

Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por Glauco Guaitoli
e aprovada pela Comissão
Julgadora em 25 / 11 / 94.
Pedro Luis Dias Peres
Orientador

LAC

Universidade Estadual de Campinas

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA

Laboratório de Análise Convexa



Controle Robusto de Sistemas Incertos

Contínuos com Alocação de Pólos

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de
Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de
Mestre em Engenharia Elétrica.

por

Glauco Guaitoli

Engenheiro Eletricista - UNESP - Ilha Solteira

em 25 de novembro de 1994 perante a banca examinadora

Pedro Luis Dias Peres

– Orientador

Antônio Marcus Nogueira Lima

– DEE/UFPB

Rafael Santos Mendes

– DCA/FEE/UNICAMP

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA	T/unicamp
V.	Ex. 931e
TOMBO BC	26.454
PROC.	667/96
C	☐
D	☒
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	16/01/96
N.º CPD	

CM-00082832-5

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

G931e Guaitoli, Glauco
Controle robusto de sistemas incertos contínuos com
alocação de pólos / Glauco Guaitoli.--Campinas, SP:
[s.n.], 1995.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica.

1. Domínios convexos. 2. Controle automático.
3. Sistemas de controle por realimentação. I. Peres, Pedro
Luis Dias. II. Universidade Estadual de Campinas.
Faculdade de Engenharia Elétrica. III. Título.

*Aos meus pais:
Cecília e Esneider*

“Temos que exterminar da alma, com a raiz, todo o medo e o terror daquilo que, do futuro, vem ao encontro do Homem.

Serenidade em relação a todos os sentimentos e sensações perante o futuro, o Homem tem que adquirir. Encarar com absoluta equanimidade tudo aquilo que possa vir, e pensar somente, que tudo o que vier virá a nós de uma direção universal plena de sabedoria.

É isto que temos que aprender em nossa época: viver em plena confiança, sem qualquer segurança existencial, confiança na ajuda sempre presente do mundo espiritual. Realmente, não é possível de outra forma.

Disciplinemos devidamente nossa vontade e procuremos o despertar a partir do interior, todas as manhãs e todas as noites.”

*Rudolf Steiner
Brehmen, 27/11/1910*

Agradecimentos

- Pela amizade, incentivo e a sincera orientação ao Prof. Pedro Luis Dias Peres.
- Aos antigos e eternos amigos: Claudio, Joaquim e Pereira.
- Aos novos e também eternos amigos: Andréa, Elton, Hamilton, Julimara, Júnior, Michelle, Nádia e Sirlene.
- A Cristina, pela paciência, incentivo e carinho.
- A Faculdade de Engenharia Elétrica da Unicamp e, em especial, a todo Departamento de Telemática.
- A CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Este trabalho trata da síntese de controladores de realimentação de estado, para sistemas dinâmicos lineares contínuos no tempo, com restrição de alocação de pólos em sub-regiões do plano complexo. As sub-regiões consideradas são: faixa vertical, circunferência e região parabólica. Sistemas com parâmetros incertos pertencentes a domínios poliedrais convexos também são considerados. Como critérios de desempenho foram utilizados norma $\mathcal{H}_2$, norma $\mathcal{H}_\infty$ e índices mistos $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Um algoritmo que permite a resolução dos problemas de controle robusto com alocação de pólos é apresentado, e também exemplos numéricos ilustrativos.

ABSTRACT

This work addresses the state feedback control design for linear continuous time systems with regional pole constraints. The subregions of the complex plane considered are: vertical strip, circle and parabolic region. Uncertain systems in convex bounded domains can also be handled. The performance criteria used are: $\mathcal{H}_2$ norm, $\mathcal{H}_\infty$ norm and mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ index. An algorithm to solve the robust control problems with regional pole constraints is presented, as well as numerical illustrative examples.

Conteúdo

Introdução Geral	1
1 Controle de Sistemas Contínuos	4
1.1 Introdução	4
1.2 Preliminares	4
1.3 Estabilidade Quadrática	6
1.4 Controle $\mathcal{H}_2$	8
1.4.1 Caso Precisamente Conhecido	10
1.4.2 Solução via Análise Convexa	11
1.5 Controle $\mathcal{H}_\infty$	12
1.5.1 Caso Precisamente Conhecido	13
1.5.2 Solução via Análise Convexa	14
1.6 Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	18
1.7 Conclusão	19
2 Sub-regiões de Alocação	20
2.1 Introdução	20
2.2 Alocação em Faixa Vertical	21
2.3 Alocação em uma Região Circular	23
2.4 Alocação em Região Parabólica	24
2.5 Conclusão	25
3 Controle de Sistemas com Alocação de Pólos	26
3.1 Introdução	26
3.2 Faixa Vertical	26
3.3 Região Circular	30
3.4 Região Parabólica	33

3.5	Conclusão	36
4	Exemplos	37
4.1	Introdução	37
4.2	Método de Planos de Corte	37
4.3	Exemplo	40
4.3.1	Controle $\mathcal{H}_2$ com alocação em uma Faixa	41
4.3.2	Controle $\mathcal{H}_\infty$ com alocação em uma Região Circular	43
4.3.3	Controle Misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ com alocação em uma Região Parabólica	44
4.3.4	Caso Precisamente Conhecido	45
4.4	Conclusão	47
	Conclusão Geral	48
	Bibliografia	50
	Apêndice	54
A	Equivalência para Alocação em Círculo	54
A.1	Introdução	54
A.2	Equivalência entre Condições	54

Lista de Tabelas

4.1	Otimização $\mathcal{H}_2$ e Alocação em uma faixa.	42
4.2	Otimização $\mathcal{H}_\infty$ e Alocação em uma Região Circular.	44
4.3	Otimização $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ e Alocação em uma Região Parabólica.	45
4.4	Otimização $\mathcal{H}_2$ - Caso Precisamente Conhecido.	46

Lista de Figuras

2.1	Região de Alocação	21
2.2	Alocação em uma faixa: $\mathcal{V}(\alpha, \beta)$	22
2.3	Alocação em um círculo: $\mathcal{U}(\delta, \rho)$	23
2.4	Alocação em uma região parabólica $\mathcal{D}(\psi, \phi)$	25
4.1	Politopo Inicial $\mathcal{P}^0$	39
4.2	Politopo $\mathcal{P}^1$	39
4.3	Politopo $\mathcal{P}^2$	40
4.4	Nuvs de Pólos - Otimização $\mathcal{H}_2$	42
4.5	Nuvs de Pólos - Otimização $\mathcal{H}_\infty$	43
4.6	Nuvs de Pólos - Otimização $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	44
4.7	Localização dos Pólos - Otimização $\mathcal{H}_2$	46
A.1	Alocação em um círculo: $\mathcal{U}(\delta, \rho)$	55

Introdução Geral

Um dos principais problemas, em projetos de controle, é a alocação dos pólos do sistema em malha fechada. Isto porque, garantir a estabilidade e minimizar o distúrbio por meio de normas do tipo $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ nem sempre é o suficiente para o funcionamento a contento de um sistema. É necessário ainda, a garantia de desempenho do sistema em termos de fator de amortecimento, velocidade de resposta e frequência natural. Todos esses índices estão relacionados com a correta localização dos autovalores do sistema em malha fechada. Na maior parte dos casos, ao invés da alocação precisa, delimitar uma sub-região do plano complexo na qual devem estar contidos os pólos em malha fechada é a melhor garantia de desempenho e talvez a única maneira de abordar o problema quando se trata de sistemas incertos.

Por outro lado, problemas de robustez e otimização, utilizando as normas $\mathcal{H}_2$ e/ou $\mathcal{H}_\infty$, têm sido amplamente explorados em Teoria de Controle [9], assim como projetos de controladores que levam em conta a presença de incertezas no modelo. A otimização $\mathcal{H}_2$ nada mais é do que o conhecido problema de minimização de um critério quadrático de desempenho, chamado Problema Linear Quadrático no contexto de controle ótimo de sistemas lineares. Do ponto de vista de sinais, a otimização $\mathcal{H}_2$ pode ser interpretada como a minimização de um erro quadrático médio na saída do sistema.

Os critérios do tipo $\mathcal{H}_\infty$, mais recentes, se preocupam com medidas do tipo “pior caso”, tendo surgido em abordagens frequenciais de projetos de controladores, embora também admitam soluções no espaço de estados [9], [16], [26].

Dentro do contexto de estabilidade quadrática [5], [24], [30], isto é, sistemas lineares incertos que admitem um mesmo controlador e uma mesma função de Lyapunov para todo o domínio de incertezas considerados, os projetos de controladores com critérios de desempenho $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ adquiriram o adjetivo de robustos, com custos garantidos. Podem ser citados, para sistemas contínuos, trabalhos que tratam de estabilização quadrática [12], controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ [22], controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$ [26],

[31] ou controle com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ [25], entre outros.

A convexidade tem aparecido, em alguns desses trabalhos, como uma propriedade essencial, principalmente quando soluções numéricas são investigadas [7], [12]. Usando um espaço paramétrico apropriado, é possível transformar problemas de controle em problemas convexos, que podem ser resolvidos por técnicas convencionais de otimização. Graças à convexidade, é possível estender esses resultados para o tratamento de incertezas no modelo, permitindo ainda incluir restrições adicionais como, por exemplo, a descentralização do controle [11]. Formulando os critérios $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ adequadamente, pode-se resolver problemas de controle ótimo e também de custo garantido $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ [14], [25], [26].

Mais recentemente, alguns trabalhos começaram a incorporar restrições de alocação de pólos no projeto de controladores [3], [4], [10], [13], [20], [21], [23], [35], [36].

A idéia principal utilizada é a de expressar condições que garantam um posicionamento dos pólos do sistema dentro de uma determinada sub-região do plano complexo em termos dos parâmetros envolvidos no projeto do controlador. Como grande parte dos métodos de síntese baseia-se em funções quadráticas de Lyapunov, que garantem a alocação no semi-plano esquerdo do plano complexo, explora-se o fato de que algumas sub-regiões do plano complexo podem ser mapeadas analiticamente no semi-plano esquerdo. Por exemplo, passa-se da análise da estabilidade de sistemas contínuos (semi-plano esquerdo) à de sistemas discretos (círculo unitário centrado na origem) trocando a equação de Lyapunov de sistemas contínuos ($A'P + PA + Q = 0$) pela de sistemas discretos no tempo ($A'PA - P + Q = 0$). Pelo deslocamento e interseção dessas regiões, novas sub-regiões podem ser abordadas.

Em [19], o problema de alocação de pólos para sistemas contínuos é tratado em detalhes. O artigo explora a idéia dos mapeamento analíticos em termos de função de Lyapunov, estudando diversas sub-regiões. Para a alocação em região circular, é proposta uma equação modificada de Lyapunov, que revelou-se, entretanto, equivalente à equação utilizada nesta dissertação, obtida a partir da translação e alteração do raio do círculo unitário centrado na origem (veja a relação entre as expressões no apêndice).

A extensão dos resultados de [19] para tratar sistemas incertos não é imediata, pois as equações do tipo Lyapunov associadas às sub-regiões não estão expressas nos parâmetros apropriados, sendo necessária alguma manipulação.

Este trabalho trata do problema de minimização das norma $\mathcal{H}_2$ e/ou $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas contínuos, incertos, controlados via realimentação de estados, com alocação dos autovalores em sub-regiões do plano complexo. São tratadas as seguintes sub-

regiões: faixa vertical, círculo e parábola, e também interseções entre elas. O domínio de incertezas é considerado poliedral convexo. Dessa forma, o problema de custo garantido $\mathcal{H}_2$ e/ou $\mathcal{H}_\infty$ via realimentação de estados pode ser resolvido via análise convexa. Restrições adicionais, também convexas, são definidas de modo a garantir o posicionamento desejado dos autovalores.

No capítulo 1 é visto o problema de estabilidade quadrática e minimização das normas $\mathcal{H}_2$ e/ou $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas incertos. Esse capítulo resume os resultados de vários trabalhos que se preocupam em resolver o problema de custo garantido via análise convexa.

Em seguida, no capítulo 2, são vistas as sub-regiões de alocação. Para se garantir o posicionamento dos pólos dentro da sub-região desejada do plano complexo, equações do tipo Lyapunov são utilizadas. A idéia básica é utilizar um mapeamento analítico que leve do semi-plano esquerdo do plano complexo (ou do círculo unitário centrado na origem) para a região especificada.

O capítulo 3 mostra condições que garantem a minimização de limitantes das normas $\mathcal{H}_2$ e/ou $\mathcal{H}_\infty$ com os pólos localizados no interior das sub-regiões do plano complexo vistas no capítulo anterior.

No capítulo 4 é apresentado o algoritmo baseado no método de planos de corte que soluciona o problema. Em seguida são apresentados exemplos ilustrativos.

Capítulo 1

Controle de Sistemas Contínuos

1.1 Introdução

Neste capítulo, a estabilidade de sistemas incertos é estudada. O problema de controle é, basicamente, encontrar um mesmo ganho de realimentação de estados que garanta a estabilidade para todo o domínio de incertezas. Depois da caracterização do conjunto de ganhos que estabilizam um sistema incerto, serão estudados índices de desempenho do tipo $\mathcal{H}_2$ e/ou $\mathcal{H}_\infty$ que norteiem a escolha de um ganho estabilizante segundo critérios de otimalidade.

1.2 Preliminares

Considere o seguinte sistema linear, contínuo e invariante no tempo

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ y &= Cx + Du \\ u &= -Kx \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $w \in \mathbb{R}^l$ é o distúrbio e $y \in \mathbb{R}^q$ é a saída. As matrizes possuem dimensões apropriadas e são supostas conhecidas, com exceção de A e B_2 que podem possuir parâmetros incertos. Esta representação é bastante comum em problemas de controle envolvendo normas $\mathcal{H}_2$ e/ou $\mathcal{H}_\infty$ de matrizes de transferência [8], [9], [22]. Note que a definição da saída $y(t)$ tem analogia direta com o critério quadrático em controle ótimo, pois

$$\int_0^\infty y(t)'y(t) dt = \int_0^\infty [x(t)'C'Cx(t) + u(t)'D'Du(t)] dt \quad (1.2)$$

Para maiores detalhes veja [2]. A interpretação das hipóteses colocadas a seguir decorre desta analogia.

Assume-se que $C'D = \mathbf{0}$, ou seja, não existe ponderação cruzada entre o controle e o estado na saída, $D'D > \mathbf{0}$ (todos os controles são ponderados positivamente) e que $B_1B_1' > \mathbf{0}$. As duas primeiras hipóteses são tradicionais em problemas de controle; a ortogonalidade $C'D = \mathbf{0}$ poderia ser relaxada sem perda de generalidade, resultando em equações e demonstrações ligeiramente mais complicadas. A exigência $D'D > \mathbf{0}$ auxilia no condicionamento da solução ótima. Finalmente, a hipótese $B_1B_1' > \mathbf{0}$ caracteriza a influência dos ruídos exógenos como sendo “rica” e também não implica em perda de generalidade [16]. A lei de controle que se deseja determinar é do tipo realimentação de estado.

Associadas ao sistema (1.1) introduzimos as matrizes aumentadas $F \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e $G \in \mathbb{R}^{p \times m}$ com $p = n + m$

$$F = \begin{bmatrix} A & -B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

e também as matrizes simétricas e semi-definidas positivas $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$.

$$Q = \begin{bmatrix} B_1B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} C'C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D'D \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Note que a matriz G é constante, não dependendo da planta em questão, e que toda a informação sobre a dinâmica do sistema está concentrada na matriz F . Definimos também o espaço nulo de G' , ou seja

$$\mathcal{N} \triangleq \{v \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^p : G'v = 0\} \quad (1.5)$$

e qualquer vetor $v \in \mathcal{N}$ tem a propriedade

$$v \in \mathcal{N} \iff v = \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad x \neq 0 \in \mathbb{R}^n \quad (1.6)$$

Consideramos que alguns dos elementos das matrizes (A, B_2) são incertos, isto é, não são conhecidos com precisão, sabendo-se apenas que estão limitados. Essas incertezas são definidas diretamente na matriz aumentada F , considerada pertencente

a um domínio poliedral convexo dado por

$$\mathcal{D}_F = \left\{ F \in \mathbb{R}^{p \times p} : F = \sum_{i=1}^N \xi_i F_i, \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1 \right\} \quad (1.7)$$

onde um F qualquer pode ser visto como uma combinação convexa das “matrizes vértices” F_i , $i = 1 \cdots N$. Naturalmente, $N = 1$ descreve o caso precisamente conhecido.

1.3 Estabilidade Quadrática

O problema consiste em se determinar um ganho $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tal que o sistema em malha fechada fechada

$$A_{cl} \triangleq A - B_2 K \quad (1.8)$$

seja assintoticamente estável (isto é, com parte real de todos os seus autovalores estritamente negativa) para todo par $(A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$. Esse problema, extremamente complicado no espaço paramétrico dos elementos da matriz K , pode ser contornado se usarmos o conceito de estabilidade quadrática. Estabilidade quadrática de um sistema incerto significa a existência de uma mesma função quadrática de Lyapunov que assegura a estabilidade para todo domínio de incertezas, ou seja, existe uma mesma matriz $P = P' > \mathbf{0}$ tal que

$$A_{cl}' P + P A_{cl} < \mathbf{0}, \quad (1.9)$$

ou, equivalentemente, existe $W = W' > \mathbf{0}$ tal que

$$A_{cl} W + W A_{cl}' + B_1 B_1' \leq \mathbf{0}, \quad \forall F \in \mathcal{D}_F \quad (1.10)$$

Definindo

$$\mathcal{K} \triangleq \left\{ K \in \mathbb{R}^{m \times n} : A_{cl} \text{ quadraticamente estável.} \right\} \quad (1.11)$$

isto é, $\mathcal{K}$ é o conjunto dos ganhos de realimentação de estado que asseguram a estabilidade quadrática. É importante observar que o conjunto $\mathcal{K}$ é não convexo e explorá-lo sob o ponto de vista numérico pode ser muito complicado. Essa dificuldade pode ser contornada definindo-se um novo espaço paramétrico [12]. Para isto definem-se as funções matriciais $\Theta_{2i}(\cdot) : \mathbb{R}^{p \times p} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$

$$\Theta_{2i}(W) = F_i W + W F_i' + Q, \quad i = 1 \cdots N \quad (1.12)$$

e o conjunto

$$\mathcal{C}_2 \triangleq \bigcap_{i=1}^N \mathcal{C}_{2i} \quad (1.13)$$

onde,

$$\mathcal{C}_{2i} = \left\{ \mathcal{W} \geq \mathbf{0} : v' \Theta_{2i}(\mathcal{W}) v \leq 0, \forall v \in \mathcal{N}, \|v\| = 1 \right\} \quad (1.14)$$

sendo as matrizes $\mathcal{W}$ particionadas na forma

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

com $W_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva, $W_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $W_3 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Tem-se então o seguinte resultado [12].

Lema 1 O conjunto dos ganhos quadraticamente estabilizantes é dado por

$$\mathcal{K} = \{W_2' W_1^{-1} : \mathcal{W} \in \mathcal{C}_2\} \quad (1.16)$$

onde $\mathcal{C}_2$, definido em (1.13), é um conjunto convexo

Prova: Partindo de uma matriz $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_2$, tem-se $\forall v \in \mathcal{N}$

$$v' [F_i \mathcal{W} + \mathcal{W} F_i' + Q] v \leq 0 \quad \forall i = 1 \dots N \quad (1.17)$$

e portanto,

$$x' [A_i W_1 + W_1 A_i' - B_{2i} W_2' - W_2 B_{2i}' + B_1 B_1'] x \leq 0 \quad \forall i = 1 \dots N \quad (1.18)$$

rearranjando

$$x' [(A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1})' + B_1 B_1'] x \leq 0 \quad \forall i = 1 \dots N \quad (1.19)$$

ou

$$(A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1})' + B_1 B_1' \leq \mathbf{0} \quad \forall i = 1 \dots N \quad (1.20)$$

Multiplicando por ξ_i e fazendo a soma de 1 a N , tem-se que, com $K = W_2' W_1^{-1}$

$$A_{cl} W_1 + W_1 A_{cl}' + B_1 B_1' \leq \mathbf{0} \quad \forall F \in \mathcal{D}_F \quad (1.21)$$

Para mostrar a necessidade, partindo da existência de K e $W = W' > \mathbf{0}$ tais que

$$(A - B_2K)W + W(A - B_2K)' + B_1B_1' \leq \mathbf{0} \quad \forall F \in \mathcal{D}_F \quad (1.22)$$

é fácil constatar que a matriz

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W & WK' \\ KW & KWK' \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

satisfaz a condição

$$v' \Theta_{2i}(\mathcal{W})v \leq 0 \quad \forall v \in \mathcal{N}, \quad \|v\| = 1 \quad (1.24)$$

para todo $F \in \mathcal{D}_F$ e, em particular, nos vértices do poliedro, $i = 1 \dots N$, implicando $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_2$. A convexidade de $\mathcal{C}_2$ é evidente, pois o cone de matrizes $\mathcal{W} \geq \mathbf{0}$ é convexo e $\Theta_{2i}(\mathcal{W})$ é afim em W para todo $i, i = 1 \dots N$.

□

O primeiro fato importante aqui é que $\mathcal{C}_2$ mapeia completamente o conjunto dos ganhos $\mathcal{K}$ que estabilizam quadraticamente o sistema (1.1). O segundo, e fundamental para a resolução numérica dos problemas que serão tratados a seguir, é que $\mathcal{C}_2$ é convexo e portanto pode-se, a partir de uma matriz $\mathcal{W}_0 \notin \mathcal{C}_2$, obter a expressão de um hiperplano que separa $\mathcal{W}_0$ do conjunto $\mathcal{C}_2$.

1.4 Controle $\mathcal{H}_2$

A norma $\mathcal{H}_2$ é bastante utilizada em teoria de controle como medida de índice de desempenho (por exemplo, no problema clássico Linear Quadrático). Nesta seção, primeiramente é apresentada a definição freqüencial da norma $\mathcal{H}_2$ e a sua determinação a partir dos gramianos. A seguir é discutida a otimização desta norma propriamente dita. Considerando-se $F \in \mathcal{D}_F$ arbitrária porém fixa e um ganho de realimentação de estados $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pode-se definir as matrizes em malha fechada

$$A_{cl} = A - B_2K \quad , \quad C_{cl} = C - DK \quad (1.25)$$

A função de transferência de w para y é dada por

$$H = C_{cl}(s\mathbf{I} - A_{cl})^{-1}B_1 \quad (1.26)$$

A norma $\mathcal{H}_2$ é definida por

$$\|H\|_2^2 \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}[H(j\omega)^* H(j\omega)] d\omega \quad (1.27)$$

onde $\text{Tr}(\cdot)$ é o operador traço (soma dos elementos da diagonal) e $H(j\omega)^*$ é o conjugado transposto de $H(j\omega)$. Supondo a matriz A_{cl} assintoticamente estável, podemos definir o gramiano de controlabilidade L_c como

$$L_c \triangleq \int_0^\infty e^{A_{cl}t} B_1 B_1' e^{A_{cl}'t} dt \quad (1.28)$$

e o gramiano de observabilidade L_o

$$L_o \triangleq \int_0^\infty e^{A_{cl}'t} C' C e^{A_{cl}t} dt \quad (1.29)$$

que, respectivamente, satisfazem as seguintes equações de Lyapunov

$$A_{cl}L_c + L_c A_{cl}' + B_1 B_1' = \mathbf{0} \quad (1.30)$$

$$A_{cl}'L_o + L_o A_{cl} + C' C = \mathbf{0} \quad (1.31)$$

e norma $\mathcal{H}_2$ é dada por

$$\|H\|_2^2 = \text{Tr}(B_1' L_o B_1) = \text{Tr}(C_{cl} L_c C_{cl}') \quad (1.32)$$

O problema de minimização da norma $\mathcal{H}_2$ pode ser colocado da seguinte forma:

$$\min \left\{ \|H\|_2 : K \in \mathcal{K}, \forall F \in \mathcal{D}_F \right\} \quad (1.33)$$

ou equivalentemente,

$$\min \left\{ \beta : \|H\|_2 \leq \beta : K \in \mathcal{K}, \forall F \in \mathcal{D}_F \right\} \quad (1.34)$$

A solução do problema de otimização para sistemas incertos é obtida de maneira aproximada, ou seja, minimiza-se um limitante superior da norma $\mathcal{H}_2$, obtendo-se um ganho $K \in \mathcal{K}$ e um custo garantido β que satisfaz

$$\|H\|_2 \leq \beta \quad \forall F \in \mathcal{D}_F \quad (1.35)$$

Para sistemas precisamente conhecidos, o valor calculado da norma $\mathcal{H}_2$ iguala-se ao limitante β .

1.4.1 Caso Precisamente Conhecido

Para sistemas precisamente conhecidos, ou seja, $N = 1$, o problema (1.33) tem solução conhecida via equação de Riccati (Problema Ótimo Linear Quadrático). Neste caso um único par (A, B_2) é considerado, e o conjunto $\mathcal{K}$ contém todos os ganhos estabilizantes dos sistema, já que, sem incertezas, a estabilidade quadrática equivale à estabilidade. A solução ótima é então dada por

$$K = (D'D)^{-1}B_2'P \quad (1.36)$$

onde $P \in \Re^{n \times n}$ é uma matriz simétrica definida positiva solução da equação de Riccati

$$A'P + PA - PB_2(D'D)^{-1}B_2'P + C'C = 0 \quad (1.37)$$

Observe que o ganho K e a matriz P podem ser vistos como solução ótima do problema linear quadrático

$$\begin{aligned} \min_u \quad & \int_0^\infty (x'C'Cx + u'D'Du)dt \\ \text{s.a.} \quad & \dot{x} = Ax + B_2u \end{aligned} \quad (1.38)$$

onde

$$x(0) = x_0 \quad (1.39)$$

e o valor ótimo da função objetivo é dado por $J^* = x_0'Px_0$. Como já visto anteriormente, a norma $\mathcal{H}_2$ pode ser calculada a partir dos gramianos de controlabilidade e de observabilidade (1.30)-(1.31). A equação de Riccati (1.37) pode ser re-escrita (levando-se em conta a hipótese de ortogonalidade, $C'D = 0$)

$$(A - B_2K)'P + P(A - B_2K) + (C - DK)'(C - DK) = 0 \quad (1.40)$$

e, comparando com (1.31), pode-se concluir que $P = L_o$ e também

$$J^* = \min \|H\|_2^2 \quad (1.41)$$

desde que $x_0x_0' = B_1B_1'$. Essa solução é de extrema importância em Teoria de Controle, tendo sido exaustivamente estudada na década de 70. Entretanto, a extensão desses resultados para o tratamento de sistemas incertos não é imediata; note que a expressão para o ganho ótimo K envolve explicitamente a matriz B_2 .

Utilizando o espaço paramétrico apresentado no Lema 1, mostra-se que o problema de custo garantido $\mathcal{H}_2$ pode ser resolvido via otimização convexa [25]. Para $N = 1$, a solução ótima é idêntica à obtida via equação de Riccati, configurando assim uma maneira alternativa, convexa, de resolução do Problema Linear Quadrático [16].

1.4.2 Solução via Análise Convexa

A partir da caracterização do conjunto $\mathcal{C}_2$, o conjunto dos ganhos quadraticamente estabilizantes para o sistema (1.1) está completamente mapeado em um conjunto convexo. O lema a seguir permite a obtenção do ganho $K \in \mathcal{K}$ que minimiza um limitante superior da norma $\mathcal{H}_2$.

Lema 2 Considere $\mathcal{W}^*$ dado por

$$\mathcal{W}^* \triangleq \arg \min \left\{ \text{Tr} (R\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in \mathcal{C}_2 \right\} \quad (1.42)$$

Então, $K^* = W_2'W_1^{-1} \in \mathcal{K}$ e

$$\beta^2 \triangleq \text{Tr} (R\mathcal{W}^*) \geq \|H\|_2^2, \quad \forall F \in \mathcal{D}_F \quad (1.43)$$

Prova: A equivalência entre $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_2$ e $K \in \mathcal{K}$ já foi mostrada no Lema 1. Supondo $\mathcal{C}_2 \neq \emptyset$, para todo $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_2$ tem-se

$$\begin{aligned} \text{Tr}(R\mathcal{W}) &= \text{Tr}(C'CW_1 + D'DW_3) \\ &= \text{Tr}(CW_1C' + DW_3D') \end{aligned} \quad (1.44)$$

e levando-se em conta que

$$\mathcal{W} \geq \mathbf{0} \iff W_3 \geq W_2'W_1^{-1}W_2 \quad (1.45)$$

então

$$\text{Tr}(R\mathcal{W}) \geq \text{Tr}(CW_1C' + DW_2'W_1^{-1}W_2D') \quad (1.46)$$

Usando a condição de ortogonalidade $C'D = \mathbf{0}$, pode-se escrever

$$\text{Tr}(R\mathcal{W}) \geq \text{Tr}\left\{(C - DW_2'W_1^{-1})W_1(C - DW_2'W_1^{-1})'\right\} \quad (1.47)$$

e portanto com $K = W_2'W_1^{-1}$ e a matriz $W_1 > \mathbf{0}$ a condição

$$(A - B_2K)W_1 + W_1(A - B_2K)' + B_1B_1' \leq \mathbf{0} \quad (1.48)$$

é satisfeita para $(A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$. Do cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ e da equação do gramiano de controlabilidade conclui-se que $W_1 \geq L_c$ (L_c é solução da equação para um par (A, B_2) fixo) e portanto para qualquer $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_2$

$$\text{Tr}(R\mathcal{W}) \geq \text{Tr}(C_{cl}L_cC_{cl}') = \|H\|_2^2 \quad \forall F \in \mathcal{D}_F \quad (1.49)$$

ou seja, $\text{Tr}(RW)$ é um limitante superior do quadrado da norma $\mathcal{H}_2$ para o sistema (1.1) em malha fechada. Finalmente, uma vez que a solução ótima do problema (1.42) fornece o mínimo valor de $\text{Tr}(RW)$, tem-se

$$\beta^2 \triangleq \text{Tr}(RW^*) \geq \|H\|_2^2, \quad \forall F \in \mathcal{D}_F \quad (1.50)$$

e β é um custo garantido para o sistema.

□

Note que $\text{Tr}(RW)$ é um limitante da norma $\|H\|_2^2$ para todo $W \in \mathcal{C}_2$. A escolha de W^* garante o menor limitante que respeita as condições de estabilidade.

1.5 Controle $\mathcal{H}_\infty$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ aparece na literatura como uma medida do tipo pior caso, em contraposição à norma $\mathcal{H}_2$ que seria uma medida de valor médio. Uma outra característica vem do fato que o cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ requer procedimentos iterativos, diferente da norma $\mathcal{H}_2$ que pode ser obtida a partir de um número finito de operações.

A função transferência do sistema (1.1) de w para y em malha fechada para $K \in \mathcal{K}$ e $F \in \mathcal{D}_F$ arbitrário mas fixo é dada por

$$H = C_{cl}(s\mathbf{I} - A_{cl})^{-1}B_1 \quad (1.51)$$

e para $s = j\omega$, a norma $\mathcal{H}_\infty$ é definida por

$$\|H\|_\infty \triangleq \sup_{\omega \in \mathbb{R}_+} \sigma_{\max}[H(j\omega)] \quad (1.52)$$

onde $\sigma_{\max}(\cdot)$ indica o valor singular máximo de $(\cdot)$, isto é, $\lambda_{\max}^{1/2}(H(j\omega)^*H(j\omega))$. Em um sistema monovariável, a norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser obtida a partir do ganho máximo de um diagrama de Bode de magnitude, ou então, no diagrama de Nyquist é dada pela distância da origem ao ponto mais distante do diagrama. Usando a própria definição, tem-se a relação

$$\|H\|_\infty \leq \gamma \iff \mathbf{I} - \gamma^{-2}H(j\omega)^*H(j\omega) \geq \mathbf{0}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+ \quad (1.53)$$

e, portanto a norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser obtida por busca exaustiva em ω de $\sigma_{max}[H(j\omega)]$. A norma $\mathcal{H}_\infty$ pode também ser caracterizada a partir de equações matriciais, como apresentado pelo Lema a seguir.

Lema 3 Para $\gamma > 0$ dado, suponha que o par (A_{cl}, C_{cl}) é observável. Então,

$$\|H\|_\infty \leq \gamma \quad (1.54)$$

se e somente se a inequação de Riccati

$$A'_{cl}P + PA_{cl} + \gamma^{-2}PB_1B'_1P + C'_{cl}C_{cl} \leq 0 \quad (1.55)$$

admite uma solução simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Prova: Veja, por exemplo, [31].

□

Uma alternativa para o cálculo de $\|H\|_\infty$ seria baixar gradativamente o valor de γ e ir testando se a desigualdade (1.55) admite ou não solução $P = P' > 0$. Note que uma condição equivalente é dada por

$$A_{cl}W + WA'_{cl} + WC'_{cl}C_{cl}W + \gamma^{-2}B_1B'_1 \leq 0 \quad (1.56)$$

podendo ser obtida da anterior pré e pós multiplicando-se por P^{-1} e fazendo $W = P^{-1}$. O problema de otimização em $\mathcal{H}_\infty$ fica

$$\min \left\{ \|H\|_\infty : K \in \mathcal{K}, \forall F \in \mathcal{D}_F \right\} \quad (1.57)$$

ou, equivalentemente

$$\min \left\{ \gamma : \|H\|_\infty \leq \gamma : K \in \mathcal{K}, \forall F \in \mathcal{D}_F \right\} \quad (1.58)$$

e, tal qual no caso $\mathcal{H}_2$, obtêm-se soluções aproximadas para (1.58). Note que o conjunto $\mathcal{K}$ garante a estabilidade para todo $F \in \mathcal{D}_F$.

1.5.1 Caso Precisamente Conhecido

Para sistemas precisamente conhecidos, $N = 1$; isto é, o modelo é descrito por um único par (A, B_2) . Neste caso, dado um ganho $K \in \mathcal{K}$, pelo Lema anterior fica estabelecida uma relação em γ (um limitante da norma $\mathcal{H}_\infty$) e $P = P' > 0$. Para a determinação de um ganho K que garanta $\|H\|_\infty \leq \gamma$, o próximo Lema estabelece uma condição baseada na existência de uma matriz definida positiva.

Lema 4 Para $\gamma > 0$, supondo que o par (A, C) é observável. Então existe $K \in \mathcal{K}$ tal que

$$\|H\|_\infty \leq \gamma \quad (1.59)$$

se e somente se a inequação de Riccati

$$AW + WA' + WC'CW + \gamma^{-2}B_1B_1' - B_2B_2' \leq 0 \quad (1.60)$$

admite uma solução $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica definida positiva. Em caso afirmativo, o ganho é dado por

$$K = (D'D)^{-1}B_2'W^{-1} \quad (1.61)$$

Prova: Veja [31].

□

A solução do problema de otimização 1.57 pode ser obtida, de maneira iterativa, a partir do Lema 4. O valor de γ seria baixado gradativamente, enquanto a existência de $W = W' > 0$ seria verificada a cada novo valor de γ , tendendo assim para a solução ótima do problema. A extensão para o tratamento de sistemas incertos, assim como no controle $\mathcal{H}_2$, não é imediata. Note que, também neste caso, o ganho depende explicitamente de B_2 . A seguir, uma abordagem alternativa é apresentada, caracterizando o conjunto de ganhos $K \in \mathcal{K}$ que asseguram $\|H\|_\infty \leq \gamma$ através de um conjunto convexo. Nesse novo espaço paramétrico, a extensão para o caso incerto é imediata. Dessa forma, o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ é resolvido via análise convexa, tanto no caso de sistemas precisamente conhecidos como no caso incerto. Além disso, o limitante γ é incorporado no procedimento de otimização, podendo o problema ser resolvido de maneira global em γ e no ganho K , isto é, sem a necessidade do procedimento iterativo que gradativamente baixa o valor γ até atingir o mínimo.

1.5.2 Solução via Análise Convexa

Consideremos então sistemas incertos, com pares $(A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$ como definido em (1.7). Utilizando a notação de sistema aumentado, definimos as funções matriciais $\Theta_{\infty i}(\cdot, \cdot) : (\mathbb{R}^{p \times p}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$

$$\Theta_{\infty i}(\mathcal{W}, \mu) \triangleq F_i \mathcal{W} + \mathcal{W} F_i' + \mathcal{W} R \mathcal{W} + \mu Q \quad (1.62)$$

e o conjunto

$$\mathcal{C}_\infty \triangleq \bigcap_{i=1}^N \mathcal{C}_{\infty i} \quad (1.63)$$

com

$$\mathcal{C}_{\infty i} = \left\{ (\mathcal{W}, \mu) : \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq \mathbf{0}, \mu \geq 0, : v' \Theta_{\infty i}(\mathcal{W}, \mu) v \leq 0, \forall v \in \mathcal{N} \right\} \quad (1.64)$$

onde as matrizes $\mathcal{W}$ são particionadas como em (1.15). Antes de apresentar os resultados da abordagem convexa do problema, vamos estender o conceito de estabilidade com atenuação de distúrbios γ para o caso de sistemas incertos.

O sistema incerto descrito por (1.1) com o par $(A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$ é dito quadraticamente estável com atenuação de distúrbios γ se as inequações

$$A'_{cli}P + PA_{cli} + \gamma^{-2}PB_1B_1'P + C'_{cl}C_{cl} \leq \mathbf{0}, \quad i = 1 \cdots N \quad (1.65)$$

admitem uma mesma solução simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Uma condição equivalente poderia ser obtida com a pós e pré-multiplicação da equação (1.65) por $W = P^{-1}$. Note também que a condição só precisa ser verificada nos vértices, pois as inequações são afins em A_{cli} . O Lema a seguir caracteriza o conjunto de ganhos $K \in \mathcal{K}$ que garantem a estabilidade quadrática com atenuação dos distúrbios γ .

Lema 5 Para todo $\mu = \gamma^{-2} > 0$

$$\left\{ K \in \mathcal{K} : \|H\|_{\infty} \leq \gamma \right\} \equiv \left\{ W_2'W_1^{-1} : (\mathcal{W}, \mu) \in \mathcal{C}_{\infty} \right\} \quad (1.66)$$

e $\mathcal{C}_{\infty}$ é convexo em $(\mathcal{W}, \mu)$.

Prova: Primeiramente, a convexidade do conjunto $\mathcal{C}_{\infty}$. O conjunto das matrizes simétricas semi-definidas positivas é convexo, e para $\gamma = 1/\sqrt{\mu}$ fixo a função $\Theta_{\infty}(\mathcal{W}, \cdot)$ é convexa em $\mathcal{W}$, pois para qualquer $\Gamma = \Gamma'$, tem-se

$$\nabla_{\alpha}^2 v' \Theta_{\infty}(\mathcal{W} + \alpha \Gamma, \mu) v = 2v' \Gamma R \Gamma v \geq 0 \quad (1.67)$$

pois R é semidefinida positiva; em relação a μ , $\Theta(\cdot, \mu)$ é linear. A partir do Lema anterior, sabe-se que as inequações

$$(A_i - B_{2i}K)'P + P(A_i - B_{2i}K) + \gamma^{-2}PB_1B_1'P + (C - DK)'(C - DK) \leq \mathbf{0} \quad (1.68)$$

admitem uma mesma solução $P = P' > \mathbf{0}$ para todo $i, i = 1 \cdots N$. Levando em conta que $C'D = \mathbf{0}$ e que $\mu = \gamma^{-2}$, desenvolvendo e multiplicando à esquerda e à direita por $W \triangleq P^{-1}$, tem-se

$$A_iW - B_{2i}KW + WA_i' - WK'B_{2i}' + WC'CW + WK'D'DKW + \mu B_1B_1' \leq \mathbf{0} \quad (1.69)$$

para todo $i, i = 1 \cdots N$. Re-escrevendo, obtem-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' & \mathbf{0} \end{bmatrix} & \left\{ \begin{bmatrix} A_i & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & WK' \\ KW & KWK' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W & WK' \\ KW & KWK' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'_i & \mathbf{0} \\ -B'_{2i} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \right. \\ & + \begin{bmatrix} W & WK' \\ KW & KWK' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D'D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & WK' \\ KW & KWK' \end{bmatrix} + \\ & \left. + \mu \begin{bmatrix} B_1 B'_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (1.70)$$

que também vale para todo $i = \cdots N$, implicando que o par

$$(\mathcal{W}, \mu) = \left(\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W & WK' \\ KW & KWK' \end{bmatrix}, \mu = \gamma^{-2} \right), \quad \mathcal{W} \geq \mathbf{0}, \quad \mu \geq 0 \quad (1.71)$$

pertence ao conjunto $\mathcal{C}_\infty$. Para mostrar a suficiência, partindo de um elemento $(\mathcal{W}, \mu) \in \mathcal{C}_\infty$, com $\mu = \gamma^{-2}$ dado, pode-se escrever

$$v' [F_i \mathcal{W} + \mathcal{W} F'_i + \mathcal{W} R \mathcal{W} + \mu Q] v \leq 0, \quad \forall v \in \mathcal{N}, \quad \forall i, i = 1 \cdots N \quad (1.72)$$

implicando

$$\begin{aligned} v' & \left\{ \begin{bmatrix} A_i & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W'_2 & W_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W'_2 & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'_i & \mathbf{0} \\ -B'_{2i} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \right. \\ & + \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W'_2 & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D'D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W'_2 & W_3 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} B_1 B'_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \left. \right\} v \leq 0 \end{aligned} \quad (1.73)$$

Considerando-se que $v \in \mathcal{N}$, tem-se

$$\begin{aligned} x' & [A_i W_1 + W_1 A'_i - B_{2i} W'_2 - W_2 B'_{2i} + \\ & + W_1 C' C W_1 + W_2 D' D W'_2 + \mu B_1 B'_1] x \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (1.74)$$

para todo $i, i = 1 \cdots N$. Re-arranjando e fazendo a combinação linear convexa, obtém-se $\forall (A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$

$$\begin{aligned} & (A - B_2 W'_2 W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A - B_2 W'_2 W_1^{-1})' + \\ & + W_1 (C - D W'_2 W_1^{-1})' (C - D W'_2 W_1^{-1}) W_1 + \mu B_1 B'_1 \leq 0 \end{aligned} \quad (1.75)$$

e, como $W_1 > \mathbf{0}$, o ganho $K = W_2'W_1^{-1}$ pertence ao conjunto $\mathcal{K}$ e garante a estabilidade quadrática do par (A, B_2) com $\|H\|_\infty \leq \gamma$.

O resultado do Lema 5 estabelece uma relação, necessária e suficiente, entre o conjunto dos ganhos de realimentação de estado que garantem uma pré-especificada atenuação de distúrbios $\gamma = 1/\sqrt{\mu}$ e o conjunto de matrizes $\mathcal{W}$ tais que o par $(\mathcal{W}, \mu)$ pertence ao conjunto convexo $\mathcal{C}_\infty$. Note que o sistema aumentado não seria estritamente necessário para se estabelecer essa correlação, uma vez que a expressão (1.74) é uma condição necessária e suficiente de estabilização quadrática com atenuação de distúrbios γ do par incerto $(A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$, formulada em termos das sub-matrizes W_1 e W_2 .

A principal vantagem de se trabalhar com a função $\Theta_{\infty i}(\mathcal{W}, \mu)$ definida em (1.62) é que esta é convexa em $\mathcal{W}$ e linear em μ , sendo portanto convexa em relação ao par $(\mathcal{W}, \mu)$. Esse fato é explorado na solução do problema de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, mostrada a seguir, que envolve de maneira conjunta $\mathcal{W}$ e μ no processo de otimização.

Lema 6 Considere o par $(\mathcal{W}^*, \mu^*)$ solução ótima do problema

$$\max \left\{ \mu : (\mathcal{W}, \mu) \in \mathcal{C}_\infty \right\} \quad (1.76)$$

Então, $K^* = W_2'W_1^{-1}$ é tal que, com $\gamma^* = 1/\sqrt{\mu^*}$, o sistema (1.1) é quadraticamente estabilizável com atenuação de distúrbios γ^* .

Prova: Pelo Lema 5, todo par $(\mathcal{W}, \mu) \in \mathcal{C}_\infty$ é tal que $W_2'W_1^{-1} \in \mathcal{K}$ e $\|H\|_\infty \leq 1/\sqrt{\mu}$, e $\mathcal{C}_\infty \neq \emptyset$ se e somente se o sistema (1.1) é quadraticamente estabilizável com atenuação de distúrbios γ . Como a solução de (1.76) fornece o máximo valor de $\mu = \mu^*$, conclui-se que $\gamma^* = 1/\sqrt{\mu^*}$ é o mínimo valor de γ para o problema (1.58) nas condições consideradas.

□

Sob o ponto de vista numérico, o problema de otimização (1.76) pode apresentar um mau comportamento pelo fato de μ não ser limitado. Diversos trabalhos da literatura abordam este problema ([25], [31]) e uma discussão mais aprofundada pode ser encontrada em [32].

Usando os resultados de [32], pode-se determinar um valor μ_M tal que, para $\mu > \mu_M$, $\mathcal{C}_\infty = \emptyset$. Com isso, a maximização em μ pode ficar restrita ao intervalo $[0, \mu_M]$.

Este Lema possibilita a abordagem do problema (1.57) via análise convexa, utilizando-se de métodos clássicos de programação matemática. Para o caso em que $N = 1$ (sistemas precisamente conhecidos) este método apresenta a vantagem de não exigir cálculos iterativos da norma $\mathcal{H}_\infty$ fornecendo a solução ótima do problema $\mathcal{H}_\infty$ [26].

1.6 Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

O problema do controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, consiste em se minimizar o custo de um critério $\mathcal{H}_2$ sobre uma classe de controladores, que simultaneamente satisfaz uma atenuação prescrita de distúrbios γ especificada em termos da norma $\mathcal{H}_\infty$. O problema de controle misto pode então ser colocado da seguinte forma:

$$\min \left\{ \|H\|_2 : K \in \mathcal{K}, \|H\|_\infty \leq \gamma, \forall F \in \mathcal{D}_F \right\} \quad (1.77)$$

Como nos casos anteriores, no espaço paramétrico dos ganhos K o problema não apresenta propriedades geométricas utilizáveis. O Lema a seguir obtém limitantes das duas normas via abordagem convexa.

Lema 7 Para $\gamma > 0$ dado, defina o problema

$$\min \left\{ \sigma : \text{Tr}(RW) - \gamma^{-2}\sigma \leq 0, (W, \gamma^{-2}) \in \mathcal{C}_\infty \right\} \quad (1.78)$$

Então, as seguintes afirmações são válidas:

- a) O problema (1.78) é convexo.
- b) Sendo W a solução ótima associada a σ , particionada como em (1.15), então $K = W_2'W_1^{-1}$ é factível para o problema (1.77) e

$$\|H\|_2 \leq \sqrt{\sigma} \triangleq \beta \quad \forall F \in \mathcal{D}_F \quad (1.79)$$

- c) Para $\gamma \rightarrow +\infty$, o problema (1.77) reverte ao problema (1.42) do Teorema 2, fornecendo assim a solução do problema $\mathcal{H}_2$.

Prova: Ver referência [15] ou [28].

□

Dessa forma o problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ também pode ter um tratamento convexo. Retirando-se a restrição $\|H\|_\infty \leq \gamma$ o problema (1.77) se reduz ao problema (1.33)

de otimização em $\mathcal{H}_2$. O problema misto inverso poderia também ser tratado com a abordagem convexa, ou seja, a minimização de um limitante γ da norma $\mathcal{H}_\infty$ sujeito a $\|H\|_\infty \leq \beta$, para $\beta > 0$ dado. Veja uma discussão sobre o assunto em [15].

1.7 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados resultados que permitem a síntese de controle por realimentação de estado para sistemas contínuos via análise convexa. Foram mostradas condições necessárias e suficientes que permitem resolver o problema de controle robusto e rejeição de perturbações através de minimização das normas $\mathcal{H}_2$ e/ou $\mathcal{H}_\infty$.

A grande vantagem da abordagem convexa é permitir novas restrições adicionais também convexas. Graças a essa propriedade podemos impor especificações extras como por exemplo, a descentralização do controle e a alocação de pólos como será relatado nos próximos capítulos.

Capítulo 2

Sub-regiões de Alocação

2.1 Introdução

Apenas garantir a minimização dos distúrbios de um sistema por meio de normas tipo $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ ou $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não é o suficiente para impor um funcionamento a contento. Outros parâmetros devem ser analisados para se projetar um controlador. Por exemplo os índices de desempenhos associados à resposta transitória: velocidade de resposta, fator de amortecimento, frequência natural de oscilação, sobre-sinal máximo (overshoot), etc. Todos esses índices estão relacionados com a localização dos pólos e/ou zeros no plano complexo do sistema em malha fechada. Um projeto de um controlador deve garantir a atenuação de distúrbios externos e, ao mesmo tempo, alguns índices de desempenho durante a resposta transitória.

Uma região de grande interesse no projeto de controladores é mostrada na figura (2.1). Se os pólos de um sistema em malha fechada estiverem localizados no interior dessa região pode-se garantir que o sistema possui um fator de amortecimento maior do que ξ_i e tempo de acomodação menor que $4/\sigma_i$ (para o critério de 2%). No entanto, a região mostrada é de difícil estudo já que não pode ser explicitada de maneira exata por meio de equações lineares. Outras regiões, que estejam contidas e/ou que se aproximam desta região de interesse são utilizadas. As regiões aqui estudadas podem ser facilmente equacionadas, e controladores lineares por realimentação de estado do tipo $u = -Kx$ podem ser obtidos.

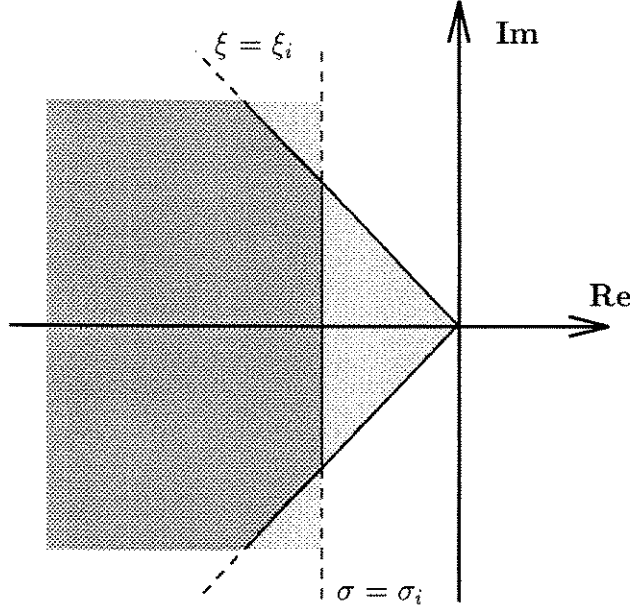


Figura 2.1: Região de Alocação

2.2 Alocação em Faixa Vertical

Definindo $\mathcal{V}(\alpha, \beta)$ como sendo uma faixa vertical, parametrizada em termos de $\beta < \alpha$ (ver figura 2.2), pretende-se encontrar (se existir) um ganho $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que aloque todos os autovalores na região desejada, ou seja, tal que

$$\lambda_j(A - B_2 K) \in \mathcal{V}(\alpha, \beta) \quad , \quad \forall F \in \mathcal{D}_F \quad (2.1)$$

para todo $j, j = 1 \dots n$ ¹.

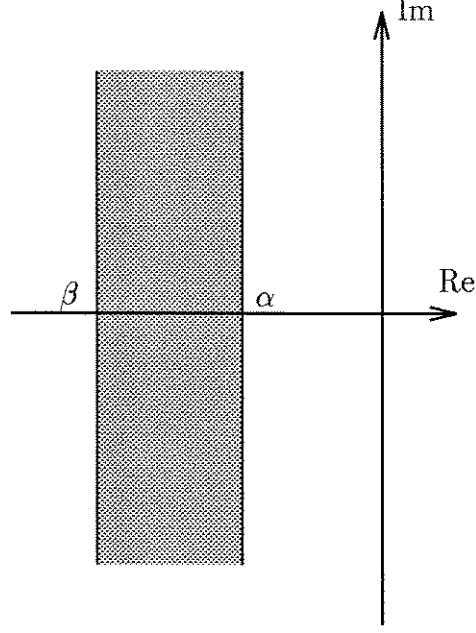
A região $\mathcal{V}(\alpha, \beta)$ pode ser vista como a interseção de duas outras. A primeira, um semi-plano esquerdo deslocado de α em relação ao eixo imaginário, e a segunda um semi-plano direito deslocado de β . Definindo as matrizes “deslocadas”

$$A_\alpha = A - \alpha \mathbf{I} \quad , \quad A_\beta = A - \beta \mathbf{I} \quad (2.2)$$

e ainda, em malha fechada

$$A_{cl\alpha} = A_\alpha - B_2 K \quad , \quad A_{cl\beta} = A_\beta - B_2 K \quad (2.3)$$

¹ $\lambda_j, j = 1 \dots n$, são os autovalores da matriz A .

Figura 2.2: Alocação em uma faixa: $\mathcal{V}(\alpha, \beta)$

tem-se que um projeto de controle por realimentação de estados, $u = -Kx$, deve garantir simultaneamente a estabilidade de $A_{cl\alpha}$ e de $-A_{cl\beta}$. Então, o sistema em malha fechada é tal que

$$\mathbf{Re}\{\lambda_j([A_{cl\alpha}])\} = \mathbf{Re}\{\lambda_j(A_{cl} - \alpha\mathbf{I})\} < 0 \iff \mathbf{Re}\{\lambda_j(A_{cl})\} < \alpha \quad (2.4)$$

$$\mathbf{Re}\{\lambda_j(-[A_{cl\beta}])\} = -\mathbf{Re}\{\lambda_j(A_{cl} - \beta\mathbf{I})\} < 0 \iff -\mathbf{Re}\{\lambda_j(A_{cl})\} < -\beta \quad (2.5)$$

implicando que

$$\beta < \mathbf{Re}\{\lambda_j(A_{cl})\} < \alpha \quad (2.6)$$

para $j = 1 \cdots n$.

2.3 Alocação em uma Região Circular

Neste caso, a região de alocação é definida por $\mathcal{U}(\delta, \rho)$, consistindo em um círculo de raio $\rho > 0$ centrado em δ (ver figura 2.3). O objetivo é encontrar K que garanta

$$\lambda_j(A - B_2 K) \in \mathcal{U}(\delta, \rho) \quad , \quad \forall F \in \mathcal{D}_F \quad (2.7)$$

para todo $j, j = 1 \cdots n$.

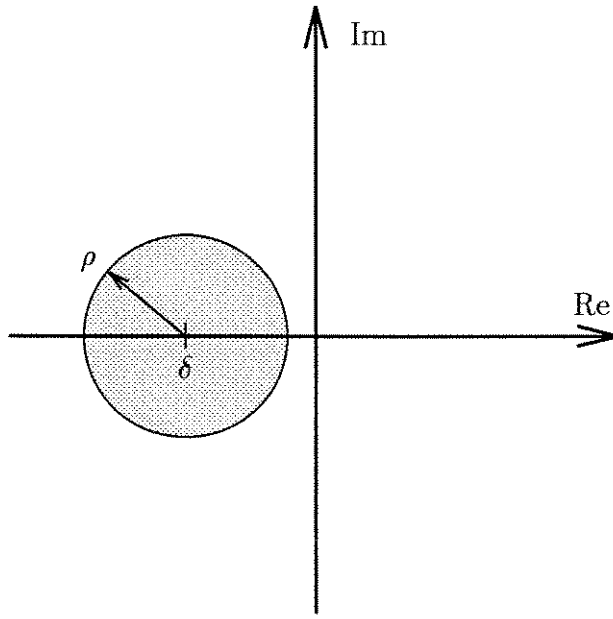


Figura 2.3: Alocação em um círculo: $\mathcal{U}(\delta, \rho)$

Para mapear a região $\mathcal{U}(\delta, \rho)$, o seguinte fato é utilizado: dada uma matriz $A_{cl} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ qualquer, sabe-se que

$$|\lambda_j(A_{cl})| < 1 \iff \exists P = P' > \mathbf{0} : A_{cl} P A_{cl}' - P < \mathbf{0} \quad (2.8)$$

para todo $j = 1 \cdots N$. Note que (2.8) é a conhecida desigualdade de Lyapunov para a estabilidade de sistemas discretos. Se A_{cl} é trocada por $(A_{cl} - \delta \mathbf{I})/\rho$, obtém-se

$$\exists P = P' > \mathbf{0} : (A_{cl} - \delta \mathbf{I}) P (A_{cl} - \delta \mathbf{I})' - \rho^2 P < \mathbf{0} \quad (2.9)$$

que, se satisfeita, assegura

$$[\operatorname{Re}\{\lambda_j(A_{cl})\} - \delta]^2 + [\operatorname{Im}\{\lambda_j(A_{cl})\}]^2 < \rho^2 \quad , \quad j = 1 \cdots n \quad (2.10)$$

significando que os autovalores de A_{cl} estão localizados no interior círculo centrado em δ e de raio ρ .

É possível obter uma região que consiste da parte externa da circunferência. Para isto, basta inverter o sinal da desigualdade de Lyapunov em (2.8).

2.4 Alocação em Região Parabólica

Usando os resultados de [34], pode-se definir uma região de alocação delimitada por uma parábola. A equação de uma parábola no plano complexo, simétrica em relação ao eixo real, com a concavidade “para a esquerda” e inteiramente contida no semi-plano esquerdo é dada por

$$-\mathbf{Re} = \frac{\psi}{2}\mathbf{Im}^2 + \phi \quad (2.11)$$

com $\psi > 0$ definindo sua concavidade e $\phi > 0$ a distância do eixo real (ver figura 2.4). Assim, impor a um sistema em malha fechada que todos os seus pólos estejam dentro da região parabólica indicada equivale a garantir que

$$\frac{\psi}{2}\mathbf{Im}^2[\lambda_j(A_{cl})] + \mathbf{Re}[\lambda_j(A_{cl})] + \phi \leq 0 \quad j = 1 \dots n \quad (2.12)$$

Note que para $\psi \rightarrow 0$, a parábola tende a uma reta paralela ao eixo imaginário, e a restrição (2.12) implica $\mathbf{Re}[\lambda_j(A_{cl})] \leq -\phi$, $j = 1 \dots n$.

O objetivo é encontrar, se existir, um ganho de realimentação $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que aloque todos os pólos do sistema em malha fechada na região parabólica $\mathcal{D}(\psi, \phi)$, ou seja,

$$\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{D}(\psi, \phi) \quad (2.13)$$

Os pólos do sistema em malha fechada podem ser alocados em $\mathcal{D}(\psi, \phi)$ se existir um ganho $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e uma matriz $P = P' > \mathbf{0}$ tais que a seguinte desigualdade matricial do tipo Lyapunov seja satisfeita.

$$A_{cl\phi}P + PA'_{cl\phi} + \psi A_{cl}PA'_{cl} < \mathbf{0} \quad (2.14)$$

onde

$$A_{cl\phi} \triangleq A_{cl} - \phi \mathbf{I} \quad (2.15)$$

A demonstração dessa propriedade pode ser vista em [34].

Da mesma forma, invertendo-se o sinal da desigualdade (2.14), obtém-se a alocação na região externa da parábola.

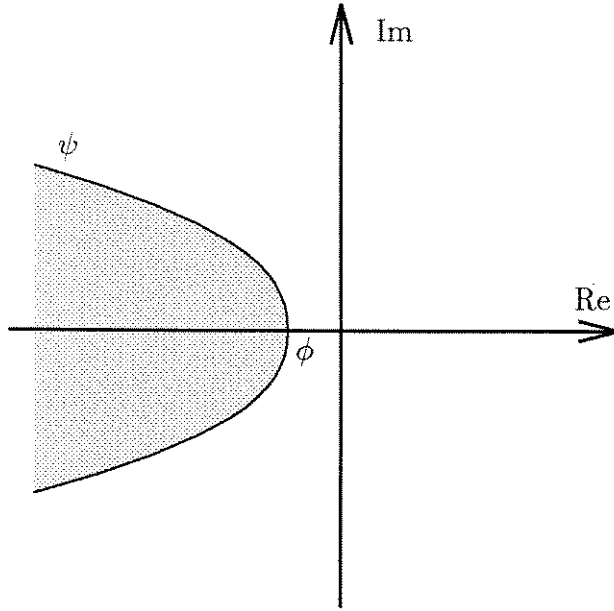


Figura 2.4: Alocação em uma região parabólica $\mathcal{D}(\psi, \phi)$

2.5 Conclusão

Neste capítulo discutiu-se a alocação de pólos numa região específica do plano complexo para o projeto de um controlador. A idéia utilizada aqui baseia-se em desigualdades matriciais do tipo Lyapunov que, se satisfeitas, garantem a alocação dos pólos na região desejada. As regiões podem ser combinadas e assim formarem regiões de alocação mais complexas. Para isto basta encontrar um mesmo ganho de realimentação $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfaça simultaneamente a desigualdade de cada uma das sub-regiões.

Capítulo 3

Controle de Sistemas com Alocação de Pólos

3.1 Introdução

A partir dos resultados apresentados nos capítulos anteriores, neste capítulo são obtidas condições que, além de garantir uma minimização do custo garantido $\mathcal{H}_2$ e/ou $\mathcal{H}_\infty$, alocam os pólos do sistema em uma sub-região do semi-plano esquerdo complexo. As regiões investigadas são: faixa vertical, círculo e parábola. Obviamente, para que a estabilidade seja assegurada, todas as regiões estudadas estão inscritas no semi-plano esquerdo.

3.2 Faixa Vertical

Inicialmente definem-se as matrizes aumentadas

$$F_\alpha \triangleq \begin{bmatrix} A_\alpha & -B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad , \quad F_\beta \triangleq \begin{bmatrix} A_\beta & -B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

onde

$$A_\alpha \triangleq A - \alpha \mathbf{I} \quad \text{e} \quad A_\beta \triangleq A - \beta \mathbf{I} \quad (3.2)$$

Definindo-se também as funções matriciais $\Theta_{\alpha i}(\cdot)$ e $\Theta_{\beta i}(\cdot)$ como sendo

$$\Theta_{\alpha i}(\mathcal{W}) \triangleq F_{\alpha i} \mathcal{W} + \mathcal{W} F'_{\alpha i} \quad (3.3)$$

$$\Theta_{\beta i}(\mathcal{W}) \triangleq F_{\beta i}\mathcal{W} + \mathcal{W}F'_{\beta i} \quad (3.4)$$

com $\mathcal{W}$ particionada na forma

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W'_2 & W_3 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

com $W_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva, $W_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $W_3 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Definindo ainda o conjunto convexo

$$\mathcal{R}_{\mathcal{V}} = \bigcap_{i=1}^N \mathcal{R}_{\mathcal{V}i} \quad (3.6)$$

onde (para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno)¹

$$\mathcal{R}_{\mathcal{V}i} = \left\{ \mathcal{W} : v'\Theta_{\alpha i}(\mathcal{W})v \leq -\epsilon, -v'\Theta_{\beta i}(\mathcal{W})v \leq -\epsilon, \forall v \in \mathcal{N} \right\} \quad (3.7)$$

tem-se o seguinte resultado.

Teorema 1 Para $\mathcal{W} \in \mathcal{R}_{\mathcal{V}}$, com $K = W'_2W_1^{-1}$ tem-se

$$\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{V}(\alpha, \beta), \quad j = 1 \cdots n \quad \forall F \in \mathcal{D}_F. \quad (3.8)$$

Prova: Das equações (3.3) e (3.4) que definem $\Theta_{\alpha i}(\mathcal{W})$ e $\Theta_{\beta i}(\mathcal{W})$, respectivamente, tem-se que $\forall v \in \mathcal{N}$ e $\forall i = 1 \cdots N$

$$\begin{aligned} -\epsilon &\geq v'\Theta_{\alpha i}(\mathcal{W})v \\ &\geq v' \left\{ \begin{bmatrix} A_{\alpha i} & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W'_2 & W_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W'_2 & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\alpha i} & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}' \right\} v \\ &\geq v' \left\{ \begin{bmatrix} A_{\alpha i}W_1 - B_{2i}W'_2 & A_{\alpha i}W_2 - B_{2i}W_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1A'_{\alpha i} - W_2B'_{2i} & \mathbf{0} \\ W'_2A'_{\alpha i} - W_3B'_{2i} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} v \\ &\geq x' \left[(A_{\alpha i} - B_{2i}W'_2W_1^{-1})W_1 + W_1(A_{\alpha i} - B_{2i}W'_2W_1^{-1})' \right] x \end{aligned} \quad (3.9)$$

¹Desigualdade estritas poderiam ser usadas. A razão da escolha de ϵ suficientemente pequeno (“fechando o conjunto”) ficará clara na implementação numérica.

que resulta, para todo $i, i = 1 \cdots N$, com $K = W_2' W_1^{-1}$ e $P = W_1$

$$(A_{\alpha i} - B_{2i}K)P + P(A_{\alpha i} - B_{2i}K)' < \mathbf{0} \quad (3.10)$$

Por outro lado, $\forall v \in \mathcal{N}$, e $\forall i = 1 \cdots N$

$$\begin{aligned} -\epsilon &\geq -v' \Theta_{\beta i}(\mathcal{W})v \\ &\geq -v' \left\{ \begin{bmatrix} A_{\beta i} & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\beta i} & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}' \right\} v \\ &\geq -v' \left\{ \begin{bmatrix} A_{\beta i} W_1 - B_{2i} W_2' & A_{\beta i} W_2 - B_{2i} W_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 A_{\beta i}' - W_2 B_{2i}' & \mathbf{0} \\ W_2' A_{\beta i}' - W_3 B_{2i}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} v \\ &\geq -x' \left[(A_{\beta i} - B_{2i} W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A_{\beta i} - B_{2i} W_2' W_1^{-1})' \right] x \end{aligned} \quad (3.11)$$

resultando

$$\left[-(A_{\beta i} - B_{2i}K) \right] P + P \left[-(A_{\beta i} - B_{2i}K) \right]' < \mathbf{0} \quad (3.12)$$

para todo $i, i = 1 \cdots N$. Note que o escalar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno é usado para “fechar” as desigualdades estritas em (3.10) e (3.12), resultando em $\beta < \mathbf{Re}[\lambda_j(A_{cl})] < \alpha$, $j = 1 \cdots n$, ou seja, todos os autovalores estão na região prescrita $\mathcal{V}(\alpha, \beta)$, para todo $F_i, i = 1 \cdots N$. Finalmente, devido à convexidade do domínio de incertezas, o mesmo fato se verifica para qualquer par incerto $(A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$.

A minimização das normas $\mathcal{H}_2$ e/ou $\mathcal{H}_\infty$ no interior da região $\mathcal{V}(\alpha, \beta)$ e a estabilidade são garantidas pelos Corolários a seguir.

□

Corolário 1 Todo $\mathcal{W} \in [\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_\mathcal{V}]$ fornece $K = W_2' W_1^{-1} \in \mathcal{K}$, assegurando

(a) $\|H\|_2^2 \leq \mathbf{Tr}(R\mathcal{W})$.

(b) $\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{V}(\alpha, \beta)$, $j = 1 \cdots n$.

para todo $F \in \mathcal{D}_F$. Portanto, é conveniente escolher

$$\mathcal{W}^* = \arg \min \left\{ \text{Tr}(R\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in [\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_\nu] \right\} \quad (3.13)$$

que assegura o menor limitante de $\|H\|_2^2$ respeitando as condições de estabilidade.

Prova: O item (a) é demonstrado no Lema 2, assim como o fato de $K \in \mathcal{K}$, e o item (b) decorre do Teorema anterior.

□

Corolário 2 Todo $\mu \in [0, \mu_M]$, $(\mathcal{W}, \mu) \in \mathcal{C}_\infty$ e $\mathcal{W} \in \mathcal{R}_\nu$ fornece $K = W_2' W_1^{-1} \in \mathcal{K}$, assegurando

- (a) $\|H\|_\infty \leq 1/\sqrt{\mu}$.
- (b) $\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{V}(\alpha, \beta)$, $j = 1 \cdots n$.

para todo $F \in \mathcal{D}_F$. Portanto, é conveniente escolher

$$(\mathcal{W}^*, \mu) = \arg \max \left\{ \mu : \mu \in [0, \mu_M] , (\mathcal{W}, \mu) \in \mathcal{C}_\infty \text{ e } \mathcal{W} \in \mathcal{R}_\nu \right\} \quad (3.14)$$

que assegura o menor limitante da norma $\mathcal{H}_\infty$ respeitando as condições de estabilidade.

Prova: O item (a) e o fato de $K \in \mathcal{K}$ são demonstrados nos Lemas 5 e 6 e o item (b) decorre do Teorema anterior. O limitante μ_M pode ser obtido dos resultados de [32] ou [31].

□

Corolário 3 Todo $\mathcal{W} \in [\mathcal{C}_\infty \cap \mathcal{R}_\nu]$ fornece $K = W_2' W_1^{-1}$, assegurando

- (a) $\|H\|_2^2 \leq \text{Tr}(R\mathcal{W})$ e $\|H\|_\infty \leq \gamma$
- (b) $\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{V}(\alpha, \beta)$, $j = 1 \cdots n$.

para todo $F \in \mathcal{D}_F$. Portanto, é conveniente escolher

$$\mathcal{W}^* = \arg \min \left\{ \text{Tr}(R\mathcal{W}) \quad : \quad \mathcal{W} \in \left[\mathcal{C}_\infty \cap \mathcal{R}_\nu \right] \right\} \quad (3.15)$$

que assegura o menor limitante $\|H\|_2^2$ para um γ pré-especificado, respeitando as condições de estabilidade.

Prova: O item (a) está demonstrado no Lema 7 assim como o fato de $K \in \mathcal{K}$ e o item (b) decorre do Teorema anterior.

□

3.3 Região Circular

Definindo-se a matriz aumentada

$$F_\delta \triangleq \begin{bmatrix} A_\delta & -B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

onde

$$A_\delta \triangleq A - \delta \mathbf{I} \quad (3.17)$$

e definindo-se também a função matricial $\Theta_{\delta i}(\cdot)$ como sendo

$$\Theta_{\delta i}(\mathcal{W}) \triangleq F_{\delta i} \mathcal{W} F_{\delta i}' - \rho^2 \mathcal{W} \quad (3.18)$$

com $\mathcal{W}$ particionada como em (3.5) e o conjunto convexo

$$\mathcal{R}_u = \bigcap_{i=1}^N \mathcal{R}_{ui} \quad (3.19)$$

onde (com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno)

$$\mathcal{R}_{ui} = \left\{ \mathcal{W} : v' \Theta_{\delta i}(\mathcal{W}) v \leq -\varepsilon, \forall v \in \mathcal{N} \right\} \quad (3.20)$$

tem-se o Teorema a seguir.

Teorema 2 Para $\mathcal{W} \in \mathcal{R}_u$ tem-se, com $K = W_2' W_1^{-1}$,

$$\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{U}(\delta, \rho) \quad , \quad j = 1 \cdots n \quad \forall F \in \mathcal{D}_F \quad (3.21)$$

Prova: Desenvolvendo $v'\Theta_{\delta i}(\mathcal{W})v$ com $\Theta_{\delta i}(\mathcal{W})$ definido em (3.18), obtém-se para $\forall v \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} -\varepsilon &\geq v'\Theta_{\delta i}(\mathcal{W})v \\ &\geq x' \left[(A_{\delta i} - B_{2i}W_2'W_1^{-1}) W_1 (A_{\delta i} - B_{2i}W_2'W_1^{-1})' - \rho^2 W_1 \right] x + \\ &\quad + x' B_{2i} [W_3 - W_2'W_1^{-1}W_2] B_{2i}' x, \quad \forall i = 1 \cdots N \end{aligned} \quad (3.22)$$

como $\mathcal{W} \geq \mathbf{0} \iff W_3 \geq W_2'W_1^{-1}W_2$, para todo $i = 1 \cdots N$ tem-se

$$(A_{\delta i} - B_{2i}W_2'W_1^{-1}) W_1 (A_{\delta i} - B_{2i}W_2'W_1^{-1})' - \rho^2 W_1 < \mathbf{0} \quad (3.23)$$

Finalmente, com $K = W_2'W_1^{-1}$ e $P = W_1$

$$(A_{\delta i} - B_{2i}K) P (A_{\delta i} - B_{2i}K)' - \rho^2 P < \mathbf{0} \quad (3.24)$$

para todo $i = 1 \cdots N$, implicando (graças à convexidade de (3.24) em relação à matriz $A_{cl\delta i} \triangleq A_{\delta i} - B_{2i}K$) que $\lambda_j(A - B_2K) \in \mathcal{U}(\delta, \rho)$, $\forall F \in \mathcal{D}_F$.

□

Os Corolários a seguir garantem a obtenção do controle robusto $\mathcal{H}_2$ e/ou $\mathcal{H}_\infty$ no interior da região $\mathcal{U}(\delta, \rho)$.

Corolário 4 Todo $\mathcal{W} \in [\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_\mathcal{U}]$ fornece $K = W_2'W_1^{-1} \in \mathcal{K}$, assegurando

$$(a) \quad \|H\|_2^2 \leq \text{Tr}(RW).$$

$$(b) \quad \lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{U}(\delta, \rho) \quad , \quad j = 1 \cdots n.$$

para todo $F \in \mathcal{D}_F$. Portanto é conveniente escolher

$$\mathcal{W}^* = \arg \min \left\{ \text{Tr}(RW) \quad : \quad \mathcal{W} \in [\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_\mathcal{U}] \right\} \quad (3.25)$$

que assegura o menor limitante de $\|H\|_2^2$ respeitando as condições de estabilidade.

Prova: O item (a) é demonstrado no Lema 2, assim como o fato de $K \in \mathcal{K}$, e o item (b) decorre do Teorema anterior.

□

Corolário 5 Todo $\mu \in [0, \mu_M]$, $(\mathcal{W}, \mu) \in \mathcal{C}_\infty$ e $\mathcal{W} \in \mathcal{R}_\mathcal{U}$ fornece $K = W_2' W_1^{-1} \in \mathcal{K}$, assegurando

- (a) $\|H\|_\infty \leq 1/\sqrt{\mu}$.
- (b) $\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{U}(\delta, \rho)$, $j = 1 \cdots n$.

para todo $F \in \mathcal{D}_F$. Portanto é conveniente escolher

$$(\mathcal{W}^*, \mu) = \arg \max \left\{ \mu : \mu \in [0, \mu_M] , (\mathcal{W}, \mu) \in \mathcal{C}_\infty \text{ e } \mathcal{W} \in \mathcal{R}_\mathcal{U} \right\} \quad (3.26)$$

que assegura o menor limitante da norma $\mathcal{H}_\infty$ respeitando as condições de estabilidade.

Prova: O item (a) e o fato de $K \in \mathcal{K}$ são demonstrados nos Lemas 5 e 6 e o item (b) decorre do Teorema anterior. O limitante μ_M pode ser obtido dos resultados de [32] ou [31].

□

Corolário 6 Todo $\mathcal{W} \in [\mathcal{C}_\infty \cap \mathcal{R}_\mathcal{U}]$ fornece $K = W_2' W_1^{-1}$ assegurando

- (a) $\|H\|_2^2 \leq \text{Tr}(R\mathcal{W})$ e $\|H\|_\infty \leq \gamma$
- (b) $\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{U}(\delta, \rho)$, $j = 1 \cdots n$.

para todo $F \in \mathcal{D}_F$. Portanto, é conveniente escolher

$$\mathcal{W}^* = \arg \min \left\{ \text{Tr}(R\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in [\mathcal{C}_\infty \cap \mathcal{R}_\mathcal{U}] \right\} \quad (3.27)$$

que assegura o menor limitante $\|H\|_2^2$ para um γ pré-especificado, respeitando as condições de estabilidade.

Prova: O item (a) está demonstrado no Lema 7 assim como o fato de $K \in \mathcal{K}$ e o item (b) decorre do Teorema anterior.

□

3.4 Região Parabólica

Defindo-se a matriz aumentada

$$F_\phi \triangleq \begin{bmatrix} A_\phi & -B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

onde

$$A_\phi \triangleq A_i - \phi \mathbf{I} \quad (3.29)$$

e definindo-se também as funções matriciais $\Theta_{\phi i}(\cdot)$ como sendo

$$\Theta_{\phi i}(\mathcal{W}) \triangleq F_{\phi i} \mathcal{W} + \mathcal{W} F_{\phi i}' + \psi F_i \mathcal{W} F_i' \quad (3.30)$$

com $\mathcal{W}$ particionada como em (3.5) e o conjunto convexo

$$\mathcal{R}_{\mathcal{D}} = \bigcap_{i=1}^N \mathcal{R}_{\mathcal{D}i} \quad (3.31)$$

onde (com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno)

$$\mathcal{R}_{\mathcal{D}i} = \left\{ \mathcal{W} : v' \Theta_{\phi i}(\mathcal{W}) v \leq -\varepsilon, \forall v \in \mathcal{N} \right\} \quad (3.32)$$

tem-se o seguinte resultado.

Teorema 3 Para $\mathcal{W} \in \mathcal{R}_{\mathcal{D}}$ tem-se, com $K = W_2' W_1^{-1}$.

$$\lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{D}(\phi, \psi), \quad j = 1 \dots n \quad \forall F \in \mathcal{D}_F \quad (3.33)$$

Prova: A partir das equações (3.30) que definem $\Theta_{\phi i}(\mathcal{W})$, tem-se que $\forall v \in \mathcal{N}$ e $\forall i = 1 \dots N$.

$$\begin{aligned} -\varepsilon &\geq v' \Theta_{\phi i}(\mathcal{W}) v \\ &\geq v' \left\{ \begin{bmatrix} A_{\phi i} & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\phi i} & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}' + \right. \\ &\quad \left. + \psi \begin{bmatrix} A_i & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & -B_{2i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}' \right\} v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\geq v' \left\{ \begin{bmatrix} A_{\phi i} W_1 - B_{2i} W_2' & A_{\phi i} W_2 - B_{2i} W_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 A_{\phi i}' - W_2 B_{2i}' & \mathbf{0} \\ W_2' A_{\phi i}' - W_3 B_{2i}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \right. \\
 &\quad \left. + \psi \begin{bmatrix} A_i W_1 A_i' - B_{2i} W_2' A_i' - A_i W_2 B_{2i}' + B_{2i} W_3 B_{2i}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} v \\
 &\geq x' \left[(A_{\phi i} - B_{2i} W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A_{\phi i} - B_{2i} W_2' W_1^{-1})' + \right. \\
 &\quad + \psi (A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1}) W_1 (A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1})' + \\
 &\quad \left. + B_{2i} (W_3 - W_2' W_1^{-1} W_2) B_{2i}' \right] x \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

e visto que $\mathcal{W} \geq \mathbf{0} \iff W_3 \geq W_2' W_1^{-1} W_2$, para todo $i = 1 \cdots N$ e $\forall v \in \mathcal{N}$ tem-se

$$\begin{aligned}
 &(A_{\phi i} - B_{2i} W_2' W_1^{-1}) W_1 + W_1 (A_{\phi i} - B_{2i} W_2' W_1^{-1})' + \\
 &\quad + \psi (A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1}) W_1 (A_i - B_{2i} W_2' W_1^{-1})' < \mathbf{0} \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

que resulta, para todo $i, i = 1 \cdots N$, com $K = W_2' W_1^{-1}$ e $P = W_1$

$$(A_{\phi i} - B_{2i} K) P + P (A_{\phi i} - B_{2i} K)' + \psi (A_i - B_{2i} K) P (A_i - B_{2i} K)' < \mathbf{0} \tag{3.36}$$

para todo $i, i = 1 \cdots N$. Devido à convexidade da equação (3.36) em relação à matriz $A_{cl\phi i} \triangleq A_{\phi i} - B_{2i} K$, o mesmo vale para qualquer par $(A, B_2) \rightsquigarrow F \in \mathcal{D}_F$.

□

Os Corolários a seguir garantem a obtenção do controle robusto $\mathcal{H}_2$ e/ou $\mathcal{H}_\infty$ no interior da região $\mathcal{D}(\phi, \psi)$.

Corolário 7 Todo $\mathcal{W} \in [\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_{\mathcal{D}}]$ fornece $K = W_2' W_1^{-1} \in \mathcal{K}$, assegurando

$$\text{(a) } \|H\|_2^2 \leq \text{Tr}(R\mathcal{W}).$$

$$\text{(b) } \lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{D}(\phi, \psi) \quad , \quad j = 1 \cdots n.$$

para todo $F \in \mathcal{D}_F$. Portanto, é conveniente escolher

$$\mathcal{W}^* = \arg \min \left\{ \text{Tr}(R\mathcal{W}) \quad : \quad \mathcal{W} \in [\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_{\mathcal{D}}] \right\} \quad (3.37)$$

que assegura o menor limitante de $\|H\|_2^2$ respeitando as condições de estabilidade.

Prova: O item (a) é demonstrado no Lema 2, assim como o fato de $K \in \mathcal{K}$, e o item (b) decorre do Teorema anterior.

□

Corolário 8 Todo $\mu \in [0, \mu_M]$, $(\mathcal{W}, \mu) \in \mathcal{C}_\infty$ e $\mathcal{W} \in \mathcal{R}_{\mathcal{D}}$ fornece $K = W_2'W_1^{-1} \in \mathcal{K}$, assegurando

$$(a) \quad \|H\|_\infty \leq 1/\sqrt{\mu}.$$

$$(b) \quad \lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{D}(\phi, \psi) \quad , \quad j = 1 \cdots n.$$

para todo $F \in \mathcal{D}_F$. Portanto, é conveniente escolher

$$(\mathcal{W}^*, \mu) = \arg \max \left\{ \mu \quad : \quad \mu \in [0, \mu_M] \quad , \quad (\mathcal{W}, \mu) \in \mathcal{C}_\infty \quad \text{e} \quad \mathcal{W} \in \mathcal{R}_{\mathcal{D}} \right\} \quad (3.38)$$

que assegura o menor limitante da norma $\mathcal{H}_\infty$ respeitando as condições de estabilidade.

Prova: O item (a) e o fato de $K \in \mathcal{K}$ são demonstrados nos Lemas 5 e 6 e o item (b) decorre do Teorema anterior. O limitante μ_M pode ser obtido dos resultados de [32] ou [31].

□

Corolário 9 Todo $\mathcal{W} \in [\mathcal{C}_\infty \cap \mathcal{R}_{\mathcal{D}}]$ fornece $K = W_2'W_1^{-1}$, assegurando

$$(a) \quad \|H\|_2^2 \leq \text{Tr}(R\mathcal{W}) \quad \text{e} \quad \|H\|_\infty \leq \gamma$$

$$(b) \quad \lambda_j(A_{cl}) \in \mathcal{D}(\phi, \psi) \quad , \quad j = 1 \cdots n.$$

para todo $F \in \mathcal{D}_F$. Portanto, é conveniente escolher

$$\mathcal{W}^* = \arg \min \left\{ \text{Tr}(R\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in [\mathcal{C}_\infty \cap \mathcal{R}_\mathcal{D}] \right\} \quad (3.39)$$

que assegura o menor limitante $\|H\|_2^2$ para um γ pré-especificado, respeitando as condições de estabilidade.

Prova: O item (a) está demonstrado no Lema 7 assim como o fato de $K \in \mathcal{K}$ e o item (b) decorre do Teorema anterior;

□

3.5 Conclusão

Foram apresentadas neste capítulo condições suficientes que permitem a minimização das normas $\mathcal{H}_2$ e/ou $\mathcal{H}_\infty$ e garantem alocação de pólos em uma sub-região à esquerda do plano complexo. Observe que nenhum termo majorante é introduzido nas desigualdades matriciais, o que poderá possibilitar a obtenção de melhores índices de desempenho.

É importante notar que as restrições são tratadas aditivamente, possibilitando a combinação das três regiões $\mathcal{V}(\alpha, \beta)$, $\mathcal{U}(\delta, \rho)$ e $\mathcal{D}(\phi, \psi)$. Vale ressaltar que, sem as restrições que garantem a alocação de pólos, tem-se a resolução do problema de custo garantido $\mathcal{H}_2$ e/ou $\mathcal{H}_\infty$.

Ao contrário do caso em que o sistema é precisamente conhecido, não é possível assegurar a localização dos pólos no exterior de um círculo ou de uma parábola, pois as expressões de Lyapunov envolvendo as matrizes do sistema deixam de ser convexas.

Capítulo 4

Exemplos

4.1 Introdução

Um método numérico para a resolução dos problemas de controle robusto com alocação de pólos é proposto neste Capítulo, através de um algoritmo de linearização externa, baseado no método de planos de corte. Em seguida são apresentados alguns exemplos de alocação em uma faixa vertical, em uma circunferência, e em uma parábola. Os três exemplos vistos são feitos com minimização das normas $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, respectivamente.

4.2 Método de Planos de Corte

A idéia básica do método de planos de corte é a resolução de uma série de problemas de programação linear, cujas soluções convergem para a solução do problema original. Esse método possibilita a resolução dos problemas convexos tratados nos capítulos anteriores, gerando hiperplanos que se aproximam gradativamente do conjunto de soluções factíveis, num processo denominado linearização externa. Trata-se de um método dual, que “caminha” de solução infactível em solução infactível, piorando o valor da função objetivo a cada iteração, até que, dentro de uma certa precisão, atinge-se uma solução factível, obtendo-se a solução ótima do problema.

Apenas o algoritmo de alocação em uma região circular com o critério $\mathcal{H}_2$ é apresentado. As demais situações são abordadas com algoritmos análogos e portanto, não descritos neste trabalho.

O algoritmo de linearização externa é dado por:

- **Passo 1:** Defina um politopo inicial $\mathcal{P}^0$ que contenha o conjunto convexo $[\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_u]$. Faça $\ell = 0$ (contador de iterações). A escolha de $\mathcal{P}^0$ é arbitrária, podendo ser o espaço paramétrico inteiro.
- **Passo 2:** Resolva o problema de Programação Linear (note que a função traço é um operador linear:

$$\min \left\{ \text{Tr}(RW) \quad : \quad W \in \mathcal{P}^\ell \right\}$$

Se o problema for infactível, então $\mathcal{C}_2 = \emptyset$ e o programa se encerra, sem solução.

- **Passo 3:** Verifique se a solução $W^\ell \in [\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_u]$. No caso afirmativo pare. O algoritmo atingiu a solução ótima, cujo ganho correspondente é dado por $K = W_2' W_1^{-1}$. Caso contrário, calcule a matriz $\Phi(W^\ell)$ e o escalar $\varphi(W^\ell)$ que definem o hiperplano separador entre W^ℓ e $[\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_u]$, e obtenha o novo politopo $\mathcal{P}^{\ell+1}$, dado por:

$$\mathcal{P}^{\ell+1} \triangleq \mathcal{P}^\ell \cap \left\{ \varphi(W^\ell) + \langle \Phi(W^\ell), W \rangle \leq -\epsilon \right\} \quad (4.1)$$

Faça $\ell = \ell + 1$ e retorne ao passo 2. A notação $\langle X, W \rangle$ indica o produto escalar de X por W . A matriz $\Phi(W^\ell)$ é um subgradiente calculado no ponto W^ℓ , e a expressão entre chaves em (4.1) define um semi-espço que contém $[\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_u]$ mas não contém o ponto W^ℓ . Para maiores detalhes sobre o algoritmo de planos de corte, veja por exemplo [6] e [24].

Nas figuras 4.1, 4.2 e 4.3 tem-se uma seqüência ilustrando o método de planos de corte. Esta seqüência se prolonga até que uma solução factível seja encontrada, ou caso contrário, que não exista uma solução para o problema de otimização convexa. Note que a seqüência de politopos $\mathcal{P}^\ell$, $\ell = 0, 1, \dots$, satisfaz

$$\mathcal{P}^0 \supset \mathcal{P}^1 \supset \mathcal{P}^2 \supset \dots \supset [\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}_u] \quad (4.2)$$

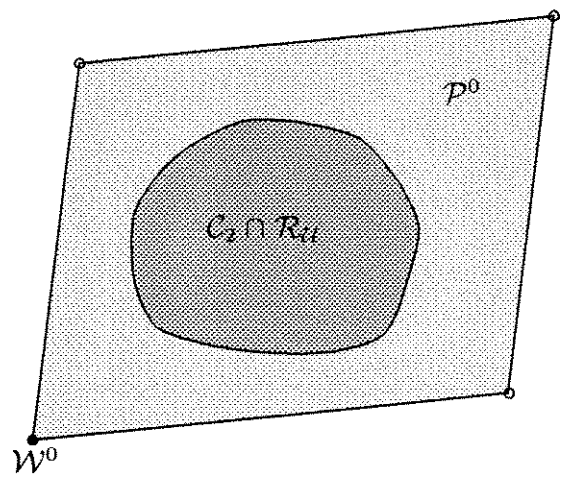


Figura 4.1: Politopo Inicial $\mathcal{P}^0$.

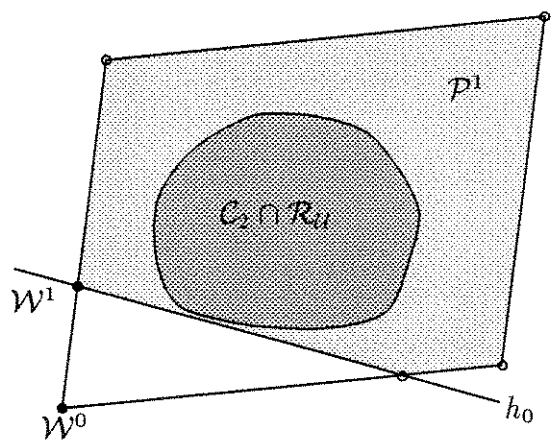
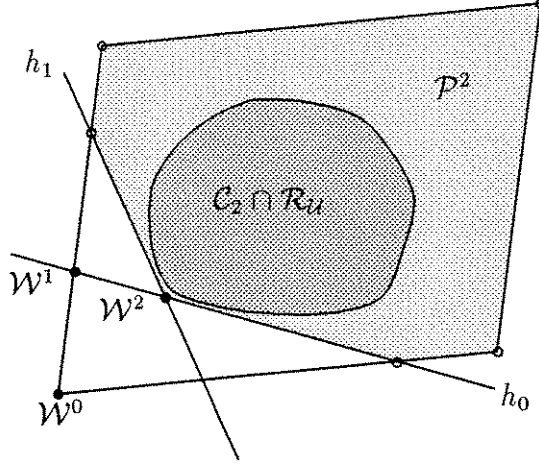


Figura 4.2: Politopo $\mathcal{P}^1$.

Figura 4.3: Politopo $\mathcal{P}^2$.

O procedimento sempre converge para o seu ótimo global quando uma solução existe. Como nos demais procedimentos do tipo plano de corte, a taxa de convergência (que depende da profundidade dos cortes dados) não pode ser calculada de maneira global. Neste algoritmo, a cada iteração, calculamos o hiperplano separador a partir da restrição mais violada do conjunto de restrições, garantindo com isso que, localmente, realizamos o corte mais profundo.

No caso de otimização $\mathcal{H}_2$ a equação do plano de corte que separa $\mathcal{W}$ de $\mathcal{C}_2$ correspondente à restrição $v'\Theta_{2i}(\mathcal{W})v \leq \epsilon$, $v \in \mathcal{N}$, com $\Theta_{2i}(\cdot)$ definida em (1.12), é dada por

$$f(\mathcal{W}) \geq f(\mathcal{W}_0) + \langle 2F'_i v_0 v'_0, \mathcal{W} - \mathcal{W}_0 \rangle \quad (4.3)$$

Para a alocação de pólos em uma região circular, a equação do plano de corte que separa $\mathcal{W}$ de $\mathcal{R}_U$ correspondente à restrição $v'\Theta_{\delta i}(\mathcal{W})v \leq 0$, $v \in \mathcal{N}$, com $\Theta_{\delta i}(\cdot)$ definida em (3.18) é dada por

$$f(\mathcal{W}) \geq f(\mathcal{W}_0) + \langle F'_{\delta i} v_0 v'_0 F_{\delta i} - \rho^2 v_0 v'_0, \mathcal{W} - \mathcal{W}_0 \rangle \quad (4.4)$$

onde i , F_i e v_0 , são obtidos a partir da restrição mais violada.

4.3 Exemplo

O sistema aqui utilizado foi extraído de [33] e representa uma aeronave do tipo F4E com dois pontos de operação, mach=0.5, altitude 5000 pés; mach = 0.9, altitude

35000 pés (mach especifica a velocidade em termos da velocidade do som). Em [33], o problema era estabilizar o modo longitudinal do avião de caça F4E. As variáveis de estado são: x_1 = aceleração normal; x_2 = “pitch rate”; x_3 = ângulo de elevação. Para maiores detalhes veja [1]. Os dados numéricos são

$$F_1 = \begin{bmatrix} -0.6606 & 18.1100 & 84.3400 & 85.1000 \\ 0.0820 & -0.6586 & -10.8100 & 0 \\ 0 & 0 & -250.0000 & -250.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -0.9896 & 17.4100 & 96.1500 & 97.7800 \\ 0.2648 & -0.8512 & -11.3900 & 0 \\ 0 & 0 & -250.0000 & -250.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$B_1 = \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Os autovalores, para o sistema em malha aberta, nos dois pontos de operação, são

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} -1.8782 \\ 0.5590 \\ -250.0000 \end{bmatrix} , \lambda_2 = \begin{bmatrix} -3.0686 \\ 1.2278 \\ -250.0000 \end{bmatrix}$$

4.3.1 Controle $\mathcal{H}_2$ com alocação em uma Faixa

Primeiramente foi determinado o Controle Robusto $\mathcal{H}_2$ e, em seguida, foi imposta uma restrição de alocação em uma faixa vertical $\mathcal{V}(-17, -25)$. A figura 4.4 mostra a localização dos pólos sem restrição (à esquerda, excluindo uma pequena “nuvem” real em torno de -300) e com a restrição de alocação (à direita). Note que a faixa imposta afastou os pólos do eixo real, mas tornou o sistema mais oscilatório. A pequena “nuvem” de pólos também foi incluída.

Para o caso robusto sem restrição de alocação o ganho de realimentação obtido foi

$$K = \begin{bmatrix} -1.0434 & -1.9329 & -0.0965 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

e com a restrição de alocação

$$K_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} -0.4010 & -0.6106 & -0.9282 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

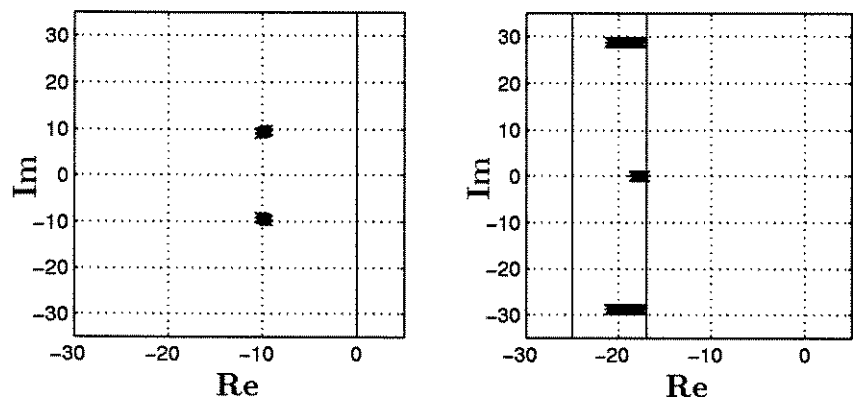


Figura 4.4: Nuvens de Pólos - Otimização $\mathcal{H}_2$.

	Controle Robusto $\mathcal{H}_2$ sem Alocação	Controle Robusto $\mathcal{H}_2$ com Alocação
iterações	61	121
$\text{Tr}(RW)$	0.2747	3.2069
$\ H\ _2^2$ (1)	0.1383	0.1042
$\ H\ _2^2$ (2)	0.1258	0.0996

Tabela 4.1: Otimização $\mathcal{H}_2$ e Alocação em uma faixa.

A tabela 4.1 resume os resultados obtidos para os dois casos aqui estudados. Nota-se uma elevação significativa no limitante da norma (cerca de 12 vezes), embora a norma $\mathcal{H}_2$ calculada em cada um dos vértices (indicados (1) e (2) para F_1 e F_2 , respectivamente). Note também que não houve alteração significativa no valor do ganho.

4.3.2 Controle $\mathcal{H}_\infty$ com alocação em uma Região Circular

Neste caso determinou-se o controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ e, em seguida, impôs-se a região circular $\mathcal{U}(-60, 30)$. A figura 4.5 mostra a localização dos pólos sem restrição (à esquerda) e com a restrição de alocação (à direita). Note que os pólos próximos ao eixo real foram afastados, e que o círculo garante também que a parte imaginária dos autovalores está limitada.

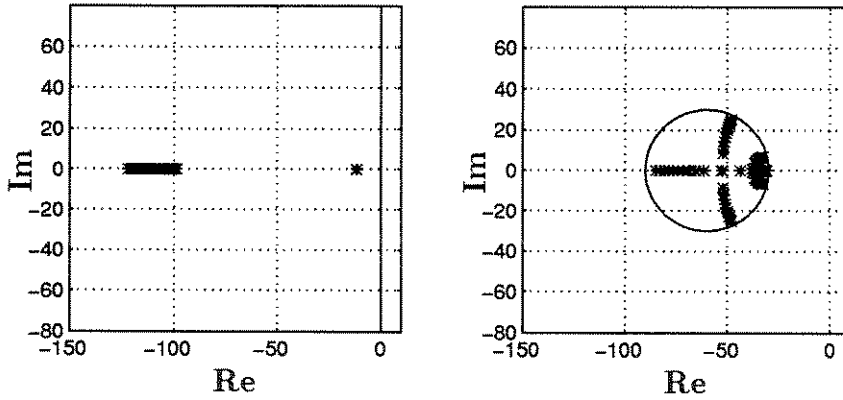


Figura 4.5: Nuvens de Pólos - Otimização $\mathcal{H}_\infty$.

A tabela 4.2 resume os resultados para os dois casos aqui estudados. Note que, embora o custo garantido γ tenha aumentado de cerca de 10 vezes, o valor calculado da norma $\mathcal{H}_\infty$ mostra apenas uma pequena variação.

Para o caso robusto sem alocação o ganho de realimentação obtido foi

$$K = \begin{bmatrix} -1592.1 & -2808.0 & -306.1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

com a restrição de alocação

$$K_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} -1.7891 & -2.0420 & -1.1053 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

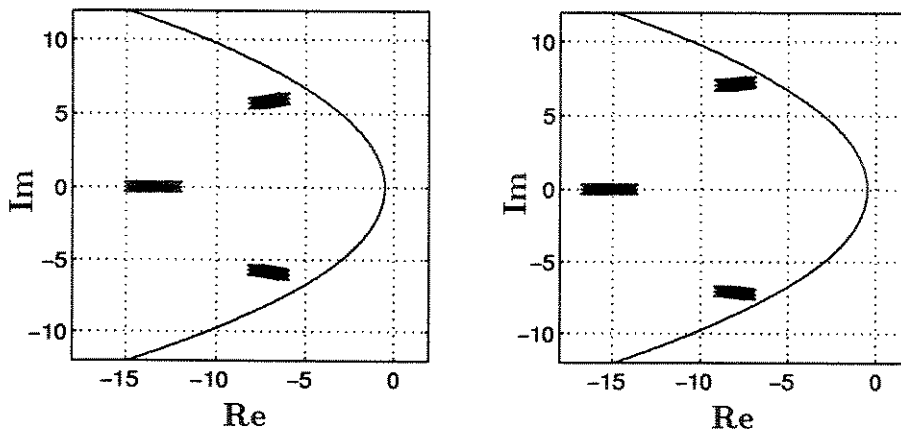
	Controle Robusto $\mathcal{H}_\infty$ sem Alocação	Controle $\mathcal{H}_\infty$ com Alocação
iterações	292	360
γ	0.1208	1.3994
$\ H\ _\infty$ (1)	0.1167	0.1572
$\ H\ _\infty$ (2)	0.1173	0.1391

Tabela 4.2: Otimização $\mathcal{H}_\infty$ e Alocação em uma Região Circular.

É interessante notar a tendência do controle $\mathcal{H}_\infty$ de fazer o ganho K assumir valores muito grandes. A especificação de uma sub-região do plano complexo evita esse tipo de comportamento.

4.3.3 Controle Misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ com alocação em uma Região Parabólica

Para este caso determinou-se o controle robusto $\mathcal{H}_2$ com a restrição da região parabólica $\mathcal{D}(0.1, 0.5)$ e, em seguida, com a mesma restrição, determinou-se o controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para $\gamma = 0.35$.

Figura 4.6: Nuvens de Pólos - Otimização $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

A figura 4.6 mostra a localização dos pólos para os dois casos: controle robusto

$\mathcal{H}_2$ (à esquerda) e controle robusto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ (à direita). A parábola foi escolhida de maneira a, quando comparada a alocação na faixa vertical, diminuir o comportamento oscilatório. A tabela 4.3 mostra os valores dos limitantes e normas para este caso.

	Controle Robusto $\mathcal{H}_2$ com Alocação	Controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ com Alocação
iterações	232	248
$\text{Tr}(\text{RW})$	1.7573	2.3450
$\ H\ _2^2 (1)$	0.6545	0.4491
$\ H\ _2^2 (2)$	0.5217	0.3624
$\ H\ _\infty (1)$	0.4552	0.3436
$\ H\ _\infty (2)$	0.4178	0.3118

Tabela 4.3: Otimização $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ e Alocação em uma Região Parabólica.

O valor de $\gamma = 0.35$, imposto para a determinação do controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, foi determinado em função da norma $\mathcal{H}_\infty$ calculada no controle $\mathcal{H}_2$ (0.4552). Dessa forma conseguiu-se a otimização da norma $\mathcal{H}_2$ com uma norma $\mathcal{H}_\infty$ menor do que o γ especificado.

Para o caso robusto $\mathcal{H}_2$ com a alocação o ganho de realimentação obtido foi

$$K = \begin{bmatrix} -0.0316 & -0.1100 & -0.8928 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

e no caso $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

$$K_D = \begin{bmatrix} -0.0371 & -0.1549 & -0.8650 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

O limitante γ impõe atenuação de distúrbios e o critério $\mathcal{H}_2$ se ocupa do posicionamento dos pólos, sempre respeitando a região parabólica imposta.

4.3.4 Caso Precisamente Conhecido

Determinou-se o controle $\mathcal{H}_2$ utilizando-se somente a matriz F_1 (problema precisamente conhecido). Em seguida, especificou-se a região de interesse como sendo a interseção do interior do círculo de raio 8 e centro em -280 com o lado externo de um círculo de raio 10 e centro em -270 .

A figura 4.7 mostra a localização exata dos pólos para os dois casos: sem alocação de pólos (à esquerda) e com alocação de pólos (à direita).

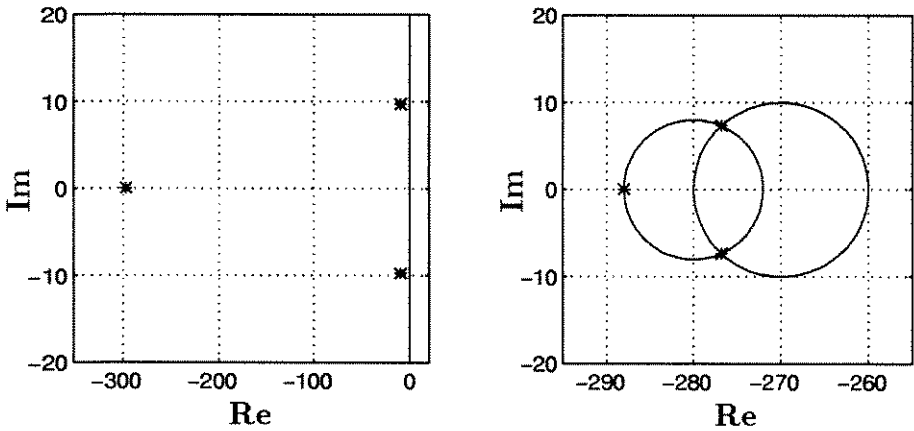


Figura 4.7: Localização dos Pólos - Otimização $\mathcal{H}_2$.

	Controle $\mathcal{H}_2$ sem Alocação	Controle $\mathcal{H}_2$ com Alocação
iterações	44	183
$\text{Tr}(\text{RW})$	0.2745	6.50×10^7
$\ H\ _2^2$	0.1389	4.3616
pólos	-297.10	-288.01
	$-9.44 \pm 9.70i$	$-276.79 \pm 7.34i$

Tabela 4.4: Otimização $\mathcal{H}_2$ - Caso Precisamente Conhecido.

Para o caso $\mathcal{H}_2$ sem alocação o ganho de realimentação obtido foi

$$K = \begin{bmatrix} -1.0434 & -1.9329 & -0.0965 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

e com a alocação de pólos

$$K_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} -446.8402 & -64.6680 & -149.7433 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

A tabela 4.4 mostra os valores calculados da norma $\mathcal{H}_2$ e a localização dos pólos. É interessante notar a tendência dos pólos de ficar o mais próximo possível da localização original do controle $\mathcal{H}_2$ (sem a restrição). Note que o limitante da norma $\mathcal{H}_2$ atinge valores da ordem de 10^7 , indicando o quão restritiva é a região escolhida. Houve também um aumento significativo tanto da norma $\mathcal{H}_2$ calculada (aproximadamente 30 vezes), quanto dos valores do ganho $K_{\mathcal{D}}$.

4.4 Conclusão

Os exemplos aqui apresentados tem como finalidade apenas ilustrar e comprovar a teoria descrita anteriormente. É importante ressaltar que as regiões vistas podem ser combinadas e formar uma região de alocação mais específica e que satisfaça os critérios de desempenho exigidos no projeto de um controlador.

A aplicação das técnicas desenvolvidas neste trabalho em outros exemplos pode ser encontrada em [17], [18], [27] e [29].

Conclusão Geral

Este trabalho apresenta um método de otimização convexa para controle de custo garantido $\mathcal{H}_2$ e/ou $\mathcal{H}_\infty$ via realimentação de estados com restrições de alocação de pólos. Os sistemas aqui tratados são sistemas dinâmicos lineares, contínuos no tempo, modelados por variáveis de estado e incertos. A incerteza, presente na matriz dinâmica e na matriz de controle, é do tipo poliedral convexa.

A otimização de normas do tipo $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$, ou mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ é muito importante quando pretende-se, por exemplo, minimizar a ação do distúrbio na saída do sistema. A alocação de pólos complementa a otimização quando deseja-se, além da minimização de normas, especificar critérios de desempenho para o sistema [17], [27].

O tratamento convexo do problema permitiu a implementação de um algoritmo baseado no método de planos de cortes. Além das restrições de alocações, qualquer outra pode ser adicionada, desde que convexa.

Como extensão dos resultados aqui apresentados, podem ser citados os problemas de realimentação estática de saída, ou as restrições do tipo descentralização da matriz de ganhos. Dentro da metodologia empregada ao longo deste trabalho, o problema de realimentação de saída se resume a conseguir expressar, no espaço paramétrico escolhido, restrições que garantam a existência de um ganho estático de saída. Apesar de avanços consideráveis nesse tema (veja [32] e referências internas), o problema de realimentação de saída não pode ser convertido em um problema convexo. Entretanto, as soluções adotadas em [32] poderiam ser perfeitamente empregadas para realizar a alocação de pólos via realimentação de saída.

A restrição de descentralização pode ser incorporada aos problemas de controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ com alocação, pois não alteram a convexidade global dos problemas. Uma análise detalhada de controle descentralizado pode ser encontrada em [11].

Um estudo importante diz respeito ao uso de condições necessárias e suficientes para alocação de pólos em sub-regiões, baseadas na extensão do conceito de estabilidade quadrática. No caso de estabilidade quadrática, é suficiente a existência de

uma mesma matriz de Lyapunov para todo o domínio de incertezas considerado. Expressando a condição de alocação dentro de um círculo como em [19], é possível trabalhar uma mesma desigualdade de Lyapunov que, além da presença dos pólos no interior do círculo, garante que este se encontra no semi-plano esquerdo e ainda proporciona uma relação com a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema, calculada em algum ponto dentro do domínio de incertezas. O problema de atenuação prescrita e o controle de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ poderiam ser resolvidos de maneira menos conservativa se as restrições de alocação fossem expressas na mesma equação que se relaciona com a norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência, e não de maneira aditiva (interseção de um conjunto que garante a norma com outro conjunto que garante a localização dos pólos, como feito neste trabalho).

Bibliografia

- [1] J. Ackerman, "Longitudinal Control of Fighter Aircraft F4E with Additional Cannards", in a Collection of Plant Models and Design Specifications for Robust Control, by K. P. Sondergeld, Ed. Oberpfaffenhofen, West Germany: DFVLR.
- [2] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, "Optimal Control - Linear Quadratic Methods", Prentice Hall, 1989.
- [3] D. Arzelier, J. Bernussou and G. Garcia, "Pole Assignment of Linear Uncertain Systems in a Sector Via Lyapunov-Type Approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, pp. 1128-1131, July, 1993.
- [4] R. Bambang, E. Shimemura and K. Uchida, "Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Control with Pole Placement: State Feedback Case", *Proceedings of the 1993 American Control Conference*, Vol. 3, pp. 2777-2779, June, 1993.
- [5] B. R. Barmish, "Stabilization of Uncertain Systems Via Linear Control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 28, No. 8, pp. 848-850, August, 1983.
- [6] J. Bernussou, P. L. D. Peres and J. C. Geromel, "A Linear Programming Oriented Procedure for Quadratic Stabilization of Uncertain Systems", *Systems & Control Letters*, Vol. 13, pp. 65-72, July, 1989.
- [7] S. P. Boyd and C. H. Barratt, "Linear Control Design: Limits of Performance", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [8] J. C. Doyle, B. A. Francis and A. R. Tannenbaum, "Feedback Control Theory", Macmillan, New York, 1992.
- [9] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis, "State-Space Solutions to Standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ Control Problems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 8, pp. 831-847, August, 1989.

-
- [10] K. Furuta and S. B. Kim, "Pole Assignment in Specified Disk", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 32, No. 5, pp. 423-427, May, 1987.
 - [11] J. C. Geromel, J. Bernussou and P. L. D. Peres, "Decentralized Control Through Parameter Space Optimization", *Automatica*, Vol. 30, No. 10, pp. 1565-1578, October, 1994.
 - [12] J. C. Geromel, P. L. D. Peres and J. Bernussou, "On a Convex Parameter Space Method for Linear Control Design of Uncertain Systems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 29, No. 2, pp. 381-402, March, 1991.
 - [13] J. C. Geromel, G. Garcia and J. Bernussou, " $\mathcal{H}_2$ Robust Control With Pole Placement", *12th IFAC World Congress on Automatic Control*, Sidney, Australia, Vol. 2, pp. 283-288, July, 1993.
 - [14] J. C. Geromel, P. L. D. Peres and S. R. de Souza, " $\mathcal{H}_2$ Guaranteed Cost Control for Uncertain Continuous-Time Systems", *Systems & Control Letters*, Vol. 19, pp. 23-27, 1992.
 - [15] J. C. Geromel, P. L. D. Peres and S. R. de Souza, "Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Control for Continuous-Time Systems", *IEEE Proceedings of 31st Conference on Decision and Control*, Tucson, USA, vol. 4, pp. 3717-3722, December, 1992.
 - [16] J. C. Geromel, P. L. D. Peres and S. R. de Souza, " $\mathcal{H}_\infty$ Control of Discrete-time Uncertain Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, No. 5, pp. 1072-1075, May, 1994.
 - [17] G. Guaitoli e P. L. D. Peres, "Controle $\mathcal{H}_\infty$ para Sistemas Contínuos Incertos com Alocação de Pólos", *10^o Congresso Brasileiro de Automática*, vol. 1, pp. 197-202, 1994.
 - [18] G. Guaitoli e P. L. D. Peres, "Otimização $\mathcal{H}_2$ para Sistemas Contínuos Incertos com Alocação de Pólos", *Nota Interna FEE No. 013/93 - UNICAMP*, 1993.
 - [19] W. M. Haddad and D. S. Bernstein, "Controller Design with Regional Pole Constraints", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 1, pp. 54-69, January, 1992.
 - [20] Y. T. Juang, "Robust Stability and Robust Pole Assignment of Linear Systems with Structured Uncertainty", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, No. 5, pp. 635-637, May, 1991.

-
- [21] Y. T. Juang, Z. C. Hong and Y. T. Wang, "Robustness of Pole-Assignment in a Specified Region", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 7, pp. 758-760, July, 1989.
- [22] P. P. Khargonekar and M. A. Rotea, "Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control: A Convex Optimization Approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, No. 7, pp. 824-837, July, 1991.
- [23] J. Medanic, H. S. Tharp and W. R. Perkins, "Pole Placement by Performance Criterion Modification", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 33, No. 5, pp. 469-472, May, 1988.
- [24] P. L. D. Peres, "Sur la Robustesse des Systèmes Linéaires: Approche par Programmation Linéaire", Tese de Doutorado, Université Paul Sabatier, Toulouse, França, 1989.
- [25] P. L. D. Peres, J. C. Geromel and S. R. Souza, " $\mathcal{H}_\infty$ Guaranteed Cost Control for Uncertain Continuous-Time Linear Systems", *Systems & Control Letters*, Vol. 20, pp 413-418, 1993.
- [26] P. L. D. Peres, J. C. Geromel and S. R. Souza, "Optimal $\mathcal{H}_\infty$ State Feedback Control for Continuous-Time Linear Systems", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 82, No. 2, pp. 343-359, August, 1994.
- [27] P. L. D. Peres, G. Guaitoli and C. K. Umez, "Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Control of Uncertain Continuous-time Systems with Regional Pole Constraints", *IFAC Symposium on Robust Control Design*, vol. 1, pp. 98-103, 1994.
- [28] P. L. D. Peres, S. R. Souza e J. C. Geromel, "Uma Abordagem Convexa para o Problema de Controle Robusto de Sistemas Dinâmicos", publicação FEE no. 27/92 - UNICAMP, 1992.
- [29] P. L. D. Peres, C. K. Umez and G. Guaitoli, " $\mathcal{H}_2$ Control of Uncertain Discrete-Time Systems with Regional Pole Constraints", *33rd Conference on Decision and Control*, Vol. 1, pp. 565-570, 1994.
- [30] I. R. Petersen, "A Procedure for Simultaneously Stabilizing a Collection of Single Input Linear Systems Using Non-Linear State Feedback Control", *Automatica*, Vol. 23, N. 1, pag. 33-40, 1987.

-
- [31] C. Scherer, " $\mathcal{H}_\infty$ -Control by State Feedback: An Iterative Algorithm and Characterization of High-Gain Occurrence", *Systems & Control Letters*, Vol. 12, pp. 383-391, 1989.
 - [32] S. R. Souza "Análise Convexa Aplicada a Sistemas Dinâmicos Contínuos", Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Campinas, 1994.
 - [33] W. E. Schimmitendorf, "Designing Stabilizing Controllers for Uncertain Systems Using the Riccati Equation Approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.33, No.4, pp.376-378, 1988.
 - [34] E. Yaz, A. Azemi and E. E. Skelton, "Design of Covariance Controller and Estimator with Prescribed Pole Location", *Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control*, Vol. 1, pp. 197-202, Tucson, USA, December, 1992.
 - [35] E. Yas, K. Grigoriadis and R. E. Skelton, "Discrete-time $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Norm-bounding Pole Placement", *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 1, pp. 487-492, Tucson, USA, December, 1992.
 - [36] B. Wittenmark, R. J. Evans and Y. C. Soh, "Constrained Pole-Placement using Transformation and LQ-Design", *Automatica*, Vol. 23, No. 6, pp. 767-769, Tucson, USA, 1987.

Apêndice A

Equivalência para Alocação em Círculo

A.1 Introdução

Neste apêndice, mostra-se a equivalência entre a condição de alocação em círculo proposta em [19] e a utilizada nesta dissertação.

A.2 Equivalência entre Condições

Em [19], a equação de Lyapunov que garante a localização dos pólos de A em um círculo é dada por

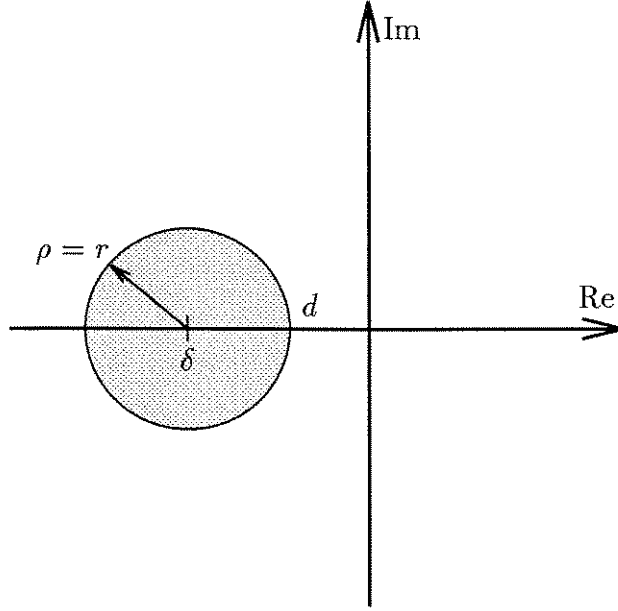
$$A_d P + P A'_d + \frac{1}{r} A_d P A'_d + Q = 0 \quad (\text{A.1})$$

onde Q é uma matriz definida positiva arbitrária,

$$A_d = A + d\mathbf{I} \quad (\text{A.2})$$

d é a distância do círculo ao eixo imaginário e r é o raio da circunferência (ver figura A.1). Entretanto, como será mostrado, esta equação é equivalente à equação (2.9) utilizada no capítulo 2

$$(A - \delta\mathbf{I})P(A - \delta\mathbf{I})' - \rho^2 P < 0 \quad (\text{A.3})$$

Figura A.1: Alocação em um círculo: $\mathcal{U}(\delta, \rho)$

para um círculo centrado em δ com raio ρ .

Para Q definida positiva pode-se reescrever (A.1) como

$$A_d P + P A'_d + \frac{1}{r} A_d P A'_d < 0 \quad (\text{A.4})$$

substituindo (A.2) tem-se

$$(A + dI)P + P(A + dI)' + \frac{1}{r}(A + dI)P(A + dI)' < 0 \quad (\text{A.5})$$

Rearranjando e multiplicando por r

$$(AP + PA')(r + d) + APA' + d^2 P + 2rdP < 0 \quad (\text{A.6})$$

pela figura A.1 pode-se tirar

$$\begin{aligned} r + d &= \delta \\ r &= \rho \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

ou ainda

$$d = \delta - r \quad (\text{A.8})$$

Substituindo, tem-se

$$\delta(AP + PA') + APA' + (\delta - \rho)^2 P + 2\rho(\delta - \rho)P < 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\delta(AP + PA') + APA' + (\delta^2 - 2\delta\rho + \rho^2)P + (2\rho\delta - 2\rho^2)P < 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\delta(AP + PA') + APA' + \delta^2 P - \rho^2 P < 0 \quad (\text{A.11})$$

Finalmente, (A.11) pode ser escrita

$$(A - \delta\mathbf{I})P(A - \delta\mathbf{I})' - \rho^2 P < 0 \quad (\text{A.12})$$