



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MÁQUINAS, COMPONENTES E SISTEMAS INTELIGENTES
LCSI – LABORATÓRIO DE CONTROLE E SISTEMAS INTELIGENTES

**PROPOSTAS DE METODOLOGIAS PARA CONTROLE
INTELIGENTE DE SISTEMAS NÃO LINEARES COM INCERTEZAS
PARAMÉTRICAS E FUNCIONAIS**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de

Doutor em Engenharia Elétrica

por

ERICK VILE GRINITS

PROF. DR. CELSO PASCOLI BOTTURA

Orientador – FEEC/UNICAMP

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura (Presidente)

Prof. Dr. Takashi Yoneyama – ITA

Prof. Dr. Karl Heinz Kienitz – ITA

Prof. Dr. Fernando José Von Zuben – FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Márcio Luiz de Andrade Netto – FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Gilmar Barreto – FEEC/UNICAMP

24 de agosto de 2007

Erick Vile Grinits

**Propostas de Metodologias para Controle Inteligente de
Sistemas Não Lineares com Incertezas Paramétricas e
Funcionais**

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Automação.

Orientador: Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura

Banca examinadora:

Prof. Dr. Takashi Yoneyama – ITA

Prof. Dr. Karl Heinz Kienitz – ITA

Prof. Dr. Fernando José Von Zuben – UNICAMP

Prof. Dr. Márcio Luiz de Andrade Netto – UNICAMP

Prof. Dr. Gilmar Barreto – UNICAMP

Campinas, SP
2007

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

G885p Grinits, Erick Vile
Propostas de metodologias para controle inteligente de sistemas não lineares com incertezas paramétricas e funcionais / Erick Vile Grinits.--Campinas, SP: [s.n.], 2007.

Orientador: Celso Pascoli Bottura.
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas inteligentes de controle. 2. Teorias não-lineares. 3. Equações diferenciais não-lineares. 4. Redes neurais (Computação). 5. Algoritmos genéticos. I. Bottura, Celso Pascoli. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Advances on methodologies for intelligent control of nonlinear systems with parametric and functional uncertainties.

Palavras-chave em Inglês: Intelligent control, Backstepping, Nonlinear systems, Neural networks, Genetic algorithm.

Área de concentração: Automação

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Takashi Yoneyama, Karl Heinz Kienitz, Fernando José Von Zuben, Márcio Luiz de Andrade Netto e Gilmar Barreto.

Data da defesa: 24/08/2007

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidato: Erick Vile Grinits

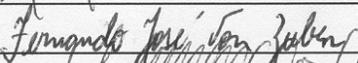
Data da Defesa: 24 de agosto de 2007

Título da Tese: "Propostas de Metodologias para Controle Inteligente de Sistemas Não Lineares com Incertezas Paramétricas e Funcionais"

Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura (Presidente):  _____

Prof. Dr. Takashi Yoneyama:  _____

Prof. Dr. Karl Heinz Kienitz:  _____

Prof. Dr. Fernando José Von Zuben:  _____

Prof. Dr. Márcio Luiz de Andrade Netto:  _____

Prof. Dr. Gilmar Barreto:  _____

Resumo

Esta tese apresenta contribuições para o controle inteligente de sistemas não lineares com incertezas paramétricas e funcionais. São desenvolvidas duas abordagens. Em primeiro lugar, é proposta uma modificação ao *backstepping* adaptativo clássico, fundamentada em Extensão do Princípio de Invariância de La Salle que contempla o caso em que a derivada da função de Lyapunov ao longo das soluções do sistema é permitida ser definida positiva em regiões limitadas do espaço de estados, que favorece o pleno uso de técnicas de otimização baseadas em computação evolutiva com vistas à melhoria de desempenho da solução em termos de redução expressiva de esforço de controle e conformação da resposta transitória conforme critérios de tempo de estabilização, magnitude de sobre-sinal, etc. Em segundo lugar, é proposta uma metodologia de controle adaptativo neural, estruturada na técnica de *backstepping*, aplicável a sistemas não lineares com incertezas com múltiplas entradas e múltiplas saídas compostos de subsistemas interconectados cujas matrizes de entrada apresentam funções não lineares e cujas interconexões entre subsistemas também apresentam não linearidades. A estratégia apresentada propõe-se a sanar várias das dificuldades encontradas em metodologias análogas, eliminando a questão de singularidade nas leis de controle, evitando o uso de funções de Lyapunov com integrais e suprimindo a necessidade de introdução de derivadas dos controladores virtuais nas redes neurais, o que se traduz em projetos de controle menos complexos, com menor custo computacional e com melhor desempenho na solução em comparação aos métodos similares existentes.

Abstract

This thesis presents contributions to the intelligent control of nonlinear systems with parametric and functional uncertainties. Two approaches are advanced. Firstly, it is proposed a modification to the traditional adaptive backstepping grounded on an Extension to the La Salle's Invariance Principle that allows the Lyapunov function derivative along the systems solutions to be positive definite in limited regions of the state space, which favours the deployment of optimisation techniques based on evolutionary computation aiming at the improvement of the solution performance in terms of an expressive reduction of control effort and transient conformation according to criteria such as settling time, overshoot magnitude, etc. Secondly, it is proposed a neural adaptive control methodology, structured on the backstepping technique, applicable to nonlinear systems with uncertainties with multiple inputs and multiple outputs constituted of interconnected subsystems whose input matrices feature nonlinear functions and whose subsystems interconnections also bear nonlinearities. The advanced strategy removes several difficulties found in analogous methodologies, namely eliminating control laws singularity issues, avoiding the use of Lyapunov functions with integrals, and suppressing the need for the introduction of virtual controllers' derivatives into the neural networks, which leads to less complex control designs, with decreased computational cost and with better response performance in comparison with similar existing methods.

Aos meus pais, Victor e Alice, e à minha irmã, Laura.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura, agradeço pela orientação, incentivo e confiança na realização desta pesquisa, por sua amizade, seus conselhos e pela convivência que tivemos ao longo destes anos.

Aos membros da Banca Examinadora e ao Prof. Dr. José Cláudio Geromel, pelas observações, comentários e sugestões relevantes.

À Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da UNICAMP; em especial, ao Departamento de Máquinas, Componentes e Sistemas Inteligentes.

Aos professores que exerceram influência decisiva em minha formação.

À Da. Carminha, pela presença amiga.

Aos colegas, amigos e professores da UNICAMP e do ITA que, de variadas maneiras, contribuíram para este trabalho.

À CPG e à DAC, pelas inúmeras e importantes ajudas.

Às bibliotecas da UNICAMP e do ITA.

À minha família, pelo apoio incondicional durante estes anos.

Índice

1. Introdução	1
1.1. Objetivos	1
1.2. Organização	2
2. Estabilidade e Convergência em Sistemas Dinâmicos	5
2.1. Introdução	5
2.2. Sistemas Dinâmicos	6
2.2.1. Definição e Caracterização	6
2.2.2. Estados Estacionários em Sistemas Não Lineares	10
2.2.2.1. Ponto de Equilíbrio	10
2.2.2.2. Soluções Periódicas	10
2.2.2.3. Soluções Quase-Periódicas	11
2.2.2.4. Caos	11
2.2.3. Aspectos Relativos ao Estudo de Sistemas Dinâmicos	12
2.2.3.1. Representação	12
2.2.3.2. Geração de Soluções	12
2.2.3.3. Exploração de Relações Estruturais	13
2.2.3.4. Controle	13

2.3. Estabilidade e Convergência	14
2.3.1. Propriedades de Conjuntos	14
2.3.2. Existência e Unicidade	17
2.3.3. Definição de Estabilidade	20
2.3.4. Definição de Limitação	22
2.3.5. Condições para Estabilidade e Limitação	23
2.3.5.1. Sistemas Autônomos	23
2.3.5.2. Sistemas Não Autônomos	31
3. Métodos Recursivos para o Controle de Sistemas Não Lineares	35
3.1. Introdução	35
3.2. Técnicas Precursoras de Controle de Sistemas Não Lineares	36
3.3. Funções de Lyapunov de Controle	40
3.4. Funções de Lyapunov de Controle e <i>Backstepping</i> Integrador	42
3.4.1. Passo 1	43
3.4.2. Passo 2	44
3.4.3. Aspectos de Implementação	45
3.4.4. Transformação de Coordenadas do <i>Backstepping</i>	45
3.4.5. Sistema Resultante	46
3.4.6. Avaliação da Estabilidade	46
3.5. <i>Backstepping</i> Integrador	47
3.6. <i>Backstepping</i>	51
3.6.1. Sistemas de Realimentação Estrita	51
3.7. <i>Backstepping</i> Adaptativo Integrador	55

3.8. <i>Backstepping</i> Adaptativo	57
3.8.1. Sistemas de Realimentação Estrita Paramétricos	58
4. Técnicas de Controle Inteligente Aplicadas ao Controle de Sistemas	
 Não Lineares	65
4.1. Introdução	65
4.2. Redes Neurais para Controle de Sistemas Dinâmicos	66
4.2.1. Redes Neurais Artificiais	66
4.2.1.1. Modelo de Neurônio	68
4.2.1.2. Percéptron Multicamadas	69
4.2.1.3. Redes Neurais com Funções de Ativação Radiais	73
4.2.2. Limites do <i>Backstepping</i> Adaptativo	76
4.2.3. Redes Neurais em Controle Adaptativo Não Linear	81
4.2.4. <i>Backstepping</i> Adaptativo Neural	83
4.2.4.1. Método de Kwan & Lewis (2000)	84
4.2.4.2. Método de Zhang, Ge & Hang (2000)	87
4.2.4.3. Método de Ge & Wang (2002)	89
4.3. Otimização Baseada em Computação Evolutiva e Aplicações em Controle	92
4.3.1. Algoritmos Genéticos	93
4.3.1.1. Codificação de Indivíduos	96
4.3.1.2. Operadores de Inicialização	96
4.3.1.3. Operadores Genéticos	97
4.3.1.4. Operadores de Seleção	99

4.3.2. Utilização de Algoritmos Genéticos no Controle de Sistemas Dinâmicos	99
5. Proposta de <i>Backstepping</i> Modificado Aplicado a Sistemas Não Lineares com e sem Incertezas Paramétricas	105
5.1. Introdução	105
5.2. Controle Adaptativo de Sistemas de Realimentação Estrita Paramétricos com Melhor Desempenho Utilizando <i>Backstepping</i> Modificado	106
5.2.1. Proposta de Algoritmo Genérico para Síntese de Controladores Eficientes para Sistemas Não Lineares de Realimentação Estrita com Incertezas	107
5.2.1.1. Passo 1	107
5.2.1.2. Passo i ($2 \leq i \leq n-1$)	108
5.2.1.3. Passo n ($n \geq 2$)	110
5.2.1.4. Otimização Paramétrica do Controlador via Computação Evolutiva	111
5.2.2. Exemplo de Aplicação – Controle Adaptativo Otimizado de Sistemas Caóticos com Incertezas	115
5.2.2.1. Controle Eficiente de Caos em Modelo de Circuito de Chua com Incertezas Paramétricas	117
5.3. Controle de Sistemas de Realimentação Estrita com Melhor Desempenho Utilizando <i>Backstepping</i> Modificado	130
5.3.1. Proposta de Algoritmo Genérico para Síntese de Controladores Eficientes para Sistemas Não Lineares de Realimentação Estrita sem Incertezas	131
5.3.1.1. Passo 1	131

5.3.1.2. Passo i ($2 \leq i \leq n-1$)	132
5.3.1.3. Passo n ($n \geq 2$)	133
5.3.2. Exemplo de Aplicação – Controle de Sistema de Chua	135
6. Proposta de <i>Backstepping</i> Neural para Sistemas Não Lineares com Incertezas com Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas	143
6.1. Introdução	143
6.2. Proposta de Algoritmo para Síntese de Controladores para Sistemas Não Lineares com Incertezas com Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas Genéricos	145
6.2.1. Passo 1	150
6.2.2. Passo i_j ($2 \leq i_j \leq \rho_j - 1$)	153
6.2.3. Passo ρ_j	155
6.2.4. Limitação e Convergência	158
6.2.5. Exemplo de Aplicação I – Sistema Não Linear MIMO de Ge & Wang (2004)	165
6.2.6. Exemplo de Aplicação II – Sistema Não Linear MIMO	176
7. Conclusões	185
Referências Bibliográficas	187

Capítulo 1

Introdução

1.1. Objetivos

Os últimos anos têm assistido a um desenvolvimento crescente nas teorias relacionadas ao estudo de sistemas não lineares, especialmente no campo da síntese de controladores eficazes e eficientes. Os conceitos desenvolvidos com base na geometria diferencial, cuja utilização em controle não linear remonta a meados da década de 80, mostraram-se, com o passar dos anos, bastante úteis na construção de ferramentas para análise e síntese de sistemas não lineares, tendo a técnica de *linearização por realimentação*, em especial, se convertido num dos métodos mais empregados no tratamento de não-linearidades (Isidori, 1996). Algumas desvantagens importantes da metodologia atrelada à geometria diferencial, no entanto, são a impossibilidade de tratamento de vários tipos de sistemas não lineares e o elevado esforço de controle despendido na aplicação das leis de controle obtidas conforme essa abordagem. A introdução de métodos recursivos de síntese de controladores, a partir dos anos 90 (Kanellakopoulos et al., 1992), resolveu vários desses problemas. A técnica de *backstepping*, descrita em detalhes por Krstić et al. (1995) é, hoje, um dos meios mais populares de tratamento de sistemas não lineares, sendo, inclusive, aplicável a vários sistemas não “linearizáveis” (Kokotović, 1992).

A idéia de *controle inteligente* foi originalmente proposta por Fu (1971), que a definiu como “uma forma de se gerar ações de controle através do emprego conjunto de aspectos de inteligência artificial, pesquisa operacional e sistemas de controle automático” (Tamariz, 2005). No universo do controle inteligente, as estratégias de controle são definidas de modo a se alcançar e a se manter o nível desejado de desempenho da resposta do sistema em malha fechada na presença de, por exemplo, não-linearidades, incertezas, complexidade computacional, não-estacionariedade, etc. *Sistemas de controle inteligente* são, portanto, aqueles capazes de lidar de maneira eficaz com tais dificuldades por meio do emprego de técnicas de inteligência artificial, tais como: redes neurais, lógica nebulosa, sistemas especialistas, computação evolutiva, etc. em combinação com métodos de controle tradicionais. O êxito conseguido na utilização de controle inteligente em, por exemplo, projetos de controle de sistemas não lineares com incertezas é evidenciado pelo grande e crescente número de trabalhos publicados sobre o assunto na literatura especializada.

Objetiva-se, nesta tese, a exploração de duas das combinações mencionadas no parágrafo anterior, a saber: *backstepping* aliado a algoritmos genéticos e *backstepping* aliado a redes neurais, de modo a se obter, no final, metodologias de controle que reúnam as já aludidas vantagens da técnica de *backstepping* aos bons resultados da aplicação de inteligência artificial em controle de sistemas. No primeiro caso, propõe-se uma modificação ao *backstepping* clássico de Krstić et al. (1995) de forma a se conseguir respostas de alto desempenho em projetos de controle não linear com e sem incertezas. A estratégia de controle inteligente proposta remete a e estende os resultados apresentados em Grinits (2002). No segundo caso, é proposta uma metodologia de controle inteligente de sistemas não lineares com incertezas com múltiplas entradas e múltiplas saídas.

1.2. Organização

Esta tese compõe-se de sete capítulos.

Os conceitos relacionados às noções de convergência e estabilidade em sistemas não lineares são apresentados no Capítulo 2.

O Capítulo 3 trata da construção de controladores para sistemas não lineares com e sem incertezas e apresenta o método de *backstepping* tradicional para sistemas de realimentação estrita paramétricos e não paramétricos. São abordados o caso regulador e o caso seguidor.

O Capítulo 4 é dedicado à estruturação dos conceitos associados a controle inteligente com enfoque na contextualização das propostas deste trabalho, i.e. projetos de controle de sistemas não lineares via *backstepping* aliados a redes neurais e a algoritmos genéticos.

No Capítulo 5, é desenvolvida uma modificação ao *backstepping* clássico de Krstić et al. (1995) de forma a se conseguir respostas de alto desempenho em projetos de controle não linear com e sem incertezas. O *backstepping* modificado aqui introduzido fundamenta-se na Extensão do Princípio de Invariância de La Salle apresentada por Rodrigues et al. (2002), o que favorece o pleno uso de técnicas de otimização baseadas em computação evolutiva com vistas à melhoria de performance da solução em termos de redução expressiva de esforço de controle e conformação da resposta transitória conforme critérios de tempo de estabilização, magnitude de *overshoot*, etc.

O Capítulo 6 propõe uma metodologia de controle adaptativo neural, estruturada na técnica de *backstepping*, aplicável a sistemas não lineares com incertezas com múltiplas entradas e múltiplas saídas compostos de subsistemas interconectados cujas matrizes de entrada apresentam funções não lineares e cujas interconexões entre subsistemas também apresentam não linearidades. A estratégia apresentada propõe-se a sanar várias das dificuldades encontradas em metodologias análogas, eliminando a questão de singularidade nas leis de controle; evitando o uso de funções de Lyapunov com integrais; e suprimindo a necessidade de introdução de derivadas dos controladores virtuais nas redes neurais, o que

se traduz em projetos de controle menos complexos, com menor custo computacional e com melhor desempenho na solução em comparação aos métodos similares existentes.

O Capítulo 7 traz as conclusões e os comentários pertinentes, assim como apresenta perspectivas de trabalhos futuros.

Os resultados das seções originais deste trabalho foram publicados conforme a tabela a seguir:

Correlação entre seções desta tese e artigos publicados pelo autor

Seção 5.2.1	GRINITS, E. V. & BOTTURA, C. P. Adaptive Control of Parametric Strict Feedback Systems with Improved Performance Using Modified Backstepping. <i>Proceedings of the 16th IFAC World Congress</i> . Prague, Czech Republic, 2005.
Seção 5.2.2	GRINITS, E. V. & BOTTURA, C. P. Control of Uncertain Chaotic Systems with Improved Performance Using Modified Adaptive Backstepping and Genetic Algorithms. <i>Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Intelligent Control</i> . Taipei, Taiwan, 2004.
Seção 5.3.1	GRINITS, E. V. & BOTTURA, C. P. Nonlinear Control with Improved Performance Using Modified Backstepping and Genetic Algorithms. <i>Proceedings of the 2004 International Conference on Complex Systems, Intelligence and Modern Technological Applications</i> . Cherbourg, France, 2004.
Seção 5.3.2	GRINITS, E. V. & BOTTURA, C. P. Control of Chaotic Systems with Improved Performance Using Backstepping and Genetic Algorithms. <i>Proceedings of the 2003 IEEE International Symposium on Intelligent Control</i> . Houston, TX, 2003.
Seção 6.2	GRINITS, E. V. & BOTTURA, C. P. Adaptive Neural-Based Backstepping Control of Uncertain MIMO Nonlinear Systems. <i>Proceedings of the 2006 IEEE World Congress on Computational Intelligence</i> . Vancouver, Canada, 2006.

Capítulo 2

Estabilidade e Convergência em Sistemas Dinâmicos

2.1. Introdução

Este capítulo trata de conceitos fundamentais de estabilidade e convergência em sistemas dinâmicos. O emprego de funções de Lyapunov para a determinação de níveis de estabilidade e limitação para soluções de sistemas não lineares fundamentado, por exemplo, no Método Direto de Lyapunov e em Princípios de Invariância é o pilar sobre o qual se sustentam os processos tradicionais de síntese de controladores para sistemas não lineares por meio de procedimentos recursivos como o *backstepping*. Após uma exposição dos conceitos principais associados à teoria de sistemas dinâmicos, contida na Seção 2.2, a Seção 2.3.1 dedica-se a expor as definições básicas utilizadas na elaboração de ferramentas de análise estruturadas a partir do uso de funções de Lyapunov. A Seção 2.3.2 versa sobre os requisitos para existência e unicidade de soluções em um sistema não linear genérico. As Seções 2.3.3 e 2.3.4 trazem definições acerca dos vários tipos de estabilidade e limitação que se pode conseguir ao final de um processo de controle. A Seção 2.3.5 aborda, de forma separada, os casos dos sistemas autônomos e não autônomos, apresentando aspectos importantes relacionados ao Método Direto de Lyapunov, ao Princípio de Invariância de La Salle – juntamente com uma extensão desse princípio introduzida recentemente –, expondo conceitos essenciais relativos ao Teorema de La Salle-Yoshizawa e evidenciando algumas formas possíveis de emprego de funções de Lyapunov na determinação de variados níveis de limitação para a solução de um sistema não linear.

2.2. Sistemas Dinâmicos

2.2.1. Definição e Caracterização

O termo *dinâmico* associa-se a fenômenos que produzem padrões variantes no tempo, estando as características de um dado padrão em determinado instante inter-relacionadas com aquelas de outros instantes. Refere-se, portanto, ao desenrolar de eventos num processo que se desenvolve seqüencialmente (Luenberger, 1979).

Praticamente todas as situações observadas no cotidiano ou em investigações científicas apresentam aspectos dinâmicos importantes. Em vista disso, muitos fenômenos dinâmicos podem ser percebidos e examinados de forma intuitiva. No entanto, é necessária a introdução de esquemas sistemáticos que empreguem ferramentas matemáticas quando se deseja analisar tais fenômenos com maior eficiência e profundidade.

Dinâmico adquire, dessa maneira, duas acepções: a primeira vincula-se aos fenômenos em si e sua evolução ao longo do tempo; a segunda, aos procedimentos matemáticos utilizados para sua representação e análise.

O termo *sistema* designa uma coleção de elementos unidos por algum tipo de interação ou interdependência, possuindo cada elemento um conjunto de atributos relevantes que o descreve (Luenberger, 1979). Um sistema massa-mola, por exemplo, é composto de vários elementos (objeto móvel, mola, atrito, etc.).

O padrão de resposta relativo ao fenômeno associado a um sistema (por exemplo, o tipo de movimento do objeto móvel num sistema massa-mola) recebe influências, em maior ou menor grau, de todos os elementos que constituem o sistema. Dessa forma, uma investigação que se queira produtiva acerca de algum fenômeno específico requer que se leve em conta o meio no qual ele está inserido. Os elementos selecionados para análise, contudo, possivelmente representarão apenas algum(alguns) aspecto(s) dentre os vários que

compõem todo o complexo formado pelo fenômeno e os eventos que o cercam e o afetam. No exemplo do sistema massa-mola, uma análise minimamente eficaz deverá levar em conta os seguintes aspectos: massa do objeto móvel, caracterização da mola e do atrito e condições iniciais.

Encontrar a descrição matemática de um sistema equivale a determinar um conjunto de relações matemáticas entre os atributos dos elementos que compõem o sistema a partir do conhecimento das relações entre esses elementos e entre os atributos de um mesmo elemento. Isso significa que modelos matemáticos de sistemas envolvem, de forma geral, uma pluralidade de variáveis inter-relacionadas (*sistemas multivariáveis*).

Um *sistema dinâmico* equivale, portanto, a uma estrutura multivariável (ou monovariável, caso se considere apenas um aspecto dessa estrutura) que se desenvolve no decorrer do tempo. Todos os sistemas examinados neste trabalho serão sistemas dinâmicos. Os sistemas dinâmicos são usualmente representados através de equações diferenciais e equações a diferenças. O emprego de equações diferenciais ou a diferenças se dá, respectivamente, conforme a evolução do fenômeno por elas descrito é considerada ocorrer em tempo contínuo ou discreto. Os sistemas estudados neste trabalho restringir-se-ão ao caso contínuo.

O *estado* de um sistema dinâmico é definido como o conjunto de valores de suas variáveis necessário e suficiente para caracterizar univocamente a situação física desse sistema (Kalman et al., 1969).

A representação matemática de um sistema dinâmico adota, habitualmente, a seguinte notação:

- Sistema dinâmico: $\Sigma : \dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$;
- Variável temporal: $t \in T$ (nesta tese, $T = \mathfrak{R}_+$);

- Função de entrada: $\mathbf{u} : T \rightarrow U$ (nesta tese, $U = \mathfrak{R}^{m_1}$)¹;
- Função de saída: $\mathbf{y} : T \rightarrow Y$ (nesta tese, $Y = \mathfrak{R}^{m_2}$)²;
- Função de estado: $\mathbf{x} : T \rightarrow X$ (nesta tese, $X = \mathfrak{R}^n$).

Supondo-se que, para cada $t \in T$, Σ receba alguma entrada $\mathbf{u}(t) \in U$ e produza alguma saída $\mathbf{y}(t) \in Y$, a saída \mathbf{y} dependerá tanto da entrada instantânea \mathbf{u} quanto da história pregressa de Σ . A introdução da classe de funções de entrada $\Lambda(t_i, t_f)$ que assumem valores instantâneos em U e estão definidas no intervalo $[t_i, t_f]$ – logo, $\mathbf{u} : [t_i, t_f] \rightarrow U$ e $\mathbf{u} \in \Lambda(t_i, t_f)$ –, com $0 \leq t_i \leq t_f$, permite que se enuncie a definição de estado consoante a notação apresentada (cf. Kalman et al. (1969)):

Definição 2.1. O estado $\mathbf{x}(t) \in X$ de um sistema dinâmico Σ é um atributo interno de Σ , no instante de tempo $t \in T$, que descreve completamente a parte da história passada de Σ que é relevante na determinação da saída $\mathbf{y}(t) \in Y$ para uma dada entrada $\mathbf{u} \in \Lambda(t_0, t_1)$.

Assim, se $\mathbf{x}(t_0)$ for o estado do sistema dinâmico no instante $t_0 < t_1$, o conhecimento de $\mathbf{u} \in \Lambda(t_0, t_1)$ deverá ser necessário e suficiente para determinar $\mathbf{x}(t_1)$.

As *variáveis de estado* de um sistema dinâmico são as variáveis que pertencem ao menor conjunto de variáveis que determina o estado do sistema dinâmico (Ogata, 1997). Todo estado pode ser expresso por um ponto no *espaço de estados*, sendo que cada coordenada representa uma variável de estado. A evolução do estado de um sistema

¹ Se $m_1 = 1$, diz-se que o sistema possui *entrada única* (SI – “Single Input” em inglês). Se $m_1 > 1$, diz-se que o sistema possui *múltiplas entradas* (MI – “Multiple Inputs” em inglês).

² Se $m_2 = 1$, diz-se que o sistema possui *saída única* (SO – “Single Output” em inglês). Se $m_2 > 1$, diz-se que o sistema possui *múltiplas saídas* (MO – “Multiple Outputs” em inglês).

dinâmico ao longo do tempo no espaço de estados é denominada *trajetória* (ou *fluxo*, ou *órbita*).

Parte do estudo efetuado nesta tese irá lidar com a *equação de estado* $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$; na maioria das vezes, sem a presença explícita de uma entrada \mathbf{u} , ou seja,

$$\Sigma: \dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}) \quad (2.1)$$

Isso não significa, contudo, que a entrada do sistema é nula. De fato, a entrada pode ter sido expressa como função do tempo, $\mathbf{u} = \gamma(t)$, função do estado, $\mathbf{u} = \gamma(\mathbf{x})$, ou ambos os casos, $\mathbf{u} = \gamma(t, \mathbf{x})$. A substituição de $\mathbf{u} = \gamma$ em $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ conduz, então, à configuração (2.1).

Quando a função f não depende explicitamente de t , é possível reescrever (2.1) da seguinte forma:

$$\Sigma: \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

Diz-se, nesse caso, que o sistema é *autônomo* ou *invariante no tempo*. Um sistema autônomo é invariante a deslocamentos temporais na origem, pois uma mudança na variável de tempo de t para $\tau = t - a$ não altera o lado direito da equação de estado (2.2). Se o sistema não for autônomo, ele será denominado *não autônomo* ou *variante no tempo*.

Um sistema dinâmico será *linear* se for possível o emprego do *princípio da superposição* (mais detalhes em Bottura (1982)). Esse princípio afirma que a resposta produzida pela aplicação da soma de duas entradas diferentes num sistema é a soma das respostas individuais de cada uma das entradas. Na impossibilidade de aplicação do princípio da superposição, o sistema dinâmico será *não linear*. Embora muitos sistemas reais sejam representados por modelos lineares, na maior parte dos casos as relações físicas que os constituem são não lineares. Na prática, portanto, muitos sistemas eletromecânicos, hidráulicos, pneumáticos, etc., envolvem interações não lineares de suas variáveis. Os sistemas tratados neste trabalho serão todos não lineares.

2.2.2. Estados Estacionários em Sistemas Não Lineares

Nesta seção, os sistemas dinâmicos não lineares autônomos são classificados em termos de seu comportamento de estado estacionário (ou de regime). A razão de se restringir as classificações expostas a seguir apenas para o caso de sistemas autônomos se deve ao fato de o campo vetorial de sistemas não autônomos ser dependente do tempo, não fazendo sentido analisá-los com base em conceitos definidos para $t \rightarrow \infty$.

A despeito de um mesmo sistema dinâmico poder apresentar trajetórias iniciais completamente diferentes, essas trajetórias convergem para um padrão característico quando $t \rightarrow \infty$, conhecido como *comportamento de estado estacionário* (ou de *regime*). Para um dado sistema, o caminho percorrido pela trajetória de estado entre o estado inicial e o estado final denomina-se *transitório* (mais detalhes em Bottura (1982)).

2.2.2.1. Ponto de Equilíbrio

Um estado $\mathbf{x} = \mathbf{x}_e$ será um *estado de equilíbrio* (ou *ponto de equilíbrio*, ou *ponto fixo*) de um dado sistema dinâmico Σ caso ele seja invariante sob a dinâmica associada ao sistema, ou seja, se se constatar que $\dot{\mathbf{x}}_e = f(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0}$. Um sistema não linear pode possuir múltiplos pontos de equilíbrio.

2.2.2.2. Soluções Periódicas

Sistemas não lineares podem apresentar oscilações de amplitude e período constantes sem que sejam verificadas excitações externas continuadas. Essas oscilações, *soluções periódicas*, são, grosso modo, denominadas *ciclos-limites*.

2.2.2.3. Soluções Quase-Periódicas

Uma solução *quase-periódica*, por sua vez, corresponde a uma oscilação que combina oscilações periódicas de várias frequências não comensuráveis não múltiplas entre si.

2.2.2.4. Caos

Um sistema não linear pode exibir um comportamento de regime mais complicado que não se insere em nenhum dos três padrões acima descritos (ponto de equilíbrio, solução periódica ou solução quase-periódica) e que aparenta ser aleatório. Tal comportamento é designado por *caos*. Uma solução caótica não é, de fato, aleatória. Aleatoriedade implicaria em que o modelo do sistema ou sua entrada contivessem incertezas, o que resultaria na impossibilidade de se analisar as soluções produzidas por esse sistema sem recorrer a métodos estatísticos. No caso de ocorrência de caos, ao contrário, o problema em questão é determinístico, isto é, não há incertezas no modelo, entrada ou condições iniciais.

Sistemas *dissipativos* – como é o caso do sistema (2.2), ao se supor que $\nabla \cdot f < 0$ em alguma região de seu espaço de estados – são, tipicamente, assinalados pela presença de *conjuntos atratores* ou, simplesmente, *atratores* em seus espaços de estados, ou seja, subconjuntos limitados em direção aos quais regiões de condições iniciais de volume não nulo convergem, assintoticamente, com o passar do tempo. Pontos de equilíbrio e ciclos-limites são exemplos de atratores de dimensões zero e um, respectivamente³. Os atratores de dinâmicas caóticas possuem, caracteristicamente, estruturas geométricas bem mais intrincadas do que pontos de equilíbrio e ciclos-limites, com dimensões não inteiras. Na terminologia de Mandelbrot (citado por Ott (1997)), tais estruturas são designadas por *fractais*. Quando um atrator é um fractal, ele é denominado *atrator estranho*.

Um atributo típico de um atrator estranho é sua exponencial sensibilidade a variações nas condições iniciais – o que traz como implicação o fato de que, à medida que o

³ Dimensões de Hausdorff (mais detalhes em Ott (1997)).

tempo evolui, pequenos erros na solução crescem rapidamente (i.e. exponencialmente). Um indicador dessa sensibilidade a perturbações é o *expoente de Lyapunov*, que provê uma maneira de se determinar os padrões de contração e expansão de atratores e outros conjuntos invariantes⁴. Mais detalhes a respeito de caos podem ser encontrados em Ott (1997).

2.2.3. Aspectos Relativos ao Estudo de Sistemas Dinâmicos

Como descreve Luenberger (1979), o estudo de um sistema dinâmico pode ser dividido em quatro estágios: representação, determinação de soluções, exploração de relações estruturais e controle. Dependendo dos objetivos a que se propõe o estudo, na maior parte dos casos enfatiza-se um ou dois desses aspectos.

2.2.3.1. Representação

O processo de obtenção de uma descrição matemática associada a um sistema dinâmico real é denominado *modelagem*, sendo o resultado final um *modelo*. Esta etapa é essencial, pois deve assegurar um grau de fidelidade aceitável entre o comportamento do fenômeno real sob investigação e os padrões produzidos pela interação das variáveis selecionadas que compõem o estado do sistema-modelo⁵.

2.2.3.2. Determinação de Soluções

O uso mais imediato de um modelo dinâmico se dá na *determinação de soluções* que atendem às equações que descrevem o sistema. O padrão temporal das variáveis que

⁴ A definição de *conjunto invariante* será apresentada na Seção 2.3.5.1 a seguir.

⁵ Neste capítulo e nos seguintes, a palavra *sistema* incorporará a acepção associada a *modelo*, devendo o sentido ficar claro conforme o contexto em que o termo for utilizado.

compõem o estado do sistema numa solução específica é estudado visando-se aos mais variados propósitos.

Uma solução pode, às vezes, ser expressa analiticamente; mais freqüentemente, e, especialmente, no caso de sistemas não lineares, porém, faz-se necessária a geração numérica de soluções específicas por meio de simulações. As simulações podem ser empregadas para se testar a validade de um modelo, de maneira que uma dada solução deverá apresentar as propriedades comumente associadas ao fenômeno representado pelo sistema-modelo. As simulações contidas neste trabalho foram efetuadas no aplicativo Matlab.

Um modelo representa um rol de soluções, cada uma delas determinada por diferentes entradas, diferentes valores de parâmetros e diferentes condições iniciais.

2.2.3.3. Exploração de Relações Estruturais

Boa parte da teoria de sistemas dinâmicos é motivada pelo desejo de se ir além do estágio do simples cômputo de soluções particulares de um modelo, tendo como meta a investigação e o estabelecimento de *relações estruturais* entre, por exemplo, um dado parâmetro do sistema e sua interferência na solução. Tais relações são obtidas indiretamente, através do uso de conceitos analíticos auxiliares. Um exemplo disso é a averiguação da estabilidade de um dado sistema por meio de funções auxiliares que levem em conta a estrutura do sistema-modelo, sem que seja necessária a geração prévia de soluções.

2.2.3.4. Controle

Muitas das metodologias de estudo de sistemas dinâmicos são movidas pelo objetivo de se criar maneiras eficazes de mudar um dado sistema de sorte que sua resposta seja melhorada segundo algum aspecto. Dessa forma, o *controle* é uma atividade

continuada executada sobre e ao longo da operação do sistema que deverá ter como resultado uma resposta tão próxima da ideal quanto for possível de acordo com algum critério.

Este trabalho enfatiza o terceiro e o quarto aspectos no estudo de sistemas dinâmicos não lineares – respectivamente, a exploração de relações estruturais e a determinação de estratégias para um controle eficiente desses sistemas.

2.3. Estabilidade e Convergência

Esta seção apresenta alguns conceitos fundamentais que serão empregados ao longo desta tese.

2.3.1. Propriedades de Conjuntos

O termo *conjunto*, neste trabalho, está relacionado a uma coleção finita ou infinita de pontos. Por exemplo, os pontos que compõem uma reta ou que se localizam dentro de uma esfera no \mathfrak{R}^n são conjuntos. Um conjunto $S \subset \mathfrak{R}^n$ será *limitado* caso exista um escalar $r > 0$ tal que $\|\mathbf{x}\| < r$ para todos os pontos $\mathbf{x} \in S$. Neste estudo, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ (norma Euclidiana).

Definição 2.2. Seja um escalar $\varepsilon > 0$ e sejam \mathbf{x} e \mathbf{y} pontos no \mathfrak{R}^n . O conjunto $N(\mathbf{x}, \varepsilon) = \{\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^n \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \varepsilon\}$ é denominado *vizinhança* de \mathbf{x} com *raio* ε . O vetor \mathbf{x} chama-se *centro*. Caso o valor do raio não seja relevante, representa-se a vizinhança de \mathbf{x} por $N(\mathbf{x})$.

Supondo-se que S seja um subconjunto do \mathfrak{R}^n , o vetor $\mathbf{x} \in S$ será um *ponto interior* de S se existir uma vizinhança $N(\mathbf{x})$ tal que todos os seus pontos pertençam a S . Admitindo-se,

por outro lado, que \mathbf{x} não necessariamente pertença a S , \mathbf{x} será um *ponto de acumulação* de S se toda vizinhança de \mathbf{x} contiver pelo menos um ponto de S distinto de \mathbf{x} .

Teorema 2.1. Se $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ for um ponto de acumulação de $S \subset \mathfrak{R}^n$, toda vizinhança $N(\mathbf{x})$ conterà infinitos pontos de S .

Prova. Cf. Apostol (1965), p. 49.

Está implícito nesse teorema o fato de que não se observam pontos de acumulação em conjuntos com finitos pontos. A afirmação contrária, todavia, não se verifica. O conjunto $Z_+^* = \{1, 2, 3, \dots\}$, por exemplo, é composto de infinitos termos e não possui pontos de acumulação. Por outro lado, um conjunto *limitado* com infinitos termos *sempre* apresenta um ponto de acumulação. Esse resultado é conhecido como *Teorema de Bolzano-Weierstrass*.

Teorema 2.2 (Bolzano-Weierstrass). Se um conjunto limitado $S \subset \mathfrak{R}^n$ possuir infinitos pontos, haverá pelo menos um ponto no \mathfrak{R}^n que será um ponto de acumulação de S .

Prova. Cf. Apostol (1965), pp. 49-51.

Uma seqüência de vetores no \mathfrak{R}^n $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \dots\}$, representada por $\{\mathbf{x}_n\}$, convergirá para um vetor-limite \mathbf{x} caso se verifique $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Um vetor \mathbf{x} será um ponto de acumulação da seqüência $\{\mathbf{x}_n\}$ se existir alguma subseqüência de $\{\mathbf{x}_n\}$ que convirja para \mathbf{x} , ou seja, se houver um conjunto Ξ com infinitos termos pertencentes a Z_+ tal que $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \Xi}$ convirja para \mathbf{x} . De acordo com o Teorema de Bolzano-Weierstrass, uma seqüência limitada $\{\mathbf{x}_n\}$ no \mathfrak{R}^n possui pelo menos um ponto de acumulação no \mathfrak{R}^n . Uma seqüência de números reais $\{r_n\}$ monótona, não decrescente e superiormente limitada converge para um número real. De forma similar, uma seqüência de

números reais $\{r_n\}$ monótona, não crescente e inferiormente limitada também converge para um número real.

Exemplo 2.1. O conjunto S de números da forma $1/n$, com $n = 1, 2, 3, \dots$ tem 0 como ponto de acumulação. Deve-se atentar ao fato de 0 não pertencer ao conjunto S .

Um conjunto $S \subset \mathfrak{R}^n$ será *aberto* se todo ponto de S for um ponto interior de S . Por exemplo, um intervalo aberto (a, b) é um conjunto aberto em \mathfrak{R} . No entanto, não é um conjunto aberto no \mathfrak{R}^n , pois vizinhanças n -dimensionais não estão definidas em (a, b) .

Um conjunto $S \subset \mathfrak{R}^n$ será *fechado* se ele contiver todos os seus pontos de acumulação. Por exemplo, um intervalo fechado $[a, b]$ é um conjunto fechado em \mathfrak{R} e também no \mathfrak{R}^n . Intervalos abertos em \mathfrak{R} não são conjuntos fechados porque não contêm seus extremos, ambos pontos de acumulação. Pelo mesmo motivo, intervalos semi-abertos do tipo $(a, b]$ ou $[a, b)$ não são conjuntos fechados. Entretanto, tais intervalos tampouco são conjuntos abertos. Com efeito, para o caso $(a, b]$ a vizinhança $N(b)$ não contém apenas pontos interiores. O \mathfrak{R}^n é um conjunto aberto e, simultaneamente, um conjunto fechado. O mesmo vale para o conjunto vazio.

Um conjunto $S \subset \mathfrak{R}^n$ será *compacto* se for limitado e fechado.

Um ponto $p \in \mathfrak{R}^n$ será um *ponto-limite* de um conjunto $S \subset \mathfrak{R}^n$ se toda vizinhança de p contiver pelo menos um ponto de S e um ponto não pertencente a S . O conjunto de todos os pontos-limites de S , expresso por ∂S , é denominado *limite* (ou *fronteira*) de S . Um conjunto fechado contém todos os seus pontos-limites. Um conjunto aberto não contém nenhum de seus pontos-limites. O *interior* de S é designado por $S - \partial S$. Um conjunto aberto é igual ao seu interior. Um conjunto fechado é igual a $S + \partial S$, i.e. à união de S e sua fronteira.

Um conjunto aberto $S \subset \mathfrak{R}^n$ será *conexo* se todo par de pontos em S puder ser interligado por um arco contido em S . A união de um conjunto S aberto e conexo com alguns, nenhum ou todos os seus pontos-limites denomina-se *região*. Caso nenhum dos pontos de fronteira pertença à união, a região em questão será designada por *domínio* ou *região aberta*.

2.3.2. Existência e Unicidade

Considerando-se o problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}), \text{ com } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.3)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ e $f : \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$, como a representação matemática de um sistema físico sob experimentação, deseja-se que, ao partir de um estado inicial \mathbf{x}_0 no instante t_0 , o sistema (2.3) assuma um estado definido no instante futuro $t = t_1 > t_0$, ou seja, demanda-se a *existência* de uma solução para o problema (2.3). Além disso, caso o sistema seja determinístico, espera-se que, se as condições do experimento anterior puderem ser repetidas de maneira exata, a dinâmica do sistema seja a mesma e se alcance novamente o mesmo estado em $t_1 > t_0$. Para que o modelo matemático (2.3) preveja de forma inequívoca o estado futuro de um sistema dinâmico a partir do estado atual em $t = t_0$, o problema (2.3) deverá ter *solução única* para cada condição inicial.

Entende-se como *solução* de (2.3) num intervalo $[t_0, t_1]$ uma função contínua $\mathbf{x} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathfrak{R}^n$ tal que $\dot{\mathbf{x}}(t)$ seja definida e $\dot{\mathbf{x}}(t) = f[t, \mathbf{x}(t)] \quad \forall t \in [t_0, t_1]$. Se $f(t, \mathbf{x})$ for contínua em t e em \mathbf{x} , então a solução $\mathbf{x}(t)$ será continuamente diferenciável. Caso $f(t, \mathbf{x})$ seja contínua em \mathbf{x} , mas somente contínua por partes em t , a solução $\mathbf{x}(t)$ será apenas continuamente diferenciável por partes. A suposição de continuidade por partes em t remonta aos casos em que o sistema $f(t, \mathbf{x})$ depende de uma entrada variável no tempo com descontinuidades do tipo degrau, por exemplo.

A questão de existência e unicidade, que será abordada por meio de restrições introduzidas em $f(t, \mathbf{x})$, é essencial para que o modelo descrito por equações diferenciais (2.3) seja válido como representação do comportamento de um sistema dinâmico real.

Definição 2.3. Seja $f : \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ uma função $f(t, \mathbf{x})$. Se a desigualdade

$$\|f(t, \mathbf{y}_1) - f(t, \mathbf{y}_2)\| \leq L \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \quad (2.4)$$

for satisfeita para todo (t, \mathbf{y}_1) e (t, \mathbf{y}_2) em alguma vizinhança de (t_0, \mathbf{x}_0) , a função f será *Lipschitz em \mathbf{x}* . A constante positiva L é denominada *constante de Lipschitz*.

Diz-se que uma função $f(\mathbf{x})$ é *localmente Lipschitz* num dado domínio $D \subset \mathfrak{R}^n$ se cada ponto de D possuir uma vizinhança D_0 de tal forma que f atenda à condição de Lipschitz (2.4) para todos os pontos de D_0 com alguma constante de Lipschitz L_0 . Uma função $f(\mathbf{x})$ será *Lipschitz num conjunto W* se (2.4) for satisfeita para todos os pontos de W com a mesma constante de Lipschitz L . Uma função localmente Lipschitz num domínio D não é necessariamente Lipschitz em D , uma vez que a condição (2.4) pode não valer de maneira uniforme (i.e. com a mesma constante L) para todos os pontos em D . No entanto, uma função localmente Lipschitz num domínio D será Lipschitz em todo subconjunto compacto de D (Khalil, 1992). Diz-se que uma função é *globalmente Lipschitz* caso ela seja Lipschitz no \mathfrak{R}^n . Pode-se mostrar que o fato de uma função $f(\mathbf{x})$ ser Lipschitz num conjunto W implica continuidade de $f(\mathbf{x})$ em W (Khalil, 1992).

Essa terminologia permanece sendo válida no caso de uma função dependente do tempo $f(t, \mathbf{x})$, contanto que a condição de Lipschitz valha de maneira uniforme em t para todos os instantes num dado intervalo de tempo.

Teorema 2.3 (Existência e Unicidade Locais). Seja $f : \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ uma função $f(t, \mathbf{x})$ contínua por partes na variável t que satisfaz a condição de Lipschitz (2.4) para

todo $y_1, y_2 \in B = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r\}$, $\forall t \in [t_0, t_1]$. Existirá, então, um $\delta > 0$, dependente de \mathbf{x}_0 , tal que a equação de estado (2.3) possua solução única em $[t_0, t_0 + \delta]$.

Prova. Cf. Khalil (1992), p. 74.

No Teorema 2.3, a principal restrição introduzida em $f(t, \mathbf{x})$ corresponde à exigência de satisfação de (2.4). Todavia, o resultado obtido é local, pois existência e unicidade são conseguidas apenas no intervalo $[t_0, t_0 + \delta]$, onde δ pode ser muito pequeno. Pode-se requerer, a fim de se garantir existência e unicidade globais, que f atenda a condições *globais* de Lipschitz, i.e. tornam-se mais fortes as restrições a serem atendidas por f . Esse é um recurso restritivo, entretanto. Muitos modelos de sistemas físicos que apresentam soluções únicas e globais não atendem a condições globais de Lipschitz. Ainda, exemplos de funções f contínuas e contínuas por partes que não satisfazem condições locais de Lipschitz são raros, sendo razoável supor que representações matemáticas de sistemas práticos como (2.3) atendam a condições locais de Lipschitz (Khalil, 1992). Pode-se, dessa maneira, buscar um teorema que garanta existência e unicidade globais requerendo-se apenas a validade de condições locais de Lipschitz, à custa de se ter de antemão mais informações sobre a solução do sistema. Para o caso de sistemas autônomos, por exemplo, tem-se o teorema a seguir (a extensão para sistemas não autônomos pode ser encontrada em Hahn (1967)).

Teorema 2.4. Seja $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ uma função $f(\mathbf{x})$ localmente Lipschitz em \mathbf{x} num domínio $D \subset \mathfrak{R}^n$ e seja W um subconjunto compacto de D . Suponha que $\mathbf{x}_0 \in W$ e que se sabe que toda solução de $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, com $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, localiza-se inteiramente em W . Existirá, então, uma solução única para cada \mathbf{x}_0 definida para todo $t \geq t_0$.

Prova. Cf. Khalil (1992), p. 83.

O ponto a ser destacado nesse teorema é a necessidade de se saber que a solução está de fato num conjunto compacto sem que se tenha de resolver o sistema de equações diferenciais. O Método Direto de Lyapunov é uma ferramenta muito útil nesse sentido.

2.3.3. Definições de Estabilidade

Considere o sistema dinâmico variante no tempo

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}), \text{ com } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.5)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ e $f : \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ é suposta localmente Lipschitz em \mathbf{x} num dado domínio $D \subset \mathfrak{R}^n$ com $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in D$. Um ponto $\mathbf{x} = \mathbf{x}_e$ no espaço de estados será um *ponto de equilíbrio* de (2.5) quando

$$f(t, \mathbf{x}_e) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq 0 \quad (2.6)$$

Por conveniência, todas as definições e teoremas deste capítulo referem-se ao caso em que o ponto de equilíbrio localiza-se na origem do \mathfrak{R}^n , ou seja, $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$. Essa suposição não acarreta perda de generalidade, pois qualquer ponto de equilíbrio pode ser transladado para a origem através de uma mudança de variáveis.

Definição 2.4. O ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ de (2.5) será *estável* se houver, para cada $\varepsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$, um $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$ sempre que $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta(\varepsilon, t_0)$ e $\mathbf{x}(t) \in D$.

Ressalta-se que estabilidade é uma propriedade de um *ponto de equilíbrio* e não de um sistema. Muitas vezes, entretanto, diz-se que um *sistema* é estável quando todos os seus pontos de equilíbrio forem estáveis.

Definição 2.5. O ponto de equilíbrio \mathbf{x}_e de (2.5) será *instável* se não for estável.

Um mesmo sistema dinâmico pode conter pontos de equilíbrio tanto estáveis quanto instáveis. Os algoritmos para controle adaptativo não linear propostos nesta tese objetivam que o sistema final não apresente instabilidades.

Definição 2.6. Na Definição 2.4, se δ for independente de t_0 , ou seja, se $\delta = \delta(\varepsilon)$, o ponto de equilíbrio \mathbf{x}_e será *uniformemente estável*.

Se a função f for independente do tempo (i.e. o sistema (2.5) for um sistema autônomo), \mathbf{x}_e ser estável implica em estabilidade uniforme. Ressalta-se que estabilidade uniforme é uma propriedade local.

Definição 2.7. O ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ de (2.5) será *assintoticamente estável* se for estável e se, para todo $t_0 \geq 0$, existir um $\eta(t_0) > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$ sempre que $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \eta(t_0)$.

Definição 2.8. O ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ de (2.5) será *uniformemente assintoticamente estável* se for uniformemente estável e se, para cada $\varepsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$, existir um $\delta > 0$ independente de t_0 e de ε e um $T(\varepsilon) > 0$ independente de t_0 tal que $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$ sempre que $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_e\| \leq \delta$.

Novamente, se a função f for independente do tempo, \mathbf{x}_e ser assintoticamente estável implica em estabilidade assintótica uniforme. Ressalta-se que estabilidade assintótica uniforme é uma propriedade local.

Definição 2.9. O conjunto $\Psi \subset \mathfrak{X}^n$ de todos os estados iniciais $\mathbf{x}(t_0) \in \mathfrak{X}^n$ tal que $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_e$ com $t \rightarrow \infty$ para todo $\mathbf{x}(t_0) \in \Psi$ é denominado *domínio de atração* de \mathbf{x}_e .

Definição 2.10. O ponto de equilíbrio \mathbf{x}_e de (2.5) será *globalmente assintoticamente estável* se $\Psi = \mathfrak{R}^n$.

As definições desta seção partem do pressuposto de que as soluções de (2.5) são definidas para todo $t_0 \geq 0$. Essa suposição não é garantida pela condição local de Lipschitz atendida por f . Todavia, as exigências adicionais demandadas pelo Método Direto de Lyapunov, no Teorema 2.5 da Seção 2.3.5.1 a seguir, garantirão existência de $\mathbf{x}(t)$, para todo $t_0 \geq 0$, no contexto do Teorema 2.4.

2.3.4. Definições de Limitação

Esta seção traz algumas definições importantes acerca de limitação de soluções. Maiores detalhes podem ser obtidos em Spooner et al. (2002). Considere o sistema dinâmico genérico (2.5).

Definição 2.11. Uma solução $\mathbf{x}(t)$ de (2.5) será *limitada* caso exista um $\beta > 0$, que pode depender de cada solução, tal que $\|\mathbf{x}(t)\| < \beta$ para todo $t \geq t_0 \geq 0$. Diz-se que um sistema possui *estabilidade de Lagrange* se, para cada $t_0 \geq 0$ e $\mathbf{x}(t_0) \in \mathfrak{R}^n$, a solução $\mathbf{x}(t)$ correspondente for limitada.

Verifica-se que, se um ponto de equilíbrio for globalmente assintoticamente estável, o sistema para o qual esse equilíbrio é definido possui estabilidade de Lagrange (o contrário, entretanto, não é válido). Ainda, o fato de um ponto de equilíbrio ser estável não implica que o sistema correspondente apresente estabilidade de Lagrange, uma vez que talvez seja possível encontrar uma forma de determinar $\mathbf{x}(t_0)$ tal que este seja próximo de um equilíbrio instável e fazer com que $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$.

Definição 2.12. Uma solução $\mathbf{x}(t)$ de (2.5) será *uniformemente limitada* caso exista, para cada $\alpha > 0$ e $t_0 \geq 0$, um $\beta(\alpha) > 0$ (independente de t_0) tal que, se $\mathbf{x}(t_0) < \alpha$, então $\|\mathbf{x}(t)\| < \beta(\alpha)$ para todo $t \geq t_0 \geq 0$.

Se a solução $\mathbf{x}(t)$ de (2.5) for uniformemente limitada, ela será limitada e o sistema apresentará estabilidade de Lagrange.

Definição 2.13. A solução $\mathbf{x}(t)$ de (2.5) será *uniformemente ultimamente limitada* caso exista algum $B > 0$ e se, correspondendo a cada $\alpha > 0$ e $t_0 \geq 0$, existir um $T(\alpha) > 0$ (independente de t_0) tal que $\mathbf{x}(t_0) < \alpha$ implique em $\|\mathbf{x}(t)\| < B$ para todo $t \geq t_0 + T(\alpha)$.

Dessa forma, diz-se que um sistema é uniformemente ultimamente limitado quando todas as suas trajetórias terminam numa vizinhança $N(\mathbf{0}, B)$.

2.3.5. Condições para Estabilidade e Limitação

A idéia central do Método Direto de Lyapunov resulta da extensão matemática de uma constatação física fundamental: se a energia total de um sistema (elétrico, mecânico, etc.) for continuamente dissipada, o sistema, seja linear ou não linear, deverá tender a um estado de equilíbrio. Logo, é possível entrever a estabilidade de um sistema dinâmico por meio do exame da variação de alguma função escalar (como a função da energia, por exemplo) cuja derivada irá indicar o grau de estabilidade e convergência das soluções do sistema em questão.

2.3.5.1. Sistemas Autônomos

Considere o sistema não linear invariante no tempo

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \text{ com } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.7}$$

onde $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ e $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ é suposta localmente Lipschitz em \mathbf{x} num dado domínio $D \subset \mathfrak{R}^n$ com $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in D$.

Teorema 2.5 (Método Direto de Lyapunov). Seja $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ um ponto de equilíbrio de (2.7) e presuma que $f(\mathbf{x})$ seja localmente Lipschitz em \mathbf{x} . Seja $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}_+$ uma função $V(\mathbf{x})$ continuamente diferenciável que satisfaz

- $V(\mathbf{x}) > 0$, i.e. $V(\mathbf{x})$ é definida positiva e $V(\mathbf{0}) = 0$;
- $\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \leq -W(\mathbf{x}) \leq 0$;
- $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ com $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, i.e. $V(\mathbf{x})$ é ilimitada radialmente.

Então, $V(\mathbf{x})$ será uma *função de Lyapunov* e o ponto de equilíbrio \mathbf{x}_e será globalmente estável caso $W(\mathbf{x}) \geq 0$ (W semidefinida positiva) ou globalmente assintoticamente estável caso $W(\mathbf{x}) > 0$ (W definida positiva).

Prova. Cf. Hahn (1967), pp. 102-103, e Khalil (1992), pp. 101-102. Deve-se ressaltar que a prova desse teorema, que foge dos propósitos deste capítulo, garante existência e unicidade das soluções de (2.7) no \mathfrak{R}^n para $t \geq t_0$.

A exigência de que $V(\mathbf{x})$ seja ilimitada radialmente é necessária para que os resultados do Teorema 2.5 sejam globais (conforme Teorema de Barbashin-Krasovskii em Khalil (1992)). Entretanto, as condições do teorema são apenas suficientes, pois o fato de não se satisfazer as condições de estabilidade ou estabilidade assintótica para uma dada candidata a função de Lyapunov não significa que o ponto de equilíbrio em questão não seja globalmente estável ou globalmente assintoticamente estável. Indica, apenas, que tais características não podem ser estabelecidas utilizando-se tal candidata a função de Lyapunov. De fato, não há um procedimento sistemático que construa funções de Lyapunov adequadas para todos os tipos de problemas. A introdução dos métodos recursivos de *backstepping* configura-se, nesse sentido, num grande avanço, pois resolve essa questão para diversas classes de sistemas não lineares.

A necessidade de se ter $W(\mathbf{x}) > 0$ (ou $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$) para que se consiga estabilidade assintótica global é, em muitos casos, difícil de ser satisfeita (Fossen & Strand, 1999). O Princípio de Invariância de La Salle pode, então, ser empregado para que se consiga verificar se um sistema não linear autônomo é globalmente assintoticamente estável mesmo com $\dot{V}(\mathbf{x})$ semidefinida negativa. Algumas definições, porém, devem ser introduzidas antes de se enunciar o Teorema de La Salle.

Definição 2.14. Seja $\mathbf{x}(t)$ uma solução do sistema dinâmico (2.7). Um ponto \mathbf{p} será um *ponto-limite positivo* de $\mathbf{x}(t)$ caso haja uma seqüência $\{t_n\}$, com $t_n \rightarrow \infty$ para $n \rightarrow \infty$, de tal forma que $\mathbf{x}(t_n) \rightarrow \mathbf{p}$ quando $n \rightarrow \infty$. O conjunto de todos os pontos-limites positivos de $\mathbf{x}(t)$ é denominado *conjunto-limite positivo* de $\mathbf{x}(t)$.

Deve-se destacar que o conceito de *ponto-limite positivo* é de natureza inteiramente diversa do de *ponto-limite* apresentado na Seção 2.3.1. A definição de *ponto-limite positivo* associa-se ao conceito de *ponto de acumulação*.

Definição 2.15. Considere o sistema dinâmico (2.7). Um conjunto M será denominado *invariante* se qualquer solução $\mathbf{x}(t)$ desse sistema que pertença a M em algum instante t_1 pertencer a M em todos os instantes, i.e. $\mathbf{x}(t_1) \in M \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in M \forall t \geq t_0$.

Um conjunto Y será *positivamente invariante* caso a definição acima seja verdadeira apenas para instantes futuros, i.e. $\mathbf{x}(t_1) \in Y \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in Y \forall t \geq t_1$.

Uma propriedade fundamental dos conjuntos-limites é o lema a seguir, cuja prova pode ser encontrada em Khalil (1992):

Lema 2.1. Seja $\mathbf{x}(t)$ uma solução limitada de (2.7). Supondo-se que $\mathbf{x}(t)$ pertença ao domínio D para todo $t \geq t_0$, seu conjunto-limite positivo L^+ será um conjunto compacto invariante não vazio. Além disso, $\mathbf{x}(t) \rightarrow L^+$ quando $t \rightarrow \infty$.

Prova. Cf. Khalil (1992), p.491.

Apresentadas as definições e comentários necessários, pode-se, agora, enunciar o Teorema de La Salle:

Teorema 2.6 (Princípio de Invariância de La Salle). Seja Ω um conjunto compacto positivamente invariante de (2.7). Seja, ainda, $V : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função $V(\mathbf{x})$ continuamente diferenciável tal que $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$. Defina $E = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$ e seja M o maior conjunto invariante contido em E . Então, toda solução limitada $\mathbf{x}(t)$ iniciando-se em Ω converge para M com $t \rightarrow \infty$.

Prova (Khalil, 1992, p. 117). Seja $\mathbf{x}(t)$ uma solução de (2.7) iniciando-se em Ω . Como $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ em Ω , $V(\mathbf{x})$ é uma função não crescente. Ademais, a continuidade de $V(\mathbf{x})$ no conjunto compacto Ω implica que $V(\mathbf{x})$ é inferiormente limitada em Ω . Logo, $V(\mathbf{x})$ possui um limite a para $t \rightarrow \infty$. Note, ainda, que o conjunto-limite positivo L^+ localiza-se em Ω , pois Ω é um conjunto fechado e positivamente invariante. Considerando-se a Definição 2.14 e a continuidade de $V(\mathbf{x})$, tem-se que $V(\mathbf{p}) = \lim_{n \rightarrow \infty} V[\mathbf{x}(t_n)] = a$, onde $\mathbf{p} \in L^+$ e $\mathbf{x}(t_n) \rightarrow \mathbf{p}$ quando $n \rightarrow \infty$ para uma seqüência $\{t_n\}$ com $t_n \rightarrow \infty$. Portanto, $V(\mathbf{x}) = a$ em L^+ . Como, pelo Lema 2.1, L^+ é um conjunto invariante, verifica-se que $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ em L^+ . Assim, $L^+ \subset M \subset E \subset \Omega$. Como $\mathbf{x}(t)$ é limitado, $\mathbf{x}(t)$ tende a L^+ quando $t \rightarrow \infty$ (Lema 2.1). Conseqüentemente, $\mathbf{x}(t)$ aproxima-se de M quando $t \rightarrow \infty$.

Deve-se notar que o Teorema de La Salle não requer que $V(\mathbf{x})$ seja definida positiva. A Figura 2.1 traz uma interpretação geométrica do Teorema 2.6.

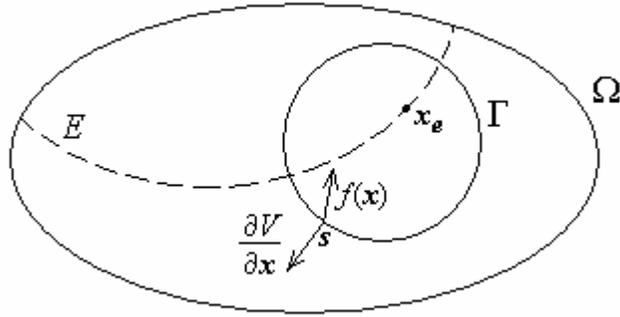


Figura 2.1. Interpretação geométrica do Princípio de Invariância de La Salle.

Supondo-se, por hipótese, que na fronteira do conjunto positivamente invariante Ω a função de Lyapunov assuma o valor $V(\mathbf{x}) = v_1$, define-se $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid V(\mathbf{x}) \leq v_1\}$, uma vez que $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ em Ω . A linha tracejada representa o conjunto E onde $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$. Admite-se que o maior conjunto invariante M em E seja composto apenas pelo ponto de equilíbrio estável \mathbf{x}_e . Define-se a curva de nível $\Gamma = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid V(\mathbf{x}) = v_2 < v_1\}$; seja s um ponto $s \in \Gamma$. Em s :

$$\dot{V} = \left. \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=s} = \left. \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}=s} \leq 0 \quad (2.8)$$

Como $\partial V / \partial \mathbf{x}$ é o vetor gradiente de $V(\mathbf{x})$ – logo, perpendicular a Γ e “saindo” – e $f(\mathbf{x})$ é o vetor velocidade $\dot{\mathbf{x}}$ – tangente às trajetórias do sistema –, a equação (2.8) indica que o produto escalar do vetor gradiente de $V(\mathbf{x})$ com o vetor velocidade $f(\mathbf{x})$ deve ser menor ou igual a zero. Isso significa que o ângulo entre os dois vetores deve ser maior ou igual a 90° . Dado que essa relação é verificada para todos os pontos de Γ , as soluções $\mathbf{x}(t)$ de (2.7) estão necessariamente entrando na região delimitada por Γ . Como isso é válido para todas as curvas de nível internas a Ω , conclui-se que toda solução com condição inicial em Ω converge para o ponto de equilíbrio \mathbf{x}_e .

Corolário 2.1 (Estabilidade Assintótica). Seja $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ o único ponto de equilíbrio de (2.7). Seja $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}_+$ uma função $V(\mathbf{x})$ continuamente diferenciável, definida positiva e ilimitada radialmente tal que $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$. Seja, ainda, $E = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$ e

presuma que nenhuma solução senão $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ possa permanecer indefinidamente em E . Então, a origem será globalmente assintoticamente estável.

Conclui-se, portanto, que as propriedades de convergência do sistema dinâmico em questão serão tanto mais poderosas quanto menores forem as dimensões de M . No caso de estabilidade assintótica, o maior subconjunto invariante M de E reduz-se à origem $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$.

Rodrigues et al. (2002) propuseram uma extensão do Princípio de Invariância de La Salle na qual não se exige que a derivada da função de Lyapunov seja sempre, no mínimo, semidefinida negativa. O teorema a seguir apresenta essa versão mais geral do Teorema 2.6 que permite que a derivada da função de Lyapunov ao longo das trajetórias do sistema seja positiva em algumas regiões.

Teorema 2.7 (Extensão do Princípio de Invariância de La Salle). Seja $v \in \Re$ uma constante tal que $\Omega_v = \{\mathbf{x} \in \Re^n \mid V(\mathbf{x}) < v\}$ seja um conjunto limitado positivamente invariante de (2.7). Seja, ainda, $V : \Omega_v \rightarrow \Re$ uma função $V(\mathbf{x})$ continuamente diferenciável. Defina $C = \{\mathbf{x} \in \Omega_v \mid \dot{V}(\mathbf{x}) > 0\}$ e presuma que $\sup_{\mathbf{x} \in C} V(\mathbf{x}) = l < v$. Defina, ainda, $\bar{\Omega}_l = \{\mathbf{x} \in \Omega_v \mid V(\mathbf{x}) \leq l\}$ e $E = \{\mathbf{x} \in \Omega_v \mid \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\} \cup \bar{\Omega}_l$ e seja M o maior conjunto invariante de (2.7) contido em E . Então, toda solução limitada $\mathbf{x}(t)$ iniciando-se em Ω_v converge para M quando $t \rightarrow \infty$. Além disso, se $\mathbf{x}_0 \in \bar{\Omega}_l$, então $\mathbf{x}(t) \in \bar{\Omega}_l$ para todo $t \geq t_0$ e $\mathbf{x}(t)$ tende para o maior conjunto invariante de (2.7) contido em $\bar{\Omega}_l$.

Prova (Rodrigues et al., 2002, p.53). Suponha, primeiramente, que $\mathbf{x}_0 \in \Omega_v$ e $\mathbf{x}_0 \notin \bar{\Omega}_l$. Seja $\mathbf{x}(t)$ uma solução de (2.7) iniciando-se em Ω_v . Presuma, de início, que $\mathbf{x}(t)$ permaneça fora do conjunto $\bar{\Omega}_l$ para $t \geq t_0$. Como $C \subset \bar{\Omega}_l$, verifica-se, nesse caso, $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$. Assim, $V(\mathbf{x})$ é uma função não crescente. Ainda, o conjunto-limite positivo L^+ de $\mathbf{x}(t)$ está contido no conjunto invariante Ω_v ; mais precisamente, no subconjunto compacto de Ω_v dado por $\{\mathbf{x} \in \Omega_v \mid V(\mathbf{x}) \leq V(\mathbf{x}_0)\}$. Como a função $V(\mathbf{x})$ é não crescente e

contínua, $V(\mathbf{x})$ é inferiormente limitada nesse conjunto. Logo, $V(\mathbf{x})$ possui um limite a para $t \rightarrow \infty$. Considerando-se a Definição 2.14 e o Lema 2.1, tem-se que $V(\mathbf{x})=a$ em L^+ e, uma vez que L^+ é um conjunto invariante de (2.7), $\dot{V}(\mathbf{x})=0$ em L^+ . Assim, $L^+ \subset \Omega_v - C$, donde se conclui que $\mathbf{x}(t) \rightarrow L^+ \subset M$ quando $t \rightarrow \infty$.

Admitindo-se, agora, que $\mathbf{x}_0 \in \overline{\Omega}_l$, tem-se que $V(\mathbf{x}_0) \leq l$. Afirma-se que a solução $\mathbf{x}(t)$ permanece em $\overline{\Omega}_l$ para todo $t \in [t_0, t_+)$. Para provar essa afirmação, suponha que há um instante $t^* > t_0$ em que $V[\mathbf{x}(t^*)] > l$. Existirá, então, um $s \in [t_0, t^*)$ tal que $V[\mathbf{x}(s)] = l$ e $V[\mathbf{x}(t)] > l$ para $t \in (s, t^*)$. Isso significa que existe algum $t' \in (s, t^*)$ em que se verifica $\dot{V}[\mathbf{x}(t')] > 0$, o que contradiz o fato de que $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ fora de $\overline{\Omega}_l \supset C$. Assim, $t_+ = \infty$ e a solução permanece dentro de $\overline{\Omega}_l$ para $t \geq t_0$. Portanto, o conjunto-limite positivo L^+ é não vazio e a solução aproxima-se dele quando $t \rightarrow \infty$. Ademais, L^+ é um subconjunto invariante contido em $\overline{\Omega}_l$. Logo, a solução $\mathbf{x}(t)$ aproxima-se do maior conjunto invariante contido em $\overline{\Omega}_l$ quando $t \rightarrow \infty$.

A Figura 2.2 traz uma interpretação geométrica da Extensão do Princípio de Invariância de La Salle. O Teorema 2.7 garante que todas as soluções de (2.7) com condição inicial dentro de Ω_v tendem para o maior conjunto invariante contido em E . Se, em particular, esse maior conjunto invariante estiver contido em $\overline{\Omega}_l$, então todas as soluções com condição inicial em Ω_v tendem para o maior conjunto invariante contido em $\overline{\Omega}_l$. Uma vez dentro de $\overline{\Omega}_l$, as soluções não saem desse conjunto. Duas coisas podem ocorrer dentro de $\overline{\Omega}_l$: ou as soluções tendem para o conjunto $\{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}_l \mid \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$ ou permanecem entrando e saindo do conjunto C (Rodrigues et al., 2002).

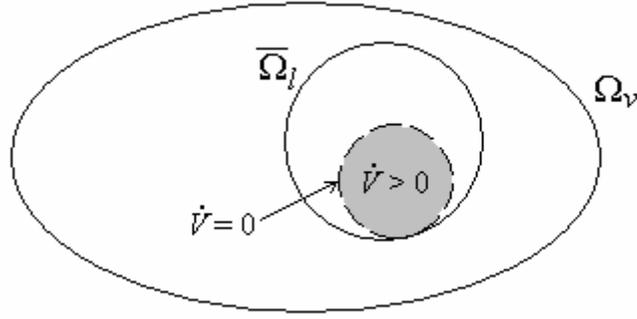


Figura 2.2. Interpretação geométrica da Extensão do Princípio de Invariância de La Salle.

O Teorema 2.8 a seguir traz a versão global da Extensão do Princípio de Invariância de La Salle:

Teorema 2.8 (Versão Global da Extensão do Princípio de Invariância de La Salle).

Seja $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função $V(\mathbf{x})$ continuamente diferenciável. Defina $C = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid \dot{V}(\mathbf{x}) > 0\}$ e presume que $\sup_{\mathbf{x} \in C} V(\mathbf{x}) = l \in \mathfrak{R}$. Defina, ainda, $\bar{\Omega}_l = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid V(\mathbf{x}) \leq l\}$ e $E = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\} \cup \bar{\Omega}_l$ e seja M o maior conjunto invariante de (2.7) contido em E . Então, toda solução limitada $\mathbf{x}(t)$ converge para M quando $t \rightarrow \infty$. Além disso, se $\mathbf{x}_0 \in \bar{\Omega}_l$, então $\mathbf{x}(t) \in \bar{\Omega}_l$ para todo $t \geq t_0$ e $\mathbf{x}(t)$ tende para o maior conjunto invariante de (2.7) contido em $\bar{\Omega}_l$.

Prova (Rodrigues et al., 2002, p.54). Suponha, primeiramente, que $\mathbf{x}_0 \notin \bar{\Omega}_l$ e presume que a solução $\mathbf{x}(t)$ de (2.7) seja limitada para $t \geq t_0$. Presumindo-se que $\mathbf{x}(t)$ permaneça fora do conjunto $\bar{\Omega}_l$ para $t \geq t_0$, verifica-se que $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ para $t \geq t_0$. Como $V(\mathbf{x})$ é uma função não crescente e inferiormente limitada, $V(\mathbf{x}) \rightarrow a \in \mathfrak{R}$ quando $t \rightarrow \infty$. O conjunto-limite positivo L^+ de $\mathbf{x}(t)$ é compacto, não vazio e invariante (Lema 2.1). Isso implica que $V(\mathbf{x}) = a$ em L^+ e, conseqüentemente, que $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ em L^+ . Assim, $L^+ \subset M$, donde se conclui que $\mathbf{x}(t) \rightarrow L^+ \subset M$ quando $t \rightarrow \infty$.

Presumindo-se, agora, que $\mathbf{x}_0 \in \overline{\Omega}_l$, tem-se que $V(\mathbf{x}_0) \leq l$. Afirma-se que a solução $\mathbf{x}(t)$ permanece em $\overline{\Omega}_l$ para todo $t \in [t_0, t_+)$. Para provar essa afirmação, suponha que há um instante $t^* > t_0$ em que $V[\mathbf{x}(t^*)] > l$. Existirá, então, um $s \in [t_0, t^*)$ tal que $V[\mathbf{x}(s)] = l$ e $V[\mathbf{x}(t)] > l$ para $t \in (s, t^*)$. Isso contradiz o fato de que $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ fora de $\overline{\Omega}_l \supset C$. Assim, tal como no teorema anterior, a solução permanece dentro de $\overline{\Omega}_l$ para $t \geq t_0$. Portanto, o conjunto-limite positivo L^+ é não vazio e a solução aproxima-se dele quando $t \rightarrow \infty$. Ademais, L^+ é um subconjunto invariante contido em $\overline{\Omega}_l$. Logo, a solução $\mathbf{x}(t)$ aproxima-se do maior conjunto invariante contido em $\overline{\Omega}_l$ quando $t \rightarrow \infty$.

Se acaso, no Teorema 2.8 acima, $V: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ for ilimitada radialmente, ou seja, $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ com $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, toda solução $\mathbf{x}(t)$ será limitada para $t \geq t_0$ e as conclusões do Teorema 2.8 serão válidas para todas as soluções.

2.3.5.2. Sistemas Não Autônomos

No caso de sistemas autônomos, o Teorema de La Salle (Teorema 2.6) mostra que a trajetória do sistema em consideração tende ao maior subconjunto invariante contido em E , onde E é o conjunto de todos os pontos de Ω que satisfazem $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$. Por outro lado, no caso do sistema não autônomo (2.5), mesmo o processo de se determinar um conjunto E pode não ser evidente, uma vez que $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ é função tanto de t como de \mathbf{x} . A situação torna-se mais clara, no entanto, quando

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq -W(\mathbf{x}) \leq 0 \tag{2.9}$$

visto que, nesse caso, o conjunto E poderá ser definido como o conjunto de pontos onde $W(\mathbf{x}) = 0$. Dessa forma, pode-se esperar que a trajetória do sistema aproxime-se de E à medida que $t \rightarrow \infty$.

O Teorema de La Salle-Yoshizawa, importante ferramenta para a análise de convergência de sistemas não autônomos, formaliza esses resultados:

Teorema 2.9 (La Salle-Yoshizawa). Seja $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ o ponto de equilíbrio de (2.5) e presuma que $f(t, \mathbf{x})$ seja localmente Lipschitz em $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ uniformemente em t . Seja $V : \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}_+$ uma função $V(t, \mathbf{x})$ continuamente diferenciável que satisfaz

- $V(t, \mathbf{x}) > 0$, i.e. $V(t, \mathbf{x})$ é definida positiva;
- $\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(t, \mathbf{x}) \leq -W(\mathbf{x}) \leq 0$;
- $V(t, \mathbf{x}) \rightarrow \infty$ com $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, i.e. $V(\mathbf{x})$ é ilimitada radialmente.

onde W é uma função contínua. Então, todas as soluções de (2.5) serão *globalmente uniformemente limitadas* e atenderão a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W[\mathbf{x}(t)] = 0. \quad (2.10)$$

Ainda, se W for definida positiva, i.e. $W(\mathbf{x}) > 0$, o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ de (2.5) será *globalmente uniformemente assintoticamente estável*.

Prova. Versões gerais podem ser encontradas em Khalil (1992), p.187, e Krstić et al. (1995), p. 492.

Funções de Lyapunov também podem ser empregadas para se avaliar a limitação das soluções do sistema não autônomo (2.5) em situações não globais.

Definição 2.16. Diz-se que uma função contínua $\alpha : [0, a) \rightarrow \mathfrak{R}_+$ pertence à *classe K* se for estritamente crescente para algum $a \in \mathfrak{R}$ e $\alpha(0) = 0$. Ela pertence à *classe K_∞* se $\alpha(r) \rightarrow \infty$ com $r \rightarrow \infty$.

Suponha que a função $V(t, \mathbf{x})$, definida em $\|\mathbf{x}\| \geq R$ (onde o valor de R pode ser elevado) e $t \geq 0$, seja continuamente diferenciável em \mathbf{x} e em t e que existam soluções únicas $\mathbf{x}(t)$ para (2.5) válidas em todo o \mathfrak{R}^n .

Definição 2.17. As soluções de (2.5) serão *uniformemente limitadas* para todo $\|\mathbf{x}\| \geq R$ e $t \geq 0$ se existirem $V(t, \mathbf{x})$ continuamente diferenciável e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{K}_\infty$ tal que

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|) \quad (2.11)$$

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0 \quad (2.12)$$

Nota-se que essa condição é menos restritiva que o Teorema de La Salle-Yoshizawa, uma vez que se requer que $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0$ para todo $\|\mathbf{x}\| \geq R$ para algum R , não em todo o \mathfrak{R}^n .

Definição 2.18. As soluções de (2.5) serão *uniformemente ultimamente limitadas* para todo $\|\mathbf{x}\| \geq R$ e $t \geq 0$ se existirem $V(t, \mathbf{x})$ continuamente diferenciável, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{K}_\infty$ e $\alpha_3 \in \mathbf{K}$ definido em $[0, \infty)$ tal que

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|) \quad (2.13)$$

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq -\alpha_3(\|\mathbf{x}\|) \quad (2.14)$$

Capítulo 3

Métodos Recursivos para o Controle de Sistemas Não Lineares

3.1. Introdução

Tal como mencionado no capítulo anterior, a maior parte dos sistemas dinâmicos reais possui interações não lineares entre as diversas variáveis que os compõem. A representação desses sistemas por meio de modelos lineares conduz, portanto, a inevitáveis discrepâncias entre o comportamento do sistema real e as soluções geradas por sua descrição matemática. Por exemplo, a linearização de um sistema não linear ao redor de um ponto de operação é válida apenas nessa região restrita. Técnicas de controle que tenham como objetivo uma atuação mais ampla sobre a resposta do sistema são inviáveis sob tal enfoque.

Os últimos anos presenciaram um desenvolvimento crescente na teoria associada ao estudo de sistemas não lineares, especialmente no campo da síntese de controladores eficientes. A partir dos anos 80, conceitos desenvolvidos a partir da geometria diferencial provaram ser ferramentas eficazes na análise e síntese de sistemas não lineares, sendo a técnica de *linearização por realimentação*, por exemplo, um método amplamente empregado no tratamento de alguns tipos de não-linearidades (cf. Isidori (1996)).

Algumas desvantagens da metodologia atrelada à geometria diferencial, no entanto, são a impossibilidade de resolução de vários tipos de sistemas não lineares e o elevado

esforço de controle despendido. A introdução de métodos recursivos de síntese de controladores a partir dos anos 90 (cf. Kanellakopoulos et al. (1992)), entretanto, resolveu vários desses problemas. A técnica de *backstepping*, descrita em detalhes por Krstić et al. (1995) é, hoje, um dos meios mais populares de tratamento de sistemas não lineares, sendo, inclusive, aplicável a vários sistemas não “linearizáveis” (Kokotović, 1992).

O *backstepping* fundamenta-se no conceito de Funções de Lyapunov de Controle (cf. Seção 3.3) e nas teorias de estabilidade e convergência de sistemas dinâmicos apresentadas no Capítulo 2 desta tese – em especial, os Teoremas de La Salle e La Salle-Yoshizawa e o Método Direto de Lyapunov. Após uma breve descrição dos aspectos mais relevantes das abordagens tradicionais de controle não linear (cf. Seção 3.2), a Seção 3.4 dedica-se a expor as características básicas do *backstepping* integrador, versão preliminar de processos de *backstepping* mais genéricos. A Seção 3.5 traz formalizações conceituais basilares. A Seção 3.6 apresenta o método de *backstepping* aplicado a um sistema genérico de realimentação estrita. As Seções 3.7 e 3.8 contemplam o caso adaptativo com exposições referentes ao *backstepping* adaptativo integrador (Seção 3.7) e ao *backstepping* adaptativo aplicado a um sistema genérico de realimentação estrita paramétrico.

3.2. Técnicas Precursoras de Controle de Sistemas Não Lineares

Muitas tentativas de introdução de abordagens sistemáticas visando a um controle eficaz de sistemas não lineares têm sido propostas nos últimos anos. Um dos primeiros e mais populares métodos voltados para o projeto de controladores para sistemas não lineares é a técnica de *linearização por realimentação*, descrita por Isidori (1996). Essa metodologia utiliza mudança de coordenadas e controle por realimentação com o objetivo de transformar um sistema dinâmico não linear em um sistema cujas dinâmicas sejam, ao menos parcialmente, lineares.

Seja o sistema não linear genérico

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}^n$ é o estado, $u \in \mathfrak{U}$ é a entrada e $y \in \mathfrak{Y}$ é a saída. As funções f , g e h são não-linearidades suaves conhecidas. Diz-se que o sistema (3.1) possui *grau relativo* ρ num ponto \mathbf{x}_0 se houver uma vizinhança $N(\mathbf{x}_0)$ ⁶ na qual se verifique

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) = \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) = \dots = \frac{\partial \psi_{\rho-1}}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) = 0\tag{3.2}$$

e

$$\frac{\partial \psi_\rho}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \neq 0\tag{3.3}$$

onde $\psi_1(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$ e $\psi_i(\mathbf{x}) = (\partial \psi_{i-1} / \partial \mathbf{x}) f(\mathbf{x})$, $i = 2, \dots, \rho$. Se acaso (3.2) e (3.3) forem válidos para todo $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}^n$, o grau relativo de (3.1) será *definido globalmente*.

Supondo que o sistema (3.1) apresente grau relativo $\rho < n$ no ponto \mathbf{x}_0 , pode-se empregar uma mudança de coordenadas e controle por realimentação para transformar (localmente) esse sistema numa conexão em cascata de um sistema linear de dimensão ρ e um sistema não linear de dimensão $n - \rho$. De fato, derivando-se ρ vezes a saída $y = h(\mathbf{x})$, tem-se:

$$y^{(\rho)} = \frac{\partial \psi_\rho}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \frac{\partial \psi_\rho}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})u\tag{3.4}$$

Como $(\partial \psi_\rho / \partial \mathbf{x})g \neq 0$ numa vizinhança de \mathbf{x}_0 , pode-se linearizar a representação entrada-saída do sistema (3.1) através de uma realimentação que cancele as não-linearidades em (3.4) (*linearização entrada-saída*):

$$u = \frac{1}{\frac{\partial \psi_\rho}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})} \left[-\frac{\partial \psi_\rho}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + v \right]\tag{3.5}$$

⁶ O conjunto de pontos onde um grau relativo pode ser definido é um subconjunto aberto e denso do conjunto aberto U onde o sistema (3.1) é definido (Isidori, 1996). Para uma definição de *conjunto denso*, cf. Isidori (1996), p. 474.

Assim, as dinâmicas de y e suas derivadas são governadas por uma cadeia de ρ integradores $y^{(\rho)} = v$. Não obstante, como o sistema original tem dimensão n , é necessário considerar, ainda, as $n - \rho$ variáveis de estado restantes. Através do uso de ferramentas de geometria diferencial, é possível (Krstić et al., 1995) encontrar $n - \rho$ funções $\psi_{\rho+1}(\mathbf{x}), \dots, \psi_n(\mathbf{x})$, com $(\partial \psi_i / \partial \mathbf{x})g = 0$, $i = \rho + 1, \dots, n$, de tal forma que a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned}
 \zeta_1 &= y = h(\mathbf{x}) = \psi_1(\mathbf{x}) \\
 \zeta_2 &= \dot{y} = \psi_2(\mathbf{x}) \\
 &\vdots \\
 \zeta_\rho &= y^{(\rho-1)} = \psi_\rho(\mathbf{x}) \\
 \zeta_{\rho+1} &= \psi_{\rho+1}(\mathbf{x}) \\
 &\vdots \\
 \zeta_n &= \psi_n(\mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

seja inversível localmente e transforme, junto com (3.5), o sistema não linear (3.1) em

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta}_1 &= \zeta_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{\zeta}_{\rho-1} &= \zeta_\rho \\
 \dot{\zeta}_\rho &= v \\
 \dot{\zeta}_{\rho+1} &= \frac{\partial \psi_{\rho+1}}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \phi_{\rho+1}(\boldsymbol{\zeta}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\zeta}_n &= \frac{\partial \psi_n}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \phi_n(\boldsymbol{\zeta}) \\
 y &= \zeta_1
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde $\boldsymbol{\zeta} = [\zeta_1, \dots, \zeta_n]^T$. A aplicação do controle (3.5) torna as variáveis de estado do subsistema não linear de (3.7), $\zeta_{\rho+1}, \dots, \zeta_n$, não observáveis a partir da saída y .

A utilização da nova entrada de controle v com a finalidade de estabilizar o subsistema linear de (3.7) não garante a estabilidade de todo o sistema, a menos que a estabilidade da porção não linear de (3.7) seja estabelecida separadamente.

Quando v é empregada para manter a saída y igual a zero para todo $t > t_0$, ou seja, quando $\zeta_1 = \dots = \zeta_\rho = 0$, as dinâmicas de $\zeta_{\rho+1}, \dots, \zeta_n$ são descritas por

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_{\rho+1} &= \phi_{\rho+1}(0, \dots, 0, \zeta_{\rho+1}, \dots, \zeta_n) \\ &\vdots \\ \dot{\zeta}_n &= \phi_n(0, \dots, 0, \zeta_{\rho+1}, \dots, \zeta_n)\end{aligned}\tag{3.8}$$

e são denominadas *dinâmicas nulas* de (3.1), pois evoluem no subconjunto do espaço de estados no qual a saída do sistema é nula. Se o equilíbrio em $\zeta_{\rho+1} = \dots = \zeta_n = 0$ das dinâmicas nulas (3.8) for assintoticamente estável, o sistema (3.1) será de *fase mínima*.

Dado que o grau relativo e as dinâmicas nulas de um sistema não podem ser alterados por meio de realimentação de saída (Kokotović & Arcak, 2001), sistemas com dinâmicas nulas instáveis (sistemas de fase não mínima) são muito mais difíceis de se controlar que sistemas de fase mínima.

Considerando-se, pois, o problema de estabilização por realimentação de um sistema em cascata genérico formado por uma parte linear e outra parte não linear oriundo de um processo de linearização entrada-saída,

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= A\zeta + Bv \\ \dot{\phi} &= f(\phi, \zeta)\end{aligned}\tag{3.9}$$

tem-se que o fato de se constatar estabilidade assintótica global de $\dot{\phi} = f(\phi, 0)$ não é suficiente para garantir estabilidade assintótica global de toda a cascata por meio de uma realimentação $v = K\zeta$ (Kokotović & Arcak, 2001). Em geral, é necessária uma realimentação tanto de ζ quanto de ϕ , ou seja, $v = K\zeta + w(\phi, \zeta)$. Kokotović e Sussman (1989) propuseram, por exemplo, o método de *passivação por realimentação*, no qual busca-se converter (3.9) numa interconexão de dois blocos passivos como a ilustrada na Figura 3.1 e encontrar, então, uma expressão para a lei de controle $v = K\zeta + w(\phi, \zeta)$ que traga estabilidade a todo o sistema. Destaca-se o fato de que um sistema constituído pela interconexão de dois blocos passivos com a configuração indicada na Figura 3.1 é passivo (Krstić et al., 1995). A noção de *passividade*, que remonta à idéia de dissipação de energia em resistores num circuito elétrico, tem sido muito utilizada com o propósito de se analisar

a estabilidade de sistemas não lineares. Sistemas passivos, tais como circuitos lineares contendo apenas resistores positivos, são estáveis (Byrnes et al., 1991).

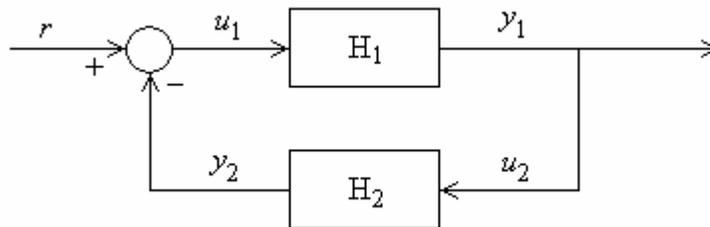


Figura 3.1. Interconexão de dois sistemas passivos (H_1 e H_2).

Apesar de sua popularidade, a abordagem ligada ao conceito de passividade é limitada a sistemas com grau relativo menor que dois (Kokotović et al., 1992). Devido à impossibilidade de se alterar o grau relativo de um sistema dinâmico através de realimentação de saída, tal restrição tem sido um obstáculo na criação de leis de controle eficazes para sistemas não lineares em geral segundo essa metodologia.

Essa limitação, no entanto, foi removida de forma muito eficiente por meio da introdução de procedimentos recursivos para a geração de leis de controle para sistemas não lineares, especialmente o *backstepping* (Kokotović et al., 1992). A idéia básica do *backstepping* é projetar uma seqüência de *sistemas virtuais* de grau relativo unitário, sendo o sistema original o último elemento dessa seqüência. Para cada sistema virtual, o grau relativo é reduzido a *um* através da seleção de uma *entrada virtual*, conseguindo-se, então, passividade com relação a uma *saída virtual*. A escolha de pares entrada-saída virtuais é flexível e o processo de estabilização faz uso de *funções de Lyapunov de controle*.

3.3. Funções de Lyapunov de Controle

A noção de *função de Lyapunov de controle*, uma extensão do conceito de função de Lyapunov introduzida por Artstein (1983) e Sontag (1983), representou uma mudança

no paradigma das teorias de estabilização vigente ao final dos anos 70 (Kokotović & Arcak, 2001), pois redirecionou o enfoque dessas teorias, até então centradas na *análise* das características de um dado sistema dinâmico, para o objetivo de se *criar* sistemas em malha fechada com propriedades de estabilidade desejáveis (veja também Parks (1966)).

Tradicionalmente, uma maneira de se estabilizar um sistema não linear é selecionar uma função de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ e então tentar encontrar uma lei de controle $u(\mathbf{x})$ que faça com que $\dot{V}(\mathbf{x})$ seja definida negativa. Supondo que o sistema apresente a configuração

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u) \quad (3.10)$$

com $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}^n$, $u \in \mathfrak{U}$ e $f(\mathbf{0}, 0) = \mathbf{0}$, objetiva-se determinar $u(\mathbf{x})$ de tal forma que o equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema em malha fechada seja globalmente assintoticamente estável. Pode-se tomar uma função $V(\mathbf{x})$ como uma candidata a função de Lyapunov e requerer que sua derivada ao longo das soluções de (3.10) atenda à desigualdade $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -W(\mathbf{x})$, onde $W(\mathbf{x})$ é uma função definida positiva, ou seja,

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, u) \leq -W(\mathbf{x}) < 0 \quad (3.11)$$

Escolhas inadequadas de $V(\mathbf{x})$ e $W(\mathbf{x})$ podem levar à não-satisfação de (3.11). Diz-se de um sistema para o qual é possível uma escolha conveniente de $V(\mathbf{x})$ e $W(\mathbf{x})$ que possui uma *função de Lyapunov de controle*.

Definição 3.1. Seja $V : \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{R}_+$ uma função $V(\mathbf{x})$ suave, definida positiva e ilimitada radialmente. $V(\mathbf{x})$ será uma *função de Lyapunov de controle* para (3.10) se

$$\inf_{u \in \mathfrak{U}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, u) \right\} < 0 \quad (3.12)$$

$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Artstein (1983) demonstra que a relação (3.12) é suficiente para assegurar a existência de uma lei de controle que satisfaça (3.11), i.e. a existência de uma função de Lyapunov de controle é equivalente à estabilizabilidade assintótica global.

A principal limitação do conceito de função de Lyapunov de controle como ferramenta de projeto consiste em não se conhecer uma função de Lyapunov de controle

adequada para a maior parte dos sistemas não lineares. A tarefa de se encontrar uma função de Lyapunov de controle apropriada pode ser tão complexa quanto a de se determinar uma lei de controle estabilizadora. Para várias classes importantes de sistemas não lineares estes dois problemas são resolvidos simultaneamente por meio da utilização do *backstepping*.

3.4. Funções de Lyapunov de Controle e *Backstepping* Integrador

A construção recursiva de funções de Lyapunov de controle através do *backstepping integrador* – uma versão preliminar dos processos de *backstepping* mais genéricos – será ilustrada por meio do sistema não linear de segunda ordem (cf. Fossen & Strand (1999))

$$\dot{x} = f(x) + \xi \quad (3.13a)$$

$$\dot{\xi} = u \quad (3.13b)$$

$$y = x \quad (3.13c)$$

onde $x \in \mathfrak{R}$, $\xi \in \mathfrak{R}$, $y \in \mathfrak{R}$ e $u \in \mathfrak{R}$. A função $f(x)$ é uma não-linearidade conhecida. Tenciona-se a regulação de $y(t)$ em zero, ou seja, deseja-se que $y(t) \rightarrow 0$ com $t \rightarrow \infty$ para todo $[x(0), \xi(0)]^T$. Obviamente, o sinal $\xi(t)$ deverá permanecer limitado. De (3.13a), o ponto de equilíbrio com $x = 0$ corresponde a $[x, \xi]^T = [0, -f(0)]^T$. O objetivo é, portanto, fazer com que esse ponto de equilíbrio seja globalmente assintoticamente estável. Como o sistema (3.13) compõe-se de duas variáveis de estado, x e ξ , o projeto compreenderá dois passos. Dessa forma, (3.13) será encarado como uma disposição em cascata de dois subsistemas de primeira ordem, cada um apresentando entrada e saída únicas. O procedimento inicia-se com o tratamento do subsistema x e prossegue com o tratamento do subsistema ξ . O subsistema ξ é um integrador que precede o subsistema x .

Introduzir-se-á uma mudança de coordenadas durante o processo recursivo dada por

$$z = \phi(x) \quad (3.14)$$

onde $z = [z_1, z_2]^T$ e $x = [x, \xi]^T$. A transformação $\phi(x): \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ será um difeomorfismo *global* se o mapeamento $\phi(x)$ for válido no \mathfrak{R}^n com $\phi(x)$ e $\phi^{-1}(z)$ continuamente diferenciáveis e *local* se a transformação inversa

$$\mathbf{x} = \phi^{-1}(\mathbf{z}) \quad (3.15)$$

existir apenas num domínio do \mathfrak{R}^n .

3.4.1. Passo 1

Inicialmente, escolhe-se a primeira variável auxiliar do processo:

$$z_1 = x - \alpha_0 \quad (3.16)$$

Como o objetivo principal do projeto é a regulação da saída $y = x$ em zero, o valor desejado para x é

$$x_d = 0 \quad (3.17)$$

Definindo-se $\alpha_0 = x_d$, tem-se que a variável z_1 corresponde ao desvio de x em relação ao valor desejado x_d . Logo, z_1 é uma *variável de erro*. Se o objetivo fosse o seguimento de algum sinal de referência $r(t)$ variante no tempo, ter-se-ia $\alpha_0 = r$.

Para o subsistema x , divisa-se a variável de estado ξ como sua *entrada de controle virtual*. Do mesmo modo como foi feito para o estado x , a variável auxiliar relativa a ξ tem a forma

$$z_2 = \xi - \alpha_1 \quad (3.18)$$

Quando $t \rightarrow \infty$, α_1 corresponderá ao valor desejado para ξ :

$$\alpha_1 = \xi_d = -f(0) \quad (3.19)$$

O subsistema x pode ser reescrito em termos das variáveis de erro:

$$\dot{z}_1 = f(x) + \alpha_1 + z_2 \quad (3.20)$$

A nova variável de estado z_2 não é utilizada neste primeiro passo, mas sua presença é importante, pois é o elo entre o subsistema z_1 (3.20) e o subsistema z_2 a ser tratado no próximo passo.

A função estabilizadora α_1 , representando o valor desejado para a entrada de controle virtual ξ , provê a realimentação necessária para o subsistema z_1 . Escolhendo-se, por exemplo,

$$\alpha_1 = -f(x) - c_1 z_1 \quad (3.21)$$

tem-se que

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2 \quad (3.22)$$

A expressão (3.21) equivale à lei de controle para o subsistema x obtida segundo a técnica de linearização por realimentação.

Uma candidata a função de Lyapunov para o subsistema z_1 é

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 \quad (3.23)$$

cuja derivada ao longo de (3.22) é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= z_1 \dot{z}_1 \\ &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde $c_1 > 0$ é um ganho de realimentação constante. O termo $z_1 z_2$, de magnitude e sinal desconhecidos, será cancelado no passo seguinte.

3.4.2. Passo 2

A dinâmica do subsistema z_2 é computada derivando-se (3.18) em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \dot{\xi} - \dot{\alpha}_1 \\ &= u - \dot{\alpha}_1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Uma candidata a função de Lyapunov para o subsistema z_2 é

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 \quad (3.26)$$

cuja derivada ao longo de (3.25) é dada por

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + z_2 \dot{z}_2 \\
&= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + z_2 \dot{z}_2 \\
&= -c_1 z_1^2 + z_2 (z_1 + \dot{z}_2) \\
&= -c_1 z_1^2 + z_2 (u - \dot{\alpha}_1 + z_1)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Como o sistema dinâmico original (3.13) é composto de apenas duas variáveis de estado, a entrada de controle real u aparece neste segundo passo. Para que se consiga estabilidade assintótica global, consoante o Método Direto de Lyapunov, é necessário que $\dot{V}_2 < 0$. Portanto, uma expressão conveniente para u é a seguinte:

$$u = \dot{\alpha}_1 - z_1 - c_2 z_2 \tag{3.28}$$

onde $c_2 > 0$ é uma constante. Dessa forma,

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 < 0 \tag{3.29}$$

$\forall z_1 \neq 0$ e $\forall z_2 \neq 0$ e V_2 é uma função de Lyapunov de controle para o sistema formado pelas equações (3.22) e (3.25) e, por extensão, para o sistema (3.13).

3.4.3. Aspectos de Implementação

Uma característica importante do método de *backstepping* é a não-utilização de diferenciadores na implementação da derivada $\dot{\alpha}_1$ presente na lei de controle (3.28) (Krstić et al., 1995); como α_1 é uma função conhecida, pode-se computar sua derivada analiticamente:

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \dot{x} = -\frac{\partial f(x)}{\partial x} \dot{x} - c_1 \dot{x} = -\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} + c_1\right)[f(x) + \xi] \tag{3.30}$$

Conseqüentemente, a expressão final para a lei de controle é dada por

$$u = -\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} + c_1\right)[f(x) + \xi] - x - c_2[\xi + f(x) + c_1 x] \tag{3.31}$$

3.4.4. Transformação de Coordenadas do *Backstepping*

A transformação de coordenadas $z = \phi(x)$ assume a forma:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \xi + f(x) + c_1 x \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

enquanto a transformação inversa $x = \phi^{-1}(z)$ é

$$\begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 - f(z_1) - c_1 z_1 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

3.4.5. Sistema Resultante

Ao final do projeto efetuado segundo o método de *backstepping*, a dinâmica do sistema em malha fechada expresso nas coordenadas (z_1, z_2) pode ser escrita como a soma de uma matriz diagonal e uma matriz anti-simétrica multiplicadas pelo novo vetor de estado. Para o sistema de segunda ordem em questão:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = - \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}}_{\text{matriz diagonal}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{anti-simétrica}}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

ou, de forma equivalente,

$$\dot{z} = -Cz + Sz \quad (3.35)$$

onde $z = [z_1, z_2]^T$, $C = \text{diag}\{c_1, c_2\} > 0$ e

$$S = -S^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

onde S atende a $z^T Sz = 0$, $\forall z$.

3.4.6. Avaliação da Estabilidade

Como $V_2 = \frac{1}{2} z^T z$ e

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= z^T (-Cz + Sz) \\ &= -z^T Cz \end{aligned} \quad (3.37)$$

o Método Direto de Lyapunov para sistemas autônomos – (3.35) é um sistema autônomo – garante a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $[z_1, z_2]^T = [0, 0]^T$. Conseqüentemente, $[x, \xi]^T = [0, -f(0)]^T$ é globalmente assintoticamente estável.

3.5. *Backstepping* Integrador

O *backstepping* integrador como ferramenta de projeto genérica baseia-se na Suposição 3.1 e no Lema 3.1 (cf. Krstić et al. (1995)) a seguir:

Suposição 3.1. Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u \quad (3.38)$$

com $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^l$ é o estado e $u \in \mathfrak{R}$ é a entrada de controle. É presumida a existência de uma lei de controle

$$u = \alpha(\mathbf{x}) \quad (3.39)$$

com $\alpha(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, continuamente diferenciável e de uma função $V : \mathfrak{R}^l \rightarrow \mathfrak{R}_+$ suave, definida positiva e ilimitada radialmente tal que

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x})] \leq -W(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (3.40)$$

$\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^l$ onde $W : \mathfrak{R}^l \rightarrow \mathfrak{R}$ é semidefinida positiva.

Essa suposição estabelece que o controle (3.39) aplicado ao sistema (3.38) assegura limitação global de $\mathbf{x}(t)$ e, por via do Teorema de La Salle-Yoshizawa (Teorema 2.9), a regulação de $W[\mathbf{x}(t)]$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W[\mathbf{x}(t)] = 0 \quad (3.41)$$

Um resultado de convergência mais forte é obtido empregando-se o Teorema de La Salle (Teorema 2.6) com $\Omega = \mathfrak{R}^l$: $\mathbf{x}(t)$ irá convergir para o maior conjunto invariante M contido em $E = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^l \mid W(\mathbf{x}) = 0\}$. Se acaso $W(\mathbf{x})$ for definida positiva, o controle (3.39) fará com que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ seja o ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável de (3.38).

Lema 3.1 (Backstepping Integrador). Seja o sistema (3.38) acrescido de um integrador:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\xi \quad (3.42a)$$

$$\dot{\xi} = u \quad (3.42b)$$

e admita que (3.42a) satisfaça a Suposição 3.1 com $\xi \in \mathfrak{R}$ como sua entrada de controle.

(i) Se $W(\mathbf{x})$ for definida positiva,

$$V_a(\mathbf{x}, \xi) = V(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}[\xi - \alpha(\mathbf{x})]^2 \quad (3.43)$$

será uma função de Lyapunov de controle para o sistema (3.42) inteiro, ou seja, haverá uma lei de controle $u = \alpha_a(\mathbf{x}, \xi)$ que fará com que $[\mathbf{x}^T, \xi]^T = [\mathbf{0}^T, 0]^T$ seja o ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável de (3.42). Uma expressão possível para u é

$$u = -c[\xi - \alpha(\mathbf{x})] + \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}}[f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\xi] - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}g(\mathbf{x}) \quad (3.44)$$

com $c > 0$.

(ii) Se $W(\mathbf{x})$ for apenas semidefinida positiva, existirá então um controle de realimentação de modo que V_a (3.43) atenda a $\dot{V}_a \leq -W_a(\mathbf{x}, \xi) \leq 0$, onde $W_a(\mathbf{x}, \xi) > 0$ sempre que $W(\mathbf{x}) > 0$ ou $\xi \neq \alpha(\mathbf{x})$. Isso garante limitação global e convergência de $[\mathbf{x}(t)^T, \xi(t)]^T$ para o maior conjunto invariante M_a contido em $E_a = \{[\mathbf{x}(t)^T, \xi(t)]^T \in \mathfrak{R}^{l+1} \mid W(\mathbf{x}) = 0, \xi = \alpha(\mathbf{x})\}$.

Prova (Krstić et al., 1995, p.34). Introduzindo-se a variável de erro

$$z = \xi - \alpha(\mathbf{x}) \quad (3.45)$$

e derivando-a em relação ao tempo, pode-se reescrever o sistema (3.42) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})[\alpha(\mathbf{x}) + z] \\ \dot{z} &= u - \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}}\{f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})[\alpha(\mathbf{x}) + z]\} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Utilizando-se (3.40), a derivada de (3.43) ao longo das soluções de (3.46) será dada por

$$\begin{aligned}
\dot{V}_a &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(f + g\alpha + gz) + z \left\{ u - \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} [f + g(\alpha + z)] \right\} \\
&= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(f + g\alpha) + z \left\{ u - \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} [f + g(\alpha + z)] + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} g \right\} \\
&\leq -W(\mathbf{x}) + z \left\{ u - \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} [f + g(\alpha + z)] + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} g \right\}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Com base no Teorema de La Salle-Yoshizawa (Teorema 2.9), qualquer escolha de u em que se verifique $\dot{V}_a \leq -W_a(\mathbf{x}, \xi) \leq 0$, com a parcela em $z = \xi - \alpha(\mathbf{x})$ de W_a definida positiva, assegura limitação global de \mathbf{x} , z e ξ e regulação de $W[\mathbf{x}(t)]$ e $z(t)$. Além disso, o Teorema de La Salle (Teorema 2.6) garante convergência de $[\mathbf{x}(t)^T, z(t)]^T$ para o maior conjunto invariante contido em $E_a = \{[\mathbf{x}(t)^T, z(t)]^T \in \mathfrak{R}^{l+1} \mid W(\mathbf{x}) = 0, z = 0\}$. A maneira mais simples de se fazer \dot{V}_a definida negativa em z é a escolha do controle (3.44). Dessa forma,

$$\dot{V}_a \leq -W(\mathbf{x}) - cz^2 = -W_a(\mathbf{x}, \xi) \leq 0 \tag{3.48}$$

Ainda, se $W(\mathbf{x})$ for definida positiva, o Teorema 2.9 garante estabilidade assintótica global de $[\mathbf{x}^T, z]^T = [\mathbf{0}^T, 0]^T$, o que, por sua vez, implica que $V_a(\mathbf{x}, \xi)$ é uma função de Lyapunov de controle e que $[\mathbf{x}^T, \xi]^T = [\mathbf{0}^T, 0]^T$ é o equilíbrio globalmente assintoticamente estável de (3.42), visto que $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Deve-se ressaltar o fato de que o principal resultado do *backstepping* tradicional não é a forma específica do controle (3.44), mas sim a possibilidade de construção de uma função de Lyapunov cuja derivada possa ser feita negativa por meio de várias leis de controle diferentes. Por conseguinte, no caso do *backstepping* integrador segundo o Lema 3.1, o projeto de um controlador estabilizador se resume ao atendimento da desigualdade

$$\dot{V}_a \leq -W(\mathbf{x}) + z \left\{ \alpha_a(\mathbf{x}, \xi) - \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} [f + g(\alpha + z)] + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} g \right\} = -W_a(\mathbf{x}, \xi) \leq 0 \tag{3.49}$$

Aplicando-se o Lema 3.1 repetidas vezes, torna-se possível o tratamento de sistemas dinâmicos da forma (3.38) precedidos de uma cadeia de integradores (Krstić et al., 1995).

Corolário 3.1. Seja o sistema (3.38), que atende à Suposição 3.1 com $\alpha(\mathbf{x}) = \alpha_0(\mathbf{x})$, acrescido de uma cadeia de k integradores:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\xi_1 \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{k-1} &= \xi_k \\ \dot{\xi}_k &= u\end{aligned}\tag{3.50}$$

Para esse sistema, aplicações seguidas do Lema 3.1 com ξ_1, \dots, ξ_k como controles virtuais resultam na função de Lyapunov

$$V_a(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_k) = V(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k [\xi_i - \alpha_{i-1}(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_{i-1})]^2\tag{3.51}$$

Qualquer escolha de controle u que resulte em $\dot{V}_a \leq -W_a(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_k) \leq 0$, com $W_a(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_k) = 0$ apenas se $W(\mathbf{x}) = 0$ e $\xi_i = \alpha_{i-1}(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_{i-1})$, $i = 1, \dots, k$, garante que $[\mathbf{x}(t)^T, \xi_1(t), \dots, \xi_k(t)]^T$ permanece limitado globalmente e converge para o maior conjunto invariante M_a contido em

$$E_a = \left\{ [\mathbf{x}(t)^T, \xi_1(t), \dots, \xi_k(t)]^T \in \mathfrak{R}^n \mid W(\mathbf{x}) = 0, \xi_i = \alpha_{i-1}(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_{i-1}), i = 1, \dots, k \right\}.$$

com $n = l + k$. Além do mais, se $W(\mathbf{x})$ for definida positiva, ou seja, se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ puder ser feito globalmente assintoticamente estável através de ξ_1 , então (3.51) será uma função de Lyapunov de controle para (3.50) e o equilíbrio $[\mathbf{x}(t)^T, \xi_1(t), \dots, \xi_k(t)]^T = [\mathbf{0}^T, 0, \dots, 0]^T$ será feito globalmente assintoticamente estável por meio de u .

Portanto, o cerne dos processos de *backstepping* (em geral) consiste em, iniciando-se com um sistema estabilizável através de uma lei de realimentação conhecida obtida por meio de uma função de Lyapunov conhecida, adicionar recursivamente integradores à entrada e projetar novas leis de realimentação estabilizadoras através de novas funções de Lyapunov.

3.6. Backstepping

Krstić et al. (1995) empregam os conceitos associados ao *backstepping* integrador para construir procedimentos de projeto sistemáticos para classes mais gerais de sistemas não lineares, tais como os sistemas de realimentação estrita.

3.6.1. Sistemas de Realimentação Estrita

Os sistemas não lineares de realimentação estrita apresentam a forma

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\xi_1 \\
 \dot{\xi}_1 &= f_1(\mathbf{x}, \xi_1) + g_1(\mathbf{x}, \xi_1)\xi_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{k-1} &= f_{k-1}(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) + g_{k-1}(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})\xi_k \\
 \dot{\xi}_k &= f_k(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_k) + g_k(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_k)u
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

onde $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}^l$ e ξ_1, \dots, ξ_k são escalares. As funções $f(\cdot)$, $g(\cdot)$, $f_i(\cdot)$ e $g_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, k$, são não-linearidades conhecidas. O subsistema \mathbf{x} atende à Suposição 3.1 com $V(\mathbf{x})$, sendo ξ_1 sua entrada de controle virtual. O processo recursivo de controle inicia-se com o subsistema

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\xi_1 \\
 \dot{\xi}_1 &= f_1(\mathbf{x}, \xi_1) + g_1(\mathbf{x}, \xi_1)\xi_2
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Se $f_1 = 0$ e $g_1 = 1$, o Lema do *Backstepping* Integrador (Lema 3.1) poderia ser aplicado diretamente em (3.53), admitindo-se ξ_2 como controle. Proceder-se-á, contudo, de maneira análoga, introduzindo-se a função de Lyapunov $V_1(\mathbf{x}, \xi_1)$ para (3.53):

$$V_1(\mathbf{x}, \xi_1) = V(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}[\xi_1 - \alpha(\mathbf{x})]^2 \tag{3.54}$$

onde $\alpha(\mathbf{x})$ é um sinal de realimentação estabilizador que satisfaz (3.40) para o subsistema \mathbf{x} . Leis de controle intermediárias – como $\alpha(\mathbf{x})$ – são denominadas *funções estabilizadoras* (como já mencionado na Seção 3.4). A determinação de uma função estabilizadora $\alpha_1(\mathbf{x}, \xi_1)$ para ξ_2 , o controle virtual em (3.53), deverá levar em conta a exigência de se ter a derivada \dot{V}_1 não positiva quando $\xi_2 = \alpha_1$:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + [\xi_1 - \alpha(\mathbf{x})] \left(\dot{\xi}_1 - \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \right) \\
&= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})[\alpha(\mathbf{x}) + \xi_1 - \alpha(\mathbf{x})]\} + \\
&\quad + [\xi_1 - \alpha(\mathbf{x})] \left\{ f_1(\mathbf{x}, \xi_1) + g_1(\mathbf{x}, \xi_1) \xi_2 - \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \xi_1] \right\} \\
&\stackrel{(3.40)}{\leq} -W(\mathbf{x}) + [\xi_1 - \alpha(\mathbf{x})] \left\{ \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) + f_1(\mathbf{x}, \xi_1) + g_1(\mathbf{x}, \xi_1) \alpha_1(\mathbf{x}, \xi_1) + \right. \\
&\quad \left. + g_1(\mathbf{x}, \xi_1) [\xi_2 - \alpha_1(\mathbf{x}, \xi_1)] - \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \xi_1] \right\} \\
&= -W(\mathbf{x}) + [\xi_1 - \alpha(\mathbf{x})] \underbrace{\left\{ \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) + f_1(\mathbf{x}, \xi_1) + g_1(\mathbf{x}, \xi_1) \alpha_1(\mathbf{x}, \xi_1) - \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \xi_1] \right\}}_{-W_1(\mathbf{x}, \xi_1)} + \\
&\quad + \underbrace{[\xi_1 - \alpha(\mathbf{x})] g_1(\mathbf{x}, \xi_1) [\xi_2 - \alpha_1(\mathbf{x}, \xi_1)]}_{\frac{\partial V_1}{\partial \xi_1}(\mathbf{x}, \xi_1)}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\dot{V}_1 \leq -W_1(\mathbf{x}, \xi_1) + \frac{\partial V_1}{\partial \xi_1}(\mathbf{x}, \xi_1) g_1(\mathbf{x}, \xi_1) [\xi_2 - \alpha_1(\mathbf{x}, \xi_1)] \quad (3.55)$$

onde $W_1(\mathbf{x}, \xi_1) > 0$ quando $W(\mathbf{x}) > 0$ ou $\xi_1 \neq \alpha(\mathbf{x})$. Se $g_1(\mathbf{x}, \xi_1) \neq 0$ para todo \mathbf{x} e ξ_1 , uma escolha possível para α_1 é

$$\alpha_1(\mathbf{x}, \xi_1) = \frac{1}{g_1(\mathbf{x}, \xi_1)} \left\{ -c_1 [\xi_1 - \alpha(\mathbf{x})] - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x}, \xi_1) + \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \xi_1] \right\} \quad (3.56)$$

com $c_1 > 0$. Dessa forma, $W_1(\mathbf{x}, \xi_1) = W(\mathbf{x}) + c_1 [\xi_1 - \alpha(\mathbf{x})]^2$. Entretanto, como já mencionado anteriormente, outras escolhas para $\alpha_1(\mathbf{x}, \xi_1)$ são possíveis, mesmo com $g_1(\mathbf{x}, \xi_1) = 0$ em alguns pontos (Krstić et al., 1995).

Terminado o processo de determinação de $\alpha_1(\mathbf{x}, \xi_1)$, o próximo passo consiste em se acrescentar em (3.53) o subsistema ξ_2 . Adotando-se uma notação mais compacta, obtém-se

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{X}}_1 &= \bar{f}_1(\mathbf{X}_1) + \bar{g}_1(\mathbf{X}_1) \xi_2 \\
\dot{\xi}_2 &= f_2(\mathbf{X}_1, \xi_2) + g_2(\mathbf{X}_1, \xi_2) \xi_3
\end{aligned} \quad (3.57)$$

onde

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1(\mathbf{X}_1) = \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\xi_1 \\ f_1(\mathbf{x}, \xi_1) \end{bmatrix}, \quad \bar{g}_1(\mathbf{X}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1(\mathbf{x}, \xi_1) \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

A estrutura de (3.57) é a mesma de (3.53). Repete-se de forma similar, portanto, o procedimento efetuado no passo anterior. Introdz-se, assim, a função de Lyapunov

$$\begin{aligned} V_2(\mathbf{X}_1, \xi_2) &= V_1(\mathbf{X}_1) + \frac{1}{2} [\xi_2 - \alpha_1(\mathbf{X}_1)]^2 \\ &= V(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 [\xi_i - \alpha_{i-1}(\mathbf{X}_{i-1})]^2 \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde, por conveniência, faz-se $\mathbf{X}_0 = \mathbf{x}$ e $\alpha_0(\mathbf{X}_0) = \alpha(\mathbf{x})$. A função estabilizadora $\alpha_2(\mathbf{X}_2)$, com $\mathbf{X}_2 = [\mathbf{X}_1^T, \xi_2]^T$, para o controle virtual ξ_3 é então determinada de tal forma que se verifique

$$\dot{V}_2 \leq -W_2(\mathbf{X}_1, \xi_2) + \frac{\partial V_2}{\partial \xi_2}(\mathbf{X}_1, \xi_2) g_2(\mathbf{X}_1, \xi_2) [\xi_3 - \alpha_2(\mathbf{X}_2)] \quad (3.60)$$

com $W_2(\mathbf{X}_1, \xi_2) > 0$ quando $W_1(\mathbf{x}, \xi_1) > 0$ ou $\xi_2 \neq \alpha_1(\mathbf{X}_1)$.

O procedimento recursivo será concluído no passo k , quando todo o sistema (3.52) será estabilizado por meio do controle real u . Na notação compacta adotada, o sistema (3.52) é reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_{k-1} &= \bar{f}_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1}) + \bar{g}_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1})\xi_k \\ \dot{\xi}_k &= f_k(\mathbf{X}_{k-1}, \xi_k) + g_k(\mathbf{X}_{k-1}, \xi_k)u \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{k-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{k-2} \\ \xi_{k-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1}) = \begin{bmatrix} \bar{f}_{k-2}(\mathbf{X}_{k-2}) + \bar{g}_{k-2}(\mathbf{X}_{k-2})\xi_{k-1} \\ f_{k-1}(\mathbf{X}_{k-2}, \xi_{k-1}) \end{bmatrix}, \\ \bar{g}_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ g_{k-1}(\mathbf{X}_{k-2}, \xi_{k-1}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.62)$$

As expressões (3.61) e (3.62) possuem a mesma conformação de (3.57) e (3.58). Logo, a função de Lyapunov para (3.61) terá a seguinte configuração:

$$\begin{aligned} V_k(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_k) &= V_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1}) + \frac{1}{2} [\xi_k - \alpha_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1})]^2 \\ &= V(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k [\xi_i - \alpha_{i-1}(\mathbf{X}_{i-1})]^2 \end{aligned} \quad (3.63)$$

Uma observação atenta da equação (3.63) leva à conclusão de que as funções estabilizadoras $\alpha_i(\mathbf{X}_i)$ atuam como ferramentas para se construir uma função de Lyapunov adequada para o sistema (3.52).

Uma escolha apropriada para o controle u produz $\dot{V}_k \leq -W_k \leq 0$, com $W_k > 0$ quando $W_{k-1} > 0$ ou $\xi_k \neq \alpha_{k-1}$:

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &= \frac{\partial V_{k-1}}{\partial \mathbf{X}_{k-1}} \dot{\mathbf{X}}_{k-1} + [\xi_k - \alpha_{k-1}] \left(\dot{\xi}_k - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \mathbf{X}_{k-1}} \dot{\mathbf{X}}_{k-1} \right) \\ &\leq -W_{k-1}(\mathbf{X}_{k-2}, \xi_{k-1}) + \frac{\partial V_{k-1}}{\partial \xi_{k-1}} g_{k-1} (\xi_k - \alpha_{k-1}) + (\xi_k - \alpha_{k-1}) \left[f_k + g_k u - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \mathbf{X}_{k-1}} (\bar{f}_{k-1} + \bar{g}_{k-1} \xi_k) \right] \\ &= -W_{k-1}(\mathbf{X}_{k-2}, \xi_{k-1}) + (\xi_k - \alpha_{k-1}) \left[\frac{\partial V_{k-1}}{\partial \xi_{k-1}} g_{k-1} + f_k + g_k u - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \mathbf{X}_{k-1}} (\bar{f}_{k-1} + \bar{g}_{k-1} \xi_k) \right] \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\dot{V}_k \leq -W_k(\mathbf{X}_{k-1}, \xi_k) \leq 0 \quad (3.64)$$

Caso a condição de não-singularidade

$$g_k(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_k) \neq 0 \quad (3.65)$$

$\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^l$ e $\forall \xi_i \in \mathfrak{R}$, com $i = 1, \dots, k$, seja satisfeita, a escolha mais simples para o controle u é expressa por

$$u = \frac{1}{g_k} \left[-c_k (\xi_k - \alpha_{k-1}) - \frac{\partial V_{k-1}}{\partial \xi_{k-1}} g_{k-1} - f_k + \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \mathbf{X}_{k-1}} (\bar{f}_{k-1} + \bar{g}_{k-1} \xi_k) \right] \quad (3.66)$$

com $c_k > 0$. Assim, $W_k = W_{k-1} + c_k (\xi_k - \alpha_{k-1})^2$. Deve-se reiterar o fato de que esta conformação para u não é única, sendo possível o emprego de outras opções.

Krstić et al. (1995) definem procedimentos de projeto para outras classes de sistemas não lineares, como os de *realimentação pura* e os de *realimentação estrita em bloco*. Este trabalho limita-se aos sistemas de realimentação estrita.

3.7. Backstepping Adaptativo Integrador

O *backstepping adaptativo integrador* surge com a introdução de termos com incertezas paramétricas nas expressões das equações que compõem o sistema em estudo e, como ferramenta de projeto genérica, baseia-se na Suposição 3.2 e no Lema 3.2 (cf. Krstić et al. (1995)) a seguir:

Suposição 3.2. Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\theta}^T F(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u \quad (3.67)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^l$ é o estado, $\boldsymbol{\theta} \in \mathfrak{R}^p$ é o vetor de parâmetros e $u \in \mathfrak{R}$ é a entrada de controle. É presumida a existência de um controlador adaptativo

$$\begin{aligned} u &= \alpha(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= T(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \end{aligned} \quad (3.68)$$

onde $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathfrak{R}^p$ é o vetor de estimativas paramétricas, e de uma função $V(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}): \mathfrak{R}^l \times \mathfrak{R}^p \rightarrow \mathfrak{R}_+$ suave, definida positiva e ilimitada radialmente tal que

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} [f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\theta}^T F(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})] + \frac{\partial V}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} T(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \leq -W(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \leq 0 \quad (3.69)$$

$\forall (\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \in \mathfrak{R}^l \times \mathfrak{R}^p$ onde $W: \mathfrak{R}^l \times \mathfrak{R}^p \rightarrow \mathfrak{R}_+$ é semidefinida positiva.

Essa suposição estabelece que o controle (3.68) aplicado ao sistema (3.67) assegura limitação global de $\mathbf{x}(t)$ e de $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ e, por via do Teorema de La Salle-Yoshizawa (Teorema 2.9), a regulação de $W[\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)]$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W[\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)] = 0 \quad (3.70)$$

Lema 3.2 (Backstepping Adaptativo Integrador). Seja o sistema (3.67) acrescido de um integrador:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\theta}^T F(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\xi \\ \dot{\xi} &= u \end{aligned} \quad (3.71)$$

onde $\xi \in \mathfrak{R}$. Considere, para esse sistema, o controlador

$$\begin{aligned}
u &= -c[\xi - \alpha(x, \hat{\theta})] + \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, \hat{\theta}) \left[f(x) + \hat{\theta}^T F(x) + g(x)\xi \right] + \\
&\quad + \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{\theta}} T(x, \hat{\theta}) - \frac{\partial V}{\partial x}(x, \hat{\theta}) g(x) \\
\dot{\hat{\theta}} &= T(x, \hat{\theta}) \\
\dot{\xi} &= -\Gamma \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, \hat{\theta}) F(x) \right]^T [\xi - \alpha(x, \hat{\theta})]
\end{aligned} \tag{3.72}$$

onde $\hat{\theta}$ é uma nova estimativa para θ e $\Gamma = \Gamma^T > 0$ é uma matriz de ganhos. Conforme a Suposição 3.2, o controlador (3.72) garante limitação global de $x(t)$, $\xi(t)$, $\hat{\theta}(t)$ e $\dot{\hat{\theta}}(t)$ e regulação de $W[x(t), \hat{\theta}(t)]$ e $\xi(t) - \alpha[x(t), \hat{\theta}(t)]$. Tais propriedades podem ser estabelecidas com a função de Lyapunov

$$V_a(x, \xi, \hat{\theta}, \dot{\hat{\theta}}) = V(x, \hat{\theta}) + \frac{1}{2} [\xi - \alpha(x, \hat{\theta})]^2 + \frac{1}{2} (\theta - \hat{\theta})^T \Gamma^{-1} (\theta - \hat{\theta}) \tag{3.73}$$

Prova (Krstić et al., 1995, p.97). Com o auxílio da variável de erro $z = \xi - \alpha(x, \hat{\theta})$, as equações do sistema (3.71) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + \theta^T F(x) + g(x) [\alpha(x, \hat{\theta}) + z] \\
\dot{z} &= u - \frac{\partial \alpha}{\partial x} \{ f(x) + \theta^T F(x) + g(x) [\alpha(x, \hat{\theta}) + z] \} - \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{\theta}} T(x, \hat{\theta})
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Ressalta-se que a lei de atualização $\dot{\hat{\theta}} = T(x, \hat{\theta})$ foi introduzida em (3.74) em substituição à derivada de $\hat{\theta}$. Derivando-se a função de Lyapunov (3.73) ao longo de (3.74) com a aplicação de (3.69), chega-se a

$$\begin{aligned}
\dot{V}_a &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} (f + \boldsymbol{\theta}^T F + g\alpha + gz) + \frac{\partial V}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} T + \\
&\quad + z \left\{ u - \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} [f + \boldsymbol{\theta}^T F + g(\alpha + z)] - \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} T \right\} - (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \\
&= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} (f + \boldsymbol{\theta}^T F + g\alpha) + \frac{\partial V}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} T + \\
&\quad + z \left\{ u - \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} [f + \boldsymbol{\theta}^T F + g(\alpha + z)] - \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} T + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} g \right\} - (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \\
&\leq -W(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + z \left\{ u - \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} [f + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T F + g(\alpha + z)] - \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} T + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} g \right\} - \\
&\quad - (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} F z + \Gamma^{-1} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \right)
\end{aligned} \tag{3.75}$$

O termo em $(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})$ é eliminado com a introdução da lei de atualização paramétrica

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\Gamma \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} F \right)^T z \tag{3.76}$$

e a lei de controle u em (3.72) é utilizada para fazer com que o fator entre chaves que multiplica z em (3.75) seja igual a $-cz$:

$$u = -cz + \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} [f + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T F + g(\alpha + z)] + \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} T - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} g \tag{3.77}$$

o que resulta na derivada de V_a ser não positiva:

$$\dot{V}_a \leq -W(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) - cz^2 \leq 0 \tag{3.78}$$

Conclui-se, portanto, que $V(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e z são limitados. Pela Suposição 3.2, isso significa que $\mathbf{x}(t)$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ são limitados. Ainda, $\xi = z + \alpha(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ e u são limitados. Pelo Teorema 2.9, a limitação de todos os sinais aliada à equação (3.78) comprova a regulação de $W[\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)]$ e de $z(t)$.

3.8. Backstepping Adaptativo

Analogamente ao verificado no *backstepping* não adaptativo, os conceitos associados ao *backstepping* adaptativo integrador podem ser empregados para construir

procedimentos de projeto sistemáticos para classes mais gerais de sistemas não lineares com incertezas paramétricas, tais como os sistemas de realimentação estrita paramétricos.

3.8.1. Sistemas de Realimentação Estrita Paramétricos

Os sistemas não lineares de realimentação estrita paramétricos apresentam a forma⁷

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= g_1(x_1, t)x_2 + \boldsymbol{\theta}^T F_1(x_1, t) + f_1(x_1, t) \\
 \dot{x}_2 &= g_2(x_1, x_2, t)x_3 + \boldsymbol{\theta}^T F_2(x_1, x_2, t) + f_2(x_1, x_2, t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_i &= g_i(x_1, \dots, x_i, t)x_{i+1} + \boldsymbol{\theta}^T F_i(x_1, \dots, x_i, t) + f_i(x_1, \dots, x_i, t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= g(x)u + \boldsymbol{\theta}^T F_n(x, t) + f_n(x, t)
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

onde $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathfrak{R}^n$ é o estado e $u \in \mathfrak{R}$ é a entrada. As funções $F_i(\cdot)$, $f_i(\cdot)$ e $g_i(\cdot) \neq 0$, com $i = 1, \dots, n$, são não-linearidades suaves conhecidas. $\boldsymbol{\theta} \in \mathfrak{R}^p$ é o vetor de parâmetros constantes desconhecidos. Supõe-se que $y = x_1 \in \mathfrak{R}$ seja a saída do sistema.

Objetiva-se que y siga assintoticamente a referência y_r , em que y_r é a saída (i.e. $y_r = x_{r1}(t)$) do sistema de referência

$$\begin{cases} \dot{x}_{ri} = f_{ri}(\mathbf{x}_r, t), 1 \leq i \leq m, n \leq m \\ y_r = x_{r1}(t) \end{cases} \tag{3.80}$$

onde $\mathbf{x}_r = [x_{r1}, \dots, x_{rm}]^T \in \mathfrak{R}^m$ é o estado, y_r é a saída e $f_{ri}(\cdot)$, com $i = 1, \dots, m$, são não-linearidades suaves conhecidas, ou seja, deseja-se que o controlador adaptativo para o sistema (3.79) garanta estabilidade global e

$$\|y(t) - y_r(t)\| \rightarrow 0 \tag{3.81}$$

quando $t \rightarrow \infty$.

⁷ O sistema (3.79) é uma extensão do sistema (3.71), com $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^l$ escalar, ou seja, $l = 1$ e, aqui, $\mathbf{x} = x_1$.

O processo recursivo de controle inicia-se com o tratamento do subsistema

$$\dot{x}_1 = g_1(x_1, t)x_2 + \boldsymbol{\theta}^T F_1(x_1, t) + f_1(x_1, t) \quad (3.82)$$

por meio da definição da primeira variável de erro,

$$z_1 = x_1 - x_{r1} \quad (3.83)$$

cuja derivada é dada por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_{r1} \\ &= g_1(x_2 - x_{r2}) + \boldsymbol{\theta}^T F_1 + f_1 - f_{r1} + g_1 x_{r2} \\ &= g_1 z_2 + g_1 \alpha_1 + \boldsymbol{\theta}^T F_{1s} + f_{1s} \end{aligned} \quad (3.84)$$

onde $z_2 = x_2 - x_{r2} - \alpha_1$, $F_{1s} = F_1$, $f_{1s} = f_1 - f_{r1} + g_1 x_{r2}$ e α_1 é um sinal de realimentação estabilizador que será definido a seguir:

$$\alpha_1 = \frac{1}{g_1} \left(-c_1 z_1 - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1^T F_{1s} - f_{1s} \right) \quad (3.85)$$

onde $c_1 > 0$ é uma constante de projeto e $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ é um vetor com as estimativas paramétricas deste primeiro passo. Ressalta-se que o processo de determinação de α_1 segue a diretriz de se fazer com que a derivada da função de Lyapunov deste passo resulte negativa quando $z_2 = \alpha_1$. Substituindo (3.85) em (3.84) obtém-se

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + g_1 z_2 + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1)^T F_{1s} \quad (3.86)$$

O projeto da lei de atualização paramétrica para $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ é determinado com o auxílio da função de Lyapunov deste passo, que possui a seguinte conformação:

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1)^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1) \quad (3.87)$$

onde $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}^T > 0$ é uma matriz de ganhos. A derivada de V_1 ao longo de (3.86) é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= z_1 \dot{z}_1 - (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1)^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_1 \\ &= g_1 z_1 z_2 - c_1 z_1^2 + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1)^T \left(F_{1s} z_1 - \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_1 \right) \end{aligned} \quad (3.88)$$

A última parcela da expressão de \dot{V}_1 é cancelada com a lei de atualização que segue:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_1 = \boldsymbol{\Gamma} F_{1s} z_1 \quad (3.89)$$

Dessa forma, tem-se que

$$\dot{V}_1 = g_1 z_1 z_2 - c_1 z_1^2 \quad (3.90)$$

A fim de que se consiga estabilidade global ao final do processo, o termo $g_1 z_1 z_2$ será cancelado no passo seguinte.

Os vários subsistemas de (3.79) são tratados nos $n-2$ passos intermediários que compõem o processo de *backstepping* adaptativo. A metodologia de projeto do i -ésimo passo, onde $i = 2, \dots, n-1$, repete o mesmo procedimento efetuado no primeiro passo descrito anteriormente, iniciando-se pela definição da variável de erro

$$z_i = x_i - x_{r_i} - \alpha_{i-1} \quad (3.91)$$

cuja derivada, após um pequeno algebrismo, pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{r_i} - \dot{\alpha}_{i-1} \\ &= g_i z_{i+1} + \theta^T F_{is} + f_{is} \end{aligned} \quad (3.92)$$

onde $z_{i+1} = x_{i+1} - x_{r(i+1)} - \alpha_i$,

$$\begin{aligned} F_{is} &= F_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} F_k \\ f_{is} &= f_i - f_{r_i} + g_i x_{r(i+1)} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} (f_k + g_k x_{k+1}) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}_k} \Gamma F_{ks} z_k - \sum_{k=1}^m \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_{rk}} f_{rk} - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.93)$$

e α_i é a função estabilizadora associada a x_{i+1} , definida como segue:

$$\alpha_i = \frac{1}{g_i} \left(-c_i z_i - g_{i-1} z_{i-1} - \hat{\theta}_i^T F_{is} - f_{is} \right) \quad (3.94)$$

onde $c_i > 0$ é um escalar constante e $\hat{\theta}_i$ é o vetor com as estimativas paramétricas do i -ésimo passo. A determinação de α_i e da lei de atualização paramétrica $\dot{\hat{\theta}}_i$ objetiva fazer com que a derivada da função de Lyapunov deste passo,

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{1}{2} (\theta - \hat{\theta}_i)^T \Gamma^{-1} (\theta - \hat{\theta}_i) \quad (3.95)$$

resulte negativa quando $z_{i+1} = \alpha_i$. Derivando-se, portanto, (3.95) ao longo de (3.92) chega-se a

$$\begin{aligned}\dot{V}_i &= \dot{V}_{i-1} + z_i \dot{z}_i - (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_i)^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_i \\ &= z_i (g_{i-1} z_{i-1} + g_i z_{i+1} + g_i \alpha_i + \boldsymbol{\theta}^T F_{1s} + f_{is}) - \sum_{k=1}^{i-1} c_k z_k^2 - (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_i)^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_i\end{aligned}\quad (3.96)$$

Substituindo (3.94) em (3.92) e (3.96) chega-se, respectivamente, a

$$\dot{z}_i = -c_i z_i - g_{i-1} z_{i-1} + g_i z_{i+1} + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_i)^T F_{is} \quad (3.97)$$

e

$$\dot{V}_i = -\sum_{k=1}^{i-1} c_k z_k^2 + g_i z_i z_{i+1} + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_i)^T (F_{is} z_i - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_i) \quad (3.98)$$

O termo em $(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_i)$ da expressão de \dot{V}_i será eliminado com a lei de atualização que segue:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_i = \Gamma F_{is} z_i \quad (3.99)$$

Portanto,

$$\dot{V}_i = -\sum_{k=1}^{i-1} c_k z_k^2 + g_i z_i z_{i+1} \quad (3.100)$$

A parcela $g_i z_i z_{i+1}$ será cancelada no passo subsequente.

O procedimento recursivo será concluído no passo n , quando todo o sistema (3.79) será estabilizado por meio do controle real u , que aparece, por fim, na derivada da variável de erro $z_n = x_n - x_m - \alpha_{n-1}$:

$$\begin{aligned}\dot{z}_n &= \dot{x}_n - \dot{x}_m - \dot{\alpha}_{n-1} \\ &= g_n u + \boldsymbol{\theta}^T F_{ns} + f_{ns}\end{aligned}\quad (3.101)$$

onde

$$\begin{aligned}F_{ns} &= F_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} F_k \\ f_{ns} &= f_n - f_m - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} (f_k + g_k x_{k+1}) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}_k} \Gamma F_{ks} z_k - \sum_{k=1}^m \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_{rk}} f_{rk} - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial t}\end{aligned}\quad (3.102)$$

A lei de controle u e a lei de atualização paramétrica para $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ são determinadas de forma a fazer com que a derivada da função de Lyapunov do sistema completo,

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} z_n^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_n)^T \Gamma^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_n) \quad (3.103)$$

seja negativa. Derivando-se, portanto, (3.103) ao longo de (3.101) chega-se a

$$\begin{aligned}\dot{V}_n &= \dot{V}_{n-1} + z_n \dot{z}_n - (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_n)^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_n \\ &= z_n (g_{n-1} z_{n-1} + g_n u + \boldsymbol{\theta}^T F_{ns} + f_{ns}) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k z_k^2 - (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_n)^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_n\end{aligned}\quad (3.104)$$

A lei de controle u tem a seguinte configuração:

$$u = \frac{1}{g_n} (-c_n z_n - g_{n-1} z_{n-1} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_n^T F_{ns} - f_{ns}) \quad (3.105)$$

A substituição de (3.105) em (3.101) e (3.104) resulta, respectivamente, em

$$\dot{z}_n = -c_n z_n - g_{n-1} z_{n-1} + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_n)^T F_{ns} \quad (3.106)$$

e

$$\dot{V}_n = -\sum_{k=1}^n c_k z_k^2 + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_n)^T (F_{ns} z_n - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_n) \quad (3.107)$$

A lei de atualização paramétrica deste passo final é dada por

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_n = \Gamma F_{ns} z_n \quad (3.108)$$

o que conduz, finalmente, a

$$\dot{V}_n = -\sum_{k=1}^n c_k z_k^2 \quad (3.109)$$

A equação (3.106) aliada aos subsistemas (3.86) e (3.97) compõem o sistema completo em função das variáveis de erros:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -c_1 z_1 + g_1 z_2 + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1)^T F_1 \\ &\vdots \\ \dot{z}_i &= -c_i z_i - g_{i-1} z_{i-1} + g_i z_{i+1} + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_i)^T F_{is} \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= -c_n z_n - g_{n-1} z_{n-1} + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_n)^T F_{ns}\end{aligned}\quad (3.110)$$

onde $z_i = x_i - x_{ri} - \alpha_{i-1}$, com $i = 1, \dots, n$ e $\alpha_0 = 0$. As leis de atualização paramétricas são as seguintes:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_i = \Gamma F_{is} z_i \quad (3.111)$$

com $i = 1, \dots, n$.

Teorema 3.1. O sistema em malha fechada composto pelo sistema (3.79), pelo modelo de referência (3.80), pelo controlador (3.105) e pelas leis de atualização (3.111) possui um ponto de equilíbrio globalmente uniformemente estável em $z = [z_1, \dots, z_n]^T = \mathbf{0}$, o que garante limitação global do estado $x = [x_1, \dots, x_n]^T$, do controle u e das estimativas paramétricas $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n]^T$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \mathbf{0}$, ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - y_r(t)] = 0$.

Prova. As equações em termos das variáveis de erro (3.110) correspondem ao sistema em malha fechada. A derivada da função de Lyapunov (3.103) ao longo das equações de (3.110) é (3.109), o que prova que o equilíbrio $z = \mathbf{0}$ é globalmente uniformemente estável. Ainda, as expressões (3.103) e (3.109) permitem concluir que $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n$ são limitados. Como $z_1 = x_1 - x_{r1}$ e x_{r1} é limitado, conclui-se que x_1 também é limitado. A limitação de x_i , com $i = 2, \dots, n$, segue da limitação de α_{i-1} , com $i = 2, \dots, n$ (definido em (3.94)) e de x_{r_i} e do fato de que $x_i = z_i + x_{r_i} + \alpha_{i-1}$, com $i = 2, \dots, n$. De (3.105), chega-se à conclusão de que o sinal de controle u também é limitado.

Pelo Teorema de La Salle-Yoshizawa (Teorema 2.9), estabelece-se, ainda, que todas as soluções de (3.110) convergem para $z = \mathbf{0}$ quando $t \rightarrow \infty$. De (3.83), conclui-se que $\|y(t) - y_r(t)\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Krstić et al. (1995) definem procedimentos de projeto para outras classes de sistemas não lineares com incertezas paramétricas, tais como os *sistemas de realimentação estrita em bloco paramétricos*. Esta tese limita-se aos sistemas de realimentação estrita paramétricos.

Como descrito neste capítulo, a síntese de controladores através do *backstepping* e do *backstepping* adaptativo sustenta-se na premissa de que a derivada da função de Lyapunov de controle do sistema é, no mínimo, semidefinida negativa de modo que sejam garantidas estabilidade do sistema resultante em malha fechada e limitação de seus sinais

constituintes. De fato, a cada passo é introduzida uma candidata a função de Lyapunov intermediária e escolhida uma função estabilizadora (e, no caso adaptativo, uma lei de atualização paramétrica) de tal forma que a derivada dessa função-candidata resulte (semi)definida negativa. A função de Lyapunov de controle corresponde à soma das funções de Lyapunov intermediárias. Como consequência, chega-se, ao final do processo de *backstepping*, a um sistema de erros assintoticamente estável na origem. Os objetivos de estabilização e seguimento são, em vista disso, satisfatoriamente atingidos.

Capítulo 4

Técnicas de Controle Inteligente Aplicadas ao Controle de Sistemas Não Lineares

4.1. Introdução

A idéia de *controle inteligente* foi originalmente proposta por Fu (1971), que a definiu como uma “forma de se gerar ações de controle através do emprego de aspectos de inteligência artificial, pesquisa operacional e sistemas de controle automático” (Tamariz, 2005). No universo do controle inteligente, as estratégias de controle são definidas de modo a se alcançar e a se manter o nível desejado de desempenho da resposta do sistema em malha fechada na presença de, por exemplo, não-linearidades, incertezas, complexidade computacional, não-estacionariedade, etc. Denominam-se *sistemas de controle inteligente* os sistemas de controle capazes de lidar de maneira eficaz com tais dificuldades por meio do emprego de técnicas de inteligência artificial, tais como: redes neurais, lógica nebulosa, sistemas especialistas, computação evolutiva, etc. em combinação com métodos de controle tradicionais (Serra, 2005).

Nesta tese, são exploradas duas dessas combinações, a saber: *backstepping* aliado a redes neurais e *backstepping* aliado a algoritmos genéticos. No primeiro caso, é proposta uma metodologia de controle de sistemas não lineares com incertezas com múltiplas entradas e múltiplas saídas; no segundo, propõe-se uma modificação ao *backstepping*

clássico de Krstić et al. (1995) de forma a se conseguir respostas de alto desempenho em projetos de controle não linear com e sem incertezas.

As seções a seguir dedicam-se a estruturar o contexto de ambas as propostas, apresentando arrazoados acerca da utilização de redes neurais em projetos de controle adaptativo não linear (em especial, nos que seguem a filosofia do *backstepping* – Seção 4.2) e do emprego de algoritmos genéticos como ferramenta de otimização em sistemas de controle não linear (novamente, com ênfase na metodologia de *backstepping* – Seção 4.3).

4.2. Redes Neurais para Controle de Sistemas Dinâmicos

4.2.1. Redes Neurais Artificiais

Redes neurais artificiais podem ser definidas como sistemas de processamento de informação formados pela interconexão maciça de unidades simples de processamento, denominadas *neurônios artificiais*. Os neurônios artificiais recebem essa denominação porque foram originados a partir de um modelo matemático de um neurônio biológico. Uma rede neural artificial (doravante designada apenas por *rede neural*) encerra uma propensão natural à acumulação de informações previamente a ela disponibilizadas e por ela apreendidas, havendo a possibilidade de utilização futura dessas informações. Assemelha-se ao cérebro em dois aspectos, a saber (Haykin, 1999):

1. O conhecimento é adquirido pela rede, a partir de dados amostrados, através de um processo de aprendizagem;
2. As conexões entre neurônios, conhecidas como *pesos sinápticos*, são utilizadas na acumulação do conhecimento adquirido.

O poder de uma rede neural provém de sua estrutura de processamento paralela e distribuída e de sua habilidade de aprender – i.e. capacidade de generalização⁸. Tais características fazem com que seja possível a resolução de problemas complexos via redes neurais.

Uma rede neural estruturada na interconexão de neurônios não lineares é, ela própria, não linear; não-linearidade esta de tal forma que se “distribui” pela rede. Trata-se de uma propriedade importante, particularmente se o sistema físico subjacente, responsável pela geração do sinal de entrada, é inerentemente não linear.

Embora seja teoricamente possível projetar uma rede neural a partir da definição do papel que ela deve desempenhar apenas por meio da combinação dos efeitos individuais de todos os neurônios, uma rede neural normalmente se adapta para atingir a funcionalidade desejada com base em uma ou mais estratégias de aprendizado que atuam junto a parâmetros configuráveis da rede. É fundamental, portanto, para que se consiga resultados satisfatórios, que a rede neural possua meios de interagir com o mundo exterior.

Por exemplo, um paradigma popular de aprendizado, denominado *aprendizado supervisionado*, envolve a modificação dos pesos sinápticos de uma rede neural a partir da aplicação de um conjunto de dados de treinamento ou de exemplo. Cada exemplo constitui-se de um sinal de entrada e uma saída associada desejada. Cada passo do processo de aprendizado caracteriza-se pela apresentação à rede de um dos exemplos – selecionado de maneira aleatória – e a decorrente modificação dos seus pesos sinápticos (parâmetros livres) de tal forma que se minimize a diferença entre a resposta desejada e a resposta fornecida pela rede de acordo com algum critério estatístico que se julgue conveniente. O treinamento conforme a metodologia de aprendizado supervisionado compreende a repetição deste processo para os vários exemplos do conjunto até que a rede neural atinja um estado estacionário no qual não haja mais mudanças significativas nos pesos sinápticos. Logo, a rede neural aprende, por condicionamento, a construir um *mapeamento entrada-*

⁸ Entende-se *generalização* como a capacidade de produção de saídas tidas como apropriadas quando a rede é submetida a entradas inexistentes durante o processo de aprendizagem.

saída baseado nos dados de treinamento disponíveis. Outra abordagem de aprendizado é o *aprendizado não supervisionado*, em que apenas os padrões de entrada estão disponíveis para a rede.

Uma outra maneira – complementar à apresentada no parágrafo anterior – de se qualificar as formas de aprendizado em redes neurais é sua classificação em *aprendizado off-line* e *aprendizado on-line*. No ambiente de controle de sistemas, a abordagem *off-line* é aquela na qual o ajuste dos pesos sinápticos da rede (que pode estar sendo usada, por exemplo, para aproximar não-linearidades do sistema) ocorre em etapa separada ao processo de controle da planta. Já nos métodos de aprendizado *on-line*, procede-se ao ajuste dos pesos paralela e simultaneamente ao processo de controle da planta. As garantias de estabilidade em malha fechada e convergência às soluções de interesse são conseguidas através da incorporação das hipóteses dos teoremas do Capítulo 2 (atendimento do Método Direto de Lyapunov, por exemplo) pela estratégia de controle adotada. Os processos de treinamento das redes neurais empregados nesta tese seguem esta última abordagem.

Maiores detalhes acerca de processos de aprendizado em redes neurais podem ser encontrados em Haykin (1999).

4.2.1.1. Modelo de Neurônio

O *neurônio* é a unidade de processamento de informação básica de uma rede neural. O diagrama da Figura 4.1 ilustra o modelo de um neurônio; três elementos podem ser identificados (Haykin, 1999):

1. Um conjunto de *sinapses* ou *conexões*, cada qual caracterizada por um *peso*. Especificamente, um sinal x_j na entrada da sinapse j conectada ao neurônio k é multiplicado por um peso sináptico w_{kj} . É importante destacar a notação utilizada no subscrito do peso sináptico. O primeiro índice refere-se ao neurônio em questão

- e o segundo, ao terminal de entrada relacionado àquele peso. O peso sináptico de um neurônio artificial pode tomar valores tanto positivos quanto negativos;
2. Um *somador* que executa a soma dos sinais de entrada ponderados pelos pesos sinápticos correspondentes a cada sinal – faz-se, pois, uma *combinação linear* dos dados de entrada;
 3. Uma *função de ativação* que limita a amplitude da saída do neurônio. Geralmente, a função de ativação de um neurônio possui formato sigmoidal (logo, não linear).

Em termos matemáticos, descreve-se um neurônio k através do seguinte par de equações: $u_k = b_k + \sum_{j=1}^m w_{kj} x_j$, em que m é o número de sinapses, e $y_k = \varphi(u_k)$. Uma função de ativação φ sigmoidal usual é a *função logística* $\varphi(v) = 1/(1 + e^{-av})$.

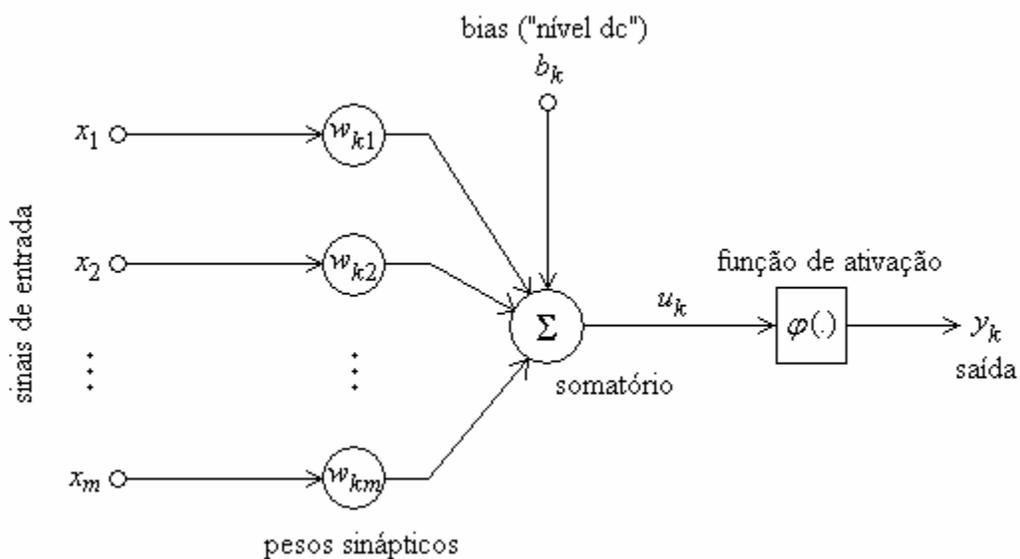


Figura 4.1. Modelo não linear de um neurônio (reproduzido de Haykin(1999)).

4.2.1.2. Percéptron Multicamadas

A rede percéptron multicamadas (MLP – “MultiLayer Perceptron” em inglês) é uma das arquiteturas para redes neurais artificiais mais conhecidas e aplicadas, representando uma generalização do percéptron proposto por Rosenblatt (1958). Sua proposta consistia na

utilização do perceptron (um neurônio como o da Figura 4.1) como estrutura-base do paradigma de aprendizado supervisionado.

A arquitetura (topologia) MLP consiste de uma camada de entrada, uma ou mais camadas intermediárias e uma camada de saída. A camada de entrada, cujos neurônios a ela pertencentes denominam-se *unidades de entrada*, difunde o sinal de entrada para as camadas seguintes sem exercer sobre estes quaisquer modificações. A camada intermediária, cujos neurônios são denominados *unidades intermediárias*, transmite informações através das conexões entre as camadas de entrada e de saída. A camada de saída, formada pelas *unidades de saída*, transmite ao mundo exterior a resposta determinada pela rede neural ao sinal aplicado na camada de entrada. A Figura 4.2 ilustra a arquitetura MLP com uma camada intermediária.

A topologia MLP possui três características distintivas (Haykin, 1999):

1. O modelo de cada neurônio que compõe a rede inclui uma função de ativação não linear. Deve-se enfatizar que a não-linearidade deve ser suave, ou seja, diferenciável em todos os pontos – como a função logística anteriormente citada. O uso da função logística possui motivação biológica, mas também podem ser empregados outros tipos de não-linearidades sigmoidais, como a função tangente hiperbólica;
2. A rede contém uma ou mais camadas de unidades intermediárias que não fazem parte nem da entrada nem da saída da estrutura neural. Esses neurônios “ocultos” permitem à rede o aprendizado de disposições complexas por meio da extração de características relevantes dos padrões de entrada (vetores de entrada);
3. A arquitetura MLP apresenta um alto grau de *conectividade*, determinado pelas sinapses. Uma modificação na conectividade da rede demanda uma alteração na população de conexões sinápticas ou em seus pesos.

A combinação dessas características aliada à capacidade de aprendizado por meio de treinamento supervisionado provê o poder computacional da rede MLP.

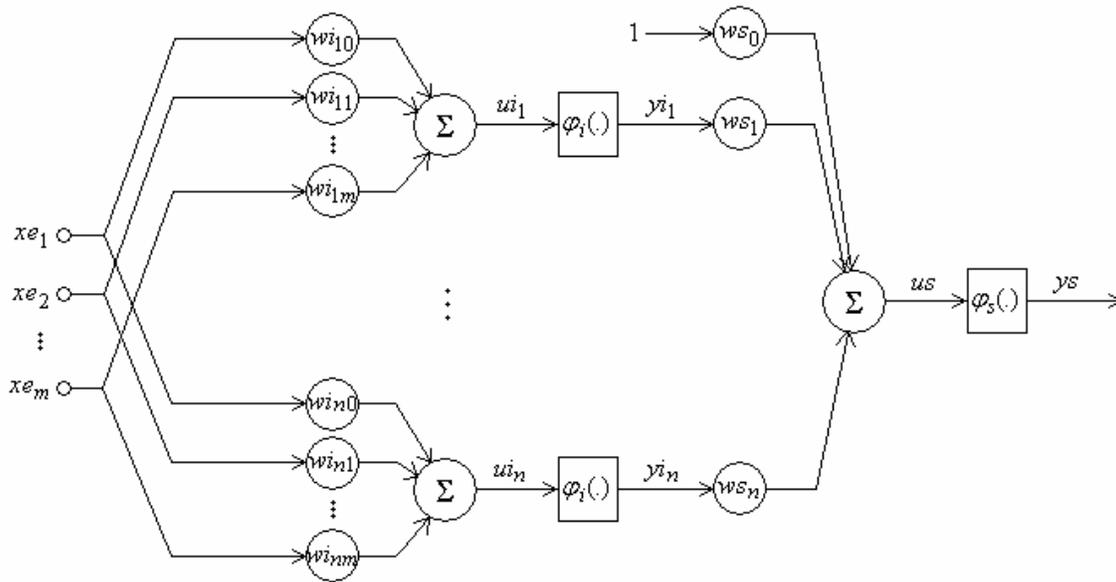


Figura 4.2. Rede neural MLP com uma camada intermediária.

A rede neural da Figura 4.2 possui m entradas (uma correspondendo ao *bias* – “nível dc”), uma saída e uma camada intermediária com n neurônios. w_{i_j} e w_s indicam os pesos (parâmetros ajustáveis) a serem determinados e φ_i e φ_s são as funções de ativação das unidades intermediárias e de saída respectivamente. Os n neurônios intermediários perfazem a soma ponderada das entradas e as transformações não lineares associadas à função de ativação sigmoideal φ_i . O neurônio de saída executa uma soma ponderada das saídas de todas as unidades intermediárias e aplica sobre o resultado a não-linearidade φ_s , produzindo o valor de saída final.

O modelo MLP requer a aplicação do paradigma de aprendizado supervisionado, ou seja, é necessário um “professor” que indique a resposta desejada para o padrão de entrada apresentado à rede durante a fase de aprendizagem. Um sinal de erro é definido como sendo a diferença entre a resposta desejada e a resposta observada (i.e. gerada pela rede). Os parâmetros da rede neural são ajustados de acordo com este sinal de erro. Há, dessa forma, uma adaptação progressiva da rede, efetuada por meio de um processo iterativo de ajustes sucessivos de seus pesos.

Para o treinamento da rede MLP, o método de aprendizagem mais utilizado é o *algoritmo de retropropagação do erro*. Esse algoritmo consiste, basicamente, de duas fases. Na primeira fase, denominada fase “*forward*”, as entradas são apresentadas à arquitetura e propagadas através das conexões da rede, camada por camada, calculando-se, a cada passo, a saída correspondente a cada unidade. Durante essa fase, os pesos não são alterados e a saída resultante da passagem do sinal pela rede é comparada com a saída desejada, o que determina um valor de erro. Na segunda fase, o erro é propagado da camada de saída para a camada de entrada e os pesos são ajustados de acordo com alguma regra para a correção do erro. Esta é a fase “*backward*”. Descrição mais detalhada do algoritmo de retropropagação pode ser encontrada em Haykin (1999).

Apesar de largamente utilizados, métodos de primeira ordem como o algoritmo de retropropagação (que emprega a derivada primeira da função de ativação) são caracterizados por uma baixa taxa de convergência. Ainda, em alguns casos, é exigido o estabelecimento arbitrário de alguns parâmetros (como taxas de aprendizagem) antes de se iniciar a tarefa. Escolhas inadequadas podem, como consequência, fazer com que sejam criados obstáculos para sua execução correta. Métodos de aprendizagem de segunda ordem, como o Método do Gradiente Conjugado (cf. Haykin (1999)), são empregados visando-se à superação dessas dificuldades. É relevante citar que o custo computacional do Método do Gradiente Conjugado é aproximadamente o dobro do custo de um método de primeira ordem, apesar da utilização de derivadas de segunda ordem (que normalmente implicariam em um incremento quadrático no custo).

Conforme exposto por Ge et al. (1998), redes MLP apresentam importantes limitações quando utilizadas em estratégias para controle de sistemas dinâmicos. Em primeiro lugar, algoritmos de retropropagação não asseguram estabilidade nem convergência do sistema em malha fechada resultante e, no caso de as haver, pode-se levar um tempo demasiado longo para que se alcance o estado estacionário objetivado. Tais restrições são indesejáveis em esquemas de controle *on-line*, como os utilizados em problemas de controle adaptativo. Em segundo lugar, embora a topologia MLP possua capacidade de aproximação universal, não existe um método que determine a estrutura de

rede necessária para que se atinja um valor previamente tido como adequado de exatidão. Outro aspecto relevante a se destacar é o fato de as redes MLP serem não lineares em seus parâmetros, ou seja, suas saídas são relacionadas aos pesos ajustáveis de maneira não linear, o que dificulta sobremaneira a análise de sistemas contendo esse tipo de rede. Finalmente, é característica inerente à arquitetura MLP o rápido “esquecimento” de informações “antigas”. Em outras palavras, os ajustes de pesos efetuados com o recebimento de novos padrões de entrada-saída, ainda que pequenos, muitas vezes conduzem a uma piora na qualidade da aproximação dos dados em relação aos quais a rede já havia sido treinada.

4.2.1.3. Redes Neurais com Funções de Ativação Radiais

Considere um modelo $h_m(X)$, onde $X = [x_1, \dots, x_m]^T \in \mathfrak{R}^m$, para uma função $h(X)$ com a forma $h_m(X) = \sum_{i=1}^n w_i s_i(X)$. Trata-se de uma combinação linear de n funções fixas, geralmente denominadas *funções-base* por analogia com o conceito de vetor gerado a partir de uma combinação linear de vetores-base.

As funções-base e quaisquer parâmetros que elas possam conter são supostos fixos. No caso, se as funções-base s_i , com $i = 1, \dots, n$, forem não lineares, o *modelo* será *não linear*, mas *linear nos parâmetros*, porque a flexibilidade de h_m , ou seja, sua habilidade em assumir formas diferentes, deriva apenas da liberdade de escolher diferentes valores para os coeficientes da combinação linear w_i , $i = 1, \dots, n$. Caso os parâmetros destas funções-base sejam ajustáveis e as funções, não lineares, o *modelo* será *não linear* e também *não linear nos parâmetros*.

Em princípio, qualquer conjunto de funções pode ser escolhido para formar a base $\{s_i\}$, com $i = 1, \dots, n$, embora existam conjuntos mais adequados para cada problema e também conjuntos suficientemente flexíveis para apresentarem desempenho adequado frente a uma ampla classe de funções h .

Um dos grandes atrativos apresentados pelos modelos lineares nos parâmetros está na possibilidade de se obter o conjunto de coeficientes da combinação linear em forma fechada, através da aplicação de técnicas de solução baseadas em, por exemplo, quadrados mínimos. O mesmo não se aplica a modelos não lineares nos parâmetros, os quais, como mencionado na seção anterior, requerem processos numéricos iterativos (técnicas de otimização não linear) para a obtenção de soluções.

Uma função-base radial é caracterizada por apresentar uma resposta que decresce (ou cresce) monotonicamente com a distância a um ponto central. Os centros (designados nesta seção por c_{ji} , com $j=1,\dots,m$ e $i=1,\dots,n$) e a taxa de decrescimento (ou crescimento) em cada direção são alguns dos parâmetros a ser definidos. Esses parâmetros devem ser constantes caso o modelo de regressão seja tomado como linear nos parâmetros ajustáveis. Uma função-base radial monotonicamente decrescente típica é a função Gaussiana.

Funções radiais (não lineares) podem ser utilizadas como base em qualquer tipo de modelo de regressão não linear (linear ou não linear nos parâmetros) e, particularmente, como função de ativação de qualquer tipo de rede multicamadas.

As redes neurais com funções de ativação radiais (RBF – “Radial Basis Functions” em inglês) (Figura 4.3) apresentam três diferenças principais em relação às redes do tipo percéptron multicamadas:

1. Elas sempre apresentam uma única camada intermediária;
2. Os neurônios de saída são sempre lineares;
3. Os neurônios da camada intermediária têm apenas funções radiais como funções de ativação, em vez de funções sigmoidais.

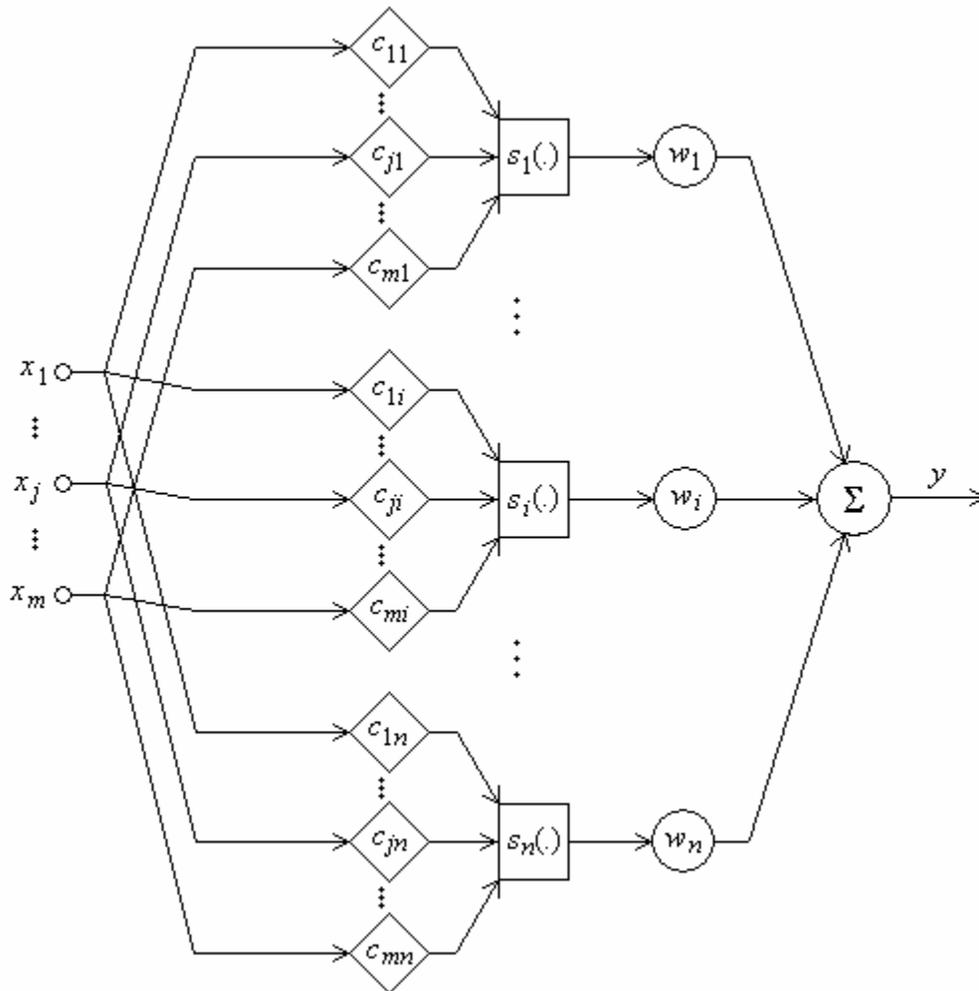


Figura 4.3. Rede neural com funções de ativação radiais.

A consequência imediata do uso de funções de ativação radiais está na forma como as entradas são processadas pelos neurônios da camada intermediária. Em vez da ativação interna de cada neurônio da camada intermediária se dar pelo emprego do produto escalar entre o vetor de entradas e o vetor de pesos, como no caso do perceptron, ela é obtida a partir de uma norma ponderada da diferença entre ambos os vetores.

Dado um número suficiente de neurônios com funções-base radiais, qualquer função contínua definida numa região compacta pode ser devidamente aproximada usando uma rede RBF (Park & Sandberg, 1991).

Segundo Ge et al. (1998), decorre das particularidades inerentes à arquitetura típica das redes RBF sua melhor adequabilidade para problemas de controle e modelagem adaptativos não lineares executados de maneira *on-line* em relação às redes MLP. Em primeiro lugar, a já citada característica de se fazer com que a saída da rede RBF esteja associada de forma linear aos parâmetros ajustáveis torna possível a obtenção de garantias analíticas de convergência e facilita o projeto de leis de atualização dos pesos da rede. Além disso, as funções de ativação da rede RBF são espacialmente distribuídas, de sorte que as informações são armazenadas localmente. Isso significa que o processo de adaptação conduzido em uma parte do espaço não afeta o conhecimento adquirido em uma área diferente, resultando na memória das redes RBF ser melhor do que a das redes MLP. Por fim, redes neurais RBF apresentam alta taxa de convergência.

Na metodologia de controle com redes neurais e *backstepping* proposta nesta tese, a ser apresentada no Capítulo 6, são utilizadas redes neurais com funções de ativação radiais.

4.2.2. Limites do *Backstepping* Adaptativo

Tem-se observado, nos últimos anos, um interesse crescente no controle adaptativo de sistemas não lineares. Durante a primeira metade da década de 90, avanços nas técnicas e teorias de controle não linear baseadas em conceitos matemáticos derivados do campo da geometria diferencial constituíram os alicerces de quase todos os controladores adaptativos desenvolvidos para sistemas não lineares com incertezas (Seto et al., 1994).

Como descrito no capítulo anterior, a metodologia geométrica tradicional de controle não linear fundamenta-se em transformações de coordenadas que convertem uma dada classe de sistemas não lineares em sistemas lineares ou parcialmente lineares. Este procedimento é efetuado por meio de realimentação de estados, sendo, pois, denominado *linearização por realimentação*.

Uma desvantagem importante desta metodologia, todavia, reside na exigência de um perfeito conhecimento das não-linearidades do sistema original durante o processo. Na análise de aplicações práticas geralmente isto não é possível, dado que na maioria das vezes não se dispõe de informações suficientes sobre todas as não-linearidades da planta. Tais procedimentos configuram-se, portanto, demasiado restritivos, devido à não-robustez a dinâmicas desconhecidas.

Por outro lado, o advento da linearização por realimentação abriu um campo propício à integração de técnicas de controle adaptativo para sistemas lineares no tratamento de sistemas não lineares com incertezas paramétricas. Algumas das primeiras propostas de controle adaptativo em sistemas linearizáveis foram introduzidas por Sastry & Isidori (1989), Nam & Arapostathis (1988) e Taylor et al. (1989). Uma amostra desses resultados é ilustrada pelo exemplo a seguir (Marino, 1997):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \theta x_2^3 + u \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde $\theta \in \mathfrak{R}$ é um parâmetro constante desconhecido. Seja $\hat{\theta}$ a estimativa de θ na lei de controle

$$u = -\hat{\theta}x_2^3 - c_1x_1 - c_2x_2\tag{4.2}$$

onde $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$, de tal forma que o sistema em malha fechada correspondente seja

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (\theta - \hat{\theta})x_2^3 - c_1x_1 - c_2x_2\end{aligned}\tag{4.3}$$

No caso de $\theta - \hat{\theta} < 0$, a origem será globalmente assintoticamente estável. Se $\theta - \hat{\theta} > 0$, verifica-se um ciclo limite – correspondente à fronteira da região de atração da origem – e não há estabilidade assintótica global. Os obstáculos para se conseguir estabilidade assintótica global para quaisquer condições iniciais e qualquer θ são suprimidos por meio de técnicas de controle adaptativo. De fato, o controle (4.2) com

$$\dot{\hat{\theta}} = [x_1 \quad x_2] \mathbf{P} \begin{bmatrix} 0 \\ x_2^3 \end{bmatrix}\tag{4.4}$$

onde \mathbf{P} é a solução (simétrica, definida positiva) da equação de Lyapunov

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} = -\mathbf{I} \quad (4.5)$$

garante que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$, onde $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$, para quaisquer condições iniciais $\mathbf{x}(0)$, $\hat{\theta}(0)$ e para qualquer parâmetro desconhecido θ , seja ele positivo ou negativo. Comprova-se esta conclusão através da função de Lyapunov

$$V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + (\theta - \hat{\theta})^2 \quad (4.6)$$

cuja derivada é

$$\dot{V} = -\mathbf{x}^T \mathbf{x} \quad (4.7)$$

Assim, a introdução de técnicas de controle adaptativo trouxe robustez aos processos de linearização por realimentação para os casos em que se verificam incertezas *paramétricas* (Åström & Wittenmark, 1995). Essas abordagens, contudo, caracterizam-se pela atribuição de restrições estruturais ao sistema. Em Sastry & Isidori (1989) e Nam & Arapostathis (1988), por exemplo, condições globais de Lipschitz são impostas às não-linearidades. Em Taylor et al. (1989), essas limitações traduzem-se num “grau de incerteza estrutural” (Krstić et al., 1995), ou seja, no número de integradores permitidos entre a entrada de controle e o parâmetro desconhecido. Na condição de combinação estrita (“*strict matching condition*”), a incerteza poderá aparecer somente nas equações que incluam um termo de controle. Kanellakopoulos, Kokotović & Marino (1991) ampliaram o grau de incerteza tratável para a situação de combinação estendida (“*extended matching condition*”).

Um ponto importante a se ressaltar em todos esses métodos reside na presunção de incógnitas linearmente parametrizadas. Com efeito, essa suposição tem sido essencial no desenvolvimento de estratégias de controle adaptativo (Narendra & Annaswamy, 1989). No caso de observadores adaptativos, por exemplo, visa-se a esquemas que permitam que as saídas mensuráveis sejam expressas como combinações lineares de variáveis acessíveis do sistema.

Mais recentemente, a introdução do *backstepping* adaptativo (cf. Kanellakopoulos, Kokotović & Morse (1991), Kokotović (1992), Kokotović & Arcak (2001)) ampliou a

classe de sistemas não lineares para os quais controladores adaptativos podem ser projetados de maneira sistemática, eliminando-se as restrições correspondentes ao grau de incerteza estrutural. Algumas das principais desvantagens do método de *backstepping* adaptativo tradicional (Krstić et al., 1995), contudo, permanecem sendo a necessidade de se ter uma parametrização linear dos termos desconhecidos do sistema e o imperativo de se ter um conhecimento exato das funções não lineares.

Diversas tentativas com o objetivo de se contornar esses dois obstáculos têm sido apresentadas, uma vez que o emprego de relações constitutivas e equações de conservação não-linearmente parametrizadas torna-se premente caso se aspire a descrições mais acuradas das variáveis físicas presentes no sistema em estudo e suas relações entre si. Karsenti et al. (1996), por exemplo, propuseram uma aproximação de Taylor de primeira ordem a fim de se eliminar a problemática da exigência de parametrização linear. No entanto, a descrição precisa das não-linearidades do sistema continua sendo essencial. Além disso, apenas estabilidade assintótica local é conseguida.

Annaswamy et al. (1998) destacam a inevitabilidade de se ter uma parametrização não linear caso se queira um modelo dinâmico realista para os casos em que a aplicação prática possui dinâmicas intrincadas e complexas e propõem uma metodologia de controle adaptativo que garante estabilidade global para sistemas com parametrização convexa ou côncava na forma

$$\dot{x} = Ax + b(f(\phi(t), \theta) + u) \quad (4.8)$$

onde $x \in \mathfrak{R}^n$ é o estado, $u \in \mathfrak{R}$ é a entrada, $\theta \in \mathfrak{R}^p$ é o vetor de incógnitas paramétricas e f é não linear em ϕ e θ . Essa abordagem demanda que o sistema atenda à conformação de (4.8), o que expõe a obrigatoriedade de validade de condições de combinação. Além disso, os parâmetros desconhecidos devem estar localizados num conjunto compacto.

Kojić et al. (1998) relaxam a obrigatoriedade de verificação de condições estruturais fixas e estendem o algoritmo desenvolvido por Annaswamy et al. (1998) para o caso de sistemas de segunda ordem, incluindo dinâmicas adicionais entre as não-linearidades e a entrada de controle. No entanto, o procedimento não garante que θ permaneça num

conjunto compacto, sendo necessário o acoplamento de técnicas de projeção. Outra tentativa de tratamento do problema da parametrização não linear em sistemas de configurações específicas inclui, por exemplo, o trabalho de Bošković (1998), para o caso de sistemas de primeira ordem.

Enquanto Annaswamy et al. (1998) lidam com parametrizações côncavas e convexas, Loh et al. (1999) tratam de parametrizações não lineares genéricas, mas que ocorrem de maneira aditiva. A principal característica explorada nestes trabalhos (e também por Kojić et al. (1998)) consiste no fato de a verificação de convexidade ser suficiente para que se assegure que o algoritmo de otimização baseado no método do gradiente “caminhe na direção certa” numa dada região do espaço de estados. Aplica-se, então, um esquema adaptativo padrão nesta região; nas regiões remanescentes, os efeitos das incertezas devem ser trabalhados de outras formas. Em Annaswamy et al. (1998) e Loh et al. (1999), por exemplo, a estabilidade da configuração é garantida através do ajuste adaptativo dos ganhos de uma estrutura de auxílio localizada fora da malha principal, uma tarefa que requer algum conhecimento prévio a respeito da topologia da parametrização.

Dentro da estratégia de controle por *backstepping* adaptativo, a problemática de incertezas relacionadas a não-linearidades desconhecidas tem sido abordada, por exemplo, por meio da introdução de conceitos de controle robusto. Polycarpou & Ioannou (1996), por exemplo, combinam o algoritmo de *backstepping* clássico com um esquema adaptativo de estimação *on-line* de parâmetros desconhecidos. Estes parâmetros multiplicam funções conhecidas que atuam como limites previamente estabelecidos às não-linearidades. Apesar de se permitir que as incertezas resultem tanto de incógnitas paramétricas quanto de funções não conhecidas, demanda-se que se tenham disponíveis informações extras *a priori*.

4.2.3. Redes Neurais em Controle Adaptativo Não Linear

Paralelamente aos desenvolvimentos na área de controle adaptativo não linear, muitas novas abordagens de controle neural têm sido propostas e estudadas (Gupta & Rao, 1994), (Lewis & Parisini, 1998). Nesses estudos, redes neurais são empregadas principalmente como modelos adaptativos de aproximação de não-linearidades desconhecidas. Modelos desse tipo são denominados *aproximadores on-line* (Polycarpou, 1996) e compreendem também outras técnicas, como, por exemplo, sistemas nebulosos e funções *spline*. Metodologias de controle que fundamentam-se em aproximadores *on-line* são designadas por *controle baseado em aproximação on-line*.

A distinção usualmente reconhecida entre controle adaptativo não linear e controle baseado em aproximação *on-line* manifesta-se no fato de que o primeiro lida com incertezas paramétricas em sistemas não lineares, enquanto que o segundo lida com plantas nas quais as incertezas são devidas a não-linearidades desconhecidas.

Grosso modo, no que tange à forma de utilização de redes neurais em processos de controle de sistemas dinâmicos à luz do conceito de controle baseado em aproximação *on-line*, há dois paradigmas de aplicação: esquemas de controle adaptativo indireto e de controle adaptativo direto.

O projeto de controle conforme o esquema de controle adaptativo *indireto* divide-se em dois estágios (Polycarpou & Mears, 1998): primeiramente, a não-linearidade desconhecida (i.e. a planta) é representada por uma rede neural (aproximador *on-line* selecionado). O projetista deverá escolher, inicialmente, uma dada configuração estrutural da rede (número de camadas, número de pesos em cada camada, etc.). Posteriormente, desenvolve-se uma lei de controle apropriada e uma lei de atualização para o ajuste dos pesos. Esta segunda etapa, sob o ponto de vista analítico, é similar ao problema de controle adaptativo não linear, desde que a estrutura do aproximador *on-line* seja fixa (vide, por exemplo, Knohl & Unbehauen (2000)) e pode envolver uma segunda rede neural. Verifica-se, portanto, que a estratégia de controle indireto depende fortemente de um processo de

identificação (que, em geral, não traz garantias de estabilidade e convergência (Sundararajan et al., 2001))

A utilização de redes neurais para o controle de sistemas dinâmicos foi proposta pela primeira vez por Narendra & Parthasarathy (1990). Inicialmente, a maioria dos estudos apoiavam-se em técnicas clássicas de otimização (especialmente o método do gradiente) para o projeto das leis de adaptação dos pesos. Apesar de apresentarem bom desempenho em muitos casos (Gupta & Rao, 1994), dificuldades surgem quando se deseja produzir resultados analíticos concretos referentes à estabilidade, robustez e desempenho do sistema como um todo (Polycarpou & Mears, 1998). Além disso, muitas complicações sobrevêm junto à aplicação de redes neurais sob essa ótica tradicional em sistemas em malha fechada. Os problemas principais incluem (Lewis & Parisini, 1998): inicialização conveniente dos pesos de modo que se consiga estabilidade em malha fechada, determinação de parâmetros adequados para o algoritmo de retropropagação, determinação de quais variáveis serão retropropagadas, necessidade de treinamento prévio *off-line*, etc.

Objetivando suprir a falta de análises rigorosas de estabilidade e convergência em processos de controle adaptativo com redes neurais, Sanner & Slotine (1992) propuseram um esquema de controle adaptativo *direto* em que não se verifica a demanda explícita de determinação de um modelo da dinâmica da planta desconhecida, promovendo uma redefinição do projeto de controle, agora focado em estabilidade, convergência e desempenho.

Redes neurais introduzidas em um sistema dinâmico em malha fechada ocasionam problemas que não são verificados quando são utilizadas em aplicações em malha aberta, tais como classificação ou identificação de sistemas (Lewis et al., 1996). Numa aplicação em malha fechada, por exemplo, não é possível garantir um desempenho satisfatório do sistema em termos de valores pequenos do erro de saída seguidor ou uma limitação para os valores dos pesos da rede, o que garantiria entradas de controle apropriadamente limitadas. Ainda, a falta de informações suficientes no que tange a uma inicialização adequada dos

pesos de modo a se conseguir estabilidade fatalmente conduz à demanda de um treinamento *off-line* preliminar.

Numa tentativa de se resolver alguns desses problemas, foram propostas alternativas de projeto que envolvem a utilização da teoria de estabilidade de Lyapunov como elemento basilar na construção de leis de controle adaptativas no contexto da metodologia de controle baseado em aproximadores *on-line* segundo o paradigma de controle adaptativo direto (Sanner & Slotine, 1992), (Kosmatopoulos et al., 1995), (Lewis et al., 1996), (Polycarpou, 1996). Evidencia-se a vantagem dessa abordagem no fato de que a lei de controle adaptativo é construída levando-se em conta o Método Direto de Lyapunov e técnicas associadas. Portanto, as propriedades de estabilidade do sistema em malha fechada são determinadas de forma muito mais clara.

Contribuições relevantes na teoria de controle adaptativo neural foram também introduzidas por Rovithakis & Christodolou (1994) e Farrel (1998), que apresenta uma análise detalhada de conceitos de convergência e estabilidade.

Até recentemente, as abordagens de controle adaptativo neural baseadas em técnicas de Lyapunov foram aplicadas apenas em classes relativamente limitadas de sistemas não lineares. A principal restrição (estrutural) referia-se à localização das não-linearidades, que deveriam atender a algum tipo de condição de combinação. Estas limitações foram eliminadas em (Polycarpou, 1996), que propôs a junção entre a abordagem de controle neural fundamentada em esquemas de Lyapunov e os procedimentos de *backstepping* adaptativo.

4.2.4. *Backstepping* Adaptativo Neural

Esta seção dedica-se a expor, em linhas gerais, os três métodos mais conhecidos e difundidos que aliam o emprego do *backstepping* adaptativo com a metodologia de controle

neural sustentada pelos conceitos de estabilidade e convergência de Lyapunov aplicáveis a sistemas de realimentação estrita (cf. (3.52)):

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\
 \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_i) + g_i(x_1, \dots, x_i)x_{i+1} \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= f_n(\mathbf{x}) + g_n(\mathbf{x})u
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

onde $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathfrak{R}^n$ é o estado e $u \in \mathfrak{R}$ é a entrada. As funções f_i e g_i , com $i = 1, \dots, n$, são não-linearidades que contêm incertezas tanto paramétricas quanto não paramétricas.

Para maiores detalhes, o leitor é convidado a verificar as referências citadas. Reitera-se que os três métodos seguem o paradigma de controle adaptativo *direto*.

4.2.4.1. Método de Kwan & Lewis (2000)

Na metodologia proposta por Kwan & Lewis (2000), as redes neurais são utilizadas com a finalidade de se aproximar as não-linearidades desconhecidas f_i , $i = 1, \dots, n$. Supõe-se que g_i , $i = 1, \dots, n$, sejam conhecidas e inversíveis. O objetivo de controle é fazer com que a saída $y = x_1$ do sistema (4.9) siga a referência $y_r = x_{r1}$.

Os passos do *backstepping* adaptativo neural de Kwan & Lewis (2000) são como segue: consideram-se, inicialmente, as variáveis de estado x_2 até x_n como sinais de controle virtuais. Redes neurais são empregadas no projeto de controladores virtuais intermediários α_1 até α_{n-1} . Na determinação de cada α_i , leva-se em conta o objetivo de redução do erro $x_i - \alpha_{i-1}$ do passo anterior. Ao final, a lei de controle u procura tornar o erro entre x_n e α_{n-1} tão pequeno quanto possível. Utilizam-se, em cada passo do processo, redes neurais com vistas a se aproximar as funções não lineares nas dinâmicas de erro.

A primeira etapa deste procedimento inicia-se com a definição da lei de controle intermediária

$$\alpha_1 = g_1^{-1}(-\hat{f}_1 + \dot{x}_{r1} - c_1 z_1) \quad (4.10)$$

onde $c_1 > 0$ e \hat{f}_1 é a estimativa de f_1 . Aplicando-se (4.10) na primeira equação de (4.9), chega-se à dinâmica do erro $z_1 = x_1 - x_{r1}$:

$$\dot{z}_1 = f_1 - \hat{f}_1 - c_1 z_1 + g_1 z_2 \quad (4.11)$$

onde $z_2 = x_2 - \alpha_1$. Segundo Kwan & Lewis (2000), a abordagem tradicional de *backstepping*, neste ponto, supõe que as incertezas de f_1 são linearmente parametrizáveis, de modo a partir para o uso de técnicas-padrão de controle adaptativo. Como tal hipótese não será, aqui, seguida, uma rede neural de duas camadas será utilizada para aproximar f_1 .

A dinâmica do erro z_2 é dada por:

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 = f_2 + g_2 x_3 - \dot{\alpha}_1 \quad (4.12)$$

Define-se, a seguir, a lei de controle intermediária para x_3 :

$$\alpha_2 = g_2^{-1}(-\hat{f}_2 + \dot{\alpha}_1 - c_2 z_2 - g_1 z_1) \quad (4.13)$$

onde $c_2 > 0$ e \hat{f}_2 é a estimativa de f_2 . Aplicando-se (4.13) em (4.12), chega-se a

$$\dot{z}_2 = f_2 - \hat{f}_2 - c_2 z_2 - g_1 z_1 + g_2 z_3 \quad (4.14)$$

onde $z_3 = x_3 - \alpha_2$.

Procede-se, nos $n-3$ passos seguintes, de maneira análoga: define-se a lei de controle intermediária

$$\alpha_i = g_i^{-1}(-\hat{f}_i + \dot{\alpha}_{i-1} - c_i z_i - g_{i-1} z_{i-1}) \quad (4.15)$$

de forma a se minimizar o erro $z_i = x_i - \alpha_{i-1}$, cuja dinâmica será expressa como

$$\dot{z}_i = f_i - \hat{f}_i - c_i z_i - g_{i-1} z_{i-1} + g_i z_{i+1} \quad (4.16)$$

onde $z_{i+1} = x_{i+1} - \alpha_i$, $c_i > 0$ e \hat{f}_i é a estimativa de f_i .

No passo final, a lei de controle u será dada por

$$u = g_n^{-1} \left(-\hat{f}_n + \hat{\alpha}_{n-1} - c_n z_n - g_{n-1} z_{n-1} \right) \quad (4.17)$$

e a dinâmica do erro z_n será

$$\dot{z}_n = f_n - \hat{f}_n - c_n z_n - g_{n-1} z_{n-1} \quad (4.18)$$

onde $c_n > 0$ e \hat{f}_n é a estimativa de f_n .

Todas as funções f_i , com $i = 1, \dots, n$, serão aproximadas via redes neurais:

$$f_i = \boldsymbol{\theta}_i^{*T} \boldsymbol{\xi}_i + d_i \quad (4.19)$$

com $i = 1, \dots, n$, onde $\boldsymbol{\theta}_i^*$ são os vetores de pesos com valores ótimos para aproximar f_i e $|d_i| < \varepsilon_i$ é limitado. As funções $\boldsymbol{\xi}_i$ podem ser, por exemplo, funções de base radiais. As estimativas \hat{f}_i serão, portanto:

$$\hat{f}_i = \boldsymbol{\theta}_i^T \boldsymbol{\xi}_i \quad (4.20)$$

com $i = 1, \dots, n$, onde $\boldsymbol{\theta}_i$ são as estimativas para os pesos geradas por leis de atualização definidas *a posteriori*.

A análise de estabilidade do sistema em malha fechada resultante,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1^T \boldsymbol{\xi}_1 - c_1 z_1 + g_1 z_2 + d_1 \\ \dot{z}_2 &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2^T \boldsymbol{\xi}_2 - c_2 z_2 - g_1 z_1 + g_2 z_3 + d_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_i &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \boldsymbol{\xi}_i - c_i z_i - g_{i-1} z_{i-1} + g_i z_{i+1} + d_i \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^T \boldsymbol{\xi}_n - c_n z_n - g_{n-1} z_{n-1} + d_n \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i = \boldsymbol{\theta}_i^* - \boldsymbol{\theta}_i$, $i = 1, \dots, n$, é efetuada com o auxílio de funções de Lyapunov. Mostra-se (Kwan & Lewis, 2000) que todos os sinais do sistema são uniformemente ultimamente limitados quando são aplicadas leis de atualização dos pesos com a forma

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_i = \boldsymbol{\Gamma}_i \boldsymbol{\xi}_i z_i - c_\theta \boldsymbol{\Gamma}_i \|\boldsymbol{z}\| \boldsymbol{\theta}_i \quad (4.22)$$

com $i = 1, \dots, n$, onde $\boldsymbol{\Gamma}_i = \boldsymbol{\Gamma}_i^T > 0$ são matrizes constantes, $\boldsymbol{z} = [z_1, \dots, z_n]^T$ é o estado do sistema (4.21) e c_θ é um escalar positivo.

4.2.4.2. Método de Zhang, Ge & Hang (2000)

Na metodologia proposta por Zhang, Ge & Hang (2000), ao contrário do que ocorre em Kwan & Lewis (2000), as não-linearidades g_i , $i = 1, \dots, n$, assim como f_i , $i = 1, \dots, n$, são desconhecidas, supostamente suaves e não linearmente parametrizáveis. Para se evitar problemas decorrentes de singularidade nas leis de controle gerados pelos termos g_i , Zhang, Ge & Hang (2000) introduzem um novo tipo de função de Lyapunov, que não requer a estimativa dos g_i . O objetivo de controle é fazer com que a saída $y = x_1$ do sistema (4.9) siga a referência $y_r = x_{r1}$.

A primeira etapa do *backstepping* adaptativo neural de Zhang, Ge & Hang (2000) inicia-se com o tratamento do primeiro subsistema de (4.9), i.e. $\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2$. Considerando x_2 como entrada de controle virtual, determina-se a lei intermediária

$$\alpha_1^* = \frac{1}{\bar{g}_1(x_1)} \left\{ -c_1(t)z_1 - \underbrace{\left[\beta_1(x_1)f_1(x_1) - \dot{y}_r \int_0^1 \beta_1(\tau z_1 + y_r) d\tau \right]}_{h_1(z_1)} \right\} \quad (4.23)$$

onde $z_1 = x_1 - x_{r1}$ é a variável de erro deste passo, $\mathbf{Z}_1 = [x_1, y_r, \dot{y}_r]^T$, $\beta_1(x_1) = \bar{g}_1(x_1)/g_1(x_1)$, $c_1(t) \geq c_1^* > 0$, $\bar{g}_1(x_1)$ é uma função suave tal que $\bar{g}_1(x_1) \geq |g_1(x_1)| \geq g_{10} > 0 \quad \forall x_1 \in \mathfrak{R}$ e

$$c_1(t) = \frac{1}{C_1} \left(1 + \int_0^1 \bar{g}_1(\tau z_1 + y_r) d\tau + \|\mathbf{Z}_1 \boldsymbol{\theta}_1^T \hat{\boldsymbol{\xi}}_1\|_F^2 + \|\hat{\boldsymbol{\xi}}_1^T \boldsymbol{\delta}_1^T \mathbf{Z}_1\|^2 \right) \quad (4.24)$$

com $C_1 > 0$, $\hat{\boldsymbol{\xi}}_1 = \boldsymbol{\xi}_1(\boldsymbol{\delta}_1^T \mathbf{Z}_1)$ e $\hat{\boldsymbol{\xi}}_1 = \text{diag}\{\hat{\xi}'_{11}, \dots, \hat{\xi}'_{1l_1}\}$, onde $\hat{\xi}'_{1,j} = \xi'_1(\boldsymbol{\delta}_{1,j}^T \mathbf{Z}_1) = d[\xi_1(\tau_1)]/d\tau_1|_{\tau_1 = \boldsymbol{\delta}_{1,j}^T \mathbf{Z}_1}$, $j = 1, \dots, l_1$ e $l_1 > 0$. $\|\cdot\|_F$ denota a norma de Frobenius.

O termo entre colchetes $h_1(\mathbf{Z}_1)$ será aproximado por uma rede neural com três camadas, de modo a fazer com que (4.23) possa ser dado como

$$\alpha_1 = \frac{1}{\bar{g}_1(x_1)} \left[-c_1(t)z_1 - \boldsymbol{\theta}_1^T \boldsymbol{\xi}_1(\boldsymbol{\delta}_1^T \mathbf{Z}_1) \right] \quad (4.25)$$

A função de Lyapunov deste primeiro passo é a seguinte:

$$V_1 = z_1^2 \int_0^1 \tau \beta_1(\tau z_1 + y_r) d\tau \quad (4.26)$$

Sua derivada pode ser expressa (Zhang, Ge & Hang, 2000) como segue:

$$\dot{V}_1 = -c_1(t)z_1^2 - \bar{d}_1 z_1 + z_1 \bar{g}_1(x_1)z_2 \quad (4.27)$$

onde $\bar{d}_1 = \boldsymbol{\theta}_1^T \hat{\boldsymbol{\xi}}_1(\boldsymbol{\delta}_1^T \mathbf{Z}_1) - h_1(\mathbf{Z}_1)$. O ajuste dos pesos das redes neurais é feito conforme as leis de atualização abaixo:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 = \Gamma_{1a} \left[\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}_1 - \hat{\boldsymbol{\xi}}_1' \boldsymbol{\delta}_1^T \mathbf{Z}_1 \right) z_1 - \sigma_1 \boldsymbol{\theta}_1 \right] \quad (4.28)$$

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_1 = \Gamma_{1b} \left[\mathbf{Z}_1 \boldsymbol{\theta}_1^T \hat{\boldsymbol{\xi}}_1' z_1 - \gamma_1 \boldsymbol{\delta}_1 \right] \quad (4.29)$$

Os passos seguintes prosseguem de maneira análoga. É importante ressaltar que o grau de complexidade do processo aumenta à medida que são introduzidos novos subsistemas. Além disso, as redes neurais recebem, como entrada, as derivadas das leis de controle intermediárias, o que acentua a dificuldade de aplicação do método. Ao final, tem-se a seguinte lei de controle para u :

$$u = \frac{1}{\bar{g}_n(\mathbf{x})} \left[-\bar{g}_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})z_{n-1} - c_n(t)z_n - \boldsymbol{\theta}_n^T \boldsymbol{\xi}_n(\boldsymbol{\delta}_n^T \mathbf{Z}_n) \right] \quad (4.30)$$

onde

$$\mathbf{Z}_n = \left[\mathbf{x}^T, \alpha_{n-1}, \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_{n-1}}, \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y_{rd(j+1)}} \dot{y}_{rd(j+1)} + \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \boldsymbol{\theta}_j} \dot{\boldsymbol{\theta}}_j + \sum_{k=1}^{l_j} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \boldsymbol{\delta}_{j,k}} \dot{\boldsymbol{\delta}}_{j,k} \right) \right] \quad (4.31)$$

com $\mathbf{y}_{rd(i+1)} = [y_r, \dot{y}_r, \dots, y_r^{(i)}]^T$, e

$$c_n(t) = \frac{1}{C_n} \left(1 + \int_0^1 \tau \bar{g}_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \tau z_n + \alpha_{n-1}) d\tau + \left\| \mathbf{Z}_n \boldsymbol{\theta}_n^T \hat{\boldsymbol{\xi}}_n' \right\|_F^2 + \left\| \hat{\boldsymbol{\xi}}_n' \boldsymbol{\delta}_n^T \mathbf{Z}_n \right\|^2 \right) \quad (4.32)$$

com $C_n > 0$, $\hat{\boldsymbol{\xi}}_n = \boldsymbol{\xi}_n(\boldsymbol{\delta}_n^T \mathbf{Z}_n)$ e $\hat{\boldsymbol{\xi}}_n' = \text{diag}\{\hat{\xi}'_{n1}, \dots, \hat{\xi}'_{nl_n}\}$, onde

$\hat{\xi}'_{n,j} = \xi'_{n,j}(\boldsymbol{\delta}_n^T \mathbf{Z}_n) = d[\xi_n(\tau_n)]/d\tau_n|_{\tau_n = \boldsymbol{\delta}_n^T \mathbf{Z}_n}$, $j = 1, \dots, l_n$ e $l_n > 0$. $z_n = x_n - \alpha_{n-1}$ é a variável

de erro deste passo, $\beta_n(\mathbf{x}) = \bar{g}_n(\mathbf{x})/g_n(\mathbf{x})$, $c_n(t) \geq c_n^* > 0$, $\bar{g}_n(\mathbf{x})$ é uma função suave tal que $\bar{g}_n(\mathbf{x}) \geq |g_n(\mathbf{x})| \geq g_{n0} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$. O ajuste dos pesos das redes neurais é feito conforme as leis de atualização abaixo:

$$\dot{\theta}_n = \Gamma_{na} \left[(\hat{\xi}_n - \hat{\xi}'_n \delta_n^T z_n) z_n - \sigma_n \theta_n \right] \quad (4.33)$$

$$\dot{\delta}_n = \Gamma_{nb} \left[z_n \theta_n^T \hat{\xi}'_n z_n - \gamma_n \delta_n \right] \quad (4.34)$$

Mostra-se (Zhang, Ge & Hang, 2000) que todos os sinais do sistema são uniformemente ultimamente limitados.

É relevante notar que a maior parte das técnicas de controle adaptativo neural para sistemas não lineares disponíveis na literatura baseia-se na abordagem de linearização por realimentação, suas estruturas de controle usualmente assumindo a forma $u = (-\hat{f}_1 + v)/\hat{g}_1$, com \hat{f} e \hat{g} estimativas das não-linearidades f e g , respectivamente, e v uma nova entrada de controle. Para se evitar a ocorrência de singularidade quando $\hat{g} \rightarrow 0$, lança-se mão, em geral, de duas soluções: (a) considerar conhecidos os termos g , tal como é verificado na seção anterior (4.2.4.1) e também, por exemplo, em Polycarpou (1996) e em Sharma & Calise (2002); ou (b) propor métodos adaptativos modificados, como em Yeşildirek & Lewis (1995) e em Kosmatopoulos (1996). Entretanto, com relação a esta última abordagem, via de regra tais metodologias fazem uso de algoritmos de projeção (as estimativas de pesos θ são projetadas via algoritmo dedicado num conjunto factível pré-determinado) e/ou descontinuidades (chaveamentos nos controladores para que as magnitudes de controle sejam mantidas limitadas), o que inviabiliza sua sistematização via *backstepping* para sistemas mais gerais de realimentação estrita. A proposta de Zhang, Ge & Hang (2000) contorna tal dificuldade por meio da introdução de novos formatos para função de Lyapunov. Todavia, como já apontado no decorrer desta seção, o projeto segundo esse paradigma é excessivamente complexo e de difícil implementação.

4.2.4.3. Método de Ge & Wang (2002)

Na metodologia introduzida por Ge & Wang (2002), da mesma forma como em Zhang, Ge & Hang (2000), as não-linearidades g_i , $i = 1, \dots, n$, assim como f_i , $i = 1, \dots, n$, são desconhecidas, supostamente suaves e não linearmente parametrizáveis. No entanto,

para se evitar problemas decorrentes de singularidade nas leis de controle gerados pelos termos g_i , Ge & Wang (2002) supõem que g_n não depende de x_n ; tal medida, segundo Zhang et al. (1999), faz com que a possibilidade de singularidade seja completamente eliminada sem a necessidade de introdução de funções de Lyapunov com integrais. O objetivo de controle é fazer com que a saída $y = x_1$ do sistema (4.9) siga a referência $y_r = x_{r1}$.

A primeira etapa deste procedimento inicia-se com a definição da lei de controle intermediária

$$\alpha_1^* = -c_1 z_1 - g_1^{-1}(f_1 - \dot{y}_r) \quad (4.35)$$

para o subsistema associado à variável de erro $z_1 = x_1 - y_r$, cuja derivada é

$$\dot{z}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 - \dot{y}_r \quad (4.36)$$

Em (4.35), $c_1 > 0$ é uma constante de projeto que faz com que a derivada da função de Lyapunov $V_1 = (1/2)z_1^2$,

$$\dot{V}_1 = z_1(f_1 + g_1\alpha_1^* - \dot{y}_r) \stackrel{(4.35)}{=} -c_1 g_1 z_1^2 \quad (4.37)$$

seja não positiva, uma vez que, por hipótese, $g_{11} \geq g_1(x_1) \geq g_{10} > 0 \quad \forall x_1 \in \mathfrak{X}$. Como f_1 e g_1 são funções desconhecidas, a lei de controle intermediária α_1^* não pode ser implementada na prática. Denotando-se

$$h_1(\mathbf{Z}_1) = \frac{1}{g_1(x_1)} [f_1(x_1) - \dot{y}_r] \quad (4.38)$$

onde $\mathbf{Z}_1 = [x_1, \dot{y}_r]^T$, Ge & Wang (2002) propõem a aproximação do termo $h_1(\mathbf{Z}_1)$ por uma rede neural com funções de base radiais. Assim, a lei de controle intermediária α_1^* pode ser expressa como

$$\alpha_1^* = -c_1 z_1 - \theta_1^{*T} \xi(\mathbf{Z}_1) - d_1 \quad (4.39)$$

onde θ_1^* é o vetor com os valores ideais para os pesos da rede neural e $|d_1| < \varepsilon_1$ é o erro de aproximação da rede, limitado por $\varepsilon_1 > 0$. O controlador virtual deste passo emprega uma estimativa para θ_1^* :

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - \boldsymbol{\theta}_1^T \boldsymbol{\xi}_1(\mathbf{Z}_1) \quad (4.40)$$

Definido-se a variável de erro $z_2 = x_2 - \alpha_1$ e aplicando (4.40) em (4.36), tem-se:

$$\dot{z}_1 = g_1(x_1) [z_2 - c_1 z_1 - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1^T \boldsymbol{\xi}_1(\mathbf{Z}_1) + d_1] \quad (4.41)$$

onde $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1 = \boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1^*$. A função de Lyapunov deste passo é

$$V_1 = \frac{1}{2g_1(x_1)} z_1^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}_1^T \boldsymbol{\Gamma}_1^{-1} \boldsymbol{\theta}_1 \quad (4.42)$$

onde $\boldsymbol{\Gamma}_1 = \boldsymbol{\Gamma}_1^T > 0$ é uma matriz de ganhos. Com a lei de atualização dos pesos da rede neural

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 = \boldsymbol{\Gamma}_1 [\boldsymbol{\xi}_1(\mathbf{Z}_1) z_1 - \sigma_1 \boldsymbol{\theta}_1] \quad (4.43)$$

a derivada de (4.42) ao longo de (4.41) pode ser escrita como

$$\dot{V}_1 = z_1 z_2 - c_1 z_1^2 - \frac{\dot{g}_1}{2g_1^2} z_1^2 + z_1 d_1 - \sigma_1 \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1^T \boldsymbol{\theta}_1 \quad (4.44)$$

Ge & Wang (2002) mostram que, à exceção do termo $z_1 z_2$, a ser cancelado no passo seguinte, todas as parcelas que compõem \dot{V}_1 podem ser feitas negativas.

A lei de controle virtual do passo genérico i , onde $i = 2, \dots, n-1$, é a seguinte:

$$\alpha_i = -z_{i-1} - c_i z_i - \boldsymbol{\theta}_i^T \boldsymbol{\xi}_i(\mathbf{Z}_i) \quad (4.45)$$

onde $c_i > 0$, $z_i = x_i - \alpha_{i-1}$ é a variável de erro deste passo, $z_{i-1} = x_{i-1} - \alpha_{i-2}$ é a variável de erro do passo anterior (obs.: para $i = 2$, tem-se que $z_1 = x_1 - y_r$) e

$$\mathbf{Z}_i = \left[x_1, \dots, x_i, \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_{i-1}}, \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y_r} \dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \boldsymbol{\theta}_j} \{ \boldsymbol{\Gamma}_j [\boldsymbol{\xi}_j(\mathbf{Z}_j) z_j - \sigma_j \boldsymbol{\theta}_j] \} \right\} \right] \quad (4.46)$$

com $\mathbf{y}_r = [y_{r1}, y_{r2}, \dots, y_{rm}]^T$, em que m é a ordem do modelo de referência gerador de y_r .

A lei de atualização dos pesos da rede neural é dada por

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_i = \boldsymbol{\Gamma}_i [\boldsymbol{\xi}_i(\mathbf{Z}_i) z_i - \sigma_i \boldsymbol{\theta}_i] \quad (4.47)$$

Ao final do processo, chega-se à lei de controle

$$u = -z_{n-1} - c_n z_n - \boldsymbol{\theta}_n^T \boldsymbol{\xi}_n(\mathbf{Z}_n) \quad (4.48)$$

onde $c_n > 0$, $z_n = x_n - \alpha_{n-1}$ é a variável de erro deste passo, $z_{n-1} = x_{n-1} - \alpha_{n-2}$ é a variável de erro do passo anterior e

$$\mathbf{Z}_n = \left[\mathbf{x}, \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_{n-1}}, \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y_r} \dot{\mathbf{y}}_r + \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \boldsymbol{\theta}_j} \left\{ \Gamma_j [\boldsymbol{\xi}_j(\mathbf{Z}_j) z_j - \sigma_j \boldsymbol{\theta}_j] \right\} \right\} \right] \quad (4.49)$$

A lei de atualização dos pesos da rede neural é dada por

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_n = \Gamma_n [\boldsymbol{\xi}_n(\mathbf{Z}_n) z_n - \sigma_n \boldsymbol{\theta}_n] \quad (4.50)$$

Mostra-se (Ge & Wang, 2002) que todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente ultimamente limitados e que a saída do sistema converge para uma pequena vizinhança da trajetória de referência. Em comparação aos dois métodos anteriores, a abordagem de Ge & Wang (2002) é a que proporciona um melhor compromisso entre representatividade (em não fazer uso da hipótese restritiva de que as funções g_i , $i = 1, \dots, n$, de (4.9) são conhecidas) e menor dificuldade de implementação (por conta da não-utilização de funções de Lyapunov com integrais). No entanto, como apontam Li et al. (2004), também a metodologia introduzida por Ge & Wang (2002) padece de excessiva complexidade de implementação, desta vez no que tange à utilização das derivadas dos controladores virtuais intermediários como entradas nas redes neurais. Para solucionar este problema, Li et al. (2004) propõem uma nova estrutura para a incorporação das redes neurais no processo de controle, em que são empregadas *duas* redes neurais em cada passo: uma para aproximar $g_i^{-1} f_i$ e outra para aproximar g_i^{-1} . Tal concepção será empregada no Capítulo 6, que apresenta, em detalhes, a proposta de uma metodologia de controle de sistemas não lineares com incertezas com múltiplas entradas e múltiplas saídas.

A Figura 4.4 a seguir ilustra as características das metodologias apresentadas nesta Seção, localizando o contexto da proposta desta tese.

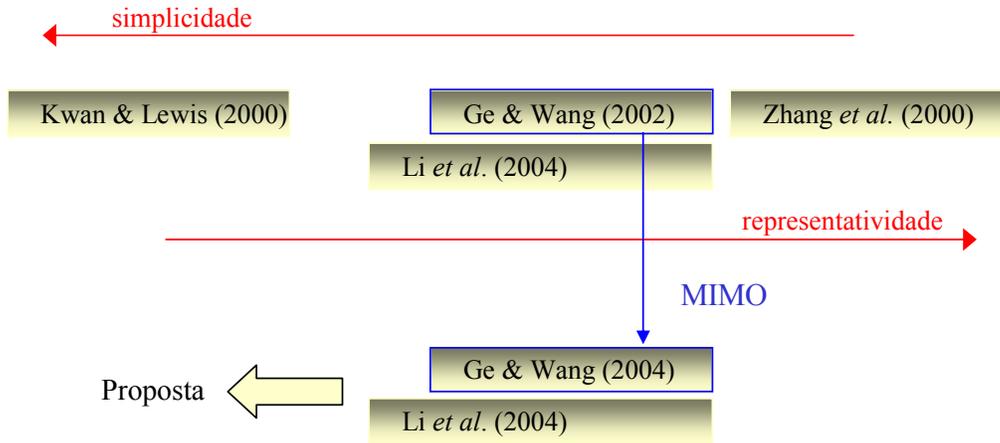


Figura 4.4. Características das metodologias de *backstepping* adaptativo neural e contextualização da proposta desta tese.

4.3. Otimização Baseada em Computação Evolutiva e Aplicações em Controle

Analogias entre o mecanismo biológico de seleção natural e processos matemáticos de otimização conduziram ao desenvolvimento dos *algoritmos evolutivos*, cuja característica principal é a simulação do processo evolutivo num computador com vistas à solução de problemas de otimização. Alguns paradigmas relacionados aos algoritmos evolutivos são *algoritmos genéticos*, *programação evolutiva* e *estratégias evolutivas* (Fogel, 1995).

Em geral, os algoritmos evolutivos simulam o processo de evolução utilizando os seguintes elementos: representação matemática dos indivíduos candidatos à solução, uma população formada por possíveis soluções, operadores que atuam sobre os indivíduos da população, uma função de *fitness* que indica a qualidade de um indivíduo em comparação aos demais e um mecanismo de seleção para a geração (iteração) seguinte. A diferença entre os paradigmas citados reside nas diferentes possibilidades de configuração e aplicação desses elementos. Neste trabalho são utilizados *algoritmos genéticos*.

A evolução (método de busca paralela de soluções dentre um número muito grande de candidatos, sujeitos a condições de adaptação variáveis) é uma estratégia promissora no tratamento de problemas computacionais de complexidade elevada ou para os quais não é possível obter uma formalização adequada para o emprego de técnicas convencionais. Por exemplo, em problemas que requerem busca dentre um número muito grande de candidatos a solução (cf., por exemplo, Paiva (1997), Ursem et al. (2002), Fleming & Purshouse (2001) e Fonseca Neto (2000)). Esses problemas podem se beneficiar do paralelismo inerente aos processos evolutivos, em que muitas possibilidades de solução são exploradas simultaneamente (cf. Von Zuben (2000)).

4.3.1. Algoritmos Genéticos

Os algoritmos genéticos foram introduzidos por Holland (1975) com o objetivo de formalizar matematicamente e explicar rigorosamente processos de adaptação em sistemas naturais e desenvolver sistemas artificiais (simulados em computador) que retivessem os mecanismos encontrados em sistemas naturais.

A terminologia empregada pelos algoritmos genéticos origina-se da teoria da evolução natural e da genética. Dessa forma, um elemento da população, formada por um subconjunto de possíveis soluções para o problema em questão, é denominado *cromossomo*. Cromossomos são usualmente implementados na forma de listas de atributos ou vetores. Cada atributo é designado por *gene*. Os possíveis valores que um determinado gene pode assumir são denominados *alelos*. Um cromossomo é a codificação de uma possível solução para o problema. A essa codificação dá-se o nome de *genótipo*. A interpretação do código presente em um cromossomo chama-se *fenótipo*. O *espaço de busca* tem como elementos todos os candidatos à solução do problema. A *população* é um subconjunto do espaço de busca. A *função de adaptação* ou *fitness* atribui a cada elemento da população (cromossomo) um valor de adaptação, que indica a qualidade do candidato à solução em relação aos demais. É, portanto, uma medida relativa de desempenho e representa a pressão do ambiente sobre o fenótipo dos indivíduos.

Os *operadores de inicialização* produzem a primeira geração de indivíduos (população inicial) selecionando elementos do espaço de busca segundo algum critério pré-determinado. Os *operadores genéticos* implementam o mecanismo de introdução de variabilidade aleatória no genótipo da população. Os *operadores de seleção* implementam o mecanismo de seleção natural de indivíduos na passagem para a geração seguinte. A ação desses três operadores tende a conduzir o processo de otimização rumo a uma solução adequada para o problema.

Fogel (1995) descreve a estrutura básica de um algoritmo genético:

1. A iteração t apresenta uma população de soluções potenciais $P(t)$;
2. Cada solução é avaliada e é produzida uma medida que a qualifica com relação à possibilidade de resolver o problema (*fitness*);
3. Uma nova população (iteração $t+1$) é então formada, privilegiando a participação dos melhores indivíduos através do emprego dos operadores de seleção;
4. Alguns membros da nova população passam por alterações, por meio da atuação dos operadores genéticos, para formar novas soluções potenciais;
5. O processo se repete até que um número pré-determinado de iterações (gerações) seja atingido, ou até que um nível de adaptação esperado seja alcançado.

O processo de evolução executado por um algoritmo genético corresponde a uma busca pelo melhor indivíduo em um espaço de soluções potenciais para o problema. Essa procura requer um equilíbrio entre dois objetivos aparentemente conflitantes: o aproveitamento das melhores soluções já encontradas e uma exploração ampla do espaço de busca (*exploitation* \times *exploration*) (Michalewicz, 1996). Tal equilíbrio praticamente inexistente quando se consideram outras técnicas, como (a) métodos de otimização clássicos (o método do gradiente, por exemplo), que apenas aproveitam a melhor solução conhecida na investigação de possíveis aprimoramentos, sem realizar uma exploração efetiva do espaço, e (b) métodos de busca aleatória, que exploram o espaço de possíveis soluções ignorando o aproveitamento de regiões promissoras. Os algoritmos genéticos, por outro lado, são uma classe de métodos de busca de propósito geral que apresentam um balanço

notável entre aproveitamento de boas soluções e exploração do espaço de busca (Von Zuben, 2000).

O processo de pesquisa de soluções é multidirecional, encorajando a troca de informação entre as direções. A cada geração, soluções relativamente boas se reproduzem, enquanto que soluções relativamente ruins são eliminadas. Como já mencionado, para fazer a distinção entre diferentes soluções é empregada uma função de avaliação ou de adaptabilidade (*fitness*) que simula o papel da pressão exercida pelo ambiente sobre o indivíduo.

Embora apresentem etapas não determinísticas em seu desenvolvimento, os algoritmos genéticos não são métodos de busca puramente aleatórios, pois combinam variações aleatórias com seleção, polarizada pelos valores de adequação atribuídos a cada indivíduo (Von Zuben, 2000).

Michalewicz (1996) lista os cinco componentes necessários a um algoritmo genético para um dado problema:

- Uma representação genética para os candidatos a solução;
- Uma maneira de se criar uma população inicial de soluções potenciais;
- Uma função de avaliação que classifique os indivíduos da população quanto à sua capacidade de resolver o problema em questão;
- Operadores genéticos;
- Valores para os diversos parâmetros utilizados pelo algoritmo genético (tamanho da população, probabilidade de aplicação dos operadores genéticos, etc.).

4.3.1.1. Codificação de Indivíduos

Cada indivíduo de uma população representa um potencial candidato à solução do problema em questão. No algoritmo genético clássico, proposto por Holland (1975), as soluções candidatas são codificadas em arranjos binários de tamanho fixo.

Entretanto, em diversas aplicações práticas a utilização de codificação binária leva a um desempenho insatisfatório (Von Zuben, 2000). Em problemas de otimização numérica com parâmetros reais, algoritmos genéticos com representação inteira (cada cromossomo é um vetor cujos elementos são números inteiros) ou em ponto flutuante (cada cromossomo é um vetor de números na representação em ponto flutuante) freqüentemente apresentam desempenho superior àqueles com codificação binária. Michalewicz (1996) apresenta simulações computacionais comparando o desempenho de algoritmos genéticos com codificação binária e com ponto flutuante aplicados a um problema de controle. Os resultados apresentados mostram uma clara superioridade da codificação em ponto flutuante.

4.3.1.2. Operadores de Inicialização

O método mais comum utilizado na definição da população inicial é a inicialização aleatória dos indivíduos. Se algum conhecimento inicial a respeito do problema estiver disponível, pode ser utilizado na inicialização da população.

4.3.1.3. Operadores Genéticos

Os operadores mais freqüentemente utilizados em algoritmos genéticos são os operadores de *crossover* e de mutação.

Operador de Crossover

O operador de *crossover* (ou *recombinação*) cria novos indivíduos através da combinação de dois ou mais indivíduos. A idéia intuitiva por trás do operador de *crossover* é a troca de informação entre diferentes soluções candidatas.

O operador de *crossover* mais comumente empregado é o *crossover* de um ponto. Para a aplicação desse operador, são selecionados dois indivíduos (pais) e, a partir de seus cromossomos, são gerados dois novos indivíduos (filhos). Para gerar os filhos, seleciona-se aleatoriamente um mesmo ponto de corte nos cromossomos dos pais; os segmentos de genes a partir do ponto de corte são trocados.

Muitos outros tipos de *crossover* têm sido propostos na literatura (cf. Bäck et al. (2000)). Por exemplo, no *crossover de dois pontos*, selecionam-se dois pontos de corte e faz-se a troca do material cromossômico entre eles. Já no *crossover uniforme* (Syswerda, 1989), para cada bit do primeiro filho é decidido (com alguma probabilidade fixa p) qual pai irá contribuir com seu valor para aquela posição; o segundo filho receberá o bit do outro pai. Não há, no entanto, nenhum operador de *crossover* que claramente apresente um desempenho superior aos demais. Os operadores de recombinação para cromossomos com codificação binária podem ser utilizados em cromossomos com codificação em ponto flutuante. Entretanto, existem operadores de *crossover* especialmente desenvolvidos para uso em indivíduos com codificação em ponto flutuante. Um exemplo é o *crossover aritmético* (Michalewicz & Schönauer, 1996). Este operador é definido como uma combinação de dois vetores (cromossomos): sejam x_1 e x_2 dois indivíduos selecionados para *crossover*; os dois filhos resultantes serão $x'_1 = ax_1 + (1-a)x_2$ e $x'_2 = ax_2 + (1-a)x_1$, onde a é um número aleatório pertencente ao intervalo $[0,1]$.

Outros operadores de recombinação são descritos em Michalewicz & Schönauer (1996).

Operador de mutação

O operador de mutação modifica aleatoriamente um ou mais genes de um cromossomo. A probabilidade de ocorrência de mutação em um gene é denominada *taxa de mutação*. A idéia intuitiva por trás do operador de mutação é criar uma variabilidade extra na população, mas sem destruir o progresso já obtido com a busca.

No caso de problemas com codificação binária, o operador de mutação padrão simplesmente troca o valor de um gene em um cromossomo (Michalewicz, 1996). No caso de problemas com codificação em ponto flutuante, o operador de mutação *uniforme*, por exemplo, seleciona aleatoriamente um componente do cromossomo $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_k, \dots, x_n]^T$, onde $k \in \{1, \dots, n\}$, e gera um indivíduo $\mathbf{x}' = [x_1, \dots, x'_k, \dots, x_n]^T$, em que x'_k é um número aleatório (com distribuição de probabilidade uniforme) amostrado no intervalo $[li_k, ls_k]$; li_k e ls_k são, respectivamente, os limites inferior e superior para o alelo x_k . Na *mutação não uniforme*, supondo que o gene x_l seja selecionado pelo operador genético, o cromossomo resultante será $\mathbf{x}' = [x_1, \dots, x'_l, \dots, x_n]^T$, em que

$$x'_l = \begin{cases} x_l + \Delta(t, ls_l - x_l), & \text{se um dado índice aleatório for 0;} \\ x_l - \Delta(t, x_l - li_l), & \text{se um dado índice aleatório for 1,} \end{cases}$$

onde li_l e ls_l são os limites inferior e superior para o alelo x_l , respectivamente. Nesse caso, a função $\Delta(t, y)$ retorna um valor no intervalo $[0, y]$ de sorte que a probabilidade de $\Delta(t, y)$ assumir um valor próximo de zero aumenta à medida que t aumenta. Essa característica faz com que o operador explore o espaço em busca de forma global inicialmente e, em gerações avançadas, de modo progressivamente local.

Outros operadores de mutação são descritos em Michalewicz & Schönauer (1996).

4.3.1.4. Operadores de Seleção

O algoritmo genético clássico utiliza um esquema de seleção de indivíduos para a próxima geração chamado *roulette wheel* (Michalewicz, 1996). O *roulette wheel* atribui a cada indivíduo de uma população uma probabilidade de passar para a próxima geração proporcional ao seu *fitness*. Assim, quanto mais apto for um indivíduo, maior será sua probabilidade de passar para a próxima geração. Com a seleção de indivíduos por *roulette wheel*, contudo, há o risco de que o melhor indivíduo da população seja perdido, ou seja, não passe para a próxima geração. Uma opção é manter sempre o melhor indivíduo da

geração atual na geração seguinte, estratégia esta conhecida como seleção *elitista*. A seleção elitista garante convergência assintótica. A taxa de convergência, porém, é específica para cada problema e, geralmente, desconhecida (Fogel, 1995).

Outros mecanismos de seleção podem ser encontrados em Bäck et al. (2000).

4.3.2. Utilização de Algoritmos Genéticos no Controle de Sistemas Dinâmicos

Bons projetos de sistemas de controle procuram, além de cumprir com seus objetivos principais – por exemplo, fazer com que um dado sistema em malha fechada siga um sinal de referência específico ao mesmo tempo em que é assegurada a estabilidade do sistema resultante e/ou a limitação de suas soluções –, atender a vários outros aspectos, tais como: garantir que o esforço de controle despendido no processo não seja elevado, fazer com que critérios de desempenho pré-determinados no início do projeto sejam atendidos (por exemplo, amplitude e duração máximas do transitório), etc. A observação de cada um desses pontos depende fortemente da estrutura que se estabelece para o controlador, assim como dos valores assumidos por seus parâmetros.

Como apontam Wang et al. (2003), a ausência de uma abordagem sistemática e intuitiva para a seleção de estruturas de controladores e de valores para seus parâmetros em projetos de controle de sistemas não lineares com incertezas é um grande obstáculo quando se almeja obter um desempenho satisfatório da resposta em malha fechada em termos das características expostas no parágrafo anterior. Nesses casos, metodologias auxiliares, associadas ao universo de problemas de otimização, podem ser incorporadas ao projeto de controle de modo a aliviar essa dificuldade.

Técnicas convencionais baseadas em gradiente, *hill climbing* e em busca aleatória são tidas, em geral, como insatisfatórias quando aplicadas em problemas de otimização não linear (Fogel, 1995), uma vez que suas superfícies de resposta normalmente possuem características como descontinuidades, não-diferenciabilidade e multimodalidade. Por outro

lado, o grande êxito verificado na aplicação de algoritmos evolutivos em problemas de otimização extremamente complexos oriundos de diversas disciplinas fez com que estes se tornassem as metodologias de otimização e busca preferidas para várias aplicações (Alander, 2004). Os algoritmos genéticos, em especial, têm se revelado eficazes em problemas que oferecem complicações maiores em sua formalização matemática e que têm, portanto, sua análise mais dificultada. Os benefícios apresentados pelos algoritmos genéticos tornaram-nos uma ferramenta valiosa a ser incorporada no projeto de sistemas de controle tanto como uma forma de se criar estruturas de controladores quanto como uma estratégia para a obtenção de parâmetros para um dado controlador conhecido (Jamshidi et al., 2002). Com relação a essa última abordagem, Dracopoulos (1997) aponta que seu êxito reside, especialmente, na possibilidade de se utilizar resultados de estabilidade previamente estabelecidos, ao mesmo tempo em que se atingem melhorias de desempenho.

A combinação criativa de uma multiplicidade de metodologias de controle pré-existentes (tradicionais ou não) e algoritmos genéticos resulta, potencialmente, em ferramentas poderosas na solução eficaz e eficiente de problemas de controle (Wang et al., 2003). Zuo (1995), por exemplo, propôs um esquema de controle no qual um controlador PID adaptativo multivariável é associado a um algoritmo genético (empregado para sua sintonia paramétrica *on line*) de sorte que o índice de desempenho definido para o sistema em malha fechada seja adequadamente minimizado e o comportamento resultante do sistema seja o prescrito. O controlador assim obtido foi aplicado no controle de atitude e no sistema de gerenciamento de momento de uma estação espacial. Como apontado por Wang et al. (2003), os resultados alcançados são notáveis em termos de robustez de estabilidade e qualidade de seguimento de referências num cenário de variação de momento de inércia entre 200% e 400%.

Outro exemplo de aplicação reside em problemas de controle de modos deslizantes, que apresentam a já aludida dificuldade de carência de um modo ótimo e sistemático para a seleção de ganhos de realimentação – que se torna mais grave à medida que seu número aumenta (Alander, 2004). Uma proposta de solução é a introduzida por Al-Hamouz et al. (2000): a conversão dessa seleção de ganhos num problema de otimização a ser tratado via

algoritmo genético. O método proposto é empregado no controle da frequência de carga de um sistema de potência, verificando-se melhorias tanto na performance do sistema em malha fechada quanto na magnitude do esforço de controle.

Ge et al. (1996) utilizaram algoritmos genéticos na elaboração de um controlador construído segundo critérios de estabilidade de Lyapunov para um robô com um elo flexível. O projeto levou em conta tanto critérios de estabilidade quanto de performance e seu objetivo principal consistia em levar a ponta da haste flexível para uma posição pré-definida tão rapidamente quanto possível com um mínimo de *overshoot* e duração de transitório. Para conseguir um bom compromisso entre a velocidade de rotação do motor na base do elo e a trajetória de deflexão da haste segundo tais critérios de desempenho, os ganhos de realimentação do controlador foram ajustados via um processo de otimização com algoritmo genético. Como apontam Ge et al. (1996), a maneira usual de se efetuar a seleção de parâmetros para leis de controle obtidas via Método Direto de Lyapunov tem sido a seleção aleatória de conjuntos de parâmetros e a posterior aplicação de testes simulados sucessivos nos mesmos até que se consiga uma performance tida como razoável. A aplicação do paradigma de otimização via algoritmos genéticos na busca de parâmetros adequados equivale a se agregar uma *metodologia* de ajuste automático de leis de controle à estrutura de projeto das mesmas – que garante, portanto, por um lado (i.e. Método Direto de Lyapunov), a estabilidade do sistema em malha fechada e, por outro (i.e. otimização via algoritmo genético), o atendimento dos critérios de performance de convergência da solução em termos de duração de transitório e da magnitude de *overshoot*. Um outro exemplo de uso de algoritmo genético conforme tal procedimento é apresentado em (Ge & Lee, 2001).

No universo de controle não linear, métodos estruturados no atendimento de critérios de estabilidade de Lyapunov têm obtido crescente destaque na literatura – como pode ser verificado, nos últimos anos, nas seções dedicadas dos congressos e periódicos de IEEE, IFAC e SBA, por exemplo –, especialmente a metodologia de *backstepping*. Também aqui, não há um processo consagrado para a definição dos parâmetros das leis de controle resultantes, mas a utilização de algoritmos genéticos, embora infrequente, tem se

mostrado bastante promissora: Steinberg & Page (1999), por exemplo, salientam a vital importância de se constatar, numa lei de controle para uso aeronáutico, não apenas garantias de estabilidade e convergência, mas também que a resposta resultante tenha uma conformação de transitório aceitável e, principalmente, magnitudes reduzidas de esforço de controle de forma a se evitar saturações nos atuadores. De fato, como apontam esses autores, o *backstepping* tradicional de Krstić et al.(1995) tende a gerar sinais de controle de amplitudes excessivas, o que torna a incorporação de mecanismos de otimização paramétrica uma necessidade. Em seu artigo, Steinberg & Page (1999) projetam controladores adaptativos de alto desempenho para um modelo não linear de aeronave com seis graus de liberdade. Um algoritmo genético foi empregado na determinação dos parâmetros, dada a dificuldade de se conseguir otimizar a performance de transitório num envelope de vôo conforme os critérios exigidos com outros métodos. Outros exemplos de aplicação de algoritmos genéticos a projetos de controle via *backstepping* são apresentados em Zhong et al. (2006) e Yang et al. (2006).

É de grande interesse, portanto, a utilização de algoritmos genéticos na definição de parâmetros de controladores construídos com base em *backstepping* que conduzam a um melhor desempenho em controle adaptativo em termos de esforço de controle e resposta transitória (no que tange a tempo de estabilização, magnitude de *overshoot*, eliminação de oscilações, etc.). Entretanto, visto que as leis de controle obtidas via *backstepping* adaptativo são fundamentadas em funções de Lyapunov – isto é, a metodologia de projeto alcança seus objetivos de estabilização e/ou seguimento de alguma referência pré-determinada através da construção de funções de Lyapunov adequadas, cujas derivadas em cada passo devem ser não positivas –, o campo de atuação de um algoritmo genético introduzido a fim de se otimizar os parâmetros desses controladores, embora com êxito em certas aplicações (como as citadas no parágrafo anterior), ainda é bastante limitado, uma vez que o Método Direto de Lyapunov e os requisitos do Princípio de Invariância sobre os quais se baseiam as técnicas de *backstepping* colocam restrições excessivas no espaço de busca paramétrico, tanto dimensionais quanto de factibilidade de regiões de exploração (ponto a ser explorado com mais detalhes no capítulo a seguir).

Trabalhos recentes no campo de equações diferenciais, contudo, resultaram em extensões interessantes aos requisitos clássicos de estabilidade. Rodrigues et al. (2002), por exemplo, propuseram uma generalização do Princípio de Invariância de La Salle que contempla o caso em que a derivada da função de Lyapunov ao longo das soluções do sistema sendo tratado pode ser positiva num conjunto limitado do espaço de estados (Teoremas 2.7 e 2.8). Com base nas novas premissas permitidas por essa Extensão ao Princípio de Invariância, pode-se modificar o procedimento de *backstepping* adaptativo tradicional de modo a fazer com que suas condições de estabilidade sejam menos severas – o que, como consequência, proporcionará o aumento da região factível do espaço de busca paramétrico e permitirá o pleno uso de um algoritmo genético para a obtenção de um conjunto de parâmetros que defina um controlador via *backstepping* adaptativo com melhor desempenho em termos de esforço de controle e conformação de resposta transitória. Tal abordagem será proposta no Capítulo 5 desta tese.

Capítulo 5

Proposta de *Backstepping* Modificado Aplicado a Sistemas Não Lineares com e sem Incertezas Paramétricas

5.1. Introdução

O *backstepping* adaptativo modificado proposto nesta tese emprega a Extensão do Princípio de Invariância de La Salle como base para a síntese de leis de controle que provêm estabilidade e convergência a uma classe de sistemas não lineares sem que se requeira que a derivada da função de Lyapunov ao longo das soluções do sistema seja (semi)definida negativa em todo o espaço de estados. Como será apresentado neste capítulo, tal característica permite que se obtenha um processo de controle mais eficiente – por exemplo, em termos de esforço de controle demandado –, no cotejo com a técnica tradicional de *backstepping* de Krstić et al. (1995), ao facilitar a incorporação de ferramentas de otimização baseadas em computação evolutiva no algoritmo de projeto do controlador.

A Seção 5.2 introduz a metodologia de *backstepping* adaptativo modificado aplicada a um sistema de realimentação estrita paramétrico. As Seções 5.2.1.2 e 5.2.1.3 trazem os passos do algoritmo recursivo e a Seção 5.2.1.4 contempla o processo de otimização do controlador. A aplicação de técnicas de computação evolutiva para esse fim resulta em uma melhoria substancial no desempenho da solução relativamente à diminuição do esforço de controle despendido e à adequada conformação da resposta transitória em

comparação aos melhores resultados conseguidos com a metodologia tradicional de *backstepping*. A Seção 5.3.1 apresenta a proposta de *backstepping* modificado aplicada a um sistema de realimentação estrita. Os exemplos de aplicação das Seções 5.2.2 e 5.3.2 evidenciam o método e suas vantagens.

5.2. Controle Adaptativo de Sistemas de Realimentação Estrita Paramétricos com Melhor Desempenho Utilizando *Backstepping* Modificado

Esta seção propõe um procedimento genérico para a obtenção de controladores – cujos parâmetros podem ser otimizados segundo algum critério conveniente com base na flexibilização do *backstepping* – aplicável em sistemas não lineares de realimentação estrita com incertezas da forma

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= k_1 x_2 + \boldsymbol{\theta}^T F_1(x_1, t) + f_1(x_1, t) \\
 \dot{x}_2 &= k_2 x_3 + \boldsymbol{\theta}^T F_2(x_1, x_2, t) + f_2(x_1, x_2, t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_i &= k_i x_{i+1} + \boldsymbol{\theta}^T F_i(x_1, \dots, x_i, t) + f_i(x_1, \dots, x_i, t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= g(\mathbf{x})u + \boldsymbol{\theta}^T F_n(\mathbf{x}, t) + f_n(\mathbf{x}, t)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

O sistema (5.1) segue a conformação de um sistema de realimentação estrita paramétrico (vide Equação (3.79), onde, aqui, $g_i(x_1, \dots, x_i, t) = k_i$, com $i = 1, \dots, n-1$) onde $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathfrak{R}^n$ é o estado e $u \in \mathfrak{R}$ é a entrada. As funções F_i , f_i e $g \neq 0$, com $i = 1, \dots, n$, são não-linearidades suaves conhecidas. Os termos k_i , com $i = 1, \dots, n-1$, são escalares constantes não nulos e $\boldsymbol{\theta} \in \mathfrak{R}^q$ é o vetor de parâmetros constantes, porém desconhecidos. Supõe-se que $y = x_1 \in \mathfrak{R}$ seja a saída do sistema. Visa-se a que y siga a referência y_r , em que y_r é a saída (i.e. $y_r = x_{r1}(t)$) do sistema de referência

$$\begin{cases} \dot{x}_{ri} = f_{ri}(\mathbf{x}_r, t), 1 \leq i \leq m, n \leq m \\ y_r = x_{r1}(t) \end{cases} \tag{5.2}$$

onde $\mathbf{x}_r = [x_{r1}, \dots, x_{rm}]^T \in \mathfrak{R}^m$ é o estado, y_r é a saída e f_{ri} , com $i = 1, \dots, m$, são não-linearidades suaves conhecidas.

5.2.1. Proposta de Algoritmo Genérico para Síntese de Controladores Eficientes para Sistemas Não Lineares de Realimentação Estrita com Incertezas

O projeto de controladores consoante a metodologia de *backstepping* é composto de n passos. Cada passo consiste na geração de uma lei de controle virtual por meio de uma função de Lyapunov quadrática. A expressão “função de Lyapunov” neste capítulo também compreende o caso em que sua derivada é permitida ser positiva.

5.2.1.1. Passo 1

O processo se inicia pela definição da variável de erro relativa à saída do sistema:

$$z_1 = x_1 - y_r \quad (5.3)$$

onde y_r é o sinal de referência desejado. Derivando (5.3) ao longo de (5.1) e (5.2), chega-se a

$$\dot{z}_1 = k_1(x_2 - x_{r2}) + k_1 x_{r2} + \boldsymbol{\theta}^T F_1 + f_1 - f_{r1} \quad (5.4)$$

A variável de erro correspondente à segunda variável de estado é dada por

$$z_2 := x_2 - x_{r2} - \alpha_1 \quad (5.5)$$

onde α_1 é a lei de controle intermediária quando $x_2 - x_{r2}$ é considerado como entrada de controle virtual. Portanto:

$$\dot{z}_1 = k_1 z_2 + k_1 \alpha_1 + \boldsymbol{\theta}^T F_{1s} + f_{1s} \quad (5.6)$$

onde $F_{1s} = F_1$ e $f_{1s} = f_1 - f_{r1} + k_1 x_{r2}$. A função de Lyapunov (i.e. “*Lyapunov-like*”) para o subsistema (5.6) é a seguinte:

$$V_1 = \frac{1}{2}(z_1 - a_1)^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1)^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1) \quad (5.7)$$

onde $\Gamma = \Gamma^T > 0$ é a matriz de ganhos, $a_1 \in \mathfrak{R}$ é um escalar constante e $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ é o vetor com as estimativas paramétricas deste passo. A derivada de (5.7) ao longo de (5.6) é dada por

$$\dot{V}_1 = z_1(k_1 z_2 + k_1 \alpha_1 + \boldsymbol{\theta}^T F_{1s} + f_{1s}) - a_1 \dot{z}_1 - (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1)^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_1 \quad (5.8)$$

A lei de controle intermediária α_1 é definida:

$$\alpha_1 = \frac{1}{k_1} (-c_{11} z_1 - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1^T F_{1s} - f_{1s}) \quad (5.9)$$

onde $c_{11} \in \mathfrak{R}$ é um escalar constante. O subsistema z_1 (5.6) pode, agora, ser reescrito da seguinte forma:

$$\dot{z}_1 = -c_{11} z_1 + k_1 z_2 + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1)^T F_{1s} \quad (5.10)$$

Com (5.9), (5.10) e a lei de atualização paramétrica

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_1 = \Gamma F_{1s} (z_1 - a_1) \quad (5.11)$$

chega-se a

$$\dot{V}_1 = -c_{11} z_1^2 + k_1 z_1 z_2 + a_1 c_{11} z_1 - a_1 k_1 z_2 \quad (5.12)$$

Deve-se ressaltar que, ao contrário do que é demandado na metodologia tradicional de *backstepping* (Krstić et al., 1995), não se requer aqui que c_{11} seja estritamente positivo. Valores negativos para c_{11} são permitidos.

5.2.1.2. Passo i ($2 \leq i \leq n-1$)

O i -ésimo passo, com $2 \leq i \leq n-1$, se inicia com a definição da variável de erro z_i :

$$z_i := x_i - x_{r_i} - \alpha_{i-1} \quad (5.13)$$

Sua derivada é dada por

$$\dot{z}_i = k_i (x_{i+1} - x_{r,i+1}) + \boldsymbol{\theta}^T F_{is} + f_{is} \quad (5.14)$$

onde

$$F_{is} = F_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} F_j \quad (5.15)$$

e

$$f_{is} = f_i - f_{ri} + k_i x_{r,i+1} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} (k_j x_{j+1} + f_j) - \sum_{j=1}^m \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_{rj}} f_{rj} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}_j} \dot{\hat{\theta}}_j - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial t} \quad (5.16)$$

A variável de erro correspondente à $(i+1)$ -ésima variável de estado é expressa por

$$z_{i+1} := x_{i+1} - x_{r,i+1} - \alpha_i \quad (5.17)$$

onde α_i é a lei de controle intermediária quando $x_{i+1} - x_{r,i+1}$ é considerado como entrada de controle virtual. Portanto:

$$\dot{z}_i = k_i z_{i+1} + k_i \alpha_i + \theta^T F_{is} + f_{is} \quad (5.18)$$

A função de Lyapunov para o subsistema (5.18) é a seguinte:

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} (z_i - a_i)^2 + \frac{1}{2} (\theta - \hat{\theta}_i)^T \Gamma^{-1} (\theta - \hat{\theta}_i) \quad (5.19)$$

onde $\Gamma = \Gamma^T > 0$ é uma matriz de ganhos, $a_i \in \mathfrak{R}$ é um escalar constante e $\hat{\theta}_i$ é o vetor com as estimativas paramétricas deste passo. A derivada de V_i ao longo dos subsistemas z_j anteriores, com $j = 1, \dots, i-1$, é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & - \sum_{j=1}^{i-1} \left(\sum_{t=j}^{i-1} c_{j,t} z_j z_t \right) - (\theta - \hat{\theta}_i)^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}_i - a_i \dot{z}_i + \sum_{j=1}^{(i>2) i-2} \left(\sum_{t=j}^{i-1} a_t c_{j,t} + a_{j+1} k_j - a_{j-1} k_{j-1} \right) z_j + \\ & + \left(a_{i-1} c_{i-1,i-1} - a_{i-2} k_{i-2} \right) z_{i-1} - a_{i-1} k_{i-1} z_i + z_i (k_{i-1} z_{i-1} + k_i z_{i+1} + k_i \alpha_i + \theta^T F_{is} + f_{is}) \end{aligned} \quad (5.20)$$

A lei de controle intermediária α_i é definida por:

$$\alpha_i = \frac{1}{k_i} \left(-k_{i-1} z_{i-1} - \sum_{j=1}^i c_{j,i} z_j - \hat{\theta}_i^T F_{is} - f_{is} \right) \quad (5.21)$$

onde $c_{j,i} \in \mathfrak{R}$, com $j = 1, \dots, i$, são escalares constantes. Ao contrário do que é demandado no *backstepping* tradicional (Krstić et al., 1995), não se requer aqui que $c_{j,i}$ seja estritamente positivo. O subsistema z_i (5.18) pode, agora, ser reescrito da seguinte forma:

$$\dot{z}_i = - \sum_{j=1}^{(i>2) i-2} c_{j,i} z_j - (c_{i-1,i} + k_{i-1}) z_{i-1} - c_{i,i} z_i + k_i z_{i+1} + (\theta - \hat{\theta}_i)^T F_{is} \quad (5.22)$$

Com (5.21), (5.22) e a lei de atualização paramétrica

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \Gamma F_{is} (z_i - a_i) \quad (5.23)$$

chega-se a

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & -\sum_{j=1}^i \left(\sum_{t=j}^i c_{j,t} z_j z_t \right) + k_i z_i z_{i+1} + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\sum_{t=j}^i a_t c_{j,t} + a_{j+1} k_j - a_{j-1} k_{j-1} \right) z_j + \\ & + (a_i c_{i,i} - a_{i-1} k_{i-1}) z_i - a_i k_i z_{i+1} \end{aligned} \quad (5.24)$$

5.2.1.3. Passo n ($n \geq 2$)

O n -ésimo passo, com $n \geq 2$, se inicia com a definição da variável de erro correspondente à última variável de estado, z_n :

$$z_n := x_n - x_m - \alpha_{n-1} \quad (5.25)$$

Sua derivada é dada por

$$\dot{z}_n = gu + \boldsymbol{\theta}^T F_{ns} + f_{ns} \quad (5.26)$$

onde

$$F_{ns} = F_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} F_j \quad (5.27)$$

e

$$f_{ns} = f_n - f_m - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} (k_j x_{j+1} + f_j) - \sum_{j=1}^m \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_{rj}} f_{rj} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}_j} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_j - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial t} \quad (5.28)$$

A função de Lyapunov para o sistema completo (5.1) é a seguinte:

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} (z_n - a_n)^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_n)^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_n) \quad (5.29)$$

onde $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}^T > 0$ é uma matriz de ganhos, $a_n \in \mathfrak{R}$ é um escalar constante e $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ é o vetor com as estimativas paramétricas deste último passo. A derivada de (5.29) ao longo dos subsistemas z_j anteriores, com $j = 1, \dots, n-1$, e de (5.26) é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_n = & -\sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{t=j}^{n-1} c_{j,t} z_j z_t \right) - (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_n)^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_n - a_n \dot{z}_n + \sum_{j=1}^{(n>2)n-2} \left(\sum_{t=j}^{n-1} a_t c_{j,t} + a_{j+1} k_j - a_{j-1} k_{j-1} \right) z_j + \\ & + \left(a_{n-1} c_{n-1,n-1} - a_{n-2} k_{n-2} \right) z_{n-1} - a_{n-1} k_{n-1} z_n + z_n (k_{n-1} z_{n-1} + gu + k_i \alpha_i + \boldsymbol{\theta}^T F_{ns} + f_{ns}) \end{aligned} \quad (5.30)$$

A lei de controle para o sistema completo (5.1) pode ser, finalmente, definida:

$$u = \frac{1}{g} \left(-k_{n-1} z_{n-1} - \sum_{j=1}^n c_{j,n} z_j - \hat{\theta}_n^T F_{ns} - f_{ns} \right) \quad (5.31)$$

onde $c_{j,n} \in \mathfrak{R}$, com $j=1, \dots, n$, são escalares constantes. O subsistema z_n (5.26) pode, agora, ser reescrito em sua forma definitiva:

$$\dot{z}_n = - \sum_{j=1}^{(n>2)n-2} c_{j,n} z_j - (c_{n-1,n} + k_{n-1}) z_{n-1} - c_{n,n} z_n + (\theta - \hat{\theta}_n)^T F_{ns} \quad (5.32)$$

Com a lei de atualização paramétrica

$$\dot{\hat{\theta}}_n = \Gamma F_{ns} (z_n - a_n) \quad (5.33)$$

e substituindo-se (5.31) em (5.30), chega-se a

$$\begin{aligned} \dot{V}_n = & - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{t=j}^n c_{j,t} z_j z_t \right) + \sum_{j=1}^{(n>2)n-2} \left(\sum_{t=j}^n a_t c_{j,t} + a_{j+1} k_j - a_{j-1} k_{j-1} \right) z_j + \\ & + \left(a_{n-1} c_{n-1,n-1} + a_n c_{n-1,n} + a_n k_{n-1} - a_{n-2} k_{n-2} \right) z_{n-1} + (a_n c_{n,n} - a_{n-1} k_{n-1}) z_n \end{aligned} \quad (5.34)$$

5.2.1.4. Otimização Paramétrica do Controlador via Computação Evolutiva

Conforme a notação adotada no Teorema 2.7 da Seção 2.3.5.1, o conjunto C , em que a derivada da função de Lyapunov é definida positiva, é definido tal como segue:

$$C := \{z \in \mathfrak{R}^n : \dot{V}_n > 0\} \quad (5.35)$$

De acordo com a Extensão do Princípio de Invariância de La Salle, consegue-se o controle adaptativo do sistema de realimentação estrita paramétrico (5.1) quando o conjunto C for limitado, uma vez que a função de Lyapunov (5.29) é radialmente ilimitada (é aplicável, aqui, o Teorema 2.8). A equação $\dot{V}_n = 0$ representa vários tipos de lugares geométricos. Dependendo dos valores assumidos pelo conjunto de parâmetros $\{c_{j,t} \in \mathfrak{R} : j=1, \dots, n; t=j, \dots, n\}$, o conjunto C será limitado ou ilimitado. Testes geométricos baseados nos coeficientes da forma quadrática \dot{V}_n podem ser conduzidos de maneira a se avaliar a limitação ou não de C (Zwillinger, 1996).

Tanto o formato de C quanto o desempenho da lei de controle (5.31) no que tange ao esforço de controle demandado fundamentam-se nos valores adotados pelo conjunto de parâmetros $\{c_{j,t} \in \mathfrak{R} : j = 1, \dots, n; t = j, \dots, n\}$. Isso faz com que seja possível a utilização de técnicas de otimização nesses parâmetros de forma a se conseguir um processo de controle mais eficiente. Uma maior eficiência no processo de controle equivale, aqui, a uma minimização da magnitude do sinal de esforço de controle aliado ao requisito de se manter uma qualidade satisfatória dos sinais de saída de interesse (no caso, em termos de uma duração de transiente não excessiva). Como a restrição representada pela limitação de C é, conforme a Extensão do Princípio de Invariância, um requisito para estabilidade, tem-se, portanto, a seguinte tarefa de otimização associada à metodologia proposta de *backstepping* adaptativo modificado:

$$\{c_{i,j}\} = \arg \min_{\{c_{i,j}\}} \left[(\text{magnitude de } u) + \left(\begin{array}{c} \text{duração do transitório das variáveis} \\ \text{de estado de } \mathbf{x} \end{array} \right) \right] \quad (5.36)$$

sujeito a $\{\text{limitação do conjunto } C \text{ determinada pelos coeficientes de } \dot{V}_n\}$

onde $i, j = 1, \dots, n$.

De acordo com o Teorema de *No Free Lunch* (Wolpert & Macready, 1997), não existe uma única ferramenta que resolva *todos* os problemas de maneira ótima. Na resolução de problemas de otimização, por exemplo, métodos clássicos e dedicados mostram-se mais eficientes do que, por exemplo, algoritmos evolutivos quando são válidas hipóteses restritivas quanto ao espaço de busca, tais como: continuidade, existência de derivadas, convexidade, unimodalidade, etc. Por outro lado, como destaca Von Zuben (2000), algoritmos evolutivos são capazes de lidar com problemas para os quais não é possível ou é muito custoso obter uma descrição detalhada, ou ainda junto aos quais não é possível suportar restrições muito fortes (ambas condições necessárias para a aplicação de ferramentas de solução dedicadas). Por exemplo, algoritmos de programação linear requerem que a função-objetivo seja linear; caso ela não seja linear, algoritmos de busca baseados no gradiente requerem que a função-objetivo seja diferenciável e que se possa calcular essa derivada a um baixo custo computacional. Na ausência de linearidade e na impossibilidade de se obter a derivada (seja porque ela não existe ou por representar uma

etapa muito custosa) da função-objetivo, os algoritmos evolutivos passam a representar uma das poucas alternativas de se chegar à solução.

Para o problema (5.36), não é possível obter formalização e descrição apropriadas para o uso de métodos convencionais (baseados em gradientes, por exemplo). De fato, a função-objetivo em (5.36) não permite o cômputo de derivadas e características do espaço de busca cujo conhecimento é necessário para a aplicação desses métodos – continuidade, convexidade, etc. – não são passíveis de verificação. Opta-se, portanto, pela utilização de técnicas de otimização baseadas em computação evolutiva na busca de valores adequados para $\{c_{j,t} \in \mathfrak{R} : j = 1, \dots, n; t = j, \dots, n\}$.

O emprego de algoritmos genéticos (Michalewicz, 1996), em particular, em problemas cuja formalização matemática para o uso de técnicas convencionais é tida como inviável, tais como o controle adaptativo otimizado de sistemas não lineares com espaço de busca descontínuo, não diferenciável, não convexo e/ou multimodal, tem conduzido a resultados bastante satisfatórios (Fleming & Purshouse, 2001). Por exemplo, problemas que requerem busca dentre um número muito grande de candidatos à solução podem se beneficiar do paralelismo inerente aos algoritmos genéticos, em que muitas possibilidades de solução são exploradas simultaneamente. Por conta disso, a probabilidade de convergência a soluções subótimas é reduzida e a identificação de regiões de melhor performance no espaço de busca é acelerada sem que sejam verificados problemas decorrentes de sua potencialmente elevada dimensionalidade.

Como apresentado na Seção 4.3.2, as vantagens exclusivas oferecidas pelos algoritmos genéticos tornaram-nos, ao longo dos anos, uma ferramenta valiosa a ser incorporada no projeto de sistemas de controle seja como uma forma de se projetar estruturas para controladores, seja como uma estratégia para a obtenção de parâmetros para uma lei de controle conhecida (Fleming & Purshouse, 2001). Novamente, com respeito a esta última abordagem, Dracopoulos (1997) ressalta que seu êxito reside, especialmente, na possibilidade de se utilizar resultados de estabilidade do controlador previamente

estabelecidos, ao mesmo tempo em que se atinge um melhor desempenho na tarefa de controle.

Destaca-se, contudo, que, como enfatiza De Jong (1985), os algoritmos genéticos não são diretamente comparáveis a algoritmos tradicionais de otimização, visto que não garantem convergência para o mesmo ótimo local quando executados várias vezes. Por outro lado, a otimização é um dos campos mais significativos do espectro de aplicações dos algoritmos genéticos, pois excelentes resultados são obtidos quando do emprego desses algoritmos em problemas de otimização de elevada complexidade, nos quais não é possível o uso de métodos tradicionais (Michalewicz, 1996). Dessa forma, embora não assegurem eficiência total na obtenção da solução, podendo não convergir para o ótimo global, os algoritmos genéticos geralmente garantem a obtenção de uma “boa aproximação” para a solução.

É importante ressaltar que não seria, em princípio, possível a introdução de um algoritmo genético para otimizar os parâmetros de um controlador obtido por meio da técnica tradicional de *backstepping* adaptativo (Krstić et al., 1995) que resultasse num desempenho satisfatório do sistema controlado (em termos de esforço de controle demandado, por exemplo) comparado à metodologia aqui proposta, pois as condições exigidas pelo Método Direto de Lyapunov (Teorema 2.5) e pelo Princípio de Invariância de La Salle (Teorema 2.6) estabelecem fortes restrições no espaço de busca paramétrico, expressas tanto na quantidade reduzida de parâmetros otimizáveis (vide Tabela 5.1) quanto na obrigatoriedade de que estes sejam estritamente positivos (Seção 3.8).

Metodologia	Ordem do sistema	Parâmetros otimizáveis
<i>Backstepping</i> adaptativo tradicional	n	n
<i>Backstepping</i> adaptativo modificado	n	$n^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k$

Tabela 5.1. Comparação entre o número de parâmetros potencialmente otimizáveis no *backstepping* adaptativo proposto nesta tese e na metodologia tradicional.

O *backstepping* adaptativo modificado aqui proposto permite, por ser estruturado na generalização do Princípio de Invariância de La Salle apresentada por Rodrigues (2002) (que, reforça-se, inclui o caso em que a derivada da função de Lyapunov ao longo das soluções do sistema pode ser positiva num conjunto limitado do espaço de estados), que as condições de estabilidade tornem-se menos severas, aumentando a dimensão e a região factível do espaço de busca paramétrico; possibilitando, assim, o emprego satisfatório de algoritmos genéticos na busca de parâmetros que conduzam a um melhor desempenho do controlador em termos de esforço de controle e outros critérios de performance.

5.2.2. Exemplo de Aplicação – Controle Adaptativo Otimizado de Sistemas Caóticos com Incertezas

Comportamentos de estado estacionário caóticos podem ser observados em muitos sistemas físicos (Ott, 1997). Por exemplo, fenômenos de turbulência em mecânica de fluidos, vibrações aparentemente aleatórias em sistemas elétricos ou mecânicos e oscilações atmosféricas imprevisíveis. Tais acontecimentos irregulares e complexos são usualmente indesejáveis. Muitas aplicações práticas demandam o controle de fenômenos caóticos – para se evitar, por exemplo, falhas advindas de fadiga num sistema mecânico –, de modo que se consiga que a trajetória estacionária do sistema seja periódica ou, preferencialmente, que seja atraída para um ponto fixo. O problema de controle do caos é, portanto, um campo de pesquisas importante na área de sistemas não lineares (Fradkov & Pogromsky, 1998), (Chen & Dong, 1998).

Em aplicações reais, nem sempre é possível conhecer por completo o modelo do sistema caótico com o qual se está trabalhando. Nestes casos, é requerida a aplicação de técnicas que reflitam esse conhecimento apenas parcial do sistema de modo a se conseguir o controle do sistema caótico. Grosso modo, há duas abordagens para o controle por realimentação de um sistema caótico com incertezas: controle baseado em dados e controle baseado em modelo.

A abordagem baseada em dados segue, geralmente, a técnica tradicional proposta por Ott, Grebogi e Yorke (OGY), (Ott et al., 1990), que consiste, em linhas gerais, na seleção de uma resposta desejada dentre a grande variedade de padrões naturalmente presentes em um atrator estranho (Ott, 1997) e na estabilização desse padrão por meio da aplicação controlada de pequenas modificações em algum parâmetro acessível do sistema. A metodologia OGY converte, dessa forma, uma resposta caótica em uma das órbitas periódicas contida no atrator estranho. Com a incorporação de atraso de coordenadas, o método OGY é aplicável em situações nas quais um conhecimento analítico *a priori* da dinâmica do sistema não está disponível. A aplicação da metodologia OGY, entretanto, é limitada por conta de, por exemplo, erros de medição (Fuh & Tung, 1995). Um sistema dinâmico não linear com comportamento de regime caótico tem esse tipo de erro amplificado de forma exponencial no decorrer do tempo, de tal modo que a trajetória pode não ser controlada com a precisão necessária para o método OGY. Além disso, é essencial o desenvolvimento de metodologias de controle que sejam capazes não somente de fazer com que o sistema siga uma órbita periódica, mas também de fazer com que se encaminhe a um estado de equilíbrio, pois soluções na forma de pontos fixos representam o modo de operação mais vantajoso em muitos sistemas não lineares, tais como circuitos eletrônicos (Madan, 1993). Ainda, com o propósito de se obter abordagens de aplicabilidade mais geral é desejável que se desenvolvam técnicas que não sejam relacionadas a um sistema caótico em particular.

A abordagem baseada em modelo elimina essas desvantagens, mas exige algum conhecimento analítico do modelo do sistema sobre o qual será estruturado o projeto de controle por realimentação. Nesse caso, normalmente as incertezas consistem em parâmetros desconhecidos que aparecem linearmente nas equações do sistema. Técnicas de linearização por realimentação adaptativa são exemplos de abordagens baseadas em modelo. A introdução de linearização por realimentação adaptativa no controle de caos (vide, por exemplo, Fradkov (2000) e as referências ali citadas) permite que se converta uma resposta de regime caótica para qualquer padrão de estado estacionário desejado (órbita periódica ou ponto fixo). Uma vantagem importante consiste no fato de que a referência de estado estacionário pode ser qualquer ponto de equilíbrio ou órbita periódica

arbitrária, mesmo fora do atrator estranho. A idéia principal do esquema é transformar algebricamente um sistema não linear em um sistema cuja dinâmica seja linear, de tal modo que técnicas de controle linear possam ser aplicadas. Abordagens fundamentadas em linearização por realimentação, no entanto, apresentam a desvantagem de requerer um esforço de controle excessivo, pois objetivam antes a linearização do sistema ao invés de estabilização ou seguimento de alguma referência.

Como ferramentas de uso genérico, metodologias fundamentadas em funções de Lyapunov têm sido largamente utilizadas no projeto de leis de controle para sistemas caóticos com incertezas paramétricas (vide, por exemplo, Dong et al. (1997) e Fradkov (2000)). Em especial, o *backstepping* adaptativo (Krstić et al., 1995) tornou-se um dos métodos de projeto mais populares no campo do controle adaptativo não linear, tendo, inclusive, se revelado uma técnica eficaz de controle de caos (Ge, Wang & Lee, 2000). Por conta de sua sistematização, o *backstepping* é aplicável a vários tipos de sistemas caóticos (Ge, Wang & Lee, 2000). Todavia, em algumas aplicações, como, por exemplo, na estabilização de circuitos de Chua com incertezas, o esforço de controle resultante do emprego do projeto de *backstepping* tradicional pode ser considerado elevado. De fato, magnitudes elevadas de esforço de controle na estabilização de um sistema caótico acarretam um dispêndio excessivo e desnecessário de energia. É desejável, assim, a concepção de sistemas de controle adaptativo de caos que mantenham a sistematização dos processos de *backstepping* ao mesmo tempo em que incorporem mecanismos de otimização de maneira a reduzir o esforço de controle. A metodologia de *backstepping* adaptativo modificado apresentada nesta seção atende a esta necessidade, como será evidenciado pelo exemplo numérico a seguir.

5.2.2.1. Controle Eficiente de Caos em Modelo de Circuito de Chua com Incertezas Paramétricas

Circuitos eletrônicos analógicos são exemplos conhecidos de sistemas que exibem respostas não lineares caóticas. Dentre esses sistemas, o circuito de Chua tornou-se um paradigma, por conta de sua relativa simplicidade e riqueza de padrões de comportamento.

Esta seção traz o projeto de controle adaptativo otimizado com *backstepping* modificado aplicado ao circuito de Chua adimensional (Madan, 1993):

$$\begin{aligned}\dot{x}'_1 &= p_1 x'_2 - p_2 x'_1 - p_3 (|x'_1 + 1| - |x'_1 - 1|) \\ \dot{x}'_2 &= p_4 x'_1 - p_5 x'_2 + p_6 x'_3 \\ \dot{x}'_3 &= -p_7 x'_2\end{aligned}\tag{5.37}$$

As equações (5.37) podem ser escritas na forma de um sistema de realimentação estrita paramétrico com o auxílio da seguinte transformação de variáveis de estado: $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$ e $x_3 = x'_1$. Assim, com $b_1 = p_7$, $b_2 = p_4$, $\theta_1 = p_6$, $\theta_2 = p_5$, $\theta_3 = p_1$, $\theta_4 = p_2$ e $\theta_5 = p_3$ chega-se a

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -b_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= b_2 x_3 + \theta_1 x_1 - \theta_2 x_2 \\ \dot{x}_3 &= u + \theta_3 x_2 - \theta_4 x_3 - \theta_5 (|x_3 + 1| - |x_3 - 1|)\end{aligned}\tag{5.38}$$

onde é suposta a introdução de um controlador u na terceira equação. Comparando (5.38) com (5.1) e levando-se em conta que os elementos do vetor $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5]^T$ são desconhecidos, tem-se que

$$\begin{aligned}k_1 &= -b_1 \\ k_2 &= b_2 \\ g(\mathbf{x}) &= 1 \\ f_1 &= f_2 = f_3 = 0 \\ F_1(\cdot) &= [0, 0, 0, 0, 0]^T \\ F_2(\cdot) &= [x_1, -x_2, 0, 0, 0]^T \\ F_3(\cdot) &= [0, 0, x_2, -x_3, -(|x_3 + 1| - |x_3 - 1|)]^T\end{aligned}\tag{5.39}$$

Objetiva-se a determinação de uma lei de controle via realimentação de estado que garanta a regulação do estado $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ na origem e a limitação de todos os sinais (variáveis de estado, controle, estimativas paramétricas) no sistema em malha fechada com o menor esforço de controle possível.

Passo 1. É definida, inicialmente, a variável auxiliar correspondente à primeira variável de estado:

$$z_1 = x_1\tag{5.40}$$

A derivada de (5.40) é dada por:

$$\dot{z}_1 = -b_1 x_2 \quad (5.41)$$

Considerando-se x_2 como entrada virtual de controle, projeta-se a lei de controle intermediária α_1 . A diferença entre o valor real da variável x_2 e α_1 é definida como sendo a segunda variável de erro:

$$z_2 = x_2 - \alpha_1 \quad (5.42)$$

Assim, (5.41) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\dot{z}_1 = -b_1 z_2 - b_1 \alpha_1 \quad (5.43)$$

Introduz-se a função de Lyapunov relativa ao subsistema (5.43):

$$V_1 = \frac{1}{2}(z_1 - 1)^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1)^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1) \quad (5.44)$$

onde $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ é o vetor de estimativas paramétricas deste passo e $\boldsymbol{\Gamma} = \text{diag}\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_5\} > 0$ é a matriz de ganhos. A derivada de (5.44) ao longo de (5.43) é dada por

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 - \dot{z}_1 - (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1)^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_1 \quad (5.45)$$

Aplicando-se a lei de controle intermediária

$$\alpha_1 = \frac{1}{b_1} c_{11} z_1 \quad (5.46)$$

onde $c_{11} \in \mathfrak{R}$ é um escalar constante, e a lei de atualização paramétrica deste passo $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_1$,

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_1 = \mathbf{0} \quad (5.47)$$

tem-se que

$$\dot{V}_1 = -c_{11} z_1^2 - b_1 z_1 z_2 + c_{11} z_1 + b_1 z_2 \quad (5.48)$$

O termo de acoplamento $-b_1 z_1 z_2$ será cancelado no próximo passo. Pode-se, agora, exprimir o subsistema z_1 em sua forma definitiva:

$$\dot{z}_1 = -c_{11} z_1 - b_1 z_2 \quad (5.49)$$

Passo 2. A derivada de z_2 pode ser expressa como

$$\dot{z}_2 = b_2 x_3 + \theta_1 x_1 - \theta_2 x_2 + c_{11} x_2 \quad (5.50)$$

De maneira análoga ao passo anterior, x_3 é considerado como entrada virtual de (5.50). A lei de controle intermediária correspondente é α_2 . A terceira variável de erro é definida como

$$z_3 = x_3 - \alpha_2 \quad (5.51)$$

A função de Lyapunov deste passo é dada por

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}(z_2 - 1)^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_2)^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_2) \quad (5.52)$$

onde $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2$ é o vetor de estimativas paramétricas deste passo. A derivada de (5.52) ao longo de (5.49) e (5.50) é expressa por

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -c_{11}z_1^2 + c_{11}z_1 + b_1z_2 + z_2(-b_1z_1 + b_2z_3 + \\ & + b_2\alpha_2 + \boldsymbol{\theta}_1x_1 - \boldsymbol{\theta}_2x_2 + c_{11}x_2) - \dot{z}_2 - (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_2)^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_2 \end{aligned} \quad (5.53)$$

Como $\boldsymbol{\theta}$ é desconhecido, α_2 emprega a estimativa $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2$:

$$\alpha_2 = \frac{1}{b_2}(b_1z_1 - c_{11}x_2 - \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(1)}x_1 + \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(2)}x_2 - c_{12}z_1 - c_{22}z_2) \quad (5.54)$$

onde $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 = [\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(1)}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(2)}, \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(5)}]^T$ e $c_{12}, c_{22} \in \mathfrak{R}$ são escalares constantes. Pode-se, agora, escrever o subsistema z_2 em sua forma definitiva:

$$\dot{z}_2 = -(c_{12} - b_1)z_1 - c_{22}z_2 + b_2z_3 + (\boldsymbol{\theta}_1 - \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(1)})x_1 - (\boldsymbol{\theta}_2 - \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(2)})x_2 \quad (5.55)$$

Com (5.54), (5.55) e as leis de atualização paramétricas

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_2^{(1)} &= \Gamma_1 x_1 (z_2 - 1) \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_2^{(2)} &= -\Gamma_2 x_2 (z_2 - 1) \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_2^{(3)} &= 0 \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_2^{(4)} &= 0 \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_2^{(5)} &= 0 \end{aligned} \quad (5.56)$$

chega-se a

$$\dot{V}_2 = -c_{11}z_1^2 - c_{22}z_2^2 - c_{12}z_1z_2 + (c_{11} + c_{12} - b_1)z_1 + (c_{22} + b_1)z_2 - b_2z_3 + b_2z_2z_3 \quad (5.57)$$

O termo de acoplamento $b_2z_2z_3$ será cancelado no próximo passo.

Passo 3. A derivada de z_3 pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_3 &= \dot{x}_3 - \dot{\alpha}_2 \\
&= u + \frac{1}{b_2} (c_{11} + c_{22} - \hat{\theta}_2^{(2)}) (x_1 \theta_1 - x_2 \theta_2) + x_2 \theta_3 - x_3 \theta_4 + (|x_3 + 1| - |x_3 - 1|) \theta_5 + \\
&\quad + \frac{b_1}{b_2} (b_1 - c_{12} - \hat{\theta}_2^{(1)}) x_2 - (c_{11} + c_{22} - \hat{\theta}_2^{(2)}) x_3 - x_1 \dot{\hat{\theta}}_2^{(1)} + x_2 \dot{\hat{\theta}}_2^{(2)}
\end{aligned} \tag{5.58}$$

A função de Lyapunov do sistema (5.38) é a seguinte:

$$V = V_3 = V_2 + \frac{1}{2} (z_3 - 1)^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_3)^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_3) \tag{5.59}$$

onde $\hat{\boldsymbol{\theta}}_3$ é o vetor de estimativas paramétricas deste passo. A derivada de (5.59) ao longo de (5.49), (5.55) e (5.58) é dada por

$$\begin{aligned}
\dot{V}_3 &= -c_{11} z_1^2 - c_{22} z_2^2 - c_{12} z_1 z_2 + (c_{11} + c_{12} - b_1) z_1 + (c_{22} + b_1) z_2 - b_2 z_3 + \\
&\quad + z_3 (b_2 z_2 + \dot{z}_3) - \dot{z}_3 - (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_3)^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_3
\end{aligned} \tag{5.60}$$

A lei de controle u do sistema pode ser, finalmente, definida

$$\begin{aligned}
u &= -b_2 z_2 - c_{13} z_1 - c_{23} z_2 - c_{33} z_3 + x_1 \dot{\hat{\theta}}_2^{(1)} - x_2 \dot{\hat{\theta}}_2^{(2)} - \frac{b_1}{b_2} (b_1 - c_{12} - \hat{\theta}_2^{(1)}) x_2 + \\
&\quad + (c_{11} + c_{22} - \hat{\theta}_2^{(2)}) x_3 - \frac{1}{b_2} (c_{11} + c_{22} - \hat{\theta}_2^{(2)}) (x_1 \hat{\theta}_3^{(1)} - x_2 \hat{\theta}_3^{(2)}) - \\
&\quad - x_2 \hat{\theta}_3^{(3)} + x_3 \hat{\theta}_3^{(4)} - (|x_3 + 1| - |x_3 - 1|) \hat{\theta}_3^{(5)}
\end{aligned} \tag{5.61}$$

onde $\hat{\boldsymbol{\theta}}_3 = [\hat{\theta}_3^{(1)}, \hat{\theta}_3^{(2)}, \dots, \hat{\theta}_3^{(5)}]^T$ e $c_{13}, c_{23}, c_{33} \in \mathfrak{R}$ são escalares constantes. Substituindo (5.61)

para u em (5.58), tem-se que

$$\begin{aligned}
\dot{z}_3 &= -c_{13} z_1 - (c_{23} + b_2) z_2 - c_{33} z_3 + x_2 (\boldsymbol{\theta}_3 - \hat{\boldsymbol{\theta}}_3^{(3)}) + \\
&\quad + \frac{1}{b_2} (c_{11} + c_{22} - \hat{\theta}_2^{(2)}) [x_1 (\boldsymbol{\theta}_1 - \hat{\boldsymbol{\theta}}_3^{(1)}) - x_2 (\boldsymbol{\theta}_2 - \hat{\boldsymbol{\theta}}_3^{(2)})] - \\
&\quad - x_3 (\boldsymbol{\theta}_4 - \hat{\boldsymbol{\theta}}_3^{(4)}) + (|x_3 + 1| - |x_3 - 1|) (\boldsymbol{\theta}_5 - \hat{\boldsymbol{\theta}}_3^{(5)})
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Com (5.49), (5.55), (5.62) e as leis de atualização paramétricas

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\theta}}_3^{(1)} &= \frac{\Gamma_1}{b_2} (c_{11} + c_{22} - \hat{\theta}_2^{(2)}) x_1 (z_3 - 1) \\
\dot{\hat{\theta}}_3^{(2)} &= -\frac{\Gamma_2}{b_2} (c_{11} + c_{22} - \hat{\theta}_2^{(2)}) x_2 (z_3 - 1) \\
\dot{\hat{\theta}}_3^{(3)} &= \Gamma_3 x_2 (z_3 - 1) \\
\dot{\hat{\theta}}_3^{(4)} &= -\Gamma_4 x_3 (z_3 - 1) \\
\dot{\hat{\theta}}_3^{(5)} &= \Gamma_5 (|x_3 + 1| - |x_3 - 1|) (z_3 - 1)
\end{aligned} \tag{5.63}$$

chega-se à expressão da derivada da função de Lyapunov de todo o sistema:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= -c_{11} z_1^2 - c_{22} z_2^2 - c_{33} z_3^2 - c_{12} z_1 z_2 - c_{13} z_1 z_3 - c_{23} z_2 z_3 + (c_{11} + c_{12} + c_{13} - b_1) z_1 + \\
&\quad + (c_{22} + c_{23} + b_1 + b_2) z_2 + (c_{33} - b_2) z_3
\end{aligned} \tag{5.64}$$

O conjunto C (onde $\dot{V} > 0$), para este exemplo, é o seguinte:

$$\begin{aligned}
C &= \{z \in \mathfrak{R}^3 : -c_{11} z_1^2 - c_{22} z_2^2 - c_{33} z_3^2 - c_{12} z_1 z_2 - c_{13} z_1 z_3 - c_{23} z_2 z_3 + \\
&\quad + (c_{11} + c_{12} + c_{13} - b_1) z_1 + (c_{22} + c_{23} + b_1 + b_2) z_2 + (c_{33} - b_2) z_3 > 0\}
\end{aligned} \tag{5.65}$$

Conforme a Extensão do Princípio de Invariância (aqui, Teorema 2.8), o objetivo de regulação – e, portanto, a estabilização do sistema de Chua com incertezas – será atingido se o conjunto C for limitado, uma vez que a função de Lyapunov V (5.59) é radialmente ilimitada. A equação $\dot{V} = 0$ representa vários tipos de superfícies quádricas; o conjunto C será limitado se a superfície $\dot{V} = 0$ – que corresponde à fronteira de C – for um elipsóide real, além de se o sentido do vetor gradiente $\partial V / \partial z$, avaliado nos pontos desse elipsóide, for “para dentro” do mesmo. Para que a superfície onde $\dot{V} = 0$ seja um elipsóide real, no que tange às matrizes

$$\begin{aligned}
M_1 &= \begin{bmatrix} -c_{11} & \frac{-c_{12}}{2} & \frac{-c_{13}}{2} \\ \frac{-c_{12}}{2} & -c_{22} & \frac{-c_{23}}{2} \\ \frac{-c_{13}}{2} & \frac{-c_{23}}{2} & -c_{33} \end{bmatrix} \\
M_2 &= \begin{bmatrix} & & & M_2^{14} \\ & M_1 & & M_2^{24} \\ & & & M_2^{34} \\ M_2^{14} & M_2^{24} & M_2^{34} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.66}$$

onde $M_2^{14} = 0.5(c_{11} + c_{12} + c_{13} - b_1)$, $M_2^{34} = 0.5(c_{33} - b_2)$ e $M_2^{24} = 0.5(c_{22} + c_{23} + b_1 + b_2)$, as seguintes condições devem ser satisfeitas: $\text{rank}(M_1) = 3$, $\text{rank}(M_2) = 4$, $\det(M_2) < 0$ e as partes reais dos autovalores de M_1 devem ter o mesmo sinal (Zwillinger, 1996).

Tanto a forma de C quanto o desempenho do controlador (5.61) em termos de esforço de controle sustentam-se nos valores assumidos pelo conjunto de parâmetros $\{c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}\}$. A determinação dos elementos desse conjunto será feita por meio de um processo de otimização via algoritmo genético. O algoritmo genético selecionado buscará, de maneira *off-line*, em meio a uma população de controladores (i.e. em meio a uma população de conjuntos de parâmetros $\{c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}\}$), o indivíduo mais adequado para ser implementado.

Como descrito no Capítulo 4, algoritmos genéticos são algoritmos estocásticos cujos métodos de busca emulam alguns fenômenos naturais, a saber: herança genética e mecanismos de seleção de indivíduos ao longo de gerações sucessivas propostos por Darwin (Michalewicz, 1996). Um dos requisitos que devem ser atendidos para que o algoritmo genético encontre a melhor solução para um determinado problema é que os indivíduos da população (i.e. os candidatos à solução) devem ser codificados num formato que permita a operação eficaz do algoritmo. Na presente tarefa de otimização, a população possui 100 indivíduos (cromossomos) e cada cromossomo, seis genes – que correspondem ao conjunto de seis parâmetros –, cujos alelos podem assumir qualquer valor no intervalo $[-10, 10]$ com uma precisão de quatro dígitos após a vírgula. Esta abordagem de representação proporciona uma simplificação do processo de codificação/decodificação, permitindo um fácil monitoramento da dinâmica de operação do algoritmo genético. A definição da quantidade de indivíduos da população foi estabelecida de maneira a garantir uma variabilidade mínima de candidatos a solução – variabilidade esta cuja medida é dada, indiretamente, por uma velocidade de convergência apropriada (convencionada em 50 gerações) a uma solução tida como adequada segundo as características de desempenho desejadas. Populações maiores não apresentaram, nas simulações, desempenho significativamente superior ao conseguido com 100 cromossomos. Os limites de variação dos alelos gênicos em $[-10, 10]$ e sua precisão foram estabelecidos empiricamente após uma

bateria de simulações com a população congelada em 100 indivíduos, sendo que a configuração aqui apresentada é a que trouxe, na média, melhores resultados em termos de se encontrar uma solução adequada com velocidade de convergência em, no máximo, 50 gerações.

Como já referido anteriormente, dado que os algoritmos genéticos emulam processos de evolução natural, eles incluem operações biomiméticas tais como seleção, recombinação e mutação. Seleção é o processo através do qual uma nova geração é formada por meio da escolha de indivíduos de uma dada população conforme seus valores de *fitness*. Disso resulta a possibilidade de que os cromossomos com maiores valores de *fitness* tenham uma ou mais cópias de si na geração seguinte, enquanto que os com menores valores podem ter nenhuma. Fundamentando-se na idéia de que, em média, os membros da população da geração atual devam ser tão bons quanto (ou melhores que) os da geração anterior na maximização da função de *fitness*, utiliza-se uma variante da estratégia elitista na qual os 20 membros mais aptos seguem sem sofrer alterações rumo à geração seguinte. Com efeito, se o indivíduo mais apto apontar para um ótimo local do espaço de busca, mas um indivíduo ligeiramente menos apto apontar para o ótimo global, é interessante que ambos sobrevivam inalterados na geração subsequente. O operador de recombinação reúne as características de dois cromossomos-pais para compor dois cromossomos-filhos, que podem substituir indivíduos menos aptos da população. Emprega-se, aqui, o *crossover* aritmético. Os 80 membros mais aptos são selecionados para reprodução; destes, a escolha dos pais é feita de maneira aleatória, com igual probabilidade. O operador de mutação reduz a probabilidade de que o algoritmo genético convirja para soluções locais. Utiliza-se, aqui, mutação não uniforme, com a função $\Delta(t, y)$ retornando um valor no intervalo $[0, y]$ tal que a probabilidade de $\Delta(t, y)$ ser próximo de 0 aumenta à medida que t aumenta (vide Seção 4.3.1.3.2). Essa propriedade permite que esse operador faça a busca de maneira uniforme inicialmente (quando t é pequeno) e localmente em estágios posteriores. É utilizada a seguinte função:

$$\Delta(t, y) = y \cdot \left[1 - r^{\left(\frac{1-t}{T} \right)^2} \right] \quad (5.67)$$

onde r é um número aleatório no intervalo $[0, 1]$ e T é o número máximo de gerações. No caso presente, como já mencionado em parágrafos anteriores, $T = 50$.

A função de *fitness* leva em conta o objetivo desejado: magnitudes de esforço de controle tão pequenas quanto possível sem um aumento excessivo na duração da resposta transitória. Considera-se que uma duração adequada para o transiente seja não mais que $t_t = 3$ unidades de tempo. Para cada cromossomo da geração t é feita uma simulação de forma a avaliar sua performance (i.e. a performance do controlador associado) em termos da função de *fitness*

$$fitness = \frac{1}{p + \int_0^3 u^2(\tau) + \beta \|\mathbf{x}(\tau)\|_2 d\tau} \quad (5.68)$$

onde a norma Euclidiana $\|\mathbf{x}(\tau)\|_2$ representa o efeito da resposta transitória e β é um peso; para o problema sendo tratado, $\beta = 100$ (valor determinado empiricamente de maneira a conferir magnitudes compatíveis entre $u^2(\tau)$ e $\|\mathbf{x}(\tau)\|_2$). Antes de se proceder à simulação propriamente dita, cada indivíduo é considerado factível ou infactível em termos das condições associadas às matrizes (5.66). Os indivíduos factíveis são os que fazem com que o lugar geométrico onde $\dot{V} = 0$ seja um elipsóide real. Os cromossomos infactíveis são penalizados com $p = 10^{10}$. Simulações são conduzidas apenas para os indivíduos factíveis (neste caso, $p = 0$).

Os parâmetros do sistema de Chua adotam, originalmente, os seguintes valores (Madan, 1993):

$$\begin{aligned} b_1 &= 16 \\ b_2 &= 1 \\ \theta_1 &= 1 \\ \theta_2 &= 1 \\ \theta_3 &= 9.8008 \\ \theta_4 &= 2.8028 \\ \theta_5 &= -2.1021 \end{aligned} \quad (5.69)$$

Para esses valores, o sistema de Chua (5.38) exibe resposta caótica quando $u = 0$. As condições iniciais escolhidas são $x_1(0) = 0.2$, $x_2(0) = 0.5$ e $x_3(0) = 0.3$. A Figura 5.1 mostra a evolução do *fitness* do melhor indivíduo ao longo de 50 gerações.

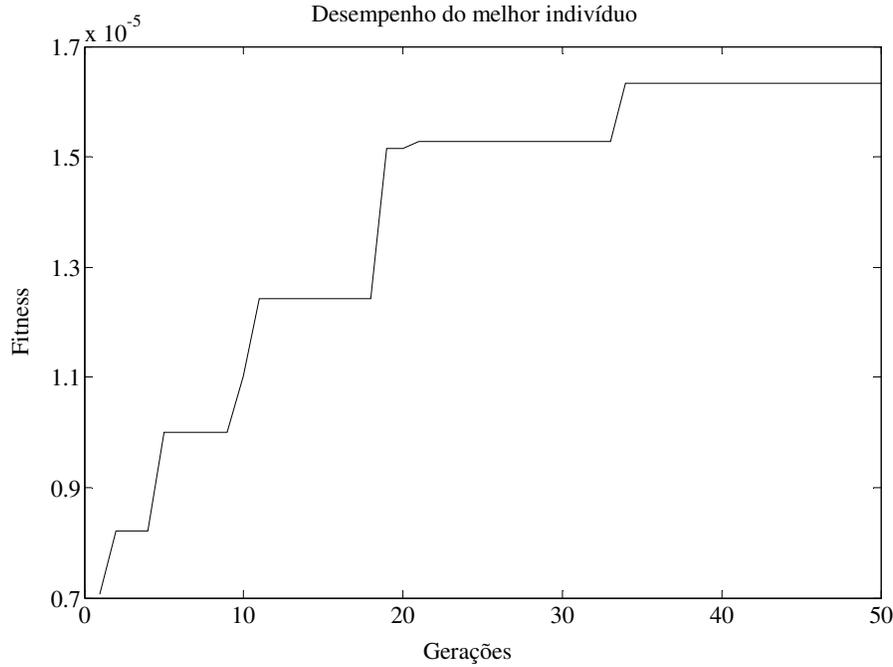


Figura 5.1. Evolução do fitness do melhor indivíduo.

Depois de 50 gerações, o melhor cromossomo tem um *fitness* de 1.6327×10^{-5} e é composto pelos seguintes genes:

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= -1.4056 \\
 c_{22} &= -6.7052 \\
 c_{33} &= -0.3747 \\
 c_{12} &= 4.9612 \\
 c_{13} &= 0.5991 \\
 c_{23} &= -0.1743
 \end{aligned} \tag{5.70}$$

O conjunto C correspondente a esses parâmetros é o seguinte:

$$\begin{aligned}
 C = \{z \in \mathfrak{R}^3 : & 1.4056z_1^2 + 6.7052z_2^2 + 0.3747z_3^2 - 4.9612z_1z_2 - 0.5991z_1z_3 + \\
 & + 0.1743z_2z_3 - 11.8453z_1 + 10.1205z_2 - 1.3747z_3 > 0\}
 \end{aligned} \tag{5.71}$$

O lugar geométrico onde $\dot{V} = 0$ é um elipsóide real. No entanto, o gradiente $\partial V/\partial z$, avaliado nos pontos desse elipsóide, está voltado “para fora” da superfície quádrica. Assim, o conjunto C descrito em (5.70), definido após o processo de otimização, é ilimitado – o que faz com que, neste caso em particular, não seja aplicável a Extensão do Princípio de Invariância de La Salle. Entretanto, a introdução da lei de controle (5.61) e das leis de atualização paramétricas (5.47), (5.56), e (5.63) com parâmetros (5.71) e $\Gamma = I$ (matriz identidade) no sistema de Chua com incertezas faz com que a trajetória z convirja para a origem $z = \mathbf{0}$. Levando-se isso em conta e considerando-se as expressões (5.40), (5.42) e (5.51), a trajetória do estado x também converge para a origem $x = \mathbf{0}$, atingindo-se, com isso, o objetivo de controle de caos no modelo de circuito de Chua com incertezas.

A Figura 5.2 traz as respostas temporais das variáveis de estado x_1 , x_2 e x_3 quando o controlador (5.61) e as leis de atualização paramétricas (5.47), (5.56), e (5.63) são aplicados ao sistema (5.38) (linhas cheias). Verifica-se a eficácia da metodologia de projeto proposta com relação ao objetivo de estabilização com duração de transitório $t_i \approx 2$. A figura também traz as respostas obtidas quando é aplicado o *backstepping* adaptativo tradicional (Krstić et al., 1995) (linhas tracejadas). Neste caso, os parâmetros da lei de controle são $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 3$ e $c_{12} = c_{13} = c_{23} = 0$. Com vistas a um estudo comparativo mais apurado, escolhe-se, também, $\Gamma = I$. Esses são os melhores valores paramétricos que resultam em $t_i \approx 2$. É importante ressaltar que, no *backstepping* tradicional, deve-se ter, obrigatoriamente, $c_{11}, c_{22}, c_{33} > 0$ e $c_{12} = c_{13} = c_{23} = 0$, conforme procedimento exposto na Seção 3.8, o que evidencia a desvantagem em termos dimensionais e, também, no que tange ao cenário de possibilidades combinatórias de alelos componentes de indivíduos potencialmente factíveis do espaço de busca paramétrico associado ao *backstepping* clássico em relação à metodologia proposta nesta tese (vide Tabela 5.2).

Metodologia	Características do Espaço de Busca	
	Dimensão	Restrições a Alelos
<i>Backstepping</i> adaptativo tradicional	3	Obrigatoriamente positivos
<i>Backstepping</i> adaptativo modificado	6	Devem estar contidos em $[-10, 10]$ (intervalos cujos limites foram convencionados; a rigor, não se trata de uma restrição)

Tabela 5.2. Comparação entre as características dos espaços de busca do *backstepping* adaptativo modificado proposto e do *backstepping* clássico.

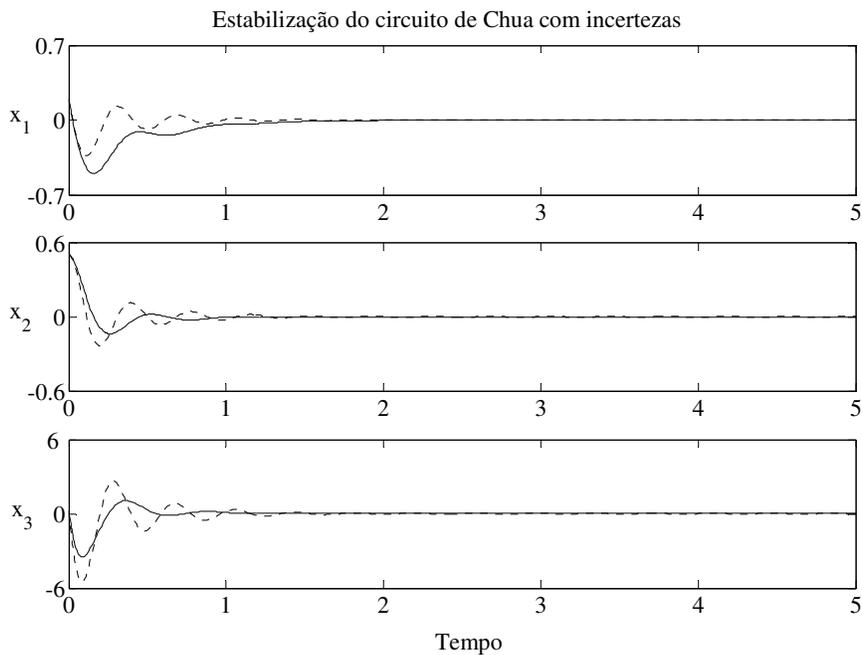


Figura 5.2. Resposta temporal das variáveis de estado.

A Figura 5.3 mostra a limitação das estimativas paramétricas, tal como desejado. A Figura 5.4 traz o esforço de controle requerido para o objetivo de regulação adaptativa quando são aplicados o controlador (5.61) e as leis (5.47), (5.56), e (5.63) no sistema de Chua com incertezas (linha cheia). A figura também apresenta o esforço de controle quando é aplicado o controlador construído a partir da metodologia tradicional de *backstepping* adaptativo com parâmetros $c_{11}, c_{22}, c_{33} > 0$ e $c_{12} = c_{13} = c_{23} = 0$ (linha tracejada). A magnitude do esforço de controle é reduzida substancialmente quando o controlador obtido segundo a metodologia de *backstepping* adaptativo modificado com parâmetros otimizados

via algoritmo genético proposta nesta tese é utilizado. É importante ressaltar que, conforme apontado por simulações efetuadas com uma amostra de indivíduos $\{c_{11}, c_{22}, c_{33}\}$ do espaço de busca, pode-se concluir que não há valores para os parâmetros $c_{11}, c_{22}, c_{33} > 0$ do procedimento tradicional de *backstepping* que conduzam a um menor esforço de controle com $t_f \approx 2$.

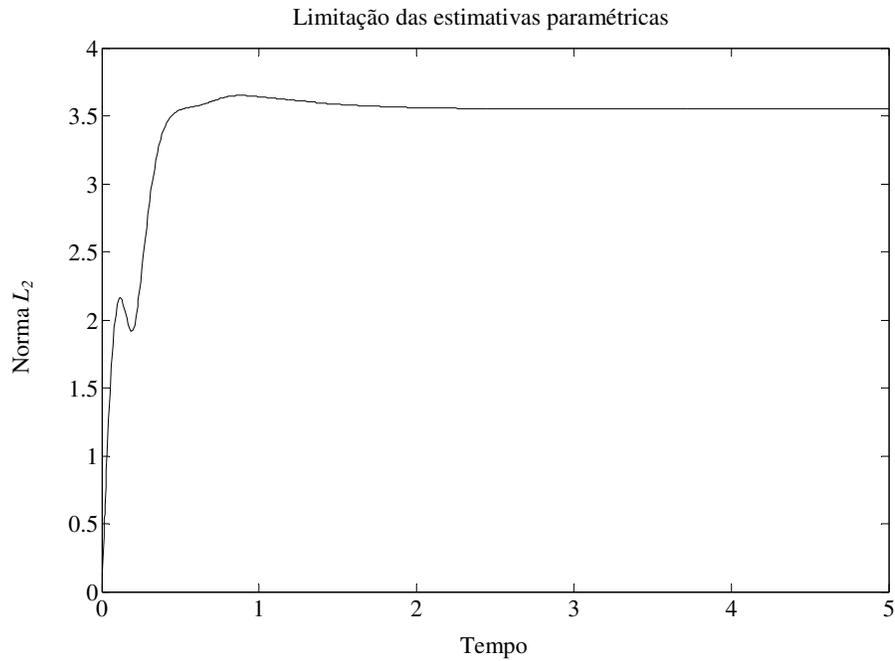


Figura 5.3. Norma L_2 de todas as estimativas paramétricas.

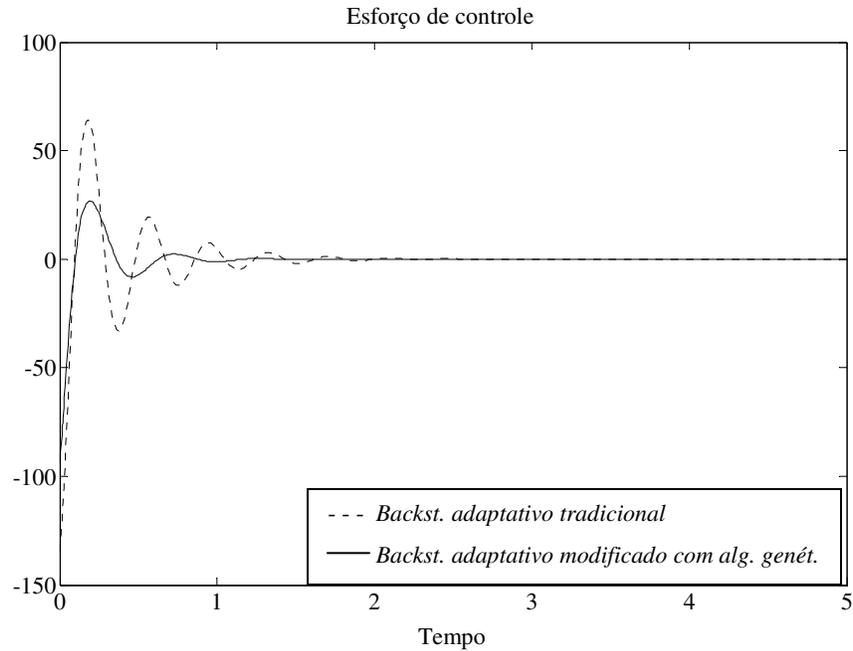


Figura 5.4. Redução da magnitude do esforço de controle.

5.3. Controle de Sistemas de Realimentação Estrita com Melhor Desempenho Utilizando *Backstepping* Modificado

Esta seção pode ser considerada como um caso particular do algoritmo genérico exposto na Seção 5.2 em que o sistema dinâmico não linear cujo controle se deseja ser obtido tem sua estrutura completamente conhecida. As linhas a seguir trazem, de maneira análoga ao caso adaptativo, um procedimento genérico para a obtenção de controladores cujos parâmetros podem ser otimizados segundo algum critério conveniente com base na flexibilização do *backstepping* estruturada na Extensão do Princípio de Invariância de La Salle aplicável em sistemas não lineares de realimentação estrita da forma

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= k_1 x_2 + f_1(x_1) \\
 \dot{x}_2 &= k_2 x_3 + f_2(x_1, x_2) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_i &= k_i x_{i+1} + f_i(x_1, \dots, x_i) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= g(\mathbf{x})u + f_n(\mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{5.72}$$

O sistema (5.72) segue a conformação de um sistema de realimentação estrita paramétrico (vide Equação (3.52)) onde $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathfrak{X}^n$ é o estado e $u \in \mathfrak{X}$ é a entrada. As funções f_i e $g \neq 0$, com $i = 1, \dots, n$, são não-linearidades suaves conhecidas e os termos k_i , com $i = 1, \dots, n-1$, são escalares constantes não nulos. Supõe-se que $y = x_1 \in \mathfrak{X}$ seja a saída do sistema. Visa-se a que y convirja assintoticamente ao ponto fixo y_s .

5.3.1. Proposta de Algoritmo Genérico para Síntese de Controladores Eficientes para Sistemas Não Lineares de Realimentação Estrita sem Incertezas

O projeto de controladores conforme a metodologia de *backstepping* é composto de n passos. Cada passo consiste na geração de uma lei de controle virtual por meio de uma função de Lyapunov quadrática. Como apontado no início deste capítulo, a expressão “função de Lyapunov”, aqui, também compreende o caso em que sua derivada é permitida ser positiva.

5.3.1.1. Passo 1

O processo se inicia pela definição da variável de erro relativa à saída do sistema:

$$z_1 = x_1 - y_s \quad (5.73)$$

onde y_s é o ponto de equilíbrio desejado. Derivando (5.73) ao longo de (5.72), chega-se a

$$\dot{z}_1 = f_1 + k_1 x_2 \quad (5.74)$$

A função de Lyapunov (i.e. “*Lyapunov-like*”) para o subsistema (5.74) é a seguinte:

$$V_1 = \frac{1}{2}(z_1 - a_1)^2 \quad (5.75)$$

onde $a_1 \in \mathfrak{X}$ é um escalar constante. A derivada de (5.75) ao longo de (5.74) é dada por

$$\dot{V}_1 = z_1(k_1 x_2 + f_1) - a_1 \dot{z}_1 \quad (5.76)$$

A lei de controle intermediária α_1 para a entrada virtual x_2 é definida como segue:

$$x_2 = \alpha_1 = \frac{1}{k_1}(-c_{11}z_1 - f_1) \quad (5.77)$$

onde $c_{11} \in \mathfrak{R}$ é um escalar constante. Com (5.77), a equação (5.76) pode ser reescrita como

$$\dot{V}_1 = -c_{11}z_1^2 - a_1\dot{z}_1 \quad (5.78)$$

Ressalta-se novamente que, tal como no caso adaptativo, ao contrário do que é demandado na metodologia tradicional de *backstepping* (Krstić et al., 1995), são permitidos valores negativos para c_{11} .

5.3.1.2. Passo i ($2 \leq i \leq n-1$)

O i -ésimo passo, com $2 \leq i \leq n-1$, se inicia com a definição da variável de erro z_i :

$$\begin{aligned} z_i &= x_i - \alpha_{i-1} \\ &= x_i + \frac{1}{k_{i-1}} \left(f_{i-1} - \overset{(i>2)}{\dot{\alpha}_{i-2}} + k_{i-2}z_{i-2} + \sum_{j=1}^{i-1} c_{j,(i-1)}z_j \right) \end{aligned} \quad (5.79)$$

Tendo em vista (5.79), pode-se expressar o subsistema z_{i-1} em sua forma definitiva:

$$\dot{z}_{i-1} = - \sum_{j=1}^{\overset{(i>3)}{i-3}} c_{j,(i-1)}z_j - \overset{(i>2)}{(c_{(i-2),(i-1)} + k_{i-2})}z_{i-2} - c_{(i-1),(i-1)}z_{i-1} + k_{i-1}z_i \quad (5.80)$$

Derivando-se (5.79), tem-se:

$$\dot{z}_i = \dot{x}_i - \dot{\alpha}_{i-1} = f_i + k_i x_{i+1} - \dot{\alpha}_{i-1} \quad (5.81)$$

A função de Lyapunov para o subsistema (5.81) é a seguinte:

$$V_i = \sum_{j=1}^{i-1} V_j + \frac{1}{2}(z_i - a_i)^2 \quad (5.82)$$

onde $a_i \in \mathfrak{R}$ é um escalar constante. A derivada de (5.82) ao longo dos subsistemas z_j anteriores, com $j = 1, \dots, i-1$, e (5.81) é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= - \sum_{j=1}^{i-1} \left(\sum_{t=j}^{i-1} c_{j,t} z_j z_t \right) + \overset{(i>2)}{\sum_{j=1}^{i-2}} \left(\sum_{t=j}^{i-1} a_t c_{j,t} + a_{j+1} k_j - a_{j-1} k_{j-1} \right) z_j + \\ &+ \left(a_{i-1} c_{(i-1),(i-1)} - \overset{(i>2)}{a_{i-2} k_{i-2}} \right) z_{i-1} - a_{i-1} k_{i-1} z_i + z_i (k_{i-1} z_{i-1} + f_i + k_i x_{i+1} - \dot{\alpha}_{i-1}) - a_i \dot{z}_i \end{aligned} \quad (5.83)$$

A lei de controle intermediária α_i para a entrada de controle virtual x_{i+1} é definida como segue:

$$x_{i+1} = \alpha_i = -\frac{1}{k_i} \left(f_i - \dot{\alpha}_{i-1} + k_{i-1} z_{i-1} + \sum_{j=1}^i c_{j,i} z_j \right) \quad (5.84)$$

onde $c_{j,i} \in \mathfrak{R}$, com $j = 1, \dots, i$, são escalares constantes. Aplicando (5.84) em (5.83), tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & -\sum_{j=1}^i \left(\sum_{t=j}^i c_{j,t} z_j z_t \right)^{(i>2)} + \sum_{j=1}^{i-2} \left(\sum_{t=j}^{i-1} a_t c_{j,t} + a_{j+1} k_j - a_{j-1} k_{j-1} \right) z_j + \\ & + (a_{i-1} c_{(i-1),(i-1)} - a_{i-2} k_{i-2}) z_{i-1} - a_{i-1} k_{i-1} z_i - a_j \dot{z}_j \end{aligned} \quad (5.85)$$

5.3.1.3. Passo n ($n \geq 2$)

O n -ésimo passo, com $n \geq 2$, se inicia com a definição da variável de erro correspondente à última variável de estado, z_n :

$$\begin{aligned} z_n &= x_n - \alpha_{n-1} \\ &= x_n + \frac{1}{k_{n-1}} \left(f_{n-1} - \dot{\alpha}_{n-2}^{(n>2)} + k_{n-2} z_{n-2} + \sum_{j=1}^{n-1} c_{j,(n-1)} z_j \right) \end{aligned} \quad (5.86)$$

Tendo em vista (5.86), pode-se expressar o subsistema z_{n-1} em sua forma definitiva:

$$\dot{z}_{n-1} = -\sum_{j=1}^{(n>3) n-3} c_{j,(n-1)} z_j - (c_{(n-2),(n-1)} + k_{n-2}) z_{n-2} - c_{(n-1),(n-1)} z_{n-1} + k_{n-1} z_n \quad (5.87)$$

Derivando-se (5.86), tem-se:

$$\dot{z}_n = \dot{x}_n - \dot{\alpha}_{n-1} = f_n + gu - \dot{\alpha}_{n-1} \quad (5.88)$$

A função de Lyapunov (i.e. “Lyapunov-like”) para o sistema (5.72) é a seguinte:

$$V_n = \sum_{j=1}^{n-1} V_j + \frac{1}{2} (z_n - a_n)^2 \quad (5.89)$$

onde $a_n \in \mathfrak{R}$ é um escalar constante. A derivada de (5.89) ao longo dos subsistemas z_j anteriores, com $j = 1, \dots, n-1$, e (5.88) é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_n = & -\sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{t=j}^{n-1} c_{j,t} z_j z_t \right) + \sum_{j=1}^{(n>2) n-2} \left(\sum_{t=j}^{n-1} a_t c_{j,t} + a_{j+1} k_j - a_{j-1} k_{j-1} \right) z_j + \\ & + \left(a_{n-1} c_{(n-1),(n-1)} - a_{n-2} k_{n-2} \right) z_{n-1} - a_{n-1} k_{n-1} z_n + z_n (k_{n-1} z_{n-1} + f_n + g u - \dot{\alpha}_{n-1}) - a_n \dot{z}_n \end{aligned} \quad (5.90)$$

A lei de controle para o sistema completo pode ser, finalmente, definida:

$$u = -\frac{1}{g} \left(f_n - \dot{\alpha}_{n-1} + k_{n-1} z_{n-1} + \sum_{j=1}^n c_{j,n} z_j \right) \quad (5.91)$$

onde $c_{j,n} \in \mathfrak{R}$, com $j = 1, \dots, n$, são escalares constantes. Aplicando (5.91) em (5.88) e (5.90), tem-se, respectivamente,

$$\dot{z}_n = -k_{n-1} z_{n-1} - \sum_{j=1}^n c_{j,n} z_j \quad (5.92)$$

e a expressão da derivada da função de Lyapunov do sistema completo (5.72):

$$\begin{aligned} \dot{V}_n = & -\sum_{j=1}^n \left(\sum_{t=j}^n c_{j,t} z_j z_t \right) + \sum_{j=1}^{(n>2) n-2} \left(\sum_{t=j}^n a_t c_{j,t} + a_{j+1} k_j - a_{j-1} k_{j-1} \right) z_j + \\ & + \left(a_{n-1} c_{(n-1),(n-1)} - a_n c_{(n-1),n} + a_n k_{n-1} - a_{n-2} k_{n-2} \right) z_{n-1} + (a_n c_{n,n} - a_{n-1} k_{n-1}) z_n \end{aligned} \quad (5.93)$$

O projeto para regulação em ponto de equilíbrio apresentado nesta seção pode ser facilmente estendido para a tarefa de seguimento. O objetivo de controle será, então, fazer com que a saída $y = x_1$ do sistema (5.72) siga, no limite, o sinal de referência $y_r(t)$, cujas primeiras n derivadas são, por hipótese, conhecidas, limitadas e contínuas. De maneira análoga à metodologia para regulação, a primeira variável de erro será $z_1 = x_1 - y_r$.

Da mesma forma como no caso adaptativo, o processo de otimização aplicado na determinação de um controlador eficiente para (5.72) estrutura-se em características do conjunto $C := \{z \in \mathfrak{R}^n : \dot{V}_n > 0\}$, cuja conformação é definida pelo conjunto de parâmetros $\{c_{j,t} \in \mathfrak{R} : j = 1, \dots, n; t = j, \dots, n\}$. A tarefa de otimização é dada por (5.36) e faz uso, pelas mesmas razões expostas na Seção 5.2.1.4, de técnicas de computação evolutiva – em particular, de algoritmos genéticos.

5.3.2. Exemplo de Aplicação – Controle de Sistema de Chua

A avaliação da eficácia da metodologia proposta será feita por meio do controle do circuito de Chua (5.37) com todos os seus parâmetros conhecidos, situação em que segue a conformação de um sistema de realimentação estrita do tipo (5.72) após uma pequena transformação de variáveis de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -b_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= b_2 x_3 + \theta_1 x_1 - \theta_2 x_2 \\ \dot{x}_3 &= u + \theta_3 x_2 - \theta_4 x_3 - \theta_5 (|x_3 + 1| - |x_3 - 1|)\end{aligned}\quad (5.94)$$

Objetiva-se a determinação de uma lei de controle via realimentação de estado que garanta a regulação de $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ na origem e a limitação de todos os sinais (variáveis de estado, controle) no sistema em malha fechada com o menor esforço de controle possível.

Passo 1. É definida, inicialmente, a variável auxiliar correspondente à primeira variável de estado:

$$z_1 = x_1 \quad (5.95)$$

A derivada de (5.95) é dada por:

$$\dot{z}_1 = -b_1 x_2 \quad (5.96)$$

Introduz-se a função de Lyapunov associada ao subsistema (5.96):

$$V_1 = \frac{1}{2} (z_1 - 1)^2 \quad (5.97)$$

A derivada de (5.97) ao longo de (5.96) é dada por

$$\dot{V}_1 = z_1 (-b_1 x_2) - \dot{z}_1 \quad (5.98)$$

Aplicando-se a lei de controle intermediária relativa à entrada de controle virtual x_2

$$x_2 = \alpha_1 = -\frac{1}{b_1} (-c_{11} z_1) \quad (5.99)$$

tem-se que

$$\dot{V}_1 = -c_{11} z_1^2 - \dot{z}_1 \quad (5.100)$$

Passo 2. O segundo passo se inicia com a definição da variável de erro z_2 :

$$z_2 = x_2 - \alpha_1 = x_2 - \frac{1}{b_1} c_{11} z_1 \quad (5.101)$$

O subsistema z_1 pode ser expresso, agora, em sua forma definitiva:

$$\dot{z}_1 = -b_1 \left(z_2 + \frac{1}{b_1} c_{11} z_1 \right) = -c_{11} z_1 - b_1 z_2 \quad (5.102)$$

Derivando-se (5.101), tem-se:

$$\dot{z}_2 = b_2 x_3 + \theta_1 x_1 - \theta_2 x_2 - \dot{\alpha}_1 \quad (5.103)$$

A função de Lyapunov para o subsistema (5.103) é a seguinte:

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} (z_2 - 1)^2 \quad (5.104)$$

A derivada de (5.104) ao longo de (5.102) e (5.103) é dada por

$$\dot{V}_2 = z_1 (-c_{11} z_1 - b_1 z_2) - (-c_{11} z_1 - b_1 z_2) + z_2 (b_2 x_3 + \theta_1 x_1 - \theta_2 x_2 - \dot{\alpha}_1) - \dot{z}_2 \quad (5.105)$$

A lei de controle intermediária α_2 para a entrada de controle virtual x_3 é definida como segue:

$$x_3 = \alpha_2 = \frac{1}{b_2} (b_1 z_1 - \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dot{\alpha}_1 - c_{12} z_1 - c_{22} z_2) \quad (5.106)$$

onde $c_{12}, c_{22} \in \Re$ são escalares constantes. Aplicando (5.106) em (5.105), tem-se que

$$\dot{V}_2 = -c_{11} z_1^2 - c_{22} z_2^2 - c_{12} z_1 z_2 + c_{11} z_1 + b_1 z_2 - \dot{z}_2 \quad (5.107)$$

Passo 3. Este passo se inicia com a definição da variável de erro correspondente à última variável de estado, z_3 :

$$\begin{aligned} z_3 &= x_3 - \alpha_2 \\ &= x_3 + \frac{1}{b_2} (b_1 z_1 - \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dot{\alpha}_1 - c_{12} z_1 - c_{22} z_2) \end{aligned} \quad (5.108)$$

Tendo em vista (5.108), pode-se expressar o subsistema z_2 em sua forma definitiva:

$$\dot{z}_2 = -(c_{12} - b_1) z_1 - c_{22} z_2 + b_2 z_3 \quad (5.109)$$

Derivando (5.108), tem-se:

$$\dot{z}_3 = u + \theta_3 x_2 - \theta_4 x_3 - \theta_5 (|x_3 + 1| - |x_3 - 1|) - \dot{\alpha}_2 \quad (5.110)$$

A função de Lyapunov para o sistema inteiro é a seguinte:

$$V = V_3 = V_2 + \frac{1}{2}(z_3 - 1)^2 \quad (5.111)$$

A derivada de (5.90) ao longo de (5.102), (5.109) e (5.110) é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} = \dot{V}_3 = & -c_{11}z_1^2 - c_{22}z_2^2 - c_{12}z_1z_2 + (c_{11} + c_{12} - b_1)z_1 + (c_{22} + b_1)z_2 - b_2z_3 + \\ & + z_3[b_2z_2 + u + \theta_3x_2 - \theta_4x_3 - \theta_5(|x_3 + 1| - |x_3 - 1|) - \dot{\alpha}_2] - \dot{z}_3 \end{aligned} \quad (5.112)$$

A lei de controle para o sistema completo pode ser, finalmente, definida:

$$u = -b_2z_2 - \theta_3x_2 + \theta_4x_3 + \theta_5(|x_3 + 1| - |x_3 - 1|) + \dot{\alpha}_2 - c_{13}z_1 - c_{23}z_1 - c_{33}z_3 \quad (5.113)$$

onde $c_{13}, c_{23}, c_{33} \in \mathfrak{R}$ são escalares constantes. Aplicando (5.113) em (5.110) e (5.112), tem-se, respectivamente,

$$\dot{z}_3 = -c_{13}z_1 - (c_{23} + b_2)z_2 - c_{33}z_3 \quad (5.114)$$

e a expressão da derivada da função de Lyapunov do sistema completo (5.94):

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -c_{11}z_1^2 - c_{22}z_2^2 - c_{33}z_3^2 - c_{12}z_1z_2 - c_{13}z_1z_3 - c_{23}z_2z_3 + \\ & + (c_{11} + c_{12} + c_{13} - b_1)z_1 + (c_{22} + c_{23} + b_1 + b_2)z_2 + (c_{33} - b_2)z_3 \end{aligned} \quad (5.115)$$

A estrutura do conjunto C , onde $\dot{V} > 0$, é a mesma obtida para o caso de projeto de controle para o circuito de Chua com incertezas estudado na Seção 5.2.2.1 (vide Equação (5.65)). A tarefa de otimização no caso presente é, portanto, análoga à do adaptativo, inclusive no número de parâmetros que compõem cada cromossomo da população localizada no espaço de busca. Devido a isso, a configuração de algoritmo genético aqui utilizada (população com 100 indivíduos; alelos gênicos compreendidos no intervalo [-10, 10] com precisão de quatro dígitos após a vírgula; seleção elitista com os vinte indivíduos de maior *fitness* sobrevivendo inalterados em cada passagem de geração; *crossover* aritmético; mutação não uniforme), bem similar à do caso adaptativo, à exceção do limite máximo de gerações comportado pelo algoritmo ($T = 200$), trouxe bons resultados. A função de *fitness* também se repete (vide Equação (5.68)).

Os parâmetros do sistema de Chua que conduzem a um comportamento caótico quando $u = 0$ são os seguintes: $b_1 = 16$, $b_2 = 1$, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 1$, $\theta_3 = 9.8008$, $\theta_4 = 2.8028$, e $\theta_5 = -2.1021$ e as condições iniciais do sistema são $x_1(0) = 0.2$, $x_2(0) = 0.5$ e

$x_3(0) = 0.3$. A Figura 5.5 mostra a evolução do *fitness* do melhor indivíduo ao longo das 200 gerações.

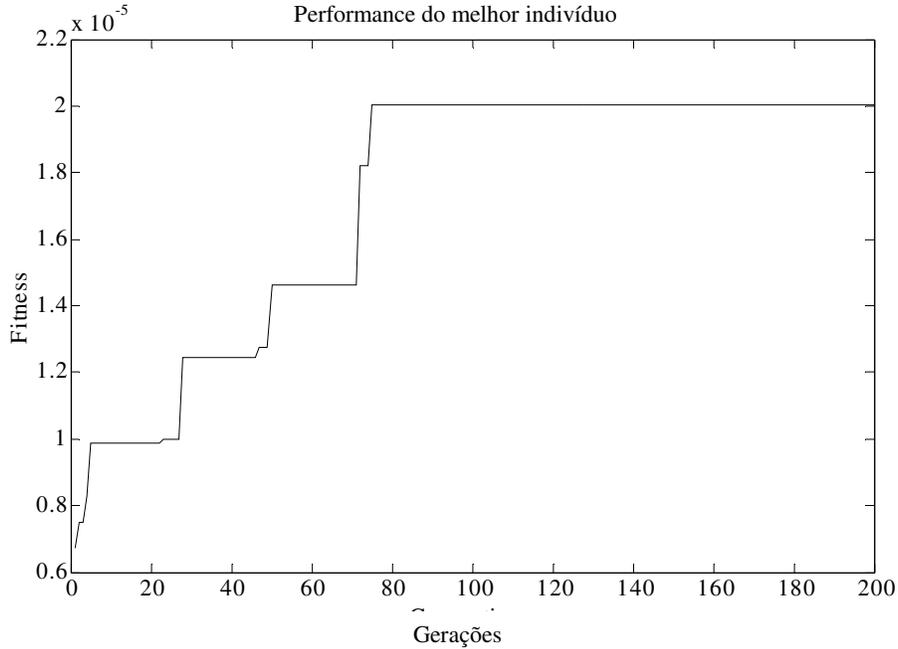


Figura 5.5. Evolução do fitness do melhor indivíduo.

Depois de 200 gerações, o melhor cromossomo tem um *fitness* de 2.0035×10^{-5} e é composto pelos seguintes genes:

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= 4.8120 \\
 c_{22} &= 4.9593 \\
 c_{33} &= 0.8451 \\
 c_{12} &= 8.8282 \\
 c_{13} &= -1.9353 \\
 c_{23} &= -1.9058
 \end{aligned} \tag{5.116}$$

O conjunto C correspondente a esses parâmetros é o seguinte:

$$\begin{aligned}
 C = \{z \in \mathfrak{R}^3 : & -4.8120z_1^2 - 4.9593z_2^2 - 0.8451z_3^2 - 8.8282z_1z_2 + 1.9353z_1z_3 + \\
 & + 1.9058z_2z_3 - 4.2951z_1 + 20.0535z_2 - 0.1549z_3 > 0\}
 \end{aligned} \tag{5.117}$$

Sua fronteira é um elipsóide real. Como C é um conjunto convexo e a função de Lyapunov (5.111) é uma função convexa, o $\sup_{z \in C} V(z)$ ocorre na fronteira do conjunto C . Consegu-

se, por meio do uso da técnica de multiplicadores de Lagrange, determinar seu valor. A função de Lagrange

$$L(z) = \frac{1}{2}(z_1 - 1)^2 + \frac{1}{2}(z_2 - 1)^2 + \frac{1}{2}(z_3 - 1)^2 + \lambda(-4.8120z_1^2 - 4.9593z_2^2 - 0.8451z_3^2 - 8.8282z_1z_2 + 1.9353z_1z_3 + 1.9058z_2z_3 - 4.2951z_1 + 20.0535z_2 - 0.1549z_3) \quad (5.118)$$

e as condições de contorno

$$\frac{\partial L}{\partial z_1} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial z_2} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial z_3} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad (5.119)$$

produzem $z_1 = -25.7236$, $z_2 = 25.9572$ e $z_3 = -0.7724$ para $\lambda = 2.11$. Substituindo esses valores na expressão da função de Lyapunov, chega-se a

$$l = \sup_{z \in C} V(z_1 = -25.7236, z_2 = 25.9572, z_3 = -0.7724) = 670.0769 \quad (5.120)$$

Portanto, o conjunto $\bar{\Omega}_l$ é a esfera

$$\bar{\Omega}_l = \left\{ z \in \mathfrak{R}^3 : \sum_{i=1}^3 (z_i - 1)^2 \leq 670.0769 \right\} \quad (5.121)$$

A Figura 5.6 ilustra os conjuntos C e $\bar{\Omega}_l$ no espaço de estado de z .

O conjunto no qual $\dot{V} = 0$ está contido em $\bar{\Omega}_l$. Logo, toda solução converge para o maior conjunto invariante contido em $\bar{\Omega}_l$. A introdução da lei de controle (5.113) com parâmetros (5.116) no sistema de Chua (5.94) faz com que a trajetória z convirja para a origem $z = \mathbf{0}$. Levando-se isso em conta e considerando-se as expressões (5.95), (5.101) e (5.108), a trajetória do estado x também converge para a origem $x = \mathbf{0}$, atingindo-se, com isso, o objetivo de controle de caos no modelo de circuito de Chua.

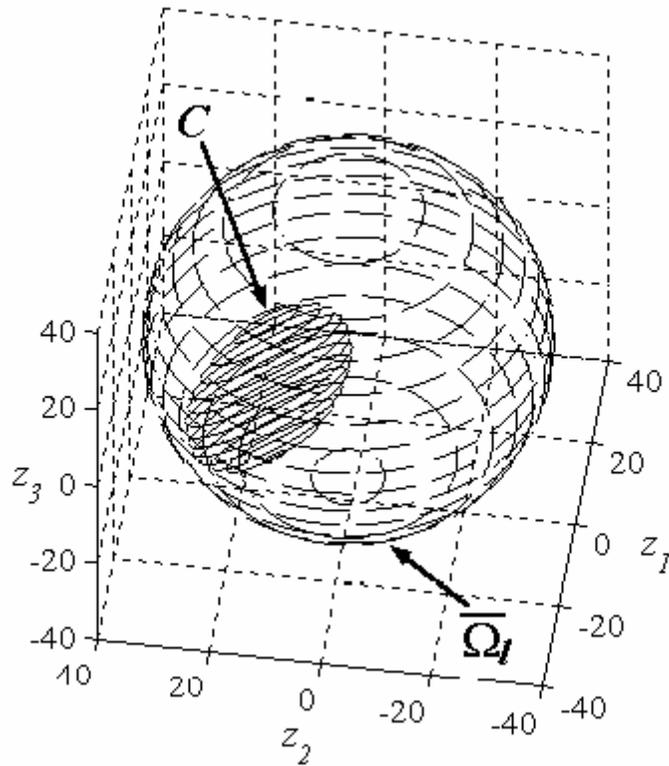


Figura 5.6. Conjuntos C e $\bar{\Omega}_1$. $\dot{V} > 0$ dentro de C .

A Figura 5.7 traz as respostas temporais das variáveis de estado x_1 , x_2 e x_3 quando o controlador (5.113) é aplicado ao sistema (5.94) (linhas cheias). Verifica-se a eficácia da metodologia de projeto proposta com relação ao objetivo de estabilização com duração de transitório $t_t \approx 3$. A figura também traz as respostas obtidas quando é aplicado o *backstepping* tradicional (Krstić et al., 1995) (linhas tracejadas). Neste caso, os parâmetros da lei de controle são $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1$ e $c_{12} = c_{13} = c_{23} = 0$. Esses são os melhores valores paramétricos que resultam em $t_t \approx 3$. É importante ressaltar que, tal como no caso adaptativo, o *backstepping* tradicional exige que se verifique $c_{11}, c_{22}, c_{33} > 0$ e $c_{12} = c_{13} = c_{23} = 0$.

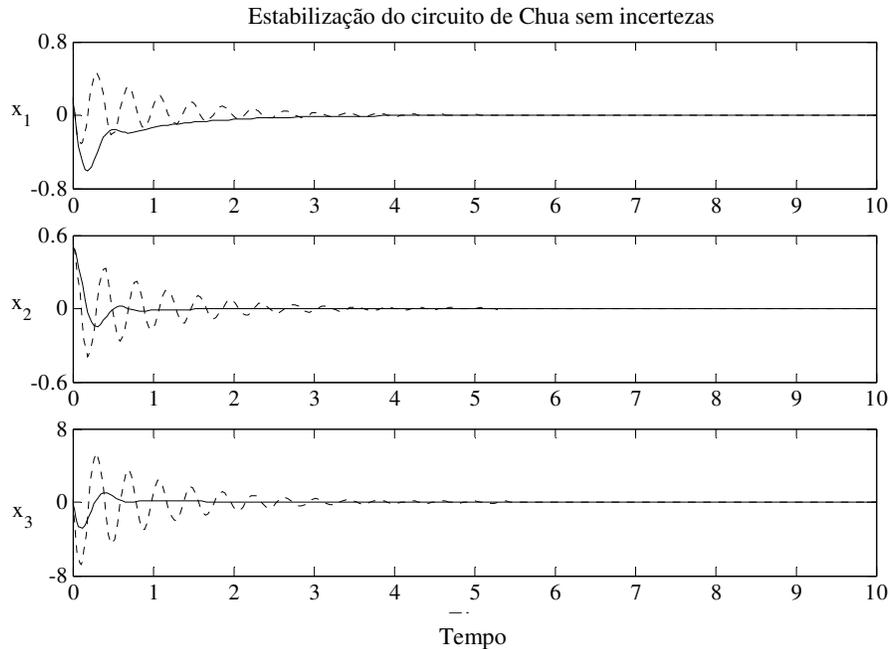


Figura 5.7. Resposta temporal das variáveis de estado.

A Figura 5.8 traz o esforço de controle requerido para o objetivo de regulação quando é aplicado o controlador (5.113) no sistema de Chua (linha cheia). A figura também apresenta o esforço de controle quando se é aplicado o controlador construído a partir da metodologia tradicional de *backstepping* adaptativo com parâmetros $c_{11}, c_{22}, c_{33} > 0$ e $c_{12} = c_{13} = c_{23} = 0$ (linha tracejada). A magnitude do esforço de controle é reduzida substancialmente quando o controlador obtido segundo a metodologia de *backstepping* modificado com parâmetros otimizados via algoritmo genético proposta nesta tese é utilizado. É importante ressaltar que, conforme apontado por simulações efetuadas com uma amostra de indivíduos $\{c_{11}, c_{22}, c_{33}\}$ do espaço de busca, pode-se concluir que não há valores para os parâmetros $c_{11}, c_{22}, c_{33} > 0$ do procedimento tradicional de *backstepping* que conduzam a um menor esforço de controle do que o ilustrado com $t_r \approx 3$.

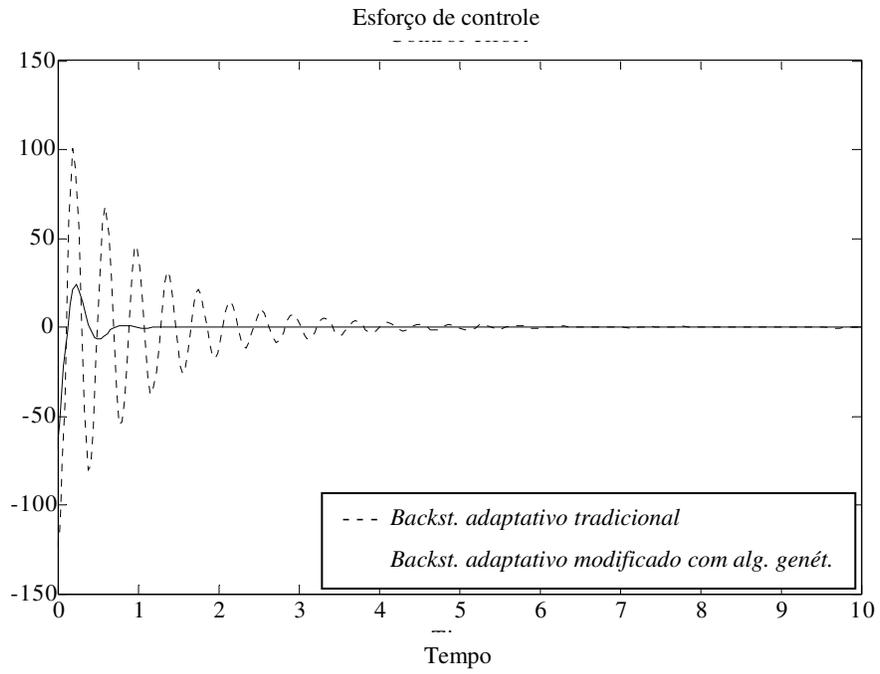


Figura 5.8. Redução da magnitude do esforço de controle.

Capítulo 6

Proposta de *Backstepping* Neural para Sistemas Não Lineares com Incertezas com Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas

6.1. Introdução

Verifica-se, na literatura, que, em comparação à grande quantidade de trabalhos que abordam a aplicação de técnicas de *backstepping* em problemas de controle para sistemas não lineares com incertezas SISO (cf. Krstić et al. (1995), Kokotović & Arcak (2001)), é ainda pequeno o número de resultados que tratam da aplicação de *backstepping* em sistemas não lineares com incertezas MIMO (cf. Liu et al. (1999), Yao & Tomizuka (2001), Lin & Qian (2001)).

Isso se deve, principalmente, à maior complexidade estrutural dos sistemas MIMO – refletida, por exemplo, na existência de diferentes tipos de acoplamentos entre entradas e saídas, dentre outras características. A presença de incertezas paramétricas e/ou funções não lineares na matriz de acoplamento de entrada faz, ainda, com que dificuldades adicionais sejam introduzidas no projeto de leis de controle para sistemas não lineares MIMO. Com efeito, Krstić et al. (1995) trazem uma metodologia de controle adaptativo via *backstepping* para um sistema não linear com incertezas MIMO na forma de realimentação estrita paramétrica, porém sem incertezas na matriz de entrada. Recentemente, técnicas de controle adaptativo foram propostas para sistemas não lineares MIMO na forma de realimentação semi-estrita, também com matriz de entrada conhecida (Yao & Tomizuka, 2001).

Quanto às interconexões entre os subsistemas, observa-se, em todos esses trabalhos, que essas interconexões são ou funções conhecidas (cf. Liu et al. (1999), Lin & Qian (2001)) ou limitadas por funções não lineares conhecidas (Yao & Tomizuka, 2001). Além disso, não são verificadas não-linearidades desconhecidas nas matrizes de acoplamento de entrada. De fato, poucas são as referências que trazem projeto de leis de controle para sistemas MIMO que contêm funções não lineares desconhecidas tanto nas matrizes de acoplamento de entrada quanto nas interconexões entre os subsistemas (sem restrições de limitação) (Ge & Wang, 2004).

Nos últimos anos, metodologias de controle adaptativo com redes neurais têm se mostrado bastante eficazes em problemas de controle de sistemas não lineares com incertezas que apresentam razoável complexidade (cf., por exemplo, Sundararajan et al. (2001)). Entretanto, assim como no caso da literatura de controle adaptativo sem o emprego de redes neurais ou outros aproximadores universais, existem poucas referências no campo de controle adaptativo neural para sistemas não lineares com incertezas MIMO (cf. Lewis et al. (1999), Ge et al. (1998), Ge, Hang & Zhang (2000)). Ge & Wang (2004), por exemplo, apresentam uma técnica para projeto de leis de controle aplicável em sistemas não lineares com incertezas MIMO na forma triangular-em-bloco cujas diretrizes seguem princípios de *backstepping* adaptativo neural.

Não obstante o fato de se ter observado progresso significativo no desenvolvimento de metodologias de controle adaptativo que combinem *backstepping* com redes neurais, ainda há alguns problemas que precisam ser encarados no que tange à viabilidade de implementação dessas metodologias, seja no ambiente de sistemas SISO, seja no de sistemas MIMO. Por exemplo, na grande maioria das abordagens propostas em trabalhos recentes, é suposto que as funções $g_i(\cdot)$, com $i = 1, \dots, \rho$, para sistemas SISO (vide equação (6.3) a seguir), e $g_{j,i_j}(\cdot)$, com $i_j = 1, \dots, \rho_j$ e $j = 1, \dots, m$, para sistemas MIMO (vide equação (6.1) a seguir), são ou constantes ou funções conhecidas, de modo a se evitar problemas de singularidade (cf., por exemplo, Kwan & Lewis (2000), Knohl & Unbehauen (2000), Zhang, Ge & Hang (2000)). No entanto, na prática, em muitos casos essa hipótese não é verificada (Li et al., 2004). Em Zhang, Ge & Hang (2000), as funções $g_i(\cdot)$ são supostas desconhecidas e um procedimento estruturado em *backstepping* com a incorporação de redes neurais é proposto. Todavia, o uso de funções de Lyapunov com integrais faz com

que a abordagem se revele por demais complicada, com dificuldades de implementação prática. Em (Ge & Wang, 2002) e em (Ge & Wang, 2004), um esquema similar, porém mais simples (i.e. sem o uso de funções de Lyapunov com integrais), é apresentado. Entretanto, o fato de as derivadas das leis de controle virtuais serem incluídas nas redes neurais faz com que estas sejam de difícil cálculo e implementação.

Neste capítulo, é proposta uma metodologia de controle adaptativo neural, baseada em *backstepping*, aplicável a sistemas não lineares com incertezas MIMO compostos de subsistemas interconectados cujas matrizes de entrada apresentam funções não lineares e cujas interconexões entre subsistemas também apresentam não-linearidades, sem restrições de limitação. O método apresentado resolve de maneira simples a questão de singularidade sem o uso de algoritmos de projeção (como usado por Sastry & Isidori, 1989) nem funções de Lyapunov com integrais e também elimina a necessidade de introdução de derivadas dos controladores virtuais nas redes neurais.

6.2. Proposta de Algoritmo para Síntese de Controladores para Sistemas Não Lineares com Incertezas com Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas Genéricos

Esta seção propõe um procedimento genérico para a obtenção de controladores aplicável em sistemas não lineares com incertezas com múltiplas entradas e múltiplas saídas da forma

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}_{j,i_j} = f_{j,i_j}(\bar{x}_{1,(i_j-\zeta_{j,1})}, \dots, \bar{x}_{m,(i_j-\zeta_{j,m})}) + g_{j,i_j}(\bar{x}_{1,(i_j-\zeta_{j,1})}, \dots, \bar{x}_{m,(i_j-\zeta_{j,m})})x_{j,i_j+1}, & 1 \leq i_j \leq \rho_j - 1 \\ \dot{x}_{j,\rho_j} = f_{j,\rho_j}(X, u_1, \dots, u_{j-1}) + g_{j,\rho_j}(\bar{x}_{1,\rho_1-1}, \dots, \bar{x}_{m,\rho_m-1})u_j \\ y_j = x_{j,1}, & 1 \leq j \leq m \end{cases} \quad (6.1)$$

por hipótese controláveis, onde x_{j,i_j} , com $i_j = 1, \dots, \rho_j$, são as variáveis de estado do j -ésimo subsistema e $\bar{x}_{j,i_j} = [x_{j,1}, \dots, x_{j,i_j}]^T \in \mathfrak{R}^{i_j}$, com $i_j = 1, \dots, \rho_j$ e $j = 1, \dots, m$, denota o vetor de variáveis de estado parciais do j -ésimo subsistema. O vetor $X = [\bar{x}_{1,\rho_1}^T, \dots, \bar{x}_{m,\rho_m}^T]^T$ contém as variáveis de estado do sistema completo. $u_j \in \mathfrak{R}$ e $y_j \in \mathfrak{R}$ são, respectivamente, a

entrada e a saída do j -ésimo subsistema. As funções f_{j,i_j} e g_{j,i_j} , com $i_j = 1, \dots, \rho_j$ e $j = 1, \dots, m$, são não-linearidades suaves desconhecidas. Os índices j , i_j , ρ_j e m são inteiros positivos e $\zeta_{j,l}$ é definido como a diferença de ordem entre os j -ésimo e l -ésimo subsistemas:

$$\zeta_{j,l} = \rho_j - \rho_l \quad (6.2)$$

Quando $j = l$, essa diferença de ordem é nula, ou seja, $\zeta_{j,j} = 0$. Isso significa que, para esta situação, $\bar{\mathbf{x}}_{j,(i_j-\zeta_{j,j})} = \bar{\mathbf{x}}_{j,i_j}$, i.e. o próprio vetor de variáveis de estado do j -ésimo subsistema. Quando $j \neq l$, duas situações devem ser consideradas, à luz do vetor genérico $\bar{\mathbf{x}}_{l,(i_j-\zeta_{j,l})}$: $i_j - \zeta_{j,l} > 0$ e $i_j - \zeta_{j,l} \leq 0$. Se $i_j - \zeta_{j,l} > 0$, $\bar{\mathbf{x}}_{l,(i_j-\zeta_{j,l})}$ representa o vetor com o maior número de variáveis de estado do l -ésimo subsistema embutidas no j -ésimo subsistema. Se $i_j - \zeta_{j,l} \leq 0$, o vetor $\bar{\mathbf{x}}_{l,(i_j-\zeta_{j,l})}$ não existe.

A presença dos vetores $\bar{\mathbf{x}}_{l,(i_j-\zeta_{j,l})}$, com $j, l = 1, \dots, m$, nos argumentos das funções f_{j,i_j} e g_{j,i_j} , com $i_j = 1, \dots, \rho_j - 1$ e $j = 1, \dots, m$, assim como os termos f_{j,ρ_j} e g_{j,ρ_j} fazem com que o sistema MIMO (6.1) seja caracterizado por uma série de interconexões entre as variáveis de estado dos vários subsistemas que o compõem. Além disso, o argumento de f_{j,ρ_j} inclui não apenas \mathbf{X} , como também as entradas de controle dos $j-1$ subsistemas anteriores ao j -ésimo subsistema. Essas características ampliam o domínio de representatividade do sistema MIMO (6.1) em comparação ao dos sistemas não lineares de realimentação estrita com múltiplas entradas e múltiplas saídas derivados dos apresentados em Krstić et al. (1995) (vide, por exemplo, (Ge, Hang & Zhang, 2000)).

Problemas de singularidade no projeto do(s) controlador(es) são evitados fazendo com que os termos g_{j,ρ_j} independam das variáveis de estado $x_{1,\rho_1}, \dots, x_{j,\rho_j}$, com $j = 1, \dots, m$ (Ge & Wang, 2004).

De fato, uma das principais causas da ocorrência indesejável de singularidades em projetos de leis de controle para sistemas não lineares com incertezas é o termo que multiplica a

entrada de controle. A título de ilustração, considere o sistema não linear de realimentação estrita SISO a seguir:

$$\mathbf{P}: \begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_i) + g_i(x_1, \dots, x_i)x_{i+1}, & 1 \leq i \leq \rho - 1 \\ \dot{x}_\rho = f_\rho(\mathbf{x}) + g_\rho(\mathbf{x})u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (6.3)$$

onde o vetor $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_\rho]^T \in \mathfrak{R}^\rho$ contém as variáveis de estado do sistema completo. $u \in \mathfrak{R}$ e $y \in \mathfrak{R}$ são, respectivamente, a entrada e a saída do sistema. As funções f_i e g_i , com $i = 1, \dots, \rho$, são não-linearidades suaves desconhecidas.

Uma das principais dificuldades no projeto de leis de controle para o sistema (6.3), de acordo com Zhang, Ge & Hang (2000), reside na estrutura dos termos g_i , com $i = 1, \dots, \rho$. Se, por um lado, a metodologia de projeto de *backstepping* neural introduzida por Polycarpou (1996), por exemplo, é diretamente aplicável ao sistema (6.3) na situação em que g_i são funções conhecidas, por outro lado, problemas de singularidade (Isidori, 1996) são passíveis de ocorrer no decorrer do projeto quando g_i são funções não conhecidas. Algumas alternativas foram propostas para lidar com esta situação, como a utilização de funções de Lyapunov com integrais (cf. Zhang, Ge & Hang (2000), Ge, Hang & Zhang (2000)). Entretanto, a introdução de integrais em funções de Lyapunov faz com que tais abordagens se tornem excessivamente complicadas e de difícil aplicação prática (Li et al., 2004).

Através da suposição que $\partial g_i / \partial x_\rho = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega'$, onde Ω' é um conjunto compacto que contém a origem, Zhang et al. (1999) elimina por completo problemas de singularidade no controlador.

No caso do sistema (6.1), o fato de os termos g_{j,ρ_j} , com $j = 1, \dots, m$, não dependerem de $x_{1,\rho_1}, \dots, x_{j,\rho_j}$ evita o aparecimento de problemas de singularidade e a estabilidade do sistema resultante é garantida sem que se requeira o uso de funções de Lyapunov com integrais.

Objetiva-se, neste capítulo, projetar controladores adaptativos neurais para o sistema (6.1) de tal forma que todos os sinais em malha fechada permaneçam semiglobalmente uniformemente ultimamente limitados e as saídas y_j sigam trajetórias de referência y_{d_j} geradas pelo seguinte modelo de referência suave e limitado:

$$\Sigma_{ref} : \begin{cases} \dot{x}_{di} = f_{di}(\mathbf{x}_d), & 1 \leq i \leq n \\ y_{dj} = x_{dj}, & 1 \leq j \leq m \leq n \end{cases} \quad (6.4)$$

onde $\mathbf{x}_d = [x_{d1}, \dots, x_{dm}]^T \in \mathfrak{R}^m$ é o estado, $y_{dj} \in \mathfrak{R}$, com $j = 1, \dots, m$, são as saídas e f_{di} , com $i = 1, \dots, n$, são não-linearidades suaves conhecidas.

As seguintes hipóteses são feitas em relação ao sistema MIMO com incertezas (6.1):

Hipótese 1: Os sinais de g_{j,i_j} são conhecidos, e existem constantes $\bar{g}_{j,i_j} \geq \underline{g}_{j,i_j} > 0$, com $i_j = 1, \dots, \rho_j$ e $j = 1, \dots, m$, tal que $\bar{g}_{j,i_j} \geq |g_{j,i_j}| \geq \underline{g}_{j,i_j}$.

A hipótese acima implica que as funções suaves g_{j,i_j} são ou estritamente positivas ou estritamente negativas. Sem que se perca generalidade, supõe-se, nesta tese, que $\bar{g}_{j,i_j} \geq g_{j,i_j} \geq \underline{g}_{j,i_j}$.

Hipótese 2: Existem constantes $g_{j,i_j}^d > 0$, com $i_j = 1, \dots, \rho_j$ e $j = 1, \dots, m$, tal que $|\dot{g}_{j,i_j}| \leq g_{j,i_j}^d$ no conjunto compacto $\Omega_{j,i_j} \forall t \geq 0$.

Dado que as derivadas de g_{j,i_j} são

$$\begin{aligned} \dot{g}_{j,i_j}(\bar{\mathbf{x}}_{1,(i_j-\zeta_{j,1})}, \dots, \bar{\mathbf{x}}_{m,(i_j-\zeta_{j,m})}) &= \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^{i_j-\zeta_{j,l}} \frac{\partial g_{j,i_j}}{\partial x_{l,k}} \dot{x}_{l,k} \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^{i_j-\zeta_{j,l}} \frac{\partial g_{j,i_j}}{\partial x_{l,k}} [g_{l,k} x_{l,k+1} + f_{l,k}] \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned}
\dot{g}_{j,\rho_j}(\bar{\mathbf{x}}_{1,\rho_1-1}, \dots, \bar{\mathbf{x}}_{m,\rho_m-1}) &= \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^{\rho_l-1} \frac{\partial g_{j,i_j}}{\partial x_{l,k}} \dot{x}_{l,k} \\
&= \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^{\rho_l-1} \frac{\partial g_{j,i_j}}{\partial x_{l,k}} [g_{l,k} x_{l,k+1} + f_{l,k}]
\end{aligned} \tag{6.6}$$

com $i_j = 1, \dots, \rho_j - 1$ e $j = 1, \dots, m$, i.e. dependem apenas de \mathbf{X} , e porque f_{j,i_j} e g_{j,i_j} são funções suaves, as derivadas $\dot{g}_{j,i_j}(\cdot)$, com $i_j = 1, \dots, \rho_j$ e $j = 1, \dots, m$, são, conforme a Hipótese 2, limitadas no conjunto compacto Ω_{j,i_j} .

Nos projetos dos controladores adaptativos neurais deste capítulo, as aproximações das redes neurais são garantidas somente dentro de um conjunto compacto (Ω_q , definido a seguir). O fato de os resultados de estabilidade obtidos nesta seção serem classificados como semiglobais significa que, contanto que as variáveis de entrada das redes neurais permaneçam dentro de conjuntos compactos (onde esses conjuntos compactos podem ser feitos tão grandes quanto se deseje), existirão controladores com número suficiente de nós nas redes neurais que os compõem que garantam que todos os sinais em malha fechada permaneçam limitados.

A habilidade de redes neurais com funções de base radiais aproximar funções suaves em conjuntos compactos é vastamente registrada na literatura (Narendra, 1991). Nesta tese, é utilizada a seguinte rede neural com funções de base radiais para aproximar uma função contínua $h(\mathbf{Z}): \Omega_q \rightarrow \mathfrak{R}$ (onde Ω_q é um conjunto compacto de \mathfrak{R}^q):

$$h_m(\mathbf{Z}) = \mathbf{W}^T \mathbf{S}(\mathbf{Z}) \tag{6.7}$$

onde $\mathbf{Z} \in \Omega_q \subset \mathfrak{R}^q$ é o vetor de entrada, $\mathbf{W} = [w_1, w_2, \dots, w_l]^T \in \mathfrak{R}^l$ é o vetor de pesos, o número de nós da rede neural é $l > 1$ e $\mathbf{S}(\mathbf{Z}) = [s_1(\mathbf{Z}), \dots, s_l(\mathbf{Z})]^T$, com

$$s_i(\mathbf{Z}) = \exp\left[\frac{-(\mathbf{Z} - \boldsymbol{\vartheta}_i)^T (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\vartheta}_i)}{\lambda_i^2}\right] \tag{6.8}$$

onde $\boldsymbol{\vartheta}_i = [\vartheta_{i1}, \vartheta_{i2}, \dots, \vartheta_{iq}]^T$ é o centro e λ_i é a largura da função Gaussiana. Mostra-se, em geral, que, dada uma função suave $h(\mathbf{Z}): \Omega_q \rightarrow \mathfrak{R}$ e $\varepsilon > 0$, existe um vetor de funções de

base radiais $S: \mathfrak{R}^q \rightarrow \mathfrak{R}^l$ e um vetor de pesos $W^* \in \mathfrak{R}^l$ de tal maneira que $|h(Z) - W^{*T} S(Z)| \leq \varepsilon \quad \forall Z \in \Omega_q$. A expressão $h(Z) - W^{*T} S(Z) = d_h(Z)$ é definida como o erro de reconstrução da rede. O vetor de pesos ótimo W^* é definido somente para fins de análise. Caracteristicamente, W^* é escolhido como o valor de W que minimiza $d_h(Z)$ em Ω_q , ou seja,

$$W^* = \arg \min_{W \in \mathfrak{R}^l} \left\{ \sup_{Z \in \Omega_q} |h(Z) - W^T S(Z)| \right\} \quad (6.9)$$

A metodologia de projeto de leis de controle nesta seção segue a técnica de *backstepping* (Krstić et al., 1995) para cada subsistema em (6.1). Para cada i_j -ésimo passo é obtida uma lei de controle virtual α_{j,i_j}^* . O subsistema de i_j -ésima ordem do j -ésimo subsistema é estabilizado por meio de uma função de Lyapunov V_{j,i_j} que leva em consideração uma função estabilizadora α_{j,i_j} , na qual redes neurais de base radiais são usadas para aproximar as partes desconhecidas de α_{j,i_j}^* . A lei de controle u_j para o j -ésimo subsistema é projetada no ρ_j -ésimo passo.

6.2.1. Passo 1

A variável de erro correspondente à primeira variável de estado é

$$z_{j,1} = x_{j,1} - x_{dj} \quad (6.10)$$

Sua derivada é expressa por

$$\dot{z}_{j,1} = f_{j,1} + g_{j,1} x_{j,2} - \dot{x}_{dj} \quad (6.11)$$

A equação (6.11) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\dot{z}_{j,1} = g_{j,1} [g_{j,1}^{-1} f_{j,1} + x_{j,2} - g_{j,1}^{-1} \dot{x}_{dj}] \quad (6.12)$$

Considerando $x_{j,2}$ como a entrada de controle virtual em (6.12), pode-se escolher o seguinte controlador ideal $\alpha_{j,1}^*$:

$$\alpha_{j,1}^* = -g_{j,1}^{-1}f_{j,1} + g_{j,1}^{-1}\dot{x}_{dj} - c_{j,1}z_{j,1} \quad (6.13)$$

onde $c_{j,1} > 0$. Utilizando-se redes neurais com funções de base radiais para aproximar os termos desconhecidos, a lei de controle para $x_{j,2}$ pode ser expressa da seguinte forma:

$$\alpha_{j,1} = -\theta_{j,1}^T \xi_{j,1}(\mathbf{z}_{j,1}) + \delta_{j,1}^T \eta_{j,1}(\mathbf{z}_{j,1}) \dot{x}_{dj} - c_{j,1}z_{j,1} \quad (6.14)$$

com

$$\mathbf{z}_{j,1} = [\bar{\mathbf{x}}_{1,(1-\varepsilon_{j,1})}^T, \dots, \bar{\mathbf{x}}_{m,(1-\varepsilon_{j,m})}^T]^T \in \Omega_{j,1} \quad (6.15)$$

onde $\bar{\mathbf{x}}_{l,(1-\varepsilon_{j,l})}$, $l = 1, \dots, m$, representa as variáveis de estado do l -ésimo subsistema que estão embutidas no j -ésimo subsistema. Definindo

$$z_{j,2} = x_{j,2} - \alpha_{j,1} \quad (6.16)$$

pode-se reescrever (6.12) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{j,1} &= g_{j,1} [g_{j,1}^{-1}f_{j,1} - g_{j,1}^{-1}\dot{x}_{dj} + z_{j,2} + \alpha_{j,1}] \\ &= g_{j,1} [\theta_{j,1}^{*T} \xi_{j,1}(\mathbf{z}_{j,1}) - \delta_{j,1}^{*T} \eta_{j,1}(\mathbf{z}_{j,1}) \dot{x}_{dj} + z_{j,2} + \alpha_{j,1} + d_{j,1}] \end{aligned} \quad (6.17)$$

onde $\theta_{j,1}^*$ e $\delta_{j,1}^*$ são os vetores de pesos com valores ótimos para aproximar $g_{j,1}^{-1}f_{j,1}$ e $g_{j,1}^{-1}$.

O erro de reconstrução neural

$$d_{j,1} = [g_{j,1}^{-1}f_{j,1} - \theta_{j,1}^{*T} \xi_{j,1}] + [-g_{j,1}^{-1} + \delta_{j,1}^{*T} \eta_{j,1}] \dot{x}_{dj} \quad (6.18)$$

é limitado, i.e. existe uma constante $\varepsilon_{j,1} > 0$ tal que $|d_{j,1}| < \varepsilon_{j,1}$. Substituindo (6.14) por

$\alpha_{j,1}$ em (6.17), chega-se a

$$\dot{z}_{j,1} = g_{j,1} [\tilde{\theta}_{j,1}^T \xi_{j,1} - \tilde{\delta}_{j,1}^T \eta_{j,1} \dot{x}_{dj} - c_{j,1}z_{j,1} + z_{j,2} + d_{j,1}] \quad (6.19)$$

onde $\tilde{\theta}_{j,1} = \theta_{j,1}^* - \theta_{j,1}$ e $\tilde{\delta}_{j,1} = \delta_{j,1}^* - \delta_{j,1}$. A função de Lyapunov deste passo é a seguinte:

$$V_{j,1} = \frac{1}{2g_{j,1}} z_{j,1}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{j,1}^T \Gamma_{j,1a}^{-1} \tilde{\theta}_{j,1} + \frac{1}{2} \tilde{\delta}_{j,1}^T \Gamma_{j,1b}^{-1} \tilde{\delta}_{j,1} \quad (6.20)$$

onde $\Gamma_{j,1a} = \Gamma_{j,1a}^T > 0$ e $\Gamma_{j,1b} = \Gamma_{j,1b}^T > 0$ são matrizes constantes. A derivada de (6.20) é dada por

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{j,1} &= \frac{z_{j,1}\dot{z}_{j,1}}{g_{j,1}} - \frac{\dot{g}_{j,1}}{2g_{j,1}^2}z_{j,1}^2 - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{j,1}^T \boldsymbol{\Gamma}_{j,1a}^{-1} \dot{\boldsymbol{\theta}}_{j,1} - \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{j,1}^T \boldsymbol{\Gamma}_{j,1b}^{-1} \dot{\boldsymbol{\delta}}_{j,1} \\
&= \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{j,1}^T [z_{j,1}\boldsymbol{\xi}_{j,1} - \boldsymbol{\Gamma}_{j,1a}^{-1} \dot{\boldsymbol{\theta}}_{j,1}] - \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{j,1}^T [z_{j,1}\boldsymbol{\eta}_{j,1}\dot{x}_{dj} + \boldsymbol{\Gamma}_{j,1b}^{-1} \dot{\boldsymbol{\delta}}_{j,1}] - \\
&\quad - \left[c_{j,1} + \frac{\dot{g}_{j,1}}{2g_{j,1}^2} \right] z_{j,1}^2 + z_{j,1}z_{j,2} + z_{j,1}d_{j,1}
\end{aligned} \tag{6.21}$$

As leis de atualização para os vetores de pesos $\boldsymbol{\theta}_{j,1}$ e $\boldsymbol{\delta}_{j,1}$ são as seguintes:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{j,1} = \boldsymbol{\Gamma}_{j,1a} [z_{j,1}\boldsymbol{\xi}_{j,1} - \sigma_{j,1}\boldsymbol{\theta}_{j,1}] \tag{6.22}$$

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_{j,1} = \boldsymbol{\Gamma}_{j,1b} [-z_{j,1}\boldsymbol{\eta}_{j,1}\dot{x}_{dj} - \gamma_{j,1}\boldsymbol{\delta}_{j,1}] \tag{6.23}$$

onde $\sigma_{j,1} > 0$ e $\gamma_{j,1} > 0$ são constantes. Fazendo $c_{j,1} = c_{j,1a} + c_{j,1b}$, com $c_{j,1a} > 0$ e $c_{j,1b} > 0$, pode-se reescrever (6.21) da seguinte maneira:

$$\dot{V}_{j,1} = z_{j,1}z_{j,2} - \left[c_{j,1a} + \frac{\dot{g}_{j,1}}{2g_{j,1}^2} \right] z_{j,1}^2 - c_{j,1b}z_{j,1}^2 + z_{j,1}d_{j,1} + \sigma_{j,1}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{j,1}^T \boldsymbol{\theta}_{j,1} + \gamma_{j,1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{j,1}^T \boldsymbol{\delta}_{j,1} \tag{6.24}$$

Completando-se os quadrados, tem-se:

$$\sigma_{j,1}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{j,1}^T \boldsymbol{\theta}_{j,1} = \sigma_{j,1}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{j,1}^T (\boldsymbol{\theta}_{j,1}^* - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{j,1}) \leq \frac{\sigma_{j,1}\|\boldsymbol{\theta}_{j,1}^*\|^2}{2} - \frac{\sigma_{j,1}\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{j,1}\|^2}{2} \tag{6.25}$$

$$\gamma_{j,1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{j,1}^T \boldsymbol{\delta}_{j,1} = \gamma_{j,1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{j,1}^T (\boldsymbol{\delta}_{j,1}^* - \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{j,1}) \leq \frac{\gamma_{j,1}\|\boldsymbol{\delta}_{j,1}^*\|^2}{2} - \frac{\gamma_{j,1}\|\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{j,1}\|^2}{2} \tag{6.26}$$

$$-c_{j,1b}z_{j,1}^2 + z_{j,1}d_{j,1} \leq \frac{d_{j,1}^2}{4c_{j,1b}} \leq \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{j,1}^2}{4c_{j,1b}} \tag{6.27}$$

Como $-[c_{j,1a} + (\dot{g}_{j,1}/2g_{j,1}^2)]z_{j,1}^2 \leq -[c_{j,1a} - (g_{j,1}^d/2g_{j,1}^2)]z_{j,1}^2$, a escolha de $c_{j,1a}$ tal que

$c_{j,1a}^* := c_{j,1a} - (g_{j,1}^d/2g_{j,1}^2) > 0$ gera a seguinte desigualdade:

$$\dot{V}_{j,1} \leq z_{j,1}z_{j,2} - c_{j,1a}^*z_{j,1}^2 + \frac{1}{2}\sigma_{j,1}\|\boldsymbol{\theta}_{j,1}^*\|^2 - \frac{1}{2}\sigma_{j,1}\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{j,1}\|^2 + \frac{1}{2}\gamma_{j,1}\|\boldsymbol{\delta}_{j,1}^*\|^2 - \frac{1}{2}\gamma_{j,1}\|\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{j,1}\|^2 + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{j,1}^2}{4c_{j,1b}} \tag{6.28}$$

6.2.2. Passo i_j ($2 \leq i_j \leq \rho_j - 1$)

A i_j -ésima variável de erro é definida como segue:

$$z_{j,i_j} = x_{j,i_j} - \alpha_{j,i_j-1} \quad (6.29)$$

Sua derivada é dada por

$$\dot{z}_{j,i_j} = f_{j,i_j} + g_{j,i_j} x_{j,i_j+1} - \dot{\alpha}_{j,i_j-1} \quad (6.30)$$

Pode-se reescrever (6.30) da seguinte forma:

$$\dot{z}_{j,i_j} = g_{j,i_j} \left[g_{j,i_j}^{-1} f_{j,i_j} + x_{j,i_j+1} - g_{j,i_j}^{-1} \dot{\alpha}_{j,i_j-1} \right] \quad (6.31)$$

Considerando x_{j,i_j+1} como entrada de controle virtual de (6.31), pode-se definir um

controlador ideal α_{j,i_j}^* como segue:

$$\alpha_{j,i_j}^* = -g_{j,i_j}^{-1} f_{j,i_j} + g_{j,i_j}^{-1} \dot{\alpha}_{j,i_j-1} - c_{j,i_j} z_{j,i_j} - z_{j,i_j-1} \quad (6.32)$$

com $c_{j,i_j} > 0$. Redes neurais com funções de base radiais podem ser empregadas para

aproximar os termos desconhecidos de (6.32). Dessa forma, a lei de controle para x_{j,i_j+1}

pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\alpha_{j,i_j} = -\boldsymbol{\theta}_{j,i_j}^T \boldsymbol{\xi}_{j,i_j}(\mathbf{z}_{j,i_j}) + \boldsymbol{\delta}_{j,i_j}^T \boldsymbol{\eta}_{j,i_j}(\mathbf{z}_{j,i_j}) \dot{\alpha}_{j,i_j-1} - c_{j,i_j} z_{j,i_j} - z_{j,i_j-1} \quad (6.33)$$

onde

$$\mathbf{z}_{j,i_j} = \left[\bar{\mathbf{x}}_{1,(i_j-\zeta_{j,1})}^T, \dots, \bar{\mathbf{x}}_{m,(i_j-\zeta_{j,m})}^T \right]^T \in \Omega_{j,i_j} \quad (6.34)$$

Define-se, a seguir, a $(i_j + 1)$ -ésima variável de erro:

$$z_{j,i_j+1} = x_{j,i_j+1} - \alpha_{j,i_j} \quad (6.35)$$

Pode-se, assim, reescrever (6.31):

$$\begin{aligned} \dot{z}_{j,i_j} &= g_{j,i_j} \left[g_{j,i_j}^{-1} f_{j,i_j} - g_{j,i_j}^{-1} \dot{\alpha}_{j,i_j-1} + z_{j,i_j+1} + \alpha_{j,i_j} \right] \\ &= g_{j,i_j} \left[\boldsymbol{\theta}_{j,i_j}^{*T} \boldsymbol{\xi}_{j,i_j} - \boldsymbol{\delta}_{j,i_j}^{*T} \boldsymbol{\eta}_{j,i_j} \dot{\alpha}_{j,i_j-1} + z_{j,i_j+1} + \alpha_{j,i_j} + d_{j,i_j} \right] \end{aligned} \quad (6.36)$$

onde $\boldsymbol{\theta}_{j,i_j}^*$ e $\boldsymbol{\delta}_{j,i_j}^*$ são os vetores de pesos com valores ótimos para aproximação de $g_{j,i_j}^{-1} f_{j,i_j}$

e g_{j,i_j}^{-1} . O erro de reconstrução neural

$$d_{j,i_j} = \left[g_{j,i_j}^{-1} f_{j,i_j} - \boldsymbol{\theta}_{j,i_j}^{*T} \boldsymbol{\xi}_{j,i_j} \right] + \left[-g_{j,i_j}^{-1} + \boldsymbol{\delta}_{j,i_j}^{*T} \boldsymbol{\eta}_{j,i_j} \right] \dot{\alpha}_{j,i_j-1} \quad (6.37)$$

é limitado, ou seja, existe uma constante $\varepsilon_{j,i_j} > 0$ tal que $|d_{j,i_j}| < \varepsilon_{j,i_j}$. Substituindo (6.33) por $\alpha_{j,1}$ em (6.36), tem-se:

$$\dot{z}_{j,i_j} = g_{j,i_j} \left[\tilde{\theta}_{j,i_j}^T \xi_{j,i_j} - \tilde{\delta}_{j,i_j}^T \eta_{j,i_j} \dot{\alpha}_{j,i_j-1} - c_{j,i_j} z_{j,i_j} + z_{j,i_j+1} - z_{j,i_j-1} + d_{j,i_j} \right] \quad (6.38)$$

onde $\tilde{\theta}_{j,i_j} = \theta_{j,i_j}^* - \theta_{j,i_j}$ e $\tilde{\delta}_{j,i_j} = \delta_{j,i_j}^* - \delta_{j,i_j}$. A função de Lyapunov deste passo é a seguinte:

$$V_{j,i_j} = V_{j,i_j-1} + \frac{1}{2g_{j,i_j}} z_{j,i_j}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{j,i_j}^T \Gamma_{j,i_j a}^{-1} \tilde{\theta}_{j,i_j} + \frac{1}{2} \tilde{\delta}_{j,i_j}^T \Gamma_{j,i_j b}^{-1} \tilde{\delta}_{j,i_j} \quad (6.39)$$

com $\Gamma_{j,i_j a} = \Gamma_{j,i_j a}^T > 0$ e $\Gamma_{j,i_j b} = \Gamma_{j,i_j b}^T > 0$ matrizes constantes. A derivada de (6.39) é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{j,i_j} &= \dot{V}_{j,i_j-1} + \frac{z_{j,i_j} \dot{z}_{j,i_j}}{g_{j,i_j}} - \frac{\dot{g}_{j,i_j}}{2g_{j,i_j}^2} z_{j,i_j}^2 - \tilde{\theta}_{j,i_j}^T \Gamma_{j,i_j a}^{-1} \dot{\theta}_{j,i_j} - \tilde{\delta}_{j,i_j}^T \Gamma_{j,i_j b}^{-1} \dot{\delta}_{j,i_j} \\ &= \dot{V}_{j,i_j-1} + \tilde{\theta}_{j,i_j}^T \left[z_{j,i_j} \xi_{j,i_j} - \Gamma_{j,i_j a}^{-1} \dot{\theta}_{j,i_j} \right] - \tilde{\delta}_{j,i_j}^T \left[z_{j,i_j} \eta_{j,i_j} \dot{\alpha}_{j,i_j-1} + \Gamma_{j,i_j b}^{-1} \dot{\delta}_{j,i_j} \right] - \\ &\quad - z_{j,i_j} z_{j,i_j-1} + z_{j,i_j} z_{j,i_j+1} - \left[c_{j,i_j} + \frac{\dot{g}_{j,i_j}}{2g_{j,i_j}^2} \right] z_{j,i_j}^2 + z_{j,i_j} d_{j,i_j} \end{aligned} \quad (6.40)$$

As leis de atualização dos vetores de pesos θ_{j,i_j} e δ_{j,i_j} são as seguintes:

$$\dot{\theta}_{j,i_j} = \Gamma_{j,i_j a} \left[z_{j,i_j} \xi_{j,i_j} - \sigma_{j,i_j} \theta_{j,i_j} \right] \quad (6.41)$$

$$\dot{\delta}_{j,i_j} = \Gamma_{j,i_j b} \left[-z_{j,i_j} \eta_{j,i_j} \dot{\alpha}_{j,i_j-1} - \gamma_{j,i_j} \delta_{j,i_j} \right] \quad (6.42)$$

onde $\sigma_{j,i_j} > 0$ e $\gamma_{j,i_j} > 0$ são constantes. Fazendo $c_{j,i_j} = c_{j,i_j a} + c_{j,i_j b}$, com $c_{j,i_j a} > 0$ e $c_{j,i_j b} > 0$, (6.40) torna-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_{j,i_j} &= \dot{V}_{j,i_j-1} - z_{j,i_j-1} z_{j,i_j} + z_{j,i_j} z_{j,i_j+1} - c_{j,i_j b} z_{j,i_j}^2 - \left[c_{j,i_j a} + \frac{\dot{g}_{j,i_j}}{2g_{j,i_j}^2} \right] z_{j,i_j}^2 + z_{j,i_j} d_{j,i_j} + \\ &\quad + \sigma_{j,i_j} \tilde{\theta}_{j,i_j}^T \theta_{j,i_j} + \gamma_{j,i_j} \tilde{\delta}_{j,i_j}^T \delta_{j,i_j} \end{aligned} \quad (6.43)$$

Completando-se os quadrados, tem-se que

$$\sigma_{j,i_j} \tilde{\theta}_{j,i_j}^T \theta_{j,i_j} = \sigma_{j,i_j} \tilde{\theta}_{j,i_j}^T (\theta_{j,i_j}^* - \tilde{\theta}_{j,i_j}) \leq \frac{\sigma_{j,i_j} \|\theta_{j,i_j}^*\|^2}{2} - \frac{\sigma_{j,i_j} \|\tilde{\theta}_{j,i_j}\|^2}{2} \quad (6.44)$$

$$\gamma_{j,i_j} \tilde{\delta}_{j,i_j}^T \delta_{j,i_j} = \gamma_{j,i_j} \tilde{\delta}_{j,i_j}^T (\delta_{j,i_j}^* - \tilde{\delta}_{j,i_j}) \leq \frac{\gamma_{j,i_j} \|\delta_{j,i_j}^*\|^2}{2} - \frac{\gamma_{j,i_j} \|\tilde{\delta}_{j,i_j}\|^2}{2} \quad (6.45)$$

$$-c_{j,i_j b} z_{j,i_j}^2 + z_{j,i_j} d_{j,i_j} \leq \frac{d_{j,i_j}^2}{4c_{j,i_j b}} \leq \frac{\varepsilon_{j,i_j}^2}{4c_{j,i_j b}} \quad (6.46)$$

Como $-[c_{j,i_j a} + (g_{j,i_j}^d / 2g_{j,i_j}^2)] z_{j,i_j}^2 \leq -[c_{j,i_j a} - (g_{j,i_j}^d / 2g_{j,i_j}^2)] z_{j,i_j}^2$, a escolha de $c_{j,i_j a}$ tal que

$c_{j,i_j a}^* := c_{j,i_j a} - (g_{j,i_j}^d / 2g_{j,i_j}^2) > 0$ gera a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{j,i_j} \leq & z_{j,i_j} z_{j,i_j+1} - \sum_{k=1}^{i_j} c_{j,ka}^* z_{j,k}^2 + \sum_{k=1}^{i_j} \frac{\varepsilon_{j,k}^2}{4c_{j,kb}} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{i_j} \left(\sigma_{j,k} \|\tilde{\theta}_{j,k}\|^2 + \gamma_{j,k} \|\tilde{\delta}_{j,k}\|^2 \right) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{i_j} \left(\sigma_{j,k} \|\theta_{j,k}^*\|^2 + \gamma_{j,k} \|\delta_{j,k}^*\|^2 \right) \end{aligned} \quad (6.47)$$

6.2.3. Passo ρ_j

A variável de erro do passo ρ_j (último passo do *backstepping* do subsistema j) é definida como segue:

$$z_{j,\rho_j} = x_{j,\rho_j} - \alpha_{j,\rho_j-1} \quad (6.48)$$

e sua derivada é dada por:

$$\dot{z}_{j,\rho_j} = f_{j,\rho_j} + g_{j,\rho_j} u_j - \dot{\alpha}_{j,\rho_j-1} \quad (6.49)$$

A equação (6.49) pode ser assim reescrita:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{j,\rho_j} &= g_{j,\rho_j} \left[g_{j,\rho_j}^{-1} f_{j,\rho_j} + u_j - g_{j,\rho_j}^{-1} \dot{\alpha}_{j,\rho_j-1} \right] \\ &= g_{j,\rho_j} \left[\theta_{j,\rho_j}^{*T} \xi_{j,\rho_j}(\mathbf{z}_{j,\rho_j}) - \delta_{j,\rho_j}^{*T} \eta_{j,\rho_j}(\mathbf{z}_{j,\rho_j}) \dot{\alpha}_{j,\rho_j-1} + u_j + d_{j,\rho_j} \right] \end{aligned} \quad (6.50)$$

onde

$$\mathbf{z}_{j,\rho_j} = [\mathbf{X}, u_1, \dots, u_{j-1}]^T \in \Omega_{j,\rho_j} \quad (6.51)$$

e θ_{j,ρ_j}^* e δ_{j,ρ_j}^* são os vetores de pesos com valores ótimos para aproximação de $g_{j,\rho_j}^{-1} f_{j,\rho_j}$ e

$g_{j,\rho_j}^{-1} \cdot \dot{\alpha}_{j,\rho_j-1}$. O erro de reconstrução neural

$$d_{j,\rho_j} = \left[g_{j,\rho_j}^{-1} f_{j,\rho_j} - \theta_{j,\rho_j}^{*T} \xi_{j,\rho_j} \right] + \left[-g_{j,\rho_j}^{-1} + \delta_{j,\rho_j}^{*T} \eta_{j,\rho_j} \right] \dot{\alpha}_{j,\rho_j-1} \quad (6.52)$$

é limitado, i.e. existe uma constante $\varepsilon_{j,\rho_j} > 0$ tal que $|d_{j,\rho_j}| < \varepsilon_{j,\rho_j}$. O controle de realimentação ideal para o j -ésimo subsistema, u_j^* , é escolhido como segue:

$$u_j^* = -g_{j,\rho_j}^{-1} f_{j,\rho_j} + g_{j,\rho_j}^{-1} \dot{\alpha}_{j,\rho_j-1} - c_{j,\rho_j} z_{j,\rho_j} - z_{j,\rho_j-1} \quad (6.53)$$

com $c_{j,\rho_j} > 0$. O emprego de redes neurais com funções de base radiais para aproximação dos termos desconhecidos faz com que a lei de controle para o j -ésimo subsistema possa ser expressa da seguinte maneira:

$$u_j = -\theta_{j,\rho_j}^T \xi_{j,\rho_j} + \delta_{j,\rho_j}^T \eta_{j,\rho_j} \dot{\alpha}_{j,\rho_j-1} - c_{j,\rho_j} z_{j,\rho_j} - z_{j,\rho_j-1} \quad (6.54)$$

Substituindo (6.54) em (6.50), chega-se a

$$\dot{z}_{j,i_j} = g_{j,\rho_j} \left[\tilde{\theta}_{j,\rho_j}^T \xi_{j,\rho_j} - \tilde{\delta}_{j,\rho_j}^T \eta_{j,\rho_j} \dot{\alpha}_{j,\rho_j-1} - c_{j,\rho_j} z_{j,\rho_j} - z_{j,\rho_j-1} + d_{j,\rho_j} \right] \quad (6.55)$$

onde $\tilde{\theta}_{j,\rho_j} = \theta_{j,\rho_j}^* - \theta_{j,\rho_j}$ e $\tilde{\delta}_{j,\rho_j} = \delta_{j,\rho_j}^* - \delta_{j,\rho_j}$. A função de Lyapunov deste ρ_j -ésimo passo é a seguinte:

$$V_{j,\rho_j} = V_{j,\rho_j-1} + \frac{z_{j,\rho_j}^2}{2g_{j,\rho_j}} + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{j,\rho_j}^T \Gamma_{j,\rho_j a}^{-1} \tilde{\theta}_{j,\rho_j} + \frac{1}{2} \tilde{\delta}_{j,\rho_j}^T \Gamma_{j,\rho_j b}^{-1} \tilde{\delta}_{j,\rho_j} \quad (6.56)$$

com $\Gamma_{j,\rho_j a} = \Gamma_{j,\rho_j a}^T > 0$ e $\Gamma_{j,\rho_j b} = \Gamma_{j,\rho_j b}^T > 0$ matrizes constantes. A derivada de (6.56) é

$$\begin{aligned} \dot{V}_{j,\rho_j} &= \dot{V}_{j,\rho_j-1} + \frac{z_{j,\rho_j} \dot{z}_{j,\rho_j}}{g_{j,\rho_j}} - \frac{\dot{g}_{j,\rho_j}}{2g_{j,\rho_j}^2} z_{j,\rho_j}^2 - \tilde{\theta}_{j,\rho_j}^T \Gamma_{j,\rho_j a}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_{j,\rho_j} - \tilde{\delta}_{j,\rho_j}^T \Gamma_{j,\rho_j b}^{-1} \dot{\tilde{\delta}}_{j,\rho_j} \\ &= \dot{V}_{j,\rho_j-1} + \tilde{\theta}_{j,\rho_j}^T \left[z_{j,\rho_j} \xi_{j,\rho_j} - \Gamma_{j,\rho_j a}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_{j,\rho_j} \right] - \tilde{\delta}_{j,\rho_j}^T \left[z_{j,\rho_j} \eta_{j,\rho_j} \dot{\alpha}_{j,\rho_j-1} + \Gamma_{j,\rho_j b}^{-1} \dot{\tilde{\delta}}_{j,\rho_j} \right] - \\ &\quad - z_{j,\rho_j} z_{j,\rho_j-1} - \left[c_{j,\rho_j} + \frac{\dot{g}_{j,\rho_j}}{2g_{j,\rho_j}^2} \right] z_{j,\rho_j}^2 + z_{j,\rho_j} d_{j,\rho_j} \end{aligned} \quad (6.57)$$

As leis de atualização dos vetores de pesos θ_{j,ρ_j} e δ_{j,ρ_j} são dadas por:

$$\dot{\theta}_{j,\rho_j} = \Gamma_{j,\rho_j a} \left[z_{j,\rho_j} \xi_{j,\rho_j} - \sigma_{j,\rho_j} \theta_{j,\rho_j} \right] \quad (6.58)$$

$$\dot{\delta}_{j,\rho_j} = \Gamma_{j,\rho_j b} \left[-z_{j,\rho_j} \eta_{j,\rho_j} \dot{\alpha}_{j,\rho_j-1} - \gamma_{j,\rho_j} \delta_{j,\rho_j} \right] \quad (6.59)$$

onde $\sigma_{j,\rho_j} > 0$ e $\gamma_{j,\rho_j} > 0$ são constantes. Fazendo $c_{j,\rho_j} = c_{j,\rho_j a} + c_{j,\rho_j b}$, com $c_{j,\rho_j a} > 0$ e $c_{j,\rho_j b} > 0$, (6.57) torna-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{j,\rho_j} = & \dot{V}_{j,\rho_j-1} - z_{j,\rho_j-1} z_{j,\rho_j} - c_{j,\rho_j b} z_{j,\rho_j}^2 - \left[c_{j,\rho_j a} + \frac{\dot{g}_{j,\rho_j}}{2g_{j,\rho_j}^2} \right] z_{j,\rho_j}^2 + \\ & + z_{j,\rho_j} d_{j,\rho_j} + \sigma_{j,\rho_j} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{j,\rho_j}^T \boldsymbol{\theta}_{j,\rho_j} + \gamma_{j,\rho_j} \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{j,\rho_j}^T \boldsymbol{\delta}_{j,\rho_j} \end{aligned} \quad (6.60)$$

Completando-se os quadrados, chega-se a

$$\sigma_{j,\rho_j} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{j,\rho_j}^T \boldsymbol{\theta}_{j,\rho_j} \leq \frac{\sigma_{j,\rho_j} \|\boldsymbol{\theta}_{j,\rho_j}^*\|^2}{2} - \frac{\sigma_{j,\rho_j} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{j,\rho_j}\|^2}{2} \quad (6.61)$$

$$\gamma_{j,\rho_j} \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{j,\rho_j}^T \boldsymbol{\delta}_{j,\rho_j} \leq \frac{\gamma_{j,\rho_j} \|\boldsymbol{\delta}_{j,\rho_j}^*\|^2}{2} - \frac{\gamma_{j,\rho_j} \|\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{j,\rho_j}\|^2}{2} \quad (6.62)$$

$$-c_{j,\rho_j b} z_{j,\rho_j}^2 + z_{j,\rho_j} d_{j,\rho_j} \leq \frac{\varepsilon_{j,\rho_j}^2}{4c_{j,\rho_j b}} \quad (6.63)$$

Como $-\left[c_{j,\rho_j a} + \left(\dot{g}_{j,\rho_j} / 2g_{j,\rho_j}^2 \right) \right] z_{j,\rho_j}^2 \leq -\left[c_{j,\rho_j a} - \left(g_{j,\rho_j}^d / 2\underline{g}_{j,\rho_j}^2 \right) \right] z_{j,\rho_j}^2$, a escolha de $c_{j,\rho_j a}$ tal que $c_{j,\rho_j a}^* := c_{j,\rho_j a} - \left(g_{j,\rho_j}^d / 2\underline{g}_{j,\rho_j}^2 \right) > 0$ gera a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{j,\rho_j} \leq & -\sum_{k=1}^{\rho_j} c_{j,ka}^* z_{j,k}^2 + \sum_{k=1}^{\rho_j} \frac{\varepsilon_{j,k}^2}{4c_{j,kb}} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\rho_j} \left(\sigma_{j,k} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{j,k}\|^2 + \gamma_{j,k} \|\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{j,k}\|^2 \right) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\rho_j} \left(\sigma_{j,k} \|\boldsymbol{\theta}_{j,k}^*\|^2 + \gamma_{j,k} \|\boldsymbol{\delta}_{j,k}^*\|^2 \right) \end{aligned} \quad (6.64)$$

Definindo

$$\phi_j := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\rho_j} \left(\sigma_{j,k} \|\boldsymbol{\theta}_{j,k}^*\|^2 + \gamma_{j,k} \|\boldsymbol{\delta}_{j,k}^*\|^2 \right) + \sum_{k=1}^{\rho_j} \frac{\varepsilon_{j,k}^2}{4c_{j,kb}} \quad (6.65)$$

e selecionando $c_{j,ka}^*$ tal que $c_{j,ka}^* \geq \mu_j / 2\underline{g}_{j,k}$, ou seja,

$$c_{j,ka} \geq \frac{\mu_j}{2\underline{g}_{j,k}} + \frac{g_{j,k}^d}{2\underline{g}_{j,k}^2} \quad (6.66)$$

onde μ_j é uma constante positiva e $\sigma_{j,k}$, $\gamma_{j,k}$, $\Gamma_{j,ka}$ e $\Gamma_{j,kb}$ seguem

$$\sigma_{j,k} \geq \mu_j \lambda_{\max} \{ \Gamma_{j,ka}^{-1} \} \quad (6.67)$$

$$\gamma_{j,k} \geq \mu_j \lambda_{\max} \{ \Gamma_{j,kb}^{-1} \} \quad (6.68)$$

onde $\lambda_{\max} \{ \cdot \}$ é o maior autovalor da respectiva matriz e $k = 1, \dots, \rho_j$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{j,\rho_j} &\leq -\sum_{k=1}^{\rho_j} c_{j,ka}^* z_{j,k}^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\rho_j} \left(\sigma_{j,k} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{j,k}\|^2 + \gamma_{j,k} \|\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{j,k}\|^2 \right) + \phi_j \\
&\leq \sum_{k=1}^{\rho_j} \frac{\mu_j}{2g_{j,k}} z_{j,k}^2 - \mu_j \sum_{k=1}^{\rho_j} \left(\frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{j,k}^T \Gamma_{j,ka}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{j,k} + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{j,k}^T \Gamma_{j,kb}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{j,k} \right) + \phi_j \\
&\leq -\mu_j \left[\sum_{k=1}^{\rho_j} \frac{z_{j,k}^2}{2g_{j,k}} - \sum_{k=1}^{\rho_j} \left(\frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{j,k}^T \Gamma_{j,ka}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{j,k} + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{j,k}^T \Gamma_{j,kb}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{j,k} \right) \right] + \phi_j \\
&\leq -\mu_j V_{j,\rho_j} + \phi_j
\end{aligned} \tag{6.69}$$

Seja $V = \sum_{j=1}^m V_{j,\rho_j}$. Sua derivada é

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^m \dot{V}_{j,\rho_j} \leq \sum_{j=1}^m \left(-\mu_j V_{j,\rho_j} + \phi_j \right) < -\mu V + \phi \tag{6.70}$$

onde $\mu = \min\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ e $\phi = \sum_{j=1}^m \phi_j$ são constantes positivas.

Nas leis de atualização (6.22), (6.23), (6.41), (6.42), (6.58) e (6.59), a introdução dos termos $-\sigma_{j,i_j} \boldsymbol{\theta}_{j,i_j}$ e $-\gamma_{j,i_j} \boldsymbol{\delta}_{j,i_j}$, com $i_j = 1, \dots, \rho_j$ e $j = 1, \dots, m$, remete à proposta de “modificação- σ ”, de Ioannou & Kokotović (1984), para se evitar o aparecimento de instabilidades na resposta do sistema em malha fechada, aumentando, portanto, sua robustez.

6.2.4. Limitação e Convergência

De acordo com o Lema 6.1 a seguir, todos os sinais z_{j,i_j} , $\boldsymbol{\theta}_{j,i_j}$ e $\boldsymbol{\delta}_{j,i_j}$, com $i_j = 1, \dots, \rho_j$ e $j = 1, \dots, m$, são uniformemente ultimamente limitados para condições iniciais limitadas.

Lema 6.1. Considere a função positiva dada por

$$V(t) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{z}(t) + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(t) \Gamma_a^{-1}(t) \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T(t) \Gamma_b^{-1}(t) \tilde{\boldsymbol{\delta}}(t) \tag{6.71}$$

onde $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t)$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) = \boldsymbol{\theta}^* - \boldsymbol{\theta}(t)$ e $\tilde{\boldsymbol{\delta}}(t) = \boldsymbol{\delta}^* - \boldsymbol{\delta}(t)$, com $\mathbf{x}(t) \in \mathfrak{R}^n$, $\mathbf{x}_d(t) \in \Omega_d \subset \mathfrak{R}^n$, $\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathfrak{R}^{m_1}$ e $\boldsymbol{\delta}(t) \in \mathfrak{R}^{m_2}$. $\boldsymbol{\theta}^* \in \mathfrak{R}^{m_1}$ e $\boldsymbol{\delta}^* \in \mathfrak{R}^{m_2}$ são constantes.

$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}^T(t) > 0$, $\Gamma_a(t) = \Gamma_a^T(t) > 0$ e $\Gamma_b(t) = \Gamma_b^T(t) > 0$ são matrizes dimensionalmente compatíveis. Se a desigualdade a seguir for válida:

$$\dot{V}(t) < -\mu V(t) + \phi \quad (6.72)$$

então, dado um conjunto inicial compacto definido por

$$\Omega_0 = \{ \mathbf{x}(0), \mathbf{x}_d(0), \boldsymbol{\theta}(0), \boldsymbol{\delta}(0) \mid \mathbf{x}(0), \mathbf{x}_d(0) \in \Omega_d, \boldsymbol{\theta}(0) \text{ finito}, \boldsymbol{\delta}(0) \text{ finito} \}$$

pode-se concluir que:

(i) Os estados e os pesos das redes neurais, no sistema em malha fechada, permanecerão dentro do conjunto compacto definido por

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}(t), \boldsymbol{\delta}(t) \mid \|\mathbf{x}(t)\| \leq c_{z_{\max}} + \max_{\tau \in [0, t]} \{ \|\mathbf{x}_d(\tau)\| \}, \|\boldsymbol{\theta}(t)\| \leq c_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\max}} + \|\boldsymbol{\theta}^*\|, \|\boldsymbol{\delta}(t)\| \leq c_{\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{\max}} + \|\boldsymbol{\delta}^*\| \right\}$$

(ii) Os estados e os pesos das redes neurais, no sistema em malha fechada, irão convergir para o conjunto compacto definido por

$$\Omega_S = \left\{ \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}(t), \boldsymbol{\delta}(t) \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}(t)\| = \sqrt{\frac{2\phi}{\mu \lambda_{\mathbf{Q}_{\min}}}}, \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)\| = \sqrt{\frac{2\phi}{\mu \lambda_{\Gamma_a \min}}}, \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\boldsymbol{\delta}}(t)\| = \sqrt{\frac{2\phi}{\mu \lambda_{\Gamma_b \min}}} \right\}$$

$$\text{onde } c_{z_{\max}} = \sqrt{\frac{2V(0) + \left(\frac{2\phi}{\mu}\right)}{\lambda_{\mathbf{Q}_{\min}}}}, c_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\max}} = \sqrt{\frac{2V(0) + \left(\frac{2\phi}{\mu}\right)}{\lambda_{\Gamma_a \min}}} \text{ e } c_{\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{\max}} = \sqrt{\frac{2V(0) + \left(\frac{2\phi}{\mu}\right)}{\lambda_{\Gamma_b \min}}}.$$

Prova. A partir das deduções deste capítulo, pode-se verificar facilmente que a função de Lyapunov de todo o sistema (6.1),

$$V = \sum_{j=1}^m V_{j, \rho_j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{i_j=1}^{\rho_j} \frac{z_{j, i_j}^2}{g_{j, i_j}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{i_j=1}^{\rho_j} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{j, i_j}^T \Gamma_{j, i_j a}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{j, i_j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{i_j=1}^{\rho_j} \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{j, i_j}^T \Gamma_{j, i_j b}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{j, i_j} \quad (6.73)$$

pode ser reescrita na forma (6.71), onde $\mathbf{Q}(t) = \text{diag}\{1/g_{j, i_j}\}$, $\Gamma_a^{-1}(t) = \text{diag}\{\Gamma_{j, i_j a}^{-1}\}$ e $\Gamma_b^{-1}(t) = \text{diag}\{\Gamma_{j, i_j b}^{-1}\}$, com $i_j = 1, \dots, \rho_j$ e $j = 1, \dots, m$. Multiplicando (6.70) por $e^{\mu t}$, tem-se:

$$\frac{d}{dt} [V(t)e^{\mu t}] \leq \phi e^{\mu t} \quad (6.74)$$

Integrando (6.74) ao longo de $[0, t]$, chega-se a

$$0 \leq V(t) \leq \left[V(0) - \frac{\phi}{\mu} \right] e^{-\mu t} + \frac{\phi}{\mu} \quad (6.75)$$

onde $V(0) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T(0) \mathbf{Q}(0) \mathbf{z}(0) + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(0) \Gamma_a^{-1}(0) \tilde{\boldsymbol{\theta}}(0) + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T(0) \Gamma_b^{-1}(0) \tilde{\boldsymbol{\delta}}(0)$.

(i) *Limitação Uniforme.* De (6.75), tem-se que:

$$0 \leq V(t) \leq \left[V(0) - \frac{\phi}{\mu} \right] e^{-\mu t} + \frac{\phi}{\mu} \leq V(0) + \frac{\phi}{\mu} \quad (6.76)$$

De (6.71), tem-se que:

$$\frac{1}{2} \lambda_{\mathbf{Q}_{\min}} \|\mathbf{z}(t)\|^2 \leq \frac{1}{2} \lambda_{\min} [\mathbf{Q}(t)] \|\mathbf{z}(t)\|^2 \leq \frac{1}{2} \mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{z}(t) \leq V(t) \quad (6.77)$$

$$\frac{1}{2} \lambda_{\Gamma_{a\min}} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)\|^2 \leq \frac{1}{2} \lambda_{\min} [\Gamma_a^{-1}(t)] \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)\|^2 \leq \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(t) \Gamma_a^{-1}(t) \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) \leq V(t) \quad (6.78)$$

$$\frac{1}{2} \lambda_{\Gamma_{b\min}} \|\tilde{\boldsymbol{\delta}}(t)\|^2 \leq \frac{1}{2} \lambda_{\min} [\Gamma_b^{-1}(t)] \|\tilde{\boldsymbol{\delta}}(t)\|^2 \leq \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T(t) \Gamma_b^{-1}(t) \tilde{\boldsymbol{\delta}}(t) \leq V(t) \quad (6.79)$$

Combinando as expressões (6.77), (6.78) e (6.79) com (6.76):

$$\|\mathbf{z}(t)\| \leq \sqrt{\frac{2V(t)}{\lambda_{\mathbf{Q}_{\min}}}} \leq \sqrt{\frac{2V(0) + (2\phi/\mu)}{\lambda_{\mathbf{Q}_{\min}}}} \Rightarrow \|\mathbf{z}(t)\| \leq c_{z_{\max}} \quad (6.80)$$

$$\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)\| \leq \sqrt{\frac{2V(t)}{\lambda_{\Gamma_{a\min}}}} \leq \sqrt{\frac{2V(0) + (2\phi/\mu)}{\lambda_{\Gamma_{a\min}}}} \Rightarrow \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)\| \leq c_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\max}} \quad (6.81)$$

$$\|\tilde{\boldsymbol{\delta}}(t)\| \leq \sqrt{\frac{2V(t)}{\lambda_{\Gamma_{b\min}}}} \leq \sqrt{\frac{2V(0) + (2\phi/\mu)}{\lambda_{\Gamma_{b\min}}}} \Rightarrow \|\tilde{\boldsymbol{\delta}}(t)\| \leq c_{\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{\max}} \quad (6.82)$$

onde $\lambda_{\mathbf{Q}_{\min}} = \min_{\tau \in [0, t]} \lambda_{\min} [\mathbf{Q}(\tau)]$, $\lambda_{\Gamma_{a\min}} = \min_{\tau \in [0, t]} \lambda_{\min} [\Gamma_a^{-1}(\tau)]$ e $\lambda_{\Gamma_{b\min}} = \min_{\tau \in [0, t]} \lambda_{\min} [\Gamma_b^{-1}(\tau)]$. $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$ e $\lambda_{\min}(\mathbf{A})$ denotam o maior e o menor autovalores da matriz quadrada \mathbf{A} , respectivamente.

Como $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t)$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) = \boldsymbol{\theta}^* - \boldsymbol{\theta}(t)$ e $\tilde{\boldsymbol{\delta}}(t) = \boldsymbol{\delta}^* - \boldsymbol{\delta}(t)$:

$$\|\mathbf{x}(t)\| - \|\mathbf{x}_d(t)\| \leq \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t)\| \leq c_{z_{\max}} \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \leq c_{z_{\max}} + \max_{\tau \in [0, t]} \{\|\mathbf{x}_d(\tau)\|\} \quad (6.83)$$

$$\|\boldsymbol{\theta}(t)\| - \|\boldsymbol{\theta}^*\| \leq \|\boldsymbol{\theta}(t) - \boldsymbol{\theta}^*\| \leq c_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\max}} \Rightarrow \|\boldsymbol{\theta}(t)\| \leq c_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\max}} + \|\boldsymbol{\theta}^*\| \quad (6.84)$$

$$\|\boldsymbol{\delta}(t)\| - \|\boldsymbol{\delta}^*\| \leq \|\boldsymbol{\delta}(t) - \boldsymbol{\delta}^*\| \leq c_{\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{\max}} \Rightarrow \|\boldsymbol{\delta}(t)\| \leq c_{\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{\max}} + \|\boldsymbol{\delta}^*\| \quad (6.85)$$

(ii) *Limitação Última Uniforme.* De (6.75), (6.77), (6.78) e (6.79):

$$\|\mathbf{z}(t)\| \leq \sqrt{\frac{2[V(0) - (\phi/\mu)]e^{-\mu t} + 2(\phi/\mu)}{\lambda_{\mathbf{Q}_{\min}}}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}(t)\| = \sqrt{\frac{2\phi}{\mu \lambda_{\mathbf{Q}_{\min}}}} \quad (6.86)$$

$$\|\tilde{\theta}(t)\| \leq \sqrt{\frac{2[V(0) - (\phi/\mu)]e^{-\mu t} + 2(\phi/\mu)}{\lambda_{\Gamma_{a_{\min}}}}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\theta}(t)\| = \sqrt{\frac{2\phi}{\mu\lambda_{\Gamma_{a_{\min}}}}} \quad (6.87)$$

$$\|\tilde{\delta}(t)\| \leq \sqrt{\frac{2[V(0) - (\phi/\mu)]e^{-\mu t} + 2(\phi/\mu)}{\lambda_{\Gamma_{b_{\min}}}}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\delta}(t)\| = \sqrt{\frac{2\phi}{\mu\lambda_{\Gamma_{b_{\min}}}}} \quad (6.88)$$

Três conjuntos compactos são descritos no Lema 6.1: Ω_0 (conjunto compacto inicial), Ω (conjunto compacto limitador) e Ω_s (conjunto compacto do estado estacionário). A partir da análise efetuada nesta seção, tem-se que o tamanho de Ω_0 afeta o de Ω , porém não o de Ω_s . O tamanho de Ω_s pode ser alterado (e ser feito tanto menor quanto se deseje) através da mudança dos valores dos parâmetros μ , ϕ , $Q(t)$, $\Gamma_a^{-1}(t)$ e $\Gamma_b^{-1}(t)$, ou seja, o tamanho dos conjuntos residuais (6.86), (6.87) e (6.88) depende dos parâmetros c_{j,i_j} , σ_{j,i_j} e γ_{j,i_j} , de $\Gamma_{j,i_j a}^{-1}$ e $\Gamma_{j,i_j b}^{-1}$ e dos erros de reconstrução neural d_{j,i_j} , com $i_j = 1, \dots, \rho_j$ e $j = 1, \dots, m$.

Observa-se que um aumento de $c_{j,i_j a}$ e de $c_{j,i_j b}$, com $i_j = 1, \dots, \rho_j$ e $j = 1, \dots, m$, resulta, respectivamente em aumento de μ_j e diminuição de ϕ_j , o que, à luz de (6.86), (6.87) e (6.88), implica numa diminuição do tamanho de Ω_s . Entretanto, aumentar c_{j,i_j} equivale a um esquema de controle com altos ganhos. É sabido que o emprego de metodologias de controle com altos ganhos é desvantajoso na prática, uma vez que comporta o risco de que as dinâmicas não modeladas do sistema sejam excitadas, destruindo assim a estabilidade do sistema em malha fechada (Zhang, Peng & Jiang, 2000). No tocante a σ_{j,i_j} e γ_{j,i_j} , apesar de se requerer que assumam valores pequenos conforme as diretrizes da aplicação da estratégia de modificação- σ (Kwan & Lewis, 2000), magnitudes excessivamente pequenas para σ_{j,i_j} e γ_{j,i_j} podem não ser suficientes para evitar que as estimativas dos pesos das redes neurais se encaminhem indesejadamente para valores muito grandes (Zhang, Peng & Jiang, 2000), o que se constituiria, analogamente, numa variação de controle com altos ganhos. Portanto, em aplicações práticas, os

parâmetros de projeto devem ser ajustados de forma cautelosa para que a performance do transiente e a ação de controle no sistema em malha fechada sejam adequadas.

Quanto a Ω_0 e Ω , Ω será tanto maior quanto maior for Ω_0 . Pode-se projetar facilmente um controlador adaptativo neural estável se a rede neural for escolhida de tal modo que cubra a extensão de Ω para condições iniciais limitadas em Ω_0 . Dessa forma, a resposta final segue a definição de limitação última uniforme semiglobal, pois condições iniciais limitadas garantem a limitação de todos os sinais do sistema em malha fechada contanto que a rede neural seja definida de tal forma que cubra um conjunto compacto Ω suficientemente extenso (Ge & Wang, 2004).

Por conta das várias interconexões presentes nos subsistemas que compõem (6.1), a estabilidade do sistema em malha fechada não pode ser provada subsistema a subsistema, como ocorre na metodologia de *backstepping* tradicional (Krstić et al., 1995). De maneira análoga a Ge & Wang (2004), irá se recorrer aqui a um procedimento iterativo para a prova de estabilidade do sistema completo realimentado.

Teorema 6.1. Considere o sistema em malha fechada composto pelo sistema (6.1), pelo modelo de referência (6.4), pelos controladores (6.54) e pelas leis de atualização dos vetores de pesos das redes neurais (6.22), (6.23), (6.41), (6.42), (6.58) e (6.59) para todos os subsistemas (i.e. para $j = 1, \dots, m$). Então, para condições iniciais limitadas, existem conjuntos compactos Ω_{j,i_j} tal que $\mathbf{Z}_{j,i_j} \in \Omega_{j,i_j}$, com $i_j = 1, \dots, \rho_j$ e $j = 1, \dots, m$, para todo $t \geq 0$ e todos os sinais do sistema em malha fechada permanecem limitados.

Prova. De acordo com o Lema 6.1, sabe-se que, por conta de $\dot{V}_{j,\rho_j} \leq -\mu_j V_{j,\rho_j} + \phi_j$, todos os sinais z_{j,i_j} , θ_{j,i_j} e δ_{j,i_j} , com $i_j = 1, \dots, \rho_j$ e $j = 1, \dots, m$, são uniformemente ultimamente limitados. Como $z_{j,1} = x_{j,1} - x_{d_j}$ e \mathbf{x}_d são limitados, tem-se que a primeira variável de estado $x_{j,1}$ de todos os m subsistemas é limitada. Para provar que o sinal $x_{j,2} = z_{j,2} + \alpha_{j,1}$ é limitado, é necessário mostrar que $\alpha_{j,1}$ é limitado. Como $\alpha_{j,1}$ é função de $z_{j,1}$, $\mathbf{Z}_{j,1}$, $\theta_{j,1}$ e

$\delta_{j,1}$, i.e. função de $\bar{x}_{1,(1-\zeta_{j,1})}, \dots, \bar{x}_{m,(1-\zeta_{j,m})}, \mathbf{x}_d, \boldsymbol{\theta}_{j,1}$ e $\delta_{j,1}$, não é possível, em princípio, definir prontamente a limitação de $\alpha_{j,1}$, uma vez que nem todas as variáveis de estado de $\bar{x}_{l,(1-\zeta_{j,l})}$, com $j, l = 1, \dots, m$ e $l \neq j$, são, ainda, comprovadamente limitadas.

Dois situações são possíveis:

(i) Todos os subsistemas têm a mesma ordem, ou seja, $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m$. Logo, como a diferença de ordem entre o j -ésimo e o l -ésimo subsistemas é nula, i.e. $\zeta_{j,l} = \rho_j - \rho_l = 0$ $\forall j, l = 1, \dots, m$ e, portanto, $\bar{x}_{l,(i_j-\zeta_{j,l})} = \bar{x}_{l,i_j}$, com $i_j = 1, \dots, \rho_j$ e $j = 1, \dots, m$, $\alpha_{j,1}$ será função de $x_{1,1}, \dots, x_{m,1}, \mathbf{x}_d, \boldsymbol{\theta}_{j,1}$ e $\delta_{j,1}$. Como as primeiras variáveis de estado de todos os subsistemas são comprovadamente limitadas, conclui-se que o sinal $\alpha_{j,1}$ é limitado. Isso leva, por sua vez, à comprovação da limitação de $x_{j,2}$, com $j = 1, \dots, m$. Seguindo-se o mesmo raciocínio, é possível provar, um por um, que todos os $\alpha_{j,i_{j-1}}$ e x_{j,i_j} , com $i_j = 3, \dots, \rho_j$ e $j = 1, \dots, m$, são limitados. Prova-se, dessa forma, que as variáveis de estado que compõem \mathbf{X} são todas limitadas.

(ii) Nem todos os subsistemas de (6.1) têm a mesma ordem, i.e. há, pelo menos, dois subsistemas (por exemplo, o j -ésimo e o l -ésimo subsistemas) tal que $\rho_j \neq \rho_l$ e, portanto, $\zeta_{j,l} = \rho_j - \rho_l \neq 0$. Supondo que $i_j - \zeta_{j,l} > 0$, as variáveis de estado $\bar{x}_{l,(i_j-\zeta_{j,l})}$ do l -ésimo subsistema estarão embutidas no j -ésimo subsistema. Nesse caso, não é possível provar a limitação de $\alpha_{j,1}$ seguindo os passos descritos em (i), uma vez que outras variáveis além de $x_{j,1}$, com $j = 1, \dots, m$, estão contidas em $\mathbf{Z}_{j,1}$, do qual $\alpha_{j,1}$ depende. Pode-se apenas, neste momento, comprovar a limitação de $\alpha_{q,1}$, onde $q(q$'s) é(são) dado(s) por:

$$(q, i_q) = \arg \max_{(j, i_j) \in U_r} \{\rho_j - i_j\} \quad (6.89)$$

com $U_r = \{(j, i_j) | x_{j,i_j} \text{ ainda não comprovadamente limitado(s)}\}$.

Neste momento, $i_j = 2$ e, portanto, $i_q = 2$. A definição dos elementos do conjunto U_r levará em conta a existência de combinações possíveis para $i_j = 2$ no rol de subsistemas existentes em (6.1), i.e. $j = 1, \dots, m$. Fazendo-se a escolha do(s) q -ésimo(s) subsistema(s) conforme (6.89), pode-se selecionar, neste passo, apenas aquele(s) $\alpha_{q,1}$ que seja(m) função(funcões) das variáveis já comprovadamente limitadas x_d , $x_{q,1}$, $\theta_{q,1}$ e $\delta_{q,1}$. $\alpha_{q,1}$ será(serão), dessa forma, limitado(s). Da limitação de $z_{q,2}$ e de $\alpha_{q,1}$ decorre a limitação de $x_{q,2}$. Os passos subseqüentes (i.e. análise para $i_j \geq 3$) contemplam as provas dos vários α_{q,i_q-1} e x_{q,i_q} por meio da aplicação sucessiva de (6.89). Com efeito, a aplicação de (6.89) faz com que, em cada iteração, α_{q,i_q-1} seja(m) aquele(s) que depende(m) do menor número de variáveis embutidas de outros subsistemas naquele momento, ou seja, aquele(s) que é(são) função(funcões) de variáveis de estado cujas provas de limitação já foram efetuadas. Desse modo, todos os α_{j,i_j-1} e, portanto, todos os x_{j,i_j} , com $i_j = 2, \dots, \rho_j$ e $j = 1, \dots, m$, são limitados, o que, por sua vez, torna todos os elementos de X limitados.

Da expressão de u_j (6.54), com $j = 1, \dots, m$, conclui-se que todos os sinais das leis de controle são limitados, pois dependem das variáveis limitadas X , x_d , $\theta_{j,1}$, ..., θ_{j,ρ_j} , $\delta_{j,1}$, ..., δ_{j,ρ_j} , com $j = 1, \dots, m$. Conseqüentemente, todos os sinais do sistema em malha fechada são limitados.

Em Ge & Wang (2004), apenas uma rede neural é utilizada na aproximação da função não linear $\lfloor 1/g_{j,i_j} \rfloor \lfloor f_{j,i_j} - \dot{\alpha}_{j,i_j-1} \rfloor$ em cada passo do projeto. O fato de, nessa abordagem, as derivadas das expressões das leis de controle virtuais estarem presentes na composição de Z_{j,i_j} faz com que as dimensões dos vetores de entrada das redes neurais se tornem indesejavelmente grandes, o que, como apontado pelos próprios Ge & Wang (2004), restringe demasiadamente a aplicabilidade do método.

A metodologia proposta nesta tese, por outro lado, emprega duas redes neurais em cada passo do projeto para a aproximação das funções não lineares $[1/g_{j,i_j}]f_{j,i_j}$ e $1/g_{j,i_j}$. A aplicabilidade prática, neste caso, é bem mais simples, uma vez que Z_{j,i_j} não depende das derivadas de $\alpha_{j,i_{j-1}}$. As vantagens da metodologia proposta neste trabalho serão concretamente evidenciadas no exemplo estudado na próxima seção.

6.2.5. Exemplo de Aplicação I – Sistema Não Linear MIMO de Ge & Wang (2004)

Para verificar a eficiência do método proposto, a metodologia de *backstepping* adaptativo neural introduzida neste trabalho será empregada no projeto de controle do mesmo sistema MIMO não linear empregado por Ge & Wang (2004):

$$\Sigma_{E_1} : \begin{cases} \dot{x}_{1,1} = 0.5(x_{1,1} + x_{2,1}) + (1 + 0.1x_{1,1}^2 x_{2,1}^2)x_{1,2} \\ \dot{x}_{1,2} = (x_{1,1}x_{1,2} + x_{2,1}x_{2,2}) + [2 + \cos(x_{1,1}x_{2,1})]u_1 \\ \dot{x}_{2,1} = x_{1,1}x_{2,1} + [2 + \sin(x_{1,1}x_{2,1})]x_{2,2} \\ \dot{x}_{2,2} = (x_{1,1}x_{1,2} + x_{2,1}x_{2,2} + u_1)^2 + (e^{x_{1,1}} + e^{-x_{2,1}})u_2 \\ y_1 = x_{1,1}; \quad y_2 = x_{2,1} \end{cases} \quad (6.90)$$

Serão comparados os resultados de controle obtidos através do método de *backstepping* adaptativo neural proposto nesta tese com os conseguidos por meio da metodologia de projeto introduzida por Ge & Wang (2004).

Objetiva-se o projeto de controladores u_1 e u_2 para o sistema (6.90) de tal forma que todos os sinais do sistema em malha fechada permaneçam limitados e as saídas y_1 e y_2 sigam as trajetórias de referência y_{d1} e y_{d2} definidas pelo sistema a seguir:

$$\Sigma_{E_r} : \begin{cases} \dot{x}_{d1} = x_{d2} \\ \dot{x}_{d2} = -x_{d1} + \beta(1 - x_{d1}^2)x_{d2} \\ y_{d1} = x_{d1}; \quad y_{d2} = x_{d2} \end{cases} \quad (6.91)$$

O sistema (6.91) é um oscilador de van der Pol (Vidyasagar, 1978). Como descrito em Vidyasagar (1978), as trajetórias desse sistema encaminham-se para um ciclo limite quando $\beta > 0$, a partir de um estado inicial que não a origem.

- *Método Proposto:*

O sistema (6.90) segue a conformação de (6.1), com $m = 2$, $\rho_1 = 2$ e $\rho_2 = 2$. As leis de controle para as entradas u_1 e u_2 são definidas de acordo com a expressão (6.54):

$$u_1 = -\boldsymbol{\theta}_{1,2}^T \boldsymbol{\xi}_{1,2}(\mathbf{Z}_{1,2}) + \boldsymbol{\delta}_{1,2}^T \boldsymbol{\eta}_{1,2}(\mathbf{Z}_{1,2}) \dot{\alpha}_{1,1} - c_{1,2} z_{1,2} - z_{1,1} \quad (6.92)$$

$$u_2 = -\boldsymbol{\theta}_{2,2}^T \boldsymbol{\xi}_{2,2}(\mathbf{Z}_{2,2}) + \boldsymbol{\delta}_{2,2}^T \boldsymbol{\eta}_{2,2}(\mathbf{Z}_{2,2}) \dot{\alpha}_{2,1} - c_{2,2} z_{2,2} - z_{2,1} \quad (6.93)$$

Os controladores virtuais $\alpha_{1,1}$ e $\alpha_{2,1}$ são, respectivamente (conforme (6.14)):

$$\alpha_{1,1} = -\boldsymbol{\theta}_{1,1}^T \boldsymbol{\xi}_{1,1}(\mathbf{Z}_{1,1}) + \boldsymbol{\delta}_{1,1}^T \boldsymbol{\eta}_{1,1}(\mathbf{Z}_{1,1}) \dot{x}_{d1} - c_{1,1} z_{1,1} \quad (6.94)$$

$$\alpha_{2,1} = -\boldsymbol{\theta}_{2,1}^T \boldsymbol{\xi}_{2,1}(\mathbf{Z}_{2,1}) + \boldsymbol{\delta}_{2,1}^T \boldsymbol{\eta}_{2,1}(\mathbf{Z}_{2,1}) \dot{x}_{d2} - c_{2,1} z_{2,1} \quad (6.95)$$

onde $z_{1,1} = x_{1,1} - x_{d1}$, $z_{2,1} = x_{2,1} - x_{d2}$, $z_{1,2} = x_{1,2} - \alpha_{1,1}$, $z_{2,2} = x_{2,2} - \alpha_{2,1}$, $\mathbf{Z}_{1,1} = [x_{1,1}, x_{2,1}]^T$, $\mathbf{Z}_{2,1} = [x_{1,1}, x_{2,1}]^T$, $\mathbf{Z}_{1,2} = [x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}]^T$ e $\mathbf{Z}_{2,2} = [x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}, u_1]^T$. Os pesos das redes neurais são atualizados segundo as expressões abaixo (obtidas a partir de (6.22), (6.23), (6.58) e (6.59)):

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{1,1} = \Gamma_{1,1a} [z_{1,1} \boldsymbol{\xi}_{1,1}(\mathbf{Z}_{1,1}) - \sigma_{1,1} \boldsymbol{\theta}_{1,1}] \quad (6.96)$$

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_{1,1} = \Gamma_{1,1b} [-z_{1,1} \boldsymbol{\eta}_{1,1}(\mathbf{Z}_{1,1}) \dot{x}_{d1} - \gamma_{1,1} \boldsymbol{\delta}_{1,1}] \quad (6.97)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{2,1} = \Gamma_{2,1a} [z_{2,1} \boldsymbol{\xi}_{2,1}(\mathbf{Z}_{2,1}) - \sigma_{2,1} \boldsymbol{\theta}_{2,1}] \quad (6.98)$$

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_{2,1} = \Gamma_{2,1b} [-z_{2,1} \boldsymbol{\eta}_{2,1}(\mathbf{Z}_{2,1}) \dot{x}_{d2} - \gamma_{2,1} \boldsymbol{\delta}_{2,1}] \quad (6.99)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{1,2} = \Gamma_{1,2a} [z_{1,2} \boldsymbol{\xi}_{1,2}(\mathbf{Z}_{1,2}) - \sigma_{1,2} \boldsymbol{\theta}_{1,2}] \quad (6.100)$$

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_{1,2} = \Gamma_{1,2b} [-z_{1,2} \boldsymbol{\eta}_{1,2}(\mathbf{Z}_{1,2}) \dot{\alpha}_{1,1} - \gamma_{1,2} \boldsymbol{\delta}_{1,2}] \quad (6.101)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{2,2} = \Gamma_{2,2a} [z_{2,2} \boldsymbol{\xi}_{2,2}(\mathbf{Z}_{2,2}) - \sigma_{2,2} \boldsymbol{\theta}_{2,2}] \quad (6.102)$$

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_{2,2} = \Gamma_{2,2b} [-z_{2,2} \boldsymbol{\eta}_{2,2}(\mathbf{Z}_{2,2}) \dot{\alpha}_{2,1} - \gamma_{2,2} \boldsymbol{\delta}_{2,2}] \quad (6.103)$$

Os parâmetros de projeto são os seguintes:

$$\begin{cases} \sigma_{1,1} = \sigma_{2,1} = \sigma_{1,2} = \sigma_{2,2} = \gamma_{1,1} = \gamma_{2,1} = \gamma_{1,2} = \gamma_{2,2} = 0.05; \\ c_{1,1} = 2; \quad c_{2,1} = 5; \quad c_{1,2} = 3; \quad c_{2,2} = 10; \\ \beta = 0.001; \\ \Gamma_{1,1a} = \Gamma_{1,1b} = \Gamma_{2,1a} = \Gamma_{2,1b} = \Gamma_{1,2a} = \Gamma_{1,2b} = \Gamma_{2,2a} = \Gamma_{2,2b} = \text{diag}\{0.3\} \end{cases} \quad (6.104)$$

As redes neurais $\boldsymbol{\theta}_{1,1}^T \boldsymbol{\xi}_{1,1}(\mathbf{Z}_{1,1})$, $\boldsymbol{\delta}_{1,1}^T \boldsymbol{\eta}_{1,1}(\mathbf{Z}_{1,1})$, $\boldsymbol{\theta}_{2,1}^T \boldsymbol{\xi}_{2,1}(\mathbf{Z}_{2,1})$ e $\boldsymbol{\delta}_{2,1}^T \boldsymbol{\eta}_{2,1}(\mathbf{Z}_{2,1})$ contêm 16 nós; seus centros ϑ_i são igualmente distribuídos em $[-2, 2.5] \times [-2, 2]$ e as larguras das funções Gaussianas são todas $\lambda_i = 5$, com $i = 1, \dots, 16$. As redes neurais $\boldsymbol{\theta}_{1,2}^T \boldsymbol{\xi}_{1,2}(\mathbf{Z}_{1,2})$ e $\boldsymbol{\delta}_{1,2}^T \boldsymbol{\eta}_{1,2}(\mathbf{Z}_{1,2})$, por sua vez, contêm ambas 81 nós com centros ϑ_i igualmente distribuídos em $[-2, 2.5] \times [-2, 3] \times [-2, 2] \times [-2, 3]$ e larguras $\lambda_i = 10$, com $i = 1, \dots, 81$. As redes neurais $\boldsymbol{\theta}_{2,2}^T \boldsymbol{\xi}_{2,2}(\mathbf{Z}_{2,2})$ e $\boldsymbol{\delta}_{2,2}^T \boldsymbol{\eta}_{2,2}(\mathbf{Z}_{2,2})$, por fim, contêm ambas 243 nós com centros ϑ_i igualmente distribuídos em $[-2, 2.5] \times [-2, 3] \times [-2, 2] \times [-2, 3] \times [-2, 3]$ e larguras $\lambda_i = 10$, com $i = 1, \dots, 243$.

As condições iniciais e os pesos iniciais são:

$$\begin{aligned} [x_{1,1}(0), x_{1,2}(0), x_{2,1}(0), x_{2,2}(0)]^T &= [0.5, 2, 0.7, 1]^T; \\ [x_{d1}(0), x_{d2}(0)]^T &= [1.5, 0.8]^T; \\ \boldsymbol{\theta}_{1,1}(0) = \boldsymbol{\delta}_{1,1}(0) = \boldsymbol{\theta}_{2,1}(0) = \boldsymbol{\delta}_{2,1}(0) = \boldsymbol{\theta}_{1,2}(0) = \boldsymbol{\delta}_{1,2}(0) = \boldsymbol{\theta}_{2,2}(0) = \boldsymbol{\delta}_{2,2}(0) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.105)$$

- *Abordagem apresentada por Ge & Wang (2004):*

Simulações em Matlab foram conduzidas de maneira a se proceder à comparação entre os resultados fornecidos pela metodologia proposta neste capítulo e os gerados por Ge & Wang (2004) para o problema de controle do sistema (6.90). Conforme o equacionamento apresentado em Ge & Wang (2004), tem-se que as leis de controle para as entradas u_1 e u_2 são dadas por:

$$u'_1 = -\boldsymbol{\chi}_{1,2}^T \boldsymbol{\xi}_{1,2}(\mathbf{Z}'_{1,2}) - c'_{1,2} z'_{1,2} - z'_{1,1} \quad (6.106)$$

$$u'_2 = -\boldsymbol{\chi}_{2,2}^T \boldsymbol{\xi}_{2,2}(\mathbf{Z}'_{2,2}) - c'_{2,2} z'_{2,2} - z'_{2,1} \quad (6.107)$$

Os controladores virtuais $\alpha'_{1,1}$ e $\alpha'_{2,1}$ são, respectivamente:

$$\alpha'_{2,1} = -\boldsymbol{\chi}_{1,1}^T \boldsymbol{\xi}_{1,1}(\mathbf{Z}'_{1,1}) - c'_{1,1} z'_{1,1} \quad (6.108)$$

$$\alpha'_{2,1} = -\boldsymbol{\chi}_{2,1}^T \boldsymbol{\zeta}_{2,1}(\mathbf{Z}'_{2,1}) - c'_{2,1} z'_{2,1} \quad (6.109)$$

onde $z'_{1,1} = x_{1,1} - x_{d1}$, $z'_{2,1} = x_{2,1} - x_{d2}$, $z'_{1,2} = x_{1,2} - \alpha'_{1,1}$, $z'_{2,2} = x_{2,2} - \alpha'_{2,1}$,

$$\mathbf{Z}'_{1,1} = [x_{1,1}, x_{2,1}, \dot{x}_{d1}]^T, \quad \mathbf{Z}'_{2,1} = [x_{1,1}, x_{2,1}, \dot{x}_{d2}]^T,$$

$$\mathbf{Z}'_{1,2} = [x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}, \partial \alpha'_{1,1} / \partial x_{1,1}, \partial \alpha'_{1,1} / \partial x_{2,1}, \phi'_{1,1}]^T \text{ e}$$

$$\mathbf{Z}'_{2,2} = [x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}, u'_1, \partial \alpha'_{2,1} / \partial x_{1,1}, \partial \alpha'_{2,1} / \partial x_{2,1}, \phi'_{2,1}]^T \text{ e}$$

$$\phi'_{1,1} = (\partial \alpha'_{1,1} / \partial x_{d1}) \dot{x}_{d1} + (\partial \alpha'_{1,1} / \partial x_{d2}) \dot{x}_{d2} + (\partial \alpha'_{1,1} / \partial \boldsymbol{\chi}_{1,1}) \dot{\boldsymbol{\chi}}_{1,1} \quad (6.110)$$

$$\phi'_{2,1} = (\partial \alpha'_{2,1} / \partial x_{d1}) \dot{x}_{d1} + (\partial \alpha'_{2,1} / \partial x_{d2}) \dot{x}_{d2} + (\partial \alpha'_{2,1} / \partial \boldsymbol{\chi}_{2,1}) \dot{\boldsymbol{\chi}}_{2,1} \quad (6.111)$$

Os pesos das redes neurais são atualizados segundo as expressões abaixo:

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_{1,1} = \boldsymbol{\Gamma}'_{1,1} [z'_{1,1} \boldsymbol{\zeta}_{1,1}(\mathbf{Z}'_{1,1}) - \sigma'_{1,1} \boldsymbol{\chi}_{1,1}] \quad (6.112)$$

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_{2,1} = \boldsymbol{\Gamma}'_{2,1} [z'_{2,1} \boldsymbol{\zeta}_{2,1}(\mathbf{Z}'_{2,1}) - \sigma'_{2,1} \boldsymbol{\chi}_{2,1}] \quad (6.113)$$

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_{1,2} = \boldsymbol{\Gamma}'_{1,2} [z'_{1,2} \boldsymbol{\zeta}_{1,2}(\mathbf{Z}'_{1,2}) - \sigma'_{1,2} \boldsymbol{\chi}_{1,2}] \quad (6.114)$$

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_{2,2} = \boldsymbol{\Gamma}'_{2,2} [z'_{2,2} \boldsymbol{\zeta}_{2,2}(\mathbf{Z}'_{2,2}) - \sigma'_{2,2} \boldsymbol{\chi}_{2,2}] \quad (6.115)$$

Os parâmetros de projeto utilizados por Ge & Wang (2004) são os seguintes:

$$\begin{cases} \sigma'_{1,1} = \sigma'_{1,2} = \sigma'_{2,1} = \sigma'_{2,2} = 0.1; \\ c'_{1,1} = 2.5; \quad c'_{1,2} = 10; \quad c'_{2,1} = 6; \quad c'_{2,2} = 20; \\ \beta = 0.001; \\ \boldsymbol{\Gamma}'_{1,1} = \boldsymbol{\Gamma}'_{1,2} = \boldsymbol{\Gamma}'_{2,1} = \boldsymbol{\Gamma}'_{2,2} = \text{diag}\{2\} \end{cases} \quad (6.116)$$

A rede neural $\boldsymbol{\chi}_{1,1}^T \boldsymbol{\zeta}_{1,1}(\mathbf{Z}'_{1,1})$ contém 27 nós; seus centros ϑ_i são igualmente distribuídos em $[-2.5, 2.5] \times [-2.5, 2.5] \times [-2, 2]$ e as larguras das funções Gaussianas são todas $\lambda_i = 3$, com $i = 1, \dots, 27$. A rede neural $\boldsymbol{\chi}_{1,2}^T \boldsymbol{\zeta}_{1,2}(\mathbf{Z}'_{1,2})$ contém 2187 nós; seus centros ϑ_i são igualmente distribuídos em $[-2.5, 2.5] \times [-1.5, 1.5] \times [-2.5, 2.5] \times [-1.5, 1.5] \times [-1.9, -1.6] \times [-0.2, 0.1] \times [-4, 4]$ e as larguras das funções Gaussianas são todas $\lambda_i = 5$, com $i = 1, \dots, 2187$. A rede neural $\boldsymbol{\chi}_{2,1}^T \boldsymbol{\zeta}_{2,1}(\mathbf{Z}'_{2,1})$ contém 27 nós com centros ϑ_i igualmente distribuídos em $[-2.5, 2.5] \times [-2.5, 2.5] \times [-2.5, 2.5]$ e larguras $\lambda_i = 3$, com $i = 1, \dots, 27$. A rede neural $\boldsymbol{\chi}_{2,2}^T \boldsymbol{\zeta}_{2,2}(\mathbf{Z}'_{2,2})$, por sua vez, contém 6567 nós com centros ϑ_i igualmente distribuídos em

$[-2.5, 2.5] \times [-1.5, 1.5] \times [-2.5, 2.5] \times [-1.5, 1.5] \times [-2, 2] \times [-0.3, 0] \times [-1.7, -1.4] \times [-4, 4]$ e larguras $\lambda_i = 8$, com $i = 1, \dots, 6567$.

As condições iniciais são as mesmas de (6.105) e os pesos iniciais são:

$$\boldsymbol{\chi}_{1,1}(0) = \boldsymbol{\chi}_{1,2}(0) = \boldsymbol{\chi}_{2,1}(0) = \boldsymbol{\chi}_{2,2}(0) = \mathbf{0} \quad (6.117)$$

As Figuras 6.1, 6.2, 6.3 e 6.4 trazem os resultados das simulações quando são aplicados, respectivamente, os controladores (6.92) e (6.93) (obtidos através da metodologia aqui introduzida) e (6.106) e (6.107) (abordagem de Ge & Wang (2004)) com vistas ao seguimento dos sinais y_{d1} e y_{d2} . Verifica-se que um bom desempenho é conseguido quando as leis de controle geradas pelo método proposto neste capítulo são utilizadas, bastante similar ao obtido por Ge & Wang (2004). É essencial ressaltar que o número total de nós necessário para a obtenção de uma estrutura neural que forneça uma resposta adequada com a técnica proposta é significativamente reduzido em comparação aos milhares de nós presentes nas redes neurais demandados pela abordagem de Ge & Wang (2004) para este exemplo.

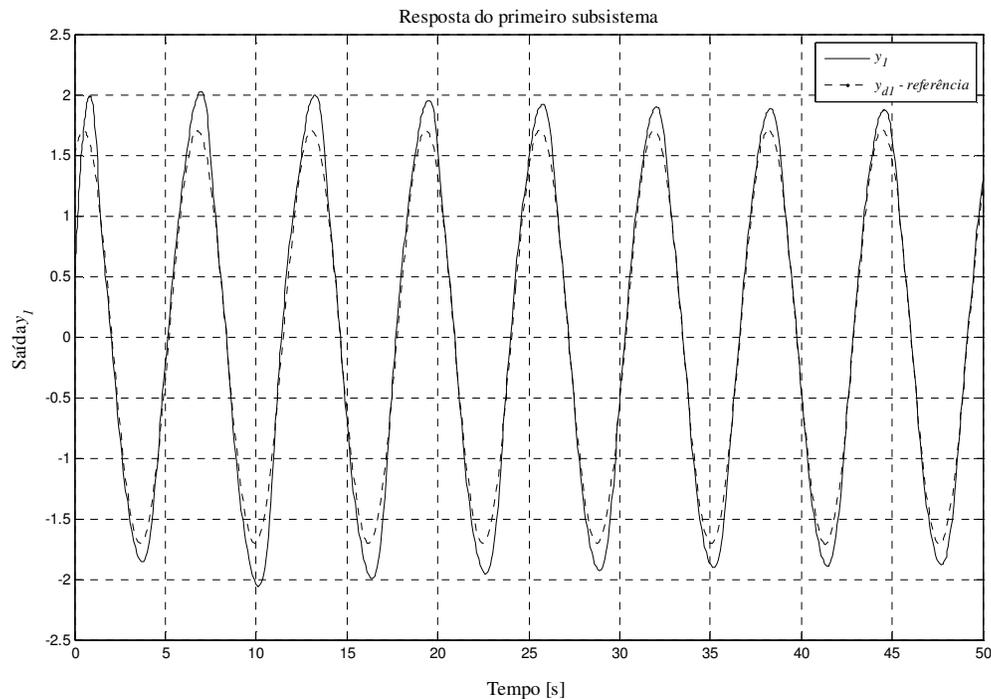


Figura 6.1. A saída do primeiro subsistema de Σ_{E_1} segue a referência y_{d1} – método proposto.

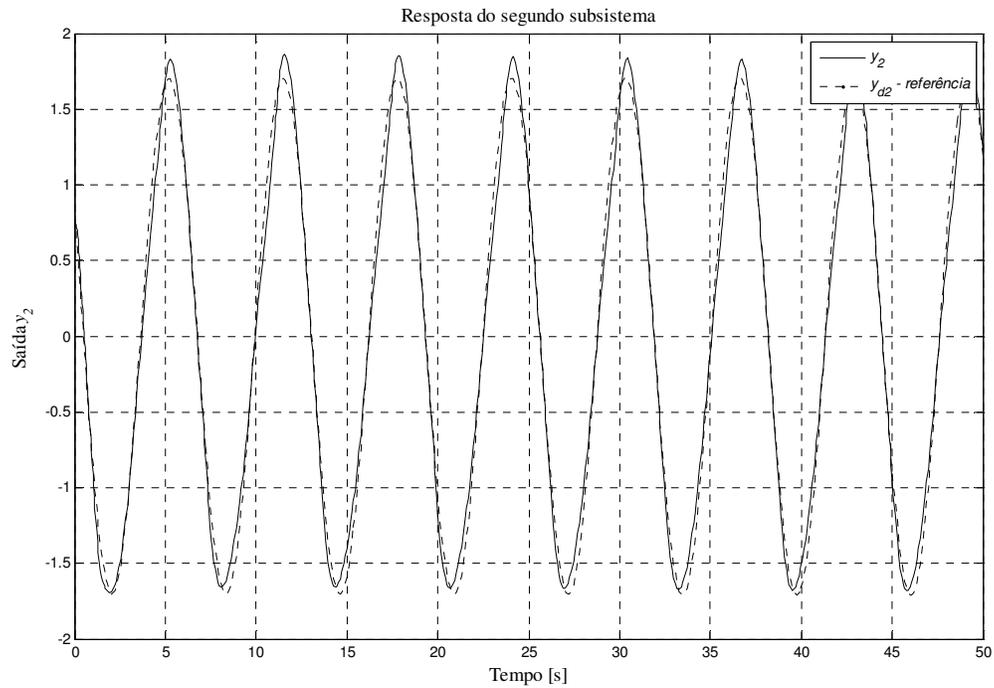


Figura 6.2. A saída do segundo subsistema de Σ_{E_1} segue a referência y_{d2} – método proposto.

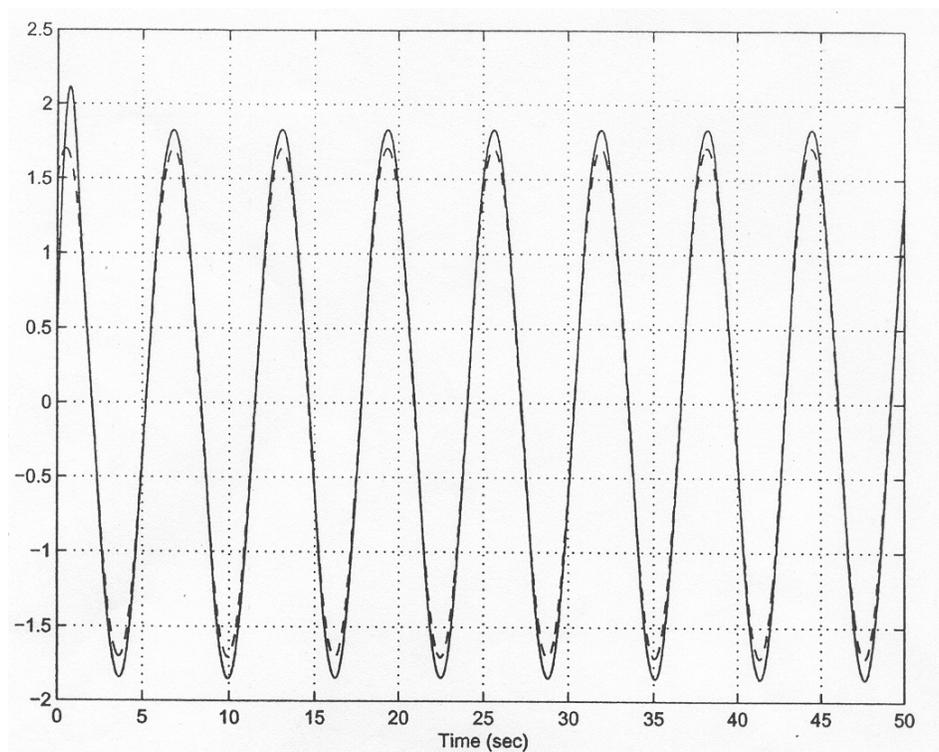


Figura 6.3. A saída do primeiro subsistema de Σ_{E_1} segue a referência y_{d1} (figura extraída de Ge & Wang (2004)).

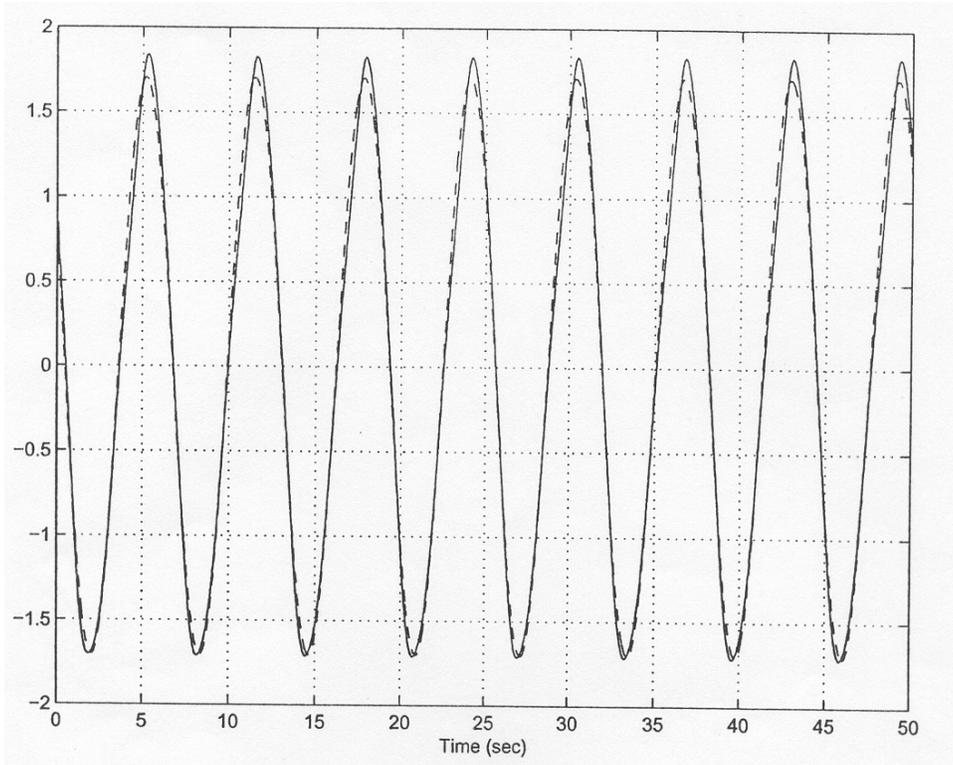


Figura 6.4. A saída do segundo subsistema de Σ_{E_1} segue a referência y_{d2} (figura extraída de Ge & Wang (2004)).

As Figuras 6.5 e 6.6 apresentam, respectivamente, a evolução dos sinais de esforço de controle u_1 e u_2 . Nota-se que todos os sinais são limitados, tal como requerido. As Figuras 6.7 e 6.8 mostram o comportamento dos sinais u'_1 e u'_2 . Ressalta-se a elevada magnitude de esforço de controle presente nos instantes de transitório do processo de controle utilizando u'_1 e u'_2 em comparação ao que emprega u_1 e u_2 . As Figuras 6.9, 6.10, 6.11 e 6.12 mostram a limitação de todos os sinais do sistema em malha fechada resultante do processo de controle através do método introduzido nesta tese, a saber: variáveis de erro z_{j,i_j} , controladores virtuais $\alpha_{1,1}$ e $\alpha_{2,1}$, variáveis de estado de Σ_{E_1} x_{j,i_j} e pesos das redes neurais θ_{j,i_j} e δ_{j,i_j} , onde $i_j = 1, \dots, \rho_j$, $j = 1, 2$ e $\rho_1 = \rho_2 = 2$. Apesar de se verificar um crescimento na norma L_2 dos pesos das redes neurais, sua evolução oscilatória é assintótica em direção a um intervalo de valores finito.

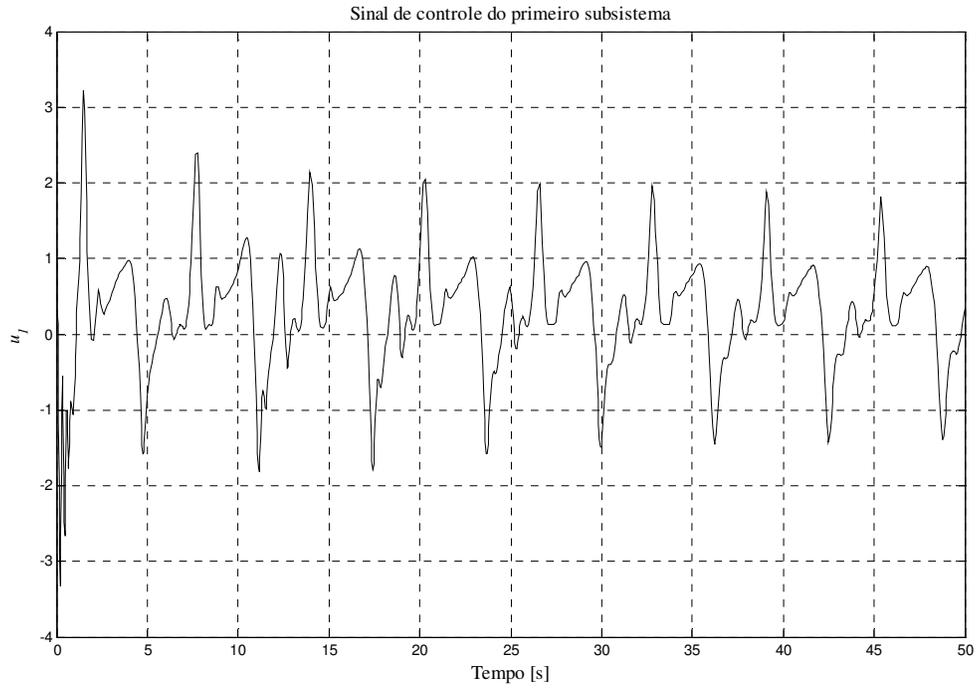


Figura 6.5. Limitação do sinal de controle u_1 gerado pelo método proposto.

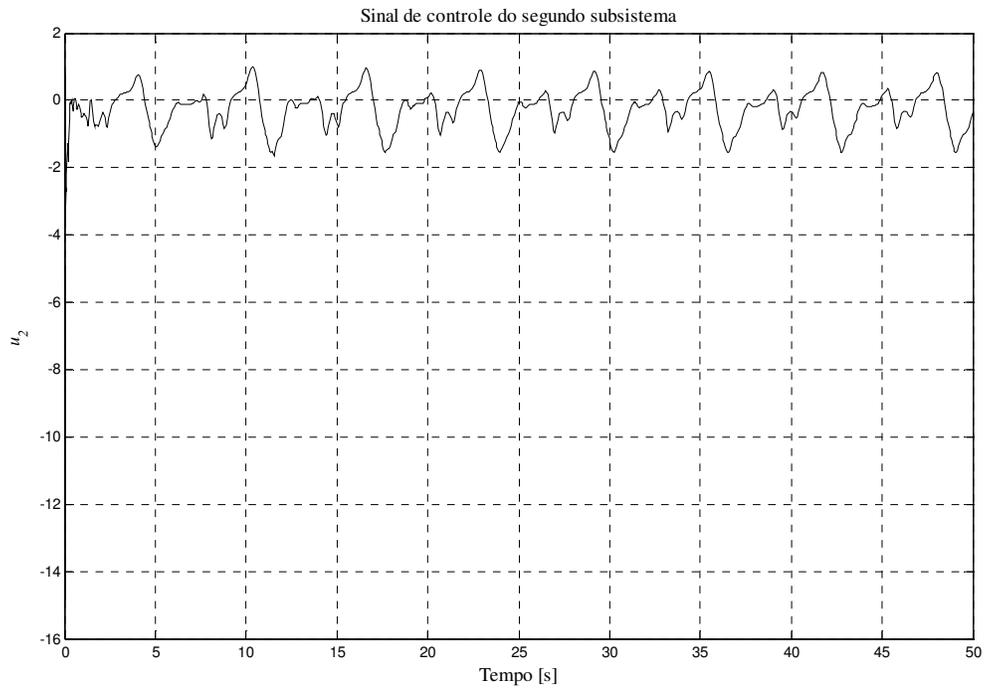


Figura 6.6. Limitação do sinal de controle u_2 gerado pelo método proposto.

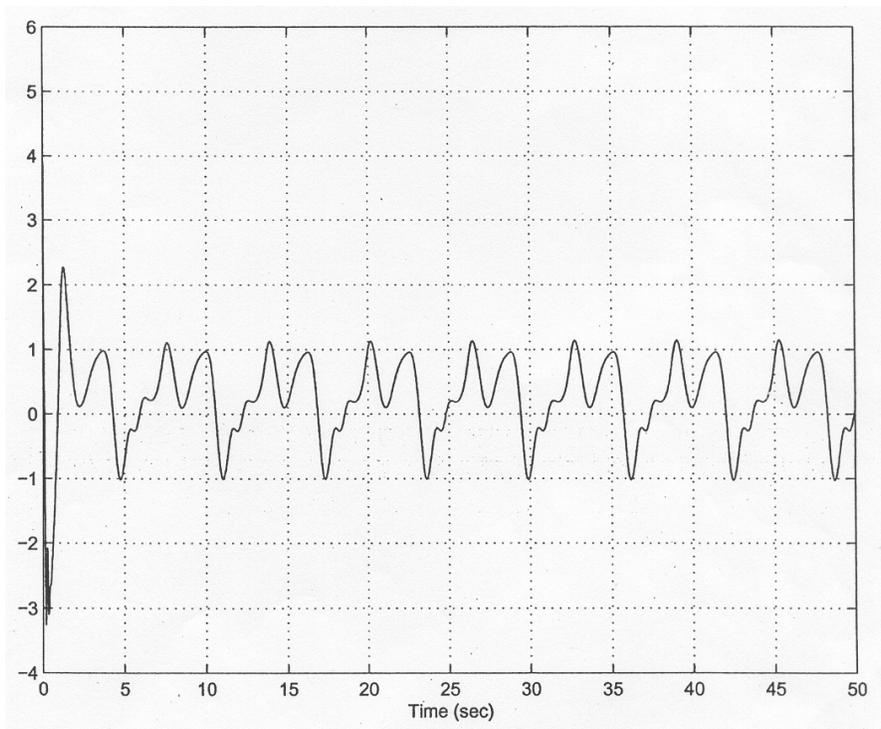


Figura 6.7. Evolução do sinal de controle u_1' gerado pelo método de Ge & Wang (2004) (figura extraída de Ge & Wang (2004)).

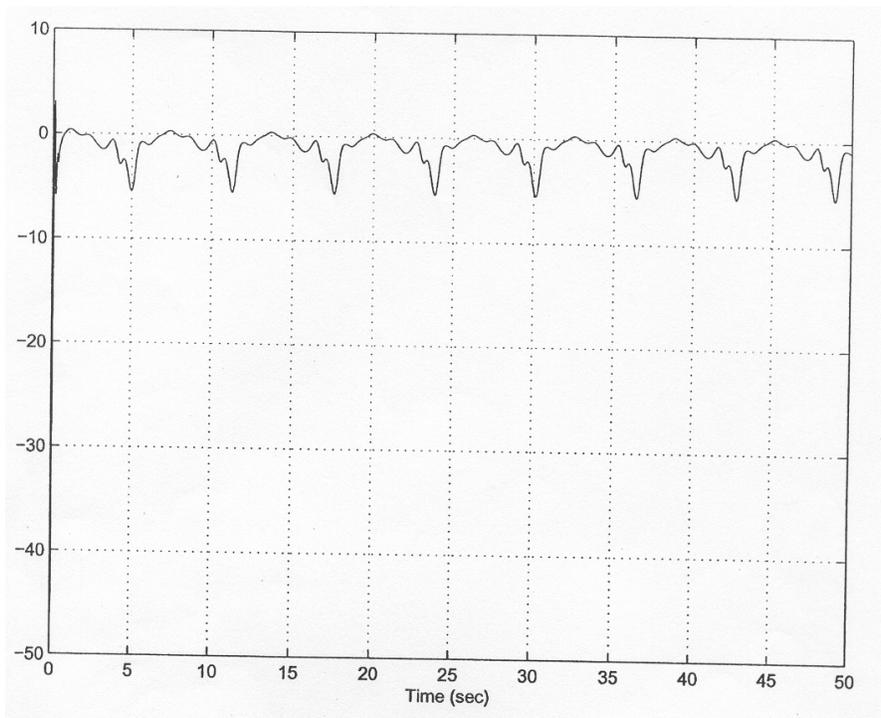


Figura 6.8. Evolução do sinal de controle u_2' gerado pelo método de Ge & Wang (2004) (figura extraída de Ge & Wang (2004)).

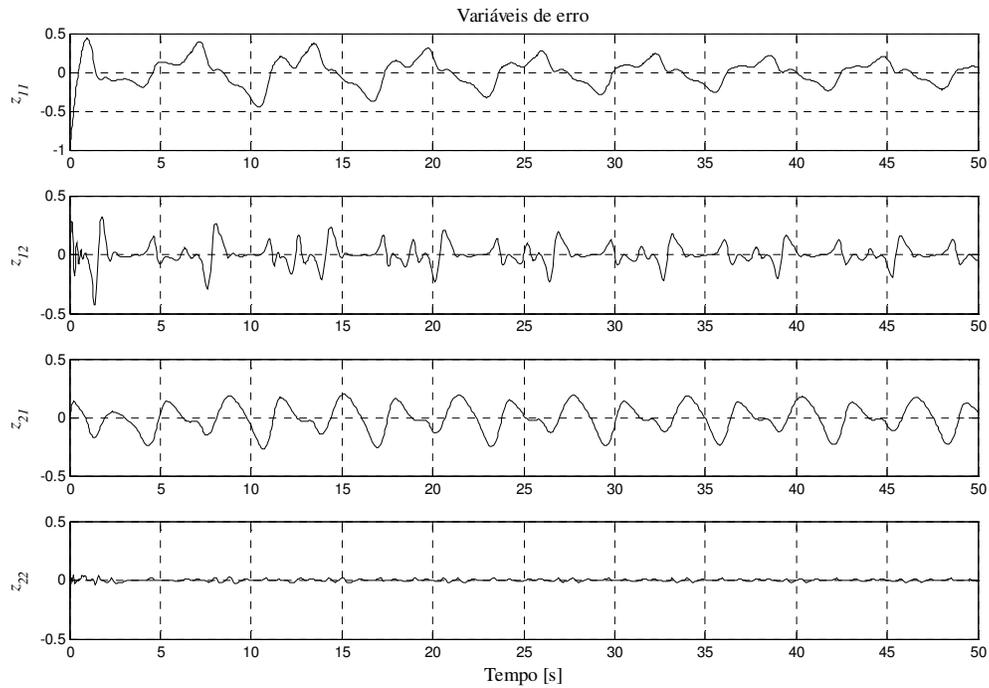


Figura 6.9. Limitação dos sinais das variáveis de erro – método proposto.

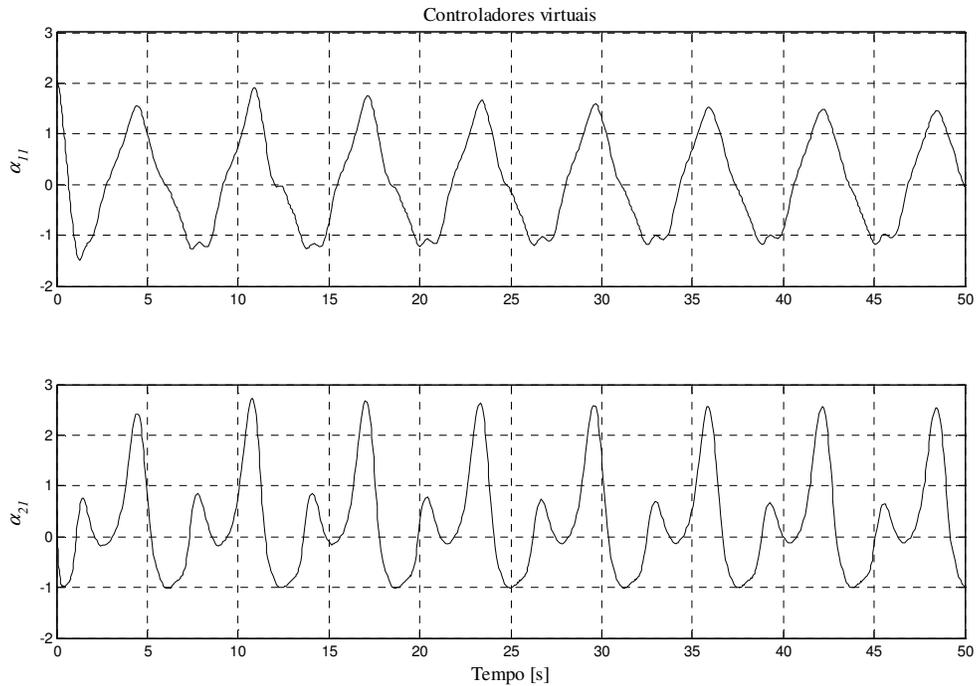


Figura 6.10. Limitação dos sinais dos controladores virtuais – método proposto.

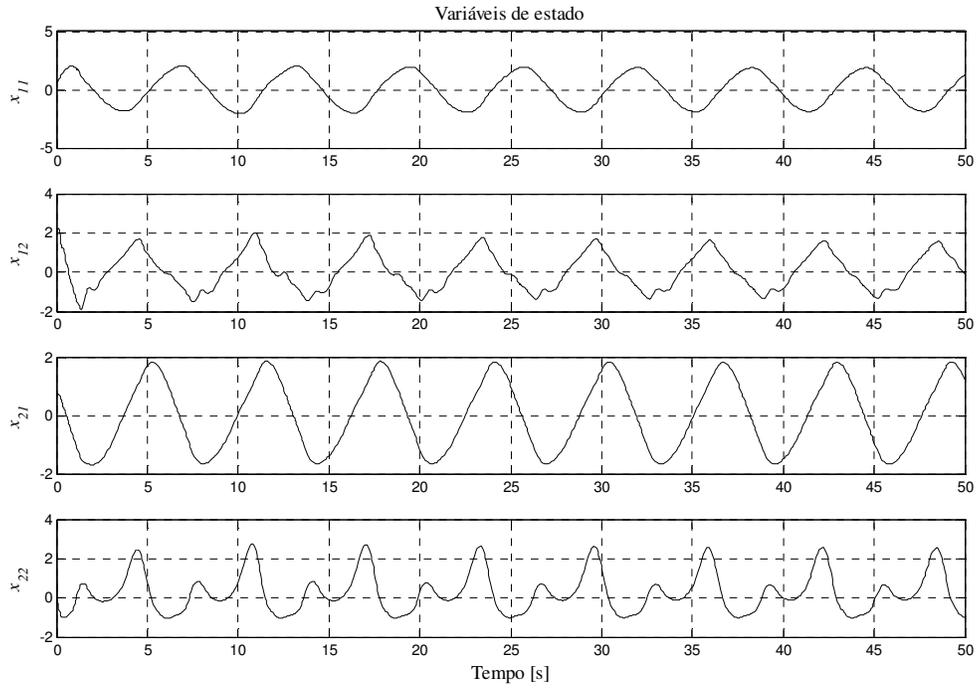


Figura 6.11. Limitação dos sinais das variáveis de estado – método proposto.

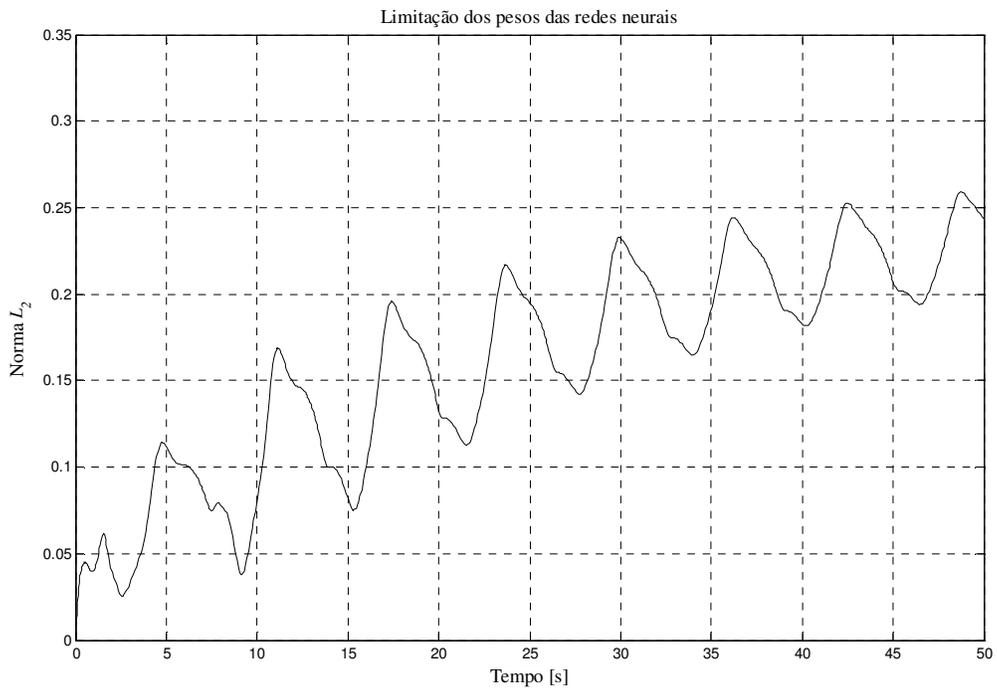


Figura 6.12. Limitação dos sinais dos pesos das redes neurais – método proposto.

6.2.6. Exemplo de Aplicação II – Sistema Não Linear MIMO

Prosseguindo com a verificação da eficiência do método proposto, a metodologia de *backstepping* adaptativo neural introduzida neste trabalho será, agora, empregada no projeto de controle do seguinte sistema MIMO não linear:

$$\Sigma_{E_2} : \begin{cases} \dot{x}_{1,1} = x_{2,1} \text{sen}(x_{1,1} x_{2,2}) + (1 + x_{2,1}^2) u_1 \\ \dot{x}_{2,1} = e^{-x_{2,1}} + \cos(x_{2,1}) x_{2,2} \\ \dot{x}_{2,2} = (x_{1,1} x_{2,1} + u_1)^2 + x_{2,2} + e^{x_{2,1}} u_2 \\ y_1 = x_{1,1}; \quad y_2 = x_{2,1} \end{cases} \quad (6.118)$$

Serão comparados os resultados de controle obtidos através do método de *backstepping* adaptativo neural proposto nesta tese com os conseguidos por meio da metodologia de projeto introduzida por Ge & Wang (2004).

Objetiva-se o projeto de controladores u_1 e u_2 para o sistema (6.118) de tal forma que todos os sinais do sistema em malha fechada permaneçam limitados e as saídas y_1 e y_2 sigam as trajetórias de referência y_{d1} e y_{d2} definidas pelo mesmo sistema (6.91) do exemplo anterior.

- *Método Proposto:*

O sistema (6.118) segue a conformação de (6.1), com $m = 2$, $\rho_1 = 1$ e $\rho_2 = 2$. A lei de controle para a entrada u_1 é definida de acordo com a expressão (6.54):

$$u_1 = -\theta_{1,1}^T \xi_{1,1}(z_{1,1}) + \delta_{1,1}^T \eta_{1,1}(z_{1,1}) \dot{x}_{d1} - c_{1,1} z_{1,1} \quad (6.119)$$

O controlador virtual $\alpha_{2,1}$ e a lei de controle para u_2 são, respectivamente (conforme (6.14) e (6.54)):

$$\alpha_{2,1} = -\theta_{2,1}^T \xi_{2,1}(z_{2,1}) + \delta_{2,1}^T \eta_{2,1}(z_{2,1}) \dot{x}_{d2} - c_{2,1} z_{2,1} \quad (6.120)$$

$$u_2 = -\theta_{2,2}^T \xi_{2,2}(z_{2,2}) + \delta_{2,2}^T \eta_{2,2}(z_{2,2}) \dot{\alpha}_{2,1} - c_{2,2} z_{2,2} - z_{2,1} \quad (6.121)$$

onde $z_{1,1} = x_{1,1} - x_{d1}$, $z_{2,1} = x_{2,1} - x_{d2}$, $z_{2,2} = x_{2,2} - \alpha_{2,1}$, $\mathbf{Z}_{1,1} = [x_{1,1}, x_{2,1}, x_{2,2}]^T$, $\mathbf{Z}_{2,1} = x_{2,1}$ e $\mathbf{Z}_{2,2} = [x_{1,1}, x_{2,1}, x_{2,2}, u_1]^T$. Os pesos das redes neurais são atualizados segundo as expressões abaixo (obtidas a partir de (6.22), (6.23), (6.58) e (6.59)):

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{1,1} = \Gamma_{1,1a} [z_{1,1} \boldsymbol{\xi}_{1,1}(\mathbf{Z}_{1,1}) - \sigma_{1,1} \boldsymbol{\theta}_{1,1}] \quad (6.122)$$

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_{1,1} = \Gamma_{1,1b} [-z_{1,1} \boldsymbol{\eta}_{1,1}(\mathbf{Z}_{1,1}) \dot{x}_{d1} - \gamma_{1,1} \boldsymbol{\delta}_{1,1}] \quad (6.123)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{2,1} = \Gamma_{2,1a} [z_{2,1} \boldsymbol{\xi}_{2,1}(\mathbf{Z}_{2,1}) - \sigma_{2,1} \boldsymbol{\theta}_{2,1}] \quad (6.124)$$

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_{2,1} = \Gamma_{2,1b} [-z_{2,1} \boldsymbol{\eta}_{2,1}(\mathbf{Z}_{2,1}) \dot{x}_{d2} - \gamma_{2,1} \boldsymbol{\delta}_{2,1}] \quad (6.125)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{2,2} = \Gamma_{2,2a} [z_{2,2} \boldsymbol{\xi}_{2,2}(\mathbf{Z}_{2,2}) - \sigma_{2,2} \boldsymbol{\theta}_{2,2}] \quad (6.126)$$

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_{2,2} = \Gamma_{2,2b} [-z_{2,2} \boldsymbol{\eta}_{2,2}(\mathbf{Z}_{2,2}) \dot{\alpha}_{2,1} - \gamma_{2,2} \boldsymbol{\delta}_{2,2}] \quad (6.127)$$

Os parâmetros de projeto são os seguintes:

$$\begin{cases} \sigma_{1,1} = \sigma_{2,1} = \sigma_{2,2} = \gamma_{1,1} = \gamma_{2,1} = \gamma_{2,2} = 0.05; \\ c_{1,1} = 2; \quad c_{2,1} = 5; \quad c_{2,2} = 35; \\ \beta = 0.001; \\ \Gamma_{1,1a} = \Gamma_{1,1b} = \Gamma_{2,1a} = \Gamma_{2,1b} = \Gamma_{2,2a} = \Gamma_{2,2b} = \text{diag}\{0.3\} \end{cases} \quad (6.128)$$

As redes neurais $\boldsymbol{\theta}_{1,1}^T \boldsymbol{\xi}_{1,1}(\mathbf{Z}_{1,1})$ e $\boldsymbol{\delta}_{1,1}^T \boldsymbol{\eta}_{1,1}(\mathbf{Z}_{1,1})$ contêm ambas 27 nós; seus centros ϑ_i são igualmente distribuídos em $[-2.5, 2.5] \times [-2, 2] \times [-8, 2]$ e as larguras das funções Gaussianas são todas $\lambda_i = 5$, com $i = 1, \dots, 27$. A rede neural $\boldsymbol{\theta}_{2,1}^T \boldsymbol{\xi}_{2,1}(\mathbf{Z}_{2,1})$ contém 16 nós com centros ϑ_i igualmente distribuídos em $[-2, 2]$ e larguras $\lambda_i = 12$, com $i = 1, \dots, 16$. A rede neural $\boldsymbol{\delta}_{2,1}^T \boldsymbol{\eta}_{2,1}(\mathbf{Z}_{2,1})$, por sua vez, contém 10 nós com centros ϑ_i igualmente distribuídos em $[-2, 2]$ e larguras $\lambda_i = 12$, com $i = 1, \dots, 10$. As redes neurais $\boldsymbol{\theta}_{2,2}^T \boldsymbol{\xi}_{2,2}(\mathbf{Z}_{2,2})$ e $\boldsymbol{\delta}_{2,2}^T \boldsymbol{\eta}_{2,2}(\mathbf{Z}_{2,2})$ contêm ambas 81 nós com centros ϑ_i igualmente distribuídos em $[-2, 2] \times [-2, 2] \times [-8, 2] \times [-2, 2]$ e larguras $\lambda_i = 10$, com $i = 1, \dots, 81$.

As condições iniciais e os pesos iniciais são:

$$\begin{aligned} [x_{1,1}(0), x_{2,1}(0), x_{2,2}(0)]^T &= [0.5, 1.2, -0.7]^T; \\ [x_{d1}(0), x_{d2}(0)]^T &= [1.5, 0.8]^T; \\ \boldsymbol{\theta}_{1,1}(0) = \boldsymbol{\delta}_{1,1}(0) = \boldsymbol{\theta}_{2,1}(0) = \boldsymbol{\delta}_{2,1}(0) = \boldsymbol{\theta}_{2,2}(0) = \boldsymbol{\delta}_{2,2}(0) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.129)$$

- *Abordagem apresentada por Ge & Wang (2004):*

Simulações em Matlab foram conduzidas de maneira a se proceder à comparação entre os resultados fornecidos pela metodologia proposta neste capítulo e os gerados pela abordagem introduzida por Ge & Wang (2004) no que tange ao problema de controle do sistema (6.118). Conforme o equacionamento de Ge & Wang (2004), tem-se que a lei de controle para a entrada u_1 é dada por:

$$u'_1 = -\boldsymbol{\chi}_{1,1}^T \boldsymbol{\zeta}_{1,1}(\mathbf{Z}'_{1,1}) - c'_{1,1} z'_{1,1} \quad (6.130)$$

O controlador virtual $\alpha'_{2,1}$ e a lei de controle para u_2 são, respectivamente:

$$\alpha'_{2,1} = -\boldsymbol{\chi}_{2,1}^T \boldsymbol{\zeta}_{2,1}(\mathbf{Z}'_{2,1}) - c'_{2,1} z'_{2,1} \quad (6.131)$$

$$u'_2 = -\boldsymbol{\chi}_{2,2}^T \boldsymbol{\zeta}_{2,2}(\mathbf{Z}'_{2,2}) - c'_{2,2} z'_{2,2} - z'_{2,1} \quad (6.132)$$

onde $z'_{1,1} = x_{1,1} - x_{d1}$, $z'_{2,1} = x_{2,1} - x_{d2}$, $z'_{2,2} = x_{2,2} - \alpha'_{2,1}$, $\mathbf{Z}'_{1,1} = [x_{1,1}, x_{2,1}, x_{2,2}, \dot{x}_{d1}]^T$,

$\mathbf{Z}'_{2,1} = [x_{2,1}, \dot{x}_{d2}]^T$ e $\mathbf{Z}'_{2,2} = [x_{1,1}, x_{2,1}, x_{2,2}, u'_1, \partial \alpha'_{2,1} / \partial x_{2,1}, \phi'_{2,1}]^T$ e

$$\phi'_{2,1} = (\partial \alpha'_{2,1} / \partial x_{d2}) \dot{x}_{d2} + (\partial \alpha'_{2,1} / \partial \boldsymbol{\chi}_{2,1}) \dot{\boldsymbol{\chi}}_{2,1} \quad (6.133)$$

Os pesos das redes neurais são atualizados segundo as expressões abaixo:

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_{1,1} = \boldsymbol{\Gamma}'_{1,1} [\boldsymbol{z}'_{1,1} \boldsymbol{\zeta}_{1,1}(\mathbf{Z}'_{1,1}) - \boldsymbol{\sigma}'_{1,1} \boldsymbol{\chi}_{1,1}] \quad (6.134)$$

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_{2,1} = \boldsymbol{\Gamma}'_{2,1} [\boldsymbol{z}'_{2,1} \boldsymbol{\zeta}_{2,1}(\mathbf{Z}'_{2,1}) - \boldsymbol{\sigma}'_{2,1} \boldsymbol{\chi}_{2,1}] \quad (6.135)$$

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_{2,2} = \boldsymbol{\Gamma}'_{2,2} [\boldsymbol{z}'_{2,2} \boldsymbol{\zeta}_{2,2}(\mathbf{Z}'_{2,2}) - \boldsymbol{\sigma}'_{2,2} \boldsymbol{\chi}_{2,2}] \quad (6.136)$$

Os parâmetros de projeto, obtidos de modo a se conseguir resposta em malha fechada similar aos obtidos com o método proposto, são os seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}'_{1,1} = \boldsymbol{\sigma}'_{2,1} = \boldsymbol{\sigma}'_{2,2} = 0.05; \\ c'_{1,1} = 7; \quad c'_{2,1} = 25; \quad c'_{2,2} = 40; \\ \beta = 0.001; \\ \boldsymbol{\Gamma}'_{1,1} = \boldsymbol{\Gamma}'_{2,1} = \boldsymbol{\Gamma}'_{2,2} = \text{diag}\{0.1\} \end{array} \right. \quad (6.137)$$

A rede neural $\boldsymbol{\chi}_{1,1}^T \boldsymbol{\zeta}_{1,1}(\mathbf{Z}'_{1,1})$ contém 256 nós; seus centros ϑ_i são igualmente distribuídos em $[-2.5, 2.5] \times [-2, 2] \times [-8, 2] \times [-2, 2]$ e as larguras das funções Gaussianas são todas $\lambda_i = 18$, com $i = 1, \dots, 256$. A rede neural $\boldsymbol{\chi}_{2,1}^T \boldsymbol{\zeta}_{2,1}(\mathbf{Z}'_{2,1})$ contém 25 nós com centros ϑ_i igualmente

distribuídos em $[-2, 2] \times [-2, 2]$ e larguras $\lambda_i = 3$, com $i = 1, \dots, 25$. A rede neural $\boldsymbol{\chi}_{2,2}^T \boldsymbol{\zeta}_{2,2}(\mathbf{z}'_{2,2})$, por sua vez, contém 729 nós com centros ϑ_i igualmente distribuídos em $[-2, 2] \times [-2, 2] \times [-8, 2] \times [-2, 2] \times [4, 6] \times [-10, 10]$ e larguras $\lambda_i = 5$, com $i = 1, \dots, 729$.

As condições iniciais são as mesmas de (6.129) e os pesos iniciais são:

$$\boldsymbol{\chi}_{1,1}(0) = \boldsymbol{\chi}_{2,1}(0) = \boldsymbol{\chi}_{2,2}(0) = \mathbf{1} \quad (6.138)$$

Essas são as configurações das redes neurais (em termos de número de nós, centros e larguras) e valores paramétricos que conduzem a um desempenho de saída similar ao conseguido pelas leis de controle obtidas por meio do método proposto nesta tese.

As Figuras 6.13 e 6.14 trazem os resultados das simulações quando são aplicados os controladores (6.119) e (6.121) (obtidos através da metodologia aqui introduzida) e (6.130) e (6.132) (abordagem de Ge & Wang (2004)) com vistas ao seguimento dos sinais y_{d1} e y_{d2} . Verifica-se que um bom desempenho é conseguido quando as leis de controle geradas pelo método proposto neste capítulo são utilizadas. Um transiente indesejável é observado quando são empregados os controladores projetados segundo a metodologia de Ge & Wang (2004). É essencial ressaltar, ainda, que o número total de nós necessário para a obtenção de uma estrutura neural que forneça uma resposta adequada com a técnica proposta é significativamente reduzido em comparação aos milhares de nós presentes nas redes neurais demandados pela abordagem de Ge & Wang (2004) para este exemplo.

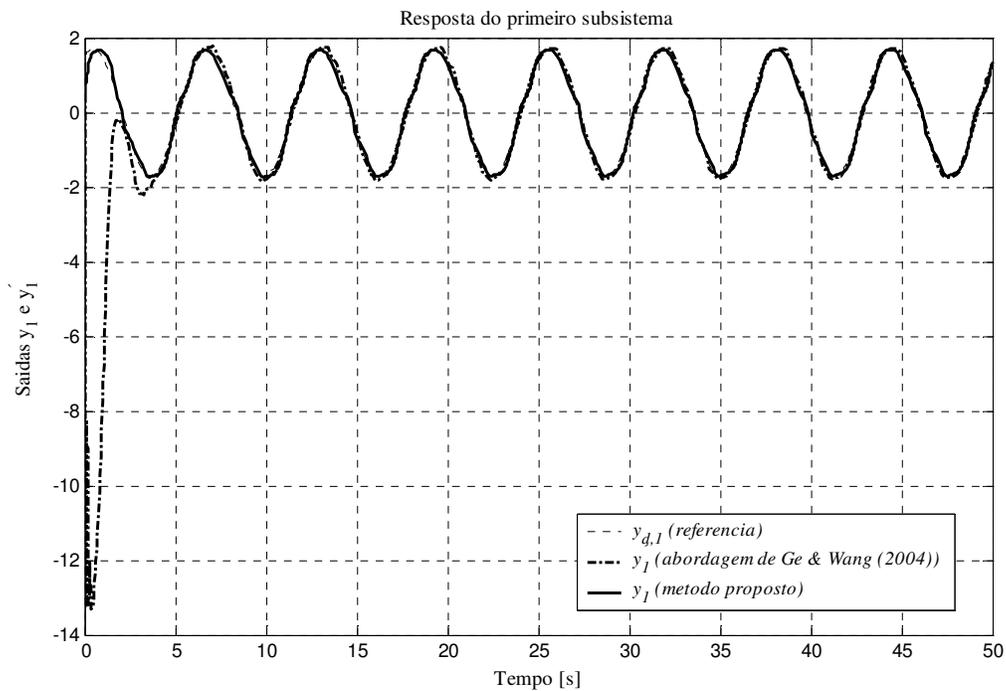


Figura 6.13. A saída do primeiro subsistema de Σ_{E_2} segue a referência y_{d1} .

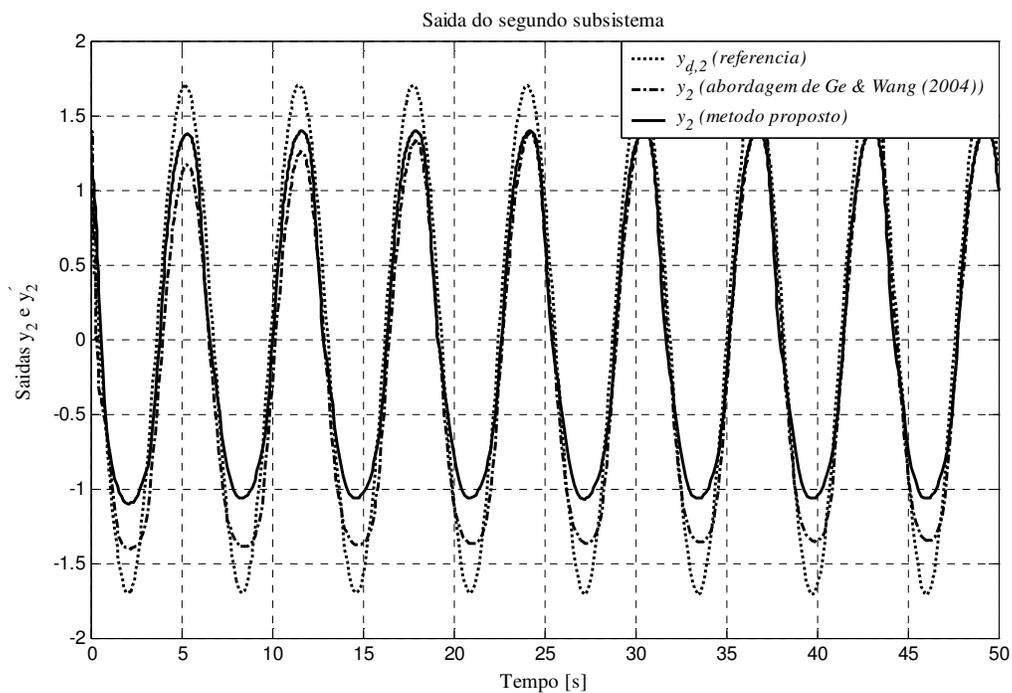


Figura 6.14. A saída do segundo subsistema de Σ_{E_2} segue a referência y_{d2} .

A Figura 6.15 apresenta a evolução dos sinais de esforço de controle u_1 e u_2 , além do controle virtual $\alpha_{2,1}$. Nota-se que todos os sinais são limitados, tal como requerido. A Figura 6.16 mostra o comportamento dos sinais u'_1 , u'_2 e $\alpha'_{2,1}$. Ressalta-se a elevada magnitude de esforço de controle presente nos instantes de transitório do processo de controle utilizando u'_1 , u'_2 e $\alpha'_{2,1}$ em comparação ao que emprega u_1 , u_2 e $\alpha_{2,1}$. As Figuras 6.17, 6.18 e 6.19 mostram a limitação de todos os sinais do sistema em malha fechada resultante do processo de controle através do método introduzido nesta tese, a saber: variáveis de erro z_{j,i_j} , variáveis de estado de Σ_E x_{j,i_j} e pesos das redes neurais θ_{j,i_j} e δ_{j,i_j} , onde $i_j = 1, \dots, \rho_j$, $j = 1, 2$ e $\rho_1 = 1$ e $\rho_2 = 2$. Apesar de se verificar um crescimento na norma L_2 dos pesos das redes neurais, sua evolução oscilatória é assintótica em direção a um intervalo de valores finito.

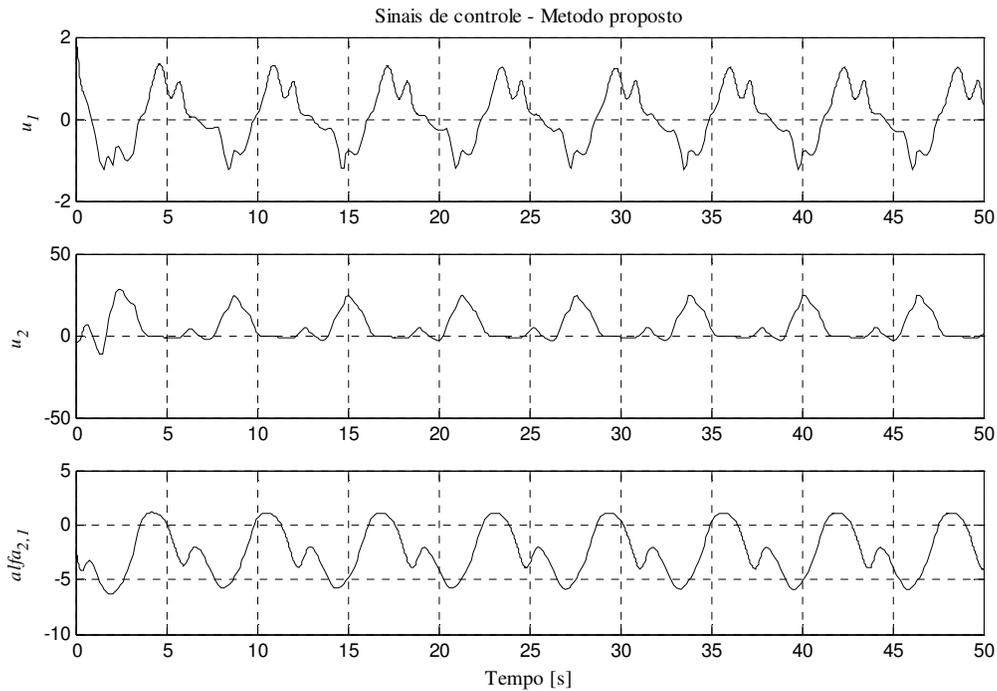


Figura 6.15. Limitação dos sinais de controle gerados pelo método proposto.

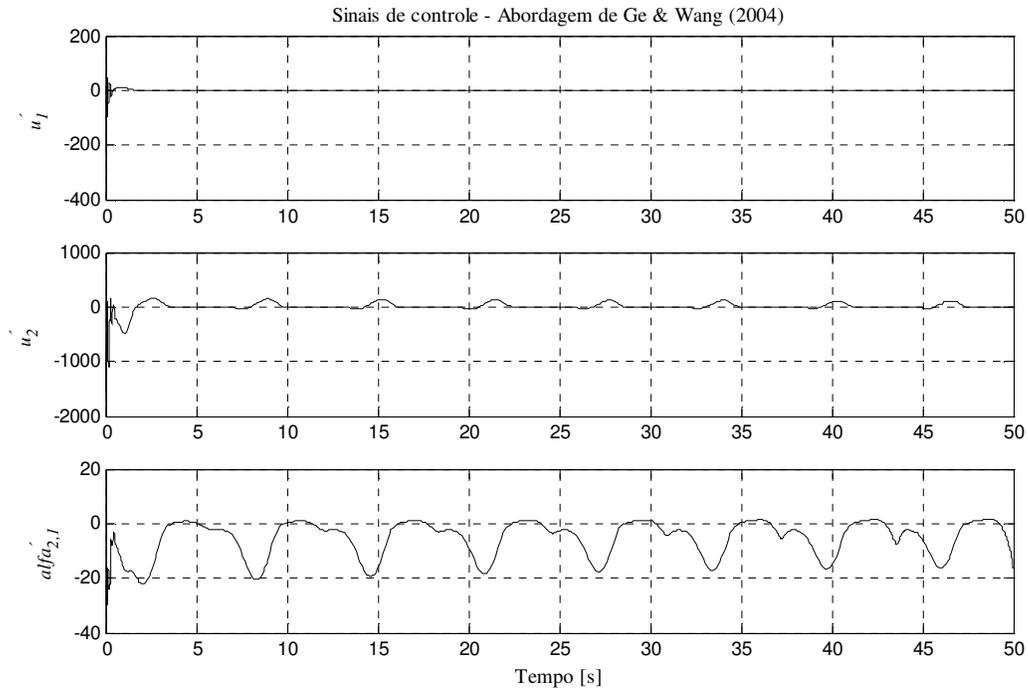


Figura 6.16. Limitação dos sinais de controle gerados pelo método de Ge & Wang (2004).

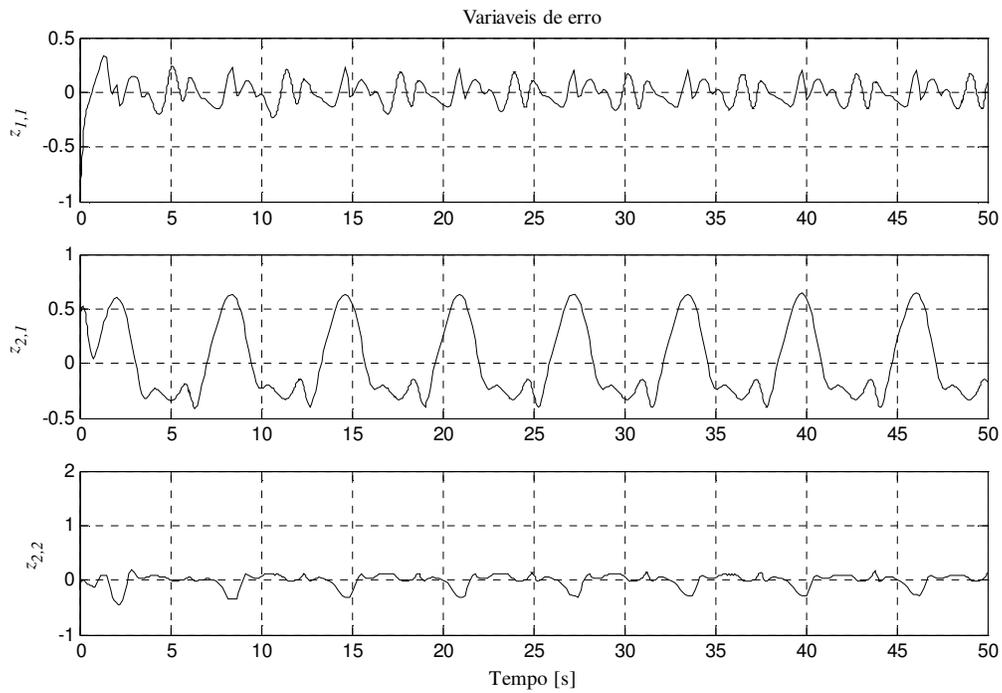


Figura 6.17. Limitação dos sinais das variáveis de erro – método proposto.

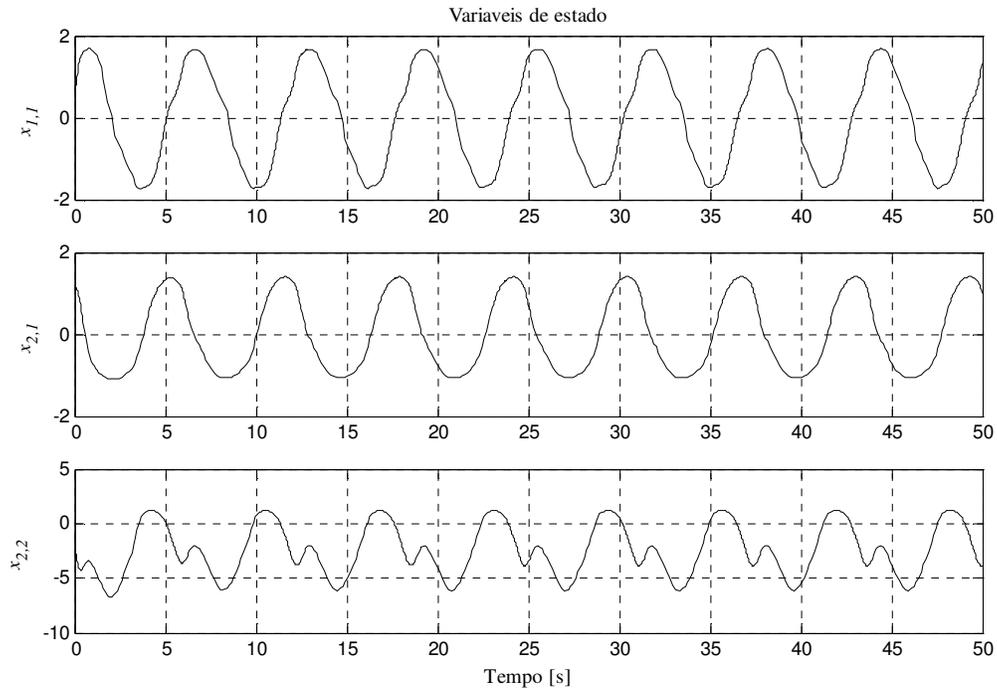


Figura 6.18. Limitação dos sinais das variáveis de estado – método proposto.

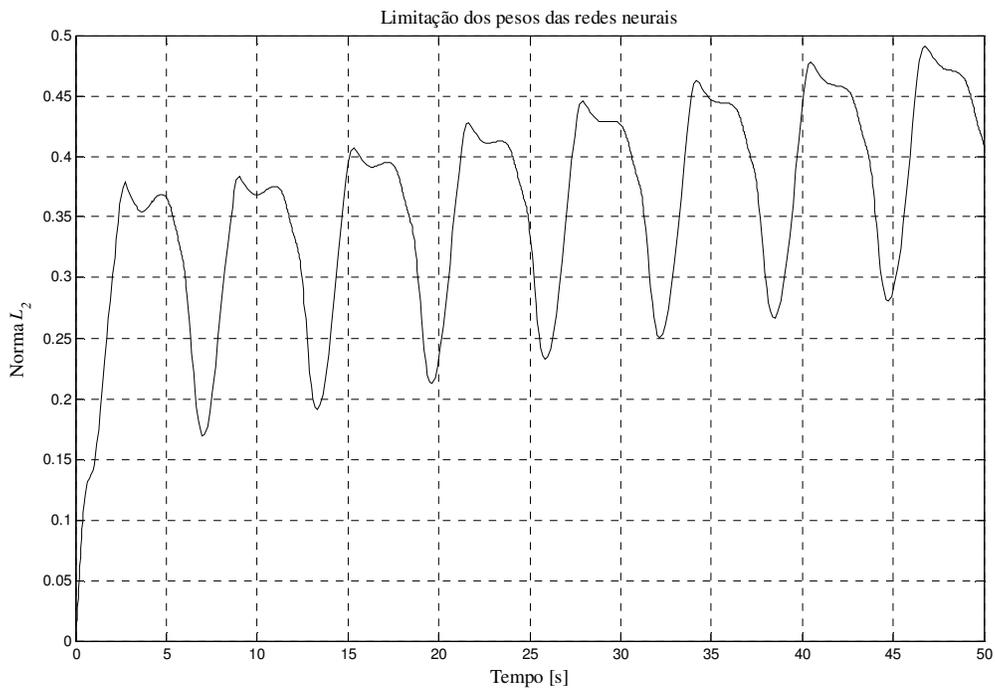


Figura 6.19. Limitação dos sinais dos pesos das redes neurais – método proposto.

Capítulo 7

Conclusões

A teoria associada às noções de estabilidade e convergência em sistemas dinâmicos, apresentada no Capítulo 2, tem servido de base, nos últimos anos, ao desenvolvimento de técnicas recursivas de síntese de controladores adaptativos para diversas classes de sistemas não lineares. Uma delas, o método de *backstepping*, exposto no Capítulo 3, é, hoje, a metodologia mais popular para o tratamento de sistemas não lineares com incertezas, pois permite uma abordagem sistemática mais eficaz que as observadas em outras técnicas mais tradicionais, como processos oriundos da geometria diferencial. A grande quantidade de publicações envolvendo o método de *backstepping* adaptativo evidencia tal êxito.

Ao mesmo tempo, como apresentado no Capítulo 4, verifica-se crescente interesse nos resultados positivos advindos da combinação de estratégias de controle adaptativo recentemente desenvolvidas para sistemas não lineares (como o *backstepping*) e técnicas de inteligência artificial, tais como redes neurais e lógica nebulosa (Spooner et al., 2002) e algoritmos genéticos (Alander, 2004), ou seja, abordagens de *controle inteligente* para sistemas não lineares com incertezas.

Esta tese apresentou propostas originais para controle inteligente de sistemas não lineares com incertezas em duas vertentes: *backstepping* aliado a algoritmos genéticos (Capítulo 5) e *backstepping* aliado a redes neurais (Capítulo 6).

No Capítulo 5, foram introduzidos dois algoritmos genéricos para o controle de sistemas de realimentação estrita – paramétricos e não paramétricos – com melhor

desempenho utilizando *backstepping* modificado. O *backstepping* modificado sustenta-se na Extensão do Princípio de Invariância de La Salle, que garante a estabilidade dos resultados ao mesmo tempo em que permite, por meio do emprego de otimização via algoritmo genético, melhor performance da resposta do sistema em malha fechada, tanto em termos de redução significativa de esforço de controle e de conformação do transitório – no que tange à redução do tempo de estabilização, da magnitude de *overshoot* e da ocorrência de oscilações indesejáveis. Os exemplos apresentados confirmam os melhores resultados da metodologia aqui proposta em comparação aos conseguidos com o *backstepping* tradicional.

No Capítulo 6, foi introduzida uma estratégia de controle adaptativo neural genérica, baseada em *backstepping*, focada no projeto de controle de sistemas não lineares com incertezas com múltiplas entradas e múltiplas saídas compostos de subsistemas interconectados cujas matrizes de entrada possuem funções não lineares e cujas interconexões entre subsistemas também apresentam não-linearidades. O método proposto resolve várias das dificuldades encontradas em metodologias análogas, eliminando a questão de singularidade nas leis de controle; evitando o uso de funções de Lyapunov com integrais; e suprimindo a necessidade de introdução de derivadas dos controladores virtuais nas redes neurais. Os resultados conseguidos com a técnica apresentada nesta tese mostram-se superiores aos existentes na literatura, tanto em termos de desempenho das soluções obtidas quanto relativamente à complexidade e ao custo computacional do processo de controle, aqui substancialmente reduzidos.

Propõe-se, para trabalhos futuros, a extensão da metodologia de *backstepping* modificado adaptativo para sistemas SISO para casos em que o sistema a ser controlado possui incertezas funcionais – situação que demandaria a introdução de redes neurais no projeto de controle. Vislumbra-se, além disso, a incorporação de técnicas de otimização baseadas em computação evolutiva para o ajuste dos parâmetros no processo de *backstepping* neural apresentado no Capítulo 6, assim como sua reformulação de modo a converter-se em “*backstepping* neural modificado para sistemas MIMO”, através de uma possível estruturação na Extensão do Princípio de Invariância de La Salle.

Referências Bibliográficas

- [1] ALANDER, J. T. *An Indexed Bibliography of Genetic Algorithms in Control*. Report 94-1, Department of Information Technology and Production Economics, University of Vaasa, Finland, 2004.
- [2] AL-HAMOUZ, Z. M. & AL-DUWAISH, H. M. A New Load Frequency Variable Structure Controller Using Genetic Algorithms. *Electric Power Systems Research*, 55 (1): 1-6, 2000.
- [3] ANNASWAMY, A. M., SKANTZE, F. P. & LOH, A-P. Adaptive Control of Continuous Time Systems with Convex/Concave Parametrization. *Automatica*, 34 (1): 33-49, 1998.
- [4] APOSTOL, T. M. *Mathematical Analysis*. 2. ed. Reading, MA, Addison-Wesley, 1965.
- [5] ARTSTEIN, Z. Stabilization with Relaxed Controls. *Nonlinear Analysis*, 7 (11): 1163-1173, 1983.
- [6] ÅSTRÖM, K. J. & WITTENMARK, B. *Adaptive Control*. Addison-Wesley, 1995.
- [7] BÄCK, T., FOGEL, D. B. & MICHALEWICZ, Z. (eds.), *Evolutionary Computation I; Basic Algorithms and Operators*. Philadelphia, PA, Institute of Physics Publishing, 2000.
- [8] BARRON, A. R. Universal Approximation Bounds for Superpositions of a Sigmoidal Function. *IEEE Transactions on Information Theory*, 39 (3): 930-945, 1993.

- [9] BOŠKOVIĆ, J. D. Adaptive Control of a Class of Nonlinearly Parameterized Plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43 (7): 930-934, 1998.
- [10] BOTTURA, C. P. *Análise Linear de Sistemas*. Rio de Janeiro, RJ, Guanabara Dois, 1982.
- [11] BYRNES, C. I., ISIDORI, A. & WILLEMS, J. C. Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36 (11): 1228-1240, 1991.
- [12] CHEN, G. & DONG, X. *From Chaos to Order*. Singapore, World Scientific, 1998.
- [13] DE JONG, K. A. Genetic Algorithms: A 10 Year Perspective, in GREFFENSTETTE, J. J. (ed.), *Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms*. Hillside, NJ, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 169-177, 1985.
- [14] DONG, X., CHEN, G. & CHEN, L. Adaptive Control of the Uncertain Duffing Oscillator. *International Journal on Bifurcation and Chaos*, 7 (7): 1651-1658, 1997.
- [15] DRACOPOULOS, D. Genetic Algorithms and Genetic Programming for Control, in DASGUPTA, D. & MICHALEWICZ, Z. *Evolutionary Algorithms in Engineering Applications*. Berlin, Springer, 1997.
- [16] FARRELL, J. Stability and Approximator Convergence in Nonparametric Nonlinear Adaptive Control. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9 (5): 1008-1020, 1998.
- [17] FLEMING, P. J. & PURSHOUSE, R. C. *Genetic Algorithms in Control Systems Engineering*. Research Report No. 789, Department of Automatic Control and Systems Engineering, University of Sheffield, UK, 2001.

- [18] FOGEL, D. B. *Evolutionary Computation; Toward a New Philosophy of Machine Intelligence*. New York, NY, IEEE Press, 1995.
- [19] FONSECA NETO, J. V. *Alocação Computacional Inteligente de Auto-estruturas para Controle Multivariável*. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2000.
- [20] FOSSEN, T. I. & STRAND, J. P. Tutorial on Nonlinear Backstepping: Applications to Ship Control. *Modeling, Identification and Control*, 20 (2): 83-135, 1999.
- [21] FRADKOV, A. L. *Chaos Control Bibliography (1997-2000)*. Russian Systems and Control Archive, 2000.
- [22] FRADKOV, A. L. & POGROMSKY, A. *Introduction to Control of Oscillations and Chaos*. Singapore, World Scientific, 1998.
- [23] FU, K. S. Learning Control Systems and Intelligent Control Systems: An Intersection of Artificial Intelligence and Automatic Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16 (1): 70-72, 1971.
- [24] FUH, C-C. & TUNG, P-C. Controlling Chaos Using Differential Geometric Method. *Physical Review Letters*, 75 (16): 2952-2955, 1995.
- [25] FUNAHASHI, K-I. On the Approximate Realization of Continuous Mappings by Neural Networks. *Neural Networks*, 2 (3): 183-192, 1989.
- [26] GE, S. S., HANG, C. C. & ZHANG, T. Stable Adaptive Control for Multivariable Systems with a Triangular Control Structure. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45 (6): 1221-1225, 2000.

- [27] GE, S. S. & LEE, T. H. Robust Controller Design with Genetic Algorithm for Flexible Spacecraft. *Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computation*. Korea, pp.1033-1039, 2001.
- [28] GE, S. S., LEE, T. H. & HARRIS, C. J. *Adaptive Neural Network Control of Robotic Manipulators*. London, World Scientific, 1998.
- [29] GE, S. S., LEE, T. H. & ZHU, G. Genetic Algorithm Tuning of Lyapunov-Based Controllers: An Application to a Single Link Flexible Robot System. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 43 (5): 567-573, 1996.
- [30] GE, S. S. & WANG, C. Direct Adaptive NN Control for a Class of Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 13 (1): 214-221, 2002.
- [31] GE, S. S. & WANG, C. Adaptive Neural Control of Uncertain MIMO Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 15 (3): 674-692, 2004.
- [32] GE, S. S., WANG, C. & LEE, T. H. Adaptive Backstepping Control of a Class of Chaotic Systems. *International Journal on Bifurcation and Chaos*, 10 (5): 1149-1156, 2000.
- [33] GRINITS, E. V. *Proposta de Projeto de Controle de Sistemas Não Lineares Usando Backstepping Flexibilizado e Computação Evolutiva*. Tese de Mestrado, FEEC-UNICAMP, 2002.
- [34] GUPTA, M. M. & RAO, D. H. (eds.). *Neuro-Control Systems; Theory and Applications*. IEEE Press, 1994.
- [35] HAHN, W. *Stability of Motion*. New York, Springer-Verlag, 1967.

- [36] HAYKIN, S. *Neural Networks – A Comprehensive Foundation*. 2. ed. New York, IEEE Press, 1999.
- [37] HOLLAND, J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, 1975.
- [38] IOANNOU, P. A. & KOKOTOVIĆ, P. V. Instability Analysis and Improvement of Robustness of Adaptive Control. *Automatica*, 20 (5): 583-594, 1984.
- [39] ISIDORI, A. *Nonlinear Control Systems*. 3. ed. London, Springer-Verlag, 1996.
- [40] JAMSHIDI, M., KROHLING, R. A., COELHO, L. S. & FLEMING, P. J. *Robust Control Systems with Genetic Algorithms*. CRC, 2002.
- [41] KALMAN, R. E., FALB, P. L. & ARBIB, M. A. Topics in Mathematical System Theory. *International Series in Pure and Applied Mathematics*. McGraw-Hill, 1969.
- [42] KANELLAKOPOULOS, I., KOKOTOVIĆ, P. V. & MARINO, R. An Extended Direct Scheme for Robust Adaptive Nonlinear Control. *Automatica*, 27 (2): 247-255, 1991.
- [43] KANELLAKOPOULOS, I., KOKOTOVIĆ, P. V. & MORSE, A. S. Systematic Design of Adaptive Controllers for Feedback Linearizable Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36 (11): 1241-1253, 1991.
- [44] KANELLAKOPOULOS, I., KOKOTOVIĆ, P. V. & MORSE, A.S. A Toolkit for Nonlinear Feedback Design. *Systems & Control Letters*, 18 (2): 83-92, 1992.
- [45] KARSENTI, L., LAMNABHI-LAGARRIGUE, F. & BASTIN, G. Adaptive Control of Nonlinear Systems with Nonlinear Parameterization. *Systems & Control Letters*, 27 (2): 87-97, 1996.

- [46] KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. New York, Macmillan Publishing Company, 1992.
- [47] KNOHL, T. & UNBEHAUEN, H. ANNNAC – Extension of Adaptive Backstepping Algorithm with Artificial Neural Networks. *IEE Proceedings – Control Theory and Applications*, 147 (2): 177-183, 2000.
- [48] KOJIĆ, A., ANNASWAMY, A. M., LOH, A-P. & LOZANO, R. Adaptive Control of A Class of Second Order Nonlinear Systems with Convex/Concave Parameterization. *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. Tampa, FL, pp. 2849-2854, 1998.
- [49] KOKOTOVIĆ, P. V. The Joy of Feedback: Nonlinear and Adaptive; 1991 Bode Prize Lecture. *Control Systems Magazine*, 12 (3): 7-17, 1992.
- [50] KOKOTOVIĆ, P. V. & ARCAK, M. Constructive Nonlinear Control: A Historical Perspective. *Automatica*, 37 (5): 637-662, 2001.
- [51] KOKOTOVIĆ, P. V., KRSTIĆ, M. & KANELLAKOPOULOS, I. Backstepping to Passivity: Recursive Design of Adaptive Systems. *Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control*. Tucson, Arizona, pp. 3276-3280, 1992.
- [52] KOKOTOVIĆ, P. V. e SUSSMAN, H. J. A Positive Real Condition for Global Stabilization of Nonlinear Systems. *Systems and Control Letters*, 13 (2): 125-133, 1989.
- [53] KOSMATOPOULOS, E. B. Universal Stabilization Using Control Lyapunov Functions Adaptive Derivative Feedback and Neural Network Approximators. *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*. Kobe, pp. 2444-2449, 1996.

- [54] KOSMATOPOULOS, E., POLYCARPOU, M. M., CHRISTODOULOU, M. & IOANNOU, P. High-Order Neural Network Structures for Identification of Dynamical Systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 6 (2): 422-431, 1995.
- [55] KRSTIĆ, M., KANELLAKOPOULOS, I. & KOKOTOVIĆ, P. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York, NY, John Wiley & Sons, 1995.
- [56] KWAN, C. & LEWIS, F. L. Robust Backstepping Control of Nonlinear Systems Using Neural Networks. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, A*, 30 (6): 753-765, 2000.
- [57] LEWIS, F. L., JAGANNATHAN, S. & YEŞILDIREK, A. *Neural Network Control of Robot Manipulators and Nonlinear Systems*. London, Taylor Francis, 1999.
- [58] LEWIS, F. L. & PARISINI, T. New Developments in Neurocontrol. *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications*. Trieste, pp. 86-91, 1998.
- [59] LEWIS, F. L., YEŞILDIREK, A. & LIU, K. Multilayer Neural-Net Robot Controller with Guaranteed Tracking Performance. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 7 (2): 388-399, 1996.
- [60] LI, Y., QIANG, S., ZHUANG, X. & KAYNAK, O. Robust and Adaptive Backstepping Control for Nonlinear Systems Using RBF Neural Networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 15 (3): 693-701, 2004.
- [61] LIN, W. & QIAN, C. Semi-global Robust Stabilization of MIMO Nonlinear Systems by Partial State and Dynamic Output Feedback. *Automatica*, 37 (7): 1093-1101, 2001.
- [62] LIU, X., GU, G. & ZHOU, K. Robust Stabilization of MIMO Nonlinear Systems by Backstepping. *Automatica*, 35 (5): 987-992, 1999.

- [63] LOH, A-P., ANNASWAMY, A. M. & SKANTZE, F. P. Adaptation in the Presence of a General Nonlinear Parameterization: An Error Model Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44 (9): 1634-1652, 1999.
- [64] LUENBERGER, D. G. *Introduction to Dynamic Systems; Theory, Models, and Applications*. New York, NY, John Wiley & Sons, 1979.
- [65] MADAN, R. (ed.), *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos*. Singapore, World Scientific, 1993.
- [66] MARINO, R. Adaptive Control of Nonlinear Systems: Basic Results and Applications. *Annual Reviews in Control*, 21: 55-66, 1997.
- [67] MICHALEWICZ, Z. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. 3. ed. New York, Springer-Verlag, 1996.
- [68] MICHALEWICZ, Z. & SCHÖNAUER, M. Evolutionary Algorithms for Constrained Parameter Optimization Problems. *Evolutionary Computation*, 4 (1): 1-32, 1996.
- [69] NAM, K. & ARAPOSTATHIS, A. A Model Reference Adaptive Control Scheme for Pure-Feedback Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33 (9): 803-811, 1988.
- [70] NARENDRA, K. Adaptive Control Using Neural Networks, in *Neural Networks for Control*. Cambridge, MA, MIT Press, 1991.
- [71] NARENDRA, K. S. & ANNASWAMY, A. M. *Stable Adaptive Systems*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1989.

- [72] NARENDRA, K. S. & PARTHASARATHY, K. Identification and Control of Dynamical Systems Using Neural Networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1 (1): 4-27, 1990.
- [73] OGATA, K. *Modern Control Engineering*. 3. ed. New Jersey, Prentice-Hall, 1997.
- [74] OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1997.
- [75] OTT, E., GREBOGI, C. & YORKE, J. A. Controlling Chaos. *Physical Review Letters*, 64 (11): 1196-1199, 1990.
- [76] PAIVA, E. C. *Otimização Restrita de Controladores Robustos Utilizando Algoritmos Genéticos*. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 1997.
- [77] PARK, J. & SANDBERG, W. Universal Approximation Using Radial Basis Function Networks. *Neural Computation*, 3 (2): 246-257, 1991.
- [78] PARKS, P. C. Liapunov Redesign of Model Reference Adaptive Control Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11 (3): 362-367, 1966.
- [79] POLYCARPOU, M. Stable Adaptive Neural Control Scheme for Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41 (3): 447-451, 1996.
- [80] POLYCARPOU, M. M. & IOANNOU, P. A. A Robust Adaptive Nonlinear Control Design. *Automatica*, 32 (3): 423-427, 1996.
- [81] POLYCARPOU, M. M. & MEARS, M. J. Stable Adaptive Tracking of Uncertain Systems Using Nonlinearly Parametrized On-Line Approximators. *International Journal of Control*, 70 (3): 363-384, 1998.

- [82] RODRIGUES, H., ALBERTO, L. F. C. & BRETAS, N. G. Um Princípio de Invariância Uniforme. Robustez com Relação à Variação de Parâmetros. *Revista Controle & Automação*, 13 (1): 51-67, 2002.
- [83] ROSENBLATT, F. The Perceptron: A Probabilistic Model for Information Storage and Organization in the Brain. *Psychological Review*, 65 (6): 386-408, 1958.
- [84] ROVITHAKIS, G. A. & CHRISTODOULOU, M. A. Adaptive Control of Unknown Plants Using Dynamical Neural Networks. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 24 (3): 400-411, 1994.
- [85] SANNER, R. M. & SLOTINE, J-J. E. Gaussian Networks for Direct Adaptive Control. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 3 (6): 837-863, 1992.
- [86] SASTRY, S. & ISIDORI, A. Adaptive Control of Linearizable Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34 (11): 1123-1131, 1989.
- [87] SERRA, G. L. O. *Propostas de Metodologias para Identificação e Controle Inteligentes*. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2005.
- [88] SETO, D., ANNASWAMY, A. M. & BAILLIEUL, J. Adaptive Control of Nonlinear Systems with a Triangular Structure. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39 (7): 1411-1428, 1994.
- [89] SHARMA, M. & CALISE, A. J. Adaptive Backstepping Control for a Class of Nonlinear Systems via Multilayered Neural Networks. *Proceedings of the American Control Conference*. Anchorage, AK, pp. 2683-2688, 2002.
- [90] SONTAG, E. D. A Lyapunov-like Characterization of Asymptotic Controllability. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 21 (3): 462-471, 1983.

- [91] SPOONER, J. T., MAGGIORE, M., ORDÓÑEZ, R. & PASSINO, K. M. *Stable Adaptive Control and Estimation for Nonlinear Systems*. New York, NY, John Wiley & Sons, 2002.
- [92] STEINBERG, M. L. & PAGE, A. B. Nonlinear Adaptive Flight Control with Genetic Algorithm Design Optimization. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 9 (14): 1097-1115, 1999.
- [93] SUNDARARAJAN, N., SARATCHANDRAN, P. & LI, Yan. *Fully Tuned Radial Basis Function Neural Networks for Flight Control*. Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [94] SYSWERDA, G. Uniform Crossover in Genetic Algorithms, in SCHAFFER, J. D. (ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms*. Morgan Kaufmann Publishers, pp. 2-9, 1989.
- [95] TAMARIZ, A. D. R. *Modelagem Computacional de Dados e Controle Inteligente no Espaço de Estado*. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2005.
- [96] TAYLOR, D. G., KOKOTOVIĆ, P. V., MARINO, R. & KANELLAKOPOULOS, I. Adaptive Regulation of Nonlinear Systems with Unmodeled Dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34 (4): 405-412, 1989.
- [97] URSEM, R. K., KRINK, T., JENSEN, M. T. & MICHALEWICZ, Z. Analysis and Modeling of Control Tasks in Dynamic Systems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6 (4): 378-389, 2002.
- [98] VIDYASAGAR, M. *Nonlinear Systems Analysis*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1978.
- [99] VON ZUBEN, F. J. *Computação Evolutiva: Uma Abordagem Pragmática*. DCA/FEEC, Unicamp, 2000

- [100] WANG, Q., SPRONCK, P. & TRACHT, R. An Overview of Genetic Algorithms Applied to Control Engineering Problems. *Proceedings of the Second International Conference on Machine Learning and Cybernetics*. Xi'an, pp. 1651-1656, 2003.
- [101] WOLPERT, D. H. & MACREADY, W. G. No Free Lunch Theorems for Optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1 (1): 67-82, 1997.
- [102] YANG, S. X., JIANPING, T. & MENG, M. Q-H. Hybrid GA and Backstepping Based Tracking Control of a Mobile Robot. *Proceedings of the Sixth World Congress on Intelligent Control and Automation*. Dalian, pp. 427-431, 2006.
- [103] YAO, B. & TOMIZUKA, M. Adaptive Robust Control of MIMO Nonlinear Systems in Semi-strict Feedback Forms. *Automatica*, 37 (9): 1305-1321, 2001.
- [104] YEŞILDIREK, A. & LEWIS, F. L. Feedback Linearization Using Neural Networks. *Automatica*, 31 (11): 1659-1664, 1995.
- [105] ZHANG, T., GE, S. S. & HANG, C. C. Design and Performance Analysis of a Direct Adaptive Controller for Nonlinear Systems. *Automatica*, 35 (11): 1809-1817, 1999.
- [106] ZHANG, T., GE, S. S. & HANG, C. C. Adaptive Neural Network Control for Strict-Feedback Nonlinear Systems Using Backstepping Design. *Automatica*, 36 (12): 1835-1846, 2000.
- [107] ZHANG, Y., PENG, P. & JIANG, Z. Stable Neural Controller Design for Unknown Nonlinear Systems Using Backstepping. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 11 (6): 1347-1360, 2000.
- [108] ZHONG, L., LIANG, X-G., CAO, B-G. & CAO, J-Y. An Optimal Backstepping Design for Blended Aero and Reaction-Jet Missile Autopilot. *Journal of Applied Sciences*, 6 (12): 2623-2628, 2006.

[109] ZUO, W. Multivariable Adaptive Control for a Space Station Using GAs. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*. 142 (2): 81-87, 1995.

[110] ZWILLINGER, D. *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*. Boca Raton, FL, CRC Press, 1996.