

LAC

Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA
Laboratório de Análise Convexa



Este exemplar corresponde à defesa final da tese
defendida por Oswaldo Antunes Cruz
JUNIOR apresentada pela Comissão
Julgadora em 08 de julho de 1994.
Paulo A. Valente Ferreira
Orientador

Síntese de Sistemas de Controle via Otimização Convexa

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de
Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre
em Engenharia Elétrica.

por

Oswaldo Antunes Cruz Júnior

Engenheiro Eletricista - UFPA/PA

em 08 de julho de 1994 perante à banca examinadora

^{Oswaldo}
Paulo A. Valente Ferreira - Orientador

Samuel Siqueira Bueno - IA/CTI

Rafael Santos Mendes - FEE/UNICAMP

Para Dulce Cruz, minha Mãe.

If it's gonna get better
It starts with a feeling
If it's gonna get better
It's gonna take time
If it's gonna get better
We've gotta start now ...

Genesis

Agradecimentos

Este trabalho não existiria sem a ajuda e a participação de muitas pessoas. A todas elas, gostaria de expressar os meus mais sinceros agradecimentos. Em especial:

- Prof. Paulo Augusto Valente Ferreira, um profissional brilhante e um ser humano raro. Sua dedicação e competência são para mim um exemplo. Sua orientação abriu-me muitos caminhos;
- Aos meus pais, Sr. Osvaldo e D. Dulce, tão amados e tão presentes na minha vida;
- À minha doce Márcia: *você é mais do que eu sonhara...*
- Dadato, Maninha, Lucinha, Carlos, Dudu, Isabela, Valéria, Tia Quintiliana e Telma: que falta vocês me fazem...
- Minha Amiga Ângela, de Belém: seu amor pela ciência é contagiante. Obrigado pelo livro do Brecht e por sua eterna dedicação, muitas vezes não retribuída;
- Nádia Gimenez, sua Fidelidade e companhia nesta jornada estão entre as coisas mais inesquecíveis pra mim.
- Ao amigo Reginaldo pela estadia e amizade.
- Isamara, Sirlene, Michelle, Julimara, Glauco, Claudio, Pereira, Hamilton, Andrea, Cristiane e Miguel. Obrigado pela amizade e ambiente de trabalho, muitas vezes não muito silencioso, que vocês me proporcionaram.
- Telma e Leônidas Sobrinho pela força no início do mestrado.
- Aos professores da FEE/UNICAMP que ministraram os cursos necessários para os trabalhos desenvolvidos nesta Tese;
- Ao Prof. Pedro L. Dias Peres pela ajuda sempre prestada.
- Ao Governo Brasileiro, que através do CNPq, financiou o início deste trabalho.
- Ao Governo do Estado de São Paulo, que através da FAPESP, financiou este trabalho a partir do ano de 1993.
- À Deus por, absolutamente, tudo.

Sumário

O principal objetivo deste trabalho é abordar o problema de síntese de sistemas de controle através de técnicas de otimização. Trabalhos recentes demonstram a viabilidade computacional de se traduzir especificações de desempenho através de restrições e funcionais, na sua grande maioria convexos. Esta abordagem elimina a necessidade de se representar todas estas especificações em termos de um único critério de desempenho, como no caso de projetos baseados no regulador LQG, tornando o problema tratável por técnicas de otimização extremamente eficientes. No trabalho faz-se uso do Método de Planos de Corte para resolver o problema de síntese, a partir de aproximações em espaços de dimensão finita do espaço das matrizes de transferência racionais estáveis próprias sobre o qual o controlador para o sistema deve ser determinado. O trabalho inclui resultados numéricos que ilustram o desempenho do procedimento implementado.

Abstract

The main purpose of this work is to address the control systems design problem by optimization techniques. Recent results show the computational feasibility of translating performance specifications through constraints and functionals of a convex optimization problem. This framework prevents the representation of all specifications in terms of a single performance criterion as, for example, in the case of designs based on the LQG regulator, and allows the treatment of the problem by very efficient optimization techniques. In this work, a Cutting Plane Method is used to solve the control design problem. Finite dimensional approximations of the infinite dimensional space of proper stable transfer matrices, over which the controller must be determined, are developed. The work includes numerical results which illustrate the performance of the proposed procedure.

Conteúdo

| | |
|---|-----------|
| Simbologia e Notação | 2 |
| 1 Introdução Geral | 3 |
| 1.1 Motivação | 3 |
| 1.2 Arquitetura do Sistema de Controle | 4 |
| 1.3 Aspectos Bibliográficos | 9 |
| 1.4 Organização da Tese | 9 |
| 2 Fundamentos Algébricos | 11 |
| 2.1 Introdução | 11 |
| 2.2 Anéis, Campos e Ideais | 13 |
| 2.3 Anéis e Campos de Frações | 15 |
| 2.4 Domínios Euclidianos | 16 |
| 2.5 O Anel \mathcal{S} como Domínio Euclidiano | 18 |
| 2.6 Fatorações Coprimas | 19 |
| 2.7 Anel de Matrizes | 20 |
| 3 Parametrização \mathcal{Q} | 23 |
| 3.1 Introdução | 23 |
| 3.2 Parametrização de Todos os Controladores Estabilizantes - Caso SISO | 23 |
| 3.3 Parametrização de Todos os Controladores Estabilizantes - Caso MIMO | 26 |
| 3.4 Paradigma do Controlador Modificado | 32 |
| 3.5 Parametrização em Espaço de Estados | 34 |
| 4 Análise Convexa das Especificações de Projeto | 40 |
| 4.1 Introdução | 40 |
| 4.2 Realizabilidade | 40 |
| 4.3 Estabilidade | 42 |
| 4.4 Desempenho | 44 |
| 4.4.1 Overshoot e Undershoot | 45 |
| 4.4.2 Resposta RMS a um Ruído Particular | 46 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.4.3 | Norma H_2 : Resposta ao Ruído Branco | 47 |
| 4.4.4 | Ganho de Pico | 47 |
| 4.4.5 | Rastreamento Assintótico | 48 |
| 5 | Projeto de Sistemas de Controle via Otimização Convexa | 50 |
| 5.1 | Introdução | 50 |
| 5.2 | Formulação do Problema de Projeto | 50 |
| 5.3 | Aproximações de Ritz | 51 |
| 5.3.1 | Um Método de Ritz Específico | 52 |
| 5.4 | Aspectos de Implementação | 53 |
| 5.5 | Experiências Numéricas | 53 |
| 6 | Conclusão Geral | 63 |
| A | Elementos de Otimização Convexa | 65 |
| A.1 | Introdução | 65 |
| A.2 | Conjuntos e Funcionais Convexos | 65 |
| A.3 | Subgradientes e Quasi-Gradientes Generalizados | 66 |
| A.4 | Subgradientes: Propriedades | 67 |
| A.5 | Método dos Planos de Corte | 68 |
| B | Subgradientes de Algumas Especificações de Projeto | 72 |
| B.1 | Introdução | 72 |
| B.2 | Resposta RMS | 72 |
| B.3 | Overshoot | 73 |
| B.4 | Ganho de Pico | 74 |
| | Referências Bibliográficas | 76 |

Simbologia e Notação

- \mathbb{R} – Conjunto dos números reais.
- $\mathbb{R}[s]$ – Conjunto dos polinômios em s com coeficientes reais.
- $\mathbb{R}(s)$ – Conjunto das funções de transferência em s com coeficientes reais.
- \mathcal{S} – Conjunto das funções de transferência em s , estáveis, com coeficientes reais.
- $\mathcal{S}^{n \times m}$ – Conjunto das matrizes de transferência $n \times m$, com elementos em \mathcal{S}
- A^T – Matriz transposta de A .
- $\|\cdot\|$ – Norma. Uma norma particular é indicada por um subscrito.
- $\partial\phi(x)$ – Subdiferencial do funcional ϕ no ponto x .
- \triangleq – Igual por definição.
- \approx – Aproximadamente igual.
- $\lim sup$ – O supremo assintótico de uma função.
- \mathbb{Z}_+ – O conjunto dos números inteiros positivos.
- \mathcal{H} – O conjunto de todas as matrizes de transferência $n_z \times n_w$.
- K – Matriz de transferência do controlador.
- $\Re\{s\}$ – Parte real do número complexo s

Capítulo 1

Introdução Geral

1.1 Motivação

Esta dissertação trata do problema de síntese de sistemas de controle para uma planta linear invariante no tempo. A síntese tem como finalidades básicas estabilizar e satisfazer certas especificações de desempenho para o sistema a ser controlado.

Quando o número de parâmetros envolvidos é relativamente pequeno e as especificações de desempenho não são muito complexas, técnicas de tentativa e erro baseadas no Lugar das Raízes ou nos Diagramas de Bode e Nyquist ([Oga90]) podem ser aplicadas para se obter, por exemplo, controladores do tipo PID muito utilizados em ambientes industriais.

No caso de sistemas multivariáveis mais complexos, estes procedimentos de projeto tornam-se impraticáveis e a utilização de métodos analíticos, obrigatória. Um exemplo típico de projeto nestas condições é a síntese de reguladores do tipo LQG - Lineares Quadráticos Gaussianos - baseada em técnicas analíticas de otimização, isto é, na minimização de um determinado funcional quadrático. Embora sempre forneça controladores estabilizantes, este tipo de projeto apresenta como desvantagem a necessidade de se traduzir as especificações de desempenho em termos das matrizes de ponderação do funcional mencionado, o que exige grande experiência prática do projetista.

O principal objetivo deste trabalho é abordar o problema de síntese de sistemas de controle através de técnicas de otimização. Trabalhos recentes (Boyd e Barrat [BB91]; Boyd et al [BBB88]; [PoSal89]) demonstram a viabilidade computacional de se traduzir especificações de desempenho através de restrições e funcionais, na sua grande maioria *convexos*. Esta abordagem elimina a necessidade de se representar todas estas especificações em termos de um único critério de desempenho, como no caso do regulador LQG, tornando o problema tratável por técnicas de otimização

extremamente eficientes.

1.2 Arquitetura do Sistema de Controle

A figura 1.1 mostra a representação clássica de um sistema conhecido como *Sistema de Controle com um Grau de Liberdade* (1-DOF); ver [BB91]. No sistema de controle 1-DOF o sinal de referência, denotado por r , é uma entrada externa que varia com o tempo. O principal objetivo do projeto de um sistema 1-DOF é manter a saída y_p da planta o mais próximo possível do sinal de referência r , a despeito das perturbações n_{proc} e n_{sen} , ao mesmo tempo em que tenta manter o esforço do atuador, isto é, o sinal u , não muito grande.

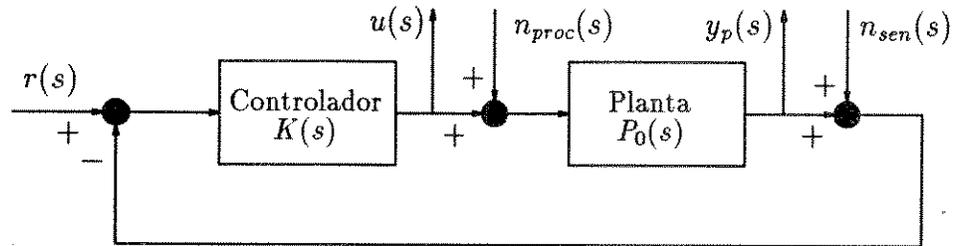


Figura 1.1: Representação Clássica do Sistema

Uma representação mais racional e explícita para o sistema acima consiste em definir adequadamente os sinais que *entram* e os sinais que *saem* da planta a ser controlada, como mostra a figura 1.2.

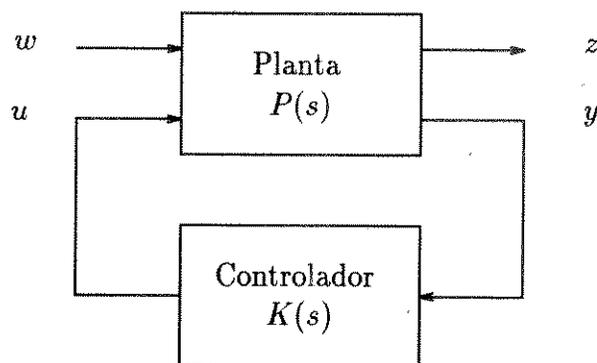


Figura 1.2: Nova Representação para o Sistema

As entradas da planta estão divididas em:

- *vetor de entradas controladas (u)*: consiste das entradas que são geradas pelo controlador;
- *vetor de entradas exógenas (w)*: consiste de todas as demais entradas da planta, como ruídos, referências, perturbações físicas e até sinais fictícios que ajudem na análise do sistema.

As saídas da planta consistem em dois vetores de sinais:

- *vetor de saídas medidas (y)*: provenientes de sensores e/ou de comandos de entrada (ver [BB91]). Estes sinais são acessíveis ao controlador;
- *vetor de saídas reguladas (z)*: representa qualquer sinal do sistema sobre o qual deseje-se expressar uma especificação de desempenho. Não importa que seja ou não acessível ao controlador. Exemplos: temperatura, força, posição real, enfim qualquer variável que se deseje regular ou controlar. O vetor z pode incluir componentes de y ou de u e até variáveis de estado internas ao sistema.

Por definição, o controlador somente possui entrada y e saída u e o sistema como um todo possui entrada w e saída z . As dimensões dos vetores w , u , z e y , serão denotadas por n_w , n_u , n_z e n_y respectivamente. Note que a relação entre w e z é extremamente interessante ao projetista, pois um controlador candidato ao sistema em malha fechada pode ser avaliado através de simulações ou testes envolvendo apenas z e w . O Capítulo 3 explora com detalhes este tipo de arquitetura.

A figura 1.3 mostra esta estrutura de maneira mais geral, ou seja, com a inclusão de sinais adicionais de comandos e de diagnósticos que podem estar presentes no controlador. Nesta figura o vetor de sinais de comando (w_{com}) é incluído no vetor de sinais exógenos, e passa através da planta $P(s)$ para ser acessado diretamente pelo controlador. Do mesmo modo, o vetor de sinais de diagnóstico (u_{diag}) parte do controlador diretamente para a saída regulada (z_{diag}) que é usada para monitoramento do sistema. Maiores detalhes podem ser encontrados em Boyd & Barrat ([BB91]) e Boyd et al ([BBB88]).

Para ilustrar o uso desta arquitetura, um exemplo de um sistema monovariável é apresentado a seguir.

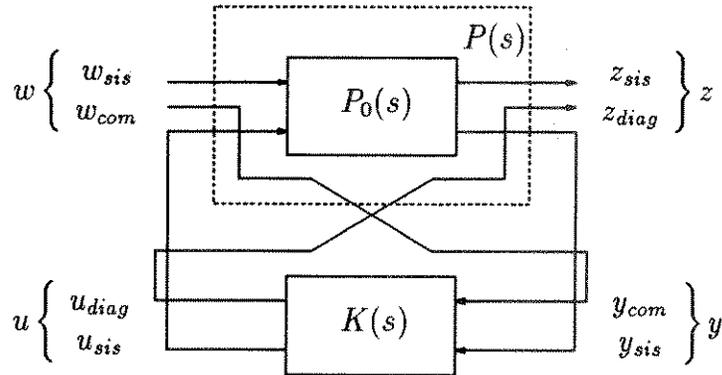


Figura 1.3: Nova Arquitetura: Estrutura Geral

Exemplo 1.1: Um motor com codificador angular é usado para regular o ângulo θ de um bastão em torno de algum valor (pequeno) de referência θ_{ref} , enquanto um torque de perturbação d atua no bastão (figura 1.4).

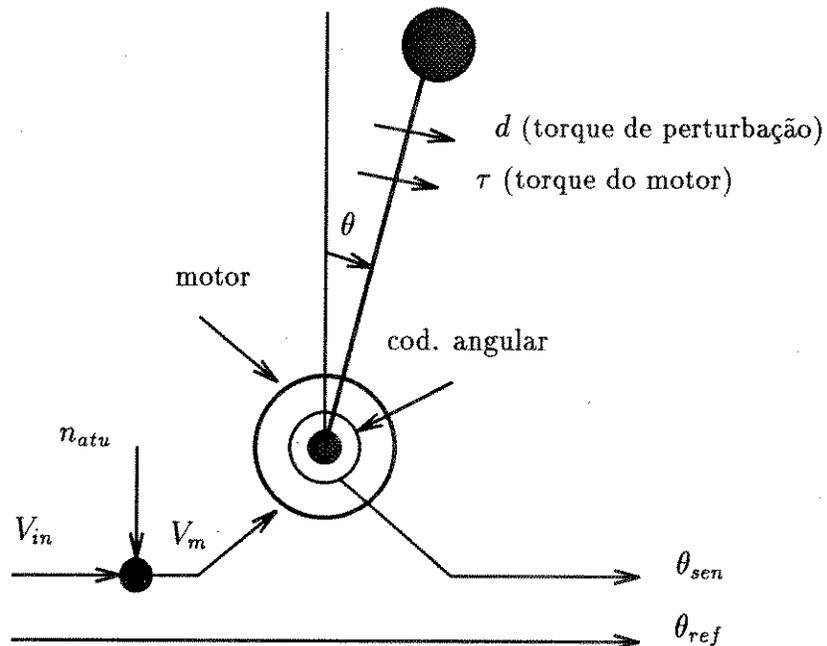


Figura 1.4: Esquema referente ao Exemplo 1.1.

No esquema da figura 1.4, tem-se

θ_{sen} : saída do codificador angular.

$n_{sen} = \theta - \theta_{sen}$: diferença entre o ângulo real e o ângulo medido.

n_{atu} : sinal fictício de ruído no atuador.

A representação que será considerada é a mostrada na figura 1.2. Pode-se então definir as entradas e saídas da planta como seguem:

- entradas exógenas:

$$w = \begin{bmatrix} \theta_{ref} \\ d \\ n_{sen} \\ n_{atu} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

- saídas medidas:

$$y = \begin{bmatrix} \theta_{ref} \\ \theta_{sen} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

- entrada controlada: $u = V_{in}$.

- saídas reguladas; uma possível escolha seria

$$z = \begin{bmatrix} \theta \\ V_m \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Em diagrama de blocos,

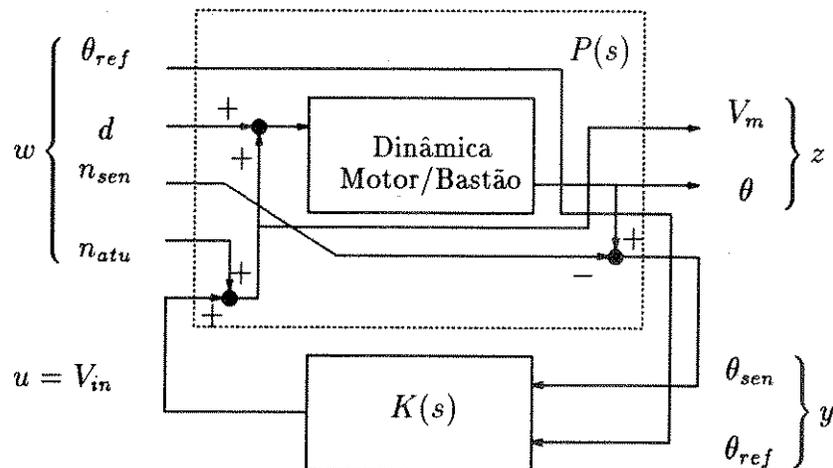


Figura 1.5: Arquitetura do Sistema de Controle - Exemplo 1.1.

A planta $P(s)$ possui cinco entradas e quatro saídas, isto é,

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Particionando $P(s)$,

$$P = \begin{bmatrix} P_{zw} & P_{zu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

obtem-se

$$z = P_{zw}w + P_{zu}u \quad (1.6)$$

$$y = P_{yw}w + P_{yu}u \quad (1.7)$$

onde P_{zw} , P_{zu} , P_{yw} e P_{yu} são as matrizes de transferência de w para z , de u para z , de w para y e u para y , respectivamente.

O controlador K deste sistema possui duas entradas e uma saída:

$$K = \begin{bmatrix} K_{ref} & K_{sen} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

onde K_{ref} e K_{sen} referem-se às partes do controlador K devidas a θ_{ref} e θ_{sen} , respectivamente. Com isso, tem-se também que

$$u = Ky \quad (1.9)$$

Resolvendo para z em função de w ,

$$z = (P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw})w \quad (1.10)$$

e assumindo-se que $\det(I - P_{yu}K)$ não seja identicamente nulo, chega-se à expressão que relaciona z com w em malha fechada.

Definição 1.1

A matriz de transferência em malha fechada (com o controlador conectado à planta $P(s)$) de w para z é chamada de *Matriz de Transferência em Malha Fechada* H :

$$H = P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw} \quad (1.11)$$

$$z = Hw \quad (1.12)$$

Os elementos de H são funções de transferência de cada entrada exógena (w_i) para cada variável regulada (z_i). Perceba que H contém (e deve conter sempre) todas as funções de transferência de malha fechada que interessem ao projetista.

1.3 Aspectos Bibliográficos

Resultados recentes na área de controle linear multivariável obtidos através do emprego da técnica chamada *Abordagem por Fatorização* formam a base teórica sobre a qual desenvolveu-se a idéia e os algoritmos utilizados no presente trabalho. A idéia central desta abordagem consiste em *fatorar* a matriz de transferência de um sistema (não necessariamente estável) como a *razão* de matrizes estáveis. Esta idéia aparentemente simples deu origem a uma elegante metodologia para a solução de alguns importantes problemas de controle de uma forma mais simples e natural (ver [Vid85]). Esta idéia foi usada pela primeira vez em um trabalho de M. Vidyasagar em 1972 ([Vid72]), mas a ênfase estava mais na análise de estabilidade de um dado sistema do que na síntese de sistemas de controle. O ponto de partida da *Abordagem por Fatorização* é obter uma parametrização simples de todos os controladores que estabilizam uma determinada planta. Com isso pode-se, em princípio, escolher o melhor controlador para várias aplicações. Esta idéia foi apresentada em 1976 por Youla, Jabr e Bongiorno ([YJB76]). O ponto de vista adotado nesta dissertação - caracterização da classe de todos os controladores que estabilizam uma planta como um Anel¹ - foi inicialmente proposto em 1980 por Desoer et al ([DLM80]). Neste último trabalho, os autores exploram o ponto de vista de Youla et al ([YJBI76] e [YJBII76]) e reduzem o problema ao essencial. Seguindo a mesma idéia e com maior detalhamento, Vidyasagar ([Vid85]) apresenta um estudo completo do emprego de técnicas de fatoração em síntese de sistemas de controle. Mais recentemente, Boyd e Barrat ([BB91]) mostram de maneira bastante didática as potencialidades da técnica de parametrização em problemas de controle, explorando suas propriedades de convexidade.

1.4 Organização da Tese

A parte restante desta tese está organizada da seguinte forma:

Capítulo 2: Neste capítulo serão introduzidos os conceitos teóricos que dão suporte à tese. Aqui, os conceitos de Anéis, Domínios Euclidianos, Fatorações Coprimas, e outros, são apresentados. Particularizações de alguns desses conceitos para o contexto desta Tese, também são apresentados.

Capítulo 3: O objetivo central deste capítulo é a descrição do conjunto *afim* de matrizes de transferência em malha fechada realizáveis por controladores que estabilizam a planta. Este é um capítulo fundamental para o entendimento dos trabalhos desenvolvidos nesta Tese.

¹ver Capítulo 2

Capítulo 4: Este capítulo explora as características de convexidade de algumas especificações de desempenho que são extremamente úteis na formulação do Problema de Projeto de Controlador descrito no Capítulo 5.

Capítulo 5: Aqui será apresentado e formulado o problema de controle tratado nesta Tese, bem como sua implementação e análise dos resultados.

Capítulo 6: Apresenta os comentários e conclusões mais relevantes a respeito das técnicas e algoritmos empregados neste trabalho além de sugerir temas para trabalhos futuros.

Apêndice A: Resume alguns conceitos fundamentais de análise convexa e apresenta o *Método dos Planos de Cortes* no qual se baseiam os algoritmos para solução de problemas convexos utilizados nesta dissertação.

Apêndice B: São apresentados os cálculos de subgradientes de algumas especificações de projeto utilizadas na formulação do problema.

Capítulo 2

Fundamentos Algébricos

2.1 Introdução

O principal resultado deste capítulo pode ser resumido da seguinte forma: seja \mathcal{R} o conjunto das funções de transferência que satisfazem determinadas especificações de projeto. Então somas e produtos de elementos de \mathcal{R} também pertencem a \mathcal{R} , isto é, pode-se caracterizar \mathcal{R} como um *anel*. Neste capítulo a caracterização do *Problema de Projeto do Controlador* em um anel \mathcal{R} é introduzida juntamente com os conceitos algébricos necessários. As especificações de projeto são tratadas a partir do Capítulo 4. O problema de estabilização do sistema consiste no primeiro passo em direção à solução do *Problema de Projeto do Controlador*. Em termos mais formais, o problema de estabilização pode ser assim descrito:

Dado uma planta P_0 e um anel \mathcal{R} das funções de transferência estáveis¹, encontre um controlador K tal que o par (P_0, K) seja estável, isto é, $(P_0, K) \in \mathcal{R}$.

O esquema utilizado neste trabalho para a obtenção do controlador K (ou do par $(P_0, K) \in \mathcal{R}$) é do tipo por *realimentação* (malha-fechada), como adotado no Capítulo 1. Este esquema é considerado o melhor do ponto de vista da redução de sensibilidade e robustez contra imperfeições do modelo, dentre outros.

Antes de serem introduzidos os conceitos e proposições deste capítulo, é necessária a apresentação daquilo que será chamado neste trabalho de *Fato ou Resultado Fundamental*.

Considere o esquema de um sistema genérico mostrado na figura 2.1 na sua representação clássica:

¹Note que esta é uma particularização para o anel \mathcal{R} . Uma descrição mais geral e adequada para \mathcal{R} seria: \mathcal{R} é o anel de funções de transferência que satisfazem determinadas especificações de projeto. Para mais detalhes sobre este enfoque ver Desoer et al ([DLM80]).

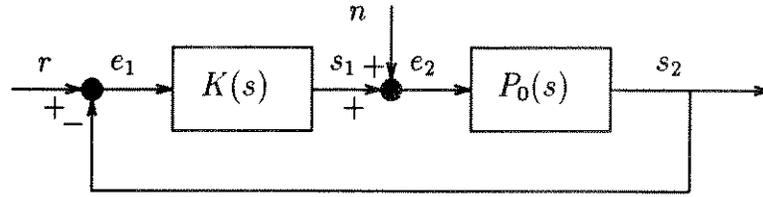


Figura 2.1: Sistema Genérico: Representação Clássica

Na figura 2.2 o sistema já aparece *traduzido* para a nova arquitetura.

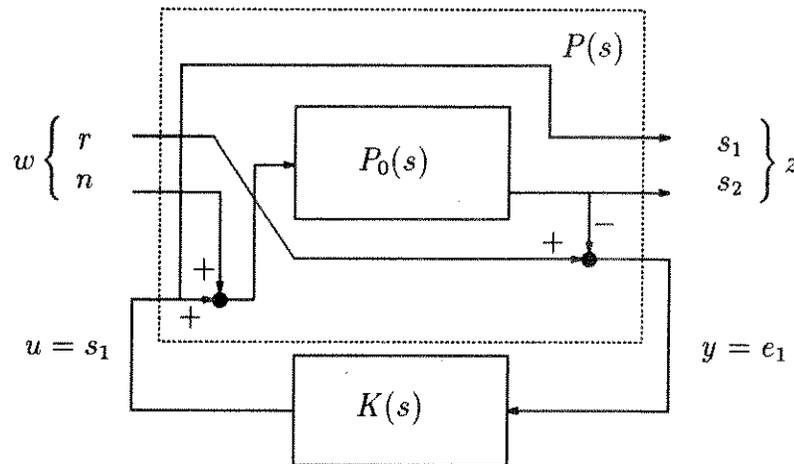


Figura 2.2: Sistema Genérico: Nova Representação

A matriz de transferência H das duas entradas externas r e n (entradas exógenas w) para as saídas s_1 do controlador $K(s)$ e s_2 da planta $P_0(s)$ (saídas reguladas z) é, após cálculos simples,

$$H = \begin{bmatrix} K(I + P_0K)^{-1} & -P_0K(I + P_0K)^{-1} \\ KP_0(I + KP_0)^{-1} & P_0(I + KP_0)^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Entretanto, H pode ser escrita de uma forma mais compacta. Sejam as matrizes

$$G = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Com isso ([Vid85]),

$$H = G(I + FG)^{-1}. \quad (2.4)$$

O sistema da figura 2.2 é estável se todos os elementos de H pertencerem ao anel \mathcal{R} das funções de transferência estáveis. Resolvendo (2.4) para G , tem-se,

$$G = (I - HF)^{-1}H = [(I - HF)^{\text{adj}}/|I - HF|]H \quad (2.5)$$

onde M^{adj} e $|M|$ denotam respectivamente, a adjunta e o determinante² da matriz quadrada M .

Esta última expressão mostra que todo elemento da matriz G (formada por K que estabiliza H e P_0) pode ser expresso como a *razão* de duas funções pertencentes a \mathcal{R} . Conclui-se que uma vez especificado um anel \mathcal{R} de funções de transferência estáveis, os elementos da classe de todas as possíveis (e eventualmente, instáveis) funções de transferência G podem ser escritas como a *razão* de funções de transferência estáveis. Com este resultado fundamental pode-se agora descrever de maneira mais precisa o problema de estabilização.

Dado um anel \mathcal{R} de funções de transferência estáveis e a matriz de transferência de uma planta P_0 onde cada elemento de P_0 é a razão de funções em \mathcal{R} , encontre todos os controladores K que resultem em uma matriz de transferência em malha fechada H cujos todos elementos h_{ij} pertençam a \mathcal{R} .

2.2 Anéis, Campos e Ideais

Nas seções seguintes são apresentados os fundamentos algébricos sobre os quais estão estabelecidos os resultados deste trabalho. Algumas demonstrações e provas foram incluídas para facilitar o entendimento de certos conceitos. As provas omitidas podem ser facilmente encontradas em [Vid85] e [Fran87].

Definição 2.1 - Anel

Um Anel é um conjunto não-vazio \mathcal{R} com duas operações binárias, $+$ (adição) e \cdot (multiplicação) que satisfazem, para todos $a, b, c \in \mathcal{R}$,

$$\mathbf{A1} \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$\mathbf{A2} \quad a + b = b + a$$

$$\mathbf{A3} \quad a + 0 = 0 + a = a \quad (0 \in \mathcal{R})$$

$$\mathbf{A4} \quad \text{Para todo elemento } a \in \mathcal{R}, \text{ existe um elemento correspondente } -a \in \mathcal{R} \text{ tal que}$$

$$a + (-a) = 0$$

$$\mathbf{A5} \quad a(bc) = (ab)c$$

$$\mathbf{A6} \quad a(b + c) = ab + bc$$

$$\mathbf{A7} \quad (a + b)c = ac + bc$$

²Ver Seção 2.7

Neste trabalho a multiplicação será denotada pela maneira usual, isto é, por justaposição dos elementos.

Diz-se que um anel \mathcal{R} é *comutativo* se $ab = ba$, $\forall a, b \in \mathcal{R}$ e é dito possuir uma *identidade* se existir um elemento $1 \in \mathcal{R}$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathcal{R}$.

Definição 2.2 - Domínio

Um anel \mathcal{R} é chamado de *domínio* ou *domínio de integridade* se $a, b \in \mathcal{R}$, $ab = 0$ implicar que $a = 0$ ou $b = 0$. Em outras palavras, \mathcal{R} é um domínio se o produto de elementos de \mathcal{R} diferentes de zero for diferente de zero.

Definição 2.3 - Unidade

Seja \mathcal{R} um anel com identidade. Um elemento $x \in \mathcal{R}$ é chamado de *unidade de \mathcal{R}* se existir um elemento $y \in \mathcal{R}$ tal que $xy = yx = 1$. Tal y é chamado de *inverso de x* e muitas vezes é denotado por x^{-1} .

Definição 2.4 - Campo

Campo é um anel comutativo \mathcal{F} com identidade que satisfaz duas propriedades adicionais:

F1 \mathcal{F} contém pelo menos dois elementos.

F2 Todo elemento de \mathcal{F} diferente de zero é uma unidade, ou seja, possui inverso.

Definição 2.5 - Ideal

Um subconjunto \mathcal{I} de um anel \mathcal{R} é chamado de *ideal à esquerda* se:

i \mathcal{I} for um subgrupo do grupo aditivo³ de \mathcal{R} e

ii $a \in \mathcal{I}$, $x \in \mathcal{R}$ implicar em $xa \in \mathcal{I}$.

Do mesmo modo, \mathcal{I} é chamado de *ideal à direita* se

i \mathcal{I} for um subgrupo do grupo aditivo de \mathcal{R} e

ii $a \in \mathcal{I}$, $x \in \mathcal{R}$ implicar em $ax \in \mathcal{I}$.

Um subconjunto \mathcal{I} é chamado de *ideal* se for um ideal à esquerda e à direita.

Definição 2.6 - Ideal Principal

Seja a algum elemento de um anel \mathcal{R} . Então o conjunto de todos os elementos da forma xa onde $x \in \mathcal{R}$, isto é, o conjunto de todos os múltiplos à esquerda de a , é um ideal à esquerda. Este conjunto é chamado de *ideal principal à esquerda gerado por a* . Similarmente, o Ideal Principal à Direita gerado por a é o conjunto de todos os elementos ax onde $x \in \mathcal{R}$. *Ideal principal* é todo ideal principal à esquerda e à direita.

³Entende-se por grupo aditivo, os elementos de \mathcal{R} que satisfazem as propriedades relativas a operação de adição

2.3 Anéis e Campos de Frações

Nesta seção, faz-se uso da palavra anel para designar um anel comutativo com identidade.

Definição 2.7 - Não-Divisor Absoluto de Zero

Suponha \mathcal{R} um anel. Um elemento $a \in \mathcal{R}$ é um *não-divisor absoluto de zero* se $b \in \mathcal{R}$, $ab = 0$ implicar em $b = 0$.

Em todo anel existem não-divisores absolutos de zero; por exemplo, todas as unidades são não-divisores absolutos de zero. Se a for um não-divisor absoluto de zero e $ab = ac$, então $b = c$; em outras palavras, não-divisores absolutos de zero podem ser *cancelados*. Note que se \mathcal{R} for um domínio, então todo elemento diferente de zero de \mathcal{R} é um não-divisor absoluto de zero.

Definição 2.8 - Sistema Multiplicativo

Um conjunto \mathcal{M} em um anel \mathcal{R} é chamado de *sistema multiplicativo* se $a, b \in \mathcal{M}$ implicar em $ab \in \mathcal{M}$.

Teorema 2.1

O conjunto \mathcal{N} de não-divisores absolutos de zero em um anel \mathcal{R} é um sistema multiplicativo.

Prova: Suponha $a, b \in \mathcal{N}$, $y \in \mathcal{R}$, e $aby = 0$. Então, como $a, b \in \mathcal{N}$, segue que $aby = 0 \Rightarrow by = 0 \Rightarrow y = 0$. Então $ab \in \mathcal{N}$. \square

Suponha \mathcal{R} um anel, \mathcal{M} um sistema multiplicativo em \mathcal{R} contendo 1, e \mathcal{N} um subconjunto de \mathcal{R} - o conjunto de todos os não-divisores absolutos de zero em \mathcal{R} . A partir dessas definições, dá-se início a uma construção que resultará em um anel \mathcal{L} que contém \mathcal{R} como um sub-anel, e no qual todo elemento de \mathcal{M} é uma unidade.

Considere o conjunto $\mathcal{R} \times \mathcal{M}$, e defina uma relação binária \sim sobre $\mathcal{R} \times \mathcal{M}$, da seguinte forma: $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$. A relação \sim é uma relação de equivalência: \sim é reflexiva e simétrica. Para mostrar que é transitiva, suponha $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$. Então $ad = bc$ e $cf = de$. Multiplicando a primeira equação por f e a segunda por b , tem-se $adf = bcf = bde$. Agora $d \in \mathcal{N}$ pois $d \in \mathcal{M}$ e $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Então d pode ser cancelado na equação acima para se obter $af = be$, isto é, $(a, b) \sim (e, f)$.

Como \sim é uma relação de equivalência, o conjunto $\mathcal{R} \times \mathcal{M}$ pode ser particionado em classes de equivalência disjuntas sob \sim ([Vid85]). O conjunto de classes equivalentes $\mathcal{R} \times \mathcal{M} / \sim$ é denotado por \mathcal{L} . O conjunto \mathcal{L} consiste de *frações* (a, b) , ou a/b como é usualmente representada uma fração, onde duas frações a/b e c/d são equivalentes se $ad = bc$.

Adição e multiplicação de frações em \mathcal{L} são definidas da maneira usual, ou seja,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad (2.6)$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (2.7)$$

Note que se $b, d \in \mathcal{M}$, então bd também pertence a \mathcal{M} . Com isso, o lado direito de (2.6) e (2.7) são frações válidas. Na verdade, (2.6) e (2.7) representam operações sobre classes equivalentes. O leitor pode verificar que a soma e o produto de duas frações, isto é, de duas classes equivalentes, não dependem de qual representação de classes equivalentes está sendo usada.

Com a adição e multiplicação definidas por (2.6) e (2.7), \mathcal{L} é um anel. Mais ainda, se todo $a \in \mathcal{R}$ for identificado com a fração $a/1$, então \mathcal{R} tem a mesma estrutura de um sub-anel de \mathcal{L} . O elemento $1/1$ serve como identidade para \mathcal{L} . Finalmente, se $d \in \mathcal{M}$, então d corresponde a $d/1 \in \mathcal{L}$; $d/1$ é uma unidade de \mathcal{L} com inversa $1/d$. Com isso, todo elemento de \mathcal{M} é uma unidade em \mathcal{L} .

Definição 2.9 - Anel de Frações

O anel \mathcal{L} como definido acima é chamado de *anel de frações de \mathcal{R} com relação a \mathcal{M}* , e é denotado por $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{R}$.

Como \mathcal{M} é um subconjunto de \mathcal{N} , o anel $\mathcal{N}^{-1}\mathcal{R}$ contém o maior número de unidades. Se em particular \mathcal{R} for um domínio, então $\mathcal{N} = \mathcal{R} - 0$, isto é, \mathcal{N} consiste de todos os elementos diferentes de zero de \mathcal{R} . Neste caso, o anel $\mathcal{F} = (\mathcal{R} - 0)^{-1}\mathcal{R}$ tem a propriedade de que *todo* elemento diferente de zero de \mathcal{R} é uma unidade em \mathcal{F} . Mais ainda, todo elemento de \mathcal{F} é também uma unidade: Se $a/b \in \mathcal{F}$ e $a \neq 0$, então b/a é a inversa de a/b .

Definição 2.10 - Campo de Frações

Como definido acima, \mathcal{F} é um campo chamado de *campo de frações* ou *campo quociente* associado ao domínio \mathcal{R} .

2.4 Domínios Euclidianos

Se x e y são elementos de um anel \mathcal{R} com $x \neq 0$, diz-se que x *divide* y , e que y é *múltiplo* de x , se existir um elemento $z \in \mathcal{R}$ tal que $y = xz$. Isto é denotado por $x|y$.

Definição 2.11 - Máximo Divisor Comum

Se x e y são elementos de um anel \mathcal{R} de tal forma que ambos sejam diferentes de zero, um *máximo divisor comum* (m.d.c.) de x, y é qualquer elemento d , tal que:

MDC1 $d|x$ e $d|y$.

MDC2 $c|x, c|y \Rightarrow c|d$.

Na definição acima está implícito que $d \neq 0$, já que d divide um elemento diferente de zero em **MDC1**. Note que d não é único. Se d é um m.d.c. de x e y , $-d$ também o será. Na verdade esta é apenas uma observação que conduz a um resultado mais forte: suponha que d seja o m.d.c. de x e y ; du também será um m.d.c. de x e y sempre que u for uma unidade. Supondo ainda que \mathcal{R} é um domínio, então todo m.d.c. d_1 de x e y pode ser escrito na forma $d_1 = du$ para alguma unidade u ([Vid85]).

Definição 2.12 - Domínio Euclidiano

Um domínio \mathcal{R} é chamado de *domínio euclidiano* se existir uma função grau $\delta : \mathcal{R} - 0 \rightarrow \mathcal{Z}_+$ que satisfaz os seguintes axiomas:

DE1 Para todo $x, y \in \mathcal{R}$ com $y \neq 0$, existe um elemento $q \in \mathcal{R}$ tal que $r = x - qy$ é zero ou $\delta(r) < \delta(y)$, isto é, o grau do resto r é menor que o grau do dividendo y .

DE2 Se $x|y$, então $\delta(x) \leq \delta(y)$.

Pode-se imaginar o elemento q como um quociente e r como um resto de uma divisão de x por y . O axioma **DE1** afirma que sempre se pode obter um resto r que é igual a zero ou que possui grau menor que o grau do divisor y . Note que q e r não são necessariamente únicos, a não ser que condições adicionais sejam impostas à função grau δ .

O axioma **DE2** implica que $\delta(1) \leq \delta(x)$, $\forall x \neq 0$, já que 1 divide todo e qualquer elemento diferente de zero. Com isso, pode-se assumir sem perda de generalidade que $\delta(1) = 0$ (o grau de uma unidade é 0).

Definição 2.13 - Domínio Euclidiano Próprio

Um domínio Euclidiano \mathcal{R} com função grau $\delta(\cdot)$ é chamado de *domínio euclidiano próprio* se \mathcal{R} não for um campo e $\delta(\cdot)$ satisfizer: $\delta(xy) = \delta(x) + \delta(y)$.

2.5 O Anel \mathcal{S} como Domínio Euclidiano

Seja $\mathfrak{R}[s]$ o conjunto dos polinômios na variável s com coeficientes no campo dos reais \mathfrak{R} . Note que $\mathfrak{R}[s]$ é um domínio euclidiano se o grau de um polinômio for definido da maneira usual. O campo de frações associado a $\mathfrak{R}[s]$ é denotado por $\mathfrak{R}(s)$, e consiste das funções racionais em s com coeficientes reais. Pode-se pensar em $\mathfrak{R}(s)$ como o conjunto de todas as possíveis funções de transferência de sistemas escalares, lineares, invariantes no tempo e a parâmetros concentrados, estáveis ou não.

Agora seja \mathcal{S} um subconjunto de $\mathfrak{R}(s)$ que consiste de todas as funções racionais limitadas no infinito, e cujos pólos possuem parte real negativa; em outras palavras, \mathcal{S} é formado por todas as funções racionais estáveis próprias. Uma função P_0 pertence a \mathcal{S} se e somente se P_0 for uma função de transferência de um sistema BIBO estável ([Chen84]).

Como de costume, seja C_+ o semi-plano direito fechado $\{s : \Re\{s\} \geq 0\}$, e C_{+e} o semi-plano direito estendido, ou seja, C_+ mais um ponto no infinito. Então uma função racional pertence a \mathcal{S} se e somente se não possuir pólos em C_{+e} .

Sob as definições usuais de adição e multiplicação no campo $\mathfrak{R}(s)$, é fácil verificar que o conjunto \mathcal{S} é um anel comutativo com identidade, e que também é um domínio. Mais ainda, o campo de frações associado a \mathcal{S} é precisamente $\mathfrak{R}(s)$. A razão de dois elementos quaisquer $a, b \in \mathcal{S}$ com $b \neq 0$ pertence a $\mathfrak{R}(s)$. De maneira inversa, suponha que $h \in \mathfrak{R}(s)$, e que $h = \alpha/\beta$, onde α, β são polinômios. Seja n o maior grau dentre os graus de α e β , e defina

$$f(s) = \frac{\alpha(s)}{(s+1)^n}, \quad g(s) = \frac{\beta(s)}{(s+1)^n}.$$

Então $h(s) = f(s)/g(s)$ é a razão de dois elementos de \mathcal{S} . Também é fácil mostrar que uma função de \mathcal{S} é uma unidade de \mathcal{S} , isto é, possui inversa em \mathcal{S} , se e somente se não possuir zeros no semi-plano direito estendido C_{+e} . As unidades de \mathcal{S} são muitas vezes chamadas de *funções de fase mínima* (ver [Vid85], [DLM80]).

A seguir, define-se uma função grau sobre o anel \mathcal{S} , de tal forma que \mathcal{S} se torne um domínio euclidiano.

Teorema 2.2

Defina a função $\delta : \mathcal{S} - 0 \rightarrow \mathcal{Z}_+$ da seguinte forma:

Se $f \in \mathcal{S} - 0$, então $\delta(f) = n^{\underline{0}}$ de zeros de f em C_{+e}

$= n^{\underline{0}}$ de zeros de f em C_+ mais o grau relativo de f .

Então \mathcal{S} é um domínio euclidiano com função grau δ .

□

2.6 Fatorações Coprimas

Nesta seção, faz-se uso do termo anel para designar um anel comutativo com identidade.

Definição 2.14 - Domínio Ideal Principal

Um anel \mathcal{R} é dito ser um *anel ideal principal* se todo ideal em \mathcal{R} for um ideal principal. \mathcal{R} é um *domínio ideal principal* (d.i.p.) se \mathcal{R} for domínio bem como um anel ideal principal.

Teorema 2.3

Seja \mathcal{R} um anel ideal principal. Então todo par de elementos $x, y \in \mathcal{R}$, ambos diferentes de zero, possui um m.d.c. d que pode ser expresso na forma

$$d = px + qy \quad (2.8)$$

para $p, q \in \mathcal{R}$ apropriados. Mais ainda, se \mathcal{R} for um domínio, então todo m.d.c. de x, y pode ser escrito da forma (2.8).

□

Definição 2.15 - Elementos Coprimos

Dois elementos $x, y \in \mathcal{R}$ são *relativamente primos* ou *coprimos* se todo m.d.c. de x, y for uma unidade.

Teorema 2.4

Seja \mathcal{R} um domínio ideal principal. Então $x, y \in \mathcal{R}$ são coprimos se e somente se existirem $p, q \in \mathcal{R}$ tais que $px + qy = 1$.

□

Corolário 2.1

Dois elementos x, y são coprimos se e somente se seus divisores primos forem distintos.

□

Teorema 2.5

Seja \mathcal{R} um domínio ideal principal e \mathcal{F} o campo de frações associado a \mathcal{R} . Dada qualquer fração a/b em \mathcal{F} , existe uma fração equivalente f/g tal que f e g são coprimos.

Prova

Se a e b já são coprimos, então não há nada a fazer. Caso contrário, seja d um m.d.c. de a, b , e defina $f = a/d$, $g = b/d$. Então claramente $f/g = a/b$, e só resta mostrar que f e g são coprimos. A partir do Teorema 2.3, existem $p, q \in \mathcal{R}$ tais que

$$d = pa + qb = pfd + gqd \quad (2.9)$$

Cancelando d nos dois lados de (2.9) tem-se $1 = pf + qg$, o que mostra que f, g são coprimos. □

Note que o Teorema 2.5 leva a um procedimento para a redução de uma fração: basta extrair o m.d.c. do numerador e do denominador. Este resultado é muito importante, como será visto no Capítulo 3.

2.7 Anel de Matrizes

O objetivo desta seção é estender os resultados algébricos anteriores de tal forma a ser possível considerar sistemas multivariáveis. Esta extensão leva naturalmente ao conceito de Anel de Matrizes.

Seja \mathcal{R} um anel, e seja $\mathcal{R}^{n \times n}$ o conjunto de matrizes de ordem $n \times n$ cujos elementos pertencem a \mathcal{R} . Se a soma e o produto de duas matrizes em $\mathcal{R}^{n \times n}$ são definidas da maneira usual, isto é,

$$\begin{aligned} (A+B)_{ij} &= a_{ij} + b_{ij}, \\ (AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, \end{aligned}$$

então $\mathcal{R}^{n \times n}$ torna-se um anel, usualmente chamado de um *anel de matrizes sobre \mathcal{R}* . Se \mathcal{R} contém uma identidade e $n \geq 2$, então $\mathcal{R}^{n \times n}$ não é comutativo. Por exemplo, se $n = 2$, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplos similares podem ser construídos para $n \geq 2$. Note também que $\mathcal{R}^{n \times n}$ não é um domínio pois

$$\text{Diag}\{1, 0, \dots, 0\} \text{Diag}\{0, 1, \dots, 0\} = 0_{n \times n}.$$

O *determinante* de uma matriz $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, denotado por $|A|$, é definido da seguinte forma:

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij}(A). \quad (2.10)$$

onde $m_{ij}(A)$ é o ij -ésimo *menor* de A , definido como o determinante da matriz de ordem $(n-1) \times (n-1)$ obtida a partir da eliminação da i -ésima linha e j -ésima coluna de A .

Se $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, a sua *matriz adjunta*, denotada por A^{adj} , é definida por

$$(A^{\text{adj}})_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ji}(A). \quad (2.11)$$

Note que para qualquer $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$,

$$A \cdot A^{\text{adj}} = A^{\text{adj}} \cdot A = |A| I_n, \quad (2.12)$$

onde I_n representa uma matriz identidade de ordem n .

Uma matriz $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ é chamada de *unimodular* se possuir inversa em $\mathcal{R}^{n \times n}$, isto é, se for uma unidade do anel $\mathcal{R}^{n \times n}$.

Teorema 2.6

$A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ é unimodular se e somente se $|A|$ for uma unidade de \mathcal{R} .

Prova

Suficiência: Suponha que $|A|$ seja uma unidade de \mathcal{R} e seja $b = |A|^{-1} \in \mathcal{R}$. Então $bA^{\text{adj}} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ e $A \cdot bA^{\text{adj}} = bA^{\text{adj}} \cdot A = I$. Então A é unimodular.

Necessidade: Suponha que A seja unimodular, e seja $B \in \mathcal{R}^{n \times n}$ a inversa de A . Então $1 = |I_n| = |A| \cdot |B|$, o que mostra que $|A|$ é uma unidade de \mathcal{R} .

□

Agora considere o conjunto $\mathcal{F}^{n \times n}$ das matrizes com elementos de um campo \mathcal{F} . Como todo campo é também um anel, o que foi discutido acima também se aplica aqui. Mais ainda, como todo elemento diferente de zero em \mathcal{F} é uma unidade, verifica-se que todo $A \in \mathcal{F}^{n \times n}$ tal que $|A| \neq 0$ possui uma inversa em $\mathcal{F}^{n \times n}$. Se $|A| \neq 0$, a matriz A é chamada de *não singular* e sua inversa é dada por

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}(A) / |A|. \quad (2.13)$$

Seja \mathcal{R} um domínio comutativo com identidade e \mathcal{F} o campo de frações associado a \mathcal{R} . Define-se $\mathbf{M}(\mathcal{R})$ como o conjunto das matrizes com elementos em \mathcal{R} . Quando for necessário explicitar as dimensões de uma matriz, a notação equivalente é $A \in \mathcal{R}^{n \times m}$. Os símbolos $\mathbf{M}(\mathcal{F})$ e $\mathcal{F}^{n \times m}$ são definidos de forma análoga.

Definição 2.16 - Divisor à Direita

Seja $A \in \mathbf{M}(\mathcal{R})$; então uma matriz quadrada $D \in \mathbf{M}(\mathcal{R})$ é um *divisor à direita* de A , e A é um *múltiplo à esquerda* de D , se existe $C \in \mathbf{M}(\mathcal{R})$ tal que $A = CD$. Suponha que $A, B \in \mathbf{M}(\mathcal{R})$ e que possuam o mesmo número de colunas. Então uma matriz quadrada $D \in \mathbf{M}(\mathcal{R})$ é um *máximo divisor comum à direita* (m.d.c.d.) de A, B se

MDCD1 D é um divisor à direita de A e de B ;

MDCD2 D é um múltiplo à esquerda de todo divisor comum à direita de A e de B .

Duas matrizes $A, B \in \mathbf{M}(\mathcal{R})$ que possuam o mesmo número de colunas são *coprimas à direita* se todo m.d.c.d. de A, B é unimodular.

As definições de *divisor à esquerda*, *múltiplo à direita*, *máximo divisor comum à esquerda* (m.d.c.e.) e *matrizes coprimas à esquerda* são análogas à definição anterior.

O resultado a seguir estende o teorema 2.4 para o caso de anéis de matrizes.

Teorema 2.7

Suponha que $A, B \in \mathbf{M}(\mathcal{R})$ têm o mesmo número de colunas. Então A e B são coprimas à direita se e somente se existem $X, Y \in \mathbf{M}(\mathcal{R})$ tais que

$$XA + YB = I \quad (2.14)$$

Este resultado pode ser interpretado da seguinte maneira: reescrevendo a equação anterior como

$$\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = I$$

então A, B são coprimas à direita se a matriz

$$F = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

possuir uma *inversa à esquerda* em $\mathbf{M}(\mathcal{R})$.

A equação (2.14) é chamada de *identidade de Bezout à direita* ou de *identidade de Diophantine à direita*.

Capítulo 3

Parametrização \mathcal{Q}

3.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é fornecer uma idéia do poder da abordagem por fatorização da maneira mais simples possível. Um exemplo numérico será discutido no Capítulo 5. Utilizando os conceitos fundamentais apresentados no capítulo anterior, a parametrização de todos os controladores que estabilizam uma determinada planta é apresentada.

Neste capítulo, o símbolo \mathcal{S} é usado para denotar o conjunto de funções racionais estáveis próprias e \mathcal{U} denota o conjunto de unidades de \mathcal{S} , isto é, funções em \mathcal{S} que possuem inversa em \mathcal{S} .

3.2 Parametrização de Todos os Controladores Estabilizantes - Caso SISO

Suponha $P_0 \in \mathfrak{R}(s)$, tal que $P_0(s)$ seja uma função de transferência de um sistema escalar, linear e invariante no tempo. Suponha que um controlador $K \in \mathfrak{R}(s)$ seja conectado à planta na configuração de malha fechada como mostrado na figura 2.1. A matriz de transferência 2×2 em malha fechada H de (r, n) para (e_1, e_2) é

$$H = \begin{bmatrix} (1 + P_0K)^{-1} & -P_0(1 + P_0K)^{-1} \\ K(1 + P_0K)^{-1} & (1 + P_0K)^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Diz-se que o par (P_0, K) é *estável* ou que K *estabiliza* P_0 , se e somente se $H \in \mathcal{S}^{2 \times 2}$. Esta noção de estabilidade requer que *cada* um dos quatro elementos de H (dos quais dois são iguais), representem um sistema BIBO-estável. Não é

suficiente apenas ter-se $P_0(1 + P_0K)^{-1} \in \mathcal{S}$, como é usualmente definido o conceito de estabilidade entrada-saída. Existem duas razões para isso:

1. Se o controlador K é por si próprio estável, então $H \in \mathcal{S}^{2 \times 2}$ se e somente se $P_0(1 + P_0K)^{-1} \in \mathcal{S}$. Com isso, se estiver assegurado o uso de um controlador estável, a estabilidade do sistema em malha fechada como definida acima, reduz-se ao simples e familiar caso segundo o qual $P_0(1 + P_0K)^{-1}$ deva ser uma função racional estável;
2. Atingir estabilidade em malha fechada, normalmente significa que se deseja atingir seguramente tanto a estabilidade *interna* quanto a *externa*. Em outras palavras, é aconselhável assegurar que, sempre que r e n forem quaisquer entradas limitadas, *todos* os sinais resultantes no sistema de malha fechada sejam limitados.

Com isso, tem-se que $H \in \mathcal{S}^{2 \times 2}$ é uma condição necessária e suficiente para se garantir a estabilidade *interna* e *externa* do sistema.

Teorema 3.1

Suponha $P_0, K \in \mathfrak{R}(s)$, e seja $P_0 = N/M$, $K = U/V$, onde $N, M, U, V \in \mathcal{S}$; N, M são coprimos e U, V são coprimos. Defina

$$\Delta(P_0, K) = NU + MV. \quad (3.2)$$

Então o par (P_0, K) é estável se e somente se $\Delta(P_0, K) \in \mathcal{U}$.

Prova

Suficiência: Suponha $\Delta(P_0, K) \in \mathcal{U}$; então $1/\Delta(P_0, K) \in \mathcal{S}$. Com isso, é só verificar que

$$H = \frac{1}{\Delta(P_0, K)} \begin{bmatrix} MV & -NV \\ MU & MV \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

pertence a $\mathcal{S}^{2 \times 2}$, e portanto o par (P_0, K) é estável.

Necessidade: Suponha que (P_0, K) seja estável. Então certamente $1 + P_0K \neq 0$. Note também que $M \neq 0$, $V \neq 0$ pois ambos são denominadores de frações. Com isso $\Delta(P_0, K) = MV(1 + P_0K) \neq 0$, e a equação (3.3) é válida. Como $H \in \mathcal{S}^{2 \times 2}$, segue que, a partir de (3.3) tem-se

$$\frac{MV}{\Delta(P_0, K)} \in \mathcal{S}, \quad \frac{MU}{\Delta(P_0, K)} \in \mathcal{S}, \quad \frac{NV}{\Delta(P_0, K)} \in \mathcal{S}. \quad (3.4)$$

Também é verdade que

$$1 - \frac{MV}{\Delta(P_0, K)} = \frac{NU}{\Delta(P_0, K)} \in \mathcal{S}. \quad (3.5)$$

Uma forma compacta de se expressar (3.4) e (3.5) é

$$\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta(P_0, K)} \begin{bmatrix} V & U \end{bmatrix} \in \mathcal{S}^{2 \times 2}. \quad (3.6)$$

Como N, M são coprimos e U, V são coprimos, então existem $X_p, Y_p, X_c, Y_c \in \mathcal{S}$ tais que $X_p N + Y_p M = 1$, $X_c U + Y_c V = 1$. Agora (3.6) implica que

$$\begin{bmatrix} Y_p & X_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta(P_0, K)} \begin{bmatrix} V & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_c \\ X_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(P_0, K)} \in \mathcal{S}, \quad (3.7)$$

o que mostra que $\Delta(P_0, K) \in \mathcal{U}$.

□

Corolário 3.1

Suponha $P_0 \in \mathfrak{R}(s)$, e seja $P_0 = N/M$ onde $N, M \in \mathcal{S}$ são coprimos. Então $K \in \mathfrak{R}(s)$ estabiliza P_0 se e somente se $K = U/V$ para $U, V \in \mathcal{S}$ que satisfaçam

$$NU + MV = 1. \quad (3.8)$$

□

O resultado central deste capítulo, que leva à parametrização de todos os compensadores que estabilizam uma dada planta pode agora ser enunciado.

Teorema 3.2

Suponha $P_0 \in \mathfrak{R}(s)$ e seja $P_0 = N/M$ onde $N, M \in \mathcal{S}$ são coprimos. Selecione $X, Y \in \mathcal{S}$ tais que

$$XN + YM = 1. \quad (3.9)$$

Então o conjunto de *todos* os controladores que estabilizam P_0 , denotado por $\mathcal{Q}(P_0)$, é dado por

$$\mathcal{Q}(P_0) = \left\{ K = \frac{X + QM}{Y - QN} : Q \in \mathcal{S} \text{ e } Y - QN \neq 0 \right\}. \quad (3.10)$$

Prova

Suponha que K seja da forma

$$K = \frac{X + QM}{Y - QN} \quad (3.11)$$

para algum $Q \in \mathcal{S}$. Então, como

$$(X + QM)N + (Y - QN)M = \bar{X}N + \bar{Y}M = 1, \quad (3.12)$$

segue a partir do Corolário 3.1 que K estabiliza P_0 .

Do modo contrário, suponha que K estabilize P_0 . Então a partir do Corolário 3.1, $K = U/V$ onde $U, V \in \mathcal{S}$ satisfazem (3.8). Com isso, a prova estará completa se puder ser mostrado que toda solução de (3.8) é da forma

$$U = X + QM, \quad V = Y - QN \quad (3.13)$$

para algum $Q \in \mathcal{S}$. Subtraindo (3.9) de (3.8) e arrumando os termos,

$$(U - X)N = (Y - V)M. \quad (3.14)$$

Como M e N são coprimos, a partir do Corolário 2.1, tem-se que M divide $(U - X)$ e que N divide $(Y - V)$. Seja Q igual a $(U - X)/M$. Então $U = X + QM$. Agora (3.14) mostra que $V = Y - QN$.

□

Em geral, existe uma descrição do conjunto $\mathcal{H}_{estavel}$ das matrizes de transferência em malha fechada H realizáveis através de controladores estabilizantes (ver Cap. 4). Este conjunto é descrito em função de um *parâmetro livre* Q e será o assunto da seção seguinte.

3.3 Parametrização de Todos os Controladores Estabilizantes - Caso MIMO

Considere uma planta multivariável P , particionada em termos das variáveis w, u, z e y , que representam vetores de sinais exógenos, de controle, regulados e medidos, respectivamente:

$$P = \begin{bmatrix} P_{zw} & P_{zu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} z &= P_{zw}w + P_{zu}u \\ y &= P_{yw}w + P_{yu}u \\ u &= Ky \end{aligned}$$

As matrizes P e K são, por hipótese, racionais e próprias. Por simplicidade, assume-se também que a matriz de transferência P_{yu} é estritamente própria.

Teorema 3.3

Para cada matriz racional própria P existem oito matrizes $M, \tilde{M}, N, \tilde{N}, X, \tilde{X}, Y, \tilde{Y}$, pertencentes a $\mathbf{M}(\mathcal{S})$ que satisfazem as equações

$$P = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} & -\tilde{Y} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & Y \\ N & X \end{bmatrix} = I$$

□

As equações anteriores constituem a chamada *fatoração duplamente coprima* de P . Note que N e M são coprimas à direita e \tilde{N} e \tilde{M} são coprimas à esquerda. Veja [Fran87] para a obtenção de fórmulas explícitas para as oito matrizes envolvidas, utilizando-se realizações em espaço de estados.

A definição de estabilidade interna exige que os quatro elementos da matriz de transferência H , pertençam a $\mathbf{M}(\mathcal{S})$. A forma usualmente utilizada para se chegar a este resultado, é introduzir ruídos de atuação e de medidas no modelo da planta conforme ilustrado na figura 3.1.

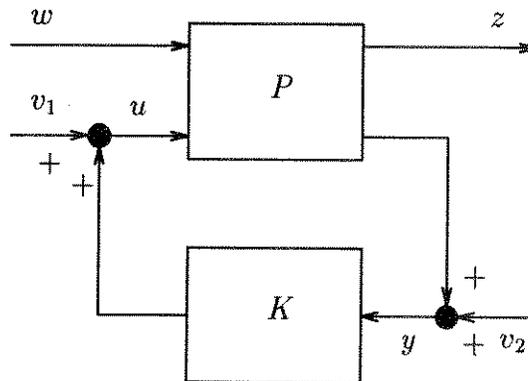


Figura 3.1: Definição de Estabilidade Interna - Sinais Externos

Neste caso diz-se que K estabiliza P se e somente se as nove matrizes de transferência que relacionam w, v_1 e v_2 com z, y e u pertencem a $\mathbf{M}(\mathcal{S})$.

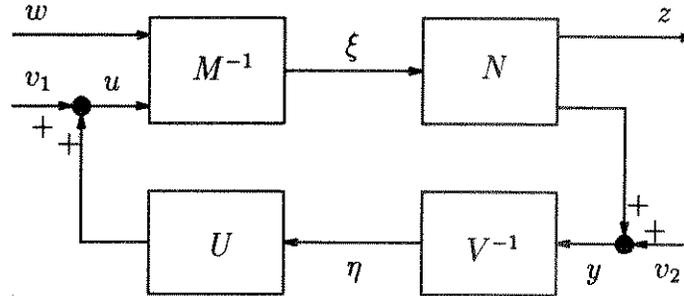


Figura 3.2: Definição de Estabilidade Interna - Sinais Internos

Teorema 3.4

As nove matrizes de transferência da figura 3.1 (de w , v_1 , v_2 para z , y , u) pertencem a $\mathbf{M}(\mathcal{S})$ se e somente se as seis matrizes de transferência na figura 3.2 (de w , v_1 , v_2 para ξ , η) também pertencem a $\mathbf{M}(\mathcal{S})$.

Prova

Suficiência: Observe que $P = NM^{-1}$ e $K = UV^{-1}$ são as fatorações coprimas à direita de P e K respectivamente. Diretamente a partir da figura 3.2 tem-se que

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = N\xi + \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$u = U\eta + v_1$$

e como as matrizes de transferência de w , v_1 e v_2 para ξ e η são estáveis, o mesmo ocorrendo com N e U , conclui-se que as matrizes de transferência de w , v_1 e v_2 para z , y e u são também estáveis.

Necessidade: Como N e M são coprimas à direita, existem matrizes $X, Y \in \mathbf{M}(\mathcal{S})$ tais que

$$XM + YN = I$$

Portanto

$$\xi = XM\xi + YN\xi$$

Da figura 3.2 tem-se que

$$M\xi = \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, \quad N\xi = \begin{bmatrix} z \\ y - v_2 \end{bmatrix}$$

Substituindo na equação anterior obtém-se

$$\xi = X \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} + Y \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} + X \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} - Y \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Consequentemente as três matrizes de transferência de w , v_1 e v_2 para ξ pertencem a $\mathbf{M}(\mathcal{S})$. A demonstração envolvendo o sinal η é similar.

□

Em seguida, as condições para que K estabilize a planta P são analisadas em termos das seis funções de transferência de w , v_1 e v_2 para ξ e η . Note que

$$M\xi = \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ v_1 + U\eta \end{bmatrix}$$

que pode ser escrita na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} M & -\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ v_1 \end{bmatrix}$$

Do mesmo modo,

$$\begin{bmatrix} z \\ y - v_2 \end{bmatrix} = N\xi$$

e após algumas manipulações algébricas, pode-se demonstrar que

$$-[0 \ I]N\xi + V\eta = v_2$$

Agregando estes resultados na forma matricial, tem-se que

$$\begin{bmatrix} M & -\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}U \\ -[0 \ I]N & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Note que as seis funções de transferência serão estáveis se e somente se a matriz do lado esquerdo da equação anterior possuir inversa em $\mathbf{M}(\mathcal{S})$. Reescrevendo esta matriz na forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M & -\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}U \\ -[0 \ I]N & V \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & -\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}K \\ -[0 \ I]P & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & -K \\ -P_{yw} & -P_{yu} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Observe que a matriz

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}$$

é não singular dado que M e V são não singulares. Por outro lado,

$$\det \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & -K \\ -P_{yw} & -P_{yu} & I \end{bmatrix} = \det I \det \begin{bmatrix} I & -K \\ -P_{yu} & I \end{bmatrix}$$

e como P_{yu} é estritamente própria, em $s = \infty$,

$$\det \begin{bmatrix} I & -K \\ -P_{yu} & I \end{bmatrix} = 1$$

o que mostra que a matriz (3.15) é não singular.

Teorema 3.5

K estabiliza P se e somente se

$$\begin{bmatrix} M & - \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} U \\ -[0 \ I]N & V \end{bmatrix}^{-1} \in \mathbf{M}(S)$$

□

Uma planta P é *estabilizável* se existe uma matriz racional própria K que a estabilize. Do ponto de vista do conceito de estabilizabilidade, o principal resultado pode ser enunciado como a seguir.

Teorema 3.6

K estabiliza P se e somente se K estabiliza P_{yu} .

□

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [Fran87]. Observe que a parte necessária do teorema é trivial. A parte suficiente baseia-se no fato de que P e P_{yu} compartilham os mesmos pólos instáveis e que portanto para estabilizar P é suficiente estabilizar P_{yu} . Finalmente, note que K estabiliza P_{yu} se e somente se as quatro matrizes de transferência, de v_1 e v_2 para u e y pertencem a $\mathbf{M}(S)$. Estas condições são devidas a Desoer e Chan ([DC75]) e serão utilizadas posteriormente no Capítulo 4.

Teorema 3.7

O conjunto de todas as matrizes racionais próprias K que estabilizam P_{yu} está parametrizado pelas equações

$$K = (Y + MQ)(X + NQ)^{-1} \tag{3.16}$$

$$= (\tilde{X} + Q\tilde{N})^{-1}(\tilde{Y} + Q\tilde{M}), \quad Q \in \mathbf{M}(S) \tag{3.17}$$

□

Este teorema é muito importante por estabelecer que K estabiliza P_{yu} se e somente se K possui a estrutura evidenciada pela equação (3.16) e/ou (3.17). O restante desta seção é dedicada à obtenção da matriz de malha fechada do sistema como uma representação afim envolvendo o parâmetro Q .

Considere uma fatorização duplamente coprima de P_{yu} :

$$P_{yu} = N_{yu} M_{yu}^{-1} = \widetilde{M}_{yu}^{-1} \widetilde{N}_{yu}$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{X}_{yu} & -\widetilde{Y}_{yu} \\ -\widetilde{N}_{yu} & \widetilde{M}_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{yu} & Y_{yu} \\ N_{yu} & X_{yu} \end{bmatrix} = I$$

Neste caso, a expressão para K é

$$K = (Y_{yu} + M_{yu}Q)(X_{yu} + N_{yu}Q)^{-1} \quad (3.18)$$

$$= (\widetilde{X}_{yu} + Q\widetilde{N}_{yu})^{-1}(\widetilde{Y}_{yu} + Q\widetilde{M}_{yu}), \quad Q \in \mathbf{M}(\mathcal{S}) \quad (3.19)$$

Defina então

$$T_1 = P_{zw} + P_{zu}M_{yu}\widetilde{Y}_{yu}P_{yw}$$

$$T_2 = P_{zu}M_{yu}$$

$$T_3 = \widetilde{M}_{yu}P_{yw}$$

Teorema 3.8

Com K dado por (3.18) e T_1 , T_2 e T_3 dados pelas equações acima, a matriz de transferência de w para z é dada por $T_1 + T_2QT_3$.

Prova

Note que

$$z = [P_{zw} + P_{zu}(I - KP_{yu})^{-1}KP_{yw}]w$$

Usando as relações envolvidas na fatoração coprima, com $P_{yu} = N_{yu}M_{yu}^{-1}$, obtém-se as seguintes identidades:

$$(I - KP_{yu})^{-1} = M_{yu}(\widetilde{X}_{yu} + Q\widetilde{N}_{yu})$$

$$(I - KP_{yu})^{-1}K = M_{yu}(\widetilde{Y}_{yu} + Q\widetilde{M}_{yu})$$

Substituindo esta última identidade na expressão para z , vem

$$z = [P_{zw} + P_{zu}M_{yu}(\widetilde{Y}_{yu} + Q\widetilde{M}_{yu})P_{yw}]w$$

que pode ser facilmente identificada como sendo

$$z = [T_1 + T_2QT_3]w$$

a partir das definições de T_1 , T_2 e T_3 . □

Note que a matriz de transferência de malha fechada

$$H = T_1 + T_2QT_3$$

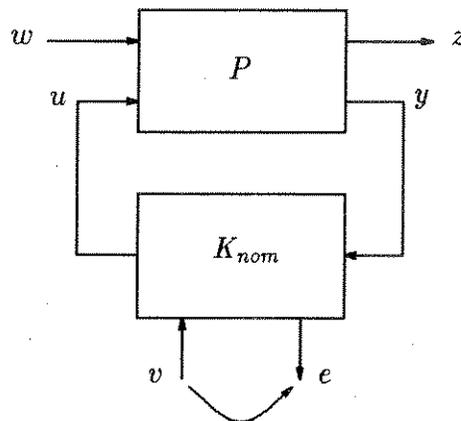
é agora caracterizada como uma relação afim em termos do parâmetro Q . Esta propriedade será fundamental no sentido de expressar o problema de projeto de controladores como um problema convexo.

3.4 Paradigma do Controlador Modificado

Na seção anterior descreveu-se o conjunto das matrizes estáveis em malha fechada em função de um parâmetro $Q \in \mathbf{M}(\mathcal{S})$. Nesta seção aborda-se o problema de como gerar um subconjunto representativo de controladores que estabilizam a planta P .

O procedimento a ser utilizado baseia-se nos seguintes pontos:

- Dado um controlador nominal K_{nom} que estabiliza P , modifica-se ou aumenta-se este controlador, de tal forma que o mesmo produza um sinal de saída auxiliar e (de mesma dimensão de y) e aceite um sinal auxiliar de entrada v (de mesma dimensão de u) conforme ilustrado na figura 3.3.



$$H_{ev} = 0 \text{ (malha fechada)}$$

Figura 3.3: Controlador nominal K aumentado

• A modificação do controlador nominal deve ser feita de tal maneira que a matriz de transferência de malha fechada de v para e seja nula e que a matriz de transferência de malha aberta de y para u permaneça K_{nom} .

• Conecta-se então uma matriz de transferência Q de e para v como mostrado na figura 3.4. Um novo controlador é então definido através de K_{nom} e Q .

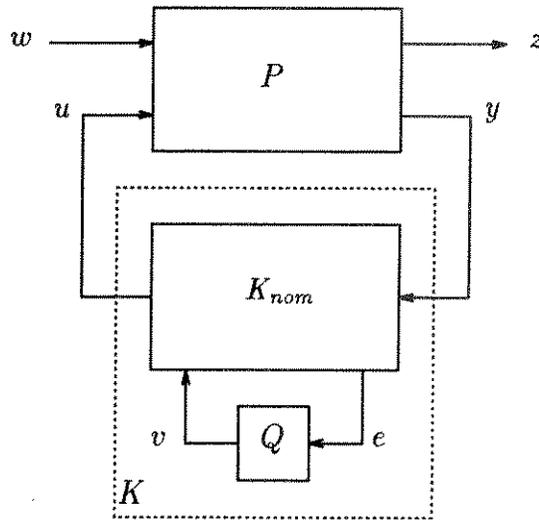


Figura 3.4: Modificação de K_{nom} com Q

É razoável imaginar que K também estabilizará P , pois o parâmetro Q adicionado a K_{nom} não *enxerga* realimentação e portanto não pode instabilizar a planta. Defina então as seguintes matrizes de transferência de malha fechada:

- U_1 : de w para z ;
- U_2 : de v para z ;
- U_3 : de w para e ;

Como a matriz de transferência de v para e é nula, a figura 3.4 pode ser redesenhada como na figura 3.5. Após uma manipulação simples, a matriz de transferência em malha fechada de w para z é

$$H = U_1 + U_2QU_3,$$

que é estável, pois U_1 , U_2 , U_3 e Q são estáveis, uma vez que o controlador nominal estabiliza a planta. Note que a escolha de U_1 , U_2 e U_3 pode não conduzir ao conjunto de todas as matrizes de transferência de malha fechada estáveis, realizáveis através de um controlador estabilizante.

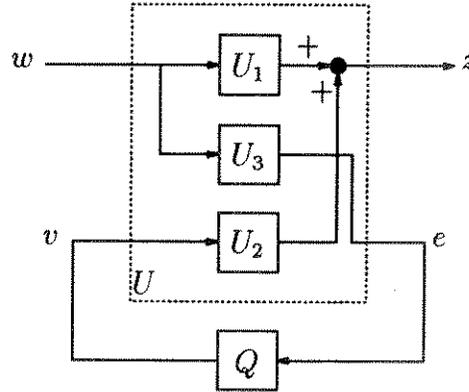


Figura 3.5: Figura anterior redesenhada

Na próxima seção, o conjunto de *todas* as matrizes de transferência será caracterizado a partir de formulações em espaço de estados que implementam o paradigma do controlador modificado.

3.5 Parametrização em Espaço de Estados

Os algoritmos desenvolvidos nesta tese são baseados na representação do sistema em espaço de estado. Tal representação é necessária devido a problemas numéricos inerentes à representação por funções de transferência, como a geração de matrizes mal-condicionadas. Por isso, neste trabalho serão obtidas as representações de estado da planta $P(s)$, do controlador $K(s)$ e do sistema em malha fechada $H(s)$.

Uma planta $P(s)$ de um sistema MIMO (*múltiplas entradas - múltiplas saídas*) com dois vetores de entradas (w e u) e dois vetores de saída (z e y), possui a seguinte realização em espaço de estado:

$$\dot{x} = A_p x + B_w w + B_u u \quad (3.20)$$

$$z = C_z x + D_{zw} w + D_{zu} u \quad (3.21)$$

$$y = C_y x + D_{yw} w + D_{yu} u, \quad (3.22)$$

com $x(0) = 0$, de tal forma que

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{zw}(s) & P_{zu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix} = C_p (sI - A_p)^{-1} B_p + D_p, \quad (3.23)$$

onde

$$B_p = [B_w \quad B_u]$$

$$C_p = \begin{bmatrix} C_z \\ C_y \end{bmatrix}$$

$$D_p = \begin{bmatrix} D_{zw} & D_{zu} \\ D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix}.$$

Muitos modelos de plantas encontrados na prática possuem a propriedade de que $D_{yu} = 0$, ou equivalentemente, $P_{yu}(\infty) = 0$; tais plantas são chamadas de *estritamente próprias*. As fórmulas em espaço de estado para plantas estritamente próprias são bastante simplificadas, por isso, neste trabalho serão consideradas somente plantas desta natureza.

Esta hipótese é usada mais por razões estéticas e por conveniência (simplificações no modelo) e não compromete a utilização da técnica aqui discutida.

Suponha que o controlador possua a seguinte realização em espaço de estado

$$\dot{x}_K = A_K x_K + B_K y \quad (3.24)$$

$$u = C_K x_K + D_K y \quad (3.25)$$

de tal forma que

$$K(s) = C_K(sI - A_K)^{-1} B_K + D_K. \quad (3.26)$$

Uma realização em espaço de estado do sistema em malha fechada pode ser encontrada eliminando-se u e y em (3.20) a (3.22) e (3.24) a (3.25):

$$\dot{x} = (A_P + B_u D_K C_y) x + B_u C_K x_K + (B_w + B_u D_K D_{yw}) w \quad (3.27)$$

$$\dot{x}_K = B_K C_y x + A_K x_K + B_K D_{yw} w \quad (3.28)$$

$$z = (C_z + D_{zu} D_K C_y) x + D_{zu} C_K x_K + (D_{zw} + D_{zu} D_K D_{yw}) w \quad (3.29)$$

de tal forma que

$$H(s) = C_H(sI - A_H)^{-1} B_H + D_H \quad (3.30)$$

onde

$$A_H = \begin{bmatrix} A_P + B_u D_K C_y & B_u C_K \\ B_K C_y & A_K \end{bmatrix}$$

$$B_H = \begin{bmatrix} B_w + B_u D_K D_{yw} \\ B_K D_{yw} \end{bmatrix}$$

$$C_H = \begin{bmatrix} C_z + D_{zu} D_K C_y & D_{zu} C_K \end{bmatrix}$$

$$D_H = \begin{bmatrix} D_{zw} + D_{zu} D_K D_{yw} \end{bmatrix}.$$

Um método geral para se aplicar o paradigma do controlador modificado começa por um controlador nominal que é uma realimentação de estado *estimado*. O controlador de estado estimado por realimentação é dado por

$$u = -K_{sfb} \hat{x}, \quad (3.31)$$

onde K_{sfb} é uma matriz apropriada (o ganho de realimentação do estado estimado) e \hat{x} é uma estimativa de x devida apenas a u , que é governada pela equação do observador

$$\dot{\hat{x}} = A_P \hat{x} + B_u u + L_{est}(y - C_y \hat{x}), \quad (3.32)$$

onde L_{est} é o ganho do estimador. A matriz de transferência deste controlador é

$$K_{nom}(s) = -K_{sfb}(sI - A_P + B_u K_{sfb} + L_{est} C_y)^{-1} L_{est}. \quad (3.33)$$

Note que K_{nom} irá estabilizar P se K_{sfb} e L_{est} são tais que $A_P - B_u K_{sfb}$ e $A_P - L_{est} C_y$ são estáveis, o que será assumido a partir daqui.

Para aumentar este controlador nominal de realimentação de estado estimado, incorpora-se v em u , na saída do observador, significando que (3.31) é substituída por

$$u = -K_{sfb} \hat{x} + v, \quad (3.34)$$

e por isto o sinal v não induz qualquer erro de observação. Para o sinal e , toma-se a predição do erro da saída:

$$e = y - C_y \hat{x}. \quad (3.35)$$

Isto é mostrado na figura 3.6.

A imposição de que a matriz de transferência em malha fechada de v para e deva ser zero é satisfeita, pois a diferença $x - \hat{x}$ não é influenciada por v , isto é, o erro $x - \hat{x}$ é não controlável a partir de v . De fato, manipulações simples levam a

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A_p + L_{est} C_y)(x - \hat{x})$$

que não depende de v .

Portanto, a matriz de transferência de v para $x - \hat{x}$ é zero. A matriz de transferência de v para e é C_y vezes esta última, isto é, zero.

A aplicação do paradigma do controlador modificado ao controlador de estado estimado por realimentação leva ao *controlador baseado no observador* mostrado na figura (3.6). O *controlador baseado no observador* é apenas um controlador de estado estimado por realimentação, com a predição do erro da saída processada através de uma matriz estável Q e adicionada ao sinal do atuador na saída do observador.

De fato, este aumento é tal que o paradigma do controlador modificado gera todos os controladores que estabilizam a planta. Todo controlador estabilizante pode ser realizado como um controlador baseado no observador, para alguma escolha de matriz de transferência estável Q .

A partir do controlador baseado no observador pode-se obter as equações em espaço de estado para a parametrização de todos os controladores que estabilizam a planta, e todas matrizes de transferência em malha fechada realizáveis pelos controladores que estabilizam a planta. É possível mostrar ([Fran87]), que este método é uma implementação da fatoração duplamente coprima discutida no final da seção anterior.

As equações em espaço de estado para o controlador nominal aumentado são, a partir de (3.31) a (3.35),

$$\dot{\hat{x}} = (A_P - B_u K_{sfb} - L_{est} C_y) \hat{x} + L_{est} y + B_u v \quad (3.36)$$

$$u = -K_{sfb} \hat{x} + v \quad (3.37)$$

$$e = y - C_y \hat{x} \quad (3.38)$$

As equações em espaço de estado para o sistema em malha fechada com o controlador aumentado são encontradas eliminando-se u e y de (3.36) a (3.38) e das equações da planta (3.20) a (3.22):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_P x - B_u K_{sfb} \hat{x} + B_w w + B_u v \\ \dot{\hat{x}} &= L_{est} C_y x + (A_P - B_u K_{sfb} - L_{est} C_y) \hat{x} + L_{est} D_{yw} w + B_u v \\ z &= C_z x - D_{zu} K_{sfb} \hat{x} + D_{zw} w + D_{zu} v \\ e &= C_y x - C_y \hat{x} + D_{yw} w \end{aligned}$$

As matrizes de transferência T_1 , T_2 e T_3 podem ser realizadas como

$$\begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \\ T_3(s) & 0 \end{bmatrix} = C_T (sI - A_T)^{-1} B_T + D_T, \quad (3.39)$$

onde

$$\begin{aligned} A_T &= \begin{bmatrix} A_P & -B_u K_{sfb} \\ L_{est} C_y & A_P - B_u K_{sfb} - L_{est} C_y \end{bmatrix} \\ B_T &= \begin{bmatrix} B_w & B_u \\ L_{est} D_{yw} & B_u \end{bmatrix} \\ C_T &= \begin{bmatrix} C_z & -D_{zu} K_{sfb} \\ C_y & -C_y \end{bmatrix} \\ D_T &= \begin{bmatrix} D_{zw} & D_{zu} \\ D_{yw} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se Q possui a seguinte realização em espaço de estado

$$\dot{\hat{x}}_Q = A_Q \hat{x}_Q + B_Q e \quad (3.40)$$

$$v = C_Q \hat{x}_Q + D_Q e, \quad (3.41)$$

então a realização em espaço de estado do controlador baseado no observador pode ser encontrada eliminando-se e e v das equações do controlador aumentado (3.36) a

(3.38):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A_P - B_u K_{sfb} + L_{est} C_y - B_u D_Q C_y) \hat{x} + B_u C_Q x_Q + (L_{est} + B_u D_Q) y \\ \dot{x} &= -B_Q C_y \hat{x} + A_Q x_Q + B_Q y \\ u &= -(K_{sfb} + D_Q C_y) \hat{x} + C_Q x_Q + D_Q y\end{aligned}$$

tal que

$$K(s) = C_K (sI - A_K)^{-1} B_K + D_K, \quad (3.42)$$

onde

$$\begin{aligned}A_K &= \begin{bmatrix} A_P - B_u K_{sfb} - L_{est} C_y - B_u D_Q C_y & B_u C_Q \\ -B_Q C_y & A_Q \end{bmatrix} \\ B_K &= \begin{bmatrix} L_{est} + B_u D_Q \\ B_Q \end{bmatrix} \\ D_K &= D_Q.\end{aligned}$$

Com um pouco de álgebra pode-se verificar que a matriz de transferência de malha fechada H dada por (3.30) é igual a $T_1 + T_2 Q T_3$.

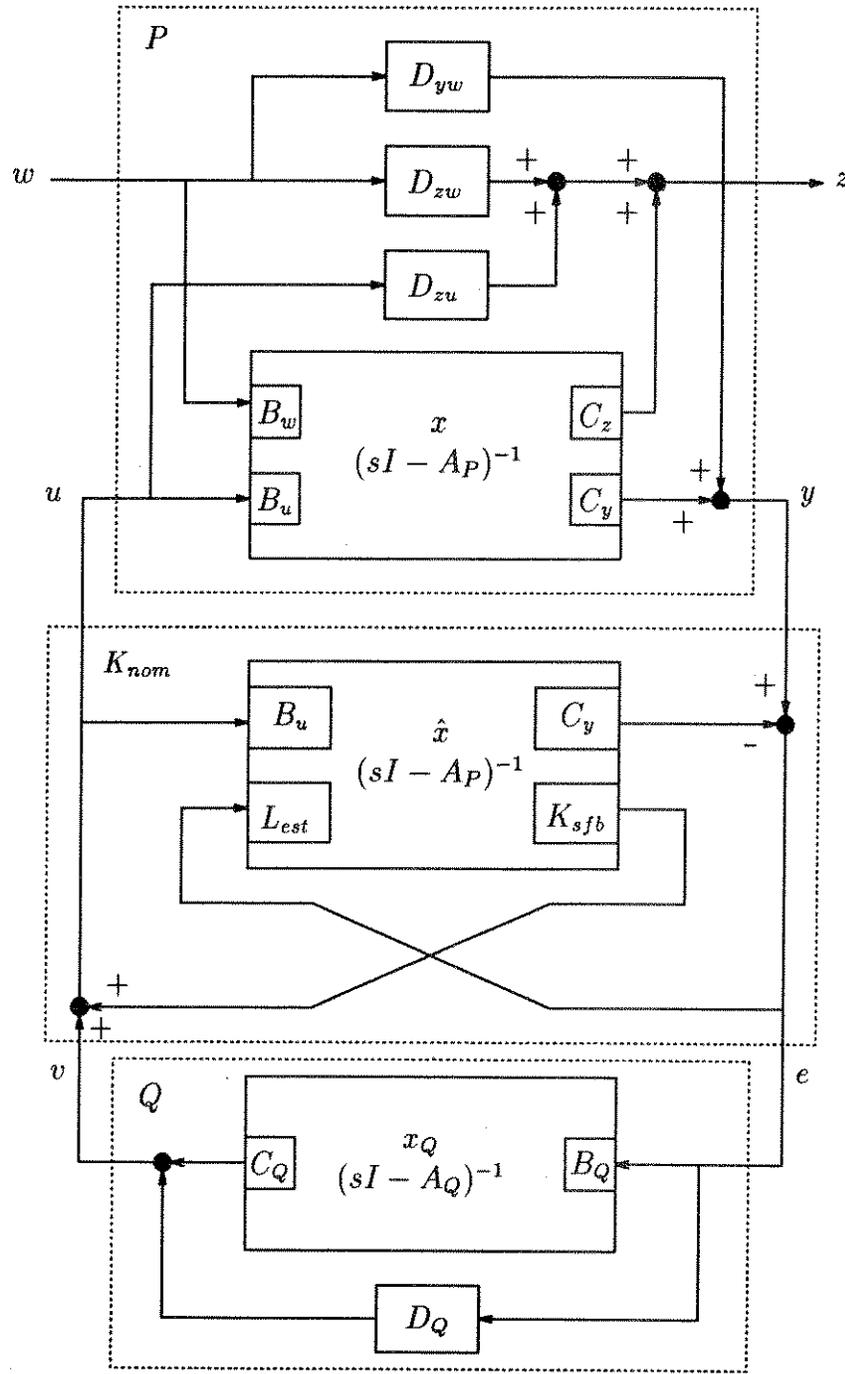


Figura 3.6: Paradigma do Controlador Modificado

Capítulo 4

Análise Convexa das Especificações de Projeto

4.1 Introdução

Neste capítulo serão exploradas algumas propriedades geométricas das especificações de projeto. Também será definida a noção de *especificação de projeto convexa em malha fechada*. Esta definição é de grande utilidade, principalmente no que diz respeito a implementação do problema que será apresentado no Capítulo 5, pois este é formulado completamente em termos de especificações de projeto convexas em malha fechada.

Muitas especificações de projeto possuem a propriedade de que o conjunto das matrizes de transferência em malha fechada que satisfazem estas especificações é um conjunto convexo.

Definição 4.1

Uma especificação de projeto \mathcal{D} é convexa em malha fechada se o conjunto de matrizes de transferência que satisfazem \mathcal{D} for convexo.

4.2 Realizabilidade

Uma importante restrição sobre a matriz de transferência em malha fechada $H \in \mathcal{H}$, é que H deve ser gerada através de algum controlador K ou, em outras palavras, H deve ser da forma $H = P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw}$ para algum K . Esta restrição é chamada de *Realizabilidade*:

$$\mathcal{H}_{\text{real}} \triangleq \{H \mid H = P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw} \text{ para algum } K\} \quad (4.1)$$

O conjunto (4.1) mostra que a dependência de H com K não é linear. Contudo pode-se afirmar que no caso geral \mathcal{H}_{rlvel} é *afim*. Isto pode ser mostrado da seguinte forma: dada qualquer matriz de transferência K de dimensão $n_u \times n_y$, define-se a matriz de transferência R como

$$R = K(I - P_{yu}K)^{-1}. \quad (4.2)$$

Esta correspondência é *biunívoca*, isto é, dada qualquer matriz de transferência R de dimensão $n_u \times n_y$, a matriz K $n_u \times n_y$ é dada por

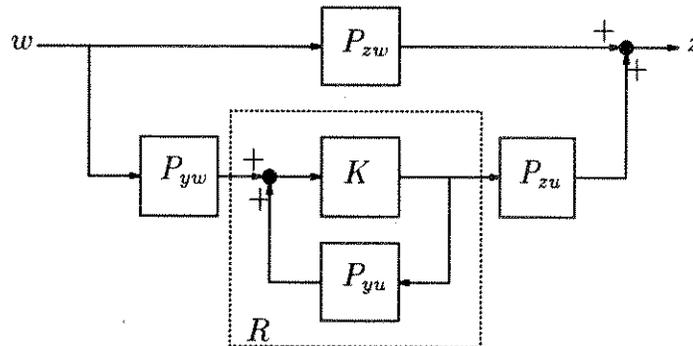
$$K = (I + RP_{yu})^{-1}R. \quad (4.3)$$

Com isso pode-se expressar (4.1) como

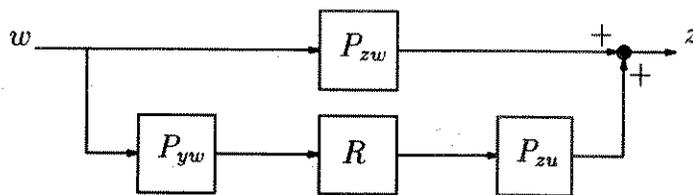
$$\mathcal{H}_{rlvel} \triangleq \{H \mid H = P_{zw} + P_{zu}RP_{yw} \text{ para algum } R_{n_u \times n_y}\} \quad (4.4)$$

Esta forma de \mathcal{H}_{rlvel} pode ser interpretada de uma maneira simples, como mostra a figura 4.1.

A matriz de transferência R pode ser interpretada como o *controlador* que realizaria a matriz de transferência em malha fechada H se não existisse realimentação através da planta, isto é, $P_{yu} = 0$.



(a)



(b)

Figura 4.1: Substituição de K por R

A substituição feita acima, partiu da observação de que se pode reconstruir o controlador K que possui o mesmo efeito sobre a planta real que o controlador R que opera sobre a planta com P_{yu} igual a zero. Variações desta substituição irão aparecer em capítulos posteriores e serão de grande importância para a convexidade do problema a ser resolvido (ver Cap. 5).

A partir de (4.4) pode-se verificar que \mathcal{H}_{rlevel} é um conjunto afim. Suponha que $H, \tilde{H} \in \mathcal{H}_{rlevel}$. Então existem duas matrizes de transferência R e \tilde{R} de dimensões $n_u \times n_y$ cada, tais que

$$H = P_{zw} + P_{zu}RP_{yw}, \quad (4.5)$$

$$\tilde{H} = P_{zw} + P_{zu}\tilde{R}P_{yw}. \quad (4.6)$$

Seja $\lambda \in \mathfrak{R}$. Deve-se mostrar que a matriz de transferência $H_\lambda = \lambda H + (1 - \lambda)\tilde{H}$ é também realizável como matriz de transferência de malha fechada da planta através de algum controlador. Nota-se que

$$H_\lambda = P_{zw} + P_{zu}R_\lambda P_{yw}, \quad (4.7)$$

onde

$$R_\lambda = \lambda R + (1 - \lambda)\tilde{R}. \quad (4.8)$$

Isto mostra que $H_\lambda \in \mathcal{H}_{rlevel}$.

4.3 Estabilidade

Como foi discutido no capítulo anterior, uma matriz de transferência é estável se todos os seus elementos forem funções de transferência estáveis. Foi enfatizado também que esta definição é necessária e suficiente para garantir a estabilidade interna e externa do sistema em malha fechada. Esta seção mostra que esta especificação de projeto gera um conjunto convexo.

Desoer e Chan ([DC75]) propõem uma definição de estabilidade interna que serve muito bem para a demonstração da convexidade desta especificação de desempenho. A motivação e as consequências desta definição foram discutidas em detalhes no Capítulo 3.

Definição 4.2 - Estabilidade Interna

O sistema em malha fechada com planta P e controlador K é internamente estável se as quatro matrizes de transferência

$$H_{uv_1} = K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yu}, \quad (4.9)$$

$$H_{uv_2} = K(I - P_{yu}K)^{-1}, \quad (4.10)$$

$$H_{yv_1} = (I - P_{yu}K)^{-1}P_{yu}, \quad (4.11)$$

$$H_{yv_2} = (I - P_{yu}K)^{-1}, \quad (4.12)$$

são estáveis. Neste caso diz-se que o controlador K estabiliza a planta P .

Estas matrizes de transferência podem ser interpretadas da seguinte forma. Suponha que v_1 e v_2 são entradas referentes a ruídos do processo e ruídos dos sensores respectivamente, como mostrado na figura 4.2. Então as quatro matrizes, (4.9) a (4.12), são as matrizes de transferência em malha fechada dos ruídos para u e y . De uma maneira geral, estabilidade interna requer que um pequeno ruído, seja do processo ou de sensores, não resulte em um esforço muito grande do sinal de controle u nem aumente em demasiado o sinal y proveniente dos sensores.

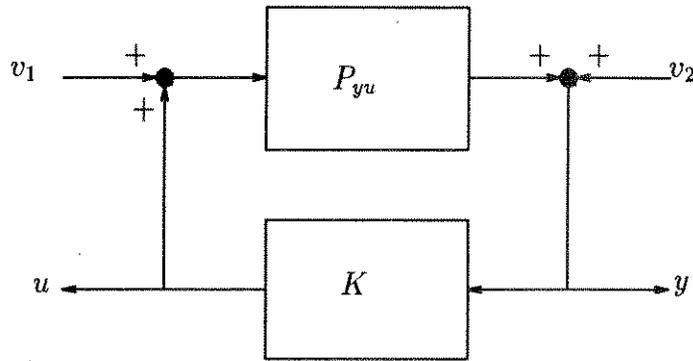


Figura 4.2: Definição Formal de Estabilidade Interna

A especificação de estabilidade interna pode ser introduzida na arquitetura discutida no Capítulo 1 da seguinte forma: os sinais de ruídos referentes ao processo ou aos sensores devem ser incluídos no vetor de entradas exógenas w , e deve-se incluir u e y no vetor de variáveis reguladas z . Assim as matrizes (4.9) a (4.12) aparecem como submatrizes da matriz de transferência em malha fechada H . Estabilidade interna é então expressa como a especificação de que esses elementos de H sejam estáveis, o que, como será mostrado a seguir, é uma especificação afim.

Considere agora a especificação de que H seja a matriz de transferência gerada por algum controlador que estabilize a planta:

$$\mathcal{H}_{estavel} = \left\{ H \mid \begin{array}{l} H = P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw} \\ \text{para algum } K \text{ que estabilize } P. \end{array} \right\}. \quad (4.13)$$

Note que esta especificação é mais restrita do que a de realizabilidade.

Assim como \mathcal{H}_{rlvel} , $\mathcal{H}_{estavel}$ também é um conjunto afim: seja K e \tilde{K} controladores que estabilizam P , gerando matrizes de transferência H e \tilde{H} , respectivamente. Usando (4.3) com $R = R_\lambda$, onde R_λ é dado por (4.8), as quatro matrizes de transferência dadas por (4.9) a (4.12), após algumas manipulações algébricas, tornam-se

$$K_\lambda(I - P_{yu}K_\lambda)^{-1}P_{yu} = \lambda K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yu} + (1 - \lambda)\tilde{K}(I - P_{yu}\tilde{K})^{-1}P_{yu},$$

$$\begin{aligned}
K_\lambda(I - P_{yu}K_\lambda)^{-1} &= \lambda K(I - P_{yu}K)^{-1} + (1 - \lambda)\widetilde{K}(I - P_{yu}\widetilde{K})^{-1}, \\
(I - P_{yu}K_\lambda)^{-1}P_{yu} &= \lambda(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yu} + (1 - \lambda)(I - P_{yu}\widetilde{K})^{-1}P_{yu}, \\
(I - P_{yu}K_\lambda)^{-1} &= \lambda(I - P_{yu}K)^{-1} + (1 - \lambda)(I - P_{yu}\widetilde{K})^{-1}.
\end{aligned}$$

Com isso as quatro matrizes (4.9) a (4.12) geradas através de K_λ são combinações afins daquelas geradas por K e \widetilde{K} . Como os lados direitos das equações acima são todos estáveis, os lados esquerdos também são, e por isso K_λ estabiliza P .

O mesmo artifício usado para simplificar a descrição de \mathcal{H}_{rlvel} pode também ser usado aqui. As quatro matrizes de transferência (4.9) a (4.12) podem ser expressas em termos da matriz de transferência R dada por (4.2):

$$K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yu} = RP_{yu}, \quad (4.14)$$

$$K(I - P_{yu}K)^{-1} = R, \quad (4.15)$$

$$(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yu} = (I + P_{yu}R)P_{yu}, \quad (4.16)$$

$$(I - P_{yu}K)^{-1} = I + P_{yu}R. \quad (4.17)$$

O conjunto $\mathcal{H}_{estavel}$ pode agora ser expresso como

$$\mathcal{H}_{estavel} = \left\{ P_{zw} + P_{zu}RP_{yu} \left| \begin{array}{l} RP_{yu}, \\ R, \\ I + P_{yu}R, \\ (I + P_{yu}R)P_{yu} \end{array} \right. \text{são estáveis.} \right\} \quad (4.18)$$

Se a planta P for estável, então em particular P_{yu} é estável. Também é verdade que se R for estável, então RP_{yu} , $I + P_{yu}R$ e $(I + P_{yu}R)P_{yu}$ são também estáveis. Este fato leva a

$$\mathcal{H}_{estavel} = \{P_{zw} + P_{zu}RP_{yu} \mid R \text{ estável}\}. \quad (4.19)$$

Note que (4.19) é a descrição de \mathcal{H}_{rlvel} com a restrição adicional de que R deva ser estável.

Dada qualquer R estável, o controlador que estabiliza P e gera uma matriz de transferência em malha fechada $H = P_{zw} + P_{zu}RP_{yu}$ é

$$K = (I + RP_{yu})^{-1}R. \quad (4.20)$$

De maneira inversa, todo controlador que estabilize P pode ser expresso através de (4.20) para alguma matriz R estável.

4.4 Desempenho

Nesta seção serão analisadas especificações de desempenho que limitam a resposta do sistema em malha fechada com relação a vários sinais de comando e perturbações que podem agir no sistema. Também será mostrado que tais especificações

são convexas em malha fechada. Por motivos de apresentação será feito um particionamento dos vetores w e z da seguinte forma:

$$w = \begin{bmatrix} w_c \\ w_d \\ w_{etc} \end{bmatrix}$$

Os n_c elementos de w_c são sinais de comando, referências ou sinais de *set-point*, *entradas*, na terminologia clássica de controle. Os n_d elementos de w_d são perturbações ou sinais de ruídos. O vetor de sinal w_{etc} contém todas as outras entradas. Particionando o vetor de variáveis reguladas,

$$z = \begin{bmatrix} z_c \\ z_a \\ z_o \\ z_{etc} \end{bmatrix}$$

As n_c componentes de z_c são as variáveis reguladas por w_c - *saídas*, na terminologia clássica. Os outros vetores são: z_a , o vetor de sinais do atuador; z_o , outros sinais críticos como sinais de sensores ou variáveis de estados; z_{etc} , os sinais restantes. Conforme o particionamento feito anteriormente a matriz H deve ter o seguinte aspecto

$$\begin{bmatrix} z_c \\ z_a \\ z_o \\ z_{etc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{cc} & H_{cd} & \star \\ H_{ac} & H_{ad} & \star \\ H_{oc} & H_{od} & \star \\ \star & \star & \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_c \\ w_d \\ w_{etc} \end{bmatrix}$$

O símbolo \star denota uma submatriz de H que não é usada para formular especificações de desempenho.

4.4.1 Overshoot e Undershoot

Define-se dois funcionais de H_{cc} : o *overshoot*,

$$\phi_{os}(H_{cc}) \triangleq \sup_{t \geq 0} s(t) - 1,$$

onde $s(t)$ é a resposta ao degrau unitário de H_{cc} , e o *undershoot*,

$$\phi_{us}(H_{cc}) \triangleq \sup_{t \geq 0} -s(t).$$

Estes funcionais são convexos de tal forma que as especificações

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{os} &\triangleq \{H \mid \phi_{os}(H_{cc}) \leq \alpha\}, \\ \mathcal{H}_{us} &\triangleq \{H \mid \phi_{us}(H_{cc}) \leq \alpha\},\end{aligned}$$

são convexas: por exemplo, se entre duas respostas de um sistema ao degrau unitário, ambas não excedem 10% de *overshoot*, a combinação convexa dessas duas respostas também não excederá.

A seguir, tem-se uma caracterização mais geral para os funcionais ϕ_{os} e ϕ_{us} , chamados de *overshoot relativo* e *undershoot relativo*, definidos por

$$\begin{aligned}\phi_{ost}(H_{cc}) &\triangleq \begin{cases} \sup_{t \geq 0} s(t)/H_{cc}(0) - 1 & \text{se } H_{cc}(0) > 0, \\ +\infty & \text{se } H_{cc}(0) \leq 0, \end{cases} \\ \phi_{ust}(H_{cc}) &\triangleq \begin{cases} \sup_{t \geq 0} -s(t)/H_{cc}(0) & \text{se } H_{cc}(0) > 0, \\ +\infty & \text{se } H_{cc}(0) \leq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Agora não parece tão óbvio que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{ost} &\triangleq \{H \mid \phi_{ost}(H_{cc}) \leq \alpha\}, \\ \mathcal{H}_{ust} &\triangleq \{H \mid \phi_{ust}(H_{cc}) \leq \alpha\},\end{aligned}$$

sejam especificações convexas. Para mostrar que o conjunto \mathcal{H}_{ost} é convexo basta escrevê-lo como

$$\mathcal{H}_{ost} = \{H \mid H_{cc}(0) > 0, s(t) - (1 + \alpha)H_{cc}(0) \leq 0 \text{ para todo } t \geq 0\}.$$

Se $H, \tilde{H} \in \mathcal{H}_{ost}$ e $0 \leq \lambda \leq 1$, então $H_\lambda = \lambda H + (1 - \lambda)\tilde{H}$ satisfaz $H_{\lambda cc}(0) > 0$, e para cada $t \geq 0$ tem-se $s(t) - (1 + \alpha)H_{\lambda cc}(0) \leq 0$. Desse modo, $H_\lambda \in \mathcal{H}_{ost}$.

A prova para \mathcal{H}_{ust} pode ser feita de maneira similar.

4.4.2 Resposta RMS a um Ruído Particular

Uma medida muito usada para se avaliar o *tamanho* de uma função de transferência H é o valor RMS de sua saída quando em sua entrada é aplicado algum processo estocástico estacionário. Suponha que a entrada particular w tenha densidade espectral de potência $S_w(\omega)$, e que H seja estável. Então a densidade espectral de potência da saída z de H é

$$S_z(\omega) = S_w(\omega)|H(j\omega)|^2,$$

e com isso

$$\|z\|_{rms} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_w(\omega) d\omega \right)^{1/2}$$

Chama-se de norma de H o termo

$$\|H\|_{rms,w} \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_w(\omega) d\omega \right)^{1/2} \quad (4.21)$$

Em (4.21), w é algum sinal fixo, e está-se medindo o *tamanho* do sistema linear invariante no tempo H .

4.4.3 Norma \mathbf{H}_2 : Resposta ao Ruído Branco

Considere a norma RMS discutida anteriormente. Se $S_w(\omega) \approx 1$ nas frequências para as quais $|H(j\omega)|$ possui valor significativo, então

$$\|H\|_{rms,w} \approx \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \quad (4.22)$$

É conveniente pensar neste sinal como uma aproximação de um sinal tipo *ruído branco*, um sinal de entrada fictício com $S_w(\omega) = 1$ para todo ω . Esta importante norma de um sistema estável é denotada por

$$\|H\|_2 \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \quad (4.23)$$

e é chamada de norma \mathbf{H}_2 de H . Se H for instável, $\|H\|_2 = \infty$. A norma \mathbf{H}_2 de uma função de transferência mede o valor RMS da resposta de sua saída quando uma excitação do tipo ruído branco está presente em sua entrada. A norma \mathbf{H}_2 pode ter uma outra interpretação. Pelo Teorema de Parseval,

$$\|H\|_2 = \left(\int_0^{\infty} h(t)^2 dt \right)^{1/2} = \|h\|_2, \quad (4.24)$$

chamada de norma \mathbf{L}_2 da resposta ao impulso h da matriz de transferência H . Com isso, pode-se interpretar a norma \mathbf{H}_2 de um sistema como a norma \mathbf{L}_2 de sua resposta a um sinal de entrada particular δ , o impulso unitário.

4.4.4 Ganho de Pico

O Ganho de Pico de um sistema linear invariante no tempo é definido como

$$\|H\|_{pg} \triangleq \sup_{\|w\|_{\infty} \neq 0} \frac{\|Hw\|_{\infty}}{\|w\|_{\infty}} \quad (4.25)$$

Pode ser mostrado que o ganho de pico de uma função de transferência é igual à norma \mathbf{L}_1 da sua resposta ao impulso:

$$\|H\|_{pg} = \int_0^{\infty} |h(t)| dt = \|h\|_1. \quad (4.26)$$

O ganho de pico de uma função de transferência é finito se e somente se a função de transferência for estável.

A equação (4.26) pode ser verificada da seguinte forma: considere o sinal de entrada

$$w(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(h(T-t)) & \text{para } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.27)$$

Note que $\|w\|_{\infty} = 1$ (a função $\operatorname{sgn}(\cdot)$, vale 1 para argumentos positivos e -1 para argumentos negativos). A saída no instante T é

$$\begin{aligned} z(T) &= \int_0^T w(T-t)h(t)dt \\ &= \int_0^T \operatorname{sgn}(h(t))h(t)dt \\ &= \int_0^T |h(t)|dt, \end{aligned}$$

que converge para $\|h\|_1$ com $T \rightarrow \infty$. Então para T grande (e H estável, de tal forma que $\|H\|_{pg} < \infty$), o sinal de (4.27) implica que $\|z\|_{\infty}/\|w\|_{\infty}$ se aproxima de $\|h\|_1$; também é possível mostrar que existe um sinal w tal que

$$\|z\|_{\infty}/\|w\|_{\infty} = \|h\|_1$$

4.4.5 Rastreamento Assintótico

Uma especificação comum sobre H_{cc} é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H_{cc}(0) = 1,$$

o que significa que para w_c constante (e $w_d = 0$, $w_{etc} = 0$), $z_c(t)$ converge para w_c com $t \rightarrow \infty$, ou equivalentemente, a função de transferência em malha fechada de z_c para w_c é um em $s = 0$. O conjunto das matrizes que correspondem a esta especificação é

$$\mathcal{H}_{rastress} = \{H \mid H_{cc}(0) = 1\} \quad (4.28)$$

Mostra-se a seguir que este conjunto é convexo.

Suponha que $H, \tilde{H} \in \mathcal{H}_{rastress}$, de tal forma que $H_{13}(0) = \tilde{H}_{13}(0) = 1$, e $\lambda \in \mathfrak{R}$. Então a matriz de transferência $H_{\lambda} = \lambda H + (1 - \lambda)\tilde{H}$ satisfaz

$$H_{\lambda 13}(0) = \lambda H_{13}(0) + (1 - \lambda)\tilde{H}_{13}(0) = \lambda + (1 - \lambda) = 1,$$

e portanto $H_\lambda \in \mathcal{H}_{rastr_ass}$.

O conjunto 4.28 também pode ser expresso da seguinte forma:

$$\mathcal{H}_{rastr_ass} = \{H \mid \phi_{rastr_ass}(H) = 1\},$$

onde $\phi_{rastr_ass}(H) \triangleq H_{cc}(0)$ é um funcional afim.

Capítulo 5

Projeto de Sistemas de Controle via Otimização Convexa

5.1 Introdução

Este capítulo descreve o método usado na formulação e resolução do problema de projeto do controlador em um espaço de dimensão infinita. Um método baseado na parametrização discutida no Capítulo 3 leva a uma aproximação *externa* da região das especificações atingíveis ou realizáveis no espaço das especificações de desempenho. Através dessas aproximações o problema de projeto do controlador será formulado e em seguida resolvido. A aproximação de um espaço linear de dimensão infinita por um de dimensão finita também é apresentada através das aproximações de Ritz.

5.2 Formulação do Problema de Projeto

O problema de projeto de controlador pode ser formulado como

$$\min_{H \in \Omega} \Phi(H) \quad (5.1)$$

onde $\Phi(\cdot)$ é, em geral, um vetor de critérios de desempenho convexos no espaço das matrizes de transferência H , e Ω é o conjunto determinado por restrições de projeto. Em vista da Parametrização Q , discutida no Capítulo 3, o mesmo problema pode ser expresso como

$$\min_{Q \in \Omega^*} \Phi^*(Q) \quad (5.2)$$

onde $\Phi^*(Q) = \Phi(T_1 + T_2 Q T_3)$ e

$$\Omega^* = \{Q : \Psi^*(Q) \leq 0\}$$

onde $\Psi^*(Q) = \Psi(T_1 + T_2 Q T_3)$ é um vetor de funcionais convexos que determinam o conjunto Ω^* . Note que de acordo com esta reformulação do problema de projeto, satisfaz-se as restrições de realizabilidade e estabilidade, uma vez que o parâmetro Q sempre representará uma matriz de transferência estável.

Embora os problemas sejam equivalentes do ponto de vista de formulação, a dependência do funcional e das restrições com a variável de decisão é muito mais simples no último caso. Como $\Phi(\cdot)$ e $\Psi(\cdot)$ são funcionais convexos sobre H , e H pode ser representada por uma relação afim com o parâmetro Q , as propriedades de convexidade do problema são preservadas. Note que o mesmo não ocorreria se a variável de decisão do problema de projeto fosse a matriz de transferência do controlador K .

O funcional $\Phi(\cdot)$ e o conjunto Ω podem envolver especificações de desempenho em termos de rastreamento assintótico das variáveis reguladas, rejeição de entradas indesejáveis à planta, limites de *overshoot*, *undershoot* e tempo de estabelecimento, limites nos valores de pico de certos sinais de malha fechada, entre outras ([BBB88]). Na verdade, a distinção entre funcionais (critérios) e restrições não é rígida e pode-se inclusive considerar o problema de projeto no contexto das técnicas de otimização multicritério ([FG90]). Especificações de desempenho desta natureza dão origem a problemas de otimização em espaços de dimensão infinita.

5.3 Aproximações de Ritz

O método de Ritz para se abordar problemas de otimização de dimensão infinita consiste em resolver uma sequência de problemas em subespaços de dimensão finita em que a dimensão do subespaço considerado é progressivamente aumentada. Para o problema de projeto do controlador, o método da aproximação de Ritz é determinado através de uma sequência de matrizes de transferência $n_z \times n_w$

$$R_0, R_1, R_2, \dots \quad (5.3)$$

Seja

$$\mathcal{H}_N \triangleq \left\{ R_0 + \sum_{1 \leq i \leq N} x_i R_i \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq N \right\}. \quad (5.4)$$

o subconjunto afim de dimensão finita que é determinado por R_0 e a sequência de N matrizes de transferência.

A aproximação de Ritz leva à um problema de projeto de controlador convexo, se o problema de controlador original for um problema convexo, visto que a aproximação de Ritz nada mais é do que uma restrição adicional do tipo $H \in \mathcal{H}_N$ ao problema original.

A N -ésima aproximação de Ritz para o problema de projeto do controlador gera um problema de otimização de dimensão finita, de tal forma que algoritmos eficientes podem ser aplicados para a sua solução. Para cada $x \in \mathfrak{R}^N$ associa-se a matriz de transferência

$$H_N \triangleq R_0 + \sum_{1 \leq i \leq N} x_i R_i, \quad (5.5)$$

e para cada funcional ϕ_i associa-se a função $\phi_i^N : \mathfrak{R}^N \rightarrow \mathfrak{R}$ dada por

$$\phi_i^N(x) \triangleq \phi_i(H_N(x)), \quad (5.6)$$

e define-se

$$\Omega^{(N)} \triangleq \{x \mid \Psi(H_N(x)) \leq 0\}. \quad (5.7)$$

Como o mapeamento de $x \in \mathfrak{R}^N$ em \mathcal{H}_N dado por (5.5) é afim, as funções ϕ_i^N dadas por (5.6) são convexas se os funcionais ϕ_i forem convexas. Da mesma forma os subconjuntos $\Omega^{(N)} \subseteq \mathfrak{R}^N$ são convexas (ou afins) se $\psi_i^N(x) \triangleq \psi_i(H_N(x))$ forem funções convexas.

5.3.1 Um Método de Ritz Específico

Um método específico para se gerar aproximações de Ritz é baseado na parametrização de matrizes de transferência em malha fechada geradas por controladores estabilizantes (ver Capítulo 3):

$$\mathcal{H}_{estavel} = \{T_1 + T_2 Q T_3 \mid Q \text{ estável}\}. \quad (5.8)$$

Escolhe-se uma sequência de matrizes de transferência $n_u \times n_y$ estáveis Q_1, Q_2, \dots e define-se

$$R_0 = T_1, \quad R_i = T_2 Q_i T_3, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

como a sequência de Ritz particular. Observe que esta escolha gera um conjunto \mathcal{H}_N com a mesma estrutura do conjunto $\mathcal{H}_{estavel}$, onde Q é uma combinação linear das matrizes estáveis $Q_i, i = 1, 2, \dots$. Com isso tem-se que $\mathcal{H}_N \subseteq \mathcal{H}_{estavel}$, ou seja, a especificação $\mathcal{H}_{estavel}$ é automaticamente satisfeita.

Para cada $x \in \mathfrak{R}^N$ existe um controlador correspondente $K_N(x)$ que gera a matriz de transferência $H_N(x) \in \mathcal{H}_N$. Na N -ésima aproximação de Ritz, faz-se uma busca sobre um conjunto de controladores que é parametrizado por $x \in \mathfrak{R}^N$, da mesma forma que uma família de controladores PID é parametrizada por um vetor de ganhos, pertencente ao \mathfrak{R}^3 .

Observe que a aproximação de Ritz preserva a geometria do problema de projeto do controlador original. Se um critério ou restrição funcional é convexo ou afim em malha fechada, então o critério ou restrição resultante em $x \in \mathfrak{R}^N$, também o será. Isto não é verdade para a maioria das parametrizações de controladores, por exemplo, os controladores do tipo PID.

5.4 Aspectos de Implementação

Todo o *software* necessário para a implementação das técnicas discutidas neste trabalho foi desenvolvido em MATLAB ([MAT40]), versão 4.0, em ambiente UNIX, tendo como *hardware* estações de trabalho do tipo SUN.

Utilizou-se o *Control Toolbox* ([MATCT]) do MATLAB nas fases de definição do problema, obtenção de representações em espaço de estados e obtenção de resultados, incluindo-se nesta última, os aspectos de simulação.

O método de planos de corte, discutido no Apêndice A, que é utilizado na solução do problema de otimização resultante, foi implementado através de uma rotina básica de programação linear - método Simplex primal ([Las70]) - também disponível em MATLAB.

A abordagem utilizada neste trabalho, onde operações de somas e multiplicações de funções de transferência são frequentes, tende a gerar matrizes de transferência de malha fechada de ordens elevadas. Visando minimizar este efeito, sempre que possível, o resultado de qualquer operação envolvendo funções de transferência foi submetido a um processo de redução de modelo, de forma a eliminar modos fracamente controláveis e/ou observáveis. Para maiores detalhes sobre o método de redução de modelo utilizado, ver [MATCT].

O cálculo dos valores e dos subgradientes de vários funcionais considerados nos exemplos da próxima seção exige um processo de integração numérica. Neste trabalho utilizou-se o método de integração de Simpson ([BBF87]), também implementado em MATLAB.

5.5 Experiências Numéricas

O objetivo desta seção é ilustrar o desempenho do método de planos de corte quando utilizado no projeto de sistemas de controle baseado na parametrização Q . Os problemas tratados a seguir são solucionados em [BB91] através de métodos elipsoidais. No final desta seção, algumas comparações com os resultados obtidos através do método de planos de corte são realizadas.

Considere o sistema de controle com um grau de liberdade discutido no Capítulo 1. O sinal de referência $r(s)$ é uma entrada exógena, assim como os ruídos n_{proc} e n_{sen} . O vetor de entradas exógenas w pode ser assim definido

$$w = \begin{bmatrix} n_{proc} \\ n_{sen} \\ r \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

A entrada de controle da planta é o sinal do atuador u , e pode-se tomar o vetor das variáveis reguladas como

$$z = \begin{bmatrix} y_p \\ u \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

O controlador no sistema de controle 1-DOF não tem acesso direto à saída *corrompida* do sistema, $y_p + n_{sen}$. A entrada do controlador $K(s)$ é dada por

$$y = r - y_p - n_{sen} \quad (5.12)$$

Baseado na representação da figura 1.2, a planta P possui quatro entradas e três saídas. A sua matriz de transferência é

$$P = \begin{bmatrix} P_{zw} & P_{zu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 & P_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -P_0 & -1 & 1 & -P_0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

A matriz de transferência em malha fechada H possui três entradas e duas saídas:

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P_0}{(1 + P_0K)} & -\frac{P_0K}{(1 + P_0K)} & \frac{P_0K}{(1 + P_0K)} \\ -\frac{P_0K}{(1 + P_0K)} & -\frac{K}{(1 + P_0K)} & \frac{K}{(1 + P_0K)} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Considere que o sistema de controle 1-DOF acima possui planta $P_0(s)$ consistindo de

$$P_0(s) = \frac{1}{s^2} \frac{10 - s}{10 + s} \quad (5.15)$$

Observe que esta planta não é BIBO (*Bounded Input - Bounded Output*) estável, apresentando também característica de fase não-mínima. Os resultados serão apresentados com base em (5.15).

Suponha que n_{proc} e n_{sen} sejam processos estocásticos independentes com média zero e densidades espectrais de potência

$$\begin{aligned} S_{proc}(\omega) &= W_{proc}^2 \\ S_{sen}(\omega) &= W_{sen}^2 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} W_{proc} &= 0.04, \\ W_{sen} &= 0.01. \end{aligned}$$

Dentre todos os possíveis funcionais que determinam especificações de projeto, escolheu-se trabalhar com valores RMS das variáveis de saída medida (y_p) e de controle (u), *overshoot*, ganho de pico e rastreamento assintótico. Estes funcionais foram discutidos no capítulo anterior e o cálculo de seus subgradientes é apresentado no Apêndice B.

As regulações RMS de y_p e u são definidas como segue:

- Regulação RMS de y_p

$$RMS(y_p) \triangleq \phi_{rms-y_p}(H) = (\|H_{11}W_{sen}\|_2^2 + \|H_{12}W_{proc}\|_2^2)^{1/2} \quad (5.16)$$

- Regulação RMS de u

$$RMS(u) \triangleq \phi_{rms-u}(H) = (\|H_{21}W_{proc}\|_2^2 + \|H_{22}W_{sen}\|_2^2)^{1/2}. \quad (5.17)$$

O controlador nominal K_{nom} (o mesmo utilizado em [BB91]) é caracterizado pelos seguintes ganhos:

$$L_{est} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -3.1623 \\ -1.1115 \end{bmatrix}, \quad K_{sfb} = [1.4276 \quad 10.2948 \quad 2.4495]$$

A sequência de matrizes de transferência estáveis Q_1, Q_2, \dots que define a aproximação de Ritz corrente é construída a partir do termo geral, escolhido arbitrariamente,

$$Q_i = \left(\frac{1}{s+1} \right)^i$$

Pode-se demonstrar ([BB91]), que a sequência gerada a partir deste termo é *densa*, no sentido de que a solução ótima Q^* pode ser obtida para N suficientemente grande. A seguir apresenta-se três exemplos que ilustram a aplicação da síntese de controle de sistemas lineares via parametrização Q . Estes três problemas de síntese são resolvidos através do Método de Planos de Corte que é descrito em detalhes no Apêndice A, onde também são apresentados os conceitos e resultados básicos sobre Análise Convexa necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

Exemplo 5.1:

$$\begin{aligned} \text{Min } & \phi_{rms-u}(H) \\ \text{s. a : } & \phi_{rms-y_p}(H) \leq 0.1 \end{aligned} \quad (5.18)$$

para $\phi_{rms_{-yp}}(H)$ e $\phi_{rms_{-u}}(H)$ dados por (5.16) e (5.17), respectivamente.

A tabela a seguir mostra as sucessivas iterações do algoritmo implementado. Nesta tabela, N representa a ordem da aproximação de Ritz e k representa a iteração do algoritmo de planos de corte para o problema de dimensão finita N .

| | k | $\phi_{rms_{-u}}(H)$ | $\phi_{rms_{-yp}}(H)$ |
|-----|---|----------------------|-----------------------|
| N=1 | 1 | 0.140898 | 0.234289 |
| | 2 | 2.564163 | 1.632466 |
| | 3 | 0.068744 | 0.102710 |
| N=2 | 1 | 0.072971 | 0.097172 |
| | 2 | 1.938094 | 0.507782 |
| | 3 | 0.096723 | 0.105012 |
| | 4 | 0.043621 | 0.100780 |
| | 5 | 0.044360 | 0.100174 |
| | 6 | 0.042646 | 0.099385 |
| N=3 | 1 | 0.042985 | 0.099354 |
| | 2 | 2.383870 | 1.568002 |
| | 3 | 0.164163 | 0.433554 |
| | 4 | 0.089605 | 0.258532 |
| | 5 | 0.060643 | 0.197549 |
| | 6 | 0.071412 | 0.133634 |
| | 7 | 0.043993 | 0.113093 |
| | 8 | 0.039855 | 0.106074 |
| | 9 | 0.039871 | 0.102983 |

Tabela 5.1: Evolução do Algoritmo - Exemplo 5.1

A figura 5.1 ilustra a convergência do valor da função objetivo para o seu mínimo teórico 0.03967 calculado em [BBB88] através do regulador LQG. O algoritmo convergiu para o ponto $x^* = [-33.39 \ 17.74 \ 24.42]^T$.

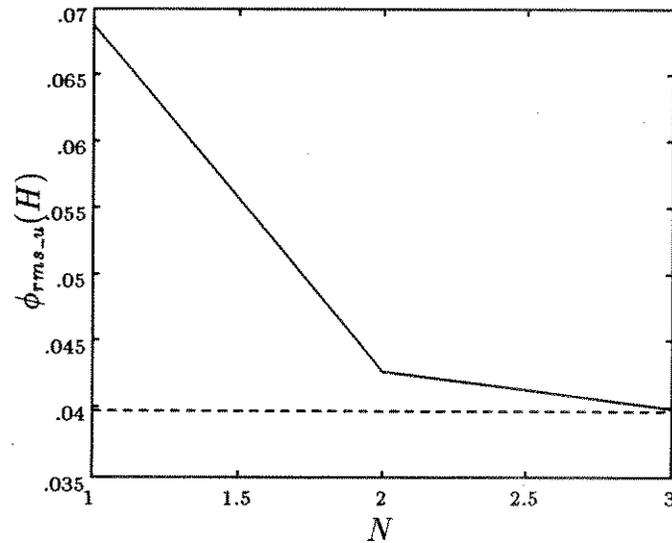


Figura 5.1: Convergência da Função Objetivo com N - Exemplo 5.1

A representação em espaço de estados do controlador K obtido para este exemplo é:

$$A_K = \begin{bmatrix} -11.42 & -10.29 & -2.44 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3.16 & -31.62 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.11 & -11.11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_K = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.16 \\ -1.11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_K = \begin{bmatrix} -1.42 & -10.29 & -2.44 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D_K = 0.$$

A figura 5.2 mostra a convergência entre a função objetivo e sua aproximação inferior L_k com relação às iterações do algoritmo de planos de corte para $N = 4$, isto é, para uma aproximação de Ritz de ordem quatro. O critério de convergência adotado foi de um erro menor do que 1% entre L_k e ϕ_k .

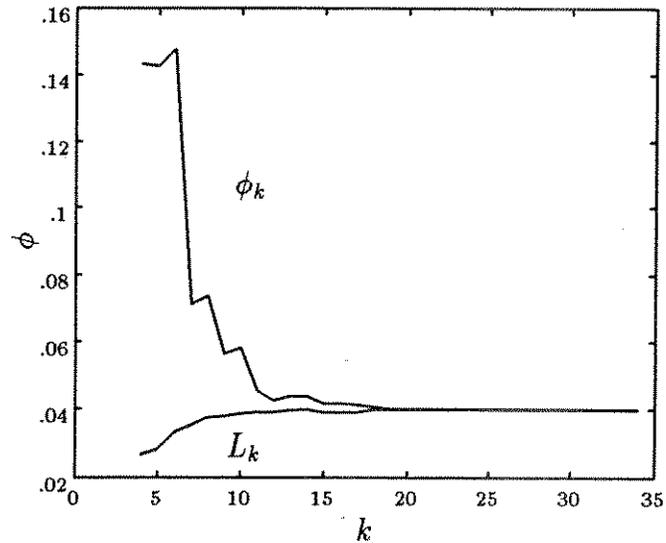


Figura 5.2: Convergência entre L_k e ϕ_k

A figura 5.3 mostra as respostas de H_{13} ao impulso e ao degrau unitário. Note que H_{13} representa a função de transferência entre a saída y_p da planta e o sinal de referência r . Este elemento de H apresenta um *overshoot* de 41.60% e um ganho de pico de 1.88.

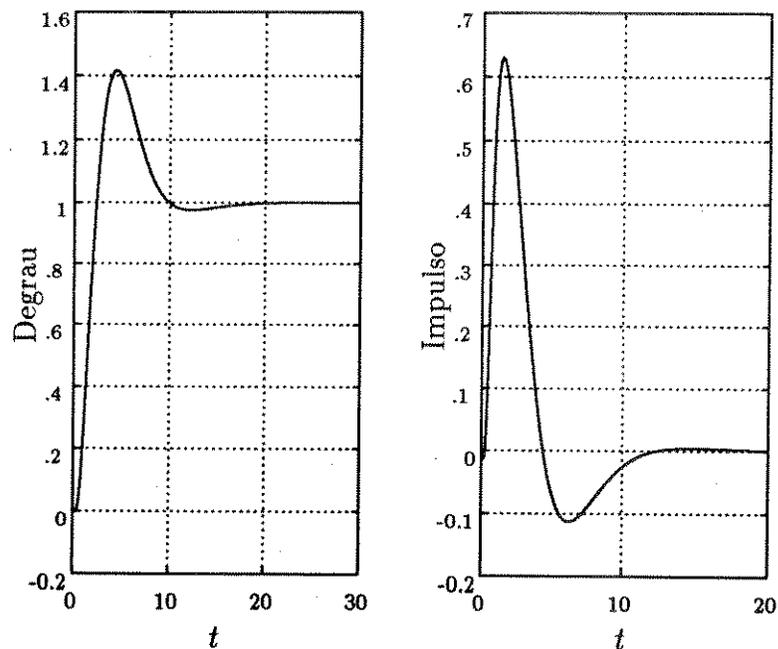


Figura 5.3: Respostas de H_{13} ao degrau e ao impulso - Exemplo 5.1

No próximo exemplo, uma restrição adicional sobre o *overshoot* de H_{13} é incorporada ao problema anterior. Observe que ao incluir-se uma restrição sobre o *overshoot* ($\phi_{os}(H_{13}) \leq 0.1$), deve-se também garantir que a referência seja assintoticamente rastreada, o que é assegurado através da restrição $\phi_{rast_{ass}}(H_{13}) = 1$.

Exemplo 5.2:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \phi_{rms_u}(H) \\ \text{s. a :} \quad & \begin{cases} \phi_{rms_{yp}}(H) \leq 0.1 \\ \phi_{os}(H_{13}) \leq 0.1 \\ \phi_{rast_{ass}}(H_{13}) = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Este problema é infactível para $N = 1$. Para $N = 4$, o valor da função objetivo converge para 0.0917 satisfazendo as restrições do problema. O número de iterações do método de planos de corte para $N = 4$ foi 20. O algoritmo convergiu para a solução $x^* = [-0.54 \ 8.04 \ -25.34 \ 1.06]^T$. Constatou-se ainda que a restrição sobre rastreamento assintótico da entrada é de certa forma redundante, pois a planta considerada é do *tipo 2* ([Oga90]), isto é, apresenta erro de regime igual a zero para entradas degrau unitário e rampa unitária.

A figura 5.4 apresenta as novas respostas de H_{13} ao degrau unitário e ao impulso.

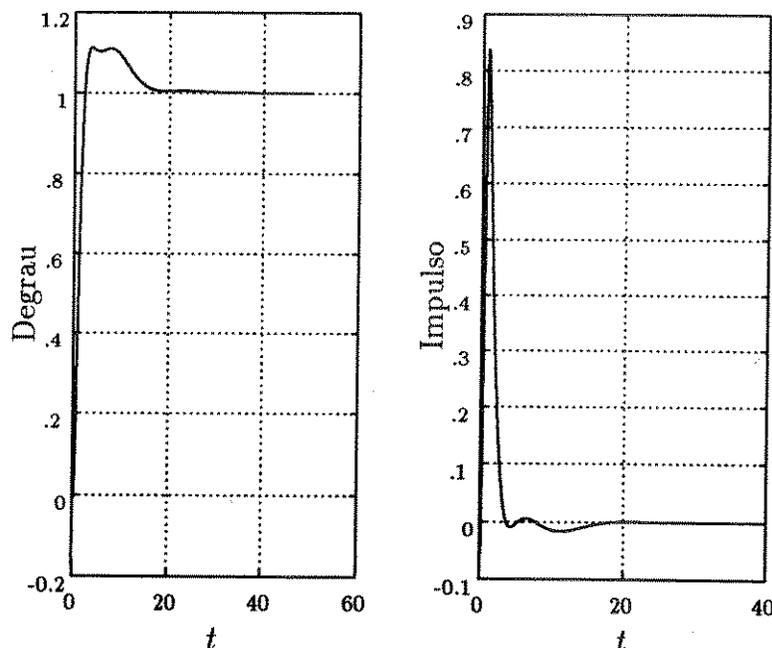


Figura 5.4: Respostas de H_{13} ao degrau e ao impulso - Exemplo 5.2

Uma abordagem alternativa ao Exemplo 5.2 seria limitar o ganho de pico de H_{13} . Limitando-se o ganho de pico deste elemento, garante-se que sempre que a entrada for limitada em amplitude a 1, por exemplo, a resposta de H_{13} estará limitada pelo ganho de pico pré-especificado.

Exemplo 5.3:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad \phi_{rms-u}(H) \\ \text{s. a:} \quad & \begin{cases} \phi_{rms-yp}(H) \leq 0.1 \\ \phi_{gp}(H_{13}) \leq 1.3 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.20)$$

O ganho de pico de H_{13} foi limitado a aproximadamente 70% do valor apresentado no Exemplo 5.1. A figura 5.5 mostra as respostas de H_{13} ao degrau unitário e ao impulso para $N = 4$. O algoritmo convergiu para a solução $x^* = [-10.52 \ 18.65 \ -25.50 \ 6.68]^T$ e o valor da função objetivo para 0.0716. Observe que como esperado, o *overshoot* de H_{13} ficou abaixo do valor de ganho de pico especificado.

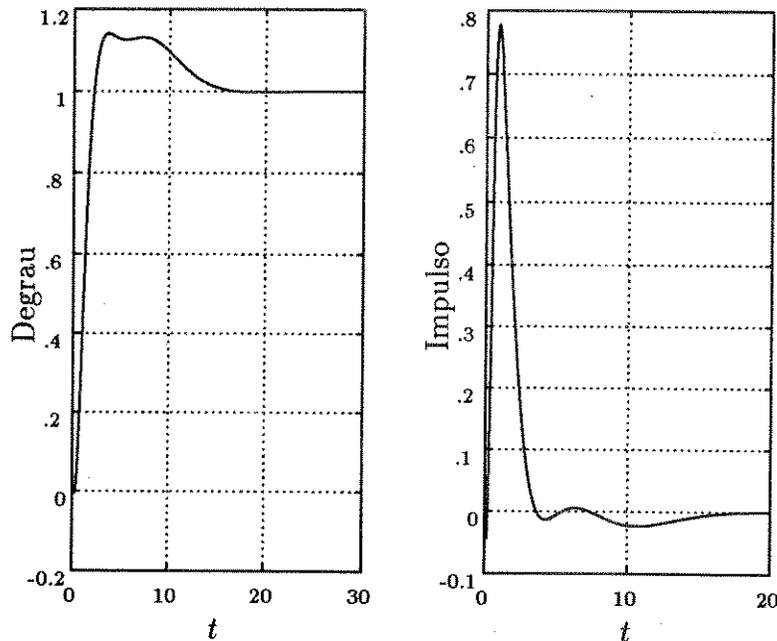


Figura 5.5: Respostas de H_{13} ao degrau e ao impulso - Exemplo 5.3

O projeto de sistema de controle pode ser abordado através de técnicas de oti-

mização multicritério ([FG90]). A partir dos exemplos anteriores fica claro perceber a natureza conflitante de muitas especificações de projeto.

Uma possível formulação multicritério para o Exemplo 5.3 baseia-se na técnica proposta por Gembicki e Haimes ([GH75]), que é aplicada ao Exemplo 5.4 a seguir.

Exemplo 5.4:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sigma \\ \text{s. a :} \quad & \begin{cases} \phi_{rms_u}(H) - w_1\sigma \leq \phi_{rms_u}^* \\ \phi_{rms_yp}(H) - w_2\sigma \leq \phi_{rms_yp}^* \\ \phi_{gp}(H_{13}) - w_3\sigma \leq \phi_{gp}^* \end{cases} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Note que a minimização indicada em (5.21) envolve as variáveis H e $\sigma \in \mathfrak{R}$. No lado direito das restrições estão especificados os valores ideais ou valores alvos, que podem ou não ser atingidos no final do processo de otimização. As quantidades $w_i\sigma$ estão relacionadas com o grau de folga ou excesso do respectivo funcional em relação ao alvo estipulado, com $w_i > 0$ fazendo o papel de uma ponderação. Note ainda que o problema (5.21) é sempre factível.

A Tabela 5.2 mostra a convergência do algoritmo para o Exemplo 5.4. Os alvos selecionados foram $\phi_{rms_u}^* = \phi_{rms_yp}^* = \phi_{gp}^* = 0$. Utilizou-se como ponderações $w_1 = w_2 = w_3 = 0.3333$.

Conforme pode ser constatado nesta tabela, o maior desvio é determinado pelo funcional associado ao ganho de pico de H_{13} . Os objetivos referentes a regulação RMS apresentam excesso em relação aos alvos estipulados.

Uma comparação entre os resultados obtidos a partir do algoritmo implementado via Método dos Planos de Corte com os resultados apresentados em [BB91], que faz uso de métodos elipsoidais, sugere que estes últimos apresentam um desempenho sensivelmente inferior ao exibido pelo Método de Planos de Corte, no que diz respeito ao número de iterações necessárias para se atingir convergência nos diversos exemplos tratados. Deve-se ainda levar em conta a maior facilidade de implementação do Método de Planos de Corte e a relativa simplicidade para definição de uma região do espaço N -dimensional que contenha a solução do problema.

| k | $\phi_{rms_u}(H)$ | $\phi_{rms_{yp}}(H)$ | $\phi_{gp}(H_{13})$ | $w_i\sigma$ |
|----|-------------------|----------------------|---------------------|-------------|
| 1 | 1.332835 | 2.175876 | 22.416107 | -2.650 |
| 2 | 5.147483 | 5.277378 | 49.132098 | -0.043 |
| 3 | 0.259118 | 0.293486 | 3.012624 | 0.125 |
| 4 | 0.296615 | 0.413486 | 1.917942 | 0.319 |
| 5 | 0.592256 | 0.677659 | 3.774498 | 0.628 |
| 6 | 0.314260 | 0.397677 | 2.327195 | 0.793 |
| 7 | 0.187093 | 0.268807 | 1.680661 | 0.898 |
| 8 | 0.126450 | 0.201232 | 1.477087 | 0.975 |
| 9 | 0.098692 | 0.228247 | 1.509147 | 1.028 |
| 10 | 0.088855 | 0.182016 | 1.351337 | 1.074 |
| 11 | 0.107472 | 0.156667 | 1.437972 | 1.126 |
| 12 | 0.103920 | 0.180032 | 1.349695 | 1.174 |
| 13 | 0.107867 | 0.153835 | 1.310958 | 1.210 |
| 14 | 0.105532 | 0.127773 | 1.302025 | 1.231 |
| 15 | 0.101392 | 0.137630 | 1.308754 | 1.248 |
| 16 | 0.108650 | 0.126879 | 1.295342 | 1.264 |
| 17 | 0.105123 | 0.106540 | 1.297950 | 1.269 |
| 18 | 0.107689 | 0.116086 | 1.289946 | 1.277 |
| 19 | 0.099056 | 0.120594 | 1.298117 | 1.279 |
| 20 | 0.101209 | 0.113759 | 1.286895 | 1.280 |
| 21 | 0.101848 | 0.108714 | 1.282795 | 1.280 |
| 22 | 0.108584 | 0.158717 | 1.381228 | 1.310 |
| 23 | 0.079597 | 0.097944 | 1.297109 | 1.310 |

N=3

Tabela 5.2: Evolução do Algoritmo - Exemplo 5.4

Capítulo 6

Conclusão Geral

Este trabalho abordou o problema de síntese de sistemas de controle através de otimização convexa e, mais especificamente, através do Método de Planos de Corte.

A partir de técnicas de fatoração de matrizes de transferência, obtém-se uma parametrização de todos os controladores que estabilizam uma determinada planta e uma representação afim para a matriz de transferência de malha fechada do sistema. Como muitas das especificações de projeto são convexas quando descritas em termos da matriz de malha fechada do sistema, foi possível formular o problema de síntese como um problema de otimização convexa, tendo como variável de otimização um elemento do espaço das matrizes de transferência racionais estáveis próprias. Uma aproximação adequada deste espaço vetorial através de espaços de dimensão finita permitiu a definição de um problema de otimização convexa passível de resolução através do Método de Planos de Corte selecionado.

Os resultados obtidos demonstram a viabilidade deste tipo de enfoque e a eficiência do método selecionado, superior à obtida com o método adotado por [BB91]. Entretanto, vários outros aspectos não cobertos por este trabalho precisariam ainda ser investigados.

Embora a abordagem adotada tenha uma vantagem decisiva - conduz aos *limites de desempenho* de um sistema, que não poderiam em geral ser determinados por quaisquer outros métodos - por outro lado também apresenta algumas desvantagens.

Uma característica inerente à abordagem adotada é a geração de controladores de ordens elevadas. Esta característica é decorrente do processo de obtenção da matriz de transferência de malha fechada através das aproximações de Ritz. Processos de redução de modelos poderiam ser utilizados para se chegar a controladores de ordens compatíveis com a sua utilização prática.

Vários aspectos envolvidos na parametrização Q podem também ser objetos de pesquisa futura. Em particular, a escolha do controlador nominal tem influência destacada no desempenho de todo o algoritmo implementado e portanto uma escolha criteriosa poderia melhorar em muito os aspectos de condicionamento numérico.

Outro ponto a considerar é a definição da sequência de matrizes de transferência estáveis que irão compor as aproximações de Ritz. Esta definição é, de longe, o aspecto mais importante envolvido no problema e também o mais difícil de tratar a curto e médio prazos.

Um último tema para pesquisas futuras seria a obtenção de controladores *fortemente estabilizantes*, isto é, controladores *estáveis* que estabilizam o sistema em malha fechada. Uma parametrização do conjunto de todos os controladores estáveis que estabilizam uma planta é também possível através das mesmas técnicas de fatoração utilizadas para se obter a parametrização Q .

Apêndice A

Elementos de Otimização Convexa

A.1 Introdução

Muitas das especificações e funcionais discutidos neste trabalho não são *suaves*, isto é, possuem *bicos*, e por isso podem não ser diferenciáveis em todo o seu domínio. Felizmente para funcionais e conjuntos convexos, algumas das ferramentas analíticas de otimização mais importantes não dependem de *suavidade*. Mais importante ainda, existem algoritmos simples e eficientes para otimização convexa que não dependem da suavidade das restrições e dos objetivos. Este Apêndice apresenta algumas ferramentas básicas de otimização convexa não-diferenciável: subgradientes, derivadas direcionais e hiperplanos suportes, enfatizando suas interpretações geométricas. A seguir um método eficiente para otimização convexa não-diferenciável chamado de método de Planos de Cortes, é apresentado.

A.2 Conjuntos e Funcionais Convexos

Seja \mathcal{H} um espaço linear.

Definição A.1 - Conjunto Convexo

O conjunto $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}$ é convexo se para quaisquer $H, \tilde{H} \in \mathcal{H}_1$, e todo $\lambda \in [0, 1]$,

$$\lambda H + (1 - \lambda)\tilde{H} \in \mathcal{H}_1.$$

Um conjunto de matrizes de transferência é convexo se, sempre que duas matrizes quaisquer estiverem dentro do conjunto, a seguimento de linha que liga as duas matrizes (a sua combinação convexa) também estiver contido no conjunto.

Definição A.2 - Funcional Convexo

Um funcional ϕ sobre \mathcal{H} é convexo se para quaisquer $H, \tilde{H} \in \mathcal{H}$, e todo $\lambda \in [0, 1]$,

$$\phi(\lambda H + (1 - \lambda)\tilde{H}) \leq \lambda\phi(H) + (1 - \lambda)\phi(\tilde{H}).$$

Um funcional é convexo se o gráfico de seus valores ao longo de um segmento de linha em \mathcal{H} permanece abaixo do segmento de linha que une as extremidades do segmento.

Definição A.3 - Funcional Quasi-Convexo

Um funcional ϕ sobre \mathcal{H} é quasi-convexo se para quaisquer $H, \tilde{H} \in \mathcal{H}$, e todo $\lambda \in [0, 1]$,

$$\phi(\lambda H + (1 - \lambda)\tilde{H}) \leq \max\{\phi(H), \phi(\tilde{H})\}.$$

A.3 Subgradientes e Quasi-Gradientes Generalizados

Definição A.4 - Derivada Direcional

Define-se derivada direcional de ϕ em H_0 na direção δH como

$$\phi'(H_0; \delta H) \triangleq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(H_0 + h\delta H) - \phi(H_0)}{h}.$$

Pode ser mostrado que para ϕ convexo, este limite sempre existe.

Definição A.5 - Subgradiente

Se ϕ é um funcional sobre um espaço linear \mathcal{H} (de dimensão possivelmente infinita), então diz-se que ϕ^{sg} é um subgradiente de ϕ em $H_0 \in \mathcal{H}$ se ϕ^{sg} é um funcional linear sobre \mathcal{H} e se

$$\phi(H) \geq \phi(H_0) + \phi^{sg}(H - H_0) \text{ para todo } H \in \mathcal{H}. \quad (\text{A.1})$$

O subdiferencial $\partial\phi(H_0)$ consiste de todos os subgradientes de ϕ em H_0 ; note que $\partial\phi(H_0)$ é um conjunto de funcionais lineares sobre \mathcal{H} . Diz-se ainda que um funcional linear ϕ^{sg} sobre \mathcal{H} é um quasi-gradiente de um funcional quasi-convexo ϕ em $H_0 \in \mathcal{H}$ se

$$\phi(H) \geq \phi(H_0) \text{ sempre que } \phi^{sg}(H - H_0) \geq 0.$$

Se $\mathcal{H} = \mathfrak{R}^n$, sabe-se que todo funcional linear sobre o \mathfrak{R}^n tem a forma $g^T z$ para algum vetor constante $g \in \mathfrak{R}^n$ e $z \in \mathfrak{R}^n$. Além disso, se $\phi : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ for um funcional convexo e diferenciável, tem-se que

$$\phi(z) \geq \phi(x) + \nabla\phi(x)^T(z - x) \quad \forall z, x. \quad (\text{A.2})$$

Isto significa que o hiperplano tangente ao gráfico de ϕ em x sempre está abaixo do gráfico de ϕ . Se $\phi : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ for convexo, mas não necessariamente diferenciável, diz-se que $g \in \mathfrak{R}^n$ é um subgradiente de ϕ em x se

$$\phi(z) \geq \phi(x) + g^T(z - x) \quad \forall z, x. \quad (\text{A.3})$$

A partir de (A.2) tem-se que o gradiente de um funcional convexo e diferenciável é sempre um subgradiente. Um resultado clássico de análise convexa é que *todo funcional convexo possui pelos menos um subgradiente em todo ponto do seu domínio*.

Suponha que $\phi : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ seja quasi-convexo, o que significa que

$$\phi(\lambda x + (1 - \lambda)\tilde{x}) \leq \max\{\phi(x), \phi(\tilde{x})\} \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1, x, \tilde{x} \in \mathfrak{R}^n.$$

Diz-se que g é um quasi-gradiente de ϕ em x se

$$\phi(z) \geq \phi(x) \text{ sempre que } g^T(z - x) \geq 0.$$

Se ϕ for diferenciável e $\nabla\phi(x) \neq 0$, então $\nabla\phi(x)$ é um quasi-gradiente; se ϕ for convexo, qualquer subgradiente de ϕ também é um quasi-gradiente de ϕ . É possível mostrar que toda função quasi-convexa possui pelo menos um quasi-gradiente em todo ponto. Note que o tamanho do quasi-gradiente é irrelevante para os propósitos deste trabalho. O que interessa é a direção e o plano de corte que o quasi-gradiente determina.

A.4 Subgradientes: Propriedades

Para se usar o Método de Planos de Corte apresentado na próxima seção é necessário calcular valores e subgradientes da função objetivo e restrições em qualquer ponto do domínio de busca. Nesta seção são apresentadas algumas formas de se calcular subgradientes. As ferramentas apresentadas são derivadas de fórmulas mais gerais que determinam inclusive o conjunto de todos os subgradientes em um ponto. Somente serão apresentados os resultados estritamente necessários para se obter *um* subgradiente em um dado ponto.

- *Funcional Diferenciável.* Se ϕ for convexo e diferenciável em x , então sua derivada no ponto x é um elemento de $\partial\phi(x)$. Na verdade, esta derivada é o único elemento de $\partial\phi(x)$.
- *Multiplicação por Escalar.* Seja $w \geq 0$ e ϕ convexo. Então um subgradiente de $w\phi$ em x é dado por wg , onde g é qualquer subgradiente de ϕ em x .
- *Soma.* Se $\phi(x) = \phi_1(x) + \dots + \phi_m(x)$, onde ϕ_1, \dots, ϕ_m são funcionais convexas, então qualquer g da forma $g = g_1 + \dots + g_m$ pertence a $\partial\phi(x)$, onde $g_i \in \partial\phi_i(x)$.

- *Máximo.* Suponha que

$$\phi(x) = \sup\{\phi_\alpha(x) \mid \alpha \in \mathcal{A}\},$$

onde cada ϕ_α é um funcional convexo, e \mathcal{A} é qualquer conjunto de índices. Suponha agora que $\alpha_{\text{ach}} \in \mathcal{A}$ seja tal que $\phi_{\alpha_{\text{ach}}} = \phi(x)$ (de tal forma que $\phi_{\alpha_{\text{ach}}}$ atinge o máximo). Então se $g \in \partial\phi_{\alpha_{\text{ach}}}(x)$, tem-se que $g \in \partial\phi(x)$. É claro que se existir mais de um índice a atingir o máximo, escolhe-se apenas um deles. Um caso especial é quando ϕ é o máximo entre os funcionais ϕ_1, \dots, ϕ_n , tal que $\mathcal{A} = \{1, \dots, n\}$. Se $\phi(x) = \phi_i(x)$, então qualquer subgradiente g de $\phi_i(x)$ é também um subgradiente de $\phi(x)$.

Note que com os resultados acima, pode-se determinar subgradientes de uma soma ponderada ou máximo ponderado de funcionais convexos.

Para funcionais quasi-convexos também é possível derivar resultados análogos aos do subgradiente (ver [BB91]).

A.5 Método dos Planos de Corte

Considere o seguinte problema de otimização irrestrita:

$$\phi^* \triangleq \min \phi(z). \quad (\text{A.4})$$

Suponha que se tenha calculado os valores da função e pelo menos um subgradiente em x_1, x_2, \dots, x_k :

$$\phi(x_1), \dots, \phi(x_k), \quad g_1 \in \partial\phi(x_1), \dots, g_k \in \partial\phi(x_k). \quad (\text{A.5})$$

Cada um desses pontos e seus respectivos subgradientes formam um limitante inferior afim para a função ϕ :

$$\phi(z) \geq \phi(x_i) + g^T(z - x_i) \quad \text{para todo } z, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Tem-se então que

$$\phi(z) \geq \phi_k^{lb}(z) \triangleq \max_{1 \leq i \leq k} (\phi(x_i) + g^T(z - x_i)). \quad (\text{A.6})$$

Note que ϕ_k^{lb} é uma função convexa, linear por partes, que possui a seguinte característica: é menor ou igual a ϕ em todo o domínio. Então esta função é uma aproximação inferior de ϕ , e a aproximação é exata nos pontos x_1, \dots, x_k , pois $\phi(x_i) = \phi_k^{lb}(x_i)$ para $1 \leq i \leq k$.

Na verdade, ϕ_k^{lb} é a menor função convexa que possui os valores e os subgradientes dados em (A.5). Um exemplo é mostrado na figura A.1. Perceba que

$$\phi^* \geq L_k \triangleq \min_z \phi_k^{lb}(z). \quad (\text{A.7})$$

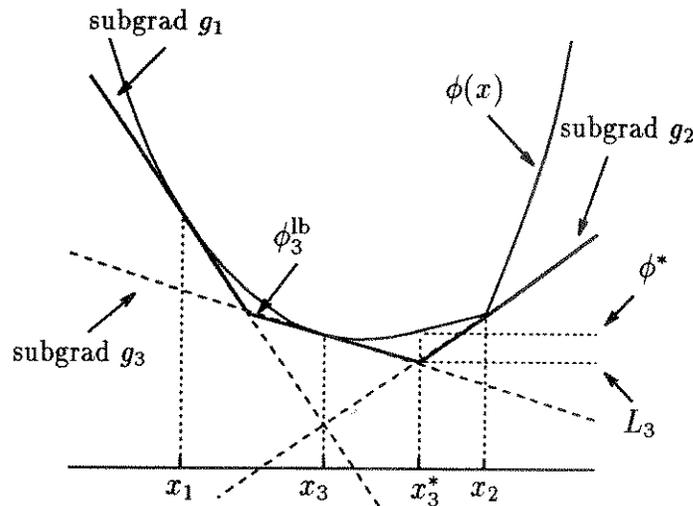


Figura A.1: Ilustração do Método de Planos de Corte

O problema de minimização do lado direito de (A.7) é resolvido via programação linear. Este problema pode ser expresso como

$$\begin{aligned} L_k &= \min_{L,z} L, \\ \phi(x_i) + g_i^T(z - x_i) &\leq L, \quad 1 \leq i \leq k \end{aligned}$$

que possui a forma de um programa linear na variável w :

$$\begin{aligned} L_k &= \min c^T w \\ Aw &\leq b \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde

$$w = \begin{bmatrix} z \\ L \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} g_1^T & -1 \\ \vdots & \vdots \\ g_k^T & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} g_1^T x_1 - \phi(x_1) \\ \vdots \\ g_k^T x_k - \phi(x_k) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Este programa linear não determina somente L_k , mas também um *minimizador* de ϕ_k^{lb} , que será denotado aqui por x_k^* (ver figura A.1).

A expressão (A.7) mostra que conhecendo-se somente um número finito de subgradientes e valores da função pode-se chegar a um limitante inferior para o mínimo

da função. Em geral, tal propriedade não se verifica para funções não-convexas. Esta propriedade é de grande utilidade para se estabelecer um critério de parada para o algoritmo de otimização, de forma a limitar um erro máximo (a diferença entre ϕ^* e L_k).

A função ϕ_k^{lb} pode ser ilimitada no seu mínimo, principalmente para $k = 1$ e $g_1 \neq 0$. Para se evitar isso, é recomendável que se limite as variáveis do problema, ou seja, deve-se considerar

$$\phi^* = \min_{z_{min} \leq z \leq z_{max}} \phi(z).$$

Neste caso, obtém-se o limite inferior

$$L_k = \min_{z_{min} \leq z \leq z_{max}} \phi_k^{lb}(z)$$

que pode ser calculado adicionando-se a restrição $z_{min} \leq z \leq z_{max}$ ao programa linear (A.8).

Com os valores de ϕ calculados nos pontos x_1, \dots, x_k , obtém-se um limite superior U_k para ϕ^* :

$$U_k \triangleq \min_{1 \leq i \leq k} \phi(x_i)$$

que representa o menor valor da função objetivo até então encontrado.

Se um valor da função objetivo e seu respectivo subgradiente são calculados em um outro ponto x_{k+1} , os novos limites inferior e superior são melhorados:

$$L_k \leq L_{k+1} \leq \phi^* \leq U_{k+1} \leq U_k.$$

O algoritmo de Planos de Corte também pode ser usado para a solução de problemas de otimização restrita, isto é,

$$\phi^* = \min_{\psi(z) \leq 0} \phi(z). \quad (\text{A.10})$$

A idéia básica é a mesma, só que agora deve-se fazer uma aproximação linear da função objetivo e do conjunto definido pelas restrições convexas. Suponha que se tenha calculado os valores e subgradientes da função objetivo e das restrições nos pontos x_1, \dots, x_k :

$$\begin{aligned} \phi(x_1), \dots, \phi(x_k), \quad g_1 \in \partial\phi(x_1), \dots, g_k \in \partial\phi(x_k) \\ \psi(x_1), \dots, \psi(x_k), \quad h_1 \in \partial\psi(x_1), \dots, h_k \in \partial\psi(x_k). \end{aligned}$$

Os pontos x_i não precisam ser necessariamente factíveis. Com isso, constrói-se funções limitantes, lineares por partes para o objetivo e restrições: ϕ_k^{lb} é dado por (A.6) e

$$\psi_k^{lb}(z) \triangleq \max_{1 \leq i \leq k} (\psi(x_i) + h^T(z - x_i)). \quad (\text{A.11})$$

que satisfaz $\psi_k^{\text{lb}}(z) \leq \psi(z)$ para todo $z \in \mathfrak{R}^n$.

Desta forma obtém-se um limitante inferior do problema (A.10):

$$\phi^* \geq L_k \triangleq \min\{\phi_k^{\text{lb}}(z) \mid \psi_k^{\text{lb}}(z) \leq 0\}. \quad (\text{A.12})$$

De forma similar ao caso irrestrito, o problema de otimização do lado direito de (A.12) é equivalente ao programa linear:

$$\begin{aligned} L_k = \min \quad & c^T w \\ \text{Aw} \leq & b \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

onde agora

$$w = \begin{bmatrix} z \\ L \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} g_1^T & -1 \\ \vdots & \vdots \\ g_k^T & -1 \\ h_1^T & 0 \\ \vdots & \vdots \\ h_k^T & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} g_1^T x_1 - \phi(x_1) \\ \vdots \\ g_k^T x_k - \phi(x_k) \\ h_1^T x_1 - \psi(x_1) \\ \vdots \\ h_k^T x_k - \psi(x_k) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Note que o limite inferior L_k pode ser calculado, não importando quais os pontos (e os respectivos subgradientes) escolhidos.

Um critério de parada para o algoritmo de otimização do problema com restrições (A.10) pode ser indicado através de um erro máximo na aproximação da função objetivo e do conjunto definido pelas restrições.

Apêndice B

Subgradientes de Algumas Especificações de Projeto

B.1 Introdução

Este Apêndice apresenta os cálculos dos subgradientes das especificações de projeto utilizadas no presente trabalho. Como estas especificações de projeto são funcionais convexos em \mathcal{H} , um espaço de dimensão infinita, os seus respectivos subgradientes são funcionais lineares sobre \mathcal{H} .

Em geral os funcionais convexos considerados são funcionais de algum elemento h_{ij} da matriz de malha fechada H . Para simplificar a notação, este Apêndice usa o símbolo H para denotar somente os elementos relevantes da matriz de malha fechada.

B.2 Resposta RMS

Considere a seguinte norma ponderada \mathbf{H}_2 ,

$$\phi(H) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_w(\omega) |H(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}$$

onde $S_w(\omega)$ é a densidade espectral de potência da entrada exógena w .

Por simplicidade, considere também H monovariável e $S_w(\omega) \geq 0$. A seguir, determina-se um subgradiente de ϕ no ponto (função de transferência) H_0 . Se $\phi(H_0) = 0$, então o funcional zero é um subgradiente. Para o caso em que $\phi(H_0) \neq 0$, tem-se que ϕ é diferenciável em H_0 e só existe um subgradiente neste ponto: a derivada de ϕ em H_0 , isto é, o funcional linear ϕ^{sg} dado por ([BB91])

$$\phi^{sg}(H)|_{H=H_0} = \frac{1}{2\pi\phi(H_0)} \int_{-\infty}^{\infty} S_w(\omega) \Re \left(\overline{H_0(j\omega)} H(j\omega) \right) d\omega$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz pode ser usada para se provar que (A.2) é satisfeita para o subgradiente acima: através do Teorema de Parseval tem-se que

$$\begin{aligned}\phi(H) &= \|H\|_2 \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|H(j\omega)\|^2 d\omega \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^{\infty} h^2(t) dt \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Mostra-se em seguida que

$$\phi^{sg}(H) = \frac{1}{\phi(H_0)} \int_0^{\infty} h_0(t) h(t) dt$$

é o respectivo subgradiente de ϕ no ponto H_0 . Basta verificar que

$$\phi(H) \geq \phi(H_0) + \phi^{sg}(H - H_0) \quad (\text{B.1})$$

é verdadeira para todo H . Analisando o lado direito de (B.1),

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{\infty} h_0^2(t) dt \right)^{1/2} + \frac{1}{\phi(H_0)} \int_0^{\infty} h_0(t) (h(t) - h_0(t)) dt &= \\ &= \left(\int_0^{\infty} h_0^2(t) dt \right)^{1/2} - \frac{1}{\phi(H_0)} \int_0^{\infty} h_0^2(t) dt + \frac{1}{\phi(H_0)} \int_0^{\infty} h_0(t) h(t) dt \\ &= \phi(H_0) - \frac{1}{\phi(H_0)} \phi(H_0)^2 + \frac{1}{\phi(H_0)} \int_0^{\infty} h_0(t) h(t) dt\end{aligned}$$

sabe-se que

$$\frac{1}{\phi(H_0)} \int_0^{\infty} h_0(t) h(t) dt = \frac{1}{\phi(H_0)} \langle h_0(t), h(t) \rangle \quad (\text{B.2})$$

e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\frac{1}{\phi(H_0)} \int_0^{\infty} h_0(t) h(t) dt \leq \frac{1}{\phi(H_0)} \|h_0\| \|h(t)\| = \phi(H) \quad (\text{B.3})$$

e a desigualdade (B.1) é satisfeita.

B.3 Overshoot

Considere o funcional que representa o *overshoot*

$$\phi_{os}(H) = \sup_{t \geq 0} s(t) - 1,$$

onde $s(t)$ é a resposta ao degrau unitário da função de transferência H . Deseja-se determinar um subgradiente de $\phi_{os}(H)$ em H_0 . A resposta ao degrau unitário de H_0 será denotada por s_0 .

Para cada $t \geq 0$, define-se um funcional $\phi^{\text{step},t}$ da seguinte forma: $\phi^{\text{step},t}(H) = s(t)$. O funcional $\phi^{\text{step},t}$ avalia a resposta ao degrau unitário de seu argumento no instante t . Este funcional é linear em \mathcal{H} , pois pode ser expresso como

$$\phi^{\text{step},t}(H) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} H(j\omega) d\omega.$$

Note que se pode expressar o funcional ϕ_{os} como o máximo entre os funcionais afins $\phi^{\text{step},t} - 1$:

$$\phi_{os}(H) = \sup_{t \geq 0} \phi^{\text{step},t}(H) - 1.$$

Seja t_0 qualquer instante de tempo em que o *overshoot* é atingido, isto é, $\phi_{os}(H_0) = s_0(t_0) - 1$. É claro que podem existir outros instantes em que o *overshoot* é atingido; t_0 pode ser qualquer um deles.

Utilizando a regra do máximo discutida na seção A.4, qualquer subgradiente do funcional $\phi^{\text{step},t_0}(H) - 1$ é um subgradiente de ϕ_{os} em H_0 . Mas o funcional $\phi^{\text{step},t_0}(H) - 1$ é afim; sua derivada é simplesmente ϕ^{step,t_0} . Com isto está determinado que o funcional ϕ^{step,t_0} é um subgradiente de ϕ em H_0 .

B.4 Ganho de Pico

Considere o funcional de ganho de pico

$$\phi(H) = \|H\|_{gp} = \int_0^{\infty} |h(t)| dt.$$

Seja h_0 a resposta ao impulso da função de transferência H_0 . Para todo $t \geq 0$ define-se um funcional que avalia o valor absoluto da resposta ao impulso de seu argumento no instante t :

$$\phi^{\text{abs},h,t}(H) = |h(t)|.$$

Esses funcionais são convexos, então pode-se expressar ϕ como

$$\phi(H) = \int_0^{\infty} \phi^{\text{abs},h,t}(H) dt.$$

Tratando-se esta integral como uma soma generalizada, a partir da regra da soma discutida no Apêndice A, é razoável pensar que o funcional linear

$$\phi^{\text{sg}}(H) = \int_0^{\infty} \phi^{\text{sg},t}(H) dt$$

é um subgradiente de ϕ , onde para cada t , $\phi^{\text{sg},t}$ é um subgradiente de $\phi^{\text{abs-h},t}$ em H_0 . Esses funcionais são diferenciáveis para todo t tal que $h_0(t) \neq 0$, e 0 é um subgradiente de $\phi^{\text{sg},t}$ em H_0 para t tal que $h_0(t) = 0$. Uma forma mais específica que a anterior seria

$$\phi^{\text{sg}}(H) = \int_0^\infty \text{sgn}(h_0(t))h(t)dt.$$

A seguir verifica-se que o funcional acima é um subgradiente de ϕ em H_0 . Para cada t e qualquer h , tem-se que $|h(t)| \geq \text{sgn}(h_0(t))h(t)$. Então

$$\phi(H) = \int_0^\infty |h(t)|dt \geq \int_0^\infty \text{sgn}(h_0(t))h(t)dt$$

esta equação pode ser reescrita como

$$\phi(H) \geq \int_0^\infty (|h_0(t)| + \text{sgn}(h_0(t))(h(t) - h_0(t)))dt = \phi(H_0) + \phi^{\text{sg}}(H - H_0)$$

Isto verifica que ϕ^{sg} é um subgradiente de ϕ em H_0 .

Referências Bibliográficas

- [BB91] Boyd, S.P. & C. H. Barratt. **Linear Controller Design-Limits of Performance**, Prentice Hall, 1991.
- [BBB88] S. Boyd, V. Balakrishnan, C. Barratt, N. Khraishi, X. Li, D. Meyer, and S. Norman. **A new method and associated architectures for linear controllers**. IEEE Trans. Aut. Control, AC-33(3):268-283, March 1988.
- [BBF87] L. C. Barroso, M. M. A. Barroso, F. F. C. Filho, M. B. de Carvalho e M. L. Maia. **Cálculo Numérico (Com Aplicações)**. Segunda edição. Editora Harbra Ltda., 1987.
- [CF92] Carvalho J. R. H. & P. A. V. Ferreira. **Uma Abordagem Para o Problema de Controle Multicritério de Sistemas Dinâmicos**. Anais do 9^o Congr. Bras. de Automática. Vitória - ES, 1992.
- [Chen84] C. T. Chen. **Linear System Theory and Design**. Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- [DC75] C. A. Desoer and W. S. Chan. **The Feedback Interconnection of Lumped Linear Time-Invariant Systems**. J. Franklin Inst., 300(5 and 6):335-351, 1975.
- [DLM80] C. A. Desoer, R. W. Liu, J. Murray, and R. Saeks. **Feedback System Design: The Fractional Representation Approach to Analysis and Synthesis**. IEEE Trans. Aut. Control, AC-25(3):399-412, June 1980.
- [FC93] Carvalho J. R. H. & Ferreira, P.A.V. **Multiple Criteria Control: A Convex Programming Approach**, Automatica, submetido, 1993.
- [FG90] Ferreira, P.A.V. & J. C. Geromel. **An Interactive Projection Method for Multicriteria Optimization Problems**. IEEE Trans. Sys., Man, and Cyb., vol. SMC-20, n^o 3, 1990.
- [Fran87] Francis, Bruce A. **A Course in H^∞ Control Theory**. Springer-Verlag, 1987.

- [GH75] Gembicki, Floyd W. and Yacob Y. Haimes. **Approach to Performance and Sensitivity Multiobjective Optimization: The Goal Attainment Method.** IEEE Trans. on Aut. Control, December 1975.
- [Las70] Lasdon, Leon S. **Optimization Theory for Large Systems.** Macmillan Publishing Co., Inc., 1970.
- [Lips85] Seymour Lipschultz. **Algebra Linear.** Coleção Schaum, 1985.
- [MAT40] **MATLAB 4.0 Reference Guide.** The MathWorks Inc. August, 1992.
- [MATCT] **MATLAB 4.0 Control Toolbox.** The MathWorks Inc. July, 1992.
- [Oga90] Ogata, K. **Modern Control Engineering.** Prentice-Hall, 1990.
- [PoSal89] Polak, E. and S. E. Salcudean. **On the Design of Linear Multivariable Feedback Systems via Constrained Nondifferentiable Optimization in H^∞ Spaces.** IEEE Trans. on Aut. Control, Vol. 34, N^o 3, 1989.
- [Vid72] M. Vidyasagar. **Input-Output Stability of a Broad Class of Linear-Time-Invariant Multivariable Feedback System.** SIAM J. Control 10, pp. 203-209, Feb. 1972.
- [Vid85] M. Vidyasagar. **Control System Synthesis: A factorization Approach.** MIT Press, 1985.
- [YJBI76] D. C. Youla, H. A. Jabr, & J. J. Bongiorno. **Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers - Part I: The Single-Input Case.** IEEE Trans. Aut. Control. AC-21:319-338, June 1976.
- [YJBII76] D. C. Youla, H. A. Jabr, & J. J. Bongiorno. **Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers - Part II: The Multivariable Case.** IEEE Trans. Aut. Control. AC-21:3-14, Feb. 1976.