

# Aplicação do Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo a Meios Giroelétricos Dispersivos : Plasma Magnetizado

Marcelo Eduardo Vieira Segatto

*Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica como pré-requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.*

Este exemplar contém a versão final da tese defendida por Marcelo Eduardo Vieira Segatto perante a Comissão Julgadora em 01/09/94.

  
Orientador

**Orientador :**  
**Prof. Dr. Atílio José Giarola**

Depto. de Microondas e Óptica  
Faculdade de Engenharia Elétrica  
Universidade Estadual de Campinas

Campinas, 01 de setembro de 1994.

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

*À meus pais, Geraldo e Risely,  
razão de minha existência.*

# Resumo

A formulação das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD), para a análise das características de propagação de estruturas bidimensionais e tridimensionais contendo materiais giroelétricos e dispersivos, é apresentada.

Nesta formulação, o método FDTD é usado na solução numérica das equações rotacionais de Maxwell no domínio do tempo. Como resultado, o sistema de equações diferenciais parciais formado pelas componentes dos campos elétrico e magnético é substituído por um sistema de equações de diferenças finitas que será resolvido iterativamente. A formulação foi desenvolvida para incluir materiais giroelétricos dispersivos (neste caso, um plasma magnetizado), com perfil de índice de refração variando arbitrariamente e limitados por paredes metálicas condutoras perfeitas.

A variação percentual da frequência de ressonância de uma cavidade, completamente preenchida com plasma, é calculada em função das frequências do plasma e as características de dispersão, para estruturas envolvendo o guia retangular preenchido com plasma também são calculadas em função das frequências do plasma. O desenvolvimento teórico foi usado para resolver problemas particulares e os resultados têm mostrado boa concordância com aqueles obtidos utilizando-se outros métodos.

Resultados foram obtidos para algumas estruturas de guiamento de ondas, de grande interesse, particularmente no desenvolvimento de dispositivos utilizados em circuitos integrados de microondas.

# Abstract

A formulation of the finite difference method in the time domain, for analysis of the propagation characteristics of bidimensional and tridimensional structures, is presented.

In this formulation, the finite difference in the time domain method is used for a numerical solution of Maxwell's equations in time domain. As result, the system of partial difference equations of the electric and magnetic field components is replaced by a system of finite difference equations that will be solved following an iterative procedure. The formulation was developed to include dispersive gyroelectric materials (in this case, magnetized plasma), with a refractive index profile varying arbitrarily, and limited by perfectly conducting metal walls.

The percent variation of the resonant frequency of a cavity, completely filled with plasma, is calculated as a function of plasma frequency. Dispersion characteristics are also calculated for a rectangular waveguide filled with plasma, as functions of the plasma frequency. The theoretical development was used to solve particular problems and the results show a good agreement with those obtained using other methods. Results were also obtained for some waveguide structures, of particular interest in the development of microwave integrated circuits.

# Agradecimentos

- Ao Prof. Atílio José Giarola, pelas lições no dia-a-dia e pela orientação.
- Ao Luis Calazans Calmon, pelo incentivo desde a graduação.
- Ao Leonardo de Souza Mendes.
- Aos funcionários do SIFEE/UNICAMP.
- A Márcia (DMO).
- À Universidade Federal do Espírito Santo, pela liberação e apoio financeiro.
- Ao Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Espírito Santo, pela confiança.
- A meus pais, pelo amor e carinho.
- A meus irmãos Cristina, Fátima, Zilo, Simone, Geraldo e Ana.
- Aos sobrinhos ...
- A tio Robinson, pelo apoio e incentivo.
- A Carla, por tornar meus dias mais agradáveis em Campinas.
- Aos amigos de toda hora, Ana, Fred, Geraldo, Jugurta, Moisés e Nestor, pelo companheirismo.
- A João e a Tete, pela amizade e carinho.
- A Rubem G. Farias, pelas dicas e discussões.
- Ao Edson P. Cardoso, Luis C. Coradine, Antônio M. Frasson e a Jussara F. Fardin, pelo incentivo.
- Aos amigos do DMO, Carlos, Helder e Luciano e a Zezé.
- Aos Alexandres, Amorim e Surerus pelas brincadeiras.
- Aos amigos da FEE, pelas conversas nos corredores.
- Ao Edson Acco, Jocarly e ao Joaquim.
- Ao Ildefonso e ao Paulo Henrique, pelos *plantões* noturnos.
- Aos criadores do compilador FORTRAN (f77), pela *economia* de tempo.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução . . . . .	1
1.2	Características Gerais do Método FDTD . . . . .	1
1.3	As Estruturas Utilizadas Neste Trabalho . . . . .	2
1.4	Objetivos e Organização do Trabalho . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Meios Dielétricos Anisotrópicos : Plasma Magnetizado</b>	<b>6</b>
2.1	Introdução . . . . .	6
2.2	O Plasma . . . . .	7
2.2.1	Permissividade do Plasma Magnetizado . . . . .	8
2.3	Análise da Influência dos Parâmetros do Plasma . . . . .	12
<b>3</b>	<b>O Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo</b>	<b>15</b>
3.1	Introdução . . . . .	15
3.2	O Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo para Meios Isotrópicos não Dispersivos . . . . .	17
3.2.1	Condições de Contorno . . . . .	23
3.2.2	Valores Iniciais . . . . .	24
3.2.3	Estabilidade . . . . .	24
3.3	O Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo em 2 Dimensões	24
3.4	O Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo Aplicado a Meios Giroelétricos Dispersivos : Plasma Magnetizado . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>30</b>
4.1	Introdução . . . . .	30
4.1.1	Teste de Convergência . . . . .	30
4.2	A Cavidade . . . . .	31
4.2.1	Estudo da Convergência . . . . .	31
4.2.2	Efeito do Plasma na Ressonância da Cavidade . . . . .	34
4.3	O Guia Retangular . . . . .	36
4.3.1	Estudo da Convergência . . . . .	36
4.3.2	Aplicação do Método ao Guia WR90 . . . . .	36

4.3.3	Estudo das Características de Dispersão . . . . .	43
4.4	O Guia Parcialmente Preenchido com Plasma . . . . .	46
4.4.1	Estudo da Convergência . . . . .	46
4.4.2	Características de Dispersão . . . . .	46
4.5	O Guia Embebido . . . . .	51
4.5.1	Estudo da Convergência . . . . .	51
4.5.2	Características de Dispersão . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>57</b>
<b>A</b>	<b>Obtenção das Equações (3.65), (3.66) e (3.67)</b>	<b>60</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>66</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Introdução

A solução analítica das equações de Maxwell no domínio do tempo, em geral, é extremamente difícil ou impossível. Esta dificuldade é devida principalmente à imposição das condições de contorno e da não uniformidade do meio. Vamos mostrar neste trabalho como obter a solução numérica destas equações, através do método das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD).

O método FDTD é análogo à solução por diferenças finitas da equação de onda escalar e de problemas de fluxo de fluidos, em que o modelo numérico é baseado na solução direta da equação diferencial parcial.

FDTD é um método simples conceitualmente e de fácil implementação, contudo é notavelmente robusto, fornecendo alta precisão no modelamento de uma variedade de problemas de interação de ondas eletromagnéticas. Este método, foi introduzido por Yee [1] e estendido por Taflov & Brodwin [2] e Kunz [3] entre outros, que se limitavam a aplicações onde os parâmetros materiais ( $\epsilon, \mu, \sigma$ ) eram constantes em relação à frequência.

Entre as diversas aplicações do método, podemos destacar as aplicações a problemas de espalhamento de ondas eletromagnéticas por objetos complexos e por corpos biológicos [4] - [11], aplicações a meios dispersivos [12] - [14] e aplicações a problemas de autovalores, i.e., guiamento de ondas eletromagnéticas em 2 e 3 dimensões [15] - [20].

### 1.2 Características Gerais do Método FDTD

Como dito anteriormente, o método FDTD é a solução direta das equações rotacionais de Maxwell no domínio do tempo. Ele aproxima as derivadas espaciais e temporais das componentes dos campos elétrico e magnético por diferenças centradas,

com erro de segunda ordem [1]. Isto permite obter uma redução dos dados amostrados dos campos eletromagnéticos contínuos num volume do espaço em um período de tempo.

As discretizações espacial e temporal são escolhidas de modo a limitar os erros no processo de amostragem e garantir a estabilidade numérica do algoritmo [2].

As componentes dos campos elétrico e magnético são intercaladas no espaço de modo a satisfazer a condição de continuidade dos campos tangenciais nas interfaces entre dois meios e intercaladas no tempo para simular a propagação de ondas eletromagnéticas. Desta forma, o sistema de equações formado pelas equações rotacionais de Maxwell pode ser resolvido iterativamente, a partir de uma distribuição inicial das componentes dos campos.

Um problema inerente ao método, é a criação de fronteiras artificiais (limite computacional) geradas pela limitação computacional. Por isto, o cálculo dos campos é feito em um volume limitado. As condições de contorno aplicadas ao limite computacional variam de acordo com o tipo de problema que queremos resolver, dentre elas podemos destacar :

1. Yee [1] - Utilizou paredes condutoras perfeitas;
2. Taylor *et al.* [21] - Utilizaram um processo simples de extrapolação;
3. Taflove & Brodwin [2] - Simularam as ondas de saída e usaram um processo para avaliar a média, numa tentativa de incluírem todos os ângulos possíveis das ondas de saída;
4. Kunz e Lee [3] - Usaram a condição de radiação a distâncias grandes com relação ao centro do objeto de espalhamento para obter uma condição de contorno absorvente;
5. Mur [22] - Utilizou uma condição de radiação de segunda ordem para melhorar a precisão dos resultados.

### 1.3 As Estruturas Utilizadas Neste Trabalho

Nesta seção são mostradas as estruturas utilizadas neste trabalho.

O método é aplicado a quatro diferentes estruturas contendo dielétricos isotrópicos e não dispersivos e/ou plasma magnetizado segundo a direção  $z$ .

A Fig. 1.1 mostra uma cavidade retangular de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  segundo as direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, totalmente preenchida e com paredes condutoras perfeitas. Esta estrutura é utilizada para testar a formulação em 3 dimensões. Os resultados obtidos para a cavidade com plasma são comparados com os obtidos através do método dos momentos [23].

A Fig. 1.2 mostra um guia retangular de lados  $a$  e  $b$  segundo as direções  $x$  e  $y$  e infinito na direção  $z$ , totalmente preenchido e com paredes condutoras perfeitas. Na Fig. 1.3 temos o guia retangular parcialmente preenchido.

Na Fig. 1.4 temos o guia embebido com paredes condutoras perfeitas.

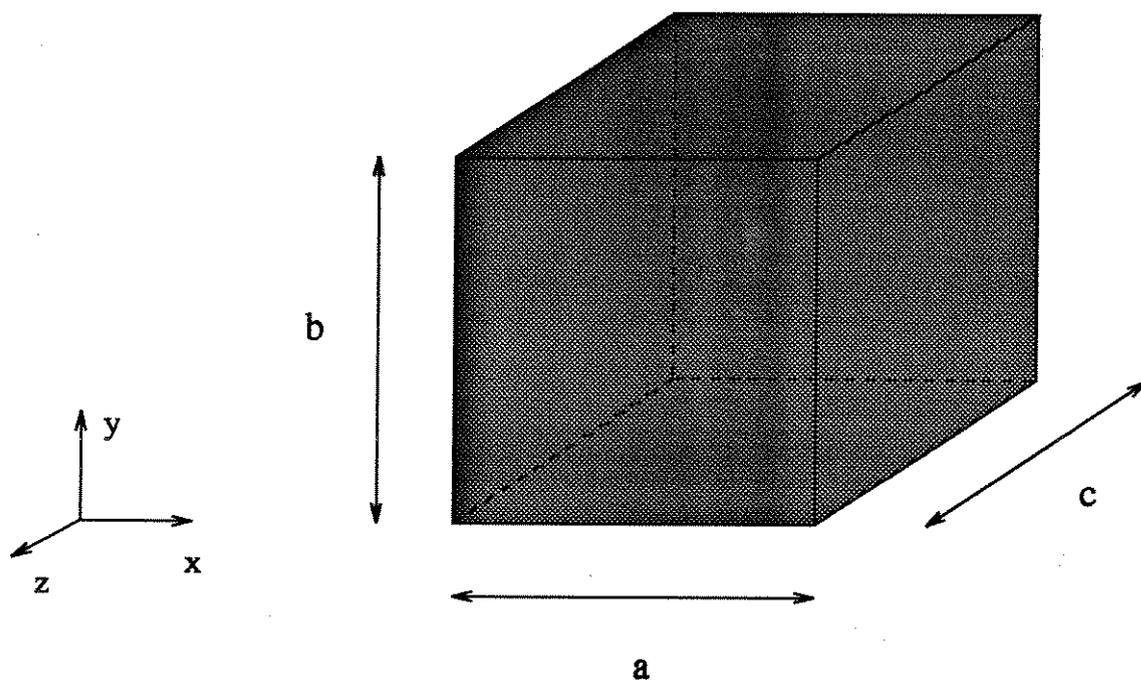


Figura 1.1: Cavidade retangular totalmente preenchida e paredes condutoras perfeitas.

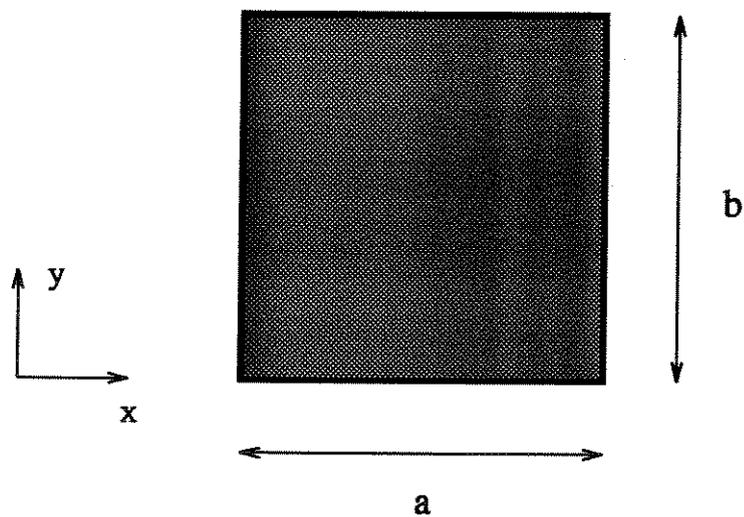


Figura 1.2: Guia retangular totalmente preenchida e paredes condutoras perfeitas.

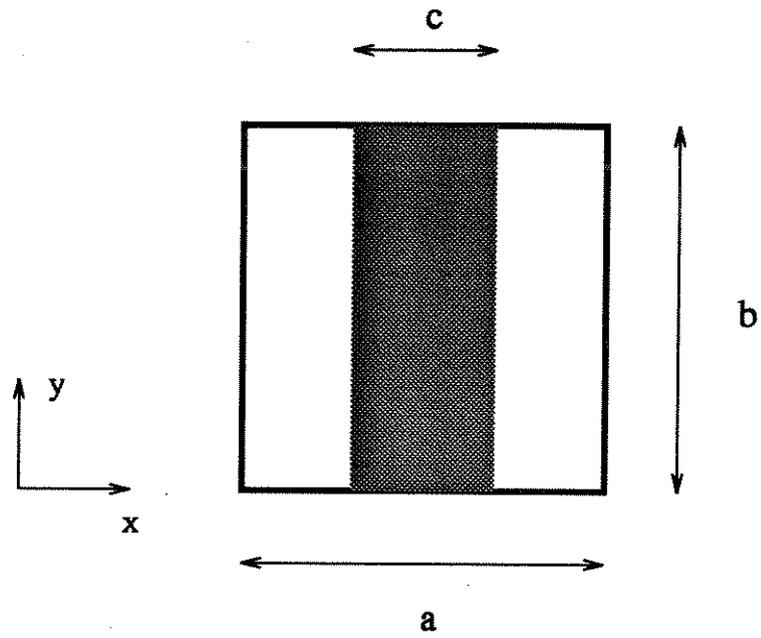


Figura 1.3: Guia retangular parcialmente preenchido e paredes condutoras perfeitas.

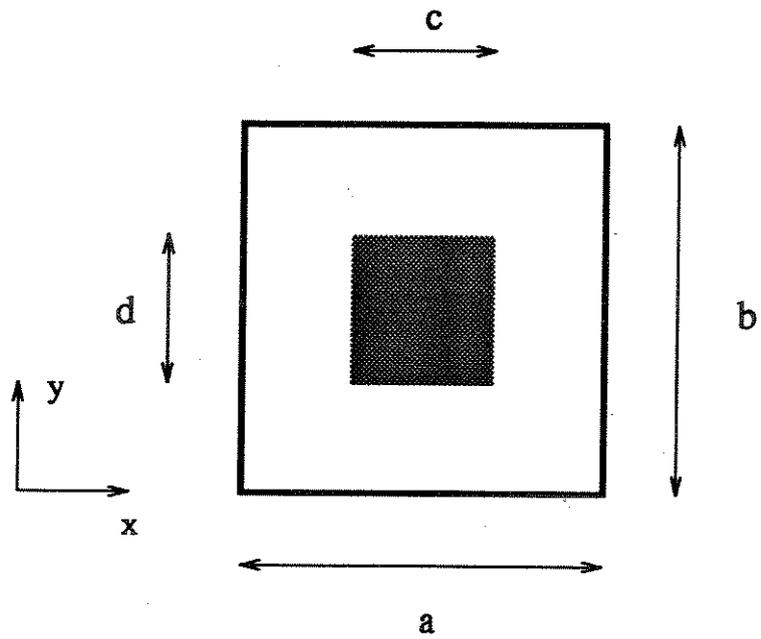


Figura 1.4: Guia retangular embebido e paredes condutoras perfeitas.

## 1.4 Objetivos e Organização do Trabalho

O objetivo principal deste trabalho é estender a formulação do método FDTD a meios giroelétricos e dispersivos e aplicá-la a problemas de guiamento de ondas. Para verificar a formulação, o método é aplicado às estruturas mostradas na seção anterior (Figs. 1.1 a 1.4), onde são analisadas a influência das frequências do plasma nas características de dispersão.

Outro objetivo deste trabalho é mostrar que este método pode ser utilizado como uma ferramenta didática no estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em meios confinados ou não. Para isto, foi desenvolvido um programa computacional utilizando o software MATLAB [24] onde é possível visualizar a distribuição espacial, variação temporal e em frequência de qualquer componente de campo em um guia retangular com paredes condutoras perfeitas.

Distribui-se o trabalho da seguinte forma entre os vários capítulos :

- Capítulo 1 - Apresentam-se as características gerais do método e são definidas as estruturas utilizadas nas simulações;
- Capítulo 2 - É mostrado um breve estudo sobre o plasma magnetizado e seu tensor permissividade;
- Capítulo 3 - Mostra-se a formulação desenvolvida por Yee para o método FDTD em meios isotrópicos e não dispersivos para os casos bi e tridimensional, levando-se em consideração as condições de contorno, valores iniciais e critério de estabilidade. A seguir, mostra-se a extensão do método para meios giroelétricos e dispersivos, considerando um plasma magnetizado segundo a direção  $z$ ;
- Capítulo 4 - São apresentados os resultados numéricos para a variação da frequência de ressonância da cavidade retangular em função das frequências do plasma e para as características de dispersão dos guias, também em função das frequências do plasma. São feitos testes de convergência para cada estrutura analisada;
- Capítulo 5 - Apresentam-se as conclusões sobre o trabalho desenvolvido e as perspectivas para trabalhos futuros, dentro desta linha de pesquisa;
- Apêndice A - Derivam-se as expressões para o cálculo recursivo das convoluções associadas ao tensor permissividade do plasma.

## Capítulo 2

# Meios Dielétricos Anisotrópicos : Plasma Magnetizado

Neste capítulo, faremos um breve estudo sobre o plasma magnetizado e seu tensor permissividade.

A seção 2.1 introduz os conceitos de meios anisotrópicos e meios giroelétricos. A seção 2.2 mostra o tensor permissividade do plasma polarizado com uma densidade de fluxo magnético  $\vec{B}_0$  constante no tempo e com direção arbitrária, e a seção 2.3 mostra a influência das frequências do plasma no seu comportamento.

### 2.1 Introdução

Um meio é anisotrópico se suas propriedades eletromagnéticas dependem da orientação dos campos a que é submetido. Uma onda eletromagnética propagando neste meio tem características que dependem de sua direção.

Em meios dielétricos anisotrópicos, o vetor deslocamento  $\vec{D}$ , em geral, não tem a mesma direção que o campo elétrico  $\vec{E}$  e sua permissividade deve ser representada por um tensor, um conjunto de nove quantidades escalares que podem ser dependentes da frequência, coordenadas espaciais e/ou da intensidade dos campos.

A relação entre  $\vec{D}$  e  $\vec{E}$  para um meio anisotrópico é dada por [25, 26, 27]

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z \end{aligned} \tag{2.1}$$

ou, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

ou ainda, de forma mais compacta

$$\vec{D} = \bar{\epsilon} \cdot \vec{E} \quad (2.3)$$

onde

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

De acordo com a variação de  $\epsilon_{ij}$  ( $i, j = x, y$  e  $z$ ), podemos classificar o meio como:

- Dispersivo :  $\epsilon_{ij}$  função da frequência;
- Não Homogêneo :  $\epsilon_{ij}$  função das coordenadas espaciais;
- Não Linear :  $\epsilon_{ij}$  função da intensidade dos campos.

Os meios dielétricos anisotrópicos podem ainda ser classificados de acordo com a forma do tensor  $\bar{\epsilon}$ .

Quando  $\bar{\epsilon}$  é diagonal, i.e.,

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

e  $\epsilon_{xx} \neq \epsilon_{yy} \neq \epsilon_{zz}$  o meio é biaxial.

Se os elementos de  $\bar{\epsilon}$  são anti-simétricos, i.e.,  $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$  ( $i \neq j$ ) o meio é dito giroelétrico. Um exemplo importante de meio giroelétrico é o plasma magnetizado segundo um eixo, que veremos com mais detalhes a seguir.

## 2.2 O Plasma

O termo *plasma* é utilizado em física para determinar um estado de ionização de um meio. Um meio ionizado em que a densidade de partículas positivas e negativas é a mesma, ou seja, carga total igual a zero, é denominado plasma [28].

Os principais elementos em um plasma são os elétrons, as partículas neutras e os íons, que podem ser simples ou multiplamente ionizados. Se existem  $n$  átomos por unidade de volume em um plasma e o grau de ionização é tal que existem  $n^-$  elétrons e  $n^+$  íons, então a condição de neutralidade requer que  $n^- = n^+$  [28].

Num plasma, os elétrons e os íons tem distribuição aleatória, de maneira que seu comportamento é isotrópico. Ao aplicarmos um campo magnético constante,

haverá movimento de cargas livres no plano transversal ao campo, fazendo com que apareçam os termos fora da diagonal do tensor permissividade  $\bar{\epsilon}$  gerando a anisotropia do plasma.

A presença de uma onda eletromagnética em um plasma força os elétrons e íons a vibrarem em torno de sua posição, gerando dois tipos de oscilações: Oscilações em baixas frequências, devido ao movimento dos íons, relativamente pesados, e portanto, com pequenos deslocamentos; e oscilações em altas frequências, devido ao movimento dos elétrons, mais leves, e com deslocamentos maiores.

### 2.2.1 Permissividade do Plasma Magnetizado

Nesta seção, vamos deduzir as expressões das componentes do tensor permissividade do plasma magnetizado a partir da equação de forças para uma partícula carregada imersa em um meio isotrópico com permissividade  $\epsilon$ , permeabilidade  $\mu$  e sujeita a um campo eletromagnético.

Seja uma partícula de carga  $Q$ , massa  $m$  e velocidade  $\vec{v}$  sujeita a um campo eletromagnético. A equação de forças para esta partícula é dada por [28]

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - m\nu_c\vec{v} = m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \quad (2.6)$$

onde  $\vec{E}$  é o campo elétrico [ $V/m$ ],  $\vec{B}$  é a densidade de fluxo magnético [ $Wb/m^2 = T$ ] e  $\nu_c$  é a frequência de colisão das partículas [ $rad/s$ ].

Supondo que os campos tenham variação harmônica no tempo, então

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 e^{j\omega t}, \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 + \vec{B}_1 e^{j\omega t}, \\ \vec{v} &= \vec{v}_1 e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$  é a frequência [ $rad/s$ ] e  $\vec{B}_0$  é a densidade de fluxo magnético de polarização com orientação arbitrária, conforme a Fig. 2.1.

Assumindo que  $|\vec{B}_1| \ll |\vec{B}_0| = B_0$ , podemos desprezar a influência de  $\vec{B}_1$  na equação (2.6) e

$$\vec{B} \simeq B_0[\cos(\alpha)\hat{a}_x + \cos(\beta)\hat{a}_y + \cos(\gamma)\hat{a}_z] \quad (2.8)$$

então

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{B} &= B_0[(v_y \cos(\gamma) - v_z \cos(\beta))\hat{a}_x + (v_z \cos(\alpha) - \\ &\quad v_x \cos(\gamma))\hat{a}_y + (v_x \cos(\beta) - v_y \cos(\alpha))\hat{a}_z] \end{aligned} \quad (2.9)$$

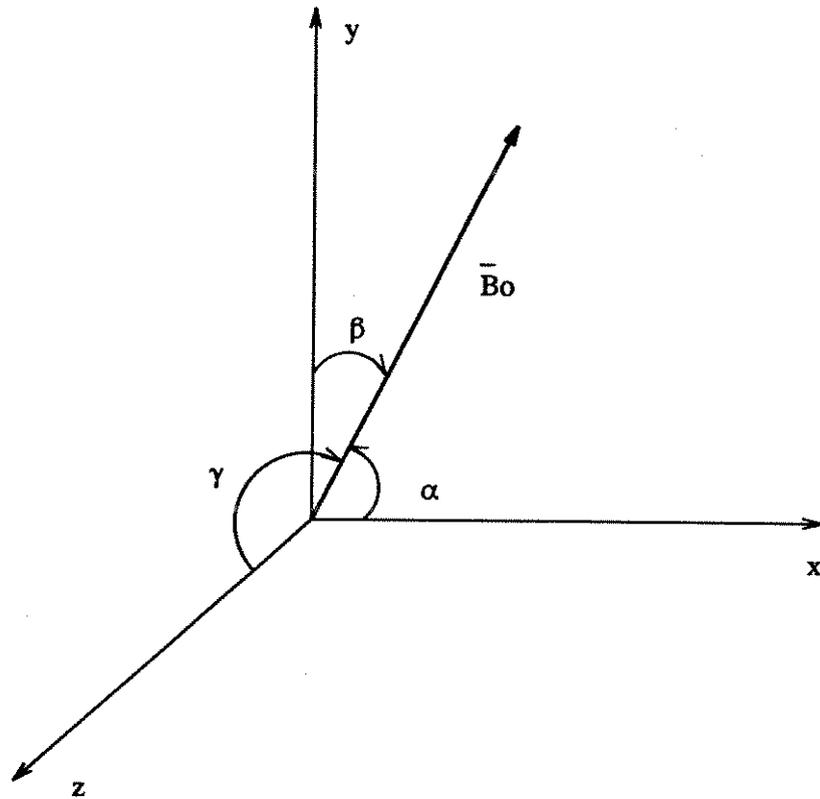


Figura 2.1: Relação entre o vetor  $\vec{B}_0$  e um sistema de coordenadas cartesianas.  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são os ângulos diretores de  $\vec{B}_0$ .

Substituindo (2.9) em (2.6), temos

$$\begin{aligned} \frac{Q}{m}E_x + \frac{QB_0}{m}(v_y \cos(\gamma) - v_z \cos(\beta)) - v_c v_x &= j\omega v_x \\ \frac{Q}{m}E_y + \frac{QB_0}{m}(v_z \cos(\alpha) - v_x \cos(\gamma)) - v_c v_y &= j\omega v_y \\ \frac{Q}{m}E_z + \frac{QB_0}{m}(v_x \cos(\beta) - v_y \cos(\alpha)) - v_c v_z &= j\omega v_z. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Escrevendo a equação anterior na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} W & -\omega_\gamma & \omega_\beta \\ \omega_\gamma & W & -\omega_\alpha \\ -\omega_\beta & \omega_\alpha & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \frac{Q}{m} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

ou, de uma forma mais compacta

$$\overline{\overline{F}} \cdot \vec{v} = \frac{Q}{m} \vec{E} \quad (2.12)$$

onde

$$\omega_g = \frac{QB_0}{m} \quad (2.13)$$

é a girofrequência,

$$\omega_i = \omega_g \cos(i), \quad i = \alpha, \beta \text{ e } \gamma, \quad (2.14)$$

$$W = j\omega + \nu_c \quad (2.15)$$

e

$$\overline{\overline{F}} = \begin{bmatrix} W & -\omega_\gamma & \omega_\beta \\ \omega_\gamma & W & -\omega_\alpha \\ -\omega_\beta & \omega_\alpha & W \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Multiplicando (2.12) por  $\overline{\overline{F}}^{-1}$

$$\vec{v} = \frac{Q}{m} \overline{\overline{F}}^{-1} \cdot \vec{E} \quad (2.17)$$

onde

$$\overline{\overline{F}}^{-1} = \frac{1}{\Delta F} \begin{bmatrix} W^2 + \omega_\alpha^2 & -W\omega_\gamma + \omega_\alpha\omega_\beta & W\omega_\beta + \omega_\alpha\omega_\gamma \\ W\omega_\gamma + \omega_\alpha\omega_\beta & W^2 + \omega_\beta^2 & -W\omega_\alpha + \omega_\beta\omega_\gamma \\ -W\omega_\beta + \omega_\alpha\omega_\gamma & W\omega_\alpha + \omega_\beta\omega_\gamma & W^2 + \omega_\gamma^2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

e

$$\Delta F = W[W^2 + (\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2 + \omega_\gamma^2)] \quad (2.19)$$

Da equação rotacional de Maxwell para  $\vec{H}$ , temos

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} = NQ\vec{v} + j\omega\epsilon \vec{E} \quad (2.20)$$

onde  $N$  é a densidade volumétrica de carga.

Substituído (2.17) em (2.20)

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon \left[ \frac{\omega_p^2}{j\omega} \overline{\overline{F}}^{-1} + \overline{\overline{I}} \right] \cdot \vec{E} \quad (2.21)$$

onde  $\bar{I}$  é o tensor unitário e

$$\omega_p = \frac{Q}{\sqrt{m\varepsilon}} \sqrt{N} \quad (2.22)$$

é a frequência do plasma para a partícula.

Finalmente, podemos definir o tensor permissividade do plasma

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \left[ \frac{\omega_p^2}{j\omega} \bar{F}^{-1} + \bar{I} \right] \quad (2.23)$$

Geralmente, podemos escolher um sistema de coordenadas de maneira que  $\vec{B}_0$  seja paralelo a um dos eixos. Neste caso, o tensor permissividade pode ser simplificado como segue:

Caso a) Polarização segundo o eixo  $z$ .

Neste caso,  $\vec{B}_0 = B_0 \hat{a}_z$ ,  $\omega_\gamma = \omega_g$  e  $\omega_\alpha = \omega_\beta = 0$ , temos então

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \begin{bmatrix} 1 + \chi & -g & 0 \\ g & 1 + \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \chi_i \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

onde

$$\chi = \frac{\omega_p^2(j\omega + \nu_c)}{j\omega[(j\omega + \nu_c)^2 + \omega_g^2]}, \quad (2.25)$$

$$g = \frac{\omega_p^2 \omega_g}{j\omega[(j\omega + \nu_c)^2 + \omega_g^2]}, \quad (2.26)$$

e

$$\chi_i = \frac{\omega_p^2}{j\omega(j\omega + \nu_c)}. \quad (2.27)$$

Caso b) Polarização segundo o eixo  $y$ .

Neste caso,  $\vec{B}_0 = B_0 \hat{a}_y$ ,  $\omega_\beta = \omega_g$  e  $\omega_\alpha = \omega_\gamma = 0$ , temos então

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \begin{bmatrix} 1 + \chi & 0 & g \\ 0 & 1 + \chi_i & 0 \\ -g & 0 & 1 + \chi \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Caso c) Polarização segundo o eixo  $x$ .

Neste caso,  $\vec{B}_0 = B_0 \hat{a}_x$ ,  $\omega_\alpha = \omega_g$  e  $\omega_\beta = \omega_\gamma = 0$ , temos então

$$\vec{\epsilon} = \epsilon \cdot \begin{bmatrix} 1 + \chi_i & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \chi & -g \\ 0 & g & 1 + \chi \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

## 2.3 Análise da Influência dos Parâmetros do Plasma

Nesta seção, iremos fazer um breve estudo da influência dos parâmetros do plasma ( $\omega_p$ ,  $\omega_g$  e  $\nu_c$ ) em seu tensor permissividade.

Para isto, vamos considerar que a direção do vetor  $\vec{B}_0$  coincida com o eixo  $z$  e que os elementos de  $\vec{\epsilon}$  são normalizados em relação à frequência.

Desta forma, das equações (2.25), (2.26) e (2.27) temos:

$$\chi = \frac{W_p^2(j + V_c)}{j[(j + V_c)^2 + W_g^2]}, \quad (2.30)$$

$$g = \frac{W_p^2 W_g}{j[(j + V_c)^2 + W_g^2]}, \quad (2.31)$$

$$\chi_i = \frac{-jW_p^2}{j + V_c} \quad (2.32)$$

onde  $W_p = \omega_p/\omega$ ,  $W_g = \omega_g/\omega$  e  $V_c = \nu_c/\omega$ .

Inicialmente, vamos analisar o comportamento do plasma em 3 casos, quando  $V_c = 0$ , quando  $W_g = 0$  e quando  $W_p = 0$ .

- $V_c = 0$  : Ocorre em baixas temperaturas.

Das equações (2.30), (2.31) e (2.32), temos:

$$\chi = \frac{W_p^2}{W_g^2 - 1}, \quad (2.33)$$

$$g = \frac{-jW_p^2 W_g}{W_g^2 - 1} \quad (2.34)$$

e

$$\chi_i = -W_p^2. \quad (2.35)$$

É interessante notar que,  $\chi$  e  $g$  têm um pólo em  $\omega = \omega_g$  e que o plasma é anisotrópico e dispersivo.

- $W_g = 0$  : Ocorre quando  $\vec{B}_0 = 0$ .

Neste caso,

$$\chi = \chi_i = \frac{-jW_p^2}{j + V_c} \quad (2.36)$$

e

$$g = 0. \quad (2.37)$$

Para esta condição, o plasma continua sendo dispersivo, porém com comportamento isotrópico.

- $W_p = 0$  : Ocorre quando a densidade volumétrica de cargas é nula ( $N = 0$ ).

$$\chi = \chi_i = g = 0. \quad (2.38)$$

Neste caso, não existe plasma, i.e., o meio é isotrópico, como suposto inicialmente.

Outra análise importante a ser feita, é a influência do termo fora da diagonal no tensor permissividade, pois este termo é responsável pela não reciprocidade do plasma [32].

Esta influência pode ser analisada através da razão entre o termo fora da diagonal ( $g$ ) e o termo da diagonal ( $1 + \chi$ ), i.e.,

$$D = \frac{g}{1 + \chi} = \frac{W_p^2}{j[(j + V_c)^2 + W_g^2] + W_p^2(j + V_c)} \quad (2.39)$$

A Fig. 2.2 mostra a variação do módulo de  $D$  com  $W_p$  e  $W_g$  quando  $V_c = 0, 1$ .

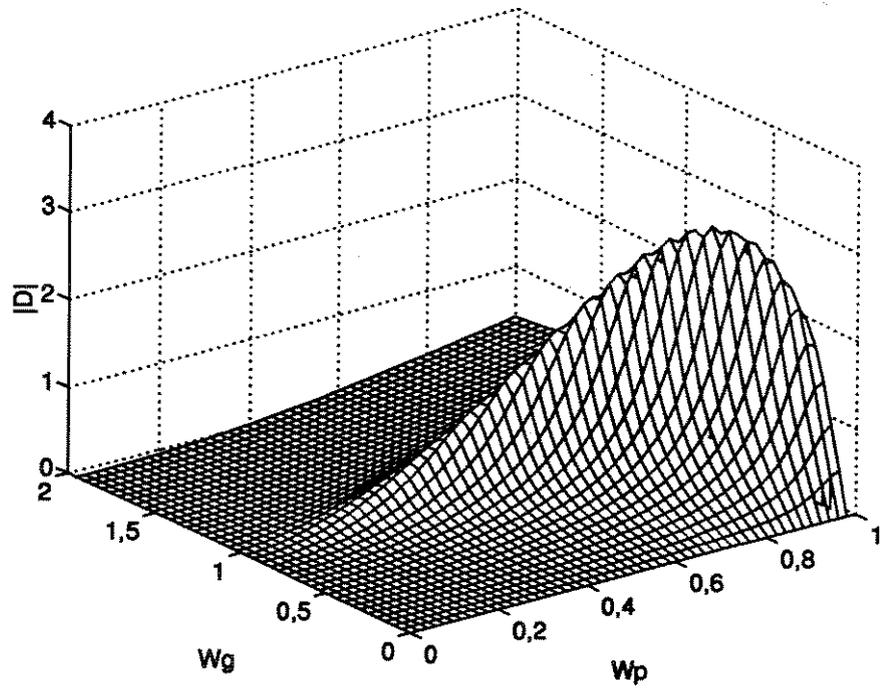


Figura 2.2: Variação do módulo de  $D$  com  $W_p$  e  $W_g$  quando  $V_c = 0,1$ .

## Capítulo 3

# O Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo

O método das diferenças finitas no domínio do tempo permite a análise das interações entre ondas eletromagnéticas e diversos tipos de materiais (meios) nas mais diversas geometrias. Este método foi proposto por Kane S. Yee[1] em 1966 para meios isotrópicos não dispersivos.

Neste capítulo mostraremos a formulação proposta por Yee e sua extensão para meios giroelétricos dispersivos. A seção 3.2 mostra a formulação de Yee, considerando as condições de contorno, valores iniciais e critério de estabilidade. A seção 3.3 mostra a formulação da seção 3.2 para o caso bidimensional e a seção 3.4 para meios giroelétricos dispersivos.

### 3.1 Introdução

As equações rotacionais de Maxwell no domínio do tempo formam um sistema de equações diferenciais hiperbólicas de 1<sup>a</sup> ordem que deve ser resolvido levando-se em consideração os valores iniciais e as condições de contorno impostas pela geometria do problema que se deseja resolver.

A solução analítica das equações de Maxwell é uma função  $F(x, y, z, t)$  de suas coordenadas espaciais e da variável temporal. Esta função satisfaz a equação diferencial hiperbólica, para todo o  $t$ , em todos os pontos do volume  $V$  limitado por uma superfície  $S$  (Fig. 3.1).

O método das diferenças finitas consiste em substituir as derivadas parciais por razões entre diferenças em um pequeno intervalo, i.e.,  $\partial F/\partial i$  é substituído por  $\delta F/\delta i$  onde  $\delta i$  é muito pequeno.

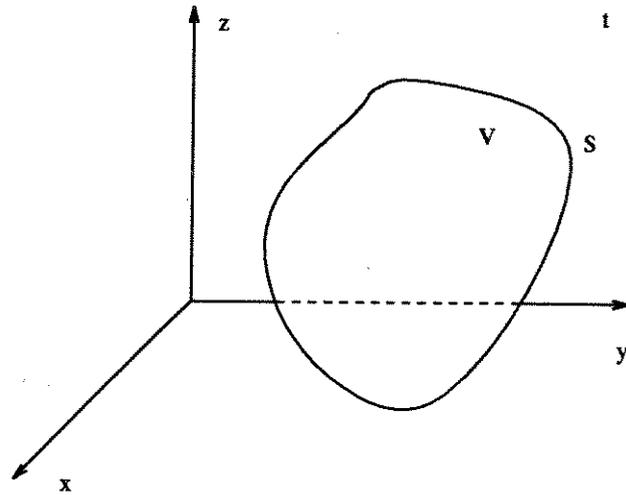


Figura 3.1: Domínio da solução de uma equação diferencial hiperbólica.

Ao substituírmos as derivadas parciais por diferenças, estamos transformando nossas funções contínuas em funções discretas, de forma que, um ponto  $P$  no espaço-tempo contínuo passa a ser representado por

$$(x, y, z, t) \rightarrow (i\delta_x, j\delta_y, k\delta_z, n\delta_t) = (i, j, k, n) \quad (3.1)$$

e uma função por

$$F(x, y, z, t) \rightarrow F(i\delta_x, j\delta_y, k\delta_z, n\delta_t) = F^n(i, j, k) \quad (3.2)$$

onde  $\delta_x, \delta_y, \delta_z$  e  $\delta_t$  são incrementos ao longo de  $x, y, z$  e  $t$ , respectivamente e  $i, j, k$  e  $n$  são inteiros.

Quando uma função  $f$  e suas derivadas são finitas e contínuas em  $x$ , então pelo teorema de Taylor

$$f(x + \delta_x) = f(x) + \delta_x \frac{df(x)}{dx} + \frac{1}{2} \delta_x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{1}{6} \delta_x^3 \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \dots \quad (3.3)$$

Supondo que  $\delta_x \gg \delta_x^2$ , temos

$$f(x + \delta_x) = f(x) + \delta_x \frac{df(x)}{dx} + O(\delta_x^2) \quad (3.4)$$

onde  $O(\delta_x^2)$  indica termos de ordem maior ou igual a 2 de  $\delta_x$ .

Da equação (3.4)

$$\frac{df(x)}{dx} \simeq \frac{f(x + \delta_x) - f(x)}{\delta_x} \quad (3.5)$$

Podemos aproximar as derivadas parciais de uma função  $F^n(i, j, k)$  da mesma forma, i.e.,

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial x} \simeq \frac{F^n(i + 1, j, k) - F^n(i, j, k)}{\delta_x} \quad (3.6)$$

e

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial t} \simeq \frac{F^{n+1}(i, j, k) - F^n(i, j, k)}{\delta_t} \quad (3.7)$$

### 3.2 O Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo para Meios Isotrópicos não Dispersivos

Vamos aplicar os conceitos introduzidos na seção anterior para desenvolver a formulação do método FDTD para meios isotrópicos não dispersivos.

Com o objetivo de reduzir erros numéricos, optamos por normalizar os campos elétrico e magnético da forma que segue. Dadas as equações de Maxwell [29]

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} - \sigma \vec{E} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad (3.9)$$

e definindo

$$\vec{H} = \eta_0 \vec{H}, \quad (3.10)$$

$$\vec{B} = c \vec{B}, \quad (3.11)$$

$$\vec{B} = \mu_r \vec{H}, \quad (3.12)$$

$$\vec{D} = \vec{\mathcal{D}}/\epsilon_0, \quad (3.13)$$

$$\vec{D} = \epsilon_r \vec{E}, \quad (3.14)$$

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}} \quad (3.15)$$

e substituindo as equações (3.10), (3.11), (3.12), (3.13), (3.14) e (3.15) nas equações (3.8) e (3.9), temos

$$\frac{\partial[\epsilon_r \vec{E}]}{\partial t} = c \nabla \times \vec{H} - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{E} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial[\mu_r \vec{H}]}{\partial t} = -c \nabla \times \vec{E}, \quad (3.17)$$

onde  $\epsilon_r$  é a permissividade relativa do meio,  $\mu_r$  a permeabilidade relativa,  $\sigma$  a condutividade e  $c$  a velocidade da luz no vácuo.

Separando as equações (3.16) e (3.17) em suas componentes nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , obtemos um sistema de 6 equações diferenciais hiperbólicas de 1<sup>a</sup> ordem.

$$\epsilon_r \frac{\partial E_x}{\partial t} = c \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - \frac{\sigma}{\epsilon_0} E_x, \quad (3.18)$$

$$\epsilon_r \frac{\partial E_y}{\partial t} = c \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - \frac{\sigma}{\epsilon_0} E_y, \quad (3.19)$$

$$\epsilon_r \frac{\partial E_z}{\partial t} = c \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) - \frac{\sigma}{\epsilon_0} E_z, \quad (3.20)$$

$$\mu_r \frac{\partial H_x}{\partial t} = c \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right), \quad (3.21)$$

$$\mu_r \frac{\partial H_y}{\partial t} = c \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right), \quad (3.22)$$

$$\mu_r \frac{\partial H_z}{\partial t} = c \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right). \quad (3.23)$$

Convém observar que estas equações foram obtidas com a hipótese de que  $\epsilon_r$ ,  $\mu_r$  e  $\sigma$  são independentes do tempo. Estes parâmetros, no entanto, poderão variar com as variáveis espaciais.

Podemos dividir o problema da discretização das equações (3.18) a (3.23) em duas partes distintas: A discretização espacial e a discretização temporal. Na discretização espacial, o espaço contínuo é substituído por um conjunto de células tridimensionais (células de discretização) formadas por paralelepípedos de lados  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  e  $\delta_z$  (Fig 3.2),

onde cada célula contém as 6 componentes de campo a serem calculadas. A discretização temporal, deve ser de forma que, as componentes do campo magnético sejam calculadas em intervalos intercalados às componentes do campo elétrico, simulando a propagação de ondas eletromagnéticas.

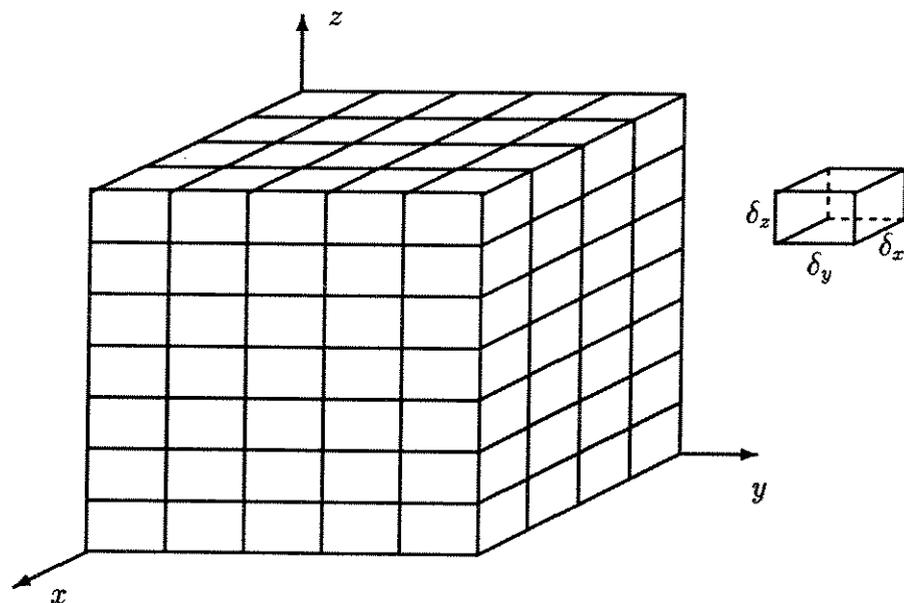


Figura 3.2: Discretização espacial para o caso tridimensional.

Yee propôs que os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  fossem distribuídos na célula unitária conforme mostrado na Fig. 3.3.

Note que cada componente do campo  $\vec{H}$  é circulado por quatro componentes do campo  $\vec{E}$  e vice-versa. Este arranjo permite que as componentes dos campos satisfaçam as equações de Maxwell.

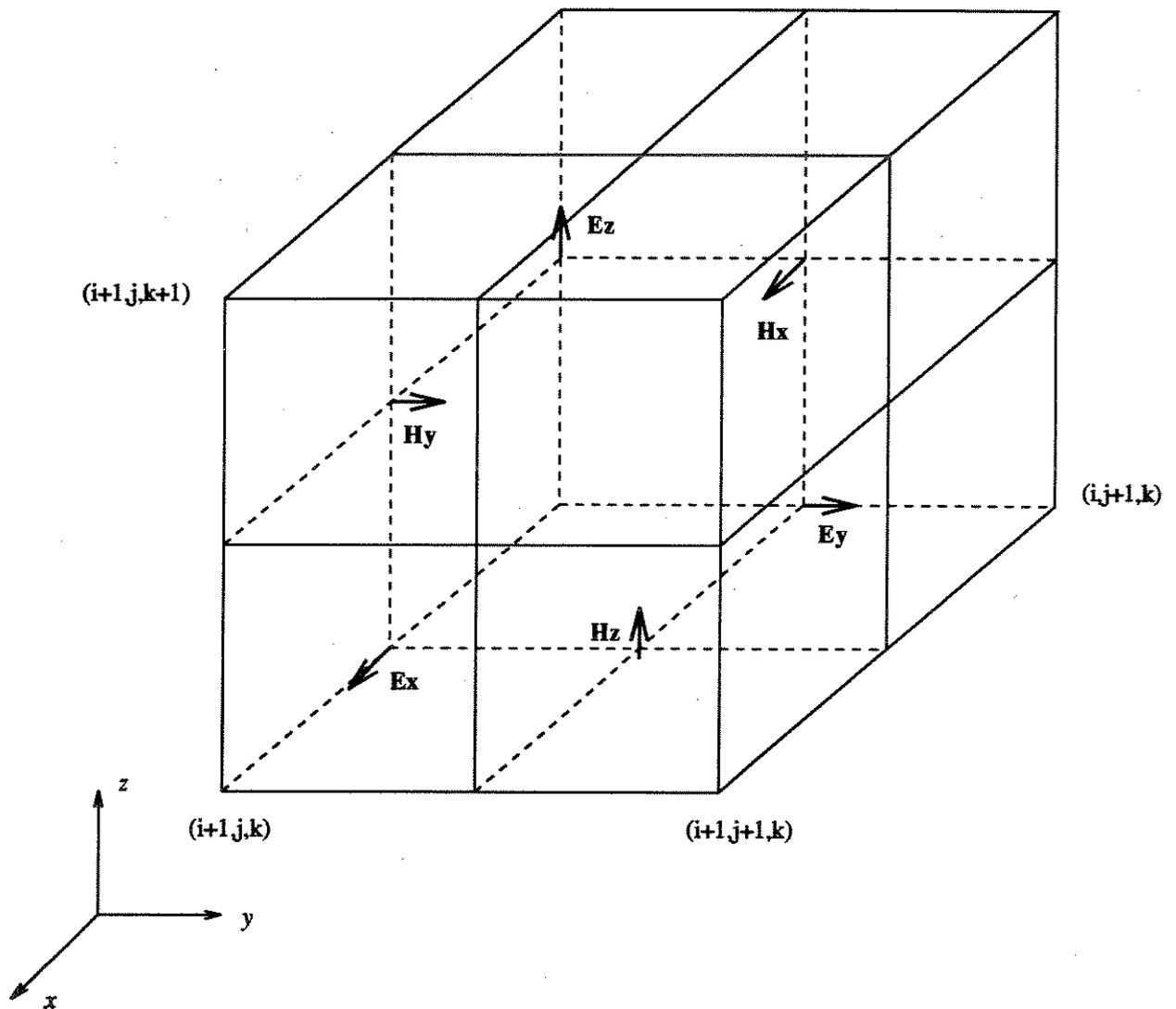


Figura 3.3: Distribuição das componentes dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  em uma célula unitária de Yee.

Utilizando a célula de Yee e as equações (3.6) e (3.7) nas equações (3.18) a (3.23) obtemos as equações de Maxwell discretizadas.

$$\begin{aligned}
 H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) = & H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - \\
 & \frac{S_y}{\mu_r(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})} [E_z^n(i, j + 1, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2})] + \\
 & \frac{S_z}{\mu_r(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})} [E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k)], \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) &= H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - \\
&\frac{S_z}{\mu_r(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})} [E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k + 1) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k)] + \\
&\frac{S_x}{\mu_r(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})} [E_z^n(i + 1, j, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2})], \quad (3.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) &= H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - \\
&\frac{S_x}{\mu_r(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)} [E_y^n(i + 1, j + \frac{1}{2}, k) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k)] + \\
&\frac{S_y}{\mu_r(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)} [E_x^n(i + \frac{1}{2}, j + 1, k) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k)], \quad (3.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k) &= \frac{1}{(\varepsilon_r + \bar{\sigma})(i + \frac{1}{2}, j, k)} \{ \varepsilon_r(i + \frac{1}{2}, j, k) E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) + \\
&S_y [H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k)] - \\
&S_z [H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2})] \}, \quad (3.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k) &= \frac{1}{(\varepsilon_r + \bar{\sigma})(i, j + \frac{1}{2}, k)} \{ \varepsilon_r(i, j + \frac{1}{2}, k) E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) + \\
&S_z [H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})] - \\
&S_x [H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)] \}, \quad (3.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_z^{n+1}(i, j, k + \frac{1}{2}) &= \frac{1}{(\varepsilon_r + \bar{\sigma})(i, j, k + \frac{1}{2})} \{ \varepsilon_r(i, j, k + \frac{1}{2}) E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) + \\
&S_x [H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})] - \\
&S_y [H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})] \}, \quad (3.29)
\end{aligned}$$

onde  $S_\alpha = c\delta t/\delta_\alpha$ , ( $\alpha = x, y$  e  $z$ ),  $\varepsilon_r(i, j, k)$  e  $\mu_r(i, j, k)$  são a permissividade relativa e a permeabilidade relativa no ponto  $(i, j, k)$  e  $\bar{\sigma}(i, j, k) = \sigma(i, j, k)\delta t/\varepsilon_0$ .

As equações (3.24) a (3.29) são calculadas iterativamente a partir do instante  $n = 0$  levando em conta a distribuição inicial dos campos (valores iniciais), a excitação e as condições de contorno escolhidas para o problema.

A Fig. 3.4 mostra o fluxograma empregado na implementação do método FDTD para meios isotrópicos não dispersivos.

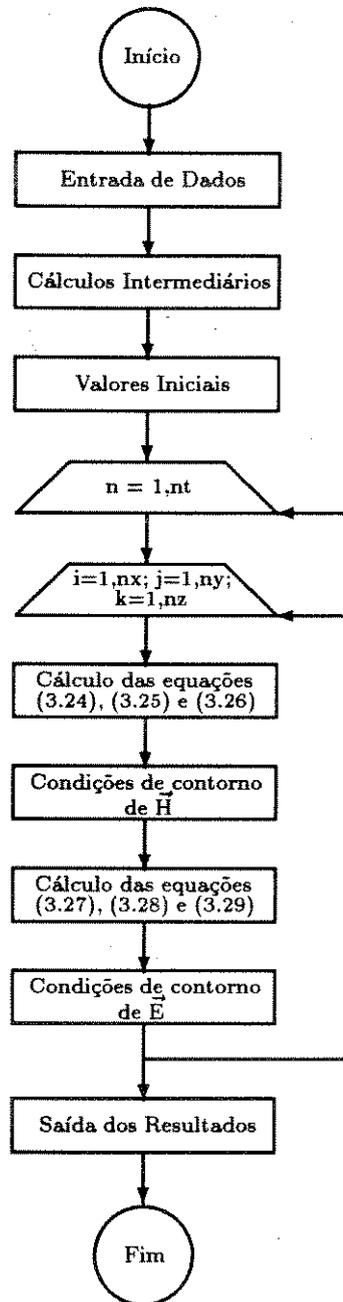


Figura 3.4: Fluxograma empregado na implementação do método FDTD para meios isotrópicos e não dispersivos.

### 3.2.1 Condições de Contorno

A formulação desenvolvida simula a propagação de ondas eletromagnéticas em um meio ilimitado, de forma que seria necessária uma quantidade infinita de memória para armazenar as componentes dos campos em todo o espaço.

Devido a limitações computacionais, a malha de discretização deve ter um tamanho finito, limitando portanto, o meio analisado, conforme ilustrado na Fig. 3.5 para o caso bidimensional.

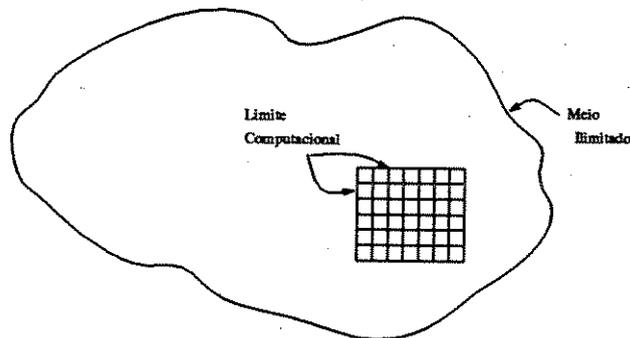


Figura 3.5: O limite computacional.

Esta limitação implica em aplicarmos condições de contorno aos campos no limite computacional. A escolha do tipo de condição de contorno a ser aplicada, depende do tipo de problema que queremos analisar com o método.

Se estamos interessados em problemas de autovalores, i.e., guiamento em guias metálicos, devemos utilizar condições de contorno “refletoras” [1, 15], ou seja, qualquer onda que incide no plano formado pelo limite computacional é totalmente refletida.

Neste caso, as componentes tangenciais do campo elétrico e as componentes normais do campo magnético devem ser nulas. Por exemplo, se a onda estiver incidindo no plano  $i = 1$  do limite computacional, então teríamos

$$\begin{aligned} E_y^n(1, j + \frac{1}{2}, k) &= 0 \\ E_z^n(1, j, k + \frac{1}{2}) &= 0 \\ H_x^n(1, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) &= 0 \end{aligned}$$

Se estamos interessados em problemas de espalhamento, devemos utilizar condições de contorno “absorventes”, ou seja, condições de contorno que simulam a propagação da onda para fora do limite computacional, sem reflexões [2, 22, 30, 31].

Neste trabalho, usaremos sempre condições de contorno refletoras.

### 3.2.2 Valores Iniciais

Existem várias maneiras de inicializarmos os cálculos no método FDTD. Para problemas de guiamento, é usual estimar uma distribuição de campos de acordo com o modo propagante que desejamos analisar e inicializar as componentes dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  com esta estimativa. E a partir daí, calcular as componentes de campos nos instantes posteriores.

Este procedimento é equivalente a excitarmos a estrutura analisada com um pulso de largura  $\delta_t$  e, conseqüentemente, um espectro em freqüências proporcional ao inverso de  $\delta_t$ .

Outra maneira de inicializarmos os cálculos é, utilizar a estimativa dos valores das componentes de campos desejada com uma variação temporal do tipo Gaussiana, onde o espectro de freqüências da excitação pode ser controlado.

Neste trabalho, utilizaremos as duas formas de inicialização dos cálculos.

### 3.2.3 Estabilidade

A escolha dos incrementos  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  e  $\delta_z$  e do incremento temporal  $\delta_t$  é limitada por razões de precisão e estabilidade, respectivamente. Para assegurar a precisão nos cálculos, os incrementos espaciais são escolhidos de forma que os campos não se alterem significativamente entre 2 células adjacentes. Isto pode ser obtido escolhendo-se os incrementos como frações do comprimento de onda.

Para assegurar a estabilidade, é necessário satisfazer uma relação entre os incrementos espaciais e temporal.

Esta relação foi estabelecida por Taflove e Brodwin [2] e é dada por

$$v_{max} \cdot \delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} + \frac{1}{\delta z^2}}} \quad (3.30)$$

onde  $v_{max}$  é a máxima velocidade de propagação da onda.

## 3.3 O Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo em 2 Dimensões

Dadas as equações de Maxwell normalizadas, vamos supor que as componentes dos campos tenham a forma :

$$F(x, y, z, t) = F(x, y, t)e^{-j\beta z}, \quad (3.31)$$

onde  $z$  é a direção de propagação e  $\beta$  é constante de propagação em  $rad/s$ .

Separando as equações de Maxwell normalizadas em suas componentes

$$\epsilon_r \frac{\partial E_x}{\partial t} = c \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y \right) - \frac{\sigma}{\epsilon_0} E_x, \quad (3.32)$$

$$\epsilon_r \frac{\partial E_y}{\partial t} = c \left( -j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - \frac{\sigma}{\epsilon_0} E_y, \quad (3.33)$$

$$\epsilon_r \frac{\partial E_z}{\partial t} = c \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) - \frac{\sigma}{\epsilon_0} E_z, \quad (3.34)$$

$$\mu_r \frac{\partial H_x}{\partial t} = c \left( -j\beta E_y - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right), \quad (3.35)$$

$$\mu_r \frac{\partial H_y}{\partial t} = c \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\beta E_x \right), \quad (3.36)$$

$$\mu_r \frac{\partial H_z}{\partial t} = c \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right). \quad (3.37)$$

A discretização espacial é feita através da célula de discretização de Yee em 2 dimensões mostrada na Fig. 3.6.

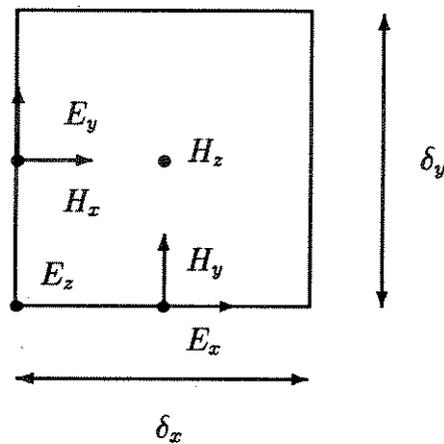


Figura 3.6: Discretização espacial para o caso bidimensional.

Discretizando as equações (3.32) a (3.37) com  $\sigma = 0$ , obtemos :

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - \frac{S_y}{\mu_r} [E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i, j)] - j \frac{S_z}{\mu_r} E_y^n(i, j + \frac{1}{2}), \quad (3.38)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) + \frac{S_x}{\mu_r} [E_z^n(i+1, j) - E_z^n(i, j)] + j \frac{S_z}{\mu_r} E_x^n(i + \frac{1}{2}, j), \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) &= H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - \\ &\quad \frac{S_x}{\mu_r} [E_y^n(i + 1, j + \frac{1}{2}) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2})] + \\ &\quad \frac{S_y}{\mu_r} [E_x^n(i + \frac{1}{2}, j + 1) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j)], \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j) &= E_x^n(i + \frac{1}{2}, j) + \\ &\quad \frac{S_y}{\epsilon_r} [H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})] + \\ &\quad j \frac{S_z}{\epsilon_r} H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j), \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) &= E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) - \\ &\quad \frac{S_x}{\epsilon_r} [H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})] - \\ &\quad j \frac{S_z}{\epsilon_r} H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}), \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}(i, j) &= E_z^n(i, j) + \\ &\quad \frac{S_x}{\epsilon_r} [H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j)] - \\ &\quad \frac{S_y}{\epsilon_r} [H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2})], \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde  $S_x = c\delta_t/\delta_x$ ,  $S_y = c\delta_t/\delta_y$  e  $S_z = c\delta_t\beta$ .

A escolha de  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\delta_t$  e  $\beta$  deve ser tal que [19, 20],

$$v_{max} \cdot \delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} + (\beta/2)^2}} \quad (3.44)$$

### 3.4 O Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo Aplicado a Meios Giroelétricos Dispersivos : Plasma Magnetizado

A formulação desenvolvida por Yee supõe que os parâmetros constitutivos são não dispersivos em frequência, i.e.,

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t} = 0 \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial t} = 0 \quad (3.46)$$

Os materiais dielétricos dispersivos em frequência não satisfazem (3.45). Neste caso, nas equações de Maxwell, devemos substituir o produto  $\bar{\epsilon}(\omega) \cdot \vec{E}(\omega)$  no domínio da frequência pela convolução  $\bar{\epsilon}(t) * \vec{E}(t)$  no domínio do tempo.

Na formulação do método FDTD para meios dispersivos, esta convolução deve ser calculada a cada instante de tempo e em cada célula da malha de discretização.

Considerando um plasma magnetizado segundo a direção  $z$ , as equações de Maxwell podem ser escritas da seguinte forma :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\bar{\epsilon}(t) * \vec{E}(t)] = c \nabla \times \vec{H}(t) \quad (3.47)$$

e

$$\mu \frac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} = -c \nabla \times \vec{E}(t) \quad (3.48)$$

e o tensor permissividade relativa no domínio da frequência ( $\omega$ ) pode ser expresso por

$$\bar{\epsilon}(\omega) = \epsilon \cdot \begin{bmatrix} 1 + \chi(\omega) & -g(\omega) & 0 \\ g(\omega) & 1 + \chi(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \chi_z(\omega) \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

onde

$$\chi(\omega) = \frac{\omega_p^2(j\omega + \nu_c)}{j\omega[(j\omega + \nu_c)^2 + \omega_g^2]}, \quad (3.50)$$

$$g(\omega) = \frac{\omega_p^2 \omega_g}{j\omega[(j\omega + \nu_c)^2 + \omega_g^2]} \quad (3.51)$$

e

$$\chi_z(\omega) = \frac{\omega_p^2}{j\omega(j\omega + \nu_c)}. \quad (3.52)$$

Aplicando a transformada de Fourier em (3.50), (3.51) e (3.52) temos,

$$\chi(t) = \frac{\omega_p^2}{\nu_c^2 + \omega_g^2} \cdot \{\nu_c + e^{\nu_c t}[-\nu_c \cos(\omega_g t) + \omega_g \sin(\omega_g t)]\} \cdot U(t), \quad (3.53)$$

$$g(t) = \frac{\omega_p^2}{\nu_c^2 + \omega_g^2} \{\omega_g - e^{-\nu_c t}[\omega_g \cos(\omega_g t) + \nu_c \sin(\omega_g t)]\} \cdot U(t), \quad (3.54)$$

$$\chi_z(t) = \frac{\omega_p^2}{\nu_c} [1 - e^{-\nu_c t}] \cdot U(t), \quad (3.55)$$

onde  $U(t)$  representa a função degrau unitário.

Ou, na forma complexa.

$$\hat{\chi}(t) = k_w \gamma^* [1 - e^{-\gamma t}] \cdot U(t), \quad (3.56)$$

$$\hat{g}(t) = -j k_w \gamma^* [1 - e^{-\gamma t}] \cdot U(t) = -j \hat{\chi}(t), \quad (3.57)$$

onde

$$k_w = \omega_p^2 / (\nu_c^2 + \omega_g^2), \quad (3.58)$$

$$\gamma = \nu_c - j\omega_g, \quad (3.59)$$

$$\chi(t) = \Re[\hat{\chi}(t)], \quad (3.60)$$

$$g(t) = \Re[\hat{g}(t)], \quad (3.61)$$

$\gamma^*$  é o complexo conjugado de  $\gamma$  e  $\Re[\cdot]$  significa a parte real de um número complexo.

Da equação (3.47), temos

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} [E_x(t) + \chi(t) * E_x(t) - g(t) * E_y(t)] = c[\nabla \times \vec{H}(t)]_x \quad (3.62)$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} [E_y(t) + \chi(t) * E_y(t) + g(t) * E_x(t)] = c[\nabla \times \vec{H}(t)]_y \quad (3.63)$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} [E_z(t) + \chi_z(t) * E_z(t)] = c[\nabla \times \vec{H}(t)]_z \quad (3.64)$$

onde  $[\nabla \times \vec{H}(t)]_\alpha$ , ( $\alpha = x, y, e z$ ) é a componente do rotacional de  $\vec{H}$  na direção  $\alpha$ .

A discretização espacial das equações (3.62) a (3.64) deve ser da mesma forma que o caso isotrópico, e a discretização temporal deve levar em conta as convoluções.

Considerando que as componentes  $E_x$ ,  $E_y$  e  $E_z$  são constantes em cada intervalo  $\delta t$ , podemos calcular as convoluções de forma recursiva [12, 13, 14], como mostrado no Apêndice A. Desta forma, teremos

$$E_x^{n+1} = k_1 \{ \varepsilon E_x^n + k_2 [\varepsilon E_y^n + A_y^n + c\delta t (\nabla \times \vec{H}^{n+\frac{1}{2}})_y] + A_x^n + c\delta t (\nabla \times \vec{H}^{n+\frac{1}{2}})_x \}, \quad (3.65)$$

$$E_y^{n+1} = k_1 \{ \varepsilon E_y^n - k_2 [\varepsilon E_x^n + A_x^n + c\delta t (\nabla \times \vec{H}^{n+\frac{1}{2}})_x] + A_y^n + c\delta t (\nabla \times \vec{H}^{n+\frac{1}{2}})_y \}, \quad (3.66)$$

$$E_z^{n+1} = k_3 \{ \varepsilon E_z^n + A_z^n + c\delta t (\nabla \times \vec{H}^{n+\frac{1}{2}})_z \}, \quad (3.67)$$

onde

$$A_x^n = \Re[\hat{A}_x^n] = \Re[(E_x^n + jE_y^n)\Delta\hat{\chi}^0 + e^{-\gamma\delta t}\hat{A}_x^{n-1}], \quad (3.68)$$

$$A_y^n = \Re[\hat{A}_y^n] = \Re[(E_x^n - jE_y^n)\Delta\hat{\chi}^0 + e^{-\gamma\delta t}\hat{A}_y^{n-1}], \quad (3.69)$$

$$A_z^n = E_z^n\Delta\chi_z^0 + e^{-\nu_c\delta t}A_z^{n-1}, \quad (3.70)$$

$$k_1 = \frac{\varepsilon + \chi^0}{(\varepsilon + \chi^0)^2 + (g^0)^2}, \quad (3.71)$$

$$k_2 = \frac{g^0}{\varepsilon + \chi^0}, \quad (3.72)$$

$$k_3 = \frac{1}{\varepsilon + \chi^0}, \quad (3.73)$$

$$\Delta\hat{\chi}^0 = - \left( \frac{k_w\gamma^*}{\omega_p} \right)^2 [1 - e^{-\gamma\delta t}]^2, \quad (3.74)$$

$$\Delta\chi_z^0 = - \left( \frac{\omega_p}{\nu_c} \right)^2 [1 - e^{-\nu_c\delta t}]^2, \quad (3.75)$$

$$\chi^0 = \Re \left[ \int_0^{\delta t} \hat{\chi}(\tau) d\tau \right], \quad (3.76)$$

$$g^0 = \Re \left[ \int_0^{\delta t} \hat{g}(\tau) d\tau \right]. \quad (3.77)$$

As componentes de  $\vec{H}$  são calculadas da mesma forma que o caso isotrópico.

# Capítulo 4

## Resultados Numéricos

### 4.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados testes e aplicações do método das diferenças finitas no domínio do tempo às estruturas apresentadas no Capítulo 1.

Um teste importante em qualquer método numérico é o teste de convergência, pois este está diretamente relacionado com a precisão obtida pelo método.

Os resultados para a cavidade preenchida com plasma mostram a influência dos parâmetros do plasma na frequência de ressonância de um dado modo.

Para as estruturas bidimensionais (guias de onda), os resultados são apresentados em termos da constante de fase ( $\beta$ ) normalizada em função da frequência, ou seja, as características de dispersão do guia analisado. São mostradas também a variação espacial, temporal e em frequência das componentes dos campos.

A seção 4.2 mostra os resultados para a cavidade isotrópica e totalmente preenchida com plasma. A seção 4.3 mostra o guia retangular totalmente preenchido com plasma. Na seção 4.4 temos o guia parcialmente preenchido e na seção 4.5 o guia embebido isotrópico e com plasma.

#### 4.1.1 Teste de Convergência

A convergência para o método FDTD é analisada através da variação do número ( $N$ ) de células utilizadas na discretização espacial e sua influência na frequência obtida para um dado modo de propagação.

Existem vários fatores que influenciam na convergência do método, entre estes fatores podemos destacar :

- Modo de propagação;
- Discretização temporal  $\delta_t$ ;
- Tipo de discretização espacial;

- Estrutura analisada;
- Constante de propagação  $\beta$  (para o caso bidimensional);
- Permissividade do meio  $\epsilon_r$ ;
- Frequências do plasma ( $\omega_p$ ,  $\omega_g$  e  $\nu_c$ ).

São apresentados testes de convergência para cada estrutura analisada neste trabalho em função do modo de propagação, de  $\delta_i$ , de  $\beta$  e das frequências do plasma.

## 4.2 A Caverna

Nesta seção, a caverna de microondas com paredes condutoras perfeitas é analisada. Inicialmente são feitos testes de convergência seguido de um estudo sobre os efeitos causados pela introdução do plasma magnetizado segundo a direção  $z$ , na frequência de ressonância de um dado modo.

### 4.2.1 Estudo da Convergência

Para verificar a convergência, o método é aplicado a uma caverna cúbica com lados iguais a 10 mm. A discretização espacial é tal que as células espaciais são uniformes e  $\delta_i$  é escolhido igual á metade do valor máximo, definido pelo critério de estabilidade (3.30).

A distribuição inicial dos campos foi escolhida de acordo com a distribuição espacial dos mesmos no modo que se deseja analisar.

A ressonância é obtida através da transformada de Fourier [33] da variação temporal de uma das componentes dos campos no centro de gravidade da caverna. Para o modo  $TE_{101}$ , foi escolhida a componente  $y$  do campo elétrico,  $E_y$ .

A Fig. 4.1 mostra a convergência dos valores obtidos para a frequência,  $\omega_0$ , de ressonância da caverna, com o aumento do número  $N$  de células nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  para a caverna isotrópica com  $\mu_r = 1,0$  e  $\epsilon_r = 2,1$  excitada com o modo  $TE_{101}$ .

Os resultados obtidos, mostram uma convergência rápida e são coerentes com os resultados apresentados por Hofer [15]. Neste caso, a frequência obtida para  $N = 10$  é a mesma que a obtida com valores maiores de  $N$ . Portanto, pode-se concluir que o método converge para  $N = 10$ .

A Fig. 4.2 mostra a convergência para a caverna anterior com  $\mu_r = \epsilon_r = 1,0$ , modo  $TE_{101}$ ,  $\omega_p/\omega_0 = \nu_c/\omega_0 = 0,1$  e  $\omega_g/\omega_0 = 0,1, 1,0$  e  $10,0$ , onde  $\omega_0$  é a frequência de corte do modo excitado. A Figura mostra que a variação de  $\omega_g$  influencia pouco na convergência.

Na Fig. 4.3 é mostrada para a mesma caverna com  $\mu_r = \epsilon_r = 1,0$ , modo  $TE_{101}$ ,  $\omega_p/\omega_0 = \omega_g/\omega_0 = 0,1$  e  $\nu_c/\omega_0 = 0,1, 1,0$  e  $10,0$ . Neste caso, o método também converge rapidamente e  $\nu_c$  influencia pouco na convergência.

Finalmente, a Fig. 4.4 mostra a convergência quando  $\omega_p$  varia de 0,1 a 10,0. Pode-se observar que o método converge mais lentamente a medida que  $\omega_p$  aumenta.

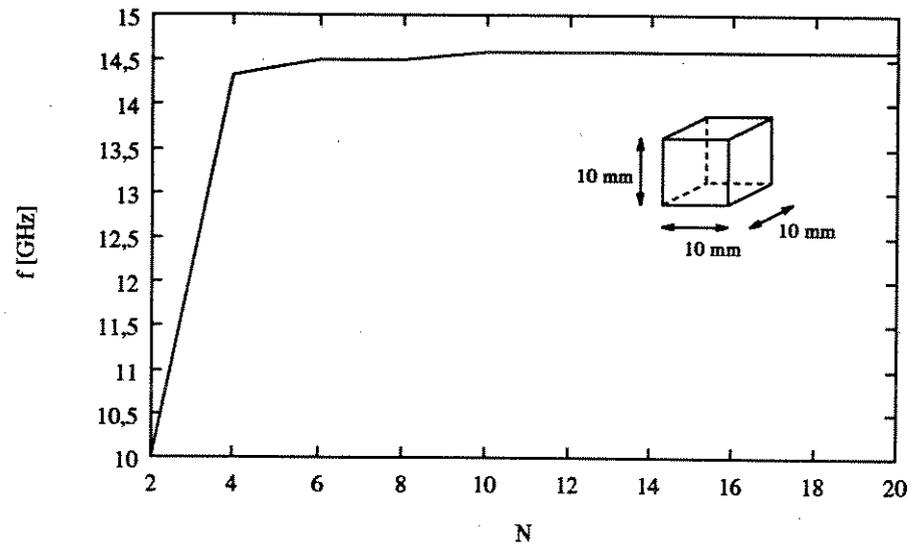


Figura 4.1: Convergência para a cavidade isotrópica com lados iguais a 10 mm,  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_r = 2,1$  e modo  $TE_{101}$ .

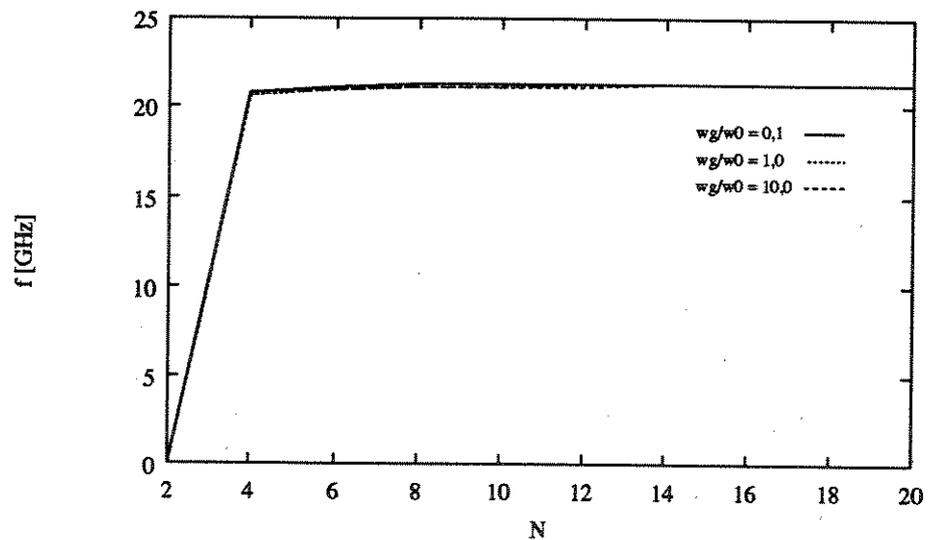


Figura 4.2: Convergência para a cavidade totalmente preenchida com plasma.  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_r = 1,0$ , modo  $TE_{101}$ ,  $\omega_p/\omega_0 = \nu_c/\omega_0 = 0,1$  e  $\omega_g/\omega_0 = 0,1$ ,  $1,0$  e  $10,0$ .

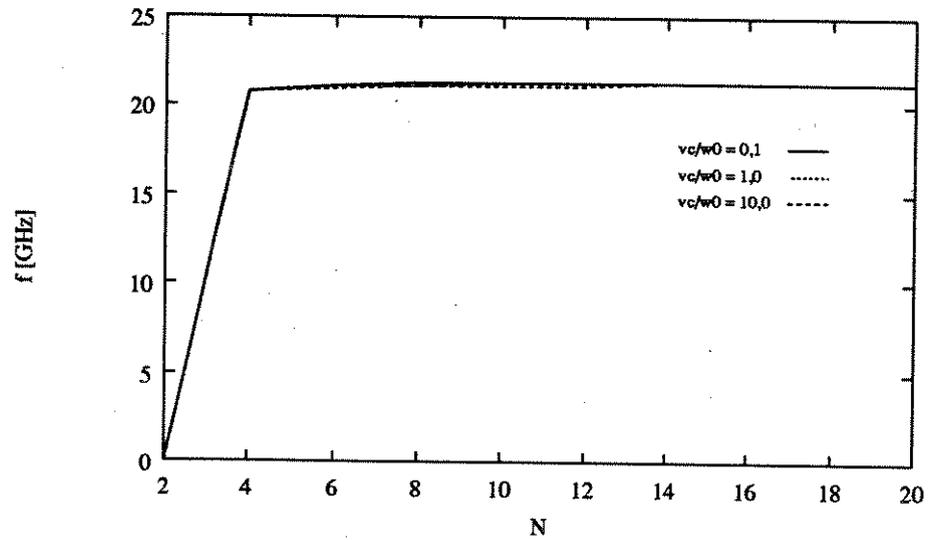


Figura 4.3: Convergência para a cavidade totalmente preenchida com plasma.  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_r = 1,0$ , modo  $TE_{101}$ ,  $\omega_p/\omega_0 = \omega_g/\omega_0 = 0,1$  e  $\nu_c/\omega_0 = 0,1$ ,  $1,0$  e  $10,0$ .

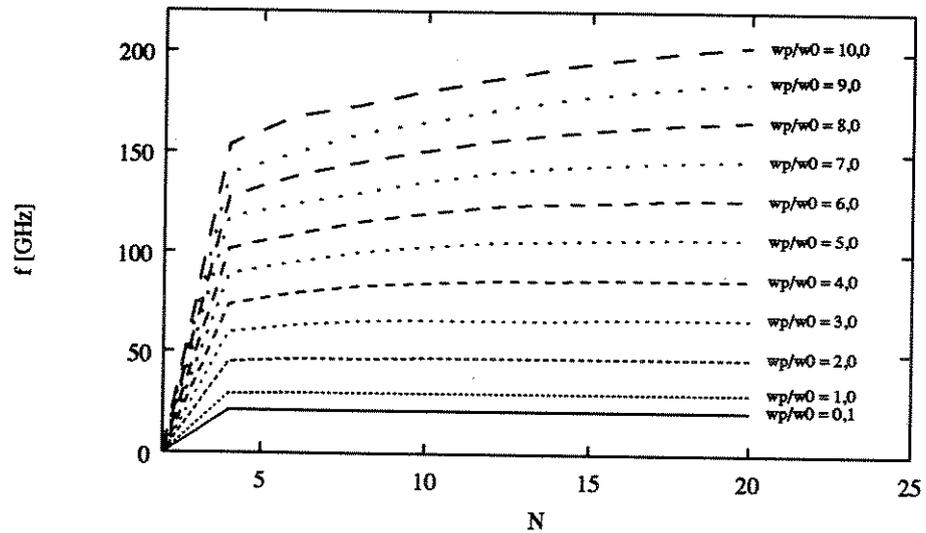


Figura 4.4: Convergência para a cavidade totalmente preenchida com plasma.  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_r = 1,0$ , modo  $TE_{101}$ ,  $\omega_g/\omega_0 = \nu_c/\omega_0 = 0,1$  e  $\omega_p/\omega_0 = 0,1$ ,  $1,0$ , ...,  $10,0$ .

### 4.2.2 Efeito do Plasma na Ressonância da Cavidade

A influência do plasma na frequência de ressonância da cavidade é analisada em função das frequências do plasma e estes resultados são comparados aos obtidos por Harrington [23] através do método dos momentos. Para isto, é utilizada uma cavidade de dimensões  $a = 9 \text{ mm}$ ,  $b = 4 \text{ mm}$  e  $c = 12 \text{ mm}$  excitada no modo  $\text{TE}_{011}$ .

A Fig. 4.5 mostra a resposta em frequência da componente  $x$  do campo elétrico,  $E_x$ , no centro de gravidade da cavidade para  $\omega_p/\omega_0 = \nu_c/\omega_0 = 0,1$  e para  $\omega_g/\omega_0 = 0,1$  e  $0,9$ . Observa-se que, uma girofrequência normalizada,  $\omega_g/\omega_c$ , aumentando de  $0,1$  (linha cheia) a  $0,9$  (linha pontilhada) causam um decréscimo nos picos da resposta espectral de  $|E_x|$  e um pequeno aumento na frequência de ressonância.

As Figs. 4.6 e 4.7 mostram a variação percentual da frequência de ressonância da cavidade ( $\Delta\omega = (\omega - \omega_0)/\omega_0$ ) em função de  $\omega_g$  e  $\omega_p$ , respectivamente. Em ambas as figuras a linha cheia reproduz os resultados apresentados por Harrington [23], usando o método dos momentos. Convém observar que os resultados obtidos pelo presente método, representados por quadrados ou triângulos, apresentam boa concordância com aqueles obtidos usando o método dos momentos.

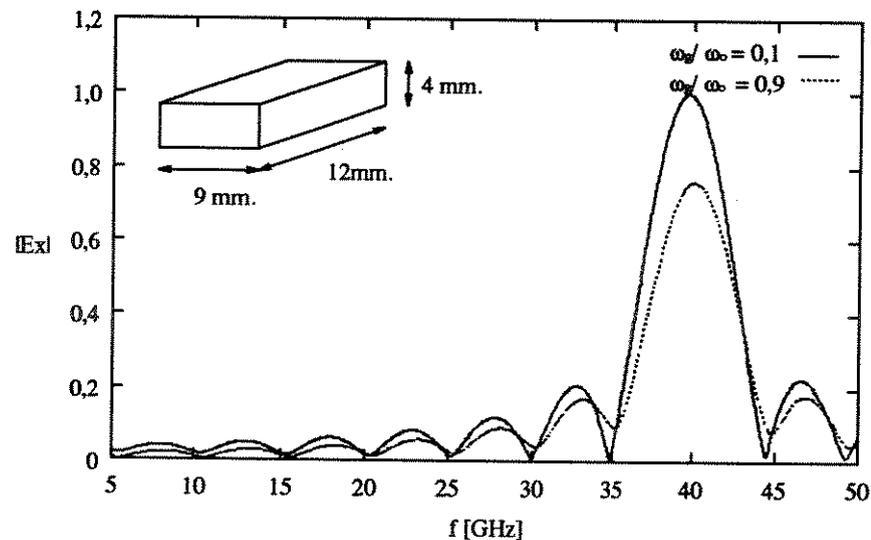


Figura 4.5: Espectro de frequências de  $E_x$  para o modo quase- $\text{TE}_{011}$ ,  $\omega_p/\omega_0 = \nu_c/\omega_0 = 0,1$ .

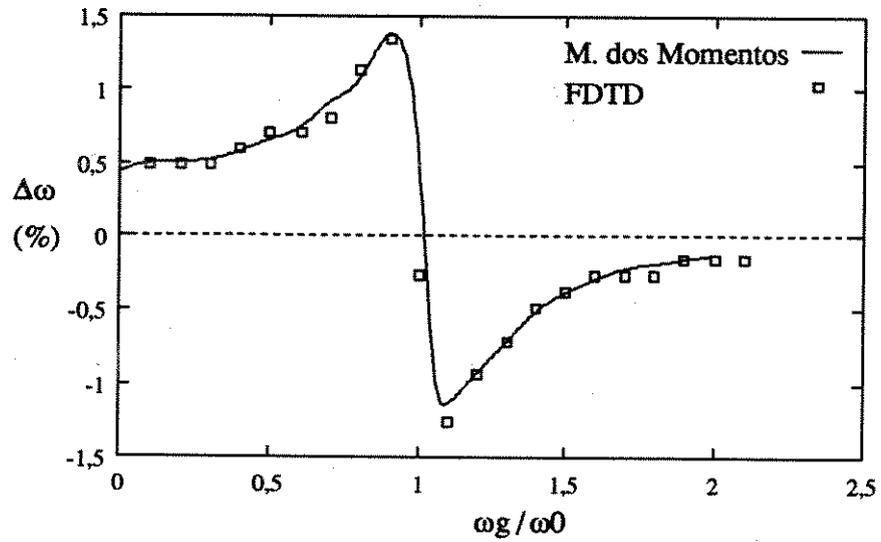


Figura 4.6: Variação percentual da frequência de ressonância em função de  $\omega_g/\omega_0$ , para o modo quase- $TE_{011}$ ,  $\omega_p/\omega_0 = \nu_c/\omega_0 = 0,1$ .

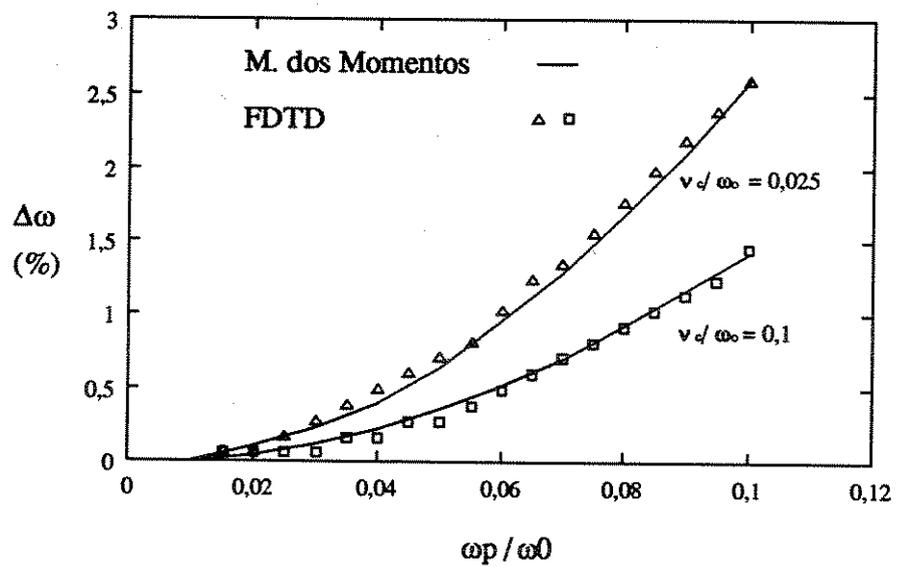


Figura 4.7: Variação percentual da frequência de ressonância em função de  $\omega_p/\omega_0$ , para o modo quase- $TE_{011}$ ,  $\omega_g/\omega_0 = 0,9$ .

## 4.3 O Guia Retangular

Nesta seção, o guia retangular totalmente preenchido com plasma e paredes condutoras perfeitas é analisado. Inicialmente são feitos os testes de convergência para vários valores de  $\omega_p$ ,  $\omega_g$  e  $\nu_c$ . A seguir, o método é aplicado ao guia WR90 [34] com o objetivo de mostrar as potencialidades do método e, finalmente, o método é utilizado para estudar a influência do plasma nas características de dispersão do guia.

### 4.3.1 Estudo da Convergência

A convergência é analisada em um guia quadrado de lados iguais a  $40\text{mm}$ , operando com a constante de propagação  $\beta$  igual a  $0,52\text{ rad/mm}$ . A discretização espacial é uniforme e  $\delta_t$  é escolhido igual ao seu valor máximo.

O guia é excitado no modo  $\text{TE}_{10}$  com variação temporal gaussiana e a resposta em frequência é obtida através da transformada de Fourier da componente  $y$  do campo elétrico,  $E_y$ , no centro do guia.

A Fig. 4.8 mostra a convergência dos valores obtidos para a frequência com o aumento do número  $N$  de células nas direções  $x$  e  $y$  para o guia com  $\mu_r = \epsilon_r = 1,0$ ,  $\omega_p/\omega_c = \nu_c/\omega_c = 0,1$  e  $\omega_g/\omega_c = 0,1, 1,0$  e  $10,0$ , onde  $\omega_c$  é a frequência de corte do modo  $\text{TE}_{10}$  para o guia vazio. Neste caso, o método converge rapidamente ( $N \simeq 32$ ) e  $\omega_g$  não influencia na convergência.

Na Fig. 4.9, a convergência é analisada para  $\mu_r = \epsilon_r = 1,0$ ,  $\omega_p/\omega_c = \omega_g/\omega_c = 0,1$  e  $\nu_c/\omega_c = 0,1, 1,0$  e  $10,0$ . O método converge rapidamente ( $N = 32$ ) e  $\nu_c$  não influencia na convergência.

Finalmente, a Fig.4.10 mostra a convergência para  $\omega_g/\omega_c = \nu_c/\omega_c = 0,1$  e  $\omega_p/\omega_c = 0,0, 0,1$  e  $1,0$ . Observa-se que, o aumento de  $\omega_p$ , faz com que o método tenha uma convergência mais lenta.

### 4.3.2 Aplicação do Método ao Guia WR90

Nesta subseção, o método é aplicado ao guia WR90 ( $a = 22,86\text{ mm}$  e  $b = 10,16\text{ mm}$ ), com e sem plasma, com o objetivo de demonstrar as potencialidades do método.

O guia é excitado com um impulso no instante inicial e constante de propagação  $\beta = 0,0$ ; desta maneira, são excitados vários modos e é possível determinar a frequência de corte de cada modo.

As Figs. 4.11 e 4.12 mostram as distribuições espaciais das componentes  $E_y$  e  $E_x$  em regime estacionário, respectivamente. A Fig. 4.13 ilustra a variação temporal da componente  $E_y$  no centro de gravidade do guia vazio ( $\epsilon_r = \mu_r = 1,0$ ) e a Fig. 4.14 mostra a resposta em frequência, onde aparecem os diversos modos propagantes.

As Figs. 4.15 e 4.16 mostram o comportamento temporal e em frequência do guia anterior preenchido com plasma, i.e.,  $\epsilon_r = \mu_r = 1,0$ ,  $\omega_g/\omega_c = \nu_c/\omega_c = 0,1$  e  $\omega_p/\omega_c = 0,2$ , onde  $\omega_c$  é a frequência de corte do modo  $TE_{10}$ .

Comparando as Figuras 4.14 e 4.16, observa-se que, ao se encher o guia com plasma, há uma troca de energia entre modos, de forma que o modo dominante cede energia para os superiores. Estas figuras mostram também uma grande vantagem do método FDTD. É possível de uma única vez, obter as frequências de vários modos. Assim, pode-se levantar as características de dispersão de diferentes modos de maneira mais rápida.

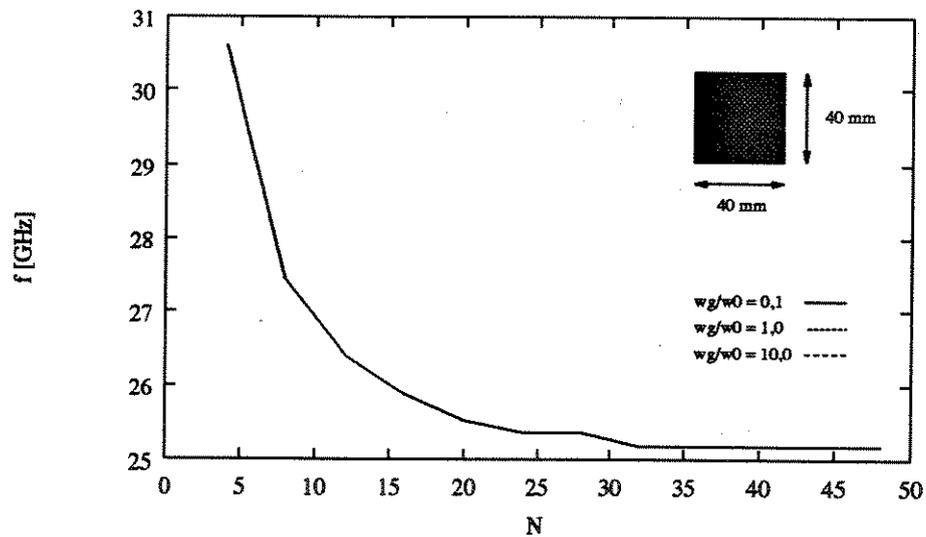


Figura 4.8: Convergência para o guia retangular totalmente preenchido com plasma.  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_r = 1,0$ , modo  $TE_{10}$ ,  $\omega_p/\omega_c = \nu_c/\omega_c = 0,1$  e  $\omega_g/\omega_c = 0,1$ ,  $1,0$  e  $10,0$ .

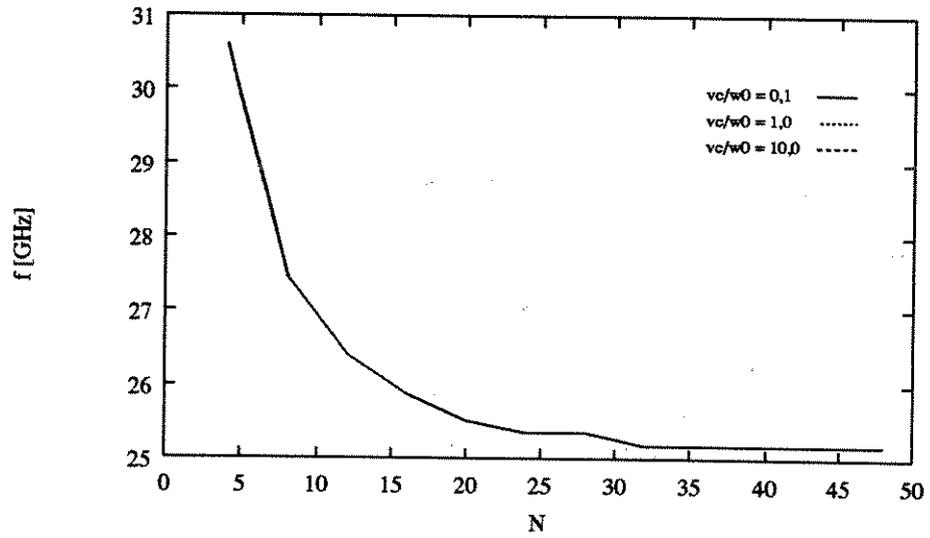


Figura 4.9: Convergência para o guia retangular totalmente preenchido com plasma.  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_r = 1,0$ , modo  $TE_{10}$ ,  $\omega_p/\omega_c = \omega_g/\omega_c = 0,1$  e  $\nu_c/\omega_c = 0,1$ ,  $1,0$  e  $10,0$ .

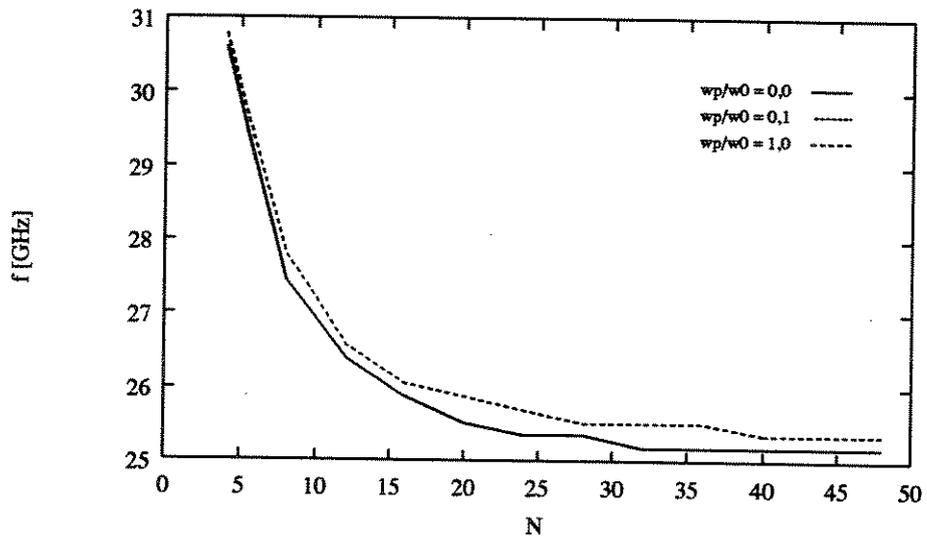


Figura 4.10: Convergência para o guia retangular totalmente preenchido com plasma.  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_r = 1,0$ , modo  $TE_{10}$ ,  $\omega_g/\omega_c = \nu_c/\omega_c = 0,1$  e  $\omega_p/\omega_c = 0,0$ ,  $0,1$  e  $1,0$ .

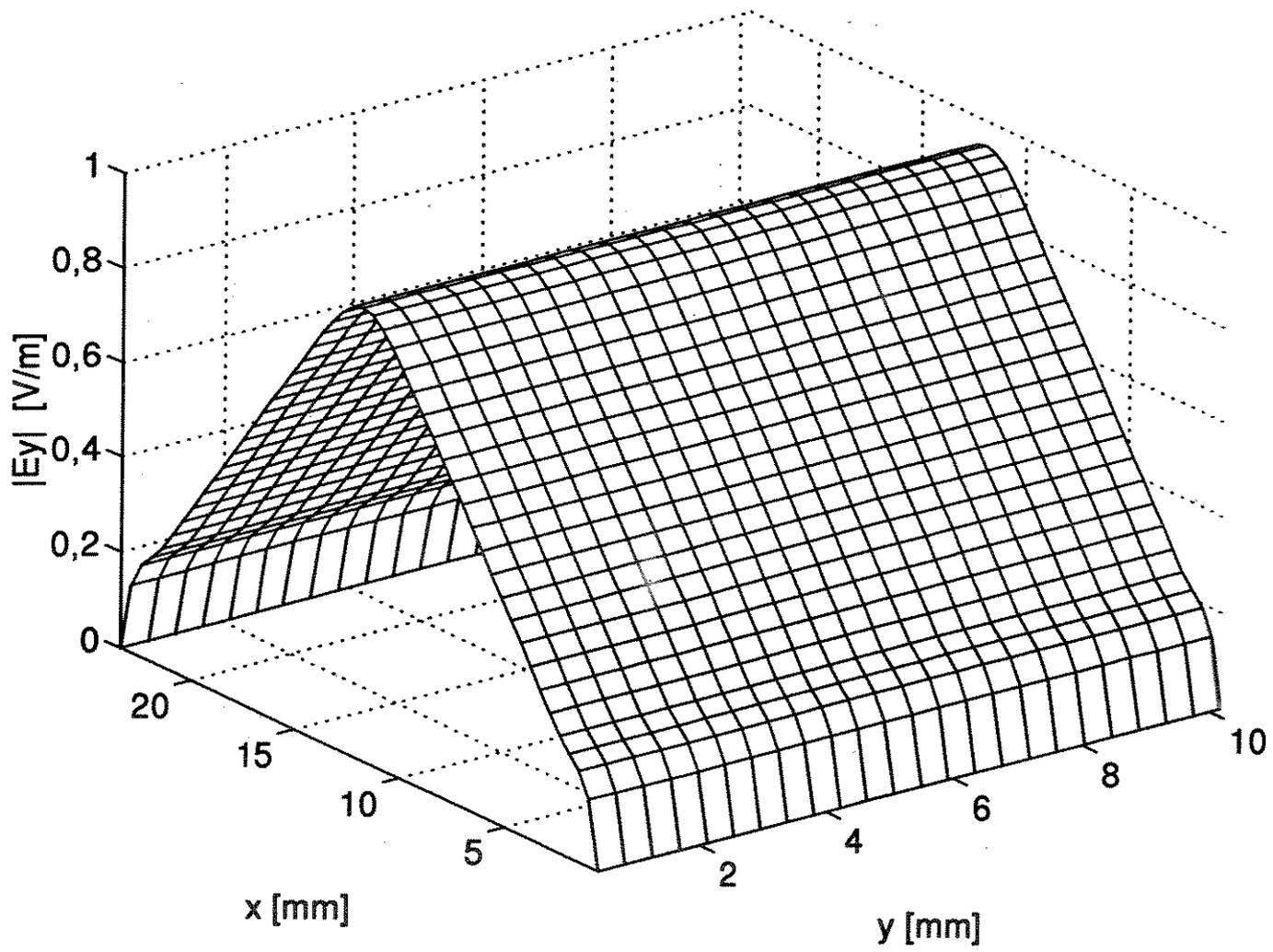


Figura 4.11: Variação espacial do campo  $E_y$  no guia WR90 vazio.

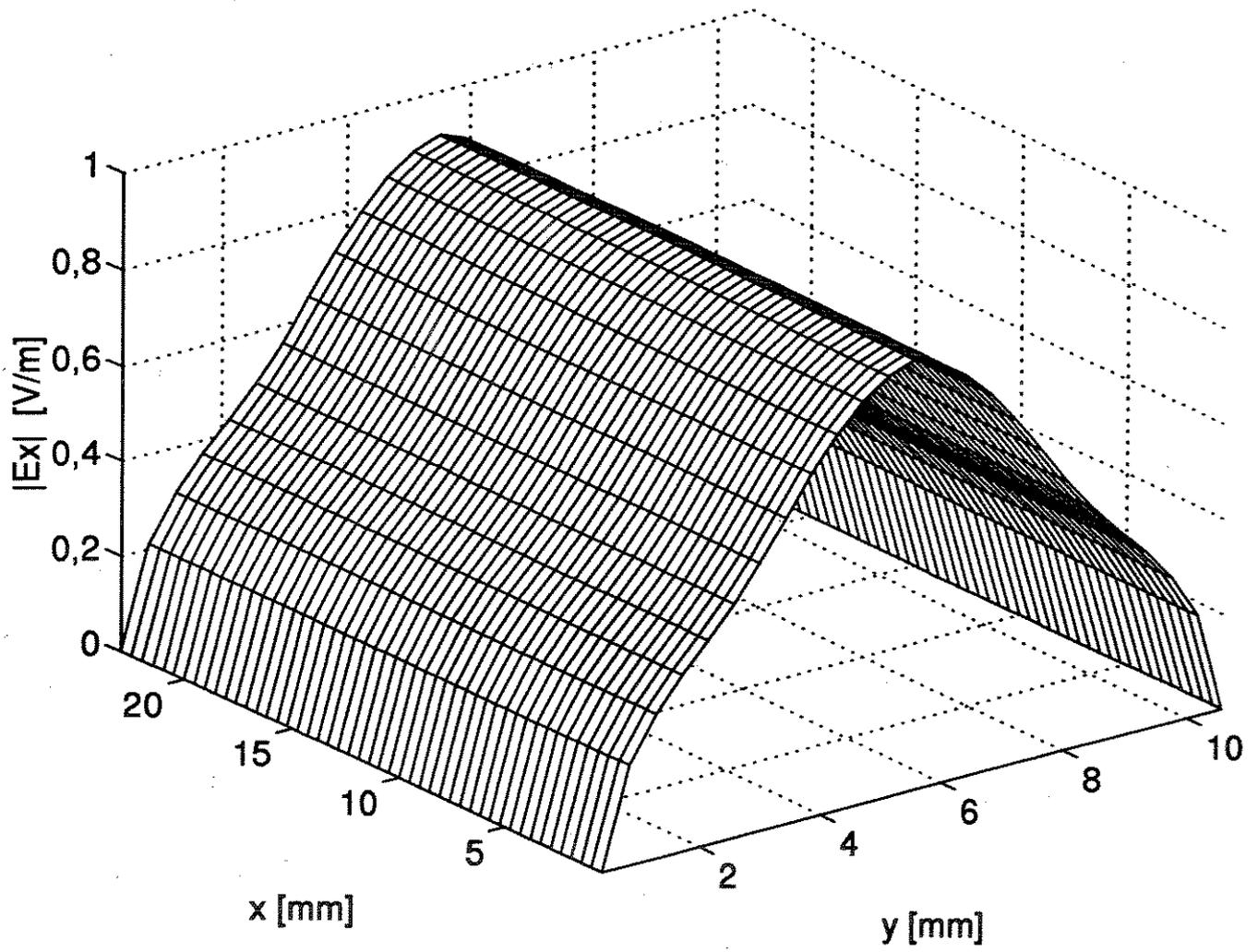


Figura 4.12: Variação espacial do campo  $E_x$  no guia WR90 vazio.

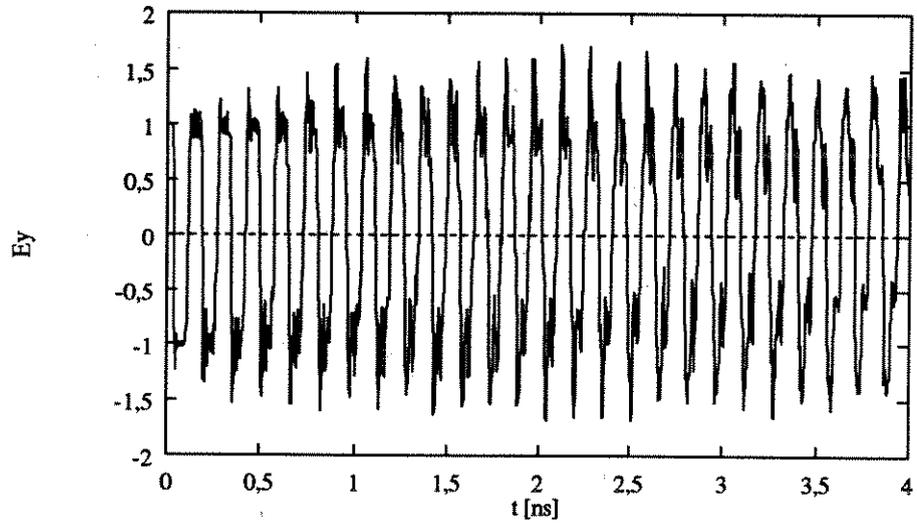


Figura 4.13: Variação temporal de  $E_y$  no centro do guia WR90 vazio.

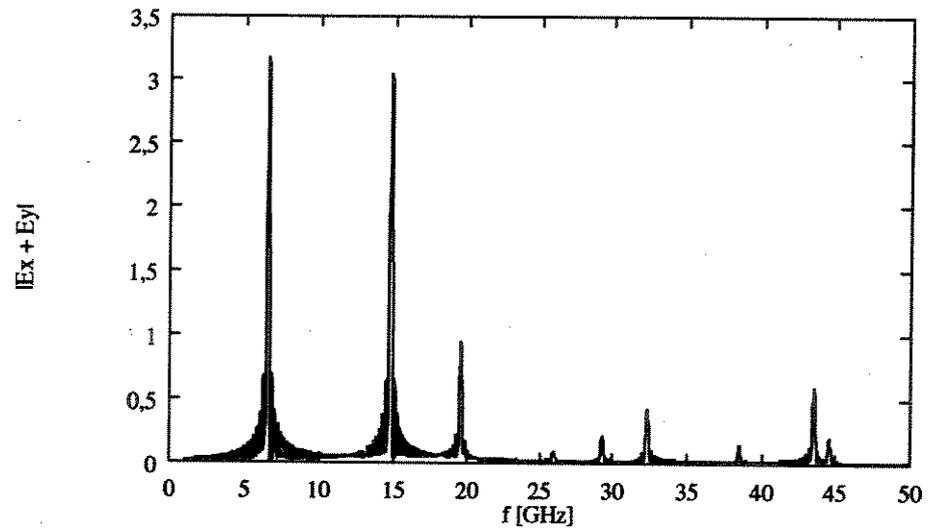


Figura 4.14: Variação na frequência de  $E_x + E_y$  no centro do guia WR90 vazio.

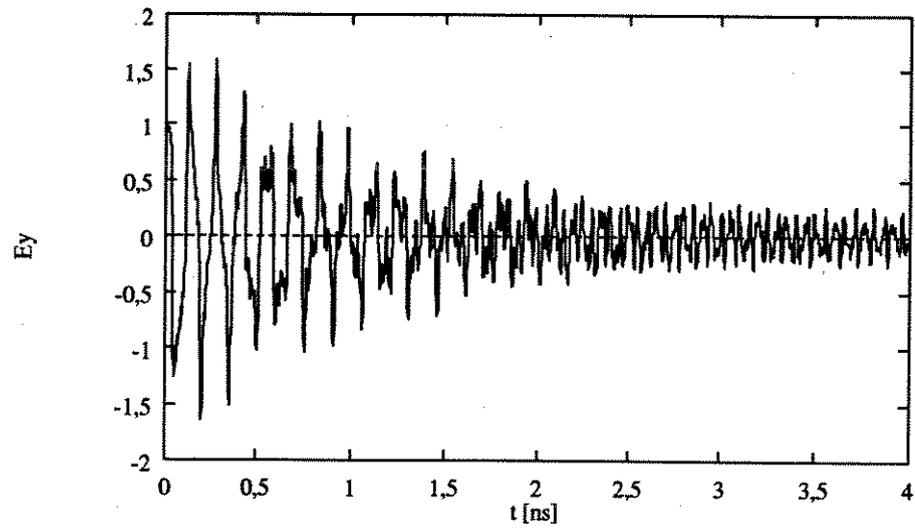


Figura 4.15: Variação temporal de  $E_y$  no centro do guia WR90 com plasma.  $\omega_g/\omega_c = \nu_c/\omega_c = 0,1$  e  $\omega_p/\omega_c = 0,2$ .

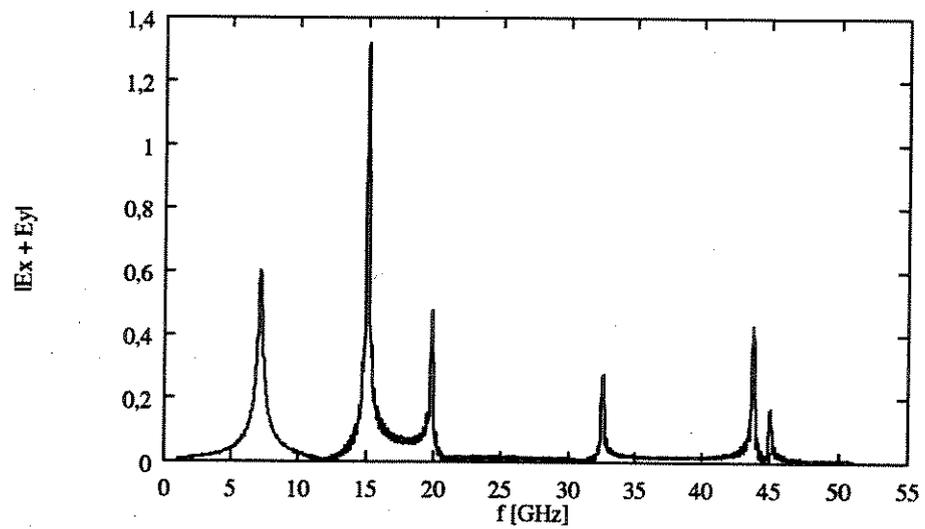


Figura 4.16: Variação na frequência de  $E_x + E_y$  no centro do guia WR90 com plasma.  $\omega_g/\omega_c = \nu_c/\omega_c = 0,1$  e  $\omega_p/\omega_c = 0,2$ .

### 4.3.3 Estudo das Características de Dispersão

A formulação apresentada no Capítulo 3 é, agora, utilizada para obter as características de dispersão de um guia retangular de lados  $a = 42,93 \text{ mm}$  e  $b = 21,47 \text{ mm}$  operando no modo  $TE_{10}$ . Para isso, uma malha uniforme de  $44 \times 22$  células é utilizada.

As curvas de dispersão são obtidas para dois valores de  $\epsilon_r$ ,  $\epsilon_r = 2,25$  e  $\epsilon_r = 13,1$ . São usados como parâmetros, as frequências normalizadas  $\omega_p/\omega_c$ ,  $\omega_g/\omega_c$  e  $\nu_c/\omega_c$ , conforme a Tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Variação dos parâmetros do plasma

$n^{\circ}$	$\omega_p/\omega_c$	$\omega_g/\omega_c$	$\nu_c/\omega_c$
00	0,0	–	–
01	0,1	0,1	0,1
02	0,5	0,1	0,1
03	0,8	0,1	0,1
04	1,0	0,1	0,1
05	1,0	0,8	0,1
06	1,0	1,0	0,1
07	1,0	1,2	0,1
08	1,0	1,9	0,1

A Fig. 4.17 mostra a influência da frequência do plasma ( $\omega_p$ ) quando  $\epsilon_r = 2,25$  e  $\omega_g/\omega_c = \nu_c/\omega_c = 0,1$  e a Fig. 4.18 a influência da girofrequência ( $\omega_g$ ) quando  $\epsilon_r = 2,25$  e  $\omega_p/\omega_c = \nu_c/\omega_c = 0,1$ . Observa-se que, para este valor de  $\epsilon_r$ ,  $\omega_p$  tem grande influência nas características de dispersão, principalmente em baixas frequências, e  $\omega_g$  pouco influencia.

As Figs. 4.19 e 4.20 ilustram, respectivamente, a influência de  $\omega_p$  e  $\omega_g$  quando  $\epsilon_r = 13,1$ . Neste caso,  $\omega_p$  e  $\omega_g$  alteram significativamente, as características de dispersão do guia, embora com uma influência mais uniforme de  $\omega_p$ .

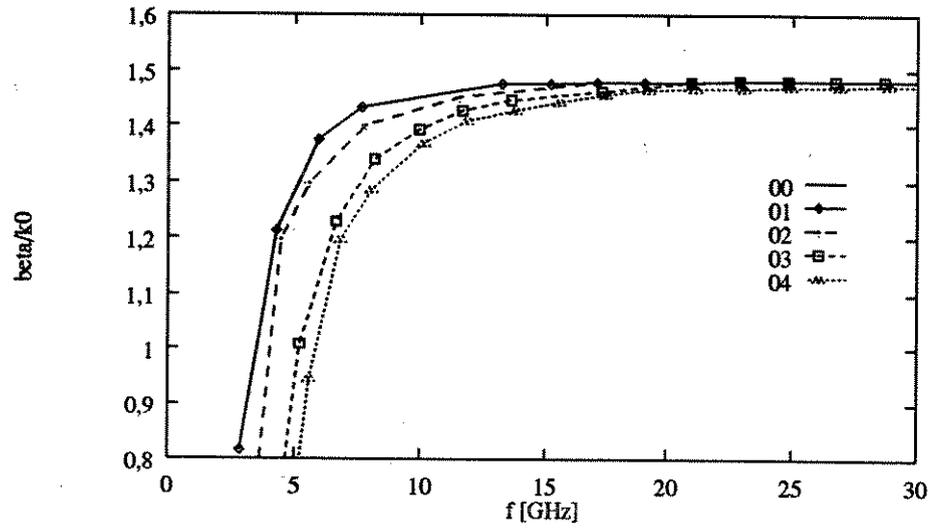


Figura 4.17: Características de dispersão do guia retangular totalmente preenchido com plasma.  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_r = 2,25$  e modo  $TE_{10}$ .

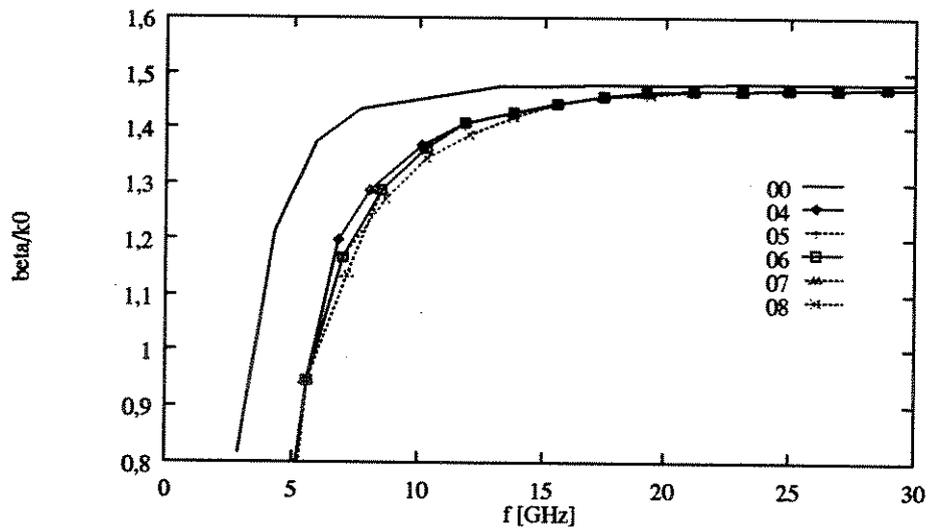


Figura 4.18: Características de dispersão do guia retangular totalmente preenchido com plasma.  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_r = 2,25$  e modo  $TE_{10}$ .

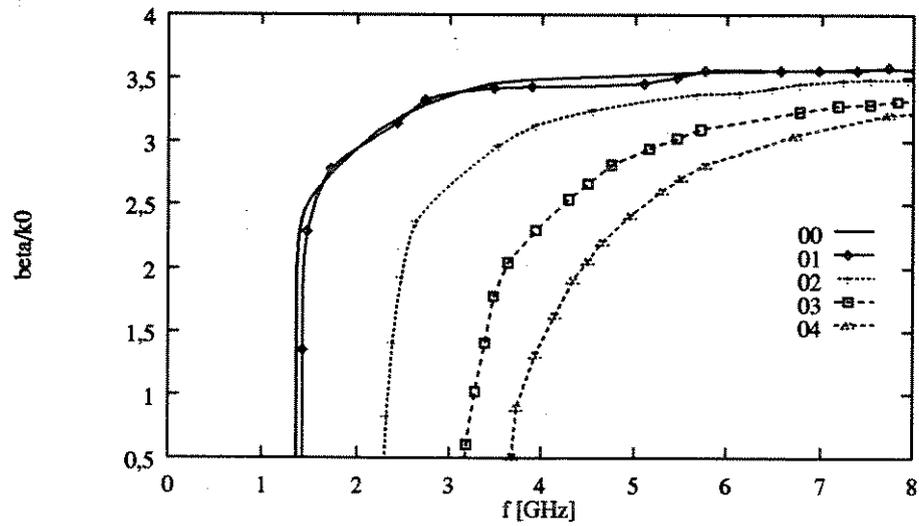


Figura 4.19: Características de dispersão do guia retangular totalmente preenchido com plasma.  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_r = 13,1$  e modo  $TE_{10}$ .

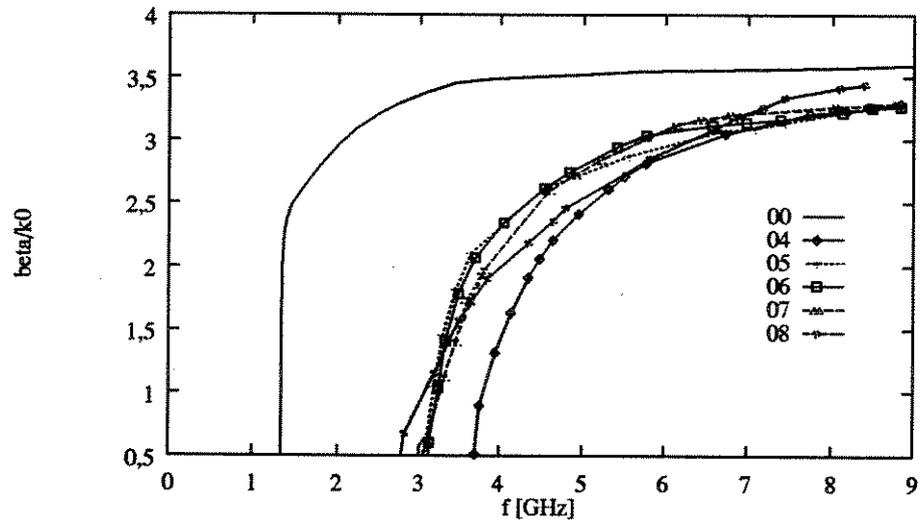


Figura 4.20: Características de dispersão do guia retangular totalmente preenchido com plasma.  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_r = 13,1$  e modo  $TE_{10}$ .

## 4.4 O Guia Parcialmente Preenchido com Plasma

Nesta seção, o guia retangular parcialmente preenchido com plasma e paredes condutoras perfeitas é analisado. Inicialmente são feitos os testes de convergência para vários valores de  $\omega_p$ ,  $\omega_g$  e  $\nu_c$  e, a seguir, o método é aplicado para obter as características de dispersão do guia.

### 4.4.1 Estudo da Convergência

A convergência é analisada em um guia quadrado de lados  $a = b = 20 \text{ mm}$  com uma lâmina de plasma de  $c = 10 \text{ mm}$  centrada no guia. A constante de propagação  $\beta$  é escolhida igual a  $0,52 \text{ rad/mm}$ .

O guia é excitado no modo  $TE_{10}$  com variação temporal gaussiana e a resposta em frequência é obtida através da transformada de Fourier da componente ao longo de  $y$  do campo elétrico,  $E_y$ , no centro do guia.

A discretização espacial é constante na direção  $y$  e não uniforme na direção  $x$  (Fig. 4.21).

A Fig. 4.22 mostra a convergência para o guia parcialmente preenchido com plasma com  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1,0$ ,  $\omega_p/\omega_c = \nu_c/\omega_c = 0,1$  e  $\omega_g/\omega_c = 0,1, 1,0$  e  $10,0$ , onde  $\omega_c$  é frequência de corte do modo  $TE_{10}$  do guia vazio. Neste caso,  $\omega_g$  influencia na convergência.

Na Fig. 4.23, a convergência é analisada para o guia com  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1,0$ ,  $\omega_p/\omega_c = \omega_g/\omega_c = 0,1$  e  $\nu_c/\omega_c = 0,1, 1,0$  e  $10,0$ . Neste caso,  $\nu_c$  também influencia na convergência.

### 4.4.2 Características de Dispersão

O método é utilizado para obter as características de dispersão para o guia parcialmente preenchido com dimensões  $a = 9,0 \text{ mm}$ ,  $b = 4,0 \text{ mm}$  e  $c = 4,5 \text{ mm}$ . A malha utilizada tem  $20 \times 32$  células.

A influência das frequências do plasma é estudada para dois valores de  $\epsilon_{r2}$ ,  $\epsilon_{r2} = 2,25$  e  $\epsilon_{r2} = 13,1$  com  $\epsilon_{r1} = 1,0$ .

As Figs. 4.24 e 4.25 mostram a influência de  $\omega_p$  e  $\omega_g$ , respectivamente, de acordo com a Tabela 4.1 quando  $\epsilon_{r2} = 2,25$  e as Figs. 4.26 e 4.27 mostram a influência de  $\omega_p$  e  $\omega_g$  quando  $\epsilon_{r2} = 13,1$ .

Observa-se que, para ambos os casos ( $\epsilon_{r2} = 2,25$  e  $\epsilon_{r2} = 13,1$ ),  $\omega_p$  e  $\omega_g$  tem grande influência nas características de dispersão, em toda a faixa de frequência analisada e também neste caso, com uma influência mais uniforme de  $\omega_p$ .

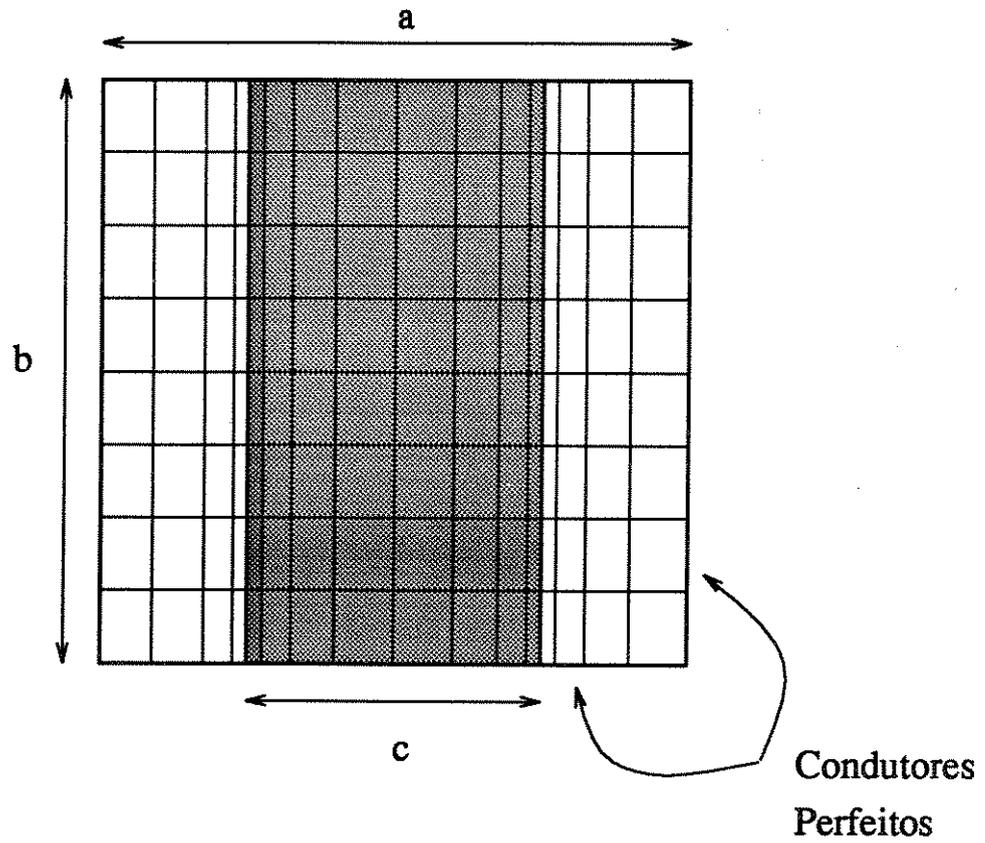


Figura 4.21: Discretização espacial para o guia parcialmente preenchido com plasma.

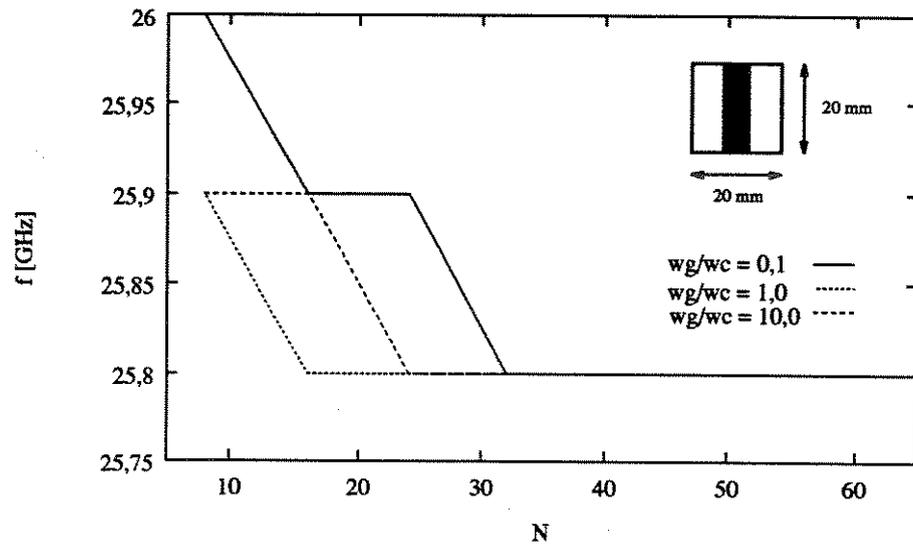


Figura 4.22: Convergência para o guia parcialmente preenchido com plasma.  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1,0$ , modo  $TE_{10}$ ,  $\beta = 0,52 \text{ rad/mm}$ ,  $\omega_p/\omega_c = \nu_c/\omega_c = 0,1$  e  $\omega_g/\omega_c = 0,1, 1,0$  e  $10,0$ .

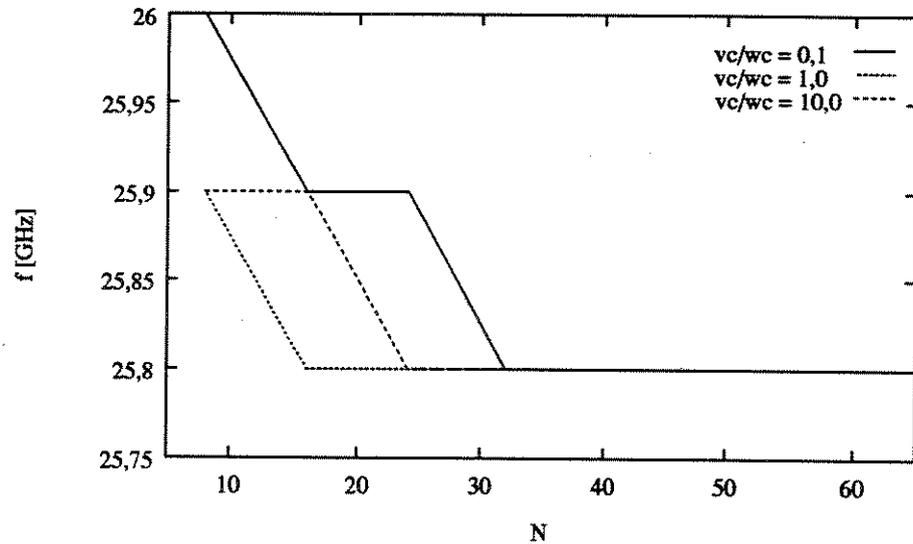


Figura 4.23: Convergência para o guia parcialmente preenchido com plasma.  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1,0$ , modo  $TE_{10}$ ,  $\beta = 1,0 \text{ rad/mm}$ ,  $\omega_p/\omega_c = \omega_g/\omega_c = 0,1$  e  $\nu_c/\omega_c = 0,1, 1,0$  e  $10,0$ .

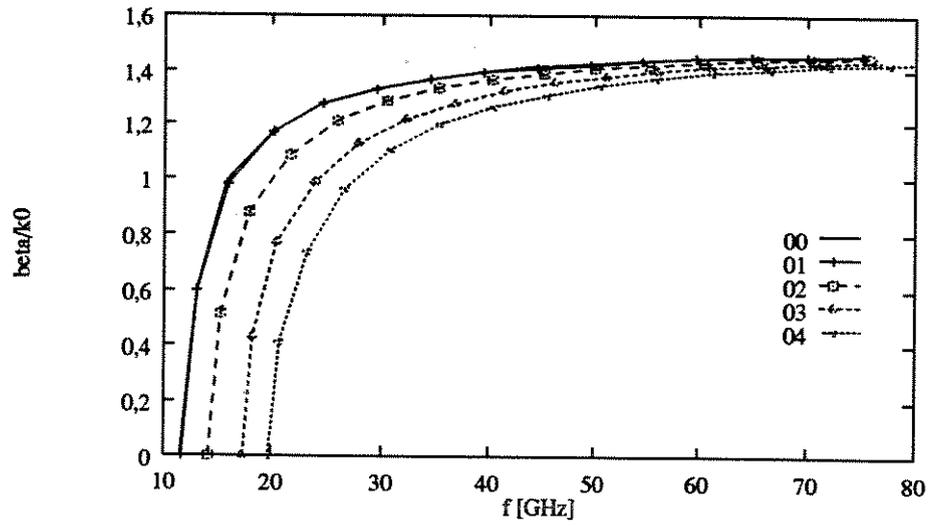


Figura 4.24: Características de dispersão do guia parcialmente preenchido com plasma.  $\mu_r = 1, 0$ ,  $\epsilon_{r1} = 1, 0$ ,  $\epsilon_{r2} = 2, 25$  e modo  $TE_{10}$ .

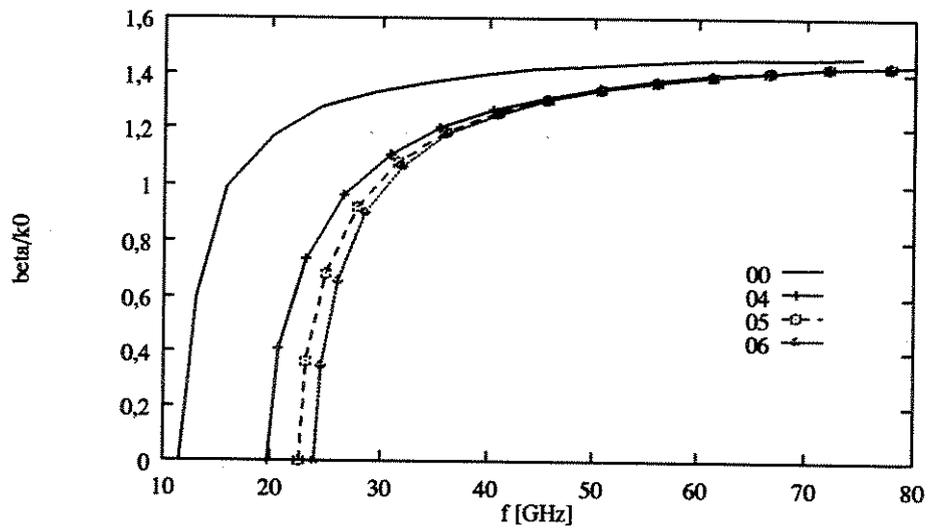


Figura 4.25: Características de dispersão do guia parcialmente preenchido com plasma.  $\mu_r = 1, 0$ ,  $\epsilon_{r1} = 1, 0$ ,  $\epsilon_{r2} = 2, 25$  e modo  $TE_{10}$ .

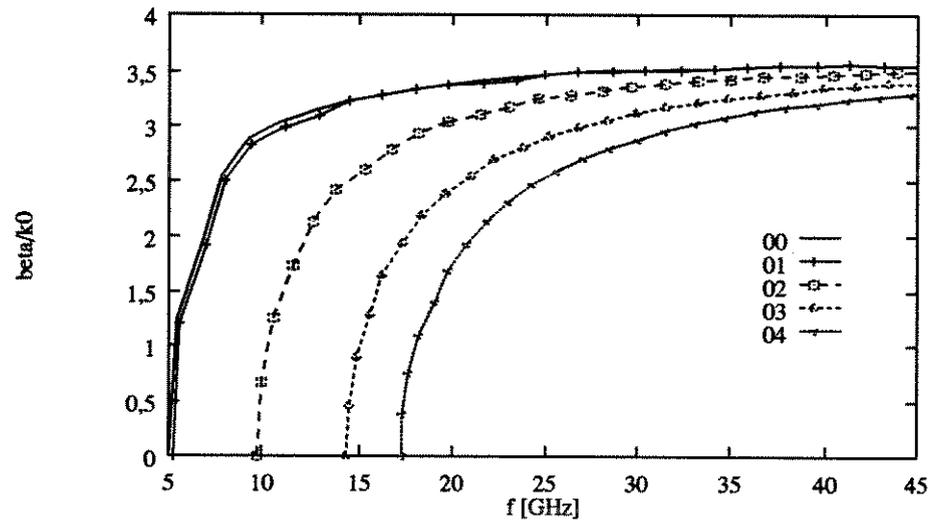


Figura 4.26: Características de dispersão do guia parcialmente preenchido com plasma.  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_{r1} = 1,0$ ,  $\epsilon_{r2} = 13,1$  e modo  $TE_{10}$ .

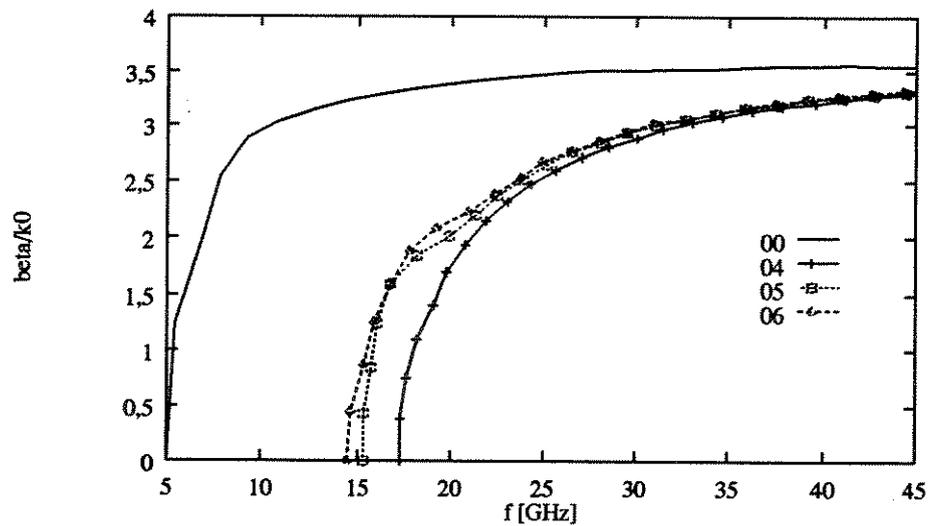


Figura 4.27: Características de dispersão do guia parcialmente preenchido com plasma.  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_{r1} = 1,0$ ,  $\epsilon_{r2} = 13,1$  e modo  $TE_{10}$ .

## 4.5 O Guia Embebido

Nesta seção, o método FDTD é aplicado ao guia embebido isotrópico e com plasma.

### 4.5.1 Estudo da Convergência

Para o guia isotrópico ( $a = b = 40 \text{ mm}$  e  $c = d = 20 \text{ mm}$ ), são realizados testes de convergência para os modos  $Ex_{11}$  e  $Ex_{22}$  e para vários valores da constante de propagação  $\beta$ .

A discretização espacial é feita de modo que a densidade de células é maior nas fronteiras entre os dois meios (Fig. 4.28).

A Fig. 4.29 mostra a convergência para os modos  $Ex_{11}$  e  $Ex_{22}$ [35], com  $\epsilon_{r1} = 1,0$ ,  $\epsilon_{r2} = 2,1$  e  $\beta = 0,52 \text{ rad/mm}$ .

Neste caso, verifica-se que o método converge mais rapidamente para o modo  $Ex_{11}$ .

A Fig. 4.30 mostra a convergência para o guia embebido com plasma com  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1,0$ ,  $\beta = 1,0 \text{ rad/mm}$ , modo  $Ex_{11}$ ,  $\omega_p/\omega_c = \nu_c/\omega_c = 0,1$  e  $\omega_g/\omega_c = 0,1, 1,0$  e  $10,0$  e a Fig. 4.31 para  $\omega_p/\omega_c = \omega_g/\omega_c = 0,1$  e  $\nu_c/\omega_c = 0,1, 1,0$  e  $10,0$ , onde  $\omega_c$  é a frequência de corte considerando o guia vazio. Observa-se que a convergência ocorre para  $N > 40$  e que ela independe de  $\omega_g/\omega_c$  e  $\nu_c/\omega_c$ .

### 4.5.2 Características de Dispersão

O método é utilizado para obter as características de dispersão para o guia embebido com dimensões  $a = 42,93 \text{ mm}$ ,  $b = 21,47 \text{ mm}$ ,  $c = 21,47 \text{ mm}$  e  $d = 10,73 \text{ mm}$ . A malha utilizada tem  $44 \times 22$  células para os casos isotrópico e com plasma.

As Figs. 4.32 e 4.33 mostram, respectivamente, a influência de  $\omega_p$  e  $\omega_g$  nas características de dispersão do guia, de acordo com a Tabela 4.1 quando  $\epsilon_{r2} = 2,25$  e as Figs. 4.34 e 4.35 mostram essa influência quando  $\epsilon_{r2} = 13,1$ . Observa-se que, para ambos os casos ( $\epsilon_{r2} = 2,25$  e  $\epsilon_{r2} = 13,1$ ), a influência de  $\omega_p$  é mais acentuada em baixas frequências e a influência de  $\omega_g$  é pequena em toda a faixa analisada.

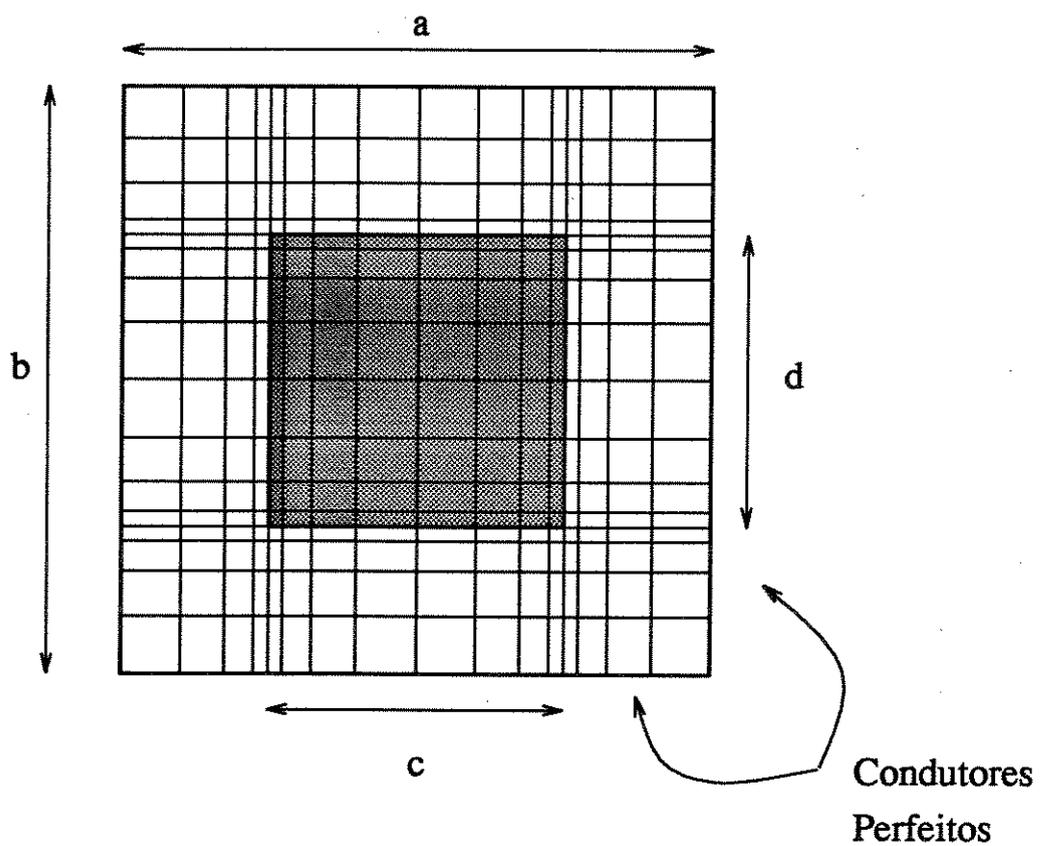


Figura 4.28: Discretização espacial para o guia embebido

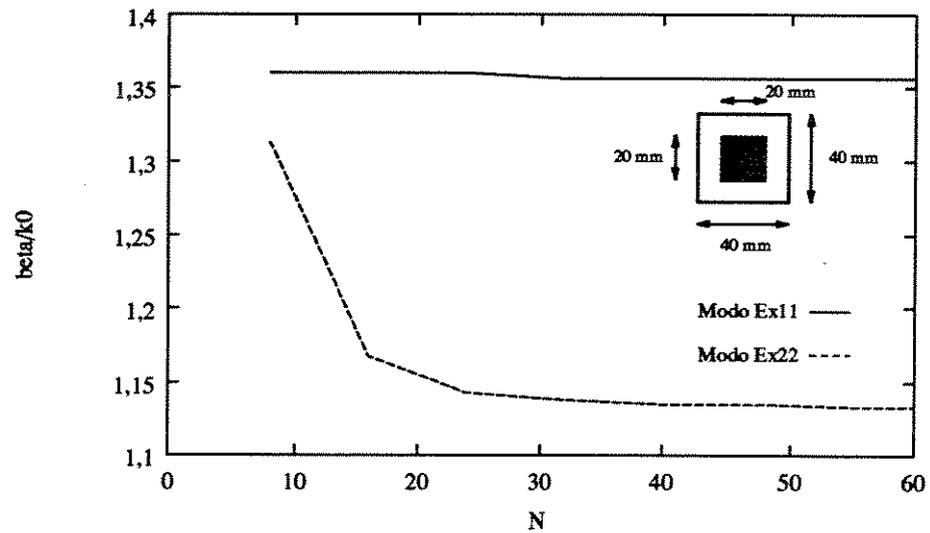


Figura 4.29: Convergência para o guia embtido isotrópico.  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_{r1} = 1,0$ ,  $\epsilon_{r2} = 2,1$ , modos  $EX_{11}$  e  $EX_{22}$  e  $\beta = 0,52 \text{ radd/mm}$ .

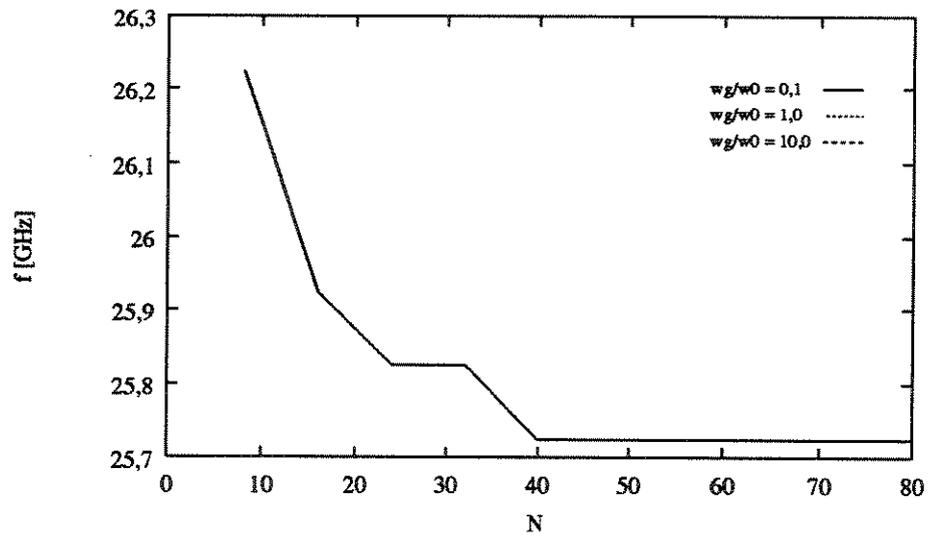


Figura 4.30: Convergência para o guia embtido com plasma.  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1,0$ , modo  $EX_{11}$ ,  $\beta = 1,0 \text{ rad/mm}$ ,  $\omega_p/\omega_c = \nu_c/\omega_c = 0,1$  e  $\omega_g/\omega_c = 0,1, 1,0$  e  $10,0$ .

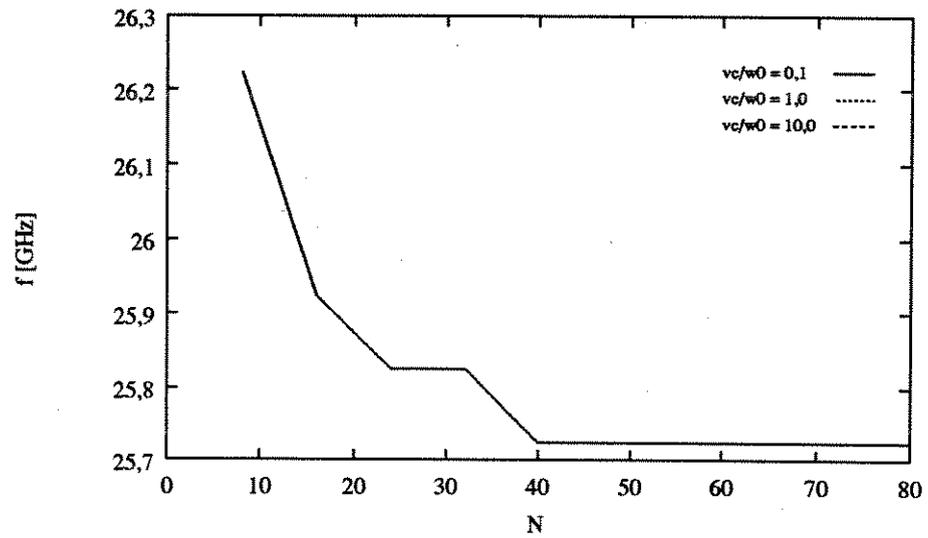


Figura 4.31: Convergência para o guia embestado com plasma.  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1,0$ , modo  $Ex_{11}$ ,  $\beta = 1,0 \text{ rad/mm}$ ,  $\omega_p/\omega_c = \omega_g/\omega_c = 0,1$  e  $\nu_c/\omega_c = 0,1, 1,0$  e  $10,0$ .

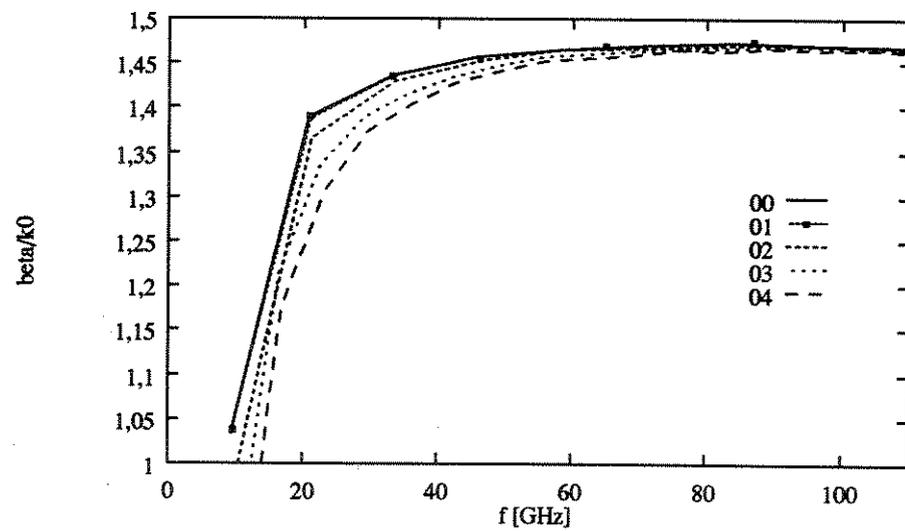


Figura 4.32: Características de dispersão do guia embestado com plasma.  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_{r1} = 1,0$ ,  $\epsilon_{r2} = 2,25$  e modo  $Ex_{11}$ .

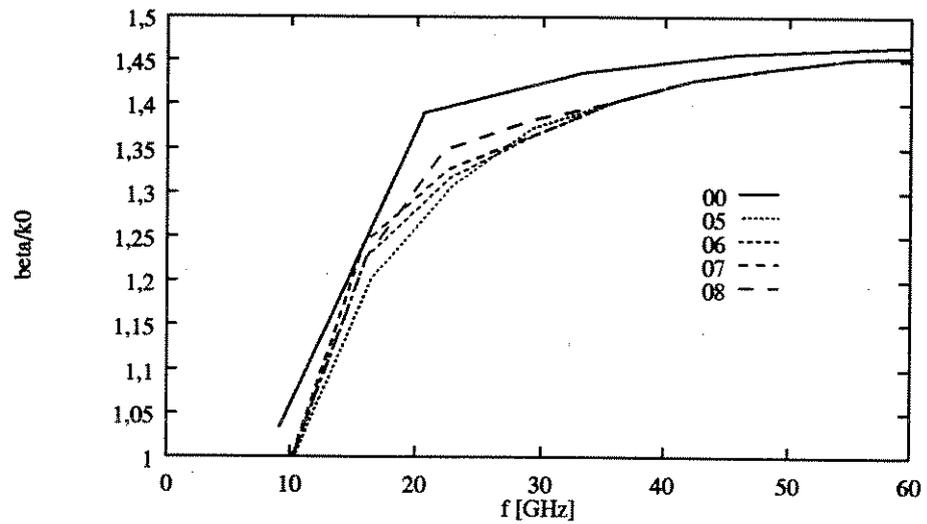


Figura 4.33: Características de dispersão do guia embebido com plasma.  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_{r1} = 1,0$ ,  $\epsilon_{r2} = 2,25$  e modo  $EX_{11}$ .

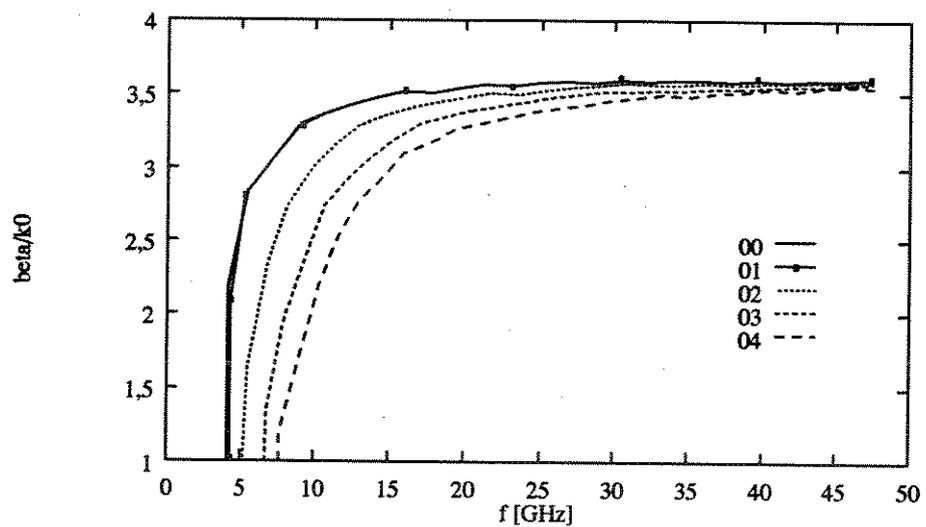


Figura 4.34: Características de dispersão do guia embebido com plasma.  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_{r1} = 1,0$ ,  $\epsilon_{r2} = 13,1$  e modo  $EX_{11}$ .

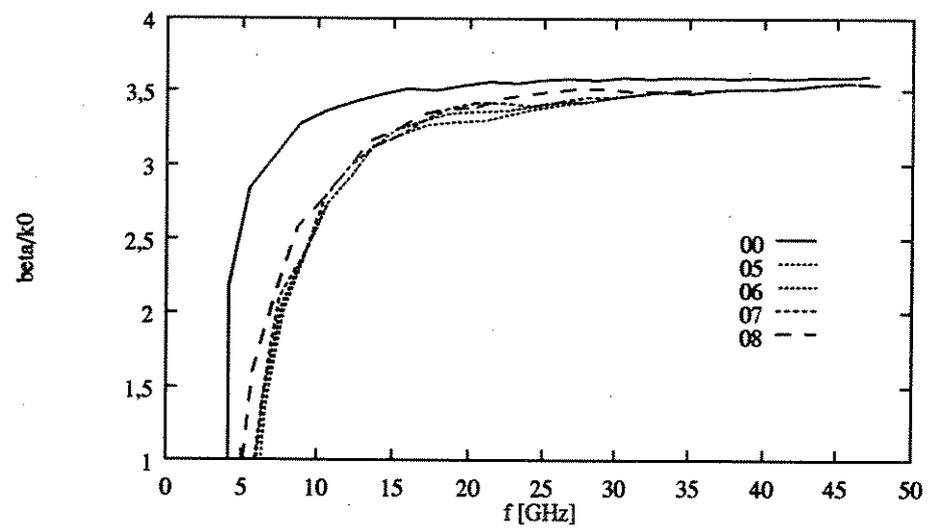


Figura 4.35: Características de dispersão do guia embebido com plasma.  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_{r1} = 1,0$ ,  $\epsilon_{r2} = 13,1$  e modo  $Ex_{11}$ .

# Capítulo 5

## Conclusões

O estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em meios giroelétricos dispersivos foi efetuado através do método das diferenças finitas no domínio dos tempos.

No método das diferenças finitas no domínio dos tempos, as componentes dos campos elétrico e magnético são obtidas em cada instante de tempo, através da discretização das equações rotacionais de Maxwell sujeitas a condições de contorno duras.

A determinação das características de propagação foi obtida a partir da transformada de Fourier das componentes do campo elétrico no centro geométrico das estruturas analisadas.

A formulação aqui apresentada é geral e pode ser aplicada na análise de estruturas bidimensionais e tridimensionais, constituídas de dielétricos isotrópicos, anisotrópicos, não dispersivos, dispersivos, com índice de refração variando arbitrariamente e estruturas com componentes metálicos.

O efeito da anisotropia elétrica e da dispersão foram investigados. Curvas da variação da frequência de ressonância da cavidade retangular e das características de dispersão do guia retangular cheio, parcialmente preenchido e do guia embebido foram apresentadas para um plasma magnetizado segundo a direção  $z$ .

O uso da malha gradual de discretização mostrou-se necessária, pois, esta permite uma economia na quantidade de memória necessária para o processamento dos programas computacionais desenvolvidos e fornece melhor precisão nos resultados obtidos. A malha gradual pode ser obtida através de uma discretização mais fina em regiões de maior densidade de potência, de modo que, a densidade de potência seja constante em cada célula da malha.

A convergência do método foi exaustivamente testada em todas as estruturas analisadas em função do modo de propagação analisado, da discretização temporal  $\delta_t$ , constante de propagação  $\beta$  (para o caso bidimensional), permissividade do meio  $\epsilon_r$  e das frequências do plasma  $\omega_p$ ,  $\omega_g$  e  $\nu_c$ .

Todos os resultados numéricos foram obtidos utilizando programas computacionais elaborados na linguagem FORTRAN e processados nos computadores IBM-3090, IBM-3191 e SUN SPARCstation 1 e 2. Os resultados para o guia WR90 (seção 4.3.2) foram obtidos através de programas elaborados no software MATLAB [24] e processados nos computadores SUN SPARCstation 10 e em microcomputador 386SX/25MHz.

Por ser um método que fornece uma boa precisão nos resultados, sua aplicação a estruturas complexas fica dependendo somente de computadores com maior capacidade de armazenamento e principalmente, de processamento.

Utilizando simulações numéricas, podemos verificar que as estruturas bidimensionais aqui analisadas apresentam reciprocidade; neste caso, características de propagação idênticas para os dois sentidos de propagação ao longo do eixo  $z$ .

Os resultados apresentados mostram que a frequência do plasma ( $\omega_p$ ) tem maior influência nas características de propagação das estruturas analisadas, principalmente para um plasma com alta permissividade relativa.

Para a cavidade, observou-se boa concordância dos resultados com os obtidos através do método dos momentos [23].

A aplicação do método a problemas de autovalores (guiamento), apresentou uma grande vantagem: É possível, de uma única vez, obtermos o valor da constante de fase normalizada ( $\beta/k_0$ ) para diversos modos propagantes na estrutura analisada, dependendo somente das condições iniciais impostas no início dos cálculos.

Uma outra vantagem do método, é que, por ser de fácil implementação, pode ser utilizado como uma excelente ferramenta didática no estudo do eletromagnetismo e da teoria de microondas e óptica.

A partir deste trabalho, outros estudos poderão ser realizados, dentro desta mesma linha de pesquisa. Como exemplo, pode-se enumerar:

- Análise de estruturas envolvendo materiais giromagnéticos, como a ferrita magnetizada.
- Análise de estruturas contendo materiais não lineares.
- Análise de estruturas que possuam simetria circular (fibras ópticas, por exemplo) através da simples substituição da discretização dos rotacionais dos campos elétrico e magnético em coordenadas retangulares pela discretização dos rotacionais em coordenadas cilíndricas.
- Estudo do espalhamento de ondas eletromagnéticas por objetos constituídos de materiais anisotrópicos e dispersivos.
- Desenvolvimento de softwares de auxílio ao ensino em eletromagnetismo, microondas e óptica.

Com o objetivo de melhorar o desempenho dos programas desenvolvidos, sugere-se:

- Substituição das condições de contorno duras utilizadas por condições de contorno absorventes. Deste modo, podemos ampliar a gama de aplicações dos programas desenvolvidos.
- Elaboração de um programa para a geração automática da malha de discretização a partir de cálculos prévios dos campos elétrico e magnético.
- Utilização de técnicas de detecção de frequências em substituição à transformada de Fourier utilizada. Com isto, estaríamos explorando, de forma mais racional, as potencialidades do método.

## Apêndice A

### Obtenção das Equações (3.65), (3.66) e (3.67)

Neste apêndice vamos deduzir as equações (3.65), (3.66) e (3.67) a partir da relação constitutiva do vetor deslocamento  $\vec{D}$  e do tensor permissividade elétrica de um plasma magnetizado segundo a direção  $z$ .

Da relação constitutiva de  $\vec{D}$ , temos :

$$\vec{D}(t) = \vec{\epsilon}(t) * \vec{E}(t) \quad (\text{A.1})$$

onde  $*$  representa o operador convolução.

Separando (A.1) em suas componentes nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$

$$D_x(t) = \epsilon[E_x(t) + \chi(t) * E_x(t) - g(t) * E_y(t)] \quad (\text{A.2})$$

$$D_y(t) = \epsilon[E_y(t) + \chi(t) * E_y(t) + g(t) * E_x(t)] \quad (\text{A.3})$$

$$D_z(t) = \epsilon[E_z(t) + \chi_z(t) * E_z(t)] \quad (\text{A.4})$$

Da definição da integral de convolução

$$D_x(t) = \epsilon[E_x(t) + \int_0^t E_x(t - \tau)\chi(\tau)d\tau - \int_0^t E_y(t - \tau)g(\tau)d\tau] \quad (\text{A.5})$$

$$D_y(t) = \epsilon[E_y(t) + \int_0^t E_y(t - \tau)\chi(\tau)d\tau + \int_0^t E_x(t - \tau)g(\tau)d\tau] \quad (\text{A.6})$$

$$D_z(t) = \epsilon[E_z(t) + \int_0^t E_z(t - \tau)\chi_z(\tau)d\tau] \quad (\text{A.7})$$

A discretização temporal das equações acima é feita substituindo a variável  $t$  por  $n\delta_t$ . Desta forma, da equação (A.5), temos :

$$D_x^n = \varepsilon[E_x^n + \int_0^{n\delta_t} E_x(n\delta_t - \tau)\chi(\tau)d\tau - \int_0^{n\delta_t} E_y(n\delta_t - \tau)g(\tau)d\tau] \quad (\text{A.8})$$

Assumindo que as componentes do campo elétrico  $E_x$ ,  $E_y$  e  $E_z$  são constantes durante o intervalo  $\delta_t$ , então

$$D_x^n = \varepsilon[E_x^n + \sum_{m=0}^{n-1} E_x^{n-m} \int_{m\delta_t}^{(m+1)\delta_t} \chi(\tau)d\tau - \sum_{m=0}^{n-1} E_y^{n-m} \int_{m\delta_t}^{(m+1)\delta_t} g(\tau)d\tau] \quad (\text{A.9})$$

e

$$D_x^{n+1} = \varepsilon[E_x^{n+1} + \sum_{m=0}^n E_x^{n+1-m} \int_{m\delta_t}^{(m+1)\delta_t} \chi(\tau)d\tau - \sum_{m=0}^n E_y^{n+1-m} \int_{m\delta_t}^{(m+1)\delta_t} g(\tau)d\tau] \quad (\text{A.10})$$

Subtraindo (A.9) de (A.10)

$$\begin{aligned} D_x^{n+1} - D_x^n &= \varepsilon\{(E_x^{n+1} - E_x^n) + \\ &+ [E_x^{n+1}\chi^0 + \sum_{m=1}^n E_x^{n+1-m} \int_{m\delta_t}^{(m+1)\delta_t} \chi(\tau)d\tau - \sum_{m=0}^{n-1} E_x^{n-m} \int_{m\delta_t}^{(m+1)\delta_t} \chi(\tau)d\tau] - \\ &- [E_y^{n+1}g^0 + \sum_{m=1}^n E_y^{n+1-m} \int_{m\delta_t}^{(m+1)\delta_t} g(\tau)d\tau - \sum_{m=0}^{n-1} E_y^{n-m} \int_{m\delta_t}^{(m+1)\delta_t} g(\tau)d\tau]\} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

onde

$$\chi^0 = \int_0^{\delta_t} \chi(\tau)d\tau \quad (\text{A.12})$$

e

$$g^0 = \int_0^{\delta_t} g(\tau)d\tau \quad (\text{A.13})$$

Fazendo uma substituição de variáveis do tipo  $m' = m - 1$  nos somatórios que tem limite inferior  $m = 1$ , temos :

$$\begin{aligned} D_x^{n+1} - D_x^n &= \varepsilon\{(1 + \chi^0)E_x^{n+1} - E_x^n - g^0 E_y^{n+1} + \\ &+ \sum_{m=0}^{n-1} \{E_x^{n-m} [\int_{(m+1)\delta_t}^{(m+2)\delta_t} \chi(\tau)d\tau - \int_{m\delta_t}^{(m+1)\delta_t} \chi(\tau)d\tau]\} - \\ &- \sum_{m=0}^{n-1} \{E_y^{n-m} [\int_{(m+1)\delta_t}^{(m+2)\delta_t} g(\tau)d\tau - \int_{m\delta_t}^{(m+1)\delta_t} g(\tau)d\tau]\} \} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Definindo

$$\Delta\chi^m = \chi^m - \chi^{m+1} \quad (\text{A.15})$$

e

$$\Delta g^m = g^m - g^{m+1} \quad (\text{A.16})$$

onde

$$\chi^m = \int_{m\delta_t}^{(m+1)\delta_t} \chi(\tau) d\tau \quad (\text{A.17})$$

e

$$g^m = \int_{m\delta_t}^{(m+1)\delta_t} g(\tau) d\tau \quad (\text{A.18})$$

podemos re-escrever a equação (A.14) da seguinte forma :

$$D_x^{n+1} - D_x^n = \varepsilon \left\{ (1 + \chi^0) E_x^{n+1} - E_x^n - g^0 E_y^{n+1} - \sum_{m=0}^{n-1} [E_x^{n-m} \Delta \chi^m - E_y^{n-m} \Delta g^m] \right\} \quad (\text{A.19})$$

Discretizando no tempo a equação de Maxwell

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = c \nabla \times \vec{H} \quad (\text{A.20})$$

obtemos :

$$D_x^{n+1} - D_x^n = c\delta t [\nabla \times \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}]_x. \quad (\text{A.21})$$

Substituindo (A.21) em (A.19) e resolvendo para  $E_x^{n+1}$ , temos :

$$E_x^{n+1} = \frac{1}{1 + \chi^0} \left\{ E_x^n + g^0 E_y^{n+1} + \sum_{m=0}^{n-1} [E_x^{n-m} \Delta \chi^m - E_y^{n-m} \Delta g^m] + \frac{c\delta t}{\varepsilon} [\nabla \times \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}]_x \right\}. \quad (\text{A.22})$$

De maneira análoga,

$$E_y^{n+1} = \frac{1}{1 + \chi^0} \left\{ E_y^n - g^0 E_x^{n+1} + \sum_{m=0}^{n-1} [E_y^{n-m} \Delta \chi^m + E_x^{n-m} \Delta g^m] + \frac{c\delta t}{\varepsilon} [\nabla \times \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}]_y \right\}. \quad (\text{A.23})$$

Substituindo (A.23) em (A.22)

$$E_x^{n+1} = k_1 \left\{ E_x^n + k_2 [E_y^n + A_y^n + \frac{c\delta t}{\varepsilon} [\nabla \times \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}]_y] + A_x^n + \frac{c\delta t}{\varepsilon} [\nabla \times \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}]_x \right\} \quad (\text{A.24})$$

onde

$$A_x^n = \sum_{m=0}^{n-1} [E_x^{n-m} \Delta \chi^m - E_y^{n-m} \Delta g^m], \quad (\text{A.25})$$

$$A_y^n = \sum_{m=0}^{n-1} [E_y^{n-m} \Delta \chi^m + E_x^{n-m} \Delta g^m], \quad (\text{A.26})$$

$$k_1 = \frac{(1 + \chi^0)}{(1 + \chi^0)^2 + (\varepsilon g^0)^2} \quad (\text{A.27})$$

e

$$k_2 = \frac{g^0}{1 + \chi^0}. \quad (\text{A.28})$$

Substituindo (A.22) em (A.23)

$$E_y^{n+1} = k_1 \{ E_y^n - k_2 [E_x^n + A_x^n + \frac{c\delta t}{\varepsilon} [\nabla \times \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}]_x] + A_y^n + \frac{c\delta t}{\varepsilon} [\nabla \times \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}]_y \}. \quad (\text{A.29})$$

Repetindo o procedimento anterior para a componente  $E_z$ , obtemos :

$$E_z^{n+1} = k_3 \{ E_z^n + A_z^n + \frac{c\delta t}{\varepsilon} [\nabla \times \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}]_z \} \quad (\text{A.30})$$

onde

$$A_z^n = \sum_{m=0}^{n-1} E_z^{n-m} \Delta \chi_z^m, \quad (\text{A.31})$$

$$k_3 = \frac{1}{1 + \chi_z^0}, \quad (\text{A.32})$$

$$\chi_z^0 = \int_0^{\delta t} \chi_z(\tau) d\tau, \quad (\text{A.33})$$

$$\Delta \chi_z^m = \chi_z^m - \chi_z^{m+1}, \quad (\text{A.34})$$

e

$$\chi_z^m = \int_{m\delta t}^{(m+1)\delta t} \chi_z(\tau) d\tau. \quad (\text{A.35})$$

As equações (A.25), (A.26) e (A.31) devem ser calculadas de forma recursiva. Para isto, vamos definir

$$\hat{\Psi}^n = \sum_{m=0}^{n-1} R^{n-m} \Delta \hat{\chi}^m \quad (\text{A.36})$$

onde  $R$  representa  $E_x$  ou  $E_y$ .

Utilizando a equação (3.56), podemos escrever

$$\hat{I} = \int \hat{\chi}(\tau) d\tau = \int k_w \gamma^* [1 - e^{-\gamma\tau}] d\tau \quad (\text{A.37})$$

resolvendo (A.37), temos

$$\hat{I} = k_w \gamma^* [\tau + \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\tau}] = \hat{I}(\tau). \quad (\text{A.38})$$

Da equação (A.15), temos

$$\Delta \hat{\chi}^m = \hat{\chi}^m - \hat{\chi}^{m+1} = \hat{I}|_{m\delta t}^{(m+1)\delta t} - \hat{I}|_{(m+1)\delta t}^{(m+2)\delta t} \quad (\text{A.39})$$

e

$$\Delta \hat{\chi}^m = 2\hat{I}((m+1)\delta t) - \hat{I}(m\delta t) - \hat{I}((m+2)\delta t) \quad (\text{A.40})$$

substituindo (A.38) em (A.40) obtemos

$$\Delta \hat{\chi}^m = -k_w \frac{\gamma^*}{\gamma} e^{-\gamma m \delta t} (1 - e^{-\gamma \delta t})^2 \quad (\text{A.41})$$

e

$$\Delta \hat{\chi}^{m+1} = e^{-\gamma \delta t} \Delta \hat{\chi}^m. \quad (\text{A.42})$$

Voltando à equação (A.36)

$$\hat{\Psi}^n = \sum_{m=0}^{n-1} R^{n-m} \Delta \hat{\chi}^m = R^n \Delta \hat{\chi}^0 + \sum_{m=1}^{n-1} R^{n-m} \Delta \hat{\chi}^m \quad (\text{A.43})$$

$$\hat{\Psi}^n = R^n \Delta \hat{\chi}^0 + \sum_{m=0}^{n-2} R^{n-1-m} \Delta \hat{\chi}^{m+1}. \quad (\text{A.44})$$

Substituindo (A.42) em (A.44)

$$\hat{\Psi}^n = R^n \Delta \hat{\chi}^0 + e^{-\gamma \delta t} \sum_{m=0}^{(n-1)-1} R^{(n-1)-m} \Delta \hat{\chi}^m \quad (\text{A.45})$$

que nos leva a

$$\hat{\Psi}^n = R^n \Delta \hat{\chi}^0 + e^{-\gamma \delta t} \hat{\Psi}^{n-1}. \quad (\text{A.46})$$

Definindo

$$\hat{\Psi}_{xx}^n = \sum_{m=0}^{n-1} E_x^{n-m} \Delta \hat{\chi}^m, \quad (\text{A.47})$$

$$\hat{\Psi}_{yy}^n = \sum_{m=0}^{n-1} E_y^{n-m} \Delta \hat{\chi}^m, \quad (\text{A.48})$$

$$\hat{\Psi}_{xy}^n = \sum_{m=0}^{n-1} E_y^{n-m} \Delta \hat{g}^m, \quad (\text{A.49})$$

e

$$\hat{\Psi}_{yx}^n = \sum_{m=0}^{n-1} E_x^{n-m} \Delta \hat{g}^m. \quad (\text{A.50})$$

Podemos re-escrever as equações (A.25) e (A.26) da seguinte forma :

$$\hat{A}_x^n = \hat{\Psi}_{xx}^n - \hat{\Psi}_{xy}^n \quad (\text{A.51})$$

e

$$\hat{A}_y^n = \hat{\Psi}_{yy}^n + \hat{\Psi}_{yx}^n. \quad (\text{A.52})$$

Substituindo (A.46) em (A.51)

$$\hat{A}_x^n = E_x^n \Delta \hat{\chi}^0 + e^{-\gamma \delta t} \hat{\Psi}_{xx}^{n-1} - E_y^n \Delta \hat{g}^0 - e^{-\gamma \delta t} \hat{\Psi}_{xy}^{n-1} \quad (\text{A.53})$$

como  $\Delta \hat{g}^0 = -j \Delta \hat{\chi}^0$ ,

$$\hat{A}_x^n = (E_x^n + j E_y^n) \Delta \hat{\chi}^0 + e^{-\gamma \delta t} \hat{A}_x^{n-1} \quad (\text{A.54})$$

e

$$A_x^n = \Re[\hat{A}_x^n]. \quad (\text{A.55})$$

Substituindo (A.46) em (A.52), temos

$$\hat{A}_y^n = (E_y^n - j E_x^n) \Delta \hat{\chi}^0 + e^{-\gamma \delta t} \hat{A}_y^{n-1} \quad (\text{A.56})$$

e

$$A_y^n = \Re[\hat{A}_y^n]. \quad (\text{A.57})$$

De maneira análoga, obtemos

$$A_z^n = E_z^n \Delta \chi_z^0 + e^{-\nu_c \delta t} A_z^{n-1}. \quad (\text{A.58})$$

## Bibliografia

- [1] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, vol. AP-14, pp. 302-307, maio 1966.
- [2] A. Taflove e M. E. Brodwin, "Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-23, no. 8, pp. 623-630, agosto 1975.
- [3] K. Kunz e K. Lee, "A three-dimensional finite-difference solution of external response of an aircraft to a complex transient EM environment: Part I - method and its implementation," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 20, no. 2, 1978.
- [4] A. Taflove, "Review of the formulation and applications of the finite-difference time-domain method for numerical modeling of electromagnetic wave interactions with arbitrary structures," *Wave Motion*, vol. 10, pp. 547-582, 1988.
- [5] A. Taflove e M. E. Brodwin, "Computation of the electromagnetic fields and induced temperatures within a model of the microwave-irradiated human eye," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-23, no. 11, pp. 888-896, novembro 1975.
- [6] D. M. Sullivan, D. T. Borup e O. P. Gandhi, "Use of the finite-difference time domain method in calculating EM absorption in human tissues," *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 34, pp. 148-157, 1987.
- [7] D. M. Sullivan, O. P. Gandhi e A. Taflove, "Use of the finite-difference time domain-method in calculating EM absorption in man models," *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 35, pp. 179-186, 1988.
- [8] A. Taflove e K. R. Umashankar, "Review of FD-TD numerical modeling of electromagnetic wave scattering and radar cross section," *Proc. IEEE*, pp. 682-699, maio 1989.

- [9] A. Taflove, "Application of finite-difference time domain-method to sinusoidal steady state electromagnetic penetration problems," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 22, pp. 191-202, agosto 1980.
- [10] K. R. Umashankar e A. Taflove, "A novel method to analyse electromagnetic scattering of complex objects," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 24, pp. 397-405, novembro 1982.
- [11] A. Taflove e K. R. Umashankar, "Radar cross section of general three-dimensional scatterers," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 25, pp. 433-440, novembro 1983.
- [12] R. Luebbers, F. Hunsberger, K. Kunz, R. Standler, e M. Schneider, "A frequency-dependent finite-difference time-domain formulation for dispersive materials," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 32, no. 3, pp. 222-227, agosto 1990.
- [13] R. Luebbers, F. Hunsberger, e K. Kunz, "A frequency-dependent finite-difference time-domain formulation for transient propagation in plasma," *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, vol. AP-39, pp. 29-34, janeiro 1991.
- [14] F. Hunsberger, R. Luebbers, e K. Kunz, "Finite-difference time-domain analysis of gyrotropic media - I: Magnetized plasma," *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, vol. AP-40, no. 12, pp. 1489-1495, dezembro 1992.
- [15] D. H. Choi e W. J. R. Hoefer, "The finite-difference-time-domain method and its application to eigenvalue problems," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-34, no. 12, pp. 1464-1469, dezembro 1986.
- [16] M. Okoniewski, "Vector wave equation 2D-FDTD method for guided wave problems," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 3, no. 9, pp.307-309, setembro 1993.
- [17] S. Xiao, R. Vahldieck e H. Jin, "Full-wave analysis of guided wave structures using a novel 2D-FDTD," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 2, no. 5, pp.165-167, maio 1992.
- [18] F. Arndt, et al, "An improved FD-TD full wave analysis for arbitrary guiding structures using a two-dimensional mesh," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, Albuquerque, NM, pp. 389-392, 1992.
- [19] A. Asi e L. Shafai, "Dispersion analysis of anisotropic inhomogeneous waveguide using compact 2D-FDTD," *Electronics Letters* , vol. 28, no. 15, pp. 1451-1452, julho 1992.

- [20] A. C. Cangellaris, "Numerical stability and numerical dispersion of a compact 2D-FDTD method used for dispersion analysis of waveguides," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 3, no. 1, pp.3-5, janeiro 1993.
- [21] C. D. Taylor, D. H. Larn e T. H. Shumpert, "Electromagnetic pulse scattering in time varying propagat.," *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, vol. AP-17, pp. 586-589, setembro 1969.
- [22] G. Mur, "Absorbing conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 23, no. 11, pp. 377-382, novembro 1981.
- [23] R. F. Harrington, "*Field Computation by Moment Methods*," Krieger P. Company, Malabar, Florida, 1968, Cap. 9, p. 172.
- [24] *MATLAB Reference Guide*, The Mathworks, Inc, agosto 1992.
- [25] A. Ishimaru, "*Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*," Prentice Hall, New Jersey, 1991, Cap. 8, p. 205.
- [26] T. Van Duzer, J. R. Whinnery e S. Ramo, "*Fields and Waves in Communication Electronics*," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993, 3 ed., Cap. 13, p. 677.
- [27] P. Yeh e A. Yariv, "*Optical Waves in Crystals*," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984, Cap. 4, p. 69.
- [28] C. Johnson, "*Field and Wave Electrodynamics*," McGraw-Hill Book Company, New York, 1965, Cap. 11, p. 370.
- [29] R. E. Collin, "*Foundations for Microwave Engineering*," McGraw-Hill Book Company, New York, 1992, 2nd. ed., Cap. 2, p. 17.
- [30] B. Engquist<sup>77</sup> e A. Majda, "Absorbing boundary conditions for the numerical simulation waves," *Mathematics of Computation*, vol. 31, no. 139, pp. 629-651, julho 1977.
- [31] P. A. Tirkas, C. A. Balanis e R. A. Renaut, "Higher order absorbing boundary conditions for the finite-difference time-domain method," *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, vol. AP-40, no. 10, pp. 1215-1222, outubro 1992.
- [32] C. M. Krowne, "Waveguiding structures employing the solid-state magnetoplasma effect for microwave and millimetre-wave propagation," *IEE Proceedings-H*, vol. 140, no. 3, pp. 147-164, junho 1993.
- [33] P. J. Davies et al., "*Methods of Numerical Integration*," Academic Press, New York, 1975, Cap. 2 p. 27.

- [34] C. A. Balanis, "*Advanced Engineering Electromagnetics*," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989, Cap. 8, p. 352.
- [35] C. L. S. S. Sobrinho, "*Método Rigoroso das Diferenças Finitas em Análise de Estruturas de Guias Dielétricos Anisotrópicos com Perfil de Índice de Refração Variável*," 1992, Tese de Doutorado, FEE-UNICAMP, Campinas - SP.