



**UNICAMP**

**LCSI**

Faculdade de Engenharia Elétrica  
Departamento de Máquinas, Componentes e Sistemas Inteligentes  
Laboratório de Controle e Sistemas Inteligentes

## Uma Metodologia para o Projeto de Controladores Robustos no Espaço de Estados

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de

Doutor em Engenharia Elétrica

por

**Celso José Munaro** *t 920*

Mestre - UNICAMP/SP

**Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura** *t*

Orientador - FEE/UNICAMP/SP

Agosto de 1994

Este exemplar constitui o único e definitivo final da tese  
defendida por *Celso José Munaro*

Julgadora em *19 / 08 / 1994* Comissão

*Celso Pascoli Bottura*  
Orientador



**UNICAMP**

**LCSI** Faculdade de Engenharia Elétrica  
Departamento de Máquinas, Componentes e Sistemas Inteligentes  
Laboratório de Controle e Sistemas Inteligentes

Tese : **Uma Metodologia para o Projeto de Controladores Robustos no Espaço de Estados**

Autor : **Celso José Munaro**

Orientador : **Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura**

Aprovada em 19 de agosto de 1994 pela banca examinadora

Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura (Presidente)

Prof. Dr. José Cláudio Geromel — UNICAMP

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres — UNICAMP

Prof. Dr. Afonso Celso Del Nero Gomes — COPPE/UFRJ

Prof. Dr. Eugenio de Bona Castelan Neto — UFSC

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Notação</b>	<b>v</b>
<b>Introdução Geral</b>	<b>1</b>
<b>1 Sistemas Lineares: Robustez e Estabilização</b>	<b>5</b>
1.1 Introdução . . . . .	5
1.2 Estabilidade segundo Lyapunov . . . . .	6
1.2.1 Condições para estabilidade associadas ao teorema de Lyapunov . .	8
1.2.2 Equações modificadas de Lyapunov e regiões do plano complexo . .	9
1.3 Robustez a perturbações . . . . .	11
1.3.1 Condição suficiente para estabilidade . . . . .	12
1.3.2 Medidas de robustez . . . . .	13
1.3.3 Geração de famílias de matrizes estáveis . . . . .	15
1.4 Controlador estabilizante para sistemas lineares . . . . .	17
1.5 Controlador estabilizante para sistemas incertos . . . . .	19
1.5.1 Estabilidade quadrática e estabilidade robusta . . . . .	19
1.5.2 Abordagem via “matching conditions” . . . . .	24
1.5.3 Método via programação convexa . . . . .	26
1.6 Controlador estabilizante via alocação de pólos . . . . .	28
1.7 Conclusão . . . . .	30
<b>2 Variações paramétricas no conjunto dos controladores</b>	<b>31</b>
2.1 Introdução . . . . .	31
2.2 Variações paramétricas sobre um controlador . . . . .	31
2.3 Direções convexas em $\mathcal{F}$ . . . . .	38
2.3.1 Exemplo 2.1: direções não convexas . . . . .	44
2.4 Direções modais robustas de $\mathcal{F}$ . . . . .	46
2.4.1 Caso entrada única . . . . .	49
2.4.2 Caso entradas múltiplas . . . . .	50
2.4.3 Escolha do parâmetro livre $f$ . . . . .	51
2.5 Critérios de desempenho associados a equações de Lyapunov . . . . .	53
2.6 Conclusão . . . . .	54

<b>3</b>	<b>Controladores robustos: abordagem via variações paramétricas</b>	<b>55</b>
3.1	Introdução . . . . .	55
3.2	Conjuntos de controladores . . . . .	56
3.3	Conjuntos de controladores robustos . . . . .	58
3.4	Exemplo 3.1 : construção de conjuntos . . . . .	60
3.5	Estabilização robusta . . . . .	63
3.6	Conclusão . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Algoritmos de projeto e aplicações</b>	<b>67</b>
4.1	Introdução . . . . .	67
4.2	Estabilização robusta . . . . .	67
4.2.1	Algoritmo 4.1 . . . . .	67
4.2.2	Exemplo 4.1 : pólos na faixa - 1 . . . . .	68
4.2.3	Exemplo 4.2 : pólos na faixa - 2 . . . . .	70
4.2.4	Exemplo 4.3 : pólos em um setor . . . . .	71
4.2.5	Algoritmo 4.2 . . . . .	72
4.2.6	Exemplo 4.4 : aplicação do algoritmo 4.2 . . . . .	73
4.2.7	Algoritmo 4.3 . . . . .	75
4.2.8	Exemplo 4.5 : aplicação do algoritmo 4.3 . . . . .	75
4.2.9	Exemplo 4.6 : Exemplo não quadraticamente estabilizável . . . . .	76
4.2.10	Exemplo 4.7 : Teste de estabilidade robusta . . . . .	77
4.3	Conclusão . . . . .	78
	<b>Conclusão Geral</b>	<b>78</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>80</b>

# Agradecimentos

Ao prof. Celso P. Bottura, por permitir que eu me perdesse, e me encontrasse ( e por outras tantas coisas mais).

À minha família, pelo apoio e carinho sempre presentes.

Aos colegas do LCSi: Gilmar, Gustavo, Fernando, Sérgio, Tetsu, pelas muitas horas de companheirismo.

Ao prof. Orlando Lopes, pelo auxílio na revisão final deste trabalho.

Ao DEL-CT-UFES, pelo apoio recebido na fase final deste trabalho.

Ao LAC-DT-FEE-UNICAMP, pela pronta colaboração sempre prestada.

À família Bortolon, pela forma especial como me recebeu.

À todos os meus amigos, cuja convivência tornou mais agradável a realização deste trabalho.

À alguém muito especial, que não gosta de agradecimentos e que me ajuda a ver o mundo com outros olhos.

Ao CNPQ, pelo auxílio financeiro.

# Resumo

Uma nova metodologia para o projeto de controladores lineares robustos multivariáveis no espaço de estados é proposta.

Técnicas de alocação de pólos associadas à teoria de estabilidade de Lyapunov permitem o desenvolvimento de uma nova abordagem para tratar o problema de estabilização robusta, para o qual algoritmos iterativos e não iterativos são propostos.

A abordagem é baseada na exploração do conjunto de controladores estabilizantes através de variações paramétricas neste conjunto.

Os algoritmos propostos são aplicados a exemplos numéricos, ilustrando a eficácia da abordagem, bem como tornando mais claros conceitos teóricos.

# Abstract

A new methodology for the design of linear multivariable robust controllers in state space is here proposed.

The use of pole allocation techniques and Lyapunov's stability theory allowed the development of a new approach for the robust stabilization problem, and iterative and non iterative algorithms are proposed to solve it.

The approach is based on exploring the set of linear stabilizing controllers through parameter variations on this set.

Numerical examples are worked out using the proposed algorithms, where the usefulness of the methodology is demonstrated and theoretical concepts are made clearer.

# Notação

$A, B, \dots$	- matrizes
$A^T$	- transposta de $A$
$A^*$	- conjugada transposta de $A$
$\lambda(A)$	- autovalores de $A$
$\sigma(A)$	- valores singulares de $A$
$\ A\ $	- norma de $A$ , dada por $\sigma_{max}(A)$
$A > 0$	- $A$ é definida positiva
$A - B > 0$	- $A - B$ é definida positiva
$I_n$	- matriz unitária de dimensão $n$
$\bar{\lambda}$	- conjugado complexo de $\lambda$
$A$ é estável	- todos autovalores de $A$ estão no semiplano esquerdo
$\text{Tr}(A)$	- traço de $A$
$\text{diag}(A)$	- matriz obtida da diagonal de $A$

# Introdução Geral

Modelos matemáticos de sistemas físicos são, na melhor das hipóteses, uma boa aproximação da realidade que se quer reproduzir. As diferenças entre os modelos e os sistemas físicos surgem de fontes tais como mudanças ambientais, erros de modelamento, erros de linearização. Em geral, as incertezas a serem consideradas são não infinitesimais, de modo que a matemática linear não é aplicável. Neste caso, métodos para análise e projeto visando garantir estabilidade são desejáveis.

No domínio da frequência, Doyle e Stein (1981) construíram as condições para estabilidade robusta e desempenho usando norma espectral. Doyle (1982) estendeu estes resultados para cobrir mais descrições de incertezas estruturadas e define o valor singular estruturado  $\mu$ . Estas técnicas são descritas com detalhes no livro de Morari e Zafrou (1989).

A análise de robustez com incertezas paramétricas reais recebeu grande impulso quando o teorema de Kharitonov foi apresentado à comunidade de controle via artigos de Barmish (1983-c) e Bialas (1983). Estes resultados foram desenvolvidos visando primariamente o caso polinomial. O caso matricial pode ser eventualmente tratado: basta recordar que uma matriz na forma canônica companheira pode ser representada por um polinômio.

No domínio do tempo, a teoria de estabilidade de Lyapunov tem sido a base sobre a qual muitos métodos para análise e projeto envolvendo estabilidade e desempenho têm sido desenvolvidos (veja [2]-[14], [18]-[32], [37]-[51] e suas referências). O uso de uma condição suficiente de estabilidade permite obter limites sobre perturbações que não desestabilizam um sistema nominalmente estável ([49]-[51]). Estes limites são, em geral, dados em função de normas de matrizes. Foo e Soh (1990) usaram medidas de matrizes para garantir a estabilidade de um sistema sujeito a um conjunto de matrizes de perturbação representado por um politopo. Neste caso, a estabilidade era garantida testando apenas os vértices do politopo. Em [18], [45] e [47] foram construídas famílias de matrizes de perturbação que não desestabilizavam um sistema nominalmente estável.

Quando o sistema nominal ou o sistema perturbado é instável, torna-se necessário o projeto de um controlador que garanta a estabilidade do sistema para qualquer realização das perturbações. Diferentes considerações sobre as perturbações originam diferentes técnicas. Em [29],[44], as perturbações obedeciam as chamadas *matching conditions*. Thorp e Barmish (1981) mostraram que, sob estas condições, sempre existe um controlador linear estabilizante.

O trabalho pioneiro de Horisberger e Belanger (1976) despertou o interesse pela busca

computacional de funções de Lyapunov. As incertezas eram representadas como vértices de um politopo. A aplicação de técnicas de programação linear a esta abordagem fez surgir diferentes métodos para atacar o problema de robustez na presença de incertezas. Bernussou, Peres e Geromel (1989) propuseram um procedimento numérico que permitia identificar a existência ou não de uma função de Lyapunov e a partir dela obter um controlador linear estabilizante para um sistema com incertezas tanto na matriz dinâmica quanto na matriz de entrada.

Em Boyd, Ghaoui, Feron e Balakrishnan (1994), são discutidos problemas que podem ser escritos como inequações matriciais lineares (LMIs) bem como diferentes métodos numéricos para sua resolução. Entre eles, é discutido o problema de encontrar uma função de Lyapunov que garanta estabilidade a uma família de sistemas lineares como sendo um problema convexo envolvendo LMIs.

Embora permitam a síntese de algoritmos bastante poderosos, técnicas baseadas na busca de uma função de Lyapunov que garanta estabilidade ou desempenho robusto a um sistema incerto, podem demandar um tremendo esforço computacional mesmo para pequenos problemas. Além disto, estas técnicas são baseadas na estabilidade quadrática do sistema. Caso a estabilidade robusta seja desejada (a função de Lyapunov associada ao sistema incerto é parametrizada), os algoritmos citados podem não encontrar uma solução mesmo que ela exista. O leitor é referido a Rotea, Corless e Da (1993) para uma discussão detalhada sobre estabilidade quadrática e robusta e suas soluções. Neste trabalho, atacamos o problema de estabilidade robusta.

Considere o sistema linear dado por

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (0.1)$$

e os conjuntos de matrizes  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  dados por

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \{A_i \in R^{n \times n}, i = 1, \dots, N\} \\ \mathcal{B} = \{B_j \in R^{r \times n}, j = 1, \dots, M\} \end{cases} \quad (0.2)$$

Chamamos de  $\Sigma_c$  o sistema incerto dado por (0.1) com  $A \in \mathcal{A}$  e  $B \in \mathcal{B}$ . Por outro lado, chamamos de  $\Sigma_v$  o sistema incerto dado por (0.1) com  $A \in \text{conv}\{\mathcal{A}\}$  e  $B \in \text{conv}\{\mathcal{B}\}$ , onde  $\text{conv}\{\mathcal{A}\}$  denota a combinação convexa dos elementos de  $\mathcal{A}$ . Definimos ainda os seguintes conjuntos:

$\mathcal{F}_{ij}$  : conjunto dos controladores que estabiliza um sistema como (0.1)

com  $A = A_i$  e  $B = B_j$  matrizes constantes conhecidas.

$\mathcal{F}^c$  : conjunto dos controladores que estabiliza robustamente o sistema  $\Sigma_c$ .

$\mathcal{F}^v$  : conjunto dos controladores que estabiliza robustamente o sistema  $\Sigma_v$ .

$\mathcal{F}^q$  : conjunto dos controladores que estabiliza quadraticamente o sistema  $\Sigma_v$ .

Estes conjuntos serão definidos mais precisamente, envolvendo também o conceito de desempenho associado a regiões do plano complexo. A relação entre  $\mathcal{F}^c$ ,  $\mathcal{F}^v$  e  $\mathcal{F}^q$  é mostrada na figura 0.1.

Métodos baseados no conceito de estabilidade quadrática buscam controladores pertencentes ao conjunto  $\mathcal{F}^q$ .

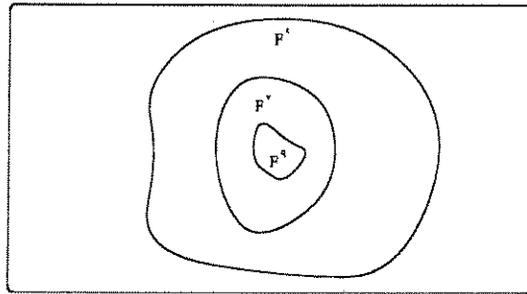


Figura 0.1: Conjuntos de controladores de interesse

Os métodos aqui propostos permitem obter soluções em  $\mathcal{F}^c$  explorando os conjuntos  $\mathcal{F}_{ij}$ . Imagine a construção dos conjuntos  $\mathcal{F}_{ij}$ . A interseção destes conjuntos, se existir, dá a solução desejada  $\mathcal{F}^c = \bigcap \mathcal{F}_{ij}$ .

Obviamente, construir tais conjuntos é uma tarefa trabalhosa. Politopos convexos contidos nos conjuntos  $\mathcal{F}_{ij}$  podem ser facilmente construídos, como discutido em Bottura e Munaro (1994b). O procedimento é similar ao usado em Eslami(1993) e Wang, Lee, e Boley(1993) para a construção de famílias de perturbações que não desestabilizam um sistema nominalmente estável. A interseção dos politopos construídos, se existir, é uma solução desejada.

Bottura e Munaro (1994c) mostraram que se um elemento do conjunto  $\mathcal{F}_{ij}$  é conhecido, qualquer outro elemento do mesmo conjunto pode ser alcançado pela escolha de *direções* (variações sobre o elemento conhecido) adequadas. Esta estratégia permite explorar os conjuntos  $\mathcal{F}_{ij}$  na direção de soluções pertencentes a  $\mathcal{F}^c$ .

Mais do que um método, propõe-se aqui uma metodologia baseada em procedimentos para a exploração do conjunto dos controladores. As principais características desta metodologia são: soluções iniciais computadas nos conjuntos  $\mathcal{F}_{ij}$  auxiliam a obtenção da solução desejada, sendo, eventualmente, a própria; quando procedimentos iterativos são necessários, eles consistem em resolver a equação de Lyapunov e calcular os autovalores de matrizes simétricas, existindo algoritmos estáveis e eficientes para fazê-lo; diferentemente de [2] e [8], não é necessário trabalhar com sistemas aumentados; restrições de projeto e especificações de desempenho podem ser facilmente incorporadas; usando o conceito de *direções não-convexas*, problemas devidos à não convexidade do conjunto de controladores podem ser contornados.

Para desenvolver a citada metodologia, é estudado no capítulo 1 o uso da teoria de Lyapunov para a análise e o projeto de sistemas sujeitos a perturbações.

Conjuntos baseados em equações modificadas de Lyapunov são introduzidos de forma a envolver ambos conceitos de estabilidade e desempenho. Também são estudadas algumas medidas de robustez bem como a geração de famílias de matrizes estáveis. Condições para estabilizabilidade de sistemas precisamente conhecidos (SPCs) e de sistemas incertos (SIs) são apresentadas e métodos propostos na literatura para a estabilização de SIs são discutidos. Os conceitos de estabilidade quadrática e estabilidade robusta são discutidos e conjuntos de controladores são propostos para cada um dos dois casos.

O capítulo 2 é dedicado a desenvolver a teoria necessária para explorar conjuntos de controladores estabilizantes para um SPC. É mostrado que qualquer elemento destes conjuntos pode ser alcançado a partir de um elemento conhecido e da escolha adequada de direções. Os conceitos de direção convexa e direção modal robusta são introduzidos. Eles permitem obter direções usadas na busca de elementos particulares do conjunto de controladores.

No capítulo 3, os resultados do capítulo 2 são aplicados a sistemas incertos. A construção de conjuntos de controladores robustos é discutida. São propostos resultados para a obtenção de controladores robustos estabilizantes.

O capítulo 4 é reservado para a proposta de algoritmos de projeto e sua aplicação a exemplos da literatura. Estes exemplos, resolvidos na literatura para o caso de estabilidade quadrática, são resolvidos para o caso de estabilidade robusta via algoritmos propostos. Um exemplo didático não quadraticamente estabilizável é discutido.

Este trabalho teve origem em nossa tese de mestrado ( Munaro(1990) ), onde algoritmos para redução de ordem e controle de sistemas discretos multivariáveis foram estudados e propostos. Nosso interesse pelo projeto de controladores para sistemas multivariáveis no espaço de estados foi despertado nos vários cursos ministrados pelo prof. Celso P. Bottura (IA502, IA701, IA310). No decorrer do curso IA333, ministrado pelo prof. José C. Geromel, nossa imaginação foi estimulada a combinar técnicas de alocação de pólos e teoria de estabilidade de Lyapunov para resolver problemas de estabilização de sistemas sujeitos a perturbações. O modelamento das incertezas via politopos de matrizes facilitou grandemente o desenvolvimento dos resultados aqui propostos.

Consideramos este trabalho como sendo um primeiro passo  $\epsilon$  na direção  $\Delta K$  do problema de estabilização robusta que desejamos resolver. Embora permitam resolver problemas significativos, os resultados aqui apresentados são bastante preliminares, e muitas contribuições podem ainda ser a eles adicionadas.

# Capítulo 1

## Sistemas Lineares: Robustez e Estabilização

### 1.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo analisar a aplicação da teoria de estabilidade de Lyapunov para estudos de robustez e estabilização.

A aplicação do método direto de Lyapunov a um sistema linear da forma

$$\dot{x} = Ax \quad (1.1)$$

com  $x \in R^n$  fornece uma condição necessária e suficiente para sua estabilidade. Esta condição é obtida via solução de uma equação matricial linear.

Para o caso de ( 1.1) ser instável, existe em geral a possibilidade de se atuar externamente sobre o sistema de forma a torná-lo estável. O método de Lyapunov pode ser novamente aplicado para a indicar a existência ou não de um controlador linear estabilizante para um sistema linear da forma

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.2)$$

Quando o modelo que representa um sistema físico estiver sujeito a perturbações paramétricas, como anteriormente, são estabelecidas condições para:

a) a estabilidade de um sistema incerto da forma

$$\dot{x} = (A + E(t))x \quad (1.3)$$

b) a existência de um controlador linear que estabilize um sistema incerto da forma

$$\dot{x} = A(r(t))x + B(s(t))u \quad (1.4)$$

As suposições feitas sobre  $E(\cdot)$ ,  $r(\cdot)$  e  $s(\cdot)$  em ( 1.3) e ( 1.4) dão origem a diferentes técnicas para garantir a estabilidade de tais sistemas.

Para que se possa falar em desempenho (associado a sub-regiões do semi-plano complexo esquerdo) e não apenas em estabilidade, são introduzidas condições baseadas em equações modificadas de Lyapunov através de uma notação proposta.

Na seção 1.3 são analisadas medidas de robustez para garantir a estabilidade de um sistema nominalmente estável. Uma condição suficiente de estabilidade satisfeita para estas medidas é proposta. Esta condição assume grande importância no capítulo 2.

Nas seções 1.4, 1.5 e 1.6 são estudadas condições para estabilização de sistemas precisamente conhecidos (SPCs) e de sistemas incertos (SIs). Os conceitos de estabilidade quadrática e de estabilidade robusta são definidos. Além disso, métodos para estabilização quadrática existentes na literatura são discutidos.

## 1.2 Estabilidade segundo Lyapunov

Dado um sistema de controle, a estabilidade é em geral a característica mais importante a ser determinada. O segundo método de Lyapunov é o método mais geral para a determinação da estabilidade de sistemas não lineares e/ou variantes no tempo.

Este método baseia-se no fato de que se um sistema tem um estado de equilíbrio estável, então a energia decresce com o tempo até que este atinja o estado de equilíbrio. A estratégia consiste então em encontrar uma função escalar definida positiva  $V(x)$ , onde  $x$  é um vetor de estados  $n$ -dimensional, de forma que  $\dot{V}(x)$  seja definida negativa.

Seja então o sistema linear invariante no tempo descrito por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (1.5)$$

Escolhemos para este sistema uma possível função de Lyapunov

$$V(x) = x^T P x$$

onde  $P$  é uma matriz simétrica definida positiva, ou seja,  $P = P^T > 0$ . A derivada de  $V(x)$  em relação ao tempo e ao longo de qualquer trajetória de (1.5) é dada por

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + P A) x$$

Como requeremos que  $\dot{V}(x)$  seja definida negativa,

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x$$

e portanto,

$$A^T P + P A = -Q \quad (1.6)$$

Para que (1.5) seja estável, é suficiente que se tenha  $Q > 0$  (definida positiva). Portanto, seguindo a idéia básica de escolher uma possível função de Lyapunov, uma matriz  $P$  foi

especificada e a análise da derivada desta função forneceu uma condição suficiente de estabilidade via matriz  $Q$ .

O teorema a seguir dá uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de ( 1.5), especificando uma matriz  $Q > 0$  e verificando se  $P$  solução de ( 1.6) é definida positiva.

**Teorema 1.1 ( Lyapunov)** *Uma dada matriz  $A$  é estável se e somente se dada uma matriz  $Q > 0$ , existir uma única matriz  $P = P^T > 0$  solução de*

$$AP + PA^T = -Q \quad (1.7)$$

**Prova :**

*Necessidade:* se  $A$  for estável, então  $\forall Q$ , existe  $P$  única dada por

$$P = \int_0^{\infty} e^{At} Q e^{A^T t} dt \quad (1.8)$$

solução de ( 1.7). Para verificar esta solução, tomamos a derivada de  $e^{At} Q e^{A^T t}$ ,

$$\frac{d}{dt} (e^{At} Q e^{A^T t}) = (A e^{At} Q e^{A^T t}) + (e^{At} Q e^{A^T t} A^T) \quad (1.9)$$

Integrando ambos lados de ( 1.9), vem

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (e^{At} Q e^{A^T t} dt) dt = AP + PA^T = -Q \quad (1.10)$$

Resta agora mostrar que  $P$  dado por ( 1.8) é definida positiva, isto é,  $x^T P x > 0, \forall x \in R^n$ . De ( 1.8),

$$x^T P x = \int_0^{\infty} (x^T e^{At}) Q (x^T e^{At})^T dt$$

Como  $Q$  é definida positiva e  $e^{At}$  é não singular para todo  $t$ , resulta que o integrando de ( 1.8) é definido positivo.

*Suficiência :* suponha que existam  $P$  e  $Q$  definidas positivas satisfazendo ( 1.7) e considere  $x \mid x^T A = \lambda x^T$ . Com  $(\cdot)$  denotando o complexo conjugado de  $(\cdot)$ , vem

$$x^T (AP + PA^T + Q) \bar{x} = 0$$

$$\lambda x^T P \bar{x} + \bar{\lambda} x^T P \bar{x} = -x^T Q \bar{x}$$

$$2\text{Re}(\lambda) x^T P \bar{x} = -x^T Q \bar{x}$$

Como  $P > 0$  e  $Q > 0$ ,  $x^T P \bar{x} > 0$  e  $x^T Q \bar{x} > 0$ . Portanto,  $\text{Re}(\lambda) < 0$ .

**C.Q.D.**

Não obstante sua vasta aplicação para estudos de estabilidade, estes resultados também permitem analisar características mais específicas de um dado sistema. Em trabalhos como os de Maxco (1980) e de Gutman e Jury (1981), são propostas equações de Lyapunov para garantir que os pólos de um sistema estejam em sub-regiões do semi-plano complexo esquerdo. Para discutir este assunto, introduzimos a seguir condições que permitem generalizar os conceitos de estabilidade robusta e desempenho robusto tanto para análise quanto para o projeto de sistemas de controle. Estas condições são baseadas nas equações modificadas de Lyapunov citadas.

### 1.2.1 Condições para estabilidade associadas ao teorema de Lyapunov

De forma semelhante ao modo como o teorema de Lyapunov foi apresentado, propomos uma condição suficiente e uma condição necessária e suficiente para estabilidade. A notação utilizada permite definir estas condições usando qualquer equação modificada de Lyapunov.

Definimos então

$$\mathcal{P}(A, Q) \stackrel{\text{def}}{=} \{P > 0 | AP + PA^T = -Q\} \quad (1.11)$$

Se  $A$  for estável,  $\mathcal{P}(A, Q) = \{P\}$  para  $Q > 0$ , pois existe um único  $P > 0$  satisfazendo  $AP + PA^T = -Q$ .

Se  $A$  for instável,  $\mathcal{P}(A, Q) = \emptyset$  para  $Q > 0$ , pois não existe  $P > 0$  satisfazendo  $AP + PA^T = -Q$ .

Observe que  $\mathcal{P}(A, Q) = \{P\}$  explicita a única função de Lyapunov  $V(x) = x^T P x$  associada à matriz estável  $A$ , para uma dada matriz  $Q$ .

$\mathcal{P}(A, Q) \neq \emptyset$  é a condição necessária e suficiente do teorema de Lyapunov aplicado a um sistema linear.

Definimos agora

$$\mathcal{L}(A, P) \stackrel{\text{def}}{=} AP + PA^T \quad (1.12)$$

Se para uma dada matriz  $P > 0$ ,

$$\mathcal{L}(A, P) < 0$$

então  $A$  é estável.

Observe que neste caso, a estabilidade foi determinada verificando se uma dada função  $V(x) = x^T P x$  é função de Lyapunov para o sistema linear definido pela matriz  $A$ . Esta

condição suficiente, que corresponde à idéia inicial do teorema de Lyapunov (testar funções candidatas a função de Lyapunov), será utilizada com muita frequência no decorrer deste trabalho.

As seguintes propriedades de  $\mathcal{P}(\cdot)$  e  $\mathcal{L}(\cdot)$  serão frequentemente utilizadas:

$$P \in \mathcal{P}(A, Q) \iff \mathcal{L}(A, P) = -Q \quad (1.13)$$

$$\mathcal{L}(A + B, P) = \mathcal{L}(A, P) + \mathcal{L}(B, P) \quad (1.14)$$

$$\mathcal{L}(A_1, P_1) + \mathcal{L}(A_2, I) = \mathcal{L}(A_1 + P_1 A_2^T, P_1) \quad (1.15)$$

Estas propriedades são facilmente verificáveis através de ( 1.11) e ( 1.12).

Satisfazer ( 1.11) e ( 1.12) é a estratégia de alguns métodos envolvendo estabilidade a perturbações (seção 1.3.2). Também é utilizada em alguns métodos para o projeto de controladores para sistemas com incertezas (seção 1.5.2).

Pode-se observar que se tivermos

$$A^T S + S A = -Q \quad (1.16)$$

então pré e pós-multiplicando por  $S^{-1}$  vem,

$$A S^{-1} + S^{-1} A^T = -S^{-1} Q S^{-1}$$

Com  $P = S^{-1}$ , e  $\bar{Q} = S^{-1} Q S^{-1}$

$$A P + P A^T = -\bar{Q} \quad (1.17)$$

Como  $S > 0$  implica  $P = S^{-1} > 0$  e  $Q > 0$  implica  $S^{-1} Q S^{-1} > 0$ , ( 1.17) e ( 1.16) são equivalentes.

### 1.2.2 Equações modificadas de Lyapunov e regiões do plano complexo

Vimos na seção anterior que se

$$P \in \mathcal{P}(A, Q)$$

então os autovalores de  $A$  estão todos no semi-plano esquerdo do plano complexo, garantindo a estabilidade de  $A$ .

Interessa-nos nesta seção obter condições que garantam estabilidade relativa para uma dada matriz  $A$ . Elas serão de grande utilidade para o projeto de sistemas de controle.

Propomos agora condições para garantir que os autovalores estejam em algumas regiões. Para uma discussão mais detalhada sobre a relação entre expressões algébricas e regiões do plano complexo, veja [25], por exemplo.

Seja então  $\lambda_i \in \lambda(A) = \mu_i + j\eta_i$  um autovalor de  $A$ .

**Caso 1 :**  $S = \{(\mu, \eta) | \mu < -\alpha; \alpha > 0\}$

Trata-se do semi-plano esquerdo deslocado de  $\alpha$  (figura 1.1 a ). Se

$$\mathcal{P}(A, Q, \alpha) = \{P > 0 \mid (A + \alpha I)P + P(A + \alpha I)^T = -Q\} \quad (1.18)$$

então  $\mathcal{P}(A, Q, \alpha) = \{P_\alpha\}$  garante  $\mu_i < -\alpha$ ,  $\forall \lambda_i \in \lambda(A)$ .

**Caso 2 :**  $S = \{(\mu, \eta) \mid -\beta < \mu < -\alpha; \alpha > 0; \beta > 0\}$

Neste caso,  $S$  é a região contida entre as duas barras verticais definidas por  $\alpha$  e  $\beta$  (figura 1.1 b ). Se

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A, Q, \alpha, \beta) = \{P > 0 \mid (A + \alpha I)P + P(A + \alpha I)^T = -Q \\ \text{ou } (-A - \beta I)P + P(-A - \beta I)^T = -Q\} \end{aligned} \quad (1.19)$$

então  $\mathcal{P}(A, Q, \alpha, \beta) = \{P_\alpha, P_\beta\}$  garante

$$\begin{cases} \mu_i + \alpha < 0 \\ -\mu_i - \beta < 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \mu_i < -\alpha \\ \mu_i > -\beta \end{cases}$$

$\forall \lambda_i \in \lambda(A)$ .

**Caso 3 :**  $S = \{(\mu, \eta) \mid h\mu - \eta < 0; h > 0\}$

O autovalor  $\lambda_i \in \lambda(A)$  pertence a  $S$  se ele estiver acima da linha  $\eta = h\mu$ . Como os autovalores são complexo-conjugados, a região  $S$  é aquela mostrada na figura 1.1 c .

Na forma polar, o autovalor  $\lambda_i(A) = \mu_i + j\eta_i$  é representado por

$$e^{j\theta_i} \sqrt{\mu_i^2 + \eta_i^2} = r_i e^{j\theta_i}$$

com

$$\theta_i = \cos^{-1}\left(\frac{\eta_i}{r_i}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\eta_i}{\mu_i}\right)$$

A multiplicação de  $\lambda_i$  por  $e^{j\theta}$  dá  $r_i e^{j(\theta_i + \theta)}$ , ou seja, temos uma rotação de  $\lambda_i$  no sentido horário. Se  $\lambda_i$  é estável, uma rotação  $\theta$  tal que  $(\theta_i + \theta) > \frac{\pi}{2}$  torna  $\lambda_i$  instável.

Escolhendo então  $\theta$  no sentido anti-horário (figura 1.1 c ) dado por

$$\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\eta}{\mu}\right) = \text{tg}^{-1}h, \tag{1.20}$$

se

$$\mathcal{P}(A, Q, \theta) = \{P > 0 \mid e^{j\theta}AP + Pe^{-j\theta}A^T = -Q\} \tag{1.21}$$

então  $\mathcal{P}(A, Q, \theta) = \{P_\theta\}$  implica em  $\theta_i + \theta < \frac{\pi}{2}$ ,  $\forall \lambda_i \in \lambda(A) = r_i e^{j\theta_i}$ .

Observe que esta condição corresponde ao resultado mais geral do teorema de Lyapunov ([31],pp.443). A solução hermitiana definida positiva P é a condição necessária e suficiente para estabilidade de  $e^{j\theta}A$ , com  $Q \in C^{n,n}$  definida positiva.

**Caso 4 :**  $S = \{(\mu, \eta) \mid -\beta < \mu < -\alpha; h\mu - \eta < 0; \alpha > 0; \beta > 0; h > 0\}$

Esta região (figura 1.1 d ) é uma composição das regiões dos dois casos anteriores. Se

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A, Q, \alpha, \beta, \theta) = \{P > 0 \mid e^{j\theta}(A + \alpha I)P + Pe^{-j\theta}(A + \alpha I)^T = -Q \\ \text{ou } (-A - \beta I)P + P(-A - \beta I) = -Q\} \end{aligned} \tag{1.22}$$

então  $\mathcal{P}(A, Q, \alpha, \beta, \theta) = \{P_{\alpha\theta}, P_\beta\}$  garante  $\lambda_i \in S$ ,  $\forall \lambda_i \in \lambda(A)$ .

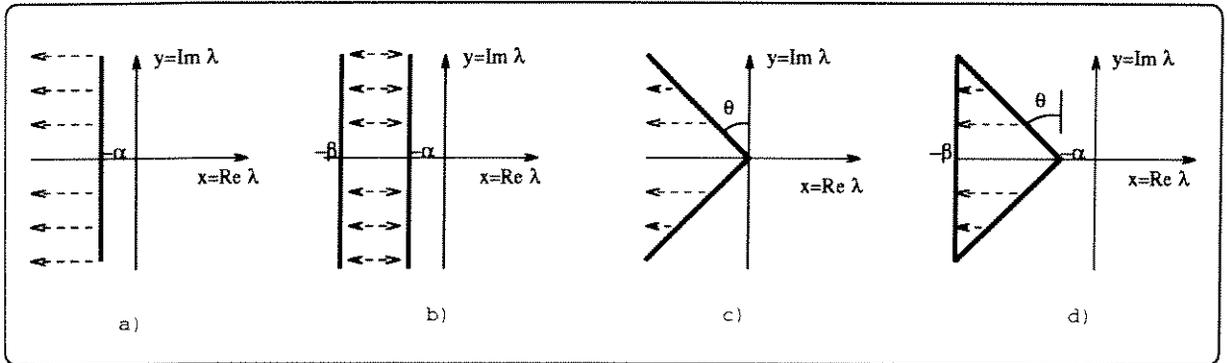


Figura 1.1: Regiões do plano complexo

No capítulo 2 voltaremos a discutir este assunto, quando critérios de desempenho e de projeto serão associados a estas regiões.

### 1.3 Robustez a perturbações

Na seção anterior, tratamos das estabilidades assintótica e relativa de sistemas precisamente conhecidos. Entretanto, a presença de incertezas e/ou de variação de parâmetros desperta o interesse de se analisar a estabilidade e o desempenho de sistemas sujeitos a estas perturbações paramétricas.

Os termos estabilidade robusta e desempenho robusto estarão associados à estabilidade assintótica e à estabilidade relativa de sistemas incertos, respectivamente. Análises de robustez permitem obter uma medida quantitativa da perturbação sob a qual o sistema ainda mantém um desempenho desejado.

As perturbações paramétricas podem ser classificadas basicamente em dois grupos ([49]):

*perturbações estruturadas*: o modelo da perturbação é conhecido, bem como os limites nos elementos individuais da matriz de perturbação.

*perturbações não estruturadas*: o modelo da perturbação é conhecido ou não. No primeiro caso, os limites de variação dos elementos individuais não são conhecidos.

O estudo de alguns métodos existentes na literatura mostra que eles são baseados na satisfação de algum critério relacionado à matriz de perturbações, usando para isto a solução da equação de Lyapunov.

Estes métodos serão analisados à luz do teorema proposto a seguir.

### 1.3.1 Condição suficiente para estabilidade

O resultado a seguir é uma versão de um resultado bastante utilizado (veja [49], por exemplo).

Seja o sistema perturbado

$$\dot{x}(t) = (A + E)x(t) \quad (1.23)$$

onde  $E$  é uma matriz de perturbação atuando sobre o sistema nominal dada por

$$E = \alpha E_0, \quad \alpha \in [0, 1] \quad (1.24)$$

**Teorema 1.2** *O sistema perturbado dado por (1.23)-(1.24) admite a função de Lyapunov do sistema nominalmente estável associada a*

$$P \in \mathcal{P}(A, Q) \quad (1.25)$$

se

$$\mathcal{L}(E_0, P) < Q \quad (1.26)$$

**Prova :** de acordo com ( 1.11), se o sistema nominal é estável, então

$$P \in \mathcal{P}(A, Q)$$

Usando  $P$  em ( 1.12) com ( 1.14) para  $(A + E_0)$ , vem

$$\mathcal{L}(A + E_0, P) = \mathcal{L}(A, P) + \mathcal{L}(E_0, P)$$

De ( 1.13)

$$\mathcal{L}(A + E_0, P) = -Q + \mathcal{L}(E_0, P) = -\bar{Q}$$

Se  $\bar{Q} > 0$  então,

$$\mathcal{L}(E_0, P) < Q$$

Como

$$\mathcal{L}(\alpha E_0, P) < Q$$

é válida  $\forall \alpha \in [0, 1]$ , então de ( 1.13)

$$\mathcal{L}(A + \alpha E_0, P) = -\bar{Q}_\alpha \implies P \in \mathcal{P}(A + \alpha E_0, \bar{Q}_\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

e portanto a mesma função de Lyapunov associada a  $P$  é válida para

$$(A + \alpha E_0), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

**C.Q.D.**

Embora esta condição para estabilidade seja apenas suficiente, ela é garantida para todo o segmento convexo  $(A + \alpha E_0)$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ . Observe que qualquer  $\mathcal{P}(\cdot)$  discutida na seção 1.2.2 pode ser aqui utilizada.

### 1.3.2 Medidas de robustez

Discutimos agora alguns métodos propostos na literatura visando estabelecer alguma medida sobre a matriz  $E$  de forma a garantir a estabilidade de um sistema como ( 1.23). Estas medidas são, em geral, dadas em função de normas de matrizes e são conhecidas como *medidas de robustez*. De acordo com o teorema 1.2, a matriz  $(A + E)$  é estável se

$$\mathcal{L}(E, P) = EP + PE^T < 2I \quad (1.27)$$

para  $P \in \mathcal{P}(A, 2I)$ . A condição ( 1.27) é satisfeita se

$$\|\mathcal{L}(E, P)\| = \|EP + PE^T\| = \sigma_{max}(EP + PE^T) < 2$$

Usando propriedades de normas de matrizes, vem

$$\|EP + PE^T\| \leq 2 \|EP\| \leq 2 \|E\| \|P\| \quad (1.28)$$

Portanto, a medida

$$\sigma_{max}(E) \leq \frac{1}{\sigma_{max}(P)} \quad (1.29)$$

garante a estabilidade de ( 1.23).

Este resultado foi obtido em [37] para o caso de perturbações lineares. Neste mesmo trabalho é mostrado que se  $|E_{ij}| \leq \epsilon_{ij}$ ,  $\epsilon = \max \epsilon_{ij}$ , então

$$\epsilon < \frac{1}{n\sigma_{max}(P)} \quad (1.30)$$

é uma condição que garante ( 1.27).

Na tentativa de reduzir o conservatismo desta medida, foi proposta em [49] uma medida levando em consideração as perturbações estruturadas. Esta medida é dada por

$$\sigma_{max}(E) \leq \frac{1}{\sigma_{max}[P_m U]_s} \quad (1.31)$$

onde  $P_m$  é a matriz dos valores absolutos de  $P$  pertencente a ( 1.11) com  $Q = 2I$ ,  $[\cdot]_s$  denota a parte simétrica de  $[\cdot]$  e os elementos da matriz  $U$  são dados por

$$u_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } e_{ij} = 0 \\ \frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon} & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

onde  $|e_{ij}| < \epsilon_{ij}$  e  $\epsilon = \max \epsilon_{ij}$ .

Nestes métodos, busca-se uma medida de robustez relacionada a  $\|E\|$ .

Em [21], um método é proposto onde a medida de robustez é relacionada a  $\|\mathcal{L}(E, P)\|$ . A matriz de perturbação  $E$  é expressa como uma combinação convexa de matrizes de perturbação  $E_i$  que formam vértices de um conjunto convexo dado por

$$S_E = \text{conv}\{E_i, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (1.32)$$

Então,  $(A + E_i)$  é estável se

$$\mathcal{L}(E_i, P) = E_i P + P E_i^T < 2I, \quad i = 1, \dots, m \quad (1.33)$$

para  $P \in \mathcal{P}(A, 2I)$ . A condição ( 1.33) é satisfeita se

$$\lambda_{max}(\mathcal{L}(E_i, P)) < 2, \quad i = 1, \dots, m$$

Se ( 1.33) for válida para  $i = 1, \dots, m$ , então  $(A + E)$  é estável  $\forall E \in S_E$ . Para ver isto, escrevemos

$$(A + E_i)P + P(A + E_i)^T = -2I + \mathcal{L}(E_i, P), \quad i = 1, \dots, m.$$

Multiplicando cada  $i$ -ésimo termo por  $\alpha_i \in [0, 1]$  com  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ , vem

$$(A + \sum_{i=1}^m \alpha_i E_i)P + P(A + \sum_{i=1}^m \alpha_i E_i)^T = -2I + \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathcal{L}(E_i, P)$$

ou

$$(A + E)P + P(A + E)^T = -2I + \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathcal{L}(E_i, P)$$

$\forall E \in S_E$ . Como

$$\lambda_{\max} \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathcal{L}(E_i, P) \right) < 2$$

pois  $\lambda_{\max}(\mathcal{L}(E_i, P)) < 2$ ,  $i = 1, \dots, m$ , temos que

$$\mathcal{L}(E, P) < 2I \quad \forall E \in S_E$$

Portanto,

$$\mathcal{L}(A + E, P) = -2I + \mathcal{L}(E, P) = -\bar{Q} < 0 \implies P \in \mathcal{P}(A + E, \bar{Q})$$

garantindo a estabilidade de  $(A + E)$ ,  $\forall E \in S_E$ .

Observe que a estabilidade dos vértices de  $A + E_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  pode ser testada através de

$$\mathcal{P}(A + E_i, Q) \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, m$$

Este teste dá uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de  $A + E_i \in S_E$ . Por outro lado, satisfazer

$$\mathcal{L}(E_i, P) < Q, \quad i = 1, \dots, m$$

garante a estabilidade para qualquer matriz dada por

$$A + \text{conv} \{E_i, \quad i = 1, \dots, m\}$$

A imposição de um limite sobre  $\|\mathcal{L}(E(\cdot), P)\|$  resulta em uma medida menos restritiva do que aquela obtida através de  $\|E\|$ . Isto é facilmente verificado usando ( 1.28), uma vez que  $\|\mathcal{L}(E, P)\| < 2$  requerido em ( 1.33) é uma condição menos restritiva do que  $\|E\| \|P\| < 1$  requerido em ( 1.29)-( 1.31).

### 1.3.3 Geração de famílias de matrizes estáveis

Nesta seção, a condição suficiente do teorema 1.2 é usada para construir uma família de matrizes estáveis. Isto é, dada uma matriz estável  $A$  e uma matriz de perturbação qualquer  $E$ , desejamos obter  $\epsilon > 0$  tal que  $(A + \epsilon E)$  também seja estável. Usando o teorema 1.2, isto equivale a obter

$$P \in \mathcal{P}(A, Q)$$

com  $Q > 0$  e determinar então  $\epsilon$  tal que

$$\mathcal{L}(\epsilon E, P) < Q$$

Assim, para um conjunto de perturbações  $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  são obtidos  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m\}$  tais que  $(A + \epsilon_i E_i)$  sejam matrizes estáveis. Isto é, para

$$P \in \mathcal{P}(A, Q)$$

temos que

$$\mathcal{L}(\epsilon_i E_i, P) < Q, \quad i = 1, \dots, m$$

Multiplicando cada um destes termos por  $\alpha_i \in [0, 1]$ , com  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ ,

$$\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i E_i, P\right) < Q$$

e definindo o politopo construído  $S_{E_c}$  como

$$S_{E_c} = \text{conv}\{\epsilon_i E_i, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (1.34)$$

então

$$\mathcal{L}(E, P) < Q, \quad \forall E \in S_{E_c}$$

Portanto,  $S_{E_c}$  é um politopo convexo com vértices  $\epsilon_i E_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Como discutido anteriormente, usando  $Q = 2I$ ,  $\epsilon_i$  pode ser calculado por

$$\epsilon_i \leq \frac{1}{\sigma_{\max}(P)\sigma_{\max}(E)}$$

ou

$$\epsilon_i \leq \frac{2}{\lambda_{\max}(\mathcal{L}(E_i, P))}$$

Esta abordagem é semelhante àquela proposta em [21] para testar robustez a perturbações. Lá, os vértices do politopo  $S_E$  dado por (1.32) representando um conjunto de perturbações são testados para garantir a estabilidade a todos elementos do politopo. Aqui, os vértices do politopo  $S_{E_c}$  dado por (1.34) são construídos de forma a garantir a estabilidade do sistema para qualquer elemento pertencente ao mesmo.

Em [18] e [47], são discutidas com mais detalhes técnicas de construção de famílias de matrizes estáveis. Se as medidas de robustez satisfizerem o teorema 1.2, estas famílias serão convexas, como discutido acima. Caso não satisfaçam, estas famílias normalmente perdem sua característica de convexidade. As medidas obtidas em [22] e [18] são exemplos deste caso. Em [45] são discutidas várias medidas matriciais que podem ser usadas como medidas de robustez.

## 1.4 Controlador estabilizante para sistemas lineares

Seja o sistema linear descrito por

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.35)$$

onde  $x \in R^n$ ,  $u \in R^r$  e  $A$  e  $B$  são matrizes de dimensões compatíveis.

Para o caso de  $\dot{x} = Ax$  ser instável, deseja-se saber se existe um controlador  $u = f(x)$  que torne ( 1.35) estável. Apresentamos agora o conceito de estabilizabilidade para o sistema linear ( 1.35), que passamos a chamar de  $\Sigma$ .

**Definição 1.1** *Um sistema linear como  $\Sigma$  é estabilizável se existir uma função de Lyapunov  $V(x) = x^T P x$ ,  $P = P^T > 0$ , e um controle  $u = f(x)$  tal que*

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + P A)x + 2x^T P B u \leq -\gamma \|x\|^2, \quad \gamma > 0 \quad (1.36)$$

Observe que o controle  $u = f(x)$  pode ser não linear neste caso. Para o caso de controladores lineares,  $\Sigma$  é estabilizável se houver uma matriz  $K \in R^{r \times n}$  tal que o sistema dado por

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (1.37)$$

seja estável, isto é, os autovalores da matriz  $(A - BK)$  tenham todos parte real negativa. O teorema a seguir ([38]) dá uma condição necessária e suficiente para a estabilizabilidade de  $\Sigma$ .

**Teorema 1.3** *O sistema linear  $\Sigma$  é estabilizável se e somente se existir uma matriz  $P > 0$  tal que*

$$x^T (AP + PA^T)x < 0 \quad (1.38)$$

$\forall x \in \mathcal{N}(B^T)$ , onde  $\mathcal{N}(\cdot)$  denota o espaço nulo de  $(\cdot)$ .

**Prova:**

*Necessidade:* se  $\Sigma$  é estabilizável, então existe uma matriz  $K$  que torna ( 1.37) estável, ou seja, pelo teorema 1.1, existe uma matriz  $S > 0$  tal que

$$(A - BK)^T S + S(A - BK) < 0 \quad (1.39)$$

Fazendo  $S = P^{-1}$

$$A^T P^{-1} + P^{-1} A - K^T B^T P^{-1} - P^{-1} B K < 0$$

Pré e pós-multiplicando por  $P$ , vem

$$AP + PA^T - BKP - PK^T B^T < 0 \quad (1.40)$$

que é equivalente a

$$x^T(AP + PA^T)x < 0$$

para  $x \in \mathcal{N}(B^T)$ .

*Suficiência* : de ( 1.38), existe uma matriz  $R > 0 \in R^{r \times r}$  tal que

$$AP + PA^T < BRB^T \quad (1.41)$$

ou,  $\forall x \neq 0, x \in R^n$ ,

$$x^T(AP + PA^T)x < x^T BRB^T x \quad (1.42)$$

A equação ( 1.42) é satisfeita  $\forall x$  tal que  $x^T(AP + PA^T)x < 0$

Seja agora o conjunto  $x \neq 0 \in \psi$ ,

$$\psi = \{x \in R^n | x^T(AP + PA^T)x \geq 0\} \quad (1.43)$$

Devemos mostrar que ( 1.42) é válida  $\forall x \in \psi$ . Definimos

$$\mu = \min x^T BB^T x \text{ tal que } \|x\| = 1, x \in \psi \quad (1.44)$$

e

$$\lambda = \lambda_{\max}(AP + PA^T) \quad (1.45)$$

Obviamente,  $\mu > 0$  pois  $\mu = 0$  se  $x \in \mathcal{N}(B^T)$ . Isto é impossível pois a interseção de  $\mathcal{N}(B^T)$  e  $\psi$  é vazia. Basta então escolher  $\alpha$  tal que  $R = \alpha I$  satisfaça ( 1.42). De ( 1.44) e ( 1.45),  $\alpha$  deve satisfazer

$$\alpha > \frac{\lambda}{\mu}$$

Portanto de ( 1.41),

$$P^{-1}A + A^T P^{-1} < P^{-1}BRB^T P^{-1} \quad (1.46)$$

ou

$$(A - \frac{1}{2}BRB^T P^{-1})^T P^{-1} + P^{-1}(A - \frac{1}{2}BRB^T P^{-1}) < 0 \quad (1.47)$$

de modo que o ganho dado por  $K = \frac{1}{2}RB^T P^{-1}$  estabiliza  $(A - BK)$ .

**C.Q.D.**

Este teorema vem de resultados de [27], onde o termo *estabilizabilidade quadrática* é definido.

Definimos agora o conjunto  $\mathcal{F}$  de controladores estabilizantes.

**Definição 1.2** *O conjunto de controladores lineares que estabiliza  $\Sigma$  é dado por*

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{K \in \mathbb{R}^{r \times n} | \mathcal{P}(A - BK, Q) = \{P\}, Q > 0\} \quad (1.48)$$

Observe que este conjunto está associado à satisfação de uma equação de Lyapunov. A modificação desta equação permite definir conjuntos de controladores que garantam desempenho associado a regiões do plano complexo, como será discutido na seção 2.3.

## 1.5 Controlador estabilizante para sistemas incertos

Tratamos agora da estabilização de sistemas incertos via controlador linear por realimentação de estados. Este problema surge frequentemente quando existe um bom modelo para a planta em estudo mas há incertezas numéricas sobre parâmetros que podem mudar durante a operação, serem desconhecidos ou ainda de difícil medição. As suposições feitas sobre estas incertezas originam diferentes métodos para atacar o problema, bem como diferentes conceitos de estabilidade, como discutido a seguir.

### 1.5.1 Estabilidade quadrática e estabilidade robusta

Seja o sistema incerto representado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.49)$$

onde as matrizes  $A$  e  $B$  são incertas. Supõe-se aqui que a forma como as perturbações aparecem nestas matrizes é conhecida, bem como seus limites.

Consideramos agora dois modelos para as perturbações.

#### a) Perturbações constantes

Neste caso, consideramos que as matrizes  $A$  e  $B$  pertencem respectivamente aos conjuntos  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  dados por

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \{A_i, i = 1, \dots, N\} \\ \mathcal{B} = \{B_j, j = 1, \dots, M\} \end{cases} \quad (1.50)$$

Chamamos de  $\Sigma_c$  o sistema incerto (1.49) com perturbações constantes dadas por (1.50). A definição a seguir é uma extensão da definição 1.1, aplicada agora a  $\Sigma_c$ .

**Definição 1.3** *O sistema incerto  $\Sigma_c$  é robustamente estabilizável por um controlador linear  $K$  se para cada par  $[A_i \in \mathcal{A}, B_j \in \mathcal{B}]$  estiver associada uma função de Lyapunov  $v_{ij}(x) = x^T P_{ij} x$  de forma que*

$$\dot{v}_{ij}(x) = x^T \left( (A_i - B_j K)^T P_{ij} + P_{ij} (A_i - B_j K) \right) x < -\gamma_{ij} \|x\|^2, \quad \gamma_{ij} > 0 \quad (1.51)$$

### a) Perturbações continuamente variantes

Se as incertezas forem variantes no tempo, então poliedros convexos  $\mathcal{A}^q$  e  $\mathcal{B}^q$  contendo as matrizes incertas  $A \in \mathcal{A}^q$  e  $B \in \mathcal{B}^q$  podem ser construídos como

$$\begin{cases} \mathcal{A}^q = \{A \in R^{n \times n} | A = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0\} \\ \mathcal{B}^q = \{B \in R^{n \times r} | B = \sum_{i=1}^M \beta_i B_i, \sum_{i=1}^M \beta_i = 1, \beta_i \geq 0\} \end{cases} \quad (1.52)$$

Chamamos de  $\Sigma_v$  o sistema incerto dado por (1.49) com perturbações continuamente variantes no tempo dadas por (1.52). Apresentamos para o sistema  $\Sigma_v$  uma definição bem conhecida na literatura ([27]).

**Definição 1.4** *O sistema incerto  $\Sigma_v$  é quadraticamente estabilizável se existir uma função de Lyapunov  $v(x) = x^T P x$  e  $\gamma > 0$  tal que  $\forall A \in \mathcal{A}^q$  e  $\forall B \in \mathcal{B}^q$  existe  $u$  tal que*

$$\dot{v}(x) = x^T (A^T P + P A)x + 2x^T P B u < -\gamma \|x\|^2 \quad (1.53)$$

Os teoremas a seguir dão condições para a existência dos controladores estabilizantes para os dois tipos de perturbação das definições acima.

**Teorema 1.4** *O sistema incerto  $\Sigma_v$  é quadraticamente estabilizável por um controlador linear  $K \in R^{r \times n}$  se e somente se existir uma matriz  $P > 0$  e uma matriz  $W \in R^{r \times n}$  tal que*

$$A_i P + P A_i^T < B_j W^T + W B_j^T, \quad i = 1, \dots, N \text{ e } j = 1, \dots, M \quad (1.54)$$

**Prova:**

*Necessidade:* um par  $[A_i \in \mathcal{A}_q, B_j \in \mathcal{B}^q]$  satisfazendo (1.52) é quadraticamente estabilizável por um controlador linear se existirem matrizes  $S > 0$  e  $K \in R^{r \times n}$  tais que

$$(A_i - B_j K)^T S + S(A_i - B_j K) < 0$$

para  $i = 1, \dots, N$  e  $j = 1, \dots, M$ . De forma equivalente,

$$A_i^T S + S A_i < K^T B_j^T S + S B_j K$$

Fazendo  $S = P^{-1}$  e pré e pós-multiplicando por  $P$ , vem

$$A_i P + P A_i^T < B_j K P + P K^T B_j^T$$

que com  $W^T = K P$  dá (1.54).

*Suficiência:* De ( 1.54) vem

$$P^{-1}A_i + A_i^T P^{-1} < P^{-1}B_j W^T + W B_j^T P^{-1}$$

ou, com  $S = P^{-1}$ ,

$$(A_i - B_j W^T S^{-1})S + S(A_i - B_j W^T S^{-1})^T < 0$$

para  $i = 1, \dots, N$  e  $j = 1, \dots, M$ . Como esta equação é válida para  $i = 1, \dots, N$ , usando  $\alpha_i \in [0, 1]$ ,  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ , e  $j$  constante, vem

$$\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i A_i - B_j W^T S^{-1}\right)S + S\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i A_i - B_j W^T S^{-1}\right)^T < 0$$

$$(A - B_j W^T S^{-1})S + S(A - B_j W^T S^{-1})^T < 0$$

que é válida  $\forall A \in \mathcal{A}^q$  e  $j = 1, \dots, M$ .

Usando agora  $\beta_j \in [0, 1]$  e  $\sum_{j=1}^M \beta_j = 1$ , vem

$$\left(A - \sum_{j=1}^M \beta_j B_j W^T S^{-1}\right)S + S\left(A - \sum_{j=1}^M \beta_j B_j W^T S^{-1}\right)^T < 0$$

$$(A - B W^T S^{-1})S + S(A - B W^T S^{-1})^T < 0$$

que é válida  $\forall A \in \mathcal{A}^q$  e  $\forall B \in \mathcal{B}^q$ . Portanto, o controlador  $K = W S^{-1}$  estabiliza ( 1.49) com  $A$  e  $B$  dados por ( 1.52).

**C.Q.D.**

Este teorema é uma extensão do teorema 1.3 para sistemas incertos modelados via ( 1.52) ([38]).

Em [28], trata-se do problema de calcular uma matriz  $P = P^T > 0$  tal que, para um conjunto de matrizes  $A_i, i = 1, \dots, N$  compondo um domínio de incerteza, se tenha

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad i = 1, \dots, N$$

Este problema é convexo e pode ser considerado o marco inicial das abordagens ditas de estabilidade quadrática. Na seção 1.5.3, um método para estabilização de sistemas incertos via programação convexa baseado neste teorema será apresentado.

Definimos agora o conjunto de controladores lineares quadraticamente estabilizantes associado ao SI  $\Sigma_v$ .

**Definição 1.5** *O conjunto de controladores lineares que estabiliza quadraticamente o sistema incerto  $\Sigma_v$  é dado por*

$$\mathcal{F}^q \stackrel{\text{def}}{=} \{K \in R^{r \times n} | \mathcal{P}(A - BK, Q) = \{P\}, Q > 0, \forall A \in \mathcal{A}^q, \forall B \in \mathcal{B}^q\} \quad (1.55)$$

Propomos agora um resultado relacionado com a existência de um controlador robustamente estabilizante para  $\Sigma_c$ , de acordo com a definição 1.3.

**Teorema 1.5** *O sistema incerto  $\Sigma_c$  é robustamente estabilizável por um controlador linear se e somente se existirem matrizes  $P_{ij} > 0$  e  $W_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times r}$  tais que*

$$A_i P_{ij} + P_{ij} A_i^T < B_j W_{ij}^T + W_{ij} B_j^T \quad (1.56)$$

e

$$W_{ij}^T P_{ij}^{-1} = K = \text{constante} \quad (1.57)$$

$i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, M$ .

**Prova :**

*Necessidade:* os pares  $[A_i, B_j]$  são robustamente estabilizáveis por um controlador linear se existirem matrizes  $S_{ij} > 0$  e  $K \in \mathbb{R}^{r \times n}$  tais que

$$(A_i - B_j K)^T S_{ij} + S_{ij} (A_i - B_j K) < 0 \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M$$

De forma equivalente,

$$A_i^T S_{ij} + S_{ij} A_i < K^T B_j^T S_{ij} + S_{ij} B_j K$$

Fazendo  $S_{ij} = P_{ij}^{-1}$  e pré e pós-multiplicando por  $P_{ij}$ , vem

$$A_i P_{ij} + P_{ij} A_i^T < B_j K P_{ij} + P_{ij} K^T B_j^T$$

que com  $W_{ij}^T = K P_{ij}$  dá (1.56).

*Suficiência:* De (1.56) vem

$$P_{ij}^{-1} A_i + A_i^T P_{ij}^{-1} < P_{ij}^{-1} B_j W_{ij}^T + W_{ij} B_j^T P_{ij}^{-1}$$

ou, com  $S_{ij} = P_{ij}^{-1}$ ,

$$(A_i - B_j W_{ij} S_{ij}^{-1}) S_{ij} + S_{ij} (A_i - B_j W_{ij} S_{ij}^{-1})^T < 0 \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M$$

De (1.57),

$$(A_i - B_j K) S_{ij} + S_{ij} (A_i - B_j K)^T < 0 \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M$$

que é válida  $\forall A \in \mathcal{A}$  e  $\forall B \in \mathcal{B}$ .

**C.Q.D.**

De acordo com a definição 1.3, se cada um dos sistemas precisamente conhecidos definidos por um par  $[A_i, B_j]$  for estabilizável, então a cada um deles está associada uma função de Lyapunov da forma

$$\dot{v}(x) = x^T (A_i^T P_{ij} + P_{ij} A_i) x + 2x^T P_{ij} B_j u < -\gamma_{ij} \|x\|^2, \quad \gamma_{ij} > 0$$

ou, com  $K$  dado por (1.57)

$$\dot{v}(x) = x^T (A_i^T P_{ij} + P_{ij} A_i) x + 2x^T P_{ij} B_j W_{ij} P_{ij}^{-1} x < -\gamma_{ij} \|x\|^2, \quad \gamma_{ij} > 0$$

ou ainda

$$\dot{v}(x) = x^T \left( (A_i - B_j W_{ij}^T P_{ij}^{-1})^T P_{ij} + P_{ij} (A_i - B_j W_{ij}^T P_{ij}^{-1}) \right) x < -\gamma_{ij} \|x\|^2, \quad \gamma_{ij} > 0 \quad (1.58)$$

Cada par  $[A_i, B_j]$  admite qualquer par  $[P_{ij}, W_{ij}]$  que satisfaça (1.58), o qual definirá um controlador  $K_{ij} = W_{ij} P_{ij}^{-1}$  tal que  $(A_i - B_j K_{ij})$  é estável.

Definimos agora o conjunto dos controladores lineares robustamente estabilizantes associado ao SI  $\Sigma_c$ .

**Definição 1.6** *O conjunto de controladores lineares que estabiliza robustamente o sistema incerto  $\Sigma_c$  é dado por*

$$\mathcal{F}^c \stackrel{\text{def}}{=} \{K \in R^{r \times n} | \mathcal{P}(A - BK, Q) = \{P_{ij}\}, Q > 0, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall B_j \in \mathcal{B}\} \quad (1.59)$$

Definimos finalmente o conceito de estabilidade robusta associado ao sistema  $\Sigma_v$  ([42]), bem como o conjunto de controladores a ele associado.

**Definição 1.7** *O sistema incerto  $\Sigma_v$  é robustamente estabilizável por um controlador linear  $K$  se para cada  $A \in \mathcal{A}^q$  e para cada  $B \in \mathcal{B}^q$ , a matriz  $(A - BK)$  for estável.*

**Definição 1.8** *O conjunto dos controladores lineares que estabiliza robustamente o sistema incerto  $\Sigma_v$  é dado por*

$$\mathcal{F}^v \stackrel{\text{def}}{=} \{K \in R^{r \times n} | \mathcal{P}(A - BK, Q) \neq \emptyset, Q > 0, \forall A \in \mathcal{A}^q, \forall B \in \mathcal{B}^q\} \quad (1.60)$$

Observe que a estabilidade quadrática de  $\Sigma_v$  é uma exigência mais forte do que a estabilidade robusta deste mesmo SI. Nas próximas seções serão discutidos métodos que garantem a primeira. Nos capítulos 3 e 4 serão propostas metodologias que garantem a estabilidade robusta de  $\Sigma_c$  e eventualmente de  $\Sigma_v$ .

### 1.5.2 Abordagem via “matching conditions”

Perturbações que obedecem as chamadas “matching conditions” são modeladas por

$$\begin{cases} A(.) &= A_0 + B_0 D(r(t)) \\ B(.) &= B_0 + B_0 G(s(t)) \\ \|G(.)\| &< 1 \end{cases} \quad (1.61)$$

Em [44] é mostrado que se as incertezas obedecerem estas condições, existe sempre um controlador linear estabilizante. Perturbações maiores originam ganhos maiores, mas a existência de tal controlador depende apenas da estrutura do sistema.

Estudaremos agora dois métodos existentes na literatura para obter um controlador linear estabilizante para sistemas incertos dados por ( 1.49) e ( 1.61).

Ambos métodos tem como passo inicial a obtenção de um controlador estabilizante  $K_0$  para o sistema nominal de modo que

$$A_f = A_0 + B_0 K_0$$

seja estável.

Analisemos inicialmente o método proposto em [29].

Neste método, o próximo passo consiste na aplicação do controlador  $K$  ao sistema com incertezas. Este controlador é dado por

$$K = K_0 - \gamma B_0^T P \quad (1.62)$$

onde

$$P \in \mathcal{P}(A_f, Q), \quad Q > 0 \quad (1.63)$$

com  $Q > 0$  e  $\gamma > 0$  a serem determinados. Denotando

$$\bar{A} = A_f + \Delta A - \gamma B_0 B_0^T P + \Delta B K_0 - \gamma \Delta B^T P \quad (1.64)$$

com

$$\Delta A = B_0 D \quad (1.65)$$

e

$$\Delta B = B_0 G \quad (1.66)$$

o sistema dado por

$$\dot{x} = \bar{A}x$$

será estável se

$$L = \bar{A}^T P + P \bar{A} < 0 \quad (1.67)$$

Observação:  $D(.)$  e  $G(.)$  são substituídas por  $D$  e  $G$ , respectivamente, apenas para tornar mais claras as manipulações algébricas.

Desenvolvendo esta expressão, vem

$$L = A_0^T P + P A_0 + K_0^T B_0^T P + P B_0 K_0 + \Delta A^T P + P \Delta A + K_0^T \Delta B^T P + P \Delta B K_0 \\ - 2\gamma P B_0 B_0^T P - \gamma [P B_0 \Delta B^T P + P \Delta B B_0^T P]$$

ou, usando ( 1.65)-( 1.66) e ( 1.63),

$$L = -Q + D^T B_0^T P + P B_0 D + K_0^T G^T B_0^T P + P B_0 G K_0 - 2\gamma P B_0 B_0^T P - \gamma P B_0 [G + G^T] B_0 P \quad (1.68)$$

Usando a identidade matricial para quaisquer matrizes  $X$  e  $Y \in R^{n,r}$ ,

$$X X^T + Y Y^T \geq X Y^T + Y X^T$$

em ( 1.68), com  $X = P B_0$  e  $Y = D^T$ , vem

$$L \leq \{-Q + D^T D + K_0^T G^T G K_0\} - \{\gamma P B_0 [2I - \frac{2}{\gamma} I + G + G^T] B_0^T P\} \quad (1.69)$$

Para garantir  $L \leq 0$  em ( 1.69), basta escolher  $\gamma$  e  $Q$  tais que as condições

$$\begin{cases} Q > D^T D + K_0^T G^T G K_0 \\ 2I + G + G^T > \frac{2}{\gamma} I \end{cases} \quad (1.70)$$

sejam satisfeitas. Escolhidos  $Q$  e  $\gamma$ ,  $K$  é dado por ( 1.62) para  $P$  dado por ( 1.63).

Em [44], uma estratégia semelhante é aplicada. Para o controlador estabilizante  $K_0$  dado,  $P$  é obtido de ( 1.63) para alguma matriz  $Q > 0$ .

Uma transformação de similaridade  $T$  é aplicada ao sistema realimentado por  $K_0$  de forma que se tenha

$$T B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_r \end{bmatrix}$$

É mostrado que a matriz  $L$  de ( 1.68) fica na forma particionada

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2(q) \\ L_2(q)^T & L_3(q) \end{bmatrix} \quad (1.71)$$

onde  $L_1 \in R^{r,r}$  independe das perturbações  $q \in \mathcal{Q}$  e é inversível. Basta então escolher  $\gamma$  tal que

$$\gamma < \frac{\max_{q \in \mathcal{Q}} \lambda_{\max}[L_3(q) - L_2^T(q) L_1^{-1} L_2(q)]}{2(1 - \max_{q \in \mathcal{Q}} \|G(q)\|)} \quad (1.72)$$

Observe que uma busca em  $q \in \mathcal{Q}$  deve ser feita para obter  $\gamma$ . O controlador que estabiliza o sistema perturbado é então dado por ( 1.62) com  $\gamma$  obtido acima.

Analisamos agora estes métodos com a condição suficiente de desempenho dada pelo teorema 1.2 . Para o controlador estabilizante  $K_0$ , temos que

$$\mathcal{P}(A_0 - B_0K_0, Q) = \mathcal{P}(A_f, Q) = \{P\} \quad (1.73)$$

De ( 1.64), a perturbação  $E$  adicionada ao sistema é dada por

$$E = \Delta A + \Delta BK_0 - \gamma(B_0B_0^T + G^T B_0^T)P^{-1} \quad (1.74)$$

onde ( 1.17) é usada ao invés de ( 1.7) para obter  $P$ .

De acordo com o teorema 1.2,  $(A_f + E)$  é estável se

$$L = \mathcal{L}(A_f + E, P) = \mathcal{L}(A_f, P) + \mathcal{L}(E, P) = -Q + \mathcal{L}(E, P) < 0$$

ou

$$\mathcal{L}(E, P) < Q \quad (1.75)$$

para  $P$  dado por ( 1.73). Portanto, garantir  $L < 0$  é equivalente a garantir ( 1.75).

Em [29],  $Q$  e  $\gamma$  são escolhidos em ( 1.70) para garantir ( 1.75) para qualquer  $P$  dado por ( 1.73). Observe que a identidade matricial usada torna esta escolha independente de  $P$ .

Em [44], para  $P$  dado por ( 1.73) para alguma matriz  $Q > 0$ ,  $\gamma$  obtido de ( 1.72) garante ( 1.75).

### 1.5.3 Método via programação convexa

Em [8] e [38], é proposto um método para estabilização de sistemas incertos utilizando uma abordagem convexa. Baseado no teorema 1.4, este método usa elementos de programação convexa para obter um par  $[P, W]$  que satisfaça ( 1.54).

Seja inicialmente o sistema dado por ( 1.35) e sejam as seguintes matrizes aumentadas:

$$F = \begin{bmatrix} A & -B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ I_r \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.76)$$

Sejam ainda  $p = n + m$  e a matriz  $S = S^T \in R^{p \times p}$  particionada na forma:

$$S = \begin{bmatrix} S_a & S_b \\ S_b^T & S_c \end{bmatrix} \quad (1.77)$$

com  $S_a \in R^{n \times n}$ ,  $S_a = S_a^T > 0$  e  $S_c = S_c^T$ . Podemos agora apresentar o lema fundamental da estratégia citada.

**Lema 1.1** O conjunto  $\mathcal{C}$  dado por

$$\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{S = S^T \in R^{p \times p} | S \geq 0 \text{ e } v^T \Theta(S)v \leq 0, \forall v | G^T v = 0\} \quad (1.78)$$

com

$$\Theta(S) = FS + SF^T + Q \quad (1.79)$$

é tal que:

a)  $[A, B]$  é estabilizável se e somente se  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ . Se  $\mathcal{C} \neq \emptyset, \forall S \in \mathcal{C}$  temos  $K = S_b^T S_a^{-1}$  como sendo um controlador estabilizante.

b)  $\mathcal{C}$  é um conjunto convexo.

Omitiremos as provas dos resultados aqui apresentados, que podem ser encontrados em [38] e suas referências.

Como o conjunto  $\mathcal{C}$  é convexo, técnicas bem conhecidas podem ser utilizadas para obter  $S \in \mathcal{C}$ . Em [8] é proposto um método usando técnicas de planos de corte. O método é ilustrado na figura 1.2.

Uma solução inicial  $S_1 \notin \mathcal{C}$  é escolhida. Portanto, existe um hiperplano separador  $h_1$  que separa  $S_1$  de  $\mathcal{C}$ . Novos elementos  $S_i$  são gerados e enquanto estes elementos não pertencerem a  $\mathcal{C}$ , novos hiperplanos separadores são obtidos. Estes hiperplanos formam um conjunto de restrições lineares ao qual técnicas de programação linear são aplicadas para a obtenção de uma solução factível. Então, em algum momento, ou uma solução  $S_i$  é encontrada para o problema ( $S_4$  na figura 1.2.a) ou o problema torna-se infactível ( $h_1 \dots h_4$  formam um conjunto de restrições inconsistente na figura 1.2.b).

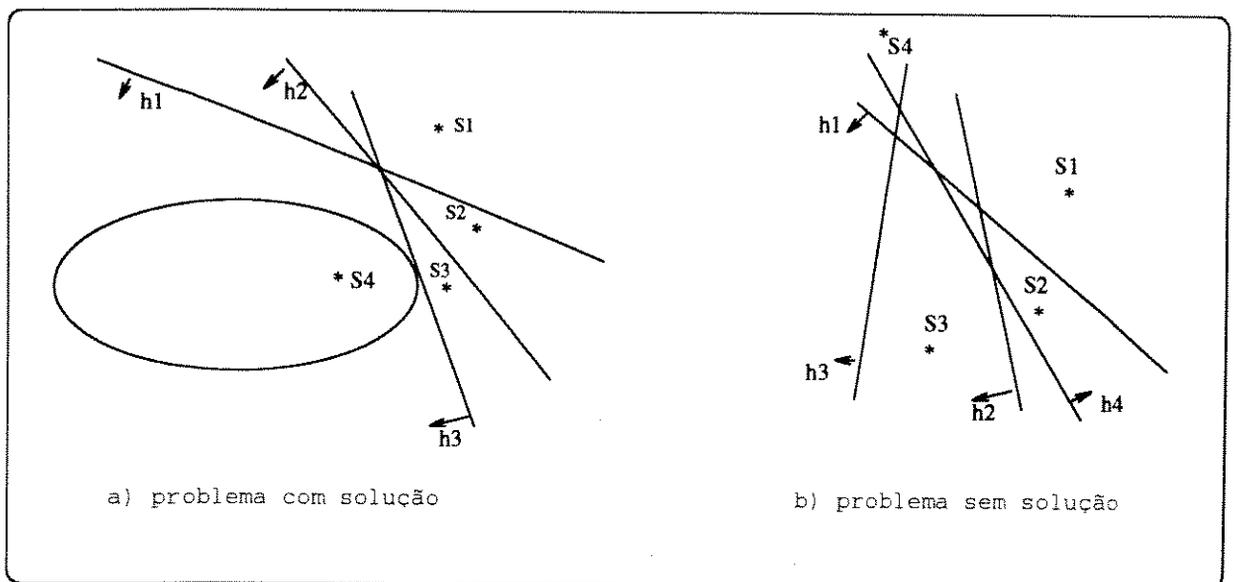


Figura 1.2: Ilustração do método por plano de corte

Para aplicar este método à estabilização de sistemas incertos, é definido o conjunto

$$\mathcal{D}_F \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ F \in R^{p \times p} \mid F = \sum_{i=1}^R \alpha_i F_i, \sum_{i=1}^R \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\} \quad (1.80)$$

com  $R = N \cdot M$ , que é um conjunto convexo envolvendo as incertezas dos pares  $[A_i, B_j]$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, M$  de (1.52).

Em [4] é mostrado que os sistemas definidos por  $[A, B]$  e  $[F, G]$  são equivalentes para fins de estabilização por ganho linear. O sistema aumentado apresenta a vantagem de não possuir incertezas na matriz de entrada.

**Teorema 1.6** *Sejam o sistema incerto caracterizado por  $\mathcal{D}_F$  e  $\mathcal{C}_i$  o conjunto convexo associado a  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, R$ . Então:*

a)  $\exists K$  tal que  $(A - BK)$  é quadraticamente estável  $\forall F \in \mathcal{D}_F$  se e somente se  $\bigcap_{i=1}^R \mathcal{C}_i \neq \emptyset$ .

b)  $\forall S \in \bigcap_{i=1}^R \mathcal{C}_i \implies K = S_b^T S_a^{-1}$  é um controlador estabilizante.

Da mesma forma que para SPCs, o uso de técnicas de planos de corte a este resultado permite a proposição de um método para estabilização quadrática de SIs. Hiperplanos separadores (restrições lineares) são gerados até que se encontre  $S \in \bigcap_{i=1}^R \mathcal{C}_i$  ou se verifique que  $\bigcap_{i=1}^R \mathcal{C}_i = \emptyset$ .

Quando uma solução  $S$  é encontrada, então

$$v^T [F_i S + S F_i^T + Q] v \leq 0, \quad \forall G^T v = 0, \quad i = 1, \dots, R$$

Usando (1.76)-(1.77) nesta equação, vem

$$A_i S_a + S_a A_i^T < B_j S_b^T + S_b B_j^T, \quad i = 1, \dots, N \text{ e } j = 1, \dots, M$$

que é a condição de estabilizabilidade para sistemas incertos dada pelo teorema 1.4.

A figura 1.3 ilustra o método de estabilização citado. Para maiores detalhes, veja [38].

## 1.6 Controlador estabilizante via alocação de pólos

Na seção 1.4 vimos como a equação de Lyapunov pode ser utilizada para testar a propriedade de estabilizabilidade de um sistema linear. Satisfeita esta condição, métodos como o de Riccati podem ser utilizados para projetar um controlador que minimize um determinado critério.

A estabilizabilidade também pode ser verificada testando-se apenas a controlabilidade dos modos instáveis do sistema ([48]). Se forem controláveis, então o sistema é estabilizável. Além disso, o conjunto de todos autovalores controláveis podem ser arbitrariamente realocados via realimentação de estados. Em [33], é mostrado que em um sistema

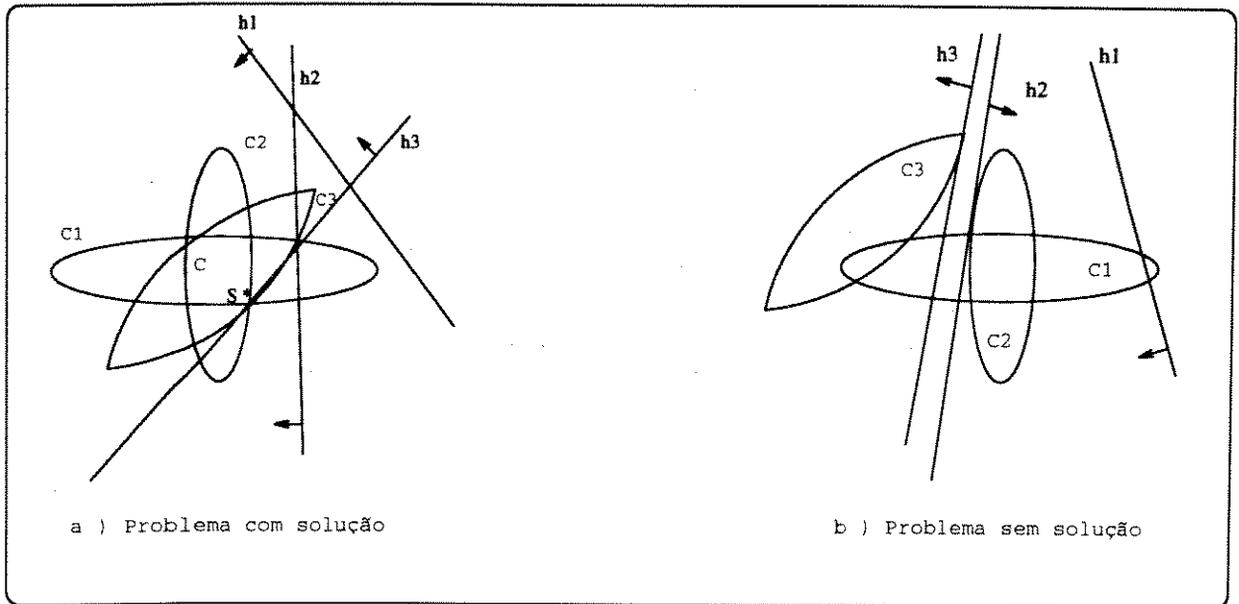


Figura 1.3: Aplicação do método a sistemas incertos

de múltiplas entradas a flexibilidade existente no projeto após a escolha dos autovalores de malha fechada, corresponde a possibilidade de se escolher também os autovetores pertencentes ao conjunto:

$$\{v_i \in C^n \mid \exists f_i \in C^r \text{ satisfazendo } (A - \gamma_i I)v_i + Bf_i = 0\} \quad (1.81)$$

Um procedimento deste tipo consiste em avaliar

$$[A - \gamma_i I \quad B] \begin{bmatrix} v_i \\ f_i \end{bmatrix} = 0 \quad (1.82)$$

onde

$\gamma_i$  é o autovalor de malha fechada desejado

$v_i$  é o autovetor de malha fechada

$f_i$  é um vetor  $r$ -dimensional caracterizando o controle necessário para mover o modo  $i$ .

A solução é obtida através de uma decomposição em valores singulares da matriz  $[A - \lambda_i I \quad B]$ , cujo espaço nulo serve de base para obter  $v_i$  e  $f_i$ . Fazendo isto para cada autovalor de malha fechada desejado, obtemos ([19])

$$K = [f_1 \cdots f_n] [v_1 \cdots v_n]^{-1} \quad (1.83)$$

Se  $[A, B]$  for não controlável, então para algum autovalor de malha aberta  $\lambda_i$  a matriz  $[A - \lambda_i I \quad B]$  tem posto menor que  $n$ . Se  $\lambda_i$  for invariante à realimentação de estados, então o autovetor  $w_i$  de  $A^T$  correspondente a  $\lambda_i$  é tal que  $w_i^T [A - \gamma_i I \quad B] = 0$ . Entretanto,

mesmo sendo invariante, seu autovetor correspondente pode ser modificado através da realimentação (1.83) (veja [33]).

O emprego de alocação de pólos para projeto de controladores, envolve um conhecimento maior sobre as características do sistema em estudo. Cada problema deve ser tratado de uma forma particular ( veja Bottura(1977) para uma comparação entre alocação de pólos e outras técnicas de projeto). Embora seu uso tenha sido bastante pesquisado para SPCs, pouco se conhece sobre técnicas de alocação para sistemas incertos. Neste caso, não é possível especificar as posições dos pólos de malha fechada, dadas as incertezas existentes. Podemos entretanto especificar regiões onde os pólos devem estar. Se o modelo incerto tratado puder ser representado através de um conjunto de sistemas precisamente conhecidos, então podemos projetar controladores via alocação de pólos para estes sistemas. Esta é a idéia básica dos métodos para estabilização robusta a serem propostos.

## 1.7 Conclusão

Neste capítulo foram discutidas aplicações da teoria de estabilidade de Lyapunov a análises de robustez e ao projeto de controladores garantindo robustez.

Condições baseadas em equações modificadas de Lyapunov foram propostas. Elas permitiram envolver ambos conceitos de estabilidade e desempenho.

Foi discutida a obtenção de medidas de robustez, que permitiu garantir a estabilidade a perturbações para um sistema nominalmente estável. Conjuntos de matrizes estáveis foram construídos usando estas medidas.

Nos métodos para projeto de controladores para sistemas incertos, os conceitos de estabilidade quadrática e estabilidade robusta foram discutidos. Métodos da literatura garantindo estabilização quadrática foram estudados.

Finalmente, discutiu-se brevemente a aplicação de técnicas de alocação de pólos a sistemas incertos modelados via pares de matrizes.

# Capítulo 2

## Variações paramétricas no conjunto dos controladores

### 2.1 Introdução

Iniciamos este capítulo propondo variações paramétricas sobre um controlador. O termo variação paramétrica é comumente associado a algum parâmetro variante do sistema representando incertezas. Entretanto, ele será usado aqui para denotar uma variação admissível sobre alguma direção no espaço de parâmetros do controlador.

As variações admitidas nas direções são computadas de forma análoga à forma que foi utilizada no capítulo anterior para se computar medidas de robustez para matrizes de perturbação. Entretanto, neste capítulo, algoritmos para calcular variações máximas em uma dada direção e conceitos aplicados a direções permitem explorar o conjunto de controladores lineares estabilizantes associados ao sistema precisamente conhecido (SPC)

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.1)$$

com  $A \in R^{n,n}$  e  $B \in R^{n,r}$ , denotado por  $\Sigma$ , como no capítulo anterior.

Os resultados obtidos neste capítulo serão utilizados no capítulo seguinte para explorar o conjunto de controladores lineares estabilizantes para um sistema incerto, buscando soluções para problemas de estabilização robusta.

### 2.2 Variações paramétricas sobre um controlador

Na seção 1.3, foram estudados métodos para garantir robustez a perturbações. Análises semelhantes são agora aplicadas a controladores visando obter variações paramétricas sobre um controlador.

Para facilitar a referência, reescrevemos aqui:

$$\mathcal{P}(A, Q) = \{P > 0 \mid AP + PA^T = -Q\} \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}(A, P) = AP + PA^T \quad (2.3)$$

$$\mathcal{P}(A, Q) = \{P\} \iff \mathcal{L}(A, P) = -Q \quad (2.4)$$

$$\mathcal{F} = \{K \in R^{r \times n} \mid \mathcal{P}(A - BK, Q) \neq \emptyset, Q > 0\} \quad (2.5)$$

**Corolário 2.1** *Seja o sistema  $\Sigma$  e  $K_0 \in \mathcal{F}$ . Então,  $(K_0 + \epsilon \Delta K) \in \mathcal{F}$ , com  $\Delta K \in R^{r \times n}$ , se para*

$$P \in \mathcal{P}(A - BK_0, Q) \quad (2.6)$$

*tivermos*

$$\mathcal{L}(-\epsilon B \Delta K, P) < Q \quad (2.7)$$

**Prova :** usando ( 2.2), escrevemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A - B(K_0 + \epsilon \Delta K), P) &= \mathcal{L}(A - BK_0, P) + \mathcal{L}(-\epsilon B \Delta K, P) \\ &= -Q + \mathcal{L}(-\epsilon B \Delta K, P) = -\bar{Q} \end{aligned}$$

Como  $P > 0$ , se  $\bar{Q} > 0$  resulta de ( 2.4) que

$$\mathcal{P}(A - B(K_0 + \epsilon \Delta K), \bar{Q}) = \{P\}$$

e da definição de  $\mathcal{F}$ ,  $(K_0 + \epsilon \Delta K) \in \mathcal{F}$ .

A matriz  $\Delta K$  será interpretada com uma **direção** em  $K$ . Embora  $\Delta K$  pertença ao subespaço  $R^{r \times n}$ , sua aplicação neste trabalho está associada ao significado usual dos termos *sentido* na língua portuguesa e *direction* na língua inglesa.

O escalar  $\epsilon$  será o parâmetro a ser variado em uma dada direção  $\Delta K$ . Embora a proposição 2.1 admita qualquer  $\epsilon \in R$ , interessa-nos apenas o valor positivo de  $\epsilon$  associado a uma direção  $\Delta K$  (uma vez que o valor negativo equivale a uma nova direção).

Dado um controlador  $K_0$  sujeito a uma perturbação  $\Delta K$ , a proposição 2.1 permite verificar se o controlador

$$K = K_0 + \epsilon \Delta K$$

pertence ao conjunto  $\mathcal{F}$ .

Dada uma direção  $\Delta K$ , como calcular  $\epsilon$  de modo a satisfazer ( 2.7) ? De ( 2.7) e ( 2.3) temos que

$$\epsilon \mathcal{L}(-B\Delta K, P) < Q \quad (2.8)$$

Esta condição é satisfeita para

$$\epsilon \lambda_{\max}(L(-B\Delta K, P)) < \lambda_{\min}(Q).$$

Escrevemos, portanto

$$\epsilon \leq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\mu(\mathcal{L}(-B\Delta K, P))} \quad (2.9)$$

onde  $\mu(\cdot)$  é uma medida sobre matrizes simétricas ( $\mu$  não é uma norma) dada por

$$\mu(\cdot) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda^+(\cdot) = \emptyset \\ \max \lambda^+(\cdot) & \text{em caso contrário} \end{cases} \quad (2.10)$$

A notação  $\lambda^+(\cdot)$  indica os autovalores não negativos de  $(\cdot)$ .

Para uma matriz simétrica  $M$ ,

$$\|M\| = \sigma_{\max}(M) = (\lambda_{\max}(M^T M))^{1/2}$$

Então,

$$\|M\| = \lambda_{\max}(M) \implies \mu(M) = \|M\|$$

$$\|M\| = \lambda_{\max}(-M) \implies \mu(M) \leq \|M\|$$

Se  $M \geq 0$ , então  $\|M\| = \mu(M)$ . Portanto,

$$\mu(M) \leq \|M\| \quad (2.11)$$

$$\mu(cM) = c\mu(M), \quad c > 0 \in R \quad (2.12)$$

$$\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B) \quad (2.13)$$

Embora existam algoritmos numéricos bastante eficientes para o cálculo de autovalores de matrizes simétricas, outras técnicas que exigem menor esforço computacional podem ser utilizadas. Propomos agora uma expressão para o cálculo de (2.9) que pode simplificar grandemente esta operação, principalmente para o caso de entrada única.

**Teorema 2.1** *Seja o sistema  $\Sigma$  com  $r=1$  (uma entrada),  $Q > 0$  e  $K_0$  tal que*

$$\mathcal{P}(A - BK_0, Q) = \{P\} \quad (2.14)$$

*Então,  $(K_0 + \epsilon\Delta K) \in \mathcal{F}$ , com  $\Delta K \in R^{1 \times n}$ , para*

$$\epsilon \leq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\|B\| \|W\| + B^T W} \quad \epsilon > 0 \quad (2.15)$$

$$W = P\Delta K^T \quad (2.16)$$

*com  $P$  dado por (2.14).*

**Prova :** Seja

$$S = BW^T + WB^T \quad (2.17)$$

e  $M \in R^{n \cdot n}$  uma matriz ortonormal tal que

$$M^T[B \ W] = [\bar{B} \ \bar{W}] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_3 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Usando  $M$  em ( 2.17), vem

$$\bar{S} = M^T S M = \begin{bmatrix} 2\alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1\alpha_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Existem apenas dois autovalores não nulos em  $S$  dados por

$$\lambda(\bar{S}) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \pm \alpha_1 \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}$$

Usando ( 2.18), dá

$$\lambda(S) = \{B^T W \pm \|B\| \|W\|, 0, \dots, 0\}$$

e de ( 2.10)

$$\mu(S) = B^T W + \|B\| \|W\|$$

O uso de ( 2.16) e ( 2.17) em ( 2.7), resulta em

$$\mathcal{L}(-\epsilon B \Delta K, P) = \epsilon S < Q$$

que é satisfeito para

$$\epsilon \mu(S) \leq \lambda_{\min}(Q)$$

Desta condição segue ( 2.15). Como  $\lambda_{\min}(Q) > 0$  e  $\mu(S) \geq 0$ , pois  $\|B\| \|W\| \geq B^T W$ , temos que  $\epsilon > 0$ .

**C.Q.D.**

Este resultado permite obter  $\epsilon$  avaliando-se a expressão ( 2.15), evitando assim o cálculo dos autovalores de  $\mathcal{L}(\cdot)$  requerido em ( 2.9). Um resultado equivalente é obtido agora para o caso múltiplas entradas.

**Teorema 2.2** *Seja o sistema  $\Sigma$  com  $r > 1$  (múltiplas entradas),  $Q > 0$  e  $K_0$  tal que*

$$\mathcal{P}(A - BK_0, Q) = \{P\} \quad (2.20)$$

*Então,  $(K_0 + \epsilon \Delta K) \in \mathcal{F}$ , com  $\Delta K \in R^{r \cdot n}$ , para*

$$\epsilon \leq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\text{Tr}((\text{diag}(B^T B) \cdot \text{diag}(W^T W))^{1/2} + B^T W)} \quad (2.21)$$

*onde  $W$  é dado por ( 2.16) e  $P$  é dado por ( 2.20).*

**Prova :** Seja  $S$  dada por ( 2.17). Tomando  $B$  e  $W$  coluna a coluna,  $S$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} S &= (B[1]W[1]^T + W[1]B[1]^T) + (B[2]W[2]^T + W[2]B[2]^T) + \dots + (B[r]W[r]^T + W[r]B[r]^T) \\ &= S_1 + S_2 + \dots + S_r \end{aligned}$$

onde  $(.)[i]$  denota a  $i$ -ésima coluna de  $(.)$

Lembrando que  $\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ , pode-se escrever

$$\mu(S) \leq \mu(S_1) + \mu(S_2) + \dots + \mu(S_r) \quad (2.22)$$

Usando o teorema 2.2 vem

$$\mu(S) \leq \sum_{i=1}^r \|B[i]\| \|W[i]\| + B[i]^T W[i]$$

que com

$$\|x\| = (x^T x)^{1/2}$$

para  $x \in R^n$ ,

dá

$$\mu(S) \leq \text{Tr} \left( (\text{diag}(B^T B) \cdot \text{diag}(W^T W))^{1/2} + B^T W \right)$$

de onde deriva ( 2.21).

**C.Q.D.**

Convém lembrar que enquanto ( 2.15) permite obter  $\epsilon_{max}$  que satisfaz ( 2.9), o uso de ( 2.21) eventualmente não o permita devido à desigualdade de ( 2.22).

Como ( 2.7) é uma condição suficiente, maiores valores de  $\epsilon$  são eventualmente possíveis. A definição a seguir trata da variação máxima admitida.

**Definição 2.1** A máxima variação admitida na direção  $\Delta K$  em  $K$  sem sair do conjunto  $\mathcal{F}$  é definida como

$$\delta(K, \Delta K) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \max \epsilon \mid \mathcal{P}(A - B(K + \gamma \Delta K), Q) \neq \emptyset, 0 \leq \gamma \leq \epsilon \} \quad (2.23)$$

A interpretação de  $\delta(\cdot)$  permite identificar direções que desestabilizem ou não um dado sistema. Definimos agora estas direções.

**Definição 2.2** Uma direção  $\Delta K$  em  $K$  é **desestabilizante** se

$$\delta(K, \Delta K) \longrightarrow \gamma, 0 < \gamma < \infty.$$

De outra forma, a direção é **não desestabilizante**.

O teorema a seguir propõe um resultado para explorar a variação máxima em uma dada direção. Baseado nele, um algoritmo para computar  $\delta(K, \Delta K)$  será proposto.

**Teorema 2.3** Seja o sistema  $\Sigma$ ,  $K_0 \in \mathcal{F}$  e  $\epsilon_1 \Delta K$  satisfazendo ( 2.7). Então:

- a) Existe  $\epsilon_2 > 0$  tal que  $(K_0 + (\epsilon_1 + \epsilon_2)\Delta K) \in \mathcal{F}$ ,
- b) Da mesma forma,  $\epsilon_3, \epsilon_4, \dots$  podem ser encontrados e

$$\max \operatorname{Re} \lambda \left( A - B \left( K_0 + \sum_i \epsilon_i \Delta K \right) \right) \rightarrow 0^- \iff \epsilon_i \rightarrow 0, i \rightarrow \infty \quad (2.24)$$

**Prova :**

- a) das suposições feitas,  $\epsilon_1$  satisfaz

$$\mathcal{L}(-\epsilon_1 B \Delta K, P) < Q$$

para

$$P \in \mathcal{P}(A - BK_0, Q)$$

e portanto

$$\mathcal{P}(A - B(K_0 + \epsilon_1 \Delta K), Q) = \{P_1\}$$

Usando ( 2.9) em

$$A - B(K_0 + \epsilon_1 \Delta K)$$

obtem-se  $\epsilon_2$  tal que

$$\mathcal{L}(-\epsilon_2 B \Delta K, P_1) < Q$$

seja satisfeita. Então,

$$\mathcal{P}(A - B(K_0 + (\epsilon_1 + \epsilon_2)\Delta K), Q) = P_2$$

e

$$(K_0 + (\epsilon_1 + \epsilon_2)\Delta K) \in \mathcal{F}$$

b)

*Necessidade:* se a direção  $\Delta K$  desestabiliza o sistema, então para algum  $\epsilon$  finito teremos  $(A - B(K + \epsilon\Delta K))$  instável. Logo,  $\epsilon_i$  deve tender a zero quando  $i \rightarrow \infty$ .

*Suficiência:* Para  $K \in \mathcal{F}$ ,

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -Q \quad (2.25)$$

tem solução  $P > 0$  para qualquer  $Q > 0$ .

Pós-multiplicando ( 2.25) por  $x$  tal que

$$(A - BK)x = \lambda(A - BK)x$$

e pré-multiplicando por  $x^*$  com  $\|x\|=1$  e  $Q = I$ , vem

$$x^*(A - BK)^T Px + x^*P(A - BK)x = -x^*Qx$$

ou

$$2 \operatorname{Re} \lambda(A - BK)x^*Px = -1 \quad (2.26)$$

Portanto, de ( 2.26)

$$\max \operatorname{Re} \lambda(A - BK) \rightarrow 0^- \iff x^*Px \rightarrow +\infty \quad (2.27)$$

donde se conclui que o sistema torna-se instável se e somente se

$$\sigma_{\max}(P) \rightarrow +\infty \quad (2.28)$$

Lembrando que  $\epsilon$  é obtido de

$$\epsilon \leq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\mu(\mathcal{L}(-B\Delta K, P))}$$

conclui-se também que, como  $B$  e  $\Delta K$  são constantes, ( 2.28) é uma condição necessária para que  $\epsilon$  tenda a zero. Portanto,  $\epsilon \rightarrow 0$  somente se  $\sigma_{\max}(P) \rightarrow \infty$ , que por sua vez implica que o sistema se torne instável.

**C.Q.D.**

Observe que se  $\epsilon_i$  não tender a zero, a parte real dos autovalores do sistema não tende a zero. Neste caso, os autovalores do sistema (ou um conjunto deles) podem se deslocar para qualquer região do semi-plano complexo esquerdo, porém sem se aproximar do eixo imaginário.

**Observação :** Para maior simplicidade, este teorema foi proposto com  $\mathcal{P}(\cdot)$  envolvendo apenas a característica de estabilidade. Entretanto, este resultado é naturalmente estendido para  $\mathcal{P}(\cdot)$  garantindo desempenho como discutido na seção 1.2.

Baseado no teorema 2.3, o algoritmo 2.1 proposto a seguir permite o cálculo de  $\delta(K, \Delta K)$ .

**Algoritmo 2.1 :**

*Passo 1 :* Escolha  $K_0$  e  $Q > 0$  tal que

$$\mathcal{P}(A - BK_0, Q) = \{P\}.$$

*Passo 2 :* Obtenha  $\epsilon_i$  que satisfaz ( 2.9).

*Passo 3 :* Faça  $K_i = K_0 + \sum_i \epsilon_i \Delta K$ .

*Passo 4 :* Verifique se  $\xi_{min} \leq \epsilon_i$  e  $\sum_{l=1}^i \epsilon_l \leq \xi_{max}$ , onde  $\xi_{min}$  e  $\xi_{max}$  são tolerâncias .

*Passo 5 :* Se as condições do passo 4) forem satisfeitas, calcule

$$\mathcal{P}(A - BK_i, Q) = \{P_{i+1}\}$$

e retorne ao passo 2.

Caso contrário, calcule  $\delta(K, \Delta K) = \sum_i \epsilon_i$

Estes resultados são agora utilizados para explorar o conjunto  $\mathcal{F}$ .

## 2.3 Direções convexas em $\mathcal{F}$

Os resultados da seção anterior são agora utilizados para explorar o conjunto  $\mathcal{F}$ , buscando elementos a ele pertencentes.

Sejam então  $K_1, K_2 \in \mathcal{F}$ . O segmento  $\overline{K_2 K_1}$  é convexo em  $\mathcal{F}$  se

$$\alpha K_2 + (1 - \alpha) K_1 \in \mathcal{F}, \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad (2.29)$$

O teorema a seguir permite verificar se ( 2.29) é verdadeira.

**Teorema 2.4** *Sejam o sistema  $\Sigma$  e  $K_1, K_2 \in \mathcal{F}$ . O segmento  $\overline{K_1 K_2}$  é convexo em  $\mathcal{F}$  se e somente se*

$$\delta(K_1, K_2 - K_1) \geq 1 \quad (2.30)$$

**Prova :**

*Necessidade* : Pode-se reescrever ( 2.29) como

$$K_1 + \alpha(K_2 - K_1), \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad (2.31)$$

De acordo com o teorema 2.3,  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m$  podem ser obtidos de modo que

$$K_1 + \sum_{i=1}^m \epsilon_i(K_2 - K_1) \in \mathcal{F} \quad (2.32)$$

Temos que ( 2.31) garante que ( 2.32) é válida para  $m$  tal que

$$0 \leq \sum_{i=1}^m \epsilon_i \leq 1$$

Como

$$K_1 + \sum_{i=1}^m \epsilon_i(K_2 - K_1) \in \mathcal{F},$$

$\epsilon_{m+1}, \epsilon_{m+2}, \dots, \epsilon_\infty$  podem ser calculados de modo que

$$K_1 + \sum_{i=1}^m \epsilon_i(K_2 - K_1) + \sum_{i=m+1}^{\infty} \epsilon_i(K_2 - K_1) = K_1 + \delta(K_1, K_2 - K_1) \in \mathcal{F}$$

donde

$$\delta(.) = \sum_{i=1}^m \epsilon_i + \sum_{i=m+1}^{\infty} \epsilon_i = 1 + \sum_{i=m+1}^{\infty} \epsilon_i \geq 1$$

*Suficiência* : Pelo teorema 2.3, se  $K_1 \in \mathcal{F}$ , então  $\epsilon_1 > 0$  pode ser encontrado de modo que

$$K_1 + \gamma_1(K_2 - K_1) \in \mathcal{F}, \quad \gamma_1 \in [0, \epsilon_1]$$

Da mesma forma,  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m$  podem ser encontrados de modo que

$$K_1 + \gamma_m(K_2 - K_1) \in \mathcal{F}, \quad \gamma_m \in [0, \sum_{i=1}^m \epsilon_i]$$

Se  $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \geq 1$ , isto é,  $\delta(K_1, K_2 - K_1) \geq 1$ , então,

$$K_1 + \gamma(K_2 - K_1) \in \mathcal{F}, \quad \gamma \in [0, 1]$$

como desejado.

C.Q.D.

Este resultado pode ser facilmente implementado via algoritmo 2.1. Basta para isto fazer  $K_0 = K_1$  e  $\Delta K = K_2 - K_1$ . O teste do passo 4 será substituído por  $\epsilon_i > \xi_{\min}$  e  $\sum_i \epsilon_i \leq 1$ . Se (2.29) for falsa, então em algum momento  $\epsilon_i < \xi_{\min}$ . Se for verdadeira, teremos para algum  $m$  finito

$$\sum_{i=1}^m \epsilon_i \geq 1.$$

O algoritmo 2.1 avança em uma direção enquanto ela não sair de um dado conjunto; se todo um segmento pertence ao conjunto (segmento convexo), então ele pode ser percorrido pelo referido algoritmo.

No caso do segmento  $\overline{K_1 K_2}$  não ser convexo, surge a questão: haverá um caminho em  $\mathcal{F}$  de modo que a partir de  $K_1$  se possa chegar em  $K_2$  (e vice-versa) ?

Se este caminho existir, para quaisquer  $K_1, K_2 \in \mathcal{F}$ , então  $\mathcal{F}$  é um conjunto conexo. O teorema a seguir demonstra esta propriedade de  $\mathcal{F}$ .

**Teorema 2.5** *Sejam o sistema  $\Sigma$  e  $K_1, K_2 \in \mathcal{F}$  tais que*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A - BK_1, Q) &= \{P_1\} \\ \mathcal{P}(A - BK_2, Q) &= \{P_2\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

*Então, todo o caminho entre  $K_1$  e  $K_2$  gerado por*

$$K = ((1 - \alpha)W_1 + \alpha W_2)^T ((1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2)^{-1}, \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad (2.34)$$

*com*

$$\begin{aligned} W_1 &= K_1 P_1 \\ W_2 &= K_2 P_2 \end{aligned} \quad (2.35)$$

*pertence a  $\mathcal{F}$ .*

Para provar este teorema, recordamos algumas propriedades de  $\mathcal{P}(\cdot)$  e  $\mathcal{L}(\cdot)$  como definidas na seção 1.2 .

- i)  $\mathcal{P}(A, Q) = \{P\} \iff \mathcal{L}(A, P) = -Q$
- ii)  $\mathcal{L}(A + B, P) = \mathcal{L}(A, P) + \mathcal{L}(B, P)$
- iii)  $\mathcal{L}(A_1, P) + \mathcal{L}(A_2, I) = \mathcal{L}(A_1 + A_2 P^{-1}, P)$

**Prova:** Usando i) e ii) em (2.33),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A - BK_1, P_1) &= \mathcal{L}(A, P_1) - \mathcal{L}(BW_1^T, I) = -Q \\ \mathcal{L}(A - BK_2, P_2) &= \mathcal{L}(A, P_2) - \mathcal{L}(BW_2^T, I) = -Q \end{aligned} \quad (2.36)$$

Multiplicando os termos de ( 2.36) por  $(1 - \alpha)$  e  $\alpha$  para qualquer  $\alpha \in [0, 1]$ , respectivamente e somando, vem

$$\mathcal{L}(A, P) - \mathcal{L}(BW^T, I) = -Q \quad (2.37)$$

onde

$$\begin{aligned} P &= (1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2 \\ W &= (1 - \alpha)W_1 + \alpha W_2 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Utilizando iii) em ( 2.37), vem

$$\mathcal{L}(A - BW^T P^{-1}, P) = -Q$$

e de i),

$$\mathcal{P}(A - BK, Q) = \{P\}$$

Portanto, por definição, todo  $K$  dado por ( 2.34) pertence a  $\mathcal{F}$ .

**C.Q.D.**

Baseado neste teorema, o teorema a seguir permite a construção de um conjunto de segmentos convexas unindo dois elementos de  $\mathcal{F}$ .

**Teorema 2.6** *Sejam o sistema  $\Sigma$  e  $K_1, K_2 \in \mathcal{F}$  tais que  $\delta(K_1, K_2 - K_1) < 1$ . Então, existem  $\Delta K_1, \dots, \Delta K_m$  tais que*

$$K_2 = K_1 + \sum_{i=1}^m \Delta K_i \quad (2.39)$$

e

$$\delta \left( K_1 + \sum_{i=0}^{k-1} \Delta K_i, \Delta K_k \right) \geq 1 \quad k = 1, \dots, m \quad (2.40)$$

**Prova :** Seja

$$\Delta K_1 = K_{\alpha_1} - K_1 \quad (2.41)$$

para  $K_{\alpha_1} \in \mathcal{F}$  dado por ( 2.34) para algum  $0 < \alpha_1 < 1$ .

De ( 2.34), ( 2.41) e ( 2.23), temos que :

$$\alpha_1 \rightarrow 0 \Rightarrow K_{\alpha_1} \rightarrow K_1 \Rightarrow \Delta K_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \delta(K_1, \Delta K_1) \rightarrow \infty$$

Portanto, para algum  $0 < \alpha_1 < 1$

$$\delta(K_1, \Delta K_1) = 1$$

e

$$K_{\alpha_1} = K_1 + \Delta K_1 ,$$

Seja agora

$$\Delta K_2 = K_{\alpha_2} - K_{\alpha_1}$$

para  $K_{\alpha_2} \in \mathcal{F}$  dado por (2.34) para  $\alpha_1 < \alpha_2 \leq 1$ , de modo que

$$\delta(K_{\alpha_1}, \Delta K_2) = 1$$

ou

$$\delta(K_1 + \Delta K_1, \Delta K_2) = 1$$

Então,

$$K_{\alpha_2} = K_{\alpha_1} + \Delta K_2 = K_1 + \sum_{i=1}^2 \Delta K_i$$

Prosseguindo desta forma, obtemos sempre  $\alpha_{k+1} > \alpha_k$  até que para algum  $k = m$  temos  $\alpha_k = 1$

$$K_2 = K_{\alpha_k} = K_1 + \sum_{i=1}^m \Delta K_i,$$

e

$$\delta\left(K_1 + \sum_{i=0}^{k-1} \Delta K_i, \Delta K_k\right) \geq 1, \quad k = 1, \dots, m$$

C.Q.D.

Neste caso, o segmento  $\overline{K_2 K_1}$  é obviamente não-convexo. Entretanto, ele pode ser substituído por um conjunto de segmentos convexas, como mostrado. Este resultado é muito importante. Ele permite que qualquer elemento de  $\mathcal{F}$  seja alcançado a partir de um elemento conhecido do mesmo e de um conjunto de segmentos convexas adequados.

Uma vez que a um segmento  $\overline{K_2 K_1}$  estão associadas duas direções  $K_2 - K_1$  e  $K_1 - K_2$ , a análise desenvolvida para segmentos também é válida para direções. Portanto, pode-se dizer que existe um conjunto de direções tal que, a partir de um controlador pertencente a  $\mathcal{F}$ , qualquer outro controlador deste mesmo conjunto pode ser alcançado através delas.

Introduzimos agora o conceito de *direção convexa*.

**Definição 2.3** Uma direção  $\Delta K$  em  $K$  é uma direção convexa em  $\mathcal{F}$  se

$$(K + \epsilon_1 \Delta K) \in \mathcal{F}, \quad \epsilon_1 = \delta(K, \Delta K) \quad \text{e} \quad \nexists \epsilon_2 > \epsilon_1 \mid (K + \epsilon_2 \Delta K) \in \mathcal{F}. \quad (2.42)$$

Esta definição está associada à seguinte questão:

*Se uma dada direção  $\Delta K$  leva  $K + \epsilon \Delta K$  para a fronteira de  $\mathcal{F}$ , seria possível continuar avançando nesta direção de modo a nela encontrar um novo elemento pertencente a  $\mathcal{F}$ ?*

Esta questão está ilustrada na figura 2.1. Ela deve ser tratada com cuidado, pois permitirá indicar a existência ou não de uma solução para problemas de controle robusto. A direção  $\Delta K$  mostrada na referida figura é um exemplo de direção não convexa.

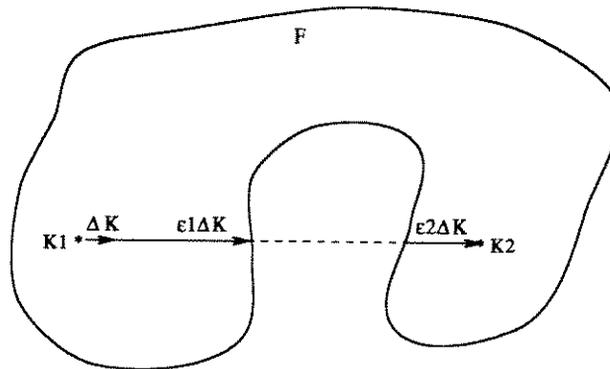


Figura 2.1: Direção não convexa

O uso do algoritmo 2.1 permite obter apenas  $\epsilon_1$  como mostrado na figura. Para obter  $\epsilon_2$ , se este existir, resultados baseados em feixes de matrizes são utilizados. Em [22] um procedimento deste tipo é usado para obter limites sobre perturbações que não desestabilizem o sistema. Para isto, é usado o mapeamento linear  $T(\cdot) : R^{n,n} \rightarrow R^{m,m}$ , que transforma um problema de estabilidade em um problema de não singularidade se, para cada  $M \in R^{n,n}$ ,  $T(M)$  tem ao menos um autovalor real e

$$\max \{ \operatorname{Re} \lambda : \lambda \text{ é um autovalor de } M \}$$

e

$$\max \{ \nu : \nu \text{ é um autovalor de } T(M) \}$$

tem o mesmo sinal, ou ambos são iguais a zero.

Este mapeamento pode ser dado por exemplo através da soma de Kronecker de  $M$  sobre ela mesma, isto é,

$$M \otimes I + I \otimes M = T(M) = \operatorname{diag} \{ M, M, \dots, M \} + [m_{ij} I_n]$$

Usando esta transformação, o problema de determinar o valor de  $\epsilon$  para o qual  $(A - \epsilon B \Delta K)$  torna-se instável é equivalente a determinar o menor valor de  $\epsilon$  para o qual  $T(A - \epsilon B \Delta K)$  torna-se singular. Se  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são autovalores de  $(A - \epsilon B \Delta K)$ , então os autovalores de  $T(A - \epsilon B \Delta K)$  são dados por  $\lambda_i + \lambda_j, i, j = 1, \dots, n$ . Portanto,  $T(\cdot)$  será singular se:

- a)  $\text{Re } \lambda_i = 0$ , quando  $\lambda_i$  é um autovalor instável ( $\bar{\lambda}_i + \lambda_i = 0$ );  
 b)  $\lambda_i = -\lambda_j$ ,  $i \neq j$ .

A análise de todos os valores para os quais  $T(A - \epsilon B \Delta K)$  torna-se singular poderá trazer informações muito importantes para a solução dos problemas de robustez a serem tratados.

O teorema a seguir é uma adaptação de [22] para o problema que desejamos tratar.

**Teorema 2.7** *Seja  $T(\cdot) : R^{n,n} \rightarrow R^{m,m}$  um mapeamento linear que transforma um problema de estabilidade em um problema de não singularidade. Então,  $(A - \epsilon B \Delta K)$  é estável, com  $\epsilon < \epsilon_{max}$ , para  $\epsilon_{max}$  dado por*

$$\epsilon_{max} = \frac{1}{\mu(T(A)^{-1}T(B\Delta K))} \quad (2.43)$$

Observe que  $\epsilon_{max}$  dado por (2.43) corresponde a  $\epsilon_1$  da figura 2.1. O teorema a seguir permite identificar direções convexas usando o teorema acima.

**Teorema 2.8** *Seja  $\Upsilon = \{\frac{1}{\lambda} | \lambda \in \lambda^+(T(A)^{-1}T(B\Delta K)) \text{ e } \lambda \text{ é real}\}$ . Então:*

- a) Se  $\Upsilon = \{\epsilon_1\} \implies \Delta K$  é convexa.  
 b) Se  $\Upsilon = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m\}$  e existir  $\epsilon_i \neq \epsilon_1$ ,  $\epsilon_i > \epsilon_1$  tal que  $\text{Re } \lambda(A - \epsilon_i B \Delta K) \leq 0$ , então  $\Delta K$  é não convexa.

**Prova :**

a) Se  $\epsilon_1 = \infty$ , então  $\Delta K$  é, por definição, convexa. Se  $\epsilon_1 < \infty$ , então  $(A - \epsilon B \Delta K)$  torna-se instável a partir de  $\epsilon = \epsilon_1$  e não existe  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  tal que  $(A - \epsilon_2 B \Delta K)$  volte a se tornar estável, uma vez que  $\Upsilon$  só contém um elemento. Assim, o sistema torna-se instável para  $\epsilon = \epsilon_1$  e à medida que  $\epsilon > \epsilon_1$  aumenta, nenhum autovalor de  $(A - \epsilon B \Delta K)$  tem sua parte real anulada.

b) Como  $A$  é ass. estável, para  $\epsilon = \epsilon_1$ , um autovalor de  $(A - \epsilon B \Delta K)$  tem parte real nula. Este autovalor só voltará a ser estável se houver  $\epsilon_i > \epsilon_1$ ,  $\epsilon_i \neq \epsilon_1$  tal que  $\text{Re } \lambda(A - \epsilon_i B \Delta K) \leq 0$ . Observe que  $|T(A - \epsilon_i B \Delta K)| = 0$  pode ocorrer para  $\lambda_l = -\lambda_j$ ,  $l \neq j$ . Portanto,  $\text{Re } \lambda(A - \epsilon_i B \Delta K) \leq 0$  deve ser testada  $\forall \epsilon_i \in \Upsilon$ ,  $\epsilon_i \neq \epsilon_1$ , afim de concluir sobre a convexidade ou não da direção  $\Delta K$ .

### 2.3.1 Exemplo 2.1: direções não convexas



Analisamos agora um exemplo didático visando ilustrar o conceito de direção não convexa. Seja então o sistema linear dado pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sejam também os controladores  $K_1, K_2 \in \mathcal{F}$  dados por

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Se calcularmos a variação máxima admitida na direção  $\Delta K$  a partir de  $K_1$ , obteremos

$$\delta(K_1, \Delta K) = 0.1273$$

De fato, calculando os autovalores para  $\epsilon = \delta(K_1, \Delta K)$  obtemos

$$\lambda(A - B(K_1 + \epsilon \Delta K)) = \{-0.00, -2.00\}$$

Usamos agora o teorema 2.8 para obter

$$\Upsilon = \{0.1273, 0.8727\}$$

Observe que o menor elemento de  $\Upsilon$  é igual a  $\delta(K_1, \Delta K)$ , como deve ser. Entretanto a existência de mais de um elemento em  $\Upsilon$  dá evidências de que  $\Delta K$  possa ser não convexa. Para verificar esta possibilidade, calculamos os autovalores para  $\epsilon = 0.8727$  obtendo

$$\lambda(A - B(K_1 + \epsilon \Delta K)) = \{-0.00, -2.00\}$$

Portanto, a direção  $\Delta K$  é não convexa, voltando a estabilizar o sistema para algum  $\epsilon > \delta(K_1, \Delta K)$ . Lembramos entretanto que a existência de mais de um elemento no conjunto  $\Upsilon$  não implica na não convexidade de  $\Delta K$ . Estes elementos devem ser analisados como foi feito neste exemplo, para obter uma resposta conclusiva.

Obtemos agora um conjunto de segmentos convexas  $\Delta K_1, \dots, \Delta K_m$  tais que

$$K_2 = K_1 + \sum_{i=1}^M \Delta K_i.$$

De fato, usando o teorema 2.5 com  $\alpha = 0.5$ , obtemos

$$\Delta K_1 = \begin{bmatrix} -0.6090 & 2.8195 \\ -0.1805 & -0.6090 \end{bmatrix}, \quad \Delta K_2 = \begin{bmatrix} 0.6090 & 0.1805 \\ -2.8195 & 0.6090 \end{bmatrix}$$

tais que

$$K_2 = K_1 + \Delta K_1 + \Delta K_2$$

## 2.4 Direções modais robustas de $\mathcal{F}$

Os resultados já desenvolvidos neste capítulo permitem:

- Estabelecer condições para que  $\Delta K$  seja não desestabilizante, desestabilizante ou convexa.
- Dada uma direção  $\Delta K$ , avançar na mesma até o limite da estabilidade.
- Dados dois controladores quaisquer  $K_1, K_2 \in \mathcal{F}$ , obter direções convexas de modo que a partir de um se possa alcançar o outro.

Estes resultados permitem explorar todo o conjunto  $\mathcal{F}$  na busca de algum elemento contido no mesmo. Entretanto, em grande parte dos problemas a serem tratados, não sabemos especificamente em qual elemento de  $\mathcal{F}$  desejamos chegar. O que conhecemos são propriedades do elemento que estamos procurando, e esta é a informação que podemos utilizar para procurá-lo. Para trabalhar com estas propriedades, recordamos inicialmente alguns conceitos de análise modal ([43]).

O comportamento de um sistema linear dado por

$$\dot{x} = Ax \quad (2.44)$$

após uma perturbação pode ser descrito pelos autovalores e autovetores da matriz  $A_{n,n}$ . Se a matriz  $A$  tiver  $n$  autovalores distintos  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ , então ela terá  $n$  autovetores linearmente independentes  $v_i, i = 1, \dots, n$ . A relação entre estes elementos é dada por

$$Av_i = \lambda_i v_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.45)$$

As  $n$  funções da forma  $e^{\lambda_i t} v_i, i = 1, \dots, n$  descrevem os  $n$  modos dinâmicos do sistema dado por ( 2.44).

Considerando agora a autoestrutura de  $A^T$ , temos

$$A^T w_j = \lambda_j w_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.46)$$

pois  $A$  e  $A^T$  possuem os mesmos autovalores, mas diferentes autovetores. Transpondo cada membro de ( 2.46) e pós-multiplicando por um autovetor  $v_i, (i \neq j)$  de  $A$ , vem

$$w_j^T A v_i = \lambda_j w_j^T v_i, \quad (i \neq j), i, j = 1, \dots, n \quad (2.47)$$

Se cada membro de ( 2.45) é pré-multiplicado por  $w_j^T, (j \neq i)$ , vem

$$w_j^T A v_i = \lambda_i w_j^T v_i, \quad (i \neq j), i, j = 1, \dots, n \quad (2.48)$$

Subtraindo ( 2.47) de ( 2.48)

$$(\lambda_i - \lambda_j) w_j^T v_i = 0, \quad (i \neq j), i, j = 1, \dots, n \quad (2.49)$$

o que implica em

$$w_j^T v_i = 0 \quad , \quad (i \neq j), i, j = 1, \dots, n \quad (2.50)$$

Portanto os autovetores de  $A$  e  $A^T$  correspondentes a diferentes autovalores são ortogonais. Para o mesmo autovalor, normalizando os autovetores, vem

$$w_i^T v_i = 1 \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (2.51)$$

Os autovetores  $w_i$  e  $v_i$  são normalmente referidos como autovetor esquerdo (( 2.46)) e autovetor direito (( 2.45)) de  $A$ , respectivamente.

Definindo

$$J = \text{diag} (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (2.52)$$

$$V = [v_1 \dots v_n] \quad (2.53)$$

$$W = [w_1 \dots w_n] \quad (2.54)$$

pode-se re-escrever ( 2.45), ( 2.46) e ( 2.50)-( 2.51) como

$$AV = VJ \quad (2.55)$$

$$A^T W = WJ \quad (2.56)$$

$$W^T V = I \quad (2.57)$$

Destas equações segue que

$$W^T = V^{-1} \quad (2.58)$$

$$W^T AV = V^{-1} AV = J \quad (2.59)$$

Seja agora o sistema linear

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.60)$$

ao qual é aplicada a transformação de variáveis  $x=Vz$ . De ( 2.58)-( 2.60)

$$\dot{z} = Jz + Du \quad (2.61)$$

com

$$D = W^T B \quad (2.62)$$

Para o caso de autovalores distintos, ( 2.61) é equivalente às  $n$  equações desacopladas

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + \sum_{j=1}^r d_{ij} u_j \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (2.63)$$

De ( 2.63) observa-se que a entrada  $u_j$  influencia o elemento  $z_i$  do vetor de estados  $z$  se e somente se

$$d_{ij} = w_i^T b_j \neq 0 \quad (2.64)$$

Portanto,  $D$  dada por ( 2.62) pode ser usada para analisar a controlabilidade dos modos do sistema dado por ( 2.60). Após analisar a forma como as entradas podem influenciar os modos de um sistema, introduzimos agora o conceito de direção modal robusta.

**Definição 2.4** *Sejam  $[A, B]$  e  $\lambda_k \in \lambda(A)$ . Então uma direção  $\Delta K \neq 0$ ,  $\Delta K \in \mathbb{R}^{r \times n}$  é  $\lambda_k$ -robusta, se  $\forall \epsilon > 0$*

$$\begin{cases} \lambda_i \in \lambda(A - \epsilon B \Delta K), & \lambda_i \notin \{\lambda_k, \bar{\lambda}_k\} \\ \lambda_i \notin \lambda(A - \epsilon B \Delta K), & \lambda_i \in \{\lambda_k, \bar{\lambda}_k\} \end{cases} \quad (2.65)$$

O conceito de direção modal robusta está relacionado a uma direção que altera parte das propriedades de um sistema. Como estamos interessados em direções reais,  $\Delta K$  deve mover o par complexo-conjugado  $\{\lambda_k, \bar{\lambda}_k\}$  quando  $\lambda_k$  for complexo. O teorema a seguir permite identificar tais direções em função dos autovetores do sistema.

**Teorema 2.9** *Sejam  $[A, B]$ ,  $\lambda_k \in \lambda(A)$  e  $w_k = x_k + jy_k$  tal que  $A^T w_k = \lambda_k w_k$ . Então,  $\Delta K$  é  $\lambda_k$ -robusta se e somente se*

- i)  $d_{ik} = w_k^T b_i \neq 0$  para algum  $i = 1, \dots, r$ ,  $b_i = i$ -ésima coluna de  $B$
- ii)  $\Delta K \in (\mathcal{R}(x_k^T) \oplus \mathcal{R}(y_k^T))$

onde  $\mathcal{R}(\cdot)$  denota o espaço range de  $(\cdot)$ .

**Prova:**

- i) Segue direto de ( 2.64)
- ii) Pós-multiplicando  $A$  por  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , vem

$$(A - \epsilon B \Delta K)v_i = \lambda_i v_i - \epsilon B \Delta K v_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.66)$$

$\lambda_i$  e  $v_i$ ,  $\lambda_i \neq \{\lambda_k, \bar{\lambda}_k\}$  são autovalores e autovetores de  $(A - \epsilon B \Delta K)$ , respectivamente, se e somente se

$$\Delta K v_i = 0, \quad i \neq k, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.67)$$

Por outro lado,  $\lambda_k$  e  $v_k$  não são um autovalor e um autovetor de  $(A - \epsilon B \Delta K)$ , respectivamente, se e somente se

$$\Delta K v_k \neq 0 \quad (2.68)$$

De ( 2.50)-( 2.51) e sendo a condição i) satisfeita, temos que ( 2.67) e ( 2.68) só são satisfeitas para  $\Delta K$  dado pela condição ii).

**C.Q.D.**

O teorema 2.9 dá as condições para que uma direção seja  $\lambda_k$ -robusta. Estas direções permitem alterar apenas os modos desejados de um sistema. Quando  $\lambda_k$  for complexo, o par  $\{\lambda_k, \bar{\lambda}_k\}$  será alterado pela direção  $\Delta K$   $\lambda_k$ -robusta.

Como veremos a seguir, estas direções permitem alocar pólos em qualquer região  $\mathcal{S}$  do plano complexo, como as discutidas na seção 1.2.2. Dado  $\lambda_k \notin \mathcal{S}$ , estaremos interessados em obter a distância deste autovalor à região  $\mathcal{S}$  na direção  $\lambda_k$ -robusta  $\Delta K$ . Denotaremos esta distância por  $d(\lambda_k, \mathcal{S})$ , definida como

$$d(\lambda_k, \mathcal{S}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \min \epsilon \mid \lambda_k(A - \epsilon B \Delta K) \in \mathcal{S} \} \quad (2.69)$$

Trataremos separadamente os casos de entrada única e entradas múltiplas.

### 2.4.1 Caso entrada única

Para uma única entrada,  $\Delta K$  que satisfaz o teorema 2.9 é dada por

$$\Delta K = \rho_k w_k^T \quad (2.70)$$

se  $\lambda_k$  for real, e por

$$\Delta K = \rho_k w_k^T + \rho_{k+1} w_{k+1}^T \quad (2.71)$$

se for complexo. Os escalares  $\rho_k$  e  $\rho_{k+1}$  são os parâmetros livres, uma vez que  $w_k$  e  $w_{k+1}$  são fixos.

Analisamos inicialmente o caso real.

Usando (2.70) com (2.46) e (2.62), temos que

$$w_k^T(A - b\Delta K) = \lambda_k w_k^T - \rho_k w_k^T b w_k^T = (\lambda_k - \rho_k d_k) w_k^T.$$

Logo

$$\gamma = \lambda_k - \rho_k d_k \quad (2.72)$$

é um autovalor de  $(A - b\Delta K)$ . Se  $\lambda_k$  é real, então  $w_k$  também é real e a aplicação de  $\Delta K = \rho_k w_k^T$  é fisicamente realizável. O autovalor  $\lambda_k$  pode ter seu valor alterado para qualquer  $\gamma$  real através de  $\rho_k w_k^T$ , com  $\rho_k$  dado por

$$\rho_k = -\frac{\gamma - \lambda_k}{d_k} \quad (2.73)$$

Caso se deseje alterar  $m$  autovalores do sistema, então  $\Delta K$  será dada por

$$\Delta K = \sum_{k=1}^m \Delta K_k \quad (2.74)$$

com  $\Delta K_k = \rho_k w_k^T$  e  $\rho_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  dados por ([43])

$$\rho_k = -\frac{\prod_{j=1}^m (\gamma_j - \lambda_k)}{d_k \prod_{j=1, j \neq k}^m (\lambda_j - \lambda_k)} \quad (2.75)$$

Para o caso de pares complexo-conjugados de autovalores, há uma direção real que os leva para qualquer outro par complexo-conjugado ou real. Seja o par complexo  $(\lambda_k, \lambda_{k+1} = \overline{\lambda_k})$  e seus autovetores esquerdos  $(w_k, w_{k+1} = \overline{w_k})$ . De ( 2.75), teremos  $\rho_k = \overline{\rho_{k+1}}$ . Escrevendo  $w_k = x + jy$  e  $\rho_k = \rho_r + j\rho_{im}$ , temos de ( 2.71) que

$$\Delta K_k = \rho_k w_k + \rho_{k+1} w_{k+1} = 2\rho_r x - 2\rho_{im} y \quad (2.76)$$

Analisando ( 2.73)-( 2.76) de acordo com ( 2.69), vemos que  $|\rho_k|$  é uma medida da distância entre os autovalores  $\lambda_k$  e  $\gamma_k$  na direção  $\Delta K_k$ . Portanto, neste caso,  $d(\lambda_k, \mathcal{S})$  é obtida escolhendo  $\gamma_k$  tal que  $|\rho_k|$  seja mínimo, de modo que  $d(\lambda_k, \mathcal{S}) = |\rho_k|$ .

### 2.4.2 Caso entradas múltiplas

Para o caso de múltiplas entradas, uma direção  $\Delta K \in R^{r \times n}$   $\lambda_k$ -robusta que satisfaz as condições do teorema 2.9 pode ser expressa por

$$\Delta K_k = \rho_k f_k w_k^T \quad (2.77)$$

para  $\lambda_k$  real e por

$$\Delta K_k = \rho_k f_k w_k^T + \rho_{k+1} f_{k+1} w_{k+1}^T \quad (2.78)$$

para  $\lambda_k$  complexo, onde  $(f_k, f_{k+1}) \in C^r$ . Neste caso, temos que

$$\rho_k = -\frac{\prod_{j=1}^m (\gamma_j - \lambda_k)}{w_k^T B f_k \prod_{j=1, j \neq k}^m (\lambda_j - \lambda_k)} \quad (2.79)$$

Observe que  $\Delta K$  dada por ( 2.74) desloca os  $m$  autovalores  $\lambda_k, k = 1, \dots, m$  para as posições  $\gamma_k, k = 1, \dots, m$ . Enquanto no caso anterior  $d(\lambda_k, \mathcal{S})$  dependia apenas da escolha de  $\gamma_k$ , temos de ( 2.79) que a escolha dos vetores  $f_k$  também altera seu valor. É fácil verificar que o vetor  $f_k$  que dá  $|\rho_k|$  mínimo (para uma escolha dos autovalores  $\gamma_k$  como discutido anteriormente) é dado por  $f_k = B^T w_k$ .

Observação 1: Este resultado está relacionado à estabilizabilidade de modos instáveis de um sistema. Este conceito é menos restritivo do que aquele que trata da controlabilidade dos modos de um sistema. Desta forma, a não controlabilidade de um modo estável do sistema não impede a estabilização do sistema como um todo.

Observação 2: Comparando este resultado com o teorema 2.6, vemos que nos dois casos obtiveram-se direções de modo a alcançar um controlador pertencente a um dado

conjunto. No primeiro, o elemento que se desejava alcançar era dado. No último, o uso de direções  $\lambda_k$ -robustas permitiu que se procurasse  $K \in \mathcal{F}$  através de informações relacionadas a estabilidade relativa.

### 2.4.3 Escolha do parâmetro livre $f$

Quando calculamos direções robustas para sistemas de múltiplas entradas, o vetor  $f$  aparece como um parâmetro livre para explorar a flexibilidade na escolha da solução.

Discutimos rapidamente como escolher  $f$  de forma a minimizar a distância  $d(\lambda_i, \mathcal{S})$ .

Propomos agora um resultado que dá  $\epsilon$  máximo para uma direção robusta  $\Delta K = fy_k^T$  com o vetor  $f$  a determinar. O vetor  $f$  deverá maximizar  $\epsilon = 1/\mu(\mathcal{L}(-B\Delta K, P))$ , porém satisfazendo  $y_k^T Bf > 0$ , afim de que a direção  $\Delta K$  obedeça a uma condição de ângulo.

**Teorema 2.10 :** *Sejam  $A \in R^{n,n}$ ,  $B \in R^{n,r}$ ,  $P = \mathcal{P}(A, Q) > 0$  e  $\Delta K = fy_k^T$  uma direção  $\lambda_k$ -robusta associada a  $\lambda_k \in \lambda(A)$  com  $f$  a determinar. Então,  $f$  que maximiza  $\epsilon = 1/\mu(\mathcal{L}(-B\Delta K, P))$  e satisfaz  $y_k^T Bf > 0$  é obtido de*

$$\begin{aligned} \min \quad & \|z\| \\ \text{s.a.} \quad & hz \geq e \end{aligned} \quad (2.80)$$

onde

$$h = y_k^T B R^{-1} \quad (2.81)$$

$$e = h Q_1^T P y_k \quad (2.82)$$

com  $R$  e  $Q_1$  obtidos de

$$\begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Prova :**

Usando os resultados do teorema 2.1, temos que para  $\Delta K$  dado,

$$\mu(\mathcal{L}(-Bfy_k^T, P)) = -(Bf)^T P y_k + \|Bf\| \|P y_k\|$$

Observa-se nesta equação que

$$\|Bf - P y_k\| \rightarrow 0 \iff (Bf)^T P y_k \rightarrow \|Bf\| \|P y_k\| \implies \mu(\mathcal{L}(-Bfy_k^T, P)) \rightarrow 0 \quad (2.83)$$

Portanto, minimizar  $\|Bf - P y_k\|$  implica em minimizar  $\mu(\mathcal{L}(-Bfy_k^T, P))$ . Entretanto,  $f$  que minimiza (2.83) deve satisfazer

$$y_k^T Bf > 0$$

Definindo  $\Phi(f) = \|Bf - P y_k\|$ , definimos o problema P1 como

$$\text{P1} \begin{cases} \min \Phi(f) \\ \text{s.a. } y_k^T Bf > 0 \end{cases} \quad (2.84)$$

Seja agora a transformação QR aplicada a B de modo que

$$Q^T B = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde  $Q_1 \in R^{m.n}$  e  $Q_2 \in R^{(n-m).n}$ . Pode-se escrever  $\Phi(f)$  como

$$\Phi(f) = \left\| \begin{bmatrix} Q_1^T d \\ Q_2^T d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Rf \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \|Q_1^T d - Rf\| + \|Q_2^T d\|$$

com  $d = Py_k$ .

Escrevendo agora

$$z = Rf - Q_1^T d$$

então

$$\Phi(f) = \|z\| + \|Q_2^T d\|$$

$$f = R^{-1}(z + Q_1^T d) \quad (2.85)$$

A restrição  $y_k^T Bf > 0$  se torna

$$y_k^T Bf = y_k^T B R^{-1} z + y_k^T B R^{-1} Q_1^T d > 0$$

ou

$$hz > e$$

com

$$h = y_k^T B R^{-1}$$

e

$$e = h Q_1^T d.$$

Assim, o problema P1 pode ser escrito como o problema P2 abaixo:

$$P2 \begin{cases} \min \|z\| \\ \text{s.a. } hz > e \end{cases} \quad (2.86)$$

**C.Q.D.**

Resolver este problema consiste em procurar o ponto sobre o hiperplano dado por  $hz = e$  que seja mais próximo da origem, que é a interseção deste hiperplano com uma reta ortogonal ao mesmo passando pela origem. Obtido  $z$ ,  $f$  é dado por (2.85).

## 2.5 Critérios de desempenho associados a equações de Lyapunov

Na seção 1.2.2 estudamos as relações entre equações de Lyapunov e regiões do plano complexo. É sabido que ([26]) critérios de desempenho e de projeto podem ser relacionados a estas regiões. Estudamos agora alguns destes critérios e os associamos aos conjuntos  $\mathcal{P}(\cdot)$  propostos na citada seção.

### a) Tempo mínimo de resposta

A resposta de um sistema dinâmico pode ser expressa por

$$x(t) = \sum \rho_i e^{\lambda_i t} v_i^T x(0)$$

onde  $x(0) \in R^n$  é o estado inicial, e  $v_i \in R^n$  e  $\lambda_i \in C$  são o autovetor e o autovalor associados a um modo do sistema, respectivamente. Desta expressão, percebe-se claramente que à medida que  $\max \operatorname{Re}(\lambda_i) \rightarrow -\infty$ , a dinâmica de  $x(t)$  torna-se cada vez mais rápida. Portanto, a especificação

$$\max \operatorname{Re}(\lambda_i) \leq -\alpha, \quad \alpha > 0$$

garante um tempo mínimo de resposta. Este critério é assegurado por

$$\mathcal{P}(A, Q, \alpha) = \{P_\alpha\}$$

### b) Esforço máximo do controlador

O esforço realizado por um controlador é tanto maior quanto mais distante da origem se desejar alocar os pólos de um sistema. Para uma direção  $\Delta K$  dada, temos que

$$\min \operatorname{Re} \lambda(A - B(K_0 + \epsilon \Delta K)) \rightarrow -\infty \implies \epsilon \rightarrow \infty \implies \|K_0 + \epsilon \Delta K\| \rightarrow \infty$$

Este esforço, que pode ser traduzido pela norma da matriz de ganho, implica em geral, em uma energia maior a ser injetada no sistema através de sua(s) entrada(s) de controle. Quando os sinais que puderem ser aplicados a esta entrada forem limitados, este critério de projeto deve ser observado. Para isto, devemos garantir

$$\min \operatorname{Re} \lambda_i(A - BK) > -\beta, \quad \beta > 0$$

o que é assegurado se

$$\mathcal{P}(A + BK, Q, \beta) = \{P_\beta\}$$

for satisfeita.

### c) Fator de amortecimento

O fator de amortecimento  $\tau$  de um sistema está relacionado à amplitude das oscilações da resposta do mesmo. Para um autovalor  $\lambda$ ,  $\tau$  é dado por

$$\tau = \frac{\operatorname{Re}(\lambda)}{\operatorname{Im}(\lambda)}$$

Observe que  $\tau$  aumenta quando a razão  $\frac{\operatorname{Re}(\lambda)}{\operatorname{Im}(\lambda)}$  aumenta. Isto corresponde a uma amplitude de oscilação menor, pois  $\operatorname{Re}(\lambda) \gg \operatorname{Im}(\lambda)$ . Como discutido na seção 1.2.2,  $\tau_{\min} \geq \tau_\lambda$ , se

$$\mathcal{P}((A - BK), Q, \theta) = \{P_\theta\}$$

for garantido, para  $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(\frac{\pi}{2} - \tau_{\min})$

Os critérios descritos podem ser combinados à vontade pelo projetista, bastando para isto que as condições correspondentes sejam satisfeitas.

## 2.6 Conclusão

Neste capítulo, o conjunto de controladores associados a um SPC foi explorado via variações paramétricas sobre um elemento deste conjunto.

Equações modificadas de Lyapunov foram empregadas para calcular variações sobre controladores em direções dadas. Desta forma, determinadas propriedades destes controladores foram mantidas.

Os conceitos de direção convexa e direção modal robusta foram introduzidos. Eles permitiram identificar características da topologia do conjunto dos controladores estabilizantes. Permitiram também determinar direções utilizadas na procura de elementos pertencentes a este conjunto.

# Capítulo 3

## Controladores robustos: abordagem via variações paramétricas

### 3.1 Introdução

Nos métodos para projeto de controladores estabilizantes para sistemas incertos estudados na seção 1.5, a meta foi encontrar uma função de Lyapunov (FL) válida para qualquer perturbação no sistema.

Para os dois métodos baseados na suposição de “matching conditions”, procurou-se garantir que a derivada da FL fosse negativa para qualquer perturbação no sistema.

Para o método usando programação convexa, procurou-se uma FL válida para qualquer um dos vértices modelando uma família de matrizes de perturbação.

O termo *estabilidade quadrática* está associado aos resultados citados. O uso de uma mesma função de Lyapunov garante a estabilidade do SI para variações contínuas das perturbações.

O termo *estabilidade robusta* também está associado à estabilidade de um sistema sujeito a parâmetros incertos. Neste caso, exige-se que o sistema seja estável para qualquer perturbação admissível, porém sem a necessidade de uma FL independente da perturbação.

Nos resultados a serem propostos neste capítulo, considera-se o sistema incerto  $\Sigma_c$ . Cada sistema definido por um par  $[A_i, B_j]$  é tratado como um SPC e uma solução que estabiliza o sistema dado por este par é encontrada facilmente.

O uso de variações paramétricas permite explorar o conjunto solução de cada SPC, buscando uma solução pertencente a  $\mathcal{F}^c$ .

A solução obtida desta forma permite a estabilização de  $\Sigma_c$  via realimentação de estados através de um controlador linear.

Iniciamos este capítulo estudando os conjuntos de controladores associados aos sistemas  $\Sigma$  e  $\Sigma_c$ .

## 3.2 Conjuntos de controladores

No capítulo anterior, vimos que dado um controlador  $K_0 \in \mathcal{F}$  é possível calcular variações  $\epsilon$  em direções  $\Delta K$  de modo os controladores  $K_0 + \epsilon \Delta K$  também pertençam a  $\mathcal{F}$ .

Nesta seção, analisaremos famílias de controladores robustos obtidas através destes resultados.

**Lema 3.1** *Sejam o sistema  $\Sigma$ ,  $K_0 \in \mathcal{F}$  e  $\Delta_m$  um conjunto de direções em  $K_0$  dado por*

$$\Delta_m = \{\Delta K_i \quad i = 1, \dots, m\} \quad (3.1)$$

*Sejam ainda*

$$P \in \mathcal{P}(A - BK_0, I)$$

e

$$\epsilon_i = \frac{1}{\mu(\mathcal{L}(-B\Delta K_i, P))}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.2)$$

*Então, o conjunto convexo definido por*

$$\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} K_0 + \text{conv}\{\epsilon_i \Delta K_i, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (3.3)$$

*é tal que  $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ .*

**Prova** : Para  $\epsilon_i$  satisfazendo ( 3.2), temos que

$$\mathcal{L}(-\epsilon_i B \Delta K_i, P) < I, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.4)$$

Multiplicando cada  $i$ -ésimo termo de ( 3.4) por  $\alpha_i \in [0, 1]$ , com  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ , vem

$$\mathcal{L}\left(-B \sum_{i=1}^m \alpha_i \epsilon_i \Delta K_i, P\right) < I,$$

Portanto,

$$\mathcal{L}(-B\Delta K, P) < I, \quad \Delta K \in \text{conv}\{\epsilon_i \Delta K_i, \quad i = 1, \dots, m\}.$$

donde

$$\mathcal{P}(A - B(K_0 + \Delta K), I) \neq \emptyset$$

e  $K \in \mathcal{K} \implies K \in \mathcal{F}$ .

**C.Q.D.**

Observe que  $\mathcal{K}$  é um conjunto convexo contido no conjunto não convexo  $\mathcal{F}$  e todo  $K \in \mathcal{K}$  possui as características definidas por  $\mathcal{P}(\cdot)$ . Para testar  $K \in \mathcal{K}$ , para algum  $K \in R^{r \times n}$ , basta verificar se

$$\mathcal{L}(-B(K - K_0), P) < Q$$

para

$$P \in \mathcal{P}(A - K_0, Q).$$

Observe ainda, que, o conjunto  $\mathcal{K}$  pode ser aumentado. As variações  $\epsilon$  dadas por (3.2) são conservativas. Se avançarmos  $\delta_i(K_0, \Delta K_i)$  nas direções  $\Delta K_i$ , obteremos um conjunto estendido  $\mathcal{K}^E$  contendo o conjunto  $\mathcal{K}$ . Entretanto, o conjunto assim obtido pode eventualmente perder suas características de convexidade. As duas possibilidades são mostradas na figura 3.1. Para verificar qual das situações ocorre com um dado conjunto estendido  $\mathcal{K}^E$ , os vértices do conjunto assim gerado devem ser testados. Se para dois vértices  $K_i, K_j$  de  $\mathcal{K}^E$  a condição

$$\delta(K_i, K_j - K_1) \geq 1$$

não for satisfeita, então a situação é aquela mostrada na figura 3.1.b. Caso esta condição seja satisfeita para quaisquer  $K_i, K_j$ , a situação é mostrada na figura 3.1.a.

Da figura 3.1 temos que, se  $\mathcal{K}^E$  for convexo, então

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^E \subset \mathcal{F}$$

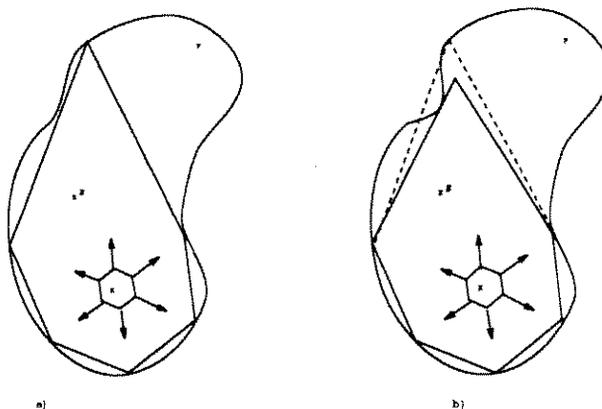


Figura 3.1: Conjuntos de controladores

Os conjuntos de controladores gerados até aqui referem-se a um sistema linear como  $\Sigma$ . Trataremos agora de conjuntos de controladores associados a um sistema como  $\Sigma_c$ .

### 3.3 Conjuntos de controladores robustos

Da mesma forma que para sistemas precisamente conhecidos, dado um controlador inicial robusto, analisaremos as variações admissíveis no mesmo de forma a manter suas características de robustez. Estes estudos permitirão o desenvolvimento de algoritmos para estabilização robusta de sistemas incertos.

Inicialmente, lembramos que  $\mathcal{F}^c$  é o conjunto de todos os controladores satisfazendo alguma  $\mathcal{P}(\cdot)$  para um sistema incerto como  $\Sigma_c$ .

A notação  $\mathcal{F}_{ij}$  é usada para representar o conjunto de controladores que satisfazem  $\mathcal{P}(\cdot)$  para um sistema como  $\Sigma$  dado pelo par  $[A_i, B_j]$ .

**Proposição 3.1** *Seja o sistema incerto  $\Sigma_c$  e  $K_0 \in \mathcal{F}^c$ . Então,  $(K_0 + \epsilon \Delta K) \in \mathcal{F}^c$  para  $\epsilon > 0$  e  $\Delta K \in R^{r \times n}$ , se para*

$$P_{ij} \in \mathcal{P}(A_i - B_j K_0, Q) \quad (3.5)$$

com  $Q > 0$ , tivermos

$$\mathcal{L}(-\epsilon B_j \Delta K, P_{ij}) < Q \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M. \quad (3.6)$$

**Prova** : Se ( 3.6) é satisfeita, então

$$\overline{Q}_{ij} = \mathcal{L}(-\epsilon B_j \Delta K, P_{ij}) - Q < 0, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall j = 1, \dots, M.$$

Da proposição 2.1,

$$\mathcal{P}(A_i - B_j(K_0 + \epsilon \Delta K), \overline{Q}_{ij}) \neq \emptyset \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall j = 1, \dots, M,$$

donde  $(K_0 + \epsilon \Delta K) \in \mathcal{F}^c$ .

**C.Q.D.**

O valor de  $\epsilon$  que satisfaz ( 3.6) é obtido de

$$\{\epsilon = \min \epsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M\}$$

através de ( 2.9).

Observe que são considerados todos os pares  $[A_i, B_j]$ . O par para o qual resultar um menor valor para  $\epsilon$ , terá seu valor adotado.

Da mesma forma que para um sistema  $\Sigma$ , pode-se andar em uma dada direção  $\Delta K$  até o limite da estabilidade ou então se descobrir que a direção é estabilizante. É o que propõe o seguinte resultado:

**Teorema 3.1** *Sejam o sistema incerto  $\Sigma_c$ ,  $K_0 \in \mathcal{F}^c$  e  $\epsilon_1 \Delta K$  satisfazendo (3.6). Então:*

- a) *Existe  $\epsilon_2 > 0$  tal que  $(K_0 + (\epsilon_1 + \epsilon_2)\Delta K) \in \mathcal{F}^c$ .*  
 b) *Da mesma forma,  $\epsilon_3, \epsilon_4, \dots$  podem ser encontrados e*

$$\max Re \left( \lambda(A_i - B_j(K_0 + \sum_k \epsilon_k \Delta K)) \right) \rightarrow 0^- \iff \epsilon_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

para algum par  $[A_i, B_j]$ .

A prova deste resultado é semelhante à do teorema 2.3, considerando-se cada par  $[A_i, B_j]$  separadamente.

Da mesma forma,  $\delta^c(K_0, \Delta K)$  é a máxima variação admitida na direção  $\Delta K$  a partir de  $K_0$  sem sair de  $\mathcal{F}^c$ . Esta variação máxima é obtida de

$$\delta^c(K_0, \Delta K) = \{ \min \delta_{ij}(K_0, \Delta K), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M \}$$

Os conceitos de direção desestabilizante e não desestabilizante têm aqui o mesmo significado.

Para um sistema tipo  $\Sigma$ , os teoremas 2.6 e 2.5 mostraram que é sempre possível obter direções convexas em  $\mathcal{F}$ , de forma que a partir de um elemento do conjunto  $\mathcal{F}$  se possa alcançar qualquer outro elemento deste conjunto.

Para sistema tipo  $\Sigma_c$ , o teorema 2.4 é obviamente válido. Se um dado segmento  $\overline{K_1 K_2}$  é convexo a  $\mathcal{F}^c$ , então o teorema 3.1 permite percorrer todo este segmento. Quando isto não for possível, o teorema abaixo pode ser utilizado. Este teorema é uma versão do teorema 2.6 para SIs.

**Teorema 3.2** *Sejam o sistema  $\Sigma_c$  e  $K_1, K_2 \in \mathcal{F}^c$  tais que  $\delta^r(K_1, K_2 - K_1) < 1$ . Então, existem  $\Delta K_1, \dots, \Delta K_m$  convexas a  $\mathcal{F}_{ij}$  tais que*

$$K_2 = K_1 + \sum_{l=1}^m \Delta K_l \quad (3.8)$$

e

$$\delta_{ij} \left( K_1 + \sum_{l=0}^{k-1} \Delta K_l, \Delta K_k \right) \geq 1 \quad k = 1, \dots, m \quad (3.9)$$

onde  $\delta_{ij}$  está associada ao par  $[A_i, B_j]$ .

**Prova :** Se  $K_1, K_2 \in \mathcal{F}^c$ , então  $K_1, K_2 \in \mathcal{F}_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, M$ . De acordo com o teorema 2.6, a cada par  $[A_i, B_j]$  um conjunto de direções convexas a  $\mathcal{F}_{ij}$  pode ser encontrado, e o resultado segue.

**C.Q.D.**

Diferentemente do caso precisamente conhecido, não faz sentido falar-se aqui de direções modais robustas para um sistema incerto. Neste caso, os próprios autovalores são incertos. Falaremos em direções modais robustas quando nos referirmos a SPCs dados por pares  $[A_i, B_j]$  do sistema incerto. Por outro lado, a definição de direção convexa continua válida para sistema incerto.

Os resultados até aqui desenvolvidos permitem explorar  $\mathcal{F}^c$  a partir de um elemento inicial conhecido. Porém, conhecer este elemento inicial é, em geral, o problema mais crítico em se tratando de sistemas incertos. Nos ocuparemos deste problema depois de trabalhar um exemplo ilustrativo.

### 3.4 Exemplo 3.1 : construção de conjuntos

Em [44] um exemplo de ordem 2 é utilizado para ilustrar um procedimento de estabilização de sistemas incertos obedecendo as “matching conditions”. São construídos agora conjuntos de controladores robustos para este exemplo. As matrizes incertas deste sistema são dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -1.0 & -1.0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -1.0 & -1.5 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ 1.0 & -1.0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

gerando quatro pares definidos por

$$[A_1, B], [A_2, B], [A_3, B], [A_4, B]$$

Para cada um destes pares é obtido um controlador que aloca seus autovalores para as posições  $\{-1, -2\}$  do plano complexo. Estes controladores são:

$$K_{0_1} = [1.0 \ 2.0], \quad K_{0_2} = [1.0 \ 4.5]$$

$$K_{0_3} = [3.0 \ 2.0], \quad K_{0_4} = [3.0 \ 4.5]$$

É usado um conjunto de direções arbitrárias

$$\Delta K_1 = [1 \ 0], \quad \Delta K_2 = [0 \ 1]$$

$$\Delta K_3 = [-1 \ 0], \quad \Delta K_4 = [0 \ -1],$$

Para cada um dos pares  $[A_i, B]$  andamos um passo  $\epsilon_j$  de modo que

$$\mathcal{L}(-e_j B \Delta K_j, P_i) < Q \quad (3.10)$$

para

$$P_i \in \mathcal{P}(A_i - B(K_0 + \epsilon_j \Delta K_j), Q), \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (3.11)$$

Conjuntos convexos da forma

$$K_0 + \text{conv} \{e_j \Delta K_j, j = 1, 2, 3, 4\} \quad (3.12)$$

são construídos para cada par  $[A_i, B]$ . Estes conjuntos, definidos por seus vértices, são dados por:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1.6180 & 2.0000 \\ 1.0000 & 6.8284 \\ -0.6180 & 2.0000 \\ 1.0000 & 1.1716 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 1.6180 & 4.5000 \\ 1.0000 & 9.3284 \\ -0.6180 & 4.5000 \\ 1.0000 & 3.6716 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 3.6180 & 2.0000 \\ 3.0000 & 6.8284 \\ 1.3820 & 2.0000 \\ 3.0000 & 1.1716 \end{bmatrix}, \quad K_4 = \begin{bmatrix} 3.6180 & 4.5000 \\ 3.0000 & 9.3284 \\ 1.3820 & 4.5000 \\ 3.0000 & 3.6716 \end{bmatrix}$$

e podem ser vistos na figura 3.2.

Cada linha da matriz  $K_1$ , por exemplo, é um controlador que estabiliza o sistema tipo  $\Sigma$  dado pelo par  $[A_1, B]$ . Como (3.10) é satisfeita para uma mesma matriz  $P_i$ , qualquer combinação convexa dos vértices de  $K_1$  também estabiliza o sistema dado por  $[A_1, B]$ .

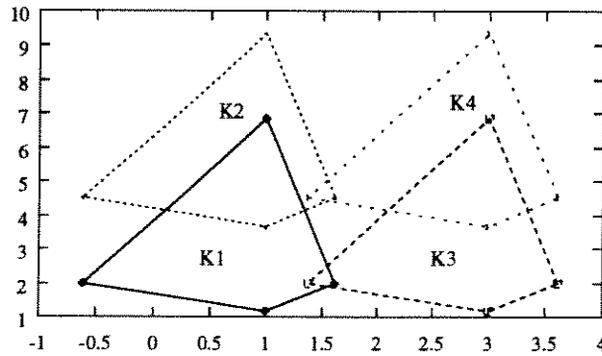


Figura 3.2: Polítopos associados aos 4 vértices

Observe a interseção de alguns destes polítopos. As interseções são soluções válidas para os pares a elas associados.

Embora, neste caso, o conjunto interseção de todos os pares seja vazio, percebe-se que um pequeno aumento na região envolvida por estes polítopos geraria um interseção não nula.

Para aumentar estes polítopos, avançamos mais um passo em cada uma das direções, porém tomando como controladores iniciais os vértices dos conjuntos  $K_1, \dots, K_4$ . Este procedimento não assegura a mesma matriz  $P_i$  (mesma função de Lyapunov) para todos os controladores do conjunto. Deve-se portanto, assegurar que o polítopo assim gerado pertença ao conjunto de controladores  $\mathcal{F}$ , como discutido no início deste capítulo.

Assegurada esta condição, os polítopos ficam como mostrado na figura 3.3.

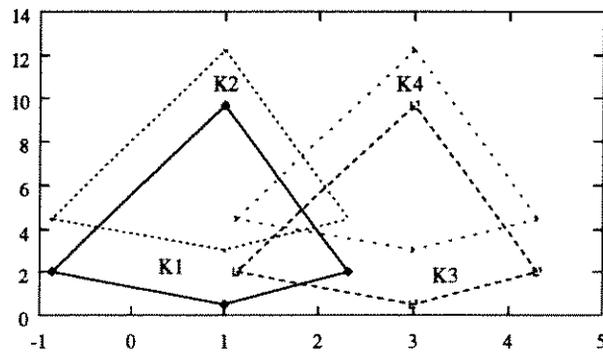


Figura 3.3: Polítopos aumentados

Nesta figura,  $K_I$  representa o polítopo interseção dos quatro polítopos associados aos vértices. Qualquer elemento  $K \in K_I$  estabiliza qualquer um dos pares  $[A_i, B]$ . Entretanto, não se pode afirmar que  $K$  estabiliza também combinações convexas dos pares  $[A_i, B]$ .

Como discutido na seção 2.1, este elemento  $K$  corresponde a quatro diferentes funções de controle de Lyapunov associadas a cada um dos sistemas dados pelos pares  $[A_i, B]$ .

O conjunto  $K_I$  é dado pelos vértices

$$K_I = \begin{bmatrix} 1.9542 & 4.0994 \\ 1.8251 & 3.9539 \\ 1.8251 & 4.8616 \\ 1.6415 & 4.0994 \end{bmatrix}$$

A obtenção dos vértices deste polítopo pode ser feita de maneira bastante elegante e eficiente combinando os resultados de [3] e [35]. A interseção de polítopos pode ser obtida computando a envoltória convexa dos polítopos duais ([35]). Para isto existem algoritmos de tempo ótimo ([3], por exemplo).

Obtido um elemento de  $K_I$ , pode-se pensar em construir um conjunto de controladores robustos para o sistema incerto composto pelos 4 pares. Para obter um único elemento da interseção, pode-se resolver o conjunto de inequações lineares que definem os 4 polítopos dados. Em programação linear, isto corresponde à busca de uma solução factível. Escolhendo o vértice de  $K_I$

$$K = [1.8251 \quad 3.9539]$$

e aplicando o algoritmo 2.1 para as direções dadas acima, obtivemos o politopo definido pelos vértices

$$K_i = \begin{bmatrix} 26.5993 & 3.9539 \\ 1.8251 & 35.6699 \\ 1.0019 & 3.9539 \\ 1.8251 & 1.5062 \end{bmatrix}$$

Este politopo é mostrado na figura 3.4 comparado ao politopo  $K_I$  obtido anteriormente.

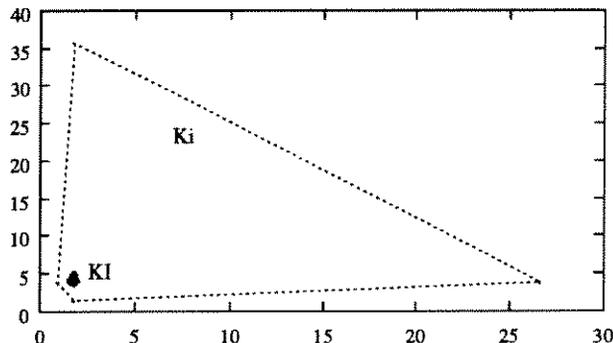


Figura 3.4: Conjunto de controladores robusto para o sistema incerto

Os vértices de  $K_i$  estabilizam todos os pares dados. Entretanto, o mesmo não é garantido para combinações convexas de elementos de  $K_i$ .

Os algoritmos a serem propostos baseiam-se não em construir conjuntos de controladores, mas sim na escolha de direções para andar dentro dos mesmos em busca de interseções.

### 3.5 Estabilização robusta

Consideramos inicialmente dois SPSs dados pelos pares  $[A_1, B_1]$  e  $[A_2, B_2]$ . Os resultados obtidos para estes pares são facilmente estendidos ao sistema incerto tipo  $\Sigma_c$ .

**Teorema 3.3** *Sejam dois sistemas precisamente conhecidos dados pelos pares  $[A_1, B_1]$  e  $[A_2, B_2]$  e sejam  $K_1 \in \mathcal{F}_1$  e  $K_2 \in \mathcal{F}_2$ . Se para algum  $\gamma_1 \in [0, 1]$  ou  $\gamma_2 \in [0, 1]$*

$$K^{(1)} = (K_1 + \gamma_1 \delta_{11}(K_1, \Delta K_1) \Delta K_1), \in \mathcal{F}_2 \quad (3.13)$$

ou

$$K^{(2)} = (K_2 + \gamma_2 \delta_{22}(K_2, \Delta K_2) \Delta K_2), \in \mathcal{F}_1 \quad (3.14)$$

para  $\Delta K_1 = K_2 - K_1$  e  $\Delta K_2 = -\Delta K_1$ , então  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$ .

**Prova :** A aplicação do algoritmo 2.1 permite obter  $\delta_{11}(K_1, \Delta K_1)$  e  $\delta_{22}(K_2, \Delta K_2)$ . À medida que  $\delta_{11}(\cdot)$  se aproxima de 1,  $K^{(1)} \in \mathcal{F}_1$  se aproxima de  $\mathcal{F}_2$  em ( 3.13). Se  $K^{(1)}$  alcança  $\mathcal{F}_2$ , então temos um ponto da desejada interseção. O mesmo raciocínio é feito para  $\delta_{22}$ . Como  $K^{(1)}$  se desloca em  $\mathcal{F}_1$  e  $K^{(2)}$  se desloca em  $\mathcal{F}_2$ , ( 3.13) e ( 3.14) devem ser computadas.

**C.Q.D.**

Este resultado, de grande simplicidade, usa informações dadas pelo projetista para gerar direções de procura. Andar na direção de um elemento do conjunto com o qual se deseja testar a interseção certamente é uma boa estratégia.

Uma vez que a forma de  $\mathcal{F}$  é desconhecida, o insucesso do teorema acima na obtenção da interseção não implica na não existência de solução. O resultado representa outra estratégia baseada no uso de direções modais robustas.

**Teorema 3.4** *Sejam dois SPCs dados pelos pares  $[A_1, B_1]$  e  $[A_2, B_2]$  associados respectivamente a  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$ . Sejam ainda  $K_1 \in \mathcal{F}_1$  e  $K_1 \notin \mathcal{F}_2$  e  $\mathcal{S}$  a região do plano complexo associada a  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$  de modo que*

$$\Lambda = \{\lambda | \lambda(A_2 - B_2 K_1) \notin \mathcal{S}\} \quad (3.15)$$

*é um conjunto não vazio. Se  $\forall \lambda_i \in \Lambda$  estiver associada uma direção  $\Delta K_i$ ;  $\lambda_i$ -robusta a  $[A_2, B_2]$  e convexa a  $[A_1, B_1]$  de modo que*

$$\delta_{11}(K_1, \Delta K_i) \geq \epsilon_i = d(\lambda_i, \mathcal{S}) \quad (3.16)$$

*então  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$ .*

**Prova :** Se  $\forall \lambda_i \in \Lambda$  estiver associada uma direção  $\Delta K_i$ ;  $\lambda_i$ -robusta a  $[A_2, B_2]$ , então

$$\lambda_i(A_2 - B_2(K_1 + \epsilon_i \Delta K_i)) \in \mathcal{S} \text{ para } \epsilon_i \geq d(\lambda_i, \mathcal{S}), \quad \forall \lambda_i \in \mathcal{S} \quad (3.17)$$

Por outro lado, se  $\forall \lambda_i \in \mathcal{S}$ ,  $\Delta K_i$  for convexa para  $[A_1, B_1]$ , então

$$\lambda_i(A_1 - B_1(K_1 + \epsilon_i \Delta K_i)) \in \mathcal{S} \iff 0 \leq \epsilon_i \leq \delta_{11}(K_1, \Delta K_i), \quad \forall \lambda_i \in \mathcal{S} \quad (3.18)$$

De ( 3.17)-( 3.18) vem ( 3.16).

Estes dois teoremas serão utilizados no próximo capítulo para propor algoritmos de projeto para estabilização robusta. Para um sistema incerto com N.M pares, procura-se inicialmente uma solução para dois SPCs (dois pares) e sucessivamente mais pares vão sendo adicionados, um a um, ao conjunto dos pares para os quais a solução já foi encontrada. Para um par  $[A_i, B_j]$  que estiver sendo adicionado com  $K_1 \in \mathcal{F}_{ij}$ , o teorema 3.2 garante a existência de um conjunto de direções convexas a  $\mathcal{F}_{ij}$  tal que qualquer elemento

deste conjunto possa ser através delas encontrado (entre eles o elemento pertencente à interseção, se este existir). Este fato motivou a proposta dos algoritmos de estabilização robusta do capítulo seguinte.

Estudos já desenvolvidos permitem obter condições para estabilização robusta de um sistema incerto  $\Sigma_c$ . Propomos agora resultados que permitem verificar se uma solução assim obtida também estabiliza robustamente um sistema incerto  $\Sigma_v$ . Através da notação utilizada, isto equivale a verificar se  $K \in \mathcal{F}^v$ , para um sistema incerto tipo  $\Sigma_v$  com  $K \in \mathcal{F}^c$ .

Para isto, definimos  $\delta_{ij}^E(K, E)$  baseada na definição 2.1 como

$$\delta_{ij}^E(K, E) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \max \epsilon \mid \mathcal{P}(A_i - B_j K + \gamma E, Q) \neq \emptyset, 0 \leq \gamma \leq \epsilon \} \quad (3.19)$$

Sejam agora

$$C_k, k = 1, \dots, N.M \quad (3.20)$$

os  $N.M$  pares  $[A_i, B_j]$  obtidos a partir de  $\mathcal{A}$  e de  $\mathcal{B}$ . Seja também

$$E_s = [A_n - A_i - (B_m - B_j)K] \quad (3.21)$$

a perturbação obtida da subtração dos pares de  $C_s = [A_n, B_m]$  e de  $C_k = [A_i, B_j]$ .

Podemos agora enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 3.5** *Seja o sistema incerto tipo  $\Sigma_v$ , e  $K \in \mathcal{F}^c$ . Então  $K \in \mathcal{F}^v$  se e somente se*

$$\delta_k^E(K, E_s) \geq 1, \quad k = 1, \dots, N.M, \quad s = k + 1, \dots, N.M \quad (3.22)$$

onde  $E_s$  é dada por (3.21) e  $\delta_k^E(\cdot)$  é calculada para o par  $[A_i, B_j]$  dado por  $C_k$ .

A prova deste teorema é simples e análoga à do teorema 3.2. Aqui, a máxima variação  $\delta_k^E(\cdot)$  sobre uma perturbação é computada. Se  $\delta_k^E(\cdot) = 1$ , então para dois pares  $[A_i, B_j]$ ,  $[A_n, B_m]$  e  $E_s$  dada por (3.21),

$$\mathcal{P}(A_i - B_j K + \delta_k^E(K, E_s) E_s, Q) = \mathcal{P}(A_n - B_m K, Q) = \{P\}$$

a estabilidade é garantida não só para as variações discretas dadas pelos pares, mas também para qualquer variação contínua entre os mesmos. Observe que todas as possíveis variações das perturbações são testadas, garantindo portanto, a estabilidade robusta de  $\Sigma_v$ .

Este resultado será novamente discutido nos exemplos do capítulo 4.

---

## 3.6 Conclusão

A análise das variações paramétricas admissíveis em direções sobre um controlador linear permitiram explorar conjuntos de controladores robustos. Para fins de ilustração, a construção destes conjuntos foi discutida.

Foram propostos resultados para determinar direções de procura para estabilizar dois SPCs. Estes resultados foram aplicados a sistemas incertos modelados via pares de matrizes, gerando condições para estabilização robusta dos mesmos.

# Capítulo 4

## Algoritmos de projeto e aplicações

### 4.1 Introdução

Este capítulo é destinado à proposta de algoritmos para estabilização robusta e à aplicação dos mesmos a exemplos da literatura.

Dois algoritmos para estabilização robusta são propostos. O primeiro busca uma solução através de um procedimento eventualmente iterativo. O segundo consiste em um procedimento não iterativo baseado no uso de direções robustas.

### 4.2 Estabilização robusta

São propostos agora dois algoritmos baseados nos teoremas 3.3 e 3.4 do capítulo 3, respectivamente. Ambos podem ser utilizados para resolver problemas de robustez. O algoritmo 4.1 é eventualmente iterativo e usa informações relativas a soluções locais para gerar direções de busca. O algoritmo 4.3 é não iterativo e baseado apenas no uso de direções modais robustas. Ambos utilizam o algoritmo 4.2 para obter direções modais robustas.

Exemplos usados na literatura para problemas de estabilização quadrática, são usados aqui para projetos de estabilização robusta.

#### 4.2.1 Algoritmo 4.1

Antes de propor o algoritmo, definimos os conjuntos:

$$\mathcal{C} = \{C_i, \quad i = 1, \dots, J\}$$

como o conjunto dos N.M pares  $[A_i, B_j]$  obtidos dos vértices de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , respectivamente;

$$\mathcal{C}^K = \{C_i, \quad i = 1, \dots, J_k\}$$

como sendo o conjunto de todos os pares estabilizáveis pelo controlador  $K$ .

A operação

$$C_i \in \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^K$$

denotará a retirada do  $i$ -ésimo par  $C_i$  do conjunto  $\mathcal{C}$  e sua inclusão no conjunto  $\mathcal{C}^K$ . Desta forma,

$$\begin{aligned} [A_i, B_j] \in \mathcal{C} &\iff [A_i, B_j] \notin \mathcal{C}^K \\ [A_i, B_j] \notin \mathcal{C} &\iff [A_i, B_j] \in \mathcal{C}^K \end{aligned}$$

Inicialmente,  $J = N.M$  e  $J_k = 0$ . Ao final do processo com êxito,  $J = 0$  e  $J_k = N.M$ .

Definimos ainda para este algoritmo,

$$\mathcal{F}_1^c = \{K \in R^{r \times n} | \mathcal{P}(A_i - B_j K, Q) = \{P_{ij}\}, ; \text{ para qualquer } Q > 0, \forall C = [A_i, B_j] \in \mathcal{C}^K\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{K \in R^{r \times n} | \mathcal{P}(A_n - B_m K, Q) = \{P_{nm}\}, \text{ para qualquer } Q > 0, \text{ para algum } C = [A_n, B_m]\}$$

Observe que enquanto  $\mathcal{F}_1^c$  está associado ao conjunto de pares de  $\mathcal{C}^K$ ,  $\mathcal{F}_2$  está associado a um único par  $[A_n, B_m]$ .

Enquanto  $\delta_{nm}(K, \Delta K)$  dá a máxima variação admitida para o conjunto  $\mathcal{F}_2$ ,  $\delta_{\mathcal{C}^K}(K, \Delta K)$  dá a máxima variação admitida para o conjunto  $\mathcal{F}_1^c$ .

#### ALGORITMO 4.1 :

**Passo 1)** : Selecione  $C_1 \in \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^K$ . Selecione também  $C_2 \in \mathcal{C}$ , associe-o a  $\mathcal{F}_2$  e faça  $k=2$ .

**Passo 2)** : Obtenha por qualquer método  $K_1 \in \mathcal{F}_1^c$ .

**Passo 3)** : Obtenha  $K_2 \in \mathcal{F}_2$ .

**Passo 4)** : Faça  $\mathcal{K} = \{K_1, K_2\}$ . Se  $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_1^c \cap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$ , selecione  $K_I \in \mathcal{K} \cap \mathcal{F}_1^c \cap \mathcal{F}_2$  e vá ao passo 9).

**Passo 5)** : Faça  $K_1 = K_1 + \epsilon_1(K_2 - K_1)$  e  $K_2 = K_2 + \epsilon_2(K_1 - K_2)$  para  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  obtidos de (72).

**Passo 6)** : Faça  $\mathcal{K} = \{K_1, K_2\}$ . Se  $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_1^c \cap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$ , selecione  $K_I \in \mathcal{K} \cap \mathcal{F}_1^c \cap \mathcal{F}_2$  e vá ao passo 9).

**Passo 7)** : Se  $\epsilon_1 > \xi$  ou  $\epsilon_2 > \xi$ , onde  $\xi$  é uma tolerância, volte ao passo 5).

**Passo 8)** : Execute o algoritmo 4.2. Se a solução foi encontrada, vá ao passo 9). Se não existir ou se não foi encontrada, pare.

**Passo 9)** : Faça  $C_k \in \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^K$  e  $K_1 = K_I$

**Passo 10)** : Faça  $k = k + 1$ . Se  $k < N.M$ , selecione  $C_k \in \mathcal{C}$ , associe-o a  $\mathcal{F}_2$  e retorne ao passo 3). Caso contrário, pare. A solução desejada é  $K_I$ .

### 4.2.2 Exemplo 4.1 : pólos na faixa - 1

O algoritmo 4.1 é aplicado ao exemplo usado em [2] tratando de um modelo dinâmico incerto de um helicóptero em um plano vertical. Desejamos aqui obter um controlador que

garanta que os autovalores dos pares associados a este sistema incerto estejam dentro de uma faixa vertical. As matrizes que definem os pares deste sistema incerto são dadas por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.5047 & -0.7070 & 2.5260 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.5047 & -0.7070 & 0.1200 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.5047 & 0.0663 & 2.5260 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.5047 & 0.0663 & 0.1200 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 5.1120 & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.9900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 0.9774 & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.9900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A faixa vertical será definida por  $(-1.0 < \text{Re}(\lambda) < -0.2)$ , o que define o conjunto de controladores

$$\mathcal{F}^c = \{K \in R^{2 \times n} | \mathcal{P}(A - BK, Q, \alpha) = \{P_\alpha\} \text{ e } \mathcal{P}(A - BK, Q, \beta) = \{P_\beta\}, \quad Q > 0\}$$

com  $\alpha = -0.2$ ,  $\beta = -1.0$ .

O conjunto  $\mathcal{C}$  dos pares que definem o sistema incerto é dado por

$$\mathcal{C} = [[A_1, B_1], [A_2, B_1], [A_3, B_1], [A_4, B_1], [A_1, B_2], [A_2, B_2], [A_3, B_2], [A_4, B_2]]$$

Os controladores iniciais para todos os pares são escolhidos de forma a alocar os autovalores para as posições  $\{-0.5, -0.6, -0.7, -0.8\}$ .

A aplicação do algoritmo 4.1 a este problema resultou na matriz de ganho

$$K = \begin{bmatrix} 0.8752 & -0.0024 & -1.3242 & -1.6805 \\ 0.9233 & 0.0897 & -1.2664 & -1.1587 \end{bmatrix}$$

que colocou os pólos dos pares do sistema incerto na região mostrada pela figura 4.1.

Para resolver este problema, não foi requerido o procedimento iterativo dos passos 5)-7) do algoritmo 4.1. O teste do passo 4) forneceu todas as vezes uma solução  $K_2 \in \mathcal{F}_1^c$  ou  $K_1 \in \mathcal{F}_2$ .

Este problema foi repetido usando controladores iniciais para alocar os pólos para as posições  $\{-0.70, -0.75, -0.80, -0.85\}$ .

Novamente, o procedimento iterativo não foi necessário e resultou na matriz de ganho

$$K = \begin{bmatrix} 2.5317 & 0.2138 & -2.1949 & -4.6649 \\ 2.7438 & 0.3264 & -2.2018 & -4.3231 \end{bmatrix}$$

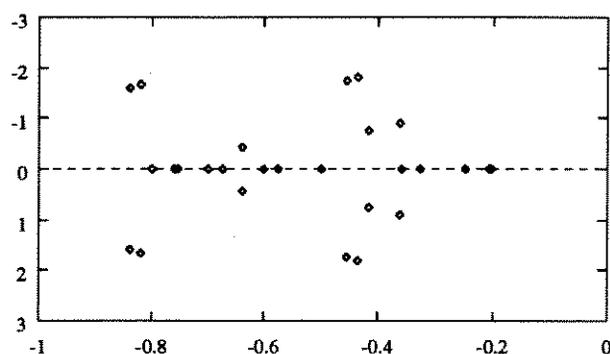


Figura 4.1: Pólos do sistema incerto

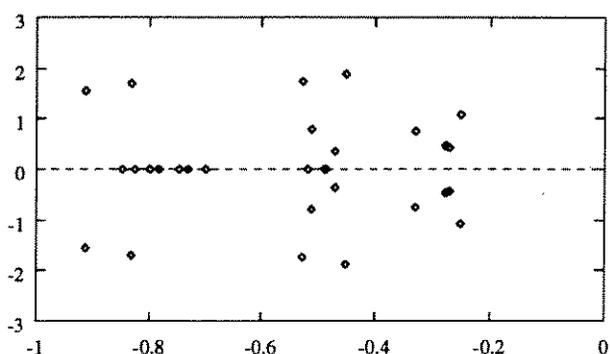


Figura 4.2: Pólos do sistema incerto

que colocou os pólos dos pares do sistema incerto na região mostrada na figura 4.2.

Os experimentos já realizados mostram que a escolha de soluções iniciais distantes das fronteiras de  $\mathcal{F}^c$ , como feito nestes exemplos, diminui grandemente a necessidade de tais procedimentos.

### 4.2.3 Exemplo 4.2 : pólos na faixa - 2

Aplicamos agora o algoritmo 4.1 a um sistema incerto tratado em [24]. As matrizes que formam os pares deste sistema incerto são dadas por:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} -0.9896 & 17.4100 & 96.1500 \\ 0.2648 & -0.8512 & -11.3900 \\ 0 & 0 & -250.0000 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} -0.9896 & 17.4100 & 96.1500 \\ 0.0820 & -0.6586 & -10.8100 \\ 0 & 0 & -250.0000 \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} -0.6606 & 18.1100 & 84.3400 \\ 0.2648 & -0.8512 & -11.3900 \\ 0 & 0 & -250.0000 \end{bmatrix}, & A_4 &= \begin{bmatrix} -0.6606 & 18.1100 & 84.3400 \\ 0.0820 & -0.6586 & -10.8100 \\ 0 & 0 & -250.0000 \end{bmatrix} \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} -97.7798 \\ 0 \\ 250.0000 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} -85.1002 \\ 0 \\ 250.0000 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

A faixa vertical será definida por  $(-10 < \text{Re}(\lambda) < -2)$ , o que define o conjunto de con-

troladores

$$\mathcal{F}^c = \{K \in R^n | \mathcal{P}(A - BK, Q, \alpha) = \{P_\alpha\} \text{ e } \mathcal{P}(A - BK, Q, \beta) = \{P_\beta\}, Q > 0\}$$

com  $\alpha = -2.0$ ,  $\beta = -10$ .

O conjunto  $\mathcal{C}$  dos pares que definem o sistema incerto é dado por

$$\mathcal{C} = \{[A_1, B_1], [A_2, B_1], [A_3, B_1], [A_4, B_1], [A_1, B_2], [A_2, B_2], [A_3, B_2], [A_4, B_2]\}$$

Os controladores iniciais para todos os pares são escolhidos de forma a alocar os pólos para as posições

$$\{-5, -5.5, -6\}$$

A aplicação do algoritmo 4.1 a este problema resultou na matriz de ganho

$$K = [ -0.0027 \quad -0.0256 \quad -0.9418 ]$$

Para

$$\mathcal{C}^k = \{[A_1, B_1], [A_2, B_1], [A_3, B_1], [A_4, B_1], [A_1, B_2]\}$$

os passos 5) - 7) não foram necessários. Para incluir  $[A_2, B_2]$  em  $\mathcal{C}^k$ , foram necessárias 3 iterações dos passos 5) - 7). Para incluir  $[A_3, B_2]$  em  $\mathcal{C}^k$ , 2 iterações foram necessárias. O par  $[A_4, B_2]$  foi incluído diretamente. A posição dos pólos dos pares é mostrada na figura 4.3.

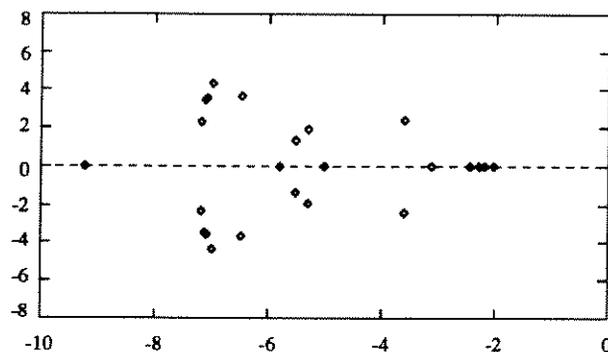


Figura 4.3: Pólos do sistema incerto

#### 4.2.4 Exemplo 4.3 : pólos em um setor

Procuramos agora um controlador linear para o sistema incerto do exemplo 4.1, de modo que os pólos dos pares do sistema incerto estejam na região definida por  $(-20 \operatorname{Re}(\lambda) < 0)$  e formando um ângulo  $\theta$  máximo de 8 graus (figura 1.1). O conjunto de controladores é dado por (para detalhes veja seção 1.2)

$$\mathcal{F}^c = \{K \in R^{r \times n} \mid \mathcal{P}(A, Q, \alpha, \beta, \theta) = \{P_{\alpha\theta}, P_{\beta}\}, Q > 0\}$$

Neste caso,  $P_{\alpha\theta}$  é uma matriz simétrica complexa. Para verificar se esta matriz é definida positiva, basta verificar se seus autovalores (reais) são maiores que zero, como nos outros casos. Da mesma forma, para obter  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  no passo 5), basta satisfazer uma condição da forma

$$\epsilon S < Q$$

onde  $Q$  é simétrica real e  $S$  é simétrica complexa. Como nos outros casos,  $\epsilon$  é obtido de

$$\epsilon = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}^+(S)}$$

Este problema foi resolvido sem requerer nenhum procedimento iterativo, resultando em um ganho  $K$  dado por

$$K = \begin{bmatrix} 8.0242 & 0.6097 & -1.0446 & -6.1503 \\ 6.2704 & 0.3079 & -0.5914 & -4.9968 \end{bmatrix}$$

que aloca os pólos dos pares para as posições mostradas na figura 4.4.

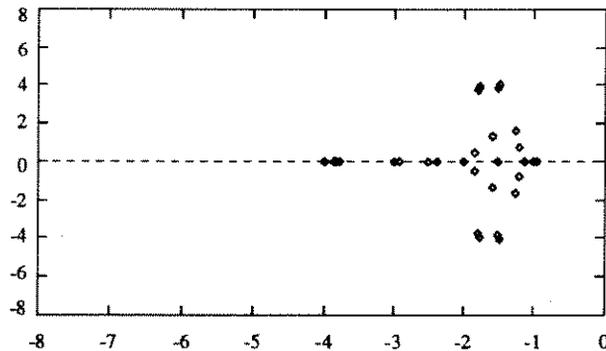


Figura 4.4: Pólos do sistema incerto no setor

Os controladores iniciais para todos os pares foram escolhidos alocando os autovalores para as posições  $\{-1, -2, -3, -4\}$ .

#### 4.2.5 Algoritmo 4.2

Este algoritmo é baseado no teorema 3.4. É utilizado em conjunto com o algoritmo 4.1 quando o problema requerer muitas iterações. Também serve de base para o algoritmo

4.3 a ser proposto.

Sejam

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^K &= \{C_i, i = 1, \dots, n_1\} \text{ associado a } \mathcal{F}_1^c \\ C_j \in \mathcal{C} &= [A_n, B_m] \text{ associado a } \mathcal{F}_2 \\ K_1 &\in \mathcal{F}_1^c \text{ e } K_1 \notin \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{S} &\text{ a região associada a } \mathcal{F}_1^c \text{ e } \mathcal{F}_2 \\ \Lambda &= \{\lambda_k, k = 1, \dots, r \mid \lambda_k \in \lambda(A_n - B_m K_1) \text{ e } \lambda_k \notin \mathcal{S}\} \end{aligned}$$

O algoritmo a seguir verifica a existência de direções  $\Delta K_k$   $\lambda_k$ -robustas tais que

$$(K_1 + \sum_k \epsilon_k \Delta K_k) \in \mathcal{F}_1^c \cap \mathcal{F}_2.$$

#### ALGORITMO 4.2:

**Passo 1)** : Selecione  $\lambda_k \in \lambda(A_n - B_m K_1)$  tal que  $\lambda_k \notin \mathcal{S}$ . Se  $\lambda_k$  for complexo, selecione também  $\lambda_{k+1} = \overline{\lambda_k}$ .

**Passo 2)** : Obtenha  $\Delta K_k$   $\lambda_k$ -robusta.

**Passo 3)** : Compute  $\delta_{\mathcal{C}^K}(K_1, \Delta K_k)$  e  $d(\lambda_k, \mathcal{S})$ .

**Passo 4)** : Se  $\delta_{\mathcal{C}^K}(K_1, \Delta K_k) \geq d(\lambda_k, \mathcal{S})$ , faça  $K_1 = K_1 + \Delta K_k d(\lambda_k, \mathcal{S})$  e volte ao passo 1).

**Passo 5)** : Se  $\Delta K_k$  for não convexa em  $\mathcal{F}_1^c$ , obtenha  $\epsilon > \delta_{\mathcal{C}^K}(K_1, \Delta K_k)$ , faça  $K_1 = K_1 + \epsilon \Delta K_k$  e retorne ao passo 3).

**Passo 6)** : Se  $\Delta K_k$  for convexa em  $\mathcal{F}_1^c$ ,  $\forall \lambda_k \in \lambda(A_n - B_m K_1)$  tal que  $\lambda_k \notin \mathcal{S}$ , então  $\mathcal{F}_1^c \cap \mathcal{F}_2 = \emptyset$  ou o algoritmo não encontrou solução.

#### 4.2.6 Exemplo 4.4 : aplicação do algoritmo 4.2

Desejamos agora resolver o problema do exemplo 4.2, porém para uma faixa vertical definida por  $(-8 < \text{Re}(\lambda) < -4)$ , a qual define o conjunto

$$\mathcal{F}^c = \{K \in R^n \mid \mathcal{P}(A - BK, Q, \alpha) = \{P_\alpha\} \text{ e } \mathcal{P}(A - BK, Q, \beta) = \{P_\beta\}\}$$

com  $\alpha = -4$ ,  $\beta = -8$ . Os controladores iniciais são escolhidos de forma a alocar os pólos para as posições  $\{-5, -6, -7\}$

##### Aplicação do algoritmo 4.1:

A procura de um controlador para os pares  $[A_1, B_1]$  e  $[A_2, B_1]$ , resulta no controlador  $K_1$ , dado por

$$K_1 = [ -0.0037 \quad -0.0278 \quad -0.9368 ] ,$$

o qual aloca os pólos do primeiro par para as posições

$$\{-4.5082, -6.7493 + j0.8757, -6.7493 - j0.8757\}$$

e do segundo par para

$$\{-9.9234, -4.9454 + j2.9406, -4.9454 - j2.9406\}$$

após 10 iterações. O algoritmo 4.2 é então chamado no passo 8). A situação é ilustrada na figura 4.5.

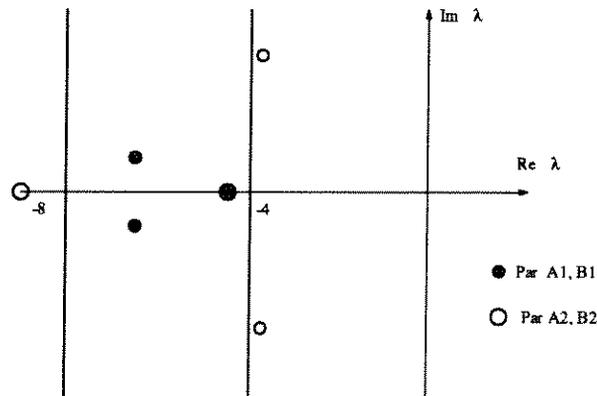


Figura 4.5: Aplicação do algoritmo 4.2

#### Aplicação do algoritmo 4.2:

A direção  $\Delta K_1$   $\lambda_{\Gamma}$ -robusta ( $\lambda_1 = -9.9234$ ) dada por

$$\Delta K_1 = [ 0.0008 \quad 0.0043 \quad -0.0074 ]$$

é obtida no passo 2). Obtêm-se então a medida

$$d(\lambda_1, \mathcal{S}) = 1$$

como sendo a distância de  $\lambda_1$  a  $\gamma = -8$  e

$$\delta_{C^*}(K_1, \Delta K_k) = 0.4345$$

Como  $\delta_{C^*}(K_1, \Delta K_k) < d(\lambda_1, \mathcal{S})$  e  $\Delta K_1$  é convexa em  $\mathcal{F}_1^c$  (isto é, ao par  $[A_1, B_1]$ ), uma nova direção robusta a

$$\{\lambda_2 = -4.9559 + j2.9406, \lambda_3 = -4.9559 - j2.9406\}$$

é computada, sendo dada por

$$\Delta K_2 = [ -0.0649 \quad -0.04862 \quad 0.4116 ]$$

Esta direção, aloca  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  para  $\gamma_2 = -4 + j2.9406$  e  $\gamma_3 = -4 - j2.9406$  com

$$d(\{\lambda_2, \lambda_3\}, \mathcal{S}) = 1$$

Neste caso,

$$K_1 = K_1 + \Delta K_2 = [ -0.0038 \quad -0.0283 \quad -0.9364 ]$$

leva  $\{\lambda_2, \lambda_3\}$  para a região  $\mathcal{S}$  satisfazendo  $\delta_{C^k}(K_1, \Delta K_2) \geq d(\{\lambda_2, \lambda_3\}, \mathcal{S})$ .

Uma nova direção  $\lambda_1$ -robusta é calculada,

$$\Delta K_1 = [ 0.008 \quad 0.0044 \quad -0.0074 ]$$

Entretanto,  $\delta_{C^k}(K_1, \Delta K_1) = 0.3882 < d(\lambda_1, \mathcal{S}) = 1$ .

Como  $\Delta K_1$  é convexa em  $\mathcal{F}_1^c$ , este problema pode não possuir solução.

#### 4.2.7 Algoritmo 4.3

Para este algoritmo valem os mesmos conjuntos  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}^k$  definidos para o algoritmo 4.1. A diferença para aquele está no uso direto de direções modais robustas para procurar controladores pertencentes à interseção desejada.

##### ALGORITMO 4.3 :

**Passo 1)** : Selecione  $C_1 \in \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^K$ . Selecione também  $C_2 \in \mathcal{C}$ , associe-o a  $\mathcal{F}_2$  e faça  $k=2$ .

**Passo 2)** : Obtenha por qualquer método  $K_1 \in \mathcal{F}_1^c$ .

**Passo 3)** : Se  $K_1 \in \mathcal{F}_2$ , faça  $K_I = K_1$  e vá ao passo 6).

**Passo 4)** : Aplique o algoritmo 4.2 para obter direções modais robustas de modo que  $K_I = (K_1 + \sum_k \Delta K_k) \in \mathcal{F}_1^c \cap \mathcal{F}_2$

**Passo 5)** : Se  $\nexists K_I \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ , pare. A solução não existe ou não foi encontrada.

**Passo 6)** : Faça  $C_k \in \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^K$  e  $K_1 = K_I$ .

**Passo 7)** : Faça  $k = k + 1$ . Se  $k < N.M$ , selecione  $C_k \in \mathcal{C}$ , associe-o a  $\mathcal{F}_2$  e retorne ao passo 3). Caso contrário, pare. A solução desejada é  $K_I$ .

#### 4.2.8 Exemplo 4.5 : aplicação do algoritmo 4.3

O exemplo 4.2, resolvido via algoritmo 4.1, é agora resolvido via algoritmo 4.3. Usando as mesmas especificações, o conjunto de pares

$$C^k = \{[A_1, B_1], [A_2, B_1], [A_3, B_1], [A_4, B_1], [A_1, B_2]\}$$

foi robustamente estabilizado via controlador

$$K = [-0.0030 \quad -0.0231 \quad -0.9481]$$

sem a necessidade de computar direções robustas (da mesma forma que não foi necessário o procedimento iterativo quando o algoritmo 4.1 foi usado).

Para incluir o par  $[A_2, B_2]$  em  $C^k$ , a direção  $\lambda_1$ -robusta

$$\Delta K_1 = [0.0002 \quad 0.0013 \quad -0.0028]$$

foi computada para levar  $\lambda_1 = -10.6139$  para a região  $\mathcal{S}$ . Satisfeita a condição

$$\delta_{C^k}(K, \Delta K_1) \geq d(\lambda_1, \mathcal{S}) = 1,$$

esta direção é adicionada ao controlador.

O controlador obtido ao final do algoritmo é

$$K = [-0.0028 \quad -0.0218 \quad -0.9453].$$

#### 4.2.9 Exemplo 4.6 : Exemplo não quadraticamente estabilizável

Um exemplo didático é tratado agora ([10]), tornando mais claros os conceitos de estabilidade utilizados. Seja o sistema incerto  $\Sigma_c$  com as matrizes  $A$  e  $B$  dadas por

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

correspondendo a um sistema com dois pontos de operação. Os valores para estes pontos de operação são:

Tabela 4.1 Pontos de Operação

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
1º ponto	0.2	0.7	0.1	0.0
2º ponto	0.8	0.4	0.8	0.8

O objetivo é obter um controlador linear estabilizante válido para os dois pontos de operação. A aplicação do algoritmo 4.1 dá, após 3 iterações,

$$K = [0.5757 \quad 3.0917]$$

que aloca os autovalores do sistema para  $\{-.0073, -4.4621\}$  para o primeiro ponto de operação e  $\{-.0439, -2.0255\}$  para o segundo.

Portanto, este sistema tipo  $\Sigma_c$  é robustamente estabilizável. Analisamos agora a estabilizabilidade quadrática deste sistema. Usando a condição dada em [8], para o caso da matriz  $B$  constante, um sistema é quadraticamente estabilizável se e somente se existir  $P = P^T > 0$  tal que

$$x^t(A_i P + P A_i^T)x < 0, \quad x \in \mathcal{N}(B^T)$$

onde  $\mathcal{N}(\cdot)$  denota o espaço nulo de  $(\cdot)$  e  $A_i$  representa cada ponto de operação.

Com os dados deste problema, obtêm-se

$$\begin{aligned} p_3 &< p_2 \\ p_1 &< 7p_3 - 6p_2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

Por outro lado,  $P > 0$  se e somente se

$$\begin{aligned} p_1 &> 0 \\ p_3 &> 0 \\ p_1 p_3 &> p_2^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Vamos supor  $0 < p_3 < p_2$ . Então, (4.2) é satisfeita se  $p_1 = \alpha p_2$ ,  $\alpha > 1$ . Usando isto em (4.1), vem  $(6 + \alpha)p_2 < 7p_3$  que contradiz a suposição de que  $p_3 < p_2$ . Portanto, este sistema não é quadraticamente estabilizável. Qualquer método baseado em satisfazer esta condição não poderá obter uma solução para o problema de estabilização robusta, resolvido aqui via algoritmo 4.1.

#### 4.2.10 Exemplo 4.7 : Teste de estabilidade robusta

Embora nenhum método seja aqui proposto para tratar o problema de estabilização robusta de um sistema incerto  $\Sigma_v$ , as soluções obtidas via algoritmos 4.1-4.3 podem eventualmente resolver este problema. O teorema 3.5 é usado aqui para testar se uma solução obtida via algoritmos acima é solução para este problema.

O algoritmo 4.1 é aplicado ao sistema incerto do exemplo 4.2 com alocações iniciais para todos os vértices em

$$\{-5, -6, 7\}$$

O controlador obtido é

$$K = [-0.0038 \quad -0.0278 \quad -0.9368]$$

O uso do teorema 3.5 dá

$$\delta_{CK}(K, E_s) \geq 1, \quad k = 1, \dots, 8 \quad s = k + 1, \dots, 8$$

Portanto, o controlador obtido estabiliza robustamente o sistema incerto  $\Sigma_v$ .

### 4.3 Conclusão

Os resultados desenvolvidos nos capítulos anteriores são aqui utilizados para propor algoritmos para estabilização robusta de sistemas incertos.

Exemplos da literatura resolvidos para o caso de estabilidade quadrática são aqui modelados como pares de matrizes incertas e resolvidos para o caso de estabilidade robusta.

A escolha dos procedimentos iterativos ou não iterativos depende do problema a ser tratado. O primeiro é de mais fácil aplicação, sendo mais *automático*. Como se pode observar nos exemplos, ele permite obter soluções com facilidade para problemas de controle com uma variada gama de restrições.

O procedimento não iterativo é superior quando o problema tratado for de difícil solução, representada por passos bastante pequenos em direções de procura. Sua limitação maior reside na necessidade de se computar a autoestrutura de matrizes.

# Conclusão Geral

O problema de robustez de um sistema linear sujeito a incertezas foi aqui tratado. Os métodos aqui apresentados e propostos foram baseados na teoria de estabilidade de Lyapunov.

Inicialmente, discutiu-se a obtenção de medidas de robustez para sistemas sujeitos a perturbações estruturadas e não estruturadas. Definidos os conceitos de estabilidade quadrática e robusta, foram estudados métodos da literatura para resolver problemas relacionados ao primeiro.

Métodos para estabilização robusta baseados na exploração do conjunto dos controladores estabilizantes foram propostos. Para isto, resultados teóricos e definições foram desenvolvidos envolvendo direções e variações admitidas nestas direções. Estes resultados permitiram obter controladores de interesse pertencentes ao conjunto, bem como identificar algumas características topológicas deste conjunto, tais como conexidade e não convexidade.

Foram propostos um algoritmo iterativo e outro não iterativo para projetar controladores robustos. Estes algoritmos foram aplicados a sistemas incertos com perturbações modeladas via pares de matrizes constantes. Exemplos de sistemas incertos da literatura foram aqui modelados desta forma e resolvidos via algoritmos propostos.

# Bibliografia

- [1] Armstrong, E.S. (1975): An Extension of Bass' Algorithm for Stabilizing Linear Continuous Constant Systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, 153-154.
- [2] Arzelier, D., Bernussou, J., Garcia, G. (1993): Pole Assignment of Linear Uncertain Systems in a Sector via a Lyapunov-Type Approach, *IEEE Trans. Automat. Control*, **38**, 1128-1132.
- [3] Barber, C.B., Dopkin, D.P., Huhdanpaa, H. (1993) : *The Quickhull Algorithm for Convex Hull*, Technical Report GCG53, The Geometry Center, University of Minnesota.
- [4] Barmish, B.R., (1983a): Stabilization of Uncertain Systems Via Linear Control, *IEEE Trans. Automat. Control*, **28**, 848-850.
- [5] Barmish, B.R., Corless, M., Leitmann, G. (1983b): A New Class of Stabilizing Controllers for Uncertain Dynamical Systems, *SIAM J. Control and Optim.*, **21**, 246-255.
- [6] Barmish, B.R., (1983c): Invariance of the Strict Hurwitz Property for Polynomials with Perturbed Coefficients, *Proc. IEEE CDC*, San Antonio; *IEEE Trans. Automat. Control*, **34** (1984) 935-936.
- [7] Barmish, B.R., (1985) Necessary and Sufficient Conditions for Quadratic Stability of an Uncertain System, *JOTA*, **46** 399-408.
- [8] Bernussou, J., Peres, P.L.D., Geromel, J.C. (1989): A Linear Programming Oriented Procedure for Quadratic Stabilizability of Uncertain Systems, *Systems & Control Letters* **13**, 65-72.
- [9] Bialas, S. (1983): A Necessary and Sufficient Condition for Stability of Interval Matrices, *Int. J. Control*, **37**, 717-722.
- [10] Bottura, C.P., Munaro, C.J., (1994a): A Design Methodology for the Robust Stabilization Problem, Proceedings of the 1<sup>st</sup> IFAC Workshop on New Trends on Design of Control Systems, Smolenice, Slovakia.
- [11] Bottura, C.P., Munaro, C.J. (1994b) : On the Design of Linear Robust Controller Sets, Anais do 10<sup>o</sup> Congresso Brasileiro de Automática, Rio de Janeiro.

- 
- [12] Bottura, C.P., Munaro, C.J. (1994c): A New Method for Robust Stability of Uncertain Systems, Third International Conference on Automation, Robotics and Computer Vision, Singapore.
- [13] Bottura, C.P. (1977) : Controle Ótimo de Turbina Hidráulica, 4<sup>o</sup> Congresso Brasileiro de Eng. Mecânica, Florianópolis.
- [14] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V. (1994) : *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, in press.
- [15] Chen, C.T. (1984) : *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart and Winston.
- [16] Doyle, J.C. (1981): Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical Modern Synthesis, *IEEE Trans. Automat. Control*, **26** (1981) 4-16.
- [17] Doyle, J.C. (1982): Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainty, *Proc. IEE, Pt. D*, **129** 242-250.
- [18] Eslami, M., (1993): Set by Set Generation of Robust Stable Matrices, *IEEE Trans. Automat. Control* **35**, 646-651.
- [19] Fahmy, M.M., O'Reilly, J., (1982) : On Eigenstructure Assignment in Linear Multivariable Systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, **27**, 690-693.
- [20] Fang, Y., Loparo, K.A., Feng, X., (1993): Sufficient Conditions for the Stability of Interval Matrices, *Int. J. Control*, **58** 969-977.
- [21] Foo, Y.K., Soh, Y.C. (1990): Stability Analysis of a Family of Matrices, *IEEE Trans. Automat. Control* **35**, 1257-1259.
- [22] Fu, M., Barmish, B.R., (1988): Maximal Unidirectional Perturbation Bounds for Stability of Polynomials and Matrices, *Systems & Control Letters* **11**, 173-179.
- [23] Galimidi, A.R., Barmish, B.R., (1986) : The Constrained Lyapunov Problem and Its Application to Robust Output Feedback Stabilization, *IEEE Trans. Automat. Control*, **31**, 410-419.
- [24] Geromel, J.C., Garcia, G., Bernussou, J. (1994) :  $\mathcal{H}_2$  Robust Control Design with Pole Placement, submetido.
- [25] Gutman, S., Jury, E.I. (1981) : A General Theory for Matrix Root-clustering in Subregions of the Complex-plane, *IEEE Trans. Automat. Control*, **26**, 853-863.
- [26] Haddad, W.M., Bernstein, D.S. (1992): Controller Design with Regional Pole Constraints, *IEEE Trans. Automat. Control* **37**, 54-69.
- [27] Hollot, C.V., Barmish, B.R., (1980) : Optimal Quadratic Stabilizability of Uncertain Systems, *Proc. Allerton Conf. Commun. Control and Computation*, Illinois, Monticello.

- 
- [28] Horisberger, H.P., Belanger, P.R. (1976): Regulators for Linear, Time Invariant Plants with Uncertain Parameters, *IEEE Trans. Automat. Control*, **21**, 705-708.
- [29] Jabbari, F., Schmitendorf, W.E. (1990): A Noniterative Method for the Design of Linear Robust Controllers, *IEEE Trans. Automat. Control* **35**, 954-957.
- [30] Juang, Y.T., Hong, Z.C., Wang, Y.T. (1989): Robustness of Pole Allocation in a Specified Region, *IEEE Trans. Automat. Control* **34**, 758-760.
- [31] Lancaster, P., Tismenetsky, M. (1985), *The Theory of Matrices*, New York: Academic Press.
- [32] Mazco, A.G. (1980): The Lyapunov Matrix Equation for a Certain Class of Regions Bounded by Algebraic Curves, *Soviet Automat. Control*, **36**.
- [33] Moore, B.C. (1976) : On the Flexibility Offered by State Feedback In Multivariable Systems Beyond Closed Loop Eigenvalue Assignment, *IEEE Trans. Automat. Control*, **21**, 689-692.
- [34] Morari, M., Zafirov, E. (1989): *Robust Process Control*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- [35] Muller, D.E., Preparata, F.P. (1978) : Finding the Intersection of Two Convex Polyhedra, *Theoretical Comp. Sci.*, **7**, 217-236.
- [36] Munaro, C.J. (1990) : *Contribuição à Redução de Ordem e Controle de Sistemas Discretos Multivariáveis*, tese de Mestrado.
- [37] Patel, R.V., Toda, M. (1980): Quantitative Measures of Robustness for Multivariable Systems, paper TP8-A, (1980) San Francisco, CA, USA.
- [38] Peres, P.L.D. (1989): *Sur la Robustesse des Systemes Lineaires: Approche par Programmation Lineaire*, These de Docteur LAAS, Toulouse, France.
- [39] Petersen, I.R. (1987): A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Systems, *Systems & Control Letters* **8**, 351-357.
- [40] Rantzer, A. (1992): Stability Conditions for Polytopes of Polynomials, *IEEE Trans. Automat. Control*, **37**, 79-89.
- [41] Rotea, M.A., Khargonekar, P.P. (1989): Stabilization of Uncertain Systems via Norm Bounded Uncertainty - a Control Lyapunov Function Approach, *SIAM J. Control Optim.*, **27**, 1462-1476.
- [42] Rotea, M.A., Corless, M., Da, D. (1993) : Systems with Structured Uncertainty: Relations Between Quadratic and Robust Stability, *IEEE Trans. Autom. Control*, **38**, 799-803.

- 
- [43] Porter,P., Crossley,R., (1972) *Modal Control - Theory and Applications*, Taylor&Francis Ltd.
- [44] Thorp,J.S., Barmish,B.R., (1981): On Guaranteed Stability of Uncertain Systems via Linear Control, *JOTA*, **35**, 559-579.
- [45] Wang,M., Lee,E.B., Boley,D. (1991) : Matriz Pencil and Matrix Measures Methods for Robust Stability in Real Parameter Spaces, *Proc. 30th CDC (1991) Brighton*, England.
- [46] Wang,Y.T. (1991): Robust Stability and Robust Pole Assignment of Linear Systems with Structured Uncertainty, *IEEE Trans. Automat. Control*, **36**, 635-637.
- [47] Wang,M., Lee,E.B., Boley,D. (1993): Approximation of a Parameter Perturbation Set by Convex Sets, *Proc.ACC San Francisco*, CA, USA.
- [48] Wonham,W.M. (1967) : On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, **12**, 660-665.
- [49] Yedavalli,R.K. (1985a): Perturbation Bounds for Robust Stability in Linear State Space Models, *Int.J.Control*, **42**. 1507-1517.
- [50] Yedavalli,R.K., (1985b): Improved Measures of Stability Robustness for Linear State Space Systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, **30**, 577-579.
- [51] Zhou,K., Kargonekar,P.P, (1987): Stability Robustness Bounds for Linear State-Space Models with Structured Uncertainty, *IEEE Trans. Automat. Control*, **32**, 621-623.