Universidade Estadual de Campinas Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Método de Pontos Interiores Aplicado ao Fluxo de Potência Ótimo Utilizando Coordenadas Cartesianas

Adriano Thomaz

Orientador: Secundino Soares Filho Co-orientador: Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Energia Elétrica. Aprovação em 19/06/2007

Banca Examinadora: Prof. Dr. Anésio dos Santos Júnior – FEEC/UNICAMP Prof. Dr. Carlos Alberto de Castro Júnior – FEEC/UNICAMP Prof. Dr. Geraldo Leite Torres – DEESP/UFPE Prof. Dr. Geraldo Roberto Martins da Costa – EESC/USP Prof. Dr. Leonardo Nepomuceno – FEB/UNESP Prof. Dr. Secundino Soares Filho – FEEC/UNICAMP

> Campinas, SP 2007

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

T868m	Método de pontos interiores aplicado ao fluxo de potência ótimo utilizando coordenadas cartesianas / Adriano Thomaz – Campinas SP: [s n] 2007
	Orientadores: Secundino Soares Filho; Aurelio Ribeiro Leite
	Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas.
	Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.
	1. Energia elétrica, 2. Sistemas de energia elétrica.
	3. Programação não-linear. I. Soares Filho, Secundino. II.
	Oliveira, Aurelio Ribeiro Leite de. III. Universidade Estadual
	de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de
	Computação. IV. Título.

Título em Inglês:	Interior points method applied to optimal power flow
	using cartesian coordinates
Palavras-chave em Inglês:	Electrical power systems, Optimal power flow, Nonlinear
	programming, Interior point methods
Área de concentração:	Energia Elétrica
Titulação:	Doutor em Engenharia Elétrica
Banca Examinadora:	Geraldo Leite Torres, Geraldo Roberto Martins da Costa,
	Leonardo Nepomuceno, Anésio dos Santos Júnior e
	Carlos Alberto de Castro Júnior
Data da defesa:	19/06/2007
Programa de Pós-Graduação:	Engenharia Elétrica

Resumo

O método de pontos interiores primal-dual é desenvolvido para o problema de fluxo de potência ótimo corrente alternada ativo e reativo. Adotou-se a representação das tensões através de coordenadas cartesianas uma vez que neste modelo a hessiana do problema é constante e a expansão em Taylor é exata para o termo de ordem dois. Antes da aplicação do método, o número de variáveis do problema é reduzido, não alterando a estrutura esparsa do problema. A matriz resultante é simétrica em estrutura e essa característica é explorada de forma eficiente reduzindo o esforço computacional por iteração. A implementação fornece um ponto de partida, uma solução inicial para ser utilizada como base e referência para futuros aprimoramentos e estudos. Permite inclusão de novos estudos de limites operacionais e físicos, particulares de cada sistema, sem a necessidade de mudanças estruturais. O desenvolvimento propõe novas idéias com técnicas de resolução já conhecidas. Os resultados dos experimentos computacionais, utilizando sistemas de teste IEEE e um sistema real brasileiro, são apresentados.

Palavras-chave: Fluxo de potência ótimo, Métodos de pontos interiores, Otimização não-linear.

Abstract

The primal dual interior point methods are developed to the AC active and reactive optimal power flow problem. The representation of the complex bus-voltages through cartesian coordinates is adopted, once the Hessian is constant and the Taylor expansion is accurate for the second order term. Before the application of the method, the number of variables of the problem is reduced. This reduction does not modify the sparse pattern of the problem. The final matrix is symmetric in structure and this feature can be exploited reducing the computational effort per iteration. The implementation gives a start point, an initial solution that can be used as a base and reference for future improvements and studies. It also allows including new studies of physical and operational limits, for each system, without the necessity of structural changes. This development proposes new ideas using solution technics already known. The computacional experiments results presented are performed for IEEE test systems and a real Brazilian system.

Keywords: Optimal power flow, Interior point methods, Nonlinear programming.

Agradecimentos

A Deus, por estar sempre comigo e iluminar meu caminho.

Ao professor Secundino, por me conceder a honra de poder trabalhar ao seu lado, pela oportunidade e confiança depositada no desenvolvimento desse trabalho.

Ao professor Aurelio, pela dedicação e amizade, por acreditar em mim e estar sempre disposto a me ajudar.

Ao professor Geraldo Costa, pela amizade, receptividade, pelas explicações, idéias e palavras de incentivo.

Ao professor Geraldo Torres, por me receber de forma atenciosa e paciente, pelas palavras, explicações e sugestões.

Ao professor Anésio, pelos conselhos e propostas que foram imprescindíveis para a conclusão desse trabalho.

Aos professores Castro, Takaaki e Rosangela pela colaboração.

À minha querida esposa Fernanda, pelo amor, carinho, atenção, dedicação e compreensão.

A meus pais Arlete e Eduardo, pelo amor, carinho, que sempre priorizaram minha educação e acreditaram em mim, me apoiando e auxiliando para que eu pudesse realizar meus trabalhos e sonhos.

Às minhas famílias, pelo amor, orações e compreensão.

Aos meus amigos do COSE pela colaboração, palavras e pelos momentos especiais e inesquecíveis.

Ao pessoal da lista e do grupo de estudos de caso.

Aos funcionários da FEEC que, direta ou indiretamente, contribuíram com este trabalho.

À FAPESP pela credibilidade e apoio financeiro.

E finalmente a todos que colaboraram indiretamente na realização deste trabalho.

"No final, tudo converge para uma solução, se não convergiu, é porque ainda não chegou no final." autor desconhecido

Para meus pais Arlete e Eduardo

Sumário

Li	sta de	e Figur	as	p. xiii
Li	sta de	e Tabel	as	p. xv
Li	sta de	e Abrev	viaturas e Siglas	p. xvii
Li	sta de	e Símb	olos	p. xix
1	Intr	odução)	p.1
	1.1	Motiv	vação	p.2
	1.2	Estrut	tura da Tese	p.3
2	Flux	to de P	otência Ótimo	p.5
	2.1	Aspec	ctos Gerais	p.5
	2.2	Fluxo	de Carga	p.7
		2.2.1	Formulação do Problema	p.8
		2.2.2	Modelagem	p.10
			2.2.2.1 Linhas de Transmissão	p.10
			2.2.2.2 Transformadores Em-fase	p.12
		2.2.3	Fluxos de Potência Ativa e Reativa	p.12
			2.2.3.1 Linhas de Transmissão	p.13
			2.2.3.2 Transformadores Em-fase	p.14

			2.2.3.3 Expressões Gerais dos Fluxos	p.14
		2.2.4	Formulação Matricial	p. 15
	2.3	Proble	ema de Fluxo de Potência Ótimo	p. 17
		2.3.1	Fluxo de Potência Ótimo Reativo	p.20
		2.3.2	Fluxo de Potência Ótimo Ativo-Reativo	p.21
		2.3.3	Função Objetivo	p.22
	2.4	Repres	sentação das Equações	p.23
		2.4.1	Representação Clássica (R-CLASS)	p.23
		2.4.2	Representação Matricial (R-MAT)	p.24
	2.5	Consid	derações Finais	p.25
3	Mét	odos de	e Pontos Interiores para Programação Não Linear	p.27
	3.1	Desen	volvimento do Método para Otimização	
		Não-L	inear	p.30
		3.1.1	Método de Pontos Interiores Primal-Dual	p. 33
		3.1.2	Representações para o Problema de Fluxo de Potência Ótimo	p.36
			3.1.2.1 Clássica (R-CLASS)	p.36
			3.1.2.2 Matricial (R-MAT)	p. 37
	3.2	Desen	volvimento Específico com Sistema Aumentado	p. 38
		3.2.1	Cálculo das Direções de Newton	p. 45
		3.2.2	Estrutura Matricial	p. 50
4	Deta	alhes do	e Implementação	p. 53
	4.1	Pontos	s Iniciais	p. 53
		4.1.1	Heurísticas HGT	p. 54

		4.1.1.1 HGT-A	p. 54
		4.1.1.2 HGT-B	p. 55
		4.1.2 Heurística HF	p. 55
		4.1.3 Heurística HAT	p.56
		4.1.3.1 Atualização do Parâmetro Energizador	p. 58
	4.2	Cálculo do Tamanho do Passo	p. 59
		4.2.1 Atualização das Variáveis	p. 59
	4.3	Redução do Parâmetro de Barreira	p.60
	4.4	Critério de Convergência	p.60
5	Expo	erimentos Computacionais	p.63
	5.1	Sistemas de Potência para Testes	p.63
	5.2	Resultados Obtidos	p.65
		5.2.1 IEEE-30	p.65
		5.2.2 IEEE-300	p.70
		5.2.3 BRAS-2098	p. 74
	5.3	Heurística HAT	p. 78
	5.4	Proposta SLPV	p. 79
6	Con	clusões	p. 83
	6.1	Propostas Futuras	p. 85
Re	eferêr	ncias	p. 87
Aj	pêndi	ice A Métodos de Pontos Interiores para Programação Linear	p. 93
	A.1	Método Primal-Dual Afim Escala	p. 94

A.2	Método I	Preditor-Corretor	p. 97
A.3	Cálculo c	las Direções nos Métodos de Pontos	
	Interiores	5	p. 99
Apêndi	ce B Méte	odo de Newton	p. 101
B.1	Uma Var	iável	p. 101
B.2	Várias Va	ariáveis	p. 101
Apêndi	ce C Deri	ivações: Equações de Fluxo de Carga	p. 103
C.1	Represen	tação Clássica (R-CLASS)	p. 103
	C.1.1 D	erivadas de Primeira Ordem	p. 103
	C.1.2 D	erivadas de Segunda Ordem	p.104
	C.1.3 Pi	ropriedade de Simetria	p. 106
C.2	Represen	tação Matricial (R-MAT)	p.106
	C.2.1 Es	strutura Matricial da Hessiana	p.106
	C.2.2 D	erivadas de Primeira Ordem	p.107
	C.2.3 D	erivadas de Segunda Ordem	p. 108
Apêndi	ce D Der	ivações: Funções Objetivo	p. 111
D.1	Represen	tação Clássica (R-CLASS)	p. 111
	D.1.1 D	erivadas de Primeira Ordem	p. 111
	D.1.2 D	erivadas de Segunda Ordem	p.112
D.2	Represen	tação Matricial (R-MAT)	p.116
	D.2.1 D	erivadas de Primeira Ordem	p. 116
	D.2.2 D	erivadas de Segunda Ordem	p. 116

Apênd	ice E R	esultados	Detal	hados	dos l	Expe	rimer	tos C	omp	utacio	nais		p.119
E.1	IEEE-	30	•••									 • • • •	. p.119
	E.1.1	FPOR	•••									 • • • •	. p.120
	E.1.2	FPOAR .	•••									 • • • •	. p.122
E.2	IEEE-	300	•••								• • •	 • • • •	. p.124
	E.2.1	FPOR	•••								• • •	 • • • •	. p.124
	E.2.2	FPOAR .										 ••••	. p.132

Lista de Figuras

1	Modelo equivalente π de uma linha de transmissão $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	p.11
2	Modelo equivalente π de um transformador em-fase	p. 12
3	IEEE-30 (ϕ_2): Perfil de magnitude de tensão nas barras de geração	p.69
4	IEEE-30 (ϕ_2): Perfil de magnitude de tensão	p. 69
5	IEEE-30 (ϕ_0): Perfil de geração de potência ativa $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	p.70
6	IEEE-30 (ϕ_2): Perfil de geração de potência ativa $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	p.70
7	IEEE-300 (ϕ_2): Perfil de magnitude de tensão nas barras de geração \ldots .	p.73
8	IEEE-300 (ϕ_0): Perfil de geração de potência ativa $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	p.73
9	IEEE-300 (ϕ_2): Perfil de geração de potência ativa $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	p.74
10	BRAS-2098 (ϕ_0): Perfil de geração de potência ativa $\ldots \ldots \ldots \ldots$	p.76
11	BRAS-2098 (ϕ_2): Perfil de geração de potência ativa $\ldots \ldots \ldots \ldots$	p.77
12	IEEE-300 (ϕ_2): Evolução do valor da função objetivo (FPOR)	p.78
13	IEEE-300 (ϕ_2): Evolução do valor da função objetivo (FPOAR)	p.78
14	IEEE-300 (ϕ_2): Evolução dos parâmetro de energização e de barreira \ldots	p.79
15	IEEE-300: FPOR (ϕ_2): Perfil de magnitude de tensão	p. 80
16	IEEE-300: FPOAR (ϕ_2): Perfil de magnitude de tensão	p. 81

Lista de Tabelas

1	Parâmetros Referência	p.64
2	Parâmetros Utilizados nas Heurísticas	p.64
3	Sistemas de potência	p.64
4	IEEE-30: tempo de processamento	p.65
5	IEEE-30: número de iterações	p.66
6	IEEE-30: valor da função objetivo	p.67
7	IEEE-30: perdas de potência ativa	p.67
8	IEEE-30: geração de potência ativa total	p. 67
9	IEEE-30: FPOR (ϕ_2) – Limites - HAT	p. 68
10	IEEE-30: FPOAR (ϕ_2) – Limites - HAT	p. 68
11	IEEE-300: número de iterações	p.71
12	IEEE-300: tempo de processamento	p.71
13	IEEE-300: valor da função objetivo	p.72
14	IEEE-300: perdas de potência ativa	p.72
15	IEEE-300: geração de potência ativa total	p.72
16	BRAS-2098: tempo de processamento	p.74
17	BRAS-2098: número de iterações	p.74
18	BRAS-2098: valor da função objetivo	p. 75
19	BRAS-2098: perdas de potência ativa	p.75

20	BRAS-2098: geração de potência ativa total p.75
21	Restrições de tensão (SLPV)
22	BRAS-2098: proposta SLPV (FPOAR) p.82
23	IEEE-30: FPOR (ϕ_0) – resultados
24	IEEE-30: FPOR (ϕ_2) – resultados
25	IEEE-30: FPOAR (ϕ_0) – resultados
26	IEEE-30: FPOAR (ϕ_2) – resultados
27	IEEE-300: FPOR (ϕ_2) – resultados
28	IEEE-300: FPOAR (ϕ_2) – resultados

Lista de Abreviaturas e Siglas

AMD	Advanced Micro Devices, Inc.
KB	kilobyte
RAM	Random Access Memory (memória de acesso alea-
	tório)
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.
FPOR	Fluxo de potência ótimo reativo
FPOAR	Fluxo de potência ótimo ativo-reativo
R-CLASS	Representação clássica das equações
R-MAT	Representação matricial das equações
KKT	Karush-Kuhn-Tucker

Lista de Símbolos

- N conjunto de todas as barras no sistema
- \tilde{N} conjunto de todas as barras exceto a barra de referência
- Ω_k conjunto de todas as barras diretamente conectadas a uma barra k
- N_k conjunto de todas as barras conectadas a uma barra k, inclusive ela mesma
- *C* conjunto das barras de carga
- G conjunto das barras geradoras de potência ativa
- \mathcal{R} conjunto das barras com controle de potência reativa
- *I*_e conjunto das barras com o componente real da tensão *e* variável
- I_f conjunto das barras com o componente imaginário da tensão f variável
- I_{g_v} conjunto das barras pertencentes às equações de balanço de potência ativa
- I_{g_a} conjunto das barras pertencentes às equações de balanço de potência reativa
- I_{h_v} conjunto das barras com limitantes de magnitude de tensão
- I_{h_v} conjunto das barras com limitantes de injeção de potência ativa
- I_{h_a} conjunto das barras com limitantes de injeção de potência reativa
- \dot{V} tensão complexa na barra terminal
- *j* unidade imaginária
- *v* magnitude de tensão (coordenadas polares)
- θ ângulo de fase de tensão (coordenadas polares)
- *e* componente real da tensão (coordenadas cartesianas)
- *f* componente imaginário da tensão (coordenadas cartesianas)
- **P** injeção de potência ativa
- **Q** injeção de potência reativa

P_{km}	fluxo de potência ativa no ramo $k - m$
Q_{km}	fluxo de potência reativa no ramo $k - m$
$Q_{km}^{ m sh}$	componente da injeção de potência reativa devida ao elemento <i>shunt</i> da barra <i>k</i>
$b_k^{ m sh}$	susceptância <i>shunt</i> ligada à barra <i>k</i>
\dot{S}^*_{km}	fluxo de potência aparente no ramo k–m
\dot{I}_{km}	corrente da barra <i>k</i> para a barra <i>m</i>
\dot{z}_{km}	impedância série no ramo k–m
r_{km}	resistência série no ramo k–m
x_{km}	reatância série no ramo k–m
\dot{y}_{km}	admitância série no ramo k–m
8km	condutância série no ramo k–m
b_{km}	susceptância série no ramo k–m
$b^{ m sh}_{km}$	susceptância <i>shunt</i> no ramo k–m
t_{km}	razão de transformação no ramo k–m
İ	vetor de injeções de corrente
Ý	matriz admitância nodal
G	matriz condutância
B	matriz susceptância
Ε	matriz diagonal do vetor <i>e</i>
F	matriz diagonal do vetor <i>f</i>
x	vetor das variáveis explícitas de decisão (variáveis de estado)
g (.)	vetor não-linear que contém equações de fluxo de potência
h (.)	vetor não-linear de desigualdades funcionais do sistema de potência
<u>.</u> ,	limite inferior e superior
$\boldsymbol{g}_p(.)$	vetor não-linear que contém equações de balanço de potência ativa
$g_q(.)$	vetor não-linear que contém equações de balanço de potência reativa
$h_v(.)$	vetor não-linear de desigualdades funcionais de tensão
$h_p(.)$	vetor não-linear de desigualdades funcionais de geração de potência ativa
$h_q(.)$	vetor não-linear de desigualdades funcionais de geração de potência reativa

n	dimensão do vetor das variáveis de decisão <i>x</i>
\mathbf{m}_g	dimensão do vetor de funções $g(.)$
\mathbf{m}_h	dimensão do vetor de funções $h(.)$
\mathbf{m}_{g_p}	dimensão do vetor de funções $m{g}_p(.)$
\mathbf{m}_{g_q}	dimensão do vetor de funções $g_q(.)$
\mathbf{m}_{h_v}	dimensão do vetor de funções $h_v(.)$
\mathbf{m}_{h_p}	dimensão do vetor de funções $h_p(.)$
\mathbf{m}_{h_q}	dimensão do vetor de funções $h_q(.)$
P_{C}	carga de potência ativa
$Q_{\rm C}$	carga de potência reativa
P_{G}	geração de potência ativa
$oldsymbol{Q}_{ m G}$	geração de potência reativa
$P^{\scriptscriptstyle ext{esp}}$	injeção líquida de potência ativa especificada
С	parâmetro de energização relacionado com a geração de potência ativa
$A_{ m G}$	vetor generalizado relacionado com a geração de potência ativa
ϕ_0	função objetivo referente à diferença entre a injeção de potência ativa calculada e
	desejada
ϕ_1	função objetivo referente à injeção de potência ativa na barra de referência
ϕ_2	função objetivo referente às perdas de potência ativa nas linhas
λ	peso relacionado com a geração
Λ	matriz diagonal do vetor λ
μ	parâmetro de barreira
κ	indicador de iteração
L	função lagrangiana
U	vetor de dimensões apropriadas e todos os componentes iguais a 1
diag(.)	matriz diagonal
γ	<i>gap</i> de complementaridade
${\cal H}$	matriz hessiana da lagrangiana
ϵ	distância das folgas utilizadas nas heurísticas HGT
	8
η_i	valor inteiro utilizado na heurística HF
η_i $lpha_{ m p}$	valor inteiro utilizado na heurística HF tamanho do passo relacionado às variáveis primais

- τ fator de segurança para o cálculo do tamanho do passo
- β parâmetro de centralização
- σ escalar utilizado para a atualização do parâmetro de centralização
- v_1 critério de convergência relacionado com a factibilidade primal
- v₂ critério de convergência relacionado com a factibilidade dual
- v₃ critério de convergência relacionado com a complementaridade
- v₄ critério de convergência relacionado com a função objetivo
- ε_1 tolerância relacionada com a factibilidade primal
- ε_2 tolerância relacionada com a factibilidade dual
- ε_3 tolerância relacionada com a complementaridade
- ϵ_4 tolerância relacionada com a função objetivo
- ε_{μ} tolerância relacionada com o tamanho do parâmetro de barreira e tamanho dos passos

1 Introdução

O fluxo de potência ótimo (ou fluxo de carga ótimo) é um problema de programação não-linear de grande porte não convexo e inteiro-misto. Torna-se ainda mais complicado pela presença de um grande número de variáveis discretas. O problema de fluxo de potência ótimo corrente alternada é um dos mais importantes na área de sistemas de potência, servindo como base para diversas outras aplicações. Dada sua importância no planejamento e operação de sistemas de potência os problemas de fluxo de potência ótimo têm sido assunto de intensa pesquisa.

A resolução de problemas de fluxo de potência ótimo eficientemente de maneira nãolinear é um tópico muito complexo. Uma técnica mais recentemente utilizada para a resolução de problemas de fluxo de potência ótimo de grande porte é a dos métodos de pontos interiores (GRANVILLE, 1994; MOMOH; EL-HAWARY; ADAPA, 1999; OLIVEIRA; SOARES; NEPO-MUCENO, 2003, 2005; OLIVEIRA; SOARES, 2000; QUINTANA; TORRES; MEDINA-PALOMO, 2000; TORRES; QUINTANA, 1998; WEI et al., 1998; WU; DEBS; MASTERN, 1994). Uma estrutura de dados bem elaborada e o uso eficiente de técnicas de esparsidade tornam estes métodos atrativos.

Uma característica comum desses trabalhos é que problemas de programação não-linear têm sido resolvidos eficientemente pelos métodos de pontos interiores para programação não-linear derivados da abordagem de função barreira logarítmica. Essa abordagem foi introduzida por Frisch (1955), e desenvolvida como uma ferramenta para programação não-linear por Fiacco e McCormick (1968). Embora tenha sido desenvolvida para resolver problemas de programação não-linear em geral, foi no campo da programação linear que sua excelente eficiência computacional foi primeiramente demonstrada e amplamente aceita (ADLER et al., 1989; LUSTIG; MARSTEN; SHANNO, 1991; MEHROTRA, 1992).

Esses métodos são reconhecidos atualmente por sua robustez (MOMOH; EL-HAWARY;

ADAPA, 1999; QUINTANA; TORRES; MEDINA-PALOMO, 2000). Além disso, o tratamento eficiente de desigualdades permite uma revisão dos procedimentos geralmente adotados. Assim, a utilização de coordenadas cartesianas apresenta uma formulação mais simples que as coordenadas polares.

1.1 Motivação

Até a presente data, não existe uma abordagem robusta, rápida e totalmente confiável, que atenda às necessidades dos operadores das concessionárias de energia elétrica. Em alguns trabalhos publicados na área, podemos perceber a utilização de abordagens e métodos genéricos de otimização para resolver problemas de fluxo de potência ótimo mas que não exploram totalmente a estrutura e as características particulares do problema.

O desenvolvimento de uma ferramenta completa, que atue de forma abrangente e eficiente em todas as possíveis variantes de um problema de fluxo de potência ótimo, é praticamente inviável. Essa inviabilidade se dá principalmente pela complexidade e particularidades de cada sistema elétrico.

Geralmente, pesquisadores desenvolvem técnicas e implementações considerando o maior número de particularidades em comum encontradas nos sistemas reais. A implementação desenvolvida nesse trabalho também segue esse pensamento. A principal proposta é desenvolver uma ferramenta base para futuros aprimoramentos e estudos. Essa ferramenta precisa ser implementada de forma simples, mas eficiente, e que permita inclusão de novos estudos e técnicas sem a necessidade de mudanças estruturais. Ela precisa fornecer uma solução, um ponto operacional, que sirva como base para análises e futuras pesquisas, de modo particular para cada sistema.

O desenvolvimento dessa ferramenta contudo, tem como objetivo a exploração da estrutura matricial do sistema resultante da aplicação do método, a utilização de novas idéias com técnicas de resolução já conhecidas e proposição de alguns aspectos que contribuam para a resolução de um problema de fluxo de potência ótimo.

Apesar da utilização de coordenadas polares na formulação das equações ser a escolha mais natural para a aplicação de otimização, onde podemos modelar mais facilmente os limites de magnitude de tensão, devido ao eficiente tratamento de desigualdades proporcionado pelos métodos de pontos interiores (MOMOH; EL-HAWARY; ADAPA, 1999; QUINTANA; TORRES; MEDINA-PALOMO, 2000), essa escolha perde importância em relação a utilização de coordenadas cartesianas.

Optou-se pela utilização de coordenadas cartesianas para representar as tensões pois desta forma, tanto as restrições do problema como as funções objetivos porventura adotadas são quadráticas. Conseqüentemente, as matrizes do problema são mais fáceis de trabalhar. Outra vantagem é que a matriz hessiana do problema é constante e a expansão em Taylor¹ é exata para o termo de ordem dois. Tensões na forma cartesiana são usadas por exemplo, para explorar a idéia de um multiplicador ótimo que melhora a convergência do fluxo de carga para estudos de estimativa do estado do sistema de potência (TORRES; QUINTANA, 1998).

1.2 Estrutura da Tese

Este trabalho está dividido da seguinte forma:

- Capítulo 2: Apresentamos o problema de fluxo de potência ótimo, formulado a partir da modelagem do problema de fluxo de carga, na forma cartesiana. Utilizamos duas formas para representar as equações, a forma clássica, utilizada na maioria das publicações, e a forma matricial, proposta para facilitar a implementação e utilizar as vantagens de rotinas computacionais específicas para o tratamento de esparsidade.
- Capitulo 3: Nesse capítulo desenvolvemos o método de pontos interiores para um problema de otimização não-linear geral e detalhamos um método específico para o problema de fluxo de potência ótimo.
- Capítulo 4: Relatamos alguns detalhes de implementação, como a definição das heurísticas para os pontos inicias do método, cálculo dos passos e definição de parâmetros utilizados.
- Capítulo 5: Os experimentos computacionais que foram realizados com os sistemas de testes são apresentados com os gráficos e resultados numéricos.

¹Brook Taylor, nasceu em 18 de agosto de 1685 em Edmonton e morreu em 30 de novembro de 1731 em Middlesex, Inglaterra. Foi um matemático com várias contribuições na física, no entanto, mais conhecido pelo seu trabalho sobre as séries que hoje recebem seu nome publicado em 1715 em "*Methodus incrementorum directa et inversa*".

• Capítulo 6: Nesse capítulo apresentamos as conclusões sobre o desenvolvimento desse trabalho e suas perspectivas futuras.

2 Fluxo de Potência Ótimo

2.1 Aspectos Gerais

O problema clássico de fluxo de carga (ou fluxo de potência) consiste em resolver um conjunto de equações algébricas, não-lineares e complexas que resultam da aplicação das Leis de Kirchhoff¹ a um sistema, em função das características e propriedades físicas dos equipamentos instalados na rede e conhecidas as demandas e gerações de potências ativa e reativa.

O fluxo de carga necessita da especificação de algumas variáveis tais como magnitudes de tensão e potência ativa gerada nas barras de geração, enquanto que o fluxo de potência ótimo trata estas variáveis como passíveis de ajustes. O fluxo de potência ótimo geralmente é apresentado como um problema de otimização, onde se procura maximizar ou minimizar um índice de desempenho, atendendo simultaneamente a um conjunto de restrições físicas e operacionais.

Podemos dizer que a utilização do fluxo de potência ótimo é dividida entre planejamento e operação do sistema. O fluxo de potência ótimo fornece ao planejador ou operador do sistema elétrico, uma orientação de como estas variáveis devem ser ajustadas de modo que os centros de geração, os centros de consumo e os equipamentos que participam da transmissão estejam dentro de suas capacidades. É, portanto, um problema bastante complexo e de difícil solução (MOMOH; EL-HAWARY; ADAPA, 1999). A busca de uma implementação computacional rápido e confiável é um objetivo comum a todas as metodologias empregadas na solução do

¹Gustav Robert Kirchhoff, nasceu em 12 de março de 1824 em Königsberg, Prússia (atual Kaliningrado, Rússia) e morreu em 17 de outubro de 1887 em Berlim, Alemanha. Kirchhoff foi um físico cujas principais contribuições científicas estiveram no campo dos circuitos elétricos, na espectroscopia e na emissão de radiação dos corpos negros. Ele formulou sua lei da voltagem para a análise dos circuitos (Leis de Kirchhoff) em 1845, quando ainda era um estudante.

fluxo de potência ótimo.

Uma ferramenta clássica de fluxo de potência ótimo precisa: ter um tempo de solução que varia aproximadamente em proporção ao tamanho da rede e seja independente do número de controles ou restrições de desigualdades; obter convergência rápida e eficiente das condições de otimalidade de Kuhn-Tucker; não necessitar da figura do operador para ajustar os parâmetros do processo de otimização, quando for o caso; obter soluções para qualquer tamanho ou tipo de problema. O tempo de convergência é fundamental para operações *on-line*, mas não necessariamente para o planejamento.

Podemos formular o fluxo de potência ótimo através de um problema de otimização não-linear, utilizando-o como uma ferramenta na busca de um ponto de operação ótimo, conforme é apresentado nesse capítulo.

O problema de despacho econômico foi, historicamente, o precursor do problema de fluxo de potência ótimo, assim ele passou a ser abordado como um caso particular de fluxo de potência ótimo.

Uma referência clássica para este problema é o trabalho de Carpentier (1962), baseado no problema de despacho econômico. Foi apresentado um problema para minimizar custo de produção de energia, considerando as equações de balanço de potência ativa e reativa como restrições de igualdade e as limitações físicas dos equipamentos como restrições de desigualdade. Esta formulação serve como um ponto de partida para os estudos posteriores, estabelecendo o fluxo de potência ótimo como um problema que envolve três elementos básicos: as variáveis, as restrições e a função objetivo.

Uma das primeiras abordagens para resolver o problema de fluxo de potência ótimo foi feita por Dommel e Tinney (1968). Eles incorporaram uma função objetivo que visa refletir as perdas no sistema de geração e transmissão à solução do problema de fluxo de carga. Além do método utilizado para obter a direção e o tamanho do passo para atualização das variáveis de controle, foram testadas outras metodologias comumente utilizadas na solução de problemas não-lineares de otimização. Este trabalho serviu como referência à produção de muitas abordagens para resolução do fluxo de potência ótimo.

A maioria das publicações especializadas utilizam coordenadas polares para representar a tensão. Ainda não ha um número relevante de publicações que apresentam as deduções das equações envolvidas no problema de fluxo de potência ótimo em coordenadas cartesianas. Nesse trabalho apresentamos essas equações partindo da modelagem do problema de fluxo de carga.

2.2 Fluxo de Carga

O cálculo de fluxo de carga em uma rede de energia elétrica consiste na determinação do estado da rede, da distribuição dos fluxos e de algumas outras grandezas de interesse. Nesse tipo de problema, a modelagem do sistema é estática, significando que a rede é representada por um conjunto de equações e inequações algébricas. Em geral, para esse cálculo, utilizam-se métodos computacionais específicos desenvolvidos para a resolução do sistema.

Os estudos de fluxo de carga em geral utilizam um modelo da rede elétrica chamado de modelo barra–linha no qual as barras são os nós da rede e as linhas/transformadores são os elos entre esses nós. As barras são condutores com resistência desprezível quando comparadas com as impedâncias de linhas e transformadores. Por isso a representamos na forma de nó elétrico no qual a tensão é uma só em todas as partes do condutor. As barras em geral estão localizadas em subestações e podem ser constituídas por várias seções de barras ligadas através de chaves ou disjuntores. Essas seções de barras conectadas por chaves e disjuntores fechados, dependendo da configuração e operação da rede num dado momento, formam uma única barra do ponto de vista do modelo barra–linha.

Os componentes de um sistema de energia elétrica podem ser classificados em dois grupos: os que estão ligados entre um nó qualquer e o nó-terra, como é o caso dos geradores, cargas, reatores e capacitores; e os que estão ligados entre dois nós quaisquer da rede, como é o caso de linhas de transmissão, transformadores e defasadores. Os geradores e cargas são considerados como a parte externa do sistema, e são modelados através de injeções de potências nos nós da rede. A parte interna do sistema é constituída pelos demais componentes (MONTICELLI, 1983).

As equações do fluxo de carga são obtidas impondo-se a conservação das potências ativa e reativa em cada barra (nó) da rede, isto é, a potência líquida injetada deve ser igual à soma das potências que fluem pelos componentes internos que têm esta barra como uma de seus terminais. Isso equivale a impor a Primeira Lei de Kirchhoff. A Segunda Lei de Kirchhoff é utilizada para expressar os fluxos de potência nos componentes internos como funções das tensões (estados) de suas barras terminais.

Para melhor representarmos as equações envolvidas no problema de fluxo de carga, e conseqüentemente as que serão apresentadas nesse trabalho, utilizamos as seguintes notações. Denotamos por N o conjunto de todas as barras no sistema, por \tilde{N} o conjunto de todas as barras exceto a barra de referência. Para representar o conjunto de todas as barras diretamente conectadas a uma barra k, utilizamos Ω_k , e para representar o conjunto de todas as barras conectadas a uma barra k, inclusive ela mesma, utilizamos N_k .

2.2.1 Formulação do Problema

A representação mais comum da tensão complexa na barra terminal (\dot{V}_k), utilizada nos estudos de sistemas de potência, é através de coordenadas polares:

$$\dot{V}_k := v_k \exp{(j\theta_k)},$$

onde v_k e θ_k são a magnitude de tensão e o ângulo de fase de (\dot{V}_k) respectivamente e j representa a unidade imaginária ($\sqrt{-1}$).

Podemos também representar a tensão complexa utilizando coordenadas cartesianas:

$$\dot{V}_k := e_k + jf_k$$

onde e_k e f_k são, respectivamente, os componentes real e imaginário da tensão.

As relações entre ambas representações são estabelecidas como segue:

$$v_k = \sqrt{e_k^2 + f_k^2}, \qquad e_k = v_k \cos(\theta_k), \theta_k = \arctan(f_k/e_k), \qquad f_k = v_k \sin(\theta_k).$$

Na formulação clássica, a cada barra *k* da rede são associadas quatro variáveis: duas relacionadas com a tensão e duas relacionadas com a injeção de potência líquida, ou seja, geração menos consumo.

Nesse trabalho utilizamos coordenadas cartesianas para representar a tensão, portanto

podemos definir as quatro variáveis da seguinte forma:

- e_k : representa a parte real da tensão;
- f_k : representa a parte imaginária da tensão;
- P_k : representa a injeção de potência ativa;
- Q_k : representa a injeção de potência reativa.

Em um problema básico de fluxo de carga, duas dessas quatro variáveis são previamente conhecidas e o objetivo é encontrar o valor das variáveis restantes.

O conjunto de equações do problema de fluxo de carga é formado por até duas equações para cada barra, cada uma delas representando o fato de as potências ativas e reativas injetadas em uma barra serem iguais à soma dos fluxos correspondentes que deixam a barra através de linhas de transmissão, transformadores, etc, (Primeira Lei de Kirchhoff) e pode ser expresso matematicamente como segue:

$$P_{k} = \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} (e_{k}, f_{k}, e_{m}, f_{m}),$$

$$Q_{k} + Q_{k}^{sh} (v_{k}) = \sum_{m \in \Omega_{k}} Q_{km} (e_{k}, f_{k}, e_{m}, f_{m}),$$
(2.1)

onde:

 $k=1,\ldots,|\mathcal{N}|;$

 P_{km} representa o fluxo de potência ativa no ramo k - m;

 Q_{km} representa o fluxo de potência reativa no ramo k - m;

 Q_{km}^{sh} representa o componente da injeção de potência reativa devida ao elemento shunt da barra $k (Q_k^{sh} = b_k^{sh} v_{k'}^2$ sendo b_k^{sh} a susceptância shunt ligada à barra k).

As expressões (2.1) consideram a seguinte convenção de sinais: as injeções de potência são positivas quando entram na barra (geração) e negativas quando saem da barra (carga); os fluxos de potência são positivos quando saem da barra e negativos quando entram; para os elementos *shunt* das barras é adotada a mesma convenção que para as injeções.

O conjunto de inequações que faz parte do problema de fluxo de cargaé formado, entre outras, pelas restrições nas magnitudes de tensão e pelos limites nas injeções de potência reativa nas barras com controle de reativos:

$$\frac{\underline{v}_k}{\underline{Q}_k} \leq v_k \leq v_k, \\ \frac{\underline{Q}_k}{\underline{Q}_k} \leq Q_k \leq \overline{Q}_k.$$

Nesse momento identificamos uma diferença nas formulações em coordenadas polares e cartesianas. Os limites impostos às magnitudes de tensão estão na forma de uma simples canalização de uma variável, ao passo que na forma cartesiana, essa restrição passa a ser uma restrição funcional da seguinte forma:

$$\underline{v_k}^2 \leq e_k^2 + f_k^2 \leq \overline{v_k}^2. \tag{2.2}$$

Essa desvantagem da formulação cartesiana em relação à polar perde importância, devido ao tratamento eficiente de desigualdades proporcionado pelos métodos de pontos interiores (MOMOH; EL-HAWARY; ADAPA, 1999; QUINTANA; TORRES; MEDINA-PALOMO, 2000).

2.2.2 Modelagem

Nesta seção apresentamos os modelos de linha de transmissão e transformadores emfase. Não estamos considerando os transformadores defasadores. Nesse trabalho os valores dos transformadores são fixados de acordo com a leitura inicial dos dados de cada sistema.

2.2.2.1 Linhas de Transmissão

Para estudos do fluxo de carga estamos interessados apenas no comportamento estacionário das linhas, o que simplifica a modelagem.

As linhas de transmissão são representadas por um modelo equivalente π , como apresentado na Figura 1.

O modelo equivalente π de uma linha de transmissão, que reproduz em estado estacionário o comportamento da linha do ponto de vista de suas barras terminais, fornece as relações desejadas entre correntes e tensões e, portanto, potências.

O modelo π é definido por três parâmetros (MONTICELLI, 1983): a resistência série r_{km} ; a



Figura 1: Modelo equivalente π de uma linha de transmissão

reatância série x_{km} ; e a susceptância *shunt* b_{km}^{sh} . A impedância do elemento série é dada por:

$$\dot{z}_{km} := r_{km} + j x_{km},$$
 (2.3)

enquanto a admitância série:

$$\dot{y}_{km} := g_{km} + jb_{km} = \dot{z}_{km}^{-1} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} - j\frac{x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2},$$
(2.4)

ou seja, a condutância série g_{km} e a susceptância série b_{km} são dadas por:

$$g_{km} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2}$$
 e $b_{km} = \frac{-x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2}$ (2.5)

Quando o modelo π representa uma linha de transmissão têm-se r_{km} e x_{km} positivos, o que implica g_{km} positivo e b_{km} negativo, do tipo indutivo. Já o elemento b_{km}^{sh} é positivo, pois o *shunt* é do tipo capacitivo. Nas linhas de transmissão, os condutores são bastante afastados, resultando valores relativamente pequenos de capacitância *shunt*. A corrente \dot{I}_{km} é formada de uma componente série e uma componente *shunt*. A corrente pode ser calculada a partir das tensões fasoriais terminais \dot{V}_k e \dot{V}_m , e dos parâmetros do modelo equivalente π :

$$\dot{I}_{km} = \dot{y}_{km} \left(\dot{V}_k - \dot{V}_m \right) + j b_{km}^{\rm sh} \dot{V}_k, \qquad (2.6)$$

onde por definição:

$$\dot{V}_k := e_k + jf_k \quad \mathbf{e} \quad \dot{V}_m := e_m + jf_m. \tag{2.7}$$

Analogamente, a corrente \dot{I}_{km} é dada por:

$$\dot{I}_{mk} = \dot{y}_{mk} \left(\dot{V}_m - \dot{V}_k \right) + j b_{km}^{\rm sh} \dot{V}_m.$$
(2.8)

2.2.2.2 Transformadores Em-fase

Este modelo pode ser visto como generalização do modelo estudado para linhas de transmissão. A representação geral de transformadores consiste em uma admitância série \dot{y} e um auto-transformador ideal com relação de transformação 1 : *t*, onde *t* é um número real.

Na Figura 2 mostramos o modelo do transformador em-fase, indicando a tensão do nó intermediário *l*. A relação entre as tensões dos nós terminais *k* e *l* é dada por:

$$\frac{\dot{V}_l}{\dot{V}_k} = t_{km}.$$
(2.9)



Figura 2: Modelo equivalente π de um transformador em-fase

2.2.3 Fluxos de Potência Ativa e Reativa

Podemos obter as expressões dos fluxos de potência ativa P_{km} e potência reativa Q_{km} a partir dos modelos apresentados na Seção 2.2.2, conforme mostramos a seguir.

2.2.3.1 Linhas de Transmissão

Sabemos que a corrente \dot{I}_{km} em uma linha de transmissão é dada por (2.6). Substituindo por (2.4) e (2.7) temos:

$$\dot{I}_{km} = \dot{y}_{km} \left(\dot{V}_k - \dot{V}_m \right) + j b_{km}^{\rm sh} \dot{V}_k
= (e_k + j f_k - e_m - j f_m) (g_{km} + j b_{km}) + j b_{km}^{\rm sh} (e_k + j f_k)
= e_k g_{km} + j e_k b_{km} + j f_k g_{km} - f_k b_{km} - e_m g_{km} - j e_m b_{km} - j f_m g_{km} + f_m b_{km}
+ j e_k b_{km}^{\rm sh} - f_k b_{km}^{\rm sh}.$$
(2.10)

O fluxo de potência complexa correspondente é:

$$\dot{S}_{km}^{*} = P_{km} - jQ_{km} = \dot{V}_{k}^{*}\dot{I}_{km} = (e_{k} - jf_{k}) \left[(e_{k} + jf_{k} - e_{m} - jf_{m}) (g_{km} + jb_{km}) + jb_{km}^{sh} (e_{k} + jf_{k}) \right] = e_{k}^{2}g_{km} - e_{k}e_{m}g_{km} + e_{k}f_{m}b_{km} + f_{k}^{2}g_{km} - f_{k}f_{m}g_{km} - e_{m}f_{k}b_{km} - j(-e_{k}^{2}b_{km} + e_{k}e_{m}b_{km} + e_{k}f_{m}g_{km} - f_{k}^{2}b_{km} + f_{k}f_{m}b_{km} - e_{m}f_{k}g_{km} - e_{k}^{2}b_{km}^{sh} - f_{k}^{2}b_{km}^{sh}).$$

$$(2.11)$$

Os fluxos P_{km} e Q_{km} são obtidos identificando-se as partes reais e imaginárias dessa equação, resultando:

$$P_{km} = g_{km} \left(e_k^2 + f_k^2 - e_k e_m - f_k f_m \right) + b_{km} \left(e_k f_m - e_m f_k \right), \qquad (2.12)$$

$$Q_{km} = -b_{km} \left(e_k^2 + f_k^2 - e_k e_m - f_k f_m \right) + g_{km} \left(e_k f_m - e_m f_k \right) - b_{km}^{\rm sh} \left(e_k^2 + f_k^2 \right).$$
(2.13)

Os fluxos P_{mk} e Q_{mk} são obtidos de forma análoga:

$$P_{mk} = g_{km} \left(e_m^2 + f_m^2 - e_m e_k - f_m f_k \right) + b_{km} \left(e_m f_k - e_k f_m \right), \qquad (2.14)$$

$$Q_{mk} = -b_{km} \left(e_m^2 + f_m^2 - e_m e_k - f_m f_k \right) + g_{km} \left(e_m f_k - e_k f_m \right) - b_{km}^{\rm sh} \left(e_m^2 + f_m^2 \right).$$
(2.15)

As perdas de potência ativa e reativa na linha são dadas, respectivamente, por:

$$P_{km} + P_{mk} = g_{km} \left(e_k^2 + f_k^2 + e_m^2 + f_m^2 - 2e_k e_m - 2f_k f_m \right),$$

$$Q_{km} + Q_{mk} = b_{km} \left(-e_k^2 - f_k^2 - e_m^2 - f_m^2 + 2e_k e_m + 2f_k f_m \right)$$

$$-b_{km}^{\text{sh}} \left(e_k^2 + f_k^2 + e_m^2 + f_m^2 \right).$$
(2.16)

Na forma mais simplificada:

$$P_{km} + P_{mk} = g_{km} \left[(e_k - e_m)^2 + (f_k - f_m)^2 \right],$$

$$Q_{km} + Q_{mk} = -b_{km} \left[(e_k - e_m)^2 + (f_k - f_m)^2 \right] - b_{km}^{\rm sh} \left(e_k^2 + f_k^2 + e_m^2 + f_m^2 \right).$$
(2.17)

2.2.3.2 Transformadores Em-fase

De maneira semelhante, podemos deduzir as expressões para o caso do transformador. No modelo apresentado na Seção 2.2.2.2, temos um transformador ideal entre as barras *k* e a barra fictícia *l*. Nesse caso, os fluxos de potência ativa e reativa que entram são iguais aos que saem, ou seja $\dot{S}_{km} = \dot{S}_{lm}$.

Conhecida a relação $\dot{V}_l = t_{km}\dot{V}_k$, dada por (2.9), ignoramos os elementos *shunt* e calculamos os fluxos P_{km} e Q_{km} identificando as partes reais e imaginárias dessa equação complexa:

$$\dot{S}_{km}^{*} = P_{km} - jQ_{km} = t_{km}\dot{V}_{k}^{*}\dot{I}_{km}$$

$$= t_{km}\dot{V}_{k}^{*}\dot{y}_{km}(t_{km}\dot{V}_{k} - \dot{V}_{m})$$

$$= t_{km}(e_{k} - jf_{k})(g_{km} + jb_{km})[t_{km}(e_{k} + jf_{k}) - (e_{m} + jf_{m})]$$

$$= t_{km}^{2}g_{km}(e_{k}^{2} + f_{k}^{2}) - t_{km}g_{km}(e_{k}e_{m} + f_{k}f_{m}) + t_{km}b_{km}(e_{k}f_{m} - e_{m}f_{k})$$

$$- j\left[-t_{km}^{2}b_{km}(e_{k}^{2} + f_{k}^{2}) + t_{km}g_{km}(e_{k}f_{m} - e_{m}f_{k}) + t_{km}b_{km}(e_{k}e_{m} + f_{k}f_{m})\right].$$

$$(2.18)$$

Obtemos então:

$$P_{km} = t_{km}^2 g_{km}(e_k^2 + f_k^2) - t_{km}g_{km}(e_k e_m + f_k f_m) + t_{km}b_{km}(e_k f_m - e_m f_k),$$

$$Q_{km} = -t_{km}^2 b_{km}(e_k^2 + f_k^2) + t_{km}g_{km}(e_k f_m - e_m f_k) + t_{km}b_{km}(e_k e_m + f_k f_m).$$
(2.19)

2.2.3.3 Expressões Gerais dos Fluxos

Podemos generalizar as expressões dos fluxos de potência ativa e reativa da seguinte forma:

$$P_{km} = a_{km}^2 g_{km} (e_k^2 + f_k^2) - a_{km} g_{km} (e_k e_m + f_k f_m) + a_{km} b_{km} (e_k f_m - e_m f_k), \qquad (2.20)$$

$$Q_{km} = -a_{km}^2(b_{km} + b_{km}^{\rm sh})(e_k^2 + f_k^2) + a_{km}g_{km}(e_kf_m - e_mf_k) + a_{km}b_{km}(e_ke_m + f_kf_m).$$
(2.21)

Para linhas de transmissão, utilizamos $a_{km} = 1$, no caso de transformadores em-fase, a_{km}
corresponde a t_{km} e nesse caso $b_{km}^{sh} = 0$.

2.2.4 Formulação Matricial

A injeção líquida de corrente na barra *k* pode ser obtida aplicando-se a Primeira Lei de Kirchhoff para esse modelo:

$$\dot{I}_k + \dot{I}_k^{\rm sh} = \sum_{m \in \Omega_k} \dot{I}_{km} \qquad (k = 1, \dots, |\mathcal{N}|).$$
 (2.22)

A corrente I_{km} numa linha de transmissão e num transformador em-fase é dada, respectivamente, pelas seguintes expressões:

$$\dot{I}_{km} = \left(\dot{y}_{km} + jb_{km}^{\rm sh}\right)\dot{V}_{k} + \left(-\dot{y}_{km}\right)\dot{V}_{m},
\dot{I}_{km} = \left(a_{km}^{2}\dot{y}_{km}\right)\dot{V}_{k} + \left(-a_{km}\dot{y}_{km}\right)\dot{V}_{m}.$$
(2.23)

Podemos expressar a corrente \dot{I}_{km} numa forma geral (MONTICELLI, 1983):

$$\dot{I}_{km} = \left(a_{km}^2 \dot{y}_{km} + jb_{km}^{\rm sh}\right) \dot{V}_k + \left(-a_{km} \dot{y}_{km}\right) \dot{V}_m, \qquad (2.24)$$

utilizando a mesma representação para $a_{km} e b_{km}^{sh}$.

Considerando I_{km} dado em (2.24) a expressão de I_k (2.22) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\dot{I}_{k} = \left[jb_{k}^{\text{sh}} + \sum_{m \in \Omega_{k}} \left(jb_{km}^{\text{sh}} + a_{km}^{2}\dot{y}_{km} \right) \right] \dot{V}_{k} + \sum_{m \in \Omega_{k}} \left(-a_{km}\dot{y}_{km} \right) \dot{V}_{m}.$$
(2.25)

Esta expressão, para k = 1, ..., |N|, pode ser representada na forma matricial:

$$\dot{I} = \dot{Y}\dot{V}, \tag{2.26}$$

onde:

- \dot{I} : representa o vetor das injeções de corrente, cujas componentes são \dot{I}_k ($k = 1, ..., |\mathcal{N}|$);
- \dot{V} : representa o vetor das tensões nodais, cujas componentes são \dot{V}_k ;
- $\hat{Y} = G + jB$ representa a matriz admitância nodal, sendo:

G a matriz condutância e B a matriz susceptância.

Os elementos da matriz \dot{Y} , considerando os valores para linhas de transmissão, são:

$$\dot{Y}_{km} = -a_{km}\dot{y}_{km}, \dot{Y}_{kk} = jb_k^{\rm sh} + \sum_{m\in\Omega_k} \left(jb_{km}^{\rm sh} + a_{km}^2\dot{y}_{km}\right).$$
(2.27)

Em geral, essa matriz é esparsa, pois $\dot{Y}_{km} = 0$ sempre que entre as barras $k \in m$ não existirem linhas.

A injeção de corrente \dot{I}_k , que é a *k*-ésima componente do vetor \dot{I} , pode ser colocada na forma:

$$\dot{I}_{k} = \dot{Y}_{kk} \dot{V}_{k} + \sum_{m \in \Omega_{k}} \dot{Y}_{km} \dot{V}_{m} = \sum_{m \in \mathcal{N}_{k}} \dot{Y}_{km} \dot{V}_{m}.$$
(2.28)

Considerando-se que $\dot{Y}_{km} = G_{km} + jB_{km}$ e $\dot{V}_m = e_m + jf_m$, a expressão (2.28) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\dot{I}_{k} = \sum_{m \in \mathcal{N}_{k}} (G_{km} + jB_{km}) (e_{m} + jf_{m}).$$
(2.29)

A injeção de potência complexa:

$$\dot{S}_{k}^{*} = P_{k} - jQ_{k} = \dot{V}_{k}^{*}\dot{I}_{k}.$$
(2.30)

Substituindo-se (2.29) em (2.30) e considerando-se que $\dot{V}_k^* = e_k - jf_k$, obtém-se:

$$\dot{S}_{k}^{*} = (e_{k} - jf_{k}) \sum_{m \in \mathcal{N}_{k}} (G_{km} + jB_{km}) (e_{m} + jf_{m}).$$
(2.31)

As injeções de potência ativa e reativa podem ser obtidas identificando-se as partes real e imaginária da expressão (2.31):

$$P_{k} = \sum_{k \in \mathcal{N}_{k}} (e_{k}G_{km}e_{m} - e_{k}B_{km}f_{m} + f_{k}G_{km}f_{m} + f_{k}B_{km}e_{m}), \qquad (2.32)$$

$$Q_{k} = \sum_{k \in \mathcal{N}_{k}} (-f_{k}B_{km}f_{m} - e_{k}G_{km}f_{m} - e_{k}B_{km}e_{m} + f_{k}G_{km}e_{m}), \qquad (2.33)$$

generalizando para a forma matricial:

$$P = EGe + FGf + FBe - EBf, \qquad (2.34a)$$

$$Q = FGe - EGf - EBe - FBf, \qquad (2.34b)$$

onde:

- P : representa o vetor de injeções de potência ativa, cujas componentes são P_k ;
- Q : representa o vetor de injeções de potência reativa, cujas componentes são Q_k ;
- *e* : representa o vetor da parte real das tensões, cujas componentes são *e_k*;
- f : representa o vetor da parte imaginária das tensões, cujas componentes são f_k ;
- *E* : representa a matriz diagonal de *e*;
- *F* : representa a matriz diagonal de *f*.

2.3 Problema de Fluxo de Potência Ótimo

O problema de fluxo de potência ótimo consiste em determinar o estado de operação ótimo de um sistema elétrico de geração/transmissão de potência, no qual simultaneamente minimize o valor de uma determinada função objetivo e satisfaça certas restrições físicas e operacionais.

Este é um típico problema de otimização não-linear, onde as equações são dadas pela formulação do fluxo de carga apresentado anteriormente e as inequações representam os limites funcionais, podendo ser matematicamente expresso na forma:

minimizar
$$\phi(x)$$

sujeito a $g(x) = 0,$ (2.35)
 $\underline{h} \le h(x) \le \overline{h},$

onde:	
$x \in \mathbb{R}^n$: um vetor das variáveis explícitas de decisão (variáveis de estado
	e de controle),
$\phi:\mathbb{R}^{n}\mapsto\mathbb{R}$: uma função escalar que representa o objetivo de otimização na
	operação ou planejamento de um sistema de potência,
$g:\mathbb{R}^{n}\mapsto\mathbb{R}^{m_{g}}$: um vetor não-linear que contém equações de fluxo de potência,
$\pmb{h}:\mathbb{R}^{ extsf{n}}\mapsto\mathbb{R}^{ extsf{m}_{h}}$: um vetor não-linear de desigualdades funcionais do sistema de
	potência,
$\underline{h}, \overline{h}$: limites inferior e superior das desigualdades, correspondendo
	aos limites operacionais físicos especificados,

Para o nosso trabalho, os valores dos *tap*'s de transformadores foram pré-fixados. Também serão excluídas das formulações apresentadas nesse trabalho, os limites nos fluxos de potência nas linhas. Na prática é comum resolver problemas desconsiderando esses limites nos fluxos da modelagem, pois as restrições têm utilidade somente para verificar as capacidades das linhas. Essa representação do modelo pode ser facilmente alterada caso não existam muitas linhas carregadas. O desenvolvimento do método é similar para ambos os problemas. Isso não significa que esses limites não serão verificados. Caso algum limite seja violado numa determinada linha, ou em algumas linhas, as equações referentes a essas linhas poderão ser tratadas como restrições de igualdade, incluídas em g(x) e assim fixadas nos limites excedidos superiores ou inferiores.

Separamos as equações do problema (2.35) que representam a parte ativa e reativa em g(x), e as inequações associadas aos limites de injeção de potência ativos e reativos e de magnitude de tensão em h(x):

$$g(x) := \begin{bmatrix} g_p(x) \\ g_q(x) \end{bmatrix}$$

$$h(x) := \begin{bmatrix} h_v(x) \\ h_p(x) \\ h_q(x) \end{bmatrix} \qquad \underline{h} := \begin{bmatrix} \underline{h}_v \\ \underline{h}_p \\ \underline{h}_q \end{bmatrix} \qquad \overline{h} := \begin{bmatrix} \overline{h}_v \\ \overline{h}_p \\ \underline{h}_q \end{bmatrix},$$

sendo que $g_p : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{m_{g_p}}, g_q : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{m_{g_q}}, h_v : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{m_{h_v}}, h_p : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{m_{h_p}} \in h_q : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{m_{h_q}}.$

Após as separações realizadas acima, reescrevemos o problema (2.35):

min
$$\phi(\mathbf{x})$$

s. a
$$\begin{cases}
g_p(\mathbf{x}) = 0, \\
g_q(\mathbf{x}) = 0, \\
\underline{h}_v \leq h_v(\mathbf{x}) \leq \overline{h}_v, \\
\underline{h}_p \leq h_p(\mathbf{x}) \leq \overline{h}_p, \\
\underline{h}_q \leq h_q(\mathbf{x}) \leq \overline{h}_q.
\end{cases}$$
(2.36)

Declaremos então as funções para o problema de fluxo de potência ótimo:

$$g_{p}(x) := P(x) + P_{C} - P_{G},$$

$$g_{q}(x) := Q(x) + Q_{C} - Q_{G},$$

$$h_{v}(x) := V(x),$$

$$h_{p}(x) := P(x),$$

$$h_{q}(x) := Q(x),$$

$$\underline{h}_{v} := \underline{v}^{2}, \qquad \overline{h}_{v} := \overline{v}^{2},$$

$$\underline{h}_{p} := \underline{P}, \qquad \overline{h}_{p} := \overline{P},$$

$$\underline{h}_{q} := Q, \qquad \overline{h}_{q} := \overline{Q}.$$
(2.37)

As seguintes definições dos conjuntos de índices serão necessárias para a apresentação dos problemas e implementação:

- *C* : conjunto das barras de carga,
- \mathcal{G} : conjunto das barras geradoras de potência ativa,
- \mathcal{R} : conjunto das barras com controle de potência reativa,
- I_e : conjunto das barras com o componente real da tensão *e* variável,
- I_f : conjunto das barras com o componente imaginário da tensão f variável,
- I_{g_v} : conjunto das barras pertencentes às equações de balanço de potência ativa,
- I_{g_a} : conjunto das barras pertencentes às equações de balanço de potência reativa,
- I_{h_v} : conjunto das barras com limitantes de magnitude de tensão,
- I_{h_v} : conjunto das barras com limitantes de injeção de potência ativa,
- I_{h_a} : conjunto das barras com limitantes de injeção de potência reativa.

Obtendo então a seguinte representação de um problema de fluxo de potência ótimo:

$$\min \phi(\mathbf{x})$$
s. a
$$\begin{cases}
P_k(\mathbf{x}) + P_{C_k} - P_{G_k} = 0, & \forall k \in I_{g_p}, \\
Q_k(\mathbf{x}) + Q_{C_k} - Q_{G_k} = 0, & \forall k \in I_{g_q}, \\
\frac{v_k^2}{2} \leq V_k(\mathbf{x}) \leq \overline{v}_k^2, & \forall k \in I_{h_v}, \\
\frac{P_k}{2} \leq P_k(\mathbf{x}) \leq \overline{P}_k, & \forall k \in I_{h_p}, \\
\frac{Q_k}{2} \leq Q_k(\mathbf{x}) \leq \overline{Q}_k, & \forall k \in I_{h_q}.
\end{cases}$$
(2.38)

Sem perda de generalidade, assumimos o último índice de N para a barra que fornece a referência angular para o sistema, com $f_{|N|} := 0$. Seja a variável x:

$$\boldsymbol{x} := \left[\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{I}_{e}}, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{I}_{f}} \right]^{t}, \tag{2.39}$$

sendo:

P_k :injeção de potência ativa calculada na barra k , Q_k :injeção de potência reativa calculada na barra k , P_{Ck} :carga de potência ativa na barra k , Q_{Ck} :carga de potência reativa na barra k , P_{Gk} :geração de potência ativa na barra k , Q_{Gk} :geração de potência reativa na barra k , Q_{k}, \overline{v}_{k} :limites de magnitude de tensão na barra k , $\underline{P}_k, \overline{P}_k$:limites de injeção de potência ativa na barra k , $\underline{Q}_k, \overline{Q}_k$:limites de injeção de potência ativa na barra k ,	V_k	:	quadrado da magnitude de tensão na barra k,
Q_k :injeção de potência reativa calculada na barra k , P_{Ck} :carga de potência ativa na barra k , Q_{Ck} :carga de potência reativa na barra k , P_{Gk} :geração de potência ativa na barra k , Q_{Gk} :geração de potência reativa na barra k , Q_{k}, \overline{v}_k :limites de magnitude de tensão na barra k , $\underline{P}_k, \overline{P}_k$:limites de injeção de potência ativa na barra k , $\underline{Q}_k, \overline{Q}_k$:limites de injeção de potência ativa na barra k ,	P_k	:	injeção de potência ativa calculada na barra k,
P_{Ck} :carga de potência ativa na barra k , Q_{Ck} :carga de potência reativa na barra k , P_{Gk} :geração de potência ativa na barra k , Q_{Gk} :geração de potência reativa na barra k , $\underline{v}_k, \overline{v}_k$:limites de magnitude de tensão na barra k , $\underline{P}_k, \overline{P}_k$:limites de injeção de potência ativa na barra k , $\underline{Q}_k, \overline{Q}_k$:limites de injeção de potência reativa na barra k ,	Q_k	:	injeção de potência reativa calculada na barra k,
Q_{Ck} :carga de potência reativa na barra k , P_{Gk} :geração de potência ativa na barra k , Q_{Gk} :geração de potência reativa na barra k , $\underline{v}_k, \overline{v}_k$:limites de magnitude de tensão na barra k , $\underline{P}_k, \overline{P}_k$:limites de injeção de potência ativa na barra k , $\underline{Q}_{k'}, \overline{Q}_k$:limites de injeção de potência ativa na barra k .	P_{Ck}	:	carga de potência ativa na barra k,
P_{Gk} :geração de potência ativa na barra k , Q_{Gk} :geração de potência reativa na barra k , $\underline{v}_k, \overline{v}_k$:limites de magnitude de tensão na barra k , $\underline{P}_k, \overline{P}_k$:limites de injeção de potência ativa na barra k , $\underline{Q}_{k'}, \overline{Q}_k$:limites de injeção de potência reativa na barra k .	Q_{C_k}	:	carga de potência reativa na barra k,
Q_{G_k} :geração de potência reativa na barra k , $\underline{v}_k, \overline{v}_k$:limites de magnitude de tensão na barra k , $\underline{P}_k, \overline{P}_k$:limites de injeção de potência ativa na barra k , $\underline{Q}_k, \overline{Q}_k$:limites de injeção de potência reativa na barra k .	P_{Gk}	:	geração de potência ativa na barra <i>k,</i>
$\underline{v}_k, \overline{v}_k$:limites de magnitude de tensão na barra k , $\underline{P}_k, \overline{P}_k$:limites de injeção de potência ativa na barra k , $\underline{Q}_k, \overline{Q}_k$:limites de injeção de potência reativa na barra k .	Q_{G_k}	:	geração de potência reativa na barra k,
$\underline{P}_k, \overline{P}_k$: limites de injeção de potência ativa na barra k , $\underline{Q}_k, \overline{Q}_k$: limites de injeção de potência reativa na barra k .	$\underline{v}_k, \overline{v}_k$:	limites de magnitude de tensão na barra k,
$\underline{Q}_{k'}\overline{Q}_{k}$: limites de injeção de potência reativa na barra k .	$\underline{P}_{k'}, \overline{P}_{k}$:	limites de injeção de potência ativa na barra k,
	$\underline{Q}_{k'}\overline{Q}_k$:	limites de injeção de potência reativa na barra <i>k</i> .

Podemos a partir dessa formulação definir casos particulares do problema de fluxo de potência ótimo. Apresentamos a seguir dois desses casos e a função objetivo $\phi(x)$ é definida na Seção 2.3.3.

2.3.1 Fluxo de Potência Ótimo Reativo

Esse é um problema de despacho de potência reativa. A partir de (2.38) podemos formular o problema de fluxo de potência ótimo reativo (FPOR), onde consideramos que o

despacho econômico já foi realizado e com isso as injeções de potência ativa são conhecidas e estão especificadas (P_G^{esp}) nas barras de geração, exceto na barra de referência. Sendo assim, representamos o problema matematicamente da forma:

$$\min \phi(\mathbf{x})$$
s. a
$$\begin{cases}
P_k(\mathbf{x}) + P_{C_k} - P_{G_k}^{esp} = 0, & \forall k \in I_{g_p}, \\
Q_k(\mathbf{x}) + Q_{C_k} - Q_{G_k} = 0, & \forall k \in I_{g_q}, \\
\frac{v_k^2}{2} \leq V_k(\mathbf{x}) \leq \overline{v}_k^2, & \forall k \in I_{h_v}, \\
\frac{Q_k}{2} \leq Q_k(\mathbf{x}) \leq \overline{Q}_{k'}, & \forall k \in I_{h_q}.
\end{cases}$$
(2.40)

Nesse caso somente a parte reativa será ajustada de acordo com o objetivo. Necessitamos também definir os conjuntos de índices:

$$I_{g_p} := \tilde{\mathcal{N}}, \qquad I_{h_v} := \mathcal{N}, I_{g_a} := C, \qquad I_{h_a} := \mathcal{R}.$$

$$(2.41)$$

Para esse problema, não necessitamos impor limites para a injeção de potência ativa, portanto definimos o conjunto I_{h_v} como vazio.

2.3.2 Fluxo de Potência Ótimo Ativo-Reativo

Podemos também especificar o problema descrito em (2.38) como um problema de fluxo de potência ótimo ativo-reativo (FPOAR), onde os valores para as injeções de potência ativa não foram definidos e serão estabelecidos juntamente com a parte reativa. Representamos matematicamente esse problema da seguinte forma:

$$\min \phi(\mathbf{x})$$
s. a
$$\begin{cases}
P_k(\mathbf{x}) + P_{Ck} = 0, \quad \forall k \in I_{g_p}, \\
Q_k(\mathbf{x}) + Q_{Ck} - Q_{Gk} = 0, \quad \forall k \in I_{g_q}, \\
\frac{v_k^2}{2} \leq V_k(\mathbf{x}) \leq \overline{v}_k^2, \quad \forall k \in I_{h_v}, \\
\frac{P_k}{2} \leq P_k(\mathbf{x}) \leq \overline{P}_k, \quad \forall k \in I_{h_p}, \\
\frac{Q_k}{2} \leq Q_k(\mathbf{x}) \leq \overline{Q}_k, \quad \forall k \in I_{h_q}.
\end{cases}$$
(2.42)

Assim como no problema anterior, definimos os conjuntos de índices, notando que agora é necessário que se tenha limitantes também sobre a injeção de potência ativa nas barra de geração:

$$I_{g_p} := C, \qquad I_{h_v} := N,$$

 $I_{g_q} := C, \qquad I_{h_p} := G,$
 $I_{h_a} := R.$
(2.43)

2.3.3 Função Objetivo

A função objetivo representa critérios de desempenho da operação dos sistemas elétricos tais como custo de geração, perdas ativas nas linhas de transmissão, desvios de tensão a partir de um valor pré-estabelecido, ou uma combinação desses critérios, entre outras.

Podemos definir várias funções que avaliam esse desempenho. As funções definidas aqui nessa seção podem ser utilizadas para ambos os casos particulares do problema de fluxo de potência ótimo. Utilizamos nesse trabalho três funções para avaliar a solução encontrada pelo método, que são:

- ϕ_0 : referente à diferença entre a injeção de potência ativa calculada e desejada,
- ϕ_1 : referente à injeção de potência ativa na barra de referência,
- ϕ_2 : referente às perdas de potência ativa nas linhas.

A utilização da função objetivo ϕ_0 só faz sentido para o problema FPOAR, pois a geração de potência ativa não é fixada. O método tem liberdade para encontrar a geração de potência ativa dentro dos limites estabelecidos, de forma que o desvio em relação à potência especificada seja mínimo.

A minimização das perdas na geração pode ser utilizada como critério de otimização. Estas perdas podem ser modeladas como uma função quadrática separável tanto para geradores térmicos representando os custos, como hidrelétricos representando as perdas (SOA-RES; SALMAZO, 1997). Para isso, utilizamos a função ϕ_0 e definimos os valores de geração de potência ativa desejados em zero.

Na literatura é comum a utilização somente de uma função referente às perdas de potência ativa. As funções $\phi_1 e \phi_2$ são semelhantes do ponto de vista elétrico, pois as perdas de potência ativa são absorvidas pela barra de referência nas equações de fluxo de carga. A função referente às perdas de potência ativa nas linhas pode dificultar a resolução do problema de fluxo de potência ótimo, por ser não convexa e não separável. A utilização

dessas duas funções tem o objetivo de demonstrar a facilidade de utilização no método desenvolvido nesse trabalho e também ser mais uma opção, no caso de não convergência utilizando-se uma delas.

A complexidade de implementação de outras funções objetivo, depende exclusivamente do tipo de cada função a ser considerada. O método foi desenvolvido de forma que os componentes relacionados às funções objetivo pudessem ser inseridos independentemente da dedução das outras equações. Nesse trabalho estudamos a estrutura e as características das matrizes envolvidas para as funções ϕ_0 , ϕ_1 e ϕ_2 .

2.4 Representação das Equações

Utilizamos duas representações para as funções de fluxo de potência ótimo definidas em (2.37) e as funções objetivo definidas na Seção 2.3.3. À primeira representação chamaremos de clássica (R-CLASS), onde calculamos cada componente do vetor de funções. A segunda representação denominaremos por matricial (R-MAT), em que as funções são calculadas através de operações matriciais.

As atuais ferramentas e bibliotecas computacionais, disponíveis para o desenvolvimento de métodos, estão preparadas para tratar e operar matrizes de forma eficiente. A principal vantagem dessas ferramentas é a utilização de técnicas que armazenam e operam matrizes esparsas de forma inteligente. Determinar um vetor de funções através de algumas operações matriciais envolve menos custo computacional se comparado ao custo do cálculo de cada componente individualmente.

O aproveitamento desses recursos computacionais nos impulsiona a considerar e utilizar essa representação no desenvolvimento do método. A utilização da formulação matricial é de fundamental importância na implementação diferenciada desenvolvida nesse trabalho.

2.4.1 Representação Clássica (R-CLASS)

Na literatura especializada, as equações de fluxo de carga são geralmente, em sua maioria, apresentadas para cada barra k conforme apresentado na Seção 2.2.1. Nessa representação clássica, as injeções de potência ativa $P_k(x)$ e reativa $Q_k(x)$, para uma barra k, são calculadas da seguinte forma:

$$P_{k}(\mathbf{x}) := \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km}(\mathbf{x}), \qquad \forall k \in I_{g_{p}},$$

$$Q_{k}(\mathbf{x}) := \sum_{m \in \Omega_{k}} Q_{km}(\mathbf{x}), \qquad \forall k \in I_{g_{q}},$$
(2.44)

onde $P_{km}(x)$ e $Q_{km}(x)$ representam os fluxos de potência ativa e reativa nos ramos, da barra origem k para a barra destino m e são calculadas respectivamente em (2.20) e (2.21).

O quadrado da magnitude de tensão na barra k, definido em (2.2), é calculado da forma:

$$V_k(\mathbf{x}) := e_k^2 + f_k^2, \qquad \forall k \in I_{h_v}.$$
(2.45)

E por fim definimos as funções objetivo utilizando essa mesma representação:

$$\phi_0(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{2} \sum_k \lambda_k \cdot \left(\sum_{m \in \Omega_k} P_{km} - P_k^{\text{esp}} \right)^2, \quad \forall k \in \mathcal{G},$$
(2.46)

$$\phi_1(\mathbf{x}) := \sum_{m \in \Omega_k} P_{km}, \qquad k = |\mathcal{N}|, \qquad (2.47)$$

$$\phi_2(\mathbf{x}) := \sum_{m \in \Omega_k} (P_{km} + P_{mk}), \qquad \forall k \in \mathcal{N}.$$
(2.48)

sendo $\lambda \in \mathbb{R}^{|\mathcal{G}|}$ o peso relacionado com a geração na barra k, P_k^{esp} é a injeção líquida de potência ativa especificada. Na função $\phi_2(x)$, $P_{mk}(x)$ é definido analogamente a $P_{km}(x)$.

2.4.2 Representação Matricial (R-MAT)

Na Seção 2.2.4 é desenvolvida uma formulação envolvendo operações com matrizes para os cálculos das injeções de potência ativa e reativa. Essa representação é de extrema importância para o estudo da estrutura matricial resultante do desenvolvimento do método.

Sendo assim, para determinar os valores das funções, utilizaremos como referência as equações (2.34):

$$P(x) := EGe + FGf + FBe - EBf, \qquad (I_{g_p}),$$

$$Q(x) := FGe - EGf - EBe - FBf, \qquad (I_{g_n}),$$

onde utilizamos I_{g_p} e I_{g_q} para representar os índices de tal forma que os vetores P(x) e Q(x) sejam formados somente por elementos relacionados a esses conjuntos respectivamente.

Utilizaremos essa notação nesse trabalho quando estivermos representando as equações na forma matricial.

Podemos utilizar o mesmo raciocínio para calcular a restrição de magnitude de tensão:

$$V(x) := Ee + Ff,$$
 $(I_{h_{v}}).$ (2.49)

E conseqüentemente, as funções objetivo podem ser declaradas assim:

$$\begin{split} \phi_0(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2} \left[P(\mathbf{x}) - P^{\text{esp}} \right]^t \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \left[P(\mathbf{x}) - P^{\text{esp}} \right], \qquad (I_{g_p}), \\ \phi_1(\mathbf{x}) &:= EGe + FGf + FBe - EBf, \qquad (|\mathcal{N}|), \\ \phi_2(\mathbf{x}) &:= e^t Ge + f^t Gf, \qquad (\mathcal{N}), \end{split}$$

$$(2.50)$$

onde Λ é a matriz cuja diagonal é formada pelo vetor λ dos pesos associados à geração.

Quando utilizamos operações matriciais para calcular funções obtemos P(x), Q(x) e V(x) com dimensão $|\mathcal{N}|$, ou seja, estão definidas para todas as barras. Na representação matricial utilizamos os conjuntos de índices para identificar e separar quais são as barras que fazem parte de cada função específica.

A utilização de conjuntos de índices facilita a implementação do método e permite selecionar quais funções serão selecionadas para pertencer as restrições de fluxo de carga, quais são as variáveis do problema, quais valores são fixos e também definir quais funções são limitadas.

2.5 Considerações Finais

Nesse capítulo apresentamos o problema de fluxo de carga, modelamos e definimos as equações que são utilizadas no problema de fluxo de potência ótimo. Formulamos dois problemas de fluxo de potência ótimo, o FPOR e o FPOAR.

O primeiro, FPOR, é um problema de despacho de potência reativa, onde a geração de potência ativa é pré-determinada pela solução de um problema de despacho econômico ou por um problema de fluxo de carga. Geralmente, utiliza-se também como valores iniciais, as variáveis relacionadas com a tensão. Dessa forma podemos garantir um bom ponto inicial para o método.

O FPOAR é um problema de despacho econômico associado ao FPOR, de solução complexa devido à natureza dos problemas ativo e reativo serem diferentes e pela sensibilidade em relação ao ponto inicial e aos parâmetros utilizados pelo método.

Com o objetivo de utilizar uma única formulação para o desenvolvimento do método e conseqüentemente para a implementação, representamos ambos os problemas FPOR e FPOAR reescrevendo $g_v(x)$ como:

$$g_p(x) := P(x) + P_{\rm C} - c \cdot A_{\rm G},$$

obtendo a seguinte formulação:

$$\min \phi(\mathbf{x})$$
s. a
$$\begin{cases}
P_k(\mathbf{x}) + P_{Ck} - c_k \cdot A_{Gk} = 0, & \forall k \in I_{g_p}, \\
Q_k(\mathbf{x}) + Q_{Ck} - Q_{Gk} = 0, & \forall k \in I_{g_q}, \\
\underline{v}_k^2 \leq V_k(\mathbf{x}) \leq \overline{v}_k^2, & \forall k \in I_{h_v}, \\
\underline{P}_k \leq P_k(\mathbf{x}) \leq \overline{P}_k, & \forall k \in I_{h_p}, \\
\underline{Q}_k \leq Q_k(\mathbf{x}) \leq \overline{Q}_k, & \forall k \in I_{h_q}.
\end{cases}$$
(2.51)

Nessa formulação os vetores $c \in A_G$ representam ambas as possibilidades na modelagem. A atribuição de valores para esses vetores depende do tipo de problema. Para o problema FPOR, a geração de potência ativa é especificada:

$$\begin{array}{lll} A_{\mathrm{G}k} & := & P_{\mathrm{G}_{k}}^{\mathrm{esp}}, & & \forall k \in \mathcal{G}, \\ c_{k} & := & 1, & & \forall k \in \mathcal{G}. \end{array}$$

Para o problema FPOAR, essa geração não é conhecida, dessa forma utilizamos:

$$\begin{array}{lll} A_{\mathrm{G}k} & := & 0, & & \forall k \in \mathcal{G}, \\ c_k & := & 1, & & \forall k \in \mathcal{G}. \end{array}$$

A utilização desses vetores é fundamental para a especificação do problema e também para a utilização de uma heurística de inicialização do método, que é proposta nesse trabalho na Seção 4.1.3.

3 Métodos de Pontos Interiores para Programação Não Linear

Desde 1984, pesquisas sobre métodos de pontos interiores passaram por grande expansão, ambos em teoria e prática computacional. Derivações de métodos de pontos interiores estão sendo estendidas para resolver todas as classes de problema de otimização, desde linear até não-linear e de convexos até não-convexos, sendo o último sem garantia com relação a sua convergência. Da mesma forma, os métodos de pontos interiores estão também sendo aplicados para resolver todos os tipos de problemas práticos. Sistemas de potência é uma dessas áreas onde eles estão sendo aplicados extensivamente. Devido ao tamanho e características especiais desses problemas, os métodos de pontos interiores têm-se mostrado uma alternativa viável especialmente para os problemas não-lineares (GRANVILLE, 1994; IRISARRI et al., 1997; TORRES; QUINTANA, 1998; WU; DEBS; MASTERN, 1994).

Frisch (1955) foi quem primeiro considerou os métodos de pontos interiores, em um manuscrito não publicado. Posteriormente, Fiacco e McCormick (1968) desenvolveram a aproximação função barreira logarítmica para resolver problemas com restrições de desigualdade. No entanto, foi na área de programação linear que a excelente eficiência computacional dos métodos de pontos interiores foi primeiramente comentada por Karmarkar (1984), inicialmente com pouca aceitação e relutância. Ele mencionou soluções 50 vezes mais rápidas comparadas com o método simplex. O reconhecimento pela comunidade científica veio com os resultados computacionais em (ADLER et al., 1989). Desde então, muitas variações de métodos de pontos interiores foram propostos e implementados.

Esses métodos são geralmente classificados em três categorias principais:

Métodos de projeção;

- Métodos afim-escala;
- Métodos primal-dual.

Métodos de projeção, dentre os quais está o método original proposto por Karmarkar (1984), são responsáveis pelo grande interesse existente nas pesquisas de métodos de pontos interiores. Logo após 1984, métodos afim-escala foram obtidos como simplificações dos métodos de projeção, embora Dikin já tivesse publicado esse método (DIKIN, 1967). Eles não compartilhavam da ótima qualidade teórica dos métodos de projeção, mas a redução em termos de complexidade e simplicidade computacional fizeram com que eles se tornassem muito populares na época. Os métodos afim-escala estavam também entre os mais efetivos computacionalmente. Os métodos primais-duais surgiram como os mais importantes e eficientes métodos de pontos interiores, e podem ser subdivididos em duas classes principais:

- Métodos seguidores de caminho;
- Métodos de redução potencial.

Os primeiros resultados teóricos para os métodos seguidores de caminho são atribuídos a Megiddo (1988), que propôs aplicar o método barreira logarítmica para os problemas de programação linear primal e dual simultaneamente. Esse método provou ter melhor desempenho dos métodos de pontos interiores anteriores. Desde então, as propriedades dos métodos primais-duais para programação linear têm sido estudadas por pesquisadores (WRIGHT, 1996).

Granville (1994) propôs a implementação do método primal-dual barreira logarítmica para o problema de despacho reativo, um método de pontos interiores que consiste em encontrar o ponto ótimo satisfazendo as restrições canalizadas durante o processo iterativo. Ele utiliza multiplicadores de Lagrange¹ para as restrições de igualdade e transforma as desigualdades em equações de igualdade, através do uso de variáveis de folga. Estas variáveis são incorporadas à função objetivo através da função barreira logarítmica e do

¹Joseph-Louis Lagrange, nasceu em 25 de janeiro de 1736 em Turim, Itália e morreu em 10 abril de 1813 em Paris, França. Foi um dos mais notáveis matemáticos do século XVIII. Em 1788, Lagrange publicou "*Mécanique Analytique*", que continha todo o trabalho e investigações feitas no campo da mecânica desde Newton, e que se tornou notável pelo uso que fazia da teoria das equações diferenciais. Com esta obra, Lagrange conseguiu transformar a mecânica num ramo da análise matemática.

parâmetro de barreira, que tende a zero com o aumento do número de iterações. Este método apresenta muita sensibilidade quanto à escolha do parâmetro de barreira, podendo divergir em alguns casos. A solução é encontrada quando todas as restrições do problema original estão satisfeitas.

Wu, Debs e Mastern (1994) apresentam o problema de fluxo de potência ótimo baseado nas condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) e propõem para sua solução, resolver o sistema de equações não-lineares resultantes das condições de KKT, duas formulações baseadas no método de Newton de pontos interiores primal-dual: o método de pontos interiores primaldual puro e a variante preditor-corretor do método de pontos interiores primal-dual. Os aspectos referentes à implementação dos dois métodos são cuidadosamente discutidos, sendo o principal deles o ajuste do parâmetro de barreira, que foi baseado nos teoremas de Fiacco e McCormick (1968), fazendo com que esse parâmetro tenda a zero a medida que se aproxima de uma solução. O maior esforço computacional do método consiste em resolver um sistema simétrico de equações cuja estrutura esparsa é fixa.

Torres e Quintana (1998) propuseram a resolução do problema de fluxo de potência ótimo pelos métodos de pontos interiores, utilizando coordenadas cartesianas para representar a tensão. A técnica proposta obteve um bom desempenho computacional. Utilizou-se basicamente o mesmo conjunto de restrições que em (GRANVILLE, 1994), mas com o objetivo de minimizar as perdas de transmissão. A geração ativa é especificada neste modelo.

Wei et al. (1998) apresentam uma abordagem teórica do método de pontos interiores aplicada à solução de problemas não-lineares perturbados devido o uso da técnica de barreira, levando em consideração aspectos referentes às restrições funcionais de desigualdade e às variáveis de folga e excesso envolvidas. Na proposta de atualização do parâmetro de barreira usando o *gap* de dualidade, os autores definem um parâmetro de centralização entre zero e um, que multiplicado pelo *gap* de dualidade permite uma melhor convergência do método. O conceito do parâmetro de centralização permite que o método, baseado nas condições de KKT do problema primal perturbado, seja estendido tanto para os problemas de fluxo de potência ótimo como para o fluxo de potência tradicional. Uma nova estrutura de dados é proposta para o modelo com coordenadas cartesianas. Esta estrutura consiste no reordenamento das linhas da matriz hessiana para preservar a esparsidade da matriz durante a resolução dos sistemas lineares, necessários para solução tanto dos problemas de

fluxo de carga tradicional como de fluxo de potência ótimo.

Atualmente, métodos primais-duais que incorporam passos preditores e corretores, como a técnica preditor-corretor de Mehrotra (1992), são aceitos como a variante de pontos interiores mais eficaz computacionalmente.

Em relação ao método simplex, uma das desvantagens dos métodos de pontos interiores foi a dificuldade em detectar-se infactibilidades. Felizmente, modelos homogêneos e *self-dual* para programação linear são capazes de detectar infactibilidades (WRIGHT, 1996), enquanto sua complexidade computacional é muito similar à complexidade do mais eficiente dos métodos primal-dual. Vários pacotes de otimização possuem este método como uma opção.

Embora os métodos de pontos interiores tenham sido originalmente desenvolvidos para resolver problemas de programação linear, ultimamente, o desenvolvimento dos métodos de pontos interiores para programação não-linear tem sido motivado pelo excelente desempenho computacional dos métodos de pontos interiores primal-dual para programação linear. Da mesma forma é feita nesse trabalho, onde descrevemos o desenvolvimento de um método de pontos interiores primal-dual para programação não-linear como uma extensão direta de programação linear, similarmente aos métodos desenvolvidos por Granville (1994), Wu, Debs e Mastern (1994) e Torres (1998). A apresentação dos métodos de pontos interiores para programação linear pode ser encontrada no Apêndice A.

3.1 Desenvolvimento do Método para Otimização Não-Linear

Nesta seção apresentamos o desenvolvimento matemático de um método de pontos interiores primal-dual (veja Método 1) para resolver um problema de otimização não-linear (2.35).

Este método encontra a solução dos problemas primal e dual aplicando variantes do método de Newton às condições de otimalidade, e modificando o tamanho do passo para manter os pontos interiores.

A aplicação do método de Newton às condições de otimalidade leva a um método de pontos interiores específico para este modelo. As condições de otimalidade podem ser ob-

tidas através da função lagrangiana do problema, onde as restrições de desigualdade são representadas por funções de barreira logarítmica das variáveis de folga. A abordagem função barreira logarítmica é atribuída a Frisch (1955), e foi desenvolvida como uma ferramenta para programação não-linear por Fiacco e McCormick (1968).

Especificaremos as funções, que estão envolvidas nesse desenvolvimento, de acordo com cada representação utilizada, R-CLASS ou R-MAT.

O modelo adotado pode então ser escrito acrescentando as variáveis de folga para os limites inferiores e superiores, para transformar as desigualdades em igualdades, o problema (2.35):

min
$$\phi(x)$$

s. a
$$\begin{cases}
g(x) = 0, \\
-s_1 - s_2 + \overline{h} - \underline{h} = 0, \\
-h(x) - s_2 + \overline{h} = 0, \\
(s_1, s_2) \ge 0.
\end{cases}$$
(3.1)

No problema (3.1), as restrições de desigualdade são as condições de não-negatividade. Para tratar dessas restrições nos métodos de pontos interiores, podemos utilizar funções de barreira logarítmica (LUENBERGER, 1984; WRIGHT, 1996) que são incorporadas à função objetivo:

min
$$\phi(\mathbf{x}) - \mu^{\kappa} \sum_{i=1}^{m_{h}} (\ln s_{1_{i}} + \ln s_{2_{i}})$$

s. a
$$\begin{cases}
g(\mathbf{x}) = 0, \\
-s_{1} - s_{2} + \overline{h} - \underline{h} = 0, \\
-h(\mathbf{x}) - s_{2} + \overline{h} = 0, \\
(s_{1}, s_{2}) > 0,
\end{cases}$$
(3.2)

onde $\mu^{\kappa} > 0$ é o parâmetro de barreira que é monotonicamente decrescente e converge para zero durante o progresso das iterações. A seqüência de parâmetros $\{\mu^{\kappa}\}_{\kappa=0}^{\infty}$ gera uma seqüência de subproblemas dados por (3.2), sendo κ o índice do subproblema e, sob suposições de regularidade (FIACCO; MCCORMICK, 1968), como $\mu^{\kappa} \downarrow 0$ a seqüência $\{x(\mu^{\kappa})\}_{\kappa=0}^{\infty}$ de soluções de (3.2) aproxima-se de x^* , um mínimo local de (3.1) (TORRES; QUINTANA, 1998). O caminho definido por $\{x(\mu^{\kappa})\}$ é conhecido como trajetória de barreira.

As condições de positividade estritas das variáveis de folga (s_2, s_1) são implicitamente consideradas, conseqüência da definição dos termos logarítmicos.

As condições necessárias de otimalidade das restrições de igualdade do problema (3.2) podem ser derivadas da função lagrangiana $\mathcal{L}(w; \mu^{\kappa})$, que é dada por (LUENBERGER, 1984):

$$\mathcal{L}(w; \mu^{\kappa}) := \phi(x) - \mu^{\kappa} \sum_{i:=1}^{m_{h}} (\ln s_{1_{i}} + \ln s_{2_{i}}) + y^{t} g(x) + z_{1}^{t} (-s_{1} - s_{2} + \overline{h} - \underline{h}) + z_{2}^{t} (-h(x) - s_{2} + \overline{h}),$$
(3.3)

com μ^{κ} pré-definido e fixo, onde y, z_1, z_2 representam os multiplicadores de Lagrange, chamadas também de variáveis duais, e $w := (x, s_1, s_2, y, z_1, z_2)^t$.

Um mínimo local de (3.3) é expresso em termos de um ponto estacionário de $\mathcal{L}(w; \mu^{\kappa})$, tendo que satisfazer as condições necessárias de primeira ordem de KKT (WRIGHT, 1996), $\nabla_w \mathcal{L}(w; \mu^{\kappa}) = 0.$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L} = \nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x})^t \mathbf{y} - \nabla_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x})^t \mathbf{z}_2 + \nabla_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x})^t = 0, \qquad (3.4a)$$

$$\nabla_{s_1} \mathcal{L} = -\mu^{\kappa} S_1^{-1} \mathbf{U} - z_1 = 0, \qquad (3.4b)$$

$$\nabla_{s_2} \mathcal{L} = -\mu^{\kappa} S_2^{-1} U - z_1 - z_2 = 0, \qquad (3.4c)$$

$$\nabla_y \mathcal{L} = \qquad g(x) = 0, \qquad (3.4d)$$

$$\nabla_{z_1} \mathcal{L} = -s_1 - s_2 + \overline{h} - \underline{h} = 0, \qquad (3.4e)$$

$$\nabla_{z_2} \mathcal{L} = -h(x) - s_2 + \overline{h} = 0, \qquad (3.4f)$$

onde u é um vetor de dimensões apropriadas e todos os componentes iguais a 1, $\nabla_x g(x)$ é a jacobiana² de g(x), $\nabla_x h(x)$ é a jacobiana de h(x), $\nabla_x \phi(x)$ é o gradiente de $\phi(x)$, $S_1 := \text{diag}(s_1)$ e $S_2 := \text{diag}(s_2)$ são matrizes diagonais formadas pelos componentes dos vetores s_1 e s_2 respectivamente.

²Carl Gustav Jakob Jacobi, nasceu em 10 de dezembro de 1804 em Potsdam, Prússia (atual Alemanha) e morreu em 18 de fevereiro de 1851 em Berlim. Foi um proeminente matemático. Seu autodidatismo propiciou seu primeiro trabalho notável em funções elípticas. Seus trabalhos abrangem equações diferenciais. Iniciou uma nova era em Álgebra.

Podemos expressar o sistema (3.4) da seguinte forma:

$$\nabla_{w}\mathcal{L}(w;\mu^{\kappa}) = \begin{bmatrix} \nabla_{x}\mathcal{L} \\ \nabla_{s_{1}}\mathcal{L} \\ \nabla_{s_{2}}\mathcal{L} \\ \nabla_{y}\mathcal{L} \\ \nabla_{z_{1}}\mathcal{L} \\ \nabla_{z_{2}}\mathcal{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{x}g(x)^{t}y - \nabla_{x}h(x)^{t}z_{2} + \nabla_{x}\phi(x)^{t} \\ -\mu^{\kappa}S_{1}^{-1}\upsilon - z_{1} \\ -\mu^{\kappa}S_{2}^{-1}\upsilon - z_{1} - z_{2} \\ g(x) \\ -s_{1} - s_{2} + \overline{h} - \underline{h} \\ -h(x) - s_{2} + \overline{h} \end{bmatrix} = 0, \quad (3.5)$$

 $(s_2, s_1) \ge 0 \in (z_1, z_1 + z_2) \ge 0.$

As equações (3.4d–3.4f) e as condições implícitas (s_2 , s_1) correspondem à factibilidade primal. A equação (3.4a) e as condições implícitas (z_1 , $z_1 + z_2$) correspondem à factibilidade dual. As equações (3.4b–3.4c) são denominadas condições de μ -complementaridade, perturbações das condições de complementaridade padrão para (3.1).

Durante o processo iterativo do método, atendemos a factibilidade quando nos aproximamos ou obtemos a otimalidade.

O residual das condições de complementaridade, definido por:

$$\gamma := s_1^{t} z_1 + s_2^{t} (z_1 + z_2), \qquad (3.6)$$

é chamado de *gap* de complementaridade. Se *w* é primal-dual factível, então γ é também chamado de *gap* de dualidade.

3.1.1 Método de Pontos Interiores Primal-Dual

O método resultante é essencialmente um método primal-dual específico para este problema (EL-BAKRY et al., 1996). As iterações do método partem da escolha de um ponto inicial w^0 que satisfaça as condições de positividade. Esse controle é realizado através do cálculo do tamanho do passo na direção de Newton. Em seguida, atualizamos as variáveis e reduzimos μ^{κ} . O método termina quando as infactibilidades primal e dual e as condições de μ -complementaridade forem menores do que tolerâncias pré-estabelecidas.

A inicialização do método, o cálculo do tamanho do passo, a atualização de variáveis, a redução do parâmetro de barreira μ e os testes de convergência são discutidos com detalhes

metodo 1	1	ontoo interiores i interiores i interiores i
Passo 0	:	Inicialização
		Escolha $\mu^0 > 0$, e um ponto inicial w^0 que satisfaça as condições de pontos interiores ($s_1^0 \ s_2^0 \ z_1^0 + z_2^0 > 0$; faca $\kappa \leftarrow 0$;
Passo 1	:	Cálculo da Direção de Newton
		Forme o sistema de Newton (3.11) no ponto w^{κ} e resolva para as dire-
		ções de Newton Δw ;
Passo 2	:	Cálculo da Tamanho do Passo e Atualização das Variáveis
		Calcule o tamanho do passo α^{κ} na direção Δw e atualize as variáveis primais e duais: $w^{\kappa+1} \leftarrow w^{\kappa} + \alpha^{\kappa} \Delta w$;
Passo 3	:	Teste de Convergência e Atualização do Parâmetro de Barreira
		Se o novo ponto $w^{\kappa+1}$ satisfizer o critério de convergência, então fim.
		Senão, calcule o parâmetro de barreira $\mu^{\kappa+1} < \mu^{\kappa}$, faça $\kappa \leftarrow \kappa+1$, e volte
		ao Passo 1.

Método 1 – Pontos Interiores Primal-Dual

no Capítulo 4.

A direção de Newton é calculada através da solução aproximada do sistema de equações não-lineares (3.5), geralmente obtida por uma iteração do método de Newton (TORRES, 1998). Utilizamos os termos de primeira ordem em uma aproximação por série de Taylor desse sistema não-linear, acerca do ponto w^{κ} , para obtermos o seguinte sistema linear:

$$\Delta \boldsymbol{w} = -\left[\nabla_{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}}^{2} \mathcal{L}(\boldsymbol{w};\boldsymbol{\mu}^{\kappa})\right]^{-1} \nabla_{\boldsymbol{w}} \mathcal{L}(\boldsymbol{w};\boldsymbol{\mu}^{\kappa}), \qquad (3.7)$$

onde $\nabla^2_{ww} \mathcal{L}(w; \mu^{\kappa})$ é a jacobiana de $\nabla_w \mathcal{L}(w; \mu^{\kappa})$.

Definimos os resíduos r_i e utilizaremos como referência para obtermos $\nabla^2_{ww} \mathcal{L}(w; \mu^{\kappa})$, derivando-os em relação a w:

$$r_{1} := \nabla_{x}g(x)^{t}y - \nabla_{x}h(x)^{t}z_{2} + \nabla_{x}\phi(x)^{t},$$

$$r_{2} := -\mu^{\kappa}S_{1}^{-1}U - z_{1},$$

$$r_{3} := -\mu^{\kappa}S_{2}^{-1}U - z_{1} - z_{2},$$

$$r_{4} := g(x),$$

$$r_{5} := -s_{1} - s_{2} + \overline{h} - \underline{h},$$

$$r_{6} := -h(x) - s_{2} + \overline{h},$$
(3.8)

$$(r_{1}) \Delta x \rightarrow \nabla_{xx}^{2}g(x)y - \nabla_{xx}^{2}h(x)z_{2} + \nabla_{xx}^{2}\phi(x)$$

$$\Delta y \rightarrow \nabla_{x}g(x)^{t}$$

$$\Delta z_{2} \rightarrow -\nabla_{x}h(x)^{t}$$

$$(r_{2}) \Delta s_{1} \rightarrow -Z_{1}$$

$$\Delta z_{1} \rightarrow -S_{1}$$

$$(r_{3}) \Delta s_{2} \rightarrow -(Z_{1} + Z_{2})$$

$$\Delta z_{1} \rightarrow -S_{2}$$

$$(r_{4}) \Delta x \rightarrow \nabla_{x}g(x)$$

$$\Delta z_{2} \rightarrow -S_{2}$$

$$(r_{5}) \Delta s_{1} \rightarrow -I_{m_{t}}$$

$$\Delta s_{2} \rightarrow -I_{m_{t}}$$

$$(r_{6}) \Delta x \rightarrow -\nabla_{x}h(x)$$

$$\Delta s_{2} \rightarrow -I_{m_{t}}$$

$$(r_{6}) \Delta x \rightarrow -\nabla_{x}h(x)$$

sendo que Z_1 e Z_2 são matrizes cujas diagonais são compostas pelos vetores z_1 e z_2 respectivamente e I_{m_h} é uma matriz identidade de dimensão m_h.

As matrizes simétricas $\nabla_{xx}^2 g(x)$, $\nabla_{xx}^2 h(x) \in \nabla_{xx}^2 \phi(x)$ são hessianas³ das funções de restrições $g(x) \in h(x)$ e da função objetivo $\phi(x)$ respectivamente.

A hessiana $\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(w; \mu^{\kappa})$ pode ser definida como segue:

$$\mathcal{H}_{x} := \nabla_{xx}^{2} \mathcal{L}(w; \mu^{\kappa}) = \nabla_{xx}^{2} g(x) y - \nabla_{xx}^{2} h(x) z_{2} + \nabla_{xx}^{2} \phi(x).$$
(3.10)

Conseqüentemente as equações do sistema linear resultante (3.7) podem ser matematicamente descritas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{x} \Delta x + \nabla_{x} g(x)^{t} \Delta y - \nabla_{x} h(x)^{t} \Delta z_{2} = -r_{1}, \\ -Z_{1} \Delta s_{1} - S_{1} \Delta z_{1} = -r_{2}, \\ -(Z_{1} + Z_{2}) \Delta s_{2} - S_{2} \Delta z_{1} - S_{2} \Delta z_{2} = -r_{3}, \\ \nabla_{x} g(x) \Delta x = -r_{4}, \\ -I_{m_{h}} \Delta s_{1} - I_{m_{h}} \Delta s_{2} = -r_{5}, \\ -\nabla_{x} h(x) \Delta x - I_{m_{h}} \Delta s_{2} = -r_{6}, \end{cases}$$

$$(3.11)$$

³James Joseph Sylvester, nasceu no dia 3 de setembro de 1814 e morreu no dia 15 de março de 1897 em Londres, Inglaterra. Foi o primeiro a usar o termo matriz para indicar uma tabela retangular de números. O termo hessiano foi denominado por Silvester para determinantes funcionais, em homenagem ao matemático alemão Ludwig Otto Hesse. Hesse realizou seu doutorado sob supervisão de Jacobi e foi supervisor de Kirchhoff.

\mathcal{H}_{x}	0	0	$\nabla_{x}g(x)^{t}$	0	$-\nabla_{x}h(x)^{t}$	Δx		r ₁		
0	$-Z_1$	0	0	$-S_1$	0	Δs_1		r ₂		
0	0	$-(Z_1 + Z_2)$	0	$-S_2$	$-S_2$	Δs_2	_	r 3		(2.12)
$\nabla_{x}g(x)$	0	0	0	0	0	Δy		r_4	•	(3.12)
0	$-I_{m_h}$	$-I_{m_h}$	0	0	0	Δz_1		r 5		
$-\nabla_{x}h(x)$	0	$-I_{m_{t}}$	0	0	0	Δz_2		r ₆		

ou representado matricialmente por:

3.1.2 Representações para o Problema de Fluxo de Potência Ótimo

Concluído o desenvolvimento do método apresentado na Seção 3.1.1 e através das representações R-CLASS e R-MAT definidas anteriormente na Seção 2.4, podemos identificar as matrizes resultantes para cada representação das equações que envolvem o problema de fluxo de potência ótimo. As derivadas de primeira e segunda ordem das funções objetivo, em ambas representações, são apresentadas no Apêndice D.

3.1.2.1 Clássica (R-CLASS)

Definidas as equações de injeções de potência em (2.44), podemos reescrever g(x):

$$g_{p}(\mathbf{x}) := \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} + P_{Ck} - c_{k} \cdot A_{Gk}, \qquad \forall k \in I_{g_{p}},$$

$$g_{q}(\mathbf{x}) := \sum_{m \in \Omega_{k}} Q_{km} + Q_{Ck} - Q_{Gk}, \qquad \forall k \in I_{g_{q}}.$$
(3.13)

E juntamente com a equação (2.45), relacionada com os limites de magnitude tensão, obtemos h(x):

$$h_{v}(\mathbf{x}) := e_{k}^{2} + f_{k}^{2}, \qquad \forall k \in I_{h_{v}},$$

$$h_{p}(\mathbf{x}) := \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km}, \qquad \forall k \in I_{h_{p}},$$

$$h_{q}(\mathbf{x}) := \sum_{m \in \Omega_{k}} Q_{km}, \qquad \forall k \in I_{h_{q}}.$$
(3.14)

Para essa representação podemos calcular a hessiana \mathcal{H}_x , definida em (3.10), dessa forma:

$$\mathcal{H}_{x} := \sum_{i=1}^{m_{g}} y_{i} \nabla_{xx}^{2} g_{i}(x) - \sum_{i=1}^{m_{h}} z_{2i} \nabla_{xx}^{2} h_{i}(x) + \nabla_{xx}^{2} \phi(x).$$
(3.15)

E para calcular os componentes da hessiana \mathcal{H}_x , redefinida em (3.15), utilizamos o mesmo procedimento de separar as equações correspondentes à parte ativa e reativa em g(x) e também nas desigualdades envolvendo limites de ativo, reativo e tensão em h(x):

$$\sum_{i=1}^{m_g} y_i \nabla_{xx}^2 g_i(x) = \sum_{i=1}^{m_{gp}} y_{p_i} \nabla_{xx}^2 g_{p_i}(x) + \sum_{i=1}^{m_{gq}} y_{q_i} \nabla_{xx}^2 g_{q_i}(x),$$

$$\sum_{i=1}^{m_h} z_{2i} \nabla_{xx}^2 h_i(x) = \sum_{i=1}^{m_{hv}} z_{2vi} \nabla_{xx}^2 h_{vi}(x) + \sum_{i=1}^{m_{hp}} z_{2p_i} \nabla_{xx}^2 h_{p_i}(x) + \sum_{i=1}^{m_{hq}} z_{2q_i} \nabla_{xx}^2 h_{q_i}(x).$$
(3.16)

A estrutura matricial envolvendo o cálculo da hessiana definida em (3.16) e as derivadas de primeira e segunda ordem correspondentes estão apresentadas no Apêndice C.1.

3.1.2.2 Matricial (R-MAT)

Analogamente, definidas as equações de injeções de potência em (2.4.2), podemos reescrever g(x):

$$g_{p}(x) := P(x) + P_{C} - c \cdot A_{G}, \qquad (I_{g_{p}}), g_{q}(x) := Q(x) + Q_{C} - Q_{G}, \qquad (I_{g_{q}}).$$
(3.17)

E assim, utilizando as equações reescrevemos também h(x):

$$\begin{aligned} h_{v}(x) &:= V(x), & (I_{h_{v}}), \\ h_{p}(x) &:= P(x), & (I_{h_{p}}), \\ h_{q}(x) &:= Q(x), & (I_{h_{q}}). \end{aligned}$$
 (3.18)

Redefinimos os componentes relacionados às funções g(x) e h(x) da hessiana $\mathcal{H}_x em (3.10)$:

$$\nabla_{xx}^{2} g(x) y = \nabla_{xx}^{2} g_{p}(x) y_{p} + \nabla_{xx}^{2} g_{q}(x) y_{q'}$$

$$\nabla_{xx}^{2} h(x) z_{2} = \nabla_{xx}^{2} h_{v}(x) z_{2v} + \nabla_{xx}^{2} h_{p}(x) z_{2p} + \nabla_{xx}^{2} h_{q}(x) z_{2q}.$$
(3.19)

Reescrevemos \mathcal{H}_x da seguinte forma:

$$\mathcal{H}_{x} := \nabla_{xx}^{2} g_{p}(x) y_{p} + \nabla_{xx}^{2} g_{q}(x) y_{q} - \nabla_{xx}^{2} h_{v}(x) z_{2v} - \nabla_{xx}^{2} h_{p}(x) z_{2p} - \nabla_{xx}^{2} h_{q}(x) z_{2q} + \nabla_{xx}^{2} \phi(x).$$
(3.20)

As derivadas de primeira e segunda ordem das funções g(x) e h(x), na forma matricial, estão apresentadas no Apêndice C.2.

3.2 Desenvolvimento Específico com Sistema Aumentado

O desenvolvimento do método com a representação R-MAT foi estudado e alguns aspectos puderam ser melhorados com a utilização de técnicas para que a aplicação do método de Newton às condições de otimalidade nos conduzisse a um método de pontos interiores primal-dual específico para resolução de um problema de fluxo de potência ótimo (3.21), baseado no problema (2.51). Da mesma forma, as condições de otimalidade são obtidas através da função lagrangiana onde as restrições de desigualdade são representadas por funções de barreira logarítmicas das variáveis de folga.

Utilizamos a mesma formulação matricial do problema neste desenvolvimento:

onde $g_p(x)$, $g_q(x)$, $h_v(x)$, $h_p(x) \in h_q(x)$ são definidos em (3.17) e (3.18).

Com o objetivo de obter uma hessiana mais fácil de trabalhar utilizando coordenadas cartesianas, optamos por acrescentar as restrições:

$$egin{array}{rcl} V & := & h_v(x), & & (I_{h_v}), \ P & := & h_p(x), & & (I_{h_p}), \ Q & := & h_q(x), & & (I_{h_q}), \end{array}$$

onde V representa o quadrado da magnitude da tensão, P a injeção de potência ativa nas

barras com limites de geração de ativos e Q a injeção de potência reativa nas barras com limites de geração de reativos.

O problema (3.21) é reescrito matematicamente da forma:

$$\min \quad \phi(\mathbf{x}) \tag{3.22a}$$

s. a
$$g_p(x) = 0$$
, (I_{g_p}) , (3.22b)

$$g_{a}(x) = 0,$$
 (*I*_{g_a}), (3.22c)

$$h_v(x) - V = 0,$$
 (*I*_{*h*_v}), (3.22d)

$$h_p(x) - P = 0,$$
 (*I*_{*h*_p}), (3.22e)

$$h_q(x) - Q = 0,$$
 (*I*_{*h*_q}), (3.22f)
 $v^2 \le h_v(x) \le \overline{v}^2,$ (*I*_{*h*_v}), (3.22g)

$$P < h_n(x) < \overline{P}, \qquad (I_h), \qquad (3.22h)$$

$$Q \le h_q(x) \le \overline{Q}, \qquad (I_{h_q}). \qquad (3.22i)$$

Antes de construir a função lagrangiana, realizamos uma mudança de variáveis de tal forma que todos os limites inferiores das variáveis canalizadas sejam anulados.

Subtraindo os limites inferiores das desigualdades (3.22g-3.22i) obtemos:

$$\begin{array}{rclcrcl} 0 & \leq & V - \underline{v}^2 & \leq & \overline{v}^2 - \underline{v}^2, \\ 0 & \leq & P - \underline{P} & \leq & \overline{P} - \underline{P}, \\ 0 & \leq & Q - Q & \leq & \overline{Q} - Q, \end{array}$$

onde as mudanças de variáveis são definidas por:

de forma a obter às seguintes restrições:

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & s_{2v} & \leq & v_u, \\ 0 & \leq & s_{2p} & \leq & p_{u'}, \\ 0 & \leq & s_{2q} & \leq & q_u. \end{array}$$

Adicionamos as variáveis de folga não-negativas para os limites superiores e temos as

seguintes restrições:

$$\begin{aligned} s_{2v} + s_{1v} - v_u &= 0, & s_{2p} + s_{1p} - p_u &= 0, & s_{2q} + s_{1q} - q_u &= 0, \\ s_{2v} &\ge 0, & s_{2p} &\ge 0, & s_{2q} &\ge 0, \\ s_{1v} &\ge 0, & s_{1p} &\ge 0, & s_{1q} &\ge 0. \end{aligned}$$

As equações (3.22d–3.22f) sofrem alterações devido a essa mudança de variáveis e são reescritas como segue:

$$h_v(x) - s_{2v} - \underline{v}^2 = 0, \tag{3.23}$$

$$h_p(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_{2p} - \underline{P} = 0, \tag{3.24}$$

$$h_q(x) - s_{2q} - Q = 0. (3.25)$$

Sendo assim, as restrições (3.22) do modelo adotado são reescritas da seguinte forma:

min	$\phi(x)$			
s. a	$g_p(x)$	= 0,	(I_{g_p}) ,	
	$g_q(x)$	= 0,	$(I_{g_{q}}),$	
	$h_v(x) - s_{2v} - \underline{v}^2$	= 0,	(\mathcal{I}_{h_v}) ,	
	$h_p(x) - s_{2p} - \underline{P}$	= 0,	$({\mathcal I}_{h_p})$,	(3.26)
	$h_q(x) - s_{2q} - \underline{Q}$	= 0,	(\mathcal{I}_{h_q}) ,	(0.20)
	$s_{2v} + s_{1v} - v_u$	= 0,	(\mathcal{I}_{h_v}) ,	
	$s_{2p} + s_{1p} - p_u$	= 0,	$({\mathcal I}_{h_p})$,	
	$s_{2q} + s_{1q} - q_u$	= 0,	(\mathcal{I}_{h_q}) ,	
	(s_2,s_1)	≥ 0 ,		

onde $s_2^t := (s_{2v}, s_{2p}, s_{2q}) e s_1^t := (s_{1v}, s_{1p}, s_{1q}).$

No problema (3.26), as restrições de desigualdade também são as condições de nãonegatividade. Para tratar dessas restrições utilizamos o mesmo procedimento, incorporamos à função objetivo, funções de barreira logarítmica:

$$\min \quad \phi(x) - \mu^{\kappa} \left[\sum_{i=1}^{m_{h_v}} \ln(s_{2v_i} + s_{1v_i}) + \sum_{i=1}^{m_{h_p}} \ln(s_{2p_i} + s_{1p_i}) + \sum_{i=1}^{m_{h_q}} \ln(s_{2q_i} + s_{1q_i}) \right]$$
s. a $g_p(x) = 0, \quad (I_{g_p}),$
 $g_q(x) = 0, \quad (I_{g_q}),$
 $h_v(x) - s_{2v} - \underline{v}^2 = 0, \quad (I_{h_v}),$
 $h_p(x) - s_{2p} - \underline{P} = 0, \quad (I_{h_p}),$
 $h_q(x) - s_{2q} - \underline{Q} = 0, \quad (I_{h_q}),$
 $s_{2v} + s_{1v} - v_u = 0, \quad (I_{h_v}),$
 $s_{2p} + s_{1p} - p_u = 0, \quad (I_{h_p}),$
 $s_{2q} + s_{1q} - q_u = 0, \quad (I_{h_q}),$
 $(s_2, s_1) > 0.$

A função lagrangiana $\mathcal{L}(w; \mu^{\kappa})$ das restrições de igualdade do problema (3.27) é dada por (LUENBERGER, 1984):

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{w};\boldsymbol{\mu}^{\kappa}) := \phi(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\mu}^{\kappa} \left[\sum_{i:=1}^{m_{h_v}} \ln(s_{2v_i} + s_{1v_i}) + \sum_{i:=1}^{m_{h_p}} \ln(s_{2p_i} + s_{1p_i}) + \sum_{i:=1}^{m_{h_q}} \ln(s_{2q_i} + s_{1q_i}) \right] +$$
(3.28)
$$l^t \mathcal{L}_d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_1),$$

sendo:

$$\mathcal{L}_d(x,s_2,s_1) := egin{bmatrix} g_p(x) \ g_q(x) \ h_v(x) - s_{2v} - ar{v}^2 \ h_p(x) - s_{2p} - ar{P} \ h_q(x) - s_{2q} - ar{Q} \ s_{2v} + s_{1v} - v_u \ s_{2p} + s_{1p} - ar{p}_u \ s_{2q} + s_{1q} - ar{q}_u \end{bmatrix}, \qquad l := egin{bmatrix} y_p \ y_q \ z_{2v} \ z_{2p} \ z_{2p} \ z_{2q} \ z_{1v} \ z_{1p} \ z_{1q} \end{bmatrix},$$

onde *l* são os multiplicadores de Lagrange e $w := (x, s_2, s_1, l)$.

Um mínimo local de (3.27) é expresso em termos de um ponto estacionário de $\mathcal{L}(w; \mu^{\kappa})$, que deve satisfazer as condições necessárias de primeira ordem de KKT $\nabla_w \mathcal{L}(w; \mu^{\kappa}) = 0$, ou seja, $\nabla_l \mathcal{L}(w; \mu^{\kappa}) = \mathcal{L}_d(x, s_2, s_1) = 0$ e:

$$\begin{aligned} \nabla_{e}\mathcal{L}(w;\mu^{\kappa}) &= \nabla_{e}g_{p}(x)^{t}y_{p} + \nabla_{e}g_{q}(x)^{t}y_{q} + \nabla_{e}h_{v}(x)^{t}z_{2v} + \\ \nabla_{e}h_{p}(x)^{t}z_{2p} + \nabla_{e}h_{q}(x)^{t}z_{2q} + \nabla_{e}\phi(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{f}\mathcal{L}(w;\mu^{\kappa}) &= \nabla_{f}g_{p}(x)^{t}y_{p} + \nabla_{f}g_{q}(x)^{t}y_{q} + \nabla_{f}h_{v}(x)^{t}z_{2v} + \\ \nabla_{f}h_{p}(x)^{t}z_{2p} + \nabla_{f}h_{q}(x)^{t}z_{2q} + \nabla_{f}\phi(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{s_{2v}}\mathcal{L}(w;\mu^{\kappa}) &= z_{1v} - z_{2v} - \mu S_{2v}^{-1}U, \\ \nabla_{s_{2p}}\mathcal{L}(w;\mu^{\kappa}) &= z_{1q} - z_{2q} - \mu S_{2v}^{-1}U, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{s_{1v}}\mathcal{L}(w;\mu^{\kappa}) &= z_{1p} - \mu S_{1v}^{-1}U, \\ \nabla_{s_{1v}}\mathcal{L}(w;\mu^{\kappa}) &= z_{1q} - \mu S_{1v}^{-1}U, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{s_{1q}}\mathcal{L}(w;\mu^{\kappa}) &= z_{1q} - \mu S_{1v}^{-1}U, \\ \nabla_{s_{1q}}\mathcal{L}(w;\mu^{\kappa}) &= z_{1q} - \mu S_{1v}^{-1}U, \end{aligned}$$

Além dessas relações, devemos ter $s_1 \ge 0$, o que implica $z_1 \ge 0$, onde $z_1^t := (z_{1v}, z_{1p}, z_{1q})$.

Para obter um método estritamente primal-dual resta ainda definir as variáveis de folga duais (ZHANG; TAPIA, 1992):

$$egin{array}{rcl} \pi_v &:= & \mu S_{2v}^{-1} \mathrm{U}, \ \pi_p &:= & \mu S_{2p}^{-1} \mathrm{U}, \ \pi_q &:= & \mu S_{2q}^{-1} \mathrm{U}. \end{array}$$

Essas variáveis também são não-negativas por definição.

Finalmente, reescalando os conjuntos de equações referentes às condições de complementaridade obtemos o seguinte sistema não-linear que corresponde às condições de otimalidade de primeira ordem do problema (3.21):

$$\begin{array}{l} \nabla_{e}g_{p}(x)^{t}y_{p} + \nabla_{e}g_{q}(x)^{t}y_{q} + \nabla_{e}h_{v}(x)^{t}z_{2v} + \nabla_{e}h_{p}(x)^{t}z_{2p} + \nabla_{e}h_{q}(x)^{t}z_{2q} + \nabla_{e}\phi(x) \\ \nabla_{f}g_{p}(x)^{t}y_{p} + \nabla_{f}g_{q}(x)^{t}y_{q} + \nabla_{f}h_{v}(x)^{t}z_{2v} + \nabla_{f}h_{p}(x)^{t}z_{2p} + \nabla_{f}h_{q}(x)^{t}z_{2q} + \nabla_{f}\phi(x) \\ z_{1v} - z_{2v} - \pi_{v} \\ z_{1p} - z_{2p} - \pi_{p} \\ z_{1q} - z_{2q} - \pi_{q} \\ S_{1v}z_{1v} - \mu U \\ S_{1p}z_{1p} - \mu U \\ g_{p}(x) \\ g_{q}(x) \\ g_{q}(x) \\ h_{v}(x) - s_{2v} - \frac{v^{2}}{2} \\ h_{p}(x) - s_{2p} - \frac{P}{2} \\ h_{q}(x) - s_{2q} - Q \\ s_{2v} + s_{1v} - v_{u} \\ s_{2p} + s_{1p} - p_{u} \\ s_{2q} + s_{1q} - q_{u} \\ S_{2v}\pi_{v} - \mu U \\ S_{2q}\pi_{q} - \mu U \end{array} \right] = 0, \quad (3.29)$$

 $\operatorname{com}\left(s_{1},z_{1}\right) \geq 0.$

Podemos resolver diretamente o sistema de equações não-lineares completo (3.29), mas temos como opção eliminar as variáveis duais z_{2v} , z_{2p} e z_{2q} do sistema neste momento, seguindo as técnicas de preprocessamento utilizadas em programação linear (GONDZIO, 1997). Essas variáveis podem ser eliminadas através das equações:

$$egin{array}{rcl} z_{2v} &=& z_{1v} - \pi_v, \ z_{2p} &=& z_{1p} - \pi_p, \ z_{2q} &=& z_{1q} - \pi_q. \end{array}$$

Estas eliminações podem ser feitas porque as variáveis z_{2v} , z_{2p} e z_{2q} são irrestritas. Além disso, uma vez que estas eliminações são triviais, a estrutura esparsa do sistema linear

resultante não se altera.

É importante notar que a resolução do sistema (3.29) sem a eliminação dessas variáveis é diferente de resolver eliminando as variáveis. É necessária uma comparação numérica entre os dois métodos para determinar se existe uma diferença significativa entre ambos no que diz respeito ao número de iterações para obtenção da convergência uma vez que o esforço computacional por iteração é praticamente o mesmo. Essa pesquisa deixamos para estudos futuros. Nesse desenvolvimento eliminamos essas variáveis antes de resolvermos o sistema resultante.

3.2.1 Cálculo das Direções de Newton

As direções de Newton são calculadas pelo seguinte sistema linear⁴:

$$\begin{split} \mathcal{M}_{c}\Delta e + \mathbf{N}_{f}\Delta f + \nabla_{e}g_{p}(\mathbf{x})^{l}\Delta y_{p} + \nabla_{e}g_{q}(\mathbf{x})^{l}\Delta y_{q} + \nabla_{e}h_{v}(\mathbf{x})^{l}\Delta z_{2v} + \\ \nabla_{e}h_{p}(\mathbf{x})^{l}\Delta z_{2p} + \nabla_{e}h_{q}(\mathbf{x})^{l}\Delta z_{2v} + \\ \nabla_{f}h_{p}(\mathbf{x})^{l}\Delta z_{2p} + \nabla_{f}h_{q}(\mathbf{x})^{l}\Delta z_{2v} + \\ \nabla_{f}h_{p}(\mathbf{x})^{l}\Delta z_{2p} - \nabla_{f}h_{q}(\mathbf{x})^{l}\Delta z_{2q} &= \mathbf{r}_{2} \\ \Delta z_{1v} - \Delta z_{2v} - \Delta \pi_{v} &= \mathbf{r}_{3} \\ \Delta z_{1p} - \Delta z_{2p} - \Delta \pi_{p} &= \mathbf{r}_{4} \\ \Delta z_{1q} - \Delta z_{2q} - \Delta \pi_{q} &= \mathbf{r}_{5} \\ Z_{1v}\Delta s_{1v} + S_{1v}\Delta z_{1v} &= \mathbf{r}_{6} \\ Z_{1p}\Delta s_{1p} + S_{1p}\Delta z_{1p} &= \mathbf{r}_{7} \\ Z_{1q}\Delta s_{1q} + S_{1q}\Delta z_{1q} &= \mathbf{r}_{8} \\ \nabla_{e}g_{p}(\mathbf{x})\Delta e + \nabla_{f}g_{p}(\mathbf{x})\Delta f &= \mathbf{r}_{9} \\ \nabla_{e}g_{q}(\mathbf{x})\Delta e + \nabla_{f}g_{p}(\mathbf{x})\Delta f &= \mathbf{r}_{10} \\ \nabla_{e}h_{v}(\mathbf{x})\Delta e + \nabla_{f}h_{v}(\mathbf{x})\Delta f - \Delta s_{2v} &= \mathbf{r}_{11} \\ \nabla_{e}h_{p}(\mathbf{x})\Delta e + \nabla_{f}h_{p}(\mathbf{x})\Delta f - \Delta s_{2p} &= \mathbf{r}_{12} \\ \nabla_{e}h_{q}(\mathbf{x})\Delta e + \nabla_{f}h_{q}(\mathbf{x})\Delta f - \Delta s_{2q} &= \mathbf{r}_{13} \\ \Delta s_{2v} + \Delta s_{1v} &= \mathbf{r}_{14} \\ \Delta s_{2p} + \Delta s_{1p} &= \mathbf{r}_{15} \\ \Delta s_{2q} + \Delta s_{1q} &= \mathbf{r}_{16} \\ \Pi_{v}\Delta s_{2v} + S_{2v}\Delta \pi_{v} &= \mathbf{r}_{17} \\ \Pi_{p}\Delta s_{2v} + S_{2v}\Delta \pi_{p} &= \mathbf{r}_{18} \\ \Pi_{q}\Delta s_{2q} + S_{2q}\Delta \pi_{q} &= \mathbf{r}_{19}, \end{split}$$

onde:

$$\begin{split} M_{e} &:= \nabla_{ee}^{2} g_{p}(x) y_{p} + \nabla_{ee}^{2} g_{q}(x) y_{q} + \nabla_{ee}^{2} h_{v}(x) z_{2v} + \nabla_{ee}^{2} h_{p}(x) z_{2p} + \nabla_{ee}^{2} h_{q}(x) z_{2q} + \nabla_{ee}^{2} \phi(x), \\ N_{f} &:= \nabla_{ef}^{2} g_{p}(x) y_{p} + \nabla_{ef}^{2} g_{q}(x) y_{q} + \nabla_{ef}^{2} h_{v}(x) z_{2v} + \nabla_{ef}^{2} h_{p}(x) z_{2p} + \nabla_{ef}^{2} h_{q}(x) z_{2q} + \nabla_{ef}^{2} \phi(x), \\ N_{e} &:= \nabla_{fe}^{2} g_{p}(x) y_{p} + \nabla_{fe}^{2} g_{q}(x) y_{q} + \nabla_{fe}^{2} h_{v}(x) z_{2v} + \nabla_{fe}^{2} h_{p}(x) z_{2p} + \nabla_{fe}^{2} h_{q}(x) z_{2q} + \nabla_{fe}^{2} \phi(x), \\ M_{f} &:= \nabla_{ff}^{2} g_{p}(x) y_{p} + \nabla_{ff}^{2} g_{q}(x) y_{q} + \nabla_{ff}^{2} h_{v}(x) z_{2v} + \nabla_{fe}^{2} h_{p}(x) z_{2p} + \nabla_{fe}^{2} h_{q}(x) z_{2q} + \nabla_{fe}^{2} \phi(x), \end{split}$$

 $^{^4}O$ índice κ representando o número da iteração será desconsiderado de agora em diante para evitar uma notação muito carregada

e os resíduos de r_1 a r_{19} são dados pela aplicação do ponto corrente (w^{κ}) ao lado esquerdo do sistema de equações (3.29) com o sinal trocado. Π_v , Π_p e Π_q são as matrizes diagonais dos vetores π_v , π_p e π_q .

Essa solução pode ser obtida resolvendo todas as equações diretamente, no entanto é mais vantajoso reduzir a dimensão do sistema através da eliminação das variáveis de folga sem modificar sua estrutura esparsa (TORRES; QUINTANA, 1998). Primeiramente substituímos as variáveis de folga primais:

$$\Delta s_{1v} = r_{14} - \Delta s_{2v},$$

$$\Delta s_{1p} = r_{15} - \Delta s_{2p},$$

$$\Delta s_{1q} = r_{16} - \Delta s_{2q},$$

obtendo:

1

$$M_{e}\Delta e + N_{f}\Delta f + \nabla_{e}g_{p}(\mathbf{x})^{t}\Delta y_{p} + \nabla_{e}g_{q}(\mathbf{x})^{t}\Delta y_{q} + \nabla_{e}h_{v}(\mathbf{x})^{t}\Delta z_{2v} + \nabla_{e}h_{p}(\mathbf{x})^{t}\Delta z_{2p} + \nabla_{e}h_{p}(\mathbf{x})^{t}\Delta z_{2p} + \nabla_{f}h_{p}(\mathbf{x})^{t}\Delta z_{2v} + \nabla_{f}h_{p}(\mathbf{x})^{t}\Delta z_{2v} + \nabla_{f}h_{p}(\mathbf{x})^{t}\Delta z_{2v} + \nabla_{f}h_{p}(\mathbf{x})^{t}\Delta z_{2v} + \nabla_{f}h_{p}(\mathbf{x})^{t}\Delta z_{2p} + \nabla_{f}h_{q}(\mathbf{x})^{t}\Delta z_{2v} = \mathbf{r}_{2}$$

$$\Delta z_{1v} - \Delta z_{2v} - \Delta \pi_{v} = \mathbf{r}_{3}$$

$$\Delta z_{1p} - \Delta z_{2p} - \Delta \pi_{p} = \mathbf{r}_{4}$$

$$\Delta z_{1q} - \Delta z_{2q} - \Delta \pi_{q} = \mathbf{r}_{5}$$

$$Z_{1v}(\mathbf{r}_{14} - \Delta s_{2v}) + S_{1v}\Delta z_{1v} = \mathbf{r}_{6}$$

$$Z_{1p}(\mathbf{r}_{15} - \Delta s_{2p}) + S_{1p}\Delta z_{1p} = \mathbf{r}_{7}$$

$$Z_{1q}(\mathbf{r}_{16} - \Delta s_{2q}) + S_{1q}\Delta z_{1q} = \mathbf{r}_{8}$$

$$\nabla_{e}g_{p}(\mathbf{x})\Delta e + \nabla_{f}g_{p}(\mathbf{x})\Delta f = \mathbf{r}_{9}$$

$$\nabla_{e}g_{q}(\mathbf{x})\Delta e + \nabla_{f}g_{q}(\mathbf{x})\Delta f = \mathbf{r}_{10}$$

$$\nabla_{e}h_{v}(\mathbf{x})\Delta e + \nabla_{f}h_{v}(\mathbf{x})\Delta f - \Delta s_{2v} = \mathbf{r}_{11}$$

$$\nabla_{e}h_{p}(\mathbf{x})\Delta e + \nabla_{f}h_{p}(\mathbf{x})\Delta f - \Delta s_{2p} = \mathbf{r}_{12}$$

$$\nabla_{e}h_{q}(\mathbf{x})\Delta e + \nabla_{f}h_{q}(\mathbf{x})\Delta f - \Delta s_{2p} = \mathbf{r}_{12}$$

$$\nabla_{e}h_{q}(\mathbf{x})\Delta e + \nabla_{f}h_{q}(\mathbf{x})\Delta f - \Delta s_{2p} = \mathbf{r}_{13}$$

$$\Pi_{v}\Delta s_{2v} + S_{2v}\Delta \pi_{v} = \mathbf{r}_{17}$$

$$\Pi_{p}\Delta s_{2v} + S_{2p}\Delta \pi_{p} = \mathbf{r}_{18}$$

$$\Pi_{q}\Delta s_{2q} + S_{2q}\Delta \pi_{q} = \mathbf{r}_{19}.$$

Eliminando agora as variáveis de folga duais:

$$\begin{split} \Delta \boldsymbol{z}_{1v} &= \boldsymbol{S}_{1v}^{-1} \left(\boldsymbol{r}_6 - \boldsymbol{Z}_{1v} (\boldsymbol{r}_{14} - \Delta \boldsymbol{s}_{2v}) \right), \\ \Delta \boldsymbol{z}_{1p} &= \boldsymbol{S}_{1p}^{-1} \left(\boldsymbol{r}_7 - \boldsymbol{Z}_{1p} (\boldsymbol{r}_{15} - \Delta \boldsymbol{s}_{2p}) \right), \\ \Delta \boldsymbol{z}_{1q} &= \boldsymbol{S}_{1q}^{-1} \left(\boldsymbol{r}_8 - \boldsymbol{Z}_{1q} (\boldsymbol{r}_{16} - \Delta \boldsymbol{s}_{2q}) \right), \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_v &= \boldsymbol{S}_{2v}^{-1} \left(\boldsymbol{r}_{17} - \boldsymbol{\Pi}_v \Delta \boldsymbol{s}_{2v} \right), \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_p &= \boldsymbol{S}_{2p}^{-1} \left(\boldsymbol{r}_{18} - \boldsymbol{\Pi}_p \Delta \boldsymbol{s}_{2p} \right), \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_q &= \boldsymbol{S}_{2q}^{-1} \left(\boldsymbol{r}_{19} - \boldsymbol{\Pi}_q \Delta \boldsymbol{s}_{2q} \right), \end{split}$$

o sistema linear se reduz a:

$$M_{e}\Delta e + N_{f}\Delta f + \nabla_{e}g_{p}(x)^{t}\Delta y_{p} + \nabla_{e}g_{q}(x)^{t}\Delta y_{q} + \nabla_{e}h_{v}(x)^{t}\Delta z_{2v} + \nabla_{e}h_{p}(x)^{t}\Delta z_{2p} + \nabla_{e}h_{q}(x)^{t}\Delta z_{2q} = r_{1}$$

$$N_{e}\Delta e + M_{f}\Delta f + \nabla_{f}g_{p}(x)^{t}\Delta y_{p} + \nabla_{f}g_{q}(x)^{t}\Delta y_{q} + \nabla_{f}h_{v}(x)^{t}\Delta z_{2v} + \nabla_{f}h_{p}(x)^{t}\Delta z_{2p} + \nabla_{f}h_{q}(x)^{t}\Delta z_{2q} = r_{2}$$

$$D_{v}\Delta s_{2v} - \Delta z_{2v} = r_{v}$$

$$D_{p}\Delta s_{2p} - \Delta z_{2p} = r_{p}$$

$$D_{q}\Delta s_{2q} - \Delta z_{2q} = r_{q}$$

$$\nabla_{e}g_{p}(x)\Delta e + \nabla_{f}g_{p}(x)\Delta f = r_{9}$$

$$\nabla_{e}g_{q}(x)\Delta e + \nabla_{f}g_{q}(x)\Delta f = r_{10}$$

$$\nabla_{e}h_{v}(x)\Delta e + \nabla_{f}h_{v}(x)\Delta f - \Delta s_{2v} = r_{11}$$

$$\nabla_{e}h_{p}(x)\Delta e + \nabla_{f}h_{p}(x)\Delta f - \Delta s_{2p} = r_{12}$$

$$\nabla_{e}h_{q}(x)\Delta e + \nabla_{f}h_{q}(x)\Delta f - \Delta s_{2p} = r_{13},$$
(3.32)

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{v} &:= \mathbf{r}_{3} - \mathbf{S}_{1v}^{-1} \left(\mathbf{r}_{6} - \mathbf{Z}_{1v} \mathbf{r}_{14} \right) + \mathbf{S}_{2v}^{-1} \mathbf{r}_{17}, \\ \mathbf{r}_{p} &:= \mathbf{r}_{4} - \mathbf{S}_{1p}^{-1} \left(\mathbf{r}_{7} - \mathbf{Z}_{1p} \mathbf{r}_{15} \right) + \mathbf{S}_{2p}^{-1} \mathbf{r}_{18}, \\ \mathbf{r}_{q} &:= \mathbf{r}_{5} - \mathbf{S}_{1q}^{-1} \left(\mathbf{r}_{8} - \mathbf{Z}_{1q} \mathbf{r}_{16} \right) + \mathbf{S}_{2q}^{-1} \mathbf{r}_{19}, \\ \mathbf{D}_{v} &:= \mathbf{S}_{1v}^{-1} \mathbf{Z}_{1v} + \mathbf{S}_{2v}^{-1} \mathbf{\Pi}_{v}, \\ \mathbf{D}_{p} &:= \mathbf{S}_{1p}^{-1} \mathbf{Z}_{1p} + \mathbf{S}_{2p}^{-1} \mathbf{\Pi}_{p}, \\ \mathbf{D}_{q} &:= \mathbf{S}_{1q}^{-1} \mathbf{Z}_{1q} + \mathbf{S}_{2q}^{-1} \mathbf{\Pi}_{q}. \end{aligned}$$

Somente inversas de matrizes diagonais são envolvidas nestas substituições. As substituições encontradas na literatura geralmente terminam neste ponto e o equivalente ao sistema (3.32) é resolvido. No entanto, a eliminação das variáveis relacionadas com a injeção de potência ativa, a injeção de potência reativa e magnitude de tensão (THOMAZ, 2003):

$$\Delta s_{2v} = \nabla_e h_v(x) \Delta e + \nabla_f h_v(x) \Delta f - r_{11},$$

$$\Delta s_{2p} = \nabla_e h_p(x) \Delta e + \nabla_f h_p(x) \Delta f - r_{12},$$

$$\Delta s_{2q} = \nabla_e h_q(x) \Delta e + \nabla_f h_q(x) \Delta f - r_{13},$$

resulta em:

$$M_{e}\Delta e + N_{f}\Delta f + \nabla_{e}g_{p}(x)^{t}\Delta y_{p} + \nabla_{e}g_{q}(x)^{t}\Delta y_{q} + \nabla_{e}h_{v}(x)^{t}\Delta z_{2v} + \nabla_{e}h_{p}(x)^{t}\Delta z_{2p} + \nabla_{e}h_{q}(x)^{t}\Delta z_{2q} = r_{1}$$

$$N_{e}\Delta e + M_{f}\Delta f + \nabla_{f}g_{p}(x)^{t}\Delta y_{p} + \nabla_{f}g_{q}(x)^{t}\Delta y_{q} + \nabla_{f}h_{v}(x)^{t}\Delta z_{2v} + \nabla_{f}h_{p}(x)^{t}\Delta z_{2p} + \nabla_{f}h_{q}(x)^{t}\Delta z_{2q} = r_{2}$$

$$D_{v}\left(\nabla_{e}h_{v}(x)\Delta e + \nabla_{f}h_{v}(x)\Delta f - r_{11}\right) - \Delta z_{2v} = r_{v}$$

$$D_{v}\left(\nabla_{e}h_{p}(x)\Delta e + \nabla_{f}h_{p}(x)\Delta f - r_{12}\right) - \Delta z_{2p} = r_{p}$$

$$D_{q}\left(\nabla_{e}h_{q}(x)\Delta e + \nabla_{f}h_{q}(x)\Delta f - r_{13}\right) - \Delta z_{2q} = r_{q}$$

$$\nabla_{e}g_{p}(x)\Delta e + \nabla_{f}g_{p}(x)\Delta f = r_{9}$$

$$\nabla_{e}g_{q}(x)\Delta e + \nabla_{f}g_{q}(x)\Delta f = r_{10}.$$
(3.33)

Estas substituições alteram a estrutura matricial do sistema de forma mais radical. A esparsidade dos blocos matriciais envolvidos é, até antes desta transformação (3.33), determinada pelas linhas de transmissão onde cada linha corresponde a um elemento não nulo nas matrizes envolvidas. Uma vez que os novos blocos matriciais são formados por produtos dos blocos anteriores, eles correspondem a uma rede onde novas linhas surgem entre barras que se encontram a uma distância de comprimento dois originalmente na rede.

Essa abordagem parece ser indicada para sistemas reais, pois o enchimento da matriz é relativamente pequeno e como veremos a seguir, a matriz do sistema linear (3.34) tem propriedades interessantes.

Antes porém, realizamos a eliminação das variáveis duais irrestritas citadas anteriormente:

$$\Delta z_{2v} = D_v \left(\nabla_e h_v(x) \Delta e + \nabla_f h_v(x) \Delta f - r_{11} \right) - r_v, \Delta z_{2p} = D_p \left(\nabla_e h_p(x) \Delta e + \nabla_f h_p(x) \Delta f - r_{12} \right) - r_p, \Delta z_{2q} = D_q \left(\nabla_e h_q(x) \Delta e + \nabla_f h_q(x) \Delta f - r_{13} \right) - r_q,$$

para definirmos o sistema aumentado resultante:

$$\begin{cases}
\mathbf{R}_{ee}\Delta e + \mathbf{R}_{ef}\Delta f + \nabla_{e}g_{p}(\mathbf{x})^{t}\Delta y_{p} + \nabla_{e}g_{q}(\mathbf{x})^{t}\Delta y_{q} = \mathbf{r}_{a} \\
\mathbf{R}_{fe}\Delta e + \mathbf{R}_{ff}\Delta f + \nabla_{f}g_{p}(\mathbf{x})^{t}\Delta y_{p} + \nabla_{f}g_{q}(\mathbf{x})^{t}\Delta y_{q} = \mathbf{r}_{b} \\
\nabla_{e}g_{p}(\mathbf{x})\Delta e + \nabla_{f}g_{p}(\mathbf{x})\Delta f = \mathbf{r}_{9} \\
\nabla_{e}g_{q}(\mathbf{x})\Delta e + \nabla_{f}g_{q}(\mathbf{x})\Delta f = \mathbf{r}_{10},
\end{cases}$$
(3.34)

sendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{a} &:= \mathbf{r}_{1} + \nabla_{e} h_{v}(\mathbf{x})^{t} \left(\mathbf{D}_{v} \mathbf{r}_{11} + \mathbf{r}_{v} \right) + \nabla_{e} h_{p}(\mathbf{x})^{t} \left(\mathbf{D}_{p} \mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{p} \right) + \nabla_{e} h_{q}(\mathbf{x})^{t} \left(\mathbf{D}_{q} \mathbf{r}_{13} + \mathbf{r}_{q} \right), \\ \mathbf{r}_{b} &:= \mathbf{r}_{2} + \nabla_{f} h_{v}(\mathbf{x})^{t} \left(\mathbf{D}_{v} \mathbf{r}_{11} + \mathbf{r}_{v} \right) + \nabla_{f} h_{p}(\mathbf{x})^{t} \left(\mathbf{D}_{p} \mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{p} \right) + \nabla_{f} h_{q}(\mathbf{x})^{t} \left(\mathbf{D}_{q} \mathbf{r}_{13} + \mathbf{r}_{q} \right), \\ \mathbf{R}_{ee} &:= \mathbf{M}_{e} + \nabla_{e} h_{v}(\mathbf{x})^{t} \mathbf{D}_{v} \nabla_{e} h_{v}(\mathbf{x}) + \nabla_{e} h_{p}(\mathbf{x})^{t} \mathbf{D}_{p} \nabla_{e} h_{p}(\mathbf{x}) + \nabla_{e} h_{q}(\mathbf{x})^{t} \mathbf{D}_{q} \nabla_{e} h_{q}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{R}_{ef} &:= \mathbf{N}_{f} + \nabla_{e} h_{v}(\mathbf{x})^{t} \mathbf{D}_{v} \nabla_{f} h_{v}(\mathbf{x}) + \nabla_{e} h_{p}(\mathbf{x})^{t} \mathbf{D}_{p} \nabla_{e} h_{p}(\mathbf{x}) + \nabla_{e} h_{q}(\mathbf{x})^{t} \mathbf{D}_{q} \nabla_{f} h_{q}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{R}_{fe} &:= \mathbf{N}_{e} + \nabla_{f} h_{v}(\mathbf{x})^{t} \mathbf{D}_{v} \nabla_{e} h_{v}(\mathbf{x}) + \nabla_{f} h_{p}(\mathbf{x})^{t} \mathbf{D}_{p} \nabla_{e} h_{p}(\mathbf{x}) + \nabla_{f} h_{q}(\mathbf{x})^{t} \mathbf{D}_{q} \nabla_{e} h_{q}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{R}_{ff} &:= \mathbf{M}_{f} + \nabla_{f} h_{v}(\mathbf{x})^{t} \mathbf{D}_{v} \nabla_{f} h_{v}(\mathbf{x}) + \nabla_{f} h_{p}(\mathbf{x})^{t} \mathbf{D}_{p} \nabla_{f} h_{p}(\mathbf{x}) + \nabla_{f} h_{q}(\mathbf{x})^{t} \mathbf{D}_{q} \nabla_{f} h_{q}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

3.2.2 Estrutura Matricial

O sistema de equações linear aumentado (3.34) pode ser mais facilmente estudado ao ser escrito da seguinte forma:

Proveniente da utilização de coordenadas cartesianas, que possibilitam o cálculo das equações de fluxo de carga de forma matricial, algumas características desse sistema resultante podem ser exploradas.

As matrizes M_e e M_f podem ser obtidas a partir de uma única matriz auxiliar, resultado de operações matriciais (vide Apêndice C.2.3), sendo definidas simplesmente pelos conjuntos de índices I_e e I_f referentes às variáveis e e f respectivamente.

Podemos deduzir também que $N_e = N_f^t$, ou seja, os blocos matriciais da matriz do sistema (3.35) são simétricos. Não existe garantia que as matrizes M_e e M_f sejam definidas
positivas, mas por outro lado a existência de blocos matriciais semidefinidos indica que esta matriz deve permanecer numericamente estável ao longo das iterações do método em comparação com a matriz do sistema linear (3.32). Além disso, sua estrutura esparsa é simétrica, proporcionando a resolução do sistema linear de forma mais eficiente.

4 Detalhes de Implementação

Neste capítulo são discutidos os detalhes de implementação do método de pontos interiores desenvolvido. Foram feitas duas implementações, a primeira baseada no desenvolvimento do método generalizado da Seção 3.1, utilizando as representações R-CLASS e R-MAT e a segunda implementação no desenvolvimento da Seção 3.2, utilizando a estrutura matricial apresentada.

4.1 Pontos Iniciais

No desenvolvimento do método no Capítulo 3, a inicialização precisa satisfazer as condições de pontos interiores. A princípio, não é obrigatório que os pontos iniciais sejam factíveis, mas as condições de positividade precisam ser satisfeitas a cada iteração.

Entretanto em alguns casos, a eficiência do método é prejudicada por uma simples condição de positividade. Para pontos iniciais que produzem restrições perto dos limites, inferiores ou superiores, é vantajoso sacrificar a factibilidade inicial para não permitir que os valores de algumas variáveis de folga sejam muito pequenos. Este detalhe pode causar passos muito pequenos logo no início, resultando num processo de convergência lento (TORRES, 1998).

Quatro heurísticas foram utilizadas para a escolha dos pontos iniciais para as variáveis w^0 , definidas no desenvolvimento do método no Capítulo 3, e são descritas a seguir.

4.1.1 Heurísticas HGT

As heurísticas denominadas nesse trabalho por HGT-A e HGT-B foram propostas e implementadas por Torres (1998) e são baseadas numa proposta que, além das condições estritas de positividade, um ponto inicial deve também satisfazer duas outras condições. Primeiramente, os pontos devem estar bem centralizados, isto é, as condições de μ -complementaridade (3.4b–3.4c) devem assegurar que os produtos de complementaridades $s_k^0 z_k^0$ sejam similares para todo índice k. Em segundo, os pontos não devem ser muito infactíveis, ou seja, a razão entre a infactibilidade e o *gap* de complementaridade não deve ser grande.

Para ambas heurísticas HGT, as variáveis primais x^0 podem ser estimadas por uma das quatro seguintes abordagens, listadas por ordem de preferência: (i) dadas pela solução de um fluxo de carga corrente alternada, (ii) dadas por duas ou três iterações do método de Gauss-Seidel aplicado as equações do fluxo de carga, (iii) dadas pela solução de um fluxo de carga corrente contínua, ou (iv) como valores *flat*, utilizando o ponto intermediário entre os limites inferiores e superiores dessas variáveis.

4.1.1.1 HGT-A

• As variáveis de folga primais são inicializadas como:

$$s_1^0 = \min\left\{\max\left\{\epsilon \cdot (\overline{h} - \underline{h}), h(x^0) - \underline{h}\right\}, (1 - \epsilon) \cdot (\overline{h} - \underline{h})\right\}, \\ s_2^0 = \overline{h} - \underline{h} - s_1^0,$$

onde ϵ é a distância das folgas até a fronteira do hiperquadrante positivo que limita as variáveis. Nessa implementação atribuímos 0,35 como valor padrão para ϵ .

- A variável dual y⁰_k é definida por -1 se estiver relacionada com a restrição de balanço de potência ativa e por 0 se estiver relacionada com a restrição de balanço de potência reativa.
- Assumindo que $\mu^0 > 0$ é fornecido, as variáveis duais são obtidas da forma:

$$z_1^0 = \mu^0 (S_1^0)^{-1} \mathrm{U},$$

$$z_2^0 = \mu^0 (S_2^0)^{-1} \mathrm{U} - z_1^0$$

4.1.1.2 HGT-B

- Escolha s_1^0 , s_2^0 e y^0 da mesma forma utilizada na heurística HGT-A.
- As variáveis duais são obtidas da seguinte forma:

$$z_{1_{k}}^{0} = \begin{cases} 1 - \epsilon, & \text{se } s_{1_{k}}^{0} = \epsilon \cdot (\overline{h_{k}} - \underline{h_{k}}), \\ \frac{1}{2}, & \text{se } s_{1_{k}}^{0} = h_{k}(x^{0}) - \underline{h_{k}}, \\ \epsilon, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
$$z_{2_{k}}^{0} = 1 - z_{1_{k}}^{0}.$$

• O valor inicial do parâmetro de barreira é calculado da seguinte forma:

$$\mu^{0} = \beta^{0} \frac{(s_{1}^{0})^{t} z_{1}^{0} + (s_{2}^{0})^{t} (z_{1}^{0} + z_{2}^{0})}{2(m_{g} + m_{h})},$$

onde o valor de β é detalhado na Seção 4.3.

As variáveis primais estimadas para inicialização nas implementações foram valores fornecidos pela solução de um fluxo de carga corrente alternada. Esse valores são fornecidos pelo estado de operação atual de cada sistema em questão.

A utilização dos valores atuais de uma sistema é importante na prática, pois o método pode encontrar um ponto de operação ótimo local. Com isso, as variáveis podem ser reajustadas de forma que se tenha o mínimo de alterações no estado atual de operação do sistema.

Para efeitos de estudos e planejamento do sistema, um ponto de inicialização das variáveis primais pode ser formulado ou obtido de outras formas, onde as características particulares de cada sistema sejam observadas e reproduzidas.

4.1.2 Heurística HF

Nessa heurística, que denominamos por HF, utilizamos valores *flat* para definir as variáveis. Essa heurística foi proposta para calibrar e testar os parâmetros utilizados pelo método, como a escolha e atualização do parâmetro de barreira e também para uma tentativa de conseguir a convergência em casos que as heurísticas anteriores não obtenham sucesso.

- Assim como nas heurísticas HGT, os valores das variáveis primais podem ser determinados pelas mesmas abordagens.
- As variáveis de folga primais são inicializadas como:

$$s_1^{\ 0} = \eta_1 \cdot \mathbf{U},$$
$$s_2^{\ 0} = \eta_2 \cdot \mathbf{U}.$$

• Os valores iniciais para a variável dual **y**⁰:

$$y^0 = \eta_3 \cdot \mathbf{U}.$$

• E as variáveis duais $z_1^0 e z_2^0$ são inicializadas da forma:

$$z_1^{\ 0} = \eta_3 \cdot \mathbf{U},$$

 $z_2^{\ 0} = \eta_4 \cdot \mathbf{U},$

onde os valores para η_i podem ser quaisquer valores positivos. Utilizamos para testes os números {10⁻¹, 10⁰, 10¹ ou 10²}, dependendo da dimensão de cada sistema.

Na literatura especializada é comum encontrar inicialização de variáveis com valores unitários, ou seja, definimos o $\eta_i := 10^0$. Mas os resultados podem variar muito devido à natureza não-linear do problema.

Valores maiores para η_i podem deixar o ponto inicial muito infactível, mas podem garantir que o método não tenha problemas de lentidão causada pela proximidade das variáveis de folga em relação a seus limites.

4.1.3 Heurística HAT

Experiências anteriores mostraram que o método é bastante sensível quanto ao ponto de operação inicial, ou seja, aos valores que atribuímos às variáveis no momento inicial da resolução (THOMAZ, 2003). Para isso existem na literatura especializada várias heurísticas

propostas. A mais comum encontrada e citada é a inicialização com o resultado proveniente de um fluxo de carga. Mas nem sempre é possível utilizar uma implementação de fluxo de carga para determinar uma solução factível, ou seja, um ponto de operação do sistema. Em alguns casos, o programa diverge por questões de limites de tensão. O principal motivo é que geralmente um programa de fluxo de carga está baseado no método de Newton, que depende de uma solução inicial razoavelmente boa para que se aumente a chance de sucesso na convergência. Idealizamos uma técnica para evitar esse círculo vicioso, mas que não perdesse a qualidade e confiabilidade para a implementação do fluxo de potência ótimo.

Mesmo se tratando de um método primal-dual, denominado *infactível* e bastante comum na literatura, as condições de positividade estritas precisam ser satisfeitas a cada iteração. A idéia dessa nova heurística proposta, que chamaremos de HAT, é gerar um subproblema inicial, que ao final convergisse para o problema original de forma que os pontos de operação x^i fossem sempre soluções ótimas para cada subproblema. A convergência desse subproblema para o problema original é obtida através de uma energização parametrizada da rede. Utilizamos para isso, o vetor *c* que denominamos vetor de energização, juntamente com o vetor A_G criteriosamente definido.

O subproblema inicial é definido atribuindo um gerador fictício de potência ativa para todas as barras de carga da rede. Utilizando os componentes c e A_G nas equações de balanço, cada barra consumidora de potência ativa "geraria" potência ativa necessária para seu próprio consumo. Para isso, ajustamos:

$$\begin{array}{lll} c_k & := & 1, & & \forall k \in C, \\ A_{\mathrm{G}k} & := & P_{\mathrm{C}k}, & & \forall k \in C. \end{array}$$

Em conjunto, precisamos definir o ponto de operação inicial desse problema. Se cada barra consumidora está "gerando" sua própria demanda, então a solução ótima é não transmitir potência ativa na rede. Para isso, basta definirmos as variáveis primais $e \in f$ como segue:

$$e_k := 1, \qquad \forall k \in \mathcal{N},$$

$$f_k := 0, \qquad \forall k \in \tilde{\mathcal{N}}.$$

Lembrando que $f_{|\tilde{N}|} = 0$ já foi definido anteriormente, pois fornece a referência angular para o sistema.

Definidos os valores das variáveis primais podemos determinar as demais variáveis utilizando qualquer uma das heurísticas anteriores. Optamos por utilizar a mesma da heurística HF, com $\eta_i := 10^0$, $\forall i := 1, ..., 4$.

Obtemos então uma solução factível para o subproblema gerado. Essa solução é ótima global para objetivos relacionados com potência ativa, mas evidentemente não é a solução do problema original. Para retornar ao problema original precisamos que o parâmetro c_k para $k \in C$ se anule. É necessário então uma forma para a atualização desse parâmetro de energização.

4.1.3.1 Atualização do Parâmetro Energizador

O adjetivo energizador é atribuído ao vetor *c* pois conforme ele se anula, a potência ativa começa a ser transmitida pelas linhas da rede. Mas para tentar manter o ponto de operação atual sempre o melhor ponto para aquele subproblema, é necessário que o parâmetro energizador seja atualizado de maneira correta. A sugestão é que esse parâmetro seja atualizado em função do parâmetro de barreira logarítmica, pois μ também tende a se anular na solução do problema original, conforme aumenta o número de iterações. Existem vários estudos e propostas publicados na literatura da área para atualização eficiente do μ , por isso a idéia é aproveitar esse conhecimento.

Para que a redução desse parâmetro não interfira no tipo de problema que está sendo resolvido, utilizamos o seguinte cálculo para atualizar c_k :

$$c_k^{i+1} = c_k^i \cdot \min\{0, 8; \mu^i\}, \quad \forall k \in C.$$
 (4.1)

Um estudo mais aprofundado pode ser realizado para determinar esse fator de redução para cada sistema em particular. Um comparativo entre valores e até mesmo novas formas de atualização podem ser propostas para essa heurística.

Acreditamos que essa contribuição possa ajudar outros métodos que dependem de pontos iniciais estritamente positivos e que a determinação desses valores seja uma tarefa custosa do ponto de vista prático e computacional.

4.2 Cálculo do Tamanho do Passo

Calculamos separadamente os passos primal e dual na direção de Newton, respeitando as limitações das condições estritas de positividade. Esta é a forma mais comum utilizada nas implementações de método de pontos interiores para programação linear.

Os escalares $\alpha_p^{\kappa} \in (0,1]$ e dual $\alpha_d^{\kappa} \in (0,1]$ são os tamanhos dos passos primal e dual respectivamente. Eles são calculados primeiramente obtendo o menor dos comprimentos máximos de passo para todas as variáveis de acordo com as limitações:

$$\rho_{\rm p}^{\rm max} := \min\left\{\min_{i=1:m_h}\left\{\frac{-S_{1_i}^{\kappa}}{\Delta s_{1_i}}\right| \Delta s_{1_i} < 0\right\}; \min_{i=1:m_h}\left\{\frac{-S_{2_i}^{\kappa}}{\Delta s_{2_i}}\right| \Delta s_{2_i} < 0\right\}\right\},\tag{4.2}$$

$$\rho_{d}^{\max} := \min\left\{\min_{i=1:m_{h}}\left\{\frac{-z_{1_{i}}^{\kappa}}{\Delta z_{1_{i}}}\right|\Delta z_{1_{i}} < 0\right\}; \min_{i=1:m_{h}}\left\{\frac{-(z_{1_{i}}^{\kappa}+z_{2_{i}}^{\kappa})}{(\Delta z_{1_{i}}+\Delta z_{2_{i}})}\right|(\Delta z_{1_{i}}+\Delta z_{2_{i}}) < 0\right\}\right\}.$$
(4.3)

A seguir calculamos os tamanhos dos passos primal e dual:

$$\alpha_{\rm p} := \min\left\{1; \tau \rho_{\rm p}^{\rm max}\right\},\tag{4.4}$$

$$\alpha_{\rm d} := \min\left\{1; \tau \rho_{\rm d}^{\rm max}\right\},\tag{4.5}$$

onde o escalar $\tau \in (0, 1)$ é um fator de segurança para assegurarmos que o próximo ponto satisfará as condições estritas de positividade. Um valor comum utilizado em programação linear é $\tau = 0,99995$ (LUSTIG; MARSTEN; SHANNO, 1991).

4.2.1 Atualização das Variáveis

A atribuição dos novos valores para as variáveis primais é feita da seguinte forma:

$$\boldsymbol{x}^{\kappa+1} = \boldsymbol{x}^{\kappa} + \boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{p}}^{\kappa} \Delta \boldsymbol{x}, \qquad (4.6a)$$

$$s_1^{\kappa+1} = s_1^{\kappa} + \alpha_p^{\kappa} \Delta s_1, \qquad (4.6b)$$

$$s_2^{\kappa+1} = s_2^{\kappa} + \alpha_p^{\kappa} \Delta s_2, \qquad (4.6c)$$

e para as variáveis duais:

$$y^{\kappa+1} = y^{\kappa} + \alpha_{\rm d}^{\kappa} \Delta y, \qquad (4.7a)$$

$$z_1^{\kappa+1} = z_1^{\kappa} + \alpha_d^{\kappa} \Delta z_1, \tag{4.7b}$$

$$z_2^{\kappa+1} = z_2^{\kappa} + \alpha_d^{\kappa} \Delta z_2. \tag{4.7c}$$

4.3 Redução do Parâmetro de Barreira

A escolha de um bom processo para o cálculo da atualização do parâmetro de barreira é um tópico complexo. μ^{κ} é o parâmetro que varia a cada iteração, onde $\mu^{\kappa} \rightarrow 0$ quando $\kappa \rightarrow \infty$. Pesquisas na área têm mostrado que o valor para μ^{κ} não deve ser reduzido rapidamente pois pode resultar em não-convergência. Por isso uma regra eficiente para a atualização desse parâmetro é de vital importância para o desempenho do método.

Utilizamos para isso, a seqüência dos resíduos das condições de complementaridade. Essa seqüência $\{\gamma^{\kappa}\}_{\kappa=0}^{\infty}$ deve convergir para zero no ótimo. A relação entre γ^{κ} e μ^{κ} , implícita nas condições de KKT, sugerem que μ^{κ} poderia ser reduzido baseado numa diminuição prevista do *gap* de complementaridade, como:

$$\mu^{\kappa+1} = \beta^{\kappa} \frac{\gamma^{\kappa}}{2 \cdot \mathbf{m}_h} \,. \tag{4.8}$$

O parâmetro $\beta^{\kappa} \in [0, 1]$ é chamado de parâmetro de centralização e é interpretado como segue. Se $\beta^{\kappa} = 1$, as condições de KKT definem uma direção de centralização, um passo de Newton em direção ao ponto na trajetória da barreira. Por outro lado, $\beta^{\kappa} = 0$ temos o passo de Newton puro, conhecido como direção afim-escala. Para redução do μ^{κ} e melhorar a centralização, β^{κ} é dinamicamente escolhido como $\beta^{\kappa} = \max\{\sigma\beta^{\kappa-1}; 0, 1\}$, com $\beta^{0} = 0, 2$ e $\sigma = 0, 95$.

4.4 Critério de Convergência

O método tem duas possibilidades de resultado durante as iterações, ou ele converge para um ponto mínimo local, otimizando as soluções anteriores e encontrando uma solução que respeita as condições de factibilidade e complementaridade dentro de uma tolerância permitida, ou ele não converge. É necessário avaliar em que situação obtemos um mínimo local ou quando problemas numéricos ocorrem durante o processo.

Primeiramente, para avaliarmos se um mínimo local foi obtido utilizamos critérios de avaliação relacionados com a factibilidade primal, factibilidade dual e a complementaridade:

$$\nu_1^{\kappa} \leq \varepsilon_1, \tag{4.9a}$$

$$\nu_2^{\kappa} \leq \varepsilon_2, \tag{4.9b}$$

$$\nu_3^{\kappa} \leq \varepsilon_3, \tag{4.9c}$$

onde:

$$\nu_{1}^{\kappa} = \max\left\{ \left\| g(x^{\kappa}) \right\|_{\infty} ; \max\left\{ \underline{h} - h(x^{\kappa}) \right\} ; \max\left\{ h(x^{\kappa}) - \overline{h} \right\} \right\},$$

$$\left\| \nabla_{\mu} f_{\mu}(x^{\kappa}) \right\|$$
(4.10)

$$\nu_{2}^{\kappa} = \frac{\| v_{x} \mathcal{L}_{\mu}(w, \mu) \|_{\infty}}{1 + \| x^{\kappa} \| + \| y^{\kappa} \| + \| z_{2}^{\kappa} \|'}$$
(4.11)

$$\nu_3^{\kappa} = \frac{\gamma^{\kappa}}{1 + \|\boldsymbol{x}^{\kappa}\|'}$$
(4.12)

A factibilidade primal, a factibilidade dual e as condições de complementaridade estão satisfeitas se $v_1^{\kappa} \leq \varepsilon_1$, $v_2^{\kappa} \leq \varepsilon_2$ e $v_3^{\kappa} \leq \varepsilon_3$ respectivamente. Quando essas condições estiverem satisfeitas, o ponto atual atenderá as condições de KKT.

Se os critérios (4.9) não foram atendidos, verificamos se algum problema numérico é detectado. Um desses problemas é a estagnação num outro ponto, que detectamos quando:

$$\mu^{\kappa} \leq \varepsilon_{\mu}, \tag{4.13a}$$

$$\left\|g(\boldsymbol{x}^{\kappa})\right\|_{\infty} \leq \varepsilon_{1}, \qquad (4.13b)$$

$$\|\Delta \boldsymbol{x}^{\kappa}\|_{\infty} \leq \varepsilon_{3}, \qquad (4.13c)$$

$$\nu_{4}^{\kappa} = \frac{\left|\phi(\boldsymbol{x}^{\kappa}) - \phi(\boldsymbol{x}^{\kappa-1})\right|}{1 + \left|\phi(\boldsymbol{x}^{\kappa})\right|} \leq \varepsilon_{4}, \qquad (4.13d)$$

ou seja, que atende as restrições de igualdade do problema, mas no qual o valor do parâmetro de barreira μ^{κ} e a norma da direção de Newton das variáveis x^{κ} são muito pequenos e que ocorre também a estagnação do valor da função objetivo.

Outro problema de convergência ocorre quando os tamanhos dos passos são muito

pequenos, ou seja, $\alpha_p < \varepsilon_\mu$ ou $\alpha_d < \varepsilon_\mu$. Esse é um problema associado ao fator de segurança utilizado. Devido à características de cada sistema de potência, as restrições podem formar uma região de factibilidade muito estreita. Para esse tipo de problema, costumamos reduzir o fator de segurança, fazendo com que o passo não aproxime tanto as variáveis de seus limites. A convergência nesse caso pode acontecer com um número maior de iterações.

Os valores de tolerância para a convergência são $\varepsilon_1 = 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = 10^{-4}$, $\varepsilon_3 = 10^{-6}$, $\varepsilon_4 = 10^{-6}$ e $\varepsilon_{\mu} = 10^{-8}$.

5 Experimentos Computacionais

Neste capítulo mostramos os resultados dos testes realizados na resolução dos problemas de fluxo de potência ótimo FPOR e FPOAR utilizando a implementação do método desenvolvido na Seção 3.2.

As principais propostas desses testes foram: (i) verificar a eficiência do método de pontos interiores específico; (ii) comparar a implementação para os problemas FPOR e FPOAR; (iii) verificar a funcionalidade da heurística HAT para pontos iniciais proposta na Seção 4.1.3 e (iv) apresentar as facilidades na utilização do programa desenvolvido.

O programa foi feito em MATLAB (http://www.mathworks.com) utilizando a funcionalidade de tratamento de esparsidade para matrizes. Dessa forma, as operações algébricas foram feitas utilizando matrizes armazenadas na forma esparsa, diminuindo consideravelmente o tempo de processamento. Os testes foram realizados utilizando um computador com processador AMD© Atlhon XP 2800+, com 2.250 MHz de freqüência, 1024 KB de memória RAM e o sistema operacional utilizado foi o Linux.

Para evitar uma exaustão de experimentos com um grande número de combinações de parâmetros, definimos um conjunto padrão que é utilizado para todos os testes. Os valores iniciais são os que foram apresentados no Capítulo 4 e são mostrados na Tabela 1, e os valores utilizados nas heurísticas, na Tabela 2.

5.1 Sistemas de Potência para Testes

Para apresentarmos os resultados dos experimentos computacionais utilizamos três sistemas, de 30, 300 e 2098 barras, considerados de pequeno, médio e grande porte. Foram realizados testes utilizando outros sistemas de potências com 14, 57, 118, 256 e 555 barras,

Parâmetro de barreira	(μ^0)	1,0
Parâmetro de centralização	(β^0)	0,2
Parâmetro de redução de centralização	(σ^0)	0,95
Fator de segurança	(τ)	0,99995
Tolerâncias para convergência	(ε_1)	10^{-4}
	(ε_2)	10^{-4}
	(ε_3)	10^{-6}
	(ε_4)	10^{-6}
	(ε_{μ})	10^{-8}

Tabela 1: Parâmetros referência e tolerância
--

TT 1 1 O		1.1.1. 1	1 / 1	• 1	· · · 1·	~
Tabela 2:	Parametros	utilizados	nas heurist	icas de	inicializ	zacao
1010 0101 -			11010 110 01110 0	10010 010		

(HGT) distância das folgas	(ϵ)	0,35
(HF,HAT) fator multiplicador	(η_1)	1,0
	(η_2)	1,0
	(η ₃)	1,0
	(η_4)	1,0

todos com convergência do método para uma solução em ambos os problemas, mas os comportamentos não são diferentes, portanto vamos nos limitar somente aos três sistemas.

Tabela 3: Sistemas de potência

Sistemas	Nú	mero	de ba	Ramos	Perda inicial	
	$ \mathcal{N} $	$ \mathcal{G} $	$ \mathcal{R} $	C		(MW)
IEEE-30	30	6	6	24	41	18,30
IEEE-300	300	69	69	231	411	407,09
BRAS-2098	2098	169	169	1929	3283	1209,35

Os dados dos sistemas de teste IEEE estão disponíveis no site http://www.ee.washington.edu/research/pstca/. O BRAS-2098 é um sistema reduzido proveniente das regiões sul-sudeste do sistema brasileiro atual.

Os valores dos limites mínimos e máximos para geração de potência reativa são fornecidos pelos dados de entrada de cada sistema.

Os valores de tap e shunt são também fornecidos pelos dados de entrada, ou seja, são

valores que estão sendo utilizados pelo sistema no momento. Esses valores estão implícitos na matriz admitância e permanecem inalterados durante as iterações do método. O objetivo é otimizar o sistema de forma que essas variáveis sejam alteradas somente em casos de inviabilidade técnica, de contingência ou fatores operacionais, como troca ou manutenção desses equipamentos.

5.2 Resultados Obtidos

Nessa seção, apresentamos alguns aspectos envolvendo a resolução dos problemas FPOR e FPOAR aplicando as heurísticas de inicialização nos sistemas de testes de 30, 300 e 2098 barras.

Para comprovar a eficiência do método desenvolvido e verificar sua utilização com as diversas heurísticas, principalmente a HAT, utilizamos as soluções encontradas com as três funções objetivo descritas na Seção 2.3.3.

A geração de potência ativa especificada utilizada na função objetivo ϕ_0 , nos testes realizados foi determinada pelos dados de entrada de cada sistema, para o problema FPOR e igual a zero para o problema FPOAR. Os pesos *h* foram todos ajustados com valor 1.

5.2.1 IEEE-30

Mostramos nessa seção os resultados obtidos utilizando o sistema de testes IEEE-30. Pela Tabela 4 podemos perceber que o tempo utilizado para o método encontrar uma solução é pequeno. Não consideramos o tempo usado com rotinas que utilizam acessos à disco.

Problema	f.o.	HGT-A	HGT-B	HF	HAT
	ϕ_0	0,657	0,579	0,656	0,624
FPOR	ϕ_1	0,624	0,562	0,625	0,641
	$\dot{\phi}_2$	0,627	0,594	0,643	0,577
	ϕ_0	0,533	0,766	0,391	0,657
FPOAR	ϕ_1	0,782	0,734	0,674	0,484
	ϕ_2	0,563	0,718	0,578	0,688

Tabela 4: IEEE-30: tempo de processamento (s)

O número de iterações, apresentado na Tabela 5, foi praticamente o mesmo para as heurísticas nesse caso. A heurística HAT, devido a sua proposta e construção, tenderá a ter sempre um número maior de iterações em relação às demais. Estamos utilizando valores *flat* para as variáveis duais e de folga para HAT, baseados na heurística HF.

As heurísticas HGT e HF utilizam informações de um ponto de operação válido do sistema para inicializar o método. Em muitos casos para o problema FPOR, a solução encontrada é próxima ao ponto inicial. Essa característica é importante quando se deseja otimizar um sistema sem provocar alterações bruscas no perfil de operação atual.

Realizamos também testes adicionais utilizando os limites físicos e operacionais dos sistemas rigorosamente restritos em $\pm 1\%$ do valor para magnitude de tensão e para os problemas FPOAR, os limites de geração de potência ativa estabelecidos em $\pm 5\%$ dos valores de geração especificados nos dados de entrada. A resposta do método foi positiva para restrições apertadas em ambos os problemas.

Problema	f.o.	HGT-A	HGT-B	HF	HAT
	ϕ_0	33	29	32	32
FPOR	ϕ_1	33	29	32	32
	$\dot{\phi}_2$	33	29	32	32
	ϕ_0	37	34	36	37
FPOAR	ϕ_1	37	34	36	38
	ϕ_2	37	34	36	37

Tabela 5: IEEE-30: número de iterações

Os valores das funções objetivo para o problema FPOR, como mostrados na Tabela 6, são exatamente iguais para todas as heurísticas utilizadas. Diferenças mínimas nos valores das funções objetivo foram encontradas utilizando as heurísticas para o problema FPOAR. A heurística HAT conseguiu melhor desempenho para a função ϕ_2 .

A utilização da função objetivo ϕ_0 não tem sentido para o problema FPOR, pois as gerações de potência ativa são fixas nas barras de geração, com exceção da barra de referência. Por isso, utilizamos seu resultado das perdas e geração de potência ativa nas Tabelas 7 e 8 para comparações e referência de perdas iniciais.

As perdas de potência ativa para o caso do FPOR são iguais para as funções ϕ_1 e ϕ_2 , pois essas perdas são absorvidas pela barra de referência. Para o problema FPOAR isso

Problema	f.o.	HGT-A	HGT-B	HF	HAT
	ϕ_0	3,4652	3,4652	3,4652	3,4652
FPOR	ϕ_1	2,6111	2,6111	2,6111	2,6111
	ϕ_2	0,1771	0,1771	0,1771	0,1771
	ϕ_0	0,6823	0,6823	0,6823	0,6823
FPOAR	ϕ_1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	ϕ_2	0,0190	0,0198	0,0192	0,0189

Tabela 6: IEEE-30: valor da função objetivo

não acontece, pois ocorre a redistribuição da geração de potência ativa para outras barras, e conseqüentemente as perdas, que não são mais absorvidas pela barra de referência. Para a função ϕ_1 , o método anulou a geração de potência na barra de referência.

HGT-A HGT-B HF HAT Problema f.o. 18,3029 18,3029 18,3029 18,3029 ϕ_0 FPOR 17,7132 17,7132 17,7132 17,7132 ϕ_1 17,7132 17,7132 17,7132 17,7132 ϕ_2 2,7171 2,7172 2,7171 ϕ_0 2,7171 FPOAR 2,5888 2,4519 2,4518 2,4519 ϕ_1 1,8998 1,9779 1,9208 1,8957 ϕ_2

Tabela 7: IEEE-30: perdas de potência ativa (MW)

Tabela 8: IEEE-30: geração de potência ativa total (MW)

Problema	f.o.	HGT-A	HGT-B	HF	HAT
	ϕ_0	301,7029	301,7029	301,7029	301,7029
FPOR	ϕ_1	301,1132	301,1132	301,1132	301,1132
	ϕ_2	301,1132	301,1132	301,1132	301,1132
	ϕ_0	286,1171	286,1171	286,1172	286,1171
FPOAR	ϕ_1	285,8519	285,9888	285,8519	285,8518
	$\dot{\phi}_2$	285,2998	285,3779	285,3208	285,2957

Podemos ver nos resultados em termos de geração total e perdas de potência ativa, apresentados nas Tabelas 7 e 8, que o método em conjunto com a heurística HAT encontrou uma solução um pouco melhor comparada às outras heurísticas. As Tabelas 9 e 10 são referentes às soluções para os problemas FPOR e FPOAR, utilizando a função objetivo ϕ_2 .

Elas mostram que as magnitudes de tensão para ambas soluções estão próximas do limite superior, em razão da minimização de perdas de potência ativa. A grande diferença está nos valores dos ângulos de tensão, pois a heurística HAT inicializa a variável *f* em zero, e tende a encontrar o primeiro ponto cujas restrições sejam atendidas. Nesse caso em particular, a melhor solução é transmitir o mínimo possível de potência ativa, que está diretamente relacionado com a abertura angular de tensão. Por isso que a solução encontrada pela HAT pode ser ruim quando a otimização está relacionada à perdas de potência ativa.

Barra	\underline{v}	υ	\overline{v}	$P_{\rm G}$	$Q_{\rm G}$	$Q_{ m G}$	$\overline{Q_{ m G}}$
		(p.u.)		(MW)		(MVAR)	
2	0,9400	1,0417	1,0600	40,00	-40,00	50,00	50,00
5	0,9400	1,0101	1,0600	-	-40,00	39,56	40,00
8	0,9400	1,0075	1,0600	-	-10,00	40,00	40,00
11	0,9400	1,0600	1,0600	_	-6,00	10,47	24,00
13	0,9400	1,0600	1,0600	_	-6,00	8,82	24,00
1	0,9400	1,0600	1,0600	261,11	-50,00	-12,71	100,00

Tabela 9: IEEE-30: FPOR (ϕ_2) – Limites - HAT

Tabela 10: IEEE-30: FPOAR (ϕ_2) – Limites - HAT

Barra	\underline{V}	υ	\overline{V}	$\underline{P_{G}}$	P_{G}	$\overline{\pmb{P}_{\mathrm{G}}}$	$Q_{ m G}$	$Q_{ m G}$	$\overline{Q_{ m G}}$
		(p.u.)			(MW)			(MVAR)	
2	0,9400	1,0434	1,0600	0,00	42,17	200,00	-40,00	13,35	50,00
5	0,9400	1,0314	1,0600	0,00	64,34	200,00	-40,00	23,10	40,00
8	0,9400	1,0418	1,0600	0,00	60,25	200,00	-10,00	40,00	40,00
11	0,9400	1,0600	1,0600	0,00	63,26	200,00	-6,00	6,87	24,00
13	0,9400	1,0600	1,0600	0,00	34,09	200,00	-6,00	0,69	24,00
1	0,9400	1,0458	1,0600	0,00	21,18	200,00	-50,00	-0,40	100,00

O ponto de operação encontrado na resolução do problema FPOAR, apresentado na Tabela 10, pode ser utilizado para futuros estudos de planejamento e expansão do sistema. As gerações de potência são distribuídas conforme o perfil de demanda e as características do sistema.

Os gráficos na Figura 3 ilustram as diferenças nas tensões para as barras de geração e

os gráficos na Figura 4 as diferenças nas tensões em todas as barras do sistema, para os problemas FPOR e FPOAR utilizando a função ϕ_2 . O perfil de tensão é mais elevado e mais uniforme, na solução do problema FPOAR.



Figura 3: IEEE-30 (ϕ_2): Perfil de magnitude de tensão nas barras de geração (p.u.)



Figura 4: IEEE-30 (ϕ_2): Perfil de magnitude de tensão (p.u.)

A diferença no perfil de geração de potência ativa para os problemas FPOR e FPOAR, com a função ϕ_0 , pode ser vista nos gráficos da Figura 5. Quando utilizamos o valor zero para a geração de potência ativa especificada em todas as barras no problema FPOAR, o método tende a distribuir uniformemente a geração. A função dessa forma, diminui a possibilidade de geração acumulada em uma determinada barra.

Comparando com os gráficos da Figura 6, onde a função objetivo é minimizar perdas de potência ativa, podemos perceber que o perfil de geração não se alterou para o problema FPOR, mas o método convergiu para outra solução para o problema FPOAR. Essa alteração demonstra a diferente natureza das duas funções. Enquanto para ϕ_0 o objetivo está relacionado diretamente com o custo da geração, para ϕ_2 o importante são as perdas nas



Figura 5: IEEE-30 (ϕ_0): Perfil de geração de potência ativa (MW)



Figura 6: IEEE-30 (ϕ_2): Perfil de geração de potência ativa (MW)

linhas.

No Apêndice E.1 estão detalhados os resultados encontrados para o sistema IEEE-30, para os problemas FPOR e FPOAR utilizando como funções objetivo ϕ_0 e ϕ_2 .

5.2.2 IEEE-300

Nessa seção, apresentamos os resultados obtidos utilizando o sistema de testes IEEE-300. O número de iterações necessárias para a resolução desse sistema, utilizando as diferentes heurísticas para os problemas FPOR e FPOAR, estão na Tabela 11 e os tempos computacionais relacionados estão na Tabela 12. Utilizamos a notação α_p^i ou α_d^i para indicar que o método não convergiu para uma solução e que o problema numérico encontrado foi que o passo primal, ou dual, ficou menor que a tolerância permitida na iteração *i*.

Problema	f.o.	HGT-A	HGT-B	HF	HAT
	ϕ_0	$\alpha_{\rm p}^{15}$	31	32	37
FPOR	ϕ_1	43	31	32	36
	ϕ_2	49	31	32	37
FPOAR	ϕ_0	$\alpha_{\rm d}^7$	$\alpha_{\rm d}^7$	37	37
	ϕ_1	α_{p}^{11}	36	37	37
	ϕ_2	$\alpha_{\rm p}^{16}$	36	55	55

Tabela 11: IEEE-300: número de iterações

Os problemas de convergência encontrados utilizando essas heurísticas demonstram a sensibilidade do método em relação ao ponto inicial. Se as heurísticas HGT e HF utilizarem um ponto proveniente da solução de um fluxo de carga, ou seja, de um ponto de operação válido, o *mismatch* de potência ativa é pequeno na inicialização. Mas quando não temos informações de um ponto de operação do sistema, ou queremos resolver o FPOAR, precisamos ter o cuidado para não escolhermos variáveis primais tão infactíveis, o que poderia prejudicar a convergência do método.

Problema f.o. HGT-A HGT-B HF HAT 3,908 4,029 4,501 ϕ_0 _ FPOR 4,234 ϕ_1 4,871 3,625 3,783 5,473 3,686 4,267 ϕ_2 3,657 4,297 4,094 _ ϕ_0 FPOAR 4,030 4,218 4,110 ϕ_1 3,940 6,092 6,422 ϕ_2

Tabela 12: IEEE-300: tempo de processamento (s)

Na Tabela 13 podemos notar que os valores das funções objetivo, da mesma forma para o IEEE-30, foram iguais no problema FPOR. Para o FPOAR, o método utilizando a heurística HAT obteve um resultado melhor para a função ϕ_2 .

As perdas de potência ativa, dadas pelas soluções encontradas para a função ϕ_2 na Tabela 14, sofreram uma redução significativa do problema FPOR para o FPOAR.

A redução na geração total, ou perdas de potência ativa, do ponto de operação dado pelo problema FPOR para a solução do FPOAR, foi de 191 MW quando utilizamos a heurística HAT. Podemos notar essa diferença nos resultados na Tabela 15.

Problema	f.o.	HGT-A	HGT-B	HF	HAT
	ϕ_0	-	980,9713	980,9713	980,9713
FPOR	ϕ_1	4,1998	4,1998	4,1998	4,1998
	ϕ_2	3,7356	3,7356	3,7356	3,7356
	ϕ_0	-	_	458,9759	458,9759
FPOAR	ϕ_1	-	0,0000	0,0000	0,0000
	ϕ_2	-	1,8881	1,8661	1,8298

Tabela 13: IEEE-300: valor da função objetivo

Tabela 14: IEEE-300: perdas de potência ativa (MW)

Problema	f.o.	HGT-A	HGT-B	HF	HAT
	ϕ_0	-	407,0930	407,0930	407,0930
FPOR	ϕ_1	373,5592	373,5592	373,5592	373,5592
	ϕ_2	373,5592	373,5592	373,5592	373,5592
	ϕ_0	_	_	686,0654	686,0653
FPOAR	ϕ_1	_	345,6971	402,6862	434,9980
	ϕ_2	_	188,8158	186,6120	182,9845

Tabela 15: IEEE-300: geração de potência ativa total (MW)

Problema	f.o.	HGT-A	HGT-B	HF	HAT
	ϕ_0	-	23653,9530	23653,9530	23653,9530
FPOR	ϕ_1	23620,4192	23620,4192	23620,4192	23620,4192
	ϕ_2	23620,4192	23620,4192	23620,4192	23620,4192
	ϕ_0	_	_	23932,9254	23932,9253
FPOAR	ϕ_1	_	23592,5571	23649,5462	23681,8580
	$\dot{\phi}_2$	_	23435,6758	23434,4720	23429,8445

Nos gráficos da Figura 7 temos o perfil de tensão nas barras de geração, onde percebemos uma pequena redução no número de barras com a magnitude de tensão no limite máximo para as soluções dos problemas FPOR e FPOAR.

A diferença no perfil de geração de potência ativa para os problemas FPOR e FPOR, com a função ϕ_0 , pode ser vista nos gráficos da Figura 8. Utilizamos o valor zero para a geração de potência ativa especificada em todas as barras no problema FPOAR, o método distribui uniformemente a geração, exceto em algumas barras devido à demanda e às restrições físicas



Figura 7: IEEE-300 (ϕ_2): Perfil de magnitude de tensão nas barras de geração (p.u.)

do sistema.



Figura 8: IEEE-300 (ϕ_0): Perfil de geração de potência ativa (MW)

O perfil de geração de potência se altera quando utilizamos a função ϕ_2 para o problema FPOAR, como podemos ver no gráfico da Figura 9. A tendência é que a geração esteja em conformidade com a demanda, diminuindo assim as perdas ativas nas linhas.

Os resultados detalhados para o sistema de testes IEEE-0300 em ambos os problemas FPOR e FPOAR, com a função objetivo ϕ_2 , estão no Apêndice E.2.



Figura 9: IEEE-300 (ϕ_2): Perfil de geração de potência ativa (MW)

5.2.3 BRAS-2098

Nessa seção, apresentamos os resultados obtidos utilizando o sistema de testes BRAS-2098, com a heurística HAT. Esse sistema de potência é um sistema real com um grande número de variáveis, tornando complicada uma implementação que considera todas as suas características e particularidades.

Por isso a utilização de uma técnica que encontre um ponto de operação impondo um conjunto máximo de restrições e limitações em comum para todos os sistemas, é ideal para esse tipo de problemas. Nos testes realizados para esse sistema, o tempo e o número de iterações necessárias para a resolução do FPOR é relativamente baixo em comparação a outros sistemas menores. Para o problema FPOAR, o tempo e o número de iterações, apresentados nas Tabelas 16 e 17, foi bem maior.

Problema	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2
FPOR	49,421	46,248	46,264
FPOAR	476,996	382,569	489,597

Tabela 16: BRAS-2098: tempo de processamento (s)

Tabela 17:	BRAS-2098:	número	de	iteraç	ções
------------	------------	--------	----	--------	------

Problema	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2
FPOR	20	20	20
FPOAR	139	113	139

FPOAR, como podemos ver na Tabela 19.

Com liberdade para distribuir a geração de potência, o método conseguiu reduzir significativamente os valores das funções objetivo do problema FPOAR em relação ao FPOR.

Problema ϕ_0 ϕ_1 ϕ_2 FPOR1116,5812968,16136510,965360FPOAR130,0775100,0000014,680167

Tabela 18: BRAS-2098: valor da função objetivo

As perdas, conseqüentemente a geração de potência ativa, foram reduzidas em 741 MW do ponto de operação inicial em relação à solução encontrada pelo método para o problema

Tabela 19: BRAS-2098: perdas de potência ativa (MW)

Problema	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2
FPOR	1209,3493	1096,5361	1096,5360
FPOAR	1095,8282	1443,9986	468,0167

O valor da geração de potência ativa total para a função ϕ_1 , apresentada na Tabela 20, é significativamente maior no problema FPOAR. A redução na geração de potência ativa na barra de referência não obtém bons resultados para os problemas FPOAR, quando a otimização está relacionada às perdas ativas nas linhas.

No caso da função ϕ_0 , o valor da geração encontrado é maior do que o valor para a função ϕ_2 . A interpretação dessa diferença é que as barras com gerações de menor custo estão longe dos centros de consumo, causando um aumento significativo nas perdas nas linhas. Para esse problema, podemos utilizar uma função objetivo que seja uma combinação das funções ϕ_0 e ϕ_1 .

Tabela 20: BRAS-2098: geração de potência ativa total (MW)

Problema	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2
FPOR	20779,9493	20667,1361	20667,1360
FPOAR	20666,4282	21014,5986	20038,6167



Figura 10: BRAS-2098 (ϕ_0): Perfil de geração de potência ativa (MW)

Os gráficos da Figura 10 demonstram claramente que o objetivo da função ϕ_0 , quando a geração especificada é zero para todas as barras, é que todas tenham praticamente o mesmo valor.

O perfil de geração de potência se altera quando utilizamos a função ϕ_2 para o problema FPOAR, como podemos ver nos gráficos da Figura 11. Os gráficos tendem a seguir uma mesma curva, mas para o problema FPOAR essa geração é mais distribuída entre as outras barras.



Figura 11: BRAS-2098 (ϕ_2): Perfil de geração de potência ativa (MW)

5.3 Heurística HAT

O vetor *c*, utilizado pela heurística HAT, inicializa a rede sem fluxo de potência nas linhas sem perdas, como podemos ver nos gráficos da função objetivo ϕ_2 na Figura 12 e 13, para os problemas FPOR e FPOAR. A comparação é feita utilizando a heurística HGT-B.



Figura 12: IEEE-300 (ϕ_2): Evolução do valor da função objetivo (FPOR)



Figura 13: IEEE-300 (ϕ_2): Evolução do valor da função objetivo (FPOAR)

Os valores que o vetor de energização *c* assume são ilustrados no gráfico da Figura 14. Utilizamos esse gráfico para demonstrar os valores do parâmetro de barreira e para notar que ele fornece informações para o parâmetro de energização.



Figura 14: IEEE-300 (ϕ_2): parâmetro de energização e de barreira

5.4 Proposta SLPV

O controle das variáveis que são limitadas nas equações h(x) é realizado através da definição dos conjuntos I_{h_p} , $I_{h_q} \in I_{h_v}$. Geralmente as tensões são limitadas em todas as barras do sistema, ou seja, $I_{h_v} = N$. Essa proposta, denominada nesse trabalho por SLPV, é limitar a tensão somente nas barras de geração.

Como a magnitude de tensão está relacionada com a potência reativa, espera-se que o controle na geração de potência reativa e uma limitação mais apertada de tensão nessas barras seja razoavelmente suficiente para manter um nível de tensão desejado na rede. Dessa forma redefinimos o conjunto de índices $I_{h_v} = G$.

A limitação das tensões somente pelas barras de geração acarreta numa redução computacional valiosa. Gonçalves (2006) em seu trabalho utiliza essa proposta, mas o método de resolução utilizado não é pontos interiores. Para sistemas maiores e que apresentam dificuldades de convergência, essa proposta é essencial para realizar testes na implementação e comparar resultados. Nesse trabalho, para o caso BRAS-2098, essa diferença foi fundamental na convergência para uma solução. A redução em relação ao número de restrições de desigualdades para os sistemas são mostrados na Tabela 21.

Utilizando o sistema de potência IEEE-300, comparamos as diferenças no perfil de tensão entre os resultados para FPOR e FPOAR, com limites de tensão em todas as barras e nas barras de geração. Os gráficos na Figura 15 ilustram os resultados para o problema FPOR, e os gráficos na Figura 16 os resultados para o problema FPOAR, ambos com função objetivo

Sistemas	Restrições			Redução
	$ \mathcal{N} $		$ \mathcal{G} $	
IEEE-30	30	\rightarrow	6	80%
IEEE-300	300	\rightarrow	69	77%
BRAS-2098	2098	\rightarrow	169	92%

Tabela 21: Restrições de tensão (SLPV)

 (ϕ_2) e a utilização da heurística HAT.



Figura 15: IEEE-300: FPOR (ϕ_2): Perfil de magnitude de tensão (p.u.)

Para os dois problemas o perfil de tensão no sistema, quando limitamos somente as barras de geração, sofreu uma leve redução devido ao novos limites impostos. Algumas barras de carga tiveram um acréscimo no valor de tensão com o uso dessa proposta e passaram dos limites anteriormente definidos. As restrições relacionadas a limites de tensão são fortemente ativas para essas barras. Esse resultado pode ser utilizado para estudos preventivos e também planejamentos de expansão na rede.



Figura 16: IEEE-300: FPOAR (ϕ_2): Perfil de magnitude de tensão (p.u.)

Para o sistema BRAS-2098, a Tabela 22, mostra a redução no tempo computacional e o número de iterações para o problema FPOAR quando utilizamos limites de tensão para

todas as barras e somente para as barras de geração.

	temp	itera	ções	
f.o.		${\mathcal G}$	\mathcal{N}	${\mathcal G}$
ϕ_0	476,996	53,299	139	24
ϕ_1	382,569	53,220	113	24
ϕ_2	489,597	75,955	139	35

Tabela 22: BRAS-2098: proposta SLPV (FPOAR)

Porém, a utilização dessa estratégia deve ser feita com cuidado, pois com os limites de tensão nas barras de geração mais restritos, a solução pode perder um pouco na eficiência em relação à função objetivo.

6 Conclusões

Os resultados indicam que os métodos de pontos interiores são promissores para esta classe de problemas. As iterações do método são rápidas. Esta velocidade é obtida através da redução do sistema linear via eliminação de variáveis, resultando em um sistema do tipo aumentado e sua estrutura matricial sendo aproveitada.

É importante salientar que a utilização de coordenadas cartesianas contribuiu para o desenvolvimento do método fornecendo jacobianas menos complexas e contribuindo também para a exploração mais eficiente da estrutura matricial resultante. Proporcionou também uma maior facilidade na dedução das equações envolvidas e conseqüentemente na implementação do método.

A estrutura da modelagem permitiu a imposição de restrições a algumas variáveis sem o aumento do tempo, contribuindo para um melhor resultado no *gap* de complementaridade e mantendo os erros nas condições de factibilidade e otimalidade dentro de tolerâncias aceitáveis.

Conseguimos obter bons resultados utilizando as funções objetivo propostas. Esse resultado mostra, de certa forma, que não é preciso alterações significativas no desenvolvimento apresentado neste trabalho para se adotar outras funções objetivo.

Alguns problemas de convergência do método ocorreram devido à não-linearidade do problema de fluxo de potência ótimo, dificultando a escolha de parâmetros e pontos iniciais adequados. A utilização de pontos iniciais resultantes do problema de fluxo de carga estão relacionadas apenas com as equações de fluxo de carga, sendo necessários ajustes referentes às outras restrições do problema.

Estes métodos podem ser implementados para resolver problemas de grande porte e problemas sob condições mais restritas. Para isso é necessário um aproveitamento da estrutura esparsa e também um estudo mais detalhado sobre a obtenção dos melhores parâmetros e pontos iniciais adequados para cada sistema.

Uma vantagem desse desenvolvimento, observada nos testes, foi o bom desempenho do método utilizando os parâmetros referência sem que houvesse a necessidade de modificações. Apenas em algumas situações, para efeitos de comparações, esses parâmetros iniciais foram alterados.

Para os problemas FPOR, obtivemos exatamente as mesmas soluções fornecidas pelo método com todas as heurísticas de ponto inicial utilizadas. A utilização do método com a heurística HAT apresentou bons resultados. Os pontos iniciais fornecidos pelas heurísticas HF e HAT são praticamente os mesmos, a diferença é que esses pontos poderiam ser muito infactíveis para o problema original, mas para a heurística HAT esses pontos são solução ótima global do subproblema definido. Essa propriedade colaborou para a convergência do método em todos os sistemas testados.

Outra característica positiva na utilização do método com a heurística HAT é a eficiência para encontrar soluções ótimas quando a otimização está relacionada com perdas de potência ativa nas linhas.

No geral o objetivo do trabalho foi alcançado, pois mostramos que o método desenvolvido é capaz de resolver problemas de fluxo de potência ótimo de diferentes portes e características. A implementação realizada apresentou facilidades para novos desenvolvimentos e pesquisas, onde as alterações no código podem ser realizadas de forma simples. A ferramenta computacional está pronta para inclusão de novas restrições, a utilização de outras variáveis, como *tap*, para a utilização específica em cada sistema.

O código, apesar de estar escrito em linguagem de programação para o ambiente MATLAB, não utiliza rotinas especiais, como *toolboxes* externos de otimização. Para implementar esse código em outra linguagem de programação, apenas as questões do armazenamento e operações matriciais esparsas deverão ser observadas. Essas funções podem ser feitas com o uso de várias bibliotecas de domínio público disponíveis para várias linguagem de programação.

A facilidade para definir conjuntos de índices que selecionam as variáveis e as restrições é um fator de interesse para pesquisadores na área. Um exemplo prático desse uso foi os testes da proposta SLPV.

Através dos testes pudemos avaliar os resultados utilizando a proposta SLPV. Apesar de que para algumas barras, os valores de tensão excederam os limites permitidos, as soluções apresentadas foram satisfatórias. Podemos ter limites individuais de tensão para essas barras, e até mesmo serem objetos de estudo. Podemos avaliar o sistema limitando a injeção de reativos em algumas barras vizinhas a essas barras, ou realizar estudos de planejamento de expansão.

6.1 **Propostas Futuras**

Uma proposta para a continuidade desse projeto é a tradução desta implementação para uma linguagem de computação não comercial. Criar uma estrutura de dados eficiente para armazenar os dados fornecidos pelos sistemas. Estudar as operações matriciais com detalhes para as matrizes esparsas resultantes.

Incluir na modelagem os transformadores defasadores e utilizar os *tap*ś de transformadores como variáveis de decisão.

Implementar e realizar testes com funções objetivo alternativas.

Utilizar novos valores para a atualização do parâmetros de energização da heurística HAT, e também estudar a implementação dessa heurística para métodos factíveis para resolução de problemas de otimização em geral.
Referências

ADLER, I.; KARMARKAR, N.; RESENDE, M. G. C.; VEIGA, G. An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming. *Mathematical Programming*, v. 44, p. 297–335, 1989.

AZEVEDO, A. T. de. *Métodos de Pontos Interiores Aplicados em Sistemas de Potência Modelados por Fluxo em Redes*. Tese (Doutor em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2006.

BAPTISTA, E. C.; BELATI, E. A.; da COSTA, G. R. M.: A new solution to the optimal power flow problem. In: IEEE PORTO POWER TECH'2001. 2001 IEEE Porto Power Tech Proceedings. Porto, Portugal, 2001. v. 3, p. 1–6.

BAPTISTA, E. C.; BELATI, E. A.; da COSTA, G. R. M.. Um método primal-dual aplicado na resolução do problema de fluxo de potência ótimo. *Pesquisa Operacional*, Rio de Janeiro, RJ, v. 24, n. 2, p. 215–226, 2004.

CARPENTIER, J. Contribution to the economic dispatch problem. *Bulletin de la Société Française des Électriciens*, v. 8, p. 431–447, 1962.

da COSTA, G. R. M.; COSTA, C. E. U.; SOUZA, A. M. Comparative studies of optimization methods for the optimal power flow problem. *Electric Power Systems Research*, v. 56, p. 249–254, 2000.

DENNIS, J. E.; SCHNABEL, R. B. Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. Philadelphia, PA, EUA: SIAM, 1996.

DIKIN, I. I. Iterative solution of problems of linear and quadratic programming. *Soviets Math. Doklady*, v. 8, p. 674–675, 1967.

DOMMEL, H. W.; TINNEY, W. F. Optimal power flow solutions. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS 87, n. 10, p. 1866–1876, 1968.

EL-BAKRY, A. S.; TAPIA, R. A.; TSUCHIYA, T.; ZHANG, Y. On the formulation and the theory of the Newton interior-point method for nonlinear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 89, p. 507–541, 1996.

FIACCO, A. V.; MCCORMICK, G. P. Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained *Minimization Techniques*. New York, NY, EUA: John Wiley, 1968.

FRISCH, K. R. The Logarithmic Potential Method of Convex Programming. Oslo, Noruega, 1955.

GARZILLO, A.; INNORTA, M.; RICCI, M. The problem of the active and reactive optimum power dispatching solved by utilizing a primal-dual interior point method. *Electric Power & Energy Systems*, v. 20, p. 427–434, 1998.

GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. *Matrix Computations Third Edition*. Baltimore, MD, EUA: The Johns Hopkins University Press, 1996.

GONÇALVES, M. de O. *Perdas Aparente Série como Critério a Ser Minimizado no Fluxo de Potência Ótimo Reativo*. Dissertação (Mestre em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2006.

GONDZIO, J. Presolve analysis of linear programs prior to applying an interior point method. *ORSA Journal on Computing*, v. 9, n. 1, p. 73–91, 1997.

GRANVILLE, S. Optimal reactive power dispatch through interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 9, n. 1, p. 136–146, 1994.

GRANVILLE, S.; MELLO, J. C. O.; MELO, A. C. G. Application of interior point methods to power flow unsolvability. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 11, n. 2, p. 1096–1103, 1996.

HABIBALLAH, I. O.; QUINTANA, V. H. Exact-decoupled rectangular coordenates state estimation with efficient data structure. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 7, n. 1, p. 45–53, 1992.

IRISARRI, G. D.; WANG, X.; TONG, J.; MOKHTARI, S. Maximum loadability of power systems using interior point non-linear optimization method. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 12, n. 1, p. 162–172, 1997.

IWAMOTO, S.; TAMURA, Y. A load flow calculation method for ill-conditioned power systyems. *IEEE Transactions on Power Applications and Systems*, PAS–100, p. 1736–1743, 1981.

JABR, R. A.; COONICK, A. H.; CORY, B. J. A primal-dual interior point method for optimal power flow dispatching. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 17, n. 3, p. 654–662, 2002.

KARMARKAR, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, v. 4, n. 4, p. 373–395, 1984.

LIMA, F. G. M.; SOARES, S.; SANTOS JR., A.; ALMEIDA, K. C.; GALIANA, F. D. Numerical experiments with an optimal power flow algorithm based on parametric techniques. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 16, n. 3, p. 374–379, 2001.

LUENBERGER, D. G. Linear and Nonlinear Programming. Reading: Addison-Wesley, 1984.

LUSTIG, I. J.; MARSTEN, R. E.; SHANNO, D. F. Computational experience with a primal-dual interior-point method for linear programming. *Linear Algebra Appl.*, v. 152, p. 191–222, 1991.

LUSTIG, I. J.; MARSTEN, R. E.; SHANNO, D. F. On implementing Mehrotra's predictorcorrector interior point method for linear programming. *SIAM J. Optimization*, v. 2, p. 435–449, 1992.

MARTINEZ, J. M.; SANTOS, L. T. Some new theoretical results on recursive quadratic programming algorithms. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 97, p. 435–454, 1998.

MEGIDDO, N. Pathways to the optimal set in linear programming. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, EUA, p. 131–158, 1988.

MEHROTRA, S. On the implementation of a primal-dual interior point method. *SIAM Journal on Optimization*, v. 2, n. 4, p. 575–601, 1992.

MOMOH, J. A.; EL-HAWARY, M. E.; ADAPA, R. A review of selected optimal power flow literature to 1993, part II Newton, linear programming and interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 14, n. 1, p. 105–111, 1999.

MONTEIRO, R. D. C.; ADLER, I.; RESENDE, M. G. C. A polynomial-time primal-dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extension. *Mathematics of Operations Research*, v. 15(2), p. 191–214, 1990.

MONTICELLI, A. J. *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*. São Paulo, SP: Edgard Blcher, 1983.

MONTICELLI, A. J.; GARCIA, A. *Introdução a Sistemas de Energia Elétrica*. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2000.

NEJDAWI, I. M.; CLEMENTS, K. A.; DAVIS, P. W. An efficient interior point method for sequential quadratic programming based optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 15, n. 4, p. 1179–1183, 2000.

OLIVEIRA, A. R. L.; SOARES, S. Métodos de pontos interiores para problema de fluxo de potência Ótimo. *Anais do XIII Congresso Brasileiro de Automática, em CD-ROM, Florianópolis, SC*, p. 790–795, 2000.

OLIVEIRA, A. R. L.; SOARES, S. Métodos de pontos interiores para problema de fluxo de potência Ótimo dc. *SBA Controle & Automação, Sociedade Brasileira de Automática*, v. 14, n. 3, p. 278–284, 2003.

OLIVEIRA, A. R. L.; SOARES, S.; NEPOMUCENO, L. Optimal active power dispatch combining network flow and interior point approaches. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 18, n. 4, p. 1235–1240, 2003.

OLIVEIRA, A. R. L.; SOARES, S.; NEPOMUCENO, L. Short term hydroelectric scheduling combining network flow and interior point approaches. *Electrical Power & Energy Systems*, v. 27, n. 2, p. 91–99, 2005.

OVERBYE, T. J.; KLUMP, R. P. Effective calculation of power system low-voltage solutions. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 11, n. 1, p. 75–82, 1996.

PONNAMBALAM, K.; QUINTANA, V. H.; VANNELLI, A. A fast algorithm for power system optimization problems using an interior point method. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 7, n. 2, p. 892–899, 1992.

QUINTANA, V. H.; TORRES, G. L.; MEDINA-PALOMO, J. Interior point methods and their applications to power systems: A classification of publications and software codes. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 15, n. 1, p. 170–176, 2000.

SANTOS, J. R.; LORA, A. T.; EXPÓSITO, A. G.; RAMOS, J. L. M. Finding improved local minima of power system optimization problems by interior-point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 18, n. 1, p. 238–244, 2003.

SASSON, A. M. Combined use of the Powell and Fletcher-Powell nonlinear programming load flow method. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. 88, p. 1530–1537, 1969.

SASSON, A. M.; VILORIA, F.; ABOYTES, F. Optimal load flow solutions using the hessian matrix. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. 92, p. 31–41, 1973.

SOARES, S.; SALMAZO, C. T. Minimum loss predispatch model for hydroelectric systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 12, n. 3, p. 1220–1228, 1997.

THOMAZ, A. *Métodos de Pontos Interiores Aplicados ao Fluxo de Carga Ótimo Utilizando Coordenadas Cartesianas*. Dissertação (Mestre em Ciências de Computação e Matemática Computacional) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2003.

TORRES, G. L. *Nonlinear Optimal Power Flow by Interior and Non-Interior Point Methods*. Tese (PhD em Engenharia Elétrica) — University of Waterloo, Ontario, Canadá, 1998.

TORRES, G. L.; QUINTANA, V. H. An interior point method for nonlinear optimal power flow using voltage rectangular coordinates. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 13, n. 4, p. 1211–1218, 1998.

TORRES, G. L.; QUINTANA, V. H. On a nonlinear multiple-centrality-corrections interior-point method for optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 16, n. 2, p. 222–228, 2001.

VANDERBEI, R. J. *Linear Programming – Foundations and Extensions*. Boston, MA, EUA: Kluwer Academics Publishers, 1996.

VARGAS, L. S.; QUINTANA, V. H.; VANNELLI, A. A tutorial description of an interior point method and its applications to security-constrained economic dispatch. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 8, n. 3, p. 1315–1324, 1993.

WEI, H.; SASAKI, H.; KUBOKEWA, J.; YOKOYAMA, R. An interior point nonlinear programming for optimal power flow problems with a novel data structure. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 13, n. 3, p. 870–877, 1998.

WEI, H.; SASAKI, H.; YOKOYAMA, R. An application of interior point quadratic programming algorithm to power system optimization problems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 11, n. 1, p. 260–266, 1996.

WRIGHT, S. J. *Primal-Dual Interior-Point Methods*. Philadelphia, PA, EUA: SIAM Publications, SIAM, 1996.

WU, Y.-C.; DEBS, A. S. Initialisation, decoupling, hot start, and warm start in direct nonlinear interior point algorithm for optimal power flows. *IEE Proceedings - Generation*, *Transmission and Distribution*, v. 148, n. 1, p. 67–75, 2001.

WU, Y. Q.; DEBS, A. S.; MASTERN, R. E. A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for optimal power flows. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 9, n. 2, p. 876–883, 1994.

YAN, W.; YU, J.; YU, D. C.; BHATTARAI, K. A new optimal reactive power flow model in rectangular form and its solution by predictor corrector primal dual interior point method. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 21, n. 1, p. 61–67, 2006.

YAN, X.; QUINTANA, V. H. An infeasible interior-point algorithm for optimal power-flow problems. *Electric Power Systems Research*, v. 39, p. 39–46, 1996.

ZHANG, Y.; TAPIA, R. A. Superlinear and quadratic convergence of primal-dual interior point methods for linear programming revisited. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Plenum Press, New York, NY, EUA, v. 73, n. 2, p. 229–242, 1992.

APÊNDICE A

Métodos de Pontos Interiores para Programação Linear

Neste apêndice vamos adotar a seguinte forma, denominada padrão, para o problema de programação linear:

minimizar
$$c^{t}x$$

sujeito a $\begin{cases} Ax = b, \\ x \ge 0, \end{cases}$ (A.1)

onde, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com posto *m* e os vetores coluna *x*, *c* e *b* tem as dimensões apropriadas. O dual desse problema é dado por:

maximizar
$$b^t y$$

sujeito a
$$\begin{cases} A^t y + z = c, \\ z \ge 0, \end{cases}$$
 (A.2)

Um ponto é dito interior quando todas as variáveis estão estritamente dentro de seus limites. Um ponto interior é factível quando todas as restrições são satisfeitas, ou seja, o ponto x^0 , onde, $Ax^0 = b \operatorname{com} x^0 > 0$ é um ponto interior factível. As condições de otimalidade dos problemas primal e dual são formadas pela: factibilidade primal

$$b - Ax = 0,$$
$$x \ge 0,$$

factibilidade dual

$$c - A^{t}y - z = 0,$$

$$z \geq 0,$$

e condições de complementaridade (LUENBERGER, 1984; VANDERBEI, 1996):

$$x_i z_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

ou seja:

$$XZU = 0,$$

onde *X* é a matriz diagonal formada pelos elementos do vetor *x*, *Z* é a matriz diagonal formada pelos elementos do vetor *z* e u é o vetor com todos os elementos iguais a 1, $u^t = (1, 1, ..., 1)$. O método de pontos interiores primal-dual pode ser desenvolvido através aplicação do método de Newton (veja Apêndice B) às condições de otimalidade.

A.1 Método Primal-Dual Afim Escala

Este método encontra a solução dos problemas primal e dual aplicando variantes do método de Newton às condições de otimalidade, e modificando o tamanho do passo para manter os pontos interiores. Vamos escrever as condições de otimalidade da seguinte forma:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} Ax + b \\ A^{t}y + z - c \\ XZu \end{pmatrix} = 0.$$

Aplicando o método de Newton neste sistema de equações não-lineares obtemos:

$$(x, y, z) = (x^0, y^0, z^0) - J(x^0, y^0, z^0)^{-1} \cdot f(x^0, y^0, z^0) = (x^0, y^0, z^0) + \Delta^0.$$

Seja:

$$-f(x^0,y^0,z^0) = - egin{pmatrix} Ax^0-b\ A^ty^0+z^0-c\ X^0Z^0\mathbf{U} \end{pmatrix} = egin{pmatrix} r_p^0\ r_d^0\ r_a^0 \end{pmatrix} \equiv r^0.$$

A direção do método de Newton aplicado às equações f(x, y, z) torna-se:

$$J(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{z}^0) \cdot \Delta^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^t & \mathbf{I} \\ \mathbf{Z}^0 & \mathbf{0} & \mathbf{X}^0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_x^0 \\ \Delta_y^0 \\ \Delta_z^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_p^0 \\ \mathbf{r}_d^0 \\ \mathbf{r}_a^0 \end{pmatrix},$$

logo:

$$\Delta^{0} = \begin{pmatrix} \Delta_{x}^{0} \\ \Delta_{y}^{0} \\ \Delta_{z}^{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^{t} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{Z}^{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}^{0} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_{p}^{0} \\ \boldsymbol{r}_{d}^{0} \\ \boldsymbol{r}_{a}^{0} \end{pmatrix}.$$

Podemos assim resumir o método de pontos interiores primal-dual afim escala (MONTEIRO; ADLER; RESENDE, 1990):

Método 2 Pontos Interiores Primal-Dual Afim-Escala Dado um ponto interior (x^0, y^0, z^0) onde $(x^0, z^0) > 0$, Para $\kappa = 0, 1, ...$ $r_p^{\kappa} = -Ax^{\kappa} + b$ $r_d^{\kappa} = -A^t y^{\kappa} - z^{\kappa} + c$ $r_a^{\kappa} = -X^{\kappa} Z^{\kappa} U$ $\Delta^{\kappa} = J^{-1}(x^{\kappa}, y^{\kappa}, z^{\kappa}) \cdot r^{\kappa}$ calcule o tamanho do passo primal α_p^{κ} e dual α_d^{κ} $x^{\kappa+1} = x^{\kappa} + \alpha_p^{\kappa} \Delta_x^{\kappa}$ $y^{\kappa+1} = y^{\kappa} + \alpha_d^{\kappa} \Delta_y^{\kappa}$ $z^{\kappa+1} = z^{\kappa} + \alpha_d^{\kappa} \Delta_z^{\kappa}$ até convergir.

O critério de convergência usado nesse método é baseado nas condições de otimalidade:

$$\left| \frac{x^t z}{1 + c^t x + b^t y} \right| \leq \varepsilon,$$

$$\frac{\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2}{1 + \|\boldsymbol{b}\|_2} \leq \varepsilon,$$
$$\frac{\|\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\|_2}{1 + \|\boldsymbol{c}\|_2} \leq \varepsilon,$$

onde ε é a tolerância desejada.

Para calcular o tamanho dos passos α_p^{κ} e α_d^{κ} , definimos primeiramente:

$$\rho_{\rm p}^{\kappa} = \min_{\Delta_{x_i}^{\kappa} < 0} \left\{ -\frac{x_i^{\kappa}}{\Delta_{x_i}^{\kappa}} \right\},\tag{A.3}$$

$$\rho_{\rm d}^{\kappa} = \min_{\Delta_{z_i}^{\kappa} < 0} \left\{ -\frac{z_i^{\kappa}}{\Delta_{z_i}^{\kappa}} \right\},\tag{A.4}$$

onde os valores ρ_p^{κ} e ρ_d^{κ} representam o tamanho de passo máximo tal que a primeira variável de *x* e *z* se anulam respectivamente.

Logo, o tamanho do passo α_p^{κ} e α_d^{κ} será multiplicado por $\tau \in (0,1)$:

$$\begin{aligned} \alpha_{\rm p}^{\kappa} &= \min\left\{1; \tau \rho_{\rm p}^{\kappa}\right\}, \\ \alpha_{\rm d}^{\kappa} &= \min\left\{1; \tau \rho_{\rm d}^{\kappa}\right\}, \end{aligned} \tag{A.5}$$

o que garante que nenhuma variável de x ou z será anulada.

Os métodos afim-escala têm uma desvantagem importante, eles permitem que as variáveis (x, z) se aproximem de seus limites muito rapidamente. Conseqüentemente as direções calculadas são muito distorcidas e o método converge lentamente, pois $x_i z_i \approx 0$. Para evitar que isto ocorra é acrescentada uma perturbação (μ) na condição de complementaridade $x_i z_i = 0$. Em seu lugar consideramos $x_i z_i = \mu$ ou seja, o método primal-dual resolve o seguinte sistema de equações não-lineares a cada iteração:

$$\begin{cases} \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^{\kappa} &= 0, \\ \boldsymbol{c} - A^{t}\boldsymbol{y}^{\kappa} - \boldsymbol{z}^{\kappa} &= 0, \\ \mu^{\kappa}\boldsymbol{U} - \boldsymbol{X}^{\kappa}\boldsymbol{Z}^{\kappa}\boldsymbol{U} &= 0, \end{cases}$$

onde μ^{κ} é um parâmetro que varia a cada iteração $\mu^{\kappa} \to 0$ quando $\kappa \to \infty$. As únicas alterações do problema primal-dual seguidor de caminho em relação ao método afim-escala são a substituição de r_a^{κ} por $r_c^{\kappa} = \mu^{\kappa} \upsilon - X^{\kappa} Z^{\kappa} \upsilon$ e o cálculo da pertubação $\mu^{\kappa} = \beta^{\kappa} \frac{\gamma^{\kappa}}{n}$, onde $\gamma = x^t z$ representa o *gap* de dualidade se x e z são factíveis (WRIGHT, 1996), $\beta \in (0,1)$ e $\frac{\gamma^{\kappa}}{n}$ seria uma "medida" da distância média de um ponto ótimo. O Jacobiano permanece o mesmo.

A.2 Método Preditor-Corretor

O método preditor-corretor é o método de pontos interiores mais utilizado na prática, pois obtém os melhores resultados para problemas considerados grandes e tem convergência quadrática considerando a resolução dos dois sistemas lineares como uma única iteração. Este método utiliza uma direção com três componentes (WRIGHT, 1996):

- direção afim-escala;
- direção de centragem (β);
- direção de correção que compensa a aproximação linear do método de Newton:

$$(\mathbf{x} + \Delta_x)^t (\mathbf{z} + \Delta_z) = \Delta_x^t \Delta_z.$$

No método preditor-corretor calcula-se primeiro a direção afim escala ($\tilde{\Delta} = \Delta_{\tilde{x}}, \Delta_{\tilde{y}}, \Delta_{\tilde{z}}$):

$$A\Delta_{\tilde{x}} = r_{p},$$

$$A^{t}\Delta_{\tilde{y}} + \Delta_{\tilde{z}} = r_{d},$$

$$Z\Delta_{\tilde{x}} + X\Delta_{\tilde{z}} = r_{a} = -XZU.$$
(A.6)

Usando o mesmo jacobiano encontra-se em seguida a direção perturbada no ponto:

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (x, y, z) + (\Delta_{\tilde{x}}, \Delta_{\tilde{y}}, \Delta_{\tilde{z}}),$$

ou seja:

$$\begin{cases}
A\Delta_{\hat{x}} = \mathbf{r}_p = \mathbf{b} - A_{\tilde{x}} = \mathbf{b} - A(\mathbf{x} + \Delta_{\tilde{x}}) = 0, \\
A^t \Delta_{\hat{y}} + \Delta_{\hat{z}} = \mathbf{r}_d = 0, \\
Z\Delta_{\hat{x}} + X\Delta_{\hat{z}} = \mu \mathbf{U} - (\mathbf{X} + \mathbf{D}_{\tilde{x}})(\mathbf{Z} + \mathbf{D}_{\tilde{z}})\mathbf{U} = \mu \mathbf{U} - \mathbf{D}_{\tilde{x}}\mathbf{D}_{\tilde{z}}\mathbf{U},
\end{cases}$$

onde, $\mu \upsilon$ é a centragem e $(X + D_{\tilde{x}}) (Z + D_{\tilde{z}})$ é a correção não-linear, sendo $D_{\tilde{x}}$ e $D_{\tilde{z}}$ as matrizes diagonais dos vetores $\Delta_{\tilde{x}}$ e $\Delta_{\tilde{z}}$ respectivamente. A direção utilizada será a soma das duas direções:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_x = \Delta_{\tilde{x}} + \Delta_{\hat{x}}, \\ \Delta_y = \Delta_{\tilde{y}} + \Delta_{\hat{y}}, \\ \Delta_z = \Delta_{\tilde{z}} + \Delta_{\hat{z}}. \end{array} \right.$$

Logo, $(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ podem ser calculados diretamente somando os dois sistemas lineares:

$$\begin{aligned} A(\Delta_{\tilde{x}} + \Delta_{\hat{x}}) &= r_p, \\ A^t(\Delta_{\tilde{y}} + \Delta_{\hat{y}}) + \Delta_{\tilde{z}} + \Delta_{\hat{z}} &= r_d, \\ Z(\Delta_{\tilde{x}} + \Delta_{\hat{x}}) + X(\Delta_{\tilde{z}} + \Delta_{\hat{z}}) &= r_a + \mu \upsilon - D_{\tilde{x}} D_{\tilde{z}} \upsilon, \end{aligned}$$

ou seja, $\hat{\Delta} = (\Delta_{\hat{x}}, \Delta_{\hat{y}}, \Delta_{\hat{z}})$ nunca é calculada. Substituindo as direções, temos:

$$A\Delta_{x} = r_{p},$$

$$A^{t}\Delta_{y} + \Delta_{z} = r_{d},$$

$$Z\Delta_{x} + X\Delta_{z} = r_{a} + \mu U - D_{\tilde{x}}D_{\tilde{z}}U = r_{s}.$$
(A.7)

O cálculo da perturbação μ^{κ} é função da direção afim. Quanto melhor a direção menor será a perturbação e vice-versa. Sejam:

$$\begin{split} \mu^{\kappa} &= \beta^{\kappa} \cdot \frac{\gamma^{\kappa}}{n}, \\ \tilde{\gamma}^{\kappa} &= \left(\boldsymbol{x}^{\kappa} + \tilde{\alpha}_{\mathrm{p}}^{\kappa} \Delta_{\tilde{x}}^{\kappa} \right)^{t} \cdot \left(\boldsymbol{z}^{\kappa} + \tilde{\alpha}_{\mathrm{d}}^{\kappa} \Delta_{\tilde{z}}^{\kappa} \right), \end{split}$$

onde $\tilde{\alpha}_{p}^{\kappa}$ e $\tilde{\alpha}_{d}^{\kappa}$ são os tamanhos dos passos em relação aos problemas primal e dual respectivamente. São calculados da seguinte forma:

$$\begin{split} \tilde{\rho}_{\mathrm{p}}^{\kappa} &= \min_{\Delta_{x_{i}}^{\kappa} < 0} \left\{ -\frac{\tilde{x}_{i}^{\kappa}}{\Delta_{\tilde{x}_{i}}^{\kappa}} \right\}, \\ \tilde{\rho}_{\mathrm{d}}^{\kappa} &= \min_{\Delta_{z_{i}}^{\kappa} < 0} \left\{ -\frac{\tilde{z}_{i}^{\kappa}}{\Delta_{\tilde{z}_{i}}^{\kappa}} \right\}, \end{split}$$

sendo:

 $\tilde{\alpha}_{p}^{\kappa} = \min\left\{1; \tau \tilde{\rho}_{p}^{\kappa}\right\} e \ \tilde{\alpha}_{d}^{\kappa} = \min\left\{1; \tau \tilde{\rho}_{d}^{\kappa}\right\}, \text{ com } \tau \in (0, 1).$ onde: $\left(-\left(\tilde{\alpha}^{\kappa}\right)^{2}\right)$

$$\beta^{\kappa} = \begin{cases} \left(\frac{\tilde{\gamma}^{\kappa}}{\gamma^{\kappa}}\right)^{2}, & \text{se } \gamma^{\kappa} > 1, \\ \frac{\gamma^{\kappa}}{\sqrt{n}}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A escolha da direção de centragem quando $\gamma^{\kappa} \leq 1$ é baseada em razões técnicas e são mostradas em (ZHANG; TAPIA, 1992). Podemos resumir o método preditor-corretor da seguinte forma:
$$\begin{split} & \underline{\text{Método 3} - \text{Pontos Interiores Preditor-Corretor}} \\ & \text{Dados } \tau \in (0, 1), (x^0, y^0, z^0) \text{ tal que } (x^0, z^0) > 0, \\ & \text{Para } \kappa = 0, 1, \dots \\ & r_p^{\kappa} = b - Ax^{\kappa} \\ & r_d^{\kappa} = c - A^t y^{\kappa} - z^{\kappa} \\ & r_a^{\kappa} = -X^{\kappa} Z^{\kappa} U \\ & \text{calcule } \tilde{\Delta}^{\kappa} \in \tilde{\alpha}_p^{\kappa}, \tilde{\alpha}_d^{\kappa} \\ & \tilde{\gamma}^{\kappa} = \left(x^{\kappa} + \tilde{\alpha}_p^{\kappa} \Delta_{\tilde{x}}^{\kappa}\right)^t \left(z^{\kappa} + \tilde{\alpha}_d^{\kappa} \Delta_{\tilde{z}}^{\kappa}\right) \\ & \mu^{\kappa} = \left(\frac{\tilde{\gamma}}{\gamma}\right)^2 \frac{\tilde{\gamma}}{n} \\ & r_s^{\kappa} = \mu^{\kappa} U + r_a^{\kappa} - D_{\tilde{x}^{\kappa}} D_{\tilde{z}^{\kappa}} U \\ & \text{calcule } \Delta^{\kappa} \in \alpha_p^{\kappa}, \alpha_d^{\kappa} \\ & x^{\kappa+1} = x^{\kappa} + \alpha_p^{\kappa} \Delta_x^{\kappa} \\ & y^{\kappa+1} = y^{\kappa} + \alpha_d^{\kappa} \Delta_z^{\kappa} \\ & z^{\kappa+1} = z^{\kappa} + \alpha_d^{\kappa} \Delta_z^{\kappa} \\ & \text{até convergir.} \end{split}$$

U U

O critério de convergência é o mesmo do método primal-dual afim escala. O método resolve dois sistemas utilizando a mesma matriz.

A.3 Cálculo das Direções nos Métodos de Pontos Interiores

O sistema linear (A.7) tem dimensão 2n + m. Este sistema pode ser reduzido à dimensão m através das seguintes relações:

$$\Delta_y = (AD^{-1}A^t)^{-1}(r_p + AD^{-1}r_d - AZ^{-1}r_s),$$

$$\Delta_x = D^{-1}(A^t\Delta_y - r_d + X^{-1}r_s),$$

$$\Delta_z = X^{-1}(r_s - Z\Delta_x).$$

Essas simplificações também são válidas para os métodos primal-dual afim escala e seguidor de caminho. A única alteração será do resíduo r_s . O esforço maior, portanto, está no cálculo de Δ_y , onde uma matriz simétrica definida positiva deve ser decomposta a cada iteração. Usualmente é utilizada a decomposição de Cholesky (GOLUB; LOAN, 1996) na resolução deste sistema linear.

APÊNDICE B

Método de Newton

B.1 Uma Variável

O método de Newton para uma variável busca zeros de uma função resolvendo equações da forma $\phi(x) = 0$. Este método pode ser deduzido aplicando a série de Taylor a $\phi(x)$ em torno de x^0 , obtendo:

$$\phi(x) = \phi(x^0) + \phi'(x^0)(x - x^0) + \dots$$

Ignorando os termos de ordem superior temos $\phi(x) = 0$:

$$-rac{\phi(x^0)}{\phi'(x^0)} = x - x^0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -rac{\phi(x^0)}{\phi'(x^0)} + x^0,$$

obtendo assim o processo iterativo:

$$\boldsymbol{x}^{\kappa+1} = \boldsymbol{x}^{\kappa} - \frac{\phi(\boldsymbol{x}^{\kappa})}{\phi'(\boldsymbol{x}^{\kappa})},$$

onde: $d^{\kappa} = -\frac{\phi(x^{\kappa})}{\phi'(x^{\kappa})}$ é a direção de Newton. Este processo pode ser repetido até que uma tolerância estabelecida seja satisfeita.

B.2 Várias Variáveis

O método de Newton para várias variáveis tem como objetivo encontrar os zeros de sistemas de equações da seguinte forma: seja $\Phi(x) = 0$ um conjunto de funções não - lineares $\phi_i(x)$ onde $\phi_i(x) = 0$, i = 1, ..., n.

O método de Newton pode ser deduzido aplicando a série de Taylor para cada $\phi_i(x)$ em torno de x^0 , obtendo:

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \phi_i(\mathbf{x}^0) + \left[\nabla \phi_i(\mathbf{x}^0)\right]^t (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \dots,$$

para todo $i = 1, \ldots, n$, onde:

$$\nabla \phi_i(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_i(\mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{x}^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_i(\mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{x}^n} \end{pmatrix}.$$

Ignorando os termos de ordem superior temos:

$$\left[\nabla\phi_i(\mathbf{x}^0)\right]^t(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)=-\phi_i(\mathbf{x}^0), \quad i=1,\ldots,n$$

Onde definimos agora o Jacobiano no ponto x^0 :

$$J(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \nabla \phi_1(\mathbf{x}^0) \\ \vdots \\ \nabla \phi_n(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix}^t \quad \mathbf{e} \quad \Phi(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \phi_1(\mathbf{x}^0) \\ \vdots \\ \phi_n(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix}.$$

Podemos resumir assim o método de Newton:

Método 4 – NewtonDado x^0 ,Para $\kappa = 0, 1, \dots$ $d^{\kappa} = -J(x^{\kappa})^{-1} \cdot \Phi(x^{\kappa})$ $x^{\kappa+1} = x^{\kappa} + d^{\kappa}$ até convergir.

APÊNDICE C

Derivações: Equações de Fluxo de Carga

C.1 Representação Clássica (R-CLASS)

C.1.1 Derivadas de Primeira Ordem

$$\nabla_{x}g_{p}(x) \in \nabla_{x}h_{p}(x)$$

$$\nabla_{e_{k}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}P_{km}\right) = \sum_{m\in\Omega_{k}}\left(2a_{km}^{2}g_{km}e_{k} - a_{km}g_{km}e_{m} + a_{km}b_{km}f_{m}\right),$$

$$\nabla_{e_{m}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}P_{km}\right) = -a_{km}g_{km}e_{k} - a_{km}b_{km}f_{k},$$

$$\nabla_{f_{k}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}P_{km}\right) = \sum_{m\in\Omega_{k}}\left(2a_{km}^{2}g_{km}f_{k} - a_{km}g_{km}f_{m} - a_{km}b_{km}e_{m}\right),$$

$$\nabla_{f_{m}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}P_{km}\right) = -a_{km}g_{km}f_{k} + a_{km}b_{km}e_{k}.$$

 $\nabla_x h_v(x)$

$$\begin{split} \nabla_{e_k} \left(\sum_{m \in \Omega_k} e_k^2 + f_k^2 \right) &= 2e_k, \qquad \nabla_{f_k} \left(\sum_{m \in \Omega_k} e_k^2 + f_k^2 \right) &= 2f_k, \\ \nabla_{e_m} \left(\sum_{m \in \Omega_k} e_k^2 + f_k^2 \right) &= 0, \qquad \nabla_{f_m} \left(\sum_{m \in \Omega_k} e_k^2 + f_k^2 \right) &= 0. \end{split}$$

 $\nabla_{x}g_{q}(x) \in \nabla_{x}h_{q}(x)$

$$\nabla_{e_k} \left(\sum_{m \in \Omega_k} Q_{km} \right) = \sum_{m \in \Omega_k} \left[-2a_{km}^2 \left(b_{km} + b_{km}^{\rm sh} \right) e_k + a_{km} g_{km} f_m + a_{km} b_{km} e_m \right],$$

$$\nabla_{e_m} \left(\sum_{m \in \Omega_k} Q_{km} \right) = -a_{km} g_{km} f_k + a_{km} b_{km} e_k,$$

$$\nabla_{f_k} \left(\sum_{m \in \Omega_k} Q_{km} \right) = \sum_{m \in \Omega_k} \left[-2a_{km}^2 \left(b_{km} + b_{km}^{\rm sh} \right) f_k - a_{km} g_{km} e_m + a_{km} b_{km} f_m \right],$$

$$\nabla_{f_m} \left(\sum_{m \in \Omega_k} Q_{km} \right) = +a_{km} g_{km} e_k + a_{km} b_{km} f_k.$$

C.1.2 Derivadas de Segunda Ordem

$$\nabla_{xx}^{2} g_{p}(x) \in \nabla_{xx}^{2} h_{p}(x)$$

$$\nabla_{e_{k}e_{k}} \left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) = \sum_{m \in \Omega_{k}} \left(2a_{km}^{2}g_{km} \right), \qquad \nabla_{e_{k}f_{k}} \left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) = 0,$$

$$\nabla_{e_{k}e_{m}} \left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) = -a_{km}g_{km}, \qquad \nabla_{e_{k}f_{m}} \left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) = +a_{km}b_{km},$$

$$\nabla_{e_{m}e_{k}} \left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) = -a_{km}g_{km}, \qquad \nabla_{e_{m}f_{k}} \left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) = -a_{km}b_{km},$$

$$\nabla_{e_{m}e_{m}} \left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) = 0, \qquad \nabla_{e_{m}f_{m}} \left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) = 0,$$

$$\nabla_{f_{k}f_{k}} \left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) = \sum_{m \in \Omega_{k}} \left(2a_{km}^{2}g_{km} \right), \qquad \nabla_{f_{k}e_{k}} \left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) = 0,$$

$$\nabla_{f_{k}f_{m}} \left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) = -a_{km}g_{km}, \qquad \nabla_{f_{k}e_{m}} \left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) = -a_{km}b_{km},$$

$$\nabla_{f_{m}f_{k}} \left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) = -a_{km}g_{km}, \qquad \nabla_{f_{m}e_{m}} \left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) = -a_{km}b_{km},$$

$$\nabla_{f_{m}f_{m}} \left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) = -a_{km}g_{km}, \qquad \nabla_{f_{m}e_{m}} \left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) = +a_{km}b_{km},$$

$$\nabla_{f_{m}f_{m}} \left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) = 0, \qquad \nabla_{f_{m}e_{m}} \left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) = 0.$$

 $\nabla_{xx}^2 g_q(x) \in \nabla_{xx}^2 h_q(x)$

 $\nabla_{e_{k}e_{k}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}Q_{km}\right) = \sum_{m\in\Omega_{k}}\left[-2a_{km}^{2}\left(b_{km}+b_{km}^{\mathrm{sh}}\right)\right], \qquad \nabla_{e_{k}f_{k}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}Q_{km}\right) = 0,$ $\nabla_{e_{k}e_{m}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}Q_{km}\right) = +a_{km}b_{km}, \qquad \nabla_{e_{k}f_{m}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}Q_{km}\right) = +a_{km}g_{km},$ $\nabla_{e_{m}e_{k}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}Q_{km}\right) = +a_{km}b_{km}, \qquad \nabla_{e_{m}f_{k}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}Q_{km}\right) = -a_{km}g_{km},$ $\nabla_{e_{m}e_{m}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}Q_{km}\right) = 0, \qquad \nabla_{e_{m}f_{m}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}Q_{km}\right) = 0,$ $\nabla_{f_{k}f_{k}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}Q_{km}\right) = \sum_{m\in\Omega_{k}}\left[-2a_{km}^{2}\left(b_{km}+b_{km}^{\mathrm{sh}}\right)\right], \qquad \nabla_{f_{k}e_{k}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}Q_{km}\right) = 0,$ $\nabla_{f_{k}f_{m}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}Q_{km}\right) = +a_{km}b_{km}, \qquad \nabla_{f_{k}e_{m}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}Q_{km}\right) = -a_{km}g_{km},$ $\nabla_{f_{m}f_{k}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}Q_{km}\right) = +a_{km}b_{km}, \qquad \nabla_{f_{m}e_{m}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}Q_{km}\right) = -a_{km}g_{km},$ $\nabla_{f_{m}f_{m}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}Q_{km}\right) = +a_{km}b_{km}, \qquad \nabla_{f_{m}e_{m}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}Q_{km}\right) = +a_{km}g_{km},$ $\nabla_{f_{m}f_{m}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}Q_{km}\right) = 0, \qquad \nabla_{f_{m}e_{m}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}Q_{km}\right) = 0.$

 $\nabla^2_{xx} h_v(x)$

C.1.3 Propriedade de Simetria

Podemos perceber a igualdade entre alguns componentes nas derivadas de segunda ordem. Essas igualdades são asseguradas pelo Teorema 1.

Teorema 1 (Schwarz) Seja $\Phi(x, y)$ uma função e um ponto P de seu domínio. Se as derivadas Φ_x , $\Phi_y e \Phi_{xy}$ existirem em P e se Φ_{xy} for contínua em P, então existe Φ_{yx} em P e $\Phi_{xy}(P) = \Phi_{yx}(P)$.

Definindo as funções anteriormente apresentadas nesta seção como $\Phi(x)$, obtemos as seguintes relações:

$$egin{array}{rcl}
abla_{e_ke_m}\Phi(m{x})&=&
abla_{e_me_k}\Phi(m{x}),\
abla_{e_kf_k}\Phi(m{x})&=&
abla_{f_ke_k}\Phi(m{x}),\
abla_{e_kf_m}\Phi(m{x})&=&
abla_{f_me_k}\Phi(m{x}),\
abla_{e_mf_k}\Phi(m{x})&=&
abla_{f_ke_m}\Phi(m{x}),\
abla_{e_mf_m}\Phi(m{x})&=&
abla_{f_me_m}\Phi(m{x}),\
abla_{f_mf_m}\Phi(m{x})&=&
abla_{f_mf_k}\Phi(m{x}).\
abla_{f_mf_k}\Phi(m{x}).\$$

A identificação de algumas matrizes simétricas são importantes para o estudo da estrutura matricial e facilitam a implementação.

C.2 Representação Matricial (R-MAT)

C.2.1 Estrutura Matricial da Hessiana

Reescrevemos a hessiana \mathcal{H}_x em (3.20) em função das variáveis e, f:

$$\mathcal{H}_{x} := \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{ee} & \mathcal{H}_{ef} \\ \mathcal{H}_{fe} & \mathcal{H}_{ff} \end{bmatrix} + \nabla_{xx}^{2} \phi(x), \qquad (C.1)$$

onde:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_{ee} & \mathcal{H}_{ef} \\ \mathcal{H}_{fe} & \mathcal{H}_{ff} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \nabla_{ee}^2 g(x)y - \nabla_{ee}^2 h(x)z_2 & \nabla_{ef}^2 g(x)y - \nabla_{ef}^2 h(x)z_2 \\ \nabla_{fe}^2 g(x)y - \nabla_{fe}^2 h(x)z_2 & \nabla_{ff}^2 g(x)y - \nabla_{ff}^2 h(x)z_2 \end{bmatrix}.$$
(C.2)

E para calcular os componentes de (C.2), separamos as equações correspondentes à parte ativa e reativa em g(x) e também nas desigualdades envolvendo limites de ativo, reativo e tensão em h(x):

$$\nabla_{xx}^2 \boldsymbol{g}_p(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{y}_p = \begin{bmatrix} \nabla_{ee}^2 \boldsymbol{g}_p(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{y}_p & \nabla_{ef}^2 \boldsymbol{g}_p(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{y}_p \\ \nabla_{fe}^2 \boldsymbol{g}_p(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{y}_p & \nabla_{ff}^2 \boldsymbol{g}_p(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{y}_p \end{bmatrix}, \quad (C.3)$$

$$\nabla_{xx}^2 g_q(x) y_q = \begin{bmatrix} \nabla_{ee}^2 g_q(x) y_q & \nabla_{ef}^2 g_q(x) y_q \\ \nabla_{fe}^2 g_q(x) y_q & \nabla_{ff}^2 g_q(x) y_q \end{bmatrix}, \quad (C.4)$$

$$\nabla_{xx}^{2}\boldsymbol{h}_{v}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}_{2v} = \begin{bmatrix} \nabla_{ee}^{2}\boldsymbol{h}_{v}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}_{2v} & \nabla_{ef}^{2}\boldsymbol{h}_{v}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}_{2v} \\ \nabla_{fe}^{2}\boldsymbol{h}_{v}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}_{2v} & \nabla_{ff}^{2}\boldsymbol{h}_{v}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}_{2v} \end{bmatrix}, \quad (C.5)$$

$$\nabla_{xx}^{2} h_{p}(x) z_{2p} = \begin{bmatrix} \nabla_{ee}^{2} h_{p}(x) z_{2p} & \nabla_{ef}^{2} h_{p}(x) z_{2p} \\ \nabla_{fe}^{2} h_{p}(x) z_{2p} & \nabla_{ff}^{2} h_{p}(x) z_{2p} \end{bmatrix},$$
(C.6)

$$\nabla_{xx}^{2} h_{q}(x) z_{2q} = \begin{bmatrix} \nabla_{ee}^{2} h_{q}(x) z_{2q} & \nabla_{ef}^{2} h_{q}(x) z_{2q} \\ \nabla_{fe}^{2} h_{q}(x) z_{2q} & \nabla_{ff}^{2} h_{q}(x) z_{2q} \end{bmatrix}.$$
 (C.7)

Substituindo as respectivas matrizes em (C.2) obtemos:

$$\mathcal{H}_{ee} := \nabla_{ee}^2 g_p(x) y_p + \nabla_{ee}^2 g_q(x) y_q - \nabla_{ee}^2 h_v(x) z_{2v} - \nabla_{ee}^2 h_p(x) z_{2p} - \nabla_{ee}^2 h_q(x) z_{2q}, \qquad (C.8)$$

$$\mathcal{H}_{ef} := \nabla_{ef}^2 g_p(x) y_p + \nabla_{ef}^2 g_q(x) y_q - \nabla_{ef}^2 h_v(x) z_{2v} - \nabla_{ef}^2 h_p(x) z_{2p} - \nabla_{ef}^2 h_q(x) z_{2q'}$$
(C.9)

$$\mathcal{H}_{fe} := \nabla_{fe}^2 g_p(x) y_p + \nabla_{fe}^2 g_q(x) y_q - \nabla_{fe}^2 h_v(x) z_{2v} - \nabla_{fe}^2 h_p(x) z_{2p} - \nabla_{fe}^2 h_q(x) z_{2q}, \quad (C.10)$$

$$\mathcal{H}_{ff} := \nabla_{ff}^2 g_p(x) y_p + \nabla_{ff}^2 g_q(x) y_q - \nabla_{ff}^2 h_v(x) z_{2v} - \nabla_{ff}^2 h_p(x) z_{2p} - \nabla_{ff}^2 h_q(x) z_{2q}.$$
(C.11)

As derivadas relacionadas à essas matrizes são apresentadas a seguir.

r

C.2.2 Derivadas de Primeira Ordem

$$\nabla_x g_p(x)$$

$$\nabla_{e}g_{p}(x) = EG + FB + \text{diag}(Ge - Bf), \qquad (I_{g_{p}}),$$

$$\nabla_{f}g_{p}(x) = FG - EB + \text{diag}(Gf + Be), \qquad (I_{g_{p}}).$$

 $\nabla_x g_q(x)$

$$\nabla_{e} g_{q}(x) = FG - EB - \operatorname{diag}(Gf + Be), \qquad (I_{g_{q}}),$$

$$\nabla_{f} g_{q}(x) = -EG - FB + \operatorname{diag}(Ge - Bf), \qquad (I_{g_{q}}).$$

 $\nabla_x h_v(x)$ $\nabla_e h_v(x) = 2E,$ $(\mathcal{I}_{h_v}),$ $\nabla_f h_v(x) = 2F,$ $(\mathcal{I}_{h_v}).$ $\nabla_x h_p(x)$ $\nabla_e h_p(x) = EG + FB + \operatorname{diag}(Ge - Bf),$ $(\mathcal{I}_{h_p}),$ $\nabla_{\!f} h_p(x) = FG - EB + \operatorname{diag}(Gf + Be),$ $(\mathcal{I}_{h_p}).$ $\nabla_x h_q(x)$ $\nabla \mathbf{l}$ (T_{τ}) 1: (Cf

$$\begin{aligned}
\nabla_e h_q(x) &= FG - EB - \operatorname{diag}(Gf + Be), & (I_{h_q}), \\
\nabla_f h_q(x) &= -EG - FB + \operatorname{diag}(Ge - Bf), & (I_{h_q}).
\end{aligned}$$

C.2.3 Derivadas de Segunda Ordem

 $\nabla_{xx}^2 g_p(x) y_p$

$$\begin{aligned} \nabla_{ee}^2 g_p(x) y_p &= G^t Y_p + Y_p G, \qquad (I_e, I_e), \\ \nabla_{ef}^2 g_p(x) y_p &= B^t Y_p - Y_p B, \qquad (I_e, I_f), \\ \nabla_{fe}^2 g_p(x) y_p &= B Y_p - Y_p B^t, \qquad (I_f, I_e), \\ \nabla_{ff}^2 g_p(x) y_p &= G^t Y_p + Y_p G, \qquad (I_f, I_f). \end{aligned}$$

 $\nabla_{xx}^2 g_q(x) y_q$

$$\begin{aligned} \nabla_{ee}^2 g_q(x) y_q &= -B^t Y_q + Y_q B, & (I_e, I_e), \\ \nabla_{ef}^2 g_q(x) y_q &= G^t Y_q - Y_q G, & (I_e, I_f), \\ \nabla_{fe}^2 g_q(x) y_q &= G Y_q - Y_q G^t, & (I_f, I_e), \\ \nabla_{ff}^2 g_q(x) y_q &= -B^t Y_q + Y_q B, & (I_f, I_f). \end{aligned}$$

 $\nabla_{xx}^2 h_v(x) z_{2v}$

$$\begin{aligned}
\nabla_{ee}^{2} h_{v}(x) z_{2v} &= 2 \mathbf{Z}_{2v}^{e}, & (I_{e}, I_{e}), \\
\nabla_{ef}^{2} h_{v}(x) z_{2v} &= 0, & (I_{e}, I_{f}), \\
\nabla_{fe}^{2} h_{v}(x) z_{2v} &= 0, & (I_{f}, I_{e}), \\
\nabla_{ff}^{2} h_{v}(x) z_{2v} &= 2 \mathbf{Z}_{2v}^{f}, & (I_{f}, I_{f}).
\end{aligned}$$

 $\nabla_{xx}^2 h_p(x) z_{2p}$

$$\begin{aligned}
\nabla_{ee}^{2} h_{p}(x) z_{2p} &= G^{t} \hat{Z}_{2p} + \hat{Z}_{2p} G, & (I_{e}, I_{e}), \\
\nabla_{ef}^{2} h_{p}(x) z_{2p} &= B^{t} \hat{Z}_{2p} - \hat{Z}_{2p} B, & (I_{e}, I_{f}), \\
\nabla_{fe}^{2} h_{p}(x) z_{2p} &= B \hat{Z}_{2p} - \hat{Z}_{2p} B^{t}, & (I_{f}, I_{e}), \\
\nabla_{ff}^{2} h_{p}(x) z_{2p} &= G^{t} \hat{Z}_{2p} + \hat{Z}_{2p} G, & (I_{f}, I_{f}).
\end{aligned}$$

 $\nabla_{xx}^2 h_q(x) z_{2q}$

$$\begin{aligned} \nabla_{ee}^{2}h_{q}(x)z_{2q} &= -B^{t}\hat{Z}_{2q} + \hat{Z}_{2q}B, & (I_{e}, I_{e}), \\ \nabla_{ef}^{2}h_{q}(x)z_{2q} &= G^{t}\hat{Z}_{2q} - \hat{Z}_{2q}G, & (I_{e}, I_{f}), \\ \nabla_{fe}^{2}h_{q}(x)z_{2q} &= G\hat{Z}_{2q} - \hat{Z}_{2q}G^{t}, & (I_{f}, I_{e}), \\ \nabla_{ff}^{2}h_{q}(x)z_{2q} &= -B^{t}\hat{Z}_{2q} + \hat{Z}_{2q}B, & (I_{f}, I_{f}). \end{aligned}$$

onde, para todo $k, m \in N$:

$$\begin{split} \hat{Z}_{2p} & \rightarrow \quad \hat{Z}_{2p}(k,k) & := \begin{cases} z_{2p_k} & \text{se } k \in I_{h_p}, \\ 0 & \text{caso contrário}, \end{cases} \\ \hat{Z}_{2p}(k,m) & := & 0, \\ \hat{Z}_{2p}(m,k) & := & 0. \end{cases} \\ \hat{Z}_{2q}(k,k) & := & \begin{cases} z_{2q_k} & \text{se } k \in I_{h_q}, \\ 0 & \text{caso contrário}, \end{cases} \\ \hat{Z}_{2q}(k,m) & := & 0, \\ \hat{Z}_{2q}(m,k) & := & 0. \end{cases}$$

APÊNDICE D

Derivações: Funções Objetivo

D.1 Representação Clássica (R-CLASS)

D.1.1 Derivadas de Primeira Ordem

 $\nabla_x \phi_0(x)$

$$\begin{aligned} \nabla_{e_{k}}\phi_{0}(\mathbf{x}) &= \lambda_{k} \left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} - P_{k}^{\mathrm{esp}} \right) \left(\nabla_{e_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) + \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left(\sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} - P_{j}^{\mathrm{esp}} \right) \left(\nabla_{e_{k}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right), \\ \nabla_{e_{k}}\phi_{0}(\mathbf{x}) &= \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left(\sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} - P_{j}^{\mathrm{esp}} \right) \left(\nabla_{e_{k}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right), \\ \nabla_{f_{k}}\phi_{0}(\mathbf{x}) &= \lambda_{k} \left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} - P_{k}^{\mathrm{esp}} \right) \left(\nabla_{f_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) + \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left(\sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} - P_{j}^{\mathrm{esp}} \right) \left(\nabla_{f_{k}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right), \\ \nabla_{f_{k}}\phi_{0}(\mathbf{x}) &= \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left(\sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} - P_{j}^{\mathrm{esp}} \right) \left(\nabla_{f_{k}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right), \\ \nabla_{f_{k}}\phi_{0}(\mathbf{x}) &= \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left(\sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} - P_{j}^{\mathrm{esp}} \right) \left(\nabla_{f_{k}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right). \end{aligned}$$

 $\nabla_x \phi_1(x) \in \nabla_x \phi_2(x)$

$$\nabla_{e_k} \left(\sum_{m \in \Omega_k} P_{km} \right) = \sum_{m \in \Omega_k} \left(2a_{km}^2 g_{km} e_k - a_{km} g_{km} e_m + a_{km} b_{km} f_m \right),$$

$$\nabla_{e_m} \left(\sum_{m \in \Omega_k} P_{km} \right) = -a_{km} g_{km} e_k - a_{km} b_{km} f_k,$$

$$\nabla_{f_k} \left(\sum_{m \in \Omega_k} P_{km} \right) = \sum_{m \in \Omega_k} \left(2a_{km}^2 g_{km} f_k - a_{km} g_{km} f_m - a_{km} b_{km} e_m \right),$$

$$\nabla_{f_m} \left(\sum_{m \in \Omega_k} P_{km} \right) = -a_{km} g_{km} f_k + a_{km} b_{km} e_k.$$

D.1.2 Derivadas de Segunda Ordem

$$\nabla_{xx}^2 \phi_0(x)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{e_{k}e_{k}}\phi_{0}(\mathbf{x}) &= \lambda_{k} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} - P_{k}^{esp} \right) \left(\nabla_{e_{k}e_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) + \left(\nabla_{e_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right)^{2} \right] \\ &+ \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} - P_{j}^{esp} \right) \left(\nabla_{e_{k}e_{k}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right) + \left(\nabla_{e_{k}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right)^{2} \right], \\ \nabla_{e_{k}e_{j}}\phi_{0}(\mathbf{x}) &= \lambda_{k} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} - P_{k}^{esp} \right) \left(\nabla_{e_{k}e_{l}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) + \left(\nabla_{e_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) \left(\nabla_{e_{l}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) \right] \\ &+ \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} - P_{j}^{esp} \right) \left(\nabla_{e_{k}e_{l}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right) + \left(\nabla_{e_{k}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right) \left(\nabla_{e_{l}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right) \right], \\ \nabla_{e_{k}e_{l}, i \in \mathcal{G}} &= \lambda_{k} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} - P_{k}^{esp} \right) \left(\nabla_{e_{k}e_{l}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right) + \left(\nabla_{e_{k}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right) \left(\nabla_{e_{l}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right) \right], \\ &+ \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} - P_{k}^{esp} \right) \left(\nabla_{e_{k}e_{l}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) + \left(\nabla_{e_{k}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right) \left(\nabla_{e_{l}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{km} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{split} \nabla_{j_{kel}} \phi_{0}(\mathbf{x}) &= \lambda_{k} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} - P_{k}^{oep} \right) \left(\nabla_{j_{kel}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) + \left(\nabla_{j_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) \left(\nabla_{e_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) \right] \\ &+ \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} - P_{j}^{oep} \right) \left(\nabla_{j_{kel}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right) + \left(\nabla_{j_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{jm} \right) \left(\nabla_{e_{k}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right) \right] \right] \\ &+ \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} - P_{k}^{oep} \right) \left(\nabla_{j_{kel}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) + \left(\nabla_{j_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) \left(\nabla_{e_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) \right] \\ &+ \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} - P_{j}^{oep} \right) \left(\nabla_{j_{kel}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) + \left(\nabla_{j_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) \left(\nabla_{e_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) \right] \\ &+ \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} - P_{k}^{oep} \right) \left(\nabla_{j_{kel}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) + \left(\nabla_{j_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) \left(\nabla_{e_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) \right] \\ &+ \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} - P_{k}^{oep} \right) \left(\nabla_{j_{kel}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) + \left(\nabla_{j_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) \left(\nabla_{e_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) \right] \\ &+ \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{jm} - P_{j}^{oep} \right) \left(\nabla_{j_{kel}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{jm} \right) + \left(\nabla_{j_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{jm} \right) \left(\nabla_{e_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{jm} \right) \right] \\ &+ \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{jm} - P_{j}^{oep} \right) \left(\nabla_{j_{kel}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{jm} \right) + \left(\nabla_{j_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{jm} \right) \left(\nabla_{e_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{jm} \right) \right] \\ &+ \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{jm} - P_{j}^{oep} \right) \left(\nabla_{j_{kel}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{jm} \right) + \left(\nabla_{j_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{jm} \right) \left(\nabla_{e_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{jm} \right) \right] \\ &+ \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{jm} - P_{j}^{oep} \right) \left(\nabla_{j_{kel}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) + \left(\nabla_{j_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{jm} \right) \right] \\ &+ \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{jm} - P_{j}^{oep} \right) \left(\nabla_{j_{kf}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) + \left(\nabla_{j_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) \left(\nabla_{e_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{jm} \right) \right] \\ \\ &+ \sum_{j$$

$$\begin{aligned} \nabla_{f_{k}f_{l}}\phi_{0}(\mathbf{x}) &= \lambda_{k} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} - P_{k}^{\text{esp}} \right) \left(\nabla_{f_{k}f_{l}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) + \left(\nabla_{f_{k}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) \left(\nabla_{f_{l}} \sum_{m \in \Omega_{k}} P_{km} \right) \right] \\ &+ \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} - P_{j}^{\text{esp}} \right) \left(\nabla_{f_{k}f_{l}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right) + \left(\nabla_{f_{k}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right) \left(\nabla_{f_{l}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right) \right], \\ \nabla_{f_{k}f_{k}}\phi_{0}(\mathbf{x}) &= \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} - P_{j}^{\text{esp}} \right) \left(\nabla_{f_{k}f_{l}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right) + \left(\nabla_{f_{k}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right)^{2} \right], \\ \nabla_{f_{k}f_{l}}\phi_{0}(\mathbf{x}) &= \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} - P_{j}^{\text{esp}} \right) \left(\nabla_{f_{k}f_{l}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right) + \left(\nabla_{f_{k}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right) \left(\nabla_{f_{l}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right) \right], \\ \nabla_{f_{k}f_{l}}\phi_{0}(\mathbf{x}) &= \sum_{j \in \Omega_{k}} \lambda_{j} \left[\left(\sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} - P_{j}^{\text{esp}} \right) \left(\nabla_{f_{k}f_{l}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right) + \left(\nabla_{f_{k}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right) \left(\nabla_{f_{l}} \sum_{m \in \Omega_{j}} P_{jm} \right) \right], \end{aligned}$$

 $\nabla_{xx}^2 \phi_1(x) \in \nabla_{xx}^2 \phi_2(x)$

$$\begin{aligned} \nabla_{e_{k}e_{k}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}P_{km}\right) &= \sum_{m\in\Omega_{k}}\left(2a_{km}^{2}g_{km}\right), \quad \nabla_{f_{k}e_{k}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}P_{km}\right) &= 0, \\ \nabla_{e_{k}e_{m}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}P_{km}\right) &= -a_{km}g_{km}, \quad \nabla_{f_{k}e_{m}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}P_{km}\right) &= -a_{km}b_{km}, \\ \nabla_{e_{m}e_{k}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}P_{km}\right) &= -a_{km}g_{km}, \quad \nabla_{f_{m}e_{k}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}P_{km}\right) &= +a_{km}b_{km}, \\ \nabla_{e_{m}e_{m}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}P_{km}\right) &= 0, \quad \nabla_{f_{m}e_{m}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}P_{km}\right) &= 0, \\ \nabla_{e_{k}f_{k}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}P_{km}\right) &= 0, \quad \nabla_{f_{k}f_{k}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}P_{km}\right) &= \sum_{m\in\Omega_{k}}\left(2a_{km}^{2}g_{km}\right), \\ \nabla_{e_{k}f_{m}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}P_{km}\right) &= +a_{km}b_{km}, \quad \nabla_{f_{k}f_{m}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}P_{km}\right) &= -a_{km}g_{km}, \\ \nabla_{e_{m}f_{k}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}P_{km}\right) &= -a_{km}b_{km}, \quad \nabla_{f_{m}f_{k}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}P_{km}\right) &= -a_{km}g_{km}, \\ \nabla_{e_{m}f_{m}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}P_{km}\right) &= 0, \quad \nabla_{f_{m}f_{m}}\left(\sum_{m\in\Omega_{k}}P_{km}\right) &= 0. \end{aligned}$$

D.2 Representação Matricial (R-MAT)

D.2.1 Derivadas de Primeira Ordem

 $\nabla_x \phi_0(x)$

$$\nabla_{x}\phi_{0}(x) = \begin{bmatrix} \nabla_{e}\phi_{0}(x) & \nabla_{f}\phi_{0}(x) \end{bmatrix} = \nabla_{x}P(x)^{t} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot [P(x) - P^{\text{esp}}],$$
$$\nabla_{e}\phi_{0}(x) = \nabla_{e}P(x)^{t} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot [P(x) - P^{\text{esp}}],$$
$$\nabla_{f}\phi_{0}(x) = \nabla_{f}P(x)^{t} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot [P(x) - P^{\text{esp}}],$$

onde:

$$\begin{aligned} \nabla_e P(x) &= EG + FB + \operatorname{diag}(Ge - Bf), & (\mathcal{G}, \mathcal{I}_e), \\ \nabla_f P(x) &= FG - EB + \operatorname{diag}(Gf + Be), & (\mathcal{G}, \mathcal{I}_f). \end{aligned}$$

 $\nabla_x \phi_1(x)$

$$\nabla_{x}\phi_{1}(x) = \begin{bmatrix} \nabla_{e}\phi_{1}(x) & \nabla_{f}\phi_{1}(x) \end{bmatrix},$$

$$\nabla_{e}\phi_{1}(x) = EG + FB + \operatorname{diag}(Ge - Bf), \quad (\{|\mathcal{N}|\}, I_{e}),$$

$$\nabla_{f}\phi_{1}(x) = FG - EB + \operatorname{diag}(Gf + Be), \quad (\{|\mathcal{N}|\}, I_{f}).$$

 $\nabla_x \phi_2(x)$

$$\nabla_{x}\phi_{2}(x) = \begin{bmatrix} \nabla_{e}\phi_{2}(x) & \nabla_{f}\phi_{2}(x) \end{bmatrix},$$

$$\nabla_{e}\phi_{2}(x) = (G^{t}+G)e, \qquad (\mathcal{N}, I_{e}),$$

$$\nabla_{f}\phi_{2}(x) = (G^{t}+G)f, \qquad (\mathcal{N}, I_{f}).$$

D.2.2 Derivadas de Segunda Ordem

 $\nabla_{xx}^2 \phi_0(x)$

$$\nabla_{xx}^{2}\phi_{0}(x) = \begin{bmatrix} \nabla_{ee}^{2}\phi_{0}(x) & \nabla_{ef}^{2}\phi_{0}(x) \\ \nabla_{fe}^{2}\phi_{0}(x) & \nabla_{ff}^{2}\phi_{0}(x) \end{bmatrix} = \widehat{\Lambda} \cdot \nabla_{xx}^{2}P(x) + \nabla_{x}P(x)^{t} \cdot \Lambda \cdot \nabla_{x}P(x),$$

$$\begin{aligned} \nabla_{ee}^{2}\phi_{0}(x) &= \widehat{\Lambda}_{ee} \cdot \nabla_{ee}^{2}P(x) + \nabla_{e}P(x)^{t} \cdot \Lambda \cdot \nabla_{e}P(x), & (I_{e}, I_{e}), \\ \nabla_{ef}^{2}\phi_{0}(x) &= \widehat{\Lambda}_{ef} \cdot \nabla_{ef}^{2}P(x) + \nabla_{e}P(x)^{t} \cdot \Lambda \cdot \nabla_{f}P(x), & (I_{e}, I_{f}), \\ \nabla_{fe}^{2}\phi_{0}(x) &= \widehat{\Lambda}_{fe} \cdot \nabla_{fe}^{2}P(x) + \nabla_{f}P(x)^{t} \cdot \Lambda \cdot \nabla_{e}P(x), & (I_{f}, I_{e}), \\ \nabla_{ff}^{2}\phi_{0}(x) &= \widehat{\Lambda}_{ff} \cdot \nabla_{ff}^{2}P(x) + \nabla_{f}P(x)^{t} \cdot \Lambda \cdot \nabla_{f}P(x), & (I_{f}, I_{f}), \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{split} \nabla^2_{ee} P(\mathbf{x}) &= G^t + G, \qquad (I_e, I_e), \\ \nabla^2_{ef} P(\mathbf{x}) &= 0, \qquad (I_e, I_f), \\ \nabla^2_{fe} P(\mathbf{x}) &= 0, \qquad (I_f, I_e), \\ \nabla^2_{ff} P(\mathbf{x}) &= G^t + G, \qquad (I_f, I_f). \end{split}$$

$$\widehat{\Lambda}_{ee} \rightarrow \widehat{\Lambda}_{ee}(k,k) &:= \begin{cases} \lambda_k \left[P_k(\mathbf{x}) - P_k^{esp} \right] & \text{se } k \in \mathcal{G} \cap I_e, \\ 1 & \text{caso contrário}, \\ \widehat{\Lambda}_{ee}(m,k) &:= 0, \\ \widehat{\Lambda}_{ee}(m,k) &:= 0, & k, m \in I_e, \end{cases}$$

$$\widehat{\Lambda}_{ff}(k,m) &:= 0, \\ \widehat{\Lambda}_{ff}(k,m) &:= 0, \\ \widehat{\Lambda}_{ff}(k,m) &:= 0, \\ \widehat{\Lambda}_{ff}(m,k) &:= 0, & k, m \in I_f, \end{cases}$$

$$\widehat{\Lambda}_{ef}(m,k) &:= 0, & k, m \in I_f, \\ \widehat{\Lambda}_{ef}(k,m) &:= 0, & k \in \mathcal{G}, \\ 0 & \text{caso contrário}, \\ \widehat{\Lambda}_{ef}(k,m) &:= 0, & k \in I_e, m \in I_f, \end{cases}$$

$$\widehat{\Lambda}_{fe}(k,m) &:= 0, & k \in I_e, m \in I_f, \\ \widehat{\Lambda}_{fe}(k,m) &:= 0, & k \in I_e, m \in I_f, \end{cases}$$

 $\nabla_{xx}^2 \phi_1(x)$

$$\begin{aligned} \nabla_{xx}^{2}\phi_{1}(x) &= \begin{bmatrix} \nabla_{ee}^{2}\phi_{1}(x) & \nabla_{ef}^{2}\phi_{1}(x) \\ \nabla_{fe}^{2}\phi_{1}(x) & \nabla_{ff}^{2}\phi_{1}(x) \end{bmatrix}, \\ \nabla_{ee}^{2}\phi_{1}(x) &= G^{t} + G, \qquad (I_{e}, I_{e}), \\ \nabla_{ef}^{2}\phi_{1}(x) &= 0, \qquad (I_{e}, I_{f}), \\ \nabla_{fe}^{2}\phi_{1}(x) &= 0, \qquad (I_{f}, I_{e}), \\ \nabla_{ff}^{2}\phi_{1}(x) &= G^{t} + G, \qquad (I_{f}, I_{f}). \end{aligned}$$

 $\nabla_{xx}^2 \phi_2(x)$

$$\begin{aligned} \nabla_{xx}^{2}\phi_{2}(x) &= \begin{bmatrix} \nabla_{ee}^{2}\phi_{2}(x) & \nabla_{ef}^{2}\phi_{2}(x) \\ \nabla_{fe}^{2}\phi_{2}(x) & \nabla_{ff}^{2}\phi_{2}(x) \end{bmatrix}, \\ \nabla_{ee}^{2}\phi_{2}(x) &= G^{t} + G, \qquad (I_{e}, I_{e}), \\ \nabla_{ef}^{2}\phi_{2}(x) &= 0, \qquad (I_{e}, I_{f}), \\ \nabla_{fe}^{2}\phi_{2}(x) &= 0, \qquad (I_{f}, I_{e}), \\ \nabla_{ff}^{2}\phi_{2}(x) &= G^{t} + G, \qquad (I_{f}, I_{f}). \end{aligned}$$

Nos gradientes e matrizes relacionados às funções objetivo $\phi_0(x)$ e $\phi_1(x)$ é necessário identificarmos somente o cálculo referente às barras de geração de potência e à barra de referência, através dos conjuntos de índices \mathcal{G} e { $|\mathcal{N}|$ } respectivamente.

APÊNDICE E

Resultados Detalhados dos Experimentos Computacionais

E.1 IEEE-30

Nessa seção apresentamos os melhores resultados encontrados para os problemas FPOR e FPOAR utilizando o sistema de potência IEEE-30, para as funções objetivo ϕ_0 e ϕ_2 com a heurística HAT.

E.1.1 FPOR

Barra	υ	θ	$P_{\rm G}$	P _C	$Q_{\rm G}$	$Q_{\rm C}$	sh
	(p.u.)	(°)	(MW)	(MW)	(MVAR)	(MVAR)	(MVAR)
2	1,0217	-5,394	40,0000	21,7000	34,4842	12,7000	0,0000
3	0,9988	-8,026	_	2,4000	-0,0000	1,2000	0,0000
4	0,9868	-9,7 01	_	7,6000	0,0000	1,6000	0,0000
5	0,9796	-14,638	0,0000	94,2000	32,1497	19,0000	0,0000
6	0,9822	-11,471	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
7	0,9731	-13,330	-	22,8000	0,0000	10,9000	0,0000
8	0,9807	-12,241	0,0000	30,0000	33,9107	30,0000	0,0000
9	1,0156	-14,718	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
10	1,0105	-16,425	-	5,8000	0,0000	2,0000	0,1940
11	1,0391	-14,718	0,0000	0,0000	11,6996	0,0000	0,0000
12	1,0262	-15,702	-	11,2000	-0,0000	7,5000	0,0000
13	1,0406	-15,702	-0,0000	0,0000	10,7048	0,0000	0,0000
14	1,0104	-16,647	-	6,2000	0,0000	1,6000	0,0000
15	1,0053	-16,732	-	8,2000	0,0000	2,5000	0,0000
16	1,0121	-16,296	-	3,5000	-0,0000	1,8000	0,0000
17	1,0055	-16,607	-	9,0000	-0,0000	5,8000	0,0000
18	0,9946	-17,366	-	3,2000	0,0000	0,9000	0,0000
19	0,9915	-17,538	-	9,5000	-0,0000	3,4000	0,0000
20	0,9954	-17,320	-	2,2000	0,0000	0,7000	0,0000
21	0,9978	-16,907	-	17,5000	-0,0000	11,2000	0,0000
22	0,9984	-16,894	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
23	0,9937	-17,143	-	3,2000	0,0000	1,6000	0,0000
24	0,9869	-17,325	-	8,7000	-0,0000	6,7000	0,0419
25	0,9832	-16,951	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
26	0,9649	-17,401	-	3,5000	0,0000	2,3000	0,0000
27	0,9898	-16,441	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
28	0,9781	-12,115	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
29	0,9693	-17,758	-	2,4000	0,0000	0,9000	0,0000
30	0,9573	-18,705		10,6000	0,0000	1,9000	0,0000
1	1,0536	0,000	261,7029	0,0000	18,3262	0,0000	0,0000

Tabela 23: IEEE-30: FPOR (ϕ_0) – resultados

Barra	v	θ	$P_{\rm G}$	P _C	$Q_{\rm G}$	Q _C	sh
	(p.u.)	(°)	(MW)	(MW)	(MVAR)	(MVAR)	(MVAR)
2	1,0417	-5,489	40,0000	21,7000	49,9960	12,7000	0,0000
3	1,0178	-7,967	_	2,4000	0,0000	1,2000	0,0000
4	1,0084	-9,620	_	7,6000	0,0000	1,6000	0,0000
5	1,0101	-14,436	0,0000	94,2000	39,5611	19,0000	0,0000
6	1,0068	-11,353	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7	1,0004	-13,148	_	22,8000	0,0000	10,9000	0,0000
8	1,0075	-12,122	0,0000	30,0000	39,9991	30,0000	0,0000
9	1,0395	-14,450	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
10	1,0351	-16,078	_	5,8000	0,0000	2,0000	0,2036
11	1,0600	-14,450	0,0000	0,0000	10,4693	0,0000	0,0000
12	1,0484	-15,346	-	11,2000	0,0000	7,5000	0,0000
13	1,0600	-15,346	0,0000	0,0000	8,8164	0,0000	0,0000
14	1,0333	-16,253	_	6,2000	0,0000	1,6000	0,0000
15	1,0286	-16,344	-	8,2000	0,0000	2,5000	0,0000
16	1,0355	-15,933	-	3,5000	0,0000	1,8000	0,0000
17	1,0298	-16,245	-	9,0000	0,0000	5,8000	0,0000
18	1,0186	-16,958	-	3,2000	0,0000	0,9000	0,0000
19	1,0159	-17,127	_	9,5000	0,0000	3,4000	0,0000
20	1,0199	-16,923	-	2,2000	0,0000	0,7000	0,0000
21	1,0227	-16,536	_	17,5000	0,0000	11,2000	0,0000
22	1,0233	-16,524	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
23	1,0179	-16,747	_	3,2000	0,0000	1,6000	0,0000
24	1,0122	-16,935	-	8,7000	0,0000	6,7000	0,0441
25	1,0093	-16,581	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
26	0,9914	-17,008	-	3,5000	0,0000	2,3000	0,0000
27	1,0161	-16,098	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
28	1,0033	-11,976	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
29	0,9961	-17,345		2,4000	0,0000	0,9000	0,0000
30	0,9845	-18,241		10,6000	0,0000	1,9000	0,0000
1	1,0600	0,000	261,1132	0,0000	-12,7125	0,0000	0,0000

Tabela 24: IEEE-30: FPOR (ϕ_2) – resultados

E.1.2 FPOAR

Barra	v	θ	$P_{\rm G}$	P _C	$Q_{ m G}$	$Q_{\rm C}$	sh
	(p.u.)	(°)	(MW)	(MW)	(MVAR)	(MVAR)	(MVAR)
2	1,0500	-0,917	47,3494	21,7000	15,7579	12,7000	0,0000
3	1,0391	-1,400	_	2,4000	0,0000	1,2000	0,0000
4	1,0350	-1,622	_	7,6000	0,0000	1,6000	0,0000
5	1,0321	-4,440	49,0137	94,2000	24,4186	19,0000	0,0000
6	1,0367	-1,975	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
7	1,0273	-3,492	_	22,8000	0,0000	10,9000	0,0000
8	1,0422	-1,760	47,7603	30,0000	39,9965	30,0000	0,0000
9	1,0547	-1,006	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	1,0522	-3,212	-	5,8000	0,0000	2,0000	0,2103
11	1,0600	4,110	47,9232	0,0000	4,8380	0,0000	0,0000
12	1,0600	-1,838	_	11,2000	-0,0000	7,5000	0,0000
13	1,0547	1,551	47,2134	0,0000	-2,5662	0,0000	0,0000
14	1,0461	-2,832		6,2000	0,0000	1,6000	0,0000
15	1,0417	-3,050		8,2000	0,0000	2,5000	0,0000
16	1,0493	-2,692	_	3,5000	0,0000	1,8000	0,0000
17	1,0460	-3,261	-	9,0000	0,0000	5,8000	0,0000
18	1,0332	-3,795		3,2000	0,0000	0,9000	0,0000
19	1,0314	-4,048	_	9,5000	0,0000	3,4000	0,0000
20	1,0358	-3,897		2,2000	0,0000	0,7000	0,0000
21	1,0401	-3,717	_	17,5000	0,0000	11,2000	0,0000
22	1,0407	-3,725	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
23	1,0328	-3,768	_	3,2000	0,0000	1,6000	0,0000
24	1,0295	-4,389	_	8,7000	0,0000	6,7000	0,0456
25	1,0287	-5,079	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
26	1,0112	-5,490	_	3,5000	0,0000	2,3000	0,0000
27	1,0371	-5,248	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
28	1,0338	-2,227	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
29	1,0176	-6,444	-	2,4000	0,0000	0,9000	0,0000
30	1,0063	-7,302		10,6000	0,0000	1,9000	0,0000
1	1,0557	0,000	46,8571	0,0000	0,8929	0,0000	0,0000

Tabela 25: IEEE-30: FPOAR (ϕ_0) – resultados
Barra	v	θ	$P_{\rm G}$	P _C	$Q_{ m G}$	$Q_{\rm C}$	sh
	(p.u.)	(°)	(MW)	(MW)	(MVAR)	(MVAR)	(MVAR)
2	1,0434	-0,391	42,1731	21,7000	13,3492	12,7000	0,0000
3	1,0344	-0,692	_	2,4000	-0,0000	1,2000	0,0000
4	1,0315	-0,767		7,6000	-0,0000	1,6000	0,0000
5	1,0314	-2,747	64,3370	94,2000	23,0969	19,0000	0,0000
6	1,0350	-0,761	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7	1,0259	-2,084	_	22,8000	-0,0000	10,9000	0,0000
8	1,0418	-0,307	60,2455	30,0000	39,9983	30,0000	0,0000
9	1,0539	0,910	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	1,0536	-1,795	_	5,8000	-0,0000	2,0000	0,2109
11	1,0600	7,674	63,2629	0,0000	6,8693	0,0000	0,0000
12	1,0600	-1,580	_	11,2000	-0,0000	7,5000	0,0000
13	1,0600	0,855	34,0930	0,0000	0,6934	0,0000	0,0000
14	1,0459	-2,438	_	6,2000	-0,0000	1,6000	0,0000
15	1,0423	-2,516	_	8,2000	-0,0000	2,5000	0,0000
16	1,0503	-1,947	_	3,5000	-0,0000	1,8000	0,0000
17	1,0473	-2,047	_	9,0000	-0,0000	5,8000	0,0000
18	1,0342	-2,949	_	3,2000	-0,0000	0,9000	0,0000
19	1,0325	-3,016	-	9,5000	-0,0000	3,4000	0,0000
20	1,0370	-2,767	_	2,2000	-0,0000	0,7000	0,0000
21	1,0414	-2,349	_	17,5000	-0,0000	11,2000	0,0000
22	1,0420	-2,373	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
23	1,0334	-2,976	_	3,2000	-0,0000	1,6000	0,0000
24	1,0301	-3,248	_	8,7000	-0,0000	6,7000	0,0456
25	1,0287	-3,886	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
26	1,0113	-4,296	_	3,5000	-0,0000	2,3000	0,0000
27	1,0368	-4,022	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
28	1,0325	-0,963	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
29	1,0172	-5,219	-	2,4000	-0,0000	0,9000	0,0000
30	1,0059	-6,078	-	10,6000	-0,0000	1,9000	0,0000
1	1,0458	0,000	21,1841	0,0000	-0,3979	0,0000	0,0000

Tabela 26: IEEE-30: FPOAR (ϕ_2) – resultados

E.2 IEEE-300

Apresentamos nessa seção as soluções encontradas para o sistema IEEE-0300, nos problemas FPOR e FPOAR, para a função objetivo ϕ_2 , com a heurística HAT.

E.2.1 FPOR

Barra	υ	θ	$P_{\rm G}$	P _C	$Q_{\rm G}$	$Q_{\rm C}$	sh
	(p.u.)	(°)	(MW)	(MW)	(MVAR)	(MVAR)	(MVAR)
1	1,0610	6,742	_	90,0000	-0,0000	49,0000	0,0000
2	1,0672	8,552	_	56,0000	-0,0000	15,0000	0,0000
3	1,0296	7,514	_	20,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	1,0640	5,707	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
5	1,0527	5,542	_	353,0000	-0,0000	130,0000	0,0000
6	1,0635	7,857	_	120,0000	-0,0000	41,0000	0,0000
7	1,0261	7,093	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
8	1,0490	3,436	-5,0000	58,0000	9,9999	14,0000	0,0000
9	1,0418	3,769	_	96,0000	-0,0000	43,0000	0,0000
10	1,0584	2,405	-5,0000	148,0000	19,9999	33,0000	0,0000
11	1,0480	3,344	—	83,0000	-0,0000	21,0000	0,0000
12	1,0306	6,180	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
13	1,0369	0,511	—	58,0000	-0,0000	10,0000	0,0000
14	1,0284	-3,373	—	160,0000	-0,0000	60,0000	0,0000
15	1,0570	-6,979	—	126,7000	-0,0000	23,0000	0,0000
16	1,0628	-1,184	—	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
17	1,0748	-10,885	—	561,0000	0,0000	220,0000	0,0000
19	1,0173	2,294	—	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
20	1,0367	-1,319	-10,0000	595,0000	19,9999	120,0000	0,0000
21	1,0097	2,839	-	77,0000	-0,0000	1,0000	0,0000
22	1,0313	-0,838	—	81,0000	-0,0000	23,0000	0,0000
23	1,0800	4,806	-	21,0000	-0,0000	7,0000	0,0000
24	1,0351	7,004	—	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
25	1,0549	2,431	—	45,0000	-0,0000	12,0000	0,0000
26	1,0322	-0,580	-	28,0000	-0,0000	9,0000	0,0000
27	1,0108	-3,561	—	69,0000	-0,0000	13,0000	0,0000
33	1,0606	-10,265	—	55,0000	0,0000	6,0000	0,0000
34	1,0728	-6,277	—	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
35	1,0272	-22,577	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
36	1,0476	-19,744		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
					co	ontinua na próxi	ma página

Tabela 27: IEEE-300: FPOR (ϕ_2) – resultados

Barra	υ	θ	$P_{ m G}$	P_{C}	$Q_{ m G}$	$Q_{\rm C}$	sh
37	1,0576	-9,677	_	85,0000	-0,0000	32,0000	0,0000
38	1,0569	-10,781	-	155 <i>,</i> 0000	0,0000	18,0000	0,0000
39	1,0800	-4,221	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
40	1,0587	-10,998	-	46,0000	-0,0000	-21,0000	0,0000
41	1,0646	-8,825	-	86,0000	0,0000	0,0000	0,0000
42	1,0758	-5,790	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
43	1,0417	-14,550	-	39,0000	0,0000	9,0000	0,0000
44	1,0511	-15,061	-	195,0000	0,0000	29,0000	0,0000
45	1,0635	-12,540	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
46	1,0709	-9,789	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
47	1,0251	-20,314	-	58,0000	0,0000	11,8000	0,0000
48	1,0422	-13,972	-	41,0000	0,0000	19,0000	0,0000
49	1,0783	-2,563	-	92,0000	-0,0000	26,0000	0,0000
51	1,0610	-6,952	-	-5,0000	0,0000	5,0000	0,0000
52	1,0373	-10,143	-	61,0000	0,0000	28,0000	0,0000
53	1,0375	-15,284	-	69,0000	0,0000	3,0000	0,0000
54	1,0467	-13,998	-	10,0000	0,0000	1,0000	0,0000
55	1,0551	-10,273	-	22,0000	0,0000	10,0000	0,0000
57	1,0731	-5,952	-	98,0000	-0,0000	20,0000	0,0000
58	1,0462	-4,370	-	14,0000	0,0000	1,0000	0,0000
59	1,0378	-3,774	-	218,0000	0,0000	106,0000	0,0000
60	1,0696	-7,709	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
61	1,0506	-2,156	-	227,0000	0,0000	110,0000	0,0000
62	1,0631	0,160	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
63	1,0212	-14,659	0,0000	70,0000	25,0000	30,0000	0,0000
64	1,0078	-10,554	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
69	1,0159	-23,320	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
70	1,0069	-31,105	-	56 <i>,</i> 0000	0,0000	20,0000	0,0000
71	1,0322	-26,361	-	116,0000	0,0000	38,0000	0,0000
72	1,0224	-24,181	-	57,0000	0,0000	19,0000	0,0000
73	1,0278	-22,633	-	224,0000	0,0000	71,0000	0,0000
74	1,0434	-19,200	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
76	1,0155	-23,327	-0,0000	208,0000	35,0000	107,0000	0,0000
77	1,0364	-21,915	-	74,0000	0,0000	28,0000	0,0000
78	1,0429	-21,132	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
79	1,0343	-22,004	-	48,0000	0,0000	14,0000	0,0000
80	1,0387	-21,812	_	28,0000	0,0000	7,0000	0,0000
81	1,0721	-16,243	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
84	1,0800	-14,930	375,0000	37,0000	142,7506	13,0000	0,0000
85	1,0358	-15,467	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
86	1,0385	-12,235	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
87	1,0327	-6,130	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
					c	ontinua na próxi	ma página

Barra	v	θ	$P_{ m G}$	$P_{\rm C}$	$Q_{ m G}$	$Q_{\rm C}$	sh
88	1,0584	-18,197	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
89	1,0610	-9,345	_	44,2000	-0,0000	0,0000	0,0000
90	1,0593	-9,514	_	66,0000	0,0000	0,0000	0,0000
91	1 <i>,</i> 0799	-7,562	155,0000	17,4000	21,1368	0,0000	0,0000
92	1,0800	-4,610	290,0000	15,8000	13,7389	0,0000	0,0000
94	1,0316	-7,671	_	60,3000	-0,0000	0,0000	0,0000
97	1 <i>,</i> 0597	-11,301	_	39 <i>,</i> 9000	-0,0000	0,0000	0,0000
98	1,0588	-12,856	68,0000	66,7000	13,0310	0,0000	0,0000
99	1,0382	-17,860	_	83,5000	0,0000	0,0000	0,0000
100	1,0551	-12,541	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
102	1,0496	-13,236	_	77,8000	-0,0000	0,0000	0,0000
103	1,0646	-10,152	-	32,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
104	1,0450	-15,163	_	8,6000	-0,0000	0,0000	0,0000
105	1,0586	-10,987	-	49,6000	-0,0000	0,0000	0,0000
107	1,0502	-13,888	-	4,6000	0,0000	0,0000	0,0000
108	1,0390	-17,853	117,0000	112,1000	24,1917	0,0000	0,0000
109	1,0253	-23,207	_	30,7000	0,0000	0,0000	0,0000
110	1,0225	-21,982		63,0000	0,0000	0,0000	0,0000
112	1,0262	-25,865	_	19,6000	0,0000	0,0000	0,0000
113	1,0188	-22,408		26,2000	0,0000	0,0000	0,0000
114	1,0285	-25,801	_	18,2000	0,0000	0,0000	0,0000
115	1,0012	-11,459		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
116	1,0555	-10,673		0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
117	0,9797	-3,616	_	0,0000	0,0000	0,0000	3,1196
118	0,9748	-3,064		14,1000	-0,0000	650,0000	0,0000
119	1,0800	5,583	1930,0000	0,0000	994,4944	0,0000	0,0000
120	1,0003	-7,243	_	777,0000	-0,0000	215,0000	0,5503
121	1,0320	-10,735	_	535,0000	-0,0000	55,0000	0,0000
122	1,0139	-12,156	_	229,1000	-0,0000	11,8000	0,0000
123	1,0350	-15,229		78,0000	-0,0000	1,4000	0,0000
124	1,0519	-11,367	240,0000	276,4000	91,6484	59,3000	0,0000
125	1,0460	-15,916	0,0000	514,8000	199,9997	82,7000	0,0000
126	1,0334	-10,721	-	57 <i>,</i> 9000	-0,0000	5,1000	0,0000
127	1,0286	-8,500	-	380,8000	-0,0000	37,0000	0,0000
128	1,0314	-3,099	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
129	1,0327	-2,751	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
130	1,0524	6,535	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
131	1,0185	6,980	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
132	1,0389	4,175	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
133	1,0294	-3,729	–	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
134	1,0424	-6,079	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
135	1,0420	-4,866	_	169,2000	-0,0000	41,6000	0,0000
					CO	ontinua na próxi	ma página

Barra	υ	θ	$P_{\rm G}$	P _C	$Q_{ m G}$	$Q_{\rm C}$	sh
136	1,0728	3,015	_	55,2000	-0,0000	18,2000	0,0000
137	1,0678	0,147	_	273,6000	-0,0000	99,8000	0,0000
138	1,0800	-4,547	-192,5000	826,7000	288,6411	135,2000	0,0000
139	1,0365	-1,987	_	595 <i>,</i> 0000	-0,0000	83,3000	0,0000
140	1,0661	-1,785	_	387,7000	-0,0000	114,7000	0,0000
141	1,0649	1,629	281,0000	145,0000	41,5199	58,0000	0,0000
142	1,0397	-1,240	_	56 <i>,</i> 5000	-0,0000	24,5000	0,0000
143	1,0629	5,252	696,0000	89 <i>,</i> 5000	86,9727	35,5000	0,0000
144	1,0610	0,564	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
145	1,0310	1,271	_	24,0000	0,0000	14,0000	0,0000
146	1,0770	5,577	84,0000	0,0000	34,9997	0,0000	0,0000
147	1,0800	9,410	217,0000	0,0000	-44,7445	0,0000	0,0000
148	1,0800	1,659	_	63,0000	-0,0000	25,0000	0,0000
149	1,0800	6,558	103,0000	0,0000	23,2087	0,0000	0,0000
150	1,0192	7,245	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
151	1,0388	5,196	—	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
152	1,0800	10,337	372,0000	17,0000	-50,0000	9,0000	0,0000
153	1,0698	11,491	216,0000	0,0000	-50,0000	0,0000	0,0000
154	1,0043	-0,104	_	70,0000	0,0000	5,0000	0,3480
155	1,0603	7,823	-	200,0000	0,0000	50,0000	0,0000
156	1,0023	6,342	-0,0000	75,0000	8 <i>,</i> 9281	50,0000	0,0000
157	1,0261	-9,862	-	123,5000	-0,0000	-24,3000	0,0000
158	1,0372	-9,367	—	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
159	1,0296	-7,902	_	33,0000	-0,0000	16,5000	0,0000
160	1,0328	-10,424		0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
161	1,0682	9,895	_	35,0000	-0,0000	15,0000	0,0000
162	1,0509	18,647		85,0000	-0,0000	24,0000	0,0000
163	1,0746	4,477	_	0,0000	-0,0000	0,4000	0,0000
164	1,0304	10,724	_	0,0000	0,0000	0,0000	-2,2507
165	1,0640	25,555	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
166	1,0618	29,007	_	0,0000	0,0000	0,0000	-1,1612
167	1,0033	-5,113	_	299 <i>,</i> 9000	-0,0000	95,7000	0,0000
168	1,0314	-3,121	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
169	1,0180	-4,892	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
170	0,9626	1,420	205,0000	481,8000	89,9999	205,0000	0,0000
171	1,0110	-7,964	0,0000	763,6000	149,9999	291,1000	0,0000
172	1,0477	-4,491	_	26,5000	-0,0000	0,0000	0,0000
173	1,0128	-10,717	_	163,5000	-0,0000	43,0000	0,5437
174	1,0800	-1,028	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
175	1,0000	-5,457	_	176,0000	-0,0000	83,0000	0,0000
176	1,0800	5,759	228,0000	5,0000	40,8541	4,0000	0,0000
177	1,0353	1,938	84,0000	28,0000	35,0000	12,0000	0,0000
					C	ontinua na próxi	ma página

Barra	v	θ	P_{G}	$P_{\rm C}$	$Q_{ m G}$	$Q_{\rm C}$	sh
178	0,9670	-4,837	—	427,4000	-0,0000	173,6000	0,0000
179	0,9990	-7,535	_	74,0000	-0,0000	29,0000	0,4491
180	1,0041	-1,528	_	69 <i>,</i> 5000	-0,0000	49,3000	0,0000
181	1,0715	0,279	_	73,4000	-0,0000	0,0000	0,0000
182	1,0697	-2,520	_	240,7000	-0,0000	89,0000	0,0000
183	0 <i>,</i> 9987	8,333	_	40,0000	0,0000	4,0000	0,0000
184	1,0466	-4,843	_	136,8000	0,0000	16,6000	0,0000
185	1,0521	-2,303	200,0000	0,0000	-1,1446	0,0000	0,0000
186	1,0800	3,677	1200,0000	59 <i>,</i> 8000	151,3238	24,3000	0,0000
187	1,0800	2,929	1200,0000	59 <i>,</i> 8000	172,4979	24,3000	0,0000
188	1 <i>,</i> 0721	0,862	_	182,6000	-0,0000	43,6000	0,0000
189	1,0593	-22,771	_	7,0000	0,0000	2,0000	0,0000
190	1,0727	-17,570	475,0000	0,0000	-228,4878	0,0000	-1,7260
191	1,0800	12,441	1973,0000	489,0000	628,8367	53,0000	0,0000
192	0,9869	-9,006	_	800,0000	-0,0000	72,0000	0,0000
193	1,0543	-24,126	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
194	1,0800	-16,421	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
195	1,0709	-17,883	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
196	1,0272	-21,256	_	10,0000	0,0000	3,0000	0,0000
197	1,0437	-20,209	_	43,0000	0,0000	14,0000	0,0000
198	1,0665	-17,545	424,0000	64,0000	99,6071	21,0000	0,0000
199	1,0112	-22,365	_	35,0000	0,0000	12,0000	0,0000
200	1,0141	-22,326	-	27,0000	0,0000	12,0000	0,0000
201	1,0312	-25,661	_	41,0000	0,0000	14,0000	0,0000
202	1,0415	-21,915	-	38,0000	0,0000	13,0000	0,0000
203	1,0540	-19,182	_	42,0000	0,0000	14,0000	0,0000
204	1,0247	-25,990	-	72,0000	0,0000	24,0000	0,0000
205	1,0423	-25,068	-	0,0000	-0,0000	-5,0000	0,0000
206	1,0585	-25,070	-	12,0000	0,0000	2,0000	0,0000
207	1,0719	-24,929	_	-21,0000	-0,0000	-14,2000	0,0000
208	1,0557	-23,683	-	7,0000	0,0000	2,0000	0,0000
209	1,0619	-22,369	_	38,0000	0,0000	13,0000	0,0000
210	1,0349	-20,700	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
211	1,0505	-20,105	_	96,0000	0,0000	7,0000	0,0000
212	1,0593	-19,380	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
213	1,0720	-9,760	272,0000	0,0000	59,8277	0,0000	0,0000
214	1,0488	-14,958	-	22,0000	0,0000	16,0000	0,0000
215	1,0387	-17,374	_	47,0000	-0,0000	26,0000	0,0000
216	1,0219	-19,424	-	176,0000	-0,0000	105,0000	0,0000
217	1,0543	-19,121	_	100,0000	-0,0000	75,0000	0,0000
218	1,0393	-19,528	_	131,0000	0,0000	96,0000	0,0000
219	1,0789	-18,139		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
					CC	ontinua na próxi	ma página

Barra	v	θ	$P_{ m G}$	$P_{\rm C}$	$Q_{ m G}$	$Q_{\rm C}$	sh
220	1,0498	-18,696	100,0000	285,0000	-6,5997	100,0000	0,0000
221	1,0587	-19,428	450,0000	171,0000	274,4429	70,0000	0,0000
222	1,0400	-20,067	250,0000	328,0000	99,5601	188,0000	0,0000
223	1,0546	-19,606	_	428,0000	0,0000	232,0000	0,0000
224	1,0456	-18,532	_	173,0000	-0,0000	99 <i>,</i> 0000	0,0000
225	0,9944	-9,164	_	410,0000	-0,0000	40,0000	0,0000
226	1,0566	-18,524	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
227	1,0404	-23,851	303,0000	538,0000	299,8877	369,0000	0,0000
228	1,0591	-17,912	_	223,0000	0,0000	148,0000	0,0000
229	1,0659	-16,941	_	96,0000	-0,0000	46,0000	0,0000
230	1,0534	-10,986	345,0000	0,0000	33,9640	0,0000	0,0000
231	1,0745	-18,184	_	159,0000	0,0000	107,0000	-3,4637
232	1,0667	-20,079	-	448,0000	-0,0000	143,0000	0,0000
233	1,0522	-22,633	300,0000	404,0000	186,4429	212,0000	0,0000
234	1,0538	-17,878	-	572,0000	0,0000	244,0000	0,0000
235	1,0515	-18,051	-	269,0000	0,0000	157,0000	0,0000
236	1,0077	-12,371	600,0000	0,0000	153,2312	0,0000	0,0000
237	1,0766	-18,065	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
238	1,0526	-17,981	250,0000	255,0000	199,9993	149,0000	-1,6618
239	1,0549	-13,386	550,0000	0,0000	156,4722	0,0000	0,0000
240	1,0406	-17,103	_	0,0000	-0,0000	0,0000	-1,5160
241	1,0519	-13,536	575,4300	0,0000	-164,0204	0,0000	0,0000
242	1,0509	-14,954	170,0000	0,0000	68,1518	0,0000	0,0000
243	1,0548	-16,301	84,0000	8,0000	40,0001	3,0000	0,0000
244	1,0402	-17,197	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
245	1,0258	-17,908	-	61,0000	-0,0000	30,0000	0,0000
246	1,0183	-18,642	-	77,0000	-0,0000	33,0000	0,0000
247	1,0271	-18,614	-	61,0000	-0,0000	30,0000	0,0000
248	1,0386	-21,798	_	29,0000	-0,0000	14,0000	0,4919
249	1,0381	-22,172	_	29,0000	-0,0000	14,0000	0,0000
250	1,0800	-20,525	-	-23,0000	0,0000	-17,0000	0,0000
281	1,0419	-17,033	-	-33,1000	0,0000	-29,4000	0,0000
319	1,0448	2,712	_	115,8000	0,0000	-24,0000	0,0000
320	1,0478	-1,049	-	2,4000	0,0000	-12,6000	0,0000
322	1,0496	-15,427	-	2,4000	-0,0000	-3,9000	0,0000
323	1,0292	-11,782	-	-14,9000	0,0000	26,5000	0,0000
324	1,0251	-20,720	-	24,7000	0,0000	-1,2000	0,0000
526	1,0120	-29,203	_	145,3000	0,0000	-34,9000	0,0000
528	1,0271	-33,270	-	28,1000	0,0000	-20,5000	0,0000
531	1,0138	-25,639	_	14,0000	0,0000	2,5000	0,0000
552	1,0531	-20,496	_	-11,1000	-0,0000	-1,4000	0,0000
562	1,0299	-24,670	_	50,5000	0,0000	17,4000	0,0000
					co	ontinua na próxi	ma página

Barra	υ	θ	$P_{ m G}$	P _C	$Q_{ m G}$	$Q_{\rm C}$	sh
609	1,0128	-25,377	_	29,6000	0,0000	0,6000	0,0000
664	1,0630	-14,338	_	-113,7000	-0,0000	76,7000	0,0000
1190	1,0489	4,405	_	100,3100	-0,0000	29,1700	0,0000
1200	1,0698	-6,099	_	-100,0000	0,0000	34,1700	0,0000
1201	1,0477	-13,077	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
2040	1,0229	-21,679	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
7001	1,0800	11,307	467,0000	0,0000	123,6928	0,0000	0,0000
7002	1,0800	13,040	623,0000	0,0000	76 <i>,</i> 2501	0,0000	0,0000
7003	1,0642	14,197	1210,0000	0,0000	419,9999	0,0000	0,0000
7011	1,0652	5,655	234,0000	0,0000	99 <i>,</i> 9999	0,0000	0,0000
7012	1,0800	12,166	372,0000	0,0000	190,5315	0,0000	0,0000
7017	1,0574	-7,962	330,0000	0,0000	295,8934	0,0000	0,0000
7023	1,0793	6,898	185,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7024	1,0530	13,245	410,0000	0,0000	87,7629	0,0000	0,0000
7039	1,0555	4,034	500,0000	0,0000	80,6141	0,0000	0,0000
7044	1,0602	-11,387	37,0000	0,0000	41,9999	0,0000	0,0000
7055	1,0375	-5,365	45,0000	0,0000	24,9999	0,0000	0,0000
7057	1,0500	-1,225	165,0000	0,0000	66,7476	0,0000	0,0000
7061	1,0800	2,657	400,0000	0,0000	149,9998	0,0000	0,0000
7062	1,0485	7,133	400,0000	0,0000	150,0000	0,0000	0,0000
7071	1,0419	-21,901	116,0000	0,0000	86,9990	0,0000	0,0000
7130	1,0800	19,208	1292,0000	0,0000	297,6904	0,0000	0,0000
7139	1,0782	4,017	700,0000	0,0000	306,1749	0,0000	0,0000
7166	1,0800	33,266	553,0000	0,0000	148,2282	0,0000	0,0000
9001	1,0490	-9,697	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
9002	1,0352	-16,660	-4,2000	0,0000	1,9999	0,0000	0,0000
9003	1,0305	-17,184	-	2,7100	0,0000	0,9400	0,0255
9004	1,0244	-17,306	-	0,8600	0,0000	0,2800	0,0000
9005	1,0497	-9,774	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
9006	1,0478	-15,186	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
9007	1,0376	-16,300	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
9012	1,0425	-15,211	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
9021	1,0298	-16,859	_	4,7500	0,0000	1,5600	0,0000
9022	1,0074	-19,109	_	1,5300	0,0000	0,5300	0,0000
9023	1,0168	-17,126	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
9024	1,0127	-18,906	_	1,3500	0,0000	0,4700	0,0000
9025	1,0074	-18,059	_	0,4500	0,0000	0,1600	0,0000
9026	1,0082	-17,981	_	0,4500	0,0000	0,1600	0,0000
9031	0,9830	-21,785	_	1,8400	0,0000	0,6400	0,0000
9032	0,9942	-20,777	-	1,3900	0,0000	0,4800	0,0000
9033	0,9803	-22,062	_	1,8900	0,0000	0,6500	0,0000
9034	1,0462	-18,423	_	1,5500	0,0000	0,5400	0,0188
					co	ontinua na próxi	ma página

Barra	υ	θ	$P_{ m G}$	$P_{\rm C}$	$Q_{ m G}$	$Q_{\rm C}$	sh
9035	1,0000	-20,200	-	1,6600	0,0000	0,5800	0,0000
9036	1,0081	-19,895	_	3,0300	0,0000	1,0000	0,0000
9037	1,0061	-19,692	-	1,8600	0,0000	0,6400	0,0000
9038	0,9897	-21,267	_	2,5800	0,0000	0,8900	0,0000
9041	1,0120	-18,606	_	1,0100	0,0000	0,3500	0,0000
9042	0,9997	-19,612	-	0,8100	0,0000	0,2800	0,0000
9043	1,0129	-18,762	_	1,6000	0,0000	0,5200	0,0000
9044	1,0265	-17,270	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
9051	1,0539	-17,198	-35,8100	0,0000	17,3497	0,0000	0,0000
9052	1,0239	-15,231	_	30,0000	0,0000	23,0000	0,0000
9053	1,0377	-15,662	-26,4800	0,0000	11,7021	0,0000	0,0000
9054	1,0580	-5,679	50,0000	0,0000	37,9999	0,0000	0,0000
9055	1,0498	-6,300	8,0000	0,0000	5 <i>,</i> 9999	0,0000	0,0000
9071	1,0226	-17,851	_	1,0200	0,0000	0,3500	0,0000
9072	1,0273	-17,370	-	1,0200	0,0000	0,3500	0,0000
9121	1,0211	-17,079	-	3,8000	0,0000	1,2500	0,0000
9533	1,0800	-16,099		1,1900	0,0000	0,4100	0,0000
7049	1,0800	0,000	419,9792	0,0000	23,8403	0,0000	0,0000

E.2.2 FPOAR

Barra	v	θ	$P_{\rm G}$	P _C	$Q_{ m G}$	$Q_{\rm C}$	sh
	(p.u.)	(°)	(MW)	(MW)	(MVAR)	(MVAR)	(MVAR)
1	1,0629	0,437	_	90,0000	-0,0000	49,0000	0,0000
2	1,0631	2,297	_	56,0000	0,0000	15,0000	0,0000
3	1,0322	1,342	_	20,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
4	1,0662	1,055	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
5	1,0557	-0,332	-	353,0000	0,0000	130,0000	0,0000
6	1,0609	1,670	_	120,0000	0,0000	41,0000	0,0000
7	1,0294	1,285	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
8	1,0604	2,043	237,5534	58,0000	10,0007	14,0000	0,0000
9	1,0499	-0,047	_	96,0000	-0,0000	43,0000	0,0000
10	1,0675	4,009	279,4756	148,0000	20,0003	33,0000	0,0000
11	1,0611	1,429	-	83,0000	0,0000	21,0000	0,0000
12	1,0359	1,870	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
13	1,0542	-0,679	-	58,0000	-0,0000	10,0000	0,0000
14	1,0339	-1,802	_	160,0000	0,0000	60,0000	0,0000
15	1,0503	-2,506	-	126,7000	-0,0000	23,0000	0,0000
16	1,0649	-0,036	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
17	1,0800	-2,029	_	561,0000	-0,0000	220,0000	0,0000
19	1,0308	-0,163	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
20	1,0564	-1,796	385,6317	595,0000	19,9998	120,0000	0,0000
21	1,0238	-0,035	-	77,0000	0,0000	1,0000	0,0000
22	1,0475	-2,294	-	81,0000	-0,0000	23,0000	0,0000
23	1,0800	0,100	_	21,0000	-0,0000	7,0000	0,0000
24	1,0355	1,199	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
25	1,0585	-1,891	-	45,0000	-0,0000	12,0000	0,0000
26	1,0414	-4,155	-	28,0000	-0,0000	9,0000	0,0000
27	1,0245	-5,846	-	69,0000	-0,0000	13,0000	0,0000
33	1,0501	-3,314	_	55,0000	-0,0000	6,0000	0,0000
34	1,0618	-0,257	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
35	1,0442	-1,061	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
36	1,0645	-1,090	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
37	1,0490	-2,260	_	85,0000	-0,0000	32,0000	0,0000
38	1,0466	-3,645	-	155,0000	-0,0000	18,0000	0,0000
39	1,0569	1,332	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
40	1,0491	-3,668	-	46,0000	-0,0000	-21,0000	0,0000
41	1,0544	-2,419	_	86,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
42	1,0642	0,116	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
43	1,0336	-4,577	-	39,0000	-0,0000	9,0000	0,0000
		I			СС	ontinua na próxi	ma página

Tabela 28: IEEE-300: FPOAR (ϕ_2) – resultados

Barra	v	θ	$P_{ m G}$	$P_{\rm C}$	$Q_{ m G}$	$Q_{\rm C}$	sh
44	1,0434	-2,728	_	195,0000	-0,0000	29,0000	0,0000
45	1,0666	-1,535	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
46	1,0721	-0,512	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
47	1,0254	-5,592	_	58,0000	-0,0000	11,8000	0,0000
48	1,0324	-4,752	_	41,0000	-0,0000	19,0000	0,0000
49	1,0598	-1,017	_	92,0000	-0,0000	26,0000	0,0000
51	1,0498	-2,126	—	-5,0000	0,0000	5,0000	0,0000
52	1,0287	-3,332	-	61,0000	-0,0000	28,0000	0,0000
53	1,0297	-5,190	-	69,0000	-0,0000	3,0000	0,0000
54	1,0397	-3,640	-	10,0000	-0,0000	1,0000	0,0000
55	1,0480	-1,964	_	22,0000	-0,0000	10,0000	0,0000
57	1,0545	-1,945	_	98,0000	-0,0000	20,0000	0,0000
58	1,0344	-3,079	-	14,0000	-0,0000	1,0000	0,0000
59	1,0307	-3,279	_	218,0000	-0,0001	106,0000	0,0000
60	1,0800	-0,510	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
61	1,0470	-1,996	_	227,0000	-0,0001	110,0000	0,0000
62	1,0730	1,340	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
63	1,0800	0,653	220,7032	70,0000	8,1214	30,0000	0,0000
64	1,0675	0,846	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
69	1,0191	-4,661	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
70	1,0286	-6,245	_	56,0000	-0,0000	20,0000	0,0000
71	1,0529	-1,688	-	116,0000	-0,0000	38,0000	0,0000
72	1,0385	-2,183	_	57,0000	-0,0000	19,0000	0,0000
73	1,0369	-3,494	-	224,0000	0,0000	71,0000	0,0000
74	1,0573	-2,438	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
76	1,0419	-0,712	335,3678	208,0000	35,0001	107,0000	0,0000
77	1,0481	-1,070	_	74,0000	-0,0000	28,0000	0,0000
78	1,0527	-0,652	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
79	1,0431	-2,111	_	48,0000	-0,0000	14,0000	0,0000
80	1,0458	-2,177	_	28,0000	-0,0000	7,0000	0,0000
81	1,0787	-0,170	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
84	1,0800	4,327	311,0909	37,0000	106,9090	13,0000	0,0000
85	1,0507	-3,038	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
86	1,0495	-2,847	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
87	1,0466	-2,414	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
88	1,0694	-1,146	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
89	1,0448	-3,247	_	44,2000	0,0000	0,0000	0,0000
90	1,0467	-3,472	-	66,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
91	1,0558	-1,218	108,2277	17,4000	-9,7922	0,0000	0,0000
92	1,0628	0,507	186,3571	15,8000	5,3484	0,0000	0,0000
94	1,0344	-3,399	-	60,3000	0,0000	0,0000	0,0000
97	1,0515	-2,927	-	39,9000	0,0000	0,0000	0,0000
					co	ontinua na próxi	ma página

Barra	v	θ	$P_{ m G}$	$P_{\rm C}$	$Q_{ m G}$	$Q_{\rm C}$	sh
98	1,0587	-1,487	131,4251	66,7000	-5,2019	0,0000	0,0000
99	1,0486	-3,174	_	83,5000	0,0000	0,0000	0,0000
100	1,0531	-2,714	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
102	1,0502	-3,290	_	77,8000	-0,0000	0,0000	0,0000
103	1,0529	-2,858	_	32,0000	0,0000	0,0000	0,0000
104	1,0518	-3,504	_	8,6000	-0,0000	0,0000	0,0000
105	1,0500	-3,237	_	49,6000	-0,0000	0,0000	0,0000
107	1,0428	-4,022	_	4,6000	-0,0000	0,0000	0,0000
108	1,0517	-2,795	322,9463	112,1000	-18,5286	0,0000	0,0000
109	1,0324	-8,916	_	30,7000	0,0000	0,0000	0,0000
110	1,0309	-8,459	_	63,0000	0,0000	0,0000	0,0000
112	1,0301	-11,072	_	19,6000	0,0000	0,0000	0,0000
113	1,0211	-7,815	_	26,2000	0,0000	0,0000	0,0000
114	1,0320	-10,877	_	18,2000	0,0000	0,0000	0,0000
115	1,0056	-13,407	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
116	1,0658	-0,478	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
117	0,9942	-7,351	-	0,0000	-0,0000	0,0000	3,2122
118	0,9887	-7,216	-	14,1000	-0,0053	650,0000	0,0000
119	1,0787	-4,188	1113,0296	0,0000	747,2208	0,0000	0,0000
120	1,0096	-12,014	-	777,0000	-0,0020	215,0000	0,5606
121	1,0425	-15,144	_	535,0000	-0,0005	55,0000	0,0000
122	1,0205	-12,187	_	229,1000	-0,0001	11,8000	0,0000
123	1,0484	-5,262	_	78,0000	-0,0000	1,4000	0,0000
124	1,0780	1,139	762,9080	276,4000	115,4757	59,3000	0,0000
125	1,0545	-3,732	790 <i>,</i> 5708	514,8000	66,7150	82,7000	0,0000
126	1,0548	-5,886	_	57,9000	-0,0000	5,1000	0,0000
127	1,0462	-7,521	-	380,8000	-0,0001	37,0000	0,0000
128	1,0483	-5,085	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
129	1,0503	-4,614	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
130	1,0681	-0,144	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
131	1,0246	0,910	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
132	1,0609	-0,632	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
133	1,0426	-5,507	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
134	1,0552	-5,062	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
135	1,0552	-5,828	-	169,2000	-0,0000	41,6000	0,0000
136	1,0782	-2,157	_	55,2000	-0,0000	18,2000	0,0000
137	1,0518	-5,285	-	273,6000	-0,0002	99,8000	0,0000
138	1,0512	-6,299	584,4637	826,7000	135,7223	135,2000	0,0000
139	1,0210	-8,116	_	595,0000	-0,0003	83,3000	0,0000
140	1,0524	-7,591	_	387,7000	-0,0002	114,7000	0,0000
141	1,0665	-2,060	383,9381	145,0000	56,6631	58,0000	0,0000
142	1,0366	-9,763	_	56,5000	-0,0000	24,5000	0,0000
					co	ontinua na próxi	ma página

Barra	v	θ	$P_{ m G}$	$P_{\rm C}$	$Q_{ m G}$	$Q_{\rm C}$	sh		
143	1,0615	-4,080	341,5783	89,5000	83,1907	35,5000	0,0000		
144	1,0681	0,965	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000		
145	1,0318	-6,430	_	24,0000	-0,0000	14,0000	0,0000		
146	1,0800	-0,655	196,2029	0,0000	33,8627	0,0000	0,0000		
147	1,0800	0,959	113,0944	0,0000	-38,7566	0,0000	0,0000		
148	1,0800	-7,497	_	63,0000	-0,0000	25,0000	0,0000		
149	1,0800	-0,291	167,8840	0,0000	18,6603	0,0000	0,0000		
150	1,0256	0,880	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000		
151	1,0591	-0,254	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000		
152	1,0800	2,736	231,2408	17,0000	-49,9980	9,0000	0,0000		
153	1,0633	4,700	199,6186	0,0000	-49,9967	0,0000	0,0000		
154	0,9877	-4,638	_	70,0000	0,0000	5,0000	0,3366		
155	1,0515	1,956	_	200,0000	-0,0001	50,0000	0,0000		
156	0,9912	4,415	279,5133	75,0000	-9 <i>,</i> 9986	50,0000	0,0000		
157	1,0376	-9,515	-	123,5000	0,0002	-24,3000	0,0000		
158	1,0531	-5,925	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		
159	1,0422	-8,288	_	33,0000	-0,0001	16,5000	0,0000		
160	1,0569	-2,171	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		
161	1,0610	3,410	_	35,0000	-0,0000	15,0000	0,0000		
162	1,0268	4,019	-	85,0000	0,0000	24,0000	0,0000		
163	1,0648	-2,450	_	0,0000	-0,0000	0,4000	0,0000		
164	1,0217	1,713	_	0,0000	0,0000	0,0000	-2,2131		
165	1,0159	6,982	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		
166	0,9996	8,497	-	0,0000	-0,0000	0,0000	-1,0293		
167	1,0221	-7,601	_	299,9000	-0,0001	95,7000	0,0000		
168	1,0483	-5,096	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		
169	1,0345	-6,517	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		
170	0,9863	-0,648	460,7558	481,8000	90,0001	205,0000	0,0000		
171	1,0284	-6,170	638,0207	763,6000	150,0025	291,1000	0,0000		
172	1,0396	-10,326	-	26,5000	-0,0000	0,0000	0,0000		
173	1,0158	-18,655	-	163,5000	-0,0000	43,0000	0,5468		
174	1,0800	-5,596	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		
175	1,0009	-14,455	-	176,0000	-0,0000	83,0000	0,0000		
176	1,0800	-8,335	78,4426	5,0000	52,7551	4,0000	0,0000		
177	1,0507	-7,729	165,9574	28,0000	35,0001	12,0000	0,0000		
178	0,9733	-13,319	-	427,4000	-0,0000	173,6000	0,0000		
179	1,0029	-16,311	-	74,0000	-0,0000	29,0000	0,4526		
180	1,0072	-9,508	_	69 <i>,</i> 5000	-0,0000	49,3000	0,0000		
181	1,0522	-5,127	-	73,4000	-0,0000	0,0000	0,0000		
182	1,0547	-8,473	-	240,7000	-0,0002	89,0000	0,0000		
183	0,9905	1,900	-	40,0000	0,0000	4,0000	0,0000		
184	1,0529	-1,215	_	136,8000	-0,0000	16,6000	0,0000		
continua na próxima página									

Barra	v	θ	$P_{ m G}$	P _C	$Q_{ m G}$	$Q_{\rm C}$	sh	
185	1,0575	2,988	332,9253	0,0000	-11,1678	0,0000	0,0000	
186	1,0533	-3,667	552,0809	59,8000	16,4346	24,3000	0,0000	
187	1,0531	-3,948	556,6201	59,8000	14,6788	24,3000	0,0000	
188	1,0516	-4,935	-	182,6000	-0,0001	43,6000	0,0000	
189	1,0555	-5,824	_	7,0000	-0,0000	2,0000	0,0000	
190	1,0654	2,255	444,5516	0,0000	-264,8025	0,0000	-1,7027	
191	1,0800	4,250	1495,8088	489,0000	395,4795	53,0000	0,0000	
192	1,0111	-10,313	_	800,0000	-0,0010	72,0000	0,0000	
193	1,0520	-7,006	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000	
194	1,0800	1,569	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
195	1 <i>,</i> 0708	0,045	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000	
196	1,0240	-3,982	_	10,0000	-0,0000	3,0000	0,0000	
197	1,0404	-2,818	_	43,0000	-0,0000	14,0000	0,0000	
198	1,0604	-0,564	373,3055	64,0000	88,3723	21,0000	0,0000	
199	1,0071	-5,369	_	35,0000	-0,0000	12,0000	0,0000	
200	1,0104	-5,393	_	27,0000	-0,0000	12,0000	0,0000	
201	1,0359	-7,364	_	41,0000	-0,0000	14,0000	0,0000	
202	1,0412	-4,261	_	38,0000	-0,0000	13,0000	0,0000	
203	1,0506	-1,860	_	42,0000	-0,0000	14,0000	0,0000	
204	1,0239	-8,534	_	72,0000	-0,0000	24,0000	0,0000	
205	1,0408	-7,883	_	0,0000	0,0000	-5,0000	0,0000	
206	1,0563	-9,132	_	12,0000	0,0000	2,0000	0,0000	
207	1,0690	-9,487	-	-21,0000	-0,0000	-14,2000	0,0000	
208	1,0529	-6,778	_	7,0000	-0,0000	2,0000	0,0000	
209	1,0574	-5,411	-	38,0000	-0,0000	13,0000	0,0000	
210	1,0305	-3,648	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000	
211	1,0500	-2,323	-	96,0000	-0,0000	7,0000	0,0000	
212	1,0590	-1,600	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
213	1,0641	4,990	166,7284	0,0000	35,1078	0,0000	0,0000	
214	1,0493	1,783	-	22,0000	-0,0000	16,0000	0,0000	
215	1,0385	0,061	_	47,0000	-0,0000	26,0000	0,0000	
216	1,0211	-1,132	_	176,0000	-0,0000	105,0000	0,0000	
217	1,0492	0,829	-	100,0000	-0,0000	75,0000	0,0000	
218	1,0333	0,768	_	131,0000	-0,0000	96,0000	0,0000	
219	1,0731	1,511	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000	
220	1,0443	2,948	477,4060	285,0000	-56,1405	100,0000	0,0000	
221	1,0668	-0,074	554,6245	171,0000	310,7727	70,0000	0,0000	
222	1,0301	4,913	444,5479	328,0000	90,4004	188,0000	0,0000	
223	1,0624	-0,419	_	428,0000	-0,0003	232,0000	0,0000	
224	1,0550	-1,900	_	173,0000	-0,0001	99,0000	0,0000	
225	1,0189	-9,223	_	410,0000	-0,0005	40,0000	0,0000	
226	1,0638	-0,949	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000	
continua na próxima página								

Barra	v	θ	P_{G}	$P_{\rm C}$	$Q_{ m G}$	$Q_{\rm C}$	sh	
227	1,0229	0,615	494,0578	538,0000	262,3832	369,0000	0,0000	
228	1,0498	1,909	—	223,0000	-0,0000	148,0000	0,0000	
229	1,0570	2,978	—	96,0000	0,0000	46,0000	0,0000	
230	1,0453	9,394	365,7579	0,0000	37,7878	0,0000	0,0000	
231	1,0682	1,656	—	159,0000	-0,0000	107,0000	-3,4230	
232	1,0602	0,338	_	448,0000	-0,0000	143,0000	0,0000	
233	1,0433	2,063	471,3360	404,0000	174,3150	212,0000	0,0000	
234	1,0442	1,668	_	572 <i>,</i> 0000	-0,0000	244,0000	0,0000	
235	1,0441	3,334	—	269,0000	-0,0000	157,0000	0,0000	
236	0,9929	5,672	426,2971	0,0000	107,2056	0,0000	0,0000	
237	1,0701	1,739	—	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
238	1,0455	3,446	436,9425	255,0000	199,9999	149,0000	-1,6395	
239	1,0466	6,852	402,7126	0,0000	140,5002	0,0000	0,0000	
240	1,0337	2,729	_	0,0000	0,0000	0,0000	-1,4959	
241	1,0379	5,253	434,9132	0,0000	-217,7935	0,0000	0,0000	
242	1,0536	1,962	223,1620	0,0000	87,9646	0,0000	0,0000	
243	1,0528	-0,718	63,1694	8,0000	40,0002	3,0000	0,0000	
244	1,0395	-1,387	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000	
245	1,0271	-1,510	-	61,0000	-0,0000	30,0000	0,0000	
246	1,0191	-2,461	_	77,0000	-0,0000	33,0000	0,0000	
247	1,0285	-1,961	-	61,0000	-0,0000	30,0000	0,0000	
248	1,0386	-5,016	_	29,0000	-0,0000	14,0000	0,4919	
249	1,0381	-5,391	-	29,0000	-0,0000	14,0000	0,0000	
250	1,0800	-3,743	-	-23,0000	0,0000	-17,0000	0,0000	
281	1,0350	2,800	_	-33,1000	0,0000	-29,4000	0,0000	
319	1,0452	-3,090	_	115,8000	-0,0000	-24,0000	0,0000	
320	1,0568	-4,617	_	2,4000	0,0000	-12,6000	0,0000	
322	1,0563	-3,765	_	2,4000	0,0000	-3,9000	0,0000	
323	1,0404	-2,404	_	-14,9000	-0,0000	26,5000	0,0000	
324	1,0380	-5,594	-	24,7000	0,0000	-1,2000	0,0000	
526	1,0751	-12,264	_	145,3000	0,0000	-34,9000	0,0000	
528	1,0485	-8,322	_	28,1000	0,0000	-20,5000	0,0000	
531	1,0300	-3,596	_	14,0000	-0,0000	2,5000	0,0000	
552	1,0647	0,316	_	-11,1000	-0,0000	-1,4000	0,0000	
562	1,0453	-7,764	_	50,5000	-0,0000	17,4000	0,0000	
609	1,0248	-4,454	_	29,6000	0,0000	0,6000	0,0000	
664	1,0630	3,651	_	-113,7000	-0,0000	76,7000	0,0000	
1190	1,0476	-5,368	_	100,3100	-0,0003	29,1700	0,0000	
1200	1,0800	-10,892	-	-100,0000	-0,0003	34,1700	0,0000	
1201	1,0535	-18,772	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
2040	1,0199	-4,389	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000	
7001	1,0800	3,592	323,4973	0,0000	103,5967	0,0000	0,0000	
continua na próxima página								

Barra	v	θ	$P_{ m G}$	P_{C}	$Q_{ m G}$	$Q_{\rm C}$	sh	
7002	1,0658	4,126	248,2610	0,0000	6,6786	0,0000	0,0000	
7003	1,0517	3,234	340,0756	0,0000	199,6876	0,0000	0,0000	
7011	1,0781	3,740	239,9144	0,0000	100,0008	0,0000	0,0000	
7012	1,0631	6,640	293,5086	0,0000	104,8302	0,0000	0,0000	
7017	1,0472	2,914	555,0603	0,0000	212,9256	0,0000	0,0000	
7023	1,0796	1,719	143,2250	0,0000	0,0014	0,0000	0,0000	
7024	1,0405	4,564	218,7957	0,0000	24,3548	0,0000	0,0000	
7039	0,9729	7,892	358,8489	0,0000	-124,3662	0,0000	0,0000	
7044	0,9635	21,094	210,3818	0,0000	34,1106	0,0000	0,0000	
7055	1,0208	7,849	87,5894	0,0000	25,0000	0,0000	0,0000	
7057	1,0142	1,712	121,1920	0,0000	27,5369	0,0000	0,0000	
7061	1,0778	1,881	320,5695	0,0000	150,0007	0,0000	0,0000	
7062	1,0560	6,290	288,9577	0,0000	132,6732	0,0000	0,0000	
7071	1,0509	7,636	248,6684	0,0000	87,0000	0,0000	0,0000	
7130	1,0800	3,665	397,0318	0,0000	79,5218	0,0000	0,0000	
7139	1,0606	-2,209	667,2061	0,0000	285,9966	0,0000	0,0000	
7166	0,9956	10,414	216,1565	0,0000	-22,7911	0,0000	0,0000	
9001	1,0405	-2,216	-	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
9002	1,0475	-0,027	16,2107	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000	
9003	1,0204	-9,838	-	2,7100	-0,0000	0,9400	0,0250	
9004	1,0142	-9,962	-	0,8600	-0,0000	0,2800	0,0000	
9005	1,0415	-1,844	—	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
9006	1,0380	-7,804	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000	
9007	1,0275	-8,938	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000	
9012	1,0471	-0,910	_	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
9021	1,0421	-0,222	—	4,7500	-0,0000	1,5600	0,0000	
9022	1,0201	-2,418	_	1,5300	-0,0000	0,5300	0,0000	
9023	1,0293	-0,483	_	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000	
9024	1,0253	-2,220	_	1,3500	-0,0000	0,4700	0,0000	
9025	1,0200	-1,393	_	0,4500	-0,0000	0,1600	0,0000	
9026	1,0208	-1,316	-	0,4500	-0,0000	0,1600	0,0000	
9031	0,9722	-14,537	-	1,8400	-0,0000	0,6400	0,0000	
9032	0,9836	-13,506	-	1,3900	-0,0000	0,4800	0,0000	
9033	0,9695	-14,820	-	1,8900	-0,0000	0,6500	0,0000	
9034	1,0357	-11,099	-	1,5500	-0,0000	0,5400	0,0184	
9035	0,9895	-12,917	-	1,6600	-0,0000	0,5800	0,0000	
9036	0,9977	-12,605	-	3,0300	-0,0000	1,0000	0,0000	
9037	0,9956	-12,397	-	1,8600	-0,0000	0,6400	0,0000	
9038	0,9791	-14,007	-	2,5800	-0,0000	0,8900	0,0000	
9041	1,0017	-11,289	-	1,0100	-0,0000	0,3500	0,0000	
9042	0,9892	-12,316	-	0,8100	-0,0000	0,2800	0,0000	
9043	1,0025	-11,449	_	1,6000	-0,0000	0,5200	0,0000	
continua na próxima página								

Barra	υ	θ	$P_{ m G}$	$P_{\rm C}$	$Q_{ m G}$	$Q_{\rm C}$	sh
9044	1,0163	-9,926	-	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000
9051	1,0312	3,405	25,5078	0,0000	9,1966	0,0000	0,0000
9052	1,0142	-7,397	-	30,0000	-0,0000	23,0000	0,0000
9053	1,0311	3,336	25,9898	0,0000	9,4164	0,0000	0,0000
9054	1,0333	9,836	137,3614	0,0000	38,0004	0,0000	0,0000
9055	0,9881	17,875	41,5968	0,0000	6,0015	0,0000	0,0000
9071	1,0125	-10,520	-	1,0200	-0,0000	0,3500	0,0000
9072	1,0172	-10,029	-	1,0200	-0,0000	0,3500	0,0000
9121	1,0258	-2,761	-	3,8000	-0,0000	1,2500	0,0000
9533	1,0730	2,893	—	1,1900	-0,0000	0,4100	0,0000
7049	1,0635	0,000	161,3280	0,0000	32,7098	0,0000	0,0000