

Murilo Trindade de Oliveira

# **ANÁLISE DO PROBLEMA DO ATERRAMENTO EM MODELOS ELETROSTÁTICOS**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC/UNICAMP) como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Eletrônica, Microeletrônica e Optoeletrônica.

Orientador: Prof. Dr. Cesar José Bonjuani Pagan

Campinas, SP  
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

OL4a Trindade de Oliveira, Murilo  
Análise do problema do aterramento em modelos  
eletrostáticos / Murilo Trindade de Oliveira. – Campinas, SP:  
[s.n.], 2012.

Orientador: Cesar José Bonjuani Pagan.  
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
Computação.

1. Eletrostática - Estudo e ensino. 2. Eletromagnetismo -  
Engenharia. 3. Interações eletrostáticas. 4.  
Eletromagnetismo - Modelos matemáticos. 5. Correntes  
elétricas - Aterramento. I. Pagan, Cesar José Bonjuani. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Problem analysis of electrical grounding in electrostatic models

Palavras-chave em Inglês: Electrostatic - Study and teaching, Electromagnetism -  
Engineering, Electrostatic interactions, Electromagnetism -  
Mathematical models, Electric currents - Grounding

Área de concentração: Eletrônica, Microeletrônica e Optoeletrônica

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora: Andre Koch Torres Assis, Yaro Burian Junior

Data da defesa: 31-01-2012

Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

## COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

**Candidato:** Murilo Trindade de Oliveira

**Data da Defesa:** 31 de janeiro de 2012

**Título da Tese:** "Análise do Problema do Aterramento em Modelos Eletrostáticos"

Prof. Dr. Cesar José Bonjuani Pagan (Presidente): \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Andre Koch Torres Assis: Andre Koch Torres de Assis

Prof. Dr. Yaro Burian Junior: Yaro Burian Junior

*À Angelica e Luiz*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Luiz e Angelica, e aos meus irmãos por todo o incentivo durante a realização deste trabalho. Dedico este trabalho a vocês.

Agradecimento mais do que especial ao meu orientador e amigo, Prof. Cesar Pagan, que incitou a centelha do conhecimento em mim e me mostrou o mundo do eletromagnetismo, sempre me impressionando com suas argumentações. Sua ajuda neste trabalho foi indispensável e determinante. Agradeço sinceramente.

À todos os docentes do DMCSI, em especial aos professores Bottura e Gilmar, que estiveram presentes nesta caminhada, sempre me aconselhando e incentivando no desenvolvimento do trabalho. Ao Prof. Henor Artur da Escola de Minas de Ouro Preto, que sempre me apoiou e me ajudou nas horas que eu precisei. Meu aprendizado, além do fruto do meu trabalho se deve também aos professores, cuja árdua tarefa é transmitir o conhecimento e atentar o aluno a um mundo novo, repleto de novas ideias. Um muito obrigado a todos.

À toda minha família, em especial à Tia Lena, à minha avó Cacilda, à minha madrinha Tereza, aos tios Moacir, Eloina, Marcos, Elanir, Zequinha e Fernando.

À minha avó Santa pela grande admiração. E que sempre me incentivou a ler e estudar desde muito cedo.

Aos irmãos da Associação República Boemia de Ouro Preto, um exemplo de fraternidade. E a todos os amigos que fiz por onde passei: Itapetinga, Vitória da Conquista, São Paulo, Ouro Preto, São Luís e em especial aos amigos de Campinas que me ajudaram nos momentos de descontração: Paulo, Laryssa, Gabriela, Yuri, Mariana, Marcus, Thales, Thomaz, Johanna, Ana, Manuel, Ruth e a República Tomadaboa. Valeu galera!

À CAPES pelo suporte financeiro e a todos os funcionários da UNICAMP.

Muito obrigado a todos.

# Resumo

Nesta dissertação propomos a análise de uma idealização estabelecida dentro da teoria eletromagnética. A partir de *Um Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo*, James C. Maxwell expõe alguns conceitos físicos relativos ao aterramento elétrico em condutores. Assim, ele estima que a presença de um fio condutor que estabelece a conexão entre um corpo condutor e outro, ou mesmo ao terra elétrico, perturba as características do sistema envolvido (carga, potencial e campo elétrico). Desse modo, Maxwell preconiza que para sistemas teóricos ou idealizados, quão indefinidamente fino seja o fio, indefinidamente menor será a perturbação gerada.

A contextualização de uma idealização física dentro do ensino da teoria eletromagnética, especialmente para um curso de engenharia, é necessária no intuito de enfatizar as diferenças entre modelos reais e teóricos, uma vez também que os estudantes destes cursos devem estar interessados no desenvolvimento prático dos conceitos apreendidos em sala de aula.

Nesse sentido, quando tratamos do método das imagens, especificamente para o problema de uma carga na presença de um condutor esférico aterrado, temos a oportunidade de explorar os limites de um modelo teórico, delimitando quais nuances podem aproximá-lo de uma aplicação no mundo real.

Em vista disso, notamos que a maioria dos livros didáticos usados no ensino do eletromagnetismo, quando lidam com o problema do aterramento da esfera, simplesmente negligenciam a questão suscitada por Maxwell, de modo a transformar o problema em um exercício puramente matemático, sem necessidade de explicar os fundamentos físicos que sustentam a solução do problema.

Portanto, o intuito do presente trabalho é desenvolver um modelo cuja solução defina o comportamento físico para ambos os casos (levando em consideração ou não a existência da conexão da esfera com o terra elétrico), bem como verificar os limites deste modelo teórico.

**Palavras-chave:** método das imagens, esfera aterrada.

# Abstract

In this work, we propose the analysis about an idealized established within electromagnetic theory. From *A Treatise on Electricity and Magnetism*, James C. Maxwell presents some physical concepts related to electrical conductors grounded. In this direction, he estimates that the presence of a straight metallic wire which establishes the connection between a conducting body and another, or even to electrical ground, disturbs the properties of the system involved (charge, potential and electric field). Thus, Maxwell preconize for theoretical or idealized systems, how indefinitely thin is the wire, indefinitely lower is the disturbance created.

The context of a physical idealization into the teaching of electromagnetic theory, especially for an engineering degree is required in order to emphasize the differences between real and theoretical models, since the students of these courses should be also interested in the practical development of the concepts learned in the classroom.

In this sense, when we discussed the method of images, specifically to the problem of a charge point charge in the presence of a grounded conducting sphere, we have the opportunity to explore the limits of a theoretical model, outlining which nuances can approach it to a real world application.

In view of this, we note that most of the textbooks used in teaching electromagnetism, when deals with the problem of grounded sphere, they simply neglect the issue raised by Maxwell. In order to transform the problem into a purely mathematical exercise, without to explain the physical foundations that support the solution of the problem.

Therefore, the aim of this work is to develop a model whose solution defines the physical behavior for both cases (taking into account or not the existence of a connection of the sphere with the electrical ground), and to verify the limits of this theoretical model.

**Keywords:** method of images, grounded sphere.





# Sumário

|                                                                                      |              |
|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| <b>Lista de Figuras</b>                                                              | <b>xii</b>   |
| <b>Lista de Tabelas</b>                                                              | <b>xiii</b>  |
| <b>Lista de Símbolos</b>                                                             | <b>xvi</b>   |
| <b>Trabalhos Submetidos Pelo Autor</b>                                               | <b>xviii</b> |
| <b>1 Introdução</b>                                                                  | <b>1</b>     |
| 1.1 Organização do Trabalho . . . . .                                                | 5            |
| <b>2 Solução de Problemas Eletrostáticos</b>                                         | <b>7</b>     |
| 2.1 Equações de Poisson e de Laplace . . . . .                                       | 8            |
| 2.2 Unicidade da Solução com Condições de Contorno de Dirichlet ou Neumann . . . . . | 9            |
| 2.3 Solução Formal de um Problema de Contorno com Funções de Green . . . . .         | 10           |
| 2.4 Método das Imagens . . . . .                                                     | 12           |
| 2.5 Funções Ortogonais e Desenvolvimento em Série . . . . .                          | 16           |
| 2.6 Separação de Variáveis e Solução da Equação de Laplace . . . . .                 | 17           |
| 2.6.1 Equação e Polinômios de Legendre . . . . .                                     | 19           |
| 2.6.2 Equação e Funções de Bessel . . . . .                                          | 20           |
| <b>3 Solução do problema da esfera aterrada</b>                                      | <b>23</b>    |
| 3.1 Método das Imagens aplicado ao problema modificado . . . . .                     | 25           |
| 3.2 Superposição de Anéis de Carga . . . . .                                         | 28           |
| 3.2.1 Potencial gerado pelo arranjo de anéis de carga . . . . .                      | 32           |
| 3.2.2 Solução do problema de anéis de carga . . . . .                                | 37           |
| <b>4 Resultados</b>                                                                  | <b>39</b>    |
| 4.1 Metodologia . . . . .                                                            | 40           |
| 4.2 Discussão da solução . . . . .                                                   | 42           |
| <b>5 Conclusão</b>                                                                   | <b>51</b>    |
| <b>A Potencial gerado pela região assintótica do fio</b>                             | <b>53</b>    |

|                                                        |           |
|--------------------------------------------------------|-----------|
| <b>B Artigo submetido ao Journal of Electrostatics</b> | <b>57</b> |
| <b>Referências bibliográficas</b>                      | <b>62</b> |

# Lista de Figuras

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | Proposição clássica para o problema da carga pontual na presença de um condutor esférico aterrado. . . . .                                                                                                                                                                                            | 3  |
| 2.1  | Esfera condutora de raio $a$ , com carga $q$ e carga imagem $q'$ [1]. . . . .                                                                                                                                                                                                                         | 13 |
| 3.1  | Esfera aterrada na presença de uma carga puntiforme $Q$ considerando a existência de um fio-terra. . . . .                                                                                                                                                                                            | 24 |
| 3.2  | Modelo proposto para a solução do problema da esfera aterrada. . . . .                                                                                                                                                                                                                                | 25 |
| 3.3  | Vetor de carga $\mathbf{x}'$ e vetor de observação $\mathbf{x}$ no sistema de coordenada esférico, conforme [1]. . . . .                                                                                                                                                                              | 29 |
| 3.4  | Anel de carga $q$ de raio $a$ localizada sobre o eixo $z$ com centro em $z = b$ . . . . .                                                                                                                                                                                                             | 31 |
| 3.5  | Elemento diferencial de superfície para o caso: (a) cilíndrico e o (b) esférico. . . . .                                                                                                                                                                                                              | 32 |
| 3.6  | Relações de ângulos e comprimentos dos anéis pertencentes ora à esfera ora ao fio. . . . .                                                                                                                                                                                                            | 34 |
| 3.7  | Qualquer ponto sobre o fio apresenta uma região onde $r > r'$ e outra onde $r' > r$ . . . . .                                                                                                                                                                                                         | 36 |
| 4.1  | Integração numérica utilizando a regra do trapézio. . . . .                                                                                                                                                                                                                                           | 40 |
| 4.2  | Função densidade de carga $\sigma(z')$ para cada um dos métodos. As maiores diferenças foram encontradas na região da cauda. Elas são menores conforme o raio do fio aumenta: (a) para $d = 4a$ e $b = 0,001a$ ; (b) para $d = 4a$ e $b = 0,064a$ . A densidade está em unidades de $Q/a^2$ . . . . . | 42 |
| 4.3  | Função densidade $\sigma(z')$ sobre o fio relacionada a algumas posições da carga e espessura do fio-terra. A densidade está em unidades de $Q/a^2$ . . . . .                                                                                                                                         | 45 |
| 4.4  | Densidade de carga sobre a esfera. Simulação para quatro valores de $b$ e para o problema sem o fio, em relação a $d = 4a$ . A densidade está em unidades de $Q/a^2$ . . . . .                                                                                                                        | 46 |
| 4.5  | Diferença relativa da carga total sobre a esfera, considerando o fio-terra ou não. $Q_t$ é a carga sobre a esfera para uma dada espessura do fio e $Q_e = -\frac{a}{d}Q$ é a carga imagem sem considerar a existência do fio. Os valores estão expressos em porcentagens. . . . .                     | 46 |
| 4.6  | Carga total sobre o fio como uma função de $\frac{1}{\sqrt{d}}$ para alguns valores de $b$ . A carga está em unidades de $Q$ . . . . .                                                                                                                                                                | 47 |
| 4.7  | Carga total sobre o fio como uma função de $\sqrt{b}$ para alguns valores de $d$ . No detalhe, através de extrapolação polinomial (linhas contínuas), as curvas passam próximo ao zero quando $b$ tende a zero. A densidade de carga está em unidade de $Q$ . . . . .                                 | 48 |
| 4.8  | Linhas de Equipotenciais para $b = 0,5a$ e $d = 2,4a$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                       | 49 |
| 4.9  | Linhas de Equipotenciais para $b = 0,25a$ e $d = 2,4a$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                      | 49 |
| 4.10 | Linhas de Equipotenciais para $b = 0,125a$ e $d = 2,4a$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                     | 49 |

---

|      |                                                                                       |    |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.11 | Linhas de Equipotenciais para $b = 0,064a$ e $d = 2,4a$ .                             | 49 |
| 4.12 | Linhas de Equipotenciais para $b = 0,032a$ e $d = 2,4a$ .                             | 49 |
| 4.13 | Linhas de Equipotenciais para $b = 0,016a$ e $d = 2,4a$ .                             | 50 |
| 4.14 | Linhas de Equipotenciais para $b = 0,008a$ e $d = 2,4a$ .                             | 50 |
| 4.15 | Linhas de Equipotenciais para $b = 0,004a$ e $d = 2,4a$ .                             | 50 |
| 4.16 | Linhas de Equipotenciais para $b = 0,001a$ e $d = 2,4a$ .                             | 50 |
| 4.17 | Linhas de Equipotenciais sem considerar a existência da conexão com o terra elétrico. | 50 |

# Lista de Tabelas

|     |                                                                                           |    |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.1 | Mínimo da Função Densidade $\sigma(z') \times (-10^3)$ , em unidades de $Q/a^2$ . . . . . | 43 |
| 4.2 | Coordenada sobre o eixo $z$ para o ponto de mínimo, em unidades de $a$ . . . . .          | 44 |
| 4.3 | Carga Total sobre o Fio $\times (-10^3)$ , em unidade de $Q$ . . . . .                    | 48 |



# Lista de Símbolos

- $\mathbb{R}^{n \times n}$  - Espaço dos números reais de dimensão  $n \times n$
- $\mathbf{E}$  - Campo elétrico
- $\mathbf{F}_e$  - Força elétrica
- $W_e$  - Energia potencial elétrica
- $\Phi$  - Potencial escalar elétrico
- $\mathbf{x}$  - vetor correspondente a variável de observação
- $r, \theta, \phi$  - coordenadas esféricas
- $\rho, z, \phi$  - coordenadas cilíndricas
- $x, y, z$  - coordenadas cartesianas
- $\mathbf{x}'$  - vetor correspondente a variável de carga elétrica
- $\rho_v$  - Densidade volumétrica de carga elétrica
- $\sigma, \rho_s$  - Densidade superficial de carga elétrica
- $Q, q$  - magnitude de carga pontual elétrica
- $a$  - raio da esfera aterrada
- $b$  - raio cilíndrico do fio-terra
- $d$  - distância da carga pontual até o ponto de origem
- $\delta$  - Função delta de Dirac
- $P_l$  - Polinômio de Legendre de ordem  $l$
- $J_\nu, N_\nu, I_\nu, K_\nu$  - Funções de Bessel de ordem  $\nu$





# Trabalhos Submetidos Pelo Autor

1. Murilo Trindade de Oliveira, Cesar José Bonjuani Pagan. “The Method of Images applied to the grounded sphere: the problem of the ground wire”. Submetido ao “*Journal of Electrostatics*”. Veja o manuscrito no Apêndice B.



# Capítulo 1

## Introdução

Idealizações matemáticas regem o mundo da física. É através delas que a humanidade alinha o seu pensamento para o mais próximo possível do mundo real: das observações e dos experimentos. Por sua vez, no estudo da eletricidade, muitas vezes torna-se conveniente a adoção de modelos abstratos que representem, de forma apropriada, o comportamento real do que está sendo estudado em escala macroscópica. A introdução de modelos teve grande desenvolvimento no século XIX, por intermédio dos trabalhos de Faraday, Lord Kelvin, Maxwell e J.J. Thomson [2]. Em tese, os modelos estudados dentro das disciplinas de eletricidade não precisam corresponder à realidade em termos microscópicos, mas sua utilização está condicionada a uma eficiente aproximação da realidade macroscópica, constituindo uma ferramenta muito importante para o entendimento dos fenômenos que ocorrem na natureza. Por exemplo, na maioria das aplicações em Engenharia Elétrica não existe carga estática, porém os modelos adotados em eletrostática, ao longo dos anos, têm contribuído muito para o entendimento de campos elétricos em meios materiais. Por exemplo, os elementos de circuitos elétricos se consistem de modelos abstratos na busca de uma interpretação física de componentes reais [3]. (Sobre modelos em circuitos elétricos ver Cap. 1 de Burian Jr. e Lyra [4].)

Os fenômenos eletromagnéticos apresentam-se com grande variedade de aspectos, dando lugar a inúmeras aplicações na vida moderna. Cabe aos engenheiros eletricitas a tarefa de efetuar, ordenar e promover a aplicação desses fenômenos no sentido de bem servir a coletividade. Esse conhecimento deve fornecer as bases quantitativas para o projeto de máquinas, aparelhos, dispositivos ou sistemas que possam desempenhar adequadamente as funções desejadas [5].

A teoria geral dos fenômenos eletromagnéticos deve-se, em sua forma atual, a Maxwell e Hertz, sendo designada como *Teoria Eletromagnética*. De acordo com esta teoria, os fenômenos eletromagnéticos são descritos através dos vetores do campo eletromagnético [5].

A descrição apresentada pela Teoria Eletromagnética é, muitas vezes, excessivamente detalhada para os fins práticos: numerosos dispositivos elétricos podem ter suas propriedades mais marcantes

descritas ou previstas por uma teoria mais simples, a *Teoria dos Circuitos Elétricos*. Esta teoria, em vez dos vetores do campo, serve-se de grandezas escalares — correntes e tensões — correspondentes a certas integrais dos vetores do campo eletromagnético [5].

De fato, tanto a teoria de circuitos como a teoria eletromagnética tratam dos fenômenos de natureza eletromagnética, por definição, o campo de trabalho da engenharia elétrica. Além disso, o estudo das relações entre as duas teorias se impõe àqueles que têm necessidade, na profissão, de reconhecer bem os limites da teoria de circuitos [6].

Podemos aceitar, para a teoria de circuitos elétricos, uma origem independente. As *leis de Kirchhoff* — relacionando as tensões ou as correntes de um circuito — foram enunciadas em 1845 como decorrentes de experiências. E, no caso estacionário, isto é, quando tensões e correntes não variam com o tempo, nenhum desvio dessas leis foi encontrado [6].

Porém, quando lidamos com o caso não estacionário, estas leis são aproximadas. E, quanto mais rapidamente variam as grandezas e/ou quanto maior for o circuito, maiores serão os erros cometidos com a aplicação destas leis. É quando, por exemplo, se estuda o problema atual da compatibilidade eletromagnética, onde são analisados alguns aspectos das relações entre as teorias. Tal qual a relação entre um bipolo capacitor da teoria de circuitos e a capacitância de um condutor isolado estudada na eletrostática [6].

De certo, voltamos a atenção para a eletrostática, o foco do presente trabalho e de onde surgiram as primeiras abstrações dentro do eletromagnetismo. Nesse sentido, a lei de Coulomb representa a primeira relação entre a verificação experimental da força elétrica — atração/repulsão — para pequenas esferas estáticas e a lei do inverso do quadrado da distância. Tal experimento realizado ainda no século XVIII foi observado por meio de uma balança (pêndulo) de torção.

Hoje em dia, em vista disso, a eletrostática é definida como o ramo da física que estuda os fenômenos criados pelas cargas elétricas estáticas. Os principais conceitos relativos à eletricidade, estabelecidos ao longo dos anos desde a Antiguidade, foram fundamentados a partir de suas considerações. E assim, as definições dadas à carga elétrica, à força elétrica, ao campo vetorial e ao fluxo elétrico, além evidentemente, da classificação de corpos ora como condutores ora isolantes, têm servido de esteio para as bases do eletromagnetismo.

Além disso, para a definição de tais conceitos físicos, as ferramentas matemáticas são outrora bastantes úteis como forma de descrever e prever o comportamento destes campos eletrostáticos dentro de uma dada região de interesse. De fato, o desenvolvimento de equações e teoremas, bem como de métodos que auxiliem na obtenção da expressão matemática característica é fundamental quando lidamos com problemas de carga estática.

Notadamente, os métodos para a solução de problemas representam um tópico de destaque dentro da eletrostática, haja vista a necessidade em determinar o potencial elétrico em qualquer ponto dentro

de um campo eletrostático quando a distribuição de carga é especificada. Entretanto, na prática, raramente, o problema é elementar como tal. Muitas vezes, além de cargas elétricas, temos superfícies com valores de contorno para o potencial elétrico, para as quais não são conhecidas as distribuições de carga nelas envolvida. Desse modo, métodos especiais devem ser concebidos de forma a resolver tais problemas. E assim, Lord Kelvin percebeu que quando as superfícies em questão apresentavam uma certa simetria, um artifício teórico que seria denominado por ele como o *método das imagens*, poderia ser usado com grande vantagem. Tal método assume que uma dada distribuição de carga, externa à região de interesse, é capaz de produzir o mesmo potencial sobre a superfície de contorno conhecida, e esta distribuição combinada com aquela dentro da região de interesse definiriam assim, o potencial característico para todo este espaço. Ou seja, a solução através do método de cargas-imagem elétricas envolve em encontrar uma distribuição de carga *refletida* dentro da superfície fechada de contorno que produzirá o mesmo potencial especificado sobre tal superfície, o que, pelo teorema da unicidade, é suficiente para especificar a solução correta para o problema.

Uma ilustração importante do método das imagens é o problema da carga pontual na presença de um condutor esférico aterrado. Na eletrostática, é comum dizer que um condutor está aterrado, ou conectado ao terra elétrico, quando a superfície deste condutor está mantida sob potencial zero. Esta teoria, como toda teoria física, se constrói sobre entes idealizados. Neste caso, um condutor que serve como fonte infinita de portadores de carga sem que isto altere seu próprio potencial. Assim, ao aproximá-lo a objetos carregados, este potencial é mantido. Em outras palavras, quando um condutor carregado é trazido a vizinhança de um outro aterrado, cargas deverão se deslocar entre a fonte de cargas e o corpo condutor de modo a manter constante o potencial do corpo aterrado.

Conseqüentemente, a idealização do terra elétrico consiste em conceber uma forma pela qual haja transferência de carga entre uma fonte remota e o condutor esférico. É importante também, levar em consideração uma forma de diminuir a perturbação gerada por este novo elemento de modo que fios metálicos (idealmente) muito finos podem ser usados nos modelos teóricos para esse fim.

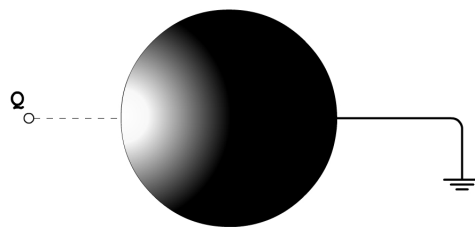


Fig. 1.1: Proposição clássica para o problema da carga pontual na presença de um condutor esférico aterrado.

Contudo, é evidente que quando se conecta um fio ao corpo condutor da esfera, toda a geometria do problema em questão se altera, provocando uma certa perturbação ao sistema e, a partir daí, intuiti-

vamente, se espera que fios de raio menor perturbem menos do que aqueles de raio maior. Analisando mais profundamente, nós percebemos que se não levarmos em consideração a distribuição de carga sobre o fio, a intensidade do campo elétrico longe da esfera tem um termo de monopolo diferente de zero, igual a

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - a/d) \mathbf{r}}{r^2 r}$$

Nesta situação, existe um campo elétrico radial. E, se conectarmos um fio a partir da esfera ao terra elétrico, então surgirá uma corrente elétrica ( $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ , onde  $\sigma$  é a condutividade elétrica e  $\mathbf{J}$  é a densidade de corrente) até que seja obtido o equilíbrio eletrostático do sistema. Desse modo, esta corrente irá drenar a carga da superfície da esfera e a solução será diferente daquela que é usualmente apresentada.

Para o levantamento desta questão, uma extensa literatura acerca de problemas eletrostáticos foi consultada, desde os livros mais utilizados no ensino da disciplina de eletromagnetismo ou teoria eletromagnética — Hayt e Buck [7], Cheng [8], Nussenzveig [9], Purcell [10] e Kraus [11] — aos mais analíticos e profundos dentro deste tema - Jackson [1], Maxwell [12], Smythe [13], Jeans [14] e Stratton [15]. O que se percebe é que a discussão deste problema é negligenciada pela maioria dos autores, ou os livros não assumem a presença de um fio quando tratam do método das imagens para o problema da esfera aterrada. Maxwell em seu tratado sobre o eletromagnetismo, já justificava que ao considerar um fio indefinidamente fino para a conexão entre um corpo condutor e o terra elétrico, a distribuição de carga elétrica sobre este corpo não é sensivelmente afetada pela introdução do fio-terra. Segue a explicação literal dada por Maxwell:

*“Já que a quantidade de eletricidade sobre qualquer porção de um fio em um dado potencial diminui indefinidamente quando o diametro do fio é indefinidamente diminuído, a distribuição de eletricidade sobre corpos de consideráveis dimensões não serão sensivelmente afetadas pela introdução de um fio metálico muito fino, tais quais são usados para formar conexões elétricas entre estes corpos e o terra, uma máquina elétrica ou um eleômetro”.* (Maxwell [12], terceira edição, vol. 1, página 96, artigo [81]).

Entretanto, cabe ao experimentador construir um sistema físico cujo comportamento se aproxime daquele previsto pelo modelo teórico, ou inversamente, verificar até que ponto o modelo teórico pode explicar o comportamento físico do sistema, assim construído [5]. Assim, considerar a existência do fio-terra significa afirmar que a distribuição das cargas sobre a superfície formada pela esfera e fio é alterada de forma a estabelecer toda a estrutura do condutor como uma superfície equipotencial. E então, é visto que de fato, teremos uma distribuição de carga sobre o fio.

Para a solução do problema, devemos começar com a própria inclusão do fio-terra como parte das condições de contorno. E então, para isso, devemos encontrar os meios teóricos de maneira a obter a densidade superficial de carga que satisfaça ao valor nulo do potencial elétrico em todas as superfícies

condutoras.

## 1.1 Organização do Trabalho

A presente dissertação além da Introdução, é organizada em mais três capítulos, estruturados conforme a seguinte indicação:

- Capítulo 2: Neste capítulo apresentamos a introdução histórica da eletrostática, bem como as bases e conceitos gerais acerca do assunto: carga elétrica e lei de Coulomb; campo elétrico; fluxo elétrico e lei Gauss; potencial escalar elétrico; condutores/isolantes e condições de contorno. Além disso, tratamos dos métodos de solução de problemas eletrostáticos, seja pelo método das imagens, seja pelo solução formal através da equação de Laplace. Para isso, consideramos os teoremas da unicidade e de Green;
- Capítulo 3: Este capítulo descreve as características do problema: entre elas, que a carga pontual induz sobre todo o corpo condutor, incluindo a superfície do fio cilíndrico, uma densidade superficial de cargas. Além disso, são elaborados métodos que possam definir uma solução para o problema: o método das imagens para o problema modificado e um método usando anéis de carga e condições de contorno para o potencial;
- Capítulo 4: Neste capítulo descrevemos a metodologia usada a fim de obter os resultados, bem como a discussão dos resultados.
- Conclusões: ao final apresentamos as conclusões deste trabalho e as perspectivas para futuros projetos.





## Capítulo 2

# Solução de Problemas Eletrostáticos

Pode-se considerar que o desenvolvimento da eletrostática como conhecemos hoje iniciou-se com o experimento desenvolvido pelo coronel das forças armadas francesas, Charles Augustin de Coulomb na segunda metade do século XVIII. Neste experimento, ele determina quantitativamente a força exercida entre duas esferas eletrizadas com certa carga estática, por meio de uma balança de torção inventada por ele próprio.

A experiência nos mostra que a força com qual duas das cargas interagem não é modificada pela presença de uma terceira carga: seu efeito é adicionado ao já existente. Deste modo, não importa quantas cargas existam no sistema, a lei de Coulomb pode ser usada para calcular a interação de cada par, de modo que a força total que atua sobre o corpo seja a soma vetorial das forças individuais que atuam sobre ele. Este é justamente o princípio de superposição das forças.

Embora a força seja a grandeza mensurável, a maneira mais usual de descrever um sistema de cargas é através do campo elétrico. Matematicamente, ele é a razão entre força e carga elétrica, de modo que, uma vez estabelecida a distribuição de carga de um sistema, o campo elétrico pode ser determinado a partir da superposição dos efeitos destas cargas. Conceitualmente, o campo elétrico modifica as propriedades do espaço ao seu redor, intermediando a interação entre as cargas.

Além disso, o campo eletrostático, assim como o campo gravitacional, é *conservativo*. Isto nos induz a definir uma grandeza escalar como forma de descrever o sistema, uma vez que grandezas vetoriais são mais complexas e difíceis de se manipular. Conseqüentemente, sua expressão no domínio local, dado o caráter conservativo, será definida através de:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.1)$$

de onde, conseqüentemente, obtém a seguinte relação entre o campo e potencial elétrico — uma grandeza escalar:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

Devemos destacar também que é convencional a inclusão do sinal negativo na Eq.(2.2), pois assim, quando associamos esta relação com a lei de Coulomb, o campo elétrico e o princípio de superposição das forças, encontramos a seguinte expressão para o potencial escalar:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_v(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dx' dy' dz' \quad (2.3)$$

Geralmente, o potencial e o campo elétrico são as formas mais utilizadas para descrever a solução de um problema eletrostático. Estes problemas são aqueles que lidam com os efeitos das cargas elétricas em repouso e podem se apresentar de diferentes maneiras, conforme aquilo que seja inicialmente conhecido. Se a distribuição de carga é dada, ambos o potencial e a intensidade do campo elétrico podem ser determinados. Contudo, em muitos problemas, a exata distribuição de carga não é conhecida em todos lugares [8]. Em certos casos temos definidos apenas potenciais sobre condutores, o que dificulta determinar a distribuição das cargas superficiais sobre os condutores e/ou a intensidade do campo elétrico no espaço. Quando a geometria do corpo condutor tem contornos simples, o *método das imagens* pode ser usado de forma bastante prática.

Em outros problemas, os potenciais de todos os condutores são conhecidos, e devemos determinar o potencial e a intensidade do campo em todo espaço ao redor, bem como a distribuição superficial de cargas sobre os condutores. Nesses casos, geralmente é necessário resolver a equação diferencial com a apropriada condição de contorno. Tal equação, que rege os problemas eletrostáticos, é dada pela Equação de Poisson (ou de Laplace).

## 2.1 Equações de Poisson e de Laplace

Para o entendimento completo do comportamento de um campo eletrostático, é necessário enunciar também a idéia de fluxo elétrico, que surge através da representação do campo elétrico por meio de linhas de força, as quais, por definição, são linhas imaginárias traçadas de tal forma que a direção e o sentido em cada ponto sejam os mesmos do campo elétrico num determinado ponto.

Baseado neste conceito, a lei de Gauss afirma que o fluxo de campo elétrico que sai de uma superfície fechada no espaço livre é igual a carga total envolvida por esta superfície dividida pela constante de permissividade do espaço livre,  $\epsilon_0$ . Também sabemos pelo teorema da divergência, que o fluxo de um vetor que atravessa uma superfície fechada é igual a integral do divergente deste vetor dentro do volume delimitado pela superfície em questão. Combinando o enunciado acima e o teorema da divergência, encontramos a forma diferencial da lei de Gauss, dada pela expressão:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \quad (2.4)$$

Nesse sentido, a equação de Poisson é obtida quando associamos as Eqs.(2.4) e (2.2), e definimos uma equação diferencial parcial para a função escalar  $\Phi(\mathbf{x})$ :

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}) = -\frac{\rho_v(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \quad (2.5)$$

Nas regiões onde não existem cargas livres, o potencial escalar satisfaz a equação de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.6)$$

Além disso, através da equação de Poisson (2.5) e do potencial escalar para uma distribuição de carga (2.3), podemos verificar que:

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.7)$$

## 2.2 Unicidade da Solução com Condições de Contorno de Dirichlet ou Neumann

Antes de discutir os métodos de solução de um problema eletrostático com valores de contorno, é importante estabelecer que a solução da equação de Poisson (da qual a equação de Laplace é um caso especial) que satisfaz uma dada condição de contorno é a solução única para o problema. Essa afirmação define o **teorema da unicidade**<sup>1</sup>.

Caso seja estabelecido o valor do potencial elétrico na superfície que limita a região de interesse, temos o *problema de contorno de Dirichlet*. Semelhantemente, a especificação da densidade superficial de carga (derivada normal do potencial ou componente normal do campo elétrico) em toda a superfície também define o problema de potencial único. Este último é conhecido como *problema de contorno de Neumann*.

Para demonstrar a unicidade da solução da equação de Laplace ou Poisson, supomos exatamente o contrário: que existam duas soluções  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$ , e ambas satisfaçam à solução da equação e ao conjunto de condições de contorno dentro de um volume  $V$ , envolto pela superfície  $S$ . Dessa forma, assumimos  $U = \Phi_1 - \Phi_2$ . De tal maneira que,

$$\nabla^2 U = \nabla^2 \Phi_1 - \nabla^2 \Phi_2 = 0 \quad (2.8)$$

Agora, considerando as condições de Dirichlet e de Neumann, teremos as seguintes situações para a

<sup>1</sup>Esta demonstração e da Seção seguinte estão comentadas com mais detalhes em Jackson [1]

região de fronteira (sobre a superfície  $S$ ), respectivamente:

$$U_S = \Phi_{1S} - \Phi_{2S} = 0 \Rightarrow \Phi_{1S} = \Phi_{2S} \quad (2.9)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_S = \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \right|_S - \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right|_S = 0 \Rightarrow \Phi_{1S} = C\Phi_{2S} \quad (2.10)$$

Assim, através da *primeira identidade de Green* (ver Jackson[1]):

$$\iiint_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV' = \iint_{S'} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \quad (2.11)$$

definimos que  $\psi = \phi = U$ . E, quando aplicamos qualquer uma das condições de contorno dada pelas Eqs.(2.9) e (2.10), obtemos:

$$\iiint_V |\nabla U|^2 dV' = 0 \quad (2.12)$$

o que implica sistematicamente que  $\nabla U = 0$  em todo o espaço, já que  $|\nabla U|^2$  não pode ser menor do que zero. Deste modo,  $U$  tem o mesmo valor em todos os pontos dentro do volume  $V$ , inclusive em sua superfície, o que equivale afirmar que  $\Phi_{1S} - \Phi_{2S} = \text{constante}$ . Isto prova imediatamente que a condição de contorno de Neumann define um problema de potencial único, uma vez que a relação encontrada corresponde àquela obtida em (2.10), para qualquer valor arbitrário de  $C$ . Além disso, é evidente que na verdade, a condição de contorno de Dirichlet é um caso especial dentro das condições de Neumann — para  $C = 1$  na Eq.(2.10). E portanto, também assegura uma única solução para o problema de contorno.

Logo, tanto as condições de contorno de Dirichlet quanto as de Neumann, quando aplicadas separadamente, definem um problema de potencial único. E, a especificação de ambos  $\Phi$  e  $\partial\Phi/\partial n$  pode gerar uma inconsistência ao problema de valor de contorno.

## 2.3 Solução Formal de um Problema de Contorno com Funções de Green

A solução da equação de Poisson ou Laplace dentro de um volume finito  $V$  pode ser obtida através de vários métodos, por meio dos quais devemos obter uma única solução, conforme o teorema da unicidade. Inicialmente, trataremos a solução a partir das *funções de Green*  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ . Para isso, a princípio, definiremos uma classe de funções  $G$ , dependentes das variáveis  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$ , e que satisfaçam a seguinte expressão:

$$\nabla'^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.13)$$

Dado a Eq.(2.7), vemos que esta apresenta o mesmo resultado que o determinado para o conjunto de funções de Green, Eq.(2.13). Desse modo, qualquer função cujo laplaciano seja nulo — neste caso, definimos uma função  $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  que satisfaz a equação de Laplace dentro do volume  $V$  — pode ser adicionada à função  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  de modo a satisfazer adequadamente a condição preestabelecida pela Eq.(2.13). Assim sendo, podemos determinar que

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (2.14)$$

Além disso, para obtenção da solução formal com funções de Green, faremos uso da *segunda identidade de Green* (ver Jackson[1]), dada por:

$$\iiint_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV' = \iint_{S'} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS'. \quad (2.15)$$

Desse modo, quando definimos que  $\phi = \Phi$  e  $\psi = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  na Eq.(2.15), obtemos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho_v(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV' \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ G(\mathbf{x}_S, \mathbf{x}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} \Big|_{\mathbf{x}_S} - \Phi(\mathbf{x}_S) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \Big|_{\mathbf{x}_S} \right] dS' \end{aligned} \quad (2.16)$$

Na Seção 2.2, estabelecemos que a especificação de uma única condição de contorno (Dirichlet ou Neumann) é o requisito necessário para a obtenção da solução de potencial único. Em vista disso, devemos produzir a função de Green adequada de forma a manter na Eq.(2.16) somente  $\Phi$  ou  $\partial\Phi/\partial n'$  como condição de contorno. Dessa forma, haverá somente uma função que fará desaparecer uma das especificações e irá satisfazer concomitantemente a condição de contorno.

Assim, para a especificação do problema de Dirichlet, devemos ter somente  $\Phi(\mathbf{x}_S)$  — potencial na superfície de contorno dado pelo vetor  $\mathbf{x}_S$  — como condição de contorno. Logo, é evidente que devemos impor na Eq.(2.16) que

$$G_D(\mathbf{x}_S, \mathbf{x}') = 0 \quad (2.17)$$

Consequentemente, o primeiro termo da integral de superfície em (2.16) desaparecerá junto com a condição de contorno de Neumann e daí, obteremos o seguinte resultado:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho_v(\mathbf{x}') G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV' - \frac{1}{4\pi} \iint_S \Phi(\mathbf{x}_S) \frac{\partial G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \Big|_{\mathbf{x}_S} dS' \quad (2.18)$$

Já a elaboração da solução de um problema de Neumann não é tão óbvia quanto para o problema de Dirichlet, pois se aplicarmos o teorema da divergência na Eq.(2.13), notaremos que não é possível

desaparecer com o segundo termo da integral de superfície em (2.16). Em vez disso, a escolha mais adequada é dada pela seguinte expressão:

$$\left. \frac{\partial G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \right|_{x_S} = \frac{-4\pi}{S} \quad (2.19)$$

onde  $S$  é a área total da superfície de fronteira. E, uma vez que as condições de Neumann geralmente são usadas para resolver o chamado problema exterior, onde  $S$  é infinito, a equação dada pela Eq.(2.19) torna-se homogênea (nula) e, desse modo, obteremos:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho_v(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV' + \frac{1}{4\pi} \iint_S G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} \right|_{x_S} dS' \quad (2.20)$$

Uma consideração importante e que serve para introduzir o método das imagens é o significado físico de  $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')/4\pi\epsilon_0$ . Esta função é solução da equação de Laplace dentro da região de interesse, o volume  $V$ , e representa o potencial de um sistema de cargas externo a este volume, o qual associado ao potencial da distribuição de carga dada pelo vetor  $\mathbf{x}'$  define o potencial na fronteira determinado pelas condições de contorno homogêneas. Assim como o potencial sobre um ponto  $\mathbf{x}$  depende da posição da distribuição de carga  $\mathbf{x}'$ , a distribuição de carga  $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  também deve depender do vetor posição de carga  $\mathbf{x}'$ . Deste ponto de vista, vemos que o método das imagens é um equivalente físico para a determinação do apropriado  $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  que satisfaça as condições de contorno dada ora por (2.17) ora por (2.19) [1]. Em [16], na Seção 7.2, Morse e Feshbach explicam que tal função, na verdade, representa o efeito das condições de contorno dentro da apropriada função de Green, como bem define a Eq.(2.14). Logo, para um problema de Dirichlet com condutores,  $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')/4\pi\epsilon_0$  pode ser interpretado como a contribuição devida a uma distribuição superficial de cargas induzidas sobre os condutores pela presença de cargas elétricas em suas vizinhanças.

## 2.4 Método das Imagens

Há uma classe de problemas eletrostáticos com condições de contorno que sob condições favoráveis é possível definir um conjunto de cargas imagens em uma região externa àquela de interesse de modo a substituir as superfícies de contorno, considerando a geometria da situação. Este método de substituição de superfícies de fronteira por apropriadas cargas imagem, em vez de uma solução formal da equação de Laplace ou Poisson, é chamado de método das imagens.

O método das imagens é desenvolvido como um problema de um ou mais pontos de cargas na presença de superfícies de contorno, como por exemplo, condutores aterrados [1]. As cargas imagem devem ser externas a região de interesse e o potencial gerado por elas devem ser solução da equação

de Laplace dentro da região de interesse.

Para a ilustração do método das imagens, é comum analisar o caso de uma carga pontual  $q$  a uma distância  $y$  de um plano condutor infinito mantido sob potencial nulo. Neste caso, a colocação de uma carga  $q'$  em uma posição simétrica a  $q$ , isto é, a uma distância  $y' = -y$  do lado oposto de  $q$ , estabelece, por simetria, um potencial nulo sobre todo o plano intermediário entre as cargas. Combinações de planos e geometrias esféricas ou elipsóides também permitem o mesmo tipo de inferência.

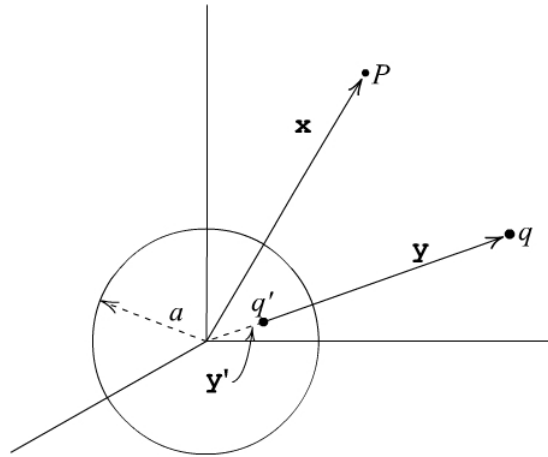


Fig. 2.1: Esfera condutora de raio  $a$ , com carga  $q$  e carga imagem  $q'$  [1].

Para o caso de uma carga pontual localizada a uma distância  $y$  relativa à origem, na vizinhança de uma esfera condutora de raio  $a$  mantida sob potencial nulo, a solução consiste em determinar a magnitude da carga imagem  $q'$  e o seu posicionamento  $y'$ , fora da região de interesse, de modo que satisfaça a condição de contorno  $\Phi(x = a) = 0$ . Para uma carga  $q$  externa à esfera, teremos uma carga imagem  $q'$  interna, como ilustrado na Figura 2.1.

Por simetria, a carga imagem se estabelecerá sobre o mesmo eixo que liga a origem à carga real. Dessa forma, o potencial dado a superposição das cargas deve ser definido como:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{q'}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|} \right] \quad (2.21)$$

A função potencial deve satisfazer a condição de contorno  $\Phi(x = a) = 0$ . Logo,

$$\frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2 - 2ay \cos \theta}} = - \frac{q'}{\sqrt{a^2 + y'^2 - 2ay' \cos \theta}}$$

Essa equação só pode ser satisfeita se  $q \cdot q' < 0$ . Consequentemente,

$$[q^2 (a^2 + y'^2) - q'^2 (a^2 + y^2)] - 2a (q^2 y' - q'^2 y) \cos \theta = 0 \quad (2.22)$$

A Eq.(2.22) tem a forma  $A + B \cos \theta, \forall \theta \in [0, \pi]$ . Assim, para  $\cos \theta \neq 0$ , é determinante que ambos os coeficientes sejam nulos, isto é,  $A = 0$  e  $B = 0$ . Isso transforma o problema no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} q^2 y' - q'^2 y = 0 \\ q^2 (a^2 + y'^2) - q'^2 (a^2 + y^2) = 0 \end{cases}$$

Como efeito, a solução mais apropriada — posição e magnitude da carga imagem — para o problema de contorno é a seguinte:

$$\left. \begin{aligned} y' &= -\frac{a^2}{y} \\ q' &= -\frac{a}{y}q \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Analisando a solução, Eq.(2.23), podemos observar que se a carga se afasta muito da esfera, a carga imagem se desloca para o centro e sua magnitude diminui proporcionalmente. Porém, se a carga aproxima-se da superfície da esfera, o mesmo acontece com a carga imagem e sua magnitude se aproxima daquela da carga real com o sinal trocado.

A função potencial pode ser definida pela seguinte expressão:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{ay}{|y^2\mathbf{x} - a^2\mathbf{y}|} \right] \quad (2.24)$$

Considerando o efeito da função potencial, Eq.(2.24), em todo o espaço inclusive sobre a esfera, podemos encontrar a expressão para a densidade de carga induzida sobre a superfície de contorno, pois sabemos que ela pode ser calculada a partir da derivada normal de  $\Phi$  sobre a superfície:

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=a} = -\frac{q}{4\pi a^2} \left( \frac{a}{y} \right) \left( 1 - \frac{a^2}{y^2} \right) \left( 1 + \frac{a^2}{y^2} - 2\frac{a}{y} \cos \theta \right)^{-3/2} \quad (2.25)$$

Além disso, a força devido a carga imagem (ou a distribuição superficial de carga) e a carga real podem ser calculadas pela superposição de forças através da lei de Coulomb.

Todo o entendimento do problema foi baseado em uma carga pontual fora da esfera. De fato, os resultados são similares para a situação na qual há uma carga pontual interna à esfera, implicando apenas em uma mudança de sinal na densidade superficial de carga.

A solução da função potencial de um ponto de carga na vizinhança de uma esfera condutora sob



potencial nulo foi obtida de forma prática utilizando o método das imagens. Entretanto, através da função de Green para a esfera, podemos generalizar a solução para uma distribuição de carga, em vez de uma carga puntiforme. Basta assim, definirmos apropriadamente as condições de contorno (Dirichlet ou Neumann) em (2.17) ou (2.19).

A partir da solução exposta na Eq.(2.24), podemos determinar a função de Green através da Eq.(2.18), que trata da função potencial para um problema de Dirichlet. Assim, considerando inicialmente  $\Phi(\mathbf{x}_S) = 0$  e  $\rho(\mathbf{x}') = 4\pi\epsilon_0\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ , obtemos a seguinte expressão para a função de Green:

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{ax'}{|x'^2\mathbf{x} - a^2\mathbf{x}'|} \quad (2.26)$$

O resultado em (2.26) pode ser generalizado para qualquer distribuição de carga externa a uma superfície esférica condutora. É simples também verificar sua simetria, uma característica própria das funções de Green,  $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G_D(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ . Além disso, a função proposta deve satisfazer adequadamente a condição de Dirichlet:  $G_D(|\mathbf{x}| = a, \mathbf{x}') = 0$ .

Para a solução completa do problema, além da função de Green, é necessária a respectiva derivada normal em relação à superfície de contorno do problema. Neste caso, tratamos todas as funções escritas em coordenadas esféricas. Assim, ao considerar o problema exterior à esfera com o potencial especificado sobre a superfície, teremos[1]:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho_v(\mathbf{x}') \left[ (x^2 - 2xx' \cos \gamma + x'^2)^{-1/2} - \left( \frac{x^2 x'^2}{a^2} - 2xx' \cos \gamma + a^2 \right)^{-1/2} \right] dV' + \frac{1}{4\pi} \iint_S \Phi(\mathbf{x}_S) \left( \frac{x^2 - a^2}{a(x^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma)^{3/2}} \right) dS' \quad (2.27)$$

Lembrando que  $\cos \gamma$  é o produto escalar de dois vetores unitários: um relativo à variável de observação e o outro à de integração. Ele é definido mais tarde na Figura 3.3.

O tratamento do problema de uma carga pontual na presença de um condutor esférico mantido em potencial nulo não é rigorosamente equivalente ao problema de um condutor esférico aterrado. O fato de  $q$  ser diferente de  $q'$  implica que haverá um campo elétrico distante com componente de monopolo elétrico não nulo, correspondente à carga  $q + q' = q(1 - a^2/y)$ . Assim, um condutor elétrico que conecte a esfera à Terra, colocado sobre o eixo que liga  $q$  a  $q'$  e estendendo-se até o infinito, estará submetido ao campo elétrico de monopolo. Nestas condições, haverá movimento de cargas elétricas modificando a quantidade de carga sobre a superfície da esfera. Assim, colocar um fio para prover cargas à esfera altera a geometria e o equilíbrio de cargas do sistema.

O enfoque do presente trabalho se estabelece justamente em uma nova abordagem para este problema. De fato, a maioria dos livros didáticos — citados na Introdução do presente trabalho —,

simplesmente negligenciam a questão do aterramento. De fato, ele não é demonstrado efetivamente. Apenas alguns livros consideram que quanto mais fino for o fio que conecta a esfera ao terra elétrico, menor será a perturbação gerada sobre o potencial com a introdução de tal elemento. E então, desconsideram sua dimensão, inclusive dentro da proposição do problema, tratando-o assim, de forma idealizada.

No presente capítulo, tratamos unicamente da solução convencional de uma esfera mantida em potencial nulo, para a qual não dissemos como a carga necessária para satisfazer esta condição chega até sua superfície. Porém, no Capítulo 3, abordaremos a questão do aterramento acrescentando um fio ao sistema e estudaremos sua influência na solução para cada superfície de contorno.

## 2.5 Funções Ortogonais e Desenvolvimento em Série

A solução da equação diferencial de Laplace ou Poisson representa a função que governa os problemas físicos em eletrostática, levando em consideração as condições de contorno de cada problema. Em algumas situações, a melhor representação da solução do problema é dada através de séries infinitas. Nesse sentido, o desenvolvimento em séries de funções ortogonais surge como uma poderosa técnica matemática que permite descrever a solução de maneira apropriada. Resumindo, tal desenvolvimento é dado por uma série de funções que converge para a específica solução do problema.

Inicialmente, para lembrar as propriedades gerais, definimos o conceito de produto interno. Assim, seja  $\mathbb{V} = \mathcal{C}\mathcal{P}^0[a, b]$  o espaço vetorial das funções reais contínuas por partes  $f, g : [-a/2, a/2] \rightarrow \mathbb{R}$ . Definimos:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-a/2}^{a/2} f(t) g(t) dt, \quad \text{para todas as funções } f, g \in \mathcal{C}\mathcal{P}^0[-a/2, a/2] \quad (2.28)$$

Agora, vamos estender ao espaço  $\mathcal{C}\mathcal{P}^0[-a/2, a/2]$  o conceito de ortogonalidade. Dizemos que um subconjunto não vazio  $\mathcal{X}$  de  $\mathbb{V}$  é **ortogonal** se para todo par  $f$  e  $g$  de elementos distintos de  $\mathcal{X}$ ,  $\langle f, g \rangle = 0$ . Neste caso, dizemos que os elementos de  $\mathcal{X}$  são **ortogonais**.

Assim como em álgebra linear, onde podemos decompor um vetor em uma base ortonormal através de uma combinação linear, o mesmo pode ser feito para um espaço de funções, fazendo uso das relações de ortogonalidade. Dessa forma, ao utilizar o mesmo espaço de funções, seja ele  $\{g_0, g_1, g_2, \dots, g_n, \dots\}$  um subconjunto de  $\mathbb{V}$  de vetores ortogonais não-nulos, teremos:

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m \quad (2.29)$$

onde

$$c_m = \frac{\langle f, g_m \rangle}{\|g_m\|^2}, \quad \|g_m\|^2 = \langle g_m, g_m \rangle, \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

Graças à condição de ortogonalidade do espaço de funções, ao aplicá-la na Eq.(2.29) obtemos a Eq.(2.31) e conseqüentemente a Eq.(2.30).

$$\langle f, g_n \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \langle g_m, g_n \rangle = c_n \|g_n\|^2 \quad (2.31)$$

Um conjunto bastante conhecido de funções de ortogonais é composto pelas funções trigonométricas seno e cosseno,

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{a}}, \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right), \dots, \sqrt{\frac{2}{a}} \text{sen}\left(\frac{2\pi m x}{a}\right), \dots \right\}, \quad \text{para } m = 1, 2, 3, \dots$$

através das quais podemos representar funções periódicas em termos de *séries de Fourier*.

Para este conjunto de funções ortogonais, a série equivalente para a expressão da Eq.(2.29), pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ A_m \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) + B_m \text{sen}\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) \right] \quad (2.32)$$

onde

$$A_m = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) dx \quad (2.33)$$

$$B_m = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) \text{sen}\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) dx \quad (2.34)$$

Conseqüentemente, podemos representar qualquer função contínua por partes, assim como a solução da equação de Laplace, através do desenvolvimento em série correspondente.

## 2.6 Separação de Variáveis e Solução da Equação de Laplace

Na Seção 2.4, vimos que o método das imagens é bastante prático para problemas eletrostáticos envolvendo cargas livres e condições de contorno geometricamente simples. Contudo, se o problema consiste em um sistema de condutores mantidos a potenciais específicos e sem cargas livres, então, ele não pode ser resolvido pelo método das imagens. Este tipo de problema requer a solução da equação de Laplace. Para tais casos, a solução é geralmente expressa como um produto de três funções, cada

uma das funções dependente de uma só coordenada, obtidas através do *método de separação das variáveis*.

É conhecido que as equações que envolvem o Laplaciano em três dimensões podem ser separáveis em onze sistemas de coordenadas diferentes[1]. Contudo, para o presente trabalho, as formas geométricas esféricas e cilíndricas são o principal alvo de nossa abordagem, sendo a solução para cada uma delas representada por um desenvolvimento em série da apropriada função ortonormal, neste caso, as funções de Legendre e Bessel, respectivamente.

Na presente seção, a intenção é simplesmente esboçar a forma como obtemos tais desenvolvimentos em série. Para um maior detalhamento, há uma vasta bibliografia que trata do assunto — Arfken [17], Brown e Churchill [18], Dennery e Krzywicki [19], Morse e Feshbach [16], Sommerfeld [20], Whittaker e Watson [21], entre outros.

Para começar, escrevemos a equação de Laplace tanto na forma esférica como cilíndrica, respectivamente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \Rightarrow \text{esféricas} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \text{cilíndricas} \quad (2.36)$$

Além disso, é necessário definir a solução como um produto de funções, cada uma dependente de apenas uma coordenada. Para o caso esférico, a separação é um pouco diferente daquelas referentes às coordenadas cartesianas e cilíndricas. Seguimos então, respectivamente:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\phi) \quad (2.37)$$

$$\Phi(\rho, \phi, z) = R(\rho) Q(\phi) Z(z) \quad (2.38)$$

Mais adiante, substituímos cada solução obtida pelas Eqs.(2.37) e (2.38), na respectiva equação diferencial. Assim, se manipularmos cada expressão, a fim de encontrarmos termos dependentes de uma única variável, chegaremos a seguintes expressões:

$$\frac{r^2 \sin^2\theta}{U} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{P} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial \phi^2} = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{R\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial \phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \quad (2.40)$$

Porém, é evidente que há termos dependentes de mais de uma variável. Mesmo assim, é possível separar cada uma das equações diferenciais parciais em três equações ordinárias. Além disso, perce-

bemos que a coordenada  $\phi$  aparece tanto na Eq.(2.39) quanto (2.40) e que, no processo de separação de variáveis, a equação ordinária para  $\phi$  será igual para ambos os casos:

$$-\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = m^2 \quad (2.41)$$

No caso de problemas que envolvem toda a variação azimutal,  $m$  deve ser um número inteiro ( $m \in \mathbb{Z}$ ). Contudo, no presente trabalho, o problema com o qual lidaremos possui simetria azimutal e, para este caso,  $m$  deve ser nulo. Portanto, a solução do problema em questão independe da solução da Eq.(2.41).

Assim, uma vez definido o problema bidimensional, vamos tratar brevemente nas Seções seguintes, as principais características de cada função ortogonal proveniente das Eqs.(2.39) e (2.40).

### 2.6.1 Equação e Polinômios de Legendre

Nesta Seção, voltamos a atenção para a Eq.(2.39). Considerando que devemos tratar da solução de um problema bidimensional independente de  $\phi$ , podemos fazer a seguinte separação:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U = 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] P = 0 \quad (2.43)$$

A solução para a Eq.(2.42) é dada por

$$U(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l} \quad (2.44)$$

enquanto que (2.43), para  $m = 0$ , a solução é dada pelos *polinômios de Legendre* de ordem  $l$ , isto é,  $P_l(x)$ .

Aqui, representamos alguns polinômios de ordem mais baixa, obedecendo as condições impostas pela equação diferencial, conforme em [1]:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \end{cases}$$

A representação compacta dos polinômios de Legendre, seja de ordem par ou ímpar, é dada pela

fórmula de Rodrigues:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (2.45)$$

Os polinômios de Legendre formam um conjunto completo de funções ortogonais. Assim, qualquer função  $f(x)$  dentro do intervalo  $-1 \leq x \leq 1$  pode ser expandido em termos deles. Para tal, a condição de ortogonalidade é dada pela seguinte expressão:

$$\langle P_l, P_l \rangle = \int_{-1}^1 P_l(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll} \quad (2.46)$$

E como efeito, a representação da série de Legendre é dada por:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x) \quad (2.47)$$

onde

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \langle P_l, f \rangle \quad (2.48)$$

Estas são as principais propriedades dos polinômios de Legendre. Através delas podemos obter as demais características, tais como as relações de recorrência, obtidas a partir da fórmula de Rodrigues combinada juntamente com a equação diferencial de Legendre.

## 2.6.2 Equação e Funções de Bessel

Após o desenvolvimento da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas, Eq.(2.40), vimos que quando se trata de um problema com simetria azimutal podemos considerar a solução independente da variável  $\phi$ , e ao mesmo tempo  $m = 0$ . Contudo, a fim de desenvolvermos apropriadamente as funções de Bessel, definiremos a constante  $m$  como sendo um número inteiro diferente de zero —  $m \in \mathbb{Z}^*$  —, de forma a permitir toda a variação azimutal. Caso contrário, só obteríamos funções de Bessel de ordem zero. Assim sendo, quando voltamos a Eq.(2.40), e utilizamos o método de separação de variáveis, obtemos as seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0 \quad (2.49)$$

$$\frac{d^2 Q}{d\phi^2} + \nu^2 Q = 0 \quad (2.50)$$

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left( k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (2.51)$$

As soluções das duas primeiras equações, (2.49) e (2.50), são elementares. São elas:

$$Z(z) = e^{\pm kz} \quad (2.52)$$

$$Q(\phi) = e^{\pm i\nu\phi} \quad (2.53)$$

Da mesma forma como realizado para a equação generalizada de Legendre, é usual definir também uma mudança de variável para a Eq.(2.51). Dessa forma, obteremos a equação de Bessel, cuja solução é conhecida como a função de Bessel de ordem  $\nu$ . Assim, definimos que  $x = k\rho$ .

Contudo, diferentemente da equação generalizada de Legendre, a solução da equação de Bessel é representada por uma série de infinitos termos, já que ela converge para todos os valores finitos de  $x$ . Dessa forma, as soluções da equação diferencial podem ser escritas como:

$$J_{\pm\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j \pm \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \quad (2.54)$$

Estas soluções são chamadas de funções de Bessel do primeiro tipo de ordem  $\pm\nu$ . Se  $\nu$  não é um número inteiro, as duas soluções da Eq.(2.54) formam um par de soluções linearmente independentes. Contudo, se  $\nu$  é número inteiro, as duas soluções são linearmente dependentes e conseqüentemente, não formam um par de soluções. Em virtude disso, as funções de Bessel do segundo tipo ou Neumann são empregadas com objetivo de integrar este conjunto de soluções:

$$N_{\nu}(x) = \frac{J_{\nu}(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (2.55)$$

Assim, tendo encontrado a solução da parte radial da equação de Laplace em termo das funções de Bessel, podemos afirmar que  $\sqrt{\rho}J_{\nu}(x_{\nu n}\rho/a)$  para  $\nu \geq 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , formam um conjunto completo ortogonal no intervalo  $0 \leq \rho \leq a$ , já que a seguinte condição de ortogonalidade é válida:

$$\int_0^a \rho J_{\nu}\left(\frac{x_{\nu n'}}{a}\rho\right) J_{\nu}\left(\frac{x_{\nu n}}{a}\rho\right) d\rho = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2 \delta_{nn'} \quad (2.56)$$

Dessa forma, assumimos que o conjunto de funções de Bessel é completo e que podemos expandir uma função arbitrária de  $\rho$  no intervalo  $0 \leq \rho \leq a$  em uma série de Fourier-Bessel:

$$f(\rho) = \sum_{n=1} A_{\nu n} J_{\nu}\left(\frac{x_{\nu n}}{a}\rho\right) \quad (2.57)$$

onde

$$A_{\nu n} = \frac{2}{a^2 [J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2} \int_0^a \rho f(\rho) J_{\nu}\left(\frac{x_{\nu n}}{a}\rho\right) \quad (2.58)$$

Como uma última consideração, vale salientar que no procedimento de separação de variáveis foi adotada a constante  $k^2$  (seja  $k$  real e positivo). Entretanto, se ao invés disso, utilizarmos uma constante  $-k^2$ , teríamos:

$$Z(z) = e^{\pm ikz} \quad (2.59)$$

E assim, para solução da parte radial obteríamos as funções modificadas de Bessel. É evidente que elas são apenas funções de Bessel com argumento imaginário. As soluções linearmente independentes são normalmente dadas por:

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) \quad (2.60)$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} [J_\nu(ix) + iN_\nu(ix)] \quad (2.61)$$



## Capítulo 3

### Solução do problema da esfera aterrada

O terra elétrico é um conceito que representa um corpo condutor ideal, o qual contém um reservatório infinito de cargas mantido a um potencial constante, convencionalmente a 0 volt (no Sistema Internacional). Quando as diferenças de potencial entre quaisquer dois pontos na geometria em análise é finita, costuma-se considerar que o potencial do terra é o mesmo que o de regiões remotas, isto é, no infinito. A ideia de “terra” advém da hipótese (não completamente exata) de que o corpo terrestre é um condutor perfeito e que seu potencial é o mesmo em todos os pontos, e também devido às suas dimensões quando comparadas com as demais dimensões envolvidas nos problemas elétricos em consideração. Desse modo, em virtude da carga envolvida e da extensão da superfície terrestre, um corpo condutor isolado, inicialmente carregado, quando entra contato com a Terra, a carga remanescente em seu corpo após ocorrido o equilíbrio eletrostático é praticamente nula (aqui, supomos que a Terra é eletricamente neutra, o que é também uma idealização).

Quando um condutor está na presença de uma distribuição de cargas externas, o equilíbrio eletrostático é obtido a partir do momento em que é estabelecida uma densidade de cargas em sua superfície de modo que o campo elétrico se anule em seu interior. Logo, em qualquer região da superfície em que haja acúmulo de cargas, deverá haver um campo elétrico perpendicular e diferente de zero sobre o condutor. Em consequência, teremos sobre o condutor uma superfície equipotencial. No mais, a colocação de cargas nas proximidades do condutor induz uma densidade de carga em sua superfície. Assim, os problemas em eletrostática consistem em encontrar a distribuição superficial de carga que satisfaça as condições de contorno de cada situação.

Entretanto, não é possível resolver diretamente a equação de Poisson, pois não conhecemos tal distribuição. Porém, podemos remover este obstáculo restringindo o problema à região livre de cargas, fora das superfícies dos condutores. Para esta região, o potencial elétrico obedece apenas à equação de Laplace. Portanto, se conhecemos as condições de contorno do problema, podemos encontrar sua solução a partir do ajuste de coeficientes de sua solução geral em um sistema de coordenadas

conveniente.

O problema de fato com o qual lidaremos neste trabalho é o da esfera condutora aterrada na presença de uma carga pontual externa, como tratado na Figura 2.1. Contudo, na presente situação devemos discutir inicialmente acerca da colocação do fio necessário à conexão que estabelece o terra elétrico. Isto é, determinar a forma como a transferência de carga entre uma fonte remota (longe o bastante) e a esfera deve ser concebida. Normalmente, os fios metálicos finos são os usados nos modelos teóricos para esse fim: de conectar a esfera ao potencial nulo no infinito. Na prática, o condutor que faz o papel do aterramento é geralmente chamado de fio-terra.

No mais, é evidente que quando se conecta um fio à esfera, toda geometria e simetria do problema se altera. Nossa intenção é verificar como a presença do fio perturba a função potencial em todo o espaço e analisar a distribuição de carga sobre os condutores. Intuitivamente, espera-se que fios de raio menor perturbem menos do que aqueles de raio maior, conforme Maxwell [12]. E portanto, a solução do problema deve começar com a inclusão do próprio fio-terra como parte das condições de contorno, isto é, o potencial sobre o fio passa a ser considerado como parte da superfície equipotencial de todo o conjunto esfera-fio. A Figura 3.1 ilustra a definição do problema da esfera aterrada levando em conta a existência de um fio-terra de raio considerável.

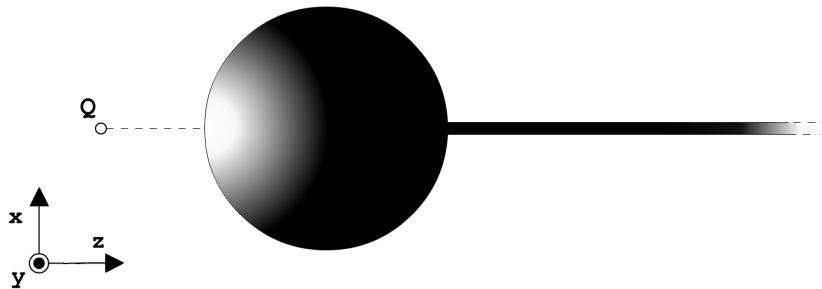


Fig. 3.1: Esfera aterrada na presença de uma carga puntiforme  $Q$  considerando a existência de um fio-terra.

Portanto, tratamos de um problema para o qual conhecemos o potencial elétrico nas fronteiras dos condutores, mas não sabemos nada acerca das distribuições de carga sobre suas superfícies. Este tipo de problema, com condições de contorno para o potencial, como visto na Seção 2.2, é conhecido como problema de Dirichlet.

Abordaremos nas Seções seguintes, algumas maneiras de resolver este problema. Infelizmente, nenhuma delas corresponde a uma solução analítica e por isso, as soluções numéricas serão nossa alternativa. A principal dificuldade é consequência da geometria mista entre o sistema de coordenada cilíndrica e esférica. Embora, tenhamos nesse caso, a simetria azimutal, isto é, simetria de rotação em torno do eixo  $z$ , a superfície condutora não tem simetria de translação ao longo do eixo  $z$ , nem simetria esférica na coordenada angular  $\theta$ , o que torna a abordagem do problema muito mais difícil.

### 3.1 Método das Imagens aplicado ao problema modificado

O método das imagens pode ser utilizado para a solução do problema modificado pela introdução do fio terra. Para isso, utilizamos as propriedades das cargas imagem para estabelecer a relação entre a carga sobre o fio e sua respectiva imagem eletrostática no interior da esfera de modo que o potencial seja obrigatoriamente nulo sobre toda a superfície desta. Neste problema modificado, devemos incluir o fio que conecta a esfera ao terra elétrico como parte das condições de contorno. Para isso, definiremos sobre este uma densidade superficial de carga que determine um potencial equivamente oposto àquele produzido pelo restante das cargas do sistema — carga pontual e respectiva carga imagem, além da própria imagem da densidade de carga — a fim de estabelecer um potencial nulo também sobre o fio. Resumindo, para obter a solução do problema, o potencial gerado pela soma de todas as cargas do sistema sobre a região superficial do fio, incluindo aí as cargas imagem, deve ser nulo. Matematicamente, isto representa:

$$\sum_n \Phi_{q_n}(\mathbf{x}_S) = 0 \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{x}_S$  é o vetor observação sobre a superfície do fio.

Dessa maneira, encontraremos uma solução — posições e magnitudes de todas as cargas do sistema — que satisfaça as condições de contorno e, haja visto o teorema da unicidade, saberemos que esta representa a solução única para o problema.

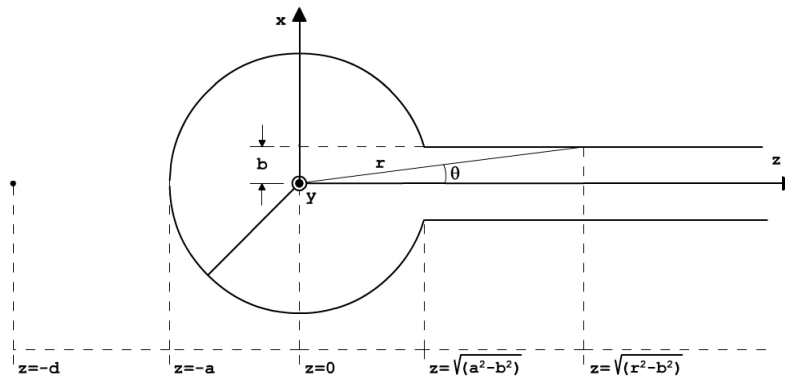


Fig. 3.2: Modelo proposto para a solução do problema da esfera aterrada.

Por conveniência, trataremos separadamente o potencial gerado pela carga pontual e sua respectiva carga imagem, e o potencial devido à distribuição de carga sobre o fio com sua respectiva imagem no interior da esfera, de modo que podemos reescrever (3.1) mais explicitamente como

$$\Phi_{q-q'}(\mathbf{x}_S) + \Phi_{\sigma-\sigma'}(\mathbf{x}_S) = 0, \quad (3.2)$$

onde  $\Phi_{q-q'}$  corresponde ao potencial produzido pela carga  $q$  e por sua imagem eletrostática e  $\Phi_{\sigma-\sigma'}$  é o potencial devido à distribuição de carga sobre o fio somado à sua respectiva distribuição de carga imagem no interior da esfera. Inicialmente, desenvolveremos a solução para a primeira situação ( $\Phi_{q-q'}$ ), uma vez que esta foi determinada anteriormente na Seção 2.4 e calculada para todo o espaço através da Eq.(2.24).

Assim, para a definição do potencial, basta que a posição da carga e do vetor observação sejam indicadas apropriadamente de modo a estabelecer ao longo do fio uma solução em função da variável  $z$ . Quanto à posição da carga  $q$ , sabemos que ela está localizada a uma distância  $d$  da origem, em sentido negativo do eixo  $z$ , conforme ilustrado na Figura 3.2. Quanto ao vetor observação, devemos estabelecer algumas relações de modo a definir sua posição sobre o fio. Logo, teremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{z^2 + b^2}, \quad \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + b^2}} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

o que conseqüentemente produz o seguinte resultado:

$$\Phi_{q-q'}(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{(z+d)^2 + b^2}} - \frac{a}{d} \left( \sqrt{\left(z + \frac{a^2}{d}\right)^2 + b^2} \right)^{-1} \right]. \quad (3.4)$$

Por outro lado, quando temos uma densidade de carga externa à região da esfera, determinar a solução utilizando o método das imagens é uma tarefa notavelmente menos árdua se desenvolvermos o problema através da solução formal com funções Green, uma vez que podemos generalizar a função de Green obtida a partir de uma carga pontual para uma densidade superficial de carga. Dessa forma, encontraremos a seguinte expressão para a função potencial causada pela densidade de carga sobre o fio:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \rho_s(\mathbf{x}') \left[ (x^2 - 2xx' \cos \gamma + x'^2)^{-1/2} - \left( \frac{x^2 x'^2}{a^2} - 2xx' \cos \gamma + a^2 \right)^{-1/2} \right] dS' \quad (3.5)$$

onde  $\cos \gamma$  é o produto escalar dos vetores unitários relativos à variável de observação  $\mathbf{x}$  e a de integração  $\mathbf{x}'$ , sendo definido da seguinte forma:

$$\cos \gamma = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\phi - \phi').$$

Além disso, na Eq.(3.5), é necessário definir o elemento diferencial de superfície do fio. Para tal, consideraremos a completa variação azimutal ao integrar todos os elementos de carga em cada anel.

É conveniente determinar um ângulo  $\psi = \phi - \phi'$ , onde  $0 < \psi < 2\pi$ , de modo que

$$dS' = b \cdot d\psi dz'.$$

Dessa forma, disporemos de uma integral dupla definida em função das variáveis  $\psi$  e  $z'$ .

Quanto à integração dentro dos limites sobre o eixo  $z$ , devemos estabelecê-la de modo a coincidir com toda a região superficial do fio. Além disso, as relações para determinação do vetor observação são iguais àsquelas usadas em (3.3). Assim, são dadas as seguintes condições:

$$\begin{cases} x = \sqrt{z^2 + b^2}, & \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + b^2}} \\ x' = \sqrt{z'^2 + b^2}, & \cos \theta' = \frac{z'}{\sqrt{z'^2 + b^2}} \end{cases}$$

Por sua vez, a densidade superficial de carga deve ser uma função relacionada somente a variável  $z'$ , uma vez que lidamos com uma carga uniformemente distribuída para cada anel do fio. Consequentemente, se substituirmos adequadamente todas estas condições, obteremos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma-\sigma'}(z) = \frac{b}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \rho_s(z') & \left[ (z^2 - 2zz' + z'^2 + 2b^2 - 2b^2 \cos \psi)^{-1/2} \right. \\ & \left. - \left( \frac{(z^2 + b^2)(z'^2 + b^2)}{a^2} - 2zz' - 2b^2 \cos \psi + a^2 \right)^{-1/2} \right] d\psi dz' \end{aligned} \quad (3.6)$$

ou ainda, conforme seja, podemos ter:

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma-\sigma'}(z) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0} \int_{\sqrt{a^2-b^2}}^{\infty} \int_0^{\pi} \rho_s(z') & \left[ \left( \sqrt{\frac{z^2 - 2zz' + z'^2 + 2b^2}{2b^2}} - \cos \psi \right)^{-1} \right. \\ & \left. - \left( \sqrt{\frac{(z^2 + b^2)(z'^2 + b^2) - 2a^2zz' + a^4}{2a^2b^2}} - \cos \psi \right)^{-1} \right] d\psi dz'. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Agora, se introduzirmos a definição de integral elíptica de primeira espécie [17]

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - m \sin^2 \alpha}}$$

Assim, através da relação:

$$\int_0^{\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{x - \cos \psi}} = \frac{2K\left(\frac{2}{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}$$

teremos condições de simplificar a expressão do potencial para

$$\Phi_{\sigma-\sigma'}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi\epsilon_0} \int_{z_{min}}^{\infty} \rho_l(z') \left[ \frac{\mathbf{K}\left(\frac{2}{A(z,z')+1}\right)}{\sqrt{A(z,z')+1}} - \frac{\mathbf{K}\left(\frac{2}{B(z,z')+1}\right)}{\sqrt{B(z,z')+1}} \right] dz' \quad (3.8)$$

onde

$$\begin{cases} A(z, z') = \frac{z^2 - 2zz' + z'^2 + 2b^2}{2b^2} \\ B(z, z') = \frac{(z^2 + b^2)(z'^2 + b^2) - 2a^2zz' + a^4}{2a^2b^2} \end{cases}$$

Neste momento, temos definido o potencial sobre o fio para todas as cargas do sistema. Assim, quando voltamos à Eq.(3.1), nos defrontamos com uma equação integral, da qual não conhecemos inteiramente sua expressão primitiva. Deste modo, para a solução de tal problema, se fará necessário um processo de discretização de tais integrais, cujo detalhamento se determinará no Capítulo 4.

## 3.2 Superposição de Anéis de Carga

Na Seção 2.6.1, desenvolvemos a solução da equação de Laplace em coordenadas esféricas para problemas com simetria azimutal, para isso estabelecendo  $m = 0$ . Isto significa que a solução independe da coordenada  $\phi$ , ou seja, a solução é invariante frente às rotações em torno do eixo  $z$ . Isto é evidente ao analisarmos a Figura 3.1. Em [1], Jackson afirma que a solução geral para um problema com simetria azimutal, em toda região onde não há carga, pode ser enunciada da seguinte forma — assim como também mostrado na Seção 2.6.1:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta) \quad (3.9)$$

Esta série tem seus coeficientes  $(A_l, B_l)$  determinados pelas condições de contorno e se trata de uma expansão única em termos dos polinômios de Legendre. Estamos interessados em calcular o potencial devido a um anel, centrado no eixo  $z$ , correspondente a uma coordenada  $z'$  constante e uniformemente carregado.

Para isso, partimos de um problema onde temos uma carga pontual com sua posição definida pelo vetor  $\mathbf{x}'$ . Desejamos calcular o potencial em toda região através de um vetor observação  $\mathbf{x}$ . A Figura 3.3 mostra a situação do problema a ser resolvido. Desenvolvemos a idéia proposta, ao assumirmos a rotação do eixo  $z$  de modo a coincidir com o vetor de carga  $\mathbf{x}'$ . Desse modo, teremos a Eq.(3.9)

modificada da seguinte maneira:

$$\Phi(r, \gamma) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \gamma), \quad (3.10)$$

onde  $\gamma$  representa o ângulo formado entre  $\mathbf{x}$  (vetor de observação) e  $\mathbf{x}'$  (vetor de carga).

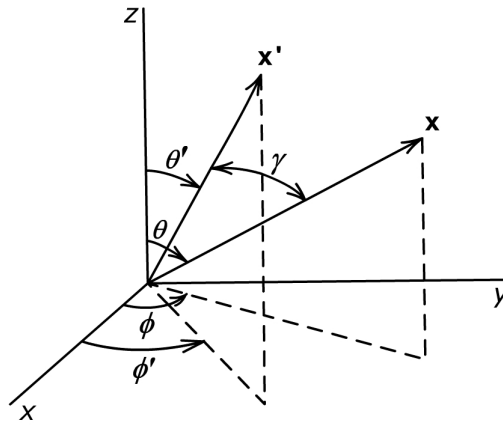


Fig. 3.3: Vetor de carga  $\mathbf{x}'$  e vetor de observação  $\mathbf{x}$  no sistema de coordenada esférico, conforme [1].

Agora imaginamos que ambos os vetores ( $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ ) estão posicionados sobre o mesmo eixo, isto é, teremos um subdomínio onde  $\mathbf{x} \parallel \mathbf{x}'$ , e conseqüentemente  $\gamma = 0$ . Dessa maneira, podemos reduzir a expressão do potencial para:

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] \\ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} \rightarrow \frac{1}{|r - r'|}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde adotamos convenientemente a carga pontual em  $\mathbf{x}'$  com magnitude igual a  $4\pi\epsilon_0$  e  $r \neq r'$ .

Podemos prosseguir com a solução se considerarmos as distintas relações entre os comprimentos dos raios de cada vetor. Assim,

$$\begin{cases} \text{se } r > r': \frac{1}{|r - r'|} = (r - r')^{-1} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r'}{r}\right)^{-1} \\ \text{se } r' > r: \frac{1}{|r - r'|} = (r' - r)^{-1} = \frac{1}{r'} \left(1 - \frac{r}{r'}\right)^{-1} \end{cases} \quad (3.12)$$

Portanto, podemos generalizar equivalentemente as expressões da Eq.(3.12) para:

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r_{>}} \left(1 - \frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^{-1}. \quad (3.13)$$

Na Eq.(3.13), a fração  $r_{<}/r_{>}$  é menor que a unidade. Com isso, podemos definir essa expressão como uma série de potências usando expansão em Maclaurin, obtendo:

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r_{>}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^l. \quad (3.14)$$

Essa é a solução no subdomínio para um vetor de observação posicionado sobre o mesmo eixo da distribuição de carga. Entretanto, devido a unicidade da representação em séries, podemos movimentar este eixo conforme o ângulo  $\gamma$ . E, dessa forma, definir a solução completa do problema baseado em um domínio limitado. Para isso, basta multiplicar a série encontrada pelo conjunto de polinômios de Legendre da respectiva ordem  $l$  em função do  $\cos \gamma$ , e enfim, encontrarmos a função apropriada da solução para todo o espaço:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma). \quad (3.15)$$

Um resultado matemático de considerável interesse é o chamado *teorema da adição para harmônicos esféricos* (ver Jackson [1], Seção 3.6). Este teorema define que um polinômio de Legendre de ordem  $l$  do  $\cos \gamma$  pode ser expresso em termos do produto de harmônicos esféricos dos ângulos  $(\theta, \phi)$  e  $(\theta', \phi')$ . Como o problema possui simetria azimutal ( $m = 0$ ), podemos expressá-lo simplesmente a partir da sua média:

$$\langle P_l(\cos \gamma) \rangle = P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta'). \quad (3.16)$$

E, em seguida encontramos que:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') \quad (3.17)$$

Agora, supomos um anel circular de raio  $\rho' = a$  com carga total  $q$  uniformemente distribuída, conforme a Figura 3.4. O centro do anel está situado sobre o eixo  $z$ , onde  $z' = b$ . Por conseguinte,  $\sqrt{\rho'^2 + z'^2} = c$ .



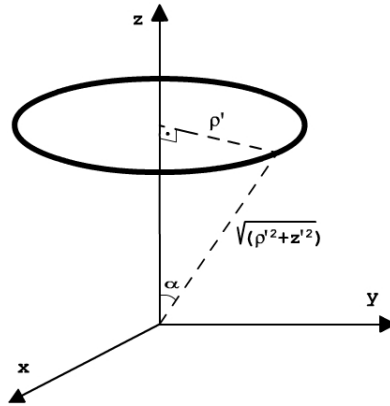


Fig. 3.4: Anel de carga  $q$  de raio  $a$  localizada sobre o eixo  $z$  com centro em  $z = b$ .

Isso significa imediatamente a seguinte distribuição espacial de carga <sup>1</sup> para o anel:

$$\rho_v(\mathbf{x}') = \frac{q}{2\pi r'^2} \delta(r' - c) \delta(\cos \theta' - \cos \alpha) = \frac{q \cdot \delta(r' - c) \delta(\theta' - \alpha)}{2\pi r'^2 \sin \alpha} \quad (3.18)$$

E portanto, substituindo adequadamente as expressões dadas nas Eqs.(3.18) e (3.17) dentro da Eq.(2.3), obtemos o potencial deste anel circular em todo o espaço:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \alpha) P_l(\cos \theta) \quad (3.19)$$

onde  $r_{<}$  ( $r_{>}$ ) é a menor (maior) distância entre  $r$  e  $c$ .

Este resultado nos será bastante útil para o desenvolvimento do problema. Agora, temos como objetivo produzir um arranjo através da superposição de anéis de carga, de forma a descrever toda a estrutura esfera-fio da Figura 3.1. Contudo, a solução para o problema não decorre em encontrar o potencial em todo o espaço, mas sim a densidade de carga sobre a superfície da estrutura esfera-fio que satisfaça o potencial na região de fronteira.

Assim, conforme os problemas de geometria mista vistos, principalmente em [22], [23], [24], [25] e [26], definiremos a proposta de solução na qual a condição de contorno para o problema exige que tenhamos potencial nulo sobre toda superfície da estrutura esfera-fio. Portanto, é evidente que o potencial gerado pelo arranjo de anéis de carga ( $\Phi_\sigma$ ) mais o potencial gerado pela carga puntiforme ( $\Phi_Q$ ) localizada a uma distância  $d$  do centro de coordenadas deve ser nulo para toda a região de superfície. Em outras palavras, o módulo de ambos os potenciais em  $\mathbf{x}_s$  devem ser iguais. Assim,

<sup>1</sup>Um maior detalhamento acerca da função delta de Dirac é dado por Dennery e Krzywicki [19] (Section III.13).

podemos reescrever a Eq.(3.1) na forma adequada para este método como

$$\Phi_{\sigma}(\mathbf{x}_s) = -\Phi_q(\mathbf{x}_s), \quad (3.20)$$

onde  $\mathbf{x}_s$  é o vetor observação sobre a superfície da estrutura esfera-fio. Tomando como ponto de partida a Eq.(3.20), o potencial da carga puntiforme pode ser dado por

$$\Phi_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2rd' \cos\theta + d'^2}}, \quad (3.21)$$

um resultado que utilizaremos mais adiante no cálculo da função densidade superficial de carga  $\sigma(\mathbf{x}')$ .

Conseqüentemente, os próximos passos para a resolução do problema são no sentido de encontrar tais expressões para enfim, definir a função densidade superficial de carga  $\sigma(\mathbf{x}')$  que satisfaça as condições de contorno.

### 3.2.1 Potencial gerado pelo arranjo de anéis de carga

Na presente Seção, devemos escrever o potencial em função da densidade superficial de carga  $\sigma(\mathbf{x}')$ . Entretanto, devido a complexidade da geometria do problema é conveniente analisarmos sua expressão em ambos os sistemas de coordenadas: esféricas e cilíndricas. Contudo, o que deve ficar claro, é que o potencial gerado pela densidade superficial de cargas da estrutura esfera-fio é o mesmo e independe do sistema adotado, inclusive quando consideramos o problema como um arranjo de infinitos anéis de carga. Além disso, é perceptível que para cada valor de  $\theta'$  ou  $z'$ , haverá apenas um anel com seu respectivo raio pertencente à esfera ou cilindro. Nesse sentido, analisando a Figura 3.5, podemos estabelecer a característica do elemento diferencial de superfície para cada um dos casos.

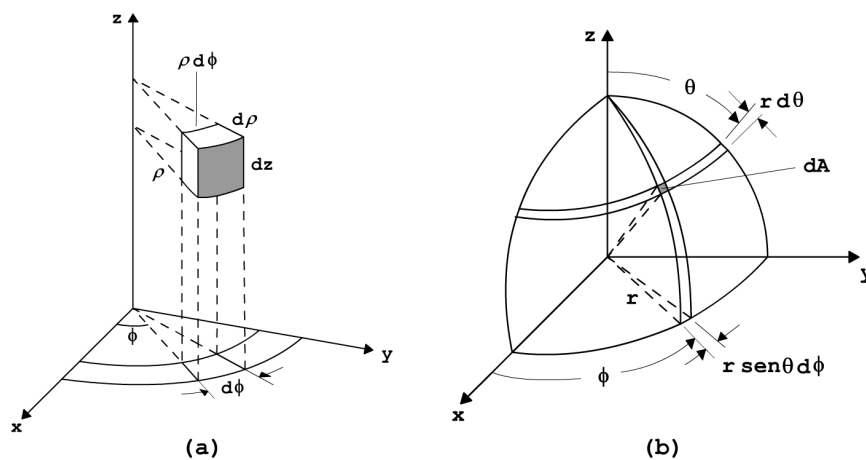


Fig. 3.5: Elemento diferencial de superfície para o caso: (a) cilíndrico e o (b) esférico.

Separadamente, descreveremos o elemento diferencial de superfície considerando o vetor normal a superfície. Primeiramente para a parte cilíndrica, com o raio cilíndrico igual a  $b$ , temos:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{a}}_\rho \cdot d\mathbf{S}' &= \rho \cdot d\phi' dz' \\ dS'_\rho &= b \cdot d\phi' dz'.\end{aligned}\quad (3.22)$$

Devido à simetria, cada um dos anéis possui uma distribuição uniforme de carga sobre sua superfície, isto é, devemos lembrar que a geometria do anel tem simetria azimutal, o que simplifica o elemento diferencial de superfície para apenas uma dimensão. Ou seja, a integral dupla de superfície para o potencial escalar se transforma em uma integral de apenas uma dimensão, onde  $dl_f$  é o elemento infinitesimal para o fio e  $dl_e$  será o equivalente para a esfera. Assim sendo:

$$\begin{aligned}dl_f &= b \cdot dz' \int_0^{2\pi} d\phi' \\ &= 2\pi b \cdot dz'\end{aligned}$$

Ou ainda, se considerarmos uma possível mudança para coordenadas esféricas ( $z' = b \cdot \cot \theta'$ ), obteremos:

$$dl_f = -2\pi b^2 \cdot \operatorname{cosec}^2 \theta' d\theta' \quad (3.23)$$

Note que o sinal negativo nos chama a atenção para o fato de que quando  $z$  cresce,  $\theta$  decresce, uma vez que  $\cos \theta = z/r$ . Agora, realizamos o mesmo procedimento para o elemento diferencial de superfície sobre a esfera de raio  $a$ , mais uma vez considerando a orientação normal. Assim:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{a}}_r \cdot d\mathbf{S}' = dS'_r &= a \sin \theta d\phi' \cdot a d\theta' \\ &= -a d\phi' \cdot (-a \sin \theta d\theta) \\ &= -a d\phi' \cdot (dz).\end{aligned}$$

Aplicando a simetria azimutal temos:

$$dl_e = 2\pi a dz = -2\pi a^2 \sin \theta \cdot d\theta' \quad (3.24)$$

onde mantivemos a convenção do elemento de superfície do anel ser positivo para  $z$  crescente.

Agora, temos que estabelecer o potencial gerado pelo arranjo formado pelo conjunto de anéis de carga, relacionando-o com a densidade superficial de carga, uma vez conhecido o elemento diferencial (de uma dimensão apenas) para cada uma das superfícies. Para isso, basta combinar a Eq.(3.17) com aquela que representa o potencial dado por uma densidade superficial de carga. Dessa forma,

a expressão que melhor simplifica a expressão do potencial considerando todos estes aspectos é a seguinte:

$$\Phi_{\sigma}(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \int_0^{\pi} \sigma(\theta') \frac{r^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta') dl_{\theta'} \quad (3.25)$$

onde  $dl_{\theta'}$  corresponde ao elemento de superfície do fio para  $\theta$  crescente e

$$\begin{cases} r_{<} = \min \left\{ r, \sqrt{z'^2 + \rho'^2} \right\} \\ r_{>} = \max \left\{ r, \sqrt{z'^2 + \rho'^2} \right\} \end{cases}$$

Aqui, o termo  $\rho'$  indica o raio em coordenadas cilíndricas para o vetor de carga  $x'$ , ora sobre a superfície da esfera ora sobre a superfície do fio.

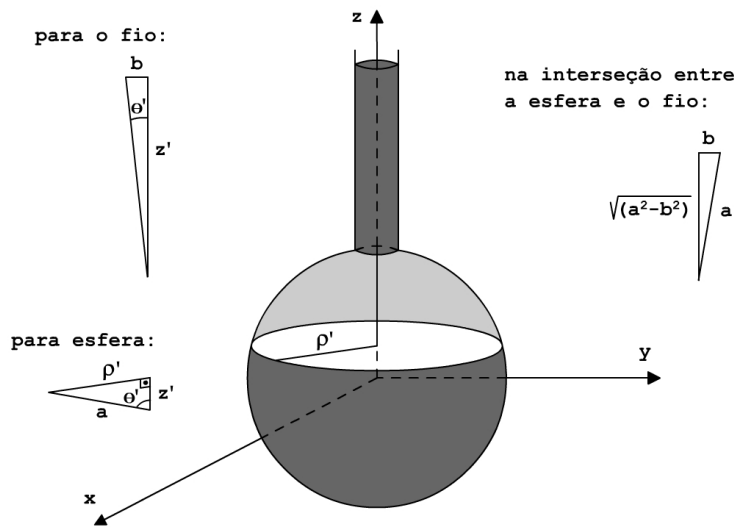


Fig. 3.6: Relações de ângulos e comprimentos dos anéis pertencentes ora à esfera ora ao fio.

Em relação a esfera, a expressão  $\sqrt{z'^2 + \rho'^2}$  representa exatamente o raio esférico  $a$  sobre tal superfície. Nesse sentido, é evidente que para escrever adequadamente a expressão do potencial é preciso, de início, dividir a integral em duas partes, uma correspondente à esfera e a outra ao fio, conforme ilustra a Figura 3.6. E, de onde temos especificado as relações entre ângulos e comprimentos, tanto pertencentes a esfera como ao fio.

Também, desse modo podemos escrever adequadamente a relação do elemento diferencial, observando bem os limites de integração na interseção entre a esfera e o fio. Assim, temos a seguinte

expressão para o potencial, em coordenadas esféricas:

$$\Phi_{\sigma}(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left[ 2\pi a^2 \int_{\arccos\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)}^{\pi} \sigma \cdot \text{sen}\theta' \left(\frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}}\right) P_l(\cos \theta') d\theta' \right. \\ \left. + 2\pi b^2 \int_0^{\arccos\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)} \sigma \cdot \text{cosec}^2\theta' \left(\frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}}\right) P_l(\cos \theta') d\theta' \right], \quad (3.26)$$

ou ainda, se considerarmos uma substituição de variáveis, onde  $x = \cos \theta'$ , temos a seguinte expressão modificada:

$$\Phi_{\sigma}(r, \theta) = \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left[ a^2 \int_{-1}^{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}} \left(\frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}}\right) \sigma(x) P_l(x) dx \right. \\ \left. + b^2 \int_{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}^1 \left(\frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}}\right) \frac{\sigma(x)}{(\sqrt{1-x^2})^3} P_l(x) dx \right] \quad (3.27)$$

Dentro destas equações, é necessário ainda determinar a relação de comprimentos dos raios ( $r_{<}$  e  $r_{>}$ ) entre os pontos sobre a superfície de integração e os pontos de observação na região de interesse. Mais alguns passos serão dados na tentativa de estabelecer evidentemente a distribuição de carga na superfície de integração.

Agora, devemos desenvolver o potencial gerado pela densidade de cargas sobre a superfície de contorno. Somente assim, podemos estabelecer alguma relação entre o comprimento dos raios de observação e integração. Para isso é fundamental que separemos também a região de interesse do potencial — da Eq.(3.25) para Eq.(3.26) dividimos a região de integração conforme a geometria da estrutura esfera-fio. Intuitivamente, o próximo passo no desenvolvimento do problema é definir o potencial sobre a esfera, para depois então, definí-lo sobre o fio cilíndrico.

### Potencial gerado pelos anéis de carga sobre a superfície da esfera

Nesta situação, temos as seguintes condições para o vetor de observação:  $r = a$  e  $x = \cos \theta \leq \sqrt{a^2 - b^2}/a$ . Consequentemente, ao considerar o primeiro termo da integração na Eq.(3.27) fica evidente que ambos  $r_{>}$  e  $r_{<}$  terão o mesmo valor e iguais ao próprio raio da esfera. Contudo, para o segundo termo,  $r_{<} = a$ , já que todos os pontos pertencentes ao fio cilíndrico possuem raio maior do que o raio da esfera. Assim, considerando  $r' = b/\sqrt{1-x^2}$ , teremos a seguinte expressão para o

potencial sobre a esfera:

$$\Phi_{\sigma}(\theta) = \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left[ a \int_{-1}^{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}} \sigma(x) P_l(x) dx + \frac{a^l}{b^{l-1}} \int_{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}^1 \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{l-2} \sigma(x) P_l(x) dx \right] \quad (3.28)$$

### Potencial gerado pelos anéis de carga sobre a superfície do fio

Sobre o fio cilíndrico, as condições para o vetor de observação não definem um raio específico. Contudo, sabemos que o raio para o ponto de observação é sempre maior que o raio da esfera, ou seja,  $r > a$  e  $x = \cos\theta > \sqrt{a^2 - b^2}/a$ . Assim, para o primeiro termo da integral em (3.27), é evidente que  $r > r' = a$ . Já o segundo termo da integral apresenta uma certa complexidade, pois para qualquer ponto sobre o fio, teremos uma região do fio que possuirá raio menor e outra raio maior que o ponto de observação, conforme ilustra a Figura 3.7.

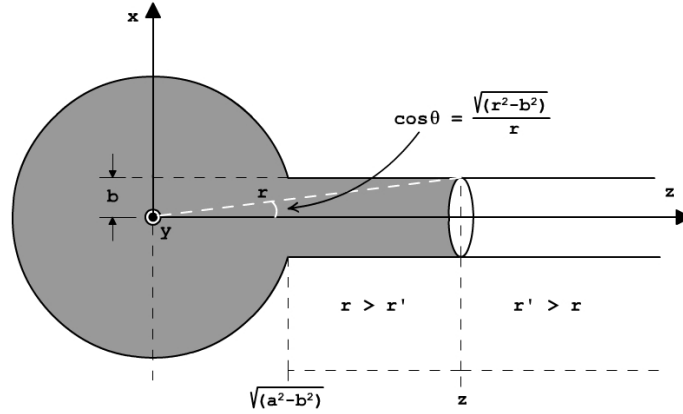


Fig. 3.7: Qualquer ponto sobre o fio apresenta uma região onde  $r > r'$  e outra onde  $r' > r$ .

Dessa maneira, é necessário dividir a integral sobre o fio em duas, observando mais uma vez o limite de integração sobre o ponto de corte. Com isso definido, chegaremos a seguinte expressão:

$$\Phi_{\sigma}(\theta) = \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left[ \frac{a^{l+2} \operatorname{sen}^{l+1}\theta}{b^{l+1}} \int_{-1}^{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}} \sigma(x) P_l(x) dx + b \cdot \operatorname{sen}^{l+1}\theta \int_{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}^{\cos\theta} \sigma(x) \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^{l+3}} P_l(x) dx + \frac{b}{\operatorname{sen}^l\theta} \int_{\cos\theta}^1 \sigma(x) \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{l-2} P_l(x) dx \right] \quad (3.29)$$

onde consideramos  $r = \frac{b}{\sin\theta}$ ,  $r' = \frac{b}{\sqrt{1-x^2}}$  e  $z = b \cot\theta$ .

Desse modo, temos já calculado e estabelecido o potencial gerado pelos anéis de carga sobre a superfície da estrutura esfera-fio. Todo ele definido em função da densidade superficial de carga. O próximo passo a fim de obter esta função é calcular o potencial gerado pela carga  $\Phi_q$  puntiforme sobre a superfície da mesma estrutura, conforme a Eq.(3.20). E então, encontrar um método de solução usando análise linear de sistema que ajuste os valores adequados para a função densidade.

### 3.2.2 Solução do problema de anéis de carga

As equações (3.28) e (3.29) relacionam o potencial sobre a superfície dos condutores com a densidade de carga. A variável escolhida para estas funções é  $x = \cos\theta$ , de modo que qualquer ponto da superfície está relacionado com um único valor de  $\theta$ . Considerando a relação (3.20) e o valor de  $\Phi_Q$  em (3.21), o valor de  $\sigma$  pode ser obtido solucionando a seguinte equação integral:

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2rd' \cos\theta + d^2}} = -\frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) T(\theta), \quad (3.30)$$

onde para  $\cos\theta < \sqrt{a^2 - b^2}/a$ , temos

$$T(\theta) = a \int_{-1}^{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}} \sigma(x) P_l(x) dx + \frac{a^l}{b^{l-1}} \int_{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}^1 \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{l-2} \sigma(x) P_l(x) dx \quad (3.31)$$

e para  $\cos\theta > \sqrt{a^2 - b^2}/a$ ,

$$\begin{aligned} T(\theta) = & \frac{a^{l+2} \sin^{l+1}\theta}{b^{l+1}} \int_{-1}^{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}} \sigma(x) P_l(x) dx \\ & + b \cdot \sin^{l+1}\theta \int_{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}^{\cos\theta} \sigma(x) \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^{l+3}} P_l(x) dx + \frac{b}{\sin^l\theta} \int_{\cos\theta}^1 \sigma(x) \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{l-2} P_l(x) dx \end{aligned} \quad (3.32)$$

utilizamos para isso os métodos numéricos descritos no Capítulo 4.





# Capítulo 4

## Resultados

A partir das soluções propostas para o problema eletrostático definido no Capítulo 3 — carga pontual na presença de uma esfera condutora aterrada, considerando a espessura do fio que conecta a esfera ao terra elétrico — nos deparamos com algumas dificuldades que incorrem da complexidade da geometria do problema, tanto esférica quanto cilíndrica.

O desenvolvimento em séries de funções ortogonais, é facilitado quando a geometria é de um tipo bem definido, cilíndrica ou esférica. Neste caso, são bem conhecidas as soluções da equação de Laplace, reservando-se polinômios de Legendre para a simetria esférica e funções de Bessel para sistemas cilíndricos. Aqui, as duas simetrias estão presentes simultaneamente e por isso outras estratégias devem ser buscadas.

Neste trabalho, preferiu-se buscar o valor das cargas na superfície dos condutores, isto é, a obtenção de uma função  $\sigma(\theta')$ , conforme as Seções 3.2 e 3.1.

Não há solução que possa ser expressa por meio de funções analíticas para nenhum dos métodos propostos, de modo que será necessária uma técnica numérica para determinar tal função desconhecida. Para isso, utilizaremos como fundamento a quadratura numérica da expressão analítica dentro da integral. Esta abordagem nos permite encontrar a solução proposta pelo Método dos Anéis de Carga e pelo Método das Funções de Green. E assim, obter resultados para dois métodos diferentes, o que permitirá inferir de forma resoluto, através da comparação de ambos, qual o efeito sobre o potencial quando incluímos o fio que conecta a esfera ao terra elétrico como parte das condições de contorno do problema. Assim, adotamos tais métodos como estratégias independentes de modo a resolver o mesmo problema.

## 4.1 Metodologia

Inicialmente, devemos desenvolver a característica fundamental envolvida na aproximação do cálculo da integração numérica, a chamada quadratura numérica, isto é:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) \quad (4.1)$$

onde  $f(x)$  é uma função suave bem comportada,  $\{\alpha_i\}$  são coeficientes reais com base na regra de interpolação utilizada, e  $\{x_i\}$  são os pontos dentro do intervalo  $[a, b]$ . Assim, a integração numérica se define como uma soma ponderada da função em cada um dos pontos, dado um determinado conjunto discreto dentro dos limites de integração.

O peso  $\alpha_i$  de cada valor da função  $f(x_i)$  para um dado ponto é determinado conforme a regra usada na quadratura numérica. No presente caso, utilizaremos a regra do trapézio, para a qual um polinômio de primeiro grau interpola a função  $f(x)$  entre cada um dos pontos  $\{x_i\}$ , conforme ilustra a Figura 4.1.

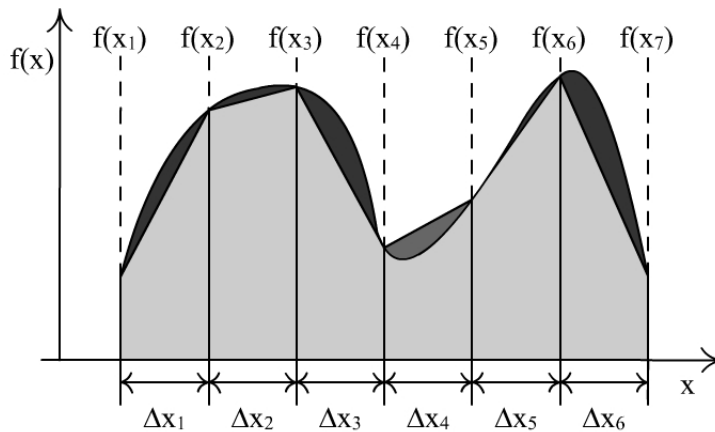


Fig. 4.1: Integração numérica utilizando a regra do trapézio.

Para o problema tratado, definiremos uma situação onde os valores obtidos para a função no ponto inicial e final sejam nulos, como mostra a Figura 4.1. Dessa forma, podemos fazer a seguinte consideração para o cálculo da integral numérica da Figura 4.1:

$$\begin{aligned} I &= \frac{[f(x_1) + f(x_2)]}{2} \Delta x_1 + \frac{[f(x_2) + f(x_3)]}{2} \Delta x_2 + \frac{[f(x_3) + f(x_4)]}{2} \Delta x_3 \\ &+ \frac{[f(x_4) + f(x_5)]}{2} \Delta x_4 + \frac{[f(x_5) + f(x_6)]}{2} \Delta x_5 + \frac{[f(x_6) + f(x_7)]}{2} \Delta x_6 \\ &= \frac{f(x_1)}{2} \Delta x_1 + \sum_{n=1}^6 f(x_n) \frac{\Delta x_{n-1} + \Delta x_n}{2} + \frac{f(x_7)}{2} \Delta x_6 \end{aligned}$$

onde  $I$  é o valor obtido para integração numérica. A partir desta análise, podemos generalizá-la para uma situação com  $N$  pontos:

$$I = \frac{f(x_1)}{2} \Delta x_1 + \sum_{n=2}^{N-1} f(x_n) \frac{\Delta x_{n-1} + \Delta x_n}{2} + \frac{f(x_N)}{2} \Delta x_{N-1} \quad (4.2)$$

Logo, tendo conhecimento de como se calcula a integral de uma expressão cuja primitiva é desconhecida, podemos voltar às Eqs.(3.8) e (3.30) e desenvolvê-la de forma a obter a função densidade de carga — solução do problema. Nesse sentido, obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{f(z, z'_1) \sigma(z'_1)}{2} \Delta z'_1 + \sum_{n=2}^{N-1} f(z, z'_n) \sigma(z'_n) \frac{\Delta z'_{n-1} + \Delta z'_n}{2} + \frac{f(z, z'_N) \sigma(z'_N)}{2} \Delta z'_{N-1} = g(z) \quad (4.3)$$

A partir da expressão em (4.3), podemos montar um sistema de equações lineares ( $A\sigma = b$ ), no qual  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  é a matriz quadrada e,  $\sigma \in \mathbb{R}^N$  e  $b \in \mathbb{R}^N$  são os vetores. Além disso, devemos levar também em consideração um conjunto discreto de pontos de mesma dimensão  $N$  dos vetores  $\sigma$  e  $b$ , tanto para a variável  $z'$  quanto para a variável  $z$ , dentro dos limites de integração. Assim, a partir destas considerações, obteremos a seguinte representação matricial:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,N} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \cdots & A_{N,N} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

onde

$$\begin{cases} A_{i,j} = f(z_i, z'_j) \frac{\Delta z'_{j-1} + \Delta z'_j}{2}, \Delta z'_0 = \Delta z'_N = 0 \\ b_i = g(z_i) \\ \sigma_j = \sigma(z'_j) \end{cases}$$

Encontraremos soluções numéricas para  $\sigma$  utilizando tanto o Método dos Anéis de Carga (Seção 3.2) quanto para o Método das Funções de Green (Seção 3.1). Para o primeiro caso, dividimos em 400 pontos a região da esfera ( $-a < z < \sqrt{a^2 - b^2}$ ) e em outros 2400 pontos a região do fio ( $z > \sqrt{a^2 - b^2}$ ), estendendo-se até  $1000a$  em alguns casos. Desenvolvemos o somatório da função até o polinômio de Legendre de ordem  $l = 5600$ , o dobro do número de pontos, como forma de obter a estabilidade numérica da solução. Para o segundo caso, dividimos em até 5000 pontos a região do fio, uma vez que os limites de integração foram definidos para ( $z > \sqrt{a^2 - b^2}$ ).

Em todas as simulações realizadas, assumimos a esfera de raio unitário. As soluções foram calculadas para  $d = \{1, 2; 1, 6; 2, 4; 4, 6; 8; 12; 18; 28; 40\}$  em unidades de raio da esfera. Os raios usados para o fio foram  $b = \{0, 5; 0, 25; 0, 125; 0, 064; 0, 032; 0, 16; 0, 008; 0, 004; 0, 002; 0, 001\}$  em unidades de raio da esfera. A magnitude da carga pontual foi definida como igual a unidade. Logo, se adotarmos a carga  $Q$  dada em *coulombs* ( $C$ ) e o raio da esfera como um (1) metro ( $m$ ), a solução obtida estará dentro do Sistema Internacional de unidades (SI).

Para a solução através do Método dos Anéis, um código foi escrito em *Visual Basic 6* (*Microsoft Visual Studio*) a fim de construir as matrizes e resolver o sistema linear através do método de decomposição LU. O algoritmo foi desenvolvido de forma a solucionar muitos casos simultaneamente, o que reduziu significativamente o tempo de processamento. Para a aplicação do Método das Funções de Green, foi utilizado o software *Wolfram Mathematica 8* para resolver o mesmo conjunto de casos.

## 4.2 Discussão da solução

A comparação Para ambos os métodos propostos, encontramos resultados bastantes similares. Ao compararmos os valores obtidos para a função densidade  $\sigma$ , percebemos que as maiores diferenças ocorrem para os menores valores de  $b$ , mais especificamente na região de curvatura da função. A

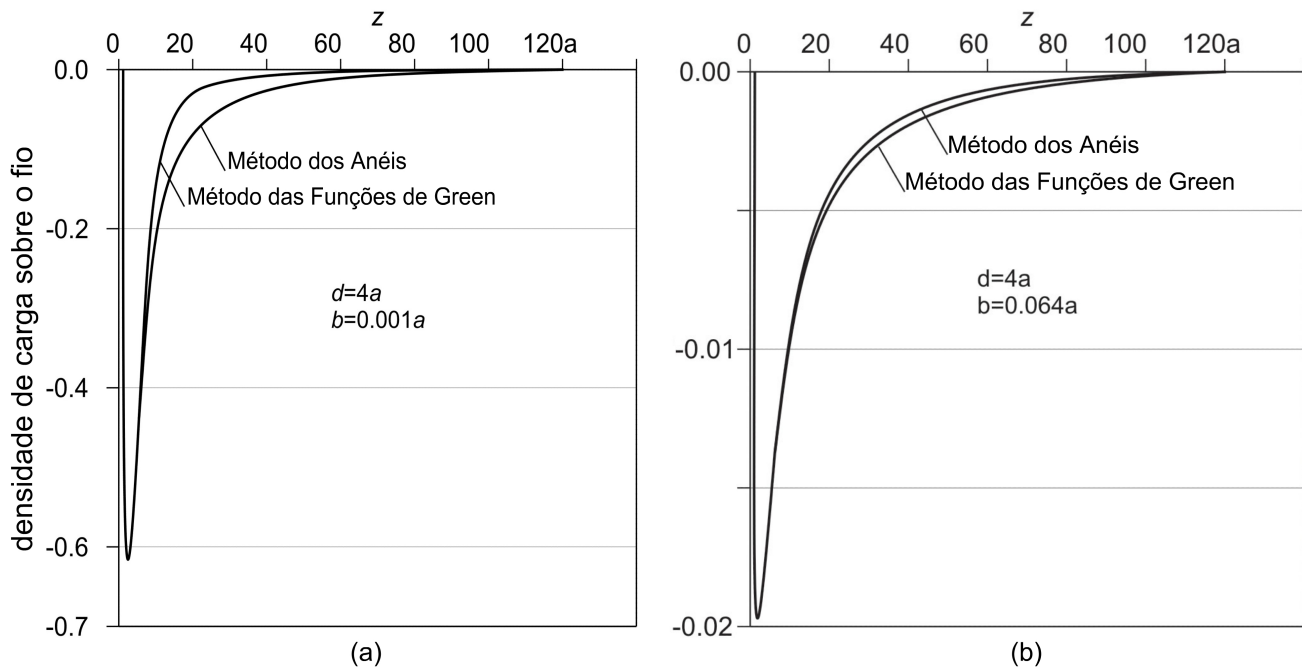


Fig. 4.2: Função densidade de carga  $\sigma(z')$  para cada um dos métodos. As maiores diferenças foram encontradas na região da cauda. Elas são menores conforme o raio do fio aumenta: (a) para  $d = 4a$  e  $b = 0, 001a$ ; (b) para  $d = 4a$  e  $b = 0, 064a$ . A densidade está em unidades de  $Q/a^2$ .

comparação entre valores obtidos para  $\sigma$  mostra diferenças maiores na região da cauda da curva, principalmente para menores valores  $b$ . Até o ponto de mínimo, todas as curvas são praticamente coincidentes. Não foram encontradas diferenças significativas para os pontos de mínimo da função densidade  $\sigma(z_{min})$  (diferença média=0,9%, desvio padrão=0,7%) ou para suas respectivas coordenadas sobre o eixo  $z$  ( $z_{min}$ ) (diferença média=2,0%, desvio padrão=1,9%). A carga total no fio difere entre os dois métodos em menos de 10% para todas as simulações com  $b > 0,004a$ . A Figura 4.2 mostra os perfis da função densidade para  $b = 0,001a$  e  $b = 0,064a$ . Para valores maiores de  $b$ , a diferença entre os dois métodos é praticamente imperceptível.

Na região da cauda, para  $z > 200a$ , as curvas obtidas pelos dois métodos se comportam diferentemente. Assumindo que a densidade da superfície para esta região é dada por  $\sigma(z \rightarrow \infty) = Az^{-\alpha}$ , o Método das Funções de Green produziu valores de  $\alpha$  dentro de um intervalo muito estreito acerca de  $\alpha = 3$  (média=3,0005, desvio padrão=0,027) para todos os valores de  $b$  e  $d$ , enquanto que o Método de Anéis produziu valores de  $\alpha$  com uma distribuição mais ampla, de  $1,9 < \alpha < 2,8$ , em função de  $b$  e  $d$ .

Estes valores de  $\alpha$  são admissíveis para uma diferença finita de potencial entre a esfera e o infinito. Considerando somente a distribuição de carga na região de cauda, o potencial sobre a cauda,  $\Phi_{cauda}$ , pode ser obtido a partir de

$$\Phi_{cauda}(z) = \frac{b}{2\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \int_{\tilde{z}}^{\infty} \sigma(z') \frac{r^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (4.5)$$

Aqui,  $\tilde{z}$  foi tomado como o começo da região de cauda.

As Tabelas 4.1 e 4.2 foram construídas com os pontos de mínimo da função densidade e suas respectivas coordenadas sobre o eixo  $z$  para todos os valores de  $b$  e  $d$ , através da solução obtida pelo

| b     | d=1,2  | d=1,6  | d=2,4  | d=4    | d=6    | d=8    | d=12   | d=18   | d=28   | d=40   |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,001 | 194,69 | 421,21 | 586,07 | 601,61 | 527,99 | 457,12 | 354,22 | 262,48 | 182,63 | 133,63 |
| 0,002 | 108,82 | 235,48 | 327,94 | 337,35 | 296,84 | 257,6  | 200,37 | 149,08 | 104,16 | 76,433 |
| 0,004 | 60,451 | 130,8  | 182,09 | 187,25 | 164,8  | 143,09 | 111,45 | 83,094 | 58,214 | 42,814 |
| 0,008 | 33,741 | 72,971 | 101,45 | 104,08 | 91,421 | 79,278 | 61,668 | 45,949 | 32,198 | 23,697 |
| 0,016 | 19,07  | 41,212 | 57,181 | 58,44  | 51,142 | 44,229 | 34,277 | 25,456 | 17,79  | 13,074 |
| 0,032 | 10,991 | 23,728 | 32,833 | 33,38  | 29,063 | 25,036 | 19,294 | 14,251 | 9,9058 | 7,2528 |
| 0,064 | 6,5402 | 14,1   | 19,435 | 19,617 | 16,989 | 14,577 | 11,104 | 8,1257 | 5,6045 | 4,0801 |
| 0,125 | 4,1048 | 8,8328 | 12,111 | 12,103 | 10,367 | 8,8217 | 6,6801 | 4,85   | 3,312  | 2,3936 |
| 0,25  | 2,7638 | 5,9252 | 8,0419 | 7,8959 | 6,6528 | 5,5945 | 4,1678 | 2,9801 | 2,0047 | 1,433  |
| 0,5   | 2,2362 | 4,7563 | 6,3224 | 5,9811 | 4,8806 | 4,0141 | 2,9051 | 2,0477 | 1,3552 | ,95581 |

Tab. 4.1: Mínimo da Função Densidade  $\sigma(z') \times (-10^3)$ , em unidades de  $Q/a^2$ .

método das imagens.

| b     | d=1,2  | d=1,6  | d=2,4  | d=4    | d=6    | d=8    | d=12   | d=18   | d=28   | d=40   |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,001 | 2,4452 | 2,4661 | 2,5322 | 2,6625 | 2,7915 | 2,8888 | 3,0246 | 3,1522 | 3,268  | 3,3438 |
| 0,002 | 2,5227 | 2,5514 | 2,6347 | 2,8006 | 2,9755 | 3,1149 | 3,3218 | 3,523  | 3,7201 | 3,8527 |
| 0,004 | 2,5428 | 2,5753 | 2,6672 | 2,8601 | 3,0706 | 3,2452 | 3,5189 | 3,8067 | 4,1119 | 4,3328 |
| 0,008 | 2,5205 | 2,5535 | 2,6485 | 2,8507 | 3,0768 | 3,2733 | 3,5919 | 3,9508 | 4,3609 | 4,685  |
| 0,016 | 2,469  | 2,5017 | 2,5939 | 2,794  | 3,0199 | 3,2174 | 3,5497 | 3,9404 | 4,4148 | 4,8231 |
| 0,032 | 2,3924 | 2,4231 | 2,5116 | 2,7012 | 2,9161 | 3,1063 | 3,4246 | 3,806  | 4,289  | 4,7171 |
| 0,064 | 2,2721 | 2,2998 | 2,3908 | 2,5752 | 2,7489 | 2,9227 | 3,2517 | 3,5807 | 4,0214 | 4,4182 |
| 0,125 | 2,1297 | 2,1579 | 2,2324 | 2,395  | 2,5666 | 2,7086 | 2,9705 | 3,2722 | 3,6441 | 4,0753 |
| 0,25  | 1,8500 | 1,8827 | 1,922  | 2,0721 | 2,2496 | 2,3581 | 2,5699 | 2,7924 | 3,0884 | 3,2773 |
| 0,5   | 1,4107 | 1,4293 | 1,4788 | 1,5603 | 1,6675 | 1,7492 | 1,8908 | 2,0506 | 2,2168 | 2,3526 |

Tab. 4.2: Coordenada sobre o eixo  $z$  para o ponto de mínimo, em unidades de  $a$ .

No método das imagens, a soma dos potenciais causados pela carga  $Q$  e por sua respectiva carga imagem — problema usual sem a conexão com o terra elétrico — corresponde a um monopolo de intensidade  $Q \left(1 - \frac{a}{d}\right)$ , superposto a um dipolo elétrico com momento  $Q \frac{a}{d} \left(d - \frac{a^2}{d}\right)$ . A esfera está localizada na região onde esta soma se anula. A região sobre o eixo  $z$  onde o fio deveria estar localizado possui potencial elétrico positivo  $\Phi_{semfio}$  que se anula na conexão com a esfera e quando  $z \rightarrow \infty$ . O potencial sobre o eixo  $z$  fora da região esfera (para  $z > a$ ) é obtido através de:

$$\Phi_{semfio}(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{z+d} - \frac{a}{d\left(z + \frac{a^2}{d}\right)} \right] \quad (4.6)$$

Supondo que sobre a esfera esteja distribuída a carga prevista pelo método das imagens ( $-\frac{a}{d}Q$ ), uma conexão da esfera através de um fio ao terra elétrico levará ao surgimento de correntes elétricas que fluirão a partir de cada uma das extremidades do fio, isto é, conduzindo cargas negativas da esfera e também do terra (em  $z \rightarrow \infty$ ) para toda a superfície do fio. Inicialmente, a tendência é que as cargas sejam atraídas para a região de onde se obtém o potencial elétrico mínimo, em  $z_0$ :

$$z_0 = \sqrt{\frac{a}{d}} \left( \frac{a\sqrt{a} - d\sqrt{d}}{\sqrt{a} - \sqrt{d}} \right) \quad (4.7)$$

Entretanto, a conexão da esfera com o fio-terra faz as cargas se rearranjarem de modo que o ponto de mínimo se desloque para mais próximo da esfera em relação àquele em (4.7). Também, é perceptível que embora a diferença de potencial entre a esfera e o infinito seja zero, a conexão do fio-terra provoca, até que o sistema atinja o equilíbrio, correntes em sentidos opostos em direção ao ponto de

potencial mínimo sobre o fio.

A Figura 4.3 mostra a densidade de carga sobre o fio para alguns valores de  $b/a$  e  $d$ . Ao longo do fio a densidade de carga é sempre negativa, iniciando com valores muito pequenos próximo à junção, aumentando em magnitude até um ponto intermediário, e então tendendo a zero quando se move em direção ao infinito. O ponto de mínimo se move conforme a geometria do sistema, assumindo valores mais altos quando  $d$  aumenta, porém mostrando pouca variação com os valores de  $b/a$ .

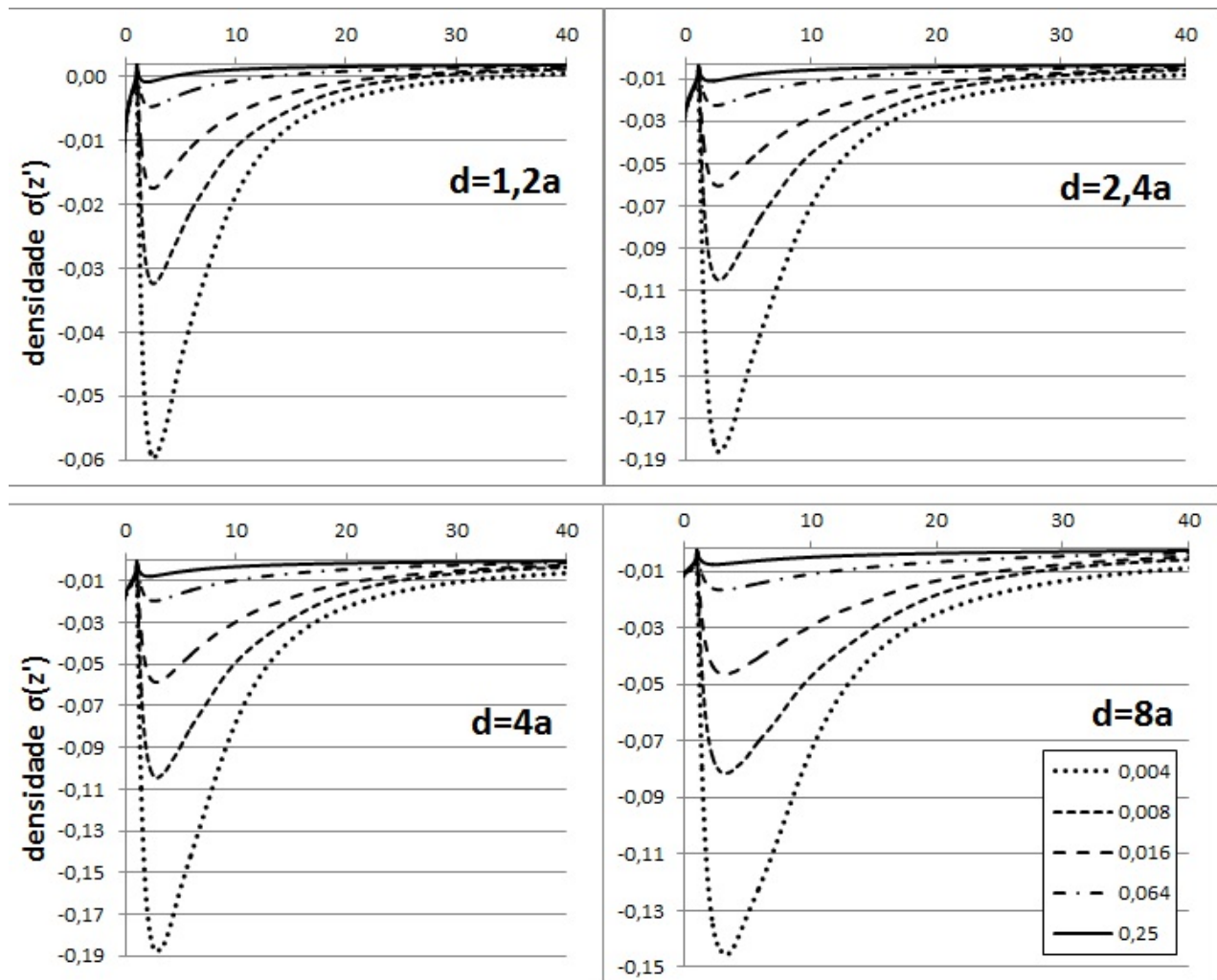


Fig. 4.3: Função densidade  $\sigma(z')$  sobre o fio relacionada a algumas posições da carga e espessura do fio-terra. A densidade está em unidades de  $Q/a^2$ .

A figura 4.4 mostra a densidade de carga sobre a superfície da esfera em função da coordenada  $z$ . A carga indutora é colocada sobre o lado negativo do eixo  $z$ , em  $z = -4a$ . A esfera se estende a partir de  $z = -a$  até  $z = \sqrt{a^2 - b^2}$ , exatamente em uma das extremidades do fio-terra (a outra extremidade se estende em direção ao infinito). O gráfico mostra a densidade de carga para fios de

diferentes espessuras, e ainda a densidade de carga convencionalmente obtida através do Método das Imagens, sem considerar a existência do fio-terra.

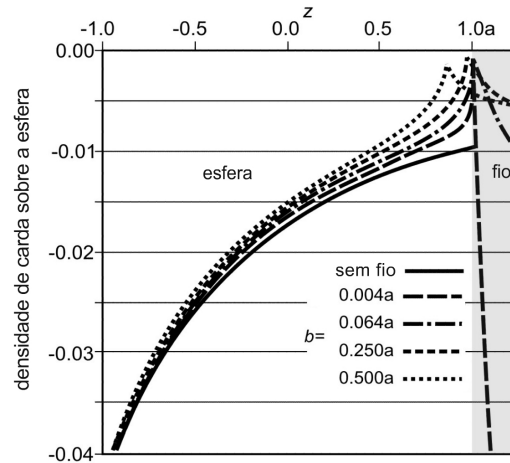


Fig. 4.4: Densidade de carga sobre a esfera. Simulação para quatro valores de  $b$  e para o problema sem o fio, em relação a  $d = 4a$ . A densidade está em unidades de  $Q/a^2$ .

A densidade sobre a esfera se desvia do valor teórico do Método das Imagens na região próxima à conexão do fio-terra, com notável diminuição do módulo da densidade de carga devido à geometria côncava. Ao contrário de uma borda afiada, que concentra a carga elétrica, o canto côncavo repele quaisquer excesso de cargas, como visto na região próxima a  $z = \sqrt{a^2 - b^2}$ . Percebemos que quando o fio afina, a densidade de carga sobre a esfera se aproxima daqueles valores previstos pelo Método das Imagens.

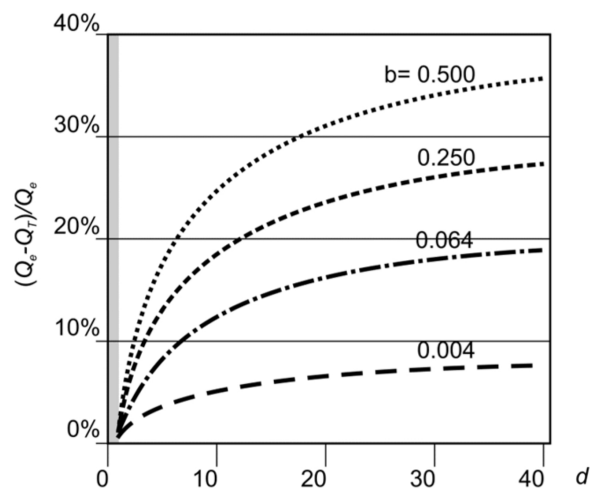


Fig. 4.5: Diferença relativa da carga total sobre a esfera, considerando o fio-terra ou não.  $Q_t$  é a carga sobre a esfera para uma dada espessura do fio e  $Q_e = -\frac{a}{d}Q$  é a carga imagem sem considerar a existência do fio. Os valores estão expressos em porcentagens.



A Figura 4.5 mostra que quanto maior for a distância, no qual a carga indutora  $Q$  é colocada, maior será a diferença relativa entre a densidade de carga calculada sobre a esfera e o valor teórico a partir do Método das Imagens, desconsiderando a existência do fio-terra.

A Figura 4.6 ilustra a carga total sobre o fio como uma função do inverso da raiz quadrada de  $d$  ( $1/\sqrt{d}$ ). A escolha desta variável produz um gráfico com um certo ponto de mínimo, permitindo um alinhamento da curva através de polinômio quadrático. A maior quantidade de carga (negativa) sobre o fio é encontrada quando  $d \approx 4,4 \pm 0,4$  para qualquer espessura  $b$  (valor obtido por interpolação). Este é um valor intermediário entre os extremos. Quando  $d$  tende até  $a$ , a carga  $Q$  estará próxima à superfície da esfera, produzindo um forte campo elétrico nas vizinhanças de  $z = -a$ , uma condição onde quase toda a carga é induzida sobre a esfera, sendo assim, o fio fica quase sem carga. Por outro lado, quando  $d$  tende ao infinito (se afasta muito), o campo elétrico se enfraquece na região dos condutores, e somente uma pequena quantidade de carga é induzida sobre eles. Assim, em ambas as extremidades a quantidade de carga induzida sobre o fio será pequena, e o módulo máximo da carga induzida será encontrada entre estas condições.

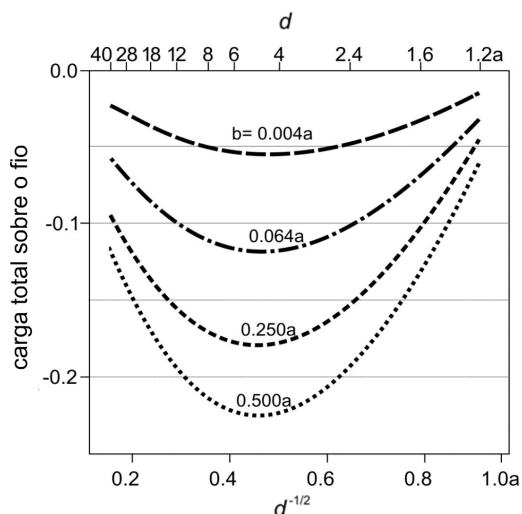


Fig. 4.6: Carga total sobre o fio como uma função de  $\frac{1}{\sqrt{d}}$  para alguns valores de  $b$ . A carga está em unidades de  $Q$ .

As curvas na Figura 4.7 foram obtidas através do Método das Funções de Green. No detalhe, através de extrapolação polinomial, elas mostram que a carga total sobre fio desaparece quando a espessura se aproxima de zero. Os dois métodos apresentaram resultados semelhantes para este comportamento, porém para o Método das Funções de Green, as curvas se aproximam de zero com menos desvio quando  $b$  tende a zero.

Desse modo, podemos efetivamente concluir que os cálculos demonstraram que quanto menor for a espessura do fio, menor é o desvio da distribuição de carga sobre a esfera, comparando com aqueles

resultados obtidos através do Método das Imagens usualmente empregado para a esfera aterrada (Seção 2.4). E, para a quantidade de carga sobre o fio, obtivemos que quanto mais fino for o fio, menor é a quantidade de carga é induzida sobre ele. Através da Tabela 4.3, podemos expressar de forma evidente essa relação.

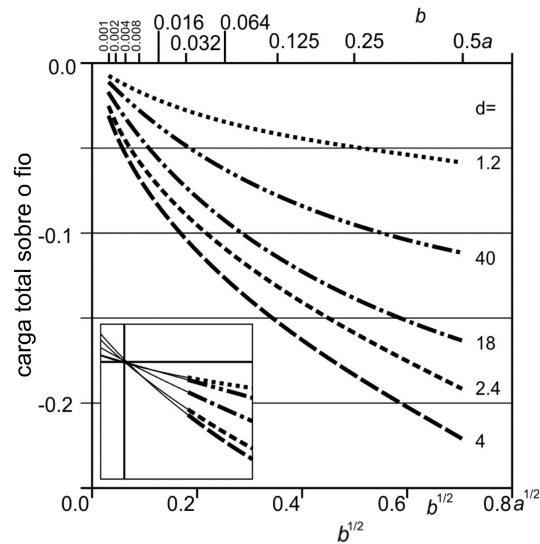
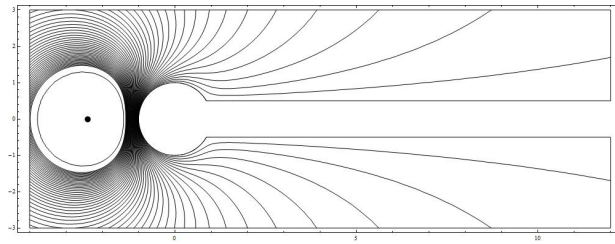
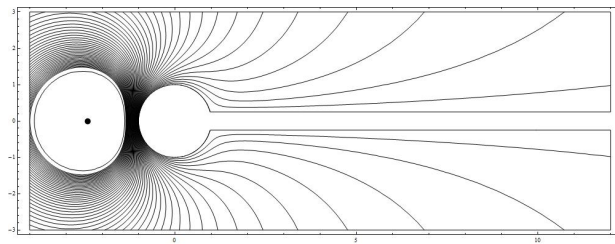
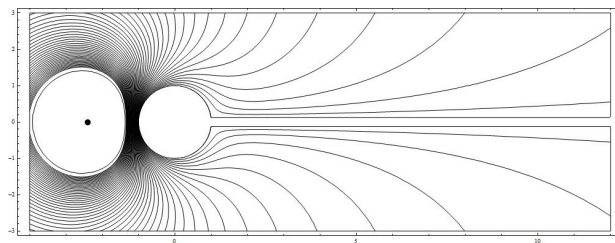
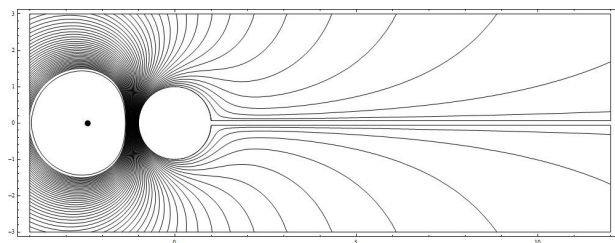
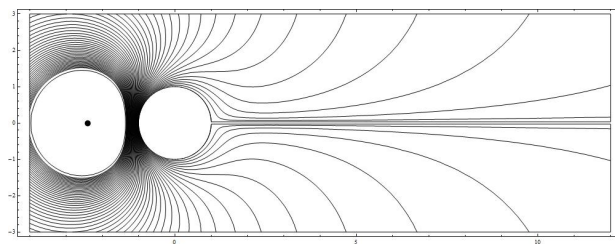


Fig. 4.7: Carga total sobre o fio como uma função de  $\sqrt{b}$  para alguns valores de  $d$ . No detalhe, através de extrapolação polinomial (linhas contínuas), as curvas passam próximo ao zero quando  $b$  tende a zero. A densidade de carga está em unidade de  $Q$ .

| b     | d=1,2  | d=1,6  | d=2,4  | d=4    | d=6    | d=8    | d=12   | d=18   | d=28   | d=40   |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,001 | 8,041  | 17,63  | 25,452 | 28,025 | 26,311 | 23,966 | 19,955 | 15,837 | 11,793 | 9,0524 |
| 0,002 | 10,75  | 23,615 | 34,284 | 38,173 | 36,247 | 33,312 | 28,103 | 22,6   | 17,058 | 13,223 |
| 0,004 | 13,964 | 30,732 | 44,854 | 50,48  | 48,471 | 44,947 | 38,435 | 31,339 | 24,001 | 18,808 |
| 0,008 | 17,723 | 39,072 | 57,3   | 65,128 | 63,198 | 59,111 | 51,224 | 42,356 | 32,932 | 26,107 |
| 0,016 | 22,084 | 48,757 | 71,802 | 82,327 | 80,649 | 76,035 | 66,72  | 55,922 | 44,141 | 35,407 |
| 0,032 | 27,129 | 59,965 | 88,609 | 102,34 | 101,07 | 95,952 | 85,147 | 72,262 | 57,86  | 46,948 |
| 0,064 | 32,989 | 72,977 | 108,11 | 125,55 | 124,79 | 119,13 | 106,71 | 91,543 | 74,238 | 60,873 |
| 0,125 | 39,65  | 87,749 | 130,16 | 151,64 | 151,34 | 145,04 | 130,79 | 113,11 | 92,645 | 76,619 |
| 0,25  | 48,136 | 106,51 | 157,94 | 184,04 | 183,9  | 176,53 | 159,77 | 138,87 | 114,55 | 95,341 |
| 0,5   | 58,81  | 129,88 | 191,62 | 221,39 | 219,67 | 209,92 | 188,96 | 163,57 | 134,52 | 111,8  |

Tab. 4.3: Carga Total sobre o Fio  $\times (-10^3)$ , em unidade de  $Q$ .

Para as linhas de equipotenciais em torno dos condutores elétricos, a perturbação causada pelo fio também é menor conforme diminuimos a sua espessura. As Figuras 4.8-4.17 ilustram esta situação para os valores de  $b$ , em relação a  $d = 2, 4a$ .

Fig. 4.8: Linhas de Equipotenciais para  $b = 0,5a$  e  $d = 2,4a$ .Fig. 4.9: Linhas de Equipotenciais para  $b = 0,25a$  e  $d = 2,4a$ .Fig. 4.10: Linhas de Equipotenciais para  $b = 0,125a$  e  $d = 2,4a$ .Fig. 4.11: Linhas de Equipotenciais para  $b = 0,064a$  e  $d = 2,4a$ .Fig. 4.12: Linhas de Equipotenciais para  $b = 0,032a$  e  $d = 2,4a$ .

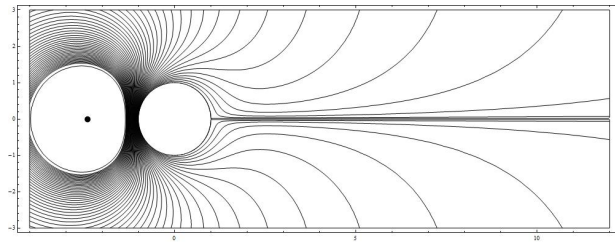


Fig. 4.13: Linhas de Equipotenciais para  $b = 0,016a$  e  $d = 2,4a$ .

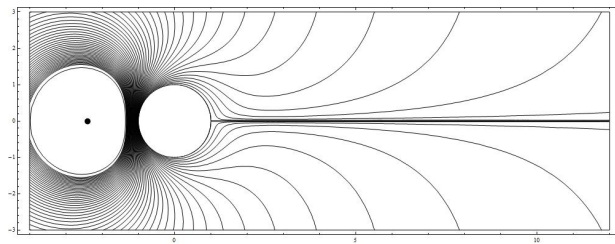


Fig. 4.14: Linhas de Equipotenciais para  $b = 0,008a$  e  $d = 2,4a$ .

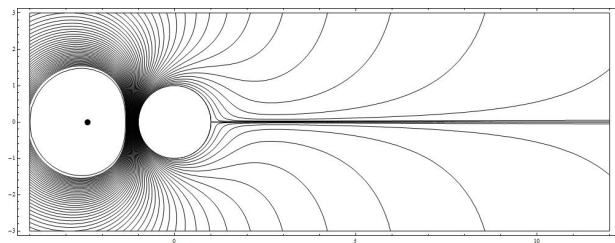


Fig. 4.15: Linhas de Equipotenciais para  $b = 0,004a$  e  $d = 2,4a$ .

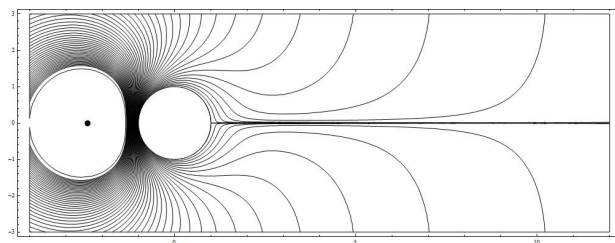


Fig. 4.16: Linhas de Equipotenciais para  $b = 0,001a$  e  $d = 2,4a$ .

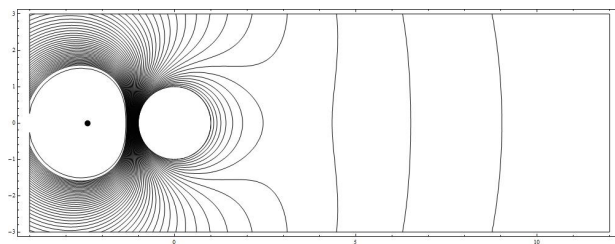


Fig. 4.17: Linhas de Equipotenciais sem considerar a existência da conexão com o terra elétrico.

# Capítulo 5

## Conclusão

Nesta dissertação, o foco do trabalho se estabeleceu em definir a solução do problema de uma carga na presença de uma esfera conectada ao terra elétrico através de um fio com certa espessura que se estende em direção ao infinito. Para isso, calculamos a distribuição de carga para cada uma das superfícies condutoras (esfera e fio), utilizando dois métodos propostos e analisamos os resultados.

A resolução do problema nos permitiu definir de forma clara um conceito negligenciado ou obscurecido dentro da eletrostática, que é a questão do aterramento elétrico para corpos condutores. Sendo assim, é possível afirmar que a validade das previsões do Método das Imagens para a densidade de carga, potencial e campo elétrico é dependente da espessura do fio-terra. Qualitativamente afirmamos que, quando o fio é muito fino, sua carga se aproxima de zero. De fato, o potencial para os fios mais finos é quase o mesmo que o obtido pelo Método das Imagens, quando o mesmo fio é desprezado. Como previsto por J. C. Maxwell e discutido por J.D. Jackson [1], o Método das Imagens requer uma fonte de carga que produza um potencial zero na superfície do esfera, e para isso, um fio infinitamente fino é a forma mais comumente utilizada, de tal maneira que não afete o sistema.

A abordagem adotada aqui é, naturalmente, uma idealização, uma vez que fios infinitos não existem no mundo real. Entretanto, ela fornece uma importante percepção no caso da aplicação do Método das Imagens para o caso da esfera aterrada. Nesse sentido, é importante destacar aos estudantes de engenharia as diferenças entre modelos idealizados e aplicações práticas. É claro que idealizações são inevitáveis, mas é importante dar uma clara compreensão de suas limitações. O Método das Imagens discutido neste trabalho oferece uma boa oportunidade para transmitir essas limitações.

Quando tratada a partir do ponto de vista teórico, os autores não estão preocupados na questão dos fios necessários para determinar o potencial sobre os condutores. Entretanto, a presença de um fio com o raio mil vezes menor que o raio do condutor esférico é suficiente para reduzir a carga total da esfera em cerca de 8% em relação ao valor sem o fio, sob o mesmo campo externo, como mostrado na Figura 4.5. Isso significa que este cuidado deveria ser exercitado quando se calcula coeficientes

capacitivos de um sistema de condutores, uma vez que seus valores podem ser significativamente modificados pela presença de fios necessários na conexão das partes do sistema.

Como possibilidade de trabalhos futuros, poderíamos estender o assunto para o desenvolvimento de uma expressão analítica da distribuição de carga nos corpos condutores, considerando o aterramento elétrico, baseada somente na relação da geometria dos corpos e da magnitude da carga. Outra abordagem possível do problema é determinar a solução (densidade de carga sobre a esfera e o fio) considerando o equilíbrio de forças em todos os pontos da estrutura.

# Apêndice A

## Potencial gerado pela região assintótica do fio

Pode-se demonstrar que o potencial na superfície de um fio infinito, cuja densidade de carga é dada por  $\sigma(z \rightarrow \infty) = Az^{-\alpha}$ , não diverge se a condição  $\alpha > 1$  for satisfeita. Para isso, consideraremos apenas o potencial  $\Phi_{cauda}$  devido ao pedaço do fio na região muito longe da esfera (cauda), delimitada por  $z > \tilde{Z}$ ,  $\tilde{Z} \gg a$ , o que é suficiente para nosso objetivo, visto que a quantidade de carga na região restante ( $z < \tilde{Z}$ ) possui uma quantidade finita de carga em uma região limitada do espaço.

Partimos de uma da equação 3.25, para limitar a região escolhida,

$$\Phi_{cauda}(z) = \frac{b}{2\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \int_{\tilde{Z}}^{\infty} \sigma(z') \frac{r^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta') dz', \quad (\text{A.1})$$

onde  $r = (b^2 + z^2)^{1/2}$ , na qual já substituímos  $dl_{\theta'}$  por  $dz'$ . Substituindo o valor de  $\sigma(z)$ , e separando a integral temos

$$\Phi_{cauda}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left[ \frac{1}{(b^2 + z^2)^{(l+1)/2}} \int_{\tilde{Z}}^z (b^2 + z'^2)^{l/2} Az'^{-\alpha} P_l(\cos \theta') dl_{z'} + \right. \\ \left. (b^2 + z^2)^{l/2} \int_Z^{\infty} \frac{1}{(b^2 + z'^2)^{(l+1)/2}} Az'^{-\alpha} P_l(\cos \theta') dl_{z'} \right]. \quad (\text{A.2})$$

Considere que na região assintótica,  $P_l(\cos \theta') \rightarrow 1$  e que  $z' \gg b$ . Logo,

$$\Phi_{cauda}(z) = \frac{Ab}{2\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left[ \frac{1}{z^{(l+1)}} \int_{\tilde{Z}}^z z'^{l-\alpha} P_l(\cos \theta') dl_{z'} + z^l \int_Z^{\infty} \frac{1}{z'^{(l+1+\alpha)}} P_l(\cos \theta') dl_{z'} \right]. \quad (\text{A.3})$$

O potencial deve ser decrescente a medida que  $z$  cresce. Logo, qualquer valor do potencial acima deve ser menor que  $\Phi_{cauda}(\tilde{Z})$ , o que anula a primeira integral na equação acima. Resolvendo a

segunda integral, obtemos

$$\Phi_{cauda}(\tilde{Z}) = \frac{Ab}{2\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \tilde{\theta}) \tilde{Z}^l \left[ -\frac{1}{l+\alpha} \frac{1}{z^{l+\alpha}} \Big|_{\tilde{Z}}^{\infty} \right] = \frac{Ab}{2\epsilon_0} \tilde{Z}^{-\alpha} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \tilde{\theta}) \frac{1}{l+\alpha}. \quad (\text{A.4})$$

o que é válido se  $\alpha \neq 0$ . Aqui,  $\tilde{Z} = b \cot \tilde{\theta}$ . Note que, se  $\alpha \geq 1$  podemos afirmar que

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \tilde{\theta}) \frac{1}{l+\alpha} < \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \tilde{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\cos \tilde{\theta}}} \quad (\text{A.5})$$

onde usamos a função geratriz dos polinômios de Legendre

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}.$$

Assim, para que  $\Phi_{cauda}(\tilde{Z})$  seja finito, basta garantir que

$$\frac{Ab}{2\epsilon_0} \tilde{Z}^{-\alpha} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\cos \tilde{\theta}}}$$

também seja para qualquer valor de  $\tilde{\theta}$  próximo de zero. Assim, ao fazer

$$\lim_{\tilde{Z} \rightarrow \infty} \Phi_{cauda}(\tilde{Z}) < \lim_{\tilde{\theta} \rightarrow 0} \frac{Ab}{2\epsilon_0} \tilde{Z}^{-\alpha} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\cos \tilde{\theta}}} \quad (\text{A.6})$$

consideramos

$$\begin{aligned} \lim_{\tilde{\theta} \rightarrow 0} \tilde{Z}^{-\alpha} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\cos \tilde{\theta}}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{\tilde{\theta} \rightarrow 0} \frac{1}{b^\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-\cos \tilde{\theta}}} \tan^\alpha \tilde{\theta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{\tilde{\theta} \rightarrow 0} \frac{1}{b^\alpha} \frac{\sin \tilde{\theta}}{\cos \tilde{\theta} \sqrt{1-\cos \tilde{\theta}}} \tan^{\alpha-1} \tilde{\theta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{\tilde{\theta} \rightarrow 0} \frac{1}{b^\alpha} \sqrt{\frac{\sin^2 \tilde{\theta}}{\cos^2 \tilde{\theta} (1-\cos \tilde{\theta})}} \tan^{\alpha-1} \tilde{\theta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{\tilde{\theta} \rightarrow 0} \frac{1}{b^\alpha} \sqrt{\frac{\tilde{\theta}^2}{(1-1+\frac{1}{2}\tilde{\theta}^2)}} \tan^{\alpha-1} \tilde{\theta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{\tilde{\theta} \rightarrow 0} \frac{1}{b^\alpha} \sqrt{2} \tan^{\alpha-1} \tilde{\theta} = \begin{cases} \infty & \text{se } \alpha < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha > 1 \end{cases} \end{aligned}$$



Logo, o potencial ao longo do fio terá valores admissíveis se  $\alpha \geq 1$ .



## Apêndice B

### Artigo submetido ao *Journal of Electrostatics*

Nas páginas seguintes, apresentamos o manuscrito submetido à publicação no “*Journal of Electrostatics*” em 13 de janeiro de 2012. A discussão e os resultados apresentados são os mesmos contidos nesta dissertação.

# The Method of Images applied to the grounded sphere: the problem of the ground wire

Murilo Trindade de Oliveira<sup>a</sup>, Cesar José Bonjuani Pagan<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*School of Electrical and Computer Engineering, University of Campinas (UNICAMP),  
13083-970, Campinas, SP, Brazil*

---

## Abstract

The Method of Images poses an important difficulty when used to solve the problem of a charge in the presence of a grounded conducting sphere. This arises from the fact that the sum of the inducing charge and the image charge is different from zero. As a consequence, there is a monopole field far from the system, and any ground wire physically connected to the sphere will carry an electric current, changing the initial balance of charges until a new equilibrium is reached. The approach taken in this paper assumed an infinite straight wire connecting the sphere to ground. The charge distribution over the surface of the conductors was calculated, and the results analyzed. It was shown that the thinner the wire, the lower will be its total charge, and the closer will be the calculated charge density at the surface of the sphere to the conventional solution by the Method of Images.

*Keywords:* education, electromagnetism, electrostatics, Method of Images.

---

## 1. Introduction

The Method of Images was first presented in 1849, in the early days of the construction of electromagnetic theory, by Sir William Thomson [1], later Lord Kelvin. It is still taught in the introductory discipline of electromagnetism, at the beginning of electrical engineering courses. It is based on the uniqueness of the solution of the Laplace Equation in a region limited by equipotential surfaces and is a powerful tool to solve a class of electrostatic problems, restricted to specific symmetries such as the infinite plane, the infinite cylinder, the sphere or, less commonly, the ellipsoid. For a more extensive discussion about the admissible regions for application of the Method of Images, see the work of J. B. Keller [2].

For a conducting sphere of radius  $a$  kept at zero potential, when an inducing charge  $Q$  is placed at a distance  $d$  from its center, the image charge must have

---

*Email addresses:* `trindade@yahoo.com.br`. (Murilo Trindade de Oliveira),  
`cesarpagan@fee.unicamp.br`. (Cesar José Bonjuani Pagan)

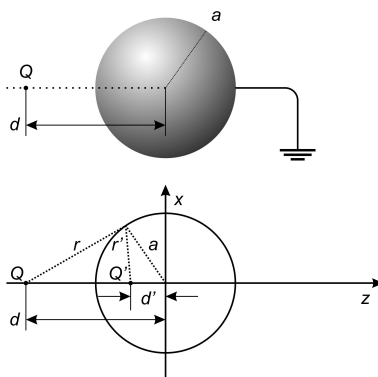


Figure 1: Usual presentation of the Method of Images. On top, a conducting grounded sphere in the presence of the inducing charge  $Q$ . On the bottom, the corresponding schematic.

an intensity of  $(-a/d)Q$  and be placed at a distance  $(a^2/d)$  from the sphere center, on the straight line connecting the sphere center to the inducing charge. The sum of the potentials due to the inducing charge and to the image charge corresponds to an electric monopole  $Q(1 - \frac{a}{d})$ , superposed onto an electric dipole moment with intensity  $Q\frac{a}{d}(d - \frac{a^2}{d})$ . The sphere is located in the region where this sum vanishes. Fig. 1 shows a presentation of the method as usually found in textbooks.

It is usual to say that the zero potential condition in the conductor is obtained by connecting it to ground. However, the presence of the wire disturbs the solution of the problem.

Some amount of charge is needed to produce a zero potential on the wire surface, since it is a conductor at the same potential as the sphere. If the charge distribution over the wire surface is not taken into account, the electric field intensity in regions far from the sphere is proportional to a non zero monopole term, i.e.,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - a/d)Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

In that case, if a wire connects the sphere to ground, there will be a radial field along the wire, and an electric current will flow through it until the electrostatic balance is reached. The current will change the charge on the sphere surface, and its final value will be different from the value of the image charge indicated above.

Most textbooks disregard this effect. Authors say that the sphere is grounded to provide a source for the image charge, but most texts seem unconcerned about the consequences of physically adding a wire to the system [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. J. D. Jackson [13] discusses the “idealizations that do not exist in the physical world” (Introduction, Section I.6, “Some Remarks on Idealizations in

Electromagnetism”). He comments on the original discussion about electrical connections by thin wires by J. C. Maxwell [14], arguing that a very thin wire will need a correspondingly small amount of charge, which hardly disturbs the field at all, except in its immediate neighborhood, where the disturbance can be very large. That was the only reference we found discussing the presence of the ground wire.

For an engineering course, it is very important to emphasize the differences between a model and a real problem. The application of the Method of Images to the sphere is a good example to be explored by instructors in the discipline of electromagnetism to bring home this point.

This paper deals with the problem of a sphere connected to the ground by a wire in the presence of an inducing charge. The solution was obtained by two different methods, demonstrating that Maxwell’s predictions were right.

It is interesting to see the facsimile edition of Maxwell’s “Treatise on Electricity and Magnetism” [15]. It is a reproduction of the second edition (1881), and the owner of the original copy marked the text referring to the Method of Images applied to a conducting sphere, where it is written that the sphere “*is maintained at potential zero by connection with the earth*” (page 231). It seems that concerns about ground wires are nearly as old as the electromagnetic theory itself.

## 2. Theory

In the Method of Images, the sphere is simply assumed to be always at zero potential; textbooks mention no other conductors in the geometry, even as they say that the sphere is grounded. Now, consider instead that the sphere is connected to ground by an infinite straight wire. Referring to Fig. 2, a point charge  $Q$  is located at position  $-d$  on the  $z$  axis, and the conductive sphere of radius  $a$  is centered at the origin. The ground wire is assumed to be a cylinder of radius  $b$ , centered in the  $z$  axis, and extending from the sphere to the infinite. The ground is able to supply any amount of charge without changing its own potential, which we take to be zero.

The system is axially symmetrical around the  $z$  axis, suggesting the use of cylindrical or spherical coordinates. However, the conductive surface has no translational symmetry along the  $z$ -axis, and no spherical symmetry in the angular coordinate  $\theta$ , making the problem substantially more difficult. The present work looks into the superficial charge density  $\sigma(z)$ , which, by symmetry, depends only on the  $z$  coordinate, or alternatively on the  $\theta$  spherical coordinate.

Two methods were used to find the correct value of  $\sigma(z)$  on conductor surfaces. The first one, based on the Method of Images, takes into consideration the image of the cylindrical wire on the sphere. The charge density on the wire surface, in turn, is determined by applying the boundary condition to its surface, i.e., zero potential. In the remainder of this paper, this method is referred to as “*Method of Green’s Functions*”, to avoid confusion with the expression “Method of Images” as used in textbooks, since the same equations can be reached by the use of Green’s functions for spherical surfaces.

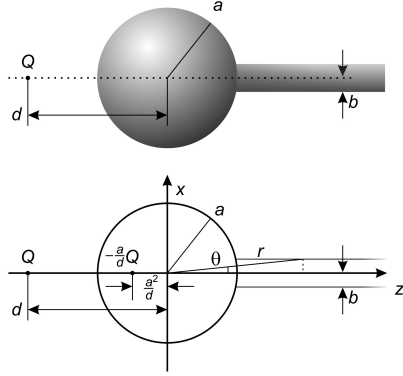


Figure 2: Conducting sphere in the presence of an inducing charge, connected to earth by a straight wire. The wire is represented by a conductive cylinder of radius  $b$  in the positive side of the  $z$ -axis.

The second method is based on the division of the conductor into an infinite number of rings. The idea is to find the charge of each ring as to satisfy the boundary conditions. This method, called in this paper “Method of Rings”, is applicable to a class of geometries limited by the requirement that the locus of the surface be determined by a single variable, in our case either the cylindrical  $z$  or else the spherical  $\theta$  coordinate.

In both methods,  $\sigma$  satisfies the zero potential condition ( $\Phi = 0$ ) at the surface of the conductors, or  $\Phi = \Phi_\sigma + \Phi_Q$ , where  $\Phi_\sigma$  is the potential due to the superficial charge distribution, and  $\Phi_Q$  is the potential due to the inducing charge  $Q$ . Note that  $\Phi_\sigma$  includes all image charge effects. Therefore, the condition to be satisfied is

$$\Phi_\sigma = -\Phi_Q \text{ (at surface of conductors),} \quad (1)$$

where

$$\Phi_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{r^2 + 2rd \cos \theta + d^2}}. \quad (2)$$

For graphical interpretation of  $r$  and  $\theta$ , see Fig. 2.

### 2.1. Solution by the Method of Green's Functions

As previously mentioned, the Method of Images applied to the case of a conducting sphere states that a zero potential on the surface of the sphere will occur if, for every charge  $Q_k$  in a position  $\mathbf{r}_k$  outside the sphere of radius  $a$ , a corresponding image charge of intensity  $\left(-\frac{a}{r_k} Q_k\right)$  is placed inside the sphere at position  $\left(\frac{a^2}{r_k} \frac{\mathbf{r}_k}{r_k}\right)$ . Thus, for each charge element  $\sigma b d\phi dz$  of the wire, for a surface charge density  $\sigma$ , there must be a corresponding infinitesimal image

charge  $-\frac{a}{r}\sigma b d\phi dz$  in order to produce a null potential on the sphere surface. The potential due to the charge density on the wire  $\Phi_{wire}(r, \theta)$ , using spherical coordinates  $r, \theta$ , is given by

$$\Phi_{wire} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\sqrt{a^2-b^2}}^{\infty} dz' \int_0^{2\pi} \frac{b\sigma \cdot d\phi'}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2}} \quad (3)$$

and the potential due to its images  $\Phi_{image-of-wire}(r, \theta)$  is

$$\begin{aligned} \Phi_{image-of-wire}(r, \theta) = \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\sqrt{a^2-b^2}}^{\infty} dz' \int_0^{2\pi} \frac{-\frac{a}{r'} \cdot b\sigma \cdot d\phi'}{\sqrt{r^2 - 2r\frac{a^2}{r'} \cos \gamma + \frac{a^4}{r'^2}}} . \end{aligned} \quad (4)$$

Here,

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \psi ,$$

with  $\psi = \phi - \phi'$ .

Note that the same expressions can be derived from the theory of Green's functions by applying Green's function for a spherical surface:

$$\begin{aligned} G(r, r') = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2}} - \\ - \frac{a}{r'} \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\frac{a^2}{r'} \cos \gamma + \frac{a^4}{r'^2}}} , \end{aligned}$$

which, for Dirichlet boundary conditions with zero potential at the surface of the sphere, leads to

$$\begin{aligned} \Phi_{wire} + \Phi_{image-of-wire} = \\ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\sqrt{a^2-b^2}}^{\infty} dz' \int_0^{2\pi} G(r, r') \sigma(r') d\phi' . \end{aligned}$$

(See [13], Sections 1.10 and 2.6). Since

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{z}{\sqrt{z^2 + b^2}}, \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{z^2 + b^2}}, \\ \cos \theta' &= \frac{z'}{\sqrt{z'^2 + b^2}}, \quad \sin \theta' = \frac{b}{\sqrt{z'^2 + b^2}}, \\ r &= \sqrt{z^2 + b^2}, \quad r' = \sqrt{z'^2 + b^2} , \end{aligned}$$

at the surface of the wire, the expression for the wire potential can be rewritten as

$$\Phi_{wire} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0} \int_{\sqrt{a^2-b^2}}^{\infty} dz' \int_0^{\pi} \frac{b\sigma d\psi}{\sqrt{\frac{z^2 - 2zz' + z'^2 + 2b^2}{2b^2} - \cos \psi}} .$$



Considering the relationship

$$\int_0^\pi \frac{d\psi}{\sqrt{u - \cos \psi}} = \frac{2K\left(\frac{2}{u+1}\right)}{\sqrt{u+1}},$$

where  $K$  represents the complete elliptic integral of the first kind [16],

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}},$$

the expression for  $\Phi_{wire}$  becomes

$$\Phi_{wire} = \frac{2\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0} \int_{\sqrt{a^2-b^2}}^\infty \frac{K\left(\frac{2}{f(z,z')+1}\right)}{\sqrt{f(z,z')+1}} \sigma dz', \quad (5)$$

where

$$f(z, z') = \frac{z^2 - 2zz' + z'^2 + 2b^2}{2b^2},$$

and similarly, for the image charge of the wire,

$$\Phi_{image-of-wire} = -\frac{2\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0} \int_{\sqrt{a^2-b^2}}^\infty \frac{K\left(\frac{2}{g(z,z')+1}\right)}{\sqrt{g(z,z')+1}} \sigma dz', \quad (6)$$

with

$$g(z, z') = \frac{(z^2 + b^2)(z'^2 + b^2) - 2a^2zz' + a^4}{2a^2b^2}.$$

Therefore, the four following effects are present when a grounded wire is included in the problem: potential due to the wire charge distribution  $\Phi_{wire}$ ; potential due to the image of the wire on the sphere, corresponding to a distribution of charges on the sphere  $\Phi_{image-of-wire}$ ; potential due to the inducing charge  $\Phi_Q$ ; and potential due to the inducing charge image on the sphere,

$$\Phi_{image-of-Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-\frac{a}{d}Q}{\sqrt{b^2 + \left(z + \frac{a^2}{d}\right)^2}}. \quad (7)$$

Now, condition (1) can be rewritten by means of expressions (2), (5), (6) and (7) as

$$\Phi_\sigma = \Phi_{wire} + \Phi_{image-of-wire} + \Phi_{image-of-Q} = -\Phi_Q$$

or

$$2\sqrt{2} \int_{\sqrt{a^2-b^2}}^\infty \sigma dz' \left[ \frac{K\left(\frac{2}{f(z,z')+1}\right)}{\sqrt{f(z,z')+1}} - \frac{K\left(\frac{2}{g(z,z')+1}\right)}{\sqrt{g(z,z')+1}} \right] + \frac{-\frac{a}{d}Q}{\sqrt{b^2 + \left(z + \frac{a^2}{d}\right)^2}} = -\frac{Q}{\sqrt{b^2 + (z+d)^2}}, \quad (8)$$

with  $z = r \cos \theta$  and  $(r, \theta)$  at the surface of the wire.

This equation does not have an analytical solution, and must be solved numerically to find  $\sigma$  and, consequently, the potential and the electrical field.

### 2.2. Solution by the Method of Rings

In the second method, the conductors were divided into infinitesimal rings of charge  $\sigma 2\pi h(\theta) dz$ , radius  $h(\theta)$  and thickness  $dz$ . Since each infinitesimal ring produces a potential contribution  $d\Phi_{ring}$  (see Jackson, ref. [13], Section 3.3),

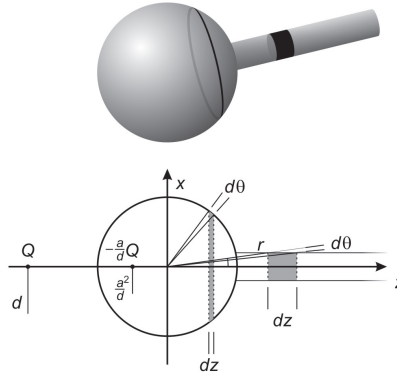


Figure 3: In the Method of Rings, the system is divided into an infinite number of rings.

$$d\Phi_{ring}(r, \theta, r', \theta') = \frac{2\pi h(\theta)\sigma dz}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta'), \quad (9)$$

integration over all infinitesimal rings plus the charge potential  $\Phi_Q$  yields the correct total potential  $\Phi$  for the arrangement. Here,  $P_l$  is the Legendre polynomial of order  $l$ ,  $(r, \theta)$  are spherical coordinates of the observer, and  $(r', \theta')$  describes the ring position, which is symmetrical around the  $z$ -axis. The minimum between  $r$  and  $r'$  is  $r_{<}$ , and the maximum is  $r_{>}$ . The ring radius  $h(\theta)$  is defined as a function of  $\theta$  as  $a \sin \theta$  for the sphere surface, and  $b$  for the wire.

A solution for  $\sigma(r, \theta)$  at the surface of the conductors, restricted by the condition that the surface be described by only the  $z$  or  $\theta$  coordinate, can be found from the equation

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma}(\theta) &= \int_0^{2\pi} d\Phi_{ring}(\theta, \theta') = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{r(\theta)^2 + 2r(\theta)d \cos \theta + d^2}} = -\Phi_Q, \quad (10) \end{aligned}$$

where

$$r(\theta) = \begin{cases} a & \text{if } \theta \geq \theta_c \\ \frac{b}{\sin \theta} & \text{if } \theta < \theta_c. \end{cases} \quad (11)$$

and  $\theta_c$  identifies the position of the junction between cylinder and sphere,  $\sin(\theta_c) = b/a$ .

A more explicit expression for (10), where the integral is divided into three parts (over the sphere and over the wire for  $\theta' > \theta$  and for  $\theta' < \theta$ ), is given by

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) & \left[ \int_{\theta_c}^{\pi} (\sigma a^2 \sin \theta' d\theta') \frac{a^l}{r(\theta)^{l+1}} P_l(\cos \theta') \right. \\ & + \int_{\min(\theta, \theta_c)}^{\theta_c} \left( \sigma b^2 \frac{1}{\sin^2 \theta'} d\theta' \right) \frac{r(\theta')^l}{r(\theta)^{l+1}} P_l(\cos \theta') \\ & \left. + \int_0^{\min(\theta, \theta_c)} \left( \sigma b^2 \frac{1}{\sin^2 \theta'} d\theta' \right) \frac{r(\theta')^l}{r(\theta)^{l+1}} P_l(\cos \theta') \right] \\ & = -\frac{1}{2\pi} \frac{Q}{\sqrt{r(\theta)^2 + 2r(\theta)d \cos \theta + d^2}}. \quad (12) \end{aligned}$$

Here,  $\min(\theta, \theta_c) = \theta$  if  $\theta < \theta_c$ , or  $\theta_c$  otherwise. Integration variables are primed. Note that when the observer is on the sphere, where  $\theta_c < \theta$ , the second integral in (12) vanishes.  $\Phi_\sigma(z)$  can be obtained from  $\Phi_\sigma(\theta)$  by the use of  $z = a \cos(\theta)$  on the sphere surface, and  $z = b \cot(\theta)$  on the cylinder surface.

Equation (12), similarly to (8), can only be solved numerically.

### 3. Calculations

In all simulations, the sphere had a radius of 1. Solutions were calculated for  $d = 1.2, 1.6, 2.4, 4, 6, 8, 12, 18, 28$  and 40 in units of sphere radius ( $a$ ). Wire radii were 0.001, 0.002, 0.004, 0.008, 0.016, 0.032, 0.064, 0.125, 0.25 and 0.5 in units of sphere radius. The value of  $Q$  was set to one. If  $Q$  is in coulombs and the sphere has a radius of one meter, the solution will be in the International System of units (SI).

In order to be solved numerically, Equations (8) and (12) were changed into the form of linear systems, such as

$$\sum_{j=1}^N A_{kj} \sigma_j = B_k.$$

For the Method of Green's Functions, the wire surface was divided into 5000 segments with intervals increasing with the square of the  $z$  coordinate, extending from  $a$  to  $1000a$ . In some cases a smaller number of points was used for numerical reasons. In the Method of Rings, the sphere surface was divided

into 400 segments and the wire into 2400 segments, both equally spaced over the  $\theta$  coordinate. The series of Legendre polynomials was summed up to  $l = 5600$  in order to provide numerical stability to the solution.

For the solution by the Method of Rings, a code was written in Visual Basic 6 (Microsoft Visual Studio) to build the matrices and solve the linear system by the LU method. The program allows many cases to be solved simultaneously, significantly reducing the processing time. For the Method of Green's Functions, the software MATHEMATICA was used to solve the same set of cases.

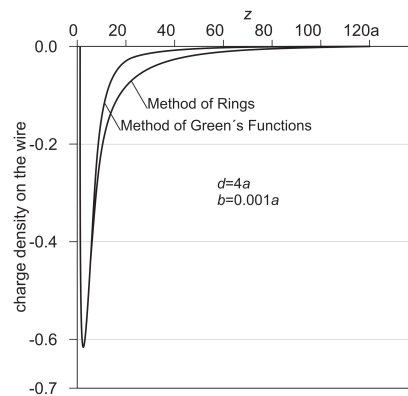


Figure 4: Charge density on the wire for  $d = 4a$  and  $b = 0.001a$ , calculated by the Method of Green's Functions and by the Method of Rings. Larger differences were found in the tail region. The  $z$ -coordinate and the value of  $\sigma$  for the minimum are nearly the same for both methods. Charge density is in units of  $Q/a^2$ .

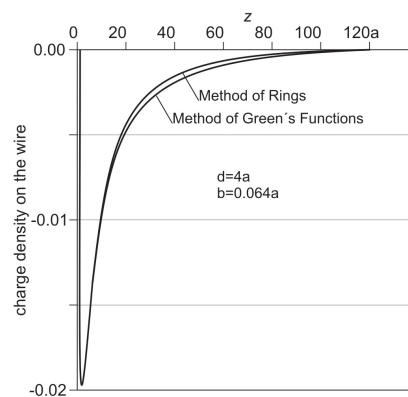


Figure 5: Charge density on the wire for  $d = 4a$  and  $b = 0.064a$ , calculated by the Method of Green's Functions and by the Method of Rings. Differences between the two calculations are much smaller than in the case of  $b = 0.001a$  (see Fig. 4). Charge density is in units of  $Q/a^2$ .

#### 4. Results and Discussion

The Method of Rings and the Method of Green's Functions were used as two independent strategies to solve the problem. Comparison of values obtained for  $\sigma$  shows larger differences in the tail region of the curve, mainly for smaller values of  $b$ . Until the minimum point, all curves are almost coincident. No significant differences between the two methods were found for the minimum density  $\sigma(z_{min})$  (difference average=0.9 %, standard deviation 0.7%), or its minimum point  $z_{min}$  (difference average=2.0%, standard deviation 1.9%). The total charge on the wire differs between methods by less than 10% for all simulations with  $b > 0.004a$ . Figures 4 and 5 show the profiles for  $b = 0.001a$  and  $0.064a$  comparing both methods. Graphs for  $b > 0.064a$  were not plotted because differences are almost imperceptible.

In the tail region, for  $z > 200a$ , curves obtained by the two methods behave differently. Assuming that the surface density is given by  $\sigma(z \rightarrow \infty) = Az^{-\alpha}$ , the Method of Green's Functions produced values of  $\alpha$  confined to a very narrow interval around  $\alpha = 3$  (average=3.0005, standard deviation=0.027) for all values of  $b$  and  $d$ , while the Method of Rings produced  $\alpha$  with a spread distribution of  $1.9 < \alpha < 2.8$ , as a function of  $b$  and  $d$ .

These values of  $\alpha$  are admissible for a finite potential difference between the sphere and infinity. Considering only the charge distribution at the tail region, the potential on the tail,  $\Phi_{tail}$ , can be obtained from

$$\Phi_{tail}(\tilde{Z}, z) = \frac{b}{2\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \int_{\tilde{Z}}^{\infty} Az'^{-\alpha} \frac{r'_{<}}{r'_{>}} P_l(\cos \theta') \cdot dz' \quad , \quad (13)$$

which has a finite value for  $\alpha \geq 1$ . Here,  $\tilde{Z}$  was taken as the beginning of the tail region.

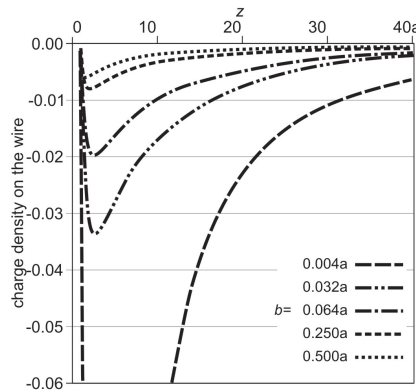


Figure 6: Charge density on the ground wire for  $d = 4a$  and some values of  $b$ . Charge density is in units of  $Q/a^2$ .

Fig. 6 shows the charge density on the wire for some values of  $b$ . Along the wire the charge density is always negative, starting with a very small value near the junction, increasing in magnitude until an intermediate point, and then tending to zero as it moves toward infinity. The minimum point moves according to the geometry of the system, taking higher values as  $d$  increases, but displaying little variation with the value of  $b$ .

According to the Method of Images, the region on the  $z$ -axis where the wire is located has a positive electrical potential  $\Phi_{Method-of-Images}(z)$ , which vanishes on the surface of the sphere and at infinity. It is given by the expression

$$\Phi_{Method-of-Images}(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{z+d} - \frac{a}{d} \frac{1}{\left(z + \frac{a^2}{d}\right)} \right]$$

valid only on the  $z$  axis for  $z > a$ .

Therefore, the connection of a ground wire to the arrangement (sphere + inducing charge) will give rise to electric currents flowing through the wire toward both extremities, in opposite directions, transporting negative charges from the sphere and from the earth at  $z = \infty$  to the wire, until equilibrium is reached. Actually,  $\Phi_{Method-of-Images}$  helps to account for the behavior of  $\sigma$  as shown in Figures 4-6. The initial trend is for charges to be attracted to the region of point  $z_0$  where the minimum electric potential is found:

$$z_0 = \sqrt{\frac{a}{d}} \left( \frac{a\sqrt{a} - d\sqrt{d}}{\sqrt{a} - \sqrt{d}} \right). \quad (14)$$

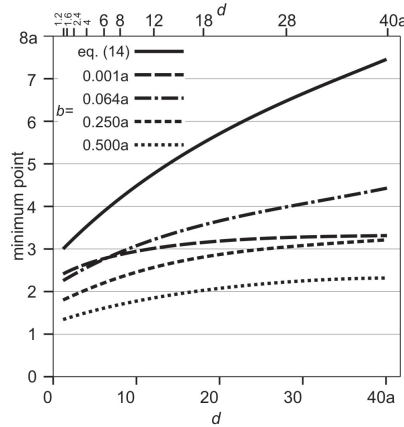


Figure 7: Point of minimum of charge density on the wire as a function of  $d$ . Equation (14) is plotted for comparison.

Fig. 7 compares expression (14) with numerical calculations for the point of minimum charge density. The value of  $z_0$  tends to  $3a$  when  $d \rightarrow a$ . However, the equilibrium of charges on the wire will require a minimum point closer to the sphere than the above value of  $z_0$ .

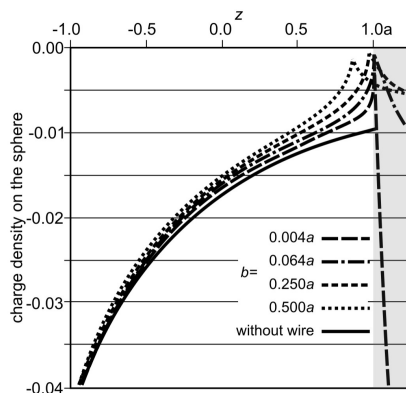


Figure 8: Charge density on the sphere as a function of  $z$  coordinate. Calculation for  $d = 4a$ , for four values of  $b$  as indicated. Continuous line represents sphere charge density without a ground wire, as usually obtained by the Method of Images. Gray area corresponds to the wire. Charge density is in units of  $Q/a^2$ .

Fig. 8 shows the superficial charge density on the surface of the sphere as a function of the coordinate  $z$ . The inducing charge  $Q$  is placed on the negative side of the axis  $z$ , at  $z = -4a$ . The sphere extends from  $z = -a$  to  $z = \sqrt{a^2 - b^2} \approx +a$ , where the ground wire begins. The graph shows the charge density with ground wires of different thicknesses, as well as the charge density conventionally obtained by the Method of Images.

The density on the sphere deviates from the theoretical value of the Method of Images in the region near the connection to the ground wire, with a striking decrease of the charge density modulus due to the concave geometry. Unlike a sharp edge, which concentrates the electric charge, the concave corner repels any excess charges, as seen in the region near  $z = \sqrt{a^2 - b^2}$ . Note that as the wire becomes thinner, the charge density on the sphere approaches more closely the value predicted by the Method of Images.

Fig. 9 shows that the greater the distance at which the inducing charge  $Q$  is placed, the greater will be the relative difference between the calculated charge density on the sphere and the theoretical value from the Method of Images.

Fig. 10 shows the charge on the wire as a function of  $1/\sqrt{d}$ . The choice of this variable produces a graph with a clear minimum point, allowing curve fitting by a quadratic polynomial. The largest amount of (negative) charge on the wire is found when  $d \approx 4.4 \pm 0.4$  for any thickness  $b$  (value obtained by interpolation). This is an intermediate value between the extremes. When  $d$  tends to  $a$ , charge  $Q$  will be close to the sphere surface, producing a strong electrical field in the vicinity of  $z = -a$ , leading to a condition in which almost all charge is induced on the sphere, the wire remaining nearly uncharged. On the other hand, when  $d$  tends to infinity, the electric field weakens in the region of the conductors, and only a small amount of charge is induced on them. Thus, in both extremes the amount of charge induced on the wire will be small, and the

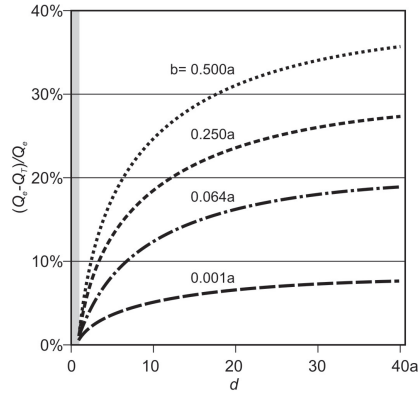


Figure 9: Relative difference in total charge on the sphere with ground wire,  $Q_t$  and without ground wire,  $Q_s = -\frac{q}{d}Q$  as a function of  $d$ . Gray area corresponds to the sphere, i.e.,  $d < 1$ . Four values of  $b$  are shown. Values are expressed as percentages.

maximum modulus of induced charge will be found between these conditions.

Curves in Fig. 11 are from the Method of Green's Functions. They show that total wire charge vanishes as thickness approaches zero. Curves in the detail are from polynomial extrapolation. The two methods gave similar results for this behavior, but with the Method of Green's Functions, curves approach zero with less deviation as  $b$  goes to zero.

As shown in Fig. 12, behavior of minima as a function of wire thickness is approximately in inverse proportion to  $b$ . This is expected, since flux density near the wire surface decreases in inverse proportion to  $b$ , and the minimum point position changes very little with  $d$ . Differences between the two calculations are almost imperceptible.

Fig. 13 shows a plot of the electrical potential around the system of conductors for the Method of Images for increasing values of  $b$ . It can be seen that the thinner the wire, the smaller will be the deviation of the charge distribution on the sphere from the prediction of the Method of Images, and the lower the disturbance of equipotential lines.

## 5. Conclusions

The validity of the predictions of the Method of Images for charge density and electric potential and field is dependent on ground wire thickness. Qualitatively stated, when the wire is thin, its charge approaches zero. In fact, the potential for thinner wires is almost the same as for the Method of Images when any wire is connected. Therefore, as predicted by J. C. Maxwell and discussed by J. D. Jackson [13], the Method of Images requires a source of charge to produce a zero potential in the surface of the sphere, and this can be provided by an infinitely thin wire, which will not disturb the system. In the words of James Clerk Maxwell,



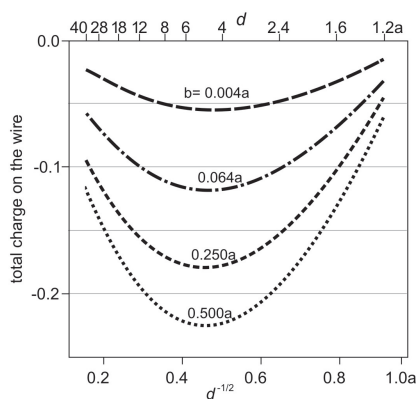


Figure 10: Total charge on the ground wire as a function of  $\frac{1}{\sqrt{d}}$  for some values of  $b$ . Charge is in units of  $Q$ .

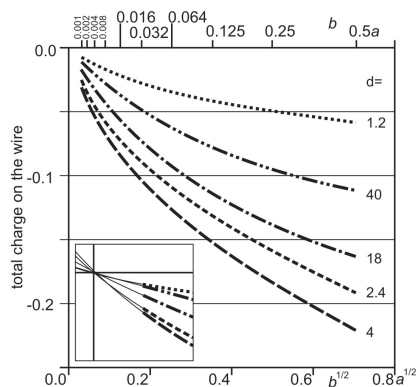


Figure 11: Total charge on the ground wire as a function of  $\sqrt{b}$  for some values of  $d$ . Detail: polynomial extrapolations (continuous lines) of the curves pass near zero as  $b$  tends to zero. Charge density is in units of  $Q$ .

*“Since the quantity of electricity on any given portion of a wire at a given potential diminishes indefinitely when the diameter of the wire is indefinitely diminished, the distribution of electricity on bodies of considerable dimensions will not be sensibly affected by the introduction of very fine metallic wires into the field, such as are used to form electrical connexions between these bodies and the earth, an electrical machine, or an electrometer.”*

(Maxwell [14], first edition, vol. 1, page 84).

Fig. 12 illustrates this statement.

One could think that the correct solution for the problem would demand that the charge in the wire should just neutralize the monopole electric field at remote distances from the sphere. This condition can be satisfied if the charge

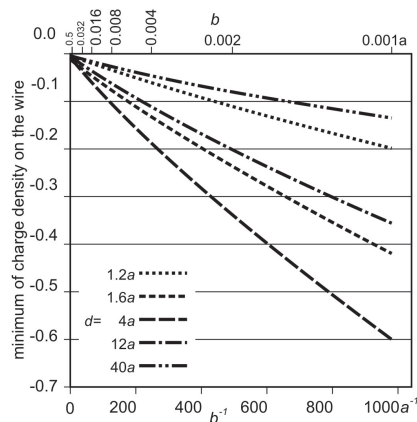


Figure 12: Value of minima for the charge density as a function of  $1/b$  for some values of  $d$ . The function is almost linear. See citation by Maxwell in the Conclusions. Charge density is in units of  $Q/a^2$ .

is equal to  $-(1 - \frac{a}{d})Q$  in the wire, a value that makes the total charge of the system equal to zero.

However, that condition is not necessary in the case of the infinite wire since the charge is not localized in a limited volume; it is spread over an infinite distribution along the wire.

In fact, a generic geometry, consisting of two conductors separated by an insulating medium, when subjected to a potential difference, does not necessarily have the same charge in both conductors, as in a capacitive dipole. This matter often raises doubts among students, and the case studied in the present paper is an example of just one such phenomenon. Referring to Fig. 13 (in any of the cases where the wire is present), if a fine metallic foil is placed to exactly fit an equipotential surface involving the inducing charge  $Q$ , initially at  $V$  potential, and if it is connected to an arbitrarily thin wire extending to a power supply at  $V$  potential reproducing the same electric field near the foil as the initial one, this arrangement can be regarded as a capacitive circuit having the sphere and the metallic foil as its plates. However, such a “capacitor” has charges of different absolute values in its plates – which may come as a surprise to students. Of course that is not new, and the point here is to distinguish between the particular case of a capacitive dipole, as used in circuits theory, and the general concept of capacity (or capacitance) of a conductor as defined by Maxwell and discussed in many textbooks that cover the issue of a system of conductors [12, 13, 17].

When dealing from a theoretical point of view, authors are not concerned about the wires needed to determine the potential on the conductors in a practical problem such as this[18, 19, 20]. However, the presence of a wire with a radius a thousand times smaller than the radius of the spherical conductor is enough to reduce the sphere’s total charge by as much as 8% of the value without the wire, under the same external field, as shown in Fig. 9. This means that

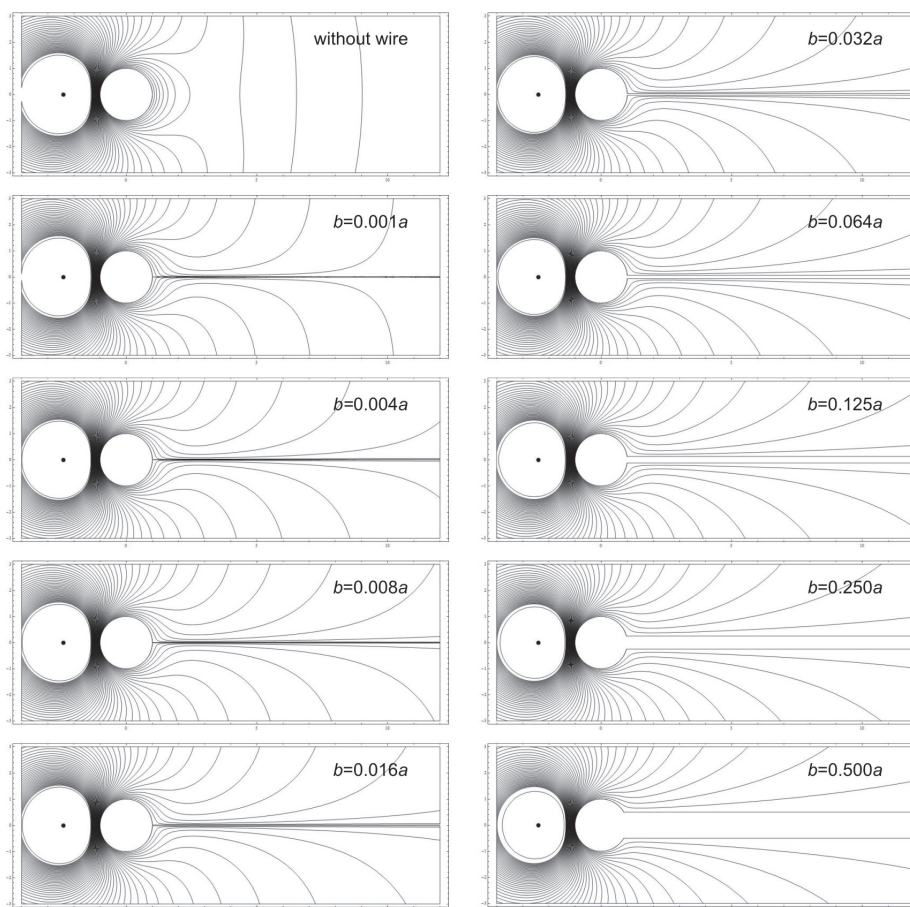


Figure 13: Equipotentials for a conductive sphere connected to a straight wire extending to infinity in the presence of  $Q$ , for  $d = 2.4a$ . Values of  $b$  in units of sphere radius  $a$ .

care should be exercised when calculating capacitive coefficients of a system of conductors, since their values can be significantly changed by the presence of the wires needed to connect the parts of the system.

In conclusion, and to place the present work in context, the need should be highlighted to teach engineering students the differences between idealized models and practical applications. Of course idealizations are inevitable, but it is important to give a clear understanding of their limitations. The Method of Images discussed in this paper provides a good opportunity to convey such limitations.

### Acknowledgment

We wish to acknowledge the financial support received for this work from Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Brazil.

### References

- [1] W. Thomson, Geometrical Investigations Regarding Spherical Conductors, MacMillan & Co., 1849, as cited in Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism, 2nd edition, MacMillan & Co. (1884).
- [2] J. B. Keller, The scope of the image method, Communications on Pure and Applied Mathematics 6 (4) (1953) 505–512. doi:10.1002/cpa.3160060406. URL <http://doi.wiley.com/10.1002/cpa.3160060406>
- [3] D. K. Cheng, Field and Wave Electromagnetics, 2nd Edition, Addison Wesley, Reading, MA, 1989.
- [4] D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, 3rd Edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1999.
- [5] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley, Reading, MA, 1964.
- [6] G. L. Pollack, D. R. Stump, Electromagnetism, Addison Wesley, Reading, MA, 2002.
- [7] W. K. H. Panofsky, M. N. Phillips, Classical Electricity and Magnetism, Addison-Wesley, Reading, MA, 1955.
- [8] P. Lorrain, P. Carson, Electromagnetic Fields and Waves, 2nd Edition, WH Fallman, San Francisco, CA, 1970.
- [9] L. Landau, E. M. Lifschitz, Electrodynamics of Continuous Media, 2nd Edition, Pergamon Press, Oxford, U.K., 1984.
- [10] A. Sommerfeld, Electrodynamics, Academic Press, New York, 1952.
- [11] M. Nayfeh, M. Brussel, Electricity and magnetism, John Wiley & Sons, New York, 1985.
- [12] J. R. Reitz, F. J. Milford, R. W. Christy, Foundations of Electromagnetic Theory, 3rd Edition, Addison-Wesley, Reading, MA, 1979.
- [13] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, 3rd Edition, John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [14] J. C. Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism, Vol. 1, Clarendon Press, Oxford, 1873.

- [15] J. Maxwell, W. Niven, A Treatise on Electricity and Magnetism, 2nd Edition, Vol. 1, Clarendon Press, Oxford, UK, 1881, facsimile reprint by Kessinger Publishing, LLC (2008).
- [16] G. Arfken, H. Weber, Mathematical Methods for Physicists, 6th Edition, Elsevier, 2005.
- [17] Y. Burian Jr., Circuitos Elétricos, Magnéticos e Teoria Eletromagnética, FEEC/UNICAMP, Campinas, Brazil, 1996, in Portuguese.
- [18] J. Lekner, Capacitance coefficients of two spheres, Journal of Electrostatics 69 (1) (2011) 11–14. doi:10.1016/j.elstat.2010.10.002.  
URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0304388610001312>
- [19] J. Lekner, Polarizability of two conducting spheres, Journal of Electrostatics 69 (5) (2011) 435–441. doi:10.1016/j.elstat.2011.05.006.  
URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0304388611000763>
- [20] K. Kolikov, D. Ivanov, G. Krastev, Y. Epitropov, S. Bozhkov, Electrostatic interaction between two conducting spheres, Journal of Electrostatics 70 (1) (2012) 91–96. doi:10.1016/j.elstat.2011.10.008.  
URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0304388611001902>

## Referências Bibliográficas

- [1] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley Sons, New York, N.Y, terceira edition, 1999. [xi](#), [4](#), [9](#), [10](#), [11](#), [12](#), [13](#), [15](#), [18](#), [19](#), [28](#), [29](#), [30](#), [51](#)
- [2] M. S. Longair. *Theoretical Concepts in Physics: An Alternative View of Theoretical Reasoning in Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, segunda edition, 2003. [1](#)
- [3] C. Christopoulos. *Principles and Techniques of Electromagnetic Compatibility (Electronic Engineering Systems)*. CRC Press, Florida, segunda edition, 2007. [1](#)
- [4] Y. Burian Jr.;A. C. C. Lyra. *Circuitos elétricos*. Pearson Prentice Hall, São Paulo, SP, 2006. [1](#)
- [5] L. Q. Orsini. *Circuitos elétricos*. Edgard Blucher, São Paulo, 1975. [1](#), [2](#), [4](#)
- [6] Y. Burian Jr. *Circuitos elétricos, magnéticos e teoria eletromagnética*. UNICAMP, Campinas, SP, 1996. [2](#)
- [7] Jr.; J. A. Buck W. H. Hayt. *Engineering Electromagnetics*. McGraw-Hill, Boston, sétima edition, 2006. [4](#)
- [8] D. K. Cheng. *Field and wave electromagnetics*. Addison Wesley, Reading, MA, segunda edition, 1989. [4](#), [8](#)
- [9] H. M. Nussenzveig. *Curso de Física Básica*. Edgar Blucher, São Paulo, SP, primeira edition, 1997. [4](#)
- [10] E. M. Purcell. *Electricity and Magnetism*. McGraw-Hill, Boston, primeira edition, 1973. [4](#)
- [11] J. D. Kraus. *Electromagnetics*. McGraw-Hill, New York, NY, quarta edition, 1992. [4](#)
- [12] J. C. Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism*. Dover, New York, NY, terceira edition, 1954. [4](#), [24](#)

- [13] W. R. Smythe. *Static and dynamic electricity*. McGraw-Hill, New York, NY, terceira edition, 1968. 4
- [14] J. H. Jeans. *The mathematical theory of electricity and magnetism*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, quinta edition, 1966. 4
- [15] J. A. Stratton. *Electromagnetic Theory*. J. Wiley and Sons, Hoboken, NJ, 2007. 4
- [16] P. M. Morse; H. Feshbach. *Methods of theoretical physics vol. 1*. McGraw-Hill, New York, NY, 1953. 12, 18
- [17] G. B. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, Inc, San Diego, CA, terceira edition, 1985. 18, 27
- [18] J. W. Brown; R. V. Churchill. *Fourier series and boundary value problems*. McGraw-Hill, Boston, sétima edition, 2008. 18
- [19] P. Dennery; A. Krzywicki. *Mathematics for physicists*. Harper and Row, New York, NY, 1967. 18, 31
- [20] A. Sommerfeld. *Partial differential equations in physics*. Academic Press, New York, NY, 1949. 18
- [21] E. T. Whittaker; G. N. Watson. *A course of modern analysis*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, quarta edition, 1969. 18
- [22] R. C. Knight. The potential of a sphere inside an infinite circular cylinder. *Quart. J. Math.*, 7:126–133, 1936. 31
- [23] W. R. Smythe. Charged spheroid in cylinder. *Journal of Mathematical Physics*, 4(6):833–837, Junho 1963. 31
- [24] W. R. Smythe. Charged sphere in cylinder. *Journal of Applied Physics*, 31(3):553–556, Março 1960. 31
- [25] W. R. Smythe. Charged right circular cylinder. *Journal of Applied Physics*, 21(8):917–920, Agosto 1956. 31
- [26] W. R. Smythe. Charged disk in cylindrical box. *Journal of Applied Physics*, 24(6):773–775, Junho 1953. 31

- [27] H. Anton. *Cálculo : um novo horizonte*. J. Wiley and Sons, Porto Alegre, RS, sexta edition, 2000.
- [28] G. Aubert. *Électromagnétisme*. Dunod, Paris, 1971.
- [29] C. A. Balanis. *Advanced Engineering Electromagnetics*. J. Wiley, New York, NY, 1989.
- [30] R. L. Boylestad. *Introdução à análise de circuitos*. Prentice Hall, São Paulo, décima edition, 2004.
- [31] A. Chaves. *Física básica : eletromagnetismo*. LTC, Rio de Janeiro, 2007.
- [32] J. C. Cooke. On potential problems involving spheroids inside a cylinder. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 42(7-8):305–316, 1962.
- [33] J. C. Cooke. Some relations between bessel and legendre functions. *Monatshefte für Mathematik*, 60(4):322–328, Dezembro 1956.
- [34] W. E. Boyce; R. C. DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. LTC, Rio de Janeiro, sétima edition, 2011.
- [35] D. J. Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, terceira edition, 1999.
- [36] W. Kaplan. *Cálculo avançado*. Edgard Blucher, São Paulo, 1982.
- [37] O. D. Kellogg. *Foundations of potential theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [38] C.M. Linton. Multipole methods for boundary-value problems involving a sphere in a tube. *IMA J. Appl. Math.*, 55:187–204, 1995.
- [39] Y. Burian Jr.; A. C. C. Lyra. *Circuitos elétricos*. Prentice Hall, São Paulo, 2006.
- [40] T. M. MacRobert. *Spherical harmonics: an elementary treatise on harmonic functions with applications*. Oxford Pergamon Press, New York, terceira edition, 1967.
- [41] F. G. Mehler. Ueber eine mit den kugel- und cylinderfunctionen verwandte function und ihre anwendung in der theorie der elektricitätsvertheilung. *Mathematische annalen*, 18(2):161–194, 1881.
- [42] A. Elsenaar; R. Scha. Electric body manipulation as performance art: A historical perspective. *Leonardo Music Journal*, 12:17–28, 2002.



- 
- [43] A. E. A. Araújo; W. L. A. Neves. *Cálculo de transitórios eletromagnéticos em sistemas de energia*. UFMG, Belo Horizonte, 2011.
- [44] W. K. H. Panofsky. *Classical electricity and magnetism*. Dover, Mineola, N.Y., segunda edition, 2005.
- [45] J. C. Piquette. Special function integration. *ACM SIGSAM Bulletin*, 23(2):11–21, Abril 1989.
- [46] J. R. Reitz; F. J. Milford; R. W. Christy. *Fundamentos da teoria eletromagnética*. Campus, Rio de Janeiro, RJ, décima edition, 2002.
- [47] M. N. O. Sadiku. *Elements of electromagnetics*. Oxford Univ. Press, New York, NY, terceira edition, 2001.
- [48] E. Segre. *From Falling Bodies to Radio Waves: Classical Physicists and Their Discoveries*. Dover Publications, 2007.
- [49] I. N. Sneddon. *Mixed boundary value problems in potential theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1966.
- [50] I. N. Sneddon. *Elements of partial differential equations*. McGraw-Hill, Inc, New York, NY, 1957.
- [51] X. Cai; G. B. Wallis. Potential flow around a row of spheres in a circular tube. *Physics of Fluids A*, 4(5):904–912, Maio 1992.
- [52] F. R. Zypman. Off-axis electric field of a ring of charge. *American Journal of Physics*, 74(4):295–300, Abril 2006.