

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS

Departamento de Automação

MODELAMENTO DE MOTOR DE INDUÇÃO. UMA CONTRI-  
BUIÇÃO AO ESTUDO DE CHAVEAMENTO DAS CORRENTES  
DE ROTOR DE MOTOR DE INDUÇÃO DE ROTOR ENROLADO

ERNESTO RUPPERT FILHO *rt*

Orientador: YARO BURIAN JUNIOR *Yer*

Tese apresentada à Faculdade  
de Engenharia da Universida-  
de Estadual de Campinas como  
parte dos requisitos para ob-  
tenção do título de "MESTRE  
EM CIÊNCIAS".

novembro - 1974

## SUMÁRIO

Dadas as dificuldades apresentadas pelos modelos matemáticos mais comuns de motor de indução desenvolveu-se, a partir das transformações de Park, Blondel e Kron, um modelo adequado para simulação de motor de indução de rotor enrolado quando submetido a chaveamento das correntes de rotor.

O presente trabalho procurou, didaticamente, na medida do possível, desenvolver alguns modelos de motor em questão, modificando-os gradativamente, até chegar ao seu objetivo final.

## INTRODUÇÃO

A idéia de se realizar este trabalho surgiu da necessidade de se ter um modelo de motor de indução adequado para se estudar as possibilidades de se controlar o seu torque ou a sua velocidade através de chaveamento das correntes de fase do rotor.

Na prática usar-se-ia um motor de indução de rotor enrolado e o chaveamento das correntes do rotor seria feito com tiristores (" Chopper Control ").

No Departamento de Automação da FEC-UNICAMP vinha-se, há cerca de três anos, desenvolvendo-se pesquisas no campo do " Chopper Control ". Estudaram-se vários sistemas de corrente - continua ( XIV/XVII ).

Em todos os casos acima mencionados foi possível estabelecer equações recorrentes implícitas para descrever o sistema.

Pesquisaram-se a estabilidade dos sistemas através de considerações a respeito da estabilidade dos pontos duplos de ordem 1,2,3,...,n das equações recorrentes e chegou-se a resultados bastante satisfatórios em cada caso.

Tentou-se, então, controlar o torque de um motor de indução trifásico de rotor enrolado através de chaveamento das correntes de fase do rotor com tiristores conforme sugestão apresentada no final do capítulo II deste trabalho.

Apesar das dificuldades que o modelo normal\* de um motor de indução apresenta foi possível, desacoplando as fases do rotor, considerando o motor em regime permanente senoidal com velocidade constante e utilizando as soluções de regime permanente das equações do modelo, correntes de rotor, escrever essas correntes sob forma de equações recorrentes, traçar curvas torque x velocidade e utilizar o método do ponto duplo para obter subsídios às conclusões sobre a estabilidade da máquina em operação - com "Chopper" no rotor ( XIII ).

\* - Modelo descrito pelas equações ( 6 ), ( 13 ), ( 47 ), ( 48 )

Porém, quando se tentou acoplar as fases e incluir também na pesquisa em realização os transitórios envolvidos nos chaveamentos, o que seria bastante razoável, tornou-se muito difícil conseguir descrever o motor com "Chopper" no rotor por equações recorrentes implícitas.

Porque o modelo normal do motor de indução constitui-se de oito equações diferenciais ordinárias, não lineares com coeficientes variáveis com o tempo, a única solução viável pareceu ser possível, em computador, através de simulação do motor em questão.

Como os coeficientes das equações do modelo normal são funções do tempo, uma simulação analógica não deveria ser realizada; uma simulação digital teria um tempo de execução relativamente longo para ser usada numa pesquisa onde um programa de computador deveria ser executado muitas vezes, onde muitas curvas deveriam ser construídas usando "plotter" que constitui um periférico de computador e torna a execução do programa ainda mais lenta.

Tornou-se imprescindível procurar-se um modelo adequado de motor de indução que pudesse ser utilizado em computador e que proporcionasse uma simulação de execução rápida.

Analisando-se a bibliografia existente sobre chaveamento de correntes de motor de indução constatou-se ser ela bastante reduzida e incipiente, principalmente no caso de chaveamento de correntes de rotor. Não se encontrou nenhum modelo capaz de admitir uma simulação desse tipo.

Em nenhum dos poucos artigos existentes foi feito algum tipo de simulação. Apenas alguns ensaios teóricos e alguns trabalhos práticos aparecem (V e XX).

A sequência da matéria exposta neste trabalho procura, durante os seus seis capítulos, dar uma idéia do desenvolvimento do modelo proposto e das dificuldades que tiveram de ser superadas para a ele se chegar.

## PARTE I: Modelo geral transformado do motor de indução

### Capítulo I: Apresentação do motor de indução.

#### Tipos

#### Técnicas convencionais de controle de tor

que e de velocidade com tiristores no circuito de rotor de um motor de rotor enrolado ("Chopper Control").

Capítulo II: Apresentação do modelo normal do motor de indução com um sistema de referência trifásico colocado no estator.

Torque eletromagnético produzido.

Capítulo III: Apresentação de uma técnica de transformação das equações diferenciais com coeficientes variáveis com o tempo do modelo normal em equações diferenciais a coeficientes constantes, pelo uso de um novo sistema de referência constituído de dois eixos normais denominados: eixo direto (d) e eixo em quadratura (q) - Modelo dq.

PARTE II: Modelo para chaveamento das correntes de rotor

Capítulo IV: Apresentação de um modelo dq, obtido a partir de um sistema de referência dq fixo no rotor, adequado para ser modificado para simular o motor submetido a chaveamento das correntes de rotor.

Análise das possibilidades de simulação em computador digital e em híbrido.

Capítulo V: Modificação do Modelo dq, obtido no capítulo anterior, para a obtenção de um modelo de motor de indução de rotor enrolado adequado para simulação em caso de chaveamento das correntes de rotor - Modelo Rotor.

Capítulo VI: Utilização do Modelo Rotor para chavear as correntes de rotor.

Análise das possibilidades de simulação em computador digital e em híbrido.

Uso do EAI 690 para essa tarefa.

## PARTE I

### MODELO TRANSFORMADO GERAL DE MOTOR DE INDUÇÃO

#### Capítulo I: O MOTOR DE INDUÇÃO

O motor de indução trifásico é constituído, em geral, de seis circuitos (enrolamentos denominados fase) sendo três no estator e três no rotor.

Os circuitos de estator, idênticos, são enrolados simetricamente de tal forma que os seus eixos magnéticos estejam defasados de  $120^\circ$  (figura 1).

Os circuitos do rotor podem ser de dois tipos: a) enrolados simetricamente de tal forma que os seus eixos estejam defasados de  $120^\circ$ . Neste caso os terminais do rotor são anéis de deslizamento (um para cada fase). O motor deste tipo é denominado motor de indução de rotor enrolado (figura 1); b) constituídos de barras condutoras, normalmente de cobre ou alumínio fundidas dentro das ranhuras do rotor e curto circuitadas externamente por dois anéis, um em cada extremidade. O motor deste tipo é denominado motor de indução de rotor tipo gaiola de esquilo. Neste caso não há terminais de rotor acessíveis externamente e o número de fases do rotor é a metade do número de barras por polo.

Os enrolamentos do motor de indução são, em geral, distribuídos uniformemente ou senoidalmente (cada fase).

Esta-se tratando de uma máquina simétrica, o que é uma idealização porém, ela oferece um meio bastante seguro de se prever o desempenho dos mais variados de motor de indução.

Na figura 1 estão representadas apenas a espira média de cada enrolamento de fase do estator e do rotor de um motor de indução de rotor enrolado com o respectivo sentido da corrente elétrica além dos eixos magnéticos dos campos produzidos por eles.

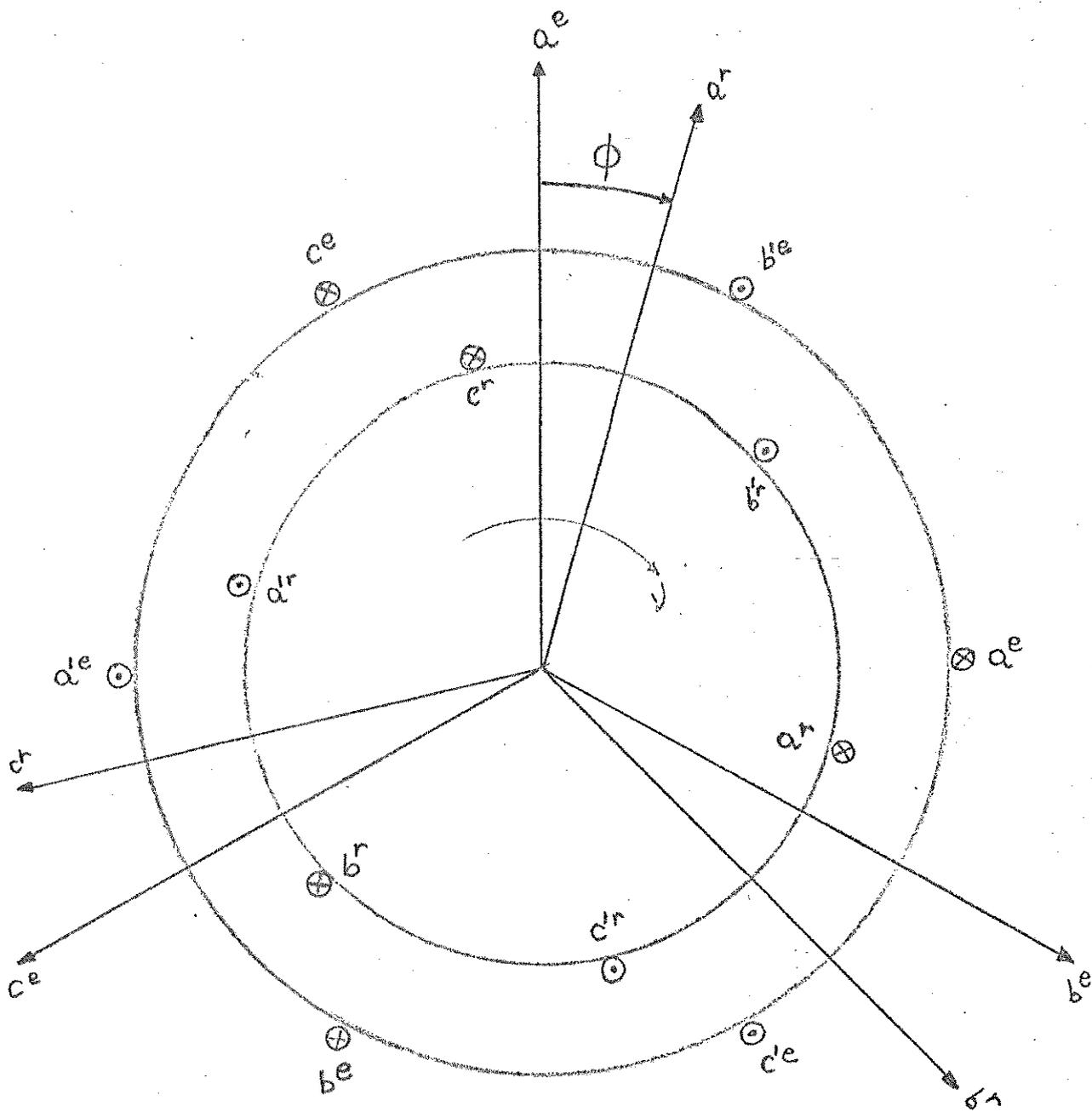


figura 1

As fases do estator estão marcadas com as letras a, b, c com o sobrescrito e. As do rotor com o sobrescrito r.

Os sentidos positivos de corrente são também os marcados na figura.

Esta representação é, naturalmente, de um motor trifásico que se constitui no caso mais comum de motor de indução.

O motor de indução de rotor enrolado apresenta uma sensível vantagem sobre o de rotor em gaiola de esquilo sob o ponto de vista de controle da máquina.

Como os enrolamentos do rotor de um motor de rotor enrolado terminam em anéis, são acessíveis externamente, permitindo a possibilidade de se mudar as suas características terminais; correntes, torque e velocidade, pela adição de elementos elétricos como impedâncias e dispositivos semicondutores (tiristores) em terminais ligados a esse anéis.

Com isso pode-se controlar melhor principalmente o torque e a velocidade do motor.

O motor de rotor em gaiola de esquilo não tem terminais de enrolamento de rotor.

Os métodos usuais de controle de velocidade e de torque de motores de indução tem-se mostrado ineficientes sob vários pontos de vista.

A inserção de resistores no rotor de motores de rotor enrolado apresenta os inconvenientes de produzir grande perda de energia e de não ser adaptável facilmente para se fazer controle com realimentação (V). A essência do método, é porém, variar as correntes do motor de acordo com os valores de resistência dos resistores colocados nos terminais de rotor e conseqüentemente variar o torque ou a velocidade.

O método de variação de amplitude das tensões de alimentação do motor exige o uso de transformadores, algumas vezes de transformadores com mudança de "taps" possível, o que deixa de ser

cômodo, encarece o sistema e produz um controle discreto de torque e de velocidade (\*).

O controle de velocidade usando mudança do número de polos do motor é também um controle discreto (\*).

Métodos um pouco mais recentes cuidam de usar máquinas rotativas para produzir variações na frequência das tensões de alimentação do motor de indução. São métodos que produzem curvas torque x velocidade aceitáveis e rendimentos razoáveis porém são de implementação economicamente desaconselhável devido ao uso das máquinas elétricas adicionais necessárias.

Com o aparecimento dos tiristores, em particular dos tiristores de potência, altamente eficientes, é que surgiram os mais recentes tipos de controle de velocidade e de torque de motor de indução.

Dois são, essencialmente, os métodos de se controlar torque e velocidade de motor de indução usando tiristores:

- a) através de conversão estática de frequência.
- b) através do controle do fluxo de correntes do estator ou do rotor, ou seja, chaveando-se as correntes de estator ou de rotor com tiristores ("chopper" no estator ou no rotor).

O controle do tipo a já está consideravelmente desenvolvido industrialmente porém exige um conjunto auxiliar de equipamentos eletrônicos como retificadores, etc.

No caso de controle do tipo b o mais desenvolvido, se bem que teoricamente, é o controle por "chopper" no estator.

Como o motor de indução é alimentado pelo estator através de fontes de tensão e o rotor é curto-circuitado; chavear o estator implica em cortar a alimentação de uma ou mais fases do estator continuando a tensão terminal das outras comandadas pelas fontes sem ter de intervir no rotor. Há ainda mais a facilidade de

---

\* No sentido de uma curva torque x velocidade para cada tensão ou número de polos.

se poder alimentar o motor com ligação estrela e usar o neutro.

Chavear as correntes de rotor, como será visto, implica em manter o estator alimentado normalmente e abrir as fases do rotor, produzindo-se assim tensões induzidas nas fases abertas do rotor.

A vantagem que o controle de torque ou de velocidade pela introdução de "chopper" no rotor pode apresentar é a possibilidade de se usar bem o circuito magnético da máquina visto que não se perturba o circuito do estator e o fluxo no entreferro se mantém essencialmente constante.

O estudo, analítico, que se tentou fazer de um controle de velocidade e de torque de um motor de indução de rotor enrolado com chaveamento das correntes de rotor por tiristores baseia-se na inclusão, em cada fase, de um circuito de tiristores [XIII] que; quando a corrente na fase se anular o circuito não mais permite o seu fluxo durante um intervalo de tempo ( $\tau$ ) igual a uma fração do período da onda de corrente do rotor (ângulo de disparo dos tiristores). Em seguida os tiristores são gatilhados e permitem novamente o fluxo de corrente naquela fase [figuras 2 e 3].

O princípio básico do controle utilizado nesse caso é o mesmo do controle de torque e de velocidade com resistores no rotor, ou seja, variar as correntes do motor e conseqüentemente torque ou velocidade.

Com a técnica acima varia-se as formas de onda das correntes de rotor e em conseqüência variam o torque ou a velocidade, dependendo do controle que se está fazendo, não havendo dissipação de energia de forma sensível como no caso de controle por resistores.

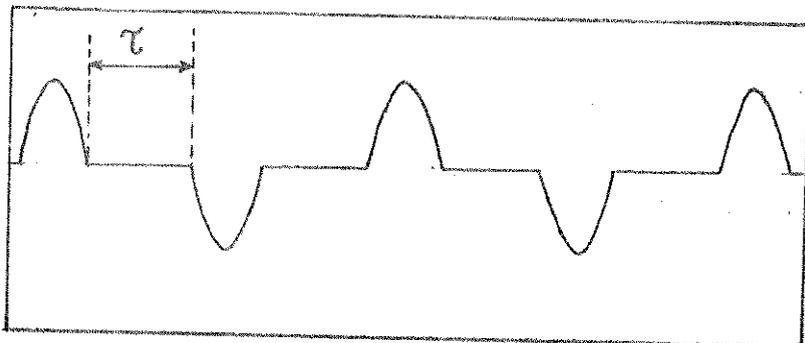


figura 2

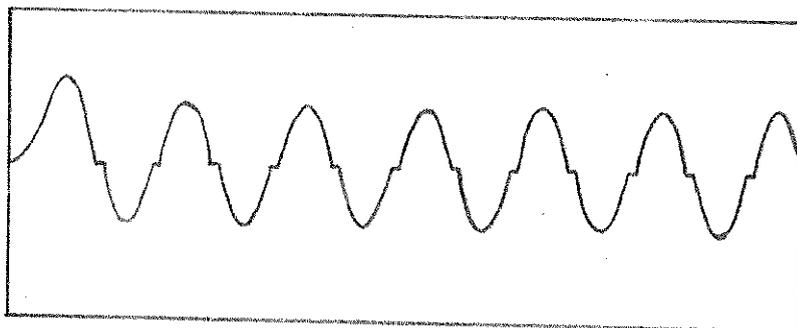


figura 3

Capítulo II: MODELAMENTO DO MOTOR DE INDUÇÃO

Para o motor em estudo serão feitas as hipóteses simplificadoras porém, admissíveis para estudos sobre motores de indução, seguintes:

- 1. Enrolamentos do estator idênticos distribuídos de modo a produzir força magnetomotriz espacial senoidal.
- 2. Enrolamentos do rotor distribuídos de modo que, a força magnetomotriz do rotor seja também uma senoide com mesmo número de polos de estator.
- 3. Entreferro constante.
- 4. Circuito magnético linear.
- 5. Parâmetros constantes.

Desprezar-se-ã, então, os efeitos dos seguintes fatores:

- 1. Não linearidade do circuito magnético.
- 2. Variação das resistências dos enrolamentos com a temperatura e com a frequência.
- 3. Perdas no núcleo.
- 4. Harmônicas das f.m.m.

Essas hipóteses todas podem ser feitas supondo-se a máquina perfeitamente simétrica.

Sendo  $\omega$  a velocidade angular do rotor e  $\phi$  a fase entre os campos magnéticos do estator e do rotor podemos escrever:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \quad [\text{rad/seg}]$$

Observando-se a figura 1 e as hipótese feitas define-se

os seguintes parâmetros do modelo do motor de indução trifásico (resistências e indutâncias):

$$R_a^e = R_b^e = R_c^e = R_e$$

$$R_a^r = R_b^r = R_c^r = R_r$$

$$L_{aa}^{er} = L_{bb}^{er} = L_{cc}^{er} = M \cos \phi$$

$$L_{ab}^{er} = L_{bc}^{er} = L_{ca}^{er} = M \cos \left( \phi + \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$L_{ac}^{er} = L_{ba}^{er} = L_{cb}^{er} = M \cos \left( \phi - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$L_{aa}^{ee} = L_{bb}^{ee} = L_{cc}^{ee} = L_e$$

$$L_{aa}^{rr} = L_{bb}^{rr} = L_{cc}^{rr} = L_r$$

$$L_{ab}^{ee} = L_{ac}^{ee} = L_{bc}^{ee} = L_{me}$$

$$L_{ab}^{rr} = L_{ac}^{rr} = L_{bc}^{rr} = L_{mr}$$

Os fluxos ligados com os enrolamentos do estator e rotor se relacionam com as correntes pela expressão (1).

As equações volt-ampère para o motor podem ser obtidas de (1) e escritas como em (2).

$$\underline{\lambda} = (L) \underline{i} \tag{1}$$

$$\underline{\lambda} = \left[ \lambda_a^e \quad \lambda_b^e \quad \lambda_c^e \quad \lambda_a^r \quad \lambda_b^r \quad \lambda_c^r \right]^T$$

$$(L) = \begin{bmatrix} L_e & L_{me} & L_{me} & M \cos \phi & M \cos \left( \phi + \frac{2\pi}{3} \right) & M \cos \left( \phi - \frac{2\pi}{3} \right) \\ L_{me} & L_e & L_{me} & M \cos \left( \phi - \frac{2\pi}{3} \right) & M \cos \phi & M \cos \left( \phi + \frac{2\pi}{3} \right) \\ L_{me} & L_{me} & L_e & M \cos \left( \phi + \frac{2\pi}{3} \right) & M \cos \left( \phi - \frac{2\pi}{3} \right) & M \cos \phi \\ M \cos \phi & M \cos \left( \phi - \frac{2\pi}{3} \right) & M \cos \left( \phi + \frac{2\pi}{3} \right) & L_r & L_{mr} & L_{mr} \\ M \cos \left( \phi + \frac{2\pi}{3} \right) & M \cos \phi & M \cos \left( \phi - \frac{2\pi}{3} \right) & L_{mr} & L_r & L_{mr} \\ M \cos \left( \phi - \frac{2\pi}{3} \right) & M \cos \left( \phi + \frac{2\pi}{3} \right) & M \cos \phi & L_{mr} & L_{mr} & L_r \end{bmatrix}$$

$$\underline{i} = \begin{bmatrix} i_a^e & i_b^e & i_c^e & i_a^r & i_b^r & i_c^r \end{bmatrix}^T$$

$$\underline{v} = D \underline{\lambda} + (R) \underline{i} \quad (2)$$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_a^e & v_b^e & v_c^e & v_a^r & v_b^r & v_c^r \end{bmatrix}^T$$

$$[R] = \begin{bmatrix} R_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix}$$

D = operador de diferenciação em relação ao tempo

A equação (2) pode ainda ser escrita:

$$\underline{v} = D\{(L)\underline{i}\} + (R)\underline{i} = \{(R) + D(L)\} \underline{i} \quad (3)$$

$$\underline{v} = (Z) \underline{i} \quad (4)$$

A equação (3) pode ser escrita de uma maneira computacionalmente melhor (5):

$$(L) D \underline{i} = -\{(R) + D\{(L)\}\} \underline{i} + \underline{v} \quad (5)$$

Para se concluir a respeito da equação (5), em termos de solução em computador, é conveniente escrevê-la explicitamente evidenciando os elementos das matrizes envolvidas (6).

Nota-se nestas equações a presença do ângulo de fase existente entre os enrolamentos do estator e do rotor.

Esse ângulo, como se vê, varia com o tempo e é ele que descreve a dinâmica da máquina. A equação de onde dever-se-á obter o valor instantâneo de  $\phi$  é a equação que o relaciona com o

$$\begin{bmatrix} L_e & L_{me} & L_{me} & M\cos\phi & M\cos(\phi+\frac{2\pi}{3}) & M\cos(\phi-\frac{2\pi}{3}) \\ L_{me} & L_e & L_{me} & M\cos(\phi-\frac{2\pi}{3}) & M\cos\phi & M\cos(\phi+\frac{2\pi}{3}) \\ L_{me} & L_{me} & L_e & M\cos(\phi+\frac{2\pi}{3}) & M\cos(\phi-\frac{2\pi}{3}) & M\cos\phi \\ M\cos\phi & M\cos(\phi-\frac{2\pi}{3}) & M\cos(\phi+\frac{2\pi}{3}) & L_r & L_{mr} & L_{mr} \\ M\cos(\phi+\frac{2\pi}{3}) & M\cos\phi & M\cos(\phi-\frac{2\pi}{3}) & L_{mr} & L_r & L_{mr} \\ M\cos(\phi-\frac{2\pi}{3}) & M\cos(\phi+\frac{2\pi}{3}) & M\cos\phi & L_{mr} & L_{mr} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{ia} \\ D_{ib} \\ D_{ic} \\ D_{ia} \\ D_{ib} \\ D_{ic} \end{bmatrix}$$

=

$$\begin{bmatrix} -R_e & 0 & 0 & \dot{M}\sin\phi & \dot{M}\sin(\phi+\frac{2\pi}{3}) & \dot{M}\sin(\phi-\frac{2\pi}{3}) \\ 0 & -R_e & 0 & \dot{M}\sin(\phi-\frac{2\pi}{3}) & \dot{M}\sin\phi & \dot{M}\sin(\phi+\frac{2\pi}{3}) \\ 0 & 0 & -R_e & \dot{M}\sin(\phi+\frac{2\pi}{3}) & \dot{M}\sin(\phi-\frac{2\pi}{3}) & \dot{M}\sin\phi \\ \dot{M}\sin\phi & \dot{M}\sin(\phi-\frac{2\pi}{3}) & \dot{M}\sin(\phi+\frac{2\pi}{3}) & -R_r & 0 & 0 \\ \dot{M}\sin(\phi+\frac{2\pi}{3}) & \dot{M}\sin\phi & \dot{M}\sin(\phi-\frac{2\pi}{3}) & 0 & -R_r & 0 \\ \dot{M}\sin(\phi-\frac{2\pi}{3}) & \dot{M}\sin(\phi+\frac{2\pi}{3}) & \dot{M}\sin\phi & 0 & 0 & -R_r \end{bmatrix}$$

+

$$\begin{bmatrix} i_a & e_a \\ i_b & e_b \\ i_c & e_c \\ i_a & v_a \\ i_b & v_b \\ i_c & v_c \end{bmatrix}$$

(6)

torque eletromagnético produzido pelo motor (característica dinâmica da máquina).

Há vários métodos para determinar o torque eletromagnético produzido pelo motor de indução. O método do deslocamento virtual (método da energia) (X) pode ser usado sem grandes problemas para qualquer geometria do circuito magnético.

Movendo-se o rotor de um ângulo  $d\phi$  no sentido positivo (marcado na figura) e usando-se o princípio da conservação da energia pode-se escrever:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{energia mecânica desen-} \\ \text{volvida pela força ele-} \\ \text{tromagnética durante o} \\ \text{deslocamento = traba-} \\ \text{lho mecânico.} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{energia elétrica} \\ \text{entregue pela} \\ \text{fonte} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \text{energia perdida} \\ \text{por efeito Joule} \end{array} \right] -$$

$$- \left[ \begin{array}{l} \text{energia armazenada} \\ \text{no campo magnético} \end{array} \right]$$

$$dW_{mec} = dW_{elet} - dW_{perdas} - dW_{arm} \tag{7}$$

$$dW_{elet} = \underline{i}^T \underline{v} dt = \underline{i}^T (R) \underline{i} dt + \underline{i}^T D\{(L)\} \underline{i} dt + \underline{i}^T (L) (D\underline{i}) dt \tag{8}$$

$$dW_{perdas} = \underline{i}^T (R) \underline{i} dt$$

Mostra-se que a energia eletromagnética armazenada num sistema eletromagnético, do tipo máquina elétrica (XI) é dada por:

$$W_{arm} = \frac{1}{2} \underline{i}^T (L) \underline{i} \tag{9}$$

$$dW_{arm} = \frac{1}{2} D\{\underline{i}^T\} (L) \underline{i} dt + \frac{1}{2} \underline{i}^T D\{(L)\} \underline{i} dt + \frac{1}{2} \underline{i}^T (L) (D\underline{i}) dt$$

$$dW_{arm} = \frac{1}{2} \underline{i}^T D\{(L)\} \underline{i} + \underline{i}^T (L) (D\underline{i}) dt \tag{10}$$

Então:

$$dW_{mec} = \frac{1}{2} i^T D\{(L)\} \underline{i} dt \quad (11)$$

O torque eletromagnético ( $T_e$ ) da máquina é calculado por:

$$T_e = \frac{dW_{mec}}{d\phi} = \frac{1}{2} \underline{i}^T \frac{d(L)}{d\phi} \underline{i} \quad (12)$$

Executando os cálculos envolvidos na expressão (12) teremos (X):

$$\begin{aligned} T_e = & - M(i_a^e i_a^r + i_b^e i_b^r + i_c^e i_c^r) \sin\phi - \\ & - M(i_a^e i_b^r + i_b^e i_c^r + i_c^e i_a^r) \sin(\phi + \frac{2\pi}{3}) - \\ & - M(i_a^e i_c^r + i_b^e i_a^r + i_c^e i_b^r) \sin(\phi - \frac{2\pi}{3}) \end{aligned} \quad (13)$$

Em operação normal o motor de indução trifásico funciona alimentado, pelo estator, por um conjunto balanceado de tensões:

$$\begin{aligned} v_a^e &= V_e \sin \omega_{et} \\ v_b^e &= V_e \sin (\omega_{et} - \frac{2\pi}{3}) \\ v_c^e &= V_e \sin (\omega_{et} + \frac{2\pi}{3}) \end{aligned} \quad (14)$$

Observa-se que as equações (6) além de serem não lineares tem os coeficientes variáveis com o tempo.

Essas equações, unicamente, não constituem o modelo que simula um motor de indução; além delas, precisamos das equações que descrevem a dinâmica da máquina (capítulo IV).

Em regime permanente, supondo-se velocidade angular do rotor constante e operação em situação balanceada elas podem ser resolvidas de forma analítica.

Para estudos de transitórios de motor de indução, como

os que se propõe para análise neste trabalho, não há possibilidades de se obter solução analítica dessa equação. Pfaff, tentou, sem grande sucesso, linearizar essas equações e resolvê-las analiticamente.

Conseguiu em poucos e bastante especiais casos (III).

O modelo aqui apresentado (modelo normal do motor de indução) constituído das equações (6) e das equações que descrevem a dinâmica da máquina (47) e (48) pode ser utilizado para simulação em computador do motor de indução em regime transitório como o motor sujeito a chaveamentos das correntes de estator ou de rotor.

Porém, a inconveniência de seu uso é obviamente computacional, principalmente, no caso dos estudos em projeto na F.E.C.-UNICAMP utilizando um computador de pequeno porte como o híbrido EAI-690 pois, os coeficientes das equações são todos funções do tempo.

Uma simulação analógica ou híbrida com base nesse modelo não seria recomendável. A todo instante precisaríamos estar ajustando potenciômetros o que, evidentemente, absorveria um tempo grande.

A simulação digital, usando-se qualquer método numérico (XVIII) de solução de equações diferenciais, principalmente os mais refinados seria bastante demorada pois, a cada passo da integração numérica precisar-se-ia redefinir as matrizes  $(L)$  e  $D(L)$ , o vetor  $\underline{v}$ , ainda inverter a matriz  $(L)$  e efetuar os produtos de matrizes envolvidos.

Capitulo III: TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES QUE DESCREVE O MODELO NORMAL DO MOTOR - MODELO dq DO MOTOR DE INDUÇÃO.

Usando-se, porém, transformações das variáveis do modelo normal do motor de indução devidas a Park, Blondel e outros - (I e X) podemos transformar as equações do modelo normal de modo que os coeficientes não mais dependam do ângulo do rotor e portanto do tempo.

As novas equações, porém, para operação com velocidade variável serão não lineares mas mais simples de serem simuladas em computador digital ou em computador híbrido.

Em operação à velocidade constante as equações do modelo tornam-se lineares a coeficientes constantes.

Tomando-se a equação (4)

$$\underline{v} = (Z) \underline{i}$$

Fazendo-se uma mudança de variáveis usando um sistema de referência constituído de dois eixos d e q em quadratura, de nominados respectivamente, eixo direto e eixo em quadratura, girando com velocidade  $\omega$ , associado à figura (1) (figura 4) poder-se-á, sem muitos problemas obter-se um modelo geral de motor de indução mais simples do que o normal.

Esse modelo está sendo chamado de geral porque, como veremos, poderá ser adaptado para as diversas possibilidades de operação e controle de motor de indução.

A versatilidade desse modelo é devida ao fato de que o sistema de referência dq pode ser de tres tipos:

- a - estar girando com a mesma velocidade angular da f.m.m. produzida pelas correntes de estator, ou seja, com a velocidade síncrona,  $\omega = \omega_e$ .
- b - estar no rotor portanto, girando com a velocidade angular do rotor,  $\omega = \nu = \dot{\phi}$ .

c - estar fixo no estator,  $\omega = 0$  (Blondel, Park)

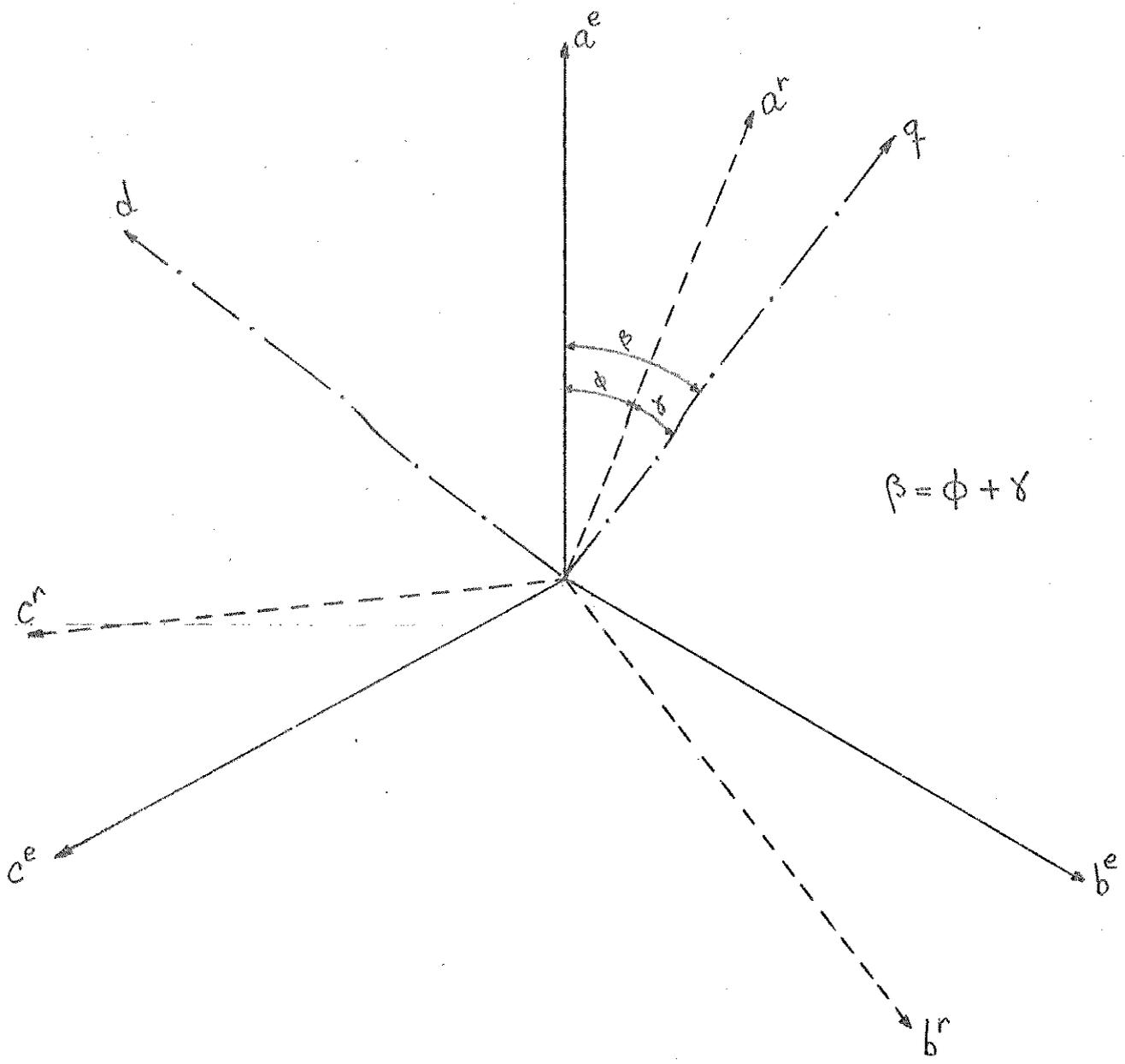


figura 4

As correntes transformadas segundo esses eixos serão:

$$i_d^e = C_1 \left\{ i_a^e \sin\beta + i_b^e \sin \left( \beta - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c^e \sin \left( \beta + \frac{2\pi}{3} \right) \right\} \quad (15)$$

$$i_q^e = C_2 \left\{ i_a^e \cos\beta + i_b^e \cos \left( \beta - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c^e \cos \left( \beta + \frac{2\pi}{3} \right) \right\} \quad (16)$$

$$i_o^e = C_3 \left\{ i_a^e + i_b^e + i_c^e \right\} \quad (17)$$

$$i_d^r = C_4 \left\{ i_a^r \sin\gamma + i_b^r \sin \left( \gamma - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c^r \sin \left( \gamma + \frac{2\pi}{3} \right) \right\} \quad (18)$$

$$i_q^r = C_5 \left\{ i_a^r \cos\gamma + i_b^r \cos \left( \gamma - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c^r \cos \left( \gamma + \frac{2\pi}{3} \right) \right\} \quad (19)$$

$$i_o^r = C_6 \left\{ i_a^r + i_b^r + i_c^r \right\} \quad (20)$$

As equações (15), (16), (18) e (19) são evidentes e são obtidas por inspeção da figura 2. Representam as composições das correntes de estator e de rotor segundo os eixos d e q a partir das correntes das tres fases do estator e do rotor.

As equações (17) e (20) definem as correntes de sequên-  
cia zero para o estator e para o rotor. São em geral necessárias pois, tornam o sistema descrito por seis equações com seis incog-  
nitas e sua importância está no comportamento em regime transitô-  
rio do motor desequilibrado.

A matriz que conecta então o vetor de correntes  $\underline{idq}$ , "fictícias", com o vetor de correntes da máquina é a matriz de transformação  $T^{-1}$  tal que:

$$\boxed{\underline{idq} = T^{-1} \underline{i}} \quad (21)$$

$$\underline{idq} = \begin{bmatrix} i_d^e & i_q^e & i_o^e & i_d^r & i_q^r & i_o^r \end{bmatrix}^T$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 \sin \beta & C_1 \sin(\beta - \frac{2\pi}{3}) & C_1 \sin(\beta + \frac{2\pi}{3}) & 0 & 0 \\ C_2 \cos \beta & C_2 \cos(\beta - \frac{2\pi}{3}) & C_2 \cos(\beta + \frac{2\pi}{3}) & 0 & 0 \\ C_3 & C_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \sin \gamma & C_4 \sin(\gamma - \frac{2\pi}{3}) & C_4 \sin(\gamma + \frac{2\pi}{3}) \\ 0 & 0 & 0 & C_5 \cos \gamma & C_5 \cos(\gamma - \frac{2\pi}{3}) & C_5 \sin(\gamma + \frac{2\pi}{3}) \\ 0 & 0 & 0 & C_6 & C_6 & C_6 \end{bmatrix}$$

Supondo-se que  $T^{-1}$  seja não singular:

$$\underline{i} = T \underline{idq} \quad (22)$$

Precisa-se, agora escrever uma equação do tipo:

$$\underline{v}_{dq} = (Z_{\text{novo}}) \underline{idq} \quad (23)$$

$$\underline{v}_{dq} = (v_q^e \ v_q^e \ v_o^e \ v_d^r \ v_q^r \ v_o^r)^T$$

$\underline{v}_{dq}$  = vetor das tensões fictícias no estator e rotor segundo os eixos  $\underline{d}$  e  $\underline{q}$

e estabelecer uma relação entre  $\underline{v}_{dq}$  e  $\underline{v}$

Para esta relação ser única é necessário impor-se uma restrição à transformação. A restrição que será imposta é a invariância de potência que irá implicar também em invariância de torque.

$$p = \underline{i}^T \underline{v} = \underline{i}_{dq}^T \underline{v}_{dq} \quad (24)$$

$$\underline{i}_{dq}^T T^T \underline{v} = \underline{i}_{dq}^T \underline{v}_{dq}$$

Sendo  $\underline{i}_{dq}^T$  não nulo:

$$\underline{v}_{dq} = T^T \underline{v} \quad (25)$$

$$\underline{v}_{dq} = T^T (Z) \underline{i} = T^T (Z) T \underline{i}_{dq}$$

$$\underline{v}_{dq} = (Z_{\text{novo}}) \underline{i}_{dq} \quad (26)$$

$$(Z_{\text{novo}}) = T^T (Z) T \quad (27)$$

Fazendo-se na matriz  $T^{-1}$ :

$$c_1 = c_2 = c_4 = c_5 = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$c_3 = c_6 = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

teremos:

$$T^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \sin\beta \sin(\beta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\beta + \frac{2\pi}{3}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\beta \cos(\beta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\beta + \frac{2\pi}{3}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\gamma \sin(\gamma - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\gamma + \frac{2\pi}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\gamma \cos(\gamma - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\gamma + \frac{2\pi}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Pode-se provar que  $T^{-1}$  assim definida é ortogonal:

$$(T^{-1})^{-1} = (T^{-1})^T \quad (29)$$

Então:

$$T = (T^{-1})^T \tag{30}$$

$$T^T = T^{-1} \tag{31}$$

$$\boxed{\underline{v}_{dq} = T^{-1} \underline{v}} \tag{32}$$

$$(Z_{\text{nov}}) = T^{-1} (Z) (T^{-1})^T \tag{33}$$

$$\boxed{\underline{v}_{dq} = T^{-1} (Z) (T^{-1})^T \underline{i}_{dq}} \tag{34}$$

$$\boxed{\underline{i} = (T^{-1})^T \underline{i}_{dq}} \tag{35}$$

Na equação (34): os vetores  $\underline{v}_{dq}$  e  $\underline{i}_{dq}$  são constituídos por elementos que são variáveis fictícias, não representam, - especificamente variável real nenhuma da máquina. São apenas combinações das variáveis reais; os elementos da matriz  $(Z_{\text{nov}})$  dependem do sistema de referência dq utilizado. Pode-se mostrar, bastando para isso fazer o cálculo, bastante trabalhoso, de  $(Z_{\text{nov}})$ , segundo a expressão (33), que eles não mais serão funções do tempo nos casos mais importantes que são os que utilizam o referencial dq com velocidade :  $\omega = \dot{\phi}$  ou  $\omega = 0$  (capítulo IV e apêndice 1); no cálculo de  $(Z_{\text{nov}})$  o operador D será aplicado sobre elementos de  $(Z)$  e de  $(T^{-1})^T$ .

No capítulo II foi calculado o torque eletromagnético desenvolvido pelo motor a partir das correntes reais da máquina (equação 12).

Utilizando-se a equação (35) podemos escrever:

$$T_e = \frac{1}{2} \underline{i}_{dq}^T T^{-1} \frac{d(L)}{d\phi} (T^{-1})^T \underline{i}_{dq} \tag{36}$$

Executando-se os cálculos envolvidos em (36) teremos :

$$T_e = \frac{3}{2} M (i_q^e i_d^r - i_d^e i_q^r) \quad (37)$$

Observa-se então que a equação (34) pode ser modificada de modo a se obter uma equação do tipo da (5).

O torque que deverá ser utilizado nas equações que representarão a dinâmica da máquina, agora, será o da expressão (37).

MODELO PARA CHAVEAMENTO DAS CORRENTES  
DE ROTOR DE MOTOR DE INDUÇÃO

Capítulo IV: SIMULAÇÃO DE MOTOR DE INDUÇÃO USANDO UM TIPO DE MODELO TRANSFORMADO DQ EM COMPUTADOR

Como foi observado no capítulo anterior o sistema de referência dq pode ser de três tipos ou ter três velocidades. Conforme a sua velocidade ter-se-á uma equação do tipo (34) e consequentemente um modelo dq. Em resumo pode-se ter três tipos de modelos dq.

Dentre eles, um é melhor para simulação do motor em operação normal e para ser modificado convenientemente para se poder chavear as correntes de estator [apêndice 1], outro é melhor para ser modificado convenientemente para se poder chavear as correntes de rotor.

O modelo a ser desenvolvido neste capítulo será do segundo tipo acima mencionado. Não será o ideal para simulação do motor em operação normal, apesar de poder ser utilizado sem problemas mas, como será visto no capítulo V, será adaptado para estudar o comportamento do motor quando se chaveia as correntes de rotor.

Considere-se o sistema de referência dq da figura 2 a girar com o rotor e fixo a êle ( $\omega = \dot{\phi}$ ).

O ângulo  $\gamma$  será constante. Pode-se fazer:

$$\gamma = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \phi \quad (38)$$

A matriz  $T^{-1}$  definida em (28) será escrita:

$$T^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \cos\phi & \cos(\phi - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\phi + \frac{2\pi}{3}) & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & -\sin(\phi - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\phi + \frac{2\pi}{3}) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (39)$$

Calculando-se a matriz  $(Z_{\text{nov}})$  tem-se:

$$[Z_{\text{nov}}] = \begin{pmatrix} R_e + DL'_e & -\dot{\phi}L'_e & 0 & DM' & -\dot{\phi}M' & 0 \\ \dot{\phi}L'_e & R_e + DL'_e & 0 & \dot{\phi}M' & DM' & 0 \\ 0 & 0 & R_e + DL'_{eo} & 0 & 0 & 0 \\ DM' & 0 & 0 & R_r + DL'_r & 0 & 0 \\ 0 & DM' & 0 & 0 & R_r + DL'_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_r + DL'_{ro} \end{pmatrix} \quad (40)$$

Com:

$$L'_e = L_e - L_{me}$$

$$L'_r = L_r - L_{mr}$$

$$L'_{eo} = L_e + 2L_{me}$$

$$L'_{ro} = L_r + 2L_{mr}$$

$$M' = \frac{3}{2} M$$

A equação:

$$\underline{v}_{dq} = \{Z_{\text{nov}}\} \underline{i}_{dq}$$

pod e ser escrita então na forma:

$$\{A\} D \underline{i}_{dq} = \{B\} \underline{i}_{dq} + \underline{v}_{dq} \quad (41)$$

Onde:

$$\{A\} = \begin{bmatrix} L'_e & 0 & 0 & M' & 0 & 0 \\ 0 & L'_e & 0 & 0 & M' & 0 \\ 0 & 0 & L'_{eo} & 0 & 0 & 0 \\ M' & 0 & 0 & L'_r & 0 & 0 \\ 0 & M' & 0 & 0 & L'_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L'_{ro} \end{bmatrix}$$

$$\{B\} = \begin{bmatrix} -R_e & \dot{\phi} L'_e & 0 & 0 & \dot{\phi} M' & 0 \\ -\dot{\phi} L'_e & -R_e & 0 & -\dot{\phi} M' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_r \end{bmatrix} \quad (41A)$$

A equação (41) pode ainda ser escrita:

$$D\dot{i}_{dq} = (Q)\dot{i}_{dq} + \underline{u} \quad (42)$$

$$(Q) = (A)^{-1}(B)$$

$$\underline{u} = (A)^{-1} \underline{v}_{dq}$$

Da equação (32) obtém-se:

$$v_d^e = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( v_a^e \cos\phi + v_b^e \cos\left(\phi - \frac{2\pi}{3}\right) + v_c^e \cos\left(\phi + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \quad (43)$$

$$v_q^e = -\sqrt{\frac{2}{3}} \left( v_a^e \sin\phi + v_b^e \sin\left(\phi - \frac{2\pi}{3}\right) + v_c^e \sin\left(\phi + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \quad (44)$$

$$v_o^e = \sqrt{\frac{1}{3}} \left( v_a^e + v_b^e + v_c^e \right) \quad (45)$$

Em operação normal:

$$v_a^r = v_b^r = v_c^r = 0$$

Consequentemente:

$$v_d^r = v_q^r = v_o^r = 0$$

Analisando-se a equação (42) observa-se os seguintes fatos:

1. Está na forma normal ou de variáveis de estado portanto na forma adequada para simulação tanto analógica como digital ou ainda híbrida.
2. É uma equação não linear pois, a variável  $\phi$  aparece no vetor de controle  $\underline{u}$  e a variável  $\dot{\phi}$  na matriz  $(Q)$ .
3. Com exceção dos elementos dependentes de  $\phi$  e de  $\dot{\phi}$  todos os outros da matriz  $(Q)$  estão determinados e são constantes.

Para se obter as características dinâmicas da máquina e completar o conhecimento dos elementos da matriz  $(Q)$  e do vetor  $\underline{u}$  é necessário relacionar o torque do motor com a sua velocidade angular.

$$T_e = T_{\text{externo}} + T_{\text{perdas}} + T_{\text{inércia}}$$

$T_{\text{externo}}$  = torque externo ou torque de carga

$T_{\text{perdas}}$  = torque necessário para vencer os atritos =  $b\dot{\phi}$ .

$b$  = coeficiente de atrito angular

$T_{\text{inércia}}$  = torque necessário para vencer a inércia do rotor e da carga

$J$  = momento de inércia combinado ( rotor + carga)

$$J\ddot{\phi} + b\dot{\phi} + T_{\text{externo}} = T_e \quad (46)$$

Como:

$$D\phi = \dot{\phi}$$

As equações que descreverão a dinâmica da máquina, na forma normal serão:

$$D\phi = \dot{\phi} \quad (47)$$

$$D\dot{\phi} = \frac{1}{J} ( T_e - T_{\text{externo}} - b\dot{\phi} ) \quad (48)$$

Tem-se desta forma, para representar o motor de indução um sistema de oito equações diferenciais ordinárias, de primeira ordem, não lineares, na forma normal e que pode ser integrado tanto em computador digital como em híbrido.

$$\begin{aligned} D\underline{i}_{dq} &= (Q)\underline{i}_{dq} + \underline{u} \\ D\phi &= \dot{\phi} \end{aligned} \quad (49)$$

$$D\dot{\phi} = \frac{1}{J} ( T_e - T_{\text{externo}} - b\dot{\phi} )$$

No presente trabalho procurou-se, de forma proposital, escrever as equações do motor na forma normal pelo seguinte motivo: no Laboratório de Simulação Híbrida da FEC-UNICAMP existe um computador híbrido EAI 690. No software de sua parte digital há uma subrotina para resolver sistemas de equações diferenciais, - num intervalo de tempo qualquer, posto na forma de variáveis de

estado:

$$\dot{y} = f(t, y)$$

Essa subrotina utiliza vários métodos de integração de equações diferenciais tais como: Euler modificado, Heun, Runge - Kutta de quarta ordem com passo fixo ou variável e outros, que podem ser escolhidos pelo usuário e é denominada subrotina NIP (XVIII). Utilizando-se essa subrotina a simulação digital do modelo dq torna-se bastante rápida.

Além disso, estando as equações na forma normal poder-se-ia pensar numa simulação híbrida para resolver o sistema de equações (49). Na parte analógica resolver-se-ia as equações propriamente ditas, na parte digital seriam calculadas as entradas, traçar-se-iam as saídas em gráficos, ajustar-se-iam potenciômetros e enfim controlar-se-ia o computador analógico (figura 5).

Para a simulação híbrida o sistema de equações (49) precisa ser escrito, explicitamente, a fim de que se possa fazer o devido escalonamento das variáveis para o computador analógico (apêndice 2).

As soluções obtidas para o sistema de equações diferenciais (49) são as correntes transformadas  $i_d^e$ ,  $i_q^e$ ,  $i_o^e$ ,  $i_d^r$ ,  $i_q^r$ ,  $i_o^r$ , a velocidade angular  $\phi$  e a fase  $\phi$ .

Para se obter as correntes reais da máquina usa-se a equação (22), onde:

$$T = (T^{-1})^T \tag{50}$$

e  $T^{-1}$  dado por (39).

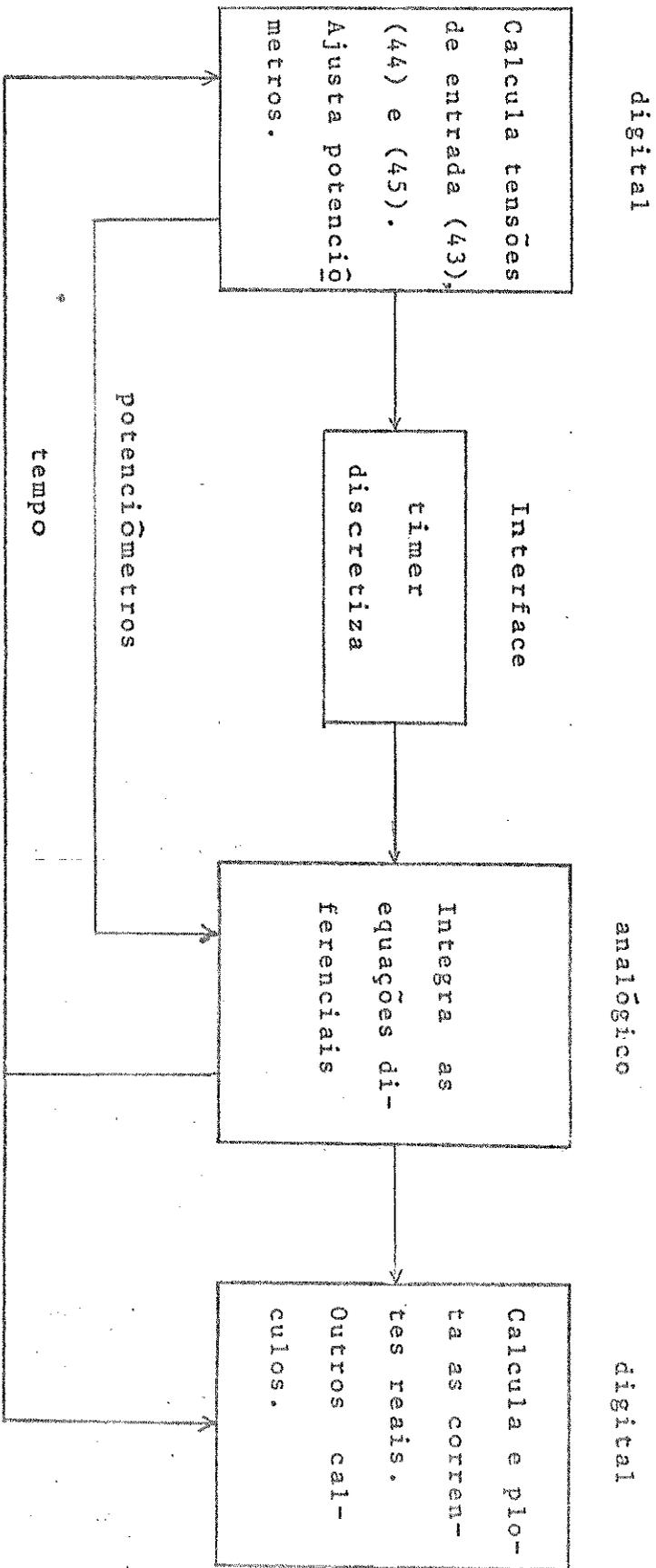


figura 5

Capítulo V: MODELO DE UM MOTOR DE INDUÇÃO DE ROTOR ENROLADO PARA ESTUDOS SOBRE CHAVEAMENTO DAS CORRENTES DE ROTOR - MODELO ROTOR.

No capítulo IV obteve-se um modelo bastante simples computacionalmente tanto num computador digital como num híbrido porém, não adequado para ser utilizado diretamente em problemas que envolvam chaveamento das correntes de rotor pois, elas não aparecem explicitamente nas equações e é sobre elas que os dispositivos chaveadores irão atuar.

Dessa maneira impõe-se que se façam modificações no modelo dq apresentado que permitam obter um novo modelo com as mesmas facilidades do anterior e que possa ser utilizado em problemas que envolvam chaveamento das correntes de rotor.

O novo modelo envolverá os vetores de correntes e de tensões abaixo:

$$\underline{i}_{\text{novo}} = (i_d^e \ i_q^e \ i_o^e \ i_a^r \ i_c^r)^T$$

$$\underline{v}_{\text{novo}} = (v_d^e \ v_q^e \ v_o^e \ v_a^r \ v_b^r \ v_c^r)^T$$

Como o rotor não tem neutro ligado (figura 6)

$$i_b^r = -i_a^r - i_c^r$$

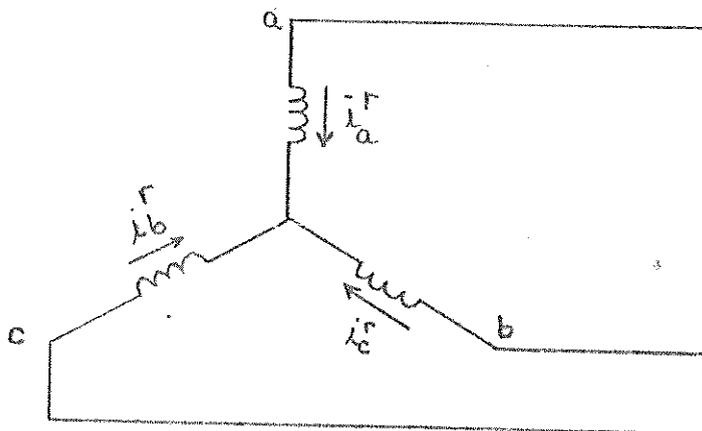


figura 6

Relacionando o vetor  $i_{dq}$  com o novo vetor de correntes tem-se, pelas expressões (30) e (39):

$$\begin{pmatrix} i_d^e \\ i_q^e \\ i_o^e \\ i_d^r \\ i_q^r \\ i_o^r \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d^e \\ i_q^e \\ i_o^e \\ i_a^r \\ i_b^r \\ i_c^r \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i_d^e \\ i_q^e \\ i_o^e \\ i_a^r \\ i_b^r \\ i_c^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d^e \\ i_q^e \\ i_o^e \\ i_a^r \\ i_c^r \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dessa forma:

$$\begin{pmatrix} i_d^e \\ i_q^e \\ i_o^e \\ i_d^r \\ i_q^r \\ i_o^r \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d^e \\ i_q^e \\ i_o^e \\ i_a^r \\ i_c^r \\ 0 \end{pmatrix} \quad (51)$$

$$\underline{i}_{dq} = T_{\text{novo}}^{-1} \underline{i}_{\text{novo}} \quad (52)$$

A matriz  $T_{\text{novo}}^{-1}$  não é ortogonal mas a sua inversa é facilmente calculável:

$$T_{\text{novo}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (53)$$

Observa-se que, na parte referente ao estator o modelo não mudará em relação ao anterior mas na parte do rotor aparecem explicitamente as correntes e tensões de rotor.

O vetor  $\underline{v}_{dq}$  pode ser relacionado com o novo vetor das tensões usando-se as expressões (32) e (39) por:

$$\begin{bmatrix} v_d^e \\ v_q^e \\ v_o^e \\ v_d^r \\ v_q^r \\ v_o^r \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_d^e \\ v_q^e \\ v_o^e \\ v_a^r \\ v_b^r \\ v_c^r \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\underline{v}_{dq} = T_v^{-1} \underline{v}_{\text{novo}} \quad (55)$$

Com as novas variáveis, a equação (41) que fornece as correntes fictícias da máquina, no modelo anterior, poderá ser escrita:

$$[A] T_{\text{novo}}^{-1} \underline{D}i_{\text{novo}} = [B] T_{\text{novo}}^{-1} \underline{i}_{\text{novo}} + T_v^{-1} \underline{v}_{\text{novo}} \quad (56)$$

Onde:

$$(A)T_{\text{ново}}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} L'_e & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} M' & 0 & 0 \\ 0 & L'_e & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} M' & -\sqrt{2} M' & 0 \\ 0 & 0 & L'_{eo} & 0 & 0 & 0 \\ M' & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} L'_r & 0 & 0 \\ 0 & M' & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} L'_r & -\sqrt{2} L'_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L'_{ro} \end{bmatrix}$$

(57)

$$(B)T_{\text{ново}}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} -R'_e & \dot{\phi} L'_e & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \dot{\phi} M' & -\sqrt{2} \dot{\phi} M' & 0 \\ -\dot{\phi} L'_e & -R'_e & 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\phi} M' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R'_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}} R'_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} R'_r & \sqrt{2} R'_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R'_r \end{bmatrix}$$

(58)

$$T_v^{-1} v_{\text{novo}} = \begin{pmatrix} v_d^e \\ v_q^e \\ v_o^e \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (v_a^r - \frac{1}{2} (v_b^r + v_c^r)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (v_b^r - v_c^r) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} (v_a^r + v_b^r + v_c^r) \end{pmatrix} \quad (59)$$

Da equação (56) conclui-se que:

$$v_a^r + v_b^r + v_c^r = 0 \quad (60)$$

De (51):

$$i_d^r = \frac{\sqrt{6}}{2} i_a^r$$

$$i_q^r = \frac{-\sqrt{2}}{2} i_a^r - \sqrt{2} i_c^r$$

Substituindo as equações acima em (37) tem-se:

$$T_e = M' \left( \frac{1}{2} i_a^r (\sqrt{6} i_q^e + \sqrt{2} i_d^e) + \sqrt{2} i_c^r i_d^e \right) \quad (61)$$

Então:

$$D\dot{\phi} = \frac{1}{J} \{ M' \left( \frac{1}{2} i_a^r (\sqrt{6} i_q^e + \sqrt{2} i_d^e) + \sqrt{2} i_c^r i_d^e \right) - T_{\text{externo}} - b\dot{\phi} \} \quad (62)$$

A equação (56), na forma normal, pode ser escrita:

$$D\dot{i}_{\text{novo}} = T_{\text{novo}}(A)^{-1}(B)T_{\text{novo}}^{-1} i_{\text{novo}} + T_{\text{novo}}(A)^{-1} T_v^{-1} v_{\text{novo}} \quad (63)$$

Explicitamente, tem-se então as equações finais do mode-

$$\begin{bmatrix} D_{1d}^i e \\ D_{1q}^i e \\ D_{1o}^i e \\ D_{1a}^i r \\ D_{1c}^i r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_{eL}^i}{\Delta} & \frac{L_{eL}^i}{\Delta} & 0 & \frac{\sqrt{6} R_{rM}^i}{2\Delta} - \frac{\sqrt{2} L_{rM}^i}{2\Delta} & -\sqrt{2} \frac{L_{rM}^i}{\Delta} \\ \frac{-L_{eL}^i}{\Delta} & \frac{-R_{eL}^i}{\Delta} & 0 & \frac{-\sqrt{2} R_{rM}^i}{2\Delta} - \frac{\sqrt{6} L_{rM}^i}{2\Delta} & -\sqrt{2} \frac{R_{rM}^i}{\Delta} \\ 0 & 0 & \frac{-R_{eL}^i}{L_{rM}^i} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{6} R_{eM}^i}{3\Delta} & \frac{-\sqrt{6} M^i L_{eL}^i}{3\Delta} & 0 & \frac{-R_{rL}^i}{\Delta} + \frac{\sqrt{3} M^i 2}{3\Delta} & \frac{2\sqrt{3} M^i 2}{3\Delta} \\ \frac{-\sqrt{6} R_{eM}^i}{6\Delta} - \frac{\sqrt{2} M^i L_{eL}^i}{2\Delta} & \frac{\sqrt{6} M^i L_{eL}^i}{6\Delta} - \frac{\sqrt{2} R_{eM}^i}{2\Delta} & 0 & \frac{-2\sqrt{3} M^i 2}{3\Delta} & \frac{-R_{rL}^i}{\Delta} - \frac{\sqrt{3} M^i 2}{3\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \\ i_a \\ i_c \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{L_{rL}^i}{\Delta} v_d e - \frac{\sqrt{6} M^i r}{2\Delta} v_a \\ \frac{L_{rL}^i}{\Delta} v_q e + \frac{\sqrt{2} M^i}{2\Delta} (v_a + 2v_c) \\ L_{eo}^i v_o \\ \frac{-\sqrt{6} M^i v_d e}{3\Delta} + \frac{L_{eL}^i}{\Delta} v_a \\ \frac{\sqrt{6} M^i v_d e}{6\Delta} + \frac{\sqrt{2} M^i}{2\Delta} v_q e + \frac{L_{eL}^i}{\Delta} v_c \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\dot{D}\phi = \frac{1}{j} \{ M^i ( \frac{1}{2} i_a^r ( \sqrt{6} i_q^e + \sqrt{2} i_d^e ) + \sqrt{2} i_d^e i_c^r ) - T_{\text{externo}} - b\phi \} \quad (65)$$

$$D\phi = \phi \quad (66)$$

Com  $v_d^e$ ,  $v_q^e$ ,  $v_o^e$  obtidos das expressões (43), (44) e (45).

Se as tensões de alimentação  $v_a^e$ ,  $v_b^e$ ,  $v_c^e$  forem equilibradas e senoidais teremos:

$$v_o^e = \frac{1}{\sqrt{3}} (v_a^e + v_b^e + v_c^e) = 0$$

Então a terceira equação de (64) poderá ser eliminada.

$$\Delta = L_e' L_r' - M'^2$$

Capítulo VI: CHAVEAMENTO DAS CORRENTES DE ROTOR DE UM MOTOR DE INDUÇÃO DE ROTOR ENROLADO UTILIZANDO O MODELO ROTOR.

Em operação normal o rotor de um motor de indução estará curto circuitado ( figura 6 ).

Então:

$$v_a^r + v_b^r + v_c^r = 0$$

$$v_a^r - v_b^r = 0$$

$$v_b^r - v_c^r = 0$$

Portanto:

$$v_a^r = v_b^r = v_c^r = 0$$

Nessa situação dir-se-á que o motor está num modo de operação que será denominado: MODO A.

Quando a fase a estiver aberta, nela não se terá corrente elétrica mas, em compensação, aparecerá uma tensão induzida - que será denominada simplesmente  $v_a$  ( figura 7 ).

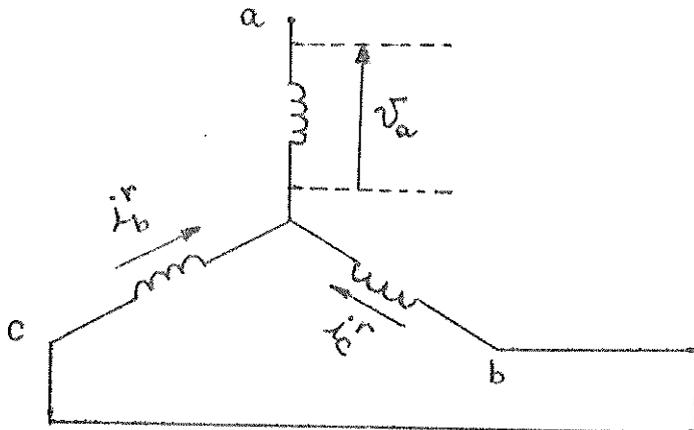


figura 7

Nesse caso:

$$i_a^r = 0$$

$$v_a + v_b^r + v_c^r = 0$$

$$v_b^r - v_c^r = 0$$

Então:

$$v_a^r = v_a$$

$$v_b^r = v_c^r = -\frac{v_a}{2}$$

A esse modo de operação dar-se-á a denominação: MODO B.

O MODO C de operação será alcançado quando a fase c estiver aberta. Nela será induzida uma tensão que será denominada simplesmente  $v_c$ .

$$i_c^r = 0$$

$$v_a^r = v_b^r = -\frac{v_c}{2}$$

$$v_c^r = v_c$$

O último modo de operação possível, MODO D, será alcançado quando ambas as fases a e c estiverem abertas. Haverá, então nelas as tensões induzidas  $v_a'$  e  $v_c'$ .

$$i_a^r = i_c^r = 0$$

$$v_a^r = v_a'$$

$$v_b^r = -v_a' - v_c'$$

$$v_c^r = v_c'$$

Nesse modo de operação o motor não produzirá torque eletromagnético (61).

Qualquer simulação que se faça do motor com chaveamento das correntes de rotor deve levar em conta além das equações (64) (65) e (66) também o modo de operação em que o motor se encontra. As equações do modelo que irão ser integradas mudarão, conforme o modo de operação do motor.

### Simulação Digital

A simulação do controle proposto no capítulo I, pode ser realizada em computador digital usando o Modelo Rotor pois, no software da maioria dos computadores há subrotinas que inte-

gram um sistema de equações diferenciais posto na forma de variáveis de estado:

$$\underline{y} = \underline{f} ( t, \underline{y} )$$

É o caso da subrotina NIP (XVIII) do EAI 640 utilizada nos testes deste trabalho ou das subrotinas DRKGS, HPCG, RKGS da IBM.

Essas subrotinas, através de outras internas a elas, possibilitam a mudança das equações conforme o modo de operação da máquina.

É importante nessa simulação detetar-se, em cada passo, em que modo de operação a máquina estará no passo seguinte.

#### MODO A

As equações a serem utilizadas serão (64), (65) e (66) com  $v_a^r = v_b^r = v_c^r = 0$ .

#### MODO B

As equações serão (67), (65) e (66).

$$v_a = \frac{\sqrt{3}M'}{3L_e'} \{ \sqrt{2} (v_d^e - R_e i_d^e + L_e' \dot{\phi} i_q^e) - 2M' \dot{\phi} i_c^r \}$$

Com  $v_d^e$ ,  $i_d^e$ ,  $\dot{\phi}$ ,  $i_q^e$ ,  $i_c^r$  calculados no passo anterior.

#### MODO C

As equações serão (68), (65) e (66).

$$v_c = \frac{\sqrt{6}M'}{6L_e'} \{ -(v_d^e + \sqrt{3}v_q^e) + (R_e + \sqrt{3}L_e' \dot{\phi}) i_d^e + (\sqrt{3}R_e - L_e' \dot{\phi}) i_q^e + 2\sqrt{2}M' \dot{\phi} i_a^r \}$$

Com  $v_d^e$ ,  $v_q^e$ ,  $\dot{\phi}$ ,  $i_d^e$ ,  $i_q^e$ ,  $i_a^r$  calculados no passo anterior.

#### MODO D

As equações serão (69), (65) e (66).

$$v_a' = \frac{\sqrt{3}M'}{3L_e'} \{ \sqrt{2} (v_d^e - R_e i_d^e + L_e' \dot{\phi} i_q^e) \}$$

$$v_c' = \frac{\sqrt{6}M'}{6L_e'} \{ -(v_d^e + \sqrt{3}v_q^e) + (R_e + \sqrt{3}L_e' \dot{\phi}) i_d^e + (\sqrt{3}R_e - L_e' \dot{\phi}) i_q^e \}$$

Com  $v_d^e$ ,  $v_q^e$ ,  $i_d^e$ ,  $i_q^e$  calculados no passo anterior.

Resumidamente, em diagrama de blocos, tem-se na figura



8 a sequência de operações a executar para simular o motor de indução de acordo com o Modelo Rotor proposto no capítulo V.

Cada um dos blocos exige uma análise algo mais detalhada pois, envolvem uma sequência de operações a serem programadas.

BLOCO I:

Como a máquina será suposta inicialmente em repouso, as correntes e a velocidade angular do rotor serão nulas no instante inicial, a fase inicial será feita também nula, por conveniência.

BLOCO II:

A filosofia deste bloco será testar, a cada passo da integração e para cada fase do rotor se:

- a) estará ou não havendo circulação de corrente na fase em inspeção.
- b) se o item acima for positivo, verificar se o tempo de não circulação ( $\tau$ ) de corrente terminou.
- c) se a corrente deixou de circular na fase naquele passo.
- d) se o item acima for positivo, determinar ainda até que instante esta corrente não circulará.

Nesse bloco algumas variáveis são importantes e decisivas para o entendimento e desenvolvimento da simulação.

MODO: utilizada para indicar o modo de operação do motor.

MODO	Modo de operação
1	D
2	B
4	C
5	A

tabela I

KCROT(I)=1 não está havendo circulação de corrente elétrica na fase I do rotor. ( I = 1, 2 ).

KCROT(I)=0 circula corrente elétrica na fase I do rotor.

TFIM(I): indica o instante no qual a corrente na fase I do rotor voltará novamente a circular após ter sido interrompida

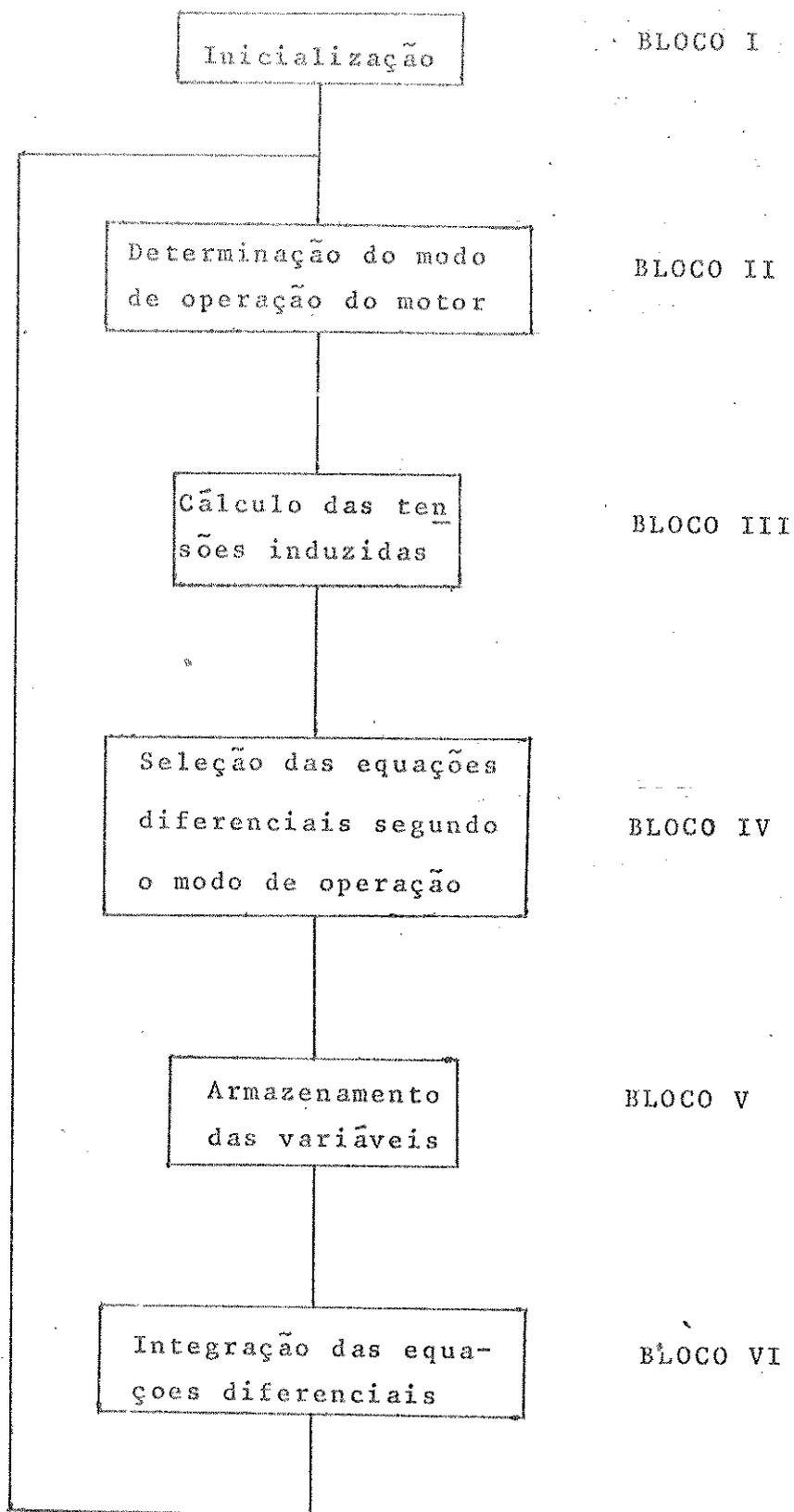


figura 8

durante  $\tau$  segundos.

$Y(I)$ : variáveis do modelo.

Para  $I = 1, 2, 3, 4$  e  $5$  tem-se as correntes  $i_d^e, i_q^e, i_o^e, i_a^r, i_c^r$  do modelo.

Para  $I = 6$  tem-se a velocidade angular do rotor ( $\dot{\phi}$ ) e para  $I = 7$  o ângulo de fase do rotor ( $\phi$ ).

KCROT e TFIM devem ser inicializadas com 1 e 0, respectivamente pelos motivos expostos no bloco I.

O diagrama de blocos da figura 9 mostra como detetar, em cada passo da simulação em que modo de operação a máquina estará no passo seguinte.

Em virtude da simulação ser digital e portanto discreta e como é importante detetar-se pontos onde as correntes de rotor se anulam, o passo na integração, ou seja, o incremento da variável tempo ( $T$ ) deve ser o menor possível. Esta foi a principal razão de se ter procurado um modelo cuja simulação em computador fosse rápida e não se ter utilizado o modelo normal para simular o motor em questão.

Como a sequência de operações mostrada na figura 9 é executada a cada passo da integração, no fim de cada um deles, tem-se um valor para a variável MODO que indicará, como se verá em seguida, o modo de operação no passo seguinte segundo a tabela I.

#### BLOCO III:

A análise deste bloco está incluída na do bloco IV pois, as tensões induzidas dependem do modo de operação da máquina e influem nas equações que deverão ser integradas no próximo passo.

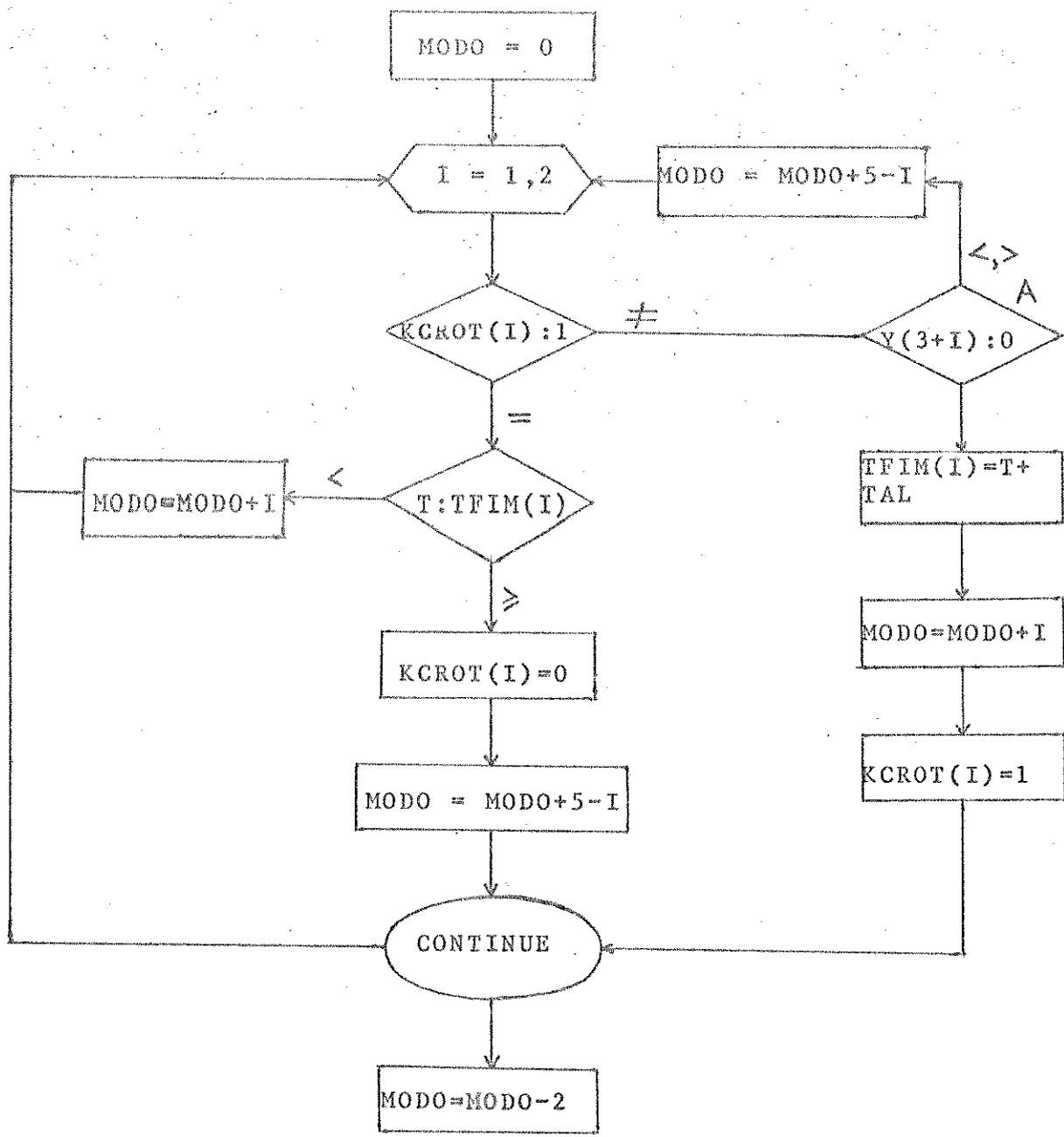
#### BLOCO IV:

O diagrama de blocos da figura 10 visa esclarecer tanto o bloco III como o IV.

Na programação, em FORTRAN, do modelo proposto podemos usar para a seleção das equações segundo o modo de operação um "GO TO calculado".

GO TO ( a, b, m, d, e ), MODO

Onde a, b, c, d são os números de comando que iniciam a programação dos blocos (a), (b), (c) e (d) da figura 10; m é um comando qualquer que nunca será utilizado.



T = tempo  
 TAL = intervalo de tempo ( $\tau$ ) durante o qual as correntes de rotor permanecem nulas.

figura 9

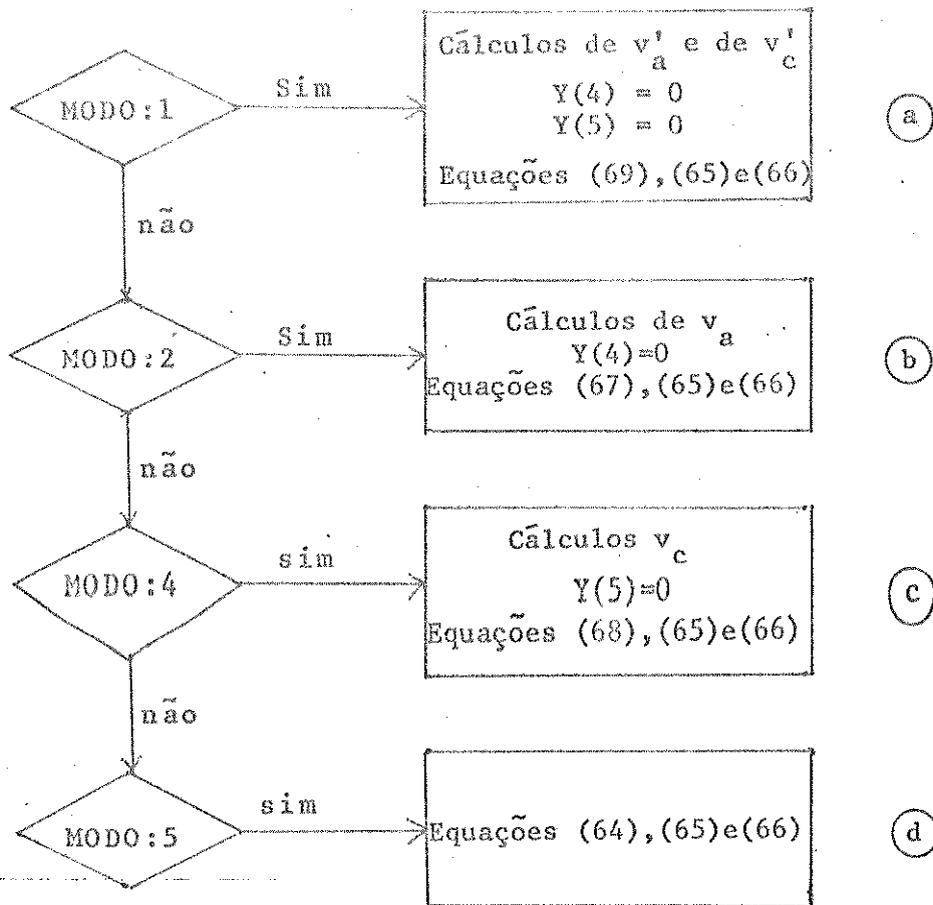


figura 10

BLOCO V:

É necessário armazenar-se as variáveis do modelo entre um passo e outro da simulação por duas razões:

- a) Necessidade de, conforme o modo de operação do motor ter-se de calcular as tensões induzidas nos enrolamentos de fase do rotor em circuito aberto. Como foi visto, os cálculos das tensões induzidas foram feitos com os valores das variáveis no passo anterior.
- b) Necessidade de se ter de detetar o instante em que as correntes de rotor se anulam. Essa deteção é feita sempre a partir dos valores armazenados das correntes de rotor de acordo com o diagrama de blocos da figura 11 e ocupa no diagrama da figura 9 o bloco A.

BLOCO VI:

Como as equações do modelo estão todas na forma normal pode-se, como já foi visto, e superando as dificuldades peculiares, usar subrotinas já elaboradas e introduzidas no software das diversas marcas de computadores existentes.

O intervalo de tempo de definição das soluções das equações diferenciais é fixado pelo usuário da subrotina, bem como o intervalo de tempo de discretização ( passo ).

A subrotina de integração das equações diferenciais e o passo de integração são importantes para assegurar a estabilidade e a precisão dos cálculos.

É recomendável usar-se uma subrotina de passo fixo porque nas vizinhanças dos pontos de chaveamento existirá sempre o perigo de não se encontrar o ponto onde a corrente se anula.

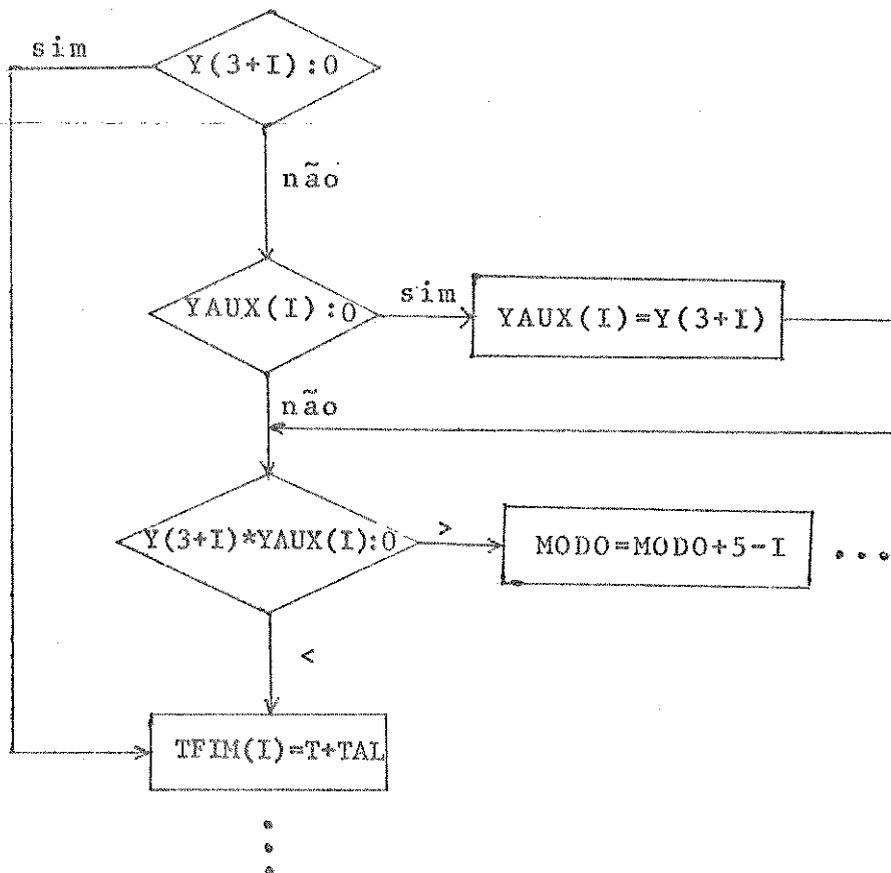


figura 11

### Simulação Híbrida

As figuras 12 e 13 mostram os diagramas de simulação da parte analógica do Modelo Rotor.

As tensões de entrada  $v_d^e$ ,  $v_q^e$ ,  $v_a^r$ ,  $v_c^r$  são calculadas digitalmente e entram ou não nos integradores, via conversores digital - analógico ( figura 5 ), dependendo do modo de operação do motor.

Os instantes em que as correntes de rotor se anulam são detetados através do uso de lógica paralela ( comparadores, flip - flops, inversores ) ( figura 14 ).

Através de subrotinas de serviços de interrupt pode-se calcular as tensões induzidas  $v_a^r$  e  $v_c^r$  e entrar com elas ou não nos integradores.

Sendo a simulação híbrida mais rápida do que a digital - pode-se usar passos bem pequenos na integração das equações do modelo, melhorando assim a precisão em torno dos pontos onde as correntes se anulam.

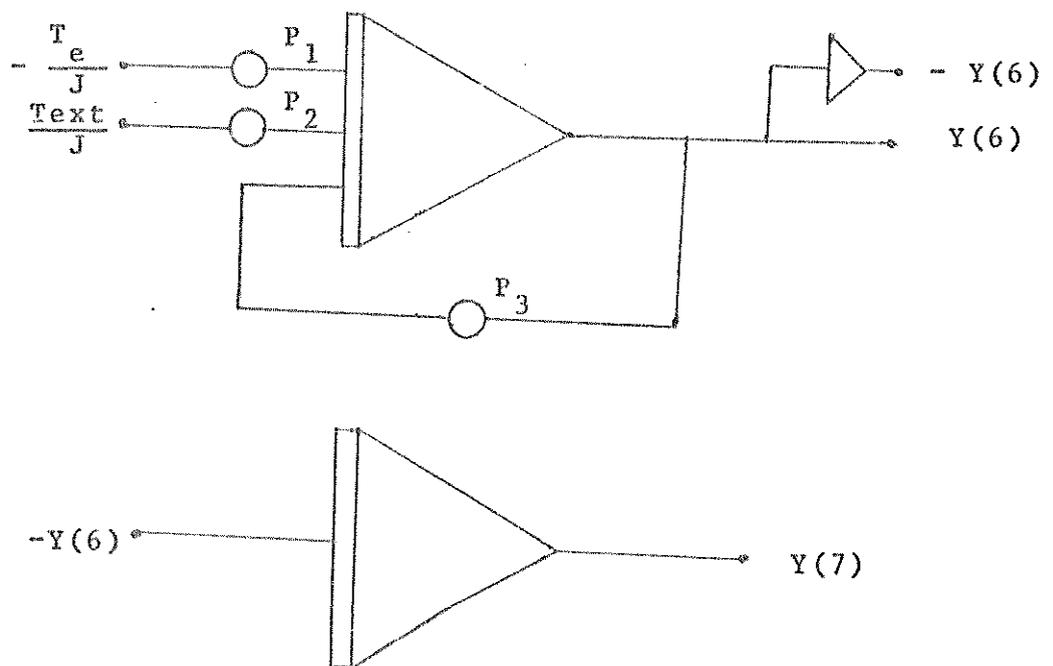
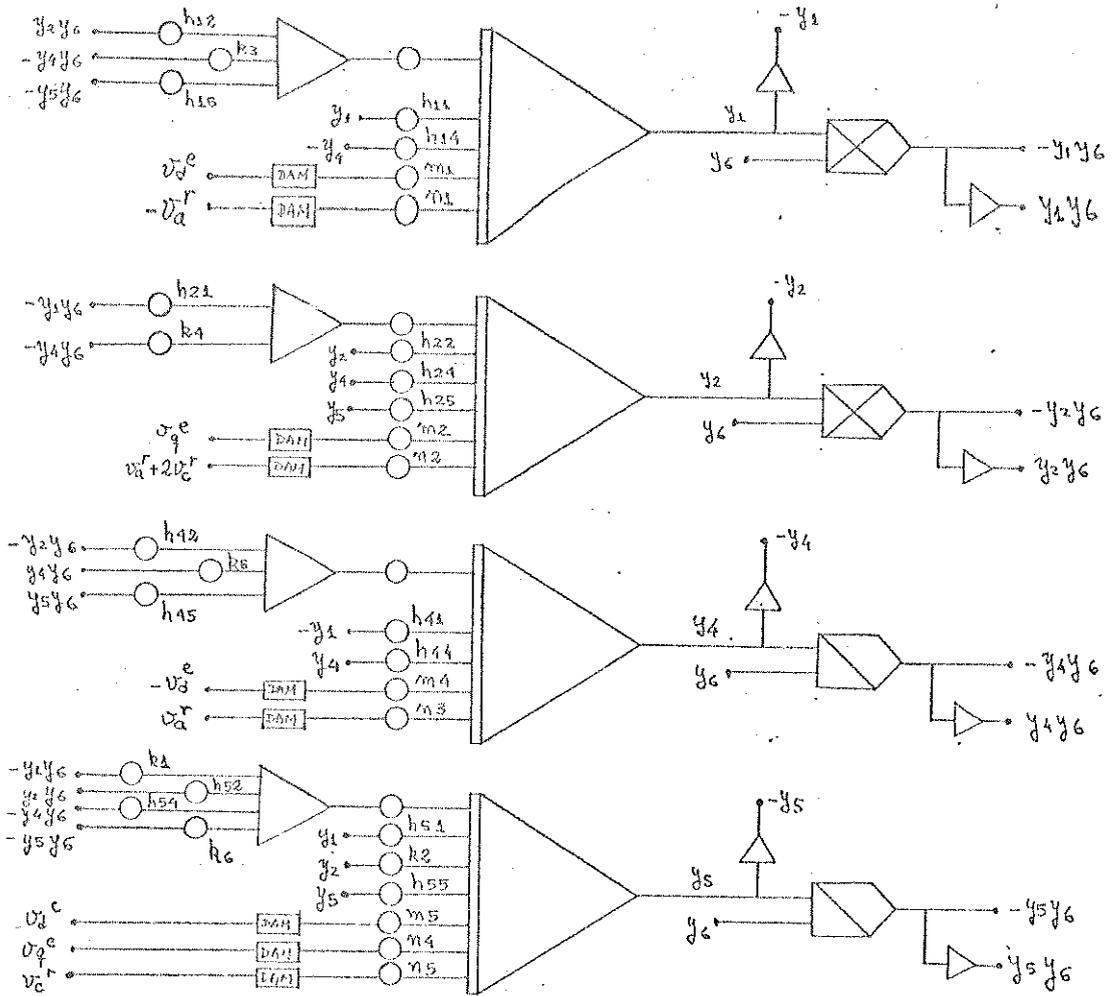


figura 12



• Figura 13

Os diagramas das figuras 12 e 13 são obtidos das equações (64), (65) e (66) escrevendo-as do modo abaixo:

$$\begin{bmatrix} DY(1) \\ DY(2) \\ DY(4) \\ DY(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_{11} & h_{12} Y(6) & h_{14} - k_3 Y(6) & -h_{15} Y(6) \\ -h_{21} Y(6) & -h_{22} & -h_{24} - k_4 Y(6) & -h_{25} \\ h_{41} & -h_{42} Y(6) & -h_{44} + k_5 Y(6) & h_{45} Y(6) \\ -h_{51} - k_1 Y(6) & -h_{52} Y(6) - k_2 & -h_{54} Y(6) & -h_{55} - k_6 Y(6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(1) \\ Y(2) \\ Y(4) \\ Y(5) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} m_1 v_d^e - n_1 v_a^r \\ m_2 v_q^e + n_2 (v_a^r + 2 v_c^r) \\ -m_4 v_d^e + n_3 v_a^r \\ m_5 v_d^e + n_4 v_q^e + n_5 v_c^r \end{bmatrix}$$

$$DY(6) = p_1 T_e - p_2 T_{\text{externo}} - p_3 Y(6)$$

$$DY(7) = Y(6)$$

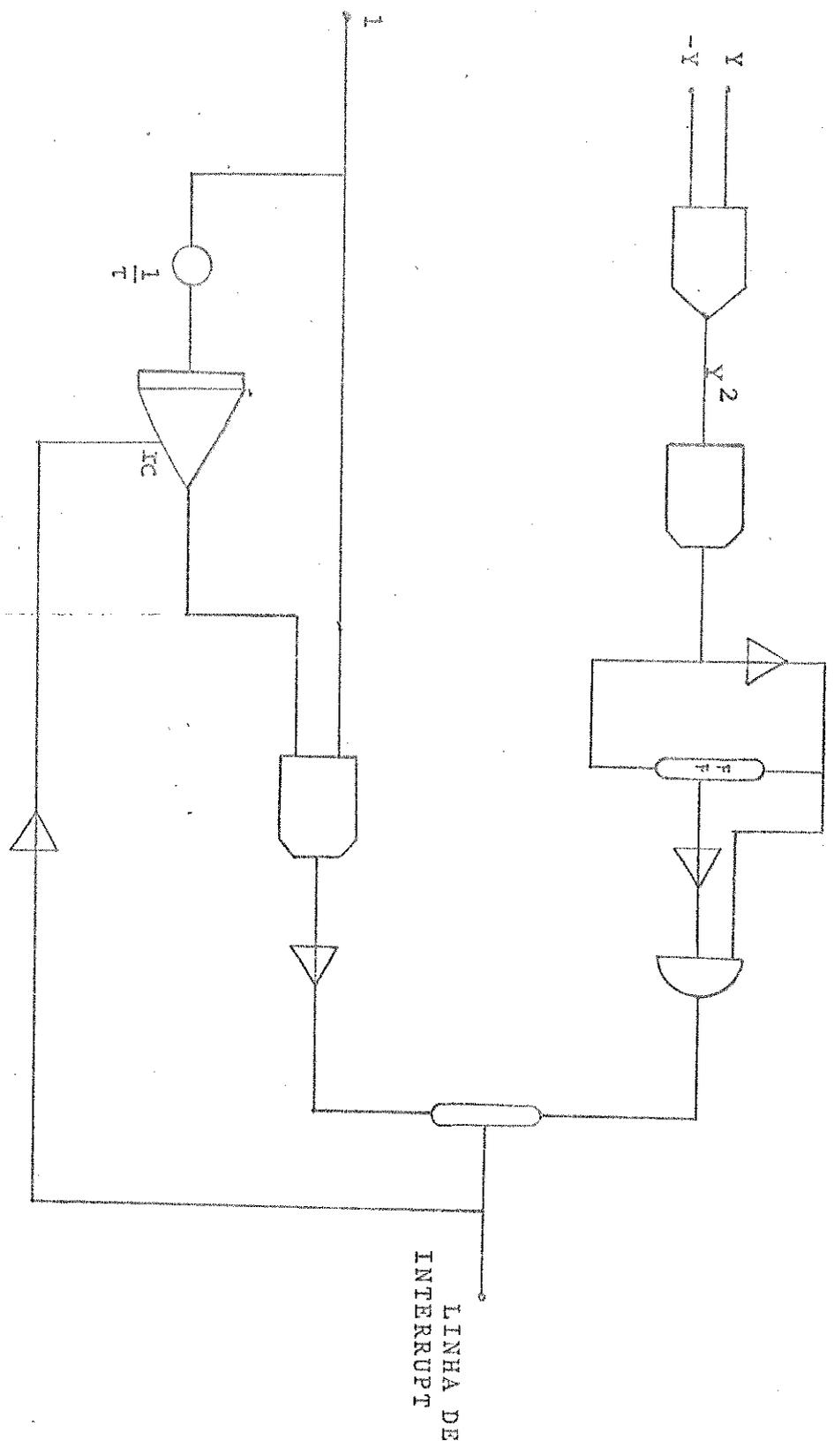


Figura 14

## CONCLUSÃO

O modelo de motor de indução desenvolvido, neste trabalho, para se estudar chaveamento das correntes de rotor apresenta algumas facilidades computacionais:

- a) as equações estão na forma de variáveis de estado - permitindo assim tanto uma simulação híbrida como uma digital, usando subrotinas já implementadas em diversos computadores para resolver equações diferenciais.
- b) apesar das equações serem não lineares, os coeficientes que aparecem não são variáveis com o tempo. Este fato aumenta mais a possibilidade de realização de uma simulação híbrida e diminui bastante o tempo de computação na simulação digital.
- c) Não há inversões nem produtos de matrizes o que produz uma diminuição ainda maior no tempo de computação digital.

Em virtude dessas facilidades apresentadas esse modelo torna-se razoavelmente adequado para ser simulado em mini-computadores, como são os da maioria dos centros de pesquisa científicas existentes hoje em dia, tanto no exterior como no Brasil ( caso - do Laboratório de Simulação Híbrida da FEC-UNICAMP ).

A utilidade desse modelo, entretanto, está intimamente ligada à utilidade de se fazer chaveamento das correntes de rotor de motor de indução.

Atualmente pesquisa-se muito, tanto teórica como praticamente o chaveamento das correntes de estator de motor de indução e a sua utilidade prática, talvez pela maior simplicidade que se apresenta e muito pouco se tem feito com relação ao rotor.

Pelo menos, para pequenos motores, com correntes baixas de rotor, pode-se esperar, intuitivamente, resultados satisfatórios em relação ao controle de torque ou de velocidade por chaveamento das correntes de rotor pois, trata-se de um controle filosoficamente parecido com o feito com resistores no rotor.

Hã, possivelmente, detalhes que tornam o chaveamento -

56

das correntes de rotor mais complicado e, para que se possa estudá-los só existem dois caminhos: as realizações práticas, até agora pouco feitas e as simulações onde um modelo adequado e de simulação com execução rápida poderá ser bastante útil.

APÊNDICE 1

Se o sistema de referência dq, da figura 2, estiver fixo no estator o ângulo  $\beta$  será constante.

Fazendo-se:

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \phi$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & \cos(\phi + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\phi - \frac{2\pi}{3}) \\ 0 & 0 & 0 & \sin\phi & \sin(\phi + \frac{2\pi}{3}) & \sin(\phi - \frac{2\pi}{3}) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$Z_{\text{nov}} = \begin{bmatrix} R_e + DL'_e & 0 & 0 & DM' & 0 & 0 \\ 0 & R_e + DL'_e & 0 & 0 & DM' & 0 \\ 0 & 0 & R_e + DL'_{e0} & 0 & 0 & 0 \\ DM' & \dot{\phi}M' & 0 & R_r + DL'_r & \dot{\phi}L'_r & 0 \\ -\dot{\phi}M' & DM' & 0 & -\dot{\phi}L'_r & R_r + DL'_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_r + DL'_{r0} \end{bmatrix}$$

A equação:

$$(A) \underline{di}_{dq} = (B) \underline{i}_{dq} + \underline{v}_{dq}$$

terá:

$$(B) = \begin{bmatrix} -R_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi M' & 0 & -R_r & -\phi L_r' & 0 \\ \phi M' & 0 & 0 & \phi L_r & -R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_r \end{bmatrix}$$

Da equação (32) obtém-se:

$$v_d^e = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( v_a^e - \frac{1}{2}v_b^e - \frac{1}{2}v_c^e \right)$$

$$v_q^e = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( v_b^e - v_c^e \right)$$

$$v_o^e = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( v_a^e + v_b^e + v_c^e \right)$$

Observa-se que este modelo é mais simples do que o apresentado no capítulo IV para operação normal de motor de indução porém, a sua modificação para se poder chavear as correntes de rotor torna-o ainda mais complicado pois, introduz coeficientes que são funções do tempo.

Na equação que envolve o torque eletromagnético também aparecerão coeficientes que serão funções do tempo.

Entretanto, é adequado para estudar controle por conversão estática de frequência pois, nesse caso o rotor continua em curto circuito e apenas a alimentação é que se modifica. Ainda pode ser modificado para se estudar chaveamento das correntes de estator.

APÊNDICE 2

$$D\underline{i}_{dq} = (A)^{-1}(B)\underline{i}_{dq} + (A)^{-1}\underline{v}_{dq}$$

$$(A)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} L'_r & 0 & 0 & -M' & 0 & 0 \\ 0 & L'_r & 0 & 0 & -M' & 0 \\ 0 & 0 & L''_{eo} & 0 & 0 & 0 \\ -M' & 0 & 0 & L'_e & 0 & 0 \\ 0 & -M' & 0 & 0 & L'_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L''_{ro} \end{bmatrix}$$

$$L''_{eo} = \frac{\Delta}{L'_{eo}}$$

$$L''_{ro} = \frac{\Delta}{L'_{ro}}$$

$$(A)^{-1}(B) = \begin{bmatrix} \frac{-R_e L'_r}{\Delta} & \frac{L'_e L'_r}{\Delta} \phi & 0 & \frac{R_r M'}{\Delta} & \frac{M' L'_r}{\Delta} \phi & 0 \\ \frac{-L'_e L'_r}{\Delta} \phi & \frac{-R_e L'_r}{\Delta} & 0 & \frac{-M' L'_r}{\Delta} \phi & \frac{R_r M'}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-R_e}{L'_{eo}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R_e M'}{\Delta} & \frac{-M' L'_e}{\Delta} \phi & 0 & \frac{-R_r L'_e}{\Delta} & \frac{-M'^2}{\Delta} \phi & 0 \\ \frac{M' L'_e}{\Delta} \phi & \frac{R_e M'}{\Delta} & 0 & \frac{M'^2}{\Delta} \phi & \frac{-R_r L'_e}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-R_r}{L'_{ro}} \end{bmatrix}$$

A matriz (B) é a da expressão (41A)

$$(\Delta)^{-1} \underline{v}_{dq} = \begin{pmatrix} \frac{L'_r}{\Delta} v_d^e \\ \frac{L'_r}{\Delta} v_q^e \\ \frac{1}{L'_{eo}} v_o^e \\ \frac{-M'}{\Delta} v_d^e \\ \frac{-M'}{\Delta} v_q^e \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D\dot{\phi} = \frac{1}{J} ( M' ( i_q^e i_d^r - i_d^e i_q^r ) - T_{\text{externo}} - b\dot{\phi} )$$

$$D\dot{\phi} = -\dot{\phi}$$

## BIBLIOGRAFIA

- I. P.C. Krause and C. H. Thomas, Simulation of Symmetrical Induction Machinery, "IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems", November 1965, vol. PAS-84, n<sup>o</sup> 11, pp. 1038-1052.
- II. P.C. Krause, Simulation of Unsymmetrical 2-Phase Induction Machines, "IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems", November 1965, vol. PAS-84, n<sup>o</sup> 11, pp. 1025-1037.
- III. Howard E. Jordan, Digital Computer Analysis of Induction-Machines in Dynamic Systems, "IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems", June 1967, vol. PAS-86, n<sup>o</sup> 6, pp. 722-728.
- IV. Asish K. De Sarkar and Gunnar J. Berg, Digital Simulation of Three-Phase Induction Motors, "IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems", July/August 1970, vol. PAS-89, n<sup>o</sup> 6, pp. 1031-1037.
- V. P.R. Basu, A variable speed Induction motor using thyristors in the Secondary Circuit, "IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems", March/april 1971, vol. PAS-90, n<sup>o</sup> 2, pp. 509-514.
- VI. P.C. Krause and Thomas A. Lipo, Analysis and Simplified Representations of a Rectifier-Inverter Induction Motor Drive, "IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems", May 1969, vol. PAS-88, n<sup>o</sup> 5, pp. 588-596.
- VII. T. A. Lipo, The Analysis of Induction Motors with voltage control by symmetrically triggered thyristors, "IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems", March/April 1971 vol. PAS-90, n<sup>o</sup> 2, pp. 515-525.
- VIII. Stuart D. T. Robertson and Kattingeri M. Hebbar, A Digital Model for Three-Phase Induction Machines, "IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems", November 1969, vol. PAS-88, n<sup>o</sup> 11, pp. 1624-1634.
- IX. G. Kron, Equivalent Circuits of Electric Machinery, New York: Wiley, 1951.
- X. Harit Majmudar, Electromechanical Energy Conversion, Allyn and Bacon, Inc, Boston, 1965.

- 62
- XI. P. C. White and H. H. Woodson, Electromechanical Energy Conversion, New York, Wiley 1959.
  - XII. B. Adkins, The General Theory of Electric Machines, New York; Wiley, 1957.
  - XIII: Burian Jr. Yaro, Ruppert Fº, Ernesto, Miskulin M. Sergio, Controle de torque e de velocidade de motores de indução de rotor enrolado com tiristores no rotor, I Simpósio Brasileiro de Ciências Mecânicas, Rio Janeiro, 1973.
  - XIV. Yaro Burian Jr. José Claudio Geromel, Contribuição ao Estudo de Sistemas de Controle de Ângulo de Disparo de Tiristores, I Simpósio Brasileiro de Ciências Mecânicas, Rio de Janeiro, 1973.
  - XV. Yaro Burian Jr., Celso Pascoli Bottura e Álvaro G. Badan Palhares, Controle Pulsado com Modulação em Largura de Pulso de Sistema Eletrohidraulico, I Simpósio Brasileiro de Ciências Mecânicas, Rio de Janeiro, 1973.
  - XVI. Yaro Burian Jr. e Celso Pascoli Bottura, Controle por Comutação de Motor Série, I Simpósio Brasileiro de Ciências Mecânicas Rio de Janeiro, 1973.
  - XVII. Yaro Burian Jr. e Maria Beatriz de Paiva, Contribuição ao Estudo de Sistemas de Controle com Modulação em Largura de Pulso Autooscilantes, I Simpósio Brasileiro de Ciências Mecânicas, Rio de Janeiro, 1973.
  - XVIII. A. S. Chai, Numerical Integration Package, Electronic Associates, INC, Education and Training Department.
  - XIX. Brice Carnahan, H. A. Luther, James O. Wilkes, Applied Numerical Methods, Wiley, 1969.
  - XX. Ahmed Abd El-Sattar, Speed Control of Induction Motors by Three-Phase Thyristors in the Rotor Circuits, IFAC Simposium, Outubro 1974.