

Iury Zottele Medeiros

Modelagem Optomecânica de Fibras Ópticas Microestruturadas

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Telecomunicações e Telemática.

Orientador: Hugo Enrique Hernández Figueroa

Campinas, SP
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

M467m Medeiros, Iury Zottele
Modelagem optomecânica de fibras ópticas
microestruturadas / Iury Zottele Medeiros. –Campinas,
SP: [s.n.], 2012.

Orientador: Hugo Enrique Hernández Figueroa.
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Fibras ópticas microestruturadas. 2. Método dos
elementos finitos. 3. Birrefringência. 4. Tensões
residuais. 5. Análise modal. I. Hernández-Figueroa,
Hugo Enrique. II. Universidade Estadual de Campinas.
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III.
Título.

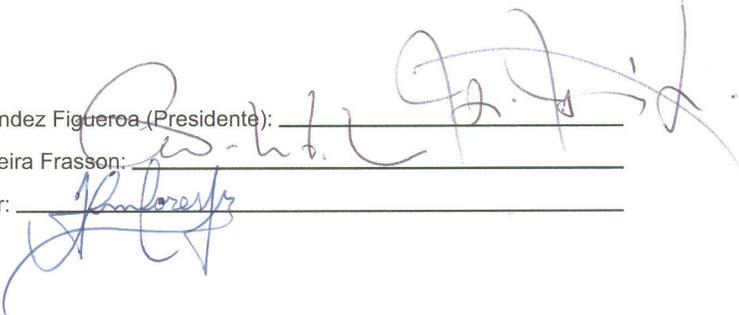
Título em Inglês: Opto-mechanical modeling of microstructured optical fibers
Palavras-chave em Inglês: Microstructured optical fibers, Finite element method,
Birefringence, Residual stresses, Modal analysis
Área de concentração: Telecomunicações e Telemática
Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica
Banca Examinadora: Antônio Manoel Ferreira Frasson, Jose Amilton Mores Junior
Data da defesa: 30/01/2012
Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

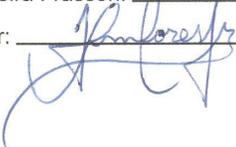
Candidato: Iury Zottele Medeiros

Data da Defesa: 30 de janeiro de 2012

Título da Tese: "Modelagem Optomécânica de Fibras Ópticas Microestruturadas"

Prof. Dr. Hugo Enrique Hernandez Figueroa (Presidente):  _____

Prof. Dr. Antônio Manoel Ferreira Frasson: _____

Dr. Jose Amilton Mores Junior:  _____

Resumo

Atualmente as fibras ópticas microestruturadas (FOMs) estão sendo cada vez mais exploradas por possuírem geometricamente um maior grau de liberdade em seu projeto, além da possibilidade do uso de materiais não usados em fibras convencionais, proporcionando características ópticas antes inalcançáveis.

Sendo assim, através do uso do programa para obtenção de modos de propagação pelo método dos elementos finitos totalmente vetorial disponível no grupo do Prof. Dr. Hugo E. H. Figueroa, foram apresentadas técnicas de simulação em FOMs multimodais, as quais foram implementadas em FORTRAN e adicionadas ao programa principal.

Neste trabalho também foi estudado os esforços mecânicos gerados pelo uso de diferentes materiais na constituição da FOM em seu processo de fabricação. Tais esforços são conhecidos como tensão residual térmica e proporcionam variações anisotrópicas dos índices de refração dos meios que compõem as FOMs. Primeiramente o cálculo das tensões residuais foi feito analiticamente para uma geometria generalizada de FOM, e então tratando-as como uma perturbação no modo propagante analisado anteriormente pelo programa de análise modal. Por último foi implementado um código para o cálculo estimativo da birrefringência de fase e de grupo levando em conta os esforços mecânicos induzidos no processo de fabricação, portanto o objetivo final foi alcançado.

Palavras-chave: fibras ópticas microestruturadas, método dos elementos finitos, análise modal, tensões residuais térmicas, birrefringência, multifísica.

Abstract

Nowadays micro-structured optical fibers (MOFs) are being increasingly exploited since they have a greater geometrical flexibility in its project, in addition to the possibility of using un-conventional materials, providing optical features unreachable before.

Therefore, a full-vectorial finite element modal solver developed by Prof. Dr. Hugo E. H. Figueroa's group was used, since it has already proved its efficiency. New techniques for multi-modal MOFs simulation were presented, they were implemented using FORTRAN and then added to the main program to make the search for the propagation constants easier.

Mechanical stress was also studied. It is generated by the use of different materials within the MOF constitution, in its manufacturing process. These stresses are known as thermal residual stresses and they provide variations of the anisotropic refractive indexes of the MOFs media. First, the calculation of the residual stresses was done analytically for a general geometry of MOF, and then they were treated as perturbations in the propagating mode, discussed previously by the full-vectorial finite element modal solver. Finally a code was implemented to estimate the phase and group birefringence, considering the mechanical stresses induced in the manufacturing process, therefore the ultimate goal was achieved.

Keywords: microstructured optical fibers, finite element method, modal analysis, thermal residual stresses, birefringence, multiphysics .

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por toda a minha vida, pois sei que tudo o que ocorreu de bom em minha vida foi Ele que me presenteou.

À minha família, em especial meus pais, Joel e Valquiria, que nunca hesitaram em me apoiar, tanto financeiramente como afetivamente. Sempre os amarei.

À minha namorada, Paola, que sem sua paciência e compreensão esse trabalho não ficaria pronto. Agradeço pelo incentivo através de palavras e exemplo, que sempre me deu. Agradeço por estar comigo por todo esse tempo, e ainda rezo para que possamos continuar juntos por toda as nossas vidas. Te amo muito!

Ao meu orientador, Prof. Dr. Hugo E. H. Figueroa, sou grato pela orientação.

Aos amigos, brasileiros, cubanos, argentinos e a grande caravana peruana do antigo LE-45, Sala 3 e agora Sala 4, sou grato pelas horas de descontração em meio a tanto trabalho. Em especial, agradeço ao amigo José Amilton, o qual não hesitou em fornecer seus resultados e explicações para a confecção desse trabalho.

Aos amigos de república, Jefferson, Anthony, Victor, Gustavo (Koréia), Wiliam (JP) e Vinícius, sou grato pela boa convivência e os momentos de alegria que compartilharam comigo.

Aos meus amigos de Vitória-ES, Fellipe, João Marcos e Leandro, pelos momentos de descontração compartilhados.

Aos amigos da UNICAMP, Kobi, Rubem, Eduardo e Murilo, pelas agradáveis conversas e momentos de lazer passados juntos.

Ao grande amigo Prof. Dr. Antonio Manoel Ferreira Frasson, o qual me iniciou na vida acadêmica com muita paciência em repetitivas explicações. Obrigado pelos ensinamentos.

Sou grato também ao CNPq, que me deu suporte financeiro.

Um grande abraço a todos!

Aos meus pais, irmãos e avós

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
Glossário	xiii
Lista de Símbolos	xiii
1 Introdução	1
1.1 Organização da Dissertação	2
2 Cálculo analítico dos Esforços Residuais em Fibras Ópticas Microestruturadas	3
2.1 Cálculo da Tensão Residual	3
2.1.1 O Método	3
2.1.2 Cálculo Generalizado para Fibras Ópticas Microestruturadas	6
2.2 Exemplos de Cálculos dos Esforços Residuais	20
2.2.1 Exemplo 1	20
2.2.2 Exemplo 2	21
2.2.3 Exemplo 3	23
2.3 Conclusão	25
3 Análise Modal	26
3.1 Programa de Análise Modal	26
3.1.1 Simples Exemplo	28
3.2 Aperfeiçoamento do Simulador	29
3.2.1 Aperfeiçoamento do Bloco Verificação e Organização das Soluções	30
3.2.2 Aperfeiçoamento do Bloco Estimativa do Próximo Autovalor Solução	32
3.2.3 Exemplo de Aplicação dos Aperfeiçoamentos	34
3.3 Conclusão	35
4 Relação dos Esforços Mecânicos com a Birrefringência	36
4.1 O Método	36
4.2 Exemplo e Sintonização	37
4.2.1 Problemas	39
4.2.2 Os Resultados	41

4.3	Conclusão	46
5	Conclusão	48
5.1	Trabalhos Futuros	48
	Referências bibliográficas	50

Lista de Figuras

2.1	Geometria genérica.	6
2.2	Translação no sistema de coordenadas.	8
2.3	Região externa à região circular central.	9
2.4	Região externa às regiões circulares descentralizadas.	12
2.5	Seção da fibra óptica do exemplo 1.	20
2.6	Tensão radial e angular para o exemplo 1.	21
2.7	Seção da fibra óptica do exemplo 2.	22
2.8	Tensão radial e angular para o exemplo 2.	22
2.9	Seção da fibra óptica do exemplo 3.	23
2.10	Tensão radial e angular para o exemplo 3.	24
3.1	Fluxograma do analisador modal.	27
3.2	Geometria da seção da fibra óptica do exemplo 1.	29
3.3	Distribuição normalizada de potência do modo fundamental.	30
3.4	Associação entre a solução n e a $n - 1$	31
3.5	Desmonstração da estimativa original.	32
3.6	Desmonstração de um erro da estimativa original.	33
3.7	Seção da FOM do exemplo de aplicação dos aperfeiçoamentos.	34
3.8	Índice efetivo v. comprimento de onda para vários modos.	35
4.1	Fluxograma para obtenção da birrefringência de fase e de grupo.	37
4.2	Esquema da FOM.	38
4.3	Birrefringências de fase e de grupo obtidas experimentalmente.	39
4.4	Fotos de partes de uma fibra óptica do tipo <i>holey</i>	40
4.5	Transmissão e dispersão de grupo para o 3 ^o <i>bandgap</i>	40
4.6	Perdas por confinamento para cada valor de r_{ge}	41
4.7	Índice de refração efetivo.	42
4.8	Campo elétrico em 910 nm polarizado no eixo lento.	42
4.9	Campo elétrico em 1050 nm polarizado no eixo lento.	43
4.10	Campo elétrico em 1150 nm polarizado no eixo lento.	43
4.11	Birrefringência geométrica.	44
4.12	Distribuição da tensão diferencial na fibra óptica da figura 4.2.	45
4.13	Birrefringência residual efetiva.	45
4.14	Birrefringência modal obtida com o método utilizado.	46

4.15 Birrefringência de grupo.	46
--	----

Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros de entrada relevantes do analisador modal.	28
4.1	Índices de refração dos materiais da FOM exemplo.	38
4.2	Parâmetros geométricos da FOM exemplo.	39
4.3	Parâmetros termomecânicos da FOM da figura 4.2.	44

Lista de Símbolos

e	-	Deformação total
ϵ_x	-	Componente x da deformação
ϵ_y	-	Componente y da deformação
u	-	Deslocamento na direção x
v	-	Deslocamento na direção y
γ_{xy}	-	Deslocamento angular
α	-	Coefficiente de expansão térmica
T	-	Diferença de temperatura
ν	-	Coefficiente de Poisson
ψ	-	Função termoelástica de deslocamento
ϕ	-	Função de tensão de Airy
E	-	Módulo de Young
σ	-	Tensão mecânica
σ_{xy}	-	Componente cisalhante da tensão
b	-	Raio externo da fibra óptica
σ^A	-	Tensão referente a função de tensão de Airy
σ^D	-	Tensão referente a função de deslocamento termoelástico
σ_d	-	Contribuição das regiões deslocadas à tensão
σ_c	-	Contribuição da região central à tensão
β	-	Constante de propagação
n_e	-	Índice de refração efetivo
Ic	-	Índice de compatibilidade entre as soluções
λ	-	Comprimento de onda
n_{nos}	-	Número de nós numa malha
C	-	Coefficiente de estresse óptico relativo
B	-	Birrefringência de fase
B_g	-	Birrefringência de grupo
α_p	-	Perda por confinamento

Capítulo 1

Introdução

Fibras Ópticas de Cristais Fotônicos (do inglês, *Photonic Crystal Fibers*, PCFs), também chamadas de Fibra *Holey* ou ainda Fibras Ópticas Microestruturadas, FOM (do inglês, *Microstructured Optical Fibers*, MOF), estão sendo intensamente estudadas nos últimos anos [1]. Proposta no início dos anos 70 como um guia de onda de baixa perda e monomodo para telecomunicações e feita puramente de sílica, a primeira desse tipo de estrutura consistia de uma casca tubular conectada ao núcleo por duas membranas finas de vidro [2]. Essa primeira FOM era muito difícil de ser fabricada, e quando a deposição modificada de vapor químico (em inglês, *Modified Chemical Vapor Deposition*, MCVD) surgiu, as FOMs foram abandonadas [2].

As Fibras Ópticas Microestruturadas voltaram a ser interessantes quando as fibras ópticas convencionais começaram a atingir seus limites de projetos, que tem basicamente como variáveis a diferença entre o índice de refração do núcleo e da casca e o raio do núcleo. Assim o número de pesquisas sobre FOM aumentou estrondosamente devido as inúmeras configurações de estrutura obtidas nesse tipo de fibra, permitindo o alcançar propriedades não obtidas antes, como por exemplo o aumento de potência na fibra óptica, facilidade em sensoriamento, múltiplos núcleos, altas não-linearidades, baixas não-linearidades, alta birrefringência, maior estabilidade térmica, controle de dispersão em fibras curtas, etc [2, 3].

Diferentemente das fibras ópticas convencionais, que só guiam a luz por reflexão interna total, as FOMs também podem guiar a luz pelo efeito de bandas proibidas, mais conhecido pelo termo em inglês, PBG, *Photonic Bandgap* [4]. Nas FOMs, o mecanismo de guiamento por reflexão interna total também é conhecido por reflexão interna total modificada (do inglês, *Modified Total Internal Reflection*, M-TIR) [4].

O guiamento pelo efeito de bandas proibidas ocorre quando os bastões em torno do centro da FOM estão arrançados de forma periódica, como elétrons em sólidos periódicos, proibindo a propagação da onda eletromagnética pela casca para uma certa faixa de comprimento de onda [5].

A M-TIR ocorre quando o índice de refração efetivo da casca é menor do que o índice de refração do núcleo [5]. Em contraste com o guiamento pelo efeito de bandas proibidas, para que M-TIR ocorra não é necessário um arranjo periódico na estrutura, contudo, isso é frequentemente usado [5].

Juntamente com o intenso estudo de projeto das FOMs nos últimos anos, análises multifísicas também vem sendo feitas de forma a explorar suas amplas possibilidades assim como auxiliar no discernimento de suas propriedades físicas para garantir projetos mais confiáveis e abrir a possibilidade de agregar mais graus de liberdade em seu projeto.

No trabalho aqui apresentado, a ideia de análise multifísica é feita estudando-se as características de guiamento da FOMs quando suas propriedades elétricas podem ser alteradas por grandezas mecânicas. Sabe-se que anisotropia óptica geralmente ocorre devido aos efeitos foto-elásticos em meios isotrópicos como fibras ópticas [6]. As mudanças nos índices de refração linearmente proporcionais às tensões induzidas nas fibras ópticas [6].

Como proposta de melhoramento dos projetos de fibras ópticas microestruturas, nesse trabalho é apresentado um método de avaliação de como os esforços residuais podem influenciar na propagação da onda eletromagnética. Os esforços residuais aqui estudados, também conhecidos como tensões residuais, têm origem no processo de fabricação, uma vez que as FOMs são anisotrópicas com relação aos coeficiente de expansão térmica dos vários materiais que as constituem.

1.1 Organização da Dissertação

A dissertação está dividida em quatro outros capítulos além deste. No capítulo 2 é apresentado um método para cálculo analítico das tensões residuais em fibras ópticas microestruturas totalmente sólidas. Após a descrição do método são feitos três exemplos, sendo que o terceiro é a combinação dos dois primeiros, sugerindo o uso do princípio da superposição.

No capítulo 3 é feita uma breve apresentação do programa de análise modal disponível no grupo do Prof. Hugo E. H. Figueroa, para então mostrar duas sugestões de melhoramento no programa. Posteriormente é apresentado um exemplo no qual os melhoramentos sugeridos são de grande valor.

No capítulo 4 é apresentado um método para se mensurar a influência dos esforços mecânicos na propagação da onda eletromagnética nas FOMs. Após, é apresentado um exemplo no qual envolve todos os capítulos dessa dissertação.

E finalmente no capítulo 5 é realizada a conclusão sobre todo o trabalho além da apresentação de sugestões de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Cálculo analítico dos Esforços Residuais em Fibras Ópticas Microestruturadas

Nesse capítulo é apresentado um método de cálculo analítico das tensões causadas por dilatação térmica em fibras ópticas microestruturadas. Tal dilatação ocorre durante o resfriamento das fibras ópticas quando estas estão sendo fabricadas.

2.1 Cálculo da Tensão Residual

2.1.1 O Método

Por concepção, as fibras ópticas possuem seu eixo principal muito mais longo que as dimensões de sua seção, permitindo-nos imaginar como se fosse infinita quando estivermos analisando apenas uma seção ao longo de todo seu comprimento. Dessa forma, a estrutura aqui estudada é considerada um cilindro infinito, que na mecânica é tratado como um problema de deformação plana em duas dimensões. Por consequência, a deformação ao longo do eixo da fibra óptica é considerado zero. Dessa forma, a deformação total no cilindro é dado pela equação (2.1) [7].

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y \quad (2.1)$$

onde ϵ_x e ϵ_y são as componentes x e y da deformação, relacionadas com os deslocamentos u e v , nas direções x e y respectivamente, de acordo com as equações abaixo [8].

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.2a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.2b)$$

A deformação angular é dada por

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.3)$$

As equações em (2.4) descrevem a relação da deformação total e e os deslocamentos u e v com a deformação sofrida por um corpo quando submetido a mudança de temperatura de acordo com [8].

$$\frac{\partial e}{\partial x} + (1 - 2\nu)\nabla^2 u = 2(1 + \nu)\frac{\partial \alpha T}{\partial x} \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial e}{\partial y} + (1 - 2\nu)\nabla^2 v = 2(1 + \nu)\frac{\partial \alpha T}{\partial y} \quad (2.4b)$$

onde α é o coeficiente de expansão térmica dos materiais e T , no caso tratado, é diferença de temperatura ambiente (ou final) e a temperatura de amolecimento dos materiais que constituem a fibra [9].

Uma maneira de se obter soluções para as equações em (2.4) consiste em definir uma função auxiliar como se segue

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{e} \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.5)$$

sendo ψ uma função denominada potencial termoelástico de deslocamento [8], relacionada com as variáveis espaciais x e y e com o tempo se a temperatura variar temporalmente. Aplicando a definição da equação (2.5) na equação (2.1) encontra-se a relação de e com ψ , como

$$e = \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (2.6)$$

Combinando a equação (2.6) com a definição (2.5), e com umas das equações em (2.4), chega-se a

$$\nabla^2 \psi = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha T \quad (2.7)$$

A solução da equação (2.7) é uma solução particular das equações em (2.4), assim para encontrar a solução complementar, faça-se a equação homogênea das equações em (2.4).

$$\frac{\partial e}{\partial x} + (1 - 2\nu)\nabla^2 u = 0 \quad (2.8a)$$

$$\frac{\partial e}{\partial y} + (1 - 2\nu)\nabla^2 v = 0 \quad (2.8b)$$

Derivando a equação (2.8a) com relação a x e derivando (2.8b) com relação a y , somando-as em seguida, obtém-se

$$\nabla^2 e + (1 - 2\nu)\nabla^2 e = 0 \Rightarrow \nabla^2 e = 0 \quad (2.9)$$

Para a resolução da equação (2.9) é introduzido uma nova função, denominada função de tensão ou função de tensão de Airy [7, 8].

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \text{e} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.10)$$

onde σ_x e σ_y são, respectivamente, as componentes x e y da distribuição de tensão numa fibra homogênea. Através de [8], sabe-se que

$$\sigma_x = \frac{\nu E e}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} + \frac{E \epsilon_x}{1 + \nu} \quad (2.11a)$$

$$\sigma_y = \frac{\nu E e}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} + \frac{E \epsilon_y}{1 + \nu} \quad (2.11b)$$

Usando as equações (2.9), (2.10) e (2.11) chega-se a

$$\nabla^4 \phi = 0 \quad (2.12)$$

O problema de achar a distribuição de tensão no interior da fibra óptica fica reduzido em achar a solução da equação de Poisson (2.7) para a solução particular e a equação biarmônica (2.12) para a solução homogênea, as quais devem satisfazer as condições de contorno que em coordenadas polares estão descritas nas equações abaixo [7].

$$\sigma_r(r = b, \theta) = 0 \quad (2.13a)$$

$$\sigma_{r\theta}(r = b, \theta) = 0 \quad (2.13b)$$

onde σ_r é a componente normal da tensão na direção radial, $\sigma_{r\theta}$ é a componente cisalhante da tensão e b é o raio externo da fibra.

De acordo com [7], a solução de (2.12) em coordenadas polares pode ser descrita como

$$\phi(r, \theta) = b_0 r^2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{n+2}) \cos n\theta \quad (2.14)$$

onde os coeficientes a_n e b_n são determinados através das condições de contorno descritas nas equações (2.13), sendo as componentes da tensão em coordenadas polares dadas pelas equações (2.15) [7].

$$\sigma_r = \frac{-E}{1 + \nu} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.15a)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{-E}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \quad (2.15b)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{E}{1 + \nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \quad (2.15c)$$

onde E e ν são o módulo de Young e o coeficiente de Poisson do material da região analisada na fibra e χ é a soma da solução particular de ψ com a solução homogênea de ϕ como na equação (2.16).

$$\chi = \psi + \phi \quad (2.16)$$

2.1.2 Cálculo Generalizado para Fibras Ópticas Microestruturadas

Para o cálculo alcançar um conjunto grande de configurações das FOMs foi feito um cálculo para a distribuição das tensões residuais numa geometria generalizada. É importante salientar que o problema da determinação da distribuição da tensão residual resume-se na determinação da função de tensão de Airy (ϕ) e da função potencial termoelástico de deslocamento (ψ). A maneira que foram definidas, essas funções são escalares e lineares, sendo assim, o princípio da superposição pode ser usado. Por consequência a distribuição da tensão residual total nas fibras ópticas é obtido através da soma da contribuição individual de cada região geradora de tensão [7]. Dessa forma a geometria utilizada para cálculo genérico é a apresentado na figura 2.1.

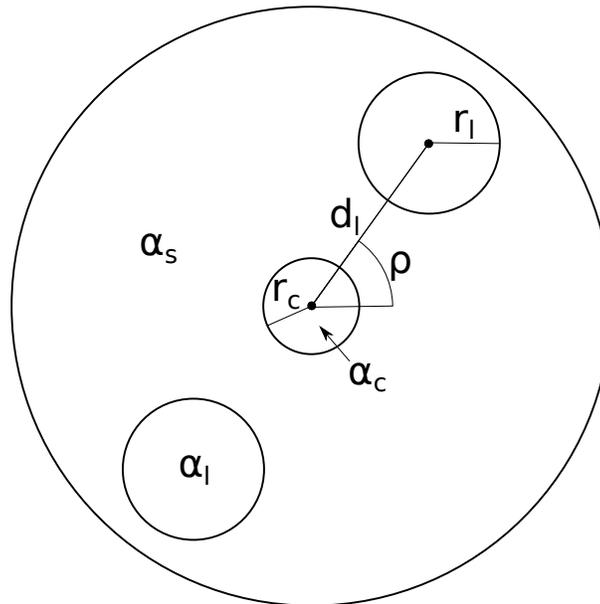


Fig. 2.1: Geometria genérica.

Para a geometria da figura 2.1 o cálculo foi dividido em três etapas em ordem: contribuição da região circular central, contribuição das regiões circulares descentralizadas e determinação dos coeficientes

da função de tensão de Airy. As duas primeiras etapas são a solução particular do problema em cada região individualmente (equação (2.7)) e a terceira etapa parte da solução do problema para um cilindro infinito homogêneo, ou seja, a solução da equação homogênea (2.12).

Contribuição da região circular central no cálculo das tensões residuais

Para encontrar a contribuição da região circular central à distribuição de tensão residual deve-se encontrar a solução da equação (2.7), considerando ainda a expansão relativa entre o material da região central e o material que a envolve.

$$\nabla^2 \psi = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} (\alpha_c - \alpha_g) T = \beta_c T \quad (2.17)$$

onde α_c e α_g são, respectivamente, o coeficiente de expansão térmica do material da região central e o do material que envolve essa região.

Como afirmado em [7], a solução da equação de Poisson que é circularmente simétrica e tem valor finito na origem é

$$\psi_c(r) = \frac{\beta_c T}{4} r^2 + K_1, \quad r \leq r_c \quad (2.18)$$

e a solução da equação de Laplace é

$$\psi_c(r) = \frac{r_c^2 \beta_c T}{2} \ln r + K_2, \quad r \geq r_c \quad (2.19)$$

onde K_1 e K_2 são constantes sem importância para o cálculo das tensões, e a constante multiplicando $\ln r$ é determinada através do fato da derivada do potencial de deslocamento (ψ) ser contínuo na mudança de meio ($r = r_c$).

Contribuição das regiões circulares descentralizadas no cálculo das tensões residuais

Novamente seguindo o procedimento em [7], para o cálculo das contribuições das regiões não centralizadas usa-se de uma translação no sistema de coordenadas para aproveitar o resultado já encontrado em (2.18) e em (2.19). Tal translação é indicada na figura 2.2.

Assim equação da contribuição da região circular no primeiro quadrante da figura 2.2 é dada por

$$\psi_{l1} = \frac{\beta_l T}{4} R^2 + K'_{1}, \quad R \leq r_l \quad (2.20)$$

e

$$\psi_{l1} = \frac{\beta_l r_l^2 T}{2} \ln R + K'_{2}, \quad R \geq r_l \quad (2.21)$$

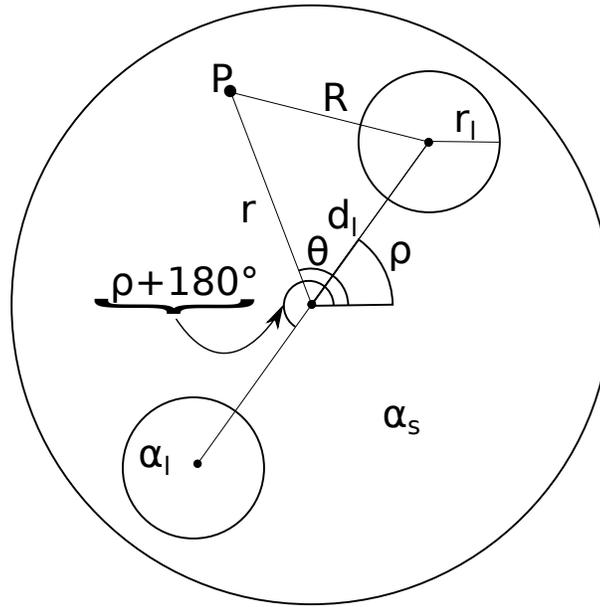


Fig. 2.2: Translação no sistema de coordenadas.

onde pela translação indicada na figura R é dado por

$$R^2 = r^2 - 2rd_l \cos(\theta - \rho) + d_l^2 \quad (2.22)$$

Dessa forma o potencial de deslocamento devido a essa região será

$$\psi_{l1} = \frac{\beta_l T}{4} [r^2 - 2rd_l \cos(\theta - \rho) + d_l^2] + K'_1 \quad (2.23)$$

na parte interna dessa região. E

$$\psi_{l1} = \frac{\beta_l r_l T}{4} \ln[r^2 - 2rd_l \cos(\theta - \rho) + d_l^2] + K'_2 \quad (2.24)$$

na parte externo dessa região.

Para a região circular no terceiro quadrante, a contribuição é dada por

$$\psi_{l3} = \frac{\beta_l T}{4} [r^2 - 2rd_l \cos(\rho + 180^\circ - \theta) + d_l^2] + K'_3 \quad (2.25)$$

para a parte interna a essa região, e

$$\psi_{l3} = \frac{\beta_l r_l T}{4} \ln[r^2 - 2rd_l \cos(\rho + 180^\circ - \theta) + d_l^2] + K'_4 \quad (2.26)$$

para a parte externa a essa região. Simplificando as equações (2.25) e (2.26)

$$\psi_{I3} = \frac{\beta_l T}{4} [r^2 + 2rd_l \cos(\theta - \rho) + d_l^2] + K'_3 \quad (2.27)$$

para a parte interna a essa região, e

$$\psi_{I3} = \frac{\beta_l r_l T}{4} \ln[r^2 + 2rd_l \cos(\theta - \rho) + d_l^2] + K'_4 \quad (2.28)$$

para a parte externa a essa região. Nas equações acima as constantes K'_1 , K'_2 , K'_3 e K'_4 não são importantes para o cálculo das tensões.

Determinação dos coeficientes da função de tensão de Airy

Para se determinar os coeficientes da função de tensão de Airy dada pela equação (2.14), considera-se primeiramente apenas a existência da região circular central e posteriormente apenas a existência das duas regiões descentralizadas, depois aplica-se o teorema da superposição.

Começando pela região central e usando as condições de contorno dadas pela equação (2.13), a solução geral para a parte preenchida da figura 2.3 é dada pela soma da equação (2.14) com (2.19)

$$\chi = b_0 r^2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{n+2}) \cos(n\theta) + \frac{r_c^2 \beta_c T}{2} \ln r + K_2, \quad r \geq r_c \quad (2.29)$$

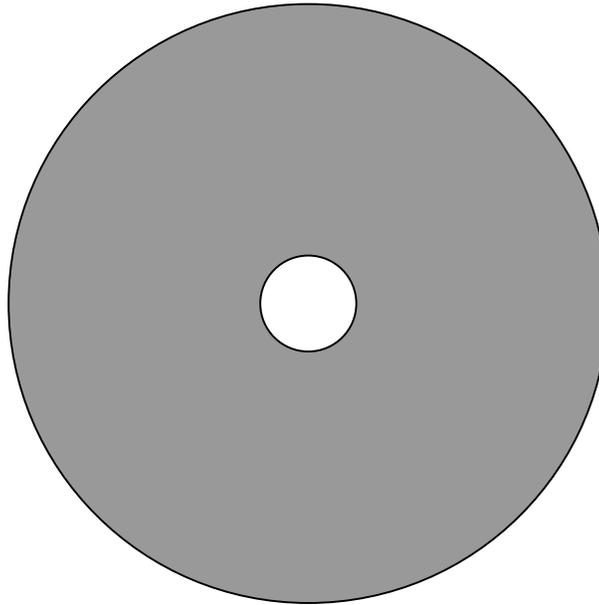


Fig. 2.3: Região externa à região circular central.

Agora substituindo a equação (2.29) na equação (2.15a) e usando a condição de contorno dada pela equação (2.13a) tem-se

$$\begin{aligned}\sigma_r(b, \theta) &= \frac{-E}{1 + \nu} \frac{1}{r} \left\{ 2b_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} [(-n^2 + n)a_n r^{n-1} + (-n^2 + n + 2)b_n r^{n+1}] \cos(n\theta) + \frac{r_c^2 \beta_c T}{2r} \right\} \Big|_{r=b} \\ &= 0\end{aligned}\quad (2.30)$$

Rearranjando a equação (2.30) tem-se

$$2b_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} [(-n^2 + n)a_n b^{n-1} + (-n^2 + n + 2)b_n b^{n+1}] \cos(n\theta) + \frac{r_c^2 \beta_c T}{2b} = 0 \quad (2.31)$$

Baseando-se na semelhança com uma série de Fourier, os coeficientes da função de tensão de Airy serão obtidos de forma similar aos coeficientes de uma série de Fourier. Assim primeiramente integrando-se a equação (2.31) de $-\pi$ a $+\pi$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ 2b_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} [(-n^2 + n)a_n b^{n-1} + (-n^2 + n + 2)b_n b^{n+1}] \cos(n\theta) + \frac{r_c^2 \beta_c T}{2b} \right\} d\theta = 0 \quad (2.32)$$

Assim, como

$$\int_{-\pi}^{+\pi} K \cos(n\theta) d\theta = 0, \quad \forall n \in Z \quad (2.33)$$

onde K é uma constante real. Então,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} 2b_0 b d\theta = - \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{r_c^2 \beta_c T}{2b} d\theta \quad (2.34)$$

Logo,

$$b_0 = - \frac{r_c^2 \beta_c T}{4b^2} \quad (2.35)$$

é a contribuição da região circular central à b_0 .

Agora, multiplicando-se a equação (2.31) por $\cos(m\theta)$ e integrando-se de $-\pi$ a $+\pi$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ 2b_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} [(-n^2 + n)a_n b^{n-1} + (-n^2 + n + 2)b_n b^{n+1}] \cos(n\theta) + \frac{r_c^2 \beta_c T}{2b} \right\} \cos(m\theta) d\theta = 0 \quad (2.36)$$

onde m pertence ao conjunto dos números inteiros.

Então devido ao fato de

$$\int_{-\pi}^{+\pi} K \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = 0, \forall n \neq m \quad (2.37)$$

e da equação (2.33), tem-se

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \{ [(-m^2 + m)a_m b^{m-1} + (-m^2 + m + 2)b_m b^{m+1}] \cos(m\theta) \} \cos(m\theta) d\theta = 0 \quad (2.38)$$

Assim, pode-se afirmar que

$$(-m^2 + m)a_m b^{m-1} + (-m^2 + m + 2)b_m b^{m+1} = 0 \quad (2.39)$$

Agora, substituindo a equação (2.29) na equação (2.15c) e usar a condição de contorno dada pela equação (2.13b), tem-se

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}(b, \theta) &= \frac{E}{1 + \nu} \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} [(n^2 - 1)a_n r^{n-2} + (n^2 + 1)b_n r^n] \text{sen}(n\theta) \right\} \Big|_{r=b} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Rearranjando a equação (2.40) tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(n^2 - 1)a_n b^{n-2} + (n^2 + 1)b_n b^n] \text{sen}(n\theta) = 0 \quad (2.41)$$

Novamente usando uma multiplicação na equação (2.40) por $\text{sen}(m\theta)$ e a integrando de $-\pi$ a $+\pi$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [(n^2 - 1)a_n b^{n-2} + (n^2 + 1)b_n b^n] \text{sen}(n\theta) \right\} \text{sen}(m\theta) d\theta = 0 \quad (2.42)$$

Semelhantemente, devido ao fato de

$$\int_{-\pi}^{+\pi} K \text{sen}(n\theta) \text{sen}(m\theta) d\theta = 0, \forall n \neq m \quad (2.43)$$

Tem-se que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [(m^2 - 1)a_m b^{m-2} + (m^2 + 1)b_m b^m] \text{sen}(m\theta) \text{sen}(m\theta) d\theta = 0 \quad (2.44)$$

Logo,

$$(m^2 - 1)a_m b^{m-2} + (m^2 + 1)b_m b^m = 0 \quad (2.45)$$

Através do sistema de equações dado pelas equações (2.39) e (2.45) tem-se

$$a_n = 0 \quad e \quad b_n = 0 \quad (2.46)$$

Agora faz-se o cálculo da contribuição das regiões descentralizadas aos coeficientes da função de tensão de Airy. Novamente, como as condições de contorno são para $r = b$, substitui-se a equação (2.24) somado à equação (2.26), assim como novamente a equação (2.14) na equação em χ .

$$\begin{aligned} \chi = & b_0 r^2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{n+2}) \cos(n\theta) + \frac{\beta_l r_l^2 T}{4} \ln[r^2 - 2rd_l \cos(\theta - \rho) + d_l^2] + K'_2 \\ & + \frac{\beta_l r_l T}{4} \ln[r^2 + 2rd_l \cos(\theta - \rho) + d_l^2] + K'_4 \end{aligned} \quad (2.47)$$

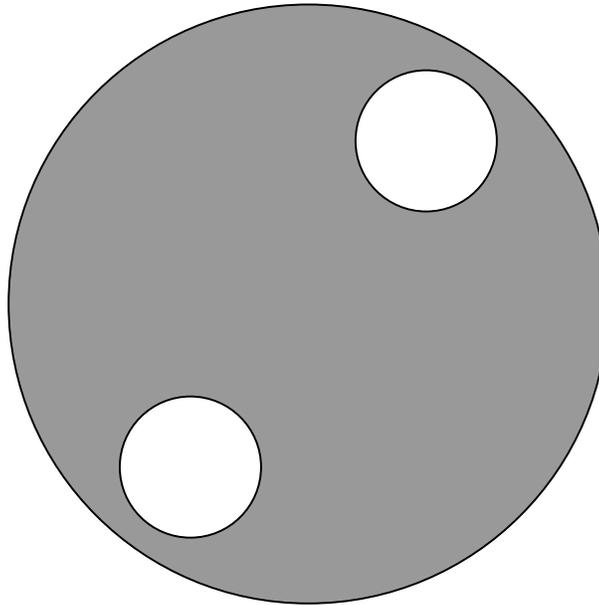


Fig. 2.4: Região externa às regiões circulares descentralizadas.

A parte preenchida da figura 2.4 mostra a região para a qual a equação (2.47) é válida. Como feito para a região central, substitui-se a equação (2.47) na equação (2.15a) e aplicando-se a condição de contorno dada pela equação (2.13a) tem-se

$$\begin{aligned} \sigma_r(b, \theta) &= \frac{-E}{1 + \nu} \frac{1}{r} \left\{ 2b_0 r - \sum_{n=1}^{\infty} [(n^2 - n)a_n r^{n-1} + (n^2 - n - 2)b_n r^{n+1}] \cos(n\theta) \right. \\ &\quad \left. + \beta_l r_l^2 T \frac{-2d_l^4 r^3 + r^7 d_l^4 \cos[4(\theta - \rho) + d_l^6 r \cos[2(\theta - \rho)] - d_l^2 r^5 \cos[2(\theta)]]}{\{d_l^4 + r^4 - 2d_l^2 r^2 \cos[2(\theta - \rho)]\}} \right\} \Big|_{r=b} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Rearranjando a equação (2.48) tem-se

$$\begin{aligned} &2b_0 b - \sum_{n=1}^{\infty} [(n^2 - n)a_n b^{n-1} + (n^2 - n - 2)b_n b^{n+1}] \cos(n\theta) \\ &+ \beta_l r_l^2 T \frac{-2d_l^4 b^3 + b^7 d_l^4 \cos[4(\theta - \rho) + d_l^6 b \cos[2(\theta - \rho)] - d_l^2 b^5 \cos[2(\theta)]]}{\{d_l^4 + b^4 - 2d_l^2 b^2 \cos[2(\theta - \rho)]\}} = 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Segundo mesmo procedimento feito para o cálculo da contribuição da região circular centra ao coeficiente b_0 , integra-se a equação (2.49) de $-\pi$ a π .

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ 2b_0 b - \sum_{n=1}^{\infty} [(n^2 - n)a_n b^{n-1} + (n^2 - n - 2)b_n b^{n+1}] \cos(n\theta) \right. \\ &\left. + \beta_l r_l^2 T \frac{-2d_l^4 b^3 + b^7 d_l^4 \cos[4(\theta - \rho) + d_l^6 b \cos[2(\theta - \rho)] - d_l^2 b^5 \cos[2(\theta)]]}{\{d_l^4 + b^4 - 2d_l^2 b^2 \cos[2(\theta - \rho)]\}} \right\} d\theta = 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Assim, usando (2.33) tem-se

$$\begin{aligned} &-\int_{-\pi}^{+\pi} \beta_l r_l^2 T \frac{-2d_l^4 b^3 + b^7 d_l^4 \cos[4(\theta - \rho) + d_l^6 b \cos[2(\theta - \rho)] - d_l^2 b^5 \cos[2(\theta)]]}{\{d_l^4 + b^4 - 2d_l^2 b^2 \cos[2(\theta - \rho)]\}} d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} 2b_0 b d\theta \end{aligned} \quad (2.51)$$

Logo, a contribuição da região circular descentralizada à constante b_0 é

$$b_0 = -\frac{\beta_l r_l^2 T}{2b^2} \quad (2.52)$$

Agora, multiplicando-se a equação (2.49) por $\cos[m(\theta - \rho)]$ e integrando-se de $-\pi$ a π

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ 2b_0 b - \sum_{n=1}^{\infty} [(n^2 - n)a_n b^{n-1} + (n^2 - n - 2)b_n b^{n+1}] \cos(n\theta) \right. \\ & \left. + \beta_l r_l^2 T \frac{-2d_l^4 b^3 + b^7 d_l^4 \cos[4(\theta - \rho) + d_l^6 b \cos[2(\theta - \rho)] - d_l^2 b^5 \cos[2(\theta)]]}{\{d_l^4 + b^4 - 2d_l^2 b^2 \cos[2(\theta - \rho)]\}} \right\} \cos[m(\theta - \rho)] d\theta \\ & = 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

Sabendo-se que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} K \cos(n\theta) \cos[m(\theta - \rho)] d\theta = 0, \quad \forall n \neq m \quad (2.54a)$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} K \cos(n\theta) \cos[m(\theta - \rho)] d\theta = \pi \cos(m\rho), \quad \forall n = m \quad (2.54b)$$

onde K e ρ são constantes reais e m é um número inteiro.

Assim, usando (2.33) e (2.61) tem-se

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{+\pi} \beta_l r_l^2 T \frac{-2d_l^4 b^3 + b^7 d_l^4 \cos[4(\theta - \rho) + d_l^6 b \cos[2(\theta - \rho)] - d_l^2 b^5 \cos[2(\theta)]]}{\{d_l^4 + b^4 - 2d_l^2 b^2 \cos[2(\theta - \rho)]\}} \cos[m(\theta - \rho)] d\theta \\ & = \int_{-\pi}^{+\pi} [(m^2 - m)a_m b^{m-1} + (m^2 - m - 2)b_m b^{m+1}] \cos(m\theta) \cos[m(\theta - \rho)] d\theta \end{aligned} \quad (2.55)$$

Definindo uma função auxiliar f como

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{+\pi} \beta_l r_l^2 T \frac{-2d_l^4 b^3 + b^7 d_l^4 \cos[4(\theta - \rho) + d_l^6 b \cos[2(\theta - \rho)] - d_l^2 b^5 \cos[2(\theta)]]}{\{d_l^4 + b^4 - 2d_l^2 b^2 \cos[2(\theta - \rho)]\}} \cos[m(\theta - \rho)] d\theta \\ & = f(m) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Tem-se

$$(m^2 - m)a_m b^{m-1} + (m^2 - m - 2)b_m b^{m+1} = \frac{f(m)}{\pi \cos(m\rho)} \quad (2.57)$$

Agora, usando-se a condição de contorno (2.13b) com χ dado pela equação (2.47) tem-se

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}(b, \theta) &= \frac{E}{1 + \nu} \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} [(n^2 - 1)a_n r^{n-2} + (n^2 + 1)b_n r^n] \text{sen}(n\theta) \right. \\ &\quad \left. + \beta_i d_i^2 r_i^2 T \frac{d_i^4 - 3r^4 + 2d_i^2 r^2 \cos[2(\theta - \rho)]}{\{d_i^4 + r^4 - 2d_i^2 r^2 \cos[2(\theta - \rho)]\}} \text{sen}[2(\theta - \rho)] \right\} \Big|_{r=b} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Rearranjando a equação acima,

$$\begin{aligned} &- \sum_{n=1}^{\infty} [(n^2 - 1)a_n b^{n-2} + (n^2 + 1)b_n b^n] \text{sen}(n\theta) \\ &+ \beta_i d_i^2 r_i^2 T \frac{d_i^4 - 3b^4 + 2d_i^2 b^2 \cos[2(\theta - \rho)]}{\{d_i^4 + b^4 - 2d_i^2 b^2 \cos[2(\theta - \rho)]\}} \text{sen}[2(\theta - \rho)] = 0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

Por conseguinte, multiplica-se a equação (2.58) por $\text{sen}[m(\theta - \rho)]$ e integra-se de $-\pi$ a π

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} [(n^2 - 1)a_n b^{n-2} + (n^2 + 1)b_n b^n] \text{sen}(n\theta) \right. \\ &\quad \left. + \beta_i d_i^2 r_i^2 T \frac{d_i^4 - 3b^4 + 2d_i^2 b^2 \cos[2(\theta - \rho)]}{\{d_i^4 + b^4 - 2d_i^2 b^2 \cos[2(\theta - \rho)]\}} \text{sen}[2(\theta - \rho)] \right\} \text{sen}[m(\theta - \rho)] d\theta \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

Sabendo-se que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} K \text{sen}(n\theta) \text{sen}[m(\theta - \rho)] d\theta = 0, \quad \forall n \neq m \quad (2.61a)$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} K \text{sen}(n\theta) \text{sen}[m(\theta - \rho)] d\theta = \pi \cos(m\rho), \quad \forall n = m \quad (2.61b)$$

e da equação (2.43), tem-se

$$\begin{aligned}
& - \int_{-\pi}^{+\pi} [(m^2 - 1)a_m b^{m-2} + (m^2 + 1)b_m b^m] \text{sen}(m\theta) \text{sen}[m(\theta - \rho)] d\theta \\
& + \int_{-\pi}^{+\pi} \beta_l d_l^2 r_l^2 T \frac{d_l^4 - 3b^4 + 2d_l^2 b^2 \cos[2(\theta - \rho)]}{\{d_l^4 + b^4 - 2d_l^2 b^2 \cos[2(\theta - \rho)]\}} \text{sen}[2(\theta - \rho)] \text{sen}[m(\theta - \rho)] d\theta \\
& = 0 \quad (2.62)
\end{aligned}$$

Definindo então a função auxiliar g como

$$g(m) = \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ \beta_l d_l^2 r_l^2 T \frac{d_l^4 - 3b^4 + 2d_l^2 b^2 \cos[2(\theta - \rho)]}{\{d_l^4 + b^4 - 2d_l^2 b^2 \cos[2(\theta - \rho)]\}} \text{sen}[2(\theta - \rho)] \right\} \text{sen}[m(\theta - \rho)] d\theta \quad (2.63)$$

Tem-se

$$(m^2 - 1)a_m b^{m-2} + (m^2 + 1)b_m b^m = \frac{g(m)}{\pi \cos(m\rho)} \quad (2.64)$$

Resolvendo o sistema dado pelas equações (2.57) e (2.64), encontra-se os coeficientes da função tensão de Airy como

$$a_n = - \frac{b^{1-n} [-nf(n) + (nb - b)g(n)]}{2n\pi(n - 1)\cos(n\rho)} \quad (2.65a)$$

$$b_n = \frac{b^{-n-1} [-f(n) + bg(n)]}{2\pi(n + 1)\cos(n\rho)} \quad (2.65b)$$

onde $f(n)$ e $g(n)$ são dados respectivamente pelas equações (2.56) e (2.63). Fazendo então as devidas integrações dadas por essas equações, encontra-se

$$f(n) = \begin{cases} \pi \beta_l r_l^2 T (n + 1) \frac{d_l^n}{b^{n+1}}, & \text{se } n = 2, 4, 6, \dots \\ 0, & \text{se } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (2.66)$$

e

$$g(n) = \begin{cases} -\pi \beta_l r_l^2 T (n + 1) \frac{d_l^n}{b^{n+2}}, & \text{se } n = 2, 4, 6, \dots \\ 0, & \text{se } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (2.67)$$

Reescrevendo as equações acima substituindo n por $2n$,

$$f(2n) = \pi \beta_l r_l^2 T (2n + 1) \frac{d_l^{2n}}{b^{2n+1}}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.68)$$

e

$$g(2n) = -\pi\beta_l r_l^2 T(2n+1) \frac{d_l^{2n}}{b^{2n+2}}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.69)$$

Fazendo a mesma substituição na equação (2.65),

$$a_{2n} = -\frac{b^{1-2n}[-nf(2n) + (n-1)bg(2n)]}{2n\pi(2n-1)\cos(2n\rho)} \quad (2.70a)$$

$$b_{2n} = \frac{b^{-2n-1}[-f(2n) + bg(2n)]}{2\pi(2n+1)\cos(2n\rho)} \quad (2.70b)$$

Substituindo as equações (2.68) e (2.69) em (2.70),

$$a_{2n} = \frac{2n+1}{2n} \beta_l r_l^2 T \left(\frac{d_l}{b} \right)^{2n} \sec(2n\rho) \quad (2.71a)$$

$$b_{2n} = -\beta_l T \left(\frac{r_l}{b} \right)^2 \left(\frac{d_l}{b} \right)^{2n} \sec(2n\rho) \quad (2.71b)$$

Sendo essa equação juntamente com a equação (2.52) a contribuição das regiões circulares não centralizadas aos coeficientes da função tensão de Airy.

Finalizando o Cálculo

Já conhecidos as contribuições dos coeficientes da função de tensão de Airy, assim como, as funções de potencial de deslocamento de cada região estudada, a determinação das tensões residuais é feita para cada região da seção da FOM. Primeiramente através das equações (2.35), (2.46), (2.14), (2.16) e das equações (2.15), determina-se a contribuição da região central às tensões residuais levando em conta apenas a função de tensão de Airy.

$$\sigma_{rc}^A = \frac{\beta_c E r_c^2 T}{2b^2(1+\nu)} \quad (2.72a)$$

$$\sigma_{\theta c}^A = \frac{\beta_c E r_c^2 T}{2b^2(1+\nu)} \quad (2.72b)$$

$$\sigma_{r\theta c}^A = 0 \quad (2.72c)$$

Através das equações (2.52), (2.71), (2.14), (2.16) e das equações (2.15), determina-se a contribuição das regiões descentralizadas às tensões residuais levando em conta apenas a função de Airy.

$$\sigma_{rd}^A = \frac{ET}{1+\nu} \left\{ \frac{\beta_l r_l^2}{b^2} + \frac{\beta_l r_l^2}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(4n^2 - 1) \left(\frac{d_l}{b} \right)^2 \left(\frac{rd_l}{b^2} \right)^{2n-2} - 2(n-1)(2n+1) \left(\frac{rd_l}{b^2} \right)^{2n} \right] \cos(2n\theta) \cos(2n\rho) \right\} \quad (2.73a)$$

$$\sigma_{\theta d}^A = \frac{ET}{1+\nu} \left\{ \frac{\beta_l r_l^2}{b^2} - \frac{\beta_l r_l^2}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(4n^2 - 1) \left(\frac{d_l}{b} \right)^2 \left(\frac{rd_l}{b^2} \right)^{2n-2} - 2(n-1)(2n+1) \left(\frac{rd_l}{b^2} \right)^{2n} \right] \cos(2n\theta) \cos(2n\rho) \right\} \quad (2.73b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta d}^A &= -\frac{ET}{1+\nu} \frac{\beta_l r_l^2}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(4n^2 - 1) \left(\frac{d_l}{b} \right)^2 \left(\frac{rd_l}{b^2} \right)^{2n-2} \right. \\ &= \left. -2n(2n+1) \left(\frac{rd_l}{b^2} \right)^{2n} \right] \cos(2n\theta) \cos(2n\rho) \end{aligned} \quad (2.73c)$$

Agora, usando as equações (2.18), (2.19), (2.16) e as equações (2.15), determina-se a contribuição da região central às tensões residuais levando em conta apenas o potencial de deslocamento.

$$\sigma_{rc}^D = \begin{cases} -\frac{ET\beta_c}{2(1+\nu)}, & \text{se } r \leq r_c \\ -\frac{ET\beta_c r_c^2}{2(1+\nu)r^2}, & \text{se } r \geq r_c \end{cases} \quad (2.74a)$$

$$\sigma_{\theta c}^D = \begin{cases} -\frac{ET\beta_c}{2(1+\nu)}, & \text{se } r \leq r_c \\ \frac{ET\beta_c r_c^2}{2(1+\nu)r^2}, & \text{se } r \geq r_c \end{cases} \quad (2.74b)$$

$$\sigma_{r\theta c}^D = 0 \quad (2.74c)$$

Usando as equações (2.23), (2.24), (2.27), (2.28), (2.16) e as equações (2.15), determina-se a contribuição das regiões descentralizadas às tensões residuais levando em conta apenas o potencial de deslocamento.

$$\sigma_{rd}^D = \begin{cases} -\frac{ET\beta_l}{2(1+\nu)} \left\{ 1 + r_l^2 \frac{r^2 \pm 2rd_l \cos(\theta-\rho) + d_l^2 \cos[2(\theta-\rho)]}{(r^2 \pm 2rd_l \cos(\theta-\rho) + d_l^2)^2} \right\}, & \text{dentro das regiões descentralizadas} \\ -\frac{ET\beta_l r_l^2}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{r^2 + d_l^2 \cos[2(\theta-\rho)] - 2rd_l \cos(\theta-\rho)}{(r^2 + d_l^2 - 2rd_l \cos(\theta-\rho))^2} \right. \\ \quad \left. + \frac{r^2 + d_l^2 \cos[2(\theta-\rho)] + 2rd_l \cos(\theta-\rho)}{(r^2 + d_l^2 + 2rd_l \cos(\theta-\rho))^2} \right\}, & \text{fora das duas regiões descentralizadas} \end{cases} \quad (2.75a)$$

$$\sigma_{\theta d}^D = \begin{cases} \frac{ET\beta_l}{2(1+\nu)} \left\{ -1 + r_l^2 \frac{r^2 \pm 2rd_l \cos(\theta-\rho) + d_l^2 \cos[2(\theta-\rho)]}{(r^2 \pm 2rd_l \cos(\theta-\rho) + d_l^2)^2} \right\}, & \text{dentro da região} \\ \frac{ET\beta_l r_l^2}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{r^2 + d_l^2 \cos[2(\theta-\rho)] - 2rd_l \cos(\theta-\rho)}{(r^2 + d_l^2 - 2rd_l \cos(\theta-\rho))^2} \right. \\ \quad \left. + \frac{r^2 + d_l^2 \cos[2(\theta-\rho)] + 2rd_l \cos(\theta-\rho)}{(r^2 + d_l^2 + 2rd_l \cos(\theta-\rho))^2} \right\}, & \text{fora das duas regiões descentralizadas} \end{cases} \quad (2.75b)$$

$$\sigma_{r\theta d}^D = \begin{cases} \frac{ET}{1+\nu} \beta_l r_l^2 d_l \operatorname{sen}(\theta - \rho) \frac{r \pm d_l \cos(\theta-\rho)}{(r^2 \pm 2rd_l \cos(\theta-\rho) + d_l^2)^2}, & \text{dentro das regiões descentralizadas} \\ -\frac{ET}{2(1+\nu)} \beta_l r_l^2 d_l \operatorname{sen}(\theta - \rho) \left\{ \frac{r - d_l \cos(\theta-\rho)}{(r^2 - 2rd_l \cos(\theta-\rho) + d_l^2)^2} \right. \\ \quad \left. - \frac{r + d_l \cos(\theta-\rho)}{(r^2 + 2rd_l \cos(\theta-\rho) + d_l^2)^2} \right\}, & \text{fora das duas regiões descentralizadas} \end{cases} \quad (2.75c)$$

As equações acima que apresentam o artifício matemático “ \pm ” possuem a operação de adição quando a região analisada for a região original e será subtração quando a região analisada for a região oposta, com coordenada angular $\rho + 180^\circ$.

2.2 Exemplos de Cálculos dos Esforços Residuais

2.2.1 Exemplo 1

Nesse primeiro exemplo é calculada a distribuição das tensões residuais na seção de uma fibra óptica convencional, cuja geometria é apresentada na figura 2.5, e as propriedades de interesse para o cálculo são

$$E = 7830 \text{ kg/mm}^2$$

$$\nu = 0.186$$

$$\alpha_c = 2.125 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\alpha_s = 5.4 \times 10^{-7} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$T = -850^\circ\text{C}$$

$$r_c = 5 \mu\text{m}$$

$$b = 60 \mu\text{m}$$

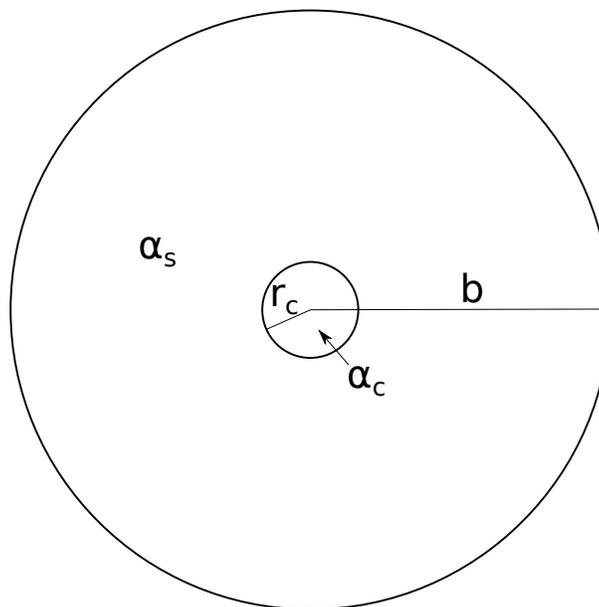


Fig. 2.5: Seção da fibra óptica do exemplo 1.

A figura 2.6 mostra os gráficos da tensão radial e da tensão angular ao longo do eixo radial em coordenadas polares, do centro da fibra óptica até sua borda externa.

A região central não contribui para a tensão cisalhante de acordo com equação (2.72c) e com a

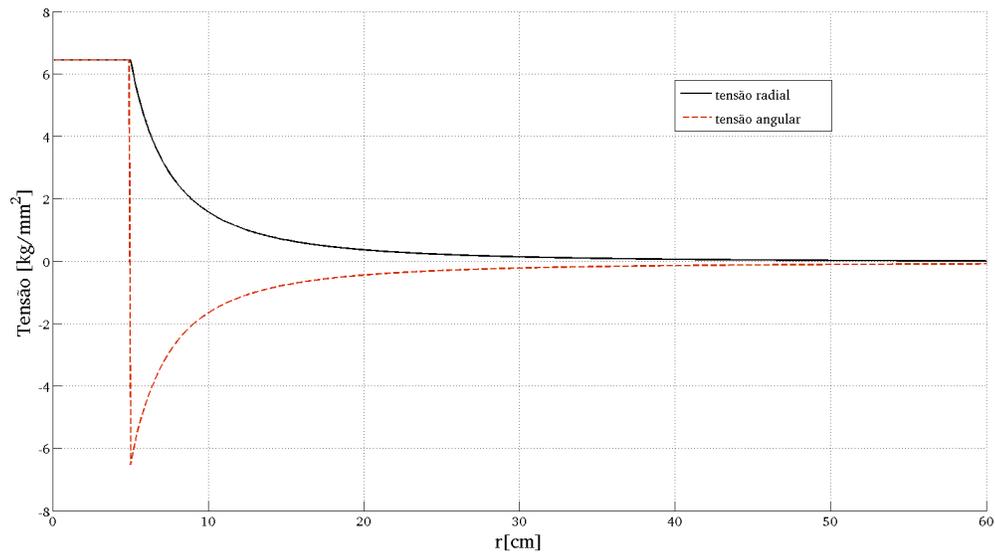


Fig. 2.6: Tensão radial e angular para o exemplo 1.

equação (2.74c).

2.2.2 Exemplo 2

Nesse exemplo o cálculo é feito para a geometria da figura 2.7. Os parâmetros para o cálculo continuam os mesmo do exemplo anterior.

$$E = 7830 \text{ kg/mm}^2$$

$$\nu = 0.186$$

$$\alpha_l = 1.45 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\alpha_s = 5.4 \times 10^{-7} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$T = -850 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$r_l = 18,5 \mu\text{m}$$

$$d_l = 26,5 \mu\text{m}$$

$$b = 60 \mu\text{m}$$

A figura 2.8 mostra os gráficos da tensão radial e da tensão angular ao longo do eixo radial num

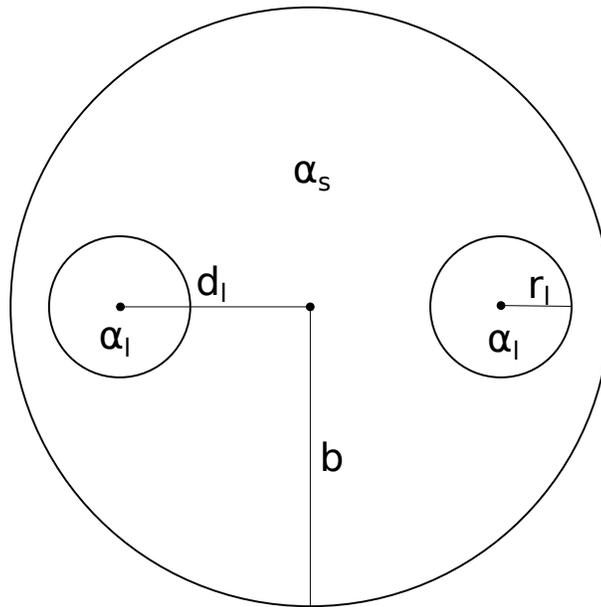


Fig. 2.7: Seção da fibra óptica do exemplo 2.

ângulo de zero graus, do centro da fibra até a sua borda externa.

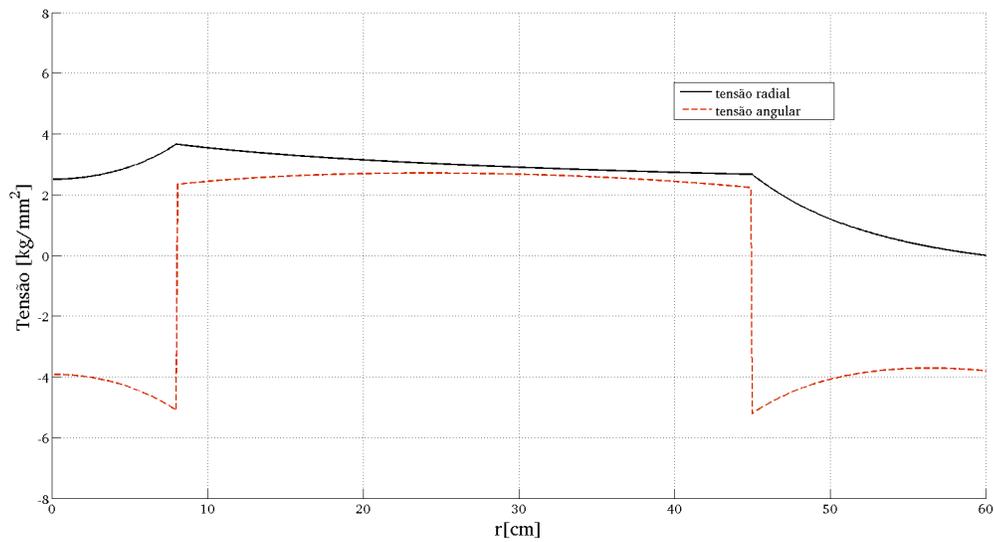


Fig. 2.8: Tensão radial e angular para o exemplo 2.

A tensão cisalhante não está presente no gráfico da figura 2.8 pois esta é zero quando $\theta = 0$ nas equações (2.73c) e (2.75c).

2.2.3 Exemplo 3

Nesse exemplo a fibra óptica analisada é composta pela combinação geométrica das duas fibras ópticas dos exemplos anteriores. A figura 2.9 mostra a geometria da seção da fibra óptica desse exemplo.

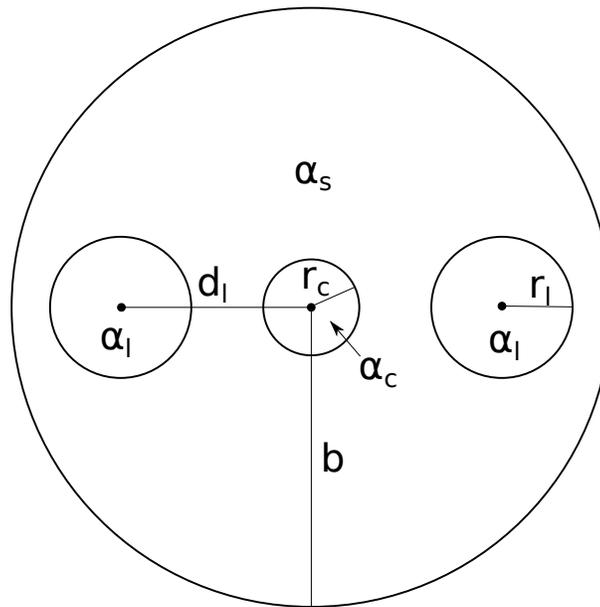


Fig. 2.9: Seção da fibra óptica do exemplo 3.

Os parâmetros para cálculo das tensões nessa fibra óptica são os seguintes:

$$E = 7830 \text{ kg/mm}^2$$

$$\nu = 0.186$$

$$\alpha_c = 2.125 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\alpha_l = 1.45 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\alpha_s = 5.4 \times 10^{-7} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$T = -850^\circ\text{C}$$

$$r_c = 5 \mu\text{m}$$

$$r_l = 18,5 \mu\text{m}$$

$$d_l = 26,5 \mu\text{m}$$

$$b = 60 \mu\text{m}$$

A figura 2.10 mostra os gráficos da tensão radial e da tensão angular ao longo do eixo radial em um ângulo de zero graus, do centro da fibra até a sua borda externa.

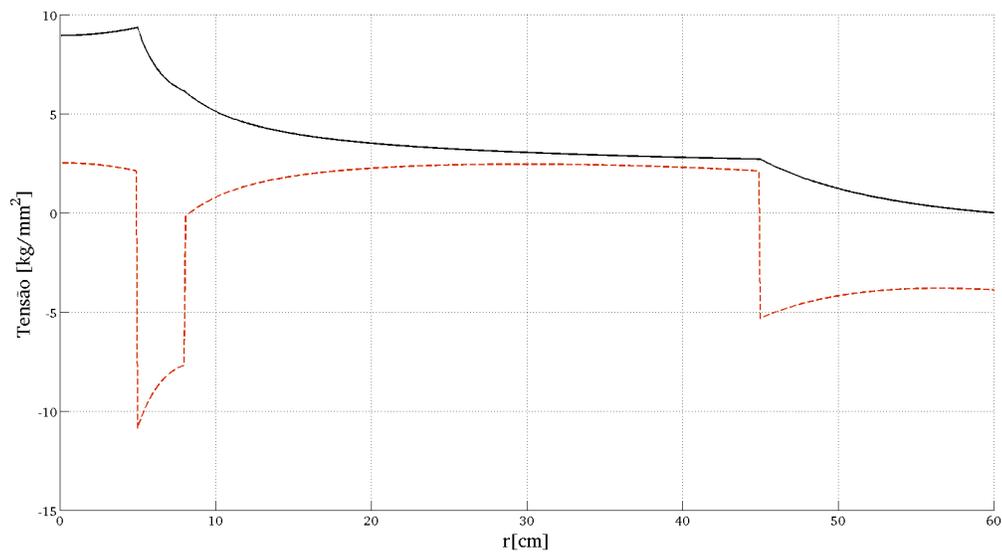


Fig. 2.10: Tensão radial e angular para o exemplo 3.

2.3 Conclusão

Nesse capítulo foi apresentado um método que serve de base para o cálculo dos esforços residuais em FOMs compostas por bastões circulares de materiais sólidos. Também é considerado que os materiais presentes na FOM possuem mesmos coeficiente de Poisson e módulo de Young. O problema resolvido trata basicamente do efeito dos diferentes coeficientes de expansão térmica dos materiais presentes na FOM nos esforços mecânicos que surgem quando a FOM é resfriada no processo de fabricação. O método aqui descrito tem como base a aplicação do princípio da superposição, o que permite tratar cada região da seção da FOM como um problema separado e posteriormente as soluções serem somadas chegando ao resultado final.

Capítulo 3

Análise Modal

Nesse capítulo é apresentado o programa simulador para análise modal disponível no grupo de pesquisa do Prof. Dr. Hugo Enrique Hernández Figueroa, apresentado em [10, 11], feito totalmente em FORTRAN. A esse programa foram adicionadas sub-rotinas que facilitam a busca pelos modos de propagação, as quais também serão descritas. Após é feita a análise modal em determinadas faixas de frequências para algumas FOMs como exemplo de uso do programa simulador.

3.1 Programa de Análise Modal

O programa de análise modal usado nesse trabalho tem seu algoritmo baseado no Método dos Elementos Finitos e foi fundamentado no artigo [12] o qual descreve o uso de elementos triangulares curvilíneos híbridos aresta/nodal em análise modal de guias de onda, não só para elementos de 1^a ordem, mas de ordem superiores. A figura 3.1 mostra o fluxograma do programa de análise modal.

Entre os parâmetros de entrada do programa, os mais relevantes usados nesse trabalho estão relacionados na tabela 3.1.

O funcionamento do analisador modal, tomando como base o fluxograma da figura 3.1, dá-se da seguinte forma. Primeiramente, o bloco “Leitura dos parâmetros” consiste em:

- Identificação dos arquivos de dados da malha da geometria a ser simulada;
- Identificação do arquivo das propriedades elétricas dos materiais (ϵ e μ);
- Determinação da faixa discreta de comprimentos de onda a serem simulados;
- Configurar o uso do módulo de soluções de sistemas numéricos;
- Determinação dos dados a serem armazenados para pós-processamento.

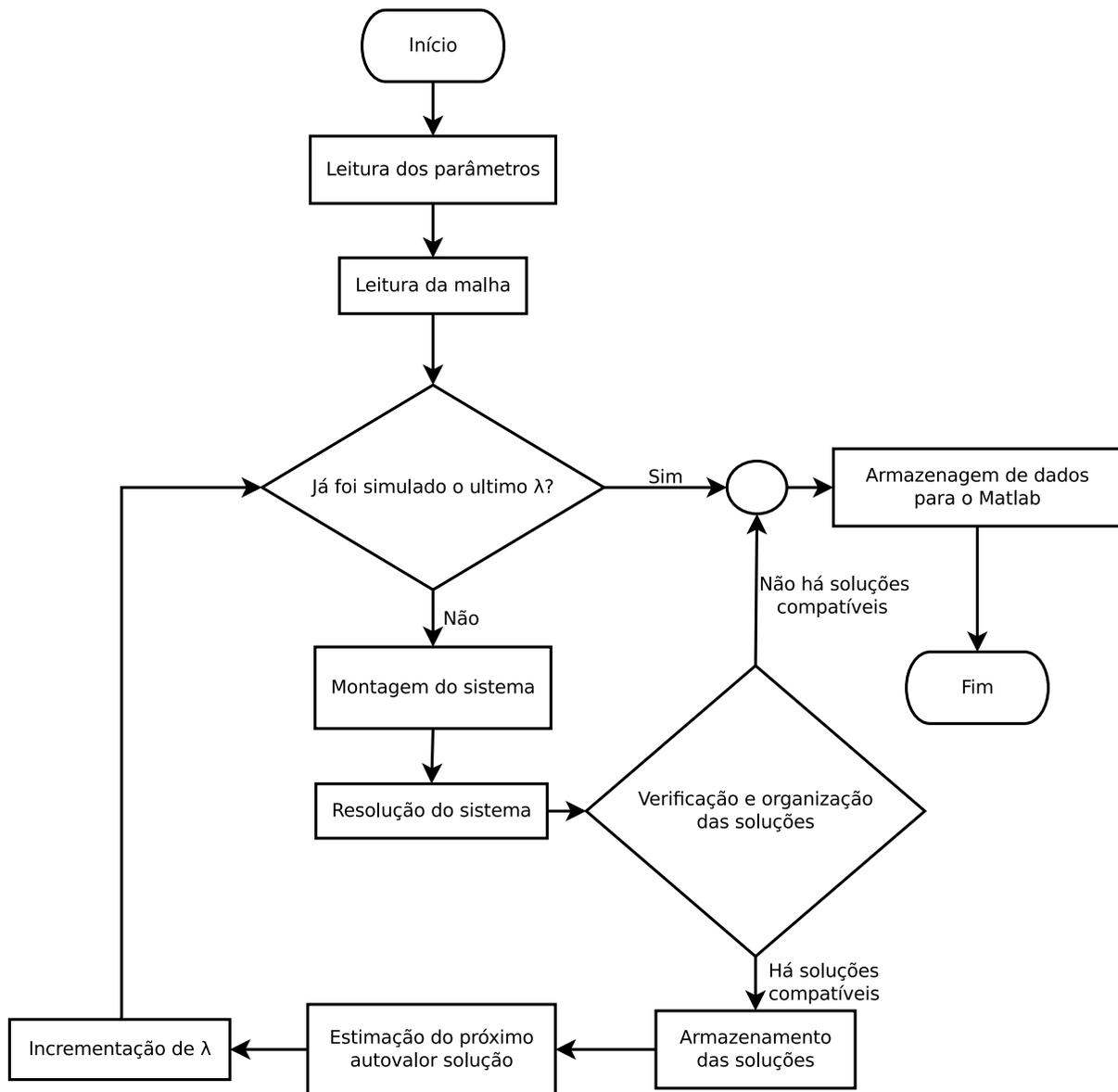


Fig. 3.1: Fluxograma do analisador modal.

No bloco “Leitura da malha”, faz-se a pré-armazenagem dos dados dos arquivos da malha na memória do computador. Posteriormente é iniciada a sequência de simulação dos comprimentos de onda discretos.

No bloco “Montagem do sistema”, faz-se a montagem do sistema dado pela equação (3.1), onde suas matrizes $[K]$ e $[M]$ e o vetor $\{\phi\}$ são definidos em [10, 12].

$$[K] \{\phi\} - \beta^2 [M] \{\phi\} = 0 \quad (3.1)$$

<i>Parâmetro</i>	<i>Descrição</i>
Malha	Localização dos arquivos com dados da malha gerados pelo GiD
Materiais	Localização do arquivo com as propriedades elétricas (ϵ e μ) dos materiais, sendo que esses podem ser anisotrópicos
λ_i	Comprimento de onda inicial da faixa de frequências a ser simulada
λ_f	Comprimento de onda final da faixa de frequências a ser simulada
N_λ	Número de comprimentos de onda a serem simuladas dentro da faixa especificada
<i>Kick</i>	Valor semente para o módulo de soluções
Ordem	Ordem dos elementos da malha
τ	Número de autovalores e autovetores a serem buscados pela sub-rotina de resolução de sistemas lineares

Tab. 3.1: Parâmetros de entrada relevantes do analisador modal.

onde β é a constante de propagação no guia de onda a ser simulado e, β^2 e $\{\phi\}$ são, respectivamente, o autovalor e o autovetor do sistema.

No bloco “Resolução do sistema”, o sistema dado pela equação (3.1) é resolvido de modo iterativo, o que justifica o uso do parâmetro de entrada *Kick*.

No bloco “Verificação e organização das soluções”, os autovetores encontrados são comparados com os mesmo encontrados para o comprimento de onda anteriormente simulado. Essa comparação permite também a identificação e organização entre as soluções. Esse bloco será descrito com mais detalhes na seção 3.2. Caso os autovetores encontrados não sejam compatíveis com os anteriores, a simulação é finalizada com a armazenagem dos dados usados para pós-processamento no bloco “Armazenamento de dados para o Matlab”. Caso os autovetores sejam compatíveis, tanto os autovetores quanto os autovalores são armazenados, e um novo autovalor é estimado para a solução do sistema no próximo comprimento de onda a ser simulado.

3.1.1 Simple Exemplo

Nesse exemplo é calculado a distribuição do campo eletromagnético para uma fibra óptica padrão de índice degrau para apenas um comprimento de onda. Segue os parâmetros da simulação:

$$\begin{aligned}r_n &= 8 \mu m \\n_n &= 1,45 \\n_c &= 1,44 \\\lambda_0 &= 1500 nm\end{aligned}$$

A figura 3.2 mostra a geometria da seção da fibra óptica desse exemplo.

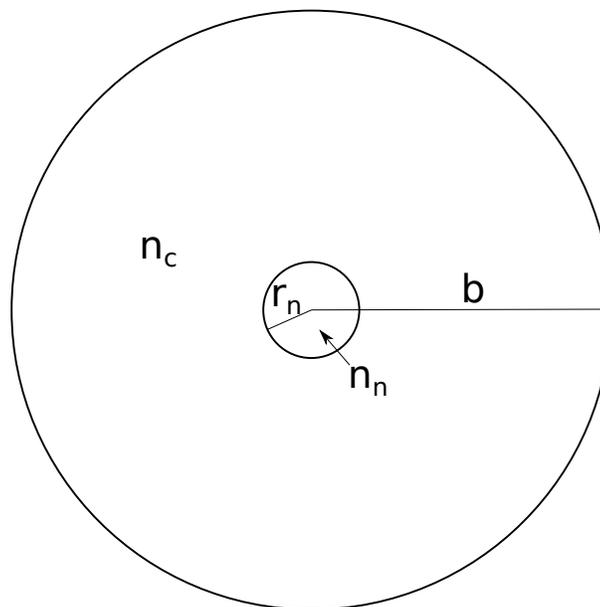


Fig. 3.2: Geometria da seção da fibra óptica do exemplo 1.

A distribuição normalizada de potência para o modo fundamental da fibra óptica desse exemplo é apresentada na figura 3.3.

3.2 Aperfeiçoamento do Simulador

Originalmente, o programa usado em [10, 11] possui sub-rotinas de Algoritmos Genéticos para otimização de parâmetros de dispersão de alta ordem. Tais sub-rotinas e suas consequentes passagens para implementação no código foram suprimidas, uma vez que no trabalho aqui apresentado não foi necessário. Ao código foram adicionadas duas novas subrotinas que objetivam facilitar a busca pelos modos de propagação e pela identificação destes.

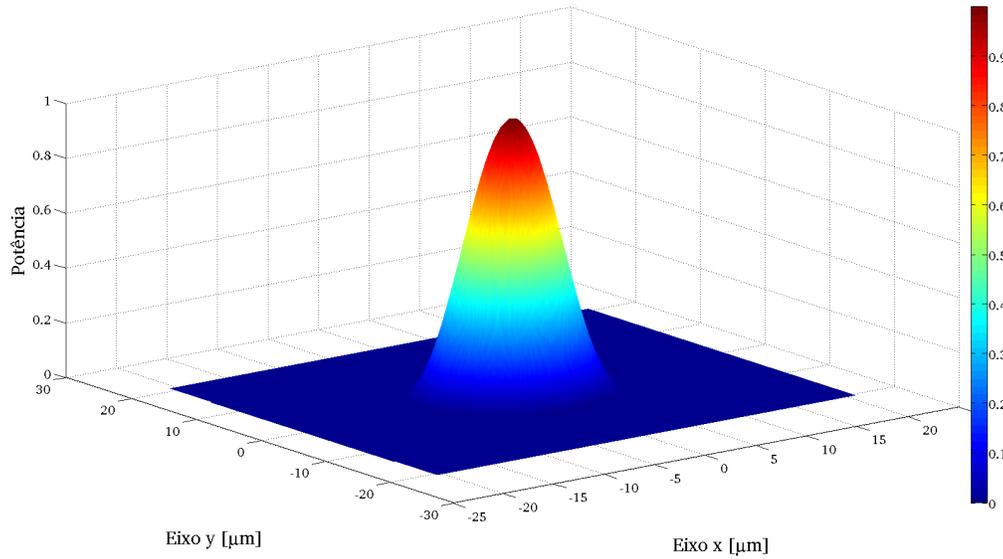


Fig. 3.3: Distribuição normalizada de potência do modo fundamental.

As novas subrotinas atuam nos blocos Verificação e organização das soluções e Estimação do próximo autovalor solução, referentes ao fluxograma apresentado na figura 3.1.

3.2.1 Aperfeiçoamento do Bloco Verificação e Organização das Soluções

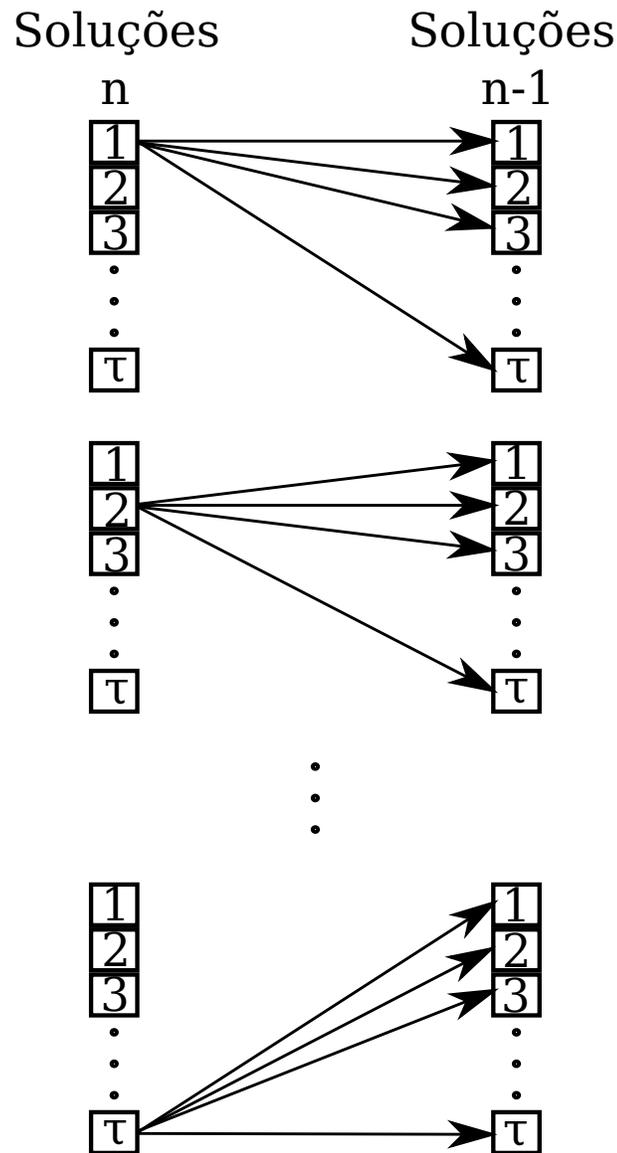
O aperfeiçoamento do bloco “Verificação e Organização das Soluções” que era baseado originalmente no produto interno definido na equação (3.2), foi motivado principalmente pelo alto tempo de execução além do alto consumo de memória.

$$Ic_i(k) = \frac{\{\phi_n\}_i}{\sqrt{\{\phi_n\}_i \cdot ([X_n] \cdot \{\phi_n^*\}_i)}} \cdot \frac{[X_n] \cdot \{\phi_{n-1}^*\}_k}{\sqrt{\{\phi_{n-1}\}_k \cdot ([X_n] \cdot \{\phi_{n-1}^*\}_k)}} \quad (3.2)$$

onde $Ic_i(k)$ é definido como índice de compatibilidade do autovetor i da solução n com o autovetor k da solução $n - 1$, e $[X_n]$ é a matriz peso, podendo essa ser tanto $[K]$ como $[M]$, já definidos na equação (3.1). Então, para cada autovetor da solução n eram calculados τ valores de Ic , ou seja, um valor de Ic para cada autovetor da solução $n - 1$. A figura 3.4 mostra a associação entre os autovetores da solução n com a solução $n - 1$ no calculo dos Ic 's.

Então para organizar os autovetores das soluções n de acordo com a soluções da intereção anterior ($n - 1$), procurava-se a posição de maior valor no vetor Ic_i , caso fosse a posição k_m , este $i^{\text{ésimo}}$ autovetor seria o correspondente ao $k_m^{\text{ésimo}}$ autovetor da solução anterior.

Com esse procedimento era possível fazer a organização dos autovetores e seus repectivos auto-

Fig. 3.4: Associação entra a solução n e a $n - 1$.

valores, porém os operandos da equação (3.2) ocupam muita memória, principalmente o $[X_n]$ que é uma matriz. Sendo assim, foi proposto o seguinte produto interno:

$$Ic_i(k) = \{\hat{\phi}_n\}_i \cdot \{\hat{\phi}_{n-1}^*\}_k \quad (3.3)$$

onde $\{\hat{\phi}\}$ é definido por

$$\{\hat{\phi}\} = \frac{\{\phi\}}{\sqrt{\{\phi\} \cdot \{\phi^*\}}} \quad (3.4)$$

Dessa forma, como o novo produto interno não possui operando matricial e contém menos opera-

ções, o tempo de processamento e o uso da memória foram reduzidos.

Com o novo produto interno dado pela equação (3.3) e (3.4) os valores achados para Ic ficam compreendidos entre 0 e 1, sendo que quanto mais próximo de 0, menor a semelhança ou compatibilidade entre os vetores, enquanto que quanto mais próximo de 1, maior a compatibilidade entre os vetores. Com isso, considera-se que quando tem-se um Ic próximo de 1, tem-se autovetores pertencentes ao mesmo modo de propagação.

3.2.2 Aperfeiçoamento do Bloco Estimativa do Próximo Autovalor Solução

Como já descrito, o programa calcula τ autovalores e seus respectivos autovetores em cada passo de comprimento de onda, porém como o sistema numérico que deve ser resolvido para o cálculo desses valores são grandes, necessita-se então de métodos iterativos para sua resolução e métodos iterativos precisam de valor semente para encontrar a solução. Contudo ainda, é necessário que o programa estime um valor semente para o cálculo de cada autovalor em cada passo de comprimento de onda fazendo com que o programe faça o calculo por muitos comprimentos de onda sem intervenção humana.

O método original usava simplesmente o primeiro autovalor das soluções do passo anterior, após estas já estarem organizadas pelo bloco de “Verificação e Organização das Soluções”. Esse método é funcional para guias de onda que possuem poucos modos de propagação, porém quando trata-se de guias com muitos modos esse método mostra-se pouco eficaz. A figura 3.5 mostra uma curva do índice de refração efetivo de um modo de propagação qualquer pelo comprimento de onda num guia de onda hipotético, um exemplo em que esse método funciona.

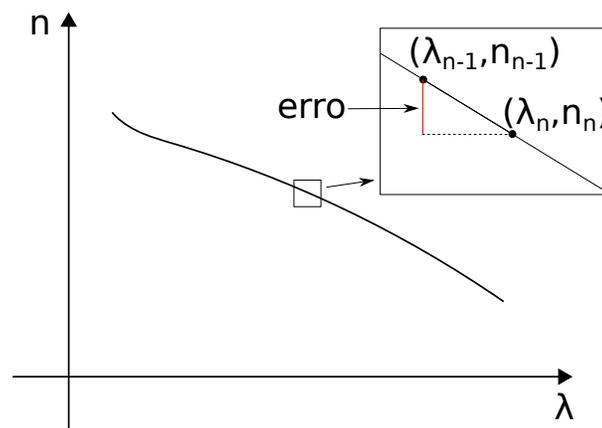


Fig. 3.5: Desmonstração da estimativa original.

Como pode ser visto na figura 3.5, quanto menor for o passo de comprimento de onda, ou seja, quanto maior for o número de comprimentos de onda a serem simulados (N_λ) numa mesma faixa

de frequências, menor será o erro entre o valor semente e o valor calculado na simulação. Porém para certas fibras ópticas microestruturadas, a simulação ficaria muito custosa computacionalmente com esse tipo de estimação, requerendo o aumento da densidade de comprimentos de onda a serem simulados na faixa de frequências ou o aumento do número de autovalores a serem buscados (aumento de τ). Um exemplo onde isso ocorre é mostrado na figura 3.6, onde é apresentado duas curvas de índice de refração efetivo de dois modos de propagação quaisquer num guia de onda também hipotético.

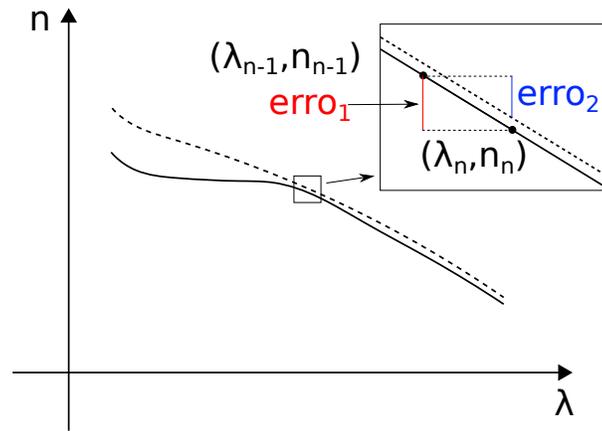


Fig. 3.6: Desmonstração de um erro da estimativa original.

No exemplo da figura 3.6, caso o número de modos a serem calculados for apenas um ($\tau = 1$), o simulador acharia um modo de propagação referente a curva tracejada ao invés de achar o modo de propagação da curva contínua, e posteriormente continuaria a achar o modo da curva tracejada. Isso corre pois o bloco “Resolução do sistema” procura por apenas um modo de propagação, e como a curva mais próxima do valor estimado n_{n-1} em λ_n é a curva tracejada ($erro_2 < erro_1$), ou seja, a curva que representa outro modo de propagação.

Vale lembrar que o índice de refração efetivo está relacionado com a constante de propagação de acordo com a seguinte equação

$$n_e = \frac{\beta}{\kappa_0} \quad (3.5)$$

onde κ_0 é a constante de propagação de uma onda eletromagnética no espaço livre.

Assim, para melhorar a estimativa do autovalor, usa-se uma interpolação linear com dois índices refrativos calculados para os comprimentos de onda exatamente anteriores λ_{n-1} e λ_{n-2} , para extrapolar um autovalor em λ_n . Logo, o índice efetivo estipulado em λ_n é dado por

$$\begin{aligned} n_n &= n_{n-1} + (n_{n-1} - n_{n-2}) \\ n_n &= 2n_{n-1} - n_{n-2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Assim, para espaçamentos pequenos em comprimento de onda, a curva de índice efetivo versus comprimento de onda é praticamente uma reta quando comparando 3 pontos consecutivos nessa curva, o que torna esse método de estimação muito conveniente, e muito mais preciso que o método original.

3.2.3 Exemplo de Aplicação dos Aperfeiçoamentos

O exemplo aqui apresentado está baseado na FOM proposta em [4, 13]. Tal FOM apresenta ambos mecanismos de guiamento da onda eletromagnética, reflexão interna total, e por reflexão não ressonante devido ao efeito das bandas de energia fotônicas. A figura 3.7 mostra a seção da fibra óptica usada nesse exemplo [4].

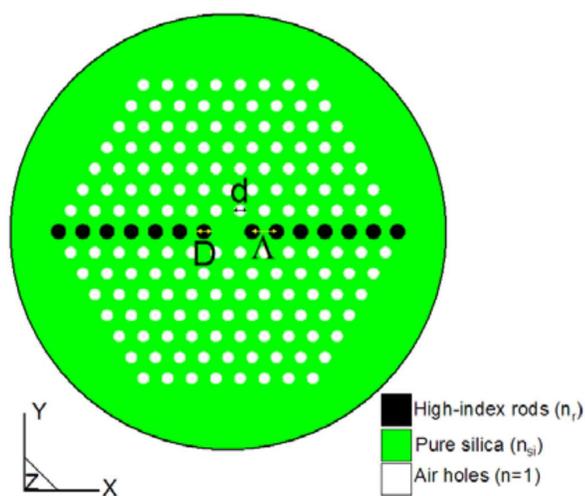


Fig. 3.7: Seção da FOM do exemplo de aplicação dos aperfeiçoamentos.

A FOM mostrada na figura 3.7, foi escolhida para este exemplo pelo fato dela possuir muitos modos de propagação, o que dificulta sua simulação. A figura 3.8 mostra varias curvas de índice efetivo por comprimento de onda para alguns modos de propagação na fibra mostrada na figura 3.7 assim como duas curvas auxiliares para a fabricação do gráfico [4].

Através das curvas referentes aos modos híbridos 2 e 3 da figura 3.8, fica claro o esforço computacional que seria necessário para o calculo dos valores dos índices efetivos para cada curva caso estivesse sendo usado o método antigo para estimação do próximo autovalor. Na região destacada da figura 3.8, é mostrado que caso o passo de simulação em comprimento de onda fosse de apenas $1nm$, não seria suficiente para diferenciar a curva do segundo para o terceiro modo híbrido com um valor pequeno de τ . É importante frisar que quanto maior o valor de τ , maior a quantidade de memória gasta para armazenar cada solução que contém todos os autovetores, aumentando o custo computacional. Também deve-se salientar que a figura 3.8 não mostra todos os modos existentes em na fibra

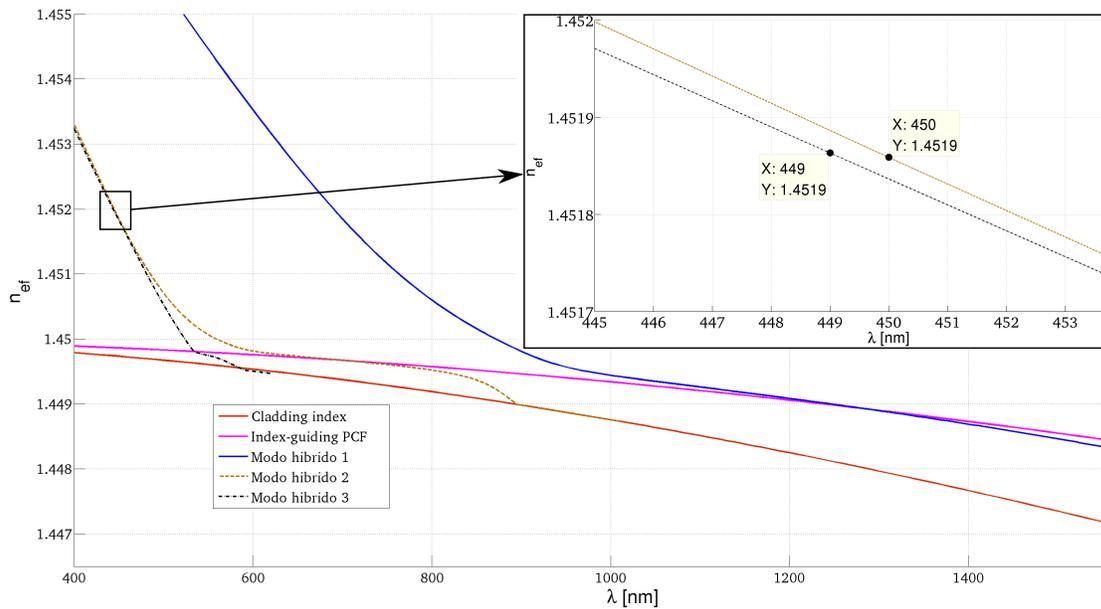


Fig. 3.8: Índice efetivo v. comprimento de onda para vários modos.

usada como exemplo, há muitos modos que não tiveram seus gráficos traçados por questão de tempo de processamento.

3.3 Conclusão

Nesse capítulo foi apreendido o programa simulador de análise modal disponível no grupo de pesquisa do Prof. Dr. Hugo Enrique Hernández Figueroa, mostrando seus principais blocos através do fluxograma da figura 3.1, assim como seus principais parâmetros de entrada. Dois dos principais blocos foram explicados detalhadamente para justificar duas propostas de melhoramento do analisador modal, também apresentadas nesse capítulo. Ao final foi apresentado um resultado de simulações feitas com os melhoramentos já implementados, exemplificando o uso dos melhoramentos feitos.

Capítulo 4

Relação dos Esforços Mecânicos com a Birrefringência

Nesse capítulo é apresentado um método para se mensurar a influência dos esforços mecânicos na propagação da onda eletromagnética dentro do guia de onda. Após a descrição do método, será apresentado um exemplo juntamente com uma discussão sobre os resultados das simulações.

4.1 O Método

Na literatura encontra-se inúmeros trabalhos como [7, 9, 14–16], publicados entre 1981 e 1992, que usam a seguinte relação:

$$B_r(x, y) = C(\sigma_x(x, y) - \sigma_y(x, y)) \quad (4.1)$$

onde σ_x e σ_y são, respectivamente, a tensão residual na direção x e y . C é o coeficiente de estresse óptico [17]. B_r é a birrefringência residual, que surge devido aos esforços residuais.

Para se ter uma relação entre campo eletromagnético e tensão residual, ainda é necessário incluir como a potência da onda eletromagnética que se propaga no guia óptico se distribui em uma seção transversal desse. Então, numa fibra óptica onde a birrefringência induzida é desprezível¹, pode-se tratar a distribuição das tensões residuais como uma perturbação como mostrado na equação (4.2). Ou seja, primeiramente usa-se programa de análise modal apresentado no capítulo 3 para obtenção da distribuição dos campos eletromagnéticos no interior da fibra óptica analisada, para posteriormente sobrepor a equação (4.1) a esses campos eletromagnéticos [15, 18].

¹Birrefringência calculada considerando apenas o problema eletromagnético ($n_e^x - n_e^y$). Muito menor quando comparada com a birrefringência calculada pela equação (4.2)

$$B_{re} = (\sigma_x - \sigma_y)_e = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} [\sigma_x(x, y) - \sigma_y(x, y)] |\vec{E}|^2 dx dy}{\iint_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}|^2 dx dy} \quad (4.2)$$

onde o subíndice e refere-se a efetivo.

A figura 4.1 mostra o fluxograma para obtenção da relação entre os esforços residuais e os campos eletromagnéticos através dos parâmetros das birrefringências de fase e de grupo.

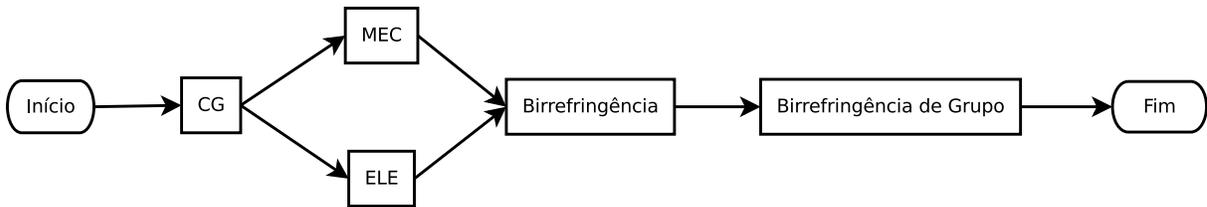


Fig. 4.1: Fluxograma para obtenção da birrefringência de fase e de grupo.

No bloco CG do fluxograma da figura 4.1 é feita a configuração dos parâmetros de entrada para a análise modal e para o cálculo das tensões residuais, assim como os ajustes necessários na geometria da qual será feita a malha para o uso do programa baseado em MEF.

No bloco ELE é feita a análise modal na fibra óptica na faixa de frequência determinada, considerando os índices de refração como isotrópicos. Para isso é usado o analisador modal já apresentado no capítulo 3. Como resultado da simulação é armazenado a distribuição dos campos eletromagnéticos para cada frequência requerida.

No bloco MEC é feito o cálculo das distribuições de tensão residual na fibra óptica objetivo como apresentado no capítulo 2. A tensão residual nas direções x , y e de cisalhamento são calculadas para cada centro geométrico de um elemento da malha gerada no bloco CG.

A partir dos resultados armazenados pelos blocos ELE e MEC, no bloco Birrefringência, é calculado a birrefringência de fase a partir da equação (4.2) para cada distribuição de campos eletromagnéticos encontrada na faixa de frequência simulada.

Assim, finalizando o fluxograma, no bloco Birrefringência de Grupo é feito o cálculo da birrefringência de grupo como descrito na equação (4.3)[18–20].

$$B_g = B - \lambda \frac{dB}{d\lambda} \quad (4.3)$$

4.2 Exemplo e Sintonização

Como exemplo de projeto de uma FOM que leva em consideração as tensões residuais advindas do processo de fabricação da fibra, foi tomado como base a fibra óptica I estudada em [18]. Trata-

se de uma FOM que possui ambos mecanismos de propagação, reflexão interna total e PBG. Um esquema da seção transversal da fibra é mostrado na figura 4.2 [18].

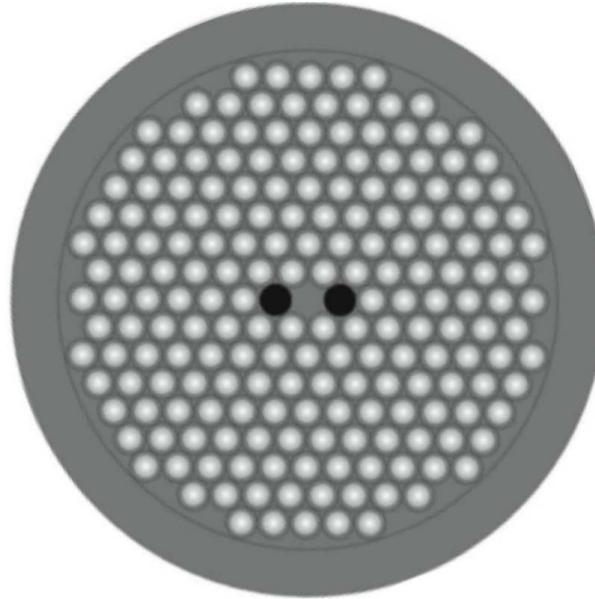


Fig. 4.2: Esquema da FOM.

No esquema da figura 4.2 os círculos brancos representam bastões de sílica dopada com germânio, os círculos pretos representam sílica dopada com boro, e o restante da fibra é sílica. Os índices de refração dos materiais constituintes dessa fibra óptica estão indicados na tabela 4.1.

<i>Material</i>	<i>Sigla</i>	<i>Índice de Refração</i>
Sílica	n_s	1,45
Sílica dopada com germânio	n_{ge}	1,4848*
Sílica dopada com boro	n_b	1,44942

*Máximo índice de refração usado para a sílica dopada com germânio, sendo que o perfil de índice de refração deste foi considerado parabólico, tendo o centro do bastão o maior índice e as bordas do bastão o menor [18].

Tab. 4.1: Índices de refração dos materiais da FOM exemplo.

Os parâmetros geométricos estão listados na tabela 4.2.

A figura 4.3 mostra o gráfico das birrefringências de fase e de grupo obtidos experimentalmente para a FOM exemplo [18].

<i>Parâmetro</i>	<i>Sigla</i>	<i>Valor</i>
Raio do bastão dopado com germânio	r_{ge}	$0,26\Lambda$
Raio do bastão dopado com boro	r_b	$0,45\Lambda$
Periodicidade da estrutura	Λ	$8,6 \mu m$

Tab. 4.2: Parâmetros geométricos da FOM exemplo.

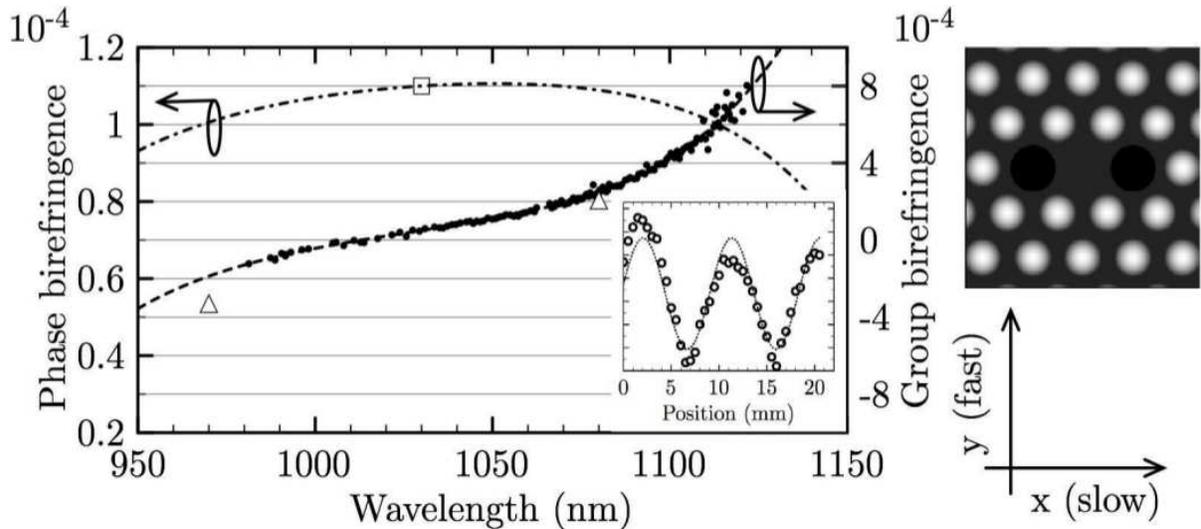


Fig. 4.3: Birrefringências de fase e de grupo obtidas experimentalmente.

4.2.1 Problemas

Um esforço muito grande foi empregado na simulação dessa fibra óptica, levando a 2 questões mais relevantes: diferença entre geometria final da fibra e a preforma; valor do coeficiente de estresse óptico.

Diferença entre a Preforma e o Estado Final da Fibra Óptica

As fibras ópticas microestruturadas que possuem guiamento por PBG (do inglês, Photonic Bandgap) são muito sensíveis a variações da estrutura em sua simulação [21]. Em [21] é mostrado por exemplo a variação da primeira região de confinamento por PBG com o diâmetro e a periodicidade da estrutura da fibra óptica. Em [22] é sugerido a mudança do raio dos bastões de germânio da fibra proposta em [4] de forma a sintonizar a região de confinamento por PBG com a obtida experimentalmente.

Um exemplo de deformação da estrutura final é mostrado nas figuras 4.4, no qual a preforma continha todos os capilares com seção geométrica circular [23]. Pela figura 4.4 é nítido que alguns dos furos mais externos obtiveram uma deformação não uniforme após o puxamento, o que pode

modificar as frequências permitidas nos cristais fotônicos.

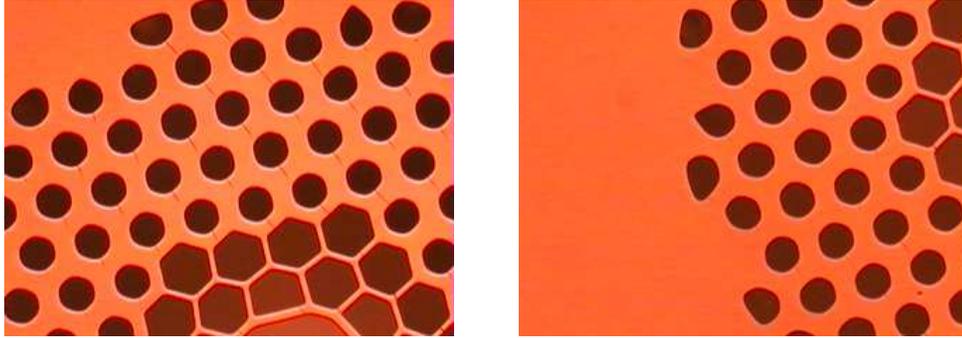


Fig. 4.4: Fotos de partes de uma fibra óptica do tipo *holey*.

Como as simulações feitas aqui consideram a forma final dos tubos como circulares, limitação dada pelo método de cálculo das tensões residuais, deve-se ajustar a estrutura para que o guiamento por PBG aconteça na mesma faixa de frequência da obtida experimentalmente mostrada na figura 4.5 [18].

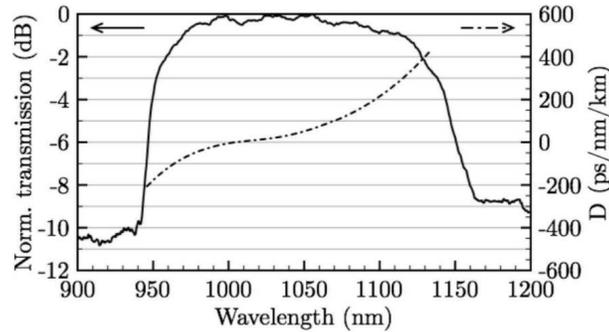


Fig. 4.5: Transmissão e dispersão de grupo para o 3^o *bandgap*.

Então, para se fazer a sintonização da banda proibida (do inglês, *bandgap*) simulada do cristal fotônico com a do gráfico da figura 4.5 foi usado o parâmetro r_{ge} . Então a partir de simulações de análise modal foi medido a perda por confinamento através da equação (4.4) [24] na faixa de comprimento de onda que compreende a banda proibida da figura 4.5.

$$\alpha_p = 8.686 \operatorname{Im}[\beta] \quad (4.4)$$

onde β é a constante de propagação da onda eletromagnética no guia de onda e α_p é dado em dB/m .

Coeficiente de Estresse Óptico

Não foi encontrado na literatura algum trabalho que descreva como o coeficiente de estresse óptico se comporta para uma fibra óptica microestruturadas. Porém, através de [6, 17], pode-se dizer que em uma fibra baseada em sílica não há muita variação com o comprimento de onda. Mas ainda o valor desse coeficiente não pode ser pré-determinado, então a resposta para a birrefringência será ajustada com base num valor do coeficiente de estresse óptico.

4.2.2 Os Resultados

A partir da discussão feita em 4.2.1, foram feitas várias simulações de análise modal variando-se o parâmetro r_{ge} . Aproveitando da simetria, foi simulado apenas um quarto da FOM, sendo que as malhas tinham entre 270 a 300 mil nós. A figura 4.6 mostra a perda por confinamento para cada simulação.

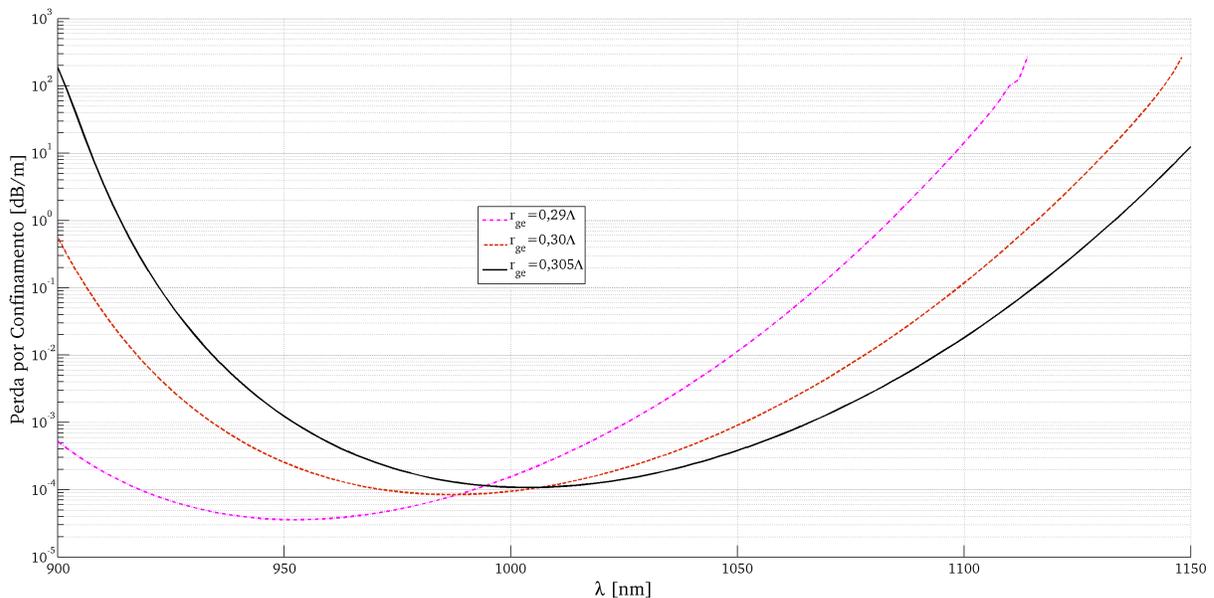


Fig. 4.6: Perdas por confinamento para cada valor de r_{ge} .

Assim para a banda de transmissão mostrada na figura 4.5, das curvas mostradas na figura 4.6, a que mais se adéqua é a para $r_{ge} = 0,305\lambda$. Então, tomando como base o valor considerado mais adequado de r_{ge} , a curva do índice de refração efetivo para a faixa de comprimentos de onda simulado é mostrada na figura 4.7.

As figuras 4.8, 4.9 e 4.10 mostram a distribuição do campo elétrico para polarização no eixo lento (eixo x) para o início da banda analisada, meio e fim, respectivamente.

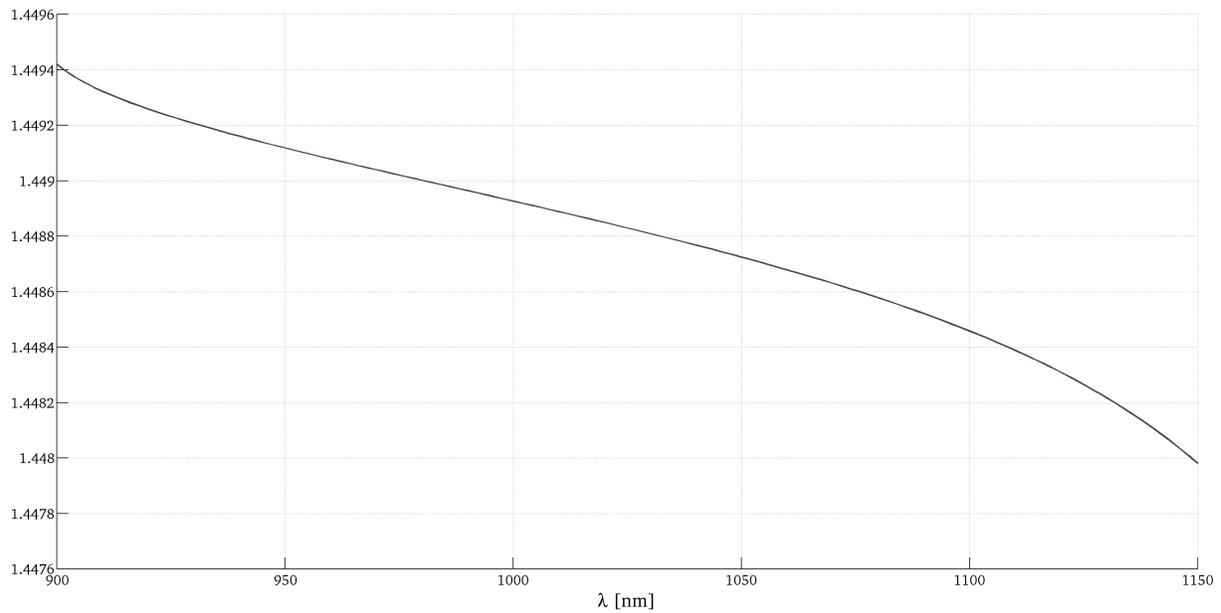


Fig. 4.7: Índice de refração efetivo.

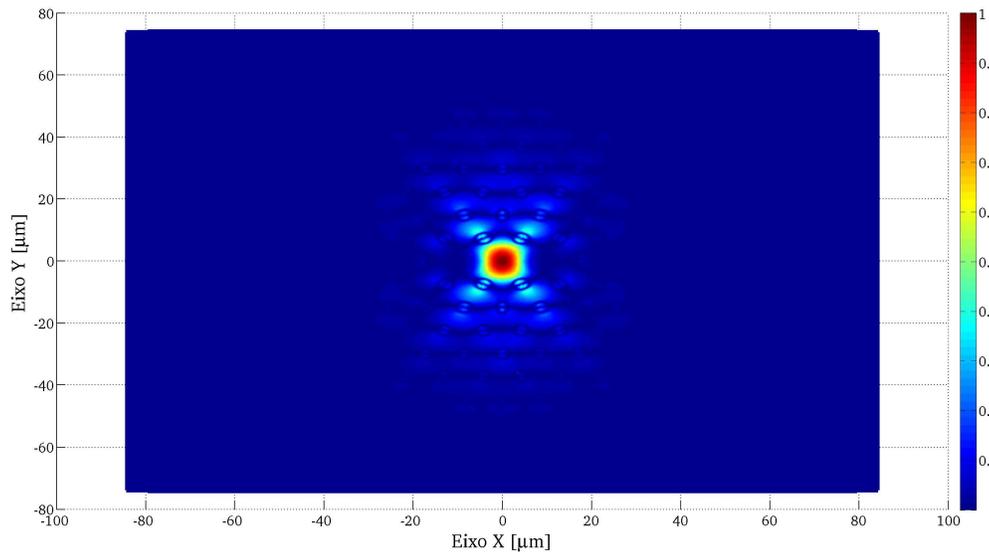


Fig. 4.8: Campo elétrico em 910 nm polarizado no eixo lento.

A birrefringência geométrica obtida através de simulação é mostrada na figura 4.11. A birrefringência geométrica vem diretamente da equação (4.5) [14].

$$B_{geo} = n_{x0} - n_{y0} \quad (4.5)$$

onde n_{x0} e n_{y0} são os índices de refração efetivos para as polarizações x e y , respectivamente, para

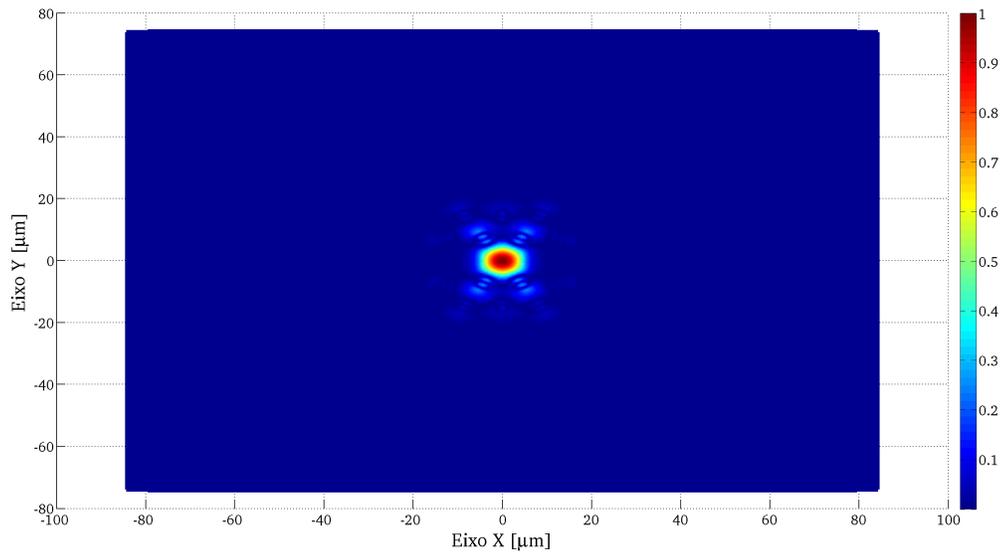


Fig. 4.9: Campo elétrico em 1050 nm polarizado no eixo lento.

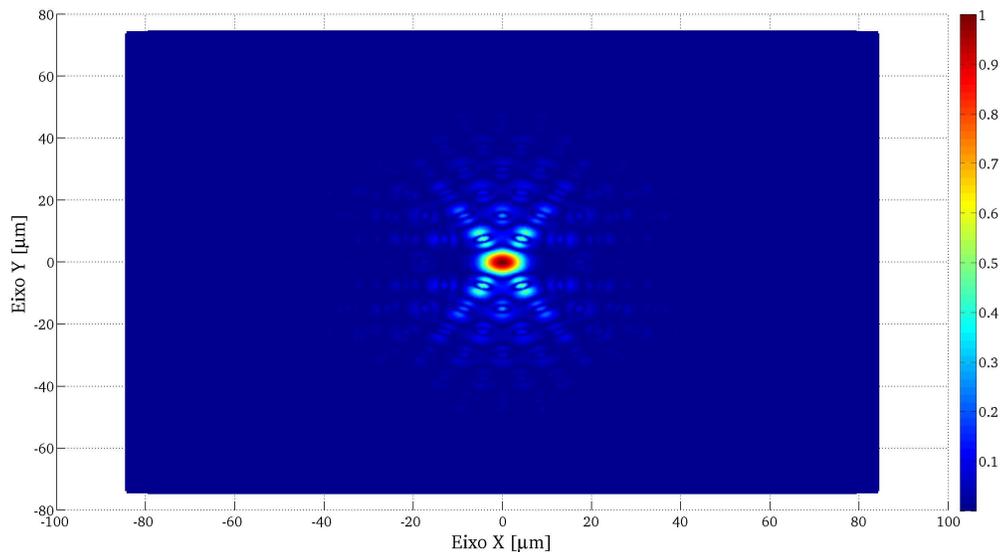


Fig. 4.10: Campo elétrico em 1150 nm polarizado no eixo lento.

uma condição em que não há tensões atuando na estrutura da fibra [14].

Através do método de cálculo apresentado no capítulo 2, é obtida a distribuição diferencial de tensão mostrada na figura 4.12. Os parâmetros termomecânicos para o cálculo são os seguintes.

Para o cálculo da tensão diferencial foi usado apenas 2 anéis pois como a maior parte da potência óptica é guiada pelo centro da fibra, a contribuição dos outros anéis à região no qual a potência está

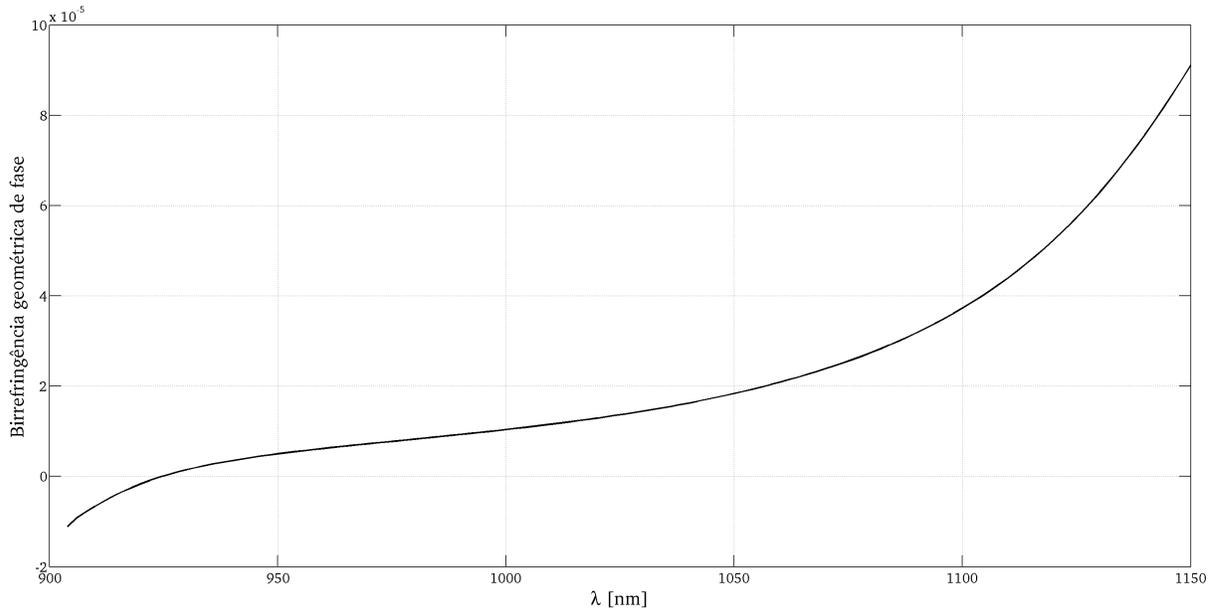


Fig. 4.11: Birrefringência geométrica.

<i>Parâmetro</i>	<i>Valor</i>	<i>Descrição</i>
E	7830 kg/mm^2	Módulo de Young.
ν	0.164	Coefficiente de Poisson.
α_{ge}	$-1,7 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	Coef. de expansão diferencial entre os tubos de Ge e a sílica pura.
α_b	$-1,42 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	Coef. de expansão diferencial entre os tubos de B e a sílica pura.
T_{ge}	-800°C	Diferença entre a temperatura de derretimento e a temperatura ambiente para os tubos de Ge.
T_b	-1000°C	Diferença entre a temperatura de derretimento e a temperatura ambiente para os tubos de B.
r_{ge}	$0,26\Lambda$	Raio dos tubos de Ge.
r_b	$0,45\Lambda$	Raio dos tubos de B.
b	$100 \mu\text{m}$	Raio externo da fibra óptica

Tab. 4.3: Parâmetros termomecânicos da FOM da figura 4.2.

mais confinada é muito baixa. Como pode ser visto na figura 4.12, as maiores porções da tensão diferencial são encontradas na transição entre os materiais. Agora que já se tem a distribuição de campo eletromagnético ao longo da banda e a distribuição da tensão diferencial, usando a equação (4.2), com uma constante de estresse óptica de $6,5 \text{ mm}^2/\text{kg}$, a birrefringência residual efetiva é calculada e mostrada na figura 4.13.

Final, a birrefringência modal, será dada pela soma da birrefringência geométrica com a bir-

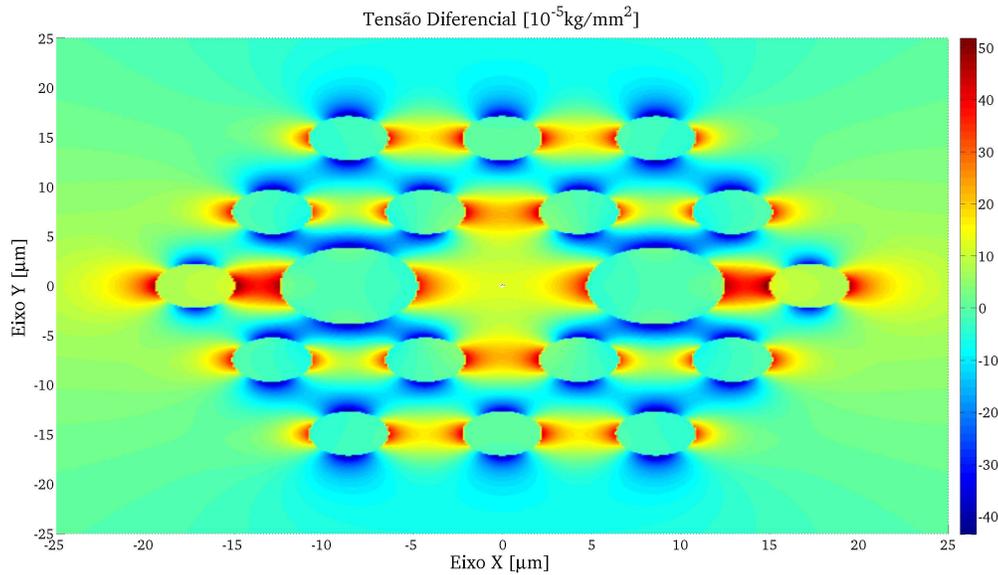


Fig. 4.12: Distribuição da tensão diferencial na fibra óptica da figura 4.2.

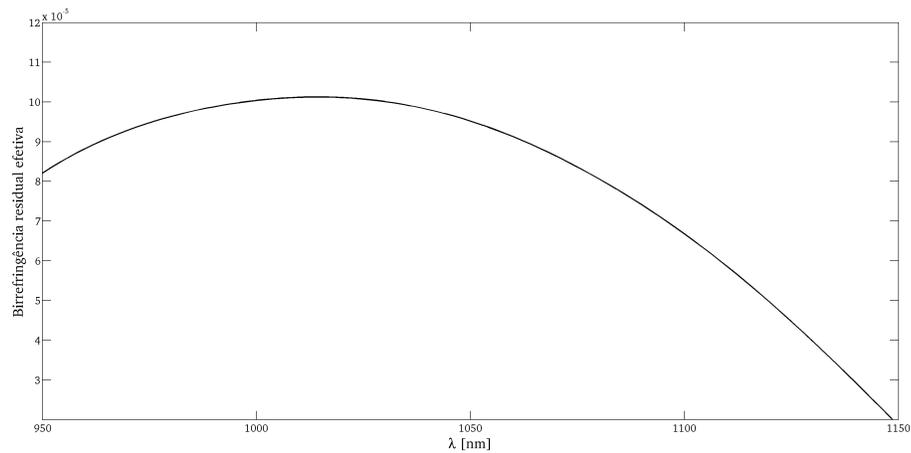


Fig. 4.13: Birrefringência residual efetiva.

refringência residual efetiva. A figura 4.14 mostra a birrefringência modal no banda de propagação para a FOM exemplo mostrada na figura 4.2 [14, 15, 25].

A partir da birrefringência modal, foi calculada a birrefringência grupo através da equação (4.3). A figura 4.15 mostra o gráfico da birrefringência de grupo associada à birrefringência modal mostrada na figura 4.14.

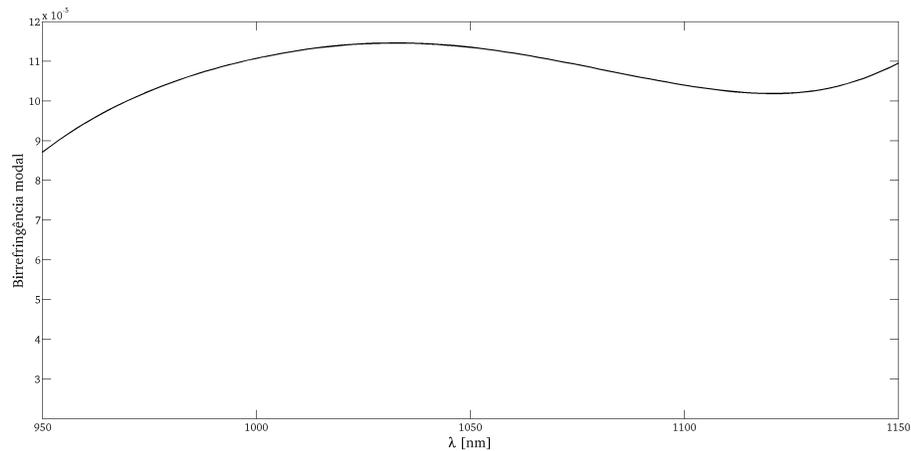


Fig. 4.14: Birrefringência modal obtida com o método utilizado.

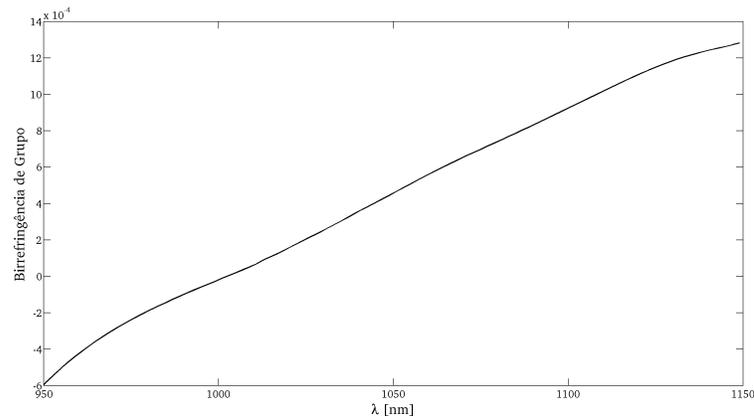


Fig. 4.15: Birrefringência de grupo.

4.3 Conclusão

Nesse capítulo foi apresentado um método para mensurar como as tensões residuais afetam a propagação da luz na fibra óptica. Tal medida é feita através da birrefringência modal, a qual possui uma parcela proveniente das tensões residuais da fibra provenientes do seu processo de fabricação. Foi apresentado como a equação que relaciona as componentes da tensão residual com o índice de refração.

Vale frisar o sintonia da banda proibida feita através da simulação modal, para que a banda de transmissão da FOM usada no exemplo fosse equivalente com as perdas por confinamento obtidas através de simulação. Para tal, foi utilizado o parâmetro r_{ge} como variável de sintonia.

Ainda influenciando no resultado final, a constante de estresse óptico não teve um valor definido previamente por questão de complexidade das estruturas das FOMs. O valor foi definido de tal forma

para que as curvas de birrefringência modal de fase e de grupo fossem aproximadas às experimentais. A diferença mais acentuada entre a birrefringência modal de fase experimental para a aqui obtida, nos comprimentos de onda mais longos da banda analisada, provavelmente ocorreram por uma sintonia de banda não muito afinada, uma vez que a birrefringência geométrica apresenta valores elevados para esse extremo da banda.

Nesse capítulo é apresentado um método para se mensurar a influência dos esforços mecânicos na propagação da onda eletromagnética dentro do guia de onda. Após a descrição do método, será apresentado um exemplo juntamente com uma discussão sobre os resultados das simulações.

Capítulo 5

Conclusão

Nesse trabalho foi apresentado um procedimento para viabilização do projeto de fibras ópticas microestruturadas que levam em consideração as tensões residuais térmicas geradas no processo de fabricação da fibra óptica.

Primeiramente, o método apresentado para cálculo analítico dos esforços residuais em FOMs totalmente sólidas é baseado no princípio da superposição, visto que as equações envolvidas são todas lineares. Dessa forma pode-se fazer com que cada região da seção transversal da FOM possa ser resolvida de forma independente, facilitando a implementação de subrotinas. Os exemplos de cálculo dos esforços residuais apesar de simples demonstram exatamente o princípio da superposição que é a chave da resolução analítica.

Também foram propostos dois melhoramentos a serem incluídos no código FORTRAN do programa disponível no grupo do Prof. Hugo E. H. Figueroa. Esses melhoramentos foram simples de serem implementados, porém de grande eficácia, pois com eles foi viabilizada a simulação do exemplo final do capítulo 3, que trata de uma fibra híbrida que possui muitos modos de propagação.

Um método para obtenção da birrefringência também foi apresentado. Tal método ainda precisa ser desenvolvido uma vez que as constantes de estresse óptico não estão bem definidas, gerando um grau de liberdade não desejado no projeto de uma FOM. Apesar disso, o exemplo resolvido no capítulo 4 apresenta uma resposta satisfatória, contando com o melhoramento na sintonização das bandas de frequências proibidas.

5.1 Trabalhos Futuros

Como sugestão para trabalhos futuros pode ser feita a implementação de um código que utiliza o Método dos Elementos Finitos para cálculo dos esforços residuais, agregando grande valor pois esse código facilitaria a inclusão de forças externas ao sistema como parâmetros na obtenção dos esforços

internos da estrutura mecânica, no caso, FOMs.

Para complementação do trabalho, seria interessante se as FOMs com furos fossem analisadas, visto que uma parcela significativa das FOMs possuem essa característica.

Mensurar as constantes de estresse óptico também é importante, pois possibilitaria projetos de FOMs que levam em consideração os cálculos dos esforços residuais com maior precisão.

Referências Bibliográficas

- [1] Kunimasa Saitoh and Masanori Koshiba. Numerical Modeling Photonic Crystal Fibers. *Journal Of Lightwave Technology*, 23(11):3580–3590, Novembro 2005.
- [2] Philip Russell. Photonic Crystal Fibers: A Historical Account. *Special 30th Anniversary, IEEE LEOS Newsletter*, Outubro 2007.
- [3] Maksim Skorobogatiy and Jianke Yang. *Fundamentals of Photonic Crystal Guiding*. Cambridge University Press, 1a edition, 2009.
- [4] Arismar Cerqueira Sodré Junior. *Hybrid Photonic Crystal Fiber*. PhD thesis, Scuola Superiore Sant’Anna di Studi Universitari e di Perfezionamento, Janeiro 2006.
- [5] T. Sorensen, J. Broeng, A. Bjarklev, T. P. Hansen, E. Knudsen, S. E. B. Libori, H. R. Simonsen and J. R. Jensen. Spectral macro-bending loss considerations for photonic crystal fibres. *IEE Proc.-Optoelectron*, 149(5/6):206–210, Outubro/Dezembro 2002.
- [6] Yoshinori Namihira. Opto-Elastic Constant in Single Mode Optical Fibers. *Journal Of Lightwave Technology*, LT-3(5):1078–1083, Outubro 1985.
- [7] Pak L. Chu, Rowland A. Sammut. Analytical method for calculation of stresses and material birefringence in polarization-maintaining optical fiber. *Journal of Lightwave Technology*, LT-2 NO. 5:650–661, 1984.
- [8] S. P. Timoshenko, J. N. Goodier. *Teoria da Elasticidade*. Editora Guanabara Dois, 3a edition, 1980.
- [9] Y. Namihira, Y. Ejiri, K. Mochizuki. Birefringence in Elliptical-Cladding Single-Polarisation Fibres. *Electronics Letters*, 18(2), Janeiro 1982.
- [10] José Amilton Mores Junior. *Cálculo Por Elementos Finitos Dos Parâmetros de Dispersão de Alta Ordem de Estruturas Fotônicas*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas, Fevereiro 2011.

- [11] J. A. Mores Jr., G. N. Malheiros-Silvera, H. L. Fragnito, H. E. Hernández-Figueroa. Efficient calculation of higher-order optical waveguide dispersion. *Optics Express*, 18(19), Agosto 2010.
- [12] Masanori Koshiba, Yasuhide Tsuji. Curvilinear Hybrid Edge/Nodal Elements with Triangular Shape for Guided-Wave Problems. *Journal of Lightwave Technology*, 18(5), Maio 2000.
- [13] Arismar Cerqueira S. Jr., F. Luan, C. M. B. Cordeiro, A. K. George, J. C. Knight. Hybrid photonic crystal fiber. *Optics Express*, 14(2), Janeiro 2006.
- [14] Katsunari Okamoto, Toshihito Hosaka, Takao Eda. Stress Analysis of Optical Fibers by a Finite Element. *IEEE Journal Of Quantum Electronics*, QE-17(10), Outubro 1981.
- [15] Nori Shibata, Makoto Tsubokawa, Masaharu Ohashi, Ken-ichi Kitayama, Shigeyuki Seikai. Birefringence and polarization mode dispersion in a coil of a single-mode fiber. *J. Opt. Soc. Am. A*, 3(11), Novembro 1986.
- [16] Viliam Bernát, Alexander L. Yarin. Analytical Solution for Stress and Material Birefringence in Optical Fibers with Noncircular Cladding. *Journal Of Lightwave Technology*, 10(4), Abril 1992.
- [17] Nobuyuki Imoto, Nobuyuki Yoshizawa, Jun-Ichi Sakai, Haruhiko Tsuchiya. Birefringence in Single-Mode Optical Fiber due to Elliptical Core Deformation and Stress Anisotropy. *IEEE Journal Of Quantum Electronics*, QE-16(11), Novembro 1980.
- [18] J. K. Lyngsø, B. J. Mangan, C. B. Olausson, P. J. Roberts. Stress induced birefringence in hybrid TIR/PBG guiding solid photonic crystal fibers. *Optics Express*, 18(13), Junho 2010.
- [19] T. Pagel, S. Gade, M. Krause, H. Renner, and E. Brinkmeyer. Phase and group birefringence of silicon waveguides. In *Group IV Photonics, 2008 5th IEEE International Conference on*, pages 197 –199, sept. 2008.
- [20] D. Budaszewski and A. W. Domanski. Group Birefringence Measurement in Photonic Liquid Crystal Fibers by Use of Narrowband Light Sources. *Optical and Acoustical Methods in Science and Technology*, 116(3), 2009.
- [21] Marcos A. R. Franco, Paulo S. Patrício, Tânia R. Pitarello. Thermal tunability of photonic bandgaps in photonic crystal fibers selectively filled with nematic liquid crystal. *Proc. of SPIE*, 7839(78390D-1), 2010.

-
- [22] Marcos A. R. Franco, Valdir A. Serrão, Tânia R. Pitarello, Arismar Cerqueira S. Jr. Hybrid Photonic Crystal Fiber Sensing of High Hydrostatic Pressure. *Proc. of SPIE*, 7753(775346-1), 2011.
- [23] J. M. Giehl e A. R. Miranda. Imagens de uma Holey Fiber. Lab de Materiais Vítreos, IFI - UNICAMP.
- [24] Kunimasa Saitoh and Masanori Koshiba. Confinement Losses in Air-Guiding Photonic Bandgap Fibers. *IEEE Photonics Technology Letters*, 15(2):236–238, Fevereiro 2003.
- [25] Govind P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, 3a edition, 2001.