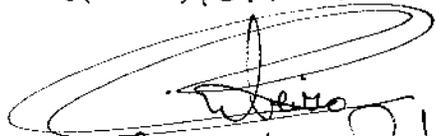


Este exemplar corresponde a redação
final da tese defendida por Ronald An-
tonio Avelar Flores e aprovada pela Comis-
são julgadora em 15/07/1985


Raul Vitor Ribeiro

MÉTODO DE PARTIÇÃO PRIMAL PARA REDES
MULTIFLUXO - UMA APLICAÇÃO A PROBLEMAS
DE LOCALIZAÇÃO DE ARMAZÉNS AGRÍCOLAS

TESE DE MESTRADO
apresentada à

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

por

RONALD ANTONIO AVELAR FLORES

MÉTODO DE PARTIÇÃO PRIMAL PARA REDES
MULTIFLUXO - UMA APLICAÇÃO A PROBLEMAS
DE LOCALIZAÇÃO DE ARMAZÉNS AGRÍCOLAS

Orientador: RAUL VINHAS RIBEIRO

JULHO - 85

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Raul V. Ribeiro pela excelente orientação.

Aos Professores Hermano, Akebo e França por sua colaboração neste trabalho.

Aos Professores Secundino e Jurandir.

Ao Sr. Milton Xavier do IPT por sua colaboração na obtenção das informações.

A todos meus amigos da UNICAMP, em especial Marcius, Casilda e Ferreira.

A Olga por seu excelente trabalho de datilografia.

Ao Luis por seus ótimos desenhos.

Este trabalho contou com o suporte da Universidade Nacional Autônoma de Honduras e da CAPES.

À Maria José, Eduardo e Anne

À meus pais e irmãos

ÍNDICE

PARTE I:

O PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO - MODELAMENTO E MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

INTRODUÇÃO	2
CAPÍTULO I	
O PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO	3
1.1. INTRODUÇÃO	3
1.2. O PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO	3
1.3. EXTENSÕES DO MODELO MATEMÁTICO	8
1.3.1. Funções não Lineares	8
1.3.2. Mais de um Produto na Rede	11
1.3.3. Outras Extensões	13
CAPÍTULO 2	
MODELAMENTO EM REDES CAPACITADAS	14
2.1. INTRODUÇÃO	14
2.2. REDE DE TRANSPORTE	14
2.3. SISTEMAS DE ARMAZENAGEM	17
2.4. MAIS DE UM PRODUTO NO SISTEMA	21
2.5. PROCESSAMENTOS E OPERAÇÕES NOS PRODUTOS	22
CAPÍTULO 3	
MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO	23
3.1. INTRODUÇÃO	23
3.2. SISTEMÁTICA DE RESOLUÇÃO	23

.../.

3.3. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO EM REDES CAPACITADAS	23
3.4. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM FUNÇÕES NÃO LINEARES	25
3.5. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO	26
3.5.1. Métodos Heurísticos	26
3.5.2. Métodos de Separação e Avaliação	27
3.5.3. Métodos de Decomposição	28

PARTE II:

O PROGRAMA COMPUTACIONAL

INTRODUÇÃO	30
------------------	----

CAPÍTULO 4

4.1. O PROBLEMA MULTIFLUXO (PM)	31
4.2. CARACTERIZAÇÃO DA BASE	32
4.3. OBTENÇÃO DA MATRIZ DE CICLOS Q	36
4.4. CÁLCULO DAS VARIÁVEIS DUAIS	37
4.5. CÁLCULO DOS CUSTOS RELATIVOS DAS VARIÁVEIS NÃO BÁSICAS	41
4.6. EXPRESSÃO DO VETOR NÃO BÁSICO N^t EM TERMOS DA BASE CORRENTE B	42
4.7. OBTENÇÃO DA VARIÁVEL QUE SAI DA BASE	44
4.8. ATUALIZAÇÃO DA BASE	45
4.9. O PROGRAMA	46
4.9.1. Inicialização	46
4.9.2. Fase de Otimização	48

.../.

CAPÍTULO 5

PROGRAMAS DE CUSTOS NÃO LINEARES E DE LOCALIZAÇÃO	55
5.1. O PROGRAMA PARA FUNÇÕES DE CUSTO NÃO LINEARES	55
5.1.1. Introdução	55
5.1.2. Procedimento de Resolução	55
5.1.3. O programa	56
5.1.4. Convergência	58
5.2. PROGRAMA PARA LOCALIZAÇÃO DE ARMAZÉNS	58
5.2.1. Introdução	58
5.2.2. O Programa	60

PARTE III

APLICAÇÃO E CONCLUSÃO

INTRODUÇÃO	66
------------------	----

CAPÍTULO 6

APLICAÇÃO DO MODELO	67
6.1 - O Exemplo	67
6.2 - Rede de Transporte	67
6.3 - Rede de Armazenagem	72
6.4 - Experiências Computacionais	74

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	85
7.1 - Conclusões	85
7.2 - Recomendações	86

BIBLIOGRAFIA	87
--------------------	----

SUMÁRIO

O presente trabalho, dividido em três partes, trata na primeira delas da apresentação do problema de localização de armazéns agrícolas, seu modelamento como uma rede capacitada e os métodos que o resolvem. Na segunda parte, desenvolve-se o programa computacional, que resolve o problema de localização, utilizando-se três métodos; um método de partição primal para a resolução da rede multifluxo de custo mínimo, um método iterativo para a resolução de funções de custo não lineares e um método heurístico para a localização de armazéns agrícolas. Na terceira parte faz-se uma aplicação prática do programa em um problema de armazenamento de milho e soja no Estado de São Paulo.

PARTE I

PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO

MODELAMENTO E MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

INTRODUÇÃO

O crescimento acentuado verificado na demanda, as deficiências nos sistemas de distribuição e os incentivos à produção provocam a necessidade de administrar a comercialização da oferta alimentícia. A administração inclui a criação de estoques em tempo de colheita, a oferta segura de alimentos em tempo de escassez, e o controle de qualidade dos produtos. Uma das ferramentas com que conta a administração é a criação de estoques reguladores; para tal fim deve-se adotar técnicas modernas de planejamento da expansão da capacidade armazenadora de forma a otimizar os custos de investimento e os custos sociais.

A finalidade da parte I composta dos capítulos 1, 2 e 3 desta tese, é a de apresentar uma metodologia para a resolução do problema de localização de armazéns agrícolas e por conseguinte o problema de distribuição de produtos agrícolas. Primeiramente é apresentado o modelo matemático no Capítulo 1, no Capítulo 2 o modelo é abordado como uma rede capacitada, e por último, no Capítulo 3 são apresentados os métodos mais comuns para a resolução do problema.

CAPÍTULO 1

O PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO

1.1 - INTRODUÇÃO

O planejamento de expansão de uma rede de centros de armazenagem deve determinar as ampliações dos existentes e/ou criação de novos centros, deve ainda detectar pontos de estrangulamento do sistema e definir a forma de distribuição dos produtos na rede. O problema de localização (implementação e ampliação) dos centros de armazenagem é talvez o ponto fundamental na elaboração deste planejamento. Neste capítulo é desenvolvido o modelo matemático do problema de localização agregando aspectos particulares que os problemas possam conter.

1.2 - O PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO

O problema de localização de armazéns agrícolas pode ser definido da seguinte forma:

- . Deve-se implementar ou ampliar um conjunto de centros de armazenagem ($j=1, \dots, m$) em um número finito de pontos candidatos, previamente selecionados como potencialmente mais atrativos.
- . Estes centros de armazenagem devem estocar a oferta de uma série de centros produtores ($i=1, \dots, t$) e atender a demanda de uma série de centros de consumo ($k=1, \dots, n$).
- . Devem ser conhecidas as funções de custo de transporte, armazenagem e ampliação e/ou implementação de armazéns.

O problema consiste em determinar em que locais e o número de armazéns que devem ser implementados e/ou ampliados; o tamanho e capacidade que deverá ter cada um deles; a distribuição de fluxo entre os diferentes centros (armazenagem, consumo e produção); e os pontos de estrangulamento do sistema.

Na figura 1.1 é apresentado em forma de uma rede um sistema de distribuição, onde os nós são os centros de armazenagem, consumo e/ou produção; e os arcos são transferência de fluxo entre os nós. Observa-se que um armazém é representado por dois nós e um arco, onde os nós representam entrada e saída dos armazéns, e o arco a atividade armazenadora com capacidade apropriada. As setas significam entrada ou saída dos produtos da rede.

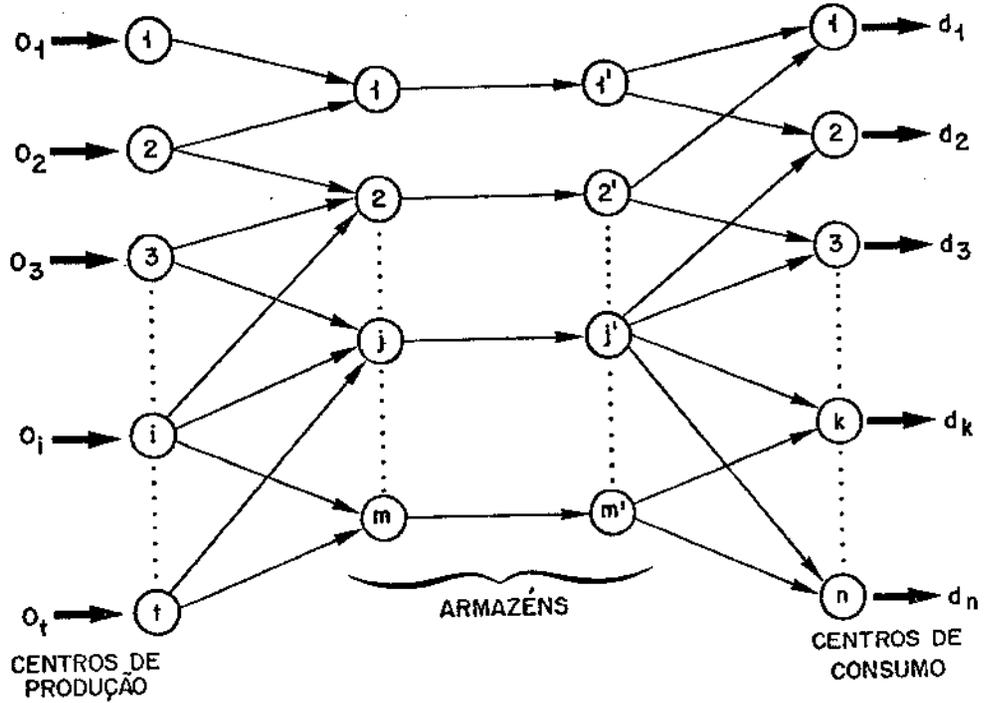


Figura 1.1.

Matematicamente o problema de localização pode ser formulado da seguinte forma, que denominaremos PL1:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^m \sum_{j'=1}^{m'} (F_{jj'} y_{jj'} + G_{jj'} x_{jj'}) + \\ & \sum_{j'=1}^{m'} \sum_{k=1}^n c_{j'k} x_{j'k} \end{aligned} \quad (1)$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = o_i \quad i = 1, \dots, t \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{m'} x_{j',k} = d_k \quad k=1, \dots, n \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^t x_{ij} - x_{jj'} = 0 \text{ para todo } j=j' \quad (4)$$

$$(PL1) \quad x_{jj'} - \sum_{k=1}^n x_{j',k} = 0 \text{ para todo } j=j' \quad (5)$$

$$x_{ij} \leq M_{ij} \text{ para todo } i \text{ e } j \quad (6)$$

$$x_{j',k} \leq M_{j',k} \text{ para todo } j' \text{ e } k \quad (7)$$

$$x_{jj'} \leq M_{jj'} y_{jj'} \text{ para todo } j=j' \quad (8)$$

$$x_{ij}, x_{jj'}, \text{ e } x_{j',k} \geq 0 \quad (9)$$

$$y_{jj'} = 0 \text{ ou } 1 \text{ para todo } j=j' \quad (10)$$

onde:

c_{ij} = custo unitário de transporte do centro de produção i à entrada do armazem j

$c_{j',k}$ = custo unitário de transporte da saída do armazem j' ao centro de demanda k .

$F_{jj'}$ = custo fixo do armazem jj'

$G_{jj'}$ = custo marginal do armazem jj'

x_{ij} = quantidade do produto enviado do centro de produção i à entrada do armazem j .

$x_{jj'}$ = produto armazenado em jj' .

- $x_{j',k}$ = quantidade do produto enviada da saída do armazem j' ao centro de consumo k .
 o_i = oferta do produto no centro de produção i .
 d_k = demanda do produto no centro de consumo k .
 M_{ij} = capacidade do arco de transporte ij
 $M_{jj'}$ = capacidade do arco de armazenagem jj'
 $M_{j'k}$ = capacidade do arco de transporte $j'k$
 $y_{jj'}$ = variável 0 ou 1, que é nula se o armazem não é efetivado e "1" se o é.

A função objetivo (1) procura minimizar simultaneamente os custos de transporte e os custos de armazenagem (fixos e variáveis).

As restrições tipo (2) pressupõem que toda a oferta do produto é encaminhada à rede de armazens, desde os centros de produção considerados no modelo.

As restrições tipo (3) pressupõem que toda a demanda do produto será satisfeita pela rede de armazenagens.

As restrições tipo (4) e (5) têm o mesmo significado de conservação de fluxo nos centros de armazenagens.

As restrições tipo (6) e (7) definem que os arcos de transporte são capacitados.

As restrições tipo (8) definem que os arcos de armazenagem são capacitados, a variável inteira $y_{jj'}$ assegura que o fluxo entrando ou saindo do armazem jj' seja nulo se o armazem não é efetivado e menor ou igual à capacidade do arco se o armazem é efetivado.

As restrições tipo (9) definem que os fluxos nos arcos sejam positivos.

As restrições tipo (10) são os valores que podem assumir as variáveis inteiras $y_{jj'}$.

Algumas observações devem ser feitas a respeito do problema:

- As variáveis x_{ij} e $x_{j,k}$ têm a mesma natureza, estando separadas apenas para facilidade de exposição, o mesmo comentário pode-se dizer das variáveis c_{ij} e $c_{j,k}$.
- O modelo é estático ou seja, só é considerado um período de tempo que engloba todos os aspectos sazonais do sistema.
- O modelo só considera um sentido de fluxo do produto, dos centros produtores aos armazéns e de - les aos centros de consumo.
- Na função objetivo o custo de armazenagem f_{jj} , = $F_{jj'} y_{jj'} + G_{jj'} x_{jj'}$, é constituído por um custo fixo $F_{jj'}$, mais uma parte linear, da forma da figura 1.2. O custo marginal de jj' é uma constante que não depende da quantidade de produto transitado e portanto da capacidade de armazenamento. O problema de localização com custo desta forma, é comumente conhecido na literatura como "fixed charge problem".
- A capacidade de armazenamento $M_{jj'}$, é o produto da capacidade estática do armazém pelo índice de rotação do armazém. O índice de rotação é um fator que multiplicado pela capacidade estática do armazém fornece o volume de trânsito possível durante o período tratado.

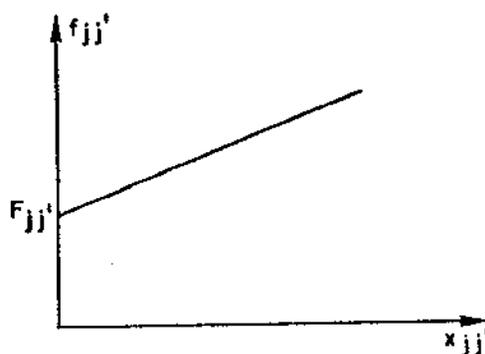


Figura 1.2.

Estudos do problema de localização encontram-se em França {7}, Monterosso {19} e Salkin {21}.

O modelo anterior deverá sofrer alterações quando se considerarem extensões do problema. A seguir estudaremos algumas dessas extensões em suas características e seu tratamento matemático.

1.3 - EXTENSÕES DO MODELO MATEMÁTICO

Entre as extensões do modelo matemático apresentado anteriormente podemos mencionar.

- A existência de funções não lineares para os custos de armazenagem.
- O sistema de distribuição opera com vários produtos.
- Outras extensões

1.3.1 - Funções não Lineares

No problema anterior é considerado o custo marginal como uma constante, onde o custo fixo não depende do fluxo circulando no arco, mas o custo unitário, calculado pela função $g_{jj'}(x_{jj'}) = F_{jj'}/x_{jj'} + G_{jj'}$, é uma função decrescente do fluxo, como aparece na figura 1.3, e pode ser considerado como economia de escala pois os custos unitários diminuem à medida que aumenta o nível da atividade econômica.

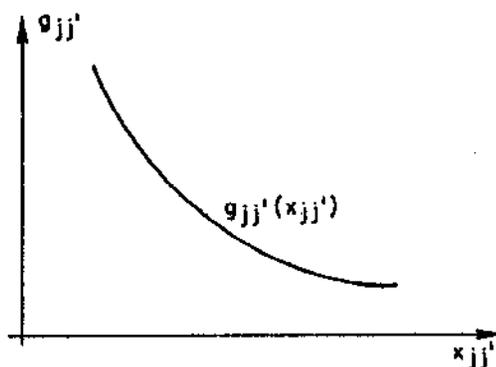


Figura 1.3

Se o custo marginal for uma função decrescente do volume de trânsito $x_{jj'}$, ter-se-á neste caso uma função do tipo $f_{jj'}(x_{jj'}) = F_{jj'} + G_{jj'}(x_{jj'})$ como aparece na figura 1.4.

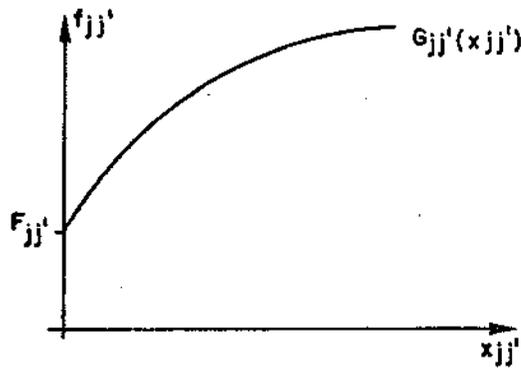


Figura 1.4

A função de custo unitário será $g_{jj'}(x_{jj'}) = F_{jj'}/x_{jj'} + G_{jj'}(x_{jj'})/x_{jj'}$, que tem a forma da figura 1.5. observa-se que esta função decresce mais rapidamente que a da figura 1.3.

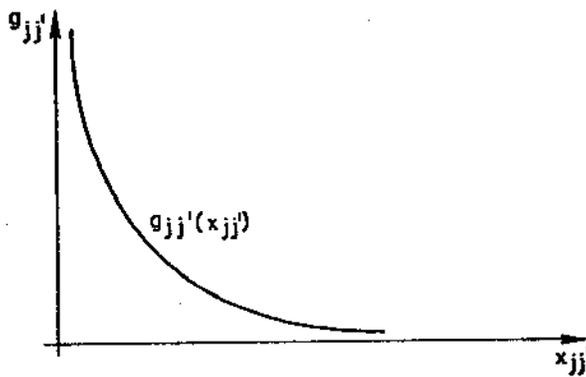


Figura 1.5

Um procedimento de resolução é aproximar a curva da figura 1.4 por uma função côncava linear por partes, o que permite utilizar métodos de programação linear mista. Esse recurso é visualizado na figura 1.6.

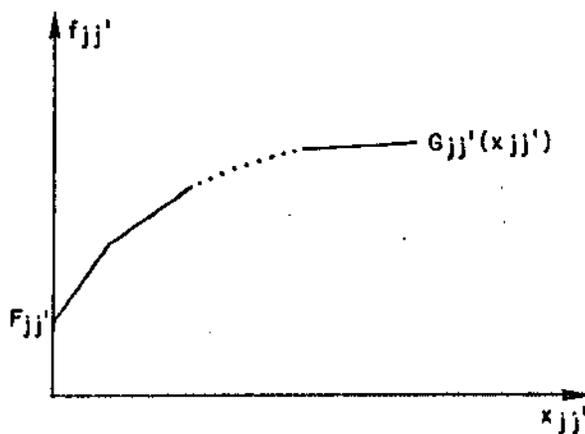


Figura 1.6

Matematicamente esta extensão é feita separando-se em parcelas os custos de armazenagem da função, objetivo, o mesmo ocorrendo para as capacidades de armazenagem, em tantas divisões quanto forem os segmentos considerados como é desenvolvido a seguir:

$$F_{jj'} + G_{jj'}(x_{jj'}) \text{ em } \sum_{\ell=1}^z (F_{jj',\ell} y_{jj',\ell} + G_{jj',\ell} x_{jj',\ell}) \quad (11)$$

e $0 \leq x_{jj'} \leq M_{jj'} y_{jj'}$ em:

$$0 \leq x_{jj',1} \leq M_{jj',1} y_{jj',1}$$

$$M_{jj',1} y_{jj',2} \leq x_{jj',2} \leq M_{jj',2} y_{jj',2} \quad (12)$$

⋮
⋮
⋮
⋮
⋮

$$M_{jj',(z-1)} y_{jj',z} \leq x_{jj',z} \leq M_{jj',z} y_{jj',z}$$

$$\sum_{\ell=1}^z y_{jj',\ell} \leq 1 \quad (13)$$

e

$$y_{jj',\ell} = 0 \text{ ou } 1 \quad \ell = 1, \dots, z$$

onde ℓ é um segmento de curva e z o número total de segmentos.

A restrição (13) permite que o modelo assume um e somente um ponto da função de custo de armazenagem. Esta separação pode-se observar na figura 1.7.

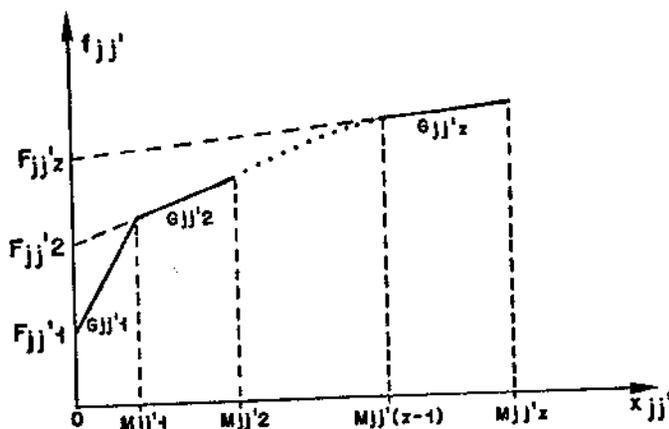


Figura 1.7

O procedimento anterior provoca um aumento excessivo no número de variáveis inteiras. Para evitar isto, é apresentado no capítulo 5, e adotado neste trabalho, um procedimento iterativo para estas funções. O procedimento é inicializado adotando-se a inclinação de um dos segmentos da curva da figura 1.7 como custo do arco. Se na solução do modelo existir disparidade entre o custo marginal da iteração e os custos marginais verdadeiros para o fluxo circulando no arco, o modelo é de novo resolvido para os custos marginais verdadeiros. Se a disparidade não ocorrer o problema termina.

Estudos da extensão encontram-se em Monterosso {19}, Kennington e Helgason {13} e Day {5}.

1.3.2 - Mais de um Produto na Rede

O caso de mais de um produto circulando na rede apresenta as mesmas restrições do problema PL1, formando tantos conjuntos independentes de restrições quantos forem os produtos considerados.

Se os produtos disputam um ou mais recursos disponíveis, (transporte ou armazenagem), devem ser acrescentadas tantas restrições quantos sejam os recursos disputados.

Matematicamente as restrições que devem ser acrescentadas são da forma:

$$\sum_{k'=1}^{\omega} x_{ij}^{k'} \leq N_{ij} \quad \text{para todo } i \text{ e } j \quad (14)$$

$$\sum_{\ell'=1}^{\omega} x_{jj'}^{\ell'} \leq N_{jj'} y_{jj'} \quad \text{para todo } j=j' \quad (15)$$

$$\sum_{\ell'=1}^{\omega} x_{j'k}^{\ell'} \leq N_{j'k} \quad \text{para todo } j' \text{ e } k \quad (16)$$

$$y_{jj'} = 0 \text{ ou } 1$$

onde:

- ℓ' = índice do produto
- ω = número total de produtos considerados
- N_{ij} = capacidade máxima do arco de transporte ij para os ω produtos
- $N_{jj'}$ = capacidade máxima do arco de armazenagem jj' para os ω produtos.
- $N_{j'k}$ = capacidade máxima dos arcos de transporte $j'k$ para os ω produtos.

Nas equações (14) e (16) o recurso disputado é a capacidade máxima de um arco de transporte, ou seja, a somatória dos produtos circulando no arco não deve ultrapassar sua capacidade máxima. Por exemplo, o transporte agregado de todos os produtos entre duas regiões interligadas por uma estrada de ferro, não deve ultrapassar a capacidade medida em toneladas por vagão, multiplicadas pelo número de vagões disponíveis durante o período de tempo considerado.

Na equação (15) o recurso disputado é a capacidade máxima de um arco de armazenagem, sua natureza é igual à das equações (14) e (16), diferindo somente pelo acréscimo das variáveis bivalentes $y_{jj'}$, que foram definidas no problema de localização.

Observa-se que se os produtos não disputarem nenhum recurso, o problema pode ser separado em uma série de problemas independentes, tantos quantos sejam os produtos considerados. Outra simplificação pode ser feita quando os produtos são tratados como homogêneos, nesse caso resolve-se o problema como se só existisse um único produto.

Estudos da extensão encontram-se em Kennington e Helgason {13}, Bazaraa e Jarvis {2} e Geoffrion e Graves {9}.

1.3.3 - Outras Extensões

O modelo matemático do problema de localização desenvolvido nas seções anteriores, pode resolver uma série de características do sistema de distribuição quando é modelado como uma rede capacitada, como por exemplo as seguintes extensões:

- Diferentes meios de transporte podem ser modelados por uma série de arcos unindo os mesmos dois nós.
- Armazéns modulares podem ser modelados por vários arcos unindo os mesmos dois nós, cada um dos arcos representando uma capacidade de armazenagem pré-fixadas.

No capítulo subsequente é considerada a maioria das extensões expostas neste capítulo.

CAPÍTULO 2

MODELAMENTO EM REDES CAPACITADAS

2.1 - INTRODUÇÃO

Uma rede capacitada é formada por dois elementos "arco" e "nó". O arco pode ser visto como uma via unidirecional de transporte, armazenagem ou operações nos produtos, (como por exemplo ensacamento de um produto), e os nós como localidades ou terminais. Cada arco caracteriza-se por três parâmetros que representam: o custo de enviar uma unidade de fluxo do nó i ao nó j (c_{ij}); o limite inferior (L_{ij}) e superior (U_{ij}) de quantidade de fluxo que poderá passar entre os dois nós.

O modelo de redes capacitadas para um sistema de distribuição de produtos agrícolas compõe-se de uma série de subsistemas interligados. Os arcos e os nós de cada subsistema (transporte, armazenagem e processamento) acham-se ligados entre si por arcos, que representam os custos de transbordo ou operações nos terminais, cada um deles com capacidades apropriadas.

O modelamento em redes capacitadas oferece uma grande flexibilidade em simular diferentes situações dos sistemas físicos, cada consideração feita, equivale no modelo a aumentar o número de arcos e nós. Este aumento é de suma importância para a escolha dos métodos de resolução do modelo.

A intenção deste capítulo é apresentar a modelagem de algumas características de um sistema de distribuição. No capítulo 3 é apresentado os métodos de resolução do modelo e na parte II o programa computacional.

2.2 - REDE DE TRANSPORTE

O transporte dos produtos agrícolas faz uso dos diferentes sistemas viários (rodoviário, ferroviário e fluvial) da região estudada. Cada um deles pode ser visto como um subsistema com recursos e custos próprios. Sua modelagem deve respeitar as rotas e traçados com que se apresentam na realidade, em ou

tras palavras, um arco deve unir dois nós se existe um meio de transporte entre os nós. Os nós representam microregiões e subdivisões como também os principais pontos de entroncamentos ou processamentos dos produtos.

Quando entre dois nós pode-se utilizar mais de uma forma de transporte, existirão tantos arcos unindo-os quanto sejam os meios de transporte, como aparece na figura 2.1. Nesta figura a diferença no traçado dos arcos representa os diferentes sistemas de transporte. Os nós com setas representam entrada ou saída dos produtos segundo o sentido delas. Os nós carentes das setas significam pontos de transbordo, entroncamentos ou processamentos dos produtos.

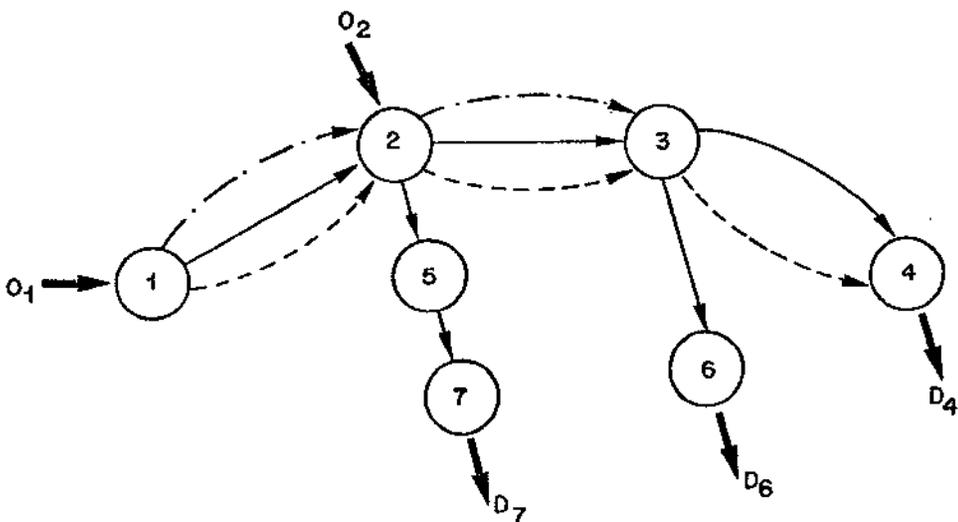


Figura 2.1

Os custos aditivos da operação de um dado sistema de transporte são atribuídos aos arcos que representam trechos de transporte. Estes custos baseiam-se na média ponderada de quilômetros percorridos segundo as condições do trecho. Por exemplo, em estradas existem diferentes custos se ela é asfaltada ou de terra, estradas de ferro planas e retilíneas têm menor custo unitário de transporte que aquelas com declive ou

com muitas curvas, em diferentes trechos fluviais podem existir ou não eclusas que aumentam seu custo unitário. Além destes custos por trecho devem ser adicionados os demais custos, como por exemplo, tarifas cobradas pelo uso de determinadas vias, depreciação dos meios de transporte, etc. Na prática estes custos de transporte são encontrados na forma de tarifas cobradas por meio de transporte utilizado e por produto transportado.

Se são considerados os custos de transferência entre os diferentes subsistemas de transporte (e de uma forma geral para qualquer transferência do produto) estes poderão ser representados repartindo-se o nó onde se realiza a operação em dois nós. Os arcos que os unem representam a transferência de fluxo entre dois meios de transporte, como mostra a figura 2.2, onde c_{12} é o custo de transferência, por exemplo, de um caminhão a um trem, e c_{21} caso contrário, pode-se considerar também capacidades diferenciadas da transferência como mostra a figura 2.2.

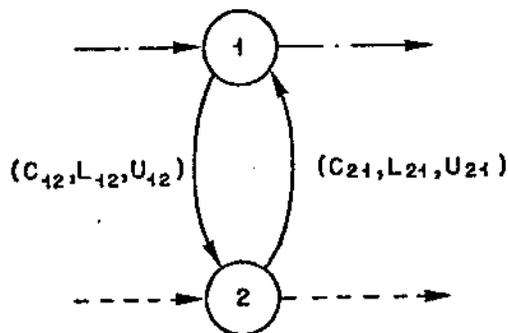


Figura 2.2

Outra consideração importante nos custos de transporte é a existência de economia de escala, isto é, os custos unitários podem variar com o volume de carga, por exemplo, pequenas encomendas são um serviço caro para as ferrovias, enquanto maiores volumes de cargas homogêneas resultam em custos unitários menores. Isto pode ser modelado por mais de um arco unindo os mesmos dois nós, como aparece na figura 2.3, onde para a ferrovia que liga os nós 1 e 2, existem custos diferentes para determinadas cargas transportadas. Observa-se que o arco artifi-

cial 22' define a capacidade total do arco de transporte, no caso a capacidade da ferrovia entre os nós 1 e 2. Evidentemente um problema com esta característica não pode ser resolvido pelo método simplex.

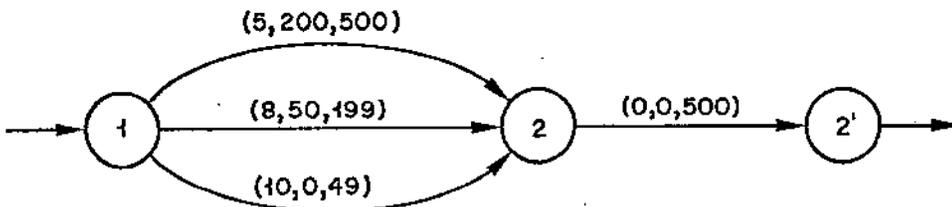


Figura 2.3

De uma forma geral toda atividade que represente um custo na rede transporte pode ser modelada por um arco. Esta facilidade de construção do modelo permite simular situações futuras, tais como, melhoramentos nos subsistemas de transporte, construção de novos trechos, etc.

2.3 - SISTEMAS DE ARMAZENAGEM

Um dos principais motivos do armazenamento de produtos agrícolas é a necessidade de estocar uma quantidade, produzida num breve período de colheita, para consumo durante um período maior de entre-safra. Portanto um bom modelo de distribuição deve simular esta necessidade de armazenagem, definindo os períodos em que cada uma das atividades ocorrem. A seguir são desenvolvidos dois modelos que considerarão a atividade de armazenagem.

. MODELO 1

Este modelo caracteriza-se pela consideração de um só período de tempo, normalmente um ano, que engloba todos os padrões sazonais do sistema de distribuição, e ao fim do

qual esses padrões tendem a se repetir . Então deve existir um equilíbrio entre oferta e demanda neste período.

Ao se resolver este modelo corre-se o risco de encontrar soluções inconsistentes, como por exemplo, o de não se armazenar os produtos, devido a que esta atividade aumenta os custos na solução, portanto os produtos seriam enviados diretamente dos centros de produção aos de demanda. Para evitar isto deve-se repetir a rede de distribuição; em uma delas só se consideram os fluxos dos centros de produção às entradas dos armazéns, e na outra rede se consideram os fluxos das saídas dos armazéns aos centros de demanda. Os arcos que ligam estas redes são arcos de armazenamento como é esquematizado na figura 2.4 , onde a produção de 100 unidades no nó 1, da rede 1, deve ser armazenada no arco 22' e/ou no arco 33' para ser consumida nos centros de demanda 4' e 5'; da rede 2.

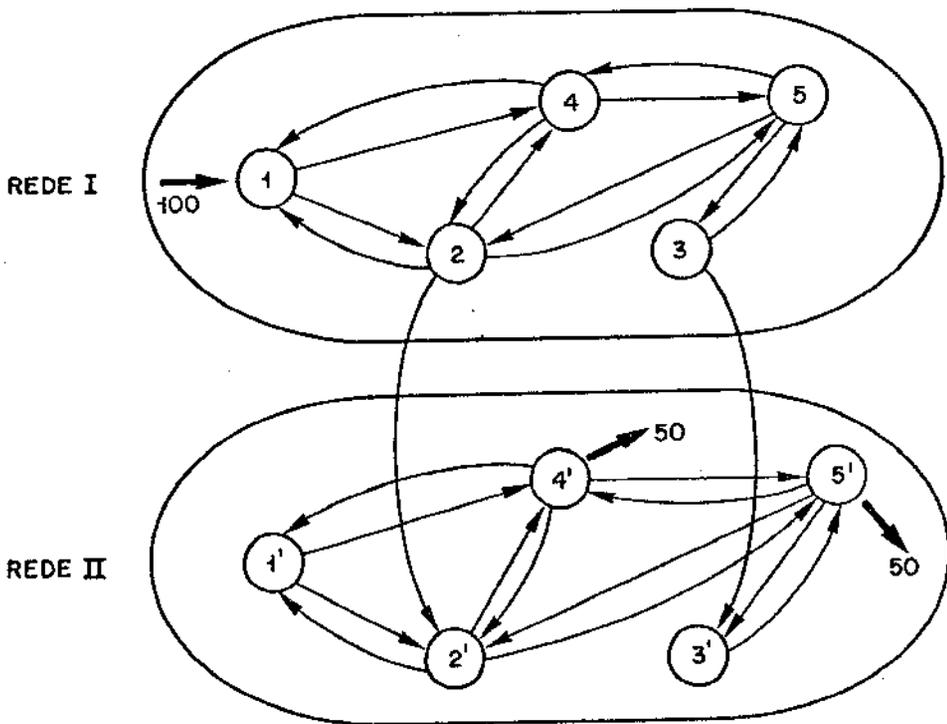


Figura 2.4

. MODELO 2

Este modelo separa o período definido no modelo 1 em subperíodos, nos quais não existe equilíbrio entre oferta e demanda, mas sim no modelo como um todo.

Aqui as ofertas e demandas são consideradas nas redes dos períodos e o ligamento entre as redes são representa - das por arcos de armazenagem, como aparece na figura 2.5. O problema é modelado em 4 períodos e por conseguinte em quatro redes, considerando duas safras ao ano e quatro períodos de consumo, onde o nó 1 é um centro de produção, os nós 2 e 3 entrada ou saída dos armazéns, e os nós 4 e 5 são centros de demanda. Os algarismos romanos definem períodos diferentes.

Algumas observações devem ser feitas:

- . O modelo 2 usa o mecanismo da demanda para a definição das quantidades a serem armazenadas, para isto devem ser conhecidas, além das demandas, todas as demais informações necessárias para cada um dos períodos, como por exemplo, custos de armazenagem, tarifas, produções, etc.. As difi - culdades na obtenção destas informações por períodos podem tornar proibitiva sua implementa - ção. Mas se isto é possível o modelo 2 é mais realista que o modelo 1, onde as informações neces - sárias para sua implementação são mais facilmen - te encontradas.
- . O modelo 2 pode aumentar excessivamente a dimen - são do problema, provocando dificuldades na sua resolução.
- . Um arco de transporte saturado para o período de safra passa a ser folgado se é considerado o período de um ano. Por isso o modelo 2 se presta mais para o estudo de congestionamento em deter - minados períodos, entretanto o modelo 1 só permitiria isto por uma análise de pós-otimização.

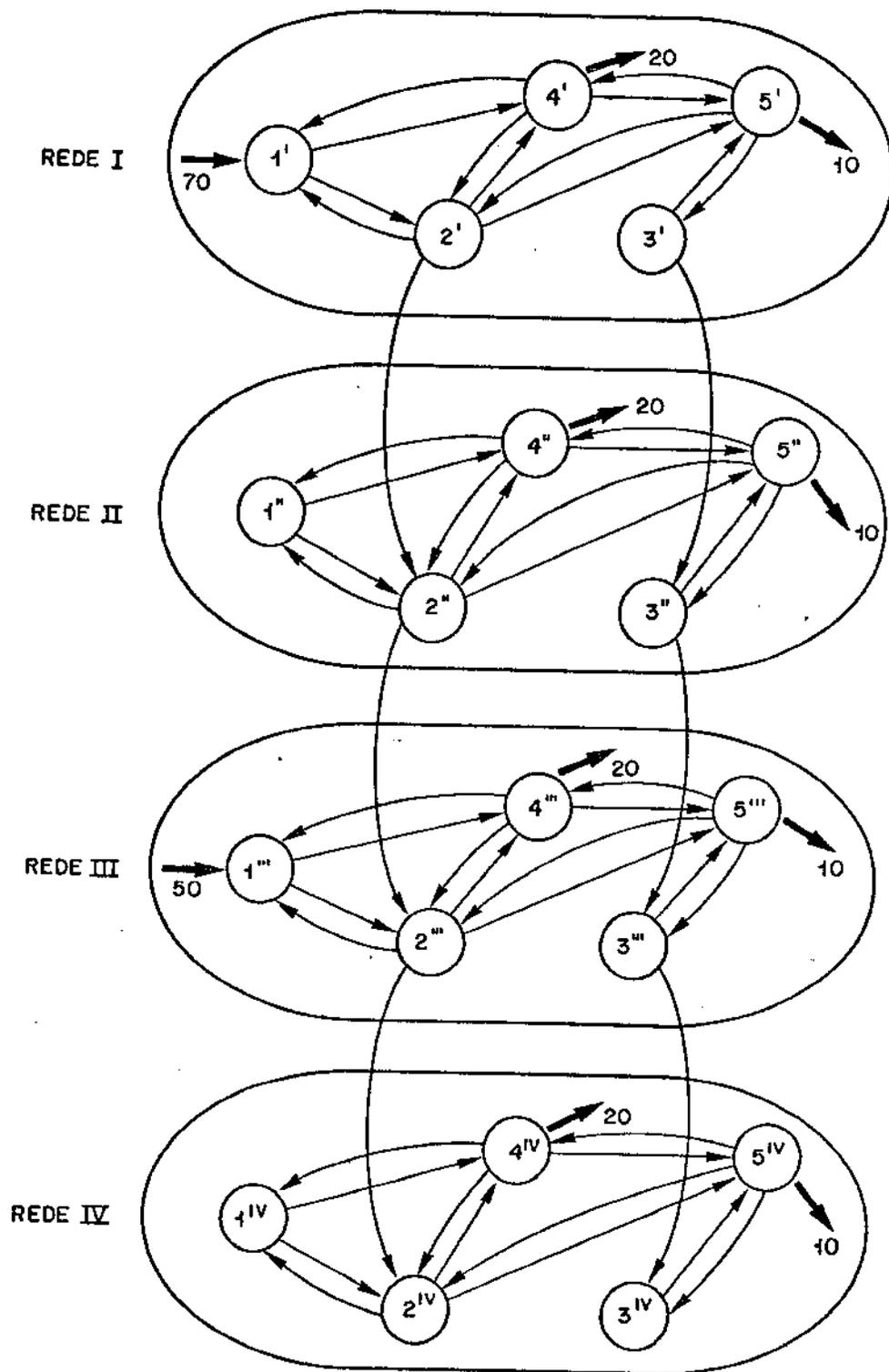


Figura 2.5

Diferentes sistemas de armazenagem ou armazéns modulares podem ser modelados como aparece na figura 2.6 onde cada arco representa cada armazém ou um módulo de um determinado sistema de armazenagem.

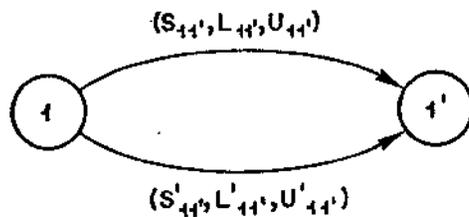


Figura 2.6

2.4 - MAIS DE UM PRODUTO NO SISTEMA

Quando é considerado mais de um produto no sistema de distribuição e se estes produtos disputam um mesmo recurso, devemos modelar o problema com tantas redes capacitadas quantos sejam os produtos considerados, cada uma delas com suas limitações de recursos. Cada uma das redes pode ser simplificada evitando o modelamento de certos nós e arcos, como por exemplo, se um produto não é produzido em uma dada região seu nó não deve ser modelado, se um armazém não tem as condições para armazenar um produto seu arco não deve ser modelado.

Observa-se que o número de redes a serem modeladas para o Modelo 1 é de duas vezes o número de produtos considerados, e no modelo 2 o número de redes será igual à multiplicação do número de períodos pelo número de produtos. O que provocaria no modelo 2 o problema de dimensionalidade.

2.5 - PROCESSAMENTOS E OPERAÇÕES NOS PRODUTOS

Além dos custos de transporte e armazenagem existem outros custos de operação e processamento dos produtos. Alguns destes custos podem ser incluídos nos sistemas de transporte ou de armazenagem, como por exemplo, os produtos para sua armazenagem ou transporte podem sofrer um processo de ensacamento. Se estes custos são relevantes, e devem ser tratados separadamente, podem ser modelados por arcos nos lugares que se efetuam.

Quando se considera o custo de congestionamento no carregamento ou no descarregamento dos produtos em um nó do modelo, ele deve ser subdividido em dois nós. No caso em que os custos aumentem com o tamanho da fila de espera, a função de custo deve ser linearizada por uma série de arcos unindo os nós, como aparece na figura 2.7, onde os custos aumentam à medida que os fluxos crescem.

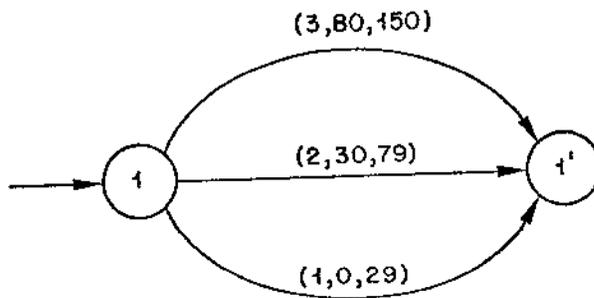


Figura 2.7

De uma forma geral toda atividade efetuada no sistema de distribuição deve ser modelada por arcos e nós, o número de considerações que se deve estudar depende do tamanho do modelo, das técnicas utilizadas para resolvê-lo, dos recursos computacionais disponíveis e principalmente da relevância desta atividade.

Estudos de modelamento em redes capacitadas encontram-se em Wright {24}, Monterosso {19}, Kennington e Helgason {13} e Bazarra e Jarvis {2}.

CAPÍTULO 3

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO

3.1 - INTRODUÇÃO

O problema de localização de armazéns agrícolas apresentado no capítulo 1, pode ser resolvido por métodos de programação mista, que resolvem problemas com variáveis reais e inteiras, entre eles podemos mencionar os pacotes comerciais UMPIRE da UNIVAC, OPHELIE MIXED da CDC e MPSX-MIP da IBM. De uma forma geral estes programas apresentam o problema de baixa eficiência computacional por não considerarem as estruturas particulares dos problemas em pauta. Eles somente são utilizados em problemas de médio porte.

Para evitar o problema da dimensionalidade, muitos autores têm criado métodos e algoritmos mais rápidos. A seguir são apresentados alguns deles e na parte II desta tese os que são implementados neste trabalho.

3.2 - SISTEMÁTICA DE RESOLUÇÃO

Uma classe ampla de métodos para a resolução do problema de localização separa a parte real da inteira. Esta sistemática de resolução pode ser observada no diagrama de blocos da Fig. 3.1. Este diagrama é dividido em três estágios; o primeiro que define uma configuração de localização dos armazéns agrícolas, que são ou não ativados; no segundo os arcos com funções de custo não lineares são linearizados; e no terceiro é resolvido o problema de distribuição.

Cada um dos estágios da figura 3.1 pode ser resolvido por métodos específicos. É apresentado a seguir alguns destes métodos.

3.3 - MÉTODOS DE RESOLUÇÃO EM REDES CAPACITADAS

Como foi mostrado no capítulo anterior o problema de distribuição de produtos agrícolas é formada por uma rede canalizada. Nas décadas de 50 e 60 apareceram os primeiros traba-

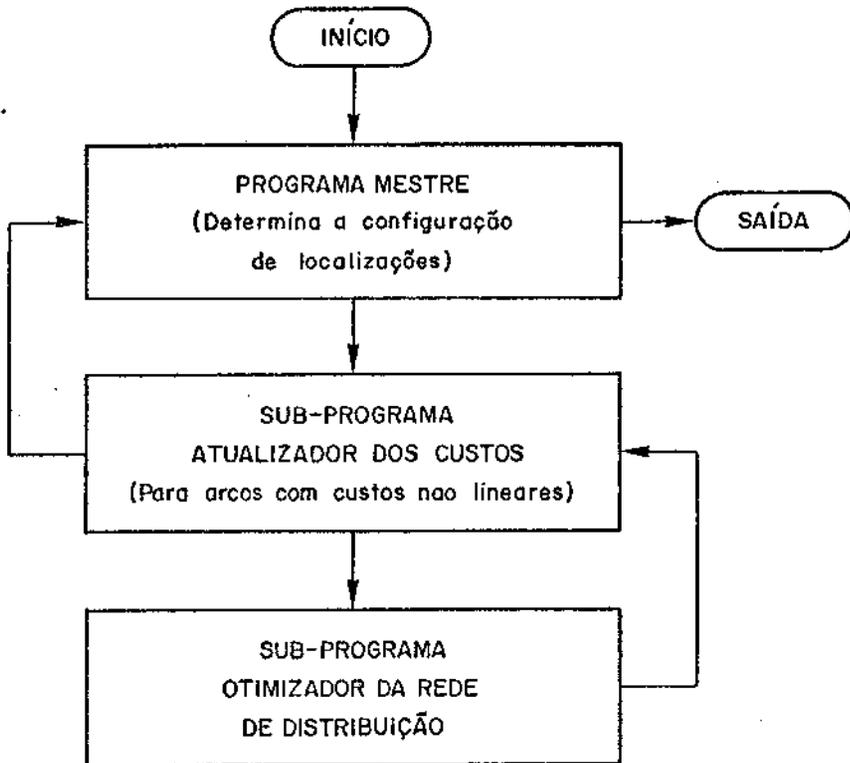


Figura 3.1

lhos nesta área, geralmente considerando um só produto na rede de distribuição, baseando-se nos métodos primal e dual simplex. Os trabalhos de Dantzig {4} e Johnson{11} são especializações do método primal simplex. Especializações do método dual aparecem nos trabalhos de Kuhn{17} e Fulkerson {8}, este último desenvolvendo o algoritmo "out-of-kilter". O programa primal simplex especializado para problemas de rede, aqui também chamado de programa de fluxo de custo mínimo, tem seu algoritmo de resolução apresentado em Bazaraa e Jarvis {2} e Kennington e Helgason {13}.

A consideração de vários produtos circulando na rede de distribuição provoca uma estrutura especial do problema. Esta estrutura foi explorada por vários autores que apresentam especializações do método simplex para este problema, baseados em técnicas de partição e/ou decomposição.

A técnica de partição é chamada de partição primal ("Primal Partitioning") que como indica, particiona

o problema em estruturas básicas, sendo cada uma delas a rede de cada produto. Partindo-se de uma solução factível, otimiza-se cada subsistema, respeitando a cada iteração a factibilidade com relação às restrições de acoplamento (capacidades coletivas dos arcos para todos os produtos que neles circulam) e resolve-se o problema até encontrar-se uma solução ótima. O desenvolvimento deste método é encontrado em Kennington {12}, Kennington e Helgason {13} e o algoritmo apresentado por eles é utilizado nesta tese. Grigoriadis e White {10} apresentaram também um algoritmo de partição para o problema dual.

A técnica de decomposição consiste de um programa coordenador que otimiza as soluções de subproblemas bases, que são resolvidos pelo programa de fluxo de custo mínimo. O método pode ser resolvido por duas formas:

Na primeira, de alocação de preços ("price-directive"), o programa coordenador usa um mecanismo de preços para gerar os subproblemas. Estudos deste processo pode-se encontrar em Wollmer {23}.

Na segunda forma, de alocação de recursos ("resource-directive"), o programa coordenador aloca capacidades aos arcos de cada subsistema de forma a manter a capacidade coletiva do arco. Experiências deste processo encontram-se em Kennington e Shalaby {14}.

3.4 - MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM FUNÇÕES NÃO LINEARES

A resolução de problemas de programação não linear por técnicas lineares pode ser feita por linearização da curva, como foi apresentado nos custos de congestionamento no capítulo anterior.

Para o problema de custos côncavos nos arcos de armazenamento existe o problema de definir, quais devem ser os custos de armazenamento antes de começar o processo, sem se saber qual é o fluxo que circulará no arco. Para resolver este problema King e Logan {15}, propuseram um método iterati-

vo, utilizado também por Monterosso [19], que consiste em iniciar o problema com os custos unitários mínimos de armazenagem, que corresponde ao fluxo máximo que as capacidades dos armazéns permitem, com estes custos é resolvido o problema de distribuição, com os fluxos nos arcos e com as funções de custo unitário dos armazéns, calcula-se o custo real unitário, e compara-se estes custos com os que serão usados para resolver o problema de distribuição. Nos locais onde houver discrepância os custos são corrigidos e uma nova iteração é começada. O programa termina quando se obtém uma coerência entre os fluxos e os custos usados para obtê-los.

O processo anteriormente apresentado pode ser substituído por métodos de programação mista, Day [5] desenvolve um método de resolução de funções não lineares por aproximações lineares, como foi desenvolvido na seção 1.3.1 do capítulo 1, e para a resolução do modelo utiliza um procedimento do tipo "Branch-and-Bound".

3.5 - MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO

Os métodos anteriores aparecem como sub-programas do programa mestre que visa obter os locais ótimos para a instalação ou ampliação de armazéns agrícolas.

Para resolver o problema de localização apresentado no capítulo 1 vários métodos são encontrados na literatura, e podem ser classificados, em linhas gerais, como métodos heurísticos, de separação e avaliação e de decomposição, cujas descrições são apresentadas a seguir de forma resumida.

3.5.1 - Métodos Heurísticos

Os métodos heurísticos não procuram o ótimo global, mas sim uma boa solução, reduzindo segundo algum critério o número total de alternativas a serem analisadas, que pode ser muito grande e, conseqüentemente, reduzindo os cálculos. Em outras palavras procura simplesmente uma "boa solução". Assim se em um problema existem n locais candidatos, teremos 2^n combinações de localizações. Por exemplo, para n

igual a 10 teríamos que resolver 1024 redes de distribuição para encontrar a configuração de localização ótima. Para evitar isto propõe-se uma heurística qualquer que resolva um número menor de possibilidades.

Entre os trabalhos nesta linha pode-se citar Kuehne Hamburger [16]. Sua heurística consiste em adicionar um a um os locais candidatos a armazenamento. Esta adição baseia-se na escolha de um subconjunto de melhores candidatos do conjunto total de centros de armazenagem a ser ou não efetivado. Cada uma das configurações de localização é testada, a que produzir maior redução nos custos é efetivada, e a que produzir uma elevação nos custos não será mais considerada. O processo é repetido escolhendo-se um novo subconjunto de melhores candidatos. Se nenhum candidato produz uma redução nos custos, e se não existir outro candidato a ser testado fora do subconjunto, o processo termina.

A solução pode ser melhorada eliminando-se armazéns que por acaso tenham-se tornado antieconômicos com a inclusão posterior de outros.

A escolha do subconjunto de melhores candidatos é feita segundo um critério puramente heurístico: na prática, escolhem-se os candidatos de maior demanda local.

Feldman, Leher e Ray [6] apresentaram um trabalho no qual o problema é inicializado com todos os candidatos ativos, e desenvolvem uma heurística de exclusão, definindo o subconjunto de melhores candidatos à exclusão como aquele subconjunto composto dos armazéns com os maiores custos unitários. Este método também foi utilizado por Monterosso [19] e pode ser considerado o inverso do anterior.

3.5.2 - Métodos de Separação e Avaliação

Uma forma de resolver um problema de localização é a enumeração completa de todas as 2^n combinações de localizações. Para isso são fixados os valores 0 ou 1 das variáveis inteiras e são resolvidos os problemas de distribuição para cada combinação. A solu

ção é aquela que minimiza o problema. Em um problema real isto não é possível, portanto vários autores propuseram métodos que enumeram implicitamente conjuntos grandes de possibilidades, baseados na técnica "Branch-and-Bound". O estudo do método, a sua aplicação em problemas de localização e experiências computacionais podem ser encontradas em Salkin [21]. Roy e Erlenkotter [20] estudaram o problema de localização dinâmico, resolvendo-o pela técnica Branch-and-Bound, propondo um método dual, chamando-o de "método dual ascendente".

3.5.3 - Métodos de Decomposição

Os métodos de decomposição, como o próprio nome indica, dividem o problema em outros menores e de mais fácil resolução, separando a parte real da inteira. Um método utilizado é a decomposição de Benders [3], que consiste em resolver um programa mestre, um problema dual, o qual encontra os valores ótimos dos variáveis inteiras e com esses valores é resolvido o subproblema da rede de distribuição, que gera novas restrições ao programa mestre. O programa termina quando a solução do problema dual satisfaz o problema primal ou satisfaça certos limites de tolerância.

Entre os trabalhos nesta linha podemos mencionar os de Geoffrion e Graves [9], em que estudaram um problema de localização em redes com vários produtos. França [7] apresenta de uma forma geral os métodos que resolvem o problema de localização e desenvolve o algoritmo de Benders para problemas estocásticos. Sweeney e Thatan [22] apresentam o desenvolvimento do método de Benders para um problema de localização dinâmica.

PARTE II

O PROGRAMA COMPUTACIONAL

INTRODUÇÃO

Um dos objetivos deste trabalho é o desenvolvimento de um programa para solução dos problemas de localização de armazéns agrícolas. Em virtude disto, foram criados três programas de computação acoplados segundo a sistemática de resolução apresentada no capítulo 3.

Estes programas estão baseados em três algoritmos, a saber:

- . O primeiro programa é um algoritmo heurístico que define uma configuração de localização que deve ser testada e foi desenvolvido por Feldman, Leher e Ray {6} .
- . O segundo programa é um processo de resolução para funções de custo não lineares, segundo o método iterativo desenvolvido por King e Logan {15} .
- . O terceiro programa resolve o problema de multifluxo de custo mínimo, especialização do primal simplex, desenvolvido por Kennington e Helgason {13} .

A apresentação dos métodos e seus respectivos programas segue uma ordem inversa à do parágrafo anterior, devido a uma melhor apresentação e compreensão das interações entre os programas.

A parte II é composta dos capítulos 4 e 5, apresentando-se no capítulo 4 o programa de multifluxo de custo mínimo (PMFCM) e no capítulo 5 o programa para funções de custo não lineares (PCNL) e o programa de localização de armazéns agrícolas (LOAGRI).

CAPÍTULO 4

MÉTODO PRIMAL PARA A RESOLUÇÃO DE REDE MULTIFLUXO

4.1 - O PROBLEMA MULTIFLUXO (PM)

Matematicamente o problema de rede multifluxo é equacionado da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } \sum_{k=1}^{\ell} c^k x^k \quad (1)$$

sujeito a:

$$A^k x^k = b^k \quad k = 1, \dots, \ell \quad (2)$$

$$\text{PM} \quad \sum_{k=1}^{\ell} D^k x^k + x^s = d \quad (3)$$

$$0 \leq x^k \leq u^k \quad (4)$$

$$x^s \geq 0$$

onde:

k : é o índice dos produtos de 1 até ℓ

A^k : matriz de incidência não-arco, de ordem $(m \times n)$, m arcos e n nós, representando a rede de distribuição do produto k , que chamaremos daqui por diante de rede local. Esta matriz tem uma das suas colunas representando o arco raiz de forma a garantir que A^k tenha posto completo. Considera-se, para facilidade de exposição, que todas as matrizes A^k são iguais.

c^k : é o vetor de custo de todos os arcos para o produto k .

u^k : é o vetor de limite de capacidade de fluxo nos arcos da rede para o produto k .

pode-se então subdividir as colunas de A^k , que estão na base total, como:

$$\left[\begin{array}{c|c} B^k & R^k \end{array} \right]$$

Onde B^k é uma matriz quadrada inversível que é denominada de base local de A^k e representa uma árvore enraizada da rede local.

Uma base total para A pode ser particionada da seguinte forma.

$$B = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} B^1 & & R^1 & & \\ \hline & \ddots & & \ddots & \\ \hline & & B^\ell & & R^\ell \\ \hline P^1 & \dots & P^\ell & T^1 & \dots & T^\ell \\ \hline S^1 & \dots & S^\ell & U^1 & \dots & U^\ell & I \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} n \\ \} n \\ \} q \\ \} p \end{array} \right\} m$$

n
 n
 m

Então uma solução básica pode ser obtida como solução do sistema:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} B^1 & & R^1 & & \\ \hline & \ddots & & \ddots & \\ \hline & & B^\ell & & R^\ell \\ \hline P^1 & \dots & P^\ell & T^1 & \dots & T^\ell \\ \hline S^1 & \dots & S^\ell & U^1 & \dots & U^\ell & I \end{array} \right] x = \begin{bmatrix} b \\ \dots \\ a \\ \dots \\ g \end{bmatrix}$$

As últimas m equações são subdivididas em dois blocos de equações:

- O primeiro formado por q equações de arcos de folga nula chamados de arcos "saturados", cuja saturação obriga a corrigir as soluções das redes locais criando fluxo em arcos "não básicos" destas redes, definidos pelas submatrizes R^k , $k=1, \dots, \ell$. Estes arcos são chamados "corretores". Caso uma árvore local não tenha arcos corretores então a submatriz R^k não existe.
- O segundo bloco é formado por p equações de arcos folgados, as variáveis de folga correspondentes participam da solução básica.

Usar-se-á a seguinte notação.

$$\begin{array}{l}
 L_1 = \left[\begin{array}{c|c|c} B^1 & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & B^\ell \end{array} \right] \\
 L_2 = \left[\begin{array}{c|c|c} p^1 & \dots & p^\ell \end{array} \right] \\
 L_3 = \left[\begin{array}{c|c|c} s^1 & \dots & s^\ell \end{array} \right] \\
 \bar{c}_L = \left[\begin{array}{c|c|c} c_L^1 & \dots & c_L^\ell \end{array} \right] \\
 R_1 = \left[\begin{array}{c|c|c} R^1 & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & R^\ell \end{array} \right] \\
 R_2 = \left[\begin{array}{c|c|c} T^1 & \dots & T^\ell \end{array} \right] \\
 R_3 = \left[\begin{array}{c|c|c} U^1 & \dots & U^\ell \end{array} \right] \\
 c_R = \left[\begin{array}{c|c|c} c_R^1 & \dots & c_R^\ell \end{array} \right]
 \end{array}$$

onde L_1 tem inversa e:

$$L_1^{-1} = \left[\begin{array}{c|c|c} (B^1)^{-1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & (B^\ell)^{-1} \end{array} \right]$$

As colunas de A que não estão em B , portanto não básicas, constituem a submatriz N .

tem-se que:

$$Q x_{L_2} = \tilde{a}$$

$$x_{L_1} + \tilde{R} x_{L_2} = \tilde{b}$$

$$S x_{L_1} + U x_{L_2} + x_{L_3} = g$$

Dessa forma os fluxos são calculados da seguinte forma:

$$x_{L_2} = Q^{-1} \tilde{a} = \hat{a} \quad (6)$$

$$x_{L_1} = \tilde{b} - \tilde{R} x_{L_2} = \hat{b} \quad (7)$$

$$x_{L_3} = g - U x_{L_2} - S x_{L_1} = \hat{g} \quad (8)$$

Onde x_{L_1} são os fluxos nos arcos básicos das árvores locais, x_{L_2} são os fluxos nos arcos corretores e x_{L_3} são as folgas dos arcos não saturados.

4.3 - OBTENÇÃO DA MATRIZ DE CICLOS Q

Da relação (5) tem-se que:

$$Q^k = T^k - P^k (B^k)^{-1} R^k, \quad k=1, \dots, \ell$$

A relação $\tilde{R}^k = (B^k)^{-1} R^k$ é a expressão dos arcos corretores em termos das bases (árvores) locais. Todo arco corretor j , relacionado à coluna $\tilde{R}^{k,j}$, está associado a um ciclo na árvore local k , cada linha i de $\tilde{R}^{k,j}$ é dada por:

- . +1 se o arco da base local correspondente a esta linha pertence ao ciclo do corretor j e tem sentido contrário a ele.
- . -1 se o arco pertence ao ciclo e tem o mesmo sentido.
- . Nulo se o arco não pertence ao ciclo.

Cada linha i de $\begin{bmatrix} P^k & T^k \end{bmatrix}$, $k=1, \dots$, correspondente a uma restrição coletiva de capacidade, relacionado a um arco saturado, sô terá um coeficiente não nulo e igual a +1 no cruzamento com a coluna correspondente ao arco. Se o arco é básico, este coeficiente estará em P^k , se ele é corretor estará em T^k .

Um arco j , não saturado, corretor para a base local k , corresponde a uma coluna $Q^{k,j}$ de Q^k dada por:

$$\begin{aligned} Q^{k,j} &= P^k (B^k)^{-1} R^{k,j} \\ &= -P^k \bar{R}^{k,j}, \text{ pois } T^{k,j} = \emptyset \end{aligned}$$

Se a linha i de P^k corresponde a um arco básico saturado da rede local k , então o elemento $Q_i^{k,j}$ terá valor.

- . +1 se o arco básico saturado, tem o mesmo sentido do corretor no ciclo.
- . -1 se o arco básico saturado, tem sentido contrário ao do corretor no ciclo.
- . Nulo se não pertence ao ciclo.

Se o arco j , corretor, é também saturado então:

$$Q^{k,j} = T^{k,j} - P^k \bar{R}^{k,j}$$

Na linha i correspondente ao arco j tem-se que $T_i^{k,j} = 1$ e $P_i^{k,j} = 0$. Portanto $Q_i^{k,j} = +1$. Nas outras linhas $T_i^{k,j} = 0$ e recai-se no caso anterior.

Desta forma Q pode ser obtida diretamente das árvores locais, pela análise dos ciclos formados pelos arcos corretores.

4.4 - CÁLCULO DAS VARIÁVEIS DUAIS

Nesta seção apresenta-se uma forma eficiente de cálculo das variáveis duais $\pi = c_B B^{-1}$, solução do sistema $\pi B = c_B$ que matricialmente é da forma:

$$\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & | & R_1 \\ \hline L_2 & | & R_2 \\ \hline L_3 & | & R_3 \\ \hline & & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_L \\ c_R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

A solução para (9) é:

$$\pi_3 = 0 \quad (10)$$

$$\pi_2 = (c_R - c_L L_1^{-1} R_1) (R_2 - L_3 L_1^{-1} R_1)^{-1} \quad (11)$$

$$\pi_1 = (c_L - \pi_2 L_2) L_1^{-1} \quad (12)$$

Que pode ser re-escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \pi_3 = 0 \\ \pi_2 = (c_R^1 \dots c_R^\ell) - (c_L^1 \dots c_L^\ell) \\ \left\{ \begin{array}{l} (T^1 \dots T^\ell) - (P^1 \dots P^\ell) \end{array} \right\} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c|c} (B^1)^{-1} & \\ \hline & (B)^{-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} R^1 & \\ \hline & R^\ell \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c|c} (B^1)^{-1} & \\ \hline & (B^\ell)^{-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} R^1 & \\ \hline & R \end{array} \right] \end{array} \right\}^{-1}$$

$$\text{Mas } Q^{-1} = (T^1 - P^1 (B^1)^{-1} R^1 \dots T^\ell - P^\ell (B^\ell)^{-1} R^\ell)^{-1}$$

Logo:

$$\pi_2 = (c_R^1 - c_L^1 (B^1)^{-1} R^1 \dots c_R^\ell - c_L^\ell (B^\ell)^{-1} R^\ell) Q^{-1} \quad (13)$$

Conhecidas as componentes $c_R^k - c_L^k (B^k)^{-1} R^k$, $k=1, \dots, \ell$ que podem ser obtidos através dos potenciais nas árvores básicas das redes locais para os arcos corretores, o vetor π_2 é calculado por pré-multiplicação por Q^{-1} .

Pos-multiplicando (12) por L_1 obtem-se:

$$\pi_1 L_1 = c_L - \pi_2 L_2$$

Que pode ser re-escrito em termos de seus componentes como:

$$\begin{aligned} \pi_1^1 B^1 &= c_L^1 - \pi_2 P^1 \\ &\vdots \\ \pi_1^2 B^2 &= c_L^2 - \pi_2 P^2 \end{aligned}$$

Fazendo

$$\gamma^k = c_L^k - \pi_2 P^k \quad k=1, \dots, \ell \quad (14)$$

temos que:

$$\pi_1^k B^k = \gamma^k \quad k=1, \dots, \ell \quad (15)$$

Observa-se que uma coluna de P^k é um vetor com um único elemento não nulo e igual a 1 na posição correspondente ao arco saturado, básico para a árvore local. Observa-se também que C_L^k são os custos dos arcos básicos das árvores locais.

Pelo exposto acima, γ^k pode ser definido como os custos alterados dos arcos saturados, e para os arcos não saturados, os γ^k continuam sendo os mesmos c_L^k .

Portanto os π_1^k podem ser calculados pela resolução da equação (15) ou ainda, de forma equivalente, através dos potenciais das árvores locais. Estes potenciais são calculados usando-se os γ^k como custos dos arcos.

Uma outra forma de calcular os γ^k para os arcos saturados é:

$$\gamma^S = V_C Q^{-1} \quad (16)$$

com

$$V_C = (C_L^S Q - \bar{C}_R^C) \quad (17)$$

onde:

γ^S : vetor de custos alterados para os arcos saturados

\underline{c}_L^S : vetor de custos dos arcos saturados

\underline{c}_R^C : vetor de custos relativos para os arcos corretores em relação a base local.

Prova:

Sabemos da equação (14) que para os arcos saturados os custos alterados γ^S são da forma:

$$\gamma^S = \underline{c}_L^S - \pi_2 \quad (18)$$

e da equação (13) que:

$$\pi_2 = \tilde{\underline{c}}_R^C Q^{-1} \quad (19)$$

substituindo (19) em (18) temos que:

$$\gamma^S = \underline{c}_L^S - \tilde{\underline{c}}_R^C Q^{-1}$$

que pode ser escrito

$$\gamma^S = (\underline{c}_L^S Q - \tilde{\underline{c}}_R^C) Q^{-1}$$

fazendo $V^C = (\underline{c}_L^S Q - \tilde{\underline{c}}_R^C)$

obtem-se a relação (16)

Da relação (17) o vetor $\underline{c}_L^S Q$ é a somatória dos custos dos arcos saturados presentes nos ciclos dos arcos corretores, cada elemento de $\tilde{\underline{c}}_R^C$ é o custo do arco corretores menos a somatória dos arcos presentes no ciclo formado por ele. Estas somatórias são calculadas somando-se os custos dos arcos com igual sentido do arco corretores e subtraindo-se em caso contrário. Portanto os custos dos arcos saturados são anulados quando se calcula V_C pela re

lação (17). Desta forma Y_c pode ser calculado diretamente nos ci clos dos arcos corretores.

4.5 - CÁLCULO DOS CUSTOS RELATIVOS DAS VARIÁVEIS NÃO BÁSICAS

O vetor de custo relativo \hat{c} , para as variáveis não básicas, é calculado pela equação $\hat{c} = c - N$ onde N é formado por três tipos de colunas, segundo as características dos arcos:

. Arco saturado t - Um arco não básico, saturado co letivamente para outras redes locais, apresenta em sua respectiva coluna de N três coeficientes diferentes de zero; +1 em seu nó origem i e -1 em seu nó destino j para a submatriz local k_e , ainda, +1 na sua restrição do bloco de arcos saturados, portanto:

$$\hat{c}^t = c^t - (\pi_{1i} - \pi_{1j}) - \pi_2^t$$

ou ainda:

$$\hat{c}^t = (c^t - \pi_2^t) - (\pi_{1i} - \pi_{1j}) \quad (20)$$

onde $c^t - \pi_2^t$ é o custo alterado do arco t e $\pi_{1i} - \pi_{1j}$ é a ten são.

. Arco não saturado t - Um arco não básico, não sat urado coletivamente para outras redes locais, apresenta em sua respectiva coluna de N três coeficientes diferentes de zero; +1 na linha do nó origem i , -1 na linha de seu nó destino j , e +1 na sua restrição dos blocos dos arcos folgados, portanto:

$$\hat{c}^t = c^t - (\pi_{1i} - \pi_{1j}) - \pi_3^t$$

mas $\pi_3 = 0$ logo:

$$\hat{c}^t = c^t - (\pi_{1i} - \pi_{1j}) \quad (21)$$

onde c^t é o custo do arco e $(\pi_{1i} - \pi_{1j})$ é a ten são.

. Folga fora da base - Quando uma folga esta fora da base ela é nula, e corresponde a um arco r saturado coletivamente, apresentando somente um coeficiente diferente de zero no cr uzamento da coluna que lhe corresponde com a linha de restrições, que contem esta variável, portanto:

$$\hat{c}^f = c^f - \pi_2^r$$

como o custo da folga é igual a zero.

$$\hat{c}^f = -\pi_2^r \quad (22)$$

Uma variável t é candidata a entrar na base se o custo relativo é negativo.

4.6 - EXPRESSÃO DO VETOR NÃO BÁSICO N^t EM TERMOS DA BASE CORRENTE

\mathcal{B}

O vetor não básico N^t expresso em termos da base corrente \mathcal{B} é dado por:

$$\hat{N}^t = \mathcal{B}^{-1} N^t$$

e portanto

$$\mathcal{B} \hat{N}^t = N^t$$

Tem-se dois casos a considerar dependendo de t corresponder a um arco ou a uma folga.

t é um arco. A coluna N^t não básica, associada ao arco t na rede local k , tem três coeficientes diferentes de zero; +1 na linha do nó origem i , -1 na linha do nó destino j , os dois nós na rede k , e +1 em uma linha das equações de acoplamento. Após as duas transformações clássicas de pivoteamento parcial por blocos desenvolvidas na seção 4.2, tem-se que:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & \tilde{R} & 0 \\ \hline 0 & Q & 0 \\ \hline S & U & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \hat{N}_1^t \\ \hat{N}_2^t \\ \hat{N}_3^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{N}_1^t \\ \tilde{N}_2^t \\ \tilde{N}_3^t \end{bmatrix}$$

que pode ser re-escrito como:

$$\begin{aligned} Q \hat{N}_2^t &= \tilde{N}_2^t \\ \hat{N}_1^t + R \hat{N}_2^t &= \tilde{N}_1^t \\ S \hat{N}_1^t + U \hat{N}_2^t + \hat{N}_3^t &= \tilde{N}_3^t \end{aligned}$$

cujá solução é dada por:

$$\hat{N}_2^t = Q^{-1} \tilde{N}_2^t \quad (23)$$

$$\hat{N}_1^t = N_1^t - \tilde{R} N_2^t \quad (24)$$

$$\hat{N}_3^t = N_3^t - S \hat{N}_1^t - U \hat{N}_2^t \quad (25)$$

O arco t forma com os arcos de uma base (árvore) local k um ciclo, os componentes de \tilde{N}_1^t , relacionados a esta rede local, notado por $\tilde{N}_1^{k,t}$, são dados por:

$$\tilde{N}_1^{k,t} = (B^k)^{-1} N_1^{k,t}$$

e cada componente deste vetor é:

- . +1 se o arco da base local correspondente pertence ao ciclo e tem sentido contrário ao de t .
- . -1 se o arco correspondente pertence ao ciclo e tem o mesmo sentido de t .
- . Nulo se o arco não pertence ao ciclo.

Para todas as outras árvores locais a coluna N_1^t é nula.

O vetor \tilde{N}_2^t é dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_2^t &= N_2^t - P^k \cdot (B^k)^{-1} N_1^{k,t} \\ &= N_2^t - P^k \tilde{N}_1^{k,t} \end{aligned}$$

e portanto pode ser calculado de forma análoga ao vetor $Q^{k,j}$, seção 4.3, e assim cada componente de \tilde{N}^t é:

- . +1 se o arco t é saturado ou se o arco saturado pertence ao ciclo e tem igual sentido de t .
- . -1 se o arco pertence ao ciclo de t em sentido contrário a ele
- . nulo se o arco saturado não pertence ao ciclo de t .

O vetor \hat{N}_3^t é igual ao N_3^t pois não sofreu operações de pivoteamento.

t é uma variável de folga. A coluna N^t tem apenas um elemento diferente de zero e igual a +1 na linha de acoplamento do arco saturado r . Aplicando-se as operações parciais de pivoteamento temos.

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & & \tilde{R} & 0 \\ \hline - & & Q & 0 \\ \hline S & & U & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \hat{N}_1^t \\ \hat{N}_2^t \\ \hat{N}_3^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -N_2^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde deduzimos que

$$\hat{N}_2^t = Q^{-1} N_2^t \quad (26)$$

$$N_1^t = -R \hat{N}_2^t \quad (27)$$

$$N_3^t = -S \hat{N}_1^t - U \hat{N}_2^t \quad (28)$$

Mas, N_2^t é uma coluna com apenas um coeficiente diferente de zero, que corresponde à linha do arco saturado r , logo \hat{N}_2^t é a coluna r de Q^{-1} ou seja:

$$\hat{N}_2^t = (Q^{-1})^r \quad (29)$$

Portanto \hat{N}_2^t é calculado diretamente da matriz de ciclos.

4.7 - OBTENÇÃO DA VARIÁVEL QUE SAI DA BASE

Quando um arco entra na base os custos da função objetivo diminuem mediante a variação de fluxo nesse arco. Esta variação é bloqueada pela manutenção da factibilidade das variáveis básicas, a variável bloqueante estará saindo da base, e é obtida através da expressão abaixo e de considerações sobre os limites das variáveis básicas.

$$x_I = b - \hat{N}^t x_t \quad (30)$$

onde;

x_T : são os fluxos resultantes para todas as variáveis básicas.

\hat{b} : são os fluxos atuais das variáveis básicas, obtidos por (6), (7) e (8).

\hat{N}^t : é a coluna da variável não básica t .

x_t : é a variação de fluxo no arco não básico t .

4.8 - ATUALIZAÇÃO DA BASE

Para a atualização da base existem sete casos possíveis, a saber:

. Entra um arco t e sai um arco j pertencente ao ciclo de um arco corretor . Nesse caso o arco t passa a ser básico da rede local, sai o arco j , e t passa a ser corretor. A dimensão de Q se mantém.

. Entra um arco t e sai um arco j pertencente ao ciclo de t . Nesse caso entra t como arco básico da árvore local e sai j , Q conserva sua dimensão.

. Entra um arco t e sai o corretor ℓ . Nesse caso o arco t passa a ser corretor e ℓ sai da base. Q mantém sua dimensão.

. Entra um arco t e sai a folga r . O arco t passa a ser corretor e um arco j passa a ser saturado. Q aumenta a sua dimensão.

. Entra a folga f e sai j pertencente ao ciclo do arco corretor . Nesse caso sai j e a folga passa a ser básica. Q diminui de dimensão.

. Entra uma folga f e sai o arco corretor . A folga passa a ser básica e sai o arco corretor . Q diminui de dimensão.

. Entra uma folga f e sai uma folga r . Há portanto , uma troca de arcos saturados na matriz de trabalho. Q mantém sua dimensão.

No programa estas alterações são efetuadas nas árvores locais.

4.9 - O PROGRAMA

Apresenta-se a seguir o programa de rede multifluxo de custo mínimo PMFCM utilizado nesta tese.

4.9.1 - Inicialização

O programa se inicializa pressupondo que as soluções ótimas de cada rede local se constituem na solução ótima do problema multifluxo. Isto é verdadeiro se a soma de fluxos em cada arco não ultrapassa sua capacidade coletiva. Deve-se portanto obter, por meio do algoritmo de fluxo de custo mínimo, a solução ótima de cada rede em particular. Se estas soluções não ultrapassarem as capacidades de cada arco, a solução encontrada é ótima. Caso contrário, por um procedimento equivalente ao método do M grande do primal simplex, acrescenta-se às redes arcos artificiais paralelos aos arcos saturados com custos e capacidades suficientemente grandes. Factibiliza-se as redes descarregando-se parte dos fluxos dos arcos saturados nos arcos artificiais, desse modo obtem-se uma base factível inicial para o problema.

A inicialização é apresentada no diagrama de blocos da figura 4.1.

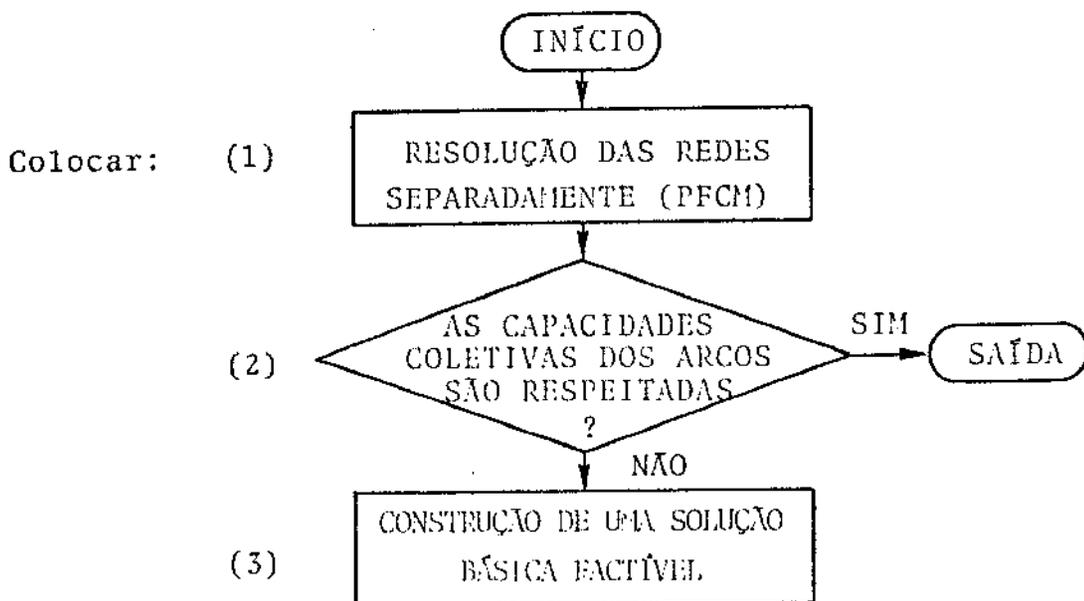


Figura 4.1

Bloco 1 - Resolução das redes separadamente. Para isso é utilizado o programa de fluxo de custo mínimo elaborado pelo setor POS do DEE/FEC e desenvolvido por Authie [1].

Bloco 2 - Encontra as equações de acoplamento que não são respeitadas. Para isto o programa utiliza a rotina SOFLU que soma os fluxos para cada um dos arcos. Se o fluxo em um dado arco ultrapassa sua capacidade coletiva, ele é definido como saturado, e se passa ao bloco 3. Se o número de arcos saturados é nulo, a solução inicial é ótima e termina-se o processo.

Bloco 3 - Encontra uma solução básica factível. Factibiliza-se o problema criando-se os arcos artificiais definidos anteriormente. Estes arcos têm custos (M) e capacidades (W) suficientemente grandes, de modo a absorverem os fluxos que ultrapassam as capacidades dos arcos saturados mas que seus custos tornem proibitivos seus usos na solução ótima. Os arcos artificiais passam a ser arcos corretores. Na figura 4.2 se observa que 3 é um arco saturado e 3' é um arco corretor artificial. No programa a rotina ACOR factibiliza o problema, criando estes arcos corretores artificiais.

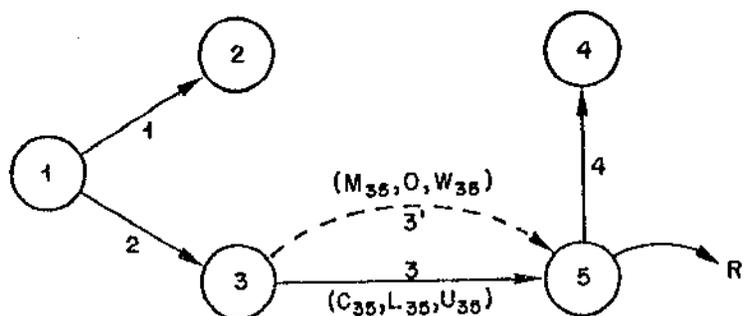


Figura 4.2

4.9.2 - Fase de Otimização

Os blocos para a fase de otimização aparecem na figura 4.3. Observa-se que nos exemplos demonstrativos a rede multi fluxo é simplificada a apenas uma rede para facilidade de exposição, assumindo que as demais redes não contêm arcos corretos. A seguir é apresentado cada um dos blocos.

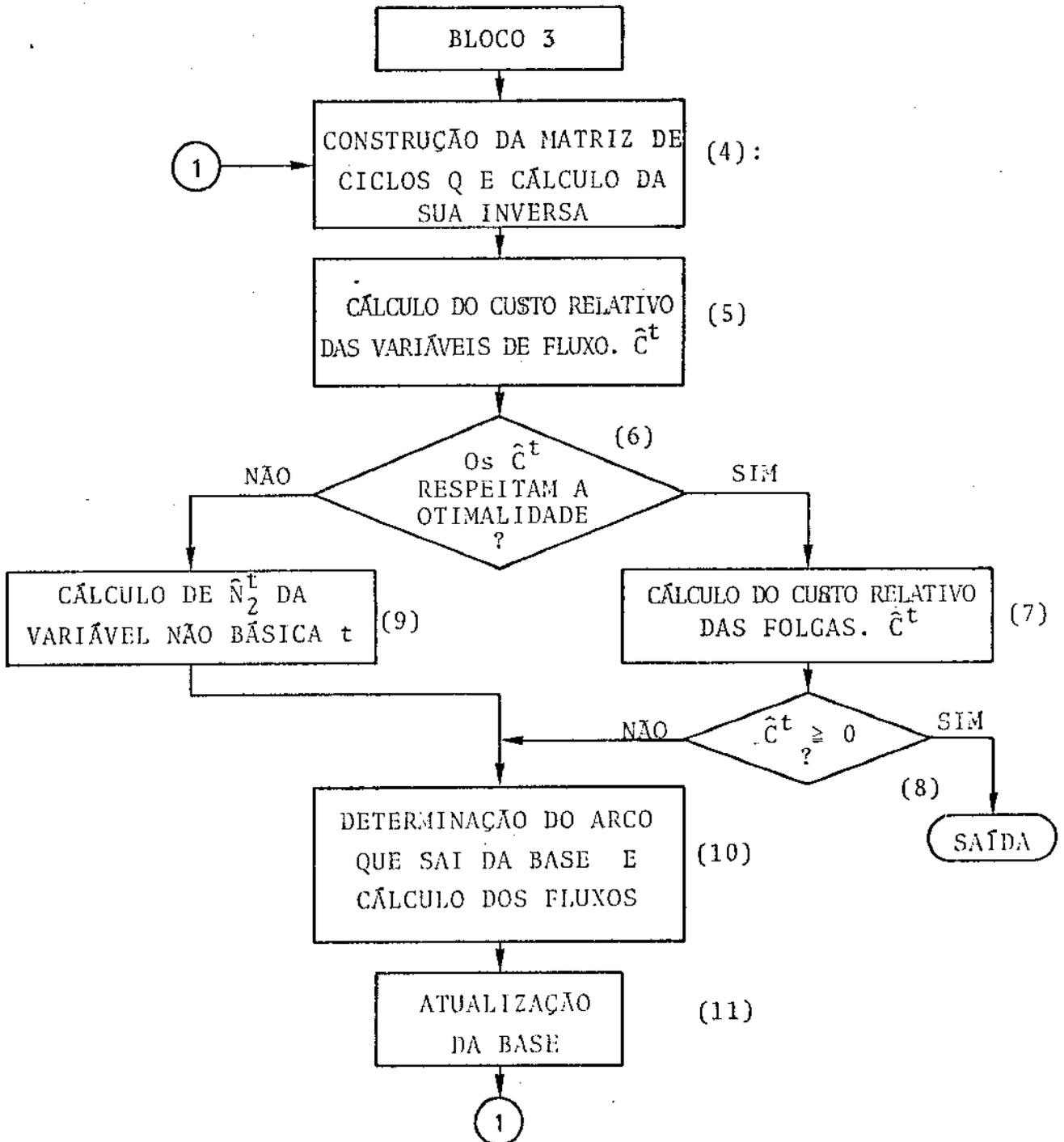


Figura 4.3

Bloco 4 - Construção da matriz de ciclo e sua inversa. No programa, Q é calculada diretamente através dos ciclos dos arcos corretos. O processo inicializa localizando o ciclo do arco corretor j na árvore local k em que ele participa e procede a seguir como exposto na secção 4.3. Na figura 4.4 supõem-se que os arcos 3 e 5 são corretos sendo o último e, ainda o arco 3, os únicos saturados do problema. Q é então uma matriz quadrada de ordem 2, a primeira linha corresponde ao arco saturado 3 e a segunda ao arco saturado 5. A matriz Q é dada por:

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e calculada da seguinte forma:

- . No ciclo α_1 o arco saturado 3 é contrário ao ciclo e o arco saturado 5 não participa do ciclo, então:

$$Q_1^1 = -1$$

$$Q_2^1 = 0$$

- . No ciclo α_2 os arcos saturados 3 e 5 têm o sentido do ciclo, então.

$$Q_1^2 = 1$$

$$Q_2^2 = 1$$

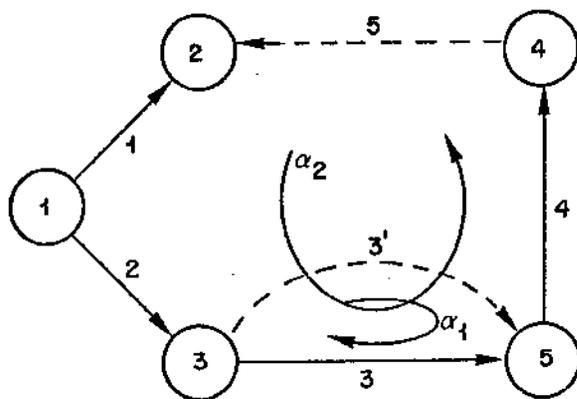


Figura 4.4

No programa a matriz Q é calculada na rotina CUMO. Este bloco é finalizado calculando-se a inversa de Q pela rotina INVE.

Bloco 5 - Cálculo dos custos relativos para as variáveis de fluxo. Como foi desenvolvido na seção 4.5, para calcular os custos relativos das variáveis não básicas precisa-se antes calcular os custos alterados γ^s para os arcos saturados. No programa estes custos, são calculados por intermédio dos custos dos arcos presentes nos ciclos dos corretores e por Q^{-1} , pela resolução das equações (16) e (17) desenvolvidas na seção 4.4. Este procedimento é exemplificado na figura 4.5, onde os custos aparecem em cada arco; os números dos arcos assim como a classificação de arcos corretores e saturados são os mesmos da figura 4.4.

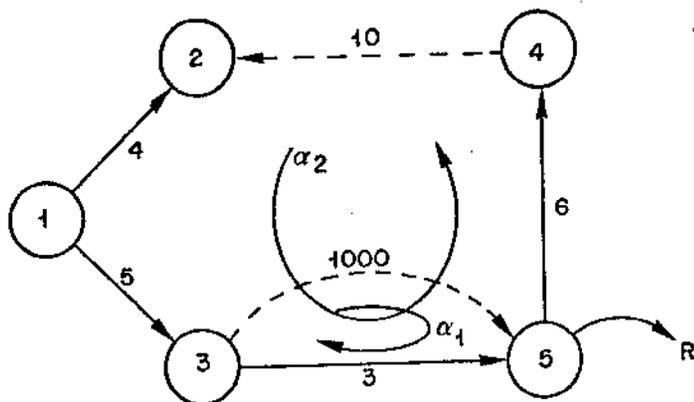


Figura 4.5

O primeiro e segundo componentes de V_c se referem respectivamente aos arcos corretores 3' e 5 e são calculados da seguinte forma:

Nos ciclos α_1 e α_2 , calcula-se a somatória dos custos dos arcos não saturados. Estes custos são positivos se os arcos têm sentido do ciclo e negativos caso contrário.

$$V_c^1 = C_3 \\ = 1000$$

$$V_c^2 = -c_1 + c_2 + c_4 \\ = -4 + 5 + 6 \\ = 7$$

dessa forma γ^s é calculado por:

$$\gamma^s = -(1000 \ 7) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ = (1000 - 1007)$$

Com estes custos alterados para os arcos saturados e sem modificar os custos dos demais arcos, o programa calcula os poten -

ciais dos nós e determina os custos relativos aplicando a mesma metodologia do PFCM, com $\tilde{c} = c - \text{potencial do nó origem} + \text{Potencial do nó destino}$. Para isso é utilizada a rotina CUMO que calcula o custo alterado dos arcos saturados, a rotina POTEM que calcula os potenciais e a rotina CREM que calcula os custos relativos dos arcos não básicos.

Bloco 6 - Teste de otimalidade para as variáveis de fluxo. Caso alguma variável de fluxo tenha custo relativo negativo, ela entra na base e vai-se ao bloco 9, caso contrário, vai-se ao bloco 7.

Bloco 7 - Cálculo dos custos relativos para as variáveis de folga. Pela relação (22) da secção 4.5, tem-se que $\tilde{c}^f = -\pi_2$. O vetor multiplicador π_2 é calculado pela relação (18) da secção 4.4. No exemplo da figura 4.5 π_2 é dado por:

$$\begin{aligned} (\pi_2^1 \quad \pi_2^2) &= (3 \ 10) - (1000 - 1007) \\ &= (-997 \ 1017) \end{aligned}$$

e portanto o custo relativo das variáveis de folga dos arcos saturados 3 e 5 é dada por:

$$\begin{aligned} (\tilde{c}^1 \quad \tilde{c}^2) &= -(-997 \ 1017) \\ &= (997 \ -1017) \end{aligned}$$

Bloco 8 - Teste de otimalidade para as variáveis de folga. Se todos os $\tilde{c}^f \geq 0$ o programa termina e é encontrada a solução ótima do problema. Caso contrário vai-se ao bloco 10, e entra uma folga na base. No programa os cálculos dos blocos (6) (7) e (8) são efetuados na rotina CREM.

Bloco 9 - Cálculo da componente \hat{N}_2^t da coluna da variável não básica t . O cálculo da componente \hat{N}_2^t da coluna da variável não básica t em termos da base corrente B é feito pela expressão (23).

No programa calcula-se primeiro \hat{N}_2^t como foi desenvolvido na secção 4.6, pela análise do ciclo do arco t . E aplica-se a expressão (23).

Observa-se que quando uma folga entra na base este bloco não é executado, porque o \hat{N}_2^t correspondente pode ser obtido diretamente na matriz Q^{-1} como pode ser visto na expressão (29).

Este bloco é executado na rotina VECI.

Bloco 10 - Determinação do arco que sai da base e os fluxos. Para isso é calculado os \hat{N}_1^t e \hat{N}_3^t pelas expressões (24) e (25) quando a variável a entrar na base é um arco e pelas expressões (27) e (28) quando a variável a entrar é uma folga. Com isto é determinada a variável que sai pela expressão (30). No programa a variável que sai é calculada pela rotina SABA2. A rotina FLUXO 2 atualiza os fluxos para todos os arcos.

Bloco 11 - Atualização da base. Este bloco permite determinar a nova base e é formada por três rotinas.

A rotina RETAR coordenadora que define os arcos corretores, saturados e as novas bases (árvores) locais na forma apresentada na secção 4.8.

A rotina REST2 que atualiza as árvores locais quando houver uma troca de arcos básicos.

A rotina CACO que reordena as linhas de Q de forma a obter que todos os elementos da diagonal principal sejam não nulos. O objetivo é facilitar a inversão da matriz Q .

CAPÍTULO 5

PROGRAMAS DE CUSTOS NÃO LINEARES E DE LOCALIZAÇÃO

5.1 - PROGRAMA PARA FUNÇÕES DE CUSTO NÃO LINEARES

5.1.1 - Introdução

Para a implementação do programa de rede multifluxo o modelo deve ser equacionado com funções de custo lineares para os arcos das redes. Entretanto, pode-se observar que o modelamento da atividade de armazenamento como um arco capacitado implica na adoção de funções de custo unitário não lineares para este arco, como foi desenvolvido na seção 1.3.1 do capítulo 1.

Para resolver este problema é utilizado o método iterativo de King e Logan [15], utilizado também por Monterosso [19], e citado na seção 3.4 do capítulo.3.

5.1.2 - Procedimento de Resolução

Basicamente o programa de funções de custo não lineares PCNL consiste de um programa que executa várias vezes a rotina PMFCM para uma série de configurações de custos unitários dos arcos.

O procedimento de resolução de funções não lineares é esquematizado no exemplo da figura 5.1, onde temos uma função de custo unitário $c_{jj'} = F_{jj'}/x_{jj'} + G_{jj'}(x_{jj'})$ para o arco jj' . O exemplo é inicializado com o menor custo unitário $c_{jj'}^0$, que é definido como o custo do arco para a iteração inicial. Ao executar o PMFCM é encontrado para um arco jj' um fluxo $x_{jj'}^1$, que corresponde na curva ao custo $c_{jj'}^1$. Como a diferença entre $c_{jj'}^1$ e $c_{jj'}^0$, não é tolerável, então o progrma executa a segunda iteração resolvendo o PMFCM para o custo $c_{jj'}^1$, encontra-se agora um fluxo $x_{jj'}^2$, que corresponde a um custo $c_{jj'}^2$, compara-se $c_{jj'}^2$ e $c_{jj'}^1$, a tolerância não é satisfeita. Passa-se então a terceira iteração, utilizando-se para o arco o custo $c_{jj'}^2$, obtêm-se o fluxo $x_{jj'}^3$, que corresponde ao custo

$c_{jj'}^3$. Comparando-se $c_{jj'}^3$ e $c_{jj'}^2$, tem-se que é satisfeito algum critério de parada. Este procedimento é efetuado para todos os arcos de armazenagem, terminando o programa quando todos os arcos satisfazem a tolerância. Mais adiante apresentamos o critério de parada utilizado.

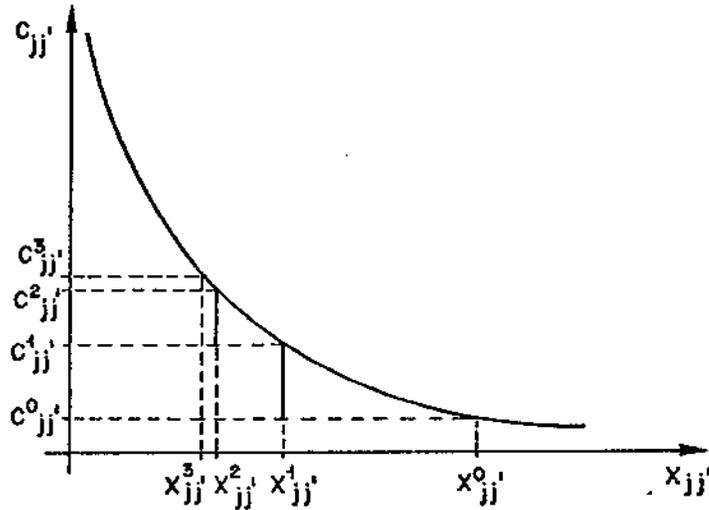


Figura 5.1

5.1.3 - O Programa

O programa que segue o procedimento do item anterior é esquematizado no diagrama de blocos de Figura 5.2, dividindo-se em quatro blocos, a saber: inicialização, chamada da rotina PMFCM, atualização dos custos e teste de convergência.

- . Inicialização - Como o programa PCNL toma parte, como rotina, do programa principal de localização LOAGRI, a estrutura inicial dos custos de armazenagem é definida no programa LOAGRI. Portanto os $c_{jj'}^0$ entram como dados da rotina PCNL.
- . Rotina PMFCM - Aqui é resolvido o problema de rede canalizada para os custos $c_{jj'}^i$. Observamos que a rotina PMFCM somente na primeira ite

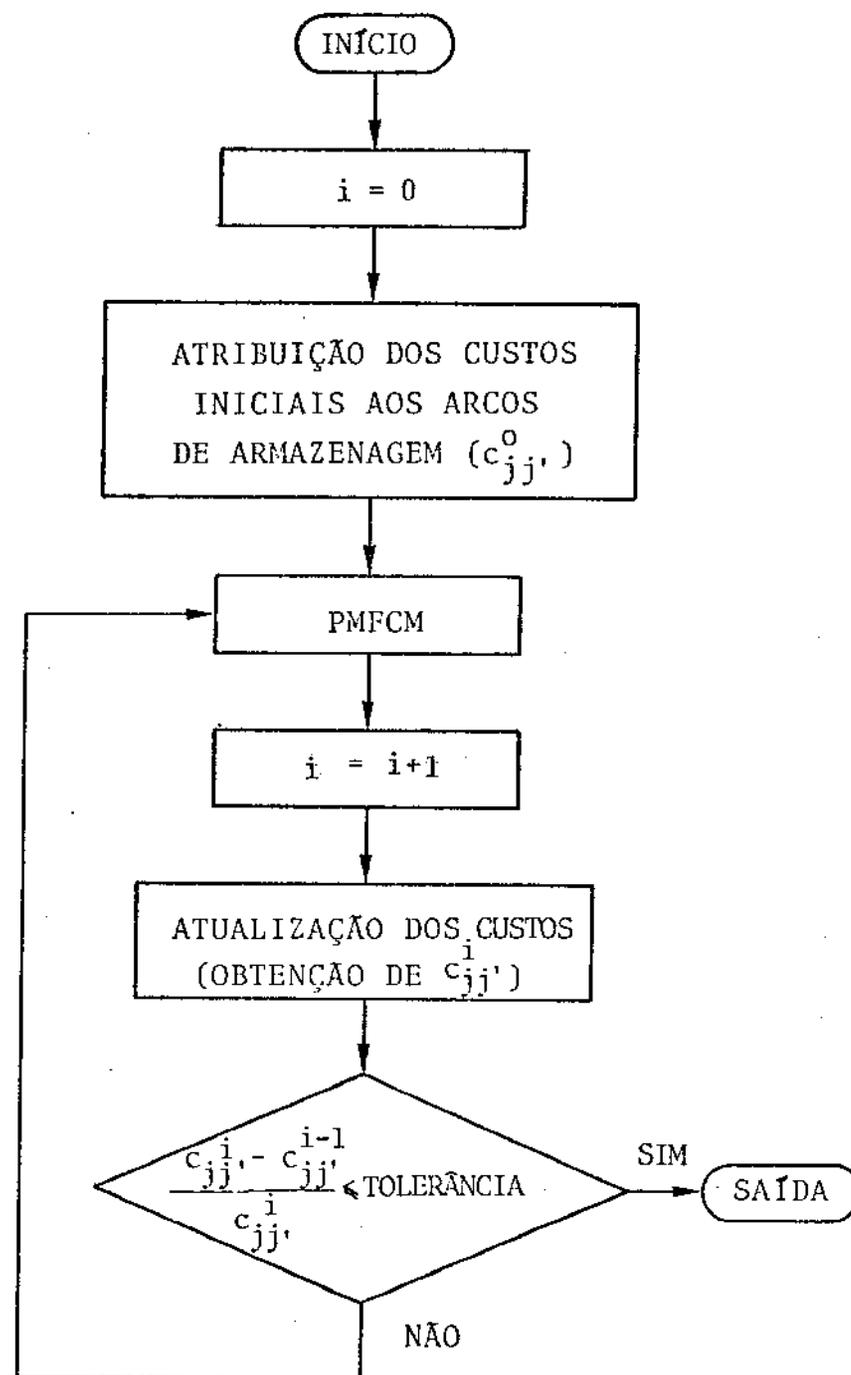


Figura 5.2

ração realiza a FASE I, após isto parte da solução ótima encontrada na iteração anterior, o que permite maior rapidez na obtenção da solução ótima do programa PCNL.

- . Atualização dos Custos - Com os fluxos $x_{jj'}^{i-1}$, obtidos no passo anterior obtém-se os custos correspondentes $c_{jj'}^i$.
- . Teste de convergência - A relação chamada aqui de ERRO, entre $c_{jj'}^i$ e $c_{jj'}^{i-1}$ é calculado pela fórmula.

$$\text{ERRO} = \frac{c_{jj'}^i - c_{jj'}^{i-1}}{c_{jj'}^i}$$

O teste de convergência consiste em que o ERRO deve ser menor ou igual a uma tolerância dada. Se o ERRO é maior que a tolerância o programa executa uma nova iteração, utilizando $c_{jj'}^i$ como o novo custo do arco jj' .

5.1.4 - Convergência

A convergência deste método é mostrada por Frank e Wolfe {25} para funções de custo com derivadas segundas contínuas.

Monterosso {19} afirma que o método iterativo é satisfatório para a maioria das funções com significado econômico prático.

Para as funções de custo utilizadas neste trabalho a convergência é satisfatória.

5.2 - PROGRAMA PARA LOCALIZAÇÃO DE ARMAZENS

5.2.1 - Introdução

O procedimento utilizado neste trabalho para o problema de localização de armazéns agrícolas, é um método de exclusão desenvolvido por Fildman, Leher e Ray {6}.

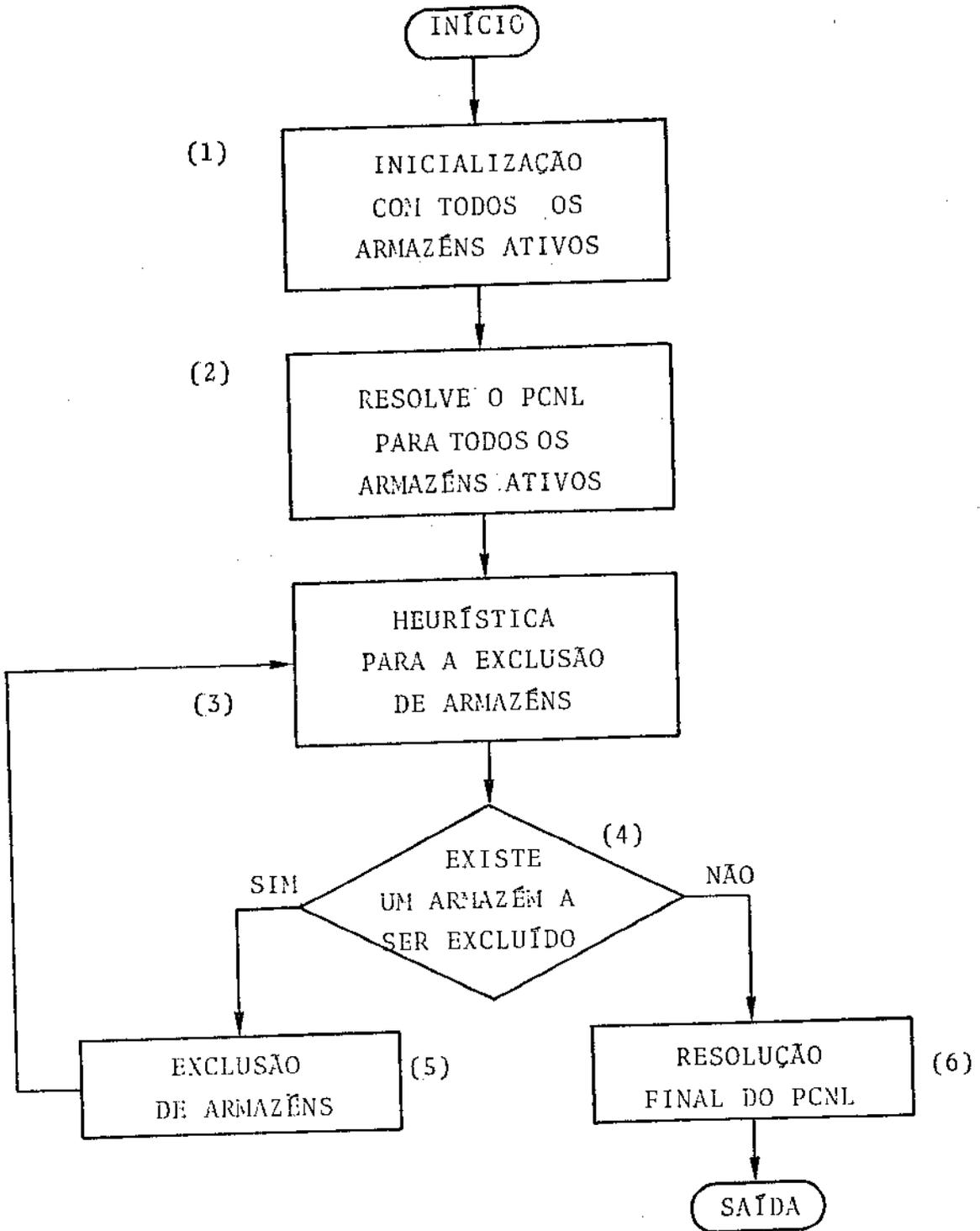


Figura 5.3

5.2.2 - O Programa

O programa de localização de armazéns agrícolas, LOAGRI, é esquematizado no diagrama de blocos da figura 5.3. Este diagrama é formado por 6 blocos, de finais por: inicialização, resolução do PCNL, heurística para cálculo do conjunto de candidatos a exclusão, teste de existência de armazéns a serem excluídos, exclusão de armazéns e resolução final do PCNL. A seguir é apresentado o desenvolvimento de cada um destes blocos.

- . Inicialização - O programa LOAGRI inicializa com todos os armazéns ativos. Para isso é adotado custos mínimos de armazenamento, que correspondem aos máximos fluxos permitidos pelos arcos de armazenagem, como aparece na figura 5.4. O custo c_{jj}^0 , corresponde à capacidade máxima U_{jj} , do arco de armazenagem jj' .

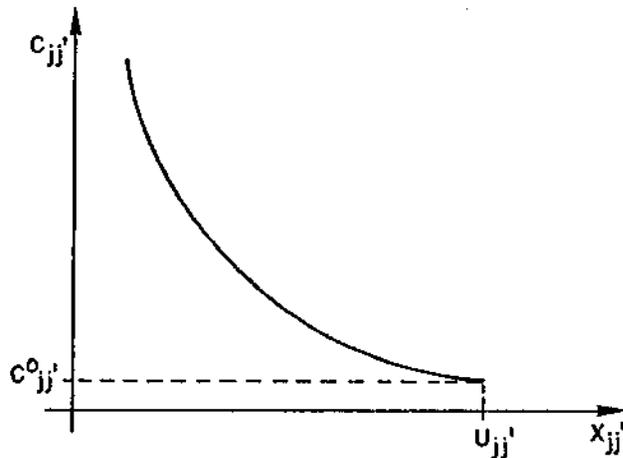


Figura 5.4

- . Resolução do PCNL - Com os custos $c_{jj'}^0$, é resolvido o programa PCNL, que aqui entra como uma rotina do programa principal LOAGRI. O valor da função objetivo é guardada na variável SOTO que durante o processo armazenará o valor da melhor

solução até então encontrada.

- . Heurística para a exclusão de armazéns - A heurística de exclusão de armazéns consiste em encontrar os armazéns com maiores custos unitários da melhor solução até agora encontrada. Estes constituíram o conjunto ITES de candidatos a exclusão. Portanto em ITES é guardado o número dos arcos que representam os armazéns candidatos a exclusão. O número máximo de armazéns a serem excluídos um a um, em um dado estágio de exclusão, é dado pela variável NAT que entra como informação para o programa na leitura de dados.
- . Teste de saída - Se o conjunto de candidatos a exclusão é vazio, vai-se ao bloco 6. Caso contrário inicia-se um estágio de exclusão.
- . Exclusão de armazéns - Neste estágio, exclui-se temporariamente cada armazém de ITES e logo após em caráter definitivo, um deles. Seja ITES (I) o armazém candidato a exclusão. Sua exclusão temporária é efetuada alterando-se o custo c_{jj} , do arco representativo do armazém ITES(I) para um valor suficientemente grande, de modo a tornar proibitiva sua implantação, mantendo-se os outros armazéns com custos unitários iguais aos da última solução aceita. Excluído o armazém, o valor de custo da nova configuração é dado por FOT(I). O arco representativo deste armazém recebe então novamente o custo da última solução aceita e um próximo elemento de ITES é testado. Obtido o custo de todas as configurações possíveis FOT(I), $I=1,2,\dots,NAT$ estes são comparados com SOTO. Duas situações são possíveis (vide figura 5.5) onde os armazéns candidatos a exclusão são os de número (10, 20, 35 e 14).

1. $FOT(I) > SOTO$, então o arco $ITES(I)$ não deve jamais retornar ao conjunto $ITES$, não sendo mais candidato a exclusão; no exemplo, os armazéns 10 e 14.
2. Entre as configurações tais que $FOT(I) < SOTO$, para a mais econômica fazemos $SOTO = FOT(I)$ e o armazém $ITES(I)$ é excluído definitivamente, os demais arcos poderão fazer parte de outros estágios de exclusão. No exemplo, é excluído definitivamente o armazém 20, o de número 35 poderá ser candidato a exclusão em outro estágio.

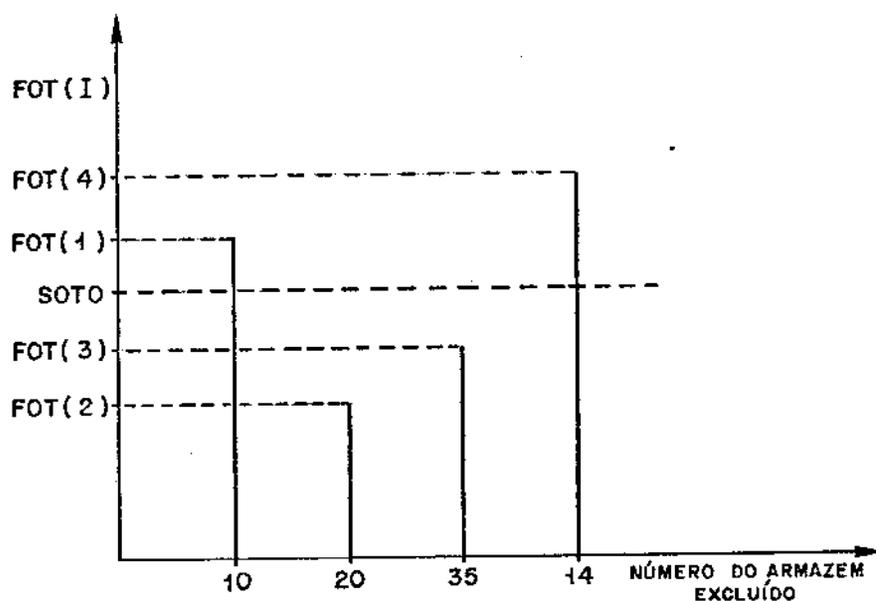


Figura 5.5

Na figura 5.6 é apresentado o diagrama de blocos deste procedimento. O programa utiliza a variável indexada $IMA(J)$, J variando de um até o número total de armazéns, com valores 1 para os arcos que devem ser testados e -1 para os armazéns que foram excluídos ou não devem mais ser excluídos. No início do programa todos os $IMA(J)$ são iguais a 1.

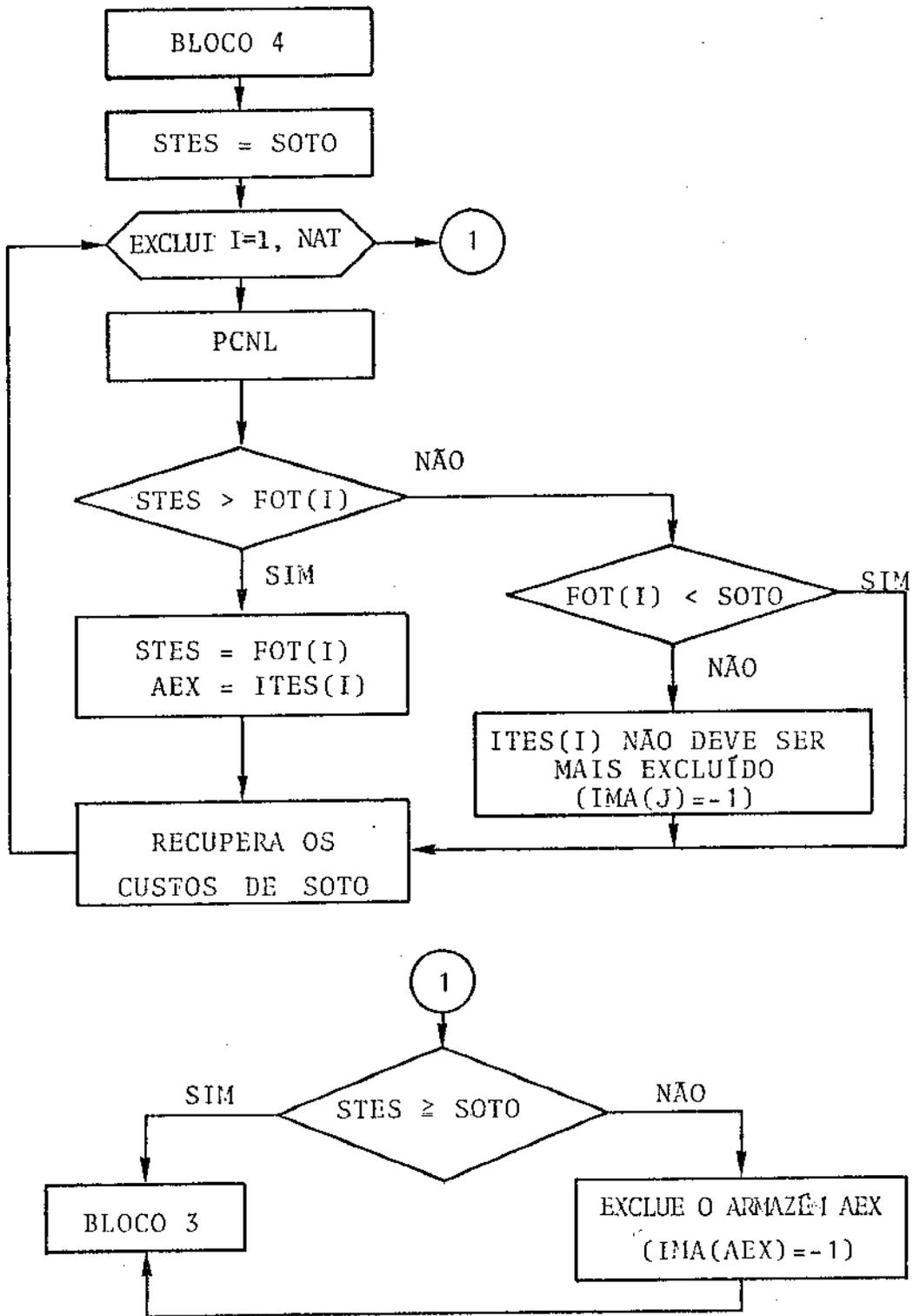


Figura 5.6 - Bloco 5 detalhado.

Resolução final do PCNL - Uma das vantagens do programa é que a resolução de uma determinada configuração é obtida partindo-se da solução ótima da configuração anteriormente testada. Por isso cada vez que se calcula uma nova solução se perde a solução anterior; se a última solução testada não é a melhor, então a solução ótima é recuperada neste bloco, finalizando o programa.

PARTE III

APLICAÇÃO E CONCLUSÃO

INTRODUÇÃO

Nos capítulos precedentes, descreveu-se o problema de localização de armazéns agrícolas, seu modelamento como uma rede capacitada, os métodos que o estudam e o programa computacional que o resolve. Nesta parte é desenvolvido um exemplo de aplicação para o sistema de armazenamento de uma região do Estado de São Paulo. Antes de tudo, observa-se que este estudo teve como origem uma aplicação em um projeto de implementação de centros de armazenagem na República de Honduras, o qual consistia na localização ótima de centros candidatos a instalação de armazéns rurais. Por dificuldades na obtenção das informações o estudo se efetuou no Estado de São Paulo, no qual o setor de armazenagem apresenta um bom dimensionamento com as atuais instalações. A aplicação que será apresentada no capítulo 6, se faz para o sistema atual considerando simplificações como por exemplo só dois produtos, milho e soja e apenas um meio de transporte.

No capítulo 7 são apresentadas as conclusões do trabalho e as recomendações para futuras aplicações em modelos mais gerais.

CAPÍTULO 6

APLICAÇÃO DO MODELO

6.1 - O EXEMPLO

A região do Estado de São Paulo tomada como exemplo aparece na figura 6.1, consistindo de 18 microregiões. Segundo a classificação de zonas de tráfego definidas pelo GEIPOT, observa-se que a região do Estado em consideração é dividida em 24 zonas de tráfego mas, no exemplo, algumas delas foram agregadas.

O sistema de armazenagem e distribuição de milho e soja é dividido em 3 subsistemas, um sistema de produção formado por 72 arcos de transporte entre os centros de produção e os centros de armazenagem, um sistema de demanda formado por 72 arcos de transporte entre os centros de armazenagem e os centros de demanda. Por último, um sistema de armazenagem formado por 18 arcos, cada um deles representando um armazém unindo uma mesma microregião representada por dois nós, um para o sistema de produção e outro para o sistema de demanda. Dessa forma o número total de nós é 36 que simulam as 18 microregiões, segundo o modelo 1 desenvolvido na seção 2.3 do capítulo 2.

As considerações sobre: produção, demanda, custos de transporte e armazenagem, capacidade armazenadora e rede de transporte referem-se ao ano base de 1980.

6.2 - REDE DE TRANSPORTE

No exemplo toma-se apenas a rede de transporte rodoviário, primeiro porque é um exemplo acadêmico e segundo porque é o sistema de transporte mais utilizado no Estado.

A rede paulista de rodovias pavimentadas chega a todos os centros produtores, o que permite um razoável escoamento dos produtos. Contudo, no tempo de safra, o grande número de caminhões pesados satura as principais vias. No estudo não são consideradas estas saturações porque se visa somente obter a localização dos arma

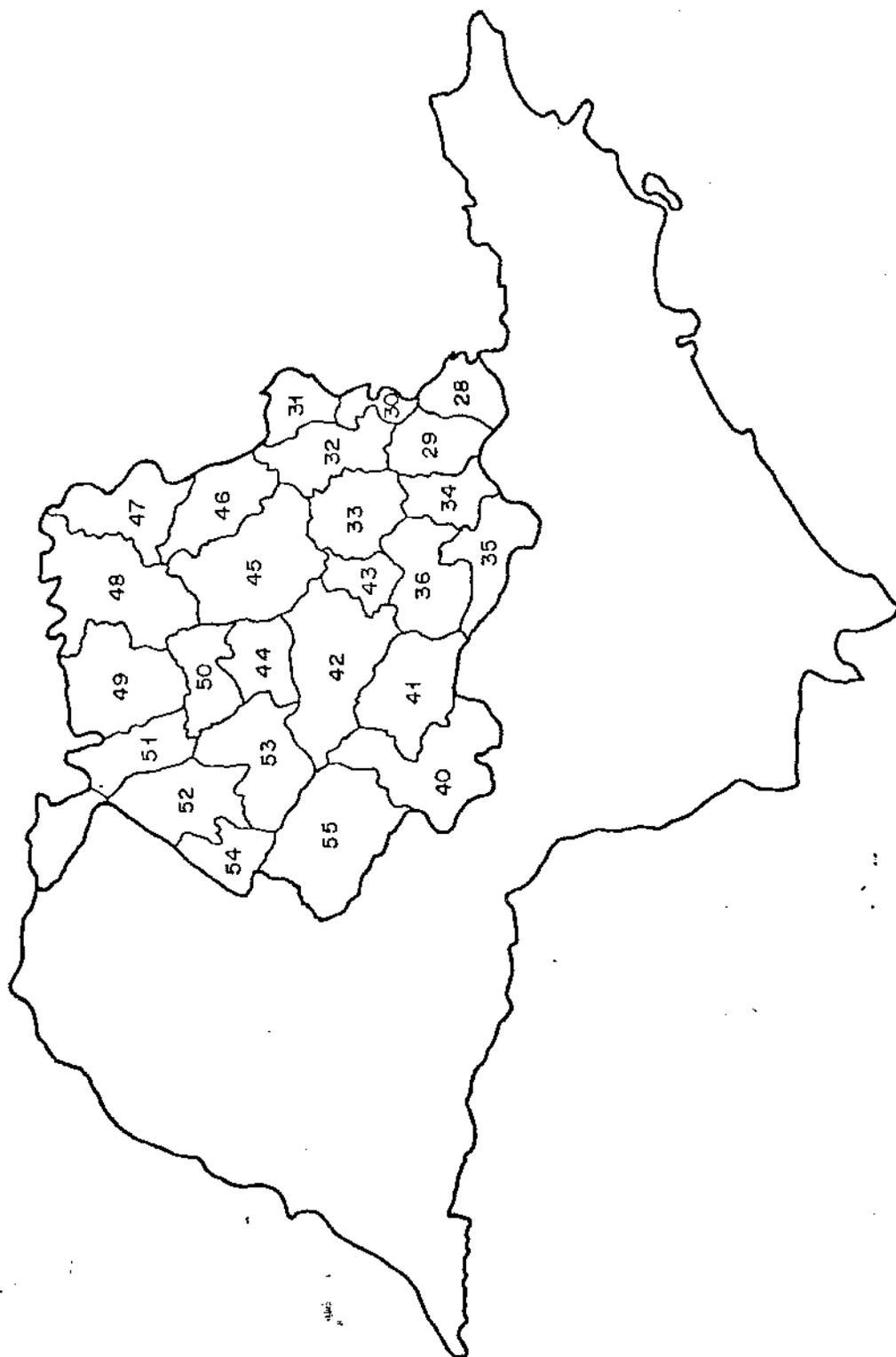


FIGURA 6.1

zêns, embora o modelo possa ser utilizado em um estudo da rede de transporte.

O custo de transporte é obtido a partir da distância mínima entre duas zonas de tráfego do estudo do GEIPOT. Com esta distância utiliza-se a tabela de tarifas, para o transporte rodoviário de cargas, da Associação Nacional das Empresas de Transporte Rodoviário de Carga para o ano de 1980. Uma parte desta, referentes às tarifas para transporte de grãos, é apresentada na tabela 1

TABELA 1

Distância em Kms.	Custo Cr\$
01 - 50	864
51 - 100	946
101 - 150	1027
151 - 200	1109
201 - 250	1350
251 - 300	1432
301 - 350	1514
351 - 400	1596
401 - 450	1678
451 - 500	1760

Graficamente esta tabela tem a forma da curva em escada da figura 6.2, que pode ser aproximada por uma curva linear, com equação dada por:

$$\text{custo} = 1,64 \times \text{distância} + 823$$

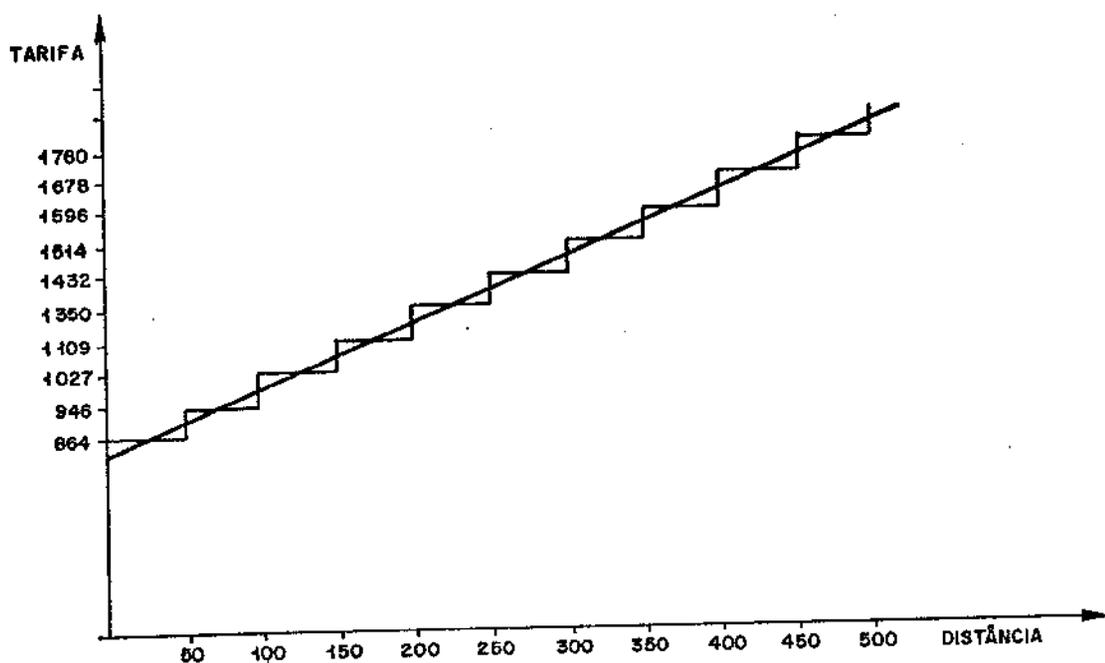


Figura 6.2

No exemplo despreza-se o custo fixo porque não é uma variável otimizante, a função de custo de transporte é então da forma seguinte:

$$\text{custos} = 1.64 \times \text{distância}$$

Na figura 6.3 apresentam-se os arcos e as regiões compreendidas pelo estudo, observando-se que os arcos têm duplo sentido de fluxo. Na tabela 2, apresentam-se os arcos, as distâncias e os custos dos arcos.

Na tabela 3 apresentam-se os nós centróides das micro regiões, as produções e demandas por produto e as capacidades estáticas dos armazéns. No computador foi utilizado como unidade cem toneladas para as produções, demandas e capacidades dos armazéns.

TABELA 2

Nº DO ARCO	DISTÂNCIA (Km)	CUSTO (Cr\$)
1	64	105
2	79	130
3	89	146
4	28	46
5	158	259
6	113	185
7	203	333
8	54	89
9	71	116
10	104	171
11	129	212
12	75	123
13	50	82
14	130	213
15	77	126
16	212	348
17	129	212
18	105	172
19	71	116
20	120	197
21	209	342
22	80	131
23	157	257
24	181	297
25	43	71
26	66	108
27	110	180
28	82	134
29	47	77
30	110	180
31	61	89
32	49	80
33	62	102
34	36	59
35	90	148
36	119	195

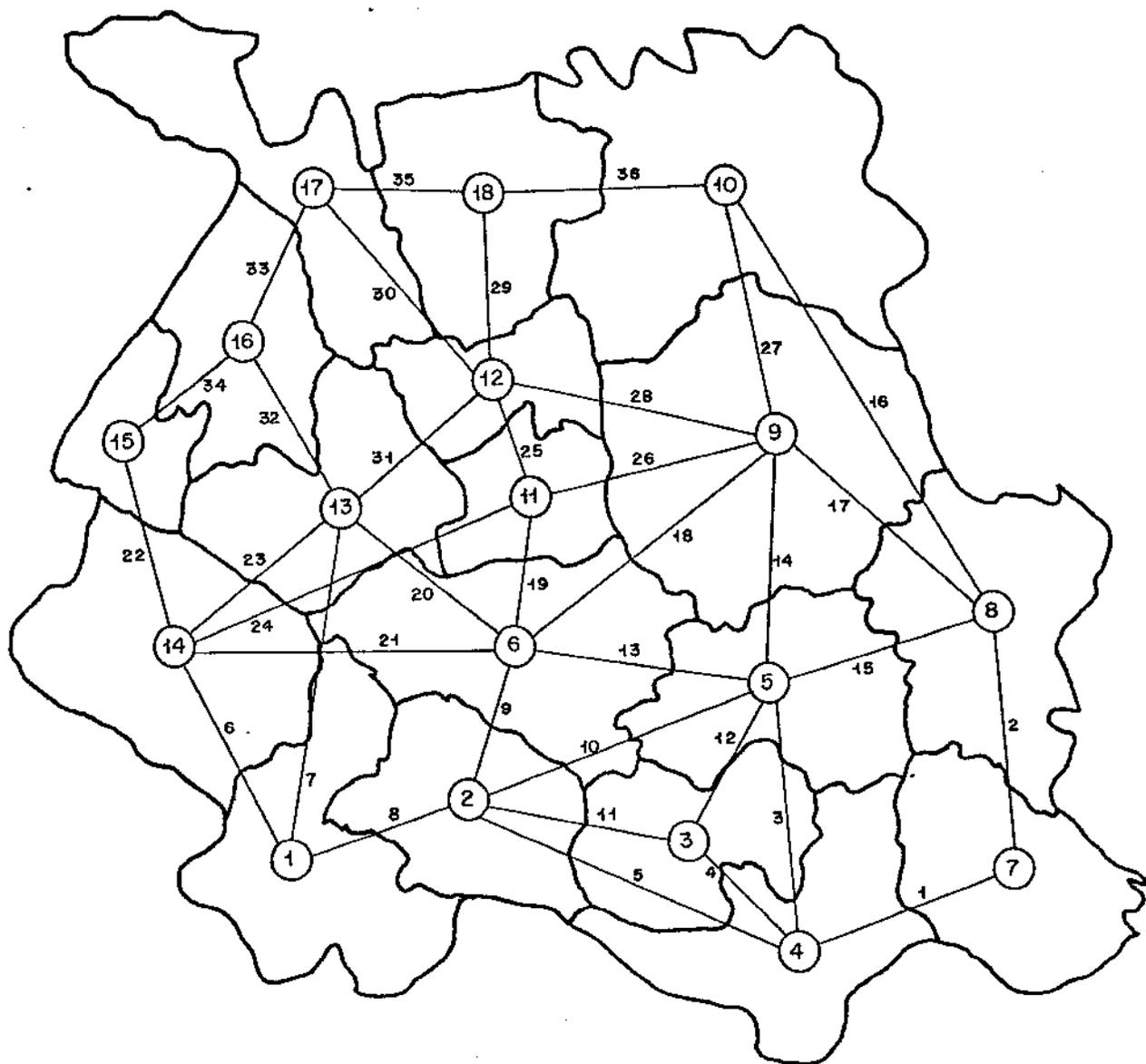


Figura 6.3

6.3 - REDE DE ARMAZENAGEM

Como pode-se observar na tabela 3 todas as regiões possuem centros de armazenagem. Para a modelagem desta atividade foram utilizados arcos, onde as capacidades representam o máximo fluxo que pode ser armazenado durante o período considerado.

Não foi possível obter informações a respeito das funções de custo. A partir de dados de tarifas para o ano de 1980 da Federação Meridional de Cooperativas Agropecuárias Ltda., com sede em Campinas, criou-se algumas funções de custo, que não têm muito compro-

Nº DO Nº	Nº DO Nº	PRODUÇÃO MILHO EM TONELADAS	PRODUÇÃO SOJA EM TONELADAS	DEMANDA MILHO EM TONELADAS	DEMANDA SOJA EM TONELADAS	CAPACIDADE ESTÁTICA DE ARMAZENAGEM EM TON.
1	Bauru	19900	164100	18200	43200	310100
2	Jaú	19000	100	16600	43400	241800
3	Rio Claro	26900	1000	51100	-	58500
4	Piracicaba	13700	1000	31600	-	692600
5	São Carlos	37600	12000	67100	-	160600
6	Araraquara	25400	7200	31300	-	602500
7	Mogi-Mirim	49200	5000	56300	-	129500
8	Mococa	74100	23500	111400	-	144300
9	Rib. Preto	70800	67100	95900	88100	807600
10	Franca	132700	247200	111700	128000	696200
11	Jaboticabal	38700	16200	9000	131200	227500
12	Bebedouro	14500	36300	12000	219000	173900
13	Catanduva	24000	200	20100	8300	129100
14	Lins	36800	179600	41500	-	55100
15	José Bonifácio	14400	2000	19600	-	7000
16	S. J. Rio Preto	73000	2100	43800	-	211300
17	Olímpia	43400	9300	29000	-	240800
18	Barretos	76300	132300	24200	245000	241000

misso com a realidade mas serve aos nossos propósitos de mostrar as potencialidades do modelo. As funções utilizadas são:

$$C_1 = 360 Q_1 + 175 CE_1, \text{ para } CE_1 = 900.000$$

$$C_2 = 400 Q_2 + 225 CE_2, \text{ para } CE_2 = 225.000$$

$$C_3 = 440 Q_3 + 275 CE_3, \text{ para } CE_3 = 150.000$$

onde:

C_i : Custo de armazenagem para armazém com capacidade máxima dada por CE_i

Q_i : Quantidade armazenada

CE_i : Capacidade máxima estática do armazém

Com função custo unitário dado por:

$$CU_i = \frac{C_i}{Q_i}$$

Observando-se que quando $CE=Q$ obtem-se os mínimos custos unitários dados por:

$$CU_1 = 535$$

$$CU_2 = 625$$

$$CU_3 = 715$$

6.4 - EXPERIÊNCIAS COMPUTACIONAIS

Para o exemplo anteriormente apresentado foram feitas várias experiências computacionais. Apresentamos aqui apenas sete delas por serem uma síntese das outras e são explicadas a seguir:

- 1) Inicialização com as funções de custo de armazenagem com mínimos custos unitários.

- 2) Inicialização com as funções de custo de armazenagem com custos unitários médios.
- 3) Inicialização com as funções de custo de armazenagem com altos custos unitários.
- 4) Diminuição de 20% nos custos de transporte.
- 5) Diminuição de 10% nos custos de transporte.
- 6) Aumento de 10% nos custos de transporte.
- 7) Aumento de 20% nos custos de transporte.

Dados das experiências quanto à localização, quantidade e custos podem ser observados na tabela 4, na qual não aparecem as localizações 2,4,9 e 15 dado que, em experiências anteriores, estes locais não se ofereciam como localização atrativas para a implementação de armazéns.

A seguir preocupa-se mais em comentar a totalidade das experiências do que alguma em particular.

De forma geral no máximo 10 centros de armazenagem seriam necessários para o sistema, sendo que no caso do milho alguns centros só armazenam esse produto, como é o caso do armazem na região 3. Isto se deve ao fato de que todos os centros produzem e demandam milho, o que não é verdadeiro para a soja. Nas figuras 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, 6.9 e 6.10 aparecem as localizações ótimas para cada experiência.

Quanto às experiências 1, 2 e 3 observa-se que a inicialização dos custos unitários de armazenagem influencia a solução do problema. Isto porque a função objetivo é côncava, havendo então vários ótimos locais, o que permite soluções múltiplas que satisfazem a tolerância permitida. Em nossas experiências foi aceita uma tolerância de 0.1 em relação ao ERRO estudado no capítulo 5 seção 5.13. Das experiências realizadas é possível constatar que se obtém soluções melhores inicializando-se o problema com baixos custos unitários.

TABELA 4

EXPERIENCIA COMPUTACIONAL	QUANTIDADE ARMAZENADA**													CUSTOS* DE TRANSPORTE	CUSTOS* DE ARMAZENAGEM	CUSTOS* DE TOTALS	
	1	3	5	6	7	8	10	11	12	13	14	16	17				18
1	S	164		14			29	231	189	114		8		157	136	630	1424
	M	35	58	147			116	133	39	60		47	73	36	88	570	
2	S	217		43				247	189	69				142	153	617	1418
	M	40	58	118			144	133	39	105	55			99	107	514	
3	S				349		39	247					63	36	262	569	1552
	M		58		220		105	133		6		148	120		138	583	
4	S	214					29	247	122	140		14		142	117	613	1387
	M	84				90	116	133	106	35	87	41		99	88	569	
5	S	225		17			26	247	187	63				142	137	617	1407
	M	41		144		49	119	133	41	111	55		99	93	560		
6	S	164		14			29	222	189	108		14		167	150	631	1445
	M	35	58	146			116	133	39	66	41	83	74	95	569		
7	S	164		14			29	222	189	108		14		167	164	633	1471
	M	35	58	146			116	133	39	66	41	83	74	104	570		

* em milhões de cruzeiros

** em milhares de toneladas

obs: S: soja, M: milho

Em relação as experiências 4,5 , 6 e 7 o aumento ou diminuição dos custos de transporte provocam a ativação e desativação de centros; se estes custos diminuem os armazéns 7 e 13 têm uma tendência a serem ativados e os de números 5 e 3 a serem desativados. Se os custos aumentam o armazem 16 é ativado. Para os dois casos os centros 1, 8, 10, 11, 12, 14 e 18 sempre se apresentam, e de uma forma geral os centros 8 e 10 são imprescindíveis para o sistema, apresentando-se como os melhores centros de localização,

O programa oferece uma boa rapidez, com tempo médio de execução de 30 segundos de CPU para o exemplo aqui apresentado. Observa-se que na primeira vez que é chamada a rotina de funções de custos não lineares (PCNL) pelo programa principal (LOAGRI), encontra-se o ponto de equilíbrio entre custos unitários e fluxos em uma média de 3 iterações . Nas demais chamadas em apenas uma iteração se encontra o ponto de equilíbrio.

O programa realiza uma única vez a fase 1 efetuada quando encontra a solução com todos os armazéns ativados. Ao testar uma saída de um armazem, da segunda chamada em diante do PCNL ou do PMFCM, se parte da última solução básica encontrada, o que permite maior rapidez na obtenção da solução ótima do problema.

Destas experiências não é possível concluir que aquelas regiões que têm armazéns instalados mas não utilizados, que estes deveriam ser desativados; pois utiliza-se apenas dois produtos e funções de custo aproximados. Resultados mais conclusivos só podem ser obtidos com dados mais precisos.

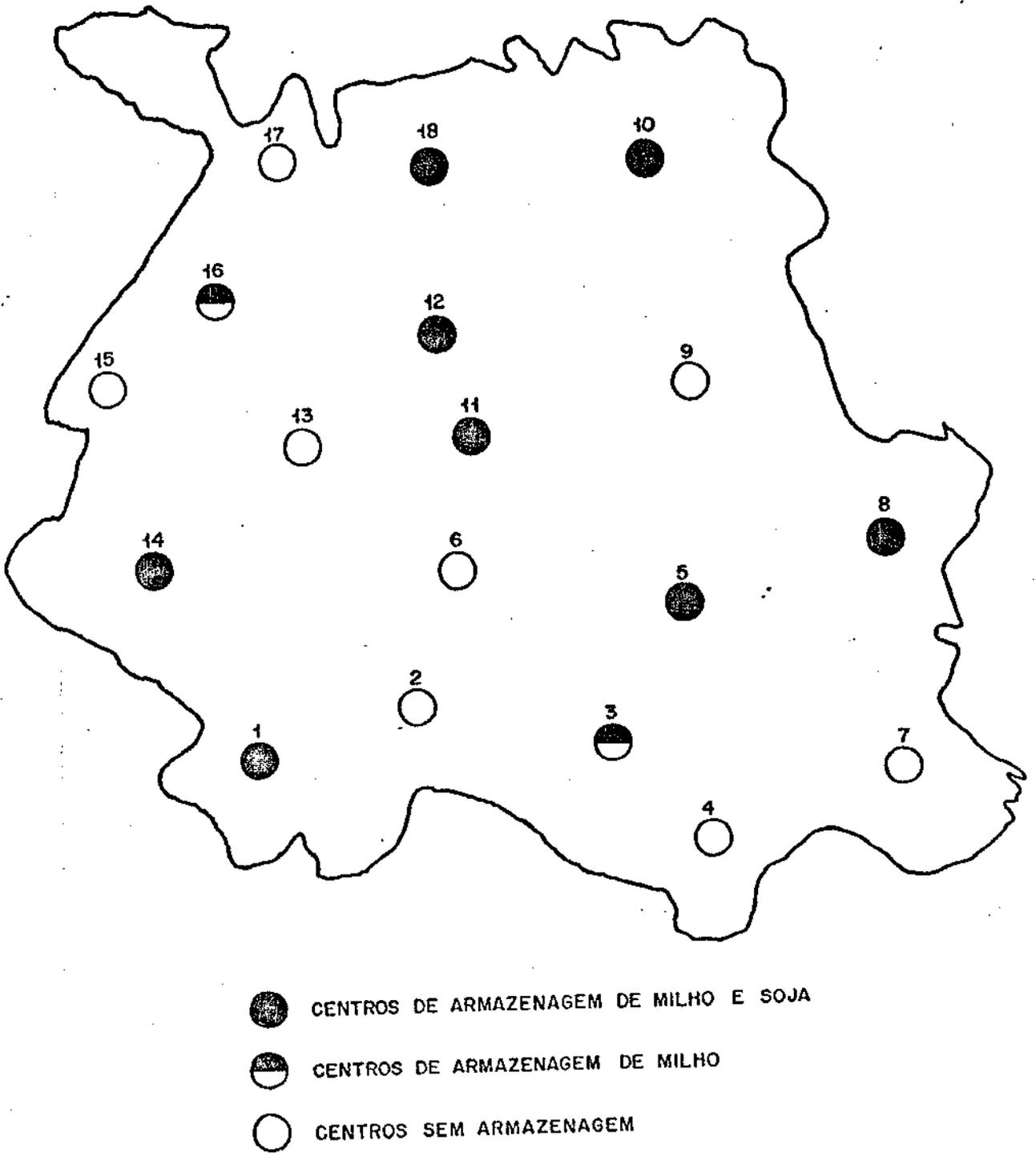


FIGURA 6.4

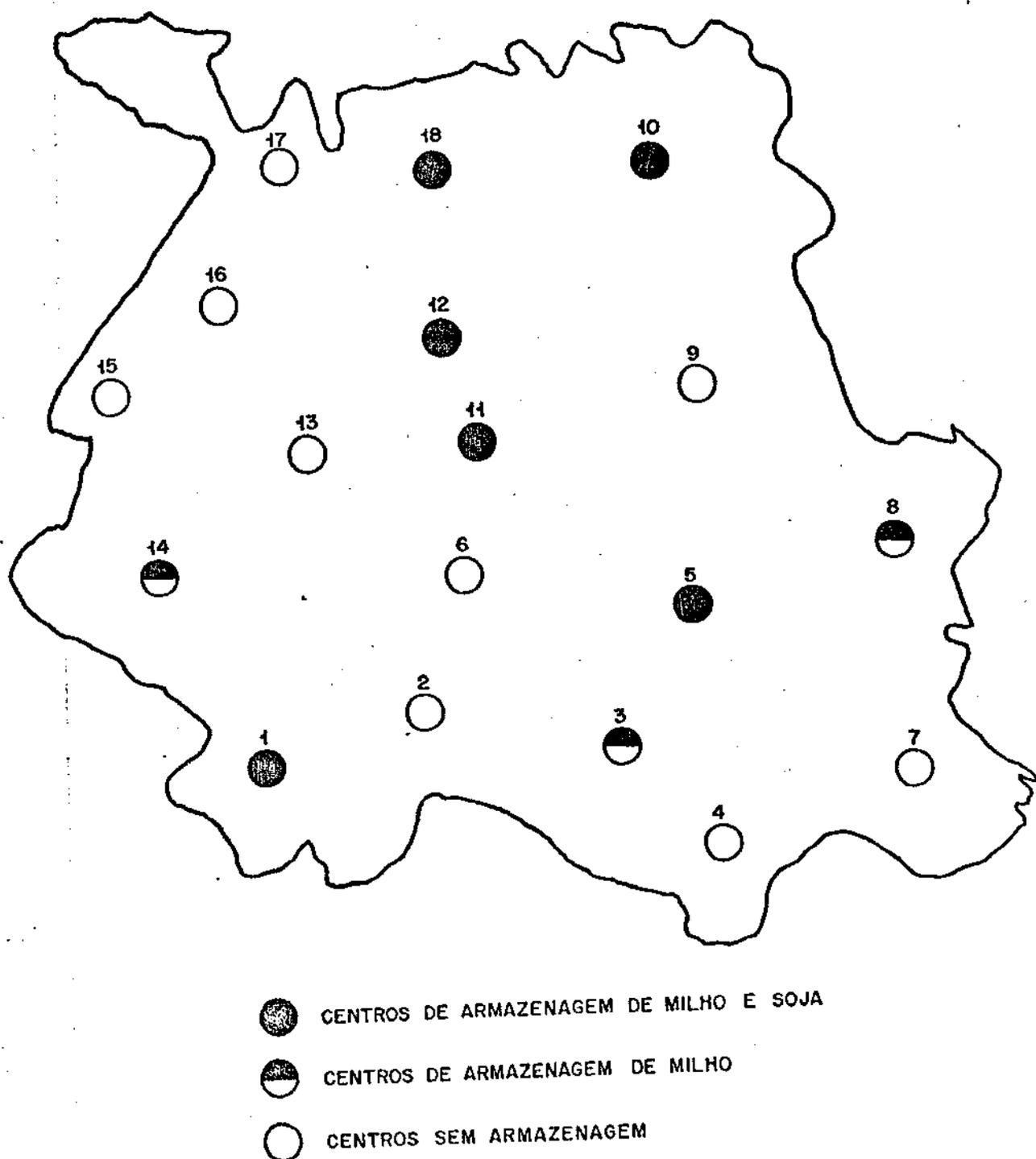


FIGURA 6.5

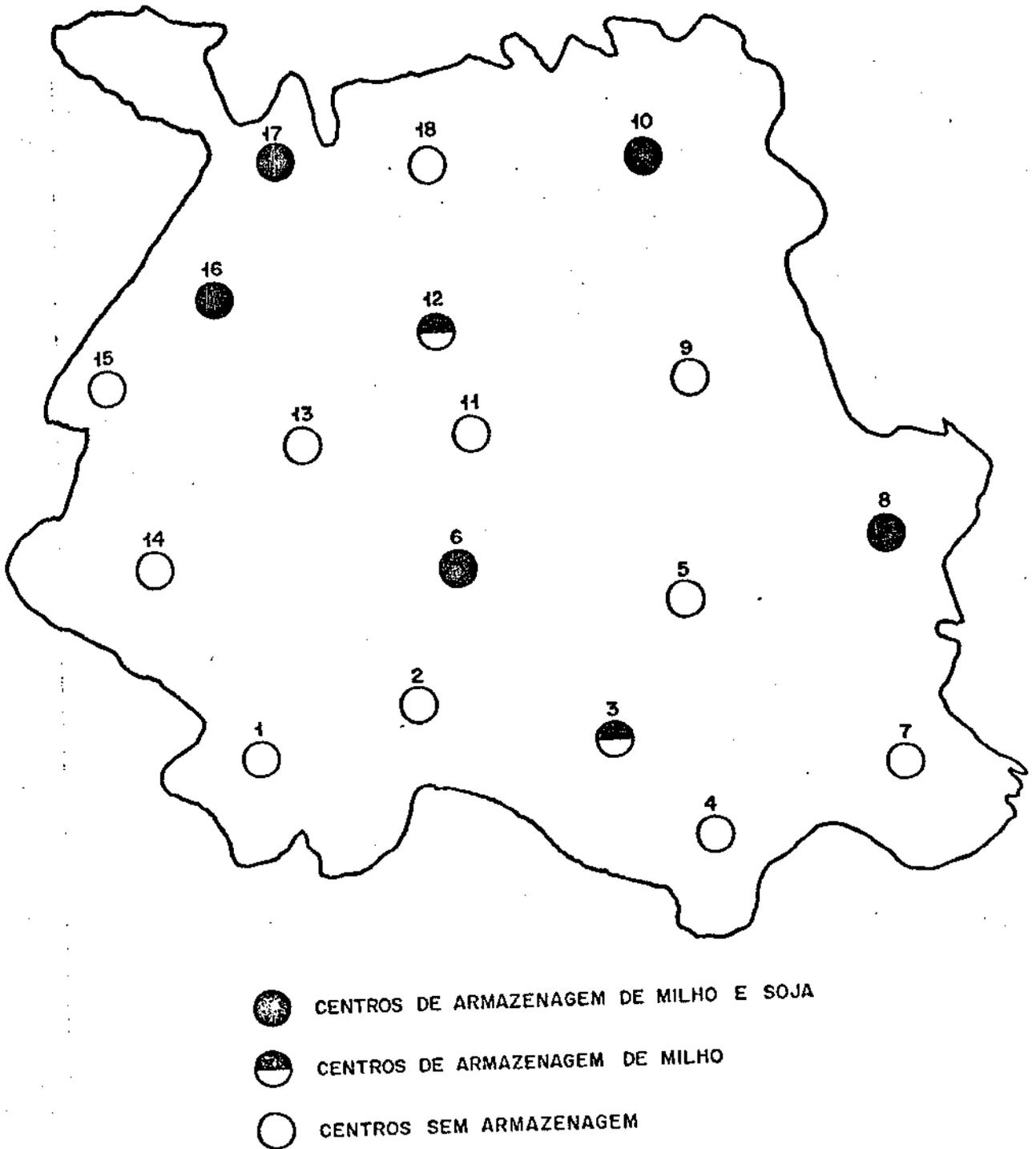


FIGURA 6.6

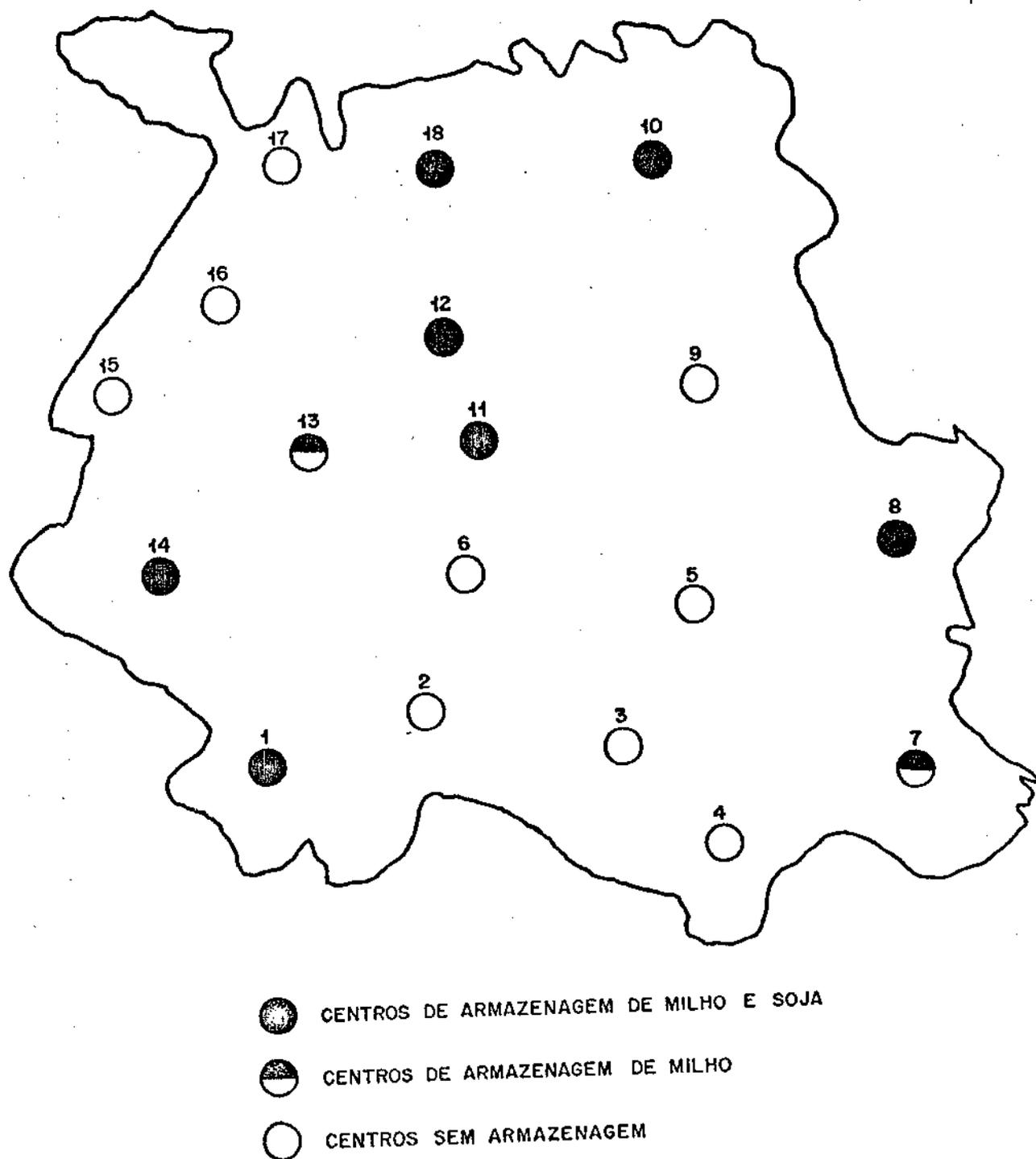


FIGURA 6.7

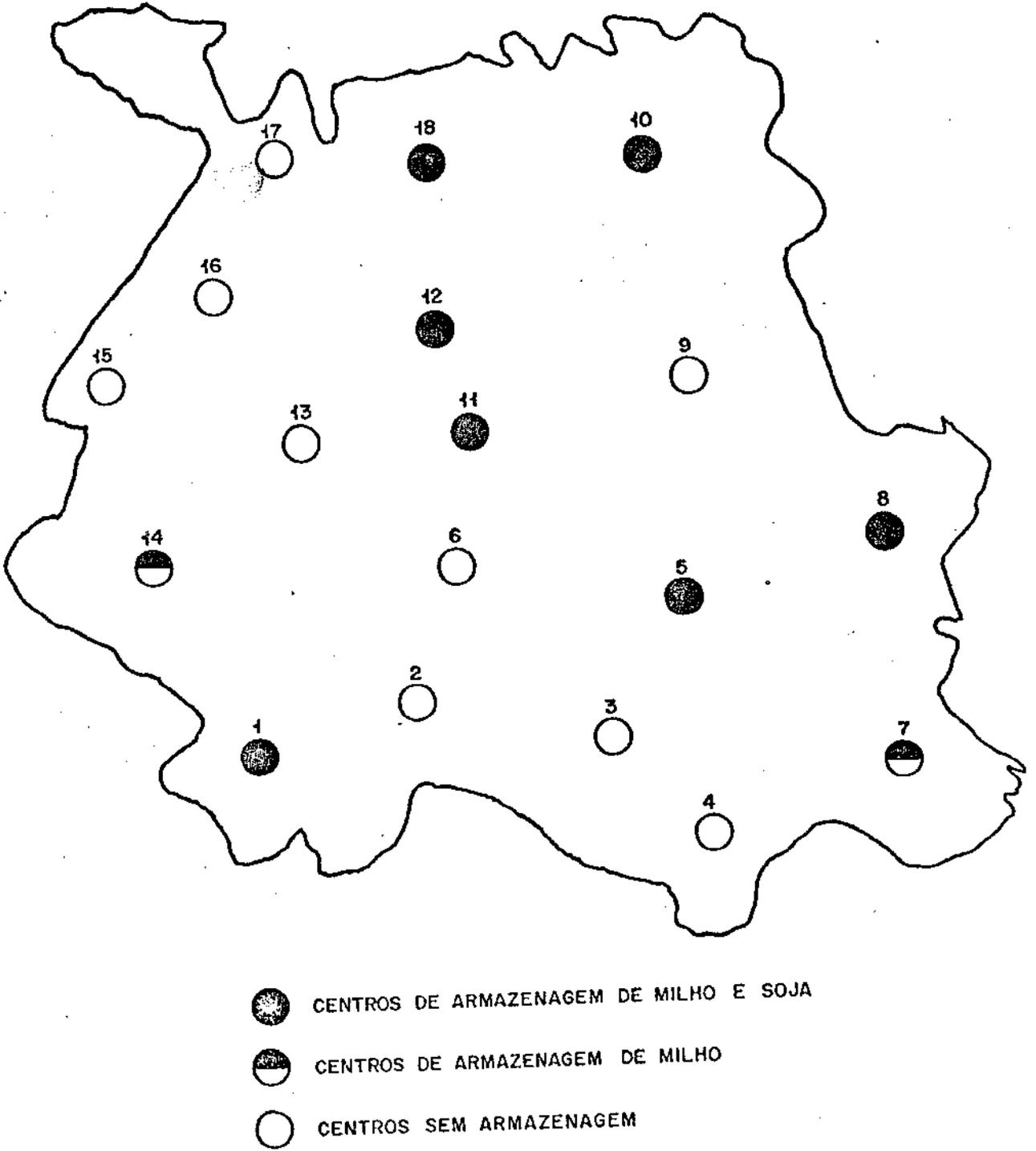


FIGURA 6.8

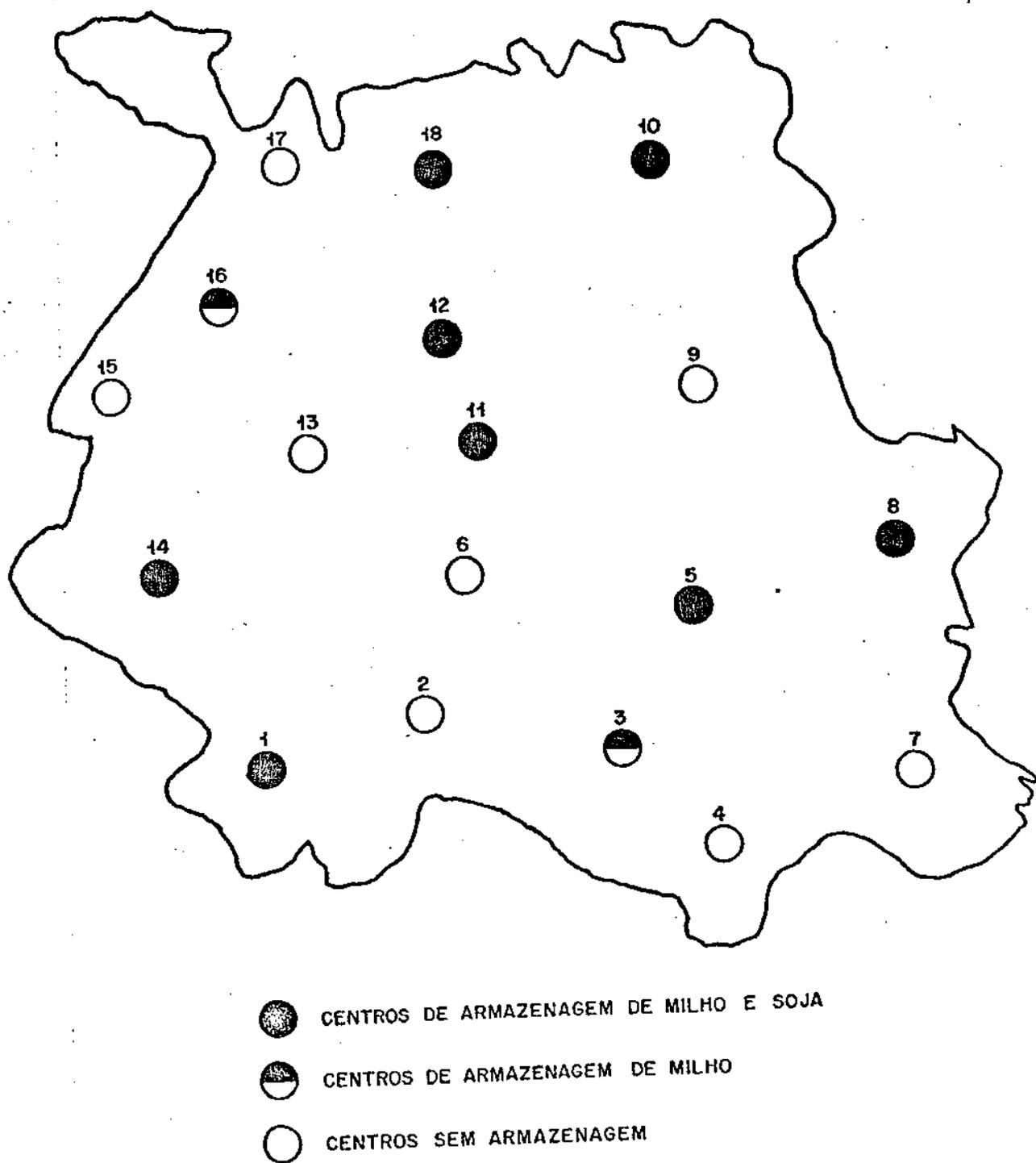


FIGURA 6.9

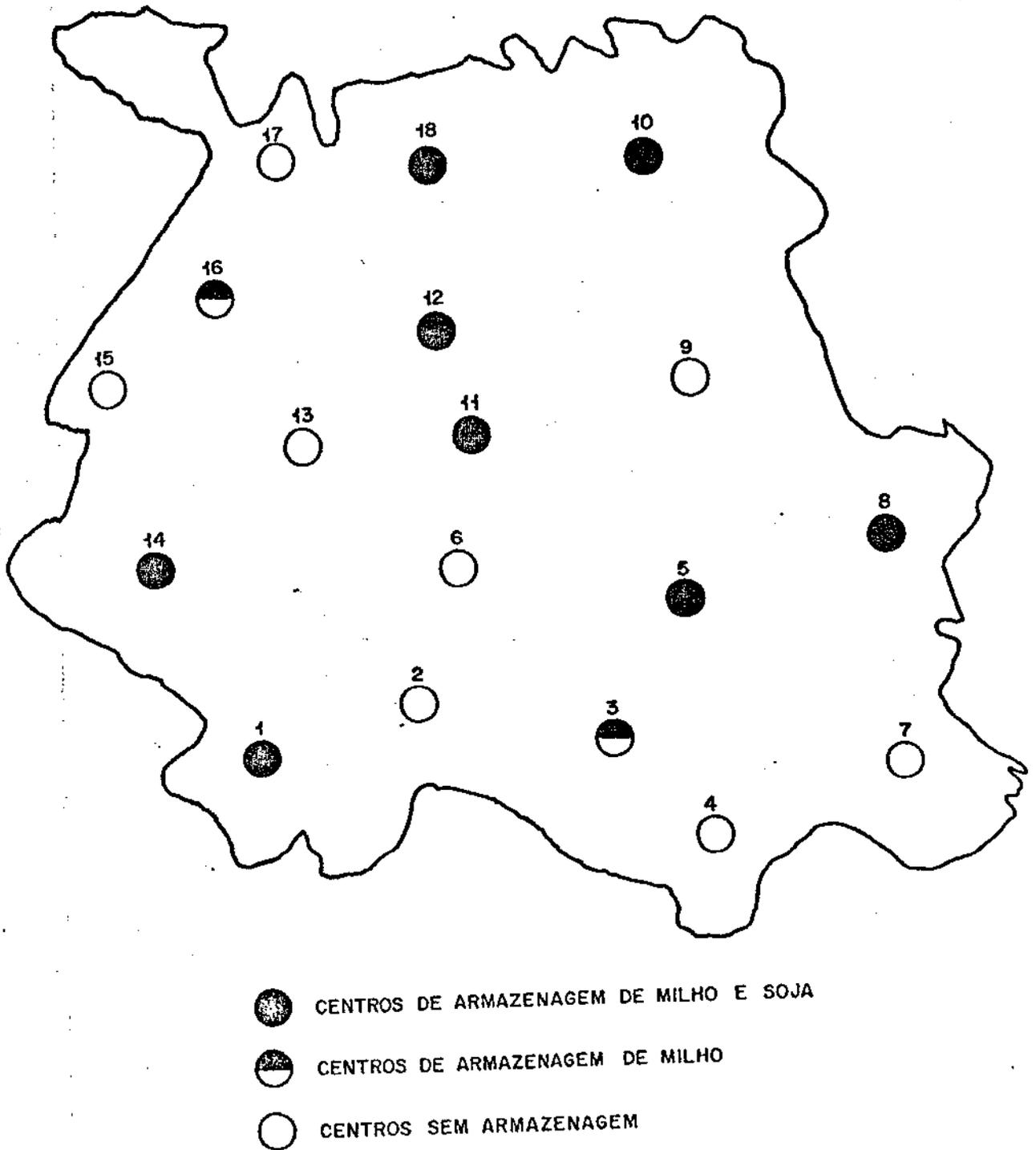


FIGURA 6.10

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

7.1 - CONCLUSÕES

Como foi desenvolvido no capítulo 2, o modelamento em redes capacitadas permite a resolução do problema de localização de armazéns agrícolas, oferecendo grande flexibilidade no modelamento das diferentes particularidades que um dado sistema possa conter.

Para a resolução do problema de localização foram utilizados quatro algoritmos acoplados de forma a permitir maior eficiência no problema como um todo. Para cada um deles podemos concluir o seguinte.

O PFCM apresentou-se muito rápido na resolução de redes de grande porte e em particular a rede utilizada no exemplo, criando sempre um bom ponto de partida para a resolução do problema de localização.

O PMFCM mostrou-se bastante apropriado quando são considerados mais de um produto na rede de distribuição, a programação de seu algoritmo permitiu o aproveitamento da solução básica ótima em uma dada iteração do PCNL como inicialização da seguinte, aumentando sua eficiência.

O PCNL como método iterativo para a determinação de custos de equilíbrio permitiu a adoção de curvas não lineares e concavas o que por sua vez provoca uma boa medida de confrontação das diferentes alternativas de localização sem a necessidade de se trabalhar com variáveis inteiras.

O LOAGRI como programa heurístico mostrou-se um método simples e rápido na análise de diferentes alternativas de localização, embora sem garantir ótimos globais, as soluções encontradas nas experiências computacionais, foram confiáveis e aceitáveis. De uma forma geral este método tem permitido a abordagem

de problemas cujas dimensões tornariam praticamente inviável o uso de outras técnicas.

Quanto às condições que possam surgir em problemas reais e que não foram tratadas neste estudo, acredita-se que a flexibilidade proporcionada pelo programa permitirá contornar prováveis dificuldades tornando possível a resolução de problemas complexos de localização de armazéns agrícolas.

7.2 - RECOMENDAÇÕES

Como continuidade deste trabalho, faz-se as seguintes recomendações:

- . Estudo de problemas mais complexos. A decisão de ativação ou desativação de centros de armazenagens, no exemplo apresentado, seria mais conclusiva se na rede estudada fossem considerados mais de dois produtos - para o estado de São Paulo a armazenagem de milho e soja representa aproximadamente 30% da oferta total de alimentos -, adotadas funções de custo de transporte e armazenagem mais realistas e portanto diferenciadas para cada uma das microregiões e considerados diferentes meios de transportes.
- . Especialização do PMFCM para considerações como, por exemplo, de perdas na rede de armazenamento, ou seja redes de multifluxo generalizada, ou ainda na consideração de modelos dinâmicos como foi apresentado na seção 2.3 do capítulo 2, modelo 2.

BIBLIOGRAFIA

- {1} AUTHIÉ, G., "Recherche d'un Flot Minimisant une Fonction de Coût Lineaire: Methode Primale", Laboratoire D'Automatique et D'Analyse des Sistèmes, Toulouse, França (1979).
- {2} BAZARAA, M.S. e J.J.JARVIS, "Linear Programming and Network Flows", John Wiley & Sons, New York (1977).
- {3} BENDERS, J.F., "Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems", Numerische Mathematik, 4, 238-252 (1962).
- {4} DANTZIG, G.B. "Linear Programming and Extensions", Princeton University Press, Princeton, N.J. (1963).
- {5} DAY, J.T., "Forecasting Minimum Production Cost with Linear Programming", IEEE Trans. on PAS-90, 2, 814-823 (1971).
- {6} FELDMAN, E., F.A. LEHER, and T.L. RAY, "Warehouse Location under Continuous Economie of Scale", Management Science, 12, 670-687 (1966).
- {7} FRANÇA, P.M. "Problemas de Localização: Solução por Decomposição", Tese de Doutorado, 10/79, FEC/UNICAMP (1979).
- {8} FULKERSON, D.R., "An Out-of-Kilter Method for Minimal-Cost Flow Problems", Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics, 9, 1, 18-27 (1961).
- {9} GEOFFRION, A.M., and G.W. GRAVES, "Multicommodity Distribution System Design by Benders Decomposition", Management Science, 20, 5, 822-844 (1974).
- {10} GRIGORIADIS, M.D., and W.W. WHITE, "A Partitioning Algorithm for the Multicommodity Network Flow Problem", Mathematical Programming, 3, 157-177 (1972).

- {11} JOHNSON, E.L., "Networks and Basic Solutions", Operations Research, 14, 619-623 (1966).
- {12} KENNINGTON, J.L., "Solving Multicommodity Transportation Problems Using a Primal Partitioning Simplex Technique", Naval Research Logistics Quarterly, 24, 2, 309-325 (1977).
- {13} KENNINGTON, J.L., and R.V. HELGASON, "Algorithms for Network Programming", John Wiley & Sons, N.J. (1980).
- {14} KENNINGTON, J.L., and M. SHALABY, "An Effective Subgradient Procedure for Minimal Cost Multicommodity Flow Problems", Management Science, 23, 9, 994-1004 (1977).
- {15} KING, G.A., and S.H. LOGAN, "Optimum Location, Number and Size of Processing Plants with Raw Product and Final Product Shipments", Journal Farm Economic, 57, 420-430 (1975).
- {16} KUEHN, A.A., and M.J. HAMBURGER, "A Heuristic Program for Locating Warehouses", Management Science, 9, 643-666 (1963).
- {17} KUHN, H.W., "The Hungarian Method for the Assignment Problems", Naval Research Logistics Quarterly, 2, 83-97 (1955).
- {18} LASDON, L.S., "Optimization Theory for Large Systems", Macmillan Co., London, England (1972).
- {19} MONTEROSSO, C.D., "Um Método Heurístico para a Localização e Dimensionamento de Armazéns em Sistemas de Grande Porte Considerando Economias de Escala", Tese de Mestrado, COPPE, UFRJ (1977).
- {20} ROY, T.J., and D. ERLINKOTTER, "A Dual-Based Procedure for Dynamic Facility Location", Management Science, 28, 10, 1091-1105 (1982).
- {21} SALKIN, H.N., "Integer Programming", Addison Wesley Publ. Co., (1975).

- {22} SWEENEY, D.J., and R.L. TATHAN, "An Improved Long-Run Model for Multiple Warehouse Location", *Management Science*, 22, 748-758 (1976).
- {23} WOLLMER, R.D., "Multicommodity Networks with Resource Constraints: The Generalized Multicommodity Flow Problem", *Networks*, 1, 245-263 (1972).
- {24} WRIGT, C.L., "Análise Econômica de Transporte e Armazenagem de Grãos; Estudo do Corredor de Exportação de Paranaguá", Tese de Doutorado na Universidade de Ohio, Ministério dos Transportes, GEIPOT (1980).
- {25} FRANK, M. e P. WOLPE, "An Algorithm for Quadratic Programming" *Naval Res. Log. Quart* 3, 95-110, 1956.