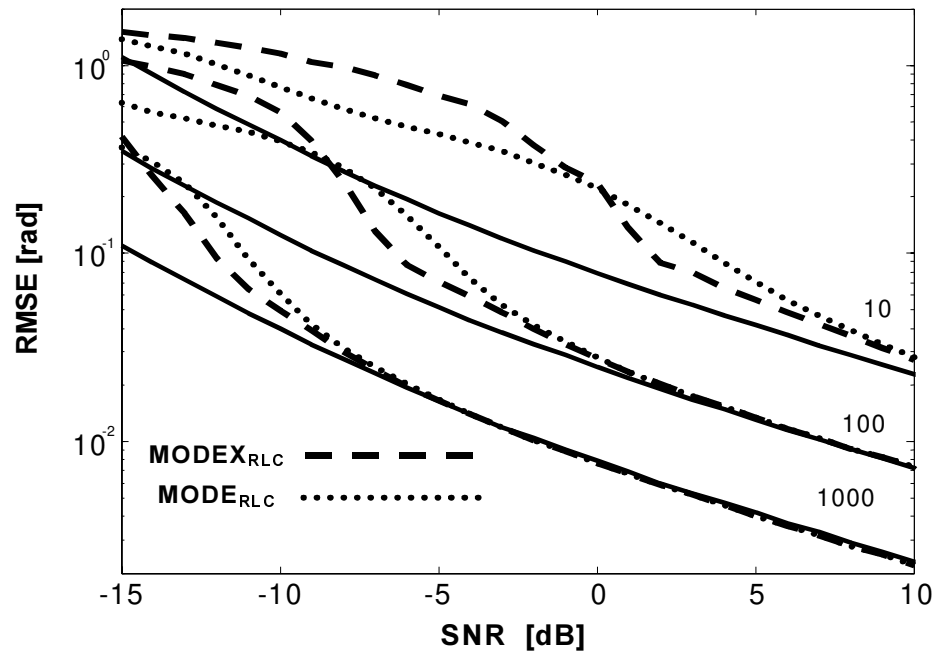


Figura 7.7 – Desempenho do método MODE e MODEX – restrição RLC e $\rho = 0$.

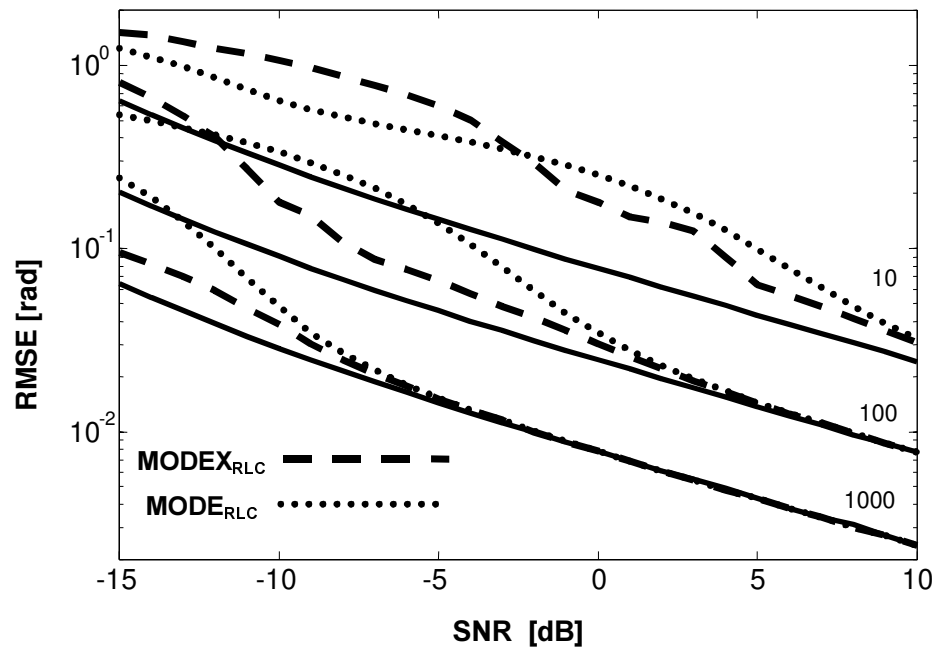


Figura 7.8 – Desempenho do método MODE e MODEX – restrição RLC e $\rho = 1,0$.

Analisando-se as Figuras 7.7 e 7.8 observa-se que as curvas de desempenho do método $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$ estão mais próximas das curvas dos CRBs que as do método MODE_{RLC} na maioria dos casos.

Nos casos para 10 e 100 *snapshots* das duas figuras anteriores, as curvas de desempenho do MODE_{RLC} apresentam melhores desempenhos que as do $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$ em algumas regiões onde a SNR é baixa, apesar desses trechos situarem-se distantes das curvas dos CRBs. Ainda assim, isto demonstra que o critério de seleção das estimativas do método MODEX não é sempre eficiente, uma vez que as estimativas do MODE também fazem parte das estimativas candidatas do método MODEX, mas nem sempre as estimativas selecionadas propiciam um desempenho melhor que aquele obtido pelas estimativas do MODE. A análise das funções custos do MODE, MODEX e a do critério de seleção adotado, DMLE ou SMLE, indicam que a similaridade entre elas ocorre apenas nas condições assintóticas, para N grande ou SNR alta, onde o critério de seleção se torna, de fato, eficiente. É isso que se observa no caso para 1000 *snapshots* das duas figuras, onde as curvas de desempenho do $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$ estão mais próximas do CRB do que as curvas do MODE_{RLC} , em toda a faixa de SNR analisada.

Com os resultados dos itens 7.4.3 e 7.4.4, conclui-se que o método $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$ representa um avanço em relação a um dos métodos de estimação DOA mais avançados que é apresentado na literatura, o $\text{MODEX}_{\text{RLR}}$ [Gershman99]. Esse método também supera a implementação MODE_{RLC} , apesar de seu esforço computacional ser maior.

7.4.5 - Métodos MODEX e M-IQML sob Restrição Linear Central

O método $\text{M-IQML}_{\text{RLC}}$ foi aquele que apresentou o melhor desempenho no Capítulo 6 e método $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$ é o melhor dentre as implementações apresentadas nesse capítulo. Apresenta-se nas Figuras 7.9 e 7.10 suas curvas de desempenho para sinais descorrelacionados e coerentes, respectivamente.

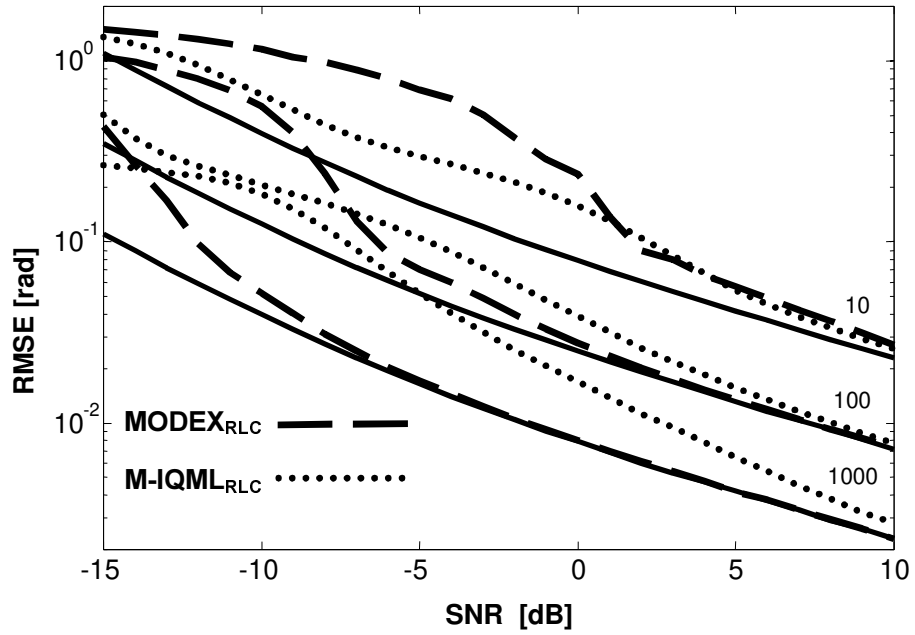


Figura 7.9 – Desempenho dos métodos M-IQML e MODEX - restrição RLC e $\rho = 0$.

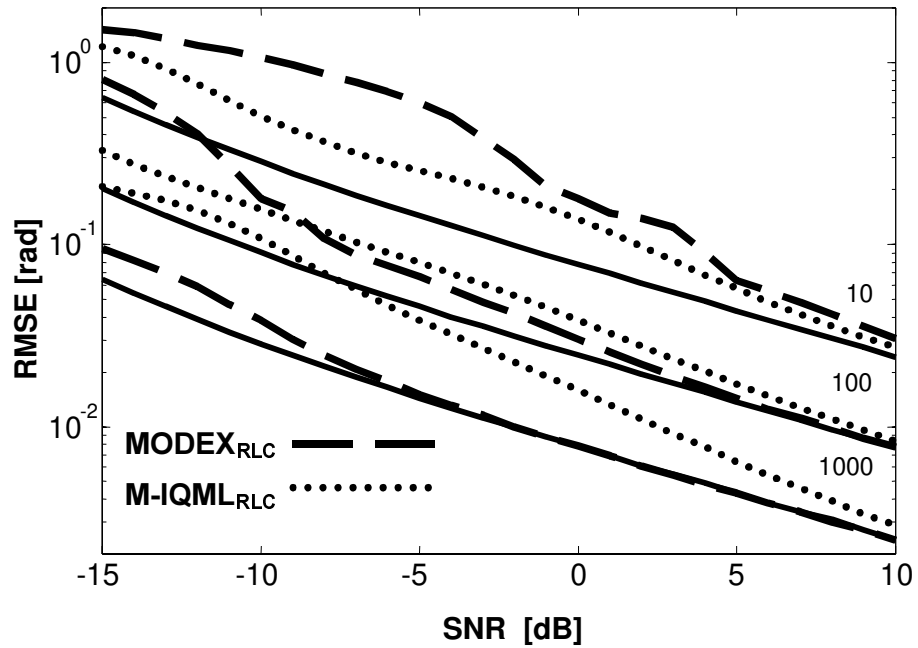


Figura 7.10 – Desempenho dos métodos M-IQML e MODEX – restrição RLC e $\rho = 1,0$.

O método $M\text{-IQML}_{\text{RLC}}$ apresenta desempenho melhor ou igual que do $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$ no caso para 10 *snapshots* nas duas figuras. No caso para 100 *snapshots* as curvas do $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$ estão mais próximas do CRB em SNR elevada. Porém, com a diminuição da SNR, este

método apresenta o efeito de limiar e suas curvas se afastam do CRB, sendo superado pelo M-IQML_{RLC} numa pequena região, porém, distante do CRB. Finalmente, no caso para 1000 *snapshots*, as curvas de desempenho do MODEX_{RLC} estão mais próximas do CRB.

A minimização realizada pelo método M-IQML é, aparentemente, mais eficiente na situação de poucos *snapshots* por usar todos os autovetores da matriz $\hat{\mathbf{R}}$. Para os demais casos, as restrições de subespaços que são impostas no método MODEX (que inclui uma etapa do MODE) propiciam melhor desempenho a este método.

Com estes resultados, o MODEX_{RLC} é selecionado para as comparações a serem realizadas no próximo capítulo.

7.5 – Conclusões

Os métodos MODE e MODEX foram apresentados e avaliados frente às restrições de não-trivialidade. Na literatura da área, tais métodos utilizam a restrição linear real.

O método MODE sob restrição linear central apresentou desempenho excelente em todos os casos analisados, superando os resultados obtidos com restrição de norma e a restrição linear real. O MODEX_{RLR} é apresentado na literatura como um dos melhores métodos de estimação de DOA. O método MODE_{RLC} foi comparado com o MODEX_{RLR} e apresentou um desempenho notável, sendo superado apenas em alguns poucos trechos de SNR. Isso representa um resultado de destaque pois o esforço computacional exigido pelo método MODEX é maior que o dobro daquele gasto pelo MODE, qualquer que seja o tipo de restrição de não-trivialidade utilizada.

Na análise experimental do método MODEX, a restrição linear central foi a que conferiu o melhor desempenho geral a este método. Também quando comparado com os métodos MODE e M-IQML, este método se destaca. No caso do MODEX_{RLC}, cujas estimativas candidatas incluem as estimativas do método MODE_{RLC}, constata-se que os critérios de seleção, tanto o determinístico como o estocástico, não são eficientes quando a SNR é pequena e há poucos *snapshots*. Isso faz com que o desempenho do MODE_{RLC} seja melhor que o do MODEX_{RLC} em alguns trechos das curvas de desempenho, porém, distante da curva de CRB, o que configura um resultado de estimação impreciso. No caso assintótico,

com o aumento do número de *snapshots*, os critérios de seleção mostram-se mais eficientes e o MODEX é sempre melhor que o MODE.

Em resumo, a restrição linear central mostrou ser uma excelente alternativa que substitui com vantagem a restrição linear real e supera a restrição de norma nos métodos MODE e MODEX. O método $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$ apresenta o melhor desempenho geral, apesar de ter o esforço computacional duas vezes maior que o do MODE.

Capítulo 8

Proposta de Extensão do Método MODE: O MODE-ES

8.1 - Introdução

No Capítulo 7 foi observado que o método MODEX apresenta curvas de desempenho assintótico próximas do CRB e na maioria das condições analisadas seu desempenho supera o do método MODE. Isto foi conseguido graças ao aumento no número de frequências candidatas, sobre as quais é aplicado um critério de seleção. Entretanto, o esforço computacional exigido pelo MODEX é maior que o dobro que aquele do MODE e o critério de seleção só é eficiente na condição assintótica ou com SNR alta.

Nesse capítulo apresentamos um novo método de estimação de DOA que também gera frequências candidatas extras como o MODEX. Entretanto, não há a necessidade de se executar a segunda etapa do MODEX, na qual o vetor $\mathbf{b}$ tem sua ordem estendida. Além desta vantagem, as candidatas geralmente apresentam melhor qualidade que aquelas do MODEX, pois se situam mais próximas das verdadeiras frequências.

Esta nova proposta apresenta um menor esforço computacional quando comparado ao do MODEX devido a dois fatores: 1) há um número menor de estimativas candidatas e, conseqüentemente, uma quantidade menor de combinações a serem avaliadas pelo critério de seleção; 2) o novo método exige um menor número de cálculos que o MODEX. Por fim, este novo método apresenta melhor desempenho que o MODEX e é, portanto, uma importante contribuição desse trabalho.

8.2 – Considerações sobre o Método MODEX

O método MODEX agrupa as K estimativas de frequências obtidas pelo método MODE mais as $(K+Q)$ estimativas obtidas com a repetição do MODE, agora usando o vetor $\mathbf{b}$

de parâmetros com ordem aumentada. São formados todos os conjuntos possíveis sobre estas $(2K+Q)$ frequências candidatas, cada um com K frequências distintas. O passo final é a seleção do melhor conjunto, que é aquele que proporciona o menor valor para a função custo do MLE. Como consequência dessa estrutura, o esforço computacional deste método é maior que o dobro daquele do MODE.

A ação do método MODEX pode ser analisada [Lopes02] da seguinte forma. A função MLE tem muitos pontos de mínimos locais nas vizinhanças do mínimo global, principalmente em SNR baixas, como foi mostrado no Capítulo 4. O limiar de estimação do método MODE ocorre quando seu algoritmo atinge um mínimo local distante do mínimo global. Para tentar contornar este problema, o método MODEX gera alguns novos pontos no espaço das frequências (candidatas) e realiza a pesquisa do melhor mínimo entre todas as candidatas. Com isso o MODEX é capaz de diminuir a SNR de limiar do MODE. Contudo, apesar desse sucesso, nem todas as estimativas extras do MODEX são adequadas para estimação de DOA: aumentando a ordem do vetor de coeficientes $\mathbf{b}$ no método MODE leva, em princípio, K raízes a se aproximarem das frequências verdadeiras enquanto que as demais Q raízes são alocadas em posições distantes das verdadeiras frequências, atendendo a imposições do subespaço de ruído da matriz de correlação dos dados [Gershman99]. Como consequência, estas Q raízes associadas ao subespaço de ruído não são, em geral, boas estimativas de frequências.

8.3 – Proposta de um Novo Método de Estimação: MODE-ES

Propõe-se a seguir um conjunto de procedimentos para modificar o critério de geração de estimativas extras do MODEX. O objetivo é obter frequências candidatas melhores e em menor quantidade. Este conjunto de procedimentos é tratado como um novo método de estimação e será chamado de MODE-ES, pois é basicamente o método MODE com o conjunto de estimativas estendido.

Em linhas gerais, a proposta do novo método é gerar três soluções distintas do método MODE para cada situação, cada uma delas usando um tipo distinto de restrição de não-trivialidade. Assim, o algoritmo MODE é executado uma única vez, usando uma determinada restrição. Em seguida, duas outras soluções são obtidas analiticamente aplicando-se a expressão (5.24) à matriz $\mathbf{\Omega}$ e usando as restrições RLR e RLI.

São analisadas duas versões desta nova proposta: 1 - **MODE-ES_{RN}**, na qual o algoritmo MODE é executado sob a restrição de norma; 2 - **MODE-ES_{RLC}**, que usa a restrição linear central. A descrição conjunta destas duas alternativas é apresentada a seguir.

Seja $\mathbf{\Omega}$ a matriz quadrada de dimensão $K+1$, obtida na última iteração do algoritmo unificado na sua versão para o método MODE e dada pela expressão (5.24).

O MODE-ES consta dos seguintes passos:

- 1 – Execute o MODE e obtenha $\mathbf{\omega}_{\text{RN}0}$ ou $\mathbf{\omega}_{\text{RLC}0}$, o vetor final das estimativas de frequência sob a restrição de norma ou a restrição linear central, respectivamente;
- 2 - Obtenha os vetores de frequências $\mathbf{\omega}_{\text{RLR}}$ e $\mathbf{\omega}_{\text{RLI}}$ a partir da matriz $\mathbf{\Omega}$ e da expressão (5.28), usando a restrição linear real e imaginária, respectivamente;
- 3 - Monte um dos conjuntos de frequências, composto dos seguintes elementos:

$$\mathbf{\Phi}_{\text{ES1}} = \{\mathbf{\omega}_{\text{RN}0}, \mathbf{\omega}_{\text{RLR}}, \mathbf{\omega}_{\text{RLI}}\} \in \mathbb{R}^{3K}$$

$$\mathbf{\Phi}_{\text{ES2}} = \{\mathbf{\omega}_{\text{RLC}0}, \mathbf{\omega}_{\text{RLR}}, \mathbf{\omega}_{\text{RLI}}\} \in \mathbb{R}^{3K}.$$

$\mathbf{\Phi}_{\text{ES1}}$ é o conjunto das estimativas de frequências geradas para o método MODE-ES_{RN} e $\mathbf{\Phi}_{\text{ES2}}$, das estimativas do método MODE-ES_{RLC};

- 4 - Monte os grupos de frequências candidatas combinando todos os elementos de um dos dois conjuntos definidos no passo anterior em grupos de K elementos. O número de grupos formados é calculado por:

$$N_T = \binom{3K}{K} = \frac{3K!}{K!2K!} \quad (8.1)$$

- 5 – Use o critério de seleção do método MODEX, escolhendo o grupo que minimiza a função custo DMLE ou SMLE. Esta será a estimativa de frequência do método MODE-ES.

8.3.1 - Comparação entre os Métodos MODE-ES e MODEX

As vantagens deste novo método podem ser prontamente analisadas. Suponha que o método MODEX seja simulado para o caso $K = 2$ e use $Q = 4$. Isso gera 8 frequências que, quando agrupadas, resultam em 28 pares de frequências candidatas.

O método MODE-ES, sob as mesmas condições, terá apenas 6 frequências e que resultam em 15 pares de candidatas. Adicionalmente, o MODE-ES obtém suas frequências candidatas usando o algoritmo MODE apenas uma vez. Tem-se, portanto, um esforço computacional significativamente menor do que aquele do MODEX. Obviamente, o método

proposto só será vantajoso caso seu desempenho seja melhor ou igual ao do MODEX, o que será avaliado através de simulações numéricas na próxima seção.

8.4 – Simulações e Resultados

Nesta seção são mostradas as simulações numéricas dos métodos $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ e $\text{MODE-ES}_{\text{RN}}$. As comparações são realizadas com os métodos $\text{MODEX}_{\text{RLR}}$, $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$ e também uma proposta alternativa do $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$.

O caso simulado é o mesmo apresentado nos capítulos anteriores, com um ULA com dez sensores, omnidirecionais, com inter espaçamento de metade do comprimento de onda. Há dois sinais de banda estreita de mesma potência, com $\omega_1 = 0,1736\pi$ rad e $\omega_2 = 0,2588\pi$ rad. Consideraram-se os casos de 10, 100 e 1000 *snapshots* e a faixa de SNR é varrida desde -15 a 10 dB, com passo de 1 em 1 dB. O modelo usado é o aleatório incondicional e os fatores de correlação são $\rho = 0$ e $\rho = 1,0$. São utilizadas 1000 realizações independentes para o cálculo do desempenho médio, definido como a raiz quadrada do erro quadrático médio das estimativas (RMSE). As implementações $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ e $\text{MODE-ES}_{\text{RN}}$ usam o algoritmo unificado na versão para o método MODE e com apenas duas iterações, como foi realizado nos métodos MODE e MODEX no Capítulo 7.

8.4.1 – Desempenho dos Métodos MODE-ES e $\text{MODEX}_{\text{RLR}}$

Nas Figuras 8.1 e 8.2 as curvas de desempenho do método $\text{MODEX}_{\text{RLR}}$ são comparadas com aquelas dos métodos $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ e $\text{MODE-ES}_{\text{RN}}$. O fator de correlação tem valores iguais a $\rho = 0$ e $\rho = 1,0$, respectivamente.

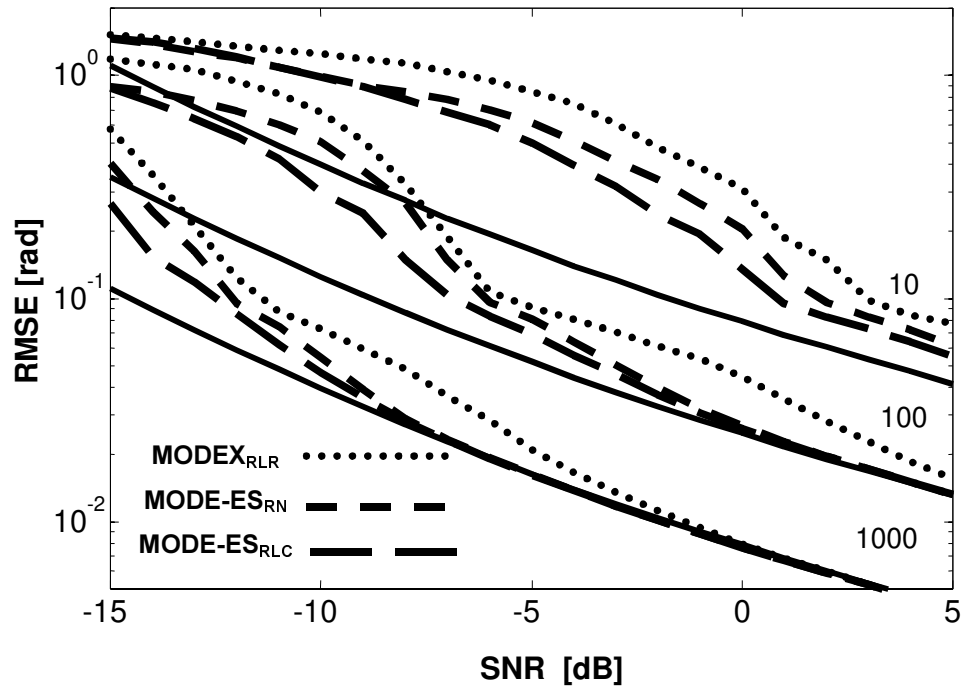


Figura 8.1 – Desempenho dos métodos MODE-ES e $\text{MODEX}_{\text{RLR}}$ – $\rho = 0$.

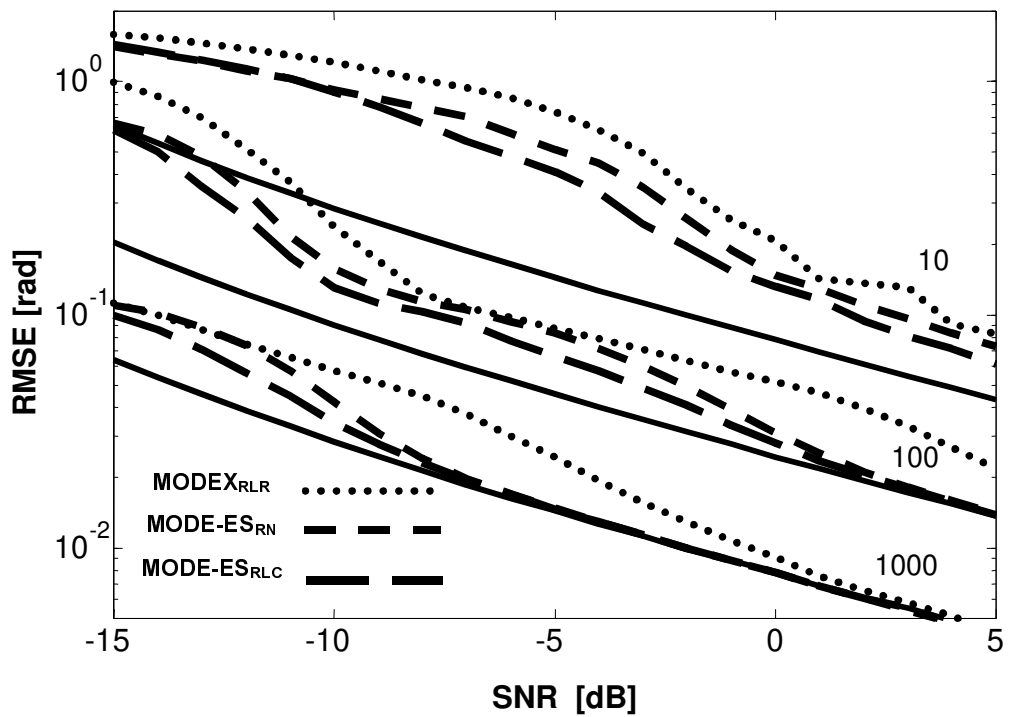


Figura 8.2 – Desempenho dos métodos MODE-ES e $\text{MODEX}_{\text{RLR}}$ – $\rho = 1,0$.

Nas Figuras 8.1 e 8.2 constata-se que as curvas das duas implementações do método MODE-ES apresentam melhor desempenho do que aquelas do método $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$ em todas as condições analisadas, tanto sob sinais descorrelacionados como no caso de sinais coerentes. Comparando as duas versões do MODE-ES entre si, observa-se que o $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ é melhor que o $\text{MODE-ES}_{\text{RN}}$ em quase todas as curvas mostradas.

Estes resultados permitem afirmar que o método MODE-ES representa um avanço significativo em termos de métodos de estimação de DOA, uma vez que o desempenho superior é alcançado com um esforço computacional quase que metade daquele exigido pelo MODEX . A restrição linear central se sobressai novamente quando comparada com a restrição de norma.

8.4.2 – Desempenho dos Métodos $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ e $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$

O método $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$ foi apresentado no Capítulo 7 e avaliado como o que produzia melhor desempenho dentre aqueles que foram avaliados. Na Seção 8.4.1 o método $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ apresentou desempenho melhor que os demais métodos. Nas Figuras 8.3 e 8.4 estes dois métodos são comparados.

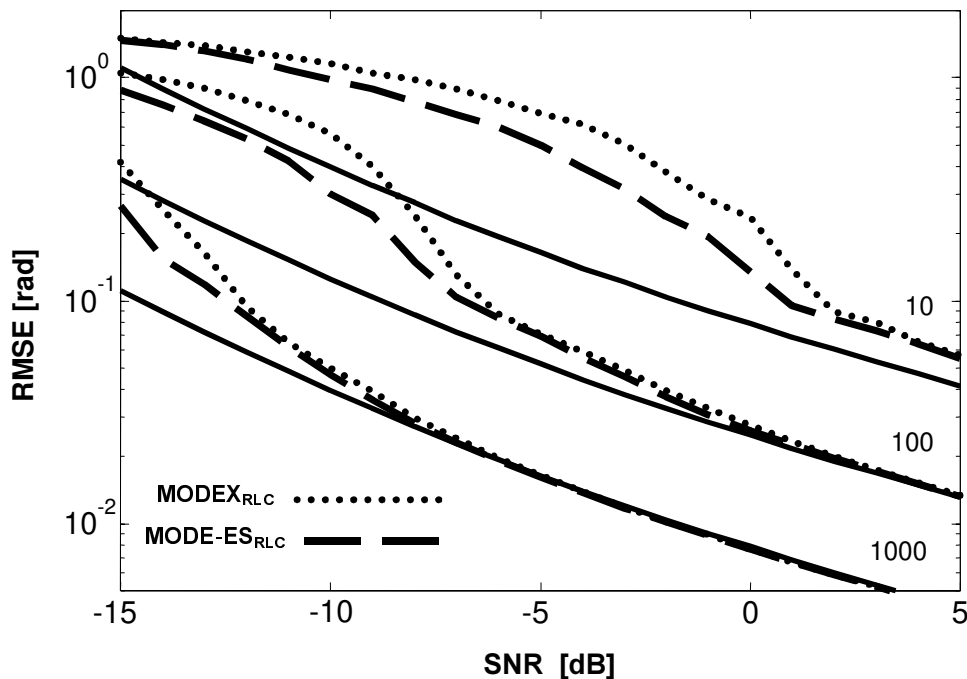


Figura 8.3 – Desempenho dos métodos MODE-ES e MODEX – restrição RLC – $\rho = 0$.

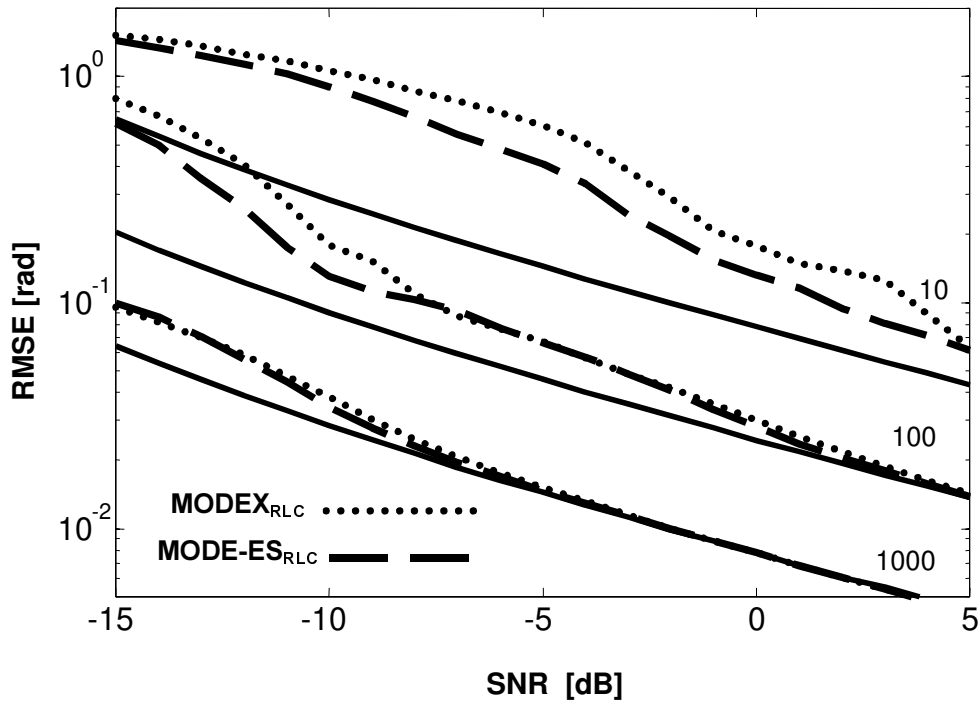


Figura 8.4 – Desempenho dos métodos MODE-ES e MODEX – restrição RLC – $\rho = 1,0$.

Estas figuras indicam que o $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ supera o método $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$ nos casos com 10 e 100 *snapshots* e tem desempenho semelhante para o caso com 1000 *snapshots*.

8.4.3 – Desempenho do Método $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ e Novas Restrições

No método $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ padrão, apresentado na Seção 8.3, as candidatas extras são geradas usando as restrições RLR e RLI após a convergência do MODE. Porém, é possível também utilizar outras combinações de restrições de não-trivialidade para geração dessas candidatas.

O caso mais geral é aquele que utiliza todas as restrições analisadas, ou seja, RLR, RLI e RN. Porém, os resultados numéricos obtidos indicam que o desempenho obtido com esta alternativa é semelhante àquele obtido com o $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ padrão, que não usa as candidatas geradas pela RN. Adicionalmente, este caso mais geral usa K candidatas a mais, o que aumenta o esforço computacional em relação ao método padrão.

Outra possibilidade para o $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ é o uso das candidatas geradas pela restrição de norma, RN, e também aquelas obtidas por uma das restrições lineares, RLR ou RLI.

As Figuras 8.5 e 8.6 permitem comparar o desempenho da proposta $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ com as candidatas extras geradas pelas restrições RN e RLC, com o desempenho do $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ padrão.

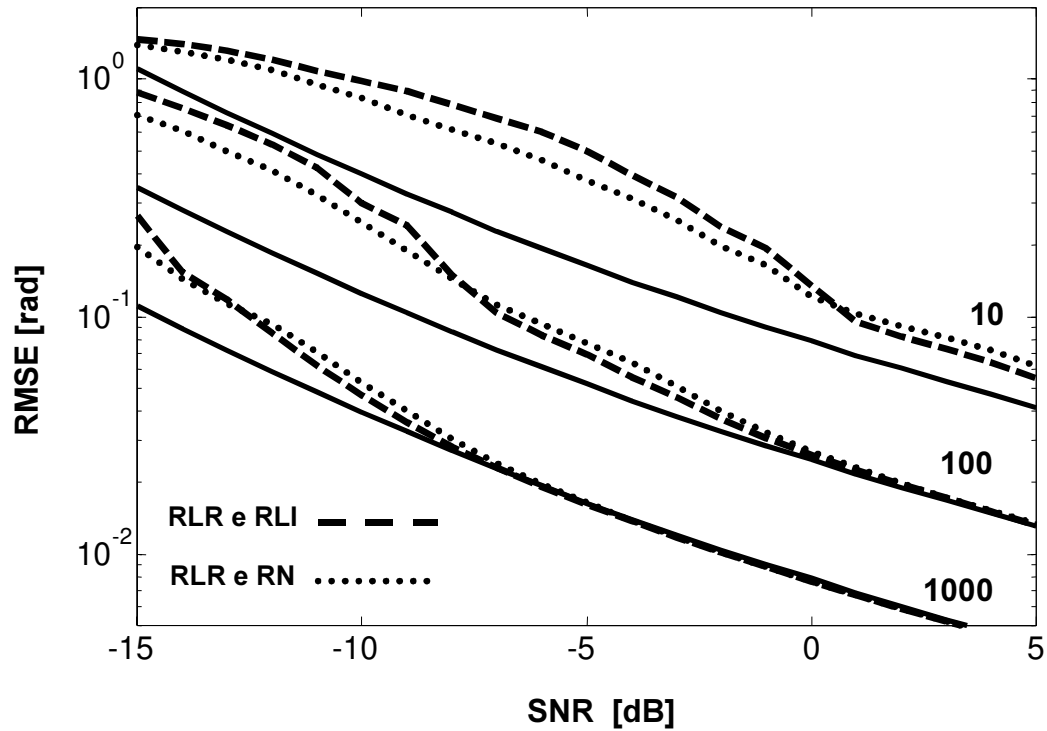


Figura 8.5 – Desempenho do método $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ – $\rho = 0$.

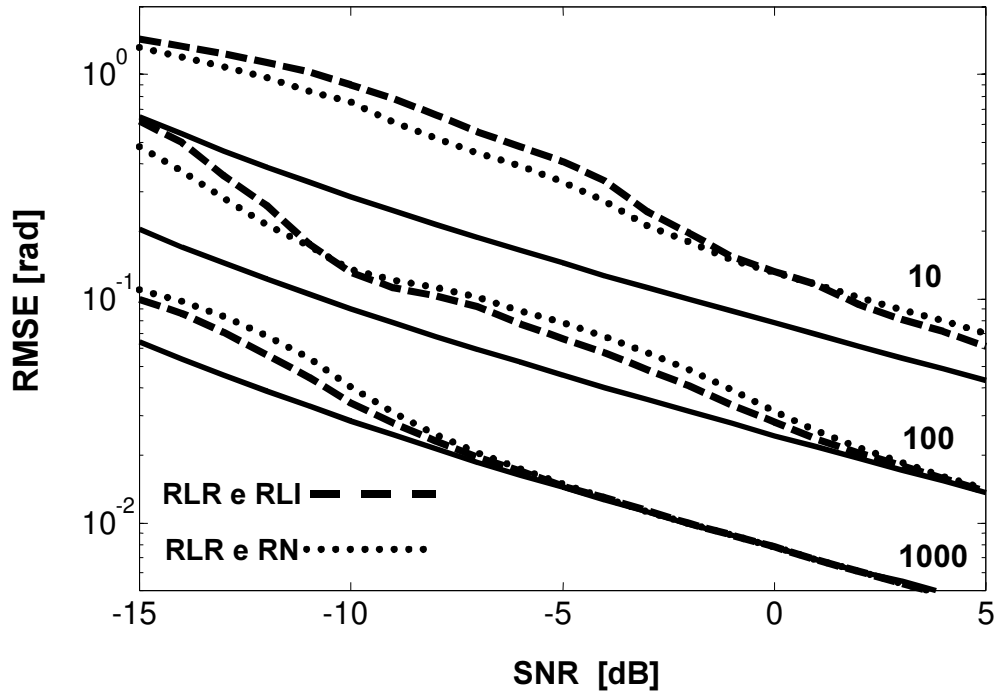


Figura 8.6 – Desempenho do método $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}} - \rho = 1,0$.

Observa-se que a substituição da RN pela RLI confere ao $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ melhor desempenho em algumas condições, como para poucos *snapshots* e baixa SNR. Porém, este método apresenta desempenho pior em outras situações, de forma que o $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ padrão é o que obtém o melhor resultado geral.

A outra proposta alternativa do $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$, que usa as candidatas geradas com a RLI e a RN, foi avaliada, porém os resultados obtidos (não mostrados aqui) também não indicaram melhoria em relação àqueles do $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ padrão.

Estes resultados e os obtidos nos itens anteriores permitem afirmar que o método $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ padrão é o mais avançado dentre os métodos analisados nesse trabalho e configura mais uma importante contribuição.

O método $\text{MODE-ES}_{\text{RN}}$ é também uma boa alternativa que pode ser utilizada caso a restrição linear central não possa ser utilizada, o que ocorre quando K é ímpar.

8.5 – Conclusões

Neste capítulo foi apresentada uma proposta de um novo método de estimação, o MODE-ES. Neste método, o número das estimativas de frequências do método MODE original é aumentado adicionando as estimativas obtidas com as restrições lineares RLR e RLI aplicadas sobre a matriz da minimização quadrática final.

Foram apresentadas duas versões desse método, usando a restrição linear central e a restrição de norma. Os desempenhos de ambas as propostas superaram o desempenho do $\text{MODEX}_{\text{RLR}}$ nas condições analisadas, método este considerado até então como padrão na literatura. A versão $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ apresentou desempenho superior ao $\text{MODE-ES}_{\text{RN}}$, consagrando a restrição linear central comparada com a restrição de norma também nesse novo método.

Por fim, foi mostrado que o $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ obtém melhor resultado que o $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$, indicado como o melhor método de estimação do capítulo anterior.

Em resumo, as propostas de implementação do MODE-ES apresentadas superaram o desempenho das implementações do MODEX. As vantagens obtidas com isso foram:

- 1) há um número menor de estimativas candidatas e, consequentemente, uma menor quantidade de combinações a serem avaliadas pelo critério de seleção;
- 2) o método proposto exige menos cálculos que o MODEX;
- 3) o novo método melhora o desempenho do MODEX e é, portanto, uma importante contribuição desse trabalho.

Capítulo 9

Conclusões e Sugestões para Prosseguimento do Trabalho

9.1 – Introdução

Algumas aplicações atuais na área de estimação de frequências e de DOA exigem métodos com alta capacidade de resolução, ou seja, métodos que consigam estimar parâmetros próximos entre si, mesmo com pequena quantidade de dados disponíveis e baixas SNR's. A correlação entre as fontes de sinais torna a estimação desses parâmetros ainda mais difícil.

O estimador de Máxima-Verossimilhança (MLE) apresenta excelente desempenho, porém, exige esforço computacional proibitivo. Para superar este inconveniente, foram desenvolvidos métodos alternativos derivados do MLE que não comprometem o desempenho desse estimador.

Os objetivos deste trabalho foram realizar uma análise teórica e experimental dos principais métodos derivados do MLE e uma descrição unificada geral. Como resultado, algumas novas propostas de métodos e diversos detalhes das implementações dos algoritmos foram desenvolvidos e avaliados. No item seguinte são apresentados os principais resultados e conclusões desse trabalho.

9.2 – Resultados e Conclusões

No Capítulo 3 foram condensadas as principais expressões do Limite de Cramér-Rao, o limite teórico de desempenho para os métodos de estimação. Foram apresentados os resultados mais importantes para os modelos de sinais determinístico e incondicional, inclusive suas expressões assintóticas. Foram obtidas curvas e superfícies que mostram como o CRB se comporta com a variação de parâmetros dos sinais como número de sinais e de sensores, diferença de fases, espaçamento entre frequências e fator de correlação entre os sinais. Algumas dessas curvas são utilizadas para estabelecer figuras de mérito para avaliar e comparar os métodos de estimação apresentados nos capítulos seguintes.

No Capítulo 4 foi apresentado o Estimador de Máxima-Verossimilhança (MLE) para os modelos de sinais analisados. Este estimador é clássico na literatura da área e os métodos de estimação mais modernos são baseados nele. O objetivo desse capítulo foi condensar as principais expressões e suposições do MLE e, por extensão, as dos métodos derivados desse estimador. Também foram realizadas algumas simulações para mostrar algumas de suas limitações.

Nas simulações numéricas realizadas com a função de verossimilhança foi observado que podem haver diversos pontos de mínimos locais, os quais se situam longe das frequências verdadeiras. Nesse caso, nenhum estimador baseado nesse critério consegue realizar a estimação de forma precisa.

No Capítulo 5 foi apresentada uma proposta de descrição unificada para os métodos de estimação derivados do MLE, a saber, IQML, M-IQML, MODE e MODEX. Foram descritos todos os passos da reparametrização que é realizada sobre a função custo do MLE e as restrições que devem ser impostas a esta nova função a ser minimizada. Um algoritmo computacional para a descrição unificada foi desenvolvido e analisaram-se também as restrições de não-trivialidade associadas ao processo de otimização dos métodos de estimação, bem como os detalhes gerais de suas implementações. Um novo tipo de restrição linear, a restrição linear central (RLC), foi também apresentada nesse capítulo.

No Capítulo 6 foram apresentados dois métodos de estimação derivados do MLE: o IQML e o M-IQML. Para o método IQML foi apresentada a sua versão original e também

uma nova proposta, baseada na descrição unificada apresentada no capítulo anterior. Esta proposta é inédita e particularmente importante, pois possibilita que este método seja simulado em condições onde o algoritmo da versão original demandaria esforço computacional excessivo.

O M-IQML é um método que apresenta pequenas modificações em relação ao IQML, pretendendo corrigir algumas de suas deficiências. É apresentada a sua versão para a descrição unificada. As simulações numéricas desenvolvidas nesse e nos demais capítulos foram realizadas usando os parâmetros e modelos de sinais clássicos na literatura. As restrições lineares real (RLR) e imaginária (RLI) foram avaliadas qualitativamente para o método IQML. Foi observada uma forte degradação no desempenho devido aos problemas numéricos que ocorrem em determinados valores das frequências dos sinais. Isso constitui uma característica extremamente indesejada, de forma que tais restrições não podem ser utilizadas diretamente na solução de problemas de estimação de DOA ou de frequência. Por outro lado, os resultados das simulações indicaram que a RLC aqui proposta e a restrição de norma (RN) são robustas a este problema. As curvas de desempenho mostraram que, de forma geral, a RLC melhora o desempenho dos dois métodos e que bons resultados são obtidos com poucas iterações, mesmo para o IQML, um método originalmente tratado como iterativo. Isto motivou a proposta de utilização de um número fixo de iterações para o algoritmo do método IQML, o que reduz o esforço computacional em relação à proposta original.

As simulações realizadas com o método M-IQML_{RLC} mostram que o mesmo corrige, em parte, as inconsistências que são previstas nas estimativas do método IQML, principalmente quando os sinais são coerentes. Este método foi indicado como o que apresenta melhor desempenho geral nesse capítulo.

No Capítulo 7 os métodos MODE e MODEX foram apresentados e avaliados através de simulações. O método MODE pode ser interpretado como uma versão do método IQML que utiliza apenas o subespaço de sinal da matriz de correlação estimada. A idéia básica é minimizar uma função custo em torno dos valores ótimos dos parâmetros, partindo de uma boa estimativa inicial. Com isso, este método apresenta excelente desempenho quando comparado com o IQML e M-IQML, particularmente para sinais correlacionados ou quando o número de *snapshots* é grande. Já o método MODEX é um aprimoramento do MODE, que, com pequenas modificações, consegue melhorar o desempenho desse método em baixas

SNR's e pequeno número de *snapshots*. Estas características fazem do MODEX um dos mais poderosos métodos de estimação de DOA.

As análises experimentais desses métodos foram realizadas avaliando-se o uso das restrições de não-trivialidade RLR, RLC e RN. A RLR é retomada para análise por ser apresentada na literatura, a despeito da limitação de seu uso em estimação de frequência e de DOA. O método MODE_{RLC} apresenta desempenho excelente em todos os casos avaliados, superando os resultados obtidos com o MODE_{RN} e MODE_{RLR} .

As versões $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$ e MODEX_{RN} apresentaram desempenhos semelhantes, com uma pequena vantagem para a que usa a RLC. Ambas superaram o desempenho do $\text{MODEX}_{\text{RLR}}$ em todas as condições avaliadas.

A proposta MODE_{RLC} foi avaliada frente ao $\text{MODEX}_{\text{RLR}}$, apresentando um desempenho notável e superando este último na maioria das curvas analisadas. Isso representa um resultado de destaque, pois o esforço computacional exigido pelo método MODEX é maior que o dobro daquele gasto pelo MODE, qualquer que seja o tipo de restrição de não-trivialidade utilizada.

Por outro lado, a proposta $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$ supera o MODE_{RLC} em boa parte das curvas analisadas. Observa-se que os critérios de seleção das estimativas, tanto o determinístico como o estocástico, não são eficientes quando a SNR é pequena e há poucos *snapshots*. Isso faz com que o desempenho do MODE_{RLC} seja melhor que o do $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$ em alguns trechos das curvas de desempenho. Com o aumento do número de *snapshots*, os critérios de seleção mostram-se mais eficientes e o desempenho do $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$ é sempre melhor que o do MODE_{RLC} . Adicionalmente, verificou-se que ambos os métodos têm desempenho geral melhor que o $\text{M-IQML}_{\text{RLC}}$.

Em resumo, a restrição linear central mostrou ser uma excelente alternativa que substitui com vantagem a restrição linear real e supera a restrição de norma nos métodos MODE e MODEX. O método $\text{MODEX}_{\text{RLC}}$ apresenta o melhor desempenho geral, apesar de ter o esforço computacional duas vezes maior que o do MODE. A única deficiência prevista para o uso da RLC é que tal restrição só pode ser aplicada quando o número de sinais é par.

No Capítulo 8 foi apresentada a proposta de um novo método de estimação, o MODE-ES. Este método é uma extensão do método MODE e usa também alguns dos conceitos do método MODEX.

Nesse novo método, a primeira etapa consiste na obtenção das estimativas de frequência geradas com o método MODE original, usando a restrição de norma ou a restrição linear central. Na segunda etapa, são calculados mais dois conjuntos de estimativas, usando-se as restrições RLR e RLI. Estes três conjuntos de estimativas são agrupados em grupos com K estimativas e formam os vetores de estimativas candidatas. A seguir, um dos critérios de seleção das estimativas usados no método MODEX é aplicado.

Dois aspectos do MODE-ES merecem destaque. Em primeiro lugar, ele utiliza um número fixo de estimativas candidatas, que é geralmente menor que o número obtido no método MODEX. Com isso, há um número menor de estimativas candidatas e, conseqüentemente, uma menor quantidade de combinações a serem avaliadas pelo critério de seleção. Em segundo lugar, a segunda etapa do MODE-ES calcula as duas novas estimativas usando uma matriz de ordem $(K+1)$ já obtida na primeira etapa, sem a necessidade de executar o algoritmo MODE novamente. Em contraste, no MODEX, a segunda etapa envolve uma nova execução do MODE, agora com ordem $(K+Q)$. Assim, o número de cálculos do MODE-ES é bem menor que o do MODEX.

As simulações numéricas realizadas indicam que o MODE-ES_{RLC} apresenta desempenho melhor que a versão MODE-ES_{RN}. Quando comparado com o MODEX_{RLR}, um dos métodos mais destacados na literatura da área, ambas as versões do MODE-ES apresentam melhor desempenho.

Por fim, verificou-se que o MODE-ES_{RLC} tem desempenho melhor ou igual que o MODEX_{RLC} e, portanto, é o método com o melhor desempenho dentre todos aqueles analisados neste trabalho.

9.3 – Sugestões para Prosseguimento

A principal deficiência da restrição linear central é que não pode ser aplicada quando o número de sinais é ímpar. Porém, parece promissora a proposta onde o método $\text{MODE-ES}_{\text{RLC}}$ é usado com a ordem do vetor $\mathbf{b}$ incrementada de forma a manter ordem par e com isso a RLC possa ser sempre utilizada. As demais estimativas candidatas devem ser obtidas também com este vetor aumentado. Isso gera uma maior quantidade de estimativas candidatas comparada a do $\text{MODE-ES}_{\text{RN}}$, mas é possível que haja um ganho razoável no desempenho que justifique tal opção.

Outro item que merece uma análise posterior é a possibilidade de incorporar algumas outras categorias de métodos de estimação [Colares00b] dentro da descrição unificada. Apesar dos bons resultados obtidos com os métodos derivados do MLE e as novas propostas, a ampliação de aplicação da descrição unificada para outros métodos permite que todos os métodos sejam avaliados sob um mesmo enfoque experimental. Adicionalmente, pode ser realizada a classificação geral de todos os principais métodos de cada categoria quanto ao desempenho, esforço computacional e outros índices de mérito de interesse.

Por fim, os métodos que utilizam subespaços tentam minimizar a ação do ruído atuando nos autovalores da matriz de correlação dos dados recebidos. Uma proposta já em fase de investigação consiste em se atuar também sobre os autovetores através, por exemplo, de filtragem dos dados recebidos. A perspectiva é que tal proposição melhore ainda mais o desempenho dos novos métodos com pequeno custo adicional extra.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Alves99a] **Alves, C. A.** e Lopes, A. , “Comportamento Assintótico de Métodos DOA com Alta Resolução”, *XVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações* - SBT 99, Vila Velha - ES - Brasil, pp. 173-178, Setembro de 1999.
- [Alves99b] **Alves, C. A.** e Lopes, A. , “Métodos de Estimação DOA Baseados no Critério TLS”, *XVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações* - SBT 99, Vila Velha - ES - Brasil, pp. 175-184, Setembro de 1999.
- [Alves00a] **Alves, C. A.**, Colares, R. F. e Lopes, A., “Análise de Métodos Para DOA em Função das Restrições de Otimização”, *XVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações* - SBT 2000, Gramado – RS - Brasil, CD-ROM, Setembro de 2000.
- [Alves00b] **Alves, C. A.**, Colares, R. F. e Lopes, A. , “Constraints Implementation for IQML and MODE Direction-of-Arrival Estimators”, *The 43rd. Midwest Symposium on Circuits and Systems – MWSCAS 2000*, Lansing, Michigan, EUA, Agosto de 2000.
- [Antunes92] Antunes, E. J. B., “Detecção de Frequências Através de Predição Linear”, *Dissertação de Mestrado*, UNICAMP, Campinas-SP, Maio de 1992.
- [Baillet01] Baillet, S., Mosher, J. C. e Leahy, R. M., “Electromagnetic Brain Mapping”, *IEEE Signal Processing Magazine*, pág. 14 –39, vol. 18, no. 6, Novembro de 2001.
- [Bresler86] Bresler, Y. e Macoski, A., “Exact Maximum Likelihood Parameter Estimation of Superimposed Exponential Signals in Noise”, *IEEE Transaction on Acoustic, Speech and Signal Processing*, vol. 34, no. 5, pp. 1081-1089, Outubro de 1986.
- [Colares00a] Colares, R. F., **Alves, C. A.** e Lopes, A. , “Proposta para Aplicação do Método WTLS em DOA”, *XVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações* - SBT 2000, Gramado – RS - Brasil, CD-ROM, Setembro de 2000.
- [Colares00b] Colares, Ricardo Fialho, “Descrição Unificada de Métodos de Estimação DOA em Arranjo de Sensores”, *Tese de Doutorado*, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, Setembro de 2000.
- [Colares01] Colares, Ricardo F., **Alves, Carlos A.** e Lopes, Amauri, “Descrição Unificada dos Métodos Modernos de Estimação DOA em Arranjos de Sensores”, *Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações* – vol. 16, número 2, pp.101 a 121, ISSN 0102-986X, Dezembro de 2001.

- [Degroat93] Degroat, R. D. , Dowling, E.M. e Linebarger, D.A., “The Constrained MUSIC Problem”, *IEEE Transaction on Signal Processing*, pp. 1445-1449, vol. 41, no.3, Março de 1993.
- [Gershman99] Gershman, Alex B. e Stoica, Petre, “New MODE-based techniques for direction finding with an improved threshold performance”, *Signal Processing* , vol. 76, pág. 221-235, 1999.
- [Godara97] Godara, L. C., ”Applications of Antenna Arrays to Mobile Communications”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 85, no. 7, Julho de 1997.
- [Gorokhov00] Gorokhov, A. e Stoica, P., “Generalized Quadratic Minimization and Blind Multichannel Deconvolution”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, no. 1, pp. 201-213, 2000
- [Haykin85] Haykin, S., “*Array Signal Processing*”, vol I e II, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1985.
- [Haykin89] Haykin,S., “*Modern Filters*”, Macmillan Publishing Company New York, USA, 1989
- [Haykin91] Haykin, S., “*Advances in Spectrum Analysis and Array Processing*”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1991.
- [Hua94] Hua, Y., “The Most Efficient Implementation of the IQML”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 42, no. 8, pp. 2203-2204, Agosto de 1994.
- [Kaveh86] Kaveh, M. e Barabell, A. J.: “The Statistical Performance of the MUSIC and Minimum-Nom Algorithms in Resolving Plane Waves in Noise”. *IEEE Trans. on Acoustic, Speech and Signal Processing*, vol. 34, Abril de 1986
- [Kay84] Kay, S. M., “Accurate frequency estimation at low SNR”, *IEEE Transaction on Acoustic Speech, Signal Processing*, vol. 32, pp. 540-547, Junho de 1984.
- [Kay88] Kay, V. C. e Laub, A. J., “*Modern Spectral Estimation: Theory and Application*”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.
- [Kay93] Kay, S. M., ”*Fundamentals of Statistical Signal Processing*”, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1993.
- [Kot93] Kot, A. C., Tufts, D. W. e Vaccaro, R. J., “Analysis of Linear Prediction by Matrix Approximation”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.41, no. 11 pp. 3174-3177, Novembro de 1993.
- [Krim96] Krim, H. e Viberg, M., “Two Decades of Array Signal Processing Research”, *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 67-94, Julho de 1996.

- [Kristensson99] Kristensson, M. Jansson, M. e Ottersten, B., "Modified IQML and Weighted subspace fitting without eigendecomposition", *Signal Processing*, vol. 79, pp. 29-44, 1999.
- [Kumaresan82] Kumaresan, R. e Tufts, D., "Estimating the Parameters of Exponentially Damped Sinusoids and Poles-Zero Modeling in Noise", *IEEE Transaction on Acoustic, Speech and Signal Processing*, pág. 833-840, vol. ASSP 30, no. 6, Dezembro de 1982.
- [Kumaresan83] Kumaresan, R. e Tufts, D., "Estimating the Angles of Arrival of Multiple Plane Waves", *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, pág. 134-139, vol. AES-19, no.1, Janeiro de 1983.
- [Kumaresan86] Kumaresan, R., Scharf L. L. e Saw, A. K., "An Algorithm for Pole-Zero Modeling and Spectral Analysis", *IEEE Transaction on Acoustic, Speech and Signal Processing*, pág. 637-640, vol. 34, no. 3, Junho de 1986.
- [Lemos95] Lemos, R. P., "*Métodos de Alta Resolução com Restrição de Subespaço para Detecção de Frequências*", Dissertação de Mestrado, FEEC, UNICAMP, Março de 1995.
- [Lemos97] Lemos, R. P., "*Mínimos Quadrados Totais e Máxima Verossimilhança em Estimação de Frequências*", Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da UNICAMP, Junho de 1997.
- [Li98] Li, J., Stoica, P. e Liu, Z., "Comparative Study of IQML and MODE Direction-of-Arrival Estimators", *IEEE Transactions on Signal Processing*, pág. 149-160, vol. 46, no. 1, Janeiro de 1998.
- [Lopes01] Lopes, A., Bonatti, Ivanil S., Peres, Pedro L. D., Colares, Ricardo F. e **Alves, Carlos A.**, "A DOA Estimator Based on Linear Prediction and Total Least Squares", Anais do SBT 2001, Fortaleza – Ceará - Brasil, CD-ROM, 2001.
- [Lopes02] Lopes, A., Bonatti, Ivanil Sebastião, Peres, Pedro Luis Dias, Colares, Ricardo Fialho, **Alves, Carlos Antonio**, "A DOA Estimator Based on Linear Prediction and Total Least Squares". *Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações*. Brasil, v.17, no.1, p.71 - 78, 2002.
- [Lopes03] Lopes, A., Bonatti, Ivanil Sebastião, Peres, Pedro Luis Dias, **Alves, Carlos Antonio**, "Improving the MODEX Algorithm for Direction Finding". *Signal Processing*, vol. 83, no.9, pp. 2047-2051, 2003.
- [Nagesha94] Nagesha, V. e Kay, S., "On Frequency Estimation with IQML Algorithm", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 9, pp. 2509-2513,

- Setembro de 1994.
- [Ottersten89] Ottersten, Björn E., “Parametric Subspace Fitting Methods for Array Signal Processing”, *Tese de Doutorado*, Stanford University, EUA, 1989.
- [Pillai89] Pillai, S. Unnikrishna, “*Array Signal Processing*”, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [Rao89] Rao, B.D. e Hari, K. V. S. “Statistical Performance Analysis of the Minimum-Norm Method”, *IEE Proceedings*, pág. 125-134, vol. 136, Pt. F, no. 3, Junho de 1989.
- [Rife74] Rife, D. C. e Boorstyn, R. R., “Single-Tone Parameter Estimation From Discrete-Time Observations”, *IEEE Transactions on Information Theory*, pág. 591-598, vol. 20, no. 5, Setembro de 1974.
- [Rife76] Rife, D. C. e Boorstyn, R. R., “Multiple Tone Parameter Estimation From Discrete-Time Observations”, *The Bell System Journal*, pp. 1389-1410, Novembro de 1976.
- [Schmidt86] Schmidt, R. O., “Multiple Emitter Location and Signal Parameters Estimation”, *IEEE Trans. on Ant. and Prop.*, vol. 34, 1986.
- [Sorelius99] Sorelius Joakim, “Subspace-Based Parameter Estimation Problems in Signal Processing”, *Tese de Doutorado*, Uppsala University, Suécia, 1999.
- [Stoica89] Stoica, P. e Nehorai A., “MUSIC, Maximum Likelihood and Cramér-Rao Bound”, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 37, no. 5, pp. 720-741, Maio de 1989.
- [Stoica90a] Stoica, P. e Sharman, K. C., “Novel Eigenanalysis Method for Direction Estimation”, *IEE Proceedings*, vol. 137, Pt. F, no. 1, pp. 19-26, Fevereiro de 1990.
- [Stoica90b] Stoica, P. e Sharman, K. C., “Maximum Likelihood Methods for Direction-of-Arrival Estimation”, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pág. 1132-1143, vol. 38, no. 7, Julho de 1990.
- [Stoica90c] Stoica, P. e Nehorai, A., “Performance Study of Conditional and Unconditional Direction-of-Arrival Estimation”, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 38, no. 10, pp. 1783-1795, Outubro de 1990.
- [Stoica90d] Stoica, P. e Nehorai, A., “MUSIC, Maximum Likelihood and Cramér-Rao Bound: Further Results and Comparisons”, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 38, no. 12, pp. 2140-2150, Dezembro

- de 1990.
- [Stoica96] Stoica, P. e Viberg, M., “Maximum Likelihood Parameter and Rank Estimation in Reduced-Rank Multivariate Linear Regressions”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 44, no. 12, pp. 3069-3078, Dezembro de 1996.
 - [Stoica97] Stoica, P., Li, J. e Söderström, T: “On the Inconsistency of IQML”, *Signal Processing, Elsevier Science B. V.*, no. 56, 1997
 - [Tufts82] Tufts, D. W. e Kumaresan, R., “Estimation of Frequencies of Multiple Sinusoids: Making Linear Prediction Perform Like Maximum Likelihood”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 70, no. 9, pp. 975-89, Setembro de 1982.
 - [Tufts86] Tufts, D. W. e Melissinos, C. D., “Simple, Effective Computation of Principal Eigenvectors and Their Eigenvalues and Application to High-Resolution Estimation of Frequencies”, *IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing*, vol. 34, no.5, pp. 1046-1053, Outubro de 1986.
 - [Viberg91] Viberg, M., Ottersten, B. e Kailath, T. “Detection and Estimation in Sensor Array Using Weighted Subspace Fitting”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 39, Novembro de 1991
 - [Zhou99] Zhou, Y., Yip, P. C. e Leung, H., “Tracking the Direction-of-Arrival of Multiple Moving Targets by Passive Arrays: Asymptotic Performance Analysis”, *Transactions on Signal Processing*, vol. 47, no. 10, pp. 2644-2666, Outubro de 1999.