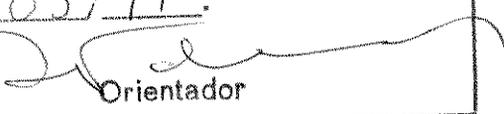


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E CONTROLE DE ENERGIA

Este exemplar corresponde à redação final da tese  
defendida por Adelheid Ingeborg Mahla  
Álvarez e aprovada pela Comissão  
Ju'gadora em 4 / 03 / 91.  
  
Orientador

CAOS EM SISTEMAS DE CONTROLE DE MOTORES C.C.  
PELA TÉCNICA PLL-DUAL

Orientador :

Álvaro Geraldo Badan Palhares

Aluna :

Adelheid Ingeborg Mahla Álvarez

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia  
Elétrica da Universidade Estadual de Campinas,  
UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos  
para a obtenção do título *Mestre em Engenharia  
Elétrica*.

Março 1991

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

*A minha família*

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho deve muito à contribuição de várias pessoas e instituições, às quais desejaria expressar os meus agradecimentos.

Ao Prof. Dr. Álvaro Badan Palhares, orientador desta tese, pela sua dedicação e interesse, manifestados na sugestão de idéias, elaboração de conceitos, discussão dos modelos propostos e revisão cuidadosa das versões preliminares. A sua visão dos objetivos a serem alcançados foi muito valiosa no direcionamento do trabalho. Aos professores Dr. Roberto Lagos, Dr. José Cláudio Geromel e Dr. João Bosco Ribeiro do Val, pela revisão do trabalho e as suas sugestões.

A Aluízio Ribeiro Araújo, pela indicação de bibliografia e pela discussão de conceitos e propostas para análise.

A Paulo Brero de Campos, pelo fornecimento de dados experimentais.

A Ely Carneiro Paiva, Vicente Carvalho de Almeida e Andrea Hann, pela indicação de bibliografia e discussão do tema.

À desenhista Lúcia Cardoso e às secretárias Ademilde Félix, Elza Aoki e Ana Maria Silva pelo seu trabalho cuidadoso na confecção dos desenhos e na digitação do texto.

Às seguintes instituições: À UNICAMP, onde este trabalho se desenvolveu; à CAPES, pelo suporte financeiro; e ao Centro Internacional de Física Teórica da Universidade de Brasília, pelo suporte financeiro para participar dos cursos da "Escola de Inverno em Fenômenos Físicos Não Lineares" em 1989.

*De que ventre procede o gelo?  
E quem gera a geada do céu?*

*Quem pôs a sabedoria no íntimo,  
ou quem à mente deu o entendimento?*

*Tudo fez formoso em seu tempo:  
também pôs o mundo no coração deles,  
sem que o homem possa  
descobrir a obra que Deus fez  
desde o princípio até o fim.*

*A Bíblia, Jó 38: 29, 36 ;  
Eclesiastes 3:11*

## ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
PARTE I : FUNDAMENTOS TEÓRICOS	
1	
CONCEITOS GERAIS SOBRE SISTEMAS DINÂMICOS E CAOS	5
1.1. Sistemas dinâmicos	8
1.2. Conjuntos limites	13
1.3. Comportamento em regime permanente	16
1.4. A transformação de Poincaré	23
1.5. Estabilidade dos conjuntos limites	28
1.6. Superfícies estáveis e instáveis	36
1.7. Trajetórias homoclínicas e pontos homoclínicos transversos	41
1.8. A ferradura de Smale	45
2	
CAOS EM SISTEMAS COM MODELOS CONTÍNUOS	51
2.1. Método de Melnikov para um sistema Hamiltoniano, autônomo e de ordem dois	52
2.2. Método de Melnikov para um sistema autônomo de ordem dois	65
2.3. Conclusões	67

<b>3</b>	
<b>CAOS EM SISTEMAS DISCRETOS</b>	<b>68</b>
3.1. Caos em equações escalares	69
3.2. Caos no espaço $\mathbb{R}^n$	79
3.3. Caos em sistemas de controle amostrados	87
3.4. Conclusões	97

<b>4</b>	
<b>TEORIA ERGÓDICA DE CAOS</b>	<b>100</b>
4.1. Dimensão dos atratores	103
4.2. Reconstrução do espaço de fase a partir de uma série de amostras de uma componente do vetor de estado	121
4.3. Expoentes de Lyapunov	124
4.4. Conclusões	130

## PARTE II :O SISTEMA PLL-DUAL. REGIÃO DE COMPORTAMENTO CAÓTICO NO ESPAÇO DE PARÂMETROS

<b>5</b>	
<b>DESCRIÇÃO DO SISTEMA E MODELO MATEMÁTICO. MODELO PARA SIMULAÇÃO ANALÓGICA</b>	<b>131</b>
5.1. Descrição do PLL	131
5.2. O PLL utilizado como sistema de controle de velocidade de motores	136
5.3. Sistema PLL-dual. Modelo para simulação analógica	140

**6**  
**MODELO CONTÍNUO. ANÁLISE PELO MÉTODO DE MELNIKOV E DETERMINAÇÃO DOS VALORES DOS PARÂMETROS PARA OS QUAIS O SISTEMA COMPORTA-SE EM FORMA CAÓTICA** 150

- 6.1. Derivação da equação diferencial a partir do modelo de fase 151
- 6.2. Análise do modelo considerado como um sistema Hamiltoniano perturbado 161
- 6.3. Análise do modelo considerado como um sistema não Hamiltoniano perturbado 171

**7.**  
**COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS TEÓRICOS COM OS RESULTADOS DA SIMULAÇÃO ANALÓGICA. ANÁLISE E CONCLUSÕES.** 177

- 7.1. Resultados da simulação analógica 178
- 7.2. Comportamento de um sistema real 183
- 7.3. Discussão dos resultados teóricos e experimentais 186
- 7.4. Resumo 186
- 7.5. Perspectivas 187

**APÊNDICE A. O PLL UTILIZADO COMO DEMODULADOR FM** 189

- A.1. O PLL utilizado como demodulador FM 189
- A.2. Análise de erro em regime 192
- A.3. Definições 194

APÊNDICE B. CÁLCULO DE INTEGRAIS DE MELNIKOV	195
B.1. Caso Hamiltoniano	195
B.2. Caso não Hamiltoniano. Prova do teorema 6.1	198
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	203

## RESUMO

Descreve-se a dinâmica de um motor CC controlado pela técnica PLL-dual. Discutem-se as diferentes técnicas existentes para modelar um sistema dinâmico não linear e analisar o comportamento caótico. Escolhe-se um modelo que representa o sistema como uma equação diferencial contínua e não linear, o qual é constituído por um processo linear de 2ª ordem, uma não-linearidade na realimentação e uma perturbação periódica. Utiliza-se o Método de Melnikov para determinar a região do espaço de parâmetros para a qual o comportamento é caótico. Os resultados são verificados em uma simulação analógica e num sistema real.

Palavras-chave: Caos, controle de motores CC, método de Melnikov, sistemas dinâmicos, sistemas não-lineares, técnica PLL-dual.

## ABSTRACT

A dual-PLL d.c. motor control technique is described as a dynamical system. Existent methodologies for nonlinear dynamical system modeling and chaotic behavior analysis are exposed. A model that represents a system as a nonlinear, continuous differential equation is selected. The system is composed of a 2<sup>nd</sup> order linear process, a nonlinearity in the feedback and a periodic perturbation. The Melnikov Method is used to define the chaotic region in parameter space. Results are verified via an analog simulation and in a real system.

Keywords: Chaos, d.c. motor control, dual-PLL technique, dynamical systems, Melnikov Method, nonlinear systems.

## INTRODUÇÃO

O controle de máquinas pela técnica PLL-dual combina de forma vantajosa as melhores características do PLL (phase-locked loop) com as dos controladores contínuos convencionais.

O PLL é caracterizado pela alta exatidão em regime permanente, mas tem as desvantagens de uma resposta transitória lenta e limitações nas faixas de captura e encravamento ("lock").

O sistema dual elimina estas desvantagens, operando como um sistema de malha fechada convencional para erros grandes e comutando para o controle PLL na vizinhança do ponto de operação em regime permanente. A malha fechada contínua é projetada para prover resposta transitória rápida, enquanto que, em modo PLL, a malha é projetada para obter alta exatidão em regime permanente [1].

Esta combinação de características - alta exatidão em regime permanente e resposta transitória rápida, a baixo custo - tem despertado, nos últimos anos, um crescente interesse pela utilização do sistema PLL-dual para o controle de máquinas elétricas.

Contudo, o sistema não deixa de apresentar alguns problemas, que devem ser considerados na fase de projeto. A inclusão de um elemento não linear - o detetor de fase do PLL -, e a presença de um sinal de erro descontínuo no tempo, podem causar, para determinados valores dos parâmetros do sistema, um comportamento de tipo pseudo-aleatório nas variáveis de saída.

Este fenômeno, que tem origem na própria dinâmica do sistema e que não é atribuível à presença de ruído estocástico, tem sido reportado e analisado na área de telecomunicações, no PLL de segunda ordem utilizado como demodulador de FM [2]. Em sistemas de controle com uma estrutura semelhante (modulação por largura de pulso), observa-se o mesmo tipo de comportamento [3,4,5,6,7,8].

Em um contexto mais amplo, os sistemas determinísticos que exibem um comportamento pseudo-aleatório tem sido chamados de "caóticos". O redescobrimento deste tipo de sistemas, nos últimos quinze anos, deve-se, em grande parte, à pesquisa em sistemas não lineares, a qual tem crescido pela maior capacidade de cômputo a baixo custo.

Paralelamente à descoberta do caos em diferentes áreas da ciência, tem-se desenvolvido ferramentas analíticas e computacionais que permitem compreender e descrever o fenômeno. O assunto está hoje longe de se esgotar, e apresenta problemas difíceis, tanto nos aspectos teóricos como nos experimentais. A teoria de sistemas dinâmicos utiliza resultados matemáticos complexos, os quais ainda são incompletos.

Embora as técnicas analíticas apresentem certo grau de dificuldade na sua aplicação a problemas reais (principalmente se a ordem do sistema for maior do que dois), permitem ter uma compreensão mais profunda do fenômeno, além de quantificá-lo e relacioná-lo com os parâmetros do sistema. Por outra parte, a experimentação e as simulações têm sustentado a formulação de conjeturas matemáticas baseadas na experiência, sendo úteis também em forma complementar às técnicas analíticas.

Os objetivos, neste trabalho, são a caracterização do fenômeno de caos e a determinação dos valores dos parâmetros para os quais dito fenômeno apresenta-se no sistema PLL-dual. Isto é importante para o projeto do controlador, pois pequenas alterações nos parâmetros do sistema podem levá-lo a se comportar de forma totalmente diferente. Não são suficientes, então, o ajuste empírico do controlador ou o projeto pelas técnicas clássicas. É necessário identificar as origens do comportamento caótico e descrever a sua influência no sistema.

Daí decorre a obtenção de critérios para o projeto do controlador, de forma tal que sejam determinadas regiões de trabalho seguras, nas quais eventuais modificações nas condições do sistema não conduzam a um comportamento qualitativamente diferente.

Uma melhor compreensão do fenômeno de caos em geral, e das condições para as quais ele apresenta-se no sistema em particular,

contribui para o projeto do controlador em duas formas: por uma parte traduz-se num aumento da qualidade do produto e pela outra significa um aumento de eficiência no uso do tempo de engenharia.

O melhoramento da qualidade provém de um aumento na confiabilidade, desde que sejam consideradas na etapa de projeto alterações que possam se apresentar no transcurso da vida útil do equipamento - tais como envelhecimento, troca de componentes, mudanças nas condições ambientais, etc. .

O aumento na eficiência é conseqüência da escolha de critérios mais adequados ao sistema em particular, os quais levem em consideração sua natureza intrinsecamente não-linear. As técnicas de tentativa e erro, utilizadas até agora no projeto de sistemas PLL de controle de motores, são demasiado dispendiosas em termos de tempo. Um exemplo ilustrativo é dado em [9], onde menciona-se que a Divisão de Motores PMI da Corporação Kollmorgen, pioneira na fabricação comercial de sistemas PLL de controle de motores, suspendeu a comercialização deste tipo de sistemas por quase uma década, apesar de ter obtido excelentes resultados e sucesso comercial. O motivo apontado foi o excessivo tempo de engenharia necessário para o projeto do sistema com diferentes especificações dos clientes, pois para compensar cada novo sistema utilizavam-se penosas técnicas de tentativa e erro.

Este estudo foi dividido em duas partes, atendendo aos objetivos expostos: descrição do fenômeno de caos e determinação das condições para as quais este apresenta-se no sistema PLL-dual.

Na parte I introduz-se a terminologia utilizada, caracteriza-se o fenômeno de caos e descreve-se formalmente as condições suficientes para sua existência.

Apresenta-se algumas das principais técnicas atualmente utilizadas no estudo de caos. Escolheu-se aquelas factíveis de serem empregadas na técnica PLL-dual, sem que por isso esta apresentação seja exaustiva. Há outras técnicas possivelmente úteis também para o problema considerado, as quais pela amplitude do tema não foram tratadas aqui. Mais ainda, muito trabalho de pesquisa desenvolve-se atualmente, com o objetivo de fornecer novas ferramentas de análise.

Os teoremas incluídos na parte I são apresentados de forma tal que seja possível compreendê-los e utilizá-los, mas não são dadas as demonstrações formais, as quais pela sua complexidade e extensão sobrepõem os objetivos inicialmente propostos.

Na parte II descreve-se o sistema e propõe-se um modelo adequado às técnicas de análise descritas na parte I. Escolheu-se um método que permite obter teoricamente uma região no espaço de parâmetros, na qual o sistema comporta-se em forma caótica. Compara-se os resultados teóricos com os resultados obtidos da simulação do sistema e discute-se a utilidade de cada tipo de técnica como ferramenta de projeto e diagnose.

## CAPÍTULO 1

### CONCEITOS GERAIS SOBRE SISTEMAS DINÂMICOS E CAOS

Durante muito tempo acreditou-se que a ciência, se fosse suficientemente desenvolvida, teria a capacidade não tão somente de explicar os fenômenos, mas também de prevê-los. Condição suficiente, segundo aquela premissa, teria sido o conhecimento de um modelo exato da realidade. Assim, conhecendo um modelo matemático que descrevesse o comportamento do sistema em função de um número de variáveis suficiente para especificá-lo completamente, se o modelo fosse determinístico e invariante no tempo, as saídas teriam sido previstas conhecendo o estado inicial e as variáveis externas atuando sobre o sistema. O comportamento de tipo aleatório só podia provir, então, de um processo com um modelo estocástico ou da influência de uma variável externa de tipo aleatório.

Esta idéia, válida para sistemas determinísticos lineares invariantes no tempo, revelou-se, com o decorrer do tempo, insuficiente para explicar o comportamento de alguns sistemas determinísticos não lineares, os quais, apesar de serem modelados por equações invariantes no tempo, exibem um comportamento de tipo pseudo-aleatório.

Considere-se, por exemplo, o sistema de equações

$$x_{k+1} = 1 - 1.4 x_k^2 + y_k \quad (1.1)$$

$$y_{k+1} = 0.3 x_k ,$$

conhecido como transformação de Hénon [10].

A Fig. 1.1. mostra as duas primeiras iterações da transformação, aplicada sobre os pontos da elipse R.

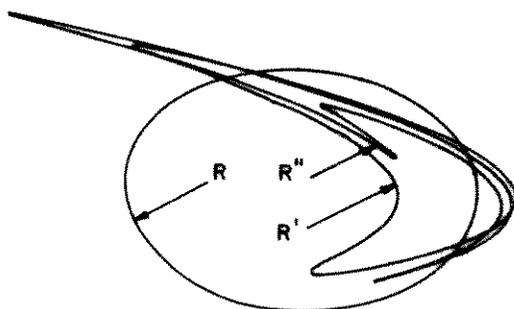


Figura 1.1 - Transformação de Hénon aplicada sobre os pontos de uma elipse.

Observa-se, na figura, vários fatos interessantes. O primeiro, que nem todos os pontos da elipse evoluem da mesma forma. Dois pontos arbitrariamente próximos na elipse R podem se separar na primeira iteração R' e continuar a se separarem na segunda iteração R". Dependendo da orientação relativa inicial dos dois pontos escolhidos, o contrário poderia também ocorrer. A separação, através de muitas iterações sucessivas, aumenta - em média - em uma direção característica, enquanto que diminui na outra. A elipse original alonga-se numa direção, comprime-se em outra, e dobra-se sobre ela mesma, permanecendo a figura resultante sempre dentro da mesma região. As trajetórias descritas por aqueles dois pontos muito próximos inicialmente, chegam assim a ser completamente diferentes, para um número suficientemente grande de iterações. Se considerarmos que a condição inicial de um sistema não pode ser especificada exatamente, mas que sempre há uma incerteza nela, esta incerteza vai aumentando progressivamente a medida que o sistema evolui, até o momento em que não mais pode-se prever em que lugar ficará o próximo ponto da

trajetória descrita a partir da condição inicial. Ou, em outras palavras, a região de incerteza complicou-se de forma tal que somente é possível saber que a  $k$ -ésima iteração da transformação aplicada sobre o ponto inicial está em algum lugar de uma região do plano  $X$ - $Y$  -uma região limitada, certo, mas com limites tão grandes quanto os limites da elipse inicial-.

Este comportamento, sensível às condições iniciais, corresponde com o que é definido como caos. Como é possível quantificar a sensibilidade às condições iniciais, a partir das equações que descrevem a dinâmica do sistema, ou também a partir da amostragem de uma das variáveis de estado (em um sistema acoplado), este conceito de comportamento caótico é o mais comumente utilizado hoje [11]. Uma definição alternativa é a originalmente proposta por Li e Yorke [12], a qual será apresentada mais adiante.

Outra característica do caos, que é possível observar no exemplo, é que a trajetória descrita pela evolução de um ponto da elipse inicial, dada pela aplicação repetida da transformação, é irregular, ou seja, não tem nenhuma periodicidade. Em geral, os espectros de frequências dos sinais caóticos são de natureza contínua, de banda larga, similares aos do ruído estocástico.

O fenômeno de caos, exemplificado pela transformação de Hénon, será descrito mais formalmente através das definições e teoremas apresentados nos capítulos 2, 3 e 4. No presente capítulo, introduz-se os sistemas dinâmicos, classificando-os segundo o tipo de estrutura e segundo o tipo de comportamento em regime permanente. Apresenta-se os principais teoremas que justificam a utilização das técnicas que serão descritas nos capítulos seguintes. Paralelamente, define-se a terminologia que será usada ao longo do texto, bem como os conceitos básicos para compreender as técnicas de análise do comportamento caótico.

## 1.1. SISTEMAS DINÂMICOS [13]

Definiremos três tipos de estruturas: sistemas dinâmicos autônomos, não autônomos e discretos no tempo.

### 1.1.1. Sistemas dinâmicos autônomos

Chamam-se autônomos os sistemas de equações diferenciais invariantes sob translações do tempo. São definidos pela equação de estado

$$\dot{x} = f(x) \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.1)$$

com  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $f(x)$  não contém o tempo explicitamente.

A solução de (1.1) é chamada trajetória ( $\phi_t(x_0)$ ).

O mapeamento  $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é chamado o fluxo do sistema, e representa o conjunto de todas as soluções.

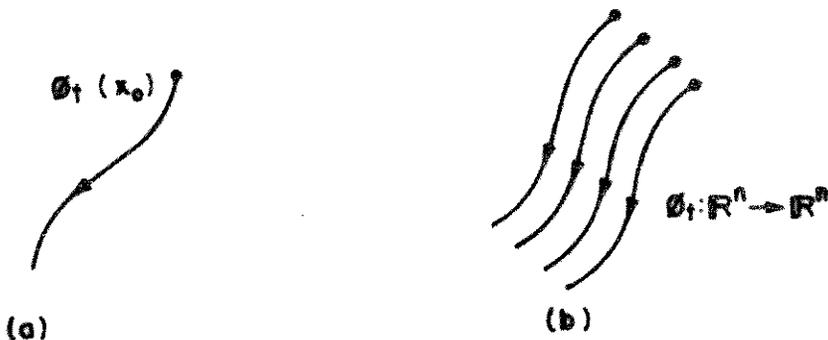


Figura 1.2 - a) Trajetória. b) Fluxo.

### 1.1.2. Sistemas dinâmicos não autônomos

São definidos pela equação de estado variante no tempo

$$\dot{x} = f(x, t) \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.2)$$

Como neste caso  $f$  depende de  $t$ ,  $t_0$  não pode ser feito igual a zero arbitrariamente.

A solução de (1.2) é  $\phi_t(x_0, t_0)$ .

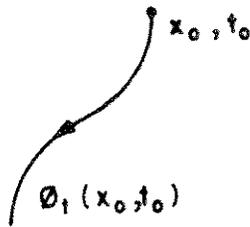


Figura 1.3 - Trajetória de um sistema não autônomo.

Se existir  $T > 0$  tal que  $f(x, t) = f(x, t+T) \forall x, t$ , o sistema é chamado de periódico no tempo.

Um sistema não autônomo de ordem  $n$ , periódico no tempo, sempre pode ser convertido num sistema autônomo de ordem  $(n+1)$ , definindo o estado adicional  $\theta := 2\pi t/T$ . O sistema autônomo é dado por

$$\dot{x} = f(x, \theta/T/2\pi) \quad x(0) = x_0 \quad (1.3)$$

$$\dot{\theta} = 2\pi/T \quad \theta(0) = 2\pi t_0/T.$$

Ou seja, o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$  é transformado no espaço de estado cilíndrico  $\mathbb{R}^n \times S$ , onde  $S := [0, 2\pi)$  é o círculo. A solução no novo espaço de estado é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_t(x_0, t_0) \\ \frac{2\pi t}{T} \bmod 2\pi \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

onde a função módulo restringe  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Com esta transformação, os resultados para sistemas autônomos podem ser usados no caso não autônomo periódico no tempo.

### 1.1.3. Propriedades das trajetórias $\phi_t$

É feita a suposição de que para qualquer  $t$  finito,  $\phi_t$  é um difeomorfismo, ou seja,  $\phi_t^{-1}$  existe e tanto  $D\phi_t$  como  $D\phi_t^{-1}$  existem e são contínuas. Por tanto,  $\phi_t$  apresenta as seguintes propriedades:

$$i) \phi_t(x) = \phi_t(y) \iff x = y$$

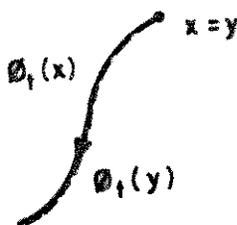


Figura 1.4 - Trajetórias com igual condição inicial.  
(Sistema autônomo).

$$\text{ii) } \phi_t(x, t_0) = \phi_t(y, t_0) \iff x = y$$

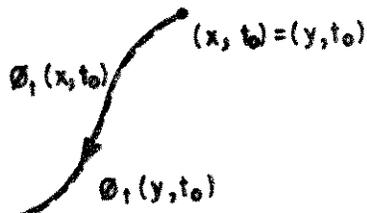


Figura 1.5 - Trajetórias com igual condição inicial, especificada no mesmo instante. (Sistema não autônomo).

Se  $t_0 \neq t_1$ , é possível  $\phi_t(x, t_0) = \phi_t(y, t_1)$ .

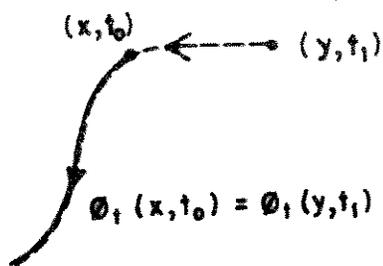


Figura 1.6 - Trajetórias iguais para condições iniciais diferentes, especificadas em instantes distintos.

iii) A derivada da trajetória com respeito à condição inicial existe e é não singular.

#### 1.1.4. Sistemas dinâmicos discretos no tempo

São definidos pelo mapeamento  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  na equação de estado

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad , \quad (1.5)$$

$x_k \in \mathbb{R}^n$  ;  $f$  transforma o estado  $x_k$  no estado  $x_{k+1}$ .

A aplicação repetida do mapeamento  $f$  gera a seqüência  $\left\{ x_k \right\}_{k=0}^{\infty}$ , chamada órbita do sistema discreto no tempo.

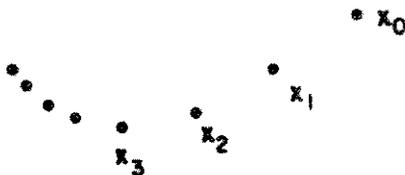


Figura 1.7 - Órbita definida por um sistema dinâmico discreto.

## 1.2. CONJUNTOS LIMITES

Os sistemas dinâmicos podem ser classificados também segundo as soluções em regime permanente e os conjuntos limites. Antes de apresentar os diferentes tipos de comportamento em regime permanente, define-se os termos utilizados.

**Ponto limite:**  $y$  é ponto limite de  $x$ , se existirem pontos  $\phi_{t_1}(x)$ ,  $\phi_{t_2}(x)$ , ..., na órbita de  $x$ , tais que  $\phi_{t_i}(x) \rightarrow y$  para  $t_i \rightarrow \infty$ . Em outras palavras,  $\phi_t$  entra repetidamente a uma vizinhança  $U$  de  $y$ , para  $t \rightarrow \infty$ .

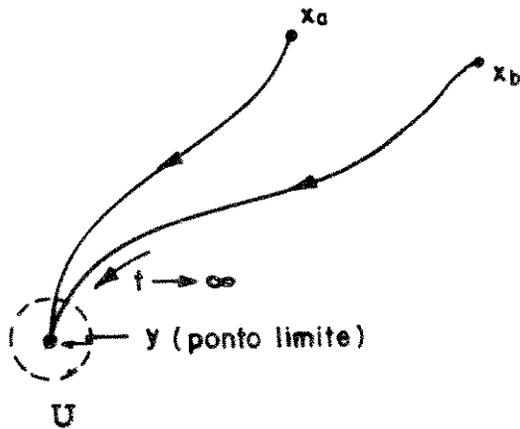


Figura 1.8 -  $y$  é um ponto limite de  $x_a$  e  $x_b$ <sup>1</sup>.

1

As figuras 1.7 - 1.10 são somente ilustrativas e não abrangem todos os casos possíveis.

**Conjunto limite  $L(x)$ :** Conjunto de todos os pontos limites de  $x$ .  
 Os conjuntos limites são fechados e invariantes em  $\phi_t$ , isto é,  $\forall x \in L$  e  $\forall t$ ,  $\phi_t(x) \in L$ .

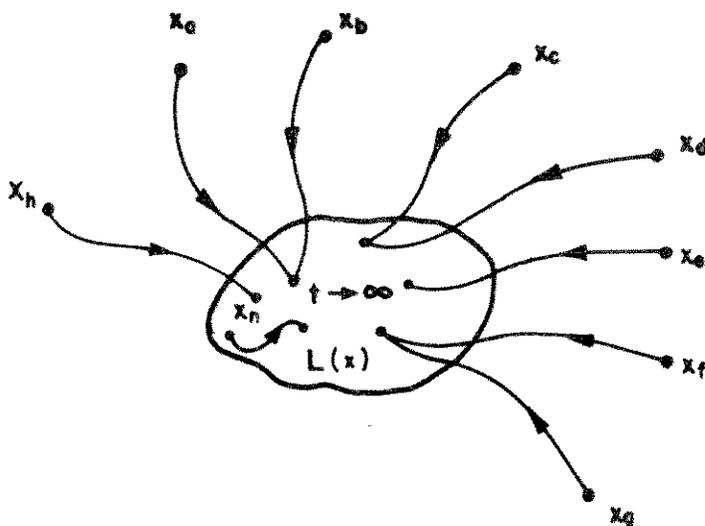


Figura 1.9 - Conjunto limite.

**Conjunto limite atrator:** O conjunto limite é atrator se  $\exists$  uma vizinhança aberta  $U$  de  $L$  tal que  $L(x)=L \forall x \in U$ .

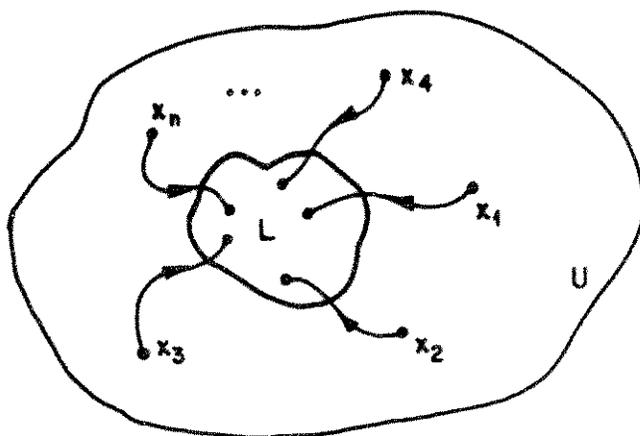


Figura 1.10 - Conjunto limite atrator.

Base de atração  $B(L)$ : União de todos os  $U_i$  de  $L$  tais que  
 $L(x) = L \vee x \in U_i$ .

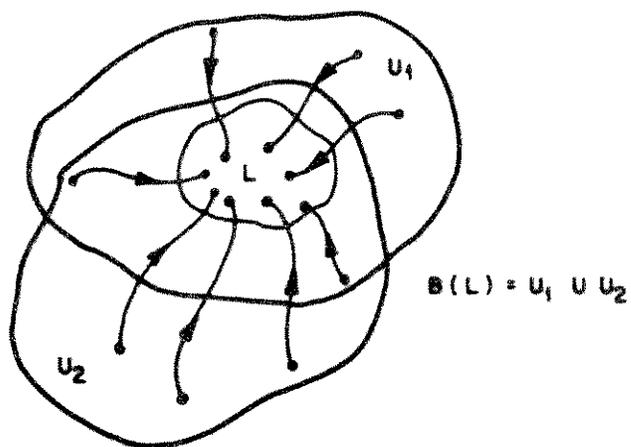


Figura 1.11 - Base de atração.

**Atrator estranho:** Conjunto limite atrator de um sistema caótico.

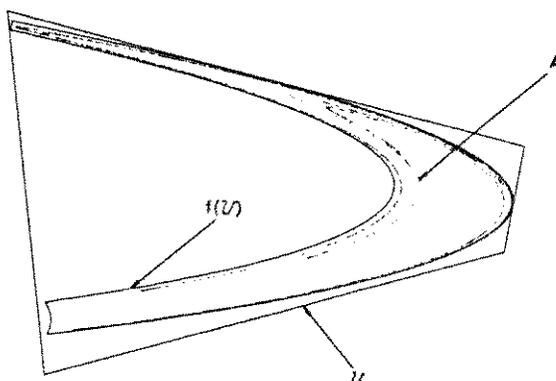


Figura 1.12 - Exemplo de atrator estranho [11]. A figura mostra o conjunto limite atrator  $L$  da transformação de Hénon, com os parâmetros indicados no sistema de equações (1.1). Este conjunto é mais conhecido como o "atrator de Hénon". Indicam-se, na figura, uma vizinhança  $U$  e a transformação aplicada sobre a vizinhança  $U$ ,  $f(U)$ .

Num sistema linear estável, há só um conjunto limite. Num sistema não linear típico, há vários conjuntos limites, cada um com uma base de atração diferente.

### 1.3. COMPORTAMENTO EM REGIME PERMANENTE

A seguir, apresenta-se quatro tipos diferentes de comportamento em regime permanente. Eles serão descritos no domínio do tempo, da frequência e no espaço de estado.

### 1.3.1. Pontos de equilíbrio

$x_{eq}$  ou ponto de equilíbrio num sistema autônomo, é definido como uma solução constante da equação de estado

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{com } x(t_0) = x_0,$$

ou seja,

$$\phi_t(x_{eq}) = x_{eq} \quad \forall t \quad (1.6)$$

e  $f(x) = 0$ .

O conjunto limite para um ponto de equilíbrio é o próprio ponto de equilíbrio.

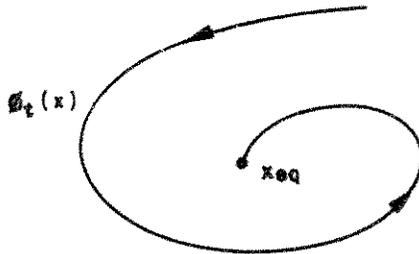


Figura 1.13 - Ponto de equilíbrio.

### 1.3.2. Soluções periódicas

$\phi_t(x^*, t_0)$  é solução periódica se

$$\phi_t(x^*, t_0) = \phi_{t+T}(x^*, t_0) \quad (1.7)$$

$\forall t$  e algum período mínimo  $T' > 0$ .



Figura 1.14 - Solução periódica.

A solução periódica tem uma frequência fundamental em  $f = 1/T'$  e harmônicas em  $k/T'$ ,  $k = 2, 3, \dots$ .

Num sistema não autônomo,  $T'$  é tipicamente um múltiplo inteiro  $k=1, 2, \dots$  do período forçante  $T$ , e a solução é chamada solução de período  $k$  (subharmônica de  $k$ -ésima ordem). Para um sistema linear assintoticamente estável, o regime permanente senoidal é uma solução de período 1 e não pode ter subharmônicas.

No caso autônomo, uma solução periódica isolada  $\phi_t^*(x^*)$  (ou seja, tal que exista uma vizinhança dela tal que não contenha outras soluções periódicas), é chamada ciclo limite.

O conjunto limite correspondente a um ciclo limite é a curva fechada descrita por  $\phi_t^*(x^*)$  num período. Ele constitui uma cópia difeomórfica do círculo (o qual é denotado por  $S$ ).

### 1.3.3. Soluções quase-periódicas

Uma solução quase-periódica é aquela que pode ser escrita como a soma de funções periódicas  $h_i(t)$

$$x(t) = \sum_i h_i(t), \quad (1.8)$$

onde  $h_1$  tem período mínimo  $T_1$  e frequência  $f_1=1/T_1$ .

Então existe um conjunto finito de frequências básicas  $\{\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_p\}$  tais que:

i) O conjunto é linearmente independente, isto é, não existe um conjunto de inteiros diferentes de zero  $\{k_1, k_2, \dots, k_p\}$  tais que  $k_1 \hat{f}_1 + k_2 \hat{f}_2 + \dots + k_p \hat{f}_p = 0$ .

ii) Forma uma base finita integral para as  $f_i$ , ou seja, para cada  $i$ ,

$$f_i = k_1 \hat{f}_1 + \dots + k_p \hat{f}_p \text{ para alguns inteiros } \{k_1, k_2, \dots, k_p\}.$$

A base não é única mas  $p$  está definido. Uma solução quase-periódica com  $p$  frequências base é chamada  $p$ -periódica.

Uma trajetória de período 2 fica numa cópia difeomórfica do toróide-2  $S \times S$ , onde cada  $S$  representa uma das frequências básicas. Como a trajetória é uma curva e o toróide-2 é uma superfície, nem todos os pontos do toróide pertencem à trajetória, mas a trajetória passa repetida e arbitrariamente perto de cada ponto do toróide. Portanto, o toróide é o conjunto limite do comportamento quase periódico.

Podem ocorrer trajetórias quase-periódicas de ordem maior, em sistemas de ordem maior. Em geral, uma solução periódica com base de dimensão  $p$  tem um conjunto limite que é difeomórfico a um toróide- $p$ .

#### 1.3.4. Comportamento caótico

Os sistemas caóticos dependem, sensivelmente, das condições iniciais: dadas duas condições iniciais arbitrariamente próximas, as trajetórias geradas a partir desses pontos divergem com uma razão

característica do sistema até que, para fins práticos, chegam a não ter correlação.

Como na realidade, o estado inicial de um sistema nunca pode ser especificado exatamente - mas só dentro de alguma tolerância  $\epsilon > 0$  -, se duas condições  $x_0$  e  $\hat{x}_0$  são tais que  $\|x_0 - \hat{x}_0\| < \epsilon$  isto implica que elas não podem ser distinguidas. Depois de um tempo finito,  $\phi_t(x_0)$  e  $\phi_t(\hat{x}_0)$  divergem e chegam a ser não-correlatas.

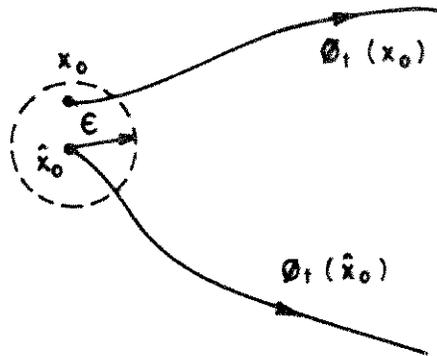


Figura 1.15 - Divergência das trajetórias a partir de duas condições iniciais próximas.

Então, sem importar a precisão com que a condição inicial é conhecida, o comportamento a longo prazo de um sistema caótico nunca pode ser predito.

A **sensibilidade às condições iniciais** pode ser quantificada, e portanto cabe definir um sistema caótico como um sistema sensível às condições iniciais [11].

Um outro conceito, que tem relação com o anterior, é o de **ganho ou perda de informação**. Seja um sistema autônomo com um fluxo

contrativo  $\phi_t$ , ou seja, tal que

$$\| \phi_t(x_0) - \phi_t(\hat{x}_0) \| < \| x_0 - \hat{x}_0 \|, \quad (1.9)$$

para qualquer  $x_0 \neq \hat{x}_0$  e qualquer  $t > 0$ .

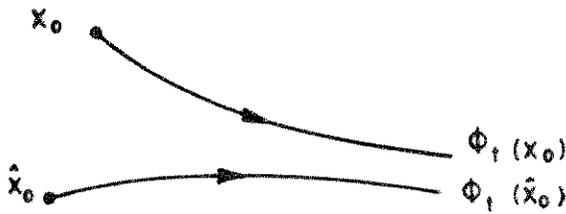


Figura 1.16 - Sistema autônomo com um fluxo contrativo.

Suponha-se que o estado do sistema possa ser medido dentro de uma resolução de  $\varepsilon$ . Então, se o estado observado no instante  $t_1$  é  $x_1$ , o estado no qual o sistema realmente está naquele instante fica dentro de  $B_\varepsilon(x)$ , a bola de raio  $\varepsilon$  centrada em  $x$ .

Assuma-se que é observado o estado do sistema também no instante  $t_2 > t_1$ , e que deseja-se saber quando conhece-se mais sobre o estado do sistema no instante  $t_2$ , isto é, se a informação sobre o estado do sistema no instante  $t_2$  é maior em  $t_1$  ou em  $t_2$ .

Em  $t_1$  sabe-se que o estado em  $t_1$  fica em algum lugar dentro de  $B_\varepsilon(x_1)$  e, portanto, que o estado em  $t_2$  deve ficar dentro de  $\phi_{t_2-t_1}(B_\varepsilon(x_1))$ .

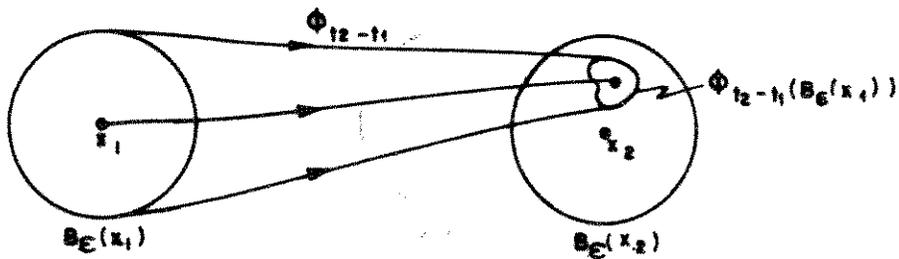


Figura 1.17 - Evolução da bola de incerteza num sistema contrativo.

Como o sistema está se contraindo,  $\phi_{t_2-t_1}(B_\epsilon(x_1))$  é um subconjunto próprio de  $B_\epsilon(x_2)$  e portanto em  $t_1$  conhece-se o estado do sistema em  $t_2$  com maior exatidão que se este fosse observado no instante  $t_2$ . Deste ponto de vista, o sistema pode ser visto como destruindo informação.

Ao invés do caso anterior, um sistema com fluxo expansivo pode ser considerado como criando informação.

Assim, para um sistema contrativo é mais exato usar  $x_1$  para a predição do estado no tempo  $t_2$ , do que observar o estado no tempo  $t_2$ . Isto significa que o valor preditivo da condição inicial é incrementado com o decorrer do tempo. O oposto ocorre com um sistema expansivo.

Nos sistemas expansivos, o valor preditivo da condição inicial é deteriorado com o decorrer do tempo, pelo que estes sistemas têm uma dependência sensível às condições iniciais.

Na prática, um fluxo puramente expansivo em todas as direções corresponde a um sistema que continuamente está ganhando energia, e que tem um comportamento não limitado. Os sistemas que estudaremos serão de tipo conservativo (Hamiltoniano) ou dissipativo. Os sistemas

conservativos e os dissipativos, mesmo que sejam expansivos em algumas direções, devem ser contrativos em outras.

A expansão e a contração - e portanto a sensibilidade às condições iniciais - são quantificadas pelos expoentes de Lyapunov, os quais são definidos na seção 1.5.3.

A transformação de Hénon, ilustrada nas Figuras 1.1 e 1.11, exemplifica este comportamento típico dos sistemas caóticos: expansão, contração e torção. Smale ([14], [15]) analisou uma transformação idealizada, a **ferradura de Smale**, que tem este comportamento. Ele provou que a dita transformação é sensível às condições iniciais e estabeleceu condições suficientes para que um sistema tenha o mesmo comportamento da ferradura (e portanto seja sensível às condições iniciais). A ferradura de Smale é discutida na seção 1.8.

## 1.4. A TRANSFORMAÇÃO DE POINCARÉ

Um método clássico para a análise de sistemas dinâmicos é devido a Poincaré. Ele substitui o fluxo do sistema dinâmico contínuo no tempo, pela chamada transformação de Poincaré.

### 1.4.1. Definição de Transformação de Poincaré

#### 1.4.1.1. A Transformação de Poincaré para sistemas não autônomos

Como já foi mostrado, o sistema não autônomo de ordem  $n$  com período  $T$  pode ser transformado num sistema autônomo de ordem  $(n+1)$  no espaço de estado cilíndrico  $\mathbb{R}^n \times S$ .

Seja o hiperplano de dimensão  $n$ ,  $\Sigma \in \mathbb{R}^n \times S$  definido por

$$\Sigma = \left\{ (x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S : \theta = \theta_0 \right\} \quad (1.10)$$

A cada T segundos, a trajetória (1.4) intersecciona  $\Sigma$ . Assim, o mapeamento  $P: \Sigma \rightarrow \Sigma (\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$  é definido por  $P(x) = \phi_T(x, t_0)$ . P é chamada a transformação de Poincaré.  $\phi_T$  é um difeomorfismo, e portanto é um-a-um e diferenciável.

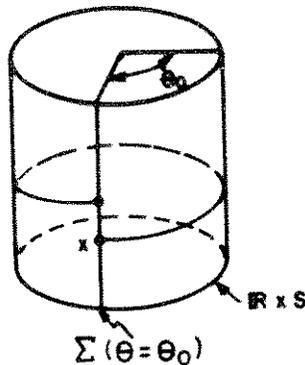


Figura 1.18 - Hiperplano  $\Sigma$  num sistema não autônomo periódico.

P pode ser entendida de duas formas:

- i)  $P(x)$  indica onde o fluxo leva  $x$  depois de T segundos. Este é chamado **mapeamento com avanço T**.
- ii) A órbita  $\{ P^k(x) \}_{k=1}^{\infty}$  é uma amostragem de somente uma trajetória, cada T segundos, ou seja

$$P^k(x_0) = \phi_{kT}(x_0, t_0) \quad (1.11)$$

para  $k = 0, 1, \dots$

### 1.4.1.2. A Transformação de Poincaré para sistemas autônomos

Seja o sistema autônomo de ordem  $n$  com o ciclo limite  $\Gamma$  indicado na figura.

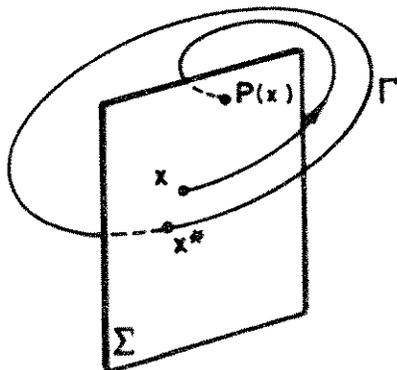


Figura 1.19 - Hiperplano  $\Sigma$  num sistema autônomo.

Seja  $x^*$  um ponto no ciclo limite, e  $T$  o período do ciclo limite. Então  $x^* = P(x^*)$  define um ponto fixo do sistema. Considere-se um hiperplano  $\Sigma$  de dimensão  $(n-1)$ , transverso (não tangente) a  $\Gamma$  em  $x^*$ .

A trajetória que sai de  $x^*$  alcançará  $\Sigma$  em  $x^*$ , em  $T$  segundos. Como  $\phi_t$  é contínua com relação à condição inicial, as trajetórias que começam em  $\Sigma$  numa vizinhança de  $x^*$  suficientemente pequena, intersestarão  $\Sigma$  em aproximadamente  $T$  segundos, na vizinhança de  $x^*$ .

Então,  $f$  e  $\Sigma$  definem um mapeamento  $P$  de alguma vizinhança  $U \subset \Sigma$  em  $x^*$  em outra vizinhança  $V \subset \Sigma$  de  $x^*$ .  $P$  é chamada a transformação de Poincaré ou transformação do primeiro retorno.

Para sistemas autônomos, a transformação de Poincaré está definida só em uma vizinhança de  $x^*$ ; a dessemelhança do caso não autônomo, não é garantido que a trajetória emergente de qualquer ponto em  $\Sigma$  intersestará  $\Sigma$  novamente.

Como no caso autônomo, é possível mostrar que  $P$  é um difeomorfismo.

Esta definição é freqüentemente inadequada para fins

experimentais, pois requer conhecimento da posição do ciclo limite. Na prática, é escolhido o hiperplano de dimensão  $(n-1)$

$$\Sigma := \left\{ x: h'(x - x_{\Sigma}) = 0 \right\} \quad , \quad (1.12)$$

onde  $h$  é o vetor normal a  $\Sigma$  e  $x_{\Sigma}$  é algum ponto no hiperplano.  $\Sigma$  divide o espaço de estado em duas regiões:

$$\Sigma^+ := \left\{ x: h'(x - x_{\Sigma}) > 0 \right\} \quad (1.13)$$

$$\Sigma^- := \left\{ x: h'(x - x_{\Sigma}) < 0 \right\} \quad (1.14)$$

Se  $\Sigma$  é escolhido apropriadamente, a trajetória observada passa repetidamente através de  $\Sigma$ , desde  $\Sigma^-$  a  $\Sigma^+$  e daí a  $\Sigma^-$ , etc. A seqüência de pontos gerada pela interseção da trajetória de  $\Sigma^-$  a  $\Sigma^+$  define um mapeamento, assim como também as interseções de  $\Sigma^+$  a  $\Sigma^-$  definem outro.

Estes mapeamentos são chamados transformações de Poincaré de uma face, enquanto que a seqüência completa de pontos, sem considerar a direção, é chamada transformação de Poincaré de duas faces.

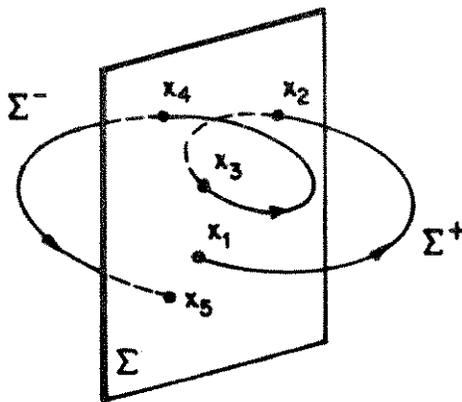


Figura 1.20 - Pontos de interseção com o hiperplano  $\Sigma$ .

Na figura, os pontos  $\{x_1, x_3, x_5 \dots\}$  são uma órbita da transformação de Poincaré definida por interseções na passagem de  $\Sigma^-$  a  $\Sigma^+$ .

A seqüência completa de pontos  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  é uma órbita da transformação de Poincaré de duas faces.

#### 1.4.2. Comportamento da transformação de Poincaré em regime permanente

A utilidade da transformação de Poincaré está no fato de que há uma correspondência um-a-um entre os diferentes tipos de comportamento do sistema dinâmico contínuo no tempo, em regime permanente, e o comportamento de P em regime permanente.

##### 1.4.2.1. Transformação de Poincaré e soluções periódicas

Uma solução de período-um corresponde a um ponto fixo no mapeamento de Poincaré. Para sistemas não-autônomos, uma órbita fechada com período  $k$ , corresponde à subharmônica de ordem  $k$ , do fluxo.

##### 1.4.2.2. Transformação de Poincaré e quase-periodicidade

Uma solução de período-2 fica numa cópia difeomórfica do toróide-2  $S \times S$ .

Usando coordenadas  $(\theta_1, \theta_2)$  no toróide, uma trajetória de período-2 pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\pi f_1 t \bmod 2\pi \\ 2\pi f_2 t \bmod 2\pi \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

onde  $f_1$  e  $f_2$  são incomensuráveis ( $f_2/f_1$  não é um número racional).

No caso não autônomo, uma das frequências,  $f_1$ , é a frequência forçante do sistema.

Uma órbita da transformação de Poincaré corresponde a amostrar (1.15) a cada  $1/f_1$  segs.,

$$\begin{bmatrix} \theta_1(k/f_1) \\ \theta_2(k/f_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\pi k \bmod 2\pi \\ (2\pi k f_2/f_1) \bmod 2\pi \end{bmatrix} \quad (1.16a)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1(k/f_1) \\ \theta_2(k/f_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (2\pi k f_2/f_1) \bmod 2\pi \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.16b)$$

No caso autônomo de período-2, a geometria depende da orientação de  $\Sigma$  com relação ao toróide-2, e de se é usada uma transformação de face dupla ou simples.

## 1.5. ESTABILIDADE DOS CONJUNTOS LIMITES

### 1.5.1. Pontos de equilíbrio

Seja  $X_{eq}$  ponto de equilíbrio da Eq.

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.17)$$

Linearizando  $f$  em  $x_{eq}$ ,

$$\dot{\delta x} = Df(x_{eq}) \delta x. \quad (1.18)$$

A trajetória para a condição inicial

$$x_o = x_{eq} + \delta x_o \quad (1.19)$$

é, em aproximação de primeira ordem,

$$\delta_t(x_{eq} + \delta x_o) = x_{eq} + \delta x(t). \quad (1.20)$$

Como a Eq. (1.18) define um sistema linear invariante no tempo, com  $t_o=0$ , a solução é

$$\delta x(t) = e^{Df(x_{eq})t} \delta x_o, \quad (1.21)$$

donde

$$\phi_t(x_{eq} + \delta x_o) = x_{eq} + e^{Df(x_{eq})t} \delta x_o. \quad (1.22)$$

Para  $n$  autovalores distintos,

$$\phi_t(x_{eq} + \delta x_o) = x_{eq} + C_1 \eta_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n \eta_n e^{\lambda_n t} \quad (1.23)$$

onde  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  e  $\{\eta_i\}_{i=1}^n$  são os autovalores e autovetores de  $Df(x_{eq})$  e os  $\{C_i\}_{i=1}^n$  são constantes escalares tais que para  $t=0$  seja obtida

a condição inicial.

A interpretação dinâmica [18] da Eq. (1.23) é ilustrada no exemplo da Fig. 1.21. Supõe-se que há três autovalores reais distintos  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , e um conjunto de autovalores ortonormais correspondentes àqueles autovalores,  $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ . Assume-se que  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$ .

A origem do "frame" de autovetores é  $x_{eq}$ . Então a condição

inicial é dada por  $x_0 = x_{eq} + C_1 \eta_1 + C_2 \eta_2 + C_3 \eta_3$ . A evolução de  $\phi_t$  pode ser decomposta também, considerando a razão de expansão ou contração na direção de cada autovetor, dada pelos autovalores.

A parte real de  $\lambda_1$  dá a razão de expansão (se  $\text{Re}[\lambda_1] > 0$ ) ou contração (se  $\text{Re}[\lambda_1] < 0$ ), na vizinhança do ponto de equilíbrio na direção de  $\eta_1$ .

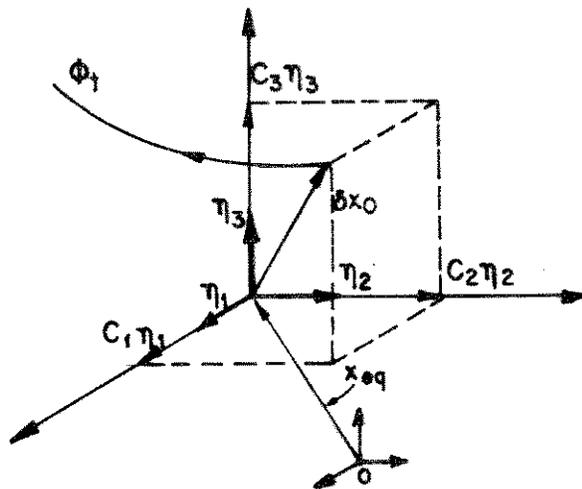


Figura 1.21 - Interpretação dinâmica da Equação (1.23).

Para  $\text{Re}[\lambda_1] \neq 0 \forall \lambda_1$ , há três condições possíveis:

- i)  $\text{Re}[\lambda_1] < 0 \forall \lambda_1$ ; neste caso  $x_{eq}$  é assintoticamente estável.
- ii)  $\text{Re}[\lambda_1] > 0 \forall \lambda_1$ ; corresponde a  $x_{eq}$  instável.
- iii)  $\text{Re}[\lambda_1] > 0$  para alguns  $\lambda_1$  e  $\text{Re}[\lambda_1] < 0$  para outros  $\lambda_1$ ;  $x_{eq}$  é chamado de não-estável ou ponto de sela.

As conclusões anteriores são válidas também quando existem autovalores repetidos.

Se o tempo for revertido, um ponto instável transformar-se-ia num ponto estável, enquanto que um ponto não-estável continuaria sendo não estável.

Se algum dos autovalores têm parte real zero, a estabilidade não pode ser determinada a partir dos autovalores somente. Os pontos de equilíbrio onde todos os autovalores têm parte real não nula são chamados **hiperbólicos**. Os pontos hiperbólicos têm a propriedade de **estabilidade estrutural**, isto é, eles existem ainda para pequenas perturbações de  $f(x)$ , e o ponto de equilíbrio perturbado mantém o mesmo tipo de estabilidade. Tipicamente, os pontos de equilíbrio não hiperbólicos não são estruturalmente estáveis, e portanto não podem ser observados experimentalmente ou em simulações.

### 1.5.2. Soluções periódicas

A estabilidade de uma solução periódica é determinada pelos seus multiplicadores característicos. Eles são uma generalização dos autovalores num ponto de equilíbrio e serão definidos seguidamente.

A solução periódica corresponde a um ponto fixo da transformação de Poincaré, denominada  $P$ . A estabilidade da solução periódica é determinada pela estabilidade do ponto fixo. Analogamente ao caso anterior (ponto de equilíbrio), a estabilidade de um ponto fixo  $x^*$  de  $P$  é determinada linearizando  $P$  em  $x^*$ .

Linearizando o sistema discreto no tempo  $x_{k+1} = P(x_k)$  na vizinhança de  $x^*$ ,

$$\delta x_{k+1} = DP(x^*) \delta x_k \quad (1.24)$$

As Figs. 1.22 e 1.23 ilustram o comportamento do sistema na vizinhança do ponto fixo, no caso não-autônomo periódico e no caso autônomo, respectivamente.

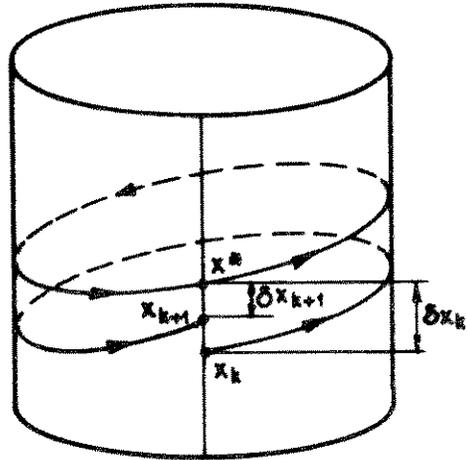


Figura 1.22 - Vizinhança do ponto fixo, num sistema não-autônomo periódico.

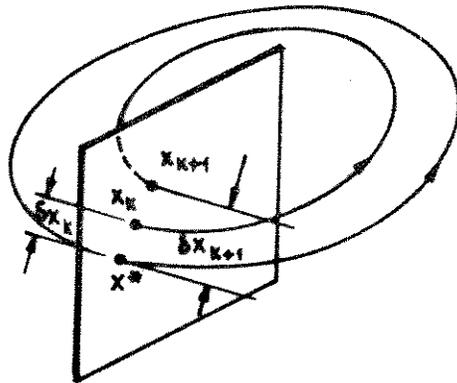


Figura 1.23 - Vizinhança do ponto fixo num sistema autônomo.

Para um sistema com condição inicial  $x_0 = x^* + \delta x_0$ , a aproximação de primeira ordem é

$$x_k = x^* + \delta x_k \quad (1.25)$$

$$x_k = x^* + DP(x^*)^k \delta x_0 \quad (1.26)$$

Assumindo que todos os autovalores de  $DP(x^*)$  sejam diferentes,

$$x_k = x^* + C_1 \eta_1 m_1^k + \dots + C_p \eta_p m_p^k \quad (1.27)$$

onde  $\{m_i\}_{i=1}^p$  e  $\{\eta_i\}_{i=1}^p$  são os autovalores e autovetores de  $DP(x^*)$ , e  $\{C_i\}_{i=1}^p$  são constantes escalares escolhidas de forma tal que seja obtida a condição inicial.

Os autovalores  $\{m_i\}$  são os **multiplicadores característicos** do ponto fixo e determinam a contração ( $|m_i| < 1$ ) ou a expansão ( $|m_i| > 1$ ) na vizinhança de  $x^*$  na direção de  $\eta_i$  para uma iteração da transformação P.

Os multiplicadores característicos da solução periódica independem da seção transversa  $\Sigma$  escolhida. Eles determinam a estabilidade da solução periódica. Se todos os  $m_i$  ficam dentro do círculo unitário, então a solução é periodicamente estável. Se todos os  $|m_i|$  são maiores do que um, a solução periódica é instável. Se alguns dos multiplicadores característicos ficam dentro do círculo unitário e outros fora, a solução periódica é não-estável.

As soluções que não têm multiplicadores característicos na circunferência unitária são chamadas hiperbólicas. As soluções hiperbólicas são estruturalmente estáveis.

Mesmo que não seja válida a suposição de que todos os multiplicadores característicos são distintos, os resultados para fins de estabilidade são válidos em geral.

### 1.5.3. Expoentes de Lyapunov

Sejam  $\{m_i(t)\}_{i=1}^n$  os autovalores da matriz de transição de estado  $\Phi_t(x_0)$ . Os expoentes de Lyapunov são definidos por

$$\lambda_i : \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |m_i(t)|, \quad i=1, \dots, n. \quad (1.28)$$

Os expoentes de Lyapunov são úteis para determinar a estabilidade de qualquer tipo de solução em regime permanente, ainda as de tipo quase-periódico ou caótico.

Um expoente de Lyapunov positivo indica que existe uma direção característica na qual, em média, as trajetórias tendem a se separar. Pelo contrário, um expoente negativo indica que existe uma direção característica na qual, em média, as trajetórias aproximam-se.

Num conjunto limite atrator, a contração deve ser maior do que a expansão, de modo que

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i < 0 \quad (1.29)$$

O que caracteriza o caos é a dependência das condições iniciais. Como esta dependência está associada a um fluxo expansivo, a característica de um atrator estranho é a existência de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo. Então, é possível definir um sistema caótico baseando-se no valor dos expoentes de Lyapunov.

#### Definição 1.1

Sistema caótico é aquele que possui pelo menos um expoente de Lyapunov positivo.

Esta definição expressa a sensibilidade às condições iniciais, e corresponde ao uso dado atualmente à palavra caos [11]. Uma definição diferente é a proposta por Li e Yorke [12], a qual

considera, além da sensibilidade às condições iniciais, o fato de que o conjunto limite é um atrator. A definição de Li e Yorke será dada no capítulo 2.

É possível, também, classificar os diferentes tipos de comportamento em regime permanente, baseando-se nos expoentes de Lyapunov. A tabela 1.1 [13] resume o tipo de conjunto atrator e os expoentes de Lyapunov que caracterizam cada tipo de comportamento em regime permanente.

Regime permanente	Conjunto atrator		Expoentes de Lyapunov
	Fluxo	Transf. de Poincaré	
Ponto de equilíbrio	ponto		$0 > \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$
Periódico <u>Subharmônico</u>	curva fechada	ponto <u>órbita</u> fechada	$\lambda_1 = 0$ $0 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$
Período-2	toróide	curva fechada	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $0 > \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$
Período-k	toróide	toróide k-1	$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ $0 > \lambda_{k+1} \geq \dots \geq \lambda_n$
Caótico	estranho	estranho	Pelo menos um $\lambda_j > 0$ $\sum_1 \lambda_i < 0$

Tabela 1.1. - Classificação dos conjuntos atratores.

## 1.6. SUPERFÍCIES ESTÁVEIS E INSTÁVEIS [17]

### 1.6.1. Comportamento de um sistema autônomo contínuo na vizinhança de um ponto de equilíbrio

Seja

$$\dot{\delta x} = Df(x_{eq}) \delta x \quad (1.30)$$

a linearização do sistema

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.31)$$

no ponto de equilíbrio  $x_{eq}$ , com  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Então, assumindo que o ponto  $x_{eq}$  é hiperbólico, define-se o **espaço estável**  $E^s$  como o espaço gerado pelos  $n_s$  autovetores de  $Df(x_{eq})$   $\{v_1, \dots, v_{n_s}\}$ , onde  $v^1, \dots, v^{n_s}$  são os autovetores correspondentes aos  $n_s$  autovalores com parte real negativa.

Analogamente, define-se o **espaço instável**  $E^u$  como o espaço gerado pelos  $n_u$  autovetores de  $Df(x_{eq})$   $\{u^1, \dots, u^{n_u}\}$  tais que os autovalores correspondentes têm parte real positiva.

Desde que o ponto de equilíbrio seja hiperbólico,  $n = n_u + n_s$ .

#### Teorema 1.6.1 (Hartman-Grobman)

Se  $Df(x_{eq})$  não tem autovalores zero ou imaginários puros, então há um **homeomorfismo**  $h$  definido em alguma vizinhança  $U$  de  $x_{eq}$  e  $\mathbb{R}^n$  levando localmente as trajetórias do fluxo não linear  $\phi_t$  de (1.31), a aquelas do fluxo linear  $e^{Df(x_{eq})t}$  de (1.30). O homeomorfismo (ou difeomorfismo de classe  $C^0$ ) preserva o sentido das trajetórias.

Da mesma forma que definem-se  $E^s$  e  $E^u$  para o sistema

linearizado  $\dot{\delta x} = Df(x_{eq})\delta x$ , definem-se  $W_{loc}^s(x_{eq})$  e  $W_{loc}^u(x_{eq})$ , as superfícies localmente estável e instável respectivamente, do sistema não linear  $\dot{x} = f(x)$ . A definição é dada por

$$W_{loc}^s(x_{eq}) = \left\{ x \in U \mid \phi_t(x) \rightarrow x_{eq} \text{ para } t \rightarrow \infty, \right. \\ \left. \text{e } \phi_t(x) \in U \forall t \geq 0 \right\}, \quad (1.32a)$$

$$W_{loc}^u(x_{eq}) = \left\{ x \in U \mid \phi_t(x) \rightarrow x_{eq} \text{ para } t \rightarrow -\infty, \right. \\ \left. \text{e } \phi_t(x) \in U \forall t \leq 0 \right\}, \quad (1.32b)$$

onde  $U \subset \mathbb{R}^n$  é a vizinhança do ponto de equilíbrio  $x_{eq}$ .

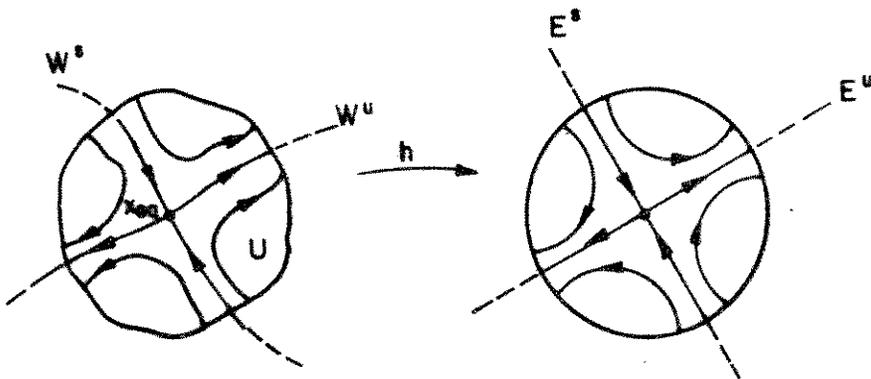


Fig. 1.24 - Ilustração do teorema de Hartman-Grobman.

As superfícies  $W_{loc}^s, W_{loc}^u$  têm superfícies análogas globais  $W^s, W^u$  obtidas pela evolução dos pontos de  $W_{loc}^s$  em tempo revertido e pela evolução de  $W_{loc}^u$  em tempo positivo, isto é,

$$W^s(x_{eq}) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(W_{loc}^s(x_{eq})), \quad (1.33a)$$

$$W^u(x_{eq}) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(W_{loc}^u(x_{eq})) \quad (1.33b)$$

**Teorema 1.6.2 (Teorema da Superfície Estável para um Ponto de Equilíbrio)**

Assuma-se que  $\dot{x} = f(x)$  tem um ponto de equilíbrio hiperbólico  $x_{eq}$ . Então existem superfícies localmente estável e instável  $W_{loc}^s(x_{eq})$ ,  $W_{loc}^u(x_{eq})$ , das mesmas dimensões  $n_s$ ,  $n_u$  que aquelas dos autoespaços  $E^s$ ,  $E^u$  do sistema linearizado (1.30), e tangentes a  $E^s, E^u$  em  $x_{eq}$ .

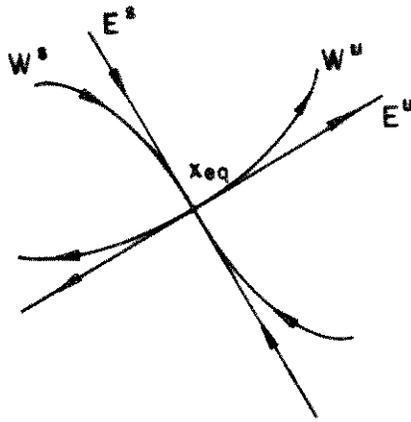


Fig. 1.25 - Ilustração do Teorema da Superfície Estável.

**1.6.2. Comportamento na vizinhança do ponto fixo de um sistema discreto**

Seja

$$\delta x_{k+1} = DP(x^*) \delta x_k \quad (1.34)$$

a linearização do sistema discreto no tempo

$$x_{k+1} = P(x_k), \quad (1.35)$$

onde  $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Definem-se os subespaços estável e instável de forma análoga ao caso em que o sistema é contínuo:

$E^s$ : = espaço gerado pelos  $n_s$  autovetores de  $DP(x^*)$  para os quais os autovalores têm módulo menor do que um.

$E^u$ : = espaço gerado pelos  $n_u$  autovetores de  $DP(x^*)$ , para os quais os autovalores têm módulo maior do que um.

Se  $x^*$  é um ponto fixo hiperbólico (ou seja, se  $DP(x^*)$  não tem autovalores de módulo um),  $n = n_s + n_u$ .

#### Teorema 1.6.3. (Hartman-Grobman)

Seja  $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo de classe  $C^1$ , com um ponto fixo hiperbólico  $x^*$ . Então existe um homeomorfismo  $h$  definido em alguma vizinhança  $U$  de  $x^*$  tal que  $h(P(\varphi)) = DP(x^*)h(\varphi) \forall \varphi \in U$ .

#### Teorema 1.6.4. (Teorema da Superfície Estável para um Ponto Fixo)

Seja  $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo de classe  $C^1$  com um ponto fixo hiperbólico  $x^*$ . Então existem superfícies estável e instável  $W_{loc}^s(x^*)$ ,  $W_{loc}^u(x^*)$ , tangentes aos autoespaços  $E_x^s$ ,  $E_x^u$  de  $DP(x^*)$  em  $x^*$  e de dimensões correspondentes.

As superfícies estável e instável são definidas de forma similar às dos sistemas contínuos, ou seja

$$W_{loc}^s(x^*) = \left\{ x \in U \mid P^k(x) \rightarrow x^* \text{ para } k \rightarrow +\infty, \right. \\ \left. \text{e } G^k(x) \in U, \forall k \geq 0 \right\}, \quad (1.36a)$$

$$W_{loc}^u(x^*) = \left\{ x \in U \mid P^{-k}(x) \rightarrow x^* \text{ para } k \rightarrow +\infty, \right. \\ \left. \text{e } G^{-k}(x) \in U, \forall k \geq 0 \right\}, \quad (1.36b)$$

e

$$W^s(x^*) = \bigcup_{k \geq 0} P^{-k}(W_{loc}^s(x^*)), \quad (1.37a)$$

$$W^u(x^*) = \bigcup_{k \geq 0} P^k(W_{loc}^u(x^*)), \quad (1.37b)$$

com  $k$  inteiro.

A Fig. 1.26 ilustra o teorema da superfície estável para um ponto fixo.

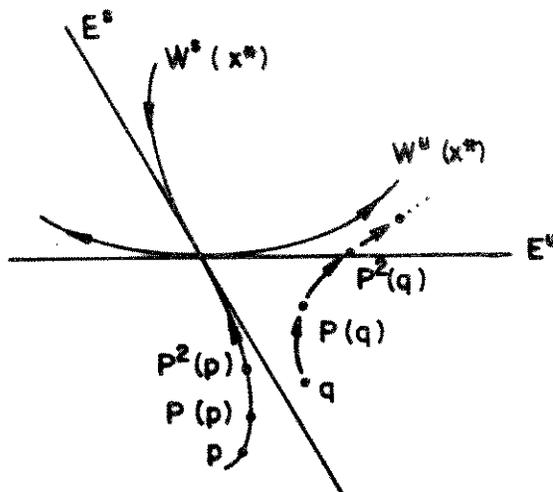


Fig. 1.26 - Teorema da superfície estável para um ponto fixo de uma aplicação  $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

$W^s$  tem a propriedade de ser invariante sob  $P$ , ou seja se  $x \in W^s$  então  $P^j(x) \in W^s \forall j$ .

De forma similar,  $W^u$  tem a propriedade de ser invariante sob  $P$ .

Se  $P$  for a transformação de Poincaré definida a partir de um sistema contínuo com um ciclo limite  $\Gamma$ , os teoremas anteriores são válidos para as superfícies geradas pela interseção das trajetórias contínuas com a secção  $\Sigma$ , como indica a Fig. 1.27.

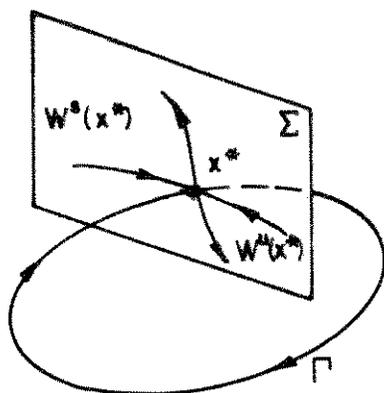


Figura 1.27 - Superfícies estável e instável no hiperplano  $\Sigma$  da aplicação de Poincaré.

## 1.7. TRAJETÓRIAS HOMOCLÍNICAS E PONTOS HOMOCLÍNICOS TRANSVERSOS [15, 17]

Considere-se o modelo que descreve o movimento de um pêndulo não amortecido:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -\text{sen } \theta \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

A Fig. 1.28 mostra as trajetórias no plano de fase.

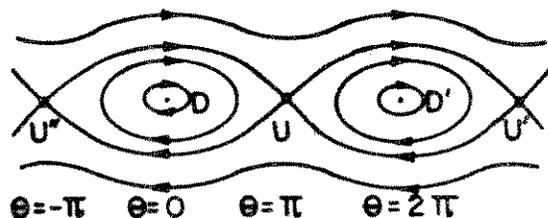


Fig. 1.28 - Trajetórias do pêndulo não amortecido.

Os ciclos fechados são trajetórias periódicas que representam as oscilações do pêndulo. As trajetórias exteriores correspondem a soluções para as quais a velocidade inicial é a suficiente para que o pêndulo continue girando indefinidamente, o que significa que  $\theta$  aumenta (na trajetória superior) e diminui (na trajetória inferior). Na fronteira dos dois tipos de comportamento há um terceiro tipo, que fisicamente representa a solução para uma condição inicial tal que o pêndulo tem a energia suficiente para alcançar a vertical superior, mas não a necessária para ultrapassá-la. Esse ponto corresponde ao ponto de sela  $U$ . As soluções que convergem a  $U$  têm a propriedade de que convergem tanto em tempo positivo como em tempo reverso. Este tipo de solução é chamada **homoclínica**.

A trajetória homoclínica forma um ciclo fechado, de forma similar as trajetórias periódicas, mas a diferença destas, a trajetória homoclínica demora um tempo infinito até chegar ao ponto de sela.

A Fig. 1.29 mostra uma outra característica das trajetórias homoclínicas: elas não permanecem para pequenas perturbações nas equações que descrevem o sistema. Um pequeno amortecimento no pêndulo do exemplo, transforma a Eq. (1.38) na Eq. (1.39), como ilustra a Fig. 1.29.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -c\dot{\theta} - \text{sen } \theta \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

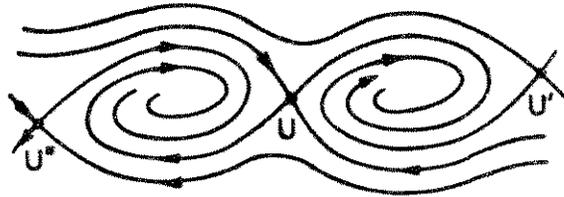


Fig. 1.29 - Trajetórias do pêndulo com um pequeno amortecimento.

Neste caso, existem soluções convergindo a U em t positivo e negativo, mas elas não são assintóticas em ambas direções de tempo simultaneamente, e portanto não são homoclínicas.

O tipo de trajetória homoclínica do exemplo será chamado trajetória E-homoclínica. (Homoclínica a um ponto de equilíbrio).

As trajetórias E-homoclínicas são encontradas nas **bifurcações**, onde constituem fronteiras entre sistemas com comportamento qualitativamente diferente. As **bifurcações** podem ser definidas como mudanças qualitativas do comportamento ante variações dos parâmetros do sistema.

De forma similar, define-se as trajetórias P-homoclínicas como assintóticas a uma trajetória periódica. Estas podem existir em três ou mais dimensões somente.

Considere-se novamente a Fig. 1.27, onde  $\Gamma$  corresponde à trajetória periódica. Como esta-se trabalhando com uma aplicação P, não um fluxo, é possível que  $W^s$  e  $W^u$  tenham um ponto de interseção diferente de  $x^*$ . Seja q o ponto de interseção. Se as superfícies  $W^s$  e  $W^u$  se intersejam com um ângulo diferente de zero, o ponto é chamado **ponto homoclínico transverso**.

O ponto homoclínico transverso  $q$  pertence à superfície estável  $W^s$ . Então todas as iterações  $P^j(q)$  (as anteriores e as seguintes) devem pertencer também, pois  $W^s$  é invariante. Da mesma forma, como  $q$  pertence a  $W^u$ , os  $P^j(q)$  devem pertencer a  $W^u$  também. Portanto, se  $q$  for um ponto homoclínico transverso, todas as iterações  $P^j(q)$  são pontos homoclínicos também (Fig. 1.30).

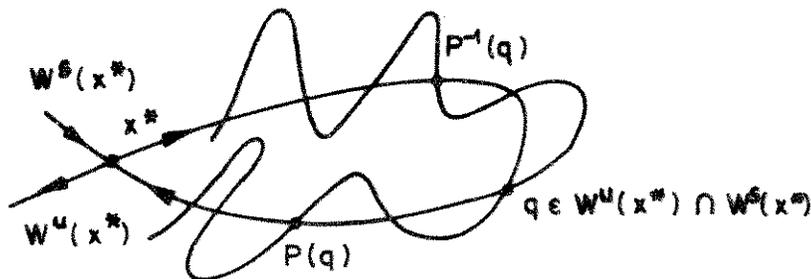


Figura 1.30 - Órbita formada por pontos homoclínicos transversos, no hiperplano  $\Sigma$ .

A existência de um ponto homoclínico transverso implica então na existência de uma infinidade deles,  $P^j(q)$ ,  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , os quais tendem a  $x^*$  para  $j \rightarrow \pm \infty$ .

Estes pontos correspondem a uma trajetória do fluxo, a qual é assintótica à trajetória periódica  $\Gamma$  para  $t \rightarrow \infty$  e  $t \rightarrow -\infty$ . Este tipo de órbita é chamada **P-homoclínica**.

As órbitas P-homoclínicas têm a propriedade de serem **robustas**. Isto quer dizer que se a equação original é perturbada levemente,  $W^s$  e  $W^u$  têm uma mudança pequena, de forma que a interseção transversa é conservada. (A diferença das órbitas do tipo E, que existem somente para determinados valores dos parâmetros). Outras características das órbitas P-homoclínicas são sensibilidade às condições iniciais e comportamento complexo.

## 1.8. A FERRADURA DE SMALE

A ferradura de Smale é uma transformação idealizada que explica o comportamento complexo das órbitas P-homoclínicas e a sua sensibilidade às condições iniciais.

Os resultados gerais desenvolvidos por Smale, baseados nesta aplicação, foram publicados num artigo clássico em 1967 [14]. As idéias principais serão discutidas aqui informalmente, na forma em que foram apresentadas por A. I. Mees [18].

Seja a transformação idealizada  $P : (M_j, N_j) \rightarrow (M_{j+1}, N_{j+1})$ , onde  $P$  é a transformação de Poincaré de um fluxo  $\in \mathbb{R}^3$ .

Suponha-se que  $P$  é uma aplicação contínua sobre o quadrado unitário, tal que ele é alongado na direção vertical, comprimido na direção horizontal e dobrado na forma indicada na Fig. 1.31.

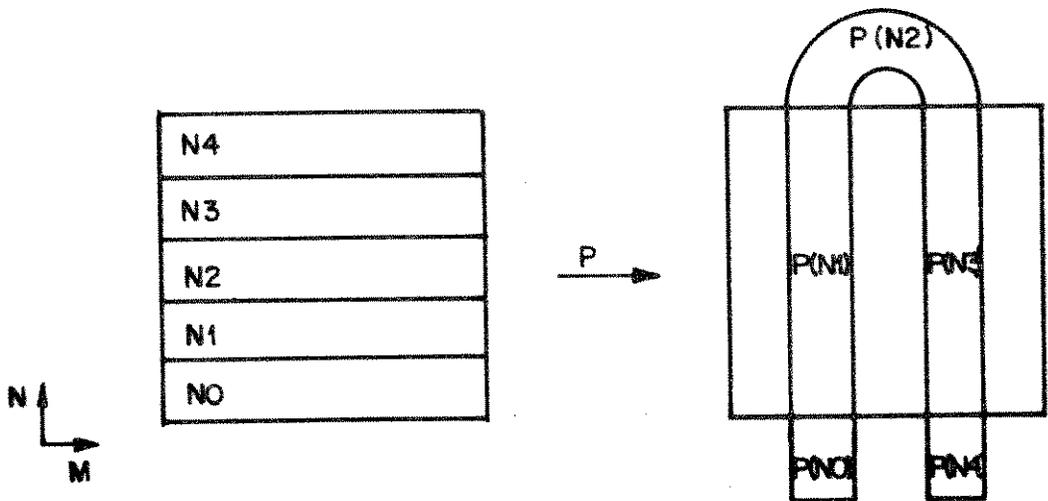


Fig. 1.31 - Primeira iteração da aplicação da ferradura.

O quadrado inicial é dividido em cinco retângulos iguais  $\{N_0, \dots, N_4\}$ , os quais são levados pela aplicação a  $\{P(N_0), \dots, P(N_4)\}$ .

Assuma-se, também, que as áreas sombreadas fora do quadrado inicial, na Fig. 1.32, são levadas pela aplicação  $P$  às duas áreas sombreadas na ferradura da Fig. 1.32.

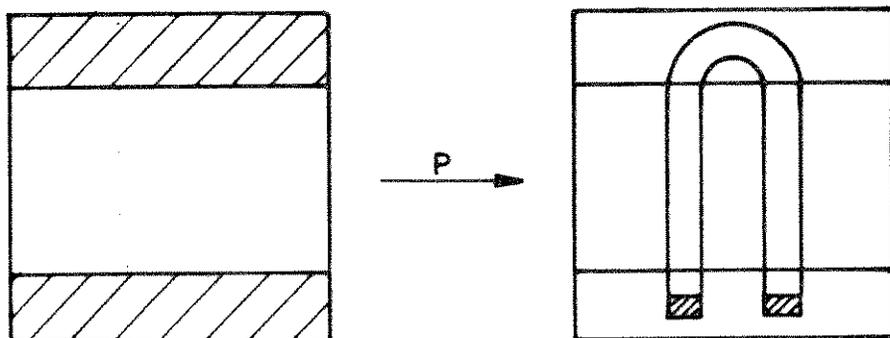


Fig. 1.32 - Aplicação das áreas exteriores ao quadrado.

Desta forma, ao iterar  $P$ , um ponto qualquer que abandonar o quadrado não volta mais a ele.

Como os pontos pertencentes às faixas  $N_0$ ,  $N_2$  e  $N_4$  abandonam o quadrado inicial na primeira iteração de  $P$ , não voltam mais nas iterações seguintes.

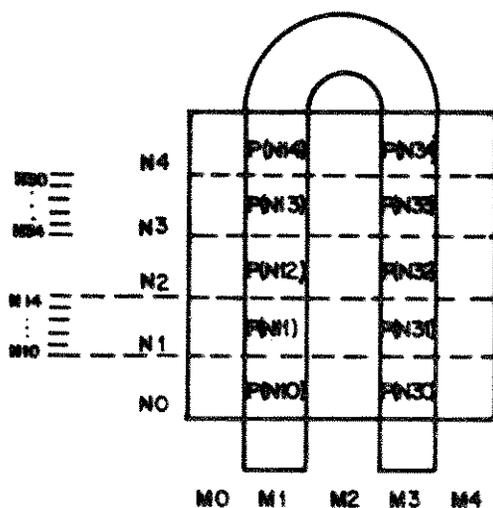


Fig. 1.33 - Identificação dos retângulos do quadrado inicial e primeira iteração da transformação P.

Na Fig. 1.33, indica-se, além das divisões do eixo das ordenadas em cinco faixas horizontais  $\{N_0, \dots, N_4\}$ , as subdivisões das faixas  $N_1$  e  $N_3$ , as quais permanecem dentro do quadrado depois de uma iteração.

Observa-se que os pontos que têm ordenada  $\in N_1$  são levados, pela aplicação P, a pontos com abscissa  $\in M_1$ , enquanto que os pontos com ordenada  $\in N_3$  são levados a pontos com ordenada  $\in M_3$ . Os pontos com ordenada  $\in N_0 \cup N_2 \cup N_4$  são perdidos. A tabela 1.2 mostra o efeito da aplicação de P sobre os pontos de cada uma das sub-áreas de  $N_1 \cup N_3$ .

x	P(x)	x	P(x)
N10	$M1 \cap N0$	N30	$M3 \cap N0$
N11	$M1 \cap N1$	N31	$M3 \cap N1$
N12	$M1 \cap N2$	N32	$M3 \cap N2$
N13	$M1 \cap N3$	N33	$M3 \cap N3$
N14	$M1 \cap N4$	N34	$M3 \cap N4$

Tabela 1.2 - Aplicação da transformação P sobre os pontos contidos nas áreas N1 e N3.

Então, como as subdivisões são feitas em cinco faixas iguais, gera-se partes decimais em base 5. (O quadrado inicial é unitário).

Para um ponto com ordenada começando com um ou três, a parte decimal da ordenada é deslocada à esquerda, e o primeiro dígito é tirado. (Ex.:  $N_k = 0.3313 \implies N_{k+1} = 0.313$ ).

A nova abscissa é obtida deslocando a parte decimal de  $M_k$  um lugar à direita (ou seja, dividindo por 5) e somando 0.1 se o ponto veio de N1 ou 0.3 se o ponto veio de N3. (Ex.:  $N_k = 0.1331 \implies N_{k+1} = 0.331$ ;  $M_k = 0.3133 \implies M_{k+1} = 0.13133$ ).

Ou seja,  $M_{k+1}$  é obtido deslocando a parte decimal à direita e somando o dígito tirado quando a parte decimal de  $N_k$  foi deslocada à esquerda. Sejam

$$M_k = .abcde\dots,$$

$$N_k = .pqrst\dots,$$

então

$$M_{k+1} = .pabcd\dots,$$

$$N_{k+1} = .qrst\dots,$$

sempre que  $p = 1$  ou  $p = 3$ .

Escrevendo a seqüência M ao invés e colocando-a à esquerda da seqüência N,

$$\begin{array}{c} \dots \text{edcba} . \text{pqrst} \dots \\ \longleftarrow \quad \text{M} \quad \quad \text{N} \quad \longrightarrow \end{array}$$

a ação de P é deslocar o ponto um lugar à direita, até que um 0, 2 ou 4 é alcançado; então a seqüência toda é eliminada. Como é possível deslocar o ponto à esquerda também, a aplicação é inversível.

Por conseguinte, os pontos que têm parte decimal formada por dígitos um ou três somente, nunca deixam o quadrado. Eles são chamados de **pontos não desviantes**. Por exemplo, a aplicação de P sobre o ponto  $(0.\overline{13}, 0.\overline{31})$  (onde a linha indica uma seqüência de dígitos repetida ad infinitum) gera a órbita

$$(0.\overline{13}, 0.\overline{31}) \rightarrow (0.\overline{31}, 0.\overline{13}) \rightarrow (0.\overline{13}, 0.\overline{31}) \rightarrow \dots$$

Ou seja, o ponto  $(0.\overline{13}, 0.\overline{31})$  tem período dois.

Da mesma forma, é possível gerar pontos com qualquer período. Entre os pontos não desviantes há um infinito contável de pontos periódicos (correspondentes à parte decimal dos números racionais em base cinco) e um infinito não contável de pontos aperiódicos (correspondente à parte decimal dos números irracionais).

Os pontos  $(0.\overline{1}, 0.\overline{1})$  e  $(0.\overline{3}, 0.\overline{3})$  são pontos fixos não estáveis (selas), pois os pontos próximos convergem a eles na direção horizontal e afastam-se na direção vertical.

Sejam x e y iguais até a r-ésima casa, onde x tem um 1 e y tem um 3. Então,  $P^r(x) \in M1$  e  $P^r(y) \in M3$ . Isto implica que pequenas diferenças nas condições iniciais são magnificadas, e que o sistema é sensível às condições iniciais.

Smale provou que se existir uma órbita homoclínica transversa de um difeomorfismo P, então existe um inteiro  $m > 0$  tal que a

$m$ -ésima iteração da transformação  $P$  tem ferraduras, o que implica a existência de um número infinito de pontos periódicos de diferentes períodos. Um corolário é que as trajetórias na vizinhança das órbitas  $P$ -homoclínicas são sensíveis às condições iniciais.

Daí que a existência de órbitas  $P$ -homoclínicas é uma das possíveis formas de geração de caos.

## CAPÍTULO 2

### CAOS EM SISTEMAS COM MODELOS CONTÍNUOS

Dado um sistema autônomo com uma trajetória E-homoclínica, ao qual é acrescentado um pequeno termo forçante periódico, o ponto de sela do sistema original transforma-se em uma trajetória P-homoclínica. Então, é possível que a trajetória homoclínica do sistema não perturbado origine um ponto homoclínico transverso. Nesse caso, o comportamento é robusto ante pequenas variações na amplitude do termo forçante e implica na existência de uma ferradura na dinâmica do sistema.

A existência de uma ferradura indica sensibilidade às condições iniciais, e portanto comportamento caótico segundo a definição 1.1. Mas a sensibilidade às condições iniciais não implica na existência de um conjunto limite atrator. Para que seja possível observar um atrator estranho, é necessário que exista alguma outra propriedade do sistema que obrigue às trajetórias a retornarem repetidamente à vizinhança da ferradura. (Estabilidade global, entendida como uma generalização da estabilidade de Lyapunov definida na página 78).

Por outra parte, a existência de um ponto homoclínico transverso é somente uma condição suficiente para a sensibilidade às condições iniciais, ficando aberta a possibilidade de outras causas de comportamento caótico.

Ainda assim, a determinação da existência de um ponto homoclínico transverso sugere que a dinâmica é muito complexa e que o comportamento caótico, se for observado em simulações, está associado com a homoclinicidade. Desta forma, complementando a análise com as

simulações, é possível estabelecer uma relação causa-efeito.

Neste capítulo apresentaremos uma das técnicas úteis para sistemas autônomos contínuos, o **Método de Melnikov**. Ela é aplicável em sistemas com uma trajetória P-homoclínica, e em particular no modelo contínuo do sistema PLL-dual, que será analisado na parte II.

## 2.1. MÉTODO DE MELNIKOV PARA UM SISTEMA HAMILTONIANO, AUTÔNOMO E DE ORDEM DOIS [15]

Seja o sistema autônomo

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x(t) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.1)$$

tal que o sistema é Hamiltoniano, ou seja

$$f_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2} \quad f_2 = - \frac{\partial H}{\partial x_1} \quad (2.2)$$

para alguma função suave, escalar,  $H(x_1, x_2)$ .

Substituindo (2.2) em (2.1),

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_2} \quad (2.3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_1} \quad (2.4)$$

$$\therefore \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \quad (2.5)$$

Substituindo (2.3) e (2.4) em (2.5),

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} . \quad (2.6)$$

Então,  $dH/dt = 0$ . Isto implica que  $H(x_1, x_2)$  é constante nas trajetórias.

Voltando ao exemplo do pêndulo da seção 1.7, descrito pela equação

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -\text{sen } \theta \end{pmatrix} , \quad (2.7)$$

temos que

$$\frac{\partial H(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta} = \text{sen } \theta , \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial H(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\theta} , \quad (2.9)$$

e portanto

$$dH(\theta, \dot{\theta}) = \frac{\partial H(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial H(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} d\dot{\theta} , \quad (2.10)$$

$$dH(\theta, \dot{\theta}) = \text{sen } \theta d\theta + \dot{\theta} d\dot{\theta} . \quad (2.11)$$

Integrando,

$$H(\theta, \dot{\theta}) = -\text{cos } \theta + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + C . \quad (2.12)$$

Com  $C=0$ ,  $H(\theta, \dot{\theta})$  representa os níveis de energia no sistema.

Como  $H(\theta, \dot{\theta})$  é constante nas trajetórias, o sistema é conservativo. Então,

$$H(\theta, \dot{\theta}) = -\cos \theta + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2. \quad (2.13)$$

Para as trajetórias homoclínicas, no exemplo,  $H(\theta, \dot{\theta}) = 1$ .

Logo é possível obter uma expressão explícita para  $\theta(t)$  na trajetória homoclínica.

De (2.13),

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \cos \theta = 1 \quad (2.14)$$

ou

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{2(1+\cos \theta)}, \quad (2.15)$$

e separando variáveis,

$$\frac{d\theta}{\pm \sqrt{2(1+\cos \theta)}} = dt. \quad (2.16)$$

Integrando,

$$t = \int \frac{d\theta}{\pm \sqrt{2(1+\cos \theta)}} \quad (2.17)$$

donde

$$\theta(t) = 2 \arctan \sinh t. \quad (2.18)$$

No caso Hamiltoniano geral, é possível obter alguma função  $h(t)$  (trajetória homoclínica) - se ela existe -, com  $h(t) \rightarrow U$  para  $t \rightarrow \pm \infty$  para algum ponto de sela  $U$ .

O sistema autônomo é agora perturbado, somando um termo pequeno, periódico em  $t$ :

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t) \quad (2.19)$$

onde  $g(x, t) = g(x, T+t) \quad \forall x$ .

Transformando este sistema não autônomo de dimensão 2 em um sistema autônomo de dimensão 3,

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x_2, \psi) \quad (2.20a)$$

$$\dot{\psi} = 1 \quad (2.20b)$$

com o vetor de estado  $(x_1, x_2, \psi)$ .

Como  $g$  é periódica com período  $T$ , então  $\psi$  é periódica com período  $T$ . Identificando  $\psi = 0$  com  $\psi = T$ , trabalha-se em  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ .

No exemplo do pêndulo, seja  $g$  tal que as equações perturbadas são

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -\text{sen } \theta - \varepsilon \text{ sen } \omega t \text{ sen } \theta \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Como  $\theta$  é periódico também, é possível trabalhar em  $\mathbb{R} \times S^1 \times S^1$ .

Para propósitos ilustrativos, o fluxo será visualizado em  $\mathbb{R}^3$ , considerando que o plano  $\psi=0$  é identificado com  $\psi = 2\pi$  e que o plano  $\psi = 0$  é identificado com  $\psi = T$ .

Para  $\varepsilon = 0$ , as trajetórias permanecem no plano formado por  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ , como mostra a Fig. 2.1.

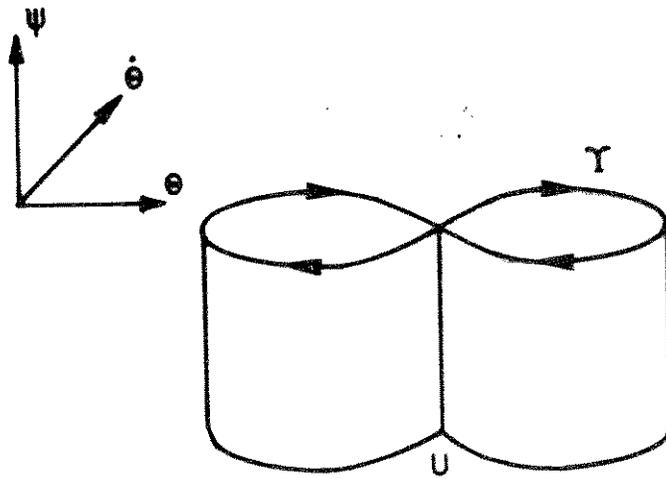


Fig. 2.1 - Trajetória homoclínica  $\Gamma$  no pêndulo não perturbado.

Para  $\epsilon \neq 0$ , as trajetórias deslocam-se também na direção vertical  $\psi$ , como indica a Fig. 2.2.

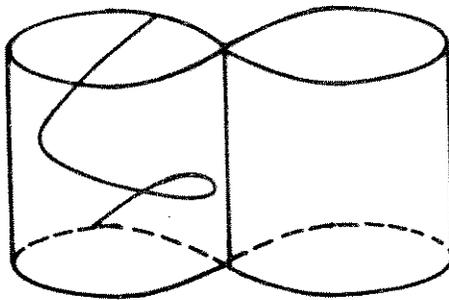


Fig. 2.2 - Trajetória  $\Gamma$  perturbada ( $\epsilon \neq 0$ ).

Seja a órbita E-homoclínica não perturbada bidimensional  $\Gamma$  dada por  $h(t)$ , ou seja  $h(-\infty, \infty) = \Gamma$  e  $h(t) \rightarrow U$  para  $t \rightarrow \pm \infty$ .

Dado um ponto qualquer  $h(0)$  em  $\Gamma$ , precisa-se determinar como varia  $h(0)$  sob a perturbação.

Tipicamente, o efeito da perturbação é abrir  $\Gamma$  em  $\Gamma_s$  e  $\Gamma_u$  (estável e instável); por tal razão considera-se ambos casos ( $t > 0$  e  $t < 0$ ) separadamente.

Para  $\psi = \hat{\psi}$  constante (plano  $\psi = \hat{\psi}$  na Fig. 2.3),  $h(0)$  corresponde a  $h(t-\psi)$ . Se a perturbação do sistema for pequena, pode-se supor que a solução  $h(t-\psi)$  é perturbada levando a uma solução do tipo

$$h(t-\psi) + \varepsilon s(\psi, t) + O(\varepsilon^2) \quad (2.22)$$

para  $t \geq \psi$  (solução perturbada convergente a  $U$  em tempo positivo), e

$$h(t-\psi) + \varepsilon u(\psi, t) + O(\varepsilon^2) \quad (2.23)$$

para  $t \leq \psi$  (solução perturbada convergente a  $U$  em tempo negativo), onde os termos  $O(\varepsilon^2)$  podem ser ignorados.

A suposição de que as soluções perturbadas podem ser aproximadas como a soma da solução não perturbada mais uma série de potências de  $\varepsilon$ , corresponde à aplicação de um método de perturbação para a solução de equações diferenciais não lineares [19].

As funções  $u$  e  $s$  podem ser determinadas das equações variacionais de primeira ordem [16], derivadas das equações (2.1) e (2.19).

Substituindo a solução perturbada

$$x = h(t-\psi) + \varepsilon s(\psi, t) \quad (2.24)$$

na Eq. (2.19),

$$\frac{d}{dt} [h(t-\psi) + \epsilon s(\psi, t)] = f[h(t-\psi) + \epsilon s(\psi, t)] + \epsilon g[h(t-\psi) + \epsilon s(\psi, t), t]. \quad (2.25)$$

Considerando que em aproximação de primeira ordem,

$$f(y+\delta y) = f(y) + Df_y \delta y, \quad (2.26)$$

com  $y = h(t-\psi)$  (solução não perturbada) e  $\delta y = \epsilon s(\psi, t)$  (perturbação da solução), desenvolvendo a Eq. (2.25),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} h(t-\psi) + \epsilon \frac{d}{dt} s(\psi, t) &= f[h(t-\psi)] + Df_{h(t-\psi)} \epsilon s(\psi, t) + \epsilon g[h(t-\psi), t] \\ &+ Dg_{h(t-\psi)} \epsilon^2 s(\psi, t). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Para a solução não perturbada é válida a Eq. (2.1); substituindo  $x = h(t-\psi)$  em (2.1),

$$\dot{h}(t-\psi) = f[h(t-\psi)], \quad (2.28)$$

e substituindo em (2.27),

$$\epsilon \dot{s}(\psi, t) = Df_{h(t-\psi)} \epsilon s(\psi, t) + \epsilon g[h(t-\psi), t] + Dg_{h(t-\psi)} \epsilon^2 s(\psi, t). \quad (2.29)$$

Eliminando de 2.29 o termo de segundo grau em  $\epsilon$ , é obtida a equação variacional,

$$\dot{s}(\psi, t) = Df_{h(t-\psi)} s(\psi, t) + g[h(t-\psi), t]. \quad (2.30)$$

A equação variacional para  $u(\psi, t)$  é obtida de forma análoga.

O vetor entre os pontos  $h(t-\psi) + \epsilon s(\psi, t)$  e  $h(t-\psi) + \epsilon u(\psi, t)$ , para  $t=\psi$ , é

$$\epsilon[u(\psi, \psi) - s(\psi, \psi)] , \quad (2.31)$$

onde os termos  $O(\epsilon^2)$  não são considerados.

Se os dois pontos coincidem, as superfícies invariantes perturbadas  $W^s$  e  $W^u$  intersectam.

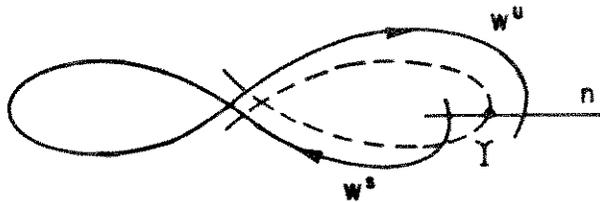


Fig. 2.3 - Separação das superfícies estável e instável, em uma seção com  $\psi = \text{constante}$ .

Para obter uma medida da separação entre os dois pontos, projeta-se o vetor (2.31) sobre  $n$ , o vetor normal a  $Y$  em  $h(0)$ . Esta medida permite obter um escalar positivo ou negativo, de forma que seja possível verificar a transversalidade de interseção.

A medida, projetando (2.31) sobre  $n$ , é:

$$\epsilon d(\psi) = \epsilon n^T [u(\psi, \psi) - s(\psi, \psi)]. \quad (2.32)$$

Se  $d(\psi)$  tem zeros não degenerados para algum valor de  $\psi$ , há uma órbita homoclínica transversa na seção correspondente.

Para  $t = \psi$ ,  $h(t-\psi) = h(0)$ , e um vetor normal a  $\Gamma$  em  $h(0)$  é  $\nabla H$  avaliado em  $h(0)$ , onde  $\nabla H = (-f_2, f_1)^T$ . Seja

$$n = [-f_2(h(0)), f_1(h(0))]^T. \quad (2.33)$$

Então

$$d(\psi) = n^T [u(\psi, \psi) - s(\psi, \psi)], \quad (2.34)$$

$$d(\psi) = \begin{bmatrix} -f_2(h(0)) & f_1(h(0)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(\psi, \psi) - s_1(\psi, \psi) & u_2(\psi, \psi) - s_2(\psi, \psi) \end{bmatrix}^T \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} d(\psi) = & -f_2(h(0)) u_1(\psi, \psi) + f_2(h(0)) s_1(\psi, \psi) \\ & + f_1(h(0)) u_2(\psi, \psi) - f_1(h(0)) s_2(\psi, \psi), \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$d(\psi) = -f_1 u_2 - f_2 u_1 - (f_1 s_2 - f_2 s_1), \quad (2.37)$$

$$d(\psi) = (f \wedge u) - (f \wedge s), \quad (2.38)$$

onde  $a \wedge b$  é definido como  $a_1 b_2 - a_2 b_1$ , e representa a componente vertical (eixo  $\psi$ ) do produto cruzado tri-dimensional<sup>2</sup>. Definindo

$$d_u(\psi) = f(h(0)) \wedge u(\psi, \psi), \quad (2.39a)$$

$$d_s(\psi) = f(h(0)) \wedge s(\psi, \psi), \quad (2.39b)$$

então

2 \_\_\_\_\_

Algumas propriedades desta operação entre vetores são:

$$i) \quad w \wedge (u+v) = (w \wedge u) + (w \wedge v);$$

$$ii) \quad \frac{d}{dt}(u \wedge v) = \left( \frac{du}{dt} \wedge v \right) + \left( u \wedge \frac{dv}{dt} \right).$$

$$d(\psi) = d_u(\psi) - d_s(\psi). \quad (2.40)$$

Seja

$$d_u(\psi) = \Delta_s(\psi, \psi), \quad (2.41)$$

$$\Delta_s(\psi, t) = f(h(t-\psi)) \wedge s(\psi, t), \quad (2.42)$$

e similarmente para  $d_u(\psi)$  e  $\Delta_u(\psi, t)$ .

Para um valor fixo de  $\psi$ ,  $\hat{\psi}$  na Eq. (2.39b),

$$\frac{d}{dt} \Delta_s(\hat{\psi}, t) = (Df)_{h(t-\hat{\psi})} \dot{h}(t-\hat{\psi}) \wedge s(\hat{\psi}, t) + f(h(t-\hat{\psi})) \wedge \dot{s}(\hat{\psi}, t). \quad (2.43)$$

A Eq. (2.1) é válida para  $x = h(t-\hat{\psi})$ ; substituindo  $h(t-\hat{\psi})$  em (2.1),

$$\dot{h}(t-\hat{\psi}) = f(h(t-\hat{\psi})). \quad (2.44)$$

Substituindo (2.44) em (2.43),

$$\frac{d}{dt} \Delta_s(\hat{\psi}, t) = (Df)_{h(t-\hat{\psi})} f(h(t-\hat{\psi})) \wedge s(\hat{\psi}, t) + f(h(t-\hat{\psi})) \wedge \dot{s}(\hat{\psi}, t). \quad (2.45)$$

Da equação variacional (2.30) e de 2.45),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta_s(\hat{\psi}, t) &= (Df)_{h(t-\hat{\psi})} f(h(t-\hat{\psi})) \wedge s(\hat{\psi}, t) \\ &+ f(h(t-\hat{\psi})) \wedge \left[ (Df)_{h(t-\hat{\psi})} s(\hat{\psi}, t) + g(h(t-\hat{\psi}), t) \right]. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Em forma abreviada,

$$\frac{d}{dt} \Delta_s = (Df)f\Lambda s + f\Lambda((Df)s+g). \quad (2.47)$$

Desenvolvendo (2.47), com  $f = (f_1 \ ; \ f_2)^T$ ;  $h(t-\hat{\psi}) = (x_1 \ ; \ x_2)^T$ ,

$$\frac{d}{dt} \Delta_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \Lambda s + f \Lambda \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + f\Lambda g, \quad (2.48)$$

$$\frac{d}{dt} \Delta_s = \begin{bmatrix} f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Lambda s + f \Lambda \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} s_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} s_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} s_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} s_2 \end{bmatrix} + f\Lambda g, \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta_s &= f_1 s_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + f_2 s_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - s_1 f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - s_1 f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ &+ f_1 s_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + f_1 s_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - f_2 s_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - f_2 s_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + f\Lambda g. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Como o sistema é Hamiltoniano,

$$f_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2} \quad ; \quad f_2 = - \frac{\partial H}{\partial x_1} \quad ; \quad (2.51)$$

portanto,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{-\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_1} \quad ; \quad (2.52)$$

e

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = - \frac{\partial f_2}{\partial x_2}. \quad (2.53)$$

Substituindo (2.53) em (2.50), e rearranjando,

$$\frac{d}{dt} \Delta_s(\hat{\psi}, t) = f(h(t-\hat{\psi})) \wedge g(h(t-\hat{\psi}), t). \quad (2.54)$$

Integrando,

$$\Delta_s(\psi, t) \Big]_{t=\hat{\psi}}^{t=\infty} = \int_{\hat{\psi}}^{\infty} f(h(t-\hat{\psi})) \wedge g(h(t-\hat{\psi}), t) dt, \quad (2.55)$$

donde

$$\Delta_s(\psi, \infty) - \Delta_s(\hat{\psi}, \hat{\psi}) = \int_{\hat{\psi}}^{\infty} f(h(t-\hat{\psi})) \wedge g(h(t-\hat{\psi}), t) dt. \quad (2.56)$$

De (2.42),

$$\Delta_s(\psi, t) = f(h(t-\psi)) \wedge s(\psi, t). \quad (2.57)$$

Como na trajetória homoclínica o ponto de sela U é atingido para  $t=\infty$ , e em U  $\dot{h}(t-\hat{\psi}) = 0 = f(h(t-\hat{\psi}))$ , então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(h(t-\hat{\psi})) = 0 \quad (2.58)$$

e portanto

$$\Delta_s(\hat{\psi}, \infty) = 0. \quad (2.59)$$

Então, de (2.56),

$$-\Delta_s(\hat{\psi}, \hat{\psi}) = \int_{\hat{\psi}}^{\infty} f(h(t-\hat{\psi})) \wedge g(h(t-\hat{\psi}), t) dt. \quad (2.60)$$

Similarmente,

$$\Delta_u(\hat{\psi}, \hat{\psi}) - \Delta_u(\hat{\psi}, -\infty) = \int_{-\infty}^{\hat{\psi}} f(h(t-\hat{\psi})) \wedge g(h(t-\hat{\psi}), t) dt; \quad (2.61)$$

com

$$\Delta_u(\hat{\psi}, -\infty) = 0,$$

$$\Delta_u(\hat{\psi}, \hat{\psi}) = \int_{-\infty}^{\hat{\psi}} f(h(t-\hat{\psi})) \wedge g(h(t-\hat{\psi}), t) dt. \quad (2.62)$$

Somando (2.60) e (2.62),

$$d(\hat{\psi}) = \Delta_u(\hat{\psi}, \hat{\psi}) - \Delta_s(\hat{\psi}, \hat{\psi}), \quad (2.63)$$

donde

$$d(\hat{\psi}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(h(t-\hat{\psi})) \wedge g(h(t-\hat{\psi}), t) dt. \quad (2.64)$$

Deslocando a variável  $t$ , obtém-se

$$d(\hat{\psi}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(h(t)) \wedge g(h(t), t+\hat{\psi}) dt, \quad (2.65)$$

chamada integral de Melnikov.

### Teorema 2.1

Se  $d(\hat{\psi})$  tem zeros simples<sup>3</sup>, então para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, existe um ponto homoclínico transverso para a transformação de Poincaré na seção  $\hat{\psi}$ . Se  $d(\hat{\psi}) \neq 0$  para  $\hat{\psi} \in [0, T]$ , então as superfícies invariantes  $W^u$  e  $W^s$  (para a trajetória homoclínica perturbada) não intersectam.

## 2.2. MÉTODO DE MELNIKOV PARA UM SISTEMA AUTÔNOMO DE ORDEM DOIS [2]

No caso de um sistema autônomo de ordem dois que não é necessariamente Hamiltoniano, a integral de Melnikov é dada por

$$M(\hat{\psi}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(h(t)) \wedge g(h(t), t+t_0) \exp \left\{ -\int_0^t \text{traço } Df(h(s)) ds \right\} dt, \quad (2.66)$$

onde  $h(t)$  é a órbita homoclínica do sistema não perturbado.

O teorema 2.2 é uma extensão do teorema 2.1, para este caso mais geral.

### Teorema 2.2

Se  $M(\hat{\psi})$  tem zeros simples, então para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, existe um ponto homoclínico transverso para a transformação de Poincaré na seção  $\hat{\psi}$ . Se  $M(\hat{\psi}) \neq 0$  para  $\hat{\psi} \in [0, T]$ , então as superfícies invariantes  $W^u$  e  $W^s$  (para a trajetória homoclínica perturbada) não intersectam.

Se a função de Melnikov parametrizada  $M(\hat{\psi}, \mu)$ , onde  $\mu \in \mathbb{R}^1$ , tem

3 \_\_\_\_\_

Isto é, para algum  $\hat{\psi} = \tau$ ,  $d(\tau) = 0$ ,  $Dd(\tau) \neq 0$ .

um zero quadrático

$$M(\tau, \mu_b) = \frac{d}{d\psi} M(\tau, \mu_b) = 0 \quad (2.67)$$

mas

$$\frac{d^2}{d\psi^2} M(\tau, \mu_b) \neq 0 \quad (2.68)$$

e

$$\frac{d}{d\mu} M(\tau, \mu_b) \neq 0, \quad (2.69)$$

então  $\mu_B = \mu_b + O(\varepsilon)$  é um valor de bifurcação para o qual ocorrem tangências homoclínicas quadráticas.

#### Corolário 2.1

Se o sistema não perturbado (2.1) é Hamiltoniano,

$$\text{traço } Df(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} ; \quad (2.70)$$

substituindo (2.2) em (2.71),

$$\text{traço } Df(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} H - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} H , \quad (2.71)$$

e portanto

$$\text{traço } Df(x) = 0.$$

Então, para o caso Hamiltoniano, a integral de Melnikov (2.66)

reduz-se à expressão (2.65).

Uma exposição mais detalhada do teorema 2.2 pode ser achada em [20].

### 2.3. CONCLUSÕES

O método é adequado para analisar sistemas que possuem uma órbita homoclínica, a qual é modificada por uma perturbação periódica. Ele estabelece condições para as quais o sistema tem um comportamento sensível às condições iniciais, mas não garante a permanência de trajetória dentro de uma determinada região (atrator estranho). Como estas condições não são necessárias e suficientes, permitem explicar o comportamento caótico de uma forma que não é geral. A utilidade do método depende do problema em particular, sendo possível complementá-lo com simulações.

## CAPÍTULO 3

### CAOS EM SISTEMAS DISCRETOS

A aplicação de técnicas de análise tais como o Método de Melnikov, em sistemas contínuos, pode ser uma tarefa árdua, ainda para equações diferenciais de ordem dois (considere-se, por exemplo, a análise do PLL de segunda ordem, feita por Endo e Chua em [2]). Por outra parte, as técnicas existentes para análise de sistemas contínuos não têm a generalidade suficiente para serem aplicadas em qualquer sistema.

Lorenz [21], estudando a convecção de um fluido sendo aquecido, obteve como aproximação do sistema de equações diferenciais parciais, o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + \sigma x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_3 + r x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - b x_3\end{aligned}$$

Ele mostrou que alguns dos aspectos caóticos do fluxo original podem ser conservados por uma equação escalar discreta da forma

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad \text{onde } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

a qual descreve uma característica escalar relevante do sistema original.

Esta foi uma das motivações que levaram a Li e Yorke a estabelecerem as condições para as quais um sistema descrito por uma

recorrência comporta-se em forma caótica [12, 22]. Posteriormente, [23, 24, 25] Marotto obteve condições suficientes para que um sistema do tipo

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad \text{onde } f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

seja caótico [23, 24].

Shiraiwa e Kurata generalizaram o teorema de Marotto, de forma que o teorema exposto por eles em [26] pode ser considerado também como uma generalização do resultado de Smale sobre o ponto homoclinico transversal de um difeomorfismo.

Ushio e Hirai [29, 30] aplicaram os teoremas de Marotto e de Shiraiwa e Kurata em sistemas de controle não lineares amostrados, e obtiveram condições suficientes para que um sistema seja caótico.

Neste capítulo serão descritos os resultados mais relevantes para a análise de sistemas discretos. Uma revisão mais detalhada pode ser achada em [6], enquanto que as provas dos teoremas encontram-se nas referências citadas.

### 3.1. CAOS EM EQUAÇÕES ESCALARES

Seja a equação

$$x_{k+1} = f(x_k) \tag{3.1}$$

onde  $f : J \rightarrow J$  é contínua e  $J$  é um intervalo  $\in \mathbb{R}$ , a qual descreve em forma discreta o comportamento de um sistema dinâmico.

Então definem-se

$$f^0(x) := x \quad , \tag{3.2a}$$

$$f^{n+1}(x) := f(f^n(x)) \quad , \tag{3.2b}$$

onde  $f^n(x)$  denota a composição de  $f$  sobre si mesma,  $n$  vezes, e  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Chama-se **ponto periódico com período  $n$**  a um ponto  $p$  tal que  $p \in J$  e  $p = f^n(p)$ , com  $p \neq f^k(p)$  para  $1 \leq k < n$ . Entende-se por **ponto periódico** aquele ponto  $p$  que é periódico com período  $n \geq 1$ .

Diz-se que um ponto  $q$  é **eventualmente periódico** se  $p = f^m(q)$  é periódico para algum inteiro positivo  $m$ .

Define-se um ponto  $r \in J$  como **assintoticamente periódico** se existe um ponto periódico  $p$  tal que

$$f^n(r) - f^n(p) \rightarrow 0 \quad \text{para } n \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

Para ilustrar estas definições, suponha-se que  $x_{k+1} = f(x_k)$ ,  $x_1 \in \mathbb{R}$ , é uma discretização do sistema contínuo

$$\dot{z} = g(z), \quad (3.4)$$

onde  $z = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com a trajetória mostrada na Fig. 3.1, no plano de fase  $x$ - $y$ .

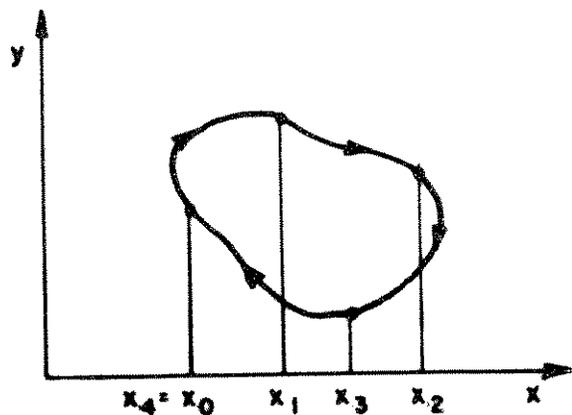


Fig. 3.1 Pontos de período quatro.

No exemplo, todos os pontos  $x_i$  gerados pela seqüência  $f^k(x)$  têm período quatro (para a discretização escolheu-se quatro pontos arbitrários).

A Fig. 3.2, similarmente, ilustra um ponto eventualmente periódico,  $q$ .

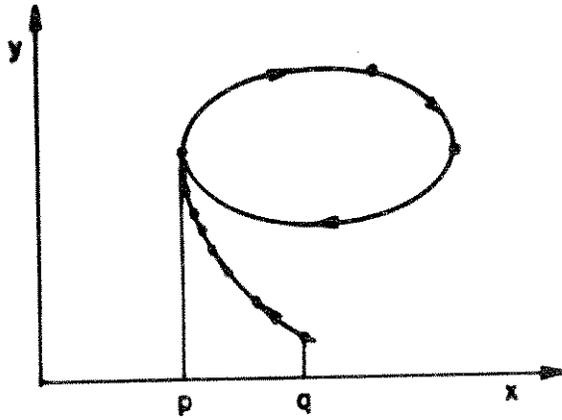


Fig. 3.2 - Um ponto eventualmente periódico.  $p = f^m(q) = f^n(p)$ ,  
com  $m = 4$ ,  $n = 3$ .

A Fig. 3.3 mostra um ponto assintoticamente periódico.

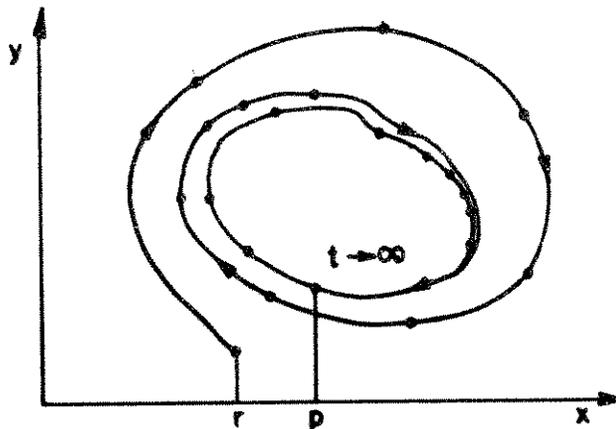


Fig. 3.3 - Um ponto assintoticamente periódico. Para  $n \rightarrow \infty$ ,  
 $f^n(r) - f^n(p) = f^n(r) - p \rightarrow 0$ .

O teorema a seguir descreve uma situação na qual as iterações de um ponto são muito irregulares.

**Teorema 3.1 (Li e Yorke)**

Seja  $J$  um intervalo  $\in \mathbb{R}$  e seja  $f : J \rightarrow J$  contínua. Suponha-se que existe um ponto  $a \in J$  para o qual os pontos  $b = f(a)$ ,  $c = f^2(a)$  e  $d = f^3(a)$  satisfazem

$$d \leq a < b < c \quad (\text{ou } d \geq a > b > c) . \quad (3.5)$$

Então

- i) para cada  $k = 1, 2, \dots$  há um ponto periódico de (3.1) em  $J$  tendo período  $k$ .

Mais ainda,

- ii) há um conjunto não contável  $S \subset J$ , o qual não contém pontos periódicos, que satisfaz as seguintes condições:

- a) para cada  $p, q, \in S$  com  $p \neq q$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0 \quad (3.6)$$

e

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| = 0 ; \quad (3.7)$$

- b) para cada  $p \in S$  e cada ponto periódico  $q \in J$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0. \quad (3.8)$$

**Observações**

- (i) Da condição (b) infere-se que o conjunto  $S$  não contém pontos assintoticamente periódicos.

(ii) Se existe um ponto periódico de período 3, então as hipóteses do teorema são satisfeitas.

**Definição 3.1**

Um sistema descrito pela equação (3.1), que satisfaz as Eqs. (3.6)-(3.8) do teorema 3.1, é chamado de caótico no sentido de Li e Yorke.

Esta definição é diferente da estabelecida no capítulo 1 (definição 1.1). Discutiremos este teorema e as diferenças entre ambas definições.

A seguir interpreta-se o Teorema de Li e Yorke em forma intuitiva, através de dois casos particulares que satisfazem o teorema. Nestes dois exemplos, ilustrados na Fig. 3.4, a equação (3.1) contém um ciclo de período 3. Este tipo de gráfico, em que representa-se  $f(x_k)$  versus  $x_k$ , é conhecido como mapa logístico.

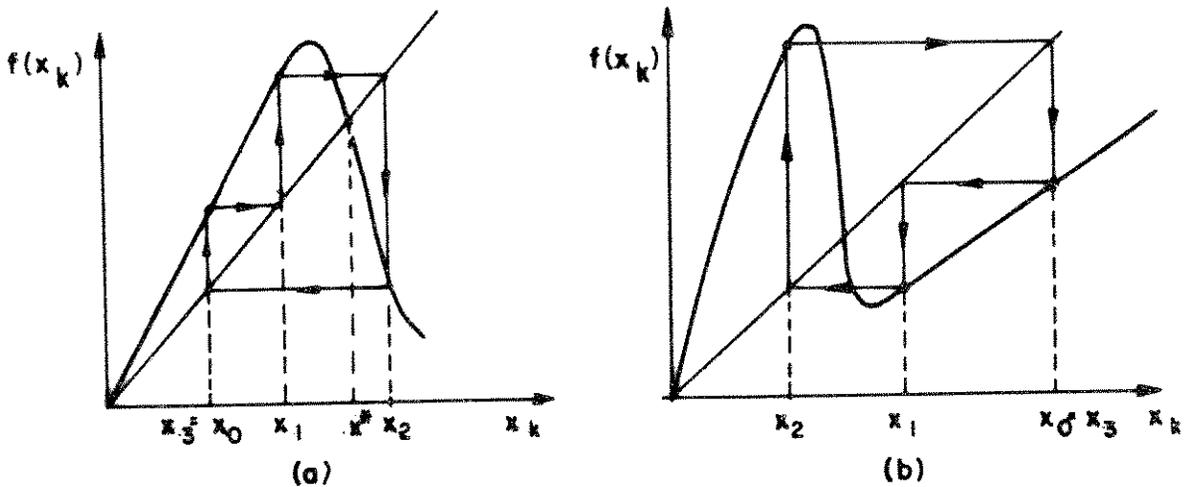


Fig. 3.4 - Dois pontos de período 3, satisfazendo:  
 (a)  $x_3 = x_0 < x_1 < x_2$  ; (b)  $x_3 = x_0 > x_1 > x_2$ .

Examinando a vizinhança do ponto fixo  $x^*$  da Fig. 3.4 (a), observa-se que o único autovalor que caracteriza o sistema lineariza-

do na vizinhança de  $x^*$ , é maior do que um em módulo. Se o sistema fosse linear, o comportamento das soluções seria divergente (Fig. 3.5).

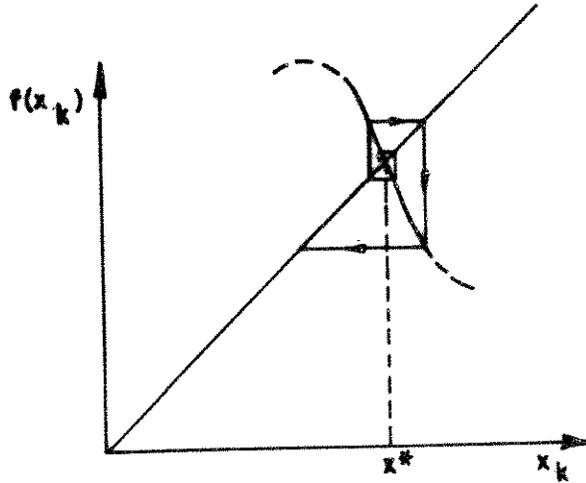


Fig. 3.5 - Linearização do sistema na vizinhança de  $x^*$ .

No entanto, pela característica não linear do sistema, a órbita volta repetidamente à vizinhança do ponto fixo.

O teorema de Li e Yorke estabelece que para um sistema que satisfaz a hipótese (3.5), verificam-se as teses (i) e (ii). A tese (i) é equivalente a dizer que  $f(x_k)$ ,  $f^2(x_k)$ ,  $f^3(x_k)$ , ... contém um ponto fixo (Fig. 3.6).

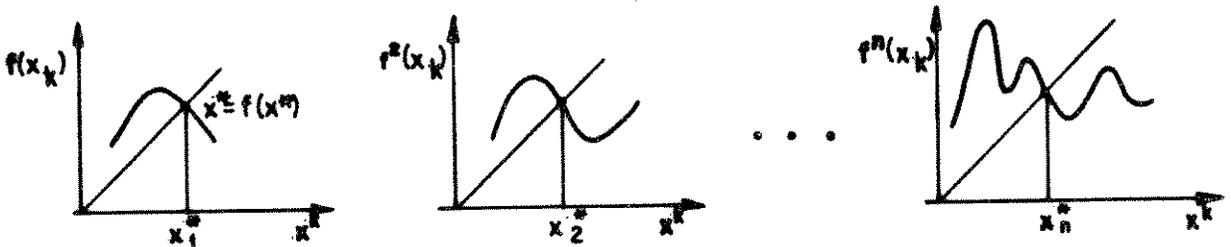


Fig. 3.6 -  $f(x_k)$  contendo pontos de todos os períodos.

A tese (ii), (a) estabelece que há um conjunto incontável de pontos aperiódicos tal que duas órbitas geradas a partir de condições iniciais diferentes não convergem a uma mesma órbita, mas podem-se aproximar a uma distância infinitesimal em alguns dos pontos (Fig. (3.7)).

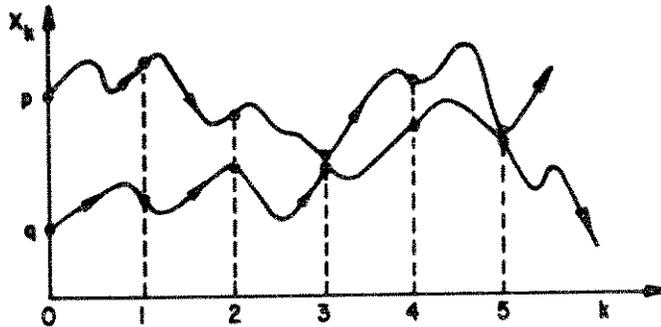


Fig. 3.7 - Duas órbitas caóticas podem-se aproximar infinitesimalmente em alguns pontos  $(p_3 - q_3, p_5 - q_5)$ , mas não convergem a uma mesma órbita.

Então, a partir de duas condições iniciais arbitrariamente próximas geram-se órbitas diferentes (sensitividade às condições iniciais).

A tese (ii), (b), indica que para cada ponto aperiódico  $p$  e cada ponto periódico  $q$ , as órbitas geradas a partir desses pontos nunca convergem, ou em outras palavras, um ponto aperiódico não é sequer assintoticamente periódico (Fig. 3.8).

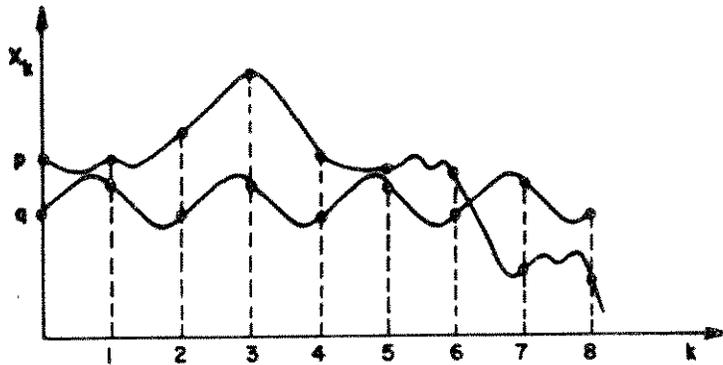


Fig. 3.8 - A órbita gerada a partir de um ponto aperiódico não converge assintoticamente à órbita gerada a partir de um ponto periódico.

Apesar de que na maioria dos casos as funções caóticas no sentido de Li e Yorke comportam-se da forma ilustrada na Fig. 3.7, Du [27] mostrou que existem funções caóticas no sentido da definição 3.1, as quais não são pseudo-aleatórias no seu comportamento.

Du provou que, para cada inteiro  $n > 1$ , existem funções contínuas  $f(x) : [1, n] \rightarrow [1, n]$  tais que elas contém pontos periódicos de período 3, mas com a propriedade de que quase todos os pontos de  $[1, n]$  são mapeados no ponto periódico  $x = 1$  de  $f$  com período  $n$  depois de um número finito de iterações sob  $f$ . Ou seja, quase todos os pontos de  $[1, n]$  são eventualmente periódicos, sendo que a órbita eventualmente periódica é a mesma que a órbita do ponto  $x = 1$ , o qual tem período  $n$ .

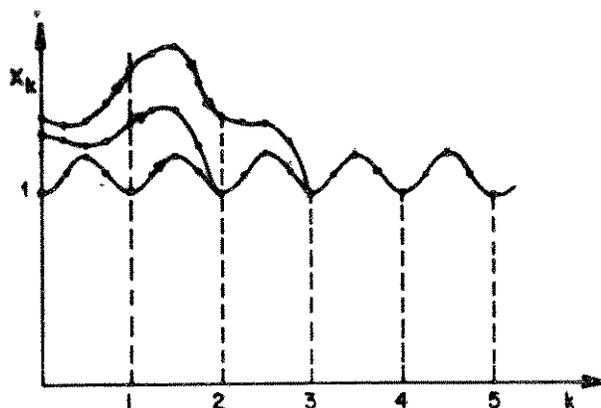


Fig. 3.9 - Duas órbitas eventualmente periódicas coincidem com uma órbita periódica após um número finito de iterações.

Num caso como o da Fig. 3.9, para efeitos práticos, em ausência de ruído, o sistema comporta-se como periódico. Este tipo de comportamento em alguns sistemas caóticos tinha sido observado já por Li et al em [22]. Através de um exemplo, no qual existe uma órbita de período três, mostra-se que a órbita aparentemente periódica pode ser destruída com quantidades de ruído tão pequenas quanto 0.1%. Du sugere, então, a possibilidade de classificar as funções caóticas desde o ponto de vista físico.

Isto leva-nos a uma questão importante, a saber, que nem sempre há uma correspondência entre o comportamento observado a partir de um número finito de amostras, e a caoticidade das equações.

É o caso na teoria ergódica, na qual deriva-se grandezas que caracterizam o sistema a partir de dados observados ou simulados.

A caoticidade do sistema pode se revelar no comportamento

somente sob certas condições, que podem ser o estado inicial dentro da base de atração de algum atrator estranho, ou como no caso discutido por Li et al., uma pequena quantidade de ruído que faça o papel de "gatilho". Como é possível que existam vários atratores num mesmo sistema - alguns deles estranhos e outros não - dependendo da base de atração na qual fique a condição inicial, a trajetória pode evoluir para um comportamento pseudo-aleatório ou não. O ruído, mesmo sendo desprezível, pode mudar a trajetória o suficiente para colocá-la numa outra base de atração.

Uma segunda questão é que segundo a definição de caos baseada no cálculo dos expoentes de Lyapunov (definição 1.1), um sistema instável<sup>4</sup> é considerado como caótico, pois possui pelo menos um expoente de Lyapunov positivo. Pela definição de Li e Yorke, um sistema instável não necessariamente satisfaz a condição  $\liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| = 0$  com  $p, q$  pontos aperiódicos, e então não é caótico no sentido de Li e Yorke. Este contra-exemplo é suficiente para mostrar que ambas definições são diferentes. Contudo, as duas são freqüentemente usadas na literatura, dependendo a sua utilidade de cada problema em particular.

Feitas estas considerações, utilizaremos a definição de Li e Yorke na exposição dos teoremas que seguem neste capítulo. Ditos teoremas referem-se, precisamente, ao comportamento caótico no sentido de Li e Yorke.

### Teorema 3.2 (Oono, [28])

Se existe um ponto periódico com período diferente de 1, 2, 4, 8, ... na órbita gerada pela Eq. (3.1), então ela é caótica.

4

Entende-se aqui sistema instável como um sistema tal que não possui pontos de equilíbrio estáveis segundo a definição de Lyapunov: "Um ponto de equilíbrio  $x_e$  é estável se e somente se para cada número real  $\varepsilon > 0$  existe um número real  $\delta(\varepsilon, t_0)$  tal que  $\|x_0 - x_e\| \leq \delta \implies \| \varphi_t(x_0, t_0) - x_e \| \leq \varepsilon, \forall t \geq t_0$ ".

### Teorema 3.3 (Li et al, [22])

Suponha-se que existe um ponto inicial  $x$  tal que é válida a hipótese

$$f^n(x) < x < f(x) , \quad (3.9)$$

para algum  $n > 1$ , com  $n$  ímpar. Então existe um ponto periódico com período  $k$  ímpar onde  $1 < k \leq n$  e  $n/k$  é um inteiro.

### Corolário 3.1

Se existe um ponto periódico de período ímpar, então pelo teorema 3.2 o comportamento de (3.1) é caótico.

Observa-se que para  $n=3$ , a condição (3.9) é menos exigente que a hipótese do teorema 3.1. A condição  $f^n(x) < x < f(x)$  pode, então, ser usada para verificar a caoticidade de uma órbita obtida experimentalmente ou por simulação.

## 3.2. CAOS NO ESPAÇO $\mathbb{R}^n$

F.R. Marotto generalizou o teorema de Li e Yorke, estabelecendo condições suficientes para que o sistema descrito por

$$x_{k+1} = f(x_k) ; f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n , k = 0, 1, \dots, \quad (3.10)$$

seja caótico [23, 24]. Antes de estabelecer o teorema de Marotto, apresentaremos algumas definições.

Assuma-se que a função  $f$  é diferenciável em um conjunto  $V$  e que

$z \in V$  é um ponto fixo de  $f$ . Se todos os autovalores de  $Df(z)$  forem maiores do que um em norma, então para algum  $s > 1$  e  $r > 0$ ,

$$\|f(x) - f(y)\| > s \|x - y\| \quad \forall x, y \in B_r(z), \quad (3.11)$$

onde  $B_r(z)$  representa a bola fechada em  $\mathbb{R}^n$ , de raio  $r$  e centrada em  $z$ , e  $\|x\|$  denota a norma euclidiana usual em  $\mathbb{R}^n$ .

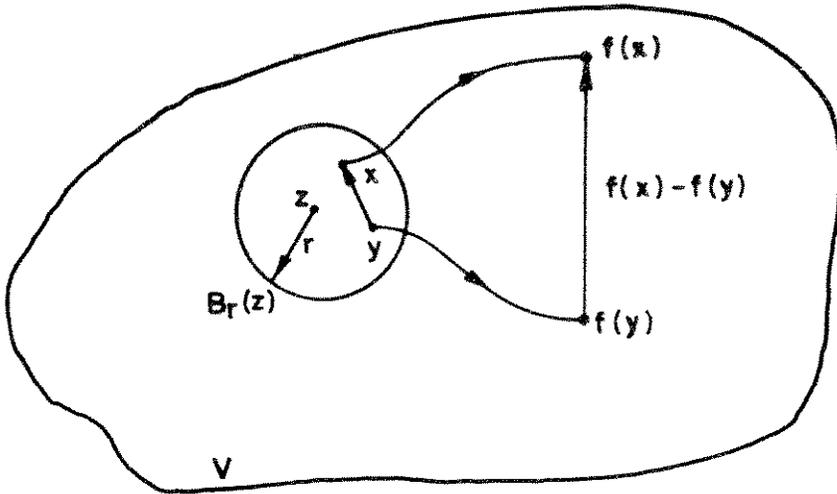


Fig. 3.10 - Se todos os autovalores de  $Df(z)$  forem maiores do que um em norma, o fluxo é expansivo em todas as direções, na vizinhança de  $z$ .

Este comportamento é válido localmente, na vizinhança de  $z$ , e significa, em outras palavras, que na proximidade do ponto fixo  $z$  o fluxo é expansivo em todas as direções, de forma que quaisquer que sejam os  $x, y$  escolhidos, obtém-se

$$\frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} > s, \quad \text{com } s > 1. \quad (3.12)$$

Em particular, se  $y=z$ ,

$$\|f(x)-z\| > \|x-z\| \quad \forall x \in B_r(z), \quad (3.13)$$

ou seja,  $f$  "expande"  $B_r(z)$ .

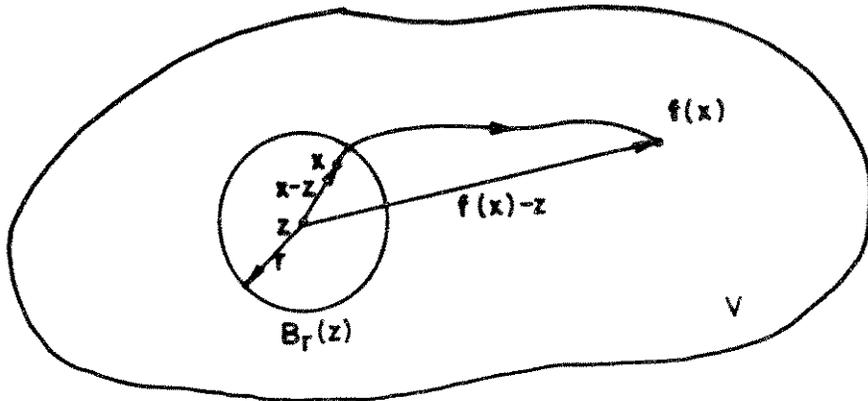


Fig. 3.11 - Qualquer que seja a escolha de  $x$ ,  $\|f(x)-z\| > \|x-z\|$ , indicando que o fluxo é expansivo em todas as direções na vizinhança de um ponto fixo expandido.

Então, define-se  $z \in \mathbb{R}^n$  como um **ponto fixo expandido** de  $f \in B_r(z)$ , se  $f$  é diferenciável em  $B_r(z)$ , se  $z=f(z)$  e se todos os autovalores de  $Df(x)$  excedem 1 em norma  $\forall x \in B_r(z)$ .

O ponto fixo expandido  $z$  é chamado de **snap-back repeller** se existirem  $x_0 \in B_r(z)$ , com  $x_0 \neq z$ , e um inteiro  $M$  tal que:

$$f^M(x_0) = z, \quad (3.14)$$

e

$$|Df^M(x_0)| \neq 0, \quad (3.15)$$

para algum inteiro positivo  $M$ , onde  $|Df^M(x_0)|$  denota o determinante de  $Df^M(x_0)$ .

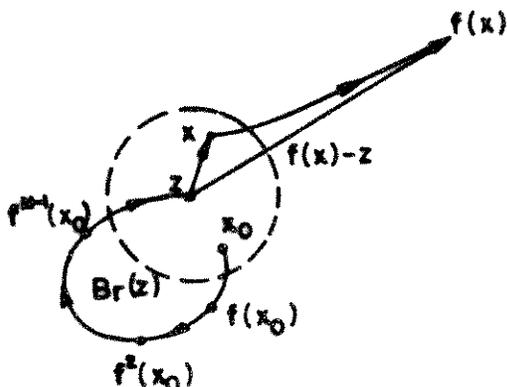


Fig. 3.12 - Snap-back repeller. Existe  $x_0 \neq z \in B_r(z)$  tal que  $f^M(x_0)=z$ .

**Teorema 3.4 (Marotto, [23], [24], [25])**

Se  $f$  possuir um snap-back repeller, então (3.10) é caótica, isto é, existe

- i) um inteiro positivo  $N$  tal que para cada inteiro  $p \geq N$ ,  $f$  tem um ponto de período  $p$ ;
- ii) um conjunto não contável  $S$  contendo pontos não periódicos de  $f$  tal que:

a)  $f[S] \subset S$ , (3.16)

b) para cada  $x, y \in S$  com  $x \neq y$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|f^k(x) - f^k(y)\| > 0, \quad (3.17)$$

c) para cada  $x \in S$  e qualquer ponto periódico  $y$  de  $f$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|f^k(x) - f^k(y)\| > 0; \quad (3.18)$$

iii) um subconjunto não contável  $S_0$  de  $S$  tal que para cada  $x, y \in S_0$ :

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|f^k(x) - f^k(y)\| = 0. \quad (3.19)$$

É interessante notar a analogia deste teorema com o resultado de Smale [14], visto no capítulo 1. O resultado de Smale estabelece que a existência de uma órbita homoclínica transversa, onde a órbita converge a um ponto fixo hiperbólico para  $t \rightarrow \infty$  e  $t \rightarrow -\infty$ , implica a existência de um número infinito de pontos periódicos de diferentes períodos (Fig. 3.13a). Como o ponto fixo  $x^*$  é hiperbólico, os autovalores de  $DP(x^*)$  são maiores ou menores (estritamente) do que 1, em norma.

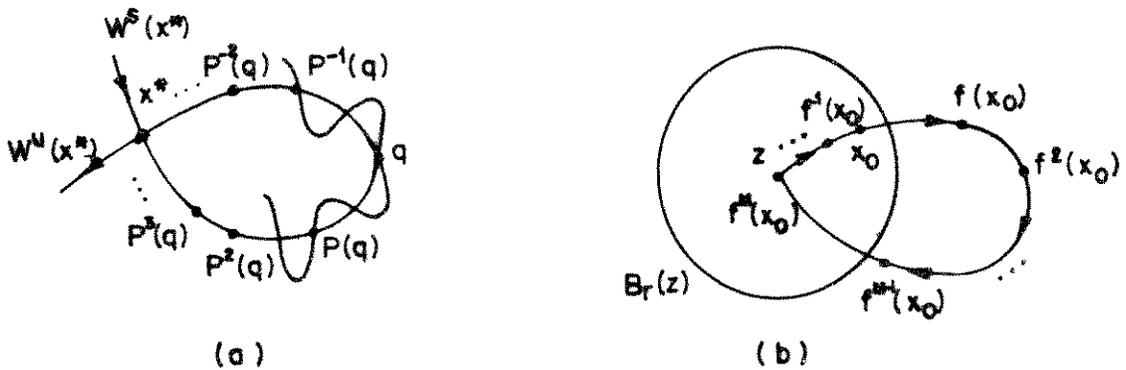


Fig. 3.13 - (a) Órbita P-homoclínica a um ponto fixo tipo sela (Smale).

(b) Órbita homoclínica a um snap-back repeller (Marotto).

No teorema de Marotto, a órbita homoclínica converge a um ponto fixo expandido para  $k \rightarrow -\infty$ , isto é, na vizinhança do ponto fixo  $z$  todos os autovalores de  $Df(x)$  são maiores do que 1 em norma. Da mesma forma que no caso da órbita P-homoclínica, robusta ante pequenas perturbações de P, a existência de um snap-back repeller é uma propriedade robusta para pequenas perturbações de  $f$ .

Como a determinação da existência de um snap-back repeller é mais simples do que a prova da existência de uma órbita homoclínica transversal, são úteis alguns teoremas propostos por Marotto em [24]. Eles permitem determinar, em alguns casos, a caoticidade de um sistema a partir da prova da existência de um snap-back repeller em um sistema de dimensão menor.

### Teorema 3.5

Seja a equação

$$x_{k+1} = f(x_k, b_1 x_{k-1}, \dots, b_m x_{k-m}) \quad (3.20)$$

uma perturbação da equação escalar

$$x_{k+1} = f(x_k, 0, \dots, 0) \quad (3.21)$$

onde  $b_i$  e  $x_k \in \mathbb{R}$  e  $f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$  é continuamente diferenciável.

Então,

- i) Se (3.21) tem um ponto estável de período  $p$ , então (3.20) tem um ponto estável de período  $p$  para todo  $|b_i| < \varepsilon$ , para algum  $\varepsilon > 0$ .
- ii) Se (3.21) tem um snap-back repeller, então (3.20) tem uma órbita homoclínica transversal para todo  $|b_i| < \varepsilon$ , para algum  $\varepsilon > 0$ .

### Teorema 3.6

Seja a dinâmica de um sistema do tipo

$$x_{k+1} = f(x_k, y_k) \quad (3.22a)$$

$$y_{k+1} = g(x_k, y_k) \quad (3.22b)$$

uma perturbação do sistema desacoplado

$$x_{k+1} = f(x_k, 0) \quad (3.23a)$$

$$y_{k+1} = g(0, y_k) \quad (3.23b)$$

onde  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são diferenciáveis e  $b, c$  pertencem aos reais e são aproximadamente iguais a zero.

Então são válidas as afirmações seguintes:

- i) Se (3.23a) tem um ponto estável  $x_0$  de período  $p$ , e (3.23b) tem um ponto estável  $y_0$  de período  $q$ , então existe  $\epsilon > 0$  tal que (3.22) tem um ponto estável  $(x(b, c), y(b, c))$  com período igual ao mínimo múltiplo comum de  $p$  e  $q$  ( $\text{MCM}(p, q)$ ) para todo  $|b|, |c| < \epsilon$ . Neste caso,  $x(b, c)$  e  $y(b, c)$  são funções contínuas de  $b$  e  $c$ , unicamente definidas, com  $(x(0, 0), y(0, 0)) = (x_0, y_0)$ .
- ii) Se um dos problemas (3.23a) ou (3.23b) tem um snap-back repeller e o outro tem um ponto fixo instável, então (3.22) tem um snap-back repeller para quaisquer  $|b|, |c| < \epsilon$  para algum  $\epsilon > 0$ .
- iii) Se um dos problemas (3.23a) ou (3.23b) tem um snap-back repeller e o outro tem um ponto fixo estável, então (3.22) tem uma órbita homoclínica transversal para todo  $|b|, |c| < \epsilon$ , para algum  $\epsilon > 0$ .

Shiraiwa e Kurata [26] generalizaram o teorema de Marotto; as conclusões obtidas por eles podem ser também interpretadas como uma generalização do resultado de Smale [14]. Shiraiwa e Kurata provaram o teorema seguinte:

### Teorema 3.7

Seja  $M$  uma superfície suave de dimensão  $n$ . Seja  $f : M \rightarrow M$  uma transformação de classe  $C^1$ , seja  $z_0 \in M$  um ponto fixo hiperbólico de  $f$ , e sejam  $W_{loc}^u(z_0)$ , e  $W_{loc}^s(z_0)$  as superfícies localmente instável e estável de  $f$  em  $z_0$ , respectivamente. Se forem satisfeitas as

condições seguintes:

- i)  $u = \dim W_{loc}^u(z_0) > 0$  ;
- ii) existe um ponto  $z_1 \in W_{loc}^u(z_0)$  ( $z_1 \neq z_0$ ) e um inteiro positivo  $m$  tal que  $f^m(z_1) \in W_{loc}^s(z_0)$ ;
- iii) existe um disco de dimensão  $u$ ,  $B^u \subset W_{loc}^u(z_0)$ , tal que  $B^u$  é uma vizinhança de  $z$  em  $W_{loc}^u(z_0)$ ,  $f^m|_{B^u} : B^u \rightarrow M$ ,  $f^m|_{B^u} : B^u \rightarrow M \subset W_{loc}^u(z_0)$ , e  $f^m(B^u)$  tem uma intersecção transversa com  $W_{loc}^s(z_0)$  em  $f^m(z_1)$ ,

então  $f$  é caótica no senso de Li e Yorke.

As condições i), ii) e iii) são ilustradas na Fig. 3.14.

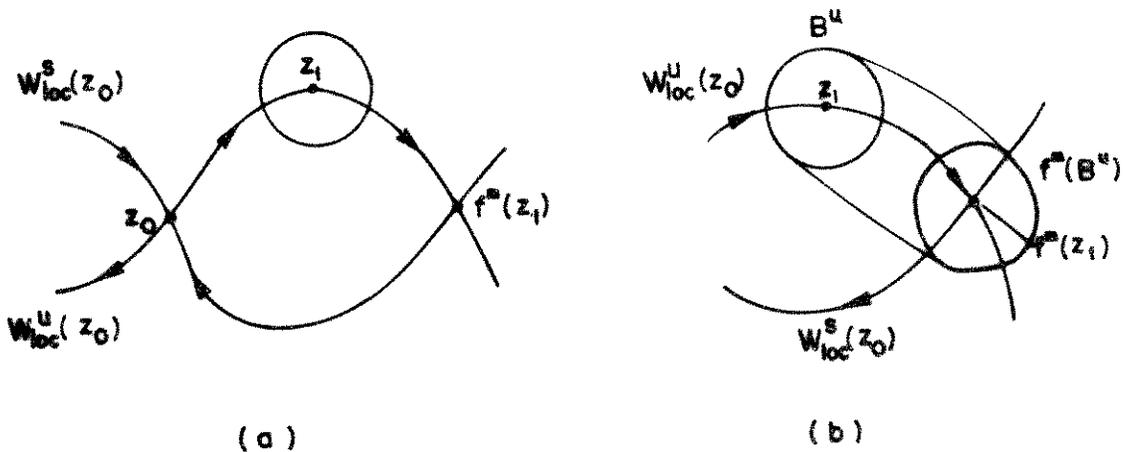


Fig. 3.14 - Condições para que  $f$  seja caótica. (a) A dimensão da superfície instável deve ser positiva (ou seja, há pelo menos um autovalor de  $Df(z_0)$  maior do que um em norma), e um ponto homoclínico transversal  $f^m(z_1)$ . (b) Há um disco  $B^u \subset W_{loc}^u(z_0)$  tal que  $f^m(B^u) \in W_{loc}^u(z_0)$ , e a intersecção do disco  $f^m(B^u)$  com  $W_{loc}^s(z_0)$  é transversa em  $f^m(z_1)$ .

## Observações

1. O teorema é válido se  $f: M \rightarrow M$  é de classe  $C^1$  na vizinhança de  $z_0$  e na vizinhança da órbita de  $z_1$ .
2. Se  $u = \dim M$ , ou em outras palavras, se a dimensão da superfície estável é zero, então  $f^m(z_1) = z_0$ ;  $z_0$  é um snap-back repeller e o teorema reduz-se ao teorema de Marotto.
3. Se  $f$  é um difeomorfismo com  $f^m(z_1) \neq z_0$ , então  $f^m(z_1)$  é um ponto homoclínico transverso, e o teorema generaliza o resultado de Smale.

## 3.3 CAOS EM SISTEMAS DE CONTROLE AMOSTRADOS

T. Ushio e K. Hirai [29, 30] utilizaram uma aplicação do teorema de Marotto (M. Hata, [31]), para provar a existência de caos em sistemas de controle amostrados não lineares. Eles mostraram que existe um período de amostragem  $T^*$  tal que alguns sistemas de controle amostrados com período de amostragem  $T$  são caóticos para todo  $T > T^*$ . Os teoremas a seguir estabelecem as condições suficientes para a existência de caos.

### 3.3.1. Caos em sistemas de controle amostrados com realimentação de estado

Seja o sistema de controle amostrado com realimentação de estado descrito por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.24a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (3.24b)$$

$$u(t) = r - f(x(kT)) \quad , \quad kT \leq t \leq (k+1)T, \quad k=0,1, \dots \quad (3.24c)$$

mostrado na Fig. 3.15, onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^1$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $r \in \mathbb{R}^1$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  é um mapeamento continuamente diferenciável, e  $T$  é o período de amostragem. Assume-se que  $\det A \neq 0$ . (Esta restrição implica que não são considerados processos com polos na origem).

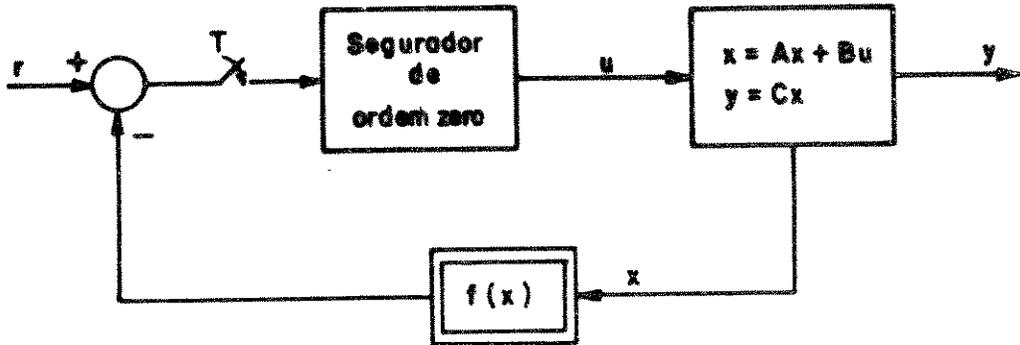


Fig. 3.15 - Sistema de controle amostrado com realimentação de estado

Sejam  $x(k) = x(kT)$ ,  $y(k) = y(kT)$  e  $u(k) = u(kT)$ , então da solução do sistema linear  $\dot{x} = Ax + Bu$  (com  $u$  degrau de valor  $u(0)$ ),

$$x(t) = e^{At} x(0) + A^{-1} [e^{At} - I] B u(0), \quad t \geq 0 \quad (3.25)$$

mais as equações (3.24b) e (3.24c), obtém-se o sistema discreto

$$x(k+1) = e^{AT} x(k) + A^{-1} [e^{AT} - I] B u(k) \quad (3.26a)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (3.26b)$$

$$u(k) = r - f(x(k)), \quad (3.26c)$$

onde  $I$  é a matriz unitária  $n \times n$ .

Reescrevendo a equação (3.26) na forma

$$x(k+1) = G(x(k); T) \quad (3.27)$$

onde

$$G(x(k); T) = x(k) + (e^{AT} - I) F(x(k)) \quad (3.28)$$

e

$$F(x(k)) = x(k) + A^{-1}B(r-f(x(k))), \quad (3.29)$$

então  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $\mathbb{R}^+$  representa os reais positivos, são mapeamentos continuamente diferenciáveis, porque  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um mapeamento continuamente diferenciável.

Temos então que qualquer ponto fixo  $v^*$  da Eq. (3.27) satisfaz  $v^* = G(v^*; T)$ , ou

$$v^* = v^* + (e^{AT} - I) F(v^*) \quad (3.30)$$

e como  $\det(e^{AT} - I) \neq 0$ , daí decorre que

$$F(v^*) = 0 \quad (3.31)$$

é uma condição satisfeita por qualquer ponto fixo  $v^*$  da Eq. (3.27). Isto significa que qualquer ponto fixo  $v^*$  é independente do período de amostragem.

### Teorema 3.8

Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um mapeamento continuamente diferenciável, e assumamos que as duas condições seguintes são satisfeitas:

i) O sistema (3.27) tem dois pontos fixos  $v^*$  e  $w^*$  tais que

$$\det DF(v^*) \neq 0, \det DF(w^*) \neq 0 \quad (3.32)$$

ii) A parte real de todos os autovalores de  $A$  é positiva.

Então, existe um período de amostragem  $T^*$  tal que (3.27) é caótica para todo  $T > T^*$ .

Embora o teorema 3.8 estabeleça as condições para que o sistema seja caótico, com  $f$  sendo qualquer mapeamento continuamente diferenciável, ele dificilmente poderia ser aplicado na prática. A condição ii) estabelece que o processo linear é instável, mais ainda, ele gera energia. A utilidade dele provém do fato de ele provar que existe um snap-back repeller, e da possibilidade de utilizá-lo num subsistema de dimensão menor. Esta idéia é aplicada no teorema a seguir, o qual considera o caso com realimentação de saída.

#### 3.3.2. Caos em sistema de controle amostrados com realimentação de saída

Considere-se um sistema da forma

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.33a)$$

$$y(t) = [C_1 \ C_2] x(t) \quad (3.33b)$$

$$u(t) = r - f(y(kT)), \quad kT \leq t < (k+1)T, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.33c)$$

onde  $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^1$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ,  
 $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$  ( $i=1, 2$ ),  $n_1 + n_2 = n$ ,

$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$  é um mapeamento continuamente diferenciável e  $T$  é o período de amostragem. Suponha-se que a parte real de todos os autovalores de  $A_1$  é positiva, e que a parte real de todos os autovalores de  $A_2$  é negativa. Com  $x(k) = x(kT)$  e  $x_i(k) = x_i(k)$  para  $i=1$  e  $i=2$ , pode-se reescrever a Eq. (3.33) como

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1(k), x_2(k); T, C_2) \\ g_2(x_1(k), x_2(k); T, B_2, C_2) \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

onde

$$g_1(x_1, x_2; T, C_2) = e^{A_1 T} x_1 + A_1^{-1} (e^{A_1 T} - I_1) B_1 (r - f(C_1 x_1 + C_2 x_2)), \quad (3.35a)$$

$$g_2(x_1, x_2; T, B_2, C_2) = e^{A_2 T} x_2 + A_2^{-1} (e^{A_2 T} - I_2) B_2 (r - f(C_1 x_1 + C_2 x_2)), \quad (3.35b)$$

e  $I_i$  denota a matriz unitária  $n_i \times n_i$ . Com  $x = [x_1^T \ x_2^T]^T$ , onde  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  para  $i=1, 2$ , define-se

$$G(x; T, B_2, C_2) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2; T, C_2) \\ g_2(x_1, x_2; T, B_2, C_2) \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Assumindo  $C_2=0$  e  $B_2=0$ , o sistema (3.36) pode ser desacoplado em

$$x_1(k+1) = g_1^*(x_1(k); T) \quad (3.37a)$$

$$x_2(k+1) = g_2^*(x_2(k); T) \quad (3.37b)$$

onde

$$g_1^*(k+1) = g_1(x_1, x_2; T, 0) = e^{A_1 T} x_1 + A_1^{-1} (e^{A_1 T} - I_1) B_1 (r - f(C_1 x_1)) \quad (3.38a)$$

e

$$g_2^*(k+1) = g_2(x_1, x_2; T, 0, 0) = e^{A_2 T} x_2. \quad (3.38b)$$

Como a parte real de todos os autovalores de  $A_2$  é negativa, então (3.37b) tem um único ponto fixo estável  $0 \in \mathbb{R}^{\frac{n_2}{2}}$  para qualquer número positivo  $T$ .

### Lema 3.1

Se o subsistema (3.37a) tem um snap-back repeller  $v^* \in \mathbb{R}^{n_1}$  para algum número positivo  $T$ , então o sistema total (3.37) é caótico.

### Teorema 3.9

Se o subsistema (3.37a) tem um snap-back repeller para algum número positivo  $T$ , então o sistema (3.34) é caótico para toda  $\|B_2\| < \varepsilon$  e toda  $\|C_2\| < \varepsilon$  para algum número positivo  $\varepsilon$ , onde  $\|\cdot\|$  denota a norma da matriz, induzida da norma euclídeana de um vetor.

### Colorário 3.2

Dos teoremas 3.8 e 3.9, se o subsistema (3.37a) tem dois pontos fixos  $v^*$  e  $w^*$  tais que  $\det DF_1(v^*) \neq 0$  e  $\det DF_1(w^*) \neq 0$ , onde

$$F_1(x_1) = x_1 + A_1^{-1}B_1^{-1}(r - f(C_1x_1)), \quad (3.39)$$

então existe um período de amostragem  $T^*$  tal que para todo  $T > T^*$ , o subsistema (3.37a) é caótico e o sistema (3.34) é também caótico para toda  $\|B_2\| < \varepsilon$  e toda  $\|C_2\| < \varepsilon$  para algum número positivo  $\varepsilon$ .

O teorema 3.9 e o corolário 3.2 permitem, para um sistema que contém uma planta linear que possa ser desacoplada num subsistema estável e um subsistema instável, verificar a existência de um snap-back repeller em um subsistema de dimensão menor e daí deduzir a existência de caos no sistema.

Para um sistema no qual o elemento não linear é descrito por uma função linear por partes, as condições para que o sistema seja caótico são menos estritas.

Dado um sistema de controle discreto no tempo com realimentação de saída, da forma

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.40a)$$

$$y(k) = [C_1 \ C_2] x(k) \quad (3.40b)$$

$$u(k) = r - f(y(k)), \quad (3.40c)$$

onde  $x_1(k) \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x(k) = [x_1(k)^T \ x_2(k)^T]^T$ ,  $y(k) \in \mathbb{R}^m$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^1$ ,

$A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{m \times n_i}$  ( $i=1, 2$ ),  $r \in \mathbb{R}^1$  e  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$  é

uma função linear por partes, considere-se o subsistema de dimensão menor

$$x_1(k+1) = A_{11}x_1(k) + B_1[r - f(C_1x_1(k))] . \quad (3.41)$$

Então, o teorema seguinte dá as condições para que o sistema (3.40) seja caótico.

**Teorema 3.10**

Se (3.41) tem um snap-back repeller e os valores absolutos de todos os autovalores de  $A_{22}$  são menores do que 1, então existe um número positivo  $\varepsilon$  tal que (3.40) é caótico para quaisquer  $A_{12}$  e  $C_2$  tais que  $\|A_{12}\| < \varepsilon$  e  $\|C_2\| < \varepsilon$ .

Para um sistema de controle amostrado, linear por partes, descrito por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.42a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (3.42b)$$

$$u(t) = r - f(y(kT)) , \quad kT \leq t < (k+1)T , \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.42c)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^1$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $r \in \mathbb{R}^1$ ,  $A$ ,  $B$  e  $C$  são matrizes de dimensão apropriada,  $T$  é o período de amostragem, e assumindo que nenhuma das partes reais dos autovalores de  $A$  seja zero, (3.42) pode ser reescrito como

$$x(k+1) = e^{AT} x(k) + A^{-1}(e^{AT} - I) Bu(k) \quad (3.43a)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (3.43b)$$

$$u(k) = r - f(y(k)) , \quad (3.43c)$$

onde  $x(k) := x(kT)$ ,  $y(k) := y(kT)$ , e  $u(k) := u(kT)$ .

Então o lema 3.2 fornece as condições suficientes para que o sistema (3.43) seja caótico.

**Lema 3.2**

Seja a função não linear  $f$ , de (3.42), tal que  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$  é diferenciável por partes, e suponham-se as condições seguintes:

- i) O sistema (3.43) tem dois pontos fixos  $v^*$  e  $w^*$ ,  $v^* \neq w^*$ ,  $DG(v^*)$  e  $DG(w^*)$  existem,  $\det DG(v^*) \neq 0$ , e  $\det DG(w^*) \neq 0$ , onde

$$G(x) = x + A^{-1}B[r-f(Cx)] . \quad (3.44)$$

- ii) A parte real de todos os autovalores de  $A$  é positiva. Então, existe um período de amostragem  $T^* > 0$  tal que, para qualquer  $T > T^*$ , (3.43) tem um snap-back repeller e portanto é caótica.

Sem perda de generalidade, é possível definir

$$x(k) := \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \quad A := \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

$$B := \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C := [C_1 \ C_2],$$

onde  $x_i(k) \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$ , e  $C_i \in \mathbb{R}^{m \times n_i}$  ( $i=1, 2$ ).

Assuma-se que a parte real de todos os autovalores de  $A_1$  é positiva para  $A_1$  e negativa para  $A_2$ , e que  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$  é linear por partes. Então, definindo para  $i = 1, 2$

$$g_i(x_1, x_2; T, C_2) := e^{A_1 T} x_1 + A_1^{-1}(e^{A_1 T} - I_1) B_1 [r - f(C_1 x_1 + C_2 x_2)],$$

onde  $I_1$  é a matriz unitária de dimensão  $n_1 \times n_1$ , a Eq. (3.42) é

reescrita como

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1(k), x_2(k); T, C_2) \\ g_2(x_1(k), x_2(k); T, C_2) \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Com  $C_2 = 0$ , da Eq. (3.45) obtém-se

$$x_1(k+1) := g_1^*(x_1(k); T), \quad (3.46a)$$

$$x_2(k+1) := g_2^*(x_1(k), x_2(k); T). \quad (3.46a)$$

onde  $g_1^*(.)$  e  $g_2^*(.)$  são definidos como

$$g_1^*(x_1; T) := g_1(x_1, x_2; T, 0)$$

$$g_2^*(x_1, x_2; T) := g_2(x_1, x_2; T, 0).$$

Aplicando o Teorema 3.10 à Eq. (3.45), deriva-se o Teorema 3.11, que estabelece as condições para que o sistema seja caótico.

### Teorema 3.11

Se (3.46a) tem um snap-back repeller para  $T = T^*$ , então existe um número positivo  $\varepsilon(T^*)$  tal que o sistema descrito pela Eq. (3.45), com  $T=T^*$ , é caótico para qualquer  $C_2$  tal que  $\|C_2\| < \varepsilon(T^*)$ .

### Corolário 3.3

Seja

$$G_1(x_1) = x_1 + A_1^{-1}B_1 [r - f(C_1x_1)],$$

com (3.46a) tendo dois pontos fixos  $v^*$  e  $w^*$  tais que  $v^* \neq w^*$ . Suponha-se que  $G_1 : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$  é diferenciável em  $v^*$  e  $w^*$ , e que  $DG_1(v^*) \neq 0$ ,  $DG_1(w^*) \neq 0$ .

Então existe um período de amostragem  $T^*$  tal que, para todo  $T > T^+$ , há um número positivo  $\varepsilon(T)$  de forma que (3.45) é caótico para qualquer  $C_2$  que satisfaça a condição  $\|C_2\| < \varepsilon(T)$ .

### 3.4. CONCLUSÕES

Dado um sistema descrito por uma equação discreta, os teoremas apresentados permitem obter condições suficientes para a existência de caos, a partir de um caso especial de órbita homoclínica transversal: o snap-back repeller.

Provar a existência de um snap-back repeller é mais simples do que provar a existência de uma órbita homoclínica transversal, mas em contrapartida as condições suficientes são mais restritivas que no caso geral. Através do método de Melnikov, descrito no capítulo 2, é possível provar a existência de caos em um sistema contínuo que tem autovalores positivos e negativos, enquanto que o teorema de Marotto exige que o sistema discretizado tenha todos os autovalores maiores do que um em norma.

Daí a utilidade dos teoremas anteriores, que permitem, dadas certas condições, provar a existência de um snap-back repeller ou de uma órbita homoclínica transversal, baseando-se na análise de um subsistema de dimensão menor. Se for possível considerar o sistema total como uma perturbação do subsistema de dimensão menor, então a existência de um snap-back repeller no subsistema determina comportamento caótico no sistema todo.

Estas idéias são aplicadas no estudo de sistemas de controle amostrados, para os quais são obtidas as condições suficientes com base na análise dos autovalores do sistema linear (realimentado

através de uma função não linear), e da linearização do sistema nos pontos fixos. (Isto evita analisar os autovalores do sistema discretizado na vizinhança dos pontos fixos). As condições obtidas para sistemas com realimentação de estado são pouco práticas, enquanto que para sistemas com realimentação de saída obtém-se requisitos menos estritos, especialmente no caso em que a função que descreve a realimentação é linear por partes.

Há, então, várias possibilidades para a análise de sistemas discretos:

- a) provar a existência de um snap-back repeller na equação discreta, determinando os valores dos parâmetros para os quais todos os autovalores são maiores do que um em norma na vizinhança de um ponto fixo (Teorema de Marotto);
- b) provar a existência de um snap-back repeller em um subsistema, e provar que o sistema total pode ser considerado como uma perturbação do subsistema;
- c) no caso em que o subsistema é de dimensão um, pode-se provar a existência de caos pelos teoremas de Li e Yorke, de Oono ou de Li et al.;
- d) se o sistema discreto puder ser modelado como um processo linear realimentado por uma função não linear, onde a discretização é obtida por amostragem, pode-se utilizar os teoremas desenvolvidos por Shiraiwa e Kurata.

Observa-se que em todos os teoremas apresentados neste capítulo são obtidas condições suficientes para a existência de caos, isto é, dados determinados valores dos parâmetros é possível garantir que o sistema é caótico, mas a região do espaço de parâmetros para a qual provou-se que existe caos pode não ser a única. A determinação de condições necessárias e suficientes é atualmente objeto de pesquisa.

No caso do sistema PLL-dual, objeto deste estudo, a análise do sistema como recorrência discreta é uma das possibilidades, porque existe nele um sinal discreto, interagindo com a não linearidade do sistema. Isto pode causar comportamento caótico, ainda com um modelo de ordem dois, como é o caso do PLL de segunda ordem, que será analisado com detalhes em capítulos posteriores. Em sistemas não lineares

discretos, em geral, pode existir caos em uma recorrência escalar. No caso de sistemas com modelo contínuo, para que exista caos, é necessário que a dimensão do sistema autônomo seja pelo menos três. Daí que em modelos contínuos de ordem dois seja necessário procurar a origem do comportamento caótico em alguma perturbação, que acrescente mais uma dimensão ao sistema.

As técnicas estudadas até aqui permitem, então, dado um modelo contínuo ou discreto, determinar condições suficientes para que o sistema modelado seja caótico. A questão seguinte é: é possível, dada uma simulação - normalmente mais complexa e próxima à realidade do que o modelo empregado na análise - ou simplesmente observando o sistema real, determinar se este é caótico? Pode-se quantificar o caos? Imagine-se o caso seguinte: da amostragem de uma das variáveis do processo controlado, observa-se que o sistema comporta-se de forma aparentemente aleatória. O sistema depende de um número grande de variáveis (quatro já é um número excessivo para se tentar a análise pelas técnicas vistas até aqui), e nem sequer é possível amostrar todas as variáveis. Então, para eliminar o comportamento "aleatório" é preciso determinar a origem: ruído estocástico ou caos? Se for caos, que parâmetros afetam a "quantidade" de caos observada? O capítulo seguinte estuda o caos no sistema baseando-se no comportamento de um sistema real ou de um modelo.

## CAPÍTULO 4

### TEORIA ERGÓDICA DE CAOS [11]

Considere-se novamente o exemplo da transformação de Hénon, descrita pela Equação 1.1. A Fig. 4.1 ilustra os pontos gerados pela transformação a partir de uma condição inicial arbitrária.

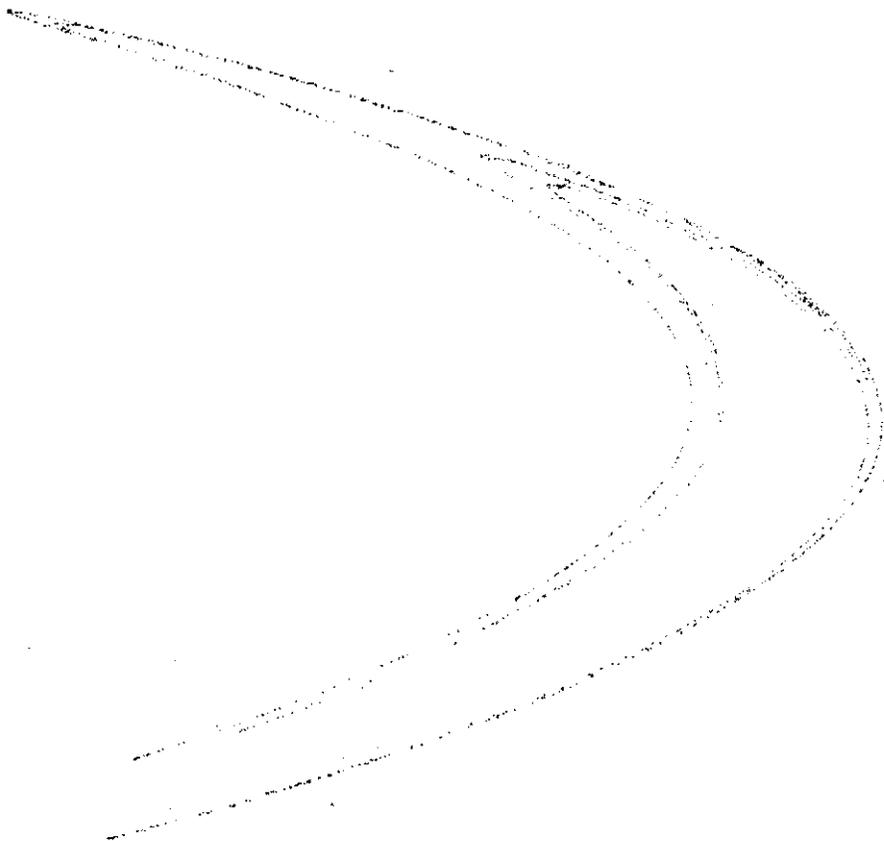


Fig. 4.1 - O atrator de Hénon.

Apesar da complexidade geométrica do atrator e da aparente aleatoriedade da seqüência de pontos  $(x_k, y_k)$  em função do tempo, a figura característica do atrator de Hénon repete-se independentemente da condição inicial escolhida, mostrando uma distribuição de pontos muito particular.

Esta peculiaridade dos atratores gerados por um conjunto de equações determinísticas, sugere que eles podem ser estudados a partir de um número finito de amostras das variáveis de estado do sistema. Desta forma, é possível medir as características relevantes do atrator, tratando os pontos de forma estatística.

O peso dado à medição de uma característica  $\varphi(x)$  em cada região do espaço, e utilizado no cálculo da média no espaço,  $\int \rho(dx) \varphi(x)$ , é uma medida  $\rho(E)$ , onde  $\rho \in \mathbb{R}$  e  $E$  é um subconjunto de pontos de  $\mathbb{R}^m$ .

Se a medida satisfaz a condição

$$\rho [f^{-t}(E)] = \rho(E) \quad , \quad t > 0, \quad (4.1)$$

onde  $E \subset \mathbb{R}^m$  e  $f^{-t}(E)$  é o conjunto obtido pela evolução de cada ponto de  $E$  em tempo reverso, então ela é chamada medida invariante.

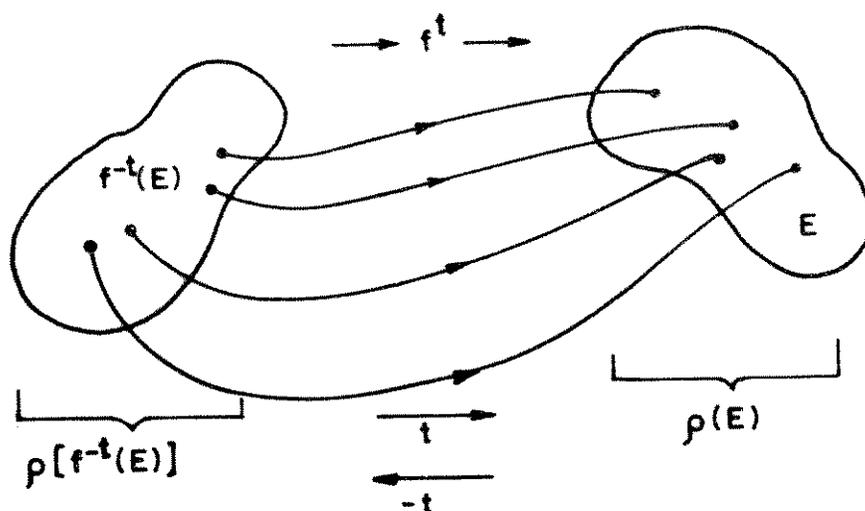


Fig. 4.2 - A medida invariante é a mesma em qualquer instante de tempo.

Se  $\rho$  for uma medida em A, onde A é o conjunto dos pontos do atrator, tal que  $\rho$  descreve a frequência com que as diferentes regiões do atrator são visitadas pela trajetória do sistema, então diz-se que  $\rho$  é uma medida de probabilidade em A.

Seja  $\rho$  uma medida de probabilidade invariante, se  $\rho$  não pode ser representada por

$$\rho = \frac{1}{2} \rho_1 + \frac{1}{2} \rho_2 , \quad (4.2)$$

onde  $\rho_1 \neq \rho_2$ , com  $\rho_1$  e  $\rho_2$  medidas de probabilidade invariante, então diz-se que  $\rho$  é ergódica.

#### Teorema 4.1 (Teorema ergódico)

Se  $\rho$  for ergódica, então para qualquer função contínua  $\varphi$ ,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi [x(t)] dt = \int \rho(dx) \varphi(x) , \quad (4.3)$$

para quase qualquer condição inicial  $x(0)$ .

Então, interpretando a Eq. (4.3), uma média temporal é equivalente a uma média sobre o espaço. Estabelece-se a igualdade (4.3) para "quase qualquer condição inicial" porque a medida  $\rho$  é determinada para os pontos do atrator, e então  $x(0)$  deve pertencer à base de atração do atrator A.

Uma consequência de considerar um intervalo de tempo infinito para a média temporal da Eq. (4.3) é que os transitórios não afetam a média. O estudo da geometria do atrator é simplificado, e pelo teorema ergódico, suas propriedades podem ser obtidas a partir dos pontos gerados por uma única trajetória.

Em termos de um experimento ou de uma simulação, pode-se escolher um T finito suficientemente grande e uma condição inicial qualquer dentro da base de atração do atrator, para gerar um conjunto de pontos que é representativo da geometria do atrator. A simplifica-

ção é enorme, já que evita considerar o conjunto de soluções (com os seus respectivos transitórios) para as diferentes condições iniciais possíveis.

Da teoria ergódica de caos, são muito úteis os conceitos de dimensão e os expoentes de Lyapunov, que são discutidos nas seções seguintes. Um outro ponto de interesse é a reconstrução de um atrator a partir de uma componente do vetor de estado. A reconstrução permite obter a dimensão ou alguns dos expoentes de Lyapunov sem um conhecimento prévio do modelo exato do sistema, a partir de um número finito de amostras de uma das variáveis de estado.

A teoria ergódica permite, então, uma caracterização do sistema a partir da observação da evolução das variáveis. Uma aplicação imediata é na diagnose: dado um comportamento aparentemente aleatório em uma das variáveis de estado, determina-se se o sistema é caótico e quanto.

#### 4.1. DIMENSÃO DOS ATRADORES [13,32]

Uma forma de definir a dimensão de um atrator poderia ser a seguinte: o atrator é de dimensão  $n$  se, na vizinhança de qualquer ponto, localmente for difeomórfico a um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Por exemplo, um ponto de equilíbrio é de dimensão zero, um ciclo limite tem dimensão 1 e um toróide-2 tem dimensão dois (Fig. 4.3).

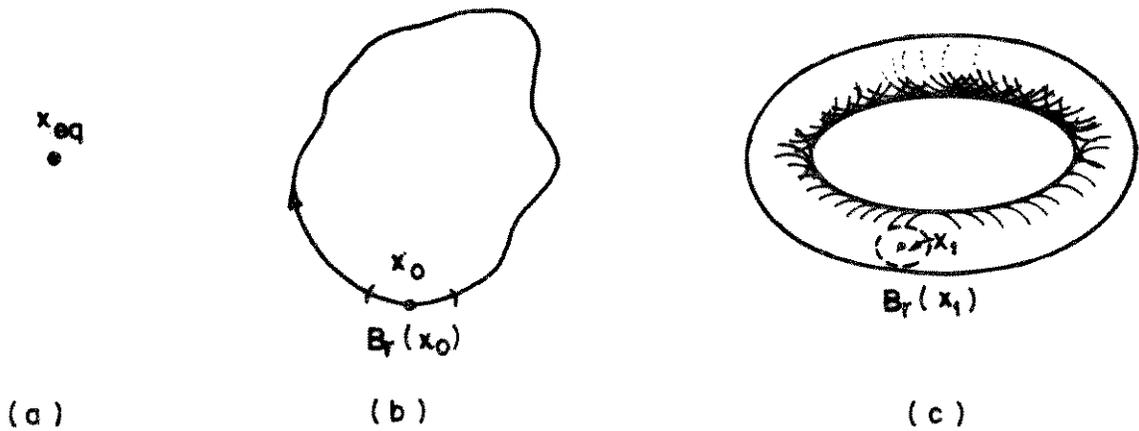


Fig. 4.3 - (a) O ponto de equilíbrio, com dimensão zero. (b) O ciclo limite, na vizinhança  $B_r(x_0)$  é difeomórfico a um segmento de reta (dimensão 1). (c) O toróide-2, na vizinhança  $B_r(x_1)$ , é difeomórfico a um subconjunto compacto, aberto, de  $\mathbb{R}^2$  (dimensão 2).

Esta definição, útil para os atratores gerados por movimentos periódicos, quase periódicos, o que tendem para um ponto de equilíbrio, é inadequada para sistemas que contém atratores do tipo caótico. Os atratores caóticos geralmente possuem uma estrutura que não é simples, que freqüentemente é muito desagregada, e que em geral não é uma superfície.

Existem várias definições de dimensão que permitem caracterizar diferentes propriedades dos atratores caóticos, e em geral de qualquer tipo de atrator. A seguir, definem-se algumas delas: dimensão de capacidade, dimensão de informação, dimensão de correlação, dimensões generalizadas de Renyi e dimensão de Lyapunov.

#### 4.1.1. Dimensão de capacidade

Este conceito é aplicável a conjuntos em espaços métricos, isto é, espaços nos quais é definida uma métrica (distância). Seja o atrator  $A$  um subconjunto limitado do espaço  $\mathbb{R}^D$ , tal que o volume ocupado por  $A$  é  $V_A$ . Cobrindo o volume  $A$  com cubos de volume  $V_i$  e lado  $\epsilon$ , para  $\epsilon \rightarrow 0$ , a soma dos elementos de volume aproxima-se a  $V_A$ .

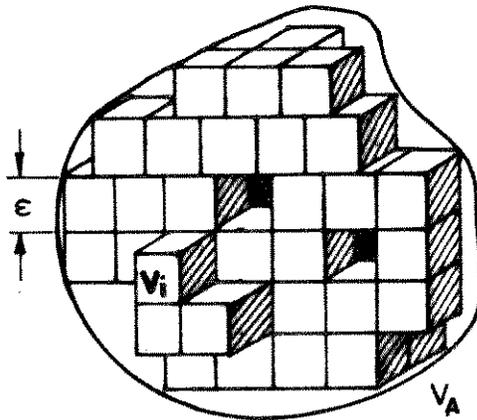


Fig. 4.4 - O atrator  $A$  coberto com elementos de volume de lado  $\epsilon$ .

Seja  $N(\epsilon)$  o número mínimo de cubos de dimensão  $D$  necessários para cobrir o conjunto  $A$ . Se  $D$  for uma dimensão inteira, então  $N(\epsilon)$  é inversamente proporcional a  $\epsilon^D$  para  $\epsilon$  pequeno. Da relação

$$N(\epsilon) = \frac{V_A}{V_i} \quad , \quad (4.4)$$

com  $V_1 = \varepsilon^D$ ,

$$N(\varepsilon) = \frac{V_A}{\varepsilon^D}; \quad (4.5)$$

e

$$\ln N(\varepsilon) = \ln V_A + \ln(1/\varepsilon)^D. \quad (4.6)$$

Com  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln N(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(1/\varepsilon)^D, \quad (4.7)$$

donde

$$D_{\text{cap}} := D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}. \quad (4.8)$$

A expressão (4.8) corresponde à definição de dimensão de capacidade, originalmente estabelecida por A.N. Kolmogorov [34]. Com a definição acima, as superfícies de dimensão  $p$ , com  $p$  inteiro, têm dimensão  $D_{\text{cap}} = p$ . A definição, quando aplicada em atratores que não são superfícies, dá como resultado uma dimensão de capacidade que usualmente é não inteira. A dimensão de capacidade é um conceito métrico somente, e não descreve o comportamento do sistema dinâmico no tempo. As definições seguintes consideram também a evolução do sistema.

#### 4.1.2. Dimensão de informação

A dimensão de informação, originalmente definida por J. Balatoni e A. Renyi [35], é uma generalização da dimensão de capacidade, que considera a probabilidade relativa de que uma trajetória visite cada um dos cubos usados para cobrir o volume  $V_A$ .

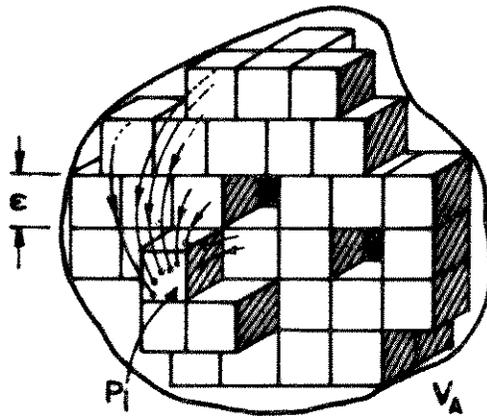


Fig. 4.5 -  $P_i$  é a freqüência relativa com que uma trajetória entra no  $i$ -ésimo elemento de volume.

A dimensão de informação é definida por

$$D_I := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{S(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}, \quad (4.9)$$

com

$$S(\epsilon) := \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} P_i \ln(1/P_i), \quad (4.10)$$

onde  $P_i$  é a freqüência relativa com que uma trajetória entra no  $i$ -ésimo elemento de volume,  $S(\epsilon)$  é a entropia e  $N(\epsilon)$  representa o número de elementos de volume<sup>5</sup>.

A entropia é uma medida da quantidade de informação necessária para determinar o estado do sistema; no caso da Fig. 4.5, representa a quantidade de informação necessária para determinar em

5 \_\_\_\_\_

O somatório considera somente os índices  $i$  para os quais  $P_i \neq 0$ .

qual dos cubos está a trajetória num determinado momento.

Considere-se, por exemplo, um registro com dois estados possíveis: 0 e 1, onde os estados são eqüiprováveis, isto é,  $p(0)=p(1)=1/2$ . Definindo  $S := \sum_{i=1}^N P_i \log_2(1/P_i)$ , (definição possível porque a base do logaritmo não altera a razão  $D_I$  na Eq. (4.9)), então

$$S = \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{2} \log_2 2 = 1 ;$$

indicando que é necessário 1 bit de informação para determinar o estado do registro. Se o registro estiver com conexão à terra, então  $p(0) = 1$ ,  $p(1) = 0$  e

$$S = 1 \cdot \log_2 1 + 0 \cdot \log_2 0 = 0 ,$$

indicando que o estado está pré-determinado e que para conhecê-lo não é preciso nenhum bit de informação.

No caso geral, com a definição (4.10), é possível calcular o valor máximo para a entropia  $S(\epsilon)$  em um sistema com  $N(\epsilon)$  estados possíveis<sup>6</sup>. Formando o Lagrangiano  $\mathcal{L}(P_i, \lambda)$ , temos que com a

restrição  $\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} P_i = 1$  ,

$$\mathcal{L}(P_i, \lambda) = - \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} P_i \ln P_i + \lambda \left( \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} P_i - 1 \right) , \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_i}(P_i, \lambda) = \lambda - (1 + \ln P_i) , \quad (4.12a)$$

6

Assume-se  $P_i \in (0,1]$  e portanto nesse intervalo  $\sum_i P_i \ln P_i$  é de classe  $C^1$ .

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} (P_i, \lambda) = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} P_i - 1. \quad (4.12b)$$

Igualando a zero  $\partial \mathcal{L} / \partial P_i^*$  e  $\partial \mathcal{L} / \partial \lambda$ ,

$$\lambda - (1 + \ln P_i^*) = 0, \quad (4.13a)$$

$$\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} P_i^* = 1. \quad (4.13b)$$

De (4.13a) o valor de  $\lambda$  que extremaliza  $S(\epsilon)$  é

$$\lambda^* = 1 + \ln P_1^* = 1 + \ln P_2^* = \dots = 1 + \ln P_{N(\epsilon)}^*, \quad (4.14)$$

donde

$$P_1^* = P_2^* = \dots = P_{N(\epsilon)}^*. \quad (4.15)$$

Com a restrição (4.13b), obtemos

$$P_1^* = P_2^* = \dots = P_{N(\epsilon)}^* = 1/N(\epsilon), \quad (4.16)$$

ou

$$P_i^* = 1/N(\epsilon), \quad (4.17)$$

indicando que sempre que todas as  $P_i$  são iguais, a entropia é máxima (como é verificado em (4.21)). O valor que extremaliza a entropia é obtido substituindo (4.17) em (4.10),

$$S^*(\epsilon) = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \frac{1}{N(\epsilon)} \ln(N(\epsilon)), \quad (4.18)$$

e portanto,

$$S^*(\epsilon) = \ln(N(\epsilon)). \quad (4.19)$$

Para a matriz Hessiana obtemos, de (4.12a), com  $P =$  vetor formado pelos elementos  $P_i$ ,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial P^2} = \begin{bmatrix} -1/P_1 & & & 0 \\ & -1/P_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1/P_{N(\varepsilon)} \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial P^2} \right|_{P^*} = - N(\varepsilon) I_{N(\varepsilon)}, \quad (4.21)$$

que é negativa definida, indicando que  $S^*(\varepsilon)$  é o valor máximo e que a condição (4.17) é necessária e suficiente<sup>7</sup>. Substituindo o valor de  $S^*(\varepsilon)$  (Eq. 4.14) em (4.9),

$$\text{Max}_P D_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln (1/\varepsilon)}, \quad (4.22)$$

e portanto, com a definição (4.8),

$$\text{Max}_P D_I = D_{\text{cap}}, \quad (4.23)$$

ou

$$D_I \leq D_{\text{cap}}, \quad (4.24)$$

sendo válida a igualdade quando todos os elementos de volume têm a mesma frequência relativa.

Interpretando estes resultados, temos que a entropia é máxima quando todos os elementos de volume têm a mesma probabilidade de serem visitados pela trajetória. Intuitivamente, então, ela é uma

7 \_\_\_\_\_

Com  $f = \sum_i P_i \ln P_i$ ,  $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial P^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial P^2}$ ; portanto  $f$  é côncava e o máximo é

global sobre o intervalo (0,1).

medida da "desordem", que é máxima para uma distribuição eqüiprovável (a semelhança da noção termodinâmica de entropia).

#### 4.1.3. Dimensão de correlação

Considere-se agora a probabilidade de que dois pontos quaisquer  $x_1, x_j$  fiquem dentro de um mesmo elemento de volume do atrator.

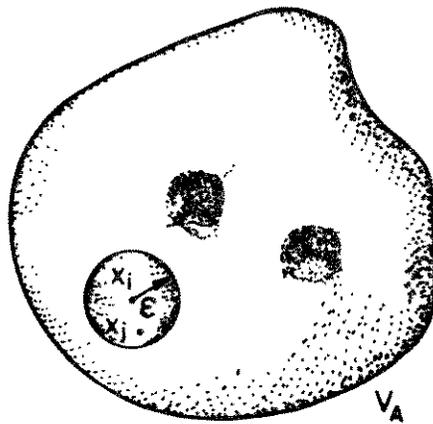


Fig. 4.6 - O elemento de volume escolhido é  $B_\epsilon(x_1)$ .

A probabilidade de que dois pontos quaisquer  $x_1, x_j$  estejam contidos dentro de um elemento de volume arbitrário é a probabilidade conjunta  $P(x_1, x_j)$ . Considerando  $x_1 \neq x_j$ ,  $P(x_1, x_j)$  é válida como aproximação. Como  $P(x_1)$  independe de  $P(x_j)$  e vice-versa,  $P(x_1, x_j) = P(x_1)P(x_j)$ , onde  $P(x_1)$  é a probabilidade de que  $x_1$  esteja contido no elemento arbitrário e  $P(x_j)$  é a probabilidade de  $x_j$  esteja contido no elemento.

Seja  $B_\epsilon(x_1)$  o elemento de volume arbitrário. Então a probabilidade de que  $x_1, x_j$  estejam contidos em  $B_\epsilon(x_1)$  é  $P(x_1)P(x_j)$ . Como  $P(x_1) = P(x_j) := P_1$ , a probabilidade  $P(x_1)P(x_j) = P_1^2$ . Ou, expresso de outra forma,

$$P(x_1, x_j \in B_\epsilon(x_1)) = P_1^2. \quad (4.25)$$

A probabilidade  $C(\epsilon)$  de que dois pontos quaisquer  $x_1, x_j$  estejam em qualquer uma das esferas  $B_\epsilon(x_i)$  usadas para preencher o volume  $V_A$  é (considerando agora todas as esferas),

$$C(\epsilon) = P(x_1, x_j \in B_\epsilon(x_1)) + P(x_1, x_j \in B_\epsilon(x_2)) + \dots + P(x_1, x_j \in B_\epsilon(x_{N(\epsilon)})), \quad (4.26)$$

$$C(\epsilon) = P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_{N(\epsilon)}^2, \quad (4.27)$$

$$C(\epsilon) = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} P_i^2, \quad (4.28)$$

onde é possível também interpretar  $C(\epsilon)$  como a probabilidade de que dois pontos quaisquer  $x_1, x_j$  estejam a uma distância  $\|x_1 - x_j\| < \epsilon$ .

$C(\epsilon)$  é a correlação, e uma forma alternativa de defini-la é

$$C(\epsilon) := \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \left( \frac{n_i}{M} \right)^2, \quad (4.29)$$

onde  $M$  é o número total de pontos,  $n_i/M$  é a frequência relativa (com

$\lim_{M \rightarrow \infty} (n_i/M) = P_i$ ) e  $\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} n_i^2$  é o número de pares de pontos  $x_1, x_j$  tais que  $\|x_1 - x_j\| < \epsilon$ .

Então

$$C(\epsilon) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M^2} \left\{ \text{número de pares de pontos } x_1, x_j \text{ tais que } \|x_1 - x_j\| < \epsilon \right\}. \quad (4.30)$$

Mais formalmente,

$$C(\varepsilon) := \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{M^2} \sum_{i,j} e[\varepsilon - \|x_i - x_j\|], \quad (4.31)$$

onde  $e(u) = (1 + \text{sinal}(u))/2$  é a função degrau unitário. Esta é a definição proposta por P. Grassberger e I. Procaccia [36], que é útil para calcular  $C(\varepsilon)$  com um número finito de pontos. A expressão (4.31) é equivalente à Eq. (4.30), como ilustra-se na Fig. 4.7.

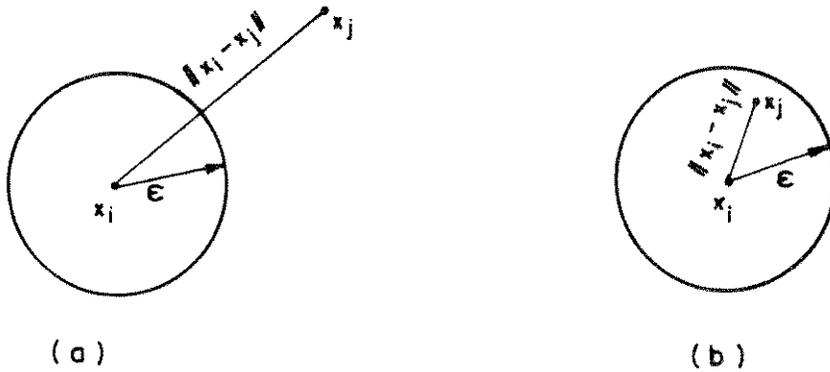


Fig. 4.7 - (a) Se  $x_j$  está fora da esfera  $B_\varepsilon(x_i)$ ,  $\varepsilon - \|x_i - x_j\| < 0$ , e  $e[\varepsilon - \|x_i - x_j\|] = 0$ ; portanto o par  $(x_i, x_j)$  não é contabilizado na soma. (b) Se  $x_j$  está dentro da esfera  $B_\varepsilon(x_i)$ , isto é, se  $\|x_i - x_j\| < \varepsilon$ , então  $\varepsilon - \|x_i - x_j\| > 0$  e  $e[\varepsilon - \|x_i - x_j\|] = 1$ , donde o par  $(x_i, x_j)$  é contabilizado na soma dos pontos tais que  $\|x_i - x_j\| < \varepsilon$ .

Com qualquer uma das expressões (4.28), (4.29) ou (4.31) para  $C(\varepsilon)$ , define-se a dimensão de correlação  $D_c$  como

$$D_c := \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} . \quad (4.32)$$

A dimensão de correlação pode ser calculada diretamente a partir da definição, utilizando pontos obtidos experimentalmente ou gerados por uma simulação do sistema.

É possível provar que  $D_c \leq D_I$ , a partir das definições (4.9), (4.10), (4.28) e (4.32); isto é, que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^2}{\ln \varepsilon} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i \ln(1/P_i)}{\ln(1/\varepsilon)} , \quad (4.33)$$

ou

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^2}{\ln \varepsilon} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i \ln P_i}{\ln \varepsilon} . \quad (4.34)$$

A desigualdade (4.34) é satisfeita se o valor máximo do funcional

$$f(P_i) = \ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^2 - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i \ln P_i \quad (4.35)$$

com a restrição

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i = 1 \quad (4.36)$$

for igual a zero, o qual prova-se a seguir.

As condições necessárias para o máximo obtém-se com o Lagrangeano

$$\partial(P_1, \lambda) = \ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_1^2 - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_1 \ln P_1 + \lambda \left( \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_1 - 1 \right), \quad (4.37)$$

onde

$$\frac{\partial \mathcal{L}(P_1^*, \lambda^*)}{\partial P_1} = \frac{2 P_1^*}{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_1^*} - \ln P_1^* - 1 + \lambda^* = 0 \quad (4.38)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}(P_1^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = 0, \quad (4.39)$$

equivalente à restrição (4.36).

Com  $i = 1, \dots, N(\varepsilon)$  em (4.38), obtemos  $P_1 = P_2 = \dots = P_{N(\varepsilon)}$ , donde, com (4.36),

$$P_1^* = P_2^* = \dots = P_{N(\varepsilon)}^* = 1/N(\varepsilon), \quad (4.40)$$

ou

$$P_1^* = 1/N(\varepsilon), \quad (4.41)$$

isto é, o valor de  $P_1$  que extremaliza  $f(P_1)$  é  $P_1^* = 1/N(\varepsilon)$ .

Avaliando o funcional  $f(P_1)$  em  $P_1^*$ ,

$$f(P_1^*) = \ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \frac{1}{N(\varepsilon)^2} - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \frac{1}{N(\varepsilon)} \ln \left( \frac{1}{N(\varepsilon)} \right), \quad (4.42)$$

donde

$$f(P_1^*) = \ln \frac{1}{N(\varepsilon)} - \ln \frac{1}{N(\varepsilon)} = 0. \quad (4.43)$$

A matriz Hessiana de  $\partial(P_1, \lambda)$ , com  $P =$  vetor formado pelos elementos  $P_1$ , é

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial P^2} = \text{diag} \left( -\frac{2}{P_1^2} - \frac{1}{P_1}, -\frac{2}{P_2^2} - \frac{1}{P_2}, \dots, -\frac{2}{P_{N(\epsilon)}^2} - \frac{1}{P_{N(\epsilon)}} \right) \quad (4.44)$$

e com  $P_1^* = 1/N(\epsilon)$

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial P^2} \right|_{P=P^*} = \text{diag}(-2N(\epsilon)^2 - N(\epsilon), -2N(\epsilon)^2 - N(\epsilon), \dots, -2N(\epsilon)^2 - N(\epsilon)) \quad (4.45)$$

ou

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial P^2} \right|_{P=P^*} = -(2N(\epsilon)^2 + N(\epsilon)) I_{N(\epsilon)}, \quad (4.46)$$

que é uma matriz negativa definida de dimensão  $N(\epsilon)$ .

Então  $f(P_1^*) = 0$  é o valor máximo para o funcional (4.42) e portanto a desigualdade (4.33) com a restrição (4.36) é válida<sup>8</sup>, donde

$$D_c \leq D_I. \quad (4.46)$$

Com a desigualdade (4.24), concluímos que

$$D_c \leq D_I \leq D_{\text{cap}}. \quad (4.47)$$

#### 4.1.4. Dimensões de Renyi

Os conceitos de dimensão de capacidade, dimensão de informação e dimensão de correlação podem ser generalizados. A. Renyi

<sup>8</sup> \_\_\_\_\_

Neste caso também são válidas as observações 5, 6 e 7 da Seção 4.1.2, isto é,  $P_i \in (0,1)$ ,  $\sum_i P_i \ln P_i \in C^1$  e  $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial P^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial P^2}$ ; portanto, o máximo é global no intervalo  $(0,1)$ .

[37] definiu originalmente as **dimensões generalizadas**  $D(q)$  como

$$D(q) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} P_i^q}{\ln \epsilon}, \quad q \in \mathbb{R}, q \neq 1, \quad (4.48a)$$

e

$$D(q) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} P_i \ln P_i}{\ln \epsilon}, \quad q = 1; \quad (4.48b)$$

onde

$$P_i = \int_{\substack{\text{i-ésimo} \\ \text{elemento} \\ \text{de volume}}} d\rho(x), \quad (4.49)$$

e  $\rho$  é uma medida de probabilidade em um espaço de fase  $d$ -dimensional, particionado em elementos de volume  $\epsilon^d$ . O somatório considera todos os índices  $i$  para os quais  $P_i \neq 0$ .

Então, com a definição (4.48), para  $q = 0$  obtemos

$$D(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon} = D_{\text{cap}}, \quad (4.50)$$

ou seja,  $D(0)$  é a dimensão de capacidade.

Com  $q = 1$ ,

$$D(1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} P_i \ln P_i}{\ln \epsilon} = D_I, \quad (4.51)$$

e portanto  $D(1)$  é a dimensão de informação.

Finalmente, para  $q = 2$ ,

$$D(2) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} P_i^2}{\ln \epsilon} = D_c, \quad (4.52)$$

isto é,  $D(2)$  corresponde à dimensão de correlação.

Analogamente à expressão (4.47), temos que para as dimensões generalizadas de Renyi

$$D(q') \leq D(q), \quad q' > q, \quad (4.53)$$

desigualdade que pode ser considerada como uma limitante superior de  $D(q')$  em termos de  $D(q)$ . Para a limitante inferior,

$$D(q') \geq \frac{q' - 1}{q - 1} D(q), \quad (4.54)$$

$q' > q > 1$  ou  $0 > q' > q$ .

A prova das desigualdades (4.53) e (4.54) é dada por C. Beck em [38].

As dimensões limites  $D(+\infty)$  e  $D(-\infty)$  descrevem o comportamento a escala das regiões do atrator onde a medida é mais concentrada ( $D(+\infty)$ ) ou mais rarefeita ( $D(-\infty)$ ). Uma propriedade importante de  $D(q)$  é que usualmente ela é uma função suave [38].

#### 4.1.5. Dimensão de Lyapunov

A dimensão de Lyapunov, baseada nos expoentes de Lyapunov, foi definida originalmente por J.L. Kaplan e J.A. Yorke [39].

Sejam  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  os expoentes de Lyapunov de um sistema dinâmico, e seja  $j$  o inteiro maior tal que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_j \geq 0$ . Então a dimensão de Lyapunov  $D_L$  é definida por

$$D_L := j + \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|}. \quad (4.55)$$

A relação da dimensão de Lyapunov com as outras dimensões definidas anteriormente não é clara ainda, e atualmente é objeto de pesquisa. T.S. Parker e L.O. Chua [13] apresentam a seguinte interpretação da definição acima.

Dado um hipercubo C de lado  $\epsilon$ , e considerando as mudanças de coordenadas apropriadas, o  $i$ -ésimo lado do cubo C, evolui, em média, como  $\epsilon e^{\lambda_i t}$ . Considere-se também, um cubo de referência R com todos os seus lados se contraíndo à razão  $\epsilon e^{\lambda_{k+1} t}$ , onde  $k$  é escolhido de forma tal que  $\lambda_{k+1} < 0$ .

O número de cubos R, necessários para preencher o cubo C, no tempo  $t$ , é dado por

$$N(t) := \frac{\epsilon e^{\lambda_1 t}}{\epsilon e^{\lambda_{k+1} t}} \cdots \frac{\epsilon e^{\lambda_k t}}{\epsilon e^{\lambda_{k+1} t}}, \quad (4.56a)$$

$$= e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_k - k \lambda_{k+1})t} \quad (4.56b)$$

onde para  $t \rightarrow \infty$  os lados de C que crescem com taxas  $\lambda_{k+2}, \dots, \lambda_n$ , não precisam ser considerados ( $e^{\lambda_{k+2} t} / e^{\lambda_{k+1} t}, \dots, \rightarrow 0$ ).

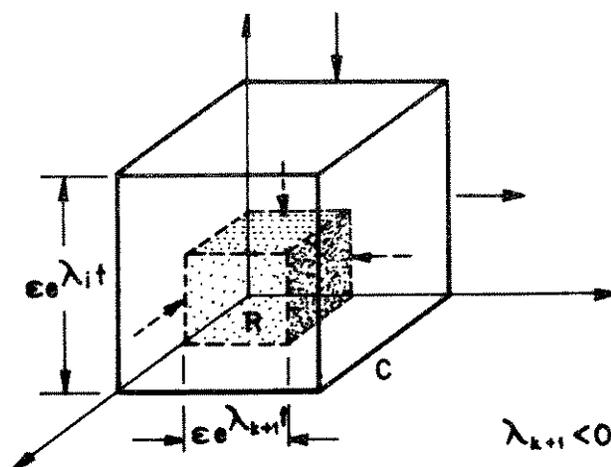


Fig. 4.8 - Evolução dos hipercubos R e C no espaço de fase.

O valor aproximado da dimensão de capacidade é

$$D_{\text{cap}}(k) = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln N(t)}{\ln(\varepsilon e^{\lambda_{k+1} t})} \quad (4.57a)$$

$$= k - \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}{\lambda_{k+1}} \quad (4.57b)$$

É possível provar que com  $k = j$  obtém-se o mínimo valor de  $D_c(k)$  [13], e portanto define-se

$$D_L := D_{\text{cap}}(j) = j - \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_j}{\lambda_{j+1}} \quad (4.58a)$$

$$= j - \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|} \quad (4.58b)$$

#### 4.1.6. Comportamento das dimensões de atratores caóticos

Se o conjunto limite atrator for uma superfície, as dimensões de capacidade, de informação, de correlação e de Lyapunov são inteiras. Como os atratores caóticos normalmente não são superfícies, as dimensões adotam valores que tipicamente são não inteiros [13, 32].

O valor da dimensão pode ser, então, utilizado para distinguir um comportamento quaseperiódico ou subharmônico, de um comportamento caótico. Isto permite estabelecer comparações no comportamento de um mesmo sistema com diferentes valores dos parâmetros.

Uma outra aplicação da dimensão é a estimação do número de variáveis de estado de um sistema. A dimensão é uma limitante inferior do número de variáveis indispensável para modelar a dinâmica [32].

A tabela 4.1 [13] indica o valor da dimensão para os diferentes tipos de comportamento em regime permanente.

Regime Permanente	Conjunto Atrator	Dimensão
Ponto de equilíbrio	ponto	0
Periódico ou subharmônico	curva fechada	1
Período 2	toróide	2
Período K	toróide-K	K
Caótico	tipicamente não é uma superfície	tipicamente não inteira

Tabela 4.1. - Dimensão para diferentes tipos de atrator.

#### 4.2. RECONSTRUÇÃO DO ESPAÇO DE FASE A PARTIR DE UMA SÉRIE DE AMOSTRAS DE UMA COMPONENTE DO VETOR DE ESTADO [13]

É possível reconstruir um atrator caótico a partir de uma das variáveis de estado, se as variáveis estiverem suficientemente acopladas, se o período de amostragem for adequadamente selecionado e se a dimensão do sistema for conhecida ou apropriadamente estimada. A dimensão da reconstrução é igual à dimensão do atrator original [40], e os expoentes de Lyapunov também são idênticos aos expoentes do atrator original [41].

Isto permite caracterizar o atrator em sistemas onde algumas das componentes do vetor de estado não são conhecidas, em sistemas de ordem infinita ou a partir de dados experimentais em sistemas cuja

dinâmica não é bem conhecida.

Seja  $A$  um atrator contido em uma superfície compacta  $M$ , de dimensão  $N$ .  $F$ , a função de reconstrução, é definida por  $F: M \rightarrow \mathbb{R}^{2N+1}$  como

$$F(x) := [\phi_0^j(x) \quad \phi_\tau^j(x) \quad \dots \quad \phi_{2N\tau}^j(x)]', \quad (4.59)$$

onde  $\phi_t^j(x)$  é a  $j$ -ésima componente da trajetória (com  $j$  arbitrário) e  $\tau > 0$  é o período da amostragem, também arbitrário.

Então,  $F$  mapea difeomorficamente a superfície  $M$  em alguma superfície de dimensão  $N$  contida em  $\mathbb{R}^{2N+1}$ . Dada a série de tempo  $\{y_k\}_{k=0}^K$ , onde  $y_k := \phi_{k\tau}^j$  é a  $j$ -ésima componente da trajetória no atrator  $A$ , a seqüência de pontos

$$\begin{aligned} & [y_0 \quad y_1 \quad \dots \quad y_{2N}]', \\ & [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_{2N+1}]', \\ & \quad \vdots \\ & [y_i \quad y_{i+1} \quad \dots \quad y_{i+2N}]', \\ & \quad \vdots \\ & [y_{K-2N} \quad y_{K-2N+1} \quad \dots \quad y_K]' \end{aligned} \quad (4.60)$$

pertence a uma cópia difeomórfica de  $A$ .

Seja, por exemplo,  $A$  um atrator num espaço de fase de dimensão 2, isto é,  $N = 2$ . Então  $2N + 1 = 5$  e o espaço reconstruído tem dimensão 5. A Fig. 4.9 ilustra a forma em que são gerados os pontos do atrator reconstruído  $A'$ .

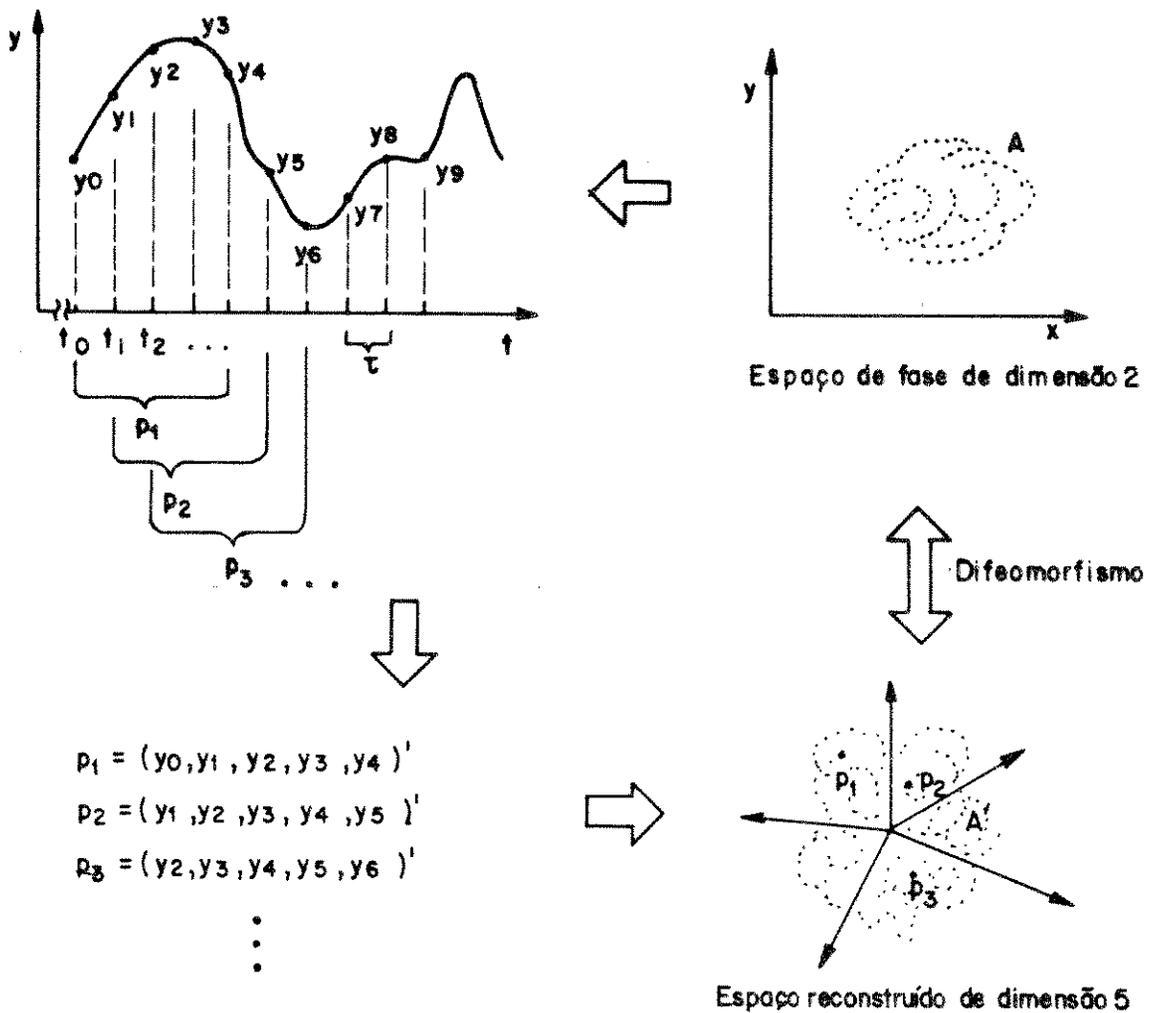


Fig. 4.9 - Reconstrução de um atrator a partir de um espaço de fase de dimensão 2.  $A$  e  $A'$  possuem dimensões e expoentes de Lyapunov iguais.

Para a implementação, é importante determinar a dimensão do espaço reconstruído e o período de amostragem  $\tau$ .

Uma versão modificada do teorema de Whitney [40] garante que  $2N + 1$ , a dimensão do vetor (4.59), é suficiente para que  $F$  seja um mapeamento difeomórfico. Entretanto, é possível obter uma boa reconstrução com uma dimensão menor. Por exemplo, A. Wolf [41] obteve uma estimativa confiável dos expoentes de Lyapunov do atrator de Lorenz (definido por 3 variáveis de estado) com uma reconstrução

de dimensão 3, bem menor do que 7, a dimensão requerida para que  $F$  seja um difeomorfismo.

Para a eleição de  $\tau$ , um critério recomendado por A. Wolf [41] é que  $\tau$  não seja tão pequeno que o atrator reconstruído esteja próximo à diagonal  $x = y = z \dots$  do espaço da reconstrução ( $\phi_{k\tau}^j(x) \cong \phi_{(k+1)\tau}^j$ ), nem tão grande que  $m\tau$  ( $m =$  dimensão do espaço reconstruído) seja muito maior que o "período" da trajetória. Recomenda-se verificar que o valor da característica estimada (dimensão, expoentes de Lyapunov) não mude substancialmente ao perturbar o valor de  $\tau$ .

### 4.3. EXPOENTES DE LYAPUNOV

O conceito dos expoentes de Lyapunov como uma medida da sensibilidade às condições iniciais foi introduzido na seção 1.5.3. Definimos caos como sensibilidade às condições iniciais, e portanto a existência de um atrator caótico pode ser estabelecida se o maior expoente de Lyapunov for positivo. Nesta seção, analisaremos o significado da definição, ilustrado com alguns exemplos.

Como a sensibilidade às condições iniciais define o comportamento caótico, importa analisar a separação, no tempo, de dois pontos iniciais infinitamente próximos. Esta idéia será ilustrada através do exemplo seguinte [11].

Seja a equação escalar discreta

$$x(n + 1) = f(x(n)), \quad x(i) \in \mathbb{R}, \quad (4.61)$$

onde  $n$  é o tempo discreto.

A separação de dois pontos iniciais  $x(0)$  e  $x(0)'$  após um tempo  $N$  é

$$x(N) - x(N') = f^N(x(0)) - f^N(x(0)'), \quad (4.62)$$

como ilustra a Fig. 4.10.

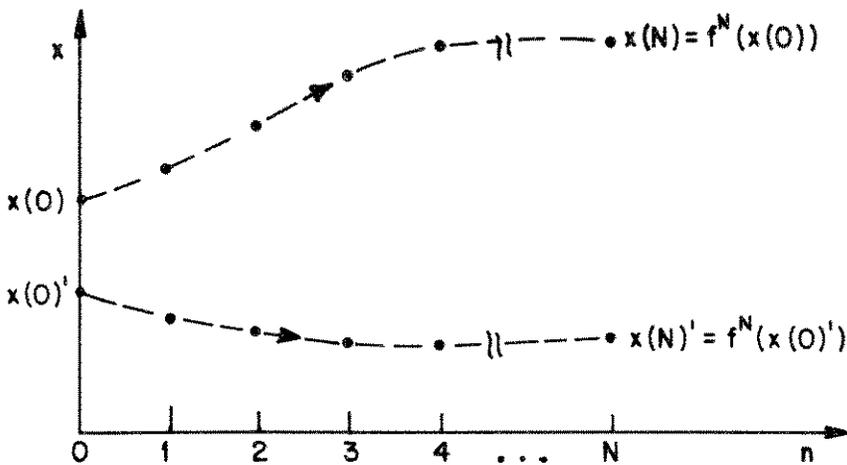


Fig. 4.10 - Evolução de dois pontos inicialmente próximos.

Então (Fig. 4.11)

$$\frac{f^N(x(0)') - f^N(x(0))}{x(0)' - x(0)} \cong \frac{d}{dx}(f^N)(x(0)). \quad (4.63)$$

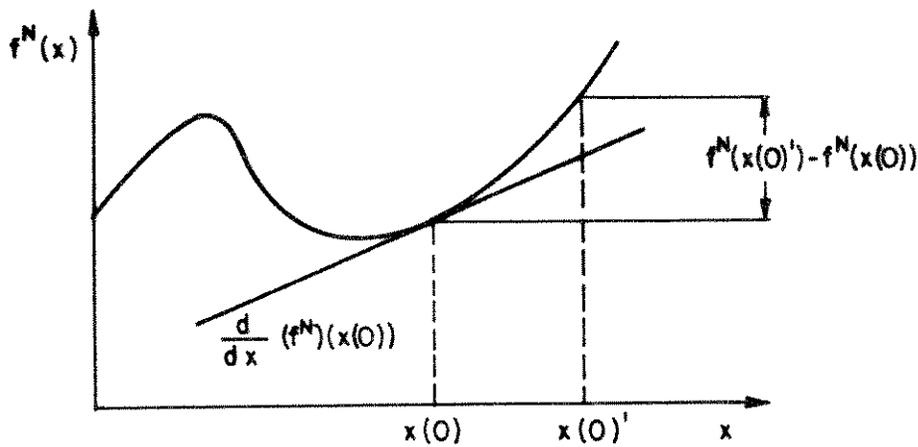


Fig. 4.11 - Aproximação para  $f^N(x(0)') - f^N(x(0))$ .

Donde

$$f^N(x(0)) - f^N(x(0)') \cong \left( \frac{d}{dx} (f^N)(x(0)) \right) (x(0) - x(0)'), \quad (4.64)$$

e substituindo em (4.62),

$$x(N) - x(N)' \cong \left( \frac{d}{dx} (f^N)(x(0)) \right) (x(0) - x(0)'), \quad (4.65)$$

onde  $f^N(x) = f(f(\dots f(x) \dots))$ ,  $N$  vezes.

Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f^N)(x) &= \frac{d}{dx} f(f(\dots f(x) \dots)) \\ &= \left. \frac{df}{dx} \right|_{f^{N-1}(x)} \cdot \left. \frac{df}{dx} \right|_{f^{N-2}(x)} \cdot \dots \cdot \left. \frac{df}{dx} \right|_x. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Para  $x = x(0)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f^N)(x(0)) &= \left. \frac{d}{dx} f \right|_{f^{N-1}(x(0))} \cdot \left. \frac{d}{dx} f \right|_{f^{N-2}(x(0))} \cdot \dots \cdot \left. \frac{d}{dx} f \right|_{x(0)} \\ &= \left. \frac{d}{dx} f \right|_{x(N-1)} \cdot \left. \frac{d}{dx} f \right|_{x(N-2)} \cdot \dots \cdot \left. \frac{d}{dx} f \right|_{x(0)}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

e portanto

$$\frac{d}{dx}(f^N)(x(0)) = \frac{d}{dx} f(x(N-1)) \cdot \frac{d}{dx} f(x(N-2)) \cdot \dots \cdot \frac{d}{dx} f(x(0)). \quad (4.68)$$

Assumindo que todos os fatores na expressão (4.68) são de tamanho comparável, então é possível supor que  $df^N/dx$  cresce (ou decai) exponencialmente com  $N$ . Isto é válido também para  $x(N) - x(N)'$ , como infere-se de (4.65).

Se  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $\left(\frac{d}{dx}\right)f$  é substituída pela matriz Jacobiana  $D_x f$ , onde os elementos da matriz  $D_x f$  são definidos por  $d_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ .

A razão média de crescimento pode ser definida como

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \|(D_{x(0)} f^N) \delta x(0)\|, \quad (4.69)$$

onde  $D_{x(0)} f^N$  é o Jacobiano de  $f^N$  com relação a  $x$ , avaliado em  $x(0)$ , e  $\delta x(0)$  é o vetor que define a separação inicial. Conseqüentemente, o valor da expansão média depende da direção da perturbação inicial  $\delta x(0)$ .

No caso contínuo no tempo, similarmente é possível definir

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|(D_{x(0)} f^t) \delta x(0)\| \quad (4.70)$$

onde  $D_{x(0)} f^t$  é o Jacobiano de  $f^t$  com relação a  $x$ , avaliado no instante inicial e  $\delta x(0)$  é o vetor que define a separação inicial.

$D_{x(0)} f^N$  em (4.69) e  $D_{x(0)} f^t$  em (4.70) correspondem à matriz de transição de estado  $\Phi_t(x(0))$ . Se  $\delta x(0)$  é um autovetor normalizado  $\delta x(0)_i$  da matriz  $\Phi_t(x(0))$ , então de (4.70)

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi_t(x(0)) \delta x(0)_i\| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|m_i(t) \delta x(0)_i\|, \end{aligned} \quad (4.71)$$

onde  $m_i(t)$  são os autovalores de  $\Phi_t(x(0))$ . Logo

$$\lambda_i := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |m_i(t)|, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.72)$$

sendo  $\{m_i(t)\}_{i=1}^n$  os autovalores da matriz de transição de estado  $\Phi_t(x(0))$ . Esta é a definição (1.28) da seção 1.5.3, onde por convenção

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p, \quad (4.73)$$

onde  $p =$  dimensão do espaço de fase.

Em geral, os expoentes dependem da eleição da condição inicial. Se eles forem os mesmos para qualquer condição inicial na base do atrator, eles são chamados de **absolutos** (esta propriedade não é comum, mas existem alguns casos em que os expoentes tem sido calculados teoricamente e são absolutos [39]).

É possível assumir que quase qualquer condição inicial na base de um atrator tem os mesmos expoentes de Lyapunov. Esta conjectura é apoiada por simulações numéricas [32]. Então os expoentes de Lyapunov podem ser considerados uma propriedade do atrator analisado.

Um exemplo de A. Wolf et al. [41] ilustra a forma em que

um vetor  $\delta x(0)$  evolui, dependendo da orientação do  $\delta x(0)$  escolhido. O exemplo corresponde ao conhecido modelo de Lorenz

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(r - z) - y \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \tag{4.74}$$

e mostra a evolução temporal da separação em três direções: uma expansiva ( $\lambda_1 > 0$ ), outra nem expansiva nem contrativa ( $\lambda_2 = 0$ ) e outra contrativa ( $\lambda_3 < 0$ ). A Fig. 4.12 indica como evoluem  $\delta x(0)_1$ ,  $\delta x(0)_2$  e  $\delta x(0)_3$ , como vetores no espaço de fase e também em norma, em diferentes instantes de tempo.

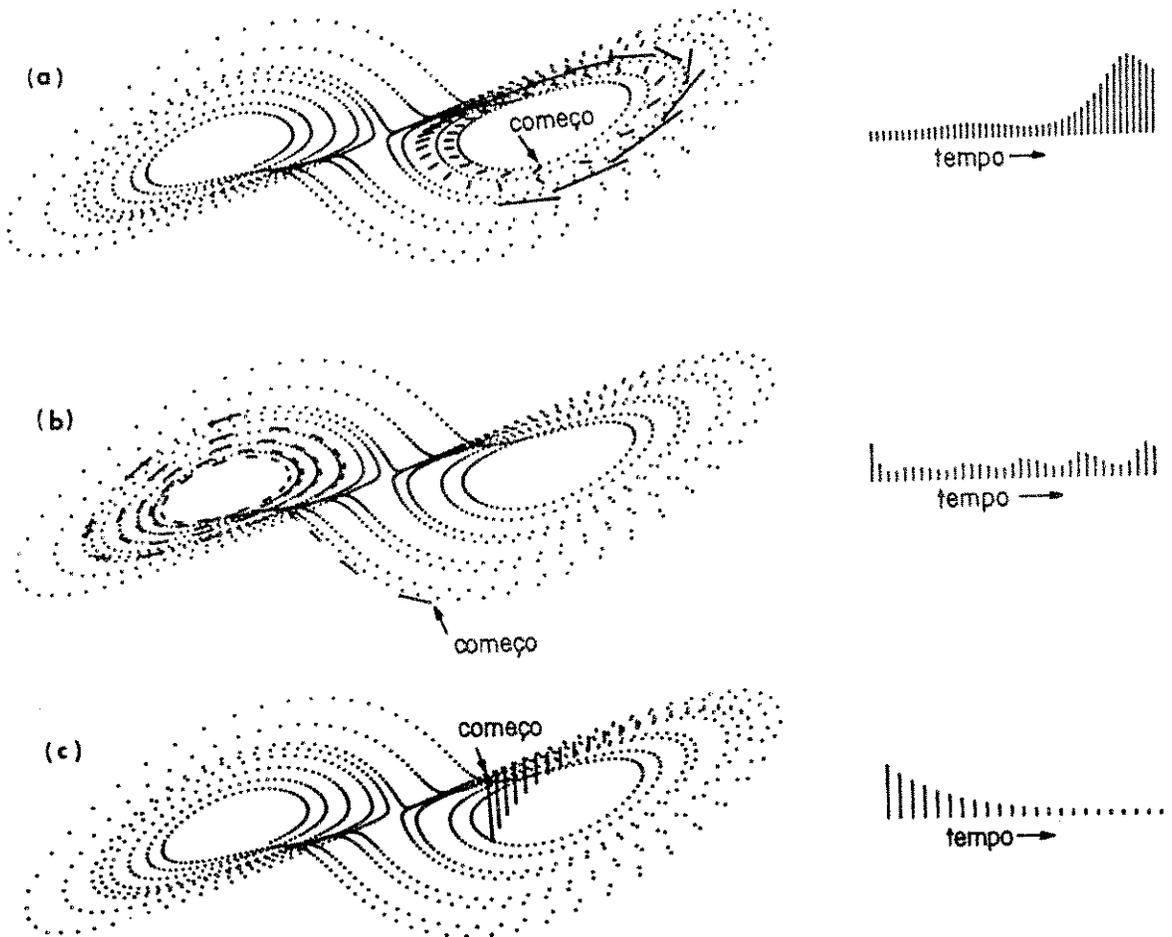


Fig. 4.12 - A evolução local do vetor separação, em três direções diferentes, no atrator de Lorenz. (a)  $\lambda_1 > 0$ . (b)  $\lambda_2 = 0$  (c)  $\lambda_3 < 0$ .

O exemplo ilustra, então, como cada expoente de Lyapunov provém da média, com relação à trajetória gerada pela condição inicial, das deformações locais nas diferentes direções do espaço de fase. Para o cálculo dos expoentes de Lyapunov, considera-se um frame de  $p$  vetores, inicialmente ortonormal.

Um dos algoritmos mais conhecidos para o cálculo dos expoentes de Lyapunov positivos é o apresentado por Wolf et al. [41], que utiliza dados de uma série de tempo, isto é, amostras discretas de uma das variáveis de estado. É suficiente calcular o maior expoente para determinar se o atrator é caótico (nesse caso, o maior expoente é positivo).

O algoritmo de Wolf et al. baseia-se na técnica desenvolvida por Bennetin et al. [42], e Shimada e Nagashima [43], a qual permite calcular o espectro de Lyapunov a partir de um conjunto de equações diferenciais.

Existem, então, técnicas que permitem calcular o maior expoente de Lyapunov a partir de dados experimentais ou a partir do modelo do sistema. Não existem - até agora - técnicas que, de forma geral, permitam calcular analiticamente os expoentes para obter uma expressão em função dos parâmetros do sistema.

#### 4.4. CONCLUSÕES

A caracterização de um atrator através da dimensão ou dos expoentes de Lyapunov permite distinguir os casos em que o comportamento do sistema é caótico. A dimensão do atrator caótico usualmente é não inteira, e o atrator caótico (segundo a definição 1.1) possui pelo menos um expoente de Lyapunov positivo.

Existem algoritmos para calcular as dimensões e os expoentes de Lyapunov positivos a partir dos pontos do atrator, mas não existe uma forma analítica para determiná-los a partir do modelo do sistema, como uma função dos parâmetros. As relações entre a dimensão de Lyapunov e as dimensões de Renyi, bem como entre os expoentes de Lyapunov e as dimensões de Renyi, são atualmente objeto de pesquisa.

## CAPÍTULO 5

### DESCRIÇÃO DO SISTEMA E MODELO MATEMÁTICO. MODELO PARA SIMULAÇÃO ANALÓGICA

O phase-locked loop (PLL) é um dispositivo que tem como objetivo manter o sinal de saída de um oscilador controlado por voltagem (VCO) à mesma frequência e fase do sinal de entrada (referência). Originalmente foi concebido para ser usado na área de comunicações, especificamente na recepção síncrona de sinais de rádio, mas posteriormente as suas aplicações estenderam-se a outras áreas, tais como sincronização de sinais de vídeo, correção do efeito Doppler na comunicação com satélites, eliminação de ruído em osciladores, regulação da frequência na geração de energia elétrica, e mais recentemente, controle de motores.

Como os integrados disponíveis comercialmente foram projetados para serem utilizados principalmente na área de comunicações, descreveremos o PLL em geral e a seguir a forma em que ele é utilizado no controle de motores.

#### 5.1. DESCRIÇÃO DO PLL

O PLL, tal como ele é usado na área de comunicações [44], apresenta a estrutura indicada na Fig. 5.1:

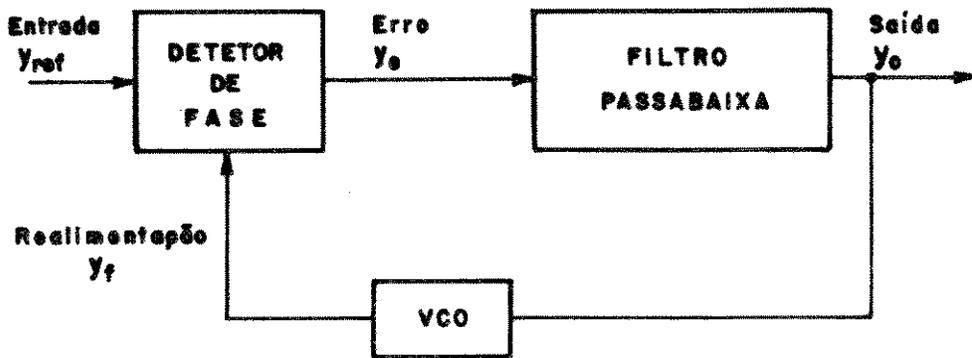


Fig. 5.1 - Estrutura do PLL utilizado em comunicações.

### 5.1.1. Detetor de Fase

O detetor de fase indica o erro de fase no sinal  $y_f$  com respeito ao sinal  $y_{ref}$ . Os principais tipos de detetores são [9]:

#### a) Multiplicadores

Sejam  $y_{ref} = A \cos(\omega_{ref} t + \theta_{ref})$  e  $y_f = B \cos(\omega_f t + \theta_f)$ . Então, assumindo  $\omega_{ref} \cong \omega_f$ , o produto  $y_{ref} \cdot y_f$  pode ser considerado como

$$y_e = y_{ref} \cdot y_f = \frac{AB}{2} \cos(\theta_{ref} - \theta_f), \quad (5.1)$$

se for feita a suposição de que o filtro elimina do produto a componente de frequência  $2\omega_{ref}$ .

b) Comutadores

Sejam  $y_{ref}$  e  $y_f$  sinais quadrados, então o produto  $y_e = y_{ref} \cdot y_f$  será do tipo

$$y_e = \left( \sum_{k=1}^{\infty} R_k \cos(k \omega_{ref} t + \theta_{ref}) \right) \times \left( \sum_{l=1}^{\infty} F_l \cos(l \omega_f t + \theta_f) \right). \quad (5.2)$$

Este produto contém termos de frequências  $k\omega_{ref} \pm l\omega_f$  ( $k, l = 1, 2, \dots$ ). Assumindo que o filtro passabaixa elimine as frequências maiores que  $\omega_{ref}$ , é obtida uma componente contínua em  $y_e$  para a condição  $k\omega_{ref} - l\omega_f = 0$ . Como interessa a detecção do erro de fase para  $\omega_{ref} = \omega_f$ , é preciso utilizar circuitos sintonizados para evitar a condição  $k\omega_{ref} - l\omega_f = 0$  com  $l\omega_f = 0$  com  $l, k \neq 1$ .

O "modulador duplamente balanceado" e o "OU exclusivo" correspondem com a descrição do detetor tipo comutador.

c) Detetores de frequência-fase [45, 46]

Este tipo de detetor é exemplificado pelo detetor de fase II do integrado CMOS 4046B. A saída do detetor leva em consideração três condições possíveis para  $\omega_{ref}$  e  $\omega_f$ :

Condição	Saída do detetor de frequência-fase
$\omega_f < \omega_{ref}$	1
$\omega_f > \omega_{ref}$	0
$\omega_f = \omega_{ref}$	Saída pulsada periódica com ciclo de trabalho proporcional à diferença de fase.

Tabela 5.1. - Saída do detetor de frequência-fase para diferentes condições de  $\omega_f$  e  $\omega_{ref}$ .

Este detetor é baseado em flip-flops, e portanto a saída depende dos estados atuais bem como de estados anteriores. Os ciclos de trabalho dos sinais  $y_{ref}$  e  $y_f$  não são levados em consideração, uma vez que o circuito é sensível somente à borda ascendente dos sinais de entrada. A Fig. 5.2 ilustra a saída do detetor de fase para a condição  $\omega_{ref} = \omega_f$ .

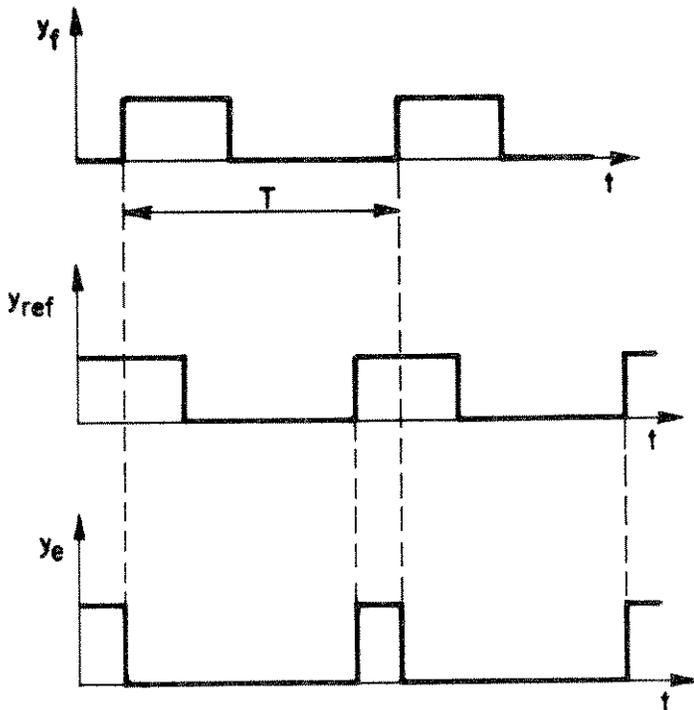


Fig. 5.2 - Saída do detetor de frequência-fase para  $\omega_{ref} = \omega_f$ .

Dos três tipos de detetores de fase descritos, os dois primeiros (multiplicador e comutador) não são úteis para o controle de motores DC, pois para  $\omega_{ref} \neq \omega_f$  a saída do detetor contém o termo  $\frac{AB}{2} \cos[(\omega_{ref} - \omega_f)t + \theta_{ref} - \theta_f]$  em lugar da componente DC proporcional a  $(\theta_{ref} - \theta_f)$  indicada na eq. 5.1. Como não há um termo DC proporcional à diferença de fase (o qual é irrelevante no caso do PLL utilizado em comunicações), este tipo de detetor não é usado para o controle de motores DC. No caso do detetor tipo comutador, há ainda

uma outra dificuldade: a existência de uma componente contínua para a condição  $k\omega_{ref} - l\omega_f = 0$  com  $l, k \neq 1$  leva à possibilidade do motor se sincronizar com uma velocidade  $\omega_f \neq \omega_{ref}$ . Isto impossibilita a utilização deste tipo de detetor para o controle de máquinas elétricas.

A nossa análise baseia-se no modelo do detetor de frequência-fase, o qual, na condição  $\omega_{ref} = \omega_f$  pode ser representado na forma indicada pela Fig. 5.3 [44].

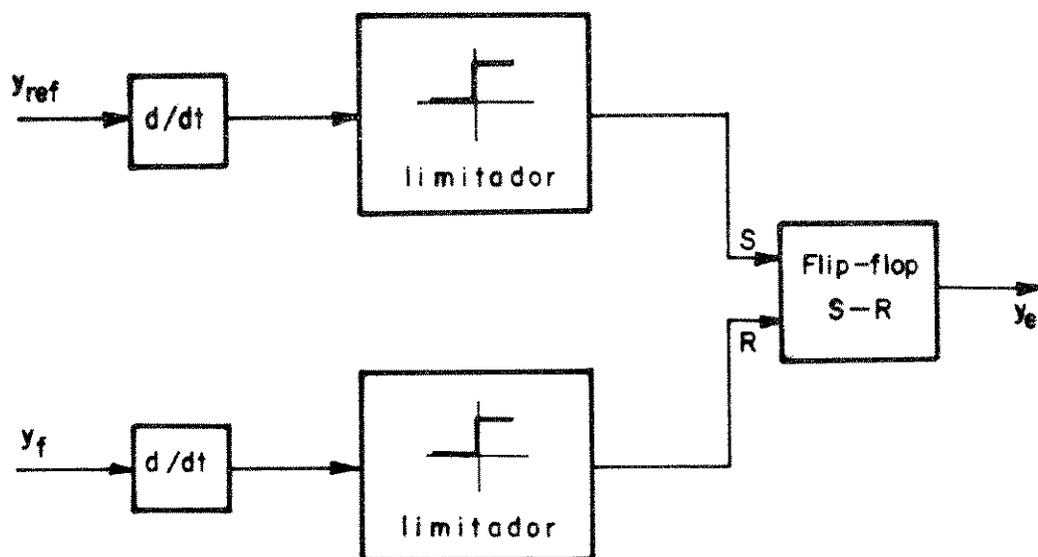


Fig. 5.3 - Modelo do detetor de frequência-fase.

### 5.1.2. Filtro Passabaixa

O filtro é linear e invariante no tempo, projetado para eliminar a componente de ruído do sinal de entrada  $y_{ref}$ . No PLL de segunda ordem, a função de transferência do filtro contém um polo.

### 5.1.3. VCO

A relação entre a frequência do sinal de saída do VCO e a tensão  $y_o$  é dada pela relação

$$\frac{d\theta_f}{dt} = \omega_o + K_o y_o(t) \quad , \quad (5.3)$$

onde  $\omega_o$  é a chamada frequência angular livre do VCO ("free-running frequency") e  $K_o$  é o ganho do VCO (rad/s/V).

Assumindo  $\tilde{\theta}_f(t) = \theta_f(t) - \omega_o t$ ;  $\tilde{\theta}_{ref}(t) = \theta_{ref}(t) - \omega_o t$ , obtém-se o modelo de fase do PLL, no qual

$$\frac{d\tilde{\theta}_f}{dt} = K_o y_o(t). \quad (5.4)$$

### 5.2. O PLL UTILIZADO COMO SISTEMA DE CONTROLE DE VELOCIDADE DE MOTORES

A configuração proposta para análise é representada pela Fig. 5.4:

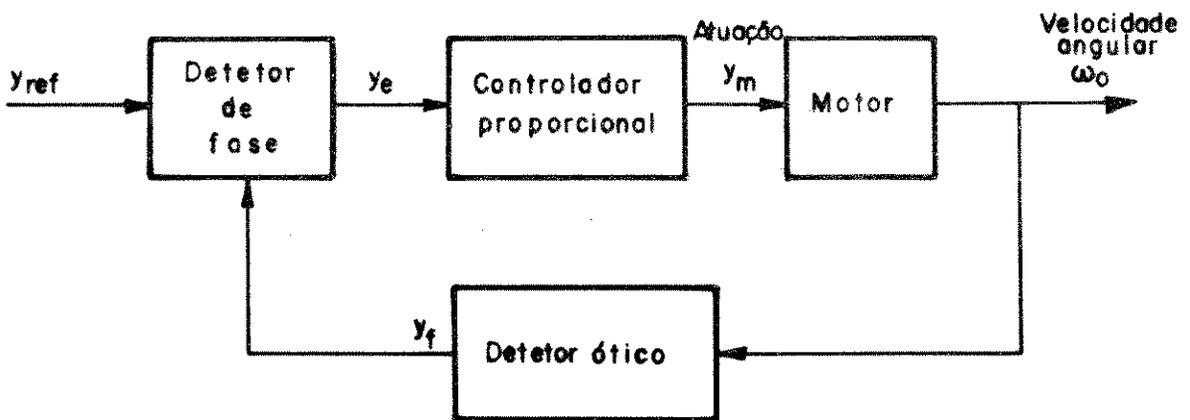


Fig. 5.4 - Configuração utilizada para o controle de motores.

Nesta estrutura, é utilizado somente o detetor de fase do PLL convencional, mas pela similitude das funções de transferência do motor e do detetor ótico com o filtro passabaixa e o VCO descritos anteriormente, pode-se considerar a configuração como sendo a mesma apresentada na Fig. 5.1. A seguir, indica-se alguns detalhes do modelo.

### 5.2.1. Detetor de Fase

O detetor escolhido, pelas razões expostas na secção 5.1.1., é o detetor de frequência-fase, modelado pela Fig. 5.3. Na saída deste, obtém-se um sinal pulsado, com ciclo de trabalho proporcional à diferença de fase dos sinais  $y_{ref}$  e  $y_f$ .

### 5.2.2. Motor

No caso do motor DC, a função de transferência  $G_m(s)$  do motor é

$$G_m(s) = \frac{Y_o(s)}{Y_m(s)} = \frac{K_m}{\tau_m s + 1} \quad (5.5)$$

onde

$$K_m = \frac{K_T}{RK_D + K_e K_T} \quad (5.6)$$

$$\tau_m = \frac{JR}{RK_D + K_e K_T} \quad (5.7)$$

e  $K_T$  é a constante de torque [N.m/A],  $R$  é a resistência de armadura [ $\Omega$ ],  $K_D$  é o coeficiente de atrito viscoso da armadura mais a carga [N.m/rad/s],  $K_e$  é a constante de força contraeletromotriz [V/rad/s] e  $J$  é o momento de inércia da armadura mais a carga. Neste modelo, considera-se desprezível a indutância.

### 5.2.3. Detetor Ótico (encoder)

O detetor ótico é constituído, basicamente, por uma fonte luminosa, um disco ranhurado fixado no eixo do motor e um sensor. A saída do sensor é uma seqüência de pulsos, com freqüência proporcional à velocidade angular do motor, isto é,

$$\frac{d\theta}{dt} = N\omega_o(t) , \quad (5.8)$$

onde  $N$  é a densidade do disco e  $\omega_o(t)$  é a velocidade angular do motor.

A exatidão do encoder no número total de revoluções independe do alinhamento do tacômetro, mas as imperfeições refletem-se em variações na freqüência dos pulsos em relação à freqüência medida, durante uma revolução. Um dos problemas comuns é a excentricidade do disco. Se o centro geométrico do disco (isto é, do ranhurado) não coincide com o eixo de rotação, produz-se modulação em freqüência na saída do detetor. Experimentalmente, observa-se um "jitter" com o motor a velocidade constante. Em malha fechada, este jitter afeta a estabilidade do sistema PLL-dual [47].

A Fig. 5.5 mostra a rotação do centro geométrico do ranhurado em relação ao centro de rotação, e as variáveis das quais depende a variação de freqüência do tacômetro.

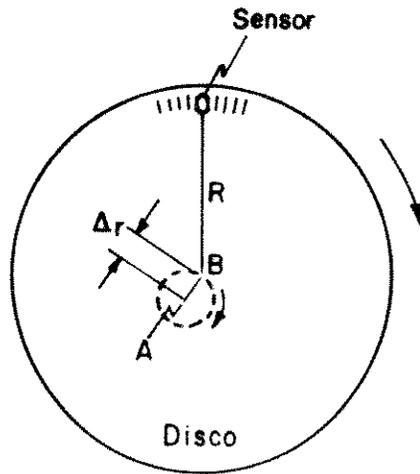


Fig. 5.5 - A excentricidade do disco produz uma rotação do centro do ranhurado B em redor do centro de rotação A.

Como resultado da excentricidade do disco, a distância entre o eixo de rotação A e o sensor varia no tempo. A expressão para a frequência de saída do detetor ótico é aproximadamente

$$\frac{d\theta}{dt} = N\omega_0 \left( 1 - 2 \frac{\Delta r}{R} \sin \omega_0 t \right). \quad (5.9)$$

A derivação da eq. (5.9) é dada em [9]. O termo de erro pode ser reduzido acrescentando um segundo sensor deslocado em  $180^\circ$  com relação ao sensor original, mas ainda assim existe sempre uma pequena componente FM.

### 5.3. SISTEMA PLL-DUAL. MODELO PARA SIMULAÇÃO ANALÓGICA

O sistema proposto para a análise é o circuito dual PLL/proportional. Este circuito seleciona seu modo de operação segundo a diferença entre a frequência de referência e a frequência do detetor ótico. As duas formas de operação são o modo PLL, descrito na Fig. 5.4, e o modo proporcional. Se a frequência do detetor for muito diferente da frequência de referência, é selecionado o modo P, o qual permite que a resposta transitória seja rápida. Para uma frequência próxima à frequência de referência seleciona-se o modo PLL, que permite obter maior exatidão em regime permanente. O diagrama de blocos da configuração proposta é mostrado na Fig. 5.6, onde o modo PLL corresponde aos blocos no quadro gris.

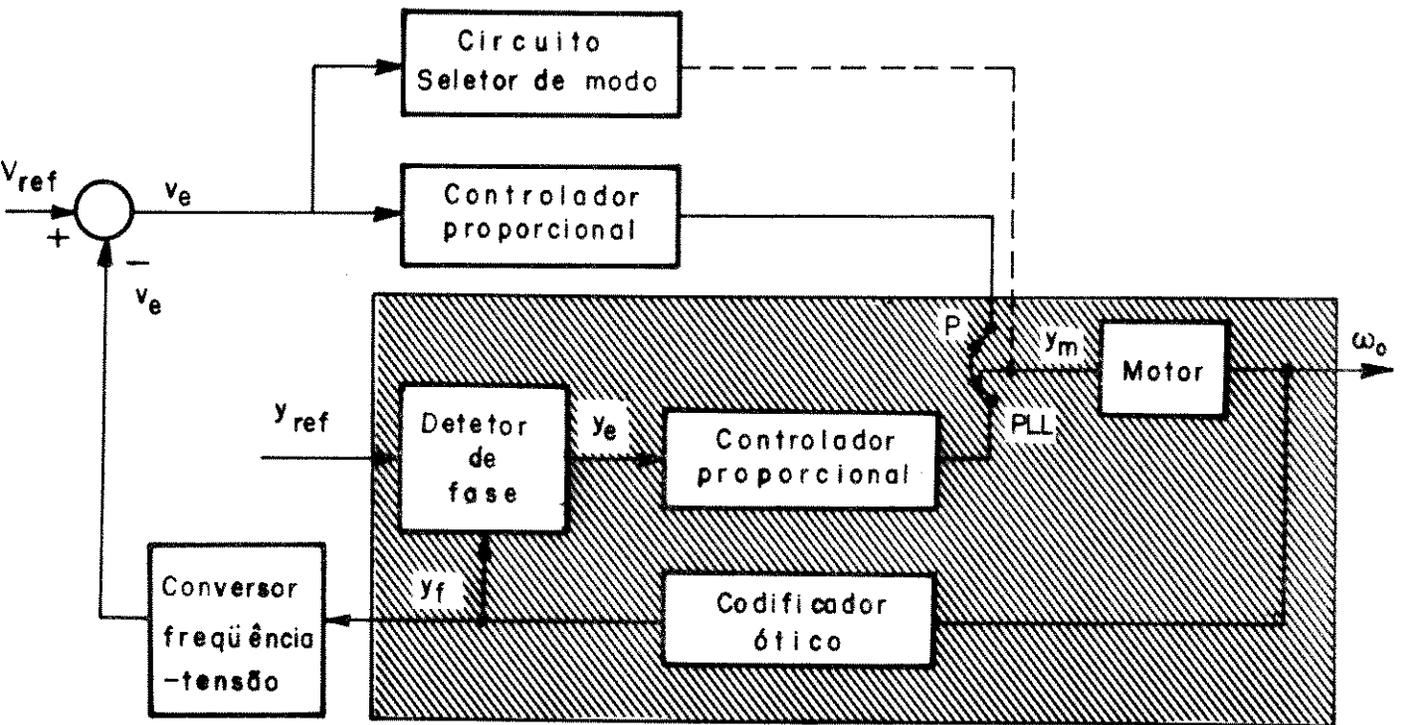


Fig. 5.6 - Diagrama de blocos do sistema dual PLL/proportional.

O bloco PLL pode ser modelado de três formas diferentes: como um sistema de equações diferenciais não-lineares, como uma recorrência não-linear (modelo discreto no tempo) ou diretamente como um circuito, identificando os subsistemas reais com blocos do simulador analógico.

O primeiro modelo será derivado no capítulo seguinte. Para propósitos de análise, o modelo deve ser tão simples quanto for possível; portanto, no modelo a ser tratado analiticamente considera-se somente o modo PLL com controlador proporcional e mostra-se que nesse regime de operação é possível observar comportamento caótico.

O modelo para simulação pode ser mais complexo e a configuração da Fig. 5.6 pode ser implementada sem maior dificuldade, sendo possível ainda alterar a configuração facilmente (se for necessário observar o comportamento de outras estruturas semelhantes, tais como um bloco PLL com controlador PI ou outro tipo de filtro, um modelo mais exato para o motor, um bloco atuador incluindo um chopper ou uma perturbação periódica na saída).

Mesmo sendo possível simular um modelo mais complexo, de ordem maior do que dois, para fins de comparação com a análise do capítulo seguinte, escolheu-se a configuração da Fig. 5.4 para a simulação. O modelo identifica cada um dos blocos com elementos ou grupos de elementos analógicos ou digitais, disponíveis no simulador.

### 5.3.1. Simulação do detetor de fase

O detetor de frequência-fase pode ser modelado pela Fig. 5.3 na condição  $\omega_f = \omega_{ref}$ ; para  $\omega_f \neq \omega_{ref}$  a saída do detetor é especificada pela Tabela 5.1. Como o modelo da Fig. 5.3 inclui uma derivada com relação a  $t$ , foi modificado segundo ilustra a Fig. 5.7.

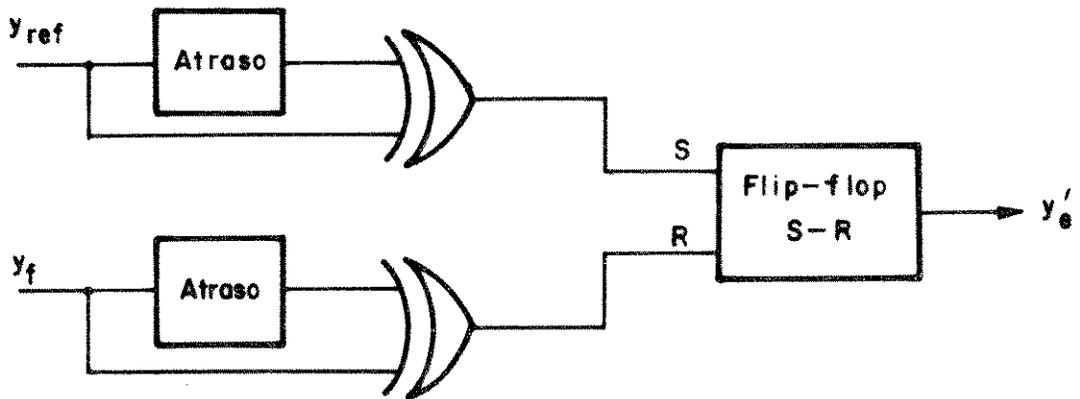


Fig. 5.7 - Modelo do detetor de freqüência-fase, para a condição

$$\omega_f = \omega_{ref}$$

A saída do detetor de fase é alterada se a freqüência do sinal  $y_f$  for diferente da freqüência do sinal  $y_{ref}$ . Esta condição pode ser especificada como  $f_{ref} - f_f > \epsilon$  ou  $f_{ref} - f_f < -\epsilon$ , onde  $f_{ref}$  é a freqüência do sinal  $y_{ref}$ ,  $f_f$  é a freqüência do sinal  $y_f$  e  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  é o máximo desvio de freqüência permitida. No primeiro caso, a saída do detetor é 1 e no segundo a saída é 0. A condição  $f_{ref} \cong f_f$  é especificada como  $|f_{ref} - f_f| < \epsilon$ . Dada a freqüência de erro  $f_e = f_{ref} - f_f$ , é examinado o valor de  $f_e$  que determina a saída do detetor segundo a Tabela 5.2. A implementação da etapa de saída é ilustrada na Figura 5.8.

frequência de erro $f_e$	saída do detetor $y_e$
$f_e > \varepsilon$	1
$f_e < -\varepsilon$	0
$ f_e  < \varepsilon$	$y'_e$

Tabela 5.2 - Saída do detetor simulado para diferentes condições de  $f_e$ .

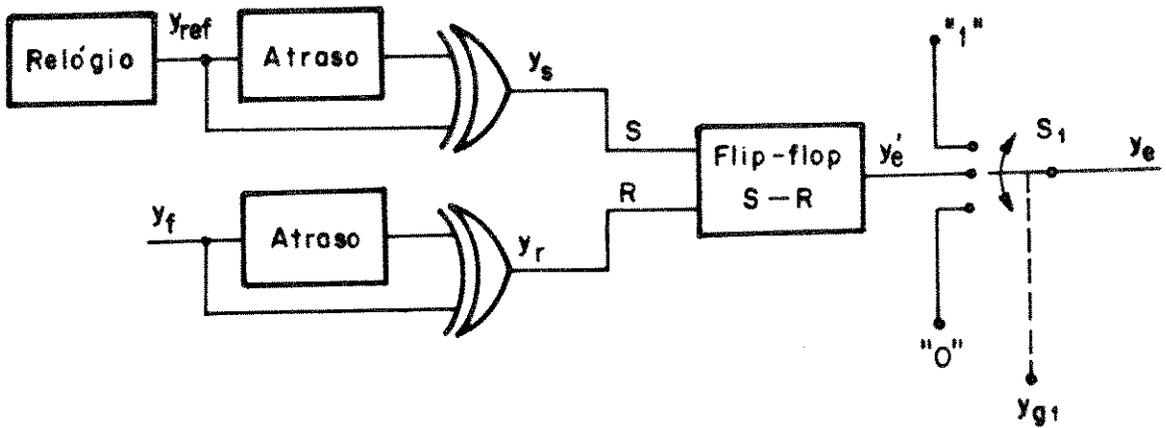


Fig. 5.8 - Implementação da etapa de saída do detetor de fase.

A posição de  $S_1$  é determinada pelo valor de  $y_{g1}$ , segundo a Tabela 5.3.

$y_{g1}$	$y_e$
$>0$	1
$=0$	$y'_e$
$<0$	0

Tabela 5.3 - Saída do detetor em função do valor de  $y_{g1}$ .

A relação entre o sinal  $y_{g1}$ , que comanda a chave  $S_1$ , e o erro de frequência é dada pela Fig. 5.9.

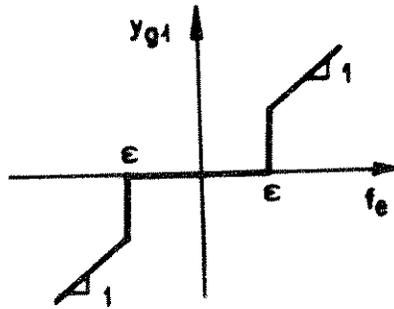


Fig. 5.9 -  $y_{g1}$  em função de  $f_e$ .

Este bloco não linear, em conjunto com a chave  $S_1$ , permite obter a saída especificada pela Tabela 5.2. A implementação deste bloco é indicada na Fig. 5.10, onde a posição da chave  $S_2$  é dada pela Tabela 5.4.

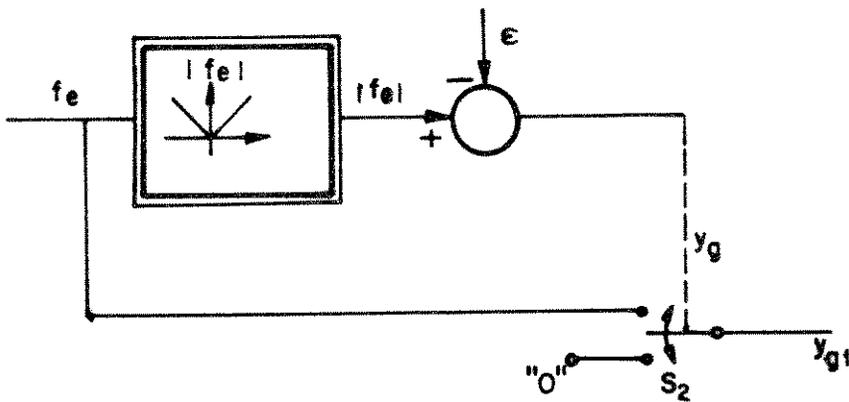


Fig. 5.10 - Implementação da função da Fig. 5.9.

$y_{g2}$	$y_{g1}$
$>0$	$f_e$
$\leq 0$	$0$

Tabela 5.4 - Saída  $y_{g1}$  em função de  $y_{g2}$ .

O sinal de erro de frequência,  $f_e$ , é obtido da comparação da frequência do sinal  $y_r$  com a frequência de referência (Fig. 5.8). O sinal  $y_r$  é constituído por uma seqüência de pulsos estreitos de, frequência proporcional à velocidade do motor. Para obter um sinal contínuo proporcional à frequência de  $y_r$ , aumenta-se a largura dos pulsos e a seguir o sinal é filtrado para obter a componente contínua (Fig. 5.11). Como a frequência de referência é fixa, a comparação é feita com a tensão contínua  $V_{ref}$ . O ganho do detetor de erro de frequência é  $K_f$ .

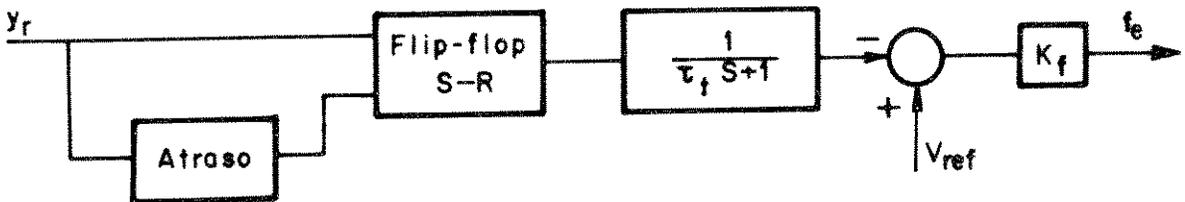


Fig. 5.11 - Detecção do erro de frequência  $f_e$ .

O sinal de erro de fase,  $p_e$ , é a componente contínua do sinal  $y_e$ , obtida através de um filtro passa baixa.

O diagrama de blocos da Fig. 5.12 é a síntese dos blocos que constituem a simulação do detetor de fase.



### 5.3.2. Simulação do detetor ótico (encoder)

Simula-se uma seqüência de pulsos estreitos com freqüência proporcional à velocidade angular do motor,  $\omega_o$ . A configuração é ilustrada na Fig. 5.13.

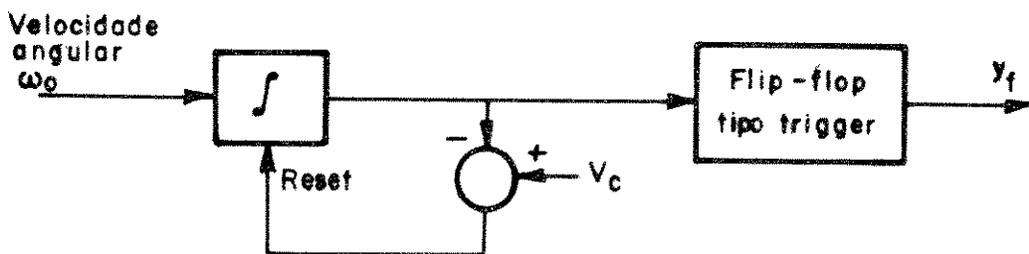


Fig. 5.13 - Simulação do detetor ótico.

O integrador volta à condição inicial sempre que o sinal de reset é menor ou igual que zero. Esta condição existe quando o valor da integral excede um valor constante  $V_c$ . A saída do integrador é um sinal dente de serra, onde cada dente tem uma inclinação de subida aproximadamente igual a  $\omega_o$  e a inclinação da borda de descida é muito alta. O flip-flop tipo trigger muda o valor da sua saída lógica sempre que a entrada passa de um valor menor ou igual que zero a um valor positivo, isto é, em cada borda de descida (reset) da dente de serra. O ciclo de trabalho de  $y_f$  é de 50%; posteriormente este ciclo de trabalho é diminuído na etapa de entrada do detetor de fase (Figs. 5.7 - 5.12).

A freqüência do sinal  $y_f$  é

$$f_f = \frac{\omega_o}{2V_c}, \quad (5.10)$$

ou

$$\frac{d\theta_f}{dt} = \frac{\pi}{V_c} \omega_o ; \quad (5.11)$$

esta frequência duplica-se à entrada do detetor de fase, (Fig. 5.12), isto é,

$$\frac{d\theta_r}{dt} = \frac{2\pi}{V_c} \omega_o , \quad (5.12)$$

onde  $\theta_r$  é a fase de  $y_r$ .

A frequência do sinal de referência  $y_{ref}$  é também duplicada na entrada do detetor, de forma que

$$\frac{d\theta_s}{dt} = 2 \frac{d\theta_f}{dt} , \quad (5.13)$$

onde  $\theta_f$  é a fase de  $y_f$ .

Pela forma dos sinais  $y_s$  e  $y_r$  (ciclo de trabalho mínimo), consideraremos  $y_s$  como a referência e  $y_r$  como o sinal de realimentação do codificador. De (5.12), comparando com a equação que define o comportamento do codificador

$$\frac{d\theta_r}{dt} = N \omega_o(t) , \quad (5.14)$$

onde  $N$  é a densidade do disco, obtemos

$$N = \frac{2\pi}{V_c} . \quad (5.15)$$

A Fig. 5.14 mostra o diagrama de blocos para a simulação do sistema completo, incluindo o motor.

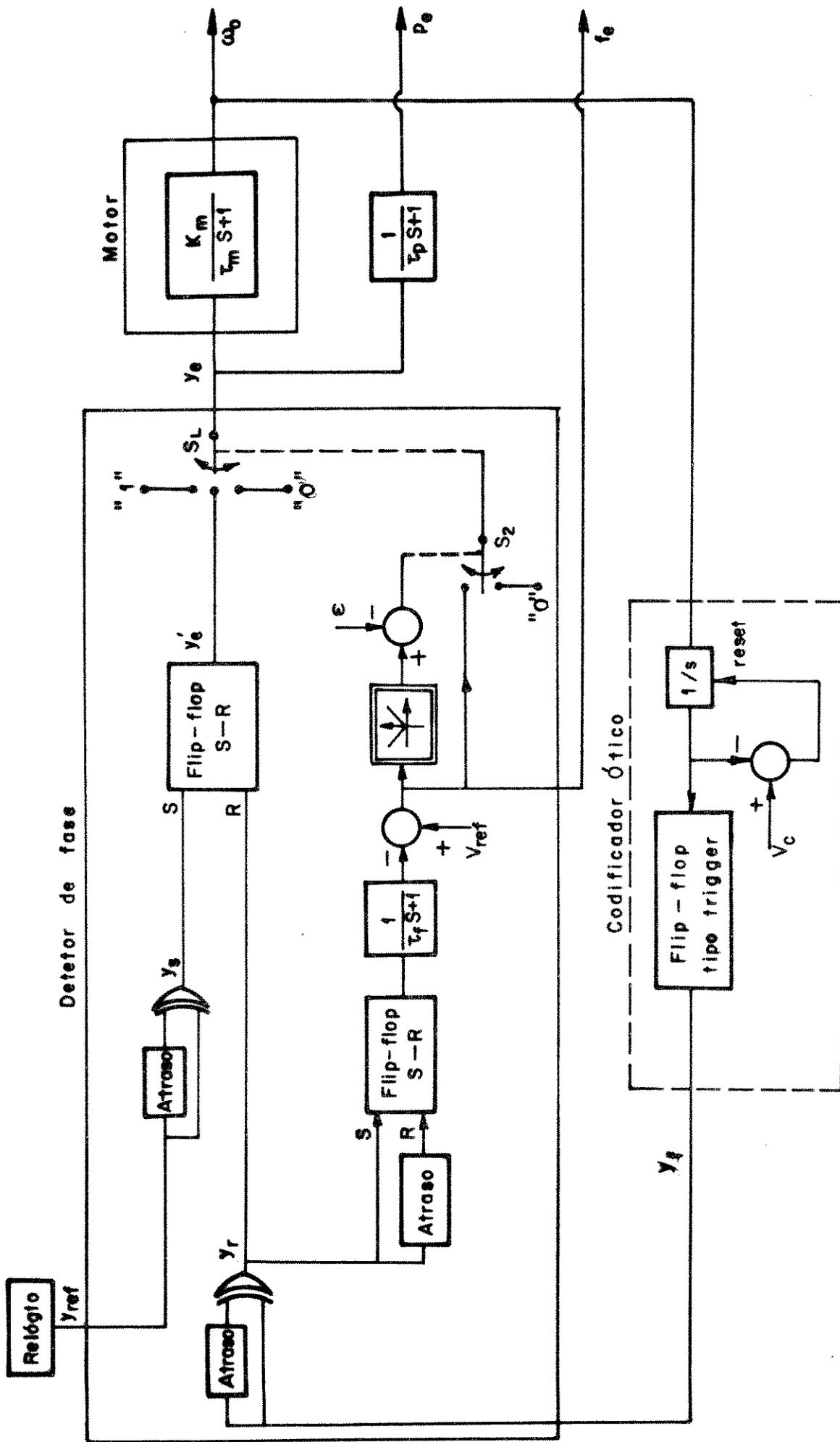


Fig. 5.14 - Simulação do PLL de segunda ordem, utilizado no controle de velocidade de um motor de c.c. .

## CAPÍTULO 6

### MODELO CONTÍNUO. ANÁLISE PELO MÉTODO DE MELNIKOV E DETERMINAÇÃO DOS VALORES DOS PARÂMETROS PARA OS QUAIS O SISTEMA COMPORTA-SE EM FORMA CAÓTICA

Neste capítulo, deriva-se a equação diferencial que descreve o sistema no modo PLL, a partir do modelo de fase do PLL, e obtém-se as condições para as quais o comportamento é caótico. O modelo de fase descreve o sistema em termos do erro de fase e a fase de referência (Fig. 6.1).

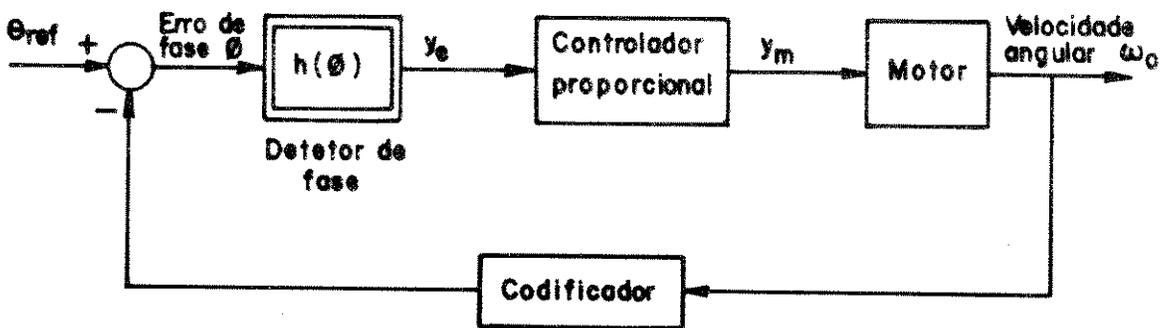


Fig. 6.1 - Modelo de fase do PLL.

Este é o modelo normalmente encontrado na literatura para descrever o comportamento do PLL, e não leva em consideração o fato de que o sinal  $y_e$  é uma seqüência de pulsos, mas aproxima  $y_e$  pelo seu valor médio. Esta aproximação desconsidera então a existência de um sinal discreto, como possível fator causante de comportamento caótico.

O modelo de fase do PLL, como demodulador de FM, foi utilizado por T.S. Endo e L.O. Chua [2] para mostrar, pelo método de Melnikov, que o sistema pode se comportar de forma caótica em condições normais de operação. No PLL utilizado como demodulador de FM<sup>9</sup>, existe uma interação entre uma não-linearidade do sistema e uma perturbação periódica, (o sinal modulante), semelhante à de um pêndulo perturbado [15], que origina caos.

No caso do PLL utilizado no controle de motores c.c., modelado pela Fig. 6.1, o sinal  $\theta_{ref}$  é uma constante, mas existe uma interação entre a não-linearidade e um sinal periódico, porque o detetor ótico registra uma oscilação (jitter) proveniente da excentricidade (Eq. 5.9). O modelo resultante é um caso particular do modelo estudado por T.S. Endo e L.O. Chua, e o método de Melkinov pode ser aplicado de forma análoga à descrita em [2].

## 6.1. DERIVAÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL A PARTIR DO MODELO DE FASE

Com as variáveis definidas no diagrama de blocos (Fig. 6.1), considerando a função de transferência do motor (Eq. 5.5), e definindo  $K_c$  como o ganho do controlador proporcional, temos que:

$$\tau_m \frac{d\omega_o}{dt} + \omega_o(t) = K_c K_m y_e(t) . \quad (6.1)$$

A saída média do detetor de fase,  $y_e$ , é dada pela equação

9

Ver modelo do PLL como demodulador de FM no Apêndice A.

$$y_e(t) = h(\phi(t)) , \quad (6.2)$$

onde  $h(\phi)$  é a função não linear que descreve a característica  $y_e$  vs  $\phi$ .

O erro de fase é

$$\phi(t) = \theta_{ref} - \theta_f , \quad (6.3)$$

onde  $\theta_{ref}$  é a fase de referência e  $\theta_f$  é a fase registrada pelo encoder.

Para o encoder, considerando o erro de excentricidade, o sinal  $\theta_f$  é dado pela Eq. (5.9),

$$\frac{d\theta_f}{dt} = N\omega_o \left( 1 - 2 \frac{\Delta r}{R} \text{sen } \omega_o t \right). \quad (6.4)$$

Os parâmetros considerados nas eqs. (6.1)-(6.4) são:

- $\tau_m$  : constante de tempo do motor,
- $K_m$  : ganho do motor,
- $K_c$  : ganho do controlador,
- $N$  : densidade do disco de encoder,
- $\Delta r$  : distância entre o centro geométrico do ranhurado e o eixo de rotação do disco (no encoder),
- $R$  : raio do ranhurado do disco (do encoder).

Como a Eq. (6.4) inclui um termo variante e não linear na realimentação, introduzimos aqui uma suposição razoável: a velocidade angular do motor,  $\omega_o$ , não desvia-se significativamente do seu valor de equilíbrio. Esta aproximação é apoiada pelo fato de que o termo de erro no encoder afeta mais significativamente à fase do que à freqüência.

Seja  $\omega_o(t) = \tilde{\omega}_{ref} + \delta\omega_o(t)$ , onde  $\tilde{\omega}_{ref}$  é a freqüência angular de referência (constante) para o motor e  $\delta\omega_o(t)$  é o termo

dependente do tempo (muito pequeno). Da Eq. (6.4),

$$\frac{d\theta_f}{dt} = N[\tilde{\omega}_{ref} + \delta\omega_o(t)] \left[ 1 - 2 \frac{\Delta r}{R} \text{sen}(\tilde{\omega}_{ref} + \delta\omega_o(t))t \right], \quad (6.5)$$

$$\frac{d\theta_f}{dt} = N\omega_o(t) - 2 \frac{N\Delta r}{R} [\tilde{\omega}_{ref} + \delta\omega_o(t)] \text{sen}(\tilde{\omega}_{ref} + \delta\omega_o(t))t, \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_f}{dt} = N\omega_o(t) - 2 \frac{N\Delta r}{R} \tilde{\omega}_{ref} \text{sen}(\tilde{\omega}_{ref} + \delta\omega_o(t))t - \\ - 2 \frac{N\Delta r}{R} \delta\omega_o(t) \text{sen}(\omega_o(t))t. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Considerando que o termo  $\Delta r\delta\omega_o(t)$  é muito pequeno,

$$\frac{d\theta_f}{dt} \cong N\omega_o(t) - 2 \frac{N\Delta r}{R} \tilde{\omega}_{ref} \text{sen}(\tilde{\omega}_{ref} + \delta\omega_o(t))t, \quad (6.8)$$

e com  $\delta\omega_o(t) \ll \tilde{\omega}_{ref}$

$$\frac{d\theta_f}{dt} \cong N\omega_o(t) - 2 \frac{N\Delta r}{R} \tilde{\omega}_{ref} \text{sen} \tilde{\omega}_{ref} t. \quad (6.9)$$

Derivando (6.3) com relação a t,

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\theta_{ref}}{dt} - \frac{d\theta_f}{dt}, \quad (6.10)$$

onde  $d\theta_{ref}/dt$  é a frequência angular de referência para o encoder. Seja  $d\tilde{\theta}_{ref}/dt$  a frequência angular de referência para o motor, então

$$\tilde{\omega}_{ref} = \frac{d\tilde{\theta}_{ref}}{dt} = \frac{1}{N} \frac{d\theta_{ref}}{dt} \quad , \quad (6.11)$$

e substituindo em (6.10),

$$\frac{d\phi}{dt} = N \frac{d\tilde{\theta}_{ref}}{dt} - \frac{d\theta_f}{dt} \quad . \quad (6.12)$$

Substituindo (6.9) em (6.12),

$$\frac{d\phi}{dt} = N \left[ \frac{d\tilde{\theta}_{ref}}{dt} - \omega_o - 2 \frac{\Delta r}{R} \tilde{\omega}_{ref} \text{sen } \tilde{\omega}_{ref} t \right] \quad . \quad (6.13)$$

Derivando em relação ao tempo, de (6.13) obtemos

$$\frac{d\omega_o}{dt} = \frac{d^2\tilde{\theta}_{ref}}{dt^2} - \frac{1}{N} \frac{d^2\phi}{dt^2} + 2 \frac{\Delta r}{R} \tilde{\omega}_{ref}^2 \text{cos } \tilde{\omega}_{ref} t \quad . \quad (6.14)$$

Substituindo na Eq. (6.1) as expressões para  $d\omega_o/dt$ ,  $\omega_o(t)$  e  $y_e(t)$  das Eqs. (6.14), (6.9) e (6.2) respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} \tau_m \left( \frac{d^2\tilde{\theta}_{ref}}{dt^2} - \frac{1}{N} \frac{d^2\phi}{dt^2} + 2 \frac{\Delta r}{R} \tilde{\omega}_{ref}^2 \text{cos } \tilde{\omega}_{ref} t \right) + \frac{1}{N} \frac{d\theta_f}{dt} + \\ + 2 \frac{\Delta r}{R} \tilde{\omega}_{ref} \text{sen } \tilde{\omega}_{ref} t = K_c K_m h(\phi(t)) \quad , \quad (6.15) \end{aligned}$$

donde, com (6.11),

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta_{ref}}{dt^2} - \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{1}{\tau_m} \frac{d\theta_f}{dt} - \frac{NK_c K_m}{\tau_m} h(\phi(t)) = \\ = \frac{2N\Delta r}{R} \left( -\tilde{\omega}_{ref}^2 \cos \tilde{\omega}_{ref} t - \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\tau_m} \sin \tilde{\omega}_{ref} t \right). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Da Eq. (6.3), derivando em relação a t,

$$\frac{d\theta_f}{dt} = \frac{d\theta_{ref}}{dt} - \frac{d\phi}{dt}, \quad (6.17)$$

e substituindo em (6.16),

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta_{ref}}{dt^2} - \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{\tau_m} \frac{d\theta_{ref}}{dt} - \frac{1}{\tau_m} \frac{d\phi}{dt} - \frac{NK_c K_m}{\tau_m} h(\phi(t)) = \\ 2N \frac{\Delta r}{R} \left( -\tilde{\omega}_{ref}^2 \cos \tilde{\omega}_{ref} t - \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\tau_m} \sin \tilde{\omega}_{ref} t \right). \end{aligned} \quad (6.18)$$

De (6.11),

$$\tilde{\omega}_{ref} = \frac{1}{N} \frac{d\theta_{ref}}{dt} = \text{constante},$$

donde

$$\frac{d^2\theta_{ref}}{dt^2} = 0; \quad (6.19)$$

com (6.11) e (6.19) em (6.18),

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{1}{\tau_m} \frac{d\phi}{dt} + \frac{NK_c K_m}{\tau_m} h(\phi(t)) = \\ = 2N \frac{\Delta r}{R} \tilde{\omega}_{ref}^2 \cos \tilde{\omega}_{ref} t + 2N \frac{\Delta r}{R} \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\tau_m} \sin \tilde{\omega}_{ref} t + N \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\tau_m} . \end{aligned} \quad (6.20)$$

A Eq. (6.20) é a equação diferencial que descreve o comportamento do modelo de fase. A função  $h(\phi)$  descreve a relação entre a saída e a entrada do detetor de fase, ou seja, a saída média em função do erro de fase. Para o detetor de frequência-fase descrito no capítulo 5, a função não linear  $h(\phi)$  é [49]

$$h(\phi) = -\pi + \left\{ (\phi + \pi) \text{ módulo } 2\pi \right\} , \quad (6.21)$$

representada pela Fig. 6.2.

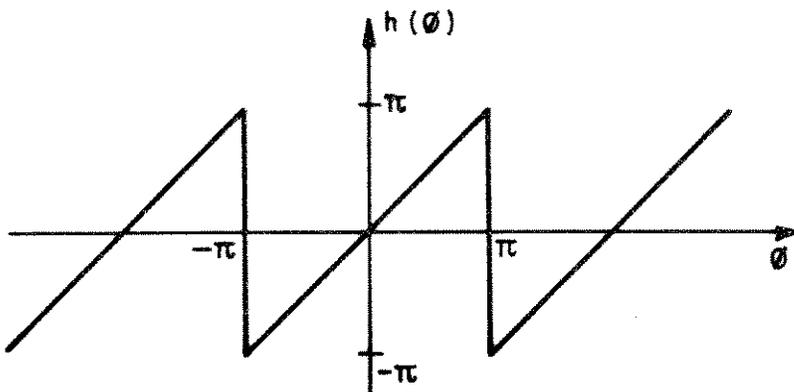


Fig. 6.2 - Característica não-linear do detetor de frequência-fase.

A seguir, a Eq. (6.20) é normalizada. O fator  $NK_c K_m$ , conhecido como **ganho de malha**, é denotado por  $K_g$ . Definimos também  $\omega_n$  e  $\varphi$  a partir da linearização de (6.20). Linearizando (6.20) e introduzindo  $K_g$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{1}{\tau_m} \frac{d\phi}{dt} + \frac{K_g}{\tau_m} \phi(t) = 2N \frac{\Delta r}{R} \tilde{\omega}_{ref}^2 \cos \tilde{\omega}_{ref} t + \\ + 2N \frac{\Delta r}{R} \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\tau_m} \sin \tilde{\omega}_{ref} t + N \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\tau_m} . \end{aligned} \quad (6.22)$$

Então é possível definir  $\omega_n$  e  $\varphi$  a partir de

$$2\varphi\omega_n = 1/\tau_m \quad (6.23)$$

e

$$\omega_n^2 = \frac{K_g}{\tau_m} , \quad (6.24)$$

donde

$$\omega_n := \sqrt{\frac{K_g}{\tau_m}} \quad (6.25)$$

e

$$\varphi := \frac{1}{2\sqrt{K_g \tau_m}} . \quad (6.26)$$

Definem-se também

$$\beta := \frac{\omega_n}{K_g} = \frac{1}{\sqrt{K_g \tau_m}}, \quad (6.27)$$

onde  $\beta$  é a frequência natural normalizada;

$$\Omega := \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\omega_n}, \quad (6.28)$$

onde  $\Omega$  é a frequência de referência normalizada (para o motor);

$$\sigma := N\Omega, \quad (6.29)$$

onde  $\sigma$  é a frequência de referência normalizada (para o encoder); e

$$m := 2N \frac{\Delta\Gamma}{R} \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\omega_n} \quad (6.30)$$

onde  $m$  é o máximo desvio de frequência, normalizado.

As definições (6.25)-(6.30), baseadas na linearização (6.22), são utilizadas para normalizar a equação não linear (6.20). Seja  $t = \tau/\omega_n$ . Substituindo  $t$  em (6.20), e considerando que

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\omega_n} \frac{d\phi}{dt} \quad (6.31)$$

e

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} = \left(\frac{1}{\omega_n}\right)^2 \frac{d^2\phi}{dt^2}, \quad (6.32)$$

obtemos

$$\omega_n^2 \frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau_m} \omega_n \frac{d\phi}{d\tau} + \frac{K_g}{\tau_m} h(\phi) = 2N \frac{\Delta r}{R} \omega_{ref}^2 \cos \left( \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\omega_n} \tau \right) + 2N \frac{\Delta r}{R} \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\tau_m} \operatorname{sen} \left( \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\omega_n} \tau \right) + N \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\tau_m} \quad (6.33)$$

ou

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau_m \omega_n} \frac{d\phi}{d\tau} + \frac{K_g}{\tau_m \omega_n^2} h(\phi) = 2N \frac{\Delta r}{R} \left( \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\omega_n} \right)^2 \cos \left( \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\omega_n} \tau \right) + 2N \frac{\Delta r}{R \tau_m} \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\omega_n^2} \operatorname{sen} \left( \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\omega_n} \tau \right) + N \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\tau_m \omega_n^2}, \quad (6.34)$$

onde, usando (6.25) e a definição (6.27),

$$\frac{1}{\tau_m \omega_n} = \frac{1}{\frac{K_g}{\omega_n^2} \omega_n} = \frac{\omega_n}{K_g} = \beta ; \quad (6.35)$$

com (6.28) e (6.30),

$$2N \frac{\Delta r}{R} \left( \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\omega_n} \right)^2 = \left( 2N \frac{\Delta r}{R} \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\omega_n} \right) \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\omega_n} = m \Omega ; \quad (6.36)$$

usando (6.30) e (6.35),

$$2N \frac{\Delta r}{R \tau_m} \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\omega_n^2} = 2N \frac{\Delta r}{R} \frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\omega_n} \frac{1}{\tau_m \omega_n} = m \beta ; \quad (6.37)$$

de (6.35), (6.28) e (6.29),

$$\frac{N\tilde{\omega}_{ref}}{\tau\omega_n^2} = \frac{1}{\tau\omega_n} \cdot N\frac{\tilde{\omega}_{ref}}{\omega_n} = \beta\sigma \quad (6.38)$$

Substituindo (6.35)-(6.38) e (6.25) em (6.34), e substituindo  $\tau$  por  $t$ , obtém-se a equação normalizada

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \beta\frac{d\phi}{dt} + h(\phi) = m\Omega \cos \Omega t + \beta m \sin \Omega t + \beta\sigma \quad (6.39)$$

Esta equação é então um caso particular da equação normalizada do PLL utilizado como demodulador de FM [2].

## 6.2. ANÁLISE DO MODELO CONSIDERADO COMO UM SISTEMA HAMILTONIANO PERTURBADO

Considerando  $\beta$  e  $m$  como parâmetros pequenos, então o sistema não perturbado é Hamiltoniano. Seja

$$y = \frac{d\phi}{dt}, \quad (6.40)$$

então a equação (6.39), na forma de equação de estado, é

$$\frac{d\phi}{dt} = y \quad (6.41a)$$

$$\frac{dy}{dt} = -h(\phi) - \beta y + \beta\sigma + m\beta \sin \Omega t + m\Omega \cos \Omega t \quad (6.41b)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \frac{d\phi}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -h(\phi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta y + \beta\sigma + m\beta \sin \Omega t + m\Omega \cos \Omega t \end{bmatrix}. \quad (6.42)$$

Escolhe-se a parte não perturbada de (6.42) como

$$f(x) = \begin{bmatrix} y \\ -h(\phi) \end{bmatrix} \quad (6.43a)$$

e a parte perturbada como

$$\varepsilon g(x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta y + \beta\sigma + m\beta \sin \Omega t + m\Omega \cos \Omega t \end{bmatrix}, \quad (6.43b)$$

onde  $x = (\phi, y) \in S^1 \times \mathbb{R}^1$ . Como a equação (6.39) é periódica em  $\phi$ , com período  $2\pi$ , é possível usar o sistema de coordenadas cilíndricas  $S^1 \times \mathbb{R}^1$  para  $(\phi, y)$ .

A equação do sistema não perturbado  $\dot{x} = f(x)$  é

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + h(\phi) = 0, \quad (6.44)$$

onde, de (6.21)

$$h(\phi) = -\pi + \{(\phi + \pi) \text{ módulo } 2\pi\}.$$

Uma condição para que o método de Melnikov possa ser aplicado é que tanto  $f$  como  $g$  em (6.43) sejam de classe  $C^r$ , com  $r \geq 2$ . Esta condição não é satisfeita por  $h(\phi)$ , mas o método é aplicável porque  $h(\phi)$  pode ser expandida em uma série de Fourier convergente [2].

O Hamiltoniano do sistema (6.44) pode ser derivado a partir das equações

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} H(\phi, y) \quad (6.45a)$$

e

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \phi} H(\phi, y) \quad (6.45b)$$

onde  $y$  é definido por (6.40). De (6.44),

$$\frac{d\phi}{dt} = y \quad (6.46a)$$

e

$$\frac{dy}{dt} = -h(\phi). \quad (6.46b)$$

Substituindo (6.46) em (6.45),

$$\frac{\partial}{\partial y} H(\phi, y) = y \quad (6.47a)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \phi} H(\phi, y) = h(\phi). \quad (6.47b)$$

Como

$$dH(\phi, y) = \frac{\partial}{\partial y} H(\phi, y) dy + \frac{\partial}{\partial \phi} H(\phi, y) d\phi, \quad (6.48)$$

com (6.47)

$$dH(\phi, y) = y dy + h(\phi) d\phi, \quad (6.49)$$

e integrando

$$H(\phi, y) = \frac{y^2}{2} + C_1 + \int h(\phi) d\phi, \quad -\pi \leq \phi \leq \pi, \quad (6.50)$$

donde

$$H(\phi, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{\phi^2}{2} + C_2. \quad (6.51)$$

Escolhendo a constante de integração  $C_2 = 0$ ,

$$H(\phi, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{\phi^2}{2}, \quad -\pi \leq \phi \leq \pi, \quad (6.52)$$

e então  $H(\phi, y)$  representa os níveis de energia no sistema.

Como o sistema é conservativo, cada trajetória de (6.44) é definida por um nível de energia constante, dado por

$$H(\phi, y) = \text{constante.}$$

A Fig. 6.3 mostra as trajetórias definidas pela eq. (6.52) na superfície  $(\phi, y)$ , onde representou-se o plano  $\mathbb{R}^2$  em lugar da superfície no sistema de coordenadas cilíndricas  $S^1 \times \mathbb{R}^1$ .

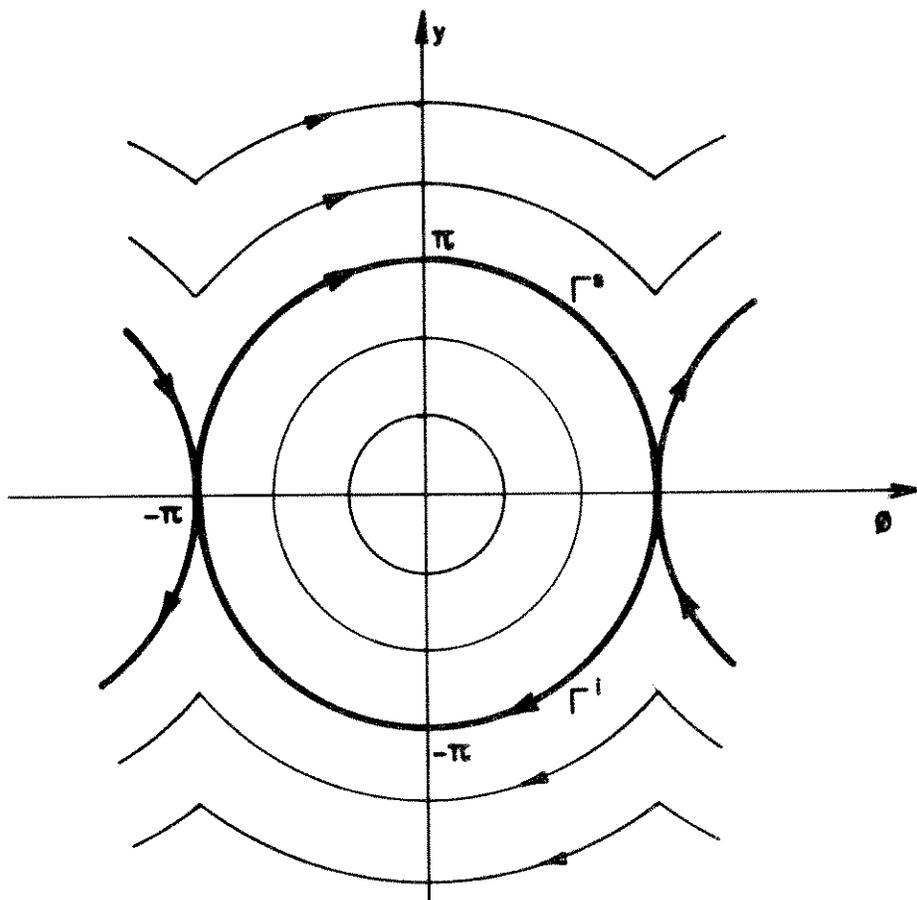


Fig. 6.3 - Trajetórias do sistema Hamiltoniano não perturbado no plano de fase  $(\phi, y)$ . As trajetórias homoclínicas  $\Gamma^s$  e  $\Gamma^i$  passam pelo ponto de sela  $(0, \pi)$ .

O sistema possui um ponto de sela  $x_s := (0, \pi)$  e duas trajetórias homoclínicas, uma superior ( $\Gamma^s$ ) e uma inferior ( $\Gamma^i$ ). As trajetórias homoclínicas podem ser obtidas explicitamente a partir de um ponto inicial qualquer pertencente às trajetórias. Sejam  $(0, \pi)$  a

condição inicial para  $\Gamma^s$  e  $(0, -\pi)$  a condição inicial para  $\Gamma^1$ .  
 Substituindo  $(\phi(0), y(0)) = (0, \pm\pi)$  em (6.52),

$$H(\phi, y) = \text{constante} = \frac{\pi^2}{2}, \quad (6.53)$$

donde

$$\frac{y^2}{2} + \frac{\phi^2}{2} = \frac{\pi^2}{2} \quad (6.54)$$

é a equação que define as trajetórias homoclínicas.

De (6.54),

$$y = \pm \sqrt{\pi^2 - \phi^2} \quad ; \quad (6.55)$$

com  $y = d\phi/dt$ ,

$$t = \pm \int \frac{d\phi}{\sqrt{\pi^2 - \phi^2}} \quad , \quad (6.56)$$

donde

$$t = \pm \arcsen \left( \frac{\phi}{\pi} \right) \quad , \quad -\pi \leq \phi \leq \pi \quad , \quad (6.57)$$

e, portanto, para a trajetória homoclínica superior, com  $|t| \leq \pi/2$ ,

$$\phi(t) = \pi \text{ sen } t \quad (6.58a)$$

e

$$y(t) = \pi \text{ cos } t \quad . \quad (6.58b)$$

Para  $-\infty < t \leq -\pi/2$

$$\phi(t) = -\pi \tag{6.59a}$$

e

$$y(t) = 0 ; \tag{6.59b}$$

para  $\pi/2 \leq t < \infty$

$$\phi(t) = \pi \tag{6.60a}$$

e

$$y(t) = 0. \tag{6.60b}$$

Analogamente, para a trajetória homoclínica inferior, com  $|t| \leq -\pi/2$ ,

$$\phi(t) = -\pi \text{ sen } t \tag{6.61a}$$

e

$$y(t) = -\pi \text{ cos } t. \tag{6.61b}$$

Para  $-\infty < t \leq -\pi/2$

$$\phi(t) = \pi \tag{6.62a}$$

e

$$y(t) = 0 ; \tag{6.62b}$$

para  $\pi/2 \leq t < \infty$

$$\phi(t) = -\pi \tag{6.63a}$$

e

$$y(t) = 0. \tag{6.63b}$$

Seja  $h(t)$  o vetor  $(\phi(t)), (y(t))$  que define a trajetória homoclínica. Então, resumindo (6.58)-(6.62),

$$h(t) = \begin{cases} \pm \begin{bmatrix} \pi \operatorname{sen} t \\ \pi \operatorname{cos} t \end{bmatrix} & , \quad |t| \leq \pi/2 \\ - \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} & , \quad -\infty < t \leq -\pi/2 \\ \pm \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} & , \quad \pi/2 \leq t < \infty , \end{cases} \quad (6.64)$$

onde o sinal superior corresponde à trajetória homoclínica superior e o sinal inferior corresponde à trajetória homoclínica inferior.

A integral de Melnikov, no caso em que o sistema não perturbado é Hamiltoniano, é dada por

$$d(\hat{\psi}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(h(t)) \wedge g(h(t), t + \hat{\psi}) dt , \quad (6.65)$$

onde  $h(t)$  é definida por (6.64) e o produto  $f \wedge g$  é

$$(f \wedge g) = f_1 g_2 - f_2 g_1 , \quad (6.66)$$

com  $f = (f_1, f_2)$  e  $g = (g_1, g_2)$  dados por (6.43).

$$\text{Então} \quad (6.67a)$$

$$f_1 = y ,$$

$$(6.67b)$$

$$f_2 = -h(\phi) ,$$

$$(6.67c)$$

$$g_1 = 0$$

e

$$g_2 = -\beta y + \beta \sigma + m\beta \operatorname{sen} \Omega t + m\Omega \operatorname{cos} \Omega t. \quad (6.67d)$$

Substituindo (6.64), (6.66), e (6.67) em (6.65), obtém-se

$$\begin{aligned}
 d(\hat{\psi}) = & \int_{-\infty}^{-\pi/2} \{0. [-\beta \cdot 0 + \beta\sigma + m\beta \operatorname{sen} \Omega(t+\hat{\psi}) + m\Omega \cos \Omega(t+\hat{\psi})] + h(\bar{\pi}) \cdot 0\} dt \\
 & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \{\pm\pi \cos t [\bar{\pi} \beta \pi \cos t + \beta\sigma + m\beta \operatorname{sen} \Omega(t+\hat{\psi}) + m\Omega \cos \Omega(t+\hat{\psi})]\} dt \\
 & + \int_{\pi/2}^{\infty} \{0. [-\beta \cdot 0 + \beta\sigma + m\beta \operatorname{sen} \Omega(t+\hat{\psi}) + m\Omega \cos \Omega(t+\hat{\psi})] + h(\pm\pi) \cdot 0\} dt
 \end{aligned} \tag{6.68}$$

donde

$$\begin{aligned}
 d(\hat{\psi}) = & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [-\pi^2 \beta \cos^2 t \quad \pm \pi\beta\sigma \cos t \quad \pm \quad \pi m\beta \operatorname{sen} \Omega(t+\hat{\psi}) \cos t \\
 & \pm \pi m\Omega \cos \Omega(t+\hat{\psi}) \cos t] dt .
 \end{aligned} \tag{6.69}$$

Avaliando esta integral (Apêndice B),

$$d(\hat{\psi}) = -\frac{\pi^3 \beta}{2} \pm 2\pi \beta\sigma \frac{2\pi m \sqrt{\beta^2 + \Omega^2}}{1 - \Omega^2} \cos(\Omega\pi/2) \operatorname{sen}(\Omega\hat{\psi} + \theta) , \tag{6.70a}$$

onde

$$\theta = \arctan \left( \frac{\Omega}{\beta} \right) , \quad \Omega \neq 1. \tag{6.70b}$$

A expressão (6.70) corresponde com o resultado obtido por

T.S. Endo e L.O. Chua [2] para a equação mais geral

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \beta \left[ 1 + \frac{(2\varphi - \beta) h'(\phi)}{\beta} \right] \frac{d\phi}{dt} + h(\phi) = \beta\sigma + \beta m \sin \Omega t + m\Omega \cos \Omega t \quad (6.71)$$

com  $h(\phi)$  sendo uma característica triangular generalizada da forma indicada na Fig. 6.4.

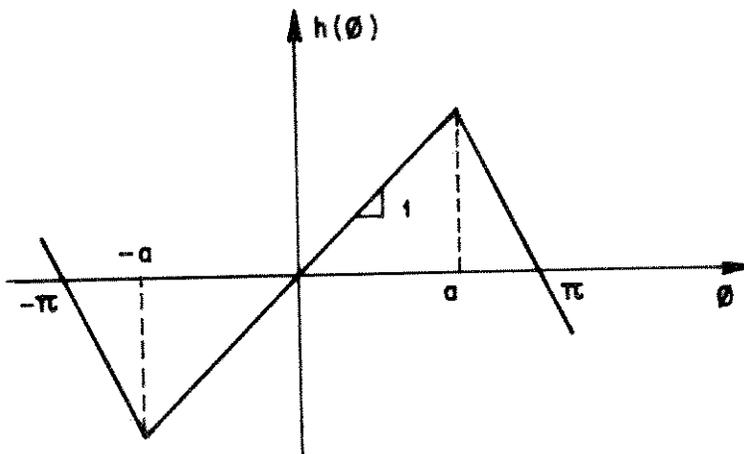


Fig. 6.4 - Característica triangular generalizada do detector de fase

A expressão obtida por T.S. Endo e L.O. Chua é [2]

$$d(\hat{\psi}) = -2a\varphi\pi \arcsen \sqrt{a/\pi} - \pi\beta \sqrt{a(\pi-a)} \pm 2\pi \beta\sigma \pm 2m \sqrt{\beta^2 + \Omega^2} \cdot Q(a, \Omega) \sin(\Omega\hat{\psi} + \theta) \quad (6.72a)$$

onde

$$Q(a, \Omega) = \frac{(1+b)}{(1-\Omega^2)(b+\Omega^2)} [a \cos \Omega t_1 - \Omega \sqrt{a(\pi-a)} \operatorname{sen} \Omega t_1] \quad (6.72b)$$

com  $b := \frac{a}{\pi-a}$ ,  $t_1 = \arcsen \sqrt{\frac{a}{\pi}}$ ,  $\Omega \neq 1$ .

Escolhendo  $2\varphi = \beta$ ,  $a = \pi$ ,  $t_1 = \pi/2$ ,  $b \rightarrow \infty$ , a eq. (6.71) reduz-se à eq. (6.39), e de (6.72) deriva-se o resultado (6.70).

As condições para existência de uma órbita homoclínica transversa são (Teorema 2.1)

$$d(\hat{\psi}) = 0, \quad (6.73a)$$

para algum conjunto não vazio de valores de  $\hat{\psi}$ , e

$$\frac{d}{d\hat{\psi}} d(\hat{\psi}) \neq 0, \quad (6.73b)$$

para o mesmo conjunto de valores.

Com  $d(\hat{\psi}) = 0$ , de (6.70a),

$$\operatorname{sen}(\Omega\hat{\psi} + \theta) = \frac{\frac{\pi^3 \beta}{2} + 2\pi \beta \sigma}{\pm \frac{2\pi m \sqrt{\beta^2 + \Omega^2}}{1-\Omega^2} \cos\left(\Omega \frac{\pi}{2}\right)}. \quad (6.74)$$

Assumindo que  $\hat{\psi}$  possa ser qualquer valor, isto é,  $\Omega\hat{\psi} + \theta \in [0, 2\pi]$ ,  $|\operatorname{sen}(\Omega\hat{\psi} + \theta)| \leq 1$  e portanto

$$\left| \frac{\beta(\pi^2 + 4\sigma)(1-\Omega^2)}{4m\sqrt{\beta^2 + \Omega^2} \cos\left(\Omega \frac{\pi}{2}\right)} \right| \leq 1, \quad \Omega \neq 1 \quad (6.75)$$

satisfaz a condição (6.73a) para qualquer valor de  $\hat{\psi}$ .

A condição (6.73b), que exclui a tangência homoclínica, leva a excluir a igualdade

$$\pm \frac{2\pi m\Omega \sqrt{\beta^2 + \Omega^2}}{1-\Omega^2} \cos(\Omega \pi/2) \cos(\Omega \hat{\psi} + \theta) = 0. \quad (6.76)$$

Como por hipótese  $m \neq 0$ ,  $\Omega \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$ ,  $\Omega \neq 1$ , somente  $\Omega \hat{\psi} + \theta = \pi/2$  ou  $\Omega \hat{\psi} + \theta = 3\pi/2$  permite que (6.76) seja válida, donde

$$|\text{sen}(\Omega \hat{\psi} + \theta)| \neq 1 \quad (6.77)$$

garante que a órbita seja transversa. Modificando (6.75) para satisfazer (6.77),

$$\left| \frac{\beta(\pi^2 + 4\sigma)(1-\Omega^2)}{4m\sqrt{\beta^2 + \Omega^2} \cos\left(\Omega \frac{\pi}{2}\right)} \right| < 1, \quad \Omega \neq 1, \quad (6.78)$$

é a condição necessária e suficiente para a existência de uma órbita homoclínica transversa.

### 6.3. ANÁLISE DO MODELO CONSIDERADO COMO UM SISTEMA NÃO HAMILTONIANO PERTURBADO

Considerando somente  $m$  como parâmetro de ordem pequena, o sistema não perturbado é não Hamiltoniano. Então pode-se escrever (6.41) na forma

$$\begin{bmatrix} \frac{d\phi}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -h(\phi) - \beta y + \beta\sigma_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta\Delta\sigma + m\beta \sin \Omega t + m\Omega \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (6.79)$$

onde  $\sigma_c$  é o valor crítico de  $\sigma$  para o qual existe uma órbita homoclínica e  $\Delta\sigma$  é uma pequena desviação a partir de  $\sigma_c$ .

A parte não perturbada pode ser escolhida como

$$f(x) = \begin{bmatrix} y \\ -h(\phi) - \beta y + \beta\sigma_c \end{bmatrix}, \quad (6.80a)$$

donde a parte perturbada é

$$g(x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta\Delta\sigma + m\beta \sin \Omega t + m\Omega \cos \Omega t \end{bmatrix}, \quad (6.80b)$$

com  $x = (\phi, y) \in S^1 \times \mathbb{R}^1$ .

Sabe-se que o sistema não perturbado  $\dot{x} = f(x)$  com  $f(x)$  definida por (6.80a) possui uma órbita homoclínica para  $\sigma = \sigma_c$ , onde  $\sigma_c$  é a faixa de captura ("pull-in range"), isto é, a máxima diferença inicial entre a frequência do sinal de entrada e a frequência do VCO, tal que é possível a captura [50].

No caso não Hamiltoniano, a integral de Melnikov é definida por

$$d(\hat{\psi}) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(h(t)) \wedge g(h(t), t + \hat{\psi})] \exp \left\{ - \int_0^t \text{traço } Df(h(s)) ds \right\} dt, \quad (6.81)$$

onde  $h(t)$  é a órbita homoclínica do sistema não perturbado.

Seja

$$h(t) = \begin{bmatrix} \phi_h(t) \\ y_h(t) \end{bmatrix}, \quad (6.82)$$

e com o produto  $f\Lambda g$  definido por (6.66), de (6.80) temos

$$f_1 = y, \quad (6.83a)$$

$$f_2 = -h(\phi) - \beta y + \beta \sigma_c, \quad (6.83b)$$

$$g_1 = 0, \quad (6.83c)$$

$$g_2 = \beta \Delta \sigma + m\beta \operatorname{sen} \Omega t + m\Omega \cos \Omega t; \quad (6.83d)$$

substituindo (6.82) e (6.83) em (6.81),

$$d(\hat{\psi}) = \int_{-\infty}^{\infty} y_h(t) [\beta \Delta \sigma + m\beta \operatorname{sen} \Omega(t + \hat{\psi}) + m\Omega \cos \Omega(t + \hat{\psi})] \cdot \exp \left\{ - \int_0^t \operatorname{traço} Df(h(s)) ds \right\} dt, \quad (6.84)$$

onde, de (6.83a) e (6.83b)

$$Df(h(s)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ - \frac{\partial}{\partial \phi} h(\phi) \Big|_{\phi = \phi_h(s)} & -\beta \end{bmatrix}. \quad (6.85)$$

De (6.85),

$$\operatorname{traço} Df(h(s)) = -\beta, \quad (6.86)$$

e, portanto,

$$-\int_0^t \text{traço } Df(h(s)) ds = -\int_0^t -\beta ds = \beta t. \quad (6.87)$$

Seja  $p(t) = \beta t$ . Substituindo em (6.84), e desenvolvendo,

$$\begin{aligned} d(\hat{\psi}) = & \beta \Delta \sigma \int_{-\infty}^{\infty} y_h(t) e^{p(t)} dt + \left[ m\beta \int_{-\infty}^{\infty} y_h(t) \text{sen } \Omega t e^{p(t)} dt \right. \\ & \left. + m\Omega \int_{-\infty}^{\infty} y_h(t) \text{cos } \Omega t e^{p(t)} dt \right] \text{cos } \Omega \hat{\psi} \\ & + \left[ m\beta \int_{-\infty}^{\infty} y_h(t) \text{cos } \Omega t e^{p(t)} dt - m\Omega \int_{-\infty}^{\infty} y_h(t) \text{sen } \Omega t e^{p(t)} dt \right] \text{sen } \Omega \hat{\psi}. \end{aligned} \quad (6.88)$$

A expressão (6.88), com  $p(t) = \beta t$ , é um caso particular da integral

$$\begin{aligned} d(\hat{\psi}) = & \beta \Delta \sigma \int_{-\infty}^{\infty} y_h(t) e^{p(t)} dt \\ & + \left[ m\beta \int_{-\infty}^{\infty} y_h(t) \text{sen } \Omega t e^{p(t)} dt + m\Omega \int_{-\infty}^{\infty} y_h(t) \text{cos } \Omega t e^{p(t)} dt \right] \text{cos } \Omega \hat{\psi} \\ & + \left[ m\beta \int_{-\infty}^{\infty} y_h(t) \text{cos } \Omega t e^{p(t)} dt - m\Omega \int_{-\infty}^{\infty} y_h(t) \text{sen } \Omega t e^{p(t)} dt \right] \text{sen } \Omega \hat{\psi}, \end{aligned} \quad (6.89a)$$

com

$$p(t) = \int_0^t [\beta + (2\varphi - \beta) h'(\phi_h(s))] ds ; \quad (6.89b)$$

se  $2\varphi = \beta$  em (6.89), obtém-se (6.88).

Para a integral (6.89) é válido o teorema seguinte [2].

**Teorema 6.1.**

A integral de Melnikov (6.89) do sistema não Hamiltoniano tem zeros simples, se são satisfeitas as seguintes condições (sob  $m \neq 0$  e  $\Omega \neq 0$ ):

$$a) \quad n_1 = \lambda_s + \beta - (2\varphi - \beta) a' < 0 \quad (6.90a)$$

$$b) \quad n_2 = \lambda_u + \beta - (2\varphi - \beta) a' > 0 \quad (6.90b)$$

$$c) \quad \left| \frac{\beta \Delta \sigma I_3}{m \sqrt{(\beta^2 + \Omega^2) (I_1^2(\Omega) + I_2(\Omega))}} \right| < 1 , \quad (6.90c)$$

onde  $h(\phi)$  e  $h'(\phi)$ , por hipótese, são funções de período  $2\pi$  que podem ser expandidas em uma série de Fourier convergente, onde

$$\lambda_u = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a'}}{2} , \quad (6.91a)$$

$$\lambda_s = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4a'}}{2} , \quad (6.91b)$$

$$a' = -h'(\phi_s) , \quad (6.91c)$$

$$b = -[\beta + (2\varphi - \beta) h'(\phi_s)] , \quad (6.91d)$$

$$\phi_s = h^{-1}(\beta \sigma_c) \in [0, \pi) : \text{a maior das duas soluções em } [0, \pi), \quad (6.91e)$$

onde

$$I_1(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y_h(t) e^{p(t)} \text{sen } \Omega t \, dt , \quad (6.92a)$$

$$I_2(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y_h(t) e^{p(t)} \text{cos } \Omega t \, dt , \quad (6.92b)$$

e

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} y_h(t) e^{p(t)} \, dt . \quad (6.92c)$$

A prova deste teorema é dada no Apêndice B.

#### Corolário 6.1.

As condições (6.90) para que a integral de Melnikov (6.89) tenha zeros transversais podem ser relaxadas se o filtro contém somente um polo (em lugar de um polo e um zero), isto é, se  $\beta=2\varphi$ .

Com  $\beta = 2\varphi$ , a condição (6.90b) é sempre satisfeita ( $n_2 = \lambda_u + \beta > 0$ ) e, portanto, as condições (6.90) modificam-se para

$$a) \, n_1 = \lambda_s + \beta < 0 \quad (6.93a)$$

$$b) \, \left| \frac{\beta \Delta \sigma I_3}{(m \sqrt{\beta^2 + \Omega^2}) (I_1^2(\Omega) + I_2^2(\Omega))} \right| < 1 \quad (6.93b)$$

## CAPÍTULO 7

### COMPARAÇÃO QUALITATIVA DOS RESULTADOS TEÓRICOS COM OS RESULTADOS DA SIMULAÇÃO ANALÓGICA E COM OS RESULTADOS DE UM SISTEMA REAL. ANÁLISE E CONCLUSÕES

O modelo utilizado para a análise de Melnikov, como foi observado no início do capítulo anterior, aproxima o sinal pulsado de erro,  $y_{ep}(t)$ , pelo seu valor médio,  $y_e(t)$ . Desta forma, o modelo simulado reflete de forma mais realista o comportamento do sistema real.

Qualitativamente, as perturbações geradas por ambos modelos são do mesmo tipo. A seqüência de pulsos que constitui o sinal de erro gera um sinal periódico constituído por segmentos de exponenciais, da mesma freqüência fundamental que a do sinal de erro, na saída  $\omega_0(t)$ , como ilustra a Fig. 7.1.

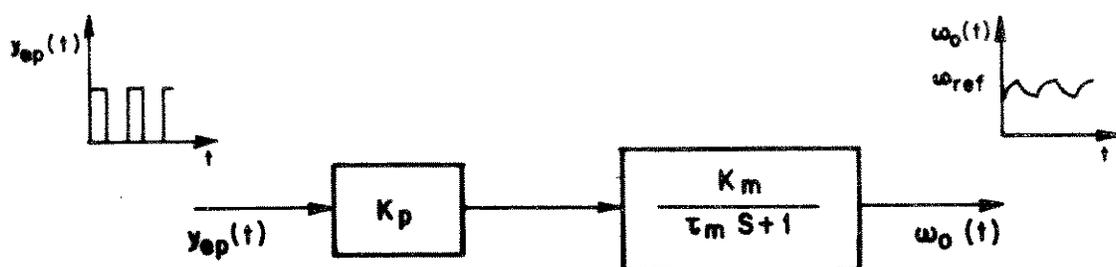


Fig. 7.1. Perturbação na saída  $\omega_0(t)$ , produzida pelas discontinuidades no sinal  $y_{ep}$ .

A saída  $w_0(t)$  contém então uma perturbação (ripple), que

pode ser decomposto como uma soma de subharmônicas mais uma frequência fundamental. A frequência fundamental é um múltiplo da frequência de referência, e depende da densidade do codificador ótico. A influência do ripple pode, portanto, ser analisada quantitativamente utilizando os resultados obtidos teóricamente para a perturbação senoidal gerada pelo codificador ótico.

No caso de um sistema real, a complexidade é ainda maior: misturam-se ambos tipos de perturbação (os quais são inerentes ao sistema e não podem ser reduzidos a zero); o sistema é na realidade de ordem maior (tanto pelo número de polos quanto pelo número de perturbações).

A comparação quantitativa dos resultados obtidos utilizando ambos modelos, bem como a comparação quantitativa com os resultados de um sistema real, são sugeridos como tema para um trabalho posterior. Limita-se aqui a comparação ao aspecto qualitativo, mostrando a dependência do fenômeno de caos com relação à mudança de um parâmetro comum (o ganho de malha).

Finalmente, resumem-se o conteúdo da tese e os aspectos nos quais houve uma contribuição original. Discute-se a contribuição para o projeto de sistemas reais, em relação aos objetivos propostos inicialmente. Indica-se algumas linhas de pesquisa pouco desenvolvidas ainda, tanto na teoria de estabilidade e caos em sistemas não lineares quanto na aplicação ao sistema PLL-dual.

## 7.1. RESULTADOS DA SIMULAÇÃO ANALÓGICA.

A seguir, escolhe-se um parâmetro adequado para observar a transição do comportamento estável ao comportamento caótico.

Da eq. (6.78), que define a condição suficiente para regime de caos no caso Hamiltoniano,

$$\left| \frac{\beta(\pi^2 \mp 4\sigma)(1 - \Omega^2)}{4m \sqrt{\beta^2 + \Omega^2} \cos\left(\Omega \frac{\pi}{2}\right)} \right| < 1, \quad \Omega \neq 1, \quad (6.78)$$

podemos comentar, em primeiro lugar, que o parâmetro  $m$  (proporcional à magnitude da perturbação), incide diretamente sobre o aparecimento de oscilações caóticas. Com  $m$  grande, a razão definida em (6.78) é pequena, sendo possível (para um  $m$  suficientemente grande) atingir a região de caos. Com  $m$  muito pequeno (codificador com compensação do jitter), a condição não é atingida e o comportamento é estável ou subharmônico. Com  $m = 0$ , a razão é infinitamente grande, e como  $\omega < 1$  é uma condição impossível de ser estabelecida, não é possível o comportamento caótico com esse valor do parâmetro  $m$ . Isto é lógico, dado que com  $m = 0$  não existe perturbação na eq. (6.39); portanto o espaço é de dimensão dois. Em espaços de dimensão 2, o comportamento caótico não é possível (v., por exemplo, [51]).

Como não foi obtido explicitamente o valor de  $m$  para a perturbação gerada pelos pulsos do sinal de erro nos casos do sistema simulado e do sistema real, escolheu-se um parâmetro comum a todos, o ganho de malha  $K_g$ .

Substituindo as eqs. (6.25), (6.27) - (6.30) em (6.78), e desenvolvendo, obtém-se a condição

$$R(K_g) = \left| \frac{\left( \pi^2 \mp 4N\tilde{\omega}_{ref} \sqrt{\frac{\tau_m}{K_g}} \right) \left[ 1 - \left( \tilde{\omega}_{ref} \sqrt{\frac{\tau_m}{K_g}} \right)^2 \right]}{8N \frac{\Delta\Gamma}{R} \tilde{\omega}_{ref} \sqrt{\frac{\tau_m}{K_g}} \sqrt{1 + (\tilde{\omega}_{ref} \tau_m)^2} \cos \left( \frac{\pi}{2} \tilde{\omega}_{ref} \sqrt{\frac{\tau_m}{K_g}} \right)} \right| < 1 \quad (7.2)$$

$$\text{com } \tilde{\omega}_{ref} \sqrt{\frac{\tau_m}{K_g}} \neq 1,$$

e onde  $R(K_g)$  representa o valor da expressão que deve ser menor do que 1 para comportamento caótico.

Considerando  $K_g$  como parâmetro e os restantes parâmetros fixos, analisaremos o comportamento da função  $R(K_g)$  para diferentes valores de  $K_g$ .

Com  $K_g \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{K_g \rightarrow 0} R(K_g) = \lim_{K_g \rightarrow 0} \left| \frac{\left( \mp 4N\tilde{\omega}_{ref} \sqrt{\frac{\tau_m}{K_g}} \right) \left( -\tilde{\omega}_{ref} \sqrt{\frac{\tau_m}{K_g}} \right)^2}{8N \frac{\Delta r}{R} \tilde{\omega}_{ref} \sqrt{\frac{\tau_m}{K_g}} \sqrt{1+(\tilde{\omega}_{ref} \tau_m)^2} \cos \left( \frac{\pi}{2} \tilde{\omega}_{ref} \sqrt{\frac{\tau_m}{K_g}} \right)} \right|$$

$$= \lim_{K_g \rightarrow 0} \left| \frac{\omega_{ref}^2 (\tau_m / K_g)}{2 \frac{\Delta r}{R} \sqrt{1+(\tilde{\omega}_{ref} \tau_m)^2} \cos \left( \frac{\pi}{2} \tilde{\omega}_{ref} \sqrt{\frac{\tau_m}{K_g}} \right)} \right| . \quad (7.3)$$

Como o valor do coseno está limitado, com  $K_g \rightarrow 0$ ,  $R(K_g) \rightarrow \infty$  e a condição de comportamento caótico não existe.

A medida que  $K_g$  aumenta,  $R(K_g)$  diminui até alcançar o valor mínimo  $R(K_g) = 0$  dado pela condição que qualquer um dos fatores do numerador de  $R(K_g)$  seja igual a zero. Como existe a restrição

$\tilde{\omega}_{ref} \sqrt{\tau_m / K_g} \neq 1$ , consideramos o fator

$$\left( \pi^2 - 4N\tilde{\omega}_{ref} \sqrt{\frac{\tau_m}{K_g}} \right) = 0 , \quad (7.4)$$

donde para  $K_g = (4N \omega_{ref})^2 \tau_m / \pi^4$  é obtido o mínimo  $R(K_g) = 0$ .

Então, aumentando  $K_g$  a partir de  $K_g = 0$  sempre é possível chegar a um valor de  $R(K_g)$  tão pequeno quanto seja necessário para alcançar a condição de comportamento caótico.

Finalmente, para  $K_g$  muito grande,

$$\lim_{K_g \rightarrow \infty} R(K_g) = \left| \frac{\pi^2}{8N \frac{\Delta r}{R} \tilde{\omega}_{ref} \sqrt{\frac{\tau_m}{K_g}} \sqrt{1 + (\tilde{\omega}_{ref} \tau_m)^2}} \right|, \quad (7.5)$$

valor que tende a infinito.

Na prática, sempre existem limitações físicas para  $K_g$ , e verificaremos a transição do regime estável ao regime de caos começando com um ganho pequeno que será aumentado até observar comportamento pseudo-aleatório na variável de saída.

Os parâmetros escolhidos para a simulação foram  $\tau_m = 0.2$  [s],  $\tilde{\omega}_{ref} = 314$  [rad/s] e  $N = 10$ , enquanto que  $K_g$  foi aumentado gradativamente desde  $K_g = 5.05$  até  $K_g = 10$ .

As Figs. 7.2 a 7.6 ilustram a velocidade  $\omega_o(t)$ , para diferentes valores do ganho de malha, onde o ganho menor corresponde à Fig. 7.2 e vai sendo aumentado em cada gráfico. Observa-se correspondência qualitativa entre as respostas simuladas e o comportamento da teoria, segundo foi discutido nos parágrafos precedentes.

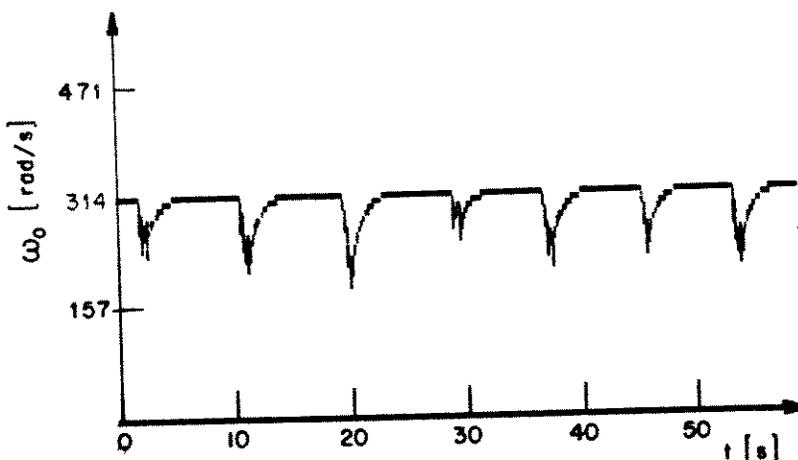


Fig. 7.2. Velocidade de saída com  $K_g = 5.05$ .

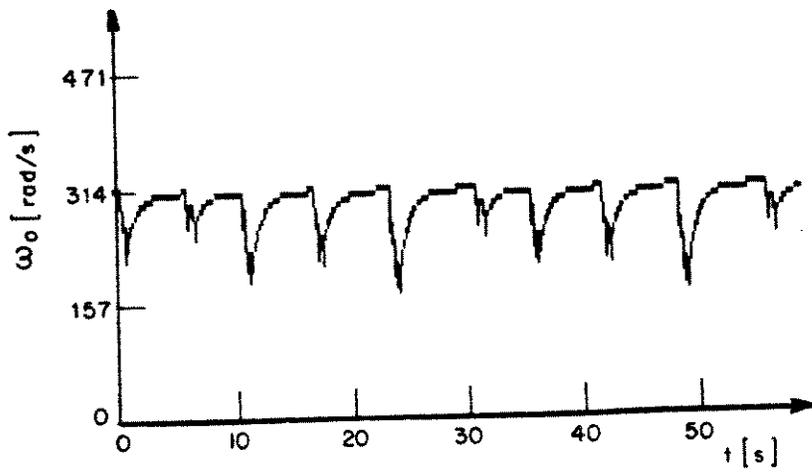


Fig. 7.3. Velocidade de saída com  $K_g = 5.2$ .

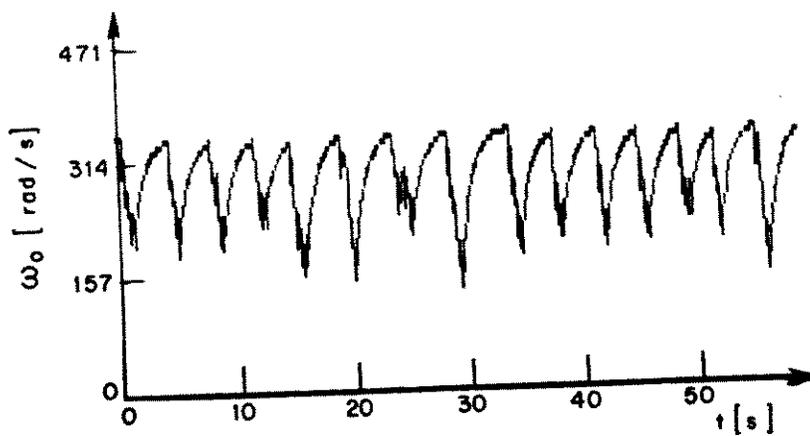


Fig. 7.4. Velocidade de saída com  $K_g = 6$ .

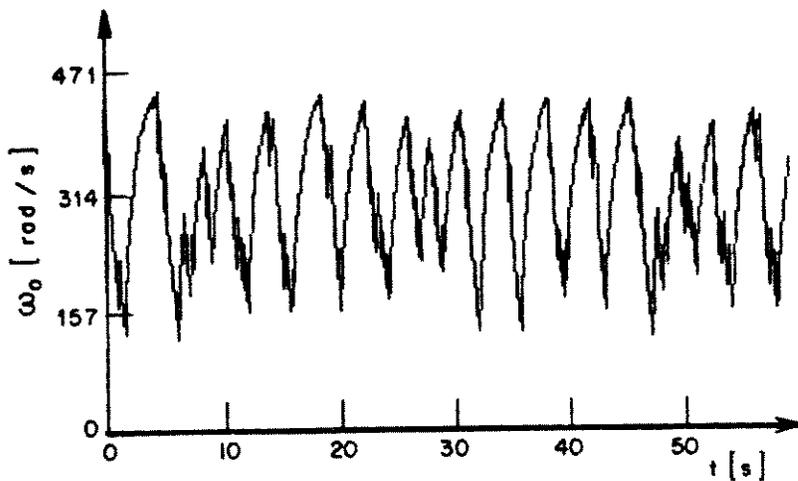


Fig. 7.5. Velocidade de saída com  $K_g = 8$ .

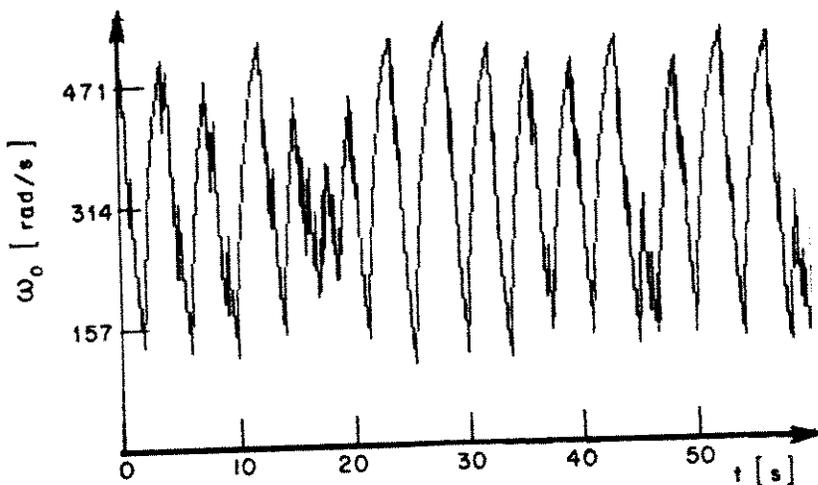


Fig. 7.6. Velocidade de saída com  $K_g = 10$ .

## 7.2. COMPORTAMENTO DE UM SISTEMA REAL

Qualitativamente, o comportamento da velocidade  $\omega_o(t)$  corresponde com o observado no sistema real, baseado no integrado CD4046B. No sistema real, implementado por P. de Campos [52], os valores dos parâmetros são  $\tau_m = 0.213[s]$ ,  $N = 0.1$  e  $\tilde{\omega}_{ref} = 200[rad/s]$ . O sistema implementado responde também a um aumento no ganho deslocando-se para a região de caos (Figs. 7.7 - 7.11).

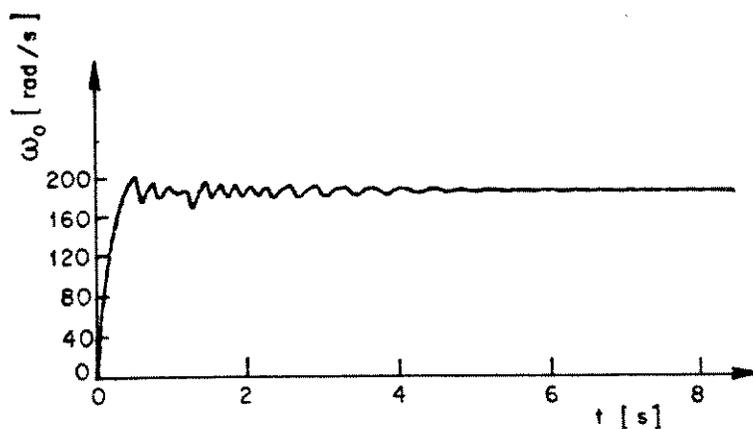


Fig. 7.7. Velocidade de saída com  $K_g = 1.5 K_T$  [52].

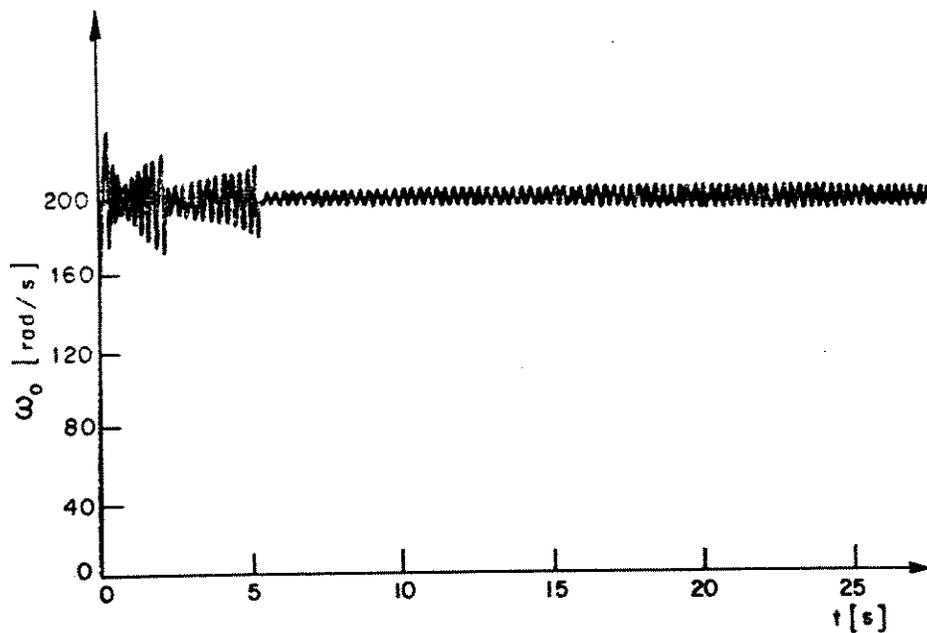


Fig. 7.8. Velocidade de saída com  $K_g = 2 K_T$  [52].

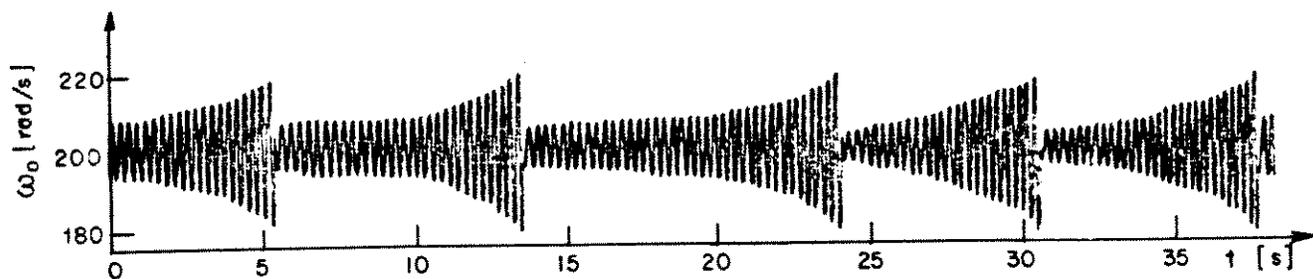


Fig. 7.9. Velocidade de saída com  $K_g = 2.5 K_T$  [52].

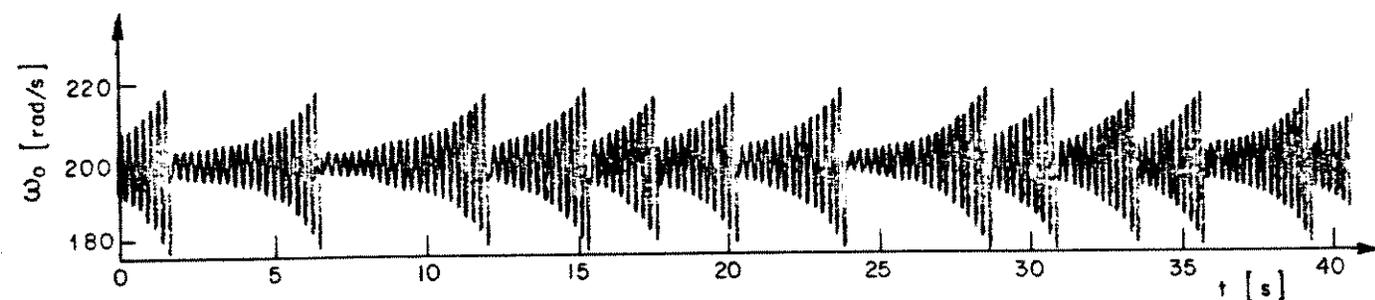


Fig. 7.10. Velocidade de saída com  $K_g = 2.7 K_T$  [52].

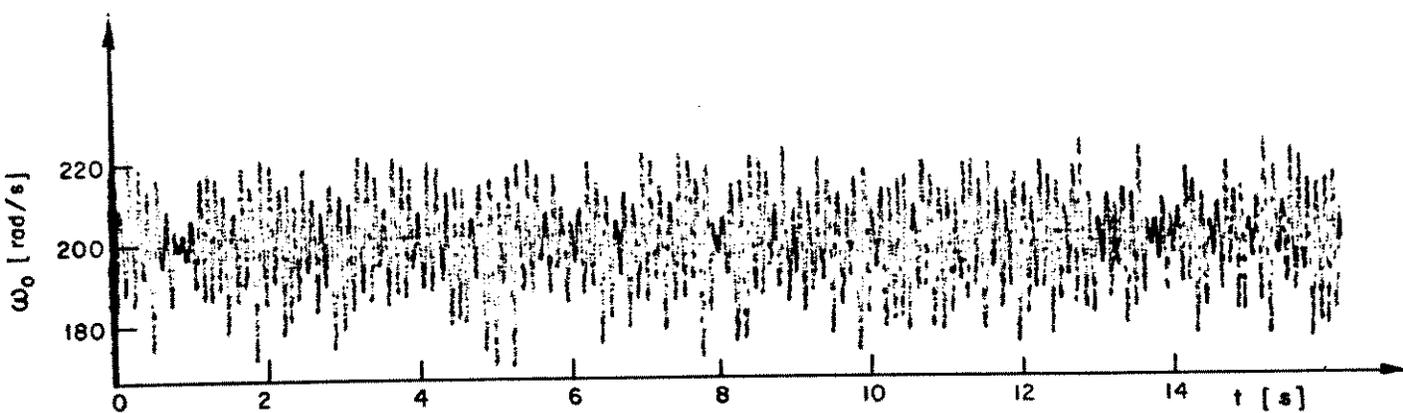


Fig. 7.11. Velocidade de saída com  $K_g = 8.5 K_T$  [52].

### 7.3. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS

O método de Melnikov permite obter, a partir de um modelo contínuo do PLL de 2ª ordem, uma expressão explícita para a região de caos homoclínico, no caso em que o sistema tem poucas perdas. No caso de perdas grandes, a região deve ser obtida numericamente para cada conjunto de valores dos parâmetros. Isto sugere que no caso não Hamiltoniano poderia ser mais simples a determinação da região de caos se fosse utilizado um outro método, como por exemplo o cálculo do maior expoente de Lyapunov para cada conjunto de valores dos parâmetros.

A simulação mostra, qualitativamente, coerência com os resultados teóricos, segundo os quais sempre é possível atingir uma região de comportamento caótico se o ganho for aumentado a partir de um valor baixo. O comportamento de um sistema real confirma também a previsão teórica. Tanto a simulação, quanto o sistema implementado, podem ser utilizados na determinação experimental das regiões de comportamento caótico. Uma sugestão para trabalho futuro com sistemas de dimensão maior, submetidos a vários tipos de perturbação simultaneamente, é utilizar a simulação em conjunto com ferramentas da teoria ergódica, para estes casos mais complexos, como também no caso não Hamiltoniano.

### 7.4. RESUMO

A parte I abordou os conceitos básicos sobre sistemas dinâmicos e os principais teoremas que permitem determinar a existência de caos em sistemas com modelos contínuos ou discretos.

Na parte II descreveu-se o sistema PLL-dual e escolheu-se um método adequado para determinar a região de comportamento caótico. O sistema foi modelado como uma equação diferencial contínua de ordem 2, com uma perturbação periódica. Escolheu-se o método de Melnikov. Por este método foi possível obter explicitamente a região de comportamento caótico para o caso em que o sistema tem poucas perdas. No caso em que o sistema tem perdas grandes, foi obtida uma expressão em função de integrais que devem ser avaliadas numericamente para cada valor do parâmetro.

Os resultados teóricos foram discutidos e comparados qualitativamente com o comportamento de uma simulação analógica e com o comportamento de um sistema real; observou-se uma região de comportamento caótico para determinados valores do ganho de malha, segundo o previsto na análise teórica.

As contribuições da tese, na parte I, são as descrições das principais técnicas de análise de comportamento caótico, em forma orientada à engenharia (especificamente para a área de controle), em um nível matemático intermédio. Os conceitos, teoremas e relações entre eles foram ilustrados através de gráficos, exemplos e comentários. Foi proposta, no capítulo de teoria ergódica, uma prova alternativa para as relações de desigualdade entre as dimensões de Renyi.

Na parte II, são contribuições originais o modelo proposto para o sistema PLL submetido a perturbações periódicas provenientes do encoder ótico, bem como a simulação analógica do sistema. O método de Melnikov foi aplicado de forma similar à proposta na literatura para sistemas demoduladores de FM, mas dadas as características particulares do sistema analisado, foi possível reduzir o tamanho das expressões envolvidas.

## 7.5. PERSPECTIVAS

Existem ainda muitas questões não resolvidas na teoria de caos. Alguns aspectos cuja pesquisa é relevante são: A determinação teórica de condições necessárias e suficientes para comportamento caótico, a partir do modelo de um sistema; a determinação teórica dos expoentes de Lyapunov; as relações entre as dimensões de Renyi e a dimensão de Lyapunov; o controle robusto de sistemas caóticos; a determinação do espaço ocupado pelos atratores e a sua base de atração.

No caso específico do sistema PLL-dual, é de interesse o estudo de sistemas de dimensão maior e da interação entre diferentes tipos de perturbação (considerando perturbações geradas por sinais chaveados). Para esses casos mais complexos, bem como para a determinação de condições necessárias e suficientes para comportamento

caótico, existem algumas técnicas que não tem sido aplicadas ainda e que poderiam ser úteis neste caso. Estas técnicas são: o critério algébrico de Ünal (que permite determinar condições necessárias e suficientes); os teoremas que podem ser aplicados a um modelo discreto do sistema (as quais foram descritas no Cap. 3); as técnicas numéricas (teoria ergódica, descrita no Cap. 4); a teoria da universalidade.

O estudo de estabilidade e bases de atração de sistemas não-lineares, e especificamente dos sistemas PLL, complementa o estudo de comportamento caótico. Um estudo mais abrangente destes tópicos, incluindo tanto estabilidade quanto caos, permitiria obter uma visão mais completa dos diferentes regimes de comportamento de um sistema dinâmico não-linear, e em particular, do sistema PLL-dual.

## APÊNDICE A

### O PLL UTILIZADO COMO DEMODULADOR FM ([2], [44], [48])

#### A.1. O PLL UTILIZADO COMO DEMODULADOR FM

O sinal FM (modulado em frequência), recebido na entrada do demodulador, tem uma frequência  $\omega_1$  da forma

$$\omega_1 = \omega_c + k_f f(t) , \quad (\text{A.1})$$

onde  $\omega_c$  é a frequência angular portadora e  $f(t)$  é o sinal em banda básica.

Integrando (A.1),

$$\theta_1 = \omega_c t + k_f \int f(t) dt + \theta_0 . \quad (\text{A.2})$$

Seja

$$\theta_{in}(t) = k_f \int f(t) dt + \theta_0 , \quad (\text{A.3})$$

então

$$\theta_1 = \omega_c t + \theta_{in}(t) . \quad (\text{A.4})$$

Assumindo  $y_1$ , o sinal de entrada, da forma

$$y_1 = A \text{ sen } \theta_1 , \quad (\text{A.5})$$

temos que

$$y_1 = A \text{ sen } [\omega_c t + \theta_{in}(t)] ,$$

$$y_1 = A \text{ sen } [2\pi f_c t + \theta_{in}(t)] , \quad (\text{A.6})$$

onde  $f_c$  é a frequência portadora.

O sinal em banda base é recuperado derivando  $\theta_{in}(t)$ ; da eq. (A.3),

$$\frac{d\theta_{in}}{dt} = k_f f(t). \quad (\text{A.7})$$

Seja  $f(t)$  um sinal senoidal de frequência  $f_m$  tal que a desviação máxima de frequência angular de  $\omega_i$  com relação a  $\omega_c$  (frequência de portadora) seja  $M$ , isto é,

$$\frac{d\theta_{in}}{dt} = M \text{ sen } (2\pi f_m t). \quad (\text{A.8})$$

De (A.8),

$$\left(\frac{d\theta_{in}}{dt}\right)_{\text{máx}} = M , \quad (\text{A.9})$$

e

$$\left(\frac{d\theta_{in}}{dt}\right)_{\text{min}} = -M , \quad (\text{A.10})$$

ou seja, a frequência angular instantânea de  $y_1$  oscila entre  $(\omega_c - M)$  e  $(\omega_c + M)$ .

A estrutura do PLL, utilizado como demodulador do sinal descrito pelas equações anteriores é indicada na Fig. A.1.

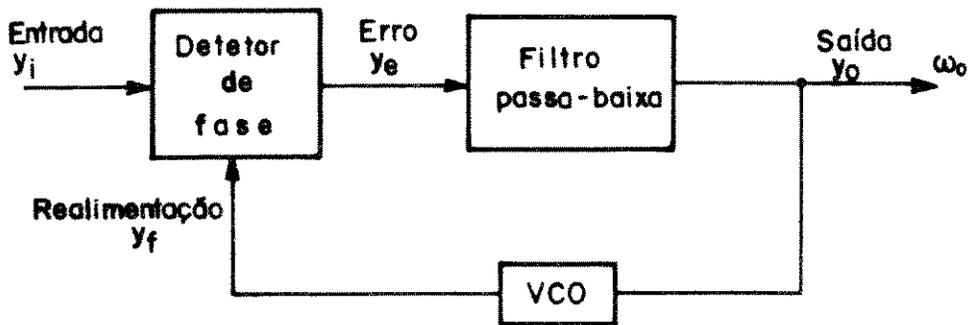


Fig. A.1 - Estrutura do PLL utilizado como demodulador de FM.

A frequência angular de oscilação do VCO é dada pela relação

$$\omega_f = \frac{d\tilde{\theta}_f}{dt} = K_o y_o(t), \quad (\text{A.11})$$

onde  $\tilde{\theta}_f(t) = \theta_f(t) - \omega_o t$ ,  $\theta_f$  é a fase de  $y_f$ ,  $K_o$  é o ganho do VCO e  $\omega_o$  é a frequência angular central do VCO ("free-running angular frequency").

Se o sinal modulante  $f(t)$  tiver mais de uma frequência, sendo  $f_m$  a máxima frequência do conteúdo harmônico de  $f(t)$ , e  $f_m \ll f_c$  (onde  $f_c$  é a frequência da portadora), e se  $M$  não for muito grande, então a fase da saída do VCO segue a fase do sinal de entrada  $y_i$ , isto é,

$$2\pi f_c t + \theta_{in}(t) = 2\pi f_o t + \tilde{\theta}_f(t), \quad (\text{A.12})$$

e portanto

$$\tilde{\theta}_f(t) = 2\pi \Delta f t + \theta_{in}(t), \quad (\text{A.13})$$

onde  $\Delta f := f_c - f_o$ .

O sinal modulante é recuperado então a partir de  $y_o$ ; de (A.11), e derivando (A.13) com relação a  $t$ ,

$$y_o(t) = \frac{1}{k_o} \frac{d\tilde{\theta}_f}{dt} = \frac{1}{k_o} \left( 2 \pi \Delta f + \frac{d\theta_{in}}{dt} \right). \quad (\text{A.14})$$

Como de (A.7),  $d\theta_{in}/dt$  é próprio sinal modulante, então  $y_o(t)$  representa o sinal modulante que deseja-se recuperar, mais um valor constante. Esta componente c.c. é posteriormente eliminada com um filtro.

## A.2. ANÁLISE DE ERRO EM REGIME

O erro médio de frequência é zero em um PLL encravado (em "lock"); para cada ciclo da entrada existe o ciclo correspondente na saída. Consideramos, então, o erro de fase na malha em lock.

Para utilizar o teorema do valor final, aplicado sobre a transformada de Laplace do erro de fase, devemos linearizar o modelo do PLL, como ilustra a Fig. A.2.

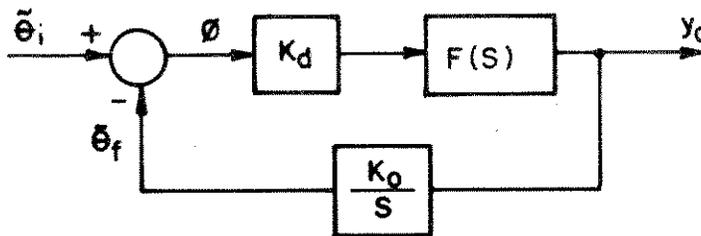


Fig. A.2 - Modelo de fase linearizado do PLL.

Na Fig. A.2,  $K_d$  é a constante que representa o detetor de fase linearizado,  $F(s)$  é a função de transferência do filtro,

$\tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \omega_o t$ ,  $\tilde{\theta}_f = \theta_f - \omega_o t$  e  $\varnothing = \tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_f = \theta_1 - \theta_f$ , onde  $\varnothing$  é o erro de fase.

Então o erro de fase, em regime, é dado por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varnothing(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 \tilde{\theta}_1(s)}{s + K_o K_d F(s)} \quad (\text{A.15})$$

O erro em regime resultante de um degrau de magnitude  $\Delta\theta$  na fase do sinal de entrada é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varnothing(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \Delta\theta}{s + K_o K_d F(s)} \quad (\text{A.16})$$

Como  $F(s)$  é um filtro passa baixa, assumimos  $F(0) \neq 0$ , e portanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varnothing(t) = 0, \quad (\text{A.16})$$

ou seja, não existe qualquer erro de fase, em regime, como resultado de uma mudança na fase de entrada.

O erro em regime resultante de um degrau de magnitude  $\Delta\omega$  na frequência do sinal de entrada é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varnothing(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{s + K_o K_d F(s)} = \frac{\Delta\omega}{K_o K_d F(0)} \quad (\text{A.17})$$

Como normalmente a frequência do sinal de entrada,  $\omega_c$ , não é exatamente igual à frequência central do VCO, mas existe uma diferença  $\Delta\omega$  entre ambas, há então um erro de fase resultante, chamado de **erro de velocidade** ( $\varnothing_v$ ) ou **erro de fase estático**.

De (A.17), este erro é

$$\phi_v = \frac{\Delta\omega}{K_v}, \quad (\text{A.18})$$

onde  $K_v := K_o K_d F(0)$  é conhecida como **constante de velocidade** ou **ganho de malha c.c.**

### A.3. DEFINIÇÕES

**pull-out frequency ( $\Delta\omega_{po}$ )** : amplitude máxima do degrau de frequência no sinal de entrada tal que a malha não perde nenhum ciclo, mas permanece sempre em "lock".

**pull-in range ( $\Delta\omega_p$ )** : máxima diferença inicial entre a frequência do sinal de entrada e a frequência do VCO, tal que é possível a captura.

## APÊNDICE B - CÁLCULO DE INTEGRAIS DE MELNIKOV

### B.1 - CASO HAMILTONIANO

$$d(\hat{\psi}) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [-\pi^2\beta \cos^2 t \pm \pi\beta\sigma \cos t \pm \pi m\beta \operatorname{sen} \Omega(t+\hat{\psi}) \cos t \pm \pi m\Omega \cos \Omega(t+\hat{\psi}) \pm \pi m\Omega \cos \Omega(t+\hat{\psi}) \cos t] dt. \quad (\text{B.1})$$

Sejam

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\pi^2\beta \cos^2 t, \quad (\text{B.2})$$

$$I_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pm \pi\beta\sigma \cos t dt, \quad (\text{B.3})$$

$$I_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pm \pi m\beta \operatorname{sen} \Omega(t+\hat{\psi}) \cos t dt \quad (\text{B.4})$$

e

$$I_4 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pm \pi m\Omega \cos \Omega(t+\hat{\psi}) \cos t dt. \quad (\text{B.5})$$

Então

$$I_1 = -\pi^2\beta \left( \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t + \frac{t}{2} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{\pi^3\beta}{2}, \quad (\text{B.6})$$

$$I_2 = \pm \pi \beta \operatorname{sen} t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pm 2\pi \beta \sigma, \quad (\text{B. 7})$$

$$I_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pm \pi m \beta [(\operatorname{sen} \Omega t + \cos \hat{\Omega} \psi + \operatorname{sen} \hat{\Omega} \psi \cos \Omega t) \cos t] dt, \quad (\text{B. 8})$$

$$I_3 = \pm \pi m \beta \cos \hat{\Omega} \psi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} \Omega t \cos t dt \pm \pi m \beta \operatorname{sen} \hat{\Omega} \psi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \Omega t \cos t dt. \quad (\text{B. 9})$$

Considerando que a função  $\operatorname{sen} \Omega t \cos t$  é ímpar, a primeira integral é zero. Então

$$I_3 = \pm \frac{\pi}{2} m \beta \operatorname{sen} \hat{\Omega} \psi \left[ \frac{\operatorname{sen} (1+\Omega)t}{1+\Omega} + \frac{\operatorname{sen} (1-\Omega)t}{1-\Omega} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}, \quad (\text{B. 10})$$

$$I_3 = \pm \pi m \beta \operatorname{sen} \hat{\Omega} \psi \left[ \frac{\operatorname{sen} ((1+\Omega)\pi/2)}{1+\Omega} + \frac{\operatorname{sen} ((1-\Omega)\pi/2)}{1-\Omega} \right] \quad (\text{B. 11})$$

$$I_3 = \pm \pi m \beta \operatorname{sen} \hat{\Omega} \psi \left[ \frac{\operatorname{sen} (\Omega \pi/2) \cos \pi/2 + \cos (\Omega \pi/2) \operatorname{sen} \pi/2}{1+\Omega} + \frac{\operatorname{sen} \pi/2 \cos (\Omega \pi/2) - \operatorname{sen} (\Omega \pi/2) \cos \pi/2}{1-\Omega} \right], \quad (\text{B. 12})$$

$$I_3 = \pm \pi m \beta \operatorname{sen} \hat{\Omega} \psi \left[ \frac{\cos (\Omega \pi/2)}{1+\Omega} + \frac{\cos (\Omega \pi/2)}{1-\Omega} \right], \quad (\text{B. 13})$$

$$I_3 = \pm \pi m \beta \operatorname{sen} \hat{\Omega} \psi \cos (\Omega \pi/2) + \frac{2}{1-\Omega^2}, \quad (\text{B. 14})$$

donde

$$I_3 = \pm 2\pi \frac{m\beta}{1-\Omega^2} \cos(\Omega \pi/2) \operatorname{sen} \hat{\Omega}\psi. \quad (\text{B.15})$$

Para  $I_4$ , de (B.5) temos

$$I_4 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pm \pi m \Omega [(\cos \Omega t \cos \hat{\Omega}\psi - \operatorname{sen} \Omega t \operatorname{sen} \hat{\Omega}\psi) \cos t] dt, \quad (\text{B.16})$$

$$I_4 = \pm \pi m \Omega \cos \hat{\Omega}\psi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \Omega t \cos t dt \mp \pi m \Omega \operatorname{sen} \hat{\Omega}\psi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} \Omega t \cos t dt, \quad (\text{B.17})$$

$$I_4 = \pm \frac{\pi}{2} m \Omega \cos \hat{\Omega}\psi \left[ \frac{\operatorname{sen} (\Omega+1)t}{\Omega+1} + \frac{\operatorname{sen} (\Omega-1)t}{\Omega-1} \right] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \quad \Omega \neq 1;$$

$$I_4 = \pm \pi m \Omega \cos \hat{\Omega}\psi \left[ \frac{\operatorname{sen} (\Omega \pi/2) \cos \pi/2 + \operatorname{sen} \pi/2 \cos (\Omega \pi/2)}{\Omega+1} + \frac{\operatorname{sen} (\Omega \pi/2) \cos \pi/2 - \cos (\Omega \pi/2) \operatorname{sen} \pi/2}{\Omega-1} \right], \quad (\text{B.18})$$

$$I_4 = \pm \pi m \Omega \cos \hat{\Omega}\psi \left[ \frac{\cos (\Omega \pi/2)}{1+\Omega} + \frac{\cos (\Omega \pi/2)}{1-\Omega} \right], \quad (\text{B.19})$$

donde

$$I_4 = \pm 2\pi \frac{m\Omega}{1-\Omega^2} \cos(\Omega \pi/2) \cos \hat{\Omega}\psi, \quad \Omega \neq 1. \quad (\text{B.20})$$

Então

$$d(\hat{\psi}) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

$$d(\hat{\psi}) = -\frac{\pi^3 \beta}{2} \pm 2\pi \beta \sigma \pm 2\pi \frac{m\beta}{1-\Omega^2} \cos(\Omega \pi/2) \operatorname{sen} \Omega \hat{\psi} \\ \pm 2\pi \frac{m\Omega}{1-\Omega^2} \cos(\Omega \pi/2) \cos \Omega \hat{\psi}, \quad (\text{B. 21})$$

$$d(\hat{\psi}) = -\frac{\pi^3 \beta}{2} \pm 2\pi \beta \sigma \pm \frac{2\pi m}{1-\Omega^2} \cos(\Omega \pi/2) (\beta \operatorname{sen} \Omega \hat{\psi} + \Omega \cos \Omega \hat{\psi}), \quad (\text{B. 22})$$

$$d(\hat{\psi}) = -\frac{\pi^3 \beta}{2} \pm 2\pi \beta \sigma \pm \frac{2\pi m \sqrt{\beta^2 + \Omega^2}}{1-\Omega^2} \cos(\Omega \pi/2) \left( \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \Omega^2}} \operatorname{sen} \Omega \hat{\psi} \right. \\ \left. + \frac{\Omega}{\sqrt{\beta^2 + \Omega^2}} \cos \Omega \hat{\psi} \right), \quad (\text{B. 23})$$

donde

$$d(\hat{\psi}) = -\frac{\pi^3 \beta}{2} \pm 2\pi \beta \sigma \pm \frac{2\pi m \sqrt{\beta^2 + \Omega^2}}{1-\Omega^2} \cos(\Omega \pi/2) \operatorname{sen}(\Omega \hat{\psi} + \theta), \quad (\text{B. 24})$$

com

$$\theta = \arctan\left(\frac{\Omega}{\beta}\right), \quad \Omega \neq 1.$$

## B.2. CASO NÃO HAMILTONIANO. PROVA DO TEOREMA 6.1.

A integral de Melnikov (6.89) é equivalente a

$$d(\hat{\psi}) = \beta \Delta \sigma I_3 + m \sqrt{(\beta^2 + \Omega^2)(I_1^2(\Omega) + I_2^2(\Omega))} \operatorname{sen}(\Omega \hat{\psi} + \theta), \quad (\text{B. 25a})$$

onde

$$\theta = \arctan \left( \frac{\beta I_1(\Omega) + \Omega I_2(\Omega)}{\beta I_2(\Omega) - \Omega I_1(\Omega)} \right). \quad (\text{B.25b})$$

Igualando a zero a expressão (B.25a), obtemos

$$\text{sen}(\Omega\hat{\psi} + \theta) = \frac{-\beta\Delta\sigma I_3}{m\sqrt{(\beta^2 + \Omega^2) (I_1^2(\Omega) + I_2^2(\Omega))}}, \quad (\text{B.26})$$

expressão que é válida se são satisfeitas as condições seguintes:

- a)  $I_1(\Omega)$  e  $I_2(\Omega)$  são finitas e não são simultaneamente iguais a zero.
- b)  $I_3$  é finita.

$$\text{c) } \left| \frac{\beta\Delta\sigma I_3}{m\sqrt{(\beta^2 + \Omega^2) (I_1^2(\Omega) + I_2^2(\Omega))}} \right| \leq 1. \quad (\text{B.27})$$

A tangência homoclínica (zeros múltiplos) deve ser excluída da condição c), de forma que, com a eq. (6.73b),

$$\frac{d}{d\hat{\psi}} d(\hat{\psi}) \neq 0 ;$$

obtem-se, de (6.93a),

$$m\Omega \sqrt{(\beta^2 + \Omega^2) (I_1^2(\Omega) + I_2^2(\Omega))} \cos(\Omega\hat{\psi} + \theta) \neq 0. \quad (\text{B.28})$$

Por hipótese,  $m \neq 0$ ,  $\Omega \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$ ,  $I_1^2(\Omega) + I_2^2(\Omega) \neq 0$  (condição a), donde (B.28) é satisfeita se

$$\cos(\Omega\hat{\psi} + \theta) \neq 0, \quad (\text{B.29})$$

ou, alternativamente,

$$|\text{sen}(\hat{\Omega}\psi + \theta)| \neq 1. \quad (\text{B. 30})$$

Logo, a condição c), excluindo a tangência homoclínica, é a desigualdade estrita

$$\left| \frac{-\beta\Delta\sigma I_3}{m\sqrt{(\beta^2 + \Omega^2) (I_1^2(\Omega) + I_2^2(\Omega))}} \right| < 1. \quad (\text{B. 31})$$

A seguir, é preciso provar que as integrais (6.92) têm valores finitos. Sabe-se que  $y_h(t)$  é uma função limitada com  $y_h(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \pm \infty$ , e deve-se provar que  $y_h(t) \exp(p(t)) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \pm \infty$ , com a rapidez necessária para que as integrais (6.92) sejam finitas.

Para  $t \rightarrow \pm \infty$ , a razão de aproximação de  $y_h(t)$  ao ponto de sela  $x_s$  é dada pelos autovalores da linearização do campo vetorial do sistema não perturbado no ponto de sela  $x_s = (\phi_s, 0)$ , onde  $\phi_s = h^{-1}(\beta\sigma_c)$ , isto é, os autovalores de  $Df(x_s)$ , onde

$$\dot{u} = Df(x_s) u \quad (\text{B. 32})$$

é a linearização do sistema não perturbado no ponto de sela. Os autovalores correspondem às duas raízes  $\lambda_s < 0$  e  $\lambda_u > 0$  da equação característica  $|Df(x_s) - \lambda I| = 0$ , onde

$$Df(x_s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -h'(\phi_s) & -\beta - (2\varphi - \beta) h'(\phi_s) \end{bmatrix}. \quad (\text{B. 33})$$

Sejam

$$a' = -h'(\phi_s), \quad (\text{B. 34a})$$

$$b = -[\beta + (2\varphi - \beta) h'(\phi_s)], \quad (\text{B. 34b})$$

então da equação característica

$$\lambda(\lambda - b) - a' = 0 \quad (\text{B. 35})$$

com solução

$$\lambda = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a'}}{2} \quad (\text{B. 36})$$

obtém-se os autovalores

$$\lambda_u = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a'}}{2} \quad (\text{B. 37a})$$

$$\lambda_s = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4a'}}{2} \quad (\text{B. 37b})$$

Para  $t \rightarrow \infty$ ,  $y_h(t)$  pode ser aproximado por

$$y_h(t) = K_1 e^{\lambda_u t} \quad (\text{B. 38a})$$

e para  $t \rightarrow -\infty$ , a aproximação para  $y_h(t)$  é

$$y_h(t) = K_2 e^{\lambda_s t} \quad (\text{B. 38b})$$

Considerando agora o comportamento de  $p(t)$  para  $t \rightarrow \pm \infty$ , com

$$p(t) = \beta t + (2\varphi - \beta) \int_0^t h'(\phi_h(s)) ds, \quad (\text{6. 89b})$$

para  $s \rightarrow \infty$ ,  $\phi_h(s) \cong \phi_s$ , donde  $h'(\phi_h(s)) \cong h'(\phi_s) = -a'$ . Como  $h'(\phi_h(s))$

é limitada para todo  $s$ , a integral  $\int_0^t h'(\phi_h(s)) ds$  tem um valor

finito  $K_3$ , onde  $t_c$  é o tempo tal que  $\phi_s$  é uma boa aproximação para  $\phi_h(s)$  para  $|s| > t_c$ .

Então

$$p(t) = \beta t + (2\varphi - \beta) (K_3 - a'(t - t_c)), \quad (\text{B. 39})$$

$$p(t) = (\beta - (2\varphi - \beta) a') t + K_4, \quad (\text{B. 40a})$$

onde 
$$K_4 = (2\varphi - \beta) K_3 + a' (2\varphi - \beta) t_c. \quad (\text{B. 40b})$$

De (B.38) e (B.40) nota-se que  $y_h(t) \exp(p(t))$  é da ordem de  $\exp(\lambda_s + \beta - (2\varphi - \beta) a') t$  para  $t \rightarrow +\infty$  e é da ordem de  $\exp(\lambda_u + \beta - (2\varphi - \beta) a') t$  para  $t \rightarrow -\infty$ . Logo,  $y_h(t) \exp(p(t))$  tende a zero exponencialmente se  $n_1 \equiv \lambda_s + \beta - (2\varphi - \beta) a' < 0$  e  $n_2 \equiv \lambda_u + \beta - (2\varphi - \beta) a' > 0$  para  $t \rightarrow \pm\infty$ . Então, as integrais (6.92) convergem a um valor finito se  $n_1 < 0$  e  $n_2 > 0$ .

A seguir, prova-se que as integrais (6.92a) e (6.92b) não são ambas iguais a zero, com a possível exceção de um conjunto discreto de frequências. Temos que

$$I_2(\Omega) - j I_1(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y_h(t) e^{p(t)} (\cos \Omega t - j \sin \Omega t) dt, \quad (\text{B. 41})$$

$$I_2(\Omega) - j I_1(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y_h(t) e^{p(t)} e^{-j\Omega t} dt, \quad (\text{B. 42})$$

$$I_2(\Omega) - j I_1(\Omega) = \mathcal{F} (y_h(t) e^{p(t)}), \quad (\text{B. 43})$$

ou seja,  $I_2(\Omega) - j I_1(\Omega)$  representa a transformada de Fourier de

$y_h(t) e^{p(t)}$ . Como  $y_h(t) e^{p(t)}$  não é idêntica a zero, a transformada de Fourier não é zero para algum intervalo de  $\Omega$ . Isto significa que  $I_1(\Omega)$  e  $I_2(\Omega)$  não são ambos zero para algum intervalo de  $\Omega$ .

Logo, o teorema 6.1 está provado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] E.S.N. Prasad et al., "High Performance DC Motor Drive with Phase-Locked Loop Regulation", IEEE Trans. Ind. Appl., vol. IA-21, nº 1, pp. 192-201, Jan-Feb 1985.
- [2] T.S. Endo, L.O. Chua, "Chaos From Phase-Locked Loops", IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 35, nº 8, pp. 987-1003, Ago. 1988.
- [3] C.P. Bottura, Y. Burian e A.G.B. Palhares, "Controle Pulsado com Modulação em Largura de Pulso de Sistema Eletrohidráulico", Anais do 2º Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, vol. C, pp. 667-680, Rio de Janeiro, 1973.
- [4] A.G. Badan Palhares, "Controle por Realimentação de Estado e Modulação em Largura de Pulso de um Servo - Posicionador Eletrohidráulico: 'Análise das Oscilações Instáveis'", Tese de Doutorado, FEC - UNICAMP, Campinas, 1980.
- [5] A.G. Badan Palhares, C.P. Bottura e J.B.R. do Val, "Oscilações Caóticas e Subharmônicas em Servomecanismo Eletrohidráulico Controlado por MLP e Realimentação de Estado", Anais do Quarto Congresso Brasileiro de Automática, Campinas, Brasil, pp. 406-413, 1982.
- [6] A.F.R. Araújo, "Caos em Sistemas de Controle com Modelos Discretos", Tese de Mestrado, FEC-UNICAMP, Campinas, Brasil, 1988.
- [7] M. Lockwood, "Simulation of Unstable Oscillations in PWM Variable Speed Drives", IEEE Trans. Ind. Appl., vol. 24, nº 1, pp. 137-141, Jan. - Feb. 1988.
- [8] A.G. Badan Palhares e A.F.R. Araújo, "Chaos from PWM Electrohydraulic Servo", Annals of 11<sup>th</sup> IFAC World Congress, vol. 6, pp. 123-128, Tallinn, Estonia, USSR, August 13-17, 1990.

- [9] D.F. Geiger, "Phaselock Loops for DC Motor Speed Control", Ed. Wiley & Sons, USA, 1981.
- [10] M. Hénon, "A Two-Dimensional Mapping with a Strange Attractor", in Commun. Math. Phys., pp. 69-77, Ed. Springer-Verlag, 1976.
- [11] J.P. Eckmann e D. Ruelle, "Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors", Rev. Mod. Phys., vol. 57, nº 3, Part I, pp. 617-656, Jul. 1985.
- [12] T. Li e J.A. Yorke, "Period Three Implies Chaos", Am. Math. Monthly, vol. 82, pp. 985- , 1975.
- [13] T.S. Parker e L.O. Chua, "Chaos: A Tutorial for Engineers", Proc. IEEE, vol. 75, nº 8, pp. 982-1008, Ago. 1987.
- [14] S. Smale, "Differential Dynamical Systems", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 73, pp. 747-817, 1967.
- [15] A.I. Mees, C. Sparrow, "Some Tools for Analyzing Chaos", Proc. IEEE, vol. 75, nº 8, pp. 1058-1070, Ago. 1987.
- [16] C.A. Desoer, "Notes for a Second Course of Linear Systems", Ed. D. Van Nostrand, USA, 1970.
- [17] J. Guckenheimer e P. Holmes, "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields", Ed. Springer-Verlag, USA, 1983.
- [18] A.I. Mees, "Dynamics of Feedback Systems", Ed. Wiley, Inghilterra, 1981.
- [19] T.L. Saaty, J. Bram, "Nonlinear Mathematics", Ed. McGraw-Hill, USA, 1964.
- [20] M. Odinyec e L.O. Chua, "Josephson Junction Circuit Analysis Via Integral Manifolds", IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-29, pp. 308-320, Maio 1983.

- [21] E.N. Lorenz, "Deterministic Nonperiodic Flow", J. Atmos. Sci., vol. 20, pp. 130-141, 1963.
- [22] T.Y. Li et al. "Odd Chaos", Phys. Lett., vol. 87A, n° 6, pp. 271-273, Jan. 1982.
- [23] F.R. Marotto, "Snap-Back Repellers Imply Chaos in  $\mathbb{R}^n$ ", J. Math. Anal. Appl., vol. 63, pp. 199-223, 1978.
- [24] F.R. Marotto, "Perturbations of Stable and Chaotic Difference Equations", J. Math. Anal. Appl., vol. 72, pp. 716-729, 1979.
- [25] J.L. Kaplan e F.R. Marotto, "Chaotic Behavior in Dynamical Systems", Proceedings of an International Conference on Nonlinear Systems and Applications, Univ. of Texas at Arlington, USA, 19-23, pp. 199-210, 1976.
- [26] K. Shiraiwa, M. Kurata, "A Generalization of a Theorem of Marotto", Prod. Japan Acad., vol. 55, ser. A, n° 8, pp. 286-289, 1979.
- [27] B.S. Du, "Topological Entropy and Chaos of Interval Maps", Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, vol. 11, n° 1, pp. 105-114, 1987.
- [28] Y. Oono, Prog. Theor. Phys., vol. 59, pp. 1028- , 1978.
- [29] T. Ushio e K. Hirai, "Chaos in Non-Linear Sampled-Data Control Systems", Int. J. Control, vol. 38, n° 5, pp. 1023-1033, 1983.
- [30] T. Ushio e K. Hirai, "Chaotic Behavior in Piecewise-Linear Sampled-Data Control Systems", Int. J. Non-Linear Mechanics, vol. 20, n° 5/6, pp. 493-506, 1985.
- [31] M. Hata, "Euler's Finite Difference Scheme and Chaos in  $\mathbb{R}^n$ ", Proc. Jap. Acad., vol. 58, Ser. A, pp. 286-289, 1980.
- [32] J.D. Farmer et al., "The Dimension of Chaotic Attractors", Physica, vol. 7D, pp. 153-180, 1983.

- [33] P.W. Miloni et al., "Chaos in Laser-Matter Interactions", World Scientific Lecture Notes in Physics, vol. 6, pp. 92-107, World Scientific, 1987.
- [34] A.N. Kolmogorov, "A New Invariant for Transitive Dynamical Systems", Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 119, pp. 861-864, 1958.
- [35] A. Renyi, Acta Mathematica (Hungria) vol. 10, pp. 193-, 1959.
- [36] P. Grassberger e I. Procaccia, "Measuring the Strangeness of Strange Attractors", Physica, vol. D9, pp. 189- , 1983.
- [37] A. Renyi, "Probability Theory", Ed. North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [38] C. Beck, "Upper and Lower Bounds on the Renyi Dimensions and the Uniformity of Multifractals", Physica D, vol. 41, pp. 67-78, 1990.
- [39] P. Frederickson et al., "The Lyapunov Dimension of Strange Attractors", J. Diff. Eq., vol. 49, pp. 185-207, 1983.
- [40] F. Takens, "Detecting Strange Attractors in Turbulence", in Warwick 1980 Lecture Notes in Mathematics, vol. 898, Berlin, W. Germany, Ed. Springer, pp. 366-381, 1981.
- [41] A. Wolf et al., "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series", Physica, vol. 16D, pp. 285-317, 1985.
- [42] G. Benettin et al., "Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems: A Method for Computing All of Them", Meccanica, vol. 15, pp. 9- , 1980.
- [43] I. Shimada e T. Nagashima, "A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems", Prog. Theor. Phys., vol. 61, pp. 1605- , 1979.
- [44] A. Blanchard, "Phase-Locked Loops. Application to Coherent Receiver Design", Ed. J. Wiley & Sons, USA, 1976.

- [45] National Semiconductor Corporation, CMOS Databook, USA.
- [46] Motorola Semiconductor Products Inc., CMOS/NMOS Special Functions Databook, USA.
- [47] P.R.B. de Campos, comunicação verbal baseada no trabalho "Controle de Velocidade de Motor DC Através de um Controlador PLL-Dual", Tese de Mestrado, FEE-UNICAMP, 1991.
- [48] F.M. Gardner, "Phaselock Techniques", Ed. J. Wiley & Sons, USA, 1966.
- [49] J.C. Lee, C.K. Un, IEEE Trans. Comm., vol. COM-30, nº 10, pp. 2398- , 1982.
- [50] T. Endo, K. Tada, "Analysis of the Pull-In Range of Phase-Locked Loops by the Galerkin's Method", IECE Trans., vol. J68-B, pp. 236-243, 1985.
- [51] J.M.T. Thompson e H.B. Stewart, "Nonlinear Dynamics and Chaos", Ed. J. Wiley & Sons, USA, 1986.
- [52] P.R.B. de Campos, "Controle de Velocidade de Motor DC Através de um Controlador PLL-Dual", Tese de Mestrado, FEE-UNICAMP, 1991.