

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

Eduardo Stockler Tognetti

Engenheiro Eletricista, Universidade de São Paulo - USP
Mestre em Engenharia Elétrica, Universidade de São Paulo - USP

CONTROLE DE SISTEMAS NEBULOSOS TAKAGI-SUGENO USANDO RELAXAÇÕES LMIS

Tese de doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Automação.

Aprovada pela banca examinadora no dia 20 de Dezembro de 2011.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres

Co-orientador: Prof. Dr. Ricardo Coração de Leão
Fontoura de Oliveira

CAMPINAS
2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

T572c Tognetti, Eduardo Stockler
Controle de sistemas nebulosos Takagi-Sugeno
usando relaxações LMIs / Eduardo Stockler Tognetti. --
Campinas, SP: [s.n.], 2011.

Orientadores: Pedro Luis Dias Peres, Ricardo
Coração de Leão Fontoura de Oliveira.

Tese de Doutorado - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Teoria de controle. 2. Lyapunov, Funções de. 3.
Sistemas de controle por realimentação. 4. Sistemas
nebulosos. 5. Otimização matemática. I. Peres, Pedro
Luis Dias. II. Oliveira, Ricardo Coração de Leão
Fontoura de. III. Universidade Estadual de Campinas.
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV.
Título.

Título em Inglês: LMI relaxations for control design of Takagi-Sugeno fuzzy systems

Palavras-chave em Inglês: Control theory, Lyapunov functions, Feedback control
systems, Fuzzy systems, Mathematical optimization

Área de concentração: Automação

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, Vilma Alves de Oliveira,
Akebo Yamakami, Fernando Antonio Campos Gomide

Data da defesa: 20-12-2011

Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidato: Eduardo Stockler Tognetti

Data da Defesa: 20 de dezembro de 2011

Título da Tese: "Controle de sistemas nebulosos Takagi-Sugeno usando relaxações LMIs"

Prof. Dr. Pedro Luís Dias Peres (Presidente): Pedro L. Dias Peres

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Profa. Dra. Vilma Alves de Oliveira: Vilma Alves de Oliveira

Prof. Dr. Akebo Yamakami: Akebo Yamakami

Prof. Dr. Fernando Antônio Campos Gomide: Fernando Antônio Campos Gomide

À MINHA ESPOSA TAÍS E AO MEU FI-
LHO LUCAS.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos meus orientadores Prof. Pedro e Prof. Ricardo pela orientação, apoio e por serem solícitos sempre que demandei atenção.

Agradeço ao Engo. Ricardo Blasco por ter me concedido a oportunidade de realizar esse trabalho, mesmo com os desafios titânicos que enfrentávamos diariamente.

Agradeço também,

- aos colegas de trabalho e parceiros de todas as empreitadas Gimenez, Frias, Beltrame, Ludmar e Racca pela amizade desses anos todos.
- às minhas equipes de trabalho do Time da Automação – Berto, Marques, PC, Preto, Pedro e Volponi – e da Eletrônica – Adriano, Fábio, Nelcy, Nelson e Roberto – por todo o profissionalismo e excelência que sempre desempenharam seus trabalhos, pelo aprendizado e pelos momentos compartilhados de tensão e emoção nos problemas de manutenção.
- aos demais colegas da Oficina de Automação, da Célula de Apoio Técnico e da Produção pelo companheirismo e troca de experiências.
- à Fibria, ao Grupo Votorantim e a toda a gerência pela oportunidade de trabalho e responsabilidade confiada para atuar como Engenheiro de Automação de uma planta tão complexa.
- à agência FAPESP o apoio financeiro concedido durante os últimos meses de doutoramento.
- aos colegas do Departamento de Telemática e de pesquisa, Renato, Tiago, Ricardo (Ceará), Walter, Alessandro, Hugo, Igor, Taís, Márcio, Diego, Rafael, Ali e Benito, a convivência e conversas descontraídas ou polêmicas da hora do café.
- à FEEC/UNICAMP a ótima estrutura que oferece aos estudantes e pesquisadores.
- aos membros da banca examinadora os comentários, sugestões e contribuições, que ajudaram a melhorar a qualidade e a redação final do manuscrito.
- aos meus pais por todo esforço que realizaram para que eu chegasse até aqui.
- à minha amada esposa Tais que pela sua cumplicidade, apoio, renúncia e compreensão permitiu que eu desenvolvesse durante tantos anos a minha carreira de pesquisador e engenheiro industrial.
- e ao meu filho Lucas pela alegria imensa que me proporcionou ao vir ao mundo.

É melhor tentar e falhar, que preocupar-se
e ver a vida passar.
É melhor tentar, ainda que em vão, que
sentar-se, fazendo nada até o final.
Eu prefiro na chuva caminhar, que em
dias tristes em casa me esconder.
Prefiro ser feliz embora louco, que em
conformidade viver.

Martin Luther King

Resumo

A principal contribuição dessa tese é a proposta de novas condições, em termos de desigualdades matriciais lineares, para a análise de estabilidade e síntese de controladores de sistemas nebulosos Takagi-Sugeno, casos discretos e contínuos no tempo. A lei de controle considerada é por realimentação de estados, sendo que para sistemas contínuos no tempo são também projetados controladores de realimentação de saída estática e dinâmica, de ordem arbitrária. São adotados como critérios de desempenho os custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$. As funções de Lyapunov propostas, mais gerais que as existentes na literatura, são construídas como a combinação nebulosa de funções quadráticas nos estados, polinomiais homogêneas de grau arbitrário em termos das funções de pertinência do sistema nebuloso. As funções de pertinência são modeladas em um espaço definido pelo produto Cartesiano de simplexos no mesmo instante de tempo, no caso contínuo, ou em múltiplos instantes de tempo, permitindo o projeto de controladores com memória finita de parâmetros presentes e passados, no caso discreto.

Em sistemas contínuos, as variáveis premissas usadas na lei de controle podem ser escolhidas pelo projetista, de acordo com a disponibilidade ou não para implementação em tempo real, dando um caráter seletivo ao controlador. Nas condições de síntese de controladores, duas situações distintas para as taxas de variação das funções de pertinência são consideradas. Um conjunto convexo modela o espaço ao qual pertencem as derivadas temporais das funções de pertinência, no caso em que algumas taxas máximas de variação são conhecidas. Para taxas de variações arbitrárias, quando as variáveis premissas são os estados, utilizam-se funções de Lyapunov do tipo integral de linha associadas a uma estratégia de síntese em dois estágios. No primeiro estágio um ganho de realimentação de estados é projetado e utilizado como entrada no segundo estágio, que retorna, se possível, um controlador de realimentação de estados que atende especificações de desempenho mais exigentes, ou ganhos de realimentação estática ou dinâmica de saída, de ordem completa ou reduzida.

Exemplos numéricos ilustram os resultados, mostrando que os métodos propostos podem reduzir o conservadorismo nos problemas estudados, sendo mais eficientes quando comparados com outras abordagens da literatura.

Palavras-chave: Sistemas nebulosos Takagi-Sugeno. Desigualdades matriciais lineares (LMIs). Teoria de estabilidade de Lyapunov. Controle por realimentação de estados. Controle por realimentação de saída. Normas H_2 e H -infinito. Funções de Lyapunov nebulosas polinomiais homogêneas.

Abstract

This thesis proposes, as main contribution, new linear matrix inequalities conditions for stability analysis and control synthesis of continuous and discrete-time Takagi–Sugeno fuzzy systems. A state feedback control law is considered and, for continuous-time systems, static and dynamic output feedback controllers of arbitrary order are also determined. The $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed costs are adopted as performance criteria. The proposed Lyapunov functions, more general than the others in the literature, are constructed as fuzzy combinations of quadratic in the state functions that are homogeneous polynomials of arbitrary degree depending on the membership functions of the fuzzy systems. The membership functions are modeled in a space defined by the Cartesian product of simplexes in the same instant of time, in the continuous-time case, or in multiple instants of time, yielding finite memory controllers depending on the present and past parameters, in the discrete-time case.

In the continuous-time synthesis conditions, the premise variables used in the control law can be defined by the designer, accordingly to real-time availability, as a selective feature of the controller. Two different situations are considered in terms of the rates of variation of the membership functions. A convex set models the space of the time-derivatives of the membership functions if some upper bounds of the variation rates are known. For arbitrary rates, when the premise variables are the states of the system, a line-integral Lyapunov function is considered associated with a two steps procedure. At the first step, a state feedback is computed and used as an input for the second step, that provides, if possible, a state feedback controller that take into account more stringent performance specifications, or static or dynamic controllers, of full and reduced orders.

Numerical examples illustrate the results, showing that the proposed approaches can be less conservative and more efficient when compared with other methods available in the literature.

Key-words: Takagi–Sugeno fuzzy systems. Linear matrix inequalities (LMIs). Lyapunov theory. State feedback control. Output feedback control. H_2 and H_∞ norms. Homogeneous polynomial fuzzy Lyapunov functions.

Lista de figuras

1.1	Setor local.	11
2.1	Estimativa da área de estabilidade do sistema nebuloso T–S do Exemplo 2.1 em termos dos parâmetros (a, b) por meio do Teorema 2.1, com $M = 1, \dots, 5$	36
2.2	Estimativa da área de estabilidade do sistema nebuloso T–S do Exemplo 2.1 em termos dos parâmetros (a, b) utilizando a condição [KWG08, Teorema 1], com $k = 1, \dots, 4$	36
2.3	Lei de controle (2.12) com memória finita M	39
2.4	Custos garantidos da norma $\mathcal{H}_2$, dado por ρ , obtidos por meio das condições do Corolário 2.1 para $\eta = 0.83$ com diferentes valores de parâmetros M e g_1	45
2.5	Simulação temporal do pêndulo invertido do Exemplo 2.6 com lei de controle obtida por meio do Teorema 2.4 (T2.4 — controle $\mathcal{H}_2$), Teorema 2.5 (T2.5 — controle $\mathcal{H}_\infty$) e Corolário 2.1 (C2.1 — estabilização).	47
3.1	Custo garantido $\mathcal{H}_2$ dado por ρ em função de δ (limite para a taxa de variação) para o Exemplo 3.3 considerando três situações para a dependência de parâmetros do controlador, dados por $s = (s_1, s_2)$ no Teorema 3.3, usando $g = (1, 1)$ na matriz de Lyapunov.	64
3.2	Custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ em função de δ (limite para a taxa de variação) para o Exemplo 3.3 considerando três situações para a dependência de parâmetros do controlador, dados por $s = (s_1, s_2)$ no Teorema 3.4, usando $g = (1, 1)$ na matriz de Lyapunov.	64

Lista de tabelas

2.1	Resultados de análise de estabilidade do Exemplo 2.2 com custo garantido da norma $\mathcal{H}_2$ dado por ρ . V é o número de variáveis escalares e L é o número de linhas de LMI.	37
2.2	Máximos valores factíveis de β e complexidade numérica (V variáveis escalares; L linhas de LMIs) obtidos no Exemplo 2.3, para diferentes parâmetros g_1 e M no Corolário 2.1 e com os métodos propostos em [GV04, KG05, DH08, Lee06, GKB09, Din10, LPJ10, LPJ11a, LPJ11b].	44
2.3	Valores dos custos garantidos da norma $\mathcal{H}_\infty$, dado por γ , do Exemplo 2.4 obtidos pelo Teorema 2.5 para diferentes parâmetros g_1 e M , comparados aos dos métodos [DB01b] e [ZFLX05], e complexidade numérica (V variáveis escalares; L linhas de LMIs).	44
3.1	Máximos valores de b para estabilidade do Exemplo 3.1 pelo Teorema 3.1 para diferentes graus parciais $g = (g_1, g_2)$ (denotado por $T3.1_{(g_1, g_2)}$), comparados com [KL00, Teorema 7], [TAA03, Teorema 5], [THW03, Teorema 2], [TOW07, Corolário 3], [RW06, Teorema 3], [MPSM09, Teorema 6], e [MPA09, Teorema 1]. O número de variáveis escalares é V e o número de linhas LMIs é L .	61
3.2	Máximos valores de b para estabilização do Exemplo 3.2 pelo Teorema 3.2 para diferentes graus parciais g_1 e s_1 (denotado por $T3.2_{(g_1, s_1)}$), comparados com [KL00, Teorema 11] (estabilizabilidade quadrática), [TOW07, Corolário 3], e [MPA09, Teorema 6], para $ \dot{\mu}_{1i} < 1$, $i = 1, 2$. O número de variáveis escalares é V e o número de linhas LMIs é L .	62
3.3	Valores dos custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ do Exemplo 3.3 usando Teorema 3.3 (custo garantido $\mathcal{H}_2$ dado por ρ) e Teorema 3.4 (custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ) com graus parciais $g = (g_1, g_2)$, $s = (s_1, s_2)$, $\beta = 1$, e $ \dot{\mu}_{ij} \leq \delta = 1$.	63
4.1	Máximos valores de b para a estabilizabilidade do sistema nebuloso T-S do Exemplo 4.1 pelo Teorema 4.1 (denotado por $T4.1$), [KL00, Teorema 11] e [MPA09, Teorema 7]. V é o número de variáveis escalares e L o número de linhas de LMIs.	79

4.2	Número de sistemas estabilizáveis pelo Teorema 4.1 (T4.1), resolvendo diretamente (4.19) e por meio de [MPA09, Teorema 7] para o Exemplo 4.2; N é o número de regras do modelo T-S.	80
4.3	Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ obtidos com o Teorema 4.2, (denotado por T4.2), [TANY01, Teorema 5], [LZ03, Teorema 2], [DGK07, Problema $\mathcal{H}_{\infty 1}$] e com [MOP09, Teorema 3] _(g,d) . V é o número de variáveis escalares e L o número de linhas de LMIs.	81
4.4	Número de sistemas estabilizáveis no Exemplo 4.4 para m entradas e p saídas (25 casos para cada par $\{m, p\}$) usando [FLK ⁺ 06, Teorema 9] (FLK06), e usando os Teoremas 4.5 e 4.6 (T4.5-T4.6), com graus representados por $\{\bar{g}, v_1, v_2\}$, em que $\bar{g}$ é o valor usado para g_1, g_2, s_1, s_2, q_1 e q_2 , que são os graus da função de Lyapunov dos Teoremas 4.5 e 4.6 (g_1, g_2), do controlador de realimentação de estados (s_1, s_2) e das variáveis de folga (q_1, q_2), e (v_1, v_2) são os graus do controlador estático de saída.	89
4.5	Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ obtidos com os Teoremas 4.5 e 4.7 (T4.5–T4.7) para diferentes graus (g, q, s, v) no Exemplo 4.5. V é o número de variáveis escalares e L é o número de linhas de LMIs.	90
4.6	Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ dados por γ do Exemplo 4.7 com diferentes graus $g_1 = s_1 = q_1 = v_1$ no Corolário 4.4 (com $\beta = 1$) e Teorema 4.10 (denotado por C4.4-T4.10 _{g₁}) comparados com [LWNT00, Teorema 8] e [DY08, Teorema 1]. A ordem do controlador dinâmico de saída é n_c	97
4.7	Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ dados por γ do Exemplo 4.8 usando o Corolário 4.4 (com $\beta = 1$) e Teorema 4.10 com alguns graus parciais $(g_1, g_3), (v_1, v_3), (q_1, q_3) = (\bar{q}, \bar{q}), (s_1, s_3) = (\bar{s}, \bar{s})$, para diferentes ordens n_c do controlador dinâmico de realimentação de saída O número de variáveis escalares é V e o número de linhas LMIs é L	100

Lista de acrônimos e notação

T-S	Takagi–Sugeno
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> (desigualdade matricial linear)
BMI	<i>Bilinear Matrix Inequality</i> (desigualdade matricial bilinear)
LPV	<i>Linear Parameter-Varying</i> (linear com parâmetros variantes)
PDC	<i>Parallel Distributed Compensation</i> (compensação distribuída paralela)

$\triangleq$	indica igual por definição
$\star$	indica bloco simétrico nas LMIs
$\otimes$	indica o produto de Kronecker
$L > 0$	indica que a matriz L é simétrica definida positiva
$L \geq 0$	indica que a matriz L é simétrica semi-definida positiva
A	notação para matrizes (letras maiúsculas do alfabeto latino)
A'	($'$), pós-posto a um vetor ou matriz, indica a operação de transposição
$Tr(A)$	indica o traço de uma matriz A
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Z}_+$	conjunto dos números inteiros não negativos
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais (incluindo o zero)
$\text{Re}(z)$	parte real de z
$I(I_n)$	matriz identidade de dimensão apropriada (n)
$0(0_n)$	matriz de zeros de dimensão apropriada (n)
$g!$	símbolo ($!$), denota fatorial, isto é, $g! = g(g-1) \cdots (2)(1)$ para $g \in \mathbb{N}$
n	utilizada para representar a ordem do sistema (número de estados)
N	utilizada para denotar o número de regras nebulosas
$\mathcal{U}_N$	simplex unitário de N variáveis
$z(t)$	vetor das variáveis premissas do sistema nebuloso
r	vetor cujos elementos são os números de conjuntos nebulosos baseados em cada $z_i(t)$
$\mathcal{U}_r$	produto Cartesiano de simplexes unitários (multi-simplex) de r_i variáveis cada
$h(t)$	funções de pertinência do sistema nebuloso pertencente ao simplex unitário
$\mu(t)$	funções de pertinência do sistema nebuloso pertencente ao multi-simplex

Sumário

Introdução geral	1
1 Definições e preliminares	7
1.1 Modelos nebulosos Takagi–Sugeno	7
1.1.1 Modelos nebulosos T–S	7
1.1.2 Aproximação de sistemas não lineares por sistemas nebulosos T–S	10
1.1.3 Controladores nebulosos	12
1.2 Lemas auxiliares	12
1.2.1 Desigualdades Matriciais Lineares	12
1.2.2 Complemento de Schur	13
1.2.3 Lema de Finsler	13
1.2.4 Lema da Eliminação	14
1.3 Condições de estabilidade e síntese	14
1.3.1 Sistemas contínuos no tempo	15
1.3.2 Sistemas discretos no tempo	17
1.4 Índices de desempenho	21
1.4.1 Norma $\mathcal{H}_2$	21
1.4.2 Norma $\mathcal{H}_\infty$	23
1.5 Matrizes polinomiais homogêneas	24
1.5.1 LMIs com matrizes polinomiais homogêneas	28
1.6 Complexidade numérica e plataforma computacional	29
2 Controle de sistemas nebulosos T–S discretos no tempo	31
2.1 Introdução	31
2.2 Preliminares	32
2.2.1 Exemplos numéricos	35
2.3 Resultados principais	37
2.4 Exemplos numéricos	42

2.5	Conclusão	48
3	Controle de sistemas nebulosos T–S contínuos no tempo com taxas de variação limitadas	49
3.1	Introdução	49
3.2	Preliminares	50
3.2.1	Modelamento da derivada temporal das funções de pertinência	51
3.3	Resultados principais	52
3.3.1	Condições de estabilidade	52
3.3.2	Condições de estabilizabilidade	54
3.4	Exemplos numéricos	59
3.5	Conclusão	63
4	Controle de sistemas nebulosos T–S contínuos no tempo com taxas de variação arbitrá- rias	65
4.1	Introdução	65
4.2	Preliminares	68
4.3	Realimentação de estado	69
4.3.1	Resultados principais com funções de Lyapunov afins	69
4.3.2	Resultados principais com funções de Lyapunov polinomiais	74
4.3.3	Exemplos numéricos	79
4.4	Realimentação estática de saída	81
4.4.1	Resultados principais	82
4.4.2	Exemplos numéricos	88
4.5	Realimentação dinâmica de saída	90
4.5.1	Resultados principais	92
4.5.2	Exemplos numéricos	96
4.6	Conclusão	99
	Conclusões e perspectivas	101
	Bibliografia	104

Introdução geral

Em diversas áreas da engenharia, o estudo de sistemas não lineares constitui um dos campos mais importantes. Isso deve-se à natureza dos sistemas físicos, que têm, em sua maioria, comportamentos intrinsecamente não lineares. Conforme a ciência avança em descrever esses comportamentos, os modelos matemáticos desses sistemas ficam cada vez mais complexos, impondo grandes desafios numéricos e analíticos para o estudo desses sistemas. Uma das estratégias mais recorrentes no estudo de sistemas não lineares é a formação de classes de sistemas de acordo com o tipo de não linearidade, permitindo o desenvolvimento de resultados específicos para essas classes. Como exemplo, muitos resultados na literatura foram desenvolvidos para sistemas não lineares do tipo Lur'e e Persidskii. Na análise de estabilidade, deve-se considerar a região de validade do modelo e das técnicas aplicadas, que podem ser de abrangência local ou global no espaço de estados. Nesse sentido, a estimativa da área de atração, ou seja, do espaço contendo as condições iniciais que convergem para a origem, é um importante problema.

Como metodologia para a análise de sistemas não lineares, uma das teorias mais utilizadas é a de Lyapunov, que consiste em determinar uma função energia do sistema para então estudar seu comportamento. Uma grande dificuldade, no entanto, é como determinar essa função energia, pois, em muitos casos, não há uma regra geral para essa tarefa. Uma das alternativas mais usuais é a linearização do sistema não linear em um ponto de operação e a posterior análise do sistema linear resultante, técnica conhecida como método indireto de Lyapunov [Kha02]. A principal vantagem dessa estratégia é a de poder contar com as bem desenvolvidas técnicas para a análise de sistemas lineares, mas o exame só é válido em torno do ponto em que o sistema não linear foi linearizado.

Nas últimas décadas, uma abordagem que vem ganhando a atenção da comunidade científica da área de controle é a descrição de sistemas não lineares por meio de sistemas nebulosos (em inglês, *fuzzy systems*) Takagi–Sugeno (T–S) [TS85]. Sistemas nebulosos T–S permitem representar sistemas não lineares descrevendo a dinâmica em diferentes regiões do espaço de estado como modelos lineares. A combinação nebulosa dos modelos lineares locais representa o sistema global. Há várias formas de se obter uma representação nebulosa em termos de modelos T–S a partir de um sistema não linear. Contudo, pode-se dividir essas estratégias em duas classes, quanto à precisão do modelo T–S obtido em relação ao sistema original. A primeira classe representa os modelos T–S que são uma aproximação do sistema não linear, utilizando-se da propriedade de aproximador universal que os modelos T–S

apresentam, ou seja, o modelo T–S com sistemas lineares na parte consequente das regras nebulosas *se-então* pode representar qualquer sistema não linear suave com precisão arbitrária se um número suficiente de regras nebulosas for usado [TW01]. Procedimentos de identificação entrada-saída e linearizações em torno de pontos de operação são comumente utilizados para esse fim, como ilustrado em [TZ99]. Vale realçar que nos últimos anos têm crescido a importância da modelagem por técnicas de aprendizado *neuro-fuzzy* e algoritmos genéticos nebulosos [CGH⁺04]. Entretanto, a análise de estabilidade e a avaliação de critérios de desempenho do modelo T–S podem não coincidir com o que de fato ocorre no sistema não linear, e o desempenho dos controladores projetados pode ficar comprometido. A segunda classe de modelos T–S, obtido principalmente pela técnica conhecida como não linearidade de setor (em inglês, *sector nonlinearity* [TW01]), permite representar de maneira exata um sistema não linear numa região compacta do espaço de estados. O preço a ser pago é um maior número de regras, se comparado aos modelos T–S aproximados. Os modelos obtidos podem ser vistos como uma classe de sistemas variantes no tempo, ou, mais precisamente, como sistemas quasi-LPV (do inglês, *Linear Parameter Varying*). Assim, essa metodologia tem ganhado a atenção da comunidade de controle pois as técnicas de análise e de projeto de controladores para esses modelos T–S são válidas para o sistema não linear, dentro da região compacta em que o sistema foi modelado.

Portanto, como principal motivação para estudar sistemas nebulosos T–S, os métodos de análise e controle robusto desenvolvidos para sistemas lineares variantes no tempo podem ser adaptados para investigar a estabilidade e projetar controladores para esta classe de sistemas não lineares. Assim, a teoria de estabilidade de Lyapunov tem sido amplamente aplicada a sistemas T–S, resultando em condições de análise e síntese baseadas em desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*). Métodos de otimização baseados em LMIs são atraentes pois podem ser resolvidos por algoritmos de convergência global em tempo polinomial [BEFB94, Stu99].

Um dos primeiros métodos de controle propostos em sistemas T–S é o chamado compensador distribuído paralelo (PDC, do inglês *Parallel Distributed Compensator*) [WTG95], no qual o controlador compartilha a mesma regra do sistema T–S, fornecendo uma lei de controle global dada pela combinação nebulosa dos controladores locais. A técnica de controle PDC foi bastante empregada tanto para a síntese de controladores de realimentação de estados quanto para a realimentação dinâmica de saída, considerando no projeto critérios de desempenho e restrições como: limitações no sinal de controle, alocação de pólos, limites para a taxa de decaimento, critérios de norma $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, robustez com respeito a incertezas e atrasos no tempo [TIW98b, CF00, CTU00, NS03, XL05, Liu03, OTS06, OCTS09, TO10]. O estudo do problema de controle de sistemas lineares com saltos Markovianos por meio de controladores PDC também pode ser mencionado [AO05, AO06]. Condições suficientes na forma de LMIs, tratando vários dos problemas relacionados a modelos nebulosos T–S contínuos e discretos no tempo, podem ser encontradas em [TW01]. A estabilidade global do sistema é assegurada pela existência de uma função de Lyapunov comum a todos os modelos lineares [WTG96, TIW98a, TW01, TAA03, FLK⁺06].

Condições LMIs baseadas em funções de Lyapunov comuns são em geral conservadoras, particularmente no caso de um grande número de regras e, portanto, considerável esforço tem sido feito na

busca de condições mais gerais. Condições de estabilizabilidade quadrática mais relaxadas foram propostas [KL00, TPA00, TANY01, TAA03, FLK⁺06], seguidas por condições necessárias e suficientes [MOP07, SA07, MOP09]. Na procura por funções de Lyapunov mais abrangentes, é válido ressaltar os métodos baseados em funções de Lyapunov por partes [JRA99, Fen03, TO10] e em funções de Lyapunov com integrais de linha [RW06, MPA09].

Funções de Lyapunov nebulosas apareceram como uma alternativa menos conservadora que funções de Lyapunov quadráticas [THW01, THW03]. Funções de Lyapunov nebulosas são formadas pela combinação nebulosa de múltiplas funções quadráticas. Uma função de Lyapunov nebulosa pode ser vista como uma função dependente de parâmetros largamente empregada no estudo de sistemas incertos, e, em muitos casos, conjuntamente com variáveis de folga ou multiplicadores [dOBG99, DB01a, EH04]. No contexto de sistemas T-S discretos no tempo, vários resultados foram publicados [GV04, DSY06, KG05, KWG08, DH08, GKB09, Din10, LPJ10]. Entretanto, no caso de sistemas contínuos, o número de resultados é menor [THW03, RW06, TOW07, MPA09, MPSM09, LPJJ10]. Uma das dificuldades é o aparecimento explícito da derivada temporal das funções de pertinência nas condições de estabilidade. Uma das técnicas utilizadas para superar essa dificuldade e permitir a construção de condições em termos de LMIs é o uso dos limitantes superiores das derivadas temporais. Condições construídas com esses limitantes são apresentadas em [MPSM09] e [MPA09], sendo este último com a utilização de variáveis de folga. Contudo, essas formulações possuem algumas desvantagens, como o conservadorismo do modelamento da derivada temporal, a obrigação de conhecer todos os limitantes das derivadas das funções de pertinência e, para a síntese, a necessidade de ter disponível as variáveis premissas em tempo real, o que nem sempre é possível ou pode representar custos elevados à implementação. Note que essa situação pode ocorrer mesmo no contexto de realimentação de estados, quando os estados estão disponíveis para a realimentação mas as variáveis premissas não são funções dos estados.

Métodos de projeto por realimentação de estados são baseados no pressuposto de que todos os estados são mensuráveis para a implementação do controlador, o que não é verdade em muitos casos práticos. Portanto, controle baseado em observadores e realimentação de saída têm sido considerados na literatura. Técnicas de realimentação de saída por meio de observadores de estados e controladores de realimentação estática de saída podem ser encontrados em [TIW98a, YNKI00, MMG⁺09] e em [HN07, LK09b, BGM09], respectivamente. O projeto de controladores de realimentação dinâmica de saída de ordem completa para sistemas nebulosos T-S foi abordado em [LWNT00, NS06, DY08, Yon09, GBM09, YD10]. A maioria dos trabalhos considera funções de Lyapunov quadráticas (constantes) com estruturas particulares [LWNT00, NS06, DY08, Yon09, YD10]. Em [GBM09], usando uma abordagem redundante descritora, funções de Lyapunov nebulosas são utilizadas para construir condições de síntese de controladores de realimentação dinâmica de saída mas que requerem o conhecimento dos limitantes superiores da taxa de variação das funções de pertinência. Esses controladores dinâmicos têm a mesma ordem da planta pois, neste caso, o projeto de controle é mais simples. No entanto, poucos métodos eficientes estão disponíveis na literatura de sistemas nebulosos T-S para o projeto de controladores dinâmicos de ordem reduzida. Assim sendo, um dos resultados dessa tese

vem trazer importantes contribuições nesse sentido.

O objetivo deste trabalho é, considerando os aspectos levantados acima, desenvolver condições para reduzir o conservadorismo na estabilização por realimentação de estados, realimentação estática e dinâmica, de ordem arbitrária, de saída, com critérios $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, para sistemas nebulosos T–S contínuos e discretos no tempo. Um procedimento sistemático para relaxação das condições de estabilizabilidade é proposto por meio de funções de Lyapunov polinomiais homogêneas de grau arbitrário [CGTV04, OP07] combinados com controladores de realimentação de estado e de saída polinomiais [MOPB09]. No tratamento de sistemas T–S discretos no tempo, funções nebulosas de Lyapunov e controladores nebulosos multi-polinomiais de grau arbitrário nas funções de pertinência do sistema nebuloso em múltiplos instantes de tempo são considerados. No caso de sistemas T–S contínuos no tempo, um modelamento mais geral é utilizado para descrever os sistemas nebulosos T–S, baseado no produto Cartesiano de simplexes, chamado *multi-simplex* [OBP08]. As derivadas temporais das funções de pertinência são modeladas como pertencentes a um politopo e os limitantes, se conhecidos, são utilizados na síntese dos controladores. Como uma das principais novidades introduzidas, o procedimento de projeto do controlador dependente de parâmetros pode ser função apenas das variáveis premissas escolhidas pelo projetista, sendo robusto em relação às outras, que não são medidas. São estabelecidas também condições que não dependem da taxa de variação das funções de pertinência.

Estrutura da tese

- **Capítulo 1:** É apresentada uma descrição geral dos modelos nebulosos T–S estudados nessa tese e uma estratégia de modelagem para obter um sistema nebuloso T–S, que é uma representação exata de um sistema não-linear. Em seguida, são apresentados lemas auxiliares, utilizados na obtenção dos resultados principais, e alguns resultados clássicos da literatura para a análise de estabilidade, cômputo de normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, e síntese de leis de controle por realimentação de estados de sistemas nebulosos T–S. Para esse fim, são utilizadas funções de Lyapunov e condições do tipo LMI. Finalmente, é apresentada a notação da representação de matrizes polinomiais homogêneas utilizada para descrever as matrizes de Lyapunov e as variáveis de folga das condições LMIs desenvolvidas no trabalho. Um exemplo de como construir tais desigualdades com o uso de matrizes polinomiais também é mostrado.
- **Capítulo 2:** É estudado o problema de análise e síntese de controladores por realimentação de estados de sistemas nebulosos T–S discretos no tempo. Na análise de estabilidade é mostrado que funções de Lyapunov dependentes de maneira multi-afim nas funções de pertinência em sucessivos instantes de tempo podem fornecer condições menos conservadoras que outras abordagens utilizadas. Para o projeto de controladores, é proposta uma nova função de Lyapunov quadrática nos estados que apresenta dependência multi-polinomial nas funções de pertinência nos instantes presente e passados. Essa função tem mais graus de liberdade que as disponíveis na literatura, contendo-as como casos particulares. Os controladores de realimentação de es-

tado projetados também dependem multi-polinomialmente nas variáveis premissas em instantes passados de tempo, e, portanto, o sinal de controle no instante atual depende de informações presentes e passadas das funções de pertinência. Simulações numéricas ilustram que as condições obtidas são menos conservadoras quando comparadas com as da literatura em exemplos do tipo *benchmark* de sistemas nebulosos T–S discretos no tempo. Os resultados apresentados derivam dos artigos publicados [TOP09a, TOP09b] e de um artigo submetido a um periódico internacional.

- **Capítulo 3:** O objetivo deste capítulo é apresentar condições de análise de estabilidade e de síntese de controladores de realimentação de estados para sistemas nebulosos T–S contínuos no tempo baseadas em uma representação do sistema e das matrizes envolvidas no problema dependente de funções de pertinência pertencentes a um multi-simplex, ou seja, produto Cartesiano de simplexes. As funções de Lyapunov quadráticas no estado apresentam uma dependência polinomial homogênea de grau arbitrário nas funções de pertinência no multi-simplex. É mostrado que essa classe de funções apresenta resultados cada vez menos conservadores à medida que o grau da função de Lyapunov aumenta. A estrutura multi-simplex, juntamente com a representação polinomial das matrizes que compõem a lei de controle, possibilita ao projetista escolher as variáveis premissas das quais o controlador dependerá. Devido ao uso de funções de Lyapunov nebulosas, o espaço ao qual as derivadas temporais das funções de pertinência pertencem é modelado por conjunto convexo. Exemplos numéricos ilustram as vantagens da técnica proposta e comparam com outros métodos da literatura. Os resultados deste capítulo foram extraídos dos artigos publicados [TOP10b, TOP10a, TOP11d].
- **Capítulo 4:** O procedimento de projeto apresentado no Capítulo 3, baseado em condições LMIs com polinômios homogêneos no multi-simplex, é estendido para o caso de realimentação estática e dinâmica de saída e para uma nova abordagem para a realimentação de estados. Contudo, para evitar o tratamento da derivada temporal das funções de pertinência, faz-se uso de funções de Lyapunov do tipo integral de linha. Como metodologia, o projeto da lei de controle é desenvolvido em dois estágios, contornando não convexidades e restrições nas estruturas das matrizes que compõem o problema, que normalmente aparecem nas condições de síntese de controladores de realimentação de saída. O controlador dinâmico de realimentação de saída possui ordem arbitrária, podendo ser igual à ordem da planta ou reduzida, problema não completamente resolvido na literatura de sistemas nebulosos T–S e que, em geral, é tratado com condições que apresentam grande conservadorismo. Simulações numéricas são apresentadas, comparando as técnicas propostas com as existentes na literatura. O capítulo é baseado nos artigos [TOP11a, TOP11b, TOP11c] e em artigos submetidos a um periódico e a um congresso internacionais.
- **Capítulo 5:** Apresenta as conclusões finais da tese e algumas perspectivas de trabalhos futuros.

Definições e preliminares

Neste capítulo são apresentadas uma breve descrição de modelos nebulosos Takagi-Sugeno (T-S) (do inglês, *Takagi-Sugeno fuzzy models*), algumas condições de análise de estabilidade existentes na literatura de sistema nebulosos T-S, as definições e as notações adotadas no texto.

1.1 Modelos nebulosos Takagi–Sugeno

1.1.1 Modelos nebulosos T-S

Modelos nebulosos T-S, originalmente propostos por [TS85], são descritos por regras nebulosas *se-então* que representam de maneira exata ou aproximada, com um grau de precisão arbitrário, uma classe abrangente de sistema não lineares. A principal característica de um modelo nebuloso T-S é a de expressar a dinâmica local de cada implicação nebulosa (regra) por um modelo de sistema linear. A i -ésima regra do modelo nebuloso T-S [TW01] é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i : & \text{ Se } z_1(t) \text{ é } \bar{\mathcal{M}}_1^i \text{ e } \cdots z_j(t) \text{ é } \bar{\mathcal{M}}_j^i \cdots \text{ e } z_p(t) \text{ é } \bar{\mathcal{M}}_p^i, \\ & \text{ então } \begin{cases} \delta[x](t) = A_i x(t) + E_i w(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) + F_i w(t) + D_i u(t) \\ \zeta(t) = C_{\zeta_i} x(t) + F_{\zeta_i} w(t) \end{cases}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Na descrição acima, $\mathcal{R}_i$ denota a i -ésima regra nebulosa, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas de controle, $w(t) \in \mathbb{R}^v$ é o vetor de distúrbios, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saídas controladas e $\zeta(t) \in \mathbb{R}^s$ é o vetor de saídas medidas. As matrizes do sistema são $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E_i \in \mathbb{R}^{n \times v}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $F_i \in \mathbb{R}^{q \times v}$, $D_i \in \mathbb{R}^{q \times m}$, $C_{\zeta_i} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ e $F_{\zeta_i} \in \mathbb{R}^{s \times v}$. O conjunto nebuloso baseado em $z_j(t)$ para a i -ésima regra é denotado por $\bar{\mathcal{M}}_j^i$ e N é o número total de regras nebulosas. As variáveis premissas são dadas pelo vetor $z(t) = [z_1(t), \dots, z_p(t)]'$ e podem ser funções das variáveis de estado, distúrbios externos ou tempo, mas assume-se que não podem depender das variáveis de controle $u(t)$ nem do distúrbio $w(t)$. O operador $\delta[x](t)$ denota a derivada temporal para sistemas contínuos no tempo ($\delta[x](t) = \dot{x}(t)$) e o operador deslocamento para sistemas discretos no tempo ($\delta[x](t) = x(t+1)$).

O termo $\bar{M}_j^i(z_j(t))$ é o grau de pertinência de $z_j(t)$ em $\bar{\mathcal{M}}_j^i$. A função de pertinência normalizada para cada i -ésima regra nebulosa é

$$h_i(z(t)) = \frac{\omega_i(z(t))}{\sum_{i=1}^N \omega_i(z(t))}, \quad i = 1, \dots, N,$$

com

$$\omega_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p \bar{M}_j^i(z_j(t)).$$

A função de pertinência $h(z(t)) = (h_1(z(t)), \dots, h_N(z(t)))'$ assume valores pertencentes ao simplex unitário $\mathcal{U}_N$, definido como

$$\mathcal{U}_N \triangleq \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}. \quad (1.2)$$

O modelo nebuloso global é obtido pela combinação nebulosa dos modelos lineares locais e pode ser descrito na seguinte forma politópica¹

$$\begin{cases} \delta[x](t) = A(h)x(t) + E(h)w(t) + B(h)u(t) \\ y(t) = C(h)x(t) + F(h)w(t) + D(h)u(t) \\ \zeta(t) = C_\zeta(h)x(t) + F_\zeta(h)w(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

sendo

$$(A, E, B, C, F, D, C_\zeta, F_\zeta)(h) = \sum_{i=1}^N h_i(z(t)) (A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i), \quad h(z(t)) \in \mathcal{U}_N. \quad (1.4)$$

Seguindo linhas dadas em [RW06], uma notação mais apropriada para os conjuntos nebulosos é utilizada para especificar qual dos conjuntos nebulosos baseados em $z_j(t)$ é usado na i -ésima regra em (1.1). Portanto, a ℓ -ésima regra de (1.1) é reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\ell : & \text{ Se } z_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^{\alpha_{\ell 1}} \text{ e } \dots z_j(t) \text{ é } \mathcal{M}_j^{\alpha_{\ell j}} \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } \mathcal{M}_p^{\alpha_{\ell p}}, \\ & \text{ então } \begin{cases} \delta[x](t) = A_{\alpha_{\ell 1} \dots \alpha_{\ell n}} x(t) + E_{\alpha_{\ell 1} \dots \alpha_{\ell p}} w(t) + B_{\alpha_{\ell 1} \dots \alpha_{\ell p}} u(t) \\ y(t) = C_{\alpha_{\ell 1} \dots \alpha_{\ell p}} x(t) + F_{\alpha_{\ell 1} \dots \alpha_{\ell p}} w(t) + D_{\alpha_{\ell 1} \dots \alpha_{\ell p}} u(t) \\ \zeta(t) = C_{y\alpha_{\ell 1} \dots \alpha_{\ell p}} x(t) + F_{y\alpha_{\ell 1} \dots \alpha_{\ell p}} w(t) \end{cases}, \quad \ell = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (1.5)$$

em que $\alpha_{\ell j}$ especifica qual conjunto nebuloso baseado em z_j é usado na ℓ -ésima regra nebulosa. Por exemplo, $\alpha_{11} = \alpha_{21} = k$ significa que o mesmo conjunto nebuloso $\mathcal{M}_1^k$ baseado na variável premissa $z_1(t)$ é utilizado nas regras 1 e 2.

Seja r_j o número de conjuntos nebulosos baseados em $z_j(t)$. Então,

$$N = \prod_{j=1}^p r_j,$$

¹Para simplificar a notação, a abreviação $A(h(z(t))) = A(h)$ é adotada.

e define-se $r = (r_1, \dots, r_p)$. Considere que $M_j^{\alpha_{\ell j}}(z_j(t))$ é o grau de pertinência de $z_j(t)$ em $\mathcal{M}_j^{\alpha_{\ell j}}$ e, portanto, a função de pertinência normalizada para cada $\alpha_{\ell j} = 1, \dots, r_j = i$ é dada por

$$\mu_{ji}(z_j(t)) = \frac{M_j^i(z_j(t))}{\sum_{i=1}^{r_j} M_j^i(z_j(t))}, \quad \text{para } j = 1, \dots, p, \quad i = 1, \dots, r_j, \quad (1.6)$$

e

$$0 \leq \mu_{ji}(z_j(t)) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{r_j} \mu_{ji}(z_j(t)) = 1.$$

Cada $\mu_j(z_j(t)) = (\mu_{j1}(z_j(t)), \mu_{j2}(z_j(t)), \dots, \mu_{jr_j}(z_j(t)))$, $j = 1, \dots, p$, pertence ao simplex unitário $\mathcal{U}_{r_j}$ e, como consequência, $\mu(z(t)) = (\mu_1(z_1(t)), \mu_2(z_2(t)), \dots, \mu_p(z_p(t)))$ pertence a um multi-simplex $\mathcal{U}_r$, definido a seguir.

Definição 1.1 (Multi-simplex) *Um multi-simplex $\mathcal{U}_r$ é o produto Cartesiano de um número finito de simplexos $\mathcal{U}_{r_1}, \dots, \mathcal{U}_{r_p}$, ou seja,*

$$\mathcal{U}_r \triangleq \mathcal{U}_{r_1} \times \mathcal{U}_{r_2} \times \dots \times \mathcal{U}_{r_p}. \quad (1.7)$$

A dimensão de $\mathcal{U}_r$ é definida como o índice $r = (r_1, \dots, r_p)$. Para facilitar a notação, $\mathbb{R}^r$ representa o espaço $\mathbb{R}^{r_1 + \dots + r_p}$. Um dado elemento μ de $\mathcal{U}_r$ é decomposto como $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ de acordo com a estrutura $\mathcal{U}_r$ e, subsequentemente, cada μ_j (pertencente a $\mathcal{U}_{r_j}$), é decomposto na forma $(\mu_{j1}, \mu_{j2}, \dots, \mu_{jr_j})$.

A principal vantagem da representação pela regra (1.5), ao invés de (1.1), é a de fornecer uma representação politópica para o sistema nebuloso T–S dada na estrutura multi-simplex, que preserva a dependência em cada variável premissa, como segue²

$$\begin{cases} \delta[x](t) = A(\mu)x(t) + E(\mu)w(t) + B(\mu)u(t), \\ y(t) = C(\mu)x(t) + F(\mu)w(t) + D(\mu)u(t) \\ \zeta(t) = C_\zeta(\mu)x(t) + F_\zeta(\mu)w(t) \end{cases} \quad (1.8)$$

sendo

$$(A, E, B, C, F, D, C_\zeta, F_\zeta)(\mu) = \sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_p=1}^{r_p} \mu_{1i_1}(z_1(t)) \dots \mu_{pi_p}(z_p(t)) \times \\ (A_{i_1 \dots i_p}, E_{i_1 \dots i_p}, B_{i_1 \dots i_p}, C_{i_1 \dots i_p}, F_{i_1 \dots i_p}, D_{i_1 \dots i_p}, C_{\zeta i_1 \dots i_p}, F_{\zeta i_1 \dots i_p}), \quad (1.9)$$

$$\mu(z(t)) \in \mathcal{U}_r, \quad \mu_j(z_j(t)) \in \mathcal{U}_{r_j}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Observe que as representações das matrizes dos sistemas em (1.4) e (1.9) são equivalentes. Basta verificar que $h_i(\mu) = \mu_{1i_1} \mu_{2i_2} \dots \mu_{pi_p}$, para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, r_1\} \times \dots \times \{1, \dots, r_p\}$.

²A abreviação $A(\mu(z(t))) = A(\mu)$ é adotada.

Por exemplo, para o caso do sistema nebuloso T–S contínuo no tempo de duas variáveis premissas ($p = 2$) e quatro regras ($N = 4$, $r = (2, 2)$), tem-se

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(z(t)) A_i x(t) = \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=1}^2 \mu_{1i_1}(z_1(t)) \mu_{2i_2}(z_2(t)) \mathcal{A}_{i_1 i_2}$$

com

$$\begin{aligned} h_1(z(t)) &= \mu_{11}(z_1(t)) \mu_{21}(z_2(t)) & h_2(z(t)) &= \mu_{11}(z_1(t)) \mu_{22}(z_2(t)) \\ h_3(z(t)) &= \mu_{12}(z_1(t)) \mu_{21}(z_2(t)) & h_4(z(t)) &= \mu_{12}(z_1(t)) \mu_{22}(z_2(t)) \end{aligned}$$

e $A_1 = \mathcal{A}_{11}$, $A_2 = \mathcal{A}_{12}$, $A_3 = \mathcal{A}_{21}$ e $A_4 = \mathcal{A}_{22}$.

1.1.2 Aproximação de sistemas não lineares por sistemas nebulosos T–S

Uma das técnicas mais utilizadas para se obter um modelo nebuloso T–S a partir de um sistema não linear é a chamada abordagem por não linearidade de setor (ou em inglês, *sector nonlinearity approach* [TW01]), que permite representar de maneira exata um sistema não linear por uma combinação convexa de modelos lineares variantes no tempo em uma região compacta do espaço de estados.

Seja um sistema não linear $\delta[x](t) = f(x(t), u(t))$, com $f(0, 0) = 0$, sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ a variável de estado e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ o sinal de controle, que pode ser expresso por meio de transformações algébricas como³

$$\delta[x] = \xi(x, u)x + \gamma(x, u)u. \quad (1.10)$$

Deseja-se obter uma representação precisa do sistema (1.10) num conjunto compacto $\mathcal{D}$ (incluindo o equilíbrio $x = 0$ em seu interior) do espaço de estados por modelos nebulosos T–S. A estratégia consiste em achar um setor global tal que o sistema não linear $f(x) \in [\bar{z} \ \underline{z}]x$, $\bar{z}, \underline{z} \in \mathbb{R}$, ou um setor local em que a condição de setor seja válida para $x_i \in [-d \ d]$, como mostrado na Figura 1.1. Para tal, empregando a aproximação de não linearidade de setor, cada termo dependente de x ou u em $\xi(x, u)$, denotado por $z_j(x, u)$, $j = 1, \dots, p$, sendo p o número de não linearidades em $f(x(t), u(t))$, pode ser expresso por

$$\begin{cases} z_j(x, u) = \underline{z}_j \mu_{j1}(x, u) + \bar{z}_j \mu_{j2}(x, u) \\ 1 = \mu_{j1}(x, u) + \mu_{j2}(x, u) \end{cases} \quad (1.11)$$

em que $\mu_{j1}(x, u)$ e $\mu_{j2}(x, u)$ são funções de pertinência normalizadas e

$$\bar{z}_j = \max_{(x, u) \in \mathcal{D}} z_j(x, u) \quad \underline{z}_j = \min_{(x, u) \in \mathcal{D}} z_j(x, u).$$

Resolvendo o sistema de equações (1.11), tem-se

$$\mu_{j1}(x, u) = \frac{\bar{z}_j - z_j(x, u)}{\bar{z}_j - \underline{z}_j}, \quad \mu_{j2}(x, u) = 1 - \mu_{j1}(x, u), \quad j = 1, \dots, p. \quad (1.12)$$

³A dependência no tempo das variáveis é omitida a partir deste ponto por questão de simplicidade.

Realizando procedimento análogo com o termo $\gamma(x, u)$, pode-se obter seguinte o modelo nebuloso T–S

$$\delta[x] = A(\mu)x + B(\mu)u \quad (1.13)$$

com

$$(A, B)(\mu) = \sum_{i_1=1}^2 \cdots \sum_{i_p=1}^2 \mu_{1i_1}(z_1) \cdots \mu_{pi_p}(z_p) (A_{i_1 \dots i_p}, B_{i_1 \dots i_p}).$$

em que as matrizes dos subsistemas lineares são obtidas pelas funções $\xi(x, u)$ e $\gamma(x, u)$ calculadas nos pontos extremos das não linearidades $z_j(x, u)$ no conjunto $\mathcal{D}$, ou seja, $z_j(x, u)$ é reescrito como em (1.11) para construir (1.13). Note que a representação do sistema não linear por (1.13) pode não ser única, pois pode haver mais de uma maneira de reescrever $f(x(t), u(t))$ por (1.10).

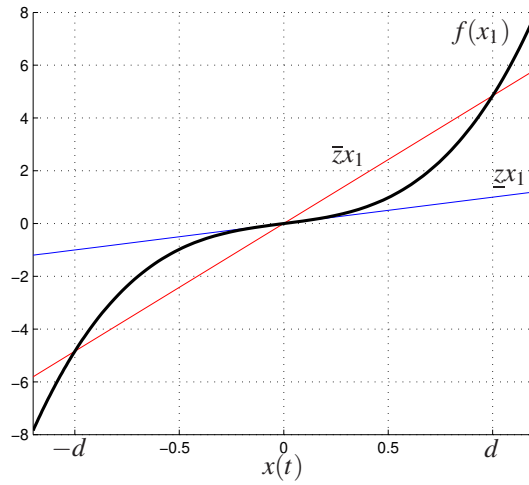


Figura 1.1: Setor local.

Exemplo 1.1 *Seja o sistema não linear*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\text{sen}(x_1^2)x_1 + u \quad (1.14)$$

e a região de interesse $\mathcal{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n : |x_1| \leq 0.5\}$. Pode-se observar que para todo $x \in \mathcal{D}$, o termo não linear $z_1(x_1) = \text{sen}(x_1^2) \in [0 \text{ sen}(0.5^2)]$ e, portanto, pode-se descrever exatamente o sistema (1.14) em $\mathcal{D}$ na forma (1.13) com $B_1 = B_2 = [0 \ 1]^T$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\text{sen}(0.5^2) & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\mu_{11}(z_1) = 1 - \text{sen}(x_1^2)/\text{sen}(0.5^2), \quad \mu_{12}(z_1) = 1 - \mu_{11}(z_1).$$

1.1.3 Controladores nebulosos

O procedimento de projeto de controladores em que cada regra de controle é projetada a partir da correspondente regra do modelo nebuloso T-S é chamado de Compensação Distribuída Paralela (PDC, do inglês *Parallel Distributed Compensation*) [TW01]. Desse modo, o controlador nebuloso projetado compartilha dos mesmos conjuntos nebulosos que o modelo do sistema nas partes premissas. Da regra de modelo nebuloso (1.1), tem-se a seguinte regra para o controlador nebuloso, para $i = 1, 2, \dots, N$, que, nesse caso, é um controlador de realimentação de estados,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i : \text{ Se } z_1(t) \text{ é } \bar{\mathcal{M}}_1^i \text{ e } \dots z_j(t) \text{ é } \bar{\mathcal{M}}_j^i \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } \bar{\mathcal{M}}_p^i, \\ \text{então} \quad u(t) = K_i x(t). \end{aligned}$$

O controlador nebuloso global, que é não linear em geral, é a combinação dos controladores lineares locais e pode ser representado por:

$$u(t) = \sum_{i=1}^N h_i(z(t)) K_i x = K(h)x(t). \quad (1.15)$$

Apesar da lei de controle nebulosa (1.15) ser construída em função dos ganhos locais K_i , os mesmos devem ser determinados utilizando condições de projeto globais a fim de garantir estabilidade e desempenho globais.

Uma lei de controle é denominada não PDC quando o controlador nebuloso não compartilha das mesmas regras do modelo nebuloso T-S. Como exemplo, a seguinte a lei de controle de realimentação de estados não PDC pode ser considerada

$$u(t) = \left(\sum_{i=1}^N h_i(z(t)) F_i \right) \left(\sum_{i=1}^N h_i(z(t)) G_i \right)^{-1} = F(h)G(h)^{-1}x(t)$$

com F_i e G_i , $i = 1 \dots, N$, matrizes de dimensões apropriadas a serem determinadas nas condições de projeto.

1.2 Lemas auxiliares

1.2.1 Desigualdades Matriciais Lineares

Uma desigualdade matricial linear (LMI, do inglês *linear matrix inequality*) é uma desigualdade do tipo $F(x) > 0$ com $F(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica positiva-definida e afim nas variáveis de busca representadas pelo vetor x . Assim, uma LMI pode ser representada genericamente pela forma

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

sendo que $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$ são matrizes dadas e x_i , $i = 1, \dots, m$ são variáveis escalares a serem determinadas de forma a satisfazer a desigualdade. Quando existe uma solução x para $F(x) > 0$

diz-se que a LMI é factível. A LMI (1.16) é equivalente a um conjunto de n desigualdades polinomiais, pois $F(x) > 0$ implica que todos os menores principais líderes da matriz $F(x)$ são positivos.

Condições construídas na forma de LMIs são convexas e podem ser resolvidas em tempo polinomial por algoritmos de pontos interiores [BEFB94]. Uma das vantagens da abordagem por LMIs é a disponibilidade de *softwares*, comerciais ou gratuitos, para a sua solução como, por exemplo, o LMI Control Toolbox [GNLC95] e SeDuMi [Stu99].

1.2.2 Complemento de Schur

Em geral, condições de análise de estabilidade ou de síntese de controladores não aparecem originalmente na forma de LMIs. Algumas ferramentas são bastante úteis na tarefa de reescrever o problema original em termos de LMIs. O complemento de Schur é uma propriedade básica utilizada na manipulação de desigualdades matriciais.

Lema 1.1 [BEFB94] *Seja $x \in \mathbb{R}$ o vetor de variáveis de decisão e sejam $M_1(x)$, $M_2(x)$ e $M_3(x)$ funções afins em x com $M_1(x)$ e $M_2(x)$ simétricas. Então, as seguintes afirmações são equivalentes*

$$\begin{aligned} a) \quad & M_1(x) - M_3(x)'M_2(x)^{-1}M_3(x) > 0 \text{ com } M_2(x) > 0, \\ b) \quad & \begin{bmatrix} M_1(x) & M_3(x)' \\ M_3(x) & M_2(x) \end{bmatrix} > 0. \end{aligned}$$

Note que a) não é uma LMI, pois, $M(x) = M_1(x) - M_3(x)'M_2(x)^{-1}M_3(x)$ não é uma função afim em x . No entanto, a desigualdade em a) é equivalente à desigualdade em b), que é uma LMI. Note que para satisfazer a), a matriz em b) deve ter $M_1(x) > 0$ e $M_2(x) > 0$ como condições necessárias, porém não suficientes.

1.2.3 Lema de Finsler

O lema de Finsler permite a eliminação ou introdução de variáveis extras em condições que tratam de positividade de matrizes.

Lema 1.2 ([dOS01]) *Seja $\xi \in \mathbb{R}^a$, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}' \in \mathbb{R}^{a \times a}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{b \times a}$ com posto $(\mathcal{B}) < a$, e $\mathcal{B}^\perp$ uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}$ (i.e. $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$). As seguintes condições são equivalentes:*

- i) $\xi' \mathcal{Q} \xi < 0, \forall \mathcal{B} \xi = 0, \xi \neq 0$;
- ii) $\mathcal{B}^{\perp'} \mathcal{Q} \mathcal{B}^\perp < 0$;
- iii) $\exists \mu \in \mathbb{R} : \mathcal{Q} - \mu \mathcal{B}' \mathcal{B} < 0$;
- iv) $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{a \times b} : \mathcal{Q} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}' \mathcal{X}' < 0$.

1.2.4 Lema da Eliminação

O lema da eliminação, que pode ser visto como a forma generalizada do Lema de Finsler, é reproduzido na sequência.

Lema 1.3 ([SIG98]) *Dadas as matrizes $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{k \times m}$ e $\Phi = \Phi' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, as seguintes condições são equivalentes:*

i) *Existe uma matriz $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{m \times k}$ satisfazendo*

$$\Phi + \mathcal{V} \mathcal{X} \mathcal{U} + (\mathcal{V} \mathcal{X} \mathcal{U})' < 0$$

ii) *As duas condições*

$$\mathcal{N}_v \Phi \mathcal{N}_v' < 0 \text{ ou } \mathcal{V} \mathcal{V}' > 0$$

$$\mathcal{N}_u' \Phi \mathcal{N}_u < 0 \text{ ou } \mathcal{U}' \mathcal{U} > 0$$

devem ser verificadas, sendo que $\mathcal{N}_v$ e $\mathcal{N}_u'$ são respectivamente complementos ortogonais de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{U}'$, ou seja,

$$\mathcal{N}_v \mathcal{V} = 0, \quad \mathcal{N}_u' \mathcal{U}' = 0.$$

1.3 Condições de estabilidade e síntese

Grande parte das condições para análise de estabilidade e síntese de controladores em sistemas nebulosos T-S deriva da teoria de estabilidade de Lyapunov. Em seguida, são mostradas algumas condições baseadas em LMIs para o sistema nebuloso T-S representado na forma politópica

$$\delta[x](t) = \sum_{i=1}^N h_i(z(t)) A_i x(t) + \sum_{i=1}^N h_i(z(t)) B_i u(t) = A(h)x(t) + B(h)u(t), \quad (1.17)$$

com as matrizes $A(h)$ e $B(h)$ dadas como em (1.4).

Considere o controlador de realimentação de estados (1.15), que produz como sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} \delta[x](t) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i + B_i K_j) x(t) \\ &= \sum_{i=1}^N h_i(z(t))^2 (A_i + B_i K_i) x(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{i < j} h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i + B_i K_j + A_j + B_j K_i) x(t) \\ &= (A(h) + B(h)K(h))x(t). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Notação

Algumas notações são definidas para facilitar a visualização dos resultados enunciados nas próximas seções. O símbolo $\star$ denota o bloco simétrico nas LMIs, $\otimes$ representa produto de Kronecker e $\text{Tr}(M)$ denota o traço de uma matriz M . A função $h(z(t))$ no instante avançado é denotada como $h(z(t+1)) = h(z+1)$ e a matriz $P(h(z(t)))$ no instante avançado por $P(h(z(t+1))) = P(h+1)$. A dependência no tempo das variáveis premissas é omitida a partir deste ponto, por questão de simplicidade de notação.

1.3.1 Sistemas contínuos no tempo

Seja a função de Lyapunov quadrática $V(x) = x(t)'Px(t)$. Uma condição suficiente para a estabilidade do sistema contínuo em malha fechada (1.18), com $\Omega_{ij} = A_i + B_iK_j$, é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_i(z)h_j(z)\Omega_{ij}x(t) \right)' Px(t) + x(t)'P \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_i(z)h_j(z)\Omega_{ij}x(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_i(z)h_j(z)x(t)' (\Omega_{ij}'P + P\Omega_{ij}) x(t) \\ &= \sum_{i=1}^N h_i(z)^2 x(t)' (\Omega_{ii}'P + P\Omega_{ii}) x(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{i < j} h_i(z)h_j(z)x(t)' (\Omega_{ij}'P + P\Omega_{ij} + \Omega_{ji}'P + P\Omega_{ji}) x(t) < 0, \end{aligned}$$

que pode ser verificada por meio da transformação de variáveis $W = P^{-1}$ e pelas LMIs

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii} &< 0, \quad i = 1, \dots, N \\ \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} &< 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i < j. \end{aligned} \tag{1.19}$$

com

$$\Gamma_{ij} \triangleq A_i W + W A_i' + B_i Z_j + Z_j' B_i' \tag{1.20}$$

e $Z_i = K_i W$, $i = 1, \dots, N$. Observe que as LMIs (1.19) garantem, para todo $h(z) \in \mathcal{U}_r$,

$$\Gamma(h) \triangleq A(h)W + W A(h)' + B(h)Z(h) + Z(h)'B(h)' < 0. \tag{1.21}$$

Condições menos conservadoras para garantir $\dot{V}(x) < 0$ surgiram na literatura, como por exemplo fazendo o uso de variáveis de folga no lado direito nas LMIs (1.19) (em inglês, *right-hand side slack matrix variables*).

Lema 1.4 ([LZ03]) *Se existirem matrizes $Z_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $Y_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, em que Y_{ii} são matrizes simétricas, $Y_{ji} = Y_{ij}'$, $i, j = 1, \dots, N$, $i \neq j$, satisfazendo as seguintes LMIs*

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii} &< Y_{ii}, \quad i = 1, \dots, N \\ \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} &< Y_{ij} + Y_{ij}', \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{r1} & \cdots & Y_{rr} \end{bmatrix} < 0,$$

em que Γ_{ii} é dada por (1.20), então a realimentação de estados (1.15) estabiliza o sistema nebuloso T–S contínuo no tempo dado por (1.18) com $K_i = Z_i W^{-1}$.

Utilizando o Lema 1.2 (Lema de Finsler), outras relaxações também podem ser obtidas⁴.

Lema 1.5 ([MOP09]) Se existirem matrizes $Z(h) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathcal{X}(h) \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ e uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que, para todo $h(z) \in \mathcal{U}_N$,

$$\mathcal{Q} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}' \mathcal{X}' < 0, \quad (1.22)$$

com

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} B(h)Z(h) + Z(h)'B(h)' & W \\ W & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} A(h)' & -I \end{bmatrix},$$

então o controlador de realimentação de estados $K(h) = Z(h)W^{-1}$ estabiliza o sistema nebuloso T–S contínuo no tempo dado por (1.18).

Prova: Primeiramente, note que $\mathcal{B}^\perp = [I \ A(h)']'$. Pela equivalência entre ii) e iv) do Lema 1.2, tem-se que (1.22) é equivalente a

$$0 > \mathcal{B}(h)^\perp{}' \mathcal{Q}(h) \mathcal{B}(h)^\perp = \begin{bmatrix} I \\ A(h)' \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} B(h)Z(h) + Z(h)'B(h)' & W \\ W & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A(h)' \end{bmatrix} = \Gamma(h),$$

com $\Gamma(h)$ dado em (1.21) ■

Note que as condições dos Lemas 1.4 e 1.5 são apenas suficientes para que (1.21) seja verificado. Entretanto, existem relaxações que tendem à necessidade quando o número de termos dos somatórios, ou determinado parâmetro, tende ao infinito. Por exemplo, [SA07, MOP09] apresentam condições baseadas no Teorema de Pólya, [MOP09] faz uso de propriedades algébricas de polinômios positivos e [KSGA09] propõe condições baseadas em triangulações que dividem o espaço das funções de pertinência.

As técnicas mais recentes da literatura de sistemas nebulosos T–S, no contexto de análise e síntese de controladores, procuram por funções de Lyapunov que compartilham a mesma função de pertinência do modelo T–S, também chamadas de funções de Lyapunov nebulosas, dadas por $V(x, z) = x(t)'P(h)x(t)$. Observe que funções de Lyapunov nebulosas são equivalente a funções de Lyapunov dependentes de parâmetros no contexto de sistemas LPV (do inglês, *Linear Parameter Varying*).

Uma condição suficiente para provar a estabilidade do sistema nebuloso T–S contínuo no tempo dado por (1.17), com $u(t) = 0$, para uma função de Lyapunov nebulosa quadrática nos estados é

$$A(h)'P(h) + P(h)A(h) + \dot{P}(h) < 0.$$

⁴Alguns teoremas são exibidos na forma de LMIs dependentes de parâmetros para facilitar a visualização.

Em particular, no caso de funções de Lyapunov afins

$$P(h) = \sum_{i=1}^N h_i(z) P_i, \quad h \in \mathcal{U}_N, \quad (1.23)$$

a derivada da matriz de Lyapunov é dada por

$$\dot{P}(h) = \sum_{i=1}^N \dot{h}_i(z) P_i, \quad \dot{h}_i = \frac{dh_i(z)}{dz} \dot{z}.$$

O principal desafio das pesquisas recentes em sistemas nebulosos T–S contínuos no tempo é o tratamento da derivada da matriz de Lyapunov, $\dot{P}(h)$. Grande parte dos trabalhos considera o uso de limitantes para a derivada temporal de $\dot{z}$, ou seja, $|\dot{z}_i| \leq \delta_i$, $i = 1, \dots, N$, estratégia muito utilizada em sistemas LPV. Nessa linha, a seguinte condição de estabilidade foi enunciada.

Teorema 1.1 ([MPSM09]) *Assuma que $|\dot{h}_i| \leq \delta_i$, $i = 1, \dots, N$. O sistema nebuloso T–S contínuo no tempo dado por (1.17), com $u = 0$, é assintoticamente estável se as seguintes LMIs são satisfeitas*

$$\begin{aligned} P_i = P_i' > 0, \quad P_i + X &\geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \\ \tilde{P}_\delta + \frac{1}{2} (A_i' P_j + P_j A_i + A_j' P_i + P_i A_j) &< 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \leq j, \end{aligned}$$

sendo $\tilde{P}_\delta = \sum_{i=1}^N \delta_i (P_i + X)$, δ_i escalares e $X = X'$.

Uma das principais desvantagens das abordagens que consideram limitantes para a derivada temporal das funções de pertinência para a síntese de controladores é a dificuldade, ou mesmo a impossibilidade, do cálculo destes limitantes, visto que $\dot{z}$ depende dos estados e do vetor de entradas u . Outra questão importante, frequentemente ignorada pelos métodos atuais, é que, na maioria dos casos, a região de validade no espaço de estados da hipótese $|\dot{z}_i| \leq \delta_i$ é restrita e, portanto, as condições dos teoremas de estabilidade e síntese têm validade local.

Observe que estruturas mais gerais que (1.23) podem ser utilizadas. No contexto de sistemas incertos invariantes no tempo, por exemplo, funções de Lyapunov com coeficientes polinomiais foram utilizadas em [BOMP06]. Em [OP07], condições para análise de estabilidade com o uso dessas funções foram apresentadas.

1.3.2 Sistemas discretos no tempo

Em sistemas discretos no tempo, funções de Lyapunov nebulosas têm sido mais exploradas que em sistemas contínuos no tempo [KL00, GV04, DSY06, KG05, KWG08, DH08, Din10], pois não aparece o problema da derivada temporal de $P(h)$.

Considerando a função de Lyapunov nebulosa

$$V(x, z) = x(t)' P(h) x(t), \quad (1.24)$$

tem-se que uma condição suficiente para a estabilidade do sistema nebuloso T-S discreto no tempo dado por (1.18) é

$$\Delta V(x, z) = x(t+1)'P(h+1)x(t+1) - x(t)'P(h)x(t) < 0. \quad (1.25)$$

Segue o seguinte resultado utilizando funções de Lyapunov nebulosas (1.24).

Teorema 1.2 *O sistema nebuloso T-S discreto no tempo dado por (1.17) com $u = 0$ é assintoticamente estável se existir $P(h) = P(h)'$ > 0 tal que uma das seguintes condições equivalentes sejam satisfeitas*

$$i) \quad A(h)'P(h+1)A(h) - P(h) < 0, \quad (1.26)$$

$$ii) \quad \begin{bmatrix} P(h) & A(h)'P(h+1) \\ \star & P(h+1) \end{bmatrix} > 0, \quad (1.27)$$

para todo $h(z) \in \mathcal{U}_N$.

Prova: A prova do Teorema 1.2 segue da avaliação da primeira diferença da função de Lyapunov $V(x, z) = x(t)'P(h)x(t)$ ao longo das soluções do sistema (1.17), aplicando um complemento de Schur. ■

Para resolver numericamente as LMIs dependentes de parâmetros do Teorema 1.2 é necessário impor uma estrutura particular para a matriz de Lyapunov nebulosa $P(h)$. Escolhendo a matriz de Lyapunov dependendo linearmente em $h(z)$, i.e. $P(h)$ como em (1.23), tem-se o seguinte teorema.

Teorema 1.3 ([DB01a]) *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$, tais que as seguintes LMIs são verificadas*

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i'P_j \\ \star & P_j \end{bmatrix} > 0, \quad i, j = 1, \dots, N$$

então o sistema (1.17), com $u(t) = 0$, é assintoticamente estável.

Observação 1.1 *Caso as condições do Teorema 1.3 não admitam uma solução, condições baseadas em estruturas polinomiais homogêneas de grau arbitrário $g > 1$ para a matriz de Lyapunov $P(h)$ também não encontrarão. Essa característica deve-se ao fato de que o produto $P(h+1)A(h)$ preserva os monômios resultantes de $g = 1$, qualquer que seja $g > 1$.*

Uma maneira de obter testes menos conservadores para o caso de variações arbitrárias das funções de pertinência $h(z)$ é considerar matrizes de Lyapunov que dependem de maneira multi-afim nos instantes de tempos sucessivos ou passados de $h(z)$. Por exemplo, considere a seguinte matriz de Lyapunov

$$P(h, h+1) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_i(z)h_j(z+1)P_{ij}. \quad (1.28)$$

Então, o seguinte resultado pode ser enunciado.

Teorema 1.4 ([Lee06]) *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N$, tais que as seguintes LMIs são verificadas*

$$\begin{bmatrix} P_{ij} & A_i' P_{j\ell} \\ \star & P_{j\ell} \end{bmatrix} > 0, \quad i, j = 1, \dots, N$$

então o sistema (1.17) com $u(t) = 0$ é assintoticamente estável.

Observação 1.2 *As condições do Teorema 1.4 são menos conservadoras que as condição do Teorema 1.3, inclusive contendo-as como um caso particular, a partir da escolha $P_{ij} = P_i$ e $P_{j\ell} = P_j$. Uma estratégia ainda menos conservadora é a de considerar a matriz de Lyapunov dependendo de mais de um instante de tempo, generalizando para M instantes de tempos a frente. No caso de análise de estabilidade, se o sistema for estável, sempre existirá uma matriz de Lyapunov multi-afim em M instantes de tempo garantindo a estabilidade para um dado M finito [Lee06, LD06]. Esse resultado caracteriza um condição de estabilidade semi-decidível. No caso da síntese de controladores, o uso de matrizes polinomiais homogêneas combinadas com matrizes de Lyapunov dependendo de M instantes de tempo produz resultados menos conservadores. Esta técnica é explorada nos resultados do Capítulo 2.*

A seguir, são reproduzidos alguns resultados importantes da literatura para a síntese de controladores para sistemas nebulosos T-S discretos no tempo. As provas foram omitidas, pois podem ser encontradas nos artigos.

O próximo teorema estende as condições apresentadas no Teorema 1.2 para o problema de síntese, com acréscimo de variáveis de folga no lado direito das LMIs. É utilizada nesse caso uma função de Lyapunov quadrática (matriz constante).

Teorema 1.5 ([KL00]) *Se existirem matrizes $W = W' > 0$, $Q_{ii} > 0$, $Q_{ij} = Q_{ji}'$, S_i , tais que*

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii} &> Q_{ii}, \quad i = 1, \dots, N \\ \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} &> Q_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i < j \\ \Psi &= \begin{bmatrix} 2Q_{11} & \star & \cdots & \star \\ Q_{12} & 2Q_{22} & \cdots & \star \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ Q_{1r} & Q_{2r} & \cdots & 2Q_{rr} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

com

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} W & \star \\ A_i + B_i S_j & W \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

então, o sistema nebuloso T-S discreto no tempo (1.17) é estabilizável pela lei de controle PDC

$$u(t) = \left(\sum_{i=1}^N h_i(z) K_i \right) x(t)$$

com

$$K_i = S_i W^{-1}.$$

Em [GV04], as condições de [KL00] são ampliadas por meio da função de Lyapunov nebulosa dada em (1.23) e variáveis de folga adicionais.

Teorema 1.6 ([GV04]) *Se existirem matrizes simétricas $P_i > 0$, matrizes $Q_{ii}^k > 0$, $Q_{ij}^k = (Q_{ij}^k)'$, $j > i$, S_i , G_i , tais que*

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii}^k &> Q_{ii}^k, \quad i, k = 1, \dots, N \\ \Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ji}^k &> Q_{ij}^k, \quad i, j, k = 1, \dots, N, \quad i < j \\ \Psi^k &= \begin{bmatrix} 2Q_{11}^k & \star & \cdots & \star \\ Q_{12}^k & 2Q_{22}^k & \cdots & \star \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ Q_{1r}^k & Q_{2r}^k & \cdots & 2Q_{rr}^k \end{bmatrix} > 0, \quad k = 1, \dots, N \end{aligned}$$

com

$$\Gamma_{ij}^k = \begin{bmatrix} P_i & \star \\ A_i G_j + B_i S_j & G_k + G_k' - P_k \end{bmatrix}, \quad i, j, k = 1, \dots, N,$$

então, o sistema nebuloso T - S discreto no tempo (1.17) é estabilizável pela lei de controle não PDC

$$u(t) = \left(\sum_{i=1}^N h_i(z) S_i \right) \left(\sum_{i=1}^N h_i(z) G_i \right)^{-1} x(t).$$

Observe que o controlador não PDC em [GV04] não depende da matriz de Lyapunov, com grandes vantagens para o caso de imposição de estruturas para o controlador.

O resultado [DSY06] fornece condições com mais variáveis no lado direito. Nessa linha, vários resultados continuam aparecendo na literatura, buscando condições mais gerais, como em [DH08, Din10].

Corolário 1.1 ([DSY06]) *Se existirem matrizes simétricas $G_i > 0$, matrizes $Q_{ii}^k > 0$, $Q_{ij}^k = (Q_{ij}^k)'$, $i \neq j$, S_i , tais que*

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii}^k &> Q_{ii}^k, \quad i, k = 1, \dots, N \\ \Gamma_{ij}^k + (\Gamma_{ji}^k)' &> Q_{ij}^k + (Q_{ij}^k)', \quad i, j, k = 1, \dots, N, \quad i \neq j \\ \Psi^k &= \begin{bmatrix} 2Q_{11}^k & \star & \cdots & \star \\ Q_{21}^k + (Q_{12}^k)' & 2Q_{22}^k & \cdots & \star \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ Q_{r1}^k + (Q_{1r}^k)' & \cdots & Q_{N(N-1)}^k + (Q_{(N-1)N}^k)' & 2Q_{rr}^k \end{bmatrix} > 0, \quad k = 1, \dots, N \end{aligned}$$

com

$$\Gamma_{ij}^k = \begin{bmatrix} G_i & \star \\ A_i G_j + B_i S_j & G_k \end{bmatrix}, \quad i, j, k = 1, \dots, N,$$

então, o sistema nebuloso T - S discreto no tempo (1.17) é estabilizável pela lei de controle não PDC

$$u(t) = \left(\sum_{i=1}^N h_i(z) S_i \right) \left(\sum_{i=1}^N h_i(z) G_i \right)^{-1} x(t).$$

1.4 Índices de desempenho

Considere o sistema nebuloso T-S

$$\mathcal{G} \triangleq \begin{cases} \delta[x](t) = A(h)x(t) + E(h)w(t) \\ y(t) = C(h)x(t) + F(h)w(t), \quad x(0) = x_0 = 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

no qual $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de variáveis de estado, $w(t) \in \mathbb{R}^v$ o vetor de distúrbios e $y(t) \in \mathbb{R}^q$ a saída controlada. As matrizes são reais, com dimensões apropriadas, e definidas como em (1.4).

Observe que $\mathcal{G}$ é um sistema variante no tempo e, portanto, não é possível obter as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ a partir da caracterização do sistema pela função transferência. Seguem as definições utilizadas das normas de $\mathcal{G}$ nesta tese. A caracterização no espaço de estado das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ também pode ser encontrada, por exemplo, em [GL95, DB01b, BdT02].

1.4.1 Norma $\mathcal{H}_2$

A norma $\mathcal{H}_2$ está relacionada com a energia da saída do sistema em resposta a uma entrada impulsiva (interpretação determinística) ou a uma entrada de ruído branco de média zero e intensidade unitária (interpretação estocástica).

Seja $\mathcal{G}$ o mapa entrada-saída de $w(t)$ para $y(t)$, e a norma $\mathcal{H}_2$ denotada por $\|\mathcal{G}\|_2$. A seguinte definição da norma $\mathcal{H}_2$ é utilizada para o sistema contínuo (1.29), com $F(h) = 0$.

Definição 1.2 ([Tak98]) A norma $\mathcal{H}_2$ para o sistema contínuo variante no tempo (1.29), com $F(h) = 0$, é definida por

$$\|\mathcal{G}\|_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T y'(t)y(t)dt \right\}$$

em que $\mathcal{E}$ corresponde ao valor esperado e $w(t)$ em (1.29) é um ruído branco com média zero e intensidade unitária.

Um limitante para a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema contínuo (1.29), para todo $h(z) \in \mathcal{U}_N$, chamado de custo garantido, pode ser expresso em termos dos Gramianos de controlabilidade e observabilidade, como no seguinte teorema.

Teorema 1.7 O sistema contínuo (1.29), com $F(h) = 0$, é assintoticamente estável com custo garantido $\mathcal{H}_2$ dado por $\rho > 0$ se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $X(h) \in \mathbb{R}^{o \times o}$ tais que, para todo $h(z) \in \mathcal{U}_N$,

$$\text{Tr}(X(h)) < \rho^2 \quad (1.30)$$

$$\begin{bmatrix} P & PE(h) \\ \star & X(h) \end{bmatrix} > 0 \quad (1.31)$$

$$\begin{bmatrix} A(h)'P + PA(h) & C(h)' \\ \star & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.32)$$

ou se existirem matrizes simétricas definidas positivas $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $X(h) \in \mathbb{R}^{o \times o}$ tais que, para todo $h(z) \in \mathcal{U}_N$,

$$\text{Tr}(X(h)) < \rho^2 \quad (1.33)$$

$$\begin{bmatrix} W & WC(h)' \\ \star & X(h) \end{bmatrix} > 0 \quad (1.34)$$

$$\begin{bmatrix} A(h)W + WA(h)' & E(h) \\ \star & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.35)$$

O Teorema 1.7 baseia-se no uso de funções de Lyapunov quadráticas $V(x) = x(t)'Px(t)$ e $V(x) = x(t)'W^{-1}x(t)$, para assegurar a estabilidade quadrática com custo garantido $\mathcal{H}_2$. Deve-se observar que o mínimo custo garantido ρ tal que as LMIs (1.30)-(1.32) valem é, em geral, diferente do valor obtido com (1.33)-(1.35). Isso deve-se ao fato que P (ou W) precisa satisfazer o conjunto de LMIs para todo $h(z) \in \mathcal{U}_N$. Os valores de ρ seriam os mesmos se matrizes dependentes de parâmetros de grau arbitrário $P(h)$ e $W(h)$ fossem usadas nas condições.

Para o sistema discreto (1.29), a seguinte definição da norma $\mathcal{H}_2$ é utilizada.

Definição 1.3 ([Tak98]) A norma $\mathcal{H}_2$ para o sistema discreto variante no tempo (1.29) é definida por

$$\|\mathcal{G}\|_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \sup \mathcal{E} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T y(t)'y(t) \right\}$$

com a entrada de distúrbio $w(t)$ em (1.29) um ruído branco com média zero e intensidade unitária.

Analogamente ao caso contínuo no tempo, um limitante para a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema discreto no tempo (1.29), para todo $h(z) \in \mathcal{U}_N$, chamado de custo garantido, pode ser obtido pelo seguinte teorema, seguindo linhas dadas em [BdT02, GL95], do contexto de sistemas discretos variantes no tempo.

Teorema 1.8 O sistema discreto (1.29) é assintoticamente estável com custo garantido $\mathcal{H}_2$ dado por $\rho > 0$ se existirem matrizes $P(h) = P(h)' > 0$ e $X(h)$ tais que, para todo $h(z) \in \mathcal{U}_N$,

$$\text{Tr}(X(h)) < \rho^2$$

$$\begin{bmatrix} X(h) - F(h)'F(h) & E(h)'P(h+1) \\ \star & P(h+1) \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} P(h) & A(h)'P(h+1) & C(h)' \\ \star & P(h+1) & 0 \\ \star & \star & I \end{bmatrix} > 0$$

ou se existirem $W(h) = W(h)' > 0$ e $X(h)$ tais que, para todo $h(z) \in \mathcal{U}_N$,

$$\text{Tr}(X(h)) < \rho^2$$

$$\begin{bmatrix} X(h) - F(h)F(h)' & C(h)W(h) \\ \star & W(h) \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} W(h+1) & A(h)W(h) & E(h) \\ \star & W(h) & 0 \\ \star & \star & I \end{bmatrix} > 0$$

No caso discreto utilizam-se funções de Lyapunov nebulosas $V(x, z) = x(t)'P(h)x(t)$ e $V(x, z) = x(t)'W(h)^{-1}x(t)$ para garantir a estabilidade do sistema nebuloso T-S discreto no tempo dado em (1.29). Diferentemente do caso contínuo no tempo, funções de Lyapunov nebulosas são usadas para variações arbitrárias das funções de pertinência sem a necessidade de impor limitantes na taxa de variação. Observa-se também que no caso discreto não é necessário impor $F(h) = 0$, como feito no caso contínuo, para garantir norma $\mathcal{H}_2$ finita.

1.4.2 Norma $\mathcal{H}_\infty$

O desempenho $\mathcal{H}_\infty$ de um sistema dinâmico coincide, no domínio do tempo, com seu ganho ℓ_2 . Para o sistema (1.29), nos casos contínuos e discretos no tempo, o desempenho $\mathcal{H}_\infty$ em relação à entrada de perturbações $w(t)$ é dada pela seguinte definição [GL95].

Definição 1.4 *Suponha que o sistema $\mathcal{G}$ seja assintoticamente estável. Então, o desempenho $\mathcal{H}_\infty$ é definido como*

$$\gamma^* \triangleq \sup_{\|w(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|y(t)\|_2}{\|w(t)\|_2}$$

com $w(t)$ e $y(t)$ pertencentes ao espaço dos sinais quadraticamente somáveis para sinais discretos no tempo e quadraticamente integráveis para sinais contínuos no tempo.

A partir do *bounded real lemma* [BEFB94], é possível obter uma condição convexa que garanta um limitante da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema contínuo (1.29) para todo $h(z) \in \mathcal{U}_N$, considerando a função de Lyapunov $V(x) = x(t)'Px(t)$.

Teorema 1.9 ([BEFB94]) *O sistema contínuo (1.29) é assintoticamente estável com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma > 0$ se existir uma matriz $P = P' > 0$ tal que, para todo $h(z) \in \mathcal{U}_N$,*

$$\begin{bmatrix} A(h)'P + PA(h) & PE(h) & C(h)' \\ \star & -I & F(h)' \\ \star & \star & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0.$$

Condições LMIs para cálculo do desempenho $\mathcal{H}_\infty$ do sistema discreto (1.29) em relação à entrada de perturbações $w(t)$ podem ser obtidas pela versão discreta dependente de parâmetros do *bounded real lemma*, conforme apresentado em [BEFB94, DB01b, dB06]. Uma variante desse resultado é dada a seguir, considerando a função de Lyapunov $V(x, z) = x'P(h)x$.

Teorema 1.10 *O sistema discreto (1.29) é assintoticamente estável com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma > 0$ se existir $P(h)' = P(h) > 0$ tal que, para todo $h(z) \in \mathcal{U}_N$,*

$$\begin{bmatrix} P(h) & A(h)'P(h+1) & 0 & C(h)' \\ \star & P(h+1) & P(h+1)E(h) & 0 \\ \star & \star & I & F(h)' \\ \star & \star & \star & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (1.36)$$

Os Teoremas 1.7 e 1.8, para cômputo do custo garantido $\mathcal{H}_2$, e os Teoremas 1.9 e 1.10, para cômputo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, podem ser reescritos com variáveis de folga adicionais por meio do Lema 1.2, fornecendo resultados menos conservadores.

1.5 Matrizes polinomiais homogêneas

Considere uma função de Lyapunov nebulosa quadrática nos estados com dependência afim nas funções de pertinência $h_i(z)$, $i = 1, \dots, N$,

$$P(h) = h_1(z)P_1 + h_2(z)P_2 + \dots + h_N(z)P_N.$$

Uma família de funções de Lyapunov mais geral pode ser construída considerando-se uma dependência polinomial nas funções de pertinência. Por exemplo, considere uma matriz de Lyapunov de dependência polinomial de grau dois ($g = 2$) nas funções de pertinência $h_1(z)$ e $h_2(z)$

$$P(h) = h_1(z)^2 P_1 + h_1(z)h_2(z)P_2 + h_2(z)^2 P_3. \quad (1.37)$$

Uma notação mais apropriada para descrever os coeficientes de uma matriz polinomial é adotada como proposto em [OP05], em que o índice do coeficiente é descrito pelos graus das funções de pertinência referentes e a matriz $P(h)$ possui subíndice relativo ao grau g , ou seja, para o exemplo (1.37), tem-se⁵

$$P_2(h) = h_1(z)^2 h_2(z)^0 P_{20} + h_1(z)^1 h_2(z)^1 P_{11} + h_1(z)^0 h_2(z)^2 P_{02}. \quad (1.38)$$

Para tratar matrizes descritas como em (1.38) na forma de somatórias para graus arbitrários $g \in \mathbb{N}$ e um número qualquer $N \in \mathbb{N}$ de funções de pertinência, adota-se a notação apresentada em [OP07]. Seja $\mathcal{K}_N(g)$ o conjunto das N -uplas obtidas como todas as combinações possíveis dos inteiros não negativos k_i , $i = 1, \dots, N$, tais que $k_1 + k_2 + \dots + k_N = g$, ou seja,

$$\mathcal{K}_N(g) \triangleq \left\{ k = k_1 k_2 \dots k_N \in \mathbb{N}^N : \sum_{j=1}^N k_j = g \right\}. \quad (1.39)$$

Então, a matriz polinomial homogênea é definida como

$$\begin{aligned} P_g(h) &\triangleq \sum_{k \in \mathcal{K}_N(g)} h_1(z)^{k_1} h_2(z)^{k_2} \dots h_N(z)^{k_N} P_{k_1 k_2 \dots k_N} \\ &= \sum_{k \in \mathcal{K}_N(g)} h(z)^k P_k, \quad k = k_1 k_2 \dots k_N, \quad h(z)^k = h_1(z)^{k_1} \dots h_N(z)^{k_N}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

O número de N -uplas em $\mathcal{K}_N(g)$ é dado por

$$J_N(g) = \frac{(N+g-1)!}{g!(N-1)!}.$$

⁵Os graus e os índices dos coeficientes estão em negrito apenas para destaque.

Matrizes independentes de parâmetros (constantes) são obtidas com (1.40) para $g = 0$. Portanto, (1.38) é reescrito como

$$P_2(h) = \sum_{k \in \mathcal{K}_2(2)} h_1(z)^{k_1} h_2(z)^{k_2} P_{k_1 k_2}.$$

Como um outro exemplo, suponha polinômios homogêneos de grau $g = 4$ com $N = 2$ variáveis. Os possíveis valores dos graus parciais são

$$\mathcal{K}_2(4) = \{04, 13, 22, 31, 40\},$$

correspondendo à matriz polinomial

$$P_4(h) = h_2(z)^4 P_{04} + h_1(z) h_2(z)^3 P_{13} + h_1(z)^2 h_2(z)^2 P_{22} + h_1(z)^3 h_2(z) P_{31} + h_1(z)^4 P_{40}.$$

Algumas operações sobre os elementos do conjunto das N -uplas $\mathcal{K}_N(g)$ necessitam ser definidas. Para N -uplas k, k' escreve-se $k \succeq k'$ se $k_i \geq k'_i, i = 1, \dots, N$. Operações usuais de soma $k + k'$ e subtração $k - k'$ (sempre que $k \succeq k'$) são definidas componente a componente. Considere também as seguintes definições para as N -uplas e_i e o coeficiente $k!$:

$$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ésimo}}, 0, \dots, 0), \quad k! = (k_1!)(k_2!) \cdots (k_N!).$$

Matrizes polinomiais homogêneas em multi-instantes no tempo

Para o caso discreto, é possível construir matrizes de Lyapunov com dependência nas funções de pertinência em mais de um instante de tempo, como por exemplo em (1.28), com interessantes resultados tanto no problema de análise como em síntese de controladores (ver Observação 1.2). Essa estratégia é discutida no Capítulo 2. Considerando matrizes multi-afins em M instantes passados de $h(z)$, é possível construir matrizes polinomiais homogêneas de graus g_i em cada instante de tempo de $h(z - i + 1), i = 1, \dots, M$.

Sejam $g = (g_1, \dots, g_M) \in \mathbb{N}^M$ e $\mathcal{N} = (N, \dots, N) \in \mathbb{N}^M$. O conjunto $\mathcal{K}_{\mathcal{N}}(g)$ é definido como o produto Cartesiano

$$\mathcal{K}_{\mathcal{N}}(g) \triangleq \mathcal{K}_N(g_1) \times \cdots \times \mathcal{K}_N(g_M). \quad (1.41)$$

Se $g_1 = g_2 = \cdots = g_M = g$, $\mathcal{K}_{\mathcal{N}}(g) = \mathcal{K}_N(g)^M$.

A matriz com dependência polinomial nos M instantes de tempo pode ser definida pela seguinte matriz homogênea multi-polinomial de graus arbitrários $g = (g_1, \dots, g_M)$

$$\begin{aligned} P_{(g,M)}(h) &\triangleq \sum_{k_1 \in \mathcal{K}_N(g_1)} \sum_{k_2 \in \mathcal{K}_N(g_2)} \cdots \sum_{k_M \in \mathcal{K}_N(g_M)} h(z)^{k_1} h(z-1)^{k_2} \cdots h(z-M+1)^{k_M} P_{(k_1, k_2, \dots, k_M)}, \\ &= \sum_{k \in \mathcal{K}_{\mathcal{N}}(g)} h(\cdot)^k P_k, \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$k = (k_1, k_2, \dots, k_M), \quad k_j = k_{j1} k_{j2} \cdots k_{jr}, \quad h(\cdot)^{k_j} = h_1(\cdot)^{k_{j1}} h_2(\cdot)^{k_{j2}} \cdots h_N(\cdot)^{k_{jr}}, \quad j = 1, \dots, M$$

com $h(\cdot)^{k_1} h(\cdot)^{k_2} \cdots h(\cdot)^{k_M}$ os monômios e $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in \mathcal{K}_{\mathcal{N}}(g)$, são os coeficientes matriciais.

Observe que a estrutura da matriz de Lyapunov dada em (1.42) possui as dadas em (1.23) e (1.40) como casos particulares. A matriz afim (1.23) é dada por (1.42) para $M = 1$ e $g = 1$ e matrizes independentes de parâmetros (constantes) são obtidas a partir de (1.42) com $g_i = 0$, $i = 1, \dots, M$. Com $M = 0$ tem-se $P_{(g,0)}(h) \triangleq P$, ou seja, uma função de Lyapunov quadrática no estado com matriz constante P .

Como exemplo, para polinômios homogêneos de grau $g = (2, 1)$, com $M = 2$ e $N = 2$, as combinações possíveis dos graus parciais de $h(z)$ e $h(z-1)$ são dadas pelo conjunto $\mathcal{K}_{(2,2)}(g) = \mathcal{K}_2(2) \times \mathcal{K}_2(1) = \{02, 11, 20\} \times \{01, 10\}$, correspondendo à forma genérica

$$P_{(g,2)}(h) = h_2(z)^2 \left(h_2(z-1)P_{(02,01)} + h_1(z-1)P_{(02,10)} \right) + h_1(z)h_2(z) \left(h_2(z-1)P_{(11,01)} + h_1(z-1)P_{(11,10)} \right) + h_1(z)^2 \left(h_2(z-1)P_{(20,01)} + h_1(z-1)P_{(20,10)} \right).$$

Matrizes polinomiais homogêneas no multi-simplex

Pode-se também construir matrizes polinomiais homogêneas baseadas na estrutura multi-simplex, dada pela Definição 1.1, de forma similar às matrizes em (1.9). Essa estratégia é usada nos Capítulos 3 e 4 para construir os resultados apresentados. Seja a seguinte definição de polinômios $\mathcal{U}$ -homogêneos.

Definição 1.5 (Polinômio $\mathcal{U}$ -homogêneo) *Dado um multi-simplex $\mathcal{U}_r$ de dimensão $r \in \mathbb{N}^p$, um polinômio $P_g(\mu)$ definido em $\mathbb{R}^r$ e assumindo valores em um espaço vetorial de dimensão finita é $\mathcal{U}$ -homogêneo se, para qualquer $i \in \{1, \dots, p\}$, e para qualquer $\mu_j \in \mathbb{R}^{r_j}$, $j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\}$ dado, a aplicação parcial $\mu_i \in \mathbb{R}^{r_i} \mapsto P_g(\mu)$ for um polinômio homogêneo.*

Tomando $r = (r_1, \dots, r_p) \in \mathbb{N}^p$ e $g = (g_1, \dots, g_p) \in \mathbb{N}^p$, o conjunto

$$\mathcal{K}_r(g) = \mathcal{K}_{r_1}(g_1) \times \dots \times \mathcal{K}_{r_p}(g_p), \quad (1.43)$$

como em (1.41), uma matriz polinomial $\mathcal{U}$ -homogênea $P_g(\mu)$ de estrutura multi-simplex e de graus parciais $g = (g_1, \dots, g_p)$, é genericamente representada por

$$\begin{aligned} P_g(\mu) &\triangleq \sum_{k_1 \in \mathcal{K}_{r_1}(g_1)} \dots \sum_{k_p \in \mathcal{K}_{r_p}(g_p)} \mu_1(z_1)^{k_1} \dots \mu_p(z_p)^{k_p} P_{k_1 \dots k_p} \\ &= \sum_{k \in \mathcal{K}_r(g)} \mu(z)^k P_k \end{aligned} \quad (1.44)$$

em que P_k são os correspondentes coeficientes matriciais e $\mu(z)^k$ são monômios homogêneos de grau g_i em cada variável $\mu_i(z_i)$, i.e.

$$\mu(z)^k = \mu_1(z_1)^{k_1} \mu_2(z_2)^{k_2} \dots \mu_p(z_p)^{k_p}, \quad \mu_i(z_i)^{k_i} = \mu_{i1}(z_i)^{k_{i1}} \mu_{i2}(z_i)^{k_{i2}} \dots \mu_{ir_i}(z_i)^{k_{ir_i}}, \quad (1.45)$$

$k_i = (k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{ir_i})$ é tal que $k_{i1} + k_{i2} + \dots + k_{ir_i} = g_i$, ou seja, os índices $k = (k_1, k_2, \dots, k_p)$ são obtidos pela combinação das r -uplas dos conjuntos $\mathcal{K}_{r_i}(g_i)$, $i = 1, \dots, p$.

Como ilustração, um polinômio $\mathcal{U}$ -homogêneo com dimensões $p = 2$, $g = (1, 2)$ e $r = (2, 2)$, ou seja, de grau 1 nos componentes de $\mu_1 \in \mathcal{U}_2$ e de grau 2 em $\mu_2 \in \mathcal{U}_2$, e com multi-simplex dado por $\mathcal{K}_{(2,2)}(g) = \mathcal{K}_2(1) \times \mathcal{K}_2(2) = \{01, 10\} \times \{02, 11, 20\}$, corresponde à seguinte matriz polinomial

$$P_g(\mu) = \mu_{11} (\mu_{21}^2 P_{(10,20)} + \mu_{21}\mu_{22} P_{(10,11)} + \mu_{22}^2 P_{(10,02)}) \\ + \mu_{12} (\mu_{21}^2 P_{(01,20)} + \mu_{21}\mu_{22} P_{(01,11)} + \mu_{22}^2 P_{(01,02)}).$$

As operações para a representação polinomial com estrutura multi-simplex também são definidas. Para r -uplas k, k' , escreve-se $k \succeq k'$ se $k_{ij} \geq k'_{ij}$, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, r_i$. As operações usuais de soma $k + k'$ e subtração $k - k'$ (sempre que $k \succeq k'$) são definidas componente a componente. O fatorial de r_i -uplas k e p -uplas g é definido como o produto do fatorial dos elementos da uplas, ou seja, $k_i! \triangleq k_{i1}!k_{i2}!\dots k_{ir_i}!$ e $g! \triangleq g_1!g_2!\dots g_p!$. No caso de LMIs com estruturas multi-simplex, o vetor de dimensão j com componentes nulos, com exceção da i -ésima posição que possui valor 1 é denotado por $e_{i|j}$.

Observação 1.3 O polinômio $\mathcal{U}$ -homogêneo $P_g(\mu)$, dado em (1.44) e dependente das funções de pertinência no multi-simplex $\mu(z)$, pode ser usado tanto para o caso contínuo quanto para o discreto, enquanto $P_{(g,M)}(h)$, dado em (1.42) e dependente do simplex $h(z)$ em vários instantes de tempo, somente pode ser usado no caso discreto. Note também que a matriz polinomial homogênea em multi-instantes $P_{(g,M)}(h)$ também pode ser vista como uma representação de estrutura multi-simplex, pois a função de pertinência $h(z)$ deslocada nos instantes de tempo pode ser considerada uma variável independente (por exemplo, $h(z+1) = \beta(z)$) para variações arbitrárias no tempo de $h(z)$. Nesse caso, os simplexes os quais $h(\cdot)$ depende devem ter sempre a mesma dimensão. Sendo assim, a Definição 1.5 de polinômios $\mathcal{U}$ -homogêneos também se aplica a $P_{(g,M)}(h)$.

As matrizes do sistema nebuloso T-S também podem ser escritas na forma de somatórias, utilizando o conjunto $\mathcal{K}_r(g)$. Essa notação é interessante para construir LMIs para o caso de sistemas nebulosos T-S com estrutura multi-simplex, como em (1.8). Nesse caso, as matrizes são representadas como em (1.44), de grau $g = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{p\text{-vezes}}$. Denotando

$$\sigma \triangleq \underbrace{(1 \dots 1)}_{p\text{-vezes}},$$

as matrizes (1.9) podem ser reescritas como

$$(A, E, B, C, F, D, C_\zeta, F_\zeta)(\mu) = \sum_{k \in \mathcal{K}_r(\sigma)} \mu(z)^k (A_k, E_k, B_k, C_k, F_k, D_k, C_{\zeta_k}, F_{\zeta_k}) \quad (1.46)$$

ou, equivalentemente,

$$(A, E, B, C, F, D, C_\zeta, F_\zeta)(\mu) = \sum_{k_1 \in \mathcal{K}_{r_1}(1)} \dots \sum_{k_p \in \mathcal{K}_{r_p}(1)} \mu_1(z_1)^{k_1} \dots \mu_p(z_p)^{k_p} (A_k, E_k, B_k, C_k, F_k, D_k, C_{\zeta_k}, F_{\zeta_k}). \quad (1.47)$$

Note que a equivalência entre (1.9) e (1.47) é intuitiva, pois os $k_j \in \mathcal{K}_{r_j}(1)$ possuem o mesmo número de elementos de $i_j = 1, \dots, r_j$, $j = 1, \dots, p$.

Como observação final, as estruturas das matrizes de Lyapunov nebulosas polinomiais homogêneas são também aplicadas às variáveis matriciais de folga nas LMIs dos problemas de análise e síntese apresentados nesta tese.

1.5.1 LMIs com matrizes polinomiais homogêneas

Nas condições de análise e síntese envolvendo matrizes polinomiais homogêneas frequentemente é necessário tratar o produto de polinômios homogêneos do tipo

$$P_g(h)A(h) \quad (1.48)$$

e homogeneizar termos que possuem graus diferentes, como em (1.26) reescrito com $P(h)$ polinomial, i.e.,

$$A(h)'P_g(h+1)A(h) - P_g(h) < 0. \quad (1.49)$$

Note que o produto (1.48) resulta em um polinômio homogêneo com grau $g+1$, pois $A(h)$ é afim (grau um) em $h(z)$. Observe também que, para construir condições independente de parâmetros (dimensão finita) a partir da LMI (1.49), usando os coeficientes das matrizes, é necessário homogeneizar em todos os instantes de tempo os graus das matrizes. Os graus do segundo termo (grau g no instante de tempo t) devem ser homogeneizados com os do primeiro (grau 2 no instante de tempo t e grau g no instante $t+1$).

O produto (1.48) é reescrito como,

$$P_g(h)A(h) = \left(\sum_{k \in \mathcal{K}_N(g)} h(z)^k P_k \right) \left(\sum_{i=1}^N h_i(z) A_i \right) = \sum_{k \in \mathcal{K}_N(g+1)} h(z)^k \left(\sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i > 0}} P_{k-e_i} A_i \right).$$

Usando uma extensão da expansão algébrica descrita pelo binômio de Newton, tem-se que

$$1 = \left(\sum_{i=1}^N h_i(z) \right)^d = \sum_{k \in \mathcal{K}_N(d)} \frac{d!}{k!} h(z)^k. \quad (1.50)$$

No caso de multiplicação de uma matriz polinomial de grau g por (1.50), operação frequente para a homogeneização de termos de LMIs com matrizes polinomiais, tem-se

$$\left(\sum_{i=1}^N h_i(z) \right)^d P_g(h) = \sum_{k \in \mathcal{K}_N(g+d)} h(z)^k \left(\sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_N(d) \\ k \geq \hat{k}}} \frac{d!}{\hat{k}!} P_{k-\hat{k}} \right).$$

Para ilustrar o procedimento de homogeneização, a desigualdade (1.27) do caso discreto com a matriz de Lyapunov na forma polinomial de grau g , $P_g(h)$, é desenvolvida na forma de LMIs indepen-

dentes de parâmetros. Homogeneizando os termos no grau g para os instantes t e $t + 1$, tem-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_g(h) & A(h)'P_g(h+1) \\ \star & P_g(h+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^N h_i(z+1)\right)^g P_g(h) & \left(\sum_{i=1}^N h_i(z)\right)^{g-1} A(h)'P_g(h+1) \\ \star & \left(\sum_{i=1}^N h_i(z)\right)^g P_g(h+1) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k \in \mathcal{K}_N(g)} \sum_{\hat{k} \in \mathcal{K}_N(g)} h(z)^k h(z+1)^{\hat{k}} \mathcal{M}_{k\hat{k}} > 0 \end{aligned} \quad (1.51)$$

em que

$$\mathcal{M}_{k\hat{k}} = \begin{bmatrix} \frac{g!}{\hat{k}!} P_k & \mathcal{Q}_{k\hat{k}} \\ \star & \frac{g!}{\hat{k}!} P_{\hat{k}} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q}_{k\hat{k}} = \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i > 0}} \frac{(g-1)!}{(k-e_i)!} A_i' P_{\hat{k}}.$$

Então, para verificar a LMI (1.51) para todo $h(z) \in \mathcal{K}_N$ e $h(z+1) \in \mathcal{K}_N$, basta verificar o conjunto finito de LMIs $\mathcal{M}_{k\hat{k}} > 0$ para todo $k \in \mathcal{K}_N(g)$ e $\hat{k} \in \mathcal{K}_N(g)$.

O desenvolvimento de LMIs baseadas em matrizes polinomiais como em (1.40) e (1.44) é apresentado mais detalhadamente nos Capítulos 2, 3 e 4.

1.6 Complexidade numérica e plataforma computacional

A complexidade numérica associada a um problema de otimização baseado em LMIs pode ser estimada pelo número de variáveis escalares V , pelo número L de linhas de LMIs e pelo tempo computacional, em segundos. O esforço computacional associado ao *solver* do LMI Control Toolbox [GNLC95] é da ordem de V^3L , ou seja, $\mathcal{O}(V^3L)$, enquanto que o método de pontos interiores usado no SeDuMi é $\mathcal{O}(V^2L^{2.5} + L^{3.5})$ [Stu99]. Os resultados desta tese foram obtidos utilizando YALMIP [Löf04] e SeDuMi [Stu99] no Matlab versão R2007a, em um computador com processador de 3.00 GHz Intel Core 2 Duo e 2.00 GB de memória RAM, e sistema operacional Windows XP.

Controle de sistemas nebulosos T–S discretos no tempo

A proposta deste capítulo é fornecer funções candidatas de Lyapunov mais gerais para sistemas nebulosos T–S discretos no tempo, e com isso obter condições menos conservadoras para a síntese de controladores para esta classe de sistemas. Para tal, é utilizada uma estrutura que leva em consideração múltiplos instantes de tempo das funções de pertinência na composição da matriz de Lyapunov. Para tornar esta função ainda mais abrangente, a função de pertinência é representada por um polinômio homogêneo de grau arbitrário para cada instante de tempo. A fim de gerar condições LMIs mais precisas para a síntese de controladores, esta estrutura é estendida para as variáveis de folga que compõem o ganho de realimentação de estado. Exemplos numéricos são apresentados com comparações com os métodos atuais.

2.1 Introdução

A busca por condições mais gerais para a análise de estabilidade e a síntese de controladores para sistemas nebulosos T–S tem levado ao uso de diversas estratégias baseadas na teoria de estabilidade de Lyapunov. Em sistemas contínuos T–S, condições relaxadas para a estabilizabilidade quadrática foram propostas em vários trabalhos, como por exemplo [WTG96, TIW98a, TW01] e funções de Lyapunov nebulosas surgiram como uma alternativa à função quadrática comum a todos os subsistemas [THW03], com o tratamento da derivada temporal das funções de pertinência. No contexto de sistemas nebulosos T–S discretos no tempo, investigado neste capítulo, a estabilidade quadrática [KL00, TAA03] tem sido preterida em relação a funções de Lyapunov nebulosas, utilizadas com mais frequência [GV04, DSY06, DH08, Din10, CYW11]. Uma função de Lyapunov não quadrática estendida foi proposta em [DSY06] e condições com mais variáveis de folga foram apresentadas em [DH08, Din10], às custas de maior esforço computacional. Uma característica comum das estratégias desses trabalhos é que as condições de estabilidade são estabelecidas a partir do deslocamento da função de Lyapunov em um instante, ou seja, $\Delta V(x(t)) = V(x(t+1)) - V(x(t))$. Em [KG05] e [KWG08], os autores propuseram uma relaxação para o cálculo de $\Delta V(x(t))$ considerando o deslocamento em k

amostras de tempo, i.e., $\Delta V_k(x(t)) = V(x(t+k)) - V(x(t))$. Essa estratégia é conhecida na literatura como *k-samples variation approach*. Por meio de um vetor de estado estendido, uma aproximação equivalente a [KWG08], levando a menos LMIs e mais variáveis de decisão, aparece em [LPJ11c] e em [GKB09], em que uma lei de controle periódica é introduzida.

O uso das informações de instantes passados das funções de pertinência, que são empregadas para construir as funções de Lyapunov e as variáveis de folga envolvidas nas condições de estabilização, pode ser encontrado em [CP03] e [KP08], porém com estruturas particulares, limitadas a somente um instante passado, para a lei de controle. A notação com índices multi-dimensionais em sistemas nebulosos T–S foi utilizada em [AS07a, AS07b] para estabilizabilidade quadrática nos casos contínuo e discreto, e em [LPJ10], em que uma lei de controle com parametrização múltipla e uma função de Lyapunov não quadrática são definidas em termos de índices de notação multi-dimensional no mesmo instante de tempo. Recentemente, importantes avanços têm sido obtidos para análise de estabilidade robusta de sistemas invariantes no tempo com parâmetros pertencentes a um politopo, mostrando que condições baseadas em funções de Lyapunov polinomiais homogêneas de graus arbitrários são necessárias e suficientes para provar a estabilidade robusta de sistemas incertos [Bli04, CGTV05, OP07].

Neste capítulo são propostas condições menos conservadoras para o projeto de controle para sistemas nebulosos T–S discretos no tempo que generalizam as abordagens [LPJ10, LPJ11a]. A estratégia baseia-se no uso de funções de Lyapunov nebulosas multi-polinomiais nas variáveis premissas em um conjunto de instantes de tempo passados até o presente. O uso de variáveis de folga polinomiais produz resultados menos conservadores do que os obtidos com as variáveis de folga adicionais apresentadas em [DH08, Din10]. Desse modo, uma lei de controle estabilizante é obtida utilizando as informações passadas das funções de pertinência para gerar um sinal de controle no instante atual. Controladores de realimentação de estado com desempenho $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ também são apresentados. As condições propostas são parametrizadas como LMIs em termos de M instantes passados e dos graus dos polinômios. Por meio de experimentos numéricos, é mostrado que a metodologia proposta pode efetivamente melhorar os resultados para esta classe de sistemas ao ser comparada com os métodos recentes disponíveis na literatura.

2.2 Preliminares

Segue a representação politópica para o sistema nebuloso T–S discreto no tempo, como dada em (1.3), e descrito por

$$\begin{cases} x(t+1) = A(h)x(t) + E(h)w(t) \\ y(t) = C(h)x(t) + F(h)w(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

com

$$(A, B, C, D, E, F)(h) = \sum_{i=1}^N h_i(z) (A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i), \quad h(z) \in \mathcal{U}_N$$

sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de variáveis de estado, $w(t) \in \mathbb{R}^v$ o vetor de distúrbios, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ o sinal de controle e $y(t) \in \mathbb{R}^q$ a saída controlada. As matrizes são reais e com dimensões apropriadas.

Seja $\mathcal{Q}(M)$ definido como o conjunto gerado pelo M -ésimo produto cartesiano de $\{1, \dots, N\}$, isto é,

$$\mathcal{Q}(M) = \{1, \dots, N\}^M.$$

Um elemento de $\mathcal{Q}(M)$ é denotado pela M -upla $q = (q_1, \dots, q_M)$. Por exemplo, um sistema nebuloso de duas regras ($N = 2$) e $M = 3$ produz $\mathcal{Q}(3)$: $\{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2)\}$, ou seja, $q = (q_1, q_2, q_3)$ pode assumir N^M combinações pois cada elemento de q pode variar de 1 a N .

Seguindo a notação acima, considere uma função quadrática nos estados com a matriz de Lyapunov

$$P_M(h) \triangleq \sum_{q_1=1}^N \cdots \sum_{q_M=1}^N h_{q_1}(z) \cdots h_{q_M}(z+M-1) P_{(q_1, \dots, q_M)}, \quad q \in \mathcal{Q}(M), \quad (2.2)$$

que é multi-afim nos instantes sucessivos de tempo das variáveis premissas $h(\cdot)$ até o instante máximo M e caracteriza-se como uma caso geral da matriz apresentada em (1.28). Essa estrutura é também conhecida como *dependente do caminho* (do inglês, *path-dependent*) e foi introduzida no contexto de sistemas chaveados [LD06, Lee06]. Para $M = 0$, $P_M(h) \triangleq P$, ou seja uma função de Lyapunov quadrática nos estados com uma matriz constante P .

O próximo teorema, uma adaptação do resultado de [Lee06] à notação desta tese, apresenta relaxações LMIs (com o incremento de M) para a análise de estabilidade do sistema nebuloso (2.1) com $w(t) = 0$ por meio da função de Lyapunov (2.2).

Teorema 2.1 *O sistema nebuloso (2.1), com $w(t) = 0$, é assintoticamente estável se, e somente se, existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_{(q_1, \dots, q_M)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $q \in \mathcal{Q}(M)$, e um inteiro não negativo $M \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tais que*

$$\Gamma_q \triangleq \begin{bmatrix} P_{(q_1, \dots, q_M)} & \star \\ P_{(q_2, \dots, q_{M+1})} A_{q_1} & P_{(q_2, \dots, q_{M+1})} \end{bmatrix} > 0, \quad q \in \mathcal{Q}(M+1) \quad (2.3)$$

Prova: Para provar a suficiência, com Γ_q dado por (2.3), tem-se

$$\begin{bmatrix} P_M(h) & \star \\ P_M(h+1)A(h) & P_M(h+1) \end{bmatrix} = \sum_{q_1=1}^N \cdots \sum_{q_{M+1}=1}^N h_{q_1}(z) \cdots h_{q_{M+1}}(z+M) \Gamma_q > 0. \quad (2.4)$$

Então $P_M(h)$, dado por (2.2), é uma matriz de Lyapunov definida positiva assegurando, pelo complemento de Schur aplicado ao lado esquerdo de (2.4),

$$A(h)' P_M(h+1) A(h) - P_M(h) < 0.$$

Consequentemente, o sistema nebuloso (2.1) com $w(t) = 0$ é assintoticamente estável. A prova da necessidade segue de [Lee06, Th. 1], que garante, sempre que o sistema for assintoticamente estável, a existência de uma matriz de Lyapunov (2.2) para um M suficientemente grande satisfazendo (2.4). ■

Observação 2.1 *Da mesma forma que comentado na Observação 1.1, caso as condições do Teorema 2.1 não admitam uma solução, condições baseadas em estruturas polinomiais homogêneas de grau arbitrário $g > 1$ para a matriz de Lyapunov $P(h)$ também não encontrarão, pois o produto $A(h)'P_M(h+1)A(h)$ preserva os monômios resultantes de $g = 1$, qualquer que seja $g > 1$.*

Observação 2.2 *A estrutura da função de Lyapunov (2.2) depende dos sucessivos instantes das funções de pertinência, ao invés de depender de instantes passados, evitando o produto de matrizes no mesmo instante de tempo. Isto pode ser feito, para efeito de análise de estabilidade, sem perda de generalidade.*

Observação 2.3 *Na literatura, o resultado apresentado no Teorema 2.1 caracteriza uma condição de estabilidade de natureza semi-decidível, ou seja, se o sistema for assintoticamente estável, sempre existirá um M suficientemente grande tal que as LMIs resultantes fornecerão uma solução factível. Entretanto, se o sistema for instável, o algoritmo não é capaz de parar em um número finito de iterações e concluir sobre a estabilidade.*

Observação 2.4 *Observe que, se para um dado $M = M^*$ as condições (2.3) são factíveis, então para qualquer $M \geq M^*$ essas mesmas condições são sempre satisfeitas.*

As condições do Teorema 2.1 com $M = 0$ convertem-se aos resultados conhecidos de estabilidade quadrática de sistemas nebulosos T-S discretos no tempo, que podem ser encontrados em [TW01].

Os próximos teoremas introduzem relaxações LMIs (parametrizadas em M) para a análise de estabilidade robusta com custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ do sistema (2.1). As condições baseiam-se na caracterização da norma $\mathcal{H}_2$ por meio do Gramiano de observabilidade [GL95], conforme Seção 1.4.1, e na extensão do *bounded real lemma* ao caso variante no tempo, dada na Seção 1.4.2.

Teorema 2.2 *O sistema nebuloso (2.1) é assintoticamente estável com norma $\mathcal{H}_2$ limitada por ρ se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $q \in \mathcal{Q}(M)$, e um inteiro positivo M tais que*

$$\text{Tr}(E'_{q_1} P_{(q_2, \dots, q_{M+1})} E_{q_1} + F'_{q_1} F_{q_1}) < \rho^2 \quad (2.5)$$

$$\begin{bmatrix} P_{(q_1, \dots, q_M)} & A'_{q_1} P_{(q_2, \dots, q_{M+1})} & C'_{q_1} \\ \star & P_{(q_2, \dots, q_{M+1})} & 0 \\ \star & \star & I \end{bmatrix} > 0, \quad q \in \mathcal{Q}(M+1). \quad (2.6)$$

Prova: As equações (2.5)-(2.6) verificadas para todo $q \in \mathcal{Q}(M+1)$ implicam

$$\text{Tr}(E(h)' P_M(h+1) E(h) + F(h)' F(h)) < \rho^2 \quad (2.7)$$

$$\begin{bmatrix} P_M(h) & A(h)' P_M(h+1) & C(h)' \\ \star & P_M(h+1) & 0 \\ \star & \star & I \end{bmatrix} > 0. \quad (2.8)$$

para todo $h(z) \in \mathcal{U}_N$. Segundo o Teorema 1.8, as equações (2.7)-(2.8) garantem um custo garantido ρ da norma $\mathcal{H}_2$ do sistema (2.1). ■

Teorema 2.3 *O sistema nebuloso T-S dado em (2.1) é assintoticamente estável com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $q \in \mathcal{Q}(M)$, e um inteiro positivo M tais que*

$$\begin{bmatrix} P_{(q_1, \dots, q_M)} & \star & \star & \star \\ P_{(q_2, \dots, q_{M+1})} A_{q_1} & P_{(q_2, \dots, q_{M+1})} & \star & \star \\ 0 & E'_{q_1} P_{(q_2, \dots, q_{M+1})} & I & \star \\ C_{q_1} & 0 & F_{q_1} & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0, \quad q \in \mathcal{Q}(M+1) \quad (2.9)$$

Prova: Para todo $h(z) \in \mathcal{U}_N$, (2.9) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} P_M(z) & \star & \star & \star \\ P_M(h+1)A(h) & P_M(h+1) & \star & \star \\ 0 & E(h)'P_M(h+1) & I & \star \\ C(h) & 0 & F(h) & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (2.10)$$

Pelo Teorema 1.10, a condição (2.10) assegura um custo garantido γ da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema (2.1). ■

2.2.1 Exemplos numéricos

Seguem os seguintes exemplos para análise de estabilidade do sistema nebuloso T-S dado em (2.1). Como os exemplos numéricos ilustram, a dependência de maneira multi-afim das funções de pertinência fornece resultados menos conservadores com o aumento de M .

Exemplo 2.1 Considere o problema de análise de estabilidade do sistema nebuloso (2.1) com $E(h) = 0$, extraído de [KWG08], com dois subsistemas lineares ($N = 2$) cujas matrizes são dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} b & -0.5 \\ a & -0.9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & -a \\ -0.6 & 0.8 \end{bmatrix},$$

com a e b parâmetros do sistema. O objetivo é achar uma faixa de valores do par (a, b) na qual o sistema nebuloso T-S é estável usando as condições do Teorema 2.1.

A condição de estabilidade com uma matriz de Lyapunov constante ($M = 0$ no Teorema 2.1) não consegue provar a estabilidade deste sistema para nenhum par (a, b) . Os resultados para vários valores de M são mostrados na Figura 2.1 cuja área escura significa estabilidade. O aumento significativo da área de estabilidade com o aumento de M para este exemplo ilustra a relevância do método apresentado. Adicionalmente, pode ser observado que a área de estabilidade obtida é maior do que aquela obtida com a estratégia *k-samples variation approach* dada em [KWG08], como mostra a Figura 2.2 (para notar a diferença entre as figuras basta tomar como referência a linha horizontal $b = -0.4$ em ambas as figuras). Nenhuma melhora significativa na área de estabilidade ocorre para $k > 4$ em [KWG08, Teorema 1] e para $M > 5$ no Teorema 2.1. Da Observação 2.4, nota-se que a região de estabilidade em termos dos parâmetros (a, b) para dado $M = M^*$ no Teorema 2.1 deve conter ou ser igual a região de estabilidade com $M < M^*$. Com respeito à complexidade dos métodos, o número de variáveis escalares e o número de linhas de LMIs aumentam com o incremento de M no método proposto, enquanto que em [KWG08] apenas o número de linhas de LMIs aumenta.

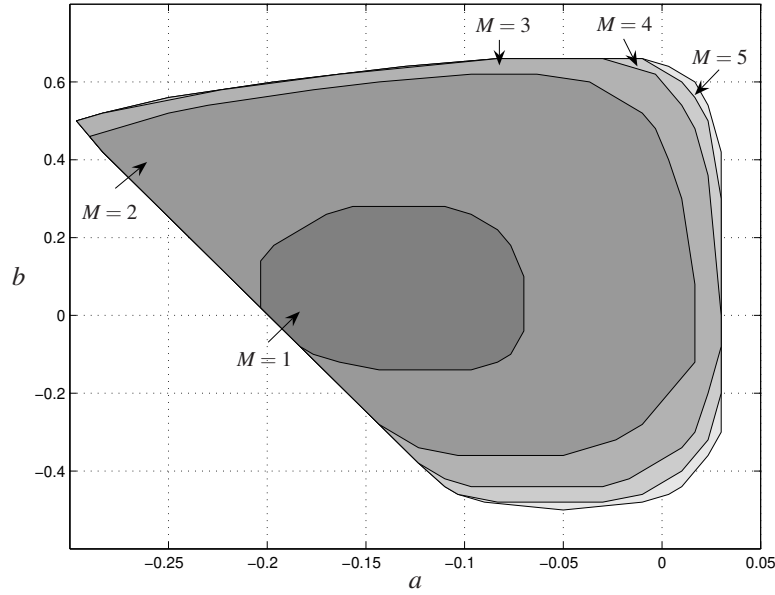


Figura 2.1: Estimativa da área de estabilidade do sistema nebuloso T–S do Exemplo 2.1 em termos dos parâmetros (a, b) por meio do Teorema 2.1, com $M = 1, \dots, 5$.

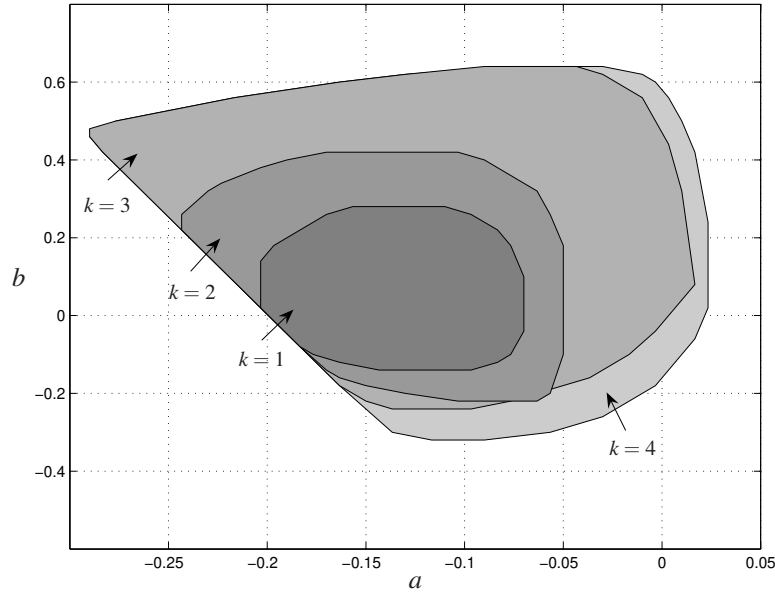


Figura 2.2: Estimativa da área de estabilidade do sistema nebuloso T–S do Exemplo 2.1 em termos dos parâmetros (a, b) utilizando a condição [KWG08, Teorema 1], com $k = 1, \dots, 4$.

Exemplo 2.2 Considere o problema de análise de estabilidade com custo garantido $\mathcal{H}_2$ do sistema nebuloso T–S dado em (2.1) com dois subsistemas lineares ($N = 2$) cujas matrizes são dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.28 & -0.315 \\ 0.63 & -0.84 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.52 & 0.77 \\ -0.7 & -0.07 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}', \quad C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad F_1 = F_2 = 0.$$

O objetivo é determinar o menor valor da norma $\mathcal{H}_2$ que assegura a estabilidade do sistema de T–S por

meio do Teorema 2.2 (T2.2). Os resultados são mostrados na Tabela 2.1. Note que não foi possível computar um valor da norma $\mathcal{H}_2$ com uma função de Lyapunov quadrática, com a condição dada em [PTP97, Seção 4] ([PTP97, S4]). Também foi realizada uma comparação com a condição dada em [ZF06, Teorema 1] ([ZF06, T1]). O menor valor da norma $\mathcal{H}_2$ encontrado com a função de Lyapunov (2.2) foi $\rho = 2.85$ com $M \geq 2$.

Tabela 2.1: Resultados de análise de estabilidade do Exemplo 2.2 com custo garantido da norma $\mathcal{H}_2$ dado por ρ . V é o número de variáveis escalares e L é o número de linhas de LMI.

Método	ρ	V	L	Tempo (s)
[PTP97, S4]	–	4	8	0.02
[ZF06, T1]	9.28	7	26	0.03
T2.2 _(M=1)	6.83	7	24	0.02
T2.2 _(M=2)	2.85	13	48	0.02
T2.2 _(M=3)	2.85	25	96	0.03

2.3 Resultados principais

A seguir são apresentados resultados para síntese de controladores com funções de Lyapunov mais gerais que as da equação (2.2). As definições para tratar polinômios homogêneos são as dadas na Seção 1.5.

É considerada uma matriz de Lyapunov com dependência polinomial em M instantes de tempo e de graus arbitrários $g = (g_1, \dots, g_M)$, apresentada em (1.42), dada por

$$\begin{aligned}
 P_{(g,M)}(h) &\triangleq \sum_{k_1 \in \mathcal{K}_N(g_1)} \sum_{k_2 \in \mathcal{K}_N(g_2)} \cdots \sum_{k_M \in \mathcal{K}_N(g_M)} h(z)^{k_1} h(z-1)^{k_2} \cdots h(z-M+1)^{k_M} P_{(k_1, k_2, \dots, k_M)}, \\
 &= \sum_{k \in \mathcal{K}_{\mathcal{N}}(g)} h(\cdot)^k P_k, \quad k = (k_1, k_2, \dots, k_M), \quad k_j = k_{j1} k_{j2} \cdots k_{jr}, \\
 &\quad h(\cdot)^{k_j} = h_1(\cdot)^{k_{j1}} h_2(\cdot)^{k_{j2}} \cdots h_r(\cdot)^{k_{jr}}, \quad j = 1, \dots, M,
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

sendo $h(\cdot)^{k_1} h(\cdot)^{k_2} \cdots h(\cdot)^{k_M}$ os monômios e $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in \mathcal{K}_{\mathcal{N}}(g)$, os coeficientes matriciais.

A função de Lyapunov proposta (2.11) é quadrática nos estados e apresenta dependência multi-polinomial nas funções de pertinência nos instantes presente e passados. Essa função tem mais graus de liberdade que as disponíveis na literatura [CP03, KP08, LPJ10, LPJ11a]. De fato, a função proposta contém as funções de Lyapunov da literatura como casos particulares para escolhas específicas de g e M .

Considere a lei de controle de realimentação de estados não PDC

$$u(t) = Z_{(g,M)}(h) G_{(g,M)}(h)^{-1} x(t) = \left(\sum_{k \in \mathcal{K}_{\mathcal{N}}(g)} h(\cdot)^k Z_k \right) \left(\sum_{k \in \mathcal{K}_{\mathcal{N}}(g)} h(\cdot)^k G_k \right)^{-1} x(t) \tag{2.12}$$

com $Z_{(g,M)}(h)$ e $G_{(g,M)}(h)$ matrizes que dependem multi-polinomialmente (com grau $g \in \mathbb{R}^M$) nas variáveis premissas a $M \in \mathbb{R}$ instantes passados de tempo (do instante presente t a $t - (M - 1)$). A lei de controle (2.12) pode ser representada pelo diagrama de blocos mostrado na Figura 2.3. Os blocos denotados “Buffer”, representados por $(t - \kappa)$, seguram a informação por κ instantes de tempo, permitindo o uso de informações passadas das funções de pertinência no instante atual no sinal de entrada de controle $u(t)$. Observe que as matrizes polinomiais que sintetizam a lei de controle podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} Z_{(g,M)}(h) &= \left((h(z))^{g_1} \otimes (h(z-1))^{g_2} \otimes \cdots \otimes (h(z-M+1))^{g_M} \right)' \mathcal{Z} \\ G_{(g,M)}(h) &= \left((h(z))^{g_1} \otimes (h(z-1))^{g_2} \otimes \cdots \otimes (h(z-M+1))^{g_M} \right)' \mathcal{G} \end{aligned}$$

com $(h(z - \ell + 1))^{g_\ell}$, $\ell = 1, \dots, M$, representados por $(\cdot)^{g_\ell}$ na Figura 2.3, sendo os vetores de todos os monômios homogêneos de grau g_ℓ pertencentes a $\mathcal{K}_N(g_\ell)$, e $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{G}$ as matrizes cujas linhas são matrizes Z_k e G_k , $k \in \mathcal{K}_N(g)$, respectivamente. Por exemplo, para $g = (2, 1)$ e $N = 2$

$$\left(h(z) \right)^{g_1} = \begin{bmatrix} h_1(z)^2 \\ h_1(z)h_2(z) \\ h_2(z)^2 \end{bmatrix}, \quad \left(h(z-1) \right)^{g_2} = \begin{bmatrix} h_1(z-1) \\ h_2(z-1) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} Z_{(20,10)} \\ Z_{(20,01)} \\ Z_{(11,10)} \\ Z_{(11,01)} \\ Z_{(02,10)} \\ Z_{(02,01)} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{bmatrix} G_{(20,10)} \\ G_{(20,01)} \\ G_{(11,10)} \\ G_{(11,01)} \\ G_{(02,10)} \\ G_{(02,01)} \end{bmatrix}.$$

Esta lei de controle tem memória finita dos parâmetros passados, e a complexidade do cômputo dos ganhos dependentes de instantes passados de tempo cresce exponencialmente com o aumento do tamanho da memória. Portanto, o sistema nebuloso em malha fechada pode ser escrito como

$$\begin{cases} x(t+1) = A_{cl(g,M)}(h)x(t) + E(h)w(t) \\ y(t) = C_{cl(g,M)}(h)x(t) + F(h)w(t) \end{cases} \quad (2.13)$$

com

$$\begin{aligned} A_{cl(g,M)}(h) &\triangleq A(h) + B(h)Z_{(g,M)}(h)G_{(g,M)}(h)^{-1} \\ C_{cl(g,M)}(h) &\triangleq C(h) + D(h)Z_{(g,M)}(h)G_{(g,M)}(h)^{-1}. \end{aligned}$$

Na sequência, novas relaxações LMIs, parametrizadas em termos do número de instantes passados M e dos graus $g = (g_1, \dots, g_M)$ dos polinômios, são desenvolvidas para síntese de controladores com custo garantido $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas nebulosos T–S.

O próximo teorema apresenta uma condição suficiente para a existência de um ganho de controle estabilizante não PDC com custo garantido $\mathcal{H}_2$ por meio de variáveis de folga e matrizes de Lyapunov dadas por (2.11).

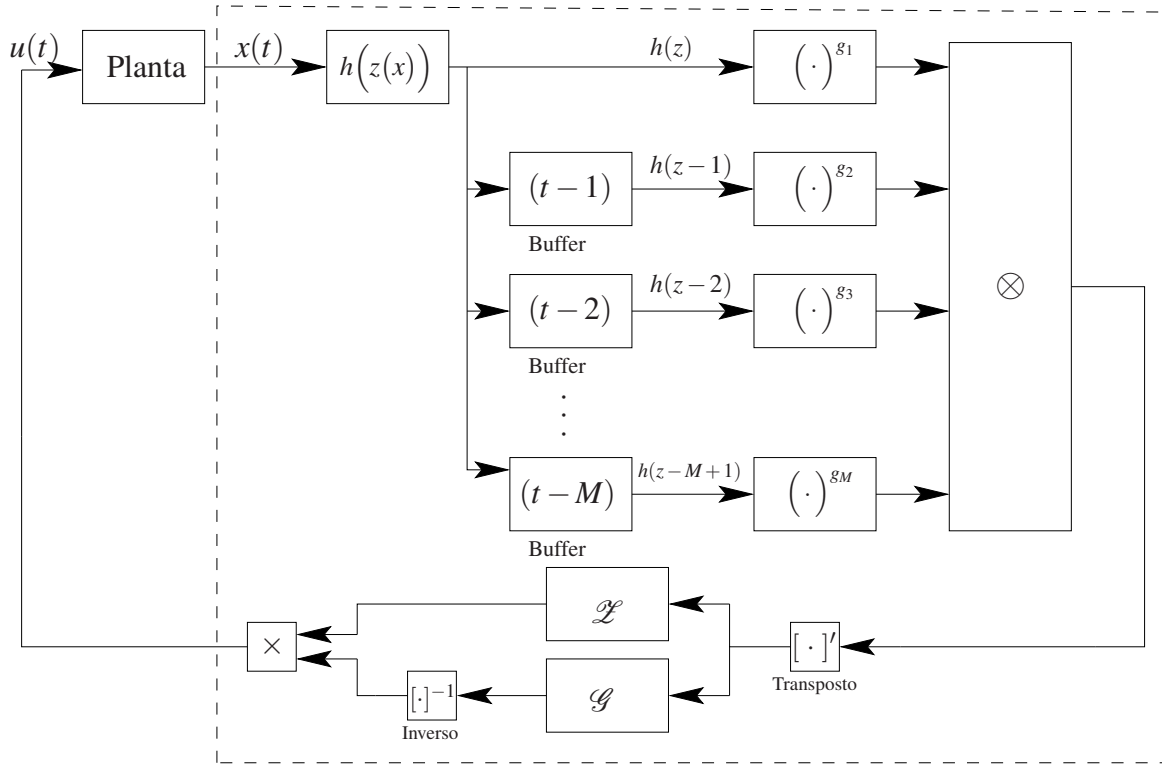


Figura 2.3: Lei de controle (2.12) com memória finita M .

Teorema 2.4 *O sistema nebuloso T-S dado em (2.13) é estabilizável com custo garantido $\mathcal{H}_2$ dado por ρ se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in \mathcal{K}_{\mathcal{N}}(g)$, matrizes $X_i \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $G_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $k \in \mathcal{K}_{\mathcal{N}}(g)$, um inteiro positivo M e graus $g = (g_1, g_2, \dots, g_2) \in \mathbb{N}^M$ tais que*

$$\text{Tr}(X_i) < \rho^2, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \Phi_k \triangleq & \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_N(w-g_1-1) \\ \hat{k} \preceq k_1}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ \hat{k} + e_i \preceq k_1}} \frac{g_1! (w - g_1 - 1)!}{k_0! \hat{k}!} \times \\ & \begin{bmatrix} P_{(k_1 - \hat{k} - e_i, k_2, \dots, k_M)} & A_i G_{(k_1 - \hat{k} - e_i, k_2, \dots, k_M)} + B_i Z_{(k_1 - \hat{k} - e_i, k_2, \dots, k_M)} & \tau_{k,i} E_i \\ \star & G_{(k_1 - \hat{k} - e_i, k_2, \dots, k_M)} + G'_{(k_1 - \hat{k} - e_i, k_2, \dots, k_M)} & 0 \\ \star & \star & \tau_{k,i} I \end{bmatrix} \\ & - \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_N(w-g_2) \\ \hat{k} \preceq k_1}} \frac{g_2! (w - g_2)!}{k_M! \hat{k}!} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \star & P_{(k_0, k_1 - \hat{k}, k_2, \dots, k_{M-1})} & 0 \\ \star & \star & 0 \end{bmatrix} > 0, \quad (2.15) \end{aligned}$$

$$\tau_{k,i} \triangleq \frac{(w-1)!(g_2!)^{M-1}}{(k_1 - e_i)! k_2! k_3! \dots k_M!},$$

$$\forall k_0 \in \mathcal{K}_N(g_1), \quad \forall k_1 \in \mathcal{K}_N(w), \quad w = \max(g_1 + 1, g_2), \quad \forall (k_2, \dots, k_M) \in \mathcal{K}_N(g_2)^{M-1}$$

$$\Psi_k \triangleq \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_{1_i} > 0}} \begin{bmatrix} \beta_{k,i} X_i - \theta_{k,i} F_i F_i' & C_i G_{(k_1 - e_i, k_2, \dots, k_M)} + D_i Z_{(k_1 - e_i, k_2, \dots, k_M)} \\ \star & G_{(k_1 - e_i, k_2, \dots, k_M)} + G_{(k_1 - e_i, k_2, \dots, k_M)}' - P_{(k_1 - e_i, k_2, \dots, k_M)} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.16)$$

$$\beta_{k,i} \triangleq \frac{g_1!(g_2!)^{M-1}}{(k_1 - e_i)!k_2!k_3! \dots k_M!}, \quad \theta_{k,i} \triangleq \frac{(g_1 - 1)!(g_2!)^{M-1}}{(k_1 - e_i - e_i)!k_2!k_3! \dots k_M!} \\ \forall k_1 \in \mathcal{K}_N(g_1 + 1), \quad \forall (k_2, \dots, k_M) \in \mathcal{K}_N(g_2)^{M-1}.$$

Se as condições acima são verdadeiras, a lei de controle não PDC dada por (2.12) estabiliza o sistema (dual) em malha fechada (2.13).

Prova: Seja

$$\mathcal{R} \triangleq \begin{bmatrix} X(h) - F(h)F(h)' & C(h)G_{(g,M)}(h) + D(h)Z_{(g,M)}(h) \\ \star & G_{(g,M)}(h) + G_{(g,M)}(h)' - P_{(g,M)}(h) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\mathcal{S} \triangleq \begin{bmatrix} P_{(g,M)}(h) & A(h)G_{(g,M)}(h) + B(h)Z_{(g,M)}(h) & E(h) \\ \star & G_{(g,M)}(h) + G_{(g,M)}(h)' - P_{(g,M)}(h+1) & 0 \\ \star & \star & I \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Observe que, se (2.15) é factível, então $\mathcal{S} > 0$, pois

$$\mathcal{S} = \sum_{k_0 \in \mathcal{K}_N(g_1)} \sum_{k_1 \in \mathcal{K}_N(w)} \sum_{k_2 \in \mathcal{K}_N(g_2)} \dots \sum_{k_M \in \mathcal{K}_N(g_2)} h(z+1)^{k_0} h(z)^{k_1} h(z-1)^{k_2} \dots h(z-M+1)^{k_M} \Phi_k$$

e, analogamente, a factibilidade de (2.16) assegura $\mathcal{R} > 0$. A condição $\mathcal{S} > 0$ pode ser identificada como a caracterização da norma $\mathcal{H}_2$ de um sistema nebuloso T–S discreto no tempo assintoticamente estável por meio do Gramiano de controlabilidade [dOGB02] e garante $P_{(g,M)}(h) > 0$. Para concluir a prova, multiplique (2.17) a esquerda por $[-I \ C_{cl(g,M)}(h)]$ e a direita por seu transposto, para obter

$$X(h) > C_{cl(g,M)}(h)P_{(g,M)}(h)C_{cl(g,M)}(h)' + F(h)F(h)'.$$

Portanto, a condição (2.14) assegura que ρ é um limitante superior (custo garantido) para a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema. ■

Uma solução para o problema de projeto de um controlador por realimentação de estados $\mathcal{H}_\infty$, em termos de um número finito de LMIs, é apresentada no próximo teorema.

Teorema 2.5 *O sistema nebuloso T–S dado em (2.13) é estabilizável com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in \mathcal{K}_N(g)$, matrizes $G_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$,*

$Z_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $k \in \mathcal{K}_{\mathcal{N}}(g)$, um inteiro positivo M e graus $g = (g_1, g_2, \dots, g_2) \in \mathbb{N}^M$ tais que

$$\Upsilon_k \triangleq \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_N(w-g_1-1) \\ \hat{k} \preceq k_1}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ \hat{k} + e_i \preceq k_1}} \frac{g_1! (w - g_1 - 1)!}{k_0! \hat{k}!} \begin{bmatrix} P_{(k_1 - \hat{k} - e_i, k_2, \dots, k_M)} \\ \star \\ \star \\ \star \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_i G_{(k_1 - \hat{k} - e_i, k_2, \dots, k_M)} + B_i Z_{(k_1 - \hat{k} - e_i, k_2, \dots, k_M)} & 0 & \tau_{k,i} E_i \\ G_{(k_1 - \hat{k} - e_i, k_2, \dots, k_M)} + G'_{(k_1 - \hat{k} - e_i, k_2, \dots, k_M)} & G'_{(k_1 - \hat{k} - e_i, k_2, \dots, k_M)} C'_i + Z'_{(k_1 - \hat{k} - e_i, k_2, \dots, k_M)} D'_i & 0 \\ \star & \star & \tau_{k,i} F_i \\ \star & \star & \tau_{k,i} \gamma^2 I \end{bmatrix} \\ - \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}'(w-g_2) \\ \hat{k} \preceq k_1}} \frac{g_2! (w - g_2)!}{k_M! \hat{k}!} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & P_{(k_0, k_1 - \hat{k}, k_2, \dots, k_{M-1})} & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & 0 \end{bmatrix} > 0, \quad (2.19) \\ \tau_{k,i} \triangleq \frac{(w-1)!(g_2!)^{M-1}}{(k_1 - e_i)! k_2! k_3! \dots k_M!},$$

para todo $k_0 \in \mathcal{K}_N(g_1)$, $k_1 \in \mathcal{K}_N(w)$, $w = \max(g_1 + 1, g_2)$ e $(k_2, \dots, k_M) \in \mathcal{K}_N(g_2)^{M-1}$. Se as condições acima são verdadeiras, a lei de controle não PDC dada por (2.12) estabiliza o sistema (dual) em malha fechada (2.13).

Prova: Primeiramente, note que Υ_k pode ser reescrito como a versão homogeneizada com os mesmos graus parciais em $h(\cdot)$ em todos os instantes de tempo

$$\Upsilon(h) \triangleq \begin{bmatrix} P_{(g,M)}(h) & A(h)G_{(g,M)}(h) + B(h)Z_{(g,M)}(h) \\ \star & G_{(g,M)}(h) + G_{(g,M)}(h)' - P_{(g,M)}(h+1) \\ \star & \star \\ \star & \star \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & E(h) \\ G_{(g,M)}(h)'C(h) + Z_{(g,M)}(h)'D(h)' & 0 \\ I & F(h) \\ \star & \gamma^2 I \end{bmatrix} \\ = \sum_{k_0 \in \mathcal{K}_N(g_1)} \sum_{k_1 \in \mathcal{K}_N(w)} \sum_{k_2 \in \mathcal{K}_N(g_2)} \dots \sum_{k_M \in \mathcal{K}_N(g_2)} h(z+1)^{k_0} h(z)^{k_1} h(z-1)^{k_2} \dots h(z-M+1)^{k_M} \Upsilon_k.$$

A factibilidade das LMIs (2.19) assegura $\Upsilon(h) > 0, \forall h(\cdot) \in \mathcal{U}_N$. A condição $\Upsilon(h) > 0$ pode ser reconhecido como o *bounded real lemma* para sistemas discretos variantes no tempo [DB01b, dOGB02] e assegura $P_{(g,M)}(h) > 0$. Portanto, o sistema nebuloso T-S em malha fechada é assintoticamente estável e tem custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ . ■

Corolário 2.1 Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in \mathcal{K}_{\mathcal{N}}(g)$, matrizes $G_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $k \in \mathcal{K}_{\mathcal{N}}(g)$, um inteiro positivo M e graus $g = (g_1, g_2, \dots, g_2) \in \mathbb{N}^M$ tais que o bloco constituído da primeira e segunda linhas e colunas de (2.19) é definido positivo para todo $k_0 \in \mathcal{K}_N(g_1)$, $k_1 \in \mathcal{K}_N(w)$, $w = \max(g_1 + 1, g_2)$, $(k_2, \dots, k_M) \in \mathcal{K}_N(g_2)^{M-1}$, então a lei de controle não PDC dada por (2.12) estabiliza o sistema (dual) em malha fechada (2.13).

Prova: Defina

$$\mathcal{M}(h) \triangleq \begin{bmatrix} P_{(g,M)}(h) & A(h)G_{(g,M)}(h) + B(h)Z_{(g,M)}(h) \\ \star & G_{(g,M)}(h) + G_{(g,M)}(h)' - P_{(g,M)}(h+1) \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

A matriz $\mathcal{M}(h)$ é a versão homogeneizada do bloco constituído da primeira e segunda linhas e colunas de (2.19). Para concluir a prova, multiplique $\mathcal{M}(h) > 0$ à esquerda por $[I \quad -A_{cl(g,M)}(h)]$ e à direita por seu transposto para obter

$$A_{cl(g,M)}(h)P_{(g,M)}(h+1)A_{cl(g,M)}(h)' - P_{(g,M)}(h) < 0$$

que garante a estabilidade do sistema em malha fechada (2.13) por meio da função de Lyapunov $V(x) = x'P_{(g,M)}(h)x$. ■

Observação 2.5 Nos Teoremas 2.4, 2.5 e Corolário 2.1, a escolha $g_2 = \dots = g_M$ é realizada para facilitar a homogeneização em cada simplex $h(\cdot)$. Como as LMIs (2.15) e (2.19) exibem produtos entre as matrizes do sistema e as variáveis matriciais do problema somente no instante de tempo atual, experimentos numéricos mostram que melhores resultados são obtidos com $g_1 \geq g_2 = \dots = g_M$.

Observação 2.6 As condições do Corolário 2.1 com $M = 0$ convertem-se em resultados conhecidos de estabilizabilidade quadrática [TIW98a]. Resultados similares em termos de funções de Lyapunov afins podem ser encontrados em [DB01a] para $M = 1$ e $g = (1, \dots, 1)$.

Comparações numéricas entre as condições de estabilizabilidade propostas e outras condições LMIs relaxadas extraídas da literatura são realizadas na próxima seção.

2.4 Exemplos numéricos

Nas comparações, os seguintes acrônimos foram utilizados: Teorema 2.4 (T2.4), Teorema 2.5 (T2.5), Corolário 2.1 (C2.1), Teorema 5 in [GV04] (GV04), Teorema 3 in [KG05] (KG05), Teorema 4 in [DH08] (DH08), Teorema 5 in [DB01b] (DB01), Teorema 5 in [ZFLX05] (ZFLX05), Teorema 2 in [Lee06] (Lee06), Teorema 3 in [GKB09] (GKB09-T3), Teorema 5 in [GKB09] (GKB09-T5), Teorema 8 in [Din10] (Din10), Teorema 1 in [LPJ10] (LPJ10), Teorema 3 in [LPJ11a] (LPJ11a) e Teorema 1 in [LPJ11b] (LPJ11b).

Note que as relaxações dos Teoremas 2.4, 2.5 e Corolário 2.1 são apenas suficientes, mas resultados mais precisos são obtidos com o aumento dos graus $g = (g_1, \dots, g_M)$ e da memória M , como ilustrado nos exemplos a seguir.

Exemplo 2.3 Considere o seguinte modelo não linear, que pode ser encontrado em [GV04]

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_1(t) - x_1(t)x_2(t) + (5 + x_1(t))u(t) \\ x_2(t+1) &= x_1(t) - 0.5x_2(t) + 2x_1(t)u(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

e assuma

$$x_1(t) \in [-\beta \ \beta],$$

com β um número real positivo. O modelo não linear (2.21) é representado com exatidão pelas seguintes regras do modelo nebuloso T–S discreto no tempo.

$\mathcal{R}_1$: Se $x_1(t)$ é $F_1^1(x_1(t))$ então

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 5+\beta \\ 2\beta \end{bmatrix} u(t)$$

$\mathcal{R}_1$: Se $x_1(t)$ é $F_1^2(x_1(t))$ então

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 5-\beta \\ -2\beta \end{bmatrix} u(t)$$

com as seguintes funções de pertinência

$$F_1^1(x_1(t)) = (\beta + x_1(t))/2\beta, \quad F_1^2(x_1(t)) = (\beta - x_1(t))/2\beta.$$

Este sistema é um conhecido problema *benchmark* da literatura de sistemas nebulosos T–S. O objetivo neste exemplo é investigar a estabilizabilidade do sistema (2.21) por meio das condições do Corolário 2.1. Os valores máximos obtidos de β , assim como a complexidade numérica associada, dada pelo número de variáveis escalares V e pelo número de linhas LMIs L , são mostrados na Tabela 2.2. Os resultados em termos dos maiores valores obtidos de β por outras condições da literatura [GV04, KG05, DH08, GKB09, Din10, LPJ10, LPJ11a, LPJ11b] são também mostrados na tabela. Como pode ser visto, a condição proposta fornece ganhos estabilizantes de realimentação de estado para os maiores valores de β (i.e. $\beta = 1.843$, com $g = (6, 1)$ e $M = 2$, e $\beta = 1.875$, com $g = (8, 1)$ e $M = 2$), e os números de linhas de LMIs e variáveis escalares permanecem aceitáveis.

Exemplo 2.4 Considere o sistema nebuloso T–S discreto no tempo randomicamente gerado com $N = 2$ e matrizes

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -0.1 & -0.4 \\ -0.4 & 0.1 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 1.1 & 1.2 \\ 0.5 & 1.2 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.4 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.8 \end{bmatrix}, \\ E_1 &= \begin{bmatrix} 0.02 \\ -0.05 \end{bmatrix}, & E_2 &= \begin{bmatrix} -0.07 \\ 0.05 \end{bmatrix}, & C_1 &= \begin{bmatrix} -0.8 & 1.6 \\ -2.2 & -1.0 \end{bmatrix}, & C_2 &= \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 1.2 & -1.6 \end{bmatrix}, \\ D_1 &= \begin{bmatrix} 0.9 \\ 1.3 \end{bmatrix}, & D_2 &= \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}, & F_1 &= \begin{bmatrix} -1.8 \\ 1.3 \end{bmatrix}, & F_2 &= \begin{bmatrix} -0.9 \\ 0.3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O objetivo é obter um controlador de realimentação de estados (2.12) com o menor custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ tal que o sistema T–S em malha fechada (2.13) seja estável. Os resultados são mostrados na Tabela 2.3. Comparadas com [DB01b] e [ZFLX05], as condições do Teorema 2.5 fornecem os menores valores do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ conforme os parâmetros g_1 e M aumentam, ($g_2 = \dots = g_M = 1$).

Tabela 2.2: Máximos valores factíveis de β e complexidade numérica (V variáveis escalares; L linhas de LMIs) obtidos no Exemplo 2.3, para diferentes parâmetros g_1 e M no Corolário 2.1 e com os métodos propostos em [GV04, KG05, DH08, Lee06, GKB09, Din10, LPJ10, LPJ11a, LPJ11b].

Método	β_{max}	V	L
GV04	1.766	78	40
KG05 _(k=6)	1.627	18	1824
KG05 _(k=8)	1.631	18	9256
Lee06 _(M=3)	1.178	40	64
Lee06 _(M=8)	1.238	1280	2048
DH08	1.782	348	120
GKB09-T3 _(k=4)	1.741	18	5120
GKB09-T4 _(k=4)	1.755	588	5120
Din10	1.790	281	76
LPJ10 _(1,1,1,5,0)	1.767	2130	192
LPJ10 _(1,1,3,0,0)	1.799	580	128
LPJ10 _(3,3,3,0,0)	1.821	1128	114
LPJ11a _{(N,N_f)=(5,5)}	1.829	5824	1920
LPJ11b _(N=2)	1.782	100	1040
C2.1 _(g1=1;M=2)	1.628	32	48
C2.1 _(g1=2;M=2)	1.712	48	96
C2.1 _(g1=2;M=4)	1.766	192	384
C2.1 _(g1=2;M=6)	1.780	768	1536
C2.1 _(g1=6;M=2)	1.843	112	448
C2.1 _(g1=8;M=2)	1.875	144	720

Tabela 2.3: Valores dos custos garantidos da norma $\mathcal{H}_\infty$, dado por γ , do Exemplo 2.4 obtidos pelo Teorema 2.5 para diferentes parâmetros g_1 e M , comparados aos dos métodos [DB01b] e [ZFLX05], e complexidade numérica (V variáveis escalares; L linhas de LMIs).

Método	γ	V	L
DB01	8.19	13	28
ZFLX05	8.19	19	56
T2.5 _(g1=1;M=1)	5.97	19	42
T2.5 _(g1=1;M=3)	4.75	73	168
T2.5 _(g1=1;M=5)	3.88	289	672
T2.5 _(g1=3;M=1)	4.16	37	140
T2.5 _(g1=3;M=3)	3.32	145	560
T2.5 _(g1=3;M=5)	2.95	577	2240
T2.5 _(g1=5;M=1)	3.31	55	294
T2.5 _(g1=5;M=3)	2.82	217	1176
T2.5 _(g1=5;M=5)	2.74	865	4704

Exemplo 2.5 Considere o sistema nebuloso de T-S com as seguintes matrizes

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} &= \eta \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & | & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & | & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \\ B_1 = B_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C_1 = C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = D_2 = 0, \quad F_1 = F_2 = 0, \end{aligned}$$

e $\eta \in \mathbb{R}$ um escalar não negativo.

O objetivo deste exemplo é obter o maior valor do parâmetro η para qual o sistema em malha fechada (2.13) pode ser estabilizado por um controlador $\mathcal{H}_2$ de realimentação de estado. Utilizando as condições do Corolário 2.1 obteve-se $\eta_{max} = 0.83$ com norma $\mathcal{H}_2$ dada por $\rho = 290.7$ e tempo computacional de 0.23s para $M = g = 1$. As condições do Teorema 4 de [ZF06] levam a um resultado mais conservador, com $\eta_{max} = 0.59$, norma $\mathcal{H}_2$ dada por $\rho = 33.8$ e tempo computacional 0.14s. Para $\eta = 0.59$ o Corolário 2.1 provê $\rho = 2.05$, 0.36s, com $M = 2$ e $g = (2, 1)$.

A Figura 2.5 mostra a evolução da norma $\mathcal{H}_2$ em função do aumento dos parâmetros M e g_1 ($g_2 = \dots = g_M = 1$) para um valor de η fixo. Pode-se observar que à medida que g_1 e M aumentam a norma $\mathcal{H}_2$ diminui.

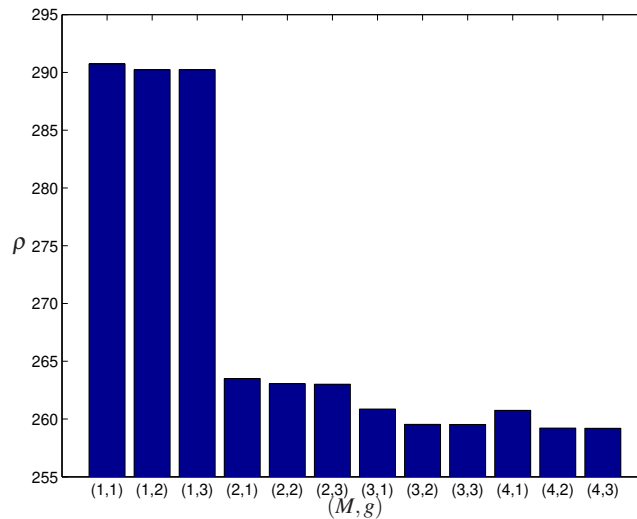


Figura 2.4: Custos garantidos da norma $\mathcal{H}_2$, dado por ρ , obtidos por meio das condições do Corolário 2.1 para $\eta = 0.83$ com diferentes valores de parâmetros M e g_1 .

Exemplo 2.6 Considere a aplicação da estratégia de controle (2.12) ao problema de equilíbrio de um pêndulo invertido em um carro. As equações de movimento do pêndulo são [WTG96]

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{2.22}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g \sin(x_1) - a m \ell x_2^2 \sin(2x_1)/2 - a \cos(x_1) u}{4\ell/3 - a m \ell \cos^2(x_1)} \tag{2.23}$$

sendo $a = \ell/(m + \mathcal{M})$, x_1 o ângulo (em radianos) da vertical do pêndulo, x_2 a velocidade angular, $g = 9.8m/s^2$ a constante gravitacional, m a massa do pêndulo, $\mathcal{M}$ a massa do carro, 2ℓ o comprimento do pêndulo e u a força aplicada ao carro (em Newtons). Nas simulações, foram escolhidos $m = 2.0 \text{ kg}$, $\mathcal{M} = 8.0 \text{ kg}$ e $\ell = 0.5m$.

Como feito em [CP03], a planta não linear foi aproximada por duas regras nebulosas do modelo T-S discretizadas pela transformação bilinear com tempo de amostragem $T = 0.1s$, resultando no seguinte sistema nebuloso T-S discreto no tempo

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + E_i w(t)) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) (C_i x(t) + D_i u(t) + F_i w(t)) \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1.418 & 0.242 \\ 4.182 & 1.418 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1.237 & 0.224 \\ 2.365 & 1.237 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0.010 \\ -0.095 \end{bmatrix}, \\ B_2 &= \begin{bmatrix} -0.001 \\ -0.014 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0.054 \\ 0.094 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} -0.054 \\ -0.094 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0.054 & 0.005 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 0.054 & 0.005 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0.100 \\ 0.050 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} -0.100 \\ -0.050 \end{bmatrix}, \\ F_1 &= \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.100 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} -0.001 \\ -0.100 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

As funções de pertinência $h_1(z)$ e $h_2(z)$, com variáveis premissas $z(t) = x_1(t)$, são respectivamente definidas como

$$h_1(z) = 1 - \frac{2}{\pi}|z(t)|, \quad h_2(z) = \frac{2}{\pi}|z(t)|.$$

Usando $g = 1$ e $M = 1$, os Teoremas 2.4, 2.5 e Corolário 2.1 fornecem, respectivamente, as seguintes matrizes G_i , Z_i , $i = 1, 2$, para a lei de controle (2.12), e custos garantidos:

$$\begin{aligned} G_1 &= \begin{bmatrix} 0.2709 & -0.2578 \\ -0.4462 & 0.9984 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0.5756 & 0.1519 \\ -0.3163 & 1.1551 \end{bmatrix} \\ Z_1 &= [23.8254 \quad 22.5566], \quad Z_2 = [28.2351 \quad 27.7298] \text{ (estabilização)} \\ G_1 &= \begin{bmatrix} 0.0134 & -0.0144 \\ -0.0229 & 0.0781 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0.0334 & -0.1847 \\ 0.0034 & 0.7819 \end{bmatrix} \\ Z_1 &= [1.7325 \quad 2.6439], \quad Z_2 = [2.1726 \quad 1.3791] \text{ (custo } \mathcal{H}_2: \rho = 2.95) \\ G_1 &= \begin{bmatrix} 0.4022 & -1.3044 \\ -1.2684 & 4.1197 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0.3367 & -1.0945 \\ -1.1394 & 3.7569 \end{bmatrix} \\ Z_1 &= [4.3134 \quad -13.3039], \quad Z_2 = [3.5123 \quad -10.4992] \text{ (custo } \mathcal{H}_\infty: \gamma = 3.41) \end{aligned}$$

A simulação temporal, com $g = (2, 1)$ ($M = 2$), incluindo o sinal de controle $u(t)$, para a condição inicial $x_0 = [0.85, -1]'$ com $w(t) = 0.2\text{rand}(t) - 0.1$, $t \in [0, 20]$, é mostrada na Figura 2.5. Observe que as condições baseadas nos critérios de desempenho $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ fornecem uma ligeira melhoria no tempo de estabilização da resposta temporal, ao custo de sinais de controle com amplitudes um pouco maiores.

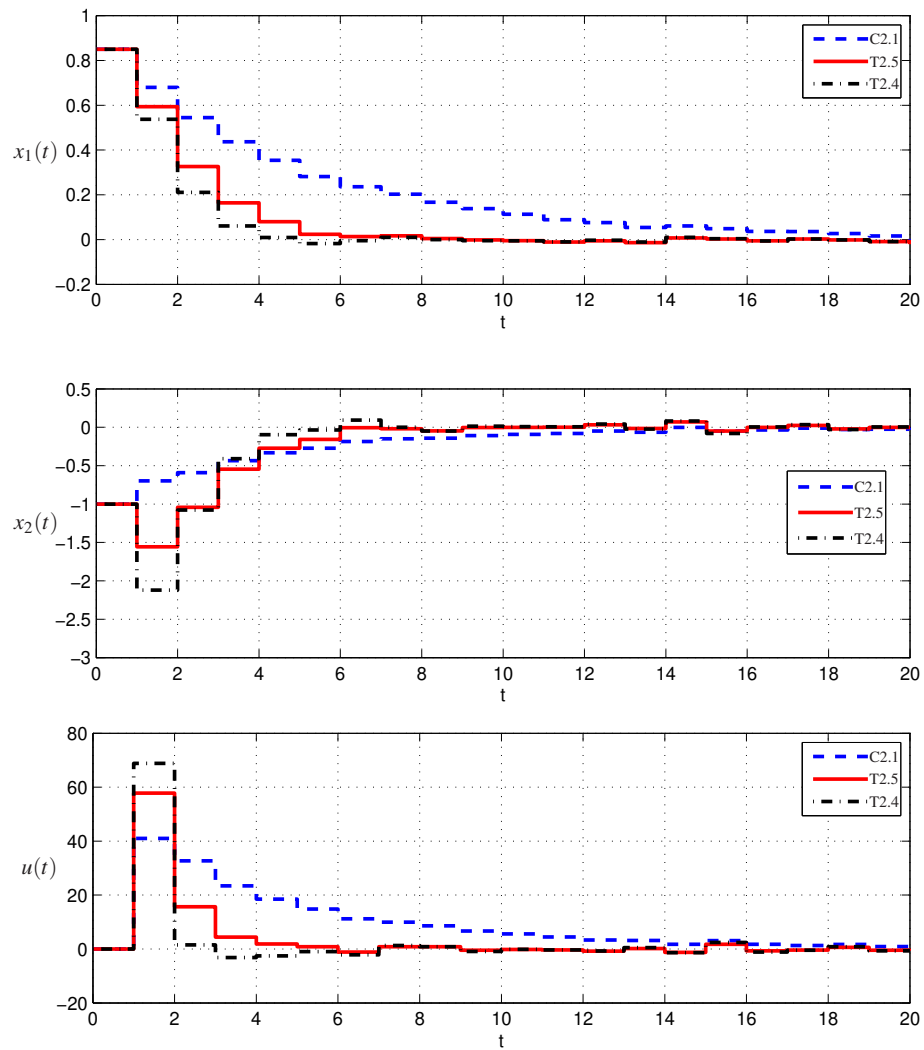


Figura 2.5: Simulação temporal do pêndulo invertido do Exemplo 2.6 com lei de controle obtida por meio do Teorema 2.4 (T2.4 — controle $\mathcal{H}_2$), Teorema 2.5 (T2.5 — controle $\mathcal{H}_\infty$) e Corolário 2.1 (C2.1 — estabilização).

2.5 Conclusão

Neste capítulo foram apresentadas relaxações LMIs para o cálculo de controladores para sistemas nebulosos T–S discretos no tempo com desempenho $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$. Uma função de Lyapunov nebulosa homogênea, polinomial de grau arbitrário nas variáveis premissas no instante atual e em diferentes instantes de tempo foi proposta para construir uma lei de controle de realimentação de estados dependente polinomialmente da informação presente e passada das funções de pertinência. Essa função generaliza e contém como casos particulares outras funções de Lyapunov nebulosas encontradas na literatura de sistemas nebulosos T–S. Exemplos numéricos ilustram que os métodos propostos são menos conservadores em comparação a outros disponíveis na literatura de sistemas nebulosos.

Controle de sistemas nebulosos T–S contínuos no tempo com taxas de variação limitadas

O objetivo deste capítulo é apresentar condições menos conservadoras para o projeto de controladores de realimentação de estados para sistemas nebulosos T–S contínuos no tempo utilizando as informações disponíveis das taxas de variação no tempo das funções de pertinência do modelo T–S. Como metodologia, são utilizadas funções de Lyapunov dependendo polinomialmente das funções de pertinência e uma modelagem politópica do espaço gerado pelos valores admissíveis da derivada temporal das funções de pertinência. Graças à caracterização das variáveis do problema na estrutura multi-simplex, a lei de controle pode depender somente das variáveis premissas selecionadas pelo projetista.

3.1 Introdução

Nas últimas décadas, considerável esforço tem sido realizado na busca de condições menos conservadoras para o projeto de controladores para sistemas nebulosos T–S contínuos no tempo. A abordagem com função de Lyapunov quadrática ainda é utilizada para garantir a estabilidade global do modelo nebuloso sem demandar informações referentes à taxa de variação das funções de pertinência, ao preço de um alto conservadorismo. Usando o teorema de Pólya [HLP52] e variáveis de folga adicionais, relaxações foram propostas para a estabilizabilidade quadrática em [MOP07, SA07, MOP09].

Resultados mais gerais podem ser obtidos considerando funções de Lyapunov nebulosas. Para lidar com a presença explícita da derivada temporal das funções de pertinência nas condições de estabilidade, limitantes superiores são usualmente considerados, como em [THW01, BPB01, THW03, TOW07, BGM09, Lam09, MPSM09, CY10].

Os métodos acima possuem algumas desvantagens, como a necessidade de se conhecer os limitantes das derivadas temporais das funções de pertinência, o modelamento conservador dessas derivadas temporais ou, nas demais estratégias mencionadas, restrições de estrutura. Além disso, essas técnicas exigem que todas as variáveis premissas estejam disponíveis em tempo real para serem utilizadas na lei de controle. Trabalhos considerando variáveis premissas não mensuráveis têm abordado o pro-

blema de síntese por meio de variáveis premissas estimadas [NS03, GKVT06, Yon09, YD10]. Esses trabalhos consideram o erro de estimação e as variáveis não mensuráveis como incertezas, produzindo, em geral, resultados conservadores.

O objetivo neste capítulo é, considerando os aspectos levantados acima, reduzir o conservadorismo na estabilização por realimentação de estados com critério $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas nebulosos T–S contínuos no tempo por meio de LMIs. Um procedimento sistemático para a relaxação das condições de estabilizabilidade é proposto por meio de funções de Lyapunov polinomiais homogêneas de grau arbitrário combinadas com controladores de realimentação de estado polinomiais. Um modelamento é proposto para os sistemas nebulosos T–S utilizando o produto cartesiano de simplexes, chamado *multi-simplex* [OBP08]. Em [Bar04], um modelamento similar é utilizado com o nome estrutura produto-tensor (do inglês, *tensor-product structure*) para descrever as matrizes do sistema, baseando-se em condições de estabilidade quadrática com matriz de Lyapunov contante. A estrutura produto-tensor também foi utilizada em sistemas nebulosos T–S em [AS07a, AS07b]. Na metodologia proposta neste capítulo, as derivadas temporais das funções de pertinência são modeladas como pertencentes a um politopo e os limitantes, se conhecidos, são utilizados nas condições para síntese dos controladores. Como uma das principais novidades, o procedimento de projeto do controlador dependente de parâmetros pode ser função apenas das variáveis premissas escolhidas pelo projetista, sendo robusto em relação às outras, que não são medidas. Exemplos numéricos ilustram a flexibilidade da estratégia proposta, que pode ser útil para a implementação prática de controladores, e que fornece resultados menos conservadores quando comparados aos obtidos com condições da literatura.

3.2 Preliminares

Considerando as regras do modelo nebuloso contínuo T–S dadas por (1.5), o modelo politópico como em (1.8) é descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\mu)x(t) + E(\mu)w(t) + B(\mu)u(t) \\ y(t) = C(\mu)x(t) + F(\mu)w(t) + D(\mu)u(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

com

$$(A, E, B, C, F, D)(\mu) = \sum_{i_1=1}^{r_1} \cdots \sum_{i_p=1}^{r_p} \mu_{1i_1}(z_1) \cdots \mu_{pi_p}(z_p) (A_{i_1 \cdots i_p}, E_{i_1 \cdots i_p}, B_{i_1 \cdots i_p}, C_{i_1 \cdots i_p}, F_{i_1 \cdots i_p}, D_{i_1 \cdots i_p}), \quad (3.2)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ a saída controlada, $w(t) \in \mathbb{R}^v$ o distúrbio de entrada, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, e as matrizes dos subsistemas lineares $A(\mu) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E(\mu) \in \mathbb{R}^{n \times v}$, $B(\mu) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(\mu) \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $F(\mu) \in \mathbb{R}^{q \times v}$, e $D(\mu) \in \mathbb{R}^{q \times m}$. As variáveis premissas são $z_1(t), \dots, z_p(t)$.

A definição de um multi-simplex bem como das funções de pertinência $\mu_j(z_j) = (\mu_{j1}(z_j), \mu_{j2}(z_j), \dots, \mu_{jr_j}(z_j)) \in \mathcal{U}_{r_j}$, $j = 1, \dots, p$, e $\mu(z) = (\mu_1(z_1), \mu_2(z_2), \dots, \mu_p(z_p)) \in \mathcal{U}_r$ são dadas na Seção 1.1.1.

A lei de controle não PDC a ser utilizada é definida por

$$u(t) = Z(\mu)G(\mu)^{-1}x(t). \quad (3.3)$$

Adicionalmente, combinações polinomiais de graus arbitrários das funções de pertinência podem também ser modeladas pela estrutura multi-simplex com grande vantagem para o projeto de controle, como é ilustrado à frente.

Para apresentar as condições de estabilidade e estabilizabilidade, são utilizadas as definições e notações para manipulação de polinômios $\mathcal{U}$ -homogêneos apresentadas na Seção 1.5. Assuma $r, g \in \mathbb{N}^p$ e o conjunto $\mathcal{K}_r(g)$ definido como o produto Cartesiano de simplexes dado em (1.43). Conforme (1.44), a matriz polinomial $\mathcal{U}$ -homogênea $P_g(\mu)$ de graus parciais $g = (g_1, \dots, g_p)$ é genericamente representada como¹

$$P_g(\mu) \triangleq \sum_{k \in \mathcal{K}_r(g)} \mu^k P_k, \quad (3.4)$$

sendo que μ^k são monômios homogêneos de grau g_i em cada variável μ_i , i.e.

$$\mu^k = \mu_1^{k_1} \mu_2^{k_2} \dots \mu_p^{k_p}, \quad \mu_i^{k_i} = \mu_{i1}^{k_{i1}} \mu_{i2}^{k_{i2}} \dots \mu_{ir_i}^{k_{ir_i}} \quad (3.5)$$

e $k_i = (k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{ir_i})$ é tal que $k_{i1} + k_{i2} + \dots + k_{ir_i} = g_i$ e $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são as matrizes coeficientes correspondentes.

O modelamento multi-simplex das matrizes nebulosas T-S nas LMIs das condições de análise de estabilidade e síntese de controladores é considerado como em (1.46)-(1.47).

3.2.1 Modelamento da derivada temporal das funções de pertinência

Para obter condições de estabilidade e estabilizabilidade com a estrutura multi-simplex para o sistema nebuloso T-S que levem em conta a derivada temporal das funções de pertinência, o modelamento da derivada temporal proposto em [CGTV04] para um único simplex é estendido para o caso multi-simplex. Assume-se que a taxa de variação das funções de pertinência seja limitada para todo $t \geq 0$, $j = 1, \dots, p$, $i = 1, \dots, r_j$:

$$\underline{\mu}_{ji} \leq \dot{\mu}_{ji} \leq \bar{\mu}_{ji}, \quad \underline{\mu}_{ji}, \bar{\mu}_{ji} \in \mathbb{R}, \quad 0 \in [\underline{\mu}_{ji}, \bar{\mu}_{ji}]. \quad (3.6)$$

Em outras palavras, supõe-se que $\dot{\mu}_{ji}$ pertença a um hiper-retângulo contendo a origem. Como $\mu_j \in \mathcal{U}_{r_j}$, para todo $t \geq 0$, tem-se

$$\dot{\mu}_{j1} + \dot{\mu}_{j2} + \dots + \dot{\mu}_{jr_j} = 0, \quad j = 1, \dots, p. \quad (3.7)$$

Como consequência, deve-se construir um conjunto definido pela interseção do hiper-retângulo (3.6) com o hiperplano em (3.7). Desse modo, o espaço ao qual as derivadas temporais das funções de

¹Por simplicidade de notação, a dependência de $\mu(z(t))$ em relação à variável premissa $z(t)$ é omitida a partir deste ponto.

pertinência pertencem ($\dot{\mu}_j \in \Omega_j$) pode ser modelado pelo conjunto convexo

$$\Omega_j = \left\{ \delta \in \mathbb{R}^{r_j} : \delta = \sum_{\ell=1}^{M_j} \eta_{j\ell} \mathcal{H}_j^{(\ell)}, \quad \eta_j \in \mathcal{U}_{M_j} \right\} \quad (3.8)$$

com $\mathcal{H}_j^{(\ell)}$, $\ell = 1, \dots, M_j$, vetores a serem determinados. A partir dos vetores $\mathcal{H}_j^{(\ell)}$ é possível construir uma matriz $\mathcal{H}_j$ cujas ℓ -ésimas colunas são dadas por $\mathcal{H}_j^{(\ell)}$. Observe que, devido a (3.7), a soma dos elementos do vetor $\mathcal{H}_j^{(\ell)}$ é nula. Como discutido em [LFC09], as colunas de $\mathcal{H}_j$ podem ser computadas por meio de cálculo manual ou por algoritmos mais eficientes. Observe que $\dot{\mu}$ assume valores que pertencem ao produto Cartesiano dos conjuntos dados por (3.8), ou seja,

$$\dot{\mu} \in \Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_p. \quad (3.9)$$

Considere o seguinte exemplo para $p = 1$, $r_1 = 2$ (número de parâmetros em $\mathcal{U}_2$):

$$-1 \leq \dot{\mu}_{11} \leq 1, \quad \dot{\mu}_{12} = -\dot{\mu}_{11}. \quad (3.10)$$

Levando em consideração (3.7) nos valores extremos de $\dot{\mu}_{11}$, $\dot{\mu}_{12}$ dados por (3.10), tem-se: se $\dot{\mu}_{11} = -1$, então $\dot{\mu}_{12} = 1$ pertence ao intervalo em (3.10), assim, $[-1 \ 1]'$ define uma coluna factível de $\mathcal{H}_1$; se $\dot{\mu}_{11} = 1$, então $\dot{\mu}_{12} = -1$ pertence ao intervalo e $[1 \ -1]'$ é a segunda coluna factível de $\mathcal{H}_1$. Portanto, o espaço ao qual os valores factíveis de $\dot{\mu}_{11}$, $\dot{\mu}_{12}$ pertencem é definido pela combinação convexa das colunas de $\mathcal{H}_1$ (vértices do conjunto), dado por

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \eta_{11} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \eta_{12} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}_1} \begin{bmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}_1 \in \mathbb{R}^{r \times M_1}, \quad (\eta_{11}, \eta_{12}) \in \mathcal{U}_2$$

e o número de soluções de (3.10) sob (3.7) é $M_1 = 2$.

Como reconhecido em muitos trabalhos, o cômputo dos limitantes das derivadas temporais das funções de pertinência pode ser um tarefa difícil em muitas situações práticas. Em geral, para análise de estabilidade, os limitantes podem ser computados analítica ou numericamente, mas o problema fica mais complexo na estabilizabilidade. Uma discussão de como podem ser escolhidos esses limitantes pode ser encontrada em [THW03, TOW07].

3.3 Resultados principais

A seguir são apresentadas condições de análise de estabilidade e síntese de controladores para o sistema (3.1) por meio da função de Lyapunov (3.4) e do conjunto convexo (3.8), que descreve o espaço no qual as derivadas temporais das funções de pertinência estão confinadas.

3.3.1 Condições de estabilidade

O teorema a seguir propõe relaxações LMIs de precisão crescente (em termos dos graus $g = (g_1, \dots, g_p)$) para o problema de análise de estabilidade do sistema nebuloso T–S dado em (3.1), com $u(t) = 0$ e $w(t) = 0$.

Teorema 3.1 *O sistema nebuloso T-S (3.1), com $u(t) = 0$ e $w(t) = 0$, é estável para todo $\mu \in \mathcal{U}$, $\dot{\mu} \in \Omega$ se existirem $g = (g_1, \dots, g_p)$, $k \in \mathcal{K}_r(g)$, e matrizes definidas positivas $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que, para todo $(q_1, \dots, q_p) \in \{1, \dots, M_1\} \times \dots \times \{1, \dots, M_p\}$, as seguintes LMIs são satisfeitas*

$$\Upsilon_{kq} \triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(\sigma) \\ \tilde{k} \preceq k}} (A'_{\tilde{k}} P_{k-\tilde{k}} + P_{k-\tilde{k}} A_{\tilde{k}}) + \Xi_{kq} < 0 \quad \forall k \in \mathcal{K}_r(g + \sigma) \quad (3.11)$$

com

$$\Xi_{kq} \triangleq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{r_i} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_r(e_{i|p}+1) \\ \hat{k} \preceq k}} \frac{2}{\hat{k}_i!} \left((k - \hat{k} + e_{i|p} \otimes e_{j|r_i})_{ij} P_{(k-\hat{k}+e_{i|p} \otimes e_{j|r_i})} \right) \mathcal{H}_i(j, q_i),$$

e $\mathcal{H}_i(j, q_i)$ é a entrada da j -ésima linha e da q_i -ésima coluna da matriz $\mathcal{H}_i$.

Prova: A estabilidade é assegurada se a derivada temporal da função de Lyapunov for negativa, ou seja,

$$A(\mu)' P_g(\mu) + P_g(\mu) A(\mu) + \frac{\partial P_g(\mu)}{\partial \mu} \dot{\mu} < 0. \quad (3.12)$$

Como $\dot{\mu} \in \Omega$, com Ω dado em (3.9), (3.12) pode ser reescrito como

$$A(\mu)' P_g(\mu) + P_g(\mu) A(\mu) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\partial P_g(\mu)}{\partial \mu_{ij}} \sum_{\ell=1}^{M_i} \eta_{i\ell} \mathcal{H}_i(j, \ell) < 0. \quad (3.13)$$

A expressão geral para a derivada da matriz de Lyapunov $P_g(\mu)$ com respeito ao ij -ésimo componente do multi-simplex μ_{ij} , $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, r_i$, é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_g(\mu)}{\partial \mu_{ij}} &= \sum_{k \in \mathcal{K}_r(g)} k_{ij} \mu_1^{k_1} \dots \hat{\mu}_i^{k_i} \dots \mu_p^{k_p} P_k \\ &= \sum_{k \in \mathcal{K}_r(g - e_{i|p})} \mu^k \left((k + e_{i|p} \otimes e_{j|r_i})_{ij} P_{(k+e_{i|p} \otimes e_{j|r_i})} \right) \end{aligned}$$

com

$$\hat{\mu}_i^{k_i} = \mu_{i1}^{k_{i1}} \dots \mu_{ij}^{k_{ij}-1} \dots \mu_{ir_i}^{k_{ir_i}}.$$

Homogeneizando o termo relacionado à derivada temporal da matriz de Lyapunov para o mesmo grau de $P_g(\mu)A(\mu)$, e então este termo em η , tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\partial P_g(\mu)}{\partial \mu_{ij}} \sum_{\ell=1}^{M_i} \eta_{i\ell} \mathcal{H}_i(j, \ell) &= \sum_{q_1=1}^{M_1} \dots \sum_{q_p=1}^{M_p} \eta_{1q_1} \dots \eta_{nq_p} \times \\ &\left(\sum_{k \in \mathcal{K}_r(g+\sigma)} \mu^k \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{r_i} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_r(e_{i|p}+1) \\ \hat{k} \preceq k}} \frac{2}{\hat{k}_i!} \left((k - \hat{k} + e_{i|p} \otimes e_{j|r_i})_{ij} P_{(k-\hat{k}+e_{i|p} \otimes e_{j|r_i})} \right) \mathcal{H}_i(j, q_i) \right). \end{aligned}$$

Conclui-se a prova verificando que o lado esquerdo de (3.13) pode ser escrito como

$$\sum_{q_1=1}^{M_1} \dots \sum_{q_p=1}^{M_p} \eta_{1q_1} \dots \eta_{nq_p} \left(\sum_{k \in \mathcal{K}_r(g+\sigma)} \mu^k \Upsilon_{kq} \right)$$

que é negativa definida se as LMIs (3.11) são satisfeitas. ■

3.3.2 Condições de estabilizabilidade

O próximo teorema apresenta condições LMIs parametrizadas em termos de $g = (g_1, \dots, g_p)$ e $s = (s_1, \dots, s_p)$ para a existência de um ganho de realimentação de estados não PDC dependente de parâmetros (3.3), assegurando a estabilidade em malha fechada para o sistema nebuloso T-S dado em (3.1).

Teorema 3.2 *Se existirem $g = (g_1, \dots, g_p)$, $s = (s_1, \dots, s_p)$, matrizes simétricas definidas positivas $W_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in \mathcal{K}_r(g)$, matrizes $G_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $k \in \mathcal{K}_r(s)$, e um escalar positivo β tais que, para todo $k \in \mathcal{K}_r(w)$, $w = \max\{g, s + \sigma\}$, e para todo $(q_1, \dots, q_p) \in \{1, \dots, M_1\} \times \dots \times \{1, \dots, M_p\}$, as LMIs*

$$\Omega_{kq} \triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-s-\sigma) \\ \tilde{k} \preceq k}} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_r(\sigma) \\ \tilde{k} + \hat{k} \preceq k}} \frac{(w-s-\sigma)!}{\tilde{k}!} \begin{bmatrix} A_{\hat{k}} G_{k-\tilde{k}-\hat{k}} + G'_{k-\tilde{k}-\hat{k}} A'_{\hat{k}} + B_{2_{\tilde{k}}} Z_{k-\tilde{k}-\hat{k}} + Z'_{k-\tilde{k}-\hat{k}} B'_{2_{\tilde{k}}} & \star \\ \beta \left(G'_{k-\tilde{k}-\hat{k}} A'_{\hat{k}} + Z'_{k-\tilde{k}-\hat{k}} B'_{2_{\tilde{k}}} \right) & 0 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} -\Xi_{kq} & \star \\ \Phi_k - \Psi_k & -\beta (\Psi_k + \Psi'_k) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.14)$$

são satisfeitas, com

$$\Xi_{kq} \triangleq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{r_i} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_r(w-g+e_{i|p}) \\ \hat{k} \preceq k}} \frac{(w_i - g_i + 1)!}{\hat{k}_i!} \left((k - \hat{k} + e_{i|p} \otimes e_{j|r_i})_{ij} W_{(k-\hat{k}+e_{i|p} \otimes e_{j|r_i})} \right) \mathcal{H}_i(j, q_i) \quad (3.15)$$

$$\Phi_k \triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-g) \\ \tilde{k} \preceq k}} \frac{(w-g)!}{\tilde{k}!} W_{k-\tilde{k}} \quad (3.16)$$

$$\Psi_k \triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-s) \\ \tilde{k} \preceq k}} \frac{(w-s)!}{\tilde{k}!} G_{k-\tilde{k}} \quad (3.17)$$

então

$$u(t) = \left(\sum_{k \in \mathcal{K}_r(s)} \mu^k Z_k \right) \left(\sum_{k \in \mathcal{K}_r(s)} \mu^k G_k \right)^{-1} x(t) \quad (3.18)$$

é uma lei de controle não PDC de realimentação de estados que estabiliza o sistema nebuloso T-S dado em (3.1) para todo $\mu \in \mathcal{U}$ e $\dot{\mu} \in \Omega$.

Prova: Primeiramente, note que

$$\mathcal{D}(\mu) + \mathcal{Y}(\mu) + \mathcal{Y}(\mu)' = \sum_{q_1=1}^{M_1} \cdots \sum_{q_p=1}^{M_p} \eta_{1q_1} \cdots \eta_{nq_p} \left(\sum_{k \in \mathcal{K}_r(w)} \mu^k \Omega_{kq} \right) \quad (3.19)$$

com

$$\mathcal{D}(\mu) \triangleq \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\partial W_g(\mu)}{\partial \mu_{ij}} \sum_{\ell=1}^{M_i} \eta_{i\ell} \mathcal{H}_i(j, \ell) & W_g(\mu) \\ W_g(\mu) & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{Y}(\mu) \triangleq \begin{bmatrix} A(\mu) G_s(\mu) + B(\mu) Z_s(\mu) & 0 \\ -G_s(\mu) + \beta (A(\mu) G_s(\mu) + B(\mu) Z_s(\mu))' & -\beta G_s(\mu) \end{bmatrix}.$$

O lado direito de (3.19) é definido negativo se as LMIs (3.14) são satisfeitas. Observe que o lado esquerdo de (3.19) é equivalente a

$$\mathcal{D}(\mu) + \mathcal{X}(\mu)\mathcal{B}(\mu) + \mathcal{B}(\mu)' \mathcal{X}(\mu)' \quad (3.20)$$

com

$$\mathcal{X}(\mu) \triangleq [G_s(\mu) \quad \beta G_s(\mu)]' \quad \mathcal{B}(\mu) \triangleq [A_{cl}(\mu)' \quad -I]$$

e

$$A_{cl}(\mu) \triangleq A(\mu) + B(\mu)Z_s(\mu)G_s(\mu)^{-1}. \quad (3.21)$$

Usando o lema de Finsler [dOS01] e o fato de que $\dot{\mu} \in \Omega$ é modelado como em (3.9), verifica-se que (3.20) é equivalente a

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mu)^\perp \mathcal{D}(\mu) \mathcal{B}(\mu)^\perp &= [I \quad A_{cl}(\mu)] \mathcal{D}(\mu) [I \quad A_{cl}(\mu)]' \\ &= A_{cl}(\mu)W_g(\mu) + W_g(\mu)A_{cl}(\mu)' - \frac{\partial W_g(\mu)}{\partial \mu} \dot{\mu}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Pré e pós multiplicando (3.22) por $W_g(\mu)^{-1}$, usando a transformação de variáveis $W_g(\mu)^{-1} = P_g(\mu)$ e levando em consideração que

$$P_g(\mu)W_g(\mu) = I \Rightarrow \frac{\partial W_g(\mu)}{\partial \mu} \dot{\mu} = -P_g(\mu)^{-1} \frac{\partial P_g(\mu)}{\partial \mu} \dot{\mu} P_g(\mu)^{-1}, \quad (3.23)$$

tem-se

$$A_{cl}(\mu)' P_g(\mu) + P_g(\mu) A_{cl}(\mu) + \frac{\partial P_g(\mu)}{\partial \mu} \dot{\mu} < 0.$$

Conclui-se que se as LMIs (3.14) são satisfeitas, o sistema nebuloso T-S em malha fechada é estável. ■

A condição de estabilização dada pelo Teorema 3.2 pode ser estendida para atender os critérios de desempenho de custo garantido $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, como mostrado em seguida.

Teorema 3.3 *Seja β um dado escalar positivo. Se existirem $g = (g_1, \dots, g_p)$, $s = (s_1, \dots, s_p)$, matrizes simétricas definidas positivas $W_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in \mathcal{K}_r(g)$, matrizes $T_k = T_k' \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $G_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $k \in \mathcal{K}_r(s)$, e um escalar positivo ρ , tais que, para todo $k \in \mathcal{K}_r(w)$, $w = \max\{g, s + \sigma\}$, e para todo $(q_1, \dots, q_p) \in \{1, \dots, M_1\} \times \dots \times \{1, \dots, M_p\}$, as LMIs*

$$\begin{aligned} \Omega_{kq} \triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-s-\sigma) \\ \tilde{k} \preceq k}} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_r(\sigma) \\ \tilde{k} + \hat{k} \preceq k}} \frac{(w-s-\sigma)!}{\tilde{k}!} &\left[\begin{array}{cc} \beta \left(G'_{k-\tilde{k}-\hat{k}} A'_{\hat{k}} + Z'_{k-\tilde{k}-\hat{k}} B'_{2\hat{k}} \right) & \begin{matrix} \star & \star \\ 0 & \star \end{matrix} \\ 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \end{array} \right] \\ &+ \left[\begin{array}{ccc} -\Xi_{kq} & \star & \star \\ \Phi_k - \Psi_k & -\beta (\Psi_k + \Psi_k') & \star \\ \Theta'_k & 0 & -\Upsilon_k \end{array} \right] < 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\Delta_k \triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-s-\sigma) \\ \tilde{k} \preceq k}} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_r(\sigma) \\ \tilde{k} + \hat{k} \preceq k}} \frac{(w-s-\sigma)!}{\tilde{k}!} \begin{bmatrix} 0 & \star \\ C_{\hat{k}} G_{k-\tilde{k}-\hat{k}} + D_{2_{\hat{k}}} Z_{k-\tilde{k}-\hat{k}} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_k + \Psi'_k - \Phi_k & \star \\ 0 & \Lambda_k \end{bmatrix} > 0 \quad (3.25)$$

$$Tr(T_{\bar{k}}) < \sum_{\bar{k} \in \mathcal{K}_r(g)} \frac{g!}{\bar{k}!} \rho^2, \quad \bar{k} \in \mathcal{K}_r(g) \quad (3.26)$$

são satisfeitas, com Ξ_{kq} dado por (3.15), Φ_k dado por (3.16), Ψ_k dado por (3.17), e

$$\mathcal{N}_{k\tilde{k}\hat{k}} \triangleq A_{\hat{k}} G_{k-\tilde{k}-\hat{k}} + G'_{k-\tilde{k}-\hat{k}} A'_{\hat{k}} + B_{\hat{k}} Z_{k-\tilde{k}-\hat{k}} + Z'_{k-\tilde{k}-\hat{k}} B'_{\hat{k}} \quad (3.27)$$

$$\Theta_k \triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-\sigma) \\ \tilde{k} \preceq k}} \frac{(w-\sigma)!}{\tilde{k}!} E_{k-\tilde{k}} \quad (3.28)$$

$$\Upsilon_k \triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w) \\ \tilde{k} \preceq k}} \frac{w!}{(k-\tilde{k})!} I \quad (3.29)$$

$$\Lambda_k \triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-g) \\ \tilde{k} \preceq k}} \frac{(w-g)!}{\tilde{k}!} T_{k-\tilde{k}} \quad (3.30)$$

então (3.18) é uma lei de controle não PDC de realimentação de estados que estabiliza o sistema nebuloso T-S dado em (3.1) para todo $\mu \in \mathcal{U}$ e $\dot{\mu} \in \Omega$, e ρ é um custo garantido $\mathcal{H}_2$ para o sistema em malha fechada.

Prova: Primeiramente, observe que

$$\mathcal{D}(\mu) + \mathcal{Y}(\mu) + \mathcal{Y}(\mu)' = \sum_{q_1=1}^{M_1} \cdots \sum_{q_p=1}^{M_p} \eta_{1q_1} \cdots \eta_{nq_p} \left(\sum_{k \in \mathcal{K}_r(w)} \mu^k \Omega_{kq} \right) \quad (3.31)$$

com

$$\mathcal{D}(\mu) \triangleq \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\partial W_g(\mu)}{\partial \mu_{ij}} \sum_{\ell=1}^{M_i} \eta_{i\ell} \mathcal{H}_i(j, \ell) & W_g(\mu) & 0 \\ W_g(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Y}(\mu) \triangleq \begin{bmatrix} A(\mu)G_s(\mu) + B(\mu)Z_s(\mu) & 0 & 0 \\ \mathcal{M}(\mu) & -\beta G_s(\mu) & 0 \\ E(\mu) & 0 & -I \end{bmatrix}$$

e

$$\mathcal{M}(\mu) = -G_s(\mu) + \beta (A(\mu)G_s(\mu) + B(\mu)Z_s(\mu))'.$$

O lado direito de (3.31) é definido negativo se as LMIs (3.24) são factíveis. Similarmente à prova do Teorema 3.2, o lado esquerdo de (3.31) é equivalente a

$$\mathcal{D}(\mu) + \mathcal{X}(\mu)\mathcal{B}(\mu) + \mathcal{B}(\mu)'\mathcal{X}(\mu)' \quad (3.32)$$

com

$$\mathcal{X}(\mu) \triangleq \begin{bmatrix} G_s(\mu) & \beta G_s(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}'$$

e

$$\mathcal{B}(\mu) \triangleq \begin{bmatrix} A_{cl}(\mu)' & -I & 0 \\ E(\mu)' & 0 & -I \end{bmatrix}$$

sendo $A_{cl}(\mu)$ dado em (3.21). Usando o Lema de Finsler [dOS01] e o fato de que $\dot{\mu} \in \Omega$ é modelado como (3.9), (3.32) é equivalente a

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mu)^{\perp'} \mathcal{D}(\mu) \mathcal{B}(\mu)^{\perp} &= [I \quad A_{cl}(\mu) \quad E(\mu)] \mathcal{D}(\mu) [I \quad A_{cl}(\mu) \quad E(\mu)]' \\ &= A_{cl}(\mu) W_g(\mu) + W_g(\mu) A_{cl}(\mu)' + E(\mu) E(\mu)' - \frac{\partial W_g(\mu)}{\partial \mu} \dot{\mu} < 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Note também que

$$\begin{bmatrix} G_s(\mu) + G_s(\mu)' - W_g(\mu) & \star \\ C(\mu) G_s(\mu) + D(\mu) Z_s(\mu) & T_s(\mu) \end{bmatrix} = \sum_{k \in \mathcal{K}_r(w)} \mu^k \Delta_k > 0 \quad (3.34)$$

pois (3.25) é satisfeito. Multiplique o lado esquerdo de (3.34) à esquerda por $[C_{cl}(\mu) \quad -I]$, com

$$C_{cl}(\mu) \triangleq C(\mu) + D(\mu) Z_s(\mu) G_s(\mu)^{-1}, \quad (3.35)$$

e à direita pelo seu transposto, para obter $T_s(\mu) > C_{cl}(\mu) W_g(\mu) C_{cl}(\mu)'$.

Portanto, a condição (3.26) assegura que ρ é um limitante superior (custo garantido) para a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema e, se as LMIs (3.24) são satisfeitas, o sistema nebuloso T-S em malha fechada é estável. ■

Teorema 3.4 *Seja β um dado escalar positivo. Se existirem $g = (g_1, \dots, g_p)$, $s = (s_1, \dots, s_p)$, matrizes simétricas definidas positivas $W_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in \mathcal{K}_r(g)$, matrizes $G_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $k \in \mathcal{K}_r(s)$, e um escalar positivo γ , tais que, para todo $k \in \mathcal{K}_r(w)$, $w = \max\{g, s + \sigma\}$, e para todo $(q_1, \dots, q_p) \in \{1, \dots, M_1\} \times \dots \times \{1, \dots, M_p\}$, as LMIs*

$$\begin{aligned} \Omega_{kq} \triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-s-\sigma) \\ \tilde{k} \preceq k}} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_r(\sigma) \\ \tilde{k} + \hat{k} \preceq k}} \frac{(w-s-\sigma)!}{\tilde{k}!} & \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{k\tilde{k}\hat{k}} & \star & \star & \star \\ \beta \left(G'_{k-\tilde{k}-\hat{k}} A'_{\tilde{k}} + Z'_{k-\tilde{k}-\hat{k}} B'_{2\tilde{k}} \right) & 0 & \star & \star \\ \mathcal{J}_{k\tilde{k}\hat{k}} & \beta \mathcal{J}_{k\tilde{k}\hat{k}} & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -\Xi_{kq} & \star & \star & \star \\ \Phi_k - \Psi_k & -\beta (\Psi_k + \Psi'_k) & \star & \star \\ 0 & 0 & -\Upsilon_k & \star \\ \Theta'_k & 0 & \Sigma'_k & -\gamma^2 \Upsilon_k \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

sejam satisfeitas, com $\mathcal{N}_{k\tilde{k}\hat{k}}$ dado por (3.27), Ξ_{kq} dado por (3.15), Φ_k dado por (3.16), Ψ_k dado por (3.17), Θ_k dado por (3.28), Υ_k dado por (3.29), e

$$\mathcal{J}_{k\tilde{k}\hat{k}} \triangleq C_{\tilde{k}} G_{k-\tilde{k}-\hat{k}} + D_{2\tilde{k}} Z_{k-\tilde{k}-\hat{k}} \quad \Sigma_k \triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-\sigma) \\ \tilde{k} \preceq k}} \frac{(w-\sigma)!}{\tilde{k}!} F_{k-\tilde{k}}$$

então (3.18) é uma lei de controle estabilizante não PDC de realimentação de estado para todo $\mu \in \mathcal{U}$ e $\dot{\mu} \in \Omega$, e γ é um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema em malha fechada.

Prova: Primeiramente, note que

$$\mathcal{G}(\mu) = \sum_{q_1=1}^{M_1} \cdots \sum_{q_p=1}^{M_p} \eta_{1q_1} \cdots \eta_{pq_p} \left(\sum_{k \in \mathcal{K}_r(w)} \mu^k \Omega_{kq} \right) \quad (3.37)$$

em que

$$\mathcal{G}(\mu) \triangleq \begin{bmatrix} A_{cl}(\mu)G_s(\mu) + G_s(\mu)'A_{cl}(\mu)' - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\partial W_g(\mu)}{\partial \mu_{ij}} \sum_{\ell=1}^{M_i} \eta_{i\ell} \mathcal{H}_i(j, \ell) \\ \beta G_s(\mu)'A_{cl}(\mu)' + W_g(\mu) - G_s(\mu) \\ C_{cl}(\mu)G_s(\mu) \\ E(\mu)' \\ -\beta(G_s(\mu) + G_s(\mu)')^* & \begin{matrix} \star & \star \\ \star & \star \end{matrix} \\ C_{cl}(\mu)\beta G_s(\mu) & \begin{matrix} -I & \star \\ 0 & F(\mu)' \end{matrix} \\ 0 & \begin{matrix} -\gamma^2 I \end{matrix} \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

com $A_{cl}(\mu)$ como em (3.21) e $C_{cl}(\mu)$ como em (3.35). Defina

$$T(\mu) \triangleq \begin{bmatrix} I & A_{cl}(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & C_{cl}(\mu) & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Com $\dot{\mu} \in \Omega$ dado por (3.9), pode-se multiplicar (3.38) por $T(\mu)$ à esquerda e por $T(\mu)'$ à direita para obter

$$\begin{bmatrix} A_{cl}(\mu)W_g(\mu) + W_g(\mu)A_{cl}(\mu)' - \frac{\partial W_g(\mu)}{\partial \mu} \dot{\mu} & \star & \star \\ C_{cl}(\mu)W_g(\mu) & -I & \star \\ E(\mu)' & F(\mu)' & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.39)$$

Pré e pós multiplicando (3.39) por

$$\begin{bmatrix} W_g(\mu)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix},$$

fazendo a transformação de variáveis $W_g(\mu)^{-1} = P_g(\mu)$ e levando em consideração (3.23), tem-se

$$\begin{bmatrix} A_{cl}(\mu)'P_g(\mu) + P_g(\mu)A_{cl}(\mu) + \frac{\partial P_g(\mu)}{\partial \mu} \dot{\mu} & \star & \star \\ E(\mu)'P_g(\mu) & -\gamma^2 I & \star \\ C_{cl}(\mu) & F(\mu) & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.40)$$

Aplicando o complemento de Schur na expressão (3.40), obtém-se o *bounded real lemma* [BEFB94] para sistemas variantes no tempo e, como consequência, γ é um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema em malha fechada. ■

O Teorema 3.2 baseia-se na aplicação do Lema de Finsler para a estabilizabilidade de sistemas contínuos. A utilização de um modelamento da derivada temporal da função de pertinência, e de graus arbitrários de forma independente para a matriz de Lyapunov e variáveis de folga, que são polinômios homogêneos com variáveis no multi-simplex, produz condições menos conservadoras e mais flexíveis, quando comparadas às da literatura. Uma busca linear deve ser feita na variável escalar β .

Um importante aspecto do Lema de Finsler é que o ganho de controle não é parametrizado pela matriz de Lyapunov. Portanto, as matrizes de Lyapunov podem ter estruturas independentes que, combinadas com a representação multi-simplex, possibilitam o projeto de controladores nebulosos de grau arbitrário dependentes somente das variáveis premissas selecionadas pelo projetista. Observe em (3.18) que as matrizes da lei de controle são compostas pelas funções de pertinência $\mu_i(z_i)$, $i = 1, \dots, p$, e, portanto, a escolha do grau s_i possibilita decidir de qual variável premissa z_i o controlador dependerá e qual não será utilizada (robusto em relação a z_i). Essa flexibilidade ainda não havia sido proposta em sistemas nebulosos T-S. Observe também que os graus das variáveis $G_s(\mu)$ e $Z_s(\mu)$, $s = (s_1, \dots, s_p)$, podem ser diferentes dos graus da matriz de Lyapunov, $g = (g_1, \dots, g_p)$. Consequentemente, uma escolha apropriada do grau do controlador não interfere no grau da matriz de Lyapunov.

Como comentário final, observe que as relaxações do Teoremas 3.2, 3.3, e 3.4 são apenas suficientes, porém mais e mais precisas à medida que os graus $g = (g_1, \dots, g_p)$ e $s = (s_1, \dots, s_p)$ aumentam, como ilustrado na sequência.

3.4 Exemplos numéricos

Algumas informações pertinentes à implementação computacional são necessárias. A fim de diminuir o conservadorismo na síntese, o grau da matriz de Lyapunov deve aumentar ao preço de um maior esforço computacional. Por outro lado, a escolha de s (grau do controlador) depende apenas da estratégia do projetista para propósitos de implementação.

Para obter um ganho constante, basta escolher $s = (0, \dots, 0)$. Um ganho de controle que depende apenas de uma variável premissa específica é construído escolhendo-se o grau correspondente s_i diferente de zero. Se o limite da derivada temporal de uma variável premissa não é conhecido, o grau respectivo da matriz de Lyapunov $\mathcal{U}$ -homogênea é fixado em zero. Os demais graus das demais variáveis premissas podem ser livremente escolhidos.

Como discutido em [THW03], em muitos casos os limitantes da derivada temporal das funções de pertinência podem ser encontrados analítica ou numericamente. Frequentemente, esses limitantes são conhecidos, mas algumas variáveis premissas não estão disponíveis para a realimentação em tempo real, ou a implementação de sensores para medição de todas as variáveis é inviável economicamente. Graças à sua flexibilidade, a estrutura multi-simplex pode lidar com essas situações de maneira eficiente.

Exemplo 3.1 Considere o seguinte sistema nebuloso T-S extraído de [RW06], também investigado

em [MPA09, Exemplo 1]:

$$\mathcal{R}_1 : \text{Se } x_1 \text{ é } M_1^1 \text{ e } x_2 \text{ é } M_2^1 \text{ então } \dot{x} = A_{11}x$$

$$\mathcal{R}_2 : \text{Se } x_1 \text{ é } M_1^1 \text{ e } x_2 \text{ é } M_2^2 \text{ então } \dot{x} = A_{12}x$$

$$\mathcal{R}_3 : \text{Se } x_1 \text{ é } M_1^2 \text{ e } x_2 \text{ é } M_2^1 \text{ então } \dot{x} = A_{21}x$$

$$\mathcal{R}_4 : \text{Se } x_1 \text{ é } M_1^2 \text{ e } x_2 \text{ é } M_2^2 \text{ então } \dot{x} = A_{22}x$$

com

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1/5(3b-2) & 1/5(3a-4) \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1/5(2b-3) & 1/5(2a-6) \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix}$$

para dadas constantes a e b . Para $i = 1, 2$, as funções de pertinência normalizadas de M_i^1 e M_i^2 são dadas como

$$\mu_{i1}(x_i) = \begin{cases} (1 - \sin(x_i))/2, & \text{se } |x_i| \leq \pi/2 \\ 0, & \text{se } x_i > \pi/2 \\ 1, & \text{se } x_i < -\pi/2 \end{cases}$$

$$\mu_{i2}(x_i) = 1 - \mu_{i1}(x_i).$$

A estabilidade do sistema é verificada para vários valores dos parâmetros (a, b) , considerando $a \in [-16, -2]$, com $|\dot{\mu}_{ij}| < 0.85$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$. Este mesmo limitante também foi adotado em [MPA09, MPSM09] para fins de comparação. A Tabela 3.1 mostra os máximos valores obtidos de b para o qual o Teorema 3.1 é factível, a complexidade numérica associada (em termos de V , L e tempo computacional, em segundos). Os maiores valores de b obtidos pelos métodos [THW03, TOW07, MPA09, MPSM09] que levam em consideração os mesmos limitantes de $|\dot{\mu}_{ij}|$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, também são mostrados. Como pode ser observado, o Teorema 3.1 fornece os melhores resultados, em termos dos valores de b , principalmente devido ao modelo proposto para a derivada de μ e aos graus de liberdades extras obtidos com o aumento dos graus $g = (g_1, g_2)$ (observe neste exemplo que g_2 tem um papel mais importante que g_1). Para obter os maiores valores de b para taxas ilimitadas da derivada temporal das funções de pertinência, os resultados obtidos com a estabilidade quadrática ([KL00, TAA03] e Teorema 3.1 com $g = (0, 0)$) e a função de Lyapunov com integral de linha [RW06] são também mostrados na Tabela 3.1.

Exemplo 3.2 Considere o sistema nebuloso tratado em [MPA09], com as seguintes regras

$$\mathcal{R}_1 : \text{Se } x_2(t) \text{ é } M_1^1 \text{ então } \dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t)$$

$$\mathcal{R}_2 : \text{Se } x_2(t) \text{ é } M_1^2 \text{ então } \dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t),$$

para as constantes dadas a e b ,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3.6 & -1.6 \\ 6.2 & -4.3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & -1.6 \\ 6.2 & -4.3 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.45 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -b \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Tabela 3.1: Máximos valores de b para estabilidade do Exemplo 3.1 pelo Teorema 3.1 para diferentes graus parciais $g = (g_1, g_2)$ (denotado por $T3.1_{(g_1, g_2)}$), comparados com [KL00, Teorema 7], [TAA03, Teorema 5], [THW03, Teorema 2], [TOW07, Corolário 3], [RW06, Teorema 3], [MPSM09, Teorema 6], e [MPA09, Teorema 1]. O número de variáveis escalares é V e o número de linhas LMIs é L .

Método	a					L	V	Tempo (s)
	-16	-12	-8	-4	-2			
[KL00, T7]	86	63	39	16	0	30	33	0.03
[TAA03, T5]	86	63	39	16	0	82	141	0.06
$T3.1_{(0,0)}$	86	63	39	16	0	34	3	0.02
[RW06, T3]	414	305	195	102	47	30	33	0.03
[THW03, T2]	242	164	102	39	16	30	33	0.03
[TOW07, C3]	320	219	133	63	23	30	33	0.03
[MPSM09, T6]	859	531	281	94	31	56	15	0.03
[MPA09, T1]	961	594	313	109	39	32	23	0.05
$T3.1_{(1,1)}$	1891	1172	625	234	94	80	12	0.05
$T3.1_{(1,3)}$	3047	1828	922	328	125	136	24	0.08
$T3.1_{(3,1)}$	2430	1477	758	266	102	136	24	0.08
$T3.1_{(3,3)}$	4727	2789	1383	469	188	232	48	0.16

O objetivo deste exemplo é investigar a estabilizabilidade para vários valores de a e b , com $|\dot{\mu}_i| < 1$, $i = 1, 2$. Os máximos valores de b para $a = \{0, 5, 15, 20\}$ em que o Teorema 3.2 é factível são mostrados na Tabela 3.2, com o respectivo esforço computacional. A variável escalar β do Teorema 3.2 e o parâmetro escalar necessário em [MPA09, Teorema 6] foram escolhidos do conjunto $\{10, 1, 0.1, 0.01, 0.04, 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}\}$. Comparados com [TOW07, Corolário 3] e [MPA09, Teorema 6], tomando o valor de a como referência, as condições do Teorema 3.2 (denotado por $T3.2_{(g_1, s_1)}$, sendo $g = g_1$ o grau da matriz de Lyapunov e $s = s_1$ o grau das matrizes que compõem a lei de controle) fornecem ganhos estabilizantes não PDC para os valores mais altos de b (para graus g_1 e s_1 maiores que 2), ao preço de um maior esforço computacional que, todavia, permanece aceitável. As abordagens baseadas na função de Lyapunov comum, [KL00, Teorema 11] e Teorema 3.2 com $g_1 = 0$ ($T3.2_{(0,1)}$), obtêm $b = 1.07$ como máximo valor factível, independente do valor de a e para $\dot{\mu}_{1i}$, $i = 1, 2$, ilimitados. Utilizando a modelagem proposta, conclui-se, para esse exemplo, que o grau g_1 tem maior influência na factibilidade, indicando que menores valores para o grau s_1 podem ser usados para o controlador, economizando tempo computacional e *hardware* para fins de implementação prática.

Tabela 3.2: Máximos valores de b para estabilização do Exemplo 3.2 pelo Teorema 3.2 para diferentes graus parciais g_1 e s_1 (denotado por $T3.2_{(g_1, s_1)}$), comparados com [KL00, Teorema 11] (estabilizabilidade quadrática), [TOW07, Corolário 3], e [MPA09, Teorema 6], para $|\dot{\mu}_{1i}| < 1$, $i = 1, 2$. O número de variáveis escalares é V e o número de linhas LMIs é L .

Método	a					L	V	Tempo (s)
	0	5	10	15	20			
[KL00, T7]	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	26	15	0.03
$T3.2_{(0,1)}$	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	26	15	0.03
[TOW07, C3]	1.28	1.39	1.41	1.42	1.42	26	43	0.16
[MPA09, T6]	1.20	1.44	1.55	1.61	1.67	20	17	0.03
$T3.2_{(1,1)}$	1.55	2.06	2.27	2.38	2.45	28	18	0.03
$T3.2_{(1,4)}$	1.59	2.22	2.44	2.53	2.61	52	36	0.05
$T3.2_{(4,1)}$	1.61	2.25	2.59	2.84	3.03	50	27	0.05
$T3.2_{(2,2)}$	1.61	2.28	2.75	3.14	3.50	38	27	0.04
$T3.2_{(4,4)}$	1.67	2.47	3.05	3.52	3.92	58	45	0.06

Exemplo 3.3 Considere o sistema nebuloso T–S com as seguintes regras

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_1 : \text{ Se } z_1 \text{ é } M_1^1 \text{ e } z_2 \text{ é } M_2^1 \text{ então} & \quad \mathcal{R}_2 : \text{ Se } z_1 \text{ é } M_1^1 \text{ e } z_2 \text{ é } M_2^2 \text{ então} \\
 \begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + E_{11}w + B_{11}u \\ y = C_{11}x + F_{11}w + D_{11}u \end{cases} & \quad \begin{cases} \dot{x} = A_{12}x + E_{12}w + B_{12}u \\ y = C_{12}x + F_{12}w + D_{12}u \end{cases} \\
 \mathcal{R}_3 : \text{ Se } z_1 \text{ é } M_1^2 \text{ e } z_2 \text{ é } M_2^1 \text{ então} & \quad \mathcal{R}_4 : \text{ Se } z_1 \text{ é } M_1^2 \text{ e } z_2 \text{ é } M_2^2 \text{ então} \\
 \begin{cases} \dot{x} = A_{21}x + E_{21}w + B_{21}u \\ y = C_{21}x + F_{21}w + D_{21}u \end{cases} & \quad \begin{cases} \dot{x} = A_{22}x + E_{22}w + B_{22}u \\ y = C_{22}x + F_{22}w + D_{22}u \end{cases}
 \end{aligned}$$

e matrizes do sistema dadas por

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \begin{bmatrix} -0.8 & 2.8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -0.8 & 2.2 \\ 0.8 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} -3.4 & 1 \\ -1.4 & -2.4 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -3.4 & 0.4 \\ -2.6 & -3.6 \end{bmatrix} \\
 E_{11} &= \begin{bmatrix} 0.4 \\ -1.4 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2.2 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} -0.4 \\ -0.4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$B_{11} = B_{12} = B_{21} = B_{22} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 1.3 \end{bmatrix} \quad C_{11} = C_{12} = C_{21} = C_{22} = \begin{bmatrix} 0.9 & 1.7 \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = 0.0, \quad D_{12} = 0.2, \quad D_{21} = 1.6, \quad D_{22} = 1.8$$

$$F_{11} = F_{12} = F_{21} = F_{22} = 2.$$

Seja $|\dot{\mu}_{ij}| \leq \delta_{ij} = \delta$, $i, j = 1, 2$. Este exemplo ilustra vantagens importantes do método proposto. Suponha que há recursos suficientes para implementar a medição em tempo real de apenas uma grandeza física e, consequentemente, apenas uma variável premissa esteja disponível para o controlador. Nessa situação, é desejável saber qual variável premissa produz o melhor desempenho na realimentação. No método proposto, o efeito de cada variável premissa pode ser avaliado independentemente.

A Tabela 3.3 mostra os valores da norma $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ para $\delta = 1$ em três casos: *i*) controlador robusto (i.e., $s = (0, 0)$), *ii*) apenas μ_2 está disponível para realimentação (i.e., $s = (0, 1)$), e *iii*) apenas μ_1 está disponível para realimentação (i.e., $s = (1, 0)$). Em ambos os Teoremas 3.3 e 3.4, foi utilizado $\beta = 1$. Observa-se, que com o aumento dos graus da função de Lyapunov e das matrizes que compõem o controlador, os valores dos custos garantidos diminuem. As Figuras 3.1 e 3.2 mostram o custo garantido $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ como função de δ , $0 < \delta \leq 3$, para as três situações descritas, com os graus $g = (1, 1)$ da matriz da função de Lyapunov. Como esperado, os menores custos garantidos são obtidos para os menores limitantes de taxa de variação das funções de pertinência. Da Tabela 3.3 e Figuras 3.1 e 3.2, conclui-se que usando a variável premissa μ_1 na lei de controle obtêm-se limitantes menores para as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, quando comparados à situação de utilizar-se somente μ_2 . Como esperado, o pior caso ocorre quando nenhuma informação das variáveis premissas está disponível para a lei de controle (controlador robusto).

Tabela 3.3: Valores dos custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ do Exemplo 3.3 usando Teorema 3.3 (custo garantido $\mathcal{H}_2$ dado por ρ) e Teorema 3.4 (custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ) com graus parciais $g = (g_1, g_2)$, $s = (s_1, s_2)$, $\beta = 1$, e $|\dot{\mu}_{ij}| \leq \delta = 1$.

Graus		Teorema 3.3		Teorema 3.4	
(g_1, g_2)	(s_1, s_2)	ρ	Tempo (s)	γ	Tempo (s)
(1, 1)	(0, 0)	6.24	0.13	2.32	0.13
(2, 2)	(0, 0)	4.87	0.19	2.27	0.26
(3, 3)	(0, 0)	2.11	0.39	2.25	0.47
(1, 1)	(0, 1)	3.35	0.14	2.25	0.16
(2, 2)	(0, 2)	3.05	0.27	2.22	0.31
(3, 3)	(0, 3)	1.58	0.45	2.20	0.52
(1, 1)	(1, 0)	0.89	0.13	2.14	0.17
(2, 2)	(2, 0)	0.80	0.25	2.11	0.34
(3, 3)	(3, 0)	0.70	0.47	2.11	0.67

3.5 Conclusão

Neste capítulo foram apresentadas novas relaxações para a análise de estabilidade e síntese de controladores de realimentação de estado por meio de funções de Lyapunov nebulosas para sistemas nebulosos T-S contínuos no tempo. As condições propostas são menos conservadoras que as existentes na literatura, conforme os exemplos numéricos apresentados ilustram. Extensões para os critérios de desempenho $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ também foram fornecidas. Diferentemente das condições existentes na literatura, o método desenvolvido permite a seleção das variáveis premissas disponíveis para a lei de controle, com importantes implicações práticas. Além dessa, outras contribuições podem ser destacadas: modelagem multi-simplex do sistema estendida para a função de Lyapunov, lei de controle polinomial, com matrizes desacopladas da matriz de Lyapunov e com graus arbitrários em cada va-

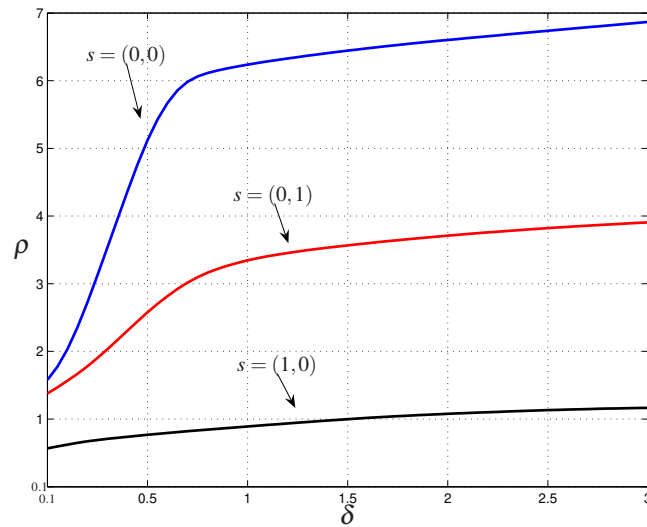


Figura 3.1: Custo garantido $\mathcal{H}_2$ dado por ρ em função de δ (limite para a taxa de variação) para o Exemplo 3.3 considerando três situações para a dependência de parâmetros do controlador, dados por $s = (s_1, s_2)$ no Teorema 3.3, usando $g = (1, 1)$ na matriz de Lyapunov.

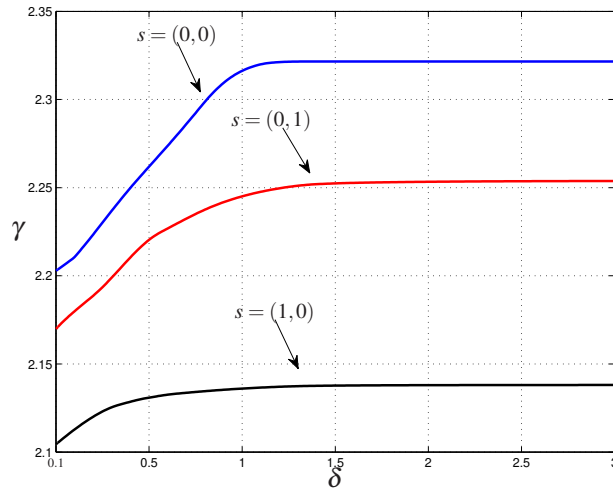


Figura 3.2: Custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ em função de δ (limite para a taxa de variação) para o Exemplo 3.3 considerando três situações para a dependência de parâmetros do controlador, dados por $s = (s_1, s_2)$ no Teorema 3.4, usando $g = (1, 1)$ na matriz de Lyapunov.

riável premissa, e modelo mais geral para a representação do conjunto das derivadas temporais das funções de pertinência.

Controle de sistemas nebulosos T–S contínuos no tempo com taxas de variação arbitrárias

O objetivo deste capítulo é explorar funções de Lyapunov nebulosas que forneçam condições para o projeto de controladores independentemente do conhecimento de limitantes da derivada temporal das funções de pertinência, ou seja, condições que garantam a estabilidade em malha fechada para variações arbitrárias das funções de pertinência. Para esta finalidade uma versão mais geral de funções de Lyapunov tipo integral de linha é utilizada. É considerada uma estratégia de duas etapas para o projeto de controladores de realimentação de estados e de saída que permite tratar de maneira simples restrições sobre a função de Lyapunov. A síntese de um controlador dinâmico de ordem arbitrária é abordada como um problema de realimentação estática de saída. Nas LMIs obtidas, as variáveis do problema são representadas por meio de polinômios homogêneos com estrutura multi-simplex (produto Cartesiano de simplexes), permitindo a escolha seletiva de variáveis premissas para a lei de controle.

4.1 Introdução

Nos últimos anos, muitos trabalhos têm sido desenvolvidos utilizando funções de Lyapunov nebulosas para obter condições de análise e síntese de controladores para sistemas nebulosos T–S contínuos no tempo. Diversas abordagens têm sido utilizadas para tratar a presença explícita das derivadas temporais das funções de pertinência nas condições de estabilidade, e, em sua maioria, o uso de limitantes superiores tem sido considerado [BPB01, THW01, BGM09, Lam09, MPSM09, CY10, TOP11d]. Cabe lembrar que, nos problemas de síntese de controladores, determinar esses limitantes pode ser extremamente complexo. Diferentes estratégias podem ser utilizadas quando esses limitantes não são conhecidos. Em [GB09, BG10], condições de estabilidade local foram propostas e o domínio de convergência foi estimado considerando apenas a informação da derivada das funções de pertinência em relação ao estado, que pode ser mais facilmente obtida. Em [BGJ10], essa mesma estratégia é aplicada ao problema de estabilização, porém é necessário impor saturação no sinal de controle e utilizar complicadas manipulações algébricas ao problema. Um outro método, baseado em uma função de

Lyapunov do tipo integral de linha [RW06], evita a necessidade da avaliação das derivadas temporais, permitindo variações arbitrariamente rápidas das funções de pertinência. Essa função de Lyapunov é formulada como uma integral de linha de um vetor nebuloso por um caminho da origem ao estado atual, e pode ser vista como um trabalho realizado no campo vetorial do sistema nebuloso. Como esse vetor é uma combinação nebulosa dos vetores que são funções dos estados do sistema, essa função de Lyapunov pode ser considerada como uma função de Lyapunov nebulosa. Nesse trabalho ([RW06]), condições LMIs suficientes para análise de estabilidade, menos conservadoras do que as condições baseadas na estabilidade quadrática, foram obtidas pela simples imposição de uma estrutura particular à matriz de Lyapunov. Extensões para tratar o problema de controle por realimentação de estados também aparecem em [RW06], na forma de desigualdades matriciais bilineares. Graças ao uso de variáveis de folga para desacoplar a matriz de Lyapunov das matrizes do sistema, condições LMIs de síntese puderam ser propostas em [MPA09], porém com restrições adicionais para garantir a estrutura da matriz de Lyapunov.

Para evitar a necessidade de ler todos os estados do sistema no caso de realimentação de estados, três estratégias principais são utilizadas na literatura de sistemas nebulosos T-S. A primeira consiste no uso de um observador de estados nebuloso [MSH98, YNKI00, GKVT06, MMG⁺09], a segunda utiliza realimentação estática de saída e a terceira abordagem baseia-se em controladores de realimentação dinâmica de saída.

Poucos resultados podem ser encontrados na literatura de sistemas nebulosos T-S tratando do problema de realimentação estática de saída. Comparada com a realimentação por controladores dinâmicos e com o controle baseado em observadores [GKVT06, MMG⁺09, NS06, GBM09], a realimentação estática de saída é a mais simples de ser implementada, pois não requer que equações diferenciais sejam resolvidas em tempo real, sendo de grande interesse para aplicações práticas [SADG97]. Por outro lado, o projeto de controladores por realimentação estática de saída é um dos problemas mais desafiadores na teoria de controle, mesmo no caso precisamente conhecido (sistemas lineares sem incertezas) [BT00]. Apenas condições suficientes existem pois, para obter condições de realimentação de saída que sejam tratáveis numericamente, algum conservadorismo é forçosamente introduzido [HN07, LK09a, BGM09].

O projeto de controladores de ordem completa de realimentação dinâmica de saída para sistemas T-S foi abordado em [LWNT00, NS06], por meio de funções de Lyapunov quadráticas (constantes) e também em [GBM09], em que, por meio de uma abordagem descritora, são fornecidas condições LMIs suficientes para a existência de funções de Lyapunov nebulosas considerando limitantes para a taxa de variação das funções de pertinência. Frequentemente, os controladores dinâmicos têm a mesma ordem da planta, porém, em alguns casos, como por exemplo, em sistemas de grande porte, a implementação de controladores de ordem completa pode ser difícil ou mesmo impossível. Embora existam técnicas para a redução de ordem de modelos e de controladores no contexto de sistemas lineares invariantes no tempo [Tro09, YS09], pode-se dizer que nenhum método eficiente está disponível na literatura de sistemas nebulosos T-S para o projeto de controladores dinâmicos de ordem reduzida.

Neste capítulo são propostas estratégias de projeto de controladores de realimentação de esta-

dos e de saída (estático e dinâmico) baseadas em funções de Lyapunov nebulosas do tipo integral de linha para sistemas nebulosos T–S contínuos no tempo. Uma grande vantagem é que nenhuma informação sobre as derivadas temporais das funções de pertinência é necessária. A principal contribuição é a de propor condições menos conservadoras para o projeto desses controladores, estendendo e generalizando essa classe de funções de Lyapunov em relação à literatura existente. Como estratégia de projeto, um procedimento em dois estágios, seguindo linhas gerais desenvolvidas em [PA01, APS03, MBB04, AGPP10], é adotado. A principal motivação do uso dessa estratégia de dois estágios é a de evitar a não-convexidade ou conservadorismos comumente introduzidos nas condições de síntese de controladores de realimentação de saída na literatura [GPS96, CT99, Tro09]. De modo geral, no primeiro estágio um ganho de realimentação de estados é projetado e utilizado como entrada no segundo estágio, que retorna, se possível, um ganho de realimentação estática ou dinâmica de saída.

Para a realimentação de estados, são projetados controladores baseados em funções de Lyapunov com dependência afim nas funções de pertinência, compartilhando a mesma regra do sistema nebuloso. A técnica de dois estágios é utilizada para projetar controladores evitando o conservadorismo introduzido pela função de Lyapunov de integral de linha nas variáveis de folga das condições do problema [RW06, MPA09]. Para tal, é projetado um controlador assegurando a estabilidade do sistema nebuloso T–S “congelado” (invariante no tempo) no primeiro estágio, que é usado nas condições do segundo estágio, que não possuem restrições de estrutura nas variáveis de folga como em [MPA09]. Se satisfeitas, essas condições fornecem um controlador estabilizante de realimentação de estados.

Para o obter os controladores de realimentação de saída é adotada uma representação polinomial da função de Lyapunov nebulosa com o uso da estrutura multi-simplex, que generaliza as existentes na literatura. Seguindo a mesma estratégia, ganhos estabilizantes de realimentação de estados com dependência polinomial arbitrária nas variáveis premissas são projetados por meio de condições LMIs no primeiro estágio. Observa-se que estes ganhos são mais gerais que os obtidos por resultados da literatura baseados em funções de Lyapunov do tipo integral de linha com dependência afim [RW06, MPA09]. No segundo passo, as matrizes que constituem esse ganho servem como parâmetros de entrada para um conjunto de LMIs que, se verificadas, provêm a lei de controle estabilizante para a realimentação estática e dinâmica de saída do sistema. A ordem do controlador dinâmico é determinada pelo projetista, e pode ser a mesma da planta ou reduzida, sendo o controlador estático de saída um caso particular. Os graus da função polinomial de Lyapunov e das matrizes que compõem a lei de controle por realimentação de saída são completamente independentes, podendo ser definidos livremente para cada variável premissa, o que permite a escolha seletiva das variáveis premissas disponíveis para a lei de controle. São apresentadas também extensões considerando certo desempenho assegurado em termos de norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada. Exemplos numéricos ilustram a flexibilidade e a eficiência das abordagens propostas.

4.2 Preliminares

Os sistemas nebulosos T-S contínuos no tempo considerados nos problemas de síntese de controladores tratados nesse capítulo, apresentados na Seção 1.1.1, são repetidos para facilidade.

Para o projeto de controladores de realimentação de estados com dependência afim nas funções de pertinência é considerada a seguinte representação politópica do modelo T-S dada em (1.3), obtida das regras nebulosas *se-então* dadas em (1.1),

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(h)x(t) + E(h)w(t) + B(h)u(t) \\ y(t) = C(h)x(t) + F(h)w(t) + D(h)u(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

com

$$(A, B, C, D, E, F)(h) = \sum_{i=1}^N h_i(x(t)) (A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i), \quad h(h) \in \mathcal{U}_N,$$

sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ é a saída controlada, $w(t) \in \mathbb{R}^v$ é o ruído de entrada, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle. As matrizes dos subsistemas lineares são $A(h) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E(h) \in \mathbb{R}^{n \times v}$, $B(h) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(h) \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $F(h) \in \mathbb{R}^{q \times v}$ e $D(h) \in \mathbb{R}^{q \times m}$.

A fim de gerar condições menos conservadoras, também é considerado nas etapas de projeto o modelo politópico T-S dado em (1.8), que faz uso de funções de pertinência $\mu(x(t))$ representadas como multi-simplexos, descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\mu)x(t) + E(\mu)w(t) + B(\mu)u(t), \\ y(t) = C(\mu)x(t) + F(\mu)w(t) + D(\mu)u(t) \\ \zeta(t) = C_\zeta(\mu)x(t) + F_\zeta(\mu)w(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

sendo

$$(A, E, B, C, F, D, C_\zeta, F_\zeta)(\mu) = \sum_{i_1=1}^{r_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{r_n} \mu_{i_1}(x_1(t)) \cdots \mu_{i_n}(x_n(t)) \times \\ \left(A_{i_1 \cdots i_n}, E_{i_1 \cdots i_n}, B_{i_1 \cdots i_n}, C_{i_1 \cdots i_n}, F_{i_1 \cdots i_n}, D_{i_1 \cdots i_n}, C_{\zeta_{i_1 \cdots i_n}}, F_{\zeta_{i_1 \cdots i_n}} \right), \quad (4.3)$$

em que

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathcal{U}_r = \mathcal{U}_{r_1} \times \mathcal{U}_{r_2} \times \cdots \times \mathcal{U}_{r_n}, \quad \mu_j = (\mu_{j1}, \dots, \mu_{jr_j}) \in \mathcal{U}_{r_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Os vetores $x(t)$, $y(t)$, $w(t)$ e $u(t)$ são definidos como no modelo (4.1), $\zeta(t) \in \mathbb{R}^p$ é a saída medida, e as matrizes dos subsistemas lineares são $A(\mu) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E(\mu) \in \mathbb{R}^{n \times v}$, $B(\mu) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(\mu) \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $F(\mu) \in \mathbb{R}^{q \times v}$, $D(\mu) \in \mathbb{R}^{q \times m}$, $C_\zeta(\mu) \in \mathbb{R}^{s \times n}$ e $F_\zeta(\mu) \in \mathbb{R}^{s \times v}$.

Em ambos os modelos (4.1) e (4.2), as variáveis premissas são os estados da planta, ou seja $z(t) = x(t)$. De acordo com a Definição 1.1, combinações polinomiais de grau arbitrário das funções de pertinência também podem ser modeladas pela estrutura multi-simplex, com grandes vantagens no trato do problema de realimentação de saída. As matrizes do sistema nebuloso T-S dado em (4.3) são reescritas na estrutura multi-simplex, como em (1.46)-(1.47), nas condições de projetos baseadas em funções de Lyapunov polinomiais.

4.3 Realimentação de estado

O objetivo é computar a seguinte lei de controle de realimentação de estados

$$u(t) = K(\cdot)x(t)$$

que estabiliza o sistema nebuloso T-S dado em (4.1) ou (4.2) independentemente da taxa de variação das funções de pertinência, permitindo variações arbitrárias das mesmas. Os métodos utilizados para obter o ganho de realimentação de estados $K(\cdot)$ são baseados na estratégia de dois estágios. No primeiro obtém-se um controlador que estabiliza o sistema em malha fechada considerando as funções de pertinência invariantes no tempo. No segundo estágio, esse controlador, obtido no primeiro estágio, é utilizado como parâmetro de entrada em condições com mais variáveis de folga para obter o controlador desejado $K(\cdot)$. O controlador $K(\cdot)$ poderá depender de condições que tenham funções de Lyapunov afins ($K(h)$) ou polinomiais com estrutura multi-simplex ($K(\mu)$).

4.3.1 Resultados principais com funções de Lyapunov afins

A seguinte função de Lyapunov nebulosa, proposta em [RW06], é utilizada

$$V(x) = 2 \int_{\rho(0,x)} f(\psi) \cdot d\psi \quad (4.4)$$

em que $\rho(0,x)$ é o caminho da origem ao estado atual. Como em [RW06], $f(x)$ é um vetor nebuloso, parametrizado da mesma forma que a regra do sistema nebuloso (1.1), ou seja

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i: & \text{ Se } x_1(t) \text{ é } M_1^{\alpha_{i1}} \text{ e } \dots \text{ e } x_n(t) \text{ é } M_n^{\alpha_{in}} \\ \text{Então } & f(x) = P_i x, \end{aligned} \quad (4.5)$$

para $i = 1, \dots, N$, com $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica definida positiva dada por

$$P_i \triangleq P_\Delta + \bar{P}_i, \quad (4.6)$$

com

$$\begin{aligned} P_\Delta &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & 0 & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{P}_i &\triangleq \begin{bmatrix} p_{11}^{\alpha_{i1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{22}^{\alpha_{i2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{nn}^{\alpha_{in}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Os elementos da diagonal principal de P_i podem variar de acordo com os conjuntos nebulosos das regras *se-então*. Portanto, a função $f(x)$ pode ser reescrita como

$$f(x) = P(h)x, \quad P(h) = \sum_{i=1}^N h_i(x) P_i > 0. \quad (4.8)$$

Para ser uma candidata a função de Lyapunov, $V(x)$ tem que satisfazer as seguintes condições: (1) $V(x)$ é uma função continuamente diferenciável; (2) $V(x)$ é definida positiva; e (3) $V(x)$ é radialmente ilimitada [Kha02]. Contudo, se $V(x)$ é dependente do caminho $\rho(0, x)$, as condições (2) e (3) não são satisfeitas. A estrutura particular de P_i dada por (4.6) foi explorada em [RW06] para garantir a independência de caminho de $V(x)$ em $\rho(0, x)$ (para prova e maiores detalhes, ver [RW06]).

A seguir são apresentadas condições de existência para o projeto de uma lei de controle não PDC de realimentação de estados baseada na função de Lyapunov nebulosa (4.4) e para taxas de variação arbitrárias das funções de pertinência.

Teorema 4.1 *Sejam $\hat{K}_i = Z_i X^{-1}$, com $W_i = W_i' > 0$, X e Z_i , $i = 1, \dots, N$, matrizes que satisfazem*

$$\begin{aligned} \Lambda_{ii} &< 0, \quad i = 1, \dots, N, \\ \Lambda_{ij} + \Lambda_{ji} &< 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i < j \end{aligned} \quad (4.9)$$

em que

$$\Lambda_{ij} \triangleq \begin{bmatrix} A_i X + X' A_i' + B_i Z_j + Z_j' B_i' & \star \\ W_i - X + \beta(A_i X + B_i Z_j)' & -\beta(X + X') \end{bmatrix}$$

para um dado escalar $\beta > 0$. Se existirem matrizes $P_i = P_i' > 0$, $i = 1, \dots, N$, com a estrutura dada em (4.6), matrizes S_i , G_i , H_i e J_i , $i = 1, \dots, N$, tais que

$$\begin{aligned} \Gamma_{iii} &< 0, \quad i = 1, \dots, N \\ \Gamma_{iij} + \Gamma_{iji} + \Gamma_{jii} &< 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j \\ \Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jik} + \Gamma_{jki} + \Gamma_{kij} + \Gamma_{kji} &< 0, \quad i, j, k = 1, \dots, N, \quad i < j < k, \end{aligned} \quad (4.10)$$

sendo

$$\Gamma_{ijk} \triangleq \begin{bmatrix} A_i' S_j' + S_j A_i + \hat{K}_k' B_j' S_i' + S_i B_j \hat{K}_k & \star & \star \\ P_i - S_i' + G_j A_i + G_i B_j \hat{K}_k & -G_i - G_i' & \star \\ B_j' S_i' + J_i - H_i \hat{K}_j & B_j' G_i' & -H_i - H_i' \end{bmatrix},$$

então

$$K(h) = H(h)^{-1} J(h) \quad (4.11)$$

com

$$H(h) = \sum_{i=1}^N h_i(x) H_i, \quad J(h) = \sum_{i=1}^N h_i(x) J_i$$

é um ganho de realimentação de estados que estabiliza o sistema nebuloso T-S dado em (4.1) com $E(h) = 0$ e $F(h) = 0$.

Prova: Primeiramente, note que

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N h_i(x) h_j(x) h_k(x) \Gamma_{ijk} = \Gamma(h)$$

e, se as LMIs (4.10) são satisfeitas, $\Gamma(h) < 0$. Pré- e pós-multiplicando $\Gamma(h)$ por T e T' respectivamente, com

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 & Y(h)' \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y(h) = H(h)^{-1}J(h) - \hat{K}(h) \quad (4.12)$$

$$\hat{K}(h) = \sum_{i=1}^N h_i(x) Z_i X^{-1} \quad (4.13)$$

e Z_i , $i = 1, \dots, N$, e X obtidas da solução de (4.9), tem-se

$$\begin{bmatrix} \bar{A}(h)'S(h)' + S(h)\bar{A}(h) & \star \\ P(h) - S(h)' + G(h)\bar{A}(h) & -G(h) - G(h)' \end{bmatrix} < 0 \quad (4.14)$$

com

$$\bar{A}(h) \triangleq A(h) + B(h)K(h) \quad (4.15)$$

e $K(h)$ dado por (4.11). Observe que (4.14) garante a estabilidade de $\bar{A}(h)$, pois pré-multiplicando (4.14) por $[I \ \bar{A}(h)']$ e pós-multiplicando pelo seu transposto, obtém-se

$$P(h)\bar{A}(h) + \bar{A}(h)'P(h) < 0, \quad (4.16)$$

com $P(h)$ dado por (4.8). A LMI (4.16) satisfaz $\dot{V}(x) < 0$, pois para $\dot{x} = \bar{A}(h)x$ a derivada temporal de $V(x)$ é

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \nabla_x V(x) \dot{x} \\ &= 2f(x)' \dot{x} \\ &= f(x)' (\bar{A}(h)x) + (\bar{A}(h)x)' f(x) \\ &= x' P(h) \bar{A}(h)x + x' \bar{A}(h)' P(h)x \\ &= x' (P(h)\bar{A}(h) + \bar{A}(h)'P(h))x. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Fazendo $Y(h) = 0$ e aplicando a mesma transformação de congruência com T a $\Gamma(h)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(h)'S(h)' + S(h)\tilde{A}(h) & \star \\ P(h) - S(h)' + G(h)\tilde{A}(h) & -G(h) - G(h)' \end{bmatrix} < 0.$$

com

$$\tilde{A}(h) \triangleq A(h) + B(h)\hat{K}(h), \quad (4.18)$$

que, por sua vez, é uma condição de estabilidade para $\tilde{A}(h)$. De fato, pré-multiplicando a desigualdade acima por $[I \ \tilde{A}(h)']$ e pós-multiplicando por seu transposto, tem-se

$$P(h)\tilde{A}(h) + \tilde{A}(h)'P(h) < 0. \quad (4.19)$$

Por fim, note que $W_i > 0$ e $P_i > 0$ asseguram $W(h) > 0$ e $P(h) > 0$. ■

Observe que $\hat{K}(h)$, obtida das LMIs (4.9), não assegura a estabilidade do sistema nebuloso T-S em malha fechada se a segunda parte (segundo estágio) do Teorema 4.1 não fornecer uma solução factível com $P(h)$ com a estrutura adequada.

Verifica-se que, se as LMIs (4.9) são satisfeitas, então

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_i(x) h_j(x) \Lambda_{ij} = \Lambda(h) < 0.$$

Por uma transformação de congruência, pré-multiplicando $\Lambda(h)$ por $[I \quad \tilde{A}(h)]$ e pós-multiplicando por seu transposto, tem-se

$$\tilde{A}(h)W(h) + W(h)\tilde{A}(h)' < 0$$

que assegura somente que as partes reais dos autovalores de $\tilde{A}(h)$, para valores "congelados" de x , são negativas. Em outras palavras, $\dot{V}(x) < 0$ não pode ser garantido, pois não há restrições na estrutura da matriz de Lyapunov $W(h)$.

Por outro lado, se as LMIs (4.10) são verificadas para algum $P(h)$ satisfazendo (4.8), então ambos $\hat{K}(h)$, dado por (4.13), e $K(h)$, dado por (4.11), são ganhos estabilizantes de realimentação de estado para o sistema nebuloso T-S. O principal interesse do procedimento em dois estágios proposto no Teorema 4.1 é a facilidade de se impor a estrutura desejada na matriz de Lyapunov $P(h)$ para procurar um ganho de controle estabilizante $K(h)$, sem impor restrições a outras variáveis do problema, ou tornar as condições BMIs. Além do mais, a estratégia permite que restrições de estrutura possam também ser impostas à lei de controle, como por exemplo no problema de descentralização (i.e. $K(h)$ bloco diagonal). É claro que, para um dado $\hat{K}(h)$, poder-se-ia usar diretamente a desigualdade (4.19) para procurar pela matriz $P(h)$, com estrutura (4.6), porém a existência de variáveis de folga no segundo estágio do Teorema 4.1 facilita esta tarefa.

A vantagem do procedimento em dois estágios fica mais evidente quando um critério de desempenho, como o custo garantido da norma $\mathcal{H}_\infty$, é considerado, como apresentado no próximo teorema.

Teorema 4.2 *Sejam $\hat{K}_i = Z_i X^{-1}$, com $W_i = W_i' > 0$, X , Z_i e M_i , $i = 1, \dots, N$, matrizes que satisfazem*

$$\begin{aligned} \Xi_{ii} &< 0, \quad i = 1, \dots, N, \\ \Xi_{ij} + \Xi_{ji} &< 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i < j \end{aligned}$$

em que

$$\Xi_{ij} \triangleq \begin{bmatrix} -A_i X - X' A_i' - B_i Z_j - Z_j' B_i' & \star & \star & \star \\ W_i + X - \beta(A_i X + B_i Z_j)' & \beta(X + X') & \star & \star \\ -C_i X - D_i Z_j & -\beta(C_i X + D_i Z_j) & -\gamma^2 I & \star \\ -M_j' E_i' & 0 & -M_j' F_i' & I + M_i + M_i' \end{bmatrix}$$

para um dado escalar $\beta > 0$. Se existirem matrizes $P_i = P_i' > 0$, $i = 1, \dots, N$, com a estrutura dada em (4.6), matrizes S_i , G_i , H_i , J_i e Q_i , $i = 1, \dots, N$, e um escalar $\gamma > 0$, tais que

$$\begin{aligned} \Upsilon_{iii} &< 0, \quad i = 1, \dots, N \\ \Upsilon_{iij} + \Upsilon_{iji} + \Upsilon_{jii} &< 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad i \neq j \\ \Upsilon_{ijk} + \Upsilon_{ikj} + \Upsilon_{jik} + \Upsilon_{jki} + \Upsilon_{kij} + \Upsilon_{kji} &< 0, \quad i, j, k = 1, \dots, N, \quad i < j < k \end{aligned} \tag{4.20}$$

em que Υ_{ijk} é dado por

$$\Upsilon_{ijk} \triangleq \begin{bmatrix} A'_i S'_j + S_j A_i + \hat{K}'_k B'_i S'_j + S_j B_i \hat{K}_k & \star & \star & \star & \star \\ P_i - S'_i + G_j A_i + G_j B_i \hat{K}_k & -G_i - G'_i & \star & \star & \star \\ E'_i S'_j & E'_i G'_j & -\gamma^2 I & \star & \star \\ Q'_j (C_i + D_i \hat{K}_k) & 0 & Q'_j F_i & I - Q_i - Q'_i & \star \\ B'_i S'_j + J_i - H_i \hat{K}_j & B'_i G'_j & 0 & D'_i Q_j & -H_i - H'_i \end{bmatrix}$$

então $K(h)$, dado por (4.11), é um ganho estabilizante de realimentação de estado para o sistema nebuloso T-S em malha fechada (4.1) com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ .

Prova: De modo similar a prova do Teorema 4.1, observe que, se as LMIs (4.20) são satisfeitas, então

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N h_i(x) h_j(x) h_k(x) \Upsilon_{ijk} = \Upsilon(h) < 0.$$

Multiplicando-se $\Upsilon(h)$ à esquerda por T_2 e à direita por T'_2 , com

$$T_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & Y(h)' \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

e $Y(h)$ como em (4.12), e considerando $(I - Q(h))'(I - Q(h)) \geq 0$, o que implica em $-Q(h)'Q(h) \leq I - Q(h) - Q(h)'$, tem-se

$$\begin{bmatrix} S(h)\bar{A}(h) + \bar{A}(h)'S(h)' & P(h) - S(h) + \bar{A}(h)'G(h)' & S(h)E(h) & \bar{C}(h)'Q(h) \\ \star & -G(h) - G(h)' & G(h)E(h) & 0 \\ \star & \star & -\gamma^2 I & F(h)'Q(h) \\ \star & \star & \star & -Q(h)'Q(h) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.21)$$

com $K(h)$ dado por (4.11), $\bar{A}(h)$ por (4.15) e $\bar{C}(h) \triangleq C(h) + D(h)K(h)$. A multiplicação de (4.21) à direita por T_3 e à esquerda por T'_3 , com

$$T_3 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ \bar{A}(h) & E(h) & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & Q(h)^{-1} \end{bmatrix},$$

fornece o *bounded real lemma* [BEFB94], com $P(h)$ dado em (4.8), implicando em $\dot{V}(x) + y'y - \gamma^2 w'w < 0$. Portanto, o ganho de realimentação de estados $K(h)$ estabiliza o sistema nebuloso T-S dado em (4.1) com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ . ■

Observe que, se as LMIs (4.20) são satisfeitas, então

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_i(x) h_j(x) \Xi_{ij} = \Xi(h) < 0.$$

A transformação de congruência feita com

$$T_4 = \begin{bmatrix} I & \tilde{A}(h) & 0 & E(h) \\ 0 & \tilde{C}(h) & I & F(h) \end{bmatrix},$$

sendo $\tilde{A}(h)$ como em (4.18) e $\tilde{C}(h) = C(h) + D(h)\hat{K}(h)$, aplicado a $\Xi(h)$, e realizando o complemento de Schur, fornece

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(h)W(h) + W(h)\tilde{A}(h)' & \star & \star \\ \tilde{C}(h)W(h) & -\gamma^2 I & \star \\ E(h)' & F(h)' & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (4.22)$$

A condição acima também é equivalente ao *bounded real lemma* [BEFB94], porém neste caso não é necessário impor nenhuma restrição de estrutura em $W(h)$, implicando que $A(h)$ tem autovalores com partes reais negativas e γ é um limitante para a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada do sistema nebuloso T-S somente se as funções de pertinência permanecerem constantes (congeladas). Por outro lado, de modo similar ao caso de estabilização sem desempenho, se a solução $P(h)$ é obtida por meio das LMIs (4.20) do Teorema 4.2, ambos $\hat{K}(h)$, dado por (4.13), e $K(h)$, dado por (4.11), obtidos do Teorema 4.2, são ganhos de controle de realimentação de estado estabilizando o sistema em malha fechada e assegurando um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ .

Novamente, a condição do *bounded real lemma* (4.22) poderia ser utilizada diretamente para testar se $\hat{K}(h)$, obtido de (4.20), admite uma matriz de Lyapunov como em (4.6), porém as variáveis de folga introduzidas no segundo estágio do teorema ajudam a fornecer valores menores para γ , como ilustrado nos experimentos numéricos.

Os Teoremas 4.1 e 4.2 fornecem um método de projeto em dois estágios para o sistema nebuloso T-S no qual o ganho de controle pode ser completamente desassociado da matriz de Lyapunov, permitindo restrições de estrutura de forma independente entre a matriz de Lyapunov e o ganho do controlador. O método apresenta, no primeiro estágio, uma LMI a ser resolvida dependente da variável escalar β . Uma busca linear pode ser utilizada ou simplesmente um conjunto de valores dados de β pode ser testado. Outro ponto importante é que qualquer ganho de controle $\hat{K}(h)$ poderia ser utilizado, com estruturas mais complexas que as dadas em (4.13). Note também que condições LMIs mais sofisticadas, a um custo computacional mais elevado, poderiam ser utilizadas para aprimorar a precisão das condições dos Teoremas 4.1 e 4.2, como proposto em [TANY01, LZ03, SA07, OP07, MOP09], e que são desenvolvidas na sequência.

4.3.2 Resultados principais com funções de Lyapunov polinomiais

Como no caso de realimentação de estados apresentado na Seção 4.3.1, é utilizada a função de Lyapunov do tipo integral de linha (4.4) para provar a estabilidade do sistema em malha fechada permitindo variações arbitrárias das funções de pertinência (sem o uso de limitantes). Para este caso, é proposto um vetor nebuloso $f(x)$ mais geral do que o apresentado em (4.5) e em [RW06, MPA09], que apenas considera dependência afim nos elementos da diagonal principal. A matriz de Lyapunov é

parametrizada utilizando a estrutura multi-simplex polinomial, conforme mostrado abaixo.

$$f(x) = P_g(\mu)x, \quad (4.23)$$

$$P_g(\mu) \triangleq P_\Delta + \bar{P}_g(\mu) \quad (4.24)$$

$$\bar{P}_g(\mu) \triangleq \begin{bmatrix} p_{11_{g_1}}(\mu_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{22_{g_2}}(\mu_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{nn_{g_n}}(\mu_n) \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

$$p_{ii_{g_i}}(\mu_i) = \sum_{k \in \mathcal{K}_{r_i}(g_i)} \mu_i^{k_i}(x_i) p_{ik_i}, \quad (4.26)$$

sendo $\mu_i^{k_i}(x_i)$ dado por (3.5) e P_Δ dado por (4.7).

O subíndice $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ identifica os graus das funções de pertinência $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ da matriz $P_g(\mu)$. Note que os elementos fora da diagonal são constantes, e que a estrutura acima permite que polinômios de graus arbitrários g_i sejam utilizados em cada elemento $p_{ii_{g_i}}(\mu_i)$. É importante notar que os graus g_i associados aos elementos p_{ii} podem ser distintos.

A grande dificuldade de utilizar estruturas mais complexas para a matriz de Lyapunov considerando $V(x)$ como uma integral de linha é a de preservar a independência de caminho em relação a $\rho(0, x)$. Em (4.6), assim como em [RW06, MPA09], esta propriedade foi obtida parametrizando o vetor nebuloso $f(x)$ com a mesma regra do sistema T-S e considerando uma estrutura apropriada para P_i . Para obter a característica da independência de caminho para $f(x)$ dado por (4.23), a estrutura multi-simplex é utilizada com grandes vantagens. A principal delas é a de conservar a dependência de cada simplex μ_i no estado x_i do sistema, conforme mostrado no Teorema 4.3. Antes, é enunciado o seguinte lema.

Lema 4.1 *Uma condição necessária e suficiente para $V(x)$ ser uma função independente de caminho é*

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (4.27)$$

Prova: Ver [ZC00]. ■

Teorema 4.3 *O vetor nebuloso $f(x)$ em (4.23), com $P_g(\mu)$ dado em (4.24)-(4.26), satisfaz a condição (4.27) do Lema 4.1.*

Prova: A estrutura (4.23)-(4.26) garante que $V(x)$ é uma função independente de caminho, ou seja, como cada i -ésimo elemento de $f(x) = [f_1(x), \dots, f_n(x)]'$ é dado por

$$f_i(x) = p_{ii_{g_i}}(\mu_i(x_i))x_i + \sum_{k \neq i}^n p_{ik}x_k,$$

tem-se que a derivada parcial com respeito a x_j , para $j \neq i$, é

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial p_{ii_{g_i}}(\mu_i(x_i))}{\partial x_j} x_i + p_{ij} = p_{ij}$$

e, de forma análoga,

$$\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i} = p_{ji}$$

e, como $p_{ij} = p_{ji}$, $f(x)$ satisfaz (4.27). ■

Seguindo linhas dadas em [RW06], enuncia-se o seguinte teorema.

Teorema 4.4 *A função de Lyapunov $V(x)$ em (4.4), e com $f(x)$ dada em (4.23), é uma função candidata a função de Lyapunov nebulosa.*

Prova: A função $V(x)$ em (4.4), candidata a função de Lyapunov nebulosa, satisfaz as seguintes condições.

(i) $V(x)$ é uma função continuamente diferenciável pois sua derivada temporal é dada por¹

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \nabla_x V(x) \dot{x} \\ &= 2f(x)' \dot{x} \\ &= f(x)' (A(\mu)x) + (A(\mu)x)' f(x) \\ &= x' P_g(\mu) A(\mu)x + x' A(\mu)' P_g(\mu)x \\ &= x' (P_g(\mu) A(\mu) + A(\mu)' P_g(\mu)) x. \end{aligned}$$

(ii) Como, pelo Teorema 4.3, $V(x)$ é independente de caminho, pode-se escolher como caminho uma reta entre a origem e o estado, ou seja, substituindo $\psi = \tau x$, com $\tau \in [0 \ 1]$, em (4.4), $V(x)$ é reescrita como

$$V(x) = 2 \int_0^1 f(\tau x)' x d\tau = 2 \int_0^1 \tau x' P_g(\mu) x d\tau = 2 \int_0^1 \tau x' \left(\sum_{k \in \mathcal{K}_r(g)} \mu^k P_k \right) x d\tau \quad (4.28)$$

Impondo-se a restrição $P_k = P'_k > 0$, existem $\bar{P} = \bar{\lambda} I$ e $\underline{P} = \underline{\lambda} I$ tais que

$$\bar{P} \geq \sum_{k \in \mathcal{K}_r(g)} \mu^k P_k \geq \underline{P} > 0, \quad (4.29)$$

sendo $\bar{\lambda}$ e $\underline{\lambda}$ respectivamente o maior e o menor autovalor de $P_g(\mu)$ para todo $\mu \in \mathcal{U}_r$.

Aplicando (4.29) em (4.28), tem-se

$$x' \bar{P} x = 2 \int_0^1 \tau x' \bar{P} x d\tau \geq V(x) \geq 2 \int_0^1 \tau x' \underline{P} x d\tau = x' \underline{P} x \quad (4.30)$$

De (4.30), conclui-se que $V(0) = 0$, $V(x) > 0$, para todo $x \neq 0$ e $V(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$.

¹Na prova são adotados $u(t) = 0$ e $w(t) = 0$, sem perda de generalidade.

Observe que os termos diagonais de $P_g(\mu)$, dados por $p_{ii}(\cdot)$, $i = 1, \dots, n$, podem ter graus arbitrários, sem comprometer a independência de caminho, contanto que dependam apenas respectivamente de x_i , $i = 1, \dots, n$, para verificar (4.27).

Para construir matrizes polinomiais homogêneas $P_g(\mu)$, como em (1.44) com $p = n$, todos os termos de (4.24) necessitam ser homogeneizados no mesmos graus, ou seja,

$$P_g(\mu) = \sum_{k \in \mathcal{K}_r(g)} \mu^k P_k = \sum_{k_1 \in \mathcal{K}_{r_1}(g_1)} \cdots \sum_{k_n \in \mathcal{K}_{r_n}(g_n)} \mu_1^{k_1} \cdots \mu_n^{k_n} P_{k_1 \cdots k_n}, \quad (4.31)$$

com

$$P_k = P_{k_1 \cdots k_n} = \hat{c}_k P_\Delta + \bar{P}_k, \quad (4.32)$$

$$\bar{P}_k \triangleq \begin{bmatrix} \prod_{i \neq 1} c_{k_i} p_{11_{k_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \prod_{i \neq 2} c_{k_i} p_{22_{k_2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \prod_{i \neq n} c_{k_i} p_{nn_{k_n}} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

sendo

$$c_{k_i} \triangleq (g_i!)/(k_i!), \quad \hat{c}_k \triangleq (g!)/\left(\prod_{i=1}^n k_i!\right) \quad (4.34)$$

os coeficientes da expansão binomial gerada pela homogeneização das funções de pertinência no grau $g = (g_1, \dots, g_n)$.

O próximo teorema fornece condições menos conservadoras para a síntese de ganhos de realimentação de estados para sistemas nebulosos T-S contínuos no tempo (4.2) com estabilidade em malha fechada assegurada pela função de Lyapunov do tipo integral de linha dada em (4.4), com dependência polinomial de grau arbitrário. As demais variáveis do problema que dependem de μ também são tratadas como matrizes polinomiais homogêneas de graus arbitrários no multi-simplex, denotadas como $L_v(\mu)$ (grau v), $Z_s(\mu)$ (grau s), etc.

Teorema 4.5 *Seja $\beta > 0$ um escalar dado. Se existirem $g = (g_1, \dots, g_n)$ e $s = (s_1, \dots, s_n)$, matrizes simétricas definidas positivas $W_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in \mathcal{K}_r(g)$, com estrutura (4.32), uma matriz $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com estrutura apropriada, e matrizes $Z_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $k \in \mathcal{K}_r(s)$, tais que, para todo $k \in \mathcal{K}_r(w)$, $w = \max\{g, s + \sigma\}$, as seguintes LMIs são verificadas*

$$\Gamma_k \triangleq \begin{bmatrix} \Lambda_k + \Lambda'_k + \Omega_k + \Omega'_k & \star \\ \Phi_k - \Psi_k + \beta(\Lambda_k + \Omega_k) & -\beta(\Psi_k + \Psi'_k) \end{bmatrix} < 0, \quad (4.35)$$

com

$$\begin{aligned}\Lambda_k &= \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-\sigma) \\ \tilde{k} \preceq k}} \frac{(w-\sigma)!}{\tilde{k}!} A_{k-\tilde{k}} G' & \Omega_k &= \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-s-\sigma) \\ \tilde{k} \preceq k}} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_r(\sigma) \\ \tilde{k} + \hat{k} \preceq k}} \frac{(w-s-\sigma)!}{\tilde{k}!} B_{\hat{k}} Z_{k-\tilde{k}-\hat{k}} \\ \Phi_k &= \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-g) \\ \tilde{k} \preceq k}} \frac{(w-g)!}{\tilde{k}!} W_{k-\tilde{k}} & \Psi_k &= \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w) \\ \tilde{k} \preceq k}} \frac{(w)!}{\tilde{k}!} G,\end{aligned}$$

então

$$K_s(\mu) = \sum_{k \in \mathcal{K}_r(s)} \mu^k K_k, \quad K_k = Z_k(G')^{-1} \quad (4.36)$$

é um ganho de controle estabilizante de realimentação de estados de grau s para o sistema nebuloso T-S dado em (4.2).

Prova: Primeiramente, note que

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_r(w)} \mu^k \Gamma_k = \Gamma(\mu)$$

e, se as LMIs (4.35) são satisfeitas, $\Gamma(\mu) < 0$. Pré- e pós-multiplicando $\Gamma(\mu)$ by T e T' respectivamente, com $T = \text{diag}(G^{-1}, G^{-1})$, tem-se

$$\mathcal{Y}(\mu) \triangleq \begin{bmatrix} M\bar{A}(\mu) + \bar{A}(\mu)'M' & \star \\ P(\mu) - M' + \beta M\bar{A}(\mu) & -\beta(M + M') \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

com $M \triangleq G^{-1}$, $Z_s(\mu) \triangleq K_s(\mu)G'$ e

$$\bar{A}(\mu) \triangleq A(\mu) + B(\mu)K_s(\mu) \quad (4.38)$$

$$P_g(\mu) \triangleq G^{-1}W_g(\mu)(G')^{-1} \quad (4.39)$$

Pré- e pós-multiplicando $\mathcal{Y}(\mu)$ por $[I \quad \bar{A}(\mu)']$ e por seu respectivo transposto para obter $\bar{A}(\mu)'P_g(\mu) + P_g(\mu)\bar{A}(\mu) < 0$ e, como a matriz simétrica definida positiva $P_g(\mu)$ tem estrutura (4.24), tem-se $\dot{V}(x) < 0$. ■

Observação 4.1 Para que a estrutura de $P_g(\mu)$, dada em (4.24), seja imposta sob a transformação de variáveis dada por (4.39), é preciso que a mesma estrutura seja exigida para $W_g(\mu)$ e, além disso, G também tem que apresentar uma estrutura especial, que de modo geral deve ser bloco diagonal ou bloco triangular de acordo com a posição do elemento da diagonal principal de $P_g(\mu)$ que for dependente de μ (sendo G bloco diagonal ou bloco triangular; G^{-1} tem a mesma estrutura). Se $n = 2$, por exemplo, e $P_g(\mu)$ tem seus elementos como em (4.24), então G precisa ser uma matriz diagonal. A matriz $P_g(\mu)$ pode também ter algum termo constante na diagonal e, nesse caso, a matriz G precisa ser triangular.

4.3.3 Exemplos numéricos

Exemplo 4.1 Considere o sistema nebuloso T–S com as seguintes regras

$$\mathcal{R}_1 : \text{Se } x_2(t) \text{ é } M_2^1 \text{ então } \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$$

$$\mathcal{R}_2 : \text{Se } x_2(t) \text{ é } M_2^2 \text{ então } \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$$

em que, para dadas contantes não negativas a e b ,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3.6 & -1.6 \\ 6.2 & -4.3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & -1.6 \\ 6.2 & -4.3 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.45 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -b \\ -3 \end{bmatrix}.$$

De acordo com (4.6), as matrizes de Lyapunov a serem procuradas no Teorema 4.1 são

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22}^1 \end{bmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

A estabilizabilidade foi investigada para vários valores de a e b , e os máximos valores obtidos são mostrados na Tabela 4.1 com a complexidade numérica associada. Em comparação com [KL00, Teorema 11] (estabilizabilidade com função de Lyapunov quadrática) e [MPA09, Teorema 7] (estabilizabilidade com função de Lyapunov (4.4)), tomando os valores de a como referência, as condições do Teorema 4.1 proporcionam controladores de realimentação de estado para os maiores valores de b (garantindo assim estabilizabilidade para o intervalo inteiro $[0, b]$). As abordagens com base em uma função de Lyapunov comum, como [KL00], são factíveis para $b = 1.07$ como valor máximo, independentemente do valor de a .

Tabela 4.1: Máximos valores de b para a estabilizabilidade do sistema nebuloso T–S do Exemplo 4.1 pelo Teorema 4.1 (denotado por T4.1), [KL00, Teorema 11] e [MPA09, Teorema 7]. V é o número de variáveis escalares e L o número de linhas de LMIs.

Método	a					L	V	Tempo (s)
	0	5	10	15	20			
[KL00, T11]	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	26	15	0.03
[MPA09, T7]	1.00	1.20	1.30	1.20	1.10	20	17	0.03
T4.1	2.02	4.13	6.23	7.97	7.97	24	26	0.08

As matrizes de Lyapunov e as matrizes que compõem o controlador (4.11), para o par $(a, b) = (15, 7.97)$, são dadas por

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.25 & -1.48 & | & 4.25 & -1.48 \\ -1.48 & 0.52 & | & -1.48 & 0.94 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} = [0.23 | 0.55] \text{ e } \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \end{bmatrix} = [-3.053 \quad 0.914 | 28.22 \quad -9.02].$$

Exemplo 4.2 Neste experimento numérico, uma base de dados de sistemas nebulosos T-S contínuos no tempo estabilizáveis por um ganho constante de realimentação de estados, mas não quadraticamente estabilizáveis (isto é, o sistema em malha fechada não admite uma matriz de Lyapunov constante) foi gerada para $n = 2$ (dois estados), $m = 1$ (uma entrada de controle), $N = \{2, 4\}$ (número de regras) e diferentes restrições de estrutura em $P(h)$, dada por (4.8), indicado por p_{jj}^i quando a entrada pode variar ou p_{jj} quando é fixo. Foram gerados cem sistemas para cada caso e o primeiro estágio do Teorema 4.1 forneceu um ganho $\hat{K}(h)$ para todos os casos (mas que não necessariamente estabiliza o sistema em malha fechada). A Tabela 4.2 mostra o número de sistemas que foram estabilizados para cada condição, com diferentes restrições de estrutura para P_i dado por (4.6): $(p_{11}^i, p_{22}) - x_1(t)$ é a variável premissa; $(p_{11}, p_{22}^i) - x_2(t)$ é a variável premissa; e $(p_{11}^i, p_{22}^i) - x_1(t)$ e $x_2(t)$ são as variáveis premissas. Pode-se notar que os resultados obtidos com o método proposto são consideravelmente melhores que os obtidos por meio de [MPA09]. Isto é principalmente devido ao fato de que as variáveis de folga do Teorema 7 de [MPA09] necessitam também ter estruturas particulares. Além disso, mais graus de liberdade em $P(h)$ (ou seja, mais elementos da diagonal principal podendo variar) implicam em mais restrições nas variáveis de folga de [MPA09, Teorema 7]. Por outro lado, a abordagem proposta não possui restrições nas variáveis de folga. Observe também que a condição com variáveis de folga no segundo estágio do Teorema 4.1 tem mais graus de liberdade, e por isso é menos conservadora, do que a desigualdade de Lyapunov (4.19), proporcionando melhores resultados.

Tabela 4.2: Número de sistemas estabilizáveis pelo Teorema 4.1 (T4.1), resolvendo diretamente (4.19) e por meio de [MPA09, Teorema 7] para o Exemplo 4.2; N é o número de regras do modelo T-S.

Estrutura	N	T4.1	(4.19)	[MPA09, T7]
(p_{11}^i, p_{22})	2	57	44	17
	4	70	59	30
(p_{11}, p_{22}^i)	2	59	46	14
	4	66	57	31
(p_{11}^i, p_{22}^i)	4	100	98	13

Exemplo 4.3 Considere o sistema nebuloso T-S dado por (4.1) com as mesmas matrizes A_1, A_2, B_1 e B_2 do Exemplo 4.1, $(a, b) = (15, 1.06)$, e as seguintes matrizes

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.001 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.083 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0.108 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.05 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.05 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \end{bmatrix}.$$

A Tabela 4.3 mostra os custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ obtidos com o Teorema 4.2 e também os obtidos com abordagens baseadas na estabilizabilidade quadrática em [MOP09]_(g,d) (g é o grau das variáveis de folga polinomiais e d é o nível de relaxamento pelo teorema de Pólya), [TANY01], [LZ03] e [DGG07]. Neste exemplo, usando diretamente o *bounded real lemma* (4.22) para o sistema de malha fechada pelo

ganho $\hat{K}(h)$ obtido no primeiro estágio do Teorema 4.2, mas considerando a matriz de Lyapunov com a estrutura (4.6), o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ foi 1.82, maior que o obtido a partir do segundo estágio do Teorema 4.2.

Tabela 4.3: Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ obtidos com o Teorema 4.2, (denotado por T4.2), [TANY01, Teorema 5], [LZ03, Teorema 2], [DGK07, Problema $\mathcal{H}_{\infty 1}$] e com [MOP09, Teorema 3] $_{(g,d)}$. V é o número de variáveis escalares e L o número de linhas de LMIs.

Método	γ	L	V	Tempo (s)
[TANY01, T5]	2.97	32	23	0.14
[LZ03, T2]	2.97	20	18	0.17
[DGK07, H1]	2.97	42	185	0.84
[MOP09, T3] $_{(2,0)}$	2.97	30	71	0.21
T4.2	0.10	36	35	0.26

4.4 Realimentação estática de saída

É considerado o problema de projeto de controladores nebulosos de realimentação estática de saída para o sistema nebuloso T–S dado em (4.2), descrito pela representação multi-simplex.

Seja a seguinte lei de controle de realimentação estática de saída

$$u(t) = L_v(\mu)\zeta(t), \quad \mu \in \mathcal{U}_r,$$

resultando no sistema nebuloso T–S em malha fechada

$$\dot{x}(t) = (A(\mu) + B(\mu)L_v(\mu)C_\zeta(\mu))x(t), \quad \mu \in \mathcal{U}_r.$$

Observação 4.2 *Um aspecto importante do controle por realimentação de saída de sistemas nebulosos T–S é a não disponibilidade de todas as variáveis premissas em tempo real para a implementação da lei de controle, pois supõe-se que alguns dos estados não estão disponíveis. Caso todos os estados estejam disponíveis ($C_\zeta(\mu) = I$), a realimentação de estados seria uma alternativa mais eficiente. De fato, a lei de controle de realimentação de saída depende da saída $\zeta(t)$ do sistema e também de algumas das variáveis premissas (ou seja, das variáveis premissas associadas aos estados disponíveis para leitura). Se nenhuma informação das variáveis premissas estiver disponível, um ganho constante de realimentação estática de saída pode ser uma alternativa, e essa estratégia também pode ser tratada pelo método proposto. De forma análoga às condições dadas no Capítulo 3, os teoremas a seguir podem projetar controladores que levam em conta somente as variáveis premissas selecionadas pelo projetista.*

O ganho estabilizante de realimentação de estados obtido com o Teorema 4.5 pode não ser fisicamente implementável, se apenas a saída $\zeta(t)$ estiver disponível. Apesar disso, o ganho pode ser usado como dado de entrada nas condições dos próximos teoremas que, se satisfeitas, provêm uma lei de controle estabilizante por realimentação de saída para o sistema nebuloso T–S contínuo no tempo.

4.4.1 Resultados principais

O teorema a seguir apresenta condições LMIs para a síntese de um controlador de realimentação estática de saída a partir do controlador de estado obtido pelo Teorema 4.5.

Teorema 4.6 *Sejam $K_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $k \in \mathcal{K}_r(s)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, as matrizes dadas de um controlador de realimentação de estados. Se existirem $g = (g_1, \dots, g_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n)$, matrizes simétricas definidas positivas $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in \mathcal{K}_r(g)$, como em (4.32), matrizes S_k , G_k , $k \in \mathcal{K}_r(q)$, H_k , J_k , $k \in \mathcal{K}_r(v)$, tais que, para todo $k \in \mathcal{K}_r(w)$, $w = \max\{g, q + \sigma + s, v + s, s + \sigma\}$, as seguintes LMIs são verificadas*

$$\begin{aligned} \Omega_k \triangleq & \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-q-\sigma) \\ \tilde{k} \preceq k}} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_r(\sigma) \\ \tilde{k} + \hat{k} \preceq k}} \frac{(w-q-\sigma)!}{\tilde{k}!} \mathcal{M}_{k\tilde{k}\hat{k}} + \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-v-\sigma) \\ \tilde{k} \preceq k}} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_r(\sigma) \\ \tilde{k} + \hat{k} \preceq k}} \frac{(w-v-\sigma)!}{\tilde{k}!} \mathcal{N}_{k\tilde{k}\hat{k}} \\ & + \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-v-s) \\ \tilde{k} \preceq k}} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_r(s) \\ \tilde{k} + \hat{k} \preceq k}} \frac{(w-v-s)!}{\tilde{k}!} \mathcal{O}_{k\tilde{k}\hat{k}} + \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-q-\sigma-s) \\ \tilde{k} \preceq k}} \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathcal{K}_r(s) \\ \tilde{k} + \bar{k} \preceq k}} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_r(\sigma) \\ \tilde{k} + \bar{k} + \hat{k} \preceq k}} \frac{(w-q-\sigma-s)!}{\tilde{k}!} \mathcal{Q}_{k\tilde{k}\bar{k}\hat{k}} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & \star & \star \\ \Phi_k - \Psi_k & -\Xi_k - \Xi'_k & \star \\ 0 & 0 & -\Theta_k - \Theta'_k \end{bmatrix} < 0, \quad (4.40) \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{k\tilde{k}\hat{k}} &\triangleq \begin{bmatrix} A'_k S'_{k-\tilde{k}-\hat{k}} + S_{k-\tilde{k}-\hat{k}} A_{\hat{k}} & \star & \star \\ G_{k-\tilde{k}-\hat{k}} A_{\hat{k}} & 0 & \star \\ B'_{\hat{k}} S'_{k-\tilde{k}-\hat{k}} & A'_k G'_{k-\tilde{k}-\hat{k}} & 0 \end{bmatrix} & \mathcal{N}_{k\tilde{k}\hat{k}} &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & \star \\ J_{k-\tilde{k}-\hat{k}} C_{\hat{k}} \zeta_{\hat{k}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{O}_{k\tilde{k}\hat{k}} &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & \star \\ H_{k-\tilde{k}-\hat{k}} K_{\hat{k}} & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathcal{Q}_{k\tilde{k}\bar{k}\hat{k}} &\triangleq \begin{bmatrix} K'_k B'_{\hat{k}} S'_{k-\tilde{k}-\bar{k}-\hat{k}} + S_{k-\tilde{k}-\bar{k}-\hat{k}} B_{\hat{k}} K_{\bar{k}} & \star & \star \\ G_{k-\tilde{k}-\bar{k}-\hat{k}} B_{\hat{k}} K_{\bar{k}} & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Phi_k &\triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-g) \\ \tilde{k} \preceq k}} \frac{(w-g)!}{\tilde{k}!} P_{k-\tilde{k}}, & \Psi_k &\triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-q) \\ \tilde{k} \preceq k}} \frac{(w-q)!}{\tilde{k}!} S_{k-\tilde{k}} \\ \Xi_k &\triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-q) \\ \tilde{k} \preceq k}} \frac{(w-q)!}{\tilde{k}!} G_{k-\tilde{k}}, & \Theta_k &\triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-v) \\ \tilde{k} \preceq k}} \frac{(w-v)!}{\tilde{k}!} H_{k-\tilde{k}} \end{aligned}$$

então

$$L_v(\mu) = \left(\sum_{k \in \mathcal{K}_r(v)} \mu^k H_k \right)^{-1} \left(\sum_{k \in \mathcal{K}_r(v)} \mu^k J_k \right) \quad (4.41)$$

é um ganho de controle estabilizante de realimentação de saída para o sistema nebuloso T-S dado em (4.2).

Prova: Tem-se que

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_r(w)} \mu^k \Omega_k = \Omega(\mu)$$

com $\Omega(\mu)$ dado por

$$\Omega(\mu) \triangleq \begin{bmatrix} A(\mu)'S_q(\mu)' + S_q(\mu)A(\mu) + K_s(\mu)'B(\mu)'S_q(\mu)' + S_q(\mu)B(\mu)K_s(\mu) & & \\ P_g(\mu) - S_q(\mu)' + G_q(\mu)A(\mu) + G_q(\mu)B(\mu)K_s(\mu) & & \\ B(\mu)'S_q(\mu)' + J_v(\mu)C_\zeta(\mu) - H_v(\mu)K_s(\mu) & & \\ & \begin{matrix} \star & \star \\ -G_q(\mu) - G_q(\mu)' & \star \\ B(\mu)'G_q(\mu)' & -H_v(\mu) - H_v(\mu)' \end{matrix} & \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

e, se as LMIs (4.40) são verificadas, $\Omega(\mu) < 0$.

Pré- e pós-multiplicando (4.42) por T e T' respectivamente, com

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 & S(\mu)' \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad S(\mu) = H_v(\mu)^{-1}J_v(\mu)C_\zeta(\mu) - K_s(\mu)$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} A_{cl}(\mu)'S_q(\mu)' + S_q(\mu)A_{cl}(\mu) & \star \\ P_g(\mu) - S_q(\mu)' + G_q(\mu)A_{cl}(\mu) & -G_q(\mu) - G_q(\mu)' \end{bmatrix} < 0$$

com

$$A_{cl}(\mu) = A(\mu) + B(\mu)L_v(\mu)C_\zeta(\mu). \quad (4.43)$$

As condições acima asseguram a estabilidade de $A_{cl}(\mu)$, com $L_v(\mu) = H_v^{-1}(\mu)J_v(\mu)$, pois, usando a mesma transformação que em (4.37), tem-se $A_{cl}(\mu)'P_g(\mu) + P_g(\mu)A_{cl}(\mu) < 0$, com $P_g(\mu)$ com a estrutura (4.24). Observe que, a mesma transformação de congruência com $S(\mu) = 0$ certifica a estabilidade de $(A(\mu) + B(\mu)K_s(\mu))$ (hipótese inicial), pois

$$\begin{bmatrix} \bar{A}(\mu)'S_q(\mu)' + S_q(\mu)\bar{A}(\mu) & \star \\ P(\mu) - S(\mu)' + G_q(\mu)\bar{A}(\mu) & -G_q(\mu) - G_q(\mu)' \end{bmatrix} < 0$$

com $\bar{A}(\mu)$ dado em (4.38). ■

O próximo teorema projeta um controlador com realimentação estática de saída com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ .

Teorema 4.7 *Sejam $K_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $k \in \mathcal{K}_r(s)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, as matrizes dadas de um controlador de realimentação de estados. Se existirem $g = (g_1, \dots, g_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n)$, matrizes simétricas definidas positivas $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in \mathcal{K}_r(g)$, com a estrutura (4.32), matrizes S_k , G_k , Q_k , $k \in \mathcal{K}_r(q)$, H_k , J_k , $k \in \mathcal{K}_r(v)$, um escalar $\gamma > 0$, tais que as seguintes LMIs são verificadas para todo*

$k \in \mathcal{K}_r(w)$, $w = \max\{g, q + \sigma + s, v + s, s + \sigma\}$,

$$\Omega_k \triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-q-\sigma) \\ \tilde{k} \preceq k}} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_r(\sigma) \\ \tilde{k} + \hat{k} \preceq k}} \frac{(w-q-\sigma)!}{\tilde{k}!} \times$$

$$\begin{bmatrix} A'_k S'_{k-\tilde{k}-\hat{k}} + S_{k-\tilde{k}-\hat{k}} A_{\hat{k}} & \star & \star & \star & \star \\ G_{k-\tilde{k}-\hat{k}} A_{\hat{k}} & 0 & \star & \star & \star \\ E'_k S'_{k-\tilde{k}-\hat{k}} & E'_k G'_{k-\tilde{k}-\hat{k}} & 0 & \star & \star \\ Q_{k-\tilde{k}-\hat{k}} C_{\hat{k}} & 0 & Q'_{k-\tilde{k}-\hat{k}} F_{\hat{k}} & 0 & \star \\ B'_k S'_{k-\tilde{k}-\hat{k}} & B'_k G'_{k-\tilde{k}-\hat{k}} & 0 & D'_k Q_{k-\tilde{k}-\hat{k}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_k & \star & \star & \star & \star \\ \Phi_k - \Psi_k + \mathcal{P}_k & -\Xi_k - \Xi'_k & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -\gamma^2 \Upsilon_k & \star & \star \\ \mathcal{R}_k & 0 & 0 & \Upsilon_k - \Pi_k - \Pi'_k & \star \\ \mathcal{N}_k + \mathcal{O}_k & 0 & \mathcal{M}_k & 0 & -\Theta_k - \Theta'_k \end{bmatrix} < 0, \quad (4.44)$$

com

$$\Phi_k \triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-g) \\ \tilde{k} \preceq k}} \frac{(w-g)!}{\tilde{k}!} P_{k-\tilde{k}}, \quad (\Psi_k, \Pi_k, \Xi_k) \triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-q) \\ \tilde{k} \preceq k}} \frac{(w-q)!}{\tilde{k}!} (S_{k-\tilde{k}}, Q_{k-\tilde{k}}, G_{k-\tilde{k}}),$$

$$\Theta_k \triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-v) \\ \tilde{k} \preceq k}} \frac{(w-v)!}{\tilde{k}!} H_{k-\tilde{k}}, \quad (\mathcal{N}_k, \mathcal{M}_k) \triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-v-\sigma) \\ \tilde{k} \preceq k}} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_r(\sigma) \\ \tilde{k} + \hat{k} \preceq k}} \frac{(w-v-\sigma)!}{\tilde{k}!} (J_{k-\tilde{k}-\hat{k}} C_{\hat{k}}, J_{k-\tilde{k}-\hat{k}} F_{\hat{k}})$$

$$(\mathcal{Q}_k, \mathcal{P}_k, \mathcal{R}_k) \triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-q-\sigma-s) \\ \tilde{k} \preceq k}} \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathcal{K}_r(s) \\ \tilde{k} + \bar{k} \preceq k}} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_r(\sigma) \\ \tilde{k} + \bar{k} + \hat{k} \preceq k}} \frac{(w-q-\sigma-s)!}{\tilde{k}!} \times$$

$$\left(K'_k B'_k S'_{k-\tilde{k}-\bar{k}-\hat{k}} + S_{k-\tilde{k}-\bar{k}-\hat{k}} B_{\hat{k}} K_{\bar{k}}, \quad G_{k-\tilde{k}-\bar{k}-\hat{k}} B_{\hat{k}} K_{\bar{k}}, \quad Q'_{k-\tilde{k}-\bar{k}-\hat{k}} D_{\hat{k}} K_{\bar{k}} \right)$$

$$\mathcal{O}_k \triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-v-s) \\ \tilde{k} \preceq k}} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_r(s) \\ \tilde{k} + \hat{k} \preceq k}} \frac{(w-v-s)!}{\tilde{k}!} H_{k-\tilde{k}-\hat{k}} K_{\hat{k}}, \quad \Upsilon_k \triangleq \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w) \\ \tilde{k} \preceq k}} \frac{w!}{(k-\tilde{k})!} I,$$

então

$$L_v(\mu) = \left(\sum_{k \in \mathcal{K}_r(v)} \mu^k H_k \right)^{-1} \left(\sum_{k \in \mathcal{K}_r(v)} \mu^k J_k \right) \quad (4.45)$$

é o controlador nebuloso de realimentação estática de saída que estabiliza o sistema nebuloso T-S dado em (4.2) com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ .

Prova: Primeiramente, note que

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_r(w)} \mu^k \Omega_k = \Omega(\mu)$$

com $\Omega(\mu)$ dado por

$$\left[\begin{array}{ccc} \bar{A}(\mu)'S_q(\mu)' + S_q(\mu)\bar{A}(\mu) & \star & \star \\ P_g(\mu) - S_q(\mu)' + G_q(\mu)\bar{A}(\mu) & -G_q(\mu) - G_q(\mu)' & \star \\ E(\mu)'S_q(\mu)' & E(\mu)'G_q(\mu)' & -\gamma^2 I \\ Q_q(\mu)'\bar{C}(\mu) & 0 & Q_q(\mu)'F(\mu) \\ B(\mu)'S_q(\mu)' + J_v(\mu)C_\zeta(\mu) - H_v(\mu)K_s(\mu) & B(\mu)'G_q(\mu)' & J_v(\mu)F_\zeta(\mu) \\ & \star & \star \\ & \star & \star \\ & \star & \star \\ I - Q_q(\mu) - Q_q(\mu)' & \star & \\ D(\mu)'Q_q(\mu) & -H_v(\mu) - H_v(\mu)' & \end{array} \right] < 0, \quad (4.46)$$

em que $\bar{A}(\mu)$ dado em (4.38) e $\bar{C}(\mu) = C(\mu) + D(\mu)K_s(\mu)$. Portanto, se as LMIs (4.44) são verificadas, $\Omega(\mu) < 0$.

A LMI (4.46) pode ser reescrita como a condição *i*) do Lema 1.3 (Lema da Eliminação), ou seja, $\Omega(\mu) = \Phi + \mathcal{V} \mathcal{X} \mathcal{U} + (\mathcal{V} \mathcal{X} \mathcal{U})' < 0$, com

$$\mathcal{X} = H(\mu), \quad \mathcal{U} = [Y(\mu) \ 0 \ \bar{Y}(\mu) \ 0 \ -I], \quad \mathcal{V}' = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ I],$$

em que $Y(\mu) = H_v(\mu)^{-1}J_v(\mu)C_\zeta(\mu) - K_s(\mu)$ e $\bar{Y}(\mu) = H_v(\mu)^{-1}J_v(\mu)F_\zeta(\mu)$, e

$$\Phi = \left[\begin{array}{ccccc} \bar{A}(\mu)'S_q(\mu)' + S_q(\mu)\bar{A}(\mu) & \star & \star & \star & \star \\ P_g(\mu) - S_q(\mu)' + G_q(\mu)\bar{A}(\mu) & -G_q(\mu) - G_q(\mu)' & \star & \star & \star \\ E(\mu)'S_q(\mu)' & E(\mu)'G_q(\mu)' & -\gamma^2 I & \star & \star \\ Q_q(\mu)'\bar{C}(\mu) & 0 & Q_q(\mu)'F(\mu) & I - Q_q(\mu) - Q_q(\mu)' & \star \\ B(\mu)'S_q(\mu)' & B(\mu)'G_q(\mu)' & 0 & D(\mu)'Q_q(\mu) & 0 \end{array} \right].$$

Definindo $\mathcal{N}_v$ e $\mathcal{N}_u$ como

$$\mathcal{N}_v = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_u = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ Y(\mu) & 0 & \bar{Y}(\mu) & 0 \end{bmatrix},$$

tais que $\mathcal{N}_v \mathcal{V} = 0$ e $\mathcal{N}_u' \mathcal{U}' = 0$, as desigualdades da condição *ii*) do Lema 1.3 resultam em

$$\mathcal{N}_v \Phi \mathcal{N}_v' = \left[\begin{array}{cc} \bar{A}(\mu)'S_q(\mu)' + S_q(\mu)\bar{A}(\mu) & \star \\ P_g(\mu) - S_q(\mu)' + G_q(\mu)\bar{A}(\mu) & -G_q(\mu) - G_q(\mu)' \end{array} \right] < 0 \quad (4.47)$$

e em

$$\left[\begin{array}{cc} S_q(\mu)A_{cl}(\mu) + A_{cl}(\mu)'S_q(\mu)' & P_g(\mu) - S_q(\mu) + A_{cl}(\mu)'G_q(\mu)' \\ \star & -G_q(\mu) - G_q(\mu)' \\ \star & \star \\ \star & \star \\ S_q(\mu)E_{cl}(\mu) & C_{cl}(\mu)'Q_q(\mu) \\ G_q(\mu)E_{cl}(\mu) & 0 \\ -\gamma^2 I & F_{cl}(\mu)'Q_q(\mu) \\ \star & -Q_q(\mu)'Q_q(\mu) \end{array} \right] < \mathcal{N}_u' \Phi \mathcal{N}_u < 0, \quad (4.48)$$

pois $(I - Q_q(\mu))'(I - Q_q(\mu)) \geq 0$, implica em $-Q_q(\mu)'Q_q(\mu) \leq I - Q_q(\mu) - Q_q(\mu)'$, e em que $A_{cl}(\mu)$ é definido como em (4.43) e

$$\begin{aligned} C_{cl}(\mu) &\triangleq C(\mu) + D(\mu)L_v(\mu)C_\zeta(\mu) & E_{cl}(\mu) &\triangleq E(\mu) + B(\mu)L_v(\mu)F_\zeta(\mu) \\ F_{cl}(\mu) &\triangleq F(\mu) + D(\mu)L_v(\mu)F_\zeta(\mu). \end{aligned}$$

A LMI (4.47) é a condição de estabilidade de $A(\mu) + B(\mu)K_s(\mu)$, assegurando que $K_s(\mu)$ é um ganho estabilizante de malha fechada.

A multiplicação de (4.48) à direita por T_3 e à esquerda por T_3' , com

$$T_3 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A_{cl}(\mu) & E_{cl}(\mu) & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & Q(\mu)^{-1} \end{bmatrix},$$

resulta no *bounded real lemma* [BEFB94] com a matriz simétrica definida positiva $P_g(\mu)$ como em (4.24), implicando $\dot{V}(\xi) + y'y - \gamma^2 w'w < 0$. Portanto, o controlador de realimentação estática de saída (4.45) estabiliza o sistema nebuloso T-S dado em (4.2) com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ .

■

Observação 4.3 *Os teoremas apresentados fornecem um procedimento em duas etapas para o projeto de controladores nebulosos por realimentação de saída para sistemas nebulosos T-S. Além disso, qualquer ganho estabilizante de realimentação de estados poderia ser usado como dado de entrada para os Teoremas 4.6 e 4.7, mesmo com estruturas polinomiais mais complexas do que em (4.36). No Teorema 4.5, diferentes escolhas do escalar β podem produzir diferentes valores para o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ no Teorema 4.7. Para obter custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ menores, pode ser usada uma heurística para encontrar β , como por exemplo por meio de algum procedimento de busca linear, ou então usando os valores de β em algum conjunto pré-definido. Ainda não há na literatura estratégias que busquem controladores ótimos no primeiro estágio a fim de minimizar um critério de desempenho na condição do segundo estágio. Uma estratégia na literatura chamada de hit-and-run [AGPP10], gera domínios aleatórios no primeiro estágio para encontrar uma família de controladores estáticos de saída que estabilizam um sistema invariante no tempo sem incertezas.*

Realimentação de estados a partir das condições de realimentação de saída

O Teorema 4.5 fornece um controlador de realimentação de estados assegurando a estabilidade do sistema nebuloso T-S em malha fechada para variações arbitrárias das funções de pertinência. Contudo, condições com mais graus de liberdade, i.e, com mais variáveis de folga e sem imposição de estrutura nas mesmas, podem ser obtidas por meio dos Teoremas 4.6 e 4.7, visto que o um ganho de realimentação de estados pode ser enxergado como um ganho de realimentação de saída com a matriz $C_\zeta(\mu) = I$.

Observa-se que uma condição necessária para a factibilidade dos Teoremas 4.6 e 4.7 é que os autovalores da matriz dinâmica de malha fechada do sistema nebuloso T–S formada pelo controlador de realimentação de estados obtido no primeiro estágio, $A(\mu) + B(\mu)K(\mu)$, tenha partes reais negativas para todos os possíveis valores de μ , ou seja,

$$\left\{ \lambda = [\lambda_1 \cdots \lambda_n]' \in \mathbb{R}^n : \operatorname{Re} \{ \lambda_i (A(\mu) + B(\mu)K(\mu)) \} \geq 0, i = 1, \dots, n, \forall \mu \in \mathcal{U}_r \right\} = \{ \emptyset \}.$$

Isto motiva a seguinte definição.

Definição 4.1 *Uma matriz $K(\mu) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é denominada como um controlador candidato de realimentação de estado se todos os autovalores do sistema em malha fechada $A(\mu) + B(\mu)K(\mu)$ possuem as partes reais negativas para todo $\mu \in \mathcal{U}_r$.*

Para gerar uma classe mais geral de controladores de realimentação de estados candidatos a ganhos de entrada para o Teorema 4.6, no sentido de aumentarem as chances de encontrar controladores estabilizantes no segundo estágio, as restrições de estrutura nas matrizes W_k e G podem ser descartadas, como apresentado no seguinte corolário.

Corolário 4.1 *Seja $\beta > 0$ um escalar dado. Se existirem $g = (g_1, \dots, g_n)$ e $s = (s_1, \dots, s_n)$, matrizes simétricas definidas positivas $W_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in \mathcal{K}_r(g)$, uma matriz $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $Z_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $k \in \mathcal{K}_r(s)$, tais que tais que as LMIs (4.35) são verificadas para todo $k \in \mathcal{K}_r(w)$, $w = \max\{g, s + \sigma\}$, então*

$$\hat{K}_s(\mu) = \sum_{k \in \mathcal{K}_r(s)} \mu^k \hat{K}_k = \sum_{k \in \mathcal{K}_r(s)} \mu^k Z_k (G')^{-1},$$

é um controlador candidato de realimentação de estados para o sistema nebuloso T–S (4.2).

Embora o Corolário 4.1 não garanta a estabilidade do sistema em malha fechada para o controlador de realimentação de estados projetado $\hat{K}_s(\mu)$, se as condições do Teorema 4.6 (segundo estágio) forem verificadas, tanto o controlador de estados candidato, obtido no primeiro estágio, quanto o controlador obtido no segundo estágio garantem a estabilidade do sistema nebuloso T–S. Em vista dessa discussão, apresentam-se os seguintes corolários.

Corolário 4.2 *Sejam $\hat{K}_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $k \in \mathcal{K}_r(s)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, as matrizes dadas de um controlador de realimentação de estados. Se existirem $g = (g_1, \dots, g_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n)$, matrizes simétricas definidas positivas $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in \mathcal{K}_r(g)$, como em (4.32), matrizes S_k , G_k , $k \in \mathcal{K}_r(q)$, H_k , J_k , $k \in \mathcal{K}_r(v)$, tais que as LMIs (4.40), com $C_\zeta(\mu) = I$, são verificadas para todo $k \in \mathcal{K}_r(w)$, $w = \max\{g, q + \sigma + s, v + s, s + \sigma\}$, então $L_v(\mu)$, dado por (4.41), é um ganho de realimentação de estados estabilizante para o sistema nebuloso T–S dado em (4.2).*

Corolário 4.3 *Sejam $\hat{K}_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $k \in \mathcal{K}_r(s)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, as matrizes dadas de um controlador de realimentação de estados. Se existirem $g = (g_1, \dots, g_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n)$, matrizes simétricas definidas positivas $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in \mathcal{K}_r(g)$, como em (4.32), matrizes S_k , G_k , Q_k , $k \in \mathcal{K}_r(q)$,*

$H_k, J_k, k \in \mathcal{K}_r(v)$, e um escalar $\gamma > 0$ tais que as LMIs (4.44), com $C_\zeta(\mu) = I$, são verificadas para todo $k \in \mathcal{K}_r(w)$, $w = \max\{g, q + \sigma + s, v + s, s + \sigma\}$, então $L_v(\mu)$, dado por (4.45), é um ganho de realimentação de estados estabilizante para o sistema nebuloso T-S dado em (4.2) com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ .

4.4.2 Exemplos numéricos

É claro que, para diminuir o conservadorismo das soluções, o grau g associado à função de Lyapunov utilizada, o grau q das variáveis de folga e o grau s do controlador do primeiro estágio devem ser aumentados, exigindo-se maior esforço computacional. Por outro lado, os graus associados à lei de realimentação de saída, dados por v , dependem dos propósitos do projeto em questão. Apesar da estrutura da matriz de Lyapunov (4.24) assumir que todas as variáveis de estado são variáveis premissas (como estabelecido pela regra nebulosa (1.5)), alguns estados podem ser descartados impondo-se que os elementos nas respectivas posições na diagonal de (4.24) sejam constantes (ou seja, grau $g_i = 0$), como em [MPA09, Exemplo 4], [RW06, Exemplo 2]. Um ganho de realimentação constante (que não depende das variáveis premissas) pode ser obtido selecionando-se $v = (0, \dots, 0)$. Uma lei de controle que depende apenas de alguma variável premissa específica pode ser construída escolhendo-se um grau v_i correspondente diferente de zero. Nos exemplos, o escalar β do Teorema 4.5 foi escolhido no conjunto $\{1, 0.1, 0.01, 0.001, 10^{-6}\}$.

Exemplo 4.4 Uma base de dados de sistemas nebulosos T-S contínuos no tempo é considerada usando as seguintes regras.

$$\begin{array}{ll}
 \mathcal{R}_1 : \text{ Se } x_1(t) \text{ é } M_1^1 \text{ e } x_2(t) \text{ é } M_2^1 \text{ então} & \mathcal{R}_2 : \text{ Se } x_1(t) \text{ é } M_1^1 \text{ e } x_2(t) \text{ é } M_2^2 \text{ então} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_{11}x(t) + B_{11}u(t) \\ \zeta(t) = C_{11}x(t) \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_{12}x(t) + B_{12}u(t) \\ \zeta(t) = C_{12}x(t) \end{array} \right. \\
 \mathcal{R}_3 : \text{ Se } x_1(t) \text{ é } M_1^2 \text{ e } x_2(t) \text{ é } M_2^1 \text{ então} & \mathcal{R}_4 : \text{ Se } x_1(t) \text{ é } M_1^2 \text{ e } x_2(t) \text{ é } M_2^2 \text{ então} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_{21}x(t) + B_{21}u(t) \\ \zeta(t) = C_{21}x(t) \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_{22}x(t) + B_{22}u(t) \\ \zeta(t) = C_{22}x(t) \end{array} \right.
 \end{array}$$

com matrizes (A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}) , $i, j = 1, 2$, $A_{ij} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, geradas aleatoriamente seguindo procedimento semelhante ao descrito em [MBB04], garantindo a existência de um ganho constante de realimentação de saída tal que o sistema em malha fechada seja Hurwitz estável para qualquer t fixo. O número de entradas m e saídas medidas p são $m = \{1, 2\}$ e $p = \{1, 2\}$, com 25 sistemas para cada par $\{m, p\}$.

Em termos de estabilização por realimentação estática de saída, o método de [BGM09] (considerando os limitantes das derivadas temporais das funções de pertinência no conjunto $\{-10, -1, -10^{-1}, -10^{-2}\}$) falhou em todos os casos. A Tabela 4.4 mostra o número de sistemas que foram estabilizados pelas condições de [FLK⁺06], que utilizam uma função de Lyapunov quadrática, e pelo Teorema 4.6. Como pode ser visto, o Teorema 4.6 conseguiu estabilizar um número maior de sistemas em relação a [FLK⁺06], ilustrando o bom desempenho das condições propostas. Observe também que, à medida que os graus da matrizes polinomiais envolvidas nas LMIs aumentam, mais sistemas são estabilizados.

Note também que a estratégia de projetar um controlador de realimentação de estados, por meio de uma função de Lyapunov quadrática ($g = (0, 0)$) e variáveis de folga afins ($s = (1, 1)$) no Teorema 4.5 ainda fornece bons resultados, não incluídos na Tabela 4.4 por razões de espaço.

Note que mesmo que todas as variáveis de estado tenham sido utilizadas na construção do modelo T-S, há casos em que algumas ou todas as variáveis premissas (dependentes dos estados) não estão disponíveis em tempo real para a implementação da lei de controle. Essa situação prática é ilustrada na Tabela 4.4 por meio dos graus das matrizes que compõem o controlador dinâmico de saída $v = (v_1, v_2)$. As situações simuladas são: sem medição de $x_2(t)$ ($\{\bar{g}, \bar{g}, 0\}$), de $x_1(t)$ ($\{\bar{g}, 0, \bar{g}\}$) ou de ambas ($\{\bar{g}, 0, 0\}$), em que, para simplicidade, $\bar{g}$ é o valor usado para g_1, g_2, s_1, s_2, q_1 e q_2 , que são os graus da função de Lyapunov do Teorema 4.5 e 4.6 (g_1, g_2), do controlador de realimentação de estados (primeiro estágio) (s_1, s_2) e das variáveis de folga (q_1, q_2). Como esperado, quando uma das variáveis premissas não estiver disponível, o desempenho $\mathcal{H}_\infty$ garantido diminui, e o pior caso ocorre quando nenhuma variável premissa é usada na lei de controle, ou seja, quando é utilizado um ganho de realimentação estática de saída constante.

Tabela 4.4: Número de sistemas estabilizáveis no Exemplo 4.4 para m entradas e p saídas (25 casos para cada par $\{m, p\}$) usando [FLK⁺06, Teorema 9] (FLK06), e usando os Teoremas 4.5 e 4.6 (T4.5-T4.6), com graus representados por $\{\bar{g}, v_1, v_2\}$, em que $\bar{g}$ é o valor usado para g_1, g_2, s_1, s_2, q_1 e q_2 , que são os graus da função de Lyapunov dos Teoremas 4.5 e 4.6 (g_1, g_2), do controlador de realimentação de estados (s_1, s_2) e das variáveis de folga (q_1, q_2), e (v_1, v_2) são os graus do controlador estático de saída.

		FLK06	T4.5–T4.6								
m	p		$\{1,1,1\}$	$\{2,2,2\}$	$\{4,4,4\}$	$\{1,1,0\}$	$\{2,2,0\}$	$\{1,0,1\}$	$\{2,0,2\}$	$\{1,0,0\}$	$\{2,0,0\}$
1	1	6	8	9	9	6	8	6	8	5	5
	2	2	7	7	7	7	7	7	7	6	7
2	1	1	3	4	4	2	3	3	2	1	2
	2	2	7	10	11	2	3	2	5	1	2
Total		11	25	30	31	17	21	18	22	13	16

Exemplo 4.5 Considere o sistema nebuloso T-S dado por (4.2) com

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 3.6 & -1.6 \\ 6.2 & -4.3 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} -15 & -1.6 \\ 6.2 & -4.3 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} -0.45 \\ -3 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \\
 E_1 &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.001 \end{bmatrix}, & E_2 &= \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.083 \end{bmatrix}, & C_{z_1} &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & C_{z_2} &= \begin{bmatrix} 0.108 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 D_1 &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.05 \end{bmatrix}, & D_2 &= \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.05 \end{bmatrix}, & F_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, & F_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \end{bmatrix} \\
 C_1 &= [7 \quad -2], & C_2 &= [5 \quad -4],
 \end{aligned}$$

sendo que $x_1(t)$ é a variável premissa.

A Tabela 4.5 mostra os custos $\mathcal{H}_\infty$ obtidos com os Teoremas 4.5 e 4.7 para vários valores dos graus da função de Lyapunov (g), variáveis de folga (q), controlador de realimentação de estado (s) e

controlador de realimentação de saída (v). Observe que os valores da norma diminuem à medida que os graus (g, q, s, v) aumentam e que o caso $g = 0$ corresponde à estabilidade quadrática.

Tabela 4.5: Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ obtidos com os Teoremas 4.5 e 4.7 (T4.5–T4.7) para diferentes graus (g, q, s, v) no Exemplo 4.5. V é o número de variáveis escalares e L é o número de linhas de LMIs.

Método	γ	L	V	Tempo (s)
T4.5–T4.7 _(0,1,1,1)	0.30	50	44	0.10
T4.5–T4.7 _(1,1,1,1)	0.12	52	46	0.15
T4.5–T4.7 _(4,4,4,4)	0.05	124	98	0.46

4.5 Realimentação dinâmica de saída

O objetivo é projetar o controlador dinâmico de saída de ordem $n_c \leq n$ para o sistema nebuloso T–S dado em (4.2). Para $n_c < n$, o controlador é denominado ser de ordem reduzida. O controlador é dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c(\mu)x_c(t) + B_c(\mu)\zeta(t) \\ u(t) = C_c(\mu)x_c(t) + D_c(\mu)\zeta(t) \end{cases} \quad (4.49)$$

em que $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ é o vetor de estados do controlador, $A_c(\mu) \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $B_c(\mu) \in \mathbb{R}^{n_c \times p}$, $C_c(\mu) \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$ e $D_c(\mu) \in \mathbb{R}^{m \times p}$ são as matrizes do controlador com a estrutura multi-simplex, como em (1.46)–(1.47). Um controlador de ordem completa é obtido com $n_c = n$ e um controlador estático de saída com $n_c = 0$ (neste caso, somente $D_c(\mu)$ existe). A escolha da ordem n_c constitui um grau de liberdade a mais para o projetista balancear desempenho e estabilizabilidade com custo computacional em implementações práticas.

Aplicando o controlador (4.49) ao sistema nebuloso T–S dado em (4.2), o sistema em malha fechada pode ser descrito como

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \tilde{A}_{cl}(\mu)\xi(t) + \tilde{E}_{cl}(\mu)w(t) \\ y(t) = \tilde{C}_{cl}(\mu)\xi(t) + \tilde{F}_{cl}(\mu)w(t) \end{cases} \quad (4.50)$$

em que $\xi(t) = [x(t)' \ x_c(t)']'$ é o estado aumentado e

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{cl}(\mu) &= \begin{bmatrix} A(\mu) + B(\mu)D_c(\mu)C_\zeta(\mu) & B(\mu)C_c(\mu) \\ B_c(\mu)C_\zeta(\mu) & A_c(\mu) \end{bmatrix}, & \tilde{E}_{cl}(\mu) &= \begin{bmatrix} E(\mu) + B(\mu)D_c(\mu)F_\zeta(\mu) \\ B_c(\mu)F_\zeta(\mu) \end{bmatrix} \\ \tilde{C}_{cl}(\mu) &= [C(\mu) + D(\mu)D_c(\mu)C_\zeta(\mu) \quad D(\mu)C_c(\mu)], & \tilde{F}_{cl}(\mu) &= [F(\mu) + D(\mu)D_c(\mu)F_\zeta(\mu)]. \end{aligned}$$

Denotando

$$L(\mu) \triangleq \begin{bmatrix} A_c(\mu) & B_c(\mu) \\ C_c(\mu) & D_c(\mu) \end{bmatrix},$$

as matrizes do controlador podem ser obtidas a partir do seguinte problema de realimentação estática de saída [EOA97, YS09]: determinar uma lei de controle de realimentação de saída $\tilde{u}(t) = L(\mu)\tilde{\zeta}(t)$ com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema aumentado

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \tilde{A}(\mu)\xi(t) + \tilde{E}(\mu)w(t) + \tilde{B}(\mu)\tilde{u}(t) \\ y(t) = \tilde{C}(\mu)\xi(t) + F(\mu)w(t) + \tilde{D}(\mu)\tilde{u}(t) \\ \dot{\tilde{\zeta}}(t) = \tilde{C}_\zeta(\mu)\xi(t) + \tilde{F}_\zeta(\mu)w(t) \end{cases} \quad (4.51)$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\mu) &= \begin{bmatrix} A(\mu) & 0 \\ 0 & 0_{n_c} \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}(\mu) = \begin{bmatrix} E(\mu) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & B(\mu) \\ I_{n_c} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}(\mu) = \begin{bmatrix} C(\mu) & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{C}_\zeta(\mu) &= \begin{bmatrix} 0 & I_{n_c} \\ C_\zeta(\mu) & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{F}_\zeta(\mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ F_\zeta(\mu) \end{bmatrix}, \quad \tilde{u}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \tilde{\zeta}(t) = \begin{bmatrix} x_c(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Para lidar com variações arbitrariamente rápidas das variáveis premissas, a função de Lyapunov nebulosa tipo integral de linha (4.4) é utilizada para o sistema aumentado (4.51).

De modo análogo ao realizado em (4.8), o vetor nebuloso $f(\xi)$ é parametrizado para a variável de estado aumentada ξ , ou seja,

$$f(\xi) = P_g(\mu)\xi,$$

com

$$P_g(\mu) \triangleq \tilde{P}_\Delta + \tilde{P}_g(\mu), \quad \tilde{P}_g(\mu) = \begin{bmatrix} \bar{P}_g(\mu) & 0 \\ 0 & \hat{P}_\Delta \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\Delta &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & \cdots & p_{1,n+n_c} \\ p_{12} & 0 & \cdots & p_{2,n+n_c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1,n+n_c} & p_{2,n+n_c} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \hat{P}_\Delta &\triangleq \begin{bmatrix} p_{n+1,n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{n+2,n+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{n+n_c,n+n_c} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sendo que $\bar{P}_g(\mu)$ é dado por (4.25), $p_{ii_{g_i}}(\mu_i)$ dado por (4.26) e $\mu_i^{k_i}(x_i)$ dado por (3.5).

Observação 4.4 Para a função de Lyapunov $V(\xi)$ não depender do caminho $\rho(0, \xi)$, pelo Lema 4.1 $f(\xi)$ deve satisfazer

$$\frac{\partial f_i(\xi)}{\partial \xi_j} = \frac{\partial f_j(\xi)}{\partial \xi_i}, \quad i, j = 1, \dots, n + n_c. \quad (4.54)$$

Como mostrado no Teorema 4.3, os termos diagonais de $P_g(\mu)$, dados por $p_{ii}(\cdot)$, $i = 1, \dots, n + n_c$, devem depender respectivamente apenas de ξ_i , $i = 1, \dots, n + n_c$, para verificar (4.54). A estrutura (4.53) garante esta condição, pois para $i \leq n$ esta condição é assegurada por $\bar{P}_g(\mu)$ dado por (4.25) e, para $i > n$, os termos diagonais são fixos como constantes em $\hat{P}_\Delta$, uma vez que as funções de pertinência μ não dependem de $x_c(t)$.

Para construir matrizes de Lyapunov polinomiais homogêneas, $P_g(\mu)$ é dado por (4.31), cujos termos homogeneizados são

$$P_k = P_{k_1 \dots k_n} = \hat{c}_k \tilde{P}_\Delta + \begin{bmatrix} \bar{P}_k & 0 \\ 0 & \hat{c}_k \hat{P}_\Delta \end{bmatrix}, \quad (4.55)$$

com $\bar{P}_k$ dado em (4.33) e c_{k_i} , $\hat{c}_k$ dados em (4.34).

4.5.1 Resultados principais

Antes de apresentar os teoremas referentes à síntese de controladores de realimentação dinâmica de saída, é necessário introduzir um resultado para a síntese de controladores de realimentação de estados para o sistema aumentado (4.51) para ser usado como parâmetro de entrada. As condições do Teorema 4.5 poderiam ser aplicadas, utilizando as matrizes do sistema aumentado (4.52) para obter o controlador de realimentação de estado, porém essa estratégia produz resultados insatisfatórios, uma vez que o controlador obtido $K_s(\mu)$, dado por (4.36), possui matrizes esparsas, resultando em matrizes do controlador dinâmico $B_c(\mu)$ e $C_c(\mu)$ com valores nulos, ou seja, levando a um controlador estático, ao invés de dinâmico, de saída. Para contornar esta dificuldade, seguindo linhas apresentada em [YS09], a estrutura do sistema aumentado em malha fechada por um controlador de realimentação de estados,

$$\hat{A}(\mu) \triangleq \tilde{A}(\mu) + \tilde{B}(\mu)K_s(\mu), \quad (4.56)$$

pode ser ajustada para incluir o termo $X_s(\mu) \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$, de dimensão apropriada, e que pode ser visto como um grau de liberdade adicional, como se segue

$$\hat{A}(\mu) = \tilde{A}(\mu) + \tilde{B}(\mu)T_s^{-1}(\mu)T_s(\mu)K_s(\mu),$$

com

$$T_s(\mu) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X_s(\mu) & I \end{bmatrix}.$$

O termo $T_s(\mu)$ é absorvido em $K_s(\mu)$, e a condição de estabilizabilidade para o sistema aumentado (4.51) fica como a seguir.

Teorema 4.8 *Sejam $\beta > 0$, uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{n_c \times n}$ e $0 \leq n_c \leq n$, a ordem do controlador dinâmico de saída, dados. Se existirem $g = (g_1, \dots, g_n)$ e $s = (s_1, \dots, s_n)$, matrizes simétricas definidas positivas $W_k \in \mathbb{R}^{n+n_c \times n+n_c}$, $k \in \mathcal{K}_r(g)$, com a estrutura (4.55), uma matriz $G \in \mathbb{R}^{n+n_c \times n+n_c}$ com estrutura apropriada, matrizes $Z_{2k} \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $Z_{3k} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Z_{4k} \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$, e $Q_k \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$, $k \in \mathcal{K}_r(s)$, tais que as seguintes LMIs são verificadas para todo $k \in \mathcal{K}_r(w)$, $w = \max\{g, s + \sigma\}$*

$$\Gamma_k \triangleq \begin{bmatrix} \Lambda_k + \Lambda'_k + \Omega_k + \Omega'_k & \star \\ \Phi_k - \Psi_k + \beta(\Lambda_k + \Omega_k) & -\beta(\Psi_k + \Psi'_k) \end{bmatrix} < 0, \quad (4.57)$$

com

$$\Lambda_k = \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-\sigma) \\ \tilde{k} \preceq k}} \frac{(w-\sigma)!}{\tilde{k}!} \tilde{A}_{k-\tilde{k}} G', \quad \Phi_k = \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-g) \\ \tilde{k} \preceq k}} \frac{(w-g)!}{\tilde{k}!} W_{k-\tilde{k}}, \quad \Psi_k = \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w) \\ \tilde{k} \preceq k}} \frac{(w)!}{\tilde{k}!} G,$$

$$\Omega_k = \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-s-\sigma) \\ \tilde{k} \preceq k}} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_r(\sigma) \\ \tilde{k} + \hat{k} \preceq k}} \frac{(w-s-\sigma)!}{\tilde{k}!} \begin{bmatrix} B_{\tilde{k}} Q_{k-\tilde{k}-\hat{k}} Y + B_{\tilde{k}} Z_{3_{k-\tilde{k}-\hat{k}}} & B_{\tilde{k}} Q_{k-\tilde{k}-\hat{k}} + B_{\tilde{k}} Z_{4_{k-\tilde{k}-\hat{k}}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ + \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathcal{K}_r(w-s) \\ \tilde{k} \preceq k}} \frac{(w-s)!}{\tilde{k}!} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Z_{2_{k-\tilde{k}}} Y & Z_{2_{k-\tilde{k}}} \end{bmatrix},$$

então

$$K_s(\mu) = \sum_{k \in \mathcal{K}_r(s)} \mu^k K_k, \quad K_k = \begin{bmatrix} Z_{2_k} Y & Z_{2_k} \\ Q_k Y + Z_{3_k} & Q_k + Z_{4_k} \end{bmatrix} (G')^{-1} \quad (4.58)$$

é um controlador de realimentação de estado de grau s para o sistema aumentado nebuloso T - S dado em (4.51) com $w(t) = 0$.

Prova: Primeiramente, note que

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_r(w)} \mu^k \Gamma_k = \Gamma(\mu) = \begin{bmatrix} \tilde{A}(\mu) G' + G \tilde{A}'(\mu) + \Omega(\mu) + \Omega(\mu)' & \star \\ W_g(\mu) - G + \beta (\tilde{A}(\mu) G' + \Omega(\mu)) & -\beta (G + G') \end{bmatrix}, \\ \Omega(\mu) = \begin{bmatrix} B(\mu) Q_s(\mu) Y + B(\mu) Z_{3_s}(\mu) & B(\mu) Q_s(\mu) + B(\mu) Z_{4_s}(\mu) \\ Z_{2_s}(\mu) Y & Z_{2_s}(\mu) \end{bmatrix}.$$

Denotando $Q_s(\mu) \triangleq X_s(\mu) Z_{2_s}(\mu)$, $\Omega(\mu)$ pode ser reescrito como

$$\Omega(\mu) = \begin{bmatrix} B(\mu) X_s(\mu) Z_{2_s}(\mu) Y + B(\mu) Z_{3_s}(\mu) & B(\mu) X_s(\mu) Z_{2_s}(\mu) + B(\mu) Z_{4_s}(\mu) \\ Z_{2_s}(\mu) Y & Z_{2_s}(\mu) \end{bmatrix} \\ = \tilde{B}(\mu) T_s^{-1}(\mu) \hat{Z}_s(\mu),$$

em que $\tilde{B}(\mu)$ é dado em (4.52) e

$$\hat{Z}_s(\mu) \triangleq \begin{bmatrix} Z_{2_s}(\mu) Y & Z_{2_s}(\mu) \\ Z_{3_s}(\mu) & Z_{4_s}(\mu) \end{bmatrix}, \quad T_s(\mu) \triangleq \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X_s(\mu) & I \end{bmatrix}.$$

Se as LMIs (4.57) são verificadas, então $\Gamma(\mu) < 0$. Pré- e pós-multiplicando $\Gamma(\mu)$ por V e V' respectivamente, com $V = \text{diag}(G^{-1}, G^{-1})$, tem-se

$$\mathcal{Y}(\mu) \triangleq \begin{bmatrix} M \hat{A}(\mu) + \hat{A}(\mu)' M' & \star \\ P_g(\mu) - M' + \beta M \hat{A}(\mu) & -\beta (M + M') \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

com $\hat{A}(\mu)$ dado por (4.56), $M \triangleq G^{-1}$,

$$P_g(\mu) \triangleq G^{-1} W_g(\mu) (G')^{-1} \quad (4.60)$$

e

$$K_s(\mu) = T_s^{-1}(\mu) \hat{Z}_s(\mu) (G')^{-1} \\ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ Q_s(\mu) Z_{2_s}^{-1}(\mu) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{2_s}(\mu) Y & Z_{2_s}(\mu) \\ Z_{3_s}(\mu) & Z_{4_s}(\mu) \end{bmatrix} (G')^{-1} \\ = \begin{bmatrix} Z_{2_s}(\mu) Y & Z_{2_s}(\mu) \\ Q_s(\mu) Y + Z_{3_s}(\mu) & Q_s(\mu) + Z_{4_s}(\mu) \end{bmatrix} (G')^{-1}.$$

Pré- e pós-multiplicando $\mathcal{B}(\mu)$ por $[I \quad \hat{A}(\mu)']$ e por seu transposto, respectivamente, para obter $\hat{A}(\mu)'P_g(\mu) + P_g(\mu)\hat{A}(\mu) < 0$ e, como $P_g(\mu) > 0$ tem a estrutura (4.53), tem-se $\dot{V}(\xi) < 0$, como demonstrado em (4.17). ■

Da mesma forma que na Seção 4.4, para aumentar as chances de encontrar controladores de realimentação dinâmica de saída no segundo estágio, utilizar-se-á o seguinte corolário, sem restrições de estrutura em W_k e G , para gerar um controlador candidato de realimentação de estados a ser usado como parâmetro de entrada no teorema que proporcionará (4.49).

Corolário 4.4 *Sejam $\beta > 0$, uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{n_c \times n}$ e $0 \leq n_c \leq n$, a ordem do controlador dinâmico de saída, dados. Se existirem $g = (g_1, \dots, g_n)$ e $s = (s_1, \dots, s_n)$, matrizes simétricas definidas positivas $W_k \in \mathbb{R}^{n+n_c \times n+n_c}$, $k \in \mathcal{K}_r(g)$, uma matriz $G \in \mathbb{R}^{n+n_c \times n+n_c}$ com estrutura apropriada, matrizes $Z_{2k} \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $Z_{3k} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Z_{4k} \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$, e $Q_k \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$, $k \in \mathcal{K}_r(s)$, tais que as LMIs (4.57) são verificadas para todo $k \in \mathcal{K}_r(w)$, $w = \max\{g, s + \sigma\}$ então $K_s(\mu)$, dado por (4.58), é um controlador candidato de realimentação de estados para o sistema nebuloso T-S aumentado (4.51) com $w(t) = 0$.*

Observação 4.5 *As LMIs do Teorema 4.8 e do Corolário 4.4 dependem de um dado escalar β e de uma dada matriz Y , que representam graus de liberdade a serem explorados na busca de uma solução factível. A matriz Y é usada para ajustar a dimensão do bloco $(1,1)$ de $\hat{Z}_s(\mu)$ a fim de recuperar $X_s(\mu)$ a partir de $Q_s(\mu)Z_2^{-1}(\mu)$. Nos exemplos, foi usado $Y \triangleq [I_{n_c \times (n-1)} \quad 0_{n_c \times 1}]$, mas outras escolhas (com dimensões apropriadas) poderiam ser empregadas. Note também que, diferentemente do que foi proposto em [YS09], as condições de estabilizabilidade obtidas pelo uso da matriz $T_s(\mu)$ propostas neste trabalho não apresentam bilinearidades.*

O próximo teorema apresenta condições suficientes para a existência de um controlador dinâmico de saída de ordem n_c .

Teorema 4.9 *Sejam $K_k \in \mathbb{R}^{m+n_c \times n+n_c}$, $k \in \mathcal{K}_r(s)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, as matrizes dadas de um controlador de realimentação de estados, e n_c a ordem do controlador dinâmico de saída. Se existirem $g = (g_1, \dots, g_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n)$, matrizes simétricas definidas positivas $P_k \in \mathbb{R}^{n+n_c \times n+n_c}$, $k \in \mathcal{K}_r(g)$, com a estrutura (4.55), matrizes S_k , G_k , $k \in \mathcal{K}_r(q)$, H_k , J_k , $k \in \mathcal{K}_r(v)$, tais que as LMIs (4.40) aplicadas às matrizes aumentadas (4.52) são verificadas para todo $k \in \mathcal{K}_r(w)$, $w = \max\{g, q + \sigma + s, v + s, s + \sigma\}$, então*

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{c_v}(\mu) & B_{c_v}(\mu) \\ \hline C_{c_v}(\mu) & D_{c_v}(\mu) \end{array} \right] = \left(\sum_{k \in \mathcal{K}_r(v)} \mu^k H_k \right)^{-1} \left(\sum_{k \in \mathcal{K}_r(v)} \mu^k J_k \right) \quad (4.61)$$

são as matrizes de um controlador nebuloso dinâmico de realimentação de saída de ordem n_c dadas em (4.49) que estabilizam o sistema nebuloso T-S de malha fechada (4.50) com $w(t) = 0$.

Prova: Segue da prova do Teorema 4.6, considerando

$$\Omega(\mu) \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{A}(\mu)'S_q(\mu)' + S_q(\mu)\tilde{A}(\mu) + K_s(\mu)'\tilde{B}(\mu)'S_q(\mu)' + S_q(\mu)\tilde{B}(\mu)K_s(\mu) & & \\ P_g(\mu) - S_q(\mu)' + G_q(\mu)\tilde{A}(\mu) + G_q(\mu)\tilde{B}(\mu)K_s(\mu) & & \\ \tilde{B}(\mu)'S_q(\mu)' + J_v(\mu)\tilde{C}(\mu) - H_v(\mu)K_s(\mu) & & \\ & \star & \star \\ & -G_q(\mu) - G_q(\mu)' & \star \\ & \tilde{B}(\mu)'G_q(\mu)' & -H_v(\mu) - H_v(\mu)' \end{bmatrix}$$

O próximo teorema apresenta condições LMIs suficientes para a existência de um controlador dinâmico de saída de ordem n_c com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ .

Teorema 4.10 *Sejam $K_k \in \mathbb{R}^{m+n_c \times n+n_c}$, $k \in \mathcal{K}_r(s)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, as matrizes dadas de um controlador de realimentação de estados, e n_c a ordem do controlador dinâmico de saída. Se existirem $g = (g_1, \dots, g_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n)$, matrizes simétricas definidas positivas $P_k \in \mathbb{R}^{n+n_c \times n+n_c}$, $k \in \mathcal{K}_r(g)$, com a estrutura (4.55), matrizes S_k , G_k , Q_k , $k \in \mathcal{K}_r(q)$, H_k , J_k , $k \in \mathcal{K}_r(v)$, um escalar $\gamma > 0$, tais que as LMIs (4.44) aplicadas às matrizes aumentadas (4.52) são verificadas para todo $k \in \mathcal{K}_r(w)$, $w = \max\{g, q + \sigma + s, v + s, s + \sigma\}$, então*

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{c_v}(\mu) & B_{c_v}(\mu) \\ \hline C_{c_v}(\mu) & D_{c_v}(\mu) \end{array} \right] = \left(\sum_{k \in \mathcal{K}_r(v)} \mu^k H_k \right)^{-1} \left(\sum_{k \in \mathcal{K}_r(v)} \mu^k J_k \right)$$

são as matrizes de um controlador nebuloso dinâmico de realimentação de saída de ordem n_c dadas em (4.49) que estabilizam o sistema nebuloso T-S de malha fechada (4.50) com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ .

Prova: Segue da prova do Teorema 4.6, considerando

$$\Omega(\mu) = \begin{bmatrix} (\tilde{A}(\mu) + \tilde{B}(\mu)K_s(\mu))'S_q(\mu)' + S_q(\mu)(\tilde{A}(\mu) + \tilde{B}(\mu)K_s(\mu)) & \star & \\ P_g(\mu) - S_q(\mu)' + G_q(\mu)(\tilde{A}(\mu) + \tilde{B}(\mu)K_s(\mu)) & -G_q(\mu) - G_q(\mu)' & \\ \tilde{E}(\mu)'S_q(\mu)' & \tilde{E}(\mu)'G_q(\mu)' & \\ Q_q(\mu)'(\tilde{C}(\mu) + \tilde{D}(\mu)K_s(\mu)) & 0 & \\ \tilde{B}(\mu)'S_q(\mu)' + J_v(\mu)\tilde{C}_\zeta(\mu) - H_v(\mu)K_s(\mu) & \tilde{B}(\mu)'G_q(\mu)' & \\ & \star & \star \\ & \star & \star \\ & -\gamma^2 I & \star \\ Q_q(\mu)'F(\mu) & I - Q_q(\mu) - Q_q(\mu)' & \star \\ J_v(\mu)F_\zeta(\mu) & \tilde{D}(\mu)'Q_q(\mu) & -H_v(\mu) - H_v(\mu)' \end{bmatrix}.$$

Note que a matriz de Lyapunov (4.53), mesmo com uma estrutura particular, é mais geral que as utilizadas na literatura de sistemas nebulosos T-S para o problema de realimentação dinâmica de saída [LWNT00, NS06, DY08, Yon09, YD10], que são baseadas em uma matriz de Lyapunov constante, e fornece melhores resultados que a abordagem descritora em [GBM09], para o caso em que os limitantes das derivadas temporais das funções de pertinência não são conhecidos.

4.5.2 Exemplos numéricos

Exemplo 4.6 Considere o sistema nebuloso T-S em [GBM09, Exemplo 1], dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 : \text{Se } x_1 \text{ é } M_1^1 \text{ então } \dot{x} &= A_1x + B_1u, \quad \zeta = C_1x \\ \mathcal{R}_2 : \text{Se } x_1 \text{ é } M_1^2 \text{ então } \dot{x} &= A_2x + B_2u, \quad \zeta = C_2x\end{aligned}$$

com matrizes

$$\begin{aligned}A_1 &= \begin{bmatrix} -5\alpha & 10 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 20 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \\ B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 3\beta \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} -0.8 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

As funções de pertinência são dadas por $\mu_{11}(x_1) = 0.5 + 0.5\sin(x_1)$ e $\mu_{12}(x_1) = 1 - \mu_{11}(x_1)$.

O objetivo é encontrar um controlador de realimentação dinâmica de saída estabilizante para cada par (α, β) com $-5 \leq \alpha \leq 20$ e $-20 \leq \beta \leq 0$. Aplicando os Teoremas 4.8 a 4.9, foi possível encontrar controladores estabilizantes, com graus $g, s, q \geq 1$, para o mesmo conjunto de pares factíveis (α, β) do que os obtidos com a condição [GBM09, Teorema 1], e produzindo melhores resultados do que [LWNT00, Teorema 2].

A principal vantagem do método proposto neste exemplo é proporcionar mais flexibilidade para o projetista e menos exigências para a implementação prática. Os mesmos resultados são verificados (mesmo conjunto de pares factíveis (α, β)) para controladores de realimentação de saída de ordem 2 (ordem completa), 1 (ordem reduzida) e 0 (estático). Além disso, um controlador robusto pôde ser projetado com $\nu = 0$ (grau do controlador de saída) para o caso de x_1 não estar disponível para todos os pares factíveis (α, β) .

É importante notar que, diferentemente do [GBM09, Teorema 1], as condições propostas não exigem que o limite superior de $\dot{\mu}_{11}(x_1)$ seja calculado pelo projetista, permitindo que as funções de pertinência possam variar arbitrariamente.

Exemplo 4.7 Considere o seguinte modelo nebuloso T-S

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 : \text{Se } x_1 \text{ é } M_1^1 \text{ então} & & \mathcal{R}_2 : \text{Se } x_1 \text{ é } M_1^2 \text{ então} \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A_1x + E_1w + B_1u \\ y = C_1x + F_1w + D_1u \\ \zeta = C_{\zeta_1}x + F_{\zeta_1}w \end{array} \right. & & \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A_2x + E_2w + B_2u \\ y = C_2x + F_2w + D_2u \\ \zeta = C_{\zeta_2}x + F_{\zeta_2}w \end{array} \right.\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}A_1 &= \begin{bmatrix} -74.2 & -0.6 \\ -39.7 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ -1.4 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad F_1 = 2, \quad D_1 = 0, \\ C_{\zeta_1} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad F_{\zeta_1} = 2, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2.4 & -0.1 \\ 32.5 & -1.2 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.7 \end{bmatrix}, \\ F_2 &= 2, \quad D_2 = 0.2, \quad C_{\zeta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad F_{\zeta_2} = 2.\end{aligned}$$

A Tabela 4.6 mostra os custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ obtidos com o Corolário 4.4 e o Teorema 4.10 para vários graus. A variável escalar β no Corolário 4.4 foi escolhida do conjunto $\{10, 1, 0.1, 0.01, 0.04, 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}\}$. Os resultados são comparados com as condições de [LWNT00, Teorema 8] e [DY08, Teorema 1]. Como pode ser visto, os custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ obtidos com o controlador de realimentação dinâmica de saída proposto (4.49), de ordem $n_c = 1$, são menores do que os custos obtidos com controladores de ordem completa ($n_c = 2$) da literatura. Observe também que melhores resultados são obtidos à medida do aumento dos graus g, s, q e v da função de Lyapunov, variáveis de folga, e controladores do primeiro e segundo estágio respectivamente. O preço a ser pago é o aumento do custo computacional que, no entanto, continua aceitável.

Tabela 4.6: Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ dados por γ do Exemplo 4.7 com diferentes graus $g_1 = s_1 = q_1 = v_1$ no Corolário 4.4 (com $\beta = 1$) e Teorema 4.10 (denotado por C4.4-T4.10 $_{g_1}$) comparados com [LWNT00, Teorema 8] e [DY08, Teorema 1]. A ordem do controlador dinâmico de saída é n_c .

Método	n_c	γ	Tempo (s)
[LWNT00, T8]	2	4.3633	0.11
[DY08, T1]	2	4.3597	0.42
C4.4-T4.10 $_{g_1=1}$	1	4.0138	0.13
C4.4-T4.10 $_{g_1=2}$	1	3.5886	0.18
C4.4-T4.10 $_{g_1=4}$	1	3.5325	0.39

Para o caso $g_1 = 1$ e $n_c = 1$ as matrizes de Lyapunov e as matrizes que compõem o controlador dinâmico (4.61) são dadas por

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4.01 & 0.06 & -2.67 & 9.73 & 0.06 & -2.67 \\ 0.06 & 0.75 & 0.71 & 0.06 & 0.75 & 0.71 \\ -2.67 & 0.71 & 5.75 & -2.67 & 0.71 & 5.75 \end{array} \right],$$

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 3.41 & 0.01 & 0.95 & -0.01 \\ 0.48 & 0.59 & -0.18 & 0.04 \end{array} \right] \text{ e } \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -7.71 & -1.08 & -4.04 & 0.09 \\ -5.39 & 0.94 & -0.70 & -0.44 \end{array} \right].$$

Observe que para cada valor de $\mu(x_1)$ é necessário avaliar a expressão (4.61) para obter as matrizes do controlador dinâmico (4.49). Por exemplo, considerando o mesmo caso $(g_1, n_c) = (1, 1)$, para $\mu_{11}(x_1) = 1$ (controlador para as matrizes da regra $\mathcal{R}_1$), tem-se

$$\begin{bmatrix} A_c(\mu) & B_c(\mu) \\ C_c(\mu) & D_c(\mu) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} -2.24 & -0.32 \\ -7.36 & 1.86 \end{array} \right]$$

e para $\mu_{11}(x_1) = 0$ (controlador para as matrizes da regra $\mathcal{R}_2$), tem-se

$$\begin{bmatrix} A_c(\mu) & B_c(\mu) \\ C_c(\mu) & D_c(\mu) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} -4.68 & -0.03 \\ -39.58 & -11.33 \end{array} \right].$$

Exemplo 4.8 Considere o sistema nebuloso T-S dado em (4.2), adaptado do exemplo utilizado em [FLK⁺06], obtido do sistema não linear

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + \text{sen}(x_3) - 0.1x_4 + (x_1^2 + 1)u + \frac{\text{sen}(x_3)}{3x_3}w \\
 \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 + (x_1^2 - 1.4)w \\
 \dot{x}_3 &= x_1 + x_1^2x_2 - 0.3x_3 + \frac{\text{sen}(x_3)}{x_3}w \\
 \dot{x}_4 &= \text{sen}(x_3) - x_4 + 2x_1^2w \\
 y_1 &= 0.9(x_1 + x_3) + 0.7(x_2 + x_4) + (x_1^2 - 2)u + 2w \\
 \zeta_1 &= x_2 + (x_1^2 + 1)x_4 \\
 \zeta_2 &= x_1 + x_3.
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

Assuma que $x_1 \in [-a \ a]$ e $x_3 \in [-b \ b]$, $a, b > 0$. Então, o sistema não linear (4.2) é representado de maneira exata pelo seguinte modelo nebuloso T-S para $\ell = 1, \dots, 4$, $i, j = 1, 2$,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_\ell : \text{ Se } x_1 \text{ é } M_1^i \text{ e } x_3 \text{ é } M_3^j \text{ então} \\
 \begin{cases} \dot{x} = A_{ij}x + E_{ij}w + B_{ij}u \\ y = Cx + Fw + D_{ij}u \\ \zeta = C_{\zeta_{ij}}x + F_{\zeta}w \end{cases}, \tag{4.63}
 \end{aligned}$$

com as funções de pertinência

$$\begin{aligned}
 \mu_{11}(x_1) &= \frac{x_1^2}{a^2} & \mu_{31}(x_3) &= \begin{cases} \frac{b\text{sen}(x_3) - x_3\text{sen}(b)}{x_3(b - \text{sen}(b))}, & x_3 \neq 0 \\ 1, & x_3 = 0 \end{cases} \\
 \mu_{12}(x_1) &= 1 - \mu_{11}(x_1) & \mu_{32}(x_3) &= 1 - \mu_{31}(x_3)
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

e matrizes

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -0.1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & a^2 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, & A_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \text{sen}(b)/b & -0.1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & a^2 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen}(b)/b & -1 \end{bmatrix} \\
 A_{21} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -0.1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, & A_{22} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \text{sen}(b)/b & -0.1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen}(b)/b & -1 \end{bmatrix} \\
 [B_{11} \mid B_{12} \mid B_{21} \mid B_{22}] &= \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1+a^2 & 1+a^2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], & \begin{bmatrix} C_{\zeta_{11}} \\ C_{\zeta_{12}} \\ C_{\zeta_{21}} \\ C_{\zeta_{22}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1+a^2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1+a^2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & \text{sen}(b)/(3b) & 1/3 & \text{sen}(b)/(3b) \\ a^2 - 1.4 & a^2 - 1.4 & -1.4 & -1.4 \\ 1 & \text{sen}(b)/b & 1 & \text{sen}(b)/b \\ 2a^2 & 2a^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C' = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.7 \\ 0.9 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 - 2 & a^2 - 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad F = 2, \quad F_\zeta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Este exemplo ilustra algumas vantagens do método proposto. Para implementar um controlador nebuloso de realimentação de saída que depende das funções de pertinência (4.64) do modelo T-S dado em (4.63), os estados x_1 e x_3 devem ser lidos em tempo real. Em muitas situações isso não é possível, por razões físicas ou econômicas; em outros casos, somente um dos estados pode ser lido. Os valores do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ podem ser usados como critério para definir qual variável premissa seria mais importante de ser medida e utilizada na lei de controle. A Tabela 4.7 mostra os valores do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para o Corolário 4.4 (com $\beta = 1$) e para o Teorema 4.10, para $a = 1.4$ e $b = 0.7$, em três casos: *i*) um controlador robusto (ou seja, $(v_1, v_3) = (0, 0)$), *ii*) apenas μ_2 está disponível para realimentação (ou seja, $(v_1, v_3) = (0, 1)$), e *iii*) apenas μ_1 está disponível para realimentação (ou seja, $(v_1, v_3) = (1, 0)$). Note que à medida que os graus das funções de Lyapunov, variáveis de folga e matrizes da lei de controle aumentam, os custos garantidos diminuem. A influência da ordem n_c do controlador dinâmica de saída (4.49) no custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ também pode ser avaliada.

Da Tabela 4.7 pode-se concluir que o uso da variável premissa x_3 na lei de controle produz limites menores para o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ do que os que se obtêm utilizando-se apenas x_1 . Além disso, o pior caso ocorre quando nenhuma informação das variáveis premissas é usada na lei de controle (controlador robusto). Observe também que, para este exemplo, o controlador de realimentação dinâmica de saída de ordem reduzida ($n_c = 3$) fornece o mesmo valor $\gamma = 6.37$ de um controlador de ordem completa ($n_c = 4$), indicando que um controlador mais simples e menos dispendioso de ordem $n_c = 3$ pode ser usado para fins de implementação prática, sem prejudicar o desempenho do custo $\mathcal{H}_\infty$.

4.6 Conclusão

Foram propostas condições na forma de LMIs para a síntese de controladores por realimentação de estados e por realimentação estática e dinâmica de saída, com critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas nebulosos T-S contínuos no tempo. A nova técnica de projeto fornece condições menos conservadoras, especialmente no caso de realimentação dinâmica de saída de ordem arbitrária, problema não completamente resolvido na literatura de sistemas nebulosos T-S e de grande conservadorismo de modo geral. A ordem do controlador dinâmico é um grau de liberdade para o projetista balancear critério de desempenho e aspectos de implementação prática. O método combina função de Lyapunov polinomial de grau arbitrário, do tipo integral de linha, com um procedimento em dois passos baseados em LMIs para a síntese dos ganhos de realimentação. As informações de limitantes superiores para as derivadas temporais das funções de pertinência são dispensadas, permitindo variação arbitrária das

Tabela 4.7: Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ dados por γ do Exemplo 4.8 usando o Corolário 4.4 (com $\beta = 1$) e Teorema 4.10 com alguns graus parciais (g_1, g_3) , (v_1, v_3) , $(q_1, q_3) = (\bar{q}, \bar{q})$, $(s_1, s_3) = (\bar{s}, \bar{s})$, para diferentes ordens n_c do controlador dinâmico de realimentação de saída. O número de variáveis escalares é V e o número de linhas LMIs é L .

Ordem do controlador	Graus parciais			C4.4–T4.10
n_c	(g_1, g_3)	(v_1, v_3)	$(\bar{q}, \bar{s})$	γ
3	(1, 1)	(0, 0)	(1, 1)	7.76
3	(1, 1)	(0, 1)	(1, 1)	6.75
3	(1, 1)	(1, 0)	(1, 1)	7.73
3	(0, 0)	(1, 1)	(1, 1)	7.01
3	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	6.73
0	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	7.65
1	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	7.06
2	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	7.05
3	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	6.37
4	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	6.37

mesmas. Graças à representação multi-simplex adotada, graus distintos para a função de Lyapunov e para a lei de controle podem ser usados. Além disso, a lei de controle pode depender somente de algumas das variáveis premissas, escolhidas pelo projetista.

Conclusões e perspectivas

O estado atual da arte em análise e controle de sistemas nebulosos T–S, contínuos e discretos no tempo, baseia-se no uso de funções quadráticas nos estados com dependência nas variáveis premissas. Esta tese propôs funções de Lyapunov mais abrangentes, quadráticas nos estados, mas polinomiais de grau arbitrário nas variáveis premissas. No caso discreto, dependentes do instante atual e de instantes anteriores. Similarmente, nas condições LMIs de análise e de síntese presentes na literatura as variáveis de folga são funções afins, assim como as matrizes que compõem o ganho da lei de controle, enquanto que neste trabalho foram propostas estruturas mais gerais, baseadas em descrições das funções de pertinência em multi-simplex, dando um caráter seletivo à lei de controle a ser implementada. No que diz respeito à realimentação de saída, muito pouco existe na literatura de sistemas nebulosos T–S para síntese de realimentação estática ou dinâmica de ordem reduzida. A estratégia proposta nesta tese mostrou excelentes resultados tanto para a determinação do controlador quanto para o tratamento de restrições na estrutura da função de Lyapunov. Além disso, como subproduto, foi implementada uma estratégia para obter controladores dinâmicos de ordem reduzida, a partir de controladores de realimentação de estados de ordem aumentada, que evita realizações não controláveis e não observáveis, um problema comum quando a síntese é realizada por meio da formulação de realimentação estática de saída.

Para sistemas nebulosos T–S discretos no tempo, a maior contribuição foi propor uma classe de funções de Lyapunov e de controladores de realimentação de estado que apresentam dependência multi-polinomial nas funções de pertinência do modelo T–S nos instantes presente e passados de tempo. Essa função generaliza e contém funções de Lyapunov existentes na literatura como casos particulares. Mostrou-se que o uso das informações passadas das variáveis premissas para compor o sinal de controle atual traz melhores resultados em relação às estratégias que ignoram essa informação.

Em sistemas nebulosos T–S contínuos no tempo, as matrizes do modelo nebuloso e as variáveis do problema são parametrizadas com funções de pertinência descritas em um multi-simplex e, portanto, para construir condições LMIs, uma metodologia sistemática foi proposta para tratar polinômios homogêneos de graus arbitrários. Quando taxas de variação das funções de pertinência são consideradas, o modelo proposto, por meio de uma representação politópica para a derivada temporal das funções de pertinência, é menos conservador, mesmo quando considerado uma representação afim (grau unitário), do que as estratégias da literatura. No caso em que as variáveis premissas são variáveis de

estado, e não se conhecem os limitantes para a taxa de variação das funções de pertinência, formas mais gerais para funções de Lyapunov nebulosas, do tipo integral de linha, foram propostas, de modo que o conservadorismo deste tipo de função fosse reduzido em relação às estratégias existentes.

Em relação ao projeto de controladores de realimentação estática e dinâmica de saída para sistemas nebulosos T–S contínuos no tempo, uma estratégia baseada em dois estágios foi utilizada, diminuindo assim o conservadorismo normalmente exigido na solução de problemas de realimentação de saída. Como o problema de realimentação de saída é, no caso geral, não convexo, essa estratégia permite uma solução baseada em LMIs, em dois passos. A principal diferença da estratégia proposta baseada em dois estágios e as existentes na literatura [PA01, APS03, AGPP10], é de considerar condições com mais variáveis de folga em estrutura polinomial homogênea e, portanto, mais graus de liberdade nas LMIs do segundo estágio.

As tendências atuais na teoria de controle de sistemas nebulosos T–S apontam para o uso de funções de Lyapunov nebulosas mais complexas, condições LMIs mais relaxadas e a incorporação de aspectos do sistema não linear do qual o modelo foi extraído, como por exemplo condições para estabilidade local e não linearidades específicas. Assim sendo, essa tese contribui também no sentido de proporcionar novas ferramentas para futuros trabalhos nessas áreas.

Perspectivas

A pesquisa realizada neste trabalho aponta alguns temas de interesse que podem ser explorados em novas investigações. A seguir são listados alguns desses temas:

- Extensão dos resultados apresentados no Capítulo 3, aplicando a representação multi-simplex nas funções de pertinência, em cada instante de tempo, do sistema nebuloso T–S discreto no tempo. A função de Lyapunov e as matrizes do problema teriam múltiplos graus de liberdade, possibilitando, como consequência, a seletividade das variáveis premissas.
- Uma frente de trabalho promissora é considerar que as funções de pertinência de um sistema nebuloso discreto no tempo pertencem a um domínio politópico e possuem limitantes em suas taxas de variação. Analogamente ao realizado no Capítulo 3 no caso contínuo no tempo, um conjunto convexo seria utilizado para representar as funções de pertinência e suas variações como um politopo, permitindo a obtenção de relaxações LMIs que levariam em conta os limitantes da taxa de variação das funções de pertinência. A estratégia segue as linhas de [OP09], aplicado ao caso de sistemas LPV. No contexto de sistemas nebulosos T–S, a principal diferença seria o uso da informação das funções de pertinência, que são conhecidas, na construção do conjunto convexo.
- Outra perspectiva está em considerar uma lei de controle periódica ou de estrutura repetitiva de realimentação de estados para sistemas nebulosos T–S discretos no tempo. Baseado nos resultados obtidos em [EPA11], que considera controladores dinâmicos de realimentação de

estado periódicos, essa técnica seria aliada ao uso de informações passadas das funções de pertinência.

- Uma extensão natural da metodologia desenvolvida no Capítulo 4 seria aplicar a estratégia de dois estágios de síntese de controladores dinâmicos de realimentação de saída de ordem arbitrária para o caso discreto no tempo, com as funções de Lyapunov apresentadas no Capítulo 3.
- Outra possibilidade de trabalho futuro, complementando os resultados do Capítulo 3, seria o desenvolvimento de uma metodologia para o cálculo dos limitantes das taxas de variações das funções de pertinência em termos da informação da taxa de variação do sistema em malha fechada. Nesse caso, as variáveis premissas devem depender dos estados ($z(t) = x(t)$) e seria necessário impor um limitante ao sinal de controle ($u(t)$ saturado) e ao estado (pertencente a um conjunto compacto no espaço de estados). Condições locais de análise e síntese seriam obtidas.

Publicações

As publicações em temas diretamente ligados ao assunto da tese são:

- (a) [TOP09a] – E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. LMI relaxations for nonquadratic stabilization of discrete-time Takagi–Sugeno systems based on polynomial fuzzy Lyapunov functions. In *Proceedings of the 17th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED2009)*, pages 7–12, Thessaloniki, Greece, June 2009.
- (b) [TOP09b] – E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Relaxações LMIs para estabilização não-quadrática $\mathcal{H}_2$ de sistemas nebulosos discretos de Takagi–Sugeno. In *Anais do IX Congresso Brasileiro de Automação Inteligente*, Brasília, DF, Brasil, September 2009.
- (c) [TOP10a] – E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Controle seletivo com critério $\mathcal{H}_2$ de sistemas nebulosos Takagi–Sugeno. In *Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automação*, pages 4118–4125, Bonito, MS, Brasil, September 2010.
- (d) [TOP10b] – E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Selective stabilization of Takagi–Sugeno fuzzy systems. In *Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 2772–2779, Barcelona, Spain, July 2010.
- (e) [TOP11a] – E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Improved stabilization conditions for Takagi–Sugeno fuzzy systems via fuzzy integral Lyapunov functions. In *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, pages 4970–4975, San Francisco, CA, USA, June 2011.
- (f) [TOP11b] – E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. An LMI-based approach to static output feedback stabilization of T–S fuzzy systems. In *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, pages 12593–12598, Milano, Italy, August 2011.

- (g) [TOP11c] – E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Relaxações LMIs para realimentação de saída $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas nebulosos Takagi–Sugeno contínuos no tempo. In *Anais do X Congresso Brasileiro de Automação Inteligente*, pages 903–908, São João del-Rei, MG, Brasil, September 2011.
- (h) [TOP11d] – E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Selective $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ stabilization of Takagi–Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 19(5):890–900, October 2011.

Bibliografia

- [AGPP10] D. Arzelier, E. N. Gryazina, D. Peaucelle, and B. T. Polyak. Mixed LMI/Randomized methods for static output feedback control design. In *Proceedings of the 2010 American Control Conference*, pages 4683–4688, Baltimore, MD, USA, June-July 2010.
- [AO05] N. S. D. Arrifano and V. A. Oliveira. Robust $\mathcal{H}_\infty$ fuzzy control design for Markovian jump systems. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control — European Control Conference ECC 2005*, pages 3243–3248, Seville, Spain, December 2005.
- [AO06] N. S. D. Arrifano and V. A. Oliveira. Robust $\mathcal{H}_\infty$ fuzzy control approach for a class of Markovian jump nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(6):738–754, December 2006.
- [APS03] D. Arzelier, D. Peaucelle, and S. Salhi. Robust static output feedback stabilization for polytopic uncertain systems: Improving the guaranteed performance bound. In *Proceedings of the 4th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2003)*, Milan, Italy, June 2003.
- [AS07a] C. Ariño and A. Sala. Design of multiple-parameterisation PDC controllers via relaxed conditions for multi-dimensional fuzzy summations. In *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 1–6, London, UK, July 2007.
- [AS07b] C. Ariño and A. Sala. Relaxed LMI conditions for closed-loop fuzzy systems with tensor-product structure. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 20(8):1036–1046, December 2007.
- [Bar04] P. Baranyi. TP model transformation as a way to LMI-based controller design. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 51(2):387–400, April 2004.
- [BdT02] K. A. Barbosa, C. E. de Souza, and A. Trofino. Robust $\mathcal{H}_2$ filtering for discrete-time uncertain linear systems using parameter-dependent Lyapunov functions. In *Proceedings*

- of the 2002 American Control Conference*, pages 3224–3229, Anchorage, AK, USA, May 2002.
- [BEFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994.
- [BG10] M. Bernal and T. M. Guerra. Generalized nonquadratic stability of continuous-time Takagi–Sugeno models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 18(4):815–822, August 2010.
- [BGJ10] M. Bernal, T. M. Guerra, and A. Jaadari. Non-quadratic stabilization of Takagi–Sugeno models: A local point of view. In *Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 2375–2380, Barcelona, Spain, July 2010.
- [BGM09] T. Bouarar, K. Guelton, and N. Manamanni. Static output feedback controller design for Takagi–Sugeno systems — A fuzzy Lyapunov LMI approach. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control — 28th Chinese Control Conference*, pages 4150–4155, Shanghai, P. R. China, December 2009.
- [Bli04] P.-A. Bliman. A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42(6):2016–2042, 2004.
- [BOMP06] P.-A. Bliman, R. C. L. F. Oliveira, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. Existence of homogeneous polynomial solutions for parameter-dependent linear matrix inequalities with parameters in the simplex. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1486–1491, San Diego, CA, USA, December 2006.
- [BPB01] Y. Blanco, W. Perruquetti, and P. Borne. Nonquadratic stability of nonlinear systems in the Takagi–Sugeno form. In *Proceedings of the 2001 European Control Conference*, pages 3917–3922, Porto, Portugal, September 2001.
- [BT00] V. D. Blondel and J. N. Tsitsiklis. A survey of computational complexity results in systems and control. *Automatica*, 36(9):1249–1274, September 2000.
- [CF00] Y. Cao and P. M. Frank. Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(2):200–211, April 2000.
- [CGH⁺04] O. Cordón, F. Gomide, F. Herrera, F. Hoffmann, and L. Magdalena. Ten years of genetic fuzzy systems: Current framework and new trends. *Fuzzy Sets and Systems*, 141(1):5 – 31, January 2004.
- [CGTV04] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino. Parameter-dependent homogeneous Lyapunov functions for robust stability of linear time-varying systems. In *Proceedings of*

- the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4095–4100, Paradise Island, Bahamas, December 2004.
- [CGTV05] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino. Polynomially parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of polytopic systems: An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(3):365–370, March 2005.
- [CP03] D. J. Choi and P. Park. $\mathcal{H}_\infty$ state-feedback controller design for discrete-time fuzzy systems using fuzzy weighting-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(2):271–278, April 2003.
- [CT99] C. A. R. Crusius and A. Trofino. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5):1053–1057, May 1999.
- [CTU00] B. Chen, C. Tseng, and H. Uang. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ fuzzy output feedback control design for nonlinear dynamic systems: An LMI approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(3):249–265, June 2000.
- [CY10] X. H. Chang and G.-H. Yang. Relaxed stabilization conditions for continuous-time Takagi–Sugeno fuzzy control systems. *Information Sciences*, 180(17):3273–3287, September 2010.
- [CYW11] X.-H. Chang, G.-H. Yang, and H. Wang. Observer-based $\mathcal{H}_\infty$ -control for discrete-time T–S fuzzy systems. *International Journal of Systems Science*, 42(10):1801–1809, October 2011.
- [DB01a] J. Daafouz and J. Bernussou. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parameter uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43(5):355–359, August 2001.
- [DB01b] J. Daafouz and J. Bernussou. Poly-quadratic stability and $\mathcal{H}_\infty$ performance for discrete systems with time varying uncertainties. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 267–272, Orlando, FL, USA, December 2001.
- [dBT06] C. E. de Souza, K. A. Barbosa, and A. Trofino. Robust $\mathcal{H}_\infty$ filtering for discrete-time linear systems with uncertain time-varying parameters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(6):2110–2118, June 2006.
- [DGK07] F. Delmotte, T. M. Guerra, and M. Ksantini. Continuous Takagi–Sugeno’s models: Reduction of the number of LMI conditions in various fuzzy control design techniques. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(3):426–438, June 2007.

- [DH08] B. Ding and B. Huang. Reformulation of LMI-based stabilisation conditions for nonlinear systems in Takagi–Sugeno’s form. *International Journal of Systems Science*, 39(5):487–496, May 2008.
- [Din10] B. Ding. Stabilization of Takagi–Sugeno model via non-parallel distributed compensation law. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 18(1):188–194, February 2010.
- [dOBG99] M. C. de Oliveira, J. Bernussou, and J. C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4):261–265, July 1999.
- [dOGB02] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and J. Bernussou. Extended $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ characterization and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, 75(9):666–679, June 2002.
- [dOS01] M. C. de Oliveira and R. E. Skelton. Stability tests for constrained linear systems. In S. O. Reza Moheimani, editor, *Perspectives in Robust Control*, volume 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, pages 241–257. Springer-Verlag, New York, NY, 2001.
- [DSY06] B. Ding, H. Sun, and P. Yang. Further studies on LMI-based relaxed stabilization conditions for nonlinear systems in Takagi–Sugeno’s form. *Automatica*, 42(3):503–508, March 2006.
- [DY08] J. Dong and G.-H. Yang. Dynamic output feedback control synthesis for continuous-time T–S fuzzy systems via a switched fuzzy control scheme. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 38(4):1166–1175, August 2008.
- [EH04] Y. Ebihara and T. Hagiwara. New dilated LMI characterizations for continuous-time multiobjective controller synthesis. *Automatica*, 40(11):2003–2009, November 2004.
- [EOA97] L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. Ait-Rami. A cone complementarity linearization algorithm for static output feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(8):1171–1176, August 1997.
- [EPA11] Y. Ebihara, D. Peaucelle, and D. Arzelier. Periodically time-varying memory state-feedback controller synthesis for discrete-time linear systems. *Automatica*, 47:14–25, January 2011.
- [Fen03] G. Feng. Controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(5):605–612, October 2003.
- [FLK⁺06] C.-H. Fang, Y.-S. Liu, S.-W. Kau, L. Hong, and C.-H. Lee. A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of T–S fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(3):386–397, June 2006.

- [GB09] T. M. Guerra and M. Bernal. A way to escape from the quadratic framework. In *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 784–789, Jeju Island, Korea, August 2009.
- [GBM09] K. Guelton, T. Bouarar, and N. Manamanni. Robust dynamic output feedback fuzzy Lyapunov stabilization of Takagi–Sugeno systems — A descriptor redundancy approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(19):2796–2811, October 2009.
- [GKB09] T. M. Guerra, A. Kruszewski, and M. Bernal. Control law proposition for the stabilization of discrete Takagi–Sugeno models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(3):724–731, June 2009.
- [GKVT06] T. M. Guerra, A. Kruszewski, L. Vermeiren, and H. Tirmant. Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi–Sugeno’s form. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(17):1248–1259, May 2006.
- [GL95] M. Green and D. J. N. Limebeer. *Linear Robust Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [GNLC95] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox User’s Guide*. The Math Works, Natick, MA, 1995.
- [GPS96] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. Convex analysis of output feedback control problems: robust stability and performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7):997–1003, July 1996.
- [GV04] T. M. Guerra and L. Vermeiren. LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi–Sugeno’s form. *Automatica*, 40(5):823–829, May 2004.
- [HLP52] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2 edition, 1952.
- [HN07] D. Huang and S. K. Nguang. Static output feedback controller design for fuzzy systems: An ILMI approach. *Information Sciences*, 177(14):3005–3015, July 2007.
- [JRA99] M. Johansson, A. Rantzer, and K. E. Arzen. Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(6):713–722, December 1999.
- [KG05] A. Kruszewski and T. M. Guerra. New approaches for the stabilization of discrete Takagi–Sugeno fuzzy models. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control — European Control Conference ECC 2005*, pages 3255–3260, Seville, Spain, December 2005.

- [Kha02] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 3rd edition, 2002.
- [KL00] E. Kim and H. Lee. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(5):523–534, October 2000.
- [KP08] S. H. Kim and P. Park. $\mathcal{H}_\infty$ state-feedback control design for fuzzy systems using Lyapunov functions with quadratic dependence on fuzzy weighting functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16(6):1655–1663, December 2008.
- [KSGA09] A. Kruszewski, A. Sala, T. M. Guerra, and C. Ariño. A triangulation approach to asymptotically exact conditions for fuzzy summations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(5):985–994, October 2009.
- [KWG08] A. Kruszewski, R. Wang, and T. M. Guerra. Nonquadratic stabilization conditions for a class of uncertain nonlinear discrete time TS fuzzy models: A new approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(2):606–611, March 2008.
- [Lam09] H. K. Lam. Stability analysis of T–S fuzzy control systems using parameter-dependent Lyapunov function. *IET Control Theory & Applications*, 3(6):750–762, 2009.
- [LD06] J.-W. Lee and G. E. Dullerud. Uniform stabilization of discrete-time switched and Markovian jump linear systems. *Automatica*, 42(2):205–218, February 2006.
- [Lee06] J.-W. Lee. On uniform stabilization of discrete-time linear parameter-varying control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(10):1714–1721, October 2006.
- [LFC09] C. Lara, J. J. Flores, and F. Calderon. On the hyperbox — Hyperplane intersection problem. *INFOCOMP Journal of Computer Science*, 8(4):21–27, December 2009.
- [Liu03] F. Liu. Fuzzy pole placement design with $\mathcal{H}_\infty$ disturbance attenuation for uncertain nonlinear systems. In *Proceedings of the 2003 IEEE Conference on Control Applications*, pages 392–396, Istanbul, Turkey, June 2003.
- [LK09a] H. J. Lee and D. W. Kim. Fuzzy static output feedback may be possible in LMI framework. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(5):1229–1230, October 2009.
- [LK09b] H. J. Lee and D. W. Kim. Robust stabilization of T–S fuzzy systems: Fuzzy static output feedback under parametric uncertainty. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 7(5):731–736, October 2009.
- [Löf04] J. Löfberg. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, pages 284–289, Taipei, Taiwan, September 2004. <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>.

- [LPJ10] D. H. Lee, J. B. Park, and Y. H. Joo. Improvement on nonquadratic stabilization of discrete-time Takagi–Sugeno fuzzy systems: Multiple-parameterization approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 18(2):425–429, April 2010.
- [LPJ11a] D. H. Lee, J. B. Park, and Y. H. Joo. Approaches to extended non-quadratic stability and stabilization conditions for discrete-time Takagi–Sugeno fuzzy systems. *Automatica*, 47(3):534–538, March 2011.
- [LPJ11b] D. H. Lee, J. B. Park, and Y. H. Joo. Further improvement of periodic control approach for relaxed stabilization condition of discrete-time Takagi–Sugeno fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 174(1):50–65, July 2011.
- [LPJ11c] D. H. Lee, J. B. Park, and Y. H. Joo. Further theoretical justification of the k -samples variation approach for discrete-time Takagi–Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 19(3):594–597, June 2011.
- [LPJJ10] D. H. Lee, J. B. Park, Y. H. Joo, and H. S. Jeong. A less conservative LMI condition for stability analysis of continuous-time Takagi–Sugeno fuzzy systems via a new fuzzy Lyapunov function. In *Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 248–253, Barcelona, Spain, July 2010.
- [LWNT00] J. Li, H. O. Wang, D. Niemann, and K. Tanaka. Dynamic parallel distributed compensation for Takagi–Sugeno fuzzy systems: An LMI approach. *Information Sciences*, 123(3–4):201–221, April 2000.
- [LZ03] X. Liu and Q. Zhang. New approaches to $\mathcal{H}_\infty$ controller designs based on fuzzy observers for T–S fuzzy systems via LMI. *Automatica*, 39(5):1571–1582, October 2003.
- [MBB04] D. Mehdi, E. K. Boukas, and O. Bachelier. Static output feedback design for uncertain linear discrete time systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 21(1):1–13, March 2004.
- [MMG⁺09] B. Mansouri, N. Manamanni, K. Guelton, A. Kruszewski, and T. M. Guerra. Output feedback LMI tracking control conditions with $\mathcal{H}_\infty$ criterion for uncertain and disturbed T–S models. *Information Sciences*, 179(4):446–457, February 2009.
- [MOP07] V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Necessary and sufficient LMI conditions to compute quadratically stabilizing state feedback controllers for Takagi–Sugeno systems. In *Proceedings of the 2007 American Control Conference*, pages 4059–4064, New York, NY, USA, July 2007.
- [MOP09] V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Convergent LMI relaxations for quadratic stabilizability and $\mathcal{H}_\infty$ control for Takagi–Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(4):863–873, August 2009.

- [MOPB09] V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira, P. L. D. Peres, and P.-A. Bliman. Stability analysis and gain-scheduled state feedback control for continuous-time systems with bounded parameter variations. *International Journal of Control*, 82(6):1045–1059, June 2009.
- [MPA09] L. A. Mozelli, R. M. Palhares, and G. S. C. Avellar. A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems. *Information Sciences*, 179(8):1149–1162, March 2009.
- [MPSM09] L. A. Mozelli, R. M. Palhares, F. O. Souza, and E. M. A. M. Mendes. Reducing conservativeness in recent stability conditions of TS fuzzy systems. *Automatica*, 45(6):1580–1583, June 2009.
- [MSH98] X. J. Ma, Z. Q. Sun, and Y. Y. He. Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(1):41–50, February 1998.
- [NS03] S. K. Nguang and P. Shi. $\mathcal{H}_\infty$ fuzzy output feedback control design for nonlinear systems: An LMI approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(3):331–340, June 2003.
- [NS06] S. K. Nguang and P. Shi. Robust $\mathcal{H}_\infty$ output feedback control design for fuzzy dynamic systems with quadratic $\mathcal{D}$ stability constraints: An LMI approach. *Information Sciences*, 176(15):2161–2191, August 2006.
- [OBP08] R. C. L. F. Oliveira, P.-A. Bliman, and P. L. D. Peres. Robust LMIs with parameters in multi-simplex: Existence of solutions and applications. In *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2226–2231, Cancun, Mexico, December 2008.
- [OCTS09] V. A. Oliveira, L. V. Cossi, M. C. M. Teixeira, and A. M. F. Silva. Synthesis of PID controllers for a class of time delay systems. *Automatica*, 45(7):1778–1782, July 2009.
- [OP05] R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres. LMI conditions for the existence of polynomially parameter-dependent Lyapunov functions assuring robust stability. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control — European Control Conference ECC 2005*, pages 1660–1665, Seville, Spain, December 2005.
- [OP07] R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(7):1334–1340, July 2007.
- [OP09] R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres. Time-varying discrete-time linear systems with bounded rates of variation: Stability analysis and control design. *Automatica*, 45(11):2620–2626, November 2009.

- [OTS06] V. A. Oliveira, E. S. Tognetti, and D. Siqueira. Robust controllers enhanced with design and implementation processes. *IEEE Transactions on Education*, 49(3):370–382, August 2006.
- [PA01] D. Peaucelle and D. Arzelier. An efficient numerical solution for $\mathcal{H}_2$ static output feedback synthesis. In *Proceedings of the 2001 European Control Conference*, Porto, Portugal, September 2001.
- [PTP97] R. M. Palhares, R. H. C. Takahashi, and P. L. D. Peres. $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{H}_2$ guaranteed costs computation for uncertain linear systems. *International Journal of Systems Science*, 28(2):183–188, February 1997.
- [RW06] B.-J. Rhee and S. Won. A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi–Sugeno fuzzy control system design. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(9):1211–1228, May 2006.
- [SA07] A. Sala and C. Ariño. Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polya’s theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(24):2671–2686, December 2007.
- [SADG97] V. L. Syrmos, C. T. Abdallah, P. Dorato, and K. Grigoriadis. Static output feedback – A survey. *Automatica*, 33(2):125–137, February 1997.
- [SIG98] R. E. Skelton, T. Iwasaki, and K. Grigoriadis. *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*. Taylor & Francis, Bristol, PA, 1998.
- [Stu99] J. F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11(1–4):625–653, 1999. <http://sedumi.mcmaster.ca/>.
- [TAA03] M. C. M. Teixeira, E. Assunção, and R. G. Avellar. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(5):613–623, October 2003.
- [Tak98] R. H. C. Takahashi. *Controle Singular de Sistemas Incertos*. PhD thesis, FEEC — Universidade Estadual de Campinas, 1998.
- [TANY01] H. D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, and Y. Yamamoto. Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(2):324–332, April 2001.
- [THW01] K. Tanaka, T. Hori, and H. O. Wang. A fuzzy Lyapunov approach to fuzzy control system design. In *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, pages 4790–4795, Arlington, VA, USA, June 2001.

- [THW03] K. Tanaka, T. Hori, and H. O. Wang. A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(4):582–589, August 2003.
- [TIW98a] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(2):250–265, May 1998.
- [TIW98b] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang. A unified approach to controlling chaos via an LMI-based fuzzy control system design. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part I: Fundamental Theory and Applications*, 45(10):1021–1040, October 1998.
- [TO10] E. S. Tognetti and V. A. Oliveira. Fuzzy pole placement based on piecewise Lyapunov functions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 20(5):571–578, March 2010.
- [TOP09a] E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. LMI relaxations for nonquadratic stabilization of discrete-time Takagi–Sugeno systems based on polynomial fuzzy Lyapunov functions. In *Proceedings of the 17th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED2009)*, pages 7–12, Thessaloniki, Greece, June 2009.
- [TOP09b] E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Relaxações LMIs para estabilização não-quadrática $\mathcal{H}_2$ de sistemas nebulosos discretos de Takagi–Sugeno. In *Anais do IX Congresso Brasileiro de Automação Inteligente*, Brasília, DF, Brasil, September 2009.
- [TOP10a] E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Controle seletivo com critério $\mathcal{H}_2$ de sistemas nebulosos Takagi–Sugeno. In *Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática*, pages 4118–4125, Bonito, MS, Brasil, September 2010.
- [TOP10b] E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Selective stabilization of Takagi–Sugeno fuzzy systems. In *Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 2772–2779, Barcelona, Spain, July 2010.
- [TOP11a] E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Improved stabilization conditions for Takagi–Sugeno fuzzy systems via fuzzy integral Lyapunov functions. In *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, pages 4970–4975, San Francisco, CA, USA, June 2011.
- [TOP11b] E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. An LMI-based approach to static output feedback stabilization of T–S fuzzy systems. In *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, pages 12593–12598, Milano, Italy, August 2011.

- [TOP11c] E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Relaxações LMIs para realimentação de saída $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas nebulosos Takagi–Sugeno contínuos no tempo. In *Anais do X Congresso Brasileiro de Automação Inteligente*, pages 903–908, São João del-Rei, MG, Brasil, September 2011.
- [TOP11d] E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Selective $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ stabilization of Takagi–Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 19(5):890–900, October 2011.
- [TOW07] K. Tanaka, H. Ohtake, and H. O. Wang. A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(3):333–341, June 2007.
- [TPA00] M. C. M. Teixeira, H. C. Pietrobom, and E. Assunção. Novos resultados sobre a estabilidade e controle de sistemas não-lineares utilizando modelos fuzzy e LMI. *SBA: Controle & Automação*, 11(2):37–48, Jan/Fev/Mar/Abr 2000.
- [Tro09] A. Trofino. Sufficient LMI conditions for the design of static and reduced order controllers. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control — 28th Chinese Control Conference*, pages 6668–6673, Shanghai, P. R. China, December 2009.
- [TS85] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-15(1):116–132, January 1985.
- [TW01] K. Tanaka and H. Wang. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley & Sons, New York, NY, 2001.
- [TZ99] M. C. M. Teixeira and S. H. Žak. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(2):133–142, April 1999.
- [WTG95] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi–Sugeno fuzzy model. In *Proceedings of the 4th IEEE International Conference on Fuzzy Systems and The 2nd International Fuzzy Engineering Symposium*, pages 531–538, Yokohama, Japan, March 1995.
- [WTG96] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1):14–23, February 1996.
- [XL05] S. Xu and J. Lam. Robust $\mathcal{H}_\infty$ control for uncertain discrete-time-delay fuzzy systems via output feedback controllers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13(2):82–93, February 2005.

- [YD10] G.-H. Yang and J. Dong. Switching fuzzy dynamic output feedback $\mathcal{H}_\infty$ control for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 40(2):505–516, April 2010.
- [YNKI00] J. Yoneyama, M. Nishikawa, H. Katayama, and A. Ichikawa. Output stabilization of Takagi–Sugeno fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 111(2):253–266, April 2000.
- [Yon09] J. Yoneyama. Output feedback control for fuzzy systems with immeasurable premise variables. In *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 802–807, Jeju Island, Korea, August 2009.
- [YS09] I. Yaesh and U. Shaked. Robust reduced-order output-feedback $\mathcal{H}_\infty$ control. In *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2009)*, pages 155–160, Haifa, Israel, June 2009.
- [ZC00] D. G. Zill and M. R. Cullen. *Advanced Engineering Mathematics*. Jones and Bartlett, London, UK, 2nd. edition, 2000.
- [ZF06] S. Zhou and G. Feng. Generalised $\mathcal{H}_2$ controller synthesis for uncertain discrete-time fuzzy systems via basis-dependent Lyapunov functions. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 153(1):74–80, January 2006.
- [ZFLX05] S. Zhou, G. Feng, J. Lam, and S. Xu. Robust $\mathcal{H}_\infty$ control for discrete-time fuzzy systems via basis-dependent Lyapunov functions. *Information Sciences*, 174(3–4):197–217, August 2005.