

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E CONTROLE DE ENERGIA

UM ESTUDO SOBRE ANÁLISE HARMÔNICA  
EM SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA

Autora : CONCEIÇÃO ROGÉRIA RAMOS PIMENTEL  
Orientador : SIGMAR MAURER DECKMANN †

Este exemplar corresponde à redação final da tese  
defendida por CONCEIÇÃO ROGÉRIA RAMOS  
PIMENTEL e aprovada pela Comissão  
Ju'gadora em 19 / 03 / 92.

*Sigmar M. Deckmann*  
Orientador

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia  
Elétrica, Departamento de Sistemas e Controle  
de Energia, como parte dos requisitos para a  
obtenção do Título de Mestre em Engenharia  
Elétrica.



Dedico este trabalho aos meus pais Pimentel e Anna, pelo amor, carinho, compreensão e apoio que sempre me deram.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero agradecer ao meu orientar Sigmar Maurer Deckmann pela orientação dedicada e principalmente pelo conhecimento que adquiri ao seu lado durante esses anos de trabalho.

Agradeço a Pedro Foltran Neto pelo carinho, amizade e apoio que sempre me dedicou.

Agradeço às secretárias da FEE Ademilde, Janete e Elza pela ajuda e sugestões na confecção final do texto.

Agradeço também à Maria Lúcia Costa Cardoso, desenhista da FEE, pelos desenhos apresentados neste trabalho.

Agradeço ainda a todos os amigos e colegas da FEE-UNICAMP pela amizade e apoio durante o período do mestrado.

Finalmente agradeço às instituições CAPES e FAPESP pelo apoio financeiro recebido ao longo deste trabalho.

## RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo visando a análise do conteúdo harmônico do sinal de energia elétrica, em face do comportamento dinâmico do sistema elétrico de potência, reunindo técnicas de processamento digital, estimação espectral e apresentação estatística dos resultados observados durante grandes períodos de medição.

O objetivo que motivou o trabalho, foi a constatação de que o engenheiro que está atualmente presenciando o aumento do nível de distorções, impostas ao sistema elétrico pelas cargas industriais controladas eletronicamente, não está, em geral, familiarizado com as técnicas de análise aplicáveis.

Apesar de relativamente antigo, o problema só agora começa a assumir proporções além do tolerável, demandando uma atenção especial tanto por parte das empresas, responsáveis pela monitoração do fenômeno, como pelas escolas que formam os profissionais que irão se defrontar com o problema.

## A B S T R A C T

This work presents study of harmonic analysis of electric energy signals faced with the dynamic behaviour of power systems, using digital processing techniques, spectral estimation and descriptive statistic for presenting the outcomes along large time periods of measurement.

The main subject of this work is derived from the observation that actual field engineers involved with harmonic distortions, are not usually familiarized with the best suited techniques for this analysis.

In spite of, not being recent, this problem is now growing on to excessive levels, requiring special attention of the concessionary people responsible for monitoring this phenomenon and also the electric engineering teaching people which transfer the professional knowledge to future engineers.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$E$	- Energia de sinal
$E[ ]$	- Valor esperado
$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$	- Função densidade de probabilidade de ordem $n$
$f_a$	- Freqüência de amostragem
$F_c(i)$	- Função cumulativa
$F_{cc}(i)$	- Função complementar de $F_c(i)$
FDI	- Fator de distorção total de corrente
FDT	- Fator de distorção total de tensão
FFT	- Transformada rápida de Fourier - (Fast Fourier Transform)
$f_n$	- Freqüência harmônica de ordem $n$
$f_X(x)$	- Função densidade de probabilidade
$F_X(x)$	- Função de probabilidade
$I_n$	- Corrente harmônica de ordem $n$
$n$	- Ordem harmônica
$N$	- Número total de amostras
$N(i)$	- Número de ocorrências por nível $i$
$N_d$	- Número de amostras sobrepostas entre segmentos
$N_{med}$	- Número de medidas do sinal dentro do período total de medição
$N_s$	- Número de amostras para o cálculo da FFT
$P$	- Número de segmentos em que foi dividido o bloco total de amostras
$\bar{P}$	- Potência média
P.A.C.	- Ponto de Acoplamento Comum
$P_X(x)$	- Probabilidade de ocorrência de $x$
$R_{xx}(\tau)$	- Função de autocorrelação
$S_{xx}(w)$	- Densidade espectral de potência
$\hat{S}_{xx}(w)$	- Densidade espectral de potência estimada
$T$	- Período de um sinal
$t_a$	- Intervalo entre amostras temporais ( $\Delta t$ )
$T_a$	- Intervalo de aquisição do sinal
TDF	- Transformada discreta de Fourier
TF	- Transformada de Fourier
TIF	- Fator de interferência telefônica
$T_m$	- Período de medição total

U	- Energia da janela
V <sub>n</sub>	- Tensão harmônica de ordem n
w	- Freqüência angular
w(t)	- Função janela contínua
w[n]	- Função janela discreta
W(f)	- Transformada de Fourier de w(t)
W[kf]	- Transformada discreta de Fourier de w[n]
W <sub>N</sub>	- Deslocamento angular - ( $e^{-j2\pi/N}$ )
$\omega_s$	- Freqüência angular de amostragem
x	- Elemento genérico do espaço amostral
X	- Variável aleatória
x(t)	- Sinal contínuo no tempo
x[n]	- Sinal discreto no tempo
X(w)	- Transformada de Fourier de x(t)
X[k]	- Transformada discreta de Fourier de x[n]
X <sub>n</sub>	- Coeficiente de ordem n da série de Fourier
$\Delta f$	- Resolução espectral
$\Delta t$	- Intervalo entre amostras ( $t_a$ ) - Resolução temporal
$\Delta T$	- Intervalo entre duas medições consecutivas
$\phi$	- Fluxo magnético
$\mu$	- Média estatística
$\sigma$	- Desvio padrão

OBS: Algumas variáveis, de uso mais restrito no texto, são definidas onde aparecem a primeira vez.

# ÍNDICE

## CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO	1
------------	---

## CAPÍTULO 2

### OCORRÊNCIA DE HARMÔNICAS EM SISTEMAS ELÉTRICOS

2.1. INTRODUÇÃO	3
2.2. GERAÇÃO DE HARMÔNICAS EM SISTEMAS DE POTÊNCIA	3
2.3. EFEITOS DAS HARMÔNICAS NO SISTEMA DE POTÊNCIA	14
2.4. NORMAS E LIMITES	15
2.4.1. PARÂMETROS DE DISTORÇÃO DE TENSÃO E CORRENTE	15
2.4.2. NORMAS E RECOMENDAÇÕES NO BRASIL	16
2.5. MÉTODOS DE REDUÇÃO OU ELIMINAÇÃO DE HARMÔNICAS	19

## CAPÍTULO 3

### MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA ANÁLISE HARMÔNICA DE SINAIS

3.1. INTRODUÇÃO	23
3.2. TRANSFORMADA DE FOURIER	24
3.3. UNIDADE DA AMPLITUDE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	27
3.4. CÁLCULO DA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER	27
3.5. ALGORITMO FFT	28
3.6. EFEITOS DA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER EM SINAIS CONTÍNUOS	32
3.6.1. "ALIASING"	32
3.6.2. "LEAKAGE" DE ENERGIA DO SINAL	34

## CAPÍTULO 4

### ESTIMAÇÃO DO ESPECTRO DE AMPLITUDES PARA SINAL VARIÁVEL

4.1. INTRODUÇÃO	40
4.2. PROCESSOS ALEATÓRIOS EM SISTEMAS DE POTÊNCIA	41
4.3. NECESSIDADE DE ESTACIONARIDADE PARA O SINAL ALEATÓRIO	42
4.4. CARACTERIZAÇÃO DE PROCESSOS ALEATÓRIOS ESTACIONÁRIOS	42

<b>4.5. DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA</b>	<b>45</b>
<b>4.6. MÉTODO PARA CALCULAR A DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA</b>	<b>46</b>
<b>4.7. ESTIMAÇÃO DA DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA – PERIODOGRAMA</b>	<b>46</b>
<b>4.8. TÉCNICA DE SUAVIZAÇÃO ESPECTRAL</b>	<b>47</b>
<b>4.9. IMPLEMENTAÇÃO DO PERIODOGRAMA DE WELCH</b>	<b>48</b>
<b>4.10. APRESENTAÇÃO DOS DADOS ESTATÍSTICOS</b>	<b>53</b>
4.10.1. HISTOGRAMA DE AMPLITUDES	53
4.10.2. OBTENÇÃO DA MÉDIA E DESVIO PADRÃO	54
4.10.3. FUNÇÃO CUMULATIVA	55
4.10.4. CURVA DE DURAÇÃO DA VIOLAÇÃO	56
4.10.5. CONTROLE ESTATÍSTICO DA VIOLAÇÃO DE LIMITES	56
<b>CAPÍTULO 5</b>	
<b>DESCRIÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS OBTIDOS</b>	
<b>5.1. INTRODUÇÃO</b>	<b>59</b>
<b>5.2. DESCRIÇÃO DOS SISTEMAS</b>	<b>60</b>
<b>5.3. PROGRAMA DE ANÁLISE HARMÔNICA</b>	<b>65</b>
<b>5.4. RESULTADOS E ANÁLISE</b>	<b>67</b>
<b>5.5. COMPARAÇÃO DE RESULTADOS COM SISTEMA PADRÃO DE MEDIÇÃO</b>	<b>71</b>
<b>5.6. OUTROS RESULTADOS</b>	<b>72</b>
<b>CAPÍTULO 6</b>	
<b>CONSIDERAÇÕES E CONCLUSÕES FINAIS</b>	
<b>6.1. INTRODUÇÃO</b>	<b>77</b>
<b>6.2. CONSIDERAÇÕES DE ORDEM PRÁTICA</b>	<b>77</b>
<b>6.3. CONSIDERAÇÕES SOBRE OS ENSAIOS</b>	<b>78</b>
<b>APÊNDICE A</b>	<b>80</b>
<b>APÊNDICE B</b>	<b>85</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>88</b>

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Até hoje é recomendado que em sistemas de energia elétrica o sinal de tensão ou corrente deve apresentar uma forma senoidal com elevado grau de pureza, para garantir um bom funcionamento dos componentes. Mas devido à presença de dispositivos chaveados eletronicamente tais como conversores, inversores, controladores de velocidade de motores e compensadores estáticos, ocorre a geração de correntes e tensões harmônicas, distorcendo o sinal da rede elétrica.

Distorções harmônicas surgem também durante a operação de cargas com comportamento não linear como fornos de arco, laminadores siderúrgicos, reatores saturados e outras, podendo ocorrer o efeito da ressonância em função da presença de capacitores, elevando o nível harmônico existente.

Este é um problema com o qual concessionárias e indústrias estão começando a se defrontar seriamente, e um dos caminhos para tentar uma solução é estudar o fenômeno através de medições sistemáticas e análise do conteúdo harmônico presente no sistema.

O objetivo deste estudo é encontrar uma técnica de análise que possa auxiliar nas observações do comportamento das harmônicas de tensão ou corrente presentes em qualquer ponto do sistema elétrico, considerando a operação de várias fontes de distorção entrando e saindo a qualquer hora do dia.

As harmônicas são componentes de um sinal com frequência múltipla da fundamental, cada qual apresentando determinada amplitude e fase. Como a amplitude é uma variável que pode causar sérios danos ao sistema, focalizar-se-á a análise sobre o seu comportamento ao longo do tempo.

No capítulo 2 apresentam-se as principais fontes harmônicas do sistema elétrico de potência, seus efeitos, normas para limite máximo permitido e técnicas para eliminá-las ou reduzir o seu valor de amplitude.

No capítulo 3 expõe-se a base matemática para o tratamento do sinal elétrico que irá levar a um processamento digital, permitindo a exploração da rapidez e eficiência dos computadores através dos algoritmos FFT (Fast Fourier Transform).

No capítulo 4, após análise das condições de aleatoriedade do conteúdo espectral do sinal, aplica-se uma técnica clássica de estimação espectral de potência que permite obter o espectro de amplitudes, com maior confiabilidade. Para tratar a grande quantidade de dados obtidos em função do comportamento dinâmico do sistema, utilizam-se técnicas de apresentação estatística para uma melhor avaliação destes resultados.

No capítulo 5 são apresentados alguns resultados da implementação da análise harmônica, obtidos em laboratórios, com diferentes instrumentações.

Finalmente no capítulo 6 são feitas considerações e apresentadas conclusões finais sobre o trabalho de pesquisa.

## CAPÍTULO 2

### OCORRÊNCIA DE HARMÔNICAS EM SISTEMAS ELÉTRICOS

#### 2.1 - INTRODUÇÃO

A ocorrência de correntes e tensões harmônicas em sistemas de potência não é recente. Na década de 30 já eram observadas ondas de tensão e corrente distorcidas em linhas de transmissão, devido principalmente à operação de equipamentos não lineares como retificadores, causando interferência telefônica, falhas em capacitores de potência e perdas excessivas em máquinas síncronas e de indução.

A partir da década de 70 houve um substancial aumento de cargas não lineares no sistema de potência, resultante do uso de novas tecnologias como os SCR's (Silicon Controlled Rectifiers) ou tiristores, além do emprego de fornos elétricos de arco e grandes laminadores na indústria siderúrgica.

Nos últimos 20 anos tem crescido a demanda de energia, na rede de distribuição, destinada à alimentação de motores de velocidade variável, carregadores de baterias, fontes chaveadas, televisores, etc. Todas essas cargas apresentam comportamento não linear de operação.

Cargas não lineares produzem distorções nas ondas de corrente e tensão. Estas distorções quando caracterizadas por frequências múltiplas da fundamental (60 Hz) são chamadas de distorções harmônicas ou simplesmente harmônicas da rede de energia elétrica.

#### 2.2 - GERAÇÃO DE HARMÔNICAS EM SISTEMAS DE POTÊNCIA

As principais cargas geradoras de harmônicas, segundo os níveis de potência, são as seguintes:

##### I - NÍVEL DE TRANSMISSÃO E SUBTRANSMISSÃO

###### a - Conversores Estáticos

São dispositivos que, empregando elementos chaveados, convertem ener-

gia ca/cc (retificadores) ou cc/ca (inversores), gerando harmônicas durante sua operação. Um conversor de alta potência tem a estrutura básica mostrada na figura 2.1:

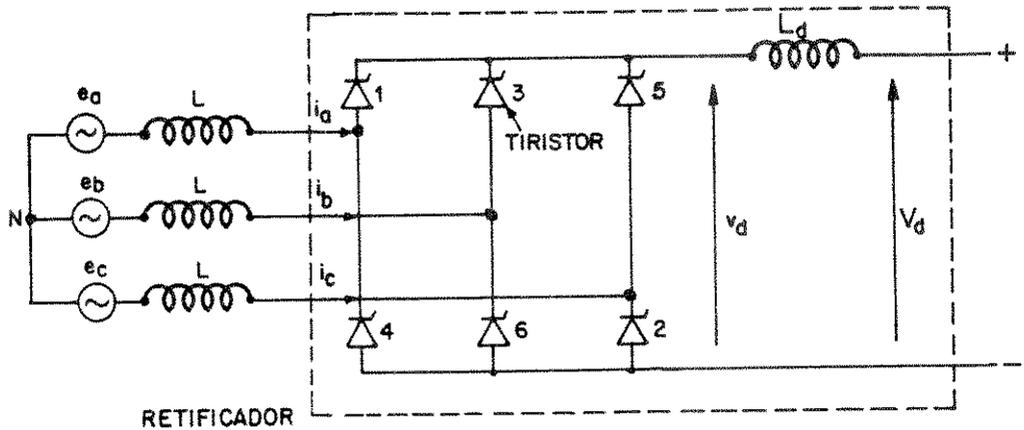


FIGURA 2.1.

Este circuito é conhecido como retificador estático de 6 pulsos a tiristores, onde a identificação destes elementos indica a seqüência de disparo dos mesmos, que pode ser controlada por um sistema de retardo dos pulsos (ângulo de disparo) que atingem os gatilhos, definindo os instantes de início de condução. As formas de onda da tensão e correntes idealizadas para o circuito do conversor apresentado são as seguintes:

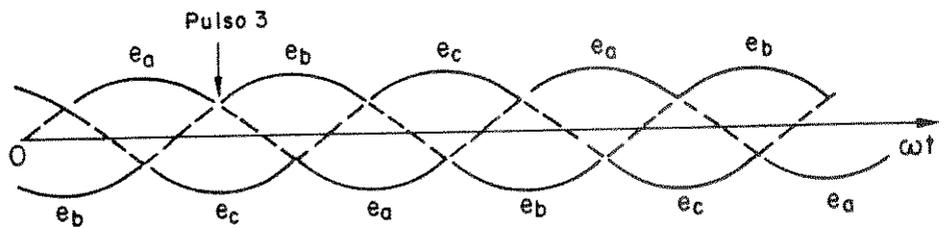


FIGURA 2.2.a - Tensão Fase-Neutro de Alimentação

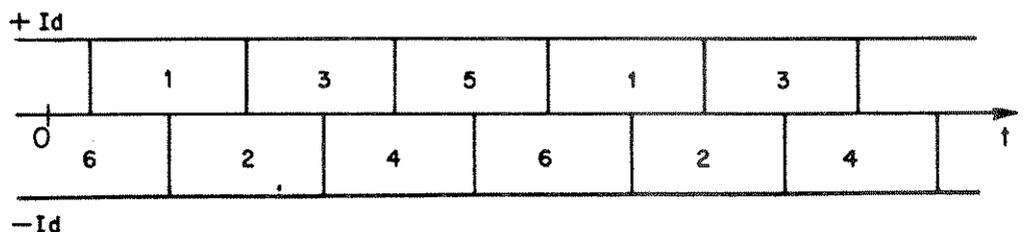


FIGURA 2.2.b - Corrente entre os Terminais de Saída do Conversor

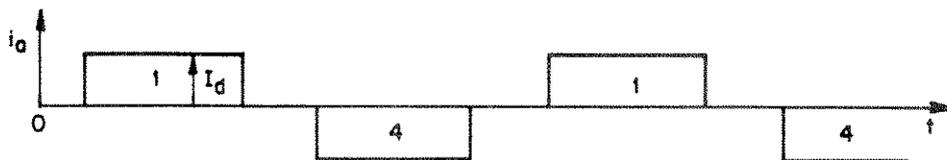


FIGURA 2.2.c - Corrente de Linha

Através da análise de Fourier, a onda de corrente na figura 2.2c pode ser decomposta na seguinte série de componentes harmônicas para um sistema equilibrado [15]:

$$I = \sqrt{2} I_1 \left[ \text{sen } \omega t - \text{sen } \frac{5\omega t}{5} - \text{sen } \frac{7\omega t}{7} + \text{sen } \frac{11\omega t}{11} + \text{sen } \frac{13\omega t}{13} + \dots + \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{n\pi}{6} \text{sen } \frac{n\omega t}{n} + \dots \right] \quad (2.1)$$

onde  $I_1$  é o valor rms da corrente fundamental e  $n$  é a ordem da harmônica.

Sendo ainda o sistema elétrico equilibrado, temos que a ordem das correntes harmônicas introduzidas no lado ca é dada por:

$$n = pk \pm 1 \quad , \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (2.2)$$

$p$  - número de pulsos do conversor

As harmônicas determinadas pela expressão 2.2 são conhecidas como harmônicas características, cuja amplitude e fase podem ser afetadas caso o ângulo de disparo dos tiristores varie.

Na prática, tensões no sistema trifásico nunca são perfeitamente balanceadas e as impedâncias não são iguais nas três fases, fazendo com que conversores estáticos gerem também harmônicas de ordens diferentes das apresentadas em (2.2) e conhecidas como harmônicas não características (pares e ímpares), que devido à sua natureza incerta são difíceis de serem monitoradas.

## b - Compensadores Estáticos

Compensadores estáticos são equipamentos cujas principais funções são regulação de tensão e correção do fator de potência, através do controle de reativos da rede elétrica, para garantir uma alta qualidade no suprimento de energia elétrica. Há vários tipos de compensadores estáticos presentes no sistema de transmissão, bem como no sistema de distribuição, mas os principais e maiores geradores de harmônicas são os compensadores com reator controlado a tiristores e com reator saturado.

### b.1 - Reator Controlado a Tiristores - (RCT)

Este compensador pode apresentar o seguinte esquema básico por fase:

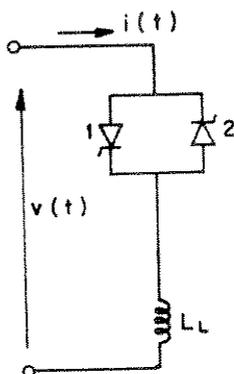


FIGURA 2.3

Os elementos de controle no circuito apresentado são os tiristores, que conectados em anti-paralelo e em série com a indutância  $L_L$ , conduzem alternadamente meio ciclo do sinal elétrico. Em sistemas trifásicos a forma convencional de se conectar o RCT é em triângulo (figura abaixo).

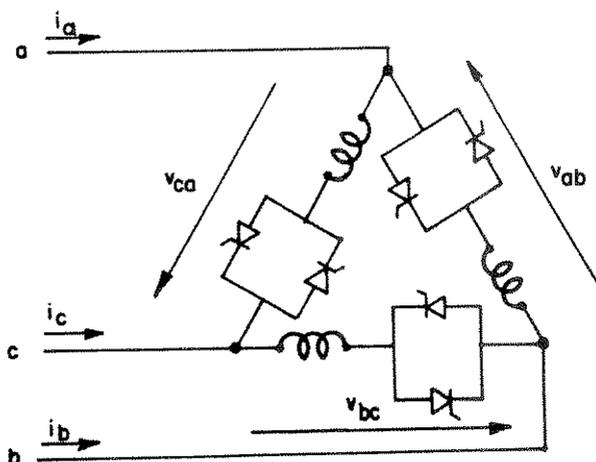


FIGURA 2.4

Se os tiristores são disparados precisamente no instante em que a tensão atinge o seu pico máximo, então haverá condução no reator e a corrente estará  $90^\circ$  atrasada da tensão, desconsiderando perdas no próprio reator. Sendo os ângulos de disparo dos tiristores ( $\alpha$ ) iguais, tem-se uma série de formas de onda da corrente tais como nas figuras 2.5.a a 2.5.d, onde cada figura corresponde a um valor particular de  $\alpha$ . Observa-se que a condução completa ocorre para  $\alpha=90^\circ$ , e que conduções parciais são obtidas quando  $\alpha$  está entre  $90^\circ$  e  $180^\circ$ . Também observa-se que quanto maior  $\alpha$ , mais distorcida é a forma de onda da corrente de linha, ou seja, há presença de correntes harmônicas.

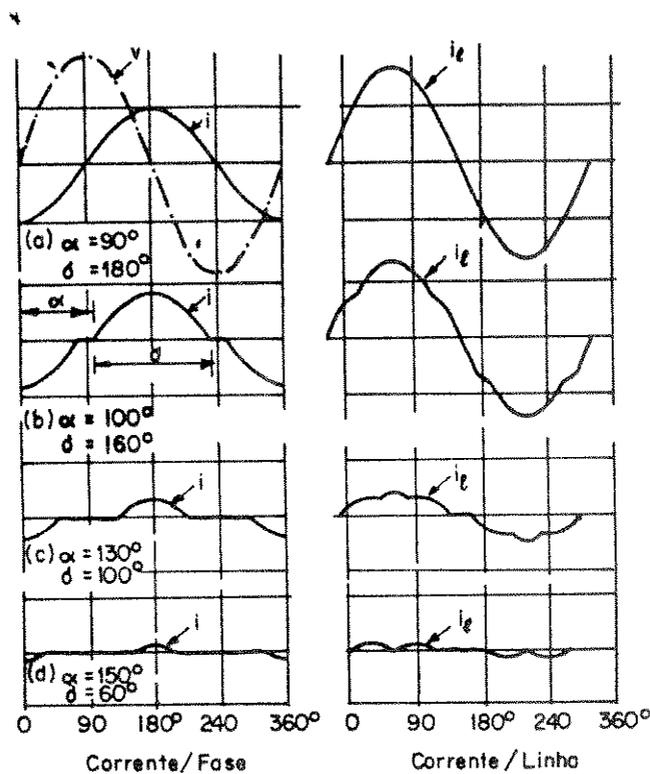


FIGURA 2.5

Sendo o sistema equilibrado, o RCT gera por fase todas as harmônicas de ordem ímpar, e o seu valor rms é dado por [15]:

$$I_n = \frac{4V}{\pi X_L} \left[ \frac{\text{sen } (n+1)\alpha}{2(n+1)} + \frac{\text{sen } (n-1)\alpha}{2(n-1)} - \cos \alpha \frac{\text{sen } n\alpha}{n} \right] \quad (2.3)$$

- onde:
- $n = 3, 5, 7, \dots$  - Ordem harmônica
  - $\alpha$  - Ângulo de disparo
  - $V$  - Tensão de alimentação fase-neutro
  - $X_L$  - Reatância do reator  $L_L$  na frequência fundamental

Nota-se que a expressão da amplitude da corrente harmônica  $I_n$  é função de  $\alpha$ . Na figura a seguir apresenta-se a variação da amplitude de algumas das principais harmônicas com o ângulo de disparo:

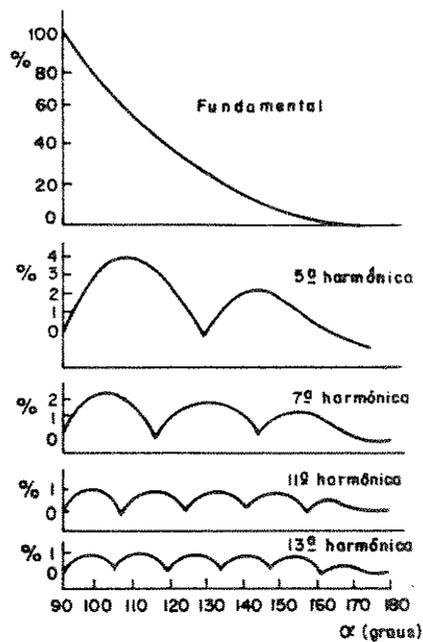


FIGURA 2.6

Para sistemas trifásicos, a figura 2.4 apresenta o arranjo preferencial do RCT, isto é, a conexão triângulo que elimina das correntes de linha a harmônica de 3ª ordem e suas múltiplas, se as tensões do sistema são perfeitamente balanceadas. Caso o sistema apresente desequilíbrio e/ou o ângulo de disparo de cada tiristor seja diferente, podem ser injetadas nas linhas correntes harmônicas de todas as ordens (pares e ímpares), bem como componente dc.

#### b.2 - Compensadores a Reator Saturado

Os compensadores a reator saturado também conhecidos como reatores de núcleo saturado (RNS), são equipamentos que, operando na região de saturação, absorvem potência reativa, regulando a tensão na barra onde estão conectados.

O princípio de operação do RNS (figura. 2.7.a) baseia-se na saturação do núcleo magnético cuja curva de magnetização ideal é mostrada ao lado em termos do fluxo e da corrente. Considerando que a tensão aplicada na entrada apresenta uma forma senoidal e a curva de magnetização do núcleo é linear, temos que a onda de corrente absorvida apresentará uma forma distorcida, evidenciando a presença de harmônicas.

Na prática a curva de magnetização do núcleo não é ideal e o sistema está em constante desequilíbrio, levando o RNS a gerar harmônicas pares e ímpares, distorcendo as ondas de tensão e corrente.

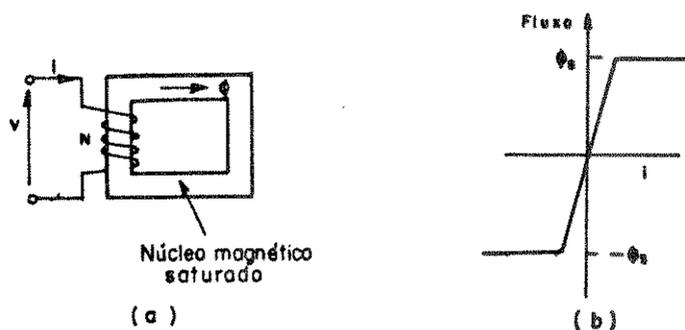


FIGURA 2.7

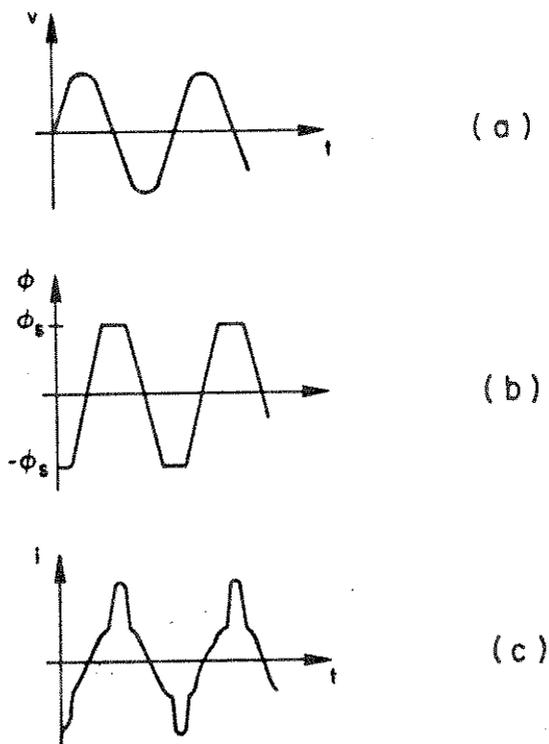


FIGURA 2.8

A eliminação ou redução das harmônicas pode ser conseguida através da instalação de filtros, mas esta solução além de onerosa pode levar o sistema a ter diversos pontos de ressonância, devido ao conjunto RNS-filtro, aumentando o nível harmônico existente. A solução neste caso é projetar o RNS com diversos enrolamentos de compensação interna como, por exemplo, apresentado

na figura 2.9 [15].

Este circuito é um tipo de RNS autocompensado denominado "frequency-trippler". O enrolamento do secundário em ligação delta elimina a terceira harmônica e suas múltiplas se o sistema é equilibrado.

Há outros tipos de RNS autocompensados com enrolamentos auxiliares conectados de várias maneiras, que a princípio podem eliminar harmônicas de ordens superiores. Se o sistema está bastante desequilibrado esta solução não elimina totalmente as harmônicas.

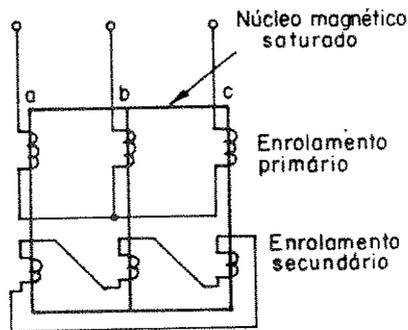


FIGURA 2.9 - RNS Autocompensado para Harmônicas Múltiplas de 3

### C - Fornos de Arco

São cargas que produzem correntes harmônicas devido à não linearidade apresentada pela característica tensão-corrente do arco, da permanente variação aleatória da resistência do arco durante o processo de fusão e da constante variação do comprimento e percurso do arco. A forma típica da característica  $V \times I$  de um arco elétrico é apresentada a seguir:

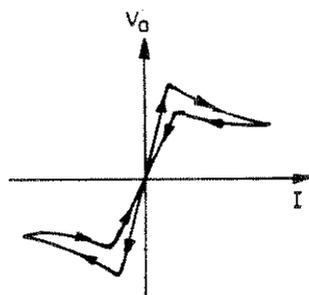


FIGURA 2.10

Nota-se que a resistência do arco tem um comportamento variável, podendo tornar-se negativa. Isto faz com que a corrente do forno de arco também varie e apresente uma forma de onda distorcida, devido à geração de correntes harmônicas (ordens inteiras e não inteiras), onde predominam as ordens 2,3,4 e 5. Na figura 2.11 são mostradas as formas de ondas da tensão e corrente produzidas por um forno de arco, variando continuamente em amplitude e fase.

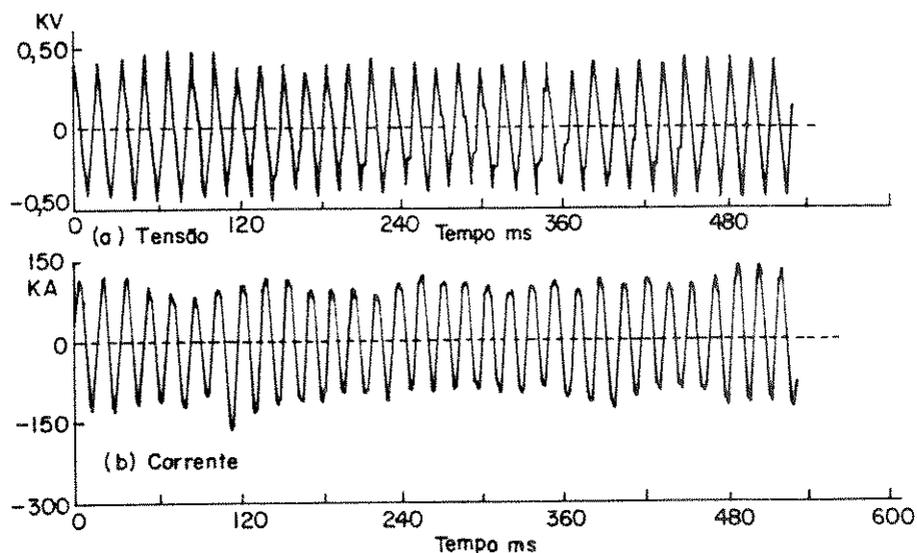


FIGURA 2.11

Além da geração de harmônicas, outras conseqüências do funcionamento de fornos de arco no sistema de potência são os desequilíbrios de tensão e o aparecimento do efeito "flicker" ou fenômeno de cintilação luminosa.

O efeito flicker representa o incômodo visual causado pelas variações de intensidade luminosa das lâmpadas de filamento (faixa de frequência de 0 a 30 Hz) devido às flutuações na amplitude da tensão, ou seja, modulação variável da onda de tensão.

#### d - Transformadores

Os transformadores de potência operando a uma tensão senoidal, apresentam distorção da onda de corrente de entrada e tensão induzida devido à não linearidade de seu circuito magnético, responsável pela corrente de magnetização, cuja forma de onda não senoidal leva à geração predominante de harmônicas ímpares (3ª e 5ª), se o sistema está equilibrado, caso contrário há produção de harmônicas de ordem par e ímpar.

Durante a energização de transformadores, também ocorre a circulação de intensas correntes harmônicas, decorrentes da corrente "inrush" [19].

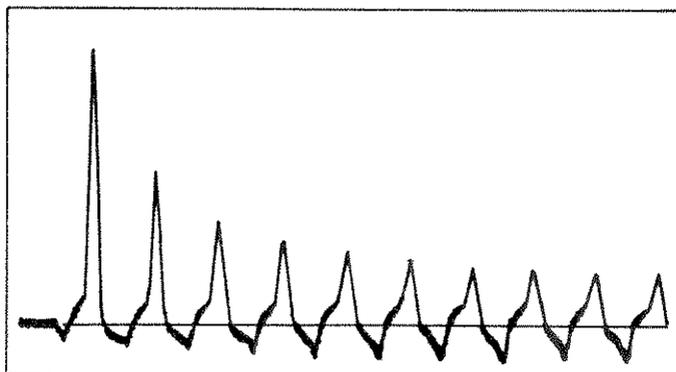


FIGURA. 2.12 - Corrente inrush para um transformador particular energizado em zero volt.

As correntes de inrush podem ser relativamente altas, embora persistam durante um curto intervalo de tempo (1 a 2 segundos) e contém harmônicas de ordem par, com predominância da 2 e 4 ordem.

Ainda no nível de transmissão e subtransmissão, cargas como laminadores siderúrgicos e sistemas de tração ferroviária injetam harmônicas no sistema, pois são alimentadas através de circuitos retificadores. Também os geradores síncronos e motores de indução geram harmônicas, devido principalmente à distribuição não uniforme do fluxo de campo no entreferro das máquinas (efeito de saliência dos polos e ranhuras do estator), porém o nível harmônico gerado é reduzido.

## II - NÍVEL DE DISTRIBUIÇÃO

Na figura a seguir tem-se correntes harmônicas registradas no lado primário de um transformador de distribuição durante várias horas de medição ao longo de 2 dias. Observa-se que as harmônicas alcançaram valores de pico aproximadamente às 21 horas, horário em que vários aparelhos domésticos, principalmente televisores, estão ligados [13].

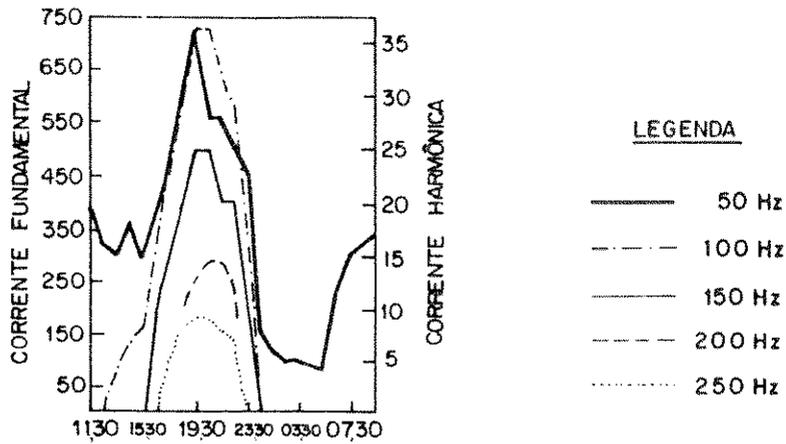


FIGURA 2.13

Em baixa potência cargas como televisores geram harmônicas, devido a sua alimentação através de circuitos retificadores. Medições realizadas pela CHESF (Companhia Hidrelétrica do São Francisco) durante jogos da copa do mundo de 1986 (horário com cargas essencialmente de televisores) mostraram predominância da corrente de 5ª harmônica nas linhas [20]. Também lâmpadas de descarga elétrica, especialmente lâmpadas fluorescentes, altamente não lineares, geram correntes harmônicas, principalmente as de ordem ímpar. Na figura 2.14 tem-se a forma de onda da tensão e corrente de arco típicas de uma lâmpada fluorescente.

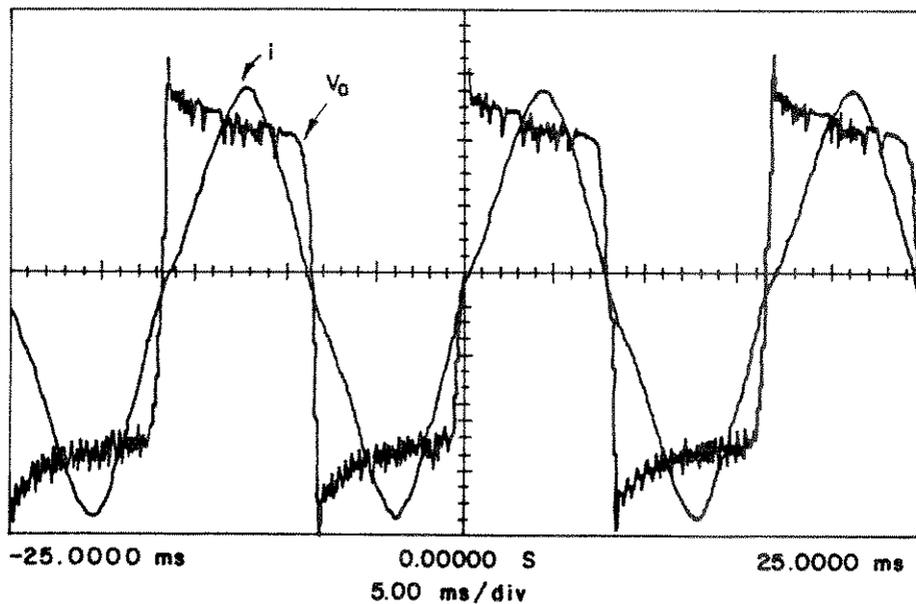


FIGURA 2.14

Outras cargas geradoras de harmônicas em sistemas de distribuição são os carregadores de baterias, fontes chaveadas, máquinas elétricas de solda e outras cargas que empregam corrente contínua.

## 2.3 - EFEITOS DAS HARMÔNICAS NO SISTEMA DE POTÊNCIA

A presença de correntes e tensões harmônicas no sistema de potência pode causar dano ou mau funcionamento de equipamentos, além de contribuir para o aumento de perdas nas linhas de transmissão, de distribuição e equipamentos em geral, ocasionadas pelos efeitos pelicular, histerese e Foucoul.

Nos cabos elétricos e transformadores a presença de tensões harmônicas diminui a vida útil do isolamento, enquanto que as correntes harmônicas aumentam as perdas no cobre e ferro, respectivamente.

Nas máquinas elétricas a circulação de correntes harmônicas produzem perdas principalmente nos enrolamentos do rotor. Nos motores de indução ocorre também diminuição da potência desenvolvida, devido à circulação de correntes harmônicas de sequência negativa induzidas no rotor.

Os capacitores, quando sujeitos a picos de tensões harmônicas superpostas aos picos da fundamental, podem ter seu dielétrico danificado, ocasionando seu envelhecimento precoce.

A presença de capacitores no sistema, principalmente para correção de fator de potência, favorece o surgimento de ressonâncias. A ressonância representa uma condição de casamento de impedâncias entre o capacitor e a rede para uma determinada frequência. Um circuito em ressonância pode apresentar uma impedância muito alta (ressonância paralela) ou muito baixa (ressonância série) para a fonte harmônica, dependendo do seu arranjo. O efeito da ressonância é elevar o nível de tensão ou corrente harmônica, causando danos aos equipamentos presentes no circuito. Sua ocorrência é imprevisível devido às constantes variações da rede (entrada e saída de carga, incidência de harmônicas, etc).

Além dos efeitos acima mencionados, as harmônicas, circulando no sistema de potência, podem causar ainda os seguintes distúrbios indesejáveis:

- Interferência nas linhas de comunicação através do acoplamento indutivo com os circuitos de alta tensão;
- Operação errônea dos dispositivos de medição e proteção;
- Mau funcionamento de unidades conversoras e suas cargas;
- Aumento de circulação de potência reativa sob condições de ressonâncias;
- Interferência em cargas sensíveis à presença das correntes e tensões harmônicas, como computadores e sistemas eletrônicos de controle industrial.

## 2.4 - NORMAS E LIMITES

Para assegurar um bom desempenho e uma vida útil adequada para a maioria dos equipamentos e dispositivos no sistema elétrico é necessário limitar o nível de harmônicas através de normas e recomendações.

De maneira geral os critérios, recomendações e normas sobre harmônicas têm os seguintes objetivos [14]:

- a) Manter as distorções de ondas de tensão e corrente em níveis toleráveis ao sistema de potência e seus componentes;
- b) Respeitar as distorções máximas admissíveis por consumidor;
- c) Garantir que o sistema de potência não interfira em outros sistemas, especialmente nos sistemas telefônicos.

A caracterização da onda de tensão ou corrente da rede elétrica é feita através do conhecimento da ordem, amplitude e fase de cada componente desta onda. A amplitude de cada componente deve ser limitada aos níveis regulamentados.

Também é recomendável, que os efeitos da circulação de harmônicas na rede sejam avaliados através da distorção na frequência fundamental e da interferência em circuitos telefônicos causada pelo acoplamento magnético entre circuitos e o sistema de transmissão. Os cálculos destes parâmetros são apresentados a seguir.

### 2.4.1 - PARÂMETROS DE DISTORÇÃO DE TENSÃO E CORRENTE

#### a) Fator de Distorção Harmônica Total de Tensão

$$\text{FDT} = \frac{1}{V_1} \sqrt{\sum_{n=2}^{50} V_n^2} \quad (2.5)$$

onde:  $V_n$  - Valor rms da tensão fase-neutro da harmônica n.  
 $V_1$  - Valor rms da tensão fundamental fase-neutro.  
n - Ordem da harmônica.

## b) Fator de Distorção Harmônica Total de Corrente

$$\text{FDI} = \frac{1}{I_1} \sqrt{\sum_{n=2}^{50} I_n^2} \quad (2.6)$$

onde:  $I_n$  - Valor rms da corrente de fase da harmônica n.  
 $I_1$  - Valor rms da corrente de fase da fundamental.  
n - Ordem da harmônica.

## c) Fator de Interferência Telefônica

$$\text{TIF} = \frac{1}{V_1} \sqrt{\sum_{n=1}^{50} (V_n \cdot F_n)^2} \quad (2.7)$$

onde:  $F_n$  - fator de peso para cada harmônica n (tabelado)

### 2.4.2 - NORMAS E RECOMENDAÇÕES NO BRASIL [14]

No Brasil, para uma operação satisfatória do sistema elétrico, é recomendado conhecer o conteúdo harmônico da tensão e corrente até a ordem 50.

Trabalhos realizados pelo grupo de coordenação para operação interligada (GCOI) sobre limites das harmônicas, fundamentados em experiências de outros países (Inglaterra e Nova Zelândia) recomendam:

a) A tensão harmônica fase-neutro ( $V_n$ ) em qualquer PAC<sup>1</sup> com tensão nominal do sistema menor que 69 kV não pode exceder a:

- 4% para harmônicas ímpares
- 2% para harmônicas pares

<sup>1</sup>PAC - Ponto de acoplamento comum - é o ponto da rede de fornecimento público mais próximo do consumidor, onde outros consumidores estão ou podem ser conectados.

b) A distorção de tensão harmônica total em qualquer PAC para sistemas com tensão nominal menor que 69 kV não pode exceder a 5%.

$$FDT = \sqrt{\sum_{n=2}^{50} V_n^2} (\%) < 5\% \quad (2.8)$$

sendo  $V_n$  dado em percentagem da tensão fundamental fase-neutro, ou seja:

$$V_n (\%) = \frac{V_n}{V_1} \times 100 [\%] \quad (2.9)$$

c) A tensão harmônica ( $V_n$ ) correspondente a qualquer harmônica de ordem ímpar não deverá em nenhum PAC, para sistemas com tensão nominal maior ou igual a 69kV, exceder o limite especificado para aquela harmônica conforme a tabela a seguir.

TABELA 1

ORDEM DE HARMÔNICA (n)	LIMITE DE TENSÃO ( $V_n$ %)
3	2,3
5	1,4
7	1,0
9	0,8
11	0,7
13	0,6
15	0,5
17 a 21	0,4
23 a 49	0,3

d) A tensão harmônica ( $V_n$ ) correspondente a qualquer harmônica de ordem par não deverá em nenhum PAC, para sistemas com tensão nominal maior ou igual a 69 kV, exceder o limite especificado para aquela harmônica conforme tabela 2.

TABELA 2

ORDEM DE HARMÔNICA (n)	LIMITE DE TENSÃO ( $v_n$ %)
2	1,2
4	0,6
6	0,4
8 a 10	0,3
12 a 50	0,2

e) A corrente harmônica que circula entre qualquer consumidor e o PAC, para as harmônicas de ordem ímpar, não deverá exceder o limite especificado abaixo.

TABELA 3

ORDEM HARMÔNICA (n)	LIMITE DE CORRENTE HARMÔNICA (corrente em A)				
	354kV	230kV	138kV	88kV	69kV
3	8,8	5,9	3,5	2,2	1,8
5	5,3	3,5	2,1	1,4	1,1
7	3,8	2,5	1,5	1,0	0,8
9	2,9	2,0	1,2	0,8	0,6
11	2,4	1,6	1,0	0,6	0,5
13	2,0	1,4	0,8	0,5	0,4
15	1,8	1,2	0,7	0,5	0,4
17	1,6	1,0	0,6	0,4	0,3
19 a 21	1,3	0,9	0,5	0,3	0,3
23	1,2	0,8	0,5	0,3	0,2
25 a 49	1,1	0,7	0,4	0,3	0,2

f) a corrente harmônica que circula entre qualquer consumidor e o PAC para as harmônicas de ordem par não deverá exceder o limite especificado na Tabela 4.

TABELA 4

OREM HARMÔNICA (n)	LIMITE DE CORRENTE HARMÔNICA (corrente em A)				
	354kV	230kV	138kV	88kV	69kV
2	4,4	2,9	1,8	1,1	0,9
4	2,2	1,5	0,9	0,6	0,4
6	1,5	1,0	0,6	0,4	0,3
8	1,1	0,7	0,4	0,3	0,2
10	0,9	0,6	0,4	0,2	0,2
12 e 14	0,7	0,5	0,3	0,3	0,2
16 e 18	0,6	0,4	0,2	0,2	0,2
20 a 50	0,4	0,3	0,2	0,2	0,2

## 2.5 - MÉTODOS DE REDUÇÃO OU ELIMINAÇÃO DE HARMÔNICAS

A presença de correntes e tensões harmônicas em sistemas de potência é indesejável devido aos vários efeitos negativos causados por elas, tornando necessário reduzi-las ou eliminá-las. O método mais utilizado para este fim é a filtragem.

A filtragem consiste na instalação de filtros nas barras onde estão localizadas as maiores fontes harmônicas, podendo ser conectados em série ou paralelo (shunt) e sintonizados em determinada frequência ou em faixas de frequências.

Quando o objetivo é impedir a propagação de determinada harmônica, faz-se uso de filtro em série apresentando alta impedância para aquela frequência harmônica. Contudo não é adequado aplicar este tipo de filtragem próximo de fontes harmônicas (como transformadores e conversores estáticos), pois a produção de harmônicas, feita por elementos não lineares, é intrínseco à sua operação normal [13]. Além disto, filtros em série devem suportar toda a corrente nominal, sendo portanto um equipamento caro.

No caso da aplicação de filtragem próximo de fontes harmônicas, são utilizados os filtros shunt, que fornecendo um caminho de baixa impedância para uma ou mais harmônicas, evitam que as mesmas se propaguem pela rede. A seguir mostra-se 1 tipo de filtro shunt utilizado em sistemas elétricos, bem como sua curva típica de impedância versus frequência [13].

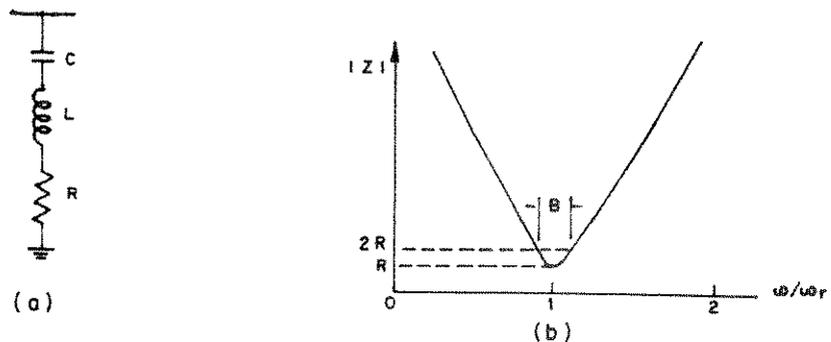


FIGURA 2.15

O esquema de filtro a ser colocado depende principalmente da configuração do sistema e do custo de instalação. Por exemplo, barras com conversores de potência menores que 30MW, recebem em geral filtros shunt sintonizados na 5ª e 7ª harmônica juntamente com um filtro shunt passa alta para harmônicas de maior ordem, enquanto conversores com potência maior que 30MW tem acrescentados filtros sintonizados na 11ª e 13ª harmônica. Para outras cargas que possam gerar harmônicas características e não características, instala-se filtros sintonizados nas ordens que tenham níveis mais altos [14].

Outro método para eliminação de harmônicas é empregado apenas em barras onde estão conectados conversores e compensadores estáticos e é conhecido como multiplicação de pulsos.

A multiplicação de pulsos consiste em colocar, por exemplo, duas unidades conversoras de seis pulsos em paralelo (lado a.c.) alimentadas por transformadores, onde cada transformador apresenta um deslocamento de fase de  $30^\circ$  em relação ao outro, fazendo o sistema funcionar como um conversor de 12 pulsos (ver figura a seguir).

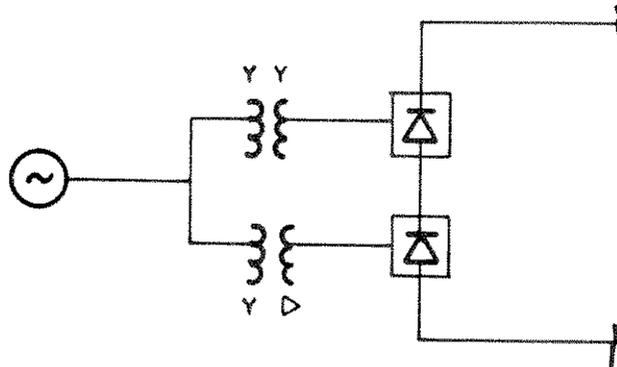


FIGURA 2.16

Aplicando a análise de Fourier para a corrente de uma fase de cada conversor, as expressões serão as seguintes:

$$I_{y-y} = \sqrt{2} I_1 \left[ \text{sen } \omega t - \frac{\text{sen } 5\omega t}{5} - \frac{\text{sen } 7\omega t}{7} + \frac{\text{sen } 11\omega t}{11} + \frac{\text{sen } 13\omega t}{13} + \dots + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{sen } \frac{n\pi}{6} \frac{\text{sen } \pi \omega t}{n} + \dots \right] \quad (2.10)$$

$$I_{y-\Delta} = \sqrt{2} I_1 \left[ \text{sen } \omega t + \frac{\text{sen } 5\omega t}{5} + \frac{\text{sen } 7\omega t}{7} + \frac{\text{sen } 11\omega t}{11} + \frac{\text{sen } 13\omega t}{13} \dots + \dots + \frac{2}{3} \text{sen } \frac{n\pi}{6} \frac{\text{sen } \pi \omega t}{n} + \dots \right] \quad (2.11)$$

onde  $I_1$  é a corrente fundamental e  $n$  é a ordem harmônica.

A soma destas correntes resultará numa corrente de linha com as harmônicas de ordem  $12k \pm 1$ .

Outras combinações de unidades conversoras podem resultar na eliminação de harmônicas de ordem mais elevada. Ao combinar 3 unidades de 6 pulsos, cada uma com deslocamento de  $20^\circ$  em relação à outra, teremos um sistema de 18 pulsos, com as harmônicas de ordem  $18k \pm 1$  [15].

Um outro método de eliminação de harmônicas que pode ser citado, é a compensação de fluxo magnético. Este método utiliza um transformador de corrente para detectar a harmônica desejada, enviada-a através de um amplificador, ao enrolamento terciário de um transformador de 4 enrolamentos, onde deve ser eliminada [13].

## CAPÍTULO 3

### MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA ANÁLISE HARMÔNICA DE SINAIS

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

Como correntes e tensões harmônicas presentes no sistema elétrico de potência distorcem a onda fundamental, causando efeitos como interferência em circuitos telefônicos e mau funcionamento de equipamentos, comprometendo a eficiência na geração, transmissão e utilização da energia elétrica, conclui-se que a amplitude de cada harmônica deve ser detectada e analisada, a fim de avaliar se seu valor encontra-se dentro dos limites determinados por normas.

A análise harmônica consiste no processo de obtenção da amplitude e fase de cada componente múltipla da onda fundamental, por decomposição do sinal original. Esta abordagem origina-se do estudo feito pelo matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), que em seu trabalho "Theorie Analytique de la Chaleur" postulou que qualquer sinal contínuo e de período  $T$  pode ser representado por uma componente de frequência fundamental e uma série de componentes harmônicas (componentes com frequência inteira múltipla da frequência fundamental). O estudo de Fourier ficou conhecido como análise por Série de Fourier e conduz à representação de uma função no domínio do tempo para o domínio da frequência.

A série de Fourier é aplicável a sinais contínuos e periódicos. Para sinais contínuos aperiódicos define-se a Transformada de Fourier que mapeia o sinal temporal de  $-\infty$  a  $+\infty$  para o domínio da frequência.

Através de conversores analógico/digitais os sinais contínuos podem ser discretizados, passando a ser representados por séries finitas de amostras espaçadas no tempo. Para estes sinais discretos, tem-se a Transformada Discreta de Fourier (TDF), que leva à sua representação em frequência. Se o sinal discreto a ser transformado é uma série de amostras periódicas e igualmente espaçadas, a TDF pode ser calculada através de algoritmos rápidos e eficientes, conhecidos como FFT (Fast Fourier Transform), que formam a base da análise espectral deste trabalho.

### 3.2 - TRANSFORMADA DE FOURIER (TF)

Como exposto anteriormente, a Transformada de Fourier é um método matemático que converte o sinal do domínio do tempo para o domínio da frequência, explicitando assim suas várias componentes harmônicas.

A T.F. é uma operação linear e baseia-se na assertiva de que qualquer sinal ou função pode ser representado por uma combinação linear de um conjunto completo de funções básicas, que possuam a propriedade de ortogonalidade (funções trigonométricas, funções exponenciais complexas, polinômios de Legendre, polinômios de Jacobi, etc.). Um dos conjuntos de funções ortogonais mais utilizados para a representação de um sinal é o conjunto das funções exponenciais complexas, que aparecem de forma compacta na expressão da TF para diferentes tipos de sinais, como apresentado a seguir [4]:

#### a) Sinais Contínuos Periódicos

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \cdot e^{jn\omega t} \quad t_1 \leq t \leq t_1 + T \quad (3.1)$$

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) \cdot e^{-jn\omega t} \cdot dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2)$$

onde:  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

T - período do sinal x(t)

A expressão 3.1 é denominada série de Fourier, que é um caso particular da T.F., e  $X_n$  é o coeficiente de ordem n da série.

#### b) Sinais Contínuos Aperiódicos

$$x(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega \quad (3.3)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \quad (3.4)$$

Estas equações são conhecidas como o par de Transformadas de Fourier e podem ser simbolicamente representadas por:

$$X(\omega) = \mathcal{F} [x(t)] - \text{Transformada direta} \quad (3.5)$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1} [X(\omega)] - \text{Transformada inversa} \quad (3.6)$$

$X(\omega)$  é conhecida como densidade espectral e geralmente é uma função contínua de  $\omega$ .

### c) Sinais Discretos Periódicos

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} X[k].e^{j\frac{2\pi nk}{N}} \quad (3.7)$$

$$X[k] = \sum_{n=\langle N \rangle} x[n].e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \quad (3.8)$$

$N$  - Número de amostras por período do sinal.

As expressões (3.7) e (3.8) juntas são conhecidas como o par de Transformada Discreta de Fourier (TDF) e quase sempre são séries complexas.

### d) Sinais Discretos Aperiódicos

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega).e^{j\Omega n}.d\Omega \quad (3.9)$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].e^{-j\Omega n} \quad (3.10)$$

onde:  $\Omega = 2\pi k/N$  com  $N \rightarrow \infty$   
 $k = \langle N \rangle$

Observando as expressões da Transformada de Fourier conclui-se que há similaridades entre os casos a e c e os casos b e d, ou seja:

- 1 - Sinal periódico (contínuo ou discreto) tem espectro discreto.
- 2 - Sinal aperiódico (contínuo ou discreto) tem espectro contínuo.

Dos 4 casos apresentados, a transformação mais conveniente para obter o espectro de amplitudes de um sinal real é a TDF (caso c), pelas seguintes razões:

- i - Todo sinal real pode ser discretizado para cálculos digitais precisos;
- ii - A transformação do sinal discreto periódico gera um espectro de valores discretos;
- iii - Os algoritmos FFT permitem calcular a TDF de forma rápida e eficiente.

Para se aplicar a TDF (válida para sinais periódicos discretos) em sinais da rede elétrica, que são contínuos e até mesmo aperiódicos dentro de intervalos grandes de observação, duas condições devem ser consideradas:

- 1 - O sinal deverá ser discretizado dentro de um intervalo de tempo  $T_a$  finito, correspondente a pelo menos 1 período da fundamental ( $T_a \geq 1/f_1$ );
- 2 - O sinal amostrado será considerado periódico, sendo um período a forma observada no intervalo de tempo  $T_a$  ( $T_a = T$ ).

Evidentemente que ao transformar um sinal resultante da discretização de um sinal contínuo para o domínio da frequência, o espectro obtido (do sinal discreto) será apenas uma aproximação do espectro original (do sinal contínuo). Isto ocorre devido as operações de limitação no tempo e amostragem do sinal contínuo para a aplicação da TDF. O efeito destas operações no espectro do sinal será melhor abordado na seção 3.6.

Para uma interpretação adequada dos resultados, deve-se ainda ressaltar que a condição de periodicidade imposta a um sinal aperiódico, considerando que um período corresponde ao sinal medido durante o intervalo de tempo  $T_a$ , significa que o espectro obtido valerá apenas para este intervalo, nada podendo ser afirmado fora dele.

Assim, com o sinal devidamente caracterizado, podemos aplicar a transformação desejada (TDF) determinando e interpretando adequadamente o espectro de amplitude do sinal de tensão ou corrente do sistema elétrico.

### 3.3 - UNIDADE DE AMPLITUDE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

No domínio da frequência os gráficos são comumente plotados em escala logarítmica, pois esta escala comprime sinais de grande amplitude, e expande os de pequena amplitude, permitindo que componentes com ordem de grandeza muito diferente sejam mostradas no mesmo gráfico.

A unidade utilizada no domínio da frequência é o decibel (dB), criada por Alexandre Graham Bell para medir a capacidade auditiva do ouvido humano. Na Tabela 3.1 são mostradas relações entre volts, potência e dB.

TABELA 3.1

dB	Razão de Potência	dB	Razão de Tensão
+20	100	+40	100
+10	10	+20	10
+ 3	2	+6	2
0	1	0	1
- 3	1/2	-6	1/2
-10	1/10	-20	1/10
-20	1/100	-40	1/100

$$\text{dB} = 10 \log (\text{Razão de Potência}) = 20 \log (\text{Razão de Tensão})$$

### 3.4 - CÁLCULO DA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Reescrevendo as expressões do par de transformadas discreta de Fourier para uma seqüência periódica de N amostras, tem-se:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k].W_N^{-kn} \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (3.11)$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n].W_N^{kn} \quad 0 \leq k \leq N - 1 \quad (3.12)$$

onde  $W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$  - Deslocamento angular

A TDF direta (equação 3.12) é a representação de Fourier para seqüências finitas de valores e corresponde a amostras da Transformada de Fourier do sinal, igualmente espaçadas em frequência. Sendo  $x[n]$  uma série complexa de valores temporais (caso geral), a equação 3.12 pode ser escrita da seguinte forma [3]:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \begin{aligned} &R_c[x[n]] \cdot R_c[W_{N^n}^k] - I_m[x[n]] \cdot I_m[W_{N^n}^k] + j \left( R_c[x[n]] \cdot I_m[W_{N^n}^k] + \right. \\ &\left. + I_m[x[n]] \cdot R_c[W_{N^n}^k] \right) \end{aligned} \right\} \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (3.13)$$

A partir de 3.13 temos que, para cada valor de  $k$ , o cálculo direto de  $X[k]$  requer  $4N$  multiplicações reais e  $4N-2$  adições reais. Desde que  $X[k]$  é calculado para  $N$  diferentes valores de  $k$ , o cálculo da TDF de uma seqüência  $x[n]$  requer  $4N^2$  multiplicações reais e  $N.(4N-2)$  adições reais ou  $N^2$  multiplicações complexas e  $N.(N-1)$  adições complexas [3].

Em um computador digital o tempo computacional e a quantidade de memória requeridos para o cálculo de dados numéricos são aproximadamente proporcionais ao número de operações aritméticas, e quanto maior for o valor de  $N$ , mais cálculos serão exigidos para obtermos a TDF. Portanto, procedimentos computacionais que reduzam o número de multiplicações e adições no cálculo da TDF são de grande interesse.

No ano de 1965 J.W. Cooley e J.W. Tukey publicaram um trabalho sobre o cálculo da TDF através de um algoritmo computacional, que reduzia consideravelmente o número de operações aritméticas. A publicação deste artigo produziu outros trabalhos que aplicavam a TDF em processamento de sinais e resultou em uma família de algoritmos conhecidos como "Fast Fourier Transform" ou algoritmos FFT [7].

### 3.5 - ALGORITMO FFT

A FFT é um método matemático para calcular a TDF, processando grande número de amostras de uma seqüência  $x[n]$  em tempo mínimo.

O princípio básico deste algoritmo é a decomposição da TDF de uma seqüência de comprimento N (expressão 3.12) em pequenas e sucessivas TDF's. A forma como este princípio é implementado leva a uma variedade de diferentes algoritmos, que explorando as propriedades de simetria e periodicidade do fator  $W_N$  reduzem o número de operações aritméticas, sendo divididos em duas classes:

- 1 - DIZIMAÇÃO NO TEMPO - Consiste em decompor a seqüência  $x[n]$  em pequenas e sucessivas subseqüências para calcular a transformada.
- 2 - DIZIMAÇÃO NA FREQUÊNCIA - É baseada na quebra da seqüência  $x[n]$  e uma posterior quebra da seqüência  $X[k]$  sucessivamente para obter a transformação.

Analizando o algoritmo de dizimação no tempo para o caso de N ser uma potência inteira de 2, tem-se:

$$N = 2^v \quad (3.14)$$

Como N é par, calcula-se  $X[k]$  (expressão 3.12), separando  $x[n]$  em duas seqüências de N/2 amostras, consistindo uma seqüência de pontos pares e a outra de pontos ímpares de  $x[n]$ .

$$X[k] = \sum_{n \text{ par}} x[n].W_N^{nk} + \sum_{n \text{ impar}} x[n].W_N^{nk} \quad (3.15)$$

Substituindo  $n=2r$  para n par e  $n=2r+1$  para n ímpar, obtém-se:

$$X[k] = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r].W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1].W_N^{(2r+1)k} \quad (3.16)$$

Como  $W_N^2 = (e^{-j2\pi/N})^2 = W_{N/2}$ , cada somatória da expressão acima torna-se uma TDF de tamanho N/2, com a primeira soma de pontos pares e a segunda soma de pontos ímpares da seqüência original  $x[n]$ , ou seja:

$$X[k] = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r].W_{N/2}^{rk} + W_N^k \cdot \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1].W_{N/2}^{rk} \quad (3.17)$$

Se N/2 é ainda um número par, podemos continuar o processo de quebra

da sequência calculando a TDF de  $N/4$  pontos. Esta quebra continua até termos a expressão da TDF de dois pontos. Para uma sequência de 8 pontos tem-se o cálculo completo da TDF, que pode ser representado pelo seguinte gráfico de fluxo:

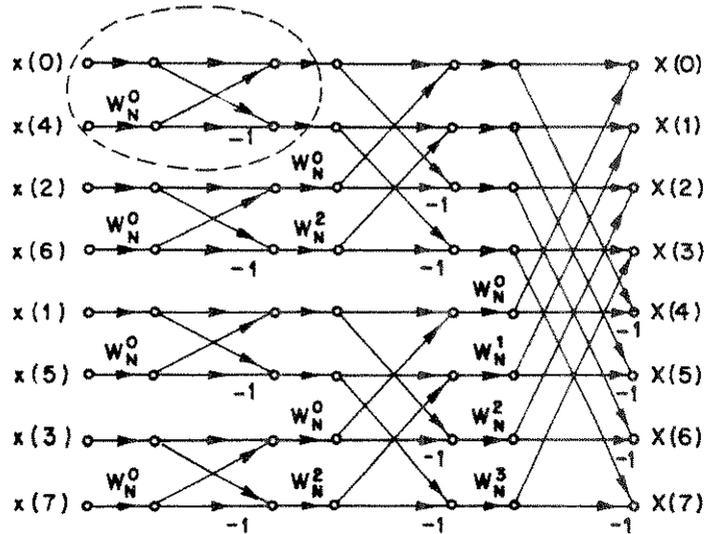


FIGURA 3.1

A parte destacada deste gráfico é a TDF de dois pontos  $[x(0)$  e  $x(4)]$ , denominada borboleta ("butterfly"), que pode ser representada pela seguinte equação:

$$X_{m+1}(p) = X_m(p) + W_N^r \cdot X_m(q) \quad (3.18)$$

$$X_{m+1}(q) = X_m(p) - W_N^r \cdot X_m(q) \quad (3.19)$$

onde:  $m$  - Estágio da TDF -  $m = 1, 2, \dots, \nu$

$p, q$  - Número da amostra

$r$  - Expoente que varia de acordo com o estágio a ser feito

No caso da TDF de 8 pontos ( $2^3$ ) tem-se 3 estágios até a obtenção dos valores de  $X[k]$ .

O algoritmo de dizimação na frequência é semelhante ao anterior, sendo que as operações quebram a sequência  $X[k]$  até a TDF de 2 pontos. Para qualquer dos dois métodos a redução no número de operações aritméticas, comparada com o método direto da TDF, é de  $N^2$  para  $N/2 \log_2 N$  multiplicações complexas e  $N \cdot (N-1)$  para  $N \cdot \log_2 N$  adições complexas. A diferença no número de operações aritméticas entre o método da FFT e o método direto é mostrado no gráfico a seguir [10]:

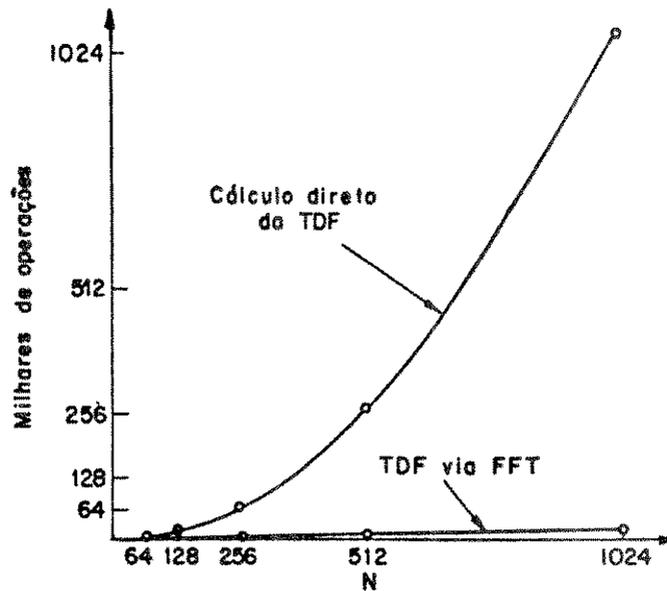


FIGURA 3.2

A FFT pode ser realizada para qualquer número de amostras  $N$ , mas sua eficiência é maior quando  $N$  é uma potência inteira de 2, levando a algoritmos chamados FFT radix 2 [3].

Para ilustrar, foi implementado o algoritmo FFT radix 2, de digitalização no tempo, em sinal composto de 4 senóides de 60, 180, 300 e 420 Hz com amplitudes de 1, 0.1, 0.01 e 0.001 volts, respectivamente. A FFT foi processada em um PC VECTRA/HP para um número total de 1024 amostras. O resultado é apresentado na figura 3.4, mostrando que o espectro calculado corresponde ao espectro esperado, porém a harmônica 7ª tem amplitude comparável ao nível de ruído do sistema utilizado (0.1%).

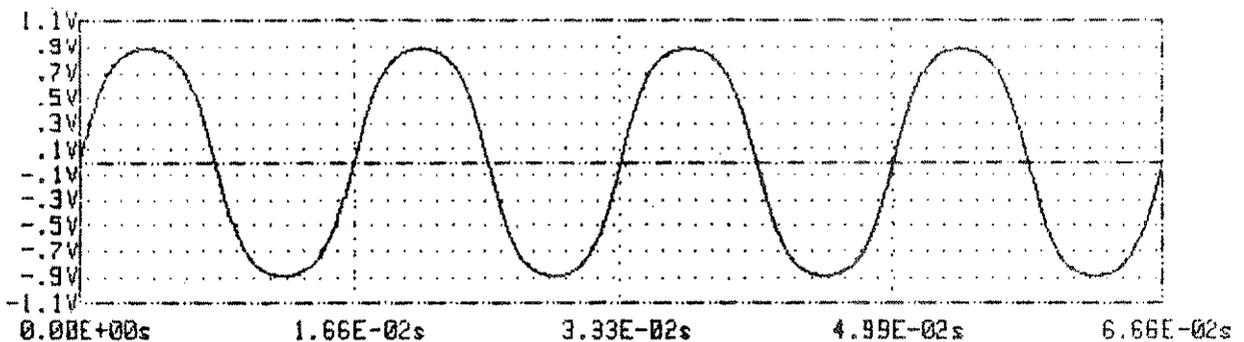


FIGURA 3.3 - Soma de Senóides com 60, 180, 300 e 420 Hz

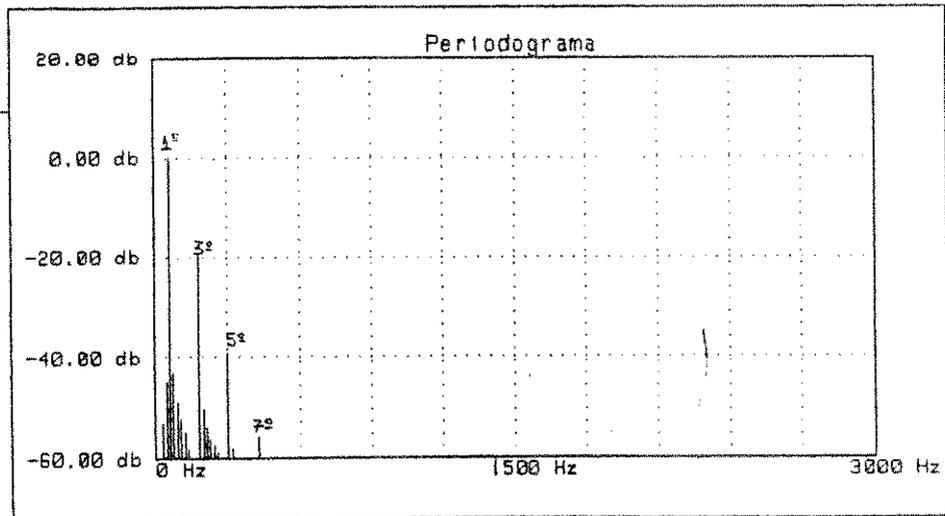


FIGURA 3.4 - Espectro do sinal - FFT de 1024 amostras

### 3.6 - EFEITOS DA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER EM SINAIS CONTÍNUOS

A aplicação da TDF, calculada através da FFT, em sinais discretos, requer uma seqüência finita de valores igualmente espaçados, ou seja, o sinal contínuo deve ser amostrado em intervalos regulares durante um tempo finito.

Com as operações de amostragem e limitação no tempo de um sinal contínuo há o aparecimento de dois efeitos que distorcem a informação espectral e que são conhecidos como "aliasing" ou superposição e "leakage" ou escoamento de energia.

#### 3.6.1 - ALIASING

O termo aliasing refere-se ao fato de que componentes em alta frequência sobrepõem componentes em baixa frequência de um sinal, durante seu processo de amostragem, fornecendo informações espectrais errôneas. Para ilustrar o fenômeno seja o sinal  $x(t)$  e o seu espectro em frequência mostrado na figura 3.5:

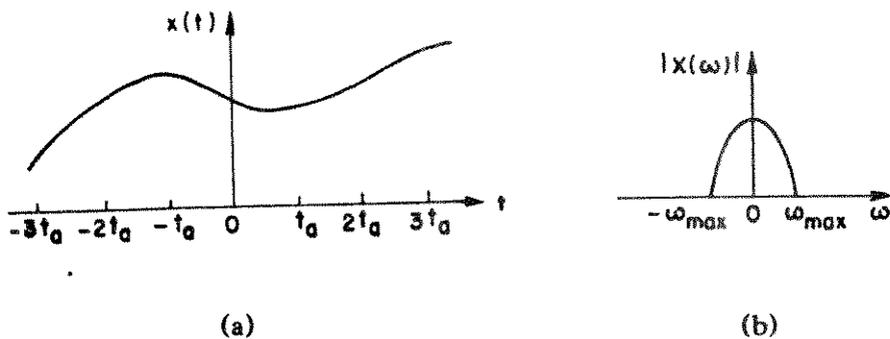


FIGURA 3.5

A frequência de amostragem do sinal é definida como:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{t_a} \quad (3.20)$$

sendo  $t_a$  o intervalo entre amostras do sinal.

Se  $\omega_s$  é menor que  $2\omega_{\max}$  ( $\omega_{\max}$  é a maior frequência contida em  $x(t)$ ), o espectro do sinal amostrado será:

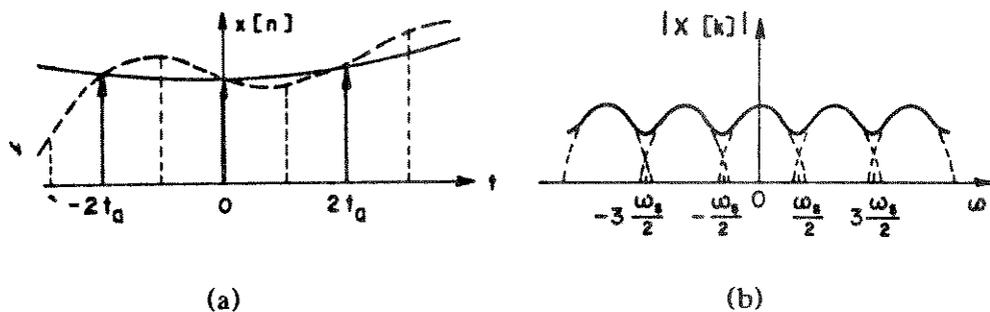


FIGURA 3.6

Pela figura 3.6.b vemos que não é possível recuperar o espectro do sinal original  $|X(\omega)|$  a partir de  $|X[k]|$ , pois há sobreposição das componentes espectrais. Este é o efeito aliasing que ocorre devido à baixa taxa de amostragem do sinal, e que pode ser eliminado aumentando esta taxa a um valor que satisfaça o critério de Nyquist, apresentado a seguir:

**CRITÉRIO DE NYQUIST** - Para que não ocorra o aliasing da informação espectral de um sinal durante seu processo de discretização, a taxa ou frequência mínima para amostragem deve ser pelo menos duas vezes a maior frequência contida neste sinal isto é,

$$\omega_s \geq 2\omega_{\max} \quad (3.21)$$

Assim com a aplicação deste critério, também conhecido como teorema da amostragem de Shannon, o aliasing desaparece e o espectro original do sinal pode ser recuperado por uma filtragem adequada (figura 3.7).

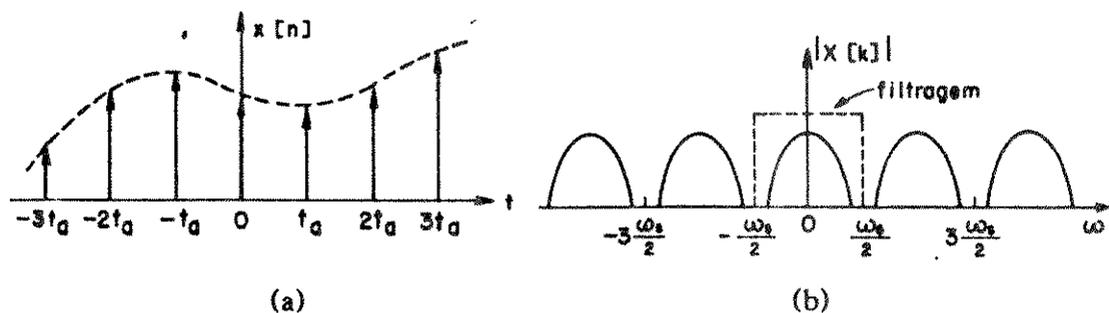
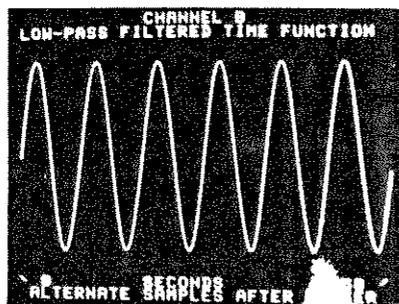


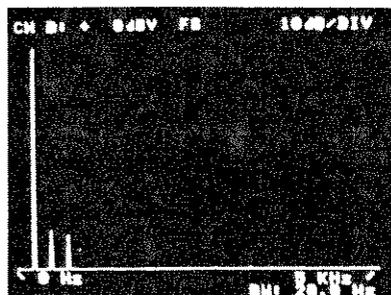
FIGURA 3.7

### 3.6.2 - LEAKAGE DA ENERGIA DO SINAL

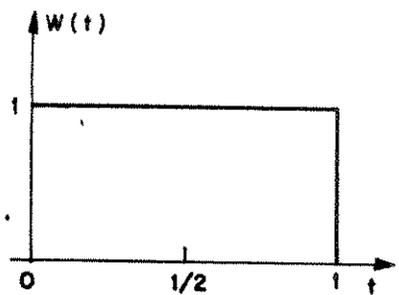
O leakage ou escoamento da energia espectral é um efeito que ocorre devido à operação de truncamento do sinal temporal contínuo, e para ilustrá-lo seja a figura 3.8 (fotos obtidas de um analisador de sinais) [17]:



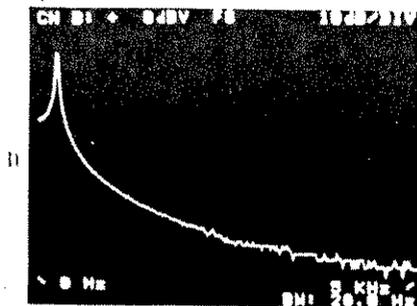
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 3.8

Sabe-se que para um sinal senoidal com frequência  $\omega$ , a forma espectral é uma linha simples, indicando sua amplitude em  $\omega$  (figura 3.8.b). Se este sinal é limitado em um intervalo de tempo  $T_a$ , o que corresponde a multiplicação da função temporal por uma janela retangular unitária (figura 3.8.c), seu espectro após o cálculo da TDF é como apresentado em 3.8.d, que mostra um escoamento de energia entre linhas espectrais. Este é o fenômeno leakage, que mascara inteiramente a forma espectral de um sinal.

Analisando a figura 3.8.d, vê-se que o problema do leakage está associado aos extremos do intervalo  $T_a$ , pois o centro é uma boa aproximação do espectro da onda senoidal com período completo (figura 3.8.b). Logo, foi observado que, calculando a TDF do sinal da figura 3.8.c, concentrando-se na parte central do intervalo  $T_a$  e ignorando os extremos, é possível obter o resultado espectral esperado. Isto é conseguido multiplicando o sinal limitado em  $T_a$  por uma função plana ou quase plana no centro e com decaimento suave para zero nas bordas (figura 3.9.a), resultando na redução do leakage (figura 3.9.b).

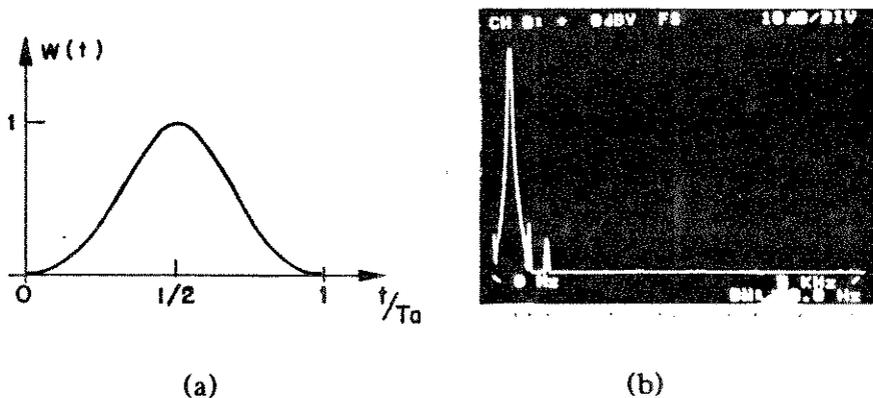


FIGURA 3.9

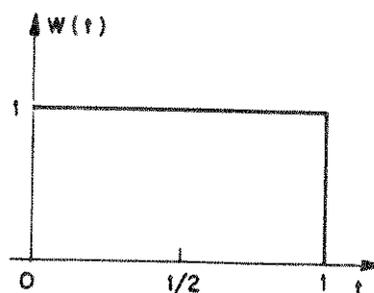
A figura 3.9.a é conhecida como função janela, porque ao aplicá-la em um sinal contínuo, este parece ser visto através de uma janela estreita. Quando um sinal é truncado, na verdade ele é multiplicado por uma janela de forma retangular com amplitude unitária.

A janela é uma função positiva, par em relação ao seu eixo central e apresenta transformada de Fourier. Alguns exemplos mais comuns de janelas, bem como seu espectro são mostrados a seguir [3], [6]:

**Retangular**

$$w(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{diferente} \end{cases}$$

$$W(f) = \frac{\text{sen}(\pi f)}{\pi f}$$

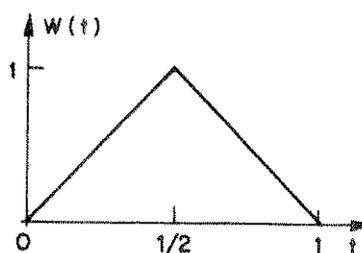


(a)

**Bartlett (+)**

$$w(t) = \begin{cases} 2 \cdot t, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ -2 \cdot t + 2, & 1/2 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{diferente} \end{cases}$$

$$W(f) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{sen}(\pi f/2)}{\pi f/2} \right]^2$$

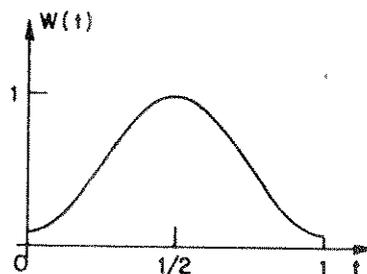


(b)

**Hamming**

$$w(t) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cdot \cos(2\pi t), & |t| \leq 1 \\ 0, & \text{diferente} \end{cases}$$

$$W(f) = \frac{(1.08 - 0.16f^2) \cdot \text{sen}(\pi f)}{2\pi f \cdot (1 - f^2)}$$

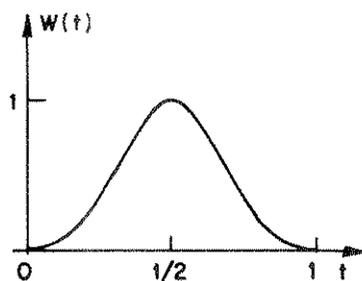


(c)

**Blackman**

$$w(t) = \begin{cases} 0.42 + 0.50 \cdot \cos(2\pi t) + 0.08 \cdot \cos(4\pi t), & |t| \leq 1 \\ 0, & \text{diferente} \end{cases}$$

$$W(f) = \frac{(0.18f^2 - 1.68f^4) \cdot \text{sen}(\pi f)}{\pi f \cdot (1 - f^2) \cdot (f^2 - 4)}$$



(d)

**FIGURA 3.10 - Funções janelas**

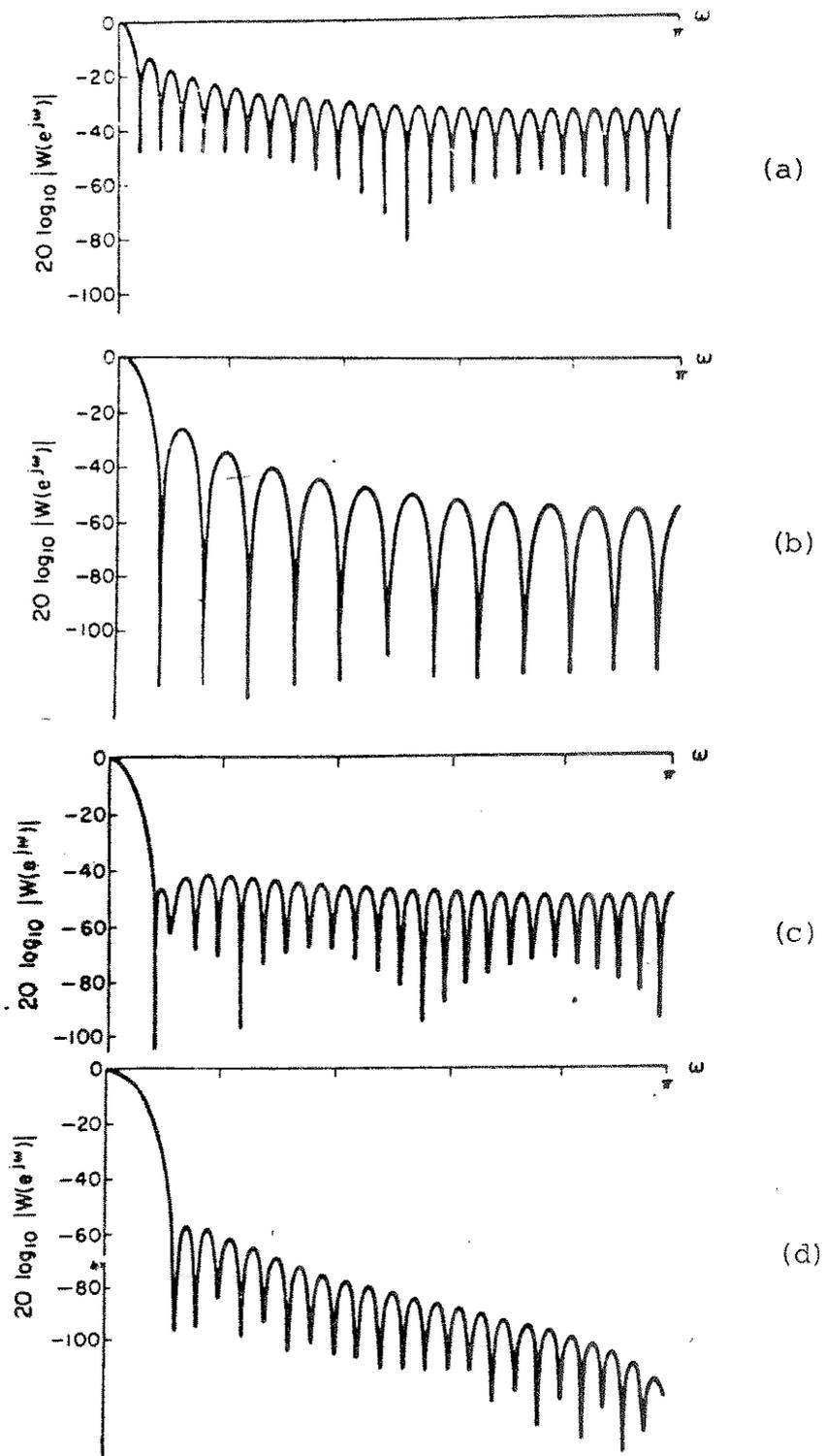


FIGURA 3.11 - Transformada de Fourier das janelas:(a) Retangular; (b) Bartlett; (c) Hamming; (d) Blackman

Há outros tipos de janelas como Hann, Hanning, Papoulis, Tukey, Exponential, etc., e a escolha de qual deve ser aplicada depende do sinal a ser analisado. Por exemplo, para sinais de comportamento transitório com instantes iniciais e finais nulos, uma boa janela a ser aplicada é a retangular. Já para sinais senoidais as funções de Hamming e Blackman são utilizadas, resultando em espectros mais precisos.

Também a quantidade de decaimento dos lóbulos laterais e o valor mínimo da resolução em frequência (função da largura do lóbulo central) influem na escolha da janela. Para uma onda senoidal de 1500 Hz e 1 volt de amplitude modulada em 300 Hz e 10% de amplitude é apresentado o efeito do janelamento. Em 3.13 tem-se o espectro com janelamento retangular, já 3.14 e 3.15 mostram o espectro com a aplicação das janelas Hamming e Blackman. Nota-se que estas janelas diminuem bastante as linhas espectrais intermediárias, mas apresentam pior resolução em torno das frequências presentes. Isto acontece porque o espectro das janelas utilizadas têm o lóbulo principal mais largo comparado com a janela retangular.

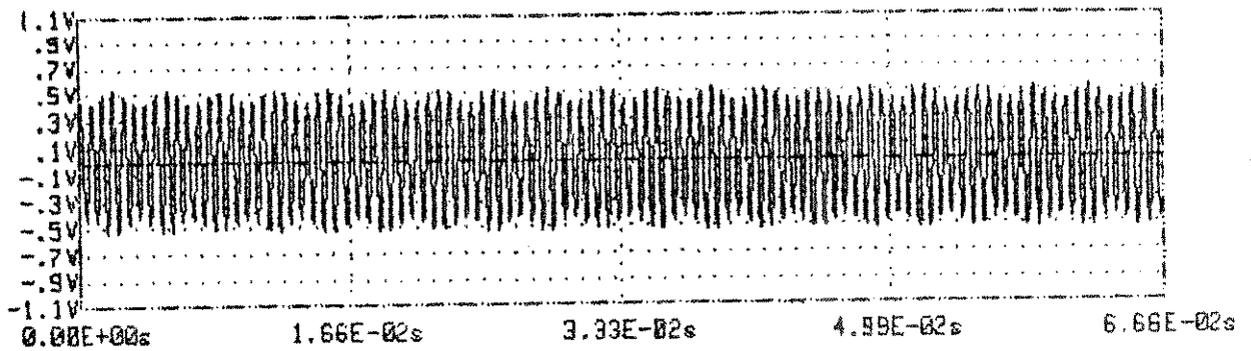


Figura 3.12 - Sinal de 1500 Hz com modulação de 300 Hz

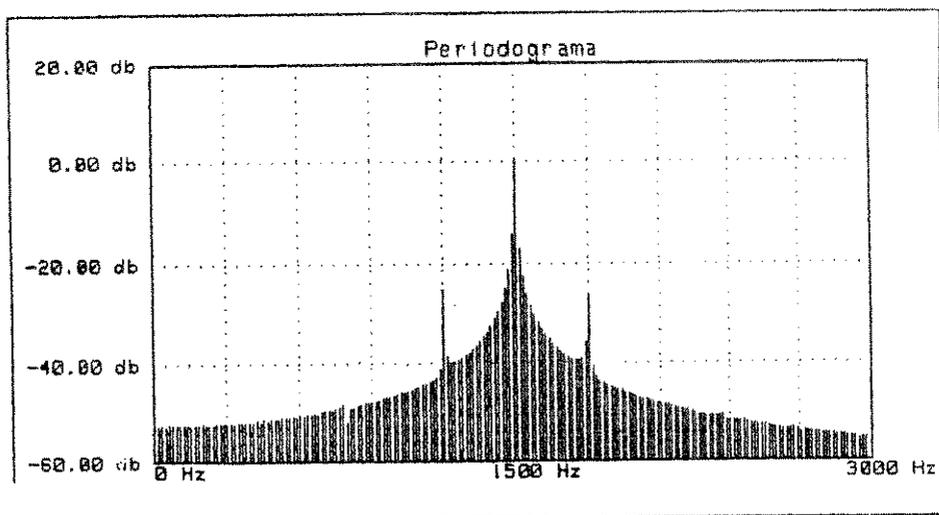


Figura 3.13 - Espectro do sinal modulado, com janela retangular

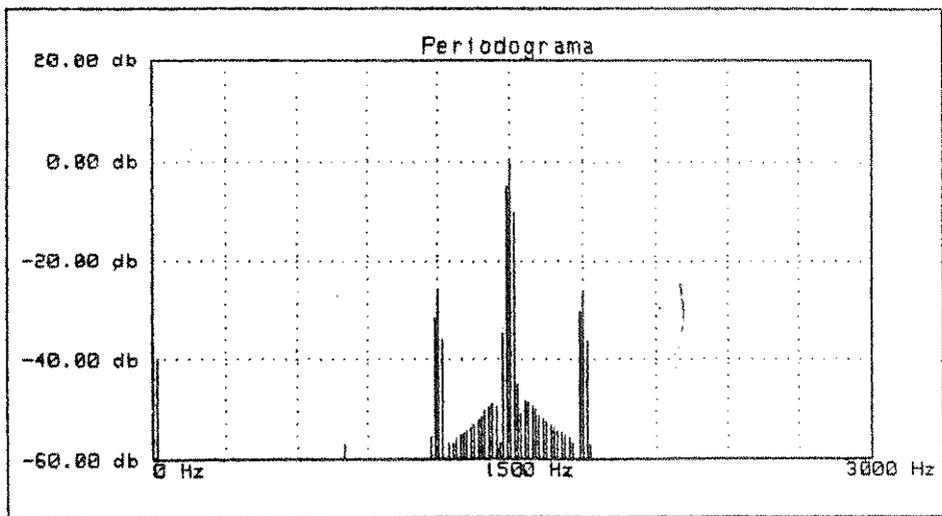


Figura 3.14 - Espectro do sinal modulado, com janela de Hamming

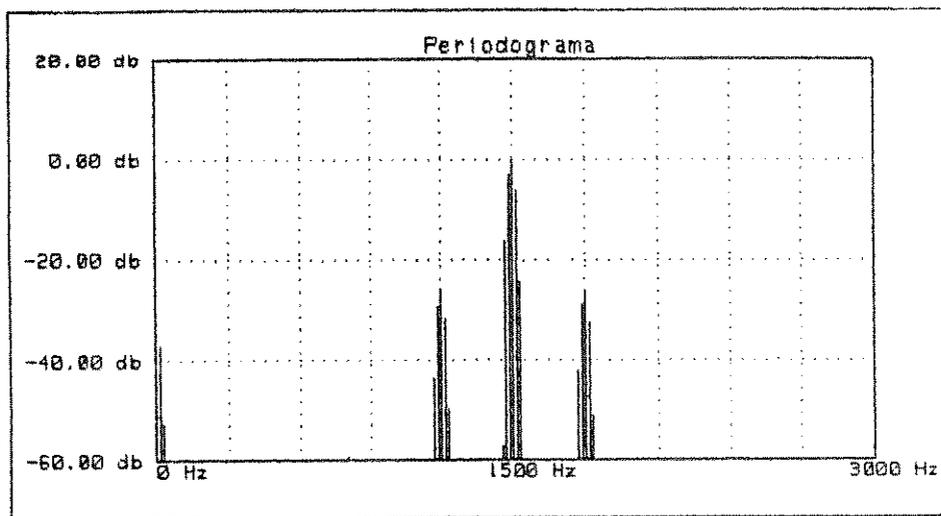


Figura 3.15 - Espectro do sinal modulado, com janela de Blackman

A redução do leakage está relacionado com a queda dos lóbulos laterais das janelas utilizadas. Como uma queda maior destes lóbulos dá-se às custas do alargamento do lóbulo principal, responsável pela resolução espectral alcançada, tem-se um compromisso entre redução do leakage e redução da resolução.

Pelos resultados apresentados, nota-se que a janela de Blackman apresenta a maior redução do leakage, reduzindo as linhas espectrais intermediárias abaixo de -60 dB (< 0.1%), e portanto adequado para a análise dos níveis harmônicos nos sistemas de energia elétrica.

## CAPÍTULO 4

### ESTIMAÇÃO DO ESPECTRO DE AMPLITUDES PARA SINAL VARIÁVEL

#### 4.1 INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores foram apresentadas as principais fontes harmônicas do sistema elétrico e as ferramentas básicas para obter a composição espectral dos sinais medidos. Neste capítulo será abordada a questão da aleatoriedade das distorções observadas.

Essa questão é de grande importância para a análise de conteúdo harmônico em sistemas de potência uma vez que, interessa mais conhecer os níveis médios e a faixa de variação ocorridos durante um ciclo de operação, do que estabelecer os valores exatos de um instante particular desse ciclo. Neste último caso basta o cálculo determinístico da FFT, enquanto que no primeiro caso, é preciso estabelecer parâmetros estatísticos para uma sucessão de observações durante a operação do sistema. Para essa abordagem necessita-se caracterizar a operação do sistema como um processo aleatório de geração de harmônicas, o que será tratado a seguir.

Durante um ciclo diário de operação do sistema de energia elétrica o conteúdo harmônico pode variar devido a uma série de fatores. As principais causas de perturbações, considerando a intensidade dos impactos produzidos no sistema, podem ser enumeradas como sendo:

- 1) Entrada em operação de grandes cargas não-lineares, como fornos de arco, laminadores siderúrgicos e sistemas de tração elétrica;
- 2) Operação de equipamentos de grande porte chaveados eletronicamente como conversores e compensadores controlados a tiristores;
- 3) Operação, na região de saturação, de equipamentos de grande porte, como reatores de núcleo saturado e transformadores;
- 4) Ocorrência de ressonâncias espúreas na rede de transmissão e distribuição, elevando o nível das harmônicas;
- 5) Entrada e saída de grandes quantidades de cargas não lineares como televisores, fontes chaveadas e lâmpadas de descarga em horas de pico.

A manifestação simples ou múltipla dessas perturbações, tendo intensidades e durações variáveis, faz com que o caráter aleatório da ocorrência do conteúdo harmônico na rede possa ser associado aos seguintes fatores:

- a) à própria aleatoriedade da incidência dos diferentes eventos ao longo do dia;
- b) à natureza aleatória de geração das harmônicas durante a operação de uma determinada fonte.

Pelo Teorema do Limite Central (Apêndice A), sabe-se que a combinação de um grande número de variáveis aleatórias com características estatísticas independentes tende a gerar um processo aleatório gaussiano. No caso, a produção de distorções harmônicas pode ser caracterizado como um processo aleatório de comportamento gaussiano ou normal, se o número de fontes presentes no sistema é significativo. Esta não é uma hipótese restritiva para a análise que será feita.

## 4.2 PROCESSOS ALEATÓRIOS EM SISTEMAS DE POTÊNCIA

Processos ou sinais aleatórios são caracterizados por [2]:

- Um conjunto de funções amostras, onde cada função é associada a um ponto do espaço amostral;
- Um sistema de probabilidade sobre o espaço amostral;
- Uma função de distribuição de probabilidade associada.

Para caracterizar o sinal elétrico (tensão ou corrente) como um processo aleatório, considera-se, para cada frequência harmônica, um conjunto de funções amostras, onde as variáveis aleatórias de cada conjunto são a amplitude e a fase.

Um processo aleatório só pode ser descrito através de parâmetros estatísticos como média simples, média quadrática, variância, etc. Para obtermos estes e outros parâmetros é necessário utilizar conceitos da teoria de probabilidade [Apêndice A].

### 4.3 NECESSIDADE DE ESTACIONARIDADE PARA O SINAL ALEATÓRIO

Deseja-se obter o espectro de amplitude do sinal da rede, ou seja, conhecer a amplitude de cada componente harmônica. Dado o caráter aleatório do processo, estas amplitudes se apresentarão de forma variável, inviabilizando a sua caracterização através da medição instantânea, e exigindo que as mesmas sejam obtidas em termos de parâmetros médios temporais.

Neste estudo o parâmetro de maior interesse é a densidade espectral média da potência do sinal, através da qual se calcula o espectro de amplitudes médias, descrito adiante.

O cálculo da densidade espectral média de potência é complexo, pois envolve a operação de média estatística, que depende da função densidade de probabilidade [Apêndice B]. Esta função é de difícil obtenção e na maioria dos casos só pode ser expressa após muitas observações do processo.

Contudo, se o fenômeno básico de geração deste processo, ou seja, as fontes harmônicas, puderem ser consideradas estatisticamente estacionárias, o cálculo da densidade espectral fica bastante simplificado, pois passa a ser função da média temporal. Para esta condição ocorrer, é necessário que as fontes harmônicas apresentem parâmetros estatísticos invariantes no tempo, pelo menos durante alguns ciclos do sinal de 60 Hz, viabilizando a aplicação das técnicas de análise de sinais aleatórios estacionários para esse período.

### 4.4 CARACTERIZAÇÃO DE PROCESSOS ALEATÓRIOS ESTACIONÁRIOS

Processos estacionários são processos cujos parâmetros estatísticos independem do tempo. Seja a função densidade de probabilidade de 2ª ordem ou conjunta para um processo aleatório  $x(t)$  [2]:

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) \quad (4.1)$$

Se houver um deslocamento de  $t$  segundos no tempo, temos:

$$f(x_1, x_2; t_1 + t, t_2 + t) \quad (4.2)$$

A estacionaridade exige que para qualquer  $t$ , resulte:

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; t_1 + t, t_2 + t) \quad (4.3)$$

ou seja, a função densidade de probabilidade independe do instante de observação, mas não do intervalo entre  $t_1$  e  $t_2$ . A equação 4.3 pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; \tau) \quad (4.4)$$

onde  $\tau = t_2 - t_1$  é o intervalo de observação.

Para um processo ser estacionário de ordem  $n$ , devemos ter:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; t_1, t_2, t_3, \dots, t_n) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; \tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n) \quad (4.5)$$

Se o processo tem todas as funções densidade de probabilidade de ordem  $k$  ( $k < n$ ) independentes do tempo, o processo é estacionário de ordem  $k$ . Em função disso, existem várias classes de estacionaridade, porém o processo em estudo deverá ser ergódico, isto é, além de possuir a propriedade de estacionaridade, caracterizar-se-á por apresentar a média temporal de qualquer função amostra igual à média estatística do conjunto de funções amostras, ou seja:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot dt = \int_{-t_0}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx \quad (4.6)$$

isto é, a média estatística pode ser substituída pela média temporal. A média é um dos parâmetros que caracteriza processos aleatórios.

Em processos aleatórios sabe-se que a densidade espectral de potência, pode ser expressa pela função de autocorrelação, que é um parâmetro de 2ª ordem, dada por [Apêndice B]:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \overline{x_1 x_2} = \int_{-t_0}^{\infty} \int_{-t_0}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f(x_1, x_2; t_1, t_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \quad (4.7)$$

A função de autocorrelação, que é a média do produto de duas variáveis aleatórias, também pode ser expressa em termos da média temporal se o processo for ergódico [2]:

$$R_{xx}(\tau) = \overline{x(t) \cdot x(t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t + \tau) \cdot dt \quad (4.8)$$

Vê-se das equações (4.6) e (4.8) que, para processos ergódicos, a obtenção da média é mais simples, pois independe da função densidade de probabilidade ( $f(x)$ ).

O processo ergódico é um modelo idealizado do processo aleatório, pois nenhum processo físico apresentará os mesmos parâmetros estatísticos durante longos períodos de observação.

O sinal do sistema de potência pode ter um comportamento ergódico durante alguns ciclos, mas certamente não o terá em longos períodos de tempo. Daí a necessidade de restringir a validade dos resultados obtidos ao período de observação ou medição utilizado. Logo, a condição de estacionariedade do processo só será necessária para a obtenção do espectro de potência de um curto período de observação, que será chamado de intervalo de aquisição ( $T_a$ ).

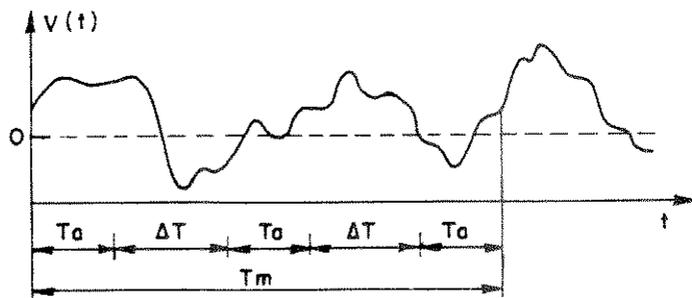


FIGURA 4.1

$T_m$  - Período de observação ou medição

$T_a$  - Intervalo de aquisição do sinal

$\Delta T$  - Intervalo entre duas medições consecutivas

A análise de sucessivos intervalos de aquisição do processo aleatório irá exigir um tratamento estatístico dos diferentes resultados obtidos,

superando assim a restrição de estacionaridade para longos períodos de observação. Este tratamento é apresentado com mais detalhes na seção 4.10.

#### 4.5 DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA

A densidade espectral de potência para um sinal aleatório é definida da seguinte forma [2]:

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X_T(\omega) \cdot X_T(-\omega)}{T} \quad (4.9)$$

onde  $|X_T(\omega)|$  é o espectro de amplitude do sinal  $x(t)$ , limitado no intervalo  $T$ .

Considerando o sinal aleatório  $x(t)$  discretizado, com  $N$  amostras, a expressão acima (4.9) passa a ser:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{N \cdot T_a} \overline{\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\omega n} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot e^{j\omega m}} \quad (4.10)$$

Rearranjando as operações de somatório e média, a equação 4.10 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{N \cdot T_a} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \overline{x[n] \cdot x[m]} \cdot e^{-j\omega(n-m)} \quad (4.11)$$

$\overline{x[n] \cdot x[m]}$  corresponde à função de autocorrelação discreta  $R_{xx}[n,m]$  expressa por:

$$R_{xx}[n,m] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x[n] \cdot x[m] \cdot f_{nm}[n,m] \quad (4.12)$$

onde  $f_{nm}[n,m]$  é a função densidade de probabilidade conjunta do processo.

## 4.6 MÉTODO PARA CALCULAR A DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA

A obtenção de  $S_{xx}(\omega)$  a partir da equação 4.11, requer o conhecimento da função densidade de probabilidade conjunta do processo. Como esta função é de difícil obtenção, para processos aleatórios quaisquer, será assumido que o processo é ergódico no intervalo de aquisição  $T_a$ , simplificando o cálculo de  $S_{xx}(\omega)$ , substituindo a operação de média estatística por média temporal, ou seja:

$$\bar{x} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n].f[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \quad (4.13)$$

Nestas condições o cálculo de  $S_{xx}(\omega)$  pode ser realizado a partir da própria definição (equação 4.9), colocada na forma discreta:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{N \cdot t_a} \overline{\left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n].e^{-j\omega n} \right|^2} \quad (4.14)$$

## 4.7 ESTIMAÇÃO DA DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA - PERIODOGRAMA

Considerando  $x[n]$  um processo ergódico, e ignorando inicialmente a operação de média, obtemos um estimador para  $S_{xx}(\omega)$ , dado por [1]:

$$\hat{S}_{xx}(\omega) = \frac{1}{N \cdot t_a} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n].e^{-j\omega n t_a} \right|^2 \quad (4.15)$$

Este estimador é denominado periodograma, e representa uma das técnicas clássicas para estimação da densidade espectral de potência.

Devido à operação de média ter sido descartada em 4.14 o estimador  $\hat{S}_{xx}(\omega)$  é instável, pois apresenta uma variância que não diminui à medida que o número de amostras de  $x[n]$  cresce, levando o periodograma a apresentar uma estimativa pobre do espectro de potência. Para contornar este problema foram propostas modificações no método do periodograma que, diminuindo a variância, tornam a forma espectral mais confiável [1].

## 4.8 TÉCNICA DE SUAVIZAÇÃO ESPECTRAL

Existem algumas técnicas, que empregando a operação de média simples no periodograma, tornam a estimativa espectral resultante mais estável. Neste trabalho foi aplicada a técnica de Welch, por apresentar menor variância quando comparada com outras técnicas (Daniel e Bartlett) [1].

Welch propõe um método de periodograma modificado, que consiste em dividir a sequência original  $x[n]$ , de tamanho  $N$ , em  $P$  segmentos de comprimento  $N_s$ , multiplicando cada segmento por uma função janela discretizada  $w[n]$  (Hamming, Blackman, Hanning ou outras), a fim de diminuir os lóbulos laterais de cada segmento causado pelo truncamento. O método ainda propõe a sobreposição dos segmentos adjacentes, através do seu deslocamento de  $N_d$  amostras ( $N_d < N_s$ ), para diminuir a perda de informação do sinal na região truncada. Assim tem-se:

$$x^{(p)}[n] = w[n] \cdot x[n + pN_d] \quad , \quad 0 \leq n \leq N_s - 1 \quad (4.16)$$

$p$  varia de 0 a  $P-1$ , onde  $P$  é dado por:

$$P = \text{Inteiro} \left[ \frac{N - N_s}{N_d} + 1 \right] = \text{Número de segmentos} \quad (4.17)$$

A densidade espectral de potência de cada segmento é calculada a partir de:

$$S_{xx}^{(p)}(\omega) = \frac{1}{U \cdot N_s \cdot T_a} |X^{(p)}(\omega)|^2 \quad (4.18)$$

onde:

$$X^{(p)}(\omega) = \sum_{n=0}^{N_s-1} x^{(p)}[n] e^{-j\omega n} \quad (4.19)$$

$$U = \sum_{n=0}^{N_s-1} w^2[n] \quad (4.20)$$

O fator  $U$  é a energia da janela e o periodograma é dividido por este fator para que esta energia não afete o valor estimado.

Assim a expressão do periodograma médio resultante para os P segmentos é dado por:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} S_{xx}^{(p)}(\omega) \quad (4.21)$$

Apesar da diminuição da variância, que alcança um valor ótimo em torno de 50% de sobreposição entre os segmentos, esta técnica apresenta uma desvantagem que é a perda de resolução espectral  $\Delta f$ , ao reduzir o número de amostras processadas pela FFT, pois  $\Delta f$  é dada por:

$$\Delta f = \frac{1}{N_s \cdot t_a} \quad (4.22)$$

onde:  $N_s$  - Número de amostras processadas ( $N_s \leq N$ )

$t_a$  - Intervalo de amostragem

Outro fator de diminuição da resolução é o alargamento do lóbulo principal da janela aplicada, introduzindo linhas espectrais laterais em torno das frequências presentes.

Deve-se ainda comentar, que a aplicação da técnica de Welch produz perda da informação de fase das harmônicas no processamento das amostras pela FFT, devido à aplicação de janelamento, que introduz deslocamento de fase diferente para cada frequência, e também devido à operação de sobreposição entre segmentos sem levar em conta as respectivas fases. Além disso o periodograma utiliza apenas a informação de magnitude do espectro.

#### 4.9 - IMPLEMENTAÇÃO DO PERIODOGRAMA DE WELCH

Para implementar o periodograma de Welch, deve-se determinar dois parâmetros, a saber:

- 1- A frequência de amostragem para discretização do sinal;
- 2- O número de amostras para o cálculo da TDF.

A taxa ou frequência de amostragem ( $f_a$ ), é determinada a partir da maior frequência do sinal da rede elétrica, que corresponde a harmônica 50, ou seja, 3kHz. Pelo critério de Nyquist  $f_a$  deve ser igual ou maior a duas vezes  $f_{max}$ , então:

$$f_{max} = 3\text{kHz} \quad (4.23)$$

$$f_a \geq 2.f_{max} \quad (4.24)$$

onde: 
$$\Delta t \leq \frac{1}{2.f_{max}} = 166.67 \mu\text{s} \quad (4.25)$$

$\Delta t$  é o intervalo de amostragem, e o conversor A/D utilizado deve apresentar um tempo de conversão menor que este intervalo.

O intervalo de aquisição do sinal ( $T_a$ ), deve ser, no mínimo, igual ao período da onda fundamental (60 Hz):

$$T = \frac{1}{60 \text{ Hz}} = 16.67 \text{ ms} \quad (4.26)$$

Com os valores de  $T$  e  $\Delta t$ , calcula-se o número de amostras do sinal:

$$N_a \geq \frac{T}{\Delta t} = 100 \quad (4.27)$$

No programa desenvolvido, aplica-se um algoritmo FFT radix 2 [3], que requer para o processamento um número de amostras igual à potência inteira de 2. Logo o valor de  $N_a$  é a potência de 2 mais próxima de 100, diminuindo o intervalo de amostragem.

$$N_a = 128 \quad (4.28)$$

$$T = 16.67 \text{ ms} \quad (4.29)$$

$$\Delta t = \frac{T}{N_a} = 130.23 \mu\text{s} \quad (4.30)$$

A partir dos valores de  $N_a$  e  $\Delta t$ , obtemos a resolução em frequência  $\Delta f$ , que corresponde a distância entre as linhas espectrais, expressas por:

$$\Delta f = \frac{1}{N_a \cdot \Delta t} = 60 \text{ Hz} \quad (4.31)$$

Os valores de  $\Delta t$ ,  $N_a$  e  $\Delta f$  são limites para determinar o espectro de amplitude, e para testá-los foi calculado o espectro de um sinal, que é a soma de três senóides com frequência 60, 180, 300 Hz e amplitudes 1, 0.1 e 0.01 V de pico respectivamente. Também foi somado um ruído branco com amplitude máxima de 0.2 V. O número total de amostras  $N$  para o processamento é 2048, com segmentos  $N_s$  de 128 para a FFT e sobreposição de 64 amostras. Foi ainda aplicada uma janela discreta de Blackman em cada segmento do periodograma.

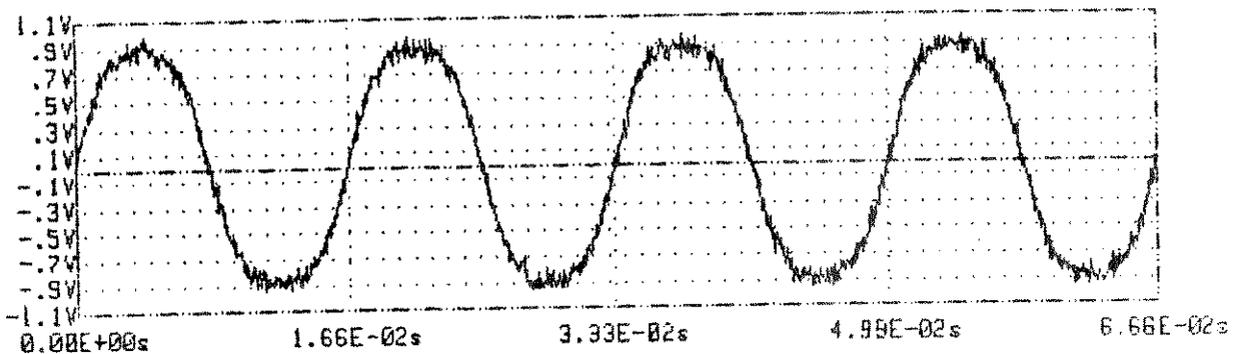


FIGURA 4.2 - Soma das senóides de 60, 180, 300 Hz e ruído

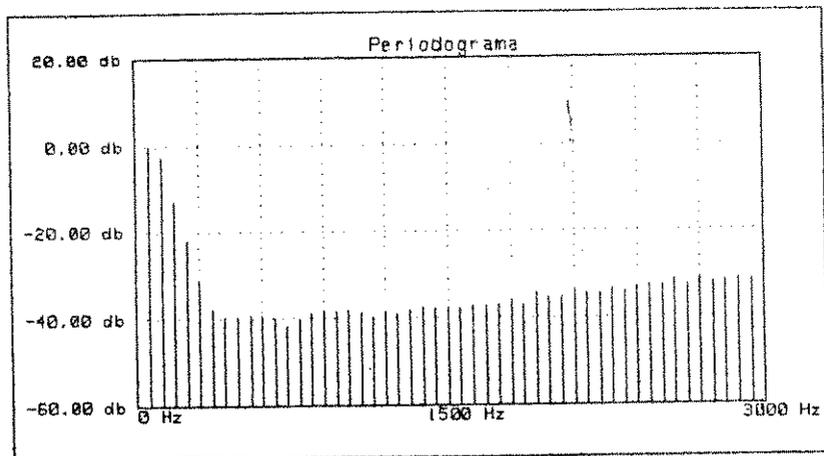
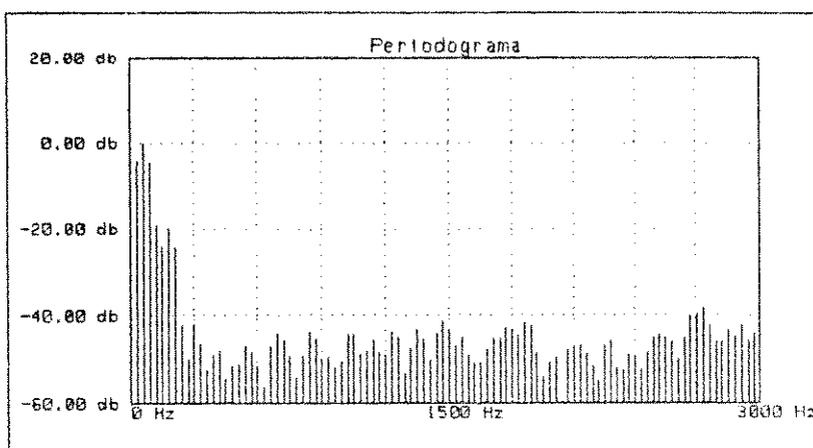


FIGURA 4.3 - Espectro calculado

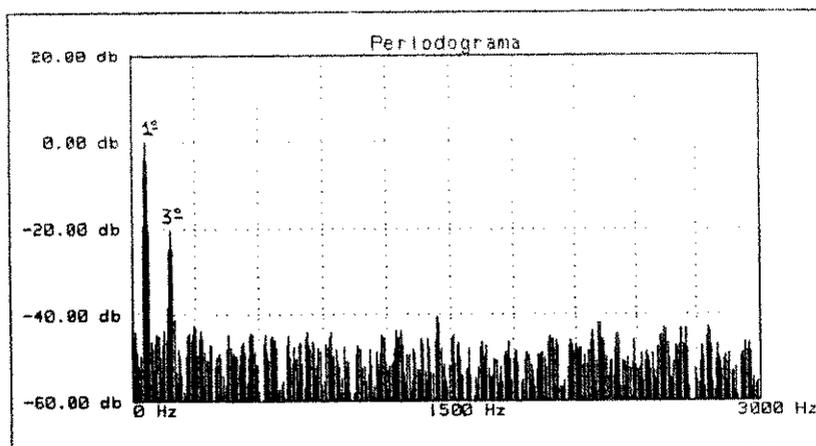
Observa-se na figura anterior que pouco pode ser afirmado sobre o conteúdo espectral do sinal. Isto ocorre porque o número de amostras para o cálculo da FFT é pequeno, resultando em uma resolução pobre do espectro. A mul-

tiplicação de cada segmento de 128 amostras por uma função janela discreta ( $w[n]$ ), corresponde, em frequência, à convolução da Transformada de Fourier do segmento com a Transformada da janela discreta  $W[kf]$ . Sendo o lóbulo principal de  $W[kf]$  muito largo, próximo da resolução mínima de 60 Hz, não é possível filtrar cada componente do sinal, causando baixa resolução do espectro obtido.

Para eliminar este problema deve-se aumentar o número de amostras  $N_s$ , aumentando assim a janela no tempo e diminuindo sua largura de banda em frequência (propriedade de escalonamento da Transformada de Fourier), ou seja, quanto maior o valor de  $N_s$  para o cálculo da FFT, melhor a resolução espectral. As figuras 4.4.a e 4.4.b mostram o espectro calculado para  $N = 1024$  amostras totais com  $N_s = 256$  ( $\Delta f = 30$  Hz) e  $N_s = 1024$  ( $\Delta f = 7.5$  Hz) que se aproximam do espectro teórico.



(a) - Espectro do sinal a partir da FFT de 256 amostras

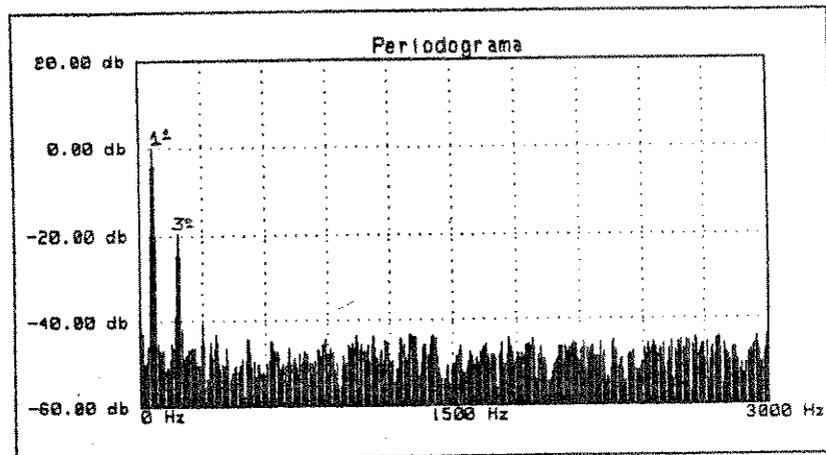


(b) - Espectro do sinal a partir da FFT de 1024 amostras

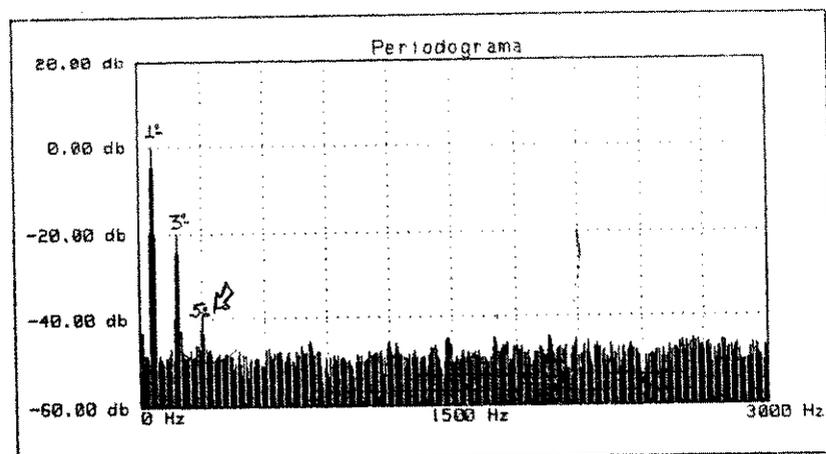
FIGURA 4.4

A variação dos parâmetros  $NS$ ,  $\Delta t$  e  $N$  afetam o resultado espectral de maneiras diversas. Aumentando o comprimento do segmento de amostras, melhora-se a resolução e aumenta o tempo de processamento da FFT, o intervalo de amostragem determina a máxima frequência que pode ser calculada e o aumento no número total de amostras melhora o periodograma.

Apesar da boa resolução espectral observada em 4.4.b, deve-se notar que a presença do sinal de 300 Hz é praticamente mascarada pelo ruído presente devido à sua baixa amplitude. As figuras 4.5.a e 4.5.b apresentam os resultados da aplicação da técnica de Welch para, respectivamente, 3 e 7 FFT's de 1024 amostras. Nota-se que à medida que aumenta o número de segmentos para o processamento de Welch, o espectro do ruído torna-se mais plano (menor dispersão), evidenciando a presença do sinal de 300 Hz.



(a) - Espectro obtido a partir do Welch de 3 FFT's de 1024 amostras



(b) - Espectro obtido a partir do Welch de 7 FFT's de 1024 amostras

FIGURA 4.5

## 4.10 - APRESENTAÇÃO DOS DADOS ESTATÍSTICOS

A partir da densidade espectral de potência do sinal de tensão ou corrente, obtida através do periodograma de Welch, pode-se extrair o valor estimado da amplitude de cada harmônica contida no sinal amostrado.

A estimativa raramente corresponde ao valor verdadeiro, porém é uma boa aproximação do mesmo. Esta aproximação será tanto melhor quanto maior for o número de periodogramas para o cálculo da amplitude média no período de aquisição  $T_a$ . Como, em função das características dinâmicas das fontes harmônicas no sistema de potência, não é possível garantir a estacionariedade do sinal em um intervalo de tempo grande, é necessário repetir as medições ao longo do tempo.

Considerando que um periodograma médio é obtido em um intervalo de aquisição de alguns ciclos de 60 Hz, poderá obter-se vários periodogramas por minuto, dependendo da rapidez do processamento.

Sendo o ciclo de operação de uma carga típica (forno de arco) de 1 hora, teremos um grande número de periodogramas para analisar todo o processo. Isto representa uma enorme quantidade de informações que precisam ser adequadamente compactadas, eliminando-se dados redundantes ou irrelevantes. No item seguinte são descritas algumas técnicas para realizar esta análise de longos períodos de observação ou medição  $T_m$ .

### 4.10.1 HISTOGRAMA DE AMPLITUDES

Uma vez calculados diversos periodogramas para um determinado período de medição, pode-se construir um histograma de amplitudes para cada harmônica. O histograma é obtido através da classificação das amplitudes segundo níveis de discretização previamente definidos. Seja o conjunto de amplitudes obtidas para uma determinada harmônica dado pela seqüência  $V_h(t)$ :

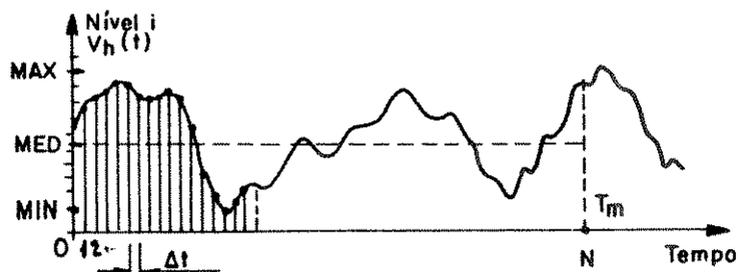


FIGURA 4.6

A classificação de  $V_h(t)$  por níveis resulta em histograma de distribuição da seguinte forma:

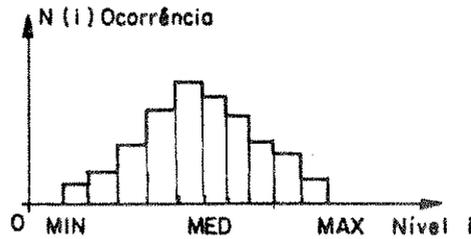


FIGURA 4.7

Cada intervalo do histograma representa o número de vezes  $N(i)$  que a amplitude  $V_h(t)$  foi detectada no respectivo nível de discretização  $i$ , devendo portanto a soma igualar-se ao número total de observações  $N_{med}$ , ou seja:

$$N_{med} = \sum_i N(i) \quad (4.32)$$

#### 4.10.2 OBTENÇÃO DA MÉDIA E DESVIO PADRÃO

A partir do histograma, representação gráfica do processo aleatório, pode-se extrair algumas medidas características, que são utilizadas para a comparação de dois ou mais grupos de dados deste processo. Há várias medidas características que podem fornecer informações compactas sobre um conjunto de dados estatísticos e, em geral, são divididas em dois grupos a saber [21]:

- a - Medidas de tendência central ( média aritmética, média geométrica, etc );
- b - Medidas de dispersão (desvio padrão, variância, quartil, etc).

Neste estudo as medidas utilizadas foram a média ponderada ( $\mu$ ) e o desvio padrão ponderado ( $\sigma$ ), dados pelas seguintes expressões:

$$\mu = \frac{1}{N_{med}} \sum_{i=1}^{\max} N(i) \cdot \overline{V_h}(i) \quad (4.33)$$

$$\sigma = \left( \frac{1}{N_{med}} \sum_{i=1}^{\max} N(i) \cdot \overline{V_h}^2(i) - N_{med} \cdot \mu^2 \right)^{1/2} \quad (4.34)$$

onde:  $\overline{V_h}(i)$  é o valor médio do intervalo  $i$  da classificação de  $V_h(t)$ .

$N(i)$  é o fator de ponderação de cada intervalo  $i$ .

### 4.10.3 FUNÇÃO CUMULATIVA

Essa função é construída a partir do somatório dos valores no histograma, normalizados pelo número de observações, obtendo-se:

$$F_c(i) = \frac{1}{N_{med}} \sum_{j=1}^i N(j) \quad (4.35)$$

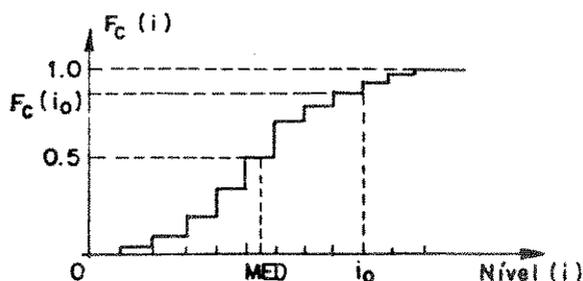


FIGURA 4.8

Uma vez que o histograma representa a distribuição da amplitude por níveis, a curva  $F_c(i)$  pode ser interpretada como uma função de probabilidade cumulativa  $F(x)$  (Apêndice A), onde se tem, por exemplo:

$$F_c(i_0) = P(i \leq i_0) \quad (4.36)$$

ou seja, o gráfico da figura (4.8) indica a probabilidade de que  $V_h(t)$  ocorra em nível menor ou igual a um dado nível  $i_0$ . A função complementar de  $F_c(i)$  é dada por:

$$F_{cc}(i) = 1 - F_c(i) \quad (4.37)$$

representando a probabilidade de que  $V_h(t)$  ultrapasse um dado nível  $i = i_0$ :

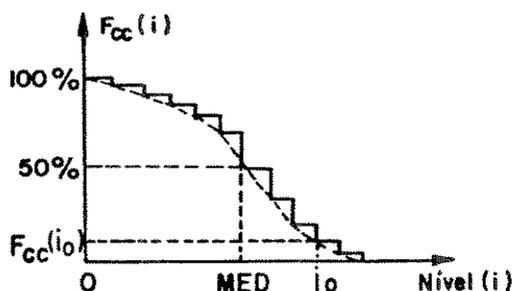


FIGURA 4.9

#### 4.10.4 CURVA DE DURAÇÃO DA VIOLAÇÃO

Sendo a aquisição do sinal feita em intervalos de tempo  $T_a$ , a curva da função complementar (figura 4.9) pode ser interpretada como uma curva de duração de violação por nível. O gráfico  $F_{cc}(i)$  informa que para  $i = i_0$ , teremos:

$$F_{cc}(i_0) = 1 - P(i \leq i_0) = 1 - \sum_{i=1}^{i_0} \frac{N(i)}{N_{med}} = 1 - \sum_{i=1}^{i_0} \frac{N(i) \cdot T_a}{N_{med} \cdot T_a} \quad (4.38)$$

onde:  $N_{med} \cdot T_a$  - Tempo de medição efetiva

$\sum_{i=1}^{i_0} N(i) \cdot T_a$  - Intervalo de tempo em que  $V_h(i) \leq V_h(i_0)$

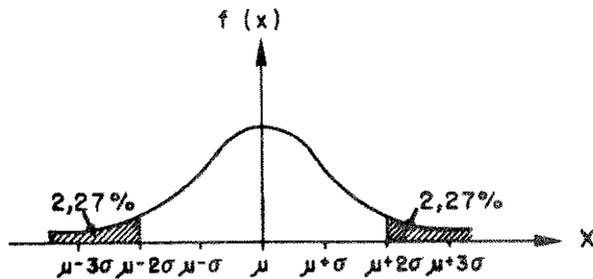
logo, o segundo membro de (4.38) representa a fração de tempo da medição efetiva em que o nível de  $V_h(i)$  foi maior que  $V_h(i_0)$ . Assim a curva  $F_{cc}(i)$  permite ler diretamente qual a fração do tempo de observação que um determinado nível  $i_0$  foi excedido.

O histograma e a função cumulativa são métodos que permitem avaliar a duração relativa de violação dos limites por harmônica, mas deve ser notado que o instante da ocorrência de cada evento é perdido. Esta informação só pode ser obtida da sequência de periodogramas calculados a partir do respectivo intervalo de medição.

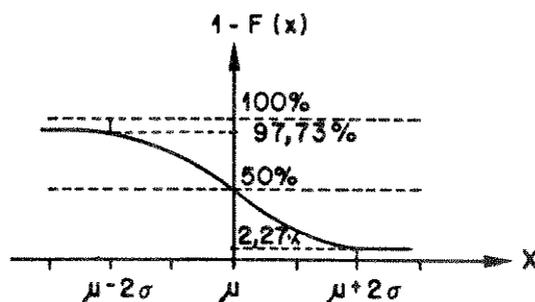
#### 4.10.5 CONTROLE ESTATÍSTICO DA VIOLAÇÃO DE LIMITES

Ao contrário da maioria dos processos de fabricação, onde a faixa de tolerância de uma variável aleatória se distribui simetricamente acima e abaixo do valor especificado (por exemplo  $\mu \pm k\sigma$ ), o problema das harmônicas apresenta uma faixa de aceitação unilateral ( $V_h(i) \leq \text{limite}$ ). Por essa razão recorre-se à função cumulativa ( $F(x)$ ) e não à função densidade ( $f(x)$ ), normalmente utilizada no controle bilateral.

Sabemos, no entanto, que as duas funções guardam uma relação de derivada ( $f(x) = dF(x)/dx$  - (Apêndice A)). Isto significa que podemos obter a correspondência entre pontos característicos nas duas curvas.



(a) - Função Densidade



(b) - Função Cumulativa Complementar

FIGURA 4.10

Assim, enquanto na função densidade  $f(x)$  os pontos  $\mu \pm 2\sigma$  delimitam o intervalo que contém 95,46% da área sob a curva, e que, portanto, excluem em cada extremidade 2,27% da área total, verifica-se que esses pontos na função complementar ( $1 - F(x)$ ) correspondem aos valores 97,73% e 2,27% para  $\mu - 2\sigma$  e  $\mu + 2\sigma$  respectivamente.

Como já foi observado anteriormente, a função complementar representa a curva de duração da violação por nível. Pode-se então assinalar os pontos da curva em função dos parâmetros estatísticos ( $\mu \pm k\sigma$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ) como sendo níveis de violação relativa (ao tempo efetivo de medição), por exemplo:

Nível	Violação Relativa
$\mu$	50,00%
$\mu + \sigma$	15,87%
$\mu + 2\sigma$	2,27%
$\mu + 3\sigma$	0,13%

A violação relativa permite estabelecer critérios mais flexíveis de monitoração dos níveis harmônicos, especialmente quando estes variam aleatoriamente. Em vez de se fixar um valor determinístico como limite a ser observado, pode-se estabelecer faixas hierarquizadas para decisão em função do tempo que esse limite foi violado. Sejam, por exemplo, as seguintes faixas de monitoração do limite:

- ACEITÁVEL - Se o limite estiver acima de  $\mu + 3\sigma$  (Violação < 0.13%)
- ALERTA - Se o limite estiver na faixa  $\mu + 2\sigma$  a  $\mu + 3\sigma$  (Violação < 2.27%)
- INACEITÁVEL - Se o limite estiver abaixo de  $\mu + 2\sigma$  (Violação > 2.27%)

onde:

- . ACEITÁVEL significa que não é necessária nenhuma providência para limitar a harmônica observada;
- . ALERTA significa que é conveniente prever meios para limitar a amplitude da harmônica em questão;
- . INACEITÁVEL significa que deverão ser tomadas providências imediatas para a redução do nível harmônico violado.

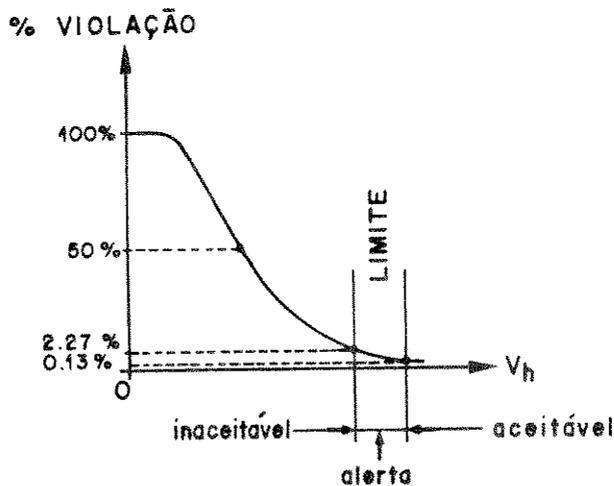


FIGURA 4.11 - Faixas de Decisão

A escolha das faixas mais convenientes é uma questão a ser pesquisada e verificada através de medições no campo. A sua vinculação com a média e desvio padrão, como proposto, tem a vantagem de se inserir na metodologia usual de controle de qualidade para processos aleatórios industriais.

## CAPÍTULO 5

### DESCRIÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS OBTIDOS

#### 5.1 INTRODUÇÃO

O processamento do sinal da rede elétrica, para obter e analisar o espectro de amplitudes descrito nos capítulos anteriores, é realizado em 6 etapas, a saber:

- 1- Amostragem do sinal através de conversor A/D durante  $T_a$  segundos ( $N$  amostras) e armazenamento dos valores em memória;
- 2- Aplicação de janelamento discreto a um segmento de  $N_s$  pontos do sinal amostrado;
- 3- Utilização da técnica do periodograma modificado de Welch e cálculo da TDF através da FFT para os segmentos, com deslocamento de  $N_d$  amostras;
- 4- Cálculo e armazenamento das linhas espectrais médias para o intervalo de tempo  $T_a$ ;
- 5- Repetição das etapas de 1 a 4 para um número pré-determinado de medições  $N_{med}$ ;
- 6- Construção de histogramas e funções cumulativas por harmônica, cálculo da média e desvio padrão da amplitude e apresentação da curva de violação para a seqüência das medições realizadas.

Evidentemente que o processamento do sinal elétrico requer sua medição através de circuitos transdutores, uma vez que o nível de tensão ou corrente precisa ser compatibilizado com a instrumentação de análise. Como neste trabalho o sinal analisado é a onda de tensão na rede de distribuição (110-220 V), optou-se por um transdutor do tipo divisor capacitivo de baixa potência, que reduz a tensão a um valor adequado, sem influir no espectro do sinal.

De acordo com as etapas descritas anteriormente, assumiu-se a ocorrência de variações da amplitude de cada harmônica, tratando a onda como um sinal aleatório e avaliou-se os resultados obtidos através de técnicas estatísticas.

No início da pesquisa, as 4 primeiras etapas foram implementadas utilizando o sistema de aquisição do Analisador de Cintilação ("FLICKERMETER"), desenvolvido na UNICAMP inicialmente através de projeto FAPESP e posteriormente de convênios com a CEMIG e ELETROPAULO. Mas devido à capacidade de memória limitada (64 Kbytes) e à baixa velocidade de processamento do aparelho, o projeto tornou-se inviável. Foi então utilizado um sistema de aquisição de dados (WAVEFORM RECORDER - HP/5183) em conjunto com o computador HP/VECTRA, com maior capacidade de memória e velocidade de processamento, tornando possível o carregamento e execução do programa de aquisição de dados, processamento de amostras, obtenção de dados estatísticos e apresentação dos resultados em tempo satisfatório.

Detalhes dos dois sistemas, algoritmos e a análise dos resultados obtidos são descritos a seguir.

## 5.2 - DESCRIÇÃO DOS SISTEMAS

### SISTEMA I - ANALISADOR DE HARMÔNICAS

Como dito, o objetivo inicial do trabalho era implementar um programa de análise harmônica no sistema Analisador de Cintilação, utilizando basicamente uma placa de conversão A/D (faixa dinâmica de 5 Volts) e um microcomputador de 8 bits. Como o nível de resolução do conversor ( $\cong 0.4\%$ ) era limitado para a faixa de amplitudes das harmônicas a analisar (da ordem de 0.1%), foram introduzidos um regulador automático de ganho para estabelecer um nível de referência fixo do sinal, um filtro do tipo "notch" de ordem 8, ou seja, 4 estágios similares ao da figura 5.2. para remover a frequência fundamental (60 Hz) e um amplificador de ganho fixo para ajustar o valor do sinal resultante, melhorando assim a sensibilidade do conversor. Na figura 5.1 apresenta-se um diagrama de blocos deste sistema.

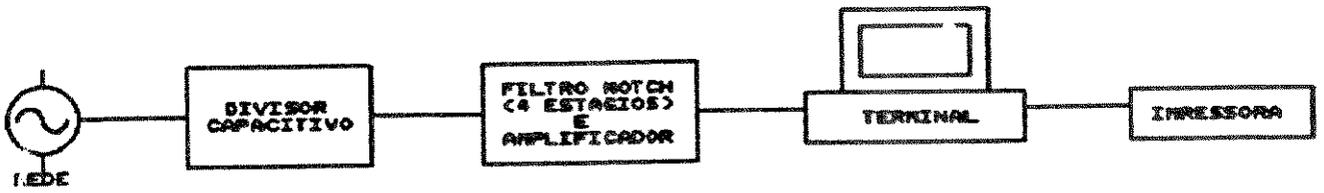


FIGURA 5.1 - Diagrama de Blocos do Sistema I

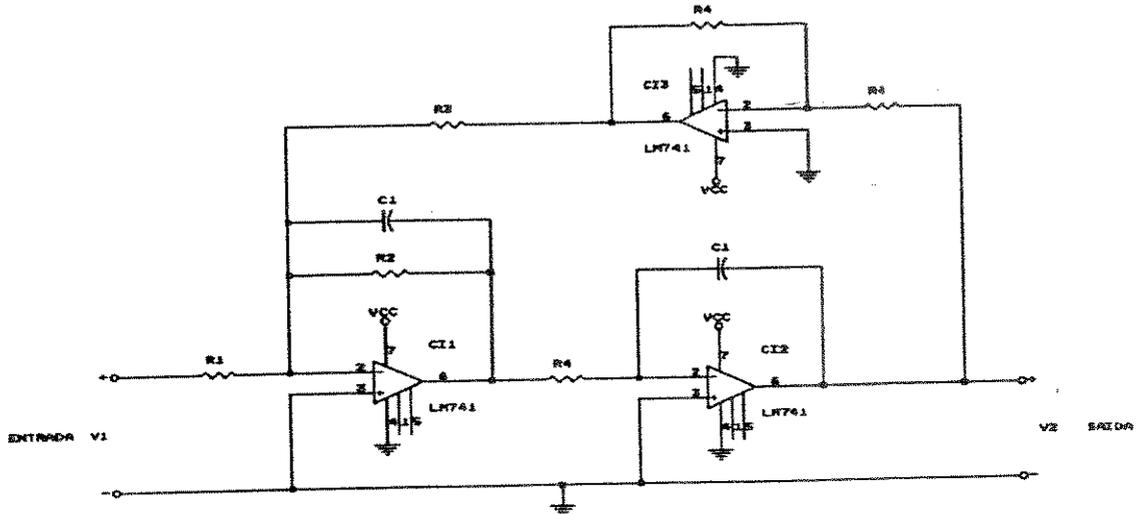


FIGURA 5.2 - Filtro Notch - 1 Estágio

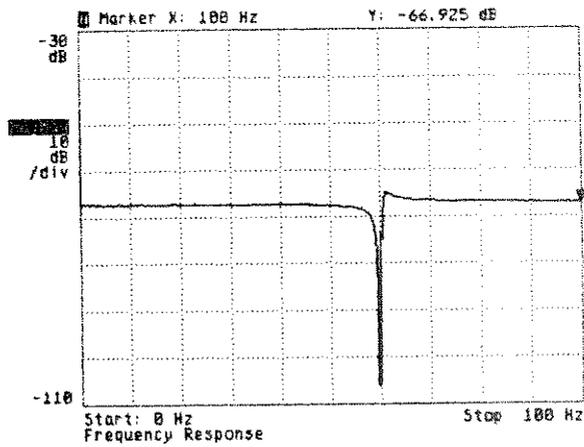


FIGURA 5.3 - Curva Característica do Filtro Notch

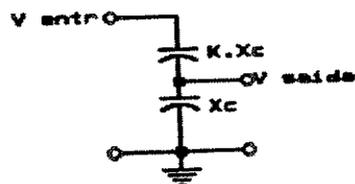


FIGURA 5.4 - Divisor Capacitivo

Um programa desenvolvido para o sistema calcula e apresenta o espectro de amplitudes, usando o periodograma de Welch com FFT de 256 amostras e intervalo de amostragem ( $t_a$ ) de  $154 \mu s$ , levando a uma resolução espectral de aproximadamente 25 Hz. O fluxograma básico do programa é mostrado na figura 5.5.

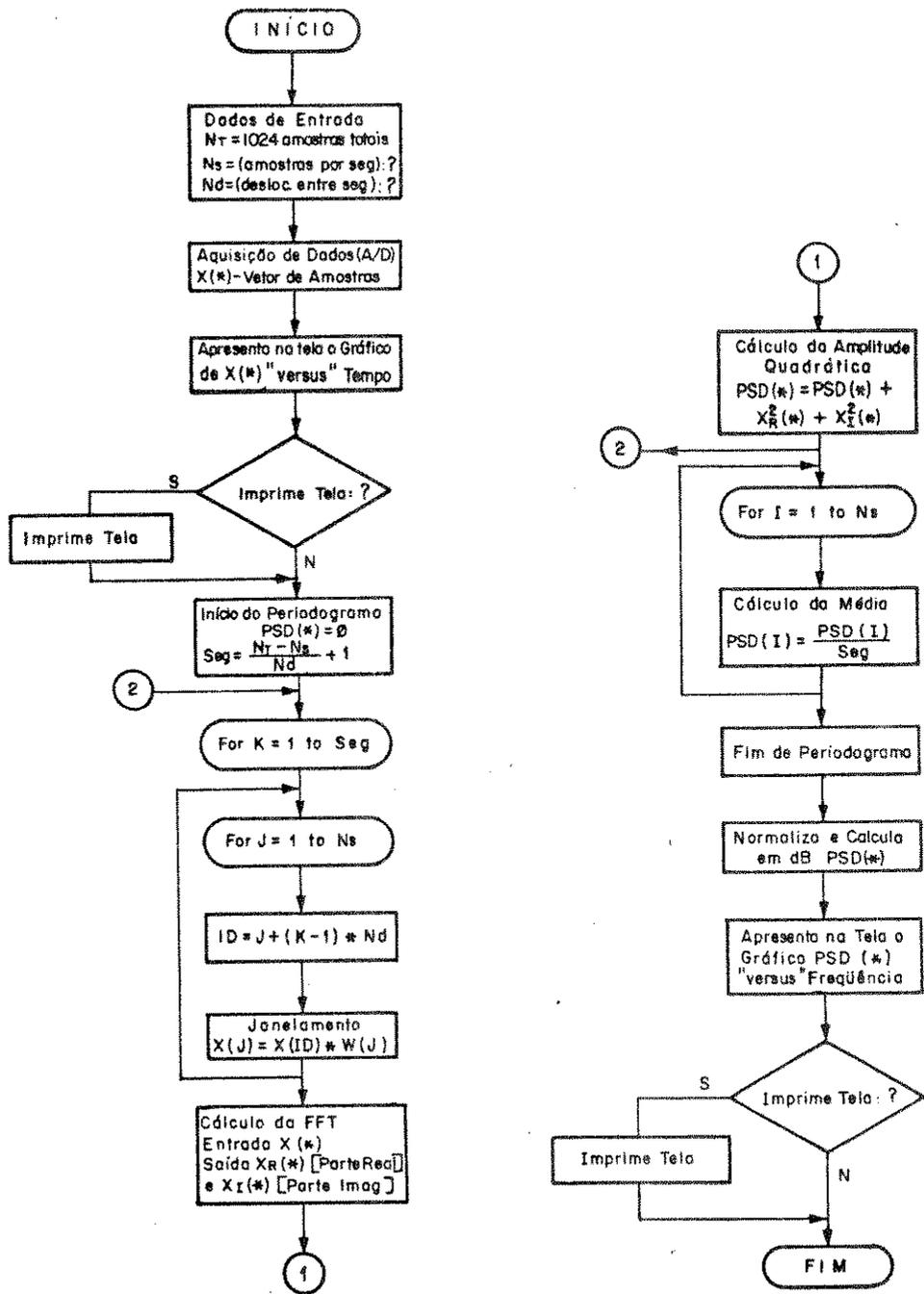


FIGURA 5.5

O teste do sistema foi feito injetando um sinal de tensão da rede de distribuição e sua forma de onda é mostrada na figura 5.6 (após a filtragem),

juntamente com seu espectro obtido entre 18:00 e 19:00 horas de um dia típico, calculado a partir de uma FFT de 256 amostras (figura 5.7). No espectro destacam-se as harmônicas de 5ª ( $\approx -30$  dB ou 3% da fundamental) e 7ª ordem ( $\approx -40$  dB ou 1% da fundamental). Também foi feito o periodograma de Welch, com 7 FFT's de 256 amostras de um total de 1024 (deslocamento de 128) e cujo resultado está na figura 5.8, mostrando um espectro suavizado e com nível de ruído alto no sinal, introduzido na rede pelo próprio sistema digital.

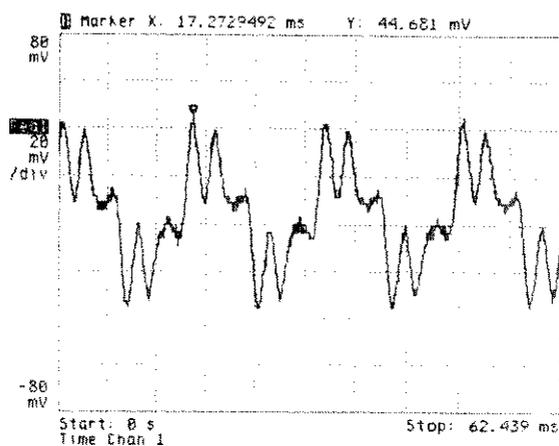


FIGURA 5.6 - Sinal Filtrado (Sem a Onda de 60 Hz)

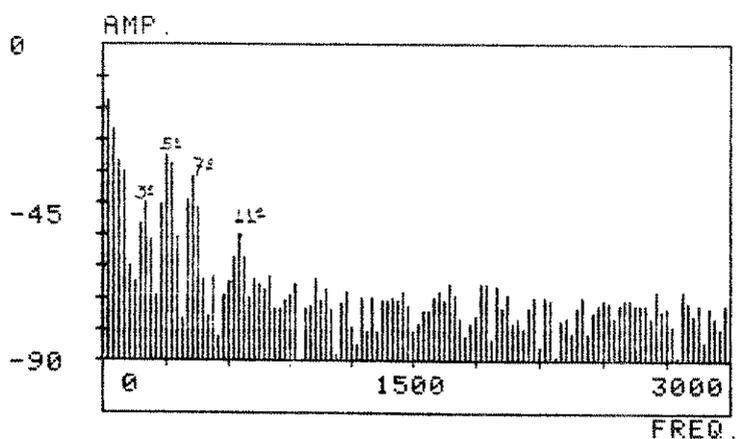


FIGURA 5.7 - Espectro do Sinal Filtrado

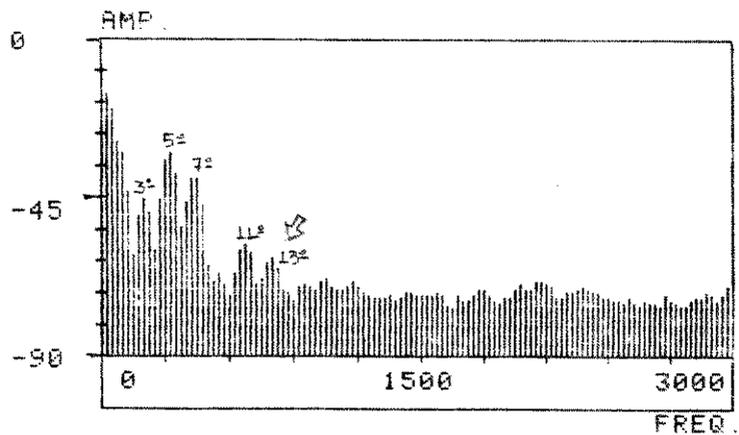


FIGURA 5.8 - Espectro do Sinal Filtrado Aplicando Welch

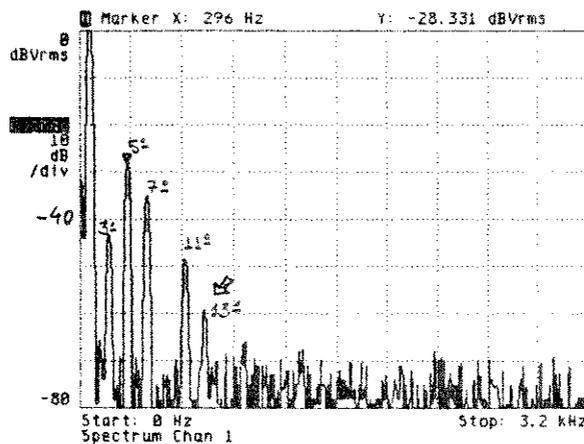


FIGURA 5.9 - Espectro Obtido do Sistema HP/35660A

Foi feita uma comparação entre os resultados do Sistema I e os resultados do Analisador Dinâmico - HP/35660A (figura 5.9), usado como padrão, que processou o sinal da rede no mesmo ponto, sem filtragem do 60 Hz. Nota-se que os espectros apresentam a mesma forma e valores muito próximos das linhas espectrais, revelando que o sistema implementado tem precisão e resolução aceitáveis.

A análise harmônica completa no sistema I, não pode ser feita por insuficiência de memória disponível para armazenar os resultados intermediários. Além disso, o sistema é demasiado lento para o processamento das amostras, levando quase 20 minutos para calcular o periodograma de Welch com 7 FFT's de 256 amostras.

Deve-se ainda observar que nos espectros obtidos há linhas espectrais significativas nas frequências em torno da fundamental, indicando que o filtro notch não está perfeitamente sintonizado em 60 Hz e apresenta atenuação insuficiente (figura 5.3). Esses problemas podem ser resolvidos, melhorando-se o projeto do filtro.

## SISTEMA II - SISTEMA DE ANÁLISE HARMÔNICA

O segundo sistema, onde foi implementado o programa de análise harmônica completo, é composto de um digitalizador de 2 canais com conversor A/D de 12 bits (HP/5183), controlado por um PC HP/VECTRA com capacidade de memória RAM de 1 Mbyte operando em 25 MHz (figura 5.10). A execução do programa é feita por processador de linguagem HP-Basic controlado pelo sistema operacional DOS.

Os resultados mostrados nos capítulos 3 e 4, bem como os que seguirão, foram obtidos por este sistema de análise.

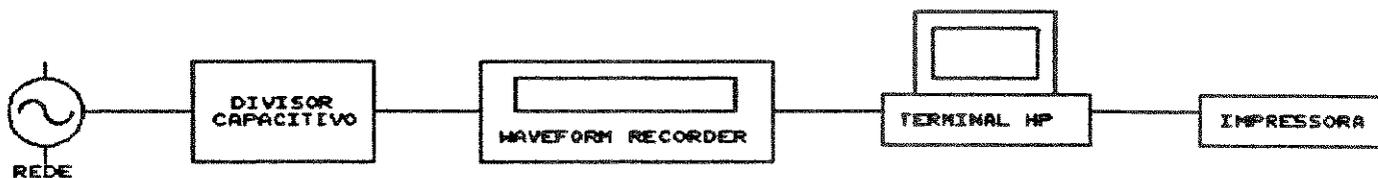


FIGURA 5.10 - Diagrama de Blocos do Sistema II

### 5.3 - PROGRAMA DE ANÁLISE HARMÔNICA

O programa de análise harmônica foi escrito em linguagem compatível com a instrumentação (HP-Basic) e inclui rotinas de aquisição de dados para o controle do conversor A/D, desenvolvidas pelo fabricante, e rotinas para calcular o periodograma de Welch aplicando o algoritmo FFT, radix 2, de dizimação no tempo [1], [3]. Os parâmetros de entrada para a execução do programa são os seguintes:

Nmed - Número de medições sequenciais desejadas

Ns - Número de amostras de cada segmento para o cálculo da TDF

Nd - Número de amostras sobrepostas - ( $Nd \leq Ns$ )

Após o processamento do periodograma relativo a cada medição, é calculada a amplitude por harmônica, cujo valor relativo à fundamental é guardado em memória e apresentado na tela em escala dB, juntamente com o valor do fator de distorção total de tensão (FDT). Completado o número de medições, os valores das amplitudes por harmônica são utilizados para a obtenção do histograma, função acumulativa, média e desvio padrão. O fluxograma básico deste programa é apresentado na figura 5.11.

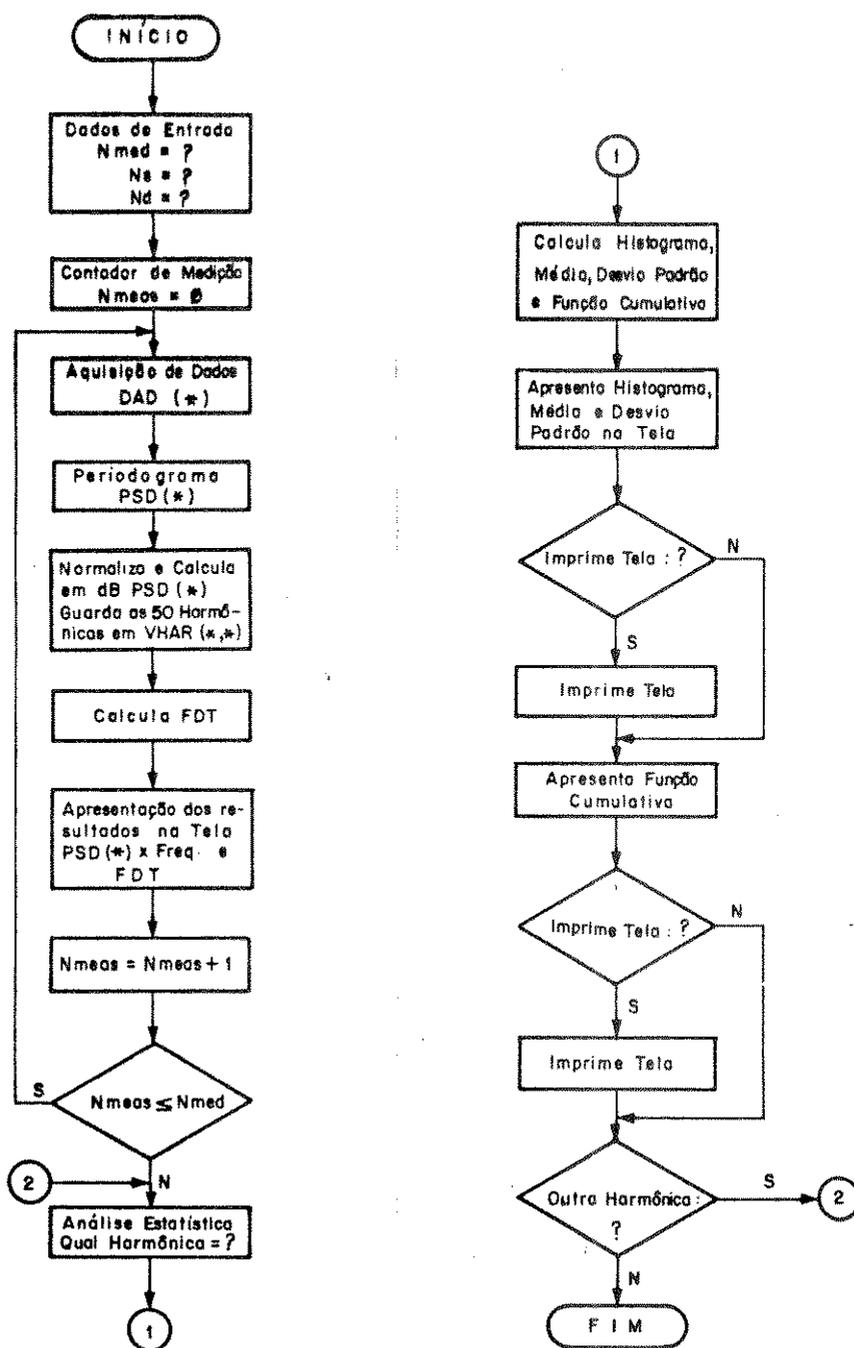


FIGURA 5.11

## 5.4 - RESULTADOS E ANÁLISE

No sistema HP, onde foi implementado o programa de análise harmônica completo, foram feitos testes preliminares para determinar os parâmetros para calibração do sistema de aquisição, que são a taxa de amostragem, o número de amostras totais a adquirir e o número de amostras para a FFT, que determina a resolução do espectro.

O sistema de aquisição de dados ( HP/5183 ) é programável para intervalos de amostragem entre 250ns e 4 segundos, variando em passos de 250ns. Para a análise, foi escolhido o intervalo entre amostras de  $65\mu\text{s}$ , com um número de 1024 amostras para processamento de FFT, o que representa uma resolução em frequência de aproximadamente 15 Hz. O número total de amostras escolhido para o sistema é 4096, adquirindo-se assim, para cada medição, aproximadamente 16 ciclos do sinal de 60 Hz.

Para as primeiras análises o ponto de medição foi a rede de distribuição de laboratório. Após alguns resultados, constatou-se pouca variação da amplitude das harmônicas e então optou-se por processar apenas uma FFT de 1024 pontos durante cada medição, diminuindo assim o tempo de processamento do periodograma. Foi aplicada a janela de Blackman, que apresenta uma queda dos lóbulos laterais de -60 dB, reduzindo o efeito "leakage".

Foram realizadas várias medições ao longo de um dia para acompanhar o comportamento do conteúdo harmônico presente na rede. As curvas obtidas apresentam o sinal medido (figura 5.12) e seu espectro entre horários determinados (figuras 5.13 a 5.17).

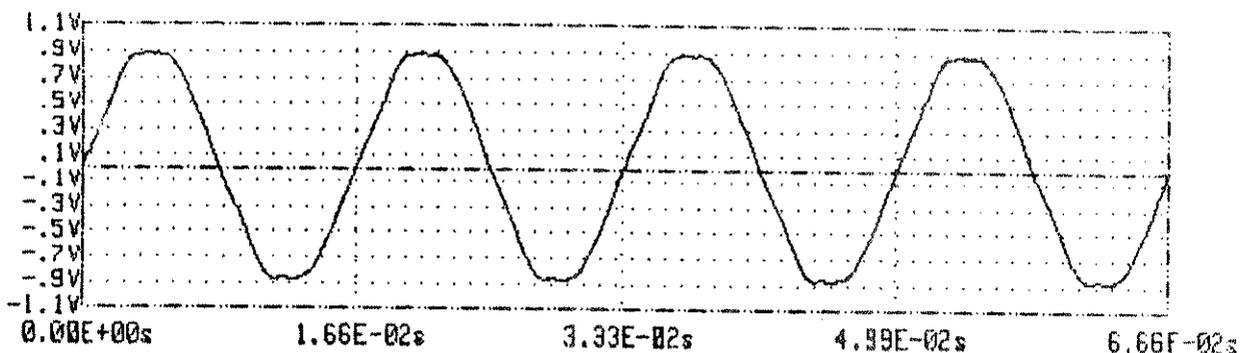


FIGURA 5.12 - Sinal da Rede de Distribuição

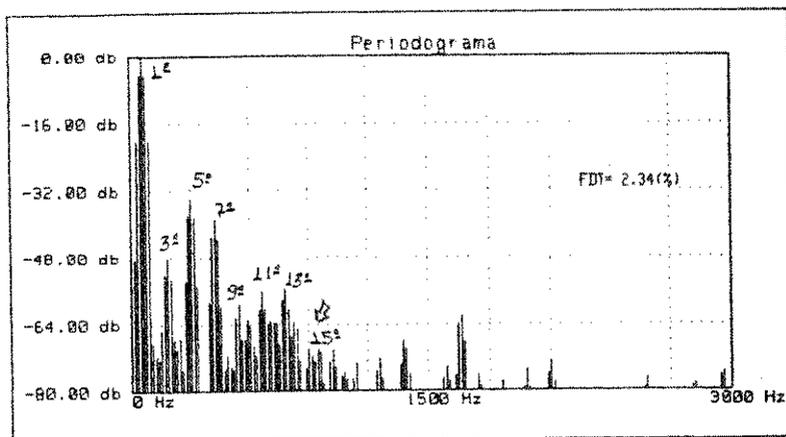


FIGURA 5.13 - Espectro - Horário de 9:00 às 11:00 Horas

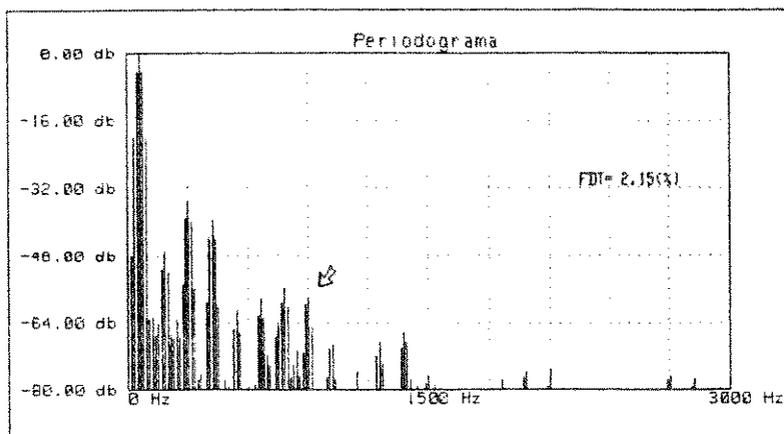


FIGURA 5.14 - Espectro - Horário de 12:00 às 14:00 Horas

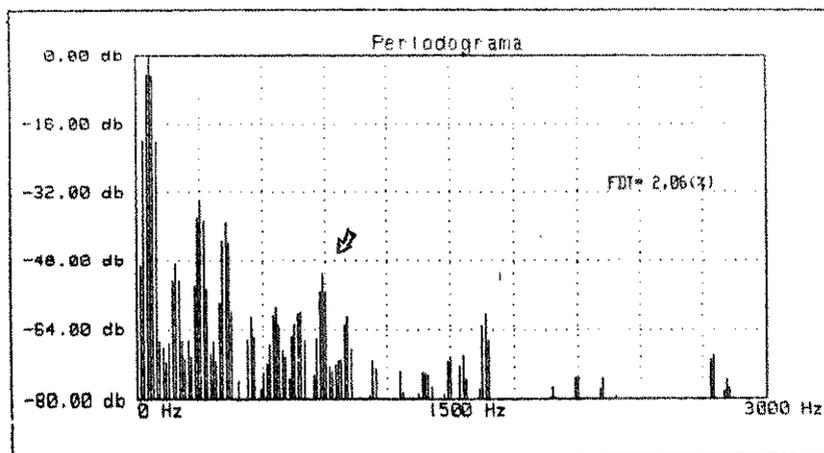


FIGURA 5.15 - Espectro - Horário de 14:00 às 16:00 Horas

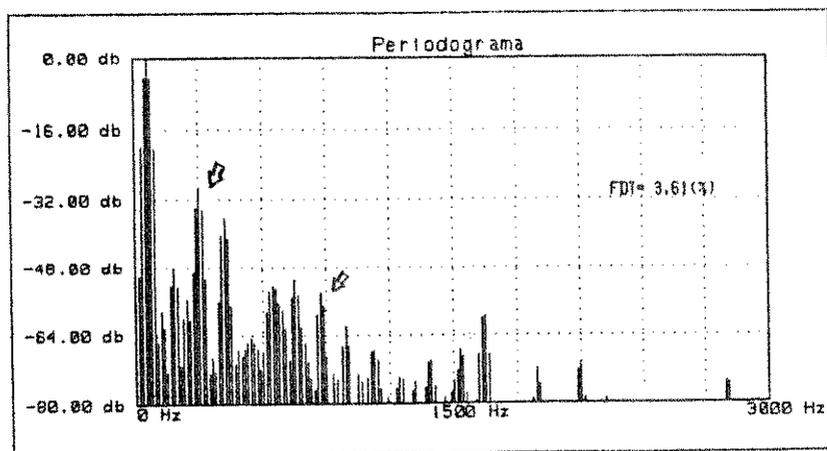


FIGURA 5.16 - Espectro - Horário de 18:00 às 19:00 Horas

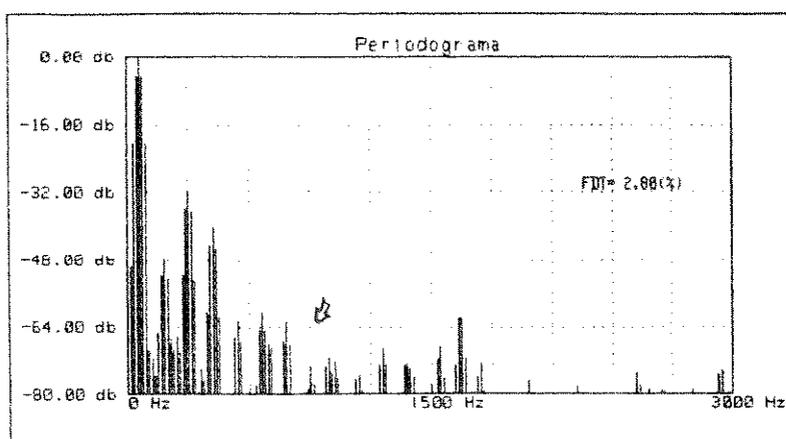


FIGURA 5.17 - Espectro - Horário de 19:00 às 21:00 Horas

Nestes espectros, destacam-se a presença das harmônicas de 3ª, 5ª e 7ª ordem e ocorre um aumento na amplitude de 5ª harmônica ( $\cong -30$  dB) entre 18:00 e 19:00 horas, provavelmente devido ao aumento de cargas com retificadores na rede de distribuição, como por exemplo, aparelhos de T.V.. Após este intervalo de tempo há uma diminuição da 5ª harmônica como mostrado na figura 5.17. Deve-se ainda observar um nível elevado de ruído em torno das harmônicas de 11ª, 13ª e 15ª ordem (660 Hz, 780 Hz e 900 Hz, respectivamente) nas figuras 5.13, 5.15 e 5.16. Isto pode ser atribuído à presença de cargas chaveadas na rede de distribuição nos horários em que foram obtidos os espectros.

Como a amplitude da 5ª harmônica destaca-se entre as demais, foi feito uma análise estatística do seu comportamento durante o intervalo em que se observou sua maior variação, ou seja, de 18:00 às 19:00 horas. Foram realizadas 50 medições, com intervalos de 1 minuto entre cada uma, resultando nos seguintes histograma e curva de violação:

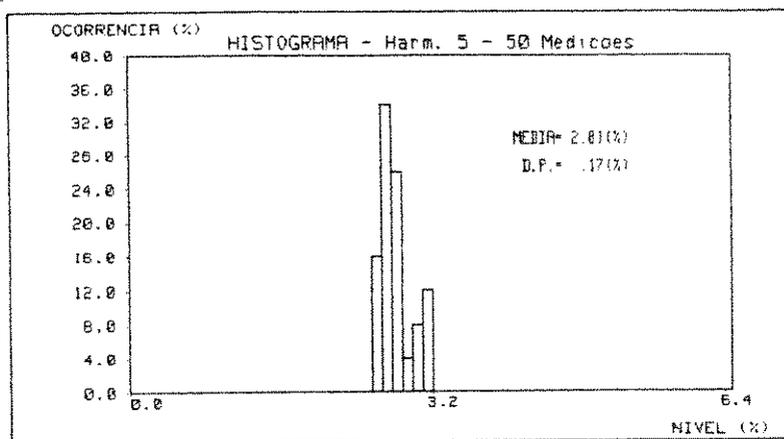


FIGURA - 5.18 - Histograma

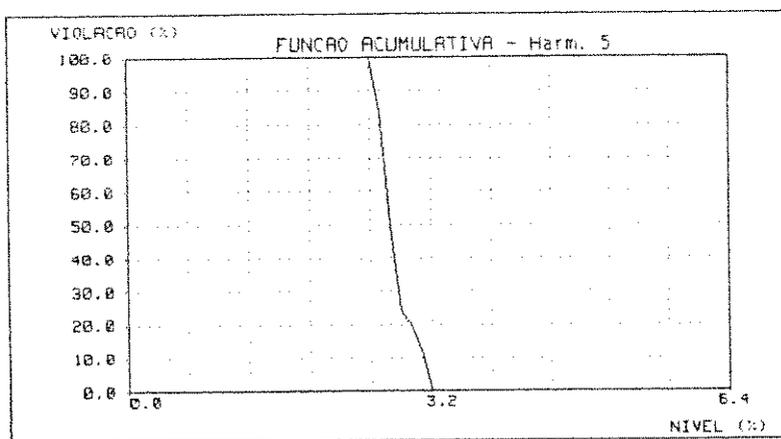


FIGURA - 5.19 - Curva de Violação

No histograma nota-se que a amplitude da 5ª harmônica chegou a um valor máximo de 3.2% da fundamental ( $\approx - 29.89$  dB) e em média 2.81% da fundamental ( $\approx - 31$  dB). Observa-se ainda que este histograma apresenta uma distribuição de níveis de amplitude diferente da gaussiana. Isto se deve basicamente a dois fatores que são o baixo número de medições e/ou a baixa quantidade de

fontes presentes no sistema. Constata-se pelos dois gráficos que não houve variação significativa da amplitude, nem violação de nível estabelecido por norma (4% da fundamental para harmônicas ímpares em redes com tensões menores que 69 kV ). O FDT observado também ficou sempre abaixo do limite de 5%.

## 5.5 COMPARAÇÃO DE RESULTADOS COM SISTEMA PADRÃO DE MEDIÇÃO

Neste item é apresentada uma comparação de espectros obtidos entre o Analisador Digital - HP/35660A (sistema padrão) e o Sistema II de Análise Harmônica, a fim de avaliar a precisão deste último. Foi obtido o espectro do sinal em um determinado ponto da rede, com os dois sistemas ligados simultaneamente entre os horários de 18:00 e 19:20, tendo os seguintes resultados:

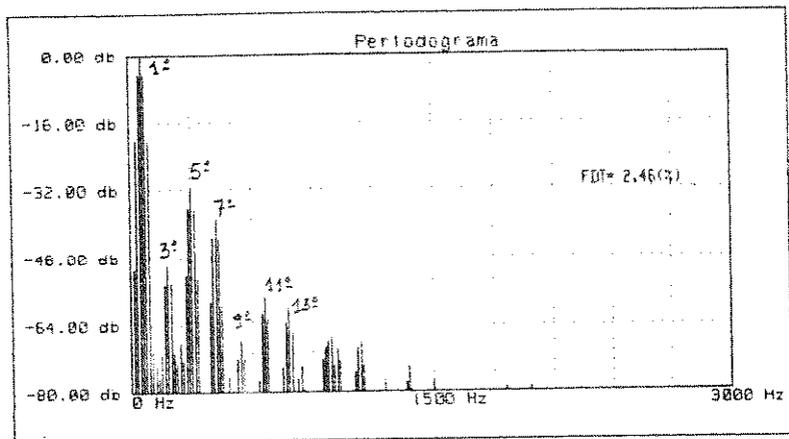


FIGURA - 5.20 - Espectro do sinal da rede de distribuição - Sistema II

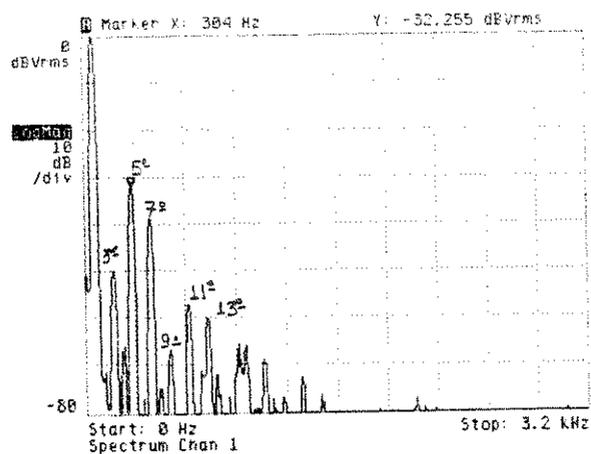


FIGURA - 5.21 - Espectro do sinal da rede de distribuição - Sistema HP/35660A

Na comparação das duas figuras nota-se a boa precisão da resposta espectral do sistema II.

## 5.6 OUTROS RESULTADOS

### a) MEDIÇÃO DIRETA NA REDE DE BAIXA TENSÃO (B. T.) DE LABORATÓRIO

Foram feitas medições durante 1 hora, entre os horários de 9:00 às 10:00 horas de um dia típico, obtendo-se os resultados apresentados nas figuras a seguir, não observando violação de nenhum limite. Os diversos histogramas resultantes mostram boa aproximação da distribuição normal, apesar da pouca variação em torno da média, validando a hipótese adotada de que o processo aleatório de geração de harmônicas pode ser considerado gaussiano.

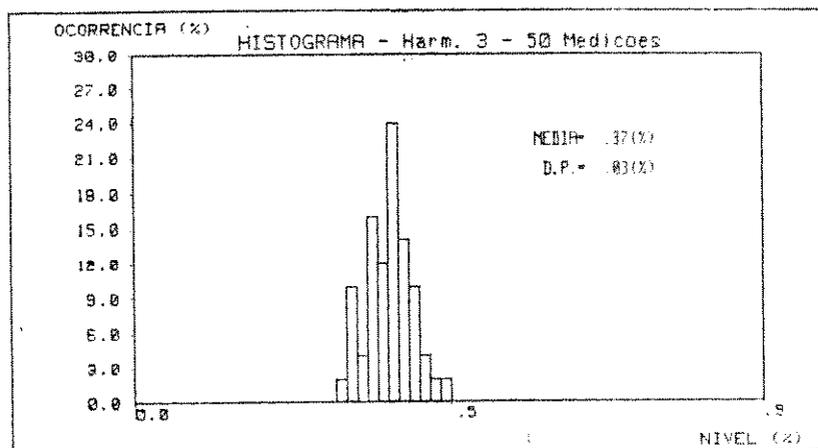


FIGURA 5.22 - Histograma correspondente à 3ª harmônica

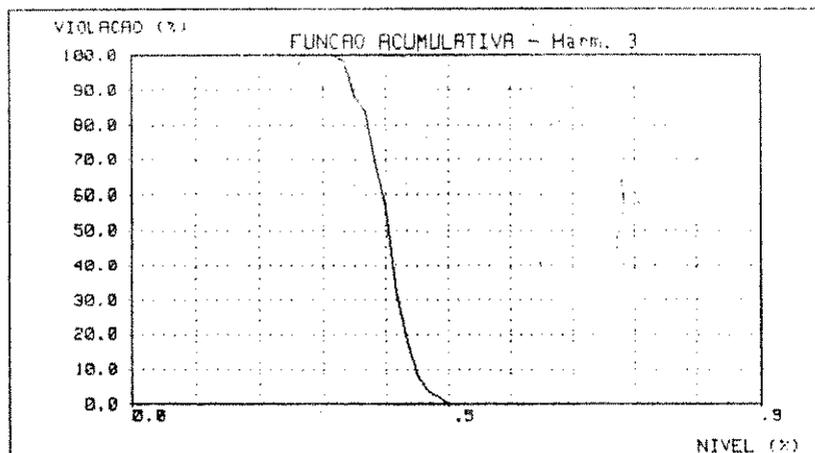


FIGURA 5.23 - Curva de Violação correspondente à 3ª harmônica

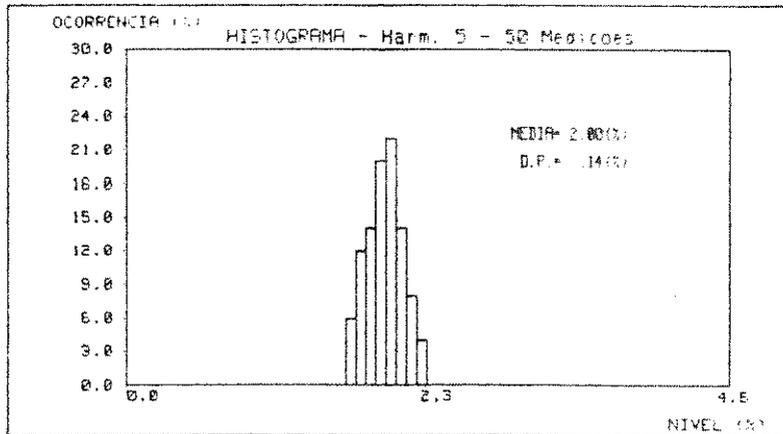


FIGURA 5.24 - Histograma correspondente à 5ª harmônica

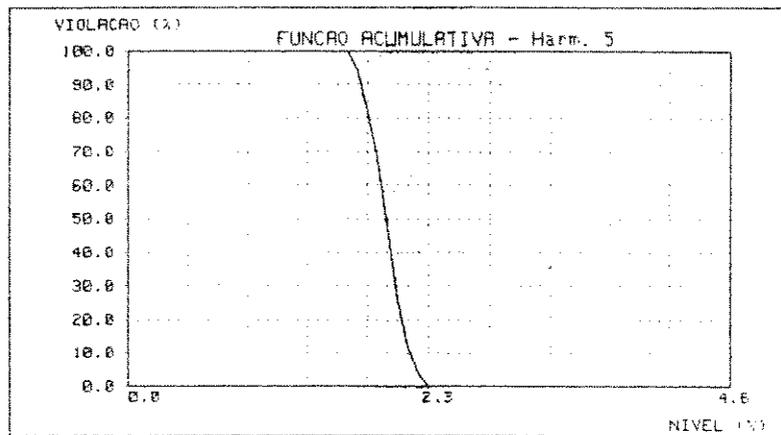


FIGURA 5.25 - Curva de Violação correspondente à 5ª harmônica

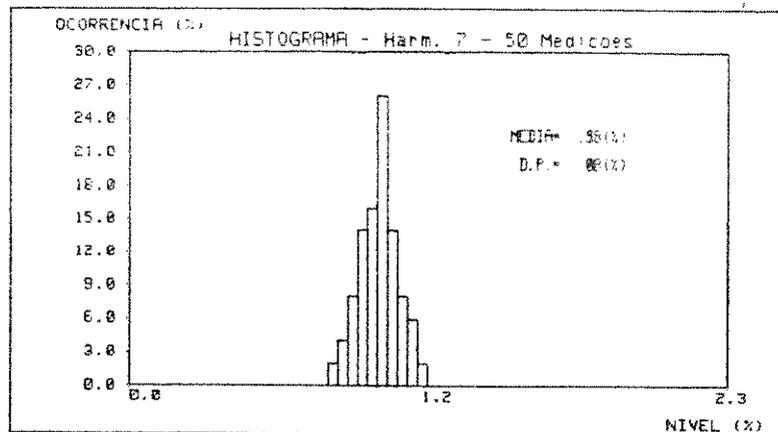


FIGURA 5.26 - Histograma correspondente à 7ª harmônica

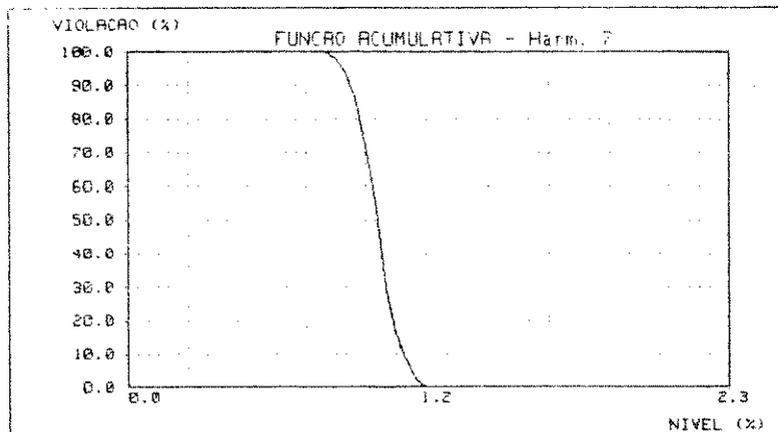


FIGURA 5.27 - Curva de Violação correspondente à 7ª harmônica

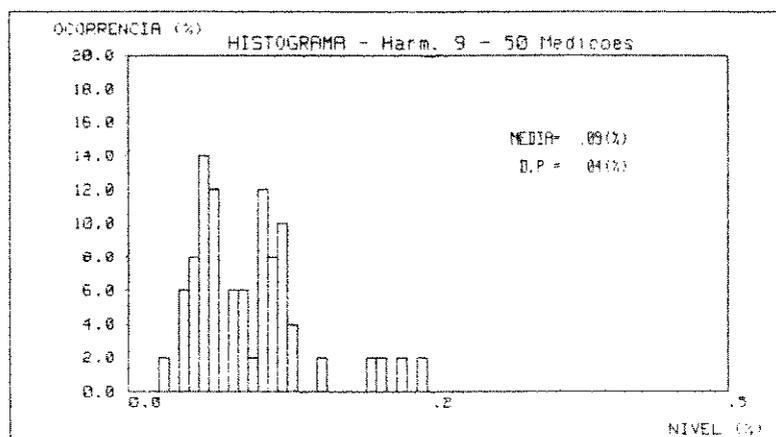


FIGURA 5.28 - Histograma correspondente à 9ª harmônica

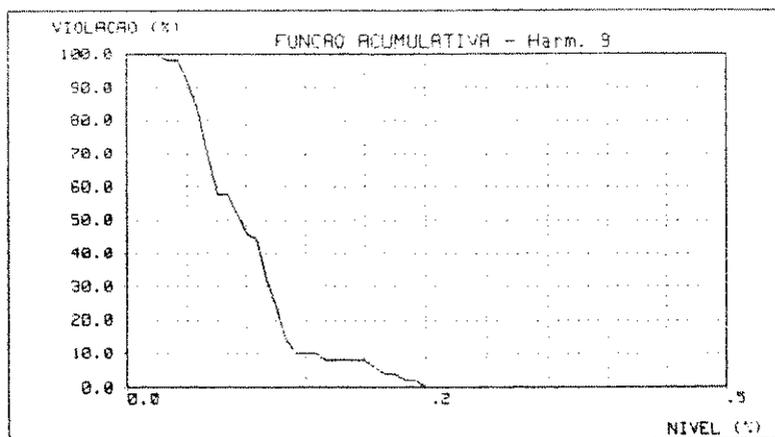


FIGURA 5.29 - Curva de Violação correspondente à 9ª harmônica

## b) MEDIÇÕES EM REDE DE B. T. CONTENDO UM REGULADOR DE TENSÃO

Foi verificado que a saída do regulador apresenta tensão com significativo grau de distorção (figuras 5.30 e 5.31). Foram então feitas medições prolongadas para verificar a evolução dinâmica, constatando-se que as harmônicas de amplitude maior (harmônicas ímpares) permaneceram praticamente constantes ao longo do tempo. Nas figuras 5.32 e 5.33 mostra-se, de forma estatística, o comportamento da harmônica de maior amplitude, ou seja, a 5ª harmônica.

A pouca variação da amplitude das harmônicas ocorre devido ao regulador, que corta os picos de tensão provocando um achatamento da onda, que com isso tende para uma forma trapezoidal.

Deve-se ainda observar que a 5ª harmônica, em média, viola o limite estabelecido por norma. Também se verifica a violação do FDT.

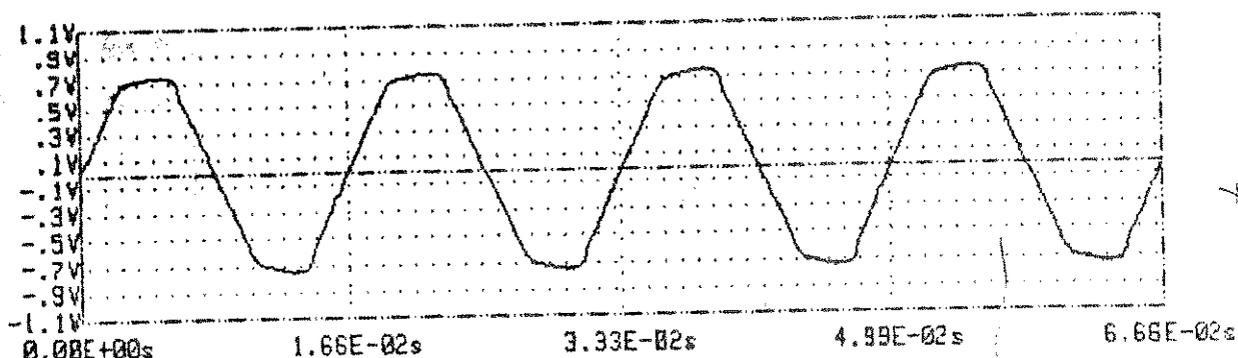


FIGURA 5.30 - Sinal da Rede de Baixa Tensão com Regulador

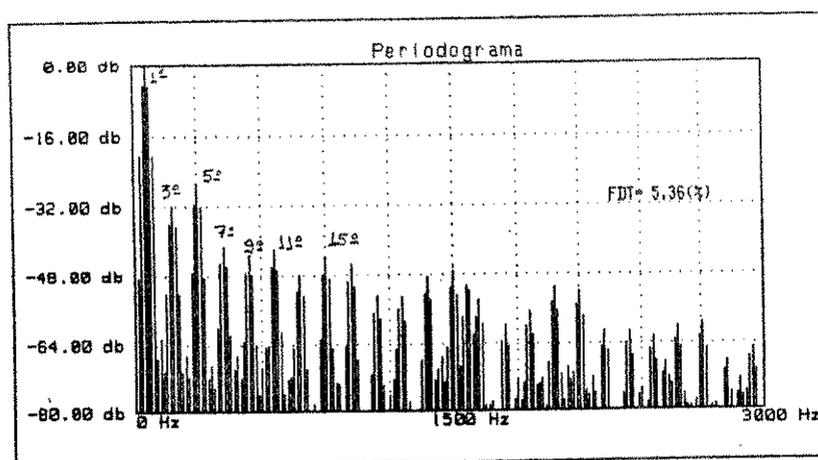


FIGURA 5.31 - Espectro do Sinal

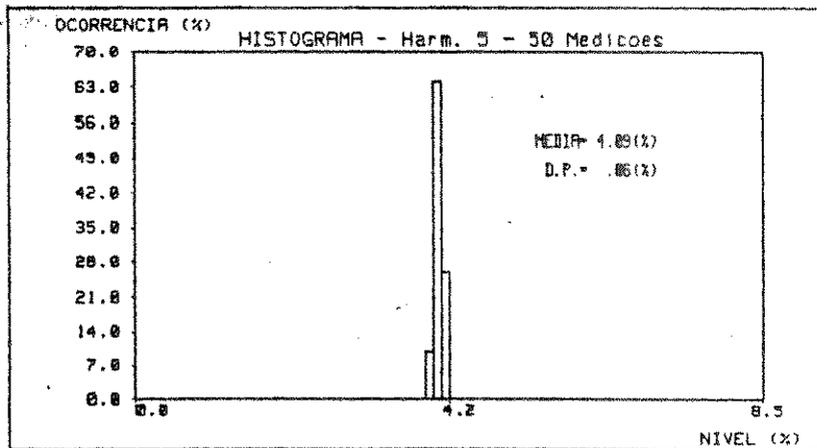


FIGURA 5.32 - Histograma correspondente à 5ª harmônica

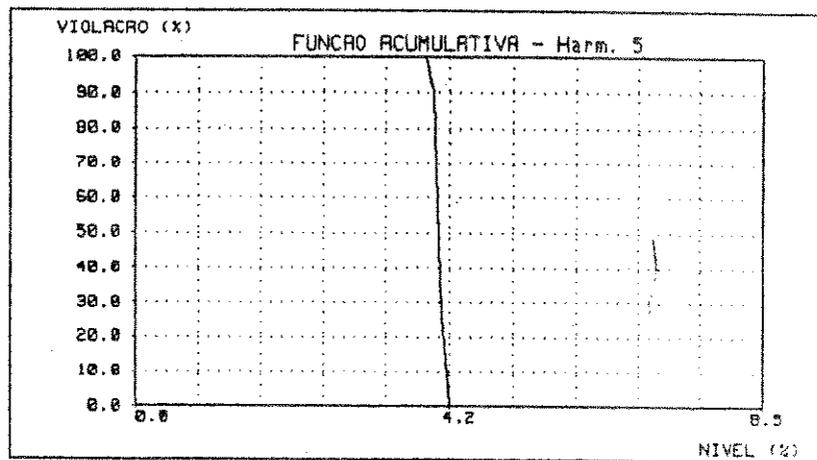


FIGURA 5.33 - Curva de Violação correspondente à 5ª harmônica

## CAPÍTULO 6

### CONSIDERAÇÕES E CONCLUSÕES FINAIS

#### 6.1 INTRODUÇÃO

O trabalho de pesquisa realizado pretendeu buscar um método de tratamento mais realístico para avaliar o conteúdo harmônico do sinal variável da rede elétrica, em qualquer nível, utilizando técnicas de processamento digital que permitam cálculos computacionais. Evidentemente que há vários equipamentos poderosos que realizam a tarefa de obter a amplitude de cada harmônica presente em um sinal amostrado, com alto grau de precisão, por isso não se tomou como objetivo a construção de um analisador de espectro, mas sim um estudo que permita acompanhar a evolução do comportamento da amplitude das harmônicas de 2 a 50 de forma simples, ao longo do tempo, tomando-se como ponto de partida o fato das mesmas poderem variar de forma aleatória.

Embora existam diversas técnicas de estimação espectral da potência de um sinal aleatório, através das quais pode-se chegar à estimação da amplitude, o método do periodograma e, em particular o método do periodograma modificado de Welch, pode levar a resultados mais confiáveis. O periodograma de Welch revela-se, experimentalmente, excelente para a determinação de sinais de baixa amplitude na presença de ruído elevado.

No final do estudo, chegou-se a um algoritmo de análise harmônica com tratamento estatístico, cujos resultados apresentados são, para os ensaios realizados, bastante coerentes.

O mérito deste trabalho está em, partindo da hipótese do comportamento aleatório do sinal elétrico, tratá-lo através da reunião de técnicas de processamento digital, de estimação espectral e análise estatística, que levem a um maior conhecimento deste sinal, em face de suas variações imprevisíveis, destacando o conteúdo espectral médio na presença de ruído no sinal.

#### 6.2 CONSIDERAÇÕES DE ORDEM PRÁTICA

A análise espectral, em princípio, pode ser aplicada a qualquer sistema que disponha de uma placa de conversão A/D e um computador que possa fazer o

controle da aquisição de dados e processamento destes. Deve-se, contudo, estar atento à definição de alguns importantes parâmetros para se chegar a resultados consistentes, tais como:

- 1 - O número de amostras do sinal deve corresponder, no mínimo, a 2 períodos da onda de 60 Hz, para poder aplicar a técnica de Welch (3 FFT's com 50% de sobreposição). A taxa de amostragem deve obedecer ao critério de Nyquist.
- 2 - O sistema deve possuir memória suficiente para apresentar uma adequada resolução espectral. Para a análise harmônica, sugere-se que a resolução assuma um valor submúltiplo de 60Hz de no máximo 20Hz (Ex: 6Hz, 12Hz, 15Hz, 20Hz).
- 3 - O tempo de processamento dos dados deve ser tanto menor quanto maior for a variação do espectro a ser analisado, para que não ocorra perda de informação do sinal devido à dinâmica do processo.

Com o estudo apresentado, é possível fazer 3 tipos de análises:

- a - Sendo o sinal no ponto de medição quase invariante no tempo, basta processar um único periodograma para caracterizar todo o processo.
- b - Se o sinal apresenta variações não muito rápidas (da ordem de minutos), basta processar o periodograma sem a média de Welch, repetindo o processamento ao longo do tempo para observar a evolução dinâmica da amplitude, aplicando a análise estatística para todo o intervalo de medição.
- c - Se o sinal varia rapidamente (da ordem de ciclos), a obtenção do periodograma médio de Welch, juntamente com cálculos estatísticos, torna os dados apresentados válidos ao longo de um determinado período de medição, mesmo em condições dinâmicas.

### 6.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS ENSAIOS

Os pontos de ensaio utilizados no laboratório, apesar de terem apresentado pouca variação espectral, permitiram demonstrar a eficácia da metodologia aplicada, evidenciando inclusive alguns resultados que não seriam

percebidos através da abordagem direta (FFT).

Esse método de análise deve ser aplicado a medições em pontos do sistema sujeitos a grandes variações do conteúdo espectral, especialmente em regiões com cargas industriais, onde existam possíveis fontes harmônicas, descritas no capítulo 2.

A adoção de faixas de decisão para os limites harmônicos, como sugerido no item 4.10.5, visa facilitar a aplicação da norma em pontos onde o conteúdo espectral apresenta variações significativas e que, em geral, têm sido os lugares de maior conflito de interesses entre concessionárias e consumidores, no que diz respeito à divisão das responsabilidades.

## APÊNDICE A

### DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS

#### A.1 Variável Aleatória Contínua

É uma variável  $X$  que pode assumir qualquer valor numerável em um intervalo infinitesimal  $dx$ . A variável é descrita pela probabilidade de estar dentro de  $dx$  para valores de  $x$ . A probabilidade de  $X$  assumir um valor particular é nula

#### A.2 Variável Aleatória Discreta

É uma variável  $X$  que pode assumir um número finito de valores  $x$  [ $x \in (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ] e é descrita pela probabilidade de assumir um determinado valor dentro do conjunto de valores possíveis, chamado espaço amostral.

#### A.3 Função Distribuição de Probabilidade da Variável Contínua

Dada uma variável aleatória contínua  $X$ , a sua função distribuição  $F_X$  indica a probabilidade dessa variável assumir um valor menor ou igual a um dado valor  $x$  do espaço amostral, ou seja:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (\text{A.1})$$

onde  $x$  é um número real qualquer.

#### A.4 Função de Probabilidade da Variável Discreta

É definida como sendo a probabilidade de ocorrência de  $x_i$ :

$$P_X(x_i) = P(X = x_i) \quad (\text{A.2})$$

### A.5 Função Densidade de Probabilidade

Se  $X$  é uma variável aleatória contínua, então  $F_X$  é contínua, sua derivada existe e é definida como função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) \quad (\text{A.3})$$

Propriedades de  $f_X(x)$ :

1)  $f_X(x) \geq 0$

2)  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

Obs.:  $P(X = x) = \int_x^x f_X(x) dx = 0$

### A.6 Função de Distribuição Gaussiana (Distribuição Normal)

Cada processo aleatório, produz resultados com determinada distribuição. Os principais tipos de funções de distribuição são a Binomial, Poisson, Uniforme, mas a função mais largamente observada e usada em estatística é a Gaussiana, dada pela seguinte expressão:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ - \left[ \frac{y - u^2}{2\sigma^2} \right] \right\} dy \quad (\text{A.4})$$

onde:  $u$  - média  
 $\sigma$  - desvio padrão

### A.7 Teorema do Limite Central

Seja a variável aleatória  $Z$  composta de  $n$  variáveis aleatórias independentes  $X$  :

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (\text{A.5})$$

Se  $f_{X_1}, f_{X_2}, f_{X_3}, \dots, f_{X_n}$  são as funções densidades das  $n$  variáveis e  $F_{X_1}, F_{X_2}, \dots, F_{X_n}$  as transformadas de Fourier das funções densidades, então  $F_Z$  é dada por:

$$F_Z(\omega) = F_{X_1}(\omega) \cdot F_{X_2}(\omega) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(\omega) \quad (\text{A.6})$$

e tenderá para uma função Gaussiana quando  $n \rightarrow \infty$  [2].

## A.8 Principais Parâmetros Estatísticos

### a) Média

Para uma variável discreta  $x$ , de um espaço amostral de  $n$  amostras, temos que seu valor médio é dado por:

$$\mu_X = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \quad (\text{A.7})$$

Se uma amostra qualquer  $x_i$  ocorrer  $K_i$  vezes em  $n$  eventos, pode-se agrupar os termos:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{n} x_i \quad (\text{A.8})$$

Cada valor  $x$  é ponderado pela frequência de ocorrência relativa  $\frac{K_i}{n}$

Dessa observação, pode-se extrair o conceito de valor esperado  $E[X]$  da variável  $X$ , que é outra definição de média estatística:

### b) Valor Esperado

Para variável aleatória contínua  $X$ :

$$E[X] = \int_{-b_0}^{\infty} x \cdot f_X(x) \cdot dx \quad (\text{A.9})$$

Para variável aleatória discreta

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i P_X(x_i) \quad (\text{A.10})$$

Neste caso,  $f_X$  e  $P_X$  são funções de ponderação.

c) *Momento Central ou Variância*

$$\sigma^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2 \quad (\text{A.11})$$

A raiz quadrada da variância ( $\sigma$ ) é definida como desvio padrão.

d) *Covariância*

$$\sigma_{xy} = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] \quad (\text{A.12})$$

A covariância mede o grau de dependência entre duas variáveis aleatórias X e Y.

e) *Estimador*

O estimador é uma variável aleatória, definida para caracterizar um parâmetro desconhecido em função de observações. Por exemplo, havendo um parâmetro desconhecido  $\theta$  e alguns valores  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , podemos formar uma função  $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , que deverá se aproximar de  $\theta(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

Logo, definimos o estimador  $\hat{\theta}$  como sendo:

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) \triangleq \hat{\theta} \quad (\text{A.13})$$

f) *BIAS ou Erro de Estimador*

É a diferença entre o valor verdadeiro e o valor esperado da estimativa.

$$B(\hat{\theta}) = \theta - E[\hat{\theta}] \quad (\text{A.14})$$

Se  $B(\hat{\theta}) = 0$ , o estimador é dito equilibrado.

g) *Critério de Estimação*

É uma relação que visa determinar se o estimador escolhido é bom. Um dos critérios mais utilizados é o erro médio quadrático, dado por:

$$E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = \sigma_{\hat{\theta}}^2 + (\theta - E[\hat{\theta}])^2 \rightarrow 0 \quad (\text{A.15})$$

Se  $\theta$  não pode ser determinado, podemos considerar  $\sigma_{\hat{\theta}}^2$  como medida de erro médio quadrático de um estimador. Isto resulta no critério de que a variância mínima pode ser um bom estimador na impossibilidade de se calcular  $(\theta - E[\hat{\theta}])^2$  [18].

h) *Função de Autocorrelação*

A função de autocorrelação é uma média estatística do produto de duas variáveis aleatórias.

Seja  $x(t)$  um processo aleatório, função da variável independente  $t$ .

Seja  $x(t_1) = x_1$  e  $x(t_2) = x_2$ .

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \overline{X_1 X_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_1 X_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{A.16})$$

onde  $f(x_1, x_2; t_1, t_2)$  é a função densidade de probabilidade conjunta do processo.

Sendo a variável  $X$  pertencente a um processo estacionário ergódico, temos [2]:

$$R_{XX}(\tau) = \overline{X(t) \cdot X(t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \cdot X(t + \tau) dt \quad (\text{A.17})$$

onde  $\tau$  corresponde a deslocamento no tempo.

A autocorrelação pode ser definida então como uma medida de similaridade entre o sinal e seu deslocamento no tempo.

## APÊNDICE B

### DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA [2]

#### B.1 Energia de um Sinal no Tempo

A energia de um sinal  $x(t)$  é definida como a energia dissipada pela tensão ou corrente  $x(t)$  aplicada em um resistor de  $1\Omega$ . Pelo teorema de Parseval, mostra-se que:

$$E = \int_{-t_0}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-t_0}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{B.1})$$

onde  $X(\omega)$  é o espectro de amplitudes do sinal.

Esse conceito é definido somente para sinais cujas integrais acima são finitas.

#### B.2 Densidade Espectral de Potência

Para sinais que têm energia infinita, define-se o parâmetro potência média que é dissipada pelo sinal  $x(t)$  aplicado ao resistor de  $1\Omega$ .

$$\bar{P} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (\text{B.2})$$

Seja  $x(t)$  um sinal de energia infinita. Truncando-se este sinal em um intervalo de tempo  $|t| \geq T/2$ , tem-se:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

Como  $x_T(t)$  é finita, tem energia finita e então:

$$E_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{B.3})$$

Mas

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (\text{B.4})$$

Ou seja:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{B.5})$$

E a potência média  $\bar{P}$  é dada por:

$$\bar{P} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} d\omega \quad (\text{B.6})$$

No limite, quando  $T \rightarrow \infty$ , a quantidade  $\frac{|X_T(\omega)|^2}{T}$  pode ser finita.

Assumindo que tal limite existe, definimos  $S_{xx}(\omega)$ , como a densidade espectral de potência de  $x(t)$ :

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} \quad (\text{B.7})$$

A expressão acima é a densidade espectral de potência para sinais determinísticos. Para sinais aleatórios,  $S_{xx}(\omega)$  é expressa da seguinte forma [2]:

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\frac{|X_T(\omega)|^2}{T}} \quad (\text{B.8})$$

Indicando que o espectro de potência corresponde ao espectro quadrático médio da amplitude do sinal.

### B.3 Cálculo da Densidade Espectral de Potência

Seja  $S_{xx}(\omega)$  a densidade espectral de potência, dada por:

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\overline{X_T(\omega)}|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overline{X_T(\omega) \cdot X_T(-\omega)}}{T} \quad (\text{B.9})$$

onde  $X_T(\omega)$  é a transformada de Fourier do sinal finito  $x_T(t)$ , assim tem-se:

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t_2) \cdot e^{-j\omega t_2} \cdot dt_2 \cdot \int_{-T/2}^{T/2} x(t_1) \cdot e^{j\omega t_1} \cdot dt_1 \quad (\text{B.10})$$

Rearranjando as operações de integração e somatório, obtém-se:

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} x(t_1) \cdot x(t_2) \cdot e^{-j\omega(t_2-t_1)} \cdot dt_1 \cdot dt_2 \quad (\text{B.11})$$

$$\text{onde } \overline{x(t_1) \cdot x(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) \cdot x(t_2) \cdot f(x(t_1), x(t_2); t_1, t_2) \cdot dt_1 \cdot dt_2 = R_{xx}(t_1, t_2) \quad (\text{B.12})$$

Se o processo é estacionário de 2ª ordem, tem-se:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(\tau), \quad \tau = t_2 - t_1 \quad (\text{B.13})$$

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} R_{xx}(t_2 - t_1) \cdot e^{-j\omega(t_2-t_1)} \cdot dt_1 \cdot dt_2 \quad (\text{B.14})$$

É demonstrado em [2] que a integral dupla da expressão acima torna-se:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau \quad (\text{B.15})$$

ou seja, a densidade espectral de potência corresponde à transformada de Fourier da função de autocorrelação.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] MARPLE, S. P., "Digital Spectral Analysis", Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1987.
- [2] LATHI, B. P., "An Introduction to Random Signals and Communication Theory", Pennsylvania, Prentice-Hall, 1968.
- [3] OPPENHEIM, A. V., "Digital Signal Processing", Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1975.
- [4] OPPENHEIM, A. V. and WILLSKY, A. S., "Signals and Systems", Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1983.
- [5] KAY, S. M., "Modern Spectral Estimation", Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1988.
- [6] GEÇKINLI, N. C., and YAVUZ, D., "Discrete Fourier Transformation and Its Applications to Power Spectral Estimation", New York, Elsevier Science Publishing Company Inc, 1983.
- [7] COOLEY, J. W. and TUKEY, J. W., "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series", Math. Computation, Vol. 19, pp. 297-301, 1965.
- [8] WELCH, P. D., "The Use of FFT for the Estimation of Power Spectra: A Method Based on Time Averaging over Short, Modified Periodograms", IEEE Trans. Audio and Electroacoustic, Vol. AV-15, pp. 70-73.
- [9] NUTTALL, A. H., "Some Windows with Very Good Side Lobe Behavior", IEEE Trans. on Acoustic, Speech and Signal Processing, Vol ASSP-29, No. 1, pp.84-91, 1981.
- [10] BERGLAND, G. D., "A guided tour of the fast Fourier transform", IEEE Spectrum, Vol. 6, pp. 41-52, July 1969.
- [11] BRADLEY, D. A., "Graphical Representation of Power Systems Harmonic Data", International Conference on Harmonics in Power System, Worcester Polytechnic Institute, Worcester, MA, Oct. 22-23, pp. 69-72, 1984.

- [12] ORR, J. A. and CYGANSKI, D., "Data Collection and Statistical Analysis Techniques for Power System Harmonics", International Conference on Harmonics in Power System, Worcester Polytechnic Institute, Worcester, MA, Oct. 22-23, pp. 73-77, 1984.
- [13] ARRILLAGA, J. and BRADLEY, D. A. and BODGER, P. S., "Power Systems Harmonics", John Wiley and Sons, 1985.
- [14] PIRES, F. A. C., "Uma Contribuição ao Estudo de Harmônicas em Sistemas de Potência", Dissertação de Doutorado, UNICAMP, 1991.
- [15] MILLER, T. J. E., "Reactive Power Control in Electric Systems", John Wiley and Sons, 1982.
- [16] DE OLIVEIRA, J. C. e outros, "Cargas Elétricas Especiais", Apostila editada pela UFU, 1986.
- [17] HEWLETT PACKARD, "The Fundamentals of Signal Analysis", Apostila editada pela TECNASA, 1991.
- [18] BREIPOHL, A. M., "Probabilistic Systems Analysis", John Wiley and Sons, 1970.
- [19] WESTINGHOUSE ELECTRIC CORPORATION, "Electrical Transmission and Distribution Reference Book", Pennsylvania, East Pittsburgh, 1950.
- [20] RIBEIRO, P. F. e outros, "Supervisão e Análise de Harmônicos na Operação do CE de Fortaleza", IX Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica", Belo Horizonte, M.G., 1987.
- [21] PEREIRA, W. e TANAKA, O. K., "Elementos de Estatística", São Paulo, McGraw-Hill, 1984.