

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE SISTEMAS**

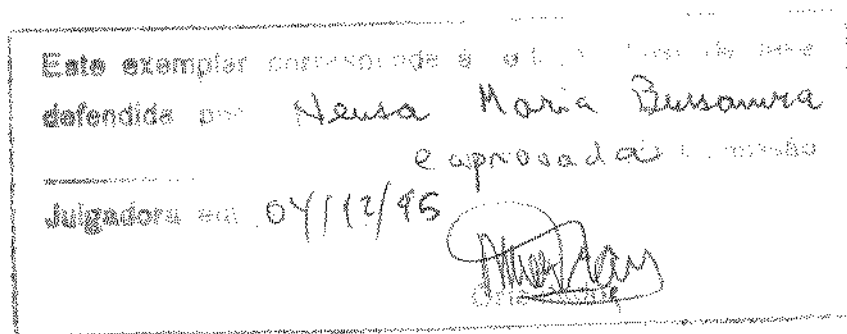
**Distritamento Eleitoral: Uma Metodologia para Definir o Recorte
dos Distritos**

Neusa Maria Bussamra

Orientador: Paulo Morelato França

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Dezembro de 1995



FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

B966d Bussamra, Neusa Maria
Distritamento eleitoral : uma metodologia para definir o
recorte dos distritos / Neusa Maria Bussamra.--Campinas,
SP: [s.n.], 1995.

Orientador: Paulo Morelato França.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica.

1. Distritos eleitorais. 2. Otimização combinatória. 3.
Heurística. I. França, Paulo Morelato. II. Universidade
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica.
III. Título.

BC
UNICAMP
B966d
27502
664/96
R\$ 11,00
26/04/96

CM-00087002-1

Resumo

Nos países onde os sistemas de eleição de representantes seguem o modelo distrital, a topografia dos distritos políticos eleitorais é de fundamental importância pois a sua manipulação pode vir a favorecer alguns partidos políticos em detrimento de outros. Na tentativa de combater esta prática, estes países delegam a tarefa de estabelecer distritos eleitorais a comissões neutras, multipartidárias, que desde os anos 60 vêm envolvendo especialistas em pesquisa operacional em seus trabalhos. Esta tese revisa os principais métodos encontrados na literatura para a resolução do problema do distritamento eleitoral que é, do ponto de vista matemático, um problema complexo de otimização combinatorial. É apresentada uma nova metodologia de solução do problema baseada em técnicas heurísticas, bem como os resultados de sua aplicação à cidade de Campinas.

Palavras chave: distritamento eleitoral, otimização combinatorial, agrupamento, heurísticas.

Abstract

This thesis revises the most important methods proposed to solve the political districting problem, a hard combinatorial optimization problem and proposes a new methodology based on heuristic techniques. The method combines the solution of a p -median problem in order to generate an initial feasible solution and an improvement procedure that makes use of a λ -interchange mechanism. Computational results on many instances are provided.

Agradecimentos

- Ao professor Paulo Morelato França, pela sua orientação e entusiasmo.
- Ao Paulo, pelo seu amor e incentivo.
- Ao Marcos Carneiro, pela sua colaboração especial.
- Ao LAPIG, Laboratório de Processamento de Imagens do Instituto de Geociências/UNICAMP, que me acolheu e possibilitou todo o trabalho gráfico.
- À Patrícia Santos Cerqueira Leite, do LAPIG, pela sua participação e entusiasmo.
- À prefeitura de Campinas, na pessoa de Áurea Maria Queiróz Davanzo, que forneceu o mapa da cidade de Campinas.
- À FAPESP, pelo apoio financeiro.

Sumário

Capítulo 1 - Introdução.....	1
1.1 Apresentação do Problema.....	1
1.2 Objetivos da Tese.....	3
1.3 Organização do Texto.....	3
 Capítulo 2 - Classificação e Modelagem do Problema do	
Distritamento.....	5
2.1 Sistemas Eleitorais.....	5
2.2 O Problema do Distritamento Político sob o Ponto de Vista Matemático..	7
2.3 Principais Requerimentos Para o Modelamento do Problema.....	9
 Capítulo 3 - Revisão Bibliográfica.....	19
3.1 As Propostas Exatas.....	19
3.2 As Propostas Heurísticas.....	22
3.3 O Problema do Agrupamento Capacitado.....	26
 Capítulo 4 - Elaboração do Algoritmo.....	38
4.1 Determinação da Solução Inicial.....	39
4.1.1 Heurística Gulosa.....	41
4.1.2 Heurística de Substituição.....	42
4.2 A Busca por Melhores Soluções.....	43

Capítulo 5 - Aplicação da Metodologia a um Caso Real..... 47

5.1	Coleta e Preparação dos Dados.....	47
5.2	Implementação da Metodologia.....	52
5.3	Resultados Obtidos.....	52

Capítulo 6 - Considerações Sobre os Resultados..... 68

6.1	Considerações sobre a Fase Inicial.....	68
6.2	Considerações sobre a Fase de Melhoramento.....	68
6.3	Considerações Finais e Conclusões.....	75

Lista de tabelas

5.3.1	Resultados para a rede de 55 nós, 5 distritos e demanda original.....	54
5.3.2	Resultados para a rede de 55 nós, 10 distritos e demanda original.....	54
5.3.3	Resultados para a rede de 55 nós, 5 distritos e demanda diminuída.....	56
5.3.4	Resultados para a rede de 55 nós, 10 distritos e demanda diminuída.....	56
5.3.5	Resultados para a rede de 200 nós, 5 distritos e demanda original.....	57
5.3.6	Resultados para a rede de 200 nós, 10 distritos e demanda original.....	57
5.3.7	Resultados para a rede de 200 nós, 5 distritos e demanda diminuída.....	59
5.3.8	Resultados para a rede de 200 nós, 10 distritos e demanda diminuída...	59
5.3.9	Resultados para a rede de 875 nós, 5 distritos e demanda original.....	60
5.3.10	Resultados para a rede de 875 nós, 10 distritos e demanda original.....	60
5.3.11	Resultados para a rede de 875 nós, 21 distritos e demanda original.....	65
6.2.1	Detalhamento da aplicação da heurística de melhoramento.....	69
6.2.2	Efeito da correção na rede de 875 nós e 5 distritos.....	73
6.2.3	Efeito da correção na rede de 875 nós e 10 distritos.....	73
6.2.4	Efeito da correção na rede de 875 nós e 21 distritos.....	74
6.2.5	Resumo dos resultados computacionais.....	75

Lista de figuras

2.3.1	Um triângulo.....	13
2.3.2	Um círculo com haste.....	13
2.3.3	Uma estrela.....	13
2.3.4	Uma serpente enrolada.....	14
2.3.5	Um quadrado.....	14
2.3.6	Um polígono.....	15
2.3.7	Um círculo recortado.....	15
2.3.8	Um quadrado deformado.....	15
2.3.9	Um retângulo.....	15
2.3.10	Um quadrado dividido em dois por um corte em dente de serra.....	16
2.3.11	Um quadrado dividido ao meio.....	16
3.3.1	Representação física para o problema do agrupamento.....	27
3.3.2	Diagrama de blocos da proposta de Mulvey e Beck.....	29
3.3.3	Diagrama de blocos da proposta de Koskosidis.....	31
4.2.1	Mecanismo de transferência para $\lambda = 1$	46
5.1.1	Representação vetorial dos setores censitários de Campinas.....	50
5.1.2	Representação vetorial sobreposta à imagem <i>raster</i>	51
5.3.1	Solução inicial para o distritamento da rede de 55 nós e 5 distritos.....	55
5.3.2	Solução final para o distritamento da rede de 55 nós e 5 distritos.....	55
5.3.3	Solução inicial para o distritamento da rede de 55 nós e 10 distritos.....	55
5.3.4	Solução final para o distritamento da rede de 55 nós e 10 distritos.....	55
5.3.5	Solução inicial para o distritamento da rede de 200 nós e 5 distritos.....	58
5.3.6	Solução final para o distritamento da rede de 200 nós e 5 distritos.....	58
5.3.7	Solução inicial para o distritamento da rede de 200 nós e 10 distritos.....	58
5.3.8	Solução final para o distritamento da rede de 200 nós e 10 distritos.....	58
5.3.9	Solução inicial para o distritamento da rede de 875 nós e 5 distritos.....	61
5.3.10	Solução final para o distritamento da rede de 875 nós e 5 distritos.....	62

5.3.11	Solução inicial para o distritamento da rede de 875 nós e 10 distritos.....	63
5.3.12	Solução final para o distritamento da rede de 875 nós e 10 distritos.....	64
5.3.13	Solução inicial para o distritamento da rede de 875 nós e 21 distritos.....	66
5.3.14	Solução final para o distritamento da rede de 875 nós e 21 distritos.....	67
6.2.1	Diagramas de barras mostrando a equalização das demandas.....	70

Capítulo 1

Introdução

1.1 Apresentação do Problema

Distritamento político é o processo em que um determinado território (cidade, estado, país...) é dividido em áreas menores chamadas distritos e a cada um desses distritos é associado um determinado número inteiro de representantes. Supõe-se que os territórios já se encontram divididos e cadastrados em pequenas unidades populacionais objetivando outros propósitos, como censo, entrega postal, etc. O problema do distritamento político é agrupar estas unidades populacionais de modo que cada uma delas é atribuída a um e somente um distrito. O resultado dessa atribuição é chamado de mapa distrital.

A necessidade de realizar distritamentos aparece com frequência na administração pública ou privada sempre que é necessário dividir um território visando alguma ação de caráter político, social ou econômico. Como exemplos dessas ações podem ser citadas a realização de eleições distritais, recenseamentos, definição de zonas para atendimento de saúde pública, combate a incêndios, distribuição de correio, atendimento a clientes, etc. Para cada uma dessas ações há diferentes distritamentos ou mapas distritais, cada um sendo definido por critérios e restrições adequados aos propósitos da ação.

Há inúmeros exemplos de problemas reais de distritamento que mereceram um tratamento científico. Técnicas matemáticas provenientes dos campos da Otimização

ou da Pesquisa Operacional têm sido largamente utilizadas para orientar políticas adequadas de distritamento. Apenas a título de exemplo podem ser citados os problemas de definição de zonas de filiação para assinantes de telefone (França et. al, 1987), agrupamento em redes de telecomunicações (Aubry et. al, 1994), definição de áreas de atendimento de subestações de energia elétrica (Silva et. al, 1994), região de atendimento de carteiros, etc. A área científica onde o problema de distritamento político pode ser enquadrado é chamada de Agrupamento (*clustering*) (Anderberg, M.R., 1973; Everitt, B.S., 1993).

No caso específico do problema do distritamento político eleitoral, ou seja, a divisão de um território em distritos políticos para fins eleitorais, observa-se que também há propostas de métodos matemáticos para tratá-lo. Em muitos países da Europa e América do Norte, onde os sistemas representativos escolhem seus parlamentares através do voto distrital, observa-se um grande esforço para que o distritamento seja feito em bases científicas, tentando-se eliminar - ou pelo menos minimizar - o favorecimento partidário injusto, além de assegurar uma mais justa representatividade dos diversos segmentos sociais. A delimitação dos distritos eleitorais interfere efetivamente na composição dos representantes. Os partidos políticos não ignoram esse fato e existem exemplos concretos da arte de manipular um mapa eleitoral para fins de privilegiar um certo partido. Alguns relatos famosos acerca de favorecimento partidário causado por má divisão de distritos eleitorais podem ser encontrados em Silva, 1965 e Taylor, 1973. Os cuidados para evitá-los são grandes, tendo a língua inglesa até cunhado um termo próprio para designar tal tipo de manipulação eleitoral: *gerrymandering*.

Na revisão constitucional iniciada em 1994, a questão da reforma do sistema eleitoral esteve na ordem do dia mas não chegou a ser apreciada. Na continuidade da revisão, talvez este seja um dos temas enfocados, com possibilidades de ser adotado um sistema distrital. Tem sido esta a tendência declarada por partidos políticos, por membros do Congresso Nacional e defendida por entidades de classe e cientistas políticos. Qualquer que seja o tipo de sistema distrital que venha a ser adotado no Brasil - o puro como ocorre nos EUA, Inglaterra e França ou o misto, adotado na Alemanha - será necessário definir os distritos para eleição dos representantes no Congresso, Assembleias Legislativas e até, talvez, Câmaras Municipais.

A título de advertência, é sempre bom lembrar que os responsáveis por esta pesquisa estão plenamente cômicos de não estar ultrapassando os limites de atuação de duas Ciências tão distintas como as Matemáticas e as Políticas. Nesta pesquisa apenas desenvolve-se uma ferramenta matemático-computacional para auxiliar o problema de distritamento eleitoral, que é um problema complexo, polêmico e multifacetado. Esperamos apenas estar contribuindo para que o processo, caso venha a ser necessário, se realize, a nosso ver, de forma mais justa, menos trabalhosa e mais barata.

1.2. Objetivos da Tese

Ressaltando a advertência acima, o objetivo desta pesquisa é propor uma metodologia para a resolução do problema do distritamento político eleitoral, além de trazer ao conhecimento da comunidade científica nacional, as possibilidades de dar um tratamento científico adequado ao problema matemático embutido neste problema de caráter político, no momento em que a sociedade começa a discutir a oportunidade de adotar o voto distrital no país.

São revisadas diferentes metodologias propostas para o problema do distritamento e, a partir dessa revisão, é proposto e implementado um novo enfoque metodológico que leva em consideração as especificidades da realidade brasileira. Este trabalho tem também a intenção de pelo menos levantar a questão que problemas complexos de natureza político-partidária podem (e devem) receber contribuições apoiadas em bases de natureza científica. No caso do problema do distritamento, o alvo buscado é a construção de um mapa eleitoral não partidário, obedecendo critérios amplamente aceitos como justos, através do respeito aos requerimentos de ordem legal, geográfica, demográfica e sociológica.

1.3 Organização do Texto

O Capítulo 2 faz uma breve descrição dos sistemas eleitorais na seção 2.1 e em seguida, apresenta o problema do ponto de vista matemático. A seção 2.2 faz uma apreciação da classe de problemas na qual o problema do distritamento se enquadra e a seção 2.3 define os principais requerimentos para o modelamento do problema.

O Capítulo 3 apresenta uma revisão das principais propostas de solução encontradas na literatura. A seção 3.1 relata as propostas que tratam o problema de forma ótima. A seção 3.2 traz as propostas que utilizam técnicas aproximadas. Na seção 3.3 associa-se o problema do distritamento eleitoral ao problema do agrupamento capacitado. São relatadas as propostas encontradas para sua solução, além de uma breve apresentação das meta-heurísticas que já foram utilizadas no tratamento desse problema.

O Capítulo 4 apresenta a nossa proposta de solução. A seção 4.1 descreve a obtenção de uma solução inicial para o problema e a seção 4.2 descreve o procedimento heurístico desenvolvido para melhorar esta solução.

O Capítulo 5 relata a aplicação da metodologia desenvolvida a um caso real. A aquisição dos dados e seu tratamento são descritos na seção 5.1. Na seção 5.2 discute-se sobre a implementação computacional dos algoritmos desenvolvidos e utilizados. Na seção 5.3 são apresentados os resultados obtidos.

O Capítulo 6 traz algumas considerações sobre os resultados. A seção 6.1 avalia a obtenção da solução inicial e a seção 6.2, analisa os resultados obtidos pela heurística desenvolvida. A seção 6.3 conclui o trabalho.

Capítulo 2

Classificação e Modelagem do Problema do Distritamento

Este capítulo faz uma breve descrição dos sistemas eleitorais na seção 2.1, considera o problema do distritamento sob o ponto de vista matemático na seção 2.2 e faz uma avaliação de seus principais requerimentos na seção 2.3.

2.1 Sistemas Eleitorais

As sociedades democráticas fazem uso de basicamente duas modalidades de sistemas eleitorais. O primeiro deles, chamado sistema proporcional e adotado no Brasil, possui as seguintes características, exemplificadas para o caso das eleições de deputados federais (Cardoso e Serra, 1991):

- Cada estado é um grande distrito eleitoral. Todos os candidatos a deputado podem ser votados no estado inteiro.
- Cada partido inscreve um número de candidatos igual a até três vezes o número de deputados do estado.
- O eleitor pode votar na legenda do partido ou num candidato individual.
- Cada partido elege um número de deputados proporcional à soma dos votos dos candidatos e da legenda do partido sobre a votação total do estado.

- As vagas conseguidas por cada partido são preenchidas pelos candidatos mais votados individualmente na chapa do partido.

O outro, denominado sistema distrital, elege seus representantes da seguinte forma:

- O estado é dividido em um número de distritos igual ao total de representantes do estado na Câmara Federal.
- Cada distrito deve ter aproximadamente o mesmo número de eleitores.
- Cada partido inscreve um candidato por distrito.
- O eleitor vota num candidato individual.
- Em cada distrito é eleito o candidato mais votado.

Uma vantagem do sistema proporcional é que ele possibilita a representação dos setores não majoritários da sociedade. Esse sistema apresenta, porém, algumas desvantagens. A principal delas é a inexistência da ligação pessoal entre representantes e representados, uma vez que os eleitores não sabem exatamente quem são os seus representantes. Outra desvantagem inerente ao sistema proporcional é o enfraquecimento dos vínculos partidários, pois a colocação dos candidatos na chapa depende da votação individual, provocando uma disputa por votos entre candidatos de um mesmo partido.

No sistema distrital puro, adotado, por exemplo, nos Estados Unidos, Inglaterra e França, o eleitor sabe exatamente quem é o representante de seu distrito. Não há concorrência entre candidatos do mesmo partido, pois cada partido só lança um candidato por distrito. Por outro lado, este sistema tende a dar um peso excessivo aos interesses locais, podendo eleger uma bancada míope em relação aos grandes temas de caráter nacional. A principal desvantagem do sistema distrital puro é a dificuldade de representação dos pequenos partidos e das minorias em geral.

Tentando conciliar as vantagens de cada um desses sistemas, a Alemanha adotou, após a Segunda Guerra Mundial, o sistema distrital misto. Nele, metade dos representantes é eleita pelo sistema distrital, enquanto que a outra metade por um sistema proporcional diferente do brasileiro. No sistema proporcional alemão o eleitor vota no partido e não num candidato individual. As vagas de cada partido são preenchidas de acordo com a ordem de inscrição dos candidatos na lista partidária.

Esse sistema permite a ligação pessoal do eleitor com o representante de seu distrito, ao mesmo tempo em que valoriza a sua opção partidária. A representação dos pequenos partidos e das minorias é possível, pois mesmo que um partido não ganhe em nenhum distrito, seu número de deputados eleitos pela lista partidária é ajustado para ser exatamente proporcional à votação total do partido no estado.

2.2 O Problema do Distritamento Político Sob o Ponto de Vista Matemático

O problema do distritamento político eleitoral consiste em dividir um território constituído de pequenas unidades básicas, também chamados de setores ou células, em distritos com fronteiras bem definidas que obedeçam certas restrições legais, políticas, geográficas e demográficas. Trata-se de um problema de atribuição no seu sentido mais amplo, ou seja, elementos de um conjunto são atribuídos a elementos de um outro conjunto (Eiselt et. al, 1987). Essa classe de problemas apresenta dificuldades não só de caráter matemático como também de análise e tomada de decisão. É raro existir um único objetivo a ser alcançado. A definição dos múltiplos objetivos é uma tarefa de análise e tomada de decisão, embora a incorporação dos mesmos aos procedimentos de resolução constitua-se uma dificuldade matemática.

Existem dificuldades puramente matemáticas que decorrem da natureza combinatorial do problema. Existe também o fato de os problemas práticos serem, em sua maioria, de grande porte, o que desencoraja a adoção de métodos exatos de solução. Os métodos heurísticos são, portanto, desejáveis e oportunos para essa classe de problemas.

A definição do modelo matemático tem, basicamente, dois ingredientes que são a função objetivo (nem sempre única) e o conjunto de restrições que devem ser satisfeitas. Num problema prático, nem sempre é possível identificar os componentes unicamente como função objetivo ou como restrições. Mesmo assim, vamos supor que os analistas e os responsáveis pela tomada de decisão sejam capazes de enumerar todos os requerimentos do problema, atribuindo-lhes uma ponderação de

acordo com a sua importância. Formalmente, esses requerimentos podem ser escritos como $g(x) \leq 0$, onde x é um vetor de variáveis de decisão e $g(x)$ é um conjunto de funções. Os requerimentos que devem ser necessariamente respeitados serão tratados como restrições e chamaremos de $g_r(x)$, enquanto que aqueles apenas desejáveis se enquadrarão como um objetivo a ser alcançado e serão chamados de $g_o(x)$. A união de $g_r(x)$ e $g_o(x)$ é, obviamente, o conjunto inicial $g(x)$. Frequentemente os requerimentos mais rigorosos são muito bem definidos enquanto que aqueles apenas desejáveis são mais nebulosos. Atribuir um requerimento a qualquer uma dessas categorias já é um problema por si só.

O problema resultante pode então ser escrito como

$$\begin{aligned} \min \quad & F = f(g_o(x)) \\ \text{s.a} \quad & g_r(x) \leq 0 \\ & x \in X, \quad X = \{0,1\} \end{aligned}$$

que é um problema de otimização combinatorial multicritério. Muitas técnicas exatas podem ser propostas para solucionar o problema acima. As diferentes abordagens se devem à quantidade de informações disponíveis. Se a função objetivo pode ser uma combinação ponderada dos múltiplos objetivos, o problema passa a ser de programação inteira monocritério. Vários algoritmos para a resolução desse problema são conhecidos, mas, sabe-se que só se aplicam a problemas de pequeno porte.

Técnicas de programação alvo ou técnicas de programação "fuzzy" poderiam ser empregadas alternativamente. Na programação alvo, são especificados os alvos, que são objetivos desejáveis de serem atingidos, e tenta-se minimizar a soma ponderada dos desvios entre os requerimentos e os alvos estabelecidos. Com relação à programação "fuzzy", busca-se estabelecer um conjunto de funções "fuzzy", onde a cada função é atribuído o valor 0 se a solução está abaixo de um nível estabelecido em relação aos objetivos almejados ou 1 em caso contrário. Em seguida, deve-se encontrar a solução que maximiza o mínimo valor de qualquer uma das funções "fuzzy".

Analisando essas duas técnicas, concluímos que a seleção das funções "fuzzy" é tão subjetiva quanto a escolha da ponderação necessária na programação alvo. Pelas

razões já expostas, quais sejam, a necessidade de resolver problemas realistas de grande porte e a complexidade inerente a tais problemas combinatoriais, a proposta de trabalho aqui apresentada pretende resolver o problema do distritamento através de técnicas heurísticas, levando em consideração a estrutura multicritério apresentada.

2.3 Principais Requerimentos para o Modelamento do Problema

Como já descrito, o problema consiste em agrupar as unidades de base, ou setores, em distritos que obedeçam a um conjunto de requerimentos, que devem ser judiciosamente qualificados em duas categorias: aqueles que devem ser respeitados estritamente - portanto colocados em forma de *restrições* a serem obedecidas - e aqueles que são desejáveis de serem obedecidos, que devem ser agrupados convenientemente para formar uma *função objetivo*.

Os requerimentos mais comuns e presentes na maioria das propostas de distritamento político encontradas na literatura se referem à **unicidade, população, contiguidade, compacidade e ausência de enclaves** (Laporte et. al, 1983). Existem muitos outros requerimentos que também são considerados por alguns autores e se referem à homogeneidade sócio-econômica, educação, renda média anual, o respeito a fronteiras naturais ou mesmo políticas, etc..., mas que tornam o problema da aquisição e tratamento de dados muito mais complexo e, por isso, não serão considerados neste trabalho.

Vamos definir:

- n número de unidades (setores) populacionais que se pretende agrupar
- N o conjunto das n unidades
- m número de distritos
- M o conjunto dos m distritos
- p_i população da unidade i

- $\bar{P}$ população média dos distritos
- $x_{ij} = 1$ se a unidade i pertence ao distrito j
- $x_{ij} = 0$ em caso contrário

Um mapa distrital é semelhante a uma matriz $[x_{ij}]$. Os elementos dessa matriz valem 0 ou 1, e devem respeitar as restrições matemáticas que vamos estabelecer.

Unicidade

O princípio da unicidade exige que cada unidade populacional pertença a um único distrito. Matematicamente, essa é a restrição de atribuição única que aparece em muitos problemas de otimização combinatorial e se escreve da seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N$$

Um mapa distrital é considerado factível somente se respeita essa restrição.

População

A igualdade populacional aparece como critério predominante em qualquer proposta de distritamento político, por representar o princípio máximo de uma sociedade democrática. O voto de um eleitor não deve ter peso diferente do voto de qualquer outro eleitor. A igualdade populacional é uma forma de respeitar a máxima *um homem, um voto*. Desvios de população muito grandes não são, portanto, aceitos. É bem verdade que em vários países tem-se verificado que a maioria das propostas de distritamento político consideradas inconstitucionais, o foram pela existência de desvios populacionais inaceitáveis. Consequência direta desse fato é a inclusão em qualquer problema de distritamento político da restrição pertinente ao desvio máximo de população.

Sejam:

p_i , $i = 1, \dots, n$ a população da unidade i

$\bar{P} = (\sum_{i=1}^n p_i) / m$ a população média dos distritos

$$P(j) = \sum_{i=1}^n x_{ij} p_i \quad \text{a população do distrito } j$$

$$x_{ij} = 1 \quad \text{se a unidade } i \text{ pertence ao distrito } j$$

$$= 0 \quad \text{em caso contrário.}$$

Um distrito é considerado factível somente se:

$$|P(j) - \bar{P}| \leq \alpha \bar{P} \quad , \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad ,$$

onde α é normalmente definido pela legislação eleitoral.

Em muitos países onde o sistema do voto distrital é adotado, o desvio percentual máximo permitido em relação à população média de cada distrito é 25%. Nós também adotaremos esse valor como limitante, o que permitirá uma comparação dos resultados obtidos com os métodos utilizados mundialmente.

Contiguidade e Compacidade

As legislações sobre distritamento político, além de definirem o desvio populacional permitido, exigem, também, que os distritos sejam territórios *contíguos* e *compactos*. Pode-se dizer, informalmente, que um distrito é contíguo se for possível caminhar por todas as suas unidades populacionais sem ultrapassar suas fronteiras, ou seja, que sua área não está dividida em unidades geográficas separadas. É necessário existir vizinhança entre suas unidades populacionais. Contiguidade pode também ser definida com maior rigor. Vamos considerar $B = \{b_{ik}\}$ uma matriz simétrica $n \times n$, onde n é o número total das unidades populacionais que participam do processo de agrupamento.

$b_{ik} = 1$ se as unidades i e k possuem fronteira comum

$b_{ik} = 0$ em caso contrário

Para cada distrito construímos um grafo não orientado, cujos nós representam as unidades populacionais que o compõem. Existe arco ligando os nós i e k somente se $b_{ik} = 1$. Um distrito é considerado contíguo se o grafo que o representa for conexo. A

condição de factibilidade associada a esse requerimento diz que um distrito é factível somente se for contíguo.

São muitas as definições possíveis para compacidade, que, basicamente, pode ser dividida em populacional e geográfica. Um distrito é considerado compacto geograficamente se se assemelha a uma figura convexa, e é considerado compacto em termos populacionais se o seu centro populacional (centro de massa) coincide com o seu centro geográfico.

É evidente que a definição da forma de cada distrito pode, numa eleição, favorecer determinados candidatos ou partidos. Por isso é importante que o distritamento busque um critério que seja amplamente aceito para orientar o recorte dos distritos. No caso do distritamento eleitoral, a compacidade geográfica é considerada um critério bastante relevante e orientador para construção de mapas eleitorais. É também evidente que para efeitos práticos operacionais, a realização de uma eleição fica muito facilitada se a forma dos distritos mais se assemelhe a um círculo que a uma faixa longa e estreita. Sendo a compacidade geográfica aceita pela sociedade e pelos partidos políticos como um critério a ser perseguido, ela tem a propriedade de “despolitizar” a definição das fronteiras dos distritos, reduzindo a polêmica e as chances de *gerrymandering*. Compacidade já chegou mesmo a ser definida como ausência de *gerrymandering*.

Uma figura compacta é densa, comprimida, segundo o Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa (1986). De acordo com o Webster's (1961), uma figura compacta é homogênea e se localiza num espaço com limites definidos, sem estrangulamentos ou deformidades. Essas definições, todas intuitivas, não fornecem um padrão preciso ou rigoroso que possa ser utilizado para avaliar o quanto um mapa distrital é ou não compacto. O que se questiona é se existe mesmo uma definição precisa para compacidade. O que existe são algumas formas de mensurá-la. Algumas medidas de compacidade encontradas na literatura serão discutidas aqui.

Grande parte dos países que adotam o sistema distrital possui alguma norma para avaliar a compacidade de seus mapas eleitorais. Não existe, entretanto, unanimidade nas normas estabelecidas. Em 1988, H.P.Young avaliou, em uma publicação de sua autoria, algumas das principais medidas de compacidade encontradas nas literaturas

sobre Ciências Políticas, Geográficas, nas Legislações e na própria Matemática. Embora algumas medidas sejam melhores que outras, todas apresentam deficiências com respeito a certos tipos de configuração geográfica. Young apreciou os métodos de Roeck, Schwartzberg, Taylor e Boyce-Clark. Utilizou também critérios como o momento de inércia, o teste do perímetro e a razão entre comprimento e largura. A maioria das medidas estudadas é definida para um distrito isolado, mas deve ser feita uma distinção entre a compacidade de um distrito e a compacidade global de um mapa distrital. Um mapa pode ser avaliado tanto pelo teste individual de seus distritos, como de forma global, pela soma das medidas de todos os seus distritos. A avaliação global do mapa distrital pode, em alguns casos, mascarar a qualidade de seus distritos. Parece adequado que cada distrito seja avaliado individualmente, mesmo sabendo-se que um mapa distrital é sempre assentado sobre um território já existente, que pode não ser apropriado para divisões de boa qualidade.

O teste mais intuitivo de avaliação é o visual, mas o uso dos olhos e da intuição pode resultar em enganos. A aparência pode nos confundir. Vamos considerar os exemplos das figuras 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3, que representam um triângulo, um círculo com haste e uma estrela, respectivamente. Todas as figuras possuem aproximadamente a mesma área. Qual é a mais compacta?

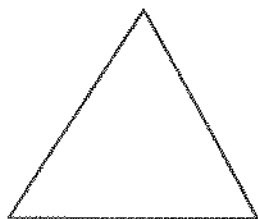


figura 2.3.1

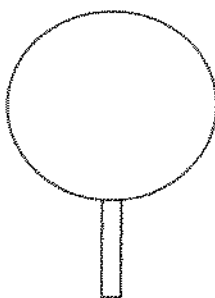


figura 2.3.2

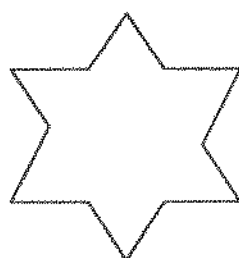


figura 2.3.3

O teste proposto por Earnest C. Roeck, (1961), encontra a menor circunferência que contém o distrito que se deseja avaliar e calcula a razão entre a área do distrito e a área da circunferência. Se o distrito não for a própria circunferência esta razão é sempre menor que a unidade. A interpretação para a medida de Roeck é que quanto mais essa razão se aproxima da unidade, mais compacto é o distrito. A deficiência dessa medida é que essa razão pode ser alta para um distrito mal formado e

confinado numa pequena área, e baixa para figuras consideradas compactas como um triângulo, por exemplo. Já se tentou estabelecer limites para essa medida. Distritos com medida de Roeck inferior a 0.4 seriam rejeitados (A. Hacker, 1963), porém, o próprio Roeck, em seu artigo original advertiu contra o uso desses valores de corte. As figuras 2.3.4, uma serpente enrolada, e 2.3.5, um quadrado, ilustram um resultado equivocado da aplicação dessa medida. O teste aplicado à figura 2.3.4 fornece resultado melhor que sua aplicação à figura 2.3.5. No entanto, um quadrado é uma figura mais compacta que uma serpente enrolada...

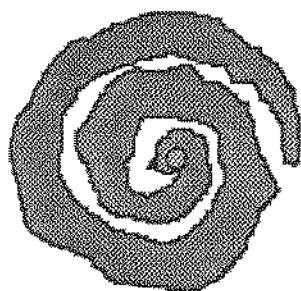


figura 2.3.4

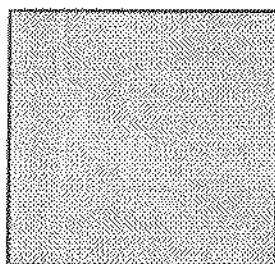


figura 2.3.5

O teste proposto por Joseph E. Schwartzberg, (1966), constrói um perímetro ajustado para o distrito em julgamento, conectando pontos escolhidos em sua fronteira. Esses pontos refletem o encontro de três ou mais unidades de qualquer distrito. A medida de Schwartzberg é a razão entre este perímetro e o perímetro de uma circunferência de mesma área que o distrito original. A medida de Schwartzberg desconsidera a forma dos distritos, daí sua deficiência. A necessidade de se considerar as fronteiras de unidades políticas pode resultar em grandes perímetros, mesmo para distritos razoavelmente compactos. Já foi sugerido que distritos que apresentam medida de Schwartzberg maior que 1,67 devam ser rejeitados. Schwartzberg, quando sugeriu esse valor como um corte razoável para o caso do distritamento do estado da Carolina do Norte, USA, admitiu a arbitrariedade da escolha. As figuras 2.3.6, um polígono, e 2.3.7, um círculo recortado, mostram duas figuras às quais se aplicou o teste. A figura 2.3.6, pela aplicação desse teste, é considerada mais compacta que a figura 2.3.7. O distrito mostrado na figura 2.3.7, embora quase circular, é prejudicado porque sua fronteira é irregular, composta por muitas unidades quadradas.

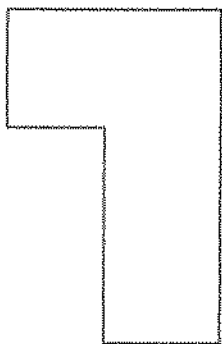


figura 2.3.6

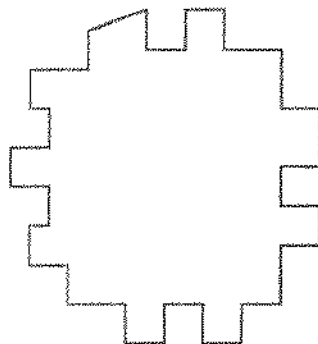


figura 2.3.7

Em 1973, Peter J. Taylor propôs um teste de compacidade parecido com o teste de Schwartzberg, construindo o mesmo perímetro do caso anterior. Em cada ponto escolhido da fronteira, o ângulo formado é considerado reflexivo se ele se curva sobre o distrito e não reflexivo em caso contrário. A medida de Taylor é a razão entre a diferença entre o número de ângulos reflexivos e não reflexivos, e o número total de ângulos. Essa razão é menor ou igual a unidade e, a exemplo da medida de Roeck, quanto mais se aproxima da unidade, mais compacto é o distrito. Por essa medida, um triângulo é perfeitamente compacto enquanto que uma estrela é uma figura não compacta. A medida de Taylor pode fornecer razão nula para figuras muito próximas de um quadrado e ao mesmo tempo, razão unitária para distritos extremamente alongados. As figuras 2.3.8, um quadrado deformado, e 2.3.9, um retângulo, ilustram essa disparidade.

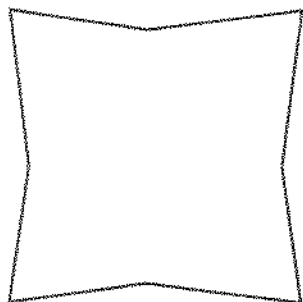


figura 2.3.8

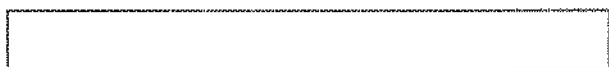


figura 2.3.9

O teste de compacidade proposto por Ronald R. Boyce e W. A. V. Clark, (1964), determina o centro de gravidade de um distrito e mede a distância entre esse centro e

pontos igualmente espaçados de sua fronteira, calculando a porcentagem de desvio entre cada uma dessas distâncias e a média delas. A medida de compactidade proposta é a média dos desvios percentuais calculados. Quanto menor o desvio, mais compacto é o distrito. Segundo essa medida, um círculo é perfeitamente compacto (desvio percentual nulo). A deficiência dessa medida é que fornece excelentes resultados para figuras muito deformadas, como a já mostrada na figura 2.3.4.

O teste da razão entre comprimento e largura procura encontrar um retângulo que envolva o distrito e o toque em seus quatro lados, de forma que a razão entre o comprimento e a largura seja máxima. Quanto mais essa razão se aproxima da unidade, mais o distrito é considerado compacto. Existem muitas variações em torno dessa idéia. Essa medida, algumas vezes, pode incorrer em classificações absurdas. Vamos considerar como exemplo a divisão de um quadrado em duas partes iguais. Se a divisão for feita através de um corte em dente de serra, como na figura 2.3.10, os distritos resultantes são considerados mais compactos que através de uma divisão simples, como mostrada na figura 2.3.11. Já houve sugestões para que um distrito seja considerado compacto se essa razão for inferior a 1,75, porém, esse valor de corte é também arbitrário e pode levar a resultados desprovidos de sentido. Por essa regra não é possível dividir um quadrado em dois distritos convexos de mesmo tamanho, sem que ambos sejam reprovados no teste. Uma variação dessa medida, proposta por Lee Papayanopoulos, (1973), é considerar a diferença máxima entre o comprimento e a largura de um retângulo circunscrito ao distrito. É também uma medida pouco conveniente pois faz distinção entre distritos urbanos e rurais, mesmo que ambos apresentem a mesma forma. É sabido que distritos rurais, caracterizados pela baixa densidade demográfica, são normalmente maiores em área. Os distritos urbanos concentram as maiores atenções devido a sua alta densidade demográfica e são por esse motivo, mais sujeitos às manipulações que se desejam evitar.

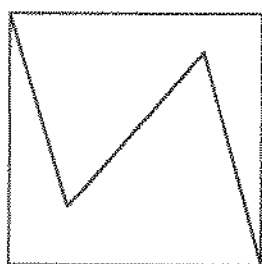


figura 2.3.10

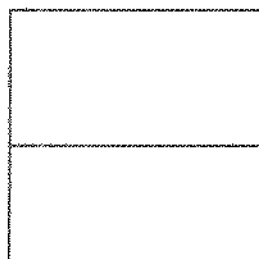


figura 2.3.11

O teste do momento de inércia localiza o centro geográfico de cada unidade que compõe o distrito. Para um ponto arbitrário x , pertencente ao distrito, calcula-se o quadrado da distância entre esse ponto e o centro geográfico da unidade, multiplicado pela população da unidade. O momento de inércia do distrito em torno desse ponto é definido como a soma de todos esses valores. O ponto x que fornecer o menor momento de inércia é o centro de gravidade do distrito. Quanto menor o valor do momento de inércia em torno do centro de gravidade, mais compacto é o distrito (Hess e Weaver, 1963). Essa medida de compactidade é deficiente na avaliação individual, porque, sendo influenciada pelo tamanho do distrito, beneficia pequenos distritos urbanos. Quando aplicada de forma global, é capaz de refletir o quanto um mapa distrital é mais compacto que outro.

O teste do perímetro permite somente a avaliação do mapa distrital como um todo. Por esse teste, a medida de compactidade de um mapa é a soma dos perímetros de todas as suas unidades. Como todas as medidas aqui apresentadas, esta também apresenta deficiências. Perímetros grandes não implicam necessariamente em distritos não-compactos. É uma medida que tem sido defendida, como um dos critérios que devem ser minimizados no problema do distritamento. Essa medida pode, entretanto, envolver sérias dificuldades computacionais.

Parece não haver medida matemática de compactidade que forneça um teste completamente confiável do quanto um mapa distrital é ou não compacto. Cada uma das medidas discutidas apresenta falhas para um ou outro tipo de figura. Os exemplos citados por Young, e aqui mostrados, foram preparados cuidadosamente para ilustrar casos onde os testes são falhos. Eles não refletem situações reais de distritamento pois são muito improváveis, alguns até fantasiosos, mas ressaltam certos princípios que devem ser considerados na escolha de uma boa medida de compactidade. São eles:

- Não existe um limiar ou valor de corte precisos que possam estabelecer quando um distrito ou mesmo um mapa distrital deixa de ser considerado compacto. Uma medida deve somente proporcionar uma comparação entre distritos ou mapas.
- Uma medida de compactidade aplicada a um mapa distrital deve poder ser aplicada também a distritos individuais.

- Uma medida deve considerar unidades básicas como células indivisíveis e não deve ser influenciada pela forma dessas unidades. Sob esse aspecto, o teste do momento de inércia é o mais recomendado, pois é baseado nas distâncias entre as diferentes unidades e um ponto de referência. O teste de Schwartzberg também satisfaz parcialmente esse critério.
- Uma medida não deve fazer distinção entre distritos grandes e pequenos. Deve avaliar a forma e não o tamanho de cada distrito. Segundo esse princípio, os testes propostos por Roeck, Boyce-Clark, Taylor e o critério de comprimento/largura são superiores.
- Finalmente, uma medida deve ser conceitualmente simples e necessitar de dados facilmente coletados. Dados muito elaborados são inconvenientes pela difícil disponibilidade. Medidas que requerem a circunscrição de figuras geométricas ou mesmo os perímetros ajustados são problemáticas pelo potencial de erro associado.

Conclui-se, do estudo, que compactidade não é um conceito preciso e, por isso, não deve ser usado isoladamente como única restrição na definição de um mapa distrital.

Ausência de Enclaves

Ausência de enclaves significa que um distrito não deve ser totalmente circundado por outro.

Um mapa distrital é considerado factível se respeita todos os requerimentos acima descritos. Todo mapa distrital $[x_{ij}]$, com $x_{ij} = 0$ ou 1 , que respeita as exigências acima enumeradas é aceitável. Ocorre, porém, que é preciso escolher um deles, o melhor segundo algum critério particular. Por exemplo, poderemos escolher o mapa mais compacto ou aquele que possui o menor desvio de população em torno da população média. O nosso problema será otimizar uma determinada função de x_{ij} sujeita às restrições de factibilidade estabelecidas. Antes disso, vamos nos debruçar sobre o que o mundo já produziu a esse respeito.

Capítulo 3

Revisão Bibliográfica

A partir dos anos 60, muitos métodos científicos aplicados ao problema do distritamento político têm sido publicados. Idealmente, um método de distritamento deveria considerar cada moradia individualmente, porém, essa consideração é impraticável. Em geral, as moradias são agrupadas em unidades maiores chamadas unidades populacionais, ou unidades básicas. Essas unidades, células básicas indivisíveis, são então agrupadas em distritos, respeitando os requerimentos específicos do problema. Os métodos científicos para solução deste problema encontrados na literatura se dividem em dois blocos distintos. O primeiro deles trata o problema de forma exata, enquanto que o segundo aborda o problema utilizando técnicas aproximadas ou heurísticas. Este capítulo apresenta as principais abordagens encontradas para solucionar o problema do distritamento.

3.1 As Propostas Exatas

O trabalho pioneiro de S.W. Hess e J.B. Weaver, (1963), aplica um modelo de localização capacitado de armazéns para atribuir eleitores a distritos. Como consequência, todos os distritos resultantes têm a mesma população. Geralmente, isso faz com que unidades populacionais sejam repartidas entre distritos, o que nem sempre é aceitável, pois uma das restrições do problema é a preservação de fronteiras naturais ou mesmo políticas. Mesmo quando as soluções geradas não

desrespeitam essas fronteiras, as novas unidades resultantes das partições não possuem delimitação conhecida.

A proposta de R.S. Garfinkel e G.L. Nemhauser, (1970), para solucionar o problema do distritamento político utiliza técnicas de enumeração implícita. O método considera unidades populacionais como elementos indivisíveis e é composto de duas fases. Na primeira fase, através de um algoritmo de *branch and bound* (B&B), são gerados todos os possíveis distritos que respeitam as restrições de factibilidade. Factibilidade engloba conceitos de contiguidade, compactidade e desvio populacional limitado. O procedimento parte de uma unidade arbitrária e agrupa unidades contíguas até atingir a população especificada, formando assim um distrito. Quando essa população atinge o limitante superior imposto inicialmente, o processo é interrompido e reiniciado com uma nova unidade. A formação de enclaves é verificada periodicamente. O resultado dessa fase é a construção de uma matriz A ($n \times s$), onde n é o número de unidades populacionais e s é o número de distritos factíveis gerados. A utilização de procedimentos de redução na matriz A possibilita a eliminação de um número substancial de linhas e colunas e é de muita importância para a execução eficiente do algoritmo.

Na segunda fase, também utilizando uma variação do método de B&B, é resolvido o problema da otimização. É quando se pretende determinar o conjunto de distritos que, envolvendo cada unidade populacional uma única vez, minimiza o máximo desvio entre a população de um distrito e a média populacional dos distritos. É uma fase relativamente rápida, que se beneficia da maneira como os distritos são organizados, pois uma grande parte deles não figura nas listas de interesse. O problema matemático resolvido nesta fase se escreve da forma abaixo:

$$\begin{aligned}
& \min \quad \max_{j=1}^s c_j a_j \\
& s.a \quad \sum_{j=1}^s x_{ij} a_j = 1 \quad i = 1, \dots, n \\
& \quad \sum_{j=1}^s a_j = m \\
& \quad a_j = 1 \quad \text{se o distrito } j \text{ está no mapa} \\
& \quad \quad = 0 \quad \text{em caso contrário} \\
& \quad c_j = \frac{|P(j) - \bar{P}|}{\alpha \bar{P}} \\
& \quad P(j) = \sum_{i=1}^n x_{ij} p_i \\
& \quad \bar{P} = (\sum_{i=1}^n p_i) / m \\
& \quad x_{ij} = 1 \quad \text{se a unidade } i \text{ pertence ao distrito } j \\
& \quad \quad = 0 \quad \text{em caso contrário}
\end{aligned}$$

Utilizando a metodologia, foram testados três problemas reais, com diferentes graus de dificuldade; o município de Sussex no estado de Delaware, contendo 26 setores censitários para formação de 6 distritos, o estado de Washington com 37 municípios e 7 distritos e o estado da Virgínia com 55 municípios e 5 distritos. A metodologia aplicada ao município de Sussex foi bem sucedida e os resultados muito bons. O estado de Washington foi o caso testado mais interessante, pois foram necessárias muitas análises e várias adaptações dos dados iniciais disponíveis. Foi necessário dividir o problema original em dois subproblemas para que a solução final fosse considerada factível. Para o estado da Virgínia, no entanto, não houve sucesso. A fase 1 mostrou-se excessivamente longa e quando foi tentada a relaxação dos parâmetros envolvidos, não houve soluções factíveis.

A utilização de métodos exatos para a solução desse tipo de problema esbarra no fator tempo computacional. Embora esse tempo seja afetado pelo número de distritos, o fator significativo é o número de unidades populacionais. Problemas com poucas unidades populacionais podem ser resolvidos rapidamente, mas qualquer distritamento com mais de 50 unidades torna-se impraticável.

Demonstra-se que muitos problemas de otimização combinatorial são NP-completos, o que implica que o tempo gasto por qualquer algoritmo exato conhecido (que garante a solução ótima) é uma função exponencial do tamanho do problema. Como o problema do distritamento político, quando aplicado a problemas reais, geralmente envolve uma base de dados grande, as pesquisas têm se direcionado para o campo das heurísticas.

3.2 As Propostas Heurísticas

A abordagem introduzida por R.E. Helbig, P.K. Orr e R.R. Roediger, (1972), considera o problema do distritamento como o problema clássico de transporte da Programação Linear. No problema de transporte, pretende-se minimizar o custo para transportar quantidades de um dado produto de n diferentes origens para m diferentes destinos, respeitando-se restrições de disponibilidade de produtos em cada origem e de demanda do produto em cada destino. No caso específico do distritamento, os produtos a serem "transportados" são as unidades populacionais.

A proposta considera 4 requerimentos para um distritamento não partidário, envolvendo os princípios da unicidade, igualdade populacional, compacidade e contiguidade. Igualdade populacional é o mais importante requerimento e é avaliado de três maneiras. A primeira forma de avaliação considera a razão entre o distrito com a maior população e o distrito com a menor população. Essa razão deve ser a mais próxima da unidade. A segunda considera a porcentagem de eleitores que compõe a metade menos densa dos distritos gerados. Essa porcentagem deve ser a mais próxima de 50%. Finalmente, a terceira maneira considera o desvio existente entre a população de cada distrito gerado e a população ideal dos distritos (população média).

O método proposto é na verdade um método de redistritamento, pois ele parte de uma solução inicial conhecida, ou seja, o mapa eleitoral existente, e gera sucessivamente novos mapas, de forma a melhorar a função objetivo utilizada. Para cada unidade básica são determinadas as coordenadas cartesianas do seu centro populacional, que pode ser aproximado pelo seu centro geográfico quando sua área

é relativamente pequena. São determinados também os centros de todos os distritos da solução inicial e calculadas as distâncias entre estes centros e todas as unidades básicas que o compõem. Através de um algoritmo de transporte, resolve-se o problema matemático descrito a seguir:

$$\begin{aligned} \min \quad & f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} d_{ij} p_i \\ \text{s.a} \quad & \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = g_j, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

D_j é o distrito j , $j = 1, \dots, m$

U_i é a unidade populacional i , $i = 1, \dots, n$

d_{ij} é a distância entre o centro do distrito j e os centros das unidades i a ele atribuídas

p_i é a população da unidade i

g_j número de unidades atribuídas ao distrito j

$x_{ij} = 1$ se $U_i \in D_j$

$= 0$ em caso contrário

O primeiro conjunto de restrições garante que cada unidade é atribuída a um único distrito, mas não evita a formação de enclaves. O segundo conjunto determina o número de unidades g_j atribuídas ao distrito D_j . Qualquer valor pode ser atribuído a g_j para se iniciar o processo e é prevista uma maneira para modificar o seu valor iterativamente, sempre que necessário. Se as unidades básicas fossem homogêneas com respeito ao número de habitantes, g_j poderia ser determinado como a razão entre o número de unidades e o número de distritos (n/m). Como consequência teríamos distritos também homogêneos, e, se n fosse múltiplo de m , todas as restrições seriam satisfeitas. Na prática, porém, isso não ocorre, e torna-se necessário estabelecer alguns artifícios para evitar partições das unidades básicas. Quando a função objetivo é minimizada, os distritos resultantes são razoavelmente compactos. Embora não haja nenhum tratamento explícito com relação à contiguidade, acredita-se que distritos compactos serão contíguos. Para os novos distritos gerados, são calculados os novos centros, e, se a diferença entre os novos e antigos valores se situar dentro da tolerância predeterminada, o processo é

encerrado. Caso contrário, calculam-se novamente as distâncias entre os novos centros de distritos e suas unidades básicas e o processo de otimização é repetido.

A diferença introduzida por Helbig e outros em relação à proposta de Hess e Weaver é que aqui, tenta-se atribuir unidades populacionais, e não pessoas, a distritos. A eficiência do método depende muito do tratamento dado aos dados disponíveis, que inclui a divisão do território objeto do distritamento em unidades básicas homogêneas em termos populacionais. O método proposto foi utilizado para realizar o distritamento do estado de Missouri, USA, e gerar 10 distritos. Foram utilizados setores censitários para representar áreas urbanas e os próprios condados para representar áreas rurais. O exemplo estudado não evita a necessidade de agrupamento de unidades populacionais como tentativa de diminuir as diferenças de densidade populacional, ou mesmo a divisão do problema em problemas menores, consequentemente mais homogêneos. Sem essa homogeneidade as soluções não são aceitáveis.

Os algoritmos apresentados por H.F. Kaiser, (1967), e Bourjolly e outros, (1981), ambos envolvendo técnicas heurísticas são, sem dúvida, mais flexíveis e práticos. A utilização de modelos multicriteriais se adapta melhor ao problema, que, em sua essência, se apresenta com vários critérios com diferentes conceitos de valor.

Kaiser sugeriu um modelo multicritério através da ponderação na função objetivo de dois requerimentos distintos: a equidade de cada distrito (mesmo número de eleitores) e a compacidade, definida por ele como a forma geométrica de cada distrito. O território objeto do distritamento é dividido em unidades básicas (ou setores) que podem ser definidas convenientemente, e que devem ser agrupadas para formar os distritos. A seguir ele sugere um método heurístico de melhoria que, partindo de uma repartição inicial conhecida, tenta deslocar cada unidade básica de um distrito para outro. Se o movimento faz melhorar a função objetivo, então ele é executado. Quando não ocorrem mais melhoras, passa-se a tentar trocar duas unidades envolvendo dois distritos. O processo termina quando não ocorrem mais melhoras provenientes dessas trocas. Esta heurística, apesar de fornecer bons resultados quanto à equidade e compacidade, pode resultar em distritos desconexos ou enclaves.

Da mesma forma que Kaiser, Bourjolly e outros optaram por um algoritmo de melhoras marginais. A partir de um mapa eleitoral conhecido, unidades populacionais são transferidas de um distrito para outro, sempre que essa alteração apresentar vantagens. Eles também utilizam uma abordagem multicriterial, uma vez que a função objetivo escolhida contém 3 penalidades associadas à igualdade populacional, compacidade e homogeneidade sócio-econômica.

Para cada distrito é definido:

- $f_p(j)$ - desvio entre a população média e a população do distrito j . Essa função é construída de forma a eliminar da solução todo desvio de população superior a uma porcentagem pré-fixada, definida pela legislação eleitoral.
- $f_d(j)$ - distância média entre o centro do distrito j e os centros das unidades desse distrito.
- $f_r(j)$ - desvio entre as rendas médias das unidades básicas do distrito j .

Utilizando-se parâmetros que permitem a ponderação da influência relativa dos requerimentos definidos anteriormente, a função objetivo que se pretende minimizar se escreve como:

$$f = \sum_{j=1}^m [k_p f_p(j) + k_d f_d(j) + k_r f_r(j)]$$

O método prevê uma fase preliminar de simplificação que acelera a execução do algoritmo. Nesta fase, é calculado o valor da função objetivo para o mapa eleitoral existente, e para cada unidade básica i , é determinada uma lista dos distritos passíveis de contê-la.

Na fase seguinte, são examinadas, sucessivamente, cada uma das n unidades básicas. Para cada unidade i , pertencente ao distrito j , e cada distrito k ($k \neq j$), passível de conter i , é calculada a variação Δf provocada pelo deslocamento da unidade i , do distrito j para o distrito k . Se $\Delta f < 0$ para pelo menos um k , a unidade é deslocada para o distrito onde $\Delta f < 0$ e $|\Delta f|$ é máximo. Após cada deslocamento, o

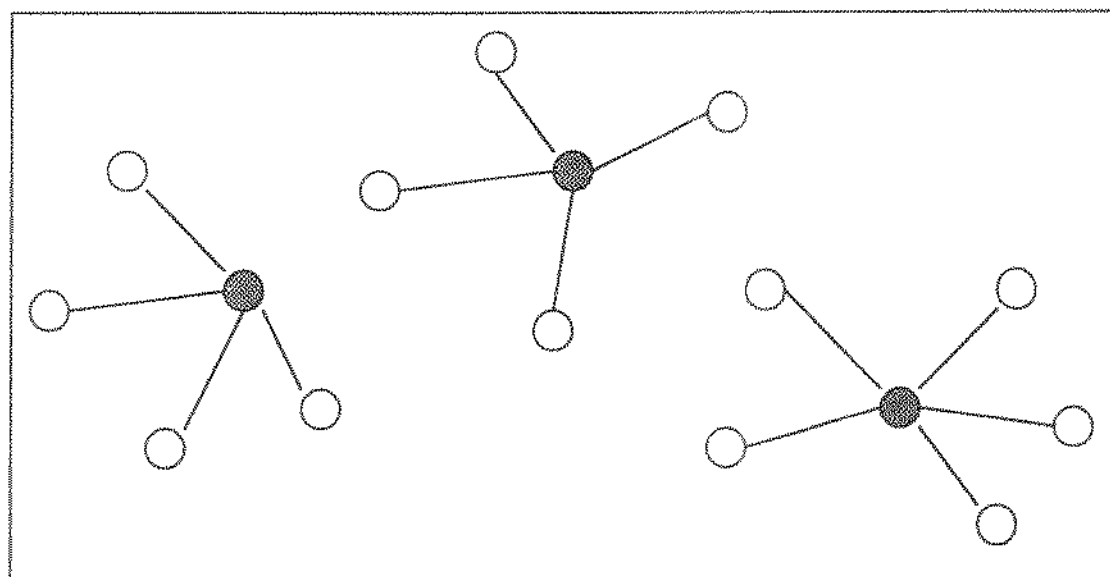
mapa é atualizado. O processo é repetido até que nenhuma melhora seja mais possível.

O método proposto foi aplicado a um caso real, a cidade de Montreal, utilizando seus 418 setores censitários como unidades básicas, e o mapa distrital já existente como solução inicial. O programa se mostrou eficaz na resolução de problemas de grande porte, com tempos de execução factíveis. As modificações decorrentes da aplicação da metodologia à carta eleitoral existente foram quantitativamente razoáveis. Os parâmetros associados às funções que compõem a função objetivo foram variados, permitindo a ponderação da influência relativa de cada uma das funções no resultado final. Não foi possível obter uma homogeneidade sócio-econômica considerada aceitável entre os distritos gerados. A principal imperfeição do método é não conseguir evitar a existência de unidades isoladas, mesmo que em pequeno número (9 unidades isoladas para o distritamento da cidade de Montreal). Os resultados obtidos apresentam desvios de população abaixo do limite estabelecido pela legislação local que é 25%. O maior desvio de população detectado foi 24.6%.

3.3 O Problema do Agrupamento Capacitado

O problema do distritamento pode ser visto como um problema de agrupamento (clustering) capacitado e, portanto, solucionado da mesma forma. No problema do agrupamento capacitado, um conjunto de n objetos (unidades básicas) deve ser agrupado em um conjunto de m grupos (distritos). Cada objeto possui uma demanda (número de habitantes) e deve ser associado a um único grupo. Cada grupo possui uma capacidade que não pode ser excedida pela soma das demandas das unidades a ele atribuídas. O centro de um grupo é definido como a unidade para a qual a soma das distâncias entre ela e todas as outras unidades que compõem o grupo é minimizada. Em outras palavras, o centro de um grupo é a sua mediana. Esta soma é chamada espalhamento (*scatter*) do grupo. O objetivo é encontrar o conjunto de centros que minimiza o *scatter* total de todos os grupos.

Uma representação física para o problema do agrupamento capacitado é mostrada na figura 3.3.1.



- objetos
- objetos considerados centros de distritos

figura 3.3.1

Matematicamente, o problema se escreve da forma abaixo:

N	conjunto de n objetos
$[c_{kl}]$	matriz das distância entre pares de objetos de N
$c_{kl} \geq 0$, $c_{kk} = 0$ e $c_{kl} = c_{lk}$, $\forall k, l \in N$	
w_k	demanda positiva do objeto k
$S = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$	conjunto de m grupos, $2 \leq m < n$
$J = \{1, \dots, m\}$	conjunto de seus índices
$Y = \{y_1, \dots, y_m\}$	conjunto dos centros de S , $Y \subset N$
W_m	capacidade do grupo C_m

Uma solução genérica factível para o problema do agrupamento capacitado pode ser representada por:

$$N = \cup C_i \quad \text{para todo } i \in J$$

$$C_i \cap C_j = \emptyset \quad \forall i, j \in J, i \neq j$$

$$\sum_{k \in C_i} w_k \leq W_i \quad \forall i \in J$$

$$Z(S) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k \in C_i} c_{ky} \right)$$

onde $Z(S)$ é o valor da função objetivo da solução $S = \{C_1, \dots, C_m\}$.

J.M. Mulvey, e M.P. Beck, (1984), foram os primeiros a abordar o problema do agrupamento considerando restrições de capacidade. A formulação matemática proposta para o problema é mostrada a seguir:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a} \quad & \sum_{j \in J} y_j = m \\ & \sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad , \quad i \in I \\ & x_{ij} \leq y_j \quad , \quad i \in I, j \in J \\ & x_{ij}, y_j = \{0, 1\} \quad i \in I, j \in J \\ & \sum_{i \in I} w_i x_{ij} \leq W_j \quad , \quad j \in J \\ & |I| \equiv n \quad , \quad |J| \equiv m \end{aligned}$$

O coeficiente de custo c_{ij} mede a proximidade entre uma unidade i e uma unidade j considerada semente ou centro do grupo. Pode ser a distância entre as unidades i e j ou qualquer outra medida estabelecida.

O problema do agrupamento capacitado é um caso especial do problema de localização de facilidades em grafos e está fortemente relacionado com o problema de atribuição generalizada e com o problema das p -medianas. Como consequência, pode ser mostrado que o agrupamento capacitado é também NP-completo (Garey, M.R. e Johnson, D.S., 1979), o que desencoraja a utilização dos algoritmos exatos disponíveis para sua solução, especialmente em problemas de grande porte. É por esse motivo que a proposta de Mulvey e Beck utiliza técnicas heurísticas.

Muitas heurísticas de agrupamento e localização fazem uso de algoritmos de melhoria ou de busca local. A heurística primal proposta por Mulvey e Beck é baseada numa atribuição gulosa das unidades que devem ser agrupadas às sementes pré-especificadas. Estas sementes representam os centros dos grupos. Fazendo uma analogia ao problema do distritamento, esta heurística faz a atribuição das unidades populacionais aos centros dos distritos. A solução é melhorada através da seleção de novas sementes e de trocas de pares de unidades entre grupos vizinhos. A proposta de Mulvey e Beck, representada no diagrama da figura 3.3.2, é composta de três fases, que passaremos a descrever.

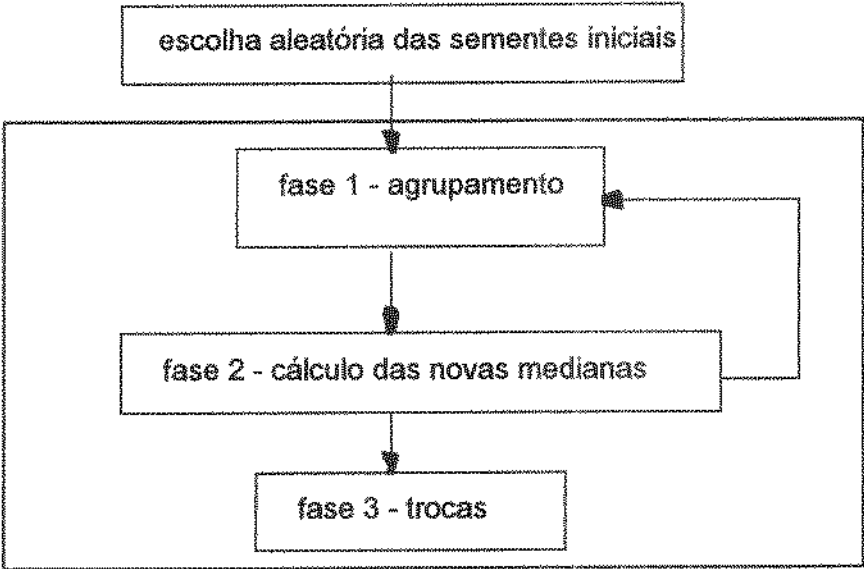


figura 3.3.2

Inicialmente são escolhidas, entre todas as n unidades presentes no processo de agrupamento, as m sementes iniciais, ou seja, as m unidades consideradas centros (medianas) dos m grupos desejados. O modelo propõe a geração aleatória dessas sementes iniciais. Na primeira fase, as unidades não consideradas sementes são atribuídas aos centros mais próximos de forma a não exceder a capacidade de cada grupo. As unidades são atribuídas em ordem decrescente do valor de sua função de arrependimento (*regret*), definida como o valor absoluto da diferença entre a distância da unidade até a primeira semente mais próxima e a distância da mesma unidade até a segunda semente mais próxima. Dessa forma, a atribuição de unidades com grande valor de *regret* é feita prioritariamente, minimizando a possibilidade de se atribuir uma unidade a um grupo muito distante, ocasionada por falta de capacidade nos grupos mais próximos.

Completadas todas as atribuições, inicia-se a segunda fase, quando os centros dos grupos gerados são recalculados. Se novos valores são encontrados, o processo de atribuição é repetido, considerando agora o novo conjunto de centros. O procedimento oscila entre essas duas fases, até não haver mais mudanças no conjunto de medianas. Atingido esse estágio, inicia-se a terceira fase, quando são examinadas todas as possíveis trocas de pares de unidades entre grupos. As trocas são executadas se proporcionam melhorias na solução corrente e não violam as restrições de capacidade. Depois de esgotadas todas as possibilidades de trocas, a solução é armazenada. O processo todo é repetido, partindo sempre de um novo conjunto aleatório de sementes. Quando o número de iterações pré-estabelecido é atingido, escolhe-se a melhor das soluções armazenadas.

Mulvey e Beck possuem uma outra proposta de solução para o problema que combina o procedimento descrito acima com um algoritmo de subgradiente, utilizado dentro da relaxação Lagrangeana do problema, de forma a substituir as soluções de partida geradas aleatoriamente. Este procedimento híbrido determina os centros dos grupos resolvendo um problema Lagrangeano onde a restrição de atribuição única é a restrição relaxada.

As duas propostas foram testadas em 18 problemas gerados aleatoriamente, com n (número de objetos) variando de 10 a 100. As soluções encontradas tanto pelo procedimento heurístico como pelo método híbrido são comparadas com limitantes inferiores obtidos através da relaxação Lagrangeana. Os desvios em relação à solução relaxada variam de 0,37% a 5,4% para o caso do procedimento heurístico puro e de 0,37% a 3,6% para o caso da metodologia híbrida.

Em 1992, Y.A. Koskosidis e W.B. Powell propõem uma alteração na heurística de Mulvey e Beck, na tentativa de aumentar a eficiência do processo de agrupamento. O algoritmo é composto das mesmas três fases descritas anteriormente. A alteração proposta está na forma como o algoritmo caminha entre essas fases. Na heurística original, quando o processo entra na fase das trocas de unidades entre grupos, as medianas não são mais recalculadas. A proposta deles recalcula as novas medianas sempre que uma troca é efetuada. Se novos valores são encontrados, volta à fase da atribuição. Esta proposta de modificação está representada no diagrama da figura 3.3.3.

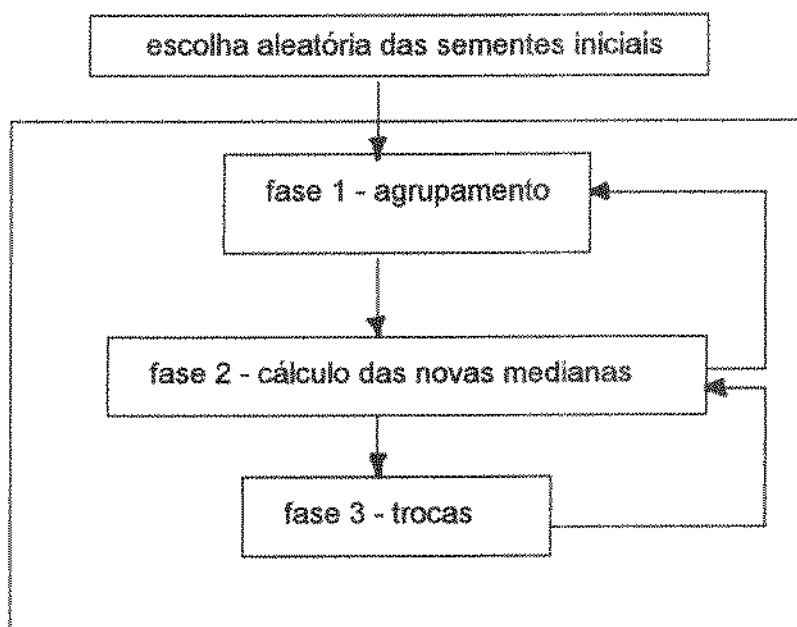


figura 3.3.3

Para a aplicação desse algoritmo é necessário que se possua um conjunto inicial de centros. Koskosidis e Powell propõem três maneiras de inicialização que são definidas como a pseudo atribuição da mochila, atribuição com eliminação e atribuição com eliminação parcial. Na pseudo atribuição da mochila, cada unidade é considerada como uma mediana e todas as outras são ordenadas de forma crescente segundo a razão entre o custo de se atribuir a unidade i ao centro do grupo j e a capacidade da unidade i . Este custo é a distância entre a unidade i e a mediana do grupo j . As unidades são atribuídas ao grupo j de acordo com esta lista, até atingir a capacidade total do grupo. Para cada mediana, o custo total é a soma dos custos de suas unidades. Quando todos os objetos forem considerados medianas, escolhem-se as m medianas com menor custo total. Esse algoritmo é baseado na relaxação Lagrangeana da restrição de atribuição única, que provoca a decomposição do problema numa série de problemas da mochila - um para cada semente.

Na atribuição com eliminação, a atribuição de unidades às medianas segue as mesmas regras, porém, uma vez atribuídas, são eliminadas do processo tanto as unidades como a mediana. Na atribuição com eliminação parcial, somente a mediana é excluída das atribuições seguintes.

Uma das formas de se mensurar o desempenho de um algoritmo heurístico, é calcular um limitante para o problema e usá-lo para comparações. Um método normalmente utilizado faz uso da relaxação Lagrangeana do problema original. O que se faz é relaxar uma ou mais restrições e o problema resultante é resolvido de forma ótima. Num problema de minimização, a solução ótima do problema relaxado é um limitante inferior para o problema original. Quando se empregam técnicas de relaxação, o problema resultante deve ser de fácil solução, quando comparado ao problema original, e ao mesmo tempo, deve ser tal que os limitantes obtidos sejam de boa qualidade. Koskosidis e Powell investigaram vários esquemas de relaxação para o problema, incluindo relaxação das restrições de capacidade e restrições de atribuição única. Os melhores resultados foram alcançados com a relaxação da restrição de atribuição única, restrição também escolhida por Mulvey e Beck quando empregaram o algoritmo híbrido.

A solução para o problema do agrupamento capacitado, proposta por I.H. Osman e N. Christofides (1994), faz uso de uma heurística construtiva para gerar uma solução inicial factível, composta de três estágios iterativos. Inicialmente são escolhidos os m centros dos grupos desejados. Em seguida é feita a atribuição das unidades aos centros e, finalmente, para cada grupo gerado, é recalculado seu novo centro.

A escolha dos centros iniciais é feita de forma que eles fiquem bem espalhados. Inicialmente, são escolhidos como centros, as duas unidades mais distantes. A próxima unidade escolhida é aquela que maximiza o produto das distâncias entre o centro candidato e os centros já escolhidos. A atribuição das unidades aos centros respeita a distância entre eles. Para cada unidade $k \in \{y_1, \dots, y_m\}$ encontra-se a distância entre k e o centro mais próximo. As unidades são então arranjadas em ordem crescente dessas distâncias. É feita a atribuição das unidades desta sequência ordenada ao seu centro correspondente, até atingir a capacidade permitida. Após, deve-se atribuir a unidade k ao mais próximo centro disponível. Depois que todas as unidades forem atribuídas, para cada grupo gerado deve-se calcular seu novo centro. O centro de cada grupo é a unidade para a qual a soma das distâncias entre esta unidade e todas as outras é minimizada. O centro de cada grupo é portanto sua mediana. Esta heurística pode não encontrar solução factível quando as capacidades associadas aos grupos são muito pequenas.

A partir desta solução inicial, inicia-se a fase de trocas. A eficiência de um algoritmo iterativo é parcialmente determinada pelo mecanismo de geração de vizinhança e pela maneira como as soluções vizinhas são pesquisadas em busca de melhores soluções. O mecanismo utilizado por Osman e Christofides é baseado no clássico esquema λ -opt proposto por Lin, S. (1965) no contexto do Problema do Caixeiro Viajante. Eles consideraram $\lambda=1$ e o mecanismo se utiliza de dois procedimentos para geração de vizinhos que são a inserção e a troca. O processo de inserção é representado pelos operadores (0,1) e (1,0) que ilustram a mudança de uma unidade pertencente a um grupo para outro grupo ou vice-versa. No primeiro operador, uma unidade é transferida (inserida) do segundo grupo para o primeiro. O operador (1,0) faz o inverso. O processo de troca é representado pelo operador (1,1) e a alteração é simultânea envolvendo duas unidades de dois grupos distintos. As unidades de um determinado par de grupos são pesquisadas sequencialmente e sistematicamente de forma a melhorar a solução através dos processos de inserção e troca. A sequência em que os operadores são acionados é (0,1), (1,0) e (1,1). A implementação só considerou $\lambda=1$. A solução S é considerada λ -ótima se, para todo par de grupos pertencente à solução, não existem mais melhoras possíveis através de movimentos de inserção ou troca. Uma solução λ -ótima não é, no entanto, única, pois depende da ordem estabelecida para a busca. Neste trabalho foram utilizadas duas estratégias de seleção de soluções vizinhas S' . A primeira examina todas as soluções S' e escolhe a melhor delas segundo um determinado critério de aceitação. A segunda, escolhe a primeira solução S' que atende o critério de aceitação estabelecido.

Um problema de otimização combinatorial pode ser representado por um par (Ω, Z) , onde Ω é o conjunto finito de todas as soluções possíveis e Z é a função objetivo, definida em R , que deve ser minimizada ou maximizada. O objetivo de um problema de minimização é encontrar uma solução ótima $S^* \in \Omega$ tal que:

$$Z(S^*) \leq Z(S) \quad \forall \quad S \in \Omega$$

É necessário dispor de um mecanismo de geração de vizinhança que defina, para cada $S \in \Omega$, o conjunto das possíveis soluções $S' \in \Omega$, chamadas vizinhas de S . A passagem de uma solução S para outra S' em $N(S)$ é chamada movimento e $N(S)$ é a vizinhança de S . Um algoritmo de busca local ou de melhoria parte de uma solução

inicial S e, iterativamente, tenta encontrar melhores soluções fazendo buscas na vizinhança. S é chamado mínimo local se $Z(S) \leq Z(S'), \forall S' \in N(S)$.

As desvantagens das heurísticas de busca local decorrem, basicamente, de dois fatores. O primeiro deles é que a qualidade da solução final depende da qualidade da solução inicial adotada. O outro é o fato do algoritmo sempre terminar num ótimo local, que pode ter uma qualidade insatisfatória. O problema da otimalidade local pode ser contornado, nem sempre com sucesso, pela aplicação sucessiva do algoritmo com diferentes soluções de partida. Escolhe-se, posteriormente, o menor entre os mínimos encontrados.

Osman e Christofides propõem também a utilização de meta-heurísticas para melhorar as soluções obtidas até o momento.

O foco das recentes atenções são duas meta-heurísticas que se sobrepõem aos conhecidos métodos de busca local, chamadas **Simulated Annealing (SA)**, Kirkpatrick, Gelatt e Veechi (1983) e **Busca Tabu (BT)**, Glover (1989). Estes métodos possuem a habilidade de forçar um algoritmo de busca local (algoritmo de descida, no caso de um problema de minimização) a continuar sua busca mesmo depois de encontrar um ótimo local, usando critérios determinísticos (BT) ou probabilísticos (SA) de aceitação ou rejeição das soluções geradas. Ambos os métodos reduzem os efeitos indesejáveis da otimalidade local e alcançam soluções próximas da ótima.

Simulated Annealing é uma técnica baseada em uma analogia com o processo de minimização da energia de um dado sistema físico, pela manutenção do mesmo em uma situação de equilíbrio térmico. Nos algoritmos de busca local, as soluções geradas somente tomam o lugar da solução corrente quando esta troca implicar numa melhora da função objetivo. No SA algumas trocas que pioram a função objetivo são permitidas. A aceitação ou rejeição desses movimentos é gerenciada por uma função chamada função de aceitação e é normalmente definida como

$$e^{-\delta/T}$$

onde δ é a variação da função objetivo, ou seja, $Z(S') - Z(S)$ e T é parâmetro de controle que deve decrescer lentamente. Se $\delta < 0$, o movimento é aceito com probabilidade 1. Se $\delta > 0$, ou seja, o movimento é de piora, sua aceitação fica

condicionada ao valor recebido por uma variável aleatória θ , gerada no intervalo $[0,1]$. Se $\theta < e^{-\delta/T}$, o movimento é aceito. Caso contrário ele é recusado. Consequentemente, pequenos valores de δ são mais aceitáveis do que grandes valores. Quando T é alto, muitos movimentos de piora são aceitáveis, mas à medida que T se aproxima de zero, a maioria desses movimentos será rejeitada. Normalmente o algoritmo parte com um valor de T elevado para evitar um mínimo local prematuro.

A motivação para um algoritmo de SA vem da analogia entre o resfriamento físico de materiais e problemas de otimização combinatorial. O resfriamento físico se refere ao processo de encontrar estados de baixa energia nos sólidos, inicialmente elevando a temperatura (associada ao parâmetro T) de uma substância até seu ponto de fusão, e, então, abaixando essa temperatura lentamente. Podemos, como exemplo, observar a formação de cristais a partir de substâncias fundidas. No estado líquido, as partículas desta substância são arranjadas aleatoriamente. Se o decréscimo da temperatura for lento o suficiente, o sólido atinge o estado de mínima energia com estruturas físicas particulares, como as encontradas nos cristais. Se o resfriamento não é feito lentamente, o sólido resultante não atenderá certos requisitos de qualidade e apresentará estruturas defeituosas.

A analogia proposta por Kirkpatrick, baseada no modelo para resfriamento de sólidos proposto por Metrópolis (1953), associa os diferentes estados da substância às diferentes soluções factíveis do problema de otimização e a energia do sistema à função que se deseja minimizar. Um algoritmo simples de descida corresponde, portanto, a um resfriamento rápido, enquanto que o SA, controlando lentamente a temperatura de resfriamento, encontra, através desta sofisticação, senão a solução ótima, soluções muito boas.

A determinação da temperatura inicial, a forma de redução dessa temperatura, o número de iterações à cada temperatura e os critérios de parada são conhecidos como *esquema (schedule) de resfriamento*.

O uso do SA é muito atrativo pois além de ser de fácil implementação, pode ser aplicado a uma gama variada de problemas combinatoriais e tem proporcionado resultados satisfatórios. Não se pode esquecer, porém, que uma boa estrutura de

geração de vizinhança e um efetivo *schedule de resfriamento* são fundamentais para determinar a sua eficácia.

Busca Tabu tem suas raízes na década de 60, mas a forma como hoje é apresentada foi proposta por Glover (1986). BT é uma abordagem plenamente aceita para o tratamento de problemas de otimização combinatorial e tem se mostrado através de inúmeras bem sucedidas aplicações como uma técnica muito promissora.

O método é uma técnica iterativa que explora o conjunto de soluções de um problema, movimentando-se de uma solução S para outra solução S' , numa determinada vizinhança $N(S)$ de S . Esses movimentos são executados com o intuito de alcançar eficientemente uma solução qualificada como boa, que pode ser ótima ou próxima da ótima. Ao contrário de um algoritmo simples de descida, BT aceita soluções S' piores que S , evitando assim o problema da otimalidade local, fazendo uso de uma estrutura de memória capaz de suportar e até encorajar uma busca não-monótona. BT percorre o espaço de busca, analisando os movimentos através de regras determinísticas. Quando BT aceita movimentos que pioram o valor da função objetivo, podem ocorrer ciclos, ou seja, um retorno a soluções já visitadas. Para evitar que ciclagens se estabeleçam, BT armazena os atributos das soluções já pesquisadas em uma lista chamada lista tabu. Os atributos armazenados são muitas vezes usados para impor condições, chamadas restrições tabu, que também impedem a escolha de movimentos indesejáveis. Um movimento é chamado tabu se conduz a soluções cujos atributos estão contidos na lista tabu ou satisfazem restrições tabu. Após um determinado número de iterações T_s , a lista tabu é alterada.

Assim como no SA, uma estrutura de geração de vizinhança de boa qualidade é fundamental para o sucesso da técnica. O resultado de simulações gráficas também pode ser de grande utilidade, proporcionando informações significativas sobre a natureza dos movimentos executados pela busca. Se um movimento provoca uma variação muito pequena na função objetivo, é razoável supor que a busca por boas trajetórias para escapar de um mínimo local será problemática. Por outro lado, se essa amplitude é grande, certamente haverá dificuldades para encontrar um mínimo local cuja qualidade seja próxima do mínimo global. Quando o tipo de problema e o tipo de movimento são passíveis de visualização gráfica, a análise das soluções

geradas pode ajudar a estabelecer se tanto a vizinhança quanto os movimentos são apropriados.

Existem alguns refinamentos que podem ser implementados no procedimento padrão de BT de forma a torná-lo mais eficiente. Esses refinamentos tentam introduzir mais inteligência no processo de busca. Um deles se refere ao tamanho da lista tabu, que varia de acordo com o problema em estudo. O tamanho da lista depende também das restrições tabu empregadas. Em geral, restrições fortes implicam em listas pequenas. Uma maneira de identificar se o tamanho da lista é apropriado é simplesmente observar a ocorrência de ciclos (listas muito pequenas) e a deterioração da qualidade da solução (listas muito grandes). A melhor lista certamente estará entre esses extremos.

Outro aprimoramento se relaciona com o tamanho da vizinhança e a construção de uma lista de candidatos. Um exame completo da vizinhança geralmente proporciona soluções de boa qualidade, porém, pode consumir muito tempo computacional. Por essa razão é importante a utilização de estratégias que isolam regiões da vizinhança contendo movimentos desejáveis e os colocam em uma lista de candidatos. Existem estudos sobre técnicas de decomposição de vizinhança, construção de listas de movimentos promissores, listas dos atributos preferidos e muitos outros.

Uma implementação bastante atraente consiste na variação da penalidade imposta à função objetivo para destruir a estrutura de otimalidade local da qual se deseja escapar. A variação da penalidade é exemplo de um procedimento conhecido como *oscilação estratégica*, que representa uma das abordagens básicas de diversificação da busca tabu. A idéia implícita é conduzir a busca para regiões situadas além dos limites de factibilidade, seja pela manipulação da função objetivo (introduzindo penalidades e incentivos), ou simplesmente induzindo a escolha de movimentos que caminham nesta direção. A oscilação pode cruzar os limites e penetrar regiões de infactibilidade ou somente se aproximar e recuar, sem transpor esses limites. Uma maneira simples de se implementar é alternar uma série de movimentos que melhoram a função objetivo com outra série de movimentos que a pioram. Aplicações recentes de oscilação estratégica têm se mostrado bastante eficientes.

Capítulo 4

Elaboração do algoritmo

A nossa proposta de solução para o problema do distritamento político é um procedimento heurístico que busca encontrar soluções de boa qualidade sem entretanto garantir encontrar a solução ótima. É um processo de melhorias marginais, composto de duas fases.

Na primeira fase, chamada fase inicial, como se supõe que pode não existir nenhum mapa distrital, que é o caso brasileiro pois o voto distrital não existe presentemente, é determinada uma solução de partida, satisfazendo os seguintes requerimentos do problema:

- cada setor deve pertencer a um único distrito
- os distritos devem ser conexos
- um distrito não deve ser totalmente circundado por outro
- a forma dos distritos deve ser a mais compacta possível

Na segunda fase, chamada de fase de melhoramento, para cada setor pertencente a um distrito, é calculada a variação ocorrida na função objetivo quando este setor é deslocado para um distrito vizinho. O deslocamento é efetuado sempre que a variação ocorrida acarretar uma melhora. Nesta fase, o princípio da equidade torna-se o objetivo principal, ou seja, procura-se a homogeneidade dos distritos em relação à sua população.

O alvo buscado é a construção de distritos compactos, conexos, que não contenham enclaves e homogêneos com respeito a sua população. Muitos desses requisitos são considerados na obtenção da solução de partida, quando tenta-se construir um mapa eleitoral através da minimização de uma certa função de compacidade. A fase de melhoramento parte de uma solução infactível do ponto de vista da equidade populacional, uma vez que esse requerimento foi desconsiderado na obtenção da solução inicial, e busca a factibilidade, minimizando a soma dos desvios entre a população média ideal dos distritos e a população real de cada um deles.

4.1 Determinação da solução inicial

A metodologia que está sendo proposta prevê a obtenção da solução inicial através do modelo das p-medianas. A determinação das p medianas de uma rede é um problema clássico de localização. O seu objetivo é encontrar p nós - chamados de medianas da rede - que minimizam a soma das distâncias entre cada nó e a sua mediana mais próxima. Visto como um problema de localização, o problema das p-medianas é equivalente ao problema de localização de facilidades não-capacitado onde não é permitido impor restrições de capacidades aos arcos e nós das redes e o número de facilidades a localizar é fixo e igual a p.

O problema das p-medianas pode ser formulado como o seguinte problema de programação inteira zero-um (P) :

$$\text{Min } z = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$s. a \quad \sum_{j \in N} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N \quad (2)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = p \quad (3)$$

$$x_{ij} \leq x_{ji} \quad \forall i, j \in N \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \in N \quad (5)$$

onde:

N é o conjunto de todos os nós da rede (qualquer nó pode ser uma mediana)

d_{ij} é a distância mínima entre os nós i e j
 p é o número fixo de medianas a localizar
 x_{ij} = 1 se o nó i é atribuído ao nó j
 = 0 em caso contrário

A restrição 2 garante que cada nó i é atribuído a um único nó j . A restrição 3 determina o número de medianas que devem ser localizadas. A restrição 4 assegura que cada nó é atribuído somente a nós considerados medianas e a restrição 5 garante a integralidade da solução.

O modelo das p -medianas sob a ótica do problema do distritamento consiste em escolher, entre todos os nós do grafo gerado pelas ligações entre os centros das unidades básicas, os p nós que tomando-se centros de distritos minimizam a compacidade geográfica do mapa resultante. A função objetivo na formulação clássica, contempla apenas a distância física de atendimento, mas como a cada nó do grafo está associada uma demanda, que é a população da unidade básica, podemos multiplicar essa demanda pela distância mínima e alterar assim o critério de otimização para o produto distância $\times$ população. O valor de d , na função objetivo, passa a ser o momento mínimo para se ligar o nó i à mediana j . Minimizar esse momento força a colocação das medianas nos centros populacionais do mapa (centros de massa). Essa alteração propicia a consideração, no modelo, da localização e da magnitude da demanda.

A aplicação do modelo das p -medianas para gerar uma solução inicial equivale a estabelecer um mapa distrital cujo objetivo é apenas a sua compacidade geográfica. O modelo das p -medianas contempla em sua função objetivo uma medida de compacidade global de um mapa distrital. É uma medida similar ao teste do momento de inércia apresentado no capítulo 2, e considerada uma das medidas mais recomendadas para o problema do distritamento por apresentar desvantagens pouco relevantes, já discutidas naquela ocasião.

A maior dificuldade encontrada na resolução de P reside na determinação do valor das variáveis x_{ij} , que define a localização das medianas na rede. Suponha que x^*_{ij} represente os valores de x_{ij} na solução ótima de P . A determinação das demais

variáveis x_{ij} , i diferente de j , chamada de problema da alocação dos nós às medianas, pode ser realizada a partir de x^*_{ij} . Assim, se $Q = \{j : x^*_{ij} = 1\}$ é o conjunto das medianas da solução ótima, então os x^*_{ij} estão definidos, para cada i , $i \in N-Q$, pela seguinte regra:

$$\begin{aligned} x^*_{ij} &= 1 \text{ para um nó } j \in Q \text{ tal que } d_{ij} = \min_{k \in Q} d_{ik}, \\ &= 0 \text{ caso contrário} \end{aligned}$$

Existe uma grande variedade de técnicas de solução para resolver o problema das p -medianas, que variam desde heurísticas simples (Cornuejols, Fisher e Nemhauser, 1977) a algoritmos ótimos (Korkel, 1989). O problema das p -medianas é NP-completo (Silva, M.C., 1990), portanto, para problemas de grande dimensão, os algoritmos ótimos são geralmente muito custosos em termos de memória e tempo computacional. Como as redes de distritamento reais podem ter centenas de nós, tornou-se um imperativo a utilização de métodos heurísticos. O procedimento heurístico escolhido para solucionar o problema é constituído de duas etapas. A primeira utiliza uma heurística "gulosa" de adição de nós, que tem como objetivo principal fornecer uma solução inicial para a fase seguinte. A segunda, utiliza uma heurística de substituição, que busca a melhoria da solução obtida na fase gulosa.

4.1.1 Heurística gulosa

A heurística gulosa consiste em escolher sucessivamente entre todos os nós do grafo, excluindo os já eleitos, que permanecem inalterados, aquele que ao se tornar uma nova mediana, proporciona o maior ganho na função objetivo, ou seja, a cada passo uma nova mediana é adicionada ao conjunto dos nós medianas. O algoritmo "guloso" tem seus passos descritos a seguir:

$$\text{passo 1 :} \quad p' = 0 \quad Q = \emptyset \quad Z(Q) = \infty$$

- passo 2 :** se $p' = p$ vá para o passo 4
 se $p' \neq p$ determine x_j^* tal que:
 $Z(Q \cup \{x_j^*\}) \leq Z(Q \cup \{x_j\})$
 $\forall x_j \in (N - Q)$
 vá para o passo 3
- passo 3 :** se $Z(Q \cup \{x_j^*\}) < Z(Q)$ faça:
 $p' = p' + 1$ $Q = Q \cup \{x_j^*\}$ vá para o passo 2
 caso contrário vá para o passo 4
- passo 4 :** Q é o conjunto das medianas; p' é a sua cardinalidade;
 $Z(Q)$ é o valor da função objetivo correspondente

O algoritmo guloso implementado (Said, França, 1988) tem se mostrado uma boa escolha que equilibra razoavelmente desempenho e qualidade da solução obtida. Dentre as várias formas de implementação possíveis, escolheu-se uma baseada na resolução de um problema de fluxo de custo mínimo (PFCM) (Jensen, Barnes, 1980). Inicialmente é montada a matriz de distâncias mínimas entre os pares de nós, utilizando o PFCM. A heurística gulosa escolhe o primeiro nó e resolve P considerando $p = 1$. A partir daí, continua escolhendo novas medianas até atingir o valor estabelecido para p . Numa iteração intermediária, a heurística procura um nó ainda não selecionado que provoca a melhor alteração na função objetivo. O procedimento é repetido até se alcançar o número de medianas desejado, quando então, inicia-se a segunda fase.

4.1.2 Heurística de substituição

Uma heurística de substituição de nós é usada na tentativa de se buscar uma solução de melhor qualidade. Nesta fase, calcula-se a mudança causada na função objetivo Z pela substituição de um nó mediana $j \in Q$ por um nó não mediana $i \in \{N - Q\}$ onde Q é o conjunto das medianas, determinado na fase anterior. Se $Q \cup \{i\} - \{j\}$ é um

conjunto melhor de medianas (variação negativa na função objetivo), a substituição é realizada. Esta heurística, baseada na proposta de Teitz e Bart (1968), tem seus passos descritos a seguir:

passo 1 : $Q = \{ x_1, x_2, \dots, x_{p'} \}$ conjunto inicial de medianas
 $(N - Q) = \{ y_1, y_2, \dots, y_{n-p'} \}$ seu complemento
 $j = 1$ ciclo = 1 chave = 0

passo 2 : para $x_j \in Q$ determine $y^* \in (N - Q)$ tal que
 $\Delta (x_j, y^*) = \max \Delta (x_j, y_k), k = 1, \dots, n-p'$
 Δ é a variação da f. objetivo causada pela substituição de x_j por y^*
 se $\Delta (x_j, y^*) > 0$ substitua x_j por y^*
 faça chave = 1 vá para o passo 3

passo 3 : se $j < p'$ faça $j = j + 1$ vá para o passo 2
 se $j = p'$ vá para o passo 4

passo 4 : se chave = 1 faça
 chave = 0, $j = 1$, ciclo = 1 volte ao passo 2
 se chave = 0 pare
 o conjunto Q é a melhor solução encontrada pelo algoritmo

A fase 1 do processo de distritamento está encerrada e temos agora uma solução inicial composta de distritos compactos, envolvendo cada uma das unidades populacionais uma única vez. Os distritos gerados são também conexos. O modelo das p-medianas faz a atribuição dos nós às medianas, "caminhando" pelos arcos do grafo associado ao problema. Para garantir conexidade, os arcos existentes no grafo representativo do problema devem se referir somente às ligações entre unidades vizinhas.

4.2 A busca por melhores soluções

A solução encontrada pela resolução do problema das p-medianas não tem preocupações explícitas em equilibrar as populações dos distritos. Por isso faz-se necessário uma fase dedicada exclusivamente a esse critério, o mais importante do ponto de vista político. É importante salientar que nessa nova fase a solução deve continuar respeitando as restrições de compacidade, contiguidade e unicidade.

A eficácia de um algoritmo iterativo de melhoria é, em parte, determinada pela estrutura de vizinhança definida para a heurística. Um mecanismo adequado de troca de componentes de uma solução de modo a obter uma outra solução, facilita a obtenção de bons resultados. O mecanismo escolhido utiliza um procedimento de trocas, baseado na transferência de setores entre distritos.

Para uma dada uma solução S definida por

$$S = \{ C_1, \dots, C_i, C_j, \dots, C_p \},$$

onde C_i representa o distrito i e com y_i sendo o centro de C_i , ou melhor, sua mediana, uma λ -transferência entre 2 distritos C_i e C_j é uma transferência de um subconjunto $C^*_i \subseteq C_i$ de tamanho $|C^*_i| \leq \lambda$, do distrito i para o distrito j , de forma a gerar 2 novos distritos,

$$\begin{aligned} C'_i &= C_i - C^*_i \\ C'_j &= C_j + C^*_i, \end{aligned}$$

possivelmente com novos centros y'_i e y'_j .

A nova solução será

$$S' = \{ C_1, \dots, C'_i, C'_j, \dots, C_p \}$$

O procedimento escolhido para melhorar a solução tenta equilibrar a demanda (população) entre os distritos, minimizando, assim, o desvio entre a demanda média global e a demanda específica de cada distrito. A função objetivo a ser minimizada nesta fase de redistributamento se escreve da seguinte forma:

$$\min \sum_{j=1}^m | \bar{P} - P(j) |$$

Existem $p(p-1)/2$ possíveis pares de distritos para serem examinados, mas somente participarão do processo os pares considerados vizinhos. Distritos vizinhos são aqueles para os quais existe pelo menos um arco ligando qualquer elemento de C_i a qualquer elemento de C_j .

Definidos os pares de distritos vizinhos, monta-se um vetor contendo a diferença de demanda entre cada par. Este vetor é ordenado em ordem decrescente e o processo de transferência se inicia pelo primeiro da lista, que representa o par com a maior diferença.

Para um dado par (C_i, C_j) , precisamos definir a ordem de busca dos λ setores que serão transferidos. O procedimento escolhido é o da transferência de setores do distrito com maior demanda para aquele com menor demanda. O valor de λ é definido a cada iteração pois é função da demanda dos setores envolvidos. Determinado o par receptor- doador, é calculada a máxima demanda que poderá ser transferida, de forma a se estabelecer o equilíbrio desejado. O distrito doador tem seus setores ordenados segundo a proximidade que mantêm em relação à mediana do distrito receptor. Os setores do distrito doador serão transferidos para o distrito receptor respeitando-se essa ordenação, até atingir o valor de demanda permitido. Se para esse par não for possível nenhuma transferência em função da demanda apresentada pelos setores, volta-se ao passo inicial, despreza-se esse par e reinicia-se o processo com o próximo da lista.

Uma vez escolhidos os setores que serão transferidos, deixa-se de se pesquisar esse par e efetua-se a transferência propriamente dita. É quando são alteradas as filiações das unidades aos respectivos distritos e recalculadas suas medianas. O vetor contendo a diferença de demanda entre cada par considerado vizinho é atualizado e o processo todo é repetido até que nenhuma transferência seja mais possível ou não se consiga mais nenhum ganho com relação à função objetivo.

Esta heurística, apesar de sua simplicidade, encontra soluções que respeitam os requerimentos estabelecidos para o problema na sua fase inicial. Como os setores

que são transferidos de um distrito para outro respeitam uma ordenação de proximidade em relação à mediana do distrito receptor, os novos distritos gerados não apresentam tendência de perder suas características iniciais de compacidade e contiguidade, embora isso não possa ser assegurado plenamente. O mecanismo de transferência está ilustrado na figura 4.2.1, considerando $\lambda = 1$.

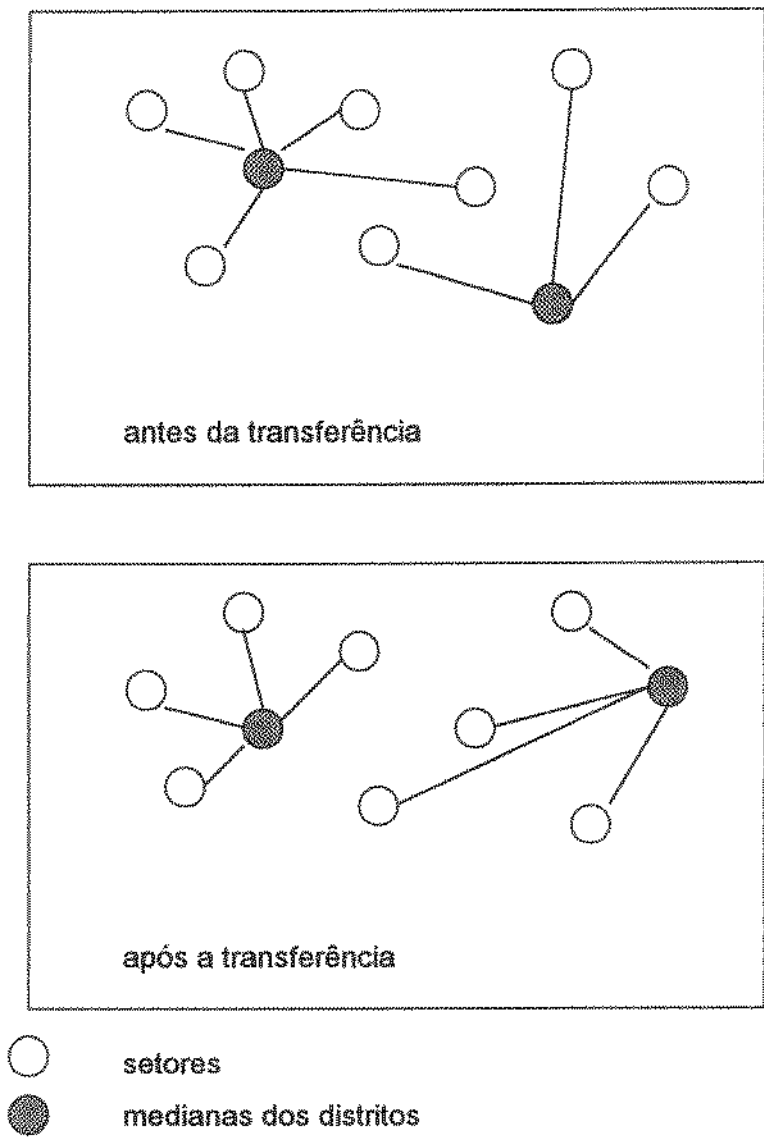


figura 4.2.1

A possibilidade de aparecimento de unidades isoladas na solução final, e consequente perda da característica de contiguidade, assegurada na solução inicial, é diminuída se não houver enclaves na definição inicial das unidades básicas, ou seja, se as unidades populacionais não estiverem contidas em unidades maiores.

Capítulo 5

Aplicação da metodologia a um problema real

Para testar a metodologia de distritamento político que está sendo proposta foi escolhido o município de Campinas, que possui hoje aproximadamente 850000 habitantes. Este capítulo apresenta a preparação dos dados para o teste, algumas considerações sobre a implementação da metodologia e os resultados obtidos na sua aplicação.

5.1 Coleta e Preparação dos Dados

Para facilitar a análise da qualidade das soluções obtidas, procuramos construir uma interface gráfica que permitisse visualizar a forma dos distritos propostos, e com isso, poder oferecer ao usuário uma ferramenta ágil para auxiliar o processo de tomada de decisão. Escolheu-se o município de Campinas para teste da metodologia proposta.

A exemplo de praticamente todas as abordagens estudadas, pareceu-nos apropriado para o caso brasileiro a utilização dos setores censitários empregados pelo IBGE na realização do último censo, pois, juntamente com a divisão topográfica, disporíamos de alguns dados adicionais como número de habitantes, eleitores, renda familiar, etc. Fizemos um contato com a Agência Campinas, mas o escritório regional não dispunha do mapa da cidade. Além disso, os dados divulgados até o momento, com

relação ao censo de 1991, trazem poucas informações sobre o perfil dos setores. A única informação divulgada que pode nos interessar é o número de habitantes.

Tentamos um contato com o Departamento de Pesquisa do IBGE-SP, através de seu diretor, mas os dados topográficos também não eram disponíveis e as informações associadas a cada setor censitário, já processadas em um banco de dados, não poderiam ser cedidas mas vendidas ao preço unitário de US\$ 11,00. Como o município de Campinas conta com mais de 800 setores, buscou-se um novo caminho para obtenção dos dados.

Tentamos um contato com a Prefeitura de Campinas, através da Secretaria de Planejamento, que possui um Departamento ligado à confecção de mapas topográficos e tem ajudado o IBGE nesta área. A Prefeitura nos forneceu uma cópia heliográfica do mapa de Campinas, escala 1:20.000, que possui 875 setores censitários abrangendo os cinco distritos municipais. Nesta altura, dispúnhamos, portanto, de dados passíveis de tratamento computacional.

O desenvolvimento experimentado pela informática nos últimos anos contribuiu de forma decisiva para o avanço do processamento de informações em relação à superfície da Terra. Essas informações, chamadas geo-referenciadas, servem de base à muitas áreas como Geologia, Geografia, Cartografia, Análise Ambiental, Agricultura, Planejamento Urbano e Engenharia.

Um dos fatores responsáveis por esse avanço foi a crescente demanda mundial por um ambiente único que permitisse a armazenagem, manuseio, análise e atualização de dados geo-referenciados. O outro foi o surgimento de computadores capazes de lidar com a enorme massa de dados necessária. Esses computadores ou estações de trabalho possuem a capacidade de processamento exigida pela complexidade das tarefas do processamento de informações geo-referenciadas.

Esses fatores ganharam significado com o desenvolvimento de programas capazes de armazenar, processar, combinar e analisar as informações e de periféricos capazes de traduzir as informações na forma de imagens, mapas, tabelas e texto.

O Instituto de Geociências da UNICAMP conta, desde 1991, com o Laboratório de Processamento de Informações Geo-Referenciadas (LAPIG) que possui um ambiente poderoso para o processamento e análise de informações geológicas e cartográficas. A infra-estrutura e o conhecimento técnico-científico reunidos no laboratório, felizmente, encontram-se à disposição de toda a comunidade acadêmica, numa tentativa de disseminar a tecnologia de Sistemas de Processamento Digital de Imagens (PDI) e Sistemas Geo-referenciados de Informação (SGI).

A utilização das facilidades do LAPIG permitiu a digitalização do mapa de Campinas, dividido em seus setores censitários. O mapa foi digitalizado utilizando um programa de desenho auxiliado por computador, AUTOCAD-12, e uma mesa digitalizadora de tamanho A1. Os dados resultantes desse processo foram tratados numa estação de trabalho SUN Sparc através de um SGI chamado GRASS, desenvolvido pelo U.S. Army - Constrution Engineering Lab e distribuído sob o sistema de domínio público, cuja versão utilizada, GRASS 4.1, é razoavelmente simples de operar.

A representação digital de entidades espaciais pode ser feita em um ambiente GIS através dos modelos vetorial e *raster* (Silva, A.B. 1991). O modelo vetorial representa objetos através de pontos, da mesma maneira como seriam desenhados manualmente. Estes pontos possuem coordenadas x e y bem definidas. O modelo *raster* representa objetos sobre uma grade regular de células retangulares denominadas *pixels*, onde cada *pixel* é definido pelo seu número de linha e coluna e um valor que lhe atribui uma qualidade. O modelo raster utiliza uma enorme quantidade de *pixels* e, num mapa simples, muitos *pixels* terão a mesma qualidade.

A cada setor censitário digitalizado foi associada uma identidade, a mesma utilizada pelo IBGE para denominação dos setores, que o associa às informações adicionais. Essa identidade, localizada fisicamente no centróide de cada setor, nos fornece as coordenadas UTM (referenciadas à superfície terrestre) dos mesmos. O tratamento dos dados através do GRASS 4.1 propiciou, além da imagem vetorial associada ao mapa, sua imagem *raster*. Os resultados do processo de digitalização são apresentados nas figuras 5.1.1 e 5.1.2. A figura 5.1.1 mostra a imagem vetorial dos setores censitários. A figura 5.1.2 mostra a mesma imagem vetorial sobreposta à imagem *raster*.

Figura 5.1.1 Representação vetorial dos setores censitários de Campinas

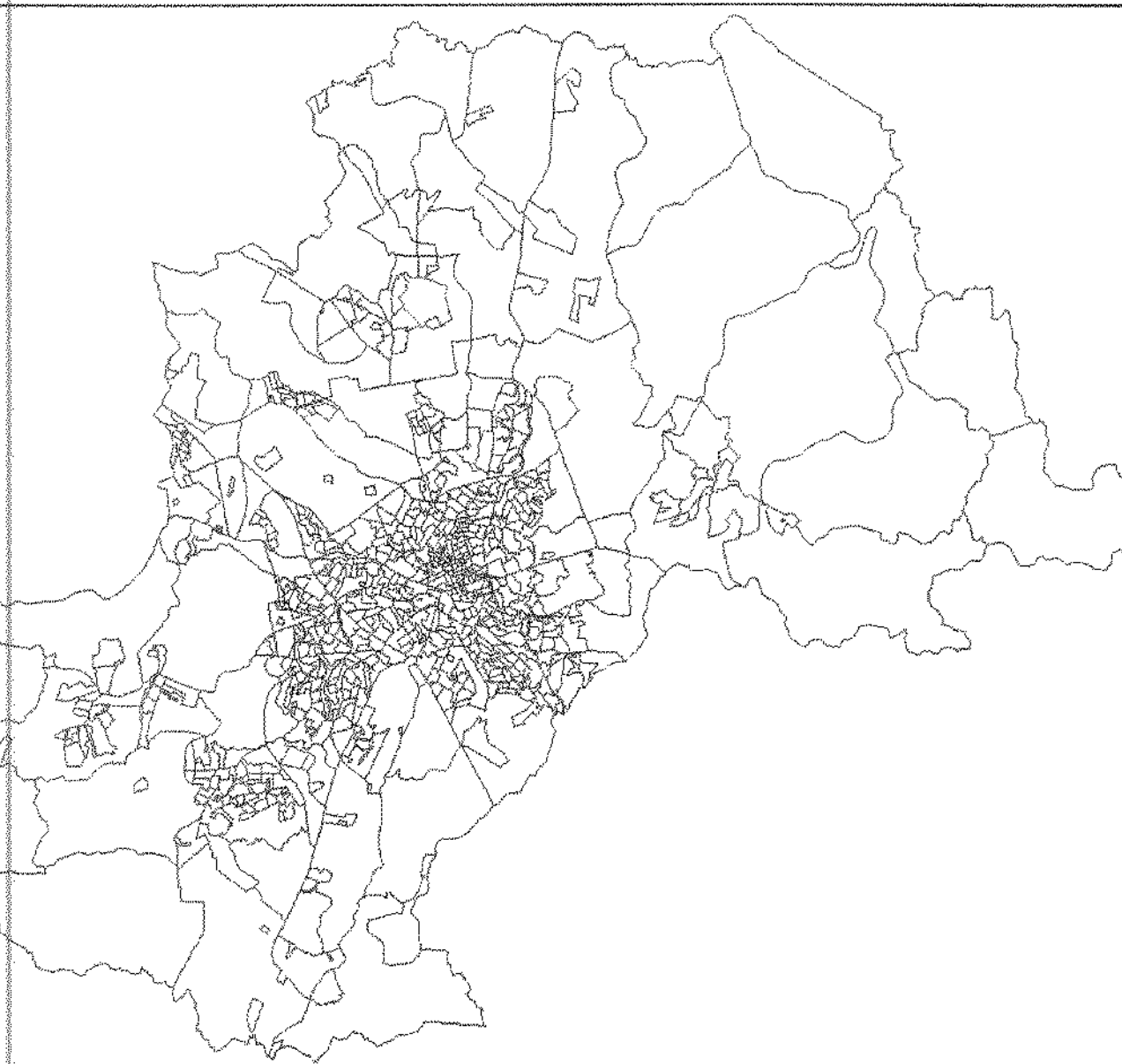
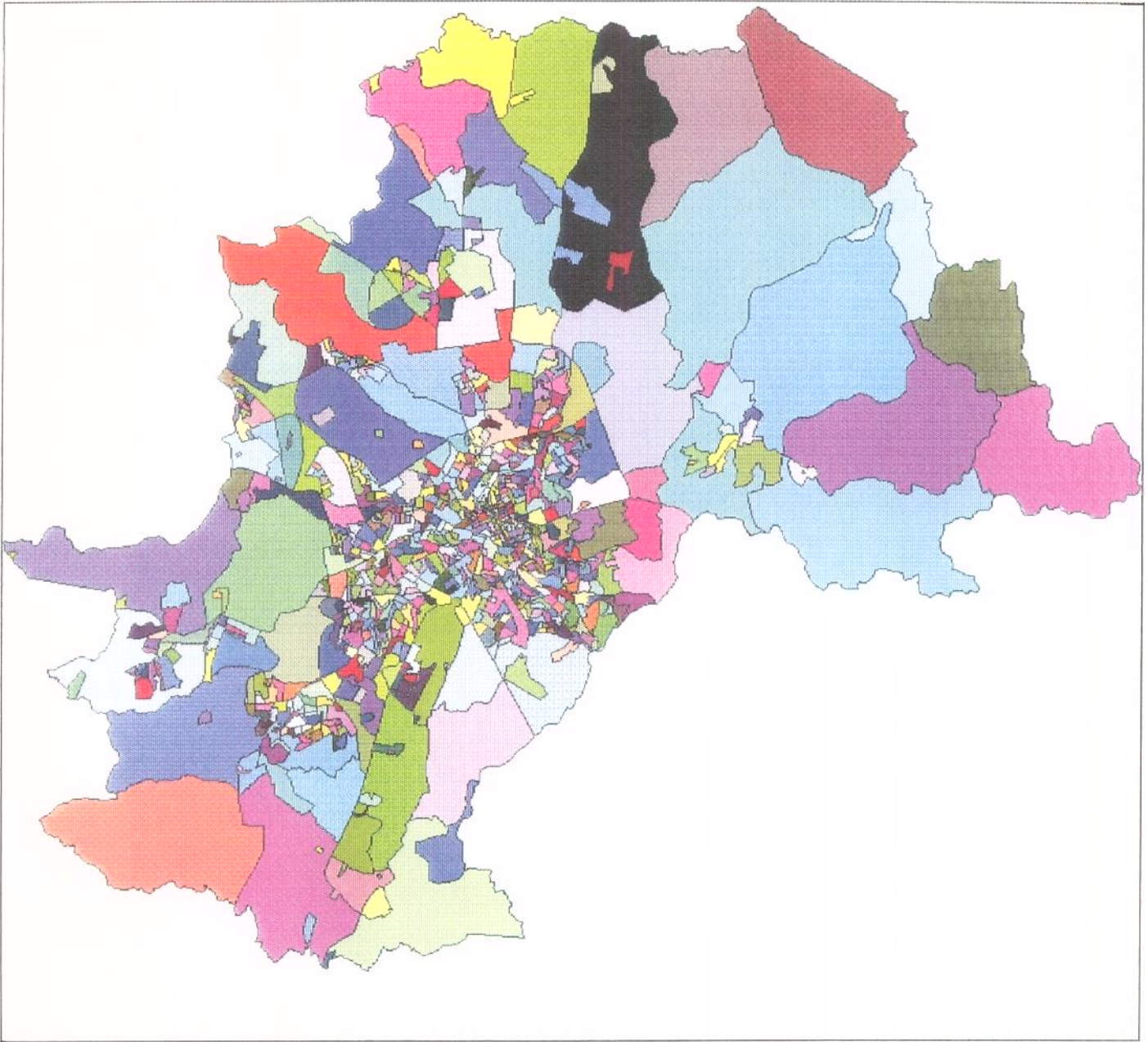


Figura 5.1.2 Representação vetorial sobreposta à imagem *raster*



5.2 Implementação da Metodologia

Todos os algoritmos de otimização foram escritos em linguagem C++ e implementados num microcomputador. Após a digitalização do mapa de setores censitários da cidade de Campinas, dispomos de uma rede constituída de 875 nós e 2498 arcos, as coordenadas UTM dos nós, além da demanda (população) associada a cada nó (centróide de cada setor censitário). Esta rede foi construída de forma que os arcos se referem somente às ligações dos nós em primeira vizinhança. A partir dessa rede, geramos algumas outras, menores, sempre considerando dados da região central da cidade. Os testes aqui exemplificados se referem a redes com 55, 200 e 875 nós. A rede de 55 nós possui 131 arcos e a de 200 nós 531, todos eles representando ligações em primeira vizinhança. Para as redes de 55 e 200 nós, alteramos os valores originais de demanda, gerando assim, novas situações de teste, numa tentativa de verificar a influência do valor da população de cada unidade na solução final.

As redes testadas foram divididas em 5 e 10 distritos. A rede referente à cidade de Campinas foi também dividida em 21 distritos, que é o número atual de vereadores. Os resultados dos testes são mostrados nas tabelas que se seguem, sendo que a população de cada distrito está sempre dividida por 100, devido a limitações computacionais.

O algoritmo utilizado na obtenção da solução inicial através do modelo das p-medianas foi cedido por Marcos Carneiro e, com exceção de algumas modificações na saída de dados, para permitir seu acoplamento à heurística de melhoramento, é o mesmo utilizado em sua tese de doutorado, para escolha de locais candidatos a instalação de novas subestações de energia elétrica.

5.3 Resultados Obtidos

Esta seção apresenta uma série de tabelas, sendo que cada uma delas se refere à aplicação da metodologia a um exemplo específico. As tabelas são construídas de forma a mostrar os parâmetros da solução inicial e da solução final, além dos dados referentes à população de cada caso estudado. O erro é o desvio porcentual absoluto entre a população de cada distrito e a população média ideal do exemplo. Como dado adicional, é informado o número de iterações necessário para se atingir a solução final em cada caso. Este número está diretamente relacionado com o tamanho do problema, ou seja, o número de unidades populacionais que se deseja agrupar. O número de iterações cresce também com o aumento do número de distritos exigidos. Para cada situação testada é mostrada a representação gráfica tanto da solução inicial, obtida através do modelo das p-medianas, como da solução final obtida pela heurística de melhoramento. Não são mostradas as representações gráficas das situações de teste que consideram variação na distribuição de demanda de cada unidade populacional, por não trazerem novas informações.

A figura 5.3.1 mostra a solução inicial para o distritamento de 55 unidades em 5 distritos enquanto que a figura 5.3.2 representa a solução final obtida. A figura 5.3.3 mostra a solução inicial para o distritamento das mesmas unidades em 10 distritos e a figura 5.3.4 representa a solução final encontrada.

A figura 5.3.5 mostra a solução inicial para o distritamento de 200 unidades em 5 distritos enquanto que a figura 5.3.6 representa a solução final obtida. A figura 5.3.7 mostra a solução inicial para o distritamento das mesmas unidades em 10 distritos e a figura 5.3.8 representa a solução final encontrada.

A figura 5.3.9 mostra a solução inicial obtida para o distritamento das 875 unidades populacionais da cidade de Campinas em 5 distritos enquanto que a figura 5.3.10 representa a solução final encontrada. As figuras 5.3.11 e 5.3.12 se referem ao distritamento de Campinas envolvendo 10 distritos e as figuras 5.3.13 e 5.3.14, mostram os resultados para 21 distritos.

Tabela 5.3.1 Rede de 55 nós, 131 arcos, 5 distritos, demanda original

População total da rede - 32.700 habitantes

População média - 6.540 habitantes.

A solução final foi alcançada em 4 iterações

distritos	solução inicial				solução final			
	nó mediana	no. de setores	população (10^2)	erro (%)	nó mediana	no. de setores	população (10^2)	erro (%)
1	19	13	80	22,32	19	12	71	8,56
2	10	10	53	18,96	11	12	63	3,67
3	34	14	89	36,09	34	11	70	7,03
4	44	8	58	11,31	44	9	67	2,45
5	52	10	47	28,13	52	11	56	14,37

Tabela 5.3.2 Rede de 55 nós, 131 arcos, 10 distritos, demanda original

População total da rede - 32.700 habitantes

População média - 3.270 habitantes.

A solução final foi alcançada em 9 iterações

distritos	solução inicial				solução final			
	nó mediana	no. de setores	população (10^2)	erro (%)	nó mediana	no. de setores	população (10^2)	erro (%)
1	8	4	22	32,72	2	6	37	13,15
2	19	9	52	59,02	18	6	35	7,03
3	23	4	18	44,95	21	5	33	0,92
4	25	3	25	23,55	25	4	30	8,26
5	28	5	20	38,84	11	6	25	23,55
6	31	5	30	8,26	13	5	29	11,31
7	14	10	65	98,78	15	6	41	25,38
8	42	5	46	40,67	40	4	36	10,09
9	45	2	22	32,72	45	3	32	2,14
10	49	3	27	17,43	49	5	29	11,31

Representação gráfica para a rede de 55 nós utilizando a demanda real.

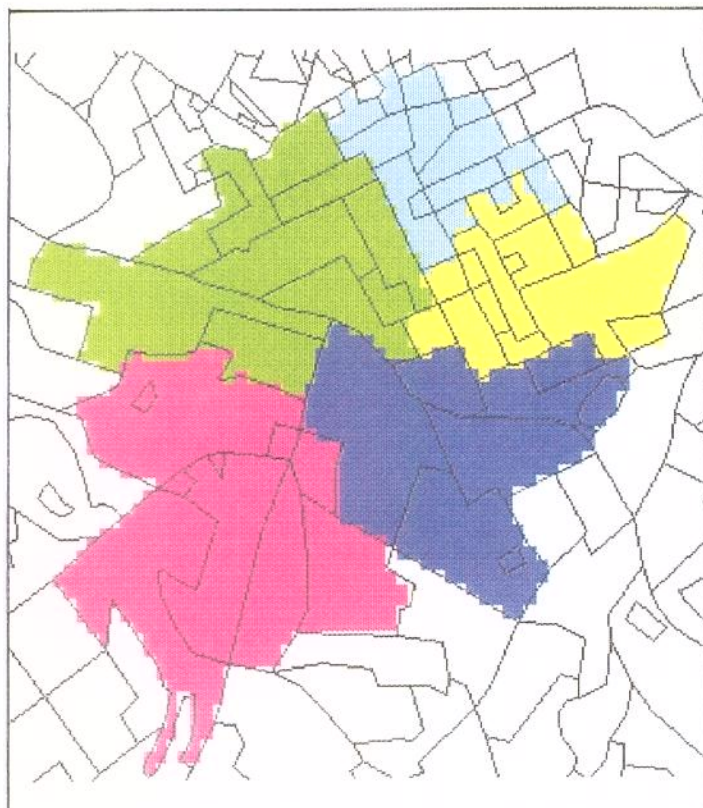


figura 5.3.1

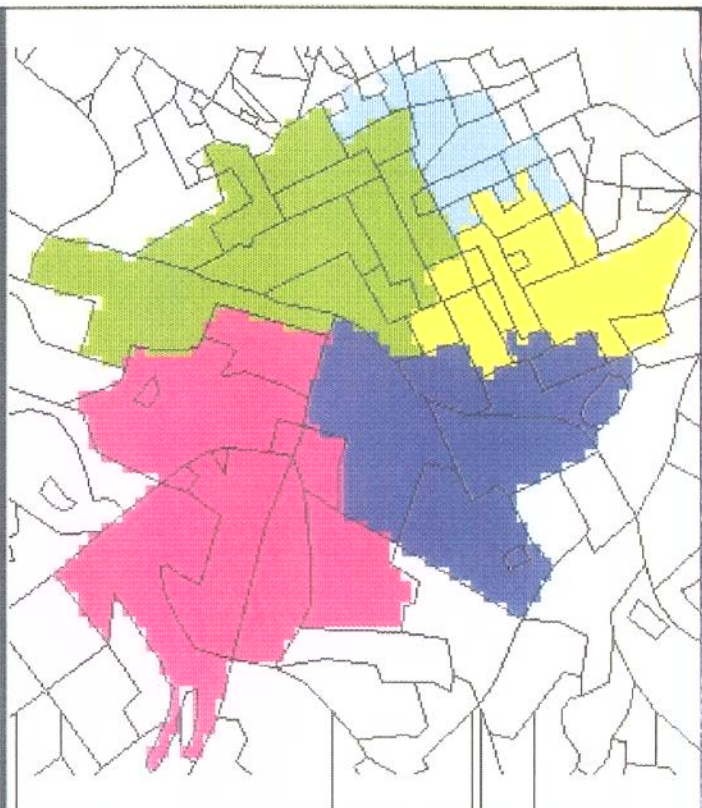


figura 5.3.2

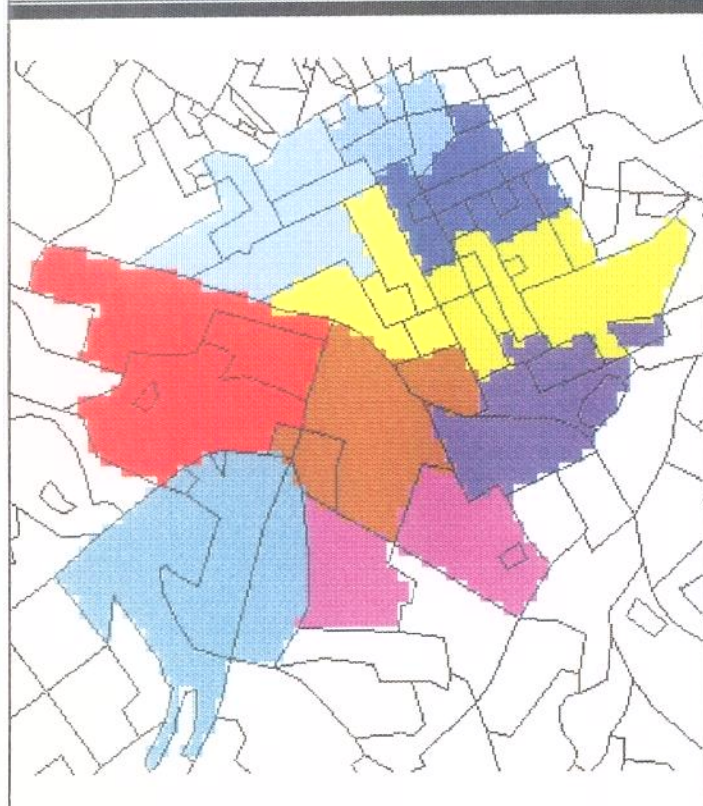


figura 5.3.3

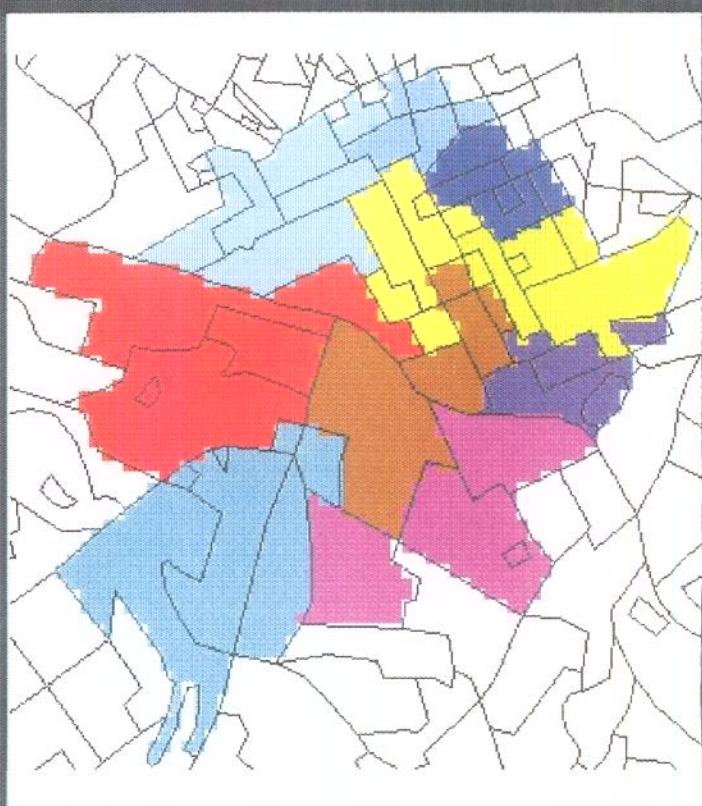


figura 5.3.4

Tabela 5.3.3 Rede de 55 nós, 131 arcos, 5 distritos, demanda diminuída
População total da rede - 10.000 habitantes
População média - 2.000 habitantes

A solução final foi alcançada em 7 iterações

	solução inicial				solução final			
distritos	nó mediana	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)	nó mediana	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)
1	19	17	31	55	19	11	21	5,00
2	49	5	9	55	49	9	18	10,00
3	28	6	13	35	28	10	20	0,00
4	34	14	30	50	34	11	23	15,00
5	23	8	17	15	23	9	18	10,00

Tabela 5.3.4 Rede de 55 nós, 131 arcos, 10 distritos, demanda diminuída
População total da rede - 10.000 habitantes
População média - 1.000habitantes

A solução final foi alcançada em 5 iterações

	solução inicial				solução final			
distritos	nó mediana	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)	nó mediana	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)
1	2	5	11	10	3	4	10	0,00
2	7	6	11	10	8	6	10	0,00
3	19	6	10	0	19	6	10	0,00
4	24	5	10	0	24	5	10	0,00
5	27	4	9	10	28	5	10	0,00
6	31	7	12	20	31	6	11	10,00
7	15	6	14	40	15	5	12	20,00
8	38	4	8	20	38	5	10	0,00
9	44	3	7	30	44	4	9	10,00
10	49	4	8	20	49	4	8	20,00

Tabela 5.3.5 Rede de 200 nós, 531 arcos, 5 distritos, demanda original
População total da rede - 140.000 habitantes
População média - 28.000 habitantes

A solução final foi alcançada em 7 iterações

	solução inicial				solução final			
distritos	nó mediana	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)	nó mediana	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)
1	88	37	288	2,86	39	36	280	0,00
2	100	24	240	14,29	100	27	275	1,79
3	58	27	181	35,36	64	52	283	1,07
4	32	72	427	52,50	33	44	290	3,57
5	93	29	264	5,71	93	30	272	2,86

Tabela 5.3.6 Rede de 200 nós, 531 arcos, 10 distritos, demanda original
População total da rede - 140.000 habitantes
População média - 14.000 habitantes

O algoritmo atingiu a solução final em 17 iterações

	solução inicial				solução final			
distritos	nó mediana	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)	nó mediana	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)
1	20	28	179	27,86	17	21	141	0,71
2	50	12	113	19,29	53	16	134	4,29
3	106	12	105	25	58	18	135	3,57
4	119	37	208	48,57	74	24	144	2,86
5	127	19	138	1,43	81	22	149	6,43
6	113	26	142	1,43	112	27	141	0,71
7	135	19	163	16,43	135	18	143	2,14
8	97	11	101	27,86	95	16	130	7,14
9	151	10	108	22,86	151	12	129	7,86
10	142	16	143	2,14	142	16	143	2,14

Representação gráfica para a rede de 200 nós utilizando a demanda real.

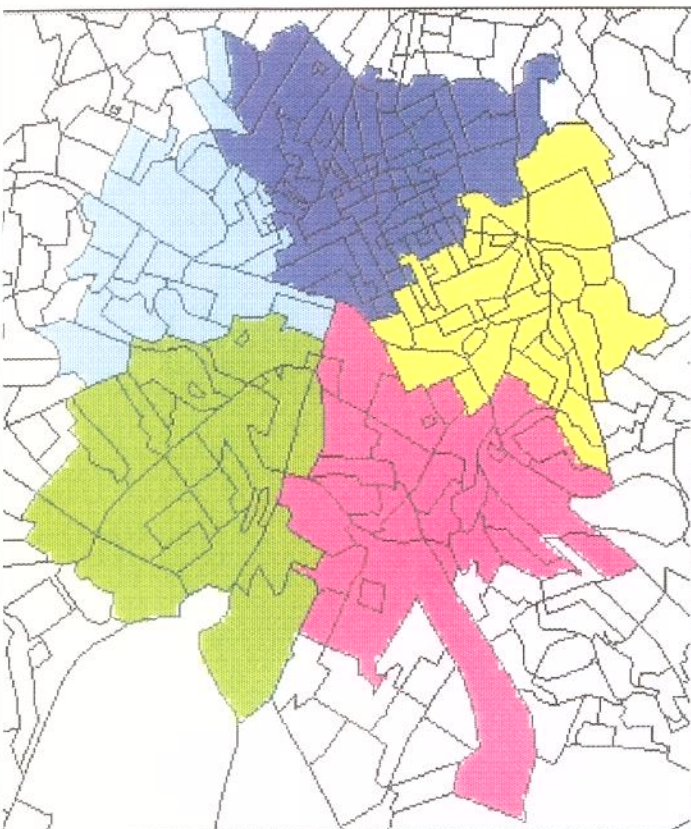


figura 5.3.5

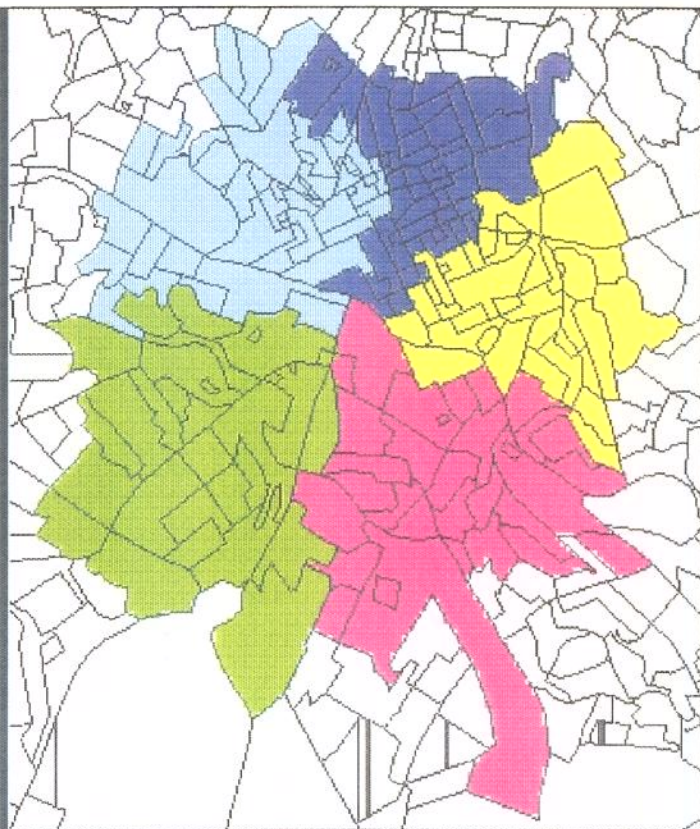


figura 5.3.6

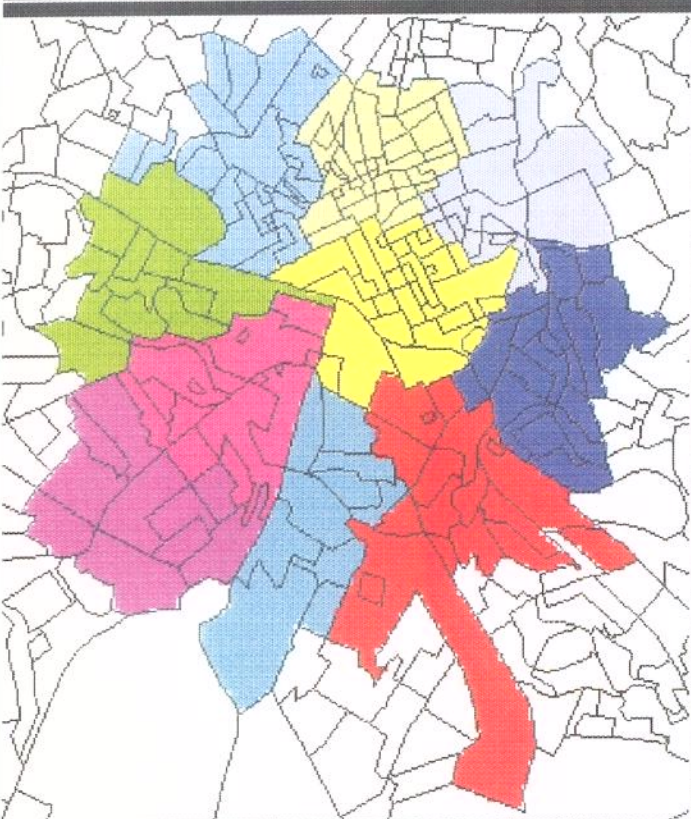


figura 5.3.7

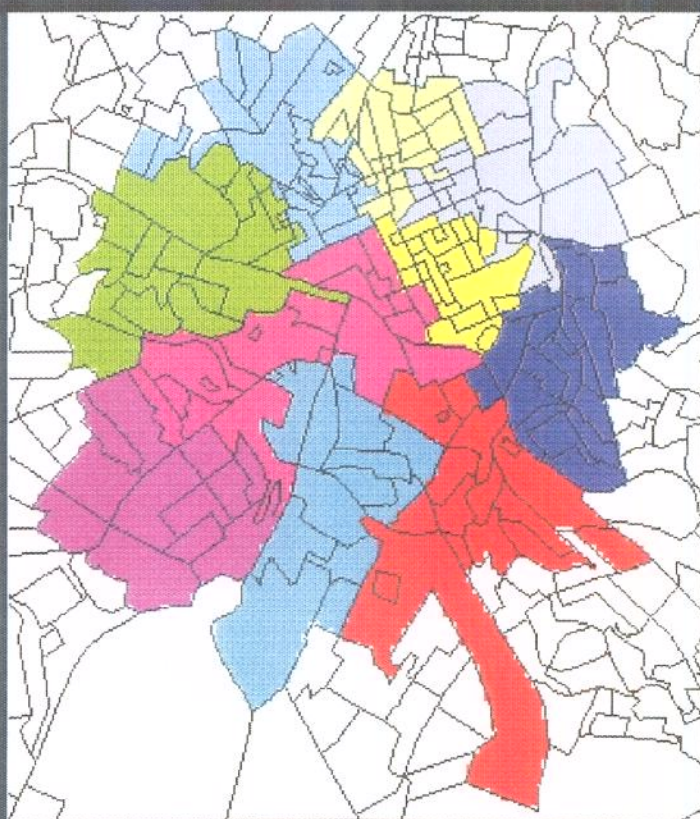


figura 5.3.8

Tabela 5.3.7 Rede de 200 nós, 531 arcos, 5 distritos, demanda diminuída
População total da rede - 39.800 habitantes
População média - 7.960 habitantes

O algoritmo atingiu a solução final em 6 iterações

distritos	solução inicial				solução final			
	nó mediana	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)	nó mediana	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)
1	108	26	54	32,16	60	38	77	3,27
2	100	36	73	8,29	98	38	78	2,01
3	74	50	98	23,12	119	42	81	1,76
4	37	54	109	36,93	36	40	82	3,02
5	141	34	64	19,60	137	42	80	0,50

Tabela 5.3.8 Rede de 200 nós, 531 arcos, 10 distritos, demanda diminuída
População total da rede - 39.800 habitantes
População média - 3.980 habitantes

O algoritmo atingiu a solução final em 23 iterações.

distritos	solução inicial				solução final			
	nó mediana	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)	nó mediana	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)
1	21	19	37	7,04	2	21	40	0,50
2	50	17	34	14,57	104	19	38	4,52
3	74	36	70	75,88	122	21	40	0,50
4	87	18	37	7,04	87	21	42	5,53
5	106	11	22	44,72	108	19	39	2,01
6	111	27	56	40,70	64	19	40	0,50
7	35	24	49	23,12	80	20	43	8,04
8	138	17	32	19,60	137	20	39	2,01
9	145	20	40	0,50	93	20	39	2,01
10	151	11	21	47,24	150	20	38	4,52

Tabela 5.3.9 Rede de 875 nós, 2498 arcos, 5 distritos, demanda original
População total da rede - 849.300 habitantes
População média - 169.860 habitantes

O algoritmo atingiu a solução final em 9 iterações

	solução inicial				solução final			
distritos	nó mediana	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)	nó mediana	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)
1	172	254	1868	9,97	121	226	1694	0,27
2	243	145	1493	12,10	187	177	1706	0,44
3	439	234	2602	53,18	438	153	1700	0,08
4	703	120	1456	14,28	702	140	1684	0,86
5	1036	122	1074	36,77	1034	179	1709	0,61

Tabela 5.3.10 Rede de 875 nós, 2498 arcos, 10 distritos, demanda original
População total da rede - 849.300 habitantes
População média - 84.930 habitantes

O algoritmo atingiu a solução final em 36 iterações

	solução inicial				solução final			
distritos	nó mediana	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)	nó mediana	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)
1	16	182	1249	47,06	19	121	855	0,67
2	243	109	1172	38,00	305	81	854	0,55
3	268	89	827	2,63	161	110	854	0,55
4	469	115	1109	30,58	346	97	861	1,38
5	501	81	863	1,61	428	77	850	0,08
6	439	78	882	3,85	440	74	843	0,74
7	1153	57	596	29,82	577	81	852	0,32
8	700	87	1047	23,28	668	76	841	0,98
9	738	30	383	54,90	709	66	830	2,27
10	1008	47	365	57,02	1042	92	853	0,44

Figura 5.3.9 Solução inicial para a rede de 875 nós, 5 distritos

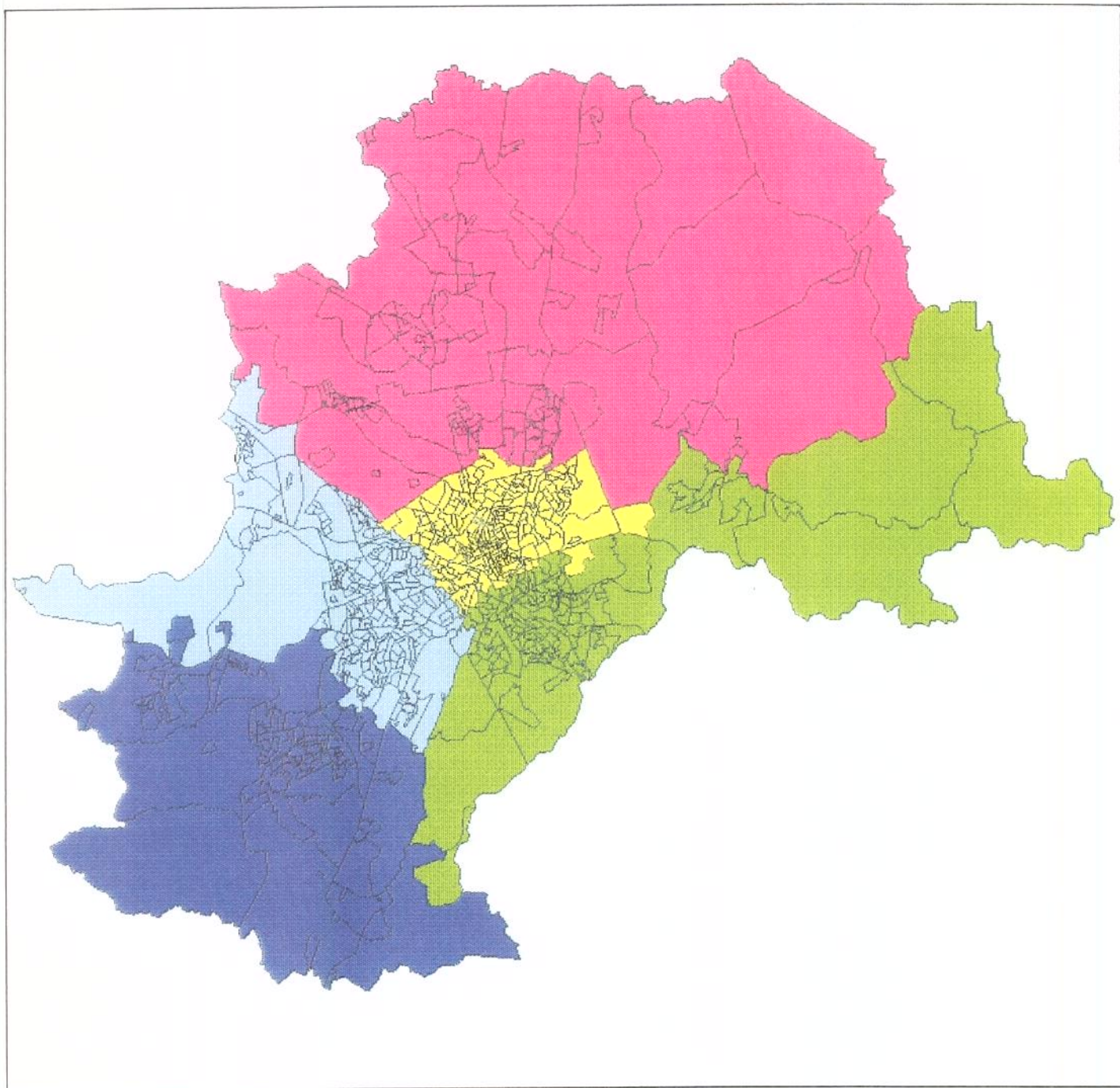


Figura 5.3.10 Solução final para a rede de 875 nós, 5 distritos

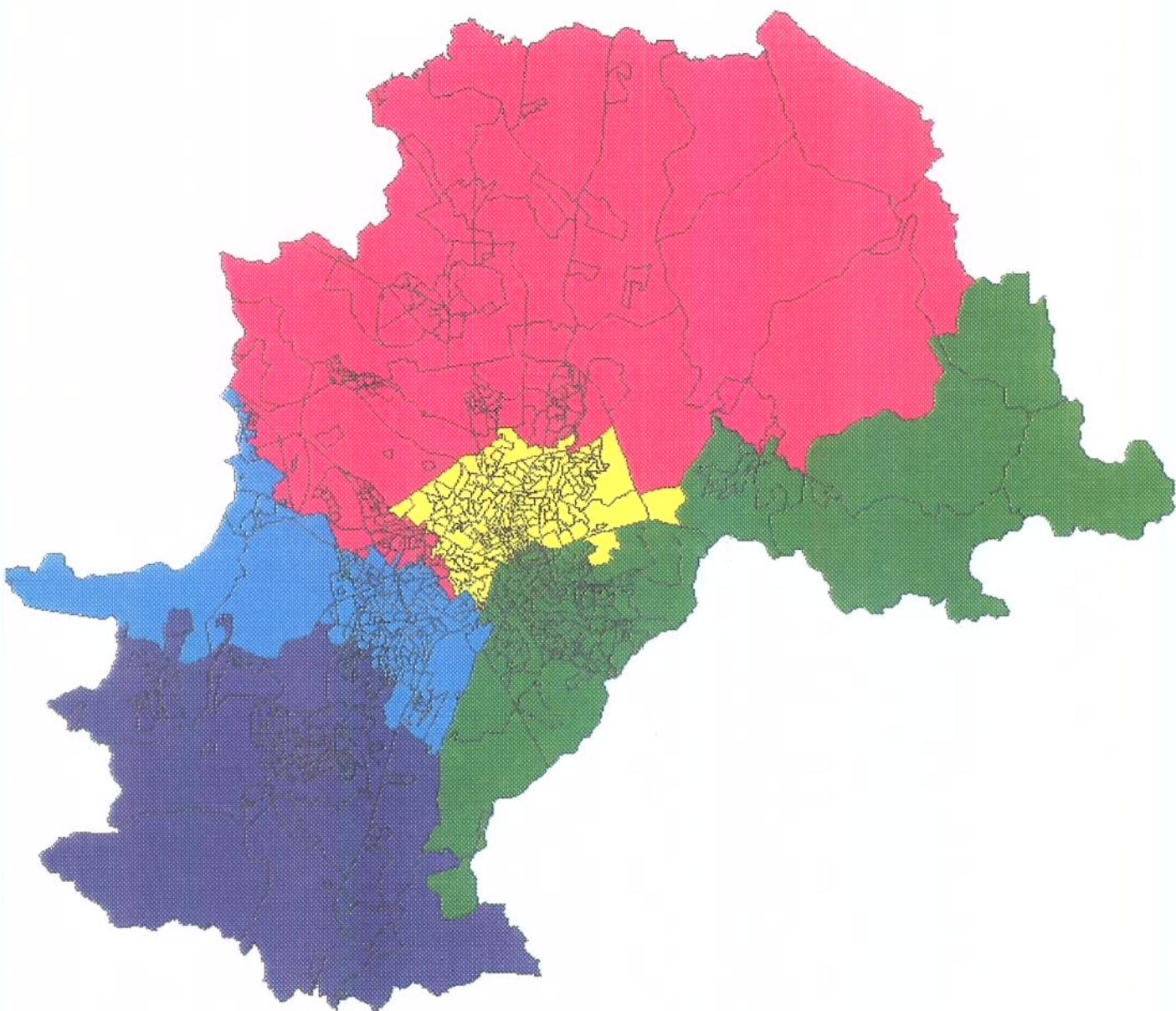


Figura 5.3.11 Solução inicial para a rede de 875 nós, 10 distritos

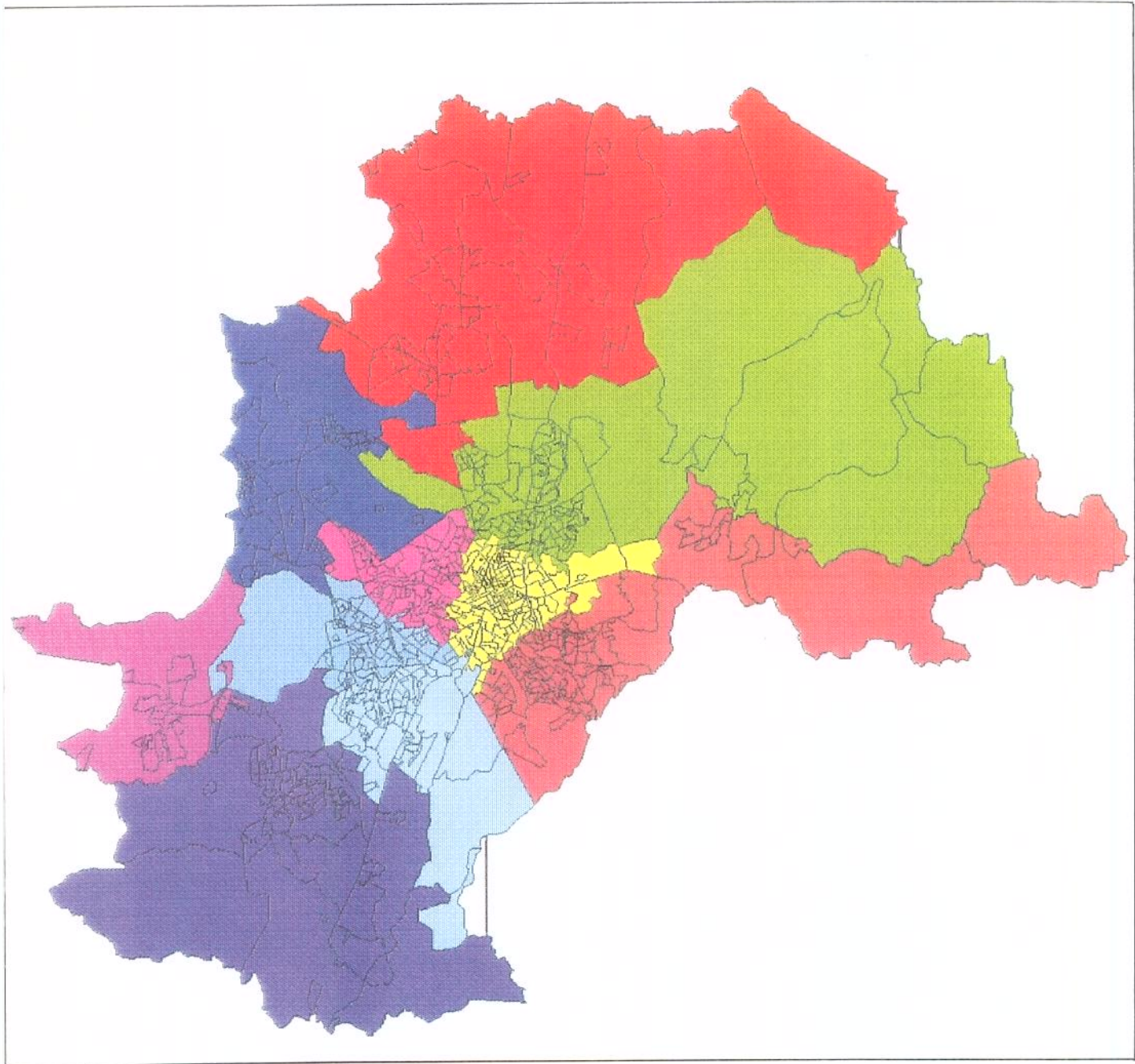


Figura 5.3.12 Solução final para a rede de 875 nós, 10 distritos

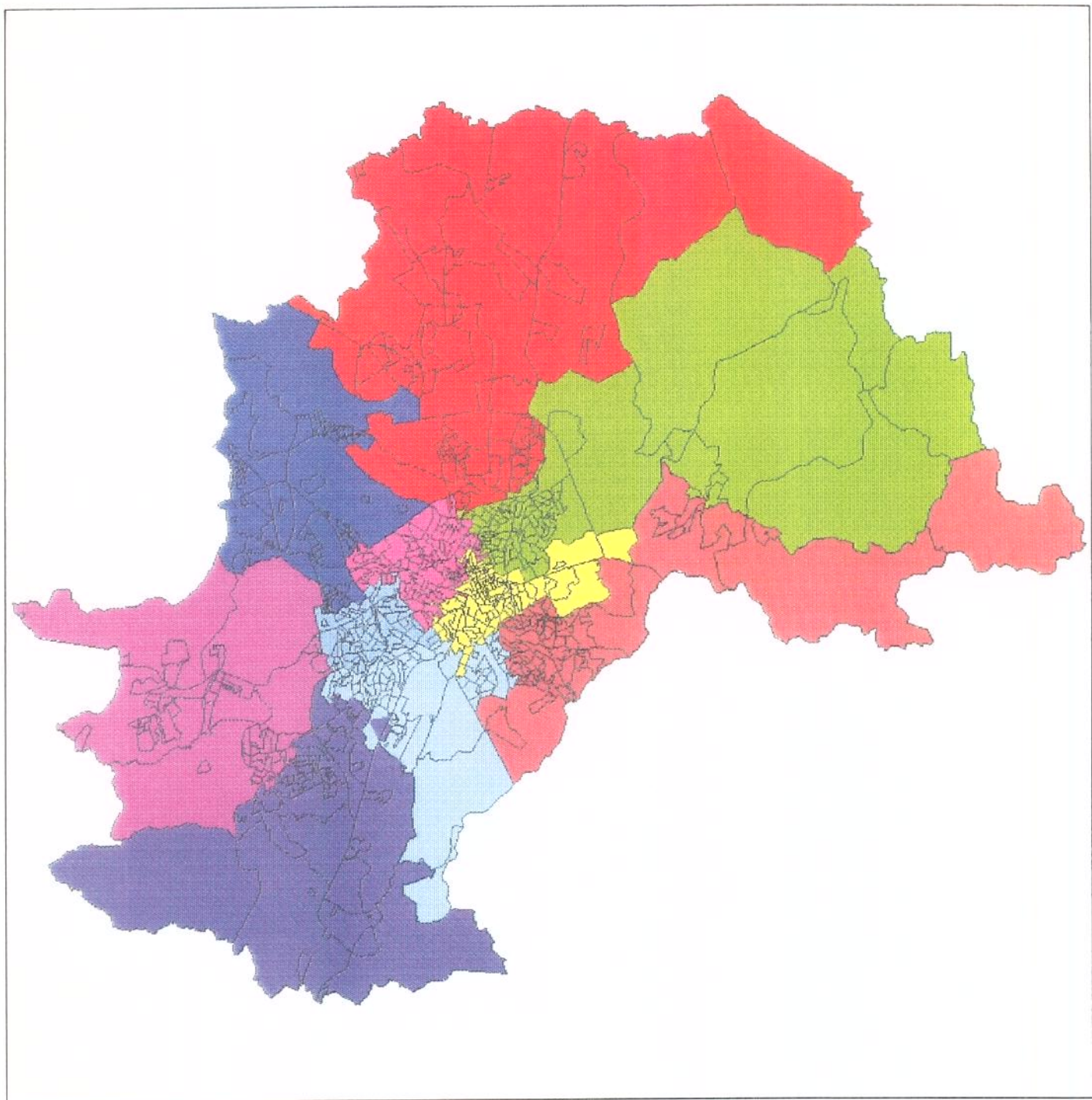


Tabela 5.3.11 Rede de 875 nós, 2498 arcos, 21 distritos, demanda original**População total da rede - 849.300 habitantes****População média - 40.440 habitantes****O algoritmo atingiu a solução final em 98 iterações**

distritos	solução inicial				solução final			
	nó mediana	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)	nó mediana	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)
1	32	101	581	43,67	16	65	415	2,62
2	50	54	483	19,44	98	41	425	5,09
3	183	53	490	21,17	240	43	422	4,35
4	217	45	348	13,95	67	71	406	0,40
5	308	74	828	104,75	361	36	422	4,35
6	265	43	442	9,30	261	40	405	0,15
7	346	57	543	34,27	234	42	405	0,15
8	513	54	628	55,29	371	34	416	2,87
9	450	30	281	30,51	383	35	389	3,81
10	497	43	437	8,06	791	41	424	4,85
11	623	30	339	16,17	792	40	390	3,56
12	599	40	460	13,75	599	35	419	3,61
13	1163	23	306	24,33	648	30	386	4,55
14	619	24	206	49,06	535	44	380	6,03
15	695	14	125	69,09	661	37	420	3,86
16	700	69	850	110,19	701	33	402	0,59
17	690	12	152	62,41	643	38	410	1,38
18	739	23	295	27,05	743	32	399	1,34
19	1015	40	320	20,87	1009	46	384	5,04
20	1030	24	244	39,66	276	46	393	2,82
21	1201	22	135	66,62	765	46	381	5,79

Figura 5.3.13 Solução inicial para a rede de 875 nós, 21 distritos

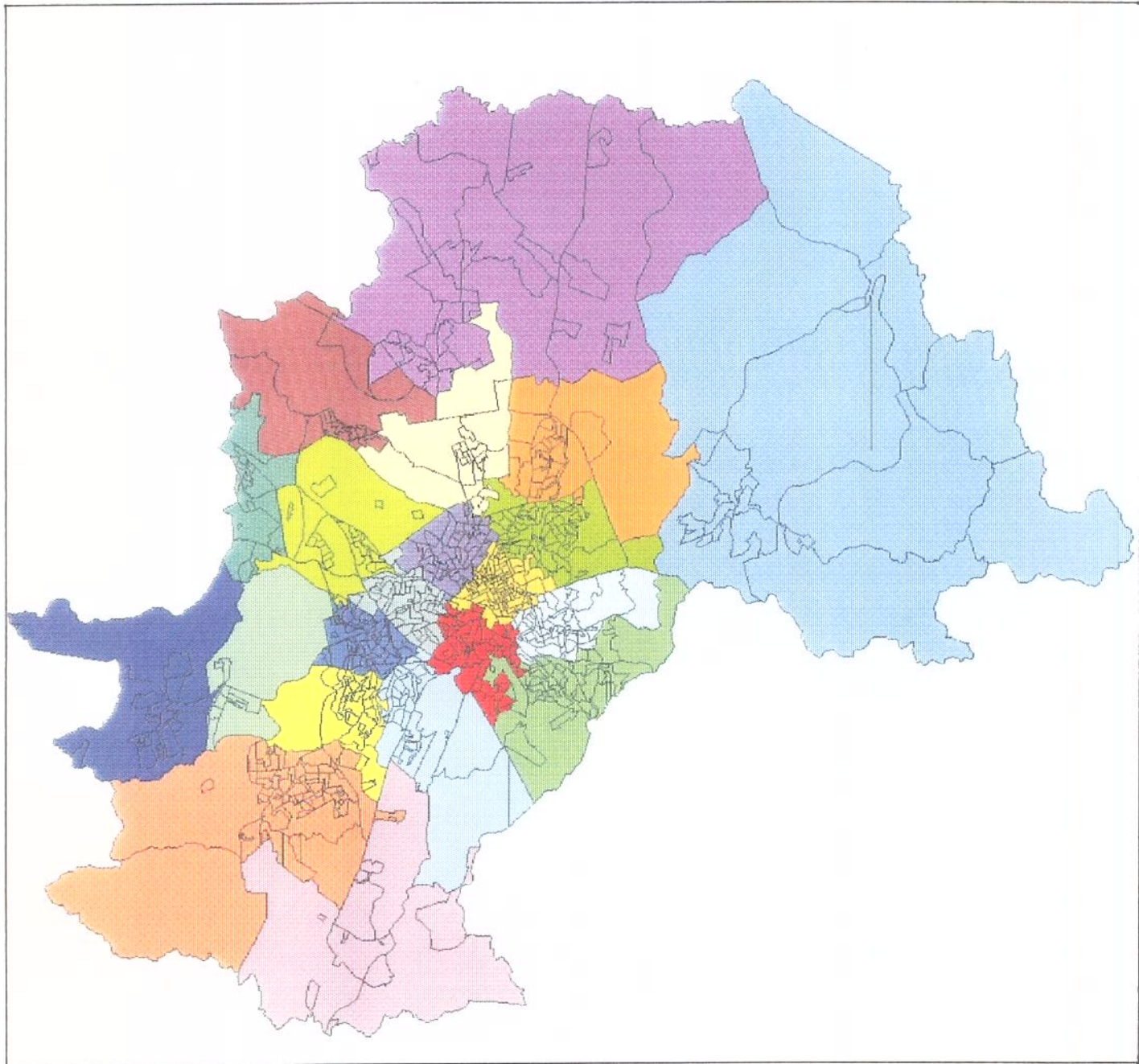
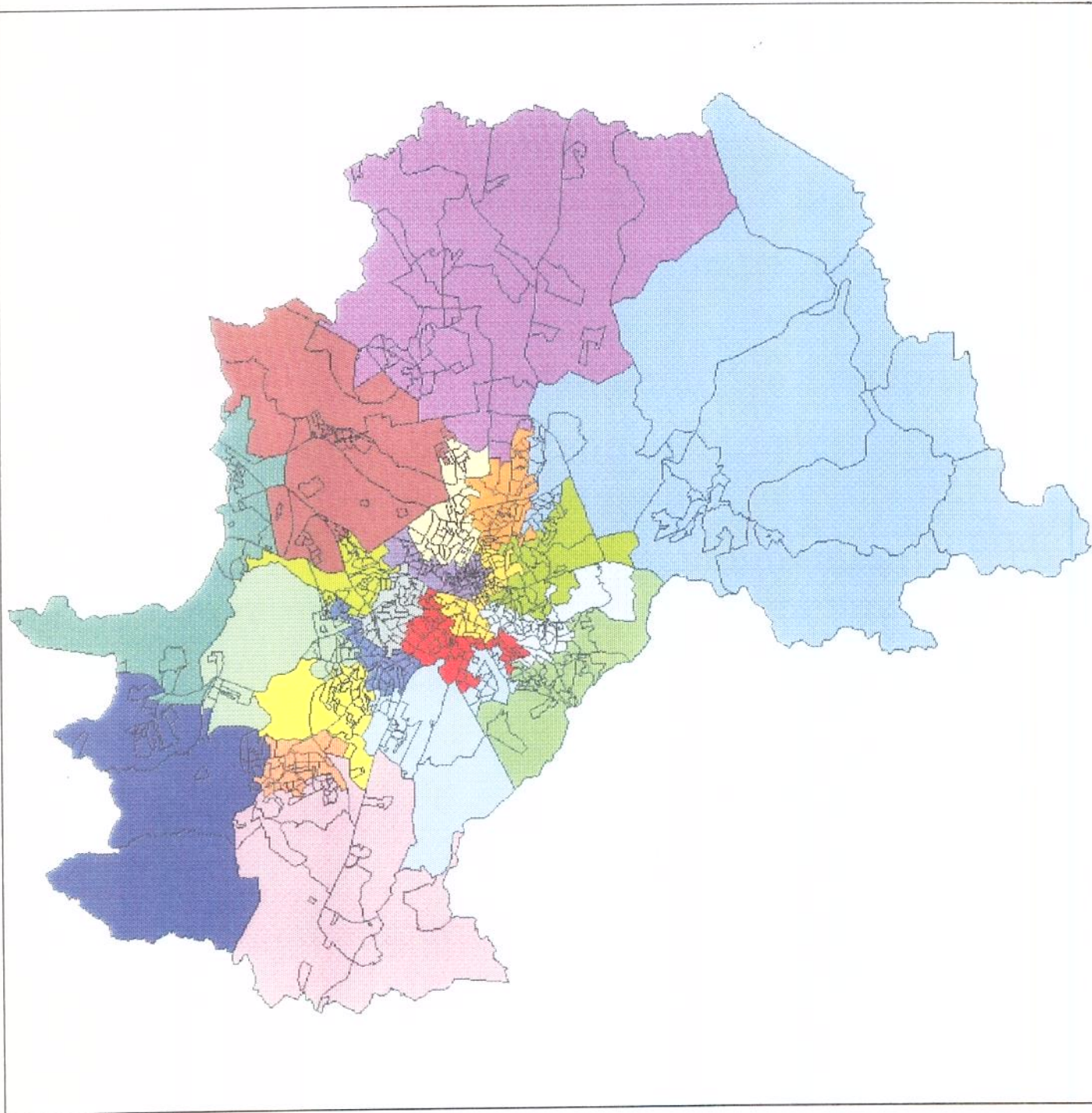


Figura 5.3.14 Solução final para a rede de 875 nós, 21 distritos



Capítulo 6

Análise dos resultados

6.1 Considerações sobre a Fase Inicial

A aplicação do modelo das p-medianas para determinação da solução inicial foi satisfatória. O alvo buscado foi atingido, pois todos os testes apresentaram distritos compactos e conexos. Nenhum enclave (um distrito totalmente circundado por outro) foi observado. Com relação à disposição física dos distritos gerados na solução inicial, percebe-se, nos testes que envolvem os dados completos da cidade de Campinas, uma tendência à formação de distritos menores no centro do mapa. Isso se explica pelo fato da cidade de Campinas, assim como praticamente todas as cidades brasileiras, apresentar alta densidade populacional em seu centro, o que provoca distritos urbanos pequenos em área, ao contrário dos distritos rurais, que são visivelmente maiores. Essa tendência não foi sentida nos testes que se referem às redes menores, criadas a partir dos dados centrais da cidade. Os setores censitários centrais são mais homogêneos entre si e, conseqüentemente, os distritos gerados também. A condição de contiguidade foi satisfeita em todos os exemplos devido ao fato de todas as redes geradas possuírem arcos somente ligando unidades vizinhas.

6.2 Considerações sobre a Fase de Melhoramento

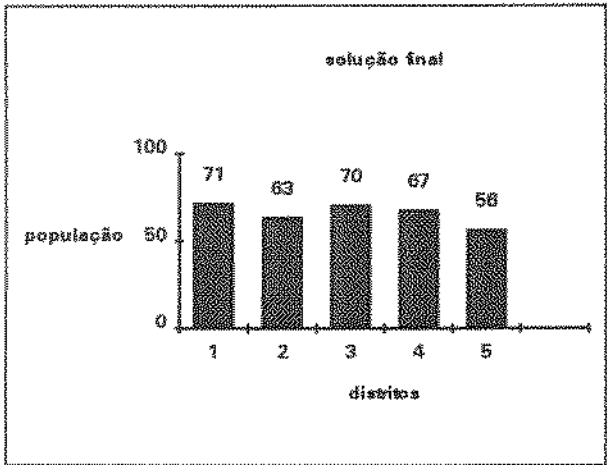
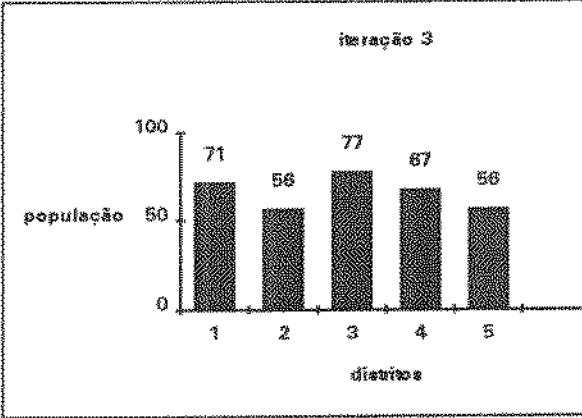
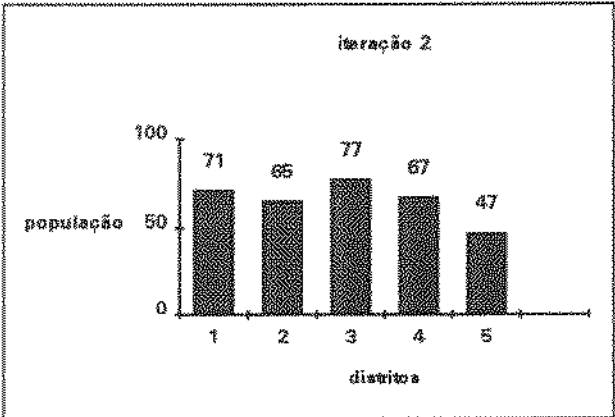
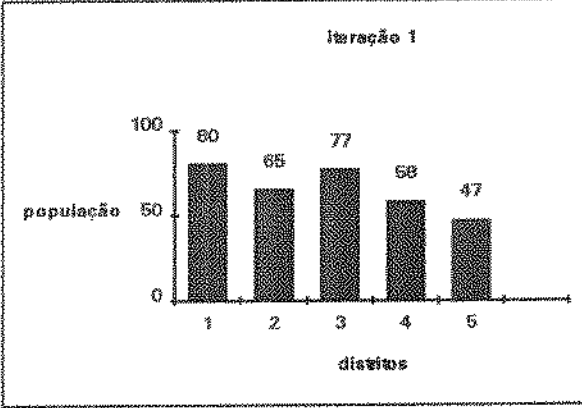
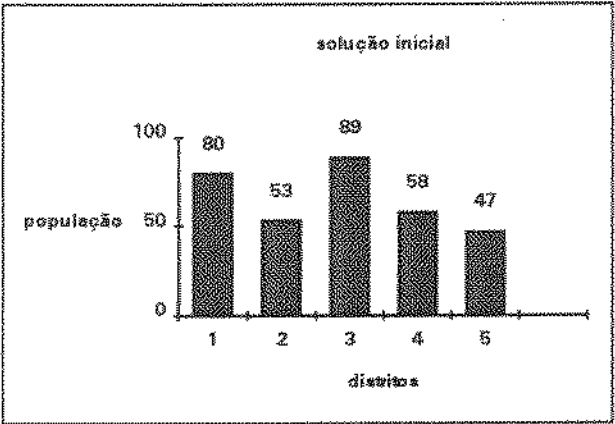
Quando se aplica a heurística de melhoramento à solução inicial, é interessante acompanhar o “movimento” do centro de cada distrito bem como a onda das unidades que vão sendo transferidas. A rede de 55 nós e 131 arcos foi utilizada para detalhamento das iterações do algoritmo, como ilustração adicional. A tabela que se segue mostra os resultados da aplicação da heurística a cada iteração. Os distritos doadores e receptores que serão pesquisados têm sua população assinalada na situação anterior. A rede de 55 nós foi a escolhida porque a solução final é atingida num pequeno número de iterações. Uma série de diagramas de barras mostra a evolução das situações intermediárias, focalizando o objetivo principal que é a minimização das diferenças de população entre os distritos.

Tabela 6.2.1 Detalhamento da aplicação da heurística de melhoramento

distritos	solução inicial				iteração 1		
	nó med.	no. de setores	pop. (10 ²)	erro (%)	nó med.	no. de setores	pop. (10 ²)
1	19	13	80	22,32	19	13	<u>80</u>
2	10	10	<u>53</u>	18,96	10	12	65
3	34	14	<u>89</u>	36,09	34	12	77
4	44	8	58	11,32	44	8	<u>58</u>
5	52	10	47	28,14	52	10	47

iteração 2			iteração 3			solução final			
nó med.	no. de setores	pop. (10 ²)	nó med.	no. de setores	pop. (10 ²)	nó med.	no. de setores	pop. (10 ²)	erro (%)
19	12	71	19	12	71	19	12	71	8,56
10	12	<u>65</u>	10	11	<u>56</u>	11	12	63	3,67
34	12	77	34	12	<u>77</u>	34	11	70	7,03
44	9	67	44	9	67	44	9	67	2,45
52	10	<u>47</u>	52	11	56	52	11	56	14,37

Figura 6.2.1 Diagramas de Barras mostrando a equalização das demandas



Os resultados obtidos sugerem que a melhor situação testada é aquela que agrupa o maior número de setores em um menor número de distritos. Para um mesmo número de setores os desvios de população aumentam em função do aumento do número de distritos exigidos. Isso não ocorre nas propostas de solução apresentadas por Mulvey e Beck, Koskosidis e Osman, que consideravam o problema do agrupamento capacitado, mas os exemplos mostrados nas publicações destes pesquisadores não se referem ao problema específico do distritamento político e sim a problemas de roteamento de veículos, onde o objetivo perseguido não é a equalização das demandas.

As soluções são também afetadas pela distribuição das demandas associadas às unidades populacionais. O primeiro teste para as redes de 55 e 200 nós utiliza os dados reais dos setores censitários da cidade de Campinas enquanto que o segundo, utiliza uma distribuição construída artificialmente. Não foi possível, porém, avaliar o efeito da distribuição das demandas na qualidade da solução final, mas, possivelmente, unidades muito heterogêneas com relação ao número de habitantes produzem agrupamentos de pior qualidade.

Da mesma forma que as propostas apresentadas por Kaiser e Bourjolly, nossa metodologia não evita totalmente a existência de unidades isoladas. Os enclaves já existentes na definição das unidades básicas escolhidas devem ser eliminados antes da aplicação da metodologia, como uma medida de prevenção.

Os testes envolvendo as redes parciais, geradas a partir dos dados da região central da cidade, não apresentaram nenhuma unidade isolada. A metodologia, aplicada a redes razoavelmente homogêneas, como era o caso dos testes, resultou em distritos que respeitam todos os requerimentos pré-estabelecidos.

Os testes envolvendo a cidade completa de Campinas apresentaram um pequeno número de unidades isoladas, que cresceu com a elevação do número de distritos exigido. A divisão de Campinas em 5 distritos teve como resultado quatro unidades isoladas. A representação gráfica mostrada na figura 5.3.10 já situou essas unidades em seus devidos lugares mas a tabela 5.3.9 mostra o resultado sem essa consideração. A inclusão dessas unidades em seus distritos de origem, altera o valor

do desvio porcentual calculado para a solução final obtida. As alterações nos resultados finais são mostradas na tabela 6.2.2.

O teste envolvendo 10 distritos apresentou 5 unidades isoladas e um grupo de 5 unidades contíguas, também isoladas, que pode ser considerado um enclave da definição inicial dos setores censitários. São muitos os enclaves existentes na definição inicial dos setores censitários, mas a sua total correção, envolvendo a eliminação de muitas unidades, implicaria num novo empreendimento de digitalização e o conseqüente tratamento de dados. A experiência adquirida na implementação da metodologia sugere o tratamento adequado que deve ser dispensado na obtenção dos dados nas próximas implementações. Da mesma forma que o caso anterior, a representação gráfica dessa simulação, mostrada na figura 5.3.12, já foi corrigida, e a tabela 6.2.3 traz as alterações nos resultados em função das correções que foram feitas. O último teste, que divide Campinas em 21 distritos, apresentou o maior número de unidades isoladas. Foram 17 unidades “fora de lugar” que já estão corrigidas na representação da figura 5.3.14. Os resultados finais são mostrados na tabela 6.2.4. A tabela 6.2.5 traz o resumo dos resultados computacionais.

Tabela 6.2.2 Efeito da correção na rede de 875 nós e 5 distritos

distritos	solução final sem correção			solução final após correção		
	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)
1	226	1694	0,27	229	1723	1,43
2	177	1706	0,44	174	1677	1,27
3	153	1700	0,08	152	1692	0,39
4	140	1684	0,86	140	1684	0,86
5	179	1709	0,61	180	1717	1,08

Tabela 6.2.3 Efeito da correção na rede de 875 nós e 10 distritos

distritos	solução final sem correção			solução final após correção		
	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)
1	121	855	0,67	124	899	5,85
2	81	854	0,55	84	887	4,44
3	110	854	0,55	113	875	3,03
4	97	861	1,38	90	785	7,57
5	77	850	0,08	78	847	0,27
6	74	843	0,74	74	836	1,57
7	81	852	0,32	80	851	0,20
8	76	841	0,98	74	830	2,27
9	66	830	2,27	66	830	2,27
10	92	853	0,44	92	853	0,44

Tabela 6.2.4 Efeito da correção na rede de 875 nós e 21 distritos

distritos	solução final sem correção			solução final após correção		
	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)	no. de setores	população (10 ²)	erro (%)
1	65	415	2,62	60	384	5,04
2	41	425	5,09	45	453	12,02
3	43	422	4,35	42	413	2,13
4	71	406	0,40	72	411	1,63
5	36	422	4,35	37	436	7,81
6	40	405	0,15	39	393	2,82
7	42	405	0,15	43	413	2,13
8	34	416	2,87	34	417	3,12
9	35	389	3,81	32	352	12,96
10	41	424	4,85	41	414	2,37
11	40	390	3,56	40	383	5,29
12	35	419	3,61	35	419	3,61
13	30	386	4,55	30	391	3,31
14	44	380	6,03	49	441	9,05
15	37	420	3,86	36	416	2,87
16	33	402	0,59	32	393	2,82
17	38	410	1,38	38	410	1,38
18	32	399	1,34	32	390	3,56
19	46	384	5,04	46	384	5,04
20	46	393	2,82	46	399	1,34
21	46	381	5,79	46	381	5,79

Tabela 6.2.5 Resumo dos Resultados Computacionais

nós	arcos	pop. total	distritos	pop. média	pop. máxima	pop. mínima	desvio pop. max (%)	desvio pop. mim (%)
55	131	32700	5	6540	7100	5600	8,56	14,37
55	131	32700	10	3270	4100	2500	25,38	23,55
55	131	10000	5	2000	2300	1800	15,00	10,00
55	131	10000	10	1000	1200	800	20,00	20,00
200	531	140000	5	28000	29000	27200	3,57	2,86
200	531	140000	10	14000	14900	12900	6,43	7,86
200	531	39800	5	7960	8200	7700	3,02	3,27
200	531	39800	10	3980	4300	3800	8,04	4,52
875	2498	849300	5	169860	171700	168400	1,43	1,27
875	2498	849300	10	84930	89900	78500	5,85	7,57
875	2498	849300	21	40443	45300	35200	12,02	12,96

6.3 Considerações Finais e Conclusões

Os resultados obtidos podem ser considerados bons com relação ao desvio populacional porcentual absoluto dos distritos gerados. Apenas um exemplo possui desvios de população acima do valor considerado como limiar de aceitabilidade em muitos países (25%). Porém, a divisão de 55 unidades em 10 distritos, onde ocorre este erro, não é um problema adequado para teste e avaliação. Nossa proposta utiliza técnicas heurísticas justamente por ser o distritamento um problema que envolve uma grande massa de dados. O algoritmo aplicado à cidade de Campinas apresenta desvios porcentuais de população muito abaixo dos valores convencionados como aceitáveis. Um exemplo real encontrado na literatura, que se utiliza do método mais robusto até hoje publicado, proposto por Bourjolly para o distritamento da cidade de Montreal, apresenta desvios de população muito próximos do limite máximo estabelecido. Nossa metodologia aplicada a cidade de Campinas atingiu um desvio máximo de 12,96%, no pior caso de distritamento, que seria a

adoção do sistema distrital puro. Se o sistema distrital adotado fosse o misto, onde apenas uma parte dos representantes seria eleita pelo voto distrital, o número de distritos seria próximo de 10 e o máximo desvio obtido para essa situação foi 7,57%.

A definição de vizinhança implementada inicialmente é a mais abrangente possível, pois considera distritos vizinhos todos aqueles que apresentam pelo menos uma fronteira comum entre setores censitários. Essa implementação não se mostrou adequada, gerando soluções desconexas. Nos casos estudados, fizemos algumas variações das vizinhanças através da análise gráfica das soluções iniciais e pudemos observar que relações de vizinhança que se estabelecem através do contato entre poucas unidades provocam soluções de pior qualidade. Isso é em parte explicado pelo fato de se definir vizinhança no início do processo de melhoria. Essa relação de vizinhança varia, no entanto, no decorrer das iterações, com a transferência das unidades de um distrito para outro. É por esse motivo que as melhores soluções são as que consideram distritos vizinhos aqueles que compartilham extensas fronteiras. Os resultados aqui apresentados se referem às melhores situações testadas para cada rede, eliminando do processo de transferência as vizinhanças sutis.

A utilização de uma interface gráfica, cuja finalidade inicial seria auxiliar o processo de definição de distritos, tornou-se, no decorrer do trabalho, uma ferramenta extremamente necessária para a análise da qualidade das soluções obtidas. O problema do distritamento eleitoral aplicado a um caso real envolve uma massa de dados não desprezível, e, por isso, analisar uma solução na ausência de sua representação gráfica é uma tarefa bastante árida. Para cada uma das situações estudadas geramos sua representação gráfica, sem a qual não se pode visualizar o respeito às principais restrições físicas do problema, ou seja, distritos compactos, conexos e a ausência de enclaves.

Embora a metodologia que está sendo proposta tenha obtido bons resultados, existem vários aspectos que podem ser considerados para projetos futuros. O primeiro deles se refere à obtenção de uma solução de partida para o problema. Os resultados poderiam ser melhorados se o modelo das p-medianas envolvesse restrições de capacidade. A introdução de uma função de penalidade no modelo das p-medianas também poderia ser considerada. Com relação ao procedimento de melhoria desenvolvido, também existem alguns aspectos que merecem mais atenção.

Um deles se refere à definição de vizinhança entre distritos, que determina os pares de distritos que irão participar do processo de trocas. Para evitar o surgimento de unidades isoladas a definição de vizinhança deve envolver o número de unidades fronteiriças. Outro, se refere à implementação de um processo de duplas trocas de setores entre os distritos gerados. O procedimento de duplas trocas pode resultar em soluções com menor desvio populacional. Não se pode deixar de enfatizar que o tratamento preliminar dos dados é uma tarefa de fundamental importância para a qualidade da solução final. As unidades que serão agrupadas não precisam ser homogêneas em termos populacionais mas a sua definição não deve conter enclaves.

Bibliografia

Anderberg, M.R. (1973), *Cluster Analysis for Applications*, Academic Press, New York.

Aubry, N.J.B., Ribeiro, R.V.eTavares, H.M.F. (1994), *Uma metodologia de agrupamento em duas fases aplicada a redes de telecomunicações*, XXVI SBPO - Florianópolis - Santa Catarina.

Bourjolly, J.M., Laporte, G. e Rousseau, J.M. (1981), *Decouplage Electoral Automatise: Application a L'île de Montréal*, INFOR, vol.19, no.2, pp. 113-124.

Bussamra, N.M., França, P.M. e Silva, M.C. (1995), *Distritamento Eleitoral: Uma Proposta para o Recorte dos Distritos*, XXVII Simpósio SBPO, Vitória- Espírito Santo.

Cardoso, F.H.e Serra, J. (1991), *Parlamentarismo no Brasil. Como, por que*. Cartilha publicada pelo Senado Federal.

Cornuejols, G., Fisher, M.L.e Nemhauser, G.L. (1977), *Location of Bank Accounts to Optimize Float: An Analytic Study of Exact and Approximate Algorithms*, Management Science 23, pp. 789-810.

Eiselt, H.A. e Laporte, G. (1987), *Combinatorial Optimization Problems with Soft and Hard Requirements*, J. Ops. Res. Soc., vol.38, no.9, pp. 785-795.

Everitt, B.S. (1993), *Cluster Analysis*, John Wiley & Sons Inc., New York - Toronto.

França, P.M., Fraislebem, F. e Tavares, H. (1884), *O Programa PEOR - Uma Metodologia para a Evolução Dinâmica de Cortes de Área*, Revista Telebrás, junho/julho, pp.27-38.

- Garfinkel, R.S. e Nemhauser, G.L. (1970), *Optimal Political Districting by Implicit Enumeration Techniques*, Manag. Sci., vol.16, no.8, B495-B508.
- Garey, M.R. e Johnson, D.S. (1979), *Computer and Intractability: A guide to the theory of NP-Completeness*, Freeman and company, San Francisco.
- Glover, F. (1989), *Tabu Search - Part 1*, ORSA Journal on Computing, vol.1, pp.190-206.
- Glover, F. e Klingman, D. (1975), *Improved Labeling of L.P. Bases in Networks*, Research Report CCS 218, University of Texas.
- Helbig, R.E., Orr, P.K. e Roediger, R.R. (1972), *Political Redistricting by Computer*, Comm. ACM, vol.15, no.8, pp. 735-741.
- Hess, S.W. e Weaver, J.B. (1963), *Nonpartisan political Redistricting by Computer*, Ops. Res., vol.13, no.6, pp. 998-1006.
- Jensen, P. e Barnes, R. (1980), *Network Flow Programming*, John Wiley.
- Kaiser, H.F. (1967), *An Objective Method for Establishing Legislative Districts*, Midwest Journal of Political Science, pp. 200-213.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C.D. e Vecchi, P.M. (1983), *Optimization by simulated annealing*, Science, vol. 38, pp. 671-680.
- Korkel, M. (1989), *Exact Solution of Large-Scale Simple Plant Location Problems*, European Journal of Operation Research, 39, pp. 157-173.
- Koskosidis, Y.A. e Powell, W.B. (1992), *Clustering Algorithms for Consolidation of Customer Orders into Vehicle Shipments*, Transpn. Res., vol.26B, no.5, pp. 365-379.
- Laporte, G., Rousseau, J.M. e Thalmann, N. (1983), *A Multicriteria Approach to Social and Political Districting*, ASAC Conference, University of British Columbia.

Lin, S. (1965), *Computer solution of the travelling salesman problem*, Operations Research, vol. 21, pp. 498-516.

Mulvey, J.M. e Beck, M.P. (1984), *Solving capacitated clustering problems*, European Journal of Operational Research, no.18, 339-348.

Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa (1986), Editora Nova Fronteira

Osman, I.H. e Christofides, N. (1994), *Capacitated Clustering Problems by Hybrid Simulated Annealing and Tabu Search*, forthcoming in International Transactions in Operational Research, vol.1, no.3.

Said, A.e França, P.M. (1988), *Combinado Heurísticas e Métodos de Subgradientes para Resolver o Problema das P-Medianas*, VII Congresso SBA, São José dos Campos.

Silva, A.B. (1991), *Remotely sensed, Geogrphisical and Geochemical Data as Aids to Mineral Exploration in Bahia State, Brazil*, Tese de Doutorado apresentada à University College of London.

Silva, M.C. (1990), *Planejamento a Longo Prazo em Sistemas de Energia Elétrica*, Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas.

Silva, M.C., França, P.M.e Silveira, P.B. (1994), *Long-Range Planning of Power Distribuion Systems: Primary Networks*, Electric Power Systems Research, vol.28, no.1.

Silva, R.C. (1965), *Reapportionment and Redistrictig*, Scientific American, pp. 20-27.

Taylor, P.J. (1973), *Some Implications of the Spacial Organization of Elections*, Trans. Inst. Brit. Georg., pp. 121-136.

Teitz, M.B. e Bart, P. (1968), *Heuristic Methods for Estimating the Generalized Vertex Median of a Weighted Graph*, Operations Research, vol.16, pp. 955-961.

Webster's Third New International Dictionary of the English Language (1961), Springfield, MA, Merriam Company.

Young, H.P. (1988), *Measuring the Compactness of Legislative Districts*, Legislative Studies Quarterly.