

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

Este exemplar corresponde à redação final da tese  
defendida por Humberto Xavier de Araújo  
aprovada pela Comissão  
Julgadora em 18 / 12 / 91.  
Rafael Santos Mendes  
Orientador

"CONTROLADORES ROBUSTOS PARA SISTEMAS LINEARES COM  
PARÂMETROS INCERTOS"

Autor: HUMBERTO XAVIER DE ARAÚJO <sup>ms</sup>  
Orientador: PROF. DR. RAFAEL SANTOS MENDES <sup>ms</sup>

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de  
Campinas - FEE/Unicamp, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título  
de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

dezembro, 1991.

*A meus pais e irmãos  
pelo carinho e incentivo.*

"Somente conscientizando sua  
possibilidade única, a violência, o  
colonizador pode compreender, pelo  
horror, a força da cultura que ele  
explora."

Glauber Rocha

## AGRADECIMENTOS

A meu orientador e amigo, Rafael Santos Mendes, pelas idéias, apoio e compreensão durante a execução deste trabalho.

A Emília pelo suporte imprescindível.

A meu amigo Ruy pelo companheirismo e incentivo nestes anos.

A Telma, cujo convívio delicioso deixou marcas definitivas.

A Marie-tchan, cujo carinho, dedicação e paciência me possibilitaram concluir este trabalho.

A Nete e Rita pela grande amizade e carinho.

A meus amigos Hsieh, Rodrigo, Dui e Minoru pelo agradável convívio nesta fase importante da minha vida.

A Ely por todo apoio prestado na elaboração do capítulo de exemplos, e a Lúcia pela confecção dos desenhos.

A Ademar, Rosana e Telma pelas valiosas discussões e sugestões sobre a redação deste trabalho.

O casal Tama e Maria, cuja amizade me é de grande estima.

A Marcélia, Ana, Sakahi e Adson por todos os bons momentos.

A Sônia, cujo transporte me foi bastante oportuno.

A Carlos Dórea, Reginaldo, Paulo, Sérgio Gouvêa e Jozué e a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

## RESUMO

Sistemas lineares, invariantes no tempo, sujeitos a incertezas de parâmetros do processo, são considerados neste trabalho. Para um controlador dado, a maior região de incerteza hiperparalelepipedal no espaço de parâmetros do processo é calculada, tal que os pólos do sistema em malha-fechada estejam contidos em uma região conexa desejada no plano complexo. Isto é equivalente a determinar os intervalos máximos para os parâmetros incertos do processo, de modo que a estabilidade relativa do sistema seja assegurada. Uma medida de robustez é definida a partir desta região de incerteza, para um controlador dado. Um procedimento de projeto é proposto para a obtenção do controlador que maximiza esta medida de robustez. Neste algoritmo, os parâmetros do controlador são modificados iterativamente de modo a aumentar a região de incerteza admissível no espaço de parâmetros do processo. A direção de busca para tais modificações é determinada analiticamente. Estes resultados são ilustrados através de exemplos.

**Palavras-chaves:** Sistemas lineares; atribuição de região de pólos; controle robusto; parâmetros incertos; medida de robustez.

## ABSTRACT

Linear time-invariant systems subject to uncertainties of the plant parameters are considered in this work. For a given controller the greatest hyperparallelepiped of uncertainty in the plant parameter space is calculated, so that the closed-loop system poles stay confined to a desired connected region in the complex plane. This is equivalent to determining the maximal interval bounds on the uncertainties of the plant parameters such that the relative stability of the system be invariant. A robustness measure of a given controller is defined from the structure adopted to the uncertainties. A design procedure is proposed in order to obtain a controller which maximizes this robustness measure. In this algorithm, the controller parameters are iteratively modified in order to augment the admissible uncertain region in the plant parameter space. The search direction for this robustification of the controller is analytically determined. Some illustrative examples are presented.

**Keywords:** Linear systems; pole region assignment; robust control; uncertain parameters; robustness measure.

## SUMÁRIO

<b>1.0 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução	2
<b>2.0 Formulação do Problema</b>	<b>6</b>
2.1 Introdução	7
2.2 Modelo do Processo	7
2.3 Estrutura Geral do Controlador	9
2.4 Sistema de Controle em Malha-Fechada	10
2.5 Metodologia de Projeto	13
<b>3.0 Descrição das Incertezas dos Parâmetros do Processo</b>	<b>18</b>
3.1 Introdução	19
3.2 Região de Incerteza $\Pi$	19
3.3 Dependência de Parâmetros	27
3.4 Normalização da Região de Incerteza	28
<b>4.0 A Função Medida de Robustez</b>	<b>32</b>
4.1 Introdução	33
4.2 Definição da Função Medida de Robustez	33
4.3 Cálculo da Função Medida de Robustez Local	38
4.4 Algoritmo para o Cálculo da Função Medida de Robustez	41
4.5 Conclusões	43
<b>5.0 Projeto de Controladores Robustos</b>	<b>44</b>
5.1 Introdução	45
5.2 O Gradiente da Função $m(x)$	46
5.3 O Gradiente Modificado da Função $m(x)$	52
5.4 Algoritmo para Projeto de Controladores Robustos	54

<b>6.0 Aplicações</b>	<b>57</b>
6.1 Introdução	58
6.2 Sistema em Tempo Discreto	58
6.3 Controle de Velocidade de um Braço de Robô	64
6.4 Problema de Estabilidade de uma Aeronave	70
<b>7.0 Conclusões</b>	<b>75</b>
7.1 Conclusões	76
<b>Apêndice: Prova do Teorema 4.1</b>	<b>78</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>85</b>

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

## 1.1 INTRODUÇÃO

O interesse pela análise e projeto de sistemas de controle, que tenham desempenho satisfatório na presença de incertezas paramétricas, vem sendo renovado nestes últimos anos (Siljak, 1989). O estudo sobre a estabilidade robusta de sistemas de controle, sujeitos a incertezas estruturadas, teve um grande impulso com a introdução do teorema de Kharitonov (Kharitonov, 1979) na literatura de controle. Este teorema é considerado um dos resultados recentes mais importantes sobre a estabilidade de uma família de polinômios, para sistemas em tempo contínuo.

O teorema de Kharitonov estabelece que um polinômio, cujos coeficientes estão sujeitos a intervalos de incertezas, é estável se, e somente se, os quatro polinômios, construídos de forma especial a partir dos limites desses intervalos, são estáveis. Uma prova simples deste teorema pode ser vista em Yeung e Wang (1987). Este resultado, entretanto, possui duas limitações fundamentais: não se aplica aos casos onde há dependência entre os coeficientes incertos, e somente o semiplano esquerdo no plano complexo pode ser considerado.

Entre os primeiros trabalhos que utilizaram diretamente este teorema, estão o de Barmish (1984) e o de Bialas e Garloff (1985). Este segundo apresenta um critério mais simples, em relação ao primeiro, para a determinação dos intervalos máximos para os coeficientes de um polinômio, tal que o mesmo permaneça estável no plano  $s$ . Outras simplificações deste problema são dadas em Anderson et al. (1987) e Soh (1989).

Algumas extensões do teorema de Kharitonov para polinômios de sistemas em tempo discreto podem ser encontradas em Soh et al. (1985, 1987), Hollot e Bartlett (1986) e Bose et al. (1988). A maior hiperesfera de estabilidade no espaço de coeficientes do polinômio característico é determinada em Soh et al. (1985), através da solução de um problema de otimização de um parâmetro. Este resultado foi adaptado em C. B. Soh et al. (1987) para regiões mais gerais no plano complexo. Em Bose et al. (1988), condições de suficiência bastante simples são apresentadas para verificação da estabilidade de um *polinômio intervalo* (polinômio com coeficientes independentes, sujeitos a intervalos de incerteza). Estes trabalhos - Soh et al. e Bose et al. - também são válidos para sistemas em tempo contínuo. Demonstra-se, em Hollot e Bartlett (1986), a impossibilidade em determinar uma versão análoga direta do teorema de Kharitonov para o caso discreto. O resultado obtido é aplicável apenas a sistemas discretos, onde somente a metade dos coeficientes do polinômio característico está sujeita a incertezas.

Todos os trabalhos citados anteriormente tratam de estabilidade robusta apenas no espaço de coeficientes do polinômio característico, não sendo válidos no espaço de parâmetros do processo. A hipótese de que todos os coeficientes do polinômio característico estejam sujeitos a incertezas independentes é conservativa e, em geral, também limita a aplicação dos resultados na síntese de controladores. Nota-se que, na maioria dos problemas de controle robusto, o polinômio característico possui coeficientes que dependem de um conjunto de parâmetros incertos (Šiljak, 1989), e que, nestes casos, o teorema de Kharitonov passa a estabelecer apenas uma condição de suficiência.

Um resultado importante, no sentido de superar as limitações do teorema de Kharitonov, é o teorema de Bartlett-Hollot-Lin ("Edge Theorem"), que se encontra transcrito em Bartlett e Hollot (1988). Este teorema fornece as condições necessárias e suficientes para verificar se as raízes de um politopo de polinômios estão contidas numa região conexa qualquer no plano complexo. O politopo de polinômios, definido como uma combinação convexa de polinômios, estabelece uma maneira de se abordar a dependência linear entre as incertezas paramétricas, descritas através de intervalos. As raízes do politopo pertencem a uma região conexa dada se, e somente se, todas as combinações convexas de dois vértices ("edges") deste politopo também possuírem raízes nesta região (um vértice é um polinômio que compõe a combinação que gera o politopo).

Ainda transcrito em Bartlett e Hollot (1988), encontra-se o teorema de Fu-Barmish, que reduz o resultado anterior à análise dos autovalores de uma matriz, para cada par de vértices do politopo, quando a região conexa é o semiplano esquerdo no plano complexo. Uma simplificação equivalente do teorema de Bartlett-Hollot-Lin para o caso discreto é dada em Bartlett e Hollot (1988) e em Ackermann e Barmish (1988). A aplicabilidade destes resultados, no entanto, pode tornar-se crítica, devido a explosão combinatorial dos pares de vértices, necessários no teste de estabilidade, mesmo para um número moderado de parâmetros incertos (Šiljak, 1989).

Outros trabalhos importantes, no sentido de se reduzir o conservantismo do teorema de Kharitonov, são: Biernacki et al. (1987) e Wei e Yedavalli (1987). Ambos levam em consideração a dependência linear, no espaço de parâmetros do processo, na solução do problema de estabilidade robusta no plano  $s$ . Em Biernacki et al. (1987), os resultados para sistemas em tempo contínuo de Barmish (1984) e Soh et al. (1985) são generalizados para os casos onde os coeficientes do polinômio característico dependem linearmente dos parâmetros do processo, permitindo, assim, calcular a maior hipersfera de estabilidade no espaço de parâmetros do processo, para um controlador dado. O raio desta hipersfera é considerado como uma medida de robustez do controlador dado. Estes resultados são usados também no projeto de controladores

robustos. O resultado obtido em Wei e Yedavalli (1987) é uma versão menos conservativa do teorema de Kharitonov.

Os resultados apresentados em Fam e Meditch (1978) e em Ackermann (1980) estão também entre as primeiras contribuições na busca da solução para o problema de alocação de pólos robusta em sistemas de controle lineares, sujeitos a incertezas paramétricas. Em Fam e Meditch (1978), encontra-se uma das primeiras tentativas de se caracterizar geometricamente o domínio de estabilidade no espaço de coeficientes do polinômio característico, para sistemas em tempo discreto. Este resultado foi usado por Soh et al. (1985), e consideravelmente estendido por Ackermann (1980). Neste último, foi determinado geometricamente o conjunto de controladores admissíveis para um sistema dinâmico, com finitos pontos de operação, tal que a estabilidade relativa do mesmo seja mantida. Um sistema possui estabilidade relativa quando todos os seus pólos de malha-fechada estão contidos em uma região desejada no plano complexo.

Todas as referências citadas anteriormente analisam o comportamento de sistemas dinâmicos, sujeitos a incertezas (paramétricas) estruturadas, em função das raízes de seus polinômios característicos. Outras abordagens para o problema, ainda no espaço de parâmetros, baseadas na teoria de estabilidade de Lyapunov, podem ser encontradas em: Yedavalli (1985), Zhou e Khargonekar (1987), Keel et al. (1988) e Juang et al. (1989). Estes trabalhos, no entanto, fornecem resultados conservativos para o problema de estabilidade.

Neste trabalho é apresentada uma metodologia de projeto de controladores robustos em relação às incertezas dos parâmetros do processo. Os processos considerados são lineares, monovariáveis e descritos no domínio da frequência; os resultados obtidos, porém, podem ser aplicados a quaisquer sistemas cujos coeficientes do polinômio característico sejam funções lineares dos parâmetros incertos.

A definição de robustez de um sistema de controle, baseada na atribuição de região de pólos, considerada neste trabalho, é semelhante àquela introduzida por Ackermann (1980). É suposto que todos os pólos do sistema em malha-fechada devam permanecer dentro de uma determinada região no plano complexo (estabilidade relativa), apesar das incertezas paramétricas do processo. A única restrição a esta região é que seja conexa. Os resultados obtidos em Ackermann (1980), no entanto, são limitados, pois condições algébricas de robustez não foram possíveis de ser obtidas, e, em relação às incertezas, somente um conjunto representativo de modelos do processo é considerado.

Os parâmetros do processo, neste trabalho, estão sujeitos a intervalos de

incertezas cujos limites são supostamente conhecidos *a priori*. Esta hipótese resulta em uma região de incerteza hiperparalelepipedal no espaço de parâmetros do processo. Os casos em que ocorrem relações de dependência linear entre os parâmetros também serão abordados.

O problema consiste, então, em projetar um controlador robusto tal que os pólos do sistema em malha-fechada permaneçam dentro de uma região específica no plano complexo, considerando-se toda a incerteza admissível do processo. Neste trabalho, este problema de síntese é dividido em duas partes.

Inicialmente, é avaliada a robustez de um controlador dado, para o sistema em malha-fechada, baseando-se no conceito de medida de robustez considerado em Barmish (1984), e também utilizado por Biernacki et al. (1987) e Santos-Mendes (1988). Então, será definida uma função medida de robustez, através da qual é possível determinar a maior região de incerteza hiperparalelepipedal no espaço de parâmetros, associada ao controlador dado, tal que a estabilidade do sistema seja mantida. Em Barmish (1984) e Biernacki et al. (1987), contudo, é avaliado apenas o problema de estabilidade robusta para sistemas em tempo contínuo.

Em seguida, um método similar ao de Biernacki et al. (1987) é apresentado para a determinação do controlador que maximiza aquela medida de robustez. O algoritmo proposto utiliza uma direção de busca obtida analiticamente. Este resultado é uma melhoria daquele apresentado em Araújo e Santos-Mendes (1991), onde a direção de busca é determinada heurísticamente. Em Biernacki et al. (1987), entretanto, a direção de modificação do controlador é obtida numericamente, o que resulta em um maior esforço computacional necessário.

A abordagem adotada neste trabalho é uma extensão daquela considerada em Santos-Mendes (1988), onde o mesmo problema é tratado para incertezas paramétricas do tipo elipsoidal. Esta avaliação, porém, pode fornecer resultados conservativos quando as incertezas paramétricas analisadas são do tipo intervalo.

No capítulo 2, serão apresentadas as suposições preliminares em relação a descrição do sistema de controle e a metodologia adotada. As incertezas dos parâmetros do processo serão descritas no capítulo 3, juntamente com as transformações de coordenadas necessárias no espaço de parâmetros. No capítulo 4, será definida uma função medida de robustez para um controlador dado. Um procedimento para o projeto de controladores robustos será fornecido no capítulo 5. No capítulo 6 encontram-se algumas aplicações ilustrando o método proposto e, finalmente, as conclusões serão apresentadas no capítulo 7.

## CAPÍTULO 2

### FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 INTRODUÇÃO

2.2 MODELO DO PROCESSO

2.3 ESTRUTURA GERAL DO CONTROLADOR

2.4 SISTEMA DE CONTROLE EM MALHA-FECHADA

2.5 METODOLOGIA DE PROJETO

## 2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, será apresentada, inicialmente, uma descrição do modelo do processo e da estrutura do controlador a serem considerados e, em seguida, será esboçada a metodologia utilizada no projeto de sistemas de controle robustos, definindo antes os tipos de problema de robustez para os quais os resultados obtidos podem ser aplicados.

## 2.2 MODELO DO PROCESSO

Os métodos usuais de projeto de controladores assumem que o modelo do processo seja conhecido precisamente. Na prática, contudo, isto não ocorre. Em modelamento teórico, assim como em identificação experimental, deve-se sempre levar em consideração as diferenças entre o modelo do processo obtido e o comportamento do processo real. Se, por simplicidade, supõe-se que a estrutura do modelo do processo é escolhida de forma exata, então estas diferenças se manifestam como erros de parâmetros. Além disso, em muitos casos, durante a operação normal, mudanças de comportamento do processo surgem, por exemplo, devido a variações do ponto de operação ou a alterações do fluxo de energia e/ou massa (Isermann,1991). Portanto, no projeto de sistema de controle, deve-se, em geral, considerar que o processo a ser controlado possui um modelo sujeito a incertezas e que seu comportamento varia com o tempo durante a operação.

Neste trabalho, analisa-se como as mudanças de parâmetros do processo influenciam no comportamento do sistema em malha-fechada, e como estas podem ser consideradas no projeto de controladores.

Considera-se que o comportamento dinâmico do processo, com sinal de entrada, o controle  $u(t)$ , e sinal de saída,  $y(t)$ , no instante  $t$ , possa ser descrito pelo modelo paramétrico definido pela seguinte função de transferência pulsada:

$$P(z^{-1}) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-d} B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (2.1)$$

onde  $U(z)$  é a transformada  $z$  da entrada e  $Y(z)$  a da saída,  $d$  é o atraso de tempo do processo, e  $A(z^{-1})$  e  $B(z^{-1})$  são polinômios em  $z^{-1}$  ( $z^{-1}$  representa o atraso de um período de amostragem e é definido por  $e^{-Ts}$ ) com graus  $na$  e  $nb$ , respectivamente, dados por:

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{na} z^{-na} \\ B(z^{-1}) &= b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{nb} z^{-nb} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Os coeficientes de  $A(z^{-1})$  e  $B(z^{-1})$  -  $a_i$ ,  $i=1,2,\dots,na$ , e  $b_j$ ,  $j=0,1,2,\dots,nb$  - são os parâmetros do processo, suposto causal.

É suposto adicionalmente que a estrutura do modelo do processo, isto é, a forma e a ordem das equações do mesmo, não varia, e que seus parâmetros possam mudar lentamente, se comparado com a dinâmica em malha-fechada, ou variar de maneira descontínua, porém com frequência desprezível, em relação à dinâmica do processo. Isto acontece, por exemplo, em processos onde o rompimento da barreira do som tem um papel importante (válvulas, aviões), em processos ligados diferentemente a um mesmo controlador (aquecimento e resfriamento em sistemas de condicionamento de ar) e em sistemas sujeitos a acréscimo no número de usuários (aumento dos usuários indutivos em redes elétricas).

Com estas considerações, os processos não-lineares ou lentamente variantes no tempo podem ser descritos aproximadamente por um modelo linear a parâmetros incertos (Isermann, 1991).

Uma descrição mais detalhada sobre as incertezas dos parâmetros do processo será dada no próximo capítulo. Nas seções seguintes será visto que este trabalho não se restringe a sistemas em tempo discreto, podendo ser aplicado de forma análoga ao caso contínuo.

## 2.3 ESTRUTURA GERAL DO CONTROLADOR

Nas situações citadas anteriormente, por razões de simplicidade e segurança, é desejado um controlador constante que, para todos os valores possíveis dos parâmetros do processo, garanta a estabilidade e assegure que certas especificações de desempenho sejam satisfeitas pelo sistema de controle. Estes controladores são referidos como controladores robustos.

Os sistemas de controle de estrutura ótima são definidos como sendo aqueles em que tanto a estrutura quanto os parâmetros do controlador são adaptados otimamente à estrutura e aos parâmetros do modelo do processo (Isermann, 1991). Este trabalho se limita a sistemas de controle em que apenas os parâmetros são otimizados. Nestes sistemas, a estrutura do controlador é dada e somente os parâmetros do controlador são adaptados ao processo controlado, usando algum critério de otimização ou regras de sintonia.

Os métodos de projeto de sistema de controle baseados em sensibilidade não serão aplicados, pois se mostram adequados apenas para sistemas com pequenas mudanças de parâmetros do processo em torno do ponto de operação (Y. C. Soh et al., 1987; De Larminat, 1989).

Considera-se a estrutura geral do controlador linear, ligado ao processo em um sistema de controle em malha-fechada, definida pela seguinte função de transferência pulsada:

$$C(z^{-1}) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{G(z^{-1})}{H(z^{-1})} \quad (2.3)$$

onde  $E(z)$  é a transformada  $z$  do sinal erro atuante  $e(t)$ , dado pela diferença entre o sinal de referência  $w(t)$  e o sinal de saída do processo  $y(t)$ , no instante  $t$ , e  $G(z^{-1})$  e  $H(z^{-1})$  são polinômios em  $z^{-1}$  com graus  $ng$  e  $nh$ , respectivamente, dados por:

$$G(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \dots + g_{ng} z^{-ng} \quad (2.4)$$
$$H(z^{-1}) = 1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots + h_{nh} z^{-nh}$$

Os graus  $ng$  e  $nh$  são escolhidos *a priori*, podendo ser modificados durante o projeto do controlador, em função dos resultados obtidos. Portanto, o problema se resume em determinar os coeficientes dos polinômios  $G(z^{-1})$  e  $H(z^{-1}) = g_i, i=0,1,2,\dots,ng$ , e  $h_j, j=1,2,\dots,nh$  - isto é, os parâmetros do controlador, de maneira tal que certos critérios de desempenho de controle, definidos a seguir, sejam satisfeitos, apesar das incertezas dos parâmetros do processo.

## 2.4 SISTEMAS DE CONTROLE EM MALHA-FECHADA

Considera-se a configuração do sistema de controle linear em malha-fechada da figura 2.1 a seguir, onde o processo  $P(z^{-1})$  e o controlador em cascata  $C(z^{-1})$  são definidos pelas funções de transferência pulsada (2.1) e (2.3), respectivamente.

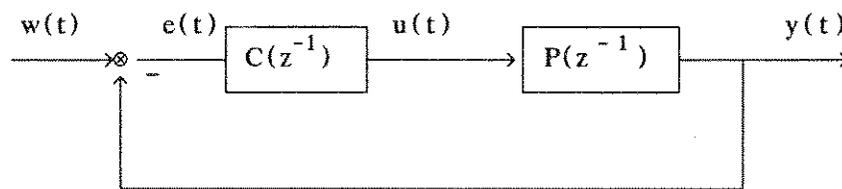


Fig. 2.1. Sistema de controle em malha-fechada

A função de transferência de malha-fechada, que relaciona a saída  $Y(z)$  com a entrada de referência  $W(z)$ , obtida para o sistema da figura 2.1, é dada por:

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{z^{-d}B(z^{-1})G(z^{-1})}{A(z^{-1})H(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})G(z^{-1})} \quad (2.5)$$

Portanto, o polinômio característico do sistema em malha-fechada, definido por  $T(z^{-1})$ , com grau  $nt$ , é

$$T(z^{-1}) = A(z^{-1})H(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})G(z^{-1}) \quad (2.6)$$

e  $nt$  é dado por

$$nt = \max [na + nh; d + nb + ng] . \quad (2.7)$$

Os pólos do sistema em malha-fechada da figura 2.1 são obtidos pela solução da seguinte equação característica:

$$A(z^{-1})H(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})G(z^{-1}) = 0. \quad (2.8)$$

Pode ser verificado facilmente que, para a configuração do sistema de controle em que o controlador se encontra no ramo de realimentação, o polinômio característico de malha-fechada é o mesmo dado pela expressão (2.6). Logo, os pólos do sistema em malha-fechada são independentes do ponto de injeção do sinal de referência, embora o mesmo não seja válido para os zeros de malha-fechada.

Em projetos de controladores através de alocação de pólos, supondo conhecidos o tempo de atraso  $d$  e os polinômios  $A(z^{-1})$  e  $B(z^{-1})$  do processo, é possível determinar os coeficientes dos polinômios  $G(z^{-1})$  e  $H(z^{-1})$  do controlador, igualando-se os coeficientes do polinômio cujas raízes são os pólos de malha-fechada desejados, com os coeficientes do polinômio característico dado em (2.6). Como a localização dos pólos do sistema em malha-fechada depende dos polinômios  $A(z^{-1})$  e  $B(z^{-1})$ , torna-se necessário encontrar um controlador com desempenho robusto em relação às incertezas dos parâmetros do processo. Neste sentido e com o objetivo de simplificar as análises feitas para o problema, será adotado um tratamento matricial para a equação polinomial (2.6).

Sejam  $\hat{p} = [1 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{na} \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{nb}]^T \in \mathbb{R}^{na+nb+2}$  e  $x = [1 \ h_1 \ h_2 \ \dots \ h_{nh} \ g_0 \ g_1, \dots \ g_{ng}]^T \in \mathbb{R}^{ng+nh+2}$  os vetores cujas componentes são os coeficientes dos polinômios do processo,  $A(z^{-1})$  e  $B(z^{-1})$ , e do controlador,  $G(z^{-1})$  e  $H(z^{-1})$ , respectivamente ( o índice superior T denota transposição). Então, a equação (2.6) pode ser escrita na forma matricial, como segue:

$$t = X(x)\hat{p} \quad (2.9)$$

ou na sua forma dual

$$t = M(\hat{p})x \quad , \quad (2.10)$$

onde  $t = [t_0 \ t_1 \ \dots \ t_{nt}]^T \in \mathbb{R}^{nt+1}$  é o vetor cujas componentes são os coeficientes do polinômio característico (2.6), que pode ser escrito como

$$T(z^{-1}) = t_0 + t_1 z^{-1} + \dots + t_{nt} z^{-nt} \quad . \quad (2.11)$$

As matrizes  $X(x) \in \mathbb{R}^{(nt+1) \times (na+nb+2)}$  e  $M(\hat{p}) \in \mathbb{R}^{(nt+1) \times (ng+nh+2)}$  são dadas por:

$$X(x) = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & 0 & 0 & & & \\ h_1 & 1 & & & g_0 & 0 & & \\ \vdots & h_1 & \ddots & & \vdots & \ddots & & \\ h_{nh} & h_{nh} & \ddots & 1 & g_{ng} & \ddots & g_0 & \\ & & & h_1 & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & & & h_{nh} & 0 & & g_{ng} & \end{array} \right] \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} d \quad (2.12)$$

$$M(\hat{p}) = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & 0 & 0 & & & \\ a_1 & 1 & & & b_0 & 0 & & \\ \vdots & a_1 & \ddots & & \vdots & \ddots & & \\ a_{na} & \vdots & \ddots & 1 & b_{nb} & \ddots & b_0 & \\ & a_{na} & \ddots & a_1 & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & & & a_{na} & 0 & & b_{nb} & \end{array} \right] \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} d \quad (2.13)$$

A matriz  $X(x)$  em (2.9) pode ser vista como uma transformação linear que mapeia o vetor de parâmetros do processo, definido por  $\hat{p}$ , num vetor  $t$  de coeficientes do polinômio característico (uma interpretação análoga pode ser dada para  $M(\hat{p})$  na equação (2.10) ). Portanto, os coeficientes do polinômio característico são funções lineares dos parâmetros do processo, para um controlador  $x$  fixo. Este fato é fundamental para o método que será proposto na próxima seção.

Os resultados a seguir são obtidos para sistemas em tempo discreto com uma entrada e uma saída. Todavia, estes podem ser estendidos para o caso contínuo, e para sistemas com múltiplas entradas e uma saída, ou com uma entrada e múltiplas saídas – em todos estes casos os coeficientes do polinômio característico de malha-fechada são funções lineares dos parâmetros do processo (Biernacki et al., 1987; Keel et al., 1988).

## 2.5 METODOLOGIA DE PROJETO

Considerando-se os modelos e as suposições apresentados nas seções anteriores para o processo e o controlador, o problema inicial de projeto consiste em determinar um controlador com desempenho robusto em relação às incertezas paramétricas, ou seja, que garanta a estabilidade e satisfaça as especificações desejadas para o sistema em malha-fechada. Este problema pode admitir várias soluções ou, até mesmo, nenhuma. Para analisar tais situações será definido um critério que permita a comparação entre controladores, com a finalidade de determinar o controlador mais robusto.

Neste trabalho, supõe-se que os coeficientes  $a_i$  ( $i=1,2,\dots,na$ ) e  $b_j$  ( $j=0,1,2,\dots,nb$ ) dos polinômios  $A(z^{-1})$  e  $B(z^{-1})$  do processo, respectivamente, estão sujeitos a variações desconhecidas, porém limitadas, que podem ser descritas no espaço de parâmetros do processo  $\mathbb{R}^{na+nb+1}$ , por uma região de incerteza aberta, denotada por  $\Pi$ :

Seja  $p=[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{na} \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{nb}]^T \in \mathbb{R}^{na+nb+1}$  o vetor cujas componentes são os parâmetros incertos do processo. Desta forma, a região de incerteza  $\Pi$  no espaço de parâmetros do processo, que contém o vetor de parâmetros incertos  $p$ , pode ser definida como:

$$\Pi = \{ p / p \in \mathbb{R}^{na+nb+1}, Q(p-p_0) < \underline{1} \} \quad , \quad (2.14)$$

onde  $p_0 \in \mathbb{R}^{na+nb+1}$  é o centro da região  $\Pi$ ,  $\underline{1}$  denota o vetor  $[1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbb{R}^{2(na+nb+1)}$  e a matriz  $Q \in \mathbb{R}^{2(na+nb+1) \times (na+nb+1)}$  é determinada a partir de considerações geométricas, como será visto com maiores detalhes no

### capítulo 3.

O vetor  $\hat{p}$ , definido anteriormente, pode então ser escrito da seguinte maneira:

$$\hat{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hline P \end{bmatrix} . \quad (2.15)$$

Em muitas situações práticas, as características de desempenho desejadas no projeto de sistemas de controle em malha-fechada, tanto no caso contínuo como no discreto, são especificadas no domínio do tempo em termos da resposta transitória para uma entrada degrau unitário. O desempenho transitório está associado com a configuração dos pólos de malha-fechada do sistema no plano complexo. Em outras palavras, as características de resposta transitória de um sistema de controle para a entrada degrau unitário, como amortecimento, frequência natural amortecida, sobre-sinal máximo, tempo de acomodação, tempo de subida, etc., podem ser relacionadas com a localização dos pólos de malha-fechada. Uma análise mais detalhada sobre a relação entre a resposta no tempo e o lugar das raízes da equação característica de um sistema em malha-fechada pode ser encontrada em textos clássicos de teoria de controle, como, por exemplo, Kuo (1980) e Franklin e Powell (1980). Convém lembrar que a localização dos zeros de malha-fechada também determina a forma da resposta transitória do sistema, embora a sua alocação não seja abordada neste trabalho.

Em sistemas de controle sujeitos a incertezas de parâmetros do processo, normalmente o desempenho é especificado em termos de intervalos aceitáveis para as características de resposta transitória, que, por sua vez, podem ser traduzidos por uma região no plano complexo, onde devem estar localizadas as raízes da equação característica de malha-fechada.

As figuras 2.2 e 2.3 apresentam dois tipos de região no plano complexo que são de grande interesse em projeto de controladores para sistemas em tempo contínuo e em tempo discreto, respectivamente (Ogata, 1987; Ackermann, 1985). Estas duas regiões, onde devem estar contidos os pólos de malha-fechada do sistema, são obtidas a partir de especificações de resposta transitória para um sistema de segunda-ordem, tendo como entrada o sinal degrau unitário.

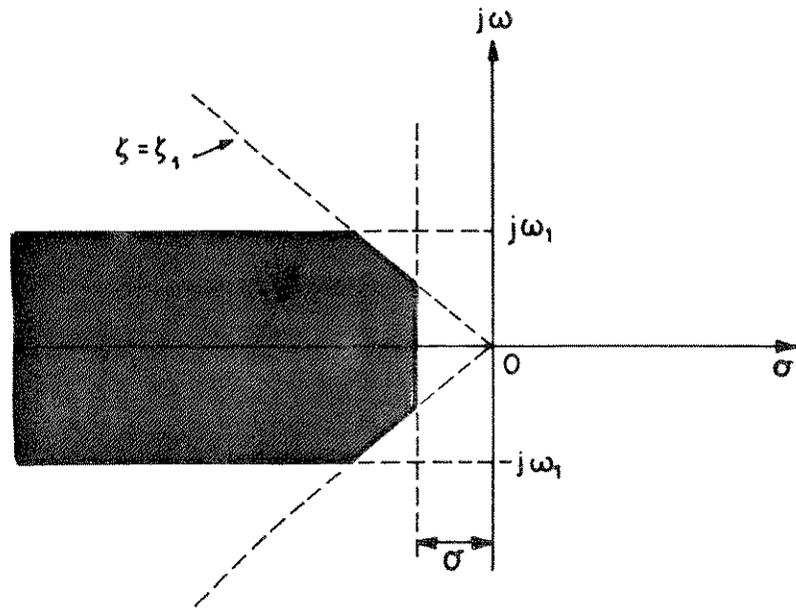


Fig. 2.2. Região desejável para os pólos de malha-fechada no plano  $s$

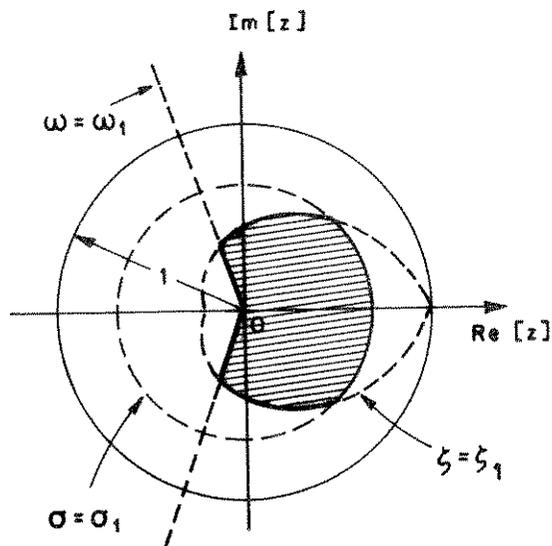


Fig. 2.3. Região desejável para os pólos de malha-fechada no plano  $z$

O comportamento dinâmico de sistemas de segunda-ordem pode ser descrito em termos de dois parâmetros: o coeficiente de amortecimento  $\zeta$  e a frequência natural não amortecida  $\omega_n$ , tendo em vista que as outras especificações de resposta transitória podem ser obtidas a partir destes. As regiões vistas nas figuras 2.2 e 2.3 garantem como características de resposta transitória um amortecimento maior do que  $\zeta_1$  e um tempo de acomodação  $t_s$  menor do que  $4/\sigma_1$  (critério de 2%).

Embora as regiões no plano complexo mostradas nas figuras 2.2 e 2.3 tenham sido determinadas para sistemas de segunda-ordem, estas podem ser adotadas para sistemas de ordem superior que possam ser aproximados por um modelo de segunda-ordem, ou seja, que possam ser caracterizados por somente um par de pólos dominantes. Nestes casos, as características de resposta transitória devem ser verificadas através de simulação e/ou experimentos. Se estas não satisfazem as especificações do projeto, mudanças na região de localização dos pólos do sistema em malha-fechada devem ser feitas, considerando-se as limitações do sistema físico, até que resultados satisfatórios sejam obtidos. Neste trabalho, supõe-se que os critérios de desempenho desejáveis para o comportamento dinâmico do sistema de controle em malha-fechada possam ser especificados por uma região no plano complexo, denotada por  $D$ , na qual estão localizados os pólos em malha-fechada do mesmo. Esta região  $D$  no plano complexo poderá ter qualquer forma geométrica, desde que seja conexa, e seu contorno será indicado por  $D^*$ .

O problema inicial se resume, então, em encontrar os coeficientes dos polinômios  $G(z^{-1})$  e  $H(z^{-1})$ , isto é, determinar o vetor de parâmetros do controlador  $x$ , tal que todos os pólos do sistema em malha-fechada permaneçam dentro de uma região específica  $D$ , conexa, no plano complexo, para todo vetor de parâmetros incertos do processo  $p$  admissível. Em outras palavras, deseja-se obter um controlador  $x$ , tal que o sistema em malha-fechada possua estabilidade relativa ou  $D$ -estabilidade, robusta em relação às incertezas paramétricas do processo, limitadas à região  $\Pi$  dada por (2.14).

O projeto do controlador será desenvolvido utilizando-se, portanto, uma técnica de alocação de pólos robusta ou de atribuição de região de pólos.

Como a única restrição à região  $D$  é que esta seja conexa, os resultados desenvolvidos são aplicáveis também a problemas de estabilidade robusta de sistemas lineares sujeitos a incertezas de parâmetros. Nestes problemas, os pólos do sistema em malha-fechada devem estar contidos dentro da região de estabilidade no plano complexo - o semiplano esquerdo, no caso contínuo, e o círculo unitário, no caso discreto.

O polinômio característico  $T(z^{-1})$  com raízes pertencentes a uma região  $D$  no

plano complexo será chamado de polinômio D-estável.

A metodologia utilizada para solução do problema inicial de se projetar um controlador robusto pode ser dividida em duas etapas. Inicialmente, é avaliada a robustez de um controlador  $x$  dado para o sistema em malha-fechada, através da definição de uma função medida de robustez. Em seguida, tenta-se determinar o controlador mais robusto para este sistema, baseando-se nesta medida.

A função medida de robustez é definida para um controlador  $x$  qualquer - desde que o polinômio característico  $T(z^{-1})$  obtido para este e o vetor de parâmetros  $p_0$  seja D-estável - a partir das informações conhecidas sobre o processo e da região D conexa no plano complexo. Por definição, esta função utiliza como medida de robustez de um controlador  $x$  um parâmetro que está relacionado diretamente com a maior região de incerteza permissível para o processo tal que o sistema mantenha a D-estabilidade, ou, mais sucintamente, com a maior região  $\Pi$  de estabilidade relativa, associada ao controlador. Desta forma, se um controlador  $x_1$  é mais robusto do que outro  $x_2$ , então a maior região  $\Pi$  de estabilidade relativa de  $x_1$  contém a de  $x_2$ , considerando-se a mesma região D no plano complexo e o mesmo processo controlado.

Na segunda etapa, um algoritmo é apresentado para a busca do controlador que maximiza a função medida de robustez. Este algoritmo aumenta iterativamente a região  $\Pi$  de estabilidade relativa, no espaço de parâmetros do processo, através de modificações nos parâmetros do controlador em uma certa direção.

A direção escolhida para tais modificações é a do gradiente da função medida de robustez. Caso este não exista, outra direção de busca será proposta. Em geral, somente um máximo local pode ser assegurado por este tipo de algoritmo.

Em virtude da ausência de propriedades simplificadoras, como, por exemplo, convexidade, não foi possível obter uma solução analítica para o problema. É importante observar, no entanto, que a condição necessária e suficiente para se encontrar uma solução para o problema inicial de alocação de pólos robusta, é que a maior região  $\Pi$  de estabilidade relativa admissível associada ao controlador, obtido através deste algoritmo, contenha a região de incerteza inicial dada para os parâmetros do processo.

## CAPÍTULO 3

### DESCRIÇÃO DAS INCERTEZAS DOS PARÂMETROS DO PROCESSO

3.1 INTRODUÇÃO

3.2 REGIÃO DE INCERTEZA  $\Pi$

3.3 DEPENDÊNCIA DE PARÂMETROS

3.4 NORMALIZAÇÃO DA REGIÃO DE INCERTEZA

### 3.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior supôs-se que os coeficientes dos polinômios do processo estão sujeitos a incertezas ou variações, limitadas, que podem ser descritas por uma região de incerteza aberta  $\Pi$ , no espaço de parâmetros do processo, definida em (2.14). Neste capítulo, estas regiões de incertezas paramétricas serão abordadas de modo detalhado, juntamente com as transformações de coordenadas necessárias, no espaço de parâmetros, para a obtenção de uma descrição de tratamento mais simples.

Observa-se que todos os parâmetros do processo podem estar sujeitos a incertezas; porém, como será visto na seção 3.3, as relações lineares entre estes e o fato de que alguns possam ser fixos, certamente simplificam a análise e o projeto do controlador robusto.

As eventuais relações de não-linearidade entre os parâmetros incertos do processo, ou entre estes e os coeficientes do polinômio característico, não constituem um fator limitante para a aplicação do método proposto neste trabalho, visto que, nestes casos, a região de incerteza pode ser envolvida por uma região adequada. Esta consideração, no entanto, pode fornecer resultados conservativos.

### 3.2 REGIÃO DE INCERTEZA $\Pi$

Os parâmetros do processo, dados pelos coeficientes  $a_i$  e  $b_j$  dos polinômios  $A(z^{-1})$  e  $B(z^{-1})$ , estão sujeitos a variações limitadas, formadas pelos seguintes intervalos de incerteza:

$$\begin{aligned} \underline{a}_i < a_i < \bar{a}_i & , i=1,2,\dots,na \\ \underline{b}_j < b_j < \bar{b}_j & , j=0,1,2,\dots,nb \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde os  $\underline{a}_i$  e  $\underline{b}_j$  e os  $\bar{a}_i$  e  $\bar{b}_j$  são, respectivamente, os limites inferior e superior, supostamente conhecidos, de cada par de parâmetros incertos  $a_i$  e  $b_j$ . Esta hipótese

sobre a descrição das variações dos parâmetros do processo, baseada em intervalos, foi considerada por ser diretamente aplicável a uma grande variedade de problemas de projeto de sistemas de controle, em que o processo está sujeito a incertezas.

Sejam  $p^- = [ \underline{a}_1 \ \underline{a}_2 \ \dots \ \underline{a}_{na} \ \underline{b}_0 \ \underline{b}_1 \ \dots \ \underline{b}_{nb} ]^T \in \mathbb{R}^{na+nb+1}$  e  $p^+ = [ \bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \dots \ \bar{a}_{na} \ \bar{b}_0 \ \bar{b}_1 \ \dots \ \bar{b}_{nb} ]^T \in \mathbb{R}^{na+nb+1}$  os vetores cujas componentes são os limites inferiores e superiores, respectivamente, dos parâmetros incertos do processo. Portanto, considerando inicialmente apenas variações independentes, o vetor de parâmetros incertos  $p$ , definido em (2.15), satisfaz a seguinte relação:

$$p^- < p < p^+ \quad . \quad (3.2)$$

Esta relação resulta em uma região de incerteza aberta no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^{na+nb+1}$ , ou seja, o espaço de parâmetros do processo, onde  $p$  deve estar contido, e cujas coordenadas são  $a_1, a_2, \dots, a_{na}, b_0, b_1, \dots, b_{nb}$ . Esta região, indicada por  $\Pi$ , pode ser definida por:

$$\Pi = \{ p / p \in \mathbb{R}^{na+nb+1}, Q(p-p_0) < \underline{1} \} \quad , \quad (3.3)$$

onde  $Q \in \mathbb{R}^{2(na+nb+1) \times (na+nb+1)}$ ,  $p_0 \in \mathbb{R}^{na+nb+1}$  é o centro da região  $\Pi$  e  $\underline{1}$  denota o vetor  $[ 1 \ 1 \ \dots \ 1 ]^T \in \mathbb{R}^{2(na+nb+1)}$ , como foi definido em (2.14).  $Q$  e  $p_0$  são obtidos a partir de  $p^-$  e  $p^+$  como:

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ \hline -C \end{bmatrix} \quad , \quad (3.4)$$

onde  $C \in \mathbb{R}^{(na+nb+1) \times (na+nb+1)}$  é dada por

$$C = \begin{bmatrix} 2/(\bar{a}_1 - \underline{a}_1) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 2/(\bar{b}_{nb} - \underline{b}_{nb}) \end{bmatrix} \quad , \quad (3.5)$$

e

$$p_0 = \frac{p^+ + p^-}{2} \quad (3.6)$$

A região de incerteza  $\Pi$  em (3.3) representa a incerteza inicial dada para o processo. Esta região, descrita desta maneira, sempre terá as retas normais às suas superfícies paralelas a um dos eixos principais do sistema de coordenadas, no espaço de parâmetros do processo. A região  $\Pi$ , portanto, descreve um hiperparalelepípedo aberto neste espaço.

Exemplo 3.1:

Considera-se o processo a seguir

$$P(z^{-1}) = \frac{z^{-1}(b_0 + b_1 z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1})}$$

sujeito a incertezas, representadas geometricamente no espaço de parâmetros  $\mathbb{R}^3$ , pela figura 3.1, com  $p = [a_1 \ b_0 \ b_1]^T \in \Pi$ .

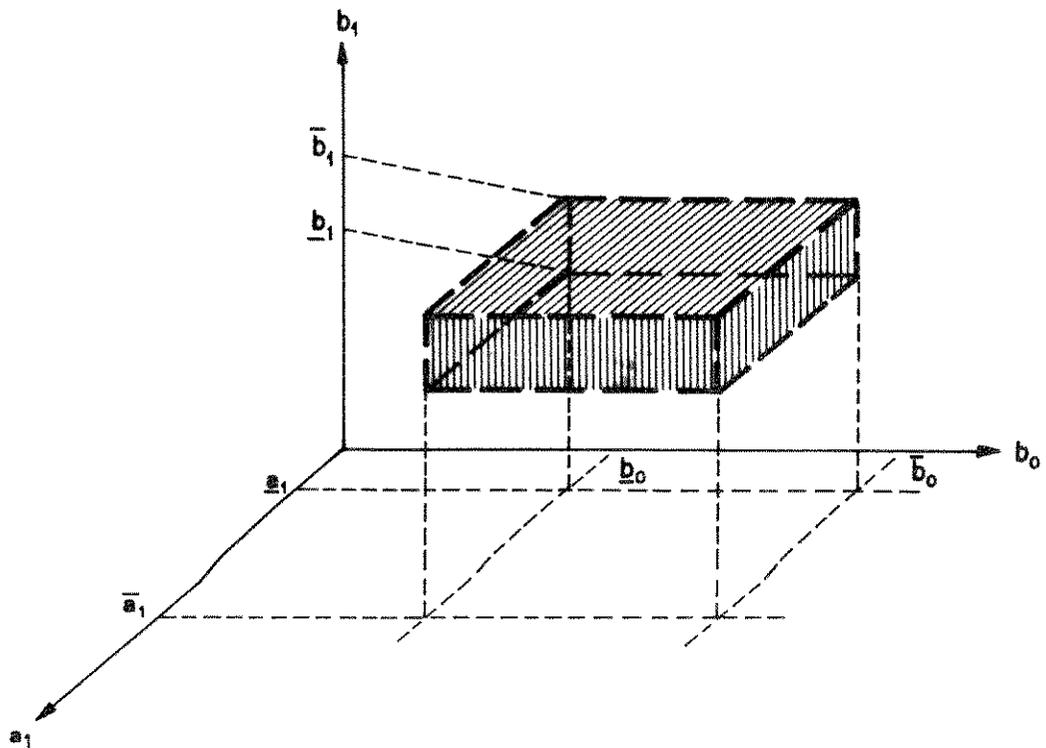


Fig. 3.1. Região de incerteza  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$

Portanto, a região de incerteza aberta  $\Pi$  será definida como:

$$\Pi = \{ p / p \in \mathbb{R}^3, Q(p-p_0) < \underline{1} \} ,$$

com  $Q$  e  $p_0$  determinados diretamente a partir da figura 3.1:

$$Q = \begin{bmatrix} 2/(\bar{a}_1 - \underline{a}_1) & 0 & 0 \\ 0 & 2/(\bar{b}_0 - \underline{b}_0) & 0 \\ 0 & 0 & 2/(\bar{b}_1 - \underline{b}_1) \\ \hline -2/(\bar{a}_1 - \underline{a}_1) & 0 & 0 \\ 0 & -2/(\bar{b}_0 - \underline{b}_0) & 0 \\ 0 & 0 & -2/(\bar{b}_1 - \underline{b}_1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$$

$$p_0 = \begin{bmatrix} (\bar{a}_1 + \underline{a}_1)/2 \\ (\bar{b}_0 + \underline{b}_0)/2 \\ (\bar{b}_1 + \underline{b}_1)/2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

Em certos casos, os parâmetros do processo  $a_i$  ( $i=1,2,\dots,na$ ) e  $b_j$  ( $j=0,1,2,\dots,nb$ ) apresentam uma dependência não-linear de um outro conjunto de parâmetros, os quais são conhecidos de maneira incerta. Este fato pode ocorrer, por exemplo, quando os parâmetros do processo dependem de grandezas físicas (temperatura, pressão, etc.) que podem assumir diferentes valores.

Neste trabalho, porém, serão admitidas somente relações lineares entre os parâmetros do processo e um outro conjunto de parâmetros incertos. Obviamente, esta restrição particulariza o problema.

Nos casos em que estas não-linearidades ocorrem, a região de variação paramétrica real deve ser inscrita em um hiperparalelepípedo adequado no espaço de parâmetros. Desta forma, pode-se obter uma região hiperparalelepipedal qualquer neste espaço. Adota-se, pois, nestes casos, um novo sistema de coordenadas, de maneira a obter uma representação mais simplificada destas incertezas, similar àquela dada em (3.3). Este novo sistema de coordenadas possui a mesma origem do sistema de coordenadas anterior, e é obtido a partir deste através de uma rotação apropriada, tal que seus eixos principais se tornem paralelos a uma das retas normais às superfícies do hiperparalelepípedo de incerteza.

Esta região hiperparalelepipedal qualquer no espaço de parâmetros do processo  $\mathbb{R}^{na+nb+1}$  será descrita através de uma matriz de rotação, denotada por  $L'$ , com  $L' \in \mathbb{R}^{(na+nb+1) \times (na+nb+1)}$ . As colunas de  $L'$  podem ser formadas pelos vetores unitários

que dão as direções principais do novo sistema de coordenadas, descritos em relação ao antigo.

Seja  $r = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n]^T \in \mathbb{R}^n$  o vetor de parâmetros do processo descrito em relação ao novo sistema de coordenadas, com  $n = na + nb + 1$ . A relação entre as duas descrições será dada, portanto, pela seguinte transformação:

$$p = L'r \quad , \quad L' \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad . \quad (3.7)$$

A região de incerteza aberta no espaço de parâmetros do processo pode ser representada de forma similar à apresentada em (3.3), em relação ao novo sistema de coordenadas, com  $r^- = [r_1^- \ r_2^- \ \dots \ r_n^-]^T \in \mathbb{R}^n$  e  $r^+ = [r_1^+ \ r_2^+ \ \dots \ r_n^+]^T \in \mathbb{R}^n$ , como:

$$\Pi = \{ r / r \in \mathbb{R}^n , Q(r - r_0) < 1 \} \quad , \quad (3.8)$$

onde  $Q \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  é dada por

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ \hline -C \end{bmatrix} \quad , \quad (3.9)$$

$$C = \begin{bmatrix} 2/(\bar{r}_1 - r_1) & & 0 \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ 0 & & 2/(\bar{r}_n - r_n) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.10)$$

e

$$r_0 = \frac{r^+ + r^-}{2} \in \mathbb{R}^n \quad . \quad (3.11)$$

Visto que os vetores unitários que compõem  $L'$ , a matriz de descrição do novo sistema de coordenadas em relação ao antigo em (3.7), também são ortogonais entre si,

então  $L'$  é uma matriz ortonormal. Logo, a seguinte relação entre os vetores  $r$  e  $p$  é válida:

$$r = L'^T p \quad (3.12)$$

Desta forma, a região de incerteza  $\Pi$  em (3.8) pode ser escrita em função de  $p$ , como:

$$\Pi = \{ p / p \in \mathbb{R}^n, QL'^T(p-p_0) < \underline{1} \} \quad (3.13)$$

onde  $Q \in \mathbb{R}^{2n \times n}$  é obtida a partir de (3.9) e (3.10).

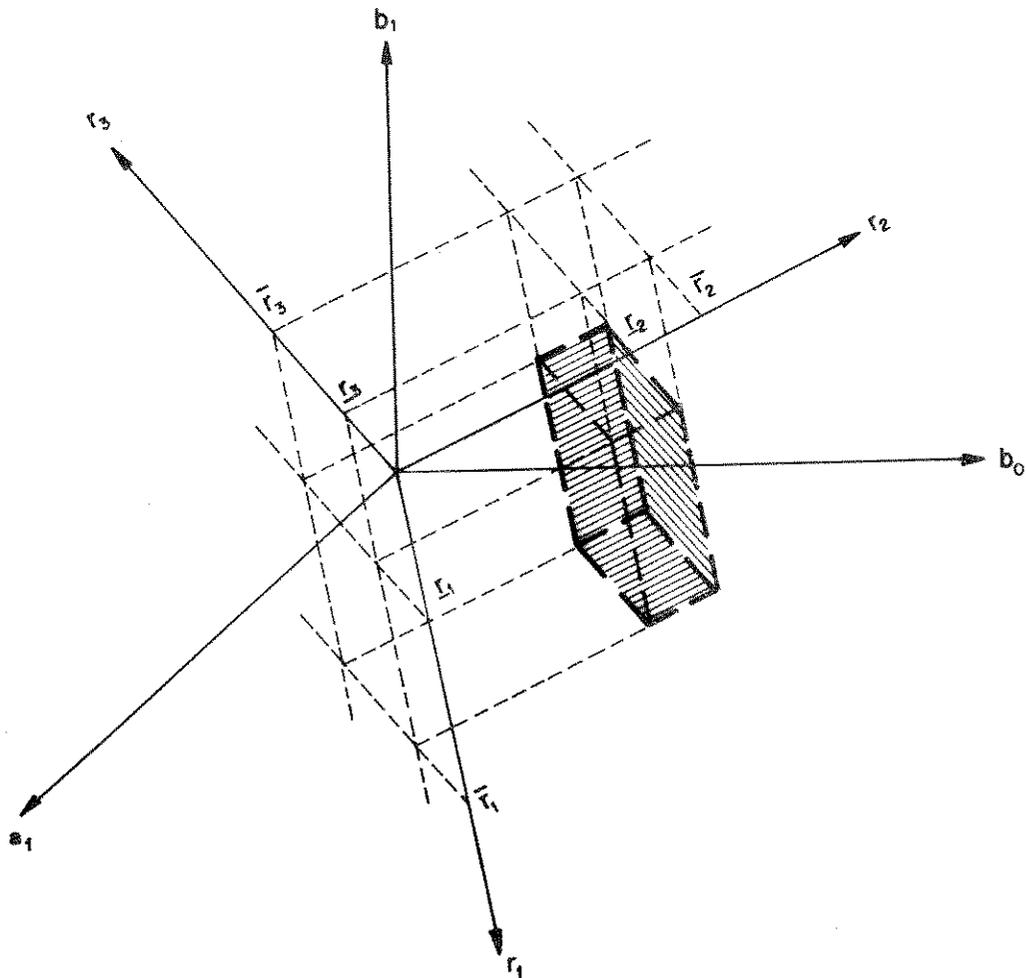


Fig. 3.2. Região de incerteza inicial

As figuras 3.2 e 3.3 dão uma visão geométrica da mudança de sistema de coordenadas proposta, através de um exemplo de região de incerteza no espaço de parâmetros tridimensional.

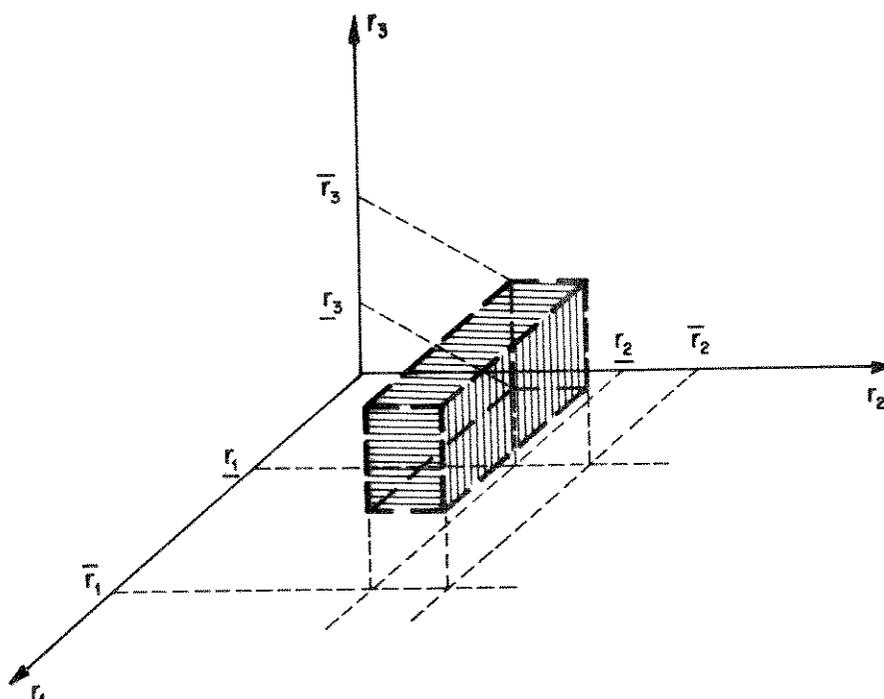


Fig. 3.3. Região de incerteza descrita em relação ao novo sistema de coordenadas

### 3.3 DEPENDÊNCIA DE PARÂMETROS

Em muitos problemas práticos pode ocorrer que certos parâmetros do processo, ou algumas relações lineares entre estes, sejam bem definidos. Nestes casos, o vetor de parâmetros do processo  $r$  poderá então ser expresso em termos de um vetor  $q$ , que contém os parâmetros realmente incertos do processo, através da seguinte relação de dependência linear:

$$r = S'q + s_0 \quad , \quad (3.14)$$

onde  $q \in \mathbb{R}^{nq}$ ,  $S' \in \mathbb{R}^{n \times nq}$  e  $s_0 \in \mathbb{R}^n$  é um vetor constante.

A matriz  $S'$  é suposta ter posto de coluna completo, sem perda de generalidade, pois de outro modo poderia ser redefinida. Portanto, lembrando que  $n = n_a + n_b + 1$ , a dimensão do vetor  $q$  satisfaz a seguinte relação:

$$nq \leq n_a + n_b + 1 \quad . \quad (3.15)$$

Como será visto posteriormente, ocorre, nestes casos, uma simplificação do problema, uma vez que o grau de incerteza é reduzido.

De maneira similar a (3.3), o vetor de parâmetros efetivamente incertos  $q$  deve estar contido em uma região  $\Pi$ , no espaço de parâmetros  $\mathbb{R}^{nq}$ , dada por:

$$\Pi = \{ q / q \in \mathbb{R}^{nq}, Q(q - q_0) < \underline{1} \} \quad , \quad (3.16)$$

onde  $q_0 \in \mathbb{R}^{nq}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{2nq \times nq}$  e  $\underline{1} \in \mathbb{R}^{2nq}$ .  $Q$  e  $q_0$  são obtidos de forma análoga a (3.4) e (3.6), respectivamente.

A expressão que relaciona o vetor de parâmetros  $p$  com o vetor de parâmetros incertos  $q$  do processo, obtida a partir de (3.7) e (3.14), é dada por:

$$p = L'S'q + L's_0 \quad . \quad (3.17)$$

### 3.4 NORMALIZAÇÃO DA REGIÃO DE INCERTEZA

A função medida de robustez, que será introduzida no capítulo 4, é definida a partir de uma descrição normalizada das incertezas paramétricas do processo - normalização que é possível de ser obtida através de uma transformação de coordenadas no espaço de parâmetros  $\mathbb{R}^{nq}$ . Esta transformação deve ser efetuada de um modo tal que as incertezas, definidas em (3.16), passem a ser representadas pela região aberta, denotada por  $\mathbb{P}$ , descrita da seguinte maneira:

$$\mathbb{P} = \{ q^* / q^* \in \mathbb{R}^{nq}, Q^* q^* < \underline{1} \} \quad , \quad (3.18)$$

onde  $\underline{1} \in \mathbb{R}^{2nq}$  e  $Q^* \in \mathbb{R}^{2nq \times nq}$  é definida por:

$$Q^* = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ \hline -1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix} \quad . \quad (3.19)$$

A região normalizada  $\mathbb{P}$  representa uma região hipercúbica centrada na origem do novo sistema de coordenadas, no espaço de parâmetros  $\mathbb{R}^{nq}$ .

Considera-se a seguinte transformação de coordenadas no espaço  $\mathbb{R}^{nq}$ :

$$q^* = R'^{-1}(q - q_0) \quad , \quad (3.20)$$

onde  $q^* \in \mathbb{R}^{nq}$  e  $R' \in \mathbb{R}^{nq \times nq}$ .

De acordo com (3.16), tem-se que:

$$Q(q - q_0) < \underline{1} \quad . \quad (3.21)$$

Substituindo-se (3.20) em (3.21), obtém-se:

$$QR'q^* < \underline{1} \quad (3.22)$$

Como a matriz  $Q$  é construída de forma similar a (3.4), considerando apenas os parâmetros efetivamente incertos, pode-se concluir, de acordo com a definição (3.19), que:

$$R' = C^{-1} \quad (3.23)$$

onde  $C \in \mathbb{R}^{nq \times nq}$  é a matriz que compõe  $Q$ , pois é fácil verificar que  $Q^* = QC^{-1}$ .

Portanto, através do cálculo da inversa de  $C$ ,  $R'$  resulta em:

$$R' = \begin{bmatrix} (\bar{q}_1 - q_1)/2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\bar{q}_{nq} - q_{nq})/2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

onde  $q_i$  e  $\bar{q}_i$ ,  $\forall i, i=1,2,\dots,nq$ , são os limites dos intervalos de incerteza das componentes do vetor de parâmetros incertos  $q$ . Como  $\bar{q}_i > q_i$ ,  $\forall i$ , a matriz  $C$  será sempre inversível, com determinante maior do que zero.  $R'$  pode ser vista como uma matriz cujas colunas formam uma base ortogonal do  $\mathbb{R}^{nq}$ .

Logo, a representação normalizada das incertezas dos parâmetros, dada em (3.18), é equivalente à representação dada em (3.16). Isto é,  $R'$  mapeia a região  $\Pi$  em uma região  $P$  e  $q \in \Pi \Leftrightarrow q^* \in P$ . Esta relação de equivalência é sempre possível, pois está garantida a existência da matriz de transformação  $R'$ .

A equação (3.17) pode ser reescrita com  $q$  substituído por  $q^*$ , utilizando-se a equação (3.20), para se conseguir uma relação entre o vetor de parâmetros  $p$  e o vetor de parâmetros incertos normalizados  $q^*$ , como segue:

$$p = L'S'R'q^* + L'S'q_0 + L's_0 \quad (3.25)$$

A figura 3.4 mostra como ficaria a região de incerteza dada pela figura 3.1, após a normalização.

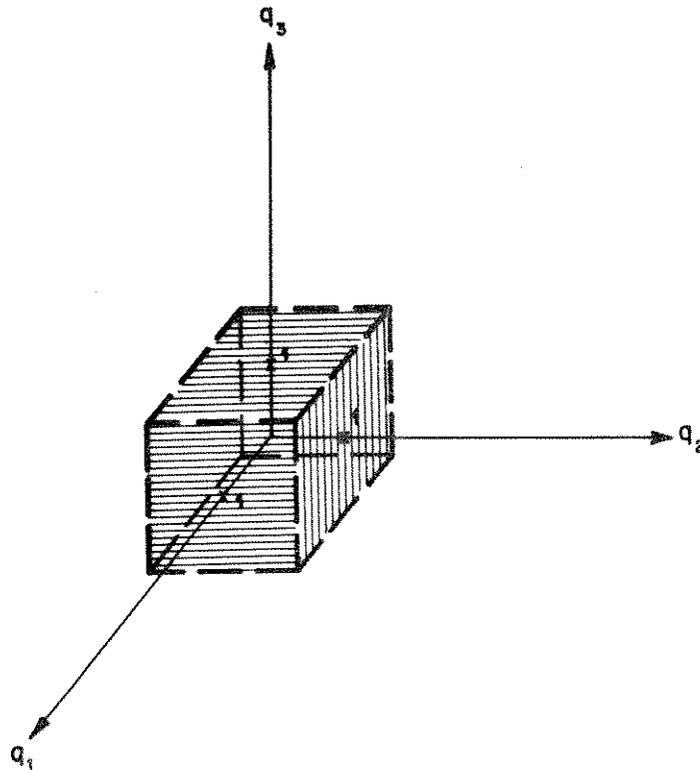


Fig. 3.4. Região de incerteza normalizada no espaço  $\mathbb{R}^3$

A equação (3.25) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & L' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ s_0 & \vdots & S' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ q_0 & \vdots & R' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ q^* \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Definindo-se as matrizes L, S e R como:

$$L = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & L' \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \quad (3.27)$$

$$S = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline s_0 & S' \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (nq+1)} \quad (3.28)$$

$$R = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline q_0 & R' \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{(nq+1) \times (nq+1)} \quad (3.29)$$

então:

$$\left[ \begin{array}{c} 1 \\ \hline p \end{array} \right] = S^* \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \hline q^* \end{array} \right] \quad (3.30)$$

com  $S^* = LSR$ ,  $S^* \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (nq+1)}$ .

No próximo capítulo, a função medida de robustez será desenvolvida utilizando-se a região hipercúbica normalizada (3.18) e a matriz  $S^*$ , que contém toda a informação a respeito dos parâmetros do processo.

## CAPÍTULO 4

### A FUNÇÃO MEDIDA DE ROBUSTEZ

4.1 INTRODUÇÃO

4.2 DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO MEDIDA DE ROBUSTEZ

4.3 CÁLCULO DA FUNÇÃO MEDIDA DE ROBUSTEZ LOCAL

4.4 ALGORITMO PARA O CÁLCULO DA FUNÇÃO MEDIDA DE ROBUSTEZ

4.5 CONCLUSÕES

## 4.1 INTRODUÇÃO

O problema inicial proposto, ou seja, o de determinar um controlador  $x$  D-estabilizante, robusto em relação às incertezas dos parâmetros do processo, pode admitir soluções múltiplas ou nenhuma solução, para a região de incerteza inicial dada. Torna-se necessária, então, a definição de algum critério que permita a comparação entre controladores.

Neste trabalho o critério a ser utilizado é introduzido pela definição na seção 4.2 de uma função medida de robustez  $m(x)$ . Esta função é definida, para cada problema, a partir da informação conhecida sobre o processo, contida na matriz  $S^*$  definida em (3.30), do controlador  $x$ , da região  $D$  no plano complexo onde os pólos do sistema devem estar contidos e da parametrização da região hipercúbica normalizada  $P$ , dada em (3.18). Esta parametrização será desenvolvida neste capítulo.

A função  $m(x)$  fornece a medida de robustez de um controlador  $x$  dado. Por definição, esta medida de robustez está relacionada diretamente com a maior região  $\Pi$  de estabilidade relativa, associada ao controlador dado. Portanto, através da função  $m(x)$ , é possível escolher entre as várias soluções do problema inicial, quando for o caso, a mais robusta, e, mesmo para um controlador  $x$  que não seja solução deste, determinar a maior região  $\Pi$  de estabilidade relativa associada.

Para o cálculo da função  $m(x)$ , será introduzida na seção seguinte a definição intermediária de função medida de robustez local  $m(x,z)$  (Santos-Mendes, 1988). A função  $m(x,z)$  é calculada em um ponto  $z$  do plano complexo, que deve pertencer à fronteira  $D^*$  da região  $D$ . A solução analítica de  $m(x,z)$  é dada pelo teorema 4.1 da seção 4.3. É demonstrado, então, que a função  $m(x)$  pode ser determinada a partir da minimização em  $z$  de  $m(x,z)$ , com  $z$  restrito à fronteira  $D^*$ . Este problema de otimização é resolvido através de um algoritmo proposto na seção 4.4.

## 4.2 DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO MEDIDA DE ROBUSTEZ

Considera-se inicialmente a família de regiões hipercúbicas, parametrizada

pela variável  $\mathbf{k}$ , dada a seguir:

$$\mathbb{P}(\mathbf{k}) = \{ \mathbf{q}^*/\mathbf{q}^* \in \mathbb{R}^{nq}, Q^*\mathbf{q}^* < \underline{\mathbf{k}} \} \quad , \quad (4.1)$$

onde  $\underline{\mathbf{k}}$  denota o vetor  $[k \ k \ \dots \ k]^T \in \mathbb{R}^{2nq}$ , com  $k \in [0, \infty)$ . Esta família de regiões hipercúbicas  $\mathbb{P}(\mathbf{k})$  está centrada na origem do sistema de coordenadas e possui arestas de comprimento igual a  $2k$ . A região de incerteza  $\mathbb{P}$  é um elemento desta família para  $k=1$ . Este parâmetro  $k$  será utilizado na definição da função medida de robustez  $m(x)$ .

A figura 4.1 mostra um elemento genérico da família de regiões  $\mathbb{P}(\mathbf{k})$  no espaço  $\mathbb{R}^3$ .

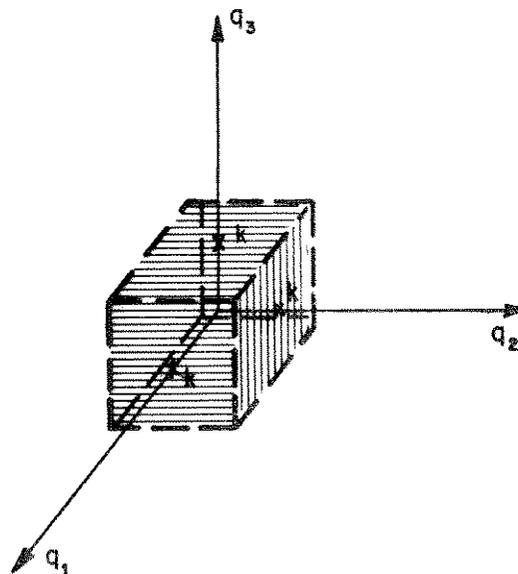


Fig. 4.1. Região de incerteza  $\mathbb{P}(\mathbf{k})$  no espaço  $\mathbb{R}^3$

Finalmente, para introdução da função  $m(x)$ , a equação matricial do polinômio característico (2.9) é reescrita a seguir com  $\mathbf{p}$  substituído por  $\mathbf{q}^*$ . Utilizando-se as

equações (2.15) e (3.30), respectivamente, tem-se que:

$$t = X(x) \begin{bmatrix} 1 \\ \text{---} \\ p \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$t = X(x) S^* \begin{bmatrix} 1 \\ \text{---} \\ q^* \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

A relação (4.3) mostra claramente a dependência dos coeficientes do polinômio característico do sistema em malha-fechada  $T(z^{-1})$ , que compõem o vetor  $t$ , em relação aos parâmetros do controlador  $x$  e aos parâmetros incertos representados pelo vetor de parâmetros  $q^*$ . Esta dependência será explicitada pela seguinte notação:

$$z^{nt} T(z^{-1}) = T(x, q^*, z) \quad (4.4)$$

Por definição, um controlador  $x$  é D-estabilizante para a região de incerteza paramétrica inicial dada, se  $\forall q^* \in \mathbb{P}$ ,  $T(x, q^*, z)$  é D-estável, ou seja,  $T(x, q^*, z) = 0 \Rightarrow z \in D$ .

A função  $m(x)$ , que dá a medida de robustez de um controlador  $x$  qualquer, é definida como:

$$m(x) = k_m \quad (4.5)$$

onde  $k_m$  é o maior valor do parâmetro  $k$  em (4.1), tal que para  $\forall q^* \in \mathbb{P}(k_m)$ ,  $T(x, q^*, z) = 0 \Rightarrow z \in D$ .

A partir da medida  $m(x)$ , pode-se determinar a maior região de incerteza  $\Pi$  de estabilidade relativa associada ao controlador  $x$ , centrada em  $p_0$ , através da equação (3.30), que estabelece a relação entre os vetores  $p$  e  $q^*$ . A justificativa para se usar  $k_m$  como medida de robustez é que se  $x_1$  e  $x_2$  são dois controladores, para o mesmo processo e região  $D$ , com  $m(x_1) > m(x_2)$ , então  $x_1$  é mais robusto do que  $x_2$ , visto que a maior região  $\Pi$  de estabilidade relativa associada a  $x_2$  está contida na de  $x_1$ .

Os resultados que serão apresentados a seguir permitem encontrar uma maneira mais simples de se obter a função  $m(x)$ , pois não foi possível determinar uma expressão analítica para o seu cálculo, em virtude da complexidade do problema proposto. Convém lembrar que, conforme definido no capítulo 2, a única restrição imposta à região  $D$  é que esta seja conexa.

Considera-se inicialmente a definição do conjunto de controladores  $W$  dada por:

$$W = \{ x/x \in \mathbb{R}^{ng+nh+2}, T(x, \underline{0}, z) = 0 \Rightarrow z \in D \} \quad , \quad (4.6)$$

onde  $\underline{0}$  denota o vetor nulo em  $\mathbb{R}^{nq}$ . Portanto,  $W$  é o conjunto dos controladores  $x$   $D$ -estabilizantes para o vetor de parâmetros do processo, associado ao centro da região de incerteza ( $q^* = \underline{0} \Leftrightarrow p = p_0$ ).

É possível, então, estabelecer a seguinte proposição:

#### Proposição 4.1.

Sejam  $x$  um controlador pertencente a  $W$  e  $k'$  um número real não-negativo.

Se  $T(x, q^*, z) \neq 0$  para  $\forall q^* \in \mathbb{P}(k')$  e  $\forall z \in D^*$ ,

então  $T(x, q^*, z) \neq 0$  para  $\forall q^* \in \mathbb{P}(k')$  e  $\forall z \notin D$ .

A demonstração desta proposição é similar àquela da proposição 3.1 apresentada em Santos-Mendes (1988), e, portanto, será omitida. Esta demonstração se baseia nos dois fatos a seguir:

- i) A região de incerteza hipercúbica em  $\mathbb{R}^{nq}$  é convexa;
- ii) Se os coeficientes de um polinômio variam continuamente então suas raízes também variam continuamente, desde que o seu grau não varie.

Pela proposição 4.1 tem-se, então, que um controlador  $x$  D-estabilizante para  $q^*=0$  será D-estabilizante para todo  $q^* \in \mathbb{P}(k')$ , se os pontos  $z$  da fronteira  $D^*$  não forem raízes de  $T(x, q^*, z)$  para todo  $q^* \in \mathbb{P}(k')$ .

Portanto, para se determinar  $k_m$  é suficiente restringir a análise aos pontos pertencentes a  $D^*$ . Este resultado conduz à definição intermediária de medida de robustez de um controlador  $x \in W$  associada ao ponto  $z \in D^*$ , a medida de robustez local  $m(x, z)$ , que será utilizada a seguir no cálculo da função  $m(x)$ .

A função  $m(x, z)$ , que dá a medida de robustez local de um controlador arbitrário  $x \in W$  em relação a um ponto  $z \in D^*$  qualquer, é definida como:

$$m(x, z) = k_z \quad , \quad (4.7)$$

onde  $k_z$  é o maior valor do parâmetro  $k$  em (4.1), tal que  $\forall q^* \in \mathbb{P}(k_z)$ ,  $T(x, q^*, z) \neq 0$ , isto é, que  $z$  não seja raiz do polinômio característico.

A partir da proposição 4.1 e da definição da função medida de robustez local, pode-se concluir o seguinte:

#### Corolário 4.1.

A função medida de robustez  $m(x)$ , definida pela equação (4.5), pode ser dada por:

$$m(x) = \min_{z \in D^*} m(x, z) \quad , x \in W \quad . \quad (4.8)$$

Isto é, o cálculo de  $m(x)$  para um controlador  $x \in W$  é determinado pela minimização da função medida de robustez local em  $z$ , com  $z$  descrevendo a fronteira  $D^*$ . A hipótese da proposição 4.1 fica completamente satisfeita quando se faz a varredura da fronteira  $D^*$  em (4.8) e, como consequência, a definição da função  $m(x)$ .

Na próxima seção será determinada uma expressão para o cálculo da função  $m(x, z)$ .

### 4.3 CÁLCULO DA FUNÇÃO MEDIDA DE ROBUSTEZ LOCAL

Pela definição da função medida de robustez local  $m(x,z)$ , dada pela equação (4.7), para se obter o valor de  $k_z$  é necessário determinar a maior região hipercúbica de incerteza para  $q^*$  tal que  $T(x,q^*,z) \neq 0$ , com  $x \in W$  e  $z \in D^*$  dados.

Considera-se inicialmente a matriz  $V(z) \in \mathbb{R}^{(nt+1) \times 2}$  definida como:

$$V^T(z) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(z^{nt}) & \operatorname{Re}(z^{nt-1}) & \dots & \operatorname{Re}(z) & 1 \\ \operatorname{Im}(z^{nt}) & \operatorname{Im}(z^{nt-1}) & \dots & \operatorname{Im}(z) & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

onde  $\operatorname{Re}(\cdot)$  e  $\operatorname{Im}(\cdot)$  denotam, respectivamente, as partes real e imaginária de um número complexo, e  $nt$  é o grau do polinômio  $T(z^{-1})$  dado pela equação (2.7).

Pode-se verificar facilmente que a matriz  $V(z)$  satisfaz a seguinte relação:

$$V^T(z)t = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}[z^{nt}T(z^{-1})] \\ \operatorname{Im}[z^{nt}T(z^{-1})] \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Substituindo-se  $t$  em (4.10) pela equação (4.3) e considerando-se a notação introduzida em (4.4), tem-se que:

$$V^T(z)X(x)S^* \begin{bmatrix} 1 \\ q^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}[T(x,q^*,z)] \\ \operatorname{Im}[T(x,q^*,z)] \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Seja a matriz  $U(x,z) \in \mathbb{R}^{(nq+1) \times 2}$  definida como:

$$U^T(x,z) = V^T(z)X(x)S^*. \quad (4.12)$$

Portanto, um número complexo  $z$  é uma raiz do polinômio  $T(x,q^*,z)$  se e somente se

$$U^T(x,z) \begin{bmatrix} 1 \\ \hline q^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (4.13)$$

Considera-se agora a definição do conjunto  $v(x,z)$  dada por:

$$v(x,z) = \left\{ q^*/q^* \in \mathbb{R}^{nq}, U^T(x,z) \begin{bmatrix} 1 \\ \hline q^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} . \quad (4.14)$$

É interessante observar que  $v(x,z) = v(x, \bar{z})$ , onde  $\bar{z}$  denota o complexo conjugado do número  $z$ , e que o vetor  $[1 \ q^*]^T \in \mathbb{R}^{nq+1}$ , com  $q^* \in v(x,z)$ , pertence ao espaço nulo da matriz  $U^T(x,z)$ .

A partir da equação (4.13) e da definição de  $v(x,z)$ , pode-se concluir, para um controlador  $x$  e um ponto  $z$  dados, que:

$$T(x, q^*, z) \neq 0 \Leftrightarrow q^* \notin v(x, z) . \quad (4.15)$$

Portanto, para um valor qualquer do parâmetro  $k \in [0, \infty)$ , tem-se que:

$$\forall q^* \in P(k), T(x, q^*, z) \neq 0 \Leftrightarrow P(k) \cap v(x, z) \equiv \phi , \quad (4.16)$$

onde  $\phi$  representa o conjunto vazio.

Como consequência deste resultado, a função medida de robustez local, dada pela equação (4.7), pode ser redefinida como:

$$m(x, z) = k_z , \quad x \in W \text{ e } z \in D^* , \quad (4.17)$$

onde  $k_z$  é o maior valor do parâmetro  $k$  em (4.1), tal que  $P(k_z) \cap v(x, z) \equiv \phi$ .

Reescrevendo-se a matriz  $U(x, z)$ , definida em (4.12), como segue,

$$U^T(x,z) = \begin{bmatrix} a^T \\ b^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times (nq+1)}, \quad (4.18)$$

onde  $a = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{nq}]^T \in \mathbb{R}^{nq+1}$  e  $b = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{nq}]^T \in \mathbb{R}^{nq+1}$ , a função medida de robustez local  $m(x,z)$  pode ser determinada pelo seguinte teorema:

Teorema 4.1.

Sejam um controlador  $x \in W$  dado e  $z$  um ponto qualquer da fronteira  $D^*$  de  $D$ . A função medida de robustez local  $m(x,z)$ , definida pela equação (4.17), é dada analiticamente, para duas situações possíveis, por:

a) Os vetores  $a$  e  $b$  em  $U(x,z)$  são linearmente dependentes:

$$m(x,z) = \frac{|a_0|}{\sum_{i=1}^{nq} |a_i|}, \quad (4.19)$$

b) Os vetores  $a$  e  $b$  em  $U(x,z)$  não são linearmente dependentes:

$$m(x,z) = \max_i \frac{|c_{0i}|}{\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{nq} |c_{ji}|}, \quad i=1,2,\dots,nq, \quad (4.20)$$

onde  $c_{ji} = a_j b_i - a_i b_j$ .

A demonstração deste teorema encontra-se no Apêndice.

Finalmente, a função  $m(x)$  pode ser obtida pela minimização numérica, em relação a  $z \in D^*$ , da função medida de robustez local, dada pelas equações (4.19) e (4.20). Na próxima seção, um algoritmo será apresentado para o cálculo da medida de robustez de um controlador  $x$  dado e, a partir desta, obter a maior região de incerteza  $\Pi$  de estabilidade relativa associada a este.

#### 4.4 ALGORITMO PARA O CÁLCULO DA FUNÇÃO MEDIDA DE ROBUSTEZ

Nesta seção é proposto um algoritmo para a solução do problema de minimização, definido pela equação (4.8), dado por:

$$\begin{aligned} m(x) = \min_{z \in D^*} m(x, z), \quad x \in W, \\ \text{s. a } z \in D^* \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde a função  $m(x, z)$  é obtida analiticamente pelas equações (4.19) e (4.20).

Este problema de minimização torna-se mais simples devido à natureza simétrica da fronteira  $D^*$  em relação ao eixo real do plano complexo, visto que, para pontos conjugados  $z$  e  $\bar{z}$ , o valor da função  $m(x, z)$  é o mesmo. Isto pode ser facilmente verificado a partir da definição de  $m(x, z)$ , dada pela equação (4.17), e do fato de que  $v(x, z) = v(x, \bar{z})$ . Portanto, somente uma metade de  $D^*$ , contida no semiplano superior (ou inferior) do plano complexo, precisa ser analisada.

É suposto, sem perda de generalidade, que a fronteira  $D^*$  da região  $D$  possa ser parametrizada por uma variável  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Isto é, para  $\theta$  variando de 0 a  $\pi$ ,  $z$  descreve uma metade da fronteira  $D^*$ . Logo, a equação (4.21) pode ser reescrita, considerando-se a simetria da região  $D$  em relação ao eixo real, como:

$$\begin{aligned} m(x) = \min_{0 \leq \theta \leq \pi} m(x, \theta), \quad x \in W, \\ \text{s. a } 0 \leq \theta \leq \pi \end{aligned} \quad (4.22)$$

Para os casos em que este procedimento não se aplica, pode-se dividir a fronteira  $D^*$  em trechos, cada um parametrizado por uma variável  $\theta^i$ ,  $i=1, 2, \dots$ , e, em

seguida, fazer a minimização de  $m(x, \theta^j)$  considerando-se todos os  $\theta^j$ .

A solução numérica da equação (4.22) é apresentada pelo algoritmo 4.1. Este algoritmo é computacionalmente simples e eficiente, e sua precisão depende do número de pontos verificados sobre a fronteira  $D^*$ .

#### Algoritmo 4.1.

- Passo 1: estabeleça o número de pontos  $N$  sobre  $D^*$  e faça o índice de iteração  $j=0$ ;
- Passo 2: determine  $\theta_j = \pi j/N$ ;
- Passo 3: obtenha a matriz  $U(x, \theta_j)$  pela equação (4.12);
- Passo 4: calcule  $m(x, \theta_j)$  pela equação (4.19) ou (4.20);
- Passo 5: se  $m(x, \theta_j) < m(x)$  ou  $j=0$  então faça  $m(x) = m(x, \theta_j)$ ;
- Passo 6: se  $j < N$  então faça  $j=j+1$  e retorne ao passo 2;
- Passo 7: faça  $q^* = [m(x) \ m(x) \ \dots \ m(x)]^T \in \mathbb{R}^{nq}$  e calcule a maior região  $\Pi$  de estabilidade relativa, associada a  $x$ , por:

$$R \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{-q^*} \end{bmatrix} < q < R \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{q^*} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Este algoritmo, além de calcular o valor da função medida de robustez para um controlador  $x$  dado, determina a maior região de incerteza paramétrica do processo, associada a  $x$ , tal que os critérios de desempenho de controle adotados, descritos pela região  $D$ , sejam assegurados.

## 4.5 CONCLUSÕES

Um controlador  $x$  será solução do problema inicial de alocação de pólos robusta, tendo em vista que a região normalizada  $\mathbb{P}$  representa a incerteza inicial dada para o processo, se e somente se:

$$m(x) \geq 1 \quad , \quad (4.24)$$

pois  $\mathbb{P}$  é um elemento da família de regiões hipercúbicas  $\mathbb{P}(k)$ , definida em (4.1), para  $k=1$ .

A partir desta medida de robustez, por definição, mesmo para os controladores que não satisfazem esta condição, é possível determinar a maior região de incerteza paramétrica do processo, associada ao controlador, de maneira a garantir que os pólos de malha-fechada do sistema não estejam fora da região  $D$ . É importante ressaltar a generalidade de regiões  $D$  que podem ser tratadas por este trabalho. A única restrição imposta a tais regiões é que sejam conexas.

CAPÍTULO 5

PROJETO DE CONTROLADORES  
ROBUSTOS

5.1 INTRODUÇÃO

5.2 O GRADIENTE DA FUNÇÃO  $m(x)$

5.3 O GRADIENTE MODIFICADO DA FUNÇÃO  $m(x)$

5.4 ALGORITMO PARA PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS

## 5.1 INTRODUÇÃO

A função medida de robustez apresentada no capítulo anterior define um critério que permite a comparação entre controladores, considerando-se o problema de projeto do controlador D-estabilizante mais robusto em relação às incertezas paramétricas do processo.

Portanto, o problema inicial de se projetar um controlador robusto  $x$  pode ser traduzido naturalmente pelo seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \max \quad & m(x), \\ \text{s. a } & x \in W \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde  $m(x)$  é a função medida de robustez definida pela equação (4.5) e  $W$  é o conjunto de controladores D-estabilizantes para o vetor de parâmetros do processo, associado ao centro da região de incerteza, definido em (4.6).

Entretanto, um controlador  $x$ , solução factível ótima deste problema de otimização, será solução do problema inicial de projeto se, e somente se, sua medida de robustez for maior do que ou igual a unidade. Como foi visto na seção 4.4, esta é a condição necessária e suficiente para que a região de incerteza inicial dada para os parâmetros do processo esteja contida na maior região  $\Pi$  de estabilidade relativa associada ao controlador.

Um algoritmo iterativo é proposto para solução do problema de maximização apresentado em (5.1). Neste algoritmo, a cada iteração, os parâmetros do controlador são modificados de uma maneira tal que a região hipercúbica (ou a região hiperparalelepipedal) de estabilidade relativa admissível, no espaço de parâmetros do processo, seja aumentada.

A direção de busca do controlador robusto ótimo, ou seja, a direção de crescimento da função medida de robustez  $m(x)$ , utilizada neste algoritmo, é a do gradiente de  $m(x)$ . O gradiente foi escolhido por fornecer a direção de maior taxa de variação da função. A expressão para o cálculo do gradiente de  $m(x)$  será obtida na seção 5.2.

O gradiente da função  $m(x)$  pode não existir para certos valores de  $x$ . Nestas situações, é adotado o gradiente modificado (Santos-Mendes,1988) para a determinação

da nova direção de busca. Este será desenvolvido na seção 5.3.

Finalmente, utilizando-se estas direções de modificação para o controlador  $x$ , o algoritmo iterativo para projeto de controladores robustos é apresentado na seção 5.4. É importante observar que, em geral, este tipo de algoritmo não garante a obtenção do máximo global, e que a solução encontrada depende da escolha dos parâmetros do controlador inicial.

## 5.2 O GRADIENTE DA FUNÇÃO $m(x)$

Nesta seção é determinada a expressão para o gradiente da função medida de robustez  $m(x)$ , que será utilizada no algoritmo para projeto de controladores robustos como direção de busca, nos pontos em que este está definido.

Considera-se a função medida de robustez definida pela equação (4.22), transcrita a seguir:

$$\begin{aligned} m(x) = \min_{\theta} m(x, \theta) \quad , x \in W, \\ \text{s. a } 0 \leq \theta \leq \pi \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde  $m(x, \theta)$  é a função medida de robustez local, obtida analiticamente pelas equações (4.19) e (4.20).

A função medida de robustez dada em (5.2) pode ser reescrita como:

$$m(x) = m(x, \theta(x)) \quad , x \in W, \quad (5.3)$$

onde  $\theta(x)$  é o valor de  $\theta \in [0, \pi]$  que minimiza a função  $m(x, \theta)$  para um controlador  $x$  dado.

A partir da equação (5.3) o gradiente da função medida de robustez, denotado por  $\nabla m(x)$ , é dado por:

$$\nabla m(x) = \frac{\partial m(x, \theta(x))}{\partial x} + \frac{\partial m(x, \theta(x))}{\partial \theta} \frac{d\theta(x)}{dx}, \quad x \in W, \quad (5.4)$$

desde que todas as derivadas que aparecem na expressão acima tenham a sua existência garantida.

Como a função  $m(x, \theta)$  é minimizada em relação a  $\theta$  no ponto  $(x, \theta)$ , onde  $x$  é o controlador dado e  $\theta = \theta(x)$ , tem-se que:

$$\frac{\partial m(x, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad . \quad (5.5)$$

Isto ocorre, obviamente, para os casos em que esta derivada existe.

Portanto, para um ponto  $x \in W$ , no qual o gradiente está definido, a expressão (5.4) pode ser simplificada como:

$$\nabla m(x) = \frac{\partial m(x, \theta(x))}{\partial x} \quad . \quad (5.6)$$

O gradiente da função medida de robustez no ponto  $x$  é obtido, então, a partir da derivada parcial da função  $m(x, \theta)$  calculada no ponto  $(x, \theta(x))$ , conforme a expressão (5.6).

Antes de calcular o gradiente da função  $m(x)$ , os elementos da matriz  $U(x, z)$ , definida pela equação (4.12), serão determinados de modo que fique explícita a sua relação com o vetor  $x$ . Isto facilita a obtenção da derivada parcial de  $m(x, \theta)$  em relação a  $x$ , considerando-se as equações (4.19) e (4.20).

A matriz  $U(x, z)$ , definida pela equação (4.12), pode ser reescrita, considerando-se a parametrização de  $z$  por  $\theta$ , como:

$$U^T(x, \theta) = V^T(\theta) X(x) S^* \quad . \quad (5.7)$$

Particionando-se a matriz  $V(z)$ , definida pela equação (4.9) e parametrizada por  $\theta$ , tem-se que:

$$V^T(\theta) = \begin{bmatrix} V_r^T(\theta) \\ V_c^T(\theta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2x(n+1)} \quad (5.8)$$

onde  $V_r(\theta) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}$  e  $V_c(\theta) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}$  são matrizes que contêm, respectivamente, a primeira e a segunda coluna de  $V(z)$ .

O produto matricial  $X(x)S^*$  em (5.7) pode ser desenvolvido, utilizando-se as colunas de  $S^*$ , como:

$$X(x)S^* = \begin{bmatrix} X(x)s_0^* & X(x)s_1^* & \dots & X(x)s_{nq}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (nq+1)} \quad (5.9)$$

onde

$$S^* = \begin{bmatrix} s_0^* & s_1^* & \dots & s_{nq}^* \end{bmatrix} \quad , s_i^* \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (5.10)$$

A partir da dualidade existente entre as equações (2.9) e (2.10), pode-se concluir, para as colunas da matriz  $X(x)S^*$ , que:

$$X(x)s_i^* = M(s_i^*)x \quad , \forall i=0,1,\dots,nq \quad (5.11)$$

onde  $M(s_i^*) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (ng+nh+2)}$  é obtida de forma similar à matriz (2.13), com  $\hat{p}$  substituído por  $s_i^*$ . Nas equações a seguir, a matriz  $M(s_i^*)$  será referida simplesmente como  $M_i$ .

Portanto, a matriz  $X(x)S^*$ , desenvolvida em (5.9), pode ser determinada usando-se o resultado anterior, da seguinte forma:

$$X(x)S^* = \begin{bmatrix} M_0 x & M_1 x & \dots & M_{nq} x \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Substituindo-se as equações (5.8) e (5.12) na equação (5.7), a matriz  $U(x,\theta)$  passa a ser dada por:

$$U^T(x, \theta) = \begin{bmatrix} V_r^T(\theta)M_0^T x & V_r^T(\theta)M_1^T x & \dots & V_r^T(\theta)M_{nq}^T x \\ V_c^T(\theta)M_0^T x & V_c^T(\theta)M_1^T x & \dots & V_c^T(\theta)M_{nq}^T x \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Finalmente, os elementos  $a_i$  e  $b_i$  da matriz  $U(x, \theta)$ , definidos pela equação (4.18), podem ser expressos, conforme a equação (5.13), por:

$$\begin{cases} a_i = V_r^T(\theta)M_i^T x \\ b_i = V_c^T(\theta)M_i^T x \end{cases}, i=0,1,\dots,nq. \quad (5.14)$$

Considera-se, agora, a derivada parcial em relação a  $x$  das equações (5.14) e de  $c_{ji}$ , definido em (4.20) como  $c_{ji} = a_i b_j - a_j b_i$ , para o cálculo do gradiente da função  $m(x)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial a_i}{\partial x} = M_i^T V_r^T(\theta) \\ \frac{\partial b_i}{\partial x} = M_i^T V_c^T(\theta) \end{cases}, i=0,1,\dots,nq \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial c_{ji}}{\partial x} = (M_j^T V_r^T(\theta)M_i^T + M_i^T V_c^T(\theta)M_j^T)x, i=1,2,\dots,nq \text{ e} \quad (5.16)$$

$$j=0,1,\dots,nq \quad (j \neq i),$$

onde  $V_M^T(\theta)$  é definida como

$$V_M^T(\theta) = V_r^T(\theta)V_c^T(\theta) - V_c^T(\theta)V_r^T(\theta). \quad (5.17)$$

Além disto, para o cálculo do gradiente  $\nabla m(x)$ , é definida a função  $\text{sgn}(\cdot)$ , de argumento real, como:

$$\text{sgn}(c) = \begin{cases} +1, \text{ se } c > 0 \\ 0, \text{ se } c = 0 \\ -1, \text{ se } c < 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

O gradiente da função medida de robustez  $m(x)$  é calculado a seguir, supondo a existência da derivada parcial de  $m(x, \theta)$  em relação a  $x$ , considerando-se as duas expressões possíveis para a função medida de robustez local, determinadas pelo teorema 4.1:

a) A função  $m(x, \theta)$  é dada pela equação (4.19):

$$m(x, \theta) = \frac{|a_0|}{\sum_{i=1}^{nq} |a_i|} \quad (5.19)$$

Portanto, derivando a equação (5.19), obtém-se o gradiente da função  $m(x)$  como:

$$\nabla m(x) = \frac{M_S^T(x, \theta) V_r(\theta)}{\sum_{i=1}^{nq} |a_i|} \quad (5.20)$$

onde  $M_S(x, \theta)$  é definida por:

$$M_S^T(x, \theta) = \text{sgn}(a_0) M_0^T - m(x) \sum_{i=1}^{nq} \text{sgn}(a_i) M_i^T \quad (5.21)$$

b) A função  $m(x, \theta)$  é dada pela equação (4.20), supondo-se igual a 1, com  $i \in \{1, 2, \dots, nq\}$ , o único valor de  $i$  que soluciona aquela maximização no ponto  $(x, \theta(x))$ :

$$m(x, \theta) = \frac{|c_{0I}|}{\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq I)}}^{nq} |c_{jI}|} \quad (5.22)$$

Portanto, derivando a equação (5.22), obtém-se o gradiente da função  $m(x)$  como:

$$\nabla m(x) = \frac{[M_{SI}^T(x, \theta) V_M^T(\theta) M_I + M_I^T V_M(\theta) M_{SI}(x, \theta)] x}{\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq I)}}^{nq} |c_{jI}|} \quad (5.23)$$

onde  $M_{SI}(x, \theta)$  é definida por:

$$M_{SI}^T(x, \theta) = \text{sgn}(c_{0I}) M_0^T - m(x) \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq I)}}^{nq} \text{sgn}(c_{jI}) M_j^T \quad (5.24)$$

As equações (5.20) e (5.23) fornecem a direção de busca que será utilizada no algoritmo para projeto de controladores robustos, nas situações em que este gradiente existe. Esta direção é dada pelo seguinte vetor unitário  $\delta x$  a partir das equações (5.20) e (5.23), respectivamente:

$$\delta x = \frac{M_S^T V_r}{\|M_S^T V_r\|} \quad (5.25)$$

$$\delta x = \frac{(M_{SI}^T V_M^T M_I + M_I^T V_M M_{SI}) x}{\|(M_{SI}^T V_M^T M_I + M_I^T V_M M_{SI}) x\|} \quad (5.26)$$

Para um ponto  $x \in W$  em que o gradiente da função  $m(x)$  está definido, a direção de busca  $\delta x$  é determinada, então, pela equação (5.25) ou (5.26), conforme a relação de dependência entre os vetores  $a$  e  $b$ , definidos em (4.18), calculados neste ponto. Pelo teorema 4.1, se os vetores  $a$  e  $b$  são linearmente dependentes, a direção de busca  $\delta x$  é calculada pela equação (5.25); caso contrário, pela equação (5.26).

### 5.3 O GRADIENTE MODIFICADO DA FUNÇÃO $m(x)$

Como foi visto na seção anterior, a existência do gradiente da função medida de robustez está vinculada à existência da função  $\vartheta(x)$ , definida pela equação (5.3), e de todas as derivadas presentes na expressão (5.4). Na ausência de tais condições é proposta uma direção de busca baseada na definição a seguir de gradiente modificado da função  $m(x)$ .

Inicialmente, considera-se que somente a função  $\vartheta(x)$ , com  $x \in W$ , tenha a sua existência garantida e que a maximização na equação (4.20) ocorra para um único valor do índice  $i$ . Nesta situação, para todo ponto  $x$ , a direção de busca proposta continua a ser obtida pelas equações (5.25) e (5.26). Isto é possível, pois a mesma pode ser calculada para qualquer ponto  $x$ , conhecendo-se o valor correspondente de  $\vartheta$  que satisfaz a minimização na equação (5.2). Esta direção foi escolhida em virtude dos bons resultados práticos obtidos. Portanto, esta escolha possui um caráter heurístico.

Na situação em que para o ponto  $x$  existe mais de um valor de  $\vartheta$  que minimiza a função  $m(x, \vartheta)$  na equação (5.2), e/ou que para o par  $(x, \vartheta(x))$  o valor do índice  $i$  que resolve a maximização na equação (4.20) não é único, a direção de busca do controlador robusto ótimo também não é única. É necessário, então, definir uma nova direção de modificação neste ponto  $x$ .

Considera-se um ponto  $x' \in W$ , onde a situação descrita no parágrafo anterior ocorre, e sejam  $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$  as possíveis direções obtidas pela equação (5.25) ou (5.26), para cada  $\vartheta_j(x')$  ou para cada par  $(\vartheta_j(x'), i(\vartheta_j(x')))$ , respectivamente, onde  $\vartheta_j(x')$  são os valores de  $\vartheta \in [0, \pi]$  que minimizam  $m(x', \vartheta)$  e  $i(\vartheta_j(x'))$  são os valores de  $i \in \{1, 2, \dots, nq\}$  que solucionam a maximização na equação (4.20) para cada par  $(x', \vartheta_j(x'))$ . Define-se a matriz  $J$  como:

$$J = \begin{bmatrix} \delta^T x_1 \\ \delta^T x_2 \\ \vdots \\ \delta^T x_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times (ng+nh+2)} \quad (5.27)$$

A direção de busca do controlador robusto ótimo, proposta neste trabalho, para os pontos onde a direção  $\delta x$  não é única, é dada pelo vetor  $\Gamma$ , definido como sendo o gradiente modificado da função  $m(x)$ , obtido pela resolução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & \Gamma^T \Gamma, \\ \text{s. a} \quad & J \cdot \Gamma = \underline{1} \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde  $\underline{1} \in \mathbb{R}^l$ .

A solução deste problema é dada por:

$$\Gamma = J^T (J J^T)^{-1} \underline{1} \quad (5.29)$$

A justificativa para tal escolha se baseia nos seguintes fatos:

1)  $\delta x_i^T \Gamma = 1 > 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, l\}$ .

2) O vetor  $\Gamma$  forma o mesmo ângulo com todos os vetores  $\delta x_i$ . Este ângulo, denotado por  $\beta$ , é dado por:

$$\beta = \arccos(\|\Gamma\|^{-1}) \quad (5.30)$$

e, portanto, minimizado pela solução do problema (5.28).

3) Para  $i=1$  a matriz  $J$ , definida em (5.27), se reduz a:

$$J = \delta x_1^T \quad . \quad (5.31)$$

Substituindo-se a equação (5.31) na equação (5.29), tem-se que:

$$\Gamma = \delta x \quad , \quad (5.32)$$

ou seja, a direção  $\Gamma$  coincide com a direção  $\delta x$  obtida pela equação (5.25) ou (5.26).

A partir do último fato acima, pode-se considerar que a direção definida pela equação (5.29) é uma generalização daquela obtida pelas equações (5.25) e (5.26). Portanto, a direção  $\Gamma$  será utilizada como direção de busca no algoritmo para projeto de controladores robustos, independentemente da existência do gradiente da função  $m(x)$ .

#### 5.4 ALGORITMO PARA PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS

Nesta seção é apresentado um algoritmo iterativo para solução do problema de otimização definido na introdução pela equação (5.1):

$$\begin{aligned} \max \quad & m(x) . \\ \text{s. a} \quad & x \in W \end{aligned} \quad (5.33)$$

O objetivo deste, então, é encontrar um controlador  $x$  que garanta a estabilidade relativa do sistema em malha-fechada para a maior região hipercúbica de incerteza possível, no espaço de parâmetros do processo.

Neste algoritmo, a cada iteração, os parâmetros do controlador  $x$  são modificados segundo a direção  $\Gamma$ , ou seja, a direção do gradiente modificado, definida

pela equação (5.29). Como foi visto, a direção  $\Gamma$  coincide com a direção do gradiente para os pontos onde este existe.

O algoritmo para projeto de controladores robustos pode ser resumido como segue:

Algoritmo 5.1.

- Passo 1: faça o índice de iteração  $j=0$ ; escolha  $x_j \in W$  e  $\alpha_0 > 0$ ;
- Passo 2: calcule  $m(x_j)$  pelo algoritmo 4.1;
- Passo 3: se possível, determine  $\Gamma_j$  pela equação (5.29); caso contrário, pare;
- Passo 4: faça  $\alpha = \alpha_0$ ;
- Passo 5: se  $\|\alpha\Gamma\| < \epsilon$ , para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, então pare;
- Passo 6: obtenha  $x_{j+1} = x_j + \alpha\Gamma_j / \|\Gamma_j\|$ ;
- Passo 7: se  $x_{j+1} \in W$ , então calcule  $m(x_{j+1})$  pelo algoritmo 4.1 e vá para o passo seguinte; caso contrário, vá para o passo 9;
- Passo 8: se  $m(x_{j+1}) > m(x_j)$ , então faça  $j=j+1$  e retorne ao passo 3;
- Passo 9: faça  $\alpha = \alpha/2$  e retorne ao passo 5.

No passo 6 não foi realizada uma busca unidimensional para a determinação do  $\alpha$  ótimo, primeiro porque, em virtude da sua geometria, a solução deste novo problema tornaria o algoritmo extremamente complexo, considerando-se, por exemplo, a verificação da restrição  $x \in W$ , e depois porque os resultados práticos obtidos pela versão acima mostram-se satisfatórios.

A ausência de convexidade, tanto da função objetivo  $m(x)$  quanto do conjunto  $W$  na equação (5.1), não permite assegurar a otimalidade global de tal algoritmo. Conforme foi visto, no entanto, para se obter uma solução do problema inicial dado é necessário e suficiente encontrar um controlador  $x$  com  $m(x) \geq 1$ . Caso não se encontre um controlador robusto aceitável, pode-se modificar a ordem do controlador ou escolher outros parâmetros para o controlador inicial  $x_0$ .

O algoritmo 5.1 foi implementado e aplicado a vários exemplos. Alguns deles têm seus resultados apresentados no próximo capítulo.

## CAPÍTULO 6

### APLICAÇÕES

6.1 INTRODUÇÃO

6.2 SISTEMA EM TEMPO DISCRETO

6.3 CONTROLE DE VELOCIDADE DE UM BRAÇO DE ROBÔ

6.4 PROBLEMA DE ESTABILIDADE DE UMA AERONAVE

## 6.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, serão apresentados alguns exemplos com o objetivo de ilustrar a metodologia desenvolvida nos capítulos anteriores. Na próxima seção, será considerado um processo em tempo discreto sujeito a incertezas de três parâmetros (Araújo e Santos-Mendes, 1991). Um controlador é projetado de maneira tal que todos os pólos do sistema em malha-fechada estejam contidos num determinado círculo, inscrito no círculo unitário. Na seção 6.3, um modelo simplificado de acionamento de um robô (Åström e Wittenmark, 1989) será analisado, considerando-se certos intervalos para as características de resposta transitória - o sobre-sinal máximo e o tempo de acomodação - no projeto do controlador robusto. Finalmente, a estabilidade longitudinal de uma aeronave (Petersen e Hollot, 1986) será analisada na seção 6.4.

## 6.2 SISTEMA EM TEMPO DISCRETO

Considera-se o processo em tempo discreto dado pela seguinte função de transferência pulsada:

$$P(z^{-1}) = \frac{z^{-d} B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{z^{-1}(q_2 + q_3 z^{-1})}{(1 - z_1^{-1})(1 + q_1 z^{-1})} \quad (6.1)$$

onde os parâmetros  $q_1, q_2$  e  $q_3$  estão sujeitos aos seguintes intervalos de incerteza:

$$\begin{aligned} -0,99 < q_1 < -0,89 \\ 0,38 < q_2 < 0,58 \\ 0,36 < q_3 < 0,56 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Deseja-se encontrar um controlador que aloque os pólos do sistema em malha-fechada dentro da região D no plano complexo, apresentada na figura 6.1, apesar das incertezas paramétricas do processo.

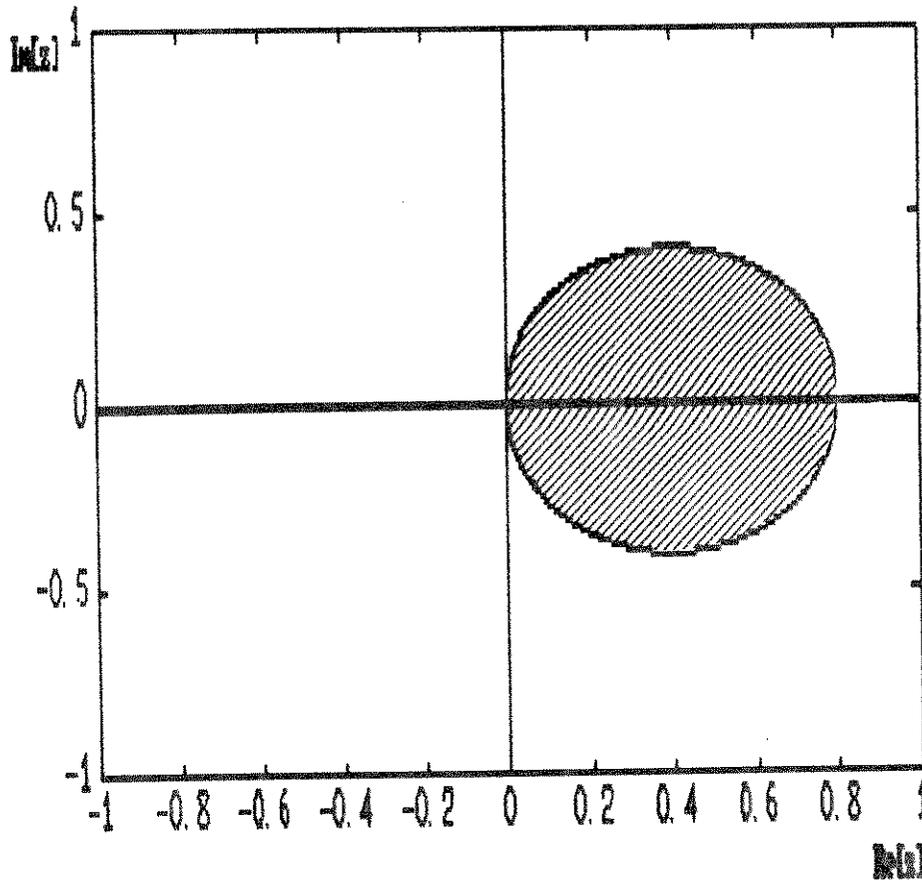


Fig. 6.1. Região D para os pólos de malha-fechada

O vetor de parâmetros do processo  $p$ , definido pela expressão (2.15), é dado por:

$$p = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Como uma das raízes do polinômio  $A(z^{-1})$  é conhecida, a dependência de parâmetros ( equação (3.17) ) pode ser expressa por:

$$p = S'q + s_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

onde  $q$  é o vetor de parâmetros incertos,  $q = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ .

Os intervalos em (6.2) resultam na seguinte região  $\Pi$ , definida pela expressão (3.16), na qual o vetor  $q$  deve estar contido:

$$\Pi = \{ q / q \in \mathbb{R}^3, Q(q - q_0) < \underline{1} \}, \quad (6.5)$$

onde:

$$Q = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ -20 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix},$$

$$q_0 = \begin{bmatrix} -0,94 \\ 0,48 \\ 0,46 \end{bmatrix}.$$

$\Pi$  descreve uma região paralelepipedal no espaço de parâmetros incertos.

A matriz  $S^*$ , que contém toda a informação do processo, obtida após a normalização descrita na seção 3.4, é igual a:

$$S^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1,94 & 0,05 & 0 & 0 \\ 0,94 & -0,05 & 0 & 0 \\ 0,48 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0,46 & 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

A estrutura adotada para o controlador robusto é dada por:

$$\frac{G(z^{-1})}{H(z^{-1})} = \frac{g_0 + g_1 z^{-1}}{1 + h_1 z^{-1}} \quad (6.7)$$

Considera-se o seguinte controlador  $x_0$ :

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ h_1 \\ g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,0887 \\ 0,7317 \\ -0,5509 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Este controlador  $x_0$  pertence ao conjunto  $W$  definido em (4.6).

O valor da medida de robustez obtido para  $x_0$ , através do algoritmo 4.1, é:

$$m(x_0) = 0,54.$$

Portanto, os maiores intervalos de incerteza admissíveis para as componentes do vetor de parâmetros incertos  $q$ , associados ao controlador  $x_0$ , são dados por:

$$\begin{bmatrix} -0,9674 \\ 0,4251 \\ 0,4051 \end{bmatrix} < q < \begin{bmatrix} -0,9125 \\ 0,5348 \\ 0,5148 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Esta relação define a maior região  $\Pi$  de estabilidade relativa associada ao controlador  $x_0$ . Obviamente, esta região de incerteza não contém a região de incerteza inicial apresentada em (6.2) e, como consequência,  $x_0$  não é uma solução do problema de alocação de pólos robusta ( $m(x_0) < 1$ ). O lugar das raízes do polinômio característico do sistema em malha-fechada, determinado para o controlador  $x_0$ , e a região de incerteza inicial (6.2), pode ser visto na figura 6.2.

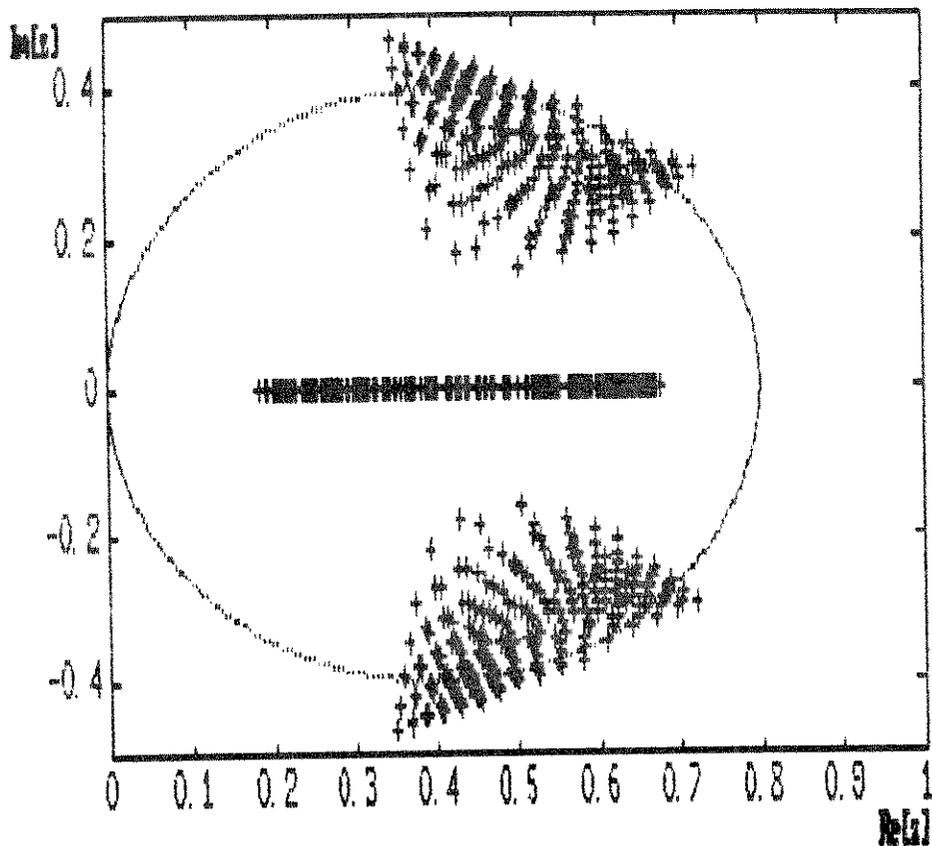


Fig. 6.2. O lugar das raízes para o controlador  $x_0$

Utilizando-se o algoritmo 5.1, para projeto de controladores robustos, com  $x_0$  como controlador inicial, obtém-se o seguinte resultado:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ h_1 \\ g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,1559 \\ 0,6707 \\ -0,5530 \end{bmatrix} \in W, \quad (6.10)$$

com

$$m(x) = 1,03.$$

Portanto, a maior região de incerteza admissível para o vetor  $q$ , associada a  $x$ , é:

$$\begin{bmatrix} -0,9915 \\ 0,3770 \\ 0,3570 \end{bmatrix} < q < \begin{bmatrix} -0,8885 \\ 0,5830 \\ 0,5630 \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

O controlador  $x$  é uma solução do problema, pois  $m(x) \geq 1$ . O lugar das raízes do polinômio característico do sistema em malha-fechada, determinado para o controlador  $x$  e a região de incerteza acima (6.11), está contido na região  $D$ , como mostra a figura 6.3.

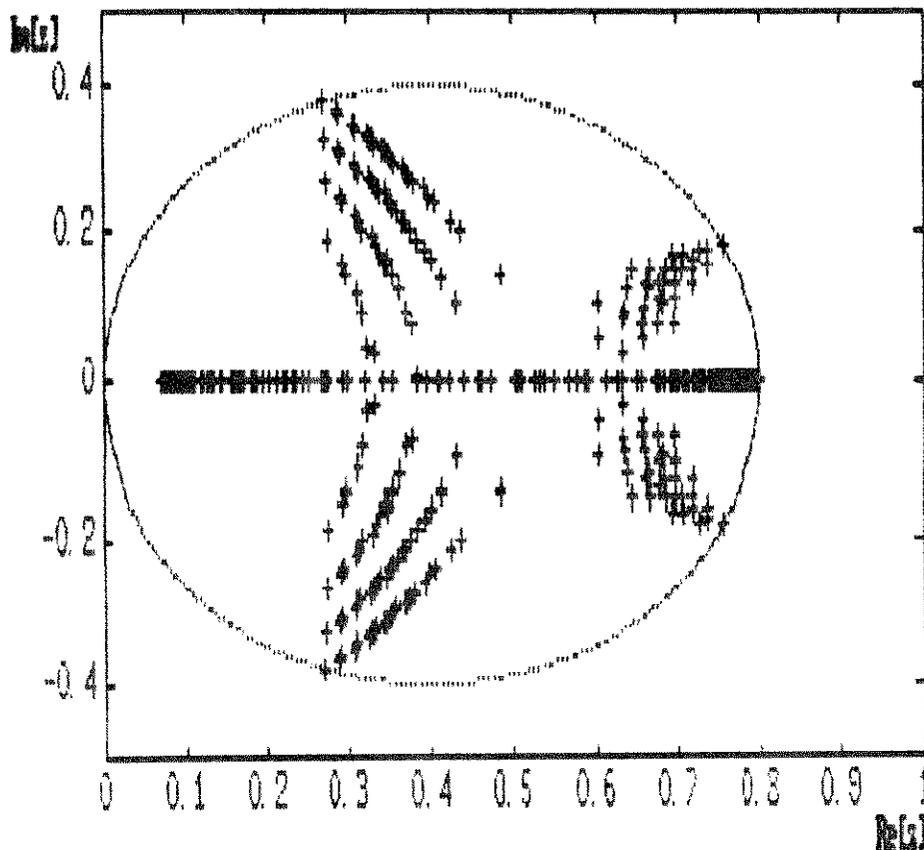


Fig. 6.3. O lugar das raízes para o controlador x

### 6.3 CONTROLE DE VELOCIDADE DE UM BRAÇO DE ROBÔ

Nesta seção, um modelo simplificado de acionamento de um robô com apenas uma junta será analisado. Este modelo leva em consideração o efeito de torção na transmissão de torque (Latre, 1988). Como em muitas aplicações em robótica, nenhuma malha de controle de posição será incluída.

Considera-se um motor c.c. controlado por armadura para acionamento da junta

do robô. O torque fornecido por este é proporcional à corrente de armadura  $i_a$ :

$$T_m = k_m i_a \quad , \quad (6.12)$$

onde  $k_m$  é a constante de torque do motor.

Definindo-se o efeito de torção através da constante de mola  $k$  e do coeficiente de atrito viscoso  $d$ , o motor e o robô satisfazem as seguintes equações simplificadas:

$$T_m = J_m \ddot{\theta}_m + nJ_a \ddot{\theta}_a \quad (6.13)$$

e

$$J_a \ddot{\theta}_a = k(n\theta_m - \theta_a) + d(n\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_a) \quad , \quad (6.14)$$

onde:

$\theta_m$  é o deslocamento angular do eixo do motor;

$\theta_a$  é a posição do braço do robô;

$n$  é a relação de engrenagem;

$J_m$  é o momento de inércia do motor;

$J_a$  é o momento de inércia do braço do robô.

Este efeito introduz pólos complexos conjugados com pouco amortecimento (Latre, 1988).

Supondo-se que todas as condições iniciais são nulas e considerando-se as transformadas de Laplace das equações (6.12), (6.13) e (6.14), a função de transferência que relaciona a velocidade angular do motor com a corrente de armadura é igual a:

$$P(s) = \frac{W_m(s)}{I_a(s)} = \frac{k_m (J_a s^2 + ds + k)}{J_a J_m s^3 + d(J_m + n^2 J_a) s^2 + k(J_m + n^2 J_a) s} \quad , \quad (6.15)$$

com  $J_a \in (0,0002;0,002)$ ;  $J_m=0,002$ ;  $d=0,0001$ ;  $k=100$ ;  $k_m=0,5$ ; e  $n=1$ . O momento de inércia do robô  $J_a$  varia com a posição do braço.

Deseja-se controlar a velocidade angular deste processo em tempo discreto, com um período de amostragem dado por:

$$T= 0,001 \text{ s} \quad (6.16)$$

A transformada  $z$  da função (6.15), com o segurador de ordem zero, é obtida como:

$$P(z)= \frac{q_3 z^2 + q_4 z + q_5}{(z-1)(z^2 + q_1 z + q_2)} \quad (6.17)$$

Os coeficientes  $q_i$ ,  $i \in \{1,2,3,4,5\}$ , dos polinômios do processo discretizado, são funções não-lineares do parâmetro incerto  $J_a$ . Neste caso, para a aplicação da metodologia desenvolvida neste trabalho, adota-se uma aproximação linear, e os parâmetros  $q_i$  ficam sujeitos, então, aos seguintes intervalos de incerteza, quando  $J_a$  varia de 0,0002 a 0,002:

$$\begin{aligned} -1,90074 < q_1 < -1,47434 \\ 0,99945 < q_2 < 0,99991 \\ 0,24792 < q_3 < 0,24797 \\ -0,48344 < q_4 < -0,37646 \\ 0,24784 < q_5 < 0,24791 \end{aligned} \quad (6.18)$$

A discretização acima aumenta a incerteza do processo.

A região  $D$  no plano complexo, onde os pólos do sistema em malha-fechada devem estar contidos, pode ser vista na figura 6.4.

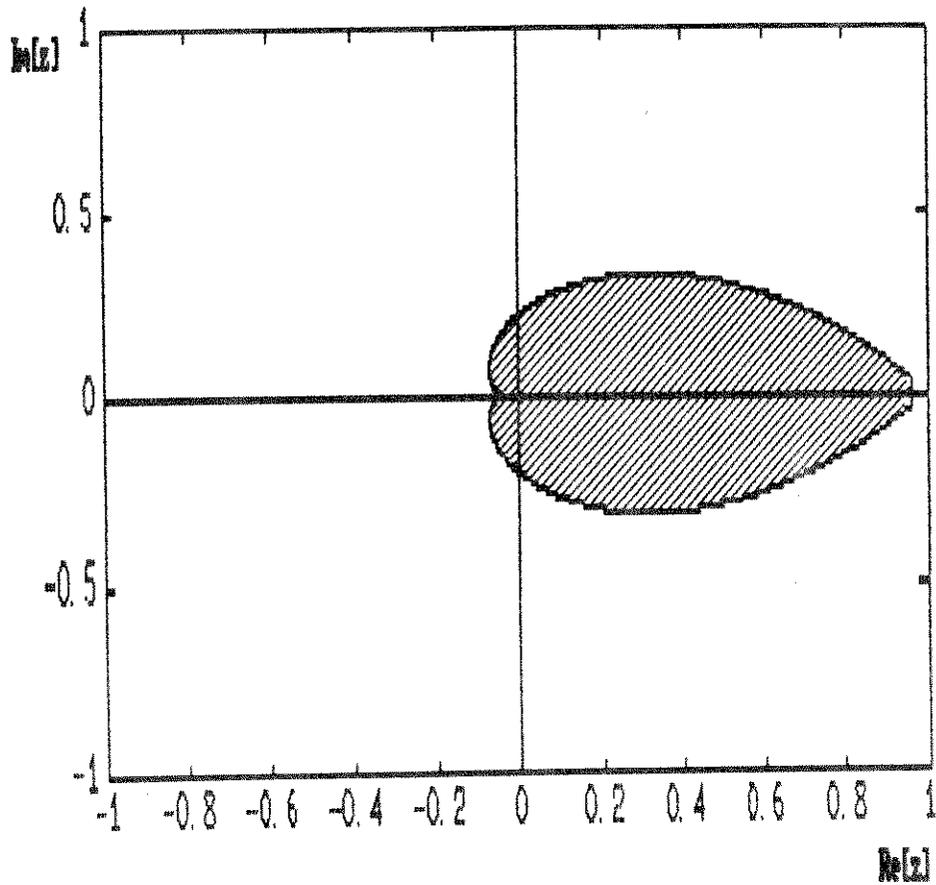


Fig. 6.4. Região D para os pólos de malha-fechada

Esta região D foi obtida considerando-se o tempo de acomodação  $t_s < 0,1s$  ( $\zeta\omega > 40$ ) e o sobre-sinal máximo  $M_p < 0,05$  ( $\zeta > 0,7$ ), como especificações de resposta transitória.

O vetor  $\mathbf{p}$  de parâmetros do processo, definido pela expressão (2.15), é dado por:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

A relação de dependência entre o vetor de parâmetros  $p$  e o vetor de parâmetros incertos  $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T$  é expressa por:

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

A matriz  $S^*$ , definida pela equação (3.30), é igual a:

$$S^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2,687540 & 0,2132 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,687220 & -0,2132 & 0,00023 & 0 & 0 & 0 \\ -0,999680 & 0 & -0,00023 & 0 & 0 & 0 \\ 0,247945 & 0 & 0 & 2,5 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ -0,429950 & 0 & 0 & 0 & 0,05349 & 0 \\ 0,247875 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,5 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

Considera-se a seguinte estrutura para o controlador robusto:

$$\frac{G(s)}{H(s)} = \frac{g_0 s^2 + g_1 s + g_2}{s^2 + h_1 s + h_2} \quad (6.22)$$

O problema se resume, então, em encontrar os coeficientes dos polinômios  $G(s)$  e  $H(s)$  de modo que as especificações de controle adotadas, descritas pela região  $D$  da figura 6.4, sejam asseguradas, apesar das incertezas paramétricas (6.18).

O controlador mais robusto obtido pelo algoritmo 5.1 foi:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ h_1 \\ h_2 \\ g_0 \\ g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6,3423 \\ -8,3111 \\ -24,0179 \\ 58,2879 \\ -33,5969 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

A medida de robustez do controlador  $x$  (6.23) é igual a:

$$m(x) = 0,0045$$

Portanto, não foi possível obter um controlador com medida de robustez maior ou igual a unidade.

Este resultado poderia, eventualmente, ser melhorado com uma análise mais elaborada da região de incerteza paramétrica obtida para o processo em tempo discreto. É importante observar que, neste exemplo, apenas um parâmetro é incerto no modelo em tempo contínuo. No entanto, o procedimento utilizado levou a um aumento do grau de incerteza  $nq$  dos parâmetros do processo em tempo discreto. Nestes casos, duas possibilidades se apresentam. Em primeiro lugar, relações não-lineares entre os parâmetros discretos e os parâmetros contínuos produzem uma variedade não-linear no espaço de parâmetros em tempo discreto. Nesta situação, nada se pode fazer. Em segundo lugar, a região gerada no espaço de parâmetros em tempo discreto pode estar contida em alguma variedade linear de dimensão menor do que  $nq$ , o que reduziria o grau de incerteza do problema, melhorando os resultados.

Outros aspectos que também poderiam ser analisados são a redução da região de incerteza paramétrica inicial e o aumento da região  $D$  que contém os pólos de malha-fechada do sistema.

## 6.4 PROBLEMA DE ESTABILIDADE DE UMA AERONAVE

Várias formulações podem ser usadas para se obter as equações de movimento linearizadas de uma aeronave. Em análises de controle, normalmente estas equações são separadas em dois conjuntos independentes - um deles contendo as equações do movimento longitudinal e o outro as do movimento lateral (Elliott, 1977). Nesta seção é analisada a estabilidade longitudinal de uma aeronave, modelo A4D (Petersen e Hollot, 1986), em certas condições de voo. A figura 6.5 apresenta um esboço da aeronave, juntamente com as notações utilizadas.

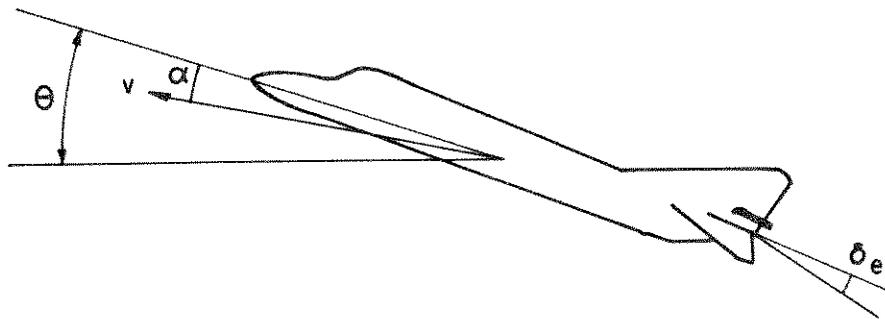


Fig. 6.5. Esboço da aeronave

A dinâmica longitudinal linearizada da aeronave, a 0,9 mach e 15.000 ft de altitude, é dada pela seguinte equação de estado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad , \quad (6.24)$$

com

$$A = \begin{bmatrix} -0,06050 & 32,37 & 0 & 32,2 \\ -0,00014 & -1,475 & 1 & 0 \\ -0,01110 & M_{\alpha} & -2,793 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,1064 \\ -33,8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O vetor de estado escolhido é dado por:

$$x(t) = \begin{bmatrix} v \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix}, \quad (6.25)$$

onde:

$v$  é a velocidade da aeronave (ft/s);

$\alpha$  é o ângulo de ataque (rad);

$\theta$  é a inclinação longitudinal (ângulo de *pitch*) (rad).

A variável de controle  $u(t)$  é a deflexão  $\delta_e$  (grau) do leme de profundidade, e a equação de saída é igual a:

$$y(t) = [ 0 \ 1 \ 0 \ 0 ] x \quad (6.26)$$

O parâmetro  $M_\alpha$  na matriz A, em (6.24), chamado de derivada de estabilidade estática longitudinal, desempenha um papel importante no estudo da dinâmica de aeronaves. Este parâmetro é bastante sensível a distúrbios, podendo ser fortemente influenciado pelas distorções aero-elásticas da asa, cauda e fuselagem, e pelas mudanças nos centros de gravidade e de aerodinâmica da aeronave. Este último é o ponto sobre o qual as variações no ângulo de ataque agem efetivamente. Todos estes fatores em conjunto indicam que existe um elevado grau de incerteza em  $M_\alpha$ .

Neste exemplo, o parâmetro  $M_\alpha$  está sujeito ao seguinte intervalo de incerteza:

$$-94,72 < M_\alpha < 25,28 \quad (6.27)$$

Deseja-se obter um controlador que mantenha a estabilidade robusta do sistema descrito pelas equações (6.24) e (6.26). Para a aplicação da metodologia desenvolvida neste trabalho, é necessário determinar a função de transferência equivalente para o sistema.

Notando-se que este sistema é observável, independentemente do parâmetro  $M_\alpha$ , a função de transferência que relaciona a saída  $y(t)$  com o controle  $u(t)$  é obtida como:

$$P(s) = \frac{-0,1064s^3 - 34,1036s^2 - 2,0629s + 0,1143}{s^4 + 4,3285s^3 + (4,3824 - M_\alpha)s^2 + (0,9786 - 0,0605M_\alpha)s + (0,5272 + 0,004508M_\alpha)} \quad (6.28)$$

A relação de dependência linear entre o vetor de parâmetros  $p$  e o parâmetro incerto  $M_\alpha$  é expressa por:

$$P = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -0,060500 \\ 0,004508 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} M_\alpha + \begin{bmatrix} 4,3285 \\ 4,3824 \\ 0,9786 \\ 0,5272 \\ -0,1064 \\ -34,1036 \\ -2,0629 \\ 0,1143 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

A estrutura adotada para o controlador robusto é dada por:

$$\frac{G(s)}{H(s)} = \frac{g_0 s + g_1}{s + h_1} \quad (6.30)$$

Utilizando-se o algoritmo 5.1, o seguinte controlador D-estabilizante, onde D é o semiplano esquerdo no plano complexo, foi obtido:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ h_1 \\ g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,08 \\ -0,65 \\ -0,85 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

com medida de robustez igual a:

$$m(x) = 1,03$$

O maior intervalo de incerteza admissível para  $M_\alpha$ , associado ao controlador x, é:

$$-96,99 < M_\alpha < 27,55 \quad (6.32)$$

O controlador x é uma solução aceitável para o problema, pois  $m(x) \geq 1$ . O lugar das raízes do polinômio característico do sistema em malha-fechada, com o

parâmetro  $M_\alpha$  variando no intervalo dado em (6.32), pode ser visto na figura 6.6.

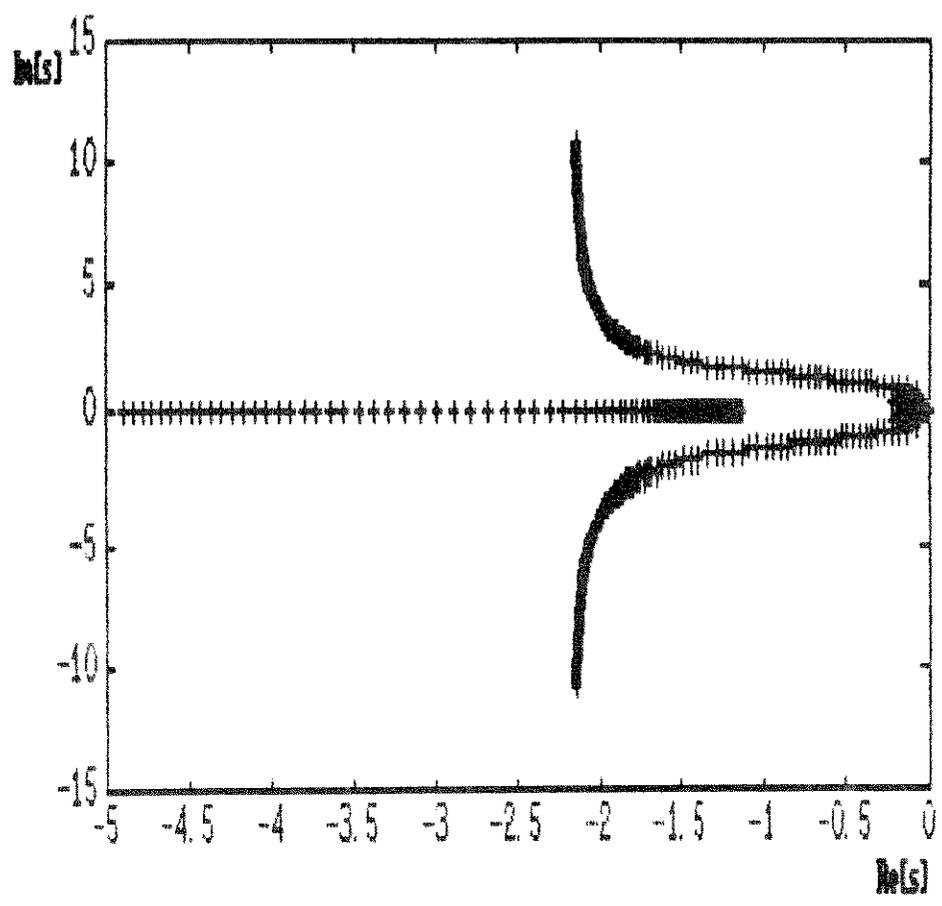


Fig. 6.6. O lugar das raízes para o controlador x

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

## 7.1 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi apresentada uma metodologia de projeto de controladores com desempenho robusto em relação às incertezas paramétricas (estruturadas). Este método é aplicável a processos cujos parâmetros podem estar sujeitos a incertezas ou depender linearmente de um outro conjunto de parâmetros incertos. As incertezas são descritas através de intervalos, conhecidos *a priori*, e não há restrição quanto ao número de parâmetros incertos.

As características de desempenho desejadas no projeto de controladores robustos são especificadas por uma região no plano complexo, na qual devem estar localizados os pólos de malha-fechada, para toda incerteza admissível do processo. A única restrição a esta região é que seja conexa.

Utilizando-se estas considerações, uma função medida de robustez foi definida para a comparação entre controladores. Através desta é possível determinar os intervalos máximos para os parâmetros incertos, ou a maior região hiperparalelepipedal no espaço de parâmetros do processo, associada a um controlador dado, de maneira que a estabilidade relativa do sistema seja assegurada.

Este resultado também pode ser usado como um complemento prático do *método do lugar das raízes*, com o qual se analisa a influência de apenas um parâmetro na localização das raízes da equação característica. Com este resultado é possível verificar se as raízes de um polinômio intervalo pertencem a uma região dada no plano complexo.

Um algoritmo iterativo para o projeto de controladores robustos foi apresentado. Este algoritmo se baseia na busca do controlador que maximiza a função medida de robustez. A direção de busca proposta foi determinada analiticamente a partir do gradiente desta função. Nos pontos em que o gradiente não existe, uma direção alternativa foi adotada.

Este algoritmo não assegura que um máximo global seja encontrado. A falta de garantias de otimalidade, entretanto, pode ser compensada pelo fato de que uma condição necessária e suficiente para se obter uma solução para o problema de alocação de pólos robusta é que o controlador resultante possua uma medida de robustez maior ou igual a unidade.

A função medida de robustez, definida neste trabalho, pode fornecer

resultados conservativos nos casos em que os coeficientes do polinômio característico do sistema em malha-fechada forem funções não-lineares de um conjunto de parâmetros incertos. Isto acontece, por exemplo, em sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas, sujeitos a incertezas paramétricas. O problema de síntese de controladores robustos, através de atribuição de região de pólos, para sistemas multivariáveis sujeitos a incertezas estruturadas, constitui uma importante área de pesquisa, a ser desenvolvida.

Algumas sugestões para estudos futuros são a extensão destes resultados de modo a permitir o tratamento de regiões mais gerais, para localização dos pólos de malha-fechada do sistema, e o desenvolvimento de algoritmos de projeto mais eficientes. A exigência de que a região de alocação seja conexa pode ser limitante em algumas aplicações como, por exemplo: problemas de alocação de pólos dominantes e projetos de filtros de Butterworth com parâmetros incertos, onde é necessária a separação dos pólos.

Uma extensão deste trabalho, que leva em consideração a presença de perturbações estocásticas para o caso discreto, está sendo realizada por Paiva (1991).

Outra possibilidade de extensão é a abordagem conjunta dos problemas de estimação robusta e controle robusto. O problema de estimação robusta consiste em obter uma região no espaço paramétrico do processo a partir de medidas de entrada e saída e do conhecimento de limitantes para a amplitude das perturbações (Clement, 1987). Esta região pode ser utilizada no contexto deste trabalho para a obtenção de um controlador. Em Messaoud et al. (1992), uma primeira tentativa de resolução deste problema *on line* é realizada.

Finalmente, outra área de pesquisa importante é o desenvolvimento de técnicas que tratem simultaneamente de incertezas estruturadas e não-estruturadas.

APÉNDICE:

PROVA DO TOEREMA 4.1

Neste apêndice será demonstrado o teorema 4.1, que determina a função medida de robustez local  $m(x,z)$ .

Considera-se o Item a) do teorema 4.1 — os vetores  $a$  e  $b$  em  $U(x,z)$  são linearmente dependentes:

$$m(x,z) = k_z = \frac{|a_0|}{\sum_{i=1}^{nq} |a_i|} \quad . \quad (A.1)$$

Pela definição de  $m(x,z)$ ,  $k_z$  é o maior valor do parâmetro  $k$  tal que  $P(k) \cap v(x,z) \equiv \emptyset$ . Observa-se que  $P(k)$  é uma região hipercúbica, centrada na origem, com arestas de comprimento igual a  $2k$ , e  $v(x,z)$  é definido pela expressão (4.14).

Inicialmente, será provado, por contradição, que  $P(k_z) \cap v(x,z) \equiv \emptyset$ . Seja  $q^*$  um vetor pertencente à interseção entre  $P(k_z)$  e  $v(x,z)$  dado por:

$$q^* = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_{nq}]^T \in \mathbb{R}^{nq} \quad . \quad (A.2)$$

Como  $q^* \in P(k_z)$ , então:

$$|q_i| < k_z, \forall i \in \{1, 2, \dots, nq\} \quad . \quad (A.3)$$

A relação a seguir é válida, pois  $q^* \in v(x,z)$ :

$$\sum_{i=1}^{nq} a_i q_i = -a_0 \quad . \quad (A.4)$$

Considerando-se o módulo da equação (A.4), decorre da desigualdade triangular que:

$$|-a_0| = \left| \sum_{i=1}^{nq} a_i q_i \right| \leq \sum_{i=1}^{nq} |a_i q_i| \quad . \quad (A.5)$$

Logo:

$$|-a_0| \leq \sum_{i=1}^{nq} |a_i| |q_i| \quad . \quad (A.6)$$

A partir da desigualdade (A.3), tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{nq} |a_i| |q_i| < \sum_{i=1}^{nq} |a_i| k_z \quad . \quad (A.7)$$

Comparando-se as equações (A.6) e (A.7), pode-se concluir que:

$$k_z > \frac{|-a_0|}{\sum_{i=1}^{nq} |a_i|} \quad . \quad (A.8)$$

Este resultado é uma contradição, pois, pela equação (A.1)  $k_z$  é dado por:

$$k_z = \frac{|a_0|}{\sum_{i=1}^{nq} |a_i|} \quad .$$

A interseção  $P(k_z) \cap v(x,z) \equiv \emptyset$ , portanto, é vazia, devido à arbitrariedade na escolha do  $q^*$ .

Em seguida, será provado que  $k_z$  é o maior valor de  $k$  tal que  $P(k) \cap v(x,z) \equiv \emptyset$ . Seja  $k' > k_z$  tal que

$$P(k') \cap v(x,z) \equiv \emptyset \quad . \quad (A.9)$$

Considera-se o vetor  $q^* \in \mathbb{R}^{nq}$  cujas componentes são definidas como:

$$q_i = \text{sgn}(a_i)k_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, nq\}, \quad (\text{A.10})$$

onde a função  $\text{sgn}(\cdot)$ , apresentada em (5.18), é igual a:

$$\text{sgn}(a) = \begin{cases} +1, & \text{se } a > 0 \\ 0, & \text{se } a = 0 \\ -1, & \text{se } a < 0 \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

e  $k_i$  é dado por:

$$k_i = \frac{-a_0}{\sum_{i=1}^{nq} |a_i|} \quad (\text{A.12})$$

Será demonstrado, a seguir, que o vetor  $q^*$ , definido em (A.10), pertence a  $P(k')$  e a  $v(x, z)$  e que, portanto, a interseção em (A.9) não é vazia com  $k' > k_z$ .

Como  $|q_i| = |k_i| = k_z, \forall i \in \{1, 2, \dots, nq\}$ , então:

$$|q_i| < k', \forall i \quad (\text{A.13})$$

A partir da desigualdade (A.13), portanto, pode-se concluir que  $q^* \in P(k')$ .

Considerando-se a definição em (A.10), a seguinte relação é válida:

$$\sum_{i=1}^{nq} a_i q_i = \sum_{i=1}^{nq} a_i \text{sgn}(a_i) k_i \quad (\text{A.14})$$

A expressão (A.14) pode ser simplificada como:

$$\sum_{i=1}^{nq} a_i q_i = \sum_{i=1}^{nq} |a_i| k_i \quad . \quad (\text{A.15})$$

Substituindo-se o valor de  $k_1$ , dado pela equação (A.12), na expressão acima (A.15), tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{nq} a_i q_i = -a_0 \quad (\text{A.16})$$

Logo, o vetor  $q^*$  também pertence a  $v(x,z)$ . Como consequência,  $k_z$  é o maior valor de  $k$  tal que  $P(k) \cap v(x,z) \equiv \emptyset$ , ou seja,  $P(k_z)$  é o maior hiper-cubo, centrado na origem,

limitado pelo hiperplano  $\sum_{i=1}^{nq} a_i q_i = -a_0$ .

Considera-se, agora, o item b) do teorema 4.1 — os vetores  $a$  e  $b$  em  $U(x,z)$  não são linearmente dependentes:

$$m(x,z) = k_z = \max_i \frac{|c_{0i}|}{\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{nq} |c_{ji}|}, \quad i=1,2,\dots,nq, \quad (\text{A.17})$$

onde  $c_{ji} = a_j b_i - a_i b_j$ .

O conjunto  $v(x,z)$ , definido em (4.14), pode ser expresso pela interseção entre os seguintes hiperplanos:

$$\sum_{j=1}^{nq} a_j q_j = -a_0 \quad (\text{A.18})$$

$$\sum_{j=1}^{nq} b_j q_j = -b_0 \quad . \quad (\text{A.19})$$

Neste caso, o problema de determinar  $k_z$ , o maior valor do parâmetro  $k$  tal que  $P(k) \cap v(x,z) \equiv \emptyset$ , pode ser dividido em vários problemas equivalentes ao do item a). Com este objetivo serão analisadas todas as projeções de  $v(x,z)$  sobre os hiperplanos ortogonais às coordenadas  $q_i$ ,  $i \in \{1,2,\dots,nq\}$ .

Obtendo-se, inicialmente, o valor de  $q_i$  em função dos  $q_j$  ( $j \neq i$ ) na equação (A.18) e, em seguida, substituindo-o na equação (A.19) (ou vice-versa), tem-se que a projeção de  $v(x,z)$  sobre o hiperplano ortogonal à coordenada  $q_i$  é dada por:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{nq} (a_{ji} b_{ij} - a_{ij} b_{ji}) q_j = -(a_{0i} b_{i0} - a_{i0} b_{0i}) \quad ,$$

ou mais sucintamente:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{nq} c_{ji} q_j = -c_{0i} \quad . \quad (A.20)$$

Como demonstrado anteriormente no item a), o maior hipercubo, centrado na origem, limitado pelo hiperplano (A.20) é obtido para  $k$  igual a:

$$k = k_i = \frac{|-c_{0i}|}{\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{nq} |c_{ji}|} \quad . \quad (A.21)$$

Obviamente,  $c_{ji} = 0$  para  $j=i$ .

O maior valor do parâmetro  $k$  tal que  $P(k) \cap v(x,z) \equiv \emptyset$  é dado pela maximização de  $k_i$ ,  $i \in \{1,2,\dots,nq\}$ , pois todas as projeções de  $v(x,z)$  consideradas são ortogonais a cada  $q_i$ , ou seja:

$$k_z = \max_i k_i = \max_i \frac{|-c_{0i}|}{n_i \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}} |c_{ji}|}, i=1,2,\dots,nq. \quad (\text{A.22})$$

$k_z$  determina, então, o maior hipercubo, centrado na origem, limitado pela interseção entre os hiperplanos (A.18) e (A.19). Este resultado é igual ao apresentado em (A.17). Portanto, a demonstração do teorema 4.1 está concluída.

REFERÊNCIAS  
BIBLIOGRÁFICAS

- Ackermann, J. (1980). Parameter space design of robust control systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-25, No.6, 1058-1072.
- Ackermann, J. (1985). *Sampled-Data Control Systems: Analysis and Synthesis, Robust System Design*. Springer-Verlag, Berlin.
- Ackermann, J. E. e B. R. Barmish (1988). Robust Schur stability of a polytope of polynomials. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.33, No.10, 984-986.
- Anderson, B. D. O., E. I. Jury e M. Mansour (1987). On robust Hurwitz polynomials. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-32, No.10, 909-913.
- Araújo, H. X. de e R. Santos-Mendes (1991). Robust control design for linear systems with uncertain parameters. *Proceedings of the IFAC Symposium on Design Methods for Control Systems*, Zurich, Switzerland.
- Åström, K. J. e B. Wittenmark (1989). *Adaptive Control*. Addison-Wesley Pub. Company.
- Barmish, B. R. (1984). Invariance of the strict Hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-29, No.10, 935-936.
- Bartlett, A. C. e C. V. Hollot (1988). A necessary and sufficient condition for Schur invariance and generalized stability of polytopes of polynomials. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.33, No.6, 575-578.
- Bialas, S. e J. Garloff (1985). Stability of polynomials under coefficient perturbation. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-32, No.3, 310-312.

- Biernacki, R. M., H. Hwang e S. P. Bhattacharyya (1987). Robust stability with structured real parameter perturbations. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-32, No.6, 495-506.
- Bose, N. K., E. I. Jury e E. Zeheb (1988). On robust Hurwitz and Schur polynomials. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.33, No.12, 1166- 1168.
- Clement, T. (1987). Estimation d'incertitude paramétrique dans un contexte de bruit de sortie inconnu mais borné. *Thèse de Doctorat*, Inst. National Polytech. de Grenoble, France.
- De Larminat, P. (1989). La commande robuste: un tour d'horizon. *Journées Nationales du G. R. "Automatique"*.
- Elliott, J. R. (1977). NASA's advanced control law program for the F-8 digital fly-by-wire aircraft. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-22, No.5, 753-757.
- Fam, A. T. e J. S. Meditch (1978). A canonical parameter space for linear systems design. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-23, No.3, 454-458.
- Franklin, G. F. e J. D. Powell (1980). *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley Pub. Company, Inc..
- Hollot, C. V. e A. C. Bartlett (1986). Some discrete-time counterparts to Kharitonov's stability criterion for uncertain systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-31, No.4, 355-356.
- Isermann, R. (1991). *Digital Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin.

- Juang, Y.-T., Z.-C. Hong e Y.-T. Wang (1989). Robustness of pole-assignment in a specified region. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.34, No.7, 758-760.
- Keel, L. H., S. P. Bhattacharyya e J. W. Howze (1988). Robust control with structured perturbations. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.33, No.1, 68-78.
- Kharitonov, V. L. (1979). Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differential Equations*, Vol.14, 1483-1485.
- Kuo, B. C. (1980). Digital Control Systems. Holt, Rinehart and Winston, Inc., NY.
- Latre, L. G. (1988). Modelo do acionamento das juntas - Controle de posição da junta isolada. *Notas em Modelagem e Controle de Robôs*, FEE/Unicamp.
- Messaoud, H., G. Favier e R. Santos-Mendes (1992). Adaptive robust pole placement by connecting robust identification and control. *ACASP*.
- Ogata, K. (1987). Discrete-Time Control Systems. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ.
- Paiva, E. C. de (1991). Alocação de pólos robusta com rejeição a perturbações estocásticas. *Dissertação de Mestrado a ser apresentada à FEE-UNICAMP*.
- Petersen, I. R. e C. V. Hollot. (1986). A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. *Automatica*, Vol.22, No.4, 397-411.

- Santos-Mendes, R. (1988). Synthèse de régulateurs robustes à placement de pôles. *Thèse de Doctorat*, Université Paul Sabatier de Toulouse, France.
- Šiljak, D. D. (1989). Parameter space methods for robust control design: a guided tour. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.34, No.7, 674-688.
- Soh, C. B., C. S. Berger e K. P. Dabke (1985). On the stability properties of polynomials with perturbed coefficients. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-30, No.10, 1033-1036.
- Soh, C. B., C. S. Berger e K. P. Dabke (1987). Addendum to "On the stability properties of polynomials with perturbed coefficients". *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-32, No.3, 239-240.
- Soh, Y. C. (1989). Strict Hurwitz property of polynomials under coefficient perturbation. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.34, No.6, 629-632.
- Soh, Y. C., R. J. Evans, I. R. Petersen e R. E. Betz (1987). Robust pole assignment. *Automatica*, Vol.23, No.5, 601-610.
- Wei, K. H. e R. K. Yedavalli (1987). Invariance of strict Hurwitz property for uncertain polynomials with dependent coefficients. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-32, No.10, 907-909.
- Yedavalli, R. K. (1985). Improved measures of stability robustness for linear state space models. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-30, No.6, 577-579.

Yeung, K. S . e S. S. Wang (1987). A simple proof of Kharitonov's theorem. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-32, No.9, 822-823.

Zhou, K. e P. Khargonekar (1987). Stability robustness bounds for linear state-space models with structured uncertainty. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-32, No.7, 621-623.