

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA

NOVEMBRO DE 1986

Este exemplar corresponde a redação  
final da tese defendida por P.A.V. Ferreira  
e aprovada pela comissão julgadora  
em 21/11/86.



PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA MULTI OBJETIVO:  
DESENVOLVIMENTO DE UM MÉTODO INTERATIVO  
BASEADO EM PROJEÇÃO

Por : Paulo Augusto Valente Ferreira

Orientador: Prof. Dr. José Cláudio Gerome

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia  
Elétrica, da Universidade Estadual de Cam-  
pinas, como parte dos requisitos exigidos  
para obtenção do título de Doutor em Enge-  
nharia Elétrica.

Classificação  
Autoria  
V. 1  
Título

À minha família.

1984

A G R A D E C I M E N T O S

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a todos os amigos, professores e funcionários da FEC que direta ou indiretamente contribuíram para a elaboração desta Tese e, em especial, ao Prof. *Geromel* pela orientação objetiva, entusiasmo e atenção especial dedicados a este trabalho e ainda à sua família pela amizade; aos Profs. *Ivanil S. Bonatti*, *S. Motoyama* e *W.C. Borelli* do Setor Telemática pelo ótimo ambiente de trabalho; aos Profs. *Fernando Gomide* e *Wagner C. Amaral* pelo apoio na fase final da Tese; à TELEBRÁS e ao CTI pelo apoio institucional; à *Célia* pelo excelente trabalho de confecção dos originais e, aos amigos da Martagão, *Martins*, *Regina*, *Naka*, *Nilzete*, *Oscar*, *Adriano*, *Cristina*, ..., e depois *Vitor* e *Isadora*, pelos tempos felizes.

Este trabalho de pesquisa contou com o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP.

R E S U M O

Neste trabalho, estratégias de Projeção, Relaxação e Linearização Externa, de emprego frequente em programação matemática, são incorporadas ao desenvolvimento de uma nova metodologia para a resolução interativa de problemas de decisão envolvendo múltiplos objetivos. Através de uma projeção adequada, o problema multiobjetivo original é decomposto em um problema mestre inteiramente definido no espaço dos objetivos, cuja resolução fica a cargo de um *Decisor*, e em um subproblema, que analisa a viabilidade das soluções propostas pelo problema mestre. Algoritmos para resolução destes dois níveis são apresentados e discutidos. Em particular, demonstra-se que através de estratégias de Relaxação, o Decisor pode desenvolver adequadamente o seu aprendizado acerca do comportamento do sistema em questão. O trabalho inclui resultados numéricos obtidos com a aplicação do método a problemas de planejamento na área de energia.

A B S T R A C T

In this work, solution strategies based on Projection, Relaxation and Outer Linearization frequently employed in mathematical programming are incorporated to the proposition of a newly developed methodology for the interactive solution of decision problems under multiple objectives. By means of a suitable projection, the original multiobjective problem is decomposed into a master problem completely defined in the objective space, whose solution is furnished by a *Decision-Maker*, and into a subproblem which analyses the feasibility of the solutions proposed by the master one. Algorithms for solving both levels are presented and discussed. In particular, Relaxation is shown to constitute an appropriate basis through which the *Decision-Maker* can develop his apprenticeship about the behaviour of the system being considered. Numerical experiences regarding the application of the method to energy planning problems are included.

## S I M B O L O G I A

No desenvolvimento do trabalho utilizam-se as seguintes notações:

- $a, b, x, y, z$  - para designar escalares ou vetores
- $A, B, P, Q, M$  - para designar matrizes
- $A, B, R, F, X$  - para designar conjuntos ou funções especiais

### CONJUNTOS

- $\mathbb{R}$  - conjunto de todos os números reais
- $\mathbb{R}^n$  - conjunto de todos os vetores reais de dimensão  $n$
- $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  - produto cartesiano
- $\mathbb{R}^{n \times m}$  - conjunto de todas as matrizes de dimensão  $n \times m$
- $X \subset \mathbb{R}^n$  - subconjunto do  $\mathbb{R}^n$
- $C^n$  - conjunto de todas as funções com  $n$  primeiras derivadas contínuas
- $x \in X$  - elemento de  $X$

### VETORES E ESCALARES

- $x'$  - transposição de  $x$
- $\langle x, y \rangle = x'y$  - produto escalar entre  $x$  e  $y$
- $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$  - norma euclidiana de  $x$
- $\max \{a, b\}$  - o maior valor real dos conjuntos  $\{a, b\}$  ou
- $\max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$   $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

- $|a|$  - valor absoluto de  $a$
- $\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$  - norma Tchebyshev de  $x$

## MATRIZES

- $I$  - matriz Identidade
- $Q = \{q_{ij}\}$  - matriz de elementos  $q_{ij}$
- $Q \geq 0$  - matriz simétrica semi-definida positiva.

## DESIGUALDADES

- $x \leq y$  - implica em  $x_i \leq y_i, \quad i = 1, \dots, n$
- $x < y$  - implica em  $x_i < y_i, \quad i = 1, \dots, n$
- $x = y$  - implica em  $x_i = y_i, \quad i = 1, \dots, n$
- $x \neq y$  - implica em  $x_i \neq y_i, \quad \text{para algum } i$
- $x \leq y$  - implica em  $x \leq y$  e  $x \neq y$

I N D I C E

INTRODUÇÃO GERAL - MOTIVAÇÃO, ESCOPO E ORGANIZAÇÃO.....	1
<hr/>	
CAPÍTULO 1 - ALGUNS TÓPICOS EM PROGRAMAÇÃO MULTIOBJETIVOS.....	7
1.1. Introdução.....	8
1.2. Formulação do Problema Multiobjetivo.....	8
1.3. Existência e Caracterização de Soluções Eficientes.....	10
1.4. Eficiência em Controle Multiobjetivo.....	21
1.5. Preferências e Funções Utilidade.....	28
1.6. Metodologias.....	36
1.6.1. Preferências a Priori: Programação Alvo.....	38
1.6.2. Articulação Progressiva de Preferências: Programação Alvo In- terativa.....	41
1.6.3. Preferências a Posteriori: Simplex Multiobjetivo.....	45
1.7. Conclusão.....	46
 CAPÍTULO 2 - PROGRAMAÇÃO MULTIOBJETIVO VIA PROJEÇÃO.....	 48
2.1. Introdução.....	49
2.2. Considerações Preliminares.....	50
2.3. Projeção do PMO no Espaço das Soluções Satisfatórias.....	55
2.4. Interpretação Geométrica do Método.....	62
2.5. O Caso Particular $m=2$ .....	66
2.6. Relações entre o Método Proposto e Alguns Métodos Multiobjetivos....	72
2.7. Conclusão.....	76
 CAPÍTULO 3 - MÉTODOS PARA O ESPAÇO DOS OBJETIVOS.....	 78
3.1. Introdução.....	79
3.2. Considerações sobre a Solução do PMO no Espaço dos Objetivos.....	80
3.3. Convergência.....	88
3.4. Conclusão.....	91
 CAPÍTULO 4 - ASPECTOS DA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA MIN-MAX.....	 93
4.1. Introdução.....	94
4.2. Cálculo de $\theta(y)$ : Caso Geral.....	94

4.3. Cálculo do Valor de $\phi(\lambda)$ por Métodos de Projeção de Gradiente.....	97
4.4. Controle <i>Mín-Max</i> de Sistemas Hidrotérmicos.....	102
4.5. Conclusão.....	113
<hr/>	
CAPÍTULO 5 - APLICAÇÕES.....	115
5.1. Introdução.....	116
5.2. Considerações Preliminares.....	116
5.2.1. Modelamento e Formulação do Problema de Despacho Econômico..	119
5.2.2. Propriedades da Solução do Problema Biobjetivo Equivalente..	122
5.2.3. Resultados Numéricos.....	127
5.3. Pareto-Otimalidade como Estratégia de Controle de Sistemas Hidroelétricos.....	134
5.4. Conclusão.....	140
CONCLUSÃO GERAL.....	141
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	144
APÊNDICE A	

---

INTRODUÇÃO GERAL

MOTIVAÇÃO, ESCOPO E ORGANIZAÇÃO

Dentre todas as possíveis formas de abordagem dos processos de decisão foi sem dúvida o enfoque por técnicas de otimização interativas, segundo as quais o problema de decisão é visto como um problema de otimização com múltiplos objetivos a ser resolvido interativamente, aquele que maiores contribuições experimentou ao longo das duas últimas décadas. De fato, os progressos teóricos nesta área foram notáveis e beneficiaram-se diretamente do enorme desenvolvimento alcançado pela programação matemática de um modo geral. Contudo, muito pouco do esforço dirigido para a elaboração de técnicas aplicáveis a problemas multiobjetivos foi efetivamente traduzido em termos de aplicações práticas.

Embora a multiplicidade de objetivos em muitos problemas importantes no domínio da pesquisa operacional fosse há muito amplamente reconhecida, persistiu ainda como regra geral o enfoque clássico de se tentar descrever conflitos e incomensurabilidades de objetivos, inerentes a qualquer problema de decisão, através de um critério global, representativo de todas estas características e matematicamente tratável. Neste sentido são frequentes, por exemplo, as aplicações de técnicas clássicas de otimização em que algum índice de eficiência econômica é proposto como substituto para um conjunto de índices igualmente importantes como qualidade e impacto ecológico da produção e equilíbrio de mercado. O sistema econômico vigente nos países em que a programação matemática mais desenvolveu-se em termos de aplicações (EUA, França,...) parece haver influenciado decisivamente formulações deste tipo.

Contudo, este quadro vem sendo gradualmente alterado nos últimos dez anos, pressionado pela crescente complexidade dos sistemas tratados e pela forte interdependência das funções que lhes servem de medida de desempenho, muitas de caráter não pecuniário, mas de grande importância para a sociedade. Estes fatores tornam algo irrealistas quaisquer tentativas de abordagem destes problemas por técnicas convencionais de otimização. A operação de reservatórios multipropósito com fins de geração de energia, navegação, irrigação, controle de cheias e lazer em sistemas hidroelétricos (Haines, 1977) é um exemplo típico da aplicação dos resultados de pesquisas em programação multiobjetivo a problemas complexos de planejamento.

A adoção da programação multiobjetivo como suporte teórico e filosofia de projeto de sistemas auxiliado por computador também já vem merecendo algumas contribuições teóricas (Fleming e Pashkevich, 1985; Radford et. ali, 1985)

e no futuro deve constituir-se numa alternativa real para o desenvolvimento de novos sistemas.

Em seu favor, os métodos baseados em programação matemática exibem duas vantagens decisivas: grande capacidade de modelamento e operacionalidade, no sentido de que os métodos desta classe podem ser implementados, na maioria das vezes, através de rotinas já existentes, incorporando-se apenas os elementos próprios à tomada de decisão. Na verdade, a ênfase da pesquisa nesta área consiste exatamente em procurar utilizar a teoria de programação matemática existente de forma a permitir que um *Decisor* possa exprimir suas preferências por um determinado tipo de solução de uma maneira simples.

Na busca de uma solução para um dado problema multiobjetivo, a assistência de um ou mais *Decisores* torna-se indispensável devido à perda do conceito de otimalidade, induzida pelo natural conflito de objetivos. Assim, a menos de formulações inadequadas, o problema passará então a exibir soluções não-comparáveis dentre as quais uma deverá ser escolhida por apresentar uma relação de compromisso adequada entre os objetivos.

Qualquer que seja a abordagem, a solução final sempre exibirá um certo grau de subjetividade e dependerá fundamentalmente da noção de equilíbrio adotada. A mais frequente é a de equilíbrio cooperativo de Pareto, cujas condições de existência no âmbito da programação matemática foram estabelecidas por Kuhn e Tucker (veja Geoffrion, 1968) e interpretadas em termos de dominância por Zadeh (1963) e Klingler (1964).

Em termos de análise pode-se mencionar ainda o conceito de solução *propriamente* eficiente introduzido por Geoffrion (1968), que veio eliminar certas deficiências do formalismo de Kuhn e Tucker, estudos sobre propriedades do conjunto de todas as soluções eficientes do problema multiobjetivo (Reid e Citron, 1971; Yu, 1974), existência de soluções ótimas (Salukvadze, 1974; Athans e Gehring, 1973) e condições necessárias e suficientes para problemas com objetivos não-diferenciáveis (Ishizuka e Shimizu, 1984).

De maneira geral, a conceituação e a caracterização analítica de pontos de equilíbrio são aspectos do problema susceptíveis de sistematização. Chankong e Haimes (1982) forneceram recentemente uma interessante abordagem unificada de parte da teoria dedicada às soluções de Pareto.

Por outro lado, a situação em termos de síntese de métodos multiobjeti

vos se apresenta completamente diferente, pois a elaboração de qualquer método desta classe parte de hipóteses sobre a forma de pensar do Decisor e de sua capacidade em transmitir corretamente suas preferências. E não existindo nenhum consenso neste sentido, a solução final obtida dependerá inevitavelmente dos meios (no caso, os métodos) utilizados para atingi-la.

Os trabalhos de Roy (1971), McCrimon (1973) e Hwang e Masud (1979) classificam e analisam propriedades dos principais métodos multiobjetivos, em diferentes fases da pesquisa na área.

A agregação das várias funções objetivo numa única função (Função Utilidade ou de Indiferença Social, Keeney (1972)) impondo uma completa ordenação das alternativas viáveis baseada em julgamentos subjetivos do Decisor foi provavelmente a primeira forma de abordagem a ser tentada. Esta linha tinha como principal vantagem o fato de remeter o problema multiobjetivo para os domínios bem estabelecidos da programação matemática. Entretanto, a prática demonstrou que a hipótese na qual baseia-se a abordagem - completa estimação (*a priori*) de uma função utilidade - é bastante restritiva sobretudo para problemas complexos.

A pesquisa então evoluiu e, basicamente permanece dirigida a métodos que prevêem algum tipo de interação do Decisor com o modelo matemático do sistema tratado. A partir desta interação, o Decisor vai adquirindo progressivamente uma melhor compreensão sobre o comportamento do sistema e passa a tentar influir na obtenção de soluções que venham de encontro às suas preferências. Elimina-se com isto a necessidade de uma função utilidade explícita.

Os métodos desta classe distinguem-se na forma de viabilizarem esta interação e quanto ao tipo de informação que o Decisor é supostamente capaz de transmitir ao modelo. Por exemplo, quando se admite que o Decisor é capaz de especificar suas Taxas Marginais de Substituição (*trade-offs* explícitos) entre os objetivos (Keeney & Raiffa, 1976) para qualquer solução local que lhe seja proposta, então métodos como os de Zionts & Wallenius (1976), Dyer (1972) e Geoffrion et. al. (1972), entre outros, são adequados.

Em geral, métodos baseados em *trade-offs implícitos* costumam ter melhor aceitação, admitindo-se mesmo que o Decisor esteja mais qualificado a indicar níveis de aspiração ou metas a atingir do que taxas de substituição locais. Sintomaticamente, métodos com estas características e/ou que incor

poram elementos da teoria de Conjuntos Nebulosos como forma de modelar o comportamento errático do Decisor vêm tendo presença marcante na literatura especializada (Baptistella e Olero, 1980; Koneyama e Sawaragi, 1984).

Contudo, o Decisor possui limitada capacidade para processar as informações que lhe são passadas pelo modelo e que não é levada em conta por muitos destes métodos. Embora a suposição sobre sua habilidade em especificar níveis de satisfação seja apropriada, o Decisor é sempre levado a indicar estes níveis sem um conhecimento prévio muito preciso de sua viabilidade no nível estrutural. Sem dúvida este conhecimento cresce com o número de interações, porém manter o processo de decisão baseado num modelo matemático rigoroso parece ser desnecessário e computacionalmente oneroso.

Assim, no início da fase interativa parece suficiente considerar um modelo mais simples que forneça algumas poucas informações sobre como os objetivos se relacionam e então ir aumentando sua complexidade na medida em que o Decisor caminha na direção de sua solução de compromisso. Esta é precisamente a filosofia na qual baseia-se este trabalho, e que será viabilizada através de estratégias de Relaxação, Projeção e Linearização Externa.

O conteúdo do trabalho está organizado em 5 Capítulos, assim distribuídos:

### *CAPÍTULO 1 - Alguns Tópicos em Programação Multiobjetivo*

Introduz várias noções pertinentes ao estudo de problemas com múltiplos objetivos. Este Capítulo subdivide-se em duas partes distintas: a primeira é referente à identificação e caracterização analítica de soluções que satisfazem as condições de Pareto-otimalidade. Na segunda parte é feita uma classificação sucinta das principais linhas de desenvolvimento de métodos multiobjetivos.

### *CAPÍTULO 2 - Programação Multiobjetivo via Projeção*

São revistas algumas propriedades de conjuntos e funções convexas e em seguida inicia-se a proposição de um novo método multiobjetivo com nível de decisão no espaço dos objetivos. Através de manipulações adequadas, o problema original é decomposto em um subproblema escalar (monobjetivo) do tipo *Mín-Max* e em um problema mestre inteiramente formulado no espaço dos objetivos. Várias características importantes do método são apontadas.

### CAPÍTULO 3 - Métodos para o Espaço dos Objetivos

Discute a transposição de alguns métodos interativos de reconhecida eficiência ao espaço dos objetivos, como suporte à resolução do subproblema mes tre formulado no Capítulo 2. Demonstra-se que esta transposição proporciona inúmeras vantagens do ponto de vista de interação com o Decisor. A convergência do algoritmo proposto é estudada com detalhes.

### CAPÍTULO 4 - Aspectos da Resolução do Problema Min-Max

Analisa os vários aspectos envolvidos na resolução do problema *Min-Max* gerado no Capítulo 2. Procedimentos numéricos para a maximização e minimização das funções envolvidas são propostos e então aplicados a uma nova formulação do problema de planejamento da geração em sistemas hidrotérmicos.

### CAPÍTULO 5 - Aplicações

Registra o emprego da metodologia proposta no trabalho a problemas de planejamento na área de energia:

- . Planejamento econômico da geração de usinas térmicas com demanda estocástica;
- . Controle multiobjetivo de recursos hidráulicos.

### APÊNDICE A

Consiste da apresentação dos programas-fonte (FORTRAN) desenvolvidos durante o decorrer da Tese.

---

CAPÍTULO 1

ALGUNS TÓPICOS EM PROGRAMAÇÃO MULTIOBJETIVO

## 1.1. INTRODUÇÃO

A Programação Multiobjetivo (Multicritério, Vetorial), se distingue, essencialmente, de todos os demais ramos da programação matemática quanto ao sentido que empresta ao conceito de *solução* do problema. Do ponto de vista matemático, um problema de programação multiobjetivo (PMO) envolve a otimização (neste trabalho, minimização) de um vetor de funções escalares, escolhido de forma a quantificar certas características que um dado sistema deva apresentar. Contudo, o espaço de soluções de problemas desta natureza é parcialmente ordenado (Zadeh, 1963) e portanto existem soluções que não obedecem nenhuma relação de ordem do tipo " $\leq$ ". Deste modo, o conceito usual de solução *ótima* fica completamente descaracterizado e, em princípio, qualquer elemento do conjunto de soluções *eficientes* ou *dominantes* que satisfazem as condições de equilíbrio cooperativo de Pareto é candidato a solução do PMO. Como nenhuma destas soluções pode ser considerada *ótima* com respeito a qualquer outra, torna-se evidente a necessidade de critérios (subjetivos) adicionais para se chegar à solução final do problema. Estes critérios adicionais são fornecidos por um *Decisor* que através deles procura encontrar uma solução que proporcione um compromisso adequado entre os seus objetivos.

Distinguem-se portanto na solução de um problema multiobjetivo aspectos de *análise* - conceituação e geração de soluções eficientes - e de *síntese* - elaboração de procedimentos que permitam ao Decisor conduzir convenientemente o processo de análise. Este Capítulo está informalmente dividido em duas partes distintas. A primeira parte é dedicada aos aspectos de análise do problema multiobjetivo e, em particular, à caracterização de soluções eficientes em termos de soluções de problemas escalares bem definidos. Na segunda parte são introduzidas algumas noções de Utilidade e Preferência e em seguida é feita uma classificação bastante sucinta dos métodos multiobjetivos existentes.

## 1.2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA MULTIOBJETIVO

Um problema de programação multiobjetivo genérico com  $n$  variáveis de decisão,  $p$  restrições funcionais e  $m$  objetivos a minimizar pode ser formulado matematicamente de duas formas distintas. A formulação do PMO no espaço das variáveis de decisão é a mais usual e consiste em

$$\text{Min}_x f(x)' = [f_1(x) \dots f_m(x)] \quad (1)$$

$$g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p \quad (2)$$

onde, por hipótese,  $f_i(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$  ( $m \geq 2$ ) e  $g_j(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, p$  são funções de classe  $C^1$ , podendo ser não-lineares e, possivelmente, não-convexas. Por conveniência, o espaço de decisões viáveis será representado na maioria das vezes por  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $X \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, p\}$ . Deste modo, (1)-(2) pode também ser colocado como

$$\text{Min}_{x \in X} f(x) \quad (3)$$

A notação  $f[X]$  será empregada para representar o mapeamento ponto-a-ponto do espaço de decisões  $X$  no espaço dos objetivos (ou critérios)  $F = f[X] \triangleq \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = f(x), x \in X\}$ . A formulação do PMO no espaço dos objetivos fica então sendo

$$\text{Min}_{y \in F} y \quad (4)$$

A ordenação parcial dos vetores do  $\mathbb{R}^m$  é responsável pela distinção básica entre problemas de otimização multiobjetivo (vetoriais) e problemas de otimização escalares.

#### DEFINIÇÃO 1.1: CONJUNTOS ORDENADOS.

Diz-se que um conjunto  $Z$  é completamente ordenado de acordo com a relação de ordem " $\leq$ " se, dados quaisquer dois elementos  $z^1$  e  $z^2$  de  $Z$ , é sempre verdade que  $z^1 \leq z^2$  ou  $z^2 \leq z^1$  se verifica, e a relação de ordem " $\leq$ " exibe as propriedades,

$$i) \quad z^1 \leq z^1$$

$$ii) \quad z^1 \leq z^2 \text{ e } z^2 \leq z^3 \rightarrow z^1 \leq z^3$$

$$iii) \quad z^1 \leq z^2 \text{ e } z^2 \leq z^1 \rightarrow z^1 = z^2$$

□

Um conjunto  $\bar{E}$  *parcialmente* ordenado quando satisfaz (i)-(iii) mas não necessariamente quaisquer  $z^1$  e  $z^2 \in Z$  são comparáveis. O conjunto de números reais  $\mathbb{R}$  é completamente ordenado; o conjunto  $F$  apenas parcialmente, pois a minimização indicada em (3)-(4) induz o aparecimento de soluções não-comparáveis. Assim, os problemas de programação multiobjetivo são caracterizados pela inexistência de soluções ótimas, isto é, em geral

$$\nexists x^* \in X \mid f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in N(x^*, \varepsilon) \quad (5)$$

onde  $N(x^*, \varepsilon) \triangleq \{x \mid \|x^* - x\| < \varepsilon\}$ , qualquer que seja  $\varepsilon > 0$ . Em outras palavras, o conceito usual de otimalidade não é aplicável a problemas com múltiplos objetivos.

Ignorando momentaneamente que o problema (4) é apenas uma abstração matemática, uma formulação para o problema multiobjetivo baseada no espaço dos critérios poderia oferecer vantagens importantes sobre a formulação no espaço de decisões. A principal delas diz respeito à dimensão do espaço no qual o problema é tratado. Problemas reais com relativamente poucos objetivos a otimizar podem exibir milhares de variáveis de decisão, quando então uma abordagem com ênfase no espaço dos objetivos seria mais adequada, se considerados os custos computacionais envolvidos. De certa forma, a metodologia proposta no Capítulo 2 viabiliza a formulação (4), introduzindo uma representação adequada para  $F$ .

### 1.3. EXISTÊNCIA E CARACTERIZAÇÃO DE SOLUÇÕES EFICIENTES

Embora a noção de vizinhança não seja adequada a problemas multiobjetivos devido a presença de soluções não-comparáveis, é possível usar a ordenação parcial existente e assim procurar excluir pontos de  $F$  que não poderiam ser considerados objetivamente, soluções do PMO. Pareto (di Roccaferreira, 1973) motivou esta análise ao propor o seguinte padrão de comportamento para a Sociedade:

"A Sociedade deve oferecer os meios adequados para que cada indivíduo, como membro dela, possa auferir o máximo de *utilidade* para si próprio, desenvolvendo certas ações, sem entretanto prejudicar as ações desenvolvidas por qualquer outro indivíduo, no mesmo sentido. Quando esta situação é alcançada

da, a *Pareto-otimalidade* também é atingida."

Zadeh (1963) e mais tarde Yu (1974) interpretaram as idéias de Pareto em termos de *dominância*. As soluções *dominantes* seriam aquelas para as quais não existiriam quaisquer outras soluções factíveis do PMO fornecendo, componente-a-componente, valores menores ou iguais para todos os  $m$  objetivos, com pelo menos uma desigualdade estrita. Excluídas as soluções dominadas, restariam as não-comparáveis - *eficientes* - uma das quais, segundo um critério subjetivo do decisor, seria a solução final do problema.

### DEFINIÇÃO 1.2: SOLUÇÕES EFICIENTES.

Diz-se que  $x^* \in X$  é uma solução *eficiente* do PMO se não existe qualquer outra solução  $x \in X$  tal que  $f(x) \leq f(x^*)$ .  $\square$

Os termos eficiente, dominante, ou Pareto-ótima devem ser entendidos como sinônimos neste trabalho. O conjunto de todas as soluções eficientes do PMO será representado por  $X^*$  no espaço de decisões e por  $\Gamma = f[X^*]$  no espaço dos objetivos.

Nos métodos existentes para geração de soluções que satisfazem a Def. 1.2 é comum o emprego de técnicas especialmente desenvolvidas para a resolução de problemas escalares. Estas técnicas fornecem, a menos de problemas convexos, apenas soluções ótimas locais. Portanto é natural supor que qualquer método usado para a geração de pontos de  $X^*$  que incorpore estas técnicas seja capaz de fornecer soluções eficientes *locais*. A Fig. 1.1 tenta ilustrar esta situação para um problema com dois objetivos e uma variável de decisão.

Qualquer ponto no intervalo  $[x_a, x_b]$  ou  $[x_c, x_d]$  representa uma solução localmente eficiente do PMO. Observe que mesmo para uma situação simples como a mostrada na Fig. 1, o conjunto  $X^*$  é disjunto, em virtude da função  $f_1(\cdot)$  ser não-convexa. *Quasi-convexidade* das funções  $f_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, m$  sobre  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  é a condição suficiente exigida para que  $X^*$  seja *conexo* (Warburton, 1983). O conceito de eficiência local motiva a seguinte definição (Geoffrion, 1968; Paine et al., 1975).

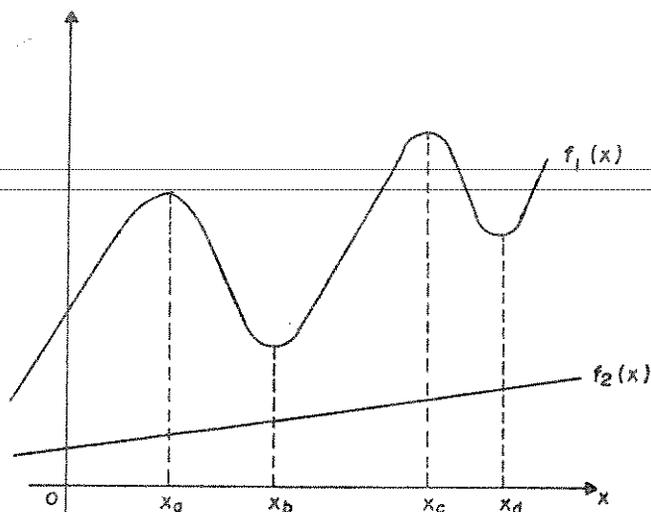


Fig. 1.1 - Exemplo típico de eficiência local

### DEFINIÇÃO 1.3: EFICIÊNCIA LOCAL.

$x^* \in X$  é uma solução localmente eficiente numa dada vizinhança  $N(x^*, \delta)$ , isto é,  $x^* \in X^* \cap N(x^*, \delta)$  se existe  $\delta > 0$  tal que  $x^*$  é eficiente em  $X \cap N(x^*, \delta)$ .  $\square$

### TEOREMA 1.1: EFICIÊNCIA GLOBAL

Sejam  $f_i(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$  funções convexas definidas sobre um conjunto convexo e compacto  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ . Então toda solução localmente eficiente é também globalmente eficiente.

**PROVA :** Geoffrion, 1968.  $\square$

O Teorema enunciado a seguir é fundamental para a caracterização analítica de soluções eficientes como soluções de problemas de otimização escalares.

**TEOREMA 1.2: TEOREMA FUNDAMENTAL.**

Se  $x^* \in X$  é eficiente então existem um inteiro  $i \in [1, \dots, m]$  e números reais  $\epsilon_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  ( $i \neq j$ ) tais que  $f_i(x^*) < f_i(x)$ , para todo  $x \in X$  compatível com as  $\epsilon$ -restrições.

$$f_j(x) \leq \epsilon_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (i \neq j) \quad (6)$$

**PROVA:** Chankong e Haimes, 1982.

**COROLÁRIO 1.2.1:**

Se  $x^*$  é eficiente, então para todo  $i \in [1, \dots, m]$ ,  $x^*$  é a solução ótima do problema escalar

$$\text{Min}_{x \in X} f_i(x) \quad (P_{\epsilon})$$

$$f_j(x) \leq \epsilon_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (i \neq j)$$

para  $\epsilon_j = \epsilon_j^* = f_j(x^*)$ ,  $j = 1, \dots, m$  ( $i \neq j$ ). A prova deste Corolário segue imediatamente das consequências do Teorema 1.2.

Desta forma torna-se possível estabelecer condições de existência de soluções eficientes em termos das condições de otimalidade de  $(P_{\epsilon^*})$ . Note que estes resultados são compatíveis com a Def. 1 pois um decréscimo no valor do objetivo  $f_i(\cdot)$  só é possível, para alguma solução factível  $x \in X$ , violando as  $\epsilon$ -restrições, isto é, degradando ao menos um dos  $(m-1)$  objetivos restantes.

Portanto, se  $x^*$  resolve  $(P_{\epsilon^*})$  existem multiplicadores  $\lambda_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, m$  ( $j \neq i$ ) e  $\beta_k \geq 0$ ,  $k = 1, \dots, p$  tais que, sob qualificação de restrições,  $x^*$  satisfaz as condições necessárias de Kuhn-Tucker para a existência de um mínimo local (Luenberger, 1973). Adotando a notação funcional para  $X$  e lembrando que  $\epsilon_j = f_j(x^*)$ , estas condições se escrevem na forma

$$g_k(x^*) \leq 0, \quad (7)$$

$$\beta_k g_k(x^*) = 0, \quad k = 1, \dots, p \quad (8)$$

$$\nabla f_i(x^*) + \sum_{j \neq i} \lambda_j \nabla f_j(x^*) + \langle \beta, \nabla g(x^*) \rangle = 0 \quad (9)$$

Como a solução de  $P(\varepsilon^*)$  não se altera quando o objetivo  $f_i(\cdot)$  é multiplicado por uma constante positiva  $\lambda_i$ , a condição (9) reduz-se então a

$$\langle \lambda, \nabla f(x^*) \rangle + \langle \beta, \nabla g(x^*) \rangle = 0 \quad (10)$$

As condições (7), (8) e (10), creditadas a Kuhn e Tucker (Chankong, 1977; Mukai, 1980) são condições necessárias para que  $x^*$  seja uma solução localmente eficiente do  $EMO$ . Contudo, entretanto destacar que nem toda solução de  $(P_{\varepsilon^*})$  é necessariamente eficiente. Suponha, por exemplo, que  $x^0$  também satisfaz as condições de Kuhn e Tucker de  $(P_{\varepsilon^*})$ , isto é,  $(P_{\varepsilon^*})$  possui soluções múltiplas. As condições de interesse são

$$f_j(x^0) \leq f_j(x^*) \quad (11)$$

$$\lambda_j (f_j(x^0) - f_j(x^*)) = 0 \quad (12)$$

Suponha ainda que a solução  $x^0$  é não-degenerada e que, para algum  $j \neq i$ ,  $\lambda_j = 0$ . Então  $f_j(x^0) < f_j(x^*)$ , o que junto com  $f_i(x^0) = f_i(x^*)$  e a condição (11) implica em  $f(x^0) \leq f(x^*)$ , contradizendo  $x^* \in X^*$ . É claro que esta situação deixa de ocorrer se, para algum  $i$ ,  $x^*$  é a solução única de  $(P_{\varepsilon^*})$  pois, neste caso, para todo  $x \in X$  satisfazendo  $f_j(x) \leq f_j(x^*)$ ,  $j = 1, \dots, m$  ( $j \neq i$ ) tem-se que  $f_i(x^*) < f_i(x^0)$ . Portanto, nenhuma função  $f_j(\cdot)$ ,  $j \neq i$  pode ter seu valor decrescido sem que o valor de  $f_i(\cdot)$  aumente em relação ao obtido com  $x^*$  e, conseqüentemente  $x^* \in X^*$ .

A unicidade de solução de  $(P_{\varepsilon^*})$  para algum  $i$  pode ser relaxada se em contrapartida  $x^*$  resolve  $(P_{\varepsilon^*})$  para todo  $i = 1, \dots, m$ . De fato, assumindo-se esta última hipótese,  $x^*$  não seria eficiente se existisse  $x^0 \in X$  compatível com as  $\varepsilon^*$ -restrições tal que, para algum  $i$ ,  $f_i(x^0) < f_i(x^*)$ . Mas isto contradiria a otimalidade de  $x^*$  para todo  $i = 1, \dots, m$ .

Em termos práticos, estes resultados são úteis por permitirem a geração de soluções eficientes, indispensável ao desenvolvimento de qualquer método multiobjetivo, através da escolha apropriada de  $\epsilon_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  ( $j \neq i$ ). Em particular, o método de Haines e Hall (1974) e seus desenvolvimentos posteriores (Chankong, 1977) fazem uso constante do problema  $(P_\epsilon)$ .

Contudo, o emprego desta técnica fica condicionada a alguns fatores. A escolha de  $\epsilon_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  ( $j \neq i$ ) deve ser tal que  $P(\epsilon)$  possua solução factível, o que pode não ser uma tarefa simples. Obtida uma solução de  $(P_\epsilon)$  para algum  $i$ , restaria ainda comprovar que a solução única e, a menos de problemas *estritamente* convexos, isto exigiria um exame das condições de segunda ordem de  $(P_\epsilon)$ . A estratégia alternativa de resolver  $(P_\epsilon)$  para todo  $i$  parece não ser muito prática. Por outro lado, através da técnica das  $\epsilon$ -restrições é possível lidar com problemas não-convexos e, uma vez que as condições de segunda ordem sejam satisfeitas, interpretar os multiplicadores de Lagrange associados às  $\epsilon$ -restrições ativas como *trade-offs* locais entre objetivos do PMO (Chankong e Haines, 1982). Na prática, entretanto, estas características parecem compensar qualquer eventual ocorrência de soluções múltiplas, sobretudo em problemas multiobjetivos não-lineares.

Outra técnica de geração de soluções eficientes bastante popular em programação multiobjetivo é a técnica de ponderação, na qual os  $m$  objetivos originais do problema são combinados aditivamente numa única função. Esta técnica pode ser justificada a partir da analogia entre as condições (7), (8) e (10) e as condições de Kuhn e Tucker do problema escalar.

$$\text{Min}_{x \in X} \langle \lambda, f(x) \rangle \quad (P_\lambda)$$

Motivados por esta correspondência, grande parte dos métodos multiobjetivos existentes, incorporam de alguma forma o problema  $(P_\lambda)$  (Hwang e Masud, 1975; Cohon, 1978). Entretanto, para a maioria destes métodos,  $\lambda$  deixa de ter interpretação de vetor de multiplicadores de Lagrange associados às  $\epsilon$ -restrições para assumir o papel de vetor de pesos, atribuídos a cada objetivo conforme a sua importância relativa ou ainda para compatibilizar suas diferentes unidades. É comum que estes pesos estejam normalizados:

$$\lambda \in \Lambda \triangleq \{ \lambda \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_i \geq 0 \text{ e } \sum_i \lambda_i = 1 \} \quad (13)$$

Uma interpretação precisa do problema ponderado  $(P_\lambda)$  será de grande utilidade em certas demonstrações deste trabalho. No espaço dos objetivos,  $(P_\lambda)$  é equivalente a<sup>(\*)</sup>

$$\text{Min}_{y \in F} \langle \lambda, y \rangle \quad (14)$$

Lembrando então que  $\langle \lambda, y \rangle = \|\lambda\| \cdot \|y\| \cos \alpha(y)$ , onde  $\alpha(y)$  é o ângulo formado entre os vetores  $\lambda$  e  $y$ ,  $(P_\lambda)$  pode ser reescrito como

$$\text{Min}_{y \in F} \|y\| \cos \alpha(y) \quad (15)$$

que consiste exatamente em procurar minimizar a projeção de  $y$  na direção do vetor  $\lambda$ . A Fig. 1.2 tenta descrever esta situação para um problema com dois objetivos.

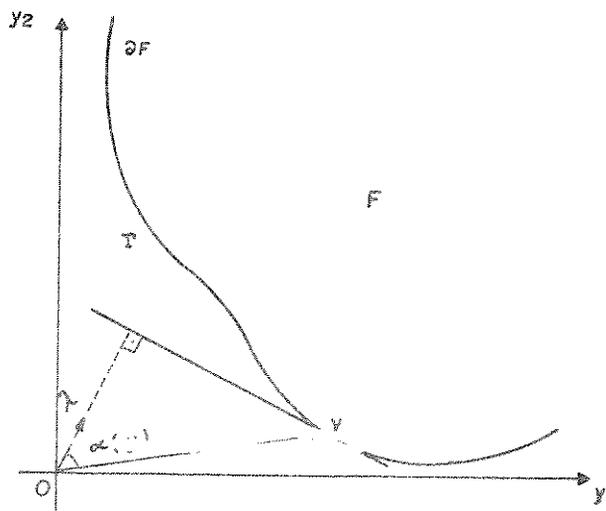


Fig. 1.2 - Interpretação gráfica de (15)

(\*) O artifício de transpor o PMO ao espaço  $F$  facilita certas interpretações e será utilizado com frequência neste trabalho.

Assim, verifica-se intuitivamente que pontos em  $X^*$  são mapeados em  $\Gamma \subseteq \partial F$ , onde  $\partial F$  é o contorno de  $F$ . Contudo, todos os pontos sobre  $\Gamma$  são eficientes, mas apenas os que pertencem a algum hiperplano suporte de  $F$  podem ser gerados através do problema ponderado  $(P_\lambda)$ . Esta limitação pode ser explicada pela ausência de convexidade no problema  $(P_\lambda)$ , sugerida implicitamente na Fig. 1.2. O exemplo a seguir enfatiza esta característica do problema  $(P_\lambda)$ .

**EXEMPLO 1.1:** (Bowman, 1975). Considere o seguinte problema biobjetivo, do tipo 0-1:

$$\text{Min}_{x \in X} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} \quad (15)$$

onde

$$f_1(x) = x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$f_2(x) = 4x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$X = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1, x_2, x_3 = 0,1\}$$

O conjunto de soluções eficientes do problema é dado por  $X^* = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$  e coincide com o conjunto de suas soluções factíveis  $X$ . No espaço dos objetivos tem-se então  $\Gamma = \{(y_1, y_2) \mid (1,4); (3,3); (4,1)\}$ . O problema ponderado relativo ao Exemplo se escreve como

$$\text{Min}_{x \in X} (4-3\alpha)x_1 + 3x_2 + (1+3\alpha)x_3 \quad (17)$$

Através de variação paramétrica de  $\alpha \in [0,1]$  obtêm-se as soluções eficientes  $x^* = (0,0,1)$ , se  $\alpha \in [0,1/2)$  e  $x^* = (1,0,0)$  se  $\alpha \in [1/2,1]$ . A solução eficiente  $x = (0,1,0)$  não pode ser gerada a partir de (17).  $\square$

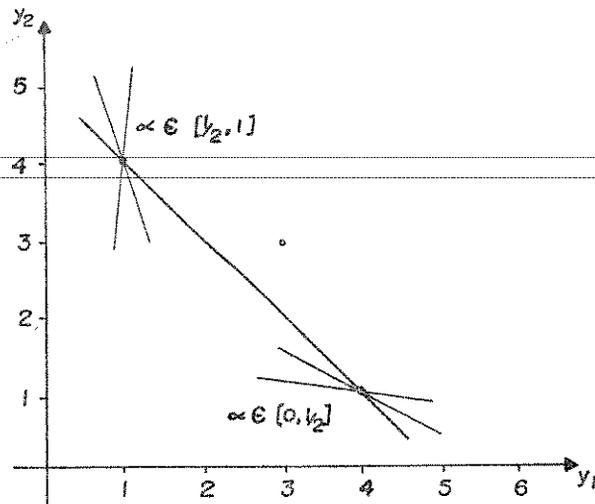


Fig. 1.3 - Soluções do problema (17) em função de  $\alpha$

Em casos gerais, apenas a envoltória (*hull*) convexa de  $\Gamma$  poderá ser gerada através do problema  $(P_\lambda)$ . Entretanto, sob hipóteses de convexidade,  $(P_\epsilon)$  e  $(P_\lambda)$  são equivalentes.

**TEOREMA 1.3: EQUIVALÊNCIA ENTRE  $(P_\epsilon)$  E  $(P_\lambda)$ .**

Seja  $X$  um conjunto convexo e  $f_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , funções convexas definidas sobre  $X$ . Se  $x^*$  resolve  $(P_\epsilon)$  então existe  $\lambda \in \Lambda$  tal que  $x^*$  também resolve  $(P_\lambda)$ .

**PROVA:** Chankong e Haimes, 1982.  $\square$

O Corolário 1.3.1, a seguir, formaliza em termos matemáticos a interpretação geométrica do problema ponderado, fornecida pela Fig. 1.2.

**COROLÁRIO 1.3.1:**

Se  $x^* \in X$  resolve  $(P_\lambda)$  e qualquer das hipóteses

- i)  $x^*$  é a solução única de  $(P_\lambda)$  (Zadeh, 1963)
- ii)  $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, m$  (Geoffrion, 1968)

é satisfeita, então  $f(x^*) \in \Gamma \subseteq \partial F$ .  $\square$

A partir do resultado do Corolário 1.3.1 torna-se teoricamente possível gerar todo o conjunto  $\Gamma$ , tomando-se valores para  $\lambda$  no conjunto  $\Lambda$ . Em particular, as soluções de  $(P_\lambda)$  obtidas com o subconjunto  $\Lambda^+ \triangleq \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda > 0\}$  satisfazem uma definição mais estrita do conceito de solução eficiente, introduzida por Geoffrion (1968) no intuito de excluir certas soluções eficientes com características indesejáveis.

**DEFINIÇÃO 1.4: EFICIÊNCIA PRÓPRIA.**

Diz-se que  $x^* \in X$  é uma solução *propriamente* eficiente do PMO se  $x^* \in X^*$  e existe um escalar  $M > 0$  tal que, para cada  $i, i = 1, \dots, m$  e cada  $x \in X$  satisfazendo  $f_i(x) < f_i(x^*)$  existe no mínimo um  $j \neq i$ , com  $f_j(x) > f_j(x^*)$  e

$$\frac{f_i(x) - f_i(x^*)}{f_j(x^*) - f_j(x)} \leq M \quad \square \quad (18)$$

Esta nova definição visa basicamente excluir soluções eficientes em que o crescimento num dos objetivos pode ser feito arbitrariamente grande em relação ao decréscimo de qualquer outro, situação não prevista nas condições (7), (8) e (10). Do ponto de vista do Decisor, efeitos de saturação deste tipo parecem indesejáveis (Geoffrion, 1968). Considere, por exemplo, a situação descrita na Fig. 1.4.

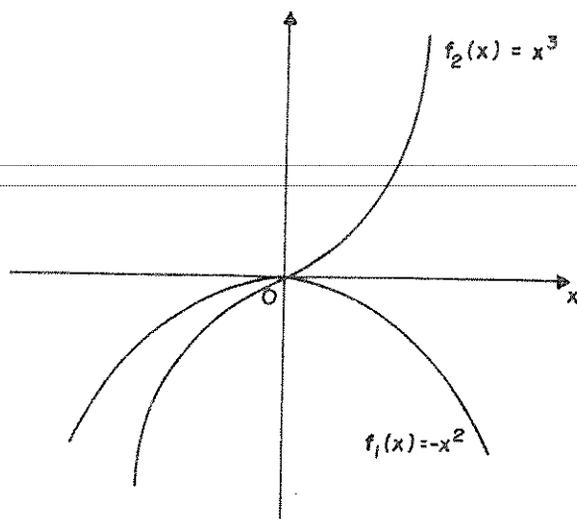


Fig. 1.4 - Ocorrência de soluções eficientes impróprias

Note que se  $X \equiv \mathbb{R}^+$  então  $x^* \equiv \mathbb{R}^+$ ; isto é, todo número real não-negativo é uma solução eficiente deste problema hipotético. Em particular  $x^* = 0 \in X^*$ . Contudo, a relação

$$\frac{f_1(x) - f_1(x^*)}{f_2(x^*) - f_2(x)} = \frac{-x^2 - 0}{0 - x} = \frac{1}{x} \quad (x > 0) \quad (19)$$

pode ser feita arbitrariamente grande escolhendo-se  $x$  suficientemente pequeno. Portanto,  $x^*$  não é propriamente eficiente.

Em termos de praticidade, a principal vantagem no emprego de  $(P_\lambda)$  como gerador de soluções eficientes (em relação a  $(P_\epsilon)$ ) é tornar desnecessária uma análise a posteriori para se saber se a solução obtida é de fato eficiente. Restringindo-se os valores de  $\lambda$  a  $\Lambda^+$ , obtém-se seguramente uma solução propriamente eficiente e caso o PMO seja convexo qualquer solução propriamente eficiente poderá ser gerada. Outro fator importante a considerar é que mesmo em problemas convexos,  $(P_\epsilon)$  pode exibir restrições não lineares e as dificuldades de solução associadas a este tipo de problema são bem conhecidas. É claro que sendo convexo,  $(P_\epsilon)$  poderia ser resolvido por métodos duais. Entretanto, a utilização do problema  $(P_\lambda)$  é aparentemente mais natural neste caso.

#### 1.4. EFICIÊNCIA EM CONTROLE MULTIOBJETIVO

Formalmente, as condições de existência de soluções eficientes em problemas multiobjetivos que envolvam relações dinâmicas não diferem muito de condições já estabelecidas com base no Princípio do Mínimo de Pontryagin (Kirk, 1970; Sage & White III, 1972) para o caso escalar. De fato, em analogia com o caso estático discutido na seção anterior, é correto admitir que dada uma lei de controle *eficiente* é sempre possível obter esta mesma lei de controle como solução de um problema de controle ótimo escalar apropriado. Na verdade nenhum dos resultados precedentes, e em particular o Teorema 1.2, restringe sua validade a problemas estáticos. Entretanto, a abordagem de problemas dinâmicos apresenta certas especificidades que exigem o emprego de um formalismo algo diverso do que o até agora utilizado e que deve ser obedecido quando se admite a presença de vários critérios de desempenho para o sistema tratado.

Embora do ponto de vista prático muito pouco se tenha feito no domínio do controle multicritério de sistemas dinâmicos, esta área vem merecendo importantes contribuições teóricas sobretudo a partir da metade da década de 60. O artigo de Da Cunha e Polak (1967) foi sem dúvida um dos primeiros a se ocupar com a caracterização analítica de soluções para este tipo de problema através de escalarização. Stern e Ben-Israel (1973) estudaram propriedades das soluções eficientes de problemas de controle ótimo lineares com vetor de funções de custo quadráticas e um pouco mais tarde Salukvadze (1974) derivou condições de existência de soluções *ótimas* em controle multicritério. São igualmente importantes os trabalhos de Yu e Leitmann (1974) e Schmitendorf e Leitmann (1974), nos quais baseia-se parte desta seção.

Considere um sistema físico descrito pelo modelo diferencial

$$\dot{x} = F(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (20)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  representa estado,  $u(t) \in \mathbb{R}^r$  representa controle e  $F(.,.) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$ .

**DEFINIÇÃO 1.5:** CONTROLE ADMISSÍVEL.

Uma lei de controle  $u(\cdot):[0,T] \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^r$  é admissível se é limitada, gera uma solução  $x(\cdot):[0,T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  compatível com (20) e satisfaz  $N(x(T)) = 0$  para  $T$  (livre)  $\in [0, \infty)$ , onde  $N(\cdot):\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q \in C^1$ .

O desempenho do sistema (20) é avaliado através de um m-vetor de critérios  $J(\cdot)' = [J_1(\cdot) \dots J_m(\cdot)]$  com componentes

$$J_i(u(t)) = \int_0^T f_i(x(t), u(t)) dt, \quad i = 1, \dots, m \quad (21)$$

onde  $f_i(\cdot, \cdot): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$ .

**DEFINIÇÃO 1.6:** LEI DE CONTROLE EFICIENTE.

Um controle admissível  $u^*(\cdot)$  é também eficiente se e apenas se não existe qualquer outro controle admissível  $u(\cdot)$  tal que  $J(u(\cdot)) \leq J(u^*(\cdot))$ .  $\square$

O Teorema 1.4 a seguir reafirma a validade da técnica das  $\epsilon$ -restrições ao caso dinâmico.

**TEOREMA 1.4:** FUNDAMENTAL.

Se  $u^*(\cdot)$  é eficiente, então para todo  $j \in [1, \dots, m]$ ,  $u^*(\cdot)$  é a solução do seguinte problema de controle ótimo

$$\text{Min}_{u(t) \in U} \int_0^T f_j(x(t), u(t)) dt \quad (22)$$

s.a.

$$\dot{x} = F(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (23)$$

$$\int_0^T f_j(x(t), u(t)) dt \leq J_j^*, \quad j = 1, \dots, m \quad (24)$$

( $j \neq i$ )

$$N(x(T)) = 0 \quad (25)$$

onde  $J_j^* \triangleq J_j(u^*(t))$ .

No âmbito da Teoria de Controle Ótimo, diz-se que o problema (22)-(25) possui restrições *isoparamétricas* (eqs. (24)). O procedimento usualmente adotado neste caso é procurar obter, através de alguma manipulação, um problema de controle ótimo equivalente a (22)-(25) ao qual o Princípio do Mínimo possa ser diretamente aplicado. A transformação a seguir é sugerida por Schmitendorf (1976).

Seja  $u^*(t)$  a solução ótima de (22)-(25) para um dado  $i$ . Sejam ainda as seguintes funções auxiliares, definidas por

$$y_j^*(t) = \int_0^t f_j(x^*(t), u^*(t)) dt, \quad j = 1, \dots, m \quad (j \neq i) \quad (26)$$

$$\dot{z}^* = v_j^*(t), \quad z_j^*(0) = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (j \neq i) \quad (27)$$

$$v_j^*(t) = [y_j^*(T) - J_j^*] / T^*, \quad \text{para } t \in [0, T] \text{ e } j = 1, \dots, m \quad (j \neq i) \quad (28)$$

#### TEOREMA 1.5:

Se  $u^*(.)$  resolve (22)-(25) então  $(u^*(.), v^*(.))$  é a solução do seguinte problema de controle ótimo:

$$\text{Min}_{\substack{u(t) \in U \\ v(t) \leq 0}} \int_0^T f_i(x(t), u(t)) dt \quad (29)$$

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (30)$$

$$\dot{y}_j = f_j(x(t), u(t)), \quad y_j(0) = 0 \quad (31)$$

$$\dot{z}_j = v_j(t), \quad z_j(0) = 0 \quad (32)$$

$$y_j(T) - J_j^* - z_j(T) = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (j \neq i) \quad (33)$$

$$N(x(T)) = 0 \quad (34)$$

Uma vez comprovada a equivalência entre os problemas (22)-(25) e (29)-(34), as condições necessárias de Pareto-otimalidade seguem da aplicação direta do Princípio do Mínimo a este último problema. Simplificações adicionais nas condições obtidas levam ao enunciado do seguinte *Teorema* (Schmitendorf, 1976).

### TEOREMA 1.6:

Se  $(u^*(.), v^*(.))$  é a solução ótima do problema (29)-(34) então existem um vetor  $\alpha \geq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^m$ , uma função contínua  $p(.): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $(p(t), \alpha) \neq 0$  sobre  $[0, T]$ , um q-vetor  $\gamma$  e uma função  $H(.): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  com

$$H(x(t), u(t), p(t), \alpha) = \langle \alpha, f(x(t), u(t)) \rangle + \langle p(t), F(x(t), u(t)) \rangle$$

onde  $f(.,.)' = [f_1(.,.) \dots f_m(.,.)]$ , tais que

$$i) \quad \dot{p}(t) = - \frac{\partial}{\partial x(.)} H(x^*(t), u^*(t), p(t), \alpha), \quad p(T^*) = \frac{\partial}{\partial x(.)} N(x^*(T^*))' \gamma$$

$$ii) \quad H(x^*(t), u^*(t), p(t), \alpha) \leq H(x(t), u(t), p(t), \alpha), \quad \forall u(.) \in U$$

$$iii) \quad H(x^*(t), u^*(t), p(t), \alpha) = 0.$$

Previsivelmente, (i)-(iii) são também as condições necessárias de otimalidade do problema de controle ótimo com função de custo  $\langle \alpha, J(.) \rangle$  sujeitos às restrições originais do sistema. O exemplo a seguir, adaptado de Yu e Leitmann (1974), ilustra alguns aspectos envolvidos na resolução de problemas multicritérios dinâmicos.

**EXEMPLO 1.2:** Seja um sistema físico descrito por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

onde  $u(t) \in U \triangleq \{u(t) \mid |u(t)| < 1\}$ ,  $x(t) \in X \triangleq \{x(t) \mid |x_1(t)| \leq 3\}$  e  $x_1(T) = 0$ . Deseja-se

- i) minimizar  $J_1(u(t)) = T$
- ii) maximizar  $J_2(u(t)) = x_2(T)$ .

Resolvendo-se a equação diferencial do modelo, vem então

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau \quad (36)$$

A solução de (36) pode ser dividida em

a)  $u(\tau) = 1, \quad \forall \tau \in [0, T]$ .

Tem-se então que, efetuando os cálculos necessários,

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} + 1 \\ t \end{bmatrix} \quad \text{ou, eliminando } t, \quad x_1 = \frac{1}{2} x_2^2 + 1 \quad (37)$$

b)  $u(\tau) = -1, \quad \forall \tau \in [0, T]$ .

De maneira análoga,

$$x(t) = \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2} + 1 \\ -t \end{bmatrix}, \quad x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2 + 1 \quad (38)$$

Assim, tendo em vista que  $|x_1(\cdot)| \leq 3$ , o conjunto de pontos dos espaços de estados atingíveis a partir da condição inicial (1,0) e que satisfa-

zem as restrições impostas  $\bar{e}$  dado por

$$\{x(t) | x_1(T) = 0, |x_2(T)| \leq 2\} \quad (39)$$

Sabe-se ainda que a solução de problemas desta natureza  $\bar{e}$  do tipo *bang bang* (Sage & White III, 1972), isto  $\bar{e}$ ,

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, s) \\ 1, & t \in [s, T] \end{cases} \quad (40)$$

a qual fica completamente caracterizada a partir da determinação do *tempo de comutação*  $s$  (Fig. 1.5).

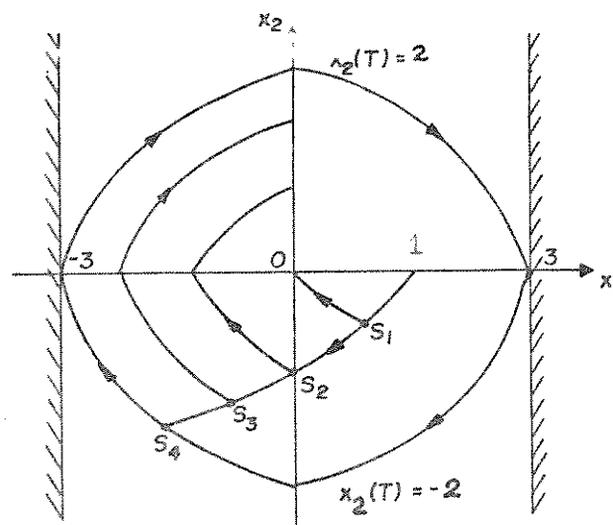


Fig. 1.5 - Representação do espaço de estados do exemplo 1.2

Na verdade, (40) representa *todo* o conjunto de controles eficientes do problema. Note que os critérios dependem de forma antagônica do tempo de comutação. Enquanto  $x_2(T)$  cresce com  $s$ , o tempo final  $T$  aumenta.  $\square$

Embora bastante simples, o exemplo abordado evidencia características próprias de sistemas dinâmicos. A principal delas  $\bar{e}$  que o espaço de decisões do problema e portanto o espaço de controles eficientes dificilmente poderão

ser interpretados de forma satisfatória num caso mais geral do que o foi tratado, apesar de conceitualmente serem análogos ao caso estático. Este fator torna indispensável que o processo de decisão seja mantido no espaço dos critérios. Num exemplo similar a este, Waltz (1967) também tratou de problemas de tempo mínimo tendo como critério secundário a minimização do esforço de controle ( $\int_0^T |u(t)| dt$ ). Problemas envolvendo aplicações práticas são entretanto raros.

Considere agora o seguinte modelo discreto

$$x(k+1) = F(x(k), u(k)), \quad x(0) = x_0 \quad (41)$$

onde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  representa estado,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  representa controle e  $F(.,.) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1$ . Por questão de praticidade, o tempo final  $T$  (um inteiro positivo) é mantido fixo, mas o estado final  $x(T)$  pode variar. O desempenho do sistema é ainda medido por um  $m$ -vetor de critérios  $J(.)' = [J_1(.) \dots J_m(.)]$  com componentes agora na forma

$$J_i(u(k)) = \sum_{k=0}^{T-1} [f_i(x(k), u(k))] + f_{iT}(x(T)), \quad i = 1, \dots, m \quad (42)$$

onde  $f_i(.,.) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f_{iT}(.) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são de classe  $C^1$  em relação aos seus argumentos. Tendo em vista as características do método iterativo proposto neste trabalho, assumamos a existência do seguinte critério global

$$J(u(k)) = \sum_{k=0}^{T-1} \langle \lambda, f(x(k), u(k)) \rangle + \langle \lambda, f_T(x(T)) \rangle \quad (43)$$

onde  $\lambda \in \Lambda$ ,

$$f(.,.)' = [f_1(.,.) \dots f_m(.,.)]$$

$$f_T(.)' = [f_{1T}(.) \dots f_{mT}(.)]$$

As condições necessárias de optimalidade para o problema de minimização de (43) sujeito a (41) são estabelecidas com base no Princípio do Mínimo Discreto, a seguir (Sage e White III, 1972).

**TEOREMA 1.7:**

Se  $u^*(k)$ ,  $k = 0, \dots, T-1$ ,  $u^*(.) \in U$  minimiza (43) sujeito a (41) então existe um  $n$ -vetor  $p(k)$ ,  $k = 0, \dots, T-1$  e uma função  $H(.) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  com

$$H(x(k), u(k), p(k)) = \langle \lambda, f(x(k), u(k)) \rangle + \langle p(k), F(x(k), u(k)) \rangle$$

tal que

$$i) \quad p(k-1) = \frac{\partial}{\partial x(k)} H(x^*(k), u^*(k), p(k)), \quad p(T-1) = \frac{d}{dx(T)} f_T(x^*(T))' \lambda$$

$$ii) \quad H(x^*(k), u^*(k), p(k)) \leq H(x(k), u(k), p(k)), \quad \forall u(.) \in U$$

Além disso,  $u^*(.)$  será certamente *eficiente* se for a única solução do problema e/ou  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Esta afirmação poderia ser facilmente demonstrada a partir da equivalência entre problemas de controle ótimo discreto com horizonte finito e problemas de programação matemática (Canon, Collum e Polak, 1970). Esta equivalência é particularmente importante quando na prática se colocam problemas com restrições nas variáveis de estado, aos quais o Princípio do Mínimo não é universalmente válido, e será utilizada de forma implícita nos Capítulos 4 e 5.

**1.5. PREFERÊNCIAS E FUNÇÕES UTILIDADE**

A formalização da estrutura de preferências do Decisor por pontos ou regiões do espaço dos critérios é certamente a técnica de abordagem mais adequada à resolução de problemas complexos de decisão. Busca-se com esta técnica, modelar matematicamente as atitudes do Decisor face a determinadas alternativas que lhe são propostas, de forma a inferir um comportamento aproximado de sua *função utilidade*. O objetivo básico de todo este processo é estabelecer uma ordenação completa para os vetores do  $\mathbb{R}^m$ , baseada no grau de utilidade, para o Decisor, de cada combinação de valores assumidos pelos critérios.

Nesta seção, analisam-se alguns aspectos qualitativos de funções do ti

po utilidade, sem se incorrer diretamente na questão de como determiná-las na prática. Em particular são apresentados resultados pertinentes aos métodos que incorporam preferências, brevemente discutidos na seção seguinte.

A ordenação lexicográfica é provavelmente a forma mais usual de estruturação de preferências encontrada na literatura. Segundo este método, o Decisor deve estruturar suas preferências meramente priorizando os critérios que considera mais importantes. Uma vez ordenados - seja  $a = \{a_1(x), \dots, a_m(x)\}$  o conjunto ordenado do Decisor, onde  $a_j = f_j(x)$  para  $i, j = 1, \dots, m$  - a solução ótima do problema será aquela que minimiza o maior número possível de critérios ao mesmo tempo, isto é,

$$x^* = \arg \text{Min}_{x \in X} \text{Lex} \{a\} \quad (44)$$

onde  $\text{Min Lex}$  significa *mínimo lexicográfico* de  $a$ . Em termos mais precisos,  $x^*$  é obtida ao fim do processo sequencial

$$\text{Min}_{x \in X_{i-1}} a_i(x), \quad i = 1, \dots, m \quad (45)$$

$$X_0 = X \quad (46)$$

onde  $X_i \triangleq \{x \in X_{i-1} \mid x \text{ minimiza } a_i(x) \text{ sobre } X_{i-1}\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Este tipo de método tem como principal desvantagem o fato da solução final  $x^*$  ser extremamente sensível à ordenação, uma característica indesejável se alguns dos critérios possuem aproximadamente a mesma importância (Haines et al, 1975). Uma variante a este procedimento básico foi proposta por Waltz (1967). Na tentativa de reduzir a sensibilidade à ordenação, este novo método introduz a possibilidade do Decisor estabelecer *níveis de aspiração*, faixas dentro das quais o Decisor concorda que os critérios variem. Após a minimização de  $a_1(x)$  sobre  $X$  - seja  $a_1^*$  o valor ótimo de  $a_1(x)$  - os demais problemas para  $i = 2, \dots, m$  então seriam

$$\text{Min}_{x \in X} a_i(x) \quad (47)$$

$$a_j(x) \leq (1 + \alpha_j) a_j^*, \quad j = 1, \dots, i-1 \quad (48)$$

onde  $\alpha_j \in [0,1]$  representa um certo percentual de  $a_j^*$  que o Decisor está disposto a abrir mão para tentar melhorar as soluções dos problemas seguintes. Waltz (1967) utilizou este procedimento para resolver o problema de controle ótimo (minimização do tempo final x minimização do esforço de controle) comentado na seção anterior. McGrew e Haimes (1974) utilizaram o procedimento básico (45)-(46) para tratar o problema de otimização e identificação conjunta de sistemas.

Este tipo de abordagem (ordenação lexicográfica) é criticável na medida em que não comporta uma análise sobre alternativas de solução do problema ao exigir do Decisor uma definição global de suas preferências baseada em objetivos.

A estruturação de preferências do Decisor por pontos do espaço de critérios, em oposição aos métodos anteriores, propicia maior flexibilidade ao Decisor para a definição de sua solução de compromisso. Entretanto, para viabilizar este tipo de abordagem, quaisquer dois pontos  $y^1$  e  $y^2$  do  $\mathbb{R}^m$  devem ser *comparáveis* de acordo com o julgamento subjetivo do Decisor, no sentido de que uma e apenas uma das sentenças a seguir é verdadeira (Keeney e Raiffa, 1976; Cohon, 1978):

- i)  $y^1 \sim y^2$  : o Decisor é indiferente entre as alternativas  $y^1$  e  $y^2$ ;
- ii)  $y^1 \succ y^2$  : o Decisor prefere a alternativa  $y^1$  a  $y^2$ ;
- iii)  $y^1 \succcurlyeq y^2$  : o Decisor prefere a alternativa  $y^2$  a  $y^1$ .

Deve-se ressaltar o caráter apenas *ordinal* em (i)-(iii), pois em nenhum dos casos o Decisor precisa realmente quantificar suas preferências, isto é, indicar que prefere a alternativa  $y^1$ , que em termos de utilidade é 10 vezes superior a alternativa  $y^2$ , por exemplo. Isto exigiria uma análise *cardinal* das alternativas  $y^1$  e  $y^2$  por parte do Decisor que, obviamente, é muito mais complexa.

As sentenças (i)-(iii) sugerem uma forma de se estruturar as preferências do Decisor em curvas de nível, mais conhecidas na literatura por *curvas de indiferença* ou *curvas de isopreferência*. O processo de construção destas curvas pode ser ilustrado com o auxílio da Fig. 1.6.

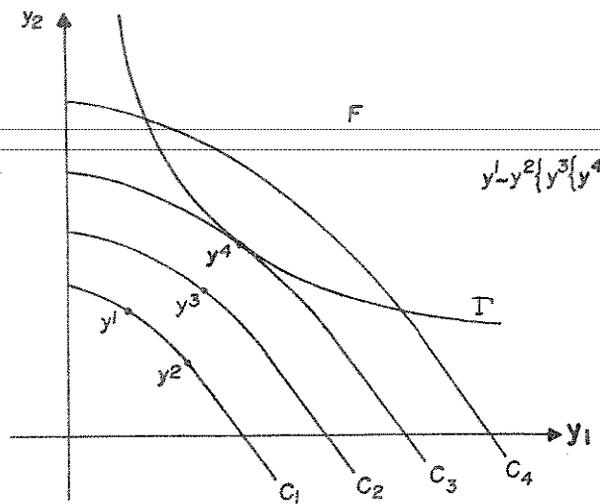


Fig. 1.6 - Curvas de indiferença do Decisor

Assim, questionando o Decisor quanto a diferentes alternativas que lhe são apresentadas, cria-se um mecanismo para que as suas curvas de indiferença sejam levantadas. O problema então poderia ser colocado nos seguintes termos: encontrar  $y^* \in F$  tal que

$$y^* \{y, \quad \forall y \in F \quad (49)$$

Supondo-se racionalidade e coerência das respostas do Decisor e ainda a necessidade de manter factibilidade da decisão, este processo certamente levaria a uma das soluções eficientes de  $\Gamma$ . Geoffrion (1967) demonstrou este resultado de uma maneira mais formal.

As curvas de indiferença do Decisor podem ser interpretadas como curvas de nível de sua função utilidade.

#### DEFINIÇÃO 1.7: FUNÇÃO UTILIDADE.

Uma função  $u(\cdot)$ , que associa um número real  $u(y)$  a cada ponto  $y \in F$  é denominada função utilidade representativa das preferências do Decisor se (Keeney, 1972; Fishburn, 1974):

$$i) \quad y^1 \sim y^2 \quad \Leftrightarrow \quad u(y^1) = u(y^2)$$

$$ii) \quad y^1 \{ y^2 \quad \Leftrightarrow \quad u(y^1) \leq u(y^2)$$

É claro que se tal função pudesse ser precisamente determinada, o problema multiobjetivo seria então substituído pelo problema equivalente

$$\text{Min}_{y \in F} \quad u(y) \quad (50)$$

para o qual existem técnicas de solução apropriadas.

A *Teoria de Utilidade Multiatributo* (Keeney, 1972) trata da conceituação e elaboração de procedimentos que possibilitem identificar  $u(\cdot)$  corretamente. Em geral, estes procedimentos são baseados em algumas hipóteses simplificadoras, uma vez que formas gerais para  $u(\cdot)$  são de difícil determinação prática. A *independência preferencial* é a principal delas. Assume que a estrutura de preferências do Decisor por cada objetivo não depende dos valores tomados por todos os demais. Esta hipótese viabiliza algumas formas especiais para  $u(\cdot)$  como a aditiva e a multiplicativa.

$$u(y) = \sum_{i=1}^m u_i(y_i) \quad (51)$$

$$u(y) = \prod_{i=1}^m u_i(y_i) \quad (52)$$

Um importante caso particular de (51) são as funções utilidade *lineares*

$$u(y) = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i \quad (53)$$

onde  $\lambda_i \geq 0$  são coeficientes de ponderação que deveriam refletir a importância relativa entre os objetivos para o Decisor. Entretanto isto raramente ocorre, isto é, a solução de (53) em geral não refletirá a importância (no sentido proporcional) que o Decisor quis em princípio atribuir aos obje-

tivos. A explicação para este fato tem raízes na hipótese pouco realista de independência preferencial, mencionada anteriormente.

Por outro lado, existe uma justificativa teórica para tomar-se  $u(.)$  na forma (53). Se  $\Gamma$  é convexa, então a mesma solução eficiente  $y^* \in \Gamma$  que resolve (50) pode ser obtida através de (53) com uma escolha apropriada de  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . No Capítulo 2 deste trabalho indica-se como a partir de procedimentos iterativos é possível obter coeficientes  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  com esta propriedade.

A existência de uma função utilidade explícita e suas hipóteses sobre independência preferencial tornou-se uma exigência desnecessária com o aparecimento de métodos iterativos. Estes métodos requerem do Decisor apenas informações parciais e progressivas sobre suas preferências, o que na prática equivale a assumir que o Decisor possui uma função utilidade implícita. Neste caso, deve-se ter em mente que a formulação (50) é apenas figurativa.

Embora descartem a necessidade de hipóteses rígidas sobre  $u(.)$ , estes métodos via de regra assumem que esta função apresenta certas características globais tais como convexidade, monotonicidade e diferenciabilidade que em muitos casos podem ser facilmente justificadas. Quando é apropriada, a monotonicidade justifica a suposição de que  $u(.)$  é uma função convexa não-decrescente de cada componente  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , pois entre duas soluções  $f^1, f^2 \in F$  tais que  $f^1 \leq f^2$  onde a desigualdade vale apenas para uma componente  $j$ , o Decisor certamente não preferirá  $f^2$ , por uma questão de coerência. Isto se traduz matematicamente por

$$f^1 \leq f^2 \quad \Leftrightarrow \quad u(f^1) < u(f^2) \quad (54)$$

De fato, particularizando este raciocínio para quando existe apenas um critério ( $m = 1$ ), (50) seria equivalente ao problema

$$\text{Min}_{y_1 \in F} y_1 \quad (55)$$

o que em parte assegura a validade da hipótese. Embora na Def. 1.7 as relações (i) e (ii) não tenham esta conotação, dificilmente um Decisor poderia quantificar suas preferências em termos absolutos, isto é, associando um número real  $u(y)$  a cada alternativa  $y \in F$  proposta, como poderia ser sugere-

rindo por (54). Na verdade, esta informação não seria estritamente necessária se fosse possível obter as derivadas parciais de  $u(y)$  para cada  $y \in F$  dado. Vários autores (particularmente Geoffrion et al (1972)) exploram este fato de forma implícita ao suporem que o Decisor é capaz de fazer uma análise *marginal* das soluções que lhe são oferecidas. Isto significa que, dada uma alternativa  $y^0 \in F$ , o Decisor é capaz de calcular

$$\tau_{ij} = - \frac{\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}}{\frac{\partial u(y)}{\partial y_j}} \Bigg|_{y=y^0} = - \frac{\partial y_j}{\partial y_i} \Bigg|_{y=y^0} \quad (i \neq j) \quad (56)$$

onde  $\tau_{ij}$  representa sua Taxa Marginal de Substituição ou Trade-off Generalizado entre os objetivos  $i$  e  $j$  ( $i \neq j$ ). É claro que isto implica em supor que  $u(\cdot)$  é diferenciável em  $F$ . Lembrando então que  $\nabla u(y^0)$ , o vetor gradiente de  $u(\cdot)$  calculado em  $y^0$  é perpendicular às suas curvas isopreferenciais é possível aproximar  $\tau_{ij}$  a partir da equação do hiperplano tangente (Geoffrion et. al. (1972)):

$$\frac{\partial u(y)}{\partial y_1} \Bigg|_{y=y^0} (y_1 - y_1^0) + \dots + \frac{\partial u(y)}{\partial y_m} \Bigg|_{y=y^0} (y_m - y_m^0) = 0 \quad (57)$$

Elegendo-se um dos critérios como critério de referência,  $y_i$  por exemplo, e dividindo (57) pela quantidade<sup>(\*)</sup>

$$\frac{\partial u(y)}{\partial y_i} \Bigg|_{y=y^0} \quad (58)$$

obtêm-se

---

(\*) Note que se  $y^0$  não é a solução de (50), então certamente existe um  $i$  tal que  $\frac{\partial u(y)}{\partial y_i} \Bigg|_{y=y^0} > 0$ .

$$\tau_{1i}(y_1 - y_1^0) + \dots + (y_i - y_i^0) + \dots + \tau_{mi}(y_m - y_m^0) = 0 \quad (59)$$

Desta forma, sendo o Decisor indiferente a variações nos valores dos critérios  $i$  e  $j$  nas respectivas proporções  $(y_i - y_i^0)$  e  $(y_j - y_j^0)$ , mantidas os demais constantes, então  $\tau_{ji}$  pode ser aproximada por

$$\tau_{ji} = - \frac{\Delta_i}{\Delta_j} = - \frac{y_i - y_i^0}{y_j - y_j^0} \quad (60)$$

Através da Fig. 1.7 procura-se interpretar graficamente este resultado. Num vizinhança de  $y^0$ , o Decisor possui taxa de substituição  $\tau_{21}$ , isto significando que um decréscimo  $\Delta_1$  no objetivo 1 compensa um acréscimo  $\Delta_2$  no objetivo 2, expressando assim a sua indiferença entre as alternativas  $y^0$  e  $y_\Delta$ .

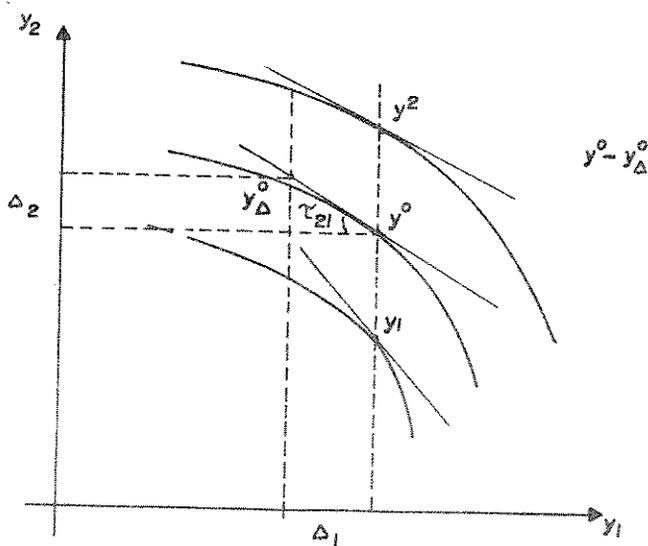


Fig. 1.7 - Variação de  $\tau_{21}$  com  $y$

A aproximação de  $\tau_{ji}$  por (60) se tornará tão mais exata quanto menor for a variação de  $\Delta_1$  ou sempre que  $u(\cdot)$  possuir segundas derivadas parciais suaves. A Fig. 1.7 ilustra também outro importante aspecto do problema:  $\tau_{ji}$  depende de  $y$ . De fato, mantendo-se o critério 1 constante obtêm-se su

cessivos valores para  $\tau_{ji}$  à medida em que  $y_2$  é feito variar, isto é,

$$\tau_{ji}(y^2) < \tau_{ji}(y^0) < \tau_{ji}(y^1) \quad (61)$$

## 1.6. METODOLOGIAS

Atualmente é possível encontrar uma quantidade relativamente grande de publicações dedicadas à revisão e classificação de métodos e aplicações da programação multiobjetivo (Roy, 1971; McCrimon, 1973; Cohon e Marks, 1973; Hwang e Masud, 1979). Embora seus autores utilizem diferentes metodologias para as suas classificações, que terminam por emprestar um maior ou menor grau de abrangência para uma determinada classe de métodos proposta, estes trabalhos concordam na existência de uma divisão fundamental.

- i) métodos que não incorporam preferências;
- ii) métodos que incorporam preferências.

Os métodos da classe (i) não incorporam nenhum tipo de julgamento subjetivo (preferência) da parte do Decisor em relação aos objetivos. O Decisor delega a uma *Analista* a tarefa de obter a solução do PMO através de algum procedimento sistemático. A maioria destes métodos procura transformar o problema multiobjetivo original num problema escalar *equivalente* introduzindo, por exemplo, algum tipo de medida que deva ser minimizada. A solução do PMO é então encontrada, resolvendo-se

$$\text{Min}_{x \in X} \left[ \sum_{i=1}^m |f_i(x) - \underline{y}_i|^p \right]^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (62)$$

onde  $\underline{y}_i = \text{Min}_{x \in X} f_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Apesar de terem caído em desuso nos últimos anos, os métodos formulados de acordo com este princípio conservam uma certa importância teórica pois muitos dos métodos mais recentes incorporam, em alguma de suas fases, a resolução de (62) para um dado  $p$  (em geral  $p=1$ ,  $p=2$  ou  $p=\infty$ ). Dmons

tra-se facilmente (Zeleny, 1973) que qualquer que seja o valor de  $p$  escolhido, a solução ótima de (62) recai em  $\Gamma$ . Este resultado pode ser interpretado graficamente como na Fig. 1.8 (Baptistella, 1980).

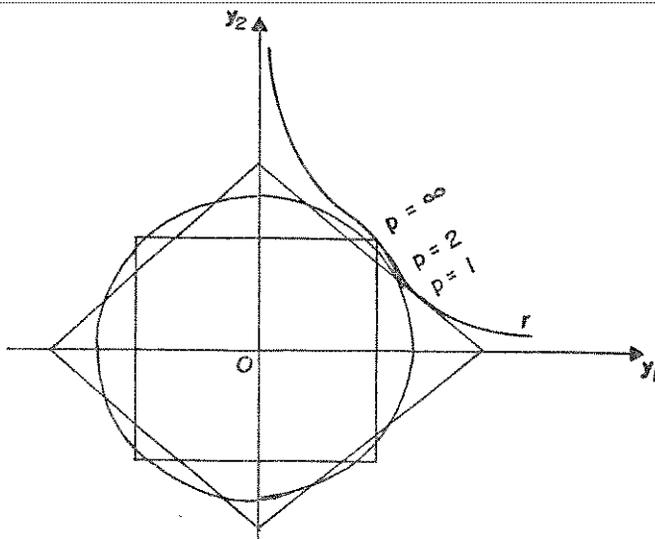


Fig. 1.8 - Relações entre a família de métricas (62) e  $\Gamma$

O ponto  $\underline{y}$  é quase sempre referenciado como *ideal* ou *utópico* por muitos autores pelo fato de não ser factível, isto é,  $\underline{y} \notin F$  na maioria dos problemas práticos.

Dependendo da forma e grau de participação do Decisor no processo de escolha da solução de compromisso do PMO, os métodos da classe (ii) podem ser agrupados em três subclasses:

- i) métodos que incorporam preferências a priori;
- ii) métodos com articulação progressiva de preferências;
- iii) métodos que incorporam preferências a posteriori.

Estas três classes de métodos serão comentadas brevemente a seguir, expondo-se seus aspectos básicos através de métodos representativos de cada uma delas.

### 1.6.1. PREFERÊNCIAS A PRIORI: PROGRAMAÇÃO ALVO

Como o próprio nome indica, os métodos desta subclasse se caracterizam por exigir do Decisor uma definição global de suas preferências antes que o processo de otimização seja efetivamente realizado, com o Decisor comprometendo-se a aceitar a solução que for obtida. Algumas formas através das quais o Decisor pode articular preferências a priori foram comentadas neste Capítulo e são indicadas a seguir:

- i) fornecendo sua função utilidade explícita;
- ii) ordenando lexicograficamente seus objetivos;
- iii) indicando os coeficientes do problema  $(P_\lambda)$ ;
- iv) indicando níveis mínimos para os objetivos em  $(P_\epsilon)$ .

Dentro do espírito de (iv), Charnes e Cooper propuseram uma técnica, a qual denominaram de *Programação Alvo* ("Goal Programming") que viria tornar-se bastante popular nas duas últimas décadas. Na sua formulação original, a Programação Alvo (PA) transforma o PMO no seguinte problema de programação não-linear (Charnes e Cooper, 1977):

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{i=1}^m (d_i^+ + d_i^-) \\ x \in X & \\ d^+, d^- & \end{array} \quad (63)$$

$$\text{s.a.} \quad f_j(x) - d_j^+ + d_j^- = M_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (64)$$

$$d_j^+, d_j^- \geq 0, \quad \forall j \quad (65)$$

$$d_j^+ \cdot d_j^- = 0, \quad \forall j \quad (66)$$

onde:

$M_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  são metas estipuladas pelo Decisor para os objetivos  $f_j(\cdot)$ ,  $j = 1, \dots, m$ ;

$d_j^+ > 0$ ,  $j = 1, \dots, m$  indica que o objetivo  $f_j(\cdot)$  excedeu a meta estipulada  $M_j$  na quantidade  $d_j^+$ ;

$d_j^- > 0$ ,  $j = 1, \dots, m$  indica que o objetivo  $f_j(\cdot)$  ficou abaixo da meta estipulada  $M_j$  na quantidade  $d_j^-$ .

A Fig. 1.9 ilustra as três situações (excludentes) que poderão ocorrer com respeito ao valor atingido por um dado objetivo, após a resolução de (63)-(66).

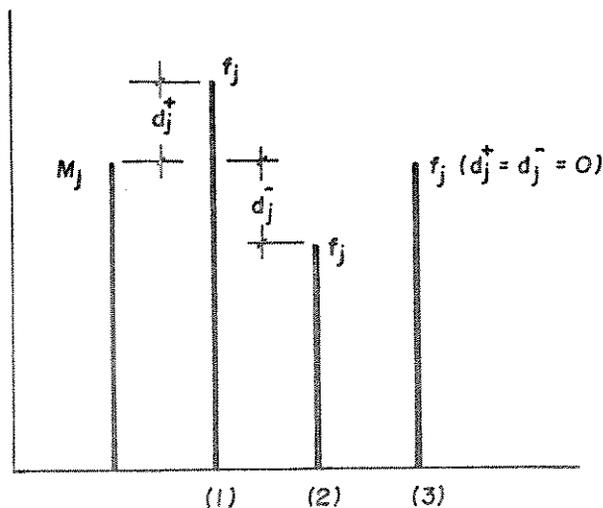


Fig. 1.9 - Possíveis resultados obtidos com Programação Alvo

É possível que além de metas a atingir, o Decisor possua preferências bem definidas quanto a manter determinados objetivos o mais próximo possível destas metas. Assim, formulações mais comuns de PA requerem que o Decisor ordene os objetivos em ordem decrescente de prioridades. Seja novamente  $a = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  o seu conjunto ordenado, onde agora  $a_i = a_i(d^+, d^-)$ ,  $i = 1, \dots, m$  é uma função linear qualquer dos desvios  $d^+$  e  $d^-$ . Em vez de (63)-(66), resolve-se então

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & a_1 \\ \text{s.t.} \quad & x \in X \\ & d^+, d^- \end{aligned} \quad (67)$$

s.a.

(64)-(66)

obtendo-se  $a_1^*$ . Os problemas seguintes serão, para  $i = 2, \dots, m$ ,

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & a_i \\ \text{s.t.} \quad & x \in X \\ & d^+, d^- \end{aligned} \quad (68)$$

s.a.

(64)-(66)

$$a_j(d^+, d^-) \leq a_j^*, \quad j = 1, \dots, (i-1) \quad (69)$$

Em relação à Programação Alvo pode-se invocar as mesmas desvantagens já constatadas no método de Ordenação Lexicográfica. A solução obtida com o procedimento (67)-(69) é muito sensível à ordenação e às metas propostas pelo Decisor. Por outro lado, a PA apresenta como grande vantagem a flexibilidade de formulação, bastante explorada em problemas de planejamento do setor público em que a presença de cronogramas e metas é mais frequente (Charnes et al, 1968). Embora existam algumas aplicações com objetivos não-lineares, a PA tornou-se mais conhecida no campo da programação linear (Ignizio, 1980).

Gembicki e Haimes (1975) propuseram um procedimento alternativo, também baseado em PA, mas diferente na forma do Decisor indicar suas preferências. Segundo esta variante, o problema de otimização a ser resolvido é:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sigma \\ \text{s.t.} \quad & x \in X, \sigma \end{aligned} \quad (70)$$

$$f_j(x) - \lambda_j \sigma \leq M_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (71)$$

onde  $\sigma$  é um escalar e  $\lambda \in \Lambda$ . Note que quanto maior for um particular  $\lambda_j$ , menor importância estará dando o Decisor para que o objetivo  $f_j(\cdot)$  alcance

a meta prevista  $M_j$  e vice-versa. Algumas analogias entre este método e o proposto neste trabalho, serão exploradas no Capítulo 2.

### 1.6.2. ARTICULAÇÃO PROGRESSIVA DE PREFERÊNCIAS: PROGRAMAÇÃO ALVO INTERATIVA

Métodos baseados em interação do Decisor com o modelo matemático do problema a ser tratado têm tido nos últimos anos uma aceitação cada vez maior por parte de pesquisadores e usuários potenciais. A julgar pelo volume de publicações que lhe são dedicados, os métodos interativos parecem haver conquistado um consenso, pelo menos em relação às linhas de pesquisa em programação multiobjetivo que deverão ser adotadas no futuro.

De fato, os métodos interativos oferecem inúmeras vantagens tanto do ponto de vista de decisão quanto de análise. Métodos com estas características são facilmente implementáveis a partir do *software* de programação matemática existente, na maioria dos casos ligeiramente alterado de forma a levar em conta aspectos próprios ao processo de decisão. Além disso, na medida em que o Decisor interage ativamente com o modelo, cresce a possibilidade de que a solução final obtida seja facilmente aceita como a melhor solução de compromisso do problema.

Genericamente, os métodos interativos costumam introduzir uma estrutura com dois níveis distintos de atuação (Fig. 1.10). Num nível inferior ou *nível de análise* estariam concentradas todas as informações referentes à parte *objetiva* do problema, isto é, o seu modelo matemático, descrito em termos de restrições físicas e relações funcionais expressando os seus objetivos.

Em geral, com este nível inferior está associada a resolução de um determinado subproblema escalar, cuja formulação é influenciada pelas preferências do Decisor. A parte *subjetiva* da interação Decisor-Analista tem lugar no nível superior ou *nível de decisão*, com o Decisor procurando induzir o nível de análise a fornecer soluções que venham de encontro às suas preferências. A forma de como isto é feito distingue os métodos, mas a hipótese de que o Decisor possui uma função utilidade *implícita* agregando os objetivos está sempre presente. A partir desta hipótese, a maioria dos métodos então requer que o Decisor forneça *trade-offs* locais (implícitos, como níveis de aspiração ou explícitos, como taxas marginais de substituição) na vizinhança de uma dada alternativa viável, os quais fazem o papel de coeficientes variá

veis de algum problema escalar bem definido.

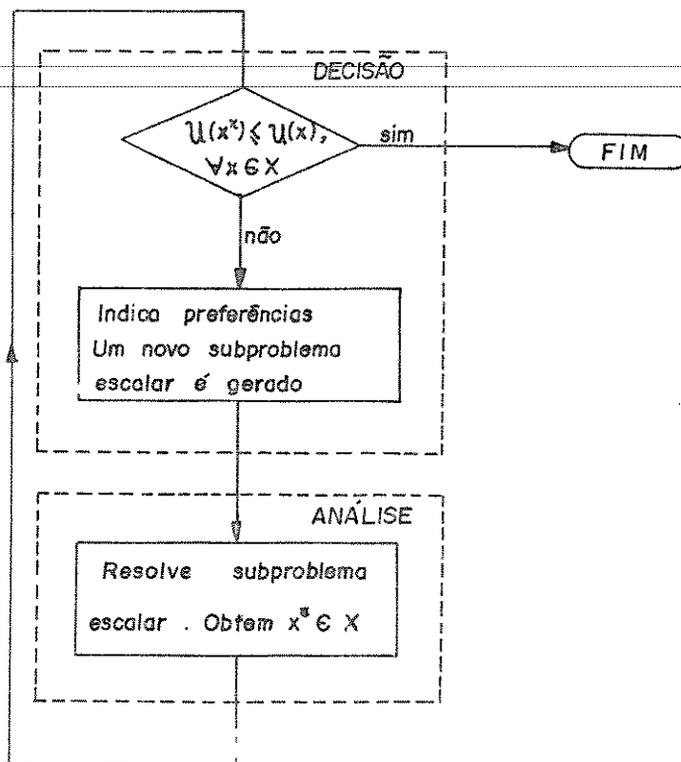


Fig. 1.10 - Esquema geral dos métodos iterativos

Considere, como exemplo, o método proposto por Dyer (1972) que incorpora a Programação Alvo tradicional, estratégias de interação na forma descrita acima. O método de Dyer envolve a minimização de uma função utilidade implícita, suposta não-decrescente com cada objetivo. Com esta hipótese adicional é fácil ver que (63)-(66) pode ser reformulado como

$$\text{Min}_{\substack{x \in X \\ d^+ \geq 0}} \sum_{i=1}^m w_i d_i^+ \quad (72)$$

$$f_j(x) - d_j^+ \leq M_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (73)$$

onde  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  são coeficientes que refletem a importância relativa atribuída a cada objetivo  $f_i(\cdot)$  no sentido de mantê-lo abaixo da meta  $M_i$ .

Estes coeficientes deverão ser fornecidos pelo Decisor a cada interação do algoritmo. Escolhido um objetivo de referência,  $f_i(\cdot)$  por exemplo, e dada uma solução viável qualquer  $y^0 = f(x^0)$ ,  $x^0 \in X$ , estes coeficientes podem ser aproximados por (Dyer, 1972)

$$w^i = [\tau_{1,i} \cdots \tau_{i-1,i} \quad 1 \quad \tau_{i+1,i} \cdots \tau_{m,i}] \quad (74)$$

com  $\tau_{j,i}$ ,  $j = 1, \dots, m$  sendo definidos através de (60). O algoritmo utilizado pela Programação Alvo Interativa é resumido a seguir.

**PASSO 1 :** Determine  $M_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Cada  $M_j$  deve ser escolhido de maneira que  $\partial u / \partial f_j = 0$  se  $f_j < M_j$ . Escolha  $M_j$  arbitrariamente pequeno caso seja difícil identificar um valor apropriado.

**PASSO 2 :** Determine uma solução inicial factível  $x^0 \in X$  e calcule  $f^0(x^0)$ . Faça  $k := 0$ .

**PASSO 3 :** Determine  $w^k$  através de interação com o Decisor.

**PASSO 4 :** Resolva o problema de Programação Alvo

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=0}^m w_i^k d_i \\ \text{s.t.} \quad & d \geq 0 \end{aligned} \quad (75)$$

$$f_j(\xi) - d_j \leq M_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (76)$$

Seja  $(\xi^k, d^k)$  a solução encontrada. Faça  $s^k = \xi^k - x^k$ .

**PASSO 5 :** Determine com auxílio do decisor, o valor de  $\alpha \in [0, 1]$  que minimiza  $u(f(x^k + \alpha s^k))$ .

**PASSO 6 :** Se  $u(f(x^k + \alpha^k s^k)) \geq u(f(x^k))$  pare:  $x^k$  é a solução de compromisso procurada. Caso contrário, faça  $x^{k+1} = x^k + \alpha^k s^k$ ,  $k := k+1$  e volte ao PASSO 3.

A opção de Dyer pelo método de Frank e Wolfe (Wolfe, 1970), descrito de acordo com a notação própria do problema de Programação Alvo nos Passos 4, 5 e 6, se justifica pelas semelhanças entre o problema tratado e as características deste método. Como se sabe, o método de Frank-Wolfe resolve problemas *convexos de programação não-linear* (em geral, a não linearidade está associada ao objetivo) lançando mão de aproximações locais *lineares* da função objetivo. São estas aproximações que permitem definir direções de pesquisa  $s^k$  como no PASSO 4 do algoritmo apresentado. Dado que o Decisor é supostamente capaz de fazer análises locais de  $u(\cdot)$  e que suas taxas marginais são na verdade o gradiente  $u(\cdot)$  dividido por uma constante positiva, percebe-se facilmente as razões da utilização deste método, em particular. Além disso, este método apresenta importantes características de convergência, que serão melhor analisadas no Capítulo 3.

O algoritmo de Programação Alvo Iterativa alterna passos de análise e de decisão. Nos PASSOS 5 e 6, pede-se que o Decisor forneça uma aproximação para  $\alpha^k$  e decida pelo término da interação, respectivamente. O PASSO 5 pode ser cumprido plotando-se as funções  $f_j(x^k + \alpha s^k)$ ,  $j = 1, \dots, m$  para  $\alpha \in [0, 1]$  (Fig. 1.11). O Decisor então seleciona  $\alpha^k$  que minimiza subjetivamente  $u(f^k(x^k + \alpha s^k))$  em  $\alpha \in [0, 1]$ .

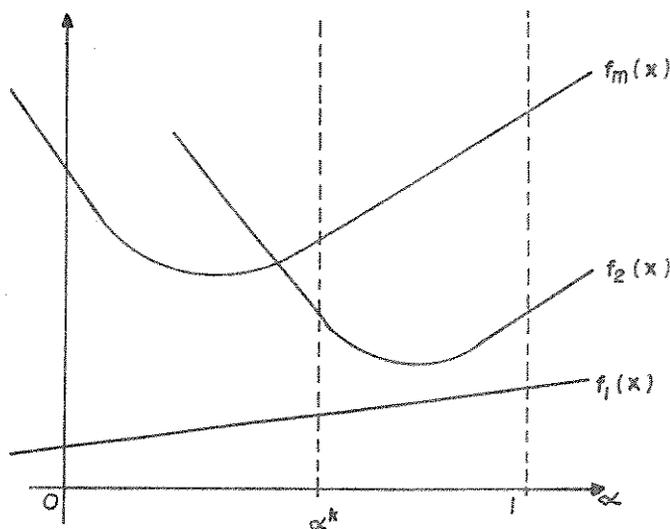


Fig. 1.11 - Determinação do Passo  $\alpha^k$

Exceto pela inexistência de metas, o método iterativo de Geoffrion, Dyer e Feinberg (1968) utiliza os mesmos procedimentos descritos acima, isto é, aproximações locais de  $u(\cdot)$  via taxas de substituição e emprego do método de Frank e Wolfe. Finalmente, convém mencionar que a adoção de um destes dois métodos não garante, por si só, que a solução final encontrada seja eficiente. Se o Decisor for incapaz de fornecer corretamente seus trade-off's então é possível que a solução de (72)-(73) seja *dominada*.

### 1.6.3. PREFERÊNCIAS A POSTERIORI: SIMPLEX MULTIOBJETIVO

Por métodos que incorporam preferências a posteriori deve-se entender todo método através do qual um determinado subconjunto finito de soluções eficientes é gerado, para que posteriormente o Decisor escolha, de um ponto de vista subjetivo, a sua melhor solução de compromisso.

As técnicas mais comuns de geração de soluções eficientes, via os problemas  $(P_\lambda)$  e  $(P_\epsilon)$  foram abordadas neste Capítulo. Embora aplicáveis, a solução através destas técnicas de um subconjunto razoável de soluções eficientes torna-se inviável pois o esforço computacional associado é em geral excessivo, especialmente se considerados problemas de grande porte.

Entretanto, existem casos especiais. Se  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  é linear e  $f_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, m$  são funções lineares sobre  $X$  então é computacionalmente factível gerar  $X^*$  (e portanto,  $\Gamma$ ) através de *Programação Linear Multiobjetivo* (Zeleny, 1973). Problemas multiobjetivo lineares são colocados genericamente na forma

$$\text{Min } Cx \quad (77)$$

s.a.

$$Ax \leq b \quad (78)$$

$$x \geq 0 \quad (79)$$

onde  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $b \in \mathbb{R}^p$ . Esta classe de problemas possui importantes propriedades com respeito aos conjuntos  $X^*$  e  $\Gamma$  e a forma de obtê-los. Em particular,  $X^*$  pode ser completamente descrito por um subconjunto de pontos extremos (*bases*) eficientes de  $X$  (os pontos eficientes que

não são extremos de  $X^*$  podem ser obtidos como combinação convexa destes). Uma vez que tenha sido encontrada uma solução básica eficiente inicial, a geração de  $X^*$  prossegue, *sem auxílio de técnicas de escalarização*, através de procedimentos adequados de pivoteamento sobre um quadro semelhante ao utilizado pelo método *Simplex*, em que os objetivos estão também representados (Zeleny, 1973; Evans e Steuer, 1973). Estes procedimentos exploram o fato de que bases eficientes são adjacentes e portanto através de mudanças de base adequadas  $X^*$  pode ser completamente gerado.

Contudo, mesmo neste caso especial, o número de bases eficientes chega a ser muito grande, de forma que o Decisor pode vir a experimentar uma certa dificuldade para fazer sua seleção. Alguns autores então sugerem uma redução posterior no número de soluções básicas eficientes. Em (Zeleny, 1973), são propostas formas de redução baseadas na família de métricas (62) e na teoria de Conjuntos Nebulosos.

## 1.7. CONCLUSÃO

Este Capítulo constou basicamente de alguns tópicos em Programação Multiobjetivo, selecionados por sua importância intrínseca para um correto entendimento da teoria e/ou para servirem de fácil referência a muitos dos resultados apresentados no restante do trabalho. Naturalmente, a abrangência e profundidade destes tópicos fica bastante restrita às limitações que este tipo de revisão impõe, mas espera-se que este Capítulo forneça uma visão geral das características e dificuldades associadas à resolução de problemas multiobjetivos.

Uma boa parte do Capítulo foi dedicada à conceituação e caracterização analítica de soluções eficientes, adotando-se a técnica tradicional de escalarização do problema multiobjetivo. Ainda com o auxílio desta técnica discutiu-se aspectos teóricos e práticos da geração de soluções eficientes por meio de problemas escalares do tipo  $(P_\epsilon)$  e  $(P_\lambda)$ . Em particular, constatou-se que embora seja mais geral, no sentido de permitir inclusive o tratamento de problemas não-convexos, a utilização do problema  $(P_\epsilon)$  sofre algumas restrições quanto a implementações práticas, no caso de problemas (funções-objetivo) não-lineares. Esta deficiência do método acentua-se ainda mais quando são considerados problemas de otimização dinâmica.

As noções de Utilidade e Preferência incluídas neste Capítulo representam, junto com o conceito de solução *Satisfatória* (a ser definido no Capítulo 2), os elementos básicos da Teoria de Decisão necessários à continuação deste trabalho.

---

CAPÍTULO 2

PROGRAMAÇÃO MULTI OBJETIVO VIA PROJEÇÃO

## 2.1. INTRODUÇÃO

Atualmente, a pesquisa em programação multiobjetivo evolui no sentido de se atribuir importância cada vez mais acentuada aos aspectos de interação do Decisor com o modelo do sistema tratado. Em grande parte, esta tendência vem sendo incentivada pelos progressos conseguidos nos últimos anos na área de sistemas de desenvolvimento (projeto, controle e manufatura assistidos por computador), os quais oferecem hoje uma vasta variedade de recursos computacionais que podem ser empregados como suporte à tomada de decisão.

A estes progressos na área de computação soma-se também o desenvolvimento de novas metodologias orientadas para lidar com particularidades da interação homem-máquina e como subprodutos destas, métodos interativos voltados para a resolução de problemas multicritérios.

Por outro lado, embora sejam inegáveis os avanços conseguidos pela programação multiobjetivo, a questão de como estabelecer mecanismos através dos quais o Decisor possa exprimir suas preferências de uma maneira simples e eficiente do ponto de vista de análise ainda não foi satisfatoriamente resolvida. Na verdade, a proposição de qualquer método esbarra quase sempre em considerações subjetivas sobre a capacidade do Decisor em fornecer determinado tipo de informação e neste campo ainda não parece haver uma concordância generalizada.

Uma característica comum à grande maioria dos métodos interativos existentes é a busca pela chamada melhor solução de compromisso, ótima no sentido de minimizar a função utilidade implícita do Decisor. Para tanto, adotam-se inúmeros procedimentos, alguns dos quais foram revistos no Capítulo anterior.

Recentemente, um outro tipo de enfoque vem merecendo atenção por parte de alguns pesquisadores. Este novo enfoque reconhece que a forma adotada até agora para se chegar à solução do PMO parece não ser muito natural. Na prática se observa que em muitas circunstâncias o indivíduo age por níveis de satisfação devido à sua limitada capacidade de compreender todas as implicações estruturais do problema.

Nestes termos, se  $\hat{y}$  representasse os níveis de satisfação do Decisor então existindo  $x \in X$  tal que  $f(x) \leq \hat{y}$ ,  $\hat{y}$  seria considerada uma possível solução do problema. É claro que a escolha correta de  $\hat{y}$  que garanta

não existir  $y^1$  tal que  $f(x) \leq y^1 \leq \bar{y}$  depende fundamentalmente do grau de informação que o Decisor possui acerca de como os objetivos se relacionam. Além disso, como o Decisor é levado a indicar seus níveis de satisfação com um conhecimento apenas parcial de suas implicações no nível estrutural, parece desnecessário manter o processo de decisão estritamente factível. A metodologia proposta neste Capítulo leva em conta estas observações.

Em linhas gerais, o método consiste em imaginar que o espaço dos critérios é um conjunto infinitamente restrito. A cada ciclo é pedido ao Decisor indicar seus níveis de satisfação que em seguida serão analisados com respeito à sua viabilidade. Se estes níveis forem tais que não possam ser atingidos, o nível de análise informará quais restrições foram violadas. Estas restrições são então agregadas a um novo problema relaxado, permitindo assim que sucessivas regiões do espaço dos critérios sejam eliminadas nos próximos ciclos. Como será visto em seguida, o método induz uma decomposição do PMO e tem um forte apelo gráfico no caso particular biojetivo.

## 2.2. CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

No Capítulo anterior discutiu-se com alguns detalhes o papel desempenhado pelo conjunto  $F$  na solução do problema multiobjetivo. Em particular mencionou-se as vantagens que a formulação

$$\text{Min}_{y \in F} u(y) \quad (1)$$

pode emprestar a solução do problema em termos de esforço computacional, descontado o fato de que  $F$  é apenas uma abstração matemática. Mesmo que  $u(\cdot)$  fosse perfeitamente conhecida, ainda assim (1) não poderia ser resolvido na forma como está formulado, pois é claramente impossível lidar com vizinhanças de alguma solução hipotética  $y^* \in F$  sem mencionar mapeamentos de  $X$  em  $F$ . Em princípio, isto inviabiliza o conceito de solução ótima ou melhor solução de compromisso para (1). Em situações como esta, o conceito de solução satisfatória se mostrará mais adequado.

**DEFINIÇÃO 2.1:** SOLUÇÃO SATISFATÓRIA.

Diz-se que um vetor  $y \in \mathbb{R}^m$  de níveis de aspiração (não necessariamente factível, isto é,  $y \in F$ ) é satisfatório se existe ao menos um  $x \in X$  tal que  $f(x) \leq y$ .  $\square$

Note que se  $\hat{y}$  é a melhor solução satisfatória que o Decisor pode articular então  $y^* = f(x) \leq \hat{y}$  resolve (1) pois por hipótese a função utilidade  $u(\cdot)$  é não-decrescente com cada objetivo, isto é,

$$u(y^*) \leq u(\hat{y}) \quad (2)$$

e mesmo não sendo factível, sempre existe um grau de utilidade associado a  $\hat{y}$ . A opção por  $\hat{y}$  e não  $y^*$  seria motivada por um conhecimento incompleto do Decisor sobre o problema tratado, uma situação que deve ser tanto quanto possível minimizada.

Admitindo-se ainda que  $y^*$  deva necessariamente ser eficiente, isto é,  $y^* \in \Gamma$ , o problema (1) pode ser formulado como

$$\text{Min}_{y \in \Gamma} u(y) \quad (3)$$

A vantagem de se considerar (3) em vez de (1) reside na possibilidade de se definir perfeitamente uma região do espaço  $\mathbb{R}^m$  dentro da qual a superfície de soluções eficientes  $\Gamma$  deverá estar contida. Esta propriedade é demonstrada no Lema a seguir.

**LEMA 2.1:**

Seja  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo e  $f_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, m$  funções convexas definidas sobre  $X$ . Para  $i = 1, \dots, m$ , seja  $x^i$  a solução do PMO quando apenas o objetivo  $i$  é considerado, isto é,

$$x^i = \arg \text{Min}_{x \in X} f_i(x) \quad (4)$$

e  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  os conjuntos definidos na forma

$$\Omega_i = \{f_i(x^j), j = 1, \dots, m\} \quad (5)$$

Então  $\Gamma \subset Y^0 \triangleq \{y \in \mathbb{R}^m \mid \underline{y} \leq y \leq \bar{y}\}$  onde, para  $i = 1, \dots, m$

$$\underline{y}_i = \min_{1 \leq j \leq m} \Omega_i = f_i(x^j) \quad (6)$$

$$\bar{y}_i = \max_{1 \leq j \leq m} \Omega_i \quad (7)$$

**PROVA:** Em primeiro lugar é fácil ver que qualquer solução eficiente (e portanto factível)  $x^* \in X^*$  satisfaz

$$\underline{y}_i = f_i(x^j) \quad (8)$$

$$\leq f_i(x^*), \quad i = 1, \dots, m \quad (9)$$

A parte resultante da prova passa pela definição dos seguintes conjuntos convexos

$$C_x = \{x \in X \mid x = \sum_{j=1}^m \xi_j x^j, \quad \forall \xi \in \Lambda\} \quad (10)$$

$$C_y \triangleq \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = \sum_{j=1}^m \xi_j f(x^j), \quad \forall \xi \in \Lambda\} \quad (11)$$

onde  $\Lambda \triangleq \{\xi \in \mathbb{R}^m \mid \xi \geq 0, \sum_{j=1}^m \xi_j = 1\}$ .

Sabe-se também que se  $x^* \in X^*$ , existe um vetor  $\lambda \in \Lambda$  tal que  $x^* = x(\lambda)$  resolve

$$\text{Min}_{x \in X} \langle \lambda, f(x) \rangle \quad (12)$$

Como  $C_x \subset X$ , tem-se então que

$$\text{Min}_{x \in X} \langle \lambda, f(x) \rangle \cong \text{Min}_{x \in C_x} \langle \lambda, f(x) \rangle \quad (13)$$

$$\cong \text{Min}_{y \in C_y} \langle \lambda, (\sum_{j=1}^m \xi_j f(x^j)) \rangle \quad (14)$$

$$\cong \text{Min}_{y \in C_y} \langle \lambda, y \rangle \quad (15)$$

e conseqüentemente

$$\langle \lambda, f(x(\lambda)) \rangle \cong \langle \lambda, y \rangle, \quad \forall y \in C_y \quad (16)$$

o que permite concluir que para todo  $\lambda \in \Lambda$  existe sempre um  $y \in C_y$  tal que  $f(x(\lambda)) \leq y$ . Suponha que tal  $y$  não existe. Como  $C_y$  divide o hiper-retângulo  $y^0$  em duas regiões (\*), existe um  $z \in C_y$  que fornece  $z \leq f(x(\lambda))$ . Em vista de (16), para  $y = z$ , isto representa um absurdo. Portanto, para  $i = 1, \dots, m$

$$f_i(x(\lambda)) \leq y_i \quad (17)$$

$$\leq \sum_{j=1}^m \xi_j f_i(x^j) \quad (18)$$

$$\leq \text{Max}_{\xi \in \Lambda} \sum_{j=1}^m \xi_j f_i(x^j) = \bar{y}_i \quad (19)$$

Em conseqüência,  $f(x(\lambda)) \in y^0, \quad \forall \lambda \in \Lambda. \quad \square$

---

(\*) Note que se  $x^j, j = 1, \dots, m$  são soluções de (4), então  $f(x^j) \in y^0, j = 1, \dots, m$  e neste caso  $C_y$  é uma combinação convexa de pontos extremos de  $\Gamma$ , contida em  $y^0$ .

O resultado do Lema 2.1 ( $\Gamma \subset Y^0$ ), pode ser interpretado como uma extensão em termos de conjuntos da Tabela *Payoffs* introduzida por Benayon et al como parte integrante do método iterativo STEM (Benayon et al, 1971). Existem também algumas demonstrações deste resultado para o caso particular  $m = 2$  (Cohon, 1978; Polak e Payne, 1980), que é ilustrado na Fig. 2.1.

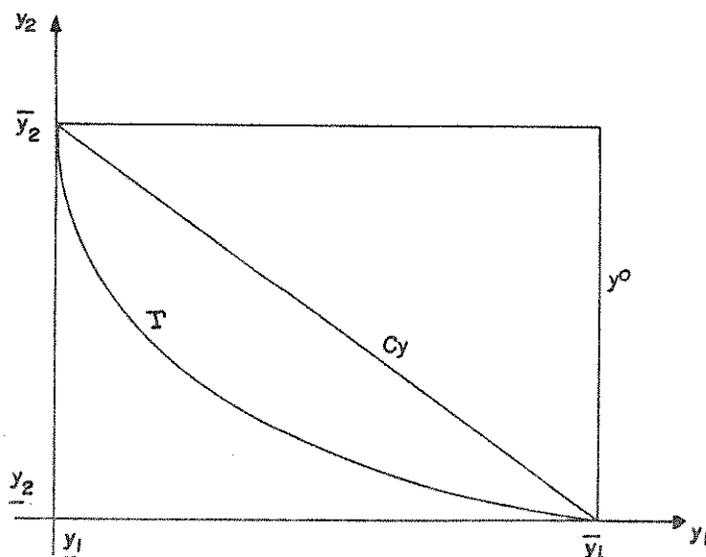


Fig. 2.1 - Interpretação do Lema 2.1 - Caso  $m=2$

Uma vez comprovada a validade do Lema é suficiente agora procurar soluções satisfatórias em  $Y^0$ . De imediato surge então a questão básica de como estabelecer a existência de uma solução  $x \in X$  para o sistema de desigualdades

$$f(x) \leq y, \quad y \in Y^0 \quad (20)$$

e que propriedades a solução de (20) pode exibir.

Em parte, a resposta a esta questão é respondida pelo seguinte resultado:

**TEOREMA 2.1:** TEOREMA FUNDAMENTAL.

Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo e  $g_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, m$  funções convexas e contínuas definidas sobre  $X$ . Se o sistema de inequações

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (21)$$

não admite solução em  $X$ , então existe uma função da forma

$$\langle \lambda, g(x) \rangle, \quad \lambda \in \Lambda \quad (22)$$

tal que, para algum  $\lambda \in \Lambda$ ,

$$\text{Min}_{x \in X} \langle \lambda, g(x) \rangle > 0 \quad (23)$$

**PROVA:** Berge e Ghouila-Houri, 1962.  $\square$

Este resultado, devido a Bohnenblust, Karlin e Shapley (Berge e Ghouila-Houri, 1962) algumas vezes é referenciado como a Propriedade Fundamental dos Conjuntos Convexos e é básico para o desenvolvimento do método proposto neste Capítulo.

**2.3. PROJEÇÃO DO PMO NO ESPAÇO DAS SOLUÇÕES SATISFATÓRIAS**

Nesta seção demonstra-se que o conceito de solução satisfatória é particularmente adequado a um tipo especial de manipulação. De fato, o conjunto de *todas* as soluções satisfatórias do PMO pode ser imaginado como a projeção das restrições  $x \in X$  e  $f(x) - y \leq 0$  sobre o espaço das variáveis  $y$ , aqui representada pelo conjunto (Ferreira, 1984; Ferreira e Geromel, 1986b).

$$V \triangleq \{y \in \mathbb{R}^m \mid f(x) \leq y \text{ para algum } x \in X\} \quad (24)$$

Esta representação permite então reescrever o problema (1) na forma

$$\text{Min}_{y^0 \cap V} u(y) \quad (25)$$

Exemplos deste tipo de manipulação são bastante frequentes em programação matemática. O método de decomposição de Benders (Benders, 1962) mais tarde generalizado por Geoffrion (Geoffrion, 1972) representa talvez a sua mais bem sucedida aplicação. Na generalização proposta por Geoffrion ou em desenvolvimentos mais recentes (Geromel e Belloni, 1986), uma projeção similar é feita, mas sobre uma classe especial de variáveis - *complicantes* -, as quais, quando temporariamente fixas, induzem o problema resultante a apresentar características favoráveis (convexidade, em geral). No caso de (24), as variáveis  $y$  (níveis de satisfação do *Decisor*) podem ser encaradas como *complicantes* para a resolução do problema multiobjetivo (1).

Pretende-se com a projeção desenvolvida neste Capítulo representar o conjunto de todas as soluções satisfatórias do PMO através de semi-espacos suportes, a partir da definição (24). Admitindo-se este tipo de caracterização, imediatamente surgem questões básicas relativas à presença ou não de um dado vetor  $\hat{y} \in \mathbb{R}^m$  em  $V$ . As respostas a todas estas questões são fornecidas em termos de resultados já existentes em programação convexa, alguns deles reformulados e analisados à luz das particularidades do problema que está sendo tratado.

A base teórica do método proposto neste Capítulo está centrada no resultado a seguir (Lasdon, 1970).

#### TEOREMA 2.2: REPRESENTAÇÃO DE $V$ .

$\hat{y} \in V$  se e apenas se  $\hat{y}$  satisfaz o sistema infinito e incontável de desigualdades lineares

$$\text{Min}_{x \in X} \langle \lambda, f(x) - \hat{y} \rangle \leq 0, \text{ para todo } \lambda \in \Lambda \quad (26)$$

**PROVA:** (Suficiência). Se  $\hat{y} \in V$ , então existe um  $x \in X$  tal que  $f(x) - \hat{y} \leq 0$  e portanto

$$\langle \lambda, f(x) - \hat{y} \rangle \leq 0, \quad \text{para todo } \lambda \in \Lambda \quad (27)$$

Tomando-se o mínimo sobre  $X$  em (27), obtêm-se (26). (Necessidade). Suponha que  $\hat{y} \notin V$ . Então, pelo Teorema 2.1, o sistema  $g(x) = f(x) - \hat{y} \leq 0$  não possui solução em  $X$ . Existe neste caso um vetor  $\tilde{\lambda} \in \Lambda$  que fornece

$$\text{Min}_{x \in X} \langle \tilde{\lambda}, f(x) - \hat{y} \rangle > 0 \quad (28)$$

implicando em que alguma desigualdade de (26) foi violada.  $\square$

Alguns desdobramentos importantes do Teorema 2.2 podem ser evidenciados. Se existe  $\tilde{\lambda} \in \Lambda$  tal que (28) se verifica, então é fácil ver que

$$\text{Min}_{x \in X} \langle \lambda^*, f(x) - \hat{y} \rangle \geq \text{Min}_{x \in X} \langle \tilde{\lambda}, f(x) - \hat{y} \rangle > 0 \quad (29)$$

se

$$\lambda^* = \arg \text{Max}_{\lambda \in \Lambda} \phi(\lambda) \quad (30)$$

$$\phi(\lambda) = \text{Min}_{x \in X} \langle \lambda, f(x) - \hat{y} \rangle \quad (31)$$

O Corolário 2.2.1 a seguir fornece um modo prático para se testar a consistência de qualquer solução proposta pelo *Decisor*.

### COROLÁRIO 2.2.1:

Seja  $\theta(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$\theta(y) = \text{Max}_{\lambda \in \Lambda} \text{Min}_{x \in X} \langle \lambda, f(x) - y \rangle \quad (32)$$

Então  $\hat{y} \in V$  se e somente se  $\theta(\hat{y}) \leq 0$ .  $\square$

Observe que sempre que  $\theta(\hat{y}) > 0$ , o vetor  $\lambda^* \in \Lambda$  estará associado com a restrição mais violada de (26). Propriedades adicionais derivadas do Teorema 2.2 ajudarão a compreender os mecanismos do método.

### COROLÁRIO 2.2.2:

Qualquer desigualdade do sistema (26) descreve um *semi-espaço* suporte a  $V$ .

A prova deste Corolário está estreitamente ligada às consequências do Teorema a seguir.

### TEOREMA 2.3:

Para qualquer  $\lambda \in \Lambda$ , seja  $x(\lambda)$  a solução ótima de

$$\text{Min}_{x \in X} \langle \lambda, f(x) - \hat{y} \rangle \quad (33)$$

e assumamos que pelo menos uma das condições suficientes

- i)  $\lambda > 0$ ;
- ii)  $x(\lambda)$  é única;

é satisfeita. Então  $x(\lambda) \in X^*$  ou, de maneira equivalente,  $f(x(\lambda)) \in \Gamma$ .

Este resultado já foi discutido no Capítulo anterior (note que a presença de  $\hat{y}$  na equação (33) não altera a validade do Corolário 1.3.1). Assim, sob hipóteses de convexidade, cada ponto de  $\Gamma \subset F$  possui um hiperplano suporte

$$h_\lambda \triangleq \{y \in \mathbb{R}^m \mid \langle \lambda, y \rangle = \langle \lambda, f(x(\lambda)) \rangle\} \quad (34)$$

que tangencia  $\Gamma$  em  $f(x(\lambda))$ . Supondo-se que  $\hat{y} \in V$ , tem-se imediatamente que

$$\langle \lambda, \hat{y} \rangle \geq \langle \lambda, f(x(\lambda)) \rangle \quad (35)$$

e portanto  $\hat{y} \in H_\lambda$ , onde

$$H_\lambda \triangleq \{y \in \mathbb{R}^m \mid \langle \lambda, y \rangle \geq \langle \lambda, f(x(\lambda)) \rangle\} \quad (36)$$

Como  $h_\lambda \subset H_\lambda$ , conclui-se então que  $H_\lambda$  define um semi-espaço suporte a  $V$ . A Fig. 2.2 procura ilustrar as características do método, apresentadas até aqui.

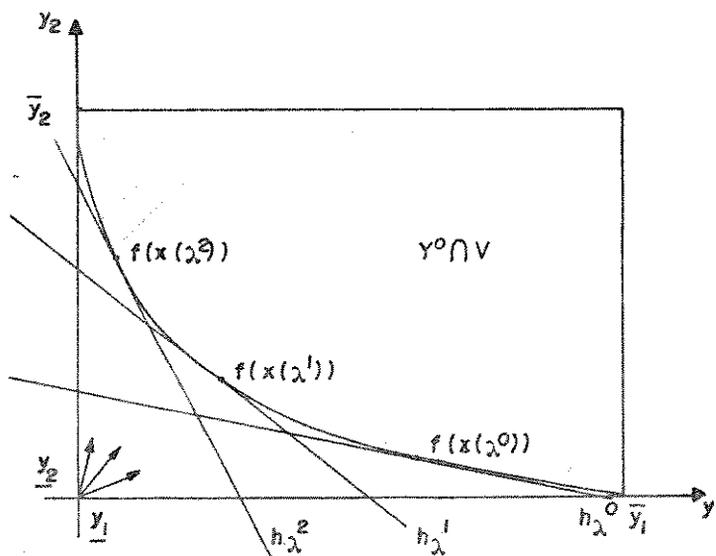


Fig. 2.2 - Representação de  $y^0 \cap V$  através de semi-espaços suportes

Em vista destes resultados pode-se formular o seguinte problema de otimização, a ser resolvido pelo Decisor:

$$\text{Min}_y u(y) \quad (37)$$

$$y \in y^0 \cap H_\lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad (38)$$

Contudo, o problema (37)-(38) possui um número infinito de restrições e portanto alguma estratégia de *relaxação* (Lasdon, 1970) deverá ser adotada.

O procedimento iterativo descrito a seguir evolui adicionando ao problema relaxado a restrição mais violada de (26).

### ALGORITMO BÁSICO:

**PASSO 0 :** (Inicialização). Determine

$$y^0 = \arg \min_{y \in Y^0} u(y) \quad (39)$$

Faça  $k := 0$ .

**PASSO 1 :** (Análise). Resolva o problema Min-Max

$$\theta(y^k) = \max_{\lambda \in \Lambda} \min_{x \in X} \langle \lambda, f(x) - y^k \rangle \quad (40)$$

Seja  $(\lambda^k, x(\lambda^k))$  a solução encontrada. Se  $\theta(y^k) \leq 0$ , então  $x^* = x(\lambda^k)$  resolve o PMO. Caso contrário, vá para o PASSO 2.

**PASSO 2 :** (Decisão). Resolva o problema relaxado

$$\min_{y \in Y^{k+1}} u(y) \quad (41)$$

onde  $Y^{k+1} \triangleq \{y \in Y^k \mid \langle \lambda^k, y - f(x(\lambda^k)) \rangle \geq 0\}$ . Seja  $y^{k+1}$  a solução correspondente. Faça  $k := k+1$  e retorne ao PASSO 1.

Neste ponto é conveniente discutir algumas características da estratégia de relaxação adotada.

- 1) Claramente, o PASSO 0 (inicialização) pode ser ignorado, uma vez que, supondo-se coerência por parte do Decisor, a solução  $y^0 = \underline{y}$  (ideal) fornece o menor valor possível para  $u(\cdot)$ .
- 2) A resolução do problema Min-Max (40) concentra indiscutivelmente a maior parte do esforço computacional requerido pelo método. Contu-

to, algumas particularidades apresentadas por este problema podem vir a ser úteis no sentido de reduzir este esforço. Em especial, o problema (40) exibe o que Geoffrion (1972) denominou de *Propriedade P*. No caso específico deste trabalho, esta propriedade está relacionada ao fato de que o mínimo sobre  $X$  em (40), independe de qualquer solução particular  $y^k$  proposta pelo *Decisor*. Deste modo, o esforço computacional empregado para resolver o problema em  $X$  não é necessariamente perdido quando muda a solução de (41).

- 3) Note que o algoritmo apresentado se encontra na sua forma mais simples. Versões mais elaboradas poderiam incorporar (e mesmo descartar) um número maior de restrições, por exemplo. Optou-se por considerar apenas a restrição mais violada de (26) por ser a sua determinação inerente ao cálculo do sinal de  $\theta(\bar{y})$  e, como será visto mais tarde, por proporcionar uma interpretação geométrica precisa do método.
- 4) Parece claro que qualquer método iterativo que vise a minimização de uma função utilidade implícita pode ser adaptado para resolver o problema relaxado (41), com importantes vantagens numéricas. O problema (41) está inteiramente formulado no espaço dos objetivos e assim sendo, exibe um pequeno número de variáveis (em geral,  $m \ll n$ ). Note ainda que independente da natureza de  $X$  e  $f_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , (41) sempre exibirá restrições lineares. A implementação de alguns métodos iterativos de reconhecida eficiência dentro do espírito da formulação (41) é discutida no Capítulo 3. Estas adaptações se destinam a problemas em que  $m \geq 3$  já que para  $m = 2$ , o método ainda permite inúmeras especializações (seção 2.5).

A Fig. 2.3 apresenta um fluxograma para o algoritmo básico apresentado nesta seção.

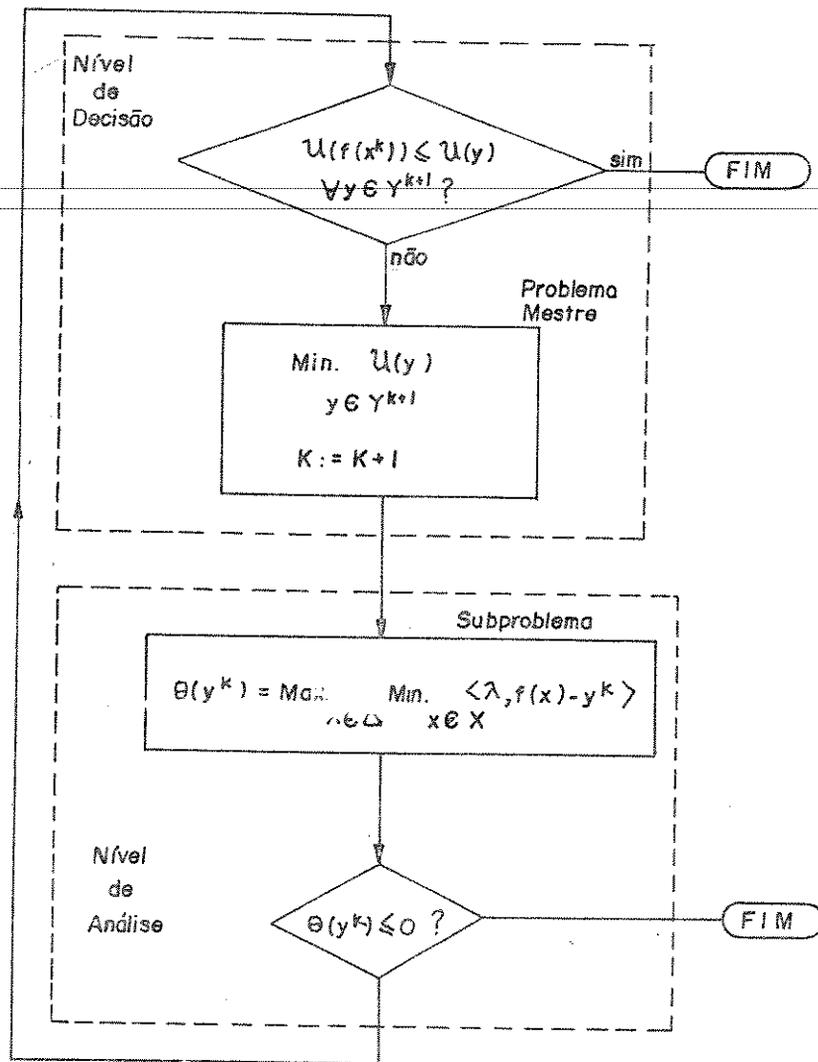


Fig. 2,3 - Fluxograma do Algoritmo Básico

#### 2.4. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÉTODO

O fluxograma da Fig. 2.3 apresenta um critério alternativo para o término da interação *Decisor-Analista*, não previsto explicitamente no *Algoritmo Básico*. Devido às suas características particulares, o procedimento interativo descrito na seção 2.3 pode ser encerrado pelo *Decisor* mesmo que  $\theta(y^k) > 0$ , uma vez que a cada interação o nível de análise fornece uma nova solução eficiente do PMO, isto é, do ponto de vista de análise, o Algoritmo Básico é factível em todas as interações. Esta característica do método é importante na medida em que pode ser virtualmente impossível ao *Decisor* pro-

por uma solução  $y^k$  tal que  $\theta(y^k) \leq 0$ , para um valor *prático* de  $k$ . De fato, o Teorema de Convergência do Capítulo seguinte demonstra que  $\theta(y^k) \rightarrow 0^+$  quando  $k \rightarrow \infty$  sob diferentes hipóteses sobre  $u(\cdot)$ . Prevalece portanto a convergência infinita.

Nestas circunstâncias, parece interessante considerar  $\theta(y^k) < \varepsilon$  como sendo o critério de parada do algoritmo, onde o valor de  $\varepsilon > 0$  não precisa ser previamente estipulado pelo *Decisor*. Este tipo de procedimento torna-se possível devido à existência de uma forte relação entre o valor de  $\theta(y^k)$  e a solução  $y^k$ , estabelecida no Teorema a seguir.

### TEOREMA 2.3:

Seja a função  $\theta^k = \theta(y^k)$  definida na forma (40). Se  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $f_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, m$  satisfazem as hipóteses usuais de convexidade, então  $\theta(y^k)$  e  $y^k$  são tais que

$$|\theta^k| = \min_{y \in \Gamma} \|y - y^k\|_{\infty} \quad (42)$$

A demonstração deste Teorema é facilitada pelo Lema 2.2.

### LEMA 2.2:

Se  $(\lambda^*, x(\lambda^*))$  resolve (40), então  $x(\lambda^*)$  é também solução ótima de

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sigma \\ & x \in X \\ & \sigma \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\sigma \geq f_i(x) - y_i^k, \quad i = 1, \dots, m \quad (44)$$

onde  $\lambda^* \in \Lambda$  são as variáveis duais ótimas associadas às restrições (44).

**PROVA:** A prova deste Lema consiste simplesmente em escrever o problema *dual* relativo a (43)-(44):

$$\text{Max}_{\lambda \geq 0} \quad \text{Min}_{\substack{x \in X \\ \sigma \in \mathbb{R}}} \quad \left\{ \sigma + \sum_{i=1}^m \lambda_i (f_i(x) - y_i^k - \sigma) \right\} \quad (44)$$

Usando em seguida a separabilidade entre as variáveis  $x \in X$  e  $\sigma \in \mathbb{R}$  no problema de minimização, vem

$$\text{Max}_{\lambda \geq 0} \quad \left\{ \text{Min}_{\sigma \in \mathbb{R}} \quad \left( 1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i \right) \sigma + \text{Min}_{x \in X} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i (f_i(x) - y_i^k) \right\} \quad (46)$$

e como (46) possui valor finito apenas de  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ , (45) reduz-se a

$$\text{Max}_{\lambda \in \Lambda} \quad \text{Min}_{x \in X} \quad \langle \lambda, f(x) - y^k \rangle \quad (47)$$

É claro então que  $x(\lambda^*)$  resolve (43)-(44), dada a equivalência entre este problema e o problema (47).

□

A prova do Teorema 2.3 segue do fato de que (43)-(44) pode ser visto como

$$\theta(y^k) = \text{Min}_{x \in X} \quad \text{Max}_{1 \leq i \leq m} \quad \{f_i(x) - y_i^k\} \quad (48)$$

mas como a solução de (48) é tal que  $x(\lambda^*) \in \Gamma$  é possível reescrever  $\theta(y^k)$  na forma

$$\theta(y^k) = \text{Min}_{x \in X^*} \quad \text{Max}_{1 \leq i \leq m} \quad \{f_i(x) - y_i^k\} \quad (49)$$

ou ainda

$$\theta(y^k) = \text{Min}_{y \in \Gamma} \quad \text{Max}_{1 \leq i \leq m} \quad \{y_i - y_i^k\} \quad (50)$$

Obtêm-se então

$$\theta(y^k) \leq \text{Max}_{1 \leq i \leq m} \{y_i - y_i^k\}, \quad \forall y \in \Gamma \quad (51)$$

Por outro lado, através de (40) é fácil ver que  $\theta(y^k)$  também satisfaz a desigualdade

$$\theta(y^k) \geq \text{Min}_{y \in \Gamma} \langle \lambda, y - y^k \rangle, \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad (52)$$

Definindo-se o vetor  $\mathbb{1}' = [1 \dots 1] \in \mathbb{R}^m$ , conclui-se que a solução de (40) deve ser da forma

$$(y^k + \theta(y^k) \mathbb{1}) \in \Gamma \quad (53)$$

uma vez que (53) satisfaz simultaneamente as desigualdades (51) e (52).

Além disso, sabe-se ainda que se existe um escalar  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $(y^k + \beta \mathbb{1}) \in \Gamma$ , a solução ótima do problema indicado no lado direito de (42) é também da forma  $y = y^k + \beta \mathbb{1}$ . Tendo em vista a relação (53), vale então a igualdade  $\beta = \theta(y^k)$ . Caso contrário, (53) poderia ser escrita como

$$(y + \alpha \mathbb{1}) \in \Gamma \quad (54)$$

onde  $\alpha = \theta^k - \beta$ . Note que qualquer valor de  $\alpha \neq 0$  contradiz (54), devido ao fato de que  $y \in \Gamma$ . Portanto, a solução de (42) fica sendo

$$\|y - y^k\|_\infty = |\beta| = |\theta^k| \quad (55)$$

O resultado do Teorema 2.3 é bastante significativo para o Decisor. Indica que uma vez proposta qualquer solução  $y^k$ , o método descrito neste Capítulo determinará a solução eficiente  $y = f(x^k)$  que minimiza a Norma de Tchebyshev entre  $y^k$  e  $y$ . Caso  $\theta(y^k) < 0$ , o método encontra  $f(x^k) \in \Gamma$  que proporciona um igual decréscimo em todos os objetivos na quantidade  $|\theta(y^k)|$  e caso contrário, se  $\theta(y^k) > 0$ , obtêm-se então  $f(x^k) \in \Gamma$  que incrementa todos os objetivos na mesma quantidade. Este tipo de informação pode vir a ser muito útil para o Decisor pois auxilia-o a definir um critério adicional para o término do algoritmo. Este critério (subjetivo) deve

ser entendido da seguinte forma: para algum  $\epsilon > 0$  definido pelo Decisor, a solução  $f(x^k) \in D$  proposta pelo nível de análise minimiza  $u(\cdot)$  sobre  $y^{k+1}$ , a aproximação corrente de  $y^0 \cap V$  (Fig. 2.2).

A Fig. 2.4 procura ilustrar as consequências do Teorema 2.3 demonstrado nesta seção.

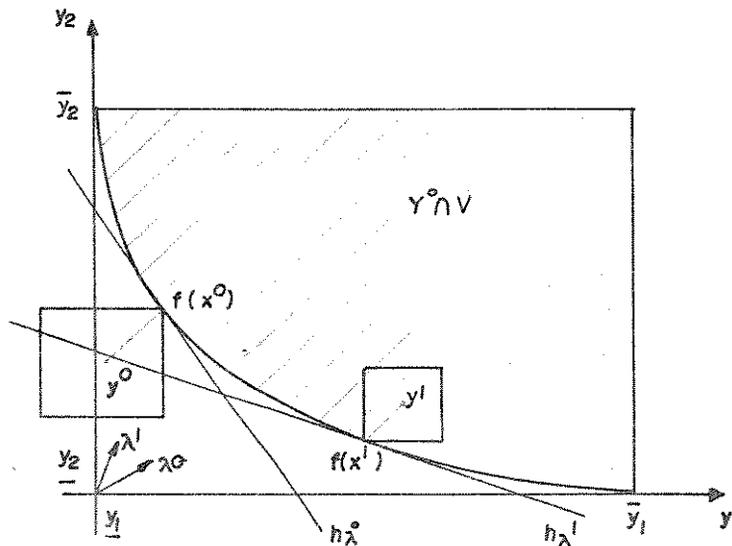


Fig. 2.4 - Propriedade geométrica da solução do problema *Min-Max*

## 2.5. O CASO PARTICULAR $m=2$

Como se pode notar, o método proposto é particularmente adequado a problemas bicritérios. Em termos de análise, esta classe de problemas permite simplificações importantes no cálculo de  $\theta(y^k)$ . Note que existe somente um grau de liberdade para as variáveis  $\lambda$  em  $\Lambda$  se  $m = 2$ . O problema *Min-Max* (40) pode ser colocado então como

$$\begin{aligned} \theta(y^k) &= \max_{\lambda_1 \in [0,1]} \min_{x \in X} \{ \lambda_1 (f_1(x) - y_1^k) + (1 - \lambda_1) (f_2(x) - y_2^k) \} \\ &= \max_{\lambda_1 \in [0,1]} \phi(\lambda_1) \end{aligned} \quad (56)$$

Assim, de forma a determinar o valor de  $\theta(y^k)$ , é necessário empregar apenas procedimentos de busca unidimensional na variável  $\lambda_1 \in [0,1]$  com ou sem informação de derivadas de  $\phi(\cdot)$  (a existência de derivadas de  $\phi(\lambda)$  para o caso geral  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  e demais aspectos numéricos referentes a implementação computacional do método são discutidos em detalhes no Capítulo 4 deste trabalho).

Do ponto de vista de Decisão, o método oferece vantagens ainda maiores. Uma vez que toda a estratégia de relaxação pode ser representada através de dispositivos gráficos apropriados quando  $m = 2$ , a participação do Decisor na busca da melhor solução de compromisso do PMO torna-se mais realista e direta. Estas características do método podem ser melhor ilustradas com um pequeno exemplo.

**EXEMPLO 2.1:** Considere o seguinte problema biobjetivo

$$\text{Min}_{x \in X} f(x)' = [f_1(x) \ f_2(x)] \quad (57)$$

onde  $f_i(x) = \frac{1}{2} \langle x, Q^i x \rangle + \langle c^i, x \rangle + d^i$ ,  $i = 1, 2$ . Supõe-se, por simplicidade, que  $X \equiv \mathbb{R}^2$  e que os valores numéricos envolvidos são

$$\begin{aligned} Q^1 &= Q^2 = I \quad (\text{matriz Identidade } 2 \times 2) \\ c^1 &= [1 \ 0]' \\ c^2 &= [0 \ 1]' \\ d^1 &= d^2 = 1/2 \end{aligned} \quad (58)$$

A seguir são comentadas as várias etapas da solução deste problema através do Algoritmo Básico da seção anterior.

#### CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO $y^0$

A determinação de  $y^0$  é bastante simples neste caso. As soluções ótimas individuais de cada critério são

$$x^i = \arg \min_{x \in X} f_i(x) = -(Q^i)^{-1} c^i, \quad i = 1, 2 \quad (59)$$

fornecendo  $x^1 = [-1 \ 0]^t$  e  $x^2 = [0 \ -1]^t$ . No espaço dos objetivos estas soluções correspondem a  $\underline{y}^t = [0 \ 0]$  e  $\bar{y}^t = [1 \ 1]$ . Obtém-se então  $y^0$  como mostrado na Fig. 2.5.

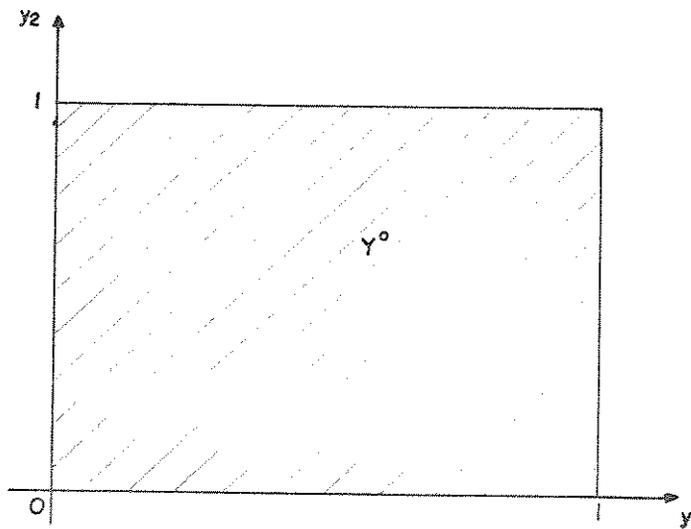


Fig. 2.5 - Retângulo inicial de decisões - Exemplo 2.1

### CÁLCULO DA FUNÇÃO $\theta(y^k)$

Neste exemplo é possível obter a função  $\theta(\cdot)$  em forma analítica. Através de (56), tem-se que

$$\begin{aligned} \theta(y^k) = & \max_{\lambda_1 \in [0,1]} \min_{x \in X} \left\{ \frac{1}{2} \langle x, Qx \rangle + \langle c, x \rangle + d \right\} - \\ & - \{ \lambda_1 y_1^k + (1-\lambda_1) y_2^k \} \end{aligned} \quad (60)$$

onde

$$\begin{aligned}
 Q &= \lambda_1 Q^1 + (1-\lambda_1)Q^2 = I \\
 c &= \lambda_1 c^1 + (1-\lambda_1)c^2 = [\lambda_1 (1-\lambda_1)]' \\
 d &= \lambda_1 d^1 + (1-\lambda_1)d^2 = 1/2
 \end{aligned} \tag{61}$$

Note que a solução do problema de minimização (estritamente convexo) é dada por

$$x(\lambda_1) = -Q^{-1}c = -[\lambda_1 (1-\lambda_1)]' \tag{62}$$

Uma vez que (62) vale para todo  $\lambda_1 \in [0,1]$ , resta agora determinar o valor de  $\lambda_1$  que maximiza o valor da função

$$\begin{aligned}
 \theta(y^k) &= \text{Max}_{\lambda_1 \in [0,1]} -\frac{1}{2}\lambda_1^2 - \frac{1}{2}(1-\lambda_1)^2 - \lambda_1(y_1^k - y_2^k) - y_2^k + \frac{1}{2} \\
 &= \text{Max}_{\lambda_1 \in [0,1]} \phi(\lambda_1)
 \end{aligned} \tag{63}$$

Ignorando momentaneamente a restrição sobre  $\lambda_1$ , o máximo de  $\phi(\lambda_1)$  ocorrerá para

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} [1 - (y_1^k - y_2^k)] \tag{64}$$

Pela análise da faixa de variação dos objetivos é fácil então ver que (64) também é a solução de (63). Substituído em (63), este valor de  $\lambda_1$  fornece

$$\theta(y^k) = \frac{1}{4} (y_1^k - y_2^k)^2 - \frac{1}{2} (y_1^k - y_2^k) - y_2^k + \frac{1}{4} \tag{65}$$

Em seguida, faz-se uma pequena simulação de como poderia evoluir o Algoritmo Básico da Seção 2.3.

**PASSO 0 :** (Inicialização). Na ausência de qualquer outra informação adicional, o Decisor certamente optará neste primeiro ciclo pela solução ideal:  $y^0 = \underline{y} = 0$ .

PASSO 1 : (Análise). No nível de análise, a solução inicial proposta pelo Decisor fornece (eqs. (65), (64) e (62)):

$$\theta(y^0) = \frac{1}{4};$$

$$\lambda_1^0 = \frac{1}{2}; \quad (66)$$

$$x(\lambda_1^0) = -\left[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right]'$$

e como esperado  $\theta(y^0) > 0$ , indicando que  $y^0$  não é satisfatória. A solução eficiente  $x(\lambda_1^0)$  leva a  $f_1(x(\lambda_1^0)) = f_2(x(\lambda_1^0)) = \frac{1}{4}$  no espaço dos objetivos e portanto a restrição a ser adicionada em  $y^0$  é da forma

$$H_{\lambda^0} = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \geq \frac{1}{4}\} \quad (67)$$

PASSO 2 : (Decisão). Supondo-se que o Decisor não se acha satisfeito com a solução eficiente  $f(x(\lambda_1^0))' = \left[\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}\right]$  proposta, o problema relaxado (41) deverá ser resolvido. Analisando a Fig. 2.6, cuja região hachureada corresponde a  $y^0 \cap H_{\lambda^0}$ , o Decisor conclui que  $y^1 = \left[\frac{1}{2} \quad 0\right]'$  seria uma solução alternativa adequada.

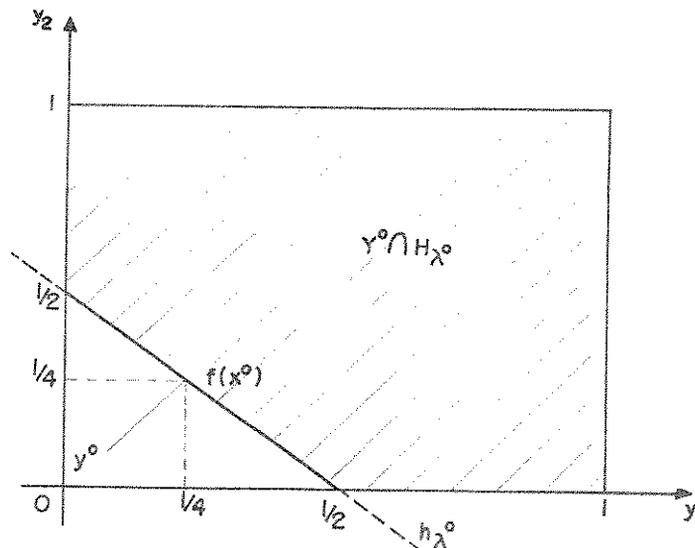


Fig. 2.6 - Retângulo de decisões após o primeiro corte

A escolha da solução  $y^1$  poderia representar uma maior preferência do Decisor em manter o objetivo  $f_2(\cdot)$  o mais próximo possível do seu valor ideal.

Retornando ao PASSO 1 (Análise) esta solução fornece

$$\begin{aligned} \theta(y^1) &= \frac{1}{16} \\ \lambda_1^1 &= \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (68)$$

$$x(\lambda_1^1)' = -\left[\frac{1}{4} \quad \frac{3}{4}\right]'; \quad f(x^1)' = \left[\frac{9}{16} \quad \frac{1}{16}\right]$$

e novamente  $\theta(y^1) > 0$ , indicando que  $y^1$  também não é satisfatória. A nova restrição a ser acrescentada ao espaço dos objetivos é portanto da forma

$$H_{\lambda^1} = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{4}y_1 + \frac{3}{4}y_2 \geq \frac{3}{16}\} \quad (69)$$

Ainda não satisfeito com a solução eficiente fornecida pelo Analista, novamente o Decisor terá que resolver um problema relaxado, considerando agora a região hachureada da Fig. 2.7.

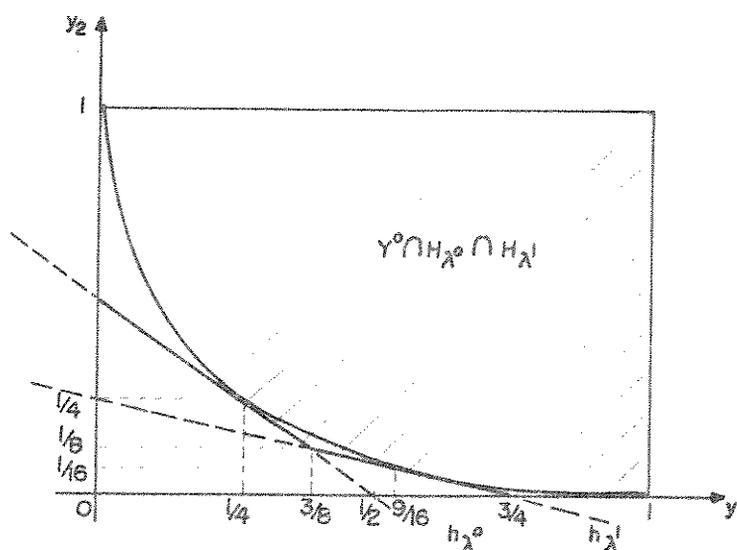


Fig. 2.7 - Retângulo de decisões após o segundo corte

Seja  $y^2 = [\frac{3}{8} \quad \frac{1}{8}]$  a solução escolhida. No nível de análise  $y^2$  leve a

$$\theta(y^2) = \frac{1}{64};$$

$$\lambda_1^2 = \frac{3}{8}; \quad (70)$$

$$x(\lambda_1^2)' = -[\frac{3}{8} \quad \frac{5}{8}]; \quad f(x^2)' = [\frac{25}{64} \quad \frac{8}{74}]$$

Embora  $y^2$  ainda não seja satisfatória, o valor da função  $\theta(\cdot)$  já é bastante pequeno:  $\theta(y^2) = 0.016$ . Assim sendo é possível que o *Decisor* se disponha a aceitar a solução eficiente  $f(x^2)$  proposta pelo *Analista* pois a diferença observada entre a sua solução e a obtida é agora da ordem de 0.016:

$$y^2 = [0.375 \quad 0.125]'; \quad f(x^2)' = [0.391 \quad 0.141] \quad (71)$$

Aspectos da implementação computacional do método para o caso biojetivo serão ainda discutidos no Capítulo 5 (Aplicações).

Problemas biobjetivos aparecem com frequência em programação matemática. Em muitas situações práticas é comum observar-se uma certa polarização entre duas características do problema, preponderantes na avaliação do desempenho do sistema que este problema representa. Uma visão mais completa da relevância de problemas biobjetivos como caso particular da programação multiobjetivo pode ser obtida, por exemplo, em Geoffrion (1967) e Wendell (1980).

## 2.6. RELAÇÕES ENTRE O MÉTODO PROPOSTO E ALGUNS MÉTODOS MULTI OBJETIVOS

Antes de analisarem-se propriedades adicionais do método proposto em linhas básicas neste capítulo, será conveniente procurar situá-lo dentro da literatura de programação multiobjetivo, estabelecendo algumas comparações entre o enfoque adotado e o utilizado por determinados métodos.

A análise fica mais simples quando se considera a formulação alternativa do problema *Min-Max* (40), dada pelo seu problema *primal* (43)-(44), rees-

critério aqui por conveniência:

$$\begin{array}{l} \text{Min} \quad \sigma \\ x \in X \\ \sigma \in \mathbb{R} \end{array} \quad (72)$$

$$f_i(x) - \sigma \leq y_i^k, \quad i = 1, \dots, m \quad (73)$$

Fica então fácil perceber uma certa semelhança entre a formulação (72)-(73) e a adotada no método de Gembicki e Haimes (1977), uma variante na linha de *Programação Alvo*, comentada no Capítulo 1. Entretanto existem diferenças fundamentais entre os dois enfoques.

Na verdade, o método de Gembicki e Haimes não chega a ser interativo (baseia-se em julgamentos *a priori* do Decisor). Requer que se fixem metas e atribuam-se pesos aos objetivos, os quais deverão refletir preferências do Decisor em mantê-los próximos às metas previstas. Assim, quanto menor o peso  $w_i$  atribuído ao objetivo  $f_i(\cdot)$ , maior importância estará dando o Decisor para que  $f_i(\cdot)$  se aproxime da meta  $M_i$ . Em geral, costuma-se adotar  $M_i = \underline{y}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  (Haimes et al, 1975). Eventualmente, metas e pesos podem ser alterados sem contudo ficarem claros os efeitos que isto acarreta na solução do problema.

Ao contrário, o método proposto atribui igual importância a todos os objetivos (o que em princípio é apropriado) ao mesmo tempo em que cria mecanismos para que as metas possam variar de acordo com as preferências do Decisor.

A formulação de (72)-(73) também guarda alguns pontos em comum com o método interativo *STEM* (*Step Method*) de Benayoun et al (1971), aplicável somente a problemas lineares, isto é, quando  $f_i(x) = \langle c^i, x \rangle$ ,  $i = 1, \dots, m$  e  $X = \{x \geq 0 \mid Ax \leq b\}$  onde  $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$  ( $p \leq n$ ) e  $b \in \mathbb{R}^m$ . Em uma interação genérica  $\ell$ , o método de Benayoun et al requer que se resolva o problema linear

$$\begin{array}{l} \text{Min} \quad \sigma \\ x \in X^\ell \\ \sigma \in \mathbb{R} \end{array} \quad (74)$$

$$w_i (f_i(x) - \underline{y}_i) \leq \sigma, \quad i = 1, \dots, m \quad (75)$$

onde  $x^\ell$  inclui  $X$  e todas as restrições adicionadas pelo *Decisor* nas  $(\ell-1)$  interações anteriores, de acordo com o processo descrito em seguida; o valor de  $w_i$  reflete ainda a importância relativa da distância de  $f_i(\cdot)$  à solução ideal  $\underline{y}_i$ , mas agora o seu valor é calculado através das expressões

$$w_i = \alpha_i / \sum_{j=1}^m \alpha_j, \quad i = 1, \dots, m \quad (76)$$

$$\alpha_i = \frac{\bar{y}_i - \underline{y}_i}{\underline{y}_i \|c^i\|}, \quad \text{se } \underline{y}_i > 0 \quad (77)$$

$$\alpha_i = \frac{\underline{y}_i - \bar{y}_i}{\bar{y}_i \|c^i\|}, \quad \text{se } \underline{y}_i \leq 0 \quad (78)$$

Observe que o peso  $w_i$  atribuído a cada diferença  $(f_i(\cdot) - \underline{y}_i)$  depende basicamente da faixa de variação  $(\bar{y}_i - \underline{y}_i)$  de cada objetivo. Quando a diferença  $(\bar{y}_i - \underline{y}_i)$  é pequena, o peso correspondente  $w_i$  também é pequeno pois neste caso o objetivo  $f_i(\cdot)$  não é muito sensível a variações de  $w_i$ . A equação (76) fornece apenas uma normalização dos pesos.

Quando a solução  $f^\ell = f(x^\ell)$  de (74)-(75) é obtida, o *Decisor* compara a subjetivamente com  $\underline{y}$ , classificando os valores tomados pelos objetivos como satisfatórios ou não. Para algum  $j$  tal que  $f_j^\ell$  é satisfatório, o *Decisor* deve então fornecer uma quantidade  $\delta_j > 0$ , da qual está disposto a abrir mão para tentar melhorar um objetivo não-satisfatório. O conjunto  $x^{\ell+1}$  fica então sendo

$$x^{\ell+1} \triangleq \{x \in X^\ell \mid f_j(x) \leq f_j^\ell + \delta_j; \quad f_i(x) \leq f_i^\ell, \quad \forall i \neq j\} \quad (79)$$

Em seguida, faz-se  $w_j = 0$ ,  $\ell := \ell+1$  e resolve-se novamente (74)-(75). A interação *Decisor-Analista* termina quando todos os objetivos forem satisfatórios.

A principal diferença entre o método proposto e a técnica descrita acima fica por conta do tipo de manipulação empregada. Do ponto de vista do *Decisor*, o método proposto utiliza *relaxação* enquanto que o método de Benayoun et al. faz uso de uma estratégia de *restrição*, também muito frequente em programação matemática (Lasdon, 1970).

A falta de um procedimento sistemático para a determinação de  $\delta_j$  representa na prática a principal deficiência do método. No Capítulo 3 indica-se como o método de Benayoun et al. pode ser incorporado pela estratégia de relaxação proposta neste Capítulo. Sugere-se também uma forma de determinação de  $\delta_j$ .

Ainda dentro do espírito da formulação (74)-(75), Nakayama e Sawaragi (1984) propuseram recentemente um novo método baseado no conceito de solução satisfatória. De acordo com este novo método, resolve-se ainda (74)-(75), mas agora com  $X^\ell \equiv X$  e pesos  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  dados na forma

$$w_i = \frac{1}{y - \underline{y}_i}, \quad i = 1, \dots, m \quad (80)$$

onde  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  são níveis de satisfação fornecidos pelo Decisor. Seja  $f^\ell = f(x^\ell)$  a solução obtida na interação  $\ell$  pelo método de Nakayama e Sawaragi. Analisando a solução  $f^\ell$  obtida, o Decisor então classifica os objetivos associando-os aos conjuntos de índices

$I_m^\ell$  : dos objetivos que o Decisor deseja melhorar;

$I_r^\ell$  : dos objetivos que o Decisor pode relaxar;

$I_a^\ell$  : dos objetivos cujos valores o Decisor aceita.

No passo seguinte, o Decisor deverá escolher  $y^{\ell+1}$  tal que

$$\begin{aligned} y_i^{\ell+1} &> y_i^\ell && \text{se } i \in I_m^\ell ; \\ y_i^{\ell+1} &< y_i^\ell && \text{se } i \in I_r^\ell ; \\ y_i^{\ell+1} &= y_i^\ell && \text{se } i \in I_a^\ell \end{aligned} \quad (81)$$

Este método apresenta deficiências semelhantes ao método STEM no que diz respeito à falta de critérios para definir os valores de  $y_i^{\ell+1}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Embora identifique corretamente uma possível infactibilidade de  $y^{\ell+1}$ , não apresenta nenhum tipo de procedimento que permita ao Decisor reconhecer soluções satisfatórias ou evitar que novas soluções infactíveis sejam escolhidas. Em outras palavras, o conhecimento do Decisor sobre o problema não cresce com a aplicação deste método.

## 2.7. CONCLUSÃO

Neste Capítulo apresentou-se a base teórica de uma nova metodologia para a abordagem de problemas multiobjetivos. Em síntese, o método consiste em projetar o PMO no seu espaço de soluções satisfatórias, decompondo-o em um problema de decisão inteiramente definido no espaço dos objetivos, e em um problema escalar do tipo *Min-Max*, que analisa a viabilidade da solução encontrada pelo Decisor. O método é descrito em termos de uma estratégia básica de relaxação particularmente adequada a problemas biobjetivos. Propriedades adicionais do método são analisadas no Capítulo 3.

Talvez a característica mais marcante do método proposto seja refletir com realismo a natureza do processo de Decisão. De fato, nas primeiras interações entre Decisor e o modelo do problema, parece desnecessário fornecer ao Decisor informações que tragam consigo todas as restrições e variáveis do seu nível estrutural. Nesta fase é suficiente fornecer umas poucas informações globais sobre como os objetivos se relacionam e, a partir daí, procurar enriquecer progressivamente o seu conhecimento sobre o problema, à medida em que o Decisor aproxima-se da sua solução preferida. Neste sentido, a estratégia de relaxação proposta é bastante adequada para propósitos de aprendizagem.

Se o problema é biobjetivo, simplificações significativas são ainda obtidas tanto em termos de análise como de decisão, com o Decisor podendo selecionar diretamente os seus níveis de satisfação no espaço dos critérios. A estratégia de relaxação pode ser inteiramente representada por dispositivos gráficos neste caso.

Entretanto, para problemas cujo número de objetivos é maior do que 2, a habilidade do Decisor para indicar níveis de satisfação fica demasiado res

trita devido à sua impossibilidade de raciocinar com cortes introduzidos no espaço  $m$ -dimensional. Nestas circunstâncias, torna-se necessário considerar procedimentos alternativos que prescindam de recursos visuais. Procedimentos deste tipo são abordados no Capítulo a seguir e baseiam-se em métodos multi-objetivos clássicos, cujas formulações dentro da abordagem proposta conduzem às suas implementações mais eficientes.

---

CAPÍTULO 3

MÉTODOS PARA O ESPAÇO DOS OBJETIVOS

### 3.1. INTRODUÇÃO

Neste Capítulo, discutem-se alguns tópicos mais específicos relacionados à metodologia proposta no Capítulo precedente. Em particular, discute-se a implementação de métodos iterativos no contexto da formulação do problema relaxado, PASSO 3 do *Algoritmo Básico*.

$$\text{Min}_y \quad u(y) \quad (1)$$

$$y \in Y^{k+1} = \{y \in Y^k \mid \langle \lambda^k, y \rangle \geq \langle \lambda^k, f(x^k) \rangle\} \quad (2)$$

Até o momento, a exposição desta nova metodologia baseou-se, em parte, na habilidade do Decisor em, observando o espaço dos objetivos e os sucessivos cortes gerados ao longo das interações, escolher de um ponto de vista subjetivo a solução que melhor preenchesse os seus níveis de satisfação. É claro que este procedimento, perfeitamente válido no caso biobjetivo ( $m=2$ ), torna-se difícil se  $m = 3$  e sem sentido se  $m > 3$ . Nestes termos será então relevante analisar algumas técnicas de solução de (1)-(2) que eliminem a necessidade de interpretações gráficas.

Como será visto, estas técnicas são baseadas em algoritmos já existentes em programação multiobjetivo, porém reformulados no sentido de explorar as características básicas do problema relaxado:

- i) linearidade de objetivos e restrições;
- ii) número de variáveis = número de objetivos =  $m \ll n$ .

Demonstra-se que estas reformulações conduzem às implementações mais eficientes de cada método considerado. Além disso, como o volume de informações a ser manipulado é agora sensivelmente menor (os objetivos se relacionam de uma forma bastante simples no espaço dos objetivos) espera-se conseguir avaliações mais precisas da parte do Decisor e eventualmente reduzir o esforço computacional necessário para se atingir a melhor solução de compromisso do PMO.

No fim do Capítulo demonstram-se algumas propriedades de convergência da estratégia de relaxação proposta supondo-se

- i) perfeito conhecimento da função utilidade  $u(\cdot)$ , quando então (1)-(2) passa a ser um problema comum de programação matemática;
- ii) conhecimento subjetivo de  $u(\cdot)$ .

### 3.2. CONSIDERAÇÕES SOBRE A SOLUÇÃO DO PMO NO ESPAÇO DOS OBJETIVOS

No Capítulo 1 formulou-se o problema de otimização multiobjetivos no espaço dos objetivos  $F$  como

$$\text{Min}_{y \in F} y \quad (3)$$

onde  $F \triangleq \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = f(x), x \in X\}$ . Demonstrou-se em seguida no Capítulo 2 que a adoção do conceito de solução satisfatória possibilita a substituição de (3) pelo problema de programação multiobjetivo *linear*.

$$\text{Min}_{y \in y^{k+1}} y \quad (4)$$

onde  $y^{k+1}$  denota a aproximação de ordem  $k$  do espaço de soluções satisfatórias do problema (3).

Por sua vez, o problema (4) possui também um conjunto de soluções eficientes  $\Gamma^{k+1} \in \partial y^{k+1}$  que nada mais é do que uma aproximação por  $k$  hiperplanos para  $\Gamma \subset y^{k+1}$ . Lembrando então que (4) é linear, o conjunto  $\Gamma^{k+1}$  pode em princípio ser completamente gerado por meio de técnicas apropriadas (Zeleny, 1973) para posterior definição, pelo Decisor, da melhor solução de compromisso de (3).

Entretanto este método exaustivo parece ser desnecessário em razão das facilidades que o problema (4) oferece para a utilização de técnicas interativas. No que diz respeito, por exemplo, à geração de soluções eficientes (nível de análise) podem ser empregados um dos procedimentos paramétricos a seguir

$$\text{Min}_{y \in y^{k+1}} \langle \lambda, y \rangle, \quad \lambda \in \Lambda \quad (5)$$

$$\text{Min}_{y \in Y^{k+1}} y_i \quad (6)$$

$$y_j \leq \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (j \neq i) \quad (7)$$

ambos lineares e de estrutura muito simples. Parece claro também que qualquer método iterativo (notadamente aqueles voltados para problemas lineares) que faça uso de conceitos como os de taxas de substituição entre objetivos e níveis de satisfação, pode ser adaptado para resolver (4) com algumas vantagens.

Considere por exemplo o método proposto por Haimes e Hall (1974) (veja também Haimes et alii, 1975), que popularizou o emprego da técnica das *ε-restrições* no desenvolvimento de algoritmos para resolução de problemas multicritérios. Numa primeira fase de aplicação do método, esta técnica é utilizada para a geração de soluções eficientes, de acordo com procedimentos já discutidos no Capítulo 1.

Em linhas gerais, o método de Haimes et alii consiste em interpretar as variáveis duais associadas às *ε-restrições* como *trade-offs* locais entre o critério de referência *i* e todos os demais. Esta mesma idéia quando transposta ao espaço dos objetivos através da metodologia do Capítulo 2 faria o problema de geração de soluções eficientes recair no problema (6)-(7) com  $\varepsilon_j = \underline{y}_i + \bar{\varepsilon}_j$ ,  $\bar{\varepsilon}_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, m$  ( $j \neq i$ ). Contudo, ao contrário da versão original do método que exige o emprego de algoritmos especiais para tratar possíveis não-linearidades, o problema (6)-(7) oferece condições ideais para o desenvolvimento de análises de sensibilidade via programação linear paramétrica (Bazaraa e Jarvis, 1977). A Fig. 3.1 ilustra como seria obtida a solução de (6)-(7) para o caso biobjetivo.

Note que para qualquer  $\varepsilon_2$ , a solução ótima de (6)-(7) pertencerá a  $\Gamma^{k+1}$ , que por sua vez é a aproximação corrente de  $\Gamma$ . De posse da solução de (6)-(7) e das variáveis duais  $\gamma_{ij}(\varepsilon_j)$  associadas às *ε-restrições* que no caso do problema (6)-(7) são apenas um subproduto de sua resolução, tem-se imediatamente uma medida dos *trade-offs* entre o critério de referência *i* e os restantes:

$$\frac{\partial y_i}{\partial y_j} = -\gamma_{ij}(\varepsilon_j), \quad j = 1, \dots, m \quad (j \neq i) \quad (8)$$

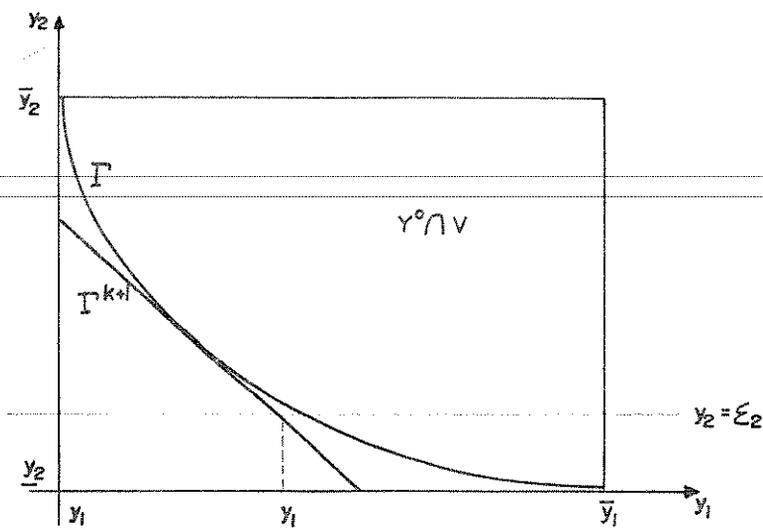


Fig. 3.1 - Resolução do problema  $\epsilon$ -restrito no espaço dos objetivos

Os demais passos da resolução de (4) através do método de Haimes e Hall seguem analogamente os passos do algoritmo original, isto é, construção da chamada Função do Valor Substituto (*Surrogate Worth Function*)  $w_{ij}(\gamma_{ij})$  e determinação da faixa de indiferença do Decisor (Haimes et alii, 1975).

A principal desvantagem do método original reside na necessidade de geração de um número muito grande de soluções eficientes como forma de melhor aproximar as funções  $w_{ij}(\gamma_{ij})$ . A técnica de relaxação adotada vem então no sentido de reduzir significativamente o esforço computacional associado com esta tarefa.

Outra alternativa de solução para o problema (4) seria o emprego do método de Benayon et alii (1971) descrito no Capítulo anterior. Quando colocado em termos da formulação (4), este método estaria relacionado à resolução do seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sigma \\ & y \in y^{k+1} \\ & \sigma \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (9)$$

$$w_j(y_j - \underline{y}_j) \leq \sigma, \quad j = 1, \dots, m \quad (10)$$

onde

$$w_j = \alpha_j / \sum_{j=1}^m \alpha_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (11)$$

$$\alpha_j = \frac{\bar{y}_j - y_j}{y_j}, \quad \text{se } y_j > 0 \quad (12)$$

$$\alpha_j = \frac{y_j - \bar{y}_j}{\bar{y}_j}, \quad \text{se } y_j \leq 0 \quad (13)$$

Suponha então que  $y^l$  resolve (9)-(10). Neste caso, se existe pelo menos uma componente  $y_s^l$  de  $y^l$  satisfatória e pelo menos uma não satisfatória, então o Decisor terá que definir uma quantidade  $\delta_s > 0$  da qual abrirá mão na tentativa de melhorar a(s) componente(s) não satisfatória(s). O novo problema a ser resolvido será portanto

$$\text{Min } \sigma \quad (14)$$

$$y \in y^{k+1}$$

$$-\sigma + w_j y_j \leq w_j \bar{y}_j \quad (15)$$

$$y_s \leq y_s^l + \delta_s \quad (16)$$

$$y_j \leq y_j^l, \quad j = 1, \dots, m \quad (j \neq s) \quad (17)$$

Observe que em (16) introduziu-se uma perturbação  $\delta_s$  no valor de  $y_s^l$ , a componente satisfatória arbitrariamente escolhida de  $y^l$ . Através de análises de sensibilidade pode-se agora estudar o comportamento da solução de (14)-(17) quando o lado direito de (16) é feito variar, auxiliando o Decisor a definir precisamente a quantidade  $\delta_s$ . Note ainda que esta técnica é aplicável ao método de Benayoun et alli no espaço das variáveis de decisão, porém a formulação (14)-(17) viabiliza o seu emprego com pequeno esforço computacional. É importante lembrar também que a formulação (1)-(2) torna possível aplicar o método de Benayoun et alli mesmo a problemas não-lineares, o que é basicamente inviável a partir do seu algoritmo original.

Na sequência da análise de métodos iterativos aplicáveis a (1)-(2), considere agora o método de Geoffrion, Dyer e Feinberg (Geoffrion et alli, 1972) que em vários aspectos é semelhante ao método de Programação Alvo iterativa de Dyer (1972). A sua discussão detalhada dentro deste capítulo facilitará algumas comparações entre a aplicação de um método de reconhecida eficiência no espaço das variáveis de decisão, e este mesmo método quando *projetado* no espaço dos critérios.

O método de Geoffrion et alli assume que o problema multiobjetivo se encontra formulado nos seguintes termos:

$$\text{Min}_{x \in X} u(f(x)) \quad (18)$$

e de forma a viabilizar o emprego do método de Frank e Wolfe (Wolfe, 1970) assume-se também que a função  $u(\cdot)$  seja diferenciável e convexa sobre um subconjunto convexo e compacto  $X \subset \mathbb{R}^n$ . O algoritmo utilizado na resolução de (18) é descrito a seguir.

#### ALGORITMO DE FRANK E WOLFE

**PASSO 0 :** Determine uma solução inicial factível  $x^0 \in X$  e faça  $k := 0$ .

**PASSO 1 :** Obtenha uma solução ótima  $\xi^k$  para o problema de otimização

$$\text{Min}_{\xi \in X} \langle \nabla u(f(x^k)), \xi \rangle \quad (19)$$

Faça  $d^k = \xi^k - x^k$ .

**PASSO 2 :** Determine a solução ótima do problema de busca unidimensional

$$\text{Min}_{t \in [0,1]} u(f(x^k + td^k)) \quad (20)$$

**PASSO 3 :** Faça  $x^{k+1} = x^k + t^k d^k$ . Se  $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$ , para  $\epsilon > 0$  arbitrariamente escolhido pare: a solução  $x^{k+1}$  resolve (18). Caso con

trário, faça  $k := k+1$  e retorne ao PASSO 1.

Como supõe-se que em geral a função utilidade  $u(\cdot)$  não é conhecida a priori, os PASSOS 1, 2 e 3 deverão ser conduzidos com o auxílio do Decisor. A aproximação linear da função  $u(\cdot)$  (PASSO 1) é obtida a partir da regra da cadeia:

$$\nabla u(f(x)) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial f_i} \nabla f_i(x) \quad (21)$$

O PASSO 1 pode então ser reescrito nos seguintes termos:

$$\text{Min}_{\xi \in X} \langle \sum_{i=1}^m w_i^k \nabla f_i(x^k), \xi \rangle \quad (22)$$

onde  $w_i^k \triangleq (\partial u / \partial f_i^k) / (\partial u / \partial f_1^k)$  define a Taxa Marginal de Substituição do Decisor entre os critérios  $i$  e 1, obtida por meio da aproximação (60), Capítulo 1.

A solução do problema de busca unidimensional (PASSO 2) também deve ser obtida com o auxílio do Decisor. Os autores sugerem que a escolha do passo  $t^k$  seja feita plotando-se as funções  $f_i(x^k + td^k)$ ,  $i = 1, \dots, m$  para  $t \in [0, 1]$  (como na Fig. 1.11 relativa ao método de Dyer) para em seguida o Decisor selecionar um valor  $t^k \in [0, 1]$  adequado. O critério de parada do algoritmo (PASSO 3) é subjetivo e depende de quão próximo da melhor solução do compromisso do PMO se acha a solução corrente em relação à solução anterior.

Os mecanismos utilizados pelo método de Geoffrion et alii para inferir preferências do Decisor também podem ser incorporados ao PASSO 2 do Algoritmo Básico. Reescrito nos termos desta nova metodologia, o algoritmo anterior consistiria dos seguintes passos:

**PASSO 0 :** Determinação de uma solução inicial factível. O cumprimento deste passo é trivial pois por construção, a última solução eficiente gerada pertence a  $y^{k+1}$ , isto é,  $f(x^k) \in \Gamma \subset y^{k+1}$ . Faça  $\ell := 0$  e  $y^0 = f(x^k)$ .

**PROVA:** Em qualquer iteração  $k$ , a última restrição linear adicionada a  $y^k$  pode ser escrita como

$$\langle \lambda^k, y - f(x^k) \rangle \geq 0 \quad (30)$$

$$\langle \lambda^k, y - \bar{y}^k \rangle \geq \langle \lambda^k, f(x^k) - \bar{y}^k \rangle \quad (31)$$

$$\langle \lambda^k, y - \bar{y}^k \rangle \geq \theta(\bar{y}^k) \quad (32)$$

e em qualquer iteração posterior  $p > k$ , a solução  $\bar{y}^p$  do problema relaxado deverá satisfazer (32). Assim

$$\theta(\bar{y}^k) \leq \langle \lambda^k, \bar{y}^p - \bar{y}^k \rangle \quad (33)$$

$$\leq \|\lambda^k\| \|\bar{y}^p - \bar{y}^k\| \quad (34)$$

$$\leq \|\bar{y}^p - \bar{y}^k\| \quad (35)$$

pois  $\|\lambda^k\| \leq 1$ ,  $\forall \lambda^k \in \Lambda$ . No limite quando  $k \rightarrow \infty$ , tanto  $\bar{y}^p$  como  $\bar{y}^k$  tendem a  $\bar{y}^*$ , obtendo-se então  $\theta(\bar{y}^*) \leq 0$ . Isto vem demonstrar que  $\bar{y}^* \in V$ . Por outro lado, associado a  $\bar{y}^*$  deve existir um  $\lambda^* \in \Lambda$  tal que  $\bar{y}^* = f(x(\lambda^*)) \in \Gamma \subset Y^0$ . Logo  $\bar{y}^* \in Y^0 \cap V$  e deste modo  $\bar{y}^*$  é uma solução factível de (29). Finalmente, supondo que  $u^*$  é o valor ótimo de (29) e em vista de que  $Y^0 \cap V \subset Y^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , tem-se  $u(\bar{y}^*) \leq u^*$ , concluindo-se assim que  $\bar{y}^*$  resolve (29).  $\square$

Note que a existência de um ponto limite da sequência  $\{\bar{y}^k\}$  é assegurada pela compacticidade de  $Y^0$  (Teorema de Weierstrass, Lumberger, 1970). A convergência infinita do Algoritmo Básico para o caso de  $u(\cdot)$  ser explicitamente conhecida fica assim demonstrada.

Considere agora o caso mais realista em que  $u(\cdot)$  não é uma função perfeitamente conhecida, uma vez que na prática o Decisor será capaz de fazer apenas aproximações locais desta função. Nestas condições, a convergência do Algoritmo Básico depende fundamentalmente da convergência, a cada iteração, do problema relaxado (1)-(2). Entretanto, mesmo neste caso é possível garantir a convergência do procedimento, lançando mão dos resultados de

ASSINTÓTICA (Canon e Cullum, 1968)

$$u(x^k) - u^* \leq \alpha/k^{1+\varepsilon}, \quad k \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0, \quad \varepsilon > 0 \quad \square \quad (28)$$

A desigualdade (27) assegura um rápido decrescimento (a *distância* entre a solução corrente e a solução ótima é sucessivamente dividida por 2) nas  $K$  primeiras iterações do método. Convém lembrar que a natureza da resolução de problemas multiobjetivos por técnicas interativas impõe algumas limitações quanto ao número final de interações entre Decisor e Analista. É sempre desejável que este número seja o menor possível e daí a importância prática da utilização de métodos com taxas de convergência iniciais elevadas, como é o caso do método de Frank e Wolfe.

Suponha que a função utilidade  $u(\cdot)$  é perfeitamente conhecida e que o algoritmo de Frank e Wolfe é utilizado para resolver o problema relaxado (1)-(2). Se  $u(\cdot)$  satisfaz as hipóteses do Teorema 3.1 ( $y^{k+1}$  é certamente um poliedro convexo limitado), então a sequência  $\{y^l\}$  converge para a solução de (1)-(2) de acordo com as características indicadas no Teorema 3.1. Resta apenas mostrar que nestas circunstâncias, o Algoritmo Básico também converge<sup>(\*)</sup>.

### TEOREMA 3.2:

Seja  $\{\bar{y}^k\}$  a sequência gerada pelo Algoritmo Básico. Qualquer ponto limite  $\bar{y}^*$  desta sequência resolve

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & u(y) \\ & y \in y^0 \cap V \end{aligned} \quad (29)$$

---

(\*) Note que  $\{y^l\}$  e  $\{\bar{y}^k\}$  referem-se às sequências geradas pelo método de Frank e Wolfe aplicado a (1)-(2) e pelo Algoritmo Básico, respectivamente.

Baptistella e Olero (1980) propõem procedimentos diretamente incorporáveis ao *Algoritmo Básico* do Capítulo 2.

Na próxima seção será realizado um estudo das suas propriedades de convergência, assumindo-se que o método de Geoffrion et alli é utilizado na resolução do problema (4).

### 3.3. CONVERGÊNCIA

Muito pouco se conhece sobre convergência de métodos iterativos voltados à resolução de problemas multiobjetivos, certamente em razão da dificuldade fundamental de modelar erros de avaliação cometidos pelo Decidor. De uma maneira geral, a análise de convergência de algoritmos é uma atividade complexa mesmo no caso escalar. Somente alguns poucos métodos apresentam um estudo completo de suas taxas de convergência (inicial e assintótica) e, dentre estes, destaca-se o método de Frank e Wolfe (Wolfe, 1970) para programação convexa, cujo algoritmo foi previamente introduzido ao longo do trabalho. Além disso, o método de Frank e Wolfe é também conhecido por apresentar estudos sobre *robustez*, isto é, convergência sob hipótese de erros de estimação do gradiente da função objetivo do problema. Sem dúvida, esta característica do método torna-o particularmente adequado a problemas do tipo (18), quando  $u(\cdot)$  não é explicitamente conhecida, justificando assim a racionalidade dos métodos de Dyer (1972) e Geoffrion et alli (1972).

As propriedades básicas de convergência do método de Frank e Wolfe estão sintetizadas no *Teorema 3.1*:

#### TEOREMA 3.1:

Se  $X$  é um poliedro convexo limitado,  $u(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(\cdot) \in C^2$  é uma função convexa sobre  $X$  e existem limites superiores e inferiores para todos os autovalores da matriz Hessiana de  $u(\cdot)$ , então a sequência  $\{x^k\}_0^\infty$  converge para a solução ótima  $u^*$  de (18) de acordo com as taxas:

INICIAL (Dyer, 1974)

$$u(x^k) - u^* \leq (u(x^0) - u^*) 2^{-k}, \quad k \leq K \quad (27)$$

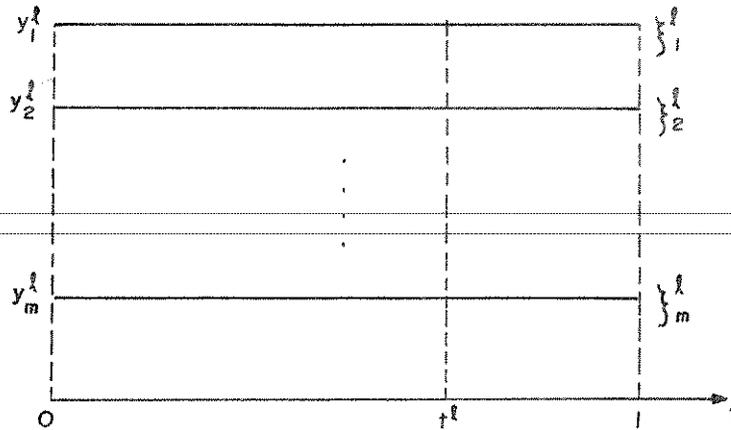


Fig. 3.2 - Determinação de passo do problema relaxado

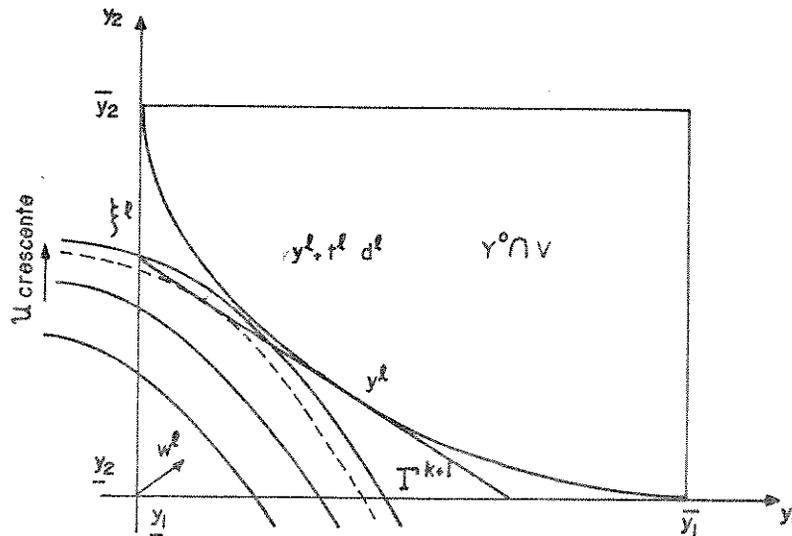


Fig. 3.3 - Interação do método de Geoffrion et alli no espaço dos objetivos

A reedição de métodos de reconhecida eficiência no espaço dos objetivos apenas exemplifica o caráter metodológico da abordagem que vem sendo proposta neste trabalho. Além dos métodos já citados é possível enumerar uma série de outros cujas formulações dentro do espírito deste trabalho conduzem a implementações muito simples (por exemplo, Zionts e Wallenius (1976)). Métodos desenvolvidos com base em Teoria de Conjuntos Nebulosos (*Fuzzy Sets*) podem ser também adaptados à técnica de relaxação proposta. Nesta linha,

**PASSO 1 :** Obtenha uma solução ótima  $\xi^l$  para o problema de otimização

$$\text{Min}_{\xi \in y^{k+1}} \langle \nabla u(y^l), \xi \rangle \quad (23)$$

Faça  $d^l = \xi^l - y^l$ . Note que (22) pode agora ser substituído por

$$\text{Min}_{\xi \in y^{k+1}} \langle w^l, \xi \rangle \quad (24)$$

onde  $w_i^l = (\partial u / \partial y_i) / (\partial u / \partial y_1)$ , cujo valor pode ser aproximado por

$$w_i^l = - \frac{y_1 - y_1^l}{y_i - y_i^l}, \quad i = 1, \dots, m \quad (25)$$

e que corresponde à obtenção de uma *taxa de substituição relaxada*.

**PASSO 2 :** Determine a solução ótima do problema de busca unidimensional

$$\text{Min}_{t \in [0,1]} u(y^l + t d^l) \quad (26)$$

No caso do problema (26), a sugestão dos autores para a determinação do passo  $t^l$  levaria à construção de um diagrama, como o ilustrado na Fig. 3.2. Note que a obtenção deste diagrama não representa na prática nenhum esforço de cálculo, ao contrário da versão original do método em que a determinação de  $t^l$  envolve o cálculo do valor de funções no intervalo  $t \in [0,1]$ .

A atualização das variáveis (*objetivos*) e teste de convergência são similares ao PASSO 3 do algoritmo original. A Fig. 3.3 ilustra uma interação do método de Geoffrion et alli adaptado ao espaço dos objetivos.

Hogan (veja Dyer, 1971; Baptistella, 1980) e Dyer (1974) sobre a *robustez* do método de Frank e Wolfe. De acordo com estes resultados é possível mostrar que a introdução de um fator de erro  $\eta^k$  no problema

$$\text{Min}_{\xi \in X} \langle \nabla u(x^k) + \eta^k, \xi \rangle \quad (36)$$

onde  $\nabla u(x^k)$  representa o valor *real* do gradiente de  $u(\cdot)$  no ponto  $x^k$ , não implica em perda de convergência do algoritmo a uma solução ótima, se  $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta^k = 0$ . Estes resultados sugerem assim que se os valores de  $w_i^l$ ,  $i = 1, \dots, m$  no problema (24) tornam-se cada vez mais exatos quando  $l$  cresce, ou em outras palavras, se o aprendizado do Decisor melhora a cada interação, então é possível garantir a convergência da série  $\{y^l\}$  a solução ótima de (24) e, em consequência, a convergência da série  $\{\bar{y}^k\}$  a solução ótima de (29).

### 3.4. CONCLUSÃO

Neste Capítulo procurou-se demonstrar que a formulação de problemas multiobjetivos no espaço  $F$ , a partir da noção de solução satisfatória, permite um elevado grau de especialização da maioria dos métodos iterativos hoje existentes. Em relação aos aspectos de análise, todos os métodos considerados tiveram seus procedimentos significativamente simplificados e a convergência do *Algoritmo Básico* a uma solução do PMO, estabelecida através do método iterativo de Geoffrion, Dyer e Feinberg (Geoffrion et alli, 1972). Este último em particular apresenta algumas características bastante favoráveis para a sua utilização como método de solução do PASSO 3 do *Algoritmo Básico*. O seu procedimento computacional é simples quando aplicado a uma formulação no espaço dos objetivos e a sua convergência pode ser assegurada mesmo na presença de erros de avaliação cometidos pelo *Decisor*. Por outro lado, embora as simplificações no seu algoritmo devam também se refletir em avaliações mais precisas por parte do *Decisor*, persiste ainda a necessidade de se ter que estimar Taxas Marginais de Substituição (que por sua vez definem a direção de pesquisa do método) através de simples análises de soluções locais.

Ressalte-se que a habilidade do Decisor em estimar estas Taxas por meio de soluções locais é questionável (Roy, 1972). No intuito de traduzir adequadamente julgamentos subjetivos do *Decisor* por Taxas de Substituição, Baptistella (1980) propôs alguns procedimentos baseados em Conjuntos Nebulosos (Bellman e Zadeh, 1970) que se adaptam bem ao método de Geoffrion et alii como "estimadores" do gradiente da função utilidade implícita  $u(.)$ . Quando associados às simplificações decorrentes da formulação do problema no espaço dos objetivos, estes procedimentos podem conduzir a um algoritmo geral bastante eficiente.

Finalizando, convém lembrar mais uma vez que o número de restrições e variáveis do problema (4) deve ser em geral suficientemente pequeno para permitir que o conjunto  $I^{k+1}$  seja completamente gerado com reduzido esforço computacional. Neste caso, procedimentos adicionais tornam-se desnecessários, caso o *Decisor* prefira escolher sua solução de compromisso a posteriori.

CAPÍTULO 4

ASPECTOS DA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA MIN-MAX

#### 4.1. INTRODUÇÃO

Neste Capítulo propõe-se estudar os aspectos numéricos envolvidos no cumprimento do PASSO 1 (Nível de Análise) do *Algoritmo Básico*, relativo à resolução do problema *Mín-Max*.

$$\theta(\bar{y}) = \max_{\lambda \in \Lambda} \min_{x \in X} \langle \lambda, f(x) - \bar{y} \rangle \quad (1)$$

$$= \max_{\lambda \in \Lambda} \phi(\lambda) \quad (2)$$

através do qual torna-se possível verificar se a solução  $\bar{y}$  escolhida pelo Decisor pertence ou não ao conjunto de soluções satisfatórias do problema multiobjetivo. Ao contrário dos demais Passos do *Algoritmo Básico*, o PASSO 1 não envolve qualquer fator subjetivo e pode ser abordado por técnicas convencionais de programação matemática. Neste Capítulo são discutidas algumas formas de se coordenar a fixação das variáveis  $\lambda \in \Lambda$  em (1) e a resolução do problema de programação não-linear nas variáveis  $x \in X$  resultante.

No fim do Capítulo introduz-se uma aplicação em planejamento de sistemas hidrotérmicos, que ilustra os principais resultados aqui expostos.

#### 4.2. CÁLCULO DE $\theta(y)$ : CASO GERAL

A natureza da função  $\phi(\lambda)$  impõe certos cuidados quando à obtenção da solução ótima de (1)-(2). É bastante conhecido no domínio da Teoria da Dualidade o fato de que somente em certos casos especiais é possível garantir que funções deste tipo possuam primeiras derivadas parciais contínuas.

Como em última análise, o método multicritério proposto envolve a maximização de  $\phi(\lambda)$  sobre  $\Lambda$  e para uma grande parcela de métodos apropriados a este problema, o cálculo de gradientes e/ou de suas projeções é essencial, será relevante expor algumas condições suficientes para que  $\nabla\phi(\lambda^0)$  exista num determinado ponto  $\lambda^0$  do seu domínio  $\Lambda$ .

O principal resultado dentro da teoria sobre diferenciabilidade de funções do tipo dual é devido a Danskin (Lasdon, 1970). Este resultado é fundamental na demonstração do seguinte *Teorema*.

## TECREMA 4.1:

Se  $X \subset \mathbb{R}^n$  é compacto e  $f_i(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$  são funções contínuas sobre  $X$ , então  $\phi(\lambda)$  é diferenciável num ponto  $\lambda^0 \in \Lambda$  se e somente se  $(f(\cdot) - \bar{y})$  for constante sobre  $X(\lambda^0)$ , o conjunto solução de

$$\text{Min}_{x \in X} \langle \lambda, f(x) - \bar{y} \rangle \quad (3)$$

para  $\lambda = \lambda^0$ . Neste caso, o gradiente de  $\phi(\cdot)$  será dado por

$$\nabla \phi(\lambda^0) = f(x) - \bar{y}, \quad \forall x \in X(\lambda^0) \quad (4)$$

PROVA: Lasdon, 1970.  $\square$

Em particular,  $\phi(\cdot)$  certamente é diferenciável num ponto  $\lambda^0 \in \Lambda$  se  $X(\lambda^0)$  contém apenas um elemento, isto é, quando a solução de (3) é única. É interessante notar que esta também é uma condição suficiente para que a solução obtida seja *eficiente* e neste caso ter-se-ia  $X(\lambda^0) \subset X^*$ , onde  $X^*$  é o conjunto de soluções eficientes do PMO. Um importante caso especial em que a unicidade de  $X(\lambda^0)$  fica assegurada acontece quando as funções  $f_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, m$  são *estritamente* convexas sobre  $X$ .

Admitindo-se que  $\phi(\lambda)$  é continuamente diferenciável em  $\Lambda$ , torna-se então possível adotar procedimentos iterativos baseados em projeção de gradiente (vide Seção 4.3), atualizando o valor de  $\lambda \in \Lambda$  através da recursão

$$\begin{cases} \lambda^{\ell+1} = \lambda^{\ell} + \alpha^{\ell} \text{Proj}_{\Lambda} \nabla \phi(\lambda^{\ell}) \\ \phi(\lambda^{\ell+1}) > \phi(\lambda^{\ell}), \quad \ell = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (5)$$

para valores de passo  $\alpha^{\ell} > 0$  adequadamente escolhidos. Contudo, além das dificuldades relacionadas com a diferenciabilidade de  $\phi(\lambda)$ , parece claro que a menos de situações particulares em que o mínimo sobre  $X$  em (3) pode-se ser obtido facilmente, qualquer método de direções factíveis baseado em

(5) seria oneroso em termos de esforço computacional, devido às atividades de projeção de  $\nabla\phi(\cdot)$  sobre  $\Lambda$  e principalmente de determinação dos valores apropriados de  $\alpha^\lambda$ ,  $\lambda = 0, 1, \dots$

Nestas circunstâncias é conveniente investigar procedimentos alternativos para a resolução de (1)-(2). Por exemplo, assumindo-se como no Teorema 4.1 que  $X \subset \mathbb{R}^n$  é compacto, demonstra-se (Lasdon, 1970) que se  $x(\lambda)$  resolve (3), isto é,

$$x(\lambda) = \arg \min_{x \in X} \langle \lambda, f(x) - \bar{y} \rangle, \quad (6)$$

então

$$\xi = f(x(\lambda)) - \bar{y} \quad (7)$$

representa um elemento do conjunto de *subgradiantes* de  $\phi(\cdot)$  no ponto  $\lambda^i$ ,  $\partial\phi(\lambda^i)$ , e que em razão da concavidade de  $\phi(\cdot)$ , satisfaz

$$\phi(\lambda) \leq \phi(\lambda^i) + \langle \xi, \lambda - \lambda^i \rangle, \quad \forall \lambda \in \Lambda, \quad \forall \xi \in \partial\phi(\lambda^i) \quad (8)$$

Além disso, supondo-se a existência de um conjunto de  $r$  subgradiantes  $\xi^i = f(x(\lambda^i)) - \bar{y}$ ,  $i = 1, \dots, r$  então

$$\phi^r(\lambda) = \min_{1 \leq i \leq r} \langle \lambda, f(x(\lambda^i)) - \bar{y} \rangle \quad (9)$$

representa uma aproximação de ordem  $r$  para  $\phi(\cdot)$  e, em vista deste fato, ter-se-ia a seguinte aproximação para (1)-(2):

$$\max_{\lambda \in \Lambda} \min_{1 \leq i \leq r} \langle \lambda, f(x(\lambda^i)) - \bar{y} \rangle \quad (10)$$

Note que (10) é um limitante superior para o valor de  $\theta(\bar{y})$ , e que pode ser obtido por um método de *Planos de Corte*.

$$\max_{\lambda \in \Lambda} \sigma \quad (11)$$

$$\sigma \leq \langle \lambda, f(x(\lambda^i)) - \bar{y} \rangle, \quad i = 1, \dots, r \quad (12)$$

Existem certas vantagens implícitas no uso de (11)-(12) como um coordenador para a resolução de (1)-(2). Ao contrário do procedimento baseado em projeção de gradiente, a introdução da restrição adicional  $\lambda \in \Lambda$  pouco acrescenta em termos de complexidade à resolução do problema linear (11)-(12), ao mesmo tempo em que desaparece a necessidade de se determinar passos para a atualização das variáveis  $\lambda$ . Assim, a estratégia para o cálculo de  $\theta(\bar{y})$  resume-se em, após resolver (11)-(12) usar a sua solução ótima  $\lambda^{r+1}$  para gerar um novo subgradiente  $\xi^{r+1}$  através de (6)-(7) e este, por sua vez, para gerar uma nova restrição a ser adicionada a (11)-(12), repetindo-se este ciclo até que  $(\phi(\lambda^r) - \sigma^r) < \epsilon$ , para um dado  $\epsilon > 0$  arbitrariamente pequeno.

O procedimento descrito acima é recomendado para a resolução de problemas do tipo dual com restrições de não-negatividade em que a existência de diferenciabilidade não é garantida (Lasdon, 1970). Constatou-se experimentalmente que este procedimento torna-se ainda mais eficiente sempre que a faixa de variação das *variáveis duais*  $\lambda$  está canalizada entre limitantes inferiores e superiores, como no caso do problema (11)-(12). De fato, a sua utilização possibilitou o cálculo de  $\theta(\bar{y})$  sempre com um número relativamente pequeno de iterações.

#### 4.3. CÁLCULO DO VALOR DE $\phi(\lambda)$ POR MÉTODOS DE PROJEÇÃO DE GRADIENTE

O cálculo do valor da função  $\phi(\cdot)$  num dado ponto  $\lambda \in \Lambda$  representa a mais básica das tarefas associadas ao nível de análise do método proposto no Capítulo 2. Na verdade, esta tarefa recai no domínio de um ramo mais específico da programação matemática, que lida com problemas de otimização do tipo

$$\text{Min}_{x \in X} h(x) \quad (13)$$

onde por hipótese  $h(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(\cdot) \in C^1$  e  $X \subset \mathbb{R}^n$ . É fácil ver que (3) é redutível à forma (13) para  $\lambda \in \Lambda$  fixo. É desnecessário lembrar também que a eficiência numérica de todo o desenvolvimento realizado até o mo-

mento depende em primeira instância de quão eficiente é a resolução do problema (13). Embora de uma maneira geral  $X$  possa conter restrições não-lineares, a maioria dos métodos que se encaixam na formulação (13) se restringe em considerar apenas o importante caso especial

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\} \quad (14)$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$  ( $\text{rank}(A) = p \leq n$ ),  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ .

A estratégia usualmente adotada para se resolver (13) consiste em repetir os passos básicos descritos a seguir até que uma dada condição seja preenchida, indicando que a solução corrente satisfaz as condições de Kuhn-Tucker para existência de um mínimo local de  $h(x)$  restrito a  $X$ . Determine uma solução inicial factível  $x^0 \in X$  e faça  $\ell := 0$ .

**PASSO 1 :** Encontre uma direção de pesquisa  $s^\ell$  tal que:

$$\exists \bar{\alpha} > 0 \mid (x^\ell - \alpha s^\ell) \in X, \quad \forall 0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha} \quad (15)$$

$$\langle \nabla h(x^\ell), s^\ell \rangle > 0 \quad (16)$$

**PASSO 2 :** Determine o passo do algoritmo  $\alpha^\ell$  resolvendo o problema de busca unidimensional

$$\text{Min}_{0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}} h(x^\ell - \alpha s^\ell) \quad (17)$$

**PASSO 3 :** Faça  $x^{\ell+1} = x^\ell - \alpha^\ell s^\ell$ ,  $\ell := \ell+1$  e volte ao PASSO 1.

As implementações mais difundidas deste algoritmo básico fazem uso de técnicas de projecção de gradiente para a determinação da direção  $s^\ell$ , seguindo a linha de pesquisa proposta por Rosen em 1960 e continuamente explorada desde então. De acordo com esta técnica, a direção  $s^\ell$  é determinada através de

$$s^\ell = \text{Proj}_{\Omega(x^\ell)} \nabla h(x^\ell) \quad (18)$$

que denota a projeção ortogonal do gradiente  $\nabla h(x^\ell)$  sobre  $\Omega(x^\ell)$ , o conjunto formado a partir das restrições ativas de (13) na solução corrente  $x^\ell$ . Esta operação de projeção pode ser representada matematicamente por (Ferreira, 1983).

$$s^\ell = \arg \text{Min}_{s \in \Omega(x^\ell)} \frac{1}{2} \|\nabla h(x^\ell) - s\|^2 \quad (19)$$

e no caso específico do método de Rosen,

$$\Omega(x^\ell) = \{s \mid As = 0; s_i = 0 \text{ se } x_i^\ell = \underline{x}_i \text{ ou } x_i^\ell = \bar{x}_i\} \quad (20)$$

De uma maneira geral, a definição de  $\Omega(x^\ell)$  varia em função do método utilizado. Por exemplo, Geromel e Baptistella (1981) propuseram o conjunto alternativo

$$\Omega(x^\ell) = \{s \mid As = 0; s_i \leq 0 \text{ se } x_i^\ell = \underline{x}_i; s_i \geq 0 \text{ se } x_i^\ell = \bar{x}_i\} \quad (21)$$

A resolução do problema indicado em (19) com  $s$  restrito a (21) através de dualidade, permite decompor a obtenção de  $s^\ell$  em  $n$  problemas de determinação das componentes  $s_i^\ell$ , cujas soluções são analíticas, resultando assim um procedimento computacional bastante eficiente.

Estudos posteriores (Ferreira, 1983; Geromel e Ferreira, 1986) nesta mesma linha mostraram a viabilidade teórica e computacional de uma nova forma de decompor a obtenção de  $s^\ell$  em (19). O ponto de partida para o desenvolvimento deste novo método é a Definição 4.1, a seguir<sup>(\*)</sup>.

#### DEFINIÇÃO 4.1: GRADIENTE MODIFICADO.

Diz-se que um vetor  $\nabla_m h(x^\ell) \in \mathbb{R}^r$  é um *gradiente modificado* da função  $h(\cdot)$  no ponto  $x^\ell \in X$  com respeito a  $B \subset \mathbb{R}^r$  se satisfaz

$$\text{Proj}_A \nabla_m h(x^\ell) = \text{Proj}_{A \cap B} \nabla h(x^\ell) \quad (22)$$

(\*) Note que a solução de (13) por métodos de projeção de gradiente não exclui a utilização de um método mais apropriado a um problema particular.

A importância prática desta definição surge do fato de que a equação (18) pode ser vista como

$$s^{\ell} = \text{Proj}_{\tilde{\Omega}(x^{\ell})} \nabla h(x^{\ell}) = \text{Proj}_{N(A) \cap \tilde{\Omega}(x^{\ell})} \nabla h(x^{\ell}) \quad (23)$$

onde  $N(A) \triangleq \{s \in \mathbb{R}^n \mid As = 0\}$  representa o espaço nulo de  $A$  e  $\tilde{\Omega}(x^{\ell}) \triangleq \{s \in \mathbb{R}^n \mid s_i \leq 0, \text{ se } x_i^{\ell} = \underline{x}_i; s_i \geq 0 \text{ se } x_i^{\ell} = \bar{x}_i\}$ . Pela Definição 4.1 tem-se então que

$$s^{\ell} = \text{Proj}_{N(A) \cap \tilde{\Omega}(x^{\ell})} \nabla h(x^{\ell}) = \text{Proj}_{N(A)} \nabla_m h(x^{\ell}) = P \nabla_m h(x^{\ell}) \quad (24)$$

onde  $P \triangleq I - A'(AA')^{-1}A$  é o operador de projeção ortogonal no espaço nulo da matriz  $A$ . Desta forma, o problema de determinação da direção de pesquisa  $s^{\ell}$  é resolvido a priori no que diz respeito às restrições de igualdade (a matriz de projeção é calculada uma única vez), ficando o cálculo do gradiente modificado  $\nabla_m h(x^{\ell})$  função apenas do conjunto  $\tilde{\Omega}(x^{\ell})$ . Por conveniência, introduz-se a seguinte notação

$$\tilde{\Omega}(x^{\ell}) \triangleq \{s \in \mathbb{R}^n \mid S(x^{\ell})s \leq 0\} \quad (25)$$

onde  $S(x^{\ell}) \in \mathbb{R}^{r \times n}$  é uma matriz sinal composta pelos elementos -1, 0 e 1, com apenas um elemento diferente de 0 por linha. O sinal deste elemento depende de qual das restrições sobre  $x_i^{\ell}$  se encontra ativa. Note que neste caso o valor de  $r$  representa o número total de restrições de canalização ativas na solução  $x^{\ell}$ .

Supondo-se conhecida uma solução inicial factível  $x^0 \in X$  do problema (13), a sua solução ótima é obtida pelo método de gradientes modificados de acordo com o procedimento descrito a seguir, para uma iteração genérica  $\ell$ .

#### ALGORITMO DE GRADIENTE MODIFICADO

**PASSO 1 :** Encontre  $\nabla h(x^{\ell})$  e  $S(x^{\ell})$ .

**PASSO 2 :** Com  $P$ ,  $\nabla h(x^{\ell})$  e  $S(x^{\ell})$  determine

$$\mu(x^l) = \arg \max_{\mu \geq 0} \frac{1}{2} \langle \mu, Q(x^l) \mu \rangle + \langle c(x^l), \mu \rangle \quad (26)$$

onde  $Q(x^l) = -S(x^l)P S(x^l)'$  e  $c(x^l) = S(x^l)P \nabla h(x^l)$ .

**PASSO 3 :** Determine o gradiente modificado  $\nabla h(x^l)$  e a direção de pesquisa  $s^l$  por

$$\nabla_m h(x^l) = \nabla h(x^l) - S(x^l)' \mu(x^l) \quad (27)$$

$$s^l = P \nabla_m h(x^l) \quad (28)$$

**PASSO 4 :** Se  $\|s^l\| < \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, pare. A solução corrente  $x^l$  satisfaz as condições necessárias de Kuhn e Tucker para existência de um mínimo local de  $h(x)$ . Caso contrário, vá ao PASSO 5.

**PASSO 5 :** Encontre o passo  $\alpha^l$  do algoritmo resolvendo (17), atualize as variáveis primais  $x^{l+1} = x^l - \alpha^l s^l$ , faça  $l := l+1$  e volte ao PASSO 1.

A determinação do operador de projeção  $P$  sobre  $N(A)$  é feita externamente ao Algoritmo e pode ser conduzida, por exemplo, através de Decomposição LU (com  $U = L'$  para o caso específico da determinação de  $(AA')^{-1}$ ) ou, em casos onde  $(AA')$  é uma matriz potencialmente mal-condicionada, através do procedimento recursivo a seguir, mais estável numericamente (Avriel, 1976):

$$P_0 = I, \quad P = P_p \quad (29)$$

$$P_{i+1} = P_i - \frac{P_i a'_{i+1} a_{i+1} P_i}{a_{i+1} P_i a'_{i+1}}, \quad i = 0, \dots, p-1 \quad (30)$$

onde  $a_{i+1}$  denota a  $(i+1)$ -ésima linha da matriz  $A$ .

Com relação ao *Algoritmo de Gradiente Modificado*, note que a partir do conhecimento de  $P$  e  $PVh(x^l)$ , a determinação de  $Q(x^l) \in \mathbb{R}^{r \times r}$  e  $c(x^l) \in \mathbb{R}^r$  envolve apenas operações lógicas e que  $\dim(Q(x^l)) = r$ , sendo razoável esperar que em problemas de grande porte  $r \ll n$ . É possível demonstrar (Geromel e Ferreira, 1986) um certo número de propriedades que simplificam significativamente a resolução do problema indicado em (26). Em particular, demonstra-se que a matriz  $Q(x^l)$  é definida positiva no subespaço das direções *usáveis* (isto é, direções que satisfazem (15)-(16)) do problema (26), o que viabiliza o emprego de métodos do tipo *gradiente ótimo* para a sua resolução. A versão atual do programa que implementa o *Algoritmo* utiliza uma técnica de gradientes conjugados proposta por Hestenes (1980).

Convém lembrar ainda que, contrariamente ao método clássico de Rosen, a diferença entre o número de restrições ativas em iterações consecutivas do método é completamente arbitrário (no método de Rosen esta diferença é tipicamente 1) e que  $\Omega(x^l)$  dado por (21) propicia maiores graus de liberdade para a definição da direção de pesquisa  $s^l$ .

A extensão do método a problemas de otimização dinâmica (Ferreira, 1983; Ferreira e Geromel, 1985a) vem sendo bastante utilizada pelo Autor em problemas de planejamento da geração de energia em sistemas hidroelétricos, sempre com bons resultados. Na próxima Seção, uma destas aplicações é discutida, quando então vários pontos levantados neste Capítulo poderão ser melhor analisados.

#### 4.4. CONTROLE MIN-MAX DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS

O planejamento da geração de um sistema de energia elétrica está comumente associado ao gerenciamento de dois meios distintos de produção - hidráulico e térmico. Em linhas gerais, o problema consiste em determinar a parcela da demanda esperada que cabe a cada um destes subsistemas, em cada período do horizonte de planejamento, de forma a minimizar os custos operacionais do sistema como um todo. Entretanto, sabe-se que a maior parcela destes custos recai sobre o subsistema térmico, que por este motivo deve, sempre que possível, apenas complementar eventuais déficits entre a produção do sistema hidráulico e a demanda requerida.

Basicamente, o planejamento econômico do sistema torna-se uma tarefa

difícil devido à natureza cíclica dos recursos hidráulicos que, em geral, não coincide com o ciclo da demanda. Surge assim a necessidade de se regular a utilização destes recursos de acordo com o comportamento esperado da demanda e, desta necessidade, a motivação para os trabalhos de inúmeros autores (Arvanitides e Rosing, 1970; Geromel et alii, 1981; Lyra Filho, 1984).

Quase sempre procura-se atacar este problema globalmente, minimizando-se por exemplo a soma dos custos de geração do sistema térmico sujeito às restrições operativas de ambos os subsistemas. Entretanto, em sistemas predominantemente hidráulicos, como é o caso do sistema brasileiro (responde por mais de 90% da produção de energia elétrica do país), justifica-se uma tentativa de *hierarquização* de cálculos com vistas à obtenção das políticas de operação hidráulica e térmica do sistema. Neste sentido foi proposta recentemente (Ferreira e Geromel, 1985b) a seguinte forma de decomposição do problema global em dois subproblemas:

**SUBPROBLEMA 1 :** Determinação da política de operação ótima do subsistema hidráulico considerando-se explicitamente o ciclo da demanda;

**SUBPROBLEMA 2 :** Determinação da política de operação ótima que minimize os custos de complementação térmica do sistema.

De forma a obter esta decomposição, introduz-se o conceito de *taxa de utilização* do subsistema hidráulico, que vem a ser a relação, em cada estágio do planejamento, entre a geração hidráulica total no período e o valor de demanda correspondente. Maximizando-se esta taxa através de uma técnica do tipo *Min-Max*, obtêm-se um efeito de *equalização* dos ciclos hidráulicos e de demanda do sistema. Uma vez que a solução do *subproblema 1* tenha sido encontrada, a política ótima de geração do subsistema térmico é facilmente obtida (*Subproblema 2*),

O modelo matemático do subsistema hidráulico expressa a operação interligada de um certo número de usinas hidroelétricas. Num modelo com  $n$  unidades, as principais quantidades são:

$x_i(k)$  : Volume de água armazenado no reservatório  $i$  no começo do período  $k$ ;

- $u_i(k)$  : Volume de água turbinada pela usina  $i$  durante o período  $k$  ;  
 $y_i(k)$  : Afluências que chegam à usina  $i$  no período  $k$  ;  
 $J_i$  : Conjunto de índices representando as usinas imediatamente acima (a montante) da usina  $i$  .

Desta forma, a transição do subsistema hidráulico do período  $k$  ao período  $k+1$  pode ser descrita pela equação linear a diferenças

$$x(k+1) = x(k) + Bu(k) + y(k), \quad x(0) = x_0 \quad (31)$$

$$k \in K = [0, T-1]$$

onde  $x(k)' = [x_1(k) \dots x_n(k)] \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estados do subsistema,  $u(k)' = [u_1(k) \dots u_n(k)] \in \mathbb{R}^n$  suas variáveis de controle e  $y(k)' = [y_1(k) \dots y_n(k)] \in \mathbb{R}^n$  entradas independentes aos reservatórios. A condição inicial do sistema  $x(0)$  é suposta conhecida e, por simplicidade, admite-se que o estado final  $x(T)$  pode assumir qualquer valor permissível. A matriz  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  estabelece a estrutura de interconexão entre as usinas e é definida facilmente como segue:

$$B = \{b_{ij}\} = \begin{cases} -1, & \text{se } i = j \\ 1, & \text{se } j \in J_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (32)$$

Além disso, existem limitações sobre a operação dos reservatórios e turbinas, expressas por

$$x(k+1) \in X \triangleq \{x(k) : \underline{x} \leq x(k+1) \leq \bar{x}, \quad k \in K\} \quad (33)$$

$$u(k) \in U \triangleq \{u(k) : \underline{u} \leq u(k) \leq \bar{u}, \quad k \in K\} \quad (34)$$

Convém destacar que as restrições (33)-(34) podem surgir não apenas devido a limitações físicas de reservatório e funcionamento de turbinas, mas também como forma de contemplar indiretamente outros objetivos importantes,

como por exemplo assegurar condições de navegabilidade e controle de cheias na bacia onde se localizam as usinas (Lyra, 1984).

A geração de uma hidroelétrica num período  $k \in K$  é função do volume turbinado pela usina  $u_i(k)$  e da sua altura de queda líquida  $h(\cdot)$ . Esta por sua vez é função do volume de água armazenado no reservatório  $x_i(k)$ . Assim, a geração total do subsistema hidráulico no período  $k$  pode ser completamente representada pela seguinte função diferenciável (e, em geral, não cônica sobre (31)-(34)):

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(x_i(k), u_i(k)) = \sum_{i=1}^n \rho_i a u_i(k) h(x_i(k)) \quad (35)$$

onde  $k \in K$ . As constantes  $\rho_i$  e  $a$  denotam, respectivamente, o rendimento equivalente do sistema turbina-gerador da usina  $i$  e a aceleração da gravidade. O problema de otimização

$$\text{Max}_{u(k) \in U} \sum_{k=0}^{T-1} \sum_{i=1}^n \psi_i(x_i(k), u_i(k)) \quad (36)$$

s.a. (31)-(34)

onde  $T$  representa horizonte de planejamento é frequentemente colocado na literatura e pode ser resolvido por inúmeros métodos. Dentre estes, a extensão do método descrito na seção anterior a problemas dinâmicos permite explorar com eficiência a estrutura particular do subsistema hidráulico sem impor quaisquer condições para a sua aplicabilidade (Ferreira e Geromel, 1985a).

A parcela da demanda do mercado que não puder ser suprida pelo subsistema hidráulico deverá ser complementada pelo subsistema térmico a um custo mínimo. Se  $g(k)' = [g_1(k) \dots g_m(k)]$  representa a geração no período  $k$  de um parque térmico composto por  $m$  unidades geradoras, então

$$g(k) \in G \triangleq \{g(k) : \underline{g} \leq g(k) \leq \bar{g}, k \in K\} \quad (37)$$

onde  $\underline{g}$  e  $\bar{g}$  denotam os limitantes inferior e superior sobre a capacidade de geração deste subsistema. O custo de geração  $C_i(\cdot)$  de cada uma das uni

dades térmicas, geralmente associado ao consumo de óleo combustível, pode ser descrito por uma função convexa crescente do nível de geração  $g(k)$  (uma descrição mais detalhada do subsistema térmico é feita no Capítulo seguinte). Assim, o problema global de planejamento fica sendo

$$\text{Min}_{g(k) \in G} \sum_{k=0}^{T-1} \sum_{i=1}^m C_i(g_i(k)) \quad (38)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^m g_i(k) + \sum_{i=1}^n \psi_i(x_i(k), u_i(k)) \geq \ell(k), \quad \forall k \in K \quad (39)$$

(32)-(35)

onde  $\ell(k)$  é a demanda esperada no período  $k$ . Um importante aspecto deste problema é que para qualquer quantidade fixa de geração hidráulica (35), o problema resultante recai em um problema de Despacho Econômico de Usinas Térmicas (Dommel, 1978) cuja solução ótima consiste simplesmente em procurar igualar os custos marginais de geração de todas as usinas.

Existe portanto uma clara vantagem em tentar obter a priori uma política de operação ótima para o subsistema hidráulico. Por outro lado, sem a presença do objetivo (38) torna-se necessário introduzir algum outro índice de desempenho que assegure uma futura complementação térmica com custo mínimo. Neste sentido, propõe-se o seguinte índice:

$$J(x(k), u(k)) = \ell(k)^{-1} \sum_{i=1}^n \psi_i(x_i(k), u_i(k)) \quad (40)$$

que mede a taxa de utilização do subsistema hidráulico no instante  $k \in K$ , para em seguida tentar torná-lo tão grande quanto possível com uma abordagem do tipo *Min-Max*:

$$\text{Max}_{u(k) \in U} \min_{k \in K} J(x(k), u(k)) \quad (41)$$

s.a. (31)-(34)

É possível mostrar (Ferreira e Geromel, 1985b) que o problema *dual* associado a (41) se escreve na forma

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\lambda \in \Lambda} \quad & \text{Max}_{u(k) \in U} \quad \sum_{k=0}^{T-1} \lambda_k J(x(k), u(k)) \\ \text{s.a.} \quad & (31)-(34) \end{aligned} \quad (42)$$

e na hipótese de que (40) seja uma função *côncava* tem-se portanto que os problemas (41) e (42) são equivalentes. Entretanto é impossível garantir que em situações práticas a função (40) apresente esta característica e, deste modo, torna-se necessário trabalhar sem a hipótese de concavidade e por conseguinte sem a hipótese de diferenciabilidade de

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) = \text{Max}_{u(k) \in U} \quad & \sum_{k=0}^{T-1} \lambda_k J(x(k), u(k)) \\ \text{s.a.} \quad & (31)-(34) \end{aligned} \quad (43)$$

em relação a  $\lambda \in \Lambda$ . A solução de (41) consistirá então em aproximar-se progressivamente o valor de (42) pelo problema linear nas variáveis  $(\lambda, \sigma)$ .

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\lambda \in \Lambda} \quad & \sigma \\ \text{s.a.} \quad & \sigma \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\sigma \geq \langle \lambda, \xi^i \rangle, \quad i = 1, \dots, r \quad (45)$$

onde  $r$  é a aproximação corrente e

$$\xi^i = [J(x^i(0), u^i(0)) \dots J(x^i(T-1), u^i(T-1))] \quad (46)$$

o valor do subgradiente de (43) obtido com  $\lambda = \lambda^i$ .

O procedimento iterativo que resolve (42) via a abordagem *Min-Max* proposta é resumido em seguida. Assume-se o conhecimento de uma política inicial admissível  $(u^0(0) \dots u^0(T-1))$ . Escolhendo-se um valor inicial qualquer para  $\lambda^0 \in \Lambda$ , uma iteração genérica do procedimento ficaria como:

- PASSO 1 :** Resolva o problema não-linear (43) para  $\lambda = \lambda^\ell$ , obtendo  $\phi(\lambda^\ell)$  e  $\xi^\ell$ .
- PASSO 2 :** Resolva o problema linear (44)-(45) para  $r = \ell$ , obtendo  $\sigma^\ell$  e  $\lambda^{\ell+1}$ .
- PASSO 3 :** Se  $(\phi(\lambda^\ell) - \sigma^\ell) < \epsilon$ , sendo  $\epsilon > 0$  arbitrariamente pequeno, pare: a política de controle corrente  $[u^\ell(0) \dots u^\ell(T-1)]$  resolve (42). Caso contrário, faça  $\ell := \ell+1$  e volte ao PASSO 1.

Note que a política obtida com este procedimento será na maioria dos casos *sub-ótima*, uma vez que fornece apenas um limitante inferior do valor real de (41), devido à ausência de concavidade de (40). Entretanto, o esquema de decomposição proposto permanece válido dado que, mesmo sendo sub-ótimo, a política de controle obtida satisfaz todas as restrições físicas do subsistema.

Em seguida, a eficiência do procedimento proposto é ilustrada com um exemplo real de controle de usinas hidráulicas. O subsistema em questão é composto por 4 hidráulicas localizadas na Bacia do Rio Paraná, como mostra a Fig. 4.1.

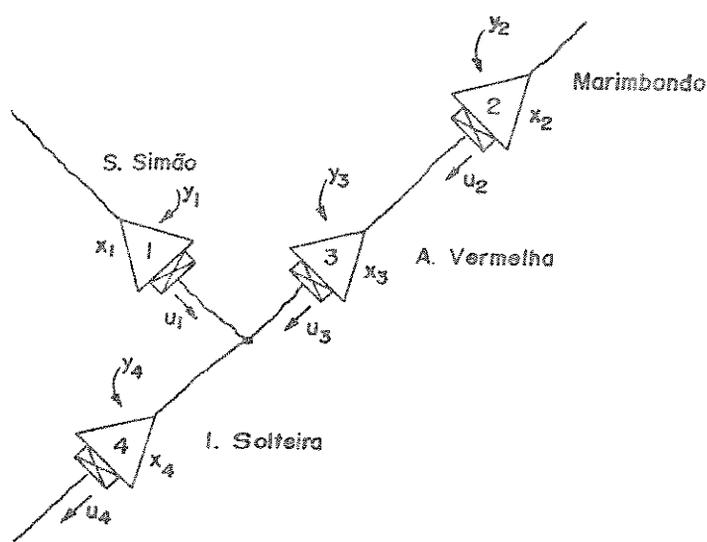


Fig. 4.1 - Subsistema hidráulico da região sudeste

Considerou-se um horizonte de planejamento de 1 ano (médio prazo) com discretização mensal, isto é,  $T = 12$ . Embora para este horizonte as afluições ao subsistema sejam variáveis estocásticas, optou-se por considerar apenas o problema determinístico envolvendo afluições médias observadas no ano de 1954.

As funções  $h_i(\cdot)$  relacionando altura de queda e volume de água armazenada no reservatório são aproximadas por polinômios de 4ª ordem, cujos coeficientes são fornecidos na Tabela 4.1. Os limitantes sobre volume armazenado e turbinagem de cada reservatório assim como o rendimento específico de cada usina e a condição inicial dos reservatórios estão indicados na Tabela 4.2. Finalmente, na Tabela 4.3 estão indicadas as afluições médias utilizadas na aplicação.

USINA	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
1	29,93000	$0,84567 \times 10^{-2}$	$-0,90713 \times 10^{-6}$	$0,60069 \times 10^{-10}$	$-0,16120 \times 10^{-14}$
2	33,06000	$0,11671 \times 10^{-1}$	$-0,21615 \times 10^{-5}$	$0,21912 \times 10^{-9}$	$-0,82406 \times 10^{-14}$
3	17,77000	$0,82191 \times 10^{-2}$	$-0,92300 \times 10^{-6}$	$0,62415 \times 10^{-10}$	$-0,16974 \times 10^{-14}$
4	13,25000	$0,32762 \times 10^{-2}$	$-0,15157 \times 10^{-6}$	$0,44840 \times 10^{-11}$	$-0,53946 \times 10^{-16}$

Tabela 4.1 - Coeficientes dos polinômios  $h_i(x_i(k)) = c_{0i} + \dots + c_{4i}x_i(k)^4$

USINA	$\bar{x}$ ( $10^6 \text{ m}^3$ )	$\bar{x}$ ( $10^6 \text{ m}^3$ )	$\bar{u}$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	$\bar{v}$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	$\rho$	$x(0)$ ( $10^6 \text{ m}^3$ )
1	7.000	12.500	693	2.558	0.89	9.750
2	900	6.150	457	2.640	0.88	3.620
3	4.400	11.000	482	2.923	0.88	5.800
4	12.743	21.166	1.400	7.992	0.89	16.900

Tabela 4.2 - Limitantes, rendimento e condição inicial

USINA	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
1	2.310	2.224	1.954	2.155	1.995	1.737	1.613	1.594	1.543	1.396	1.677	2.288
2	1.979	1.644	1.545	1.339	692	1.493	1.506	1.453	1.321	1.223	763	1.151
3	164	293	173	150	160	121	88	73	63	75	82	123
4	426	593	490	615	257	700	568	612	547	482	180	123

Tabela 4.3 - Afluências mensais médias ( $m^3/S$ )

No caso das usinas 1 e 2, os dados da Tabela 4.1 são na verdade a soma da afluência natural efetivamente observada em 1954 e o turbinamento ótimo das usinas que estão imediatamente a montante de São Simão e Marimbondo. Estes dados, assim como as características operativas das usinas foram extraídos de uma aplicação anterior realizada por (Geromel et alli, 1981).

A Fig. 4.2 mostra a produção mensal de energia do subsistema da Fig. 4.1, quando o problema (36) é resolvido com os dados acima. Note que este problema não envolve a demanda.

A Fig. 4.3 mostra o comportamento do mesmo subsistema quando a estratégia *Min-Max* é adotada. Observa-se claramente uma tendência do subsistema em procurar seguir a curva de demanda proposta.

O comportamento do algoritmo até a obtenção da solução final está indicado na Fig. 4.4. Esta aplicação envolveu 18 iterações entre um problema não-linear com 96 variáveis e 240 restrições lineares, e o problema mestre linear com 13 variáveis e um número final de 18 restrições lineares. O critério de parada do procedimento foi feito igual a  $\epsilon = 0,01$ .

Em relação ao problema não-linear, o número máximo de restrições ativas observadas foi de 27, o que corresponde a aproximadamente 28% do número total. Mais importante ainda, em média apenas 8,9 restrições estiveram ativas (9,88% do total) permitindo assim um desempenho numérico muito bom do método descrito na Seção 4.3. O tempo total de CPU foi de 403 segundos (Sistema PDP-10/UNICAMP).

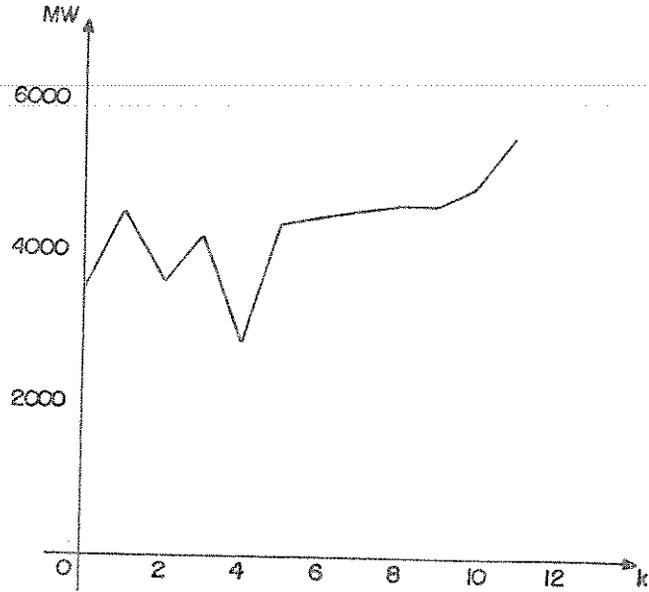


Fig. 4.2 - Produção ótima do subsistema hidráulico problema (36)

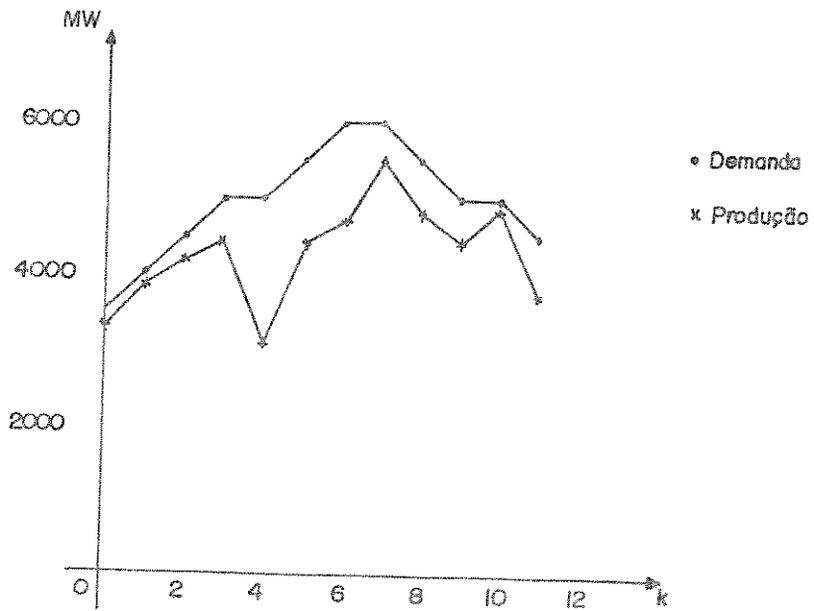


Fig. 4.3 - Efeito de equalização da estratégia Mín-Max - problema (42)

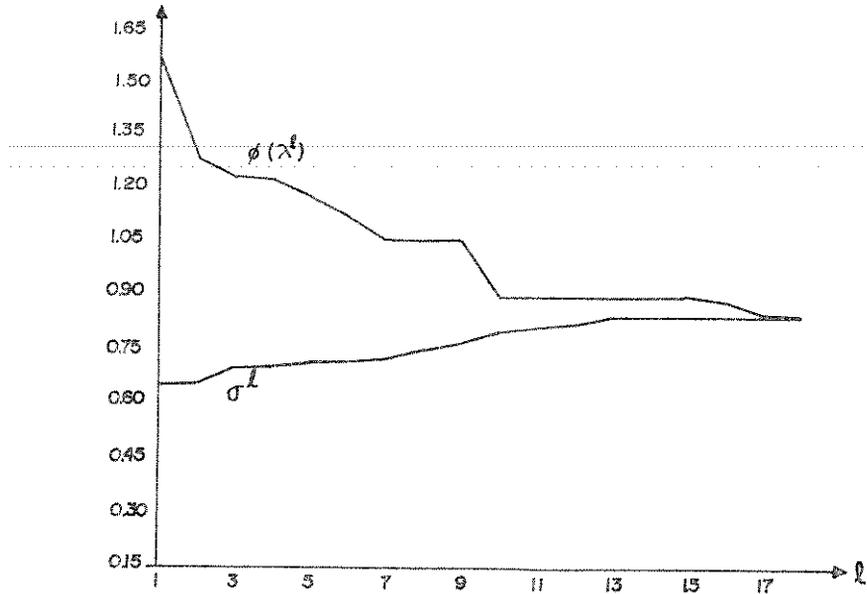


Fig. 4.4 - Convergência da estratégia *Mín-Max*

Nas Figs. 4.5 e 4.6 estão representadas as trajetórias ótimas de estado e controle obtidas após a convergência do procedimento *Mín-Max*. Os valores finais de  $\lambda_k = 1, \dots, T-1$  estão indicados na Tabela 4.4.

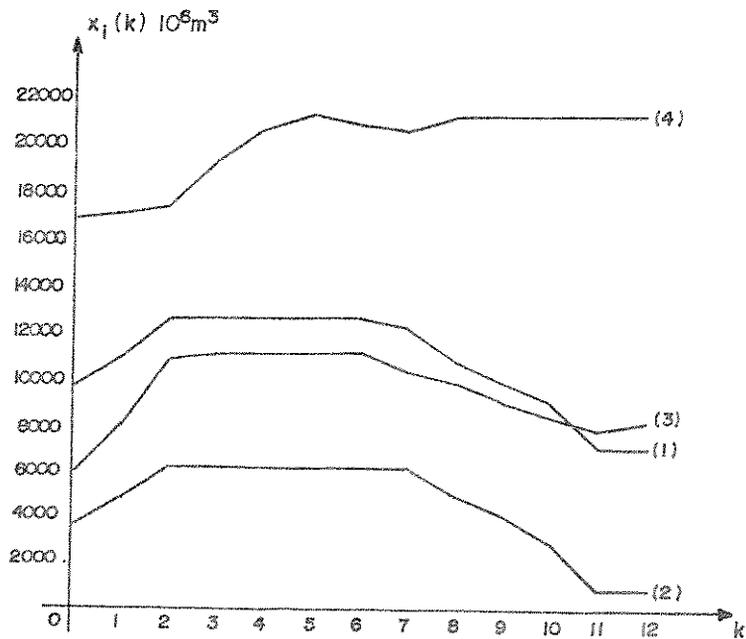


Fig. 4.5 - Trajetórias ótimas de estado

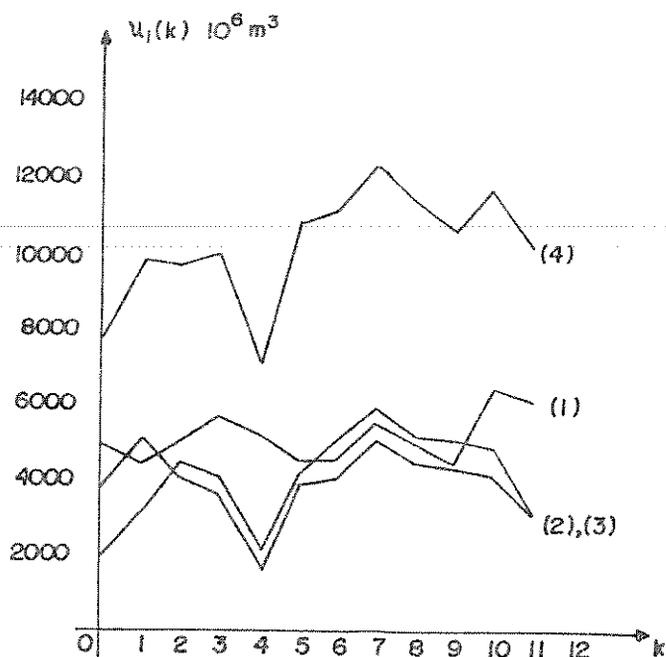


Fig. 4.6 - Trajetórias ótimas de controle

$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$	$\lambda_{10}$	$\lambda_{11}$
0.0000	0.0000	0.0917	0.0652	0.1651	0.1007	0.1521	0.1244	0.1019	0.1397	0.0593	0.000

Tabela 4.4 - Valores de  $\lambda \in \Lambda$  após convergência

#### 4.5. CONCLUSÃO

Aspectos relativos à resolução de problemas do tipo *Mín-Max*, como o gerado no nível de análise do método multicritério proposto no Capítulo 2 foram tratados no presente Capítulo. Por apresentarem um procedimento mais geral e serem de muito fácil implementação, métodos baseados em subgradientes parecem mais indicados para a tarefa de coordenar a resolução do problema *Mín-Max*, fixando valores apropriados de  $\lambda \in \Lambda$ . A escolha do método adequado à resolução do problema de programação não-linear que resulta da fixação de cada vetor  $\lambda \in \Lambda$ , deve, obviamente, atender as especificidades de cada problema multiobjetivo (restrições com estrutura particular, por exemplo). A aplicação realizada no fim do Capítulo vem no sentido de comprovar a viabi-

lidade deste esquema.

Em termos práticos, resolveu-se um problema com 12 objetivos (a geração hidráulica num dado período conflita com a geração nos demais) para o qual adotou-se a estratégia *Min-Max*, gastando-se para tanto apenas 18 iterações entre o problema mestre linear e o respectivo problema de programação não-linear.

Em princípio é razoável adotar este tipo de estratégia em problemas com um número muito grande de objetivos, nos quais certamente o *Decisor* experimentalmente dificuldades para fazer suas avaliações. Além disso, no caso específico da aplicação apresentada, a estratégia *Min-Max* permite determinar o *instante crítico* do sistema, definido aqui por

$$K_c = \arg \min_{k \in K} \{J(x(k), u(k)), k \in K: J(x(k), u(k)) < 1\} \quad (48)$$

em que a complementação de energia do subsistema térmico deverá ser máxima, exigindo assim uma cuidadosa política de utilização das unidades térmicas (Geromel e Baptistella, 1984). Na presente aplicação este período corresponderia ao mês de maio (Fig. 4.3).

CAPÍTULO 5

APLICAÇÕES

## 5.1. INTRODUÇÃO

Uma vez concluída a exposição teórica da metodologia proposta no trabalho e analisados os aspectos numéricos envolvidos na sua aplicação, resta agora considerar a sua utilização como ferramenta de síntese de estratégias de controle de alguns problemas particulares da área de geração de energia.

A Seção 5.2 aborda o problema clássico de Despacho Econômico de Carga e compreende a sua formulação como um problema de programação estocástica, a obtenção de um modelo determinístico multiobjetivo para este problema e a sua solução através do método discutido nos Capítulos anteriores. Em particular, demonstra-se que o problema escalar associado admite (como no caso clássico monobjetivo) soluções analíticas que simplificam bastante a parte numérica envolvida com a aplicação do método. Desta aplicação ficarão ainda evidentes alguns aspectos da operação deste sistema e principalmente do comportamento dos custos de geração versus demanda.

A Seção 5.3 compreende a formulação do problema de planejamento de recursos hidráulicos como um problema intrinsecamente multiobjetivo, em que cada objetivo é representado pela geração de uma dada empresa que faça parte do sistema global. Esta aplicação, ao lado de fornecer informações muito interessantes sobre a operação de usinas, ilustra também algumas limitações teóricas do método proposto, quando aplicado a problemas não-convexos. O modelo matemático para este problema já foi introduzido no Capítulo anterior.

O Capítulo inicia na próxima seção com algumas considerações acerca de problemas com restrições de risco e obtenção de métodos determinísticos equivalentes.

## 5.2. CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Embora o objetivo imediato da Seção 5.2 seja aplicar o método multiobjetivo proposto a um problema específico de planejamento, será ilustrativo procurar situar o enfoque de modelamento adotado num contexto mais amplo. Considere então o seguinte problema de programação não-linear estocástica

$$\text{Min}_{x \in X} f_1(x) \quad (1)$$

$$\text{s.a. } Ax \geq b \quad (2)$$

onde  $f_1(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função conhecida,  $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  é uma matriz de coeficientes constantes,  $X$  representa um dado subconjunto do  $\mathbb{R}^n$  e  $b \in \mathbb{R}^p$  um vetor de variáveis aleatórias com distribuições de probabilidades independentes  $F_i(b_i)$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Levando-se em conta que (1)-(2) tem sentido apenas para uma dada realização do vetor  $b$  é comum procurar então reescrever o problema estocástico original numa forma determinística equivalente. Para tanto, existem duas estratégias básicas a seguir: resolver o problema estocástico em *Dois Estágios* (Vajda, 1972) ou por uma técnica mais popular baseada no conceito de *Restrição de Risco*, proposta originalmente por Charnes e Cooper (1959). Esta última estratégia consiste em fazer com que as restrições (2) sejam satisfetias em probabilidade, isto é, impõe que

$$\text{prob} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \right\} \geq \mu_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (3)$$

para valores dados de  $\mu_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Lebrando-se que, por definição, (3) equivale a

$$F_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \geq \mu_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (4)$$

e ainda que  $F_i(\cdot)$  é uma função crescente e possui sempre uma inversa  $F_i^{-1}(\cdot)$ , vem

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq F_i^{-1}(\mu_i), \quad i = 1, \dots, p \quad (5)$$

Com  $z_i$  definido como  $z_i = F_i^{-1}(\mu_i)$ ,  $i = 1, \dots, p$  resulta então o seguinte problema determinístico

$$\text{Min}_{x \in X} f_1(x) \quad (6)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq z_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (7)$$

perfeitamente caracterizado após a fixação de  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Isto equi-  
 valeria a adotar o enfoque clássico para o problema estocástico (1)-(2) atra-  
 vés da técnica de Restrição de Risco. Entretanto, a solução de (6)-(7) é em  
 geral fortemente influenciada pela escolha dos valores de  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, p$   
 podendo a fixação *a priori* destes valores conduzir a soluções muito ruins em  
 termos da função de custo  $f_1(\cdot)$  e, em casos extremos, tornar o problema  
 (6)-(7) até mesmo infactível. Desta forma torna-se necessário que a escolha  
 do conjunto de valores de  $\mu_i$  seja feita com um certo conhecimento das rela-  
 ções entre custo e probabilidades. Parece conveniente considerar então o  
 problema multiobjetivo

$$\text{Min}_{x \in X} [f_1(x), -F_1(z_1), \dots, -F_p(z_p)] \quad (8)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq z_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (9)$$

Suponha agora que a distribuição de probabilidades de  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, p$   
 é completamente representada a partir de sua média  $\hat{b}_i$  e variância  $\sigma_i^2$ , ou  
 seja,  $b_i$  é uma variável aleatória gaussiana  $N_i \sim (\hat{b}_i, \sigma_i^2)$  (Fig. 5.1).

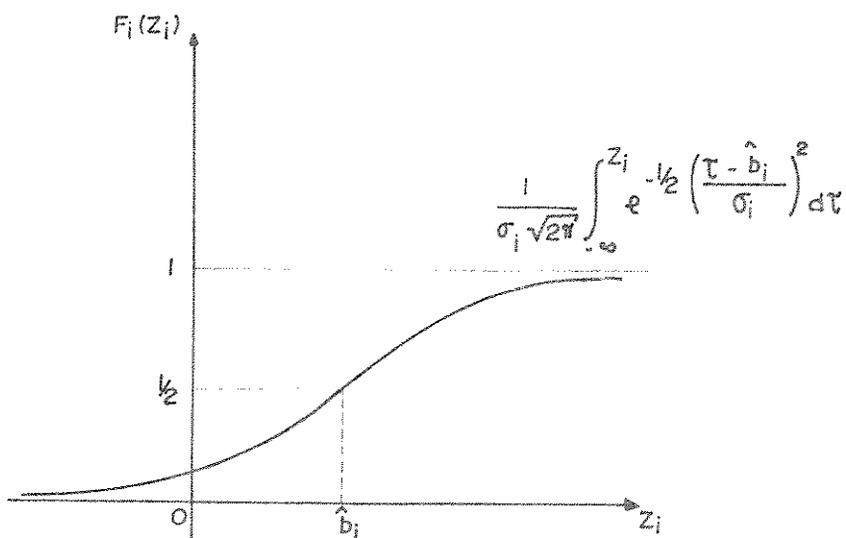


Fig. 5.1 - Função distribuição  $N \sim (\hat{b}_i, \sigma_i^2)$

Como é razoável esperar que para  $z_i = \hat{b}_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , o problema (8)-(9) admita uma solução factível com probabilidades de atendimento de (2) iguais a  $\mu_i = 0.5$ ,  $i = 1, \dots, p$  e que em princípio não existe interesse prático em considerar  $\mu_i < 0.5$  neste caso, o problema (8)-(9) pode ser reescrito com restrições adicionais do tipo  $z_i \geq \hat{b}_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ .

Qualitativamente, a adição destas novas restrições tem a propriedade de preservar a convexidade do problema a ser resolvido, caso originalmente  $X \subset \mathbb{R}^n$  seja um conjunto convexo e  $f_i(\cdot)$  uma função convexa sobre  $X$ . De fato, é fácil ver que  $-F_i(\cdot)$  é convexa sobre  $z_i \geq \hat{b}_i$  (basta analisar por exemplo o sinal da 2ª derivada de  $F_i(\cdot)$  neste domínio) e em consequência, que (8)-(9) é um problema multiobjetivo convexo.

Este será o enfoque adotado na solução do problema de controle formula do na seção a seguir.

### 5.2.1. MODELAMENTO E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE DESPACHO ECONÔMICO

Na sua formulação clássica, o problema de despacho econômico de carga envolve a determinação das políticas de operação ótimas de um certo número de usinas (térmicas, nesta aplicação), responsáveis pelo atendimento de uma parcela do mercado consumidor. Como o custo unitário da energia térmica é proporcional à quantidade de combustível (óleo, carvão mineral, etc.) consumida e este tipo de combustível possui uma alta cotação no mercado, torna-se fundamental operar adequadamente este conjunto de usinas de forma a manter os seus custos de geração em níveis mínimos.

Este problema tem sido tratado por diversos autores (Geromel e Battistella, 1984; Turgeon, 1973; Belloni, 1982) muitas vezes no âmbito de um problema mais geral, o Problema de Alocação de Unidades ("Unit Commitment") cuja solução define a configuração do parque térmico no espaço (isto é, quais unidades utilizar) e no tempo (quando colocar uma unidade em operação, por quanto tempo mantê-la operando e em que níveis de geração), ao longo de todo o período de planejamento.

Sabe-se que uma vez definida uma configuração para o sistema, o problema de despacho econômico resultante admite uma solução bastante simples (Domell, 1978), mas torna-se complexo quando a demanda é tratada realisticamente como uma variável aleatória. Neste caso é usual a adoção de modelos de-

terminísticos equivalentes (Baptistella e Geromel, 1980). Entretanto, o emprego *estático* de técnicas deste tipo impede uma melhor avaliação da influência da demanda sobre o comportamento do sistema e pode conduzir a uma superestimação de seus custos de geração. O objetivo desta seção é precisamente utilizar modelos determinísticos equivalentes em conjunto com métodos interativos para resolver o problema de despacho econômico, a partir de uma formulação multiobjetivo conveniente. O equivalente determinístico multiobjetivo para este problema baseia-se numa proposição contida em (Geromel e Baptistella, 1984).

### a) CUSTOS DE GERAÇÃO

O custo de geração de uma unidade térmica  $i$  num dado período  $k$  pode ser aproximado por uma função não-linear convexa, estritamente crescente da forma (Turgeon, 1978).

$$C_i(g_i(k)) = \alpha_{0i} + \alpha_{1i}g_i(k) + \alpha_{2i}g_i^2(k) \quad (10)$$

onde  $g_i(k)$  representa o nível de geração da unidade  $i$  no período  $k$ ,  $\alpha_{0i}$  o custo fixo de combustível necessário para que a térmica  $i$  atinja o nível de geração  $g_i(k)$  e  $\alpha_{1i}g_i(k) + \alpha_{2i}g_i^2(k)$  o custo variável relativo à obtenção do nível de geração desejado  $g_i(k)$ . É claro que a geração de cada unidade está restrita a

$$g_i(k) \in G_i \triangleq \{g_i(k), k = 1, \dots, T \mid \underline{g}_i \leq g_i(k) \leq \bar{g}_i\} \quad (11)$$

caso a unidade  $i$  esteja operando.

### b) RESTRIÇÕES DE SUPRIMENTO

A cada período do horizonte de planejamento  $T$ , o sistema térmico composto de  $n$  unidades deve ser capaz de suprir uma demanda aleatória  $L(k)$ , supostamente gaussiana  $N \sim (\mu_k, \sigma_k^2)$ , isto é,

$$\sum_{i=1}^n g_i(k) \geq L(k), \quad k = 1, \dots, T \quad (12)$$

## c) FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema clássico de planejamento visa distribuir a carga  $L(k)$  entre as unidades de forma a minimizar a soma dos custos de geração (10) do sistema, sujeito às restrições de operação (11) e suprimento (12). Note entretanto que este tipo de problema se adapta perfeitamente à formulação multiobjetivo (8)-(9). Ter-se-ia então um problema com  $(T+1)$  objetivos e  $3T$  restrições lineares a resolver. Contudo, dado que todas as restrições do sistema térmico são desacopladas no tempo, resolver o problema multiobjetivo associado equivale, neste caso, a se resolver  $T$  problemas biobjetivos, cada um deles definido para um dado instante de tempo  $k \in K = [1, \dots, T]$ :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \left[ \sum_{i=1}^n C_i(g_i(k)), -F_k(z_k) \right] \\ & g_i(k) \in G_i \\ & z_k \geq \ell_k \end{aligned} \quad (13)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^n g_i(k) \geq z_k \quad (14)$$

Em termos práticos esta forma de ver o problema é vantajosa pois a abordagem de problemas biobjetivos é enormemente facilitada pela possibilidade de interpretações gráficas em duas dimensões, oferecendo portanto condições ideais de interação do modelo com o *Decisor*. No restante da seção, a dependência temporal das variáveis em (13)-(14) será omitida para simplificar a notação. Num período genérico do intervalo  $K = [1, \dots, T]$ , o problema biobjetivo a resolver será representado por

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \left[ \sum_{i=1}^n C_i(g_i), -F(z) \right] \\ & g_i \in G_i \\ & z \geq \ell \end{aligned} \quad (15)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^n g_i \geq z \quad (16)$$

onde  $g' = [g_1 \dots g_n]$  e  $G \triangleq \bigcup_{i=1}^n G_i$ .

### 5.2.2. PROPRIEDADES DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA BIOBJETIVO EQUIVALENTE

A finalidade desta seção é apresentar algumas propriedades da solução do problema parametrizado em  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \lambda \sum_{i=1}^n C_i(g_i) + (\lambda-1)F(z) \\ & g \in G \\ & z \geq \ell \end{aligned} \quad (17)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^n g_i \geq z \quad (18)$$

problema este intimamente relacionado à aplicação do método iterativo desenvolvido neste trabalho. A exposição a seguir mostrará que a resolução de (17)-(18) através de Dualidade exhibe vantagens decisivas sobre outros métodos.

Seja portanto a função Lagrangeana  $L(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  associada ao problema (17)-(18).

$$L(g, z, \beta) = \lambda \sum_{i=1}^n C_i(g_i) + (\lambda-1)F(z) + \beta(z - \sum_{i=1}^n g_i) \quad (19)$$

O problema *dual* relativo a (17)-(18) se escreve na forma

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \min_{\substack{g \in G \\ z \geq \ell}} L(g, z, \beta) \\ & \beta \geq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

É importante observar que a fixação temporária da variável dual  $\beta \geq 0$  em (20) dará origem a dois subproblemas inteiramente desacoplados, a saber:

$$\text{Min}_{g \in G} h_1(g) = \sum_{i=1}^n (\lambda C_i(g_i) - \beta g_i) \quad (21)$$

$$\text{Min}_{z \geq \ell} h_2(z) = (\lambda - 1)F(z) + \beta z \quad (22)$$

Estes dois subproblemas admitem soluções analíticas, indicadas a seguir. Note inicialmente que se  $\lambda = 0$ , a solução de (21) será  $g^* = \bar{g}$  e caso  $\lambda = 1$ , a solução correspondente a (22) será  $z^* = \ell$ . Além disso, se  $\beta = 0$ , então a solução de (22) será  $z^* \rightarrow \infty$  caso  $\lambda < 1$  e  $z^* = [\ell, \infty)$ , caso contrário. A solução mais geral do problema (22) é obtida a partir da *Proposição 1*:

### PROPOSIÇÃO 1:

Seja  $z^*$  a solução ótima de (22) para um dado valor da variável dual  $\beta > 0$ . Então  $z^* > \ell$  se e somente se

$$0 < \beta < \frac{1-\lambda}{\sigma \sqrt{2\pi}} = \bar{\beta} \quad (23)$$

**PROVA:** Se  $z^*$  resolve (22) para um dado  $\beta > 0$ , então em vista das condições de Kuhn e Tucker deste problema tem-se

$$\frac{dh_2}{dz} = 0 \quad \text{se} \quad z^* > \ell \quad (24)$$

$$\frac{dh_2}{dz} > 0 \quad \text{se} \quad z^* = \ell \quad (25)$$

Se  $z^* > \ell$ , então

$$\left. \frac{dh_2}{dz} \right|_{z=z^*} = (\lambda - 1) \left. \frac{dF}{dz} \right|_{z=z^*} + \beta = 0 \quad (26)$$

e lembrando que  $L$  é normal  $N(\ell, \sigma^2)$ , vem

$$(1-\lambda) \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(z^*-\ell)^2}{2\sigma^2} \right] = \beta \quad (27)$$

e é claro então que (23) se verifica. Por outro lado, assumamos agora que  $0 < \beta < \bar{\beta}$  e  $z^* = \ell$ . Neste caso, supondo-se não-degenerescência,

$$\left. \frac{dh_2}{dz} \right|_{z=z^*} > 0 \quad (28)$$

ou ainda,

$$(1-\lambda) \left. \frac{dF}{dz} \right|_{z=z^*} < \bar{\beta} \quad (29)$$

indicando assim que

$$\left. \frac{dF}{dz} \right|_{z=z^*} < \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \quad (30)$$

Entretanto, (30) só ocorrerá quando  $z^* > \ell$ , contradizendo portanto  $z^* = \ell$ .  $\square$

#### PROPOSIÇÃO 2:

A solução ótima de (22) para qualquer valor  $\beta > 0$  é dada por

$$z^* = \ell + \sqrt{-2\sigma^2 \ln(\beta/\bar{\beta})}, \quad \text{se } 0 < \beta < \bar{\beta} \quad (31)$$

$$= \ell, \quad \text{se } \bar{\beta} \leq \beta < \infty \quad (32)$$

**PROVA:** Se  $0 < \beta < \bar{\beta}$  então  $z^* > \ell$  e portanto vale a expressão (25), também equivalente a

$$\exp \left[ - \frac{(z^* - \ell)^2}{2\sigma^2} \right] = \frac{\beta\sigma\sqrt{2\pi}}{1-\lambda} \quad (33)$$

Resolvendo-se (33) para  $z^*$ , após algumas manipulações algébricas chega-se facilmente a (31). É igualmente simples mostrar que se  $\bar{\beta} \leq \beta < \infty$  então  $z^* = \ell$ . De fato, calculando-se a derivada de  $h_2(z)$  para  $\beta = \bar{\beta}$ , obtêm-se

$$\frac{dh_2}{dz} = (\lambda-1) \frac{dF}{dz} + \frac{1-\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad (34)$$

ou explicitamente,

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda-1)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[ \exp \left[ - \frac{(z-\ell)^2}{2\sigma^2} \right] - 1 \right] &> 0, \text{ se } z > \ell \\ &= 0, \text{ se } z = \ell \end{aligned} \quad (35)$$

indicando assim um mínimo de  $h_2(\cdot)$  em  $z = \ell$ . Note finalmente que  $z = \ell$  é o ponto de menor derivada da função, não importa qual valor de  $\beta \geq \bar{\beta}$  tenha sido fixado. A solução do subproblema envolvendo a variável  $z$  está representada graficamente na Fig. 5.2.

Ao contrário da solução do subproblema anterior, a solução do subproblema nas variáveis  $g \in G$  já é bem conhecida (Belloni, 1982; Geromei e Baptistella, 1984).

### PROPOSIÇÃO 3:

A solução ótima  $g^*$  de (21) é da forma

$$g_i^* = \max \{g_i, \min \{\bar{g}_i, \tilde{g}_i\}\}, \quad i = 1, \dots, n \quad (36)$$

onde  $\bar{g}_i$  resolve a equação algébrica  $\frac{d}{dg_i} h_1(g) = 0$ .  $\square$

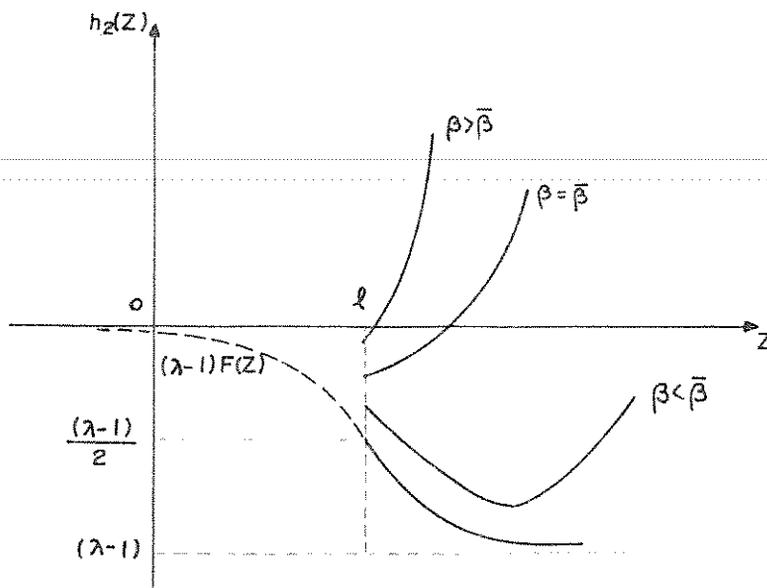


Fig. 5.2 - Comportamento de  $h_2(z)$  em função de  $\beta$

Com isto conclui-se o cálculo das soluções de (21) e (22) e portanto do mínimo da função lagrangeana (19). Para a obtenção do valor ótimo de  $\beta$  utilizou-se um procedimento de busca unidimensional baseado na técnica de Falsa Posição (Luenberger, 1970) com emprego de derivadas da função. Note que sendo  $C_i(\cdot)$  e  $-F(\cdot)$  funções estritamente convexas nos seus domínios de definição, a derivada da função dual existe em qualquer ponto  $\beta \geq 0$  e é dada por

$$z^* = \sum_{i=1}^n g_i^* \quad (37)$$

onde  $z^*$  e  $g_i^*$ ,  $i = 1, \dots, n$  resolvem (22) e (21) respectivamente.

Finalmente considere agora o problema

$$\text{Max}_{0 \leq \lambda \leq 1} \phi(\lambda) \quad (38)$$

com  $\phi(\cdot)$  dada por (17), referente ao PASSO 2 do Algoritmo Básico. Pelos mesmos motivos já citados, a derivada de  $\phi(\cdot)$  existe em qualquer ponto

$\lambda \in [0,1]$  e  $\bar{e}$  numericamente igual a

$$\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) = \sum_{i=1}^n C_i(g_i^*) + F(z^*) \quad (39)$$

Um procedimento inteiramente análogo ao adotado para encontrar  $\beta^*$  pode então ser utilizado para a obtenção do valor de  $\lambda \in [0,1]$  que resolve (38). Com estas considerações, conclui-se a fase de análise relativa à aplicação do método multiobjetivo proposto ao problema de despacho econômico.

### 5.2.3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Inicialmente, um breve comentário sobre comensurabilidade dos objetivos. Como os custos são em geral medidos em milhares de unidades monetárias e a probabilidade está restrita ao intervalo  $[\frac{1}{2}, 1]$  pode ser numericamente mais razoável realizar um ajuste de escalas. Sejam então as constantes

$$C_{\max} = \sum_{i=1}^n C_i(\bar{g}_i) \quad \text{e} \quad g_{\max} = \sum_{i=1}^n \bar{g}_i \quad (40)$$

Como alternativa para o critério de custos, poder-se-ia pensar por exemplo em

$$\bar{C}_i(g_i) = \frac{C_i(g_i)}{C_{\max}} = \frac{\alpha_{0i}}{C_{\max}} + \frac{\alpha_{1i}}{C_{\max}} g_i + \frac{\alpha_{2i}}{C_{\max}} g_i^2, \quad i = 1, \dots, n \quad (41)$$

ou definindo  $\gamma_i = g_i/g_{\max}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\bar{C}_i(\gamma_i) = \frac{\alpha_{0i}}{C_{\max}} + \frac{\alpha_{1i} g_{\max}}{C_{\max}} \gamma_i + \frac{\alpha_{2i} g_{\max}^2}{C_{\max}} \gamma_i^2 \quad (42)$$

$$= \alpha_{0i}^* + \alpha_{1i}^* \gamma_i + \alpha_{2i}^* \gamma_i^2 \quad (43)$$

Assim,  $\bar{C}_i(\cdot)$  descreve agora o custo de geração da unidade  $i$  referido

ao custo máximo de geração do sistema e  $\gamma_i$  o nível de geração da unidade  $i$  referido à capacidade máxima instalada do sistema. Este critério alternativo descreve portanto a *taxa de utilização* do parque térmico, a qual evidentemente deve ser minimizada. Note que esta manipulação não destrói nenhuma das propriedades citadas na seção anterior.

A experiência numérica a seguir é baseada nos dados da Tabela 5.1 (Turgeon, 1978). O sistema térmico é composto por 10 unidades, possui uma capacidade máxima instalada de 1980mw e custo máximo de geração de 4359 u.m. O valor médio da demanda foi tomado inicialmente como  $\lambda = 1021\text{mw}$  e o desvio padrão igual a 5%.

UNIDADE	$q_i$	$\bar{q}_i$	$\alpha_{0i}$	$\alpha_{1i}$	$\alpha_{2i}$
1	25	120	32,0	1,40	0.0038
2	50	150	29,0	1,54	0.0021
3	50	150	100,0	1,33	0.0013
4	75	200	82,0	1,21	0.0015
5	15	60	15,0	1,40	0.0051
6	20	80	25,0	1,50	0.0040
7	30	100	40,0	1,35	0.0039
8	75	200	72,0	1,35	0.0026
9	250	520	105,0	1,39	0.0013
10	120	320	49,0	1,26	0.0029

Tabela 5.1 - Dados do sistema térmico

Por conveniência, os passos do *Algoritmo Básico* serão reescritos a seguir nos termos da presente aplicação.

**PASSO 0 :** Construa  $y^0 = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{y} \leq y \leq \bar{y}\}$ , faça  $k := 0$  e determine

$$y^0 = \arg \operatorname{Min}_{y \in y} u(y) \quad (44)$$

**PASSO 1 :** Resolva o problema *Mín-Max*

$$\theta(y^k) = \operatorname{Max}_{\lambda \in [0,1]} \operatorname{Min}_{\substack{g \in G \\ z \geq \ell}} \lambda \left( \sum_{i=1}^n C_i(g_i) - y_1^k \right) + (1-\lambda) (-F(z) - y_2^k) \quad (45)$$

Sejam  $\lambda^k$  e  $(g^k, z^k)$  as soluções correspondentes. Se  $\theta(y^k) \geq 0$ ,  $(g^k, z^k)$  é a solução satisfatória procurada. Se  $\theta(y^k) > 0$ , vá ao PASSO 2.

**PASSO 2 :** Resolva o problema relaxado

$$\operatorname{Min}_{y \in y^0} u(k) \quad (46)$$

$$\lambda^p y_1 + (1-\lambda^p) y_2 \geq \lambda^p \sum_{i=1}^n C_i(g_i^p) + (\lambda^p - 1) F(z^p) \quad (47)$$

$p = 0, \dots, k$

Seja  $y$  a solução encontrada. Faça  $k := k+1$ ,  $y^k = y$  e retorne em seguida ao PASSO 1.

Este algoritmo foi implementado em FORTRAN-77 num computador digital VAX-VMS 3045. Os programas desenvolvidos incorporam ainda alguns recursos gráficos de forma a permitir uma melhor interação entre Decisor e o modelo de otimização. Assim, os sucessivos cortes no espaço dos objetivos são apresentados em vídeo após cada solução proposta pelo Decisor. Estes recursos permitem também a redefinição do retângulo de decisões, criando um efeito tipo *zoom* de determinadas regiões de  $y^0$  e possibilitando um alto grau de precisão na escolha da solução final do problema.

Através do método proposto, chega-se então facilmente ao retângulo inicial de decisões mostrado na Fig. 5.3.

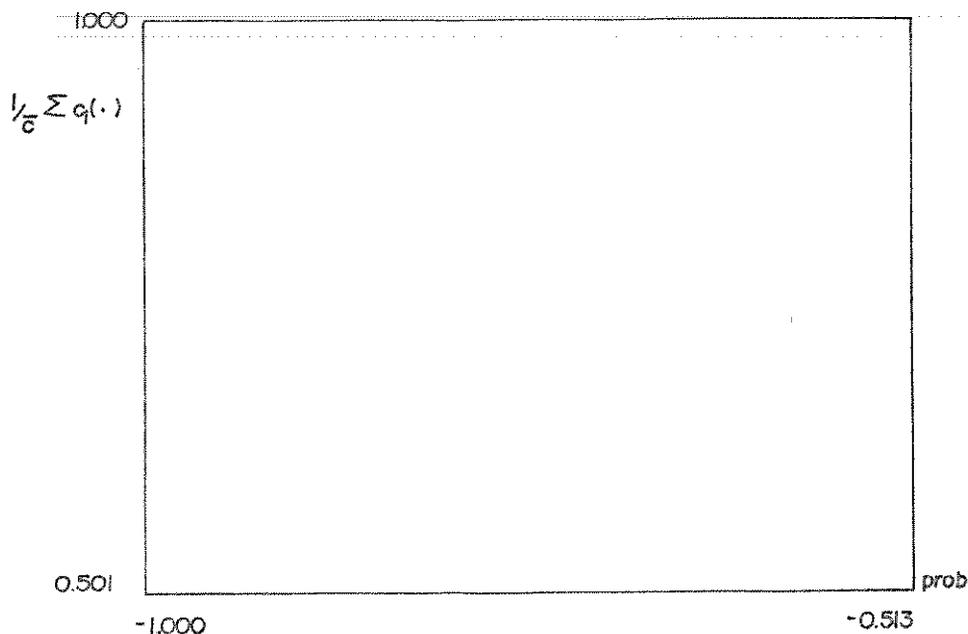


Fig. 5.3 - Retângulo inicial  $y^0$

Ao defrontar-se com o retângulo da Fig. 5.3, o *Decisor* certamente iniciará o ciclo iterativo escolhendo a solução utópica  $y^0 = [0.501, -1.000]$ . Submetida ao nível de análise, esta solução ideal revela-se não-satisfatória, como era de se esperar. O nível de análise então propõe a solução alternativa  $f^0 = [0.538, -0.964]$  cujo *trade-off* é  $-0.276$  ao mesmo tempo em que um corte inicial é feito no espaço dos critérios. Observe a Fig. 5.4.

Imaginando-se que o *Decisor* não concorda com a solução proposta e que do seu ponto de vista, 54% do custo total não representa um custo excessivo se for possível gerar com probabilidade máxima, a sua nova solução será então  $y^1 = [0.542, -1.000]$ . Mas também esta nova solução se mostra insatisfatória no nível de análise. A nova solução eficiente obtida é agora  $f^1 = [0.551, -0.992]$  com *trade-off* de  $-0.988$ . Uma nova restrição é acrescentada ao espaço dos critérios (Fig. 5.5).

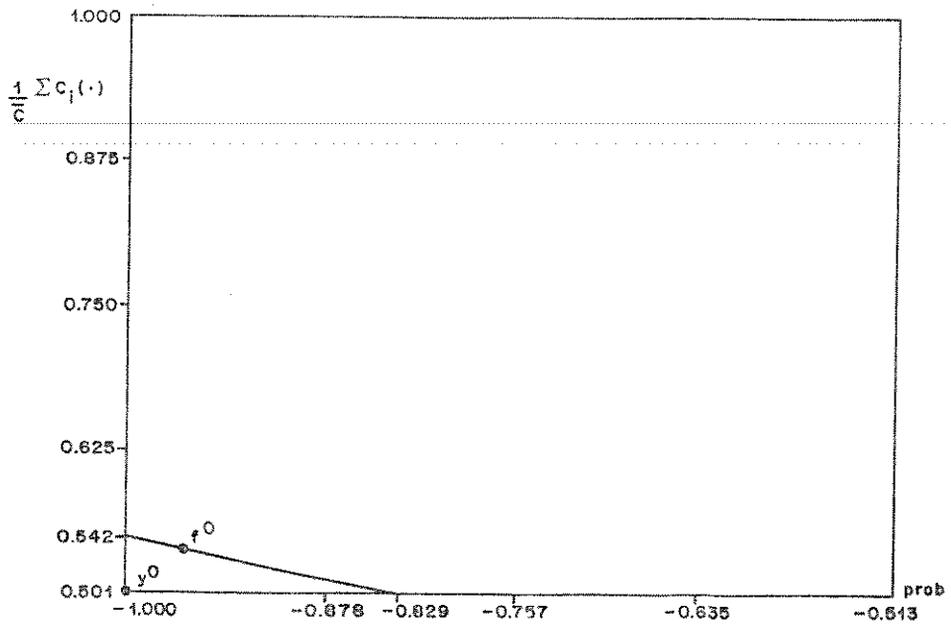


Fig. 5.4 - Retângulo de decisões após o primeiro corte

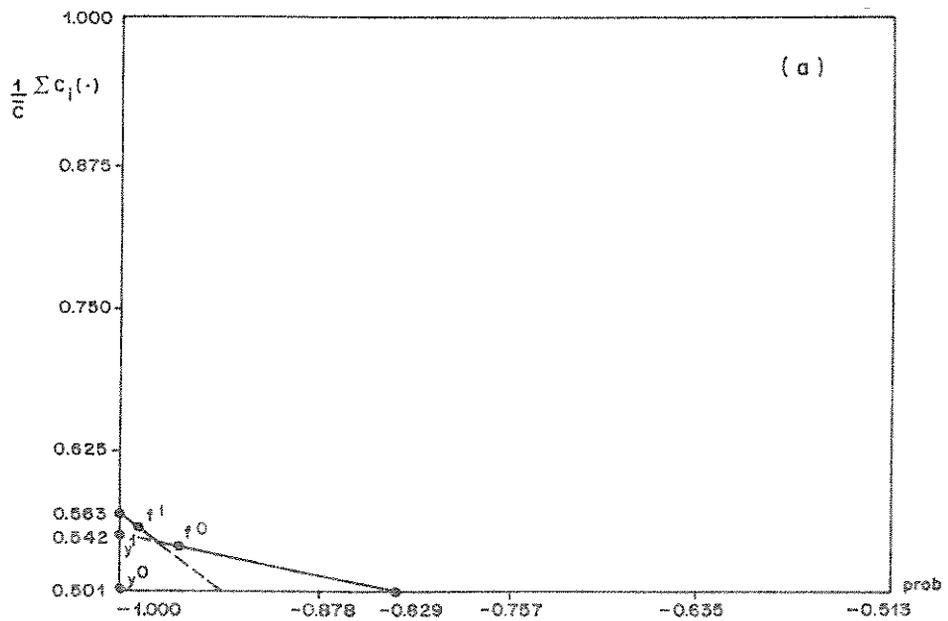


Fig. 5.5 - Retângulo de decisões após 2 cortes

Neste ponto é provável que o *Decisor* já tenha em mente uma região do espaço dos critérios onde a sua solução de compromisso deverá estar. Uma destas possíveis regiões é ilustrada na Fig. 5.6 e compreende todos os pontos tais que  $[0.501, -1.000] \leq y \leq [0.750, -0.950]$ . A partir deste novo retângulo foram geradas mais algumas soluções eficientes, que estão documentadas na Tabela 5.2.

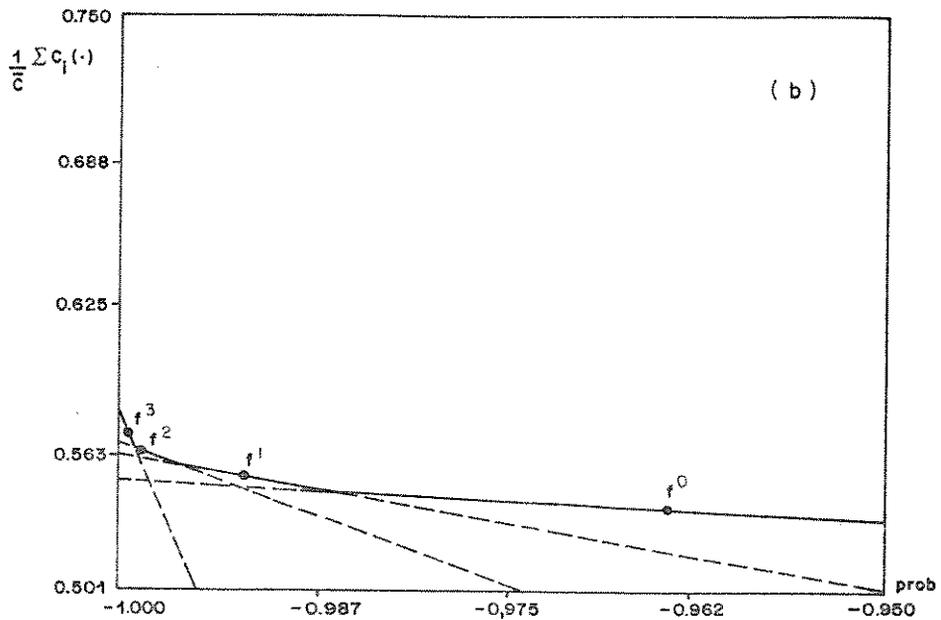


Fig. 5.6 - Retângulo de decisões redefinido

CICLO	Y1	Y2	F1	F2	TRADE	TETA
1	.50100E+00	-.10000E+01	.53786E+00	-.96410E+00	-.27642E+00	.36918E-
2	.54200E+00	-.10000E+01	.55120E+00	-.99177E+00	-.98823E+00	.188016E-
3	.56300E+00	-.10000E+01	.56513E+00	-.99879E+00	-.56456E+01	.14180E-
4	.57300E+00	-.10000E+01	.57429E+00	-.99970E+00	-.20956E+02	.36186E-
5	.56000E+00	-.98000E+00	.55011E+00	-.99085E+00	-.89916E+00	-.10139E-

Tabela 5.2 - Histórico da fase interativa

Os cortes introduzidos no novo retângulo são mostrados na Fig. 5.6. É importante observar o aumento vertiginoso dos custos de geração quando a probabilidade começa a aproximar-se de 1. Na solução  $f^4 = [0.574, -0.999]$ , o *trade-off* já é de -20.956, isto é, para que a probabilidade aumente de 1 unidade é necessário dispendir aproximadamente 21 unidades em custos de geração. Nestas circunstâncias é fundamental uma escolha equilibrada do ponto de operação do sistema para que não se produza energia térmica desnecessariamente.

A solução  $y^5 = [0.560, -0.980]$ , por exemplo, é satisfatória e gera a solução eficiente  $f^5 = [-0.550, -0.991]$  com *trade-off* de -0.899, o que parece representar uma boa solução de compromisso entre custos e probabilidade. A política de geração correspondente a  $f^5$  está indicada na Tabela 5.3.

$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$	$g_{10}$	$z$
64,89	84,08	150,00	200,00	48,35	49,14	69,63	104,45	250,00	120,00	1141,5

Tabela 5.3 - Possível solução de compromisso do problema (em mw)

Em aplicações como esta em que a geração de soluções eficientes não representa um esforço computacional excessivo, em parte devido às propriedades demonstradas na Seção 5.1.3, pode-se pensar inclusive numa aproximação exaustiva da curva de *trade-off*. A Fig. 5.7 mostra  $\Gamma$  parametrizada pelo desvio padrão  $\sigma$  na faixa  $[-1.000, -0.900]$ .

Dos resultados alcançados nesta aplicação percebe-se claramente a importância do tipo de enfoque adotado, no sentido de evitar o uso despendioso de energia térmica. De fato, observa-se um comportamento bastante peculiar do sistema térmico com relação ao atendimento da demanda, dificilmente quantificável *a priori*. Neste sentido, o uso de métodos iterativos em conjunto com modelos determinísticos equivalentes torna-se particularmente adequado. Por outro lado é interessante observar que de certa forma, o *trade-off* entre

custos de geração e probabilidade de atendimento da demanda define o custo marginal de geração do parque térmico. Como sugerido por Geromel e Baptista (1984), o valor de *trade-off* define o valor de  $\lambda$  e por conseguinte, o custo marginal  $\beta$  deverá satisfazer

$$0 \leq \beta < \bar{\beta} = \frac{1-\lambda}{\sigma \sqrt{2\pi}} \quad (48)$$

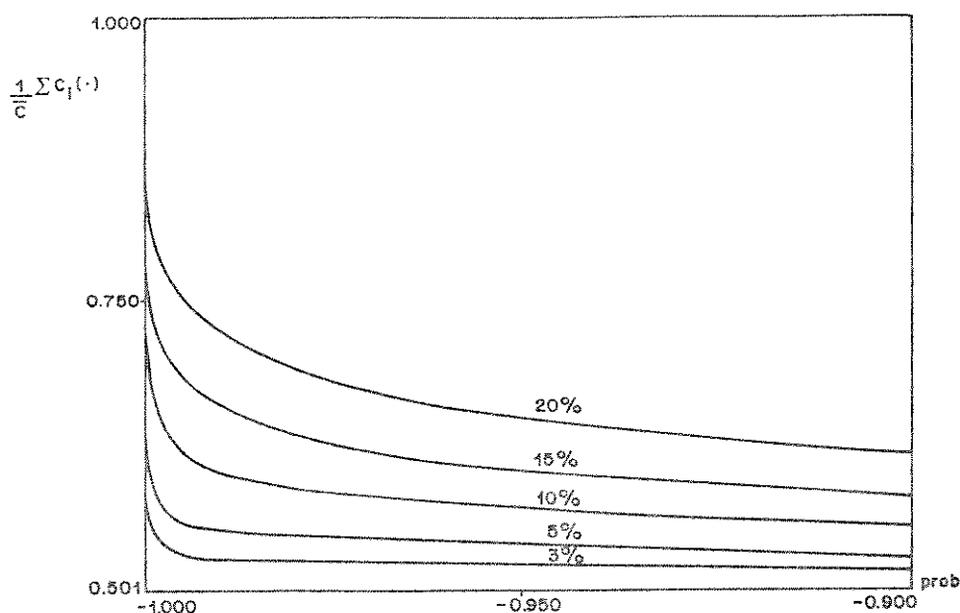


Fig. 5.7 - Curva de *trade-off* parametrizada em  $\sigma$

### 5.3. PARETO-OTIMALIDADE COMO ESTRATÉGIA DE CONTROLE DE SISTEMAS HIDROELÉTRICOS

No fim do Capítulo precedente, discutiu-se a aplicação de alguns resultados deste trabalho a um problema de planejamento de sistemas hidrotérmicos. Em síntese, tratou-se da maximização da energia elétrica gerada por um dado subsistema hidroelétrico da região sudeste do Brasil com o emprego de uma técnica do tipo *Mín-Max*. Entretanto, embora o modelamento da dinâmica do sistema seja adequado para fins de aplicação em planejamento de médio-prazo, em termos de critérios de desempenho, o modelo apresentado possui algumas simplificações. De fato, a estratégia adotada pressupõe implicitamente que

não existe conflito de interesses na geração do subsistema, como por exemplo no caso de todas as usinas pertencerem a uma mesma companhia. Apenas para ilustrar quão complicadas poderiam ser as operações de usinas hidroelétricas em um regime de mercado livre, as quatro usinas da Fig. 4.1 são operadas por três companhias distintas. Contudo este outro caso extremo também não reflete a prática de operação do sistema hidroelétrico brasileiro.

No Brasil, a operação interligada de usinas hidroelétricas é coordenada por uma empresa estatal com a finalidade de maximizar o aproveitamento dos recursos energéticos disponíveis. Este tipo de coordenação torna possível, por exemplo, deslocar blocos de energia para regiões que estejam experimentando déficits de geração (Relatório SCEN-GTMC, 1983). Em princípio, o problema pode ser modelado como um jogo não cooperativo do tipo Stackelberg (Simon e Cruz, 1973) onde uma empresa faria o papel de *líder* tendo as demais empresas como *seguidoras*. Outra possibilidade seria enxergar o problema como um jogo cooperativo em que todas as empresas formam uma *coalizão* tendo como critério de equilíbrio a Pareto-Optimalidade (Haurie, 1973). Neste caso, a operação do sistema interligado poderia ser colocado como um problema multi-objetivo

$$\text{Max}_{u(k) \in U} \left[ \begin{array}{l} T-1 \\ \sum_{k=0} \quad \sum_{i \in I_1} \quad \psi_i(x_i(k), u_i(k)) \\ \vdots \\ T-1 \\ \sum_{k=0} \quad \sum_{i \in I_j} \quad \psi_i(x_i(k), u_i(k)) \\ \vdots \\ T-1 \\ \sum_{k=0} \quad \sum_{i \in I_m} \quad \psi_i(x_i(k), u_i(k)) \end{array} \right] \quad (49)$$

s.a.

$$x(k+1) = x(k) + Bu(k) + y(k), \quad u(0) = x_0 \quad (50)$$

$$x(k+1) \in X \quad (51)$$

onde  $I_j$  denota o conjunto de usinas operadas pela empresa  $j$ , dado um sis

tema global operado por  $m$  empresas. O conflito entre os objetivos (49) surge em função das empresas utilizarem os mesmos recursos naturais, como mostrado na Fig. 5.8.

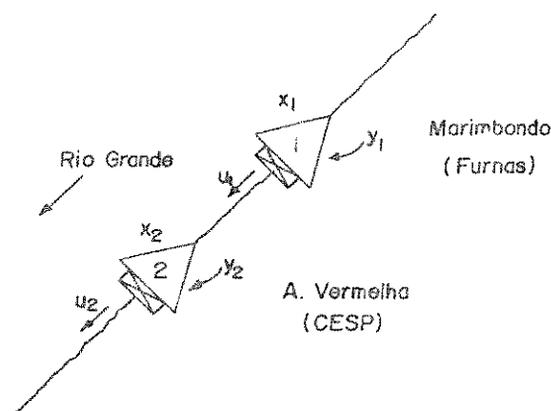


Fig. 5.8 - Usinas hidroelétricas utilizando recursos de um mesmo rio

Note que à primeira vista, a operação da usina 2 não deveria influenciar a operação da usina 1. Entretanto, como todas as restrições do problema deverão ser satisfeitas, a operação ótima da usina 1 deverá levar em conta a operação da usina 2 de forma a respeitar as restrições operativas desta última.

Com relação à aplicação do método multiobjetivo desenvolvido neste trabalho, note que o problema (49)-(51) não satisfaz as hipóteses sobre as quais está baseado o método pois as funções  $\psi_i(\cdot)$  não são em geral côncavas e portanto não se pode garantir que o conjunto

$$V = \{y \in \mathbb{R}^m \mid - \sum_{i \in I_j} \psi_i(\cdot) \leq y_j \quad (j=1, \dots, m), \text{ p/ algum } u(\cdot) \in U\} \quad (52)$$

seja convexo. Desta forma, em casos gerais, apenas o *hull* convexo de (52) poderá ser gerado pelo método proposto. Para o subsistema da Fig. 5.8, determinou-se uma aproximação da curva de soluções eficientes  $\Gamma$  como ilustrado na Fig. 5.9, sendo que as soluções propostas e obtidas estão documentadas na Tabela 5.4.

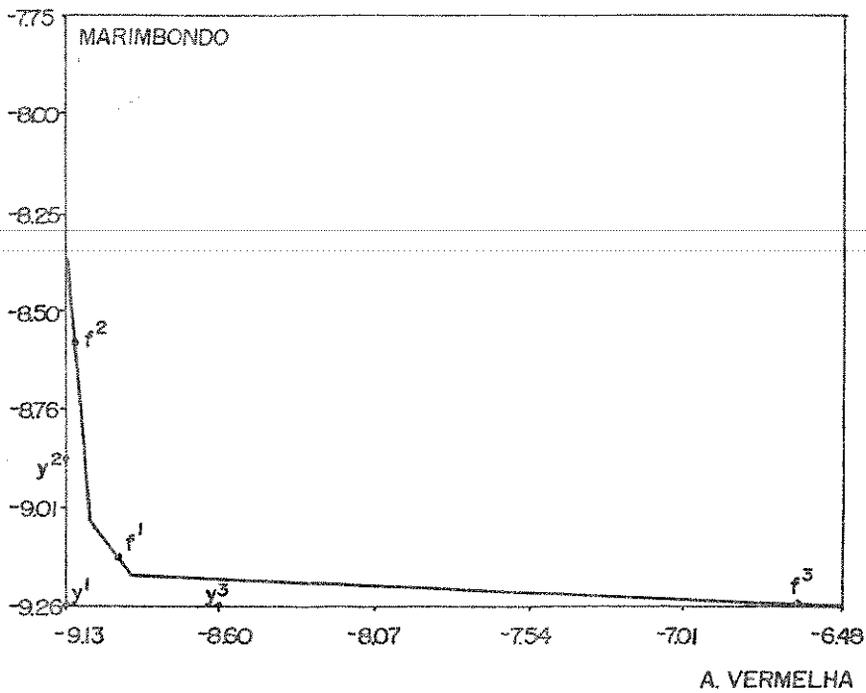


Fig. 5.9 - Aproximação de  $V \cap y^0$  para o sistema da Fig. 5.8

CICLO	Y1	Y2	J1	J2	TRADE	TETA	GAP
1	-.92550E+01	-.91340E+01	-.91294E+01	-.89878E+01	-.87512E+00	0.13439E+00	N
2	-.88880E+01	-.91340E+01	-.86058E+01	-.91294E+01	-.63722E+01	0.18317E-01	S
3	-.92550E+01	-.86920E+01	-.92561E+01	-.65938E+01	-.16260E-01	0.32644E-01	S

Tabela 5.4 - Dados relativos à obtenção da Fig. 5.9

A última coluna da Tabela 5.4 ("Gap") indica a presença (S) ou não (N) de um gap de dualidade, detectado a partir da solução proposta pelo Decisor. Note que nestas circunstâncias não é possível assegurar que todos os pontos da região delimitada da Fig. 5.9, pertençam efetivamente a  $V$ . Nesta mesma figura, observa-se se que a influência da operação da usina 2 sobre a usina 1 é menor em função desta última ter que manter apenas a factibilidade do problema, enquanto que a geração da usina 2 depende diretamente dos níveis de geração da usina 1.

É interessante observar também que na determinação do hiperretângulo

inicial de decisões  $y^0$ , para a qual resolvem-se problemas do tipo

$$\text{Max}_{u(k) \in U} \sum_{k=0}^{T-1} \sum_{i \in I_j} \psi_i(x_i(k), u_i(k)) \quad (54)$$

s.a. (50)-(51)

cada empresa opera temporariamente todos os reservatórios da rede, de forma a transferir recursos para aqueles em que a empresa está efetivamente capacitada a gerar energia. Os métodos numéricos empregados foram o algoritmo de Gradiente Modificado para a resolução do problema nas variáveis primais e o método de Planos de Cortes para a obtenção dos multiplicadores ótimos  $\lambda^*$ . Mesmo para problemas biobjetivos, este último método parece ser o mais indicado pois o problema (49)-(51) não apresenta características que viabilizem métodos de gradiente para o problema de coordenação. Com a busca unidimensional baseada em subgradientes<sup>(\*)</sup>, precisou-se em média de apenas 6 iterações entre o problema mestre (coordenação) linear e o respectivo problema de programação não-linear. O critério de parada foi feito igual a  $\epsilon = 0,001$ .

Numa outra aplicação foi utilizado o subsistema da Fig. 5.10. A aproximação de  $\Gamma$  para este subsistema, assim como as soluções propostas e obtidas estão descritas na Fig. 5.11 e Tabela 5.5 respectivamente. Desta vez, foram necessárias em média 6 iterações entre problema mestre e subproblema para o mesmo critério de parada anterior.

---

(\*) Linearização Externa no  $\mathbb{R}^1$ .

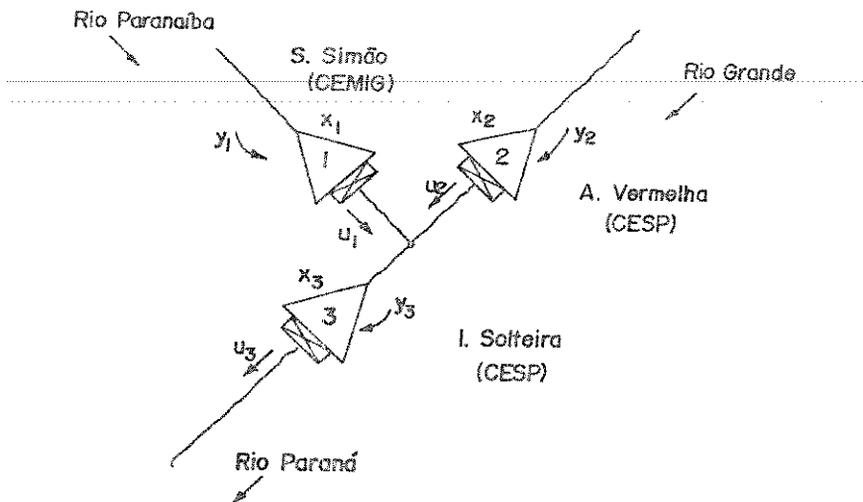


Fig. 5.10 - Operação de hidroelétricas em diferentes rios da Bacia do Paraná

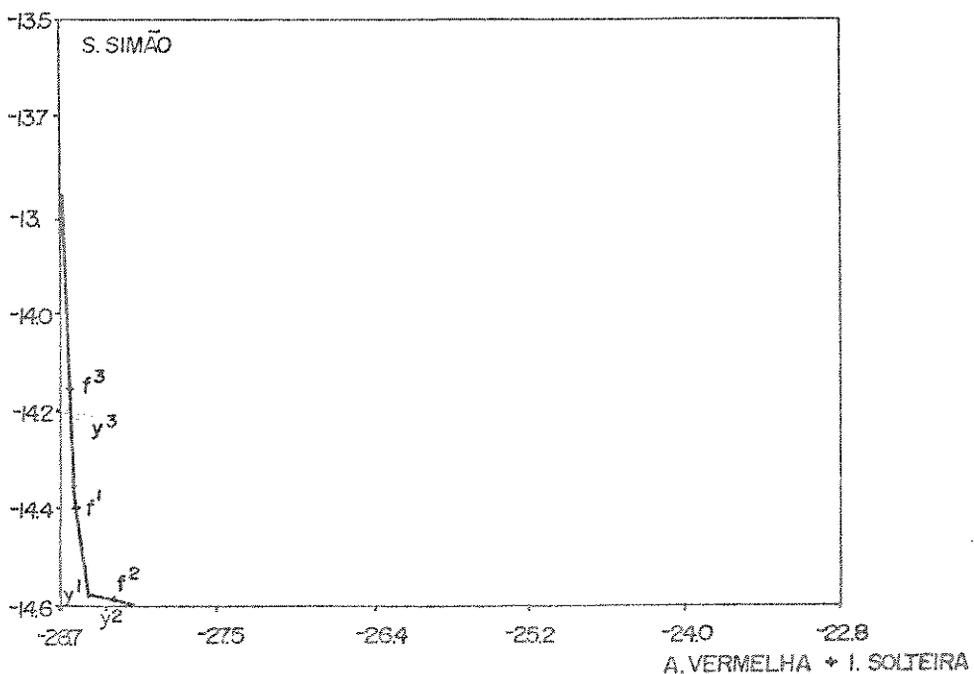


Fig. 5.11 - Aproximação de  $V \cap y^0$  para o sistema da Fig. 5:10

CICLO	Y1	Y2	J1	J2	TRADE	TETA	GAP
1	-.14560E+02	-.28700E+02	-.14383E+02	-.28611E+02	-.16158E+01	0.98191E-01	N
2	-.14560E+02	-.28210E+02	-.14559E+02	-.28342E+02	-.50786E-01	-.54380E+01	S
3	-.14290E+02	-.28700E+02	-.14144E+02	-.28928E+02	-.17406E+01	-.91575E+02	N

Tabela 5.5 - Dados relativos à obtenção da Fig. 5.11

#### 5.4. CONCLUSÃO

Este Capítulo constou de aplicações do método multiobjetivo proposto no trabalho a problemas de planejamento na área de geração de energia. Os resultados numéricos obtidos vêm demonstrar a viabilidade prática do método ao mesmo tempo em que ilustram a sua potencialidade no que diz respeito à interação com o *Decisor*. Durante todas as simulações, o *Decisor* foi mantido no espaço dos objetivos, concentrado na tarefa de selecionar soluções satisfatórias sem a necessidade de se ater a detalhes estruturais do problema que estava sendo resolvido. As aplicações ilustram ainda o emprego do método como meio de aprendizagem do *Decisor* acerca do problema de forma a levá-lo a identificar corretamente a sua melhor (e implementável) solução de compromisso.

Com relação aos problemas tratados, algumas extensões podem ainda ser tentadas. Estudos preliminares indicam ser possível enriquecer o modelamento do sistema térmico introduzindo as suas restrições elétricas de forma a se chegar num problema de fluxo de carga (Monticelli, 1983). Um modelo de fluxo de carga *linearizado* satisfaz as hipóteses de aplicabilidade do método, embora induza o acoplamento das variáveis do problema e a perda das propriedades que tornam a sua solução analítica.

Quanto ao problema de otimização de recursos hidráulicos seria relevante se tentar formulações alternativas, na linha de Teoria dos Jogos. Certamente, novas formulações trariam informações valiosas sobre o comportamento do sistema, eventualmente indicando a melhor maneira de operá-lo.

CONCLUSÃO GERAL  
=====

Neste trabalho, a utilização coordenada dos conceitos de Projeção, Relaxação e Linearização Externa, até então ausentes do domínio da Programação Multiobjetivo foi incorporada ao desenvolvimento de um novo método de otimização com características interativas.

Em conjunto com o conceito de solução satisfatória, estas estratégias viabilizaram a obtenção de aproximações lineares para problemas formulados no espaço dos objetivos, com vantagens significativas tanto do ponto de vista de decisão quanto de análise. Do ponto de vista de decisão, a metodologia proposta torna possível, por exemplo, resolver problemas não-lineares através de métodos multiobjetivos somente aplicáveis ao caso linear. Por sua vez, as tarefas de análise destes métodos são substancialmente reduzidas quando se considera que o problema se acha inteiramente formulado no espaço dos objetivos.

Além de reunir boas características de interação e convergência, o algoritmo que serve de base para a aplicação de metodologia se mostra especialmente adequado a problemas biobjetivos, por esta classe de problemas apresentar um elevado grau de simplificação do algoritmo básico. Em problemas desta natureza, o Decisor passa a contar com a ajuda de interpretações gráficas precisas do método, interagindo realisticamente com o modelo do sistema no espaço dos objetivos, em busca de sua melhor solução de compromisso. As implementações descritas no trabalho procuram deixar claros estes aspectos.

Por outro lado, existem ainda alguns pontos em aberto que suscitam possíveis extensões para o que foi aqui apresentado. Uma continuação natural (e fundamental) do trabalho seria estender a aplicação da técnica proposta para uma classe mais geral de problemas. Durante o decorrer da exposição trabalhou-se sempre com a hipótese de que o problema multiobjetivo a ser resolvido era convexo, de forma a obter

$$V \triangleq \{y \in \mathbb{R}^m \mid f(x) \leq y, \text{ para algum } x \in X\}$$

também como um conjunto convexo. Entretanto, esta hipótese é apenas suficiente, isto é,  $V$  pode ser convexo mesmo que o problema multiobjetivo não o seja (por exemplo,  $V$  é certamente convexo se  $f_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, m$  são funções *quasi-convexas* sobre  $X$ ). Assim, a extensão da metodologia para uma classe mais ampla de problemas fica condicionada à obtenção de hipóteses

mais fracas para a convexidade de  $V$ , inserindo-se desta forma no contexto de algumas considerações de Geoffrion (1971) acerca do papel desempenhado por conjuntos deste tipo no domínio da Teoria da Dualidade. Certamente, dentre todos os possíveis desdobramentos deste trabalho, este é o mais difícil de ser tentado a médio e longo prazos.

Duas outras possíveis extensões se apresentam mais promissoras a curto prazo. Em primeiro lugar, generalizar as idéias apresentadas neste trabalho para problemas que envolvam *múltiplos decisores*, aproximando assim a metodologia proposta da formulação de alguns problemas práticos importantes. Desta forma, todos os aspectos da solução de problemas envolvendo as condições de equilíbrio cooperativo de Pareto estariam contemplados.

O passo seguinte consistiria então em estender o enfoque adotado para situações de equilíbrio não-cooperativo, isto é, para problemas modelados com base na Teoria dos Jogos. Embora as condições de equilíbrio não-cooperativo de estratégias básicas como as de Nash e Stackelberg já tenham tornado-se clássicas (Baptistella, 1980), a sua utilização em problemas práticos ainda é bastante limitada pela falta de procedimentos numéricos eficientes que levem os *jogadores* a situações de equilíbrio como as mencionadas. No espírito destas considerações, alguns estudos preliminares já foram realizados no sentido de incorporar os conceitos de Projeção, Linearização Externa e Relaxação à Teoria dos Jogos. Este tópico representa na opinião do Autor um dos mais importantes desdobramentos deste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARVANITIDES, N.V. & J. ROSING (1970), Optimal Operation of Multireservoir Systems Using a Composite Representation, *IEEE Transactions on Power, Apparatus and Systems*, Vol. PAS 89, No 2.
- ATHANS, M. & H.P. GEERING (1973), Necessary and Sufficient Conditions for Differentiable Nonscalar-Valued Functions to Attain Extrema, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-18, No 2.
- AVRIEL, M. (1976), *Nonlinear Programming, Analysis and Methods*, Prentice Hall, London.
- BAPTISTELLA, L.F.B. (1980), Contribution à l'Optimisation Multi-Critère de Systèmes Dynamiques, *Thèse de Doctorat d'Etat*, Université Paul Sabatier, Toulouse.
- BAPTISTELLA, L.F.B. & A. OLLERO (1980), Fuzzy Methodologies for Interactive Multicriteria Optimisation, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. SMC-10, No 7.
- BAPTISTELLA, L.F.B. & J.C. GEROMEL (1980), Decomposition Approach to the Problem of Unit Commitment Schedule for Hydrothermal Systems, *Proceedings IEE*, London.
- BAZARAA, M.S. & J.J. JARVIS (1977), *Linear Programming and Network Flows*, John Wiley & Sons, New York.
- BELLMAN, R.E. & L.A. ZADEH (1970), Decision-Making in a Fuzzy Environment, *Management Science*, Vol. 17, No 4.
- BELLONI, M.R. (1982), Decomposição em Programação Matemática via Projeção: *Tese de Mestrado*, DEE/FEC/UNICAMP.
- BENAYOUN, R.; DE MONTGOLFIER, J.; TERGNY, J. & O. LARICHEV, (1971), Linear Programming with Multiple Objective Functions: Step Method (STEM), *Mathematical Programming*, Vol. 1, No 3.

- BENDERS, J.F. (1962), Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems, *Numerische Mathematik*, Vol. 4.
- BERGE, S. & A. GHOUILA-HOURI (1962), *Programmes, Jeux et Reseaux de Transport*, Dunod, Paris.
- BOWMAN, V.J. (1976), On the Relationship of the Thebycheff Norm of the Efficient Frontier of Multiple-Criteria Objectives, in Thiriez, H. & S. Zionts (Editors), *Multiple Criteria Decision Making*, Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, New York.
- CANON, M.D. & C.D. CULLUM (1968), A Tight Upper Bound on the Rate of the Frank-Wolfe Algorithm, *SIAM Journal of Control*, Vol. 6, No 4.
- CANON, M.D.; CULLUM, C.D. & E. POLAK (1970), *Theory of Optimal Control and Mathematical Programming*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- CHANKONG, V. (1977), Multiobjective Decision Making Analysis: The Interactive Surrogate Worth Trade-off Method, *Ph.D. Dissertation*, Case Western Reserve University.
- CHANKONG & Y.Y. HAIMES (1982), On the Characterization of Noninferior Solutions of the Vector Optimization Problem, *Automatica*, Vol. 18, No 6.
- COHON, J. (1978), *Multiobjective Programming and Planning*, Academic Press, New York.
- COHON, J. & D.H. MARKS (1975), A Review and Evaluation of Multiobjective Programming Techniques, *Water Resources Research*, Vol. 11, No 2.
- CHARNES, A. W.W. COOPER (1963), Deterministic Equivalents for Optimizing and Satisficing under Chance Constraints, *Operations Research*, Vol. 11, No 1.
- CHARNES, A.; COOPER, W.W.; DEVOE, J.K.; LEARNER, D.B. & W. REINECKE (1968), A Goal Programming Model for Media Planning, *Management Science*, Vol. 14, No 8.

- CHARNES, A. & W.W. COOPER (1977), Goal Programming and Multiple Objective Optimisation - Part I, *European Journal of Operational Research*, Vol. 1, Nº 1.
- DA CUNHA, N.O. & E. POLAK (1967), Constrained Minimization under Vector-Valued Criteria in Finite Dimensional Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 19, Nº 1.
- DI ROCCAFERRERA, G.M.F. (1973), Behavioral Aspects of Decision Making under Multiple Goals, in Cochrane, J.L. & M. Zeleny (Editors), *Multiple Criteria Decision Making*, University of South Carolina Press, Columbia, South Carolina.
- DOMMEL, H.W. (1978), Economic Dispatch and Optimal Power Flow Methods for Planning and Operation, *CEA Engineering and Operation Division Meeting*, March.
- DYER, J.S. (1972), Interactive Goal Programming, *Management Science*, Vol. 19, Nº 1.
- DYER, J.C. (1974), The Effects of Errors in the Estimation of the Gradient of the Frank-Wolfe Algorithm, with Application for Interactive Programming, *Operations Research*, Vol. 22.
- EVANS, J.P. & R.E. STEVER (1973), A Revised Simplex Method for Linear Multiple Objective Programs, *Mathematical Programming*, Vol. 5, Nº 1.
- FERREIRA, P.A.V. (1983), Um Método Primal para Problemas de Controle Ótimo de Sistemas Dinâmicos de Grande Porte, *Tese de Mestrado*, DEE/FEC/UNICAMP, Novembro.
- FERREIRA, P.A.V. & J.C. GEROMEL (1984), Otimização Multiobjetivos: Considerações Preliminares e Proposta de um Novo Método Interativo, *Nota Interna 059/84*, FEC/UNICAMP, Junho
- FERREIRA, P.A.V. & J.C. GEROMEL (1985a), Optimal Control of Large Scale Hy-

droelectric Systems: Application to the Brazilian's Network, *IEE Conference Publication N<sup>o</sup> 252 ('Control 85')*, London.

FERREIRA, P.A.V. & J.C. GEROMEL (1986b), Optimal Control of Hydrothermal Systems Using a Min-Max Decomposition Approach, *Proceedings of IFAC/IFORS Conference on Control Science and Technology for Development*, Beijing.

FERREIRA, P.A.V. & J.C. GEROMEL (1986a), Despacho Ótimo de Carga como um Problema Bicritério: Análise e Implementação através de um Novo Método Iterativo, *6<sup>o</sup> Congresso Brasileiro de Automática*, Belo Horizonte.

FERREIRA, P.A.V. & J.C. GEROMEL (1986b), An Interactive-Projection Method for Multicriteria Optimization Problems, *SIAM Journal of Control and Optimization*, submetido para publicação.

FISHBURN, P.C. (1974), Lexicographic Orders, Utilities and Decision Rules: A Survey, *Management Science*, Vol. 20, N<sup>o</sup> 11.

FLEMING, P.J. & A.P. PASHKEVICH (1985), Computer Aided Control System Design using Multiobjective Optimisation Approach, *IEE Conference Publication N<sup>o</sup> 252 ('Control 85')*.

GEMBICKI, F.W. & Y.Y. HAIMES (1975), Approach to Performance and Sensitivity Multiobjective Optimisation: The Goal Attainment Method, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-20, N<sup>o</sup> 6.

GEOFFRION, A.M. (1967), Solving Bicriteria Mathematical Programs, *Operations Research*, Vol. 15, N<sup>o</sup> 1.

GEOFFRION, A.M. (1968), Proper Efficiency and the Theory of Vector Optimisation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 22, N<sup>o</sup> 3.

GEOFFRION, A.M. (1971), Duality in Nonlinear Programming: A Simplified Applications-Oriented Development, *SIAM Review*, Vol. 13.

GEOFFRION, A.M. (1972), Generalized Benders Decomposition, *Journal of Optimisation Theory and Applications*, Vol. 10, N<sup>o</sup> 4.

- GEOFFRION, A.M.; J.S. DYER & A. FEINBERG (1972), An Interactive Approach for Multi-Criterion Optimisation, with an Application to the Operation of an Academic Department, *Management Science*, Vol. 19, No 4 (Part I).
- GEROMEL, J.C. & L.F.B. BAPTISTELLA (1981), A Feasible Direction Method for Large Scale Nonconvex Programs: Decomposition Approach, *Journal of Optimisation Theory and Applications*, Vol. 35, No 2.
- GEROMEL, J.C.; LUNA, H.P.L. & L.C.S. SILVA (1981), Saving Fuel for Electrical Energy Through Optimal Control of Hydraulic Resources, *Proceedings of the IFAC World Congress VIII*, Vol. XV
- GEROMEL, J.C. & L.F.B. BAPTISTELLA (1984), Optimal Operation of Thermal Systems with Start-Up Costs, *6th International Conference on Analysis and Optimization of Systems*, Vol. 1, Nice.
- GEROMEL, J.C. & P.A.V. FERREIRA (1986), A Dual-Projection Method for Large Scale Systems Optimization (Invited Paper), *Control Theory and Advanced Technology - Special Issue on Large Scale Systems*, Vol. 2, No 2.
- GEROMEL, J.C. & M.R. BELLONI (1986), Nonlinear Programs with Complicating Variables: Theoretical Analysis and Numerical Experience, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. SMC-16, No 2.
- HAIMES, Y.Y. (1977), *Hierarchical Analyses of Water Resources Systems*, McGraw-Hill Inc., New York, USA.
- HAIMES, Y.Y. & W.A. HALL (1974), Multiobjectives in Water Resources Analyses: The Surrogate Worth Trade-off Method, *Water Resources Research*, Vol. 10.
- HAIMES, Y.Y.; HALL, W.A. & H.T. FREEDMAN (1975), *Multiobjective Optimization in Water Resources Systems*, Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam.
- HAURIE, A. (1973), On Pareto Optimal Decisions for a Coalition of a Subset of Players, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-18, No 2.

- HESTENES, M.R. (1980), *Conjugate Direction Methods in Optimization*, Springer New York.
- HWANG, C.L. & A.S.M. MASUD (1979), *Multiple Objective Decision Making Methods and Applications, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems Series*, Springer, New York.
- IGNIZIO, J.P. (1982), *Linear Programming in Single & Multiple Objective Systems*, Prentice-Hall International, New Jersey.
- ISHIZUKA, Y. & K. SHIMIZU (1984), Necessary and Sufficient Conditions for the Efficient Solutions of Nondifferentiable Multiobjective Problems, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. SMC-14, No 4.
- KEENEY, R.L. (1972), Utility Functions for Multiattributed Consequences, *Management Science*, Vol. 18, No 5 (Part I).
- KEENEY, R.L. & H. RAIFFA (1976), *Decision with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-offs*, Wiley, New York.
- KIRK, D.E. (1970), *Optimal Control Theory: An Introduction*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall.
- KLINGER, A. (1964), Vector-Valued Performance Criteria, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-9, No 1.
- LASDON, L.S. (1970), *Optimization Theory for Large Systems*, MacMillan, New York.
- LUENBERGER, D.G. (1970), *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- LYRA, C. (1984), Contribuição ao Planejamento da Produção de Energia de Sistemas de Potência, *Tese de Doutorado*, DEE/FEC/UNICAMP.
- MACCRIMMON, K.R. (1973), An Overview of Multiple Objective Decision Making, in Cochrane, J.L. & M. Zeleny (Editors), *Multiple Criteria Decision*

*Making*, University of South Carolina Press, Columbia, South Carolina.

- MCGREW, D.R. & Y.Y. HAIMES (1974), Parametric Solution to the Joint System Identification and Optimisation Problem, *Journal of Optimisation Theory and Applications*, Vol. 13, Nº 5.
- MONTICELLI, A. (1983), *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*, Edgard Blücher, São Paulo.
- MUKAI, H. (1980), Algorithms for Multicriteria Optimisation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-25, Nº 2.
- NAKAYAMA, H. & Y. SAWARAGI (1984), Satisficing Trade-off Method for Multi-objective Programming and its Applications, *IFAC World Congress IX*, Vol. XI, Budapest.
- PAYNE, H.J.; E. POLAK, D.C. COLLINS & W.S. MEISEL (1975), An Algorithm for Bicriterion Optimisation Based on the Sensitivity Function, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-20, Nº 4.
- PAYNE, H.J. & E. POLAK (1980), An Interactive Rectangle Elimination Method for Biobjective Decision Making, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-25, Nº 3.
- RADFORD, A.D.; J.S. GERO; M.A. ROSENMAN & BALACHANDRAN (1985), Pareto Optimisation as a Computer-Aided Design Tool, in J.S. Gero (editor), *Optimisation in Computer-Aided Design*, North-Holland, Amsterdam.
- REID, R.W. & S.J. CITRON (1971), On Noninferior Performance Index Vectors, *Journal of Optimisation Theory and Applications*, Vol. 7, Nº 1.
- RELATORIO SCEN-GTMC (1983), Metodologia e Critérios para Identificação e Programação das Modalidades de Intercâmbios Energéticos entre Empresas Controladoras de Área, GCOI-SUL-SUDESTE.
- ROSEN, J.B. (1960), The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming, I. Linear Constraints, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 8.

Os programas computacionais diretamente relacionados com os métodos discutidos no trabalho são descritos resumidamente a seguir:

HYDRA : implementa o algoritmo de decomposição *Min-Max* proposto no Capítulo 4. O programa está integralmente dirigido para aplicações em controle ótimo de sistemas hidrotérmicos.

MULTC : implementa o método multicritério proposto no trabalho para problemas de Otimização Dinâmica, tendo como aplicação o controle multiobjetivo da geração de sistemas hidroelétricos.

DOCMC : implementa o método multicritério proposto no trabalho tendo como aplicação, o Despacho Econômico de Carga de Sistemas Térmicos. Este programa não leva em consideração as restrições elétricas do problema.

Os dois primeiros programas utilizam a subrotina MESTR, uma implementação do método de *Gradiente Modificado*, voltada para a resolução de problemas de controle ótimo com restrições sobre variáveis de estado. Esta rotina explora eficientemente a estrutura particular do sistema hidráulico.

O programa HYDRA utiliza como subrotina o programa SIMREV (Simplex Revisado), desenvolvido por (da Silva, 1984), como suporte para a utilização do método de subgradientes discutido no Capítulo 4.

Os programas MULTC e DOCMC utilizam ainda os recursos de um conjunto de subrotinas (CORTE, ZOOM, DIAGN,...), responsáveis pela interface entre o Decisor e os modelos de otimização.

**IMPORTANTE** : Todos os resultados computacionais deste trabalho estão disponíveis aos interessados, mediante solicitação à UNICAMP.

## REFERÊNCIA

DA SILVA, M.C. (1984), Modelo de Otimização para a Operação Hidroenergética da Cascata do S. Francisco, *Tese de Mestrado*, FEC/UNICAMP, Março.

APENDICE A  
=====

- WARBURTON, A.R. (1983), Quasiconcave Vector Maximization: Connectedness of the Sets of Pareto-Optimal and Weak-Pareto-Optimal Alternatives, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 40, No 4.
- WENDEL, R.E. (1980), Multiple Objective Mathematical Programming with Respect to Multiple Decision-Makers, *Operations Research*, Vol. 38, No 5.
- WOLFE, P. (1970), Convergence Theory in Nonlinear Programming, in Abadie, J. (Editor), *Integer and Nonlinear Programming*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam.
- YU, P.L. (1974), Cone Convexity, Cone Extreme Points and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives, *Journal of Optimisation Theory and Applications*, Vol. 14, No 3.
- YU, P.L. & G. LEITMANN (1974), Compromise Solutions, Domination Structures and Salukvadze's Solution, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 13, No 3.
- ZADEH, L.A. (1963), Optimality and Nonscalar-Valued Performance Criteria, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-8, No 1.
- ZELNY, M. (1973), Compromise Programming, in Cochrane, J.L. & M. Zeleny (Editors), *Multiple Criteria Decision Making*, University of South Carolina Press, Columbia, South Carolina.
- ZIONTS, S. & J. WALLENIUS (1976), An Interactive Programming Method for Solving the Multiple Criteria Problem, *Management Science*, Vol. 22, No 6.

- ROY, B. (1971), Problems and Methods with Multiple Objective Functions, *Mathematical Programming*, Vol. 1, No 2.
- SAGE, A.P. & C.C. WHITE III (1977), *Optimum Systems Control*, 2nd Edition, Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- SALUKVADZE, M. (1974), On the Existence of Solutions in Problems of Optimisations under Vector-Valued Criteria, *Journal of Optimisation Theory and Applications*, Vol. 13, No 2.
- SCHMITENDORF, W.E. (1976), Pontryagin's Principle for Problems with Isoperimetric Constraints and with Terminal Constraints, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 18, No 4.
- SCHMITENDORF, W.E. & G. LEITMAN (1974), A Simple Derivation of Necessary Conditions for Pareto Optimality, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-19.
- SIMAAN, M. & J.B. CRUZ JR. (1973), On the Stackelberg Strategy in Nonzero Sum Games, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 11.
- SOARES, S.; LYRA, C. & H. TAVARES (1980), Optimal Generation Scheduling of Hydrothermal Power Systems, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. 99.
- STERN, R.J. & A. BEN-ISRAEL (1973), On Linear Optimal Control Problems with Multiple Quadratic Criteria, in Cochrane, J.L. & M. Zeleny (Editors), *Multiple Criteria Decision Making*, University of South Carolina Press, Columbia, South Carolina.
- TURGEON, A. (1978), Optimal Scheduling of Thermal Generating Units, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-23, No 6.
- VAJDA, S. (1972), *Probabilistic Programming*, Academic Press, New York.
- WALTZ, F.M. (1967), An Engineering Approach: Hierarchical Optimization Criteria, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-12.