

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE COMUNICAÇÕES

*Este exemplar corresponde à redação final
da Tese defendida por Raimundo Benedito do
Nascimento e aprovada pela Comissão Julgadora
em 20 de Fevereiro de 1990.*

Reginaldo Palazzo Júnior

UM ESTUDO SOBRE QUANTIZADORES RETICULADOS
VIA FORMAS QUADRÁTICAS EXTREMAS
E
TAXA DE DISTRORÇÃO

AUTOR: RAIMUNDO BENEDITO DO NASCIMENTO.
ORIENTADOR: PROF. DR. REGINALDO PALAZZO JUNIOR.

Dissertação Submetida à Coordenação do Curso de
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da
Universidade Estadual de Campinas -UNICAMP- como
Requisito Parcial Para a Obtenção do Título de
Doutor em Engenharia Elétrica.

Campinas, Fevereiro de 1990.

WHEN CLOSED FOR US A DOOR
GOD OPEN A WINDOW TO SEE
THROUGH IT SOMETHING NEW.

À quatro pessoas maravilhosas
em minha vida.

Minha Mãe: D. Benedita.

Minha Esposa: Maria Melo.

Minhas Filhas: Susy e Sylvie.

AGRADECIMENTOS.

Várias foram as pessoas que de uma maneira ou de outra colaboraram na elaboração desta Dissertação, tanto materialmente quanto por meio de sugestões.

Esta Dissertação não poderia ter aparecido se não fôsse pelo estímulo constante do meu orientador, Professor Reginaldo Palazzo Júnior. A ele, tanto na categoria de Professor Orientador quanto na Qualidade de Amigo, Registro aqui Meus Sinceros e Cordiais Agradecimentos.

Quero na oportunidade agradecer aos professores, Dalton Soares Arantes e Yuzo Yano, ambos da FEE (UNICAMP), bem como aos professores Gur Dial da Universidade Federal de Santa Catarina e Valdemar Cardoso da Rocha da Universidade Federal de Pernambuco, por terem confirmado suas presenças na comissão de Tese.

Não poderia deixar de agradecer a Universidade Federal da Paraíba (Instituição da qual sou docente), e através desta o Departamento de Ciências Exatas e da Natureza do Campus V, sediado em Cajazeiras, pelo consentimento de minha permanência em Campinas-Sp, durante estes quatros últimos anos, bem como à Coordenação do Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro que me tem proporcionado.

Agradeço igualmente a todos que, direta ou indiretamente, me proporcionaram alguma forma de apoio durante a realização desta Dissertação.

Finalmente agradeço à Sta. Ademilde Félix que com muito zelo digitou o presente trabalho.

RESUMO.

O processamento e a transmissão de sinais digitais desempenham um papel dominante para os sistemas de comunicações tanto no aspecto aplicativo quanto no teórico. Sabemos, entretanto, que a maioria dos sinais produzidos são de natureza analógica ou contínua no tempo. Portanto, para um efetivo processamento digital torna-se necessário que sejam propostos conversores analógico-digital cada vez mais eficientes. Frequentemente a qualidade da conversão é um fator limitante com relação ao desempenho total do sistema pelo fato de que uma degradação irreversível está sendo introduzida via distorção. Na quantização o mecanismo deve responder questões do tipo: quantos bits são necessários para representar as amostras ou quanto ruído quantizado pode ser evitado para uma taxa conhecida à priori?. Em geral, os quantizadores reticulados podem ser vistos como generalizações multidimensionais de quantizadores escalares uniformes. Assim sendo, este trabalho consiste em descrever analiticamente via formas quadráticas extremas os quantizadores reticulados bem como mostrar a viabilidade dos grupos de reflexão e das álgebras de Lie em problemas de codificação de fonte, usando como um indicativo para esta viabilidade, a questão do número mínimo de bits necessários para codificar a saída de uma fonte de modo que ela possa ser reconstruída satisfazendo uma distorção pré-estabelecida.

ABSTRACT.

Digital processing and transmission play a fundamental role in communications systems regarding its theoretical and applied aspects. It is well known, however, that the majority of the signals of interest are analog or continuous time in nature. Therefore, it is quite a necessity to propose new analog-to-digital converters with ever increasing efficiency such that the irreversible degradation being introduced by distortion be as small as possible. As far as the quantization process is concerned it is important to provide an answer to the following question: How many bits are necessary to represent the samples or how much quantized noise can be avoided for given fixed rate? In general, lattice quantizers can be seen as multidimensional generalizations of uniform scalar quantizers. Therefore, it is the objective of this dissertation to describe analytically lattice quantizers via extreme quadratic forms as well as to show how promising are the use of reflection groups and Lie algebras in source coding problems. Under these assumptions it is presented a systematic procedure in establishing the Voronóí regions for several families of the simple Lie algebra as well as the corresponding rate distortion function.

INDICE

Página.

INTRODUÇÃO.....ix.

CAPÍTULO 1 - Formas Quadráticas.....1.

1.1 - Preliminares.....2.

1.2 - Formas Quadráticas.....3.

1.3 - Reticulados de Pontos.....7.

1.4 - Propriedades dos Reticulados.....10.

1.5 - O Determinante do Reticulado.....21.

1.6 - Formas Quadráticas Reflexíveis.....25.

CAPÍTULO 2 - Grupos de Reflexões e Álgebras de Lie.....32.

2.1 - Preliminares.....33.

2.2 - Grupos de Simetrias.....33.

2.3 - Grupos de Reflexões e Sistemas de Raízes.....39.

2.4 - Grafos de Coxeter.....44.

2.5 - Álgebras de Lie.....48.

2.6 - Sistema de Raízes de uma Álgebra de Lie.....58.

2.7 - Grupo de Weyl de uma Álgebra de Lie.....71.

2.8 - Matrizes de Cartan e Diagramas de Dynkin.....76.

2.9 - Empacotamento de Esferas, Formas Extremas e Álgebras
de Lie.....81.

CAPÍTULO 3 - Regiões de Voronói e Segundo Momento de Politopos...90.

3.1 - Preliminares.....91.

3.2 - Cálculo do Segundo Momento de Politopos.....	94.
3.3 - Região de Voronói de Reticulados Gerado por um Sistema de Raízes de uma Álgebra de Lie.....	121.
CAPÍTULO 4 - A Função Taxa de Distorção.....	132.
4.1 - Preliminares.....	133.
4.2 - A Função Taxa de Distorção para Fonte Discreta sem Memória.....	135.
4.3 - Cálculo da Taxa de Distorção para alguns Reticulados..	151.
CAPÍTULO 5 - Conclusões.....	156.
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	162.

INTRODUÇÃO .

O interesse contínuo de incorporação de técnicas de processamento digital de sinais em sistemas de comunicações advem da eficiência que pode ser alcançada tanto no aspecto de confiabilidade da informação sendo transmitida como da reprodutividade desta mesma informação.

Apesar de Shannon, através do Teorema da Codificação de Fonte sujeita ao critério de fidelidade, explicitar claramente a vantagem da codificação por blocos ou vetores ao invés da codificação por escalar só recentemente é que algoritmos eficientes para compressão de dados,[33]-[35], tornaram viável a implementação de sistemas práticos utilizando quantização vetorial.

O referencial teórico em que se fundamenta a análise dos quantizadores escalares vetoriais é a Teoria da Taxa de Distorção. Segundo esta teoria, o desempenho dos quantizadores vetoriais é medido através da seguinte hipótese: fixar a taxa e aumentar a dimensão ou fixar a dimensão e aumentar a taxa.

Baseado nesta última hipótese é que Bennett [36] introduziu o conceito de quantização assintótica ou de alta resolução com o objetivo de medir o desempenho de quantizadores escalares. Este mesmo conceito foi generalizado para quantizadores vetoriais por Zador [22] e para quantizadores reticulados por Conway e Sloane [9].

De uma maneira simples, a essência da quantização assintótica utiliza da hipótese de que mantendo fixa a dimensão e aumentando a taxa resulta em um aumento no número de níveis(pontos) de saída de tal forma que um grande número de níveis(pontos) a densidade de probabilidade da entrada é aproximadamente constante em qualquer

politopo contendo estes nives(pontos).

Assim, sob as hipóteses de quantização assintótica (densidade de probabilidade uniforme) e de que a fonte não possui memória, os quantizadores vetoriais baseados em reticulados apresentam isometrias com relação aos politopos fundamentais (regiões de Voronói) ótimos, isto é recobrem uniformemente todo o espaço em consideração.

Dessa forma, o objetivo deste trabalho consiste em apresentar uma forma sistemática de análise de quantizadores reticulados através de formas quadráticas extremas bem como usar a teoria da taxa de distorção para mostrar a viabilidade de álgebras de Lie em problemas de codificação de fonte.

Para atingir nosso objetivo, dividimos nosso trabalho em quatro partes.

A primeira parte, (Capítulo 1), trata do conceito e propriedades das formas quadráticas bem como sua conexão com os reticulados.

Na segunda parte, (Capítulo 2), abordamos os conceitos de grupos de simetria, grupos de reflexão, grafos de Coxeter, álgebras de Lie, grupos de Weyl de uma álgebra de Lie, matrizes de Cartan, diagramas de Dynkin, e as relações existente entres o empacotamento de esferas no espaço Euclidiano n -dimensional, as formas quadráticas extremas e as álgebras de Lie. Estes tópicos têm por objetivo, fornecer conhecimentos básicos para o Capítulo 3, no qual apresentamos um método para a determinação da região de Voronoi [9] de um reticulado gerado por um sistema de raizes de uma álgebra de Lie.

Os reticulados quando usados como quantizadores, introduzem erros inevitáveis, então a terceira parte (Capítulo 3) do nosso trabalho tem por objetivo quantificar estes erros, bem como determinar as regiões de Voronoi de alguns reticulados usando toda

estrutura algébrica estudada no Capítulo 2.

A quarta e última parte (Capítulo 4) tem por objetivo estabelecer o cálculo da função taxa de distorção quando usamos os reticulados como quantizadores ou codificadores de fonte.

Este cálculo nos permite responder à questão: quantos bits ou nats por segundos são necessários, para a representação das amostras ou quanto ruído quantizado (distorção) pode ser evitado para uma taxa fixada à priori ?.

Esperamos deste modo, que os resultados por nós obtidos no Capítulo 4 deste trabalho, possam contribuir de maneira significativa, no estudo relativo ao problema de codificação de fonte.

CAPÍTULO 1

FORMAS CUADRÁTICAS

1.1 - PRELIMINARES.

A construção de códigos para transmitir informações confiáveis está intimamente relacionada com o problema de empacotamento de esferas. Particularmente, o problema de empacotamento de esferas pode ser aplicado na construção de sinais para serem transmitidos em canais com ruído bem como na construção de conversores analógico-digitais. Usando os resultados (técnicas) de empacotamento de esferas, é possível transmitir palavras códigos com mínima quantidade de potência e máxima confiabilidade.

O objetivo deste Capítulo é apresentar os conceitos e propriedades de formas quadráticas, uma vez que estes elementos proporcionam uma alternativa para o estudo dos reticulados. Com isso mostraremos como formas quadráticas e reticulados estão relacionados. Abordaremos ainda o conceito de reflexão no espaço Euclideano com o propósito de definirmos formas quadráticas reflexíveis as quais correspondem aos empacotamentos densos de esferas.

1.2 - FORMAS QUADRÁTICAS.

Definição 1.2.1 - A soma dupla

$$Q(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i x^j \quad (a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad x^i, x^j \in \mathbb{Z}).$$

onde $A=(a_{ij})$, é uma matriz simétrica, é denominada uma forma quadrática n-ária. Diremos, em geral, que a matriz A está associada à forma Q.

Definição 1.2.2 - Duas formas quadráticas

$$Q_1(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i x^j$$

$$Q_2(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a^{ij} x_i x_j$$

são chamadas recíprocas, se a matriz $A = (a_{ij})$ possuir $B = (a^{ij})$ como inversa e vice-versa.

Exemplo 1.2.1 - Sejam $Q_1(x, y, z)$ e $Q_2(x, y, z)$ formas quadráticas especificadas (onde $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$) por

$$Q_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz$$

$$Q_2(x, y, z) = 3/2 x^2 + 2y^2 + 3/2 z^2 + 2xy + xz + 2yz,$$

Vamos denotar por A e B as matrizes associadas às formas quadráticas Q_1 e Q_2 respectivamente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Como

$$AB = BA = I,$$

então as formas quadráticas Q_1 e Q_2 são recíprocas.

Definição 1.2.3 - Uma forma quadrática

$$Q(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i x^j$$

é positiva definida, se:

$$Q(x^1, \dots, x^n) > 0$$

para todo $(x^1, \dots, x^n) \neq (0, \dots, 0)$.

No Exemplo 1.2.1, as formas Q_1 e Q_2 são positivas definidas.

Os elementos da diagonal da matriz $A = (a_{ij})$, de uma forma quadrática positiva definida

$$Q(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i x^j$$

são todos positivos, isto é

$$Q(1, 0, 0, \dots, 0, 0) = a_{11}$$

$$Q(0, 1, 0, \dots, 0, 0) = a_{22}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$Q(0, 0, 0, \dots, 0, 1) = a_{nn}$$

Definição 1.2.4 - Seja $Q(\underline{x}) = Q(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i x^j$

uma forma quadrática positiva definida. Considere M e d dados por

$$M = \min_{\underline{x}} Q(x^1, \dots, x^n) \quad \text{e} \quad d = \text{Det}(a_{ij})$$

com x^1, \dots, x^n inteiros não todos nulos. A forma quadrática Q é denominada extrema se para toda variação pequena dos coeficientes a_{ij} , a razão d/M^n é um mínimo local.

Em geral quando trabalhamos com formas quadráticas associadas à reticulados, procuramos dentro de uma mesma classe, aquela que se apresenta de uma maneira mais simples. Com este objetivo, diremos que duas formas quadráticas n -árias Q_1 e Q_2 com matrizes A e B respectivamente são equivalentes se $B = M A M^t$ para alguma matriz M com $\text{det}(M) = \pm 1$. Quando duas formas quadráticas n -árias Q_1 e Q_2 são equivalentes diremos que elas estão na mesma classe.

Exemplo 1.2.2 - As formas quadráticas binárias

$$Q_1(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad Q_2(x, y) = x^2 + (x - y)^2$$

são equivalentes.

Exemplo 1.2.3 - As formas quadráticas ternárias

$$Q_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xz + yz$$

$$Q_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + (-z)^2 - x(-z) - y(-z)$$

são equivalentes.

Gauss [14] observou que toda forma quadrática binária extrema é equivalente à

$$Q(x, y) = x^2 + y^2 - xy,$$

e que toda forma quadrática ternária extrema é equivalente à

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xz + yz.$$

Korkine e Zolotareff [15] mostraram que existem duas classes de formas quadráticas quartenárias extremas e três classes de formas quadráticas quinárias extremas.

1.3 - RETICULADOS DE PONTOS.

O termo reticulado é usado no mínimo em dois tópicos distintos da Matemática, isto é, na álgebra e na geometria dos números. Na álgebra, a teoria do reticulado refere-se ao estudo de um tipo especial de conjunto parcialmente ordenado[1]. Este tipo de reticulado não será abordado em nosso trabalho. Na geometria dos números um reticulado refere-se à qualquer subgrupo discreto do espaço Euclidiano n-dimensional. Estudaremos reticulados com a seguinte característica: Considere t_1, \dots, t_n , n vetores linearmente independentes no espaço

\mathbb{R}^n . O conjunto $\{ x = x_1 t_1 + \dots + x_n t_n \mid x_i \in \mathbb{Z} \}$ é denominado um reticulado com base t_1, \dots, t_n , (Figura 1.3.1).

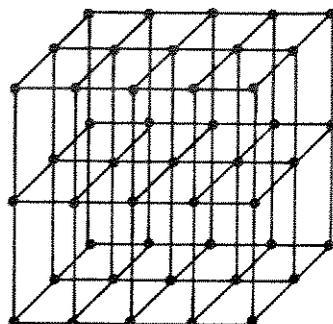


Figura 1.3.1 - Parte de um reticulado tridimensional.

A fim de motivar a definição de reticulados e estudar suas relações com formas quadráticas, daremos três exemplos de reticulados no espaço tridimensional.

Exemplo 1.3.1 - Sejam t_1, t_2, t_3 as translações unitárias no sistema de coordenadas Cartesianas. O conjunto $\{ x = x_1 t_1 + x_2 t_2 + x_3 t_3 \mid x_i \in \mathbb{Z} \}$ forma o reticulado cúbico (Figura 1.3.2).

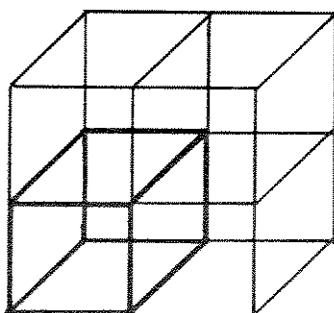


Figura 1.3.2 - Parte de um reticulado cúbico com base t_1, t_2, t_3 .

Exemplo 1.3.2 - No sistema de coordenadas Cartesianas, considere $(1/2)(t_1 + t_2), (1/2)(t_1 + t_3), (1/2)(t_2 + t_3)$. O conjunto $\langle x = (1/2x_1)(t_1 + t_2) + (1/2x_2)(t_1 + t_3) + (1/2x_3)(t_2 + t_3) \mid x_i \in \mathbb{Z} \rangle$ é denominado reticulado cúbico de face centrada (Figura 1.3.3).

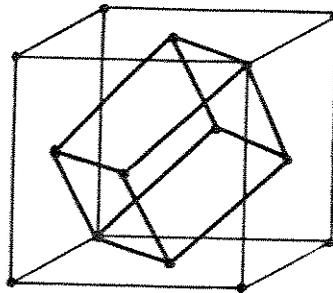


Figura 1.3.3 - Parte do reticulado cúbico de face centrada com base $(1/2)(t_1 + t_2), (1/2)(t_1 + t_3), (1/2)(t_2 + t_3)$.

Exemplo 1.3.3 - No sistema de coordenadas Cartesianas considere $t_1, t_2, (1/2)(t_1 + t_2 + t_3)$. O conjunto $\langle x = x_1 t_1 + x_2 t_2 + (1/2)x_3(t_1 + t_2 + t_3) \mid x_i \in \mathbb{Z} \rangle$ é denominado reticulado cúbico de corpo centrado (Figura 1.3.4).

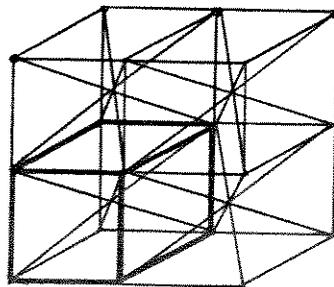


Figura 1.3.4 - Parte do reticulado cúbico de corpo centrado com base $t_1, t_2, (1/2)(t_1 + t_2 + t_3)$.

Definição 1.3.1 - Sejam t_1, \dots, t_n elementos linearmente independentes do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n . O conjunto $\{x \cdot T \mid x = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{Z}\}$ com $t_1 = (t_{11}, \dots, t_{1n}), t_2 = (t_{21}, \dots, t_{2n}), \dots, t_n = (t_{n1}, \dots, t_{nn})$

$$e \quad T = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

é denominado reticulado com base t_1, \dots, t_n . O conjunto consistindo de todos os pontos: $x_1 t_1 + \dots + x_n t_n$ ($0 \leq x_i < 1$) é denominado paralelepípedo fundamental. A (Figura 1.3.5) mostra um reticulado bidimensional e o paralelepípedo fundamental determinado pela base t_1, t_2 . Um paralelepípedo fundamental é um exemplo de uma região fundamental, isto é, uma região que ao repeti-la infinitas vezes, cobre todo o espaço com exatamente um ponto do reticulado em cada cópia.

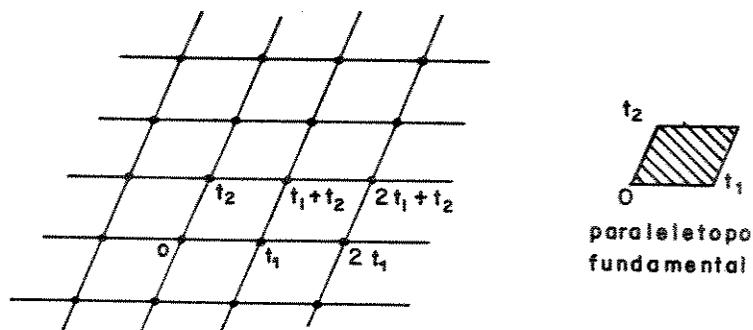


Figura 1.3.5 - Parte do reticulado bidimensional com base t_1, t_2 .

1.4 - PROPRIEDADES DOS RETICULADOS.

Sejam t_1 e t_2 dois pontos no \mathbb{R}^2 dados por

$$t_1 = (a_1, b_1) \quad \text{e} \quad t_2 = (a_2, b_2)$$

então as coordenadas de qualquer ponto $P = (a, b)$ do reticulado gerado por t_1, t_2 são dadas por

$$a = x_1 a_1 + x_2 a_2 \quad \text{e} \quad b = x_1 b_1 + x_2 b_2$$

onde x_1 e x_2 são inteiros quaisquer.

Seja Λ o conjunto de todos os pontos (a, b) com coordenadas inteiras. Considere a transformação linear L , dada por

$$a' = x_1 a + x_2 b, \quad b' = y_1 a + y_2 b \quad (1.4.1)$$

onde x_1, x_2, y_1, y_2 são inteiros positivos ou negativos. De (1.4.1) podemos ver que qualquer ponto $(a, b) \in \Lambda$, é transformado em outro ponto $(a', b') \in \Lambda$. Resolvendo (1.4.1) para a e b obtemos

$$a = (y_2 a' - x_2 b') / (x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad (1.4.2)$$

$$b = -(y_1 a' - x_1 b') / (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Seja $\text{Det}(L)$ o determinante da transformação L . Se $\text{Det}(L) = \pm 1$ então quaisquer valores inteiros de a' e b' , resultam em valores inteiros de a e b . Portanto, todo ponto $(a', b') \in \Lambda$ corresponde a um ponto $(a, b) \in \Lambda$. Isto mostra que Λ é transformado em Λ . Reciprocamente, se Λ é transformado em si próprio, todo ponto (a', b') com coordenadas inteiras deve fornecer um ponto (a, b) com coordenadas inteiras. Em particular, se (a', b') assumir os

valores $(1,0)$ e $(0,1)$, de (1.4.1) temos

$$\begin{aligned} \text{Det}(L) \text{ divide } y_2 & , & \text{Det}(L) \text{ divide } x_2 \\ \text{Det}(L) \text{ divide } y_1 & , & \text{Det}(L) \text{ divide } x_1. \end{aligned}$$

Dessa maneira,

$$(\text{Det}(L))^2 \text{ divide } (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

ou

$$(\text{Det}(L))^2 \text{ divide } \text{Det}(L)$$

isto só é possível se $\text{Det}(L) = \pm 1$.

No espaço Euclideano tridimensional os reticulados e as formas ternárias apresentam propriedades interessantes sendo que uma delas resume no fato de que formas recíprocas são representadas por reticulados recíprocos.

Com o objetivo de estudar as propriedades entre reticulados de pontos e classes de formas quadráticas, vamos considerar a forma quadrática n-ária

$$Q_1(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i x^j$$

e a forma quadrática n-ária recíproca de Q_1 , definida por

$$Q_2(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a^{ij} x_i x_j$$

Sejam $p_1 = (0, \dots, 0)$ e $p_2 = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ pontos do espaço \mathbb{R}^n . O quadrado da distância entre p_1 e p_2 é dada por

$$d^2(p_1, p_2) = (\xi^1)^2 + \dots + (\xi^n)^2$$

Considere

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \dots, 0, 0) \\ e_2 &= (0, 1, \dots, 0, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

os vetores unitários relativos aos eixos cartesianos. O quadrado da norma do vetor

$$v = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i = (\xi^1, \dots, \xi^n)$$

é dada por

$$\|v\|^2 = (\xi_1)^2 + \dots + (\xi_n)^2$$

O nosso objetivo será expressar formas quadráticas n-árias como uma soma de quadrados. Desse modo, as formas podem ser escritas da seguinte maneira

$$(\xi^1)^2 + \dots + (\xi^n)^2 \tag{1.4.3}$$

onde

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^1 & \dots & C_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ C_1^n & \dots & C_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad (1.4.4)$$

ou

$$\xi^i = \sum_{j=1}^n C_j^i x^j \quad (i=1, \dots, n)$$

As formas quadráticas recíprocas serão escritas da seguinte maneira

$$(\xi_1)^2 + \dots + (\xi_n)^2 \quad (1.4.5)$$

onde

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^1 & \dots & C_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ C_1^n & \dots & C_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad (1.4.6)$$

ou

$$x_j = \sum_{i=1}^n C_j^i \xi_i \quad (j=1, \dots, n)$$

Proposição 1.4.1 - Seja $\xi^i = \sum_{j=1}^n C_j^i x^j$, $1 \leq i \leq n$. O vetor

$$v = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i \quad \text{pode ser escrito sob a forma}$$

$$v = \sum_{j=1}^n x^j t_j \quad (1.4.7)$$

onde

$$t_j = \sum_{i=1}^n c_j^i e_i, \quad 1 \leq j \leq n$$

Demonstração

$$\sum_{i=1}^n \xi^i e_i = (\xi^1, \dots, \xi^n) = \left(\sum_{j=1}^n c_j^1 x^j, \dots, \sum_{j=1}^n c_j^n x^j \right)$$

e

$$\sum_{j=1}^n x^j t_j = x^1 t_1 + \dots + x^n t_n$$

onde

$$t_j = \sum_{i=1}^n c_j^i e_i = c_j^1 e_1 + \dots + c_j^n e_n = (c_j^1, \dots, c_j^n) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

substituindo os t_j 's em (1.4.7) temos:

$$\sum_{j=1}^n x^j t_j = \left(\sum_{j=1}^n c_j^1 x^j, \dots, \sum_{j=1}^n c_j^n x^j \right) \quad \text{C. Q. D}$$

Com o objetivo de deduzirmos uma fórmula simples para o cálculo dos elementos da matriz de uma forma quadrática n -ária a partir dos vetores básicos do reticulado associado, considere o quadrado da equação 1.4.4, isto é

$$(x^i)^2 = \left(\sum_{j=1}^n c_j^i x^j \right)^2 = \left(c_1^i x^1 + \dots + c_n^i x^n \right)^2$$

$$= \left(c_1^i x^1 + \dots + c_n^i x^n \right) \left(c_1^i x^1 + \dots + c_n^i x^n \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j^i c_k^i x^j x^k \quad 1 \leq i \leq n$$

Então

$$\sum_{i=1}^n (x^i)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(c_j^i c_k^i \right) x^j x^k$$

$$\text{Defina } d_{jk} = \sum_{i=1}^n c_j^i c_k^i \quad 1 \leq j, k \leq n$$

e considere as matrizes $M = (c_j^k)$ e $M^t = (c_k^j)$, então podemos escrever

$$d_{jk} = c_j^1 c_k^1 + \dots + c_j^n c_k^n = (c_j^1, \dots, c_j^n) \begin{pmatrix} c_k^1 \\ \vdots \\ c_k^n \end{pmatrix}$$

onde (c_j^1, \dots, c_j^n) é a j -ésima linha de M , e $\begin{pmatrix} c_k^1 \\ \vdots \\ c_k^n \end{pmatrix}$ é a k -ésima

coluna de M . Portanto, a matriz $(d_{jk}) = M M^t$ e sua inversa $(d_{jk})^{-1} = (M^{-1})^t (M^{-1})$, onde (M^{-1}) é a matriz da forma recíproca.

A Proposição 1.4.1 e a análise anterior, mostram que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i x^j &= \sum_{i=1}^n (\xi^i)^2 = \left[\sum_{i=1}^n \xi^i e_i \right]^2 = \left[\sum_{j=1}^n x^j t_j \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_i t_j x^i x^j. \end{aligned}$$

Portanto os coeficientes da forma quadrática original são determinados por pares de produto interno $\langle t_i, t_j \rangle$ dos vetores que geram o reticulado, isto é

$$a_{ij} = \langle t_i, t_j \rangle \quad (1.4.8)$$

Seja $\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^n x^i t_i \mid x_i \in \mathbb{Z} \right\}$. Dados $v, w \in \Lambda$, então

$v + w \in \Lambda$. Realmente, os elementos v, w podem ser escritos sob a forma

$$v = \sum_{i=1}^n x^i t_i \quad \text{e} \quad w = \sum_{i=1}^n y^i t_i \quad (x^i, y^i \in \mathbb{Z})$$

$$\text{então} \quad v + w = \sum_{i=1}^n (x^i + y^i) t_i \quad (x^i + y^i \in \mathbb{Z})$$

portanto, $v + w \in \Lambda$. Dessa maneira, concluímos que os vetores básicos da equação (1.4.8) geram um reticulado. Observe que a equação (1.4.8) estabelece a conexão entre formas quadráticas e reticulados.

Exemplo 1.4.1- Uma forma quadrática binária escrita como soma de quadrados. Gauss [14] observou que toda forma quadrática extrema binária é equivalente à $Q(x, y) = x^2 + y^2 - xy$. Por (1.4.4) temos $\xi^1 = C_1^1 x + C_2^1 y$ e $\xi^2 = C_1^2 x + C_2^2 y$, tomando em particular $C_1^1 = 1$, $C_2^1 = 0$, $C_1^2 = -1/2$, $C_2^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, podemos escrever $\xi^1 = (x - y/2)$ e $\xi^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2})y$, portanto a forma quadrática será dada por

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 = \left[x - y/2 \right]^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{2} y \right]^2$$

Exemplo 1.4.2 - Uma forma quadrática ternária escrita como soma de quadrados. Sejam $\xi^1 = (1/\sqrt{2})(y + z)$, $\xi^2 = (1/\sqrt{2})(x + z)$, $\xi^3 = (1/\sqrt{2})(x + y)$. Então,

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz.$$

Dado um reticulado, ou equivalentemente dado sua base, as coordenadas dos vetores da base correspondem aos elementos das linhas da matriz (C_j^i) . Para obtermos a matriz associada à forma quadrática será suficiente efetuarmos

$$(C_j^i) (C_j^i)^t = (a_{ij}) \tag{1.4.9}$$

A equação (1.4.9) mostra também uma conexão entre formas quadráticas e reticulados.

Observe que bases distintas podem gerar reticulados equivalentes. Com efeito, considere

$$e_1 = (1,0), \quad e_2 = (0,1)$$

O reticulado quadrado unitário, pode ser gerado por (e_1, e_2) bem como por $(e_1 - e_2, e_2)$ (Figura 1.4.1).

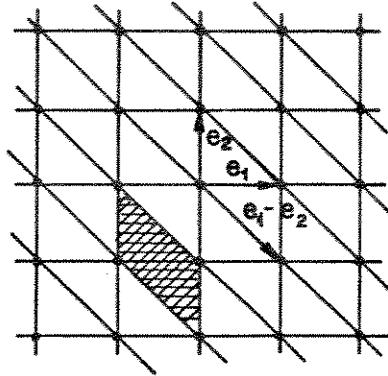


Figura 1.4.1 - Reticulado gerado pelos vetores: (e_1, e_2) ou $(e_1 - e_2, e_2)$.

Com base nos resultados anteriores concluímos que

$$e_1 = (1,0), \quad e_2 = (0,1) \quad \text{e} \quad (C_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

portanto, a forma quadrática binária correspondente ao reticulado gerado por e_1, e_2 será:

$$Q_1(x, y) = x^2 + y^2$$

Por outro lado, a forma quadrática binária correspondente ao reticulado gerado por $e_1 - e_2, e_2$ será:

$$Q_2(x, y) = x^2 + (x - y)^2$$

Pelo Exemplo 1.2.2 as formas quadráticas Q_1 e Q_2 são equivalentes.

Portanto, os reticulados associados são equivalentes.

Exemplo 1.4.3 - O reticulado D_3 em \mathbb{R}^3 . Voronoi [19] mostrou que se Λ é um reticulado em \mathbb{R}^3 , então a forma quadrática associada, é dada por:

$$Q(x, y, z) = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + a_{12} (x - y)^2 \\ + a_{13} (x - z)^2 + a_{23} (y - z)^2$$

Em particular, tomando

$$a_1 = a_3 = a_{12} = a_{23} = 1/2., \quad a_2 = a_{13} = 0,$$

obtemos a forma tenária positiva definida:

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz$$

A matriz associada é dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sejam

$$t_1 = (a_1, b_1, c_1), \quad t_2 = (a_2, b_2, c_2), \quad t_3 = (a_3, b_3, c_3),$$

Usando a equação (1.4.8) concluímos que

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0), \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -1, 1), \quad t_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1, 0)$$

Portanto, o reticulado correspondente à forma quadrática Q será aquele gerado pelo conjunto $\{t_1, t_2, t_3\}$.

1.5 - DETERMINANTE DO RETICULADO

Existem diferentes maneiras de se escolher uma base e uma região fundamental para um reticulado, porém o volume da região fundamental é unicamente determinada pelo reticulado. O quadrado deste volume, é denominado determinante do reticulado. Esta é a contrapartida do fato de que formas quadráticas equivalentes têm o mesmo determinante. Com o objetivo de estabelecer uma conexão entre o volume de um reticulado e o determinante da matriz de uma forma quadrática explicitaremos o significado de bases covariantes e contravariantes.

Considere no espaço Euclidiano \mathbb{R}^n n -vetores t_1, \dots, t_n linearmente independentes. Estes vetores geram o espaço no seguinte sentido todo vetor $x = (x_1, \dots, x_n)$ pode ser expresso de uma única maneira sob a forma

$$x_1 t_1 + \dots + x_n t_n.$$

Os n -vetores t_i são denominados uma base covariante.

Para explicitarmos o significado de uma base contravariante vamos considerar a matriz (a_{ij}) e sua inversa (a^{ij}) . Se A_{ik} é o cofator do elemento a_{ik} , e a matriz (a_{ik}) é simétrica então

$$a^{ik} = A_{ik} / \text{Det}(a_{ik}) \quad 1 \leq i, k \leq n \quad (1.5.1)$$

de modo que

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} a^{ik} = \delta_j^k = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq j \\ 1, & \text{se } k = j \end{cases}$$

Considere agora n -vetores dados por

$$t^i = \sum_{k=1}^n a^{ik} t_k \quad 1 \leq i \leq n$$

Estes vetores geram novamente o espaço \mathbb{R}^n isto é,

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} t^i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ij} a^{ik} t_k = \sum_{k=1}^n \delta_j^k t_k = t_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

Os vetores t^i são denominados uma base contravariante.

O significado geométrico entre bases covariantes e contravariantes é estabelecido por

$$\langle t^i, t_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

isto é, (Figura 1.5.1) cada t^i é perpendicular a todo t_j exceto à t_i . Além disso, o comprimento de t^i é tal que $\langle t^i, t_i \rangle = 1$.

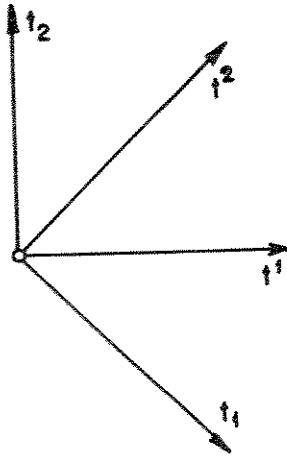


Figura 1.5.1 - Bases Covariantes e Contravariantes.

A relação existente entre o volume de um reticulado e o determinante da matriz de uma forma quadrática, é dada pela

Proposição 1.5.1 - Seja $Q(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i x^j$.

Uma forma quadrática n-ária positiva definida. O paralelepípedo gerado por t_1, \dots, t_n tem volume dado por

$$(\text{vol})^2 = \text{Det}(a_{ij}).$$

Demonstração. Para $n=1$ temos

$$(\text{vol})^2 = \langle t_1, t_1 \rangle = a_{11}$$

Seja $\langle \langle t_i, t_j \rangle \rangle_{n \times n}$ uma matriz $n \times n$ dada por:

$$\begin{bmatrix} \langle t_1, t_1 \rangle & \dots & \langle t_1, t_n \rangle \\ \langle t_2, t_1 \rangle & \dots & \langle t_2, t_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle t_n, t_1 \rangle & \dots & \langle t_n, t_n \rangle \end{bmatrix}$$

Da equação (1.5.1), temos

$$A_{nn} = a^{nn} \cdot \text{Det}(a_{ik}),$$

então o volume do paralelepípedo (n-1)dimensional será dado por

$$(\text{vol})^2 = a^{nn} \cdot \text{Det}(a_{ij})$$

A projeção de x na direção y (Figura 1.5.2) é dada por

$$\|x\| |\cos \theta|$$

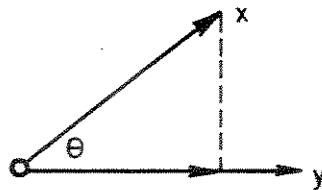


Figura 1.5.2 - Projeção de x na direção y .

Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$ então

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

De modo que,

$$\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|}$$

O volume do paralelepípedo n-dimensional é dado por:

$$(\text{vol})^2 = (a^{nn} \cdot \text{Det}(a_{ij})) \times (\text{projecção de } t_n \text{ na direção perpendicular ao subespaço gerado por } \{t_1, \dots, t_{n-1}\}).$$

Como o vetor unitário na direção de y e a projeção de t_n na direção perpendicular ao subespaço gerado por $\{t_1, \dots, t_{n-1}\}$ são dados respectivamente por:

$$\frac{t^n}{\|t^n\|} = \frac{t^n}{\sqrt{\langle t^n, t^n \rangle}} = \frac{t^n}{\sqrt{a^{nn}}} = (a^{nn})^{-1/2} \cdot t^n \quad (1.5.2)$$

$$(a^{nn})^{-1/2} \cdot \langle t^n, t^n \rangle = (a^{nn})^{-1/2} \quad (1.5.3)$$

concluimos então que o volume procurado será dado por:

$$(\text{vol})^2 = (a^{nn})^{-1/2} \cdot \text{Det}(a_{ij}) \cdot (a^{nn})^{-1/2} = \text{Det}(a_{ij}) \quad \text{C. Q. D}$$

1.6 - Formas Quadráticas Reflexíveis .

Nesta seção trataremos das formas reflexíveis, as quais foram estudadas extensivamente por Coxeter [6] . Para a descrição das

formas quadráticas reflexíveis introduziremos o conceito de reflexão no espaço Euclidiano. O objetivo desta seção será uma preparação básica para o tratamento dos grupos de reflexões os quais serão abordados no Capítulo 2.

Definição 1.6.1 - Uma reflexão no espaço Euclidiano n -dimensional é uma transformação linear R , que leva cada vetor x do \mathbb{R}^n em sua imagem refletida em relação a um hiperplano fixo P .

Na Figura 1.6.1 pode-se observar que

$$R(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in P \\ -x, & \text{se } x \in P^\perp \text{ (hiperplano perpendicular)} \end{cases}$$

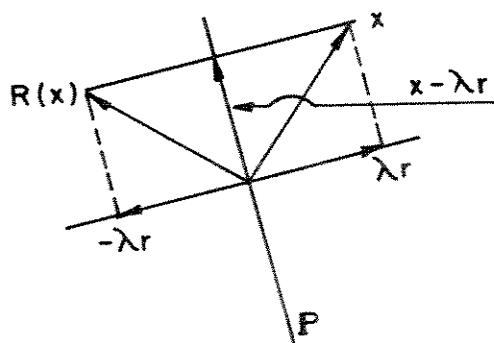


Figura 1.6.1 - Reflexão no espaço n -dimensional.

Suponha que $r \neq 0$ seja um elemento de P^\perp , vamos escolher λ (número real) tal que o vetor $(x - \lambda r)$ seja um elemento de P . Denotando o produto interno do espaço \mathbb{R}^n , por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ temos

$$0 = \langle x - \lambda r, r \rangle = \langle x, r \rangle - \lambda \langle r, r \rangle$$

e

$$\lambda = \frac{\langle x, r \rangle}{\langle r, r \rangle}$$

Se definirmos $R_r(x) = x - \frac{2\langle x, r \rangle}{\langle r, r \rangle} r$, (1.6.1)

temos:

$$R_r(x) = x, \text{ se } x \text{ está em } P$$

e

$$R_r(r) = r - 2r = -r$$

Como o conjunto $P \cup \langle r \rangle$ contém uma base do espaço \mathbb{R}^n , então

$$R_r = R.$$

Proposição 1.6.1 - Se R_r é uma reflexão, então usando a equação (1.6.1) temos

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad R_r^2(x) &= x - \frac{2\langle x, r \rangle}{\langle r, r \rangle} r - \frac{2r}{\langle r, r \rangle} \left\langle x - \frac{2\langle x, r \rangle}{\langle r, r \rangle} r, r \right\rangle \\ &= x - \frac{2\langle x, r \rangle}{\langle r, r \rangle} r + \frac{2\langle x, r \rangle}{\langle r, r \rangle} r = x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad R_{-r}(x) &= x - \frac{2\langle x, -r \rangle}{\langle -r, -r \rangle} (-r) \\ &= x - \frac{2\langle x, r \rangle}{\langle r, r \rangle} r = R_r(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad R_{\lambda r}(x) &= x - \frac{2\langle x, \lambda r \rangle}{\langle \lambda r, \lambda r \rangle} \lambda r \\ &= x - \frac{2\langle x, r \rangle}{\langle r, r \rangle} r = R_r(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1v) \quad \langle R_r(x), R_r(y) \rangle &= \langle x - \frac{2\langle x,r \rangle}{\langle r,r \rangle} r, y - \frac{2\langle y,r \rangle}{\langle r,r \rangle} r \rangle \\
&= \langle x,y \rangle - 4 \frac{\langle y,r \rangle}{\langle r,r \rangle} \langle x,r \rangle + 4 \frac{\langle x,r \rangle}{\langle r,r \rangle} \langle y,r \rangle \\
&= \langle x,y \rangle . \qquad \qquad \qquad \text{C. Q. D}
\end{aligned}$$

Definição 1.6.2 - Uma simetria (isometria) de uma figura F é uma transformação biunívoca

$$T : F \xrightarrow{1-1} F,$$

tal que a distância entre pontos p, q $\text{dist}(p,q)$ de F é a mesma que a distância $\text{dist}(T(p), T(q))$, entre suas imagens $T(p), T(q)$.

Exemplo 1.6.1 - A Figura 1.6.2 tem uma simetria em relação à reta ℓ .

De fato, seja F a Figura 1.6.2 e $R : F \xrightarrow{1-1} F$, uma aplicação biunívoca. Se q está sobre a reta ℓ , então $R(q)$ também está sobre ℓ .

Seja $p \in F$, de modo que $p \notin \ell$, então em relação à reta ℓ , $(p,q, R(p), R(q)$ na mesma horizontal) temos que $\text{dist}(p,q) = \text{dist}(R(p), R(q))$.

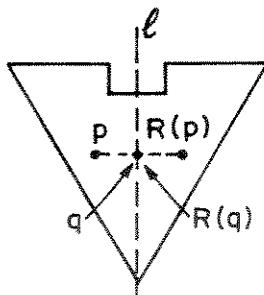


Figura 1.6.2 - Simetria de uma figura plana.

Definição 1.6.3 - Uma forma quadrática positiva definida é reflexiva, se o reticulado de pontos Λ associado é simétrico por reflexão.

Observe que a Figura 1.6.2 possui uma reflexão em relação à reta l .

Proposição 1.6.2 [24] - Uma forma quadrática positiva definida

$$Q(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i x^j$$

é reflexível se e somente se todos os quocientes $2a_{ij} / a_{ii}$ são inteiros.

As formas quadráticas reflexíveis que abordaremos em nosso estudo, têm uma característica a qual será explicitada na definição a seguir.

Definição 1.6.4 - Uma forma quadrática n -ária é denominada desconexa se ela for a soma de duas formas quadráticas n -árias envolvendo um conjunto de variáveis separadas.

Exemplo 1.6.2 - A forma quadrática binária

$$Q(x^1, x^2) = (x^1)^2 + (x^2)^2.$$

é desconexa.

Uma forma quadrática n -ária que não é desconexa, será denominada uma forma quadrática conexa.

Exemplo 1.6.3 - A forma quadrática binária

$$Q(x^1, x^2) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - x^1 x^2.$$

é conexa.

Proposição 1.6.3 [24] - Seja $Q(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i x^j$

uma forma quadrática n-ária positiva definida conexa reflexível, tal que $a_{ij} \leq 0$ para todo $i \neq j$. Então, a menos de um fator constante e uma permutação de coordenadas, $Q(x^1, \dots, x^n)$ é uma das seguintes formas quadrática:

$$A_n : (x^1)^2 - x^1 x^2 + (x^2)^2 - \dots + (x^{n-1})^2 - x^{n-1} x^n + (x^n)^2, \quad n \geq 1.$$

$$B_n : (x^1)^2 - x^1 x^2 + (x^2)^2 - \dots + (x^{n-1})^2 - 2x^{n-1} x^n + 2(x^n)^2, \quad n \geq 2.$$

$$C_n : 2(x^1)^2 - 2x^1 x^2 + 2(x^2)^2 - \dots + 2(x^{n-1})^2 - 2x^{n-1} x^n + (x^n)^2, \quad n \geq 3.$$

$$D_n : 2(x^1)^2 - x^1 x^2 + (x^2)^2 - \dots + (x^{n-1})^2 - x^{n-2} x^n + (x^n)^2, \quad n \geq 4.$$

$$E_n : (x^1)^2 - x^1 x^2 + (x^2)^2 - \dots + (x^{n-1})^2 - x^{n-3} x^n + (x^n)^2, \quad n = 6, 7 \text{ e } 8.$$

$$F_4 : (x^1)^2 - x^1 x^2 + (x^2)^2 - 2x^2 x^3 + 2(x^3)^2 - 2x^3 x^4 + 2(x^4)^2$$

$$G_2 : (x^1)^2 - 3x^1 x^2 + 3(x^2)^2$$

Proposição 1.6.4 [24] - As formas quadráticas positiva definida conexa reflexível representadas pelas famílias: A_n ($n \geq 1$), D_n ($n \geq 4$) e E_n ($n = 6, 7$ e 8), são extremas.

As famílias de formas quadráticas extremas estabelecidas na Proposição 1.6.4 são os objetos de estudo em nossa dissertação. Nosso interesse em estudá-las reside no fato de ser possível identificá-las com as álgebras de Lie, o empacotamento de esferas, e podermos obtê-las a partir de grupos gerado por reflexão. Estas estruturas matemáticas serão estudadas no Capítulo 2.

Em geral, é útil representarmos estas formas quadráticas por um grafo. Esta identificação ficará mais explícita quando tratarmos dos grupos de reflexões e das álgebras de Lie, no Capítulo 2.

Enquanto o Capítulo 1 descreveu as formas quadráticas extremas do ponto de vista analítico, a abordagem que será dada no Capítulo 2 a seguir visa a interpretação geométrica destas formas quadráticas procurando dessa forma conectar ambos os capítulos.

CAPÍTULO 2

GRUPOS DE REFLEXÕES E ALGEBRAS DE LIE

2.1 - PRELIMINARES.

Neste Capítulo estudaremos os grupos de reflexões e sistemas de raízes das álgebras de Lie. Mostraremos como obter os diagramas de Coxeter-Dynkin, as matrizes de Cartan e a ordem do grupo de Weyl de um reticulado gerado por um sistema de raízes.

O objetivo dos tópicos que abordaremos será fornecer conhecimentos necessários para o Capítulo 3, no qual descrevemos um método uniforme para a determinação da região de Voronoi de um reticulado gerado por um sistema de raízes. O método baseia-se na determinação de um simplex fundamental para o grupo de Weyl do reticulado. Além disso, com os tópicos aqui descritos, estaremos aptos a reconhecer de maneira simples que a ordem do grupo de Weyl fornece o número de cópias de um simplex fundamental cuja união é a região de Voronoi em torno da origem.

Na última Seção, mostraremos uma conexão entre: empacotamento de esferas, formas quadráticas extremas e álgebras de Lie.

2.2 - GRUPOS DE SIMETRIA.

Na Seção 1.6, dissemos que uma figura é simétrica quando aplicamos certas isometrias que deixam a figura inalterada, mas permuta suas partes.

Considere a Figura 2.2.1 (a), (b), (c), (d).

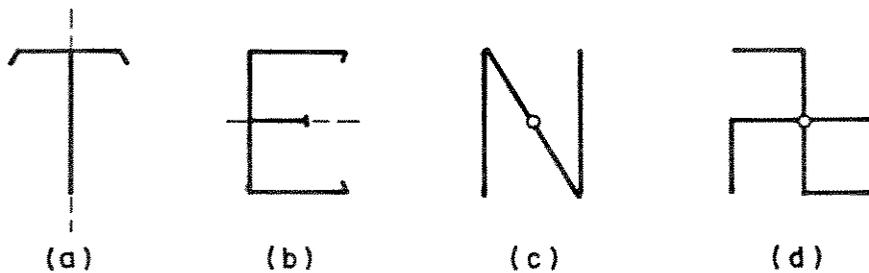
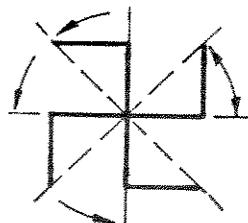


Figura 2.2.1 - Simetria de figuras planas.

A Figura 2.2.1 (a) e (b) tem simetria bilateral, o hiperplano sendo vertical em (a) e horizontal em (b). A Figura 2.2.1 (c) é simétrica por uma rotação de 180° . A Figura 2.2.1 (d) é simétrica por rotações de 90° .

Quando são consideradas operações de simetria de uma figura, é natural incluir a identidade. Qualquer figura tem sua simetria trivial. A Figura 2.2.1 (d) admite quatro operações distintas de simetria, a saber: as rotações passando por 1, 2, 3 ou 4 ângulos de 90° . A última operação é a identidade.

Exemplo 2.2.1 - Considere a Figura 2.2.1 (d)



Se S é uma rotação de 90° no sentido indicado, as quatro operações de simetria são

$$S, S^2, S^3 = S^{-1}, S^4 = 1$$

O menor (inteiro positivo) m , tal que $S^m = I$ é denominado período do elemento S . No exemplo 2.2.1, temos $m=4$, portanto S tem período quatro. A única transformação de período 1 (um) é a identidade.

Existem figuras que admitem reflexões e rotações como operações de simetria (Figura 2.2.2).

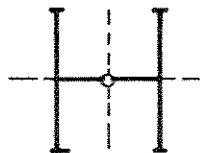


Figura 2.2.2 - Reflexões e rotações como operações de simetria

Na Figura 2.2.2 existe um hiperplano horizontal e um hiperplano vertical. Observe também uma operação de rotação em torno do centro onde os hiperplanos se interceptam. Dessa maneira, temos quatro operações de simetria

I	→	identidade
R_1	→	reflexão horizontal
R_2	→	reflexão vertical
$S = R_1 R_2 = R_2 R_1$	→	rotação de 180° (produto de $R_1 R_2$)

Definição 2.2.1 [2] - Um conjunto G é denominado um grupo se ele é fechado em relação a algum tipo de "operação" associativa, se ele contém uma "identidade" e se cada elemento de G tem um "inverso". Em outras palavras, dados R, S, T em G , devemos ter:

(i) $RS \in G$

(ii) $R(ST) = (RS)T$

(iii) Existe uma identidade I em G tal que

$$IR=R, \text{ para todo } R.$$

(iv) Cada $R \in G$ possui um inverso R^{-1} , tal que $R^{-1}R = I$.

O número de elementos distintos de G , incluindo a identidade, é denominado ordem do grupo. Esta ordem não necessariamente é finita.

As operações de simetria de qualquer figura constituem um grupo denominado grupo de simetria da figura.

Exemplo 2.2.2 - O grupo simétrico da Figura 2.2.1 (a) ou (b) é chamado grupo diedral de ordem 2, gerado por uma única reflexão R . Este grupo será denotado por D_2^1 .

O grupo simétrico da Figura 2.2.1 (c) tem ordem 2, mas neste caso o gerador é uma rotação S de 180° , este é um grupo cíclico denotado por C^2 .

Observe que os grupos C^2 e D_2^1 , por preservarem as mesmas estruturas algébricas, são isomorfos. Existe um único grupo de ordem 2 definido pela relação [5]: $R^2 = I$ ou $R = R^{-1}$.

Exemplo 2.2.3 - O grupo simétrico da Figura 2.1 (d) denotado por C^4 , tem ordem 4. Ele é gerado por rotações de 90° , e definido pela

relação: $S^4 = I$.

O grupo simétrico da Figura 2.2, denotado por D_2^2 , tem ordem 4. Ele é gerado por duas reflexões R_1 e R_2 , e definido pela relação

$$R_1^2 = I \quad ; \quad R_2^2 = I \quad ; \quad R_1 R_2 = R_2 R_1$$

Observe que, apesar dos grupos C^4 e D_2^2 possuírem a mesma ordem (4), eles não preservam as mesmas estruturas algébricas, portanto são não isomorfos. Para uma simples verificação da última afirmação, note que em C^4 existem dois elementos de período 4, ao passo que todos elementos em D_2^2 (exceto a identidade) são de período 2.

Para R_1 e R_2 temos a relação

$$(R_1 R_2)^2 = R_1 R_2 R_1 R_2 = R_1 R_2 R_2 R_1 = R_1 R_1^2 R_1 = R_1 R_1 = R_1^2 = I$$

A equivalência algébrica da relação anterior para o mesmo grupo é dada por

$$R_1^2 = I \quad ; \quad R_2^2 = I \quad ; \quad (R_1 R_2)^2 = I$$

da qual deduzimos que $R_1 R_2 = R_2 R_1$.

De um modo geral, a relação que define o grupo cíclico C^m , de ordem m , é dada por: $S^m = I$.

O único gerador S de C^m , cujo período é m , pode ser representado por uma rotação de $360^\circ/m$.

Quando S^k representar uma rotação passando $k \cdot (360/m)$ os m elementos de C^m são obtidos pelos valores de k variando de 1 a m , ou de 0 (zero) a $m-1$.

Exemplo 2.2.4 - O grupo D_2^m é um caso particular do grupo diedral D_2^m ($m > 2$) (o grupo simétrico de um polígono regular com m lados). Na Figura 2.2.3 temos os casos $m = 3, 4, 5$.

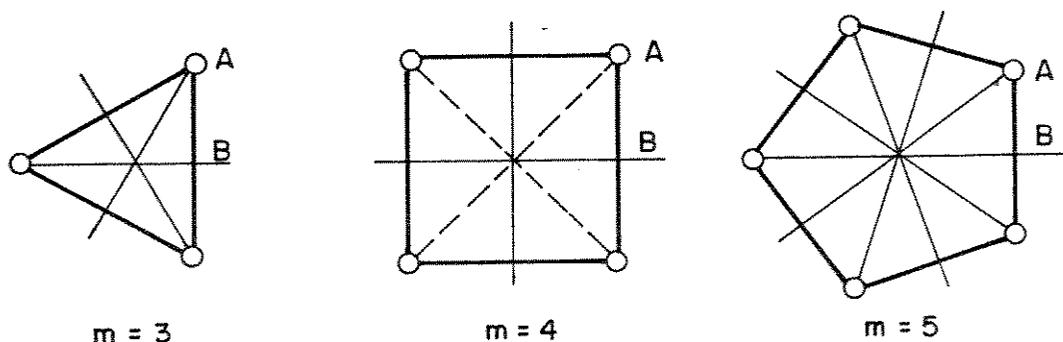


Figura 2.2.3 - Grupo simétrico de polígonos regulares

O grupo simétrico de um polígono regular com m -lados tem ordem $2m$. Este grupo consiste de m -rotações (m múltiplos de $360^\circ/m$) e m -reflexões. As rotações são precisamente os elementos do grupo cíclico C^m de modo que em D_2^m estejam incluídos todos elementos de C^m . Portanto, C^m é um subgrupo de D_2^m . As rotações geradoras do subgrupo passando por $360^\circ/m$, podem ser descritas como um produto de reflexões $R_1 R_2 = S$ em dois hiperplanos adjacentes (tal como OA e OB na Figura 2.2.3) cujo ângulo entre eles vale $180^\circ/m$.

Sejam R_1, R_2, \dots, R_m (nesta ordem) m reflexões. Suponha que $R_1 R_{k+1}$ é o produto de reflexões em dois hiperplanos cujo ângulo é

$k(180^\circ/m)$, então $R_1 R_{k+1} = S^k$, $0 \leq k \leq m-1$. Onde S^k é uma rotação de $k(360^\circ/m)$. Dessa maneira: $R_{k+1} = R_1 S^k$, $0 \leq k \leq m-1$. Portanto, podemos expressar as m reflexões por:

$$R_1, R_1 S, R_1 S^2, \dots, R_1 S^{m-1}$$

Em outras palavras, D_2^m é gerado por R_1 e S . Substituindo $R_1 R_2$ por S , observamos que o mesmo grupo é gerado por R_1 e R_2 . Estes geradores satisfazem as relações:

$$R_1^2 = I \quad ; \quad R_2^2 = I \quad ; \quad (R_1 R_2)^m = I$$

2.3 - GRUPOS DE REFLEXÕES E SISTEMAS DE RAÍZES.

A transformação linear R , definida na Seção 1.6, preserva o produto interno, isto significa que: $\langle R(p), R(q) \rangle = \langle p, q \rangle$ para todo $p, q \in \mathbb{R}^n$.

O grupo das transformações lineares em \mathbb{R}^n que preservam o produto interno (denominado grupo das transformações ortogonais) será denotado por $O(\mathbb{R}^n)$. Se $T \in O(\mathbb{R}^n)$, então: $\text{Det}(T) = \pm 1$.

Usaremos a notação $G \leq O(\mathbb{R}^n)$ para indicar que G é um subgrupo de $O(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.3.1 [26] - Seja $G \leq O(\mathbb{R}^n)$ e $R \in G$ uma reflexão em relação a um hiperplano fixo P . Os vetores $\pm r$ perpendiculares a P , tais que $R = R_r(x) = x - \frac{2\langle x, r \rangle}{\langle r, r \rangle} r$, são denominados raízes de G .

Exemplo 2.3.1 - Considere no espaço Euclideano bidimensional o

grupo simétrico do quadrado (D_2^4) com vértices $(\pm 1, \pm 1)$ (Figura 2.3.1). De uma maneira natural, escolhemos o conjunto

$$\langle (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1) \rangle$$

para representar as raízes de D_2^4 .

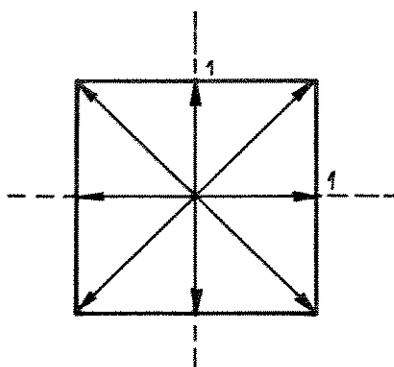


Figura 2.3.1 - As raízes do grupo simétrico D_2^4 .

Definição 2.3.2 [26] - Suponha que $G \leq O(\mathbb{R}^n)$ é gerado por um conjunto finito de reflexões. O conjunto Δ de todas as raízes é denominado um sistema de raízes para G .

O conceito de raízes e sistemas de raízes tem sua origem no estudo da álgebra de Lie a qual será abordada na Seção 2.5.

Definição 2.3.3 [26] - Seja G qualquer subgrupo de $O(\mathbb{R}^n)$ e considere o conjunto $C_0(G) = \cap \langle R \in G \rangle$. Um subgrupo G de $O(\mathbb{R}^n)$ com $C_0(G) = \{ 0 \}$ é denominado efetivo.

Definição 2.3.4 [26] - Um subgrupo G de $O(\mathbb{R}^n)$ efetivo gerado por um conjunto de reflexões será denominado um grupo de Coxeter.

Exemplo 2.3.2 - Os grupos simétricos de polígonos regulares de m lados ($m \geq 1$) (D_2^m) são grupos de Coxeter.

Exemplo 2.3.3 - O grupo das rotações de um cubo centrado na origem do sistema de eixos cartesianos ortogonal é um grupo de Coxeter.

Exemplo 2.3.4 - O grupo das transformações ortogonais que deixa o cubo invariante é um grupo de Coxeter.

Seja $G \leq O(\mathbb{R}^n)$, e considere $t \in \mathbb{R}^n$ tal que $\langle t, r \rangle \neq 0$ para toda raiz $r \in G$. Desse modo, o sistema Δ de raízes fica particionado em dois subconjuntos:

$$\Delta_t^+ = \{r \in \Delta ; \langle t, r \rangle > 0\} \quad (2.3.1)$$

$$\Delta_t^- = \{r \in \Delta ; \langle t, r \rangle < 0\} \quad (2.3.2)$$

Definição 2.3.5 [26] - Seja K um subconjunto de Δ_t^+ . Suponha que todo $r \in \Delta_t^+$ seja uma combinação linear dos elementos de K com coeficientes não negativos. O conjunto K será denominado uma t -base para Δ .

Exemplo 2.3.5 - Considere o grupo $G = D_2^4$ (grupo diedral de ordem 8). As quatro reflexões em G geram G . Considere

$$\Delta = \langle (0, -1), (-1, 0), (-1, -1) \rangle$$

Escolhendo

$$t = 2(\cos(3\pi/8), \sin(3\pi/8))$$

facilmente podemos concluir que

$$\Delta_t^+ = \langle (0,1), (1,0), (1,1), (-1,1) \rangle$$

pois o produto interno $\langle t, r \rangle > 0$. Conseqüentemente, uma t -base para Δ será:

$$K = \langle (1,0), (-1,1) \rangle$$

Geometricamente, Δ_t^+ e Δ_t^- são subconjuntos de Δ sobre os lados do hiperplano t^\perp (Figura 2.3.2)

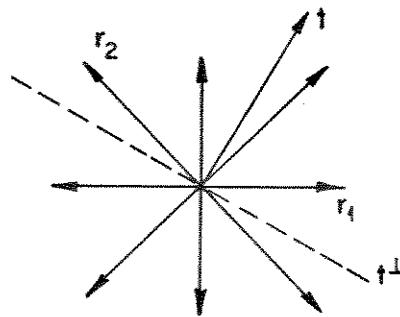


Figura 2.3.2. - Os conjuntos Δ_t^+ e Δ_t^- .

Definição 2.3.6 [26] - As raízes r_1, \dots, r_n da base K são denominadas raízes simples ou raízes fundamentais.

Definição 2.3.7 [26] - Sejam r_1, \dots, r_n elementos de K . O conjunto

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, r_i \rangle > 0 \quad ; \quad \forall r_i \in K\}$$

é denominado região fundamental para o grupo de Coxeter. O conjunto F é precisamente a interseção dos semi-espacos abertos determinados pelos hiperplanos $P_i = r_i^\perp$, $r_i \in K$. O conjunto F é aberto e convexo.

Seja \bar{F} a interseção dos semi-espacos fechados $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, r_i \rangle \geq 0\}$. Os subconjuntos $\bar{F} \cap P_i$ são denominados hiperplanos refletores de F . A reflexão no i -ésimo hiperplano de F é a reflexão R_i em relação ao hiperplano P_i .

Exemplo 2.3.6 - Seja F a região aberta do primeiro quadrante limitada pelo eixo x e a reta l (Figura 2.3.3).

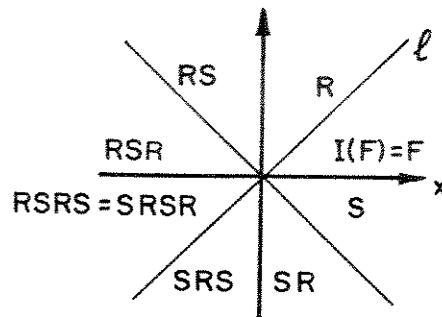


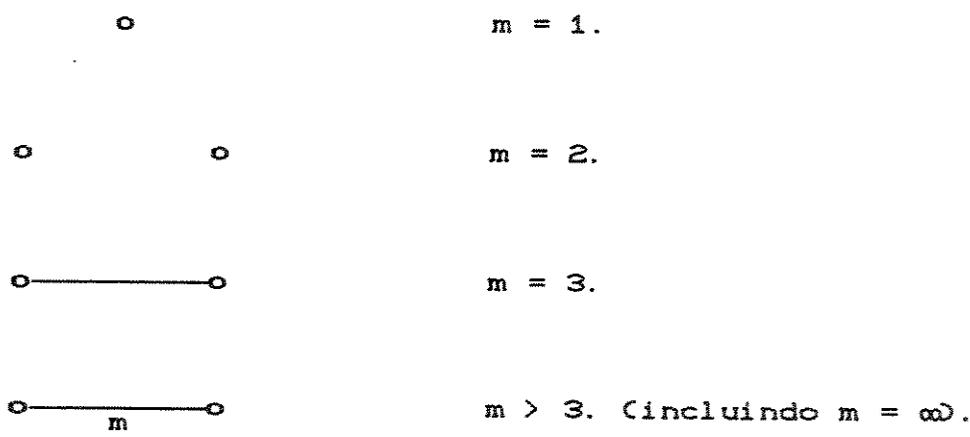
Figura 2.3.3 - Região fundamental para o grupo D_2^m

O eixo x é uma reta refletora para a transformação S e l é uma reta refletora para a transformação R . As regiões congruentes do plano obtidas pelas rotações da região F , em sucessivos múltiplos de

π/m podem ser identificados com os elementos do grupo de Coxeter D_2^m . Para cada $T \in D_2^m$, a região $T(F)$ é obtida aplicando T aos elementos da região F . A região F é uma região fundamental para o grupo D_2^m .

Identificando cada hiperplano gerador com um ponto, temos uma representação gráfica conveniente do grupo de Coxeter. Além disso, se os hiperplanos tomados dois a dois não são perpendiculares, então será especificado sobre a reta conectando estes dois hiperplanos um número m_{ij} justamente para indicar o ângulo π/m_{ij} ($m_{ij} > 3$).

Exemplo 2.3.7 - O grupo D_2^m é denotado por:



Quando $m=2$, a representação desconexa exhibe o fato de os hiperplanos serem perpendiculares.

2.4 - GRAFOS DE COXETER.

Nesta Seção, vamos associar um grafo com n nós a uma forma quadrática n -ária

$$\alpha(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i x^j \quad (2.4.1)$$

onde $A = (a_{ij})$ é uma matriz simétrica.

Seja $G \leq \alpha(\mathbb{R}^n)$. Considere o grupo de Coxeter com um sistema de raízes Δ e uma t -base $K = \{r_1, \dots, r_n\}$ para algum $t \in \mathbb{R}^n$.

Considere $r_i, r_j \in K$, então existe [26] um inteiro $m_{ij} \geq 1$

tal que

$$\frac{\langle r_i, r_j \rangle}{\|r_i\| \|r_j\|} = -\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right) \quad (2.4.2)$$

O inteiro m_{ij} é a ordem de $R_i R_j$ visto como um elemento do grupo.

Um grafo é um conjunto finito de pontos tal que quaisquer dois pontos distintos podem ou não ser ligados por um ramo com a seguinte propriedade: se existir um ramo ligando o i -ésimo ao j -ésimo nó, então a este ramo estará sendo associado um número real m_{ij} . Se g_r é um grafo para o qual todo m_{ij} é um número inteiro, então g_r é denominado grafo de Coxeter.

Seja g_r um grafo com n nós. Podemos associar à g_r a forma quadrática definida em (2.4.1) e os elementos da matriz $A = (a_{ij})$ associada à forma são dados por

$$\begin{cases} 1 & , \text{ se } i=j \\ -\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right), & \text{ se existe um ramo ligando} \\ & \text{ o } i\text{-ésimo ao } j\text{-ésimo nó.} \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (2.4.3)$$

Exemplo 2.4.1 - A forma quadrática ternária A_3 é dada por $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz$. O grafo de Coxeter correspondente a A_3 é mostrado na Figura 2.4.1.

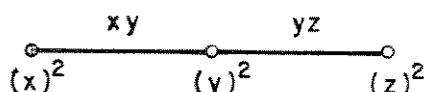


Figura 2.4.1 - Grafo de A_3

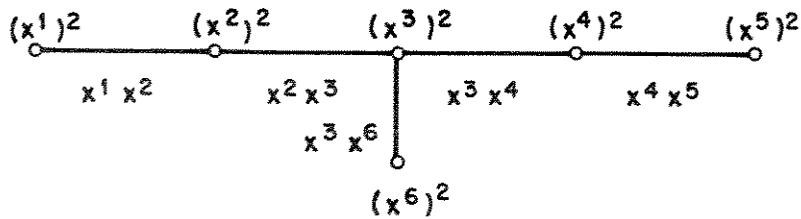
A matriz de A_3 pode ser obtida do grafo de Coxeter ou da forma quadrática ternária. Assim,

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.4.2 - A forma quadrática senária E_6 é dada por

$$Q(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 + (x^5)^2 + (x^6)^2 - x^1x^2 - x^2x^3 - x^3x^4 - x^4x^5 - x^5x^6$$

e o grafo de Coxeter correspondente é dado por



A matriz de E_6 obtida através do grafo de Coxeter ou da forma quadrática senária E_6 . Assim,

$$E_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sejam a e b nós distintos de um grafo g_r , então a e b são ditos conexos se e somente se existem nós a_1, \dots, a_k em g_r formando uma cadeia com $a=a_1$ e $a_k=b$.

Se todo par de nós distintos no grafo g_r é conexo em g_r , então g_r é dito ser conexo. Por exemplo, os grafos dos Exemplos 2.4.1 e 2.4.2 são conexos.

Um grupo é dito ser irredutível ou redutível quando seu grafo é conexo ou desconexo. Quando o grupo é redutível, ele será o produto direto de dois ou mais grupos irredutíveis representados por subgrafos conexos.

2.5 - ALGEBRAS DE LIE.

Nesta e nas próximas Seções estaremos interessados no estudo das álgebras clássicas de Lie. Com o objetivo de calcular as regiões de Voronoi de alguns reticulados, descreveremos o grupo de Weyl de um sistema de raízes, os diagramas de Dynkin e as matrizes de Cartan associadas.

Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial L (dimensão finita) sobre um corpo K (real ou complexo) e uma aplicação

$$\begin{aligned} L \times L &\longrightarrow L \\ (X, Y) &\longrightarrow [X, Y] \end{aligned}$$

tal que

$$a. [a_1 X_1 + a_2 X_2, Y] = a_1 [X_1, Y] + a_2 [X_2, Y], \quad X_1, X_2, Y \in L, \quad a_1, a_2 \in K$$

$$b. [X, Y] = -[Y, X], \quad X, Y \in L$$

$$c. [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \quad X, Y, Z \in L$$

onde o operador multiplicativo $[X, Y] = XY - YX$.

Um subespaço h de L é uma subálgebra de L , se $X, Y \in h$ implicar $[X, Y] \in h$.

Álgebras Clássicas de Lie.

Vamos considerar representações de álgebras de Lie por matrizes, isto é, as álgebras do tipo A_n , B_n , C_n e D_n podem ser identificadas com certas álgebras de matrizes sob o operador multiplicativo.

I - (A_n)

Seja $s = n + 1$. A_n é a álgebra de todas as matrizes $M_{s \times s}$ de traço zero. Isto é, a álgebra A_n é o conjunto $\{M_{s \times s} \mid \text{traço}(M_{s \times s}) = 0\}$ dotado do operador multiplicativo.

Com o objetivo de obter as raízes da álgebra A_n , vamos construir uma subálgebra cujos elementos são as matrizes

$$H_{r_1, \dots, r_s} = \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \dots & \\ & & r_s \end{bmatrix} \text{ e tal que } \sum_{i=1}^s r_i = 0. \text{ Isto é, o conjunto}$$

$$h_A = \left\{ H_{r_1, \dots, r_s} \mid \sum_{i=1}^s r_i = 0 \right\}, \text{ é uma subálgebra de } A_n.$$

As raízes de A_n são os elementos do espaço dual h_A^* de h_A . Para explicitarmos as raízes, considere E_{ik} uma matriz com dimensão $s \times s$, tendo uma unidade na i -ésima linha e k -ésima coluna e zero nas demais posições. Sejam ainda as matrizes com dimensão $s \times s$ dadas por

$$H_{r_i - r_k} = E_{ii} - E_{kk} \quad (i \neq k) \text{ e } E_{r_i - r_k} = E_{ik} \quad (i \neq k), \quad 1 \leq i, k \leq s.$$

Para explicitar as raízes de A_1 , considere

$$H_{r_1, r_2} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ onde os } a_{ij} \text{ são números reais.}$$

$$\text{Assim através de } [H, X] = HX - XH = \begin{bmatrix} 0 & (r_1 - r_2) a_{12} \\ (r_2 - r_1) a_{21} & 0 \end{bmatrix}, \text{ obtém-se } (r_1 - r_2)$$

e $(r_2 - r_1)$ como raízes. Observe que um vetor raiz correspondente à

$$r_i - r_k \text{ é } E_{ik}.$$

Uma base para a álgebra A_n é dada por h_A e todos $E_{r_i - r_k}$. Por exemplo, a álgebra A_2 é definida como o conjunto de todas as matrizes $M_{2 \times 2}$ com traço zero. A base para A_2 é dada por

$$H_{r_1 - r_2} = E_{11} - E_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad E_{r_1 - r_2} = E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{r_2 - r_1} = E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \text{ portanto, o conjunto}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ é a base da álgebra } A_2 .$$

Diremos que o conjunto h_A e todas $E_{r_i - r_k}$ ($i \neq k$, $i, k=1, \dots, s$) geram a álgebra A_n .

Os elementos $(r_i - r_k)$ ($i \neq k$, $i, k=1, \dots, s$) são chamados raízes da álgebra A_n .

Os seguintes fatos acerca das raízes e do espaço das raízes são estabelecidos na teoria das álgebras de Lie [16].

Sejam $H_1, H_2 \in h_A$ matrizes com dimensão $s \times s$. Se r e r' são raízes de A_n , e E_r é uma matriz com dimensão $s \times s$, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} [H_1, H_2] = 0 \\ [H_{r_1, \dots, r_s}, E_r] = r \cdot E_r \\ [E_r, E_{-r}] = H_r \\ [E_r, E_{r'}] = \begin{cases} 0 & \text{se } r+r' \text{ não é raiz} \\ \pm E_{r+r'} & \text{se } r+r' \text{ é raiz} \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.5.1)$$

As equações estabelecidas em (2.5.1) são denominadas fórmulas canônica da álgebra A_n .

Com o objetivo de fornecer uma interpretação geométrica para as raízes das álgebras de Lie que estudaremos, vamos introduzir um produto interno bilinear simétrico chamado a forma Killing [16]. O produto interno de dois elementos X, Y de uma álgebra de Lie L é definido como sendo o traço da transformação linear adx.ady de L em si próprio, onde adx é a transformação linear, $a \mapsto [X, a]$ de L em si próprio. Portanto, a forma Killing é dada por $\langle X, Y \rangle = \text{traço}(\text{adx.ady})$.

Pode ser mostrado que o conjunto das raízes da álgebra de Lie A_n geram h_A , e que podemos escolher um subconjunto $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ para formar uma base de h_A . De fato, qualquer outra raiz é uma combinação linear de r_1, r_2, \dots, r_n com coeficientes reais. Assim, podemos restringir h_A ao subespaço h_{A_0} de todas as combinações lineares de r_1, r_2, \dots, r_n com coeficientes reais. Dessa maneira, a forma Killing torna-se positiva definida quando restrita à h_{A_0} , portanto, podemos definir o comprimento $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ de qualquer elemento de h_{A_0} , tornando dessa maneira h_{A_0} , um espaço Euclidiano.

Na Seção 2.6 vamos mostrar como associar álgebras de Lie a uma Figura Euclidiana, (o sistema de raízes de L) no espaço n -dimensional h_{A_0} onde n é o rank de L .

As álgebras B_n, C_n e D_n são álgebras de matrizes associadas a transformações lineares, as quais são obtidas a partir de formas bilineares não-singulares [16].

II - (B_n)

Seja $s = 2n + 1$ e M uma matriz com dimensão $s \times s$ dada por

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & I_n \\ \vdots & & & \\ 0 & I_n & & 0 \end{pmatrix}$$

Então a álgebra de Lie B_n consiste de todas as matrizes $X_{s \times s}$ tais que que $XM + MX^t = 0$.

Decompondo a matriz $X_{s \times s}$ de modo análogo à matriz M temos:

$$X = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_1 & m & u \\ c_2 & p & q \end{pmatrix}.$$

onde a , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 , m , u , p e q são matrizes com dimensão: 1×1 para a matriz a , $1 \times n$ para as matrizes b_1 e b_2 , $n \times 1$ para as matrizes c_1 e c_2 , e $n \times n$ para as matrizes m, n, p e q .

Portanto, a condição $XM + MX^t = 0$ implica que $a=0$, $c_1 = -b_2^t$, $c_2 = -b_1^t$, $q = -m^t$, $u = -u^t$, $p = -p^t$. Em outras palavras, a álgebra B_n consiste de todas as matrizes do tipo:

$$\begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ -b_2^t & m & u \\ -b_1^t & p & -m^t \end{pmatrix}.$$

A partir deste conhecimento, podemos explicitar as matrizes cujo conjunto das combinações lineares das mesmas gera B_n .

$$H_{r_i} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & E_{ii} & \\ & & -E_{ii} \end{pmatrix}$$

onde e_i é o vetor linha com uma unidade na i -ésima posição e zero nas demais posições.

Portanto, o conjunto de todas as combinações lineares das matrizes h_{α} , $E_{\pm r_i \pm r_k}$ ($i < k$) e $E_{\pm r_i}$ gera a álgebra B_n .

Os elementos $(\pm r_i \pm r_k)$ ($i < k$) e $\pm r_i$ são as raízes de B_n . As fórmulas canônicas de B_n são dadas por (2.5.1).

III - (C_n)

Seja $s = 2n$ e T uma matriz com dimensão $s \times s$ dada por

$$T = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Então a álgebra de Lie C_n , consiste de todas matrizes $X_{s \times s}$ tais que $XT + TX^t = 0$.

Decompondo a matriz $X_{s \times s}$ de maneira análoga à matriz T obtemos

$$X = \begin{pmatrix} m & u \\ p & q \end{pmatrix}.$$

onde m, u, p e q são matrizes com dimensão $n \times n$. Então a condição $XT + TX^t = 0$, implica que $u = u^t$, $p = p^t$, $q = -m^t$. Assim, a álgebra C_n consiste de todas matrizes do tipo

$$H_{r_i - r_k} = \begin{pmatrix} E_{ii} - E_{kk} & 0 \\ 0 & -E_{ii} + E_{kk} \end{pmatrix} \quad H_{r_i + r_k} = \begin{pmatrix} E_{ii} + E_{kk} & 0 \\ 0 & -E_{ii} - E_{kk} \end{pmatrix}$$

(i < k)

$$H_{2r_i} = \begin{pmatrix} E_{ii} & 0 \\ 0 & -E_{ii} \end{pmatrix}$$

O conjunto de todas as combinações lineares das matrizes h_c , $E_{\pm r_i \pm r_k}$ (i < k) e $E_{\pm 2r_i}$ gera a álgebra de C_n .

Os elementos $(\pm r_i \pm r_k)$ (i < k) e $\pm 2r_i$ são as raízes de C_n .
As fórmulas estruturais de C_n são dadas por (2.5.1).

IV - (D_n)

Finalmente, seja $s = 2n$ e V uma matriz com dimensão $s \times s$ dada por

$$V = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Então a álgebra de Lie D_n consiste de todas matrizes $X_{s \times s}$ tais que $XV + VX^t = 0$.

Decompondo a matriz $X_{s \times s}$ de maneira análoga à matriz V obtemos

$$X = \begin{pmatrix} m & u \\ p & q \end{pmatrix}$$

$$E_{r_i+r_k} = \begin{pmatrix} 0 & E_{ik} - E_{ki} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{-r_i-r_k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -E_{ik} + E_{ki} & 0 \end{pmatrix}$$

(i < k)

$$H_{r_i-r_k} = \begin{pmatrix} E_{ii} - E_{kk} & 0 \\ 0 & E_{ii} + E_{kk} \end{pmatrix}$$

$$H_{r_i+r_k} = \begin{pmatrix} E_{ii} + E_{kk} & 0 \\ 0 & -E_{ii} - E_{kk} \end{pmatrix}$$

(i < k)

Assim, o conjunto de todas as combinações das matrizes h_D e $E_{\pm r_i \pm r_k}$

(i < k) gera a álgebra D_n . Os elementos $(\pm r_i \pm r_k)$ (i < k) são as raízes de D_n . As fórmulas canônicas de D_n são dadas por (2.5.1).

2.6 - SISTEMA DE RAÍZES DE UMA ÁLGEBRA DE LIE.

Nesta e nas demais Seções, o espaço no qual trabalharemos será o espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , dotado de um produto interno \langle, \rangle .

Um subconjunto Δ de \mathbb{R}^n é denominado um sistema de raízes se as seguintes propriedades são verificadas

1. Δ é finito, gera \mathbb{R}^n e não contém o elemento nulo.
2. Se $r \in \Delta$, os únicos múltiplos de r em Δ são $\pm r$.
3. Se $r \in \Delta$, a reflexão R_r deixa Δ invariante.
4. Se $r, r' \in \Delta$, então $\frac{2\langle r', r \rangle}{\langle r, r \rangle}$ é um inteiro.

Sejam r, r' raízes em \mathbb{R}^n , então $r' - \frac{2\langle r', r \rangle}{\langle r, r \rangle} r$, é também

uma raiz.

Os hiperplanos ortogonais às raízes são chamados hiperplanos de Weyl, as operações de reflexões são denominadas reflexões de Weyl. O número total das reflexões e todas as possíveis composições das reflexões constituem o grupo de Weyl para o sistema de raízes da sua álgebra de Lie associada.

Com o objetivo de determinar explicitamente uma métrica para o espaço das raízes vamos denotar por h_0 o espaço real linear consistindo de todas combinações lineares das matrizes H_r ($r \in \Delta$) definidas na Seção 2.5. O conjunto h_0^* é denominado espaço dual de h_0 . A restrição da forma Killing a h_0 induz uma métrica Euclídeana em h_0 . Isto torna possível uma identificação entre os espaços h_0 e h_0^* . Portanto, na determinação do sistema de raízes de uma álgebra de Lie, será estabelecido uma identificação entre a raiz $r \in h_0^*$ com a matriz $H_r \in h_0$.

O Sistema de Raízes da álgebra A_n

Seja $s=n+1$. Na Seção 2.5 dissemos que o conjunto

$h_A = \left\{ H_{r_1, \dots, r_s} \mid \sum_{i=1}^s r_i = 0 \right\}$ é uma subálgebra de A_n . Escolhendo uma base de A_n consistindo de todos os $E_{i,k}$ ($i \neq k, 1 \leq i, k \leq s$) e uma base de h_A , vamos calcular a forma Killing restrita a h_A . O sistema de raízes de A_n , em relação à subálgebra h_A consiste de todos os elementos $r_i - r_k, i < k, (1 \leq i, k \leq s)$ [16]. Então,

$$\langle H_{r_1, \dots, r_s}, H_{r'_1, \dots, r'_s} \rangle = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^s (r_i - r_k)(r'_i - r'_k)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^s (r_i r'_i + r_k r'_k - r_i r'_k - r_k r'_i) \\
&= 2(s-1) \sum_{i=1}^s r_i r'_i - 2 \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^s r_i r'_k \\
&= 2(s-1) \sum_{i=1}^s r_i r'_i - 2 \sum_{i=1}^s r_i \sum_{k=1}^s r'_k + 2 \sum_{i=1}^s r_i r'_i \\
&= 2s \sum_{i=1}^s r_i r'_i \tag{2.6.1}
\end{aligned}$$

Em particular, $\langle H_{r_1, \dots, r_s}, H_{r_1, \dots, r_s} \rangle = 2s \sum_{i=1}^s r_i^2$.

Com o objetivo de obter uma identificação entre h_0 e h_0^* , vamos determinar um elemento $H_{r'_1, \dots, r'_s}$ em h_A , tal que

$$\langle H_{r_1, \dots, r_s}, H_{r'_1, \dots, r'_s} \rangle = r_i - r_k \tag{2.6.2}$$

para todo H_{r_1, \dots, r_s} em h_A . De (2.6.1) e (2.6.2) obtemos

$$2s \sum_{j=1}^s r_j r'_j = r_i - r_k, \text{ tal que } \sum_{i=1}^s r_i = 0, \text{ para todo } r_1, \dots, r_s. \text{ Dessa}$$

temos que

$$r'_j = \begin{cases} c + \frac{1}{2s}, & j=1, \\ c - \frac{1}{2s}, & j=k, \\ c, & j \neq 1, k \end{cases}$$

onde c é uma constante. Como $\sum_{j=1}^s r'_j = 0$, concluímos que $c=0$. Portanto,

$$r'_j = \begin{cases} \frac{1}{2s}, & j=1, \\ -\frac{1}{2s}, & j=k, \\ 0, & j \neq 1, k \end{cases}$$

Ao identificarmos h_0 com h_0^* obtemos $r_i - r_k = \frac{1}{2s} (E_{ii} - E_{kk})$.

O quadrado do comprimento da raiz $r_i - r_k$ é dado por

$$\begin{aligned} \langle r_i - r_k, r_i - r_k \rangle &= \left[\frac{1}{2s} \right]^2 \langle E_{ii} - E_{kk}, E_{ii} - E_{kk} \rangle \\ &= \left[\frac{1}{2s} \right]^2 2s \cdot 2 = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Se os vetores $e_i = \frac{1}{2s} E_{ii}$ ($i=1, \dots, s$) formam uma base ortogonal para o espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , tal que o quadrado do comprimento do e_i seja dado por $\langle e_i, e_i \rangle = \frac{1}{2s}$, então h_0 consiste de

todos vetores $\sum_{i=1}^s r'_i e_i$, onde r'_i são números reais e $\sum_{i=1}^s r'_i = 0$.

Portanto, o sistema de raízes completo e fundamental de A_n ,

$\Delta(A_n)$ e $K(A_n)$ são dados por [16]

$$\begin{aligned}
&= 2 \sum_{i < k} (r_i r'_i + r_i r'_k + r_k r'_i + r_k r'_k + r_i r'_i - \\
&\quad - (r_i r'_i - r_i r'_k - r_k r'_i + r_k r'_k)) + 2 \sum_{i=1}^n r_i r'_i \\
&= 4 \sum_{i < k} (r_i r'_i + r_k r'_k) + 2 \sum_{i=1}^n r_i r'_i \\
&= 4(n-1) \sum_{i=1}^n r_i r'_i + 2 \sum_{i=1}^n r_i r'_i \\
&= (4n-2) \sum_{i=1}^n r_i r'_i
\end{aligned}$$

Em particular, $\langle H_{r_1, \dots, r_n}, H_{r_1, \dots, r_n} \rangle = (4n-2) \sum_{i=1}^n r_i^2$. Para identificarmos h_0 com h_0^* , devemos determinar um elemento $H_{r'_1, \dots, r'_n}$

em h_B tal que $\langle H_{r_1, \dots, r_n}, H_{r'_1, \dots, r'_n} \rangle = r_i + r_k$, ou de maneira

equivalente $(4n-2) \sum_{j=1}^n r_j r'_j = r_i + r_k$, para qualquer r_1, \dots, r_n .

Assim,

$$r'_j = \begin{cases} \frac{1}{4n-2}, & j=i, k \\ 0 & j \neq i, k \end{cases}$$

Identificando h_0 com h_0^* e considerando a matriz $H_i = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & E_{ii} & \\ & & -E_{ii} \end{bmatrix}$,

podemos então escrever as raízes de B_n sob a forma: $r_i + r_k = \frac{1}{4n-2}$.

$(H_i + H_k)$. Analogamente, $\pm r_i \pm r_k = \frac{1}{4n-2} (\pm H_i + H_k)$ e $r_i = \frac{1}{4n-2}$.

$(\pm H_i)$. O quadrado do comprimento das raízes $\pm r_i \pm r_k$ e $\pm r_i$ é

subálgebra de C_n . Para determinarmos o sistema de raízes da álgebra C_n , devemos calcular a forma Killing restrita à h_c . O sistema de raízes de C_n em relação à h_c consiste de todos os elementos $\pm r_i \pm r_k$ ($i < k$) e $\pm 2r_i$ ($i, k=1, \dots, n$) [16]. Então

$$\begin{aligned}
 \langle H_{r_1, \dots, r_n}, H_{r'_1, \dots, r'_n} \rangle &= \sum_{i < k} (\pm r_i \pm r_k) (\pm r'_i \pm r'_k) + \sum_{i=1}^n (\pm 2r_i) (\pm 2r'_i) \\
 &= 2 \sum_{i < k} ((r_i + r_k) (r'_i + r'_k) + (r_i - r_k) (r_i - r'_k)) + \\
 &\quad + 8 \sum_{i=1}^n r_i r'_i \\
 &= 4 \sum_{i < k} (r_i r'_i + r_k r'_k) + 8 \sum_{i=1}^n r_i r'_i \\
 &= 4(n-1) \sum_{i=1}^n r_i r'_i + 8 \sum_{i=1}^n r_i r'_i \\
 &= 4(n+1) \sum_{i=1}^n r_i r'_i
 \end{aligned}$$

Em particular, $\langle H_{r_1, \dots, r_n}, H_{r_1, \dots, r_n} \rangle = 4(n+1) \sum_{i=1}^n r_i^2$.

Para identificarmos h_0 com h_0^* , devemos determinar um elemento H_{r_1, \dots, r_n} em h_c tal que

$$\langle H_{r_1, \dots, r_n}, H_{r_1, \dots, r_n} \rangle = \begin{cases} \pm r_i \pm r_k \\ \text{ou} \\ \pm 2r_i \end{cases}$$

em qualquer caso obtemos

$$4(n+1) \sum_{j=1}^n r_j r'_j = \begin{cases} \pm r_i \pm r_k \\ \text{ou} \\ \pm 2r_i \end{cases}, \text{ para qualquer } r_1, \dots, r_n.$$

Assim, para $\pm r_i \pm r_k$ temos $r'_j = \begin{cases} \pm \frac{1}{4(n+1)}, & j = i, k, \\ 0 & , j \neq i, k, \end{cases}$

e para $\pm 2r_i$ temos $r'_j = \begin{cases} \pm \frac{1}{2(n+1)}, & j = i, \\ 0 & , j \neq i. \end{cases}$

Identificando h_0 com h_0^* e considerando a matriz $H_i = \begin{bmatrix} E_{ii} & 0 \\ 0 & -E_{ii} \end{bmatrix}$,

podemos então escrever as raízes de C_n sob a forma $\pm r_i \pm r_k = \frac{1}{4(n+1)} (\pm H_i \pm H_k)$ e $\pm 2r_i = \frac{1}{4(n+1)} (\pm 2H_i)$. O quadrado do comprimento das raízes $\pm r_i \pm r_k$ e $\pm 2r_i$ é dado por

$$\begin{aligned} \langle \pm r_i \pm r_k, \pm r_i \pm r_k \rangle &= \left[\frac{1}{4(n+1)} \right]^2 \langle \pm H_i \pm H_k, \pm H_i \pm H_k \rangle \\ &= \left[\frac{1}{4(n+1)} \right]^2 4(n+1) \cdot 2 = \frac{2}{4(n+1)}, \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \langle \pm 2r_i, \pm 2r_i \rangle &= \left[\frac{1}{4(n+1)} \right]^2 \langle \pm 2H_i, \pm 2H_i \rangle \\ &= \left[\frac{1}{4(n+1)} \right]^2 4(n+1) \cdot 4 = \frac{4}{4(n+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sum_{i < k} \langle (r_i + r_k)(r'_i + r'_k) + (r_i - r_k)(r_i - r_k) \rangle \\
&= 4 \sum_{i < k} (r_i r'_i + r_k r'_k) \\
&= 4(n-1) \sum_{i=1}^n r_i r'_i.
\end{aligned}$$

Em particular, $\langle H_{r_1, \dots, r_n}, H_{r_1, \dots, r_n} \rangle = 4(n-1) \sum_{i=1}^n r_i^2$.

Com o objetivo de identificar h_o com h_o^* , vamos determinar um elemento H_{r_1, \dots, r_n} em h_D tal que $\langle H_{r_1, \dots, r_n}, H_{r'_1, \dots, r'_n} \rangle = \pm r_i \pm r_k$

ou de maneira equivalente $4(n-1) \sum_{j=1}^n r_j r'_j = \pm r_i \pm r_k$.

Assim,
$$r'_j = \begin{cases} \pm \frac{1}{4(n-1)}, & j = i, k, \\ 0 & , j \neq i, k, \end{cases}$$

Identificando h_o com h_o^* e considerando a matriz $H_i = \begin{pmatrix} E_{ii} & 0 \\ 0 & -E_{ii} \end{pmatrix}$

podemos então escrever as raízes de D_n sob a forma, $\pm r_i \pm r_k = \frac{1}{4(n-1)} \cdot (\pm H_i \pm H_k)$. O quadrado do comprimento das raízes é dado por

$$\begin{aligned}
\langle \pm r_i \pm r_k, \pm r_i \pm r_k \rangle &= \left(\frac{1}{4(n-1)} \right)^2 \langle \pm H_i \pm H_k, \pm H_i \pm H_k \rangle \\
&= \left(\frac{1}{4(n-1)} \right)^2 4(n-1) \cdot 2 = \frac{1}{2(n-1)}.
\end{aligned}$$

Se os vetores $e_i = \frac{1}{4(n-1)} H_i$ ($1 \leq i \leq n$) formam uma base ortogonal para o espaço Euclídeano \mathbb{R}^n tal que o quadrado do comprimento de e_i

seja dado por $\langle e_i, e_i \rangle = \frac{1}{4(n-1)}$, então h_0 consiste de todos os vetores $\sum_{i=1}^n r_i^+ e_i$, onde os elementos r_i^+ são números reais. Portanto, o sistema de raízes completo e fundamental de D_n , $\Delta(D_n)$ e $K(D_n)$ são dados por [16].

$$\Delta(D_n) = \langle -e_i^+ - e_k^+, i < k, i, k=1, \dots, n \rangle \quad (n \geq 2) \quad (2.6.6)$$

$$K(D_n) = \langle e_1^- - e_2^-, e_2^- - e_3^-, \dots, e_{n-1}^- - e_n^-, e_{n-1}^- + e_n^- \rangle \quad (n \geq 2)$$

Exemplo 2.6.1 - O rank do sistema de raízes Δ é a dimensão n do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n . Para o sistema de raízes de rank 1 pode-se concluir que $A_1 = B_1 = C_1$, portanto existe somente um sistema de raízes de rank 1. Se r é uma raiz positiva, a única raiz não nula é $-r$, obtida refletindo-se r através do hiperplano de reflexão associado (Figura 2.6.1).

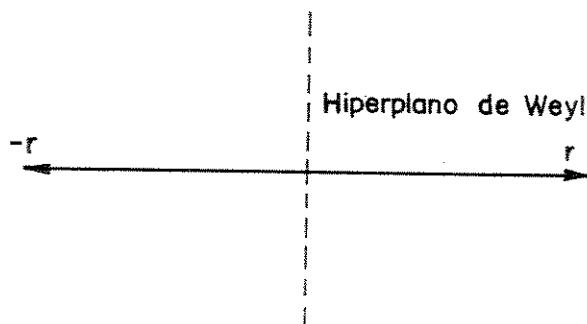


Figura 2.6.1 - Sistema de raízes "de rank 1"

Assim, para o sistema de raízes de "rank 1" o comprimento das mesmas é dado por $\|r\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exemplo 2.6.2 - Diagrama do sistema de raízes da álgebra de Lie A_2 . As raízes de A_2 : $e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_2 - e_3, e_2 - e_1, e_3 - e_2, e_3 - e_1$, podem ser facilmente obtidas de (2.6.3). Para $r, r' \in \Delta$, o ângulo θ entre r e r' é dado por $\|r\| \|r'\| \cos \theta = \langle r, r' \rangle$. Calculando o ângulo entre as raízes, obtemos o valor $\theta = 60^\circ$. O comprimento das raízes vale $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

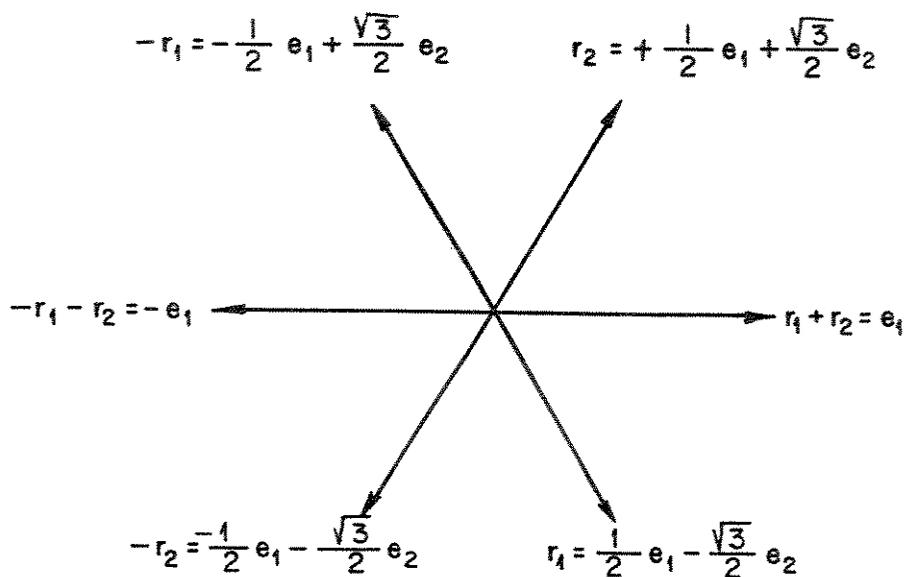


Figura 2.6.2 - Diagrama do sistema de raízes para A_2

Exemplo 2.6.3 - Diagrama do sistema de raízes das álgebras de Lie B_2 e C_2 (Figura 2.6.3 (a) e (b)). As raízes de B_2 : $\pm e_1 \pm e_2, \pm e_1, \pm e_2$, podem ser facilmente obtidas de (2.6.4). As raízes de C_2 : $\pm e_1 \pm e_2$,

$\pm 2e_1, \pm 2e_2$ podem ser obtidas facilmente de (2.6.5). O ângulo θ entre as raízes r, r' é dado por $\|r\| \|r'\| \cos \theta = \langle r, r' \rangle$. Calculando este ângulo, em ambos os casos, obtemos $\theta = 45^\circ$. Observe que o comprimento das raízes em B_2 vale $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ao passo que em C_2 o comprimento vale $\frac{1}{\sqrt{12}}$.

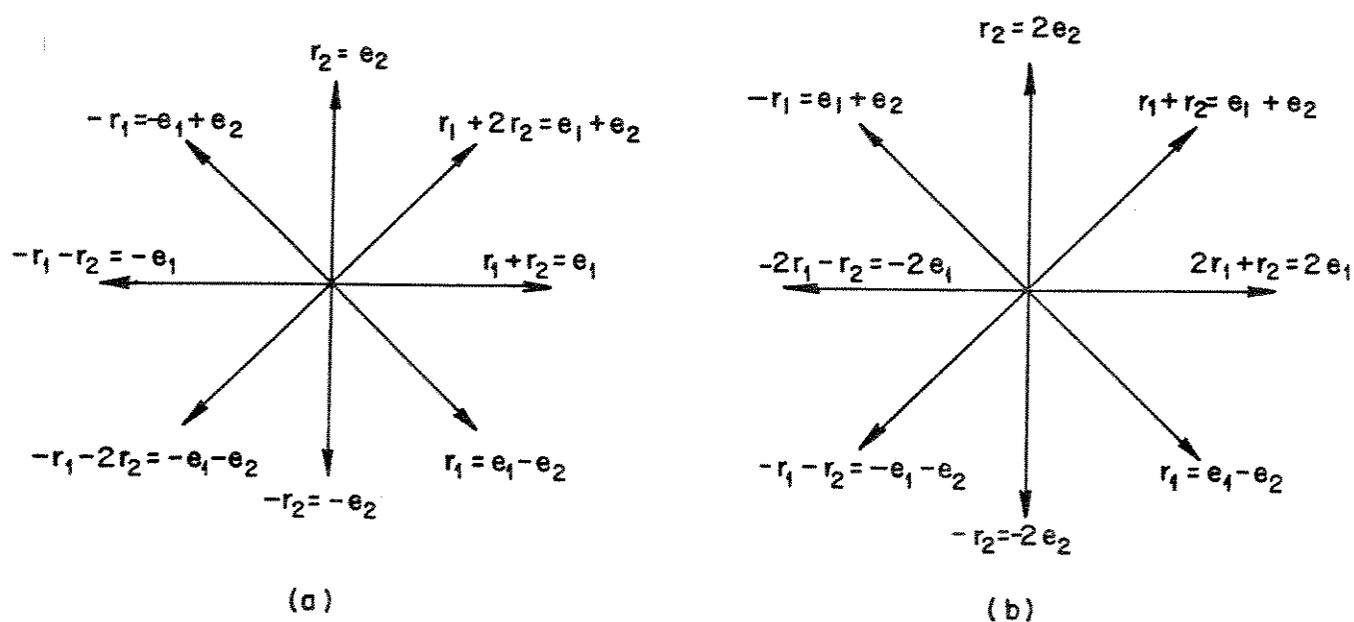


Figura 2.6.3 - Diagramas do sistema de raízes para B_2 e C_2

2.7 -GRUPO DE WEYL DE UMA ÁLGEBRA DE LIE .

Seja Δ um sistema de raízes e consideremos $r \in \Delta$. Quando a reflexão R_r atua nos distintos elementos de Δ obtemos um grupo W gerado por todas as possíveis reflexões. Este é o grupo de Weyl de uma álgebra de Lie.

Nesta Seção estudaremos os grupos de Weyl das álgebras A_n , B_n , C_n e D_n e vamos considerá-las como grupos de permutações em algum espaço dual \mathfrak{h}_0^* destas álgebras.

Grupo de Weyl de A_n

Considere o sistema de raízes completo de A_n , isto é:

$$\Delta(A_n) = \langle r_i - r_k \mid i \neq k, i, k = 1, \dots, s \rangle \quad (s = n+1)$$

onde $\{r_1, \dots, r_s\}$ formam uma base ortogonal do espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , tal que

$$\langle r_i, r_i \rangle = \frac{1}{2s} \quad (i = 1, \dots, n+1)$$

Assim o espaço dual $\mathfrak{h}_0^*(A_n)$ será dado por:

$$\mathfrak{h}_0^*(A_n) = \left\{ \sum_{i=1}^s x_i r_i \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^s r_i = 0 \right\} \quad (2.7.1)$$

Seja $x = x_1 r_1 + \dots + x_i r_i + \dots + x_k r_k + \dots + x_s r_s$ um vetor em $\mathfrak{h}_0^*(A_n)$. A reflexão determinada pela raiz $r_i - r_k$ é dada por

$$R_{(r_i - r_k)}(x) = x - \frac{2\langle x, r_i - r_k \rangle}{\langle r_i - r_k, r_i - r_k \rangle} (r_i - r_k) \quad (2.7.2)$$

Substituindo (2.7.1) em (2.7.2) e fazendo-se algumas manipulações algébricas, conclui-se que a reflexão determinada por $r_i - r_k$ vale

$$R_{(r_i - r_k)}(x) = x_1 r_1 + \dots + x_k r_i + \dots + x_i r_k + \dots + x_n r_n$$

Note que esta reflexão permuta as posições dos coeficientes r_i e r_k de x , isto é, a reflexão R_r surge como uma transposição $(r_i r_k)$. Dessa maneira, o grupo de reflexão de A_n pode ser considerado como o grupo simétrico S_s cuja ordem é $|S_s| = s!$ Conseqüentemente, a ordem do grupo de Weyl de A_n será $|W(A_n)| = (n+1)!$

Grupo de Weyl de B_n

Considere o sistema de raízes completo de B_n , isto é

$$\Delta(B_n) = \langle \pm r_i \pm r_k, \mid i < k; \pm r_i \mid i, k=1, \dots, n \rangle$$

onde $\{r_1, \dots, r_n\}$ formam uma base ortogonal para o espaço dual $h_{0n}^*(B_n)$

tal que

$$\langle r_i, r_i \rangle = \frac{1}{4n-2} \quad (i=1, \dots, n)$$

Seja $x = x_1 r_1 + \dots + x_i r_i + \dots + x_k r_k + \dots + x_n r_n$ (x_i 's, números reais) um vetor em $h_{0n}^*(B_n)$.

$$\text{Então } \frac{\langle x, \pm r_i \pm r_k \rangle}{\langle \pm r_i \pm r_k, \pm r_i \pm r_k \rangle} = \frac{\pm x_i \pm x_k}{2},$$

e, $\frac{\langle x, \pm r_i \rangle}{\langle \pm r_i, \pm r_i \rangle} = \pm x_i$. Logo, as reflexões determinadas por

$\pm r_i \pm r_k$ são dadas por

$$R_{(\pm r_i \pm r_k)}(x) = x_1 r_1 + \dots + x_k r_i + \dots + x_i r_k + \dots + x_n r_n$$

ou

$$R_{(\pm r_i \pm r_k)}(x) = x_1 r_1 + \dots - x_k r_i + \dots - x_i r_k + \dots + x_n r_n,$$

e as reflexões determinadas por $\pm r_i$ são dadas por

$$R_{\pm r_i}(x) = x_1 r_1 + \dots - x_i r_i + \dots + x_n r_n$$

Assim o grupo de Weyl de B_n , $W(B_n)$, é o grupo que permuta n -vetores da base e troca seus sinais. Portanto, sua ordem será dada por

$$|W(B_n)| = 2^n n!.$$

Grupo de Weyl de C_n

Considere o sistema de raízes completo de C_n , isto é

$$\Delta(C_n) = \langle \pm r_i \pm r_k, i < k; \pm 2r_i, i, k=1, \dots, n \rangle$$

onde $\{r_1, \dots, r_n\}$ forma uma base ortogonal para o espaço dual, $h_0^*(C_n)$

tal que

$$\langle r_i, r_i \rangle = \frac{1}{4(n+1)}, \quad (i=1, \dots, n)$$

Seja $x = x_1 r_1 + \dots + x_i r_i + \dots + x_k r_k + \dots + x_n r_n$, (x_i 's números reais) um vetor em $h_0^*(C_n)$ então

$$\frac{\langle x, \overset{+}{r}_i \overset{+}{r}_k \rangle}{\langle \overset{+}{r}_i \overset{+}{r}_k, \overset{+}{r}_i \overset{+}{r}_k \rangle} = \frac{\overset{+}{x}_i \overset{+}{x}_k}{2},$$

e

$$\frac{\langle x, \pm 2r_i \rangle}{\langle \pm 2r_i, \pm 2r_i \rangle} = \frac{\overset{+}{x}_i}{2}$$

Logo, as reflexões determinadas por $\overset{+}{r}_i \overset{+}{r}_k$ são dadas por

$$R_{(\overset{+}{r}_i \overset{+}{r}_k)}(x) = x_1 r_1 + \dots + x_k r_k + \dots + x_i r_i + \dots + x_n r_n$$

ou

$$R_{(\overset{+}{r}_i \overset{+}{r}_k)}(x) = x_1 r_1 + \dots - x_k r_k + \dots - x_i r_i + \dots + x_n r_n$$

e as reflexões determinadas por $\pm 2r_i$ são:

$$R_{\pm 2r_i}(x) = x_1 r_1 + \dots - x_i r_i + \dots + x_n r_n$$

Note que o grupo de Weyl de C_n , $W(C_n)$, realiza a permutação dos n -vetores da base e troca os seus sinais como ocorre com o grupo de Weyl de B_n , $W(B_n)$. Assim, a ordem deste grupo é dada por $|W(C_n)| = 2^n \cdot n!$.

Grupo de Weyl de D_n .

Considere o sistema de raízes completo de D_n , isto é

$$\Delta(D_n) = \{\pm r_i \pm r_k, i < k; i, k=1, \dots, n\}$$

onde $\{r_1, \dots, r_n\}$ forma uma base ortogonal para o espaço dual, $h_0^*(D_n)$

tal que

$$\langle r_i, r_i \rangle = \frac{1}{4(n-1)}, \quad (i=1, \dots, n)$$

Seja $x = x_1 r_1 + \dots + x_i r_i + \dots + x_k r_k + \dots + x_n r_n$ (x_i 's números reais) um vetor em $h_0^*(D_n)$. Como

$$\frac{\langle x, \pm r_i \pm r_k \rangle}{\langle \pm r_i \pm r_k, \pm r_i \pm r_k \rangle} = \frac{\pm x_i \pm x_k}{2}$$

então as reflexões determinadas por $\pm r_i \pm r_k$ são dados por

$$R_{(\pm r_i \pm r_k)}(x) = x_1 r_1 + \dots + x_k r_i + \dots + x_i r_k + \dots + x_n r_n$$

ou

$$R_{(\pm r_i \pm r_k)}(x) = x_1 r_1 + \dots - x_k r_i + \dots - x_i r_k + \dots + x_n r_n$$

de modo que o grupo de Weyl de D_n , $W(D_n)$, pode ser considerado como o grupo das permutações dos n -vetores da base enquanto troca os sinais de um número par de variáveis. Assim, a ordem deste grupo é dada por

$$|W(D_n)| = 2^{n-1} \cdot n!$$

2.8 - MATRIZES DE CARTAN E DIAGRAMAS DE DYNKIN.

A redução do problema de determinação das Álgebras de Lie a

problemas geométricos realizada por Dynkin [11] veio facilitar substancialmente a obtenção das mesmas. A proposta consiste basicamente da utilização de diagramas planares para a representação dos sistemas de raízes, isto é, um sistema de raízes $\Delta = \langle r_1, \dots, r_n \rangle$ pode ser representado por um conjunto de n pontos no plano, onde n é o rank da Álgebra de Lie. Estes pontos formam os vértices do diagrama de Dynkin.

Seja

$$\Delta = \langle r_1, \dots, r_n \rangle$$

um sistema de raízes e consideremos

$$C_{ij} = \frac{2\langle r_i, r_j \rangle}{\langle r_j, r_j \rangle} \quad (2.8.1)$$

A matriz (C_{ij}) é denominada matriz de Cartan do sistema Δ . Em geral temos

$$C_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{se } i=j \\ 0, -1, -2, \text{ ou } -3, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.8.2)$$

Se $i \neq j$, os elementos r_i, r_j são linearmente independentes, logo se θ_{ij} é o ângulo entre r_i, r_j , então $0 \leq (\cos \theta_{ij})^2 < 1$. Isto significa que

$$0 \leq \frac{4\langle r_i, r_j \rangle^2}{\langle r_i, r_i \rangle \langle r_j, r_j \rangle} < 4 \quad (2.8.3)$$

Portanto,

$$0 \leq C_{ij}C_{ji} < 4$$

(2.8.4)

Isto nos diz que C_{ij} e C_{ji} são ambos zeros, ou um deles é -1 e o outro é -1, -2 ou -3.

Vamos associar um diagrama (diagrama de Dynkin) com a matriz (C_{ij}) . O diagrama de Dynkin não pode conter loops, e o número total de retas conectando dois vértices é no máximo três.

Para associarmos diagrama e matriz, o seguinte procedimento é realizado: (1) dentre os n pontos r_1, \dots, r_n escolhidos, conectar r_i a r_j ($i \neq j$), através de $C_{ij}C_{ji}$ retas, (2) anexar à cada ponto r_i , seu peso definido por $\langle r_i, r_i \rangle$.

Observe que se

$$\left[\begin{array}{l} \text{(a) } C_{ij} = C_{ji} = 0, \quad r_i \text{ não está conectado à } r_j \\ \text{(b) } C_{ij} \neq 0, C_{ji} \neq 0, \quad \frac{C_{ji}}{C_{ij}} = \frac{\langle r_i, r_i \rangle}{\langle r_j, r_j \rangle} \end{array} \right.$$

Dessa maneira, a partir do diagrama, os elementos $\frac{C_{ji}}{C_{ij}}$ e

$C_{ij}C_{ji}$ podem ser determinados.

Com a informação adicional de que $C_{ij} \leq 0$ podemos obter

C_{ij} e C_{ji} .

O determinante da matriz de Cartan é um múltiplo não nulo do determinante da matriz $(\langle r_i, r_j \rangle)$.

Como exemplo desta associação, iremos considerar os diagramas de Dynkin e as matrizes de Cartan das álgebras de Lie: A_3, B_3, C_3, D_4

respectivamente.

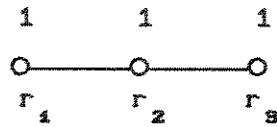


Figura 2.8.1 - Diagrama de Dynkin de A_3

Então,

$C_{ii} = 2$, $C_{21}/C_{12} = 1$, $C_{12}C_{21} = 1$, $C_{32}/C_{23} = 1$, $C_{23}C_{32} = 1$, usando a informação $C_{ij} \leq 0$, conclue-se que $C_{12} = C_{21} = C_{23} = C_{32} = -1$, todos os outros $C_{ij} = 0$. A matriz de Cartan será então dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Seja o diagrama de Dynkin de B_3 como mostrado na Figura

2.8.2

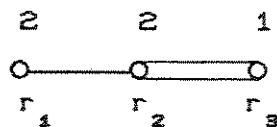


Figura 2.8.2 - Diagrama de Dynkin de B_3

Então

$C_{ii} = 2$, $C_{21}/C_{12} = 1$, $C_{12}C_{21} = 1$; $C_{32}/C_{23} = 2$, $C_{23}C_{32} = 2$,

Como $C_{ij} \leq 0$, conclue-se que $C_{12} = C_{21} = -1$, $C_{23} = -1$, $C_{32} = -2$, todos os outros $C_{ij} = 0$. A matriz de Cartan será então dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Seja o diagrama de Dynkin de C_3 , como mostrado na Figura 2.8.3.

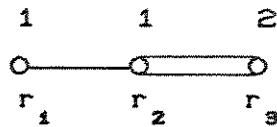


Figura 2.8.3 - Diagrama de Dynkin de C_3

Então,

$C_{ii} = 2$; $C_{21}/C_{12} = 1$, $C_{12}C_{21} = 1$; $C_{32}/C_{23} = 1/2$, $C_{23}C_{32} = 2$, como $C_{ij} \leq 0$, $C_{12} = C_{21} = -1$, $C_{23} = -1$, $C_{32} = -2$, os demais $C_{ij} = 0$. A matriz de Cartan será então dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Seja o diagrama de Dynkin de D_4 como mostrado na Figura 2.8.4.

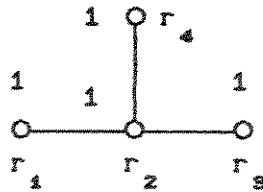


Figura 2.8.4 - Diagrama de Dynkin de D_4

Então

$$C_{ii} = 2, \quad C_{21}/C_{12} = 1, \quad C_{12}C_{21} = 1, \quad C_{32}/C_{23} = 1, \quad C_{23}C_{32} = 1, \quad C_{42}/C_{24} = 1$$

$C_{24}C_{42} = 1$ usando a informação $C_{ij} \leq 0$, conclue-se que $C_{12} = C_{21} = C_{23} = C_{32} = C_{24} = C_{42} = -1$, os demais $C_{ij} = 0$. A matriz de Cartan será dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.9 - EMPACOTAMENTO DE ESFERAS, FORMAS EXTREMAS, ÁLGEBRA DE LIE.

No Capítulo 1 mostramos uma identificação entre formas quadráticas extremas e reticulados. Nesta seção mostraremos a conexão existente entre: empacotamento de esferas no espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , formas quadráticas extremas e Álgebra de Lie. A identificação entre álgebra de Lie e Empacotamento de esferas reside no fato de que os melhores empacotamentos de esferas no espaço Euclidiano n -dimensional ($n \leq 8$) pertencem às famílias das álgebras de Lie [7]

$$A_n ; D_n ; E_n$$

O problema de empacotamento de esferas no espaço Euclidiano estudado na geometria dos números tem uma aplicação prática na teoria de Comunicações. Na verdade o estudo de empacotamento de esferas no espaço Euclidiano n-dimensional é considerado matematicamente equivalente ao estudo de alocação de um número finito de mensagens digitais codificadas ou não com os centros das esferas, que sob a forma combinada de modulação e codificação resulta em sistemas eficientes em faixa e potência.

Uma esfera no espaço Euclidiano n-dimensional de raio ρ (centrada na origem) consiste de todos pontos $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tais que

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \rho^2 .$$

Definição 2.9.1 [27] - Diremos que uma coleção de conjuntos $\langle S_i \rangle$, $(i=1, 2, \dots)$, constitui um empacotamento no espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , se:

$$(i) \quad S_i \cap S_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

$$(ii) \quad \cup S_i \subset \mathbb{R}^n$$

Assim, dois conjuntos quaisquer, não possuem elementos em comum e cada elemento de cada S_i é também um elemento do espaço \mathbb{R}^n .

Exemplo 2.9.1 - No espaço Euclidiano \mathbb{R}^2 vamos identificar cada elemento da coleção: $\langle S_i \rangle$, $(i=1, 2, \dots)$ com um círculo de raio ρ .

Com esta identificação obtemos um empacotamento no espaço \mathbb{R}^2 (Figura 2.9.1).

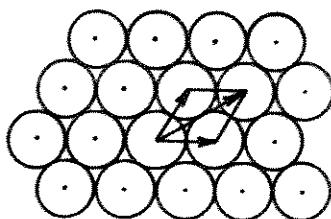


Figura 2.9.1 - Empacotamento no espaço Euclidiano bidimensional

Definição 2.9.2 [27] - Uma coleção de conjuntos: $\{S_i\}$ ($i=1,2,\dots$) é dita cobrir o espaço Euclidiano \mathbb{R}^n se: $\cup S_i \supset \mathbb{R}^n$. Desse modo cada elemento do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n pertence a pelo menos um conjunto S_i .

Seja M_n o número máximo de esferas de raio ρ contidas no espaço Euclidiano n -dimensional arranjadas em torno de uma esfera central, as quais somente se tocam. Quando $n=1$, as esferas são segmentos de retas centradas em pontos inteiros cujo raio é $\rho = 1/2$. Observemos que as esferas cobrem totalmente a reta e cada esfera toca duas outras. Dessa forma, o número máximo M_1 de esferas que tocam uma esfera central é 2. Quando $n=2$, as esferas são os círculos, como mostra a Figura 2.9.2 (a), (b), (c). Os empacotamentos (a) e (b) são equivalentes, onde (a) é \mathbb{Z} e (b) denotado por D_2 é obtido de (a) fazendo uma rotação de 45° mais uma mudança de escala. Dessa maneira, o número máximo de esferas que tocam uma esfera central é $M_2=4$ para (a) e (b).

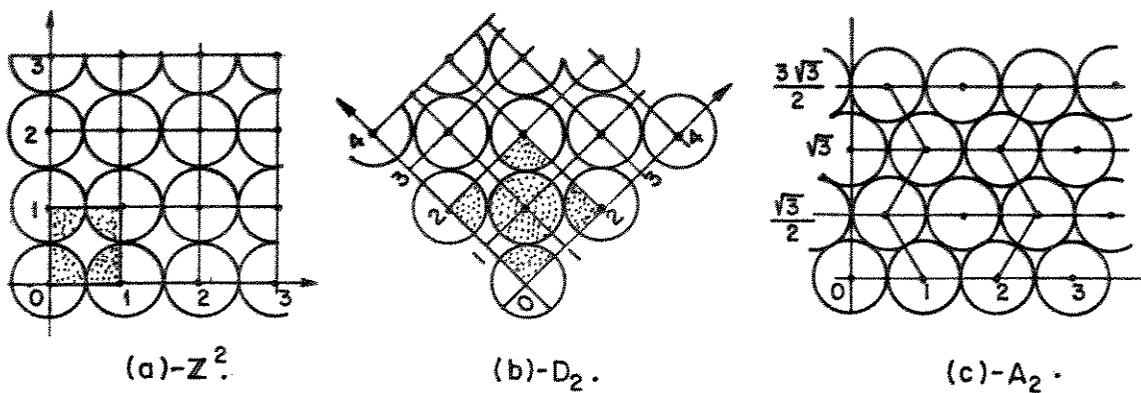


Figura 2.9.2 - Empacotamento de esferas no espaço Euclidiano bidimensional

O empacotamento em (c) é o reticulado hexagonal A_2 onde os centros dos círculos têm coordenadas dadas por

$$x = u + v/2$$

$$y = (\sqrt{3}/2)v,$$

onde u, v são inteiros.

Observe que, apesar de existir uma única maneira de contornar um círculo com seis outros de mesmo diâmetro, existem diversas maneiras de contornar uma esfera com doze outras com mesmo diâmetro. Entre estes possíveis arranjos existe um cujos centros das esferas formam um reticulado, a saber, o reticulado cúbico de face centrada, [4]. Neste arranjo, se o centro de uma esfera é fixado, o conjunto de todas as possíveis rotações e reflexões (que permutam às outras doze esferas que contornam a esfera com centro fixo) é chamado o grupo simétrico do empacotamento.

Neste empacotamento, podemos considerar o centro de cada esfera como sendo o vértice de um poliedro.

Definição 2.9.3 [28] - Um empacotamento de esferas é denominado um reticulado se os centros das esferas constituem um grupo aditivo. Em outras palavras, sejam t_1, t_2, \dots, t_n elementos linearmente independente do espaço Euclidiano n -dimensional. O reticulado gerado pelos $t_i (i=1, \dots, n)$ consiste de todos os elementos do conjunto

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^n x^i t_i \mid x^i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Definição 2.9.4 [28] - A densidade de um empacotamento de esferas no espaço Euclidiano n -dimensional é a fração do \mathbb{R}^n que está dentro das esferas.

Na Figura 2.9.4 (a) e (b) a densidade é o mesmo que a parte da área de um quadrado que está coberta por círculos ou partes de círculos.

Seja L_n o número de esferas que tocam uma única esfera em um empacotamento reticulado denso no espaço Euclidiano n -dimensional. Então

$$L_1 = M_1 = 2$$

$$L_2 = M_2 = 6$$

$$L_3 = M_3 = 12$$

De uma maneira geral, [8]

$$L_n \leq M_n.$$

Consideremos o reticulado $\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^n x^i t_i \mid x^i \in \mathbb{Z} \right\}$

Vamos associar ao conjunto Λ uma classe de formas quadráticas positiva definida [14].

Para isto, seja x um elementos de Λ , isto é: $x = \sum_{i=1}^n x^i t_i$

então

$$\begin{aligned} ||x||^2 = \langle x, x \rangle &= \left(\sum_{i=1}^n x^i t_i \right) \left(\sum_{j=1}^n x^j t_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i x^j \end{aligned}$$

onde $a_{ij} = \langle t_i, t_j \rangle$ e (a_{ij}) é a matriz simétrica associada à forma quadrática. Este procedimento torna possível a identificação de um reticulado com uma forma quadrática n -ária positiva definida, a qual denotaremos por

$$Q(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i x^j$$

O valor mínimo "M" atingido por Q para inteiros não nulos x^i é igual ao quadrado do maior diâmetro de uma esfera (considerando esferas de mesmo diâmetro) que podemos centrar nos pontos do reticulado para constituir um empacotamento de esferas. Em outras palavras, o mínimo "M" é o quadrado da distância mínima entre os pontos do

reticulado (Figura 2.9.2 (a) e (b)).

Sem perda de generalidade, podemos considerar as esferas com diâmetro igual à unidade, portanto o valor mínimo da forma Q será dado por $M=1$. O volume do paralelepípedo periódico do reticulado gerado por t_1, \dots, t_n é tal que $(\text{vol})^2 = \text{Det}(a_{ij})$.

Portanto o empacotamento denso de esferas ocorre quando $\text{Det}(a_{ij})$ é o menor possível. Desta maneira, estudar empacotamento denso de esferas é equivalente a estudar formas quadráticas extremas [7].

No espaço Euclidiano n -dimensional ($n \leq 8$), todas as formas extremas equivalentes às formas de Minkowski [21] e Blinchnfeldt [3] podem ser representadas por grafos (Figura 2.9.3)

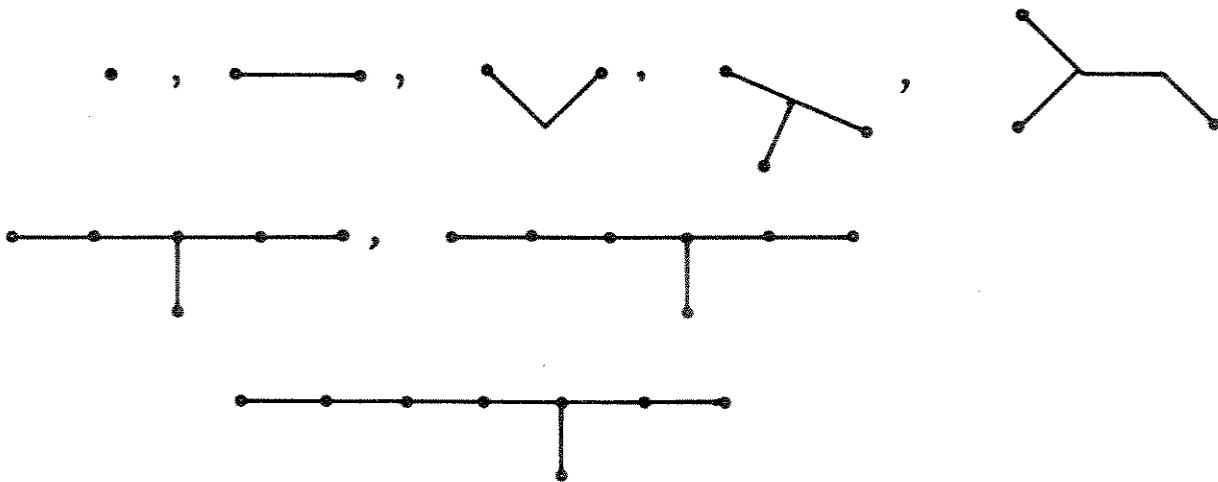


Figura 2.9.3 - Identificação de formas extremas por grafos

Na construção dos grafos usamos o critério: cada grafo tem n nós e $(n-1)$ ramos ligando pares de nós com a seguinte identificação

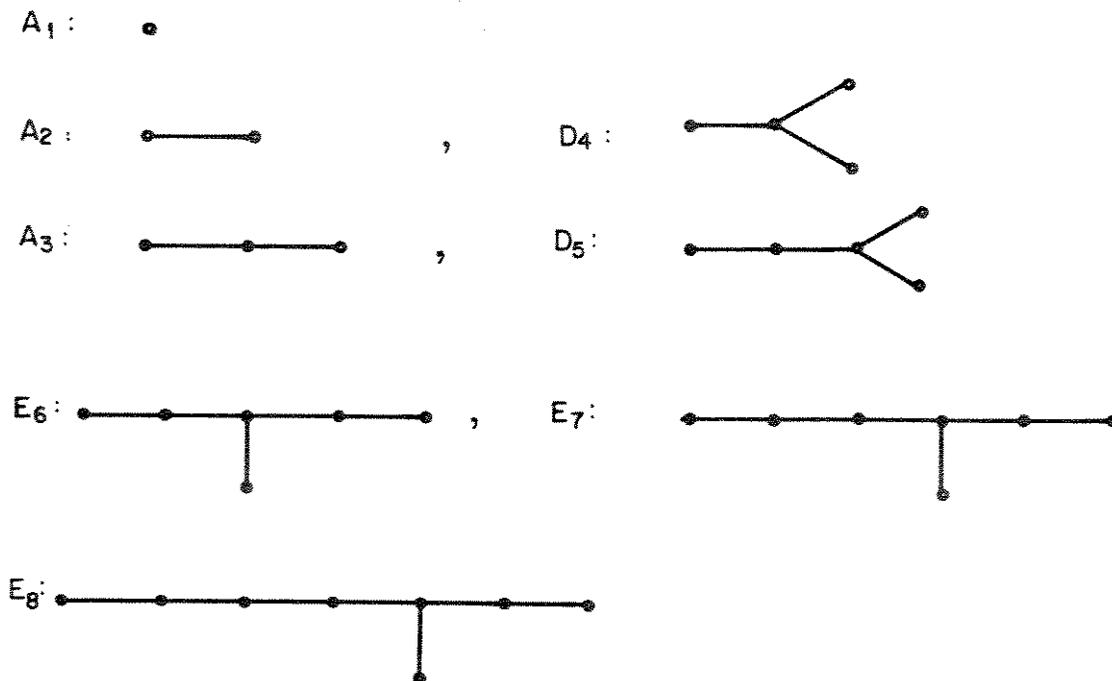
(i) Um nó para cada termo quadrado $(x^i)^2$

(ii) Um ramo ligando um par de nós para cada termo produto $-x^i \cdot x^j$.

Na Figura 2.9.3 os três primeiros grafos são identificados com as formas quadráticas

$$(x^1)^2 ; (x^1)^2 + (x^2)^2 - x^1 x^2 ; (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^3)^2 - x^1 x^2 - x^2 x^3$$

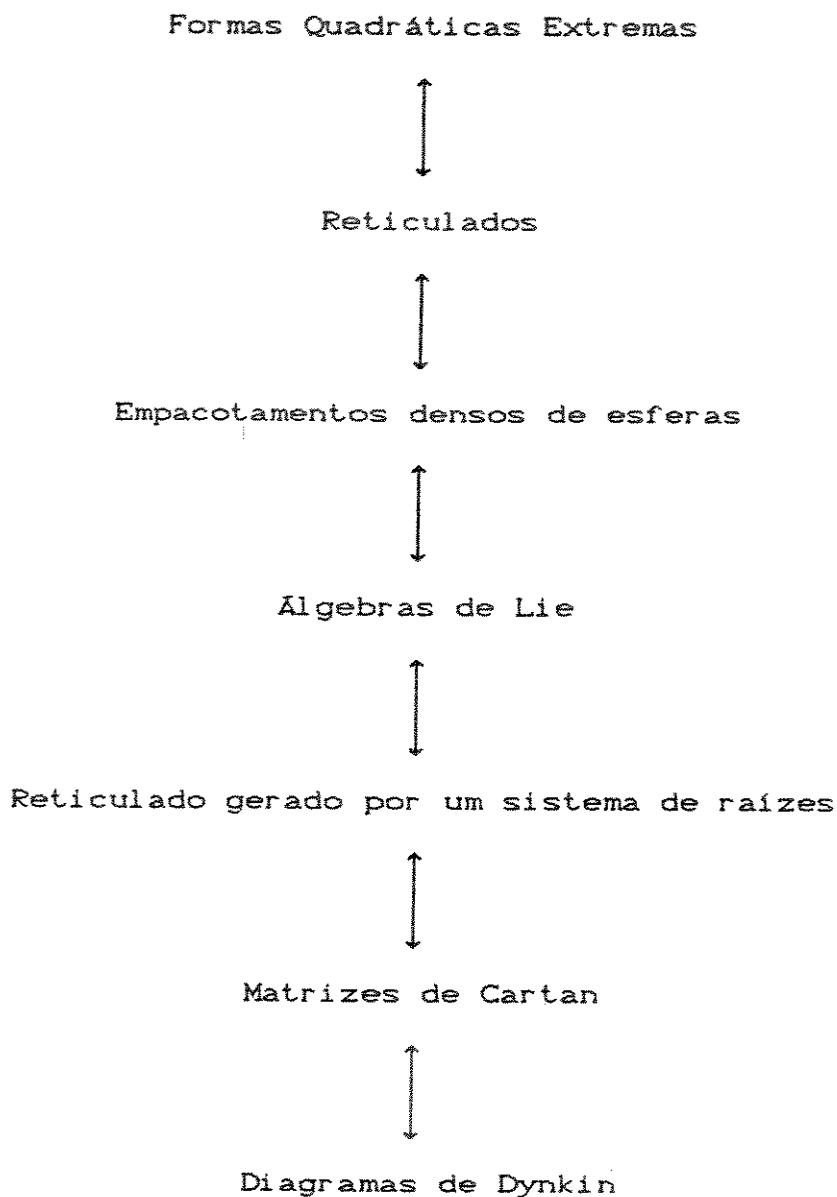
Os grafos da Figura 2.9.3 foram identificados na Seção 2.8 com as álgebras de Lie A_n , D_n e E_n . Isto é:



Esta identificação decorre do fato de que todo empacotamento denso de esferas no espaço Euclidiano n -dimensional é simétrico por reflexão em relação ao hiperplano (tangente ao ponto de contato) entre duas esferas que se tocam.

Concluimos assim que no espaço Euclidiano \mathbb{R}^n ($n \leq 8$)

existem as equivalências



As estruturas algébricas apresentadas neste capítulo, serão agora utilizadas no Capítulo 3 a seguir, para a obtenção de regiões de Voronói de um politopo bem como calcular o segundo momento destes politopos.

CAPÍTULO 3

REGIÕES DE VORONÓI E SEGUNDO MOMENTO DE POLÍTOPOS

3.1 - PRELIMINARES

Como é de conhecimento geral, o quantizador unidimensional (correspondente ao reticulado A_1 isomorfo à \mathbb{Z}) efetua uma operação sobre um único valor amostrado de um sinal analógico. O objetivo do quantizador é trocar o valor da amostra por um valor escolhido de um conjunto finito pré-estabelecido. Dessa forma, um conjunto de bits pode ser usado para identificar quais valores representativos melhor se aproximam do valor analógico original.

A noção de quantizador pode ser estendida de maneira natural a espaços Euclidianos n-dimensionais. Define-se um quantizador no espaço \mathbb{R}^n , como sendo uma função

$$Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow S \\ x \longmapsto Q(x) = P_j \text{ mais próximo de } x$$

onde

$$S = \{P_1, \dots, P_M\} \quad \text{e} \quad P_j = (P_{j1}, \dots, P_{jn}), \quad (j=1,2,\dots,M)$$

Em outras palavras, um quantizador n-dimensional pode ser visto como sendo a partição do espaço \mathbb{R}^n em M regiões congruentes tal que a identificação de cada região esteja associada ao ponto P_j . Em geral, estes pontos constituem o baricentro ou o centróide das respectivas regiões. Por outro lado, se x é um valor amostrado, então x será visto como um ponto arbitrário do espaço \mathbb{R}^n pertencente à uma das M regiões, digamos P_j , se P_j é o único, caso contrário a decisão passa a ser aleatória. A Figura 3.1.1 mostra um quantizador

n-dimensional.

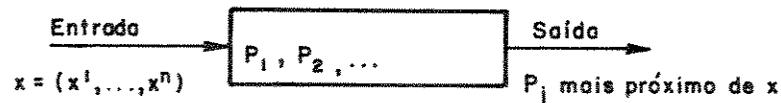
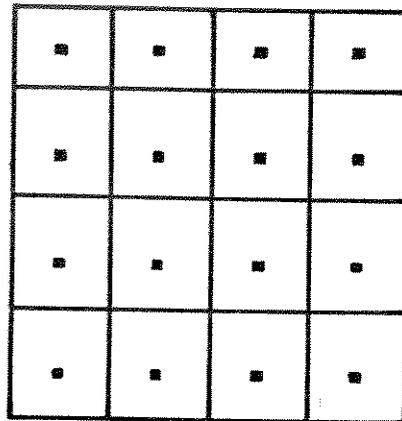


Figura 3.1.1 - Quantizador n-dimensional.

Em torno de cada P_j está sua região de Voronói, VCP_j consistindo dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ que estão mais próximos à P_j do que qualquer outro P_k ($j \neq k$). Assim

$$VCP_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, P_j) \leq \text{dist}(x, P_k) \text{ } (j \neq k)\} \quad (3.1.1)$$

A Figura 3.1.2 mostra um quantizador genérico no espaço bidimensional. Neste caso particular, escolhemos 16 pontos: P_1, P_2, \dots, P_{16} os quais são os representantes das regiões. Observe que a entrada do quantizador é um par de números reais $x = (x_1, x_2)$ ao passo que a saída será um dos P_j mais próximos à x .



$$\blacksquare = P_j, (j=1,2,\dots,16).$$

Figura 3.1.2 - Quantizador bidimensional.

Conway e Sloane [9] formalizaram rigorosamente e estenderam o conceito de quantização via reticulados como uma alternativa promissora. Zador e Gersho [23] conjecturaram sobre esta alternativa sem entretanto apresentarem uma análise rigorosa.

A motivação principal do estabelecimento deste conceito em [9] vem da dualidade existente entre problemas de Codificação de Canal e Codificação de Fonte, uma vez que o problema da Codificação de Canal já havia recebido considerável atenção por partes destes pesquisadores, com resultados importantes obtidos via empacotamento de esferas.

No Capítulo 2 vimos que através das álgebras de Lie A_n , B_n , C_n e D_n , podemos identificar os duais A_n^* , B_n^* , C_n^* e D_n^* . Note que enquanto as álgebras A_n , B_n , C_n e D_n , são utilizadas para codificação de canal os correspondentes duais A_n^* , B_n^* , C_n^* e D_n^* , são utilizados para codificação de fonte. Este procedimento é usado

como base na construção de quantizadores de bloco com entradas uniformemente distribuídas, bem como na construção de códigos usados em canais limitados em faixa com ruído Gaussiano.

Considere no espaço n-dimensional o conjunto

$$S = \{P_1, P_2, \dots, P_j\} \subset \mathbb{R}^n$$

onde

$$P_j = (P_{j1}, \dots, P_{jn})$$

Seja $V(P_j)$ a região de Voronói em torno de P_j . Esta região consiste de todos os pontos

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

que estão mais próximos à P_j do que qualquer outro P_k , ($j \neq k$). Se o reticulado é usado como um quantizador, então todos os pontos da região de Voronói em torno de um ponto P_ℓ do reticulado são identificados por ℓ , ao passo que se o reticulado for usado para codificação (Canal Gaussiano), então todos os pontos da região de Voronói em torno de P_ℓ são decodificados como o próprio ℓ .

O objetivo deste Capítulo, será calcular o segundo momento de alguns politopos simples, analisar o segundo momento da região de Voronói de alguns reticulados gerados por um sistema de raízes de uma álgebra de Lie, e encaminhar um procedimento para o cálculo da função taxa de distorção relativo ao problema de Codificação de Fonte.

3.2 - CÁLCULO DO SEGUNDO MOMENTO DE POLITOPOS.

Definição 3.2.1 - Um politopo no espaço Euclidiano n -dimensional é uma região convexa limitada por um número finito de hiperplanos. A parte do politopo que encontra-se no hiperplano é denominada célula.

Definição 3.2.2 - Um conjunto $A = \{a_0, \dots, a_k\}$ com $(k + 1)$ elementos do espaço n -dimensional é geometricamente independente se nenhum hiperplano $(k - 1)$ dimensional contém todos os pontos.

Exemplo 3.2.1 - Na Figura 3.2.1 (a) o conjunto $\{v_0, v_1, v_2\}$ é geometricamente independente, porque o único "hiperplano" em \mathbb{R}^2 contendo todos os pontos é o plano inteiro. O conjunto $\{v'_0, v'_1, v'_2\}$ da Figura 3.2.1 (b) não é geometricamente independente porque todos os pontos estão sobre uma reta (hiperplano unidimensional).

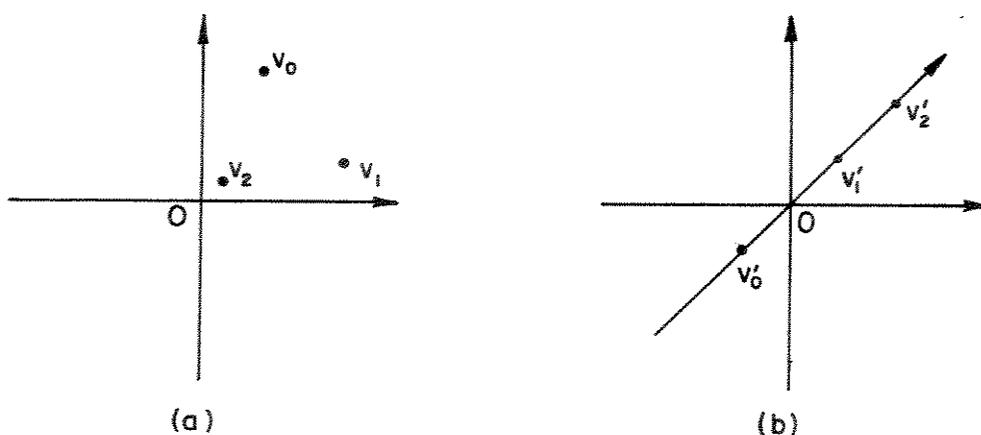


Figura 3.2.1 - Conjuntos de pontos geometricamente independentes.

Seja $\{v_0, \dots, v_n\}$ um conjunto de pontos do \mathbb{R}^n

geometricamente independente. O n -simplex σ gerado por $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$ é o conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}^n$ para os quais existem $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (não negativos) tais que

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$$

Os números $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ são as coordenadas baricêntricas de x e os pontos v_0, \dots, v_n são os vértices de σ . Na Figura 3.2.2 temos um zero-simplex (um ponto), um 1-simplex (um segmento de reta fechado), um 2-simplex (um triângulo (interior e fronteira)), um 3-simplex (um tetraedro (interior e fronteira)).

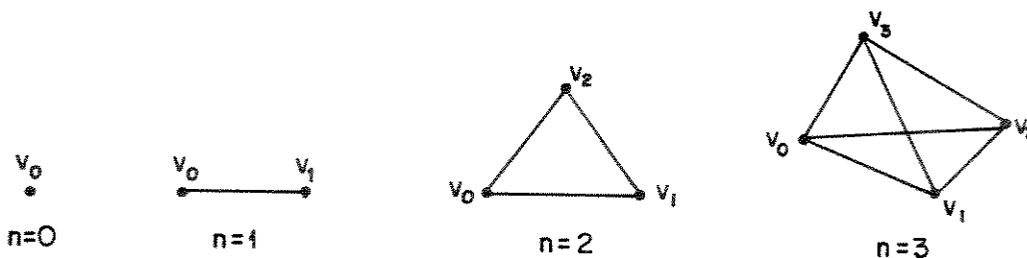


Figura 3.2.2 - Simplex de dimensão n .

Diremos que um politopo no espaço Euclideo n -dimensional é convexo se ele está situado inteiramente de um lado em relação a cada uma das $(n - 1)$ fronteiras.

Uma tesselação plana (politopo degenerado) é um conjunto

infinito de polígonos (encaixados de modo conveniente) que cobre todo o plano de modo que cada lado do polígono pertença também a outro polígono.

Um politopo convexo C_p gera uma tesselação se existe uma partição do espaço \mathbb{R}^n cujas regiões são todas congruentes à C_p . Por exemplo, no espaço bi-dimensional, todo triângulo, quadrilátero e hexágono, geram tesselações.

A região de Voronói em torno da origem de um reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ é definida como sendo um politopo convexo, isto é:

$$C_p = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; ||x|| \leq ||x - \ell||, \ell \in \Lambda \right\} \quad (3.2.1)$$

onde

$||x||$ é a norma do vetor x .

Seguramente, um quantizador ótimo para o caso da fonte apresentar distribuição uniforme sobre algum conjunto convexo C , será uma partição onde as regiões são todas congruentes à algum politopo C_p . Em outras palavras, a partição ótima é essencialmente uma tesselação de C .

O centróide $\bar{c} \in C_p$ é o valor c que minimiza a quantidade

$$\int_{C_p} ||x - c||^2 dx$$

Quando $x = (x_1, \dots, x_n)$ é uma variável aleatória com distribuição uniforme, o quantizador terá as regiões de Voronói

definidas em conjuntos limitados do espaço \mathbb{R}^n , onde $p(x)$ é positiva. Além disso, para que o quantizador minimize distorções, é necessário que cada ponto P_j seja o centróide da região a qual ele pertence. Por exemplo, se a entrada do quantizador é uma variável aleatória com densidade de probabilidade $p(x)$, o erro quadrático médio por símbolo será:

$$E_q = (1/n) \int_{\mathbb{R}^n} ||x - Q(x)||^2 p(x) dx \quad (3.2.2)$$

Gersho [13] afirma que em qualquer dimensão, um quantizador ótimo é tal que para M (número de pontos P_j) arbitrariamente grande, as regiões de Voronói são todas congruentes à algum politopo, digamos C_p . Para um quantizador com estas características, o segundo momento por dimensão de C_p é definido pela quantidade

$$M_{C_p} = (1/n) \frac{K_{C_p}}{(\text{vol}_{C_p}) \frac{(n+2)}{n}} \quad (3.2.3)$$

onde

$$\text{vol}_{C_p} = \int_{C_p} dx \quad (\text{volume do politopo})$$

$$K_{C_p} = \int_{C_p} ||x - \bar{c}||^2 dx \quad (\text{segundo momento não normalizado})$$

O segundo momento normalizado de C_p é definido por

$$\mathcal{M}_{C_p} = \left[\int_{C_p} ||x - \bar{c}||^2 dx \right] / \text{vol}_{C_p} \quad (3.2.4)$$

A quantidade (3.2.3) pode ser escrita sob a forma

$$\mathcal{M}_{C_p} = (1/n) \frac{\mathcal{M}_{C_p}}{(\text{vol}_{C_p})^{2/n}} \quad (3.2.5)$$

Se todas as células de Voronói são congruentes, o problema relativo à quantização via reticulado será essencialmente determinar entre todos os reticulados Λ do espaço n -dimensional aquele que minimiza a quantidade

$$\mathcal{M}_{\Lambda} = \left[1/n \int_{\Lambda} ||x||^2 dx \right] / \left[\text{vol}_{\Lambda} \right]^{\frac{(2+n)}{n}} \quad (3.2.6)$$

Exemplo 3.2.2 - Suponhamos que o eixo real está dividido em intervalos de comprimento unitário e os pontos quantizados estejam centrados em cada intervalo, então as regiões de Voronói são os intervalos. O intervalo particular $J = [-1/2, 1/2]$ será o politopo convexo centrado na origem. Usando (3.2.6) temos

$$\mathcal{M}_{\Lambda} = \left[\int_{-1/2}^{1/2} ||x||^2 dx \right] / \left[\int_{-1/2}^{1/2} dx \right]^3 = \left[\frac{x^3}{3} \Big|_{-1/2}^{1/2} \right] = \frac{1}{12}.$$

Dada as várias formas geométricas dos polítopos que serão abordados em nosso estudo, é de se esperar a existência de métodos que facilitem o cálculo para a obtenção do volume e segundo momento não normalizado dos mesmos. Em outras palavras, não podemos afirmar que para o conjunto de todos os polítopos com os quais trabalharemos, exista um único método que nos forneça o volume e o segundo momento não normalizado dos mesmos.

Em alguns casos especiais tais como a esfera, o tetraedro regular e o octaedro regular, será utilizado um método devido a Dirichlet para calcular o volume e o segundo momento não normalizado destes polítopos. O método reduz nossos cálculos de uma maneira considerável, quando comparado ao cálculo do volume e segundo momento não normalizado por métodos tradicionais.

De uma maneira geral, o cálculo do segundo momento de um polítopo arbitrário torna-se possível quando podemos decompô-lo em simplex, mas neste caso torna-se mais viável para o cálculo do volume e do segundo momento não normalizado, outros métodos que serão abordados. A justificativa desta viabilidade deve-se ao fato de que o volume e o segundo momento não normalizado, são obtidos usando apenas os vértices do polítopo e seu centróide.

Proposição 3.2.1(Dirichlet)[20] - Seja f uma função positiva real contínua e α_i ($i=1, \dots, n$) números reais positivos. Podemos escrever a integral

$$I = \int \dots \int f(t_1 + \dots + t_n) t_1^{\alpha_1 - 1} \dots t_n^{\alpha_n - 1} dt_1 \dots dt_n$$

sob a forma

$$I = \left[\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n) / \Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \right] \int_0^1 f(x) x^{(\sum \alpha_i) - 1} dx$$

onde a integração é tomada sobre todos os valores positivos das variáveis, $t_1 + \dots + t_n \leq 1$, e que $\Gamma(\cdot)$ é a função gama.

Como uma aplicação da Proposição 3.2.1 no cálculo do segundo momento, apresentaremos a seguir três exemplos onde os politopos são de interesse para o problema em estudo.

Exemplo 3.2.3 - Seja TR o tetraedro regular no espaço tridimensional cuja aresta mede $2l$. Para o cálculo do volume (vol_{TR}) assumiremos que $f=1$ e $\alpha_i=1$ para todo i , ao passo que no cálculo do segundo momento não normalizado K_{TR} , assumiremos $f=1$, $\alpha_1=3$ e $\alpha_i=1$ ($i \geq 2$). Dessa forma, da Proposição 3.2.1 temos que

$$\text{vol}_{\text{TR}} = 2 \cdot 2^{3/2} l^3 \int \int \int dt_1 dt_2 dt_3 = (2l)^3 \frac{2^{1/2} \Gamma(1)}{2\Gamma(3)} \int_0^1 x^2 dx$$

ou

$$\frac{\text{vol}_{\text{TR}}}{(2l)^3} = \frac{2^{1/2}}{12}$$

$$\begin{aligned} K_{\text{TR}} &= 3 \cdot 2^{3/2} l^3 \cdot 2l^2 \int \int \int t_1^2 dt_1 dt_2 dt_3 \\ &= 3 \cdot (2l)^2 \cdot 2^{1/2} l^3 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(5)} \int_0^1 x^4 dx \end{aligned}$$

ou

$$\frac{K_{TR}}{(2l)^2} = \frac{2^{1/2} l^3}{20}$$

$$\frac{N_{TR}}{(2l)^2} = \frac{3}{40}$$

$$\mu_{TR} = \frac{1}{3} \frac{3 \cdot (2l)^2}{40} \cdot \left(\frac{12}{2^{1/2} \cdot (2l)^3} \right)^{2/3} = 0,140042 .$$

Exemplo 3.2.4 - Seja OR o octaedro regular no espaço tridimensional, cujo comprimento da aresta é $2l$. Da Proposição 3.2.1, temos

$$\text{vol}_{OR} = 2^3 \cdot l^3 \cdot 2^{3/2} \int \int \int dt_1 dt_2 dt_3 = (2l)^3 \cdot 2^{3/2} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3)} \int_0^1 x^2 dx$$

ou

$$\frac{\text{vol}_{OR}}{(2l)^3} = \frac{2^{3/2}}{3!}$$

$$\begin{aligned} K_{OR} &= 3(2l)^3 \cdot 2^{3/2} \cdot 2l^2 \int \int \int t_1^2 dt_1 dt_2 dt_3 \\ &= 3 \cdot (2l)^3 \cdot 2^{3/2} \cdot 2l^2 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(5)} \int_0^1 x^4 dx \end{aligned}$$

ou

$$K_{OR} = \frac{(2D)^3 \cdot (2D)^2 \cdot 2^{1/2}}{5 \cdot 4}$$

e

$$\frac{K_{OR}}{(2D)^2} = \frac{3}{(3+1)(3+2)}$$

Finalmente,

$$M_{OR} = \frac{(3!)^{2/3}}{2(3+1)(3+2)} = 0,082548 \dots$$

Para o caso geral, isto é, um octaedro generalizado, temos que o vol_{og} é dado por

$$\text{vol}_{og} = (2D)^n 2^{n/2} \int \dots \int dt_1 \dots dt_n = (2D)^n 2^{n/2} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(n)} \int_0^1 x^{n-1} dx$$

ou

$$\frac{\text{vol}_{og}}{(2D)^n} = \frac{2^{n/2}}{n!}$$

e

$$\begin{aligned} K_{og} &= n \cdot (2D)^n \cdot 2^{n/2} \cdot 2D^2 \int \dots \int t_1^2 dt_1 \dots dt_n \\ &= n \cdot 2D^2 (2D)^n \cdot 2^{n/2} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(n+2)} \int_0^1 x^{n+1} dx \end{aligned}$$

$$\frac{M_{og}}{(2l)^2} = \frac{n}{(n+1)(n+2)}$$

Portanto,

$$M_{og} = \frac{(n!)^{2/n}}{2(n+1)(n+2)}$$

Note que quando $n \rightarrow \infty$, então M_{og} aproxima-se de $\frac{e^{-2}}{2}$. Para provarmos esta afirmativa precisamos da

Proposição 3.2.2 [24] - Se $a_n > 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

Para calcularmos o limite, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{og}$ será suficiente calcularmos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{2^n (n+1)^n (n+2)^n}}$$

Seja

$$a_n = \frac{(n!)^2}{2^n (n+1)^n (n+2)^n},$$

temos,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1) \cdot (n+1)!}{n! \cdot n!} \cdot \frac{2^n (n+1)^n \cdot (n+2)^n}{2^{n+1} (n+3)^n \cdot (n+2)^{n+1} (n+3)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n+3} \right)^n \cdot \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+6n+6} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{n+3-2}{n+3} \right)^n \cdot \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+6n+6} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n+3}{-2}} \right)^{\frac{n+3}{-2}} \right]^{\left(\frac{-2}{n+3}\right) \cdot n} \cdot \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+6n+6} \right)
\end{aligned}$$

como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{2n}{n+3} = -2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2+6n+6} = 1$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n+3}{-2}} \right)^{\frac{n+3}{-2}} = e,$$

então concluímos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{-2}}{2}$$

Portanto, pela Proposição 3.2.2, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{00} = \frac{e^{-2}}{2}$

Exemplo 3.2.5 - Seja E a esfera de raio ρ no espaço Euclidiano tridimensional, centrada na origem. Suponha que E seja dada por

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq \rho^2. \text{ Então } \left(\frac{x_1}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{x_3}{\rho} \right)^2 \leq 1. \text{ Sejam } \rho^2 t_1 = x_1^2, \\
\rho^2 t_2 = x_2^2, \quad \rho^2 t_3 = x_3^2$$

assim

$$dx_1 = 1/2 \rho t_1^{-1/2} dt_1, \quad dx_2 = 1/2 \rho t_2^{-1/2} dt_2, \quad dx_3 = 1/2 \rho t_3^{-1/2} dt_3$$

Usando a Proposição 3.2.1 obtemos

$$\begin{aligned} \text{vol}_{\mathbb{E}} &= 2^3 \iiint dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= 2^3 2^{-3} \rho^3 \iiint t_1^{-1/2} t_2^{-1/2} t_3^{-1/2} dt_1 dt_2 dt_3 \\ &= \rho^3 \frac{(\Gamma(1/2))^3}{\Gamma(3/2)} \int_0^1 \tau^{1/2} d\tau \end{aligned}$$

ou

$$\frac{\text{vol}_{\mathbb{E}}}{\rho^3} = \frac{\pi^{3/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right)}$$

$$K_{\mathbb{E}} = 3\rho^3 \cdot 2^3 \cdot 2^{-3} \iiint x_1^2 dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$\begin{aligned} &= 3\rho^3 \cdot \rho^2 \iiint t_1^{1/2} t_2^{-1/2} t_3^{-1/2} dt_1 dt_2 dt_3 \\ &= 3\rho^5 \frac{\Gamma(3/2)(\Gamma(1/2))^2}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right)} \int_0^1 \tau^{3/2} d\tau \end{aligned}$$

ou

$$K_E = 3\rho^5 \frac{\Gamma(3/2) \pi}{\left(\frac{3}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right)}$$

O segundo momento normalizado de E será

$$\mathcal{N}_E = \frac{3}{5} \rho^2$$

Finalmente,

$$\mathcal{M}_E = \frac{1}{3} \frac{\mathcal{N}_E}{(\text{vol}_E)^{2/3}} = 0,076967 \dots$$

De uma maneira geral, se E é a esfera de raio ρ no espaço Euclidiano n-dimensional, centrada na origem, temos

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq \rho^2$$
$$\rho^2 t_1 = x_1^2, \quad \rho^2 t_2 = x_2^2, \quad \dots, \quad \rho^2 t_n = x_n^2$$

Usando a Proposição 3.2.1 obtemos as quantidades

$$\frac{\text{vol}_E}{\rho^n} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}, \quad \frac{\mathcal{N}_E}{\rho^2} = \frac{n}{n+2},$$

$$\mathcal{M}_E = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)\right]^{2/n}}{(n+2)\pi}$$

Em [22], foi estabelecido o limitante superior e inferior para \mathcal{M}_E dados por

$$\frac{1}{(n+2)\pi} \Gamma \left[\frac{n}{2} + 1 \right]^{2/n} \leq \mathcal{M}_E \leq \frac{1}{n\pi} \Gamma \left[\frac{n}{2} + 1 \right]$$

e que no limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{M}_E = \frac{1}{2\pi e}$$

Em particular, para $n=4$ temos

$$\mathcal{M}_E = 0,075026 \dots$$

Baseado nestes resultados, Zador [22] mostrou que dentre todos os politopos convexos C_P , a esfera é a que fornece o valor mínimo para a quantidade.

$$\mathcal{M}_{C_P} = (1/n) \frac{\mathcal{M}_{C_P}}{(\text{vol}_{C_P})^{2/n}}$$

O cálculo do segundo momento de uma figura arbitrária torna-se possível quando podemos decompô-la em simplex.

Definição 3.2.3 - Seja σ um simplex arbitrário no espaço Euclideano n -dimensional gerado pelo conjunto $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$. O baricentro de σ denotado por b é dado pela quantidade

$$b = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n v_k$$

Proposição 3.2.2 [9] - Seja σ um simplex arbitrário no espaço Euclidiano n -dimensional com vértices $v_k = (v_{k1}, \dots, v_{kn})$, $0 \leq k \leq n$. Então

1. O centróide de σ está no baricentro

$$\bar{c} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n v_k \quad (3.2.7)$$

dos vértices.

2. O volume de σ é dado por

$$\text{vol}_\sigma = \frac{1}{n!} \det \begin{pmatrix} 1 & v_{01} & \dots & v_{0n} \\ 1 & v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.2.8)$$

3. O segundo momento normalizado de σ em torno da origem é dado pela quantidade

$$\mathcal{K}_\sigma = \frac{n+1}{n+2} \|\bar{c}\|^2 + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^n \|v_k\|^2 \quad (3.2.9)$$

Exemplo 3.2.6 - Seja σ um simplex regular no espaço Euclidiano

n-dimensional. Suponhamos que sua aresta tenha comprimento $2l$. Então pela Proposição 3.2.2, o segundo momento normalizado será dado por

$$\mathcal{N}_\sigma = \frac{n(\sqrt{2} l)^2}{(n+1)(n+2)}$$

O volume de um simplex em função do comprimento de suas arestas [12] é dado por

$$\text{vol}_\sigma = \left[\frac{n+1}{2^n} \right]^{1/2} \cdot \frac{(2l)^n}{n!}$$

Portanto,

$$\mathcal{M}_\sigma = \frac{(n!)^{2/n}}{(n+2) \cdot (n+1) \frac{n+1}{n!}}$$

Em particular, para $n = 1, 2, 3$, temos respectivamente

$$\mathcal{M}_\sigma = \frac{1}{12} \quad ; \quad \mathcal{M}_\sigma = \frac{3^{1/2}}{18} \quad ; \quad \mathcal{M}_\sigma = \frac{3^{2/3}}{20}$$

Seja P um polítopo no espaço Euclidiano n -dimensional. Suponha que existam N_1 células $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \dots, C_{N_1}^{(1)}$ congruentes, N_2 células $C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, \dots, C_{N_2}^{(2)}$ congruentes. Suponhamos ainda que P contenha um ponto v de modo que as pirâmides $vc_1^{(1)}, vc_2^{(1)}, vc_3^{(1)}, \dots$ sejam congruentes e que as pirâmides $vc_1^{(2)}, vc_2^{(2)}, vc_3^{(2)}$ sejam também congruentes. Seja C_j uma célula arbitrária e $p_j \in C_j$ o pé da

perpendicular de v até C_j .

Se denotarmos por $a_j = ||vp_j||$, $\text{vol}_{n-1}(C_j)$ o volume de C_j e $K_{n-1}(C_j)$ o segundo momento não normalizado de P em torno de v , então temos

Proposição 3.2.3 [9]: Seja P o politopo com as considerações supra citadas. O volume e o segundo momento não normalizado do politopo P em torno de v , são dados respectivamente por

$$\text{vol}_P = \sum_j \frac{N_j a_j}{n} \text{vol}_{n-1}(C_j)$$

$$K_P = \sum_j \frac{N_j a_j}{n+2} [a_j^2 \text{vol}_{n-1}(C_j) + K_{n-1}(C_j)]$$

Exemplo 3.2.7 [2] - Considere no espaço Euclideano tridimensional o octaedro truncado, OT Figura 3.2.3, cujos 24 vértices consistem de todas permutações de $(0, \pm \sqrt{2} \ell, \pm 2\sqrt{2} \ell)$. O politopo OT tem $N_1 = 6$ células quadradas e $N_2 = 8$ células hexagonais regulares. Suponha que as arestas tenham comprimento 2ℓ . Então

$$N_1 = 6, \quad N_2 = 8, \quad a_1 = 2\sqrt{2} \ell, \quad a_2 = 2\ell\sqrt{6}, \quad \text{vol}_2(1) = 4\ell^2$$

$$\text{vol}_2(2) = 6\sqrt{3} \ell^2, \quad K_2(1) = \frac{8}{3} \ell^4, \quad K_2(2) = 10\sqrt{3} \ell^4$$

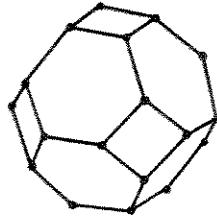


Figura 3.2.3 - Octaedro truncado

Pela Proposição 3.2.3 temos que o vol_{OT} e o segundo momento não normalizado são dados por:

$$\text{vol}_{\text{OT}} = 64 \sqrt{2} t^3$$

$$K_{\text{OT}} = 304 \sqrt{2} t^5$$

respectivamente. Portanto,

$$\mathcal{M}_{\text{OT}} = \frac{19}{4} t^4 \quad ; \quad \mathcal{M}_{\text{OT}} = \frac{19}{(1,92 \cdot 10^2)(2^{1/9})} = 0,078543 \dots$$

Com o objetivo de obter o segundo momento normalizado \mathcal{M}_P , de qualquer politopo regular P , no espaço Euclidiano n -dimensional, em relação ao seu centro, vamos descrever os seguintes passos que serão básicos para a proposição 3.2.4.

Seja P um politopo regular no espaço Euclidiano n -dimensional [6]. Para $0 \leq i \leq n$ considere uma face F_i de P com dimensão i , de modo que $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_n = P$. Seja O_i o centro de F_i , $R_i = ||O_n O_i||$ e $r_i = ||O_{i-1} O_i||$ para $i \geq 1$. Considere

(Figura 3.2.4), um polígono regular de m lados com arestas cujo comprimento $2l$. Seja o triângulo retângulo $O_2 O_1 O_0$, se o comprimento da aresta for $2l$, então

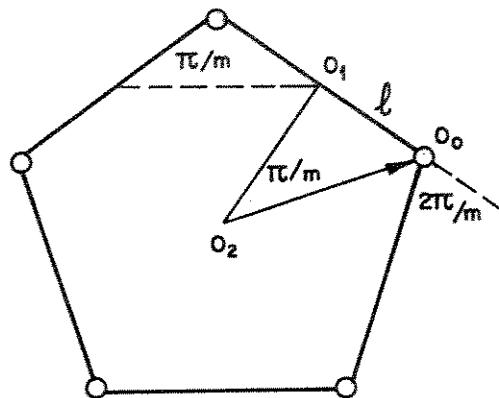


Figura 3.2.4 - Face de dimensão i do politopo P .

$$r_i^2 = R_{i-1}^2 - R_i^2 \quad ; \quad O_0 O_1 = l \quad ; \quad O_0 O_2 = R_0 \quad ; \quad O_1 O_2 = R_1$$

Portanto,

$$R_0 = l \operatorname{cosec} \frac{\pi}{m}, \quad R_1 = l \cot \frac{\pi}{m},$$

e a área do polígono com m lados é dada por

$$A = m l^2 \cot \frac{\pi}{m}.$$

Seja $N_{i,i-1}$ o número de células de F_i cuja dimensão é $(i-1)$. Então, [9], a ordem do grupo de simetria do politopo P e seu volume são respectivamente

$$g = N_{n,n-1} N_{n-1,n-2} \dots N_{2,1} N_{1,0} \quad (3.2.10)$$

$$\text{vol}_P = N_{n,n-1} \dots N_{2,1} N_{1,0} \frac{r_1 r_2 \dots r_n}{n!} \quad (3.2.11)$$

Proposição 3.2.4 [9] - O segundo momento \mathcal{K}_P de qualquer politopo regular P no espaço Euclidiano n-dimensional em relação ao seu centro O_n é dado por

$$\mathcal{K}_P = \frac{2}{(n+1)(n+2)} (R_0^2 + 2R_1^2 + 3R_2^2 + \dots + nR_{n-1}^2) \quad (3.2.12)$$

ou equivalentemente

$$\mathcal{K}_P = \frac{2}{(n+1)(n+2)} (r_1^2 + 3r_2^2 + 6r_3^2 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} r_n^2) \quad (3.2.13)$$

Demonstração [9] - Usando indução finita sobre n, temos para $n=1$,

$$\mathcal{K}_P = \frac{1}{3} R_0^2$$

Pela Proposição 3.2.3, temos

$$K_P = \frac{N_{n,n-1} r_n}{n+2} [r_n^2 \text{vol}_{(n-1)}(P) + K_{(n-1)}(P)]$$

A hipótese de indução e (3.2.11) nos fornece

$$\text{vol}_{(n-1)}(P) = N_{n-1,n-2} \dots N_{2,1} N_{1,0} \frac{r_1 r_2 \dots r_{n-1}}{(n-1)!}$$

$$K_{(n-1)}(P) = \text{vol}_{(n-1)}(P) \cdot \frac{2}{(n+2)} \left[r_1^2 + \dots + \frac{n(n-1)}{2} r_{n-1}^2 \right]$$

Portanto

$$\mathcal{M}_P = \frac{K_P}{\text{vol}} = \frac{n}{n+2} \left[r_n^2 + \frac{2}{n(n+1)} \cdot \left(r_1^2 + \dots + \frac{n(n-1)}{2} r_{n-1}^2 \right) \right]$$

que é uma forma simplificada de (3.2.13)

C. Q. D.

Para politopos regulares, os valores de g , vol_P e R_i estão tabelados em [6].

Exemplo 3.2.8 - considere no espaço tridimensional o cubo C cuja aresta tem comprimento 2ℓ . Seu volume é $(2\ell)^3$, então pela Proposição 3.2.1, temos que

$$\mathcal{M}_C = \frac{2}{(n+1)(n+2)} (R_0^2 + 2R_1^2 + 3R_2^2) = \ell^2$$

Portanto, $\mathcal{M}_C = \frac{1}{12}$.

Exemplo 3.2.9 - Considere P um polígono regular de m -lados cuja aresta tem comprimento 2ℓ . Pela proposição 3.2.4, temos

$$\text{vol}_P = m \ell^2 \cot \frac{\pi}{m}$$

$$\mathcal{M}_P = \frac{1}{6} \left[\ell^2 + 3\ell^2 \cdot \cot \frac{2\pi}{m} \right]$$

Portanto,

$$\mathcal{M}_P = \frac{1}{6m} \left(\operatorname{cosec} \frac{2\pi}{m} + \cot \frac{\pi}{m} \right)$$

Em particular

$$\mathcal{M}_P = \frac{\sqrt{3}}{18}, \quad \text{para } m=3$$

$$\mathcal{M}_P = \frac{1}{12}, \quad \text{para } m=4$$

$$\mathcal{M}_P = \frac{5\sqrt{3}}{108}, \quad \text{para } m=6$$

Nos Exemplos 3.2.10 e 3.2.11 a seguir, para o cálculo do volume (vol_P), segundo momento normalizado (\mathcal{N}_P) e segundo momento por dimensão (\mathcal{M}_P) de um politopo regular P , será necessário a introdução de um parâmetro dado por $\tau = (1+\sqrt{5})/2$, o qual é a raiz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$. As propriedades do parâmetro τ tais como $\tau^2 = \tau + 1$, $\tau^3 = 2\tau + 1$, $\tau^4 = 3\tau + 2, \dots$, foram apresentadas em [32].

Exemplo 3.2.10 - Consideremos no espaço Euclidiano tridimensional os politopos regulares: Icosaedro e Dodecaedro denotados respectivamente por P_I e P_D . De acordo com [6] e usando a Proposição 3.2.4 temos

$$\frac{\operatorname{vol}_{P_I}}{(2D)^3} = \frac{5\tau^2}{6}$$

$$\frac{\mathcal{N}_{P_I}}{(2D)^2} = \frac{3\tau^2}{20}$$

$$\mathcal{M}_{P_I} = \frac{1}{20} \left(-\frac{6\tau}{5} \right)^{2/3} = 0,077818\dots$$

E,

$$\frac{\text{vol}_{P_D}}{(2D)^3} = \frac{\tau^4 \sqrt{5}}{2}$$

$$\mathcal{N}_{P_D} = \tau^2 \frac{(39\tau + 28)}{25}$$

$$\mathcal{M}_{P_D} = \frac{17 + 11\tau}{300} \left(\frac{2}{\tau \sqrt{5}} \right)^{2/3} = 0,078128 \dots$$

Exemplo 3.2.11 - Sejam N_0 o número de vértices, N_1 o número de arestas, N_2 o número de faces e N_3 o número de células. De acordo com [6] existem três politopos regulares no espaço Euclideano 4-dimensional, os quais são denotados por P_{24} , P_{120} , P_{600} e descritos em termos dos N_0 - vértices, N_1 -arestas, N_2 -faces e N_3 -células da seguinte maneira

P_{24}	N_0	N_1	N_2	N_3
	24	96	96	24

P_{120}	N_0	N_1	N_2	N_3
	600	1200	720	120

P_{600}	N_0	N_1	N_2	N_3
	120	720	1200	600

Através destes dados iremos a seguir calcular os volumes, segundo momento normalizado e segundo momento por dimensão respectivamente de P_{24} , P_{120} e P_{600} .

De acordo com [6] temos

$$\text{vol}_{P_{24}} = 2(2D)^4 = 32l^4$$

e pela proposição 3.2.4

$$\mathcal{N}_{P_{24}} = \frac{1}{15} (R_0^2 + 2R_1^2 + 3R_2^2 + 4R_3^2)$$

Os valores de R_0 , R_1 , R_2 , R_3 em função da aresta l são dados por [6]

$$R_0^2 = 4l^2, \quad R_1^2 = 3l^2, \quad R_2^2 = \frac{8}{3}l^2, \quad R_3^2 = 2l^2$$

Portanto,

$$\mathcal{N}_{P_{24}} = \frac{26}{15} l^2$$

E,

$$\mathcal{M}_{P_{24}} = \frac{1}{4} \frac{\mathcal{N}_{P_{24}}}{(\text{Vol}_{P_{24}})^{1/2}} = \frac{13}{120\sqrt{2}} = 0,076603 \dots$$

Para o politopo P_{120} , de acordo com [6] temos

$$\text{vol}_{P_{120}} = 120 \sqrt{5} \tau^8 l^4$$

e pela Proposição 3.2.4

$$\mathcal{H}_{P_{120}} = \frac{1}{15} (R_0^2 + 2R_1^2 + 3R_2^2 + 4R_3^2)$$

Os valores de R_0, R_1, R_2, R_3 em função da aresta l são dados por [6]

$$R_0^2 = 2^3 \cdot \tau^4 \cdot l^2, \quad R_1^2 = 3 \cdot \tau^5 \cdot l^2, \quad R_2^2 = 2^2 \cdot 5^{-1/2} \cdot \tau^7 \cdot l^2, \quad R_3^2 = \tau^8$$

Portanto,

$$\mathcal{H}_{P_{120}} = \frac{2l^2}{15\sqrt{5}}$$

E,

$$\mathcal{H}_{P_{120}} = \frac{13 + 437}{300\sqrt{6 \cdot 5^{1/4}}} = 0,075147 \dots$$

Finalmente, para o politopo P_{600} , de acordo com [6], temos

$$\text{vol}_{P_{600}} = \frac{25}{4} (20^4 \tau^3)$$

e pela proposição 3.2.4

$$\mathcal{H}_{P_{600}} = \frac{1}{15} (R_0^2 + 2R_1^2 + 3R_2^2 + 4R_3^2)$$

Os valores de R_0, R_1, R_2, R_3 , em função da aresta l são dados por [6]

$$R_0^2 = (2\tau)^2 l^2; \quad R_1^2 = 5^{1/2} \tau^3 l^2; \quad R_2^2 = 2^2 \cdot 3^{-1} \cdot \tau^4 l^2; \quad R_3^2 = 2^{-1} \tau^6 \cdot l^2$$

Portanto,

$$\mathcal{M}_{P_{600}} = \frac{4l^2}{15} (5\sqrt{5} + 12)$$

E,

$$\mathcal{M}_{P_{600}} = \frac{1}{150} (4 + 3\tau)^{1/2} = 0,075083 \dots$$

O segundo momento \mathcal{M}_P dos politopos em P em três e quatro dimensões até aqui considerados são comparados nas Tabelas 3.2.1 e 3.2.2

P	\mathcal{M}_P
Tetraedo	0,140042 ...
Cubo	0,083333 ...
Octaedro	0,082548 ...
Octaedro Truncado	0,078543 ...
Dodecaedro	0,078128 ...
Icosaedro	0,077818 ...
Esfera	0,076967 ...

Tabela 3.2.1 - Comparação do segundo momento de politopos em três dimensões.

P	\mathcal{M}_P
Simplex	0,109204 ...
Cubo	0,083333 ...
Octaedro Generalizado	0,081649 ...
P_{24}	0,076603 ...
P_{120}	0,075147 ...
P_{600}	0,075083 ...
Esfera	0,075026 ...

Tabela 3.2.2 - Comparação do segundo momento de politopos em quatro dimensões.

Alguns valores destas tabelas são também fornecidos em [9], porém, sem os cálculos explícitos como aqui apresentados.

3.3 - REGIÃO DE VORONOI DE RETICULADOS GERADO POR UM SISTEMA DE RAÍZES DE UMA ALGEBRA DE LIE.

Nosso objetivo nesta Seção é mostrar um método para obter a região de Voronói de um reticulado gerado por um sistema de raízes. O método baseia-se essencialmente na determinação de um simplex fundamental para o grupo de Weyl do reticulado.

No espaço Euclidiano n -dimensional ($n \leq 8$) as reflexões (através do hiperplano comum tangente ao ponto de contato de quaisquer duas esferas) geram um grupo discreto infinito cuja região fundamental é um simplex. Quando $n = 2, 3, 4, \dots, 8$ os simplex podem ser identificados por grafos com $(n + 1)$ nós, um para cada hiperplano limitante. O ângulo entre dois hiperplanos é indicado no ramo do grafo que liga um par de nós. Se o ângulo entre os hiperplanos é $\pi/3$, os nós estão ligados por um único ramo, se o ângulo é $\pi/4$ os nós estão ligados por um ramo duplo, se o ângulo é π/p , com $p > 4$, os ramos são indicados por p , finalmente se os hiperplanos são perpendiculares, os nós não estarão ligados.

Os grafos da Figura 3.3.1 representam simplex ($n = 2, 3, \dots, 8$) e foram obtidos de cada grafo correspondente da Figura 2.9.3 acrescentando um nó extra.

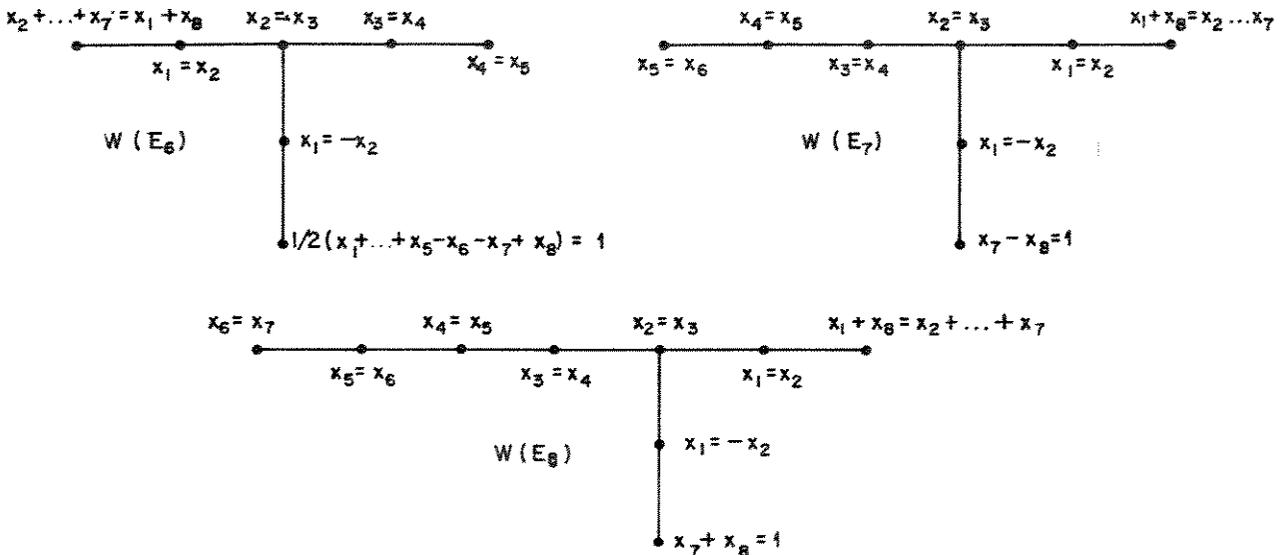
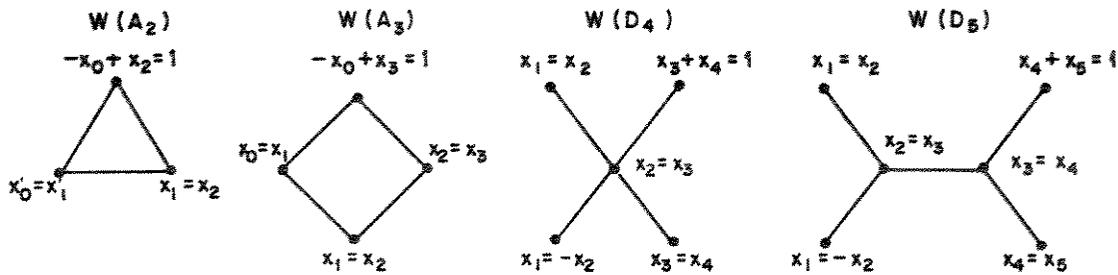


Figura 3.3.1 - Grafos de simplex no espaço \mathbb{R}^n , $n = 2, 3, \dots, 8$.

Quando identificamos cada grafo da Figura 3.3.1 com um simplex, desejamos na verdade usá-los para identificar um simplex fundamental para o grupo de Weyl do reticulado Λ , isto é, um simplex σ fechado do espaço Euclideano n -dimensional cujas imagens sob a ação do grupo de Weyl são distintas e cobrem o todo espaço \mathbb{R}^n . Em outras palavras, se R é um elemento do grupo $W(\Lambda)$ de Weyl, então

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{R \in W(\Lambda)} R(\sigma) \tag{3.3.1}$$

onde cada ponto $x = (x_1, \dots, x_n)$ do espaço n -dimensional pertence a uma e somente uma imagem $R(\sigma)$ (exceto possivelmente para as fronteiras de $R(\sigma)$, um conjunto de medida nula).

Uma maneira natural de interpretação dos grafos da Figura 3.3.1 é indicar os nós como vértices de um simplex fundamental. Assim, cada nó estará sendo associado às equações dos correspondentes hiperplanos. Os $(n + 1)$ hiperplanos associados aos nós do grafo, (exceto aquele que corresponde ao nó extra) passam pela origem.

Lema 3.3.1 [9] - A origem é o ponto do reticulado Λ mais próximo de qualquer ponto interior ao simplex fundamental.

Demonstração [9] - Seja $x \in \Lambda$ o ponto mais próximo de $u \in \sigma$. Se $x \neq 0$ então $x \notin \sigma$ neste caso x e u estão em lados opostos em relação ao hiperplano de Weyl (Figura 3.3.2). Seja $R(x)$ a reflexão de x em relação ao hiperplano P e p o pé da perpendicular de u em relação à reta $x'x$.

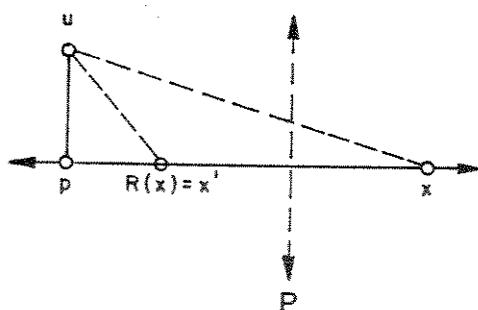


Figura 3.3.2 - Hiperplano de Weyl

Então

$$d^2(x', u) = d^2(u, p) + d^2(p, x') < d^2(u, p) + d^2(p, x) = d^2(u, x)$$

ou

$$d^2(x', u) < d^2(u, x)$$

isto mostra que u está mais próximo de x' do que de x . Isto é uma contradição, pois por hipótese tínhamos escolhido $x \in \Lambda$, o ponto mais próximo de $u \in \sigma$. Portanto, $x = 0$. C. Q. D.

Proposição 3.3.1 [9] - Seja Λ um reticulado gerado por um sistema de raízes de uma álgebra de Lie. A região de Voronói em torno da origem é a união das imagens do simplex fundamental através do grupo de Weyl $W(\Lambda)$.

Demonstração [9] - Seja u um ponto qualquer da região de Voronói em torno da origem. De (3.3.1) $u \in R(\sigma)$ para algum $R \in W(\Lambda)$. Suponhamos que u seja um ponto interior de $R(\sigma)$. Usando o Lema 3.3.1, o ponto do reticulado mais próximo de u é $R(0)$. Portanto, $R(0) = 0$, $R \in W(\Lambda)$.
E,

$$u \in R(\sigma)$$

$$R \in W(\Lambda)$$

C. Q. D.

A identificação dos diagramas da Figura 3.3.1 com um simplex fundamental σ para o grupo de Weyl $W(\Lambda)$ possibilita determinar os vértices v_0, v_1, \dots, v_n . Para isto basta omitir um hiperplano e calcular a interseção entre os n hiperplanos restantes.

Exemplo 3.3.1 - A região de Voronói para A_n . Observando a Figura 3.3.1, temos para os vértices do simplex fundamental A_1

$$v_0 = (0,0)$$

$$v_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

No caso $n=2$, a partir da Figura 3.3.1, vamos exibir as equações:

$$(a) \begin{cases} x_0 - x_1 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_0 + x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_0 = 1 \\ x_0 + x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x_0 - x_1 = 0 \\ x_2 - x_1 = 1 \\ x_0 + x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema (a) obtém-se $x_0 = x_1 = x_2 = 0$. Estes são valores das coordenadas do vértice v_0 , isto é, $v_0 = (0,0,0)$. O sistema (b) fornece os valores para as coordenadas do vértice v_1 , isto é, $x_0 = -2/3$, $x_1 = x_2 = 1/3$, portanto, $v_1 = (-2/3, 1/3, 1/3)$. As coordenadas do vértice v_2 são obtidas resolvendo o sistema (c), portanto para as coordenadas de v_2 temos, $x_0 = x_1 = -1/3$ e $x_2 = 2/3$, assim $v_2 = (-1/3, -1/3, 2/3)$. Dessa maneira os vértices do simplex fundamental A_2 são obtidos.

Seguindo os mesmos passos descritos acima, obteremos as coordenadas dos vértices do simplex fundamental A_3 , isto é, $v_0 = (0,0,0,0)$, $v_1 = (-3/4, 1/4, 1/4, 1/4)$, $v_2 = (-1/2, -1/2, 1/2, 1/2)$, $v_3 = (-1/4, -1/4, -1/4, 3/4)$.

De uma maneira geral podemos escrever o k -ésimo vértice sob

a forma

$$v_k = \left[\left(-\frac{j}{n+1} \right)^k, \left(\frac{k}{n+1} \right)^j \right] \quad (0 \leq k \leq n)$$

onde $j + k = n + 1$.

O quadrado do comprimento de v_k será dado por:

$$\begin{aligned} ||v_k||^2 &= \langle v_k, v_k \rangle = \left\langle \left[-\frac{j}{n+1}, -\frac{j}{n+1}, \dots, -\frac{j}{n+1}, \frac{k}{n+1}, \dots, \frac{k}{n+1} \right], \right. \\ &\quad \left. \left[-\frac{j}{n+1}, -\frac{j}{n+1}, \dots, -\frac{j}{n+1}, \frac{k}{n+1}, \dots, \frac{k}{n+1} \right] \right\rangle \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} (k \cdot j^2 + j \cdot k^2) . \\ &= \frac{j \cdot k}{(n+1)^2} (j+k) \end{aligned}$$

como $j + k = n + 1$, então $||v_k||^2 = \frac{j \cdot k}{n+1}$

O baricentro do simplex σ , (3.2.7) é dado por:

$$\bar{c} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n v_k = \left[-\frac{n}{2n+2}, -\frac{n-2}{2n+2}, \dots, \frac{n-2}{2n+2}, \frac{n}{2n+2} \right]$$

De (3.2.9), o segundo momento normalizado de σ em torno da origem será igual a

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\sigma &= \frac{n+1}{n+2} ||c||^2 + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^n ||v_k||^2 \\ &= \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n(n+2)}{12(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n \cdot (n+2)}{6} \end{aligned}$$

$$= \frac{n}{12} + \frac{n}{6(n+1)}$$

A ordem do grupo de Weyl de A_n foi apresentada na Seção 2.7, sendo dada por

$$|W(A_n)| = (n+1)!$$

O determinante da matriz de Cartan (Seção 2.8) da álgebra de Lie A_n é igual a $n+1$. Seja $V(O)$ a região de Voronói em torno da origem, então pela Proposição 3.3.1 $V(O)$ é a união de $(n+1)!$ cópias do simplex σ , logo

$$\mathcal{N}_{V(O)} = \frac{K_{V(O)}}{\text{vol}_{V(O)}} = \frac{|W(A_n)| \cdot K_\sigma}{|W(A_n)| \cdot \text{vol}_\sigma} = \frac{K_\sigma}{\text{vol}_\sigma} = \mathcal{N}_\sigma$$

Pela proposição 1.5.1, $\text{vol}_{V(O)} = \sqrt{(n+1)!}$. Conseqüentemente, o segundo momento por dimensão de A_n será dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{A_n} &= \frac{1}{n} \cdot \frac{\mathcal{N}_{V(O)}}{(\text{vol}_{V(O)})^{2/n}} \\ &= \frac{1}{(n+1)^{1/n}} \cdot \left[\frac{1}{12} + \frac{1}{6(n+1)} \right], \end{aligned}$$

E,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{M}_{A_n} = \frac{1}{12}.$$

Observe que o reticulado A_1 consiste dos pontos com

coordenadas inteiras sobre a reta real, e $\mathcal{M}_{A_1} = \frac{1}{12}$. O reticulado A_2 é o reticulado hexagonal, o simplex fundamental neste caso é um triângulo equilátero e a região de Voronói um hexágono. Para este reticulado temos,

$$\mathcal{M}_{A_2} = \frac{5\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{1}{12} \cong 0,96 \cdot \mathcal{M}_{A_1}$$

Exemplo 3.3.2 - A região de voronói para D_n ($n \geq 4$), E_6 , E_7 e E_8 . Os vértices do simplex fundamental para cada reticulado, são obtidos de maneira análoga ao Exemplo 3.3.1. Usando (3.3.7), para o cálculo do baricentro de D_n ($n \geq 4$) temos

$$\bar{c} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n v_k = \frac{1}{2(n+1)} (0, 2, 3, \dots, n-2, n-1, n+1).$$

A ordem do grupo de Weyl de D_n , (seção 2.7) é dada por

$$|W(D_n)| = 2^{n-1} n!.$$

O determinante da matriz de Cartan (seção 2.8) da álgebra de Lie D_n é igual a 4. Se $V(0)$ é a região de Voronói, e o volume, o segundo momento normalizado são dados respectivamente por

$$\text{vol}_{V(0)} = \sqrt{4} = 2$$

$$\mathcal{K}_{V(0)} = \frac{6 + n(n+1)}{12(n+1)}$$

Portanto o segundo momento por dimensão do reticulado D_n é dado por

$$\mathcal{M}_{D_n} = \frac{1}{(2)^{2/n}} \left[\frac{1}{12} + \frac{1}{2n(n+1)} \right]$$

Para $n = 4$, a região de Voronói [6] é o politipo P_{24} do Exemplo 3.2.11.

Em particular $\mathcal{M}_{D_4} = 0,076603\dots$

O reticulado E_6 , tem seu baricentro dado por

$$\bar{c} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n v_k = \frac{1}{42} (0, 3, 5, 8, 14, -14, -14, 14).$$

A ordem do grupo de Weyl de E_6 é dada [6] por $|W(E_6)| = 51840$. O determinante da matriz de Cartan é igual a 3. Se $V(O)$ é a região de Voronói em torno da origem, o volume e o segundo momento normalizado são dados respectivamente por

$$\text{vol}_{V(O)} = \sqrt{3} \quad \mathcal{M}_{V(O)} = \frac{15}{28}.$$

Portanto,

$$\mathcal{M}_{E_6} = \frac{5}{56 (3)^{1/6}} = 0,074346\dots$$

A região de Voronói para E_6 é descrita em [6].

O reticulado E_7 , tem seu baricentro dado por

$$\bar{c} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n v_k = -\frac{1}{96} (1, 5, 8, 12, 18, 30, -42, 42)$$

A ordem do grupo de Weyl de E_7 é dada [6] por $|W(E_7)| = 2903040$. O determinante da matriz de Cartan é igual a 2. Se $V(O)$ é a região de Voronói em torno da origem, o volume e o segundo momento normalizado são dados respectivamente por

$$\text{vol}_{V(O)} = \sqrt{2} \quad \mathcal{M}_{V(O)} = \frac{163}{288}.$$

Portanto,

$$\mathcal{M}_{E_7} = \frac{163}{2016 (2)^{1/7}} = 0,073230\dots$$

A região Voronói para E_7 , é descrita em [6].

Finamente, o baricentro do reticulado E_8 , é dado por

$$\bar{c} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n v_k = \frac{1}{1080} (5, 35, 55, 79, 109, 149, 209,$$

751).

A ordem do grupo de Weyl de E_8 é dada [6] por $|W(E_8)| = 696729600$. O determinante da matriz de Cartan é igual a 1. Se $V(0)$ é a região de Voronói em torno da origem, então o volume e o segundo momento normalizado são dados respectivamente por

$$\text{vol}_{V(0)} = 1 \quad \mathcal{N}_{V(0)} = \frac{929}{1620}.$$

Portanto,

$$\mathcal{M}_{E_8} = \frac{929}{12960} = 0,071682\dots$$

A região de Voronói é apresentada em [6].

A Tabela 3.3.1 mostra os valores correspondentes ao volume, segundo momento normalizado, segundo momento por dimensão, e a ordem do grupo de Weyl das álgebras de Lie A_1 , A_2 , D_4 , E_6 , E_7 e E_8 .

Algebra de Lie.	$\text{vol}_{\mathfrak{V}(\mathfrak{o})}$	$\mathcal{N}_{\mathfrak{V}(\mathfrak{o})}$	$\mathcal{M}_{\mathfrak{V}(\mathfrak{o})}$	$ \text{WC.} $
A_1	$\sqrt{2}$	0,1667...	0,0833	2
A_2	$\sqrt{3}$	0,2778...	0,0802	6
D_4	2	0,4333...	0,0766	192
E_6	$\sqrt{3}$	0,5357...	0,0743	51840
E_7	$\sqrt{2}$	0,5660...	0,0732	2903040
E_8	1	0,5735...	0,0717	696729600

Tabela 3.3.1 - Valores correspondentes ao volume ($\text{vol}_{\mathfrak{V}(\mathfrak{o})}$) segundo momento normalizado ($\mathcal{N}_{\mathfrak{V}(\mathfrak{o})}$), segundo momento por dimensão ($\mathcal{M}_{\mathfrak{V}(\mathfrak{o})}$) e ordem do grupo de Weyl das álgebras de Lie A_1 , A_2 , D_4 , E_6 , E_7 e E_8 .

O próximo passo na evolução dos capítulos será mostrar a viabilidade das estruturas algébricas abordadas até aqui, em problemas relativo a codificação de fonte.

A função taxa de distorção objeto de estudo do Capítulo 4 a seguir, será o indicativo para esta viabilidade.

CAPÍTULO 4

A FUNÇÃO TAXA DE DISTORÇÃO

4.1 - PRELIMINARES.

O teorema de codificação de canal [10] estabelece que uma fonte com taxa R transmitirá informações de maneira confiável através de qualquer canal com capacidade C , se $C > R$. Reciprocamente, não é possível recuperar completamente uma informação enviada por uma fonte quando $C < R$.

O teorema da codificação de fonte estabelece a existência de uma função entre os símbolos da fonte e as palavras código tal que se fixarmos uma distorção D , então serão necessários $R(D)$ bits (por símbolos da fonte) para reproduzir uma mensagem com distorção D . Portanto, a taxa real deve obedecer à condição

$$R(D) \leq R$$

quando fixamos uma fidelidade D .

A função $R(D)$ é denominada função taxa de distorção.

Com o objetivo de relacionar os parâmetros C e $R(D)$ e o conceito de informação mútua, considere S e U seqüências relativas respectivamente à entrada do codificador e saída do decodificador. Sejam A e B seqüências relativas, respectivamente, à entrada e saída do canal. A informação por amostra transmitida para o destino é dada pela informação média mútua $I(S;U)$, que é uma medida da dependência estatística entre S e U . A distorção D e a informação $I(S;U)$ dependem do tipo de codificação da fonte. Existe evidentemente um mínimo de $I(S;U)$ o qual é necessário para uma reconstrução no destino se a distorção média não exceder o limite superior D . Este valor mínimo de $I(S;U)$ é definido como sendo $R(D)$. A capacidade C (do canal) por

outro lado, está relacionada com a informação média mútua $I(A;B)$ por amostra que caracteriza tanto as entradas estatísticas quanto as transformações de entradas-saídas do canal descritos por probabilidades condicionais apropriadas.

Observe que o teorema de codificação do canal junto com o teorema de codificação da fonte leva-nos ao teorema da transmissão de informação. Formalmente, temos

Teorema 4.1.1 [17] - Seja C a capacidade do canal . Se $R(D) \leq C$, então existirá transmissão confiável com fidelidade D .

Este teorema garante que a reconstrução de mensagens com fidelidade D é também possível após a transmissão através de qualquer canal com ruído, se a capacidade C do canal for maior do que $R(D)$.

De uma maneira geral, observe que existe um compromisso entre a taxa de informação fornecida pela saída de uma fonte e a fidelidade com que desejamos reconstruí-la.

Através da ordenação dos dados gerados por uma fonte, de acordo com sua importância, e eliminando informações irrelevantes, a priori, é possível, em geral manter uma distorção mínima. Os métodos usados para selecionar informações significantes da saída de uma fonte e eliminar informações irrelevantes são denominados algoritmos de compressão de dados. Do ponto de vista da teoria de informação, a disciplina teórica que se dedica ao estudo da compressão de dados é denominada teoria da taxa de distorção [18].

A curva da Figura 4.1.1 mostra o compromisso existente entre taxa e distorção.

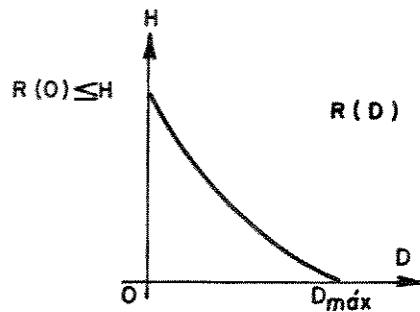


Figura 4.1.1 - Curva típica para taxa de distorção.

O número $R(0)$ sobre a curva é finito para uma fonte discreta; este valor nos fornece a taxa mínima necessária para reprodução exata ($D=0$) da saída da fonte. Observe que o número $R(0)$ é a entropia $H(S)$ de uma fonte discreta. Quando a fonte é analógica, a entropia $H(S)$ é infinita, refletindo assim no fato de que cada amostra da fonte tem um número infinito de possíveis valores. Outra interpretação é que $R(0)$ (taxa de informação necessária para uma reprodução exata da saída de uma fonte) é infinita. Dessa maneira a curva da Figura 4.1.1 pode ser interpretada da seguinte maneira: seja R a taxa de saída de uma fonte. Se $R > H$, então não haverá distorção. Quando R decresce de H para zero, a distorção cresce de zero até o valor D_{\max} , associado à melhor estimativa que podemos fazer na ausência total de informação da saída de uma fonte.

O objetivo deste Capítulo será estudar o problema de reconstruir a saída de uma fonte sujeita a um critério de fidelidade pré-estabelecido. Em outras palavras, o propósito do nosso estudo será determinar o número mínimo de bits necessários para codificar a saída de uma fonte, de modo que ela possa ser reconstruída, satisfazendo um

critério de fidelidade pré-estabelecido.

4.2 - A FUNÇÃO TAXA DE DISTORÇÃO PARA FONTE DISCRETA SEM MEMÓRIA.

Nesta Seção estudaremos o problema de codificação de uma fonte discreta sem memória, sujeita à um critério de fidelidade.

Na teoria de informação, é considerado em geral um conjunto finito

$$S = \{a_1, \dots, a_q\}$$

como o alfabeto e seus elementos, como símbolos do alfabeto. Quando o alfabeto possui q símbolos distintos diremos que ele tem cardinalidade q .

Considere uma fonte discreta sem memória com alfabeto

$$S = \{a_1, \dots, a_q\}$$

e $P(a_1), \dots, P(a_q)$ as probabilidades associadas aos símbolos do alfabeto. Suponha que a cada unidade de tempo a fonte emite um símbolo $s \in S$ de acordo com as probabilidades associadas e independente de qualquer saída passada ou futura.

O alfabeto do usuário será denotado por

$$U = \{b_1, \dots, b_p\}$$

Observe que os alfabetos S e U são distintos quer pela

natureza dos símbolos que os constituem quer pela cardinalidade de ambos.

Com o objetivo de quantificar o compromisso taxa-distorção, necessitamos de uma regra que especifique a distorção entre o símbolo $s \in S$ da fonte e sua representação $x \in U$ no destino.

Para nossos propósitos, vamos admitir uma medida de distorção

$$\begin{aligned} \mu : S \times U &\longrightarrow [0, \infty) && (4.2.1) \\ (s, x) &\longmapsto \mu(s, x) \end{aligned}$$

a qual resulta da fonte ter emitido o símbolo $s \in S$, e o sistema ter liberado $x \in U$ para o usuário. Nosso estudo será restrito a medidas de distorção do tipo finito, isto significa que existe μ_0 , tal que

$$0 \leq \mu(s, x) \leq \mu_0 < \infty \quad (4.2.2)$$

para todo $s \in S$ e $x \in U$.

Na codificação de uma fonte usando códigos de blocos, uma seqüência $s = (s_1, \dots, s_N) \in S_N$ emitida pela fonte será representada no usuário por

$$x = (x_1, \dots, x_N) \in U_N.$$

Definição 4.2.1 - A distorção entre $s = (s_1, \dots, s_N)$ e $x = (x_1, \dots, x_N)$ é dada pela quantidade

$$\mu_N(s, x) = N^{-1} \sum_{j=1}^N \mu(s_j, x_j) \quad (4.2.3)$$

Em geral na codificação de uma fonte usando códigos de bloco tem-se

$$S = \{a_1, \dots, a_q\} \quad \text{alfabeto da fonte}$$

$$\mathcal{E} = \{x_1, \dots, x_k\} \quad \text{palavras código}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S \longrightarrow \mathcal{E} \\ s_i \longmapsto x_i = (x_{i_1}, \dots, x_{i_N}) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{função que associa símbolos} \\ \text{da fonte e palavra código.} \end{array}$$

Sem perda de generalidades, o conjunto \mathcal{E} será denominado um código de bloco com k palavras código e toda sequência $x_i \in \mathcal{E}$ será denominada uma palavra código de comprimento N .

Em nosso contexto, o código será usado para codificar uma sequência $s = (s_1, \dots, s_N)$ da fonte com o seguinte critério: selecionamos a palavra código $x \in \mathcal{E}$ tal que

$$\mu(s|\mathcal{E}) = \min_{x \in \mathcal{E}} \mu_N(s, x), \quad (4.2.4)$$

em outras palavras, para codificarmos uma sequência s da fonte usando o código \mathcal{E} , devemos escolher a palavra código $x \in \mathcal{E}$ que minimiza a distorção $\mu_N(s, x)$ dada em (4.2.3).

Definição 4.2.2 - Considere uma fonte discreta sem memória. Seja s uma seqüência da fonte e \mathcal{C} um código. A distorção obtida usando o código \mathcal{C} é dada por

$$\mu(\mathcal{C}) = \sum_s P_N(s) \mu(s|\mathcal{C}) \quad (4.2.5)$$

onde

$$P_N(s) = \prod_{j=1}^N P(s_j)$$

O processo de codificação de fonte, usando códigos de blocos e a descrição da minimização da distorção dada por (4.2.5) será melhor compreendida observando na Figura 4.2.1 as seguintes etapas: quando uma seqüência s da fonte é observada pelo codificador da fonte, o codificador escolhe uma palavra código de acordo com a regra de minimização em (4.2.4)

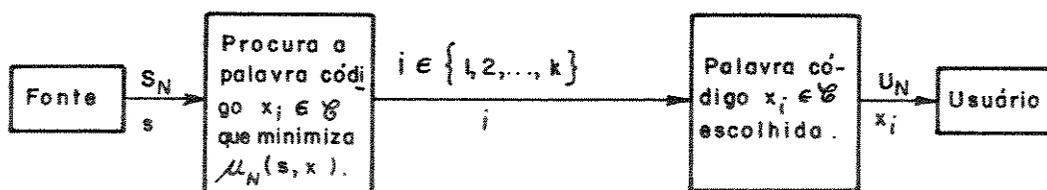


Figura 4.2.1 - Codificação de fonte usando código de bloco

e transmite através do canal o índice relativo à palavra código escolhida. O decodificador da fonte por sua vez tem a tarefa de escolher a palavra código correspondente ao índice que foi transmitido e apresentá-lo ao usuário.

Observe que para cada seqüência $s = (s_1, \dots, s_N)$ da fonte, um dos k índices é transmitido através do canal, portanto a taxa exigida será

$$R = N^{-1} \ln k \quad \text{nats/símbolos da fonte}$$

Exemplo 4.2.1 - Seja $S = U = \{0,1\}$, suponha que

$$\begin{aligned} \mu(0,0) &= \mu(1,1) = 0 \\ \mu(1,0) &= q, \quad \mu(0,1) = p \end{aligned}$$

Então, de (4.2.3) temos que

$$\mu_3(010,101) = \frac{1}{3} (2p + q)$$

Exemplo 4.2.2 - Considere os alfabetos S e U com a mesma cardinalidade. A função

$$\mu : S \times U \rightarrow [0,1]$$

definida por

$$\mu(s_i, x_j) = \mu(i, j) = \begin{cases} 0, & i=j \\ 1, & i \neq j \end{cases} \quad 1 \leq j \leq N$$

é uma medida de distorção que pode ser usada quando o interesse está na reprodução exata dos símbolos da fonte e que é considerado grave qualquer tipo de erro.

Exemplo 4.2.3 - Suponha que os alfabetos S e U possuam a mesma cardinalidade. A função definida por

$$\mu(s_i, x_j) = \mu(i, j) = (i-j)^2, \quad 1 \leq i, j \leq N$$

é uma medida de distorção que pode ser usada de modo apropriado quando os símbolos da fonte são amplitudes.

Exemplo 4.2.4 - A função definida por

$$\mu(s_i, x_j) = \mu(i, j) = 1 - \delta(i, j) = \begin{cases} 0, & i=j \\ 1, & i \neq j \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq N$$

é uma medida de distorção a qual está exibida na Figura 4.2.2. Indicamos sobre as linhas da Figura 4.2.2 os valores de distorção $\mu(i, j)$ onde foi adotada a medida de distorção como uma frequência de erros.

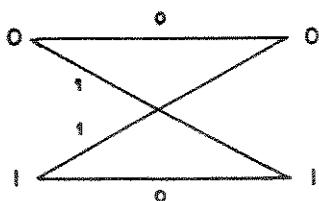


Figura 4.2.2 - Medida de distorção definida por um critério de frequência de erros.

No desenvolvimento do nosso estudo adotaremos o seguinte critério: o código \mathcal{C} será denominado um código de comprimento N com taxa $R = N^{-1} \log_n K$.

Objetivando o estabelecimento da taxa ($R = N^{-1} \log_n K$) mínima possível para uma distorção D fixa, iremos definir vários parâmetros que serão utilizados como ferramentas na obtenção da distorção média quando usamos o código \mathcal{C} .

Considere uma distribuição de probabilidade condicional arbitrária

$$Q : S \times U \longrightarrow [0,1]$$

$$(s, x) \longmapsto Q(x|s)$$

Seja

$$Q_* = \left\{ Q(x|s) \mid x \in U, s \in S \right\}$$

uma família de distribuições arbitrárias, onde $s = (s_1, \dots, s_N) \in S_N$, e $x = (x_1, \dots, x_N) \in U_N$ são seqüências arbitrárias condicionalmente independentes tal que

$$Q_N(x|s) = \prod_{j=1}^N Q(x_j|s_j) \quad (4.2.6)$$

As probabilidades marginais associadas são definidas por

$$Q_N(x) = \sum_S Q_N(x|s) P_N(s)$$

$$= \prod_{j=1}^N Q(x_j) \quad (4.2.7)$$

onde

$$Q(x) = \sum_s Q(x|s) P(s)$$

O teorema de Bayes nos fornece as probabilidades condicionais

$$\begin{aligned} P_N(s|x) &= \frac{Q_N(x|s) P_N(s)}{Q_N(x)} \\ &= \prod_{j=1}^N P(s_j|x_j) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

onde

$$P(s|x) = \frac{Q(x|s) P(s)}{P(x)}$$

As seguintes condições

$$(i) \quad \sum_x Q_N(x|s) = 1$$

$$(ii) \quad \mu(\mathcal{E}) = \sum_s P_N(s) \mu(s|\mathcal{E})$$

leva-nos à quantidade

$$\mu(\mathcal{E}) = \sum_s \sum_x P_N(s) Q_N(x|s) \mu(s|\mathcal{E})$$

onde x é, neste caso, uma variável qualquer.

Com o objetivo de determinar um limite superior para $\mu(\mathcal{E})$, considere as duas regiões disjuntas

$$F(s, x; \mathcal{E}) = \begin{cases} 0, & \mu_N(s, x) \geq \mu(s|\mathcal{E}) \\ 1, & \mu_N(s, x) < \mu(s|\mathcal{E}) \end{cases} \quad (4.2.9)$$

usando a identidade

$$1 = (1-F) + F,$$

temos

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{E}) &= \sum_{\mathcal{E}} \sum_{\mathcal{X}} P_N(s) Q_N(x|s) \mu(s|\mathcal{E}) [1-F(s, x; \mathcal{E})] \\ &+ \sum_{\mathcal{E}} \sum_{\mathcal{X}} P_N(s) Q_N(x|s) \mu(s|\mathcal{E}) F(s, x; \mathcal{E}) \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

De (4.2.10) e (4.2.2) obtêm-se respectivamente

$$\mu(s|\mathcal{E}) = [1-F(s, x; \mathcal{E})] \leq \mu_N(s, x) \quad (4.2.11)$$

$$\mu(s|\mathcal{E}) = \min_{x \in \mathcal{E}} \mu_N(s, x) \leq \mu_0 \quad (4.2.12)$$

Substituindo estes limitantes em (4.2.10) temos que

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{E}) &\leq \sum_{\mathcal{E}} \sum_{\mathcal{X}} P_N(s) Q_N(x|s) \mu_N(s|x) + \\ &+ \mu_0 \sum_{\mathcal{E}} \sum_{\mathcal{X}} P_N(s) Q_N(x|s) F(s, x; \mathcal{E}) \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

onde

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{s}} \sum_{\mathbf{x}} P_N(\mathbf{s}) Q_N(\mathbf{x}|\mathbf{s}) \mu_N(\mathbf{s}|\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{s}} \sum_{\mathbf{x}} P_N(\mathbf{x}) Q_N(\mathbf{x}|\mathbf{s}) N^{-1} \sum_{j=1}^N \mu(\mathbf{s}_j, \mathbf{x}_j) \\
&= N^{-1} \sum_{j=1}^N \sum_{\mathbf{s}_j} \sum_{\mathbf{x}_j} P(\mathbf{s}_j) Q(\mathbf{x}_j|\mathbf{s}_j) \mu(\mathbf{s}_j, \mathbf{x}_j) \\
&= \sum_{\mathbf{s}} \sum_{\mathbf{x}} P(\mathbf{s}) Q(\mathbf{x}|\mathbf{s}) \mu(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \\
&= D(Q_{\mathbf{x}})
\end{aligned}$$

Seja D uma distorção e considere uma família de distribuições condicionais dada por

$$\mathcal{F}_D = \left\{ Q(\mathbf{x}|\mathbf{s}) \mid D(Q_{\mathbf{x}}) \leq D \right\}$$

Na Proposição 4.2.1 usaremos as seguintes definições

$$(i) \quad I(Q_{\mathbf{x}}) = \sum_{\mathbf{s}} \sum_{\mathbf{x}} P(\mathbf{s}) Q(\mathbf{x}|\mathbf{s}) \ln \frac{Q(\mathbf{x}|\mathbf{s})}{Q(\mathbf{x})}$$

$$(ii) \quad E_0(\rho, Q_{\mathbf{x}}) = -\ln \sum_{\mathbf{s}} \left[\sum_{\mathbf{x}} P(\mathbf{x}) Q(\mathbf{s}|\mathbf{x})^{1/(1+\rho)} \right]^{1+\rho} \quad (-1 \leq \rho \leq 0)$$

$$(iii) \quad E(R; \rho, Q_{\mathbf{x}}) = -\rho R + E_0(\rho, Q_{\mathbf{x}}) ; \quad (R = N^{-1} \ln K)$$

$$(iv) \quad ECR, D) = \max_{Q \in \mathcal{F}_D} \max_{-1 \leq \rho \leq 0} ECR; \rho, Q_{\mathbf{x}}$$

$$(v) \quad RCD) = \min_{Q_* \in \mathcal{F}_D} I(Q_*)$$

Proposição 4.2.1 - [25] - Se fixarmos a taxa R para qualquer bloco de comprimento N , existe um código de bloco \mathcal{C} com distorção $\mu(\mathcal{C})$ tal que

$$\mu(\mathcal{C}) \leq D + \mu_0 \exp(-N E(R, D))$$

onde $E(R, D) > 0$ para $R > RCD)$.

Demonstração: A média sobre um espaço de probabilidade relativa ao código \mathcal{C} será denotada por uma barra superior $\overline{(\cdot)}$.

Seja $Q_*' \in \mathcal{F}_D$ tal que a igualdade

$$E(R, D) = \max_{Q_*' \in \mathcal{F}_D} \max_{-1 \leq \rho \leq 0} E(R; \rho, Q_*')$$

verifica-se. Então

$$\begin{aligned} \overline{\mu(\mathcal{C})} &\leq D I(Q_*') + \mu_0 \overline{\sum_s P_N(s) \sum_x Q_N(x|s) F(s, x; \mathcal{C})} \\ &\leq \exp[-N E(R; \rho, Q_*')]. \end{aligned}$$

Como

$$\overline{\mu(\mathcal{C})} \leq D I(Q_*') + \mu_0 \exp(-N [\max_{-1 \leq \rho \leq 0} E(R; \rho, Q_*')])$$

Então

$$\overline{\mu(\mathcal{C})} \leq D I(Q_*') + \mu_0 \exp(-N [E(R, D)])$$

onde

$$E(R, D) > 0 \quad \text{para} \quad R > I(Q_*')$$

Usando o fato de $Q_*' \in \mathcal{F}_D$ a desigualdade $D(Q_*') \leq D$ torna-se verdadeira. Como para todo $Q_* \in \mathcal{F}_D$ e $R > I(Q_*)$ temos que

$$E(R, D) \geq \max_{-1 \leq \rho \leq 0} E(R; \rho, Q_*') > 0$$

então

$$E(R, D) > 0 \quad \text{e} \quad R > R(D) = \min_{Q_* \in \mathcal{F}_D} I(Q_*).$$

Portanto,

$$\overline{\mu(\mathcal{C})} \leq D + \exp(-N E(R, D))$$

onde

$$E(R, D) > 0 \quad \text{para} \quad R > R(D) \quad \text{C. Q. D.}$$

A proposição 4.2.1 garante que quando o comprimento do bloco cresce, podemos encontrar um código \mathcal{C} com qualquer taxa $R > R(D)$, cuja distorção $\overline{\mu(\mathcal{C})}$ está arbitrariamente próxima à D .

Proposição 4.2.2, [25] - Para qualquer par codificador-decodificador, é impossível atingirmos uma distorção menor ou igual a D , quando a taxa R satisfaz à condição $R < R(D)$.

Demonstração: Todo par codificador-decodificador define uma função das seqüências da fonte para as seqüências do usuário. Considere uma

função de S_N para U_N , onde N é um inteiro positivo arbitrário. Seja K o número de seqüências distintas em U_N que são imagens de seqüências S_N . Defina a distribuição condicional

$$Q_N(x|s) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é imagem de } s \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.2.14)$$

e considere $Q^{(j)}(x|s)$ a distribuição condicional sobre os j -ésimos termos das seqüências.

Vamos também definir a probabilidade condicional

$$Q^0(x|s) = N^{-1} \sum_{j=1}^N Q^{(j)}(x|s) \quad (4.2.15)$$

Suponha que a função entre as seqüências da fonte e usuário forneça uma distorção menor ou igual à D . Se $x(s)$ é a imagem de s , então

$$\begin{aligned} D(Q_{\mathcal{X}^N}^0) &= \sum_{\mathcal{S}} \sum_{\mathcal{X}} P_N(s) Q_N(x|s) \mu_N(s|x) \\ &= \sum_{\mathcal{S}} Q_N(s) \mu_N(s, x(s)) \leq D \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Usando a definição

$$\mu_N(s, x) = N^{-1} \sum_{j=1}^N \mu(s_j, x_j),$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
D(Q_{*N}) &= \sum_s \sum_x P_N(s) Q_N(x|s) N^{-1} \sum_{j=1}^N \mu(s_j, x_j) \\
&= N^{-1} \sum_{j=1}^N \sum_s \sum_x P_N(s) Q_N(x|s) \mu(s_j, x_j) \\
&= N^{-1} \sum_{j=1}^N \sum_s \sum_x P(s) Q^{(j)}(x|s) \mu(s, x) \\
&= N^{-1} \sum_s \sum_x P(s) \left[N^{-1} \sum_{j=1}^N Q^{(j)}(x|s) \right] \mu(s, x) \leq D
\end{aligned}$$

ou

$$D(Q_{*N}) = N^{-1} \sum_s \sum_x P(s) \left[N^{-1} \sum_{j=1}^N Q^{(j)}(x|s) \right] \mu(s, x) \leq D \quad (4.2.17)$$

A desigualdade em (4.2.17) decorre de (4.2.16). Substituindo (4.2.15) em (4.2.17) tem-se

$$D(Q_{*N}) = N^{-1} \sum_s \sum_x P(s) Q^0(x|s) \mu(s, x) \leq D.$$

Isto mostra que a probabilidade $Q^0(x|s)$ é um membro da família \mathcal{F}_D de modo que podemos escrever

$$R(D) \leq I(Q_{*N}^0) = I \left(N^{-1} \sum_{j=1}^N Q_{*N}^{(j)} \right)$$

Usando a convexidade da função $I(\cdot)$, e a desigualdade de Jensen

obtem-se

$$R(D) \leq I(Q_{*N}^0) = I \left[N^{-1} \sum_{j=1}^N Q_{*}^{(j)} \right] \leq N^{-1} \sum_{j=1}^N I(Q_{*}^{(j)})$$

$$\leq N^{-1} I(Q_{*N}) \leq N^{-1} \ln K = R.$$

Portanto, se $D(Q_{*N}) \leq D$, então $R(D) \leq D$, o que demonstra a proposição.

As proposições 4.2.1 e 4.2.2 estabelecem que a função taxa de distorção $R(D) = \min_{Q_{*} \in \mathcal{F}_D} I(Q_{*})$ especifica a taxa mínima na qual o decodificador da fonte deve receber informações acerca da saída da fonte para enviá-la ao usuário com distorção média menor que D . Portanto, para canais discretos sem memória temos

$$R(D) = \min_{Q_{*} \in \mathcal{F}_D} I(Q_{*}) \quad \text{nats/símbolo da fonte}$$

$$I(Q_{*}) = \sum_s \sum_x P(s) Q(x|s) \log_2 \frac{Q(x|s)}{Q(x)} \quad (4.2.18)$$

$$\mathcal{F}_D = \left\{ Q(x|s) \mid \sum_s \sum_x P(s) Q(x|s) \mu(s,x) \leq D \right\}$$

Concluimos assim que, para uma fonte discreta sem memória a função taxa de distorção é dada pela quantidade em (4.2.18).

4.3 - Cálculo da Taxa de Distorção para alguns Reticulados .

A teoria da taxa de distorção, foi desenvolvida principalmente como um meio de estender a teoria de codificação de fontes discretas para fontes analógicas ou contínuas. É de

conhecimento geral, que fonte analógicas tem entropia infinita ao passo que na prática, os canais têm capacidade finita, portanto, fica inviável reproduzir fielmente a saída de uma fonte analógica sem que para isso ocorra distorções severas. De acordo com este fato, torna-se necessário estudar o problema de representação de fontes analógicas por fontes de entropia finita, de tal modo a obter distorções aceitáveis em relação à um critério de fidelidade.

Em geral, as medidas de distorção usadas em fontes analógicas dependem somente da diferença entre s e x . Por exemplo, a função erro quadrático, dada por: $\mu(s,x) = (s-x)^2$, e a função valor absoluto dada por: $\mu(s,x) = |s-x|$, onde o símbolo $|\cdot|$, significa o valor absoluto de $s-x$.

No cálculo da taxa de distorção, o nosso interesse é obter limitantes para $R(D)$, isto decorre em parte do fato de que para a maioria das fontes e medidas de distorção com as quais trabalhamos, o limitante inferior de Shannon [25] coincide com a taxa real para alguns valores de D .

Proposição 4.3.1 [25] - (Limitante Inferior de Shannon). Considere uma fonte com densidade $P(\cdot)$, e seja $\mu(s,x) = \mu(s-x)$ uma medida de distorção que depende somente da diferença $s-x$. Então

$$R_{LIS}(D) = \sup_{\lambda \geq 0} \left[h(S) + \lambda D - \ln \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda \cdot \mu(z)} dz \right] \leq R(D). \quad (4.3.1)$$

onde $h(S) = - \int_{-\infty}^{\infty} P(s) \ln P(s) ds$ e λ , é um número real.

Corolario 4.3.1[25]- Se $\mu(s,x)=(s-x)^2$, então

$$R_{LIS}(D) = h(S) - (1/2) \ln(2\pi e D) \leq R(D). \quad \text{nats/simb. (4.3.2)}$$

Exemplo 4.3.1- Considere os reticulados: A_1, A_2, D_4, E_6, E_7 e E_8 , uma medida de distorção dada por $\mu(s,x)=(s-x)^2$, e uma fonte com densidade uniforme dada por

$$P(s) = \begin{cases} 1/(2A) & , \quad |s| \leq A. \\ 0 & , \quad |s| > A. \end{cases} \quad (4.3.3)$$

Então,

$$h(S) = - \int_{-A}^A \frac{1}{2A} \ln \frac{1}{2A} ds = \ln(2A)$$

logo

$$R_{LIS}(D) = \ln(2A) - \frac{1}{2} \ln(2\pi e D) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2A^2}{\pi e D}\right).$$

onde $0 < D \leq \frac{2A^2}{\pi e}$.

A distorção D ou segundo momento por dimensão correspondente a cada reticulado da (seção 3.3)

é dada por

$$\mathcal{M}_{A_1} = 0,0833,$$

$$\mathcal{M}_{A_2} = 0,0802,$$

$$\mathcal{M}_{D_4} = 0,0766,$$

$$\mathcal{M}_{E_6} = 0,0743,$$

$$\mathcal{M}_{E_7} = 0,0732,$$

$$\mathcal{M}_{E_8} = 0,0717.$$

Portanto pelo Corolário 4.3.1, obtemos

$$R(\mathcal{M}_{A_1}) \geq R_{LIS}(\mathcal{M}_{A_1}) = \frac{1}{2} \ln \frac{2A^2}{\pi e \mathcal{M}_{A_1}} \quad \text{nats/dim.}$$

$$R(\mathcal{M}_{A_2}) \geq R_{LIS}(\mathcal{M}_{A_2}) = \frac{1}{2} \ln \frac{2A^2}{\pi e \mathcal{M}_{A_2}} \quad \text{nats/dim.}$$

$$R(\mathcal{M}_{D_4}) \geq R_{LIS}(\mathcal{M}_{D_4}) = \frac{1}{2} \ln \frac{2A^2}{\pi e \mathcal{M}_{D_4}} \quad \text{nats/dim.}$$

$$R(\mathcal{M}_{E_6}) \geq R_{LIS}(\mathcal{M}_{E_6}) = \frac{1}{2} \ln \frac{2A^2}{\pi e \mathcal{M}_{E_6}} \quad \text{nats/simb.}$$

$$R(\mathcal{M}_{E_7}) \geq R_{LIS}(\mathcal{M}_{E_7}) = \frac{1}{2} \ln \frac{2A^2}{\pi e \mathcal{M}_{E_7}} \quad \text{nats/dim.}$$

$$R(\mathcal{M}_{E_8}) \geq R_{LIS}(\mathcal{M}_{E_8}) = \frac{1}{2} \ln \frac{2A^2}{\pi e \mathcal{M}_{E_8}} \quad \text{nats/dim.}$$

Denotando por A os reticulados em estudo, a Tabela 4.3.1 mostra a distorção \mathcal{M}_A e a taxa de distorção $R_{LIS}(\mathcal{M}_A)$ para uma Fonte sem memória com densidade uniforme dada por

$$P(s) = \begin{cases} 1/(2A), & |s| \leq A \\ 0, & |s| > A \end{cases} \quad (4.3.4)$$

onde $A = \sqrt{\frac{\pi e}{2}}$.

Λ	M_Λ	$R_{LIS}(M_\Lambda)$
A_1	0,0833	1,2427
A_2	0,0802	1,2616
D_4	0,0766	1,2845
E_6	0,0743	1,2998
E_7	0,0732	1,3073
E_8	0,0717	1,3176

Tabela 4.3.1-Taxa de distorção dos reticulados Λ para uma fonte sem memória e densidade uniforme dada por (4.3.4).

Os resultados obtidos na Tabela 4.3.1 mostram que na medida em que a dimensão do espaço aumenta, menor será a distorção para uma taxa fixa. Isto decorre do fato de que quanto maior for a dimensão mais refinado será o espaço e menos passível de distorções, quando empregamos os reticulados como quantizadores. Apesar destes ganhos em dimensões superiores, nota-se o aumento da quantidade de bits, necessários para codificar a saída de uma fonte de modo que ela possa reconstruída satisfazendo a distorção pré-estabelecida.

Note que os valores apresentados na Tabela 4.3.1 representam o ínfimo da taxa de distorção a ser utilizada. De uma certa forma é interessante saber sob que condições estes ínfimos tornam-se mínimos, isto é, os valores de $R_{LIS}(M_\Lambda)$ são tais que

$$R(\cdot) > R_{LIS}(\cdot) \quad (4.3.5)$$

sendo que gostaríamos de estabelecer as condições para que

$$R(\cdot) = R_{LIS}(\cdot) \quad (4.3.6)$$

Para isto considere o parâmetro σ^2 da densidade dada em (4.3.4) isto é

$$\frac{1}{2A} \int_{-A}^A s^2 ds = \frac{1}{2A} \left[\frac{s^3}{3} \right]_{-A}^A = \frac{A^2}{3} \quad (4.3.7)$$

Como é de conhecimento geral, a entropia diferencial

$$h(S) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(s) \ln p(s) ds$$

atinge seu valor máximo quando a densidade $p(s)$ é a Gaussiana. A função densidade de probabilidade Gaussiana é caracterizada pela média e variância os quais são os únicos parâmetros possíveis de comparações entre a densidade dada em (4.3.4) e a Gaussiana. Portanto, se a Gaussiana tiver média nula e sua variância assumir o valor estabelecido em (4.3.7), a desigualdade em (4.3.5) torna-se a igualdade em (4.3.6). Quando isto ocorre, os valores da Tabela 4.3.1 correspondem ao número mínimo de bits por símbolo da fonte necessários para codificar a saída de uma fonte de modo que ela possa ser reconstruída satisfazendo a distorção pré-estabelecida.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES.

Neste trabalho desenvolvemos vários procedimentos, os quais possibilitam um encaminhamento estruturado no campo de pesquisas sobre quantizadores reticulados via formas extremas.

Os Capítulos de 1 a 4 podem ser vistos como os principais blocos de um algoritmo para a geração do reticulado desejado, do correspondente simplex fundamental bem como a região de Voronói propriamente dita. Este procedimento está fundamentado em estruturas algébricas abordadas em detalhes em cada Capítulo, objetivando o cálculo da taxa de distorção dos quantizadores reticulados via formas extremas quando os mesmos são utilizados como codificadores de fonte.

Para atingir este objetivo, este trabalho foi dividido em quatro Capítulos da seguinte maneira: O Capítulo 1 contendo seis seções, tem por título "Formas Quadráticas". A seção 1.1, descreveu sucintamente o objeto de estudo que será abordado neste Capítulo. Na seção 1.2, foram tratados os conceitos básicos de formas quadráticas, definição de forma quadrática extrema bem como definições e exemplos de formas quadráticas equivalentes. A seção 1.3, enfatizou os reticulados, procurando dar uma ênfase geométrica dos mesmos no espaço tridimensional. Na seção 1.4, com o objetivo de estabelecer a conexão entre formas quadráticas e reticulados, foram abordados algumas propriedades dos reticulados. Na seção 1.5, foi descrito o volume do reticulado. Este parâmetro foi utilizado no cálculo da distorção, quando utilizamos os reticulados como quantizadores. Ainda na seção 1.5, foram descritos os conceitos de base covariante e contravariante com o objetivo de apresentar uma proposição estabelecendo a conexão entre o determinante da matriz de uma forma quadrática e o volume do reticulado associado à mesma.

Finalmente na seção 1.6, foram tratadas as formas quadráticas reflexíveis, cujo objetivo foi o de apresentar analiticamente, as formas quadráticas extremas.

O Capítulo 2 com título "Grupos de Reflexão e Álgebras de Lie" , contém nove seções. A seção 2.1, descreveu de maneira sucinta o conteúdo abordado neste Capítulo. A seção 2.2, descreveu os conceitos de simetria, reflexão e rotação de uma figura plana, tendo como objetivo o tratamento dos grupos de simetria. Na seção 2.3, foram definidos os conceitos de raízes de um grupo, grupo de Coxeter e a região fundamental de um grupo simétrico, cujo objetivo foi estudar os grafos de Coxeter. Na seção 2.4, foram apresentados os grafos de Coxeter, onde mostra-se que a partir da matriz de uma forma quadrática é possível exibir o grafo de Coxeter associado à mesma, e vice-versa. Na seção 2.5, foram apresentadas as estruturas algébricas das seguintes famílias das álgebras de Lie: A_n , B_n , C_n e D_n , todo o formalismo descrito, tem como objetivo os tópicos: O Sistema de Raízes de uma Álgebra de Lie, O Grupo de Weyl de uma Álgebra de Lie, As Matrizes de Cartan e Os Diagramas de Dynkin. Na seção 2.6, foram definidos o sistema de raízes para cada família da álgebra de Lie descrita na seção 2.5, e procuramos através de exemplos representá-las no plano Euclídeano. Na seção 2.7, foram calculados a partir do sistema de raízes, a ordem do grupo de Weyl para cada família da álgebra de Lie descrita na seção 2.5. Na seção 2.8, foram definidas as matrizes de Cartan associadas às famílias das álgebras de Lie em estudo, bem como o diagrama de Dynkin associado à cada álgebra. Foi mostrado ainda como exibir uma matriz de Cartan a partir do diagrama de Dynkin associado.

Na seção 2.9, foi estabelecida a conexão entre o empacotamento de esferas, as formas quadráticas extremas e as álgebras de Lie. Esta conexão mostra um direcionamento (baseado em estruturas algébricas) para futuras pesquisas no estudos dos quantizadores reticulados via formas extremas, quando os mesmos são usados como codificadores de fonte.

O Capítulo 3 com título "Regiões de Voronói e Segundo Momento de Polítopos" contém três seções. A seção 3.1, descreveu de uma maneira resumida o que será abordado neste Capítulo. Na seção 3.2, foram descritos os conceitos de polítopos e simplex no espaço Euclidiano e foram calculados o segundo momento de alguns polítopos, quando estes encontram-se no espaço Euclidiano tri e quadridimensionais. Foram tabelados em seguida os resultados obtidos, e comparados com o limitante esférico obtido por Zador. Dadas as diferentes formas geométricas com que os polítopos foram, apresentados é impossível afirmar que existe um único método para o cálculo do segundo momento de polítopos, por isto, para os polítopos que foram abordados neste trabalho, existem alguns especiais para os quais foi empregado o método, devido à Dirichlet. Este método reduziu o nosso trabalho de uma maneira considerável por ocasião do cálculo do volume e segundo momento das figuras especiais: Esfera, Tetraedro Regular, e o Octaedro Regular. De uma maneira geral, o cálculo do segundo momento de uma figura arbitrária torna-se possível quando podemos decompô-la em simplex, mas neste caso, torna-se mais viável para o cálculo do volume e segundo momento outros métodos que foram abordados. A justificativa desta viabilidade, deve-se ao fato de que para o cálculo do volume e segundo momento, usamos apenas os vértices do polítopo, e seu centróide. Na

seção 3.3, foi abordado um método para se obter a região de Voronói de um reticulado gerado por um sistema de raízes de uma álgebra de Lie, esta descrição teve como objetivo o cálculo do segundo momento das famílias A_n , D_n e E_n , de reticulados gerados por um sistema de raízes de uma álgebra de Lie. Nosso interesse básico em estudar estas estruturas matemáticas, foi o fato de podermos obter facilmente o cálculo do volume e segundo momento das famílias dos reticulados que foram abordados neste estudo, além do encaminhamento promissor, em futuras pesquisas ligada ao assunto. O procedimento descrito mostrou ser uma técnica nova para as pesquisas em quantizadores reticulados, quando os mesmos são usados como codificadores de fonte.

O Capítulo 4 com título "A Função Taxa de Distorção", contém três seções. A seção 4.1, descreveu de uma maneira sucinta o teorema de codificação de canal, o teorema de codificação de fonte e apresentou uma interpretação para a função taxa de distorção a qual foi o objeto de estudo do Capítulo 4. Na seção 4.2, foram descritos os conceitos necessários para o estudo do problema de codificação de uma fonte discreta sem memória, bem como a taxa mínima na qual o decodificador da fonte deve receber informações acerca da saída de uma fonte para enviá-la ao usuário com distorção média menor do que qualquer distorção fixada à priori. Finalmente na seção 4.3, foi abordado o limitante inferior de Shannon (R_{LIS}), com o objetivo de relacionar a taxa de distorção dos reticulados A_1 , A_2 , D_4 , E_6 , E_7 e E_8 , com este limitante.

Usando como critério de fidelidade o erro quadrático, foi tabelado o Limitante Inferior de Shannon (R_{LIS}) para os reticulados A_1 , A_2 , D_4 , E_6 , E_7 e E_8 . Este cálculo, mostrou ser um resultado

novo no estudo dos quantizadores reticulados, quando os mesmos são usados como codificadores de fonte.

Portanto, esperamos que os procedimentos sugeridos bem como os resultados obtidos e expostos neste trabalho possam contribuir de modo significativo, no estudo de codificação de fonte.

Como sugestões para futuros trabalhos, apresentamos os seguintes tópicos

1- Estender este estudo para outras densidades de probabilidade e estabelecer o segundo momento normalizado e o segundo momento por dimensão.

2- Analisar os casos onde a medida de distorção seja o valor absoluto, a distorção vista como uma frequência de erros, a distorção máxima etc..., .

3- Estender este estudo para reticulados esféricos tal que o número de pontos no reticulado englobe expansões da região de Voronói na origem.

4- Estudar os efeitos de um número finito de pontos no reticulado para os casos aqui considerados.

5- Estudar as regiões de Voronói dos reticulados duais (ou recíprocos) dos reticulados descritos neste trabalho, usando o procedimento de formas quadráticas extremas.

6- Estudar as isometrias dos reticulados abordados neste trabalho (automorfismos que preservam comprimento) verificando que elas são automorfismos da região de voronói do reticulado.

7- Estender a descrição aqui estudada para reticulados complexos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- [1] B. Paul Yale, *Geometry and Symetry*, Holden - Day Series In Mathematics,(1968).
- [2] Birkoff, G. and Maclane, S., *A Survey of Modern Algebra*, Macmillan, N.Y, 4th ed., (1977).
- [3] Blinchfeldt, F. H., *The Minimum Values of Positive Quadratic Forms in Six, Seven and Eight Variables*, *Math. Zeit*, 39 (1935),1-15.
- [4] Coxeter, H.S.M., *Introduction to Geometry*, Wiley, N.Y (1961).
- [5] Coxeter, H.S.M.,and Moser, W.O.J., *Gerators and Relations for Discrete Groups*, Springer - Verlag, 4th ed., (1980).
- [6] Coxeter ,H.S.M., *Regular Polytopes*, Dover, N.Y, 3rd ed., (1973).
- [7] Coxeter, H.S.M., *Twelve Geometry Essays*, Southern Illionois Press, Carbondale IL,(1968).
- [8] C.A. Rogers, *Packing and Covering*, Camb. Univ. Press, (1964).
- [9] Conway, J.H., and Sloane, N.J.A., *Voronoi Regions of Lattices, Second Moments of Polytopes, and Quantization*, *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-28 (1982),211-226.
- [10] C.E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, *Bell System Tecnical Journal*,27 (1948) 379-423 and 623-656.
- [11] Dynkin E.B., *The Struture of Semisimple Algebras*, *Uspehi Matematiceskih Nauk (N.S)2, N^o 4 (20) (1947) 59-127.*
- [12] D.M.Y. Sommerville, *An Introduction to The Geometry of n Dimensions*, Dover, N.Y.,(1958).
- [13] Gersho, A. *Principles of Quantization*, *IEEE Trans. Circuit. Syst.* 25 (1978) 427-436.
- [14] Gauss, C.F., *Werke* (Göttingen,1876), Vol 1,307; Vol 2,192.

- [15] Korkine, A. and Zolotareff, G., Sur les Formes Quadratiques, Math. Ann., Vol 6 (1873) 366-389.
- [16] N. Bourbaki, Groupes et Algèbres de Lie, Chapitres 4,5 et 6. Paris:Hermann, (1968).
- [17] John M. Wozencraft and Irwin Mark Jacobs, Principles of Communication Engineering, John Wiley, (1985).
- [18] T. Berger, Rate Distortion Theory, A Mathematical Basis for Data Compression, Prentice-Hall, N.J.(1974).
- [19] Voronoi, G., Sur Quelques Propriétés des Formes Quadratiques Positives Parfaites, J. Reine, Angew. Math., Vol 133 (1907), 97-178.
- [20] Watson, G. N., and Whittaker, E.T., A Course of Modern Analysis, Cambridge, The Univ., 4th ed., (1963).
- [21] Minkowski, H., Diskontinuitätsbereich für Arithmetische Äquivalenz, J. Reine Angew. Math., Vol 129 (1905) 220-274.
- [22] Zador, P., Topics in The Asymptotic Quantization of Continuous Random Variables, IEEE Trans. Inform. Theory. IT-28 (1982) 139-149.
- [23] L. Fejes Tóth, Regular Figures, Pergamon, Oxford,(1964).
- [24] Lekkerkerker, C.G., Geometry of Numbers, Bibliotheca Mathematica, Vol III, North-Holland, Amsterdam,(1964).
- [25] Viterbi, J. A. and Omura, K. J., Principles of Digital Communication and Coding , McGraw-Hill, Inc. (1979).
- [26] Grove, L. C. and Benson, C.T., Finite Reflections Groups, Second Edition, Springer-Verlag, (1964).
- [27] Thomas, L. Saaty and Joyce M. Alexander, Siam Review, Vol 17 N^o 3 July (1975) 475-519.

- [28] Sloane, N.J.A., Binary Codes, Lattices and Sphere Packings in Combinatorial Surveys, ed., P. J. Cameron, Ac. Press, N.Y. (1977) 117-164.
- [29] Paulo Boulos, Sequências e Séries de Números e Funções Ed. Edgard Blücher Ltda. (1986).
- [30] Gersho, A., Asymptotically Optimal Block Quantization, IEEE Trans. Inform. Theory. IT-25 (1979) 373-380.
- [31] Cassells, J.W.S., An Introduction to the Geometry of Numbers, in Grundleheren. Math. Wissens Chaften, Vol 99 N.Y., Spriger-Verlage, (1959).
- [32] Satterly, J., The Moments of Inertia of Some Polyhedra, Math. Gazette, Vol 42, (1958) 11-13.
- [33] Y.Linde, A.Buzzo, and R.M.Gray, An algorithm for vector quantizer design, IEEE Trans. Inform. Commun., Vol Com-28, pp 84 - 95, Jan., 1980.
- [34] J.H.Conway and N.J.A.Sloane, Fast quantizing and decoding algorithms for lattice quantizer and codes, IEEE Trans. Inform. theory, Vol IT-28, pp 157-166, Mar., 1982.
- [35] T.R.Fisher, A pyramid vector quantizer, IEEE Trans. Inform. Theory Vol IT-32, pp 568-583, July 1986.
- [36] W.R.Bennett, Spectra of quantized signals, Bell Sys. Tech. Journal, Vol 27, pp 446-472, July 1948.