

# TESE DE DOUTORADO

apresentada

à

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE SISTEMAS

por

PAULO DE BARROS CORREIA

UM MODELO MULTISSETORIAL PARA OTIMIZAÇÃO DO SUPRIMENTO DE ENERGIA  
ELETRICIDADE, GÁS NATURAL E COGERAÇÃO COM BIOMASSA

Orientador: **CHRISTIANO LYRA FILHO**

*Esta cópia incorpora  
as modificações e  
correções sugeridas  
pela banca examinadora.  
26/1/89*

**DEZEMBRO DE 1988**

À:

minha esposa

Ana Lúcia;

meus filhos

Bruna, Eva, Juliana e Tiago;

e meus pais

Maria José,

José Abaeté (em memória).

Agradecimentos a:

Christiano, pela orientação;

Hermano, pelo apoio;

Amir, Aurélio, França, Llagostera,  
Marcos e Marinho pela participação  
em etapas deste trabalho;

companheiros da Cpfl, em particular  
ao Celso, Lauro e Marcius, pela  
companhia estimulante no grupo de  
Otimização e Simulação em Sistemas  
Energéticos;

colegas da FEE, em particular ao  
Alberto, Adriano, Akebo, Anírio,  
Dino, Jura, Kátia, Kleber, Raul e  
Vinicius pelo convívio agradável;

CNPq pelo suporte.

# ÍNDICE

<u>Apresentação</u> .....	1
<b>Capítulo 1 <u>Panorama Geral de Modelos Energéticos</u></b>	
1.1 Introdução .....	5
1.2 Histórico Sumário .....	6
1.3 Modelos Setoriais .....	10
1.3.1 Eletricidade .....	11
1.3.2 Petróleo e Gás Natural .....	14
1.4 Modelos Globais .....	16
1.4.1 Brookhaven .....	17
1.4.2 Efon .....	17
1.4.3 Experiência Brasileira .....	18
1.5 Comentários .....	20
<b>Capítulo 2 <u>Um Modelo Energético Multisetorial</u></b>	
2.1 Introdução .....	22
2.2 Notação .....	23
2.3 Sistema Energético Multisetorial .....	25
2.4 Produção de Eletricidade .....	26
2.4.1 Geração Hidrelétrica .....	27
2.4.2 Termelétrica a Gás Natural .....	31
2.4.3 Termelétrica a Bagaço de Cana .....	33
2.5 Produção de Gás Natural .....	37
2.5.1 Gás Natural Associado ao Petróleo .....	39
2.5.2 Gás Natural Não-Associado ao Petróleo .....	40
2.6 Transporte de Energia .....	40
2.7 Comentários .....	41

Capítulo 3 Operação Multisetorial Coordenada

3.1	Introdução .....	43
3.2	Operação Coordenada a Médio Prazo .....	45
3.2.1	Função Objetivo no Médio Prazo .....	47
3.2.2	Formulação do Problema no Médio Prazo .....	49
3.3	Operação Coordenada a Curto Prazo .....	51
3.3.1	Função Objetivo no Curto Prazo .....	53
3.3.2	Formulação do Problema no Curto Prazo .....	53
3.4	Comentários .....	56

Capítulo 4 Otimização de Fluxos em Grafo Generalizado

4.1	Introdução .....	58
4.2	Notação .....	61
4.3	Fluxo de Custo Mínimo em Grafo Generalizado .....	63
4.3.1	O Problema de Otimização .....	64
4.3.2	Método Primal-Simplex .....	65
4.3.3	Especialização do Método Simplex .....	68
4.4	Representação da Base .....	77
4.4.1	Definições Preliminares .....	78
4.4.2	Representação de uma Árvore Enraizada .....	80
4.4.3	Representação de uma Árvore Ciclada .....	82
4.5	Atualização da Base .....	85
4.6	Comentários .....	90

Capítulo 5 Extensão de Otimização em Grafo Generalizado

5.1	Introdução .....	93
5.2	Grafo Generalizado com Objetivos Conflitantes .....	95
5.2.1	O Método dos Pesos .....	95
5.2.2	Parametrização na Função Objetivo .....	97
5.3	Grafo Generalizado com Variáveis 0-1 .....	100
5.3.1	Arco com Ganho Convexo .....	101
5.3.2	O Método de <i>Branch and Bound</i> .....	104
5.4	Comentários .....	109

## Capítulo 6 Implementação Computacional

6.1	Introdução .....	111
6.2	Mínimização de Custo em Grafo Generalizado .....	112
6.2.1	Estrutura de Dados em Grafo Generalizado .....	112
6.2.2	Algoritmo Simplex Especializado .....	114
6.2.3	Solução Básica Factível Inicial .....	115
6.2.4	Escolha do Arco que Entra na Base .....	116
6.2.5	Identificação do Arco que Sai da Base .....	117
6.2.6	Atualização dos Fluxos .....	124
6.2.7	Reestruturação da Base .....	125
6.2.8	Atualização dos Potenciais .....	127
6.3	Parametrização da Função Objetivo .....	131
6.3.1	Dados na Parametrização da Função .....	131
6.3.2	Algoritmo de Parametrização da Função .....	132
6.4	Enumeração Implícita: <i>Branch and Bound</i> .....	134
6.4.1	Estrutura de Dados da Enumeração .....	135
6.4.2	Algoritmo de Enumeração Implícita .....	136
6.5	Comentários .....	141

## Capítulo 7 Estudo de Caso com o Sistema Energético do Sudeste

7.1	Introdução .....	143
7.2	Sistema da Região Sudeste .....	144
7.2.1	Produção Hidrelétrica .....	146
7.2.2	Produção de Gás Natural .....	146
7.2.3	Disponibilidade de Bagaço de Cana .....	147
7.2.4	Termelétricas a Gás Natural .....	148
7.2.5	Termelétricas a Bagaço de Cana .....	149
7.3	Exemplo no Médio Prazo .....	149
7.4	Resultados no Médio Prazo .....	151
7.5	Exemplo no Curto Prazo .....	155
7.6	Resultados no Curto Prazo .....	157
7.7	Resultados Computacionais .....	158
7.7	Comentários .....	159

## Capítulo 8 Comentários Finais .....

161

## Bibliografia .....

164

## APRESENTAÇÃO

A atividade de investigação científica que resultou neste trabalho foi iniciada no ano de 1984 na Assessoria de Pesquisa e Desenvolvimento da Companhia Paulista de Força e Luz, como parte de um esforço mais amplo que visava implantar um centro de P&D. Em particular, preocupava-se com a inserção de um sistema de suprimento de eletricidade dentro de um contexto energético mais abrangente, tendo como motivo a conversão estatutária da Cpfl em empresa de energia. Daí, passou-se ao estudo das variadas abordagens propostas na literatura para a questão energética, um campo do conhecimento que havia, recentemente, recebido um grande impulso em consequências das crises do petróleo.

Durante esta fase do trabalho - no âmbito do Programa de Implementação do Modelo Energético Brasileiro (PIMEB) conduzido pelo MME - desenvolveu-se um estudo voltado para a utilização de técnicas de otimização em sistemas de suprimento de energia, dentre outros, eletricidade, gás natural, carvão e lenha. Além das abordagens que tratavam o setor energético de uma forma integrada (BESOM, MARKAL etc.) e outras que se ocupam da interação energia-economia (PIES, PILOT etc.).

As reflexões realizadas ao longo desta etapa resultaram na escolha de uma abordagem onde se buscava ampliar a noção do sistema energético da Cpfl, tendo como núcleo sua rede de distribuição de eletricidade. Isto significava romper as fronteiras do tratamento puramente setorial sem cair,

necessariamente, nos modelos globais. O sistema de distribuição de eletricidade, com seus pontos de suprimento e consumo, definiria a configuração básica do sistema energético. A partir dele seriam introduzidos novos elementos, na medida em que fossem considerados plausíveis e relevantes.

Logo de início, dois novos aspectos eram colocados. De um lado, a possibilidade de aproveitamento de excedentes de bagaço de cana para geração de eletricidade em virtude da amplitude a que chegou o programa do álcool nesta região. Do outro lado, a implantação de um sistema supridor de gás natural que, inicialmente, escoaria o excedente de gás associado ao petróleo produzido na bacia de Campos, que seria transportado até São Paulo e com possibilidade de chegar à refinaria de Paulínea. Depois, este sistema de gás poderia ser ampliado a partir da disponibilidade de novas fontes produtoras, como a bacia de Santos ou mesmo a Bolívia.

Do ponto de vista da ferramenta analítica, a consideração de um problema que podia ser representado através de uma rede energética - incluindo conversões entre formas de energia e perda - levou à decisão de tratá-lo por técnicas de otimização em grafo generalizado. Assim, problemas de porte significativo poderiam ser resolvidos de forma muito eficiente com recursos computacionais relativamente modestos.

A esta altura dos acontecimentos, durante o ano de 1987, ocorreu uma redução muito expressiva do espaço conferido às atividades de P&D naquela Companhia. Isto resultou na transferência deste trabalho para o programa de doutorado na Faculdade de Engenharia Elétrica da Unicamp - onde ele passou a ser conduzido em tempo integral com suporte do CNPq - produzindo duas consequências principais. A primeira foi a ampliação do sistema energético objeto da atenção, que passou a envolver o sistema hidrelétrico da região Sudeste, os campos de produção de gás natural das bacias de Campos e Santos e a oferta de excedentes de bagaço de cana, disponíveis nas regiões de Campinas-SP e Campos-RJ. A segunda foi a ênfase que se passou a

dar ao desenvolvimentos dos algoritmos computacionais de otimização especializados para grafos generalizados.

Na implementação do algoritmo especializado para otimização de fluxo em grafo generalizado - que se mostrou de grande eficiência - tomou-se como referência inicial o trabalho de Glover e colegas [G6] onde apresentavam como sugestão a possibilidade de representar a base utilizando o índice preordem, apesar das idéias fundamentais de sua implementação estarem expostas com o índice triplo. A seguir, motivado pelo trabalho de Bradley e colegas [B9] para grafo conservativo, passou-se a trabalhar na inclusão do índice distância na representação da base de modo a acelerar o algoritmo. Esta era uma possibilidade que, anteriormente, havia sido descartada por Jensen e Barnes [J2]. A tentativa de incluir a distância foi bem sucedida e, posteriormente, teve-se acesso ao trabalho de Brown e McBride [B13] que, chegando a uma solução semelhante, veio a confirmar as vantagens do algoritmo implementado. Assim, o núcleo das técnicas de otimização utilizadas neste trabalho é um algoritmo de fluxo de custo mínimo em grafo generalizado onde a base é representada com os índices predecessor, preordem e distância. Este algoritmo é apresentado em todos os seus detalhes, inclusive de implementação computacional

Um primeiro problema de coordenação da operação energética multisetorial foi estabelecido para o médio prazo (horizonte anual discretizado mensalmente) onde se espera que ocorram transferências significativas de energia entre os setores em virtude da sazonalidade dos ciclos hidrológicos, da safra de cana e do ritmo de desenvolvimento da oferta de gás natural. Considerando a multiplicidade dos decisores, optou-se por tratar o problema com técnicas de programação multiobjetivo, no caso, usando o método para gerar o conjunto de não dominadas e a curva de *tradeoff*.

Para o curto prazo (horizonte semanal discretizado diariamente), como consequência das características das termelétricas de ciclo combinado, representadas com duas faixas

de operação de rendimentos diferentes, chegou-se a um problema de otimização em grafo generalizado com variáveis (0-1) através da consideração de arcos com perdas fixas. Desenvolveu-se um modelo para os arcos com perdas fixas do qual não se teve conhecimento na literatura. No entanto, é possível estabelecer uma analogia entre ele e o problema de custo fixo. Ele foi tratado com uma modificação do algoritmo de *branch and bound* proposto para o problema de custo fixo por Soland [S4].

Os modelos desenvolvidos e os programas computacionais implementados foram testados com sucesso para exemplos montados com sistema energético da região Sudeste. Isto aponta para a exequibilidade da abordagem proposta que poderia ser aplicada a outras regiões do Brasil. Por exemplo, a região Nordeste considerando o sistema elétrico implantado, as linhas de gás natural de Natal-RN até Cabo-PE, de Salvador-BA até Maceió-AL e o aproveitamento de bagaço de cana que é abundante nesta região. Na região Norte, há o caso de Juruá onde se encontram as maiores reservas de gás natural do País localizada numa região com predominância da geração termelétrica a óleo combustível.

## PANORAMA GERAL DE MODELOS ENERGÉTICOS

### 1.1 Introdução

Este capítulo oferece uma visão geral da atividade de modelagem aplicada ao planejamento de sistemas energéticos. Nele, procura-se destacar a associação que existe entre a questão energética em si, o conjunto de técnicas analíticas disponível e as soluções de modelagem propostas.

Neste contexto, o desenvolvimento de modelos matemáticos pressupõe: tratar problemas que evoluem continuamente, através do deslocamento do cerne da questão, pela busca de novos ângulos de abordagem e com a incorporação de novos elementos; resolver problemas com recursos tecnológicos que também progridem, consequência da absorção continuada de novos conhecimentos. Identificar os pontos dominantes da questão defrontada, explorar outros ângulos do problema e implementar técnicas apropriadas de solução são aspectos que impulsionam a atividade de modelagem.

Inicia-se com um histórico breve das últimas quatro décadas, associando a evolução da questão energética com o avanço das técnicas de programação matemática. A seguir, é discutida a abordagem setorial, onde o problema fica inscrito em um único setor, e os modelos estão solidamente apoiados em sistemas físicos. Prosseguindo, são comentados alguns modelos globais,

aqueles que incorporam explicitamente as mais variadas formas de energia e suas possibilidades de substituição - estes modelos são desenvolvidos a partir de aspectos físicos e sócio-econômicos. Para concluir, é lançada a idéia de um enfoque multisetorial, envolvendo vários setores energéticos, considerando substituições de energia e situações específicas e privilegiando os sistemas físicos como suporte do modelo.

## 1.2 Histórico Sumário

Procedimentos baseados em métodos matemáticos para encontrar soluções ótimas para o suprimento de energia têm suas raízes nos anos quarenta. O trabalho divulgado em 1940 por Ricard [R2], com especificação das condições para o despacho ótimo de um sistema hidrotérmico, é um primeiro marco. O conceito de valor marginal da água é introduzido em 1946 por Massé [M3], permitindo encontrar políticas ótimas de geração hidrelétrica por comparação com o custo marginal das termelétricas. Um modelo para o comportamento das pressões no interior de reservatórios durante a extração do petróleo é estabelecido por Van Everdingen [V1]. É curioso notar que este esforço coincide com a reconstrução pós-guerra; uma época com grande escassez de recursos, quando a grande maioria dos métodos iterativos de programação matemática não existia e ainda não se dispunha de sistemas computacionais, na concepção atual. Assim, o emprego de técnicas matemáticas para otimizar o uso de recursos escassos em grandes sistemas energéticos, embora já visualizados, teria que esperar por desenvolvimentos técnicos e metodológicos só alcançados nas décadas seguintes.

Observam-se, já no início dos anos cinquenta, grandes progressos nos métodos de programação matemática. As bases de programação linear e do método simplex são lançadas em 1951 por Dantzig [D1]. Em 1956, Bellman [B5] formaliza a técnica de programação dinâmica para resolver problemas de decisões ótimas sequenciais, pressentindo sua importância na solução de uma vasta gama de problemas. Nesta época, os primeiros sistemas

computacionais tornam-se disponíveis para resolver problemas até então intratáveis. Aplicações setoriais importantes são disseminadas a partir do final dos anos cinquenta, apoiadas no desenvolvimento das técnicas de otimização, em novos sistemas computacionais e motivadas pelo interesse em minimizar custos de produção ou maximizar lucro. Problemas de otimização em sistema de potência são abordados por Little [L7] e Kirchmayer [K2]. Modelos de programação linear são usados na otimização de misturas de gasolina, Charnes, Cooper e Mellon [C5], e na operação de reservatórios de petróleo, Aronofsky e Lee [A6] e Garvin [G2].

Métodos de programação matemática e sistemas computacionais de grande porte são difundidos em larga escala nos anos sessenta. Programação linear e dinâmica são técnicas bastante usadas e com eficácia comprovada. Novos métodos de otimização são desenvolvidos, tais como o gradiente reduzido de Wolfe [W4] e o gradiente reduzido generalizado de Abadie e Carpentier [A1], permitindo formular problemas que consideram funções objetivo e restrições não lineares. Problemas de grande porte com elevado número de variáveis, de restrições, incluindo variáveis inteiras e possuindo estruturas particulares recebem tratamento especializado, Lasdon [L2]. A fronteira dos problemas tratáveis sofre uma expansão significativa. Ainda dentro dos limites estabelecidos pelas abordagens setoriais, os modelos são expandidos em busca de uma maior aderência com a realidade. A expansão ótima de sistemas de potência é tratada por Lenez [L5]. O desenvolvimento de campos de petróleo e gás natural é abordado com programação linear mista por Bohannon [B8].

No início dos anos setenta (1973), acontece o primeiro choque do petróleo; seu preço sobe vertiginosamente. A estrutura de preços dos energéticos sofre modificações profundas. Aparecem desequilíbrios na competição entre formas energéticas substituíveis. A economia mundial procura adaptar seu perfil de produção e consumo de energia à nova situação. Os modelos energéticos globais, que representam de maneira explícita as possibilidades de substituições energéticas, surgem como ferramentas promissoras para resolver esta questão. São

desenvolvidos os modelos BESOM [E1], no laboratório de Brookhaven, o MARKAL [A2], pelos laboratórios de Brookhaven e Kernforschungsanlage Julich em conjunto, e EFOM em Grenoble [F3]. A situação de instabilidade econômica sugere passos mais ousados: o desenvolvimento de modelos integrados para as relações energia-economia. Com o propósito de avaliar os impactos de políticas energéticas sobre a qualidade de vida da sociedade, são desenvolvidos os modelos PILOT [E2], na universidade de Stanford, e PIES, Hogan [H3], Anh e Hogan [A5], para a *Federal Energy Administration*. Entretanto, vão-se colocando várias dificuldades. A pluralidade de decisores, cujos interesses não estão perfeitamente definidos, às vezes desarticulados ou conflitantes, choca-se com a natureza normativa destes modelos. Aspectos sócio-econômicos com representação matemática discutível, quando não polêmica, são pontos que introduzem dificuldades nos trabalhos conduzidos nesta linha.

Os anos oitenta iniciam-se sob um novo choque do petróleo. A condição de preços elevados para o petróleo e seus derivados aparece como definitiva. A situação energética não é mais caracterizada como de instabilidade, mas sim estabilizada em condições bastante diferenciadas daquelas observadas no início dos anos setentas. Os preços elevados do petróleo não mais são vistos como perturbações transitórias, e sim como uma situação permanente. A economia mundial prepara-se para um longo convívio com petróleo a preços elevados e crescentes. Os programas de conservação de energia tomam grande impulso, seja através da racionalização do uso, seja por meio da substituição de energia por capital. A noção de energia por uso final vai se difundindo através de políticas energéticas de longo prazo que visam atuar prioritariamente sobre o consumo. Modelos de demanda, a exemplo do MEDEE [L1], são propostos. Obtém-se reduções significativas nos padrões de consumo energético, até para maiores níveis de atividade econômica nas economias desenvolvidas, levando a reconsiderações sobre o significado da relação (*consumo de energia / PIB*) como indicador econômico.

No entanto, no início de 1986 voltam a ocorrer grandes instabilidades no suprimento de petróleo com a chamada *guerra dos preços*. Considerando a inflação do dólar, o preço do petróleo no mercado internacional cai a níveis equivalentes aos praticados no princípio dos anos setentas. Vários programas alternativos de energia, lançados no decênio anterior, ficam com a viabilidade econômica colocada sob suspeição. O quadro energético emite novamente sinais de instabilidade, apontando para a necessidade de novos ajustamentos. Cabe observar que as políticas de atuação sobre o consumo são essencialmente de longo prazo, implicando em modificações de hábitos e na substituição de estoques de equipamentos distribuídos em larga escala na sociedade. Isto lhes confere rigidez, acarretando dificuldades quando se procura alterá-las visando ajustes rápidos no curto prazo, o que pode até comprometer seus objetivos a médio e longo prazo; razão pela qual devem ser conduzidas sempre com visão de longo prazo. É bastante evidente que a abordagem pela demanda introduziu uma componente importante de racionalidade na questão energética. Também, programas voltados para maior eficiência no consumo de energia, através de desenvolvimentos tecnológicos e melhor gestão de recursos, são proveitosos sob quaisquer cenários. No entanto, do lado do suprimento, e sobretudo pela concentração do investimento e da capacidade decisória, há maiores possibilidades de ajustes com respostas a curto prazo. Dessa forma, é de se esperar que as perspectivas de instabilidade no quadro energético dê novo impulso às abordagens que consideram possibilidades de substituições energéticas no lado da oferta. Por outro lado, a noção de *robustez*, entendida como a capacidades do sistema de suportar turbulências, passa a ter um espaço mais amplo na questão energética, Lonergan [L8] e Shanghvi *et al.* [S2].

Em suma, há conveniência em abordar a questão energética atuando em duas frentes. Uma voltada para o consumo, disciplinando o uso, acompanhando tendências e perseguindo objetivos de longo prazo. Outra voltada para o suprimento, garantindo o atendimento à demanda, racionalizando a utilização dos insumos e preservando espaços de manobras que permitam ajustes a curto prazo, aumentando a capacidade do sistema

absorver turbulências. Ambas, abertas à incorporação de avanços tecnológicos e gerenciais.

### 1.3 Modelos Setoriais

Modelos energéticos setoriais são aqueles que se ocupam da produção e distribuição de uma única forma de energia, por exemplo, eletricidade, petróleo ou gás natural. Suportados em sistemas físicos bem definidos e, em geral, restritos a uma única empresa, estes modelos resultaram em instrumentos de planejamento com eficácia comprovada. Eles conseguem atingir um elevado grau de aderência com a realidade, levando em conta seus propósitos. A transparência na definição de variáveis, a maneira precisa como se estabelecem suas relações matemáticas, a identificação clara dos decisores e da abrangência de suas ações são fatores que contribuem decididamente para o sucesso desta abordagem. Outro aspecto, não menos importante, é a facilidade encontrada para se traduzir suas soluções em termos de ações concretas. Seu caráter normativo, na maioria dos casos, apenas reflete a concentração de capacidade decisória na estrutura administrativa empresarial.

Com o propósito de tornar mais nítido o contexto onde se inserem as idéias desenvolvidas nos capítulos seguintes, são comentados alguns modelos usados nos setores de eletricidade, petróleo e gás natural, procurando destacar a associação entre os aspectos que eles incorporam e as técnicas matemáticas usadas. No entanto, é possível encontrar na literatura trabalhos conduzidos para outros setores, dentre os quais pode-se mencionar os seguintes: Prince [P2], Tobin [T3] e Wagner [W1] para carvão mineral; Barrios e Weintraub [B4], Telhada [T2], Clutter [C7], Weintraub e Navon [W2] em florestas energéticas; Beauclair [B6], Vijayalakshmi [V3] para cana-de-açúcar.

### 1.3.1 Eletricidade

Eletricidade é produzida em hidrelétricas através do aproveitamento da energia potencial das quedas-d'águas, ou em termelétricas (convencionais ou nucleares) com a queima de combustíveis. A construção de reservatórios nas hidrelétricas possibilita regularizar as vazões naturais dos rios, criar ou elevar quedas, cujas alturas passam a depender, em maior ou menor grau, do volume armazenado. Na operação em cascata, as vazões liberadas por uma hidrelétrica são recebidas pelo aproveitamento imediatamente a jusante, definindo um acoplamento hidráulico onde o tempo de viagem da água pode ser significativo. As usinas térmicas são operadas com regras de otimalidade estabelecidas a partir do custo marginal de operação. De maneira análoga, os diversos segmentos do mercado consumidor devem ser atendidos com regras definidas pelo benefício marginal. Em geral, a energia elétrica produzida deve ser transportada até os mercados consumidores. É neste contexto, traçado com linhas muito leves, que os modelos de operação de sistemas hidrotérmicos são desenvolvidos. Uma discussão dos variados aspectos do planejamento da operação de sistemas de potência é conduzida por Lyra [L10], e uma visão geral da operação energética de sistemas hidrotérmicos é encontrada em Veiga [V2].

Um modelo clássico, largamente utilizado no planejamento de sistemas hidrotérmicos a longo prazo, é a representação por reservatório equivalente, apresentada por Arvanitidis e Rosing [A8-9]. O subsistema hidráulico é representado por um único reservatório, onde se conhece a energia afluyente no horizonte de estudo e a função que relaciona a geração hidrelétrica com a energia liberada pelo reservatório equivalente, pode-se também incluir perdas por evaporação. O subsistema termelétrico e o mercado consumidor são representados pelas respectivas curvas de custo marginal de geração e não atendimento (corte de carga). Este modelo oferece uma maneira apropriada para otimizar a operação do sistema através de programação dinâmica. Formula-se

um problema de otimização estagiado no tempo, onde o custo total da geração térmica deve ser minimizado. O emprego de programação dinâmica estocástica permite variações na formulação que consideram aleatoriedade da energia afluyente ou da demanda de eletricidade. Noções de programação multiobjetivo permitem levar em conta o uso múltiplo da água com objetivos conflitantes, Andrade e Soares [A4].

Outra abordagem para o problema de planejamento da operação a longo prazo, com múltiplos períodos, é desenvolvida por Côté, Lafond e Phan [C12]. Consideram-se sistemas hidrelétricos com um único reservatório por vale independente. A demanda é representada por uma curva de carga com vários níveis (blocos). O modelo considera geração térmica complementar, usinas hidrelétricas reversíveis, importação de energia, exportação e mercados secundários, todos referidos para cada período e cada bloco da curva de carga. Esta formulação resulta em um problema de otimização em grafo generalizado, resolvido com um algoritmo especializado. Considerar apenas um reservatório por vale independente é uma imposição que preserva a estrutura de grafo generalizado do problema.

Em estudos de médio e curto prazo é usual buscar representações mais desagregadas para o sistema com o desenvolvimento de modelos lineares de otimização, Carneiro [C3] e Oliveira, Lyra e Correia [O2]. A formulação proposta por Machado *et al.* [M2] considera as usinas hidrelétricas e termelétricas individualizadas, resultando em um programa linear onde se explora a estrutura especial da matriz de restrições. O custo da geração térmica é minimizado sobre o horizonte de estudo. As hidrelétricas são operadas levando-se em conta o balanço hidráulico de cada reservatório e o tempo de viagem da água entre aproveitamentos em cascata. As restrições do problema podem ser subdivididas em duas categorias: restrições de balanço hidráulico; restrições de balanço energético. A primeira categoria corresponde a uma rede de fluxo conservativo para cada bacia independente, a segunda pode ser considerado como um bloco de acoplamento. O uso de técnicas de particionamento da inversa

da matriz básica permite associar o método simplex-revisado, na sua formulação geral, com técnicas de otimização em grafo. Também dentro desta linha, pode-se considerar os trabalhos de Merlin *et al.* [M5] e Habibollahzadeh *et al.* [H2].

A consideração do efeito da variação da altura de queda na geração hidrelétrica, conduz a problemas de programação não linear com restrições lineares, Lyra, Friedlander e Geromel [L11], Correia [C9]. Uma abordagem para o problema de operação de um sistema hidrelétrico, considerando usinas individualizadas e tendo como objetivo a maximização das sobras hidrelétricas, é apresentada por Gagnon *et al.* [G1]. O problema minimiza uma função não linear com restrições lineares, sendo resolvido com um método que é uma variante do gradiente reduzido para problemas com estrutura de grafo. Outra especialização do método do gradiente reduzido para problemas com estrutura de grafo é desenvolvida por Rosenthal [R3]. As usinas hidráulicas são consideradas individualizadas. A função objetivo maximizada, o benefício da geração, é não linear e não separável. As restrições funcionais, balanço hidráulico nos aproveitamentos, são vistas como arborescências expandidas no tempo, possibilitando uma especialização dos algoritmos de otimização em grafo com a base representada por um único índice. Um tratamento semelhante é usado por Carvalho e Soares [C2]. Uma outra abordagem com programação não linear, que permite tratar função objetivo diferenciável por partes, é desenvolvida por Lyra e Tavares [L12] para o planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos com usinas individualizadas. Minimiza-se o custo da geração térmica em função da demanda e da geração hidrelétrica. A geração hidráulica é uma função não linear, diferenciável por partes, do volume armazenado e da descarga. O tempo de viagem da água entre aproveitamentos sucessivos é levado em consideração nas equações de balanço hidráulico .

O modelo de operação para o curto prazo proposto por Brännlund *et al.* [B10], considera usinas individualizadas e restrições de transmissão de energia. Ele resultou em um problema de otimização em grafo com função objetivo não linear e

restrições adicionais, resolvido com uma decomposição informal. O problema original é decomposto em dois subproblemas: o subproblema hidráulico que minimiza uma função que exprime o custo da complementação térmica em termos da geração hidráulica; o subproblema térmico que resolve o comissionamento das unidades térmica, considerando o custo de partida e incluindo as restrições de transmissão de energia. Os dois problemas são resolvidos iterativamente, a exemplo de um problema de ponto fixo, até que um critério de convergência seja atendido.

### 1.3.2 Petróleo e Gás Natural

Petróleo e gás natural são extraídos de reservatórios, formados por rochas porosas, onde se encontram armazenados a pressão superior à atmosférica. Quando o poço é perfurado tem início a etapa de recuperação primária com a taxa de produção mantida pela diferença natural de pressão. Ao longo do período de produção, a pressão interna declina provocando uma redução da taxa de produção do poço. No entanto, a produção total do reservatório pode ser mantida, ou ampliada, pela abertura de novos poços (mesmo reservatório). A abertura de novos poços caracteriza o período de desenvolvimento do reservatório. Quando a taxa de produção cai a níveis muito baixos, tem origem a etapa de recuperação secundária (bombeamento, injeção de água ou gás) com a diferença de pressão mantida artificialmente. O comportamento da pressão interna no reservatório, em função da produção acumulada, depende da sua geometria, da porosidade do meio e da natureza do fluido (gás, gás-água, gás-água-óleo). A produção de um campo de petróleo ou gás natural é escoada através de um sistema de *pipelines*. Uma revisão dos métodos numéricos de simulação de reservatórios é encontrada em Bidner e Gabbanelli [B7].

Um modelo de programação linear para planejamento da produção de um campo de petróleo, completamente desenvolvido, com múltiplos reservatórios e cada reservatório com vários poços, foi proposto por Aronofsky e Williams [A7]. O comportamento do

reservatório é representado por funções de influência generalizadas (linearizadas). Estas funções exprimem a pressão interna em um poço em termos da taxa de produção de todos os poços do mesmo reservatório - na prática, considera-se apenas os poços cuja influência é significativa. Maximiza-se o lucro durante o horizonte de planejamento, levando em conta restrições de pressões mínimas nos poços, produção acumulada (menor do que as reservas recuperáveis) e capacidade do sistema de escoamento.

O desenvolvimento de um campo com vários reservatórios em conjunto com o sistema de *pipeline* é tratado por Bohannan [B8]. Os reservatórios são considerados como fontes pontuais, com a taxa de produção expressa como uma função linear da produção acumulada do reservatório. As restrições do modelo levam em conta o comportamento do reservatório, a capacidade do sistema de *pipeline*, a composição de custos, os preços de produtos e os níveis de vendas. O modelo decide sobre as taxas anuais de produção, o número de poços perfurados, o início da recuperação secundária e a expansão da rede de *pipeline*. O custo de expansão é formado pelos custos fixo e variável. Este modelo resulta em um programa linear misto (variáveis 0-1), resolvido com um pacote computacional comercial.

O planejamento do desenvolvimento de reservatórios é tratado por McFarland, Lasdon e Loose [M4] com técnicas de programação não linear com restrições lineares. O reservatório é representado por um modelo tipo *tanque* para duas ou três fases (gás-água ou gás-óleo-água), que considera o afluxo de água ao reservatório diretamente proporcional ao declínio da pressão interna. Maximiza-se o valor presente do lucro. As variáveis de decisão definidas para cada período são: o número de poços perfurados, a taxa de produção, vida útil de poços e tamanho de plataformas. Embora as restrições do problema sejam lineares, ele é resolvido com o código de gradiente reduzido generalizado GRG2, Lasdon et al. [L3]

A produção ótima de um reservatório de gás natural é abordada por Lasdon et al. [L4]. O comportamento do reservatório

é definido por um modelo não linear em duas dimensões que considera uma única fase (gás seco). O problema é formulado para maximizar o volume de gás extraível, minimizar as perdas de gás ou uma combinação destes dois objetivos. As restrições levam em conta o atendimento à demanda, a capacidade máxima do sistema de escoamento, as pressões mínimas nos poços e as equações de comportamento do reservatório. Este modelo também é tratado com o código GRG2, utilizando as equações não lineares do comportamento do reservatório para *reduzir* o problema.

A visão propiciada sobre modelos de planejamento da operação e desenvolvimento de campos de petróleo e gás natural pode ser ampliada com vários outros trabalhos publicados na literatura, dentre os quais se pode mencionar os seguintes: Babayeve [B1], Devine e Lesso [D4], Lilien [L6], Dougherty *et al.* [D5], Huppler [H5], O'Dell *et al.* [O1], Sullivan [S6] e Rothfarb *et al.* [R4]. Modelos de planejamento do suprimento de gás natural envolvendo sistemas de produção, transporte, distribuição e pontos de consumo distribuídos regionalmente, são abordados por Debanné [D3], Brooks [B11-12], Guldmann [G9] e Peretti e Toth [P1]. O refino de petróleo é tratado por Baker e Lasdon [B2], Farifã e Glover [F1]. Uma revisão da literatura sobre modelos desenvolvidos nos setores de petróleo e gás natural é encontrada em McFarland *et al.* [M4] e Durrer e Slater [D6].

#### 1.4 Modelos Globais

Em linhas gerais, um sistema global de suprimento de energia envolve a exploração de diferentes formas primárias de energia, um encadeamento de atividades de beneficiamento e transformações que originam formas secundárias, o transporte e o consumo para variados fins. O conjunto destas ações pode ser representado por uma rede de fluxo, considerando de maneira explícita as diversas formas de substituição energética. O propósito dos modelos globais é identificar as alternativas mais atraentes de substituições energéticas, em geral, sob diversos cenários. O traço mais marcante neles é a forma abrangente de representar os

fluxos de energia, permitindo contabilizar o seu balanço ao longo da cadeia de produção, transporte, conversão e consumo.

#### 1.4.1 Brookhaven

O modelo BESOM (*Brookhaven Energy System Optimization Model*), Hoffman [H4], foi concebido para avaliar as perspectivas futuras de tecnologias energéticas emergentes no estabelecimento de prioridades para políticas de P & D. A preocupação em tratar de maneira explícita as possibilidades de substituição entre formas energéticas levou a uma representação do sistema através da rede de fluxo RES (*Brookhaven Reference Energy System*), EPRI [E1], que serviu de paradigma para elaboração de balanços energéticos.

Este modelo faz a otimização do desempenho de um sistema energético composto por 7 tipos de fontes primárias, 26 processos de conversão, e 16 categorias de consumo, EPRI [E1]. A partir das necessidades por energia, das disponibilidades de recursos primários e das tecnologias de conversão, faz-se uma alocação ótima dos fluxos de energia resolvendo um programa linear. O BESOM é um modelo estático onde a cada execução os fluxos de energia são otimizados para um único período. Posteriormente, foi desenvolvido o DESOM (*Dynamic Energy System Optimization Model*), EPRI [E1], que considera múltiplos períodos integrados em um único problema, admitindo uma completa antevisão do futuro. Uma outra alternativa de considerar vários períodos é explorada no TESOM (*Time-Stepped Energy System Optimization Model*), Kydes et al. [K3]. Cada período é resolvido individualmente, porém os resultados de cada estágio são usados no estágio subsequente, definindo o que se pode chamar de encadeamento para adiante.

#### 1.4.2 Efon

O modelo EFOM (*Energy Flow Optimization Model*), Finon [F3], foi proposto como um instrumento de planejamento a longo prazo capaz de desenvolver cenários futuros para o sistema energético

francês. Posteriormente, o EFON passou a ser utilizado pela Comunidade Económica Europeia como parte de um conjunto integrado de modelos, Laponche [L1]. O sistema energético é representado por uma rede de fluxo e classifica suas variáveis em dois tipos: variáveis de exploração, correspondentes aos níveis de atividades; variáveis de equipamento, associadas com a instalação de novos equipamentos. Na otimalidade, o modelo fornece a configuração do sistema e a alocação dos fluxos energéticos no atendimento à demanda.

O horizonte de planejamento é subdividido em intervalos, com o modelo resolvendo uma sequência de programas lineares, um para cada intervalo. O acoplamento entre dois intervalos subsequentes é feito através das variáveis de equipamento, a capacidade instalada no final de um intervalo é usada na inicialização do intervalo seguinte. Observe que é usado o mesmo tipo de encadeamento do TESOM. O modelo considera a regionalização do sistema, mas não com a localização geográfica de forma explícita. Cada atividade é tratada como se fosse concentrada em algum ponto territorial, e separada das outras através de uma distância média, admitida conhecida. Isto permite que a prospecção do futuro tenha em atenção tanto as perspectivas tecnológicas quanto as possibilidades de localização geográfica, sem um crescimento excessivo do modelo. Cabe observar que, apesar de ser formulado com noções de grafo, o modelo é tratado com um pacote comercial de programação linear.

#### 1.4.4 Experiência Brasileira

Um modelo global para o Brasil, envolvendo a relação energia-economia, foi desenvolvido por Modiano [M7]. Trata-se de um modelo integrado formado por um módulo macroeconómico, um módulo de avaliação da oferta primária e demanda final de energia em função de preços e um módulo energético de integração ótima entre oferta e demanda. O módulo macroeconómico é de natureza descritiva, simula a evolução da economia através de um conjunto de equações de base econométrica. O módulo energético busca o

equilíbrio entre oferta e demanda pela maximização do excedente, obtida com a solução de um programa não linear com restrições lineares, resolvido com um código de gradiente reduzido.

Um modelo regionalizado, para o planejamento energético do estado do Paraná, foi proposto por Ramos e Groszewicz [R1]. As fontes de energia e os centros de consumo são considerados geograficamente distribuídos e interligados por uma rede de transporte. É formulado um programa linear que minimiza os custos atualizados do consumo, da expansão do sistema de suprimento e da expansão ou substituição dos equipamentos de consumo. As restrições do problema englobam limites máximos para a demanda por derivados de petróleo, para a disponibilidade de insumos não renováveis e para a capacidade da rede de transporte que inclui perdas. O problema é decomposto através de uma relaxação das restrições de balanço de fluxo, que são responsáveis pelo equilíbrio entre oferta e demanda<sup>1</sup>. A perspectiva de considerar economias de escala aponta para a formulação de problemas não convexos

Outros aspectos do emprego de modelos de energia no âmbito brasileiro são encontrados na literatura. Uma análise de alternativas energéticas para um eventual corte no suprimento de petróleo, com um modelo de otimização linear estruturado a partir da Balanço Energético Nacional, é apresentada por Figueredo, Coutinho e d'Araujo [F2]. Miguez, Valle e Pimentel [M6], discutem uma metodologia integrada para o planejamento energético global, envolvendo oferta, demanda e a relação energia-economia, tendo como referência os modelos Markal (oferta) e Medee (demanda). Um modelo energético para o setor industrial, considerando possibilidades de substituições entre energético e de energia por

---

<sup>1</sup> Uma discussão de modelos energéticos tratados como problemas de equilíbrio entre oferta e demanda, resolvidos com métodos iterativos (por exemplo, ponto fixo), são encontrados em Hogan [H3] e Shapiro [S3].

capital, é desenvolvido por Iusem [11] para otimizar o perfil de consumo de energia na indústria.

### 1.5 Comentários

Nos modelos desenvolvidos no setor elétrico observa-se as seguintes tendências: representações individualizadas de aproveitamentos; modelos de grafos para os balanços hidráulicos; função objetivo não linear (consequência da influência da altura de queda na geração hidrelétrica); variáveis inteiras (0-1) no comissionamento de termelétricas e expansão de nova unidades. Nos setores de petróleo e gás natural as tendências observadas incluem: restrições não lineares para o comportamento dos reservatórios; variáveis inteiras (0-1) representando o desenvolvimento de campos e expansão de sistemas de captação; grafo generalizado para sistemas de suprimento de gás natural.

Em geral, os modelos nos setores elétrico e de petróleo resultam em instrumentos de planejamento eficazes. No entanto, eles podem assumir um comportamento míope quando se deparam com situações de instabilidade, não tomando conhecimento de oportunidades atraentes de substituições energéticas<sup>2</sup>. Por outro lado, os modelos globais defrontam-se com pelo menos dois obstáculos importantes, a saber: sua natureza normativa em contraste com a descentralização decisória observada nos sistemas globais; a dificuldade de conhecer os fluxos energético em vários segmentos da atividade econômica. O primeiro deles é inerente à esta abordagem, e conduz a uma situação paradoxal; uma técnica essencialmente normativa passa a ser usada apenas de modo prospectivo. O segundo obstáculo, que reflete a pobreza dos dados disponíveis sobre energia, os modelos globais, na realidade,

---

<sup>2</sup> Nesta circunstância, torna-se necessário ajustar os parâmetros exógenos do modelo, forma implícita de representar modificações ambientais.

apenas tiveram o mérito de contribuir para torná-lo explícito. Resolvê-lo em países como o Brasil, que principiavam a construção de suas estatísticas energéticas, é tarefa penosa, porém, com benefício que vão muito além da utilização destes dados em modelos, Iusem [11].

Neste trabalho será desenvolvida uma abordagem multisetorial que considera um sistema que opera com mais de um energético e admite substituições no lado da oferta em situações específicas. O modelo tem como suporte os sistemas físicos dos setores envolvidos, nos quais os fluxos energéticos são bem estabelecidos. Os decisores e o âmbito de suas ações são definidos com nitidez. O emprego de uma técnica normativa com múltiplos decisores conduz às seguintes situações: inexistência de conflito, onde se aponta uma cooperação operativa; ocorrência de conflito, que é quantificado de modo a fornecer elementos para negociações.

Formalmente, o problema tratado por Ramos e Groszewich [R1] assemelha-se ao desenvolvido neste trabalho; ambos consideram sistemas energéticos com produção e consumo distribuídos geograficamente, conversões energéticas e transporte de energia, podendo incluir restrições não convexas. Porém, eles são tratados de maneiras diferentes. Aqui, o problema de otimização dos fluxos de energia é resolvido com um algoritmo especializado para grafo generalizado, e as restrições não convexas tratadas com um método de enumeração implícita. Conceitualmente, os dois problemas também diferem, este é um modelo de otimização do suprimento que envolve três setores energéticos, cujos domínios de ação estão nitidamente definidos e onde procura-se identificar oportunidades para uma operação coordenada vantajosa para ambos.

## UM MODELO ENERGÉTICO MULTISSETORIAL

### 2.1 Introdução

Neste capítulo, desenvolve-se um modelo energético multisetorial e dinâmico. Aborda-se um sistema de suprimento de gás natural e eletricidade com os centros de produção e consumo distribuídos geograficamente e interligados por uma rede de transporte de energia (rede elétrica/pipeline).

Os setores de eletricidade e gás encontram-se acoplados por termelétricas a gás, criando condições para uma operação coordenada. A eletricidade conta com uma geração térmica complementar, através do aproveitamento de bagaço durante a safra de cana-de-açúcar. O gás natural é extraído em duas circunstâncias, associado e não-associado ao petróleo. A oferta do gás associado é rígida, a produção líquida deve ser alocada na curva de demanda ou queimada. Enquanto a do gás não-associado é flexível, podendo acompanhar a evolução da curva de demanda. Eletricidade e gás natural são transportados em um rede de energia, observando seus limites operativos e podendo considerar a ocorrência de perdas.

O propósito deste capítulo é estabelecer a representação matemática para os variados componentes do sistema energético multisetorial, considerados isoladamente, a saber: hidrelétricas,

termelétricas a gás, termelétrica a bagaço, campo de gás natural associado, campo de gás não-associado e rede de energia. Estes componentes serão integrados a nível de sistema no capítulo seguinte, onde se formula os problemas da operação coordenada dos setores elétrico e de gás natural para horizontes de médio e curto prazo.

## 2.2 Notação

A notação utilizada para desenvolvimento do modelo multisetorial também será considerada no terceiro capítulo, sempre que não haja referência explícita. Ela é apresentada a seguir por ordem alfabética:

- A - conjunto dos campos de gás associado
- $a_t$  - gás associado produzido no intervalo  $t$
- B - conjunto das termelétricas a bagaço de cana
- $B$  - excedente de bagaço de cana da safra  $S$
- $b_t$  - bagaço de cana no intervalo  $t$
- $d_t^E$  - demanda de eletricidade no intervalo  $t$
- $d_t^G$  - demanda de gás natural no intervalo  $t$
- E - conjunto dos arcos da rede de eletricidade
- $e_t^E$  - energia elétrica na rede de transporte no intervalo  $t$
- $e_t^H$  - geração hidrelétrica no intervalo  $t$
- $e_t^G$  - geração termelétrica a gás no intervalo  $t$
- $e_t^B$  - geração termelétrica a bagaço no intervalo  $t$
- $F_i$  - balanço líquido de fluxo do nó  $i$
- $f_{ij}$  - fluxo no arco  $(i,j)$
- G - conjunto dos arcos da rede de gás
- $g_t^A$  - produção líquida de gás associado no intervalo  $t$
- $g_t^G$  - gás natural na rede de transporte no intervalo  $t$

- $g_t^N$  - produção de gás não associado no intervalo  $t$
- $\theta$  - aceleração da gravidade
- $H$  - conjunto dos sistemas hidrelétrica
- $h$  - altura líquida de queda da hidrelétrica
- $m_t$  - excedente de bagaço moído no intervalo  $t$
- $N$  - conjunto dos campos de gás não-associado
- $N$  - gás não-associado no horizonte  $T$
- $p^B$  - produtividade da termelétrica a bagaço
- $p^G$  - produtividade da termelétrica a gás
- $p^H$  - fator de correção (geração/energia liberada) do sistema hidrelétrico
- $q_t^A$  - gás associado queimado no intervalo  $t$  (perdas)
- $S$  - período da safra de cana
- $T$  - horizonte de estudo
- $t$  - intervalo de discretização
- $u_t^B$  - bagaço usado pela termelétrica no intervalo  $t$
- $u_t^G$  - gás usado pela termelétrica no intervalo  $t$
- $u_t^H$  - turbinagem no intervalo  $t$
- $v^H$  - vertimento total no horizonte  $T$
- $v_t$  - vertimento no intervalo  $t$
- $w_{ij}$  - perdas no arco  $(i, j)$
- $w^E$  - perdas na rede elétrica
- $w^G$  - perdas na rede de gás natural
- $x^H$  - energia hidráulica no horizonte  $T$
- $x_t$  - energia hidráulica no intervalo  $t$
- $y_t$  - energia afluente no intervalo  $t$
- $\Delta$  - desvio energético do autoprodutor em paralelo
- $\delta_t^G$  - déficit de gás natural no intervalo  $t$
- $\delta_t^E$  - déficit de energia elétrica no intervalo  $t$

- $\gamma$  - ganho energético do bagaço armazenado
- $\eta$  - rendimento da hidrelétrica
- $\rho$  - densidade da água
- nó expandido no tempo para cada intervalo  $t$
- nó único para o horizonte  $T$

Barras acima e abaixo de uma variável indicam seus limites superior e inferior, respectivamente. Por exemplo,  $\bar{u}$  indica o limite superior de  $u$ , e  $\underline{u}$  seu limite inferior. Quando não ficar explícito, será considerado que  $a \in A$ ,  $b \in B$ ,  $c \in G$ ,  $h \in H$ ,  $n \in N$  e  $t \in T$ .

### 2.3 Sistema Energético Multisetorial

Um sistema multisetorial será entendido como aquele que opera com diferentes formas de energia e leva em conta possibilidades de substituições energéticas apenas em situações específicas. É o caso do modelo desenvolvido neste capítulo, abordando um sistema que fornece eletricidade e gás natural a mercados consumidores regionalizados, a partir de uma produção distribuída geograficamente. Uma rede de transporte de energia interliga os centros de consumo e produção.

Um sistema de suprimento desta natureza, considerando explicitamente intercâmbios energéticos no lado da oferta, é ilustrado na fig.2.1. Mercados consumidores de eletricidade são atendidos com energia produzida por hidrelétricas e termelétricas, a gás natural e a bagaço de cana. Simultaneamente, consumidores de gás natural são atendidos por um sistema supridor de gás. Os setores elétrico e de gás natural estão acoplados operacionalmente por termelétricas a gás.

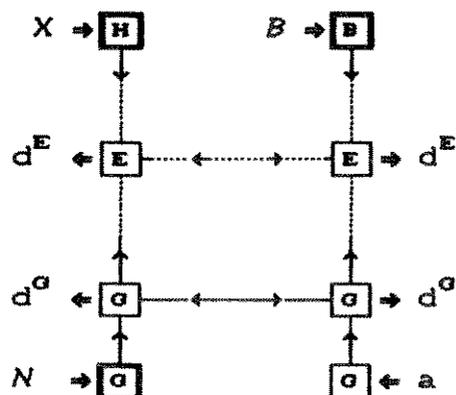


fig.2.1 Sistema Energético Multisetorial<sup>3</sup>

Como se pretende acompanhar o desempenho do sistema nos vários intervalos de discretização que compõem o horizonte de estudo, o que resultará em uma formulação dinâmica do problema, esta rede indicado no fig.2.1 deve ser expandida no tempo de modo conveniente.

#### 2.4 Produção de Eletricidade

Neste modelo, considera-se a eletricidade produzida a partir de energia hidráulica, gás natural e bagaço de cana, com uma abordagem que admite: a energia hidráulica disponível sendo armazenada, convertida em eletricidade ou vertida; o gás natural extraído sendo consumido diretamente, convertido em eletricidade ou *queimado* - não se leva em conta a possibilidade do gás já extraído vir a ser novamente armazenado; o excedente do bagaço de cana sendo armazenado, convertido em eletricidade ou comercializado diretamente. Porém, a eletricidade produzida pelo sistema terá que ser integralmente consumida.

<sup>3</sup> Os arcos representados por traços cheio e pontilhado indicam transformações energéticas. Por exemplo, de gás natural, ou bagaço de cana, para eletricidade.

Para cada forma de produção de eletricidade, serão desenvolvidos alguns modelos, sugerindo alternativas para a representação da geração elétrica e pondo em discussão aspectos considerados relevantes.

#### 2.4.1 Geração Hidrelétrica

Os aproveitamentos hidrelétricos convertem a energia potencial da água, relacionada com certa altura líquida de queda, em energia elétrica (valendo-se das vazões e declividades dos rios). Quando o aproveitamento possui reservatório, as vazões naturais são regularizadas em alguma medida. Ele cria a possibilidade de reter parte do volume afluente nas épocas úmidas para usá-lo durante as estiagens.

A fig.2.2 ilustra uma hidrelétrica com reservatório. Se não há reservatório, as vazões afluentes e defluentes são iguais a cada instante e o aproveitamento é dito a *fio-de-água*.

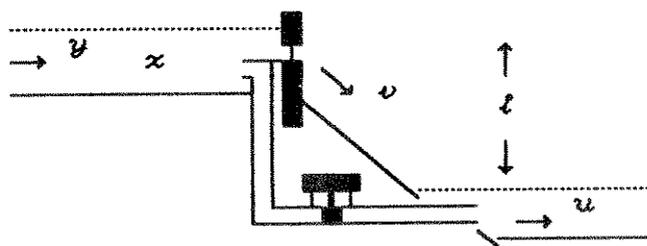


fig.2.2 Hidrelétrica com Reservatório<sup>4</sup>

Quando se admite constantes a altura de queda da usina e o rendimento do grupo turbina-gerador, a geração hidrelétrica é aproximada por uma função linear da turbinagem. Neste caso, ela é expressa por

<sup>4</sup> As letras  $u$ ,  $v$ ,  $x$ ,  $y$  são usadas para exprimir o balanço hidráulico em unidades volumétricas.

$$e^H(u) = k \cdot u^H \quad (2.1)$$

onde,  $k = \eta \cdot \rho \cdot g \cdot l$  é a produtividade do aproveitamento.

O balanço hidráulico do reservatório para cada intervalo de tempo (unidades volumétricas), expresso em termos da variação do volume armazenado, da afluência e da defluência, é determinado pela equação

$$x_t - x_{t-1} + u_t + v_t = y_t \quad (2.2)$$

Na primeira alternativa usada para representar a geração hidrelétrica, admite-se conhecidos: o total de energia hidráulica disponível a ser operado no horizonte de estudo; o fator de correção entre a energia liberada e a geração elétrica; a capacidade máxima de turbinagem do sistema. Ela ainda considera a possibilidade de vertimento do excedente de energia, como fica ilustrado na fig.2.3.

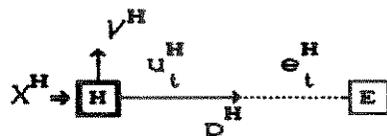


fig.2.3 Alocação da Geração Hidrelétrica

A energia hidráulica disponível no horizonte T é alocada segundo (2.3). A relação entre energia liberada e geração elétrica fica estabelecida em (2.4). As equações (2.5)-(2.6) representam as restrições locais sobre turbinagens e vertimentos.

$$\sum_{t \in T} u_t^H + V^H = X^H \quad (2.3)$$

$$P^H \cdot u_t^H - e_t^H = 0 \quad (2.4)$$

$$0 \leq u_t^H \leq \bar{u}^H \quad (2.5)$$

$$0 \leq v^H \quad (2.6)$$

Observe que este modelo aloca de forma rígida a disponibilidade de energia hidráulica durante o horizonte de estudo. Tudo se passa como se ele não possuísse qualquer autonomia para alterar os volumes de energia armazenados no horizonte. No entanto, com uma ligeira modificação, é possível lhe conferir maior flexibilidade na operação do sistema hidrelétrico, tornando-o capaz de absorver alguma flutuação no balanço de energia hidráulica. Isto é conseguido fazendo a substituição da equação (2.3) por (2.7)-(2.8).

$$\sum_{t \in T} u_t^H + v^H - X^H = 0 \quad (2.7)$$

$$\underline{X}^H \leq X^H \leq \bar{X}^H \quad (2.8)$$

A energia hidráulica  $X^H$ , passada para o lado esquerdo em (2.7), é convertida em uma variável, cujos limites, estabelecidos em (2.8), indicam sua flutuação máxima admissível. Por exemplo, considere  $X_0^H$  a energia hidráulica que se pretende alocar no horizonte T - isto é, o termo constante de (2.3). Então,  $(\bar{X}^H - X_0^H)$  corresponde ao acréscimo de energia que poderia ser deplecionado, analogamente,  $(X_0^H - \underline{X}^H)$  é o acréscimo que poderia ser armazenado. Desse modo, o sistema passa a ter decisão sobre o total de energia a ser utilizado no horizonte.

Uma terceira alternativa é levar em conta o armazenamento de energia hidráulica em cada intervalo de discretização, usando uma representação a reservatório equivalente para o sistema hidrelétrico, [A8-9] e [P3]. Com a hipótese de que as produtividades das usinas hidrelétricas são constantes, a partir de (2.1) pode-se associar o volume armazenado em um reservatório com uma quantidade de energia potencial. Neste caso, a energia potencial hidráulica  $x$  ( $\overline{MW}$ ) associada ao volume armazenado  $x$  ( $hm^3$ ) é dada por

$$x(x) = k \cdot x \quad (2.9)$$

Quando se tem vários aproveitamentos em cascata, o volume armazenado no reservatório  $i$  pode ser turbinado na própria usina  $i$  (se ela existir) e em todas as outras situadas a jusante. Desse modo, a energia armazenada no reservatório  $i$  é calculada por

$$x_i = x_i \cdot \sum_{j \in J} k_j \quad (2.10)$$

onde  $J$  é o conjunto dos índices das usinas a jusante do reservatório  $i$  (inclusive). Em decorrência de (2.10), a energia armazenada na cascata formada por  $I$  usinas será o somatório das energias armazenadas em cada reservatório, dada por

$$x = \sum_{i \in I} (x_i \cdot \sum_{j \in J} k_j) \quad (2.11)$$

Assim, observada a condição de produtividade constante, calcula-se a energia armazenada em todo sistema - ou seja, no reservatório equivalente - a partir do volume de água armazenado em cada reservatório.

Através de um desenvolvimento semelhante ao que resultou em (2.11), chega-se à conceituação de energia afluente, turbinada e vertida no reservatório equivalente, Lyra [L10], definidas como segue

$$u = \sum_{i \in I} (k_i u_i) \quad (2.12)$$

$$v = \sum_{i \in I} (k_i v_i) \quad (2.13)$$

$$y = \sum_{i \in I} (y_i \cdot \sum_{j \in J} k_j) \quad (2.14)$$

Assim, a geração hidrelétrica fica definida por (2-4)-(2.6), juntamente com a equação do balanço de energia no reservatório equivalente (2.15).

$$x_t^H - x_{t-1}^H + u_t^H + v_t^H = y_t^H \quad (2.15)$$

Este terceiro modelo fica ilustrado na fig.2.4.

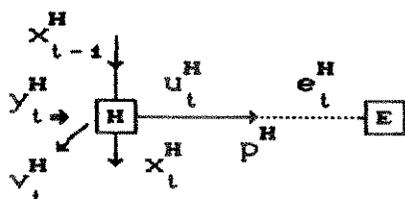


fig.2.4 Geração Hidrelétrica com Resevatório Equivalente

O primeiro modelo apresentado é agregado ao extremo, tanto no espaço quanto no tempo: admite que a quantidade de energia hidráulica a ser operada no horizonte de estudo já foi otimizada de alguma forma. Por exemplo, através de um modelo setorial mais desagregado. O segundo modelo é mais flexível, permitindo fazer ajustes nesta quantidade de energia - será utilizado na formulação do problema de curto prazo (alocação da termelétrica). O terceiro é mais o desagregado, possibilitando acompanhar a evolução da energia armazenada no sistema em cada intervalo de discretização - será usado para o médio prazo (minimização das perdas energéticas).

#### 2.4.2 Termelétrica a Gás Natural

A termelétrica a gás natural produz eletricidade aproveitando diretamente a expansão dos gases de combustão através de uma turbina a gás. Tradicionalmente, elas têm apresentado rendimentos inferiores aos das termelétricas com turbina a vapor - nas quais o calor da combustão é usado em caldeiras para produzir o vapor que aciona as turbinas a vapor.

Mais recentemente, começa a surgir uma nova geração de termelétricas: a termelétrica a gás de ciclo-combinado. Como o próprio nome sugere, ela combina turbina a gás com turbina a vapor: a expansão dos gases de combustão é aproveitada diretamente por uma turbina a gás (primeiro estágio); os gases aquecidos da descarga do primeiro estágio são aproveitados em uma caldeira para produzir vapor, que aciona uma turbina a vapor (segundo estágio), como indicado na fig.2.5.

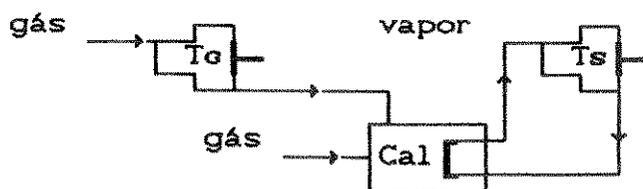


fig.2.5 Termelétrica a Gás de Ciclo Combinado

Algumas unidades geradoras com arquitetura de ciclo-combinado encontram-se atualmente em operação, para fins de demonstração, umas gaseificando carvão [C8], e outras operando diretamente com gás natural [C6]<sup>5</sup> e [B14].

A termelétrica a gás faz o acoplamento operacional entre os setores elétrico e de gás natural. Ela desempenha um duplo papel: de consumidor, absorvendo gás natural; de fornecedor, gerando energia elétrica. O modelo adotado para as termelétricas a gás natural é mostrado na fig.2.6.

<sup>5</sup> Esta referência apresenta um estudo do rendimento de uma termelétrica de ciclo combinado com 800 MW, constituída por duas unidades a gás de 150 MW e uma unidade a vapor de 450 MW. O acréscimo de 50 MW é consequência do maior rendimento do conjunto.

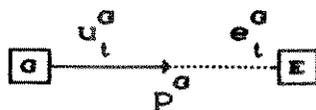


fig.2.6 Termelétrica a Gás Natural

A operação em horizonte de médio prazo considera um rendimento constante, representando o consumo específico de um ciclo típico de operação (por exemplo, anual), como fica definido em (2.16)

$$p^g \cdot u_t^g - e_t^g = 0 \quad (2.16)$$

$$0 \leq u_t^g \leq \bar{u}^g \quad (2.17)$$

No curto prazo, o rendimento será tratado como uma função linear por parte, com dois segmentos e convexa, como estabelecido em (2.18).

$$\left. \begin{aligned} p_1^g \cdot u_t^g - e_t^g = 0, \text{ se } 0 \leq u_t^g < \bar{u}_1^g \\ p_2^g \cdot u_t^g - e_t^g = 0, \text{ se } \bar{u}_1^g \leq u_t^g \leq \bar{u}_t^g \end{aligned} \right\} \text{ com } p_1^g < p_2^g \quad (2.18)$$

Assim, o seu rendimento fica definido para duas faixas de operação: a faixa de geração mais baixa onde apenas a turbina a gás produz eletricidade (menor rendimento) e a faixa mais alta onde opera todo o conjunto (maior rendimento).

#### 2.4.3 Termelétrica a Bagaço de Cana

O bagaço proveniente da moagem da cana-de-açúcar em usinas e destilarias é queimado em caldeiras que fornecem o vapor utilizado na geração de eletricidade e no processo de fabricação do álcool e açúcar. Na situação brasileira atual, geralmente, verificam-se desperdícios expressivos de energia no

aproveitamento do bagaço de cana. Em grande parte, decorrência dos níveis relativamente baixos de pressão e temperatura usados para a produção de vapor, impossibilitando maior eficiência da geração de eletricidade. Este fato, tem levado um grande número de refinarias e destilarias a operar com déficit de eletricidade, suprido pela rede elétrica. Em larga medida, o parque atual de equipamentos instalados no setor reflete épocas onde o valor do bagaço não era relevante.

Com o passar do tempo, foi-se desenvolvendo um mercado para comercialização do excedente de bagaço, adquirido pela indústria de cítricos, papel, celulose, cerâmica, Cesp [C4]. Ultimamente, passou-se a analisar as condições para operação de autoprodutores em paralelo com a rede elétrica. Consequentemente, abrem-se possibilidades para utilização em maior escala do excedente energético do bagaço, seja através de termelétricas operando de forma autônoma (independentemente do processo produtivo), seja pela ampliação da capacidade de cogeração (produção simultânea de eletricidade e vapor de processo).

Existem expectativas a médio prazo de que este setor possa atingir autosuficiência em eletricidade, através de melhoria da eficiência no aproveitamento do bagaço conseguida com a elevação dos níveis de pressão e temperatura do vapor. Em prazos mais longos, espera-se poder suprir a rede elétrica com excedentes de eletricidade. Um estudo do impacto destas modificações sobre um número expressivo de destilarias e usinas do estado de S. Paulo, considerando a tecnologia atualmente disponível e usando turbinas de alta e média pressão em configurações semelhantes à indicada na fig.2.7, é encontrado em Cercin, Oliva e Beltrán [C13]<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup> Esta referência apresenta dados que indicam a predominância da produção de vapor a 21 kgf/cm<sup>2</sup> e 290 °C, e analisa o impacto sobre o excedente de energia se o vapor fosse produzido a 62 kgf/cm<sup>2</sup> a 450 °C.

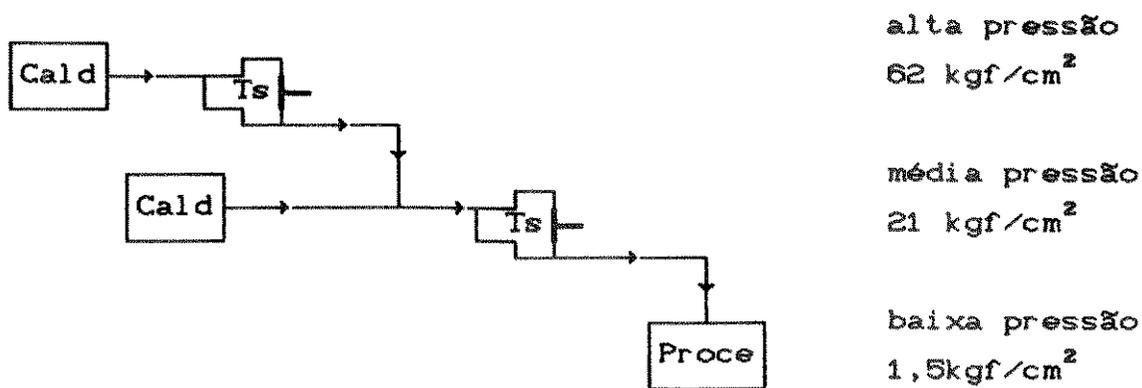


fig.2.7 Termelétrica a Bagaço de Cana

O primeiro modelo discutido para uma termelétrica a bagaço de cana considera disponível para geração termelétrica durante a safra apenas o excedente de bagaço. Isto é, a parcela que e sobra após a queima da quantidade necessária para produção de vapor. Assim, a operação da termelétrica fica desacoplada do processo produtivo. O modelo faz a alocação do excedente de bagaço da safra nos intervalos de discretização, como é mostrado na fig.2.8.

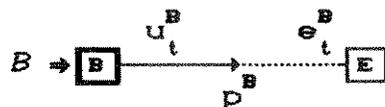


fig.2.8 Termelétrica a Bagaço

A operação da termelétrica a bagaço de cana é definida por (2.19)-(2.21).

$$\sum_{t \in S} u_t^B \leq B \quad (2.19)$$

$$p^B \cdot u_t^B - e_t^B = 0 \quad (2.20)$$

$$0 \leq u_t^B \leq \bar{u}^B \quad (2.21)$$

Onde (2.19) estabelece a alocação do excedente de bagaço, (2.20) define a geração em função do bagaço queimado e (2.21) considera seus limites de operação.

Um outro modelo considera a operação da usina/destilaria como um autoprodutor-consumidor em paralelo com a rede: durante a safra ela atua como autoprodutor, suprindo a rede elétrica com um excedente de energia; na entressafra teria o comportamento de um consumidor. A operação seria coordenada de forma a manter o desvio anual entre as energias supridas e consumidas dentro de limites aceitáveis. Este modelo é mostrado na fig.2.9.

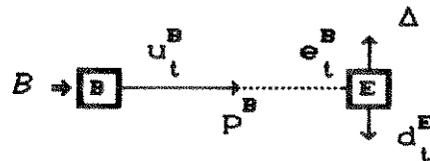


fig.2.9 Termelétrica a Bagaço

A operação da termelétrica como autoprodutor-consumidor fica definida por (2.20)-(2.25).

$$\sum_{t \in S} e_t^B - \sum_{t \in S} d_t^E - \Delta = 0 \quad (2.22)$$

$$\underline{\Delta} \leq \Delta \leq \bar{\Delta} \quad (2.23)$$

$$0 \leq d_t^E \leq \bar{d}^E \quad (2.24)$$

$$u_t^B = 0 \text{ se } t \notin S ; \quad d_t^E = 0 \text{ se } t \in S \quad (2.25)$$

onde o balanço de energia elétrica no horizonte T é estabelecido por (2.22)-(2.23), os limites para o consumo de eletricidade são definidos em (2.24) e o sentido do fluxo de energia na safra e na entressafra é dado por (2.25).

Um terceiro modelo permite levar em conta que a capacidade calorífica do bagaço de cana cresce com o declínio do seu teor de

umidade. O modelo da termelétrica, modificado para levar em conta o armazenamento do bagaço, é ilustrado na fig.2.10.

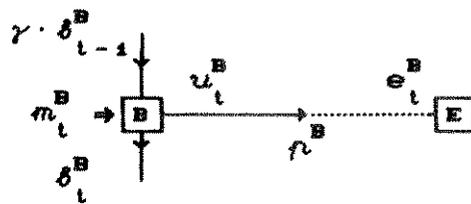


fig.2.10 Termelétrica a Bagaço com Armazenamento<sup>7</sup>

com operação da termelétrica definida pelas equações

$$\delta_t^B - \gamma \cdot \delta_{t-1}^B + u_t^B = m_t^B \quad (2.26)$$

$$\gamma \geq 0 \quad (2.27)$$

Isto possibilita considerar o ganho energético que se pode obter com a secagem do bagaço, por exemplo, fazendo uma armazenagem adequada ou utilizando os gases aquecidos da caldeira.

## 2.5 Produção de Gás Natural

O gás natural é produzido em duas circunstâncias: associado ao petróleo ou de modo independente. No primeiro caso, ele é considerado um subproduto. Sua extração fica subordinada à produção de petróleo, não podendo ser regulada de maneira autônoma. Uma vez extraído, o gás terá que ser escoado, reinjetado no campo petrolífero ou queimado. Seu aproveitamento é limitado pela capacidade do sistema de escoamento e pelo consumo. Como a quantidade máxima que pode ser reinjetada depende das características do reservatório, resta a queima como destino seguro para a parcela que sobra<sup>8</sup>.

<sup>7</sup> As letras  $\delta$ ,  $m$ ,  $u$ ,  $r$  são usadas para representar o balanço do bagaço de cana em unidades energéticas.

<sup>8</sup> No primeiro semestre de 1985 foram queimados no Brasil  $9 \cdot 10^9$  m<sup>3</sup> de gás natural [C13], correspondendo a uma demanda de

Em contrapartida, o gás não-associado é extraído de maneira autônoma, permitindo que a produção se desenvolva concomitantemente com o consumo. A demanda é atendida pelo sistema de suprimento levando em conta o comportamento dos reservatórios e a capacidade do sistema de escoamento.

O comportamento de um reservatório pode ser representado de forma aproximada por curvas de declínio que exprimem sua taxa de produção em função da produção acumulada, a fig.2.11 ilustra o este modelo.

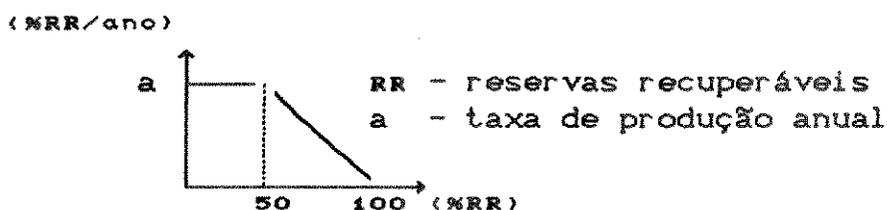


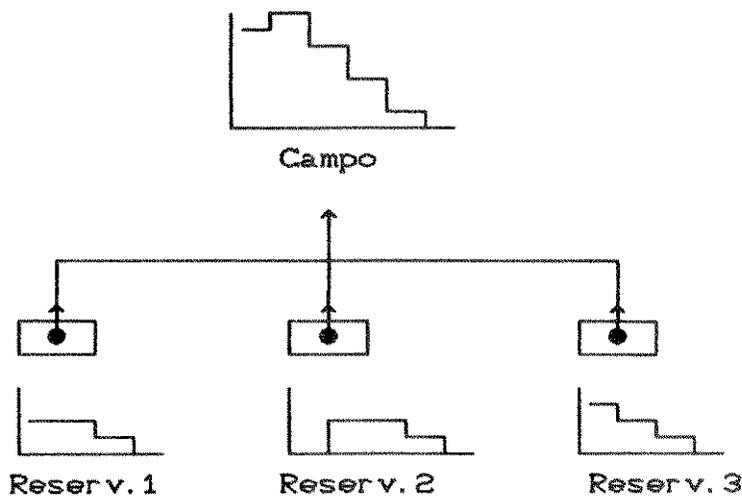
Fig.2.11 Curva de Declínio de um Reservatório de Gás

No início, a taxa de produção (a) mantém-se constante durante um certo período. A seguir, ela cai linearmente até o reservatório esgotar-se, o que ocorre quando a produção acumulada iguala a reserva recuperável (RR).

A produção de um campo de gás natural, com vários reservatórios desenvolvidos em períodos diferentes, pode ser estabelecida agregando-se convenientemente as curvas de declínio dos vários reservatórios. A fig.2.12, onde curvas encontram-se discretizadas, representam o processo de agregação. A curva de produção agregada fornece elementos para que se estime os limites máximos para a taxa de produção do campo de gás.

---

$5 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{d}$  (180 dias) e capaz de gerar 600 MW em uma termelétrica de ciclo combinado.



2.12 Produção de um Campo de Gás Natural

### 2.5.1 Gás Natural Associado ao Petróleo

A oferta de gás natural associado é rígida, não sendo regulada em função da demanda. Assim, o excedente de gás associado que não é absorvido pelo mercado, a menos da parcela que é reinjetada, terá que ser queimado.

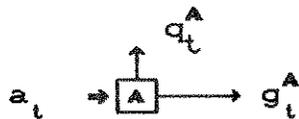


fig.2.13 Produção de Gás Associado

O modelo adotado para representar a produção do gás natural associado, mostrado na fig.2.13, é definido como segue.

$$g_t^A + q_t^A = a_t \quad (2.28)$$

$$0 \leq g_t^A \leq \bar{g}^A \quad (2.29)$$

$$0 \leq q_t^A \quad (2.30)$$

O balanço de fluxo é assegurado pela equação (2.28), o limite máximo de gás escoado é definido por (2.29) e a não negatividade do gás queimado por (2.30).

### 2.5.2 Gás Natural Não-Associado ao Petróleo

O gás não-associado é aquele extraído independentemente do petróleo. Sua produção é definida pela política de deplecionamento dos reservatórios de gás, observando as limitações impostas pelo sistema de escoamento e pelo consumo. O modelo de produção do gás não-associado admite conhecido o volume máximo que pode ser produzido no horizonte T, como ilustrado na fig.2.14.



fig.2.14 Produção de Gás Não-Associado

A produção de gás natural não-associado fica definida pelas equações (2.31)-(2.32).

$$\sum_{t \in T} g_t^N \leq N \quad (2.31)$$

$$0 \leq g_t^N \leq \bar{g}_t^N \quad (2.32)$$

## 2.6 Transporte de Energia

Produção e consumo de energéticos, no caso eletricidade e gás natural, estão distribuídos geograficamente e são interligados por uma rede de transporte de energia. Esta rede é representada convenientemente por um grafo não-conservativo, como indicado na fig.2.15, com o balanço de fluxo atendido em cada nó. Assim, os nós deste grafo indicam locais onde energia é produzida ou consumida, enquanto os arcos representam interligações energéticas. Atribui-se limites para os fluxos de

energia, e multiplicadores nos arcos de transporte permitem considerar perdas.

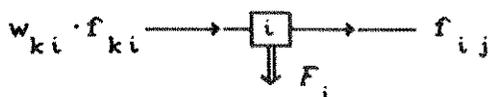


fig.2.15 Balanço de Fluxo em um Nó da Rede de Transporte

O balanço de fluxo de energia em cada nó é definido por (2.33), com o fluxo em cada arco restrito por (2.34).

$$\sum_j f_{ij} - \sum_k w_{ki} \cdot f_{ki} = -F_i \quad (2.33)$$

$$\underline{f} \leq f_{ij} \leq \bar{f} \quad (2.34)$$

onde:  $f_{ij}$  é o fluxo do arco  $(i,j)$ ;  $F_i$  o balanço líquido do nó  $i$  (produção/demanda); o arco  $(i,j)$  transporta gás se  $i,j,k \in G$ , e eletricidade quando  $i,j,k \in E$ .

## 2.7 Comentários

Neste capítulo desenvolveu-se um modelo para um sistema energético multisetorial e dinâmico. O propósito de avaliar os benefícios de uma operação coordenada acarretou maior atenção na representação dos pontos de interligação (termelétrica) e na rede de transporte de energia. Isto conduziu a uma representação simplificada dos sistemas hidrelétrico e de produção de gás. Porém, ela apresenta a grande vantagem de conduzir a um problema com estrutura de grafo generalizado, como será visto em maior detalhe no capítulo seguinte.

Representações para o sistema hidrelétrico considerando usinas individualizadas, como tratadas por Lyra e Tavares [L12], poderiam ser desenvolvidas. Mas, neste caso, verifica-se que a estrutura de grafo do problema não ficaria preservada, o que exigiria outras técnicas de solução com esforços computacionais e requisitos de memória mais expressivos.

Para o gás natural, o balanço das reservas poderia ser feito para cada reservatório do sistema produtor, ou para aqueles que merecessem maior destaque, em virtude das características do reservatório ou do sistema de escoamento. Isto apenas aumentaria a dimensão do problema, sem modificar sua estrutura.

As produtividades das usinas geradoras de eletricidade e as perdas na rede de transporte de energia foram linearizados. No entanto, se necessário (por exemplo, em estudos de curto prazo), elas poderiam ser considerados lineares por partes.

## OPERAÇÃO MULTISSETORIAL COORDENADA

### 3.1 Introdução

O objetivo da operação coordenada é procurar uma compensação mútua entre os desequilíbrios energéticos dos sistemas elétrico e de gás natural e biomassa, fazendo o ajuste do fluxo de energia intersetorial.

A disponibilidade de energia hidráulica para produção de eletricidade depende de regimes hidrológicos submetidos a incertezas. Isto deixa os sistemas hidrotérmicos onde predomina a geração hidrelétrica expostos a riscos de déficit energético. A perspectiva da ocorrência de déficits leva algumas vezes a operação do sistema a duas situações inconvenientes. Uma é a necessidade ocasional de se realizar racionamentos de energia, quando estiagens severas persistem por tempo prolongado com as reservas energéticas caindo a níveis muito reduzidos. A outra, menos explícita e mais frequente, é a prática de vertimentos desnecessários que decorre da preocupação de se procurar manter a energia armazenada no sistema em níveis elevados, induzindo procedimentos operacionais excessivamente cautelosos e geralmente dispendiosos.

É razoável supor que uma complementação térmica mais significativa contribua para uma melhor condição de operação do

sistema hidrelétrico, na medida em que reduz o risco de déficit.

Por outro lado, sistemas de suprimento de gás natural podem vir a operar com perdas acentuadas quando é preponderante a parcela do gás associado ao petróleo, em virtude da rigidez da sua oferta. Deve-se esperar que estas perdas sejam diminuídas quando se dispõe de consumidores (especiais) com flexibilidade e capacidade para absorver grandes flutuações da demanda, tendo condição de consumir maior quantidade de gás se o mercado está retraído, e menor quantidade quando o mercado se expande.

Consequentemente, a presença de usinas termelétricas a gás contribui favoravelmente para o desenvolvimento e a operação de um sistema de suprimento de gás natural, através da estabilização da demanda.

Os aspectos considerados acima justificam a análise da operação coordenada dos setores de eletricidade e de gás natural interligados por termelétricas a gás, que podem ser vistas como consumidores flexíveis pelo sistema de suprimento de gás e como uma geração complementar pelo sistema elétrico. O nível de atividade das termelétricas a gás determina a transferência de energia intersetorial, contribuindo para reduzir os desequilíbrios entre oferta e demanda. Cabe observar que este nível de atividade deve ser ajustado às condições operacionais de ambos os sistemas, podendo incluir o atendimento a mercados secundários e decidir se é mais atraente expandir as vendas de gás ou de eletricidade.

O sistema hidrelétrico também poderá contar com uma complementação térmica proveniente da queima do bagaço de cana de açúcar durante o período da safra.

O problema da operação coordenada dos setores elétrico e de gás natural será formulado para horizontes de médio e de curto prazo. No médio prazo, atua-se com as reservas de energia dos sistemas (energia hidrelétrica armazenada e gás natural não associado disponível) objetivando minimizar perdas ou déficits

energéticos, dependendo da situação do sistema. No curto prazo, decide-se pelo nível de operação das termelétricas a gás, explorando as oportunidades oferecidas pelos mercados de eletricidade e gás natural.

### 3.2 Operação Coordenada a Médio Prazo

O propósito de coordenar a operação interligada dos setores elétrico - contando com a geração termelétrica do setor de álcool/açúcar - e de gás natural no médio prazo (por exemplo, um ano discretizado mensalmente) será a redução das perdas ou déficits energéticos que ocorreriam com os sistemas operando isoladamente. Neste horizontes, os desequilíbrios entre oferta e demanda são consequência da defasagem entre os respectivos ciclos sazonais e da diferença entre os ritmos de desenvolvimento dos sistemas de suprimento e dos mercados consumidores.

Por exemplo, observa-se na região Sudeste que a época de maior consumo de eletricidade (inverno) coincide com a estiagem. Em contrapartida, este é o período da safra de cana-de-açúcar, ocasião em que o excedente de bagaço torna-se disponível para geração termelétrica. No caso do gás natural, a pressão das importações de petróleo sobre as contas externas nacionais foi motivo para um esforço vigoroso para incrementar a produção interna de petróleo, provocando um excesso na oferta de gás associado na medida em que não ocorreu um desenvolvimento simultâneo no mercado de gás.

A partir dos componentes do modelo desenvolvidos no capítulo precedente, formula-se o problema de operação para médio prazo. O comportamento das reservas energéticas do sistema hidrelétrico ficará representado pelo modelo a reservatório equivalente. Os sistemas de suprimento de gás natural associado e não associado serão considerados através de metas de produção, do horizonte de estudo, que devem ser alocadas na curva de demanda. O aproveitamento do bagaço de cana será tratado como uma complementação térmica disponível durante a safra. As

termelétricas a gás serão consideradas com um consumo específico constante (médio prazo). Eletricidade e gás natural são levados dos centros de produção até os mercados consumidores através de uma rede de transporte de energia.

O problema de coordenar a operação do sistema multisetorial no horizonte de médio prazo é ilustrado na fig.3.1. O gás natural é proveniente de campos de produção associados ao petróleo e não associados, sendo levado até os centros de consumo através de uma rede de transporte (pipeline) e pode ser consumido diretamente ou convertido em eletricidade. A parcela do gás associado que não é consumida deverá ser queimada, e déficits de gás são considerados como se fossem supridos por uma fonte fictícia de custo muito elevado. Eletricidade é gerada predominantemente por usinas hidrelétricas e complementada por termelétricas a gás natural e bagaço de cana. Déficits de eletricidade também são atendidos por uma unidade fictícia a custo muito elevado. A termelétrica a gás natural faz o acoplamento entre os dois setores.

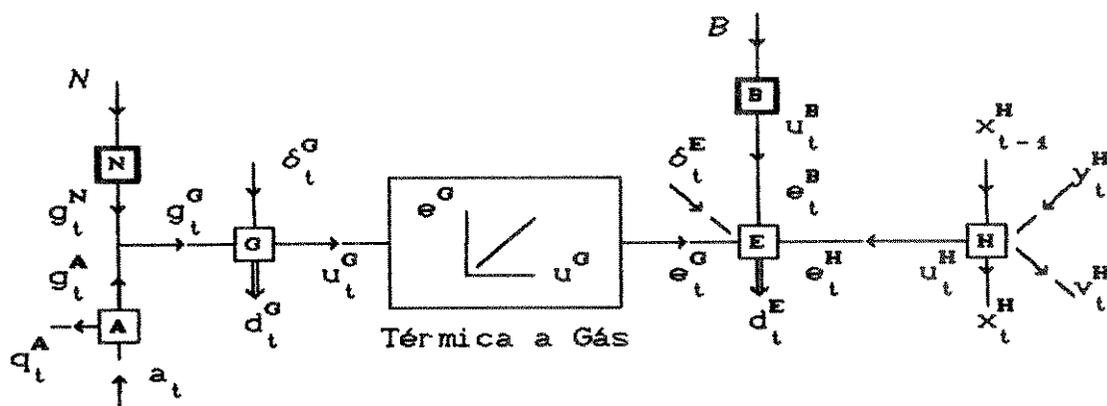


fig.3.1 Operação a Médio Prazo do Sistema Multisetorial<sup>o</sup>

Com o problema estruturado desta forma, esperar-se que a operação do sistema multisetorial venha ocorrer em alguma das situações mostradas na fig.3.2.

<sup>o</sup> Sempre que não haja referência explícita, será utilizada a notação estabelecida no capítulo 2.



o que corresponde a uma cooperação operacional entre os dois setores. Nesta condição, a função objetivo (3.2) será definida como a minimização conjunta do déficit de eletricidade e da queima do excesso de gás.

$$\text{Min } z = \sum_{t \in T} \left( \sum_{g \in G} q_t^g + \sum_{E \in E} \delta_t^E \right) \quad (3.2)$$

Déficits simultâneos de eletricidade e gás natural ocorrem na situação (iii), o que corresponderia a retardos no desenvolvimento da produção de gás acontecendo em um ano seco. Novamente, a operação das térmicas a gás depara-se com um conflito, o déficit de um dos setores somente será reduzido com a ampliação do déficit no outro. A função objetivo (3.3) minimiza uma ponderação dos déficits.

$$\text{Min } z = \sum_{t \in T} \left( \beta_1 \sum_{g \in G} \delta_t^g + \beta_2 \sum_{E \in E} \delta_t^E \right) \quad (3.3)$$

Finalmente, déficit de gás coincidentes com excesso de energia elétrica caracterizam a situação (iv), definindo-se como função objetivo (3.4) a minimização do vertimentos e déficits de gás.

$$\text{Min } z = \sum_{t \in T} \left( \sum_{H \in H} v_t^H + \sum_{g \in G} \delta_t^g \right) \quad (3.4)$$

Os valores atribuídos a  $\alpha_i$  e  $\beta_i$ , com  $i \in \{1, 2\}$ , podem traduzir a importância relativa dos termos da função objetivo, estabelecida por entendimento entre os dois setores, ou possuir significado econômico, exprimindo o custo de déficits e o valor de excedentes.

Uma alternativa para resolver o problema no médio prazo (PCMD), seria abordá-lo através de técnicas de programação multiobjetivo com os termos da função objetivo separados para

cada setor, como é mostrado em (3.5).

$$\text{Min } z(\omega) = \omega \cdot z^E + (1-\omega) \cdot z^G \quad (3.5)$$

com  $\omega \in [0,1]$ . Então, se  $\omega = 1$ , somente o objetivo  $z^E$  será minimizado. Por outro lado, se  $\omega = 0$ , apenas  $z^G$  será minimizado. Finalmente, se  $\omega \in (0,1)$ , os dois objetivos serão minimizados de forma ponderada.

Cabe observar que nos casos onde há conflito (I e III), deve-se obter uma solução não-dominada. Isto é, uma solução onde a melhora de um objetivo implica necessariamente na degradação do outro. No entanto, seria mais proveitoso levantar toda a curva de *tradeoff* dos objetivos conflitantes ao invés de uma única solução não dominada, ou seja, determinar as soluções com todas as ponderações possíveis. Isto pode ser conseguido com uma parametrização na função objetivo, fazendo o parâmetro  $\omega$  percorrer todo o intervalo  $[0,1]$ .

### 3.2.2 Formulação do Problema para Médio Prazo

O problema de coordenar a operação a médio prazo (PCMD) é formulado matematicamente considerando que a função objetivo pode ser definida por uma das equações (3.1)-(3.4). As restrições do sistema hidrelétrico incluem o balanço de energia hidráulica no reservatório equivalente e limites operativos, como estabelecido por (2.4)-(2.6) e (2.15). A termelétrica a gás é considerada com um consumo específico constante no médio prazo, como definido em (2.16). O aproveitamento do bagaço de cana disponível durante a safra é dado por (2.19)-(2.21). As produções de gás associado e não associado são representadas por (2.28-2.30) e por (2.31)-(2.32), respectivamente. Ou seja, o problema é formulado como segue:

CPCMD

Min z

s. a  $x_t^H - x_{t-1}^H + u_t^H + v_t^H = y_t^H$

$$p^H \cdot u_t^H - e_t^H = 0$$

$$p^G \cdot u_t^G - e_t^G = 0$$

$$p^B \cdot u_t^B - e_t^B = 0, \quad t \in S$$

$$g_t^A + q_t^A = a_t$$

$$\sum_{t \in S} u_t^B \leq B$$

$$\sum_{t \in T} g_t^Z \leq N$$

$$\sum_{K_G^+} (g_t^G + u_t^G) - \sum_{K_G^-} (g_t^Z + g_t^A + w^G g_t^G + \delta_t^G) = d_t^G$$

$$\sum_{K_E^+} e_t^E - \sum_{K_E^-} (e_t^H + e_t^B + e_t^G + w^E e_t^E + \delta_t^E) = d_t^E$$

$$-x_t^H \leq x_t^H \leq \bar{x}_t^H$$

$$0 \leq v_t^H$$

$$0 \leq u_t^H \leq \bar{u}_t^H$$

$$0 \leq u_t^B \leq \bar{u}_t^B, \quad t \in S$$

$$0 \leq u_t^G \leq \bar{u}_t^G$$

$$-e_t^E \leq e_t^E \leq \bar{e}_t^E$$

$$0 \leq q_t^G \leq \bar{q}_t^G$$

$$0 \leq q_t^Z \leq \bar{q}_t^Z$$

$$0 \leq q_t^A$$

$$0 \leq q_t^A$$

Onde considera-se:

- $K_{\sigma}^{+}$ , o conjunto dos arcos que deixam o nó  $\sigma$
- $K_{\sigma}^{-}$ , o conjunto dos arcos que chegam o nó  $\sigma$
- $K_{\epsilon}^{+}$ , o conjunto dos arcos que deixam o nó  $\epsilon$
- $K_{\epsilon}^{-}$ , o conjunto dos arcos que chegam o nó  $\epsilon$

O problema PCM, formulado para o horizonte de médio prazo, pode ser sumarizado como um problema de otimização em grafo generalizado (PGG),

$$\text{(PGG)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z \\ \text{s. a } \sum_{k \in K_l^+} f_k - \sum_{k \in K_l^-} w_k f_k = F_l \\ f_{-k} \leq f_k \leq \bar{f}_k \end{array} \right.$$

No capítulo seguinte será descrito um algoritmo de grande eficiência desenvolvido para tratamento deste problema.

### 3.3 Operação Coordenada a Curto Prazo

O objetivo da coordenação no horizonte de curto prazo<sup>1</sup>, no contexto deste trabalho, é decidir qual o nível ótimo de operação das termelétricas a gás natural. Leva-se em consideração os rendimentos das termelétricas a gás no curto prazo, o custo de déficits energéticos, a remuneração pelo suprimento a mercados secundários, as capacidades e perdas no transporte de energia.

O bloco de energia hidrelétrica despachado para o horizonte de estudo deve ser alocado na curva de demanda, o que também

---

<sup>1</sup> Por exemplo, pode-se considerar o problema em horizonte semanal discretizado em intervalos de algumas horas: carga leve, média e pesada.

deverá ser feito para o gás natural associado ao petróleo. A produção de gás não associado e a geração termelétrica a bagaço de cana são consideradas como complementações energéticas, cujas capacidades máximas são conhecidas de antemão.

O problema da operação coordenada a curto prazo fica ilustrado na fig.3.3. Para o gás associado é feito um balanço entre produção, consumo e queima. Um tratamento semelhante é dado para a energia hidrelétrica. O gás não associado e a complementação térmica a partir do bagaço são considerados como disponibilidades que podem ser ajustadas às demandas. As demandas são consideradas variáveis cujos limites inferiores correspondem aos mercados primários.

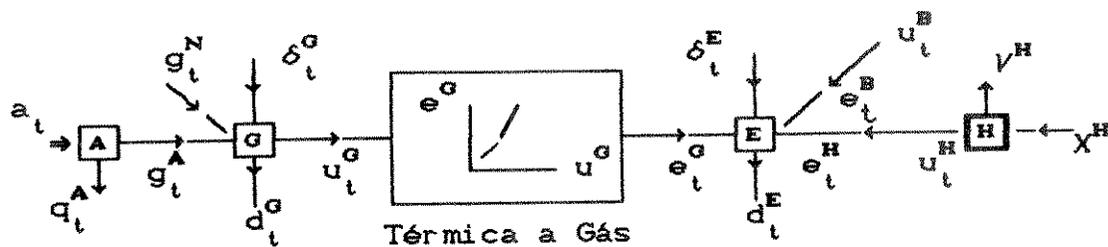


fig.3.3 Operação a Curto Prazo do Sistema Multisetorial

O rendimento a curto prazo da termelétrica a gás será considerado uma função linear por partes convexa, como fica estabelecido por (2.18). Ele será considerado a característica da termelétrica a gás natural mais relevante neste horizonte.

A decisão sobre entrada em operação da termelétrica a gás depende do que seja mais atraente, vender (reduzir déficit de) eletricidade ou gás. Observando cada setor isoladamente, a partir de suas condições de operação chega-se às noções de *valor marginal* da eletricidade ( $\pi_t^E$ ) e *valor marginal* do gás ( $\pi_t^G$ ). Cabe observar que, em geral, estes valores serão diferentes para cada intervalo de tempo, na medida em que dependem das condições de operação dos sistemas. Então, a termelétrica a gás deve entrar em operação se

$$\pi_t^G < p^G \cdot \pi_t^E \quad (3.7)$$

É possível estabelecer uma remuneração ( $s_t^G$ ) para o gás natural consumido pela termelétrica, dada por

$$\pi_t^G \leq s_t^G \leq p^G \cdot \pi_t^E \quad (3.8)$$

### 3.3.1 Função Objetivo do Problema para Curto Prazo

A função objetivo considerada para a operação coordenada a curto prazo (3.9) será a maximização do benefício líquido sobre o horizonte de estudo, expresso como a minimização do custo de déficits energéticos e a maximização da remuneração obtida com o atendimento aos mercados secundários de eletricidade e gás natural. Ou seja,

$$\text{Max } z = \sum_{t \in T} \left[ \sum_{g \in G} (r^G \cdot d_t^G - c^G \cdot \delta_t^G) + \sum_{e \in E} (r^E \cdot d_t^E - c^E \cdot \delta_t^E) \right] \quad (3.9)$$

onde  $r^G$  e  $r^E$  são as remunerações unitárias obtidas com o suprimento ao mercados de gás natural e eletricidade,  $c^G$  e  $c^E$  os custos unitários de déficits, respectivamente.

### 3.3.2 Formulação do Problema para Curto Prazo

A coordenação da operação a curto prazo do sistema multisetorial objetiva maximizar um benefício líquido no horizonte de estudo, expresso por (3.9).

Então, o problema de otimização para um horizonte de curto prazo (PCC) é formulado da maneira que segue:

Max z

s. a  $\sum_{t \in T} u_t^H + v^H - X^H = 0$

$p^H \cdot u_t^H - e_t^H = 0$

$p_1^G \cdot u_t^G - e_t^G = 0, \text{ se } 0 \leq u_t^G < c_1^G$   
 $p_2^G \cdot u_t^G - e_t^G = 0, \text{ se } c_1^G \leq u_t^G \leq c_2^G$  }  $p_1^G < p_2^G$

$g_t^A + q_t^A = a_t$

$\sum_{K_G^+} (g_t^G + u_t^G + d_t^G) - \sum_{K_G^-} (g_t^Z + g_t^A + w^G g_t^G + \delta_t^G) = 0$

$\sum_{K_E^+} (e_t^E + d_t^E) - \sum_{K_E^-} (e_t^H + e_t^B + e_t^G + w^E e_t^E + \delta_t^E) = 0$

$X^-^H \leq X^H \leq X^H$

$0 \leq v^H$

$0 \leq u_t^H \leq H$

$0 \leq e_t^B \leq B, \text{ se } 1$

$0 \leq e_t^E \leq E$

$0 \leq u_t^G \leq c_1^G$

$0 \leq g_t^G \leq c_2^G$

$0 \leq g_t^Z \leq Z$

$0 \leq g_t^A$

$0 \leq q_t^A$

$d_t^G \leq d_t^G \leq d_t^G$

$d_t^E \leq d_t^E \leq d_t^E$

CPCO

onde as demandas de gás e eletricidade foram convertidas em variáveis cujos limites mínimos  $\underline{d}^G$  e  $\underline{d}^E$  correspondem aos respectivos mercados primários.

A alocação da geração hidrelétrica na curva de demanda é feita através de (2.4)-(2.8). A termelétrica a gás é considerada com uma produtividade a curto prazo linear por partes convexa definida por (2.18), permitindo expressar tanto o rendimento da turbina a gás operando isoladamente quanto o do conjunto turbina a gás e turbina a vapor. A disponibilidade de complementação termelétrica a partir do bagaço de cana é considerada com capacidade de suprimento limitada superiormente, como estabelecido por (2.21). O gás associado é alocado na curva de demanda, como definido por (2.28)-(2.30). A disponibilidade de gás não associado é definida por (2.32).

Para o curto prazo, em virtude da geometria da curva de rendimento das termelétrica a gás de ciclo combinado, obteve-se a formulação de um problema de otimização em grafo generalizado não convexo (PNC), como segue

$$\text{(PNC)} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Max } z \\
 \text{s. a } \sum_{k \in K_l^+} f_k - \sum_{k \in K_l^-} w_k^1 f_k = F_l \quad \text{se } f_{-k} \leq f_k < \bar{f}_k^1 \\
 \sum_{k \in K_l^+} f_k - \sum_{k \in K_l^-} w_k^2 f_k = F_l \quad \text{se } \bar{f}_k^1 \leq f_k \leq \bar{f}_k \\
 w_k^1 < w_k^2 \\
 f_{-k} \leq f_k \leq \bar{f}_k
 \end{array} \right.$$

O problema (PNC) poderá ser tratado por um método de enumeração implícita (*Branch and Bound*), onde o subproblema relaxado é semelhante a (PGG).

### 3.4 Comentários

Neste capítulo desenvolveu-se uma formulação matemática para a operação coordenada de um sistema energético multisetorial, tratando o problema em dois horizontes de estudo: médio e curto prazo. As interligações entre os sistemas de suprimento de eletricidade e gás natural (termelétricas a gás) são representadas de maneira individualizadas, e leva-se em conta as redes de transporte de energia (eletricidade e gás natural).

O sistema hidrelétrico é representado de forma agregada. Cabe observar que isto não exclui o estudo individualizado para usinas hidráulicas. Pode-se considerar o problema decomposto em duas partes: o subproblema hidrelétrico considera os acoplamentos hidráulicos entre as usinas; o subproblema termelétrico decide sobre o nível de complementação térmica, levando em conta a disponibilidade de energia hidrelétrica e as limitações da rede elétrica. Uma abordagem deste tipo é utilizada por Brännlund *et al* [B10], com os dois subproblemas resolvidos iterativamente. Desse modo, não haveria maiores dificuldades em estabelecer esquemas de decomposição para o sistema multisetorial com um subproblema hidrelétrico, com usinas individualizadas e outro subproblema para os campos de produção de gás natural, com os reservatórios também representados individualmente. O problema de alocação das termelétricas, que considera restrições no transporte de energia, como está formulado neste capítulo, faria a integração entre os dois subproblemas.

No horizonte de médio prazo, definiu-se como objetivo a minimização de uma função que envolvia ponderações de déficits e perdas energéticas; é uma possibilidade. Outras alternativas poderiam ser propostas, por exemplo, a maximização das reservas energéticas no final do horizonte (volumes armazenados nas hidrelétricas e reservas recuperáveis dos reservatórios de gás não associado).

A formulação desenvolvida neste capítulo conduziu a dois problemas diferentes. Para o médio prazo, chegou-se a um problema de otimização em grafo generalizado com objetivos conflitantes. No curto prazo, obteve-se um problema não convexo de otimização em grafo generalizado. As técnicas para trata-los serão apresentadas no quinto capítulo. Elas utilizam como procedimento básico um algoritmo especializado de fluxo de custo mínimo em grafo generalizado desenvolvido no quarto capítulo.

## OTIMIZAÇÃO DE FLUXOS EM GRAFO GENERALIZADO

### 4.1 Introdução

As técnicas de otimização usadas para tratar o modelo desenvolvido nos capítulos precedentes têm no núcleo dos seus procedimentos um algoritmo especializado para otimizar fluxos em grafo generalizado, capaz de resolver com eficiência problemas como (PGG), formulado no capítulo anterior.

Como foi visto anteriormente, um sistema de energia compreende um encadeamento de atividades de produção, balanço, transporte, conversão e consumo de energéticos, que fica representado de forma conveniente por um grafo generalizado. Produção, balanço e consumo são associados a nós do grafo, enquanto transporte e conversão correspondem a arcos não-conservativos cujos ganhos (multiplicadores) significam perdas no transporte ou rendimento na conversão. No caso de conversão energética, ganhos dimensionais permitem considerar transformações de unidade, por exemplo, de gás natural para eletricidade através de termelétricas.

Problemas de otimização desta natureza apresentam estrutura muito particular: cada coluna da matriz de restrições (matriz de incidência generalizada) possui no máximo dois elementos não-nulos. Isto permite construir algoritmos de grande eficiência

computacional onde o armazenamento dos dados é compacto e os cálculos, para determinação das variáveis duais e atualização da coluna que entra na base [K1], são ordenados através de índices, o que permite evitar operações de pivoteamento dispendiosas computacionalmente. Resultados obtidos por Glover *et al.* [G7] com algoritmos especializados a estes problemas indicam desempenho da ordem de 50 vezes mais rápidos, quando comparados a implementações comerciais do método simplex.

A utilização de índices para representar a base em algoritmos para otimizar fluxos em grafo conservativo têm origem no trabalho de Johnson [J3], onde o problema de fluxo máximo é abordado com a base representada pelo índice-triplo (predecessor, filho e irmão). Glover *et al.* [G4] apresentaram um esquema para atualização do índice-triplo após uma troca de base, aplicado ao problema de transporte. Srinivarsan e Thompson [S5] trataram o problema de transporte com a base representada com os índices predecessor, distância e número-sucessores, oferecendo uma maneira muito eficiente para identificar o ascendente comum e atualizar os potenciais. O índice preordem, capaz de sintetizar a informação contida em filho e irmão, foi introduzido por Glover *et al.* [G5]. Enfatizando a diferença entre os procedimentos onde um conjunto de nós é marcado, e posteriormente desmarcado (duas-passagens), daqueles onde os nós são visitados uma única vez (uma-passagem), Bradley *et al.* [B9] apresentaram a implementação de procedimentos de uma-passagem usando os índices predecessor e preordem associados com um terceiro índice, que pode ser distância, número de sucessores ou distância-preordem. Um esquema com os índices predecessor, distância, preordem e pósordem<sup>1</sup> é apresentado por Rosenthal [R4]. Ali *et al.* [A3] apresentam várias maneiras de implementar a representação da base

---

<sup>1</sup> Observa-se que o índice preordem equivale a uma lista ligada, sua atualização pode ser acelerada usando também o pósordem, o que resulta em uma lista duplamente ligada como é mostrado por Knuth [K3].

em grafo conservativo combinando os índices: predecessor, preordem, distância, número de sucessores, distância-preordem e último sucessor.

Em grafo generalizado a estrutura da base é mais complexa; ela é formada por um conjunto de componentes conexas que são árvores enraizadas ou possuem um único ciclo (árvore ciclada). O cálculo do bloqueio e a atualização dos fluxos requer que se percorram caminhos ascendentes que conduzem até uma raiz ou ciclo, no caso de ciclo, este deve ser circulado. A atualização dos potenciais envolve circulação (se um novo ciclo é criado) e exploração de árvores. A atualização da base pode resultar em variados casos: junção de duas componentes conexas; separação de uma componente em duas; eliminação de ciclos; criação de novos ciclos. Apesar da maior dificuldade que envolve os algoritmos em grafo generalizado, eles têm sido implementados sem modificações substanciais do conteúdo da informação necessária para representar a base. Exigindo, em contrapartida, um tratamento mais elaborado desta informação, com foi assinalado por Glover *et al.* [G6].

Um método de otimização em grafo generalizado, implementado com o índice-tríplo, é discutido por Maurras [M8]. Baseando-se na representação do índice-tríplo, Glover *et al.* [G6] apresentam idéias fundamentais para uma implementação computacional, e também sugerem a possibilidade de adaptar estas idéias usando o índice preordem (desenvolvido neste trabalho). Uma outra implementação usando o índice-tríplo é apresentada em detalhe por Jensen e Barney [J2], que obtiveram melhoras computacionais através de um esquema de marcas crescentes, usado na exploração das ascendências, para identificar ciclos e a ascendência comum. No entanto, Jensen e Barney [J2] descartaram o uso do índice distância.

Neste capítulo, desenvolve-se os fundamentos de um código para otimizar fluxos em grafo generalizado usando os índices predecessor, preordem e distância, cuja implementação será apresentada no capítulo 6. O algoritmo foi implementado a partir

das idéias de Glover *et al.* [G6] esboçadas para grafo generalizado e de Bradley *et al.* [B9] desenvolvidas para grafo conservativo, com a inclusão de várias modificações. Depois, teve-se acesso ao artigo de Brown e MacBride [B13] que também utiliza o índice distância com propósito semelhante, confirmando as vantagens obtidas com o emprego deste índice. Com o esquema apresentado por Brown e MacBride [B13] é possível identificar diretamente se um nó pertence a algum ciclo; com o nosso, é possível saber se, e a qual ciclo ele pertence. Assim, pode-se verificar se os caminhos ascendentes que partem dos nós extremidade de um arco não básico terminam no mesmo ciclo, agilizando o procedimento de cálculo do bloqueio. Este acréscimo de informação é conseguido sem dispêndio, apenas modificando-se a definição do índice distância.

#### 4.2 Notação

A notação utilizada no quarto e quinto capítulo é apresentada a seguir, em ordem alfabética:

A	matriz de restrições
A	ascendência comum a $\langle i, j \rangle \in N$
$A_i$	ascendência de $i \in N$
a	ascendente comum a $i, j \in N$
$a_k$	coluna k de A
$\hat{a}_k$	coluna atualizada ( $a_k$ )
$a_{lk}$	elemento da linha l coluna k de A
B	matriz básica
B	floresta básica de $G[K, N]$
$B_i$	componente conexa i, contida em B
b	vetor recurso
$b_l$	recurso do nó $l \in N$
$C_i$	ciclo ascendente do nó $i \in N$
c	vetor custo

$c_B$	vetor custo das variáveis básicas
$c_N$	vetor custos da variáveis não básicas
$\hat{c}$	vetor custo relativo
$D_i$	caminho ascendente disjunto de $i \in N$
$d(\cdot)$	índice distância
$G$	grafo generalizado $G[K, N]$
$\hat{i}$	coluna atualizada associada ao nó $i$ , $k_E = (i, j)$
$\hat{j}$	coluna atualizada associada ao nó $j$ , $k_E = (i, j)$
$(i, j)$	arco com origem em $i \in N$ e destino em $j \in N$
$(i, o)$	raiz com origem em $i \in N$
$K$	conjunto dos arcos de $G$
$K_l^+$	conjunto dos arcos de $G$ originados do nó $l \in N$
$K_l^-$	conjunto dos arcos de $G$ destinados ao nó $l \in N$
$k_E$	arco que entra na base
$k_S$	arco que sai da base
$N$	matriz não básica
$N$	conjunto dos nós de $G$
$N_i$	conjunto dos nós da componente conexa $B_i$
$n_j$	nó-junção de $i \in N$
$P$	caminho ascendente comum $i, j \in N$
$P_i$	caminho ascendente de $i \in N$
$p(\cdot)$	índice predecessor
$S_i$	descendência de $i \in N$
$T_C$	arborescência ciclada por $C$
$T_R$	arborescência enraizada por $r \in K$
$t(\cdot)$	índice preordem
$x$	vetor de variáveis (fluxo)
$x_B$	vetor das variáveis básicas

$x_N$	vetor das variáveis não básicas
$x_k$	fluxo no arco $k \in K$
$w_k$	ganho do arco $k \in K$
$\beta$	fator-ciclo
$\pi$	vetor potencial
$\pi_i$	potencial do nó $i$

#### 4.3 Fluxo de Custo Mínimo em Grafo Generalizado

Os algoritmos especializados para a otimização de fluxos foram inicialmente desenvolvidos para problemas em grafo conservativo, onde cada coluna da matriz de restrições (matriz de incidência arco-nó) possui dois elementos não-nulos: um deles igual a (+1) e o outro a (-1). Neste caso, verifica-se que uma base corresponde a uma árvore enraizada. A estrutura particular da base permite representá-la por relações de ascendência e sucessão entre seus nós, definidas através de índices. Vários esquemas de representação da base por índices são discutidos por Ali *et al.* [A3]. Assim, como será visto neste capítulo, fica simplificado o cálculo dos potenciais e da coluna atualizada, resolvendo-se os sistemas  $\pi B = c_B$  e  $B \hat{a}_E = a_E$ , respectivamente. A solução de cada sistema linear reduz-se a um processo iterativo onde se percorre a ascendência ou a descendência de nós. Dispor destes índices equivale a conhecer o ordenamento das linhas e colunas de  $B$  que explicita sua forma triangular. Seguí-los, durante a sequência de cálculos, corresponde a resolver aqueles sistemas com um processo de substituição idêntico à segunda fase do método de Gauss.

Representações da base por índices foram posteriormente desenvolvidas para grafo generalizado [G6]. Neste caso, a base é formada por um conjunto de componentes conexas onde cada uma delas é uma árvore enraizada ou possui um único ciclo [K1]. O conceito de árvore é ampliado de forma a comportar a noção de árvore ciclada, e as relações de ascendência e sucessão devem

abranger ciclos. A base é uma matriz bloco-diagonal, onde cada bloco é triangular (árvore enraizada) ou quase-triangular (árvore ciclada).

Uma questão delicada nos algoritmos em grafo generalizado é a atualização da base. Ela envolve modificações nas componentes conexas que pode incluir ou eliminar raízes, criar ou eliminar ciclos, aumentar ou reduzir o número de componentes. Apesar da troca de base em grafo generalizado poder resultar em vários casos diferentes, é possível estabelecer procedimentos suficientemente concisos para tratar todos eles [66].

#### 4.3.1 O Problema de Otimização

Considere um grafo generalizado  $G[K, N]$ , onde  $K$  é o conjunto de arcos e  $N$  o conjunto de nós. A cada arco  $k \in K$  atribui-se um ganho  $w_k \in \mathbb{R}$ . Assim, o problema de otimizar fluxos em grafo generalizado pode ser definido como segue

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{k \in K} c_k x_k && (4.1) \\ \text{s. a} \quad & \sum_{k \in K_l^+} x_k - \sum_{k \in K_l^-} w_k x_k = b_l, l \in N \\ & x_k \geq 0 \end{aligned}$$

onde  $K_l^+ \subset K$  e  $K_l^- \subset K$  são, respectivamente, o conjunto dos arcos que saem do nó  $l$ , e o conjunto dos que chegam ao nó  $l$ .

Para simplificar a exposição, considera-se arco sem limites superiores. Entretanto, o código desenvolvido considera arcos canalizados, ou seja, possuindo limites superior e inferior.

As restrições do problema (4.1) definem uma matriz de incidência generalizada  $A$ , associada ao grafo generalizado  $G$ . Cada coluna de  $A$  possui no máximo dois elementos não nulos - sem perda de generalidade, considera-se um deste elementos igual a 1. Uma coluna de  $A$  com dois elementos não-nulos corresponde a um

arco  $k$  em  $G$  ( $k \in K$ ); uma coluna com apenas um elemento não-nulo ( $w=0$ ) a uma raiz  $k$  em  $G$  ( $k \in K$ ). Cada linha de  $A$  corresponde a um nó  $n$  em  $G$  ( $n \in N$ ).

Reescrevendo o problema em notação matricial, obtém-se

$$\begin{aligned} \text{Min } & c x && (4.2) \\ \text{s.a } & A x = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

ou seja, um problema de programação linear cuja matriz de restrições tem uma estrutura particular: se  $k \in K$  é um arco  $(i, j)$ ,  $i, j \in N$ , então,  $a_{ik} = 1$  e  $a_{jk} = -w$  e  $a_{lk} = 0$  com  $l \notin (i, j)$ ; se  $r \in K$  é uma raiz  $(i, 0)$ , então  $a_{ir} = 1$ , ou  $a_{ir} = -w$ , para a raiz  $(0, i)$ , e  $a_{kr} = 0$  se  $l \neq i$ .

#### 4.3.2 O Método Simplex

O método simplex será apresentado sumariamente com o propósito de apresentar sua estrutura lógica e introduzir conceitos fundamentais - como o de base, solução básica, custo relativo, variáveis duais etc. - utilizados na exposição do algoritmo especializado para grafo generalizado. Pode-se obter detalhes consultando [S1], [L9] ou [D2].

O simplex é um método iterativo que resolve problemas como (4.2) utilizando a seguinte partição

$$\begin{aligned} \text{Min } & c_B x_B + c_N x_N && (4.3) \\ \text{s.a } & B x_B + N x_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

onde  $B$  é uma base,  $\exists B^{-1}$ . Uma solução básica factível de (4.3) é obtida se  $x_N = 0$ ,  $x_B \geq 0$  e  $Bx_B = b$ .

O problema (4.3) pode ser colocado na forma canônica em relação à base B, [S1], como indicado em (4.4).

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \hat{c}_N x_N - \pi b & (4.4) \\ \text{s.a} \quad & x_B + \hat{N} x_N = \hat{b} \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

onde  $\hat{c} = c - \pi A$  é o custo relativo, e  $\pi = c_B B^{-1}$  o vetor das variáveis duais que, em grafo, são comumente denominadas de potenciais.

O teorema de dualidade da Programação Linear [L9], para o problema (4.3) estabelece que:

$$Ax^0 = b \quad (4.5)$$

$$x^0 \geq 0 \quad (4.6)$$

$$\hat{c}^0 \geq 0 \quad (4.7)$$

$$\hat{c}^0 x^0 = 0 \quad (4.8)$$

onde  $x^0$  é uma solução ótima, e  $\hat{c}^0$  o custo relativo associado à base ótima. Verifica-se que qualquer solução ótima de (4.4) será básica ou múltipla. No segundo caso, haverá pelo menos uma solução básica igualmente ótima. A partir das condições de otimalidade, se  $x^0$  é uma solução básica, verifica-se<sup>11</sup>

$$\hat{c}_B^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_B^0 \geq 0 \quad (4.9)$$

$$x_N^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{c}_N^0 \geq 0 \quad (4.10)$$

<sup>11</sup> Teorema das folgas complementares [L-].

O método simplex (primal) evolui iterativamente através de soluções básicas factíveis, melhorando a função objetivo. A cada iteração, verifica-se a condição de otimalidade ( $\hat{c} \geq 0$ ). Se ela é violada, ou seja

$$\exists a_E \in N \mid \hat{c}_E = c_E - \pi a_E < 0 \quad (4.11)$$

a solução corrente não é ótima. Isto significa que o aumento da variável  $x_E$  melhora a o valor da função objetivo.

O crescimento de  $x_E$  deve ser compensado pelas variáveis básicas, para que as restrições funcionais permaneçam atendidas na igualdade. A variação das variáveis básicas é expressa através da coluna atualizada por

$$\Delta x_B = \Delta x_E \hat{a}_E \quad (4.12)$$

onde

$$\hat{a}_E = B^{-1} a_E. \quad (4.13)$$

Admitindo que o problema é limitado, o crescimento de  $x_E$  acarreta o decréscimo de pelo menos uma das variáveis básicas ( $x_S$ ), havendo um bloqueio quando  $x_S=0$ . Isto origina uma troca de base, com  $x_E$  entrando na base e  $x_S$  saindo. O método simplex itera até a condição de otimalidade ser satisfeita.

A estrutura lógica do método simplex (primal) é mostrada a seguir:

```

begin <PRIMAL>
inicialize com  $B_0$  e  $x_0$  |  $Ax_0 = b$ ,  $x_{0B} \geq 0$ ,  $x_{0N} = 0$ ;
otimo := false;
repeat    $\pi = c_B B^{-1}$ ;
          $\hat{c}_N = c_N - \pi N$ ;
         if  $\exists a_E \in N$  |  $\hat{c}_E < 0$ ;
           then begin
              $\hat{a}_E = B^{-1} a_E$ ;
              $a_S = a_i$  |  $\min [b_i / \hat{a}_{iE}]$ , com  $\hat{a}_{iE} > 0$ ;
              $\Delta x_B = \Delta x_E \hat{a}_E$ ;
             atualize  $B^{-1}$ ;
           end;
         else otimo := true;
until   otimo;
end<PRIMAL>

```

A concentração de esforço computacional do algoritmo PRIMAL está no cálculo das variáveis duais ( $\pi = c_B B^{-1}$ ), na obtenção da coluna atualizada ( $\hat{a}_E = B^{-1} a_E$ ) e na atualização da inversa da matriz básica ( $B^{-1}$ ), a cada iteração. São nestas etapas que os algoritmos especializados para grafo economizam esforços, aproveitando as particularidades das estruturas da base B e da coluna  $a_E$ .

#### 4.3.3 Especialização do Método Simplex

Em grafo generalizado, é possível verificar que a base B é uma matriz bloco diagonal [K1], onde cada bloco de B é triangular, ou quase-triangular. Isto é,

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & \ddots \\ & & & B_p \end{bmatrix}$$

com os blocos  $B_i$  possuindo estruturas de um dos dois tipos indicados a seguir:

i) triangular

$$\begin{bmatrix} x & & & & \\ & x & & & \\ & & x & & \\ & x & & x & \\ & & & x & x \end{bmatrix}$$

ii) quase-triangular

$$\begin{bmatrix} x & & x & & \\ x & x & & & \\ & x & x & & \\ \hline & & & & \\ & & & x & x \\ & & & & x \end{bmatrix}$$

Vale notar que um bloco quase-triangular é formado por um sub-bloco cíclico [K1] e pode ter vários sub-blocos triangulares<sup>12</sup> com seus respectivos termos de acoplamento. Observe que um bloco triangular também pode ser formado apenas por um ciclo. Na partição indicada em (ii), o primeiro sub-bloco diagonal é cíclico, o segundo é triangular e seu termo de acoplamento aparece acima da diagonal de blocos.

Em termos do grafo  $G$ , uma base corresponde a um conjunto de componentes conexas onde cada uma delas é uma árvore enraizada ou possui um único ciclo (árvore ciclada). O conjunto de componentes conexas que formam a base  $B$  será chamado de floresta básica, denotada por  $B$ .

O exemplo de uma base com duas componentes conexas é mostrado na fig.4.1.

<sup>12</sup> Glover *et al.* [G6] denominaram as sub-árvores associadas a estes sub-blocos como árvores tributárias.



Admitindo que o arco  $k_E = (i, j)$  entra na base, a equação (4.15) equivale a

$$B \hat{i}_E = e_i \quad (4.16)$$

$$B \hat{j}_E = w_E e_j \quad (4.17)$$

$$\hat{a}_E = \hat{i}_E - \hat{j}_E \quad (4.18)$$

onde  $e_l = 1$  se  $l = i$ , e  $e_l = 0$  se  $l \neq i$ . Assim, a coluna atualizada é obtida pela superposição das soluções obtidas para as extremidades de  $k_E = (i, j)$ . Com as componentes de  $\hat{i}_E$  e  $\hat{j}_E$  sendo os ganhos acumulados a partir de  $i$  e  $j$ , respectivamente.

Quando  $B_i$  é triangular, o procedimento usado (4.14) e (4.16)-(4.18) corresponde a especializações da fase de substituição do método de Gauss.

$$B_i = \begin{bmatrix} 1 & -w_2 & -w_3 & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & -w_q \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Na realidade, opera-se diretamente sobre a árvore enraizada  $B_i$  usando a relação de ascendência definida pelo índice  $\rho(\cdot)$ . Ele define o sentido dos arcos no caminho orientado que vai de um nó  $n \in N_i$  (qualquer) até a raiz de  $B_i$ . Assim,  $B_i$  fica convertida em uma arborescência que é visualizada atribuindo-se a seguinte orientação para os arcos de  $B_i$ : para o arco  $(i, j)$ , tem-se  $\rho(i) = j$ .

Um exemplo de árvore enraizada com a relação de ascendência representada pelo índice  $\rho(\cdot)$  é mostrado na fig. 4.2. Considera-se o sentido do fluxo nos arcos coincidente com a orientação induzida pela relação de ascendência. Isto simplifica a notação e não leva perda de generalidade. Se o arco tivesse sentido

contrário, os elementos não nulos da coluna correspondente apareceriam permutados.

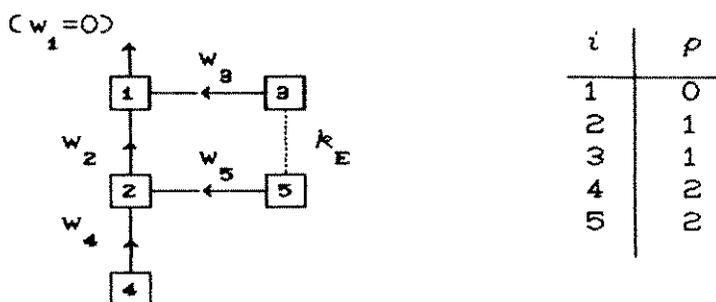


fig.4.2 Árvore Enraizada

A matriz básica  $B_i$  associada à árvore da fig.4.2 é mostrada a seguir

$$B_i = \begin{bmatrix} 1 & -w_2 & -w_3 & & \\ & 1 & & -w_4 & -w_5 \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Para simplicidade de exposição da solução de  $\pi B_i = c_B$ , faz-se a transposição de ambos os termos da equação, obtendo-se o sistema associado à seguinte matriz aumentada

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & & & & & c_1 \\ -w_2 & 1 & & & & c_2 \\ -w_3 & & 1 & & & c_3 \\ & -w_4 & & 1 & & c_4 \\ & -w_5 & & & 1 & c_5 \end{array} \right]$$

cujo resultado é

$$\begin{aligned} \pi_1 &= c_1 \\ \pi_2 &= c_2 + w_2 \pi_1, \quad p(2) = 1 \end{aligned}$$

$$\pi_3 = c_3 + w_3 \pi_1, \quad \rho(3) = 1$$

$$\pi_4 = c_4 + w_4 \pi_2, \quad \rho(4) = 2$$

$$\pi_5 = c_5 + w_5 \pi_2, \quad \rho(5) = 2$$

O potencial da raiz é calculado diretamente e, a partir dele, calcula-se o potencial de sua descendência. Isto é,

$$\pi_r = c_r, \quad r \text{ é a raiz} \quad (4.19)$$

$$\pi_i = c_i + w_k \pi_{\rho(i)}, \quad k = (i, \rho(i)) \quad (4.20)$$

Para a atualização da coluna, considere o exemplo onde o arco (3,5) entra na base. O sistema  $\hat{B}j_E = w_E e_5$  é resolvido a partir da matriz aumentada indicada a seguir.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -w_2 & -w_3 & & \\ & 1 & & -w_4 & -w_5 \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 & w_E \end{array} \right]$$

cuja solução é

$$\hat{j}_{E1} = w_E w_5 w_2, \quad \rho(1)=0$$

$$\hat{j}_{E2} = w_E w_5, \quad \rho(2)=1$$

$$\hat{j}_{E3} = 0$$

$$\hat{j}_{E4} = 0$$

$$\hat{j}_{E5} = w_E, \quad \rho(5)=2$$

A solução de  $\hat{B}i_E = e_i$  é encontrada da mesma forma.

Observar-se que as equações  $\hat{B}i_E = e_i$  e  $\hat{B}j = -w_E e_5$  são resolvidas explorando-se as ascendências dos nós extremidades de  $k_E$ . Por exemplo, para  $k_E = (3,5)$ , explora-se o que será denominado por

caminho ascendente de  $i=3$  e de  $j=5$ , respectivamente,  $\langle(3,1),(1,0)\rangle$  e  $\langle(5,2),(2,1),(1,0)\rangle$ .

Quando o bloco  $B_i$  é quase-triangular, o sub-bloco cíclico  $B_{ic}$  tem a seguinte estrutura

$$B_{ic} = \begin{bmatrix} 1 & & & & -w_q \\ -w_1 & 1 & & & \\ & -w_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & -w_{q-1} & 1 \end{bmatrix}$$

O sub-bloco  $B_{ic}$  pode ser triangularizado com uma sequência de  $q-1$  pivoteamento, onde  $q$  é sua dimensão. Observa-se que este pivoteamento também é especializado.

Por exemplo, com a transposição dos termos para se calcular  $\pi B = c_B$ , obtém-se

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} 1 & -w_1 & & & & & c_1 \\ & 1 & -w_2 & & & & c_2 \\ & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & 1 & -w_{q-1} & & c_{q-1} \\ -w_q & & & & 1 & & c_q \end{array} \right]$$

eliminando  $-w_q$  na primeira coluna

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} 1 & -w_1 & & & & & c_1 \\ & 1 & -w_2 & & & & c_2 \\ & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & 1 & -w_{q-1} & & c_{q-1} \\ & -w_1 w_q & & & 1 & & c_q - w_1 c_1 \end{array} \right]$$

eliminando  $-w_1 w_q$  na segunda coluna

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -w_1 & & & c_1 \\ & 1 & -w_2 & & c_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & -w_{q-1} \\ & & & & 1 \\ & -w_1 w_2 w_3 & & & c_q + w_1 c_1 + w_1 w_2 c_2 \end{array} \right]$$

prossequindo até a coluna q , chega-se a

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -w_1 & & & c_1 \\ & 1 & -w_2 & & c_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & -w_{q-1} \\ & & & & 1 \\ & & & & 1 - \prod_{i=1}^q w_i \\ & & & & c_q + \sum_{i=1}^{q-1} \left[ \left( \prod_{j=1}^i w_j \right) c_i \right] \end{array} \right]$$

com o sistema triangularizado.

Esta sequência de cálculos pode ser operada diretamente sobre o ciclo. Por exemplo, considere a fig.4.3

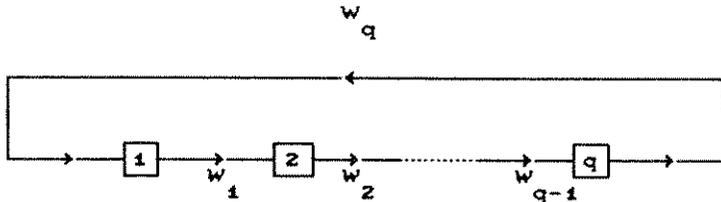


fig.4.3 Ciclo Básico

Então, calcula-se

$$\pi_q = \frac{c_q + \sum_{i=1}^{q-1} \left[ \left( \prod_{j=1}^i w_j \right) c_i \right]}{1 - \prod_{i=1}^q w_i} \tag{4.21}$$

$$\pi_k = c_k + w_k \pi_{k+1}, \quad k = q-1, \dots, 1 \quad (4.22)$$

Para resolver (4.21) o ciclo deve ser percorrido uma primeira vez, calculando-se  $\pi_q$ . Com uma segunda circulação, usando (4.22), determina-se os potenciais de todos os outros nós do ciclo.

A circulação para cálculo dos potenciais pode ser iniciada em qualquer nó do ciclo, uma vez que nenhum deles ocupa posição privilegiada

Verifica-se que é vantajoso manter armazenado, para todos os nós de cada ciclo de  $B$ , o fator-ciclo definido por

$$\beta = \left(1 - \prod_{i=1}^q w_i\right)^{-1} \quad (4.23)$$

O sistema  $B_{i_c} \hat{i} = e_1$  é resolvido como segue

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & & & -w_q & 1 \\ -w_1 & 1 & & & \\ & -w_2 & & & \\ & & 1 & & \\ & & -w_{q-1} & 1 & \end{array} \right]$$

que após uma sequência de  $q$  pivoteamentos, eliminando os coeficientes da primeira linha, resulta em

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -\prod_{i=1}^q w_i & & & 1 \\ -w_1 & 1 & & & \\ & -w_2 & & & \\ & & 1 & & \\ & & -w_{q-1} & 1 & \end{array} \right]$$

cuja solução é dada por

$$\hat{i}_1 = \beta \quad (4.24)$$

$$\hat{i}_k = w_{k+1} \hat{i}_{k+1}, \quad k=2, \dots, q \quad (4.25)$$

Conhecendo-se antecipadamente o valor de  $\beta$ ,  $\hat{i}_1$  é calculado diretamente. Sendo necessário apenas uma circulação para determinar os valores restantes de  $\hat{i}_k$ . Observa-se que não há particularidade quando se resolve este sistema para  $\hat{e}_1$ , isto apenas significa que a circulação inicia-se pelo nó  $i$ .

Quando a componente conexa é uma árvore ciclada acoplada com árvores tributária, procede-se da seguinte forma: para resolver  $\pi = c_B B^{-1}$ , trata-se o ciclo em primeiro lugar, e as árvores tributárias em seguida; para resolver  $\hat{a}_E = B^{-1} a_E$ , explora-se a ascendência das extremidades do arco que entra na base até que se encontre o ciclo, que deverá ser circulado.

Observa-se que o cálculo da coluna atualizada através de  $\hat{a}_E = \hat{i}_E - \hat{j}_E$  é necessário apenas para a interseção daquelas duas ascendências. Isto é, para as partes disjuntas a coluna atualizada será  $\hat{i}_E$  ou  $\hat{j}_E$ .

Portanto, um algoritmo especializado para grafo generalizado deve ser capaz de explorar a ascendência e descendência de nós de modo eficiente, coordenada através dos índices que representam a base. E o seu desempenho é melhorado quando se identifica diretamente a interseção das ascendências das extremidades do arco que entra na base (ascendência comum) e os nós que ligam as árvores tributárias aos ciclos (nós-junção).

#### 4.4 Representação da Base

Aqui será desenvolvida a representação para a base com os índices predecessor, preordem e distância. Ela permite construir procedimentos capazes de identificar diretamente a interseção das ascendências e o nó-junção entre árvores tributárias e ciclos. Em

consequência, a condição de bloqueio é calculado na primeira visita ao arco, permitindo uma identificação precoce de iterações degeneradas<sup>19</sup>. O fator-ciclo ( $\beta$ ) é armazenado para todos os nós de cada ciclo da base corrente, sendo usado apenas quando se processa o nó-junção. No cálculo da coluna atualizada, a superposição do ganho acumulado na ascendência comum também é realizada de forma simplificada, apenas para o arco imediatamente após o nó-junção.

#### 4.4.1 Definições Preliminares

As definições apresentadas a seguir formalizam conceitos associados a base que são utilizados de forma construtiva na implementação computacional, tornando mais claro as funções de alguns procedimentos (*subrotinas*).

Considere  $T_R$  uma arborecência enraizada com nó-raíz  $r$  e arco-raíz  $(r,0)$ , e  $T_C$  uma arborecência ciclada com ciclo-raíz  $C$ , cujos arcos são orientados pela relação de ascendência definida pelo índice predecessor  $\rho(\cdot)$  - para o arco  $(i,j)$ ,  $j=\rho(i)$ . Para os nós de  $T_R$  e os das árvores tributárias de  $T_C$ ,  $\rho(\cdot)$  define a orientação do arco no caminho que leva até à raiz, ou ao ciclo. Para os nós do ciclo  $C$ ,  $\rho(\cdot)$  estabelece um sentido de circulação.

Então define-se:

caminho ascendente  $P_i$  ; como aquele que vai de  $i$  até uma raiz ou um ciclo.

$$P_i = (i, (i, j), j, \dots, m, (m, n), n)$$

onde  $m=r$ ,  $n=0$  se  $i \in T_R$ ;  $m \in C$ ,  $n \in C$  se  $i \in T_C$ .

---

<sup>19</sup> Bradley et al. [B9] mencionam teste com problemas onde mais de 90 % das iterações são degeneradas.

caminho ascendente comum  $P$  ; como a interseção dos caminhos ascendentes dos nós  $i, j$ .

$$P = P_i \cap P_j$$

caminho ascendente disjunto  $D_i$  ; como o complemento de  $P$  em relação a  $P_i$ .

$$D_i = P_i - P$$

nó-junção  $nj_i$  ; como a interseção caminho ascendente com o ciclo-raíz.

$$nj_i = P_i \cap C_i$$

caminho de junção  $J$  ; como aquele que vai de  $nj_i$  até  $nj_j$  quando  $C_i = C_j$  e  $nj_i \neq nj_j$ .

$$J = (nj_i, (nj_i, m), m, \dots, n, (n, nj_j), nj_j)$$

ciclo ascendente  $C_i$  ; como o ciclo-raíz de  $i \in T_C$ , tendo como início o nó-junção.

$$C_i = (nj_i, (nj_i, 0), 0, \dots, p, (p, nj_i), nj_i)$$

ascendência  $A_i$  ; como a união caminho ascendente com o ciclo ascendente.

$$A_i = P_i \cup C_i$$

ascendência conjunta  $A$  ; como a união das ascendências.

$$A = A_i \cup A_j$$

ascendência disjunta  $AD_i$  ; como o complemento de  $A$  em relação à  $A_j$ .

$$AD_i = A - A_j$$

ascendente comum  $a$  ; como o primeiro nó da ascendência comum, dado por:

$$I) \left\{ a \mid (k, a) \in P_i, (l, a) \in P_j, a \in P, k \in P_j, l \in P_i \right\} \text{ se } (P_i \cap P_j) \neq \emptyset;$$

$$II) \left\{ a \mid a \in C_i \right\} \text{ se } (P_i \cap P_j) = \emptyset \text{ e } C_i = C_j;$$

em particular, pode-se considerar  $a = nj_i$  ou  $a = nj_j$ ;

$$III) a = 0, \text{ se } A = \emptyset.$$

descendência  $S_i$  ; como os sucessores de  $i$  que têm  $i$  como ascendente.

$$I) S_i = \{ n \in N \mid i \in P_n \text{ e } n \in P_i \} \text{ se } i \in C_i$$

$$II) S_i = T_c \text{ se } i \in C_i$$

#### 4.4.2 Representação de uma Árvore Enraizada

Uma árvore enraizada fica representada convenientemente pelos índices predecessor  $\rho(\cdot)$ , preordem  $t(\cdot)$  e distância  $d(\cdot)$ , atribuídos para cada um dos seus nós. O índice  $\rho(\cdot)$  define uma relação de ascendência, apontando para o nó seguinte do caminho ascendente;  $t(\cdot)$  estabelece uma ordem de sucessão;  $d(\cdot)$  é uma distância, definida como o número de arcos do caminho ascendente.

Um exemplo da definição destes índices pra árvores enraizadas é mostrado na fig.4.4.

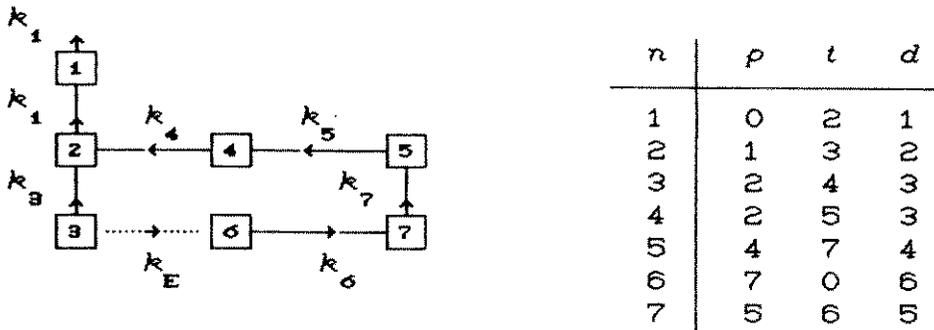


fig.4.4 Representação de uma Árvore Enraizada

O índice  $t(\cdot)$  sintetiza a relação de sucessão definida no índice-tríplo pelo filho e o irmão: ao nó  $i$  sucede seu filho, ou seu irmão, ou o irmão do seu predecessor, ou o irmão do predecessor do seu predecessor, e assim por diante [66].

Durante a atualização da coluna, o índice distância oferece uma maneira eficiente de identificar o ascendente comum aos nós do arco que entra na base,  $k_E$ . Admitindo que  $k_E=(i,j)$ , explora-se o caminho ascendente disjunto do nó mais distante, por exemplo  $D_i$ , até encontrar um nó  $n \in D_i$  com a mesma distância de  $j$ , ou seja,  $d(n)=d(j)$ . A partir daí, percorrem-se alternadamente os caminhos ascendentes disjuntos  $D_i$  e  $D_j$  até se chegar ao mesmo nó, este é o ascendente comum  $a$ . O caminho do nó  $a$  até a raiz é o caminho ascendente comum  $P$ .

Considere o exemplo da fig.4.4, onde  $k_E=(3,6)$ . Então, como  $d(6)=6$  e  $d(3)=3$ , inicie com a exploração de  $D_6$  até encontrar  $n \in D_6$  com  $d(n)=3$ . Obtem-se

$$D_6 = \langle 6, (6,7), 7, (7,5), 5, (5,4), 4, \dots \rangle$$

$d(4)=3$  e  $d(3)=3$ , porém  $4 \neq 3$ . Explorando-se alternadamente os

caminhos disjuntos  $D_\sigma$  e  $D_\beta$

$$D_\sigma = (\dots, 4, (4, 2))$$

$$D_\beta = (3, (3, 2))$$

até se chega ao ascendente comum  $\alpha=2$ . A partir deste ponto, explora-se o caminho ascendente comum

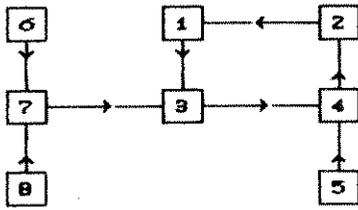
$$P = (2, (2, 1), 1, (1, 0), 0)$$

Na atualização dos potenciais, é necessário percorrer apenas os descendentes de um dos nós  $i$  ou  $j$ . Por exemplo, a exploração dos descendentes de  $i$  pode ser coordenada pelo índice  $d(\cdot)$ ; a partir de  $i$  siga o índice  $t(\cdot)$ , o nó  $n$  visitado será descendente de  $i$  enquanto  $d(n) > d(i)$  [55].

#### 4.4.3 Representação de uma Árvore Ciclada

Em grafo generalizado, a presença de ciclo obscurece a noção de distância. As ascendências de  $i$  e  $j$  podem ser disjuntas, não existindo um ascendente comum. Se  $i$  e  $j$  pertencem a um mesmo ciclo, a noção de ascendente comum é dúbia. A atualização dos potenciais quando um novo ciclo é criado deve ser realizada em todos os nós da nova árvore ciclada, e não apenas nos descendentes de um único nó. Estes aspectos tornam pouco evidente as vantagens que o índice  $d(\cdot)$  pode oferecer em grafo generalizado. No entanto, é possível defini-lo de forma coerente tanto para árvores enraizadas quanto para árvores cicladas e usa-lo também para identificação direta de ciclo, como será visto.

Um exemplo de representação de uma árvore ciclada com os índices  $p(\cdot)$ ,  $t(\cdot)$  e  $d(\cdot)$  é apresentado na fig.4.5.



i	p	t	d
1	3	2	0
2	1	4	0
3	4	7	0
4	2	5	0
5	4	3	1
6	7	1	2
7	3	8	1
8	7	6	2

fig. 4.5 Representação de uma Árvore Ciclada

A orientação dos arcos indicam a relação de ascendência, apontando para o predecessor. Para os nós que não pertencem a ciclos, ela indica o sentido dos arcos no caminho ascendente. Para os nós do ciclo, ela estabelece um sentido de circulação.

O preordem  $t(\cdot)$  será definido em uma árvore ciclada como segue: I) para cada nó do ciclo ele apontará para próximo descendente da árvore tributária deste nó, se ela existir, senão ele apontará para o próximo nó do ciclo seguindo o sentido contrário a  $p(\cdot)$ ; II) ele é definido do modo usual para os nós das árvores tributárias, sendo que no seu último descendente ele apontará para o próximo nó do ciclo, como em I). Deste modo, a presença de ciclos torna  $t(\cdot)$  equivalente a uma lista circular.

Uma extensão natural da definição do índice distância para englobar ciclos é a seguinte

$$d(i) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \in C_i \\ \text{o número de arcos de } P_i, & \text{se } i \in C_i \end{cases}$$

Enquanto se percorre caminhos disjuntos para encontrar o arco que sai da base considera-se, a cada vez, apenas o ganho acumulado de uma extremidade de  $k_E$ . A partir do ponto em que o ascendente comum é encontrado superpõem-se os ganhos acumulados.

Daí, continua-se percorrendo a ascendência até se chegar a uma raiz ou ciclo. No caso de um ciclo, o nó-junção deve ser tratado levando em conta o fator-ciclo ( $\beta$ ), fazendo-se apenas uma circulação em seguida. Diferentes situações podem ocorrer quando se estuda a entrada de um arco na base [J2], como é mostrado na fig. 4.6.

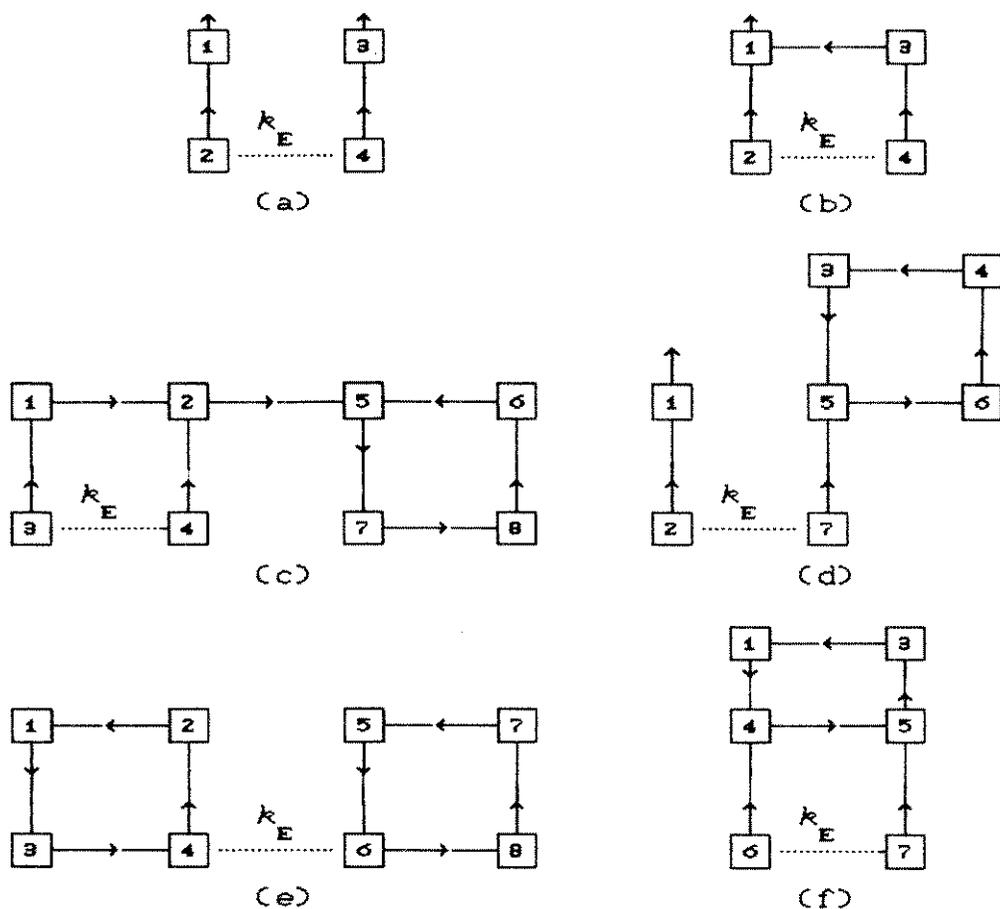


fig. 4.6 Configurações da Base

Os casos mostrados na fig.4.6 permitem fazer as seguintes observações:

- a) os caminhos ascendentes são disjuntos e enraizados, não havendo superposição de ganhos nem circulação;
- b) corresponde a uma árvore enraizada com o ascendente comum ( $\alpha=1$ ) identificado diretamente através de  $d(\cdot)$ ;
- c) identifica-se o ascendente comum ( $\alpha=5$ ) do mesmo modo que em (b), e determina-se o nó-junção através de  $d(2)=0 \Rightarrow n_j=2$ ;

- d) identifica-se o nó-junção por  $d(5)=0 \rightarrow n_j=5$ ;
- e) identifica-se os nós de junções como em (d);
- f) determina-se os nós de junções como em (e), e o ascendente comum é qualquer nó do ciclo.

Como foi definido, o índice distância permite saber se o nó visitado pertence a um ciclo, mas não a qual. Desse modo, não é possível distinguir diretamente os casos (e) e (f), o que é desvantajoso. Por exemplo, no caso (e), como não se sabe de antemão que não haverá superposição do ganho acumulado, a primeira circulação não pode ser interrompida quando se deteta bloqueios degenerados.

Esta dificuldade é contornada atribuindo-se uma *marca* para cada ciclo da base corrente, com uma única imposição; dois ciclos não podem ter a mesma *marca*. Uma forma muito simples de fazê-lo é atribuir como *marca* o número de algum nó do ciclo - se cada componente conexa tem no máximo um ciclo, um nó não poderá pertencer a mais de um ciclo.

É possível incluir a *marca* no próprio índice distância que passa a ser definido como segue:

$$d(i) = \begin{cases} -n \quad (n \in C), \text{ se } i \in C \\ \text{número de arcos de } P_i, \text{ se } i \notin C \end{cases}$$

Durante o processo de exploração de ascendências,  $d(\cdot)$  negativo significa que um ciclo foi encontrado. O valor da *marca* permite distinguir qual dos casos se encontra: (e) ou (f).

A ocasião oportuna para se fazer atribuição desta *marca* é quando se deteta a criação de um novo ciclo e ele deve ser circulado para calcular  $\beta$ . Definindo a *marca* como o número do nó onde tem início a o percurso, ela será armazenada em todos os outros nós do ciclo.

#### 4.5 Atualização da Base

A reestruturação da base em grafo generalizado envolve a inclusão ou eliminação de raízes, criação ou eliminação de ciclos, redução do número de componentes conexas através da junção de duas delas e aumento do número de componentes conexas pela subdivisão de uma delas em duas. Apesar da troca de base resultar em variados casos, é possível exibir uma regra muito concisa que permite tratar todos eles.

A troca de base envolvendo dois arcos não adjacentes será desdobrada em sucessivas trocas com arco adjacentes. Por exemplo, considere que  $k_E = (i, j)$  e  $k_S \in A_i$ . Assim, existe um caminho  $(k_E, k_1, k_2, \dots, k_S)$ . Na primeira troca de base, sai  $k_1$  e entra  $k_E$ , na segunda sai  $k_2$  e entra  $k_1$  e assim, sucessivamente, até  $k_S$  sair da base. Em consequência, a regra de reestruturação da base passa a ser definida para arcos adjacentes.

Com os arcos  $k_E$  e  $k_S$  adjacentes, a atualização da base é conduzida em duas etapas: a exclusão do arco  $k_S$ , em primeiro lugar, e a inclusão de  $k_E$  em seguida. A atribuição dos índices  $\rho(\cdot)$  e  $t(\cdot)$  durante a troca é mostrado na fig.4.7. Deve-se lembrar que na troca de base o conjunto dos nós onde o potencial e a distância são alterados é o mesmo, então a atualização de ambos é feita em conjunto.

Antes de apresentar o algoritmo de troca da base, introduz-se a notação que segue:

*orf* - o nó que fica sem predecessor após a exclusão de  $k_S$ ;

*pad* - o novo predecessor de *orf* após a inclusão  $k_E$ ;

*ant* - o nó que antecede *orf* na lista de sucessores antes da troca de base,  $t(\text{ant}) = \text{orf}$ ;

*fim* - o último descendente de *orf* antes da troca;

*pos* - o sucessor de *fim*,  $t(\text{fim}) = \text{pos}$ ;

*flag* - variável lógica igual a *true* se antes da troca existir um ciclo que contenha *pad* e *orf*.

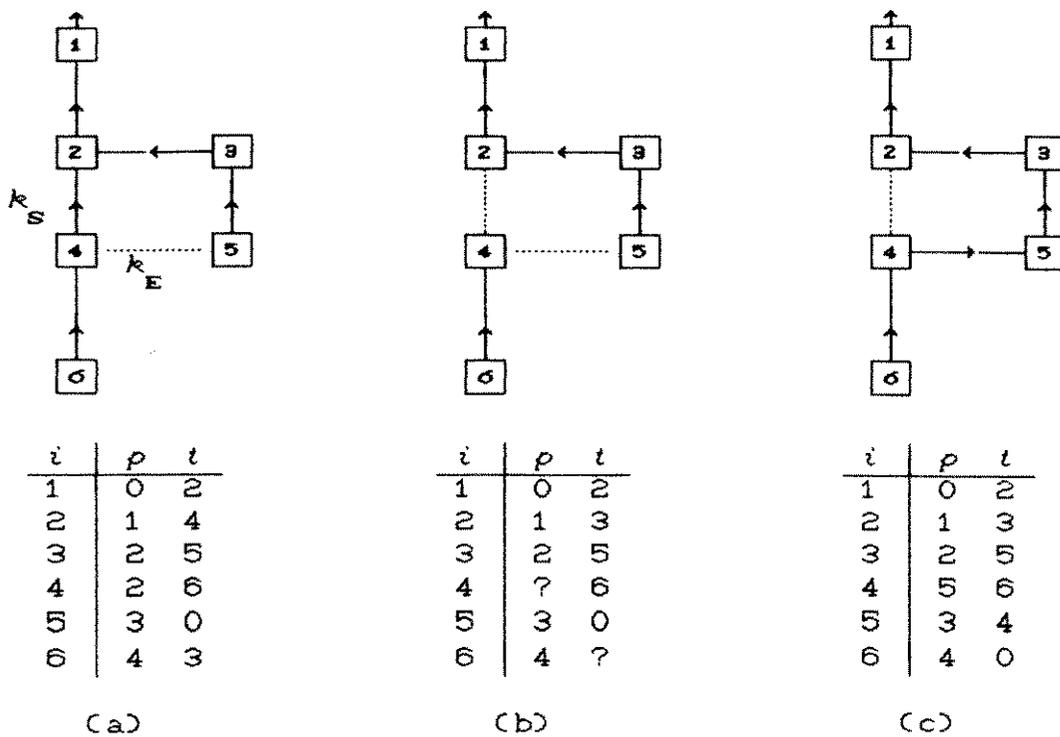


fig.4.7 Troca de Base Entre Arcos Adjacentes

Para a árvore da fig.4.7a), observa-se:  $orf=4$ ;  $pad=5$ ;  $ant=2$ ;  $fim=6$ ;  $pos=3$ ;  $flag=F$  (false).

Como foi comentado, o procedimento de atualização da base é conduzido em duas etapas: uma a exclusão de  $k_S$  e a outra a inclusão de  $k_E$ . A exclusão de  $k_S$  pode ocorrer em duas circunstâncias:

- 1) a componente conexa original é subdividida em duas, então  $k_S$  não pertence a um ciclo;
- 2) a componente original continua conexa, então  $k_S$  pertence a um ciclo.

A inclusão de  $k_E$  também ocorre de duas maneiras:

- 1) a árvore sem raiz (ou sem ciclo) é ligada a uma outra árvore, enraizada ou ciclada;
- 2) a árvore sem raiz ou ciclo é enraizada ou terá fechado um ciclo.

Estas considerações levam a apenas quatro casos diferentes que serão tratados a seguir.

Caso 1.1:  $k_S$  em (1) e  $k_E$  em (1).

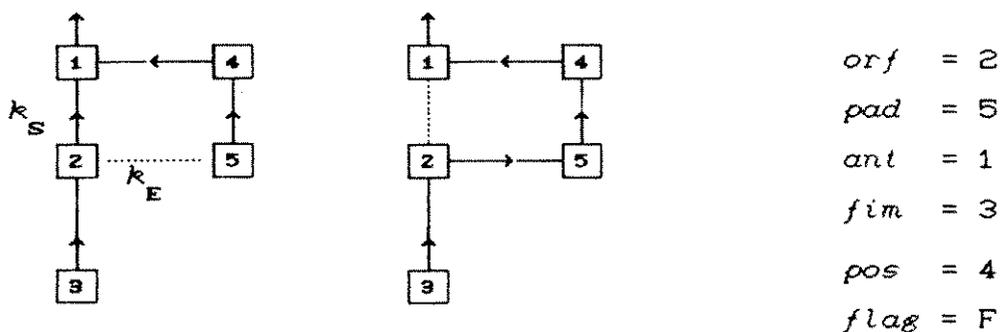


fig. 4.8 Troca de Base: caso 1.1

Atualização dos índices:

$$t(ant) = pos$$

$$t(fim) = t(pad)$$

$$t(pad) = orf$$

$$p(orf) = pad$$

Antes			Após		
$i$	$p$	$t$	$i$	$p$	$t$
1	0	2	1	0	4
2	1	3	2	5	3
3	2	4	3	2	0
4	1	5	4	1	5
5	4	0	5	4	2

Cabe observar que apenas este caso ocorre quando a rede é conservativa.

Caso 1.2:  $k_S$  em (1) e  $k_E$  em (2).

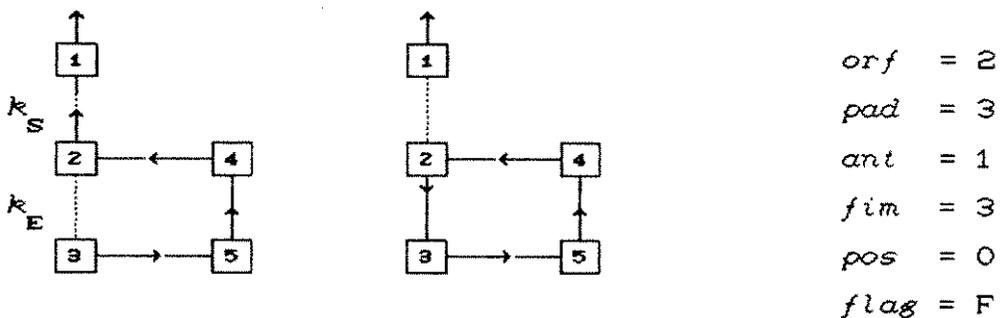


fig. 4.9 Troca de Base: caso 1.2

Atualização dos índices:

$$t(\text{ant}) = \text{pos}$$

$$t(\text{pad}) = \text{orf}$$

$$p(\text{orf}) = \text{pad}$$

Antes			Após		
<i>i</i>	<i>p</i>	<i>t</i>	<i>i</i>	<i>p</i>	<i>t</i>
1	0	2	1	0	0
2	1	4	2	3	4
3	5	0	3	5	2
4	2	5	4	2	5
5	4	3	5	4	3

Caso 2.1:  $k_S$  em (2) e  $k_E$  em (1).

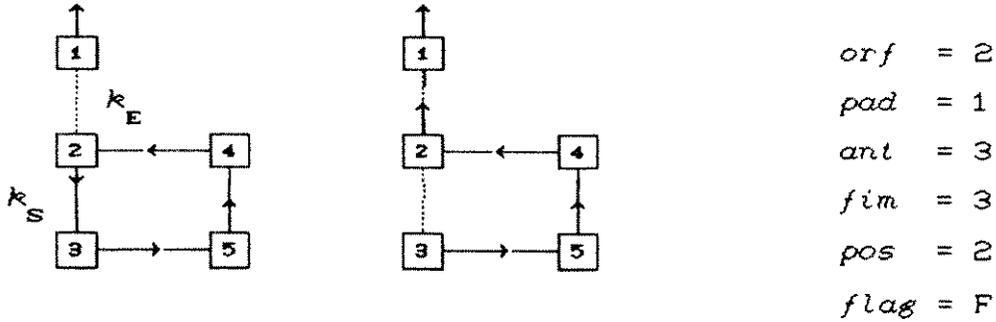


fig.4.10 Troca de Base: caso 2.1

Atualização dos índices:

$$t(\text{fim}) = t(\text{pad})$$

$$t(\text{pad}) = \text{orf}$$

$$p(\text{orf}) = \text{pad}$$

Antes			Após		
<i>i</i>	<i>p</i>	<i>t</i>	<i>i</i>	<i>p</i>	<i>t</i>
1	0	0	1	0	2
2	3	4	2	1	4
3	5	2	3	5	0
4	2	5	4	2	5
5	4	3	5	4	3

Caso 2.2:  $k_S$  em (2) e  $k_E$  em (2).

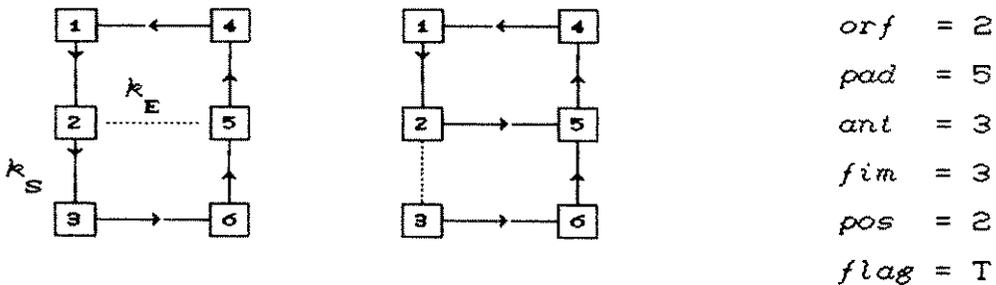


fig.4.11 Troca de Base: caso 2.2

Atualização dos índices:

$p(orf) = pad$

Antes			Após		
<i>i</i>	<i>p</i>	<i>t</i>	<i>i</i>	<i>p</i>	<i>t</i>
1	2	4	1	2	4
2	3	1	2	5	1
3	6	2	3	6	2
4	1	5	4	1	5
5	4	6	5	4	6
6	5	3	6	5	3

É interessante observar que o caso 1.1 (grafo conservativo) é o mais geral. Dele, pelo acréscimo conveniente de testes (if...then...), pode-se construir um algoritmo unificado para tratar todos os outros casos, como é mostrado a seguir.

```
begin <ATUALIZA BASE>
  if pos ≠ orf then t(ant) := pos;
  if flag = false then
    begin
      t(fim) := t(pad);
      t(pad) := orf;
    end;
   $p(orf) = pad$ ;
end <ATUALIZA BASE>
```

#### 4.6 Comentários

Neste capítulo desenvolveram-se os fundamentos para implementação computacional de um algoritmo especializado para otimizar fluxo em grafo generalizado, representando a base com os índices predecessor, preordem e distância.

A eficiência da abordagem apresentada é assegurada pelos seguintes aspectos: identificação direta do ascendente comum, fazendo com que a superposição do ganho seja calculada apenas no ascendente comum; identificação direta do nó-junção, permitindo considerar o fator-ciclo antes da circulação; diferenciação de ciclos, que possibilita uma identificação precoce de iterações

degeneradas.

Cabe chamar a atenção para este último ponto. Os procedimentos onde se atualiza a coluna explorando primeiro a ascendência de uma extremidade de  $k_E$ , e a ascendência da outra, em seguida (por exemplo os algoritmos que usam marcas) têm dois inconvenientes. O primeiro é o maior volume de cálculo, em virtude da necessidade de uma operação de adição para todos os arcos da ascendência comum. O segundo é a impossibilidade de detetar iterações degeneradas durante a primeira passagem. Esta mesma observação é válida quando se considera o fator-ciclo no nó-junção, somente é possível identificar iterações degeneradas quando se sabe que os ciclos são diferentes ou que se visitou o segundo nó-junção.

Apesar da maior complexidade da estrutura da base, se comparada a grafo conservativo, não houve necessidade de um aumento expressivo de informação para representá-la. Apenas se acrescentou o fator-ciclo. O índice distância é definido de forma natural, e ligeiramente modificado permite marcar os ciclos. A atualização da base pode ser reduzida a quatro casos, quando se considera a troca entre arcos adjacentes. O caso que requer maior elaboração é o mesmo que ocorre em grafo conservativo, os outros três são simplificações.

Como mencionado anteriormente, as idéias a que se chegou neste capítulo foram desenvolvidas a partir dos trabalhos de Glover *et al.* [G6] e Bradley *et al.* [B9]. Posteriormente, teve-se acesso ao artigo de Brown e MacBride [B13] onde se utiliza o índice distância para propósitos semelhante. Os dois esquemas de uso do índice distância diferem na medida em queo apresentado por Brown e MacBride [B13] permite identificar diretamente o nó-junção, ou seja, se um nó pertence a algum ciclo; com o nosso é possível identificar o nó-junção e o ciclo, ou seja, se o nó corrente é nó-junção, e a qual ciclo ele pertence.

O algoritmo de otimização em grafo generalizado que foi apresentado corresponde ao núcleo dos procedimentos usados pelas

técnicas de otimização com objetivos conflitantes ou com variáveis (0-1) desenvolvidas no quinto e implementadas computacionalmente no sexto capítulos, respectivamente.

## EXTENSÃO DE OTIMIZAÇÃO EM GRAFO GENERALIZADO

5.1 Introdução

Além do algoritmo de grafo generalizado, algumas técnicas complementares são necessárias para resolver os problemas propostos para coordenar a operação de um sistema de suprimento de energia com eletricidade, gás natural e aproveitamento do bagaço de cana. Estas técnicas serão tratadas neste capítulo.

A formulação desenvolvida anteriormente (capítulo três) resultou em dois problemas de natureza diferentes. Para o médio prazo, obteve-se um problema de otimização em grafo generalizado com objetivos conflitantes. No curto prazo, chegou-se a um problema de otimização em grafo generalizado com variáveis 0-1.

No caso de otimização com objetivos conflitantes, considera-se um problema com duas funções objetivos, expressando os interesses dos setores elétrico e de gás natural. Ele será abordado com o método dos pesos [Z1], apropriado, neste caso, para gerar o conjunto de suas soluções não-dominadas.

O conflito entre os dois setores é quantificado através de uma curva de *tradeoff*, traçada no espaço dos objetivos. Desse modo, as negociações podem ser conduzidas com uma percepção completa dos benefícios mútuos. Por exemplo, a curva de *tradeoff*

fornece elementos para que cada setor isoladamente compare a oportunidade oferecida pela solução coordenada com outras alternativas não contempladas explicitamente no modelo (modificação de cronogramas, ajustes de preços etc.).

Aplicações do método dos pesos em problemas com objetivos múltiplos e estrutura de grafo são encontradas na literatura. Um caso, considerando grafo conservativo na otimização do uso múltiplo da água - abastecimento e geração hidrelétrica, incluindo restrições sobre a qualidade da água - é apresentado em [C11].

O despacho das termelétricas objetiva maximizar um benefício mútuo, com os dois setores partilhando excedentes de energia e mercados secundários. A única perspectiva de conflito considerada (implicitamente) no curto prazo fica por conta do estabelecimento da remuneração para o gás consumido na termelétrica, que pode ser negociada tendo como referência o *valor marginal* do gás e da eletricidade, obtidos a partir da solução ótima.

O problema com variáveis 0-1, considerando arcos com ganhos lineares por partes e convexo, permite representar faixas de operação para as termelétricas a gás de ciclo combinado. Ele será tratado através de uma enumeração implícita conduzida com um algoritmo de *branch and bound*.

O despacho de unidades térmicas na operação a curto prazo tem sido modelado como um problema de custo fixo [H1] e [B10], permitindo levar em conta os custos de partida e de operação da unidade. Considerando a maior flexibilidade operacional oferecida pelas unidades de ciclo combinado, poderia ser usado um modelo de custo linear por partes e côncavo para representá-las - visto como uma generalização do modelo de custo fixo [S4-J2]. No entanto, como se pretende levar em conta no balanço do fluxo de gás natural na rede de transporte (*pipeline*) a quantidade de gás consumida pela termelétrica, um modelo com ganho linear por partes é mais realista.

Os dois problemas serão tratados com algoritmos iterativos, a cada passo resolvendo-se um subproblema de fluxo de custo mínimo em grafo generalizado. No caso do método dos pesos, a função objetivo é ajustada através de um parâmetro. No algoritmo de *branch and bound*, para cada nó da árvore de decisão (uma possibilidade de fixação das variáveis 0-1) é formulado um subproblema com variáveis contínuas. Em ambos os casos, o subproblema é tratado com um algoritmo especializado que leva em conta os aspectos desenvolvidos no capítulo precedente.

## 5.2 Grafo Generalizado com Objetivos Conflitantes

As técnicas de otimização para problemas com objetivos conflitantes podem ser classificadas em duas grandes categorias. Aquelas que procuram estabelecer o conjunto de todas as soluções não-dominadas, deixando o processo da escolha aos decisores. Outras, que incluem preferências para estabelecer diretamente soluções ótimas [G8]. A que será usada neste trabalho inclui-se na primeira categoria.

Quando o número de objetivos é reduzido - particularmente quando se considera apenas dois objetivos - o método dos pesos oferece uma forma atraente para gerar o conjunto das soluções não-dominadas do problema. Neste caso, o processo de obtenção das soluções não-dominadas fica reduzido a uma parametrização na função de um problema com um único objetivo [B3], tratado por técnicas de pós-otimização.

### 5.2.1 O Método dos Pesos

O método dos pesos pode ser estabelecido de maneira direta a partir das condições de Kuhn-Tucker para soluções não-dominadas em problemas com objetivos conflitantes. Considere o caso particular de um problema com dois objetivos, formulado como segue:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \begin{pmatrix} c^1 x \\ c^2 x \end{pmatrix} & (5.1) \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Diz-se que uma solução factível do problema (5.1) é não-dominada se, a partir dela, não for possível melhorar simultaneamente as duas funções objetivos. Por exemplo, se  $x^\circ$  é uma solução não-dominada e  $x^*$  uma solução factível, então verifica-se que

$$c^1 x^* < c^1 x^\circ \rightarrow c^2 x^* > c^2 x^\circ$$

As condições de Kunh-Tucker [G8] para que  $x^\circ$  seja uma solução não-dominada do problema (5.1) são as seguintes:

$$x^\circ \geq 0 \quad (5.2)$$

$$Ax^\circ = b \quad (5.3)$$

$$\lambda^1 c^1 + \lambda^2 c^2 + \pi A + \gamma = 0 \quad (5.4)$$

$$\gamma x = 0 \quad (5.5)$$

onde  $\lambda^1, \lambda^2 \geq 0$  são escalares;  $\gamma \leq 0$  e  $\pi$  (irrestrito) são vetores.

Verifica-se que as equações (5.2)-(5.5) equivalem às condições de otimalidade do seguinte problema, formulado com um único objetivo definido como segue:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \lambda^1 c^1 x + \lambda^2 c^2 x & (5.6) \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

onde  $\lambda^1, \lambda^2 \geq 0$  podem ser entendidos como coeficientes que ponderam os dois objetivos. Resolver o problema (5.6), para todas as possíveis ponderações de  $\lambda^1$  e  $\lambda^2$ , equivale a gerar o conjunto  $X^0$  de todas as soluções não-dominadas de (5.1). Esta é a idéia usada no método dos pesos, implementável com simplicidade quando se tem apenas dois objetivos.

### 5.2.2 Parametrização na Função Objetivo

O método dos pesos em problemas com dois objetivos equivale a uma parametrização do vetor custo. Para isto, por exemplo, basta normalizar os pesos em relação ao primeiro objetivo, fazendo

$$\lambda = \frac{\lambda^2}{\lambda^1} \quad (5.7)$$

como  $\lambda^1, \lambda^2 \geq 0$ , então  $\lambda \geq 0$ .

Assim, o problema (5.6) pode ser reescrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c^1 x + \lambda c^2 x & (5.8) \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

que, particionado e com os termos da função objetivo rearranjados, resulta em

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & (c_B^1 + \lambda c_B^2) x_B + (c_N^1 + \lambda c_N^2) x_N & (5.9) \\ \text{s.a} \quad & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

Colocando o problema (5.9) na forma canônica em relação à base B, obtém-se

$$\text{Min} \quad \hat{c}_N^1 x_N - \pi b \quad (5.10)$$

$$\text{s. a} \quad Bx_B + Nx_N = b$$

$$x_B, x_N \geq 0$$

onde  $\hat{c}_N = \hat{c}_N^1 + \lambda \hat{c}_N^2$ ,  $\pi = \pi^1 + \lambda \pi^2$ . Com  $c = \hat{c}_N^i - \pi^i N$ ,  $\pi^i = c_B^i B^{-1}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , calculados a partir da base B.

A condição de otimalidade para uma solução de (5.10) exige que  $\hat{c}_N \geq 0$ . Então, admitindo a otimalidade da solução atual, o incremento máximo  $\Delta\lambda$  para o qual a base B continua ótima deve satisfazer a

$$\hat{c}_N + \Delta\lambda \hat{c}_N^2 \geq 0 \quad (5.11)$$

Observa-se que, com o crescimento de  $\lambda$  ( $\Delta\lambda > 0$ ), a condição (5.11) somente poderá ser violada se existir algum  $\hat{c}_i^2 < 0$ ,  $i \in N$ . Neste caso, o valor crítico de  $\Delta\lambda_c$  a partir do qual a base corrente B deixa de ser ótima é dado por

$$\Delta\lambda_c = \min \left\{ - \frac{\hat{c}_i^1}{\hat{c}_i^2} \mid \hat{c}_i^2 < 0, i \in N \right\} \quad (5.12)$$

Quando o valor de  $\Delta\lambda_c$  é ultrapassado, a base atual deixa de ser ótima com a variável  $x_i$  candidata a entrar na nova base. Como apenas a função objetivo é modificada, a solução atual continua factível e o novo ótimo é procurado a partir desta solução.

O algoritmo de parametrização do custo coordena o cálculo de  $\Delta\lambda_c$ , gerando uma sequência de subproblemas que diferem apenas na função objetivo. Eles são resolvidos com um algoritmo primal onde cada um deles é inicializado com a solução do subproblema precedente. A estrutura lógica deste algoritmo é esboçada em seguida.

```

begin (Parametriza: c)
λ := 0;
repeat  x° | min c1x° + λkc2x° s. a Ax° = b, x° ≥ 0;
      z1 := c1x°;
      z2 := c2x°;
       $\hat{C}_N^2 := c_N^2 - c_B^2 B^{-1} N$ 
       $\hat{C}_N := \hat{C}_N + \lambda \hat{C}_N^2$ 
      if  $\exists \hat{C}_j^2 < 0$  then begin
           $\Delta \lambda_c^k := \min \left[ - \frac{\hat{C}_j}{\hat{C}_j^2} \right];$ 
           $\lambda^{k+1} := \lambda^k + \Delta \lambda_c^k$ 
          end
      else  $\Delta \lambda_c^k := \infty$ 
until Δλ = ∞
end (Parametriza: c)

```

A especialização deste algoritmo para problema de otimização em grafo generalizado contempla duas passagens. A primeira é o procedimento que obtém a solução ótima  $x^\circ$ , utilizando um algoritmo de fluxo de custo mínimo em grafo generalizado. A segunda, o cálculo de  $\hat{C}_N^2$  que explora a estrutura particular da base B, representada através de índices.

Assim, através de uma parametrização na função objetivo são obtidas as soluções não-dominadas de (5.1) de uma forma iterativa. É produzida uma sequência de subproblemas onde somente o primeiro deles ( $\lambda=0$ ) será resolvido inteiramente - ou seja, obtendo-se inicialmente uma solução factível e a solução ótima em seguida. Os outros serão tratados com técnicas de pós-otimização de modo que cada solução obtida é utilizada para inicializar o subproblema seguinte, uma vez que modifica-se apenas a função objetivo.

O conjunto das soluções não-dominadas  $X^0$  é gerado fazendo o parâmetro  $\lambda$  percorrer todo o intervalo  $[0, \infty)$ . Isto é,

$$X^0 = \{ x^0(\lambda) \mid 0 \leq \lambda < \infty \}$$

onde  $x^0(\lambda)$  é solução ótima de (5.8) com  $\lambda$  fixo.

A partir da solução ótima  $x^0(\lambda)$  obtida para (5.8), encontra-se os valores individuais de cada função objetivo, como segue:

$$z^1(\lambda) = c^1 x^0(\lambda)$$

$$z^2(\lambda) = c^2 x^0(\lambda)$$

A curva traçada no espaço dos objetivos - ou seja, tendo como eixos  $z^1$  e  $z^2$  - pela função parametrizada em  $\lambda$  que é definida por  $z^1(\lambda)$  e  $z^2(\lambda)$  exprime o compromisso (*tradeoff*) entre os dois objetivos. Isto é, o quanto um objetivo degrada-se com a melhora do outro.

### 5.3 Grafo Generalizado com Variáveis 0-1

As termelétricas a gás de ciclo combinado foram consideradas com duas faixas de operação. A primeira corresponde ao funcionamento isolado da turbina a gás, que apresenta menor rendimento. Na segunda faixa, operam simultaneamente as turbinas a gás e a vapor, com maior rendimento para o conjunto. Isto resultou em um modelo de grafo generalizado com arcos que possuem ganhos lineares por partes e convexo

A presença de arcos desta natureza conduz a um problema de otimização não-convexo, onde as condições locais de otimalidade não asseguram um ótimo global. Então, ele será tratado com um método *branch and bound*, fazendo uma enumeração implícita para avaliar todas as possíveis combinações das variáveis 0-1.

### 5.3.1 Arco com Ganho Convexo

Inicialmente, será desenvolvido um modelo com variáveis (0-1) para arcos que possuem ganho linear por partes e convexo, como indicado na fig.5.1.

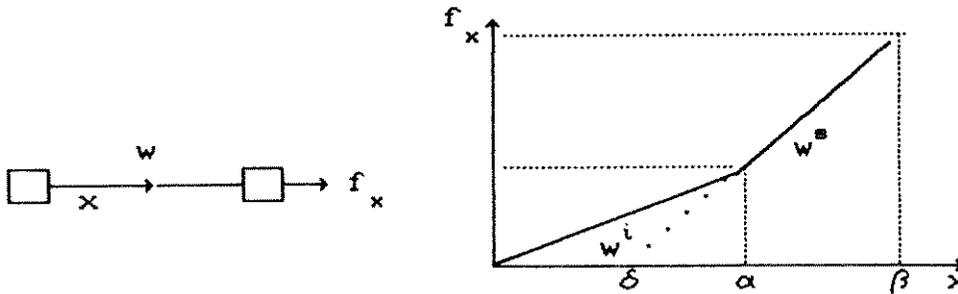


fig.5.1 Arco com Ganho Linear por Partes e Côncavo

O comportamento deste tipo de arco é representado, originalmente, pelas seguintes equações:

$$w^i x = f_x \quad \text{se} \quad 0 \leq x \leq \alpha \quad (5.13)$$

$$w^e(x - \delta) = f_x \quad \text{se} \quad \alpha \leq x \leq \beta \quad (5.14)$$

Uma formulação equivalente para (5.13) e (5.14), incluindo variáveis (0-1) será desenvolvida. Considere, isoladamente, dois tipos de arcos: um possuindo ganho linear e o outro um ganho convexo. Eles são indicados nas figuras 5.2 e 5.3.

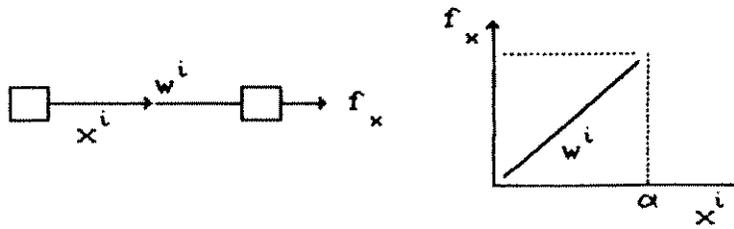


fig.5.2 Arco com Ganho Linear

Este primeiro (fig.5.2) é o caso usual de arcos com ganho linear e capacidade limitada, cujo fluxo satisfaz às equações

$$w^i x^i = f_x \quad (5.15)$$

$$0 \leq x^i \leq \alpha \quad (5.16)$$

O segundo (fig.5.3) é um caso particular de arcos que possuem um ganho convexo. Por analogia com o caso de arcos com custo fixo, eles serão chamados de arcos com *perda fixa*.

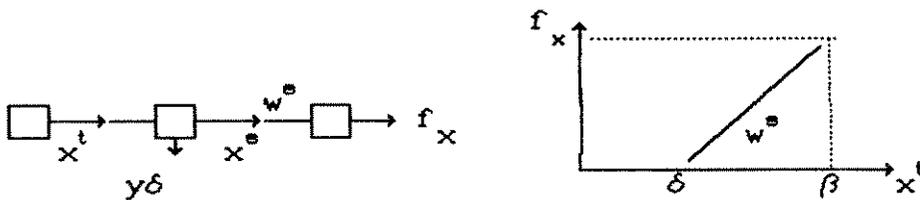


fig.5.3 Arco com Perda Fixa

A operação do arco com perda fixa é definida por

$$x^t - x^s - y\delta = 0 \quad (5.17)$$

$$w^s x^s = f_x \quad (5.18)$$

$$0 \leq x^s \leq y(\beta - \delta) \quad (5.19)$$

$$0 \leq x^i \leq \beta \quad (5.20)$$

$$y \in \{0,1\} \quad (5.21)$$

Fazendo-se uma associação destes dois tipos de arcos, chega-se ao modelo com variáveis (0-1) para um arco com ganho linear por partes e convexo da fig.5.1, mostrado na fig.5.4.

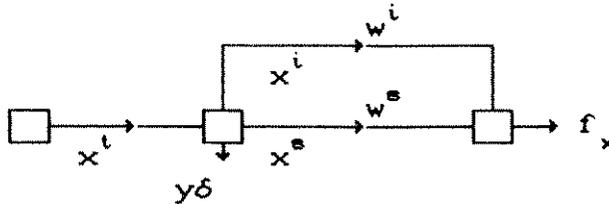


fig.5.4 Modelo do Arco com Variáveis 0-1

O funcionamento do modelo com variáveis (0-1) é regido pelas equações (5.16) e (5.19)-(5.21), acrescidas por:

$$x^t - x^i - x^s - y\delta = 0 \quad (5.22)$$

$$w^i x^i + w^s x^s = f_x \quad (5.23)$$

Verifica-se que, na otimalidade, este modelo equivale ao que fica definido pela equações (5.13) e (5.14). Ou seja,

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^s = 0 \\ w^i x^i = f_x \\ 0 \leq x^i \leq \alpha \end{cases} ; \quad y = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^i = 0 \\ w^s x^s = f_x \\ 0 \leq x^s \leq \beta - \delta \end{cases}$$

Quando  $y=1$ , apesar dos valores de  $x^i \geq 0$  serem factíveis, na solução ótima sempre ocorrerá  $x^i=0$ , uma vez que o arco  $x^s$  (paralelo), é mais eficiente ( $w^i < w^s$ ).

Dessa maneira, a operação da termelétrica a gás na primeira faixa é indicada por  $y=0$ , e na segunda faixa por  $y=1$ .

O problema de maximização do benefício, considerando arcos com ganho linear por partes e convexos, pode ser formulado em notação matricial por (5.24).

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } cx && (5.24) \\
 & \text{s. a } Ax + A^i x^i + A^s x^s + A^y y = b \\
 & \quad 0 \leq x \leq \bar{x} \\
 & \quad 0 \leq x^i \leq \alpha \\
 & \quad 0 \leq x^s \leq y(\beta - \delta) \\
 & \quad y \in (0,1)
 \end{aligned}$$

onde os blocos da matriz de restrições têm os seguintes significados:

- A - demais arcos da rede com as termelétricas excluídas;
- $A^i$  - arcos na faixa inferior de operação da termelétrica;
- $A^s$  - arcos na faixa superior de operação da termelétrica;
- $A^y$  - raízes correspondentes às perdas fixas.

Observa-se que o benefício obtido com a operação conjunta é calculado a partir do gás natural e da eletricidade fornecidos a mercados consumidores, não incidido diretamente sobre os fluxos nos arcos que representam as termelétricas. Assim, os termos da função objetivo correspondentes a  $x^i$ ,  $x^s$  e  $y$  são nulos.

### 5.3.2 O Método de Branch and Bound

O método de *branch and bound* é usado para coordenar processos de enumeração implícita. No caso de variáveis  $y \in (0,1)$ , ele gera uma árvore binária onde cada nó corresponde a uma possibilidade de fixação das componentes de  $y$ .

Por exemplo, um algoritmo de *branch and bound* pode ser inicializado com todas as variáveis  $y \in (0,1)$  relaxadas - ou seja,  $0 \leq y \leq 1$  - e evoluir fixando uma nova variável a cada incremento de nível na árvore binária.

No nível 0, todas as componentes de  $y$  estarão relaxadas. No nível 1, uma componente de  $y$  será fixada originando dois nós da árvore (por exemplo,  $y^j=0$  e  $y^j=1$ ). No nível 2, uma nova componente  $y$  será fixada originando quatro nós da árvore, que representam as possíveis combinações de fixação desta duas variáveis. Seguindo este processo, obtem-se a árvore binária que representa todas as possibilidades de fixação de  $y$ .

A fig.5.5 mostra a árvore binária gerada quando  $y$  possui duas componentes, onde  $R$  indica uma variável relaxada.

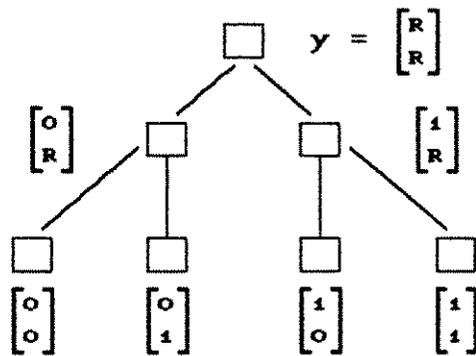


fig.5.5 Árvore Binária para  $y$  com Duas Componentes

O procedimento de enumeração implícita, deve ser capaz de avaliar a solução ótima para toda árvore binária, sem a necessidade de percorrer individualmente cada um dos seus nós. Isto é conseguido através do que se chama de sondagem do nó: diz-se que um nó está sondado quando não é necessário avaliar os seus descendentes na árvore binária.

A eficiência de um algoritmo de *branch and bound* depende de dois aspectos: do esforço computacional para avaliar um nó e do número de nós avaliados. O segundo aspecto depende da eficácia da

sondagem.

Durante o processo de enumeração as variáveis  $y \in (0,1)$  são particionadas em

$$y = \begin{pmatrix} y^R \\ y^O \\ y^I \end{pmatrix}$$

Os conjuntos de índices R, O, e I são definidos da seguinte forma:

R - variáveis relaxadas,  $0 \leq y^R \leq 1$ ;

O - variáveis fixas em 0,  $y^O = 0$ ;

I - variáveis fixas em 1,  $y^I = 1$ ;

Para cada nó  $n$  da árvore binária - associado a uma solução fixa  $y^n$  - o método de *branch and bound* produz a seguintes informações:

$f_R(y^n)$  - um limitante superior para  $f(y^n)$ , o valor de uma solução relaxada;

$f_F(y^n)$  - um limitante inferior para  $f(y^n)$ , o valor de uma solução factível;

$f_I(y)$  - a solução incumbente, o melhor valor obtido até então para uma solução factível;

onde  $f(y^n)$  é o valor ótimo da função objetivo do problema (5.24) considerando as variáveis  $y^n$  fixas.

Um nó  $n$  da árvore binária é dito sondado quando uma das seguintes condições é satisfeita:

a) não existe solução relaxada  $f_R(y^n)$  factível;

b) a solução incumbente é melhor do que a solução relaxada

obtida, isto é  $f_I(y) > f_R(y^n)$ ;

c) os dois descendentes imediatos de  $n$  já foram sondados.

Durante a exploração da árvore binária, a solução incumbente deve ser atualizada com o valor de uma solução factível melhor, sempre que esta seja encontrada.

Um algoritmo de *branch and bound* para resolver o problema (5.24) desenvolvido possui a seguinte estrutura lógica:

```
begin (Branch and Bound)
  relaxar:  $y^n$ ;
   $f_I(y) := -\infty$ ;
  repeat resolver:  $f_R(y^n)$ ;
    if  $f_R(y^n) > f_I(y)$ 
      then begin
        if  $\exists (x_i^r > 0)$  and  $(x_i^r < \beta)$ 
          then begin
            if  $x_i^r \leq \alpha_i$  then fixar:  $y_i^n = 0$ 
              else fixar:  $y_i^n = 1$ ;
            resolver:  $f_F^n(y^n)$ 
            if  $f_F^n(y^n) > f_I(y)$ 
              then  $f_I(y) := f_F^n(y^n)$ 
            end
          else sondar_n
        end
      else sondar_n
    end
  until arvore_enumerada
end; (Branch and Bound)
```

O algoritmo acima utiliza os seguintes procedimentos:

relaxar:  $y^n$  - inicializa com todas as variáveis relaxadas, ou seja,  $y^R = y^n$ ,  $O = \emptyset$  e  $I = \emptyset$ ;

resolver:  $f_R(y^n)$  - resolve (5.24) com os custos ajustados;

fixar: ajusta o custo da variável relaxada  $y_n^r$  de modo a leva-la para um dos seus limites;

sondar n: procedimentos executados quando o nó n é sondado;

arvore enumerada: indicador de que a árvore foi enumerada.

A especialização deste algoritmo para problemas com estrutura de grafo generalizado envolve o procedimento , que será tratado através do algoritmo desenvolvido no capítulo anterior.

Quando se dispõe de um algoritmo primal para resolver o subproblema associado a cada nó da árvore binária, o processo de fixação de  $y$  pode ser realizado pela inclusão de termos na função objetivo, ajustados convenientemente. Desse modo, o subproblema é resolvido integralmente apenas uma única vez. Nas outras, ele será tratado com técnicas de pós-otimização, fazendo-se uma análise de sensibilidade na função objetivo.

Uma alternativa para encontrar soluções relaxadas (ou factíveis) para o problema (5.24) é considerar explicitamente um arco relaxado, cujo ganho associado é definido por

$$w^r = \frac{w^l \alpha + w^s (\beta - \alpha)}{\beta} \tag{5.25}$$

como é mostrado na fig.5.6.

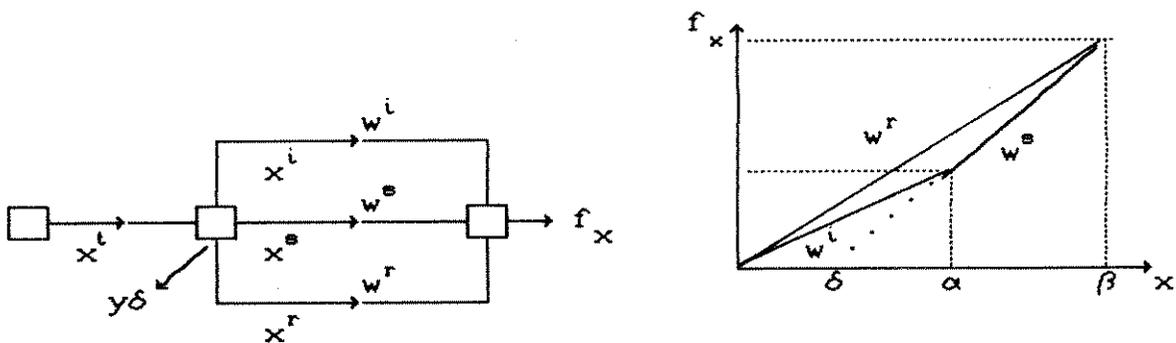


fig.5.6 Modelo com Arco Relaxado Explícito

A partir deste modelo, incluindo-se termos na função objetivo que serão ajustados convenientemente, formula-se o problema (5.26) que é equivalente a (2.24).

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & cx + c^l x^l + c^r x^r + c^e x^e + c^y y & (5.26) \\
 \text{s.a} \quad & Ax + A^l x^l + A^r x^r + A^e x^e + A^y y = b \\
 & 0 \leq x \leq \bar{x} \\
 & 0 \leq x^l \leq \alpha \\
 & 0 \leq x^e \leq y(\beta - \delta) \\
 & 0 \leq x^r \leq \beta \\
 & 0 \leq y \leq 1
 \end{aligned}$$

Considerando a correspondência existente entre  $x^r$ ,  $x^e$ , e  $y$ , ajusta-se os termos da função objetivo do seguinte modo:

$$c_j^e = -M \quad \rightarrow \quad x_j^e = 0 \quad , \quad \text{se } y_j \in R;$$

$$\left. \begin{aligned}
 c_j^e = -M & \rightarrow x_j^e = 0 \\
 c_j^r = -M & \rightarrow x_j^r = 0
 \end{aligned} \right\} , \quad \text{se } y_j \in 0;$$

$$c_j^y = M \quad \rightarrow \quad y_j = 1 \quad , \quad \text{se } y_j \in I.$$

Deve-se observar (abstraindo-se a perda fixa) que o arco relaxado ( $x^r$ ) é menos eficiente do que o arco da segunda faixa de operação ( $x^e$ ). Por isto,  $x_j^e$  é penalizado quando se relaxa a variável  $y_j$ . No entanto, a solução obtida com problema relaxado é melhor, na medida em que não arca com a perda fixa.

#### 5.4 Comentários

Este capítulo descreveu um conjunto adicional de técnicas utilizadas para resolver os problemas formulados para operação de um sistema multisetorial de suprimento de energia, que resultaram

em: um problema de otimização com objetivos conflitantes para o médio prazo, e um problema de otimização com variáveis (0-1) para o curto prazo. Ambos com estrutura de grafo generalizado.

O problema do curto prazo é abordado com o método dos pesos de maneira a gerar o conjunto de suas soluções não-dominadas, representado através da curva de *tradeoff* dos dois objetivos - os interesses dos setores elétrico e de gás natural.

No caso do médio prazo, obteve-se um problema não-convexo em virtude de considerar a termelétrica de ciclo combinado com duas faixas de operação, introduzindo o que se denominou de arco de perda fixa, em analogia com o arco de custo fixo tratado na literatura [J2]. Este problema é resolvido com um algoritmo de *branch and bound* para fazer uma enumeração implícita de suas soluções.

As duas formulações originam sequências de subproblemas de otimização em grafo generalizados, resolvidos com o algoritmo primal especializado desenvolvido no capítulo quatro. Em cada sequência, apenas o primeiro subproblema é resolvido integralmente - ou seja, encontrando-se uma solução factível (com o método do big M e a solução ótima em seguida. Os outros, são tratados através de técnicas de pós-otimização, fazendo uma análise de sensibilidade na função objetivo.

As estruturas lógicas dos algoritmos foram mostradas. No capítulo seguinte serão apresentadas suas implementações computacionais, oferecendo-se maiores detalhes sobre estes aspectos.

## IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

### 6.1 Introdução

Este capítulo exhibe a implementação computacional dos algoritmos de otimização especializados para grafo generalizado - fluxo de custo mínimo, parametrização na função objetivo e enumeração implícita com variáveis (0-1) - desenvolvidos nos capítulos quatro e cinco.

O fato dos algoritmos apresentados estarem codificados em *Pascal* pode introduzir alguma dificuldade, na medida em que se exige familiaridade com uma linguagem computacional específica<sup>14</sup>. Em contrapartida, esta forma de apresentação permite ir além de idéias gerais, entrando nos detalhes da implementação.

Os códigos produzidos foram segmentados em um número expressivo de procedimentos (subrotinas), conduzindo a uma sequência de pequenos blocos de conteúdo lógico relativamente simples. A apresentação destes blocos será intercalada por parágrafos de comentários, onde se dará destaque a aspectos

---

<sup>14</sup> Esclarecimentos sobre a linguagem *Pascal* podem ser obtidos em [J1] e [W3].

considerados relevantes.

Os vários procedimentos mostrados pressupõem a existência de um programa principal com a função de coordená-los, juntamente com a leitura de dados e a saída de resultados. No entanto, este programa não será objeto de discursão.

Cada implementação pode ser vista como formada por duas partes. Uma delas é a estrutura de dados que define um conjunto de variáveis globais, cuja abrangência envolve todos os procedimentos usados pelo método, ela organiza a informação manipulada. A segunda parte é formada pelos procedimentos computacionais em si, onde se desenvolve a lógica do método. Quando houver conveniência, são criadas variáveis locais que ficam restritas ao procedimento onde estiverem definidas.

## 6.2 Minimização de Custo em Grafo Generalizado

Aqui será apresentada a implementação do algoritmo de fluxo de custo mínimo em grafo generalizado com a base representada pelos índices predecessor, preordem e distância, além do arco que liga ao predecessor.

Ele constitui o núcleo das técnicas de otimização utilizadas neste trabalho, ou seja, estabelecendo um procedimento que será utilizado pelos algoritmos de parametrização na função objetivo e enumeração implícita.

### 6.2.1 Estrutura de Dados para Grafo Generalizado

Os dados tratados pelo algoritmo de fluxo de custo mínimo em grafo generalizado são estruturados da maneira indicada a seguir. Eles correspondem a variáveis globais cujo escopo abrange todos os procedimentos.

```

const  NMAX  =    500;
       KMAX  =   1000;
       INF   =  1.0E10;
       BIGM  =  1.0E5;
type   reg_arco = record
           orig,dest,ib           : integer;
           li,ls,x,w,wa,c,cr     : real;
       end;
       reg_no  = record
           p,t,d,klp             : integer;
           pot,beta,rhs          : real;
       end;

var     arco           : array [1..KMAX] of reg_arco;
       no             : array [0..NMAX] of reg_no;
       otimo,degenerou : boolean;
       nK,nN,ke,ks,ascendente_comum : integer;
       delta_fluxo_maximo : real;
       juncao : record
           i,j                 : integer;
       end;

```

As constantes *KMAX* E *NMAX* dimensionam o grafo, neste caso, podendo ter até 1000 arcos e 500 nós. Enquanto *INF* (infinito) e *BIGM* definem números reais grandes.

O grafo é representado por dois arranjos: I) *arco*, cujos elementos são registros do tipo *reg\_arco*; II) *no*, cujos elementos são registros do tipo *reg\_no*. Os campos de *reg\_arco* correspondem à origem, destino, indicador de arco básico, limite inferior, limite superior, fluxo, ganho, ganho acumulado, custo e custo relativo. E os campos de *reg\_no* são predecessor, preordem, distância, arco que liga ao predecessor, potenciais, fator ciclo e termo constante.

O indicador de arco básico é definido como:  $ib=0$  se o arco é básico;  $ib=1$  se o arco é não básico, estando no limite inferior;  $ib=-1$  se o arco é não básico, estando no limite superior.

Outras informações usadas no procedimento de fluxo de custo mínimo são um indicador para a condição de otimalidade, outro para iterações degeneradas, o número de arcos, o de nós, o arco que entra na base, o arco que sai da base, o ascendente comum, a

máxima variação de fluxo admissível e os nós de junção. Este último um registro com dois campos, cada um referido a uma extremidade do arco  $ke$ .

### 6.2.2 Algoritmo Simplex Especializado

A especialização para grafo generalizado do algoritmo simplex ficará melhor caracterizada através dos seus procedimentos. A estrutura lógica do algoritmo implementado pode ser considerada padrão.

```
procedure pfcg_gg(var obj: real);
var k : integer;
begin
  prepara_bigM;
  repeat entra_arco(ke,otimo);
    if not otimo then
      begin
        sai_arco(ks,degenerou);
        if not degenerou then atualiza_fluxo;
        if ke = ks
          then with arco[ke] do ib:=-ib;
          else begin
              reestrutura_base;
              atualiza_potencial;
            end
        end
      until otimo;
    if factivel then begin
      obj:=0.0;
      for k:=1 to nK do with arco[k]
        do obj:=obj+c*x;
        solucao_otima_factivel
      end
    else problema_infactivel;
  end; <pfcg_gg>
```

Cabe chamar a atenção para alguns pontos importantes nesta implementação. Quando se detetam iterações degeneradas, não há necessidade de atualizar os fluxos. E se o arco candidato a entrar na base apenas troca de limites, atualiza-se o indicador  $ib$  não sendo preciso reestruturar a base nem atualizar os potenciais.

Os procedimentos *solucao\_otima\_factivel* e *problema\_factivel* finalizam o método imprimindo relatórios ou gerando arquivos de saída. Como devem atender a necessidades específicas do usuário, eles não serão discutidos.

### 6.2.3 Solução Básica Factível Inicial

A questão da solução básica inicial é abordada com o método do *bigM*. Arcos e raízes naturais são inicializados com os fluxos no limite inferior. O fluxo em cada nó é balanceado com a introdução de raízes artificiais, com custo muito elevado. Assim, cada nó com sua raiz artificial constitui uma componente conexa da base inicial.

```

procedure prepara_bigm;
var n,k,nN,nK   : integer;
    soma        : array [1..NMAX] of real;
begin
for k:=1 to nK do with arco[k] do
  begin
  x:=li;
  soma[orig]:=soma[orig] + x;
  if dest > 0 then soma[dest]:=soma[dest] + x*w
  end;
for n:=1 to nN do with no[n],arco[n+nK] do
  begin
  orig:=n;dest:=0;d:=1;
  klp:=n+nK;
  x:=rhs-soma[n];
  if x < 0
  then begin
    li:=-INF;ls:=0;
    pot:=-BIGM;obj:=obj + x*pot
  end
  else begin
    li:=0;ls:=INF;
    pot:=BIGM;obj:=obj + x*pot
  end
  end
end;
end;

```

O método do *bigM* exige uma verificação da factibilidade da solução ótima obtida, o que implica em saber se todas as raízes artificiais possuem fluxo nulo na solução ótima. Isto é realizado através da função lógica *factivel* que retorna valor *true* quando a solução ótima é factível.

```

function factivel: boolean;
var k      : integer;
begin
factivel:=true;
for k:=nK+1 to nK+nN do
    if arco[k].x > FOLGA then factivel := false
end;(factivel)

```

### 6.2.3 Escolha do Arco que Entra na Base

O procedimento *entra\_arco*, que faz a escolha do arco que entra na base, retorna dois parâmetros: o índice do arco que entra na base (*ke*) e o indicador da condição de otimalidade (*otimo*).

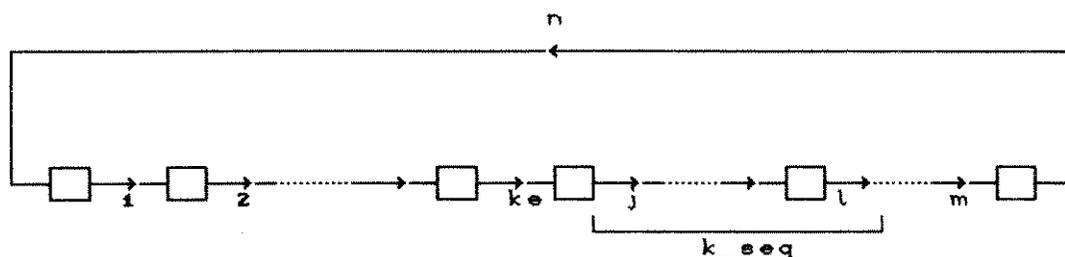


fig.6.1 Lista Circular das Variáveis Não-Básicas

A escolha do arco *ke* é realizada considerando-se o conjunto dos arcos não-básicos como uma lista circular com *k\_nb* elementos. A cada iteração, a busca é iniciada a partir do arco imediatamente após aquele que entrou na base na iteração anterior.

Escolhe-se o arco não básico no limite inferior (superior) que apresentar menor (maior) custo relativo negativo (positivo) em uma sequência de *k\_seq* arcos, como indicado na fig.6.1.

Caso não se encontre nenhum arco candidato a entrar na base, quando a primeira sequência de arcos é pesquisada, o processo deve ser repetido para a sequência seguinte. E assim, sucessivamente, até que seja encontrado algum arco candidato a entrar na base, ou toda a lista dos arcos não básicos percorrida. Neste último caso, a solução atual é ótima.

```

procedure entra_arco(var ke      : integer;
                    var otimo   : boolean);
var custo_relativo_minimo: real;
    j,k,k_nb,k_seq      : integer;
begin
otimo:=true;
custo_relativo_minimo:=0;
k:=ke;
repeat j:=0;
    repeat if k = k_nb then k:=1
           else k:=succ(k);

           with arco[k] do
               if ib*cr < custo_relativo_minimo then
                   begin
                       j:=succ(j);
                       ke:=k;
                       custo_relativo_minimo:=cr;
                       otimo:=false;
                   end;
               until (j = k_seq) or (k = ke);
until not otimo or (k = ke)
end; (entra_arco)

```

Este é um bom esquema para escolha do arco que entra na base quando os arcos do grafo são armazenados explicitamente e de forma arbitrária [B13], o que acontece neste caso.

#### 6.2.4 Identificação do Arco que Sai da Base

O procedimento *sai\_arco*, que identifica o arco que sai da base, retorna dois parâmetros: o índice do arco que sai da base (*ks*) e o indicador de ocorrência de iteração degenerada (*degenerow*).

Admitindo que as extremidades de *ke* sejam os nós *i* e *j*, a identificação de *ks* é realizada explorando-se as ascendências dos

nós  $i$  e  $j$ . Isto deve ser feito para as variadas configurações que a base pode apresentar, como foi mostrado na fig.4.6.

Como a ocorrência de ciclo ascendente comum aos nós  $i$  e  $j$  pode acontecer em duas situações diferentes, correspondentes às situações (e) e (f) da fig.4.6, ela será tratada, separadamente, por dois procedimentos: *ciclo\_ascendente\_comum\_Caso1* e *ciclo\_ascendente\_comum\_Caso2*.

```
procedure sai_arco(var ks      : integer;
                  var degenerou: boolean);
var i,j          : integer;
    w_no = record
        i,j,comum : real
    end
begin
    inicia_sai_arco;
    if (no[i].d > 0) or (no[j].d > 0) and (i <> j)
        then caminho_ascendente_disjunto;
    if i = j
        then begin
            if i > 0 then begin
                ascendente_comum:=i;
                w_no.comum:=w_no.i+w_no.j;
                caminho_ascendente_comum
                end;
            if i > 0 then begin
                juncao.i:=i;
                w_no.comum:=w_no.comum*no[i].beta;
                ciclo_ascendente_comum_Caso1
                end
            end
        else begin
            if (no[i].d = no[j].d) and (i > 0) and (j > 0)
                then ciclo_ascendente_comum_Caso2
                else ciclos_ascendentes_disjuntos
            end
        end
end;(sai_arco)
```

O procedimento *inicia\_sai\_arco* prepara a exploração das ascendências de  $i$  e  $j$ , calculando a variação máxima de fluxo admissível no arco  $ke$  e os ganhos acumulados em suas extremidades.

Quando uma raiz  $(i,0)$  entrar na base, será necessário explorar apenas a ascendência de do nó  $i$ .

```

procedure inicia_sai_arco;
var i,j      : integer;
begin
degenerou:=false;
ascendente.comum:=0;
ks:=ke;
with arco[ke] do
begin
delta_fluxo_maximo:=ls-li;
if ib = 1 then wa:=1.0
else wa:=-1.0;
i:=orig;
j:=dest;
w_no.i:=wa;
if dest > 0 then w_no.j:=wa*w
end;
end;(inicia_sai_arco)

```

A exploração das ascendências de  $i$  e  $j$  é conduzida em várias etapas, cada uma delas correspondendo a um procedimento. Elas podem ser melhor acompanhadas levando-se em conta as definições preliminares apresentadas no quarto capítulo. Observa-se que a ocorrência de degeneração interrompe o processo de busca de  $ks$  através do comando `exit`.

Durante a exploração da ascendência conjunta  $A$  dos nós  $i$  e  $j$  são utilizados os procedimentos `ganho_arco`, para calcular o ganho acumulado no arco, e `bloqueio`, para atualizar a máxima variação de fluxo admissível, discutidos mais adiante.

A primeira etapa é cumprida pelo procedimento `caminho_ascendente_disjunto`, que explora simultaneamente os caminhos disjuntos  $D_i$  e  $D_j$ . A cada passo, trata-se o nó mais distante. Esta etapa continua enquanto não se encontrar o ascendente comum ( $i \neq j$ ), nem as raízes ou ciclos ascendentes de  $i$  e  $j$  ( $d_i > 0$ ,  $d_j > 0$ ). Este procedimento corresponde ao que foi utilizado em [SS] para grafo conservativo.

```

procedure caminhos_ascendentes_disjuntos;
begin
while ((no[i].d > 0) or (no[j].d > 0)) and(i<>j)do
  if no[i].d > no[j].d
    then with no[i] do
      begin
        ganho_arco(klp,w_no.i);
        bloqueio(klp);
        if degenerou then exit;
        i:=p
      end
    else with no[j] do
      begin
        ganho_arco(klp,w_no.j);
        bloqueio(klp);
        if degenerou then exit;
        j:=p
      end;
end;(caminhos_ascendentes_disjuntos)

```

Na etapa seguinte, o procedimento *caminho\_ascendente\_comum* explora  $P$  a partir do nó *ascendente\_comum*  $a$ , percorrendo os arcos da ascendência comum enquanto não se encontrar uma raiz ou um ciclo ( $d_i > 0$ ).

```

procedure caminho_ascendente_comum;
begin
while no[i].d > 0 do
  with no[i] do
    begin
      ganho_arco(klp,w_no.comum);
      bloqueio(klp);
      if degenerou then exit;
      i:=p
    end
end;(caminho_ascendente_comum)

```

Continuando, o procedimento *ciclo\_ascendente\_comum\_Cas01* será usado para circular  $C_i = C_j$ , quando  $n_{j_i} = n_{j_j}$ . Ou seja, se um ciclo é encontrado após o caminho ascendente comum ter sido percorrido. A circulação de  $C_i$  é iniciada pelo nó-junção  $n_{j_i}$ .

```

procedure ciclo_ascendente_comum_Caso1;
begin
repeat with no[i] do
begin
ganho_arco(klp,w_no.comum);
bloqueio(klp);
if degenerou then exit;
i:=p
end
until i = juncao.i;
end;(ciclo_ascendente_comum_Caso1)

```

Outra etapa é realizada pelo procedimento *ciclo\_ascendente\_comum\_Caso2*, que circula  $C_i = C_j$ , quando  $n_{j_i} \neq n_{j_j}$ . Isto significa que o caminho ascendente comum é vazio ( $P=\emptyset$ ). Neste caso, primeiro será percorrido o caminho de junção  $J$ , com o ciclo sendo circulado em seguida.

```

procedure ciclo_ascendente_comum_Caso2;
begin
juncao.i:=i;
juncao.j:=j
ascendente_comum:=j;
repeat with no[i] do
begin
ganho_arco(klp,w_no.i);
i:=p
end;
until i = j;
with w_no do comum:=(i+j)*no[i].beta;
repeat with no[i] do
begin
ganho_arco(klp,w_no.comum);
bloqueio(klp);
i:=p
end
until i = j;
end;(ciclo_ascendente_comum_Caso2)

```

Na última etapa, o procedimento *ciclos\_ascendentes\_disjuntos* explora separadamente os ciclos  $C_i$  e  $C_j$ , quando  $C_i \neq C_j$ .

```

procedure ciclos ascendentes disjuntos;
begin
  if i > 0 then
    begin
      juncao.i:=i;
      w_no.i:=w_no.i*no[i].beta;
      repeat with no[i] do
        begin
          ganho_arco(klp,w_no.i);
          bloqueio(klp);
          if degenerou then exit;
          i:=p
        end
      until i = juncao.i;
    end;
  if j > 0 then
    begin
      juncao.j:=j;
      w_no.j:=w_no.j*no[j].beta;
      repeat with no[j] do
        begin
          ganho_arco(klp,w_no.j);
          bloqueio(klp);
          if degenerou then exit;
          j:=p
        end
      until j = anc.j
    end
end;(ciclos_ascendentes_disjuntos)

```

Em todos estes procedimentos, durante o percurso da ascendência conjunta  $A$ , calcula-se o ganho acumulado  $w_a$  e a máxima variação de fluxo admissível  $\delta_{fluxo\_maximo}$  de cada arco visitado. Isto é feito pelos procedimentos *ganho\_arco* e *bloqueio*.

Por exemplo, considere o arco da ascendência cujo sentido do fluxo coincide com a orientação definida pela relação de ascendência, como é mostrado na fig.6.2.



fig.6.2 Arco da Ascendência Visitado

O procedimento *ganho\_arco* calcula o ganho acumulado do arco *k* e do nó *n*, a partir do ganho acumulado do nó *m*, já conhecido. Cabe notar que, em *inicia\_sai\_arco*, calculou-se a ganho acumulado do nós *i* e *j*.

```

procedure ganho_arco(k           :integer;
                    var w_no : real);
begin
with arco[k] do
  if p[m] = n
    then begin
      wa:=-w_no;
      w_no:=-w*w_no
    end
    else begin
      wa:=-w_no/w;
      w_no:=wa
    end
end; <ganho_arco>

```

O procedimento bloqueio determina a máxima variação de fluxo no arco *k* a partir do valor do ganho acumulado.

Quando a variação máxima de fluxo é menor do que o valor definido para a constante FOLGA, considera-se a iteração degenerada, ocasião em que a busca do arco *ks* pode ser interrompida. Neste caso, arco que sai da base será aquele que foi responsável pelo bloqueio degenerado, e os fluxos permanecem inalterados durante esta iteração.

```

procedure bloqueio(k: integer);
const : FOLGA = 10E-4;
var   : delta_fluxo : real;
begin
with arco[k] do
begin
delta_fluxo:=wa*delta_fluxo_maximo;
if delta_fluxo > ls-x then
begin
delta_fluxo_maximo:=(ls-x)/wa;
ks:=k;
end;
if delta_fluxo < li-x then
begin
delta_fluxo_maximo:=(li-x)/wa;
ks:=k;
end
end;
if delta_fluxo_maximo < FOLGA then degenerou:=true
end;
end;

```

### 6.2.5 Atualização dos Fluxos

Com a variação de fluxo do arco  $k_e$ , devem ser atualizados apenas os fluxos dos arcos que pertencem à ascendência conjunta  $A$  das extremidades de  $k_s$ . Isto será feito considerando a variação máxima de fluxo admissível e o ganho acumulado para cada arco, já calculados.

Pode-se observar que explorando-se  $A_i$ , a ascendência do nó  $i$ , e  $AD_j$ , a ascendência disjunta do nó  $j$ , cada arco da ascendência conjunta  $A$  será visitado apenas uma única vez.

```

procedure atualiza_fluxo;
var i,j   : integer;
begin
with arco[k] do
begin
x:=x+w*delta_fluxo_maximo;
i:=orig
end;
while no[i].d > 0 do fluxo_arco(i);
if i > 0 then repeat fluxo_arco(i)
until i = juncao.i;
with arco[k] do j:=dest;
while (j <> ascendente_comum) and (no[j].d > 0)
do fluxo_arco(j);
if (j <> ascendente_comum) and (j > 0)
and (no[i].d <> no[j].d)
then repeat fluxo_arco(j)
until j = juncao.j;
end;<atualiza_fluxo>

```

O fluxo de cada arco visitado é calculado pelo procedimento *fluxo\_arco*, mostrado a seguir.

```

procedure fluxo_arco(var n: integer);
var k: integer;
begin
k:=no[n].klp;
with arco[k] do x:=x+w_arco*delta_fluxo_maximo;
n:=no[n].p
end;<fluxo_arco>

```

### 6.2.6 Reestruturação da Base

Na reestruturação da base, acrescentam-se as variáveis definidas a seguir, cujo escopo abrange os procedimentos *reestrutura\_base*, *troca\_arcos\_adjacentes* e *extremidades*.

```

var e,s,n,
orf,pad,
ant,fim,pos : integer;

```

O procedimento *reestrutura\_base* faz uma sequência de troca entre arcos adjacentes, percorrendo o caminho que liga *ke* a *ks*.

```
procedure reestrutura_base;
begin
e:=ke;
s:=no[orf].klp;
repeat n:=no[orf].p;
troca_arcos_adjacentes;
pad:=orf;
orf:=n;
e:=s;
s:=no[orf].klp
until e = ks;
end;(reestrutura_base)
```

O procedimento *troca\_arcos\_adjacentes* faz a atualização dos índices que representam a base: predecessor *p*, preordem *t* e arco que liga ao predecessor *klp*.

```
procedure troca_arcos_adjacentes;
begin
extremidades;
if pos <> orf then no[ant].t:=pos;
if (no[orf].d = no[pad].d)
and (no[orf].d = 0) and (no[pad].d = 0)
and (orf > 0) and (pad > 0)
then no[fim].t:=orf
else begin
no[fim].t:=no[pad].t;
if pad <> 0 then no[pad].t:=orf
end;
no[orf].p:=pad;
no[orf].klp:=e
end;(troca_arcos_adjacentes)
```

Uma restrição a ser observada nas árvores ciclada é que o preordem, em cada nó do ciclo, deve ser passado preferencialmente para sua árvore tributária (se ela existir). Então, quando se cria um novo ciclo deve-se verificar se esta condição é atendida. Quando ela não é satisfeita, faz-se um reordenamento do preodem nesta componente conexa.

A troca de arcos adjacentes requer informações adicionais acerca da componente conexa tratada - a identificação dos nós

*ant*, *fim* e *pos*, conforme o quarto capítulo. Esta informação é obtida com o procedimento *extremidades*, mostrado a seguir.

```
procedure extremidades;
begin
  ant:=no[orf].p;
  if ant > 0 then
    while no[ant].t <> orf do ant:=no[ant].t;
  if no[orf].d = 0
    then begin
      fim:=ant;
      pos:=orf
    end
    else begin
      fim:=orf;
      pos:=no[orf].t;
      while (no[pos].d > no[orf].d) do
        begin
          fim:=pos;
          pos:=no[pos].t
        end
      end;
    end;
end;(extremidades)
```

#### 6.2.7 Atualização dos Potenciais

Na atualização dos potenciais deve-se observar se foi criado um novo ciclo, o que se verifica com a função *novo\_ciclo*. Em caso afirmativo, será recalculado o potencial de todos os nós da componente conexa, a começar pelo ciclo. No caso contrário, apenas atualiza-se a descendência da extremidade de *ke* pertencente à componente conexa que permaneceu enraizada ou ciclada.

```

procedure atualiza_potencial;
var k,n,nc,np : integer;
begin
with arco[ke] do
    if no[orig].p = dest then inicio:=orig
    else inicio:=dest;
if novo_ciclo(inicio)
then begin
    fator_ciclo(inicio);
    potencial_ciclo(inicio)
    end
else potencial_arvore(inicio)
end;(atualiza_potencial)

```

Quando acontece a criação de um ciclo a chamada da função lógica *novo\_ciclo*, retorna valor *true*. Nesta ocasião, o índice distância está desatualizado, não podendo ser usado para identificação direta de ciclos. Observa-se que, se um novo ciclo é criado, o arco *ke* pertencerá a ele. Então, a verificação de um novo ciclo pode começar pelo nó *inicio*, definido como uma das extremidades de *ke*.

```

function novo_ciclo(inicio: integer): boolean;
var n,nc: integer;
begin
novo_ciclo:=false;
while (no[n].d > 0) and (n <> inicio) do n:=no[n].p;
if n = inicio
then novo_ciclo:=true
else begin
    if n > 0 then
    begin
        nc:=n;
        n:=no[n].p;
        while not (n in [inicio,nc]) do n:=no[n].p;
        if n = inicio then novo_ciclo:=true
        end
    end;
end;(novo_ciclo)

```

Caso um novo ciclo tenha sido criado, deve-se fazer uma circulação para calcular o fator ciclo *beta*. O cálculo de *beta* é realizado pelo procedimento *fator\_ciclo*, começando a circulação a partir do nó *inicio*.

Durante a circulação, cada nó do ciclo recebe uma marca que corresponde ao negativo do índice do nó início. Ela será atribuída ao índice distância, permitindo identificar ciclos.

```
procedure fator_ciclo(inicio: integer);
var k,n      : integer;
    caux,waux : real;
begin
n:=inicio;
caux:=0.0;
waux:=1.0;
repeat k:=no[n].klp;
    with arco[k] do
    begin
    if dest = no[orig].p
    then begin
        caux:=caux+(waux*c);
        waux:=-waux*w
    end
    else begin
        caux:=caux+(waux*c/w);
        waux:=-waux/w
    end
    end;
    n:=no[n].p
until n = inicio;
with no[inicio] do
begin
beta:=1/(1-waux);
pot:=caux*beta;
wc:=waux;
d:=-inicio;
end;
end;{fator_ciclo}
```

Após o cálculo de *beta* e a partir do nó *início*, calcula-se os potenciais de todos os outros nós da componente conexa tratada com o procedimento *potencial\_ciclo*. Neste caso, a atualização processa-se em dois níveis. No mais externo, seguindo o predecessor, percorre-se os nós do ciclo. Mais internamente, usando o preordem para cada nó do ciclo visitado, explora-se os nós da árvore tributária (se ela existir) conectada ao ciclo. Este esquema facilita a identificação dos nós que pertencem ao ciclo para atribuição do índice distância.

```

procedure potencial_ciclo(inicio: integer);
var n,nc,np : integer;
begin
nc:=inicio;
repeat np:=no[nc].p;
    potencial_no(np,nc,no[nc].klp);
    with no[np] do
        begin
            beta:=no[inicio].beta;
            d:=-inicio;
        end;
    n:=np;
    while no[n].t <> nc do
        begin
            n:=no[n].t;
            np:=no[n].p;
            potencial_no(n,np,no[n].klp);
            no[n].d:=succ(no[np].d);
        end;
    nc:=no[nc].p;
until (nc = inicio)
end;(<potencial_ciclo>)

```

Caso não se tenha criado um novo ciclo, deve-se atualizar os potenciais apenas para a descendência do nó *inicio*, como é mostrado a seguir.

```

procedure potencial_arvore(inicio: integer);
var n,nc,np : integer;
begin
n:=inicio;
np:=no[inicio].p;
repeat no[n].d:=succ(no[np].d);
    potencial_no(n,np,no[n].klp);
    n:=no[n].t;
    np:=no[n].p
until succ(no[np].d) <= no[inicio].d
end;(<potencial_arvore>)

```

Para cada nó visitado atualiza-se o índice distância e, em seguida, é calculado potencial através do procedimento *potencial\_no*, que recebe como parâmetro o nó cujo potencial é conhecido, o nó cujo potencial será calculado e o arco que liga estes nós.

Observa-se que o índice distância é atualizado juntamente com os potenciais, uma vez que eles se modificam apenas no mesmo conjunto de nós.

```
procedure potencial_no(i,j,k: integer);
begin
with arco[k] do
  if dest = j
    then no[i].pot:=c-no[j].pot*w
    else no[i].pot:=(c-no[j].pot)/w;
end;(potencial_no)
```

### 6.3 Parametrização da Função Objetivo

Como foi visto no quinto capítulo, o método de parametrização na função objetivo produz uma sequência de problemas de fluxo de custo mínimo em grafo generalizado. Eles podem ser tratados por técnicas de pós-otimização, permitindo que cada solução encontrada inicialize o problema seguinte. Estes problemas são abordados com o procedimento *pfc<sub>m</sub>gg*, apresentado anteriormente.

Na implementação deste método, utiliza-se uma estrutura de dados adicional para considerar as duas funções objetivos.

#### 6.3.1 Dados na Parametrização da Função Objetivo

A estrutura de dados utilizadas pelo algoritmo de parametrização da função objetivo inclui o arranjo *custo*, cujos elementos são registros com campos definidos para os coeficientes da primeira função objetivo, para os da segunda função objetivo e para o custo relativo referente ao segundo objetivo.

O arranjo *pot2* corresponde ao potencial calculado em relação ao segundo objetivo.

A variável real *lambda* corresponde ao coeficiente de ponderação do segundo objetivo. Enquanto a variável lógica *lambda\_infinito* indica quando o valor de *lambda* pode crescer infinitamente, com a base atual permanecendo ótima.

```
var custo : array [1..nK] of
    record
        c1,c2,cr2 : real;
    end;
    pot2 : array [0..nN] of real;
    lambda_infinito : boolean;
    lambda : real;
```

### 6.3.2 Algoritmo de Parametrização da Função Objetivo

O algoritmo de parametrização da função objetivo considera inicialmente apenas o primeiro objetivo (*lambda* nulo). Sequencialmente, resolver-se um problema de fluxo de custo mínimo, determinando-se o valor de *lambda* para o qual a base atual deixa de ser ótima. Os custos relativos são recalculados em função de *lambda*. A modificação dos custos faz, pelo menos uma, variável violar a condição de otimalidade. O processo itera até *lambda\_infinito* assumir valor true.

```

procedure parametriza_custo;
var k: integer;
begin
for k:=1 to nK do with arco[k], custo[k] do c:=c1;
prepara_bigm;
repeat pfcg_gg;
    calcular_custo_relativo2;
    lambda_infinito:=true;
    lambda:=INF;
    for k:=1 to nK do with arco[k],custo[k] do
        if (ib*cr2 < 0) and (lambda > abs(cr/cr2)) then
            begin
                lambda_infinito:=false;
                lambda:=abs(cr/cr2)
            end;
    if not lambda_infinito then
        begin
            for k:=1 to nK do
                with arco[k],custo[k] do cr:=cr+lambda*cr2;
            for n:=1 to nN do
                with no[n] do pot:=pot+lambda*pot2[n];
        end
    until lambda_infinito;
end;(<parametriza_custo>)

```

O custo relativo referente à segunda função objetivo será calculado, a partir da base atual, pelo procedimento *calcular\_custo\_relativo\_2*, mostrado a seguir.

```

procedure calcular_custo_relativo_2;
var marca : array [1..NMAX] of boolean;
    k,n : integer;
begin
for n:=1 to nN do marca[n]:=false;
for n:=1 to nN do if not marca[n] then
    begin
        m:=n;
        while (no[m].d > 0) and (no[m].p > 0) do m:=no[m].p;
        if no[m].p > 0 then potencial_ciclo_2(m)
            else potencial_arvore_2(m)
    end;
for k:=1 to nK do with arco[k],custo[k] do
    if ib = 0 then cr2:=0
        else cr2:=c2-(pot2[orig] + pot2[dest])*w)
end;(<calcula_custo_relativo_2>)

```

O custo relativo dos arcos e o potencial dos nós, associados ao segundo objetivo, devem ser calculados para toda a floresta básica. Cabe observar que, no caso do algoritmo de fluxo de custo mínimo, atualiza-se os potenciais apenas em uma componente conexa a cada iteração.

O arranjo de variáveis lógicas *marca* auxilia a indicação dos nós que pertencem às componentes conexas onde os potenciais já foram calculados.

Os procedimentos *potencial\_ciclo\_2* e *potencial\_arvore\_2* são réplicas de *potencial\_ciclo* e *potencial\_arvore*, apresentados anteriormente. Os pontos que diferenciam *potencial\_ciclo\_2* e *potencial\_arvore\_2* daqueles são: eles operam com as variáveis *c2* e *pot2*, referidas à segunda função objetivo; para cada nó *n*, cujo potencial é calculado, atribui-se valor *true* à *marca*; o fator *ciclo* e a distância não dependem do custo, de modo que não são levados em consideração.

#### 6.4 Enumeração Implícita: *Branch and Bound*

O algoritmo de *branch and bound* faz uma enumeração implícita de todas as possibilidades de fixação das variáveis  $y \in (0,1)$ . Durante a enumeração, gera-se uma árvore binária cujos nós estão associados a solução de *y*, onde cada componente pode estar fixada em 0, em 1 ou relaxada.

No processo de enumeração, são estabelecidos um limitante inferior (solução relaxada) e um limitante superior (solução factível) para a solução do problema. O menor valor obtido para o limitante superior (solução incumbente) é mantido atualizado.

Esta implementação inclui um bloco de variáveis globais, utilizadas para coordenar o processo de enumeração e caracterizar os arcos associados às variáveis *y*.

#### 6.4.1 Estrutura de Dados da Enumeração Implícita

Os dados manipulados pelo algoritmo de enumeração implícita são estruturados em um bloco de variáveis globais.

A constante *DMAX* dimensiona as variáveis  $y \in \{0,1\}$ . No caso, considera-se *y* com até 50 componentes.

Um dos campos de cada elemento do arranjo *condicao* está associado ao estado das componentes de *y*, que podem ser fixadas em 0, em 1 ou livres. No outro campo, uma variável lógica indica se, na solução factível obtida, a variável livre foi arredondada para 0 ou para 1.

```
const DMAX = 50;
var   condicao: array [0..DMAX] of
      record
        sta           : (fix_0,fix_1,livre);
        tru_1         : boolean
      end;
      decisao: array [0..DMAX] of
      record
        d_fix         : integer;
        sta_1,
        sondado       : boolean
      end;
      dados: array [0..DMAX] of
      record
        k_i,k_s,k_r,k_t,k_y,
        alfa,beta,delta : integer;
        w_i,w_s,w_r,
        y_inc          : boolean;
      end;
      f_rlx,f_fac,f_inc : real;
      nD,nivel,prox_d_fix : integer;
      prox_sta_1,enumerado : boolean;
```

Cada elemento do arranjo *decisao* corresponde a um nível da árvore de decisão, onde uma nova componente de *y* deve ser fixada. Uma variável lógica indica se esta componente foi fixada no estado 1, ou 0. O fato de um nó da árvore de decisão ser considerado sondado significa que, a partir dele, não será

necessário fixar uma nova componente de  $y$ , o que é indicado por uma outra variável lógica.

O arranjo *dados* contém as informações das variáveis  $y \in \{0,1\}$ , incluindo os índices dos arcos no grafo do problema equivalente, seus limites de fluxo e ganhos. Uma variável lógica indica as componentes de  $y$  fixas em 1 na solução incumbente.

Outras variáveis usadas correspondem aos valores de função objetivo relaxada, factível, incumbente, o número de variáveis  $\{0-1\}$ , o nível atual explorado, a próxima componente de  $y$  a ser fixada, o estado em que ela será fixado e o indicador de que a árvore foi enumerada.

#### 6.4.2 Algoritmo de Enumeração Implícita

O algoritmo de *branch and bound* implementado é essencialmente o mesmo apresentado em [J2], para o problema de custo fixo. As modificações foram introduzidas nos procedimentos *resolve\_rlx* e *resolve\_fac*, de maneira a considerar arcos criados para o modelo com perda fixa.

O procedimento *resolve\_rlx* encontra um limitante inferior (solução relaxada), *resolve\_fac* estabelece um limitante superior (solução factível) e a enumeração é processada com auxílio dos procedimentos *separar*, *backtrack* e *sondar*.

Por exemplo, considere a fig.6.3. A avaliação do nó  $i$  implica em: verificar se há necessidade de fixar um outra componente de  $y$  (*separar*), descendo um nível na árvore de decisão; ou avaliar o nó complementar a  $i$  (*sondar*), permanecendo no mesmo nível; ou retornar um nível (*backtrack*), quando duas solução complementares foram sondados.

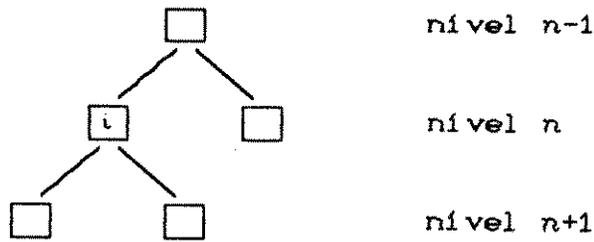


fig.6.3 Avaliação de um Nó da Árvore de Decisão

```

procedure enumerar;
var i: 0..DMAX;
begin
  inicia_enumerar;
  repeat resolver_rlx;
    if (f_rlx < f_inc) and (prox_d_fix <> 0)
      then begin
        separar;
        resolver_fac;
      end
    else begin
      while not enumerado and decisao[nivel].sondado
        do backtrack;
      if not enumerado then sondar;
      end;
    if not enumerado and (f_fac < f_inc) then
      begin
        f_inc:=f_fac;
        for i:=1 to nD do with condicao[i], dados[i]
          with condicao[i],dados[i] do y_inc:=tru_1
        end
      end
    until enumerado;
    for i:=1 to nD do
      with condicao[i], dados[i] do
        if y_inc then sta:=fix_1
          else sta:=fix_0;
    pre_pfc;
    f_inc:=f_fac;
  end;(enumerar)

```

O procedimento *inicia\_enumerar* prepara inicialização da enumeração, fazendo todas as componentes de *y* relaxadas.

```

procedure inicia_enumerar;
var i: 0..DMAX;
begin
enumerado:=false;
f_inc:=INF;
nivel:=0;
for i:=1 to nD do
    with decisao[i], condicao[i] do
        begin
            sta:=livre;
            d_fix:=0;
            sta_1:=false;
            sondado:=false
        end;
    end;
end;<inicia_enumerar>

```

O procedimento *resolver\_rlx* atualiza os custos em função dos estados em que as componentes de *y* foram fixadas. A partir dos novos custos, calculam-se os custos relativo e se faz uma pós-otimização do problema.

Neste procedimento também se faz a escolha da próxima variável que deverá ser fixada por *separar*, escolhendo-se aquela onde o fluxo no arco relaxado está mais distante de uma solução factível.

```

procedure resolve_rlx;
var i      : integer;
    desvio : real;
begin
for i:=1 to nD do with dados[i],condicao[i] do
  case sta of
    fix_0: begin
      arco[k_r].c:=BIGM;
      arco[k_s].c:=BIGM;
      arco[k_y].c:=BIGM
      end;
    livre: begin
      arco[k_r].c:=0.0;
      arco[k_s].c:=BIGM;
      arco[k_y].c:=BIGM
      end;
    fix_1: begin
      arco[k_r].c:=0.0;
      arco[k_s].c:=0.0;
      arco[k_y].c:=-BIGM
      end;
  end;
if nivel = 0 then prepara_bigM
  else calcula_custo_relativo;
pfc_m_gg(f_rlx);
prox_d_fix:=0;
desvio:=INF;
for i:=1 to nD do with dados[i],condicao[i] do
  if desvio > abs(arco[k_r].x-alfa) then
    begin
    prox_d_fix:=i;
    if arco[k_r].x > alfa then prox_sta_1:=true
      else prox_sta_1:=false;
    desvio:=abs(arco[k_r].x-alfa)
    end
end;
end;(resolve_rlx)

```

O procedimento *resolver\_fac*, faz um arredondamento das variáveis relaxadas, fixando-as em 0, ou em 1. Atualizam-se os custos em função deste arredondamento, determinam-se os custos relativos e procura-se o novo ótimo a partir da solução atual.

```

procedure resolve_fac;
var i      : integer;
begin
for i:=1 to nD do with dados[i],condicao[i] do
  if sta = livre then
    begin
    if arco[k_r] <= alfa
      then begin
        tru_1:=false;
        arco[k_r].c:=BIGM;
        arco[k_s].c:=BIGM;
        arco[k_y].c:=BIGM
      end
    else begin
        tru_1:=true;
        arco[k_r].c:=0.0;
        arco[k_s].c:=BIGM;
        arco[k_y].c:=BIGM
      end;
    end;
calculo_custo_relativo;
pfc_m_gg(f_fac);
end;(resolve_fac)

```

O procedimento *separar* fixa, na árvore de decisão, uma nova componente de  $y$ , estabelecida em *resolve\_rlx*.

```

procedure separar;
begin
nível:=nível + 1;
with condicao[next_d_fix] do
  if next_sta_1 then sta:=fix_1
    else sta:=fix_0;
with decisao[nível] do
  begin
  d_fix:=next_d_fix;
  sta_1:=next_sta_1;
  sondado:=false
  end
end;(separar)

```

O procedimento *backtrack* retorna um nível na árvore de decisão, indicando que dois nós complementares estão sondados. Quando o *backtrack* atinge o nível zero, significa que a árvore foi enumerada.

```

procedure backtrack;
begin
with decisao[nivel] do
begin
condicao[d_fix].sta:=livre;
d_fix:=0;
nivel:=nivel - 1;
if nivel = 0 then enumerado:=true
else enumerado:=false
end;
end;(backtrack)

```

O procedimento *sondar* faz a sondagem de um nó gerando o seu complemento, ou seja, fazendo a variável trocar de estado.

```

procedure sondar;
begin
with decisao[nivel] do
begin
sondado:=true;
sta_1:=not sta_1;
with condicao[next_d_fix] do
if next_sta_1 then sta:=fix_1
else sta:=fix_0;
end
end;(sondar)

```

## 6.5 Comentários

Este capítulo apresentou uma implementação computacional das técnicas de otimização em grafo generalizado desenvolvidas no quarto e quinto capítulo, envolvendo algoritmos de fluxo de custo mínimo, de parametrização na função objetivo e problemas não convexos com ganhos lineares por partes.

A parte central desta implementação é um algoritmo de fluxo de custo mínimo em grafo generalizado (*pfcm\_gg*). Ele considera a base representada com os índices predecessor, preordem e distância, além do arco que liga ao predecessor.

A distância é definida de maneira semelhante aquela apresentada em [B13]. Porém, uma ligeira modificação introduzida permite a identificação mais eficaz de ciclos.

O algoritmo de parametrização da função objetivo pode ser considerado padrão. Além da chamada do procedimento *pfcg\_gg*, seu único aspecto de especialização para grafo generalizado corresponde aos procedimentos que calculam os potenciais de todos os nós da floresta básica. Eles podem ser vistos como generalizações dos procedimentos de atualização dos potenciais utilizados em *pfcg\_gg*, que tratam apenas uma componente conexa da floresta básica.

O algoritmo de enumeração implícita é análogo aquele apresentado em [J2] para arcos com custo fixo. Os procedimentos *enumerar*, *separar*, *sondar* e *backtrack* são idênticos. As alterações introduzidas contemplam a resolução do problema relaxado e do problema factível, de maneira a considerar o modelo desenvolvido para arcos com perdas fixas desenvolvido no quinto capítulo.

Convém lembrar que o modelo de arco com perda fixa, converte o arco original em vários outros. Apesar do arco original não possuir custo, atribui-se custo aos arco criados com o intuito de bloquear (ou forçar) a passagem de fluxo neles. Os procedimentos *resolver\_rlx* e *resolver\_fac* fazem esta atribuição de custos e coordenam a chamada dos procedimentos de cálculo dos custos relativos e de pós-otimização do problema.

Acredita-se que eventuais dificuldades que possam ter surgido na leitura deste capítulo, em virtude do uso de uma linguagem computacional específica (*Pascal*), sejam compensadas pela possibilidade de apresentar a implementação a nível de detalhes.

## ESTUDO DE CASO COM O SISTEMA ENERGÉTICO DO SUDESTE

### 7.1 Introdução

Neste capítulo, apresentam-se resultados obtidos com exemplos formulados para operação coordenada com o sistema energético da região Sudeste que, neste contexto, é entendido como a reunião dos sistemas elétrico, de gás natural e considera disponibilidades localizadas de excedentes de bagaço de cana para geração termelétrica.

Dois exemplos são montados (médio e curto prazo) a partir de expectativas para a configuração, no início da próxima década, do sistema hidrelétrico, o comportamento da oferta de gás natural e do excesso de bagaço de cana. As demandas dos variados mercados de eletricidade correspondem a valores previstos pelo setor elétrico. Enquanto as demandas de gás natural indicam expectativas consideradas plausíveis.

Um conjunto de usinas térmicas a gás natural e a bagaço é introduzido para fazer um acoplamento intersetorial. O nível de operação destas termelétricas caracterizam transferências energéticas entre setores.

As termelétricas a gás consideradas neste estudo possuem arquitetura de ciclo combinado [T1-B14], apresentando maiores

rendimento e flexibilidade operacional do que as térmicas tradicionais. Enquanto as termelétricas a bagaço são consideradas com tecnologia convencional, porém, operando com níveis de temperatura e pressão mais elevados do que a média daqueles praticados no setor de açúcar e álcool [C13], o que se reflete em um maior conteúdo energético para o excedente de bagaço.

Hipóteses adicionais são colocadas para caracterizar situações hidrológicas e estágios de desenvolvimento do sistema de gás natural.

## 7.2 O Sistema Energético do Sudeste

A estrutura geral do sistema energético da região Sudeste, utilizada nos exemplos para médio e curto prazo, é ilustrada na fig. 7.1.

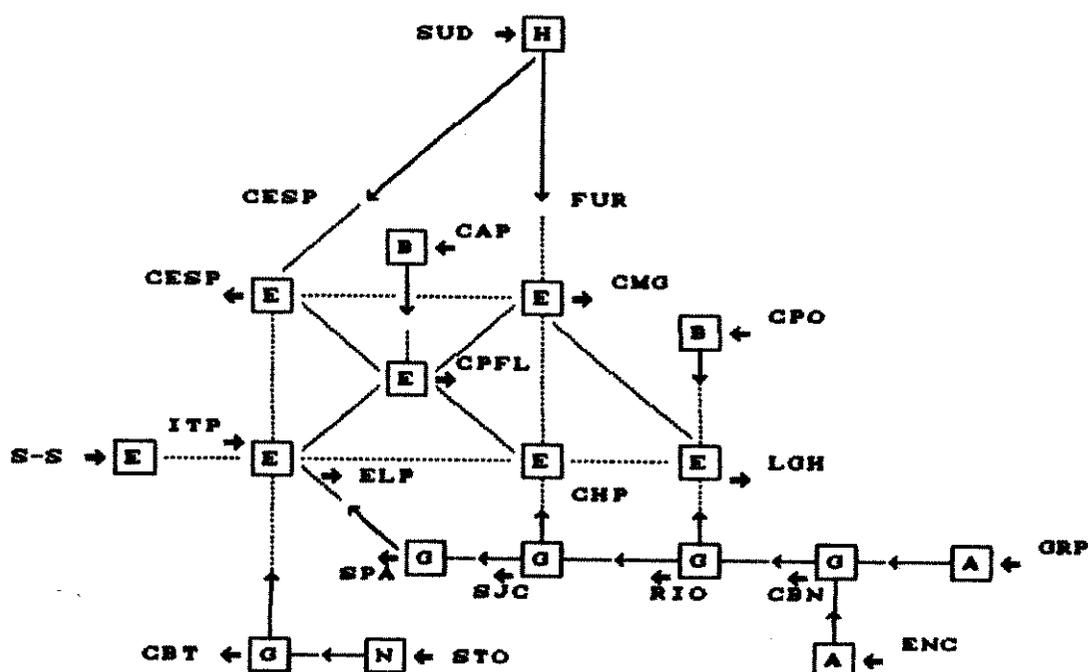


fig. 7.1 Sistema Energético da Região Sudeste.

O sistema de geração hidrelétrica está agregado<sup>15</sup> e sua produção é disponível em dois locais (Cesp e Furnas). A eletricidade gerada é levada através de uma rede de transporte até os mercados consumidores da Cesp, Cpfl, Eletropaulo, Cemig e Light. O sistema elétrico também absorve uma parcela da geração de Itaipú e encontra-se interligado com o sistema da região Sul. O sentido do fluxo energia na interligação Sul-Sudeste varia ao longo dos meses em função das condições hidrológicas das duas regiões. A oferta de energia elétrica pode ser complementada pela geração das termelétricas a gás natural e bagaço de cana.

O sistema de gás natural é formado pelos campos de gás associado de Garoupa e Enchova (bacia de Campos) e por um campo de gás não associado de Santos. A produção da bacia de Campos é escoada através de a linha de transporte de gás natural (Campos-S.Paulo) para atender os mercados consumidores de Cabriúna<sup>16</sup>, Rio de Janeiro (incluindo REDUC), S. J. dos Campos e S. Paulo. O gás produzido na bacia de Santos é consumido no mercado de Cubatão. Além do consumo direto, o gás natural pode ser convertido em eletricidade através de termelétricas localizadas, para efeito de estudos, no Rio de Janeiro, S. J. dos Campos, S. Paulo e Cubatão.

O excesso de bagaço de cana, disponível para geração de eletricidade durante o período da safra, está concentrado nas regiões de Campinas (SP) e Campos (RJ), onde admite-se a instalação de termelétricas.

---

<sup>15</sup> Por exemplo, através de um modelo a reservatório equivalente [P3].

<sup>16</sup> Em Cabriúna fica localizada um planta de gasolina natural e GLP, sintetizados a partir do gás natural [C1].

### 7.2.1 Produção Hidrelétrica

O sistema hidrelétrico da região Sudeste é representado por um único reservatório, caracterizado pelas capacidades máximas de armazenamento, de geração e afluência de energia, podendo também incluir um limite inferior para a quantidade de energia armazenada. Para uma determinada bacia hidrográfica, com regime hidrológico conhecido, estas características são estabelecidas a partir da configuração dos aproveitamentos implantados.

Os exemplos apresentados levam em conta a configuração prevista para o sistema hidrelétrico da região Sudeste no ano de 1990 [G3], sumarizada como segue:

Armazenamento máximo	90.000 MW
Afluência média	16.500 MW
Geração máxima	50.000 MW
Geração Itaipú	6.500 MW
Limite de Intercâmbio Sul-Sudeste	2.000 MW

A geração de Itaipú corresponde a uma quantidade de energia que deve ser alocada na demanda do sistema Sudeste, independente de sua situação hidrológica. O limite de intercâmbio Sul-Sudeste estabelece o valor máximo de energia que pode ser transferido entre as duas regiões Sul e Sudeste.

### 7.2.2 Produção de Gás Natural

A produção de gás natural no Brasil está atualmente entorno de  $18 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{dia}$ , podendo chegar a  $70 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{dia}$  no ano de 1997<sup>17</sup>.

---

<sup>17</sup> Segundo conferência proferida pelo presidente da Petrobrás na Unicamp durante o Seminário Brasil Século XXI, em agosto de

Para o início da década de 90, considera-se que a produção brasileira chegue a  $30 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{dia}$ . No exemplo formulado, admite-se uma produção de  $14 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{dia}$  correspondente ao gás associado extraído na bacia de Campos, ou seja, 45% da produção nacional.

A bacia de Santos, possui reservas prováveis da ordem de  $12 \cdot 10^6 \text{ m}^3$  de gás não associado, localizada na área de prospecção concedida à Pecten sob contrato de risco [T4]. Estas reservas exploradas a uma taxa de 8% das reservas ao ano, resultam numa produção de cerca de  $3 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{dia}$ . Este valor poderia chegar a  $4 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{dia}$ , desde que se admita a ocorrências de gás não associado também na área da Petrobrás.

A partir destas considerações, produção de gás natural levada em conta nos exemplos resolvidos fica resumida da seguinte forma:

Gás associado :

Garoupa  $7 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{d}$

Enchova  $7 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{d}$

Gás não associado:

Santos  $4 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{d}$

### 7.2.3 Disponibilidade de Bagaço de Cana

A safra de cana de açúcar no ano de 1987 na região da Cpf1 era estimada entorno de 80 milhões de toneladas [C13]. Isto poderia resultar em um excesso de bagaço de cana da ordem de 6,4 milhões de toneladas, considerando um percentual de excedente de bagaço da ordem de 8% [M1].

Admitindo dificuldades a curto prazo de uma absorção integral do excedente de bagaço para geração elétrica,

---

1988.

considera-se possíveis de serem convertidos em eletricidade as seguintes quantidades de excedentes de bagaço de cana:

Campinas-SP	$3 \cdot 10^6$ ton/safra
Campos-RJ	$3 \cdot 10^6$ ton/safra

Estas quantidades de bagaço são disponíveis durante a safra de cana de açúcar, com duração aproximada de seis meses.

#### 7.2.4 Termelétrica a Gás Natural

O aproveitamento do gás natural para geração elétrica é realizado através de usinas térmicas de ciclo combinado. Como foi visto no segundo capítulo, estas usinas combinam turbinas a gás e a vapor de forma que o conjunto apresenta um rendimento energético, atualmente, entorno de 35%, com expectativas futuras de se chegar aos 45% [C8-T1]. Enquanto, usinas convencionais apresentam rendimentos típicos de aproximadamente 20% para turbinas a gás e de 30% para turbinas a vapor.

A produtividade da termelétrica de ciclo combinado é determinada considerando um poder calorífero inferior de  $9800 \text{ kcal/m}^3$  para o gás natural<sup>18</sup>. Isto resultaria em uma conversão física de  $10^6 \text{ m}^3/\text{dia}$  equivalente a  $475 \overline{\text{MW}}$ .

Para o médio prazo, pode-se tomar um rendimento médio de um ciclo anual de operação que, no exemplo apresentado, atribuiu-se um rendimento de 27%. No caso do curto prazo, considera-se duas faixas de operação. Na primeira faixa atua apenas a turbina a gás com rendimento de 23%, e na segunda faixa opera todo o conjunto com rendimento de 37%.

---

<sup>18</sup> 1 cal = 4,1868 J

A produtividade da termelétrica de ciclo combinado fica definida como segue:

Médio prazo		$130\overline{\text{MW}}/(10^6\text{m}^3/\text{d})$
Curto prazo:	faixa 1	$110\overline{\text{MW}}/(10^6\text{m}^3/\text{d})$
	faixa 2	$175\overline{\text{MW}}/(10^6\text{m}^3/\text{d})$

### 7.2.5 Termelétrica a Bagaço de Cana

A produtividade da termelétrica a bagaço de cana é estabelecida considerando um poder calorífero inferior de  $7,43\text{MJ/kg}$  para o bagaço com um teor de umidade de 50%. Isto resulta em uma transformação física onde a queima de  $10^6\text{ton/mês}$  de bagaço seria equivalente à  $2865\overline{\text{MW}}$ .

Considerando a queima da bagaço em caldeiras que produzam vapor a pressão entorno de  $62\text{kgf/cm}^2$  e temperatura de  $450^\circ\text{C}$ , é razoável admitir um rendimento energético no aproveitamento do bagaço de aproximadamente 25%.

Dessas considerações, resulta a seguinte produtividade para a termelétrica a bagaço de cana:

$10^6\text{ton/mês}$	$715\overline{\text{MW}}$
----------------------	---------------------------

### 7.3 Exemplo no Médio Prazo

O exemplo formulado para o médio prazo corresponde a uma situação onde há sobra de energia. O sistema hidrelétrico recebe uma afluência média anual de  $24000\overline{\text{MW}}$  (145% da média de longo prazo para 1990) e atende a um consumo médio de  $22500\overline{\text{MW}}$ , para o ano de 1990 [G3]. A afluência de energia e consumo encontram-se distribuídos ao longo dos meses como indicado na fig.7.2.

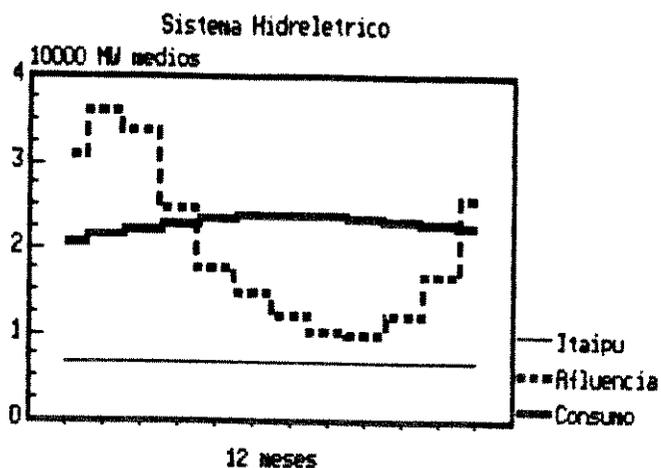


Fig. 7.2 Consumo e Disponibilidade de Eletricidade.

A demanda de eletricidade, para o ano de 1990 [G3], estará distribuída entre os mercados consumidores segundo os percentuais indicados na fig. 7.3.

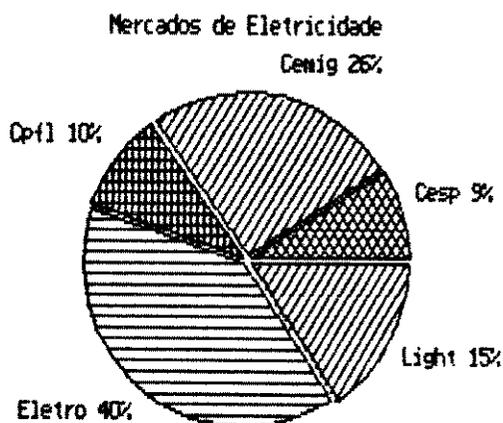


Fig. 7.3 Participação no Consumo de Eletricidade.

O gás natural é considerado com oferta em crescimento e demanda estabilizada, o que poderia significar uma expansão do gás associada sem que haja um desenvolvimento de mercados em contrapartida, como é mostrado na fig. 7.4.

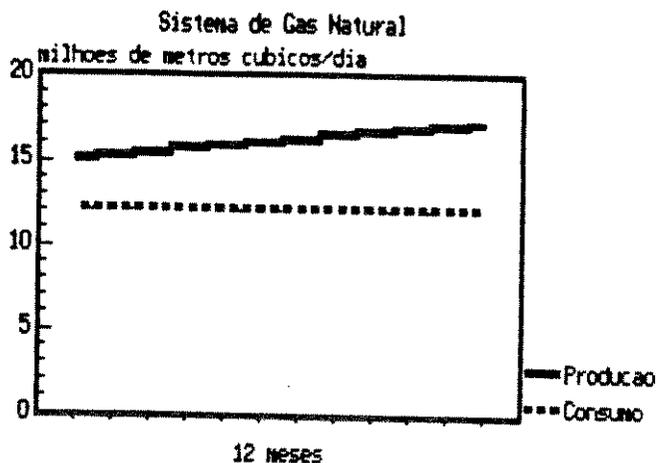


Fig. 7.4 Consumo e Disponibilidade de Gás Natural.

Os mercados consumidores de Cabriúna, Rio, S.J.Campos, S.Paulo e Cubatão participam da demanda de gás natural segundo os percentuais indicados na fig.7.5.

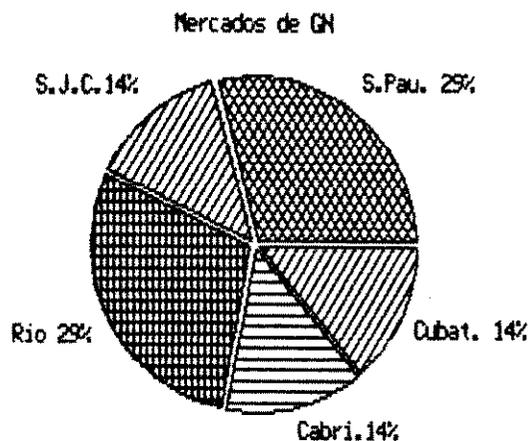


Fig. 7.5 Participação no Consumo de Gás Natural.

#### 7.4 Resultados no Médio Prazo

As soluções obtidas para o médio prazo originaram uma curva de *tradeoff* com duas soluções não dominadas, ou seja, formada por um único segmento. A primeira solução corresponde à minimização dos investimentos, com os seguintes valores de função objetivo:

vertimento:  $z^E = 11.680\overline{MW}$

queima de gás:  $z^G = 11 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{dia}$

O comportamento das variáveis energéticas ficam sumarizados no conjunto das fig.7.6-7.9, mostradas a seguir:

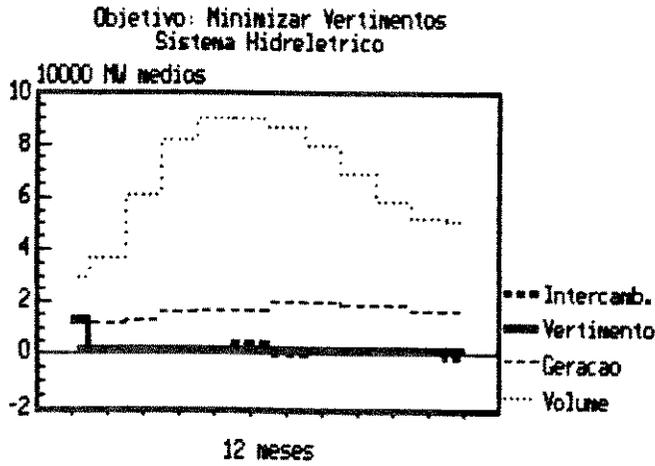


Fig. 7.6 Sistema Hidrelétrico.

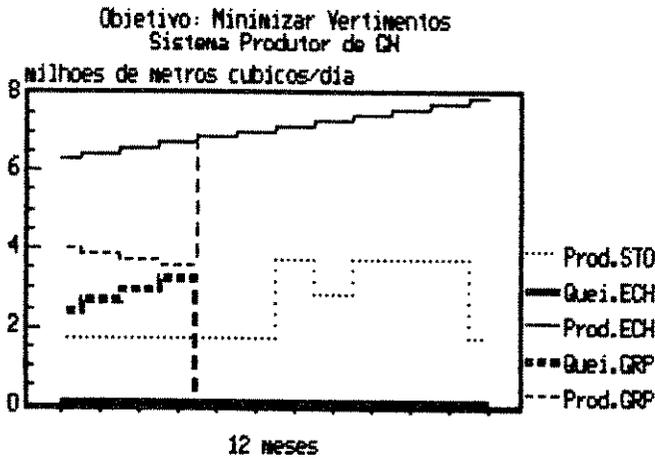


Fig.7.7 Sistema Produtor de Gás Natural.

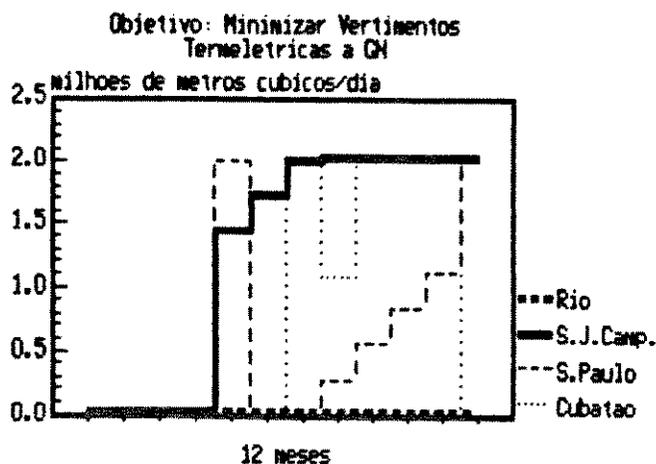


Fig. 7.8 Operação das Termelétricas a Gás Natural.

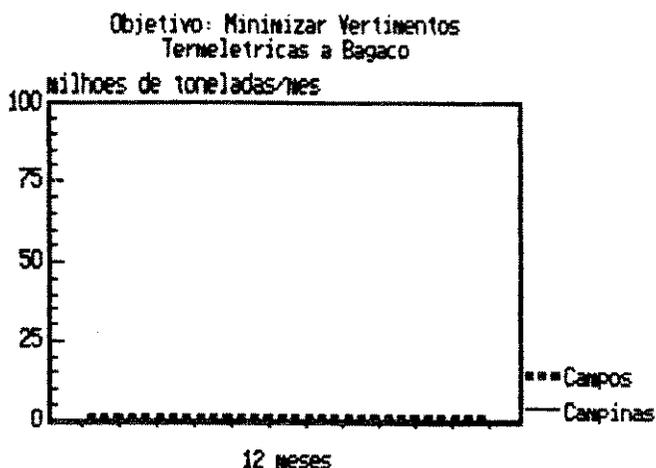


Fig. 7.9 Operação das Termelétricas a Bagaço.

A segunda solução corresponde à minimização da queima do excedente de gás associado, com os seguintes valores de função objetivo:

vertimento:  $z^E = 13.100\overline{MW}$

queima de gás:  $z^G = 0 \text{ m}^3/\text{dia}$

As variáveis energéticas são indicadas no conjunto das fig. 7.10-7.12, apresentadas as seguir:

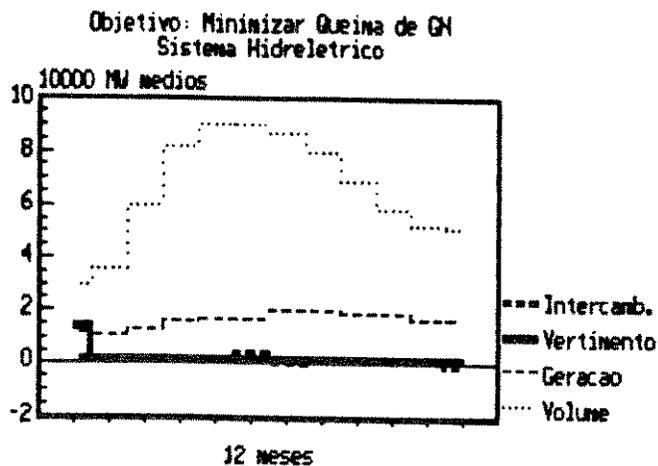


Fig. 7.10 Sistema Hidrelétrico.

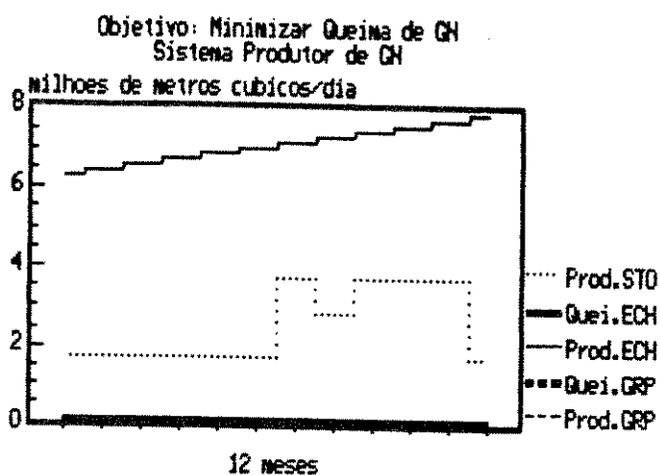


Fig. 7.11 Sistema Produtor de Gás Natural.

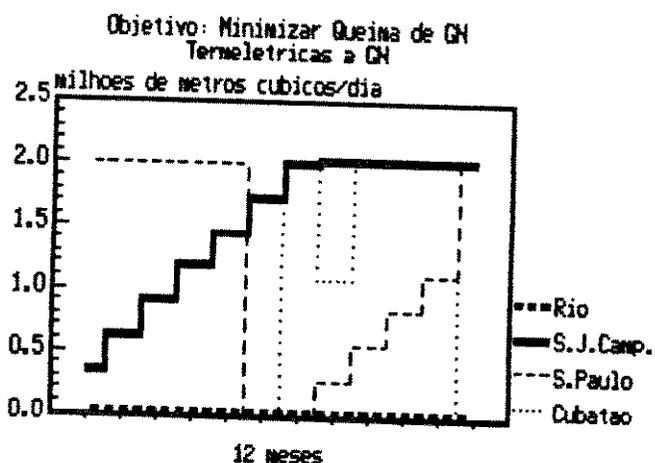


Fig. 7.12 Operação das Termelétricas a Gás Natural.

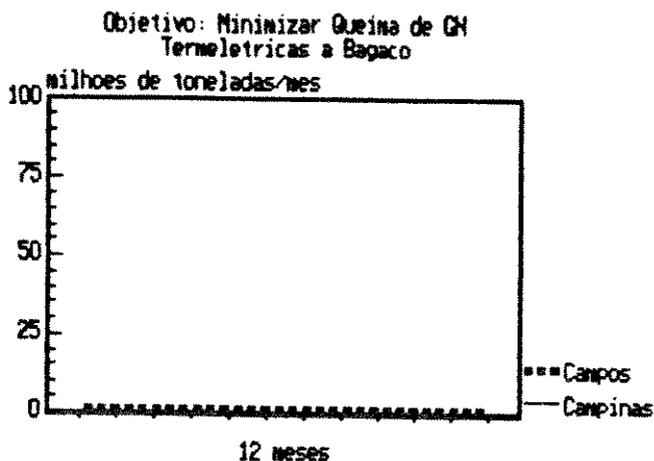


Fig. 7.13 Operação das Termelétricas a Bagaço.

### 7.5 Exemplo no Curto Prazo

O exemplo para o curto prazo é formulado para uma situação onde o sistema hidrelétrico recebe uma energia média semanal de  $14500\overline{MW}$  (87% da média de longo prazo para 1990), que pode ser despachada com um desvio de até  $\pm 15\%$ , e atende a um consumo médio semanal de  $22500\overline{MW}$ . Desse modo, fica caracterizada uma situação onde o sistema elétrico de lançar mão de sua reservas energéticas ou recorrer a uma complementação térmica. A disponibilidade de energia e o consumo encontram-se distribuídos diariamente da maneira indicada na fig. 7.14.

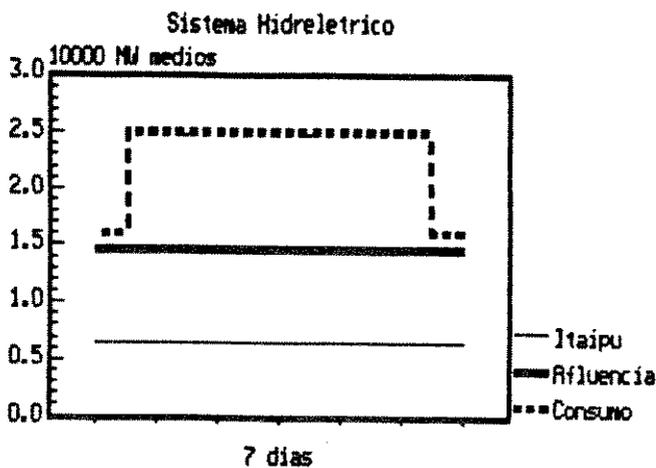


Fig. 7.14 Consumo e Disponibilidade de Energia.

A produção de gás natural associado e o consumo são admitidos constantes ao longo dos dos dias, como fica indicado na fig. 7.15.

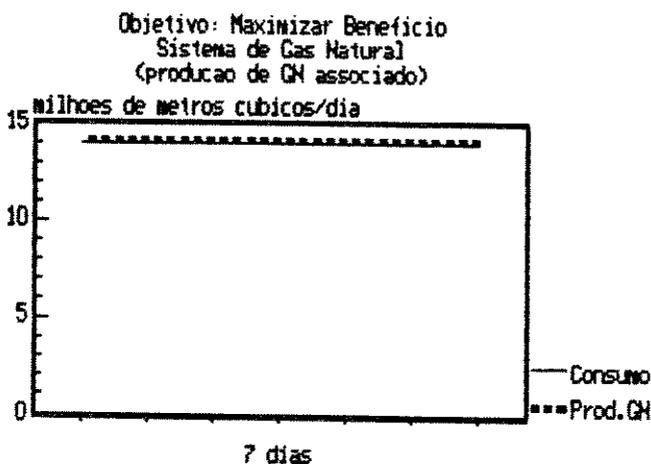


Fig. 7.15 Consumo e Disponibilidade de Gás Natural.

Os mercados de eletricidade e gás natural participam com os mesmos percentuais considerados para o médio prazo, ou seja, aqueles que são indicados nas fig. 7.3 e fig. 7.5. O problema no curto é formulado para maximizar um benefício mútuo correspondente a uma remuneração pelo atendimento a mercados secundários de eletricidade e gás natural.

## 7.6 Resultados no Curto Prazo

Os resultados para o curto prazo, indicando a produção hidrelétrica e os níveis de operação das termelétricas a gás natural e bagaço de cana são mostrados nas fig.7.16-7.18.

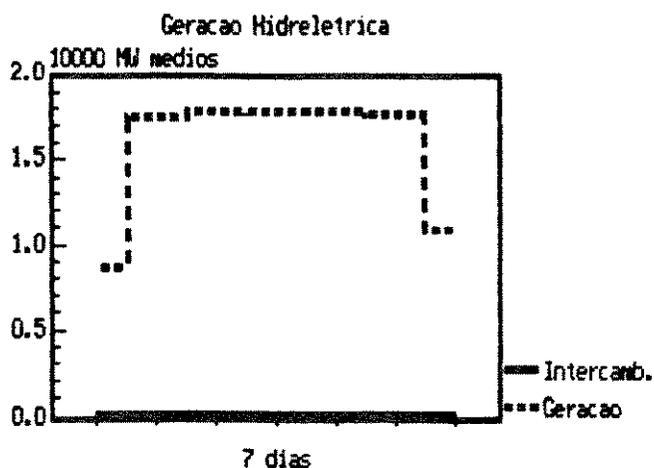


Fig. 7.16 Produção Hidrelétrica.

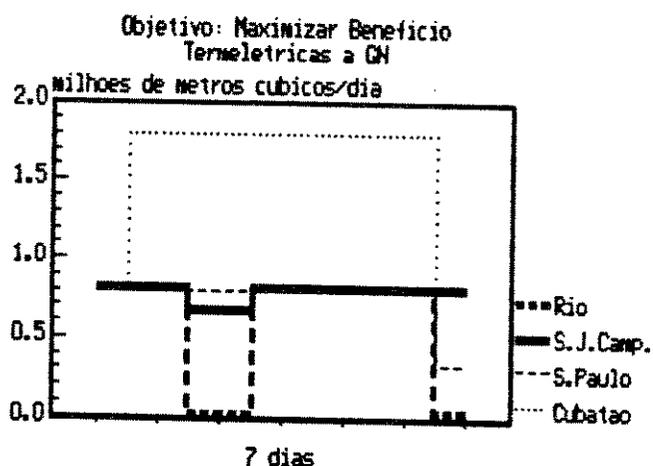


Fig. 7.17 Termelétrica a Gás Natural.

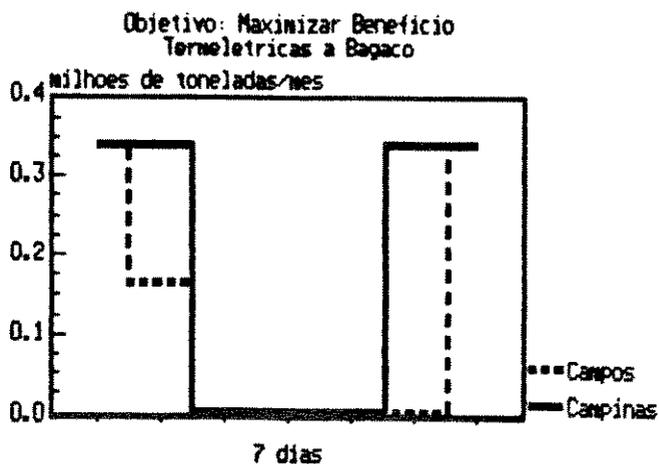


Fig. 7.18 Termelétrica a Bagaço de Cana.

### 7.7 Resultados Computacionais

Alguns resultados computacionais apresentados a seguir permitem avaliar numa primeira instância o desempenho do código implementado.

O algoritmo de fluxo de custo mínimo em grafo generalizado foi testado isoladamente considerando um exemplo com a mesma estrutura do problema do médio prazo onde se leva em conta apenas um único objetivo. Este problema resulta em uma rede com 185 nós e 364 arcos naturais (185 raízes artificiais) que foi resolvido com um microcomputador AT-compatível.

Os resultados obtidos indicam uma sensibilidade acentuada do esforço computacional em relação ao tamanhos da lista na qual se escolhe o arco de melhor custo relativo, como é mostrado a seguir:

Arcos de $k_{seq}$	Iterações	Tempo CPU (seg)
1	407	3,51
12	335	2,36
40	590	7,08
364	725	44,65

Este mesmo exemplo foi resolvido através de dois outros códigos de programação linear. O primeiro deles, uma implementação do *simplex* com a inversa da matriz básica representada na *forma produto*. O segundo, uma implementação do algoritmo *afin de ponto interior* [02]. Ambos implementados na linguagem C e utilizando esquemas de armazenamento esparsos para a matriz de coeficientes [03] e [K3].

Estes dois códigos resolveram o problema em um tempo de CPU entorno de 30 seg, com 354 iterações para o *simplex*, e 35 para o método *afin*.

O exemplo resolvido para o de médio prazo resultou em uma rede de 185 nós e 364 arcos naturais. Na resolução foram geradas duas soluções não-dominadas, com um tempo de CPU 13,1 seg. Para o curto prazo, chegou-se a uma rede com 363 arcos naturais, 115 nós e 28 variáveis (0-1). O problema foi resolvido com um tempo de CPU de 23,94 seg, sendo avaliados um total de 11 nós da árvore de decisão.

O emprego de técnicas de pós-otimização durante o processo de enumeração implícita produziu os seguintes resultados: para a solução do problema completamente relaxado (nível 0) dispendeu 344 iterações; cada nó subsequente da árvore de decisão é avaliado com números de iterações que flutuam entorno de 7.

## 7.8 Comentários

Este capítulo apresentou os resultados de dois exemplos resolvidos para testar preliminarmente o modelo desenvolvido e as técnicas de otimização implementadas.

A curva de *tradeoff* para o exemplo de médio prazo resultou em um único segmento, definido pela combinação convexa de duas soluções não dominadas. Isto significa que a redução da queima de gás em troca do aumento dos vertimentos sofreu um único bloqueio, que aconteceu a queima de gás chegou a zero. Pode-se

verificar, neste exemplo, que a inclinação da curva de curva de *tradeoff* corresponde ao rendimento da termelétrica a gás.

A situação de energia em excesso produziu uma solução onde haveria vertimento e queima de gás natural, com os sistemas operando isoladamente. No entanto, operando em conjunto a queima de gás pode ser reduzida a zero. As termelétricas a bagaço permaneceram desativadas durante o horizonte de estudo.

No curto prazo, a situação é diferente. Uma demanda de eletricidade acima de disponibilidade do sistema hidrelétrico, quando se considera os mercados de energia secundária, exige uma complementação térmica. Neste exemplo, atuam as usinas térmicas a gás natural e bagaço de cana.

## COMENTÁRIOS FINAIS

A abordagem usada neste trabalho para desenvolvimento de modelos energéticos pode ser sumarizada em: a partir de um sistema (modelo) setorial, fazer sua ampliação pela incorporação de outros aspectos que se mostrem relevantes. Isto permite romper os limites das abordagens puramente setoriais de uma forma localizada, preservando o modelo contra o crescimento desordenado de variáveis e restrições, e concentrando a atenção nos pontos de maior importância.

No caso particular do modelo desenvolvido, procurou-se articular um sistema de suprimento de energia já implantado com duas formas de energia que ganhavam importância em sua área de ação. A tendência mais imediata, através da ótica setorial, seria considerar estas novas formas energéticas pelos efeitos de penetração em mercados. No entanto, como foi visto, é possível que suas características conduzam a situações de cooperação, onde uma atuação coordenada produza ganhos mútuos. Isto deve ser avaliado.

Para tratar o modelo desenvolvido implementou-se um conjunto de algoritmos computacionais, tendo como núcleo um algoritmo especializado para minimizar custo em grafo generalizado. Foi gerado um código eficiente através de um esquema de representação da base que utiliza os índices predecessor, preordem e distância. É curioso notar que uma das informações oferecidas pela distância

quando o nó pertence a um ciclo, permitindo acelerar o algoritmo pela identificação direta de ciclos, é o ponto onde Jensen e Barnes [J2] alegaram que a definição da distância seria dúbia.

A parametrização da função objetivo, usada para gerar a soluções não dominadas do problema do médio prazo, é uma solução clássica, aplicada a um problema particular e que utiliza um algoritmo especializado.

O modelo de arcos com perda fixa é uma solução inovadora mais realista para representar o despacho das termelétricas a gás, neste problema, do que o modelo de custo fixo. Arcos com perda fixa permitem considerar diferentes faixas de rendimento e preservar o balanço de fluxo nas suas extremidades. No caso da termelétrica a gás, os balanços de eletricidade e gás natural. Não se teve notícia deste modelo na literatura. O seu desenvolvimento juntamente com o do algoritmo de enumeração implícita para abordá-lo foi realizado através de várias modificações introduzidas no modelo de custo fixo apresentado em [J3].

A abordagem proposta neste trabalho para estudar a operação coordenada de sistemas de suprimento de gás natural, eletricidade e cogeração com biomassa tem aplicação potencial em alguns sistemas regionais, como indicado na fig.8.1.

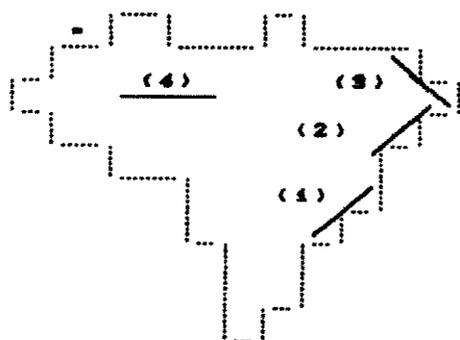


fig.8.1 Sistemas Regionais de Gás Natural

No sistema Campos-S. Paulo-Santos (1), considerado no estudo de caso, predomina o gás associado ao petróleo. Ele atende ao mercado potencialmente mais importante do país, mas que ainda se encontra em fase de desenvolvimento. Esta região também corresponde ao maior sistema elétrico e engloba duas grandes zonas de produção de cana de açúcar.

O sistema Salvador-Aracajú-Maceió (2) tem a rede de gás mais antiga em operação no país. Nele há um equilíbrio entre o gás associado e o não-associado. O mercado de gás atendido por este sistema encontra-se já desenvolvido. Ele e o sistema Natal-J. Pessoa-Recife (3) situam-se numa região submetida recentemente a racionamento de eletricidade e onde a produção de cana-de-açúcar também é expressiva. Isto leva a indagações sobre a conveniência de ampliar, com as alternativas indicadas, a complementação térmica nesta região.

Finalmente, o sistema Juruá-Manaus (4), vislumbrado para um futuro próximo, corresponde a região mais promissora em termos de gás natural e onde predomina a geração termelétrica.

## BIBLIOGRAFIA

- [A1] Abadie, J., J. Carpentier; "Generalization of the Wolfe Reduced Gradient Method to the Case of Nonlinear Constraints"; in "Optimization", R. Fletcher (ed.), Academic Press, London, 1969.
- [A2] Abilock, H. et al.; "Markal, a Multiperiod Linear Programming Model for Energy Systems Analysis (BNL version)."; in "Energy Systems Analysis - Proceedings of the International Conference of Dublin"; pp 482-493, 1980.
- [A3] Ali, A., R. Helgason, J. Kennington and H. Lall; "Primal-Simplex Network Codes: the state of the art implementation technology." Network, n8, pp.315-330, 1978.
- [A4] Andrade F., M.G., S. Soares F.; "Planejamento da Operação de um Sistema Hidroelétrico com Objetivos Conflitantes" 6º Congresso Brasileiro de Automática, pp 763-767, Belo Horizonte, 1986.
- [A5] Anh, Byong-Hun, W.W. Hogan; "On Convergence of the PIES Algorithm for Computing Equilibria"; Oper. Res., v30, n2, pp 281-300, 1982.
- [A6] Aronofsky, T.S., A.S. Lee; "A Linear Programming Model for Scheduling Crude Oil Production"; Jou. Petr. Tech., jul. 1957.
- [A7] Aronofsky, J.S., A.C. Williams, "The Use of Linear Programming and Mathematical Models on Underground Oil Production"; Manag. Sci., v8, pp 394-407, 1962.
- [A8] Arvanitidis, N., J. Rosing; "Composite Representation of a Multireservoir Hydroelectric Power System"; IEEE, PAS-89, n2, pp 319-326, feb. 1970.
- [A9] Arvanitidis, N., J. Rosing; "Optimal Operation of Multireservoir System Using a Composite Representation"; IEEE, PAS-89, n2, pp 327-335, feb. 1970.
- [B1] Babayev, D.A.; "Mathematical Models for Optimal Timing of Drilling on Multilayer Oil and Gas Field"; Manag. Sci., v21, n12, pp 1361-1369, 1975.
- [B2] Baker, T.E., L.S. Lasdon; "Successive Linear Programming at Exxon"; Manag. Sci., v31, n3, pp 264-275, 1985.

- [B3] Balachandran, V., V.Srinivasan, G.L.Thomposon; "Application of the Operator Theory of the Parametric Programming for the Transportation and Generalized Transportation Problems". Math.Prog.Study, n15, pp58-83, 1981.
- [B4] Barrios, O., A.Weintraub; "Planning for Vertically Integrates Forest Industry"; Oper.Res. v30, n6, pp ,1982.
- [B5] Bellmann, R.; "Dynamic Programming";Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.
- [B6] Beauclair, E.G.F., C.R.Penteado; "Cronograma de Corte da Cana-de-Açúcar Através de Programação Linear"; II Seminário de Tecnologia Agronômica, pp 424-434; Centro Tecnologia da Coopersucar.
- [B7] Bidner, M.S., e S.C.Gagganelli; "Simulação Numérica de Processos Convencionais de Recuperação de Petróleo - uma Revisão"; Bol.Tec.Petrobrás, v30 (2/3), pp137-150, 1987.
- [B8] Bohannon, J.M.; "A Linear Programming Model for Optimum Development of Multi-Reservoir Pipeline Systems"; Jour. Petr. Tech., pp1429-1436, nov.1970.
- [B9] Bradley, G., G.Browne G.Graves. "Design and Implementation of Large Scale Primal Transshipment Algorithms". Manag.Sci. 24(1), pp.1-34, 1977.
- [B10] Brännlund, H., J.A.Bubenko, D.Sjelvgren, N.Andersson; "Optimal Short Term Operation Planning of a Large Hydrothermal Power System Based on a Nonlinear Network Flow Concept"; IEEE PWRS-1, n4, pp75-82, nov. 1986.
- [B11] Brooks, R.E.; "Using Generalized Network to Forecast Natural Gas Distribution and Allocation During Periods of Shortage"; Math.Prog.Study, v15, pp23-42, 1981.
- [B12] Brooks, R.E.; "The Terac Gas Pipeline Competition Model"; in "Analytic Technique for Energy Planning" B.Lev et al. (eds.), North-Holland, 1984.
- [B13] Brown, G.G. and R.D.McBride; "Solving Generalized Network." Mang. Sci., v30, n12, pp1497-1523, 1984.
- [B14] Buzlukov, V.A., A.I.Danilov; "Investigating Efficiency of the PGU-250 Steam Turbine - Gas Turbine Power Generation Unit"; Thermal Engineering, v32(9), pp 503-507, 1985.
- [C1] Carvalho, C.F.; "Gás Natural no Brasil"; em "Anais do Seminário: alternativas para uma política energética" R.C.C.Leite (ed.), Cpf1, 1985.
- [C2] Carvalho, M.F.H. e Soares, S.; "An Efficient Hydrothermal Scheduling Algorithm"; IEEE, PWRS-2, n3, pp537-542, 1987.

- [C3] Carneiro, M.; "Modelo de Otimização para a Operação Hidroenergética da Cascata do São Francisco"; tese de mestrado FEC-07/84, FEC-UNICAMP, 1984.
- [C4] Cesp; "Cogeração: Avaliação do Potencial - Área da Cesp / 1982"; fev. 1982.
- [C5] Charnes, A., W.W.Cooper, B.Mellon; "Blending Aviation Gasolines"; *Econometrica*, v20, n2, apr. 1952.
- [C6] Chernetskii, N.S. et al.; "Combined-Cycle Power Plant of 800 MW Capacity fo Central Station Burning Natural Gas"; *Thermal Engineering*, v32(9), pp 485-491, 1985.
- [C7] Clutter, J.L. et al; "Timber Management - a quantitative approach"; John Wiley, 1983
- [C8] Conn, A.L.; "The Integrated Gasification Combined Cycle Power Plant-Power from Coal with Minimum Enviromental Problems: a American view"; *Energy Word*, v142, pp 5-12, 1986.
- [C9] Correia, P.B.; "Alocação Horária da Demanda Energética no Sistema do Médio São Francisco"; tese de mestrado FEC-100/84, FEC-UNICAMP, 1984.
- [C10] Correia, P.B., C.Lyra F°; "Um algoritmo em Rede de Fluxo Não Conservativa para Otimização do Suprimento de Energia"; III Congresso Latino Americano de Automática, Viña del Mar, Chile, 1988.
- [C11] Correia, P.B., M.G.Andrade F°; "Operação Ótima de um Sistema de Reservatórios com Algoritmo de Fluxo em Rede"; *Anais do 7º Congresso Brasileiro de Automática*, pp875-879, S.J. dos Campos, 1988.
- [C12] Côté, G., L.Lafond, C.Phan; "A Fast Production Scheduler for Generation Expansion in a Hydro-thermal System"; *IEEE PWRS-2*, n1, pp 101-107, feb. 1987.
- [C13] Cercin E.P., G.A.Oliva e J.I.L.Beltrán; "Avaliação do Potencial de Cogeração no Setor Sucro-alcooleiro na Área de Concessão da Cpfl: elementos para uma análise de médio e longo prazo"; Relatório Interno, fev. 1987.
- [D1] Dantzig, G.B.; "Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities"; chap.XXI of "Activity Analysis of Production and Allocation"; Cowles Commision Monograph 13, T.C.Koopmans ed., John Wiley, New York, 1951.
- [D2] Dantzig, G.B.; "Linear Programming and Extensions"; Princeton University Press, 1963.

- [D3] Debanné, J.; "Application of Generalized Transshipment and Integer Programming Algorithms in Regional Energy Planning Models"; in "Modeling of Large-Scale Energy Systems - IIASA Proceeding Serie 12"; W.Hafele e L.K.Kichmayer (eds.), Pergamon Press, 1981.
- [D4] Devine, M.D., W.G.Lesso; "Models for the Minimum Cost Development of Offshore Oil Fields' Mang.Sci., v18, n8, pp B378-B387, 1972
- [D5] Dougherty, E.L., E.Lonbardino, P.A.Goode, B.Zagaley; "An Method for Simulating Pressure/Production Performance of Volumetric Dry Gas Reservoir"; Jou.Pet.Tech. pp 2059-2070, nov. 1985.
- [D6] Durrer, E.J., G.E.Slater; "Optimization of Petroleum e Natural Gas Production - a Survey"; Manag.Sci., v24, n1, pp 35-43, 1977.
- [E1] EPRI; "Applicability of Brookhaven National Laboratory Energy Models to Electric Utility R&D Planning" ; EPRI EA-807, final report, 1978.
- [E2] EPRI; "Stanford Pilot Energy/Economic"; EPRI EA-826, 1978.
- [F1] Fariña, R.F. and F.Glover; "The Application of Generalized Network to Choice Row Materials for Fuel and Petrochemicals"; in "Analytic Techniques for Energy Planning", B.Lev et al. (eds.), pp513-524, North-Holland, 1984.
- [F2] Figueredo C.E., L.H.Coutinho, R.P.d'Araujo; "A Resposta das Fontes Energéticas Nacionais a um Eventual Corte no Suprimento de Petróleo Importado"; Anais do III CBE, pp 1062-1071, 1984.
- [F3] Finon, D.; "Un Modele Energetique pour la France"; Editions du CNRS, 1976.
- [G1] Gagnon, C.R., R.H.Hicks, S.L.S.Jacoby and J.S.Kowalik; " A Nonlinear Programming Approach to a Very Large Hydroelectric System Optimization". Math.Prog. 8 pp 28-41, 1974.
- [G2] Garvin, W.W., H.W.Crandall, T.B.John, A.A.Spellman; "Application of Linear Programming in Oil Industry" Mang.Sci., v3, pp 407-430, 1957.
- [G3] GCOI: Subcomité de Estudos Energéticos; "Plano de Operação 1987". Nov.1986.
- [G4] Glover, F., D.Karney and D.Klingman. "The Augmented Predecessor Index Method for Locating Stepping-Stone Paths and Assigning Dual Prices in Distribution Problems". Transp.Sci. 8(2), pp.171-179, 1972.

- [G5] Glover, F., D.Klingman and J.Stutz. "The Augmented Threaded Index Method for Network Optimization. INFOR 12, pp.273-298, 1974.
- [G6] Glover, F., D.Klingman and J.Stutz. "Extensions of the Augmented Predecessor Index Method to Generalized Network Problems. 7(4) pp.377-384, 1974.
- [G7] Glover, F., J.Hultz, D.Klingman, J.Stutz. "Generalized Network: a Fundamental Computer-Based Planning Tool". Manag.Sci. 24(12) pp.1209-1220, 1978.
- [G8] Goicoechea, A., D.R.Hansen, L.Duckstein; "Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Applications". John Wiley & Sons, New York, 1982.
- [G9] Guldmann, J.M.; "A Marginal-Cost Pricing Model for Gas Distribution Utilities"; Oper.Res., v34, n6, pp 851-863, 1986.
- [H1] Habibollalzadeh, H., J.A.Bubenko; "Application of Decomposition Techniques to Short-term Operational Planning of Hydrothermal Power System"; IEEE PWRS-1, pp 41-47, set. 1987.
- [H2] Habibollalzadeh, H., D.Sjølvgren, G.Lasson, N.Andersson; "Optimization of Hydroelectric Power System Operation"; in "Analytic Techniques for Energy Planning", B.Lev et al. (eds.), pp 109-119, North-Holland, 1984.
- [H3] Hogan, W.W.; "Energy Policy Model for Project Independence". Comp. and Oper. Res., n2, pp 251-271, 1975.
- [H4] Hoffman, K.C.; "Energy Modeling - Perspective and Policy Application"; TIMS Studies en the Manag.Sci., v10, pp 5-20, 1978
- [H5] Huppler, J.D.; "Scheduling Gas Field Production for Maximum Profit"; Soc.Petr.Eng.Jou., pp 279-294, jun. 1974.
- [II1] Iusem, A.N.; "Um Modelo de Demanda Industrial de Energia: formulação matemática e dados preliminares"; Informes de Matemática Série G-001, IMPA, 1985.
- [J1] Jensen, K., N.Wirth; "Pascal ISO: manual do usuário e relatório". Editora Campus, R.de Janeiro, 1988.
- [J2] Jensen, P. and J.W.Barnes; "Network Flow Programming." John Wiley & Sons, New York, 1980.
- [J3] Johnson, E.L.; "Networks and Basic Solutions"; Oper.Res., n14, pp619-623, 1966.
- [K1] Kennington, J.L. and R.V.Helgason; "Algorithms for Network Programming." John Wiley & Sons, New York, 1980.

- K2] Kirchmayer, L.K.; "Economic Operation of Power Systems"; Wiley, New York, 1958.
- K3] Knuth, D.E.; "The Art of Computer Programming", vol.1 (3<sup>rd</sup> Ed.), Addison-Wesley, New York, 1975.
- K4] Kydes, A.S., J.Rabinowitz; "Time-stepped Energy System Optimization Model (TESOM: overview and special features"; in "Energy Systems Analysis - Proceedings of the International Conference of Dublin"; pp 585-599, 1980.
- L1] Laponche, B., P.Valette; "Le Modele Energetique de Communauté Europeennes: exemple d'application des modeles MEDEE et EFON avec données françaises"; in "Energy Systems Analysis - Proceedings of the International Conference of Dublin"; pp 80-96, 1980.
- L2] Lasdon, L.S.; "Optimization Theory for Large Systems"; McMillan, New York, 1970.
- L3] Lasdon, L.S., A.D.Waren, A.Jain, M.Ratner; "Design and Testing of a Generalized Reduced Gradient Code for Nonlinear Programming"; ACM Trans.Math.Soft., v4, pp 34-50, 1978.
- L4] Lasdon, L.S., P.E.Coffman, R.MacDonald, J.W.McFarland, K.Seplehnoori; "Optimal Hydrocarbon Reservoir Production Policies"; Oper.Res., v34, n1, pp 40-54, 1986.
- L5] Lenez, I.; "A Complex Mathematic Model of the Developments of the Electric Power Systems"; E.G.U. Bull. 5-6, 1969.
- L6] Lilien, G.L.; "A Note on Offshore Oil Field Development Problems and Suggested Solutions"; Mang.Sci., v20, n4, pp 536-539, 1973.
- L7] Little, J.D.C.; "The Usage of Storage In Hydroelectric Systems"; JORSA v3, n2, pp 187-199.
- L8] Lonergan, S.C.; "Robustness as Goal in Energy Models and Policies"; Energy, v10, n11, pp 1225-1235, 1985.
- L9] Luenberger, D.G.; "Linear and Nonlinear Programming"; Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1984.
- L10] Lyra F., C.; "Contribuição ao Planejamento da Produção de Energia em Sistemas de Potência"; tese de doutorado FEC 40/84, UNICAMP, 1984.
- L11] Lyra F., C., A.Friedlander, J.C.Geromel; "Coordenação da Operação Energética no Médio São Francisco por um Método de Gradiente Reduzido". Mat.Aplic.Comp., v1, n2, pp 107-120, 1982.

- L12) Lyra F., C., H. Tavares; "An Contribution to the Midterm Scheduling of Large Scale Hydrothermal Power System"; paper 78 SM 484-9, IEEE PES Summer Meeting, San Francisco, 1987.
- M1) Marcedo, I. C., L. A. H. Nogueira; "Balanço de Energia na Produção de Cana de Açúcar nas Usinas Cooperadas"; Boletim Técnico Copersucar 31/85, pp22-33, 1985.
- M2) Machado, L. J. B., J. F. Maurras, C. Shaproth; "Description du Modele Lineaire a Court Terme de Gestion d'un Systeme de Production Hydraulique-Thermique, Comprenant um Grand Nombre de Vallees, et Premiers Resultats". Departement Methods d'Optimisation, EDF, 1975.
- M3) Massé, P.; "Les Reserves et la Régulation de l'Avenir dans la Vie Economique"; Hermann, Paris, 1946.
- M4) McFarland, J. W., L. Lasdon, V. Loose; "Development Planning and Management of Petroleum Reservoir Using Tank Models and Nonlinear Programming"; Oper. Res., v32, n2 pp 270-289, 1984.
- M5) Merlin, A., B. Lauzanne, J. Maurras, J. Auge, M. Ziglioli; "Optimization of Short-term Scheduling of EDF Hydraulic Valleys with Coupling Constraints: the Ovide Model"; Gestion Court Term Congress of PSCC, Lousanne, 1981.
- M6) Miguez, J. D., R. N. Valle, R. F. Pimentel; "Técnicas Quantitativas para Planejamento Energético Global"; Anais do III CBE; pp 1111-1119.
- M7) Modiano, E.; "Energia e Economia: um modelo integrado para o Brasil"; Pesq. Plan. Econ., v13, n2, pp 307-364, 1983.
- M8) Maurras, J.. "Optimization of the Flow through Network with Gains". Math. Progr. 3, pp.135-144, 1972.
- M9) Murray, J. E., T. F. Edgar; "Optimal Scheduling of Production and Compression in Gas Field"; Jou. Petr. Tech., v31, pp 109-116, 1979.
- O1) O'Dell, P. M., N. W. Staubing, J. W. Gray; "Optimization of Gas Field Operation"; Jou. Petr. Tech. pp 419-426, apr. 1973.
- O2) Oliveira, A. R. L., C. Lyra e P. B. Correia; "Uma Implementação Computacional de Algoritmo Polinomial de Programação Linear: aplicação ao planejamento de sistemas hidrotérmicos." Anais do 7º CBA, pp914-919, S. J. dos Campos, 1988.
- P1) Peretti, A., P. Toth; "Optimization of a pipeline for the Natural Gas Transportation"; Eur. Jou. Oper. Res., v11, pp 247-254, 1982.

- [P2] Price, J.P.; "Coal Supply Models: the state of the art"; in "Analytic Techniques for Energy Planning", B.Lev et al. (eds.), pp 3-20, North Holland, 1984.
- [P3] Pronovost, R., M. Boucher, J. Bouva; "Optimal Operating Policy for Long-Term Energy Planning in Hydro-Thermal Systems"; Comunicação Interna, IREQ, Varennes, Canadá.
- [R1] Ramos, F., R.C. Groszewicz; "Desenvolvimento de um Modelo Matemático para o Planejamento Energético Regional"; Anais da SOBRAPO, pp 175-186, 1982.
- [R2] Ricard, M.J.; "La Détermination du Programme Optimum de Production d'Usines Génératrices Hydrauliques et Thermiques Interconnectées"; Revue Générale de l'Electricité, pp. 167-182, sep. 1940.
- [R3] Rosenthal, R.E.; "A Nonlinear Network Flow Algorithm for Maximization of Benefits in Hydroelectric Power System"; Oper. Res., v29, n4, pp 763-786, 1981.
- [R4] Rosenthal, R. "Representing inverses in pure network flow optimization". Eur. Jou. Oper. Res. 23, pp. 356-366, 1986.
- [R5] Rothfarb, B., H. Frank, D.M. Rosenbaunn, K. Stellitz, D.J. Kleitman; "Optimal Desing of Offshore Natural Gas Pipeline System"; Oper. Res., v18, pp 992-1020, 1970
- [S1] Sakarovitch, M.; "Linear Programming"; Springer-Verlag, New York, 1983.
- [S2] Sanghvi, A.P., I.H. Shavel, M.H. Wagner; "Fuel Diversification, Stockpiling and Systems Interconnection Strategies for Minimizing Power Systems Vulnerability to Energy Shortages"; in "Analytic Techniques for Energy Planning", B.Lev et al. (eds.), pp 235-254, North Holland, 1984.
- [S3] Shapiro, J.F., "Decomposition Methods for Mathematical Programming / Economia Equilibrium Energy Planning Models"; TIMS Studies in Managements Sciences, v10, pp63-76, 1978..
- [S4] Soland, R.M.; "Optimal Facility Location with Concave Cost." Oper. Res., n22; pp373-382.
- [S5] Srinivasan, V., G. Thompson. "Accelerated Algorithms for Labeling and Relabeling of Trees, with Applications to Distribution Problems". Jour. Assoc. Comput. Machinery, 19(4), pp. 712-726, 1972.
- [S6] Sullivan, J.; "A Computer Model for Planning the Development of an Offshore Gas Field"; Jou. Petr. Tech., pp 1555-1564, jul. 1982.

- [T1] Tabors, R.D., D.P.Flagg; "Natural Gas Fired Combined Cycle Generators: Dominant Solution in Capacity Planning"; IEEE PWRS-1, n2, may, 1986.
- [T2] Telhada, M.A.L.; "Resolução de um Modelo de PL pa Planejamento Florestal"; tese de mestrado IMECC-UNICAMP, 1985.
- [T3] Tobin, R.L.; "A Network Programming System for Studying Coal Transportation"; in "Analytic techniques for Energy Planning", B.Lev et al. (eds.), pp 21-32, 1984
- [T4] Toffoli, L.C., S.M.S.Pereira; "Perspectiva da Produção Nacional de Petróleo"; em "Anais do Seminário: alternativas para uma política energética" R.C.C.Leite (ed.), Cpfl, 1985.
- [V1] Van Everdingen, A.F., W.Hurst; "The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoir". Trans. AMIE, 186, pp 305-324, 1949.
- [V2] Veiga, M.F.; "Optimal Scheduling of Hydrothermal System: an Overview"; IFAC Electric Energy System, R.Janeiro, 1985.
- [V3] Vijiyalakshmi, B.; "An Application of Multi-objective Modeling: the Case of the Indian Sugar Industry". Eur.Jor.Oper.Res., n28, pp 146-153, 1987.
- [W1] Wagner, M.H.; "Supply-Demand Decomposition of the National Coal Model". Oper.Res. v29, n6, pp 1137-1153, 1981.
- [W2] Weintraub, A., D.Navon; "Mathematical Programming in Large Scale Foresty: Modeling and Applications", 1985.
- [W3] Wirth, N.; "Algorithms + Data Structures = Programs". Prencite Hall Inc., 1976.
- [W4] Wolf, P.; "Methods of Nonlinear Programming"; in "Recent Advances in Mathematical Programming", R.L.Grave, P.Wolfe (eds.), McGraw-Hill, New York, 1963.
- [Z1] Zadeh, L.; "Optimality and Non-Scalar-Valued Performance Criteria"; IEEE AC-8, n59, 1963.
- [Z2] Zenios, S. and J.Mulvey. "Nonlinear Network Programming on Vetor Supercomputers: a Study on the Cray X-MP". Oper.Res. 34(5), pp.667-683, 1986.