Alessandro Ferreira Alves
Licenciado em Matemática – UFU
Mestre em Matemática Pura – UNICAMP

Análise dos Emparelhamentos de Arestas de Polígonos Hiperbólicos para a Construção de Constelações de Sinais Geometricamente Uniformes

Tese de doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Telecomunicações e Telemática. Aprovada pela banca examinadora no dia 23 de Novembro de 2011.

Orientador: Reginaldo Palazzo Jr.

Campinas
2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

AL87a

Alves, Alessandro Ferreira
Análise dos emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólicos para a construção de constelações de sinais geometricamente uniformes / Alessandro Ferreira Alves. --Campinas, SP: [s.n.], 2011.

Orientador: Reginaldo Palazzo Júnior.
Tese de Doutorado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Grupos fuchsianos. 2. Geometria hiperbólica. 3. Riemann, Superfícies de. 4. Codificação. 5. Ladrilhamento (Matemática). I. Palazzo Júnior, Reginaldo. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Analysis of the pairing up of hyberbolical polygon sides for the construction of sign constellation geometrical uniform
Palavras-chave em Inglês: Fuchsian groups, Hyperbolic geometry, Riemann surfaces, coding, Tiling (Mathematics)
Área de concentração: Telecomunicações e Telemática
Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica
Banca examinadora: Carlos Eduardo Câmara, Edson Donizete de Carvalho, Ercílio Carvalho da Silva, Henrique Lazari
Data da defesa: 23-11-2011
Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidato: Alessandro Ferreira Alves

Data da Defesa: 23 de novembro de 2011

Título da Tese: "Análise dos Emparelhamentos de Arestas de Polígonos Hiperbólicos para a Construção de Constelações de Sinais Geometricamente Uniforme"

Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Júnior (Presidente): Reginaldo Palazzo Júnior

Prof. Dr. Carlos Eduardo Câmara:

Prof. Dr. Edson Donizete de Carvalho: Edson D. Carvalho

Prof. Dr. Ercilio Carvalho da Silva:

Prof. Dr. Henrique Lazari:

À minha esposa Daiana. Que esteve ao meu lado em todos os momentos, bons ou ruins e, que através de seu amor, dedicação e paciência me deu toda a inspiração e força para concluir este trabalho.

Ao meu filho Cauã, que com sua beleza, graça e inocência deu um novo sentido à minha vida.

Ao meu irmão Wesley, pelo constante apoio e amizade contínua.

Aos meus pais, Domingos e Sônia, que estão sempre me apoiando e amando. Sem eles nada aqui seria realidade.

Com muito amor, carinho e grandes recordações, aos meus avós Júlia, Cândido, Izoleta e Lázaro (todos *in memoria*).

Agradecimentos

Tenho certeza de que muitas pessoas participaram direta e indiretamente no desenvolvimento deste trabalho. Portanto, peço desculpas àqueles cujos nomes não foram mencionados.

Durante o desenvolvimento deste trabalho, pude contar com a atenção, a compreensão, a disponibilidade, a confiança e, principalmente a paciência do Professor Dr. Reginaldo Palazzo Júnior, que foi muito mais que um orientador sempre se dedicando nas orientações e me ajudando continuamente a concluir essa importante etapa de minha vida. Meu muito obrigado de coração.

À minha esposa Daiana e ao meu filho Cauã, pelo incentivo, apoio e presença em todos os sentidos.

À minha família, pais e irmãos, pelo incentivo e paciência durante o desenvolvimento deste trabalho. Se não fosse pelo apoio de vocês essa jornada em minha vida não seria uma realidade.

Aos demais familiares, pela amizade e apoio. Aos meus avós Júlia, Cândido, Izoleta e Lázaro (todos *in memoria*).

Ao meu amigo Diogo pela amizade e digitação deste trabalho.

Aos colegas e irmãos de trabalho, Wanderson e Nilton pelo contínuo apoio e companheirismo ao longo desses anos.

Ao companheirismo dos colegas com os quais convivi durante o programa de doutorado em Engenharia Elétrica.

Aos funcionários da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora pela disponibilidade e atenção dispensada ao trabalho.

Aos companheiros de República, Nelson, Edmilson e Edson, pelas conversas e jogos de baralho agradáveis.

A Deus pois sem Ele nada disso teria acontecido.

A felicidade não se resume na ausência de problemas, mas sim na sua capacidade de lidar com eles.

Albert Einstein

Resumo

Para projetarmos um sistema de comunicação digital em espaços hiperbólicos é necessário estabelecer um procedimento sistemático de construção de reticulados como elemento base para a construção de constelações de sinais. De outra forma, em codificação de canal é de fundamental importância a caracterização das estruturas algébrica e geométrica associadas a canais discretos sem memória. Neste trabalho, apresentamos a caracterização geométrica de superfícies a partir dos possíveis emparelhamentos das arestas do polígono fundamental hiperbólico com $3 \leq n \leq 8$ lados associado à superfície. Esse tratamento geométrico apresenta propriedades importantes na determinação dos reticulados hiperbólicos a serem utilizados no processo de construção de constelações de sinais, a partir de grupos fuchsianos aritméticos e da superfície de Riemann associada. Além disso, apresentamos como exemplo o desenvolvimento algébrico para a determinação dos geradores do grupo fuchsiano Γ_8 associado ao polígono hiperbólico P_8.

constelação de sinais, polígonos hiperbólicos, superfícies de Riemann, emparelhamentos, tesselações, grupos fuchsianos.

Abstract

In order to design a digital communication system in hyperbolic spaces is necessary to establish a systematic procedure of constructing lattices as the basic element for the construction of the signal constellations. On the other hand, in channel coding is of fundamental importance to characterize the geometric and algebraic structures associated with discrete memoryless channels. In this work, we present a geometric characterization of surfaces from the edges of the possible pairings of fundamental hyperbolic polygon with $3 \leq n \leq 8$ sides associated with the surface. This treatment has geometric properties important in determining the hyperbolic lattices to be used in the construction of sets of signals derived from arithmetic Fuchsian groups and the associated Riemann surface.

Key-words: signal constellation, polygons hyperbolic, Riemann surfaces, pairings, tessellations, Fuchsian groups.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Acrônimos e Notação

$\mathbb{H}$	o semi-plano superior.
$PSL\,(2,\mathbb{C}) = \overline{\Omega}_{\mathbb{C}}$	conjunto das transformações lineares com $ab - cd = 1$.
$SL\,(2,\mathbb{C}) = \Omega_{\mathbb{C}}$	conjunto de todas as matrizes complexas 2×2 unimodulares.
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos.
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais.
$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais.
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros.
(n,k)	parâmetros de um código de bloco.
P_e	probabilidade de erro.
E	energia do sinal.
d_{min}	distância euclidiana mínima entre os sinais.
G	grupo não-vazio.
$*$	operação binária.
$G \times G$	produto cartesiano de G por G.
K	grupo de Klein.
$\|G\|$	ordem do grupo G.
$H \leq G$	H é um subgrupo de G.
$\langle g \rangle$	grupo cíclico gerado por g.
g^m	potências de g.
$a \equiv b\,(mod\ n)$	a, b são côngruos módulo n.
$\sim$	relação de equivalência.
$\overline{a}$	classe de equivalência de a.
$\mathbb{Z}_n$	conjunto dos inteiros módulo n.
S_n	grupo de permutações do conjunto S.
D_n	grupo diedral de ordem $2n$.
$\dfrac{G}{H}$	grupo quociente de G.
Hx	classe lateral à direita.
xH	classe lateral à esquerda.
$[G\ :\ H]$	índice de H em G.
$N \triangle G$	N é subgrupo normal de G.
$G \approx G'$	os grupos G e G' são isomorfos.
$\mathbb{Z}^n = \{(a_1, \ldots, a_n)\,;\ a_i \in \mathbb{Z}\}$	conjunto formado por n-uplas com valores inteiros.
$\{g_1, \ldots, g_n\}$	$\mathbb{Z}$-base livre de um dado grupo G.
$T\,(G)$	conjunto torção de G.
K	um corpo qualquer.
(M, d)	espaço métrico.

$d(x,y)$	distância entre os pontos x e y.
$\|x\|$	norma do elemento x.
$(E, \|\cdot\|)$	espaço vetorial normado.
$B(a,r)$	bola aberta de centro a e raio r.
$B[a,r]$	bola fechada de centro a e raio r.
$f(X)$	imagem do conjunto X por uma aplicação f.
$d_1 \sim d_2$	d_1 é mais fina do que d_2.
∂X	a fronteira do conjunto X.
$M - X$	complementar de X em M.
$\overline{F}$	fecho do conjunto F.
(X, τ)	espaço topológico.
$f^{-1}(B)$	imagem inversa do conjunto B.
$(A_\lambda)_{\lambda \in L}$	família arbitrária de conjuntos num dado espaço topológico.
Γ	grupo fuchsiano.
Γ_z	órbita do elemento z.
$\Gamma_z = \{T \in \Gamma \ / \ T(z) = z\}$	grupo de estabilidade z (ou estabilizador).
$\mathbb{M}$	variedade diferenciável.
$\mathbb{R}^n$	o espaço euclidiano n-dimensional.
$\langle , \rangle$	produto interno.
$\partial\mathbb{H}^n$	bordo de $\mathbb{H}^n$.
$\partial\mathbb{D}^n$	-bordo de $\mathbb{D}^n$ (fronteira ideal).
γ	curva parametrizada.
$\|\gamma\|$	comprimento hiperbólico.
$d_{\mathbb{H}^n}(x,y)$	distância hiperbólica entre x e y em um espaço hiperbólico n-dimensional.
$\mathbb{R}_n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$	compactificação de $\mathbb{R}^n$.
$S = S_r(p)$	hiperesfera de raio r e centro $p \in \mathbb{R}^n$.
i_s	aplicação inversão.
E	o eixo real.
$ISO(\mathbb{H})$	grupo de isometrias de H^2.
R	região fundamental de Γ relativo a $\mathbb{H}$.
V_i	enumeração de elementos do grupo Γ.
λ_i	bissetriz $\mathbb{H}$-perpendicular do segmento $w_0 w_i$.
N_0	polígono normal.
$f = (\alpha, \gamma)$	um lado livre do polígono N_0.
$f_1 = (\alpha_1, \infty) \cup f_2 = (-\infty, \alpha_2)$	lado livre simples do polígono N_0.
s_i	lado do polígono N_0.
v_j	vértices do polígono N_0.
B_α	componente fronteira de B.
S_α	setor elíptico em α.
$p_1, \ldots, p_t$	ciclo parabólico de N_0.
p_i	vértice parabólico.
$\|A\|$	área hiperbólica de A.
$\|\Delta\|$	área hiperbólica do triângulo Δ.
$\Gamma' = SL(2, \mathbb{Z})$	grupo modular homogêneo.
$\Gamma \approx \dfrac{\Gamma'}{\{\pm I\}}$	grupo modular não-homogêneo.
P_C^e	probabilidade de acerto euclidiana.
P_C^h	probabilidade de acerto hiperbólica.
E_M^h	energia média hiperbólica.
E_M^e	energia média euclidiana.

d_h^2	distância mínima hiperbólica ao quadrado entre pontos da constelação.
d_e^2	distância mínima euclidiana ao quadrado entre pontos da constelação.
Γ_q'	subgrupo de congruência principal de nível q.
c, d	par de inteiros primitivo $mod\ q$.
$mdc\,(a, b)$	máximo divisor comum entre a e b.
$\lambda\,(q)$	função multiplicativa de q.
χ	característica de Euler.
g	gênero da superfície.
σ_k	número de k-simplex.
λ_i	número de vértices equivalentes a i.
λ_{p}	número de vértices equivalentes a p.
λ_∞	número de vértices equivalentes a ∞.
$n_i, n_{\mathsf{p}}, n_\infty$	ramificação esquema do subgrupo G.
$\{p, q\}$	tesselação $\{p, q\}$.
$\mathcal{O}$	ordem dos quatérnios.
G_{p^m}	p-grupo.
$\mathcal{A}$	álgebra dos quatérnios.
GCA	ganho de codificação.

Sumário

Capítulo 1

Introdução Geral

A fundamentação algébrica e geométrica dos códigos geometricamente uniformes possui estruturas topológicas na caracterização dos processos de geração e de decodificação, não somente na tradicional estrutura algébrica de corpos, bem como nas estruturas algébricas provenientes de anéis e de grupos. Este aparato inovador no tratamento de códigos e modulações através do estudo dos espaços topológicos, espaços métricos, espaços hiperbólicos e das superfícies de Riemann associadas, viabiliza não só uma sistematicidade no processo de geração como também no de decodificação.

Olhando também, sob um outro ponto de vista, dentro do contexto de projeto de um sistema de comunicação digital em espaços hiperbólicos é necessário estabelecer um procedimento sistemático para a construção de reticulados, como elemento básico para a geração de constelações de sinais geometricamente uniformes.

É sabido que o surgimento da teoria de codificação se deu em 1948, com o trabalho de Shannon. Em (C. Shannon 1948), Shannon mostrou que a partir da utilização de códigos corretores de erros, seria possível a projeção de sistemas de comunicações digitais codificados, com probabilidades de erros tão pequenas quanto se deseje, desde que a taxa de transmissão seja menor do que a capacidade do canal. A partir deste resultado a procura por bons códigos vem sendo realizada. Neste sentido, uma das principais preocupações em sistemas de comunicações é o controle de erros de tal forma que possa garantir que a informação seja reproduzida com confiabilidade. Isto significa que se uma mensagem recebida contém t erros, como detectar e corrigir esses erros e efetuar a recuperação de tal mensagem enviada? Daí, a relevância dos códigos corretores de erros desenvolvidos por Shannon.

Sequencialmente, os primeiros códigos de blocos surgiram devido a Hamming, quando o mesmo descreveu uma classe de códigos binários capazes de corrigir erros simples. Hocquenghem (1959) e Bose e Ray-Chaudhuri (1960) apresentaram uma classe de códigos de blocos capazes de corrigir múltiplos erros, os denominados códigos BCH, definidos sobre corpos finitos $GF\left(p^r\right)$. Além disso, códigos sobre os anéis quocientes $\mathbb{Z}_m$ foram discutidos primeiramente por Blake em (I.F. Blake 1972) e por Spiegel em (E. Spiegel 1977). Em (J. Rifà 1995), Rifá exibe códigos sobre o grupo dos invertíveis do anel $\mathbb{Z}\left[i\right] / \left(2^n + i \cdot 2^n\right)$. Paralelamente, no ano de 1990, Celso em (Celso de Almeida 1990) generalizou o estudo da teoria da modulação-codificada para um corpo qualuqer finito de cardinalidade prima para as constelações, PAM e QAM, bem como identificou códigos ótimos e seus respectivos desempenhos. Além disso, Huber em (K Huber 1993) apresentou códigos definidos sobre subconjuntos finitos, apropriados, de anéis de inteiros provenientes de corpos quadráticos.

Até recentemente existiam duas classes gerais de construção de constelação de sinais, a saber, a relacionada aos códigos de Slepian e a relacionada aos códigos reticulados. De acordo com a complexidade e especificidade de cada uma delas, aparentemente não tinha como relacionar as mesmas, porém a partir da pesquisa de Forney, (G.D. Forney 1991), essas duas classes passaram a fazer parte de uma classe mais geral de códigos denominada códigos geometricamente uniformes.

Pode-se mencionar que a busca por constelações de sinais que apresentem a menor probabilidade de erro, está diretamente relacionada ao problema de projetar sistemas de comunicações digitais eficientes em faixa e potência. Desta maneira, se torna importante a fundamentação matemática dos códigos geometricamente uniformes através da utilização de estruturas topológicas como mostrado em (R.G. Cavalcante; H. Lazari; J.D. Lima; R. Palazzo Jr. 2005), (S. Katok 1991) e (A. Garcia; I. Leguain 2002). Este aparato diferenciado de códigos e modulações através do estudo de espaços topológicos relacionados, bem como, das superfícies de Riemann envolvidas, permite um melhor entendimento do processo de geração de constelações de sinais.

Em (H. Lazari 2000), foi estabelecido uma teoria de códigos e conjuntos de sinais geometricamente uniformes no plano hiperbólico, bem como, obteve-se representações de subgrupos de grupos de isometrias de tesselações hiperbólicas. Além disso, foi mostrado que a teoria de uniformidade geométrica no plano hiperbólico subsiste mesmo no contexto de grupos de translações não abelianos, desde que imposta a condição que os códigos de rótulos sejam subgrupos normais do alfabeto (ou de seus produtos diretos). Também foram obtidas representações de famílias de subgrupos normais do grupo $\{8,8\}$, de isometrias da tessselação auto dual $\{8,8\}$, de modo a obter como quocientes os grupos $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{D}_n$ e $\mathbb{Z}_m \times Z_n$, com m, n inteiros positivos e maiores que 2.

Em (E.D. Carvalho 2001), forneceu-se técnicas para a geração de alfabetos de códigos corretores de erros dotados de uma estrutura algébrica, a partir das constelações de sinais geometricamente uniformes, cujos sinais sejam rotulados por elementos de um p-grupo G_{p^m} e por elementos de um grupo de Galois $GF\left(p^m\right))$ em espaços de sinais euclidianos identificados por elementos de um anel de inteiros e em espaços de sinais no plano hiperbólico identificados por elementos de uma ordem de quatérnios.

Em (Edson Agustini 2002), foi abordado dois tópicos em Teoria da Informação e Codificação: (i) Probabilidade de erro associada a constelações de sinais em espaços hiperbólicos; (ii) Constelações de sinais com propriedades geométricas viáveis a aplicações em ambientes com comportamento hiperbólico. Em verdade, no primeiro item, foi desenvolvido um limitante superior para a probabilidade de erro no espaço hiperbólico n-dimensional, ou seja, foi obtida uma classe de funções densidades de probabilidade para ruído hiperbólico equivalente ao ruído gaussiano no espaço euclidiano n-dimensional, a qual chamamos de ruído gaussiano hiperbólico. Desta forma, a comparação em termos de desempenho entre constelações hiperbólicas de sinais sob a ação desse tipo de ruído se torna viável computacionalmente. Ainda, nesse tópico, constelações de sinais do tipo M-PSK hiperbólicas são analisadas em termos de desempenho quanto a probabilidade de erro. Com relação ao segundo item, foram construídas famílias de constelações de sinais geometricamente uniformes e não geometricamente uniformes em superfícies provenientes de quocientes de espaços hiperbólicos por grupos discretos de isometrias. As constelações, assim obtidas, sobre superfícies não-compactas são infinitas e semelhantes aos reticulados obtidos por grupos cristalográficos no plano euclidiano. As constelações sobre superfícies compactas são finitas, sendo que as não geometricamente uniformes se comportam como constelações geradas geradas por auto intersecção de nós únicos sobre os g-toros (toros de gênero g), resultando, portanto, em constelações cíclicas com grupo de rotulamento $\mathbb{Z}_n$. Além disso, aqui foi realizada também a análise de desempenho das constelações em termos da probabilidade de erro em canais com ruído gaussiano hiperbólico, conforme descrito no item (i).

Em (João de Deus Lima 2002), identificou-se as estruturas algébricas e geométricas associadas a canais discretos sem memória. O procedimento utilizado para alcançar tal fato consistiu em dois passos. No primeiro passo, através do grafo associado a um canal discreto sem memória, determinando o conjunto das superfícies no qual este grafo está mergulhado, e estabelecendo o conjunto das estruturas algébricas dessas superfícies através do primeiro grupo de homologia. No segundo passo, identificaram-se as tesselações regulares que possam ser utilizadas no processo de moduladores e quantificadores.

Em (Rodrigo Gusmão Cavalcante 2002), foi apresentado que quanto maior for o gênero da superfície associada, menor será a probabilidade de erro em questão.

Em (E. Brandani 2000), foi abordado a construção de constelações de sinais no plano hiperbólico, bem como foi realizada uma análise de desempenho de constelações PAM, PSK e QAM-circular no plano hipebólico em relação à constelações equivalentes do plano euclidiano. Para tal fato, foi estabelecido diversos conceitos de geometria hiperbólica, sendo o principal deles, o conceito de tesselação do plano. Além disso, para realizar decisões em relação a escolha de quais tesselações fornecem constelações de interesse, foram obtidas funções enumeradoras, que permitem contar o número de pontos em subconjuntos finitos das tesselações. De outro modo, para determinação do desempenho de constelações de interesse, foi encontrada uma função densidade de probabilidade gaussiana para o plano hiperbólico e apresentadas as suas principais propriedades, bem como, partindo do conceito de função de probabilidade gaussiana hiperbólica, foi caracterizado o ruído de um canal gaussiano hiperbólico, utilizando as isometrias do plano hiperbólico.

Em (Vandenberg Lopes Vieira 2007), através de um procedimento sistemático para a construção de reticulados $\mathcal{O}$, como elemento fundamental para a construção de constelações de sinais geometricamente uniformes, foi identificado as estruturas algébrica e geométrica a fim de construir códigos geometricamente uniformes em espaços homogêneos, especificamente falando em espaços hiperbólicos. Foi proposto ainda, a partir desses reticulados, a construção de grupos fuchsianos aritméticos Γ_p obtidos de tesselações hiperbólicas $\{p, q\}$, derivados de álgebras de divisão dos quatérnios $\mathcal{A}$ sobre corpos de números $\mathcal{K}$. Além disso, generalizou-se o processo de identificação desses grupos em ordens dos quatérnios (reticulados hiperbólicos), associadas às constelações de sinais geometricamente uniformes, provenientes de grupos discretos. Esse procedimento é importante, pois permite rotular os sinais das constelações construídas por elementos de uma estrutura algébrica.

Em (Rodrigo Gusmão Cavalcante 2008), foi abordado que as modulações associadas a superfícies mínimas apresentaram bons desempenhos, pois tais modulações são pontos críticos do erro quadrático médio. Além disso, foi mostrado também que o espaço de sinais possui métrica induzida da superfície associada à modulação. Com isso, foi possível demonstrar que os espaços de sinais com curvatura negativa são os que apresentam melhor desempenho segundo a probabilidade média de erro. Dessa forma, alguns exemplos de constelações de sinais geometricamente uniformes foram construídos e analisados em variedades Riemannianas, bem como, foi notado que na maioria das vezes que o espaço hiperbólico é utilizado nos blocos de um sistema de comunicações, o desempenho desse sistema tende a se aproximar do ponto ótimo de operação.

Dentro desse contexto e com o objetivo de propor um método de rotulagem de sinais de constelações hiperbólicas convenientes, é necessário o estabelecimento de um procedimento sistemático de construção de reticulados. Para tal procedimento é relevante a identificação dessas informações geométricas via emparelhamento das arestas de polígonos hiperbólicos regulares de modo a construir códigos geometricamente uniformes e, por consequência, garantir a eficiência desejada em diversas situações envolvendo projetos de sistemas de comunicações digitais.

1.1 Descrição do Trabalho

Sendo assim, surge a seguinte questão problema: Como poderíamos caracterizar geometricamente superfícies a partir dos emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólicos com $3 \leq n \leq 8$ arestas, que norteiem a determinação de reticulados hiperbólicos a serem utilizados na construção de constelações de sinais?

Consideremos uma tesselação hiperbólica $\{p, q\}$ e P_p o polígono hiperbólico regular com p arestas associado a essa tesselação. Seja Γ_p um grupo fuchsiano cujos geradores emparelham as arestas P_p de modo que $\mathbb{D}^2/\Gamma_p$ represente uma superfície de Riemann compacta e orientável de gênero g. As arestas do polígono P_p constituem a fronteira da região de Voronoi de Γ_p. Essa região é constituída dos pontos exteriores dos círculos isométricos fornecidos pelas funções de emparelhamentos.

Considerando $\mathbb{Z}$ o grupo dos inteiros e $\mathbb{Z}_q$ os inteiros módulo q, o homomorfismo natural $\varphi :\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_q$ induz um homomorfismo

$$\widetilde{\varphi}\colon\ SL\,(2, \mathbb{Z}) \to SL\,(2, \mathbb{Z}_q)$$

sendo o kernel desta aplicação denominado de subgrupo de congruência principal de nível q, o qual denotamos por Γ'_q. A importância de trabalharmos com subgrupos modulares de $PSL\,(2, \mathbb{Z})$ e não com $PSL\,(2, \Re)$, reside no fato de ser o primeiro passo para a caracterização das curvas algébricas relacionadas a possíveis alfabetos a serem utilizados via Geometria Hiperbólica. Ressaltamos que este aparato teórico é amplamente discutido em linhas gerais e específicas em (R.G. Cavalcante; H. Lazari; J.D. Lima; R. Palazzo Jr. 2005) e (E. Brandani 2000). Daí, a partir de um subgrupo do grupo modular Γ_p de índice finito, encontramos um domínio fundamental para tal subgrupo,o qual pode ser compactado e produzido sobre uma superfície de Riemann e, então a partir da característica de Euler,

$$\chi = 2 - 2g$$

determinamos o seu gênero e caracterizamos a mesma de qualquer uma de todas as combinações possíveis das arestas citadas anteriormente de polígonos hiperbólicos.

Deve ser salientado de que quando falamos em polígonos hiperbólicos com $3 \leq n \leq 8$ lados, é de interesse averiguar a possibilidade de construção de constelações de sinais, a partir de emparelhamentos, com todas as transformações sendo hiperbólicas, cujo gênero associado é $g = 2$, garantindo assim a construção de constelações de sinais geometricamente uniformes a partir da tesselação do bitoro por octógonos.

Por outro lado, a partir do emparelhamento do polígono hiperbólico de $n = 8$ lados, podemos tesselar a esfera, o toro ou o bitoro por octógonos, sendo que $g = 0$ (códigos de Slepian) e $g = 1$ (códigos reticulados euclidianos) acontece quando trocamos uma ou mais transformações hiperbólicas por elípticas.

Para atingirmos os nossos objetivos, o trabalho foi dividido da seguinte forma:

No Capítulo 2 revisamos alguns conceitos e resultados matemáticos introdutórios, bem como, de forma específica, comentamos sobre as principais propriedades associadas a geometria hiperbólica.

No Capítulo 3 destacamos a descrição para a construção de uma região de Voronoi de um grupo fuchsiano Γ, bem como de propriedades associadas, região esta de fundamental importância, por exemplo, para a caracterização do desempenho de constelações de sinais. Além disso, neste capítulo foi discutido a parte relacionada aos ciclos de um polígono normal, aparato necessário para a caracterização das classes de conjugação, que em verdade é a contagem das classes de vértices Γ-equivalentes associados ao grupo quociente em questão, um dos parâmetros descritos nos emparelhamentos tratados.

No Capítulo 4 apresentamos a primeira contribuição do nosso trabalho, onde foi caracterizado e tabulado algumas informações geométricas (gênero da superfície, número de pontos fixos, número de classes de conjugação) que podem ser utilizadas para o estabelecimento de um processo sistemático de construção de códigos geometricamente uniformes, bem como garantir a eficiência desejada em problemas de se projetar sistemas de comunicações eficientes em faixa e potência. Além disso, a classificação dos emparelhamentos descrita no trabalho nos permite verificar a possibilidade de construção de constelações de sinais geometricamente uniformes a partir dos emparelhamentos que possuam grupos fuchsianos aritméticos. Ou ainda, nos permite a identificação dos emparelhamentos que podem ser utilizados na proposta de construção de constelações de sinais através da caracterização do gênero da superfície associada ao mergulho do grafo correspondente ao canal binário simétrico e suas quantizações.

No Capítulo 5 explicitamos algebricamente os geradores do grupo fuchsiano Γ_8 associado ao polígono hiperbólico P_{4g}, salientando que o processo de identificação dos grupos $\Gamma \cong \Gamma_{4g}$ através da metodologia apresentada é de grande utilidade, já que nos permite, por exemplo, rotular sinais de constelações $Gp\,(0) = \{T\,(0) : \ T \in G_g\}$ (G-órbita de 0 obtidas a partir do grupo Γ_{4g}), ou ainda, podemos utilizar as tesselações $\{4g, 4g\}$ para obtermos constelações de sinais geometricamente uniformes relacionadas com o grupo fuchsiano aritmético e com a superfície de Riemann associada.

Concluímos o trabalho com o Capítulo 6, onde realizamos as considerações finais e apresentamos sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão de Conceitos

Neste capítulo, apresentamos definições e resultados de álgebra e topologia, bem como de geometria hiperbólica e grupos fuchsianos, constituindo elementos básicos essenciais para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

Desta forma, em alguns casos, o nosso contexto não será baseado em demonstrações, podendo estas serem encontradas nas referências citadas durante a exposição dos resultados. Porém, a nossa abordagem será bastante detalhada, uma vez que serão utilizados conceitos e resultados muito específicos destas áreas, já que ambas constituem o alicerce para o nosso estudo. Uma leitura complementar dos assuntos tratados neste capítulo pode ser feita nas referências (J. Anderson 1999), (S. Katok 1991), (A. Garcia; I. Leguain 2002), (J. Lehner 1996) e (Adilson Gonçalves 1982).

2.1 Tópicos de Álgebra

Nesta seção apresentamos alguns conceitos e resultados relacionados à álgebra.

Definição 2.1 *Seja G um conjunto não-vazio, onde está definido uma operação binária*

$$\begin{array}{rccc} *: & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (x,y) & \longmapsto & x * y \end{array}$$

Dizemos que $(G,*)$ é um ***grupo*** *se satisfaz às seguintes condições:*

i) $a * (b * c) = (a * b) * c \ \forall \ a, b, c \in G.$

ii) $\exists \ e \in G; \ a * e = e * a, \ \forall \ a \in G.$

iii) $\forall \ a \in G, \ \exists \ b \in G$ *tal que* $a * b = b * a = e.$

Ao longo deste trabalho utilizaremos as operações de grupo aditivo e multiplicativo, denotados por $(G,+)$ e $(G,\cdot)$.

Além disso, dizemos que o grupo $(G,*)$ é **abeliano** (ou **comutativo**) se $a*b = b*a, \ \forall \ a, b \in G$.

Vejamos alguns exemplos de grupos como segue:

1. $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo abeliano infinito.

2. $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ são grupos abelianos.

3. $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ são grupos abelianos.

4. $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +)$ é um grupo abeliano.

5. $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \ : \ det(A) \neq 0\}$ $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ é um grupo.

6. O grupo de Klein, $K = \{e, a, b, c\}$ é um grupo finito com 4 elementos, cuja operação $* : \ K \times K \to K$ é definida, conforme a tabela abaixo:

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Tabela 2.1: Grupo de Klein.

Se o conjunto G é finito e tem n elementos, dizemos que o grupo $(G, *)$ é finito e que n é a **ordem** de G. Denotaremos tal ordem por $|G|$.

Definição 2.2 *Consideremos H um subconjunto não-vazio de G. Dizemos que H é um **subgrupo** de G se satisfaz:*

i) $\forall\ h_1, h_2 \in H$ *então* $h_1 * h_2 \in H$.

ii) $\forall\ h \in H$, *então* $h^{-1} \in H$.

Denotaremos H, subgrupo de G, por $H \leq G$.
Um grupo $(G, *)$ é dito **cíclico** se $\exists\ g \in G$ tal que $G = \{g^m;\ m \in \mathbb{Z}\} = \langle g \rangle$.

Observações:

1. Se $(G, \cdot)$ é cíclico gerado por g e $H \neq \{e\}$, $H \leq G$, então H é cíclico e gerado por g^m, onde $m = min\left\{K \in \mathbb{N},\ g^k \in H\right\}$.

2. $(G, *)$ cíclico $\Rightarrow$ $(G, *)$ abeliano.

Definição 2.3 *Seja n um inteiro fixo. Dizemos que $a, b \in \mathbb{Z}$ são **côngruos** módulo n se $n|a - b$. Notação: $a \equiv b\,(mod\ n)$.*

A **congruência** módulo n satisfaz as seguintes propriedades:

i) $a \equiv a\,(mod\ n)$ (Reflexiva).

ii) se $a \equiv b\,(mod\ n)$, então $b \equiv a\,(mod\ n)$ (Simétrica).

iii) se $a \equiv b\,(mod\ n)$ e $b \equiv c\,(mod\ n)$, então $a \equiv c\,(mod\ n)$ (Transitiva).

Definição 2.4 *Seja X um conjunto. Uma relação $\sim$ é chamada* ***relação de equivalência****, se são válidas as seguintes propriedades:*

i) Para todo $x \in X,\ x \sim x$ (Reflexiva).

ii) Se $x \sim y$, então $y \sim x$, $\forall\ x, y \in X$ (Simétrica).

iii) Se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$, $\forall\ x, y, z \in X$ (Transitiva).

Observe que a congruência é uma relação de equivalência. Sendo assim, podemos definir um novo objeto. Com efeito, se $a \in X$ considere $\overline{a} = \{y \in X;\ y \sim x\}$; $\overline{a}$ é chamado a **classe de equivalência** módulo $\sim$ determinada pelo elemento $a \in X$. O elemento a, por sua vez, é chamado **representante** da classe de equivalência $\overline{a}$.

Exemplos:

1. Seja S um conjunto não-vazio e $G = \{f :\ S \to S,\ \text{bijetora}\}$. Consideremos $*$ a operação composição de funções, isto é, $* :\ G \times G \to G$ que associa $(g, f) \to g * f = g \circ f$, então $(G, *)$ é um grupo tendo $I_S :\ S \to S$ como elemento identidade. Esse grupo é conhecido como **grupo de permutações do conjunto** S. Se $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ denotaremos este grupo por S_n, e sua cardinalidade é $n!$.

   Em particular, S_3 é um exemplo de grupo não-abeliano com 6 elementos. Usualmente, denota-se um elemento de S_n por:

   $$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \ldots & f(n) \end{pmatrix}$$

   S_3 é formado pelos seguintes 6 elementos:

   $$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   $$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   $$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Seja $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 3$, o conjunto dos vértices de um polígono regular de n lados. Considerando S_n o grupo de todas as permutações do conjunto de vértices $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, vamos dar um exemplo de um subgrupo de S_n não-abeliano, contendo exatamente $2n$ elementos.

   Seja $\theta \in S_n$ a permutação determinada pelo efeito da **rotação** de um ângulo de $\dfrac{2\pi}{n} rad$ no sentido trigonométrico, isto é,

   $$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & (n-1) & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$$

Para os casos $n = 5$ e $n = 6$, consideremos a Figura 2.1:

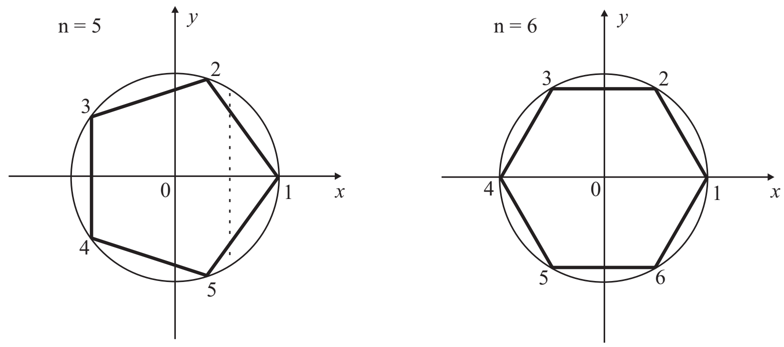


Figura 2.1: Polígonos de 5 e 6 lados, respectivamente.

Consideremos $r \in S_n$ a permutação determinada pelo efeito da reflexão da figura em torno do eixo $\vec{Ox}$, isto é, se n é par, então r fixa os vértices 1 e $\dfrac{n+2}{2}$ e, é representado por

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & \frac{n+2}{2} & \dots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \frac{n+2}{2} & \dots & 3 & 2 & \end{pmatrix}$$

se n é ímpar, então r fixa apenas o vértice 1 e, é representada por

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & (n-1) & n \\ 1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Seja $D_n = \langle r, \theta \rangle$ o menor subgrupo de S_n, contendo r e θ.

Então, $D_n = \{e, r, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}, r\theta, r\theta^2, \dots, r\theta^{n-1}\}$ é um grupo não-abeliano, contendo exatamente $2n$ elementos. Este grupo é chamado **grupo diedral de ordem $2n$** ou **grupo de simetrias do polígono regular de n lados**.

Proposição 2.1 (E.D. Carvalho 2001) *Seja G um grupo e $H \leq G$. Se $x, y \in G$, então a relação $x \equiv y \pmod{H} \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$ define uma relação de equivalência no conjunto G.*

Consideremos agora, a classe de equivalência $\overline{x} = \{y \in G : \ y \equiv x \, (mod\ H)\}$. Desta forma,

$$y \in \overline{x} \Leftrightarrow y \equiv x \, (mod\ H) \Leftrightarrow yx^{-1} = h, \text{ para algum } h \in H \Leftrightarrow y = hx, \text{ para algum } h \in H.$$

Denotando $Hx = \{hx \ : \ h \in H\}$, então $\overline{x} = Hx$, é dita uma **classe lateral** (**à direita**) de H em G. Chamamos de **conjunto quociente** e representamos por $\dfrac{G}{H}$, ao conjunto $\{\overline{x} : \ x \in H\}$, isto é, $\dfrac{G}{H} = \{Hx : \ x \in G\}$ é o conjunto de todas as classes laterais (**à direita**) de H em G. Analogamente, define-se classe lateral à esquerda $xH = \{xh; \ h \in H\}$.

Observações:

1. Existe uma correspondência biunívoca entre duas quaisquer classes laterais de um grupo G.

2. Suponha que $\dfrac{G}{H}$ possua exatamente n classes laterais, assim sendo $\dfrac{G}{H} = \{Hx_1, Hx_2, \ldots, Hx_n\}$, onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são elementos em G. Como o conjunto $Hx_1, \ldots, Hx_n$ é uma partição de G, temos que

   - $Hx_i \cap Hx_j = \emptyset,\ i \neq j$.
   - $G = Hx_1 \dot{\cup} Hx_2 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} Hx_n$ (união disjunta).

3. Sejam G um grupo finito e $H \leq G$. Então, $|H| \mid |G|$. Em verdade, $|G| = |H| \cdot [G : H]$, onde $[G : H]$ é o **índice** de H em G.

Definição 2.5 *Seja $N \leq G$. Dizemos que N é um **subgrupo normal** de G se $gng^{-1} \in N,\ \forall\ g \in G$ e $\forall\ n \in N$. Denotaremos tal subgrupo por $N \triangle G$.*

Definição 2.6 *Sejam $(G, *)$ e $(G', *')$ grupos e $\phi : G \to G'$ uma função. Dizemos que ϕ é um **homomorfismo** entre G e G' se $\phi(x * y) = \phi(x) *' \phi(y),\ \forall\ x, y \in G$.*

Observações:

1. O **núcleo** do homomorfismo $\phi : G \to G'$ é caracterizado como sendo o conjunto $N(\phi) = \{x \in G\ :\ \phi(x) = e'\}$, onde e' é o elemento neutro de G'.

2. Se $\phi : G \to G'$ é um homomorfismo com núcleo N, então $N \triangle G$.

3. Um homomorfismo $\phi : G \to G$ é dito

   - Um **monomorfismo** se é injetor;
   - Um **epimorfismo** se é sobrejetor;
   - Um **isomorfismo** se é bijetor.

Definição 2.7 *Dois grupos G e G' são **isomorfos** se existe um isomorfismo entre eles. Notação: $G \approx G'$.*

Teorema 2.1 [1º Teorema do Isomorfismo] (Adilson Gonçalves 1982) *Se $\varphi : (G, \cdot) \to (G', *)$ é um homomorfismo sobrejetor, então $\exists!\ \overline{\varphi} : \dfrac{G}{N} \to G'$, onde $N = ker(\varphi)$ tal que $\overline{\varphi} \circ \Pi = \varphi$.*

Corolário 2.1 (Adilson Gonçalves 1982) *Seja φ um homomorfismo sobrejetor de G em G' com núcleo N, então $\dfrac{G}{N} \approx G'$.*

Definição 2.8 *Um grupo G é chamado **finitamente gerado** se existem $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$, tal que $G = \langle g_1, g_2, \ldots, g_n \rangle = \langle g_1 \rangle + \cdots + \langle g_n \rangle$, onde $\langle g_i \rangle = \{m \cdot g_i, m \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \cdot g_i$. Em verdade, podemos escrever:*

$$G = \mathbb{Z} \cdot g_1 + \mathbb{Z} \cdot g_2 + \cdots + \mathbb{Z} \cdot g_n = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$$

Observações:

1. Se $g \in (G, +)$ abeliano e $\{g\}$ é $\mathbb{Z}$-livre e $m \in \mathbb{Z},\ m \geq 1$, então
$$\frac{g\mathbb{Z}}{mg \cdot \mathbb{Z}} \approx \mathbb{Z}_m.$$

2. Se $(G, +)$ é abeliano finitamente gerado e livre, então quaisquer duas $\mathbb{Z}$-bases livres de G têm o mesmo número de elementos. Tal número é chamado **posto** do grupo abeliano livre G.

3. Dado um grupo abeliano $(G, +)$, definimos o conjunto $T(G) = \{g \in G,\ \exists n \in \mathbb{N}, \geq 1, ng = 0\}$ como sendo a **torção de G**.

4. Seja $(G, +)$ um grupo abeliano livre de posto $n > 0$ e $H \leq G, H \neq \{0\}$, então:
   i) H é um grupo abeliano de posto $m \leq n$.
   ii) Existe uma base $\beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ de G e existem inteiros positivos $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{N}$ com $c_i | c_{i+1}\ \forall\ i = 1, \ldots, m-1$ tais que $\{c_1\beta_1, \ldots, c_m\beta_m\}$ é uma $\mathbb{Z}$-base de H.

5. $(G, +)$ grupo abeliano finitamente gerado, então $\exists\ r \in \mathbb{N};\ G \approx T(G) \times \mathbb{Z}^r$, mais ainda, $T(G)$ é um grupo finito e $\exists\ c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{N}$ com $c_i | c_{i+1}\ \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$.

2.2 Tópicos de Topologia

Nesta seção, apresentamos algumas definições e resultados associados à topologia.

Definição 2.9 *Uma **métrica** num conjunto M é uma aplicação $d : M \times M \to \mathbb{R}$ tal que $\forall\ x, y, z \in M$, tem-se:*

d_1) $d(x, x) = 0$.

d_2) se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$.

d_3) $d(x, y) = d(y, x)$.

d_4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Desigualdade Triangular).

Definição 2.10 *Um **espaço métrico** é um par (M, d) formado por um conjunto M e uma métrica d em M.*

Definição 2.11 *Uma **norma** num espaço vetorial E, sobre o corpo dos números reais ou complexos, é uma função que associa a cada vetor $x \in E$ um número real $\|x\|$, chamado a **norma de x**, tal que:*

i) $\|0\| = 0$ e $\|x\| > 0$, se $x \neq 0$.

ii) $\|\lambda . x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall\ x, y \in E$.

Salientamos que todo espaço vetorial normado E*, torna-se um espaço métrico considerando* $d(x, y) = \|x - y\|$.

Definição 2.12 *Sejam* a *um ponto num espaço métrico* (M, d) *e* $r > 0$ *um número real. Chama-se:*

- ***Bola aberta:*** $B(a, r) = \{x \in M\ :\ d(x, a) < r\}$.
- ***Bola Fechada:*** $B[a, r] = \{x \in M\ :\ d(x, a) \leq r\}$.
- ***Esfera:*** $B(a, r) = \{x \in M\ :\ d(x, a) = r\}$.

Além disso, $B[a, r] = B(a, r) \dot{\cup} S(a, r)$ (união disjunta).

Definição 2.13 *Um ponto* $a \in M$ *chama-se um* ***ponto isolado*** *quando* $\exists\ r > 0$ *tal que* $B(a, r) = \{a\}$*. Um espaço métrico é dito* ***discreto*** *quando todos os seus pontos são isolados.*

Definição 2.14 *Um subconjunto* X *de um espaço métrico* M *chama-se* ***limitado*** *quando existe* $c > 0$ *tal que* $d(x, y) \leq c,\ \forall\ x, y \in X$*. O menor desses números* c *será chamado* ***diâmetro*** *de* X*.*

Definição 2.15 *Sejam* (M, d_M) *e* (N, d_N) *dois espaços métricos. Uma aplicação* $f :\ M \to N$ *é dita uma* ***isometria*** *se* $d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y)$ *para quaisquer* $x, y \in M$*.*

Toda translação é uma isometria, além disso, a composta de duas isometrias e a inversa de uma isometria são ainda isometrias.

Definição 2.16 *Sejam* (M, d_M) *e* (N, d_N) *espaços métricos. Diz-se que a aplicação* $f :\ M \to N$ *é* ***contínua*** *no ponto* $a \in M$ *quando,* $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0\ /\ d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon$*. Diz-se que* f *é* ***contínua*** *quando ela é contínua em todos os pontos* $a \in M$*. Além disso, define-se um* ***homeomorfismo*** *de* M *sobre* N *quando* $f :\ M \to N$ *é uma bijeção contínua e sua inversa* $f^{-1} :\ M \to N$ *também é contínua. Neste caso, dizemos que* M *e* N *são* ***homeomorfos****.*

Observações:

1. Seja $f :\ M \to N$ uma função. Se M é discreto, então toda f é contínua.
2. Seja $f :\ M \to N$ uma função. Se N é discreto, então f é contínua $\Leftrightarrow\ \forall\ a \in M,\ \exists\ B(a, r)$ tal que f é constante.
3. $f :\ M \to N_1 \times N_2$ é contínua em $a \in M$ se, e somente se, suas coordenadas $f_1 :\ M \to N_1$ e $f_2 :\ M \to N_2$ são contínuas no ponto $a \in M$.
4. $f :\ M \to N$ homeomorfismo e N é discreto, então M também é discreto.

5. $S^1 - \{p\} \approx \mathbb{R}$, onde f é definida por

$$\begin{array}{rcl} f: \ S^1 - \{p\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \dfrac{x}{1-y} \end{array}$$

6. **Projeção Estereográfica**

$$\begin{array}{rcl} f: \ S^n - \{p\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x}{1-x_{n+1}} = \left(\dfrac{x_1}{1-x_{n+1}}, \ldots, \dfrac{x_n}{1-x_{n+1}}\right) \end{array}$$

7. Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Para todo $a \in E$ e $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$,temos

$$\begin{array}{rcl} t_a: \ E & \longrightarrow & E \quad \text{(translação)} \\ x & \longmapsto & t_a(x) = x + a \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} m_\lambda: \ E & \longrightarrow & E \quad \text{(homotetia)} \\ x & \longmapsto & m_\lambda(x) = \lambda x \end{array}$$

são homeomorfismos. Além disso, toda bola aberta é homeomorfa a E.

8. $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \approx S^1 \times \mathbb{R}$ onde $f(p) = \left(\dfrac{p}{|p|}, \log|p|\right)$.

Sejam M um espaço métrico qualquer e d_1, d_2 duas métricas sobre M. d_1 é **mais fina** do que d_2 quando $id: \ (M, d_1) \to (M, d_2)$ é contínua. Por outro lado, elas são **equivalentes** quando a identidade é um **homeomorfismo**.

Notação: $d_1 \sim d_2$.

Definição 2.17 *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto $a \in X$ diz-se um* ***ponto interior*** *a X quando é centro de uma bola aberta contida em X, isto é, quando $\exists\, r > 0$ tal que $d(x,a) < r \Rightarrow x \in X$. Chama-se o* ***interior de X*** *em M ao conjunto formado pelos seus pontos interiores.*

Notação: int $X = X^\circ$.

Definição 2.18 *A* ***fronteira*** *de X em M é o conjunto denotado por ∂X, formado pelos pontos $b \in M$ tais que toda bola aberta de centro b contém pelo menos um ponto de X e um ponto do complementar $M - X$.*

Definição 2.19 *Um subconjunto A de um espaço métrico M diz-se* ***aberto*** *em M quando todos os seus pontos são interiores, isto é, int$(A) = A$.*

Definição 2.20 *Um subconjunto $F \subset M$ diz-se* ***fechado*** *quando o seu complementar $M - F$ é aberto. Notação: $\overline{F}$. F é fechado se, e somente se, $F = \overline{F}$.*

Definição 2.21 *Seja X um conjunto não-vazio. Uma coleção τ de partes de X é uma* ***topologia*** *se:*

i) $X \in \tau$ *e* $\emptyset \in \tau$.

ii) *se* $(A_i)_{i \in I}$ *é uma família qualquer de elementos da coleção* τ, *então* $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

iii) *se* $(B_j)_{j \in J}$ *é uma família finita de elementos de* τ *(isto é,* J *conjunto finito), então* $\displaystyle\bigcap_{j \in J} B_j \in \tau$.

Um elemento $A \in \tau$ é dito um **aberto**.

Definição 2.22 *Um* ***espaço topológico*** *é um par* (X, τ) *onde* X *é conjunto e* τ *uma topologia em* X.

Definição 2.23 *Uma aplicação* $f : X \to Y$, *de um espaço topológico* X *num espaço topológico* Y, *diz-se* ***contínua*** *quando a imagem inversa* $f^{-1}(B)$ *de todo aberto* $B \subset Y$ *for um aberto em* X.

Definição 2.24 *Sejam* τ *e* τ' *duas topologias no mesmo conjunto* X. *Diremos que* τ *é* ***mais fina*** *do que* τ' *quando* $\tau > \tau'$, *isto é, quando todo aberto, segundo* τ, *for necessariamente aberto segundo* τ.

Seja X um espaço topológico, uma relação de equivalência é a aplicação quociente

$$\begin{array}{rcl} q: X & \longrightarrow & X/\sim \\ x & \longmapsto & q(x) = [x] = \{y \in X \; : \; y \sim x\}. \end{array}$$

A topologia quociente $\wp$ em $X/\sim$ é definida por: U é aberto em $X/\sim$ se $q^{-1}(U)$ é aberto em X. A topologia quociente é a mais fina entre as que tornam q contínua.

Observação: Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua e aberta entre os espaços topológicos X e Y. Então, $\widetilde{f}$ é um homeomorfismo, onde

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \\ & X/\sim \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd} \qquad \widetilde{f}([x]) = f(x)$$

Figura 2.2: Diagrama comutativo de um homomorfismo.

Definição 2.25 *Um espaço topológico X é dito* ***conexo*** *quando X e $\emptyset$ são os únicos subconjuntos de X, simultaneamente abertos e fechados; ou, em outras palavras, X é conexo se $\nexists\ A \subset X$ tal que $A \neq 0$ e $A \neq X$, A aberto e fechado.*

Definição 2.26 *Um* ***caminho*** *num espaço topológico X é uma aplicação contínua $f: I \to X$, onde $I = [0,1]$. Os pontos $f(0) = a$ e $f(1) = b$ são as* ***extremidades*** *do caminho f; $f(0) = a$ é o* ***ponto inicial*** *e $f(1) = b$ é o* ***ponto final****. Diz-se também que os pontos a e b são ligados pelo caminho f.*

Definição 2.27 *Um espaço topológico X diz-se* ***conexo por caminhos*** *quando, dados dois pontos quaisquer $a, b \in X$, existe sempre um caminho $f: I \to X$ com $f(0) = a$ e $f(1) = b$.*

Todo espaço topológico conexo por caminhos é conexo. A esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1};\ |x| = 1\}$ é conexa se $n \geq 1$, pois ela é conexa por caminhos. Basta considerar a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi: \ \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} &\longrightarrow S^n \\ x &\longmapsto \varphi(x) = \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

φ é contínua e sobrejetora e como $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ é conexo por caminhos segue que S^n é conexo por caminhos.

Definição 2.28 *Um espaço topológico $(X, \wp)$ é dito* ***compacto*** *se para qualquer cobertura aberta de X, isto é, $X = \bigcup_{i \in I} A_i$, $A_i \in \wp$, existem $i_1, i_2, \ldots, i_k$, tais que $X = \bigcup_{i \in I}^{k} A_i$.*

Observações:

i) $f: X \to Y$ contínua, X compacto e f sobrejetora, então Y é compacto.

ii) $f: X \to Y$ contínua e X compacto, então $f(X)$ é compacto.

iii) $X \subset Y$, Y compacto, então X é compacto.

iv) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ compactos, então $X = \Pi_{i=1}^{n} X_i$ é compacto.

Definição 2.29 *Seja X um espaço de Hausdorff. X é* ***localmente compacto*** *se cada ponto $x \in X$ admite uma vizinhança compacta.*

Desta forma, todo espaço compacto é localmente compacto. Além disso, todo espaço discreto é localmente compacto, pois cada um dos seus pontos é uma vizinhança compacta de si mesmo. $\mathbb{R}^n$ e em particular $\mathbb{R}$ são espaços localmente compactos, pois toda bola fechada é uma vizinhança compacta do seu centro.

Definição 2.30 *Seja X Hausdorff e localmente compacto. Uma* ***compactificação*** *do espaço topológico X é uma aplicação contínua $\varphi: X \to Y$ tal que Y é compacto, $\varphi(X)$ é denso em Y e φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(X)$.*

Teorema 2.2 [Alexandrov] (M. Armstrong 1983)

a) Qualquer espaço localmente compacto Hausdorff X pode ser mergulhado em um espaço compacto Y, tal que $Y - X$ é um único ponto e Y é Hausdorff.

b) (Unicidade) Quaisquer dois espaços compactos Y_1 e Y_2, tendo a propriedade (a) são homeomorfos, isto é, existe um homeomorfismo entre Y_1 e Y_2.

Exemplo: A aplicação $\varphi : \mathbb{R}^n \to S^n$ inversa da projeção estereográfica é a compactificação de Alexandrov do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Em particular, o círculo S^1 fica caracterizado como a compactificação de Alexandrov da reta.

Teorema 2.3 [Borel-Lebesque] (M. Armstrong 1983) *Um subconjunto S do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é limitado e fechado.*

Uma **rede** num conjunto X é uma aplicação $f : A \to X$ de um conjunto dirigido de A para X em vez de escrever $f(x)$ escrevemos x_α.

No caso $A = \mathbb{N}$ uma rede é uma sequência x_n em X. Em verdade, redes generalizam sequências.

Teorema 2.4 [Heine-Borel] (M. Armstrong 1983) *Seja F um conjunto fechado e limitado de números reais, então cada cobertura aberta de F possui uma subcobertura finita, isto é, existe $A_1, \ldots, A_n$ coleção de abertos tal que $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_1$.*

2.3 Aspectos Históricos da Geometria Hiperbólica

A Geometria é uma área da Matemática estudada desde a antiguidade. Conhecimentos geométricos complexos já eram dominados no Egito antigo, na Babilônia e na Grécia. Na forma como a conhecemos, podemos estabelecer o seu ponto inicial na Grécia, no tempo de Ptolomeu I, quando Euclides escreveu os *Elementos* (por volta do ano 300 a.C.). As Geometrias Não-Euclidianas foram descobertas a partir de tentativas de provar o **quinto postulado de Euclides** (ou **postulado das paralelas**) como um teorema a partir dos restantes nove "axiomas" e "postulados" da Geometria Euclidiana. Uma das consequências da busca de uma prova do quinto postulado foi a produção de um grande número de afirmações a ele equivalentes, o que é chamado de **substitutos**. Dentre os substitutos, o mais usado e conhecido nos tempos modernos foi o enunciado pelo matemático escocês John Playfair (1748-1819): Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada. Na Geometria Euclidiana a afirmação acima pode facilmente ser deduzida.

A primeira investigação científica do quinto postulado de Euclides foi publicada em 1773 cujo autor foi o jesuíta italiano Girolamo Saccheri (1667-1733). Nesse trabalho, intitulado *Euclides ab omni naevo vindicatus*, Saccheri aceita as vinte e oito proposições iniciais dos *Elementos* de Euclides que não necessitam do postulado das paralelas para sua prova. Baseado nestes teoremas, ele desenvolveu o estudo de um quadrilátero $ABCD$ no qual os ângulos A e B são retos e os lados AD e BC são congruentes. Traçando as diagonais AC e BD e usando Teoremas de congruência (dentre os 28 iniciais), Saccheri mostrou facilmente que os ângulos D e C são congruentes. Existem, desta forma, três possibilidades: os ângulos D e C são ângulos agudos, retos ou obtusos iguais. Saccheri referiu-se a essas três possibilidades como *hipótese do ângulo agudo*, *hipótese do ângulo reto* e *hipótese do ângulo obtuso*. Todavia, os seus contemporâneos não deram muita consideração a seu trabalho que foi logo esquecido, e somente ressuscitado por Eugenio Beltrami em 1889. Passados trinta e três anos, foi escrita a segunda investigação científica sobre o quinto postulado de Euclides, semelhante à primeira, pelo suíço Johann Heirinch Lambert intitulada *Die Theorie der Parallellinien* (A Teoria das Paralelas) que, porém, só foi publicada após a sua morte. Lambert tomou um quadrilátero contendo três ângulos retos (metade de um quadrilátero de Saccheri) como figura fundamental e ponderou três hipóteses conforme o quarto ângulo fosse agudo, reto ou obtuso. Da mesma forma que Saccheri, ele mostrou que para as três hipóteses a soma dos ângulos de um triângulo é menor, igual ou maior que dois ângulos retos, respectivamente; e, portanto, indo além, que a deficiência abaixo de dois ângulos retos, na hipótese de ângulo agudo, ou o excesso de dois ângulos retos, na hipótese do ângulo obtuso, é proporcional a seu excesso esférico e conjecturou que a geometria decorrente da hipótese do ângulo obtuso é proporcional à área do triângulo.

A hipótese do ângulo obtuso foi descartada a mesma suposição implícita de Saccheri, porém suas conclusões com respeito à hipótese do ângulo agudo foram imprecisas e insatisfatórias.

Já o analista francês do século XVIII Adien-Marie Legendre (1752-1833), iniciou seu estudo de forma distinta, examinando as hipóteses de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser menor, igual ou maior que dois ângulos retos. Assumindo de forma silenciosa a infinitude da reta, foi capaz de abandonar a terceira hipótese, mas, apesar de várias tentativas, não conseguiu eliminar a primeira. Legendre contribuiu de forma clara para popularizar o problema do quinto postulado, já que seus esforços aparecem nas sucessivas edições de seu *Éléments de Géométrie* (Elementos da Geometria).

Não é de se espantar que não se tenha achado alguma contradição sob a hipótese do ângulo agudo, pois sabemos hoje que a geometria desenvolvida a partir de uma coleção de axiomas compreendendo um conjunto básico de axiomas acrescido da hipótese do ângulo agudo é tão consistente quanto a geometria euclidiana desenvolvida a partir do mesmo conjunto básico acrescido da hipótese do ângulo reto, isto é, o quinto postulado de Euclides é independente dos demais postulados e consequentemente nada mais pode ser deduzido.

O alemão Kade Friedrich Gauss, o húngaro Janos Bolyai (1802-1860) e o russo Nicolai Ivanovitch Lobatchevsky (1793-1856) foram os primeiros estudiosos a desconfiarem deste fato. Eles analisaram a questão do quinto postulado sob o ponto de vista de Playfair: Por um ponto dado pode-se traçar *mais do que uma*, *exatamente uma* ou *nenhuma* paralela a uma reta dada.

Estas situações são equivalentes, respectivamente, às hipóteses do ângulo agudo, reto ou obtuso. O mais plausível é que tenha sido Gauss o primeiro a alcançar conclusões pertinentes relativas à hipótese do ângulo agudo, porém, a honra da descoberta dessa Geometria Não-Euclidiana é dividida entre Bolyai e Lobachevsky. Em 1832 Bolyai publicou suas primeiras descobertas num apêndice de um livro de Matemática, cujo autor era seu próprio pai. Um pouco mais tarde, descobriu-se que Lobachevsky havia publicado descobertas parecidas em 1829-1830.

Mas coube a Beltrami, Arthur Cayley, Felix Klein, Henri Poincaré e outros o estabelecimento da independência do quinto postulado com os demais. O método baseava-se em construir um modelo Euclidiano para esta geometria, de modo que o desenvolvimento abstrato da hipótese do ângulo agudo pudesse ter uma interpretação concreta no espaço euclidiano. Desta forma, qualquer inconsistência correspondente na Geometria Euclidiana.

Mas foi Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) que mostrou no ano de 1854, usando simplesmente que a reta seja ilimitada (abandonando a infinitude da reta) e alguns ajustes nos outros postulados que poderia ser desenvolvida uma outra Geometria não-Euclidiana consistente a partir da hipótese do ângulo agudo. Sendo assim, as três geometrias, a de Bolyai e Lobachevsky, a de Euclides e a de Riemann foram batizadas por Klein em 1871 de *Geometria Hiperbólica*, *Geometria Parabólica* e *Geometria Elíptica*, respectivamente.

2.4 Modelos Euclidianos para Geometria Hiperbólica

Vimos que todos os axiomas da geometria Euclidiana, exceto o axioma das paralelas, são válidos na geometria hiperbólica, consequentemente, todos os teoremas não dependentes do quinto postulado são válidos na geometria hiperbólica. Por exemplo, uma $\mathbb{H}$-reta que corta outra $\mathbb{H}$-reta UV ortogonalmente em seu ponto médio é o lugar dos pontos equidistantes de U e V.

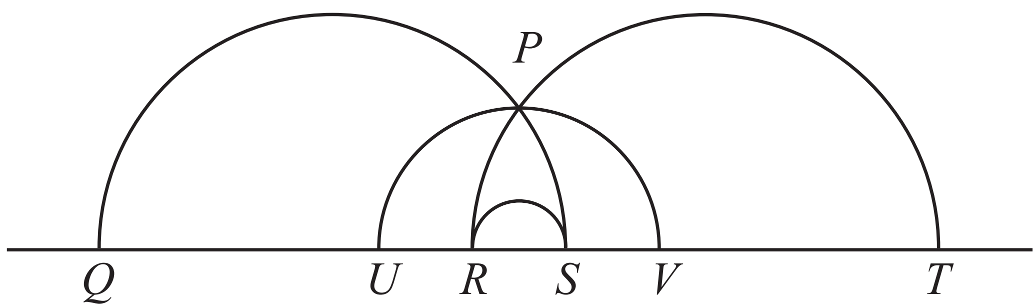


Figura 2.3: $\mathbb{H}$-retas ortogonais.

Além disso, devemos novamente ressaltar que um dos resultados notáveis que sofre modificação é o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, que é sempre menor do que 180º podendo inclusive ser igual a zero.

Os modelos euclidianos tornam a geometria hiperbólica tão consistente quanto à geometria Euclidiana. Os modelos que trabalharemos são: o **modelo do semiplano superior de Lobachevsky**-$\mathbb{H}^n$ e o **modelo disco de Poincaré**-$\mathbb{D}^n$. Desta forma, seja:

$$\mathbb{H}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n > 0\}$$

$$\mathbb{D}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < 1\}$$

Teorema 2.5 (S. Katok 1991) *O ângulo hiperbólico entre v_1 e v_2 em $T_z\mathbb{H}^n$ é o mesmo que o ângulo euclidiano entre v_1 e v_2 em $\mathbb{R}^n$. Em outras palavras a inclusão $i: \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ é uma aplicação conforme.*

Sendo assim, notamos que o Teorema 2.5 nos diz que pode-se visualizar os ângulos hiperbólicos como ângulos euclidianos.

Definição 2.31 *Seja $n \geq 2$. As variedades*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}, x_n > 0\},$$

e

$$\mathbb{D}^n = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}, x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1\right\},$$

munidas com as métricas riemannianas

$$ds = \frac{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2}}{x_n}$$

$$ds = \frac{2 \cdot \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2}}{1 - (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}$$

são chamadas de ***modelo de Lobachevsky-$\mathbb{H}^n$ do semiplano superior*** *e de* ***modelo de Poincaré-$\mathbb{D}^n$ do disco unitário****, respectivamente.*

Definição 2.32 *Os "bordos" dos modelos $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{D}^n$, que são os conjuntos*

$$\partial\mathbb{H}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}, x^n = 0\} \cup \{\infty\}$$

(onde ∞ é o ponto adicionado na compactificação de Alexandrov) e

$$\partial\mathbb{D}^n = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}, x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\right\}$$

respectivamente, são denominados a ***fronteira ideal*** *de $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{D}^n$.*

Observação: Por conveniência, se necessário, utilizaremos a seguinte notação:

$$\hat{\mathbb{H}}^n = \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$$

$$\hat{\mathbb{D}}^n = \mathbb{D}^n \cup \partial\mathbb{D}^n$$

para denotarmos a união do modelo com a sua respectiva fronteira ideal.

Definição 2.33 *Um* ***ponto ideal*** *é um ponto que se encontra na fronteira ideal de um modelo.*

Observações:

1. Os dois modelos citados anteriormente são equivalentes e não são os únicos.

2. Eles podem ser vistos como "janelas" para o contexto hiperbólico.

3. Os dois modelos citados anteriormente, são exemplos de variedades com curvatura constante negativa (-1). Além disso, a esfera unitária é outro exemplo de variedade com curvatura constante positiva (1), enquanto que o plano euclidiano também é uma variedade de curvatura constante (nula).

2.5 Distância hiperbólica

Nesta seção, estaremos interessados em determinar a distância entre dois pontos nos modelos de Lobachevsky e de Poincaré a partir da métrica riemanniana.

Definição 2.34 *Sejam $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e*

$$\begin{array}{rcll} \gamma : I & \longrightarrow & \mathbb{H}^n & \textit{uma curva parametrizada} \\ t & \longmapsto & (x_1(t), \ldots, x_n(t)) & \end{array}$$

diferenciável C^1 por partes em $\mathbb{H}^n$. Definimos

$$\|\gamma\| = \int_a^b \frac{\sqrt{x_1'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}}{x_n(t)}\, dt$$

*como sendo o **comprimento hiperbólico** de γ em $\mathbb{H}^n$.*

Pode-se definir a distância entre dois pontos de $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{D}^n$, como segue.

Definição 2.35 *Sejam $x, y \in \mathbb{H}^n$. A **distância hiperbólica** entre x e y é definida por*

$$d_{\mathbb{H}^n}(x, y) = inf\ \{\|\gamma\|\}.$$

Analogamente, podemos definir a distância hiperbólica entre x e y, com $x, y \in \mathbb{D}^n$.

É uma tarefa fácil mostrar que as funções $d_{\mathbb{H}^n}$ e $d_{\mathbb{D}^n}$ satisfazem os axiomas da definição usual de métrica.

Teorema 2.6 (S. Katok 1991) *Para dois pontos quaisquer $x, y \in \mathbb{H}^n$, temos:*

a) $\cos h\ d_{\mathbb{H}^n}(x, y) = 1 + \dfrac{|x-y|^2}{2x_n y_n}$;

b) $\operatorname{sen} h\ d_{\mathbb{H}^n}(x, y) = \sqrt{1 + \dfrac{|x-y|^2}{2x_n y_n} - 1} = \dfrac{|x-y|\,|x-\overline{y}|}{2x_n y_n}$;

c) $\operatorname{sen} h\left(\dfrac{1}{2}\ d_{\mathbb{H}^n}(x, y)\right) = \dfrac{|x-y|}{2\sqrt{x_n y_n}}$;

d) $\cos h\left(\dfrac{1}{2}\ d_{\mathbb{H}^n}(x, y)\right) = \sqrt{1 + \dfrac{|x-y|^2}{4x_n y_n}} = \dfrac{|x-\overline{y}|}{2\sqrt{x_n y_n}}$;

e) $\tan h\left(\dfrac{1}{2}\ d_{\mathbb{H}^n}(x, y)\right) = \dfrac{|x-y|}{|x-\overline{y}|}$;

f) $d_{\mathbb{H}^n}(x, y) = \ln \dfrac{|x-\overline{y}| + |x-y|}{|x-\overline{y}| - |x-y|}$.

De forma similar, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.7 (S. Katok 1991) *Para quaisquer dois pontos $x, y \in \mathbb{D}^n$, temos:*

a) $\operatorname{sen} h\left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{D}^n}(x,y)\right) = \dfrac{|x-y|}{\sqrt{\left(1-|x|^2\right)\left(1-|y|^2\right)}}$;

b) $d_{\mathbb{D}^n}(x,y) = \ln \dfrac{\sqrt{\left(1-|x|^2\right)\cdot\left(1-|y|^2\right)+|x-y|^2}+|x-y|}{\sqrt{\left(1-|x|^2\right)\left(1-|y|^2\right)+|x-y|^2}-|x-y|}$.

Em particular:

c) se $y=0$, então $d_{\mathbb{D}^n}(x,0) = \ln \dfrac{1+|x|}{1-|x|}$;

d) se $n=2$, então $d_{\mathbb{D}}(x,y) = \ln \dfrac{|1-x\overline{y}|+|x-y|}{|1-x\overline{y}|-|x-y|}$ (como $\mathbb{C}$ estrutura de Corpo esta simplificação é possível).

Em ambos os Teoremas 2.6 e 2.7, $\operatorname{sen}ht = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}, \cos ht = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ e, se $z = (z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n)$, $\overline{z} = (z_1, \ldots, z_{n-1}, -z_n)$.

Todas as equivalências acima são facilmente verificadas se levarmos em consideração as seguintes relações fundamentais:

$$\cos h^2 t - \operatorname{sen}h^2 t = 1,$$

$$\cos ht = \cos h^2 \frac{t}{2} + \operatorname{sen}h^2 \frac{t}{2},$$

$$\operatorname{sen}ht = 2 \cdot \operatorname{sen}h \frac{t}{2} \cdot \cos h \frac{t}{2}.$$

2.6 Geodésicas em $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{D}^n$

As geodésicas podem ser vistas como curvas que minimizam distâncias, isto é, elas podem ser vistas como "retas" em variedade riemanniana. A partir das métricas riemannianas, é possível identificar quais são suas geodésicas e suas principais propriedades. Além disso, ressaltamos que qualquer isometria em $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{D}^n$ pode ser obtida por uma composição de um número finito (em verdade, no máximo três) de inversões e/ou reflexões.

Teorema 2.8 (S. Katok 1991)

a) As semiretas euclidianas de $\mathbb{H}^n$ ortogonais a $\partial\mathbb{H}^n$ e os semicírculos euclidianos de $\mathbb{H}^n$ com centro em $\partial\mathbb{H}^n$ são as geodésicas de $(\mathbb{H}^n, ds)$.

b) Os diâmetros de $\mathbb{D}^n$ e arcos de circunferências euclidianas de $\mathbb{D}^n$ ortogonais a $\partial\mathbb{D}^n$ são geodésicas de $(\mathbb{D}^n, ds)$.

Algumas consequências decorrentes do Teorema 2.8, são listadas abaixo:

- Por dois pontos distintos do modelo passa uma única geodésica.
- Duas geodésicas se interceptam no máximo em um ponto do modelo.
- Inversões por hiperesferas e reflexões por hiperplanos compactificados ortogonais às fronteiras ideais dos modelos levam geodésicas em geodésicas.
- Dadas duas geodésicas γ_1 e γ_2 quaisquer, existe uma aplicação φ que é composição de inversões e/ou reflexões do tipo do item anterior com $\varphi(\gamma_1) = \gamma_2$.
- Dada uma geodésica γ e um ponto p do modelo fora dela, existe uma única geodésica ortogonal a γ contendo p.

Retornando à questão do 5º postulado de Euclides, que não é satisfeito na geometria hiperbólica, adotamos para uma dada geodésica γ e um ponto p fora dela, a seguinte nomenclatura:

a) As geodésicas que passam por p e "encontram" γ apenas em um ponto ideal, chamamos de **geodésicas paralelas** a γ. Observe que, dada γ, existem exatamente duas geodésicas satisfazendo esta condição.

b) As geodésicas que passam por p e não cruzam com γ, nem na fronteira ideal, chamamos de **geodésicas hiperparalelas** a γ. Salientamos que, dada γ, existem infinitas geodésicas satisfazendo esta condição.

c) Além disso, as infinitas geodésicas que passam por p e cruzam γ, são denominadas **geodésicas concorrentes** a γ.

Vejamos alguns exemplos dessas geodésicas, considerando o caso $n = 2$.

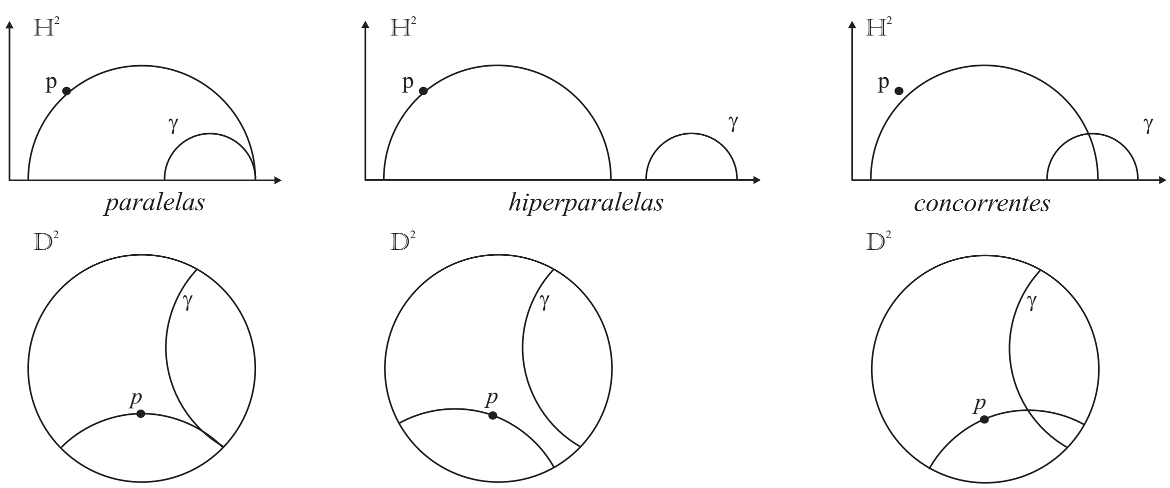


Figura 2.4: Posição relativa de geodésicas em $\mathbb{H}$ e $\mathbb{D}$.

Agora, diante da noção de geodésicas nos modelos $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{D}^n$, é interessante ressaltar uma expressão analítica para a distância hiperbólica em $\mathbb{H}$. Para tal objetivo, chamamos de **razão cruzada** dos pontos $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^n$ como sendo

$$[x_1, x_2; x_3, x_4] = \frac{|x_1 - x_2|\,|x_3 - x_4|}{|x_2 - x_3|\,|x_4 - x_1|}.$$

Teorema 2.9 (S. Katok 1991) *Sejam $x, y \in \mathbb{H}$, $x \neq y$ e γ a geodésica unindo x a y com pontos ideais x^* e y^* tais que x se encontra entre x^* e y. Portanto,*

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = \ln [y, x^*; x, y^*] .$$

Além disso, podemos observar alguns outros importantes resultados referentes às transformações de Möebius $\varphi : \widetilde{\mathbb{R}}^n \to \widetilde{\mathbb{R}}^n$.

i) φ é um transformação de Möebius se, e somente se, preserva razões cruzadas.

ii) Se $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(\mathbb{D}^n) = \mathbb{D}^n$, então $\varphi(x) = Mx$ para alguma matriz ortogonal M.

iii) Se $\varphi(\mathbb{D}^n) = \mathbb{D}^n$, então $\varphi(x) = M_{i_S}(x)$ para alguma matriz ortogonal M e alguma inversão i_S em hiperesfera ortogonal a $\partial\mathbb{D}^n$.

iv) Se $\varphi(\infty) = \infty$, então $\varphi(x) = k.Mx + c$ para alguma matriz ortogonal M, $k > 0$ e $c \in \mathbb{R}^n$.

v) Se $\varphi(\infty) \neq \infty$, então $\varphi(x) = k.M_{i_P}(x) + c$ para alguma matriz ortogonal M, $k > 0, c \in \mathbb{R}^n$ e alguma reflexão em hiperplano compactificado i_P.

vi) $d_{\mathbb{D}^n}(x, y) = d_{\mathbb{H}^n}(I_{\mathbb{D}^n\mathbb{H}^n}(x), I_{\mathbb{D}^n\mathbb{H}^n}(y))$.

vii) Definindo:

$$\begin{array}{rcl} T_n : \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & T_n(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}, \end{array}$$

onde $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$, temos que as transformações T_n são isometrias que preservam orientação e, portanto, pertencem a $ISO(\mathbb{H})$, ou seja, as $T_n's$ são transformações de Möebius que pertencem especificamente ao grupo de Möebius $M\left(\widetilde{\mathbb{H}}^2\right)$, ou ainda, temos que $PSL_2(\mathbb{R}) \approx M\left(\widetilde{\mathbb{R}}^2\right)$.

viii) Considerando $PSL_2^*(\mathbb{R}) = \dfrac{SL^*(2, \mathbb{R})}{\{\pm Id\}}$, sendo $SL^*(2, \mathbb{R})$ o grupo das matrizes 2x2 com determinante igual a ± 1, segue que $ISO(\mathbb{H}) \approx PS^*L_2(\mathbb{R})$.

ix) Analogamente, se considerarmos $SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ e } det\ M = 1 \right\}$ e

$$\begin{array}{rcl} T_n : \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & T_n(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}. \end{array}$$

O ponto divergente é impormos que $b = \overline{c}$ e $d = \overline{a}$ para termos $T_n(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Sendo assim, se trabalharmos com $A = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & \overline{c} \\ c & \overline{a} \end{pmatrix} : \ a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ e } det\ M = 1 \right\} \subset SL(2, \mathbb{C})$ e $B = \dfrac{A}{\{\pm Id\}}$ segue que $ISO(\mathbb{D}) = \left\langle T_m(z) = \dfrac{az + \overline{c}}{cz + \overline{a}}, \varphi(z) = -\overline{z} \right\rangle, M \in B$.

x) De forma particular, como a classificação dada no Capítulo 3 para as transformações de Möebius, se $T_M \in ISO^+(\mathbb{H})$ ou $T_M \in ISO^+(\mathbb{H}^n)$, $T_M \pm Id$, temos a seguinte nomenclatura:

   - **isometria elíptica** (ou **rotação hiperbólica**) quando $T_r(T_M) < 2$.
   - **isometria parabólica** quando $T_r(T_M) = 2$.
   - **translação hiperbólica** quando $T_r(T_M) > 2$.

   onde $T_r(T_M)$ é o traço de T_M.

   Como primeira aplicação da geometria hiperbólica temos o seguinte teorema fundamental aos nossos propósitos, com relação a análise dos emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólicos, no que se refere a determinação das classes de conjugação.

Teorema 2.10 (S. Katok 1991) *Seja Γ um grupo discreto. Cada $w_0 \in \mathbb{H}$ que não é ponto fixo de qualquer elemento pertencente a Γ se encontra em um conjunto aberto D contendo pontos não Γ-equivalentes.*

2.7 Transformações Lineares Fracionárias

Definição 2.36 *Uma **transformação linear fracionária** (ou **transformação de Möebius**) é uma função racional não-constante de grau 1, ou seja, uma função da forma*

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad (ad - bc \neq 0) \tag{2.1}$$

onde a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ e z é uma variável complexa.

Note que se $ad - bc = 0$, o segundo membro da Equação (2.1) se torna uma constante ou sem sentido.

A transformação inversa de T, denotada por T^{-1}, é dada por

$$z = T^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}, \tag{2.2}$$

que é também uma transformação linear fracionária.

Além disso, a transformação T definida acima, faz corresponder a cada ponto do plano-z, exceto ao ponto $z = -d/c$ quando $c \neq 0$, um único ponto do plano-w. Analogamente, a forma (2.2), associa cada ponto do plano-w, exceto o plano $w = a/c$ quando $c \neq 0$, um único ponto do plano-z. Esses pontos particulares para T e T^{-1} são mapeados nos pontos $w = \infty$ e $z = \infty$, respectivamente.

Desta forma, se considerarmos o plano complexo **estendido**, ou o **fecho** do plano, que consiste de todos os pontos complexos finitos mais o ponto infinito, a transformação T estabelece uma correspondência biunívoca (injetora) entre os pontos do plano-z estendido e os do plano-w.

De acordo com as definições (2.1) e (2.2), devemos salientar que a transformação linear fracionária

$$T: \ z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

é uma transformação conforme injetiva de toda esfera de Riemann Z nela mesma.

Vamos considerar os seguintes conjuntos:

- $PSL\,(2,\mathbb{C}) \equiv \overline{\Omega_{\mathbb{C}}} \equiv$ conjunto de todas as transformações lineares com $ad - bc = 1$.
- $SL\,(2,\mathbb{C}) \equiv \Omega_{\mathbb{C}} \equiv$ conjunto de todas as matrizes complexas 2x2 unimodulares.

Considerando a operação composição de funções, denotada por o, podemos verificar de forma direta que $(PSL\,(2,\mathbb{C})\,,o)$ é um grupo.

A matriz associada à transformação linear fracionária $T\,(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, poderá ser vista como:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, o produto de duas transformações corresponde ao produto de suas matrizes associadas.

Teorema 2.11 (S. Katok 1991) $PSL\,(2,\mathbb{C}) \approx \dfrac{SL\,(2,\mathbb{C})}{\{\pm I\}}$, *onde* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.8 Classificação das Transformações Lineares

As transformações lineares são classificadas de acordo com os seus pontos fixos, isto é, as soluções da equação $T\,(z) = z$.

Temos dois casos a considerar:

i) se $c = 0$, então $T\,(z) = \dfrac{az+b}{d}$ com $ad = 1$. Logo:

- ∞ é sempre um ponto fixo de T, pois $T\,(\infty) = \infty$.
- se $d \neq a$, $\dfrac{b}{d-a}$ é outro ponto fixo.
- se $d = a$, T se reduz a $T\,(z) = z \pm b$ (translação), e arbitrariamente dizemos que ∞ é o segundo ponto fixo de T.

Os dois pontos fixos são coincidentes, então T é dita **parabólica**. Além disso, uma transformação parabólica com ponto fixo ∞ é uma translação, e vice-versa.

E, por fim, se $b = 0$, T é a identidade.

ii) se $c \neq 0$, então $T\,(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, daí os pontos fixos são dados pela equação $cz^2 + (d-a) - b = 0$.

Temos duas soluções finitas desta equação, dados por:

$$\xi_1 = \frac{a-d+\sqrt{x^2-4}}{2c} \quad \text{e} \quad \xi_2 = \frac{a-d-\sqrt{x^2-4}}{2c}$$

onde $x = a + d$ é chamado o **traço** de T e $ad - bc = 1$.

Neste trabalho, estaremos interessados nas transformações lineares que mapeiam o semiplano superior $\mathbb{H}$ nele mesmo; em verdade, tais transformações correspondem a matrizes com entradas reais, sendo assim, designaremos:

- $PSL\left(2,\mathbb{R}\right)\equiv\overline{\Omega}_{\mathbb{R}}\equiv$ conjunto de todas as transformações com $ad-bc=1$ e $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}$.
- $SL\left(2,\mathbb{R}\right)\equiv\Omega_{\mathbb{R}}\equiv$ conjunto de todas as matrizes reais 2x2 unimodulares.

Um outro fato importante que deve ser salientado é com respeito a comutatividade entre transformações reais, ou seja, duas transformações lineares reais, nenhuma das duas sendo a identidade, são comutativas se, e somente se, possuem o mesmo conjunto de pontos fixos. Além disso, pode-se ressaltar que tal fato é verdadeiro para transformações lineares que preservam o disco unitário U.

Capítulo 3

Construção de uma Região de Voronoi Associada a Tesselações Regulares

Sabemos que em constelações de sinais geometricamente uniformes, o grupo de isometrias do espaço ambiente que deixa o conjunto de sinais Ω invariante, age de maneira transitiva em Ω. Consequentemente, as constelações de sinais apresentam o mesmo perfil de distância independente do sinal escolhido. Sendo assim, é de fundamental importância levarmos em consideração no processo de análise, uma região fundamental denominada **região de Voronoi**, que em verdade é um polígono fundamental que tessela o plano seja ele euclidiano ou hiperbólico. A introdução da teoria dos códigos geometricamente uniformes no plano hiperbólico advém do trabalho de Lazari (H. Lazari 2000) com o estabelecimento do processo de construção de cadeias de decomposição do grupo de isometrias de um polígono hiperbólico (domínio fundamental) para certas tesselações do plano hiperbólico. Por outro lado, em (E.D. Carvalho 2001), foram construídas constelações de sinais no plano hiperbólico a partir de baricentros de polígonos hiperbólicos regulares de $4g$ arestas, denotados por P_{4g}, associados às tesselações hiperbólicas auto-duais $\{4g, 4g\}$, onde g é o gênero da superfície compacta $\dfrac{\mathbb{D}^2}{\Gamma_{4g}}$ sendo tais tesselações as escolhidas para o desenvolvimento de nossas aplicações. De outra forma, tais tesselações auto-duais $\{4g, 4g\}$ são de fundamental relevância no contexto de codificação quântica, já que permite emparelhamentos diametralmente opostos. Desta maneira, é de nosso interesse neste capítulo apresentar um procedimento sistemático de construção de uma região de Voronoi para um grupo discreto Γ. Quando consideramos constelações de sinais, as regiões de Voronoi associadas aos sinais da constelação na verdade especificam as regiões de tomada de decisão em relação a cada sinal. Esse processo de particionamento implica na avaliação de desempenho associada à constelação de sinais. Chamamos a atenção ao fato de que o processo de conjugação de lados, a caracterização dos ciclos sobre o semi-plano superior, além da determinação da área hiperbólica de uma região de Voronoi são aspectos importantes direcionados ao estudo dos emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólicos para a construção de constelações de sinais geometricamente uniformes. Tais aspectos também são investigados neste capítulo.

Em (E. Brandani 2000), foi mostrado que dado um ponto z_j de uma constelação, quando transmitido, o seu limiar de decisão em relação a qualquer ponto z_k da constelação é dado pela geodésica que contém z_j. A partir de tais fatos, averigua-se que a construção das regiões de decisão tem comportamento similar ao caso euclidiano. Se considerarmos uma constelação 4-PSK, temos quatro regiões de decisão. O receptor ótimo amostrará o sinal $y(t)$, $y(t = t_k) = y_k$, na saída do canal e verificará em qual região y_k está contido e decidirá pela hipótese correspondente.

Para a determinação da probabilidade de acerto (P_h^c), deve-se calcular o volume de cada gaussiana hiperbólica centrada em cada um dos pontos da constelação e delimitada pela região de Voronoi. Porém, como é assumido que os sinais são geometricamente uniformes, basta calcular a probabilidade de acerto em uma das regiões.

No Capítulo 4, para uma constelação de sinais com quatro sinais, é descrito o modelo do receptor de máxima verossimilhança para o plano hiperbólico, o qual nos direcione para a caracterização do desempenho de constelações de sinais com o mesmo número de sinais. Sendo assim, a interpretação de informações, tais como: probabilidade de acerto, energia média, ganho de codificação assintótico (GCA), são elementos importantes para a construção e análise de desempenho de constelações de sinais.

3.1 Construção de Regiões Fundamentais

Definição 3.1 *Seja Γ um grupo real discreto. Um subconjunto F de $\mathbb{H}$ que contém exatamente um ponto de cada órbita é denominado um* ***conjunto fundamental de Γ relativo a $\mathbb{H}$****. Em outras palavras, F é um conjunto fundamental se, e somente se,*

i) Nenhum dos pontos de F são Γ-equivalentes.

ii) Qualquer ponto $z \in \mathbb{H}$ é Γ-equivalente a um ponto de F.

Pelo Axioma da Escolha, um conjunto fundamental existe independentemente do grupo de transformações de $\mathbb{H}$, porém, não é único. Por exemplo, se $A \subset F$ e $V \in \Gamma$, então o conjunto $F' = (F - A) \cup V(A)$ também é um conjunto fundamental para Γ.

Devemos salientar que um conjunto fundamental não necessita possuir propriedades topológicas convenientes. Como é de interesse considerar conjuntos abertos ou fechados, iremos modificar ligeiramente a definição anterior, já que um domínio fundamental não pode ser aberto.

Definição 3.2 *Um subconjunto aberto R de $\mathbb{H}$ é uma* ***região de Voronoi*** *para Γ se, e somente se,*

i) Não existem dois pontos distintos de R que sejam Γ-equivalentes.

ii) Qualquer ponto $\mathbb{H}$ é Γ-equivalente a um ponto de R.

Observações:

1. De uma região fundamental podemos facilmente determinar um conjunto fundamental, pois se R é uma região fundamental para Γ, existe um conjunto fundamental F tal que $R \subset F \subset \overline{R}$.

2. Um subgrupo de $\Omega_{\mathbb{R}}$ que possui uma região de Voronoi é descontínuo.

A principal ferramenta para provar a existência de uma região de Voronoi para um grupo Γ é o modelo do semi-plano superior ou modelo do disco de **Poincaré**.

Para a construção de uma região de Voronoi para um grupo discreto Γ é necessário uma série de resultados auxiliares, cujas demonstrações podem ser encontradas em (J. Lehner 1996). A descrição da construção é descrita a seguir.

Seja w_0 um ponto de $\mathbb{H}$ que não é fixado por nenhum elemento de Γ. Este ponto w_0, uma vez escolhido, não poderá ser trocado no procedimento de construção.

Consideremos $\{V_i;\ i = 0, 1, \ldots;\ V_0 \neq I\}$ uma enumeração dos elementos de Γ. Note que as imagens $V_i\,(w_0) = w_i$ são todas diferentes, pois se $w_i = w_j$ implica que $V_j^{-1}V_i$ fixa w_0. Logo, para $i > 0,\ w_0w_i$ é um $\mathbb{H}$-segmento. Vamos denotar por λ_i a bissetriz $\mathbb{H}$-perpendicular do segmento w_0w_i. A reta λ_i divide $\mathbb{H}$ em dois "semi-planos"; um contendo w_0 que denotaremos por L_i, e o complementar por L_i'. Esses semi-planos são conjuntos abertos e não incluem os pontos de λ_i.

Agora defina o conjunto

$$N = \bigcap_{i=1}^{\infty} L_i.$$

Dizemos que N é um **polígono normal com centro** w_0.

Pela definição, percebemos que N é um subconjunto de $\mathbb{H}$ que não contém pontos do eixo real E. Logo, pode-se escrever

$$N = \{w \in \mathbb{H}\ /\ d\,(w, w_0) < d\,(w, w_i)\ \ \forall\ i > 0\}$$

Em outras palavras, N consiste de todos os pontos de $\mathbb{H}$ que estão estritamente próximos de w_0. Desta maneira, nossa tarefa será mostrar que N constitui uma região fundamental para Γ.

Inicialmente, note que N é não-vazio, já que $w_0 \in N$. Além disso, N é $\mathbb{H}$-convexo, pois cada L_i é $\mathbb{H}$-convexo e, portanto, $\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i$ é $\mathbb{H}$-convexo. Como consequência, N é conectado.

Lema 3.1 (J. Lehner 1996) *Um subconjunto compacto de $\mathbb{H}$ encontra somente um número finito de bissetrizes λ_i.*

Lema 3.2 (J. Lehner 1996) *N é um conjunto aberto.*

De agora em diante, denotaremos N por N_0 e vamos definir

$$N_i = V_i\,(w_0)\,,\ V_i \in \Gamma.$$

Pela invariância da distância hiperbólica, deduzimos que N_i consiste dos pontos de $\mathbb{H}$ que estão estritamente próximos a w_i. Da mesma forma que w_0, N_i é uma região $\mathbb{H}$-convexa não-vazia. Ela é chamada **polígono normal de** Γ **com centro** w_i.

As regiões N_i são permutadas entre elas por transformações de Γ, porém a família toda $\{N_i, i = 0, 1, \ldots\}$ é invariante sob Γ. Disso decorre os seguintes resultados:

Lema 3.3 (J. Lehner 1996) *Para $i \neq j$, temos que $N_i \cap N_j = \emptyset$.*

Lema 3.4 (J. Lehner 1996) *Dois pontos distintos de N, não são Γ-equivalentes.*

Lema 3.5 (J. Lehner 1996) *Qualquer ponto de $z \in \mathbb{H}$ está em exatamente um dos conjuntos abaixo:*

$$\begin{aligned} I &= \{z \in \mathbb{H} \, : \, d(z, w_0) < d(z, w_i) \;\; \forall \; i \neq 0\} \\ B &= \{z \in \mathbb{H} \, : \, d(z, w_0) \leq d(z, w_i) \;\; \forall \; i, d(z, w_0) = d(z, w_k) \;\; \textit{para um mínimo } k \neq 0\} \\ E &= \{z \in \mathbb{H} \, : \, d(z, w_0) > d(z, w_k) \;\; \textit{para um mínimo } k \neq 0\} \end{aligned}$$

Além disso: $I = Int\,(N_0)\,,\ B = \partial\,(N_0 \cap \mathbb{H})\,,\ E = Ext\,(N_0 \cap \mathbb{H})$.

Lema 3.6 (J. Lehner 1996) $\bigcup\limits^{i} \overline{N_i}$ *cobre o semi-plano $\mathbb{H}$.*

Teorema 3.1 (J. Lehner 1996) *N_0 (e portanto N_j) é uma região de Voronoi para Γ relativo a $\mathbb{H}$. Além disso, cada subconjunto compacto de $\mathbb{H}$ é coberto por um número finito de polígonos $\overline{N_i}$.*

3.2 Conjugação de Lados

A caracterização dos possíveis emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólicos, está relacionada com a conjugação de lados de tais polígonos. Nesta seção, será mostrado que esta conjugação de lados é realizada aos pares. Tal fato é a primeira justificativa para os emparelhamentos apresentados no Capítulo 4.

Para identificarmos esta relação de conjugação de lados, suponhamos que s seja um lado de N_0. Já é sabido, que um ponto z é um ponto interno de s se, e somente se, existir um $j \neq 0$ tal que

$$d(z, w_j) = d(N_0, z) < d(z, w_i) \text{ para } i \neq 0, i \neq j.$$

Aplicando $V_j^{-1} = V_k$, obtém-se:

$$d(N_0, V_k(z)) = d(w_k, V_k(z)) < d(V_k(z), w_l) \text{ para } w_l \neq 0, l \neq k,$$

pois V_k leva $\{w_j\}$ nela mesma. Isto quer dizer que $V_k(z)$ é um ponto fronteira de N_0 e, de fato, um ponto interno de um lado s' de N_0. Logo, $V_k(s) \subset s'$.

Os pontos internos w do lado s' são caracterizados pela condição

$$d(w_n, w) = d(w, N_0) < d(w, w_i) \text{ para } i \neq 0, i \neq n,$$

onde n é um inteiro maior do que zero.

Como para alguns pontos no lado s' (a saber, imagens dos pontos em s), temos que $n = k$, para todos os pontos sobre s', a condição

$$d(w_k, w) = d(w, N_0) < d(w, w_i) \text{ para } i \neq 0, i \neq k,$$

é verdadeira para todos os pontos internos w de s'. Logo, para $z = V_k^{-1}(w)$, temos

$$d(N_0, z) = d(z, w_j) < d(z, w_i) \text{ para } i \neq 0, i \neq j.$$

Esta relação nos diz que $V_k^{-1}(w)$ é um ponto interno do lado s, e também, concluímos que $V_k^{-1}(s') \subset s$. Logo, vemos que V_k mapeia o lado s no lado s'.

De outra maneira, verifica-se que pontos internos de s são levados em pontos internos de s' e, de modo oposto, pontos finais são levados em pontos finais. Em outras palavras, V_k mapeia o lado inteiro aberto (fechado) s no lado inteiro aberto (fechado) s'. Sendo assim, cada lado s de um polígono N_0 é equivalente a um lado s' de N_0 por uma transformação $V \in \Gamma$, $V \neq I$.

Deve-se salientar ainda que pontos equivalentes estando nos lados de N_0 são pontos equidistantes de w_0, de fato: sejam z e $V(z)$ dois desses pontos, logo:

$$d(N_0, z) \leq d(z, w_i) \leq d\left(V_i^{-1}(z), N_0\right) \ \forall\, i, \tag{3.1}$$

em particular, para $V_i^{-1} = V$, temos que

$$d(N_0, z) \leq d(N_0, V(z)).$$

Intervendo os papéis de z e $V(z)$, encontramos

$$d(N_0, V(z)) \leq d(N_0, z),$$

portanto, $d(N_0, z) = d(N_0, V(z))$, ou seja, os pontos z e $V(z)$ são equidistantes de N_0.

Agora, poderia surgir a seguinte indagação: O lado s será equivalente a mais de um lado de N_0? Para mostrar que a resposta desta indagação é **não**, basta verificar que nenhum ponto interno de s é equivalente a mais que um ponto da fronteira de N_0.

Para isto, consideremos z um ponto interno de um lado s, satisfazendo

$$d(N_0, z) = d(z, w_j) \ \text{para algum } j. \tag{3.2}$$

Seja $z' = V(z)$ estando na fronteira de N_0, ou seja, $V(z) \in \partial(N_0)$. Então, z' está em um lado s' e, além disso, z' satisfaz a relação

$$d(N_0, z') = d(z', w_k) \ \text{para algum } k.$$

Seja $V(w_m) = N_0$ para algum inteiro positivo m, logo

$$d(z, w_m) = d(z', N_0) = d(z', w_k) = d(z, N_0),$$

pois z e z' sendo pontos equivalentes são pontos equidistantes de N_0. Usando a relação (3.2), segue que

$$d(z, w_m) = d(z, N_0) = d(z, w_j).$$

Donde, conclui-se que z pertence a duas bissetrizes, todas determinadas por w_m e w_j. Como z não é um vértice, nós devemos ter $w_m = N_0$ ou $w_m = w_j$. A primeira igualdade não pode ocorrer, pois $w_m = N_0$ implica $V^{-1}(N_0) = N_0$.

Portanto, $w_m = w_j$, ou seja, $V_j^{-1}V^{-1}(N_0) = N_0$. Analogamente, temos que $V = V_j^{-1}$. Os pontos z' é $V_j^{-1}(z)$ são únicos, sendo determinado pelo fato que z é um ponto interno do lado s.

Desta forma, vemos que um lado s de N_0 é equivalente a um único lado s' de N_0, ou seja, os lados do polígono N_0 se conjugam aos pares.

Definição 3.3 *Dois lados s_1 e s_2 de N_0 são ditos* ***conjugados****, se existir $V \in \Gamma$, $V \neq I$, tal que $V(s_1) = s_2$.*

Com base nesta última definição, a sequência de passos descrita anteriormente, nos leva a justificativa da conjugação aos pares dos lados do polígono normal N_0, ou seja, acabamos de provar o seguinte resultado.

Teorema 3.2 (J. Lehner 1996) *Os lados do polígono normal N_0 são conjugados aos pares.*

Ressalta-se que o Teorema 3.2 se aplica somente para lados estando em $\mathbb{H}$; ele é falso se levarmos em consideração lados livres. Como já visto, um ponto interno de um lado livre não é equivalente a qualquer ponto de $\overline{N_0}$, exceto ele mesmo.

Agora, a nova pergunta que poderia surgir é: Dois lados conjugados podem ser idênticos? Para esta análise, sejam $V(s) = s$, com $V \neq I$, e s sendo um $\mathbb{H}$-segmento ab, então um dos dois: a e b são individualmente fixados por V ou eles são permutados por V. O primeiro caso é impossível, já que nenhuma transformação de Ω_R possui dois pontos fixos em $\mathbb{H}$, nem ela tem um no eixo real E e outro em $\mathbb{H}$. Se a e b estão ambos em E, a transformação V deve ser hiperbólica; veremos mais adiante que o ponto fixo de uma transformação hiperbólica.

Desta forma, vamos assumir que $V(a) = b$ e $V(b) = a$. Logo, a e b são pontos fixos da transformação V^2. Logo, $V^2 = I$ sendo assim a transformação V é elíptica de ordem 2.

Sejam ξ um ponto fixo de V em $\mathbb{H}$ e α o $\mathbb{H}$-ponto médio do segmento ab. Temos

$$d(a, \alpha) = d(b, \alpha)$$

por construção.

Por outro lado, temos também que

$$d(a, V(\alpha)) = d\big(V(a), V^2(\alpha)\big) = d(b, \alpha).$$

e

$$d(b, V(\alpha)) = d\big(V(b), V^2(\alpha)\big) = d(a, \alpha),$$

então,

$$d(a, V(\alpha)) = d(b, V(\alpha)).$$

Como V leva s nele mesmo, $V(\alpha)$ está em s e deve, portanto, coincidir com α. Em outras palavras, α é um ponto fixo de V e deste modo $\alpha = \xi$.

Assim, conclui-se que um lado s de um polígono normal N_0 coincide com o seu lado conjugado se, e somente se, existe um elemento elíptico $V \in \Gamma$ de ordem 2 que tem um ponto fixo α coincidindo com o $\mathbb{H}$-ponto médio de s.

Desta forma, α divide s em dois segmentos de igual comprimento e a transformação V leva um segmento no outro, daí α é um vértice.

O ponto fixo α de um elemento elíptico V de ordem 2 será considerado um vértice, e os dois segmentos do lado original s contendo α que são permutados por V serão considerados lados distintos encontrando em α.

De acordo com esta convenção um lado de um polígono só pode ser mapeado nele mesmo somente pela transformação identidade.

3.3 Ciclos

No aparato geométrico tratado com relação aos possíveis emparelhamentos de arestas de polígonos normais, é de fundamental importância a caracterização das classes de conjugação, que em verdade é a contagem das classes de vértices Γ-equivalentes associados ao grupo quociente em questão.

Definição 3.4 *Chamamos a relação de partições Γ-equivalentes dos vértices ordinários de N_0 em classes equivalentes de* ***Ciclos ordinários****.*

Em outras palavras, caracteriza-se um ciclo ordinário de um polígono N_0 como sendo um conjunto consistindo de um vértice ordinário de N_0, juntamente com os outros vértices de N_0 que são Γ-equivalentes a ele. Claramente, note que um ciclo ordinário é um subconjunto de $\mathbb{H}$.

Teorema 3.3 (J. Lehner 1996) *Um ciclo ordinário de N_0 contém somente um número finito de vértices.*

Observe que o Teorema 3.3 é trivial para o caso em que o polígono normal N_0 possua um número finito de lados. Se um vértice pertencente ao ciclo ordinário C for um ponto fixo de uma transformação de Γ, o mesmo acontecerá para qualquer outro vértice, pois TVT^{-1} fixa $T(z)$ se V fixa z. Além disso, uma transformação fixando um ponto ordinário é necessariamente elíptica.

Desta forma, os ciclos ordinários são classificados como:

ciclo elíptico: quando todos os seus vértices são pontos fixos;

ciclo acidental: quando nenhum de seus vértices é ponto fixo.

Os correspondentes vértices são chamados **vértices elípticos** ou **vértices acidentais**.

Definição 3.5 *A* ***ordem*** *de um vértice elíptico v é definida como sendo a ordem do estabilizador Γ_v.*

Note que a ordem de todos os vértices de um ciclo elíptico é a mesma, já que $\Gamma_{T(v)} = T\Gamma_v T^{-1}$, $\forall\ T \in \Gamma$. Este número inteiro que representa a ordem do vértice é também **a ordem do ciclo**.

Definição 3.6 *Seja v um vértice ordinário. Os lados do polígono que se encontram em v são arcos circulares e formam dois ângulos. A medida de cada ângulo ligada a uma porção de N_0 será chamada o* ***ângulo em*** *v* ***sobre*** *N_0. Quando $v \in E$, diremos que o ângulo é zero, se v é a interseção de dois lados, ou $\pi/2$, se v é a interseção de um lado e um lado livre.*

Por definição, cada ciclo elíptico é produzido sobre pontos fixos de elementos elípticos de Γ, inversamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.4 (J. Lehner 1996) *Cada ponto fixo elíptico é um ponto de um ciclo elíptico de algum polígono normal.*

Teorema 3.5 (J. Lehner 1996)

i) A soma dos ângulos nos vértices de um ciclo ordinário de N_0 *é* $\dfrac{2\pi}{l}$ *se, e somente se, o ciclo é elíptico de ordem* l.

ii) A soma dos ângulos nos vértices de um ciclo ordinário é 2π *se, e somente se, o ciclo é acidental.*

Agora, vamos considerar o caso em que o ciclo ordinário está sobre o eixo real E. Se um ponto do ciclo pertence a E, então todo o ciclo está em E.

Consideremos $p_1 \in E$ um vértice onde dois lados do polígono N_0 se encontram e $\{p_1, p_2, \ldots\}$ o conjunto por todos os pontos de $\overline{N_0}$ que são equivalentes a p_1. Dois lados de N_0 se encontram em cada p_i. Se pensarmos na fronteira do polígono N_0 descrita no sentido positivo, então cada lado possui um ponto inicial e um ponto final. Quando um lado s é mapeado no seu lado conjugado s' por uma transformação em V, o ponto inicial de s é levado no ponto final do lado s', pois V mapeia N_0 fora de sua fronteira e a orientação é preservada numa transformação conforme. Logo, o ponto inicial de s e o ponto final de s' são equivalentes; analogamente o ponto final de s e o ponto inicial de s' são equivalentes.

Vamos apresentar agora, um procedimento prático para a determinação de um ciclo, a partir de um ponto conhecido do ciclo. Este método engloba todos os ciclos, desde aqueles estando em $\mathbb{H}$, bem como estes estando em E.

Suponhamos que s_1 seja um lado começando no ponto p_1. O conjugado de s_1 é o lado s_1' terminando em um ponto equivalente a p_1 e, portanto, pertencendo ao ciclo; digamos o ponto p_2.

Se existe um lado s_2 estando em p_2, seu lado conjugado s_2' termina num ponto, digamos p_3. Isto pode ocorrer sempre que t passa o lado s_t' terminando em p_1. Desta forma, definimos:

Definição 3.7 *O conjunto* $\{p_1, p_2, \ldots, p_t\}$ *é chamado* ***ciclo parabólico*** *de* N_0 *e cada* p_i *é dito um* ***vértice parabólico***.

No Capítulo 4, é analisada as sequências de lados, via a conjugação de lados, para cada superfície (esfera, toro e bitoro), pois o procedimento de caracterização para os demais casos é similar.

Teorema 3.6 (J. Lehner 1996) *Um vértice de* N_0 *estando em* E *não pode ser um ponto fixo de uma transformação hiperbólica de* Γ.

Em verdade, o Teorema 3.6 nos mostra que a transformação $P = W_t W_{t-1} \ldots W_2 W_1$ não é hiperbólica. Para mostrar que ela não é a identidade, consideramos o arranjo desses polígonos normais tendo um vértice no ponto p_1. Agora W_t leva p_t em p_1 e mapeia N_0 em um polígono normal N_t tendo um vértice em p_1. Como W_t leva s_t em s_t', N_t deve ter o lado s_t' em comum com N_0.

Seja s_{t-1}^* o outro lado de N_t saindo de p_1:

$$W_t\left(s_{t-1}'\right) = s_{t-1}^*$$

Agora $W_t W_{t-1}$ leva p_{t-1} em p_1 e mapeia N_0 no polígono normal N_{t-1}. Como $W_t W_{t-1}\left(s_{t-1}\right) = W_t\left(s_{t-1}'\right) = s_{t-1}^*$, fica evidente que N_{t-1} limita N_t sobre s_{t-1}^*. Continuando este raciocínio, podemos obter as regiões $N_0, N_t, N_{t-1}, \ldots, N_1$ no sentido anti-horário em volta de p_1.

Como $N_1 = P(N_0)$, P não é identidade. Logo, a transformação $P = W_t W_{t-1} \ldots W_2 W_1$ é parabólica. Então, p_1 é o ponto fixo de um elemento parabólico de Γ. Além disso, como p_i é fixado pela transformação $T_i P T_i^{-1}$ onde $T_i = W_{i-1} \ldots W_2 W_1$, $i = 1, 2, \ldots, t$, cada vértice parabólico é oponto fixo de uma transformação parabólica de Γ.

A transformação P conjuga os lados extremos do bloco de t polígonos mencionados anteriormente. A Figura 3.1 abaixo ilustra o nosso raciocínio.

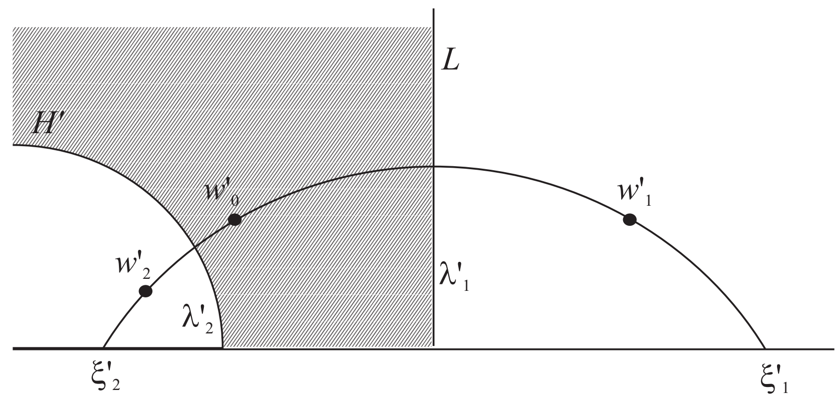


Figura 3.1: Polígono Normal de um Grupo Cíclico.

Definição 3.8 *A interseção dos fechos desses polígonos normais com o interior K de um círculo fixo de P é chamado* ***setor parabólico*** T_{p_1}.

É fácil ver que $K = \bigcup_{-\infty}^{\infty} P^m T_{p_1}$.

Se considerarmos N_0 com um número finito de lados e nenhum lado livre, N_0 é um polígono onde cada um de seus vértices, real ou ordinário, é o ponto final comum de dois lados.

Se α é um vértice real, ele necessariamente determina um ciclo finito. Portanto, α é um vértice parabólico.

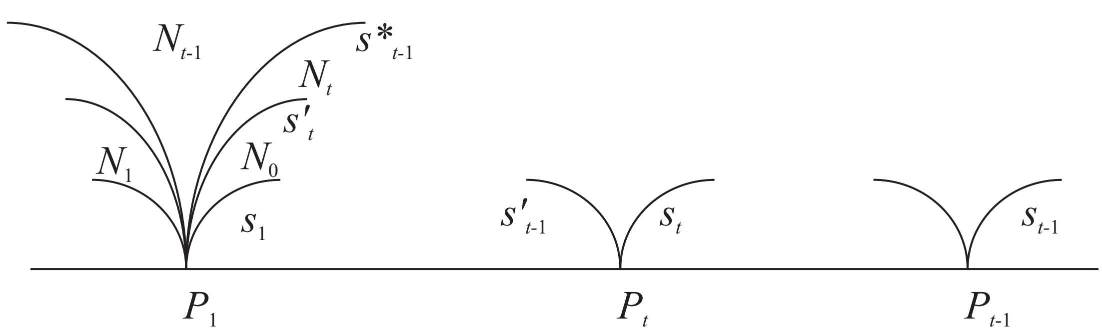


Figura 3.2: Setor parabólico Tp_1.

Teorema 3.7 (J. Lehner 1996) *Cada vértice p de um ciclo finito parabólico de N_0 é o ponto fixo de uma transformação parabólica P de Γ dada por $P = W_t W_{t-1} \dots W_2 W_1$, e P mapeia um dos lados do setor parabólico em p num outro. Se N_0 possui um número finito de lados e nenhum lado livre, $\overline{N_0}$ intercepta E em um número finito de vértices parabólicos. Além disso, P gera o estabilizador Γ_p.*

Agora vamos indagar a questão contrária: o ponto fixo de uma transformação parabólica do grupo Γ é sempre um vértice parabólico?

Se p é um ponto fixo, determinamos uma transformação linear real que leva p em ∞ e N_0 em i. O grupo transformado, o qual denotamos também por Γ, possui um polígono normal com centro em i e, além disso, contém elementos parabólicos que fixam ∞ (translações). O que queremos determinar é se ∞ é um vértice parabólico de Γ.

O subgrupo Γ_∞ é um grupo cíclico parabólico com gerador dado por:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \lambda > 0.$$

Logo, se $V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é uma transformação de Γ que fixa ∞, então $V = T^m$ para algum inteiro m.

Nos grupos que nos são familiares (como por exemplo, grupos cíclicos e o grupo modular) as transformações que conjugam os lados da região de Voronoi geram o próprio grupo.

3.4 A Área Hiperbólica da Região de Voronoi

Pode-se classificar grupos reais discretos pela área hiperbólica de um polígono normal. Além disso, sabe-se que a área é a mesma para todos os polígonos normais de uma dada tesselação, sendo que está área não depende do centro usado na construção da tesselação. No espaço hiperbólico infinitas são as possibilidades de reticulados regulares (tesselações) as quais são chamadas de tesselações hiperbólicas. Desse modo, por exemplo, o projetista de um sistema de comunicações terá a seu dispor uma infinidade de tesselações hiperbólicas, de onde este poderá selecionar a constelação de sinais mais apropriada para a aplicação considerada, a partir de informações coletadas com relação ao volume associado, probabilidade de erro e área hiperbólica. Nesta seção, alguns resultados são apresentados sem as suas respectivas demonstrações, para maiores detalhes averiguar as referências (J. Anderson 1999) e (S. Katok 1991).

Definição 3.9 *Seja $A \subset \mathbb{H}$. Definimos a área hiperbólica de A como sendo*

$$|A| = \int_A \frac{1}{y^2}\, dxdy$$

se a integral estiver bem definida.

Analogamente, se $A \subset \mathbb{D}^2$ definimos

$$|A| = \int_A \frac{4}{\left[1 - (x^2 + y^2)\right]^2}\, dxdy$$

Note que as áreas hiperbólicas são invariantes por isometrias de $ISO\,(\mathbb{H})$ e $ISO\,(\mathbb{D}^2)$.

Teorema 3.8 [Gauss-Bonnet] (S. Katok 1991) *A área hiperbólica de um triângulo hiperbólico Δ com ângulos α, β e γ é finita e igual a*

$$|\Delta| = \Pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

considerando $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{D}^2$.

Duas consequências bastante interessantes do Teorema de Gauss-Bonnet são:

a) a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é estritamente menor do que 180º;

b) a medida máxima da área de um triângulo hiperbólico é π.

A figura abaixo nos mostra triângulos Δ cuja área hiperbólica é máxima.

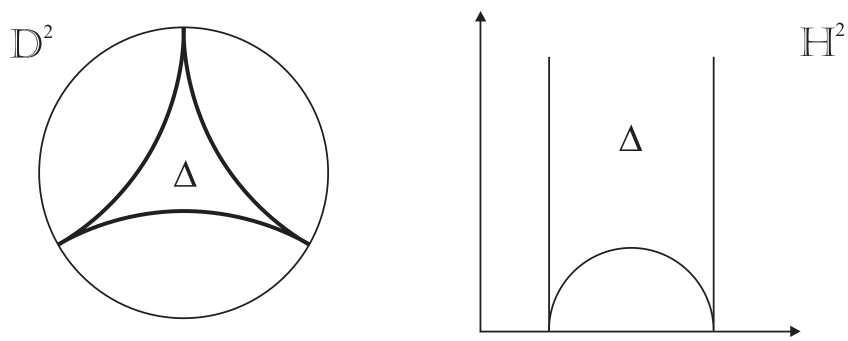


Figura 3.3: Triângulos com área hiperbólica máxima.

Teorema 3.9 (S. Katok 1991) *Sejam R_1 e R_2 duas regiões fundamentais satisfazendo a exigência de que suas fronteiras em (em $\overline{\overline{\mathbb{H}}}$) possuam medida nula no plano de Lebesgue. Então $|R_1| = |R_2|$.*

Corolário 3.1 (S. Katok 1991) *Dois polígonos normais N_0 e N_1 quaisquer na tesselação do grupo Γ (em geral, com diferentes centros) possuem igual área hiperbólica.*

Teorema 3.10 (S. Katok 1991) *Um polígono normal possui área hiperbólica finita se, e somente se, tem um número finito de lados e nenhum lado livre.*

Corolário 3.2 (S. Katok 1991) *Se $|N| < \infty$, então Γ possui um sistema de geradores com no máximo $\dfrac{3 \cdot |N|}{\Pi} + 6$ elementos.*

Teorema 3.11 (S. Katok 1991) *A área hiperbólica de uma Região de Voronoi satisfaz a desigualdade*

$$|R| \geq \frac{\pi}{21},$$

sob a condição de que a fronteira de $R\,(\partial R)$ possui medida nula plana.

Exemplo 01 (O Grupo Modular): O grupo modular $\Gamma(1)$ é o grupo formado por matrizes 2x2 cujo determinante é igual a 1 e as entradas são todas números inteiros. O estabilizador de ∞ o grupo cíclico gerado por

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

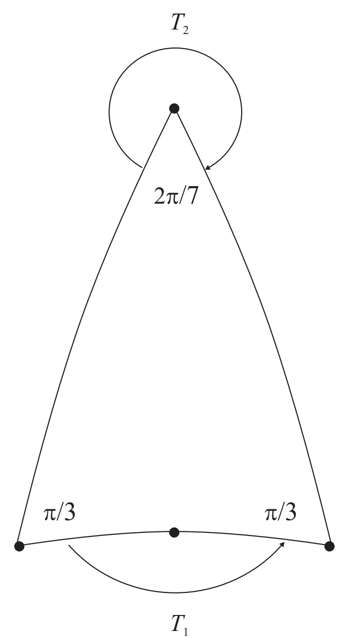


Figura 3.4: A disposição de ângulos $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{3}$ e $\dfrac{2\pi}{7}$.

Vejamos a Figura 3.5 a seguir, vamos tomar R_∞ como sendo a faixa $|x| < \dfrac{1}{2}$. Os maiores círculos isométricos são os de raio 1 e centros em inteiros. Somente os de centro em 0,1,-1 interceptam R_∞ em $\rho = e^{\frac{\pi i}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou em $-\overline{\rho} = e^{\frac{\pi i}{6}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Além disso, a Figura 3.5 nos mostra que os círculos isométricos restantes tem raios menores ou iguais a $\dfrac{1}{2}$ e, portanto, não penetram na região R descrita. Assim,

$$R:\ x^2 + y^2 > 1, \quad |x| < \frac{1}{2}, \quad y > 0$$

é uma região de Voronoi para o grupo modular.

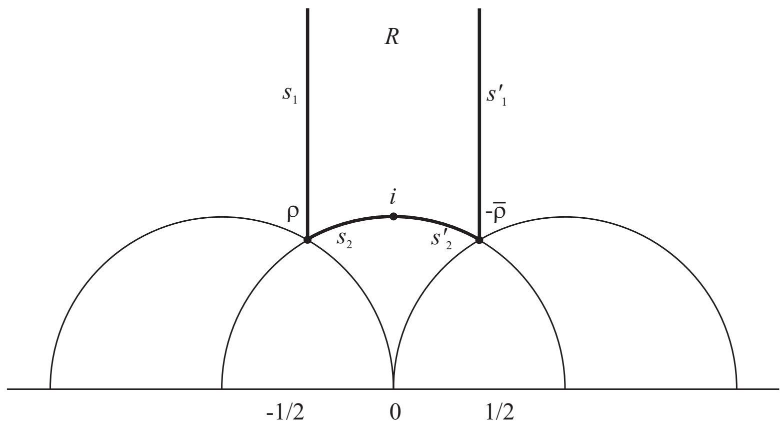


Figura 3.5: A Região de Voronoi para $\Gamma(1)$.

Além disso, R é um polígono normal. Vamos escolher para centro o ponto $N_0 = 2i$. Observe que o ponto $2i$ não é um ponto fixo. De fato, o ponto fixado de um elemento elíptico tem parte imaginária dada por

$$y = \frac{(4 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{2\,|c|}.$$

Como o traço é estritamente menor do que 2 e é um número inteiro, temos

$$y \leq \frac{2}{2\,|c|} \leq 1.$$

Agora, os pontos $2i{+}1$ e $2i{-}1$ são imagens de $N_0 = 2i$, logo as retas $x = \pm\dfrac{1}{2}$ são $\mathbb{H}$-bissetrizes. Além disso, $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$ e $T(2i) = \dfrac{i}{2}$. A $\mathbb{H}$-bissetriz da $\mathbb{H}$-reta conectando $2i$ e $\dfrac{i}{2}$ - um segmento do eixo imaginário - é o círculo unitário. Relembrando a construção do polígono normal, descrita no decorrer do capítulo, vemos que N, o polígono normal com centro $N_0 = 2i$ é conectado em R. $R - \overline{N}$ é não-vazio se $R - N$ é não-vazio também. Sejam $z \in R - \overline{N}$ e $z' \in \overline{N}$ dois pontos equivalentes a z. Então $z \neq z'$. Agora $z' \in \overline{R}$. Porém, como $z \in R$ devemos ter $z' \in R$, pois um elemento de Γ nunca mapeia um ponto interior de R em um ponto fronteira.

Os pontos z e z' são distintos e equivalentes; sendo que ambos pertencem a Região de Voronoi (absurdo) e, portanto, $N = R$.

A parte da tesselação de $\mathbb{H}$ ("figura modular") determinada por R é mostrada na Figura, neste mesmo capítulo.

Os lados de R são s_1, s_1' conjugados por $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e s_2, s_2', conjugados por $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Desta forma, U e T geram o grupo modular. T é uma transformação elíptica de ordem 2 que fixa o ponto i. Sendo assim, i deve ser considerado um vértice. Os ciclos são $\{\rho, -\overline{\rho}\}$, $\{i\}$ e $\{\infty\}$. Como a soma dos ângulos nos vértices do primeiro ciclo é $\dfrac{2\pi}{3}$, então ρ é o ponto fixo de um elemento elíptico de ordem 3, sendo este elemento $W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Da mesma forma, o ponto $-\overline{\rho}$ é fixado pela transformação $S = (0 \quad -1 \mid 1 \quad -1)$. Estas transformações podem ser encontradas observando que TU fixa ρ, ao mesmo tempo que TU^{-1} fixa $-\overline{\rho}$.

Exemplo 02 (Subgrupos do Grupo Modular) Os subgrupos básicos do grupo modular são os subgrupos de congruência principal de nível q (definidos no Capítulo 5) e denotados por $\Gamma(n)$.

Vamos considerar o caso $n = 2$, isto é, o conjunto formado por transformações $(a \quad b \mid c \quad d)$ com a e b ímpares, b e c pares.

O estabilizador de ∞ é gerado por $U^2 = (1 \quad 2 \mid 0 \quad 1)$ como foi mostrado na Figura 3.5:

Para R_∞ tome a faixa $|x| < 1$. Existem dois círculos isométricos

$$A: \ |2z - 1| = 1 \text{ e } B: \ |2z + 1| = 1$$

cortando a região R mostrada na figura fora de R_∞.

O círculo isométrico geral é $|cz + d| = 1$, onde c é par, d ímpar e podemos assumir sem perda de generalidade $c > 0$.

Se $c = 2$, o círculo isométrico não encontra R a menos que $d = \pm 1$, que neste caso é A ou B.

Se $c \geq 3$, necessitamos considerar somente $|d| < c$. Os círculos com $d = -1, \ d = -(c-1)$ são tangentes internamente a A; os círculos com $d = 1, \ d = c - 1$ são tangentes internamente a B; e os círculos com outros valores de d estão inteiramente no complementar de R.

Portanto, R é uma região de Voronoi para $\Gamma(2)$. Os lados s_1, s_1' são conjugados por $U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ enquanto que os lados s_2, s_2' são conjugados por $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Desta forma, $\Gamma(2) = \{U^2, Y\}$. Os ciclos são $\{\infty\}$, $\{-1, 1\}$ e $\{0\}$, sendo todos parabólicos.

Capítulo 4

Estudo dos Emparelhamentos das Arestas de Polígonos Hiperbólicos para a Construção de Constelação de Sinais

A busca por constelações de sinais que apresentem a menor probabilidade de erro, está diretamente relacionada ao problema de projetar sistemas de comunicações digitais eficientes em faixa e potência. Desta maneira, se torna importante a fundamentação matemática dos códigos geometricamente uniformes através da utilização de estruturas topológicas como mostrado em (J. Anderson 1999), (J.D. de Lima; R. Palazzo Jr. 2002) e (R.G. Cavalcante; H. Lazari; J.D. Lima; R. Palazzo Jr. 2005). Este aparato diferenciado de códigos e modulações através do estudo de espaços topológicos relacionados, bem como, das superfícies de Riemann envolvidas, permite um melhor entendimento do processo de geração de constelações de sinais.

Em (E.D. Carvalho 2001), forneceu-se técnicas para a geração de alfabetos de códigos corretores de erros dotados de uma estrutura algébrica, a partir das constelações de sinais geometricamente uniformes, cujos sinais sejam rotulados por elementos de um p-grupo G_{p^m} e por elementos de um grupo de Galois $GF\left(p^m\right))$ em espaços de sinais euclidianos identificados por elementos de um anel de inteiros e em espaços de sinais no plano hiperbólico identificados por elementos de uma ordem de quatérnios.

Em (Edson Agustini 2002), foi abordado dois tópicos em Teoria da Informação e Codificação: (i) Probabilidade de erro associada a constelações de sinais em espaços hiperbólicos; (ii) Constelações de sinais com propriedades geométricas viáveis a aplicações em ambientes com comportamento hiperbólico. Em verdade, no primeiro item, foi desenvolvido um limitante superior para a probabilidade de erro no espaço hiperbólico n-dimensional, ou seja, foi obtida uma classe de funções densidades de probabilidade para ruído hiperbólico equivalente ao ruído gaussiano no espaço euclidiano n-dimensional, a qual chamamos de ruído gaussiano hiperbólico. Desta forma, a comparação em termos de desempenho entre constelações hiperbólicas de sinais sob a ação desse tipo de ruído se torna viável computacionalmente. Ainda, nesse tópico, constelações de sinais do tipo M-PSK hiperbólicas são analisadas em termos de desempenho quanto a probabilidade de erro. Com relação ao segundo item, foram construídas famílias de constelações de sinais geometricamente uniformes e não geometricamente uniformes em superfícies provenientes de quocientes de espaços hiperbólicos por grupos discretos de isometrias. As constelações, assim obtidas, sobre superfícies não-compactas são infinitas e semelhantes aos reticulados obtidos por grupos cristalográficos no plano euclidiano. As constelações sobre superfícies compactas são finitas, sendo que as não geometricamente uniformes se comportam como constelações geradas geradas por auto intersecção de nós únicos sobre os g-toros (toros de gênero g), resultando, portanto, em constelações cíclicas com grupo de rotulamento $\mathbb{Z}_n$. Além disso, aqui foi realizada também a análise de desempenho das constelações em termos da probabilidade de erro em canais com ruído gaussiano hiperbólico, conforme descrito no item (i).

Em (João de Deus Lima 2002), identificou-se as estruturas algébricas e geométricas associadas a canais discretos sem memória. O procedimento utilizado para alcançar tal fato consistiu em dois passos. No primeiro passo, através do grafo associado a um canal discreto sem memória, determinando o conjunto das superfícies no qual este grafo está mergulhado, e estabelecendo o conjunto das estruturas algébricas dessas superfícies através do primeiro grupo de homologia. No segundo passo, identificaram-se as tesselações regulares que possam ser utilizadas no processo de moduladores e quantificadores.

Em (Rodrigo Gusmão Cavalcante 2002), foi apresentado que quanto maior for o gênero da superfície associada, menor será a probabilidade de erro em questão.

Em (E. Brandani 2000), foi abordado a construção de constelações de sinais no plano hiperbólico, bem como foi realizada uma análise de desempenho de constelações PAM, PSK e QAM-circular no plano hipebólico em relação à constelações equivalentes do plano euclidiano. Para tal fato, foi estabelecido diversos conceitos de geometria hiperbólica, sendo o principal deles, o conceito de tesselação do plano. Além disso, para realizar decisões em relação a escolha de quais tesselações fornecem constelações de interesse, foram obtidas funções enumeradoras, que permitem contar o número de pontos em subconjuntos finitos das tesselações. De outro modo, para determinação do desempenho de constelações de interesse, foi encontrada uma função densidade de probabilidade gaussiana para o plano hiperbólico e apresentadas as suas principais propriedades, bem como, partindo do conceito de função de probabilidade gaussiana hiperbólica, foi caracterizado o ruído de um canal gaussiano hiperbólico, utilizando as isometrias do plano hiperbólico.

Em (Vandenberg Lopes Vieira 2007), através de um procedimento sistemático para a construção de reticulados $\mathcal{O}$, como elemento fundamental para a construção de constelações de sinais geometricamente uniformes, foi identificado as estruturas algébrica e geométrica a fim de construir códigos geometricamente uniformes em espaços homogêneos, especificamente falando em espaços hiperbólicos. Foi proposto ainda, a partir desses reticulados, a construção de grupos fuchsianos aritméticos Γ_p obtidos de tesselações hiperbólicas $\{p, q\}$, derivados de álgebras de divisão dos quatérnios $\mathcal{A}$ sobre corpos de números $\mathcal{K}$. Além disso, generalizou-se o processo de identificação desses grupos em ordens dos quatérnios (reticulados hiperbólicos), associadas às constelações de sinais geometricamente uniformes, provenientes de grupos discretos. Esse procedimento é importante, pois permite rotular os sinais das constelações construídas por elementos de uma estrutura algébrica.

Em (Rodrigo Gusmão Cavalcante 2008), foi abordado que as modulações associadas a superfícies mínimas apresentaram bons desempenhos, pois tais modulações são pontos críticos do erro quadrático médio. Além disso, foi mostrado também que o espaço de sinais possui métrica induzida da superfície associada à modulação. Com isso, foi possível demonstrar que os espaços de sinais com curvatura negativa são os que apresentam melhor desempenho segundo a probabilidade média de erro. Dessa forma, alguns exemplos de constelações de sinais geometricamente uniformes foram construídos e analisados em variedades Riemannianas, bem como, foi notado que na maioria das vezes que o espaço hiperbólico é utilizado nos blocos de um sistema de comunicações, o desempenho desse sistema tende a se aproximar do ponto ótimo de operação.

Além disso, em (Clarice Dias Albuquerque 2002), associado à codificação quântica, foram propostos novos códigos quânticos tóricos, bem como foi caracterizada uma relação entre tais códigos, com conhecidos reticulados e formas quadráticas, permitindo assim, a geração de um novo método de obtenção de códigos tóricos por meio da tesselação do reticulado quadrado do toro por translações de poliminó.

Dentro desse contexto e com o objetivo de propor um método de rotulagem de sinais de constelações hiperbólicas convenientes, é necessário o estabelecimento de um procedimento sistemático de construção de reticulados. Para tal procedimento é relevante a identificação dessas informações geométricas via emparelhamento das arestas de polígonos hiperbólicos regulares de modo a construir códigos geometricamente uniformes e, por consequência, garantir a eficiência desejada em diversas situações envolvendo projetos de sistemas de comunicações digitais. Associado a este tratamento, analisaremos os possíveis emparelhamentos das arestas de polígonos hiperbólicos de $n = 3, 4, 5, 6, 7$ e 8 lados com o objetivo de determinação de reticulados hiperbólicos a serem usados na construção de constelações de sinais.

4.1 O Grupo Modular Não Homogêneo

Nesta seção, apresentamos o grupo modular não-homogêneo Γ, bem como, algumas propriedades e resultados importantes a fim de caracterizarmos um domínio fundamental para o mesmo.

Definição 4.1 *O* ***grupo modular*** *é o grupo de transformações fracionárias lineares*

$$L: \quad z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}\ , \quad ad-bc=1,\ a,b,c,d \in \mathbb{Z}.$$

Usaremos a seguinte nomenclatura:

- $\Gamma' = SL\,(2,\mathbb{Z}) \equiv$ **grupo modular homogêneo**
- $\Gamma \cong \dfrac{\Gamma'}{\{\pm I\}} \equiv$ **grupo modular não-homogêneo**

Observação: Salientamos, de acordo com o critério de classificação das transformações lineares, ver Capítulo 3, vemos que uma transformação elíptica de Γ ocorre quando $a+d=0$ ou $a+d=\pm 1$.

Nossa primeira tarefa aqui, é encontrar um domínio fundamental para o grupo modular não-homogêneo Γ.

Lema 4.1 (J. Lehner 1996) *Para um ponto fixo $z \in \mathbb{H}$ existem somente um número finito de pares de inteiros (c, d) tais que $|cz + d| \leq 1$.*

Definição 4.2 *Dado o ponto $z = x + iy \in \mathbb{H}$, dizemos que $y = Im\ z$ é a **altura** do ponto z.*

Lema 4.2 (J. Lehner 1996) *Entre as transformações $\{T(z)\}, z \in \mathbb{H}$, existem somente um número finito com alturas tão grande quanto a altura de z.*

Note que o lema anterior nos sugere que selecionaremos de cada classe de equivalência um elemento de altura máxima, isto é, um ponto $z \in \mathbb{H}$ tal que $|cz + d| \geq 1$, para todos os pares de inteiros (c, d).

Teorema 4.1 (J. Lehner 1996) *Um domínio fundamental para Γ é o conjunto*

$$D = \{z \in \mathbb{H} \ / \ |Re\ z| < 1/2 \ e \ |z| > 1\}.$$

A Figura 4.1 ilustra o domínio fundamental para Γ.

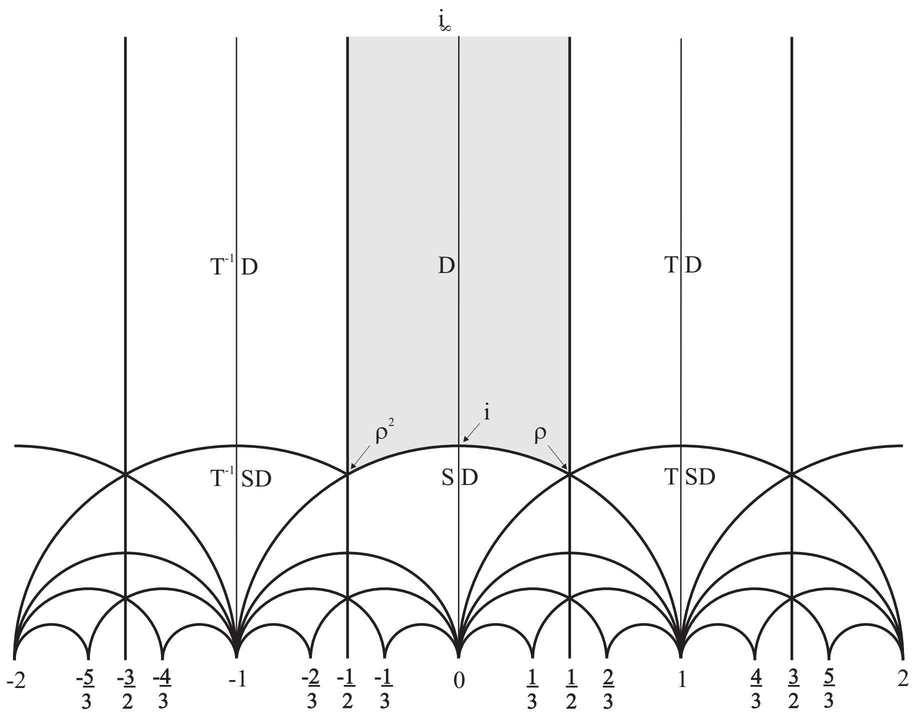


Figura 4.1: O domínio fundamental para Γ.

Note que os únicos pares de pontos da fronteira de D (região hachurada), os quais são equivalentes sob Γ são os pares de pontos da fronteira de D a qual coincide com uma reflexão sobre a reta $x = 0$ (veja Figura 4.1); estes pontos são identificados pelas seguintes transformações

$$T: \ z \longmapsto z + 1 \qquad S: \ z \longmapsto \frac{-1}{z}$$

Geometricamente, S e T correspondem a inversão e translação no plano, respectivamente.

Desta forma, temos que

$$T^{-1}:\ z \longmapsto z-1$$

$$TS = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \text{isto é, } T\left(S\left(z\right)\right) = \frac{z-1}{z}$$

$$ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \text{isto é, } S\left(T\left(z\right)\right) = \frac{-1}{z+1}$$

Suponhamos que $z, z' \in D$ e $z \sim_{\Gamma} z'$, digamos $z' = L\left(z\right)$; então, $Im\ z' = Im\ L\left(z\right)$, além disso,

$$1 = |cz+d| = \left(cx+d\right)^2 + c^2y^2 \geq c^2 + d^2 - cd \geq 1,$$

então, um dos dois $c = 0, d = \pm 1$ ou $d = 0, c = \pm 1$.

Caso 1: $c = 0, d = \pm 1 \Rightarrow L = T$.

Caso 2: $c = \pm 1, d = 0 \Rightarrow L = S$,

estas são as identificações já mencionadas.

Note que os únicos pontos fixos das transformações de Γ, os quais estão em $\overline{D}$, são os pontos i, ρ e ρ^2, onde $\rho = e^{\frac{\pi}{3}\cdot i}$. Estes pontos são pontos fixos sob as transformações elípticas $S:\ z \mapsto \dfrac{-1}{z}$ (de ordem 2), $TS:\ z \mapsto \dfrac{z-1}{z}$ (de ordem 3) e $ST:\ z \mapsto \dfrac{-1}{z+1}$ (de ordem 3), respectivamente.

De fato:

- $S\left(i\right) = \dfrac{-1}{i} \cdot \dfrac{i}{i} = \dfrac{-i}{i^2} = \dfrac{-i}{-1} = i \quad \therefore S\left(i\right) = i.$

- $TS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(TS\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, logo,
$\left(TS\right)^3 = \left(TS\right)^2\left(TS\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \therefore \left(TS\right)^3 = -I.$

- $ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(ST\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, logo, $\left(ST\right)^3 = \left(ST\right)^2 \cdot \left(ST\right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ \left(ST\right)^3 = -I.$

Além disso, temos que:

- $TS\left(\rho\right) = \dfrac{\rho-1}{\rho} = \dfrac{\cos\ \pi/3 + i\cdot \operatorname{sen}\pi/3 - 1}{\cos\ \pi/3 + i\cdot\operatorname{sen}\pi/3} = \dfrac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \dfrac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} =$
$\dfrac{-\frac{1}{2} + 2i\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} = \dfrac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \rho \quad \therefore TS\left(\rho\right) = \rho.$

- $ST\left(\rho^2\right) = \dfrac{-1}{\rho^2+1} = \dfrac{-1}{e^{\frac{2\pi}{3}i}+1} = \dfrac{-1}{cos\dfrac{2\pi}{3}+i.sen\dfrac{2\pi}{3}+1}ST\left(\rho^2\right) = \dfrac{-1}{-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1} = \dfrac{-1}{\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}.$
$\dfrac{\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}} = \dfrac{-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1} = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \rho^2 \;\therefore\; ST\left(\rho^2\right) = \rho^2.$

Proposição 4.1 (J. Lehner 1996) *As transformações S e T geram o grupo modular não-homogêneo Γ, isto é, $\Gamma = \langle S, T\rangle$.*

Ao introduzir uma estrutura topológica ao grupo quociente,

$$\frac{\mathbb{H}}{\Gamma} \equiv \text{ conjunto de classes equivalentes de pontos de } \mathbb{H} \text{ sobre o grupo modular } \Gamma.$$

faz com que o mapeamento $\tau : \mathbb{H} \to \dfrac{\mathbb{H}}{\Gamma}$ seja contínuo.

Disso decorre o seguinte resultado.

Teorema 4.2 (J. Lehner 1996) *O espaço identificação $\dfrac{\mathbb{H}}{\Gamma}$, quando compactificado acrescentando o ponto i_∞, pode ser dado uma estrutura analítica natural sobre a qual ele é uma superfície compacta de Riemann de gênero zero.*

4.2 Os Subgrupos de Congruência Principal

Nesta seção consideramos uma classe importante de subgrupos do grupo modular. Trata-se de grupos que aparecem naturalmente em aplicações envolvendo, por exemplo, formas quadráticas.

Definição 4.3 *Sejam $\mathbb{Z}$ o grupo dos inteiros e $\mathbb{Z}_q$ os inteiros módulo q. O homomorfismo natural $\varphi :\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_q$ induz um homomorfismo*

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\varphi} :\ SL\left(2,\mathbb{Z}\right) & \longrightarrow & SL\left(2,\mathbb{Z}_q\right) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \tilde{\varphi}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} \varphi(a) & \varphi(b) \\ \varphi(c) & \varphi(d) \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

O núcleo desta aplicação é denominado **subgrupo de congruência principal de nível q** que denotaremos por Γ'_q.

Teorema 4.3 (J. Lehner 1996) *Γ'_q é um subgrupo normal de Γ' e $\dfrac{\Gamma'}{\Gamma'_q} \cong SL\left(2,\mathbb{Z}_q\right)$.*

Nossa tarefa agora será a de calcular o índice $\left[\Gamma' : \Gamma'_q\right]$ que denotaremos por $\nu'(q)$, ou seja, queremos encontrar a ordem do grupo $SL\left(2,\mathbb{Z}_q\right)$. A fim de obtermos esta ordem, vamos introduzir um novo conceito.

Definição 4.4 *Um par de inteiros c, d é chamado **primitivo mod q** se $mdc\left(c,d,q\right) = 1$.*

Observação: Para o cálculo do $mdc\,(c,d,q)$, podemos lançar mão do seguinte resultado:

$$mdc\,(c,d,q) = mdc\,(mdc\,(c,d)\,,q) = mdc\,(c, mdc\,(d,q))$$

Denotaremos o número de pares primitivos incongruentes $mod\ q$ por $\lambda\,(q)$.

Lema 4.3 (J. Lehner 1996) *Uma matriz* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL\,(2,\mathbb{Z}_q) \Leftrightarrow c,d$ *é um par de inteiros primitivos* $mod\ q$. *Em outras palavras, as segundas linhas das matrizes representando elementos de* $SL\,(2,\mathbb{Z}_q)$ *são precisamente os pares primitivos* $mod\ q$.

Observe que para um par de inteiros primitivos $mod\ q$ c,d existem q pares de inteiros incongruentes $mod\ q$ a,b tais que $ad - bc \equiv 1 \pmod q$; ou seja, equivalentemente significa dizer que existem q elementos distintos da forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ em $SL\,(2,\mathbb{Z}_q)$.

Lema 4.4 (J. Lehner 1996) $\lambda\,(q)$ *é uma função multiplicativa de* q*, isto é, se* $mdc\,(q_1,q_2) = 1$*, então*
$\lambda\,(q_1 \cdot q_2) = \lambda\,(q_1) \cdot \lambda\,(q_1)\,,\ q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$.

Lema 4.5 (J. Lehner 1996) *Se* p *é um número primo, então*

$$\lambda\left(p^k\right) = p^{2k} \cdot \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Desta forma, levando em consideração os lemas anteriores, concluímos que o índice $v'\,(q)$ de Γ'_q em Γ' é dado pela expressão:

$$\nu'\,(q) = q^3 \cdot \prod_{\frac{p}{q}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Vejamos um exemplo de cálculo para $\nu'\,(q)$.

Exemplo: Consideremos o subgrupo:

$$\Gamma^*_q = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma' \ :\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \pm I \pmod q \right\}.$$

Então, Γ^*_q é um subgrupo normal de Γ.

Sejam $\Gamma_q \cong \dfrac{\Gamma^*_q}{\{\pm I\}}$ o subgrupo normal correspondente do grupo modular não-homogêneo Γ e $\nu'\,(q) = [\Gamma\ :\ \Gamma_q]$ o índice de Γ_q em Γ. Assim, temos três casos a considerar:

i) se $q = 2 \Rightarrow \Gamma^*_q = \Gamma'_2$ já que $I \equiv -I \pmod 2$. Logo, $v\,(2) = \nu'\,(2) = 2^3 \cdot \prod_{\frac{p}{2}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = 8 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = 6.$

ii) se $q > 2 \Rightarrow \left[\Gamma^*_q\ :\ \Gamma_q\right] = 2$, além disso, $v\,(q) = \frac{1}{2}\nu'\,(q) = \frac{1}{2} \cdot q^3 \cdot \prod_{\frac{p}{2}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$.

iii) se $q = 1$ então $\nu'\,(1) = 1$.

4.3 Superfícies de Riemann Associadas a Subgrupos do Grupo Modular

Nesta seção, consideramos G um subgrupo do grupo modular Γ de índice finito μ, isto é, $[\Gamma : G] = \mu < \infty$. O objetivo é mostrar um domínio fundamental para G, e, consequentemente determinarmos o gênero da superfície.

Teorema 4.4 (J. Lehner 1996) *Seja G um subgrupo de índice finito μ em Γ. Sejam $T_1, T_2, \ldots, T_\mu$ classes laterais representativas. Desta forma, $\Gamma = GT_1 \cup GT_2 \cup \ldots \cup GT_\mu$. Se D é um domínio fundamental para Γ, então*

$$D_G = T_1 D \cup T_2 D \cup \ldots \cup T_\mu D,$$

é um domínio fundamental para G.

Agora, para o espaço quociente $\dfrac{\mathbb{H}}{G}$ pode ser dado uma estrutura analítica, como no caso do grupo quociente $\dfrac{\mathbb{H}}{\Gamma}$. Além do mais, para a compactificação poderão existir vértices reais parabólicos, assim como vértices parabólicos infinitos, porém todos são tratados como anteriormente.

Como mencionamos anteriormente, existe uma triangularização natural de $\dfrac{\mathbb{H}}{\Gamma}$ (veja Figura 4.1), na qual os pontos fixos são os vértices e cada 1-simplex conectados são pontos fixos. Esta triangularização natural de $\dfrac{\mathbb{H}}{\Gamma}$ induz uma triangularização sobre $\dfrac{\overline{\mathbb{H}}}{G}$.

Além disso, $\dfrac{\overline{\overline{\mathbb{H}}}}{G}$ é uma superfície de Riemann compacta. Para calcularmos o seu gênero, utilizamos a **característica de Euler**

$$\chi = 2 - 2g = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2, \tag{4.1}$$

onde:

- χ é a característica de Euler,
- g é o gênero da superfície,
- σ_k é o número de k-simplex (0-simplex é um vértice, 1-simplex é uma aresta e 2-simplex é um triângulo) na triangularização (ver (I.N. Herstein 1975)).

Na triangularização natural de $\dfrac{\overline{\overline{\mathbb{H}}}}{G}$, σ_0 é o número de imagens de pontos elípticos e parabólicos de Γ. Desta forma, é conveniente escrevermos $\sigma_0 = \lambda_i + \lambda_\rho + \lambda_\infty$, onde:

- λ_i é o número de vértices equivalentes a i,
- λ_ρ é o número de vértices equivalentes a ρ,
- λ_∞ é o número de vértices equivalentes a ∞.

Teorema 4.5 (J. Lehner 1996) *Seja G um subgrupo de Γ, com $[\Gamma : G] = \mu < \infty$. Então o gênero da superfície $\dfrac{\overline{\mathbb{H}}}{G}$ é dado pela relação:*

$$g = 1 + \frac{1}{2}(\mu - \sigma_0) \tag{4.2}$$

Lema 4.6 (J. Lehner 1996) *Seja G um subgrupo normal de Γ. Então Γ age como um grupo de transformações conforme em $\dfrac{\overline{\mathbb{H}}}{G}$ sobre o qual todos os pontos equivalentes a i (respectivamente a ρ, ∞) são equivalentes.*

Além disso, Γ age conformemente em $\overline{\mathbb{H}}$, logo Γ age conformemente em $\dfrac{\overline{\mathbb{H}}}{G}$. Por fim, Γ leva qualquer ponto equivalente a i em qualquer outro tal ponto, (e analogamente para ρ e ∞).

Segue do Lema 4.6, que todos os vértices de $\dfrac{\overline{\mathbb{H}}}{G}$ equivalentes a i possuem o mesmo número de 1-simplex (e similarmente para ρ e ∞).

Desta forma, sejam $2n_i, 2n_\rho$ e $2n_\infty$ o número de 1-simplex se encontrando em pontos equivalentes típicos, respectivamente a i, ρ e ∞.

Definição 4.5 *A tripla (n_i, n_ρ, n_∞) é chamada* ***ramificação esquema*** *do subgrupo G.*

Desta forma, com relação a ramificação esquema de G, tem-se as seguintes relações:

$$\begin{cases} n_i = 1 \text{ ou } 2 \\ n_\rho = 1 \text{ ou } 3 \\ n_\infty = \text{ um inteiro positivo} \end{cases} \tag{4.3}$$

Teorema 4.6 (J. Lehner 1996) *Seja G um subgrupo normal de índice finito μ em Γ. Então $\dfrac{\overline{\mathbb{H}}}{G}$ é uma superfície de Riemann de gênero dado por:*

$$g = 1 + \frac{1}{2} \cdot \mu \left(1 - \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_\rho} - \frac{1}{n_\infty}\right)$$

O Teorema 4.6 nos diz que para determinarmos o gênero da superfície de Riemann $\dfrac{\overline{\mathbb{H}}}{G}$ devemos caracterizar a ramificação esquema de G. A relação (4.3) nos mostra que existem quatro tipos de ramificações esquema, que são:

$$(1, 1, n)\,,\ (1, 3, n)\,,\ (2, 1, n)\ \text{ e }\ (2, 3, n)\,.$$

Teorema 4.7 (J. Lehner 1996) Γ *possui únicos subgrupos de índices $\mu = 1, 2, 3$ os quais denotamos por Γ, G_2, G_3. Suas ramificações esquema são respectivamente:*

$$(1, 1, 1)\,,\ (2, 1, 2)\ \ e\ \ (1, 3, 3)\,. \tag{4.4}$$

Se G é um subgrupo normal, G não é nenhum destes três então, a ramificação esquema de G é $(2,3,n)$ para algum inteiro positivo. Além disso, G não contém $S(z) = \dfrac{-1}{z}$ e nem $T(z) = z+1$.

Corolário 4.1 (J. Lehner 1996) *Se G é um subgrupo normal de índice $\mu \geq 4$ em Γ, então $\mu \equiv 0$ (mod 6) e o gênero da superfície de Riemann $\dfrac{\overline{\mathbb{H}}}{G}$ é dado por*

$$g = 1 + \frac{\mu(n_\infty - 6)}{12n_\infty}$$

Teorema 4.8 (J. Lehner 1996) *O gênero de Γ_q é:*

i) $g = 0$ *se* $q = 2$.

ii) $g = 1 + \dfrac{q^2(q-6)}{24} \cdot \prod_{\frac{p}{q}} \left(1 - \dfrac{1}{p^2}\right)$, *se* $q > 2$.

Note que os únicos subgrupos normais de gênero zero, além dos subgrupos Γ, G_2, G_3 mencionados anteriormente, são Γ_q para $q = 2,3,4$ *e* 5. O grupo quociente $\dfrac{\Gamma}{\Gamma_q}$ age sobre o espaço quociente $\dfrac{\overline{\mathbb{H}}}{\Gamma_q}$, o qual é simplesmente a esfera. Os grupos $\dfrac{\Gamma}{\Gamma_q}$, para $q = 2,3,4$ e 5 agem como o grupo diedral de ordem 6, o grupo do tetraedro, o grupo do octaedro e o grupo do icosaedro, respectivamente.

Exemplo 1: O primeiro grupo é Γ_2. Temos que $\dfrac{\Gamma}{\Gamma_2} \cong SL(2, \mathbb{Z}_2)$. Tomemos as seguintes classes laterais representativas, como segue:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \to z$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \to z+1$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z \to \frac{-1}{z}$$

$$TS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z \to \frac{z-1}{z}$$

$$TST = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} z \to \frac{z}{z+1}$$

$$TSTS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} z \to \frac{1}{-z+1}$$

Um domínio fundamental para Γ_2 é dado na Figura 4.2 a seguir.

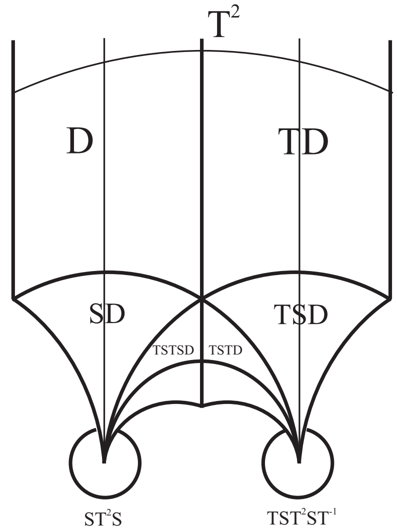


Figura 4.2: Domínio fundamental de Γ_2.

4.4 Caracterização da Superfície de Riemann Associada aos Emparelhamentos dos Lados de Polígonos Hiperbólicos

Antes de apresentarmos todos os possíveis emparelhamentos das arestas de polígonos hiperbólicos com $3 \leq n \leq 8$, é necessário algumas definições para análises a posteriori.

Definição 4.6 *Uma* ***tesselação regular*** *do plano hiperbólico é uma partição consistindo de polígonos, todos congruentes, sujeitos à restrição de se interceptarem somente em arestas ou vértices, de modo a ter o mesmo número de polígonos compartilhando um mesmo vértice, independente do vértice. Portanto, existem infinitas tesselações regulares em $\mathbb{H}^2$.*

Considere P um polígono e $\mathcal{A}$ o conjunto de arestas de P. Um emparelhamento de arestas é definido da seguinte forma.

Definição 4.7 ***Um emparelhamento de arestas de*** *P é um conjunto $\phi = \{T_\tau \mid \tau \in \mathcal{A}\}$ de isometrias que, para toda aresta $\tau \in \mathcal{A}$: 1) existe aresta $\tau' \in \mathcal{A}$ com $T_\tau(\tau') = \tau$; 2) as isometrias T_τ e $T_{\tau'}$ satisfazem a relação $T_{\tau'} = T_\tau^{-1}$; 3) se τ for aresta de P então $\tau' = P \cap T_\tau^{-1}(P)$.*

As superfícies hiperbólicas $\mathbb{H}^2/\Gamma$ obtidas como espaços de identificação de polígonos são aquelas para os quais Γ é finitamente gerado. Como Γ é gerado por transformações de emparelhamento de lados e um polígono P' tem apenas uma quantidade finita de lados, então Γ é finitamente gerado se P' é uma região fundamental para Γ. Desta forma, uma superfície hiperbólica compacta $\mathbb{H}^2/\Gamma$ é o espaço de identificação de um polígono se o polígono é uma região fundamental para Γ. Uma condição necessária e suficiente para um polígono ser uma região fundamental é o seguinte.

Condição de Lado e Ângulo (J. Lehner 1996) Se um polígono compacto P' é uma região fundamental para um grupo de isometrias que preserva orientação Γ de $\mathbb{S}^2$ (Superfície esférica), $\mathbb{R}^2$ (Plano euclidiano), ou $\mathbb{H}^2$ (plano hiperbólico), então:

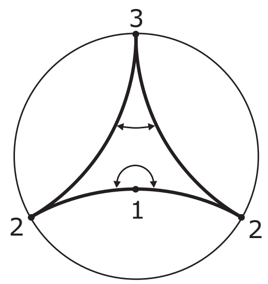
i) Para cada lado s de P' existe um único lado s' de P' tal que $s' = \gamma(s)$, para $\gamma \in \Gamma$;

ii) Dado um emparelhamento de lados P', para cada conjunto de vértices identificados, a soma dos ângulos tem que ser igual a 2π. Esse conjunto é um ciclo de vértices.

Teorema 4.9 [Poincaré] (J. Anderson 1999) *Um polígono compacto P' satisfazendo as condições de lado e ângulo é uma região fundamental para o grupo Γ gerado pelas transformações de emparelhamento de lados de P' e Γ é um grupo fuchsiano.*

A seguir, apresentamos todos os possíveis emparelhamentos das arestas de polígonos hiperbólicos com $n = 3, 4, 5, 6, 7$ e 8 lados, donde tabulamos algumas propriedades importantes que visam o direcionamento para construção de constelações de sinais geometricamente uniformes.

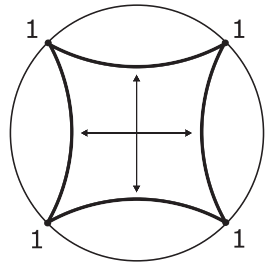
• **Caso 01**: $n = 3$ lados, neste caso temos apenas um possível emparelhamento.



$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{4}{2} + 1 \\ 2-2g &= 2 \quad \therefore \; g = 0 \end{aligned}$$

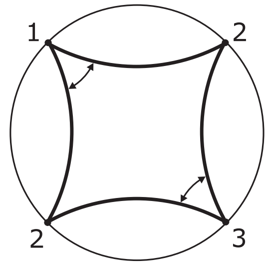
Esfera

• **Caso 02**: $n = 4$ lados, neste caso temos dois possíveis emparelhamentos.



$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 1 - \frac{4}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

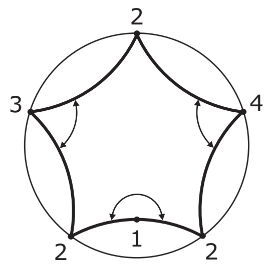
Toro



$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{4}{2} + 1 \\ 2-2g &= 2 \quad \therefore \; g = 0 \end{aligned}$$

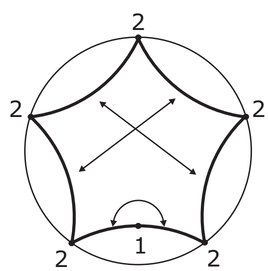
Esfera

• **Caso 03**: $n = 5$ lados, neste caso temos três possíveis emparelhamentos.



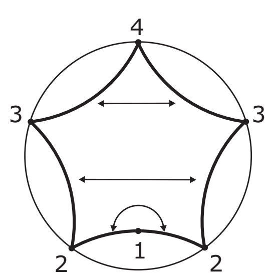
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 4 - \frac{6}{2} + 1 \\ 2-2g &= 2 \quad \therefore \ g = 0 \end{aligned}$$

Esfera



$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 2 - \frac{6}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \therefore \ g = 1 \end{aligned}$$

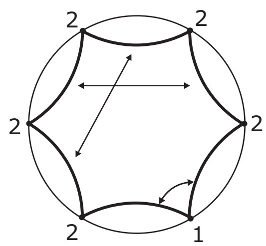
Toro



$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 4 - \frac{6}{2} + 1 \\ 2-2g &= 2 \quad \therefore \ g = 0 \end{aligned}$$

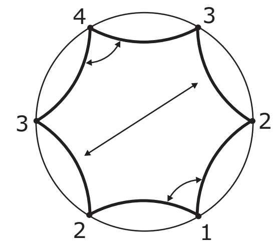
Esfera

• **Caso 04**: $n = 6$ lados, neste caso temos quinze possíveis emparelhamentos.



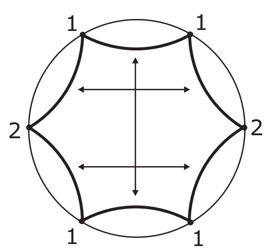
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 2 - \frac{6}{2} + 1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1\end{aligned}$$

Toro



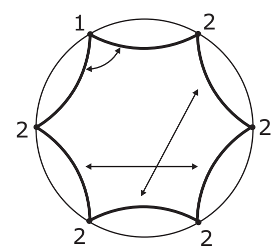
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 4 - \frac{6}{2} + 1\\ 2-2g &= 2 \quad \therefore \; g = 0\end{aligned}$$

Esfera



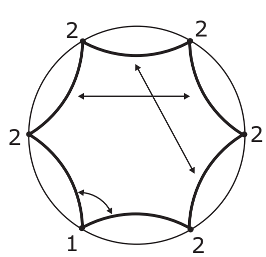
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 2 - \frac{6}{2} + 1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1\end{aligned}$$

Toro



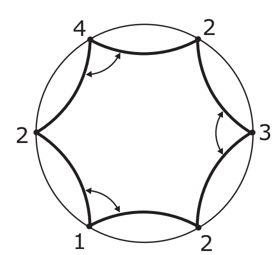
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 2 - \frac{6}{2} + 1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1\end{aligned}$$

Toro



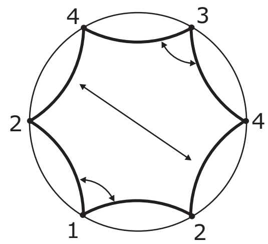
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 2 - \frac{6}{2} + 1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1\end{aligned}$$

Toro



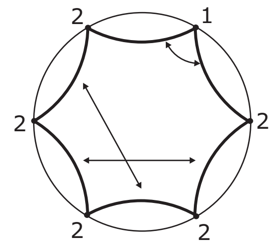
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 4 - \frac{6}{2} + 1\\ 2-2g &= 2 \quad \therefore \; g = 0\end{aligned}$$

Esfera



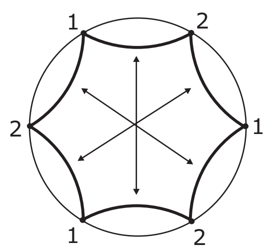
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 4-\frac{6}{2}+1\\ 2-2g &= 2 \quad \therefore\ g=0\end{aligned}$$

Esfera



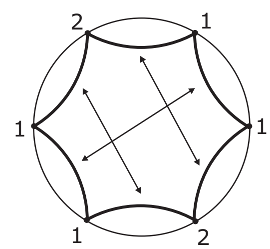
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 2-\frac{6}{2}+1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g=1\end{aligned}$$

Toro



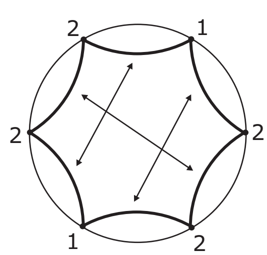
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 2-\frac{6}{2}+1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g=1\end{aligned}$$

Toro



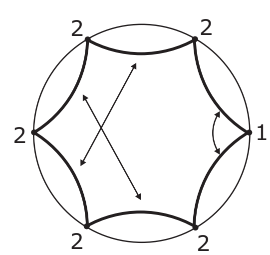
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 2-\frac{6}{2}+1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g=1\end{aligned}$$

Toro



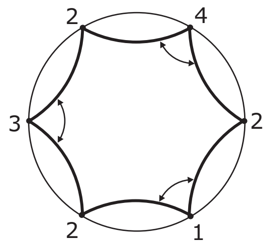
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 2-\frac{6}{2}+1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g=1\end{aligned}$$

Toro



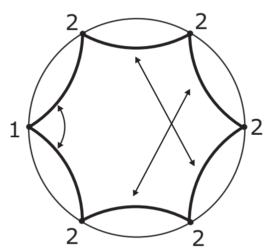
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 2-\frac{6}{2}+1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g=1\end{aligned}$$

Toro



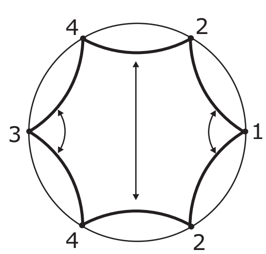
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 4-\frac{6}{2}+1\\ 2-2g &= 2 \quad \therefore\ g=0\end{aligned}$$

Esfera



$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 2-\frac{6}{2}+1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g=1\end{aligned}$$

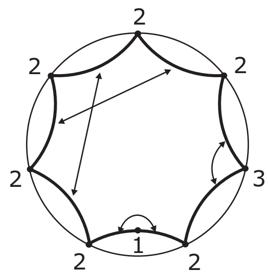
Toro



$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 4-\frac{6}{2}+1\\ 2-2g &= 2 \quad \therefore\ g=0\end{aligned}$$

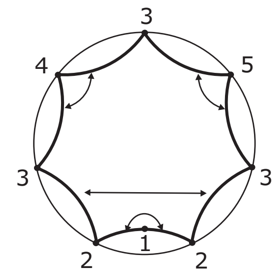
Esfera

• **Caso 05**: $n = 7$ lados, temos quinze possíveis emparelhamentos.



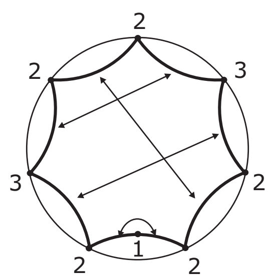
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

Toro



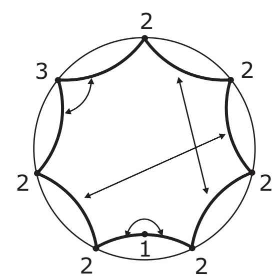
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 5 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 2 \quad \therefore \; g = 0 \end{aligned}$$

Esfera



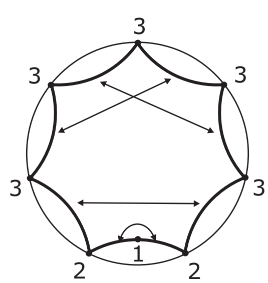
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

Toro



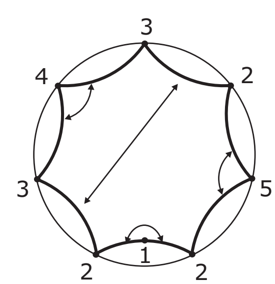
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

Toro



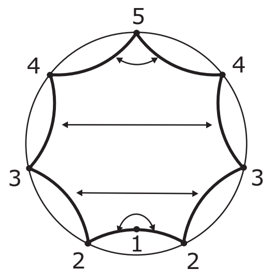
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

Toro



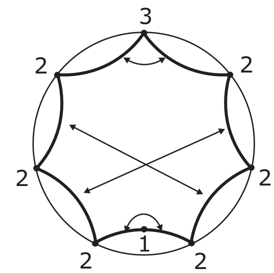
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 5 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 2 \quad \therefore \; g = 0 \end{aligned}$$

Esfera



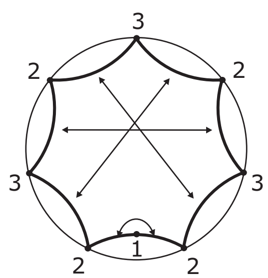
$$\begin{aligned} \chi = 2 - 2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2 - 2g &= 5 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2 - 2g &= 2 \quad \therefore\ g = 0 \end{aligned}$$

Esfera



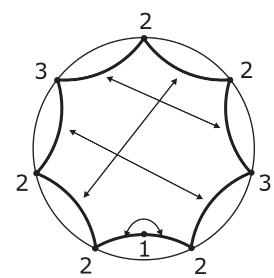
$$\begin{aligned} \chi = 2 - 2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2 - 2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2 - 2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



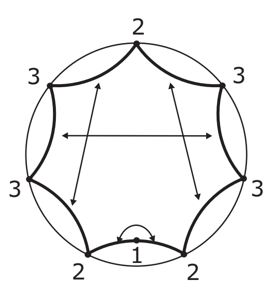
$$\begin{aligned} \chi = 2 - 2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2 - 2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2 - 2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



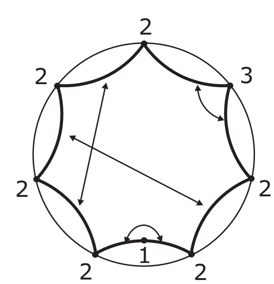
$$\begin{aligned} \chi = 2 - 2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2 - 2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2 - 2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



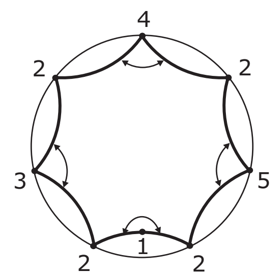
$$\begin{aligned} \chi = 2 - 2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2 - 2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2 - 2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



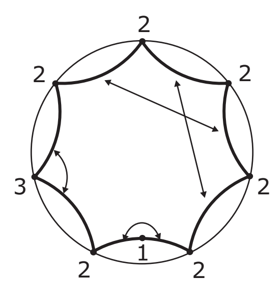
$$\begin{aligned} \chi = 2 - 2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2 - 2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2 - 2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



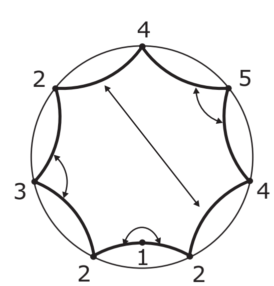
$$
\begin{aligned}
\chi = 2 - 2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\
2 - 2g &= 5 - \frac{8}{2} + 1 \\
2 - 2g &= 2 \quad \therefore \ g = 0
\end{aligned}
$$

Esfera



$$
\begin{aligned}
\chi = 2 - 2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\
2 - 2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\
2 - 2g &= 0 \quad \therefore \ g = 1
\end{aligned}
$$

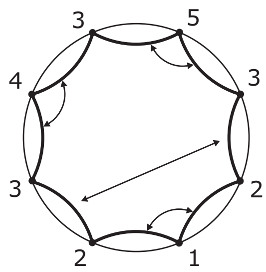
Toro



$$
\begin{aligned}
\chi = 2 - 2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\
2 - 2g &= 5 - \frac{8}{2} + 1 \\
2 - 2g &= 2 \quad \therefore \ g = 0
\end{aligned}
$$

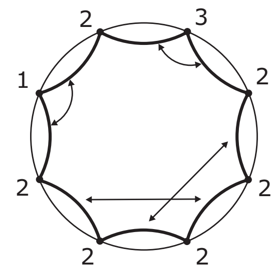
Esfera

• **Caso 06**: $n = 8$ lados, temos cento e cinco possíveis emparelhamentos.



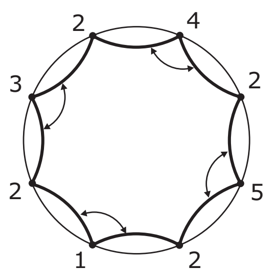
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 5 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 2 \quad \therefore\ g = 0 \end{aligned}$$

Esfera



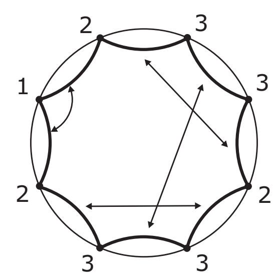
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



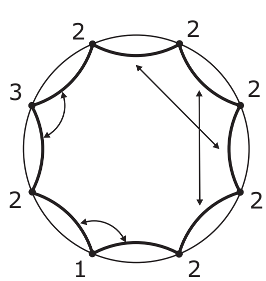
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 5 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 2 \quad \therefore\ g = 0 \end{aligned}$$

Esfera



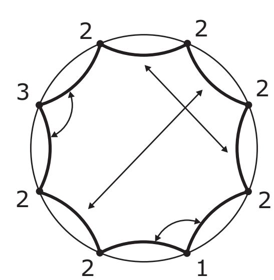
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



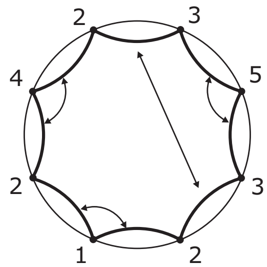
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



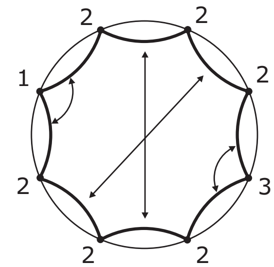
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



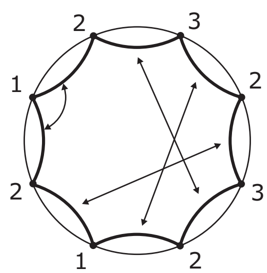
$$
\begin{aligned}
\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\
2-2g &= 5 - \frac{8}{2} + 1\\
2-2g &= 2 \quad \therefore \; g = 0
\end{aligned}
$$

Esfera



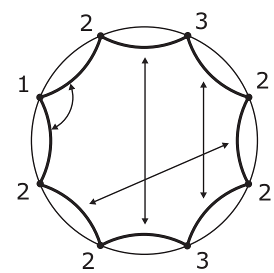
$$
\begin{aligned}
\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\
2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\
2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1
\end{aligned}
$$

Toro



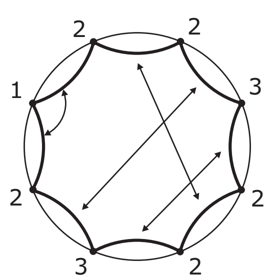
$$
\begin{aligned}
\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\
2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\
2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1
\end{aligned}
$$

Toro



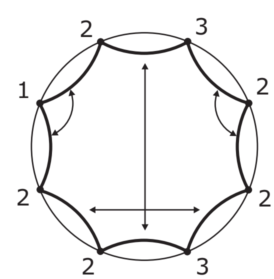
$$
\begin{aligned}
\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\
2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\
2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1
\end{aligned}
$$

Toro



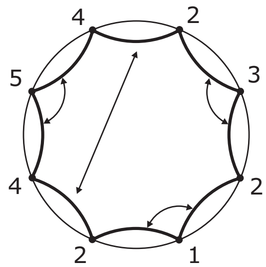
$$
\begin{aligned}
\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\
2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\
2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1
\end{aligned}
$$

Toro



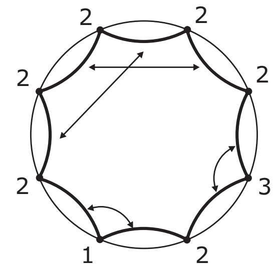
$$
\begin{aligned}
\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\
2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\
2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1
\end{aligned}
$$

Toro



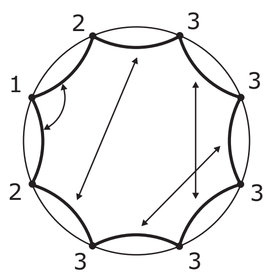
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 5 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 2 \quad \therefore \; g = 0 \end{aligned}$$

Esfera



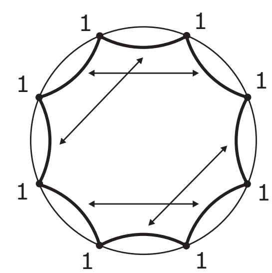
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

Toro



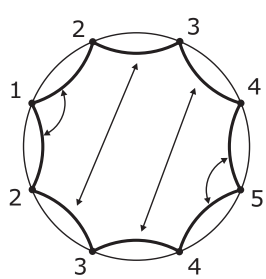
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

Toro



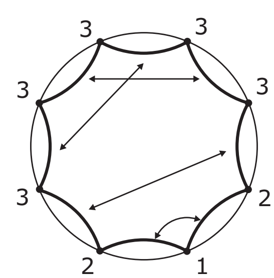
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 1 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= -2 \quad \therefore \; g = 2 \end{aligned}$$

Bitoro



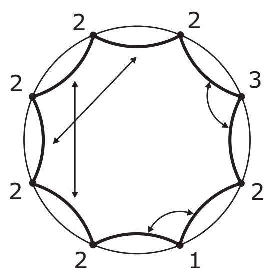
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 5 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 2 \quad \therefore \; g = 0 \end{aligned}$$

Esfera



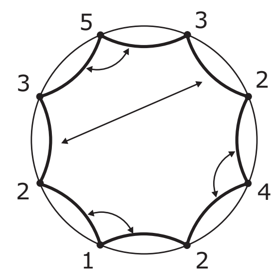
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

Toro



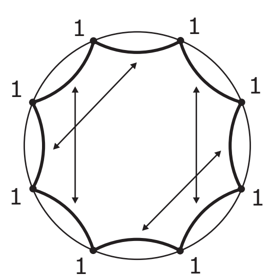
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

Toro



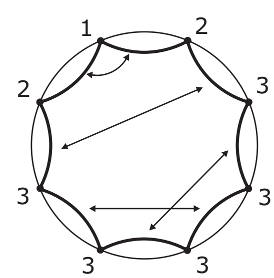
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 5 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 2 \quad \therefore \; g = 0 \end{aligned}$$

Esfera



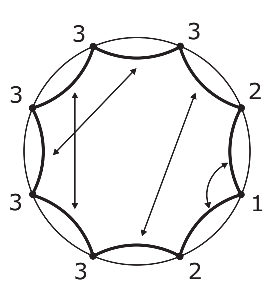
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 1 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= -2 \quad \therefore \; g = 2 \end{aligned}$$

Bitoro



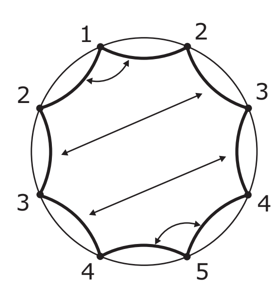
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

Toro



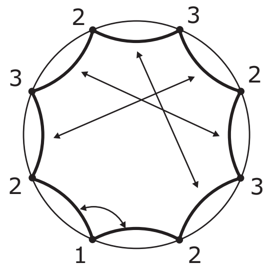
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

Toro



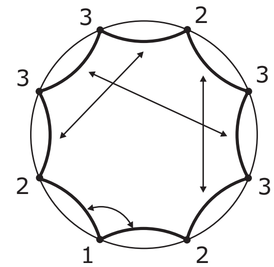
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 5 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 2 \quad \therefore \; g = 0 \end{aligned}$$

Esfera



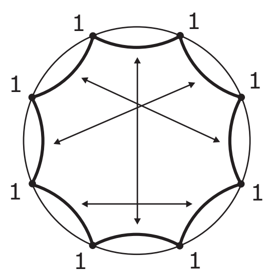
$$
\begin{aligned}
\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\
2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\
2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1
\end{aligned}
$$

Toro



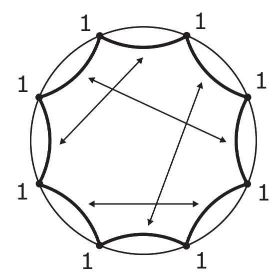
$$
\begin{aligned}
\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\
2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\
2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1
\end{aligned}
$$

Toro



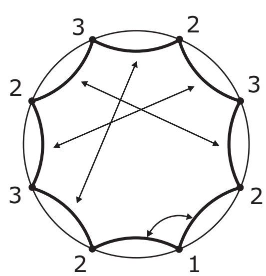
$$
\begin{aligned}
\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\
2-2g &= 1 - \frac{8}{2} + 1\\
2-2g &= -2 \quad \therefore\ g = 2
\end{aligned}
$$

Bitoro



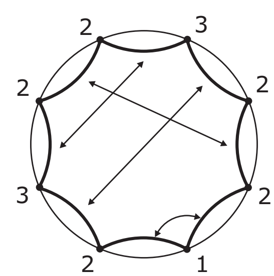
$$
\begin{aligned}
\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\
2-2g &= 1 - \frac{8}{2} + 1\\
2-2g &= -2 \quad \therefore\ g = 2
\end{aligned}
$$

Bitoro



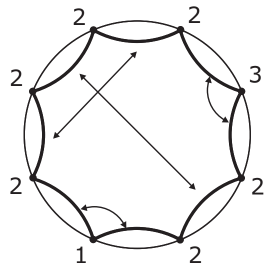
$$
\begin{aligned}
\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\
2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\
2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1
\end{aligned}
$$

Toro



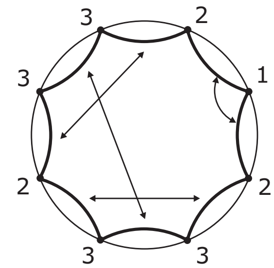
$$
\begin{aligned}
\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\
2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\
2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1
\end{aligned}
$$

Toro



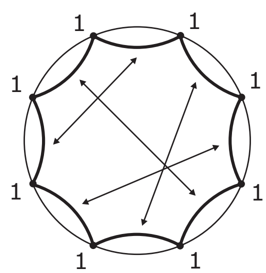
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g=1\end{aligned}$$

Toro



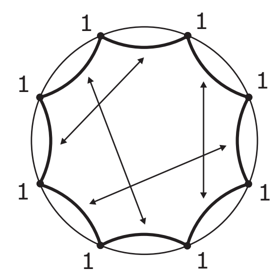
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g=1\end{aligned}$$

Toro



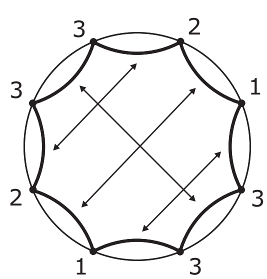
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 1 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= -2 \quad \therefore\ g=2\end{aligned}$$

Bitoro



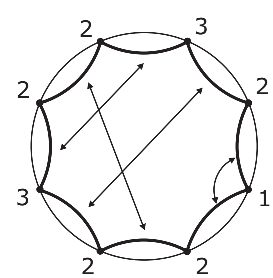
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 1 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= -2 \quad \therefore\ g=2\end{aligned}$$

Bitoro



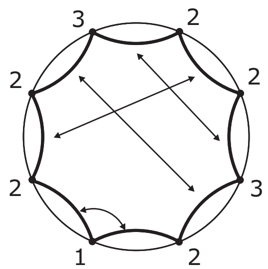
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g=1\end{aligned}$$

Toro



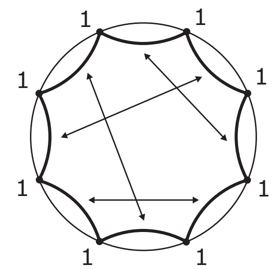
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g=1\end{aligned}$$

Toro



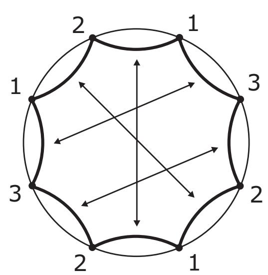
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3-\frac{8}{2}+1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g=1\end{aligned}$$

Toro



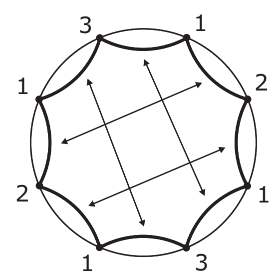
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 1-\frac{8}{2}+1\\ 2-2g &= -2 \quad \therefore\ g=2\end{aligned}$$

Bitoro



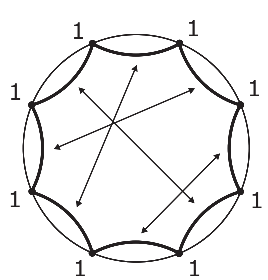
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3-\frac{8}{2}+1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g=1\end{aligned}$$

Toro



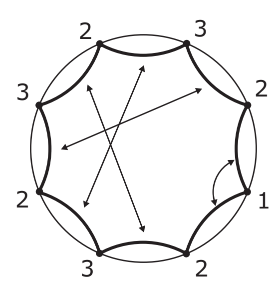
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3-\frac{8}{2}+1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g=1\end{aligned}$$

Toro



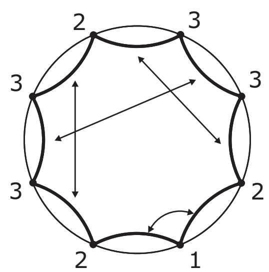
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 1-\frac{8}{2}+1\\ 2-2g &= -2 \quad \therefore\ g=2\end{aligned}$$

Bitoro



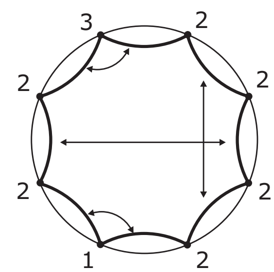
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3-\frac{8}{2}+1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g=1\end{aligned}$$

Toro



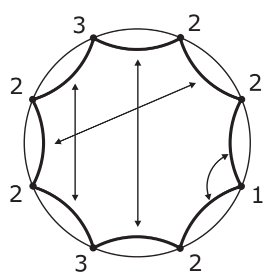
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1\end{aligned}$$

Toro



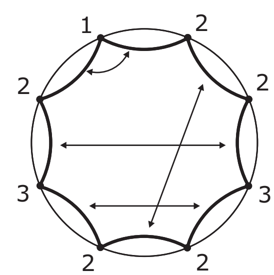
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1\end{aligned}$$

Toro



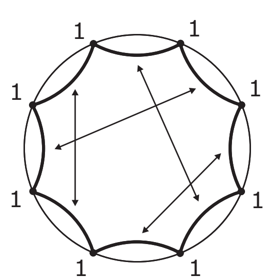
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1\end{aligned}$$

Toro



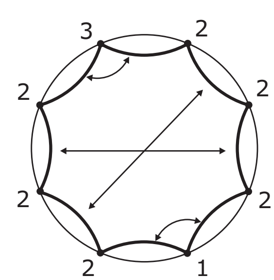
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1\end{aligned}$$

Toro



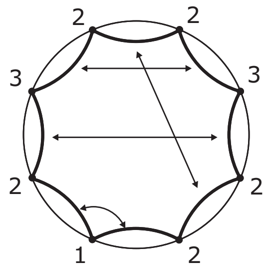
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 1 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= -2 \quad \therefore\ g = 2\end{aligned}$$

Bitoro



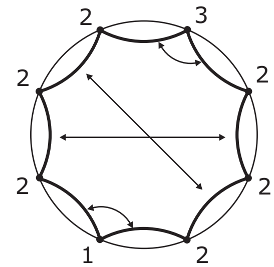
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1\end{aligned}$$

Toro



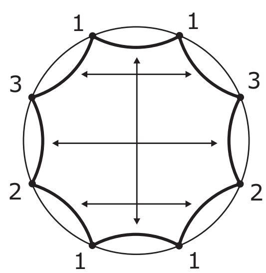
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



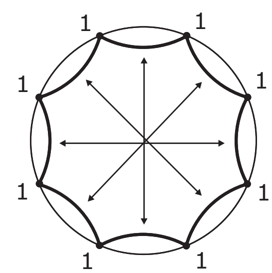
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



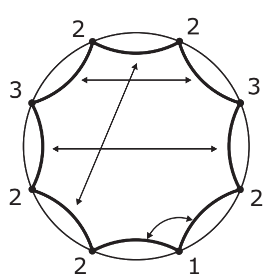
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



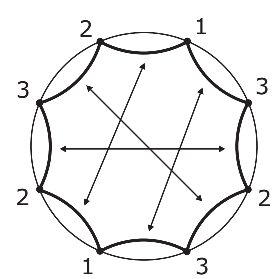
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 1 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= -2 \quad \therefore\ g = 2 \end{aligned}$$

Bitoro



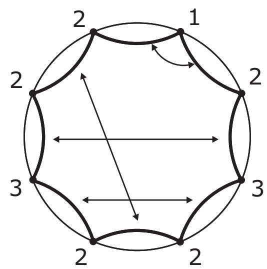
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



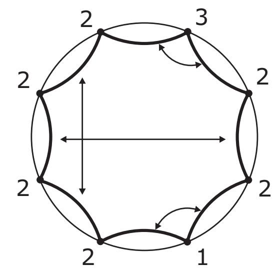
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



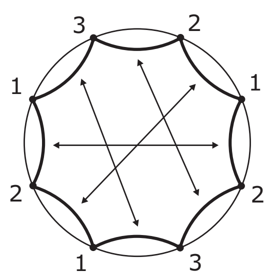
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1\end{aligned}$$

Toro



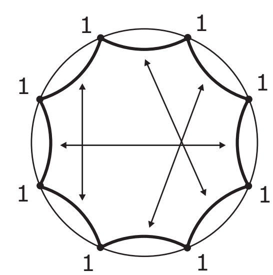
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 1 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= -2 \quad \therefore\ g = 2\end{aligned}$$

Bitoro



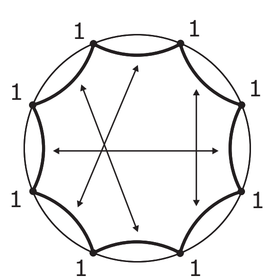
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1\end{aligned}$$

Toro



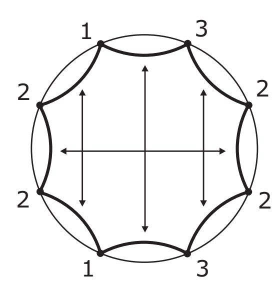
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 1 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= -2 \quad \therefore\ g = 2\end{aligned}$$

Bitoro



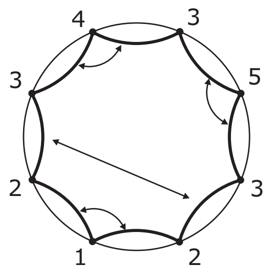
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 1 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= -2 \quad \therefore\ g = 2\end{aligned}$$

Bitoro



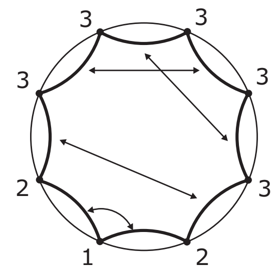
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1\end{aligned}$$

Toro



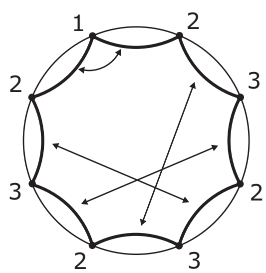
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 5 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= 2 \quad \therefore\ g = 0\end{aligned}$$

Esfera



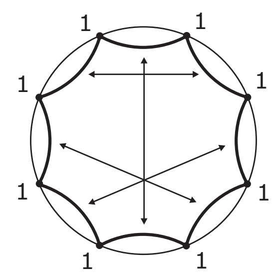
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1\end{aligned}$$

Toro



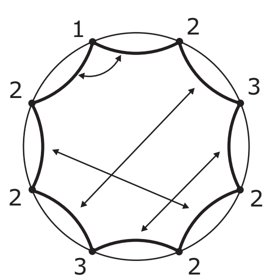
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1\end{aligned}$$

Toro



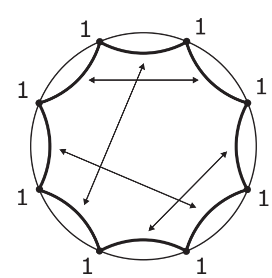
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 1 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= -2 \quad \therefore\ g = 2\end{aligned}$$

Bitoro



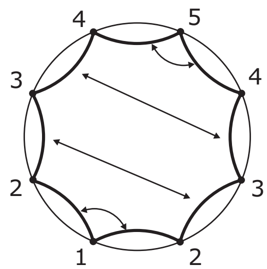
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1\end{aligned}$$

Toro



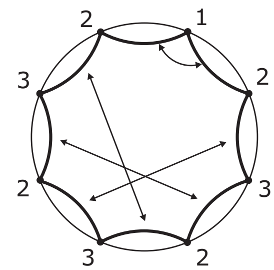
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 1 - \frac{8}{2} + 1\\ 2-2g &= -2 \quad \therefore\ g = 2\end{aligned}$$

Bitoro



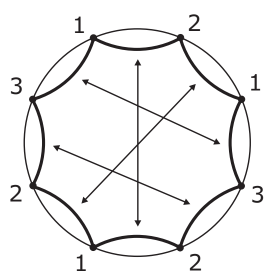
$$\begin{aligned} \chi = 2 - 2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2 - 2g &= 5 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2 - 2g &= 2 \quad \therefore \; g = 0 \end{aligned}$$

Esfera



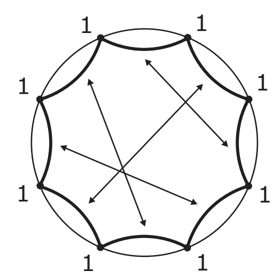
$$\begin{aligned} \chi = 2 - 2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2 - 2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2 - 2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

Toro



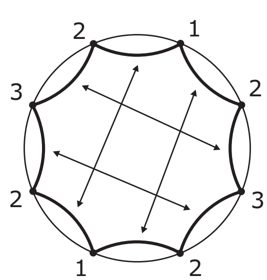
$$\begin{aligned} \chi = 2 - 2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2 - 2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2 - 2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

Toro



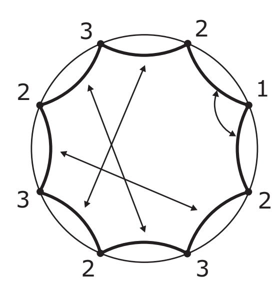
$$\begin{aligned} \chi = 2 - 2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2 - 2g &= 1 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2 - 2g &= -2 \quad \therefore \; g = 2 \end{aligned}$$

Bitoro



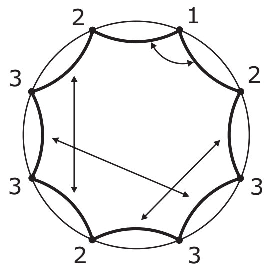
$$\begin{aligned} \chi = 2 - 2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2 - 2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2 - 2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

Toro



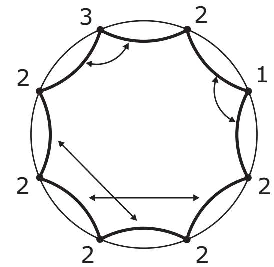
$$\begin{aligned} \chi = 2 - 2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2 - 2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2 - 2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

Toro



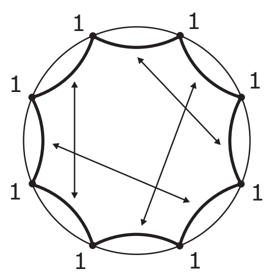
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

Toro



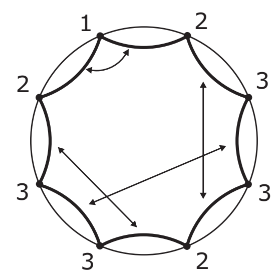
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

Toro



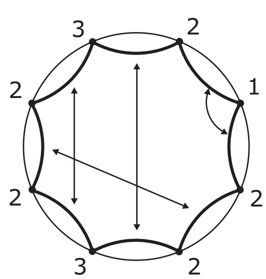
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 1 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= -2 \quad \therefore \; g = 2 \end{aligned}$$

Bitoro



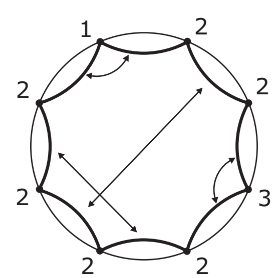
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

Toro



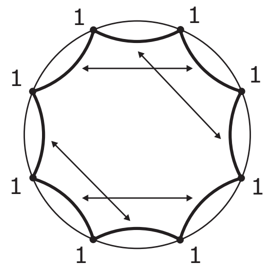
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

Toro



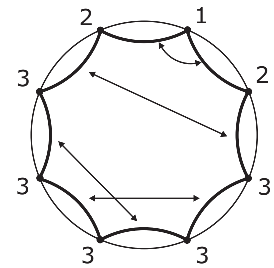
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

Toro



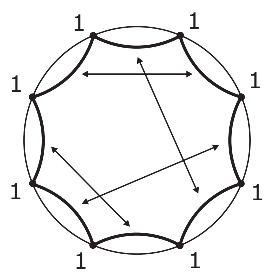
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 1 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= -2 \quad \therefore \; g = 2 \end{aligned}$$

Bitoro



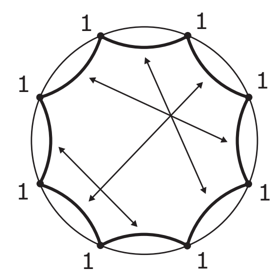
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

Toro



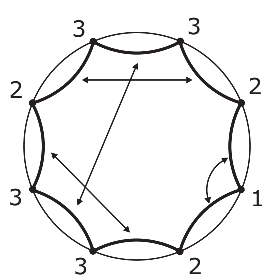
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 1 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= -2 \quad \therefore \; g = 2 \end{aligned}$$

Bitoro



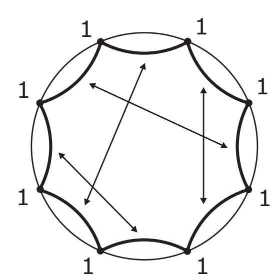
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 1 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= -2 \quad \therefore \; g = 2 \end{aligned}$$

Bitoro



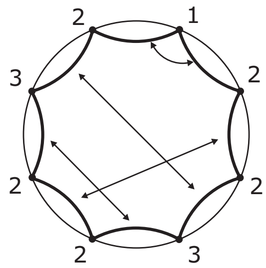
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1 \end{aligned}$$

Toro



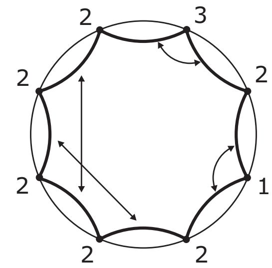
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 1 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= -2 \quad \therefore \; g = 2 \end{aligned}$$

Bitoro



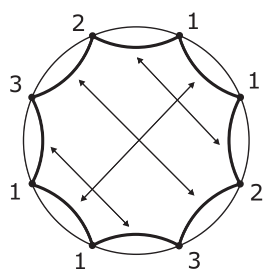
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



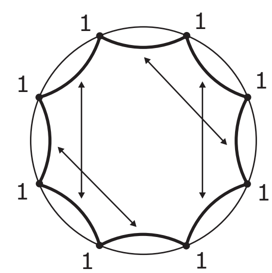
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



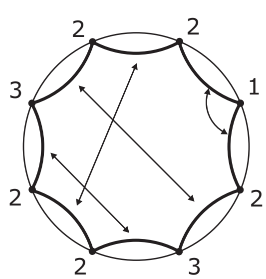
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



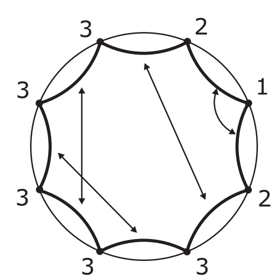
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 1 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= -2 \quad \therefore \ g = 2 \end{aligned}$$

Bitoro



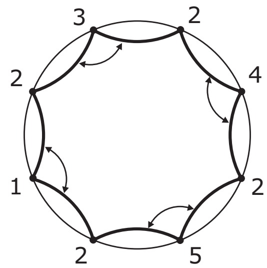
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



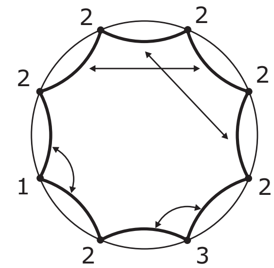
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore \ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



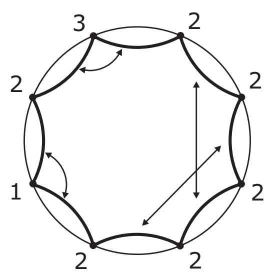
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 5-\frac{8}{2}+1\\ 2-2g &= 2 \quad \therefore\ g=0\end{aligned}$$

Esfera



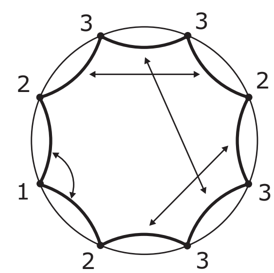
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3-\frac{8}{2}+1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g=1\end{aligned}$$

Toro



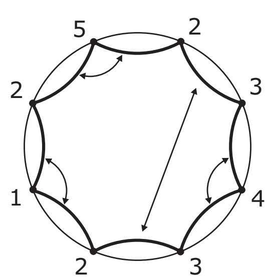
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3-\frac{8}{2}+1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g=1\end{aligned}$$

Toro



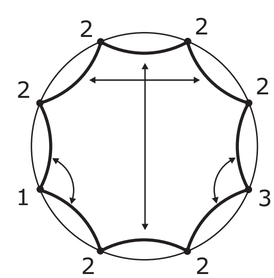
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3-\frac{8}{2}+1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g=1\end{aligned}$$

Toro



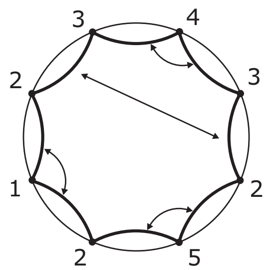
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 5-\frac{8}{2}+1\\ 2-2g &= 2 \quad \therefore\ g=0\end{aligned}$$

Esfera



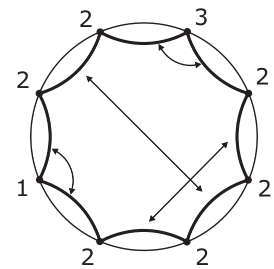
$$\begin{aligned}\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2\\ 2-2g &= 3-\frac{8}{2}+1\\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g=1\end{aligned}$$

Toro



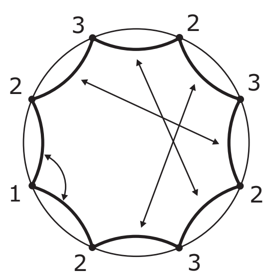
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 5 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 2 \quad \therefore\ g = 0 \end{aligned}$$

Esfera



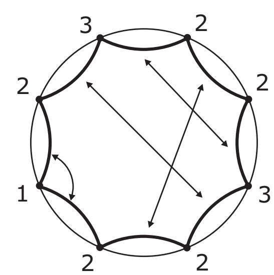
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



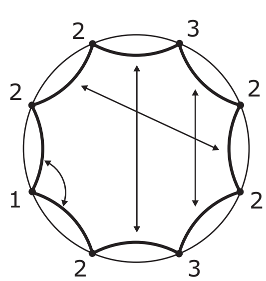
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



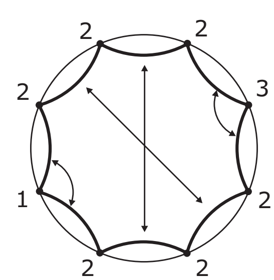
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



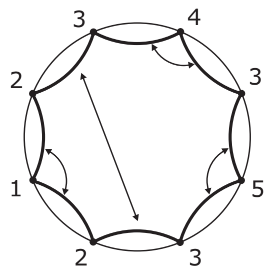
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



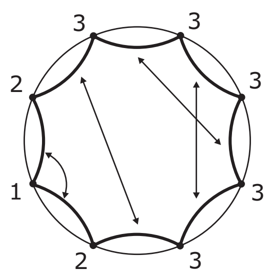
$$\begin{aligned} \chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\ 2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\ 2-2g &= 0 \quad \therefore\ g = 1 \end{aligned}$$

Toro



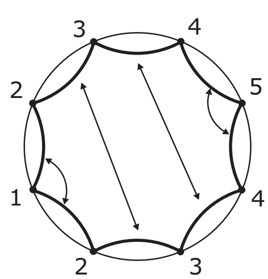
$$\begin{aligned}
\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\
2-2g &= 5 - \frac{8}{2} + 1 \\
2-2g &= 2 \quad \therefore \; g = 0
\end{aligned}$$

Esfera



$$\begin{aligned}
\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\
2-2g &= 3 - \frac{8}{2} + 1 \\
2-2g &= 0 \quad \therefore \; g = 1
\end{aligned}$$

Toro



$$\begin{aligned}
\chi = 2-2g &= \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 \\
2-2g &= 5 - \frac{8}{2} + 1 \\
2-2g &= 2 \quad \therefore \; g = 0
\end{aligned}$$

Esfera

4.5 Consequências Imediatas dos Emparelhamentos

Inicialmente, note que quando superfícies compactas orientáveis são construídas usando a forma normal, qualquer superfície de gênero 0 torna-se uma esfera (elíptica), qualquer superfície de gênero 1 torna-se um toro (euclidiano) e superfícies de gênero ≥ 2 tornam-se um g-toro (hiperbólica). Reciprocamente, toda superfície hiperbólica compacta orientável é de gênero ≥ 2, ou equivalentemente, sua característica de Euler é um número par negativo. Desta maneira, quando mudamos o tipo de tesselação mudamos também as transformações de emparelhamentos de lados, e consequentemente o número dessas transformações e o número de ciclos de vértices.

Agora, vamos tabular os dados obtidos nos possíveis emparelhamentos descritos na seção anterior, a fim de caracterizarmos algumas propriedades importantes, com o objetivo de padronizar (generalizar) os resultados obtidos. Sendo assim, temos a seguinte Tabela 5.2 abaixo:

Nº de Lados	**Nº de Pontos Fixos**	**Nº de Classes de Conjugação**	**Gênero**	**Superfície Associada**	**Nº de Casos**
3	2	3	0	Esfera	1
4	0	1	1	Toro	1
4	2	3	0	Esfera	1
5	2 ou 3	4	0	Esfera	2
5	1	2	1	Toro	1
6	0 ou 1	2	1	Toro	10
6	2 ou 3	4	0	Esfera	5
7	1 ou 2	3	1	Toro	10
7	2,3 ou 4	5	0	Esfera	5
8	2,3 ou 4	5	0	Esfera	14
8	0,1 ou 2	3	1	Toro	70
8	0	1	2	Bitoro	21

Tabela 4.1: Propriedades associadas aos Emparelhamentos.

Desta maneira, relacionando o número de lados com os parâmetros da Tabela 5.2 acima, concluímos que:

- para $n = 3$, temos um único possível emparelhamento, com um ponto fixo e três classes de conjugação, sendo assim, a superfície associada é uma esfera;

- para $n = 4$, temos dois possíveis emparelhamentos, sendo que um deles não possui pontos fixos e tem uma classe de conjugação, logo a superfície associada é um toro; já o outro, possui dois pontos fixos e três classes de conjugação, daí a associada é uma esfera;

- para $n = 5$, temos três possíveis casos de emparelhamentos, sendo que as superfícies associadas que aparecem são esfera (emparelhamento com 2 ou 3 pontos fixos e 4 classes de conjugação) e o toro (emparelhamento com 1 ponto fixo e 2 classes de conjugação);

- para $n = 6$, temos quinze possíveis emparelhamentos; aqui, as superfícies resultantes são dadas pela esfera (com 2 ou 3 pontos fixos e 4 classes de conjugação) e o toro (com 0 ou 1 ponto fixo e 2 classes de conjugação);

- para $n = 7$, temos também quinze possíveis emparelhamentos, sendo as superfícies associadas dadas pela esfera (2, 3 ou 4 pontos fixos e 5 classes de conjugação) e o toro (1 ou 2 pontos fixos e 3 classes de conjugação);

- para $n = 8$, temos um número muito grande de emparelhamentos, totalizando 105, sendo que neste caso aparecem tanto a esfera, o toro e o bitoro; desta maneira, temos a esfera (2, 3 ou 4 pontos fixos e 5 classes de conjugação), o toro (0, 1 ou 2 pontos fixos e 3 classes de conjugação) e o bitoro (com 0 pontos fixos e 1 classe de conjugação).

Para finalizarmos esta seção, vamos analisar as sequências de lados via a conjugação de lados. Devido ao grande número de possibilidades, caracterizamos apenas um exemplo de cada superfície (esfera, toro e bitoro), pois o procedimento de caracterização é idêntico para os demais casos.

Exemplo 1: Neste exemplo, vamos analisar o 12º caso para o polígono normal com $n = 8$ lados. Desta forma, temos a seguinte disposição geométrica:

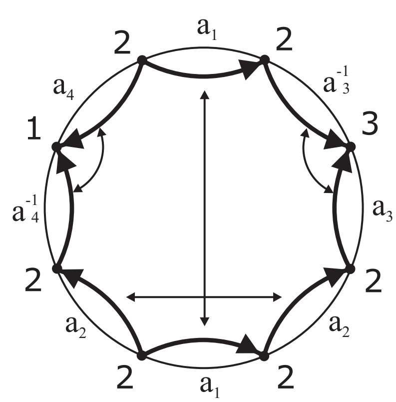


Figura 4.3: (12º caso para a conjugação de lados para um polígono com $n = 8$ lados).

Vimos que neste emparelhamento, temos: 2 pontos fixos (transformações elípticas), 3 classes de conjugação e gênero igual a 1 sendo assim a superfície associada é um toro. Fazendo a tomada de lados como descrito na Figura 4.3, obtemos a sequência dada por:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \underbrace{a_3 \cdot a_3^{-1}}_{e} \cdot a_1 \cdot \underbrace{a_4 \cdot a_4^{-1}}_{e} \cdot a_2^{-1} = e$$

Fazendo $a = a_1$ e $b = a_2$, segue que, $a^{-1} = a_1^{-1}$ e $b^{-1} = a_2^{-1}$ e, então, temos:

$$a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} = e.$$

Na verdade, percebemos que temos dois geradores (ou duas transformações) que geram o subgrupo em questão, sendo que, neste caso os pontos fixos se "anulam" $\big(a_3 \cdot a_3^{-1} = e$ e $a_4 \cdot a_4^{-1} = e\big)$.

Exemplo 2: Neste exemplo, vamos analisar o 13º caso para o polígono normal com $n = 8$ lados. Sendo assim, temos a seguinte disposição geométrica:

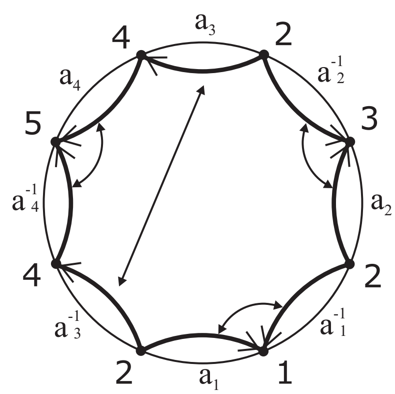


Figura 4.4: (13º caso para a conjugação de lados para um polígono com $n = 8$ lados).

Vimos que neste emparelhamento, temos: 3 pontos fixos (transformações elípticas), 5 classes de conjugação e gênero igual a 0, logo a superfície associada é uma esfera. Fazendo a tomada de lados como descrito na Figura 4.4, obtemos a sequência dada por:

$$\underbrace{a_1 a_1^{-1}}_{e}\,\underbrace{a_2 a_2^{-1}}_{e}\,a_3\,\underbrace{a_4 a_4^{-1}}_{e}\,a_3^{-1} = e$$

Na verdade, a transformação identidade gera o subgrupo em questão.

Exemplo 3: Neste exemplo, vamos analisar o 17º caso para o polígono normal com $n = 8$ lados. Desta maneira, temos a seguinte disposição geométrica:

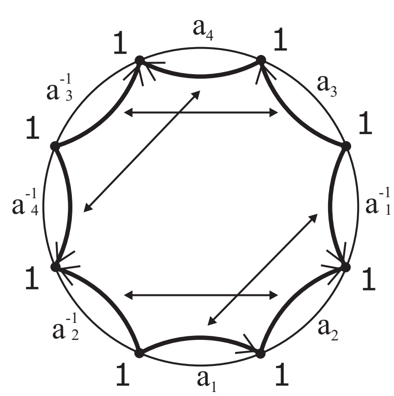


Figura 4.5: (17º caso para a conjugação de lados para um polígono com $n = 8$ lados).

Aqui, temos 0 pontos fixos, 1 classe de conjugação e gênero igual a 2, daí a superfície associada é um bitoro. Fazendo a tomada de lados como descrito na Figura 4.5, obtemos a sequência dada por:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_1^{-1} \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_3^{-1} \cdot a_4^{-1} \cdot a_2^{-1} = e$$

Fazendo $a = a_1,\ b = a_2,\ c = a_3$ e $d = a_4$, segue que:

$$a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot c \cdot d \cdot c^{-1} \cdot d^{-1} \cdot b^{-1} = e.$$

Na verdade, percebemos que temos quatro geradores (ou quatro transformações) que geram o subgrupo Fuchsiano associado em questão, já que, neste emparelhamento não temos nenhum ponto fixo.

A partir da análise relacionada aos possíveis emparelhamentos de arestas dos polígonos hiperbólicos de $n = 3, 4, 5, 6, 7$ e 8 arestas, caracterizamos e tabulamos informações geométricas (gênero da superfície, número de pontos fixos, número de classes de conjugação) que podem ser utilizadas para o estabelecimento de um processo sistemático de construção de reticulados. Além disso, via esta análise geométrica, identificamos os emparelhamentos que podem ser usados na proposta de construção de constelações de sinais, através da caracterização do gênero da superfície associada ao grafo do canal binário e suas quantizações.

4.6 Construção de Constelações de Sinais

Sabe-se que os reticulados têm sido bastante utilizados na teoria de telecomunicações, sendo que sua principal aplicação está relacionada ao problema de codificação de canal, que é equivalente ao problema de empacotamento de esfera. Geralmente, reticulados podem ser usados para a construção de códigos em n dimensões para o problema de codificação de canal ou para quantificação de vetores n-dimensionais.

Por outro lado, têm-se que as palavras-código de um código são sequências finitas de símbolos pertinentes a um alfabeto, desta maneira o procedimento mais eficiente de composição na formação dessas sequências é aquele em que os símbolos do alfabeto são identificados por elementos de uma estrutura algébrica.

Um procedimento natural de se realizar esta identificação é por meio de uma aplicação injetora de um subconjunto finito de pontos (constelação de sinais) de um espaço de sinais em uma estrutura algébrica, ou equivalentemente, a determinação da representação geométrica associada à estrutura algébrica resultando com isso na caracterização geométrica e algébrica do alfabeto do código.

Com o objetivo de redução da complexidade de demodulação / decodificação a representação geométrica mais adequada é aquela decorrente da ação transitiva de um grupo no conjunto de sinais. Quando tal situação ocorre dizemos que a constelação de sinais é **geometricamente uniforme**. Estes conjuntos de sinais, cujos elementos são representantes de classes laterais de energia máxima no espaço de sinais, dão origem aos alfabetos dos códigos geometricamente uniformes, Forney (G.D. Forney 1991).

Definição 4.8 *Um conjunto de sinais $\mathcal{K}$ é uma* ***constelação de sinais geometricamente uniforme*** *se para quaisquer dois pontos $k_1, k_2 \in \mathcal{K}$, existe uma isometria $T \in \mathcal{U}(\mathcal{K})$ tal que $T(k_1) = k_2$. Neste caso, dizemos que a ação de $\mathcal{U}(\mathcal{K})$ em $\mathcal{K}$ é transitiva.*

Em sistemas de comunicações digitais, as figuras geométricas de interesse são conjuntos S de pontos discretos de $\mathbb{R}^n$, ou seja, dado $s \in S$, existe $r > 0$ tal que $B_r(s) \cap S = \{s\}$, onde $B_r(s)$

denota uma bola aberta em $\mathbb{R}^n$ de centro s e raio r. Nesse caso, o conjunto S é denominado **conjunto de sinais**. Geralmente, podemos considerar S como um conjunto de pontos discretos de um espaço métrico qualquer (E, d), desde que se tenha uma identificação dos pontos de E por sinais.

Teorema 4.10 (J. Anderson 1999) *Se $\mathcal{K}$ é uma constelação de sinais geometricamente uniforme então todas as regiões de Voronoi são da mesma forma, ou seja, possuem a mesma caracterização geométrica.*

De acordo com (Clarice Dias Albuquerque 2002), todas as possíveis tesselações $\{p, q\}$ do polígono P', são soluções da equação:

$$\mu(P') = n_f \cdot \mu(P), \tag{4.5}$$

onde tais tesselações hiperbólicas devem satisfazer a desigualdade

$$(p-2) \cdot (q-2) > 4 \tag{4.6}$$

Na equação acima, $\mu(P')$ denota a área do polígono normal P' associado a região de Voronoi da tesselação $\{p', q'\}$, $\mu(P)$ denota a área do polígono normal associado a região de Voronoi da tesselação $\{p, q\}$ e n_f (número de faces da tesselação) é um inteiro positivo calculado pela expressão:

$$n_f = \frac{4q \cdot (q-1)}{pq - 2p - 2q} \tag{4.7}$$

Por exemplo, na Figura 4.6 abaixo, é mostrado o grupo de Klein, que em verdade é um 14-gon e pode ser tesselado por um conjunto de 24 heptágonos regulares idênticos, ou alternativamente, com um conjunto de 56 triângulos equiláteros.

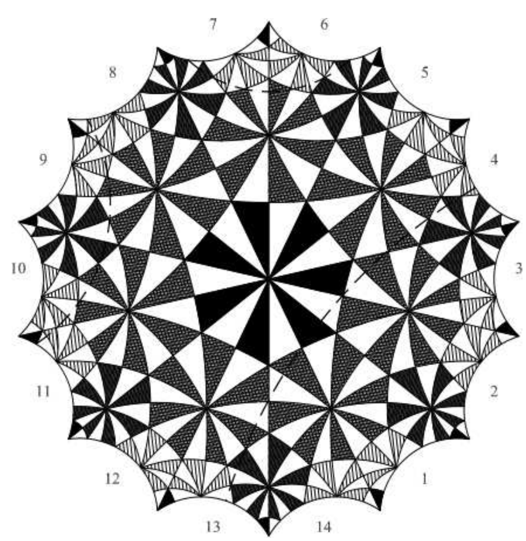


Figura 4.6: Grupo de Klein - um 14-gon com tesselação $\{7, 3\}$ dentro.

Deve-se salientar ainda, que quando se fala em tesselações regulares com sua região de Voronoi associada, com o objetivo de construção de constelações de sinais, temos um grupo quociente no contexto, ou seja, temos uma dificuldade natural na caracterização das classes laterais do quociente de grupos em questão.

Em (Clarice Dias Albuquerque 2002), foi mostrado com relação às distâncias dos códigos de interesse, em superfícies de gênero $g \geq 2$, que se faz necessário a procura do menor ciclo homologicamente não-trivial da tesselação ou da tesselação dual. Tais ciclos em um p'-gon são dados pelas geodésicas de menor comprimento que ligam os lados identificados de P'. Em termos, de arestas da tesselação de P', o menor ciclo homologicamente não-trivial é o caminho sobre as arestas que mais se aproxima das geodésicas de menor comprimento. Sendo assim, a distância do código será o mínimo entre o número de arestas do menor ciclo homologicamente não-trivial da tesselação e da tesselação dual.

Além disso, em (Clarice Dias Albuquerque 2002), mostrou-se como a distância entre os lados emparelhados de P'. Esta distância, denotada por d_g, é o comprimento hiperbólico da geodésica ortogonal a estes dois lados é dada por:

$$d_g = 2a = 2 \cdot \operatorname{arccos} h \left[\frac{\cos(\pi/4g)}{\operatorname{sen}(\pi/4g)} \right]. \tag{4.8}$$

Como a distância do código, denotada aqui por d_c, deve ser dada em função das arestas da tesselação $\{p, q\}$ de P, obtém-se um limitante inferior para tal distância dividindo o valor de d_g pelo comprimento da aresta $l(p, q)$, da região fundamental da tesselação $\{p, q\}$, ou seja, $d_c \geq d_g / l(p, q)$, onde o comprimento da aresta da tesselação é dado por:

$$l(p, q) = \operatorname{arccos} h \left[\frac{\cos^2(\pi/q) + \cos(2\pi/p)}{\operatorname{sen}^2(\pi/p)} \right]. \tag{4.9}$$

A partir de (Clarice Dias Albuquerque 2002) e com um aparato computacional, são apresentados na Tabela 4.2 abaixo com relação a algumas tesselações para $g = 2$ os parâmetros apresentados anteriormente.

$\{p,q\}$	n_f	d_g	$l(p,q)$	$\frac{d_g}{l(p,q)}$
$\{3,7\}$	28	0,5662563034	1,090549663	0,52
$\{7,3\}$	12	1,090549662	0,5662563066	1,93
$\{3,8\}$	16	0,7270398392	1,528570902	0,48
$\{8,3\}$	6	1,528570019	0,7270398394	2,10
$\{3,9\}$	12	0,8191909972	1,638381994	0,50
$\{9,3\}$	4	1,855077136	0,8191909974	2,26
$\{3,10\}$	10	0,8791792808	2,122550124	0,41
$\{10,3\}$	3	2,122550124	0,8791792810	2,41
$\{4,8\}$	4	1,528570918	2,448452446	0,62
$\{8,4\}$	2	2,448452446	1,528570919	1,60
$\{3,12\}$	8	0,9516430646	2,553373738	0,37
$\{12,3\}$	2	2,553373738	0,9516430648	2,68
$\{4,5\}$	10	1,061275061	1,253739325	0,85
$\{5,4\}$	8	1,253739325	1,061275061	1,18
$\{4,6\}$	6	1,316957897	1,762747174	0,75
$\{6,4\}$	4	1,762747174	1,316957897	1,34
$\{5,5\}$	4	1,684964162	1,684964162	1,00
$\{6,6\}$	2	2,292431670	2,292431670	1,00
$\{8,8\}$	2	3,05714183	3,05714183	0,52
$\{18,3\}$	3	3,438214244	1,035886139	3,319104402

Tabela 4.2: Parâmetros para $g = 2$ de algumas tesselações hiperbólicas $\{p, q\}$.

Portanto, pode-se observar que distâncias pequenas nos levam a probabilidade de erro alta, bem como apesar de tesselações auto-duais apresentarem boa taxa, têm um dos menores valores para a distância. De outro modo, os códigos definidos em tesselações auto-duais tem menor complexidade computacional. A fim de uma possível aplicação para os códigos caracterizados em tesselações que não são auto-duais, é que os mesmos podem ser usados quando há necessidade de proteção desigual.

4.7 Receptor de Máxima Verossimilhança

Em (E. Brandani 2000) foi apresentado o receptor de máxima verossimilhança para um sistema de modulação no plano hiperbólico, sendo que este apresenta semelhanças com o do caso euclidiano, bem como é mais simples a nível de complexidade.

Além disso, em (E. Brandani 2000), foi realizada uma análise comparativa em relação ao desempenho, entre algumas constelações de sinais euclidianas com as suas equivalentes constelações hiperbólicas.

Nosso objetivo aqui, é exemplificar para uma constelação de sinais (com quatro sinais, isto é, $n_f = 4$) a descrição do modelo do receptor de máxima verossimilhança para o plano hiperbólico, o qual nos direcione para a caracterização do desempenho de constelações de sinais com mesmo número de sinais, citadas na Tabela 4.2 da seção anterior.

A fim de descrevermos tal modelagem, considere inicialmente a Figura 4.7 abaixo, que nos mostra a interpretação geométrica de uma constelação 4-PSK dentro de uma tesselação $\{8, 8\}$. Salientamos, que de acordo com a Tabela 4.2 da seção anterior, esta tesselação possui $n_f = 4$.

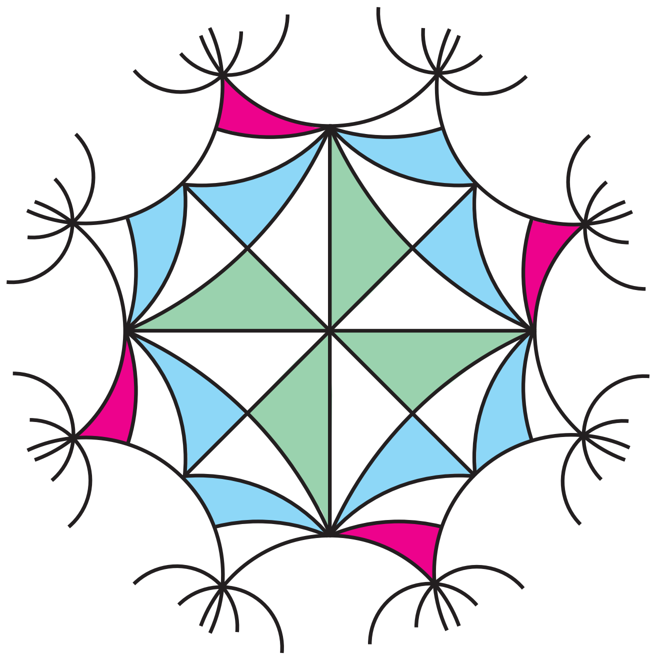


Figura 4.7: Interpretação geométrica de uma constelação 4-PSK dentro de uma tesselação $\{8, 8\}$.

Para a descrição do modelo do Receptor de Máxima Verossimilhança para este caso, consideremos $\{s_j, 1 \leq j \leq 4\}$, uma constelação de sinais no plano hiperbólico. Assumimos que o sinal recebido é dado de forma:

$$y = g\,(sj)$$

para algum $1 \leq j \leq 4$ e g é uma isometria hiperbólica que age como ruído gaussiano.

De (E. Brandani 2000), segue que temos o seguinte teste de hipóteses, ou temos quatro hipóteses associadas, que são:

$$H_1 \longleftrightarrow y = g\,(s_1)$$

$$H_2 \longleftrightarrow y = g\,(s_2)$$

$$H_3 \longleftrightarrow y = g\,(s_3)$$

$$H_4 \longleftrightarrow y = g\,(s_4)$$

Agora, assumindo que o canal é caracterizado por uma densidade de probabilidade gaussiana circular hiperbólica, e que os sinais são igualmente prováveis, então o critério de decisão a ser utilizado é o de máxima verossimilhança, isto é, o receptor decide pela hipótese H_j, se

$$f_i\,(y) \geq f_k\,(y)\,, \forall\; k \neq j \tag{4.10}$$

De (E. Brandani 2000), temos que, $f_i(y)$ é dada por:

$$f_i(y) = B \cdot \exp\left(-Ad_h^2(y, s_j)\right) = B \cdot \exp\left(-Ad_h^2(g(s_j), s_j)\right) \tag{4.11}$$

Substituindo 4.10 em 4.11 chegamos a desigualdade,

$$d_h^2(g(s_j), s_j) \leq d_h^2(g(s_j), s_k)$$

Em termos geométricos, o receptor escolherá o sinal dentre os elementos de constelação $\{s_j, 1 \leq j \leq 4\}$, aquele que minimiza $d_h(y, s_j)$. Porém, minimizar $d_h(y, s_j)$ é o mesmo que minimizar $\cos h(d_h(y, s_j))$.

Sendo assim, como

$$\cos h(d_h(z, w)) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \cdot \mathrm{Im}(z) \cdot \mathrm{Im}(w)}$$

resulta que,

$$\cos h(d_h(y, s_j)) = 1 + \frac{|y - s_j|^2}{2 \cdot \mathrm{Im}(y) \cdot \mathrm{Im}(s_j)}$$

Ou seja,

$$\cos h(d_h(y, s_j)) = 1 + \frac{|y|^2 + |s_j|^2 - 2\mathrm{Re}(\langle y, s_j \rangle)}{2 \cdot \mathrm{Im}(y) \cdot \mathrm{Im}(s_j)}$$

Ou ainda podemos escrever,

$$\cos h(d_h(y, s_j)) = 1 + \frac{1}{\mathrm{Im}(y)} \cdot \left(\frac{|y|^2}{2 \cdot \mathrm{Im}(s_j)} + \frac{|s_j|^2}{2 \cdot \mathrm{Im}(s_j)} - \frac{\mathrm{Re}(\langle y, s_j \rangle)}{\mathrm{Im}(s_j)}\right)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa o produto interno euclidiano entre duas variáveis complexas.

Desta maneira, minimizar $\cos h(d_h(y, s_j))$ é o mesmo que minimizar,

$$\left\{\frac{|y|^2}{2 \cdot \mathrm{Im}(s_j)} + \frac{|s_j|^2}{2 \cdot \mathrm{Im}(s_j)} - \frac{\mathrm{Re}(\langle y, s_j \rangle)}{\mathrm{Im}(s_j)}\right\}$$

que de outra forma, é análogo a maximizar,

$$\left\{\frac{\mathrm{Re}(\langle y, s_j \rangle)}{\mathrm{Im}(s_j)} - \frac{|y|^2}{2 \cdot \mathrm{Im}(s_j)} - \frac{|s_j|^2}{2 \cdot \mathrm{Im}(s_j)}\right\} \tag{4.12}$$

Note, que os termos $|s_j|^2$ e $\mathrm{Im}(s_j)$ podem ser pré-calculados, e $|y|^2$ e $\mathrm{Im}(y)$ são conhecidos quando o sinal é recebido. Sendo assim, o receptor calcula um conjunto de quatro variáveis decisão:

$$\mathrm{Re}(\langle y, s_1 \rangle)$$

$$\mathrm{Re}(\langle y, s_2 \rangle)$$

$$\mathrm{Re}(\langle y, s_3 \rangle)$$

$$\mathrm{Re}(\langle y, s_4 \rangle)$$

e as utiliza para encontrar o máximo em (4.12). Chamamos a atenção ao fato que utilizamos as expressões em $\mathbb{H}^2$ ao invés de em $\mathbb{D}^2$, todavia, como estes modelos são isométricos, não existe diferença aonde a decisão é tomada. De outra forma, como as expressões em $\mathbb{D}^2$ são mais complexas, implica em uma maior complexidade na construção do receptor. Este fato reforça a grande liberdade de manipulação e possibilidades que temos pelo fato de existirem vários modelos do espaço hiperbólico.

4.8 Comparação de Desempenho entre Constelações

Nesta seção, apresentamos a comparação de constelações de sinais no espaço hiperbólico, com a correspondente constelação de sinais no espaço euclidiano. Ressalta-se, que em verdade, para maiores detalhes sobre este aparato comparativo o leitor deve averiguar em (E. Brandani 2000).

Quando se fala no cálculo da probabilidade de acerto $\left(P_C^h\right)$, é necessário o cálculo do volume de cada gaussiana hiperbólica centrada em cada um dos pontos da constelação e delimitada pela região de Voronoi. Porém, como os sinais apresentam as mesmas regiões de Voronoi, basta o cálculo em uma delas. Além disso, como a probabilidade de acerto é invariante por rotação, pode-se posicionar os sinais da forma mais conveniente sobre a região de Voronoi para um sinal transmitido. Note que a probabilidade de erro é dada pela diferença da unidade por esta probabilidade de acerto.

Inicialmente, temos que a constelação de sinais M-PSK no espaço hiperbólico oferece ganho de codificação assintótico, quando comparado com a constelação de sinais M-PSK no caso euclidiano.

Na Tabela 4.3, apresentamos os ganhos de codificação associado com as constelações de sinais 4-PSK, 8-PSK, 16-PSK e 64-PSK. Para um valor fixo da probabilidade de acerto (P_c^h), é mostrada a energia média necessária e o valor ao quadrado da distância mínima entre sinais nas correspondentes constelações de sinais.

O ganho de codificação assintótico (GCA) é definido pela expressão:

$$G = 10 \log \left[\frac{d_h^2}{E_M^h} \cdot \frac{E_M^e}{d_e^2} \right] \tag{4.13}$$

onde d_h^2 e d_e^2 denotam a distância mínima ao quadrado entre pontos da constelação e E_M^h e E_M^e denotam a energia média nos planos hiperbólico e euclidiano, respectivamente. Aqui, define-se a energia média como sendo a média do quadrado das distâncias dos pontos da constelação até a origem do sistema.

Modulação	$P_C^h = P_C^e$	E_M^h	E_M^e	d_h^2	d_e^2	Gan.(dB)
4-PSK	0.999995	16.00	42.25	53.4069	84.50	2.2245
8-PSK	0.99999	25.00	169.00	65.2703	98.9979	6.4908
16-PSK	0.999999	36.00	625.00	76.2443	95.1506	11.4337
64-PSK	0.8548313	16.00	> 676.00	4.984	> 6.510	15.049

Tabela 4.3: Desempenho de constelações M-PSK mantendo a mesma probabilidade de acerto.

Desta maneira, a partir dos valores apresentados na Tabela 4.3, pode-se averiguar que os ganhos de codificação assintóticos obtidos pelo uso das constelações de sinais no plano hiperbólico, são de 2,2245 dB para o 4-PSK, 6,4908 para 8-PSK, 11,4387 dB para o 16-PSK, e 15,049 para o 64-PSK quando comparados com os correspondentes no plano euclidiano.

A seguir, na Tabela 4.4, apresentamos as probabilidades de acerto associadas com as constelações de sinais quando a energia média dos sinais é fixada.

Modulação	$E_M^e = E_M^h$	P_C^h	P_C^e
4-PSK	16.00	0.999995	0.995328
8-PSK	36.00	0.999999	0.97833
16-PSK	36.00	0.999999	0.758217
64-PSK	36.00	0.999843	0.231552

Tabela 4.4: Desempenho de constelações M-PSK mantendo a mesma energia média.

Logo, pode-se observar claramente na Tabela 4.4, que as constelações de sinais no plano hiperbólico melhoram consideravelmente o desempenho do sistema de comunicação.

Agora, vamos analisar o desempenho das constelações QAM-circulares no plano hiperbólico. Sabemos que as constelações QAM euclidianas são subconjuntos finitos das tesselações euclidianas $\{4,4\}$, e esses subconjuntos não podem ser reproduzidos em $\mathbb{H}^2$, pois uma tesselação $\{p,q\}$ existe no plano hiperbólico se $(p-2)\cdot(q-2) > 4$. Como não podemos realizar no plano hiperbólico as constelações QAM euclidianas, para realizarmos as comparações, consideremos a seguinte situação: fixado o número de pontos da constelação de $\mathbb{R}^2$, escolhemos de uma tesselação hiperbólica um subconjunto com o mesmo número de pontos, para realizar o papel de constelação euclidiana.

Deve-se salientar, que essa é uma escolha complexa, pois devemos ter em mente o seguinte fato: existem infinitas tesselações no plano hiperbólico, mas fixado p e q, de forma automática fixamos a distância entre os pontos de constelação, pois a menos de movimentos rígidos, não existe em $\mathbb{H}^2$ o conceito de semelhança, sendo assim uma tesselação $\{p,q\}$ no plano hiperbólico é essencialmente única.

Na Tabela 4.5 apresentamos os resultados obtidos para as constelações 16-QAM e 64-QAM, bem como os desempenhos em relação aos casos euclidianos. Nesta tabela, temos as seguintes notações: distância origem nos fornece a distância dos pontos da constelação hiperbólica até a origem, no caso das tesselações $\{p, 3\}$ essa distância é a mesma da distância entre dois pontos consecutivos da constelação; novo lado e nova probabilidade média, que se referem aos valores da constelação euclidiana construída para alcançar a probabilidade hiperbólica.

	$n = 16$	$n = 64$
dist. origem	3.04861	5.99265
dist. entre sinais	3.04861	5.99265
energia média hip.	8.71317	35.3507
área polígono princ.	3π	19π
prob. polígono princ.	0.76301	0.99625
prob. região infinita	0.82165	0.99980
prob. média hip.	0.81799	0.99975
lado euclidiano	1.86688	1.83486
prob. média euclid.	0.54325	0.47050
área euclidiana	3.48527	3.3667
novo lado	$\cong 3.02$	$\cong 6.6$
nova prob. média	0.81309	0.99833
Ganho (dB)	4.26	10.28

Tabela 4.5: Desempenho das constelações 16 e 64-QAM circulares.

Desta forma, interpretando a Tabela 4.5 verifica-se que as constelações de sinais $\{15, 3\}$ e $\{63, 3\}$ no plano hiperbólico possuem ganhos de codificação 4,26 dB e 10,28 dB, respectivamente, quando comparadas com as constelações de sinais 16-QAM e 64-QAM no plano euclidiano. De acordo, com (E. Brandani 2000), estes ganhos de codificação também podem ser obtidos no espaço euclidiano pelo uso de códigos de Ungerboeck com memórias $\mu = 5$ e $\mu = 6$, respectivamente. A complexidade envolvida para a utilização dos códigos de Ungerboeck é superior à complexidade de um sistema que utiliza somente a constelação hiperbólica, justificando deste modo, a troca de constelações euclidianas por hiperbólicas, quando tal fato for possível.

Além das constelações listadas anteriormente, isto é, das constelações PSK e QAM-circulares, qualquer subconjunto finito de uma tesselação hiperbólica pode ser utilizado como tesselação de sinais em um sistema de comunicações.

Pode-se averiguar que quando o número de lados p do polígono inicial cresce, também aumenta a probabilidade de acerto, sendo que isto decorre do fato de que a área dos polígonos em uma tesselação $\{p, q\}$ ser função direta de p e crescerá com o aumento deste, ou pensando de outra forma conclui-se que a probabilidade de erro diminui.

Neste momento, deve-se ressaltar que as tesselações euclidianas e hiperbólicas estão relacionadas com a teoria de superfícies no seguinte sentido: as tesselações euclidianas podem ser orientadas de forma a gerarem um toro. As tesselações hiperbólicas não podem ser orientadas de forma a gerarem um toro, mas podem gerar bitoros, tritoros etc.

Portanto, existe uma relação entre as tesselações e o gênero da superfície associada, ficando evidenciado a importância da caracterização da superfície de Riemann encontrada via os possíveis emparelhamentos de polígonos hiperbólicos com $3 \leq n \leq 8$ lados. Sendo assim, tem-se um melhor entendimento do processo de geração das constelações de sinais a partir das superfícies de Riemann envolvidas, bem como através das classes laterais características dos grupos quocientes em questão. De outra forma, o problema de se projetar sistemas de comunicações digitais eficientes em faixa e potência pode ser resolvido, já que este aparato geométrico apresentado no trabalho, nos direciona para constelações de sinais com menor probabilidade de erro associada, a partir dos parâmetros tabulados anteriormente.

Capítulo 5

Identificação Algébrica dos Geradores de Γ_8

Inicialmente, ressaltamos que em (H. Lazari 2000) os sinais pertencentes às constelações de sinais no plano hiperbólico são identificados com os baricentros de polígonos hiperbólicos regulares com 8 e 12 arestas, denotados por P_8 e P_{12}, relacionados às tesselações hiperbólicas $\{8,8\}$ e $\{12,12\}$.

Desta forma, cada sinal v de uma constelação é imagem de outro sinal w da constelação via uma isometria hiperbólica $T \in \Gamma_{4g}$, ou seja, $w = T(v)$. Se essas isometrias atuam transitivamente na constelação de sinais então a constelação de sinais é geometricamente uniforme a menos do efeito de bordo.

Em (J. Lehner 1996), é apresentada uma maneira aritmética de obter grupos fuchsianos aritméticos, comentado no Capítulo 4.

Johansson em (S. Johansson n.d.) mostra que um grupo fuchsiano aritmético está relacionado a uma ordem $\mathcal{O}$ em uma álgebra dos quatérnios $\mathcal{A}$ sobre uma extensão quadrática K dos racionais, isto é, $[K : \mathbb{Q}] = 2$, onde os geradores de Γ têm a forma:

$$T_l = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} a + b \cdot \sqrt{t} & r_1 \cdot \left(c + d \cdot \sqrt{t}\right) \\ r_2 \cdot \left(c - d \cdot \sqrt{t}\right) & a - b \cdot \sqrt{t} \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}[\theta]$, o anel dos inteiros de $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$, $m > 0$, $r_1 = -r_2 \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{Z}[\theta]$ e $\sqrt{t} \notin \mathbb{Z}[\theta]$.

A partir desta identificação, foi apresentado em (E.D. Carvalho 2001) um algoritmo de rotulamento algébrico dos sinais pertencentes a uma constelação de sinais no plano hiperbólico por elementos de um p-grupo denotado por G_{p^m}. Como consequência, obtém-se os reticulados hiperbólicos associados à essas constelações de sinais.

Desta maneira, percebemos que a caracterização de um grupo fuchsiano Γ com uma ordem dos quatérnios $\mathcal{O}$ é importante neste rotulamento algébrico de sinais. Em (E.D. Carvalho 2001) são considerados dois casos particulares de identificação, a saber:

- **1° Caso:** $g = 2$, grupo fuchsiano aritmético Γ_8, associado com a tesselação $\{8,8\}$ é identificado com os elementos da ordem $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}[2]}$.

- **2º Caso:** $g = 3$, grupo fuchsiano aritmético Γ_{12}, associado com a tesselação $\{12,12\}$ é identificado com os elementos da ordem $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}[3]}$.

Devemos salientar, que não é uma tarefa muito simples averiguar se determinado subgrupo discreto de $PSL\,(2,\mathbb{R})$ é ou não aritmético. Para maiores detalhes, referimos o leitor para (J. Anderson 1999).

De outra forma, em (E.D. Carvalho 2001) foi realizado um estudo sobre os grupos fuchsianos $\Gamma \simeq \Gamma_{4g}$, que correspondem às tesselações $\{4g, 4g\}$, onde Γ é um subgrupo de $PSL\,(2,\mathbb{R})$, com o intuito de caracterização com relação à propriedade da aritmeticidade. Além disso, em (E.D. Carvalho 2001) estendeu-se os resultados obtidos em (B. Silva; M. Firer; S.R. Costa and R. Palazzo Jr. 2006) e (I.N. Herstein 1975) para os casos em que $g = m \cdot 2^n$, $m = 1, 3, 5$ e n um natural qualquer, sendo que foi mostrado que esses grupos são derivados de uma álgebra dos quatérnios $\mathcal{A}$ sobre um corpo de números K, tal que $[K : \mathbb{Q}] = 2^m$, onde 2^m denota o grau da extensão do corpo dos racionais.

Este capítulo tem como objetivo derivar os geradores do grupo fuchsiano Γ_8, que em verdade constitui uma particularidade para $n = 1$, para o caso $g = 2^n$ onde Γ_{4g} foi discutido em (E.D. Carvalho 2001). A priori, não nos ateremos em justificar todos os detalhes com relação ao caso geral, para maiores detalhes referimos o leitor para (E.D. Carvalho 2001). Desta maneira, a descrição algébrica de tais geradores é relevante para a área de codificação de canal, já que, por exemplo, é de extrema importância a fundamentação algébrica e geométrica dos códigos geometricamente uniformes através da utilização de estruturas topológicas na caracterização dos processos de geração e de decodificação.

5.1 Revisitando o Grupo Γ_{4g}

Considerando o modelo do disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$ para o plano hiperbólico, é de nosso interesse nesta seção apresentar de forma bastante sucinta o processo de construção do grupo fuchsiano Γ_{4g}.

Ressaltando, mais uma vez, que a partir deste grupo para os nossos propósitos iremos considerar $g = 2^n$, com $n = 1$.

Uma abordagem completa com todas as formalizações sobre este processo de construção pode ser encontrada em (Vandenberg Lopes Vieira 2007).

De forma resumida, temos a seguinte construção: consideremos inicialmente uma tesselação auto-dual,

$$\{4g, 4g\}, g \geq 2.$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor que π, $\{p, q\}$ é uma tesselação hiperbólica se, e somente se,

$$\frac{2\pi}{p} + \frac{2\pi}{q} < \pi,$$

ou seja, se e somente se,

$$(p-2) \cdot (q-2) > 4.$$

Seja P_{4g} o polígono hiperbólico regular com $4g$ arestas associado a esta tesselação, como mostrado Figura 5.1.

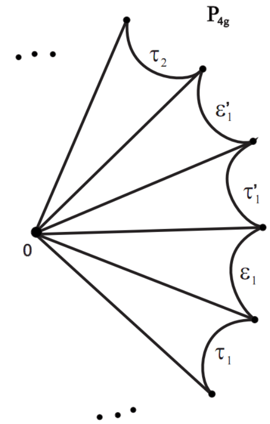


Figura 5.1: Polígono Hiperbólico regular P_{4g}.

Este polígono tessela o plano hiperbólico $\mathbb{D}^2$, de tal forma que cada vértice é compartilhado por $4g$ polígonos. Assim, para cada g, Γ_{4g} será um grupo que possui P_{4g} como domínio fundamental. Em termos algébricos, podemos dizer que $\Gamma_{4g} \simeq \pi_1(\tau_g)$ é o grupo fundamental de um g-toro τ_g.

Além disso, suponhamos sem perda de generalidade, que P_{4g} esteja centrado na origem de $\mathbb{D}^2$ e que as arestas desde polígono estejam dispostas na seguinte ordem cíclica fixa no sentido anti-horário:

$$\tau_1, \epsilon_1, \tau_1', \epsilon_1', \ldots, \tau_g, \epsilon_g, \tau_g', \epsilon_g', \ldots$$

e as isometrias hiperbólicas $T_1, S_1, \ldots, T_g, S_g$ (os geradores de Γ_{4g}), tais que:

$$T_k(\tau_k) = \tau_k' \quad \text{e} \quad S_j(\epsilon_j) = \epsilon_j', \; k, j = 1, 2, \ldots, g \tag{5.2}$$

Em (S. Katok 1991) é mostrado que estes emparelhamentos geram uma superfície compacta e orientável $\mathbb{D}^2/\Gamma_{4g}$ de gênero g. Logo, a partir de uma tesselação auto-dual $\{4g, 4g\}$ temos um polígono hiperbólico regular P_{4g} de $4g$ arestas que por sua vez está associado a um grupo fuchsiano Γ_{4g}, cuja assinatura é dada por $(g, \_)$. Consequentemente, a área hiperbólica de P_{4g} é dada por:

$$\mu(P_{4g}) = \mu\left(\mathbb{D}^2/\Gamma_{4g}\right) = 4\pi \cdot (g-1). \tag{5.3}$$

A justificativa para o cálculo desta área pode ser visto em (S. Katok 1991).

De acordo com (5.3), conclui-se a inexistência de elementos elípticos no grupo Γ_{4g}, o que é suficiente para que tenhamos um quociente $\mathbb{D}^2/\Gamma_{4g}$ localmente isométrico a $\mathbb{D}^2$.

Agora, com o objetivo de explicitar os geradores de Γ_{4g}, consideremos T_C como sendo uma transformação elíptica de ordem $4g$ cuja matriz associada é dada por:

$$C = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{4g}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i\pi}{4g}} \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

onde, $T_C(\tau_1) = \tau_1'$ e r_k é a potência de T_C tal que

$$(T_C)^{r_k} = T_{C^{r_k}}(\tau_1) \in \{\tau_k, \epsilon_k, \tau_k', \epsilon_k'\}, k = 1, \dots, g. \tag{5.5}$$

Logo, pode-se escrever os geradores de Γ_{4g} como conjugações de T_1 por meio de potências de T_C.

Por exemplo, é de interesse uma transformação T_2 de modo que $T_2(\tau_2) = \tau_2'$; de $T_1(\tau_1) = \tau_1'$, segue que $T_{C^{-4}}(\tau_2) = \tau_1$ e, portanto:

$$T_1(T_{C^{-4}}(\tau_2)) = \tau_1' \Longleftrightarrow T_{C^4}(T_1(T_{C^{-4}}(\tau_2))) = T_{C^4}(\tau_1') = \tau_2',$$

ou seja,

$$T_{C^4} \circ T_1 \circ T_{C^{-4}}(\tau_2) = \tau_2'.$$

Sendo assim, basta tomarmos $T_2 = T_{C^4} \circ T_1 \circ T_{C^{-4}}$. Para os demais casos, de (5.2) e (5.5), obtemos:

$$A_k = C^{4\cdot(k-1)} \cdot A_1 \cdot C^{-4\cdot(k-1)} \quad \text{e} \quad B_j = C^{4j-3} \cdot A_1 \cdot C^{-4j+3} \tag{5.6}$$

com A_k e B_j matrizes correspondentes às transformações T_k e S_j, respectivamente, onde $k, j = 1, \dots, g$.

Desta forma, a partir de algumas manipulações de ordem algébrica podemos escrever os geradores do grupo Γ_{4g} em (5.6) da seguinte forma:

$$A_l = \begin{cases} C^{2\cdot(l-1)} \cdot A_1 \cdot C^{-2\cdot(l-1)}, & \text{para } l \text{ ímpar} \\ C^{(2l-3)} \cdot A_1 \cdot C^{-\cdot(2l-3)}, & \text{para } l \text{ par} \end{cases} \tag{5.7}$$

Então, podemos observar que a partir da caracterização do gerador T_1 estamos, diretamente, caracterizando os demais geradores do grupo Γ_{4g}.

Considerando P_{4g} o polígono hiperbólico regular de $4g$ arestas, cujo grupo fuchsiano associado é Γ_{4g} com assinatura $(g, \_)$, bem como τ_1 a aresta entre os argumentos $\dfrac{-\pi}{2}$ e $\dfrac{-(g-1)\cdot\pi}{2g}$ e T_1 a transformação hiperbólica que emparelha as arestas τ_1 e τ_1' do polígono P_{4g}, então de (E.D. Carvalho 2001) temos que:

$$T_1(z) = \frac{az + b}{\overline{b} \cdot z + \overline{a}},$$

onde a e b são dados por:

$$\arg(a) = \frac{(g-1).\pi}{2g}, \quad |a| = \tan\frac{(2g-1)\cdot\pi}{4g},$$

e

$$\arg(b) = \frac{-(2g+1).\pi}{4g}, \quad |b| = \left(\left(\tan\frac{(2g-1)\cdot\pi}{4g}\right)^2 - 1\right)^{1/2}.$$

As demais transformações hiperbólicas $T_k(\tau_k) = \tau_k'$ e $S_j(\epsilon_j) = \epsilon_k'$ geradoras do grupo fuchsiano Γ_{4g} que realizam os outros emparelhamentos de arestas são obtidas pelas conjugações:

$$T_k = T_{C^{r_k}} \circ T_1 \circ T_{C^{-r_k}}, \quad S_j = T_{C^{r_j}} \circ T_1 \circ T_{C^{-r_j}}.$$

5.2 Caracterização Algébrica dos Geradores de Γ_8

Nesta seção, estamos interessados na identificação algébrica dos geradores do grupo Γ_{4g}, com $g = 2^n$ para $n = 1$.

Sendo assim, consideremos $n = 1$, logo $g = 2^n = 2$. Disso segue que,

$$C = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{4g}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i\pi}{4g}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix},$$

onde

$$\arg(a) = \frac{(g-1)\pi}{2g} = \frac{(2-1)\pi}{2\cdot 2} = \frac{\pi}{4}$$

$$|a| = \tan\frac{(2g-1)\pi}{4g} = \tan\frac{(2\cdot 2-1)\pi}{4\cdot 2} = \tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$\arg(b) = \frac{-(2g+1)\pi}{4g} = \frac{-(2\cdot 2+1)\pi}{4\cdot 2} = \frac{-5\pi}{8}$$

$$|b| = \left(\left(\tan\frac{(2g-1)\pi}{4g}\right)^2 - 1\right)^{1/2} = \left(\left(\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)^2 - 1\right)^{1/2},$$

ou seja,

$$\arg(a) = \frac{\pi}{4},\ \arg(b) = \frac{-5\pi}{8},\ |a| = \tan\left(\frac{3\pi}{8}\right),\ |b| = \left(\left(\text{tam}\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)^2 - 1\right)^{1/2}.$$

Para os nossos propósitos, temos que:

$$2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Como

$$C = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{8}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i\pi}{8}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{8} + i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{8} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{8} - i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{8} \end{pmatrix},$$

podemos escrever

$$C = \begin{pmatrix} x + y\cdot i & 0 \\ 0 & x - y\cdot i \end{pmatrix},$$

com

$$x = \cos\frac{\pi}{8} \quad \text{e} \quad y = \text{sen}\frac{\pi}{8},$$

ou ainda,

$$2\cdot x = \sqrt{2+\sqrt{2}},$$

e

$$2\cdot y = \sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Temos, também que,

$$A_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) & \sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} \cdot \left(-\dfrac{2-\sqrt{2}}{4} - i \cdot \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\right) \\ \sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} \cdot \left(-\dfrac{2-\sqrt{2}}{4} + i \cdot \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\right) & \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{pmatrix},$$

já que:

$$a = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

e

$$b = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Considere a isometria:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{H}^2 & \longrightarrow & \mathbb{D}^2 \\ & z & \longmapsto & f(z) = \dfrac{z \cdot i + 1}{2 + i}. \end{array}$$

Desta forma, podemos escrever que $\Gamma = f^{-1} \cdot \Gamma_{4g} \cdot f$ é um subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$, já que a função:

$$\begin{array}{rccl} \xi: & \Gamma & \longrightarrow & \Gamma_{4g} \\ & T & \longmapsto & \xi(T) = f^{-1} \cdot T \cdot f, \end{array}$$

é um isomorfismo de grupos, ou seja, $\Gamma \simeq \Gamma_{4g}$.

Sendo assim, se considerarmos $G_l = f^{-1} \cdot A_l \cdot f$ os geradores de Γ, para $l = 1, \ldots, 2^{n+1}$ e as igualdades descritas em (5.7), podemos caracterizar os geradores G_l do grupo fuchsiano $\Gamma \simeq \Gamma_8$, como segue:

$$G_l = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x_l + y_l \cdot \sqrt{\theta} & z_l + w_l \cdot \sqrt{\theta} \\ -z_l + w_l \cdot \sqrt{\theta} & x_l - y_l \cdot \sqrt{\theta} \end{pmatrix}, l = 1, \ldots, 2^{n+1}. \tag{5.8}$$

onde $x_l, y_l, z_l, w_l \in \mathbb{Z}[\theta]$ e θ descrito anteriormente.

Portanto, usando esta sequência de resultados e o fato de que para os nossos objetivos

$$G_l = f^{-1} \cdot A_l \cdot f,$$

$l = 1, 2, 3, 4$, obtemos os seguintes geradores do grupo fuchsiano aritmético $\Gamma \simeq \Gamma_8$:

$G_1 = f^{-1} \cdot A_1 \cdot f$, com A_1 descrito anteriormente

$G_2 = f^{-1} \cdot A_2 \cdot f$, com $A_2 = C \cdot A_1 \cdot C^{-1}$

$G_3 = f^{-1} \cdot A_3 \cdot f$, com $A_3 = C^4 \cdot A_1 \cdot C^{-4}$

$G_4 = f^{-1} \cdot A_4 \cdot f$, com $A_4 = C^5 \cdot A_1 \cdot C^{-5}$

ou, mais precisamente, podemos escrever:

$$G_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1 - y_1 \cdot \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} & \dfrac{z_1 - w_1 \cdot \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} \\ \\ \dfrac{-z_1 - w_1 \cdot \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} & \dfrac{x_1 + y_1 \cdot \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1 - w_1 \cdot \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} & \dfrac{z_1 + y_1 \cdot \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} \\ \\ \dfrac{-z_1 + y_1 \cdot \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} & \dfrac{x_1 + w_1 \cdot \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1 + y_1 \cdot \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} & \dfrac{z_1 + w_1 \cdot \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} \\ \\ \dfrac{-z_1 + w_1 \cdot \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} & \dfrac{x_1 - w_1 \cdot \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$G_4 = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1 + w_1 \cdot \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} & \dfrac{z_1 - w_1 \cdot \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} \\ \\ \dfrac{-z_1 - w_1 \cdot \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} & \dfrac{x_1 - w_1 \cdot \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}}, \\ y_1 &= 2 + \frac{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}}, \\ z_1 &= \frac{\left(1+\sqrt{2}\right) \cdot \left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}{2-\sqrt{2}}, \\ w_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Para finalizarmos, salientamos que o processo de identificação dos grupos $\Gamma \simeq \Gamma_{4g}$ é útil em como projetar e rotular os sinais de uma constelação de sinais através de $G_p(0) = \{T(0) : T \in G_p\}$ G-órbita de 0 obtidas a partir do grupo Γ_{4g}. Em outras palavras, podemos utilizar as tesselações $\{4g, 4g\}$ para obtermos constelações de sinais geometricamente uniformes. Algebricamente, tais tesselações estão relacionadas com grupos fuchsianos aritméticos e consequentemente com superfícies de Riemann associadas aos emparelhamentos descritos anteriormente, que apresentem menor probabilidade de erro, com o objetivo de projetar sistemas de comunicações digitais eficientes em faixa e potência.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Pode-se mencionar que a busca por constelações de sinais que apresentem a menor probabilidade de erro, está relacionada ao problema de projetar sistemas de comunicações digitais eficientes em faixa e potência. Desta maneira, se torna importante a fundamentação matemática dos códigos geometricamente uniformes através da utilização de estruturas topológicas como mostrado em (J. Anderson 1999), (J.D. de Lima; R. Palazzo Jr. 2002) e (R.G. Cavalcante; H. Lazari; J.D. Lima; R. Palazzo Jr. 2005). Este aparato diferenciado de códigos e modulações através do estudo de espaços topológicos relacionados, bem como, das superfícies de Riemann envolvidas, permite um melhor entendimento do processo de geração de constelações de sinais. Em (Edson Agustini 2002), foi abordado aspectos relacionados a forma de lidar com a probabilidade de erro em ambientes hiperbólicos, apresentando a função densidade de probabilidade de erro associada a constelações de sinais em espaços hiperbólicos de dimensão qualquer. Em (H. Lazari 2000) foi proposto pela primeira vez um sistema de comunicação hiperbólico considerando as tesselações auto-duais $\{p, p\}$, um importante subconjunto das tesselações $\{p, q\}$ com $p \neq q$, onde $\{p, q\}$ denota um polígono regular de p arestas, de tal forma que em cada vértice, q desses polígonos regulares se encontram tendo em comum somente as arestas. Em (H. Lazari 2000), foi proposta a construção de cadeias de partições geometricamente uniformes a partir do grupo de isometrias do octógono, região fundamental da tesselação $\{8, 8\}$, e do grupo de isometrias do p-ágono da tesselação $\{p, 3\}$. Em (E.D. Carvalho 2001), as tesselações $\{8, 8\}$ e $\{12, 12\}$, associadas às tesselações $\{4g, 4g\}$ foram consideradas de modo a obter constelação de sinais geometricamente uniformes a partir de grupos fuchsianos aritméticos. Em (E. Brandani 2000), foi realizada a análise de desempenho de constelações de sinais geometricamente uniformes provenientes de tesselações hiperbólicas, onde mostra-se que quanto maior for o gênero da superfície menor será o valor da probabilidade de erro associada. Por outro lado, em (João de Deus Lima 2002) caracterizou-se as estruturas algébricas e geométricas associadas a canais discretos sem memória (DMC), determinando o conjunto das superfícies no qual o correspondente grafo associado ao canal discreto sem memória possa ser mergulhado. Em (Rodrigo Gusmão Cavalcante 2002), foi realizada a análise de desempenho de constelações de sinais geometricamente uniformes provenientes de tesselações hiperbólicas, onde mostrou-se que quanto maior for o gênero da superfície menor será o valor da probabilidade de erro associada. De outra forma, em (Vandenberg Lopes Vieira 2007) construiu-se grupos fuchsianos aritméticos, associados as tesselações hiperbólicas $\{p, q\}$ e identificou-se os mesmos em ordem dos quatérnios, de modo a obter uma relação entre esses grupos e as constelações geometricamente uniformes. Além disso, em (Clarice Dias Albuquerque 2002), associado a codificação quântica, foi gerado uma série de novos códigos quânticos tóricos, bem como foi caracterizada uma relação entre tais códigos, com conhecidos reticulados e formas quadráticas, permitindo assim, a geração de um novo método de obtenção de códigos tóricos por meio da tesselação do reticulado quadrado do toro por translações de poliminó.

Dentro desse contexto e com o objetivo de propor um método de rotulagem de sinais de constelações hiperbólicas convenientes, é necessário o estabelecimento de um procedimento sistemático de construção de reticulados. Para tal procedimento é relevante a identificação dessas informações geométricas via emparelhamento das arestas de polígonos hiperbólicos regulares de modo a construir códigos geometricamente uniformes e, por consequência, garantir a eficiência desejada em diversas situações envolvendo projetos de sistemas de comunicações digitais.

Desta maneira, surge a seguinte questão: Como poderíamos caracterizar geometricamente superfícies a partir dos emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólicos com $3 \leq n \leq 8$ arestas, que norteiem a determinação de reticulados hiperbólicos a serem utilizados na construção de constelações de sinais?

Quando falamos em polígonos hiperbólicos com $3 \leq n \leq 8$ lados, é de interesse averiguar a possibilidade de construção de constelações de sinais, a partir de emparelhamentos, com todas as transformações sendo hiperbólicas, cujo gênero associado é $g = 2$, garantindo assim a construção de constelações de sinais geometricamente uniformes a partir da tesselação do bitoro por octógonos. Além disso, podemos salientar que dados dois emparelhamentos distintos do polígono hiperbólico com $n = 8$ lados resultando em $g = 2$, os grupos fuchsianos associados são isomorfos, ou seja, $\Gamma_8 \cong \Gamma'_8$. De outra forma, especificamente falando a nível de grupos fuchsianos aritméticos, que decorrem naturalmente dos grupos modulares ou dos grupos fuchsianos derivados da álgebra dos quatérnios (S. Katok 1991), sendo as duas formas de se obter grupos fuchsianos aritméticos, poderíamos escrever que $\Gamma_8 (\mathcal{A}, \mathcal{O}) \cong \Gamma'_8 (\mathcal{A}, \mathcal{O}')$. De outra forma, a partir do emparelhamento do polígono hiperbólico de $n = 8$ lados, podemos tesselar a esfera, o toro ou o bitoro por octógonos, sendo que $g = 0$ (códigos de Slepian) e $g = 1$ (códigos reticulados euclidianos) acontece quando trocamos uma ou mais transformações hiperbólicas por elípticas.

A fim de alcançarmos os objetivos propostos no trabalho, no Capítulo 2 foram apresentados os conceitos e resultados introdutórios, em particular, relacionados a geometria hiperbólica. A seguir, no Capítulo 3, apresentou-se a descrição para a construção de uma região de Voronoi de um grupo fuchsiano Γ, bem como de propriedades associadas, região esta de fundamental importância, por exemplo, para a caracterização do desempenho de constelações de sinais. Nos capítulos subsequentes, Capítulos 4 e 5, apresentamos as nossas contribuições.

Desta forma, este trabalho foi dividido em duas partes principais onde são descritas as contribuições: na primeira parte do trabalho é realizado o estudo dos possíveis emparelhamentos das arestas de polígonos de $n = 3, 4, 5, 6, 7$ e 8 arestas objetivando caracterizar geometricamente as superfícies a partir destes emparelhamentos do polígono fundamental associado a superfície e identificar novos parâmetros que norteiem a determinação de reticulados hiperbólicos para a construção de constelações de sinais; e na segunda parte do trabalho é apresentado em detalhes o desenvolvimento algébrico na identificação dos geradores do grupo fuchsiano associado ao polígono hiperbólico P.

Portanto, no Capítulo 4, apresentamos a primeira contribuição do nosso trabalho, onde foi caracterizado e tabulado algumas informações geométricas (gênero da superfície, número de pontos fixos, número de classes de conjugação) que podem ser utilizadas para o estabelecimento de um processo sistemático de construção de códigos geometricamente uniformes, bem como garantir a eficiência desejada em problemas de se projetar sistemas de comunicações eficientes em faixa e potência. Além disso, a classificação dos emparelhamentos descrita no trabalho nos permite verificar a possibilidade de construção de constelações de sinais geometricamente uniformes a partir dos emparelhamentos que possuam grupos fuchsianos aritméticos. Ou ainda, nos permite a identificação dos emparelhamentos que podem ser utilizados na proposta de construção de constelações de sinais através da caracterização do gênero da superfície associada ao mergulho do grafo correspondente ao canal binário simétrico e suas quantizações.

De outra forma, a segunda contribuição do trabalho é mostrada no Capítulo 5, onde explicitamos algebricamente os geradores do grupo fuchsiano Γ_8 associado ao polígono hiperbólico P_{4g}, salientando que o processo de identificação dos grupos $\Gamma \cong \Gamma_{4g}$ através da metodologia apresentada é de grande utilidade, já que nos permite, por exemplo, rotular sinais de constelações $G_p(0) = \{T(0) : \ T \in G_p\}$ (G-órbita de 0 obtidas a partir do grupo Γ_{4g}), ou ainda, podemos utilizar as tesselações $\{4g, 4g\}$ para obtermos constelações de sinais geometricamente uniformes relacionadas com o grupo fuchsiano aritmético e com a superfície de Riemann associada.

6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Para finalizar gostaríamos de relacionar alguns tópicos que poderiam dar prosseguimentos a este trabalho:

- Utilização deste processo em concatenação generalizada.
- Rotulamento de constelações de sinais provenientes de álgebra dos quatérnios para tesselações não auto-duais.
- Identificação e caracterização das formas modulares associadas para a utilização em MIMO (Múltiplas Entradas/Múltiplas Saídas).
- O desenvolvimento de programas capazes de mostrar geometricamente as constelações e códigos obtidos, bem como as tabulações obtidas via análise dos emparelhamentos.
- A construção de códigos geometricamente uniformes sobre os quocientes de ordem dos quatérnios provenientes de outras tesselações que foram identificadas em (Vandenberg Lopes Vieira 2007).

Bibliografia

A. Garcia; I. Leguain (2002). *Elementos de Álgebra*, Projeto Euclides, IMPA.

Adilson Gonçalves (1982). *Introdução à Álgebra*, Projeto Euclides. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro.

B. Silva; M. Firer; S.R. Costa and R. Palazzo Jr. (2006). Signal constellations in the hyperbolic plane: A proposal for new communication systems, *Journal of the Franklin Institute* **343**: 69–82.

C. Shannon (1948). A Mathematical Theory of Communication, *Bell Systems Technical Journal* **27**: 379–423;623–656.

Celso de Almeida (1990). Modulação-Codificada Generalizada via Equação de Diofanto, *Tese de doutorado*, UNICAMP-FEEC.

Clarice Dias Albuquerque (2002). Análise e Construção de Códigos Quânticos Topológicos sobre Variedades Bidimensionais, *Tese de doutorado*, UNICAMP-FEEC.

E. Brandani (2000). Constelações de Sinais e Análise de Desempenho no Plano Hiperbólico, *Tese de doutorado*, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP.

E. Spiegel (1977). Codes Over $\mathbb{Z}_m$, *Information and Control* (35): 48–51.

E.D. Carvalho (2001). Construção e Rotulamento de Constelação de Sinais Geometricamente Uniformes em Espaços Euclidianos e Hiperbólicos, *Tese de doutorado*, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP.

Edson Agustini (2002). Constelações de Sinais em Espaços Hiperbólicos, *Tese de doutorado*, UNICAMP-IMECC.

G.D. Forney (1991). Geometrically uniform codes, *IEEE Trans. Inform. Theory* **37**(6): 1241–1259.

H. Lazari (2000). Uma Contribuição à Teoria dos Códigos Geometricamente Uniformes Hiperbólicos, *Tese de doutorado*, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - DT, UNICAMP.

I.F. Blake (1972). Codes Over Certain Rings, *Information and Control* **20**: 396–404.

I.N. Herstein (1975). *Topics in Algebra*, 2nd edn, New York: Wiley.

J. Anderson (1999). *Hiperbolic Geometry*, Springer-Verlag. New York.

J. Lehner (1996). *A Short Course in Automorphic Functions*, University of Maryland, New York.

J. Rifà (1995). Groups of Complex Integers Used as QAM Signals, *IEEE Trans. on Inform. Theory* **41**(5).

J.D. de Lima; R. Palazzo Jr. (2002). Embedding Discrete Memoryless Channels on Compact and Minimal Surfaces, *IEEE Information Theory Workshop* pp. 183–186.

João de Deus Lima (2002). Identificação e Estrutura Algébrica das Superfícies Compactas com e sem Bordos, Provenientes de Mergulhos e de Canais Discretos sem Memória, *Tese de doutorado*, UNICAMP-FEEC-DT.

K Huber (1993). Codes over Eisenstein-Jacobi integers, *Finite fields: theory, applications, and algorithms* pp. 165–179.

M. Armstrong (1983). *Basic Topology*, Springer-Verlag. New York.

R.G. Cavalcante; H. Lazari; J.D. Lima; R. Palazzo Jr. (2005). A new approuch to the design of digital communication systems, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science - DIMACS Series* **68**: 145–177.

Rodrigo Gusmão Cavalcante (2002). Análise de Desempenho de Constelações de Sinais em Variedades Riemannianas, *Dissertação de mestrado*, UNICAMP-FEEC.

Rodrigo Gusmão Cavalcante (2008). Uma Análise da Influência da Curvatura do Espaço em Sistemas de Comunicações, *Tese de doutorado*, UNICAMP-FEEC.

S. Johansson (n.d.). On Fundamental Domains of Arithmetic Fuchsian Groups, *Technical report*. `www.math.chalmers.se/~sj/forskning.html`.

S. Katok (1991). *Fuchsian Groups*, The University of Chicago Press, Chicago.

Vandenberg Lopes Vieira (2007). Grupos Fuchsianos Aritméticos Identificados em Ordens dos Quatérnios para Construção de Constelações de Sinais, *Tese de doutorado*, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP.