

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MICROONDA E ÓPTICA

Simulação, por Elementos Finitos 3D, de Problemas Eletromagnéticos no Tempo e na Frequência

Tese de Doutorado

Autor: **Antonio Manoel Ferreira Frasson**

Orientador: **Prof. Dr. Hugo Enrique Hernandez Figueroa**

Banca Examinadora: **Prof. Dr. Luis Costa da Silva**
Prof. Dr. José Ricardo Descardec
Prof. Dr. José Antonio Justino Ribeiro
Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo
Prof. Dr. Rui Fragassi Souza
Prof. Dr. Luiz Carlos Kretly

Tese submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica.

27 de março de 2002

Este exemplar corresponde a redação final da tese defendida por <u>Antonio Manoel Ferreira Frasson</u> e aprovada pela Comissão Julgada em <u>27/03/2002</u> .
 Orientador

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIDADE Be
Nº CHAMADA T/UNICAMP
F8642
V _____ EX _____
TOMBO BCI 49620
PROC 16-83710 2
C _____ D X
PREÇO R\$ 11,00
DATA 14/06/02
Nº CPD _____

CM00169108-0

BIB ID 244918

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

~~F8628~~

F8642

Frasson, Antonio Manoel Ferreira

Simulação, por elementos finitos 3D, de problemas eletromagnéticos no tempo e na frequência / Antonio Manoel Ferreira Frasson. —Campinas, SP: [s.n.], 2002.

Orientador: Hugo Enrique Hernandez Figueroa.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Métodos dos elementos finitos. 2. Ondas eletromagnéticas. 3. Dispositivos de microondas. 4. Anisotropia. I. Figueroa, Hugo Enrique Hernandez. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Resumo

Este trabalho objetiva o estudo do espalhamento de ondas eletromagnéticas por dielétricos com geometrias complexas em três dimensões com anisotropia elétrica, magnética ou ambas nos domínios do tempo e da frequência. Nos dois casos, a análise é efetuada utilizando-se o método dos elementos finitos vetorial para solucionar a equação de onda. As funções de base empregadas são vetoriais, do tipo de Whitney CT/LN (*Constante Tangencial/Linear Normal*), o que evita a distorção do espaço nulo, mantendo a continuidade das componentes de campo tangenciais entre elementos e mantendo as componentes de campo normais livres. São utilizadas superfícies absorventes de primeira ordem no domínio do tempo e de segunda ordem no domínio da frequência, a fim de simular a continuidade do domínio discretizado. Também, com o objetivo de simular a continuidade do domínio discretizado, são utilizadas as camadas perfeitamente casadas, as PMLs. No domínio do tempo é apresentado pela primeira vez, no uso em 3D, o método da envoltória que consiste em trabalhar apenas com a envoltória do campo, retirando-se a portadora, o que permite maiores passos no tempo que no método convencional.

Palavras-Chave: Elementos Finitos, Método da Envoltória, PML, ABC, Espalhamento.

Abstract

Three dimensional full vectorial finite element formulations in the frequency and time domains, for wave electromagnetic problems including electric and magnetic anisotropic dielectric media, are presented in detail. Whitney CT/LN edge element were adopted, in order to avoid the null space distortion, ensuring the fields' tangent components continuity and leaving the fields' normal components free, across media interfaces. Proper absorbing boundary conditions (ABCs) of the first and second kind and also, the so-called Perfectly Matched Layers (PMLs), were utilized over the truncated boundaries. In the time domain, a scheme based on the envelope approach is proposed for the first time, and a careful study of its characteristics, stability, in particular, is presented. This novel scheme permits the use of larger time steps than conventional approaches. The validity and usefulness of all treated schemes are clearly demonstrated through the analysis of several key examples.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador por me ouvir e me sugerir idéias, pelas orientações e ter depositado confiança no meu trabalho.

Agradeço também à UFES e ao PICDT/CAPES pela bolsa de estudos concedida.

Ao amigo *Sérgio Antenor de Carvalho* por sugestões e fornecimento de resultados de sua tese de doutorado, possibilitando comparações.

Aos amigos do Departamento de Engenharia Elétrica da UFES pela ajuda e incentivo ao meu doutorado, em especial a Marcelo Vieira Segatto, pelas sugestões de texto, a Edson Pereira Cardoso e Luis Calazans Calmon por cobrirem minhas aulas para que pudesse dedicar-me ao trabalho na UNICAMP e aos colegas do DMO da UNICAMP, em especial a Andreas Pablo Barbero, Helder Fleury Pinheiro, José do Patrocínio e Kleber Zuza Nóbrega, por trabalhos realizados em conjunto.

Agradeço também a Jussara Farias Fardim e Luiz Gonzaga da Silveira Jr. pela ajuda com o LATEX, ao conjunto de pessoas de todo o planeta que trabalham no desenvolvimento dos programas livres, em especial ao projeto GNU, ao INRIA por disponibilizarem, sem custo e com o código fonte, o SCILAB, a SUN computadores por disponibilizar o Star Office, à Pacific-Sierra Research pelo compilador VAST/f90 para uso no sistema operacional GNU/LINUX, aos laboratórios Weizmann e seus desenvolvedores pelo GRACE, e a CIMNE pela permissão de uso temporário do GID 6.1.

Aos meus filhos.

Sumário

SUMÁRIO	v
LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE TABELAS	xiv
NOTAÇÃO	xvii
1 Introdução	1
1.1 Uso do Método dos Elementos Finitos em Eletromagnetismo	1
1.2 Contribuições da Tese	3
1.3 Organização da Tese	3
2 O Método dos Elementos Finitos	7
2.1 Introdução ao Método dos Elementos Finitos e o seu Uso em Eletromagnetismo. . .	7
2.1.1 Princípio Variacional no Padrão Convencional.	7
2.1.2 Princípio Variacional Padrão Modificado.	10
2.1.3 Princípio Variacional Generalizado.	11
2.1.4 Método de Galerkin.	14
2.2 Discretização	15
2.2.1 Discretização com o Método Rayleigh-Ritz	16
2.2.2 Discretização com o Método de Galerkin	16
2.2.3 O Método Rayleigh-Ritz e o Método de Galerkin em Elementos Finitos . . .	17

3	Espalhamento de Ondas por Materiais com Anisotropia Elétrica e Magnética.	19
3.1	Introdução	19
3.2	Formulação.	20
3.2.1	Integrações nos Elementos	21
3.2.1.1	Primeiro Termo do Lado Esquerdo da Equação (3.15).	22
3.2.1.2	Segundo Termo do Lado Esquerdo da Equação (3.15).	22
3.2.1.3	Terceiro Termo do Lado Esquerdo da Equação (3.15).	25
3.2.1.4	Primeiro Termo do Lado Direito da Equação (3.15).	25
3.2.1.5	Segundo Termo do Lado Direito da Equação (3.15).	27
3.2.2	Montagem do Sistema de Equações.	28
3.3	Cálculo dos Campos Distantes.	29
3.3.1	Cálculo dos Campos Distantes Utilizando o Teorema da Superfície Equivalente	29
3.3.2	Cálculo dos Campos Distantes Utilizando o Teorema das Correntes Volumétricas Equivalentes.	34
3.3.2.1	Obtenção de \vec{M}_{eq}	34
3.3.2.2	Obtenção de \vec{J}_{eq}	35
3.3.3	Integrações para o Cálculo do Campo Espalhado, em Qualquer Ponto de Observação, Utilizando o Teorema do Volume Equivalente.	35
3.3.3.1	Obtenção de \vec{M}_{eq} no Ponto de Integração.	36
3.3.3.2	Obtenção de \vec{J}_{eq} no Ponto de Integração.	38
3.4	Resultados	42
3.4.1	Campo Espalhado por uma Esfera Homogênea.	42
3.4.2	Campo Espalhado por uma Esfera Não Homogênea.	55
3.4.3	Campo Espalhado por um Cubo Homogêneo com Perdas.	57
3.4.4	Campo Espalhado por um Cubo não Homogêneo.	59
3.4.5	Campo Espalhado por dois Cubos Homogêneos.	60
3.4.6	Campo Espalhado por uma Esfera com Anisotropia Elétrica.	62

4 O Método da Envoltória em Elementos Finitos 3D Vetorial.	65
4.1 Formulação	66
4.2 Discretização	67
4.3 Esquema de Avanço no Tempo	68
4.4 Análise da Convergência do Método de Newmark com o Uso de PMLs Anisotrópicas.	69
4.4.1 Decomposição Modal	69
4.4.2 Discretização no Tempo.	71
4.5 Resultados	75
5 Conclusões	85
Referências Bibliográficas	87
A Dedução das Matrizes Elementares 3D	93
A.1 Coordenadas Locais em Tetraedros	93
A.2 Funções de Base de Arestas em Tetraedros	98
A.3 Construção das Integrais Necessárias	104
A.3.1 Construção das Integrais nos Volumes Elementares	104
A.3.2 Integrais de Superfície	108
A.3.2.1 Transformação de Coordenadas	109
A.3.2.2 Implementação da Integral de Superfície da Equação (A.34)	110
A.3.2.3 Implementação da Integral de Superfície da Equação (A.35)	116
A.3.2.4 Implementação da Integral de Superfície das Equações (A.36) e (A.37)	118
A.3.2.5 Cálculo da Área da Face	121
A.3.3 Integração Numérica nos Volumes Elementares para Cálculo das Fontes Equiv-	
alentes.	121
B O Método de Newmark	125
B.1 A Obtenção do Método de Newmark Através da Série de Taylor.	125
B.2 A obtenção do Método de Newmark Através do Métodos dos Elementos Finitos. . .	127

B.3	A relação entre o Método de Newmark Obtido Através da Série de Taylor e Elementos Finitos	131
C	Condições de Contorno Absorventes	137
C.1	Condição de Contorno de <i>Silver-Müller</i>	138
C.2	Condição de Contorno Absorvente de Segunda Ordem para Estruturas de <i>Microfita</i>	139
C.3	Condição de Contorno Absorvente de Segunda Ordem do tipo "Engquist-Majda"	144
C.3.1	ABCs Generalizadas de Trefethen e Halpern	147
C.3.2	Estudo Analítico do Coeficiente de Reflexão em ABCs.	149
C.4	Condição de Contorno Absorvente do tipo "Bayliss-Turkel"	151
C.4.1	Ordem de Convergência do Operador de Webb e Kanellopoulos.	156
C.4.2	Obtenção da Condição de Contorno Absorvente Vetorial da Família Bayliss-Turkel de Primeira Ordem.	157
C.4.3	Obtenção da Condição de Contorno Absorvente Vetorial da Família Bayliss-Turkel de Segunda Ordem.	158
C.4.4	Observações referentes à passagens para obtenção da equação (C.130)	159
C.5	Camadas Perfeitamente Absorventes, PMLs.	161
C.5.1	Análise do Desempenho Teórico da PML.	165
C.5.2	A PML de Berenger	166
C.5.3	Comparação entre a PML de Berenger e a PML Anisotrópica.	172
C.5.4	PML Para Materiais Bianisotrópicos.	175
C.5.4.1	Observação Utilizada na Obtenção das Expressões da PML para Meios Bianisotrópicos.	177

Lista de Figuras

2.1	Domínio 2D discretizado com triângulos.	17
3.1	Campo elétrico incidente \vec{E}^{inc}	26
3.2	Teorema da Superfície Equivalente.	29
3.3	Esfera homogênea iluminada por uma onda plana.	43
3.4	Esfera com $k_0a = 0,408$ e $\epsilon_r = 4,0$. PML: espessura de $0,3\lambda$; $\mathbb{C} = 1,0 - j2,0$	44
3.5	Erro para a esfera com $k_0a = 0,408$ e $\epsilon_r = 4,0$. PML: espessura de $0,3\lambda$; $\mathbb{C} = 1,0 - j2,0$	45
3.6	Esfera com $k_0a = 0,408$ e $\epsilon_r = 9,0$. PML: espessura de $0,3\lambda$; $\mathbb{C} = 1,0 - j2,0$	46
3.7	Erro para a esfera com $k_0a = 0,408$ e $\epsilon_r = 9,0$. PML: espessura de $0,3\lambda$; $\mathbb{C} = 1,0 - j2,0$	47
3.8	Esfera com $k_0a = 0,408$ e $\epsilon_r = 16,0$. PML: espessura de $0,3\lambda$; $\mathbb{C} = 1,0 - j2,0$	48
3.9	Erro para a esfera com $k_0a = 0,408$ e $\epsilon_r = 16,0$. PML: espessura de $0,3\lambda$; $\mathbb{C} = 1,0 - j2,0$	49
3.10	Esfera com $k_0a = 0,408$ e $\epsilon_r = 25,0$. PML: espessura de $0,3\lambda$; $\mathbb{C} = 1,0 - j2,0$	50
3.11	Erro para a esfera com $k_0a = 0,408$ e $\epsilon_r = 25,0$. PML: espessura de $0,3\lambda$; $\mathbb{C} = 1,0 - j2,0$	51
3.12	Esfera homogênea com $k_0a = 0,408$ e $\epsilon_r = 9,0$. Comparação para vários valores de \mathbb{C} , para uma espessura de $0,3\lambda$	52
3.13	Comparação dos resultados do cálculo com o teorema da superfície equivalente e do volume equivalente, para uma esfera homogênea com $\epsilon_r = 9,0$	53

3.14	Esfera homogênea com $k_0a = 0,408$ e $\epsilon_r = 9,0$. Comparação entre resultados obtidos com o uso de PML e de ABC de segunda ordem do tipo Engquist-Majda.	54
3.15	Esfera não-homogênea com $\epsilon_{r1} = 4,0$ para $k_0a < 0,204$ e $\epsilon_{r1} = 9,0$ para $0,204 \leq k_0a < 0,408$	55
3.16	Erro para a esfera não-homogênea com $\epsilon_{r1} = 4,0$ para $k_0a < 0,204$ e $\epsilon_{r1} = 9,0$ para $0,204 \leq k_0a < 0,408$	56
3.17	Cubo não-homogêneo iluminado por uma onda plana.	57
3.18	Campo espalhado por um cubo homogêneo de aresta $0,2\lambda$ e $\epsilon_r = 1,0 - j1000,0$; a PML utilizada possui espessura de $0,3\lambda$ e $\mathbb{C} = 1,0 - j2,0$	58
3.19	Campo espalhado por um cubo não-homogêneo de aresta $0,2\lambda$, $\epsilon_{r1} = 4,0$ e $\epsilon_{r2} = 9,0$; a PML utilizada possui espessura de $0,3\lambda$ e $\mathbb{C} = 1,0 - j2,0$	59
3.20	Dois cubos homogêneos iluminados por uma onda plana.	60
3.21	Campo espalhado por dois cubos homogêneos de aresta $0,1\lambda$, $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 9,0$; a PML utilizada possui espessura de $0,3\lambda$ e $\mathbb{C} = 1,0 - j2,0$	61
3.22	Esfera iluminada por uma onda plana polarizada na direção z, com direção de propagação no sentido positivo de x.	62
3.23	<i>Radar Cross Section</i> normalizada, no plano XZ, de uma esfera com anisotropia elétrica. PML: espessura de $0,3\lambda$ e $\mathbb{C} = 1,0 - j2,0$	63
3.24	<i>Radar Cross Section</i> normalizada da componente de polarização cruzada, no plano XZ, de uma esfera com anisotropia elétrica. PML: espessura de $0,3\lambda$; $\mathbb{C} = 1,0 - j2,0$	63
4.1	Maior Módulo, entre os dois pólos, em função da frequência de ressonância do modo da cavidade e Ω	72
4.2	Maior Módulo, entre os dois pólos, em função das perdas, b , e $dt * f_0$, Ω , com $\gamma = 0,52$, $\beta = 0,26$ e $a = 1$	73
4.3	Maior Módulo entre os dois pólos em função das perdas, "b" e $dt * f_0$, Ω , com $\gamma = 0,5$, $\beta = 0,5$ e $a=1$	74
4.4	Maior Módulo entre os dois pólos em função de $dt * f_0$, Ω , com $\gamma = 0,5$, $\beta = 0,5$, $a=1$. e $b=.2$	74

4.5	Filtro Passa Baixa em micro-fita sobre um dielétrico RT/Duroid, com $\epsilon_r = 2,2$	75
4.6	Comparação entre os resultados do parâmetro S_{11} , obtidos com Método da Envolvória FETD, com o Método FDTD e com valores medidos.	76
4.7	Comparação entre os resultados do parâmetro S_{21} , obtidos com Método da Envolvória FETD, com o Método FDTD e com valores medidos.	77
4.8	Comparação entre os resultados do parâmetro S_{11} , obtidos com FETD de várias formas.	78
4.9	Comparação entre os resultados do parâmetro S_{21} , obtidos com FETD de várias formas.	79
4.10	Geometria do indutor espiral, vista superior.	80
4.11	Parâmetro S_{11} do indutor espiral.	81
4.12	Parâmetro S_{21} do indutor espiral.	82
4.13	Guia retangular homogêneo.	83
4.14	Amplitude do campo elétrico em dois pontos de observação.	83
4.15	Amplitude do campo elétrico em um corte longitudinal, em $b/2$, no guia retangular, em vários instantes de tempo.	84
A.1	Coordenada Local L_1	93
A.2	Coordenada Local L_2	94
A.3	Coordenada Local L_3	94
A.4	Coordenada Local L_4	95
A.5	Face 1.	99
A.6	Face 2.	99
A.7	Face 3.	100
A.8	Face 4.	100
A.9	Projeção do gradiente de L_2 sobre a aresta 1.	101
A.10	Projeção do gradiente de L_2 sobre a aresta 1.	102

A.11 Mapeamento no Tetraedro Mestre.	109
B.1 Funções de Forma.	127
C.1 Guia com duas portas.	138
C.2 Onda Incidente e Refletida em uma ABC.	149
C.3 Coeficientes de reflexão teóricos de segunda ordem.	150
C.4 Plano contendo os vetores de propagação das ondas incidente e transmitida na interface da PML com o espaço livre.	166
C.5 Coeficiente de Reflexão, em dB's, de uma camada PML com $C = 1,0 - j1,6$, espessura L (em comprimentos de onda) e ângulo de incidência em radianos.	166
C.6 Plano x - z com os vetores de propagação e o plano da interface, $z = 0$	168

Lista de Tabelas

A.1	Tabela com os nós iniciais, c_i , e os nós finais, c_f , das arestas.	104
A.2	Tabela com 7 pontos da quadratura numérica para integração no triângulo mestre, $O(h_6)$	118
A.3	Tabela com 12 pontos da quadratura numérica para integração no triângulo mestre, $O(h_7)$	119
A.4	Tabela com 13 pontos da quadratura numérica para integração no triângulo mestre, $O(h_8)$	119
A.5	Tabela com os coeficiente da equação (A.67).	121
A.6	Tabela com 14 pontos da quadratura numérica para integração no tetraedro mestre.	122
C.1	Coeficientes para ABCs de Segunda Ordem	148
C.2	Coeficientes para ABCs de Terceira Ordem ($q_0 = 1, 0$ para todas aproximações)	149
C.3	Aplicação Recursiva dos Operadores Pertencentes ao Operador (C.115)	157

Glossary

ϵ_r	Permissividade Elétrica Relativa.
$\bar{\epsilon}_r$	Tensor Permissividade Elétrica Relativa.
$\bar{\mu}_r$	Tensor Permeabilidade Magnética Relativa.
μ_r	Permeabilidade Magnética Relativa.
Δ	6*Volume do tetraedro.
ϵ_0	Permissividade elétrica do vácuo, $\frac{10^{-9}}{36\pi}$ F/m.
η_0	Impedância de onda no espaço livre.
Λ	Tensor da permissividade elétrica ou permeabilidade magnética da PML anisotrópica.
\hat{x}	Vetor unitário na direção da coordenada x
\hat{y}	Vetor unitário na direção da coordenada y
\hat{z}	Vetor unitário na direção da coordenada z
\vec{N}_i	Função base da aresta "i".
μ_0	Permeabilidade magnética do vácuo, $4\pi 10^{-7}$ H/m.
∇_e	Operador ∇ modificado da equação de Faraday modificada na PML de Berenger.
∇_h	Operador ∇ modificado da equação de Ampère modificada na PML de Berenger.
L_i	Coordenada Local "i" do Tetraedro.
v_f	Velocidade de fase.

-
- C Constante dos Tensores da permissividade elétrica ou permeabilidade magnética relativa da PML anisotrópica.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Uso do Método dos Elementos Finitos em Eletromagnetismo

Embora as ferramentas teóricas necessárias ao uso dos métodos numéricos sejam conhecidas há muitos anos, o seu uso efetivo deu-se somente na década de 60, quando apareceram os primeiros computadores científicos. Daquela época até os dias de hoje, com o desenvolvimento dos computadores, tem-se técnicas numéricas cada vez mais sofisticadas em uso.

Duas datas são marcantes no surgimento do Método dos Elementos Finitos em aplicações em alta frequência [1]:

- 1942: O Método dos Elementos Finitos foi pela primeira vez descrito por *Curant* [2], quando preparou um artigo para a American Mathematical Society. Ele adicionou um apêndice de duas páginas sobre o uso de métodos variacionais na teoria dos potenciais, seguindo os princípios já descritos pelo Lord Rayleigh. Escolheu um conjunto de funções de aproximação lineares em conjunto de triângulos que denominou de elementos, construiu dois exemplos bidimensionais, marcando, assim, o início do Método dos Elementos Finitos.
- 1969: Começa o uso do Método dos Elementos Finitos em microondas com a publicação por *P. P. Silvester* do artigo intitulado " *Finite-Element solution of Homogeneous Waveguides Problems*", na revista *Alta Frequenza* [3].

Com a redução do custo dos computadores, os métodos numéricos tornaram-se mais sofisticados e já conseguem simular problemas eletromagnéticos e dispositivos cada vez mais complexos. Método

dos Momentos [4] [5], Método das Diferenças Finitas [6], *Transverse Line Transmission* [7], Método no Domínio Espectral e o Método dos Elementos Finitos [8] desenvolveram-se muito rapidamente nos últimos anos. O Método dos Elementos Finitos, inicialmente aplicado com grande sucesso à problemas de guiamento em estruturas fechadas, tinha dificuldade de ser aplicado em problemas de radiação e espalhamento. Como a condição de radiação não está implícita em sua formulação, como no Método dos Momentos por exemplo, necessitava de paredes absorventes para simular o espaço livre, como uma câmara anecóica, para assim não ser necessário discretizar todo o espaço. Vários tipos de paredes absorventes foram propostas:

- ABCs, “*Absorbing Boundary Conditions*” para fronteiras planas foram apresentadas com ordem acima de 2 pela primeira vez por Engquist e Madja [9] e depois adaptadas para o uso em formulações vetoriais em 3D por Yao et al. [10], descritas no Apêndice C.
- ABCs para fronteiras esféricas foram apresentadas pela primeira vez por Bayliss, Gunzburger e Turkel [11], descritas no Apêndice C.
- Camadas absorventes perfeitamente casadas foram apresentadas pela primeira vez por Berenger em [12] e a adaptadas para o uso em formulações vetoriais 3D por Chew e Weedon [13], descritas no Apêndice C.
- PMLs “*Perfect Matched Layers*” anisotrópicas foram apresentadas pela primeira vez por Sacks et al. [14], também estão descritas no Apêndice C.
- Uso da equação de radiação na superfície externa, que é chamado de “*Finite Element - Boundary Integral Method*” [15] [16] [17] [18] [8] [19]. Neste Método, os elementos finitos descrevem o campo interno ao domínio de discretização, enquanto, na parte externa da superfície fictícia, que delimita o domínio de discretização, é usada uma equação integral para representar o campo. A desvantagem deste método híbrido é que a matriz perde a característica de esparsidade, sendo que a parte da matriz que multiplica as incógnitas ligadas à superfície de fronteira do domínio de discretização, é cheia. A vantagem é que a malha, conseqüentemente o número de incógnitas, pode ser menor em relação ao uso das ABCs ou PMLs terminando o domínio de discretização.

Devido ao fato da matriz resultante ser esparsa, cerca de 1% dos elementos são não-nulos, o Método tem uma vantagem importante comparado com o Método dos Momentos. Além disso, devido à sua facilidade em analisar estruturas curvas, ele detém uma grande vantagem [8] em relação ao Método das Diferenças Finitas.

Nesta tese foram implementados, no domínio da frequência e para cálculo de espalhamento por dielétricos, as ABCs de segunda ordem e as PMLs. Além disso, foi implementada uma técnica que retira a portadora no domínio do tempo. Em códigos vetoriais 3D, esta é a primeira vez que se aplica esta técnica, permitindo passos temporais maiores do que na técnica clássica, onde mantém-se a portadora.

1.2 Contribuições da Tese

Pelo melhor que o autor pode observar, estas são as contribuições:

- Comparação entre o Método dos Elementos Finitos utilizando o teorema das correntes volumétricas equivalentes no cálculo de campos espalhados por dielétricos anisotrópicos, com o Método dos Momentos [20] [21] [22].
- Comparação das PMLs com as ABCs de segunda ordem no cálculo de campos espalhados por dielétricos em 3D.
- Estudo do efeito da variação das perdas na PML no cálculo de campos espalhados por dielétricos em 3D.
- Extensão do Método da Envoltória, utilizado com o Método dos Elementos Finitos no domínio do tempo, em uma formulação vetorial 3D [23] [24].
- Utilização do Método Newmark como esquema de progressão temporal no Método da Envoltória.
- Demonstração da análise de estabilidade para o Método de Newmark com o Método da Envoltória, utilizando PML anisotrópica.

1.3 Organização da Tese

A tese está dividida em cinco capítulos: este primeiro e mais quatro. Além dos cinco capítulos existem três apêndices. No Capítulo 2 apresenta-se uma introdução ao Método dos Elementos Finitos, iniciando com a formulação variacional utilizada em eletromagnetismo. Como exemplo, utiliza-se a equação vetorial de onda no domínio da frequência, onde primeiro mostra-se o princípio variacional padrão convencional, que não pode ser utilizado para situações onde as

condições de contorno são não-homogêneas e, também, não pode ser utilizado quando há perdas nos materiais. O princípio variacional padrão modificado, que pode ser utilizado quando há condições de contorno não-homogêneas mas continua com a restrição de não poder ser utilizado quando há materiais com perdas e o princípio variacional generalizado, que acaba com as duas restrições anteriores utilizando-se o produto interno simétrico. Na segunda seção apresenta-se a formulação fraca de Galerkin, também utilizando-se como exemplo a equação vetorial de onda no domínio da frequência. Em seguida, vem a discretização do domínio, onde mostra-se a montagem do sistema de equações finais a ser resolvido.

O Capítulo 3 trata do espalhamento de ondas eletromagnéticas por estruturas dielétricas anisotrópicas em 3 dimensões. É apresentada a formulação básica a partir do teorema do volume equivalente. Após isto, obtém-se a matriz elementar para cada termo da equação, incluindo os termos da fonte equivalente e das ABCs. Mostra-se, também, como calcular os campos distantes a partir dos campos calculados no domínio discretizado, por meio do teorema da superfície equivalente e por meio do próprio teorema das correntes volumétricas equivalentes. São apresentados vários resultados:

- Comparando-se o Método dos Elementos Finitos com o Método dos Momentos e seus respectivos erros em relação à resposta exata no caso da esfera dielétrica [21].
- São comparadas as soluções quando utilizadas ABCs de segunda ordem e as PMLs.
- Compara-se vários valores de perdas na camada PML.
- São comparados os resultados do cálculo do campo distante com o uso do teorema da superfície equivalente e o uso do teorema das correntes volumétricas equivalentes em duas situações distintas: uma sem perdas e outra com grandes perdas.
- São comparados resultados do espalhamento por uma esfera dielétrica anisotrópica calculada com o uso dos elementos finitos desta tese com o uso do Método dos Elementos Finitos em conjunto com a formulação integral e resultados do método dos momentos.

No Capítulo 4 mostra-se, pela primeira vez, o Método da Envoltória no domínio do tempo em uma formulação vetorial 3D, onde a portadora é retirada e só trabalha-se com a envoltória, isto é, com variações temporais mais lentas, permitindo que os passos no tempo sejam bem maiores. Apresenta-se uma análise de estabilidade para o caso de uso das PMLs anisotrópicas em conjunto com o método; os resultados deste método são comparados com os resultados utilizando-se FDTD,

Finite Difference Time Domain e, ainda, são comparados com o Método da Envoltória com o método clássico do domínio do tempo; este, por sua vez, é aplicado de duas formas: com portadora modulada em várias bandas e com pulso rápido sem portadora, cobrindo todo o espectro de interesse. Também são comparados, para uma estrutura curva, resultados obtidos com o uso do Método dos Elementos Finitos no domínio da frequência e com o uso deste método.

No Capítulo 5 faz-se uma conclusão a respeito dos resultados obtidos nos Capítulos 2 e 3 e apresenta-se sugestões de trabalhos futuros para a continuação desta tese.

No Apêndice A explica-se as funções de forma vetoriais de aresta CT/LN “*Constante Tangencial/Linear Normal*” [25] utilizadas nesta tese. Neste apêndice, apresenta-se ainda, o motivo do uso das funções de forma de aresta, o motivo da diminuição no número de graus de liberdade no tetraedro e, também, que a continuidade na interface entre elementos das componentes tangenciais está garantida e as componentes normais estão livres. No Apêndice A, também está descrita a obtenção das expressões dos termos das matrizes elementares, até no nível de se programar em uma linguagem.

No Apêndice B descreve-se a obtenção do método de Newmark, para discretização das derivações no tempo utilizadas no Capítulo 3. A obtenção das expressões de Newmark é feita de duas formas: por meio da série de Taylor e do método dos elementos finitos 1D. Por fim, mostra-se a equivalência entre as duas formas.

No Apêndice C mostra-se a ABC de primeira ordem de Silver-Miller, ABC de segunda ordem para uso em estruturas de microfitas, ABC de Engquist-Madja, ABC de segunda ordem generalizadas de Trefethen-Halpern além da análise teórica do coeficiente de reflexão, ABC de segunda ordem de Bayllis-Turkel no caso escalar, com a análise da ordem de convergência, e a adaptação de todas estas ABCs para utilização em formulações vetoriais 3D. Ainda no Apêndice C, analisa-se as PMLs anisotrópicas e, também, as PMLs de Berenger e a relação entre as mesmas. Além disto, descreve-se a obtenção de PMLs para materiais bianisotrópicos.

Capítulo 2

O Método dos Elementos Finitos

2.1 Introdução ao Método dos Elementos Finitos e o seu Uso em Eletromagnetismo.

Duas formulações são empregadas no método dos elementos finitos, a formulação variacional e o método de Galerkin. As duas convergem para a mesma formulação mas apesar da simplicidade do método de Galerkin, a formulação variacional permite uma visão mais ampla do problema físico [8]. Aqui apresenta-se os princípios de ambas, apesar de na tese ser usado o método de Galerkin em todos os casos.

2.1.1 Princípio Variacional no Padrão Convencional.

Dado um problema descrito por uma equação diferencial,

$$\mathcal{L}\phi = f \quad (2.1)$$

e por condições de contorno, se o operador \mathcal{L} for linear, e auto-adjunto, isto é:

$$\langle \mathcal{L}\phi, \psi \rangle = \langle \phi, \mathcal{L}\psi \rangle \quad (2.2)$$

sendo $\langle \phi, \psi \rangle$ o produto interno entre ϕ e ψ , o operador \mathcal{L} opera sobre um espaço \mathcal{V} de funções, e se é positivo definido, isto é:

$$\langle \mathcal{L}\phi, \phi \rangle = \begin{cases} > 0 & \phi \neq 0 \\ = 0 & \phi = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

então a solução de (2.1), com as suas condições de contorno, pode ser obtida minimizando o seguinte funcional¹:

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}(\phi), \phi \rangle - \frac{1}{2} \langle \phi, f \rangle - \frac{1}{2} \langle f, \phi \rangle \quad (2.4)$$

Para provar o princípio variacional é necessário mostrar que a equação diferencial (2.1) é o funcional (2.4) na condição estacionária [26], isto é, $\delta F = 0$. Mostrar que o ponto da condição estacionária é mínimo equivale a $\delta(\delta F) > 0$. Considerando a definição da derivada de Gateaux,

$$\delta F = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(\phi + \epsilon \delta \phi) - F(\phi)}{\epsilon} \quad (2.5)$$

que é a generalização do conceito da derivada em \mathbb{R}^n , pode-se escrever que:

$$\delta F(\phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}(\phi + \epsilon \delta \phi), \phi + \epsilon \delta \phi \rangle - \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}(\phi), \phi \rangle \\ -\frac{1}{2} \langle \phi + \epsilon \delta \phi, f \rangle - \frac{1}{2} \langle f, \phi + \epsilon \delta \phi \rangle + \frac{1}{2} \langle \phi, f \rangle + \frac{1}{2} \langle f, \phi \rangle \end{array} \right]}{\epsilon} \quad (2.6)$$

$$\delta F(\phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{\epsilon}{2} \langle \mathcal{L}(\phi), \delta \phi \rangle + \frac{\epsilon}{2} \langle \mathcal{L}(\delta \phi), \phi \rangle + \frac{\epsilon^2}{2} \langle \mathcal{L}(\delta \phi), \delta \phi \rangle - \frac{\epsilon}{2} \langle \delta \phi, f \rangle - \frac{\epsilon}{2} \langle f, \delta \phi \rangle}{\epsilon} \quad (2.7)$$

daí,

$$\delta F(\phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \langle \mathcal{L}(\phi), \delta \phi \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}(\delta \phi), \phi \rangle + \frac{\epsilon}{2} \langle \mathcal{L}(\delta \phi), \delta \phi \rangle - \frac{1}{2} \langle \delta \phi, f \rangle - \frac{1}{2} \langle f, \delta \phi \rangle \right) \quad (2.8)$$

$$\delta F(\phi) = \frac{1}{2} (\langle \mathcal{L}(\phi), \delta \phi \rangle + \langle \mathcal{L}(\delta \phi), \phi \rangle - \langle \delta \phi, f \rangle - \langle f, \delta \phi \rangle) \quad (2.9)$$

Como o operador \mathcal{L} é auto-adjunto, $\langle \mathcal{L}(\delta \phi), \phi \rangle = \langle \delta \phi, \mathcal{L}(\phi) \rangle$ e se o produto interno for definido como:

$$\langle \phi, \psi \rangle \triangleq \int_{\Omega} \phi \psi^* d\Omega, \quad (2.10)$$

sendo ψ^* o complexo conjugado de ψ , tem-se que $\langle \mathcal{L}(\delta \phi), \phi \rangle = \langle \mathcal{L}(\phi), \delta \phi \rangle^*$; assim, a equação (2.9) fica:

$$\delta F(\phi) = Re\{ \langle \mathcal{L}(\phi) - f, \delta \phi \rangle \} \quad (2.11)$$

que na condição estacionária, isto é, $\delta F = 0$, como $\delta \phi$ é arbitrária, resulta em:

$$\mathcal{L}(\phi) - f = 0 \quad (2.12)$$

que é a equação diferencial original, logo o funcional F na condição estacionária é equivalente ao problema original. Falta mostrar que a condição estacionária também é um ponto de mínimo; assim, tomando a segunda variação de F , vem:

$$\delta(\delta F) = \delta \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(\phi + \epsilon \delta \phi) - F(\phi)}{\epsilon} = Re\{ \langle \mathcal{L}(\delta \phi), \delta \phi \rangle \} \quad (2.13)$$

¹Outros funcionais poderiam ser usados

Como \mathcal{L} é positivo definido, $\delta(\delta F) > 0$, temos que a condição estacionária de F é também um mínimo. Se a condição estacionária é um mínimo, ou um máximo, do funcional na verdade não importa, só tem significado para alguns problemas físicos, mas é essencial que \mathcal{L} seja auto-adjunto para que a condição estacionária de F seja equivalente ao problema original. Para mostrar as limitações do princípio variacional padrão convencional, considere o exemplo da equação de onda vetorial [8]:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{J} \quad (2.14)$$

Para este caso, o operador \mathcal{L} pode ser escrito como:

$$\mathcal{L} = \nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times - k_0^2 \epsilon_r \quad (2.15)$$

Para verificar se o operador é positivo definido [8], com a definição de produto interno, faz-se;

$$\langle \mathcal{L}\vec{E}, \vec{F} \rangle = \iiint_V \left[\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} \right] \cdot \vec{F}^* dV \quad (2.16)$$

Com a segunda identidade vetorial de Green $\iiint_V \left[\vec{b} \cdot (\nabla \times u \nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times u \nabla \times \vec{b}) \right] dv = \oint_S u (\vec{a} \times \nabla \times \vec{b} - \vec{b} \times \nabla \times \vec{a}) \cdot \hat{n} dS$, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}\vec{E}, \vec{F} \rangle &= \iiint_V \vec{E} \cdot \left[\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{F}^* - k_0^2 \epsilon_r \vec{F}^* \right] dV + \oint_S \frac{1}{\mu_r} [\vec{E} \times \nabla \times \vec{F}^* - \vec{F}^* \times \nabla \times \vec{E}] \cdot \hat{n} dS = \\ &\langle \mathcal{L}\vec{E}, \vec{F} \rangle = \langle \vec{E}, \mathcal{L}\vec{F} \rangle + \oint_S \frac{1}{\mu_r} [\vec{E} \times \nabla \times \vec{F}^* - \vec{F}^* \times \nabla \times \vec{E}] \cdot \hat{n} dS \end{aligned} \quad (2.17)$$

Logo, para que o operador \mathcal{L} seja auto-adjunto, é necessário que a integral de superfície em (2.17) se anule. Com o produto triplo, tem-se que:

$$\begin{aligned} \vec{E} \times (\nabla \times \vec{F}^*) \cdot \hat{n} &= \hat{n} \times \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{F}^*) = -\hat{n} \times (\nabla \times \vec{F}^*) \cdot \vec{E} \\ -\vec{F}^* \times (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} &= -\hat{n} \times \vec{F}^* \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \hat{n} \times (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{F}^* \end{aligned}$$

Assim, supõe-se que \vec{E} e \vec{F} satisfazem a condição de Dirichlet homogênea em parte da superfície externa,

$$\left. \begin{aligned} \hat{n} \times \vec{E} &= 0 \\ \hat{n} \times \vec{F}^* &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ sobre } S_1 \quad (2.18)$$

e satisfazem a condição de Neumann homogênea do terceiro tipo na parte restante de S ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\mu_r} \hat{n} \times \nabla \times \vec{E} + \gamma_e \hat{n} \times \hat{n} \times \vec{E} &= 0 \\ \frac{1}{\mu_r^*} \hat{n} \times \nabla \times \vec{F}^* + \gamma_e^* \hat{n} \times \hat{n} \times \vec{F}^* &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ sobre } S_2 \quad (2.19)$$

Assim, para $S = S_1 + S_2$, o integrando na integral de superfície será nulo se μ_r , γ_e e ϵ_r forem reais. Daí, o operador \mathcal{L} só será auto-adjunto para meios sem perdas e isotrópicos, e para situações onde as condições de contorno sejam homogêneas.

2.1.2 Princípio Variacional Padrão Modificado.

Se as condições de contorno não forem homogêneas, o conjunto de funções ϕ não constituem um espaço de funções, já que a soma das mesmas, por exemplo, não possui a mesma condição de contorno das funções; portanto, não caíndo no conjunto, não satisfazem a definição de espaço. No entanto, em problemas eletromagnéticos, frequentemente as condições de contorno são não-homogêneas, como no caso de problemas de radiação, já que não se pode discretizar todo o espaço, admitem-se condições de contorno absorventes, por exemplo. Portanto, para que o princípio variacional padrão seja válido nestes casos, pode-se modificá-lo. Define-se;

$$\phi = \phi' + u, \quad (2.20)$$

onde u satisfaz as condições de contorno não-homogêneas de ϕ ; logo $\phi' = \phi - u$ satisfaz as condições de contorno homogêneas, tal que:

$$\mathcal{L}(\phi') = \mathcal{L}(\phi - u) = \mathcal{L}(\phi) - \mathcal{L}(u) = f - \mathcal{L}(u) = f' \quad (2.21)$$

Daí,

$$\mathcal{L}(\phi') = f' \quad \text{onde} \quad f' = f - \mathcal{L}(u) \quad (2.22)$$

sendo que o conjunto de funções ϕ' constituem um espaço de funções. Então, o funcional de (2.4), fica:

$$F(\phi') = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}(\phi'), \phi' \rangle - \frac{1}{2} \langle \phi', f' \rangle - \frac{1}{2} \langle f', \phi' \rangle \quad (2.23)$$

e utilizando (2.22), fica-se com:

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}(\phi - u), \phi - u \rangle - \frac{1}{2} \langle \phi - u, f - \mathcal{L}(u) \rangle - \frac{1}{2} \langle f - \mathcal{L}(u), \phi - u \rangle \quad (2.24)$$

Expandindo, vem:

$$\begin{aligned} F(\phi) &= \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}(\phi), \phi \rangle - \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}(\phi), u \rangle - \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}(u), \phi \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}(u), u \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle \phi, f \rangle + \frac{1}{2} \langle \phi, \mathcal{L}(u) \rangle + \frac{1}{2} \langle u, f \rangle - \frac{1}{2} \langle u, \mathcal{L}(u) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle f, \phi \rangle + \frac{1}{2} \langle f, u \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}(u), \phi \rangle - \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}(u), u \rangle \end{aligned} \quad (2.25)$$

Como para encontrar a condição estacionária faz-se a variação em relação a ϕ , os termos que só possuem a função u podem ser descartados; assim;

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}(\phi), \phi \rangle - \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}(\phi), u \rangle + \frac{1}{2} \langle \phi, \mathcal{L}(u) \rangle - \frac{1}{2} \langle \phi, f \rangle - \frac{1}{2} \langle f, \phi \rangle \quad (2.26)$$

Agora, se o operador \mathcal{L} é auto-adjunto para condições de contorno homogêneas, em problemas onde as condições de contorno são não-homogêneas pode-se utilizar o funcional descrito em (2.26). Dando continuidade ao exemplo da seção anterior, para a equação de onda vetorial (2.14), foi visto que o operador descrito por (2.15) é auto-adjunto para condições de contorno homogêneas, com μ_r , γ_e e ϵ_r reais.

2.1.3 Princípio Variacional Generalizado.

Apesar do princípio variacional padrão modificado poder ser utilizado em problemas eletromagnéticos com condições de contorno não-homogêneas, em problemas que envolvem perdas, isto é, com μ_r e ϵ_r complexos, e existe uma gama enorme de problemas deste tipo; como por exemplo, quando se usam camadas absorventes perfeitamente casadas, PMLs, o princípio variacional padrão modificado ainda não pode ser utilizado. No caso do exemplo da equação vetorial de onda, observa-se que o operador não é auto-adjunto quando μ_r e ϵ_r são complexos, devido à definição de produto interno. Se o produto interno for definido na forma,

$$\langle \phi, \psi \rangle \triangleq \int_{\Omega} \phi \psi d\Omega \quad (2.27)$$

em vez da forma em (2.10), pode-se facilmente eliminar o problema. A condição estacionária do funcional padrão, descrito em (2.4), continua equivalendo à equação diferencial original, como pode-se mostrar a partir de (2.9),

$$\delta F(\phi) = \frac{1}{2} [\langle \mathcal{L}(\phi), \delta\phi \rangle + \langle \mathcal{L}(\delta\phi), \phi \rangle - \langle \delta\phi, f \rangle - \langle f, \delta\phi \rangle] \quad (2.28)$$

Com o operador \mathcal{L} auto-adjunto, a condição estacionária, $\delta F(\phi) = 0$, fica:

$$\delta F(\phi) = \langle \mathcal{L}(\phi) - f, \delta\phi \rangle = 0 \quad (2.29)$$

Assim, o funcional modificado (2.26), pode ser reescrito como:

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}(\phi), \phi \rangle - \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}(\phi), u \rangle + \frac{1}{2} \langle \phi, \mathcal{L}(u) \rangle - \langle f, \phi \rangle \quad (2.30)$$

Assim, para condições de contorno não-homogêneas, com μ_r e ϵ_r complexos, pode-se encontrar o funcional da equação vetorial de onda, com as condições de contorno abaixo.

$$\hat{n} \times \vec{E} = \vec{P} \quad \text{sobre } S_1 \quad (2.31)$$

e

$$\frac{1}{\mu_r} \hat{n} \times \nabla \times \vec{E} + \gamma_e \hat{n} \times \hat{n} \times \vec{E} = \vec{U} \quad \text{sobre } S_2 \quad (2.32)$$

Sendo $S = S_1 + S_2$, com (2.30) pode-se usar o funcional,

$$\begin{aligned} F(\vec{E}) = & \frac{1}{2} \iiint_V \left[\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} \right] \cdot \vec{E} dV \\ & - \frac{1}{2} \iiint_V \left[\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} \right] \cdot \vec{u} dV \\ & + \frac{1}{2} \iiint_V \vec{E} \cdot \left[\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{u} - k_0^2 \epsilon_r \vec{u} \right] dV \\ & + j\omega_0 \mu_0 \iiint_V (\vec{E} \cdot \vec{J}) dv \end{aligned} \quad (2.33)$$

Utilizando-se a identidade vetorial,

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B} \quad (2.34)$$

pode-se escrever:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \iiint_V \vec{u} \cdot \nabla \times (\mu_r^{-1} \nabla \times \vec{E}) dV &= -\frac{1}{2} \iiint_V (\nabla \times \vec{u}) \cdot (\mu_r^{-1} \nabla \times \vec{E}) dV - \frac{1}{2} \oint_S [(\mu_r^{-1} \nabla \times \vec{E}) \times \vec{u}] \cdot \hat{n} dS \\ \frac{1}{2} \iiint_V \vec{E} \cdot \nabla \times (\mu_r^{-1} \nabla \times \vec{u}) dV &= \frac{1}{2} \iiint_V (\nabla \times \vec{E}) \cdot (\mu_r^{-1} \nabla \times \vec{u}) dV + \frac{1}{2} \oint_S [(\mu_r^{-1} \nabla \times \vec{u}) \times \vec{E}] \cdot \hat{n} dS \end{aligned} \quad (2.35)$$

Admitindo que μ_r e ϵ_r tenham, no máximo, anisotropia diagonal na região de fronteira do domínio, (2.35) em (2.33), resulta em:

$$\begin{aligned} F(\vec{E}) = & \frac{1}{2} \iiint_V \left[\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} \right] \cdot \vec{E} dV \\ & + \frac{1}{2} \oint_S \mu_r^{-1} [(\nabla \times \vec{u}) \times \vec{E} - (\nabla \times \vec{E}) \times \vec{u}] \cdot \hat{n} dS \\ & + j\omega_0 \mu_0 \iiint_V (\vec{E} \cdot \vec{J}) dv \end{aligned} \quad (2.36)$$

Aplicando as condições de contorno (2.31) e (2.32) em (2.36), vem:

$$\begin{aligned}
F(\vec{E}) &= \frac{1}{2} \iiint_V \left[\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} \right] \cdot \vec{E} dV \\
&+ \frac{1}{2} \oint_{S_1} \mu_r^{-1} [\vec{P} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{P} \cdot (\nabla \times \vec{u})] dS \\
&+ \frac{1}{2} \oint_{S_2} (\vec{U} \cdot \vec{E} - \vec{U} \cdot \vec{u}) dS \\
&+ j\omega_0 \mu_0 \iiint_V (\vec{E} \cdot \vec{J}) dv
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Descartando os termos que não contenham \vec{E} , já que deve-se ter a condição estacionária do funcional em relação a \vec{E} , com o objetivo de encontrar a solução do problema original, vem:

$$\begin{aligned}
F(\vec{E}) &= \frac{1}{2} \iiint_V \left[\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} \right] \cdot \vec{E} dV \\
&+ \frac{1}{2} \oint_{S_1} \mu_r^{-1} \vec{P} \cdot (\nabla \times \vec{E}) dS + \frac{1}{2} \oint_{S_2} \vec{U} \cdot \vec{E} dS + j\omega_0 \mu_0 \iiint_V (\vec{E} \cdot \vec{J}) dv
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Voltando a utilizar a identidade vetorial (2.34), no primeiro termo do lado direito da equação (2.38), tem-se:

$$\begin{aligned}
F(\vec{E}) &= \frac{1}{2} \iiint_V \left[(\nabla \times \vec{E}) \cdot \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{E}) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} \cdot \vec{E} \right] dV \\
&+ \frac{1}{2} \oint_S \hat{n} \times (\mu_r^{-1} \nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{E} dS \\
&+ \frac{1}{2} \oint_{S_1} \mu_r^{-1} \vec{P} \cdot (\nabla \times \vec{E}) dS + \frac{1}{2} \oint_{S_2} \vec{U} \cdot \vec{E} dS + j\omega_0 \mu_0 \iiint_V (\vec{E} \cdot \vec{J}) dv
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Novamente, utilizando as condições de contorno (2.31) e (2.32) em (2.39), vem:

$$\begin{aligned}
F(\vec{E}) &= \frac{1}{2} \iiint_V \left[(\nabla \times \vec{E}) \cdot \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{E}) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} \cdot \vec{E} \right] dV \\
&- \frac{1}{2} \oint_{S_1} \mu_r^{-1} \vec{P} \cdot (\nabla \times \vec{E}) dS + \frac{1}{2} \oint_{S_2} (\vec{U} - \gamma_e \hat{n} \times \hat{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{E} dS \\
&+ \frac{1}{2} \oint_{S_1} \mu_r^{-1} \vec{P} \cdot (\nabla \times \vec{E}) dS + \frac{1}{2} \oint_{S_2} \vec{U} \cdot \vec{E} dS + j\omega_0 \mu_0 \iiint_V (\vec{E} \cdot \vec{J}) dv,
\end{aligned} \tag{2.40}$$

que, finalmente, resulta em:

$$\begin{aligned}
F(\vec{E}) = & \frac{1}{2} \iiint_V \left[(\nabla \times \vec{E}) \cdot \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{E}) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} \cdot \vec{E} \right] dV \\
& + \oint_{S_2} (\vec{U} - \frac{1}{2} \gamma_e \hat{n} \times \hat{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{E} dS \\
& + j\omega_0 \mu_0 \iiint_V (\vec{E} \cdot \vec{J}) dv
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Observando a equação (2.41) percebe-se que a parcela do contorno S_1 onde há conhecimento das incógnitas (2.31), neste caso a componente tangencial do campo elétrico, não aparece no funcional e deverá ser aplicada já no sistema de equações finais, quando o problema já for discretizado; este tipo de condição de contorno é denominada de condição de contorno essencial. Já na parcela do contorno S_2 , onde é conhecida a derivada da função incógnita (2.32), neste caso a componente tangencial do rotacional do campo elétrico, aplica-se a condição de contorno no funcional, ainda no contínuo, antes da discretização do problema e denomina-se este caso de condição de contorno natural.

2.1.4 Método de Galerkin.

Dado o problema de contorno,

$$\mathcal{L}\phi = f \tag{2.42}$$

sendo \mathbb{V} um espaço de funções e $\phi \in \mathbb{V}$. Pode-se definir o resíduo r ,

$$r = \mathcal{L}\tilde{\phi} - f \tag{2.43}$$

quando $\tilde{\phi}$ é uma aproximação da solução ϕ . Se forem tomadas as funções de peso ou também chamadas funções teste, w , sendo que $\forall w \in \mathbb{W}$, sendo \mathbb{W} um espaço de funções, o método dos pesos residuais ou método de Petrov-Galerkin é descrito com: Encontrar um $\phi = \tilde{\phi} \in \mathbb{V}$ tal que;

$$\langle r, w \rangle = \langle \mathcal{L}(\tilde{\phi}), w \rangle - \langle f, w \rangle = 0 \tag{2.44}$$

Se $\mathbb{W} = \mathbb{V}$, o método denomina-se de método de Galerkin. No caso das condições de contorno não-homogêneas, ϕ não fará parte de um espaço de funções, então faz-se $\phi = \phi' + u$ onde u satisfaz as condições de contorno não-homogêneas e ϕ' satisfaz condições de contorno homogêneas. Assim, aplica-se Galerkin sobre $\mathcal{L}(\phi') = f'$ sendo $f' = f - \mathcal{L}(u)$, $\langle \mathcal{L}(\phi'), w \rangle = \langle f - \mathcal{L}(u), w \rangle$, que com a definição de produto interno generalizado, volta a ser $\langle \mathcal{L}(\phi), w \rangle = \langle f, w \rangle$. Como exemplo,

será aplicado o método de Galerkin na equação vetorial de onda, dada em (2.14), com as condições de contorno (2.31) e (2.32). Aplicando Galerkin em (2.14), vem:

$$\iiint_V \left[\nabla \times \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{w} \right] dV - k_0^2 \iiint_V \epsilon_r \vec{E} \cdot \vec{w} dV = -j\omega\mu_0 \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{w} dV \quad (2.45)$$

Aplicando a identidade vetorial (2.34) ao primeiro termo de (2.45), vem:

$$\iiint_V \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{E}) \cdot \nabla \times \vec{w} \right] dV + \oint_S \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{E}) \times \vec{w} \cdot \hat{n} \right] dS - k_0^2 \iiint_V \epsilon_r \vec{E} \cdot \vec{w} dV = -j\omega\mu_0 \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{w} dV \quad (2.46)$$

que com o produto triplo pode ser reescrito como:

$$\iiint_V \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{E}) \cdot \nabla \times \vec{w} \right] dV + \oint_S \left[\hat{n} \times \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{w} \right] dS - k_0^2 \iiint_V \epsilon_r \vec{E} \cdot \vec{w} dV = -j\omega\mu_0 \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{w} dV \quad (2.47)$$

As funções peso, que são arbitrárias, devem obedecer a condição de contorno essencial da incógnita de forma homogênea; assim (2.47) fica:

$$\iiint_V \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{E}) \cdot \nabla \times \vec{w} \right] dV + \oint_{S_2} \left[(\vec{U} - \gamma_e \hat{n} \times \hat{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{w} \right] dS - k_0^2 \iiint_V \epsilon_r \vec{E} \cdot \vec{w} dV = -j\omega\mu_0 \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{w} dV \quad (2.48)$$

que é a formulação fraca de Galerkin. Nota-se que o grau de requerimento de derivação em \vec{E} caiu de ordem 2 para ordem 1, desde a equação de onda original até a formulação fraca de Galerkin (2.48); isto é fundamental para o método dos elementos finitos, pois no método são usadas funções de aproximação para interpolação do campo do tipo C_0 , isto é, funções contínuas mas com derivadas de primeira ordem descontínuas. Isto deve-se ao processo de discretização como será mostrado adiante.

2.2 Discretização

Após serem encontradas as formulações através do princípio variacional generalizado ou através do método de Galerkin, faz-se uma aproximação da função que deseja-se encontrar por um somatório de coeficientes multiplicados por funções de base conhecidas L_j , na forma:

$$\phi = \sum_{j=1}^N c_j L_j = \{c\}^t \{L\} = \{L\}^t \{c\} \quad (2.49)$$

onde c_j são os coeficientes a serem encontrados, $\{c\}$ um vetor com todos os coeficientes e $\{L\}$ um vetor com todas as funções de base e $\{c\}^t$ indica o transposto do vetor $\{c\}$. As funções de base L_j são definidas em todo o domínio onde está ϕ .

2.2.1 Discretização com o Método Rayleigh-Ritz

O método de Rayleigh-Ritz é, basicamente, a utilização da aproximação (2.49) na formulação variacional generalizada. Considerando um problema com condições de contorno homogêneas, pode-se escrever;

$$F = \sum_{i=1}^N \left\{ c_i \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} L_i \mathcal{L}(L_j) d\Omega c_j \right] - c_i \int_{\Omega} L_i f d\Omega \right\} d\Omega \quad (2.50)$$

sendo Ω o domínio onde se procura a solução. Para encontrar a condição estacionária do funcional F deve-se fazer a derivada deste em relação a cada coeficiente c_i , fornecendo para cada derivação uma equação;

$$\frac{\partial F}{\partial c_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N c_j \left[\int_{\Omega} L_i \mathcal{L}(L_j) d\Omega + \int_{\Omega} L_j \mathcal{L} L_i d\Omega \right] - \int_{\Omega} L_i f d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots, N \quad (2.51)$$

Como o operador é auto-adjunto, pode-se escrever;

$$\frac{\partial F}{\partial c_i} = \sum_{j=1}^N c_j \left[\int_{\Omega} L_i \mathcal{L}(L_j) d\Omega \right] - \int_{\Omega} L_i f d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots, N \quad (2.52)$$

que pode ser reescrita na forma matricial da seguinte forma:

$$[K]\{c\} = \{b\} \quad (2.53)$$

sendo:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} L_i \mathcal{L}(L_j) d\Omega \quad (2.54)$$

e

$$b_i = \int_{\Omega} L_i f d\Omega \quad (2.55)$$

2.2.2 Discretização com o Método de Galerkin

O método de Galerkin basicamente é a aplicação da aproximação (2.49) em (2.44), considerando-se que $w = \phi_i$, o que leva a:

$$\sum_{j=1}^N c_j \int_{\Omega} L_i \mathcal{L}(L_j) d\Omega - \int_{\Omega} L_i f d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots, N \quad (2.56)$$

que pode ser reescrita na forma matricial da seguinte forma:

$$[K]\{c\} = \{b\} \quad (2.57)$$

sendo:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} L_i \mathcal{L}(L_j) d\Omega \quad (2.58)$$

e

$$b_i = \int_{\Omega} L_i f d\Omega \quad (2.59)$$

Esta é exatamente a mesma expressão encontrada com o uso do método de Rayleigh-Ritz.

2.2.3 O Método Rayleigh-Ritz e o Método de Galerkin em Elementos Finitos

Tanto no método de Rayleigh-Ritz quanto no método de Galerkin, a escolha das funções de base é feita com funções válidas em todo o domínio. Esta escolha pode ser realizada com o conhecimento prévio do problema, mas mesmo assim é uma escolha difícil de ser realizada. No método dos elementos finitos, o domínio é dividido em subdomínios denominados elementos, por exemplo, um domínio 2D pode ser dividido em triângulos, como mostrado na microfita da Figura 2.1, e são definidas as funções de base em um certo número de subdomínios, tendo valor nulo nos

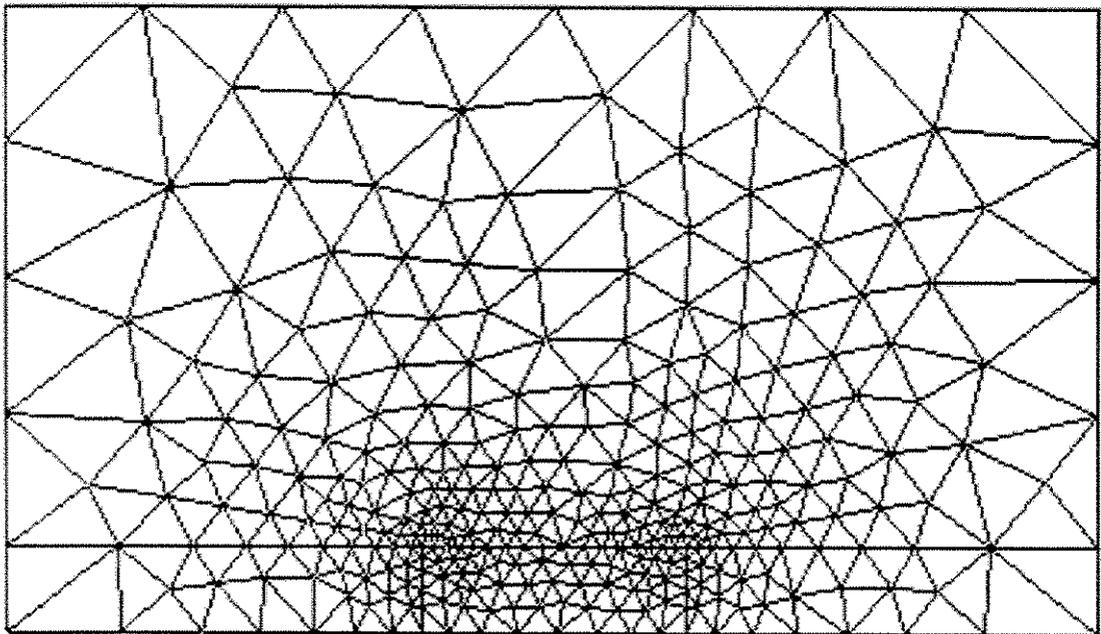


Figura 2.1: Domínio 2D discretizado com triângulos.

domínios restantes. A parcela da função de base dentro de um subdomínio chama-se de função de

forma; assim, as integrações dos produtos internos para formar a matriz, como na equação (2.60), pode-se calcular elemento a elemento,

$$K_{i j} = \int_{\Omega} L_i \mathcal{L}(L_j) d\Omega = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega_e} L_i^e \mathcal{L}(L_j^e) d\Omega_e = \sum_{e=1}^M K_{i j}^e \quad (2.60)$$

sendo Ω_e o domínio do elemento e , L_i^e a função de base i dentro do elemento e , M o número de elementos que formam o domínio Ω . Logo, com cada elemento da matriz $K_{i j}$ pode-se calcular elemento a elemento, $K_{i j}^e$. A matriz $[K]$ é denominada de matriz global e pode-se também definir uma matriz $[K^e]$ que é denominada de matriz elementar. Então, o processo de formação da matriz global é feito da seguinte forma [27]:

- Para um certo subdomínio, elemento, calcula-se a matriz elementar completa.
- Cada termo da matriz elementar é acumulado na sua respectiva posição na matriz global.
- Quando os passos acima forem realizados para todos os elementos, cada termo da matriz global terá sido completamente montado.

Como as funções de base só possuem valor diferente de zero em um certo número de elementos, muitos componentes da matriz global serão nulos. Serão diferentes de zero os elementos $K_{i j}$ no quais as funções de base i e j sejam diferentes de zero em pelo menos 1 subdomínio. Isto faz com que a matriz global tenha muitos elementos nulos. No caso desta tese, que utiliza funções de base ligadas às arestas de tetraedro, em domínios 3D, o número de elementos não nulos da matriz global está em entre 0,1 a 0,3 %. A forma de obtenção das expressões das matrizes elementares está descrita no Apêndice A.

Capítulo 3

Espalhamento de Ondas por Materiais com Anisotropia Elétrica e Magnética.

3.1 Introdução

O espalhamento de ondas por dielétricos sempre foi um desafio a ser vencido por métodos numéricos e o mais popular para este tipo de cálculo é o Método dos Momentos, MoM, que tem a característica de já possuir a condição de radiação embutida no próprio método e permite trabalhar com discretizações não-uniformes. A grande desvantagem do método é que a matriz resultante é cheia. Existem algumas tentativas de reduzir este problema fazendo inversas por partes, utilizando critérios de importância na ligação entre dois elementos da malha, Urbana-Champaign. Utiliza-se, também, uma forma iterativa bastante engenhosa e eficiente: calcula-se a onda espalhada só por parte do espalhador e o resultado será computado como se fizesse parte da onda incidente para o resto do espalhador e assim por diante até que haja convergência [4]. Além disso, as funções propostas por Antenor e Mendes [4] melhoraram o MoM, pois possuem divergência nula, fazendo com que não apareçam cargas espúrias no interior das regiões homogêneas do espalhador. O Método dos Elementos Finitos, por sua vez, necessita de condições de contorno nas superfícies abertas: ABCs descritas no Apêndice C, PMLs também descritas no Apêndice C, ou ambas, já que o método trabalha com as equações na forma diferencial. Para que as ABCs funcionem, existe a necessidade de uma certa distância do elemento radiador e as PMLs podem até ficar encostadas no radiador, mas são camadas que necessitam de discretização. Assim, é sempre necessário que sejam discretizadas regiões não pertencentes ao espalhador, aumentando a ordem da matriz a ser invertida. A boa notícia é que a matriz resultante do Método dos Elementos Finitos é esparsa e a

percentagem dos elementos não-nulos na matriz está em torno de 2 a 3%.

3.2 Formulação.

Na formulação aqui utilizada será empregado o teorema das correntes volumétricas equivalentes [28], onde o espalhador, para efeito de cálculo da onda espalhada, pode ser substituído pelas seguintes correntes equivalentes:

$$\vec{J}_{eq} = j\omega\epsilon_0(\bar{\epsilon}_r - \bar{I}) \cdot \vec{E} \quad (3.1)$$

$$\vec{M}_{eq} = j\omega\mu_0(\bar{\mu}_r - \bar{I}) \cdot \vec{H} \quad (3.2)$$

sendo \vec{J}_{eq} é a densidade de corrente elétrica equivalente, \vec{M}_{eq} é a densidade de corrente magnética equivalente, \vec{E} o campo elétrico total, \vec{H} o campo magnético total, $\bar{\epsilon}_r$ o tensor permissividade elétrica relativa e $\bar{\mu}_r$ o tensor permeabilidade magnética relativa.

O campo elétrico total pode ser escrito como:

$$\vec{E} = \vec{E}^{inc} + \vec{E}^s \quad (3.3)$$

sendo \vec{E}^{inc} o campo elétrico incidente e \vec{E}^s o campo elétrico espalhado.

O campo magnético total pode ser escrito como:

$$\vec{H} = \vec{H}^{inc} + \vec{H}^s \quad (3.4)$$

sendo \vec{H}^{inc} o campo magnético incidente e \vec{H}^s o campo magnético espalhado. Os campos espalhados podem ser calculados pelas equações de Maxwell tendo como fonte as correntes \vec{J}_{eq} e \vec{M}_{eq} ,

$$\nabla \times \vec{E}^s = -\vec{M}_{eq} - j\omega\mu_0\vec{H}^s \quad (3.5)$$

$$\nabla \times \vec{H}^s = \vec{J}_{eq} + j\omega\epsilon_0\vec{E}^s \quad (3.6)$$

Substituindo (3.2) e (3.4) na equação (3.5), vem:

$$\nabla \times \vec{E}^s = -j\omega\mu_0(\bar{\mu}_r - \bar{I}) \cdot \vec{H}^{inc} - j\omega\mu_0(\bar{\mu}_r - \bar{I}) \cdot \vec{H}^s - j\omega\mu_0\vec{H}^s \quad (3.7)$$

Daí, obtém-se:

$$\nabla \times \vec{E}^s = j\omega\mu_0(\bar{I} - \bar{\mu}_r) \cdot \vec{H}^{inc} - j\omega\mu_0\bar{\mu}_r \cdot \vec{H}^s \quad (3.8)$$

Multiplicando- os dois lados da equação (3.8) por $\bar{v}_r = \bar{\mu}_r^{-1}$ e, depois, aplicando o rotacional também nos dois lados, vem:

$$\nabla \times (\bar{v}_r \cdot \nabla \times \vec{E}^s) = j\omega\mu_0\nabla \times (\bar{v}_r - \bar{I}) \cdot \vec{H}^{inc} - j\omega\mu_0\nabla \times \vec{H}^s \quad (3.9)$$

Com a equação (3.6), pode-se escrever:

$$\nabla \times (\bar{v}_r \cdot \nabla \times \bar{E}^s) = j\omega\mu_0 \nabla \times (\bar{v}_r - \bar{I}) \cdot \bar{H}^{inc} - j\omega\mu_0 \bar{J}_{eq} + k_0^2 \bar{E}^s \quad (3.10)$$

Aplicando as equações (3.1) e (3.3) na equação (3.10), resulta em:

$$\nabla \times (\bar{v}_r \cdot \nabla \times \bar{E}^s) = j\omega\mu_0 \nabla \times (\bar{v}_r - \bar{I}) \cdot \bar{H}^{inc} + k_0^2 (\bar{\epsilon}_r - \bar{I}) \cdot \bar{E}^{inc} + k_0^2 (\bar{\epsilon}_r - \bar{I}) \cdot \bar{E}^s + k_0^2 \bar{E}^s \quad (3.11)$$

que pode ser reescrita como:

$$\nabla \times (\bar{v}_r \cdot \nabla \times \bar{E}^s) - k_0^2 \bar{\epsilon}_r \cdot \bar{E}^s = j\omega\mu_0 \nabla \times (\bar{v}_r - \bar{I}) \cdot \bar{H}^{inc} + k_0^2 (\bar{\epsilon}_r - \bar{I}) \cdot \bar{E}^{inc} \quad (3.12)$$

que é a equação que relaciona o campo elétrico espalhado com os campos elétrico e magnético incidentes. Esta é a equação usada para análise do problema de espalhamento de meios com propriedades anisotrópicas elétrica e magnética no domínio da frequência. Aplicando Galerkin na equação (3.12), isto é, fazendo o produto escalar pela função peso \bar{w} e integrando no domínio V, vem:

$$\iiint_V \bar{w} \cdot \nabla \times (\bar{v}_r \cdot \nabla \times \bar{E}^s) dV - k_0^2 \iiint_V \bar{w} \cdot \bar{\epsilon}_r \cdot \bar{E}^s dV = \quad (3.13)$$

$$j\omega\mu_0 \iiint_V \bar{w} \cdot \nabla \times (\bar{v}_r - \bar{I}) \cdot \bar{H}^{inc} dV + k_0^2 \iiint_V \bar{w} \cdot (\bar{\epsilon}_r - \bar{I}) \cdot \bar{E}^{inc} dV$$

É válida a identidade vetorial:

$$\bar{w} \cdot \nabla \times (\bar{v}_r \cdot \nabla \times \bar{E}^s) = \bar{v}_r \cdot \nabla \times \bar{E}^s \cdot \nabla \times \bar{w} - \nabla \cdot (\bar{w} \times \bar{v}_r \cdot \nabla \times \bar{E}^s) \quad (3.14)$$

Utilizando o produto triplo e a identidade vetorial (3.14), obtém-se na fração de (3.13), que é:

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \times \bar{w} \cdot (\bar{v}_r \cdot \nabla \times \bar{E}^s) dV + \oint_S \bar{w} \cdot (\hat{n} \times \bar{v}_r \cdot \nabla \times \bar{E}^s) dS - k_0^2 \iiint_V \bar{w} \cdot \bar{\epsilon}_r \cdot \bar{E}^s dV = \\ k_0^2 \iiint_V \bar{w} \cdot (\bar{\epsilon}_r - \bar{I}) \cdot \bar{E}^{inc} dV + j\omega\mu_0 \iiint_V \bar{w} \cdot \nabla \times (\bar{v}_r - \bar{I}) \cdot \bar{H}^{inc} dV \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.2.1 Integrações nos Elementos

Como já explicado na Introdução, no método dos elementos finitos o domínio de integração é subdividido em vários subdomínios, as funções peso e o campo são expandidos em termos das

funções de base, que no caso desta tese, serão as funções de Whitney CT/LN, apresentadas no Apêndice A da seguinte forma:

$$\vec{E} = \sum_{j=1}^{Na} E_{(j)} \vec{N}_{(j)}^g \quad (3.16)$$

sendo Na o número de arestas, $E_{(j)}$ os coeficientes do campo e $\vec{N}_{(j)}^g$ as funções de base de Whitney CT/LN. As funções de peso são aproximadas por:

$$\vec{w}_{(i)} = \vec{N}_{(i)}^g \quad i = 1, 2, 3, \dots, Na \quad (3.17)$$

Cada função de base global $\vec{N}_{(i)}^g$ será diferente de zero somente nos elementos que possuam a aresta número "i" como uma de suas arestas. Em cada elemento a função de base terá seu comportamento descrito por uma função de forma $\vec{N}_{(i)}$, válida dentro de um único elemento, que é uma das parcelas da função de base. A função de forma em um elemento e no seu vizinho, que são parcelas da mesma função de base $\vec{N}_{(i)}^g$, são tais que possuem componentes tangenciais iguais na interface, garantindo a continuidade tangencial dos campos, Apêndice A. As integrações da equação (3.15) são realizadas elemento-a-elemento formando o que se denomina de matriz elementar; após isto, esta matriz elementar será acumulada na matriz global; como, no caso em questão, há seis funções de base em um tetraedro, cada função de base ligada a uma aresta, a matriz elementar terá dimensão de 6X6. Após a aplicação de (3.16) e (3.17) em (3.15), os elementos das matrizes elementares correspondentes ficam:

3.2.1.1 Primeiro Termo do Lado Esquerdo da Equação (3.15).

$$Q_e(i, j) = \iiint_{V_e} \nabla \times \vec{N}_{(i)} \cdot \vec{v}_r \cdot \nabla \times \vec{N}_{(j)} dV_e \quad (3.18)$$

sendo V_e o volume do elemento "e". A matriz elementar Q_e corresponde ao primeiro termo do lado esquerdo de (3.15). As expressões de cálculo são obtidas no Apêndice A. Para ser programada, utiliza-se as expressões (A.1), (A.7), (A.9), (A.10), (A.11), (A.23), (A.25) e a Tabela A.1.

3.2.1.2 Segundo Termo do Lado Esquerdo da Equação (3.15).

O segundo termo do lado esquerdo de (3.15) é uma integral de fluxo; este fluxo entre dois elementos internos se anulará, condição de contorno aplicada ainda antes da discretização, no contínuo, que é denominada de condição de contorno natural, o que não acontece quando há uma

ou mais faces do elemento na fronteira externa do domínio; neste caso, as condições podem ser parede Elétrica, Magnética ou condições de contorno absorventes, ABCs. Na parede elétrica, o campo elétrico tangencial e o campo magnético normal se anulam; no caso da parede magnética, ocorre o inverso, o campo elétrico normal e o campo magnético tangencial se anulam. Quando são usadas funções de base de aresta, Apêndice A, que é o caso desta tese, se o campo modelado é o campo elétrico, o uso de paredes elétricas é extremamente simples, bastando para isto zerar as incógnitas ligadas às arestas que estão sobre paredes elétricas; isto é feito depois do sistema de equações global ser montado, e é denominado de condição de contorno essencial. Se a parede for magnética e o campo modelado for o elétrico, há muita complicação, fazendo com que o esquema de armazenamento esparsa seja prejudicado, já que a aplicação da condição de contorno envolve mais que uma variável. O uso de paredes elétricas pode ser feito em conjunto com as PMLs, que são camadas de material absorvente perfeitamente casadas com o espaço livre, Apêndice C, deixando para as mesmas a atribuição de simulação de espaço aberto. Quando se deseja simulação de espaço aberto, pode-se também utilizar as ABCs nesta integral de fluxo como condição natural, isto é, no contínuo, sobre as paredes externas. As ABCs mais utilizadas em códigos 3D, tanto no método dos elementos finitos, FEM, quanto no método das diferenças finitas no domínio do tempo, FDTD, são a ABC de segunda ordem do tipo Engquist-Majda e a ABC de segunda ordem do tipo Bayliss-Turkel. A obtenção das equações de ambas estão no Apêndice C, sendo as do tipo Engquist-Majda para paredes planas e as do tipo Bayliss-Turkel para paredes esféricas. Nesta tese só será aplicada a condição de contorno do tipo Engquist-Majda de segunda ordem, que é:

$$\hat{n} \times \nabla \times \vec{E}^s = jp_0k_0\vec{E}_t^s + \frac{p_2}{jk_0}\nabla_t^2\vec{E}_t^s + \nabla_t E_n^s \quad (3.19)$$

sendo p_0 e p_2 constantes reais fornecidas no Apêndice C, Tabela C.1, que modificam o ângulo de absorção máxima de uma onda plana incidindo sobre a parede absorvente, Figura C.3. Logo, o segundo termo do lado esquerdo da equação (3.15), considerando que o meio é isotrópico na fronteira, isto é, $\vec{v}_r = \vec{I}$, pode ser escrito,

$$\oint_S \vec{w} \cdot (\hat{n} \times \nabla \times \vec{E}^s) dS = jp_0k_0 \oint_S \vec{w} \cdot \vec{E}_t^s dS + \frac{p_2}{jk_0} \oint_S \vec{w} \cdot \nabla_t^2 \vec{E}_t^s dS + \oint_S \vec{w} \cdot \nabla_t E_n^s dS \quad (3.20)$$

os termos do lado direito da equação (3.20) serão tratados separadamente.

- Primeiro termo do lado direito da equação (3.20).

Após a aplicação de (3.16) e (3.17), a matriz elementar fica:

$$ISabc_1(i, j) = jp_0k_0 \int_{\Omega} \vec{N}_{(i)} \cdot \vec{N}_{(j)}^t d\Omega \quad (3.21)$$

onde Ω é a face do tetraedro que está na parede externa. $ISabc_1(i, j)$ pode ser programada utilizando-se (A.41) e (A.49) a (A.55) em (A.43).

- Segundo termo do lado direito da equação (3.20).

O segundo termo da equação (3.20) deve ser "enfraquecido" no requerimento de derivação, já que possui derivações de segunda ordem; assim, utilizando a identidade:

$$\psi \nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) - \nabla \psi \cdot \nabla \phi, \quad (3.22)$$

sendo ψ e ϕ funções escalares, pode-se dizer que:

$$\int_S \psi \nabla^2 \phi = \oint_l \psi (\nabla \phi \cdot \hat{n}) dl - \int_S \nabla \psi \cdot \nabla \phi dS \quad (3.23)$$

Como a ABC em questão é a de segunda ordem do tipo Engquist-Majda, cuja aplicação é feita nos planos $x - y$, $x - z$ e $y - z$, considerando a equação (3.23) e desprezando-se as integrais de linha, o segundo termo do lado direito da equação (3.20) pode ser reescrito para cada um dos planos na forma:

- No plano $x - y$:

$$\begin{aligned} ISabc_2(i, j) &= \frac{p_2}{jk_0} \oint_{\Omega} \vec{N}_{(i)} \cdot \nabla_t^2 \vec{N}_{(j)}^t d\Omega = -\frac{p_2}{jk_0} \int_{\Omega} \left(\nabla_t N_{x(i)} \cdot \nabla_t N_{x(j)} + \nabla_t N_{y(i)} \cdot \nabla_t N_{y(j)} \right) d\Omega \\ &= -\frac{p_2}{jk_0} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_{x(i)}}{\partial x} \frac{\partial N_{x(j)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{x(i)}}{\partial y} \frac{\partial N_{x(j)}}{\partial y} + \frac{\partial N_{y(i)}}{\partial x} \frac{\partial N_{y(j)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{y(i)}}{\partial y} \frac{\partial N_{y(j)}}{\partial y} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde Ω é a face do tetraedro que está na parede externa. Como nesta tese foram usadas as funções de base de Whitney CT/LN, apresentadas no Apêndice A, sabe-se que $\frac{\partial N_{x(k)}}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial N_{y(k)}}{\partial y} = 0$, para qualquer k , e também sabe-se que $\frac{\partial N_{x(k)}}{\partial y} = \text{constante}$ e $\frac{\partial N_{y(k)}}{\partial x} = \text{constante}$; portanto, a equação (3.24) pode ser reescrita na forma:

$$ISabc_2(i, j) = \frac{p_2}{jk_0} \oint_{\Omega} \vec{N}_{(i)} \cdot \nabla_t^2 \vec{N}_{(j)}^t d\Omega = -\frac{p_2}{jk_0} \left(\frac{\partial N_{x(i)}}{\partial y} \frac{\partial N_{x(j)}}{\partial y} + \frac{\partial N_{y(i)}}{\partial x} \frac{\partial N_{y(j)}}{\partial x} \right) Area \quad (3.25)$$

sendo $Area$ a área da face de integração do tetraedro.

- No plano $x - z$: Da mesma forma que no plano $x - y$, pode-se escrever:

$$ISabc_2(i, j) = \frac{p_2}{jk_0} \oint_{\Omega} \vec{N}_{(i)} \cdot \nabla_t^2 \vec{N}_{(j)}^t d\Omega = -\frac{p_2}{jk_0} \left(\frac{\partial N_{x(i)}}{\partial z} \frac{\partial N_{x(j)}}{\partial z} + \frac{\partial N_{z(i)}}{\partial x} \frac{\partial N_{z(j)}}{\partial x} \right) Area \quad (3.26)$$

– No plano $y - z$:

$$ISabc_2(i, j) = \frac{p_2}{jk_0} \oint_{\Omega} \vec{N}_{(i)} \cdot \nabla_t^2 \vec{N}_{(j)}^t d\Omega = -\frac{p_2}{jk_0} \left(\frac{\partial N_{y(i)}}{\partial z} \frac{\partial N_{y(j)}}{\partial z} + \frac{\partial N_{z(i)}}{\partial y} \frac{\partial N_{z(j)}}{\partial y} \right) Area \quad (3.27)$$

sendo $Area$ a área da face. A forma de programar os termos $\frac{\partial N_{x(i)}}{\partial y}$, $\frac{\partial N_{x(i)}}{\partial z}$, $\frac{\partial N_{y(i)}}{\partial x}$, $\frac{\partial N_{y(i)}}{\partial z}$, $\frac{\partial N_{z(i)}}{\partial x}$ e $\frac{\partial N_{z(i)}}{\partial y}$ está descrita na equação (A.57) do Apêndice A.

- Terceiro termo do lado direito da equação (3.20).

$$ISabc_3(i, j) = \int_{\Omega} \vec{N}_{(i)} \cdot \nabla_t [\hat{n} \cdot \vec{N}_{(j)}] d\Omega \quad (3.28)$$

onde Ω é a face do tetraedro que está na parede externa. Com as equações (A.9), (A.10), (A.11), (A.41), (A.57), (A.60) e (A.61), obtém-se a integral $ISabc_2(i, j)$ na face do tetraedro.

3.2.1.3 Terceiro Termo do Lado Esquerdo da Equação (3.15).

$$R_e(i, j) = k_0^2 \iiint_{V_e} \vec{N}_{(i)} \cdot \vec{\epsilon}_r \cdot \vec{N}_{(j)} dV_e \quad (3.29)$$

sendo V_e o volume do elemento "e". A matriz elementar R_e corresponde ao terceiro termo do lado esquerdo de (3.15). As expressões de cálculo são obtidas no Apêndice A. Para ser programada utiliza-se as expressões (A.1), (A.7), (A.9), (A.10), (A.11), (A.31), (A.32), (A.33) e a Tabela A.1.

3.2.1.4 Primeiro Termo do Lado Direito da Equação (3.15).

Este termo representa uma parcela das fontes equivalentes, a parcela da densidade corrente elétrica equivalente, e resultará em uma matriz $N_a \times 1$:

$$k_0^2 \iiint_V \vec{w} \cdot (\vec{\epsilon}_r - \vec{I}) \cdot \vec{E}^{inc} dV \quad (3.30)$$

Primeiro é necessário fornecer o campo elétrico da onda incidente, que será uma onda plana com amplitude unitária, dada por:

$$\begin{aligned}\vec{E}^{inc} &= \left\{ [\cos(\beta) \cos(\theta) \cos(\phi) - \text{sen}(\beta)\text{sen}(\phi)]\hat{x} \right. \\ &+ [\cos(\beta) \cos(\theta)\text{sen}(\phi) + \text{sen}(\beta) \cos(\phi)]\hat{y} - \cos(\beta)\text{sen}(\theta)\hat{z} \left. \right\} e^{-jk_0\vec{r}\cdot\hat{k}} \\ &= (E_x^{inc}\hat{x} + E_y^{inc}\hat{y} + E_z^{inc}\hat{z})e^{-k_0\vec{r}\cdot\hat{k}}\end{aligned}\quad (3.31)$$

$$\hat{k} = \text{sen}(\theta) \cos(\phi)\hat{x} + \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)\hat{y} + \cos(\theta)\hat{z}$$

sendo $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ o vetor posição, \hat{k} a direção de propagação, θ e ϕ os ângulos das coordenadas esféricas da direção de propagação e β o ângulo que fornece a polarização da onda incidente, como mostrado na Figura 3.1.

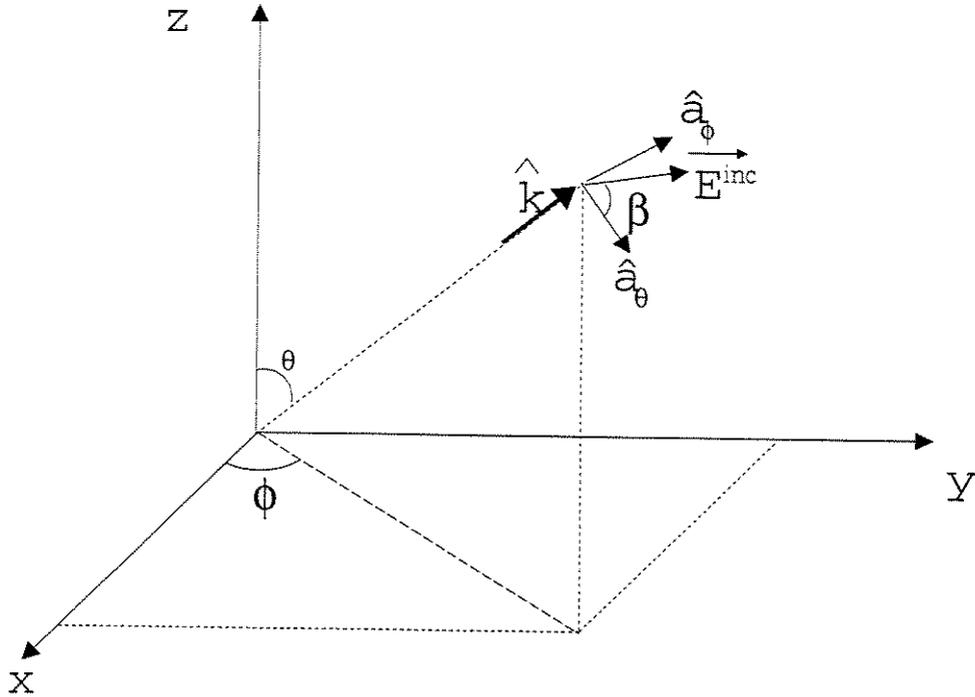


Figura 3.1: Campo elétrico incidente \vec{E}^{inc} .

Assim;

$$(\bar{\epsilon}_r - \bar{I}) \cdot \vec{E}^{inc} = \left\{ \begin{array}{l} [(\epsilon_{(rxx)} - 1)E_x^{inc} + \epsilon_{(rxy)}E_y^{inc} + \epsilon_{(rxz)}E_z^{inc}] \hat{x} \\ [\epsilon_{(ryx)}E_x^{inc} + (\epsilon_{(ryy)} - 1)E_y^{inc} + \epsilon_{(ryz)}E_z^{inc}] \hat{y} \\ [\epsilon_{(rzx)}E_x^{inc} + \epsilon_{(rzy)}E_y^{inc} + (\epsilon_{(rzz)} - 1)E_z^{inc}] \hat{z} \end{array} \right\} * e^{-jk_0 \vec{r} \cdot \hat{k}} \quad (3.32)$$

Define-se:

$$\begin{aligned} EE_x &\triangleq (\epsilon_{(rxx)} - 1)E_x^{inc} + \epsilon_{(rxy)}E_y^{inc} + \epsilon_{(rxz)}E_z^{inc} \\ EE_y &\triangleq \epsilon_{(ryx)}E_x^{inc} + (\epsilon_{(ryy)} - 1)E_y^{inc} + \epsilon_{(ryz)}E_z^{inc} \\ EE_z &\triangleq \epsilon_{(rzx)}E_x^{inc} + \epsilon_{(rzy)}E_y^{inc} + (\epsilon_{(rzz)} - 1)E_z^{inc} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Com (3.17), no elemento tem-se:

$$F_{(i)}^e = k_0^2 \iiint_{V_e} \vec{N}_{(i)} \cdot (EE_x \hat{x} + EE_y \hat{y} + EE_z \hat{z}) e^{-jk_0 \vec{r} \cdot \hat{k}} dV, \quad (3.34)$$

que pode ser obtido com (3.33), (A.70), Apêndice A e a Tabela A.6, também do Apêndice A.

3.2.1.5 Segundo Termo do Lado Direito da Equação (3.15).

Este termo representa a outra parcela das fontes equivalentes, a parcela da densidade de corrente magnética equivalente, e também resultará em um vetor.

$$j\omega\mu_0 \iiint_V \vec{w} \cdot \nabla \times (\bar{v}_r - \bar{I}) \cdot \vec{H}^{inc} dV \quad (3.35)$$

O campo magnético incidente é:

$$\vec{H}^{inc} = \frac{\hat{k} \times \vec{E}^{inc}}{\eta_0} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} (k_y E_z^{inc} - k_z E_y^{inc}) \hat{x} + \\ + (k_z E_x^{inc} - k_x E_z^{inc}) \hat{y} + \\ + (k_x E_y^{inc} - k_y E_x^{inc}) \hat{z} \end{array} \right\}}{\eta_0} e^{-jk_0 \vec{r} \cdot \hat{k}} = (H_x^{inc} \hat{x} + H_y^{inc} \hat{y} + H_z^{inc} \hat{z}) e^{-jk_0 \vec{r} \cdot \hat{k}} \quad (3.36)$$

$$(\bar{v}_r - \bar{I}) \cdot \vec{H}^{inc} = \left\{ \begin{array}{l} [(v_{(rxx)} - 1)H_x^{inc} + v_{(rxy)}H_y^{inc} + v_{(rxz)}H_z^{inc}] \hat{x} + \\ + [v_{(ryx)}H_x^{inc} + (v_{(ryy)} - 1)H_y^{inc} + v_{(ryz)}H_z^{inc}] \hat{y} + \\ + [v_{(rzx)}H_x^{inc} + v_{(rzy)}H_y^{inc} + (v_{(rzz)} - 1)H_z^{inc}] \hat{z} \end{array} \right\} * e^{-jk_0 \vec{r} \cdot \hat{k}} \quad (3.37)$$

Definindo:

$$\begin{aligned}
HH_x^{inc} &\triangleq (v_{(rxx)} - 1)H_x^{inc} + v_{(rxy)}H_y^{inc} + v_{(rxz)}H_z^{inc} \\
HH_y^{inc} &\triangleq v_{(ryx)}H_x^{inc} + (v_{(ryy)} - 1)H_y^{inc} + v_{(ryz)}H_z^{inc} \\
HH_z^{inc} &\triangleq v_{(rzx)}H_x^{inc} + v_{(rzy)}H_y^{inc} + (v_{(rzz)} - 1)H_z^{inc}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Como a onda é plana e no espaço livre pode-se fazer $\nabla \times \Rightarrow -jk_0 \hat{k} \times$, resulta;

$$j\omega\mu_0 \nabla \times (\bar{v}_r - \bar{I}) \cdot \vec{H}^{inc} = \omega\mu_0 k_0 \hat{k} \times (\bar{v}_r - \bar{I}) \cdot \vec{H}^{inc} = k_0^2 \eta_0 \hat{k} \times (\bar{v}_r - \bar{I}) \cdot \vec{H}^{inc} =$$

$$k_0^2 \eta_0 \hat{k} \times \vec{H}^{inc} = k_0^2 \eta_0 \left\{ \begin{array}{l} (k_y HH_z^{inc} - k_z HH_y^{inc}) \hat{x} + \\ + (k_z HH_x^{inc} - k_x HH_z^{inc}) \hat{y} + \\ + (k_x HH_y^{inc} - k_y HH_x^{inc}) \hat{z} \end{array} \right\} * e^{-jk_0 \vec{r} \cdot \hat{k}} \tag{3.39}$$

Definindo:

$$\begin{aligned}
KHH_x &\triangleq (k_y HH_z^{inc} - k_z HH_y^{inc}) \\
KHH_y &\triangleq (k_z HH_x^{inc} - k_x HH_z^{inc}) \\
KHH_z &\triangleq (k_x HH_y^{inc} - k_y HH_x^{inc})
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Com (3.17), no elemento tem-se;

$$F_{(i)}^h = k_0^2 \eta_0 \iiint_{V_e} \vec{N}_{(i)} \cdot (KHH_x \hat{x} + KHH_y \hat{y} + KHH_z \hat{z}) e^{-jk_0 \vec{r} \cdot \hat{k}} dV, \tag{3.41}$$

que pode ser obtido com (3.38), (3.40), (A.73), Apêndice A e a Tabela A.6, também do Apêndice A.

3.2.2 Montagem do Sistema de Equações.

Após o cálculo das matrizes elementares de um elemento, estas serão acumuladas na matriz global, até que isto se repita para todos os elementos do domínio de discretização. Finalmente é montado um sistema do tipo:

$$[A]\{E^s\} = \{b\}, \tag{3.42}$$

onde

$$[A] = [Q] + [ISabc_1] + [ISabc_2] + [ISabc_3] + [R] \tag{3.43}$$

$$\{b\} = \{F^e\} + \{F^h\}.$$

O vetor $\{E^s\}$ é o vetor de coeficientes da equação (3.16) que, com as funções de base $\vec{N}_{(i)}^g$, fornece o campo elétrico espalhado em todo o domínio discretizado.

3.3 Cálculo dos Campos Distantes.

A partir do campo elétrico espalhado no domínio de discretização, pode-se obter o campo espalhado em qualquer região, utilizando a função de Green para espaço livre. Basicamente, pode-se obter isto de duas formas:

- Utilizando o teorema da superfície equivalente.
- Utilizando o próprio teorema das correntes volumétricas equivalentes.

3.3.1 Cálculo dos Campos Distantes Utilizando o Teorema da Superfície Equivalente

Através do teorema da superfície equivalente, os campos da parte exterior de uma superfície imaginária fechada são obtidos colocando, sobre a superfície, densidades de correntes elétrica e magnética que satisfaçam as condições de contorno. Estas correntes são tais que os campos na parte interior à superfície, são nulos e, na parte externa, são os mesmos produzidos pelas fontes reais que se encontravam dentro da superfície. Esta técnica é usada para obter os campos radiados na parte externa à superfície, \vec{E}_1 e \vec{H}_1 , por fontes internas à superfície, \vec{J}_1 e \vec{M}_1 , Figura 3.2. A técnica é exata e sua precisão depende do conhecimento dos campos sobre a superfície [28]. No

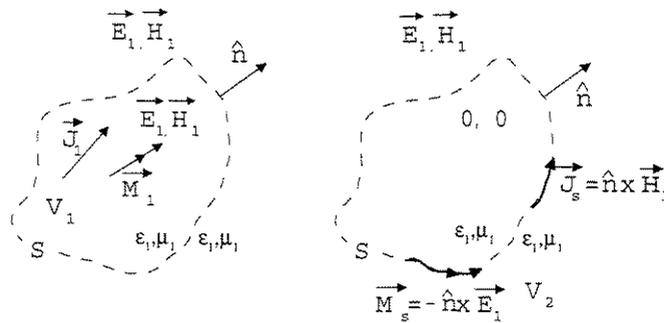


Figura 3.2: Teorema da Superfície Equivalente.

caso desta tese, o campo espalhado é conhecido em todo o domínio discretizado; assim, basta fechar uma superfície em torno do espalhador e com o campo espalhado calculado através de (3.42), sobre a superfície, calcula-se as densidades superficiais de corrente elétrica e magnética e, a partir destas, calcula-se o campo distante radiado. A densidade superficial magnética é dada por:

$$\vec{M}^s = -\hat{n} \times \vec{E}^s \quad (3.44)$$

A densidade superficial elétrica é dada por:

$$\vec{J}^s = \hat{n} \times \vec{H}^s, \quad (3.45)$$

sendo que \vec{E}^s é o campo elétrico espalhado, calculado através da equação (3.42) e \vec{H}^s é o campo magnético espalhado, calculado utilizando-se a equação de Faraday na forma diferencial no domínio da frequência. Dentro de um elemento interno à superfície, que contém uma face na mesma, calcula-se cada parcela do campo magnético e para cada função de forma ligada a cada aresta ai , na forma:

$$\vec{H}_{(ai)}^s = \frac{\nabla \times \vec{E}_{(ai)}^s}{-j\omega\mu_0} = E_{(ai)}^s \frac{\nabla \times \vec{N}_{(ai)}}{-j\omega\mu_0}, \quad (3.46)$$

sendo $E_{(ai)}^s$ o coeficiente de campo da equação (3.16), referente à aresta com o número local ai .

$$\nabla \times \vec{N}_{(ai)} = Rot_{x(ai)}\hat{x} + Rot_{y(ai)}\hat{y} + Rot_{z(ai)}\hat{z} \quad (3.47)$$

$$Rot_{x(ai)} = \frac{2l(ai)}{\Delta^2} [ce(ci_{(ai)})de(cf_{(ai)}) - ce(cf_{(ai)})de(ci_{(ai)})]$$

$$Rot_{y(ai)} = \frac{2l(ai)}{\Delta^2} [de(ci_{(ai)})be(cf_{(ai)}) - de(cf_{(ai)})be(ci_{(ai)})] \quad (3.48)$$

$$Rot_{z(ai)} = \frac{2l(ai)}{\Delta^2} [be(ci_{(ai)})ce(cf_{(ai)}) - be(cf_{(ai)})ce(ci_{(ai)})],$$

onde $l(ai)$ é o comprimento da aresta ai , Δ é seis vezes o volume do elemento, $ci_{(i)}$ e $cf_{(i)}$ são dados pela Tabela A.1 e $be_{(ai)}$, $ce_{(ai)}$ e $de_{(ai)}$ são calculados para o elemento em questão, através das equações (A.9), (A.10) e (A.11). Como $\vec{J}^s = \hat{n} \times \vec{H}^s$, deve-se ter o vetor unitário normal à face do elemento que pertence à superfície, apontando para fora desta; este vetor é obtido através da equação (A.40) e (A.41) do Apêndice A; assim, a densidade de corrente elétrica, com (3.46) e

(3.48), é:

$$\begin{aligned}\vec{J}_{(ai)}^s &= \frac{\hat{n} \times \nabla \times \vec{E}_{(ai)}^s}{-j\omega\mu_0} \\ J_{x(ai)}^s &= E_{(ai)} \frac{ce(m)Rot_z(ai) - de(m)Rot_y(ai)}{j\omega\mu_0 \sqrt{be_{(m)}^2 + ce_{(m)}^2 + de_{(m)}^2}} \\ J_{y(ai)}^s &= E_{(ai)} \frac{de(m)Rot_x(ai) - be(m)Rot_z(ai)}{j\omega\mu_0 \sqrt{be_{(m)}^2 + ce_{(m)}^2 + de_{(m)}^2}} \\ J_{z(ai)}^s &= E_{(ai)} \frac{be(m)Rot_y(ai) - ce(m)Rot_x(ai)}{j\omega\mu_0 \sqrt{be_{(m)}^2 + ce_{(m)}^2 + de_{(m)}^2}},\end{aligned}\tag{3.49}$$

onde as componentes da densidade de corrente não variam ao longo do elemento e os índices m são: $m = 4$ se a face do tetraedro que pertence à superfície for a face 1, $m = 3$ ser for a face 2, $m = 2$ se for a face 3 e $m = 1$ se for a face 4. $\vec{J}_{(ai)}^s$ é a parcela ai da densidade de corrente elétrica tangencial à superfície do elemento interno (poderia ser o externo) à superfície e que possui uma face na mesma.

Também a densidade de corrente magnética é calculada em parcelas e para cada elemento interno (poderia ser o externo) à superfície e que possui uma face na mesma. Esta parcela é calculada por:

$$\vec{M}_{(ai)}^s = -E_{(ai)}^s \hat{n} \times \vec{N}_{(ai)}\tag{3.50}$$

O vetor unitário é normal à face do elemento que pertence à superfície, apontando para fora desta; este vetor é obtido através da equação (A.40) e (A.41), do Apêndice A; assim, com (A.19) em (3.50), a densidade de corrente magnética fica:

$$\vec{M}_{(ai)}^s = \frac{E_{(ai)}^s l_{(ai)}}{\Delta} \left(\frac{be_{(m)}\hat{x} + ce_{(m)}\hat{y} + de_{(m)}\hat{z}}{\sqrt{be_{(m)}^2 + ce_{(m)}^2 + de_{(m)}^2}} \right) \times \begin{pmatrix} [L(ci_{(ai)}) be(cf_{(ai)}) - L(cf_{(ai)}) be(ci_{(ai)})]\hat{x} \\ + [L(ci_{(ai)}) ce(cf_{(ai)}) - L(cf_{(ai)}) ce(ci_{(ai)})]\hat{y} \\ + [L(ci_{(ai)}) de(cf_{(ai)}) - L(cf_{(ai)}) de(ci_{(ai)})]\hat{z} \end{pmatrix}\tag{3.51}$$

onde $m = 4$ se a face do tetraedro que pertence à superfície for a face 1, $m = 3$ ser for a face 2, $m = 2$ se for a face 3 e $m = 1$ se for a face 4 e $l_{(ai)}$ o comprimento da aresta ai . Define-se:

$$\begin{aligned}PV_x(i) &\triangleq \frac{ce_{(m)}de(i) - de(m)ce(i)}{\Delta \sqrt{be_{(m)}^2 + ce_{(m)}^2 + de_{(m)}^2}} \\ PV_y(i) &\triangleq \frac{de_{(m)}be(i) - be(m)de(i)}{\Delta \sqrt{be_{(m)}^2 + ce_{(m)}^2 + de_{(m)}^2}} \\ PV_z(i) &\triangleq \frac{be_{(m)}ce(i) - ce(m)be(i)}{\Delta \sqrt{be_{(m)}^2 + ce_{(m)}^2 + de_{(m)}^2}}\end{aligned}\tag{3.52}$$

a expressão que permite o cálculo da parcela da densidade de corrente magnética pode ser obtida na forma:

$$\begin{aligned}\vec{M}_{(ai)}^s &= M_{x(ai)}^s \hat{x} + M_{y(ai)}^s \hat{y} + M_{z(ai)}^s \hat{z} \\ M_{x(ai)}^s &= E_{(ai)}^s l_{(ai)} [L(ci_{(ai)}) PV_x(cf_{(ai)}) - L(cf_{(ai)}) PV_x(ci_{(ai)})] \\ M_{y(ai)}^s &= E_{(ai)}^s l_{(ai)} [L(ci_{(ai)}) PV_y(cf_{(ai)}) - L(cf_{(ai)}) PV_y(ci_{(ai)})] \\ M_{z(ai)}^s &= E_{(ai)}^s l_{(ai)} [L(ci_{(ai)}) PV_z(cf_{(ai)}) - L(cf_{(ai)}) PV_z(ci_{(ai)})]\end{aligned}\tag{3.53}$$

Para um dado ponto de observação, definido por r , θ e ϕ , os campos distantes podem ser calculados com o auxílio das seguintes equações [28]:

$$\begin{aligned}N_\theta &= \iint_S [J_x^s \cos(\theta) \cos(\phi) + J_y^s \cos(\theta) \text{sen}(\phi) - J_z^s \text{sen}(\theta)] e^{jk_0 \vec{r} \cdot \hat{r}} dS \\ N_\phi &= \iint_S [-J_x^s \cos(\theta) + J_y^s \cos(\phi)] e^{jk_0 \vec{r} \cdot \hat{r}} dS \\ L_\theta &= \iint_S [M_x^s \cos(\theta) \cos(\phi) + M_y^s \cos(\theta) \text{sen}(\phi) - M_z^s \text{sen}(\theta)] e^{jk_0 \vec{r} \cdot \hat{r}} dS \\ L_\phi &= \iint_S [-M_x^s \cos(\theta) + M_y^s \cos(\phi)] e^{jk_0 \vec{r} \cdot \hat{r}} dS \\ E_r &\simeq 0\end{aligned}\tag{3.54}$$

$$E_\theta \simeq -\frac{jk_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} (L_\phi + \eta_0 N_\theta)\tag{3.55}$$

$$E_\phi \simeq \frac{jk_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} (L_\theta - \eta_0 N_\phi),$$

sendo E_θ e E_ϕ as componentes do campo elétrico distante em coordenadas esféricas e r a distância do ponto de observação à origem do sistema de coordenadas.

$$H_r \simeq 0$$

$$H_\theta \simeq \frac{jk_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} (N_\phi - \frac{L_\theta}{\eta_0})\tag{3.56}$$

$$H_\phi \simeq -\frac{jk_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} (N_\theta + \frac{L_\phi}{\eta_0}),$$

sendo H_θ e H_ϕ componentes do campo magnético distante em coordenadas esféricas e r a distância do ponto de observação à origem do sistema de coordenadas. Observando (3.49) verifica-se que

$J_{x(ai)}^s$, $J_{y(ai)}^s$ e $J_{z(ai)}^s$ são constantes; observando também (3.52), verifica-se que $PVx(i)$, $PVy(i)$ e $PVz(i)$ também são constantes; então, nas integrações de (3.54), estes termos podem sair das integrais; então (3.54), no elemento, pode ser reescrita como:

$$N_{\theta(ai)} = \frac{E_{(ai)}^s}{j\omega\mu_0\sqrt{be_{(ai)}^2+ce_{(ai)}^2+de_{(ai)}^2}} \left[\begin{array}{l} (ce(p)Rot_{z(ai)} - de_{(ai)}Rot_{y(ai)}) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ + (de(p)Rot_{x(ai)} - be_{(ai)}Rot_{z(ai)}) \cos(\theta) \text{sen}(\phi) \\ - (be(p)Rot_{y(ai)} - ce_{(ai)}Rot_{x(ai)}) \text{sen}(\theta) \end{array} \right] \iint_{\Omega} e^{jk_0\vec{r}\cdot\hat{r}} d\Omega$$

$$N_{\phi(ai)} = \frac{E_{(ai)}^s}{j\omega\mu_0\sqrt{be_{(ai)}^2+ce_{(ai)}^2+de_{(ai)}^2}} \left[\begin{array}{l} (ce(p)Rot_{z(ai)} - de_{(ai)}Rot_{y(ai)}) \cos(\theta) \\ + (de(p)Rot_{x(ai)} - be_{(ai)}Rot_{z(ai)}) \cos(\phi) \end{array} \right] \iint_{\Omega} e^{jk_0\vec{r}\cdot\hat{r}} d\Omega \quad (3.57)$$

onde Ω é a face do tetraedro que está na superfície imaginária. A integral $\iint_{\Omega} e^{jk_0\vec{r}\cdot\hat{r}} d\Omega$ pode ser calculada conforme (A.66), do Apêndice A, e

$$L_{\theta(ai)} = E_{(ai)}^s le_{(ai)} \left\{ \begin{array}{l} \left[PVx(cf_{(ai)}) \cos(\theta) \cos(\phi) + PVy(cf_{(ai)}) \cos(\theta) \text{sen}(\phi) - PVz(cf_{(ai)}) \text{sen}(\theta) \right] \\ * \iint_{\Omega} L(ci_{(ai)}) e^{jk_0\vec{r}\cdot\hat{r}} d\Omega \\ - \left[PVx(ci_{(ai)}) \cos(\theta) \cos(\phi) + PVy(ci_{(ai)}) \cos(\theta) \text{sen}(\phi) - PVz(ci_{(ai)}) \text{sen}(\theta) \right] \\ * \iint_{\Omega} L(cf_{(ai)}) e^{jk_0\vec{r}\cdot\hat{r}} d\Omega \end{array} \right\}$$

$$L_{\phi(ai)} = E_{(ai)}^s le_{(ai)} \left\{ \begin{array}{l} \left[-PVx(cf_{(ai)}) \cos(\theta) + PVy(cf_{(ai)}) \cos(\phi) \right] \iint_{\Omega} L(ci_{(ai)}) e^{jk_0\vec{r}\cdot\hat{r}} d\Omega \\ - \left[-PVx(ci_{(ai)}) \cos(\theta) + PVy(ci_{(ai)}) \cos(\phi) \right] \iint_{\Omega} L(cf_{(ai)}) e^{jk_0\vec{r}\cdot\hat{r}} d\Omega \end{array} \right\} \quad (3.58)$$

onde Ω é a face do tetraedro que está na superfície imaginária. A integral $\iint_{\Omega} L(ci_{(ai)}) e^{jk_0\vec{r}\cdot\hat{r}} d\Omega$ e $\iint_{\Omega} L(cf_{(ai)}) e^{jk_0\vec{r}\cdot\hat{r}} d\Omega$ podem ser calculadas conforme (A.65), do Apêndice A.

Com (3.57) e (3.58) em (3.55), vem:

$$\begin{aligned} E_{\theta(ai)} &\simeq -\frac{jk_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} (L_{\phi(ai)} + \eta_0 N_{\theta(ai)}) \\ E_{\phi(ai)} &\simeq \frac{jk_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} (L_{\theta(ai)} - \eta_0 N_{\phi(ai)}) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Assim, os campos E_{θ} e E_{ϕ} são obtidos acumulando-se todas as parcelas $E_{\theta(ai)}$ e $E_{\phi(ai)}$ de todos os elementos que possuam faces na superfície imaginária internos a esta superfície. Seria também possível calcular estes campos utilizando-se só os elementos que possuam faces na superfície imaginária externos a esta superfície; a escolha pela utilização dos elementos internos foi para facilitar a construção das malhas.

3.3.2 Cálculo dos Campos Distantes Utilizando o Teorema das Correntes Volumétricas Equivalentes.

Observando as equações (3.5) e (3.6) pode-se ver que as densidades de corrente \vec{M}_{eq} e \vec{J}_{eq} radiam os campos espalhados no espaço livre. Assim, para calcular os campos espalhados basta obter \vec{M}_{eq} e \vec{J}_{eq} .

3.3.2.1 Obtenção de \vec{M}_{eq} .

A densidade de corrente magnética equivalente é dada por (3.2), que com (3.4), dá:

$$\vec{M}_{eq} = j\omega\mu_0(\bar{\mu}_r - \bar{I}) \cdot (\vec{H}^{inc} + \vec{H}^s) \quad (3.60)$$

O campo magnético incidente \vec{H}^{inc} pode ser calculado utilizando-se (3.36), assim:

$$\begin{aligned} \vec{H}^{inc} &= (H_x^{inc}\hat{x} + H_y^{inc}\hat{y} + H_z^{inc}\hat{z})e^{-jk_0\vec{r}\cdot\hat{k}} \\ H_x^{inc} &= \frac{(k_y E_z^{inc} - k_z E_y^{inc})}{\eta_0} \\ H_y^{inc} &= \frac{(k_z E_x^{inc} - k_x E_z^{inc})}{\eta_0} \\ H_z^{inc} &= \frac{(k_x E_y^{inc} - k_y E_x^{inc})}{\eta_0} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Partindo da equação (3.8), obtém-se o campo magnético espalhado, necessário em (3.60), da seguinte forma:

$$\vec{H}^s = \frac{-1}{j\omega\mu_0} (\bar{v}_r \cdot \nabla \times \vec{E}^s) + (\bar{v}_r - \bar{I}) \cdot \vec{H}^{inc} \quad (3.62)$$

Assim, (3.62) em (3.60), tem-se:

$$\begin{aligned}\vec{M}_{eq} &= j\omega\mu_0(\bar{\mu}_r - \bar{I}) \cdot (\vec{H}^{inc} + \vec{H}^s) \\ \vec{M}_{eq} &= j\omega\mu_0(\bar{\mu}_r - \bar{I}) \cdot \left(\frac{-1}{j\omega\mu_0} (\bar{v}_r \cdot \nabla \times \vec{E}^s) + \bar{v}_r \cdot \vec{H}^{inc} \right)\end{aligned}\quad (3.63)$$

Assim, a densidade de corrente magnética fica:

$$\vec{M}_{eq} = (\bar{v}_r - \bar{I}) \cdot \nabla \times \vec{E}^s - j\omega\mu_0(\bar{v}_r - \bar{I}) \cdot \vec{H}^{inc} \quad (3.64)$$

3.3.2.2 Obtenção de \vec{J}_{eq} .

A densidade de corrente elétrica equivalente é dada por (3.1) que, com (3.3), dá:

$$\vec{J}_{eq} = j\omega\epsilon_0(\bar{\epsilon}_r - \bar{I}) \cdot (\vec{E}^{inc} + \vec{E}^s) \quad (3.65)$$

3.3.3 Integrações para o Cálculo do Campo Espalhado, em Qualquer Ponto de Observação, Utilizando o Teorema do Volume Equivalente.

Para o cálculo do campo, deve-se realizar as integrais das equações abaixo [28]:

$$\begin{aligned}E_x^s &= \iiint_{V_{\text{espalhador}}} \left(-\frac{j\eta_0}{4\pi k_0} \left\{ G_1 J_{eq_x} + (x-x')G_2 [(x-x')J_{eq_x} + (y-y')J_{eq_y} + (z-z')J_{eq_z}] \right\} \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{4\pi} [(z-z')M_{eq_y} - (y-y')M_{eq_z}] \frac{1+jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|} dx'dy'dz', \\ E_y^s &= \iiint_{V_{\text{espalhador}}} \left(-\frac{j\eta_0}{4\pi k_0} \left\{ G_1 J_{eq_y} + (y-y')G_2 [(x-x')J_{eq_x} + (y-y')J_{eq_y} + (z-z')J_{eq_z}] \right\} \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{4\pi} [(x-x')M_{eq_z} - (z-z')M_{eq_x}] \frac{1+jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|} dx'dy'dz', \\ E_z^s &= \iiint_{V_{\text{espalhador}}} \left(-\frac{j\eta_0}{4\pi k_0} \left\{ G_1 J_{eq_z} + (z-z')G_2 [(x-x')J_{eq_x} + (y-y')J_{eq_y} + (z-z')J_{eq_z}] \right\} \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{4\pi} [(y-y')M_{eq_x} - (x-x')M_{eq_y}] \frac{1+jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|} dx'dy'dz',\end{aligned}\quad (3.66)$$

sendo \vec{M}_{eq} dado pela equação (3.64), \vec{J}_{eq} dado pela equação (3.65), $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ o vetor posição do ponto de observação, $\vec{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$ o vetor posição do ponto de integração, $|\vec{r} - \vec{r}'| = R$ a distância entre o ponto de integração e o ponto de observação,

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{-1 - jk_0 R + k_0^2 R^2}{R^3} \\ G_2 &= \frac{3 + j3k_0 R - k_0^2 R^2}{R^5} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Assim, pode-se verificar que R , G_1 , G_2 , M_{eq} , J_{eq} , $e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}$, etc . . . variam com x' , y' e z' . Então, a realização das integrais descritas em (3.66) são de difícil implementação analítica, devendo-se realizá-las de forma numérica, elemento a elemento. Assim, de forma genérica,

$$\iiint_{V_{\text{espalhador}}} f(x', y', z') dx' dy' dz' = \sum_{ele=1}^{N_{\text{esp}}} \iiint_{V_{ele}} f(x', y', z') dx' dy' dz' \quad (3.68)$$

sendo $f(x', y', z')$ a função genérica a ser integrada, N_{esp} o número de elementos no espalhador.

A integral $\iiint_{V_{ele}} f(x', y', z') dx' dy' dz'$, no elemento "ele", pode ser realizada de forma numérica como:

$$\iiint_{V_{ele}} f(x', y', z') dx' dy' dz' \approx \sum_{p=1}^{N_p} f(x'_{(p)}, y'_{(p)}, z'_{(p)}) \text{peso}(p) \frac{\Delta}{6}, \quad (3.69)$$

sendo $x'_{(p)}$, $y'_{(p)}$ e $z'_{(p)}$ as coordenadas do ponto de integração, mapeadas no tetraedro mestre, Figura A.11, com a transformação de coordenadas descrita em (A.38). Assim, deve-se encontrar cada termo dos integrandos das expressões de (3.64) no ponto de integração de um elemento qualquer, pertencente ao espalhador.

3.3.3.1 Obtenção de \vec{M}_{eq} no Ponto de Integração.

Como \vec{M}_{eq} é dado pela equação (3.65), pode-se dizer que:

$$\vec{M}_{eq(p)} = (\vec{v}_r - \vec{I}) \cdot \left\{ \sum_{ai=1}^6 [E_{(ai)}^s \nabla \times \vec{N}_{(p,ai)}] \right\} - j\omega\mu_0 (\vec{v}_r - \vec{I}) \cdot \vec{H}_{(p)}^{inc} \quad (3.70)$$

onde $\nabla \times \vec{N}_{(ai)} = Rot_{x(ai)}\hat{x} + Rot_{y(ai)}\hat{y} + Rot_{z(ai)}\hat{z}$ e pode ser obtido através da equação (3.48), e;

$$\begin{aligned} &(\vec{v}_r - \vec{I}) \cdot \nabla \times \vec{N}_{(p,ai)} = (\vec{v}_r - \vec{I}) \cdot (Rot_{x(ai)}\hat{x} + Rot_{y(ai)}\hat{y} + Rot_{z(ai)}\hat{z}) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} + \left[\begin{array}{ccccc} (v_{rxx} - 1) & Rot_{x(ai)} & v_{rxy} & Rot_{y(ai)} & v_{rzz} & Rot_{z(ai)} \end{array} \right] \hat{x} + \\ + \left[\begin{array}{ccccc} v_{ryx} & Rot_{x(ai)} & (v_{ryy} - 1) & Rot_{y(ai)} & v_{ryz} & Rot_{z(ai)} \end{array} \right] \hat{y} + \\ + \left[\begin{array}{ccccc} v_{rzx} & Rot_{x(ai)} & v_{rzy} & Rot_{y(ai)} & (v_{rzz} - 1) & Rot_{z(ai)} \end{array} \right] \hat{z} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.71)$$

sendo que $Rot_{x(ai)}$, $Rot_{y(ai)}$ e $Rot_{z(ai)}$ não possuem o índice p porque não variam dentro do elemento, e o termo $(\vec{v}_r - \vec{I}) \cdot \vec{H}^{inc(p)}$ pode ser obtido através de (3.37), que está reescrita abaixo:

$$\left(\vec{v}_r - \vec{I} \right) \cdot \vec{H}^{inc(p)} = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{lll} (v_{(rxx)} - 1) & H_x^{inc} + v_{(rxy)} & H_y^{inc} + v_{(rxz)} & H_z^{inc} \end{array} \right] \hat{x} + \\ + \left[\begin{array}{lll} v_{(ryx)} & H_x^{inc} + (v_{(ryy)} - 1) & H_y^{inc} + v_{(ryz)} & H_z^{inc} \end{array} \right] \hat{y} + \\ + \left[\begin{array}{lll} v_{(rzx)} & H_x^{inc} + v_{(rzy)} & H_y^{inc} + (v_{(rzz)} - 1) & H_z^{inc} \end{array} \right] \hat{z} \end{array} \right\} * e^{-jk_0 \vec{r}_{(p)} \cdot \vec{k}} \quad (3.72)$$

sendo :

$$H_x^{inc} = \frac{k_y E_z^{inc} - k_z E_y^{inc}}{\eta_0}$$

$$H_y^{inc} = \frac{k_z E_x^{inc} - k_x E_z^{inc}}{\eta_0} \quad (3.73)$$

$$H_z^{inc} = \frac{k_x E_y^{inc} - k_y E_x^{inc}}{\eta_0}$$

$$\vec{r}_{(p)} = \left[\begin{array}{l} (x_1 L_{(p,1)} + x_2 L_{(p,2)} + x_3 L_{(p,3)} + x_4 L_{(p,4)}) \hat{x} \\ + (y_1 L_{(p,1)} + y_2 L_{(p,2)} + y_3 L_{(p,3)} + y_4 L_{(p,4)}) \hat{y} \\ + (z_1 L_{(p,1)} + z_2 L_{(p,2)} + z_3 L_{(p,3)} + z_4 L_{(p,4)}) \hat{z} \end{array} \right] \quad (3.74)$$

sendo x_i , y_i e z_i as coordenadas do vértice i do elemento L , e

$$R_{(p)} = |\vec{r} - \vec{r}_{(p)}| \quad (3.75)$$

Com (3.75) em (3.67), vem:

$$G_{1(p)} = \frac{-1 - jk_0 R_{(p)} + k_0^2 R_{(p)}^2}{R_{(p)}^3}$$

$$G_{2(p)} = \frac{3 + j3k_0 R_{(p)} - k_0^2 R_{(p)}^2}{R_{(p)}^5} \quad (3.76)$$

Assim, pode-se escrever:

$$M_{eqz(p)} = (v_{(rxx)} - 1) \left\{ \sum_{ai=1}^6 [E_{(ai)}^s Rot_{x(ai)}] - j\omega\mu_0 \left(\frac{k_y E_z^{inc} - k_z E_y^{inc}}{\eta_0} \right) e^{-jk_0 \vec{r}_{(p)} \cdot \vec{k}} \right\}$$

$$+ v_{(rxy)} \left\{ \sum_{ai=1}^6 [E_{(ai)}^s Rot_{y(ai)}] - j\omega\mu_0 \left(\frac{k_z E_x^{inc} - k_x E_z^{inc}}{\eta_0} \right) e^{-jk_0 \vec{r}_{(p)} \cdot \vec{k}} \right\} \quad (3.77)$$

$$+ v_{(rxz)} \left\{ \sum_{ai=1}^6 [E_{(ai)}^s Rot_{z(ai)}] - j\omega\mu_0 \left(\frac{k_x E_y^{inc} - k_y E_x^{inc}}{\eta_0} \right) e^{-jk_0 \vec{r}_{(p)} \cdot \vec{k}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
M_{eq_y(p)} = & \quad v_{(ryx)} \quad \left\{ \sum_{ai=1}^6 [E_{(ai)}^s Rot_{x(ai)}] - j\omega\mu_0 \left(\frac{k_y E_z^{inc} - k_z E_y^{inc}}{\eta_0} \right) e^{-jk_0 \vec{r}_{(p)} \cdot \hat{k}} \right\} \\
& + (v_{(ryy)} - 1) \quad \left\{ \sum_{ai=1}^6 [E_{(ai)}^s Rot_{y(ai)}] - j\omega\mu_0 \left(\frac{k_z E_x^{inc} - k_x E_z^{inc}}{\eta_0} \right) e^{-jk_0 \vec{r}_{(p)} \cdot \hat{k}} \right\} \quad (3.78)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + v_{(ryz)} \quad \left\{ \sum_{ai=1}^6 [E_{(ai)}^s Rot_{z(ai)}] - j\omega\mu_0 \left(\frac{k_x E_y^{inc} - k_y E_x^{inc}}{\eta_0} \right) e^{-jk_0 \vec{r}_{(p)} \cdot \hat{k}} \right\} \\
M_{eq_z(p)} = & \quad v_{(rxx)} \quad \left\{ \sum_{ai=1}^6 [E_{(ai)}^s Rot_{x(ai)}] - j\omega\mu_0 \left(\frac{k_y E_z^{inc} - k_z E_y^{inc}}{\eta_0} \right) e^{-jk_0 \vec{r}_{(p)} \cdot \hat{k}} \right\} \\
& + v_{(rzy)} \quad \left\{ \sum_{ai=1}^6 [E_{(ai)}^s Rot_{y(ai)}] - j\omega\mu_0 \left(\frac{k_z E_x^{inc} - k_x E_z^{inc}}{\eta_0} \right) e^{-jk_0 \vec{r}_{(p)} \cdot \hat{k}} \right\} \quad (3.79) \\
& + (v_{(rzz)} - 1) \quad \left\{ \sum_{ai=1}^6 [E_{(ai)}^s Rot_{z(ai)}] - j\omega\mu_0 \left(\frac{k_x E_y^{inc} - k_y E_x^{inc}}{\eta_0} \right) e^{-jk_0 \vec{r}_{(p)} \cdot \hat{k}} \right\}
\end{aligned}$$

sendo $E_{(ai)}^s$ os coeficientes da aproximação (3.16), calculados na solução do sistema (3.42), $Rot_{x(ai)}$, $Rot_{y(ai)}$ e $Rot_{z(ai)}$ são fornecidos por (3.48), k_x , k_y e k_z são componentes do vetor unitário da direção de propagação da onda incidente, \hat{k} , E_x^{inc} , E_y^{inc} e E_z^{inc} são calculados com (3.81), η_0 é a impedância de onda no espaço livre.

3.3.3.2 Obtenção de \vec{J}_{eq} no Ponto de Integração.

Como $\vec{J}_{eq(ai)}$ é dado pela equação (3.66), pode-se dizer que:

$$\vec{J}_{eq(p)} = j\omega\epsilon_0(\vec{\epsilon}_r - \vec{I}) \cdot (\vec{E}_{(p)}^{inc} + \sum_{ai=1}^6 E_{(ai)}^s \vec{N}_{(p,ai)}) \quad (3.80)$$

onde $(\vec{\epsilon}_r - \vec{I}) \cdot \vec{E}_{(p)}^{inc}$ é dado pela equação (3.31) e (3.32), repetidas aqui:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{(p)}^{inc} = & \quad [\cos(\beta) \cos(\theta) \cos(\phi) - \text{sen}(\beta) \text{sen}(\phi) \hat{x} \\
& + \cos(\beta) \cos(\theta) \text{sen}(\phi) + \text{sen}(\beta) \cos(\phi) \hat{y} - \cos(\beta) \text{sen}(\theta) \hat{z}] e^{-k_0 \vec{r}_{(p)} \cdot \hat{k}} \quad (3.81) \\
= & \quad (E_x^{inc} \hat{x} + E_y^{inc} \hat{y} + E_z^{inc} \hat{z}) e^{-k_0 \vec{r}_{(p)} \cdot \hat{k}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{\epsilon}_r - \bar{I}) \cdot \vec{E}_{(p)}^{inc} = \\
& \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccc} (\epsilon_{(rxx)} - 1) & E_x^{inc} + \epsilon_{(rxy)} & E_y^{inc} + \epsilon_{(rxz)} & E_z^{inc} \end{array} \right] \hat{x} + \\ + \left[\begin{array}{cccc} \epsilon_{(rxy)} & E_x^{inc} + (\epsilon_{(ryy)} - 1) & E_y^{inc} + \epsilon_{(ryz)} & E_z^{inc} \end{array} \right] \hat{y} + \\ + \left[\begin{array}{cccc} \epsilon_{(rxz)} & E_x^{inc} + \epsilon_{(rzy)} & E_y^{inc} + (\epsilon_{(rzz)} - 1) & E_z^{inc} \end{array} \right] \hat{z} \end{array} \right\} * e^{-jk_0 \vec{r}_{(p)} \cdot \hat{k}}
\end{aligned} \tag{3.82}$$

e,

$$\begin{aligned}
(\bar{\epsilon}_r - \bar{I}) \cdot \vec{N}_{(p,ai)} = \frac{l_{(ai)}}{\Delta} & \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} [L(p, ci_{(ai)})be(cf_{(ai)}) - L(p, cf_{(ai)})be(ci_{(ai)})] (\epsilon_{rxx} - 1) \\ + [L(p, ci_{(ai)})ce(cf_{(ai)}) - L(p, cf_{(ai)})ce(ci_{(ai)})] \epsilon_{rxy} \\ + [L(p, ci_{(ai)})de(cf_{(ai)}) - L(p, cf_{(ai)})de(ci_{(ai)})] \epsilon_{rxz} \end{array} \right\} \hat{x} + \\ + \left\{ \begin{array}{l} [L(p, ci_{(ai)})be(cf_{(ai)}) - L(p, cf_{(ai)})be(ci_{(ai)})] \epsilon_{ryx} \\ + [L(p, ci_{(ai)})ce(cf_{(ai)}) - L(p, cf_{(ai)})ce(ci_{(ai)})] (\epsilon_{ryy} - 1) \\ + [L(p, ci_{(ai)})de(cf_{(ai)}) - L(p, cf_{(ai)})de(ci_{(ai)})] \epsilon_{ryz} \end{array} \right\} \hat{y} + \\ + \left\{ \begin{array}{l} [L(p, ci_{(ai)})be(cf_{(ai)}) - L(p, cf_{(ai)})be(ci_{(ai)})] \epsilon_{rzz} \\ + [L(p, ci_{(ai)})ce(cf_{(ai)}) - L(p, cf_{(ai)})ce(ci_{(ai)})] \epsilon_{rzy} \\ + [L(p, ci_{(ai)})de(cf_{(ai)}) - L(p, cf_{(ai)})de(ci_{(ai)})] (\epsilon_{rzz} - 1) \end{array} \right\} \hat{z} \end{array} \right)
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Daí:

$$\begin{aligned}
J_{eqx(p)} = j\omega\epsilon_0(\epsilon_{(rxx)} - 1) & \left\{ \sum_{ai=1}^6 \{E_{(ai)}^s \frac{l_{(ai)}}{\Delta} [L(p, ci_{(ai)})be(cf_{(ai)}) - L(p, cf_{(ai)})be(ci_{(ai)})]\} \right. \\ & \left. + E_x^{inc} e^{-jk_0 \vec{r}_{(p)} \cdot \hat{k}} \right\} \\ + j\omega\epsilon_0\epsilon_{(rxy)} & \left\{ \sum_{ai=1}^6 \{E_{(ai)}^s \frac{l_{(ai)}}{\Delta} [L(p, ci_{(ai)})ce(cf_{(ai)}) - L(p, cf_{(ai)})ce(ci_{(ai)})]\} \right. \\ & \left. + E_y^{inc} e^{-jk_0 \vec{r}_{(p)} \cdot \hat{k}} \right\} \\ + j\omega\epsilon_0\epsilon_{(rxz)} & \left\{ \sum_{ai=1}^6 \{E_{(ai)}^s \frac{l_{(ai)}}{\Delta} [L(p, ci_{(ai)})de(cf_{(ai)}) - L(p, cf_{(ai)})de(ci_{(ai)})]\} \right. \\ & \left. + E_z^{inc} e^{-jk_0 \vec{r}_{(p)} \cdot \hat{k}} \right\}
\end{aligned} \tag{3.84}$$

$$\begin{aligned}
J_{eq_y(p)} = & \quad j\omega\epsilon_0\epsilon_{(ryx)} \left\{ \sum_{ai=1}^6 \left\{ E_{(ai)}^s \frac{le(ai)}{\Delta} [L(p, ci_{(ai)})be(cf_{(ai)}) - L(p, cf_{(ai)})be(ci_{(ai)})] \right\} \right. \\
& \quad \left. + E_x^{inc} e^{-jk_0\vec{r}_{(p)} \cdot \hat{k}} \right\} \\
& + j\omega\epsilon_0(\epsilon_{(ryy)} - 1) \left\{ \sum_{ai=1}^6 \left\{ E_{(ai)}^s \frac{le(ai)}{\Delta} [L(p, ci_{(ai)})ce(cf_{(ai)}) - L(p, cf_{(ai)})ce(ci_{(ai)})] \right\} \right. \\
& \quad \left. + E_y^{inc} e^{-jk_0\vec{r}_{(p)} \cdot \hat{k}} \right\} \\
& + j\omega\epsilon_0\epsilon_{(ryz)} \left\{ \sum_{ai=1}^6 \left\{ E_{(ai)}^s \frac{le(ai)}{\Delta} [L(p, ci_{(ai)})de(cf_{(ai)}) - L(p, cf_{(ai)})de(ci_{(ai)})] \right\} \right. \\
& \quad \left. + E_z^{inc} e^{-jk_0\vec{r}_{(p)} \cdot \hat{k}} \right\}
\end{aligned} \tag{3.85}$$

$$\begin{aligned}
J_{eq_z(p)} = & \quad j\omega\epsilon_0\epsilon_{(rzz)} \left\{ \sum_{ai=1}^6 \left\{ E_{(ai)}^s \frac{le(ai)}{\Delta} [L(p, ci_{(ai)})be(cf_{(ai)}) - L(p, cf_{(ai)})be(ci_{(ai)})] \right\} \right. \\
& \quad \left. + E_x^{inc} e^{-jk_0\vec{r}_{(p)} \cdot \hat{k}} \right\} \\
& + j\omega\epsilon_0\epsilon_{(rzy)} \left\{ \sum_{ai=1}^6 \left\{ E_{(ai)}^s \frac{le(ai)}{\Delta} [L(p, ci_{(ai)})ce(cf_{(ai)}) - L(p, cf_{(ai)})ce(ci_{(ai)})] \right\} \right. \\
& \quad \left. + E_y^{inc} e^{-jk_0\vec{r}_{(p)} \cdot \hat{k}} \right\} \\
& + j\omega\epsilon_0(\epsilon_{(rzz)} - 1) \left\{ \sum_{ai=1}^6 \left\{ E_{(ai)}^s \frac{le(ai)}{\Delta} [L(p, ci_{(ai)})de(cf_{(ai)}) - L(p, cf_{(ai)})de(ci_{(ai)})] \right\} \right. \\
& \quad \left. + E_z^{inc} e^{-jk_0\vec{r}_{(p)} \cdot \hat{k}} \right\}
\end{aligned} \tag{3.86}$$

sendo $E_{(ai)}^s$ coeficientes da aproximação (3.16), calculados na solução do sistema (3.42), $L_{(p,i)}$ dado pela Tabela A.6, os coeficientes $be_{(i)}$, $ce_{(i)}$ e $de_{(i)}$ fornecidos por (3.8), (A.10) e (A.11), respectivamente, $r_{(p)}$ calculado com (3.74), E_x^{inc} , E_y^{inc} e E_z^{inc} calculados com (3.81), $le(ai)$ o comprimento da aresta ai , $ci_{(i)}$ e $cf_{(i)}$ coeficientes fornecidos pela Tabela A.1 e \hat{k} vetor unitário na direção de

propagação. Então, as expressões de (3.64) podem ser calculadas numericamente na forma:

$$E_x^s \approx \sum_{ele=1}^{Nesp} \left\{ \sum_{p=1}^{Np} \left[\left(-\frac{j\eta_0}{4\pi k_0} \{ G_{1(p)} J_{eq_x(p)} + (x - x'_{(p)}) G_{2(p)} * \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. [(x - x'_{(p)}) J_{eq_x(p)} + (y - y'_{(p)}) J_{eq_y(p)} + (z - z'_{(p)}) J_{eq_z(p)}] \right\} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{4\pi} [(z - z'_{(p)}) M_{eq_y(p)} - (y - y'_{(p)}) M_{eq_z(p)}] \frac{1+jk_0 R_{(p)}}{R_{(p)}^3} \right) e^{-jk_0 R_{(p)}} * peso(p) * \frac{\Delta}{6} \right] \left. \right\} \quad (3.87)$$

$$E_y^s \approx \sum_{ele=1}^{Nesp} \left\{ \sum_{p=1}^{Np} \left[\left(-\frac{j\eta_0}{4\pi k_0} \{ G_{1(p)} J_{eq_y(p)} + (y - y'_{(p)}) G_{2(p)} * \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. [(x - x'_{(p)}) J_{eq_x(p)} + (y - y'_{(p)}) J_{eq_y(p)} + (z - z'_{(p)}) J_{eq_z(p)}] \right\} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{4\pi} [(x - x'_{(p)}) M_{eq_z(p)} - (z - z'_{(p)}) M_{eq_x(p)}] \frac{1+jk_0 R_{(p)}}{R_{(p)}^3} \right) e^{-jk_0 R_{(p)}} * peso(p) * \frac{\Delta}{6} \right] \left. \right\} \quad (3.88)$$

$$E_z^s \approx \sum_{ele=1}^{Nesp} \left\{ \sum_{p=1}^{Np} \left[\left(-\frac{j\eta_0}{4\pi k_0} \{ G_{1(p)} J_{eq_z(p)} + (z - z'_{(p)}) G_{2(p)} * \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. [(x - x'_{(p)}) J_{eq_x(p)} + (y - y'_{(p)}) J_{eq_y(p)} + (z - z'_{(p)}) J_{eq_z(p)}] \right\} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{4\pi} [(y - y'_{(p)}) M_{eq_x(p)} - (x - x'_{(p)}) M_{eq_y(p)}] \frac{1+jk_0 R_{(p)}}{R_{(p)}^3} \right) e^{-jk_0 R_{(p)}} * peso(p) * \frac{\Delta}{6} \right] \left. \right\} \quad (3.89)$$

sendo $Nesp$ o número de elementos que compõem o espalhador, Np o número de pontos de integração no tetraedro, $G_{1(p)}$ e $G_{2(p)}$ são fornecidos por (3.75) e (3.76), $M_{eq_x(p)}$, $M_{eq_y(p)}$ e $M_{eq_z(p)}$ são fornecidos por (3.77), (3.78) e (3.79), respectivamente, $J_{eq_x(p)}$, $J_{eq_y(p)}$ e $J_{eq_z(p)}$ são fornecidos por (3.84), (3.85) e (3.86), respectivamente, x , y e z as coordenadas do ponto de observação, $x'_{(p)}$, $y'_{(p)}$ e $z'_{(p)}$ as coordenadas do ponto de integração, $R_{(p)}$ a distância entre o ponto de observação e o ponto de integração, o $peso(p)$ é fornecido pela Tabela A.6 e $\frac{\Delta}{6}$ o volume do elemento, que é fornecido por (A.1).

3.4 Resultados

3.4.1 Campo Espalhado por uma Esfera Homogênea.

A Figura 3.3 ilustra uma esfera homogênea iluminada por uma onda plana $\vec{E}^{inc} = e^{-jk_0z} \hat{x}$. Os resultados, expressos através da *Radar Cross Section* (RCS), (3.90), são comparados com resultados da tese de doutorado de S. A. Carvalho [4] e também com a solução pela série de Mie [29]. A malha utilizada possui 2380 nós, 12305 tetraedros, 1383 arestas(incógnitas) e 1456 tetraedros no espalhador, para ser ter uma idéia da malha utilizada. A matriz possui 0,103% de seus elementos não nulos, e para sua decomposição frontal, e solução do sistema, foram utilizados $31 \cdot 10^9$ operações de ponto flutuante. A RCS de uma esfera com $k_0a = 0,408$ está traçada para vários valores de permissividade dielétrica nas figuras 3.4, 3.6, 3.8 e 3.10. Pode-se verificar, através das Figuras 3.5, 3.7, 3.9 e 3.11, que o erro cresce à medida que a permissividade elétrica cresce; isto acontece no método dos momentos e no método dos elementos finitos, sendo mais dramático no último. No método dos momentos, o erro aumenta porque foi mantida a mesma discretização e o campo no interior da esfera tende a variar mais com a distância [4]. No método dos elementos finitos, além da variação do campo ser maior, o campo espalhado também é maior, exigindo mais das camadas absorventes, PMLs; como estas permaneceram as mesmas, o erro aumenta muito. A comparação entre PMLs com vários valores de \mathbb{C} , constante dos tensores da permissividade elétrica relativa e da permeabilidade magnética relativa da PML, está mostrada na Figura 3.12 e pode-se verificar que, para $\mathbb{C} = 1 - j2$, o resultado foi melhor que para $\mathbb{C} = 1 - j1,6$; este, por sua vez, foi melhor do que para $\mathbb{C} = 1 - j1$, que foi melhor do que para $\mathbb{C} = 1 - j3$; todos os resultados foram obtidos mantendo a mesma espessura. Isto mostra o quanto é limitada a escolha da perda, isto é, o valor negativo da parte imaginária de \mathbb{C} , não adiantando aumentá-la demasiadamente. Isto ocorre por erro de discretização: o campo com muita atenuação variaria mais por distância do que a malha pode representar. Ainda no método dos elementos finitos, através da Figura 3.13 pode-se verificar que o uso do teorema da superfície equivalente leva a um erro maior que o uso do teorema do volume equivalente para o cálculo do campo distante; isto é devido a se utilizar o próprio campo espalhado exterior ao espalhador para o cálculo do campo distante, no uso do teorema de superfície equivalente. Na Figura 3.14 há uma comparação entre o melhor resultado obtido com o uso da PML com o resultado obtido com a ABC de segunda ordem do tipo Engquist-Majda; vê-se, claramente, que o resultado obtido com a PML é melhor para a mesma malha, com a distância entre o espalhador e as fronteiras do domínio permanecendo a mesma. O número de operações de ponto flutuante gasto com a solução do sistema de equações foi de $31 \cdot 10^9$, para o uso da PML, e foi de $36 \cdot 10^9$ com o

uso das ABCs. Como o uso das PMLs envolve uma redução do número de incógnitas finais a serem encontradas, já que há paredes elétricas na fronteira do domínio, a redução do número de operações de ponto flutuante foi pequeno, o que pode ser explicado por não haver materiais com permissividade ou permeabilidade complexas nas ABC, onde antes havia nas PMLs.

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{|\vec{E}^s|^2}{|\vec{E}^{inc}|^2} \quad (3.90)$$

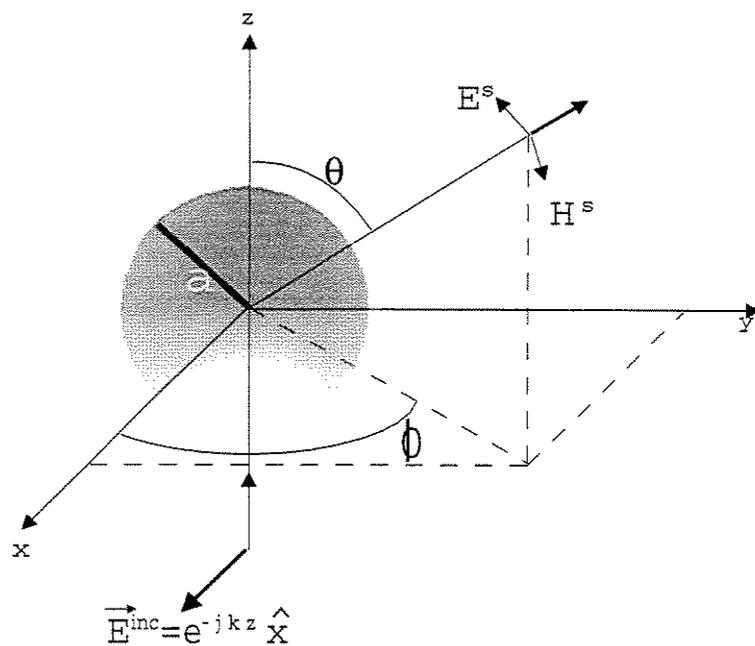


Figura 3.3: Esfera homogênea iluminada por uma onda plana.

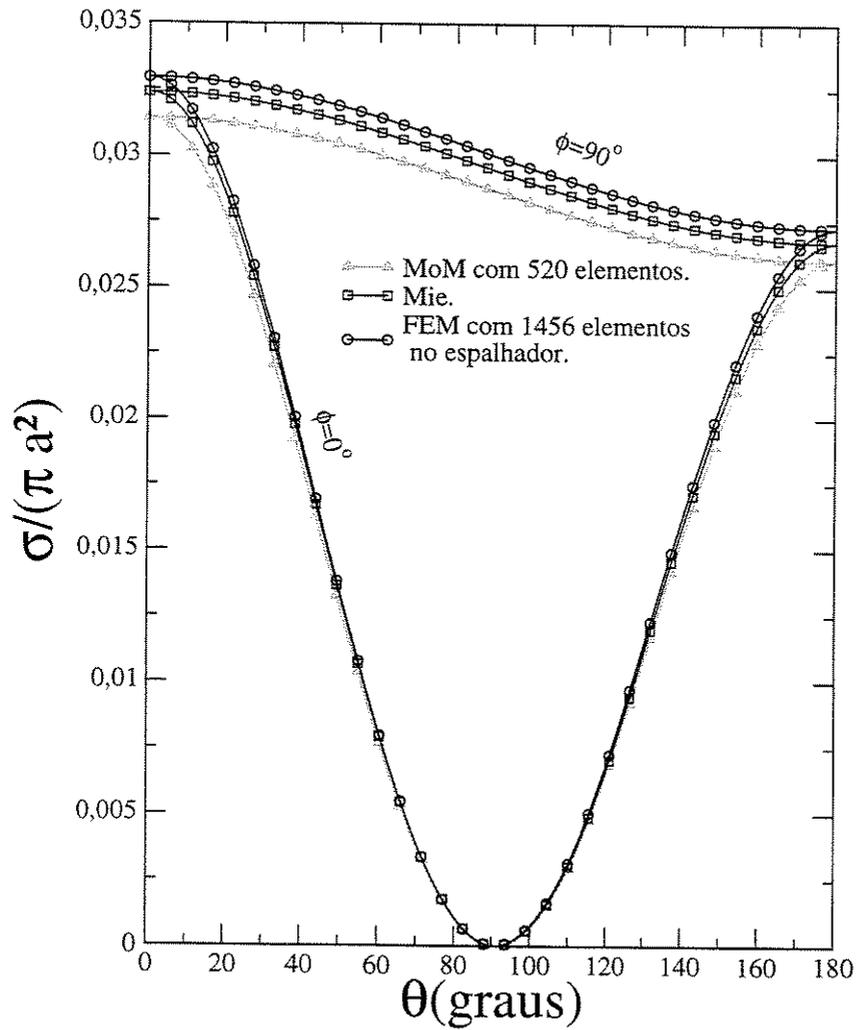


Figura 3.4: Esfera com $k_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 4,0$. PML: espessura de $0,3\lambda$; $\mathbb{C} = 1,0 - j2,0$.

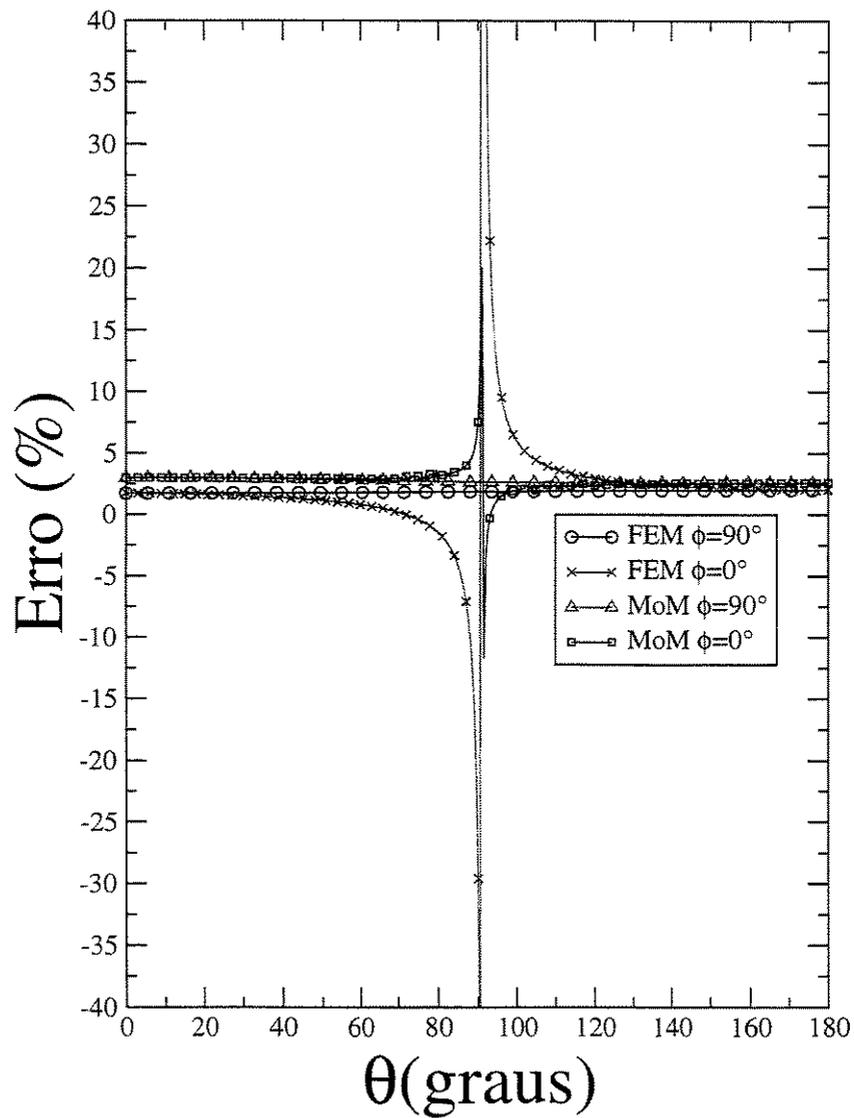


Figura 3.5: Erro para a esfera com $k_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 4,0$. PML: espessura de $0,3\lambda$; $\mathbb{C} = 1,0 - j2,0$.

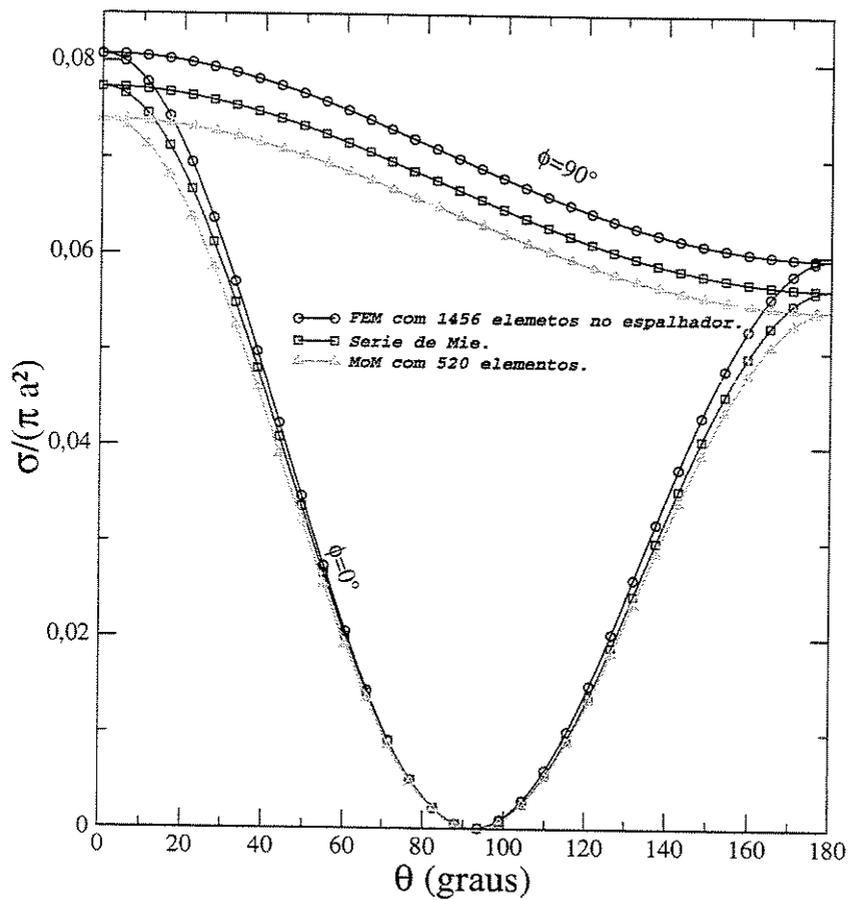


Figura 3.6: Esfera com $k_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 9,0$. PML: espessura de $0,3\lambda$; $C = 1,0 - j2,0$.

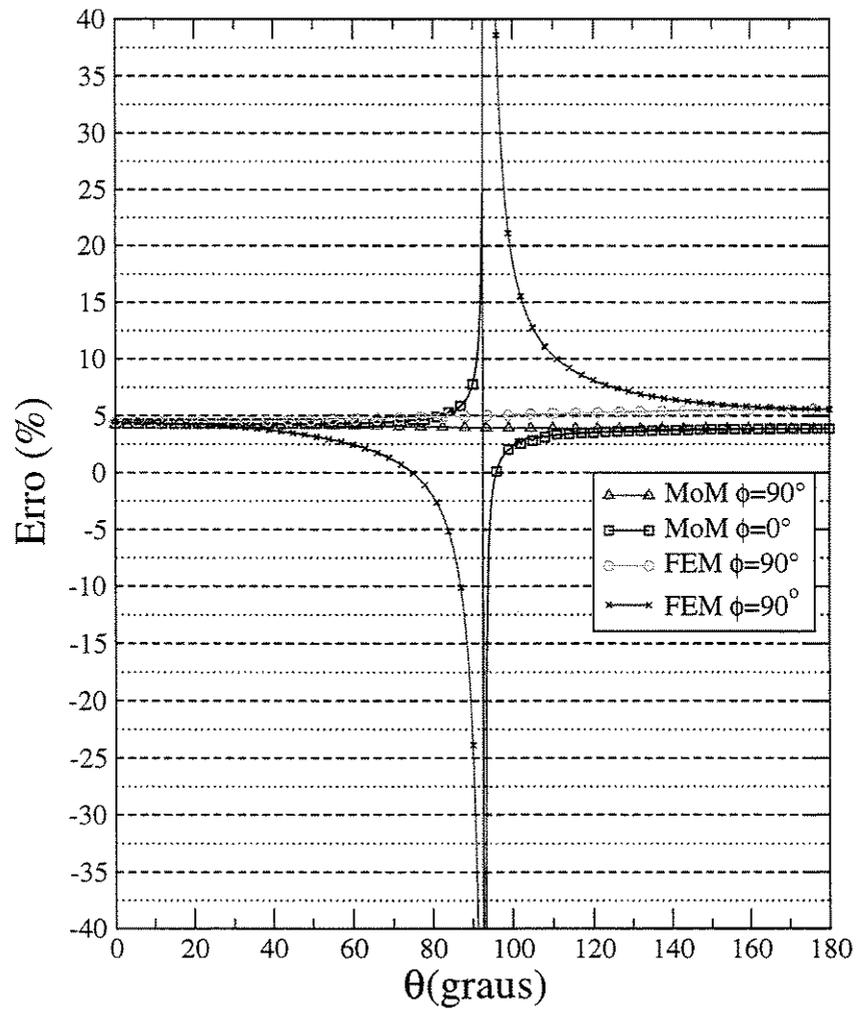


Figura 3.7: Erro para a esfera com $k_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 9,0$. PML: espessura de $0,3\lambda$; $C = 1,0 - j2,0$.

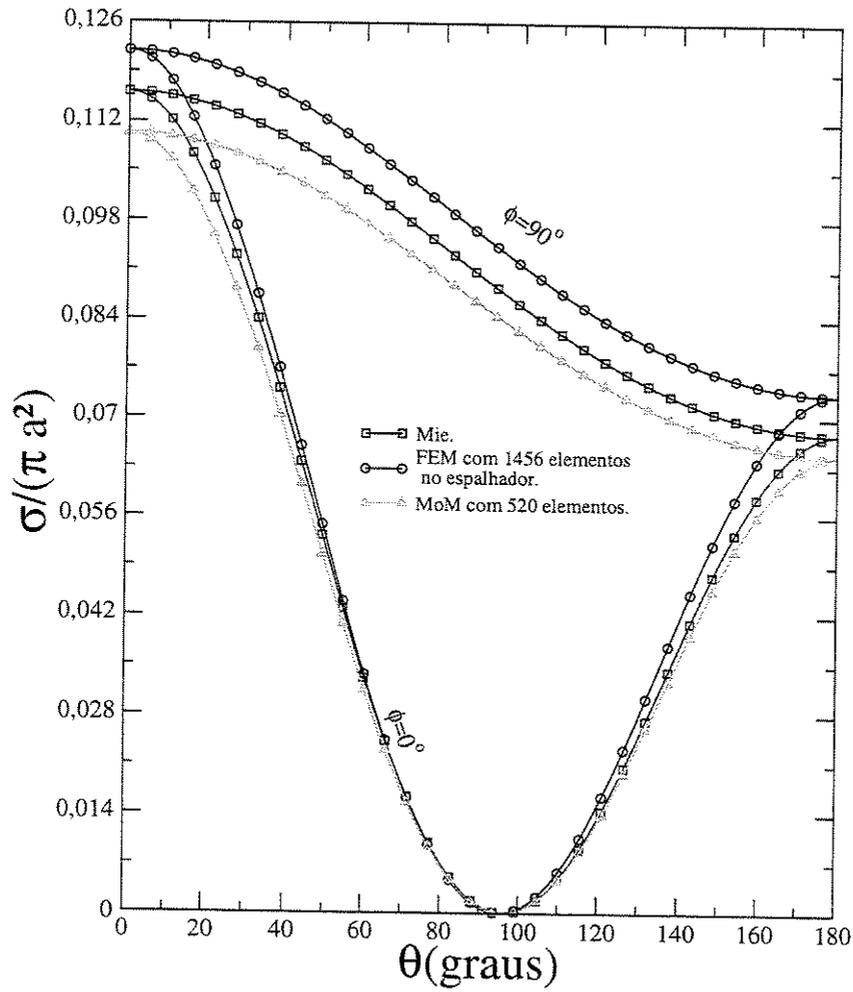


Figura 3.8: Esfera com $k_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 16,0$. PML: espessura de $0,3\lambda$; $C = 1,0 - j2,0$.

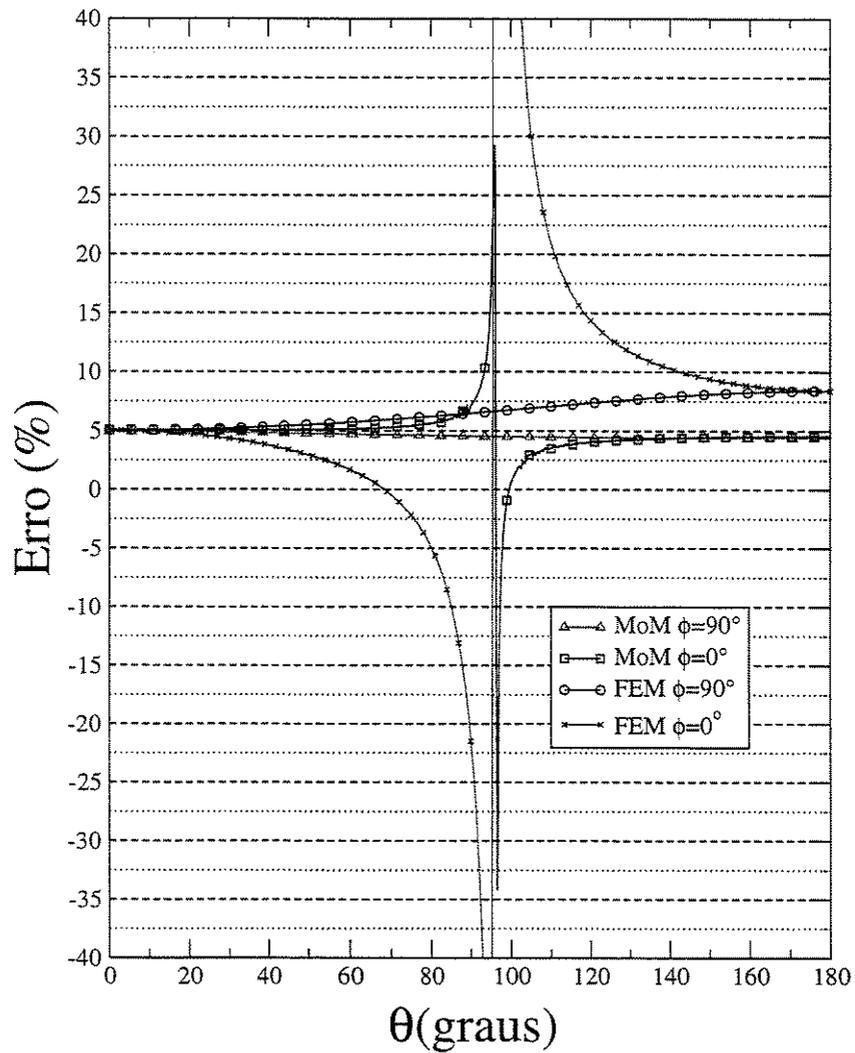


Figura 3.9: Erro para a esfera com $k_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 16,0$. PML: espessura de $0,3\lambda$; $\mathbb{C} = 1,0 - j2,0$.

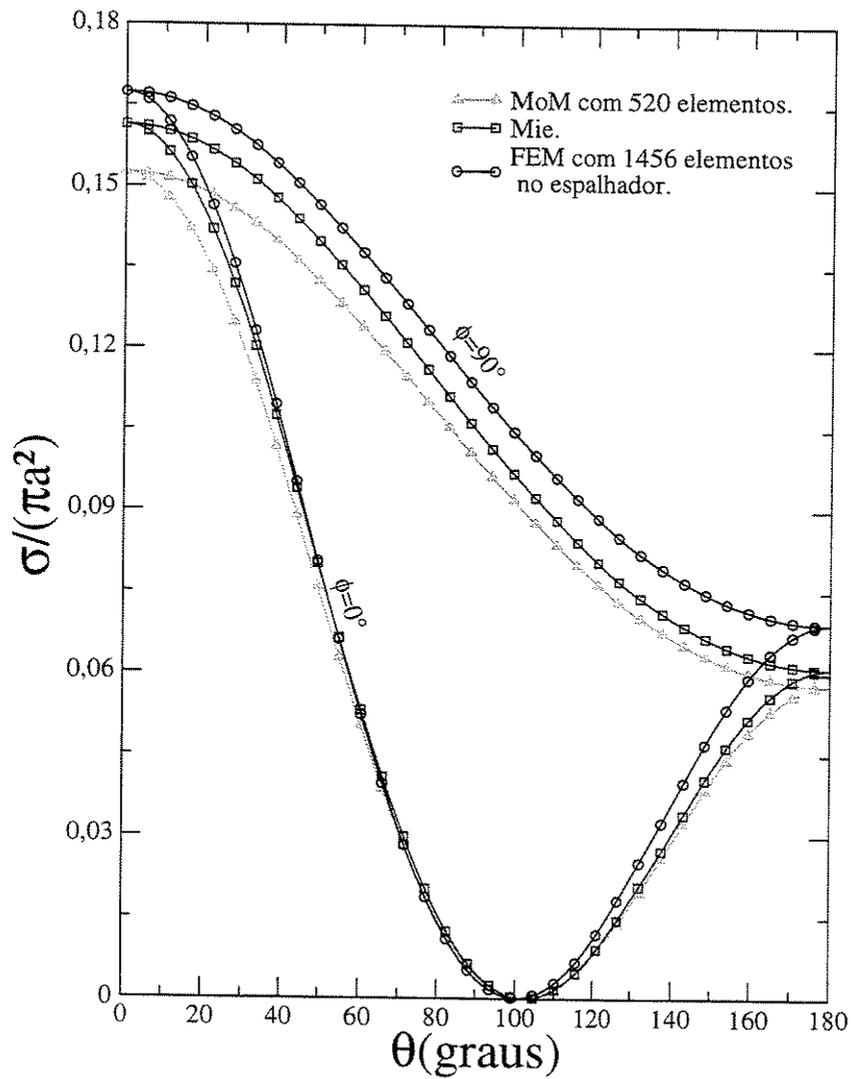


Figura 3.10: Esfera com $k_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 25,0$. PML: espessura de $0,3\lambda$; $\mathbb{C} = 1,0 - j2,0$.

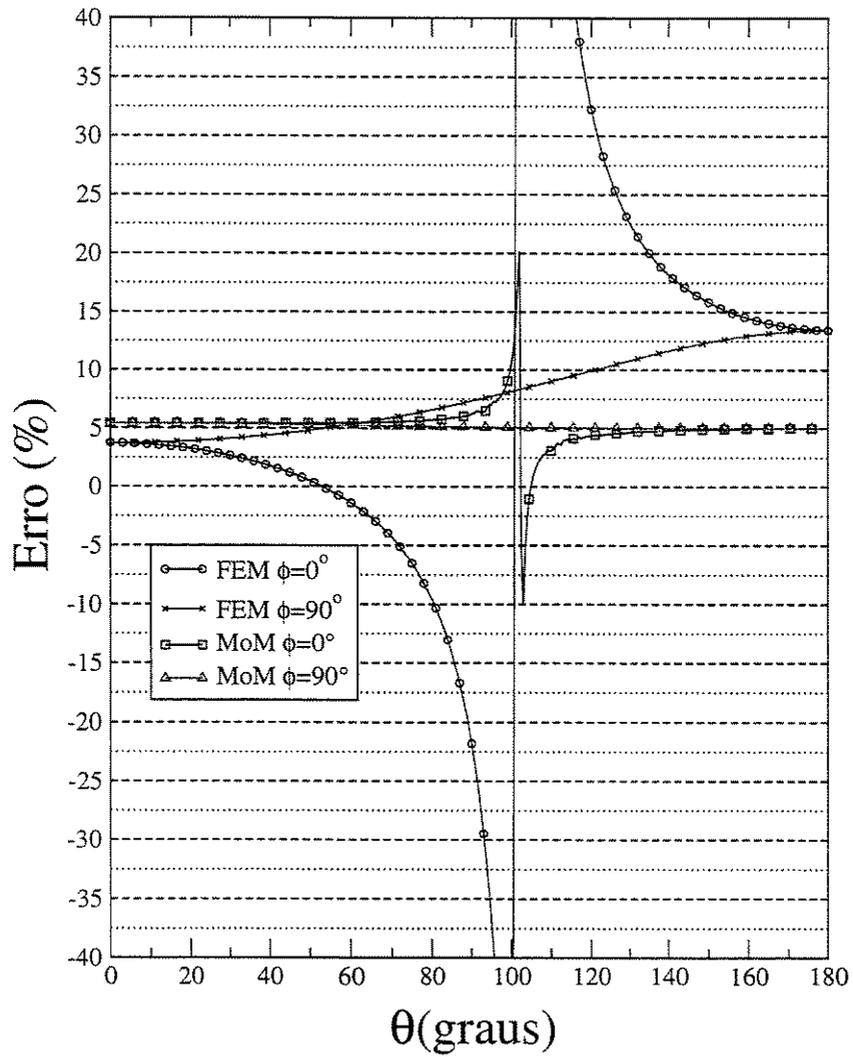


Figura 3.11: Erro para a esfera com $k_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 25,0$. PML: espessura de $0,3\lambda$; $\mathbb{C} = 1,0 - j2,0$.

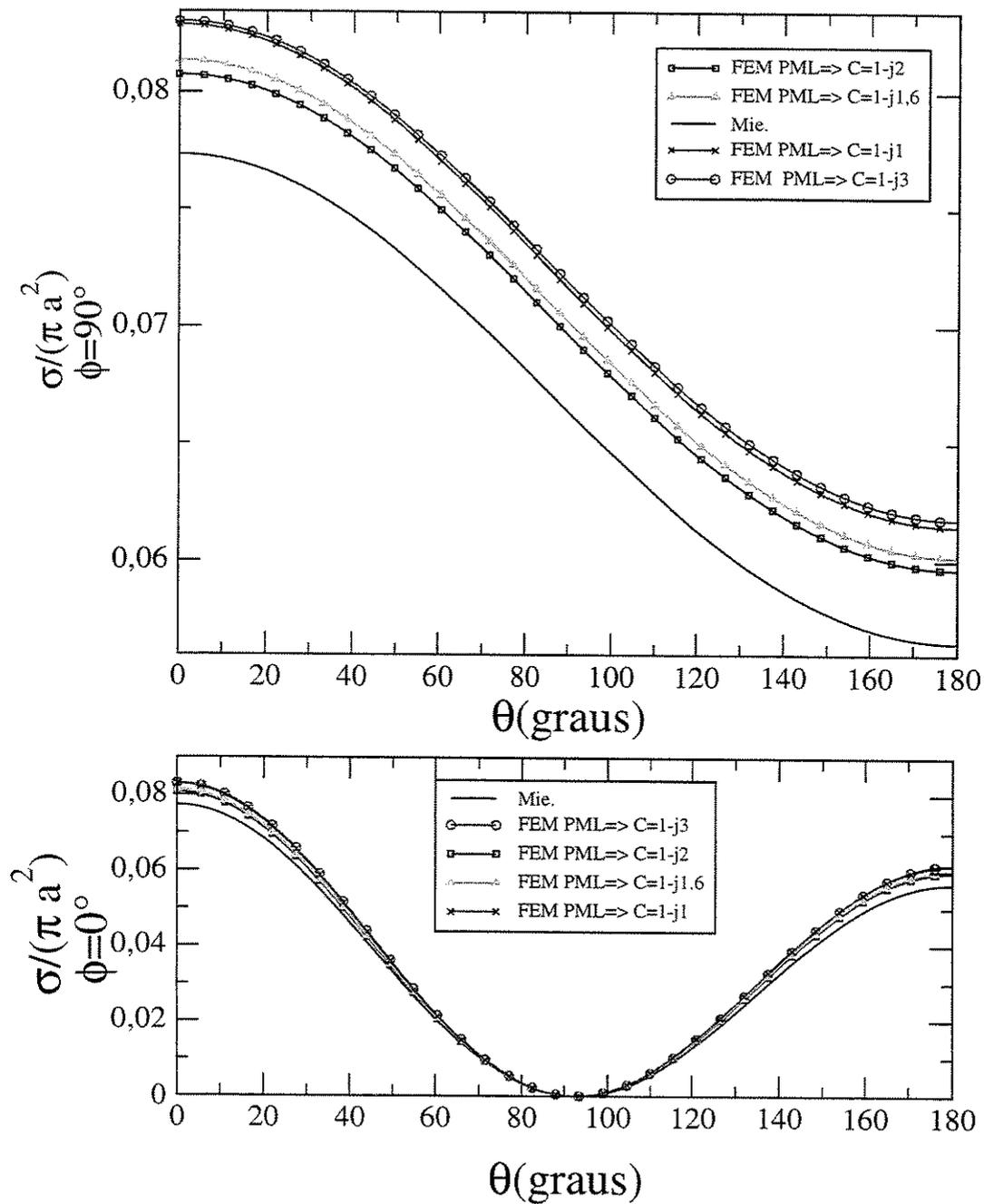


Figura 3.12: Esfera homogênea com $k_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 9,0$. Comparação para vários valores de C , para uma espessura de $0,3\lambda$.

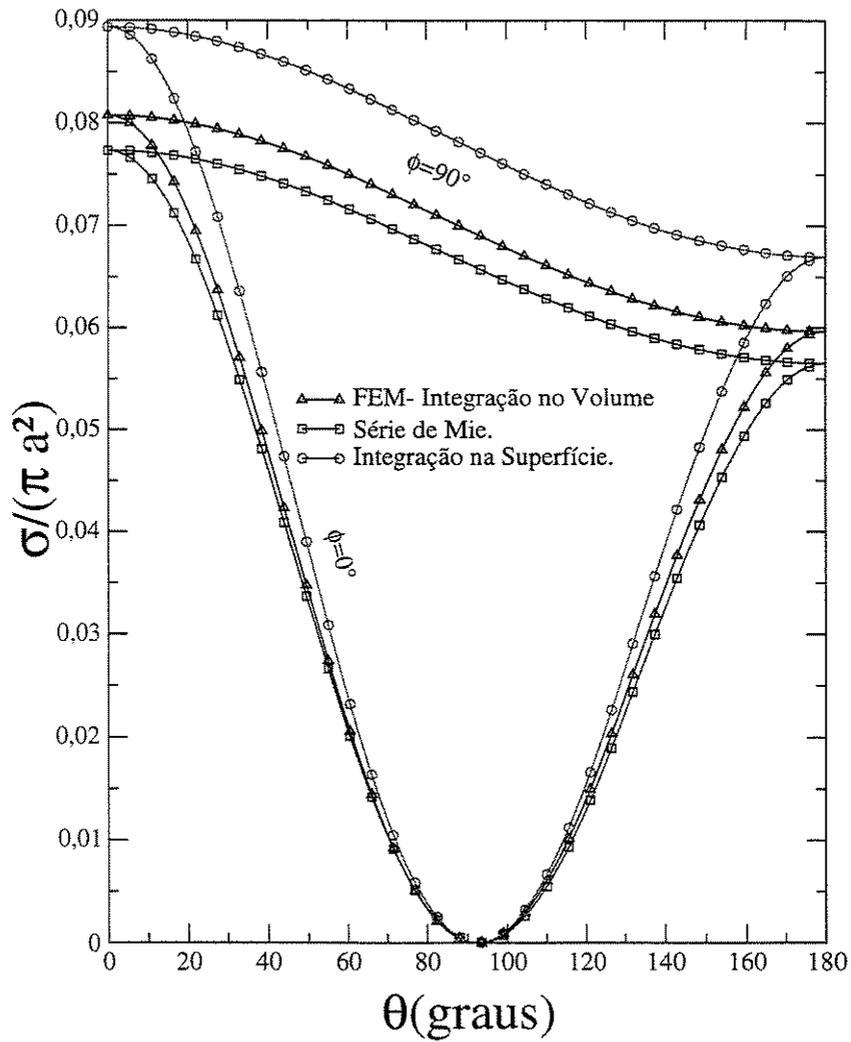


Figura 3.13: Comparação dos resultados do cálculo com o teorema da superfície equivalente e do volume equivalente, para uma esfera homogênea com $\epsilon_r = 9,0$.

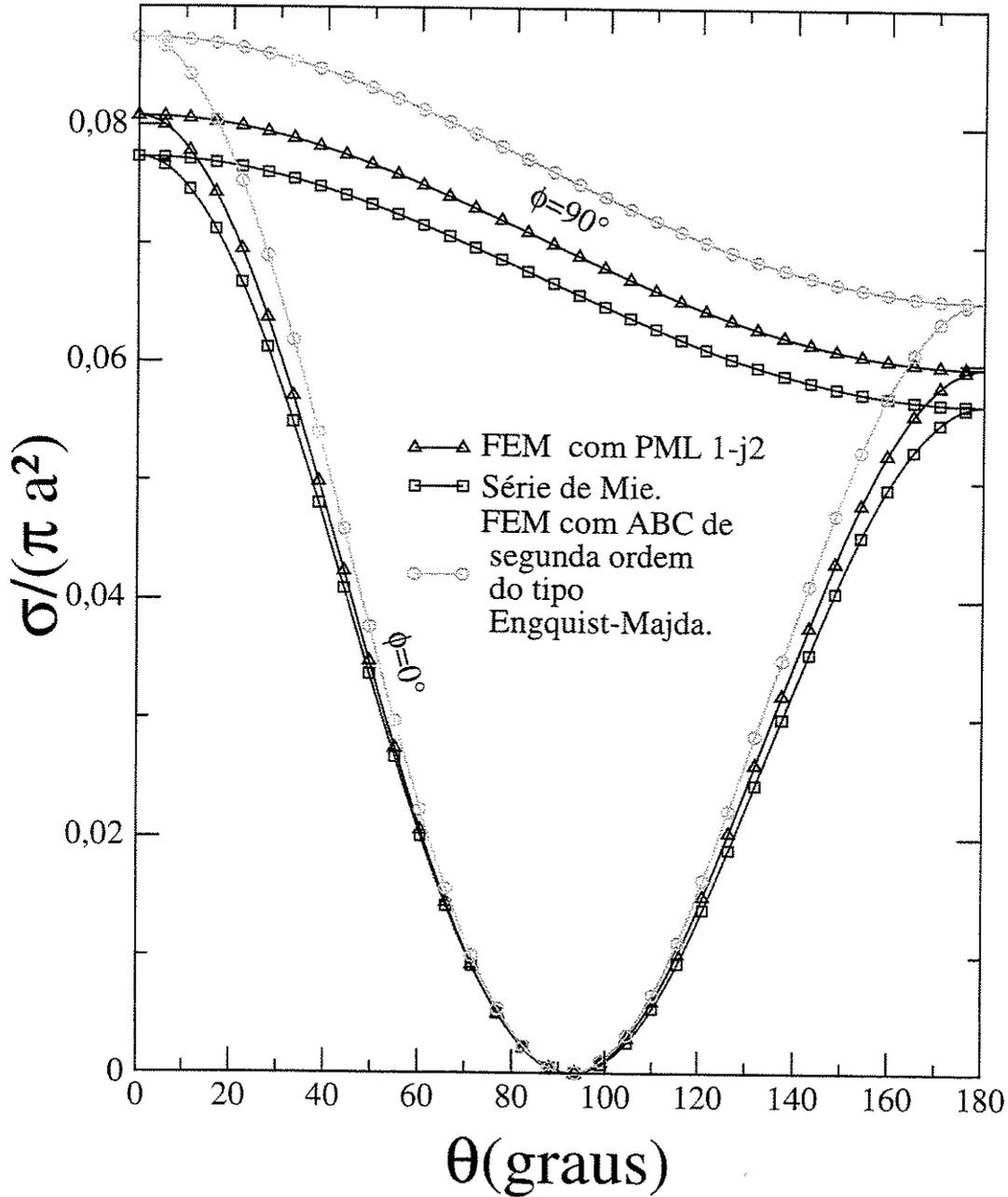


Figura 3.14: Esfera homogênea com $k_0 a = 0,408$ e $\epsilon_r = 9,0$. Comparação entre resultados obtidos com o uso de PML e de ABC de segunda ordem do tipo Engquist-Majda.

3.4.2 Campo Espalhado por uma Esfera Não Homogênea.

É calculado o campo espalhado por uma esfera não homogênea com $\epsilon_{r1} = 4,0$ para $k_0a < 0,204$ e $\epsilon_{r1} = 9,0$ para $0,204 \leq k_0a < 0,408$. É apresentado o RCS na Figura 3.11 e o erro é apresentado na Figura 3.16.

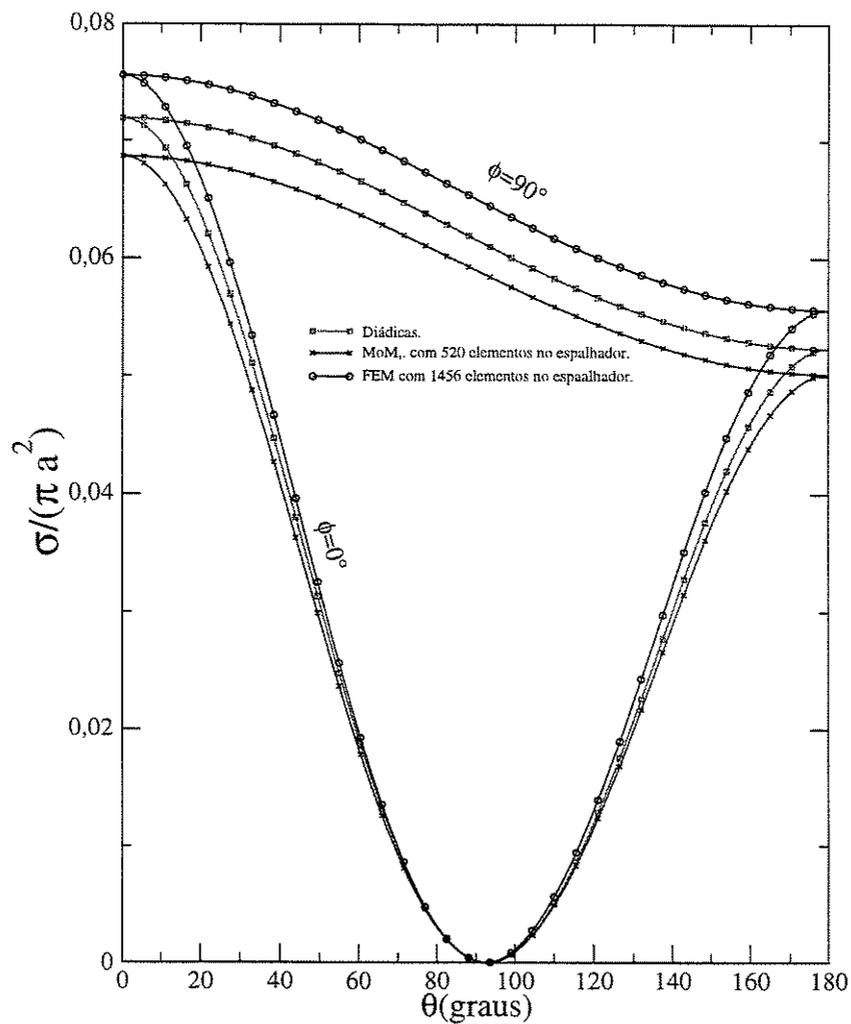


Figura 3.15: Esfera não-homogênea com $\epsilon_{r1} = 4,0$ para $k_0a < 0,204$ e $\epsilon_{r1} = 9,0$ para $0,204 \leq k_0a < 0,408$.

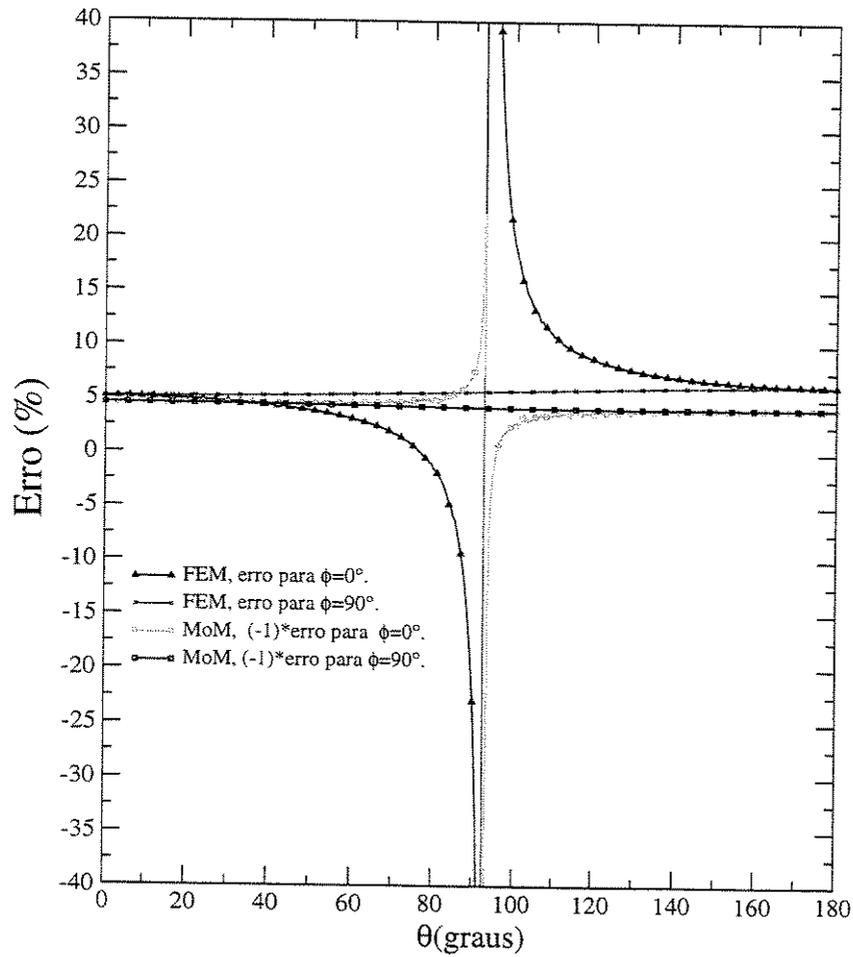


Figura 3.16: Erro para a esfera não-homogênea com $\epsilon_{r1} = 4,0$ para $k_0 a < 0,204$ e $\epsilon_{r1} = 9,0$ para $0,204 \leq k_0 a < 0,408$.

3.4.3 Campo Espalhado por um Cubo Homogêneo com Perdas.

Os campos espalhados para $\phi = 0^\circ$ e $\phi = 90^\circ$ para $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1,0 - j1000,0$, referentes à Figura 3.17, estão traçados na Figura 3.18. Neste caso o uso do teorema da superfície equivalente é imperativo, pois o campo interno ao espalhador é muito pequeno, as perdas são muito grandes, o que causa um grande erro se for usado o teorema do volume equivalente.

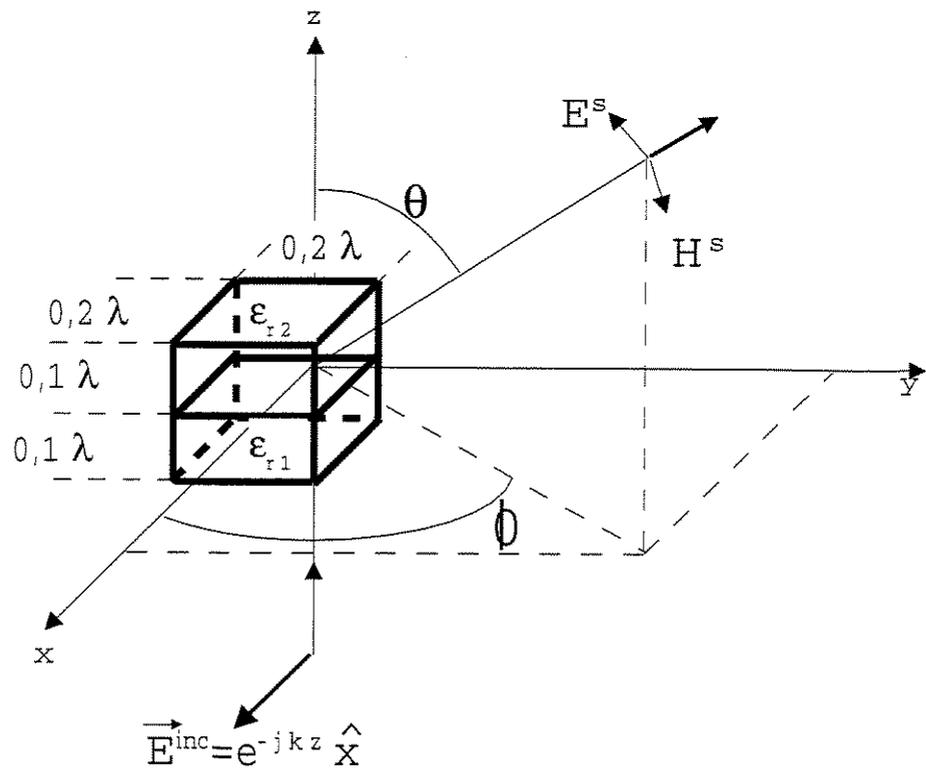


Figura 3.17: Cubo não-homogêneo iluminado por uma onda plana.

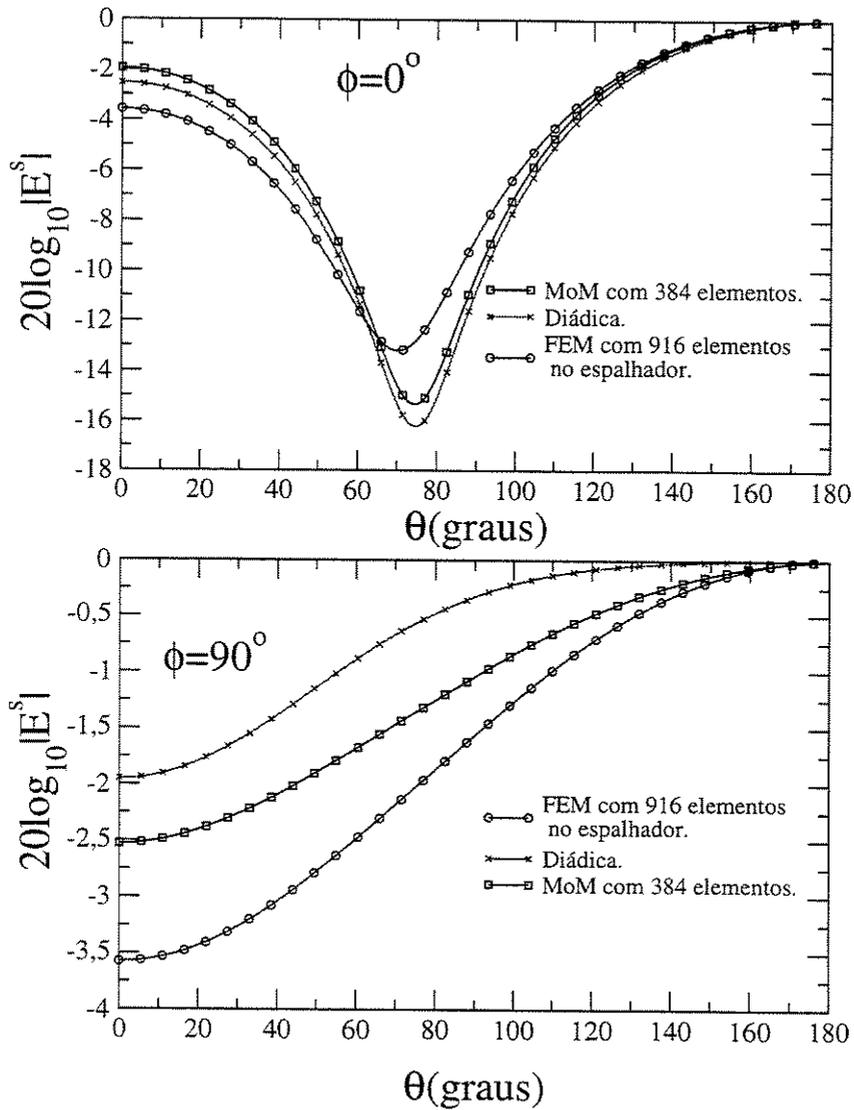


Figura 3.18: Campo espalhado por um cubo homogêneo de aresta $0,2\lambda$ e $\epsilon_r = 1,0 - j1000,0$; a PML utilizada possui espessura de $0,3\lambda$ e $C = 1,0 - j2,0$.

3.4.4 Campo Espalhado por um Cubo não Homogêneo.

Os campos espalhados para $\phi = 0^\circ$ e $\phi = 90^\circ$ para $\epsilon_{r1} = 4,0$ e $\epsilon_{r2} = 9,0$, referentes à Figura 3.17, estão traçados na Figura 3.19.

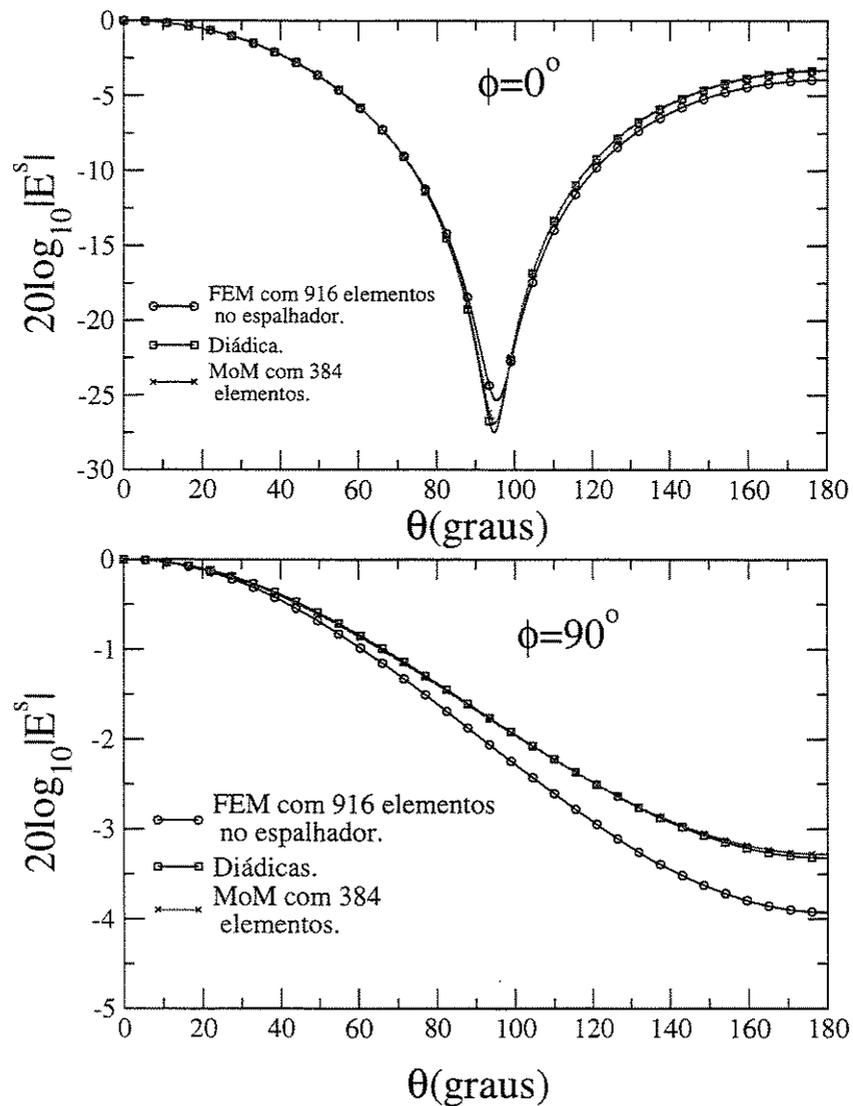


Figura 3.19: Campo espalhado por um cubo não-homogêneo de aresta $0,2\lambda$, $\epsilon_{r1} = 4,0$ e $\epsilon_{r2} = 9,0$; a PML utilizada possui espessura de $0,3\lambda$ e $\mathbb{C} = 1,0 - j2,0$.

3.4.5 Campo Espalhado por dois Cubos Homogêneos.

Os campos espalhados para $\phi = 0^\circ$ e $\phi = 90^\circ$ para $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 9,0$, referentes à Figura 3.20, estão traçados na Figura 3.21. O número de incógnitas foi de 10383, a percentagem de elementos não nulos da matriz foi 0,14947%, o número de operações de ponto flutuante foi $13,5 \times 10^9$ e o tempo gasto com a solução do sistema de equações foi 74,84 [s] em um PC Pentium III com o sistema operacional GNU & LINUX com o compilador Fortran 77 GNU.

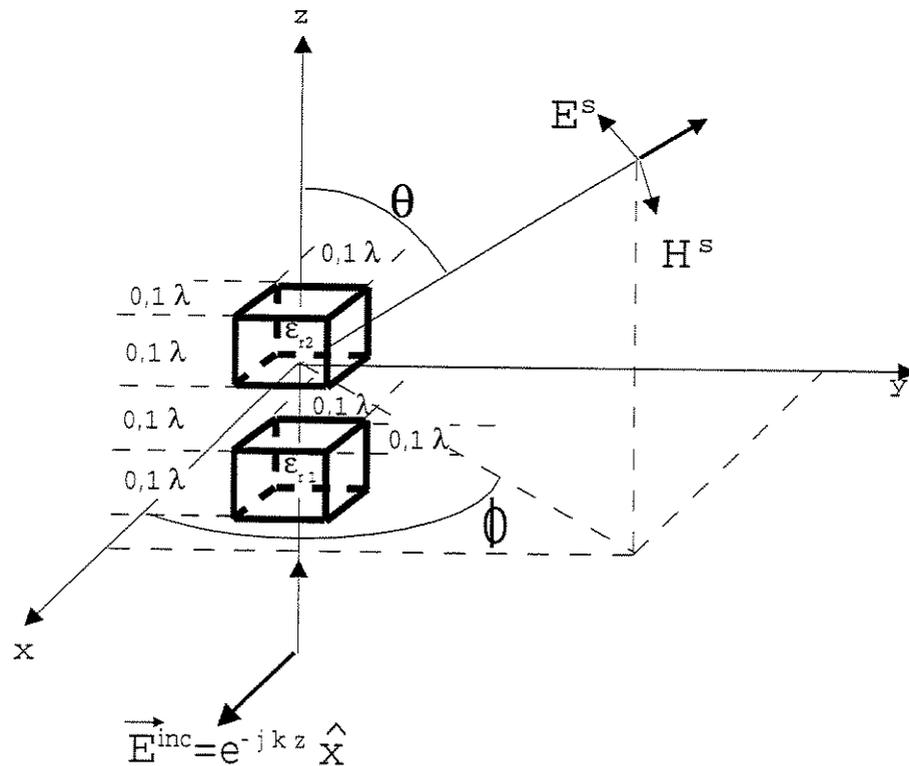


Figura 3.20: Dois cubos homogêneos iluminados por uma onda plana.

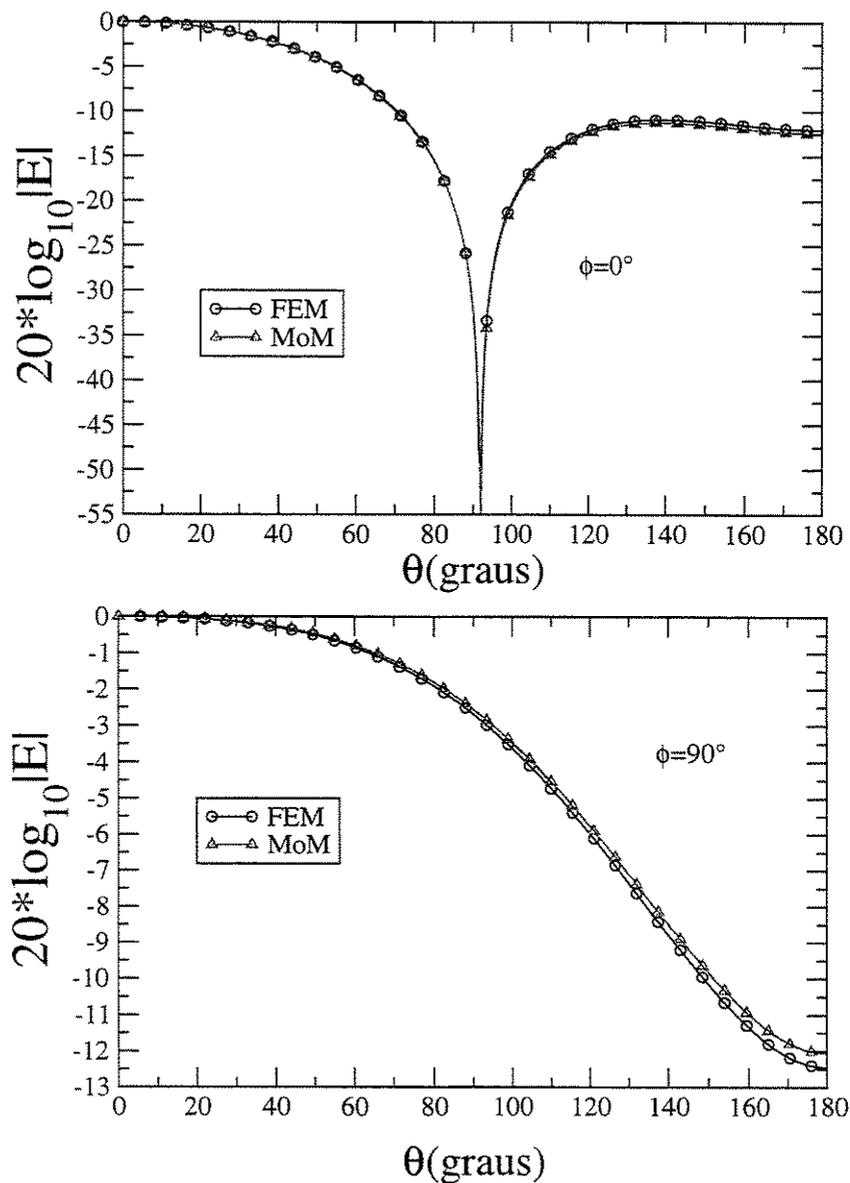


Figura 3.21: Campo espalhado por dois cubos homogêneos de aresta $0,1\lambda$, $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 9,0$; a PML utilizada possui espessura de $0,3\lambda$ e $\mathbb{C} = 1,0 - j2,0$.

3.4.6 Campo Espalhado por uma Esfera com Anisotropia Elétrica.

Os resultados mostrados nas Figuras 3.23 e 3.24 são referentes à Figura 3.22, onde uma onda plana polarizada na direção z , com direção de propagação no sentido positivo de x , incide em uma esfera com $k_0 a = 1,125$ e com

$$\bar{\epsilon}_r = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -j3 \\ 0 & j3 & 7 \end{bmatrix}$$

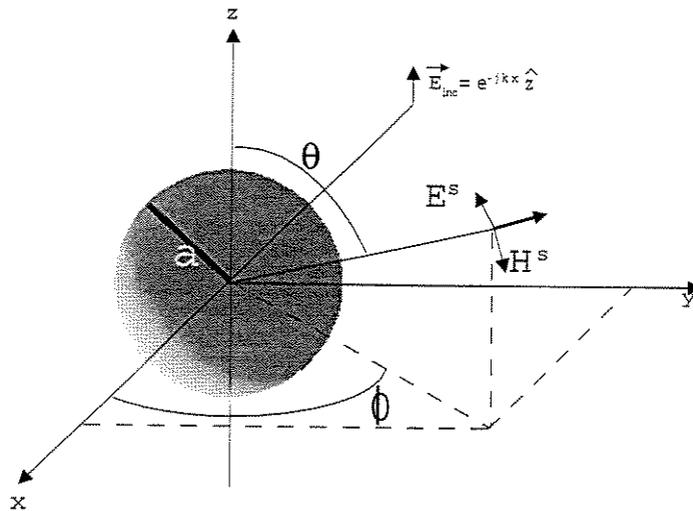


Figura 3.22: Esfera iluminada por uma onda plana polarizada na direção z , com direção de propagação no sentido positivo de x .

Nossos resultados são comparados com os resultados da referência [17], calculado com um método híbrido envolvendo o método dos elementos finitos no interior do domínio o método dos momentos na fronteira do domínio, e com os da referência [30], calculados com o método dos momentos. A componente de campo de polarização cruzada não surge no caso isotrópico e no caso com anisotropia é da ordem de grandeza da copolarizada. A discordância na Figura 3.24 pode ser debitada a vários fatores: A obtenção dos dados foi feita manualmente, diretamente dos artigos [17] e [30], com o auxílio de ampliação, já que as figuras originais estão bastante diminuídas; não é fornecido o nível de discretização utilizado nas referências e não há cálculo exato para este caso.

Mas, o que realmente importa, é a ordem de grandeza e a forma das curvas que estão com grande concordância.

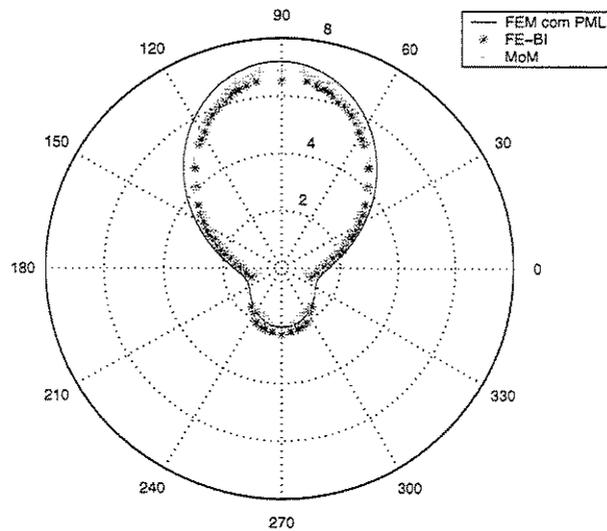


Figura 3.23: *Radar Cross Section* normalizada, no plano XZ, de uma esfera com anisotropia elétrica. PML: espessura de $0,3\lambda$ e $C = 1,0 - j2,0$.

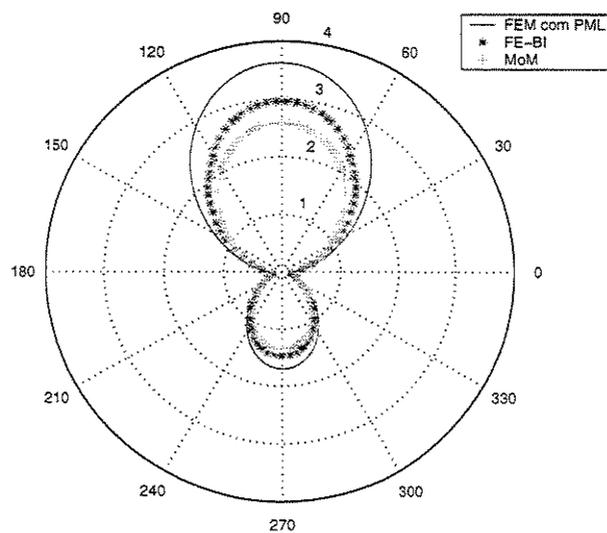


Figura 3.24: *Radar Cross Section* normalizada da componente de polarização cruzada, no plano XZ, de uma esfera com anisotropia elétrica. PML: espessura de $0,3\lambda$; $C = 1,0 - j2,0$.

Capítulo 4

O Método da Envoltória em Elementos Finitos 3D Vetorial.

O Método dos Elementos Finitos, FEM, não tem, como sua melhor característica, simulações no domínio do tempo em eletromagnetismo; ao contrário, o método mais popular é o Método das Diferenças Finitas, pois é um método explícito, não havendo necessidade de inversão de matrizes. Por outro lado, malhas não-ortogonais não são características muito fáceis de implementar no Método das Diferenças Finitas, apesar dos desenvolvimentos recentes. Esta característica é natural no Método dos Elementos Finitos e, por este motivo, o FEM é tão popular entre os engenheiros civis e os mecânicos. A nossa tentativa, apresentada neste capítulo, é tornar o FEM no domínio do tempo um pouco mais competitivo no que concerne à velocidade de cálculo. Assim, foi feita a extensão de algo já aplicado anteriormente em Elementos Finitos com formulação escalar [31] [32], isto é, com apenas uma componente de campo em duas dimensões para uma formulação vetorial em três dimensões [23] [24]. As formulações escalares em duas dimensões são muito empregadas na simulação de guias ópticos, cujas dimensões dos comprimentos de onda são tão pequenas que permite trabalhar com feixes colimados, o que significa que uma dimensão transversal do guia pode ser considerada infinita, sem variação. Com os novos dispositivos óticos, para tecnologia integrada, isto tende a mudar, já que as dimensões físicas serão bem menores e, além disso, as diferenças entre os índices de refração se tornarão cada vez maiores, tornando necessário ferramentas de simulação de três dimensões e vetoriais. O uso mais corrente de programas de simulação vetoriais em três dimensões, hoje em dia, são em dispositivos de microondas que possuem modos de propagação híbridos, exigindo assim o uso das três componentes de campo [33] [34] [35].

4.1 Formulação

A equação de onda para o campo elétrico no domínio do tempo, \vec{e} , em uma região livre de fontes, é dada por:

$$\nabla \times \bar{v}_r \cdot \nabla \times \vec{e} + \frac{1}{c^2} \bar{\epsilon}_r \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{e} = 0 \quad (4.1)$$

onde, \bar{v}_r é a inversa do tensor permeabilidade magnética $\bar{\mu}_r$, $\bar{\epsilon}_r$ é o tensor permissividade elétrica e c é a velocidade da luz no espaço livre.

Aplicando Galerkin em (4.1), vem:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \bar{v}_r \cdot \nabla \times \vec{e} \cdot \nabla \times \vec{W} dv \\ & + \iint_A \hat{n} \times \bar{v}_r \cdot \nabla \times \vec{e} \cdot \vec{W} dA + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_V \bar{\epsilon}_r \cdot \vec{e} \cdot \vec{W} dv = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde \vec{W} é a função peso vetorial e \hat{n} é o vetor unitário normal apontando para fora do volume. Considerando que as portas de entrada e de saída estão longe o suficiente das descontinuidades, onde só o modo dominante quase TEM está presente e, conseqüentemente, a condição de contorno de primeira ordem do tipo Silver-Miller, Apêndice A, pode ser utilizada, pode-se escrever:

$$\hat{n} \times \nabla \times \vec{e}_i = -\frac{1}{v_{fi}} \hat{n} \times \hat{n} \times \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial t} - \frac{2}{v_{fi}} \frac{\partial \vec{e}_i^{inc}}{\partial t} \quad (4.3)$$

onde, \vec{e}_i e \vec{e}_i^{inc} são os campos elétricos total e incidente, respectivamente, na porta i , e v_{fi} é a velocidade de fase do modo dominante, na mesma porta i .

Assumindo que as portas estão em meios isotrópicos, utilizando a condição (4.3) em (4.2), a seguinte expressão pode ser obtida:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \nabla \times \vec{W} \cdot \bar{v}_r \cdot \nabla \times \vec{e} dv + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_V \vec{W} \cdot \bar{\epsilon}_r \cdot \vec{e} dv \\ & - \sum_{n=2}^N \frac{1}{v_{fn}} \iint_{A_n} \vec{W} \cdot \hat{n} \times \hat{n} \times \frac{\partial \vec{e}_n}{\partial t} dA = \quad , \\ & \quad \frac{2}{v_{f1}} \iint_{A_1} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{e}_1^{inc}}{\partial t} dA \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde A_1 é a superfície (seção transversal) associada com as porta de entrada, $n = 2, \dots, N$ representa qualquer outra seção transversal de portas ou superfícies abertas, A_n e v_{fn} é a velocidade de fase de uma onda plana nesta localidade. Assumindo uma solução da forma

$$\vec{e} = \vec{E} e^{j\omega t} \quad (4.5)$$

onde \vec{E} é a envoltória do campo elétrico, que é dependente do tempo, e ω_0 é a frequência angular da portadora. O campo elétrico incidente, com a variação temporal como pulso gaussiano de largura de banda aproximada B_w^1 , outras formas de variação temporal poderiam ser utilizadas, pode ser escrito na forma:

$$\vec{e}^{inc} = e^{-\pi(t \cdot B_w/2)^2} \cdot e^{j\omega_0 t} \cdot \vec{E}^{inc} \quad (4.6)$$

onde \vec{E}^{inc} é a distribuição de campo elétrico incidente na porta 1, que pode ser calculado por um código 2D de cálculo de autovalores [36] e B_w é a largura de banda da envoltória.

Com as equações (4.5) e (4.6) na (4.4), a seguinte expressão para a envoltória complexa \vec{E} é obtida:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \nabla \times \vec{W} \cdot \vec{v}_r \cdot \nabla \times \vec{E} dv \\ & + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + j2\omega_0 \frac{\partial}{\partial t} - \omega_0^2 \right) \iiint_V \vec{W} \cdot \vec{e}_r \cdot \vec{E} dv \\ & - \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{v_{fn}} \iint_{A_n} \vec{W} \cdot \hat{n} \times \hat{n} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dA \right. \\ & \left. + j \frac{\omega_0}{v_{fn}} \iint_{A_n} \vec{W} \cdot \hat{n} \times \hat{n} \times \vec{E} dA \right) = \\ & \frac{2}{v_{f1}} (j\omega_0 - \pi \cdot B_w^2 \cdot t/2) * \\ & e^{-\pi*(t*B_w/2)^2} \iint_{A_1} \vec{W} \cdot \vec{E}^{inc} dA \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.2 Discretização

O domínio é, então, dividido utilizando-se tetraedros e a envoltória do campo elétrico é expandida pelas funções de base de Whitney CT/LN [37] [38] [39] [40] [41], \vec{N}_j , Apêndice A,

$$\vec{E} = \sum_{j=1}^{N_{are}} E_j \vec{N}_j \quad (4.8)$$

onde os coeficientes E_j são variáveis dependentes do tempo e N_{are} representa o número total de arestas(incógnitas). Para a função peso usa-se o mesmo conjunto de funções de base. Define-se,

$$Q_{ij} = \iiint_V \nabla \times \vec{N}_i \cdot \vec{v}_r \cdot \nabla \times \vec{N}_j dv \quad (4.9)$$

$$R_{ij} = \iiint_V \vec{N}_i \cdot \vec{e}_r \cdot \vec{N}_j dv \quad (4.10)$$

$$\Omega_{n \ i \ j} = \iint_{A_n} \vec{N}_i \cdot \hat{n} \times \hat{n} \times \vec{N}_j dA \quad (4.11)$$

$$\Omega_{f \ i} = \iint_{A_1} \vec{N}_i \cdot \vec{E}^{inc} dA \quad (4.12)$$

¹ B_w é a largura de banda em que se considera potências suficientes para que o resultado da FFT seja considerável, não é a largura de banda de 3 dB

As integrais (4.9), (4.10), (4.11) e (4.12) são semelhantes às integrais descritas no Capítulo 3; assim, a forma de implementação das mesmas já está descrita. A equação (4.7) pode ser reescrita na seguinte forma matricial:

$$[M] \frac{\partial^2 \{E\}}{\partial t^2} + [C] \frac{\partial \{E\}}{\partial t} + [K] \{E\} = \{b\} \quad (4.13)$$

onde

$$[M] = \frac{1}{c^2} [R],$$

$$[C] = \frac{j 2 w_0}{c^2} [R], - \sum_{n=1}^N \frac{1}{v_{fn}} [\Omega_n], \quad (4.14)$$

$$[K] = [Q] - \frac{\omega_0^2}{c^2} [R], - \sum_{n=1}^N \frac{j w_0}{v_{fn}} [\Omega_n],$$

$$\{b\} = \frac{2}{v_{f1}} (j \omega_0 - \pi \cdot B w^2 \cdot t/2) e^{-\pi^*(t*B_w/2)^2} \{\Omega_f\}.$$

4.3 Esquema de Avanço no Tempo

Para resolver a equação (4.13), é necessário discretizar as derivadas temporais. Como em 3D o número de incógnitas é muito grande, normalmente a discretização espacial é feita com poucos elementos, em comparação com casos de simulação em duas dimensões; assim, para evitar acúmulo excessivo no erro, devido a esta perda de precisão no espaço, deve-se utilizar um algoritmo de maior ordem de convergência no tempo, em relação aos utilizados na literatura [42], [31], [43], [32] e [44]. Então, aplicando o algoritmo de Newmark, Apêndice B [45], para a dependência no tempo, em (4.13), vem:

$$\begin{aligned} \{E\}^{m+1} = & ([M] + \gamma \Delta t [C] + \beta \Delta t^2 [K])^{-1} \left[\right. \\ & (2[M] - (1 - 2\gamma) \Delta t [C] - \\ & (0.5 - 2\beta + \gamma) \Delta t^2 [K]) \{E\}^m + \\ & (-[M] + (1 - \gamma) \Delta t [C] - \\ & (0.5 + \beta - \gamma) \Delta t^2 [K]) \{E\}^{m-1} + \\ & \left. \Delta t^2 (\beta \{b\}^{m+1} + (0.5 + \gamma - 2\beta) \{b\}^m + \right. \\ & \left. (0.5 - \gamma + \beta) \{b\}^{m-1}) \right], \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde m é o índice temporal. Os parâmetros de Newmark, β e γ , determinam as características de estabilidade e precisão do algoritmo, Seção 4.4. Como a distribuição do campo elétrico é conhecida sobre todo o domínio, para cada passo no tempo, as tensões nas portas de entrada e saída podem

ser calculadas. Então, os parâmetros de espalhamento podem ser obtidos em toda a faixa de frequências, B_w de (4.6), através da expressão:

$$S_{11} = \frac{\mathcal{F}[(V_i - V_{ref})e^{j\omega_0 t}]}{\mathcal{F}(V_{ref}e^{j\omega_0 t})} \quad (4.16)$$

e

$$S_{21} = \frac{\mathcal{F}[V_{out}e^{j\omega_0 t}]}{\mathcal{F}(V_{ref}e^{j\omega_0 t})} \sqrt{\frac{Z_{0i}}{Z_{0o}}} \quad (4.17)$$

onde Z_{0i} e Z_{0o} são as impedâncias características das portas de entrada e saída, respectivamente, \mathcal{F} é a transformada de Fourier, V_i e V_{out} são as tensões, no domínio do tempo, calculadas nas portas de entrada e saída, respectivamente, e V_{ref} é a tensão de referência, no domínio do tempo, na porta de entrada, considerando o guia infinito.

4.4 Análise da Convergência do Método de Newmark com o Uso de PMLs Anisotrópicas.

A análise será feita considerando somente o uso de PMLs, isto é, sem as integrais de superfície; então, reescrevendo a equação (4.13), vem:

$$[\mathbf{M}] \frac{\partial^2 \{e(t)\}}{\partial t^2} + [\mathbf{C}] \frac{\partial \{e(t)\}}{\partial t} + [\mathbf{K}] \{e(t)\} = \bar{b}(t) \quad (4.18)$$

usando (4.14), tem-se que:

$$[\mathbf{C}] = j2\omega_0 [\mathbf{M}] \quad (4.19)$$

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{Q}] - \omega_0^2 [\mathbf{M}] \quad (4.20)$$

4.4.1 Decomposição Modal

O primeiro passo para a análise da convergência é a decomposição modal da equação no contínuo; isto é facilitado encontrando-se os modos do problema homogêneo "não-amortecido" considerando-se $[\mathbf{C}] = 0$:

$$[\mathbf{M}] \frac{\partial^2 \{e(t)\}}{\partial t^2} + [\mathbf{K}] \{e(t)\} = 0 \quad (4.21)$$

$$[\mathbf{M}] \frac{\partial^2 \{e(t)\}}{\partial t^2} + ([\mathbf{Q}] - \omega_0^2 [\mathbf{M}]) \{e(t)\} = 0 \quad (4.22)$$

Considerando-se a solução do problema acima na forma

$$\{e(t)\} = \{\psi_i\} e^{j(\omega_i t - \phi_i)}, \quad (4.23)$$

que é a solução para o "i-ésimo" modo, a equação fica:

$$[\mathbf{Q}]\{\psi_i\} = (\omega_i^2 + \omega_0^2)[\mathbf{M}]\{\psi_i\} \quad (4.24)$$

Como $[\mathbf{M}]$ e $[\mathbf{Q}]$ são simétricas, então, normalizando os autovetores, tem-se

$$\begin{aligned} \{\psi_l\}^T [\mathbf{M}]\{\psi_m\} &= \delta_{lm} \\ \{\psi_l\}^T [\mathbf{Q}]\{\psi_m\} &= (\omega_l^2 + \omega_0^2) \delta_{lm}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

sendo $\{\psi_l\}^T$ o autovetor $\bar{\psi}_l$ transposto e δ_{lm} o delta de Kronecker. Os autovetores formam uma base para o espaço \mathbb{C}^{neq} ²; assim, qualquer elemento em \mathbb{C}^{neq} pode ser escrito como uma combinação linear dos mesmos. Assume-se a solução da equação (4.18) da forma:

$$\{e(t)\} = \sum_{i=n}^N \{\psi_i\} y_i(t) \quad (4.26)$$

A solução (4.26) na equação (4.18), resulta em:

$$\sum_{i=n}^N \left\{ [\mathbf{M}]\{\psi_i\} \frac{\partial^2 y_i(t)}{\partial t^2} + j2\omega_0 [\mathbf{M}]\{\psi_i\} \frac{\partial y_i(t)}{\partial t} + ([\mathbf{Q}] - \omega_0^2 [\mathbf{M}])\{\psi_i\} y_i(t) \right\} = \bar{b}(t) \quad (4.27)$$

Multiplicando, pela esquerda, por $\{\psi_l\}^T$:

$$\sum_{i=n}^N \left\{ \{\psi_l\}^T [\mathbf{M}]\{\psi_i\} \frac{\partial^2 y_i(t)}{\partial t^2} + j2\omega_0 \{\psi_l\}^T [\mathbf{M}]\{\psi_i\} \frac{\partial y_i(t)}{\partial t} + (\{\psi_l\}^T [\mathbf{Q}]\{\psi_i\} - \omega_0^2 \{\psi_l\}^T [\mathbf{M}]\{\psi_i\}) y_i(t) \right\} = \{\psi_l\}^T \bar{b}(t) \quad (4.28)$$

Pode-se definir $\{\psi_l\}^T \bar{b}(t) = f(t)$. Aplicando (4.23) na equação acima, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 y_l(t)}{\partial t^2} + j2\omega_0 \frac{\partial y_l(t)}{\partial t} + \omega_l^2 y_l(t) = f(t) \quad (4.29)$$

Como ω_l é a frequência angular de ressonância da cavidade, pode-se relacioná-la com a frequência central da seguinte forma:

$$\omega_l = (a + jb) * \omega_0, \quad (4.30)$$

sendo a a relação entre a frequência de ressonância da "cavidade" e a frequência central e, b a parcela das perdas introduzidas pela PML. Assim, a equação (4.28) fica:

$$\frac{\partial^2 y_l(t)}{\partial t^2} + j2\omega_0 \frac{\partial y_l(t)}{\partial t} + (a^2 - b^2 + 2jab)\omega_0^2 y_l(t) = f(t) \quad (4.31)$$

que é a equação decomposta.

²neq é o número de equações

4.4.2 Discretização no Tempo.

Para discretizar as derivadas no tempo é utilizado o algoritmo de *Newmark* descrito no Apêndice B. Aplicando a equação (B.28) na equação (4.31), vem:

$$\begin{aligned}
& \left[1 + j2\Delta t\omega_0(\gamma - 1) + \Delta t^2\omega_0^2(\beta - \gamma + 0,5)(a^2 - b^2 + 2jab) \right] y_{n-2} + \\
& \left[-2 + j2\Delta t\omega_0(1 - 2\gamma) + \Delta t^2\omega_0^2(-2\beta + \gamma + 0,5)(a^2 - b^2 + 2jab) \right] y_{n-1} + \\
& \left[1 + j2\Delta t\omega_0 \gamma + \Delta t^2 \omega_0^2 \beta (a^2 - b^2 + 2jab) \right] y_n = \\
& \Delta t^2 \left[f_{n-2}(\beta - \gamma + 0,5) + f_{n-1}(-2\beta + 0,5 + \gamma) + f_n\beta \right] \quad (4.32)
\end{aligned}$$

Aplicando a transformada Z ($Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)z^{-k}$) na equação acima, e considerando as condições iniciais nulas, vem:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[1 + j2\Delta t\omega_0(\gamma - 1) + \Delta t^2\omega_0^2(\beta - \gamma + 0,5)(a^2 - b^2 + 2jab) \right] z^{-2} + \right. \\
& \left. \left[-2 + j2\Delta t\omega_0(1 - 2\gamma) + \Delta t^2\omega_0^2(-2\beta + \gamma + 0,5)(a^2 - b^2 + 2jab) \right] z^{-1} + \right. \\
& \left. \left[1 + j2\Delta t\omega_0 \gamma + \Delta t^2 \omega_0^2 \beta (a^2 - b^2 + 2jab) \right] \right\} Y(z) = \\
& \left\{ \Delta t^2 \left[z^{-2}(\beta - \gamma + 0,5) + z^{-1}(-2\beta + 0,5 + \gamma) + \beta \right] \right\} F(z) \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Multiplicando tudo por z^2 , e definindo $\Delta t\omega_0 = 2\pi\Omega$, vem:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[1 + j4\pi\Omega(\gamma - 1) + (2\pi\Omega)^2(\beta - \gamma + 0,5)(a^2 - b^2 + 2jab) \right] + \right. \\
& \left[-2 + j4\pi\Omega(1 - 2\gamma) + (2\pi\Omega)^2(-2\beta + \gamma + 0,5)(a^2 - b^2 + 2jab) \right] z + \\
& \left. \left[1 + j4\pi\Omega \gamma + (2\pi\Omega)^2\beta (a^2 - b^2 + 2jab) \right] z^2 \right\} Y_{(z)} = \\
& \left\{ \Delta t^2 \left[(\beta - \gamma + 0,5) + z(-2\beta + 0,5 + \gamma) + z^2\beta \right] \right\} F_{(z)} \quad (4.34)
\end{aligned}$$

Para que o sistema acima seja estável, os pólos devem ter módulo menor que 1 e maior que zero. Nota-se que há cinco variáveis em (4.34), a , b , β , γ e Ω . Nos gráficos, valores são dados para tres das variáveis e gráficos 3D do maior módulo, entre os polos, são traçados. Na Figura 4.1 está mostrado o maior módulo entre os dois pólos em função de Ω e a . Nota-se que o módulo do pólo possui um máximo para $a = 1$. Como é o pior caso, este será o valor adotado para os próximos gráficos.

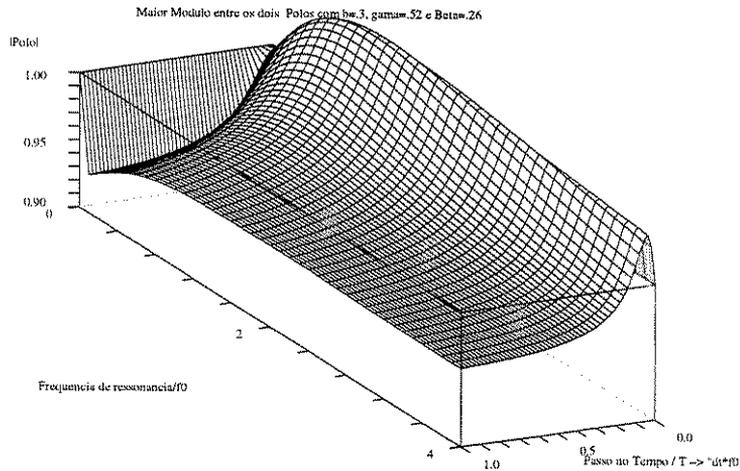


Figura 4.1: Maior Módulo, entre os dois pólos, em função da frequência de ressonância do modo da cavidade e Ω .

Nota-se, na Figura 4.2, que se forem usados os valores $\gamma = 0,52$ e $\beta = 0,26$, quanto maior a perda, maior deverá ser o passo de tempo dt , para que o esquema de avanço no tempo seja estável.

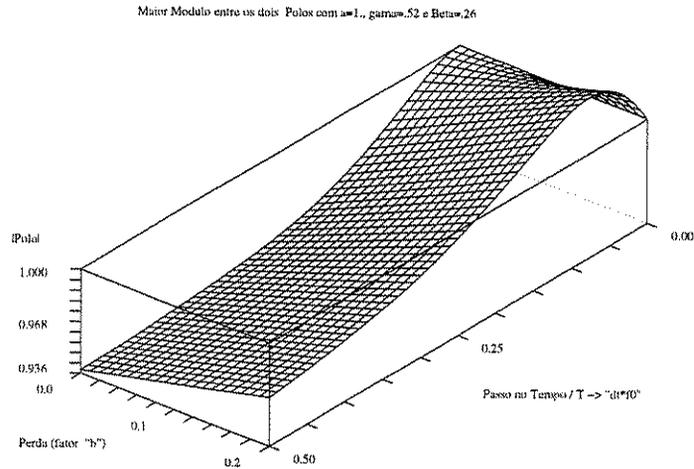


Figura 4.2: Maior Módulo, entre os dois pólos, em função das perdas, b , e $dt * f_0$, Ω , com $\gamma = 0,52$, $\beta = 0,26$ e $a = 1$.

No caso da Figura 4.3, com $\gamma = 0,5$ e $\beta = 0,5$, que é o caso das diferenças centrais, o valor do passo temporal deve ser, aproximadamente, maior que 0,17, independentemente das perdas. Este valor pode ser melhor observado na Figura 4.4, na qual foi fixado o valor de b em 0,2.

Assim, para o sistema ser estável utilizando-se PMLs, deve-se ter passos temporais maiores que um certo valor; isto faz com que o sistema não possa convergir para uma resposta correta se for usada uma largura de banda muito grande. Portanto, as PMLs anisotrópicas só devem ser utilizadas para simulações com pequenas larguras de banda.

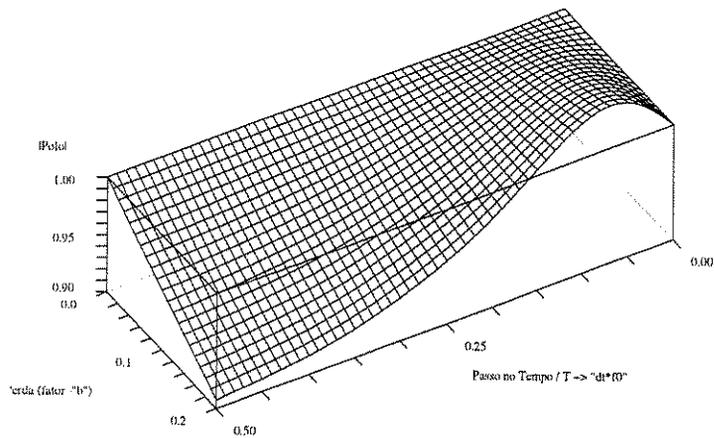


Figura 4.3: Maior Módulo entre os dois pólos em função das perdas, "b" e $dt * f_0$, Ω , com $\gamma = 0,5$, $\beta = 0,5$ e $a=1$.

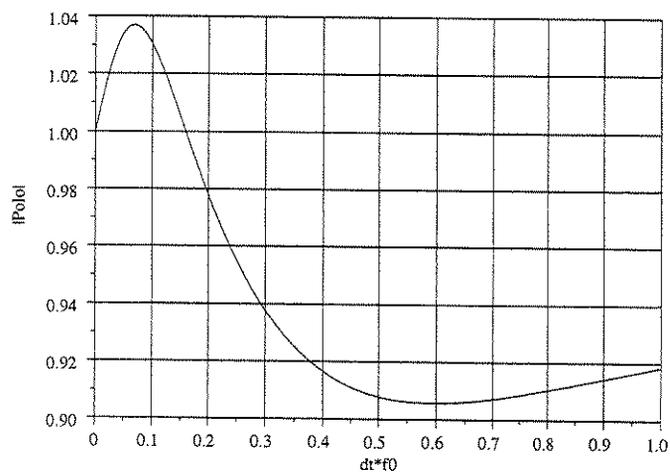


Figura 4.4: Maior Módulo entre os dois pólos em função de $dt * f_0$, Ω , com $\gamma = 0,5$, $\beta = 0,5$, $a=1$, e $b=.2$

4.5 Resultados

Como exemplo de validação foi utilizado um filtro passa-baixa de microondas realizado em microfita sobre um dielétrico RT/Duroid com $\epsilon_r = 2,2$, Figura 4.5.

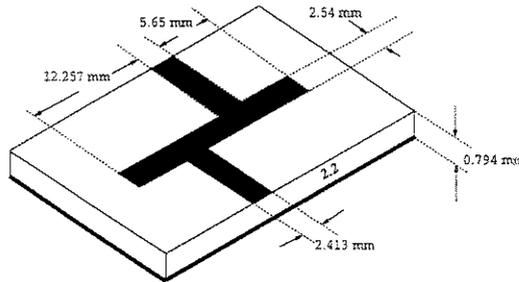


Figura 4.5: Filtro Passa Baixa em micro-fita sobre um dielétrico RT/Duroid, com $\epsilon_r = 2,2$.

Primeiro é feita uma comparação entre os resultados obtidos com o Método das Diferenças Finitas, com o auxílio do código que acompanha o livro [46], com os resultados obtidos com Método da Envoltória, Figuras 4.6 e 4.7. Por ser um método explícito, isto é, não depender de inversão de matrizes, o tempo gasto com toda a simulação do Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo foi muito menor do que o tempo gasto no Método da Envoltória. Com o Método FDTD, o tempo total de simulação foi de aproximadamente 3 min. Com o Método da Envoltória utilizando o FEM, o tempo total gasto com toda a simulação foi de 1 h 13 min em um microcomputador INTEL/PENTIUM III com relógio de 800 MHz, com o sistema operacional GNU/LINUX e compilador GNU. A faixa de frequências da simulação foi dividida em três bandas: $f_0 = 2$ GHz e $Bw = 2$ GHz, $f_0 = 7,5$ GHz e $Bw = 7,5$ GHz e $f_0 = 15$ GHz e $Bw = 15$ GHz. A malha utilizada possuía 29947 tetraedros, com um total de 38195 arestas, ou melhor, incógnitas. Em cada banda de frequências foi dado 144 passos no tempo, de 15% do período da frequência central em cada parte da simulação, na obtenção da referência e na obtenção dos campos com o filtro propriamente dito. Houve uma boa concordância dos resultados, a menos da região do mínimo da curva de S_{21} , o que pode ser explicado com o fato da simulação em FDTD ter a parede superior aberta, com o uso da ABC de segunda ordem de Engquist-Majda e, na simulação com o Método dos Elementos Finitos, foi utilizada parede elétrica e nas portas foram utilizadas ABCs de primeira ordem do tipo Silver-Miller. Ainda com a mesma malha, duas outras formas de simulação com o Método dos Elementos Finitos no Domínio do Tempo foram feitas:

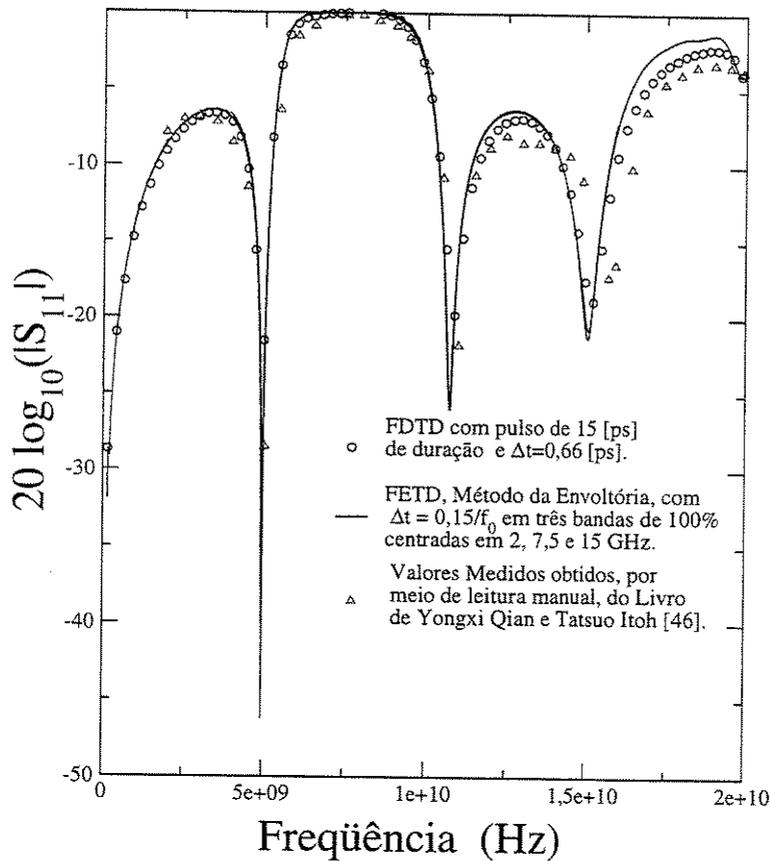


Figura 4.6: Comparação entre os resultados do parâmetro S_{11} , obtidos com Método da Envoltória FETD, com o Método FDTD e com valores medidos.

- O Método Clássico com o uso da portadora modulada nas mesmas bandas da simulação pelo Método da Envoltória. Cada banda foi simulada utilizando-se 864 passos de tempo, de 2,5% do período da frequência central em cada parte, na obtenção da referência e na obtenção dos campos com o filtro propriamente dito. Este foi o maior passo em que o Método Clássico manteve a mesma precisão que o Método da Envoltória, utilizando passos de 15% do período da frequência central. Então, apesar do esforço computacional por passo ser menor, já que todas as variáveis são reais, o tempo computacional total gasto para a obtenção de toda a curva foi de 2 h 03 min, isto é, quase o dobro do tempo gasto com o Método da Envoltória.
- Com o Método Clássico, mas com um pulso gaussiano rápido de 15 ps de duração sem portadora, o passo de tempo usado foi de 0,66 ps e o tempo total gasto para a obtenção de toda a curva foi de 1 h 49 min.

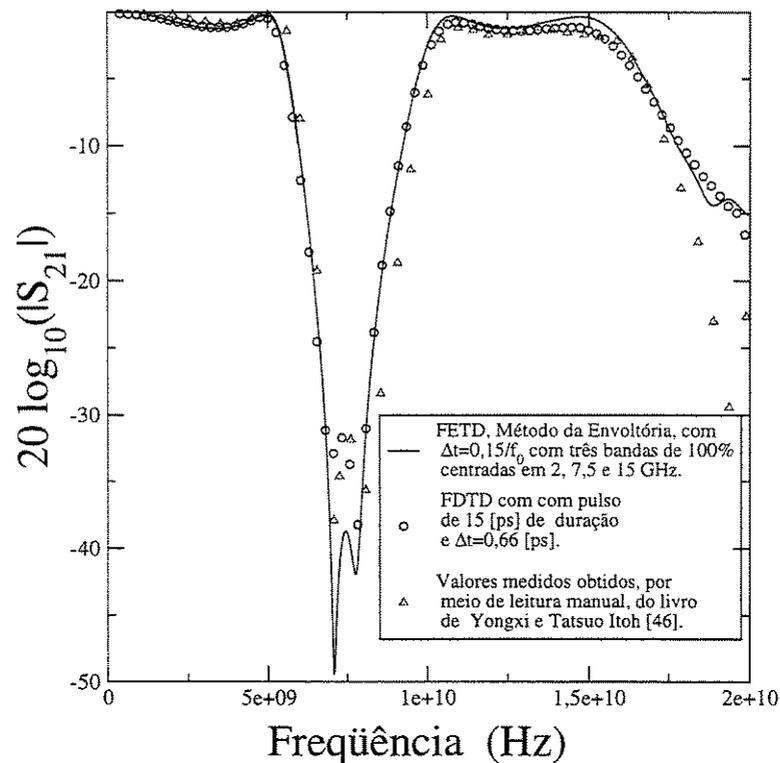


Figura 4.7: Comparação entre os resultados do parâmetro S_{21} , obtidos com Método da Envoltória FETD, com o Método FDTD e com valores medidos.

Os resultados estão mostrados nas Figuras 4.8 e 4.9.

Logo, o Método da Envoltória é mais rápido que os dois casos anteriores, apesar do esforço computacional por passo ser maior. Assim, no caso de simulações no domínio do tempo, mesmo para bandas de 100%, o Método da Envoltória é mais rápido que o Método Clássico, com pulso rápido cobrindo toda a banda. O Método FDTD ainda é incomparável em termos de velocidade, para simulação de estruturas sem curvas, como a deste primeiro exemplo; por outro lado, o FDTD tem dificuldades para tratar estruturas curvas como a do próximo exemplo.

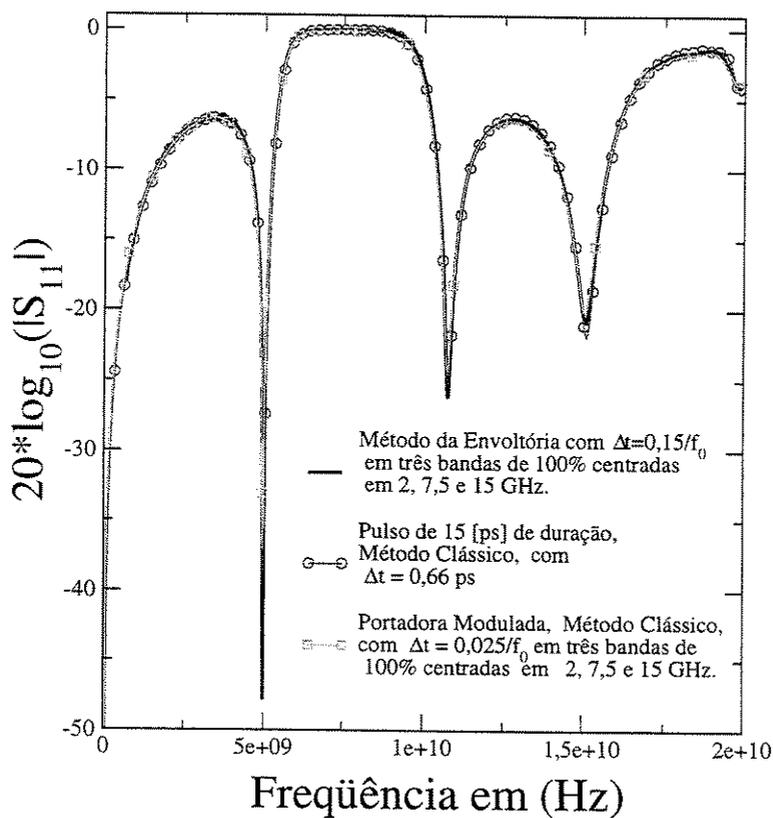


Figura 4.8: Comparação entre os resultados do parâmetro S_{11} , obtidos com FETD de várias formas.

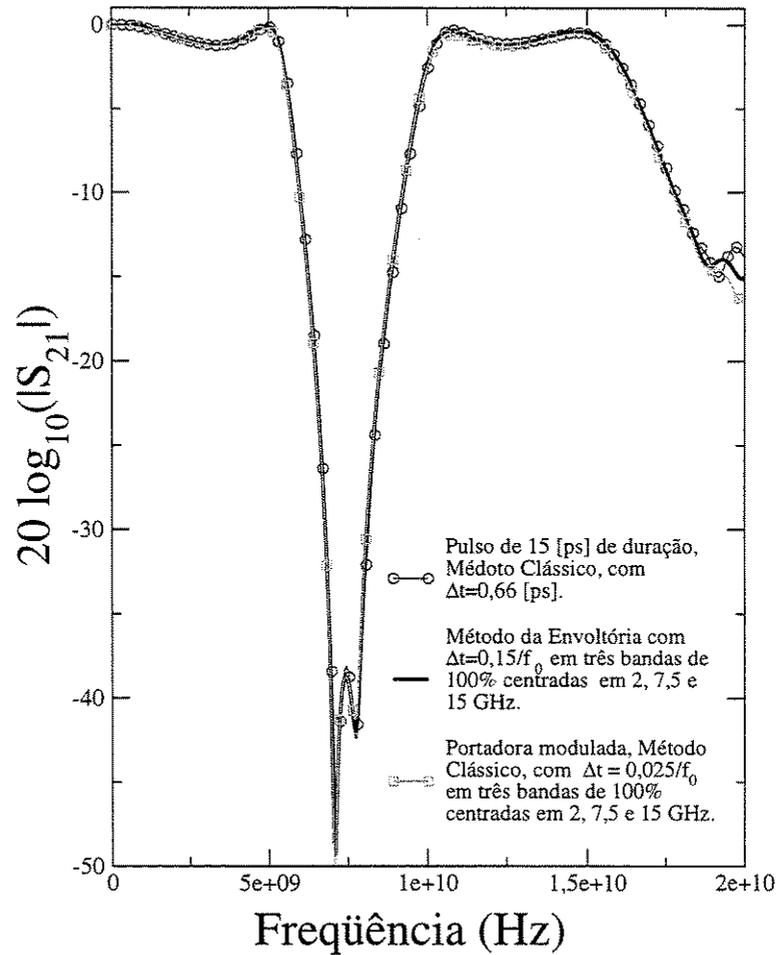


Figura 4.9: Comparação entre os resultados do parâmetro S_{21} , obtidos com FETD de várias formas.

O segundo exemplo de validação não é facilmente simulado com o Método FDTD, porque possui curvas, Figura 4.10; assim, neste caso é feita a comparação entre o Método da Envoltória com o Método dos Elementos Finitos no Domínio da Frequência. Os resultados do FEM no Domínio da Frequência foram extraídos manualmente de A. C. Polycarpou *et al.* [47]. O exemplo consiste em um indutor espiral conectado em paralelo com uma micro-fita, ambos impressos em um substrato de alumina com $\epsilon_r = 9,8$ e espessura de $0,635$ mm. Os outros parâmetros geométricos, veja a Figura 4.10, são: $w_m = 0,635$ mm, $w_d = 0,6$ mm, $w_e = 0,2$ mm, $R_1 = 1,9$ mm, $R_2 = 1,3$ mm e $R_3 = 0,7$ mm. O centro da espiral é aterrado. No caso do FEFD-*Finite Element Frequency Domain*, a malha

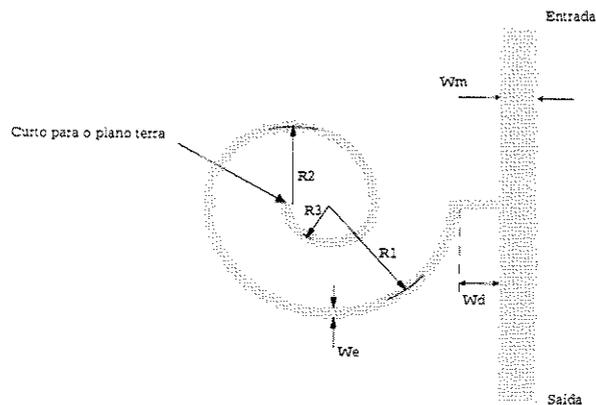
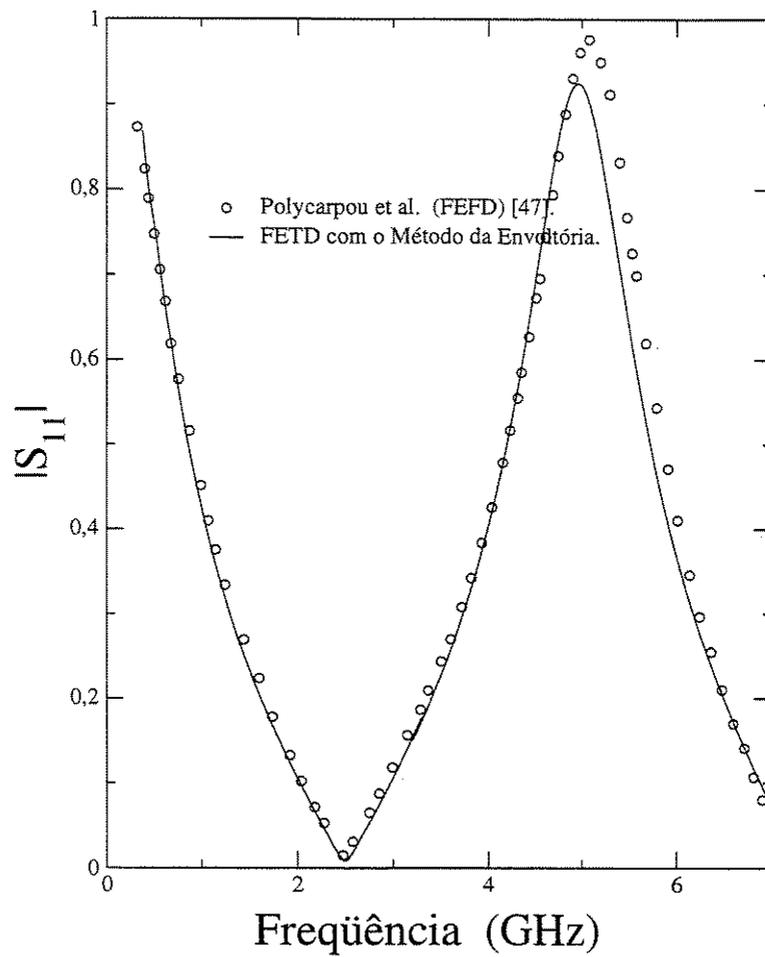


Figura 4.10: Geometria do indutor espiral, vista superior.

utilizada possuía 43588 tetraedros e um total de 51270 incógnitas; na simulação pelo Método da Envoltória foi utilizada uma malha que possuía 21749 tetraedros com um total de 26767 incógnitas. A simulação foi feita com duas bandas: $f_0 = 2$ GHz com $B_w = 2$ GHz e $f_0 = 4,5$ GHz com $B_w = 5$ GHz. O passo no tempo possuía 10% do período da frequência central e foi utilizada ABC de primeira ordem do tipo Silver-Miller. O tempo total de simulação foi de 1 h 14 min, 57% do qual utilizado na decomposição LU da matriz. Os resultados estão mostrados nas Figuras 4.11 e 4.12. As pequenas discordâncias podem ser explicadas por vários motivos: o principal deles é o fato de não se ter os parâmetros geométricos da caixa que cerca o dispositivo para os dados de Polycarpou *et al.* [47], e também, há o fato da malha utilizada no caso da simulação pelo Método da Envoltória ter um número menor de tetraedros; por fim, os dados foram retirados manualmente de [47].

Figura 4.11: Parâmetro S_{11} do indutor espiral.

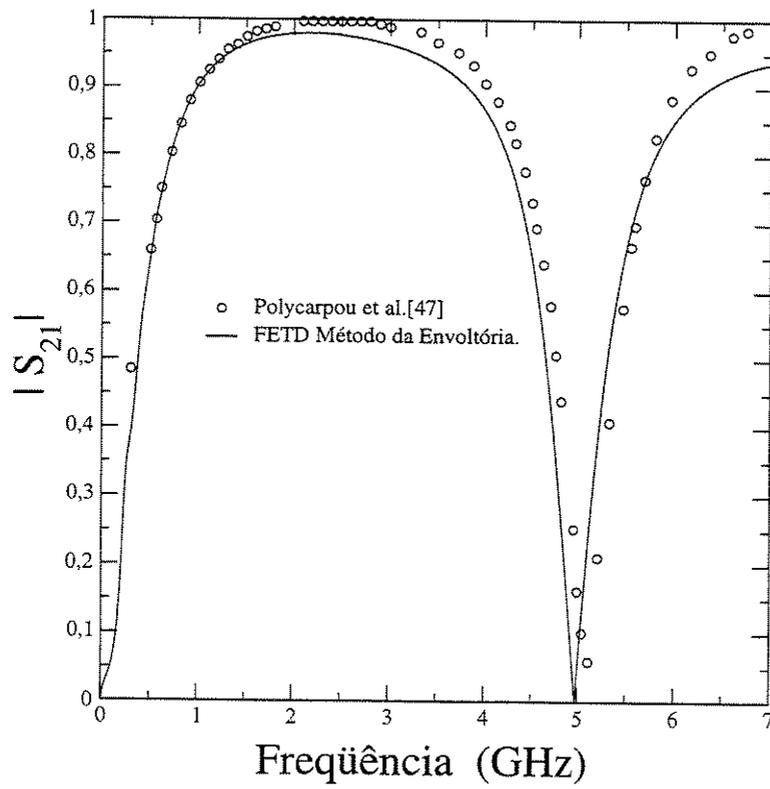


Figura 4.12: Parâmetro S_{21} do indutor espiral.

O terceiro exemplo é um guia retangular homogêneo, Figura 4.13. O guia não é prático, mas o objetivo é verificar o funcionamento das PMLs, mostrando-se a amplitude do campo em um corte longitudinal, em vários instantes de tempo, Figura 4.15. Além disso, desejava-se obter a



Figura 4.13: Guia retangular homogêneo.

velocidade de grupo "medida". A frequência central utilizada é 314 MHz, com largura de banda de 160 MHz. A largura de banda, para efeito de cálculo da velocidade de grupo, é alta, já que $1/\frac{\partial\beta}{\partial\omega}$ leva em consideração pequenas larguras de banda. Mas, como do ponto de vista espacial, o pulso deveria ser estreito o suficiente para ser visto por inteiro dentro do guia, foi feita a escolha de uma grande largura de banda. Apesar deste fato, a velocidade de grupo calculada, $2,19 \times 10^8$, quando comparada a largura de banda "medida" por meio da Figura 4.14, $2,17 \times 10^8$, resulta em um erro de 0,9 %. A diferença de amplitudes nos dois pontos de observação deve-se ao fato de estarem

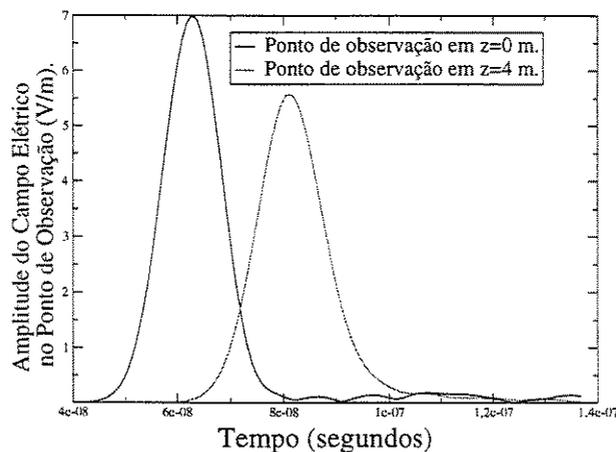


Figura 4.14: Amplitude do campo elétrico em dois pontos de observação.

"desalinhados", isto é, em diferentes posições na direção transversal do guia. Pode-se observar, na Figura 4.14, uma pequena oscilação na amplitude do ponto de observação, em $z=0 \text{ m}$, a partir de 80 ns em diante. Isto é devido à "reflexão numérica" nas PMLs, isto é, como não há uma discretização "fina" o suficiente para acompanhar a variação do campo com a distância, surge um erro de discretização que provoca reflexões. A PML, neste exemplo, não está muito discretizada

porque o guia simulado é muito grande, para que se possa ter a Figura 4.15.

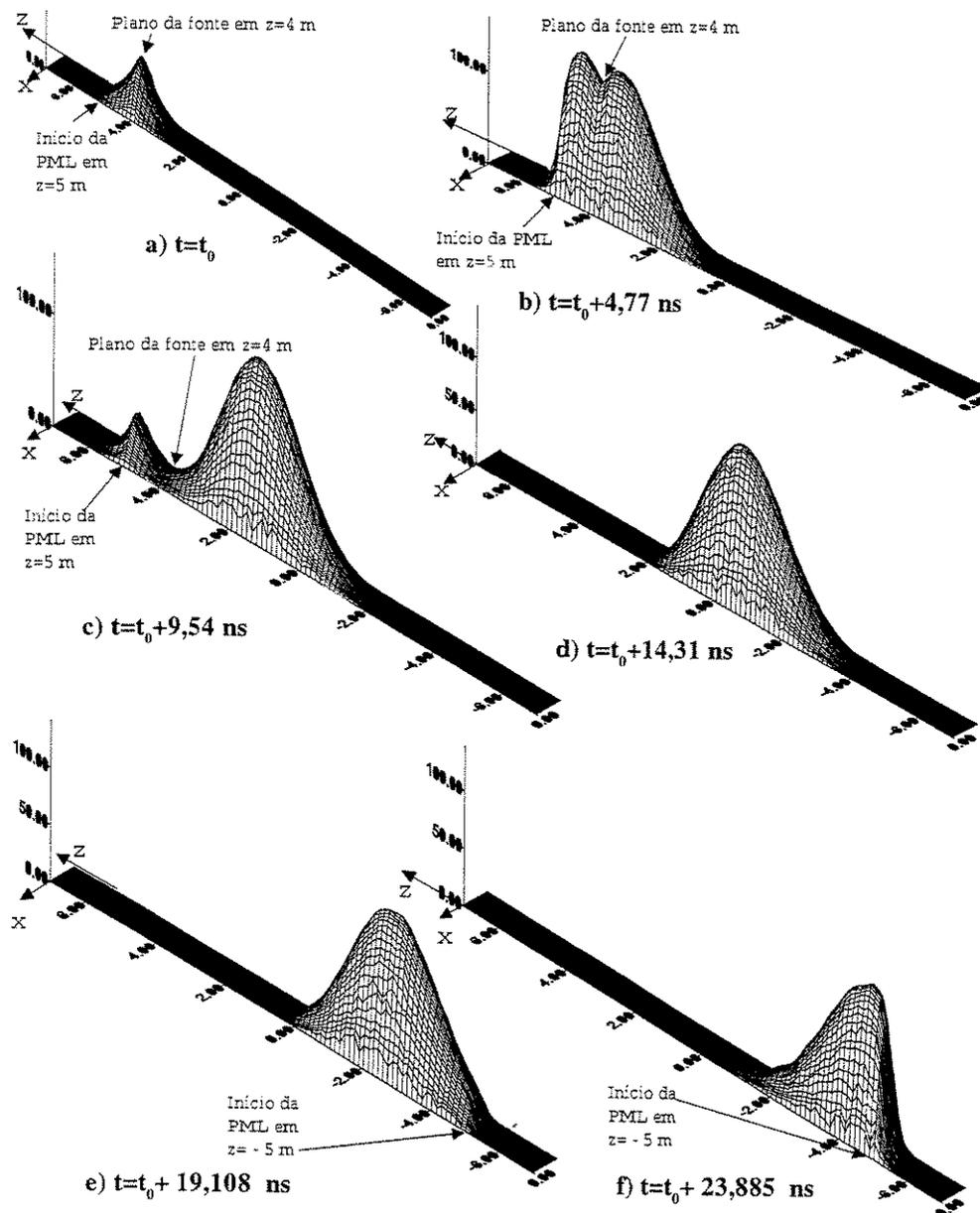


Figura 4.15: Amplitude do campo elétrico em um corte longitudinal, em $b/2$, no guia retangular, em vários instantes de tempo.

Capítulo 5

Conclusões

Nesta tese foi implementado o Método dos Elementos Finitos em 3 dimensões com o objetivo de cálculo de campos espalhados no domínio da frequência e no domínio do tempo. No caso do domínio da frequência, foram realizados vários testes não encontrados na literatura. Verificou-se que, com o uso das PMLs, o cálculo de campo espalhado por corpos dielétricos anisotrópicos em 3D pode ser feito de maneira eficiente pelo FEM.

- Como a matriz resultante é esparsa, cerca de 0,2% de elementos não-nulos no caso de uso das funções de interpolação baseadas nas arestas, a inversão da matriz, apesar do número de incógnitas ser maior, é bem mais fácil que no caso do Método dos Momentos, cuja matriz resultante é cheia.
- Mostrou-se que o uso das PMLs deve ser feito com cuidado. A escolha do fator de perdas e a discretização estão muito ligados. O aumento do fator de perda poderia melhorar o desempenho da PML mas se a discretização não for grande o suficiente para seguir a variação do campo com a distância, haverá reflexão numérica piorando o desempenho das PMLs.
- Foi mostrado, ainda, que PMLs são superiores às ABCs quando utilizadas no cálculo de campos espalhados por dielétricos.
- Quando há grandes perdas no dielétrico, mostrou-se que o teorema da superfície equivalente funciona melhor do que o teorema dos correntes volumétricas equivalentes, no cálculo dos campos distantes.

A Sugestão para trabalhos futuros no cálculo de campos espalhados por dielétrico é a utilização de métodos iterativos. No uso dos métodos iterativos, o maior esforço computacional

está na multiplicação de matrizes por vetores. Neste caso, como a esparsidade é alta, quando usado o FEM em conjunto com as funções de interpolação baseadas nas arestas, este esforço é diminuído. O problema está no condicionamento das matrizes; estas são muito mal condicionadas, recomenda-se, então, fazer um estudo dos vários pré-condicionadores existentes. Assim, como o uso de métodos iterativos requer menor quantidade de memória e pode ser paralelizado, o campo espalhado por grandes estruturas poderá ser calculado.

No caso do domínio do tempo, faz-se uma extensão do Método da Envoltória para 3 dimensões em uma formulação vetorial, pela primeira vez. No Método da Envoltória a portadora é retirada, mantendo-se apenas o sinal modulante durante as simulações. Aplicou-se o Método de Newmark, como esquema de avanço no tempo. O uso do Método de Newmark possui ordem 2 de convergência, o que possibilita compensar a perda de precisão. Isto, porque a discretização em 3 dimensões é pobre em comparação aos casos de uso do Método da Envoltória em formulações escalares em 2 dimensões. Realizou-se a análise da estabilidade do método levando em consideração o uso de PMLs anisotrópicas. Para isto mostrou-se que para haver estabilidade, passos de tempo deveriam ser maiores que um certo valor, perdendo, assim, a convergência. Desta forma, o uso de PMLs anisotrópicas deve ser feito em conjunto com uma discretização espacial mais fina em comparação com o uso das ABCs de primeira ordem. Mostrou-se que o Método da Envoltória reduz o tempo computacional envolvido na simulação de dispositivos, com relação ao Método Clássico, que mantém a portadora durante as simulações. Esta redução do esforço computacional explica-se pelo fato dos passos temporais serem maiores no Método da Envoltória em relação ao Método Clássico, para obtenção dos mesmos resultados. Isto compensa o fato de o esforço computacional para calcular cada passo temporal ser maior no Método da Envoltória, cujas variáveis são complexas, em comparação ao Método Clássico, cujas variáveis são reais.

Sugestão para trabalhos futuros no caso do domínio do tempo: Métodos de diagonalização da matriz a ser invertida, isto é, a "explicitação" do Método dos Elementos Finitos no Domínio do Tempo. Utilizando algumas aproximações, propostas para aplicações em eletromagnetismo por Lee et al. [41], Benhassine et al. [48] apresentaram resultados de validação para o cálculo de frequências de ressonância de uma cavidade; deve-se fazer testes de validação para casos mais complexos, como circuitos de microondas, por exemplo. Outra sugestão, é a implementação de ABCs de ordem 2 em conjunto com o Método da Envoltória. Estas ABCs foram implementadas para o método clássico por Komisarek et al. [49].

Referências Bibliográficas

- [1] R. Coccioli, T. Itoh, G. Pelosi and Peter P. Silvester. Finite element methods in microwaves: A selected bibliography. *Finite Elements Corner*, 1995.
- [2] R. L. Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration. *Bulletin of American Mathematical Society*, 5:1–23, 1943.
- [3] Peter P. Silvester. Finite element solution of homogeneous waveguide problems. *Alta Frequenza*, 38:313–317, 1969.
- [4] Sérgio Antenor de Carvalho. *Cálculo dos Campos Eletromagnéticos Gerados Pela Interação de Um Corpo Tridimensional com uma Onda Eletromagnética Usando o Método dos Momentos e Funções de Base Solenoidais*. Tese de Doutorado, FEEC, UNICAMP, Março 1998.
- [5] S. A. Carvalho and L. S. Mendes. Scattering of em waves by inhomogeneous dielectrics with the use of the method of moments and 3D solenoidal basis functions. *Microwave and Optical Technology Letters*, 23(1):42–46, Outubro 1999.
- [6] Allen Tavlove and Susan C. Hagness. *Computational Electrodynamics*. Artech House Publishers, 2000.
- [7] Renato de Pádua Moreira e Leonardo Menezes. Síntese de filtros de microondas utilizando o método tlm (transmission line method). *CBMAG - IV Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo*, pp 220–223, 2000.
- [8] Jianming Jin. *The Finite Element Method in Electromagnetics*. John Wiley & Sons, 1993.
- [9] Bjorn Engquist and Andrew Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Mathematics of Computation*, 31(139):629–651, Julho 1977.

- [10] J. L. Yao Bi, L. Nicolas and A. Nicolas. H(curl) elements on hexahedral and vector a.b.c.'s for unbounded microwave problems. *IEEE Transactions on Magnetism*, 31(3):1538–1541, Maio 1995.
- [11] Max Gunzburger, Alvin Bayliss and Eli Turkel. Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions. *SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, J. Appl. Math.*, 42:430–451, Abril 1982.
- [12] Jean-Pierre Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114:185–200, 1994.
- [13] W. C. Chew and W. H. Weedon. A 3-d perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates. *Microwave Optical Tech. Letters*, pp 599–604, Setembro 1994.
- [14] Z. C. Sacks, D. M. Kingsland, R. Lee and J. F. Lee. A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 43:1460–1463, Dezembro 1995.
- [15] Xingchao Yuan. Three-dimensional electromagnetic scattering from inhomogeneous objects by hybrid moment and finite element method. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, 38(8), Agosto 1990.
- [16] B. S. Jeong, C. H. Ahn and S. Y. Lee. Efficient vectorial hybrid FE-BI method for electromagnetic scattering problem. *IEEE Transactions on Magnetism*, 30(5):3136–3139, Setembro 1994.
- [17] Paul Soudais, Hervé Stève and Fabrice Dubois. Scattering from several test-objects computed by 3-d hybrid ie/pde methods. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 47(4):646–653, Abril 1999.
- [18] J. Song, C. C. Lu, X. Q. Sheng, J. M. Jin and W. C. Chew. On the formulation of hybrid finite-element and boundary-integral methods for 3D scattering. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 46(3):303–311, Março 1998.
- [19] W. Sun and C. Balanis. Edge-based FEM solution of scattering from inhomogeneous and anisotropic objects. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 42(5):627–632, Maio 1994.

- [20] A. M. F. Frasson e H. E. Hernández Figueroa. A comparison between FEM and MoM formulations applied to 3D electromagnetic scattering by inhomogeneous dielectrics. In *Anais do PIERS*, 2000.
- [21] A. M. F. Frasson, S. A. Carvalho, H. E. Hernández Figueroa e L. S. Mendes. Uma avaliação das camadas perfeitamente casadas anisotrópicas aplicadas à análise de espalhamento 3D por dielétricos. In *Anais da Brazilian Conference on Electromagnetics - CBMAG*, pp 110–113, 2000.
- [22] A. M. F. Frasson, S. A. Carvalho, H. E. Hernández Figueroa e L. S. Mendes. Uma comparação entre o método dos elementos finitos e o método dos momentos aplicados à análise de espalhamento 3D por dielétricos não homogêneos. In *SBMO*, pp 555–558, 2000.
- [23] A. M. F. Frasson and H. E. Hernández-Figueroa. Envelope full-wave 3D finite element time domain method. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, submetido.
- [24] A. Frasson and Hugo E. Hernández-Figueroa. Full-wave 3D finite element time domain method without carrier. In *Anais do 2001 SBMO/IEEE, MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference, IMOC*, 2001.
- [25] J. F. Lee and Z. Sacks. Whitney elements time domain (wetd) methods. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31(4):1325–1329, Maio 1995.
- [26] Hugo E. Hernández Figueroa. Notas de aula. 1998.
- [27] K. Z. Nóbrega, Antônio Frasson and H. E. Hernández-Figueroa. An interactive matrix assembler of FEM using a gui-matlab interface. *IEEE Trans. on Education*, Submetido.
- [28] Constantine A. Balanis. *Advanced Engineering Electromagnetics*. John Wiley & Sons, 1989.
- [29] Barber P. W. e Hill S. C. *Light Scattering by Particles: Computational Methods*. World Scientific, 1990.
- [30] Zich Roberto, D. Graglia, Piergiorgio L. E. Uslenghi and Rodolfo S. Moment method with isoparametric elements for three-dimensional anisotropic scatters. *Proceedings of the IEEE*, 77(5):750–760, Maio 1989.
- [31] M. Koshiba and Yasuhide Tsuji. Time-domain beam propagation method and its application to photonic crystal circuit components. *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 18(9):102–110, Janeiro 2000.

- [32] V. F. Rodríguez Esquerre and H. E. Hernández Figueroa. Novel wave propagation scheme for the time-domain simulation of photonic devices. *IEEE Photonics Technology Letters*, 13:311–313, Abril 2001.
- [33] A. M. Frasson, A. P. L. Barbero, H. F. Pinheiro and H. E. Hernández-Figueroa. Efficient finite-element analysis of magneto optic waveguides. In *SBMO/IEEE, MTT-S, AP-S and LEOS International Microwave and Optoelectronics Conference, IMOC*, pp 589–592, 1999.
- [34] J. P. Silva, H. E. Hernandez-Figueroa and A. M. F. Frasson. Simulation of transverse anisotropic waveguides by an efficient h-field finite-element BPM. In *PIERS*, 2002.
- [35] J. P. Silva, H. E. Hernandez-Figueroa and A. M. F. Frasson. Improved vectorial finite-element BPM analysis for transverse anisotropic media. *IEEE Journal of Lightwave Technology*, Submetido.
- [36] A. M. F. Frasson e H. E. Hernández Figueroa. Uma formulação baseada no método dos elementos finitos para caracterização de guias com meios anisotrópicos e com perdas. In *Anais do SBT 1999, Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, 1999.
- [37] M. L. Barton and Z. J. Cendes. New vector finite elements for three-dimensional magnetic field computation. *Journal of Applied Physics*, 61:3919–3921, 1987.
- [38] J. C. Nedelec. Mixed finite elements in r3. *Numerical Mathematics*, 35:315–341, 1980.
- [39] J. C. Nedelec. A new family of mixed finite elements in r3. *Numerical Mathematics*, 30:57–81, 1986.
- [40] A. Bossavit and I. Mayergoyz. Edge elements for scattering problems. *IEEE Trans. on Magnetics*, 25(4):2816–2821, Julho 1989.
- [41] Jin-Fa Lee, Robert Lee and Andreas Cangellaris. Time-domain finite element methods. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 45(3):430–441, Março 1997.
- [42] M. Koshiba and Yasuhide Tsuji. A wide-angle finite-element beam propagation method. *IEEE Photonics Technology Letters*, 8(9):1208–1210, Setembro 1996.
- [43] M. Koshiba, Y. Tsuji and T. Tanabe. A wide-angle beam propagation method based on a finite element scheme. *IEEE Transactions on Magnetics*, 33(2):1544–1547, Março 1997.
- [44] R. Y. Chan and J. M. Liu. Time-domain wave propagation on optical structures. *IEEE Photonics Technology Letters*, 6(8):1001–1003, Agosto 1994.

- [45] Thomas J. R. Hughes. *The FEM Linear Static and Dynamic Analysis*. Prentice-Hall, 1997.
- [46] Y. Qian and T. Itoh. *FDTD Analysis and Design of Microwave Circuits and Antennas*. Realize Inc., 1999.
- [47] A. C. Polycarpou, P. A. Tirkas and C. A. Balanis. The finite-element method for modeling circuits and interconnects for electronic packaging. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, 45(10):1868–1874, Outubro 1997.
- [48] W. P. Carpes, S. Benhassine and L. Pichon. Comparison of mass lumped techniques for solving the 3D Maxwell's equations in the time domain. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(4):1548–1552, Julho 2000.
- [49] N. N. Wang, A. K. Dominek, K. S. Komisarnek and R. Hann. An investigation of new fetd/abc methods of computation of scattering from three-dimensional material objects. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 47(10):1579–1585, Outubro 1999.
- [50] Giuseppe Pelosi, Tatsuo Itoh and Peter P. Silvester, editors. *Finite Element Software for Microwave Engineering*. John Wiley & Sons, 1996.
- [51] G. Mur and A. T. Hoop. A finite-element method for computing three-dimensional electromagnetic fields in inhomogeneous media. *IEEE Transactions on Magnetics*, MAG21:2188–2191, 1985.
- [52] H. Whitney. *Geometric Integration Theory*. Princeton U.P., 1957.
- [53] M. Hano. Finite element analysis of dielectric-loaded waveguides. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, MTT32:1275–1279, 1984.
- [54] Bossavit A. and J. C. Verite. A mixed FEM-BEAM method to solve 3D eddy current problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, MAG18:431–435, 1982.
- [55] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, 1989.
- [56] Robert D. Cook, David S. Malkus and Michael E. Plesha. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 1989.
- [57] J. N. Reddy. *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, 1993.
- [58] Jian-She Wang and Raj Mittra. Finite element analysis of mmic structures and electronic packages using absorbing conditions. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 42(3):441–449, Março 1994.

- [59] Zhigiang Bi, Keli Wu, Chen Wu and John Litva. A dispersive boundary condition for microstrip component analysis using the ftd method. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 40(4):774–776, Abril 1992.
- [60] Mur G. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 23:377–382, 1981.
- [61] Trefethen L. N. and L. Halpern. Well-posedness of one-way wave equations and absorbing boundary conditions. *Mathematics of Computation*, 47:421–435, 1986.
- [62] Arindam Chatterjee and John L. Volakis. Conformal absorbing boundary conditions for 3-d problems: Derivation and applications. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 43(8):860–866, Agosto 1995.
- [63] C. H. Wilcox. An expansion theorem for electromagnetic fields. *Communications Pure Applied Math*, 9:115–132, 1956.
- [64] J. P. Webb and V. N. Kanellopoulos. Absorbing boundary conditions for the finite element solution of the vector wave equation. *Microwave Optical Tech. Letters*, 2:370–372, Outubro 1989.
- [65] Andrew F. Peterson. Accuracy of 3-d radiation boundary conditions for use with the vector Helmholtz equation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 40(3):351–355, Março 1992.
- [66] I. Bárdi, O. Biró, K. Preis W. Renhart and Kurt R. Richter. Parameter estimation for PMLs used with 3D finite element codes. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(5):774–776, Abril 1998.
- [67] David M. Kingsland, Jin-Fa Lee, Jo-Yu Wu and Robert Lee. A comparison of anisotropic PML to Berenger's PML and its application to the finite-element method for em scattering. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 45(1):40–50, Janeiro 1997.
- [68] Fernando L. Teixeira and W. C. Chew. General closed-form PML constitutive tensors to match arbitrary bianisotropic and dispersive linear media. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 8(6):223–225, Junho 1998.

Apêndice A

Dedução das Matrizes Elementares 3D

A.1 Coordenadas Locais em Tetraedros .

As funções de base usadas em elementos finitos para tetraedros são melhor descritas em termos de coordenadas locais, para pontos internos ao elemento, que fornecem a distância do ponto a uma das faces relativa à distância do ponto oposto a esta face com a mesma. Um ponto interno ao tetraedro o divide em quatro pequenos tetraedros, portanto, gerando quatro coordenadas locais, mas só três delas são linearmente independentes.

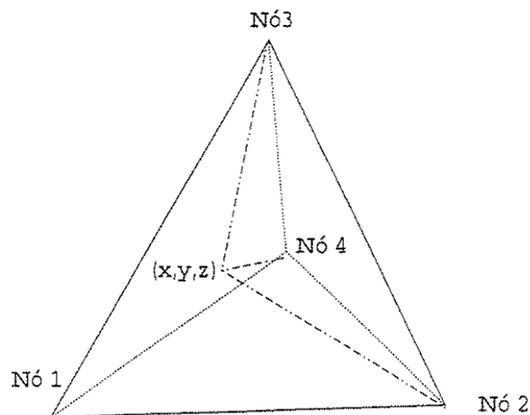


Figura A.1: Coordenada Local L_1 .

Observando a Figura A.1, a coordenada local L_1 do ponto localizado em x, y, z , será o volume formado pelo tetraedro entre os nós 2, 3, 4 e o nó x, y, z dividido pelo volume total do

tetraedro.

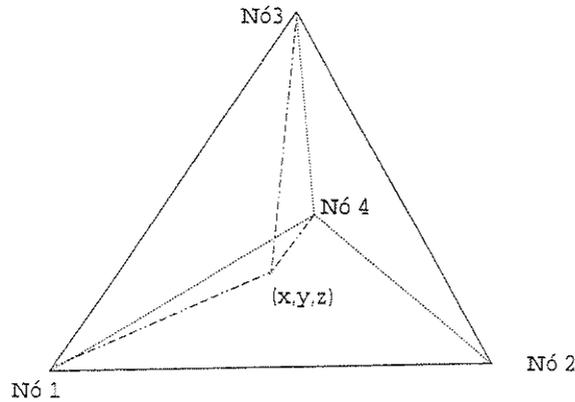


Figura A.2: Coordenada Local L_2 .

Observando a Figura A.2, a coordenada local L_2 do ponto localizado em x, y, z , será o volume formado pelo tetraedro entre os nós 1, 3, 4 e o nó x, y, z dividido pelo volume total do tetraedro.

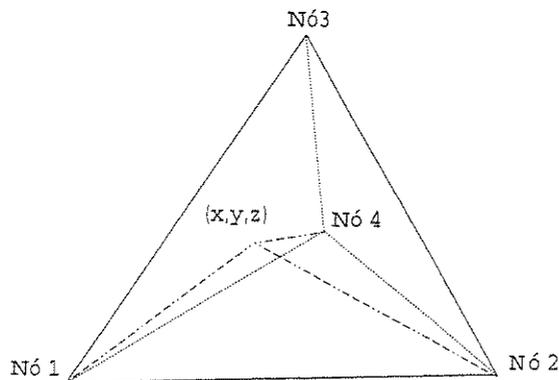
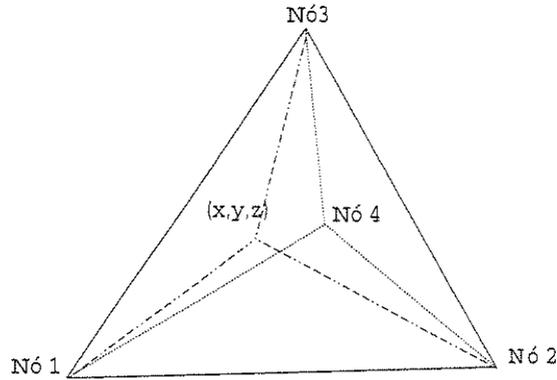


Figura A.3: Coordenada Local L_3 .

Observando a Figura A.3, a coordenada local L_3 do ponto localizado em x, y, z , será o volume formado pelo tetraedro entre os nós 1, 2, 4 e o nó x, y, z dividido pelo volume total do tetraedro.

Figura A.4: Coordenada Local L_4 .

Observando a Figura A.4, a coordenada local L_3 do ponto localizado em x, y, z , será o volume formado pelo tetraedro entre os nós 1, 2, 3 e o nó x, y, z dividido pelo volume total do tetraedro.

Então, a soma $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$, portanto, sempre pode-se escrever uma das coordenadas em função das outras três, mas por conveniência, as quatro coordenadas são utilizadas. As funções de base nodais de primeira ordem são as próprias coordenadas locais, e as funções de base nodais de ordens superiores são escritas em função das coordenadas locais. O volume de um tetraedro formado pelos nós 1, 2, 3 e 4 é dado por:

$$6 * Volume = \Delta = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} \quad (A.1)$$

onde x_i, y_i, z_i , são as coordenadas do nó i . As coordenadas locais podem ser escritas em função de x, y e z da seguinte forma:

$$L_1(x, y, z) = \frac{\begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix}}{\Delta} \quad (A.2)$$

$$L_2(x, y, z) = \frac{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix}}{\Delta} \quad (\text{A.3})$$

$$L_3(x, y, z) = \frac{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix}}{\Delta} \quad (\text{A.4})$$

$$L_4(x, y, z) = \frac{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x & y & z \end{pmatrix}}{\Delta}, \quad (\text{A.5})$$

que podem ser sistematizadas para programação da seguinte forma:

$$L(i) = \frac{ae(i) + be(i)x + ce(i)y + de(i)z}{\Delta} \quad (\text{A.6})$$

Define-se:

$$x_5 = x_1; \quad x_6 = x_2; \quad x_7 = x_3; \quad y_5 = y_1; \quad y_6 = y_2; \quad y_7 = y_3 \quad (\text{A.7})$$

$$ae(i) = \begin{bmatrix} x(i+1) * y(i+2) * z(i+3) \\ +x(i+2) * y(i+3) * z(i+1) \\ +x(i+3) * y(i+1) * z(i+2) \\ -x(i+1) * y(i+3) * z(i+2) \\ -x(i+2) * y(i+1) * z(i+3) \\ -x(i+3) * y(i+2) * z(i+1) \end{bmatrix} * (-1)^{(i+1)} \quad (\text{A.8})$$

$$be(i) = \begin{bmatrix} y(i+1) * z(i+3) + y(i+2) * z(i+1) + y(i+3) * z(i+2) - \\ y(i+1) * z(i+2) - y(i+2) * z(i+3) - y(i+3) * z(i+1) \end{bmatrix} * (-1)^{(i+1)} \quad (\text{A.9})$$

$$ce(i) = \begin{bmatrix} x(i+1) * z(i+3) + x(i+2) * z(i+1) + x(i+3) * z(i+2) - \\ x(i+1) * z(i+2) - x(i+2) * z(i+3) - x(i+3) * z(i+1) \end{bmatrix} * (-1)^{(i)} \quad (\text{A.10})$$

$$de(i) = \begin{bmatrix} x(i+1) * y(i+3) + x(i+2) * y(i+1) + x(i+3) * y(i+2) \\ x(i+1) * y(i+2) - x(i+2) * y(i+3) - x(i+3) * y(i+1) \end{bmatrix} * (-1)^{(i+1)} \quad (\text{A.11})$$

As funções de base nodais, forçam a continuidade das componentes normais nas faces de dois tetraedros além das componentes tangenciais. Isto não é o que se espera quando, por exemplo, aproximando-se campos elétricos e há interfaces entre dois materiais com permissividades elétricas diferentes. Além disso, se forem de primeira ordem, quando usadas para aproximar funções vetoriais resultam em 3 graus de liberdade por nó, 12 graus de liberdade por tetraedro. Então, o campo vetorial dentro do tetraedro é aproximado com 12 graus de liberdade. Isto resulta em aproximar também o espaço nulo, isto é, a parcela que aproxima o campo com rotacional nulo, o que não é de utilidade para aproximações de campos não estáticos, esta parcela além de não ter utilidade nas aproximações de ondas, ainda gera soluções não físicas devido a distorções [50]. Pode-se facilmente observar isto como mostrado abaixo:

$$\vec{E}_{aprox} = (A + Bx + Cy + Dz)\hat{x} + (E + Fx + Gy + Hz)\hat{y} + (I + Jx + Ky + Lz)\hat{z} \quad (\text{A.12})$$

que pode ser dividida em duas parcelas:

$$\vec{E}_{aprox} = \vec{E}_{semgradiente} + \vec{E}_{gradiente}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{semgradiente} = & [A + (C - F)y/2 + (D - J)z/2]\hat{x} \\ & + [E + (F - C)x/2 + (H - K)z/2]\hat{y} + [I + (J - D)x/2 + (K - H)y/2]\hat{z} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{gradiente} = & [Bx + (C + F)y/2 + (D + J)z/2]\hat{x} \\ & + [Gy + (F + C)x/2 + (H + K)z/2]\hat{y} + [Lz + (J + D)x/2 + (K + H)y/2]\hat{z} \end{aligned}$$

Sendo que a segunda parcela vem do gradiente da função:

$$\phi = \frac{B}{2}x^2 + \frac{G}{2}y^2 + \frac{L}{2}z^2 + (C + F)\frac{xy}{2} + (D + J)\frac{xz}{2} + (H + K)\frac{yz}{2} \quad (\text{A.14})$$

e é denominada de espaço nulo, pois como possui rotacional nulo, se utilizada em um problema de autovalores, como por exemplo em uma cavidade, a equação vetorial de Helmholtz resulta em autovalores nulos.

O maior problema, no entanto, é que devido as funções nodais forçarem a continuidade dos campos normais e não serem solenoidais, o espaço nulo é distorcido e os autovalores assumirem valores próximos às soluções procuradas, assim resultando nos chamados modos espúrios. Foi verificado que se as funções de base não impusessem continuidade completa entre dois elementos, isto é, só impusessem continuidade da componente tangencial, deixando a componente normal livre, esta distorção do espaço nulo não ocorreria [39] e [51], embora o espaço nulo continuasse a existir, não produziria mais as soluções espúrias. Outra dificuldade das funções de base nodais é a imposição das condições de contorno em fronteiras que não coincidam com os eixos ortogonais, fazendo que se tenha que relacionar duas ou mais componentes de campo, complicando o esquema de armazenamento esparso utilizado. Devido a estas dificuldades, funções de base vetoriais que não imponham continuidade normal dos campos e tenha um rotacional finito devem ser utilizadas, funções de base deste tipo são denominadas na literatura de *curl-conforming*.

A.2 Funções de Base de Arestas em Tetraedros

As funções de base de aresta têm as características necessárias para modelar os campos eletromagnéticos e foram propostas por Whitney [52] em 1957, associando graus de liberdade às arestas no lugar dos nós. Nedelec [38], em 1980 discutiu a construção dos elementos de arestas em tetraedros e em elementos cúbicos. Além de outros que usaram os elementos de arestas para o cálculo de campos em baixas frequências, M. Hano [53] usou elementos de arestas para cálculo de guias carregados com dielétricos e em 1985 G. Mur e Aa. T. Hoop utilizaram elementos de arestas para cálculo de campos eletromagnéticos 3D em meios não homogêneos [51], mas com a representação polinomial completa. Bossavit e Verite em 1982 [54] e depois Barton e Cendes [37], usaram as chamadas funções de base de arestas de ordem mista, proposta por Nedelec, que elimina certos graus de liberdade associados ao espaço nulo para cálculo de campos eletromagnéticos em alta frequência. A partir deste ponto, serão discutidas algumas características das funções de base de aresta usadas neste trabalho. Primeiro serão mostradas, nas Figuras A.5, A.6, A.7 e A.8, as nomenclaturas usadas para denominar as faces e as arestas do tetraedro.

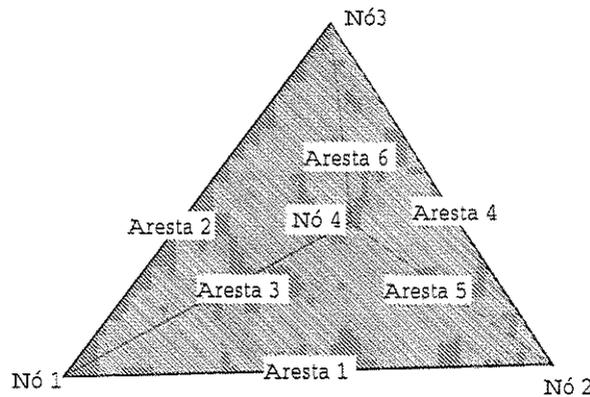


Figura A.5: Face 1.

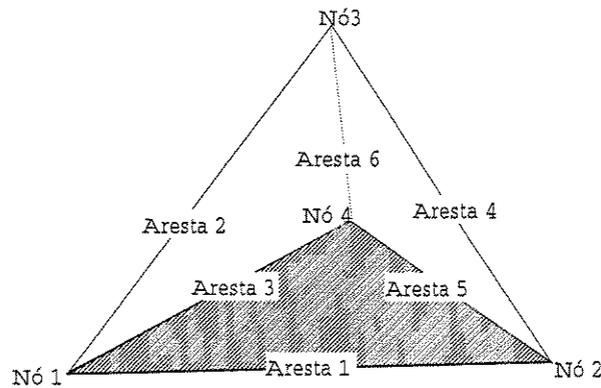


Figura A.6: Face 2.

Sabe-se que o gradiente da função de base de ordem 1, L_2 é perpendicular à face 3 e o módulo do gradiente de L_2 é igual ao inverso da distância entre o nó 2 e esta face, sendo h_2 a distância entre a face 3 e o nó 2, $|\nabla L_2| = 1/h_2$, a projeção do gradiente de L_2 sobre a aresta 1 é mostrada na Figura A.9. O cosseno do ângulo formado entre o gradiente de L_2 e a aresta 1 será $\cos(\theta) = \frac{h_2}{l_1}$, sendo l_1 o comprimento da aresta 1, logo, o módulo da projeção do gradiente de L_2 sobre a aresta 1 será igual a $\frac{1}{l_1}$ assim, o módulo da projeção de $l_1 \nabla L_2$ sobre a aresta 1 será 1, o que é ideal para elementos finitos. Na Figura A.10 vê-se função de base vetorial de aresta ligada a aresta 1 do lado do nó 1, $\vec{B}_1 = l_1 L_1 \nabla L_2$, que tem a projeção sobre a aresta 1 variando linearmente do nó 1 ao nó 2, sendo que no nó 1 tem módulo 1 e no nó 2 tem módulo 0. Sua direção é a direção do gradiente de L_2 , logo perpendicular à face 3.

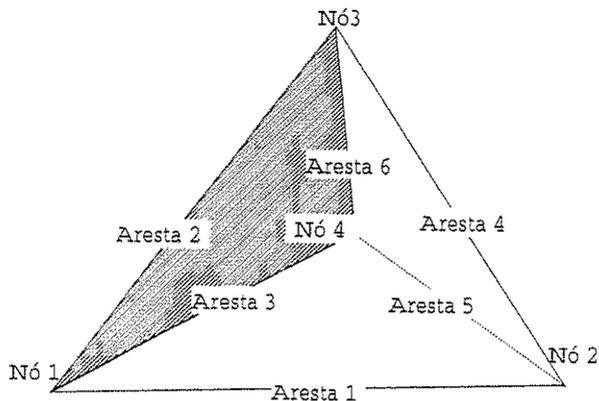


Figura A.7: Face 3.

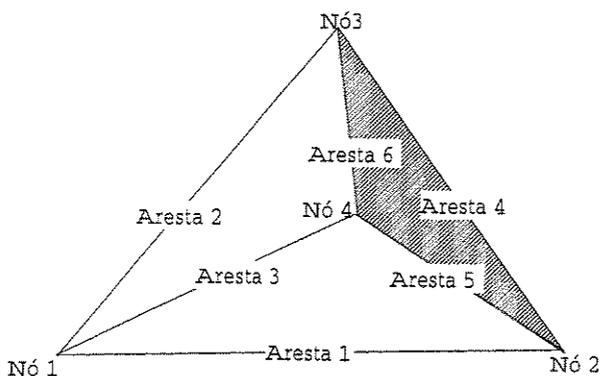


Figura A.8: Face 4.

A continuidade tangencial nas faces é garantida da seguinte forma: A função de base correspondente à função \vec{B}_1 do tetraedro vizinho à face 1, também tem projeção sobre a aresta 1 igual a 1. Além disto, tanto a função de base \vec{B}_1 como sua correspondente são normais à aresta 2, pois a função \vec{B}_1 é normal à face 3 que contém a aresta 2 e sua correspondente é normal a uma face em seu tetraedro que também contém a aresta 2, logo, também a função correspondente é normal a aresta 2. Imagine um sistema de coordenadas retangular cuja a aresta 1 seja um eixo, como na Figura A.10. Assim, tanto a função de base \vec{B}_1 como a função de base correspondente à função \vec{B}_1 do tetraedro vizinho à face 1, possuem a mesma projeção no plano da face 1, como pode ser visto na A.10.

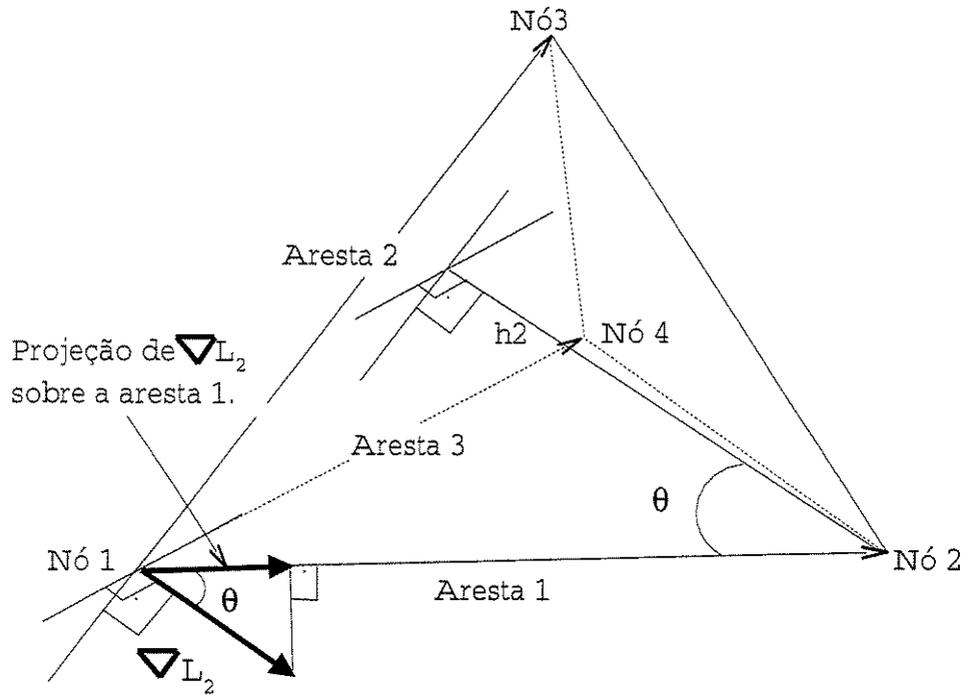


Figura A.9: Projeção do gradiente de L_2 sobre a aresta 1.

Todas funções de base seriam as equações descritas em (A.15), que para aproximação de ordem 1, resultaria em 12 graus de liberdade.

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} l_1 L_1 \nabla L_2 \\ l_1 L_2 \nabla L_1 \end{pmatrix} \text{ na aresta1} \\
 & \begin{pmatrix} l_2 L_1 \nabla L_3 \\ l_2 L_3 \nabla L_1 \end{pmatrix} \text{ na aresta2} \\
 & \begin{pmatrix} l_3 L_1 \nabla L_4 \\ l_3 L_4 \nabla L_1 \end{pmatrix} \text{ na aresta3} \\
 & \begin{pmatrix} l_4 L_2 \nabla L_3 \\ l_4 L_3 \nabla L_2 \end{pmatrix} \text{ na aresta4} \\
 & \begin{pmatrix} l_5 L_2 \nabla L_4 \\ l_5 L_4 \nabla L_2 \end{pmatrix} \text{ na aresta5} \\
 & \begin{pmatrix} l_6 L_3 \nabla L_4 \\ l_6 L_4 \nabla L_3 \end{pmatrix} \text{ na aresta6}
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

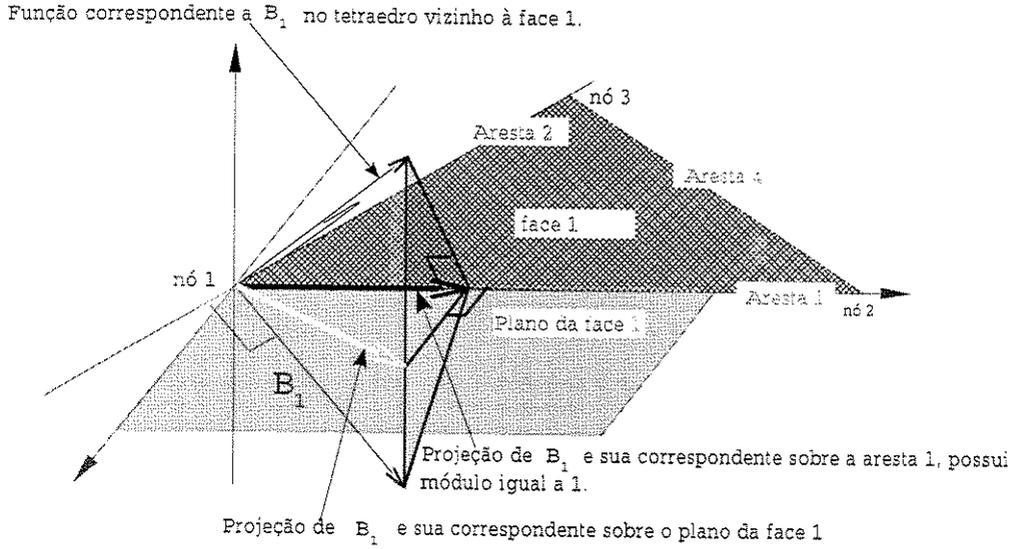


Figura A.10: Projeção do gradiente de L_2 sobre a aresta 1.

Usando a aproximação de Nedelec, retirando alguns graus de liberdade ligados ao espaço nulo, resulta nas equações descritas em (A.16).

$$\begin{aligned}
 \vec{N}_1 &= l_1(L_1 \nabla L_2 - L_2 \nabla L_1) \quad \text{na aresta 1} \\
 \vec{N}_2 &= l_2(L_1 \nabla L_3 - L_3 \nabla L_1) \quad \text{na aresta 2} \\
 \vec{N}_3 &= l_3(L_1 \nabla L_4 - L_4 \nabla L_1) \quad \text{na aresta 3} \\
 \vec{N}_4 &= l_4(L_2 \nabla L_3 - L_3 \nabla L_2) \quad \text{na aresta 4} \\
 \vec{N}_5 &= l_5(L_4 \nabla L_2 - L_2 \nabla L_4) \quad \text{na aresta 5} \\
 \vec{N}_6 &= l_6(L_3 \nabla L_4 - L_4 \nabla L_3) \quad \text{na aresta 6}
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

As funções descritas em (A.16) são funções de base de ordem mista, baseadas na aresta. Isto é, o campo tangencial ao longo da aresta é constante e a aproximação do campo normal ao longo da aresta é linear, daí são denominadas de funções CT/LN. Para melhor esclarecer a afirmação acima,

verifica-se o comportamento da função \vec{N}_1 que será: A primeira parcela, possui a componente tangencial com módulo variando linearmente do valor 1 no nó 1 a zero no nó 2 e sentido do nó 1 para 2. A segunda parcela possui a componente tangencial com módulo variando linearmente do valor 1 no nó 2 a zero no nó 1 e sentido do nó 1 para 2. Logo, a soma das duas parcelas tem componente tangencial a aresta 1 constante e unitária com sentido do nó 1 ao nó 2. A primeira parcela é normal à face formada pelos nós 1, 4 e 3 e possui valor zero na face formada pelos nós 2, 3 e 4, já a segunda parcela é normal à face formada pelos nós 2, 3 e 4 e possui valor zero na face formada pelos nós 1, 3 e 4. Logo, a função de base \vec{N}_1 não possui componentes tangenciais as faces que não contenham a aresta 1. Um conjunto de funções de ordem mais alta é o conjunto LT/QN, isto é, linear tangencial e quadrático normal descritas em (A.17).

Baseadas nas Arestas

$$l_1 L_1 \nabla L_2$$

$$l_1 L_2 \nabla L_1$$

$$l_2 L_1 \nabla L_3$$

$$l_2 L_3 \nabla L_1$$

$$l_3 L_1 \nabla L_4$$

$$l_3 L_4 \nabla L_1$$

$$l_4 L_2 \nabla L_3$$

$$l_4 L_3 \nabla L_2$$

$$l_5 L_2 \nabla L_4$$

$$l_5 L_4 \nabla L_2$$

$$l_6 L_3 \nabla L_4$$

$$l_6 L_4 \nabla L_3$$

(A.17)

Baseadas nas Faces

$$L_1 L_2 \nabla L_3 - L_1 L_3 \nabla L_2$$

$$L_2 L_3 \nabla L_1 - L_1 L_3 \nabla L_2$$

$$L_1 L_2 \nabla L_4 - L_1 L_4 \nabla L_2$$

$$L_2 L_4 \nabla L_1 - L_1 L_4 \nabla L_2$$

$$L_2 L_3 \nabla L_4 - L_2 L_4 \nabla L_3$$

$$L_3 L_4 \nabla L_2 - L_2 L_4 \nabla L_3$$

$$L_1 L_3 \nabla L_4 - L_1 L_4 \nabla L_3$$

$$L_3 L_4 \nabla L_1 - L_1 L_4 \nabla L_3$$

A.3 Construção das Integrais Necessárias

As funções de base CT/LN foram as usadas nesta tese. E nesta seção serão desenvolvidas as integrações para formação das matrizes elementares necessárias às implementações computacionais após a discretização da formulação fraca do método de Galerkin ou Rayleigh-Ritz tanto no espalhamento no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

A.3.1 Construção das Integrais nos Volumes Elementares

Utilizando-se as coordenadas de volume descritas pela equação (A.18) nas equações das funções de base de arestas descritas em (A.16), pode-se obter as funções de base de arestas de forma mais apropriada para programação como descrita em (A.19). Com as funções de base nodais;

$$L(i) = (ae_{(i)} + be_{(i)}x + ce_{(i)}y + de_{(i)}z) / \Delta \quad (\text{A.18})$$

$$\vec{N}_i = \frac{l_{(i)}}{\Delta} \begin{pmatrix} [L(ci_{(i)}) be(cf_{(i)}) - L(cf_{(i)}) be(ci_{(i)})] \hat{x} \\ + [L(ci_{(i)}) ce(cf_{(i)}) - L(cf_{(i)}) ce(ci_{(i)})] \hat{y} \\ + [L(ci_{(i)}) de(cf_{(i)}) - L(cf_{(i)}) de(ci_{(i)})] \hat{z} \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

onde os coeficientes $ci_{(i)}$ e $cf_{(i)}$ são respectivamente o nó inicial e o nó final da aresta "i", e são dados na Tabela A.1:

Aresta	ci(aresta)	cf(aresta)
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	2	3
5	4	2
6	3	4

Tabela A.1: Tabela com os nós iniciais, ci, e os nós finais, cf, das arestas.

A primeira matriz elementar a ser obtida tem os elementos descritos na equação (A.20).

$$Q_e(i, j) = \iiint_e \nabla \times \vec{N}_i \cdot \bar{\bar{v}}_r \cdot \nabla \times \vec{N}_j dV \quad (\text{A.20})$$

sendo $\bar{\bar{v}}_r = \bar{\bar{\mu}}_r^{-1}$ a inversa do tensor permeabilidade magnética relativa.

O rotacional da função de base de aresta CT/LN pode ser facilmente obtido como descrito em (A.21).

$$\nabla \times \vec{N}_i = \frac{l(i)}{\Delta} \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} [L(ci_{(i)})de(cf_{(i)}) - L(cf_{(i)})de(ci_{(i)})] \\ -\frac{\partial}{\partial z} [L(ci_{(i)})ce(cf_{(i)}) - L(cf_{(i)})ce(ci_{(i)})] \end{array} \right\} \hat{x} \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial z} [L(ci_{(i)})be(cf_{(i)}) - L(cf_{(i)})be(ci_{(i)})] \\ -\frac{\partial}{\partial x} [L(ci_{(i)})de(cf_{(i)}) - L(cf_{(i)})de(ci_{(i)})] \end{array} \right\} \hat{y} \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} [L(ci_{(i)})ce(cf_{(i)}) - L(cf_{(i)})ce(ci_{(i)})] \\ -\frac{\partial}{\partial y} [L(ci_{(i)})be(cf_{(i)}) - L(cf_{(i)})be(ci_{(i)})] \end{array} \right\} \hat{z} \end{array} \right) \quad (A.21)$$

o que resulta na equação (A.22).

$$\nabla \times \vec{N}_j = \frac{2 l(j)}{\Delta^2} \left\{ \begin{array}{l} [ce(ci_{(j)})de(cf_{(j)}) - ce(cf_{(j)})de(ci_{(j)})] \hat{x} \\ + [de(ci_{(j)})be(cf_{(j)}) - de(cf_{(j)})be(ci_{(j)})] \hat{y} \\ + [be(ci_{(j)})ce(cf_{(j)}) - be(cf_{(j)})ce(ci_{(j)})] \hat{z} \end{array} \right\} \quad (A.22)$$

Para facilitar a programação pode-se definir as relações descritas em (A.23).

$$\begin{aligned} ROT_x(j) &= [ce(ci_{(j)})de(cf_{(j)}) - ce(cf_{(j)})de(ci_{(j)})] \\ ROT_y(j) &= [de(ci_{(j)})be(cf_{(j)}) - de(cf_{(j)})be(ci_{(j)})] \\ ROT_z(j) &= [be(ci_{(j)})ce(cf_{(j)}) - be(cf_{(j)})ce(ci_{(j)})] \end{aligned} \quad (A.23)$$

$$\vec{v}_r \cdot \nabla \times \vec{N}_j = \frac{2 l(j)}{\Delta^2} \left\{ \begin{array}{l} [v_{rxx}ROT_x(j) + v_{rxz}ROT_y(j) + v_{rxz}ROT_z(j)] \hat{x} \\ + [v_{ryx}ROT_x(j) + v_{ryz}ROT_y(j) + v_{ryz}ROT_z(j)] \hat{y} \\ + [v_{rzz}ROT_x(j) + v_{rzz}ROT_y(j) + v_{rzz}ROT_z(j)] \hat{z} \end{array} \right\} \quad (A.24)$$

Finalmente com as equações (A.22) e (A.24) encontra-se a expressão final da matriz elementar Q, descrita em (A.25).

$$Q_e(i, j) = \frac{4 l(i) l(j)}{6 \Delta^3} \left\{ \begin{array}{l} ROT_x(i)[v_{rxx} ROT_x(j) + v_{rxz} ROT_y(j) + v_{rxz} ROT_z(j)] \\ + ROT_y(i)[v_{ryx} ROT_x(j) + v_{ryz} ROT_y(j) + v_{ryz} ROT_z(j)] \\ + ROT_z(i)[v_{rzz} ROT_x(j) + v_{rzz} ROT_y(j) + v_{rzz} ROT_z(j)] \end{array} \right\} \quad (A.25)$$

A segunda matriz elementar a ser obtida tem os elementos descritos na equação (A.26).

$$R_e(i, j) = \iiint_e N_i \cdot \bar{\epsilon}_r \cdot \vec{N}_j dV \quad (\text{A.26})$$

onde $\bar{\epsilon}_r$ é o tensor permissividade elétrica relativa. Para facilitar a obtenção da matriz elementar R obtém-se os passos descritos em (A.27) e (A.28).

$$\bar{\epsilon}_r \cdot \vec{N}_j = \frac{l(j)}{\Delta} + \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} [L(ci_{(j)})be(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})be(ci_{(j)})] \epsilon_{rxx} \\ + [L(ci_{(j)})ce(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})ce(ci_{(j)})] \epsilon_{rxy} \\ + [L(ci_{(j)})de(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})de(ci_{(j)})] \epsilon_{rxz} \end{array} \right\} \hat{x} \\ \left\{ \begin{array}{l} [L(ci_{(j)})be(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})be(ci_{(j)})] \epsilon_{ryx} \\ + [L(ci_{(j)})ce(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})ce(ci_{(j)})] \epsilon_{ryy} \\ + [L(ci_{(j)})de(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})de(ci_{(j)})] \epsilon_{ryz} \end{array} \right\} \hat{y} \\ \left\{ \begin{array}{l} [L(ci_{(j)})be(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})be(ci_{(j)})] \epsilon_{rzx} \\ + [L(ci_{(j)})ce(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})ce(ci_{(j)})] \epsilon_{rzy} \\ + [L(ci_{(j)})de(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})de(ci_{(j)})] \epsilon_{rzz} \end{array} \right\} \hat{z} \end{array} \right) \quad (\text{A.27})$$

$$\vec{N}_{(i)} \cdot \bar{\epsilon}_r \cdot \vec{N}_{(j)} = \frac{l(i) l(j)}{\Delta^2} \left(\begin{array}{l} [L(ci_{(i)})be(cf_{(i)}) - L(cf_{(i)})be(ci_{(i)})] \\ * \left\{ \begin{array}{l} [L(ci_{(j)})be(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})be(ci_{(j)})] \epsilon_{rxx} \\ + [L(ci_{(j)})ce(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})ce(ci_{(j)})] \epsilon_{rxy} \\ + [L(ci_{(j)})de(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})de(ci_{(j)})] \epsilon_{rxz} \end{array} \right\} \\ + [L(ci_{(i)})ce(cf_{(i)}) - L(cf_{(i)})ce(ci_{(i)})] \\ * \left\{ \begin{array}{l} [L(ci_{(j)})be(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})be(ci_{(j)})] \epsilon_{ryx} \\ + [L(ci_{(j)})ce(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})ce(ci_{(j)})] \epsilon_{ryy} \\ + [L(ci_{(j)})de(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})de(ci_{(j)})] \epsilon_{ryz} \end{array} \right\} \\ + [L(ci_{(i)})de(cf_{(i)}) - L(cf_{(i)})de(ci_{(i)})] \\ * \left\{ \begin{array}{l} [L(ci_{(j)})be(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})be(ci_{(j)})] \epsilon_{rzx} \\ + [L(ci_{(j)})ce(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})ce(ci_{(j)})] \epsilon_{rzy} \\ + [L(ci_{(j)})de(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})de(ci_{(j)})] \epsilon_{rzz} \end{array} \right\} \end{array} \right) \quad (\text{A.28})$$

Para facilitar ainda mais a programação, faz-se as seguintes definições descritas em (A.29).

$$\begin{aligned}
PA1_{(i,j)} &= L(ci_{(i)}) [L(ci_{(j)})be(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})be(ci_{(j)})] = \\
&\quad L(ci_{(i)})L(ci_{(j)})be(cf_{(j)}) - L(ci_{(i)})L(cf_{(j)})be(ci_{(j)}) \\
PA2_{(i,j)} &= L(ci_{(i)}) [L(ci_{(j)})ce(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})ce(ci_{(j)})] = \\
&\quad L(ci_{(i)})L(ci_{(j)})ce(cf_{(j)}) - L(ci_{(i)})L(cf_{(j)})ce(ci_{(j)}) \\
PA3_{(i,j)} &= L(ci_{(i)}) [L(ci_{(j)})de(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})de(ci_{(j)})] = \\
&\quad L(ci_{(i)})L(ci_{(j)})de(cf_{(j)}) - L(ci_{(i)})L(cf_{(j)})de(ci_{(j)}) \\
PA4_{(i,j)} &= L(cf_{(i)}) [L(ci_{(j)})be(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})be(ci_{(j)})] = \\
&\quad L(cf_{(i)})L(ci_{(j)})be(cf_{(j)}) - L(cf_{(i)})L(cf_{(j)})be(ci_{(j)}) \\
PA5_{(i,j)} &= L(cf_{(i)}) [L(ci_{(j)})ce(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})ce(ci_{(j)})] = \\
&\quad L(cf_{(i)})L(ci_{(j)})ce(cf_{(j)}) - L(cf_{(i)})L(cf_{(j)})ce(ci_{(j)}) \\
PA6_{(i,j)} &= L(cf_{(i)}) [L(ci_{(j)})de(cf_{(j)}) - L(cf_{(j)})de(ci_{(j)})] = \\
&\quad L(cf_{(i)})L(ci_{(j)})de(cf_{(j)}) - L(cf_{(i)})L(cf_{(j)})de(ci_{(j)})
\end{aligned} \tag{A.29}$$

Aplicando (A.29) em (A.28), é obtida a equação descrita em (A.30).

$$\vec{N}_{(i)} \cdot \vec{\epsilon}_r \cdot \vec{N}_{(j)} = \frac{l_{(i)} l_{(j)}}{\Delta^2} \left[\begin{array}{l} be(cf_{(i)})(PA1_{(i,j)} \epsilon_{rxx} + PA2_{(i,j)} \epsilon_{rxy} + PA3_{(i,j)} \epsilon_{rxz}) \\ -be(ci_{(i)})(PA4_{(i,j)} \epsilon_{rxx} + PA5_{(i,j)} \epsilon_{rxy} + PA6_{(i,j)} \epsilon_{rxz}) \\ +ce(cf_{(i)})(PA1_{(i,j)} \epsilon_{ryx} + PA2_{(i,j)} \epsilon_{ryy} + PA3_{(i,j)} \epsilon_{ryz}) \\ -ce(ci_{(i)})(PA4_{(i,j)} \epsilon_{ryx} + PA5_{(i,j)} \epsilon_{ryy} + PA6_{(i,j)} \epsilon_{ryz}) \\ +de(cf_{(i)})(PA1_{(i,j)} \epsilon_{rzx} + PA2_{(i,j)} \epsilon_{rzy} + PA3_{(i,j)} \epsilon_{rzz}) \\ -de(ci_{(i)})(PA4_{(i,j)} \epsilon_{rzx} + PA5_{(i,j)} \epsilon_{rzy} + PA6_{(i,j)} \epsilon_{rzz}) \end{array} \right] \tag{A.30}$$

Sabendo que:

$$\iiint L(i)L(j)dV = \Delta \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{60} & \frac{1}{120} & \frac{1}{120} & \frac{1}{120} \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{60} & \frac{1}{120} & \frac{1}{120} \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{120} & \frac{1}{60} & \frac{1}{120} \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{120} & \frac{1}{120} & \frac{1}{60} \end{array} \right] = MINT \tag{A.31}$$

Pode-se definir:

$$\begin{aligned}
IP1 &= \iiint_e PA1dV = be(cf_{(j)}) MINT(ci_{(i)}, ci_{(j)}) - be(ci_{(j)}) MINT(ci_{(i)}, cf_{(j)}) \\
IP2 &= \iiint_e PA2dV = ce(cf_{(j)}) MINT(ci_{(i)}, ci_{(j)}) - ce(ci_{(j)}) MINT(ci_{(i)}, cf_{(j)}) \\
IP3 &= \iiint_e PA3dV = de(cf_{(j)}) MINT(ci_{(i)}, ci_{(j)}) - de(ci_{(j)}) MINT(ci_{(i)}, cf_{(j)}) \\
IP4 &= \iiint_e PA4dV = be(cf_{(j)}) MINT(cf_{(i)}, ci_{(j)}) - be(ci_{(j)}) MINT(cf_{(i)}, cf_{(j)}) \\
IP5 &= \iiint_e PA5dV = ce(cf_{(j)}) MINT(cf_{(i)}, ci_{(j)}) - ce(ci_{(j)}) MINT(cf_{(i)}, cf_{(j)}) \\
IP6 &= \iiint_e PA6dV = de(cf_{(j)}) MINT(cf_{(i)}, ci_{(j)}) - de(ci_{(j)}) MINT(cf_{(i)}, cf_{(j)})
\end{aligned} \tag{A.32}$$

Assim (A.30) pode ser escrita como em (A.33).

$$R_e(i, j) = \frac{l_{(i)} l_{(j)}}{\Delta^2} \begin{bmatrix} be(cf_{(i)})(IP1 \epsilon_{rxx} + IP2 \epsilon_{rxy} + IP3 \epsilon_{rxz}) \\ -be(ci_{(i)})(IP4 \epsilon_{rxx} + IP5 \epsilon_{rxy} + IP6 \epsilon_{rxz}) \\ +ce(cf_{(i)})(IP1 \epsilon_{ryx} + IP2 \epsilon_{ryy} + IP3 \epsilon_{ryz}) \\ -ce(ci_{(i)})(IP4 \epsilon_{ryx} + IP5 \epsilon_{ryy} + IP6 \epsilon_{ryz}) \\ +de(cf_{(i)})(IP1 \epsilon_{rzx} + IP2 \epsilon_{rzy} + IP3 \epsilon_{rzz}) \\ -de(ci_{(i)})(IP4 \epsilon_{rzx} + IP5 \epsilon_{rzy} + IP6 \epsilon_{rzz}) \end{bmatrix} \tag{A.33}$$

A.3.2 Integrais de Superfície

As integrações nas superfícies de contorno são necessárias para a implementação das ABCs descritas no apêndice C e também para o cálculo dos campos distantes no caso do uso do teorema da superfície equivalente.. Estas integrações nos contorno necessárias são basicamente quatro:

- Integrações necessárias para o cálculo das ABC's de primeira e segunda ordem:

$$ISabc_1(i, j) = jp_0k_0 \int_{\Omega} \vec{N}_{t(i)} \cdot \vec{N}_{t(j)} d\Omega \tag{A.34}$$

sendo $\vec{N}_{t(i)} = -\hat{n} \times \hat{n} \times \vec{N}_{(i)} = \vec{N}_{(i)} - \hat{n} \cdot \vec{N}_{(i)}$ a componente tangencial função de forma $\vec{N}_{(i)}$ e \hat{n} vetor normal à superfície Ω apontando para fora da mesma.

$$ISabc_3(i, j) = \int_{\Omega} \vec{N}_{(i)} \cdot \nabla_t[\hat{n} \cdot \vec{N}_{(j)}] d\Omega \tag{A.35}$$

onde ∇_t é o operador ∇ na direção transversal à superfície.

- Integrações necessárias para o cálculo dos campos distantes no caso do uso do teorema da superfície equivalente.

$$ISeq_1(i) = \int_{\Omega} L_{(i)} e^{(-jk_0 \hat{r} \cdot \vec{r}')} d\Omega \quad (A.36)$$

sendo $\hat{r} = \text{sen}(\theta) \cos(\phi) \hat{x} + \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) \hat{y} + \cos(\theta) \hat{z}$ o vetor unitário apontando para a posição do ponto de observação do campo, θ e ϕ coordenadas esféricas do ponto de observação e $\vec{r}' = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$ o vetor posição do ponto de integração da corrente na superfície.

$$ISeq_2(i) = \int_{\Omega} e^{(-jk_0 \hat{r} \cdot \vec{r}')} d\Omega \quad (A.37)$$

A.3.2.1 Transformação de Coordenadas

A integração na superfície diretamente na posição original é muito difícil, faz-se então uma transformação do sistema de coordenadas mapeando o tetraedro original em um tetraedro mestre como mostrado na Figura A.11. A transformação de coordenadas é descrita por:

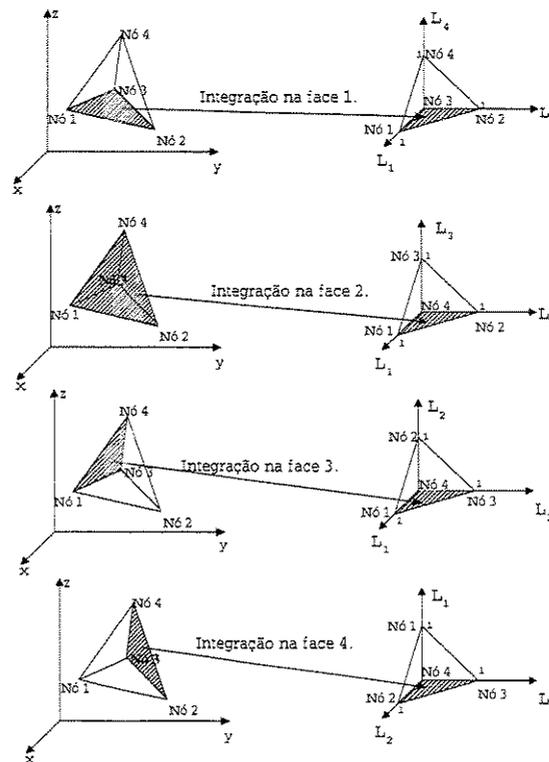


Figura A.11: Mapeamento no Tetraedro Mestre.

$$\begin{aligned}
x &= x_1L_1 + x_2L_2 + x_3L_3 + x_4L_4 \\
y &= y_1L_1 + y_2L_2 + y_3L_3 + y_4L_4 \\
z &= z_1L_1 + z_2L_2 + z_3L_3 + z_4L_4
\end{aligned} \tag{A.38}$$

sendo L_1, L_2, L_3 e L_4 as coordenadas de volume descritas nas equações (A.6), (A.7), (A.8), (A.9), (A.10) e (A.11). Com a transformação de coordenadas (A.37), uma função no tetraedro local pode ser mapeada para o tetraedro mestre, isto é, $f_{(x,y,z)} \Rightarrow f_{(L_1,L_2,L_3,L_4)}$, sendo que L_1, L_2, L_3 e L_4 não são linearmente independentes.

- Quando a integração for feita na face 1, faz-se: $L_4 = 0$ e $L_2 = 1 - L_1 - L_3$ e integra-se em no triângulo marcado no tetraedro mestre como mostrado na primeira parte de Figura A.11, sendo $\hat{n} = \frac{-\nabla L_4}{|\nabla L_4|}$.
- Quando a integração for feita na face 2, faz-se: $L_3 = 0$ e $L_4 = 1 - L_1 - L_2$ e integra-se em no triângulo marcado no tetraedro mestre como mostrado na segunda parte de Figura A.11, sendo $\hat{n} = \frac{-\nabla L_3}{|\nabla L_3|}$.
- Quando a integração for feita na face 2, faz-se: $L_2 = 0$ e $L_4 = 1 - L_1 - L_3$ e integra-se em no triângulo marcado no tetraedro mestre como mostrado na terceira parte de Figura A.11, sendo $\hat{n} = \frac{-\nabla L_2}{|\nabla L_2|}$.
- Quando a integração for feita na face 2, faz-se: $L_1 = 0$ e $L_4 = 1 - L_2 - L_3$ e integra-se em no triângulo marcado no tetraedro mestre como mostrado na quarta parte de Figura A.11, sendo $\hat{n} = \frac{-\nabla L_1}{|\nabla L_1|}$.

A.3.2.2 Implementação da Integral de Superfície da Equação (A.34)

Para implementar a integral (A.34), necessita-se de $\vec{N}_{t(i)}$, então: Com $\vec{N}_{(i)}$ descrita na equação (A.19), pode-se dizer que:

$$\begin{aligned}
\vec{N}_i &= N_{x(i)}\hat{x} + N_{y(i)}\hat{y} + N_{z(i)}\hat{z} \\
N_{x(i)} &= \frac{l(i)}{\Delta} [L(ci_{(i)}) be(cf_{(i)}) - L(cf_{(i)}) be(ci_{(i)})] \\
N_{y(i)} &= \frac{l(i)}{\Delta} [L(ci_{(i)}) ce(cf_{(i)}) - L(cf_{(i)}) ce(ci_{(i)})] \\
N_{z(i)} &= \frac{l(i)}{\Delta} [L(ci_{(i)}) de(cf_{(i)}) - L(cf_{(i)}) de(ci_{(i)})]
\end{aligned} \tag{A.39}$$

e o vetor unitário normal à face, \hat{n} , pode ser calculado como:

$$\hat{n}_{(f)} = -\frac{be_{(p)}\hat{x} + ce_{(p)}\hat{y} + de_{(p)}\hat{z}}{\sqrt{be_{(p)}^2 + ce_{(p)}^2 + de_{(p)}^2}} \quad (\text{A.40})$$

sendo f o índice da face, isto é $f = 1$ para a face 1, etc ... e $p = 4$ para a face 1, $p = 3$ para a face 2, $p = 2$ para a face 3 e $p = 1$ para a face 4. Os termos $be_{(p)}$, $ce_{(p)}$ e $de_{(p)}$ são descritos pelas equações (A.9), (A.10) e (A.11), respectivamente. Pode-se, então, definir:

$$\begin{aligned} n_{x(f)} &= -\frac{be_{(p)}}{\sqrt{be_{(p)}^2 + ce_{(p)}^2 + de_{(p)}^2}} \\ n_{y(f)} &= -\frac{ce_{(p)}}{\sqrt{be_{(p)}^2 + ce_{(p)}^2 + de_{(p)}^2}} \\ n_{z(f)} &= -\frac{de_{(p)}}{\sqrt{be_{(p)}^2 + ce_{(p)}^2 + de_{(p)}^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Daí, pode-se obter $\vec{N}_{t(i)}$ que é:

$$\begin{aligned} \vec{N}_{t(i)} &= N_{tx(i)}\hat{x} + N_{ty(i)}\hat{y} + N_{tz(i)}\hat{z} = -\hat{n} \times \hat{n} \times \vec{N}(i) \\ N_{tx(i)} &= N_{x(i)}(n_{y(f)}^2 + n_{z(f)}^2) - N_{y(i)}n_{x(f)}n_{y(f)} - N_{z(i)}n_{x(f)}n_{z(f)} \\ N_{ty(i)} &= -N_{x(i)}n_{y(f)}n_{x(f)} + N_{y(i)}(n_{x(f)}^2 + n_{z(f)}^2) - N_{z(i)}n_{y(f)}n_{z(f)} \\ N_{tz(i)} &= -N_{x(i)}n_{z(f)}n_{x(f)} - N_{y(i)}n_{z(f)}n_{y(f)} + N_{z(i)}(n_{x(f)}^2 + n_{y(f)}^2) \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Como a expressão final do integrando da equação (A.34) fica:

$$\begin{aligned} ISabc_1(i, j) &= j p_0 k_0 \int_{\Omega} \vec{N}_{t(i)} \cdot \vec{N}_{t(j)} d\Omega = \int_{\Omega} N_{tx(i)}N_{tx(j)} + N_{ty(i)}N_{ty(j)} + N_{tz(i)}N_{tz(j)} d\Omega = \\ & (n_{y(f)}^2 + n_{z(f)}^2) \int_{\Omega} N_{x(i)}N_{x(j)} d\Omega + (n_{x(f)}^2 + n_{z(f)}^2) \int_{\Omega} N_{y(i)}N_{y(j)} d\Omega + (n_{x(f)}^2 + n_{y(f)}^2) \int_{\Omega} N_{z(i)}N_{z(j)} d\Omega \\ & - n_{y(f)}n_{x(f)} \int_{\Omega} (N_{x(i)}N_{y(j)} + N_{y(i)}N_{x(j)}) d\Omega \\ & - n_{z(f)}n_{x(f)} \int_{\Omega} (N_{x(i)}N_{z(j)} + N_{z(i)}N_{x(j)}) d\Omega \\ & - n_{z(f)}n_{y(f)} \int_{\Omega} (N_{y(i)}N_{z(j)} + N_{z(i)}N_{y(j)}) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Então, a integração na equação (A.34) pode ser subdividida em várias integrações como visto em (A.43), assim é necessário a obtenção dos termos dos integrandos. Com a equação (A.39) pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 N_{x(i)}N_{x(j)} &= \frac{le_{(i)}le_{(j)}}{\Delta^2} \begin{pmatrix} be(ci_{(i)})be(ci_{(j)})L(cf_{(i)})L(cf_{(j)}) \\ -be(ci_{(i)})be(cf_{(j)})L(cf_{(i)})L(ci_{(j)}) \\ -be(cf_{(i)})be(ci_{(j)})L(ci_{(i)})L(cf_{(j)}) \\ +be(cf_{(i)})be(cf_{(j)})L(ci_{(i)})L(ci_{(j)}) \end{pmatrix} \\
 N_{x(i)}N_{y(j)} &= \frac{le_{(i)}le_{(j)}}{\Delta^2} \begin{pmatrix} be(ci_{(i)})ce(ci_{(j)})L(cf_{(i)})L(cf_{(j)}) \\ -be(ci_{(i)})ce(cf_{(j)})L(cf_{(i)})L(ci_{(j)}) \\ -be(cf_{(i)})ce(ci_{(j)})L(ci_{(i)})L(cf_{(j)}) \\ +be(cf_{(i)})ce(cf_{(j)})L(ci_{(i)})L(ci_{(j)}) \end{pmatrix} \tag{A.44}
 \end{aligned}$$

$$N_{x(i)}N_{z(j)} = \frac{le_{(i)}le_{(j)}}{\Delta^2} \begin{pmatrix} be(ci_{(i)})de(ci_{(j)})L(cf_{(i)})L(cf_{(j)}) \\ -be(ci_{(i)})de(cf_{(j)})L(cf_{(i)})L(ci_{(j)}) \\ -be(cf_{(i)})de(ci_{(j)})L(ci_{(i)})L(cf_{(j)}) \\ +be(cf_{(i)})de(cf_{(j)})L(ci_{(i)})L(ci_{(j)}) \end{pmatrix}$$

$$N_{y(i)}N_{x(j)} = \frac{le_{(i)}le_{(j)}}{\Delta^2} \begin{pmatrix} ce(ci_{(i)})be(ci_{(j)})L(cf_{(i)})L(cf_{(j)}) \\ -ce(ci_{(i)})be(cf_{(j)})L(cf_{(i)})L(ci_{(j)}) \\ -ce(cf_{(i)})be(ci_{(j)})L(ci_{(i)})L(cf_{(j)}) \\ +ce(cf_{(i)})be(cf_{(j)})L(ci_{(i)})L(ci_{(j)}) \end{pmatrix}$$

$$N_{y(i)}N_{y(j)} = \frac{le_{(i)}le_{(j)}}{\Delta^2} \begin{pmatrix} ce(ci_{(i)})ce(ci_{(j)})L(cf_{(i)})L(cf_{(j)}) \\ -ce(ci_{(i)})ce(cf_{(j)})L(cf_{(i)})L(ci_{(j)}) \\ -ce(cf_{(i)})ce(ci_{(j)})L(ci_{(i)})L(cf_{(j)}) \\ +ce(cf_{(i)})ce(cf_{(j)})L(ci_{(i)})L(ci_{(j)}) \end{pmatrix} \tag{A.45}$$

$$N_{y(i)}N_{z(j)} = \frac{le_{(i)}le_{(j)}}{\Delta^2} \begin{pmatrix} ce(ci_{(i)})de(ci_{(j)})L(cf_{(i)})L(cf_{(j)}) \\ -ce(ci_{(i)})de(cf_{(j)})L(cf_{(i)})L(ci_{(j)}) \\ -ce(cf_{(i)})de(ci_{(j)})L(ci_{(i)})L(cf_{(j)}) \\ +ce(cf_{(i)})de(cf_{(j)})L(ci_{(i)})L(ci_{(j)}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
N_{z(i)}N_{x(j)} &= \frac{le_{(i)}le_{(j)}}{\Delta^2} \begin{pmatrix} de(ci_{(i)})be(ci_{(j)})L(cf_{(i)})L(cf_{(j)}) \\ -de(ci_{(i)})be(cf_{(j)})L(cf_{(i)})L(ci_{(j)}) \\ -de(cf_{(i)})be(ci_{(j)})L(ci_{(i)})L(cf_{(j)}) \\ +de(cf_{(i)})be(cf_{(j)})L(ci_{(i)})L(ci_{(j)}) \end{pmatrix} \\
N_{z(i)}N_{y(j)} &= \frac{le_{(i)}le_{(j)}}{\Delta^2} \begin{pmatrix} de(ci_{(i)})ce(ci_{(j)})L(cf_{(i)})L(cf_{(j)}) \\ -de(ci_{(i)})ce(cf_{(j)})L(cf_{(i)})L(ci_{(j)}) \\ -de(cf_{(i)})ce(ci_{(j)})L(ci_{(i)})L(cf_{(j)}) \\ +de(cf_{(i)})ce(cf_{(j)})L(ci_{(i)})L(ci_{(j)}) \end{pmatrix}, \quad (A.46) \\
N_{z(i)}N_{z(j)} &= \frac{le_{(i)}le_{(j)}}{\Delta^2} \begin{pmatrix} de(ci_{(i)})de(ci_{(j)})L(cf_{(i)})L(cf_{(j)}) \\ -de(ci_{(i)})de(cf_{(j)})L(cf_{(i)})L(ci_{(j)}) \\ -de(cf_{(i)})de(ci_{(j)})L(ci_{(i)})L(cf_{(j)}) \\ +de(cf_{(i)})de(cf_{(j)})L(ci_{(i)})L(ci_{(j)}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

onde $le_{(i)}$ é o comprimento da aresta i , os coeficientes $ci_{(i)}$ e $cf_{(i)}$ indicam o nó local inicial e final, respectivamente, da aresta i e são fornecidos na Tabela A.1. Observando as equações (A.44), (A.45) e (A.46), como os coeficientes $be_{(i)}$, $ce_{(i)}$ e $de_{(i)}$, são constantes calculadas conforme as equações (A.9), (A.10) e (A.11), e saem fora das integrais da equação (A.43); assim as integrais que são realmente necessárias calcular são da forma:

$$\int_{\Omega} L_{(i)}L_{(j)} d\Omega \quad (A.47)$$

Como as coordenadas de volume na face se comportam como as coordenadas de área em um triângulo, a integral acima pode ser escrita como [55]:

$$inteLL(i, j) = \int_{\Omega} L_{(i)}^k L_{(j)}^h d\Omega = \frac{k!h!}{(k+h+2)!} 2 * Area \quad (A.48)$$

onde $Area$ é a área da face, cuja expressão será fornecida mais adiante. Assim, para i e j variando de 1 a 4, a equação (A.47) pode ser escrita na forma matricial para as várias faces:

$$[inteLL] = Area \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Para a face 1.} \quad (A.49)$$

$$[inteLL] = Area \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad \text{Para a face 2.} \quad (A.50)$$

$$[inteLL] = Area \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad \text{Para a face 3.} \quad (A.51)$$

$$[inteLL] = Area \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad \text{Para a face 4.} \quad (A.52)$$

Para fazer a programação, usando (A.50), (A.51) e (A.52) em (A.44), (A.45) e (A.46), vem:

$$\int_{\Omega} N_{x(i)} N_{x(j)} d\Omega = \frac{le_{(i)}le_{(j)}}{\Delta^2} \begin{pmatrix} be(ci_{(i)})be(ci_{(j)})inteLL(cf_{(i)}, cf_{(j)}) \\ -be(ci_{(i)})be(cf_{(j)})inteLL(cf_{(i)}, ci_{(j)}) \\ -be(cf_{(i)})be(ci_{(j)})inteLL(ci_{(i)}, cf_{(j)}) \\ +be(cf_{(i)})be(cf_{(j)})inteLL(ci_{(i)}, ci_{(j)}) \end{pmatrix}$$

$$\int_{\Omega} N_{x(i)} N_{y(j)} d\Omega = \frac{le_{(i)}le_{(j)}}{\Delta^2} \begin{pmatrix} be(ci_{(i)})ce(ci_{(j)})inteLL(cf_{(i)}, cf_{(j)}) \\ -be(ci_{(i)})ce(cf_{(j)})inteLL(cf_{(i)}, ci_{(j)}) \\ -be(cf_{(i)})ce(ci_{(j)})inteLL(ci_{(i)}, cf_{(j)}) \\ +be(cf_{(i)})ce(cf_{(j)})inteLL(ci_{(i)}, ci_{(j)}) \end{pmatrix} \quad (A.53)$$

$$\int_{\Omega} N_{x(i)} N_{z(j)} d\Omega = \frac{le_{(i)}le_{(j)}}{\Delta^2} \begin{pmatrix} be(ci_{(i)})de(ci_{(j)})inteLL(cf_{(i)}, cf_{(j)}) \\ -be(ci_{(i)})de(cf_{(j)})inteLL(cf_{(i)}, ci_{(j)}) \\ -be(cf_{(i)})de(ci_{(j)})inteLL(ci_{(i)}, cf_{(j)}) \\ +be(cf_{(i)})de(cf_{(j)})inteLL(ci_{(i)}, ci_{(j)}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} N_{y(i)} N_{x(j)} d\Omega &= \frac{le(i)le(j)}{\Delta^2} \begin{pmatrix} ce(ci(i))be(ci(j))inteLL(cf(i), cf(j)) \\ -ce(ci(i))be(cf(j))inteLL(cf(i), ci(j)) \\ -ce(cf(i))be(ci(j))inteLL(ci(i), cf(j)) \\ +ce(cf(i))be(cf(j))inteLL(ci(i), ci(j)) \end{pmatrix} \\
\int_{\Omega} N_{y(i)} N_{y(j)} d\Omega &= \frac{le(i)le(j)}{\Delta^2} \begin{pmatrix} ce(ci(i))ce(ci(j))inteLL(cf(i), cf(j)) \\ -ce(ci(i))ce(cf(j))inteLL(cf(i), ci(j)) \\ -ce(cf(i))ce(ci(j))inteLL(ci(i), cf(j)) \\ +ce(cf(i))ce(cf(j))inteLL(ci(i), ci(j)) \end{pmatrix} \\
\int_{\Omega} N_{y(i)} N_{z(j)} d\Omega &= \frac{le(i)le(j)}{\Delta^2} \begin{pmatrix} ce(ci(i))de(ci(j))inteLL(cf(i), cf(j)) \\ -ce(ci(i))de(cf(j))inteLL(cf(i), ci(j)) \\ -ce(cf(i))de(ci(j))inteLL(ci(i), cf(j)) \\ +ce(cf(i))de(cf(j))inteLL(ci(i), ci(j)) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.54}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} N_{z(i)} N_{x(j)} d\Omega &= \frac{le(i)le(j)}{\Delta^2} \begin{pmatrix} de(ci(i))be(ci(j))inteLL(cf(i), cf(j)) \\ -de(ci(i))be(cf(j))inteLL(cf(i), ci(j)) \\ -de(cf(i))be(ci(j))inteLL(ci(i), cf(j)) \\ +de(cf(i))be(cf(j))inteLL(ci(i), ci(j)) \end{pmatrix} \\
\int_{\Omega} N_{z(i)} N_{y(j)} d\Omega &= \frac{le(i)le(j)}{\Delta^2} \begin{pmatrix} de(ci(i))ce(ci(j))inteLL(cf(i), cf(j)) \\ -de(ci(i))ce(cf(j))inteLL(cf(i), ci(j)) \\ -de(cf(i))ce(ci(j))inteLL(ci(i), cf(j)) \\ +de(cf(i))ce(cf(j))inteLL(ci(i), ci(j)) \end{pmatrix} \\
\int_{\Omega} N_{z(i)} N_{z(j)} d\Omega &= \frac{le(i)le(j)}{\Delta^2} \begin{pmatrix} de(ci(i))de(ci(j))inteLL(cf(i), cf(j)) \\ -de(ci(i))de(cf(j))inteLL(cf(i), ci(j)) \\ -de(cf(i))de(ci(j))inteLL(ci(i), cf(j)) \\ +de(cf(i))de(cf(j))inteLL(ci(i), ci(j)) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.55}$$

Com as equações (A.53), (A.54) e (A.55) e (A.41) em (A.43) obtém-se a integral (A.34) na face.

A.3.2.3 Implementação da Integral de Superfície da Equação (A.35)

Para simplificar a obtenção será levado em consideração que esta integral será utilizada em ABC's de segunda ordem do tipo Engquist-Madja descrita no apêndice C. Assim as superfícies a serem integradas estão sempre nos planos $x - y$, $x - z$ ou $y - z$, daí:

$$\begin{aligned}
 ISabc_3(i, j) &= \int_{\Omega} \vec{N}_{(i)} \cdot \nabla_t[\hat{n} \cdot \vec{N}_{(j)}] d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \left[N_{x(i)} \frac{\partial N_{z(j)}}{\partial x} + N_{y(i)} \frac{\partial N_{z(j)}}{\partial y} \right] n_{z(f)} d\Omega \\
 &+ \int_{\Omega} \left[N_{x(i)} \frac{\partial N_{y(j)}}{\partial x} + N_{z(i)} \frac{\partial N_{y(j)}}{\partial z} \right] n_{y(f)} d\Omega \\
 &+ \int_{\Omega} \left[N_{y(i)} \frac{\partial N_{x(j)}}{\partial y} + N_{z(i)} \frac{\partial N_{x(j)}}{\partial z} \right] n_{x(f)} d\Omega
 \end{aligned} \tag{A.56}$$

Observando-se (A.39), pode-se definir:

$$\begin{aligned}
 DyNx(i) &= \frac{\partial N_{x(i)}}{\partial y} = \frac{l_{(i)}}{\Delta^2} [ce(ci_{(i)}) be(cf_{(i)}) - ce(cf_{(i)}) be(ci_{(i)})] \\
 DzNx(i) &= \frac{\partial N_{x(i)}}{\partial z} = \frac{l_{(i)}}{\Delta^2} [de(ci_{(i)}) be(cf_{(i)}) - de(cf_{(i)}) be(ci_{(i)})] \\
 DxNy(i) &= \frac{\partial N_{y(i)}}{\partial x} = \frac{l_{(i)}}{\Delta^2} [be(ci_{(i)}) ce(cf_{(i)}) - be(cf_{(i)}) ce(ci_{(i)})] \\
 DzNy(i) &= \frac{\partial N_{y(i)}}{\partial z} = \frac{l_{(i)}}{\Delta^2} [de(ci_{(i)}) ce(cf_{(i)}) - de(cf_{(i)}) ce(ci_{(i)})] \\
 DxNz(i) &= \frac{\partial N_{z(i)}}{\partial x} = \frac{l_{(i)}}{\Delta^2} [be(ci_{(i)}) de(cf_{(i)}) - be(cf_{(i)}) de(ci_{(i)})] \\
 DyNz(i) &= \frac{\partial N_{z(i)}}{\partial y} = \frac{l_{(i)}}{\Delta^2} [ce(ci_{(i)}) de(cf_{(i)}) - ce(cf_{(i)}) de(ci_{(i)})],
 \end{aligned} \tag{A.57}$$

que são constantes na face e, portanto, saem fora da integral; assim, a equação (A.56) se transforma em:

$$\begin{aligned}
ISabc_3(i, j) &= \int_{\Omega} \vec{N}_{(i)} \cdot \nabla_t [\hat{n} \cdot \vec{N}_{(j)}] d\Omega \\
&= \left[DxNz(j) \int_{\Omega} N_{x(i)} d\Omega + DyNz(j) \int_{\Omega} N_{y(i)} d\Omega \right] n_{z(f)} \\
&+ \left[DxNy(j) \int_{\Omega} N_{x(i)} d\Omega + DzNy(j) \int_{\Omega} N_{z(i)} d\Omega \right] n_{y(f)} \\
&+ \left[DyNx(j) \int_{\Omega} N_{y(i)} d\Omega + DzNx(j) \int_{\Omega} N_{z(i)} d\Omega \right] n_{x(f)}
\end{aligned} \tag{A.58}$$

Observando-se a equação (A.39), pode-se encontrar as integrais da equação (A.58) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} N_{x(i)} d\Omega &= \frac{l_{(i)}}{\Delta} \left[be(cf_{(i)}) \int_{\Omega} L(ci_{(i)}) d\Omega - be(ci_{(i)}) \int_{\Omega} L(cf_{(i)}) d\Omega \right] \\
\int_{\Omega} N_{y(i)} d\Omega &= \frac{l_{(i)}}{\Delta} \left[ce(cf_{(i)}) \int_{\Omega} L(ci_{(i)}) d\Omega - ce(ci_{(i)}) \int_{\Omega} L(cf_{(i)}) d\Omega \right] \\
\int_{\Omega} N_{z(i)} d\Omega &= \frac{l_{(i)}}{\Delta} \left[de(cf_{(i)}) \int_{\Omega} L(ci_{(i)}) d\Omega - de(ci_{(i)}) \int_{\Omega} L(cf_{(i)}) d\Omega \right]
\end{aligned} \tag{A.59}$$

Da equação (A.48), fazendo-se $k = 1$ e $h = 0$, pode-se observar que na face do tetraedro mestre, $\int_{\Omega} L_{(i)} d\Omega = Area/3$, assim, pode-se definir o vetor $intL$;

$$\begin{aligned}
\{intL\} &= [Area/3 \quad Area/3 \quad Area/3 \quad 0] \quad \text{Para a face 1,} \\
\{intL\} &= [Area/3 \quad Area/3 \quad 0 \quad Area/3] \quad \text{Para a face 2,} \\
\{intL\} &= [Area/3 \quad 0 \quad Area/3 \quad Area/3] \quad \text{Para a face 3,} \\
\{intL\} &= [0 \quad Area/3 \quad Area/3 \quad Area/3] \quad \text{Para a face 4,}
\end{aligned} \tag{A.60}$$

sendo *Area* a área da face de integração. Assim, utilizando-se a (A.59) e (A.60) em (A.58), vem:

$$ISabc_3(i, j) = \int_{\Omega} \vec{N}_{(i)} \cdot \nabla_t [\hat{n} \cdot \vec{N}_{(j)}] d\Omega$$

$$= \frac{l_{(i)}}{\Delta} \left\{ \begin{array}{l} \left[DxNz(j)n_{z(f)} + DxNy(j)n_{y(f)} \right] \left[be(cf_{(i)})intL(ci_{(i)}) - be(ci_{(i)})intL(cf_{(i)}) \right] + \\ \left[DyNz(j)n_{z(f)} + DyNx(j)n_{x(f)} \right] \left[ce(cf_{(i)})intL(ci_{(i)}) - ce(ci_{(i)})intL(cf_{(i)}) \right] + \\ \left[DzNy(j)n_{y(f)} + DzNx(j)n_{x(f)} \right] \left[de(cf_{(i)})intL(ci_{(i)}) - de(ci_{(i)})intL(cf_{(i)}) \right] \end{array} \right\} \quad (A.61)$$

Com as equações (A.57), (A.60) e (A.61), obtém-se a integral (A.35) na face do tetraedro.

A.3.2.4 Implementação da Integral de Superfície das Equações (A.36) e (A.37)

Devido à complexidade para se encontrar uma expressão fechada para o cálculo destas duas integrais, já que possuem funções exponenciais, é feita a integração numérica utilizando-se quadratura de Gauss. A quadratura numérica consiste em uma soma ponderada dos valores do integrando em pontos pré determinados com pesos pré determinados. Tabelas com as posições e pesos correspondentes no triângulo mestre, que é a face marcada no tetraedro mestre mostrada na Figura A.11, são facilmente encontradas na literatura [56], [55], [57], etc ...

Ponto	Coordenada L_a	Coordenada L_b	Peso
1	1/3	1/3	0,225.000.000.000.000
2	0,797.426.985.353.087	0,101.286.507.323.456	0,125.939.180.544.827
3	0,101.286.507.323.456	0,797.426.985.353.087	0,125.939.180.544.827
4	0,101.286.507.323.456	0,101.286.507.323.456	0,125.939.180.544.827
5	0,059.715.871.789.770	0,470.142.064.105.115	0,132.394.152.788.506
6	0,470.142.064.105.115	0,059.715.871.789.770	0,132.394.152.788.506
7	0,470.142.064.105.115	0,470.142.064.105.115	0,132.394.152.788.506

Tabela A.2: Tabela com 7 pontos da quadratura numérica para integração no triângulo mestre, $O(h6)$.

O primeiro passo para fazer a quadratura numérica no triângulo mestre é realizar o mapeamento do domínio original para o tetraedro mestre, utilizando a transformação de coordenadas

Ponto	Coordenada L_a	Coordenada L_b	Peso
1	0,873.821.971.016.996	0,063.089.014.491.502	0,050.844.906.370.207
2	0,063.089.014.491.502	0,873.821.971.016.996	0,050.844.906.370.207
3	0,063.089.014.491.502	0,063.089.014.491.502	0,050.844.906.370.207
4	0,501.426.509.658.179	0,249.286.745.170.910	0,116.786.275.726.379
5	0,249.286.745.170.910	0,501.426.509.658.179	0,116.786.275.726.379
6	0,249.286.745.170.910	0,249.286.745.170.910	0,116.786.275.726.379
7	0,636.502.499.121.399	0,310.352.451.033.784	0,082.851.075.618.374
8	0,636.502.499.121.399	0,053.145.049.844.817	0,082.851.075.618.374
9	0,310.352.451.033.784	0,636.502.499.121.399	0,082.851.075.618.374
10	0,310.352.451.033.784	0,053.145.049.844.817	0,082.851.075.618.374
11	0,053.145.049.844.817	0,310.352.451.033.784	0,082.851.075.618.374
12	0,053.145.049.844.817	0,636.502.499.121.399	0,082.851.075.618.374

Tabela A.3: Tabela com 12 pontos da quadratura numérica para integração no triângulo mestre, $O(h7)$.

Ponto	Coordenada L_a	Coordenada L_b	Peso
1	1/3	1/3	-0,149.570.044.467.682
2	0,479.308.067.841.920	0,260.345.966.079.040	0,175.615.257.433.208
3	0,260.345.966.079.040	0,479.308.067.841.920	0,175.615.257.433.208
4	0,260.345.966.079.040	0,260.345.966.079.040	0,175.615.257.433.208
5	0,869.739.794.195.568	0,065.130.102.902.216	0,053.347.235.608.838
6	0,065.130.102.902.216	0,869.739.794.195.568	0,053.347.235.608.838
7	0,065.130.102.902.216	0,065.130.102.902.216	0,053.347.235.608.838
8	0,638.444.188.569.810	0,312.865.496.004.874	0,077.113.760.890.257
9	0,638.444.188.569.810	0,048.690.315.425.316	0,077.113.760.890.257
10	0,312.865.496.004.874	0,638.444.188.569.810	0,077.113.760.890.257
11	0,312.865.496.004.874	0,048.690.315.425.316	0,077.113.760.890.257
12	0,048.690.315.425.316	0,638.444.188.569.810	0,077.113.760.890.257
13	0,048.690.315.425.316	0,312.865.496.004.874	0,077.113.760.890.257

Tabela A.4: Tabela com 13 pontos da quadratura numérica para integração no triângulo mestre, $O(h8)$.

descrita em (A.38), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} ISeq_1(i) &= \int_{\Omega} L_{(i)} e^{(-jk_0 \hat{r} \cdot \vec{r}^i)} d\Omega \\ &= 2 * Area \int_{Triangulo-Mestre} L_{(i)} e^{[-jk_0 \hat{r} \cdot \vec{r}_{(L_a, L_b)}^i]} dL_a dL_b \end{aligned} \quad (A.62)$$

onde \hat{r} é o vetor unitário na direção do vetor posição do ponto de observação e observando a Figura A.11;

$$\begin{aligned} L_{(p,1)} &= L_{a(p)} \quad L_{(p,2)} = L_{b(p)} \quad L_{(3,p)} = 1 - L_{a(p)} - L_{b(p)} \quad L_{(p,4)} = 0 \quad \text{Para a face 1} \\ L_{(p,1)} &= L_{a(p)} \quad L_{(p,2)} = L_{b(p)} \quad L_{(p,4)} = 1 - L_{a(p)} - L_{b(p)} \quad L_{(3,p)} = 0 \quad \text{Para a face 2} \\ L_{(p,1)} &= L_{a(p)} \quad L_{(p,3)} = L_{b(p)} \quad L_{(p,4)} = 1 - L_{a(p)} - L_{b(p)} \quad L_{(p,2)} = 0 \quad \text{Para a face 3} \\ L_{(p,2)} &= L_{a(p)} \quad L_{(p,3)} = L_{b(p)} \quad L_{(p,4)} = 1 - L_{a(p)} - L_{b(p)} \quad L_{(p,1)} = 0 \quad \text{Para a face 4} \end{aligned} \quad (A.63)$$

O vetor posição do ponto de integração pode ser mapeado no tetraedro mestre da seguinte forma:

$$\vec{r}_{(L_{(p,1)}, L_{(p,2)}, L_{(p,3)}, L_{(p,4)})} = \begin{pmatrix} (x_1 L_{(p,1)} + x_2 L_{(p,2)} + x_3 L_{(p,3)} + x_4 L_{(p,4)}) \hat{x} \\ +(y_1 L_{(p,1)} + y_2 L_{(p,2)} + y_3 L_{(p,3)} + y_4 L_{(p,4)}) \hat{y} \\ +(z_1 L_{(p,1)} + z_2 L_{(p,2)} + z_3 L_{(p,3)} + z_4 L_{(p,4)}) \hat{z} \end{pmatrix} \quad (A.64)$$

Com (A.63) e (A.64) encontra-se $r_{(L_a, L_b)}^i$, podendo-se então utilizar a integração numérica por quadratura de Gauss, $\int_{\Omega} f(x, y, z) d\Omega = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{Np} f(L_{a(p)}, L_{b(p)}) peso(p)$, onde Np é o número de pontos de quadratura utilizado e p é o ponto. Assim;

$$ISeq_1(i) = \int_{\Omega} L_{(i)} e^{(-jk_0 \hat{r} \cdot \vec{r}^i)} d\Omega = Area * peso(p) \sum_{p=1}^{Np} L_{(p,i)} e^{[-jk_0 \hat{r} \cdot \vec{r}_{(p)}^i]} \quad (A.65)$$

sendo $\vec{r}_{(p)}^i = \vec{r}_{[L_{(p,1)}, L_{(p,2)}, L_{(p,3)}, L_{(p,4)}]}$, $ci(i)$ coeficiente que indica o nó inicial da aresta i , $cf(i)$ coeficiente que indica o nó final da aresta i dados na Tabela A.1 e para a integral $ISeq_2(i)$, vem:

$$ISeq_2(i) = \int_{\Omega} e^{(-jk_0 \hat{r} \cdot \vec{r}^i)} d\Omega = Area * peso(p) \sum_{p=1}^{Np} e^{[-jk_0 \hat{r} \cdot \vec{r}_{(p)}^i]} \quad (A.66)$$

A.3.2.5 Cálculo da Área da Face

A área da face é facilmente calculada por:

$$Area = 0,5 * \left\{ \begin{array}{l} \left[(z_{(pc)} - z_{(pa)}) * (y_{(pb)} - y_{(pa)}) - (z_{(pb)} - z_{(pa)}) * (y_{(pc)} - y_{(pa)}) \right]^2 + \\ \left[(x_{(pc)} - x_{(pa)}) * (z_{(pb)} - z_{(pa)}) - (x_{(pb)} - x_{(pa)}) * (z_{(pc)} - z_{(pa)}) \right]^2 + \\ \left[(y_{(pc)} - y_{(pa)}) * (x_{(pb)} - x_{(pa)}) - (y_{(pb)} - y_{(pa)}) * (x_{(pc)} - x_{(pa)}) \right]^2 \end{array} \right\}^{1/2} \quad (A.67)$$

sendo:

face	pa	pb	pc
1	1	2	3
2	1	2	4
3	1	3	4
4	2	3	4

Tabela A.5: Tabela com os coeficiente da equação (A.67).

A.3.3 Integração Numérica nos Volumes Elementares para Cálculo das Fontes Equivalentes.

Também, devido à complexidade para se encontrar uma expressão fechada para o cálculo das integrais em (3.34) e (3.41), já que possuem funções exponenciais, é feita a integração numérica utilizando-se quadratura de Gauss no volume. A equação (3.34) é:

$$F_{(i)}^e = k_0^2 \iiint_{V_e} \vec{N}_{(i)} \cdot (EE_x \hat{x} + EE_y \hat{y} + EE_z \hat{z}) e^{-jk_0 \vec{r} \cdot \vec{k}} dV \quad (A.68)$$

Com (A.19) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$F_{(i)}^e = k_0^2 \iiint_{V_e} \frac{l_{(i)}}{\Delta} \left\{ \begin{array}{l} [L_{(ci_{(i)})} be(cf_{(i)}) - L_{(cf_{(i)})} be(ci_{(i)})] EE_x \\ + [L_{(ci_{(i)})} ce(cf_{(i)}) - L_{(cf_{(i)})} ce(ci_{(i)})] EE_y \\ + [L_{(ci_{(i)})} de(cf_{(i)}) - L_{(cf_{(i)})} de(ci_{(i)})] EE_z \end{array} \right\} e^{-jk_0 \vec{r} \cdot \vec{k}} dV \quad (A.69)$$

que é integrada numericamente utilizando-se a Tabela A.6 da seguinte forma:

$$F_{(i)}^e = k_0^2 \frac{l_{(i)}}{\Delta} \sum_{p=1}^{N_p} peso(p) * \left\{ \begin{array}{l} [L_{(p,ci_{(i)})} be(cf_{(i)}) - L_{(p,cf_{(i)})} be(ci_{(i)})] EE_x \\ + [L_{(p,ci_{(i)})} ce(cf_{(i)}) - L_{(p,cf_{(i)})} ce(ci_{(i)})] EE_y \\ + [L_{(p,ci_{(i)})} de(cf_{(i)}) - L_{(p,cf_{(i)})} de(ci_{(i)})] EE_z \end{array} \right\} e^{-jk_0 \vec{r}_{(p)} \cdot \hat{k}} * \frac{\Delta}{6} \quad (\text{A.70})$$

sendo;

$$\vec{r}_{(p)} = (x_1 L_{(p,1)} + x_2 L_{(p,2)} + x_3 L_{(p,3)} + x_4 L_{(p,4)}) \hat{x} + (y_1 L_{(p,1)} + y_2 L_{(p,2)} + y_3 L_{(p,3)} + y_4 L_{(p,4)}) \hat{y} + (z_1 L_{(p,1)} + z_2 L_{(p,2)} + z_3 L_{(p,3)} + z_4 L_{(p,4)}) \hat{z} \text{ e } \hat{k} = -\text{sen}(\theta) \cos(\phi) \hat{x} - \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) \hat{y} - \cos(\theta) \hat{z} . A$$

Ponto	Coordenada L_1	Coordenada L_2	Coordenada L_3	Coordenada L_4	Peso
1	0,067.342.242.2	0,310.885.919	0,310.885.919	0,310.885.919	0,112.687.926
2	0,310.885.919	0,067.342.242.2	0,310.885.919	0,310.885.919	0,112.687.926
3	0,310.885.919	0,310.885.919	0,067.342.242.2	0,310.885.919	0,112.687.926
4	0,310.885.919	0,310.885.919	0,310.885.919	0,067.342.242.2	0,112.687.926
5	0,721.794.249	0,092.735.250.3	0,092.735.250.3	0,092.735.250.3	0,073.493.043.1
6	0,092.735.250.3	0,721.794.249	0,092.735.250.3	0,092.735.250.3	0,073.493.043.1
7	0,092.735.250.3	0,092.735.250.3	0,721.794.249	0,092.735.250.3	0,073.493.043.1
8	0,092.735.250.3	0,092.735.250.3	0,092.735.250.3	0,721.794.249	0,073.493.043.1
9	0,454.496.296	0,454.496.296	0,045.503.704.1	0,045.503.704.1	0,042.546.020.8
10	0,454.496.296	0,045.503.704.1	0,454.496.296	0,045.503.704.1	0,042.546.020.8
11	0,454.496.296	0,045.503.704.1	0,045.503.704.1	0,454.496.296	0,042.546.020.8
12	0,045.503.704.1	0,454.496.296	0,454.496.296	0,045.503.704.1	0,042.546.020.8
13	0,045.503.704.1	0,454.496.296	0,045.503.704.1	0,454.496.296	0,042.546.020.8
14	0,045.503.704.1	0,045.503.704.1	0,454.496.296	0,454.496.296	0,042.546.020.8

Tabela A.6: Tabela com 14 pontos da quadratura numérica para integração no tetraedro mestre.

equação (3.41) é:

$$F_{(i)}^h = k_0^2 \eta_0 \iiint_{V_e} \vec{N}_{(i)} \cdot (KHH_x \hat{x} + KHH_y \hat{y} + KHH_z \hat{z}) e^{-jk_0 \vec{r} \cdot \hat{k}} dV \quad (\text{A.71})$$

Com (A.19) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$F_{(i)}^h = k_0^2 \eta_0 \iiint_{V_e} \frac{l_{(i)}}{\Delta} \left\{ \begin{array}{l} [L_{(ci_{(i)})} be(cf_{(i)}) - L_{(cf_{(i)})} be(ci_{(i)})] KHH_x \\ + [L_{(ci_{(i)})} ce(cf_{(i)}) - L_{(cf_{(i)})} ce(ci_{(i)})] KHH_y \\ + [L_{(ci_{(i)})} de(cf_{(i)}) - L_{(cf_{(i)})} de(ci_{(i)})] KHH_z \end{array} \right\} e^{-jk_0 \vec{r} \cdot \hat{k}} dV \quad (\text{A.72})$$

que é integrada numericamente utilizando-se a Tabela A.6 da seguinte forma:

$$F_{(i)}^h = k_0^2 \eta_0 \frac{l_{(i)}}{\Delta} \sum_{p=1}^{N_p} \text{peso}(p) * \left\{ \begin{array}{l} [L_{(p,ci_{(i)})} \text{ be}(cf_{(i)}) - L_{(p,cf_{(i)})} \text{ be}(ci_{(i)})]KHH_x \\ + [L_{(p,ci_{(i)})} \text{ ce}(cf_{(i)}) - L_{(p,cf_{(i)})} \text{ ce}(ci_{(i)})]KHH_y \\ + [L_{(p,ci_{(i)})} \text{ de}(cf_{(i)}) - L_{(p,cf_{(i)})} \text{ de}(ci_{(i)})]KHH_z \end{array} \right\} e^{-jk_0 \vec{r}_{(p)} \cdot \hat{k}} * \frac{\Delta}{6} \quad (\text{A.73})$$

sendo;

$$\vec{r}_{(p)} = (x_1 L_{(p,1)} + x_2 L_{(p,2)} + x_3 L_{(p,3)} + x_4 L_{(p,4)})\hat{x} + (y_1 L_{(p,1)} + y_2 L_{(p,2)} + y_3 L_{(p,3)} + y_4 L_{(p,4)})\hat{y} + (z_1 L_{(p,1)} + z_2 L_{(p,2)} + z_3 L_{(p,3)} + z_4 L_{(p,4)})\hat{z} \text{ e } \hat{k} = -\text{sen}(\theta) \cos(\phi)\hat{x} - \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)\hat{y} - \cos(\theta)\hat{z} .$$

Apêndice B

O Método de Newmark

Depois de discretizar o problema eletromagnético no espaço, resta a seguinte equação no tempo:

$$[\mathbf{M}]\bar{a}_{(t)} + [\mathbf{C}]\bar{v}_{(t)} + [\mathbf{K}]\bar{x}_{(t)} = \bar{F}_{(t)} \quad (\text{B.1})$$

onde:

$$\bar{a}_{(t)} = \frac{\partial^2 \bar{x}_{(t)}}{\partial t^2}$$
$$\bar{v}_{(t)} = \frac{\partial \bar{x}_{(t)}}{\partial t}$$

Será considerado que as matrizes $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{C}]$ e $[\mathbf{K}]$ são simétricas, de ordem N , $\bar{x}_{(t)}$ ¹ o vetor de coeficientes do campo e \bar{F} é o vetor fonte.

B.1 A Obtenção do Método de Newmark Através da Série de Taylor.

Expandindo $\bar{x}_{(t)}$ em série de Taylor

$$\bar{x}_{(t)} = \bar{x}_{(t_0)} + (t - t_0) * \left. \frac{\partial \bar{x}_{(t)}}{\partial t} \right|_{t=t_0} + \frac{1}{2} * (t - t_0)^2 * \left. \frac{\partial^2 \bar{x}_{(t)}}{\partial t^2} \right|_{t=t_0} + \frac{1}{6} * (t - t_0)^3 * \left. \frac{\partial^3 \bar{x}_{(t)}}{\partial t^3} \right|_{t=t_0} + \dots \quad (\text{B.2})$$

$$\bar{v}_{(t)} = \bar{v}_{(t_0)} + (t - t_0) * \left. \frac{\partial \bar{v}_{(t)}}{\partial t} \right|_{t=t_0} + \frac{1}{2} * (t - t_0)^2 * \left. \frac{\partial^2 \bar{v}_{(t)}}{\partial t^2} \right|_{t=t_0} + \dots \quad (\text{B.3})$$

¹OBS: \bar{d} é um vetor, $[\mathbf{d}]$ é uma matriz e simplesmente d , é um número.

Definindo: $\Delta t = t - t_0$

$$\bar{x}(t) = \bar{x}(t_0) + \Delta t * \bar{v}(t_0) + \frac{1}{2} * \Delta t^2 * \bar{a}(t_0) + \beta * \Delta t^3 * \left. \frac{\partial \bar{a}(t)}{\partial t} \right|_{t=t_n - \frac{\Delta t}{2}} \quad (\text{B.4})$$

$$\bar{v}(t) = \bar{v}(t_0) + \Delta t * \bar{a}(t_0) + \gamma * \Delta t^2 * \left. \frac{\partial \bar{a}(t)}{\partial t} \right|_{t=t_n - \frac{\Delta t}{2}} \quad (\text{B.5})$$

Assumindo $t = t_n$, $t_0 = t_n - \Delta t = t_{n-1}$

$$\bar{x}(t_n) = \bar{x}(t_{n-1}) + \Delta t * \bar{v}(t_{n-1}) + \frac{1}{2} * \Delta t^2 * \bar{a}(t_{n-1}) + \beta * \Delta t^3 * \left. \frac{\partial \bar{a}(t)}{\partial t} \right|_{t=t_n - \frac{\Delta t}{2}} \quad (\text{B.6})$$

$$\bar{v}(t_n) = \bar{v}(t_{n-1}) + \Delta t * \bar{a}(t_{n-1}) + \gamma * \Delta t^2 * \left. \frac{\partial \bar{a}(t)}{\partial t} \right|_{t=t_n - \frac{\Delta t}{2}} \quad (\text{B.7})$$

Definindo $\bar{x}_n = \bar{x}(t_n)$, $\bar{x}_{n-1} = \bar{x}(t_0) = \bar{x}(t_{n-1})$, $\bar{v}_n = \bar{v}(t_n)$, $\bar{v}_{n-1} = \bar{v}(t_0) = \bar{v}(t_{n-1})$, $\bar{a}_n = \bar{a}(t_n)$ e $\bar{a}_{n-1} = \bar{a}(t_0) = \bar{a}(t_{n-1})$.

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} + \Delta t * \bar{v}_{n-1} + \frac{1}{2} * \Delta t^2 * \bar{a}_{n-1} + \beta * \Delta t^3 * \left. \frac{\partial \bar{a}(t)}{\partial t} \right|_{t=t_n - \frac{\Delta t}{2}} \quad (\text{B.8})$$

$$\bar{v}_n = \bar{v}_{n-1} + \Delta t * \bar{a}_{n-1} + \gamma * \Delta t^2 * \left. \frac{\partial \bar{a}(t)}{\partial t} \right|_{t=t_n - \frac{\Delta t}{2}} \quad (\text{B.9})$$

Se for assumido que $a(t)$ é linear no intervalo Δt , pode-se escrever:

$$\left. \frac{\partial \bar{a}(t)}{\partial t} \right|_{t=t_n - \frac{\Delta t}{2}} = \frac{a_n - a_{n-1}}{\Delta t} \quad (\text{B.10})$$

Usando a equação (B.10) nas equações (B.8) e (B.9), vem:

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} + \Delta t * \bar{v}_{n-1} + \Delta t^2 * \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) * \bar{a}_{n-1} + \beta * \bar{a}_n \right] \quad (\text{B.11})$$

$$\bar{v}_n = \bar{v}_{n-1} + \Delta t * \left[(1 - \gamma) * \bar{a}_{n-1} + \gamma * \bar{a}_n \right] \quad (\text{B.12})$$

Assim, o método de **Newmark** fica:

$$\begin{aligned} \bar{x}_n &= \bar{x}_{n-1} + \Delta t * \bar{v}_{n-1} + \Delta t * \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) * \bar{a}_{n-1} + \beta * \bar{a}_n \right] \\ \bar{v}_n &= \bar{v}_{n-1} + \Delta t^2 * \left[(1 - \gamma) * \bar{a}_{n-1} + \gamma * \bar{a}_n \right] \\ [\mathbf{M}] \bar{a}_{n+1} + [\mathbf{C}] \bar{v}_{n+1} + [\mathbf{K}] \bar{x}_{n+1} &= \bar{F}_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

B.2 A obtenção do Método de Newmark Através do Métodos dos Elementos Finitos.

Para discretizar o tempo na equação (B.1) será usado o Método dos Elementos Finitos para aproximar o intervalo de 0 até o infinito. Cada elemento será composto de dois intervalos Δt .

As condições iniciais serão as condições iniciais do primeiro elemento, e as condições iniciais dos elementos seguintes serão os resultados do elemento anterior. As funções de forma usadas serão as mesmas funções de forma espaciais 1D de ordem 2.

Definindo $T = \frac{t-t_n}{\Delta t}$, sendo $\Delta t = t_{n+1} - t_n = t_n - t_{n-1}$.

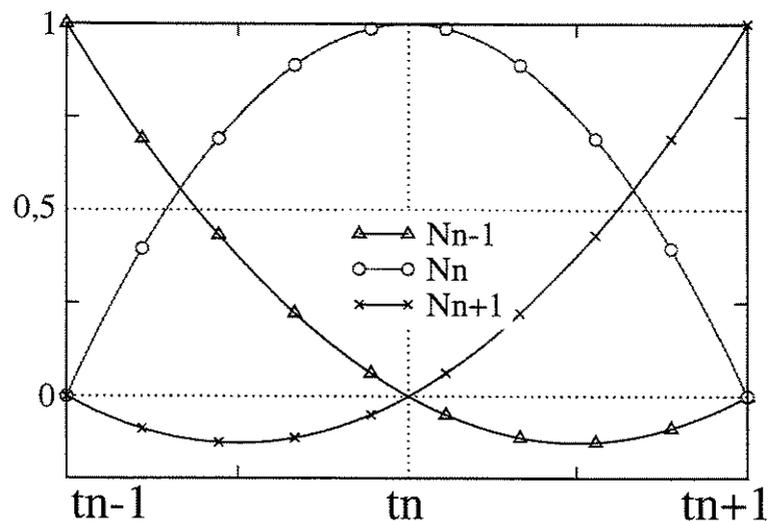


Figura B.1: Funções de Forma.

As funções de forma ficam:

$$N_{n-1} = \frac{T^2 - T}{2} \quad \frac{\partial N_{n-1}}{\partial t} = \frac{T - .5}{\Delta t} \quad \frac{\partial^2 N_{n-1}}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta t^2} \quad (\text{B.14})$$

$$N_n = 1 - T^2 \quad \frac{\partial N_n}{\partial t} = \frac{-2 * T}{\Delta t} \quad \frac{\partial^2 N_n}{\partial t^2} = \frac{-2}{\Delta t^2} \quad (\text{B.15})$$

$$N_{n+1} = \frac{T^2 + T}{2} \quad \frac{\partial N_{n+1}}{\partial t} = \frac{T + .5}{\Delta t} \quad \frac{\partial^2 N_{n+1}}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta t^2} \quad (\text{B.16})$$

Aproximando $\bar{x}(t)$ e $\bar{F}(t)$ com as funções de forma (B.14), (B.15) e (B.16) resulta em:

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_{n-1} * N_{n-1} + \bar{x}_n * N_n + \bar{x}_{n+1} * N_{n+1} \quad (\text{B.17})$$

$$\bar{F}(t) = \bar{F}_{n-1} * N_{n-1} + \bar{F}_n * N_n + \bar{F}_{n+1} * N_{n+1} \quad (\text{B.18})$$

Reescrevendo (B.1), tem-se

$$[\mathbf{M}] \frac{\partial^2 \bar{x}(t)}{\partial t^2} + [\mathbf{C}] \frac{\partial \bar{x}(t)}{\partial t} + [\mathbf{K}] \bar{x} = \bar{F} \quad (\text{B.19})$$

Substituindo (B.17) e (B.18) em (B.19) e aplicando Galerkin, vem:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \left[[\mathbf{M}] \left(\bar{x}_{n-1} \frac{\partial^2 N_{n-1}}{\partial t^2} + \bar{x}_n \frac{\partial^2 N_n}{\partial t^2} + \bar{x}_{n+1} \frac{\partial^2 N_{n+1}}{\partial t^2} \right) + \right. \\ & \quad \left. [\mathbf{C}] \left(\bar{x}_{n-1} \frac{\partial N_{n-1}}{\partial t} + \bar{x}_n \frac{\partial N_n}{\partial t} + \bar{x}_{n+1} \frac{\partial N_{n+1}}{\partial t} \right) + \right. \\ & \quad \left. [\mathbf{K}] \left(\bar{x}_{n-1} N_{n-1} + \bar{x}_n N_n + \bar{x}_{n+1} N_{n+1} \right) \right] * \omega(t) dT = \\ & \int_{-1}^{+1} \left(\bar{F}_{n-1} N_{n-1} + \bar{F}_n N_n + \bar{F}_{n+1} N_{n+1} \right) * \omega(t) dT \quad (\text{B.20}) \end{aligned}$$

Como $T = \frac{t-t_n}{\Delta t}$, $dT = \Delta t dt$ e substituindo as equações (B.14), (B.15) e (B.16), a equação (B.20) fica:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t^2} [\mathbf{M}] \left[\bar{x}_{n-1} \int_{-1}^{+1} \left(\omega(t) \right) dT + \bar{x}_n \int_{-1}^{+1} \left(-2 * \omega(t) \right) dT + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \bar{x}_{n+1} \int_{-1}^{+1} \left(\omega(t) \right) dT \right] + \\
& \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{C}] \left[\bar{x}_{n-1} \int_{-1}^{+1} \left((T - 0,5) * \omega(t) \right) dT + \bar{x}_n \int_{-1}^{+1} \left(-2 * T * \omega(t) \right) dT + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \bar{x}_{n+1} \int_{-1}^{+1} \left((T + 0,5) * \omega(t) \right) dT \right] + \\
& [\mathbf{K}] \left[\bar{x}_{n-1} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{T * (T - 1) * \omega(t)}{2} \right) dT + \bar{x}_n \int_{-1}^{+1} \left((1 - T)(1 + T) * \omega(t) \right) dT + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \bar{x}_{n+1} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{T * (T + 1) * \omega(t)}{2} \right) dT \right] = \\
& \bar{F}_{n-1} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{T * (T - 1) * \omega(t)}{2} \right) dT + \bar{F}_n \int_{-1}^{+1} \left((1 - T)(1 + T) * \omega(t) \right) dT + \\
& \qquad \qquad \qquad \bar{F}_{n+1} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{T * (T + 1) * \omega(t)}{2} \right) dT \tag{B.21}
\end{aligned}$$

Define-se:

$$\begin{aligned}
h &= \int_{-1}^{+1} \left(\omega(t) \right) dT \\
\gamma &= \frac{1}{h} \int_{-1}^{+1} \left((T + 0,5) * \omega(t) \right) dT \\
\beta &= \frac{1}{h} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{T * (T + 1) * \omega(t)}{2} \right) dT \tag{B.22}
\end{aligned}$$

as integrais:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} \left((T - 0, 5) * \omega_{(t)} \right) dT &= \int_{-1}^{+1} \left((T + 0, 5 - 1) * \omega_{(t)} \right) dT = \\
\int_{-1}^{+1} \left((T + 0, 5) * \omega_{(t)} \right) dT - \int_{-1}^{+1} \left(\omega_{(t)} \right) dT &= h * (\gamma - 1)
\end{aligned} \tag{B.23}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} \left(-2 * T * \omega_{(t)} \right) dT &= -2 \int_{-1}^{+1} \left((T + 0, 5 - 0, 5) * \omega_{(t)} \right) dT = \\
-2 \int_{-1}^{+1} \left((T + 0, 5) * \omega_{(t)} \right) dT + \int_{-1}^{+1} \left(\omega_{(t)} \right) dT &= h * (-2\gamma + 1)
\end{aligned} \tag{B.24}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} \left(\frac{T * (T - 1) * \omega_{(t)}}{2} \right) dT &= \int_{-1}^{+1} \left(\frac{T * (T + 1 - 2) * \omega_{(t)}}{2} \right) dT = \\
\int_{-1}^{+1} \left(\frac{T * (T + 1) * \omega_{(t)}}{2} \right) dT - \int_{-1}^{+1} \left(T * \omega_{(t)} \right) dT &= h * (\beta - \gamma + 0, 5)
\end{aligned} \tag{B.25}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{+1} \left((1 - T)(1 + T) * \omega_{(t)} \right) dT = \\
&\int_{-1}^{+1} \left(-T(1 + T) * \omega_{(t)} \right) dT + \int_{-1}^{+1} \left((1 + T) * \omega_{(t)} \right) dT = \\
&h * (-2\beta) + \int_{-1}^{+1} \left(\omega_{(t)} \right) dT - 0, 5 * \int_{-1}^{+1} \left(-2T * \omega_{(t)} \right) dT = \\
&h * (-2\beta + 0, 5 + \gamma)
\end{aligned} \tag{B.26}$$

Aplicando (B.22) a (B.26) em (B.21), vem:

$$\begin{aligned}
 & \frac{h}{\Delta t^2}[\mathbf{M}] \left[\bar{x}_{n-1} - 2\bar{x}_n + \bar{x}_{n+1} \right] + \\
 & \frac{h}{\Delta t}[\mathbf{C}] \left[\bar{x}_{n-1}(\gamma - 1) + \bar{x}_n(-2\gamma + 1) + \bar{x}_{n+1}\gamma \right] = \\
 & h[\mathbf{K}] \left[\bar{x}_{n-1}(\beta - \gamma + 0,5) + \bar{x}_n(-2\beta + 0,5 + \gamma) + \bar{x}_{n+1}\beta \right] = \\
 & \bar{F}_{n-1}h * (\beta - \gamma + 0,5) + \bar{F}_nh * (-2\beta + 0,5 + \gamma) + \bar{F}_{n+1}h * \beta \tag{B.27}
 \end{aligned}$$

Rearrmando os termos em (B.27) e multiplicado por $\frac{\Delta t^2}{h}$, obtém-se o método de **Newmark**:

$$\begin{aligned}
 & \left[[\mathbf{M}] + \Delta t(\gamma - 1)[\mathbf{C}] + \Delta t^2(\beta - \gamma + 0,5)[\mathbf{K}] \right] \bar{x}_{n-1} + \\
 & \left[-2[\mathbf{M}] + \Delta t(-2\gamma + 1)[\mathbf{C}] + \Delta t^2(-2\beta + \gamma + 0,5)[\mathbf{K}] \right] \bar{x}_n + \\
 & \left[[\mathbf{M}] + \Delta t \gamma [\mathbf{C}] + \Delta t^2 \beta [\mathbf{K}] \right] \bar{x}_{n+1} = \\
 & \Delta t^2 \left[\bar{F}_{n-1}(\beta - \gamma + 0,5) + \bar{F}_n(-2\beta + 0,5 + \gamma) + \bar{F}_{n+1}\beta \right] \tag{B.28}
 \end{aligned}$$

B.3 A relação entre o Método de Newmark Obtido Através da Série de Taylor e Elementos Finitos

As duas formas de obtenção, por série de Taylor e pelo Método dos Elementos Finitos, chegam a duas formas distintas de implementação do Método de Newmark, porém as duas formas são equivalentes; a seguir a demonstração desta equivalência será mostrada. Partindo das equações (B.13), pode-se escrever:

$$[\mathbf{M}]\bar{a}_{n+1} + [\mathbf{C}]\bar{v}_{n+1} + [\mathbf{K}]\bar{x}_{n+1} = \bar{F}_{n+1} \quad (\text{B.29})$$

Com um passo de tempo a menos;

$$-[\mathbf{K}]\bar{x}_n + \bar{F}_n = [\mathbf{M}]\bar{a}_n + [\mathbf{C}]\bar{v}_n \quad (\text{B.30})$$

Com um passo de tempo a menos;

$$-[\mathbf{K}]\bar{x}_{n-1} + \bar{F}_{n-1} = [\mathbf{M}]\bar{a}_{n-1} + [\mathbf{C}]\bar{v}_{n-1} \quad (\text{B.31})$$

E também;

$$\bar{v}_n = \bar{v}_{n-1} + \Delta t * [(1 - \gamma) * \bar{a}_{n-1} + \gamma * a_n] \quad (\text{B.32})$$

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} + \Delta t * \bar{v}_{n-1} + \Delta t^2 * [(0,5 - \beta) * \bar{a}_{n-1} + \beta * \bar{a}_n] \quad (\text{B.33})$$

Pode-se se reescrever as equações (B.32) e (B.33) na forma;

$$\bar{v}_{n-1} + \Delta t * (1 - \gamma) * \bar{a}_{n-1} = \bar{v}_n - \Delta t \gamma \bar{a}_n \quad (\text{B.34})$$

$$\Delta t * \bar{v}_{n-1} + \Delta t^2 * (0,5 - \beta) * \bar{a}_{n-1} = (\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}) - \Delta t^2 * \beta * \bar{a}_n \quad (\text{B.35})$$

Das equações (B.34) e (B.35) pode-se encontrar a seguinte relação:

$$\bar{v}_{n-1} = \frac{-1}{\Delta t^2(\beta - \gamma + 0,5)} \left[\Delta t^2(0,5 - \beta)\bar{v}_n + \Delta t^3(\beta - 0,5\gamma)\bar{a}_n - \Delta t(1 - \gamma)(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}) \right] \quad (\text{B.36})$$

Com um passo de tempo a mais nas equações (B.32) e (B.33);

$$\bar{v}_{n+1} = \bar{v}_n + \Delta t * [(1 - \gamma) * \bar{a}_n + \gamma * a_{n+1}] \quad (\text{B.37})$$

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n + \Delta t * \bar{v}_n + \Delta t^2 * [(0,5 - \beta) * \bar{a}_n + \beta * \bar{a}_{n+1}] \quad (\text{B.38})$$

Multiplicando a equação (B.30) por $\Delta t^2(-2\beta + 0,5 + \gamma)$

$$-\Delta t^2(-2\beta + 0,5 + \gamma)[\mathbf{K}]\bar{x}_n + \Delta t^2(-2\beta + 0,5 + \gamma)\bar{F}_n = \Delta t^2(-2\beta + 0,5 + \gamma) \left[[\mathbf{M}]\bar{a}_n + [\mathbf{C}]\bar{v}_n \right] \quad (\text{B.39})$$

Multiplicando a equação (B.31) por $\Delta t^2(\beta - \gamma + 0,5)$, vem :

$$-\Delta t^2(\beta - \gamma + 0,5)[\mathbf{K}]\bar{x}_{n-1} + \Delta t^2(\beta - \gamma + 0,5)\bar{F}_{n-1} = \Delta t^2(\beta - \gamma + 0,5) \left[[\mathbf{M}]\bar{a}_{n-1} + [\mathbf{C}]\bar{v}_{n-1} \right] \quad (\text{B.40})$$

Somando as equações (B.39) e (B.40)

$$\begin{aligned}
 & -\Delta t^2 \left((-2\beta + 0,5 + \gamma)[\mathbf{K}]\bar{x}_n + (\beta - \gamma + 0,5)[\mathbf{K}]\bar{x}_{n-1} \right) + \\
 & \quad \Delta t^2 \left((-2\beta + 0,5 + \gamma)\bar{F}_n + (\beta - \gamma + 0,5)\bar{F}_{n-1} \right) = \\
 & \quad \Delta t^2 \left((-2\beta + 0,5 + \gamma)[\mathbf{M}]\bar{a}_n + (\beta - \gamma + 0,5)[\mathbf{M}]\bar{a}_{n-1} \right) + \\
 & \quad \Delta t^2 \left((-2\beta + 0,5 + \gamma)[\mathbf{C}]\bar{v}_n + (\beta - \gamma + 0,5)[\mathbf{C}]\bar{v}_{n-1} \right) \tag{B.41}
 \end{aligned}$$

Tomando só os termos que multiplicam a matriz \mathbf{M} na equação (B.41), vem:

$$\Delta t^2(-2\beta + 0,5 + \gamma)\bar{a}_n + \Delta t^2(\beta - \gamma + 0,5)\bar{a}_{n-1} = \Delta t^2(-2\beta + 0,5 + \gamma)\bar{a}_n + \Delta t^2(\beta - 0,5 - \gamma + 1)\bar{a}_{n-1} =$$

Arranjando os termos, vem;

$$= \Delta t \underbrace{[\Delta t\gamma\bar{a}_n + \Delta t(1 - \gamma)\bar{a}_{n-1}]}_{\bar{v}_n - \bar{v}_{n-1}} + \Delta t^2(-2\beta + 0,5)\bar{a}_n + \Delta t^2(\beta - 0,5)\bar{a}_{n-1} =$$

A equação (B.32) em $[\Delta t\gamma\bar{a}_n + \Delta t(1 - \gamma)\bar{a}_{n-1}]$ resulta em $\bar{v}_n - \bar{v}_{n-1}$, então arranjando a equação, vem:

$$= \Delta t\bar{v}_n - \underbrace{[\Delta t\bar{v}_{n-1} + \Delta t^2(0,5 - \beta)\bar{a}_{n-1} + \Delta t^2\beta\bar{a}_n]}_{\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}} + \Delta t^2(0,5 - \beta)\bar{a}_n =$$

A equação (B.33) em $\Delta t\bar{v}_{n-1} + \Delta t^2(0,5 - \beta)\bar{a}_{n-1} + \Delta t^2\beta\bar{a}_n$ resulta em $\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}$, então arranjando a equação, vem:

$$= -\bar{x}_n + \bar{x}_{n-1} + \underbrace{[\Delta t\bar{v}_n + \Delta t^2(0,5 - \beta)\bar{a}_n]}_{\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n - \Delta t^2\beta\bar{a}_{n+1}} =$$

A equação (B.38) em $\Delta t\bar{v}_n + \Delta t^2(0,5 - \beta)\bar{a}_n$ resulta em $\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n - \Delta t^2\beta\bar{a}_{n+1}$ então finalmente tem-se:

$$= -2\bar{x}_n + \bar{x}_{n-1} + \bar{x}_{n+1} - \Delta t^2\beta\bar{a}_{n+1} \tag{B.42}$$

Tomando só os termos que multiplicam a matriz \mathbf{C} na equação (B.41), vem:

$$\Delta t^2 \left((-2\beta + 0,5 + \gamma)\bar{v}_n + (\beta - \gamma + 0,5)\bar{v}_{n-1} \right) =$$

Com a equação (B.36) e arranjando, tem-se:

$$= \Delta t^2 \gamma \bar{v}_n + \Delta t^3 \gamma (0,5 - \beta) \bar{a}_n + \Delta t^2 \beta \underbrace{[-\bar{v}_n - \Delta t(1 - \gamma) \bar{a}_n]}_{-\bar{v}_{n+1} + \gamma \Delta t \bar{a}_{n+1}} + \Delta t(1 - \gamma)(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}) =$$

A equação (B.37) em $-\bar{v}_n - \Delta t(1 - \gamma) \bar{a}_n$, resulta em $-\bar{v}_{n+1} + \gamma \Delta t \bar{a}_{n+1}$, arranjando a equação, vem:

$$= \Delta t \gamma \underbrace{[\Delta t \bar{v}_n + \Delta t^2 (0,5 - \beta) \bar{a}_n + \Delta t^2 \beta \bar{a}_{n+1}]}_{\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n} - \Delta t^2 \beta \bar{v}_{n+1} + (1 - \gamma) \Delta t (\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}) =$$

A equação (B.38) em $\Delta t \bar{v}_n + \Delta t^2 (0,5 - \beta) \bar{a}_n + \Delta t^2 \beta \bar{a}_{n+1}$, resulta em $\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n$, arranjando a equação, finalmente tem-se:

$$= \Delta t \gamma \bar{x}_{n+1} + (1 - 2\gamma) \Delta t \bar{x}_n + (\gamma - 1) \bar{x}_{n-1} - \Delta t^2 \beta \bar{v}_{n+1} \quad (\text{B.43})$$

As equações (B.42) e (B.43) em (B.41);

$$\begin{aligned} & -\Delta t^2 [\mathbf{K}] \left((-2\beta + 0,5 + \gamma) \bar{x}_n + (\beta - \gamma + 0,5) \bar{x}_{n-1} \right) + \\ & \Delta t^2 \left((-2\beta + 0,5 + \gamma) \bar{F}_n + (\beta - \gamma + 0,5) \bar{F}_{n-1} \right) = \\ & [\mathbf{M}] \left(-2\bar{x}_n + \bar{x}_{n-1} + \bar{x}_{n+1} - \Delta t^2 \beta \bar{a}_{n+1} \right) + \\ & [\mathbf{C}] \left(\Delta t \gamma \bar{x}_{n+1} + (1 - 2\gamma) \Delta t \bar{x}_n + (\gamma - 1) \bar{x}_{n-1} - \Delta t^2 \beta \bar{v}_{n+1} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Arranjando os termos, fica:

$$\begin{aligned} & -\Delta t^2 * \left([\mathbf{M}] \bar{a}_{n+1} + [\mathbf{C}] \bar{v}_{n+1} \right) + \\ & \left(-2[\mathbf{M}] + (1 - 2\gamma) \Delta t [\mathbf{C}] + \Delta t^2 (-2\beta + 0,5 + \gamma) [\mathbf{K}] \right) \bar{x}_n + \\ & \left([\mathbf{M}] + (\gamma - 1) \Delta t [\mathbf{C}] + \Delta t^2 (\beta - \gamma + 0,5) [\mathbf{K}] \right) \bar{x}_{n-1} + \\ & \left([\mathbf{M}] + \gamma \Delta t [\mathbf{C}] \right) \bar{x}_{n+1} = \\ & \Delta t^2 \left((-2\beta + 0,5 + \gamma) \bar{F}_n + (\beta - \gamma + 0,5) \bar{F}_{n-1} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

A equação (B.29), multiplicada por $\beta\Delta t^2$ e arranjada, resulta em:

$$\Delta t^2 * \left([\mathbf{M}]\bar{a}_{n+1} + [\mathbf{C}]\bar{v}_{n+1} \right) = -\beta\Delta t^2[\mathbf{K}]\bar{x}_{n+1} + \beta\Delta t^2\bar{F}_{n+1} \quad (\text{B.46})$$

A equação (B.46) na equação (B.45) finalmente resulta em:

$$\begin{aligned} & \left[[\mathbf{M}] + \Delta t(\gamma - 1)[\mathbf{C}] + \Delta t^2(\beta - \gamma + 0,5)[\mathbf{K}] \right] \bar{x}_{n-1} + \\ & \left[-2[\mathbf{M}] + \Delta t(-2\gamma + 1)[\mathbf{C}] + \Delta t^2(-2\beta + \gamma + 0,5)[\mathbf{K}] \right] \bar{x}_n + \\ & \left[[\mathbf{M}] + \Delta t \gamma [\mathbf{C}] + \Delta t^2 \beta [\mathbf{K}] \right] \bar{x}_{n+1} = \\ & \Delta t^2 \left[(\beta - \gamma + 0,5)\bar{F}_{n-1} + (-2\beta + 0,5 + \gamma)\bar{F}_n + \beta\bar{F}_{n+1} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

que é exatamente a expressão obtida pelo método dos elementos finitos, na equação (B.28).

Apêndice C

Condições de Contorno Absorventes

Uma das dificuldades básicas de métodos numéricos que utilizam formulação na forma diferencial é simular problemas com condições de contorno abertas, como problemas de radiação e espalhamento. Ao contrário de métodos como o *Método dos Momentos*, MoM, que inclui a condição de radiação na própria formulação, os métodos de formulação diferencial, como o *Método dos Elementos Finitos*, FEM, e o *Método das Diferenças finitas*, FDTD, necessitam de condições de contorno que simulem a continuidade dos campos entre domínio discretizado com o espaço aberto, limitando assim o domínio discretizado ao mínimo possível, diminuindo ao máximo o esforço computacional necessário. Estas condições são correntemente denominadas na literatura de *Condições de Contorno Absorventes*, ABCs. Como são aplicadas diretamente na fronteira do domínio, são ditas *locais*. Além das *Condições de Contorno Absorventes* há também as camadas perfeitamente casadas, correntemente denominadas na literatura de PMLs . As PMLs são camadas que absorvem ondas planas que incidam sobre sua interface com qualquer ângulo de incidência e a partir da interface a onda começa a atenuar dentro da camada. Estas camadas são em geral mais eficientes em absorver ondas e assim simular o espaço livre que as ABCs, porém exigem maior esforço computacional já que necessitam também serem discretizadas. Neste apêndice serão mostradas as ABCs mais utilizadas e as PMLs.

No caso do *Método dos Elementos Finitos* vetorial aparece na integração por partes o termo $\iint_{\Omega} (\hat{n} \times \nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{w} d\Omega$, onde Ω é a superfície externa ao volume, \hat{n} é o vetor unitário normal à superfície Ω . Nesta integral devem ser aplicadas as condições de contorno de paredes absorventes, condições denominadas de *condições naturais*.

C.1 Condição de Contorno de *Silver-Müller*

A condição de contorno de *Silver-Müller* [8] é uma aproximação de primeira ordem aplicada a superfícies planas.

O operador ∇ em coordenadas retangulares pode ser particionado da seguinte forma:

$\nabla = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial n} \hat{n}$ Assim, $\nabla \times \vec{E}$, pode ser escrito como:

$$\nabla \times \vec{E} = (\nabla_t + \frac{\partial}{\partial n} \hat{n}) \times (\vec{E}_t + \vec{E}_n) \quad (\text{C.1})$$

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla_t \times \vec{E}_t + \frac{\partial}{\partial n} \hat{n} \times \vec{E}_t + \nabla_t \times E_n \hat{n} \quad (\text{C.2})$$

Supondo que a propagação seja na direção normal ao plano, que os modos de propagação sejam TE, isto é, $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$ e considerando a superfície Ω normal à direção de propagação, pode-se escrever (C.2) como (C.3).

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla_t \times \vec{E}_t + \frac{\partial}{\partial n} \hat{n} \times \vec{E}_t \quad (\text{C.3})$$

Como o termo $\nabla_t \times \vec{E}_t$ está na direção normal ao plano, pode-se escrever:

$$\hat{n} \times \nabla \times \vec{E} = \frac{\partial}{\partial n} \hat{n} \times \hat{n} \times \vec{E}_t \quad (\text{C.4})$$

$$\hat{n} \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial n} \vec{E}_t \quad (\text{C.5})$$

Na porta 1, na Figura C.1, $\vec{E} = \vec{E}^i + \vec{E}^s$, onde \vec{E}^i é o campo incidente e \vec{E}^s é o campo espalhado.

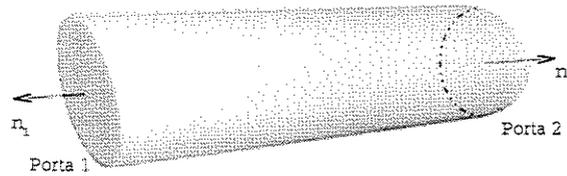


Figura C.1: Guia com duas portas.

$$\begin{aligned} \vec{E}_t^i &= \vec{E}_t^i e^{(j k_n n)} \\ \vec{E}_t^s &= \vec{E}_t^s e^{(-j k_n n)}, \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

sendo $j = \sqrt{-1}$ e k_n a componente do vetor de propagação na direção normal à porta. A equação (C.5) na equação (C.4) fica:

$$\hat{n} \times \nabla \times \vec{E} = j k_n (-\vec{E}_t^i + \vec{E}_t^s) \quad (\text{C.7})$$

Como sabe-se que $\vec{E}^s = \vec{E} - \vec{E}^i$, a equação (C.7) torna-se a equação (C.8).

$$\hat{n} \times \nabla \times \vec{E} = jk_n(-2\vec{E}_t^i + \vec{E}_t) \quad (\text{C.8})$$

Como $k_z = \frac{\omega}{v_f}$, sendo v_f a velocidade de fase do modo de propagação, a equação (C.8) fica:

$$\hat{n} \times \nabla \times \vec{E} = j \frac{\omega}{v_f} (-2\vec{E}_t^i + \vec{E}_t), \quad (\text{C.9})$$

que no domínio do tempo pode ser escrita como:

$$\hat{n} \times \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{v_{fp}} \frac{\partial}{\partial t} (-2\vec{E}_t^i + \vec{E}_t), \quad (\text{C.10})$$

sendo v_{fp} a velocidade de fase na porta "p".

Nas portas onde não há onda incidente:

$$\hat{n} \times \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{v_{fp}} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}_t) \quad (\text{C.11})$$

As equações (C.10) e (C.11) são denominadas de *condições de contorno de Silver-Müller*.

C.2 Condição de Contorno Absorvente de Segunda Ordem para Estruturas de *Microfita*.

A desvantagem da condição de contorno descrita na Seção C.1, para utilização no domínio do tempo, é que sendo a velocidade de fase dependente da frequência, sua largura de faixa é limitada. O objetivo da condição de contorno absorvente de segunda ordem, para portas de guias [58] descrita nesta seção, é aumentar a largura de banda supondo a existência de dois modos de propagação.

A condição de contorno para uma onda com dois modos de propagação é [59]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_{f1}} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_{f2}} \frac{\partial}{\partial t}\right) \vec{E} = 0 \quad (\text{C.12})$$

onde v_{f1} e v_{f2} são duas velocidades de propagação. Para verificar a validade, podemos fazer $\vec{E} = \cos(z - vt)\hat{e}$, onde \hat{e} é o vetor unitário da direção do campo elétrico. Colocando em (C.12),

vem:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_{f1}} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\vec{E}' - \frac{v}{v_{f2}} \vec{E}') = \\ & \vec{E}'' - \frac{v}{v_{f2}} \vec{E}'' - \frac{v}{v_{f1}} \vec{E}'' + \frac{v^2}{v_{f1}v_{f2}} \vec{E}'' = \\ & \left(\frac{v_{f1}v_{f2} - (v_{f1} + v_{f2})v + v^2}{v_{f1}v_{f2}} \right) \vec{E}'' \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Se $v = v_{f1}$ ou $v = v_{f2}$ em (C.13) resulta em zero. No domínio da frequência, vem:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{j\omega}{v_{f1}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{j\omega}{v_{f2}} \right) \vec{E}^s = 0 \quad (\text{C.14})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + j\beta_1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} + j\beta_2 \right) \vec{E}^s = 0, \quad (\text{C.15})$$

que é a condição de contorno de segunda ordem para guias, onde β_1 e β_2 são constantes de propagação de dois modos distintos, ou do mesmo modo em frequências distintas. Da equação (C.15) pode-se escrever:

$$\frac{\partial \vec{E}^s}{\partial n} = -\frac{1}{j(\beta_1 + \beta_2)} \left[\frac{\partial^2}{\partial n^2} - \beta_1\beta_2 \right] \vec{E}^s, \quad (\text{C.16})$$

onde a direção z foi substituída por n , que pode ser x, y ou z , dependendo do plano da porta escolhida. Na porta onde há alimentação, $\vec{E}^s = \vec{E} - \vec{E}^i$, onde \vec{E}^i é o campo incidente e \vec{E}^s é o campo espalhado, então (C.16) para a porta alimentada fica:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial n} = \frac{\partial \vec{E}^i}{\partial n} - \frac{1}{j(\beta_1 + \beta_2)} \left[\frac{\partial^2}{\partial n^2} - \beta_1\beta_2 \right] (\vec{E} - \vec{E}^i) \quad (\text{C.17})$$

Para que a condição de contorno absorvente possa ser usada em elementos finitos, deve estar na forma $\hat{n} \times \nabla \times \vec{E}$. De (C.2), vem;

$$\hat{n} \times \nabla \times \vec{E} = \hat{n} \times \left[\underbrace{\nabla_t \times \vec{E}_t}_{\text{longitudinal}} + \hat{n} \times \left(\frac{\partial \vec{E}_t}{\partial n} - \nabla_t E_n \right) \right] \quad (\text{C.18})$$

Então a equação (C.18), fica:

$$\hat{n} \times \nabla \times \vec{E} = - \left(\frac{\partial \vec{E}_t}{\partial n} - \nabla_t E_n \right) \quad (\text{C.19})$$

Com (C.17) em (C.19), $\hat{n} \times \nabla \times \vec{E}$ fica:

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \nabla \times \vec{E} &= \frac{1}{j(\beta_1 + \beta_2)} (\frac{\partial^2}{\partial n^2} - \beta_1\beta_2) \vec{E}_t + \nabla_t E_n \\ & - \frac{\partial \vec{E}_t^i}{\partial n} - \frac{1}{j(\beta_1 + \beta_2)} (\frac{\partial^2}{\partial n^2} - \beta_1\beta_2) \vec{E}_t^i \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Sendo que a derivada de segunda ordem $\frac{\partial^2}{\partial n^2} \vec{E}_t$ pode ser obtida em função de derivadas transversais, através da equação de onda nas portas, como mostrado a seguir. Partindo da equação de onda (C.21);

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = 0, \quad (\text{C.21})$$

admitindo as condições $\frac{\partial \epsilon_r}{\partial n} = 0$ e $\frac{\partial \mu_r}{\partial n} = 0$ nas portas, pode-se decompor o primeiro termo de (C.21) em componentes longitudinais e transversais como descrito em abaixo.

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} &= (\nabla_t + \frac{\partial}{\partial n} \hat{n}) \times \frac{1}{\mu_r} (\nabla_t + \frac{\partial}{\partial n} \hat{n}) \times (\vec{E}_t + E_n \hat{n}) \\ \nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} &= (\nabla_t + \frac{\partial}{\partial n} \hat{n}) \times \frac{1}{\mu_r} \left(\underbrace{\nabla_t \times \vec{E}_t}_{\text{longitudinal}} + \underbrace{\nabla_t \times E_n \hat{n} + \hat{n} \times \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial n}}_{\text{transversal}} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Precisamos observar que:

$$\nabla_t \times E_n \hat{n} = \nabla E_n \times \hat{n}$$

$$\nabla_t \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla_t E_n \times \hat{n} \right) = \left(-\nabla_t \cdot \frac{1}{\mu_r} \nabla_t E_n \right) \hat{n} \quad (\text{C.23})$$

$$\nabla_t \times \hat{n} \times \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial n} = -\nabla_t \times \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial n} \times \hat{n} = \nabla_t \cdot \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial n} \hat{n}$$

Então (C.22) e (C.23) em (C.21) resulta em:

$$\nabla_t \times \frac{1}{\mu_r} \times \nabla_t \times \vec{E}_t + \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \frac{\partial E_n}{\partial n} - \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial n^2} + \quad (\text{C.24})$$

$$\hat{n} \nabla_t \cdot \left(\nabla_t \cdot \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial n} - \frac{1}{\mu_r} \nabla_t E_n \right) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E}_t - k_0^2 \epsilon_r E_n \hat{n} = 0$$

Da componente transversal de (C.24) é obtida a equação (C.25).

$$\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial n^2} = \nabla_t \times \frac{1}{\mu_r} \times \nabla_t \times \vec{E}_t + \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \frac{\partial E_n}{\partial n} - k_0^2 \epsilon_r \vec{E}_t \quad (\text{C.25})$$

Para retirar a componente longitudinal do campo elétrico da esquerda da equação (C.25), utiliza-se a condição do divergente.

$$\nabla \cdot \epsilon_r \vec{E} = 0 \quad (\text{C.26})$$

$$\nabla_t \cdot \epsilon_r \vec{E}_t = -\epsilon_r \frac{\partial E_n}{\partial n} \quad (\text{C.27})$$

Então, aplicando (C.27) em (C.25), resulta em:

$$\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial n^2} = \nabla_t \times \frac{1}{\mu_r} \times \nabla_t \times \vec{E}_t - \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla_t \cdot \epsilon_r \vec{E}_t \right) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E}_t \quad (\text{C.28})$$

Aplicando Galerkin na (C.20) sobre a superfície da porta, aqui denominada de S_p , vem:

$$\begin{aligned} & \iint_{S_p} \frac{1}{\mu_r} \hat{n} \times \nabla \times \vec{E} \cdot \vec{w} \, dS = \\ & \iint_{S_p} \left[\frac{1}{j(\beta_1 + \beta_2)} \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial^2}{\partial n^2} - \frac{\beta_1 \beta_2}{\mu_r} \right) \vec{E}_t \right] \cdot \vec{w} \, dS \\ & + \iint_{S_p} \frac{1}{\mu_r} [\nabla_t E_n] \cdot \vec{w} \, dS + \iint_{S_p} \frac{1}{\mu_r} \left[-\frac{\partial \vec{E}_t^i}{\partial n} - \frac{1}{j(\beta_1 + \beta_2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} - \beta_1 \beta_2 \right) \vec{E}_t^i \right] \cdot \vec{w} \, dS \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

O campo incidente já é conhecido, portanto o que deve ser manipulado na equação são os termos com \vec{E}_t^i ; então, aplicando (C.28) na equação (C.29), vem:

$$\begin{aligned} & \iint_{S_p} \frac{1}{\mu_r} \hat{n} \times \nabla \times \vec{E} \cdot \vec{w} \, dS = \\ & \frac{1}{j(\beta_1 + \beta_2)} \iint_{S_p} \nabla_t \times \frac{1}{\mu_r} \times \nabla_t \times \vec{E}_t \cdot \vec{w} \, dS \\ & - \frac{1}{j(\beta_1 + \beta_2)} \iint_{S_p} \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla_t \cdot \epsilon_r \vec{E}_t \right) \cdot \vec{w} \, dS \\ & - \frac{1}{j(\beta_1 + \beta_2)} \iint_{S_p} k_0^2 \epsilon_r \vec{E}_t \cdot \vec{w} \, dS \\ & - \frac{1}{j(\beta_1 + \beta_2)} \iint_{S_p} \frac{1}{\mu_r} \beta_1 \beta_2 \vec{E}_t \cdot \vec{w} \, dS \\ & + \iint_{S_p} \frac{1}{\mu_r} [\nabla_t E_n] \cdot \vec{w} \, dS - \iint_{S_p} \frac{1}{\mu_r} \left[\frac{\partial \vec{E}_t^i}{\partial n} + \frac{1}{j(\beta_1 + \beta_2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} - \beta_1 \beta_2 \right) \vec{E}_t^i \right] \cdot \vec{w} \, dS \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

Fazendo $\vec{w} = \vec{w}_t + w_n \hat{n}$, pode-se escrever o segundo termo da equação (C.30) como:

$$\begin{aligned} & \iint_S \nabla_t \times \frac{1}{\mu_r} \times \nabla_t \times \vec{E}_t \cdot \vec{w}_t \, dS = \\ & \iint_S \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \vec{E}_t \cdot \nabla_t \times \vec{w}_t \, dS + \int_C \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \vec{E}_t \cdot (\hat{n} \times \vec{w}_t) \, dC, \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

sendo C a linha em torno da superfície da porta. O terceiro termo da equação (C.30)

$$\begin{aligned} & - \iint_S \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla_t \cdot \epsilon_r \vec{E}_t \right) \cdot \vec{w}_t \, dS = \\ & \iint_S \frac{1}{\mu_r \epsilon_r} \nabla_t \cdot \epsilon_r \vec{E}_t \nabla_t \cdot \vec{w}_t \, dS - \int_C \frac{1}{\mu_r \epsilon_r} \nabla_t \cdot \epsilon_r \vec{E}_t (\hat{n} \cdot \vec{w}_t) \, dC \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

(C.31) e (C.32) em (C.30), vem:

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_p} \frac{1}{\mu_r} \hat{n} \times \nabla \times \vec{E} \cdot \vec{w} \, dS = \\
& \frac{1}{j(\beta_1 + \beta_2)} \left[\iint_{S_p} \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \vec{E}_t \cdot \nabla_t \times \vec{w}_t \, dS + \int_C \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \vec{E}_t \cdot (\hat{n} \times \vec{w}_t) \, dC \right] \\
& + \frac{1}{j(\beta_1 + \beta_2)} \left[\iint_{S_p} \frac{1}{\mu_r \epsilon_r} \nabla_t \cdot \epsilon_r \vec{E}_t \nabla_t \cdot \vec{w}_t \, dS - \int_C \frac{1}{\mu_r \epsilon_r} \nabla_t \cdot \epsilon_r \vec{E}_t (\hat{n} \cdot \vec{w}_t) \, dC \right] \\
& - \frac{1}{j(\beta_1 + \beta_2)} \iint_{S_p} k_0^2 \epsilon_r \vec{E}_t \cdot \vec{w}_t \, dS \\
& - \frac{1}{j(\beta_1 + \beta_2)} \iint_{S_p} \frac{1}{\mu_r} \beta_1 \beta_2 \vec{E}_t \cdot \vec{w}_t \, dS \\
& - \iint_{S_p} \frac{1}{\mu_r} [\nabla_t E_n] \cdot \vec{w}_t \, dS - \iint_{S_p} \frac{1}{\mu_r} \left[\frac{\partial \vec{E}_t^i}{\partial n} + \frac{1}{j(\beta_1 + \beta_2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} - \beta_1 \beta_2 \right) \vec{E}_t^i \right] \cdot \vec{w}_t \, dS
\end{aligned} \tag{C.33}$$

Rearrmando os termos de (C.33) tem-se $\hat{n} \times \nabla \times \vec{E}$ como condição de contorno de segunda ordem para portas de um guia como da Figura C.1, descrita na equação (C.34).

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_p} \frac{1}{\mu_r} \hat{n} \times \nabla \times \vec{E} \cdot \vec{w} \, dS = \\
& \frac{1}{j(\beta_1 + \beta_2)} \left[\iint_{S_p} \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \vec{E}_t \cdot \nabla_t \times \vec{w}_t \, dS + \iint_{S_p} \frac{1}{\mu_r \epsilon_r} \nabla_t \cdot \epsilon_r \vec{E}_t \nabla_t \cdot \vec{w}_t \, dS \right. \\
& \left. - \iint_{S_p} (k_0^2 \epsilon_r + \frac{\beta_1 \beta_2}{\mu_r}) \vec{E}_t \cdot \vec{w}_t \, dS \right] \\
& + \frac{1}{j(\beta_1 + \beta_2)} \left[+ \int_C \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \vec{E}_t \cdot (\hat{n} \times \vec{w}_t) \, dC - \int_C \frac{1}{\mu_r \epsilon_r} \nabla_t \cdot \epsilon_r \vec{E}_t (\hat{n} \cdot \vec{w}_t) \, dC \right] \\
& + \iint_{S_p} \frac{1}{\mu_r} [\nabla_t E_n] \cdot \vec{w}_t \, dS - \iint_{S_p} \frac{1}{\mu_r} \left[\frac{\partial \vec{E}_t^i}{\partial n} + \frac{1}{j(\beta_1 + \beta_2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} - \beta_1 \beta_2 \right) \vec{E}_t^i \right] \cdot \vec{w}_t \, dS
\end{aligned} \tag{C.34}$$

Para o caso de paredes laterais, a ABC de segunda ordem deve levar em consideração a característica evanescente como a característica de radiação dos campos espalhados pelas descontinuidades dos guias, então a ABC tem a forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \alpha \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} + jk \right) \vec{E}^s = 0 \tag{C.35}$$

Fazendo o mesmo que foi feito para as portas, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \iint_{Sl} \frac{1}{\mu_r} \hat{n} \times \nabla \times \vec{E} \cdot \vec{w} \, dS = \\
& \frac{1}{(\alpha+jk)} \left[\iint_{Sl} \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \vec{E}_t \cdot \nabla_t \times \vec{w}_t \, dS + \iint_{Sl} \frac{1}{\mu_r \epsilon_r} \nabla_t \cdot \epsilon_r \vec{E}_t \nabla_t \cdot \vec{w}_t \, dS \right. \\
& \quad \left. - \iint_{Sl} (k_0^2 \epsilon_r + \frac{\beta_1 \beta_2}{\mu_r}) \vec{E}_t \cdot \vec{w}_t \, dS \right] \tag{C.36} \\
& + \frac{1}{j(\alpha+jk)} \left[+ \int_{Cl} \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \vec{E}_t \cdot (\hat{n} \times \vec{w}_t) \, dC - \int_{Cl} \frac{1}{\mu_r \epsilon_r} \nabla_t \cdot \epsilon_r \vec{E}_t (\hat{n} \cdot \vec{w}_t) \, dC \right] \\
& \quad + \iint_{Sl} \frac{1}{\mu_r} [\nabla_t E_n] \cdot \vec{w}_t \, dS,
\end{aligned}$$

sendo Sl a superfície lateral e Cl a linha em torno da superfície.

C.3 Condição de Contorno Absorvente de Segunda Ordem do tipo "Engquist-Majda".

Utilizando-se das aproximações de Engquist e Majda, J. L. Yao Bi, L. Nicolas e A. Nicolas [10] derivaram a forma vetorial para uso com elementos de aresta em problemas 3D. Engquist e Majda tornaram a teoria das equações de onda de um único sentido própria para uso de ABCs em FDTD [9]. Esta teoria pode ser explicada em termos da fatoração das derivadas parciais da equação de onda. Suponha a equação de onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{C.37}$$

sendo $u = u(x, y, z, t)$ uma das componentes do campo elétrico ou magnético. A solução da equação (C.37) é da forma:

$$u = \mathbb{C} e^{j(\omega t + k_x x + k_y y + k_z z)}, \tag{C.38}$$

sendo ω a frequência angular, $j = \sqrt{-1}$ e \mathbb{C} uma constante qualquer. Esta é a equação de uma onda plana que se propaga na direção $\hat{k} = \frac{k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}}{\sqrt{(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}}$. Sendo válida a seguinte relação:

$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon$. A transformada de Fourier no tempo e nas direções y e z é:

$$F_{(x, k_y, k_z, \omega)} = \mathcal{F}\{f_{(x, y, z, t)}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{(x, y, z, t)} e^{-j(\omega t + k_y y + k_z z)} \, dz dy dt \tag{C.39}$$

Aplicando a transformada de Fourier em (C.37), vem:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - (k_y^2 + k_z^2)U + \mu \epsilon \omega^2 U = 0 \tag{C.40}$$

sendo $U_{(x,k_y,k_z,\omega)} = \mathcal{F}\{u_{(x,y,z,t)}\}$. A equação (C.40) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + |k_x|^2 U = 0, \quad (\text{C.41})$$

que são ondas caminhando no sentido $\pm x$ vindo de qualquer inclinação dada por k_y e k_z . A equação (C.41) pode ser decomposta como:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + j|k_x|\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - j|k_x|\right)U &= 0 \\ \text{ou} & \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - j|k_x|\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + j|k_x|\right)U &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

Para $U = \mathcal{C}e^{jK_x x}$, sendo \mathcal{C} uma constante qualquer, $\frac{\partial U}{\partial x} - jk_x U = 0$; logo, para fronteiras planas $x = x_{min}$ para ondas que estão saindo, caminhando no sentido negativo de x ; a equação (C.42) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} - jk_x U &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} - j\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - (ky^2 + k_z^2)}U &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} - j\omega\sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - \frac{(ky^2 + k_z^2)}{\omega^2 \mu \epsilon}}U &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

Define-se:

$$S^2 = \frac{(ky^2 + k_z^2)}{\omega^2 \mu \epsilon} \quad (\text{C.44})$$

A equação (C.43) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial U}{\partial x} - j\omega\sqrt{\mu \epsilon} \left(\sqrt{1 - S^2}\right)U = 0 \quad (\text{C.45})$$

A equação (C.45) é uma condição absorvente perfeita para fronteira $x = x_{min}$, mas sua aplicação em métodos numéricos se torna impossível. Engquist e Majda [9], aproximaram o termo $\sqrt{1 - S^2}$ pela série de Taylor, assim:

$$\sqrt{1 - S^2} = 1 - \frac{S^2}{2} - \frac{S^4}{8} - \frac{S^6}{16} - \frac{5 S^8}{128} + O(S^{10}) \quad (\text{C.46})$$

Aplicando a aproximação acima nos dois primeiros termos em (C.45), vem:

$$\frac{\partial U}{\partial x} - j\omega\sqrt{\mu \epsilon} \left(1 - \frac{S^2}{2}\right)U = 0 \quad (\text{C.47})$$

Aplicando a definição de S da (C.44) em (C.47), vem:

$$\frac{\partial U}{\partial x} - j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1 - \frac{(ky^2 + kz^2)}{2\omega^2\mu\epsilon}\right]U = 0 \quad (C.48)$$

Multiplicando a equação (C.48) por $j\omega$, pode-se escrever:

$$j\omega\frac{\partial U}{\partial x} + \omega^2\sqrt{\mu\epsilon}U - \frac{ky^2}{2\sqrt{\mu\epsilon}}U - \frac{kz^2}{2\sqrt{\mu\epsilon}}U = 0 \quad (C.49)$$

Fazendo a transformada inversa em k_y , k_z e ω , vem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \sqrt{\mu\epsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (C.50)$$

que é a ABC de segunda ordem na parede $x = x_{min}$, pois seriam ondas planas com o espectro em k_y e em k_z limitado pela aproximação. Se em (C.42) for escolhido o operador $\frac{\partial U}{\partial x} + jk_x U = 0$, que é a condição da equação de onda caminhando no sentido positivo de x , será obtida então a ABC para parede $x = x_{max}$ e a equação (C.50) fica:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \sqrt{\mu\epsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (C.51)$$

Fazendo o mesmo para fronteiras $y = y_{min}$, $y = y_{max}$, $z = z_{min}$ e $z = z_{max}$, pode-se escrever a equação:

$$\frac{\partial(\nabla u \cdot \hat{n})}{\partial t} + \sqrt{\mu\epsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\nabla_t^2 u = 0, \quad (C.52)$$

que é a forma útil para utilização em códigos de diferenças finitas no domínio do tempo, FDTD, com o esquema apresentado por Mur em [60]. No domínio da frequência, (C.52) fica:

$$j\omega(\nabla u \cdot \hat{n}) - \omega^2\sqrt{\mu\epsilon}u - \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\nabla_t^2 u = 0 \quad (C.53)$$

Dai:

$$\nabla u \cdot \hat{n} = -jk_0 u + \frac{1}{2jk_0}\nabla_t^2 u \quad (C.54)$$

Na formulação vetorial 3D em elementos finitos necessita-se do termo $\hat{n} \times \nabla \times \vec{E}^s$; como (C.54) é válida para todas as componentes de campo, pode-se escrever [10]:

$$\frac{\partial \vec{E}_t^s}{\partial n} = -jk_0 \vec{E}_t^s + \frac{1}{2jk_0}\nabla_t^2 \vec{E}_t^s \quad (C.55)$$

De (C.2), sabe-se que:

$$\nabla \times \vec{E}^s = \nabla_t \times \vec{E}_t^s + \frac{\partial}{\partial n}\hat{n} \times \vec{E}_t^s + \nabla_t E_n^s \times \hat{n} \quad (C.56)$$

Daí, tem-se:

$$\hat{n} \times \nabla \times \vec{E}^s = -\frac{\partial}{\partial n} \vec{E}_t^s + \nabla_t E_n^s \quad (\text{C.57})$$

Aplicando-se (C.54) em (C.57), vem:

$$\hat{n} \times \nabla \times \vec{E}^s = +jk_0 \vec{E}_t^s - \frac{1}{2jk_0} \nabla_t^2 \vec{E}_t^s + \nabla_t E_n^s, \quad (\text{C.58})$$

que é a forma da condição de contorno de Engquist-Majda para aplicar na formulação vetorial 3D do método dos elementos finitos.

C.3.1 ABCs Generalizadas de Trefethen e Halpern

De forma a melhorar a aproximação do termo $\sqrt{1-S^2}$, Trefethen e Halpern [61] utilizaram uma razão de interpolação $r(S)$. Esta aproximação, válida para o intervalo $-1 \leq S \leq 1$, é:

$$\sqrt{1-S^2} \simeq r(S) = \frac{p(S)^m}{q(S)^n}, \quad (\text{C.59})$$

onde $r(S)$ é denominada de função de razão interpolante do tipo (m,n) . Usando $r(S)$ do tipo $(2,0)$, tem-se uma aproximação da forma:

$$r(S) \simeq p_0 + p_2 S^2, \quad (\text{C.60})$$

que aplicado em (C.45), resulta em:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - p_0 \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{p_2}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{p_2}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (\text{C.61})$$

que é a aproximação para ABC de segunda ordem em $x = x_{min}$; fazendo o mesmo para os outros planos de contorno, vem:

$$\frac{\partial \vec{E}_t^s}{\partial n} = -jp_0 k_0 \vec{E}_t^s - \frac{p_2}{jk_0} \nabla_t^2 \vec{E}_t^s \quad (\text{C.62})$$

Como a equação (C.62) é parecida com a equação (C.55), pode-se escrever a condição de contorno para uso em formulações vetoriais 3D, como a equação (C.58).

$$\hat{n} \times \nabla \times \vec{E}^s = +jp_0 k_0 \vec{E}_t^s + \frac{p_2}{jk_0} \nabla_t^2 \vec{E}_t^s + \nabla_t E_n^s, \quad (\text{C.63})$$

que é o tipo de ABCs usadas na prática nos códigos de elementos finitos. ABCs de mais alta ordem

complicam em demasia a implementação. Para efeito de comparação, se for usada a aproximação do tipo (2,2), pode-se escrever:

$$r_{(S)} \simeq \frac{p_0 + p_2 S^2}{q_0 + q_2 S^2} \quad (\text{C.64})$$

Substituindo (C.64) em (C.45), vem:

$$\frac{\partial U}{\partial x} - j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \left(\frac{p_0 + p_2 S^2}{q_0 + q_2 S^2} \right) U = 0 \quad (\text{C.65})$$

$$(q_0 + q_2 S^2) \frac{\partial U}{\partial x} - j\omega\sqrt{\mu\epsilon}(p_0 + p_2 S^2)U = 0 \quad (\text{C.66})$$

Utilizando a definição (C.44) na equação (C.66), e multiplicando a equação por $\omega^2\mu\epsilon$, vem:

$$q_0\omega^2\mu\epsilon \frac{\partial U}{\partial x} + q_2(k_y^2 + k_z^2) \frac{\partial U}{\partial x} - j\omega^3(\mu\epsilon)^{3/2}p_0U - j\omega\sqrt{\mu\epsilon}p_2(k_y^2 + k_z^2)U = 0 \quad (\text{C.67})$$

$$q_0\omega^2\mu\epsilon \frac{\partial U}{\partial x} + q_2(k_y^2 + k_z^2) \frac{\partial U}{\partial x} - j\omega^3(\mu\epsilon)^{3/2}p_0U - j\omega\sqrt{\mu\epsilon}p_2(k_y^2 + k_z^2)U = 0 \quad (\text{C.68})$$

Fazendo a transformada de Fourier inversa em (C.68), obtém-se:

$$-q_0 \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial t^2} - \frac{q_2}{\mu\epsilon} \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} - \frac{q_2}{\mu\epsilon} \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial z^2} + p_0\sqrt{\mu\epsilon} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \frac{p_2}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial y^2} + \frac{p_2}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial z^2} = 0, \quad (\text{C.69})$$

que é a ABC de terceira ordem com a aproximação proposta por Thefethen e Halpern [61].

Thefethen e Halpern mostraram que a escolha dos parâmetros p_0 , p_2 , q_0 e q_2 resulta em vários tipos de ABCs; as Tabelas C.1 e C.2 mostram estes tipos, para ABCs de segunda ordem e de terceira ordem.

<i>Tipo de Aproximação</i>	p_0	p_2	<i>Ângulos de Absorção Exata</i>	
Padé	1,00000	-0,50000	0°	0°
Chebychev em um subintervalo	1,00023	-0,51555	7,6°	18,7°
Interpolação em pontos de Chebychev	1,03597	-0,76537	22,5°	67,5°
Mínimo Quadrado	1,03084	-0,73631	22,1°	64,4°
Chebychev Padé	1,06103	-0,84883	25,8°	73,9°
Interpolação em pontos de Newman	1,00000	-1,00000	0°	90°
Chebychev	1,12500	-1,00000	31,4°	81,6°

Tabela C.1: Coeficientes para ABCs de Segunda Ordem

<i>Tipo de Aproximação</i>	p_0	p_2	q_2	<i>Ângulos de Absorção Exata</i>		
Padé	1,00000	-0,75000	-0,25000	0°	0°	0°
Chebychev em um subintervalo	0,99973	-0,80864	-0,31657	11,7°	31,9°	43,5°
Interpolação em pontos de Chebychev	0,99650	-0,91296	-0,47258	15°	45°	75°
Mínimo Quadrado	0,99250	-0,92233	-0,51084	18,4°	51,3°	76,6°
Chebychev Padé	0,99030	-0,94314	-0,55560	18,4°	53,1°	81,2°
Interpolação em pontos de Newman	1,00000	-1,00000	-0,66976	0°	60,5°	90°
Chebychev	0,95651	-0,94354	-0,70385	29,6°	66,6°	87°

Tabela C.2: Coeficientes para ABCs de Terceira Ordem ($q_0 = 1,0$ para todas aproximações)

C.3.2 Estudo Analítico do Coeficiente de Reflexão em ABCs.

Como uma onda qualquer pode ser decomposta por um somatório infinito de ondas planas, a análise do coeficiente de reflexão nas ABCs será feita fazendo incidir uma onda plana com um ângulo qualquer de incidência e será verificado qual a relação entre as amplitudes da onda refletida e incidente que é coeficiente de reflexão para vários ângulos de incidência. Considerando a Figura C.2.

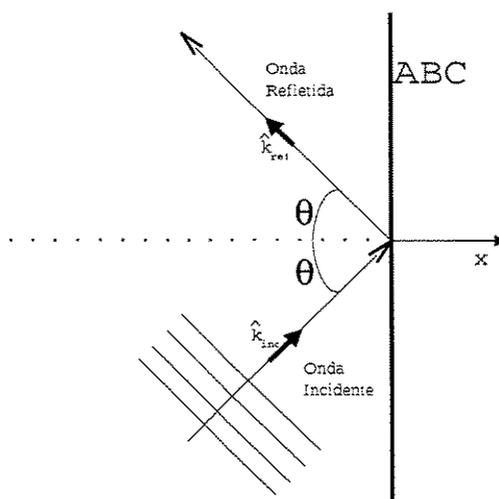


Figura C.2: Onda Incidente e Refletida em uma ABC.

Sabendo que \hat{k}_{inc} e \hat{k}_{ref} são os vetores unitários que fornecem a direção de propagação da onda incidente e refletida, respectivamente, e que estão contidos em um plano normal ao plano da ABC, permite que a análise seja feita em um plano. A onda incidente pode ser escrita como:

$$U_{inc} = e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}, \quad (C.70)$$

onde ω é a frequência angular da onda, com $k_x = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \cos(\theta)$ e $k_y = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \sin(\theta)$.

A onda refletida pode ser escrita como:

$$U_{ref} = R e^{j(\omega t + k_x x - k_y y)} \quad (C.71)$$

A ABC para a fronteira $x = x_{max}$, no plano xy , é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + p_0 \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{p_2}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (C.72)$$

Com $U = U_{inc} + U_{ref}$, na equação (C.71), vem:

$$\omega k_x U_{inc} - \omega k_x U_{ref} - p_0 \sqrt{\mu\epsilon} \omega^2 U_{inc} - p_0 \sqrt{\mu\epsilon} \omega^2 U_{ref} - \frac{p_2}{\sqrt{\mu\epsilon}} k_y^2 U_{inc} - \frac{p_2}{\sqrt{\mu\epsilon}} k_y^2 U_{ref} = 0 \quad (C.73)$$

Se $x_{max} = 0$ e aplicando a equação (C.73) em $x = 0$, vem:

$$R = \frac{\cos(\theta) - p_0 - p_2 \sin^2(\theta)}{\cos(\theta) + p_0 + p_2 \sin^2(\theta)}, \quad (C.74)$$

que é mostrado na Figura C.3 para vários valores de p_0 e p_2 da Tabela C.1.

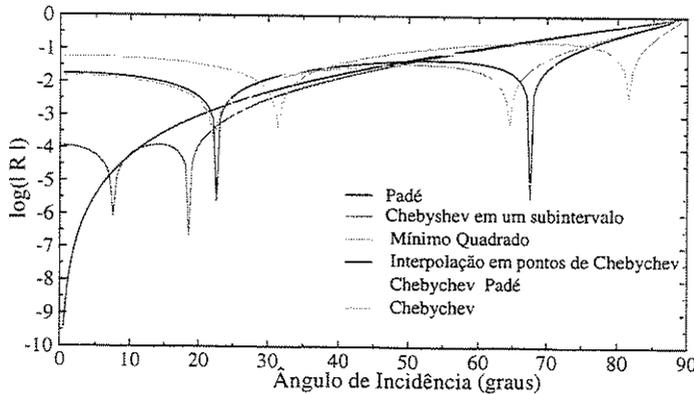


Figura C.3: Coeficientes de reflexão teóricos de segunda ordem.

C.4 Condição de Contorno Absorvente do tipo "Bayliss-Turkel"

As condições de contorno, como descritas nas Seções C.1, C.2, C.3 e C.3.1, são utilizadas para fronteiras planas; as "condições de contorno da família Bayliss-Turkel" são utilizadas em fronteiras esféricas. Bayliss e Turkel adicionaram termos à condição de contorno de Sommerfeld, tornando-a mais precisa. Mais tarde Chatterjee e Volakis [62], estenderam as condições de contorno desta família para superfície de outras curvaturas. As condições de contorno para fronteiras esféricas partem da expansão de Wilcox [63] que representa o campo em uma superfície esférica por série convergente infinita descrita em (C.75). O que se deseja é uma relação que permita ser colocada no termo da fronteira garantido a continuidade dos campos. No caso escalar 2D deseja-se obter $\frac{\partial E^s}{\partial n}$, sendo n a normal em relação à fronteira e, no caso vetorial 3D, deseja-se obter $\hat{n} \times \nabla \times \vec{E}^s$. Daí a importância da obtenção de um operador que, quando aplicado à expansão de Wilcox, forneça resultado nulo:

$$E^s(r, \theta, \phi) = e^{-jkr} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\theta, \phi)}{r^{n+1}}, \quad (\text{C.75})$$

onde E^s é qualquer componente de campo espalhado, (r, θ, ϕ) são as coordenadas esféricas e:

$$F_n(\theta, \phi) = \frac{1}{(2j)^n n!} \prod_{l=0}^n [l(l-1) + Q] F_0(\theta, \phi), \quad (\text{C.76})$$

onde:

$$Q = \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (\text{C.77})$$

O operador de Sommerfeld (C.78), que é a fatoração da equação de onda esférica para ondas caminhando na direção $+r$, é:

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial r} + jk \quad (\text{C.78})$$

Tomando só a parcela que varia com r na expansão de Wilcox, pode-se escrever: Primeiro termo, $t_1(r) = \frac{e^{-jkr}}{r}$, segundo termo, $t_2(r) = \frac{e^{-jkr}}{r^2}$, terceiro termo, $t_3(r) = \frac{e^{-jkr}}{r^3}$, etc ... Aplicando o operador de Sommerfeld ao primeiro termo;

$$\mathcal{L} \frac{e^{-jkr}}{r} = -\frac{e^{-jkr}}{r} \frac{1}{r} \quad (\text{C.79})$$

Vê-se que o resultado do operador de Sommerfeld sobre a expansão de Wilcox tende a zero com ordem 2, em r . Passando o termo do lado direito da equação (C.79) para o lado esquerdo:

$$\left(\mathcal{L} + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} = 0 \quad (\text{C.80})$$

Definindo o primeiro operador Bayliss e Turkel (C.81), que é uma pequena modificação no operador de Sommerfeld, este operador "aniquila" o primeiro termo da expansão de Wilcox.

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{L} + \frac{1}{r} \quad (\text{C.81})$$

Aplicando-o sobre o segundo termo da série, vem:

$$\mathcal{B}_1 \frac{e^{-jkr}}{r^2} = -\frac{e^{-jkr}}{r^2} \frac{1}{r} \quad (\text{C.82})$$

Vê-se, então, que o primeiro operador de Bayliss-Turkel tende a zero com terceira ordem em r . Aplicando o operador de Sommerfeld sobre o resultado:

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}_1 t_2(r)) = \frac{-3}{r} \left(-\frac{e^{-jkr}}{r^2} \frac{1}{r} \right) \quad (\text{C.83})$$

Passando o lado direito da equação (C.83) para o lado esquerdo, vem:

$$\left(\mathcal{L} + \frac{3}{r} \right) (\mathcal{B}_1 t_2(r)) = 0 \quad (\text{C.84})$$

Daí pode-se definir o operador de Bayliss-Turkel de segunda ordem:

$$\mathcal{B}_2 = \left(\mathcal{L} + \frac{3}{r} \right) \left(\mathcal{L} + \frac{1}{r} \right), \quad (\text{C.85})$$

que "aniquila" o segundo termo da expansão de Wilcox. Aplicando-o ao terceiro termo da expansão de Wilcox, vem:

$$\mathcal{B}_2 \frac{e^{-jkr}}{r^3} = \frac{e^{-jkr}}{r^3} \frac{2}{r^2} \quad (\text{C.86})$$

Vê-se, então, que o operador de Bayliss-Turkel de segunda ordem tende a zero com quinta ordem em r . Aplicando o operador de Sommerfeld sobre o resultado;

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}_2 t_3(r)) = \frac{-5}{r} \left(\frac{e^{-jkr}}{r^3} \frac{2}{r^2} \right) \quad (\text{C.87})$$

Passando o lado direito da equação (C.87) para o lado esquerdo, vem:

$$\left(\mathcal{L} + \frac{5}{r} \right) (\mathcal{B}_2 t_3(r)) = 0 \quad (\text{C.88})$$

Daí pode-se definir o operador de Bayliss-Turkel de terceira ordem:

$$\mathcal{B}_3 = \left(\mathcal{L} + \frac{5}{r} \right) \left(\mathcal{L} + \frac{3}{r} \right) \left(\mathcal{L} + \frac{1}{r} \right), \quad (\text{C.89})$$

que "aniquila" o terceiro termo da expansão de Wilcox. Repetindo o procedimento acima, Bayliss e Turkel mostraram que o operador de ordem n pode ser definido como:

$$\mathcal{B}_N = \prod_{n=1}^N \left(\mathcal{L} + \frac{2 * n - 1}{r} \right); \quad (\text{C.90})$$

que "aniquila" os N primeiros termos da expansão de Wilcox e tende a zero com a ordem $2 * N + 1$ em r .

O operador definido na equação (C.90) não tem aplicação direta em formulações vetoriais em 3D, assim, um procedimento semelhante foi feito por Webb e Kanellopoulos [64] para obter as condições de contorno vetoriais da família Bayliss-Turkel. Em coordenadas esféricas o que é necessário para garantir a continuidade dos campos nas superfícies de contorno é encontrar uma relação para o termo;

$$\hat{r} \times \nabla \times \vec{E}^s \quad (C.91)$$

onde \hat{r} é o vetor unitário na direção r das coordenadas esféricas. O campo elétrico espalhado é escrito como:

$$\vec{E}^s = E_{\hat{\theta}}^s \hat{\theta} + E_{\hat{\phi}}^s \hat{\phi} + E_r^s \hat{r} \quad (C.92)$$

Qualquer uma das componentes do campo pode ser descrita pela expansão de Wilcox (C.75) e (C.76); então, tomando o termo "n" da série, tem-se:

$$\begin{aligned} E_{\hat{\phi}n}^s &= \frac{e^{-jkr} F_{\hat{\phi}n}(\theta, \phi)}{(kr)^{n+1}} \\ E_{\hat{\theta}n}^s &= \frac{e^{-jkr} F_{\hat{\theta}n}(\theta, \phi)}{(kr)^{n+1}} \\ E_{rn}^s &= \frac{e^{-jkr} F_{rn}(\theta, \phi)}{(kr)^{n+1}} \end{aligned} \quad (C.93)$$

Assim:

$$\begin{aligned} \hat{r} \times \nabla \times \vec{E}_n^s &= \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial E_{rn}^s}{\partial \phi} - \frac{\partial r E_{\hat{\phi}n}^s}{\partial r} \right] \hat{\phi} - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial r E_{\hat{\theta}n}^s}{\partial r} - \frac{\partial E_{rn}^s}{\partial \theta} \right] \hat{\theta} \\ \hat{r} \times \nabla \times \vec{E}_n^s &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(E_{\hat{\phi}n}^s \hat{\phi} + E_{\hat{\theta}n}^s \hat{\theta})] + \left[\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial E_{rn}^s}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{rn}^s}{\partial \theta} \hat{\theta} \right] \\ \hat{r} \times \nabla \times \vec{E}_n^s &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(E_{\hat{\phi}n}^s \hat{\phi} + E_{\hat{\theta}n}^s \hat{\theta})] + \nabla_t E_{rn}^s \end{aligned} \quad (C.94)$$

Tomando só as componentes transversais do campo da expressão (C.94), vem:

$$\hat{r} \times \nabla \times \vec{E}_{tn}^s = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(E_{\hat{\phi}n}^s \hat{\phi} + E_{\hat{\theta}n}^s \hat{\theta})] \quad (C.95)$$

Observe que:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{e^{-jkr}}{r^{n+l}} \right] = -\frac{jk + (n+l)/r}{r^{n+l}} e^{-jkr} \quad (C.96)$$

Com (C.93), a equação (C.95), pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \hat{r} \times \nabla \times \vec{E}_{tn}^s &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{e^{-jkr} F_{\phi n}(\theta, \phi)}{(kr)^{n+1}} \hat{\phi} + \frac{e^{-jkr} F_{\theta n}(\theta, \phi)}{(kr)^{n+1}} \hat{\theta} \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{rk^{n+1}} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{e^{-jkr}}{r^n} \right] (F_{\phi n}(\theta, \phi) \hat{\phi} + F_{\theta n}(\theta, \phi) \hat{\theta}) = (jk + n/r) \vec{E}_{tn}^s \end{aligned} \quad (\text{C.97})$$

Pode-se, então, definir o operador \mathcal{L}_m como:

$$\mathcal{L}_m = \hat{r} \times \nabla \times -(jk + m/r), \quad (\text{C.98})$$

que aplicado sobre \vec{E}_{tm}^s resultará em zero, mas se aplicado a \vec{E}_{tn}^s , resulta em:

$$\hat{r} \times \nabla \times \vec{E}_{tn}^s - (jk + m/r) \vec{E}_{tn}^s = (jk + n/r) \vec{E}_{tn}^s - (jk + m/r) \vec{E}_{tn}^s = \frac{(n-m)}{r} \vec{E}_{tn}^s \quad (\text{C.99})$$

Daí;

$$\mathcal{L}_m \vec{E}_{tn}^s = (n-m) \frac{\vec{E}_{tn}^s}{r} \quad (\text{C.100})$$

Aplicando o operador $\hat{r} \times \nabla \times$ sobre $\frac{\vec{E}_{tn}^s}{r^l}$;

$$\begin{aligned} \hat{r} \times \nabla \times \frac{\vec{E}_{tn}^s}{r^l} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{e^{-jkr} F_{\phi n}(\theta, \phi)}{k^{n+1} r^{n+1+l}} \hat{\phi} + \frac{e^{-jkr} F_{\theta n}(\theta, \phi)}{k^{n+1} r^{n+1+l}} \hat{\theta} \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{rk^{n+1}} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{e^{-jkr}}{r^{n+l}} \right] (F_{\phi n}(\theta, \phi) \hat{\phi} + F_{\theta n}(\theta, \phi) \hat{\theta}) = (jk + (n+l)/r) \frac{\vec{E}_{tn}^s}{r^l} \end{aligned} \quad (\text{C.101})$$

Então, $\mathcal{L}_m \frac{\vec{E}_{tn}^s}{r^l}$, fica:

$$\mathcal{L}_m \left(\frac{\vec{E}_{tn}^s}{r^l} \right) = \left[\hat{r} \times \nabla \times \frac{\vec{E}_{tn}^s}{r^l} - (jk - m/r) \frac{\vec{E}_{tn}^s}{r^l} \right] = \quad (\text{C.102})$$

$$\left[(jk + (n+l)/r) - (jk + m/r) \right] \frac{\vec{E}_{tn}^s}{r^l} = (n+l-m) \frac{\vec{E}_{tn}^s}{r^{l+1}}$$

Tomando só a componente do campo na direção r na expressão (C.94), vem:

$$\hat{r} \times \nabla \times \vec{E}_{rn}^s = \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_{rn}^s}{\partial \phi} \right] \hat{\phi} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial E_{rn}^s}{\partial \theta} \right] \hat{\theta} = \nabla_t E_{rn}^s \quad (\text{C.103})$$

Aplicando o operador $\hat{r} \times \nabla \times$ na equação (C.103) vem:

$$\begin{aligned} \hat{r} \times \nabla \times \nabla_t E_{rn}^s &= \\ \hat{r} \times \nabla \times \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_{rn}^s}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{rn}^s}{\partial \theta} \hat{\theta} \right] &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_{rn}^s}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{rn}^s}{\partial \theta} \hat{\theta} \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{rk^{n+1}} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_{rn}(\theta, \phi)}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial F_{rn}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \hat{\theta} \right] \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{e^{-jkr}}{r^{n+1}} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.104})$$

Com a observação (C.96), fica:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{rk^{n+1}} \left[\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial F_{rn}(\theta, \phi)}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial F_{rn}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \hat{\theta} \right] \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{e^{-jkr}}{r^{n+1}} \right] = \\
& (jk + (n+1)/r) \left[\frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial F_{rn}(\theta, \phi)}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_{rn}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \hat{\theta} \right] \frac{e^{-jkr}}{(kr)^{n+1}} = \\
& (jk + (n+1)/r) \left[\frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial E_{rn}^s}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{rn}^s}{\partial \theta} \hat{\theta} \right]
\end{aligned} \tag{C.105}$$

Das equações (C.104) e (C.105) vem:

$$\hat{r} \times \nabla \times \nabla_t E_{rn}^s = (jk + (n+1)/r) \nabla_t E_{rn}^s \tag{C.106}$$

Assim;

$$\mathcal{L}_{n+1} \nabla_t E_{rn}^s = 0 \tag{C.107}$$

Pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_m \nabla_t E_{rn}^s = \hat{r} \times \nabla \times \nabla_t E_{rn}^s - (jk + m/r) \nabla_t E_{rn}^s = \\
& (jk + (n+1)/r) \nabla_t E_{rn}^s - (jk + m/r) \nabla_t E_{rn}^s = (n+1-m) \frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r}
\end{aligned} \tag{C.108}$$

Então;

$$\mathcal{L}_m \nabla_t E_{rn}^s = (n+1-m) \frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r} \tag{C.109}$$

Aplicando o operador $\hat{r} \times \nabla \times$ em $\frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r^l}$, vem;

$$\begin{aligned}
& \hat{r} \times \nabla \times \left(\frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r^l} \right) = \\
& \hat{r} \times \nabla \times \left[\frac{1}{r^{l+1} \text{sen}\theta} \frac{\partial E_{rn}^s}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{1}{r^{l+1}} \frac{\partial E_{rn}^s}{\partial \theta} \hat{\theta} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{1}{r^{l+1} \text{sen}\theta} \frac{\partial E_{rn}^s}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{1}{r^{l+1}} \frac{\partial E_{rn}^s}{\partial \theta} \hat{\theta} \right) \right] = \\
& -\frac{1}{rk^{n+1}} \left[\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial F_{rn}(\theta, \phi)}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial F_{rn}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \hat{\theta} \right] \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{e^{-jkr}}{r^{n+1+l}} \right]
\end{aligned} \tag{C.110}$$

Com a observação (C.96), fica:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{rk^{n+1}} \left[\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial F_{rn}(\theta, \phi)}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial F_{rn}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \hat{\theta} \right] \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{e^{-jkr}}{r^{n+1+l}} \right] = \\
& (jk + (n+1+l)/r) \left[\frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial F_{rn}(\theta, \phi)}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_{rn}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \hat{\theta} \right] \frac{e^{-jkr}}{(kr)^{n+1+l}} = \\
& (jk + (n+1+l)/r) \left[\frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial E_{rn}^s}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{rn}^s}{\partial \theta} \hat{\theta} \right] = (jk + (n+1+l)/r) \frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r^l}
\end{aligned} \tag{C.111}$$

Pode-se, então, escrever:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m\left(\frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r^l}\right) &= \hat{r} \times \nabla \times \left(\frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r^l}\right) - (jk + m/r)\left(\frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r^l}\right) = \\ &(jk + (n + 1 + l)/r)\left(\frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r^l}\right) - (jk + m/r)\left(\frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r^l}\right) = (n + 1 + l - m)\left(\frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r^{l+1}}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.112})$$

Então:

$$\mathcal{L}_m\left(\frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r^l}\right) = (n + 1 + l - m)\left(\frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r^{l+1}}\right) \quad (\text{C.113})$$

Repetindo a equação (C.102):

$$\mathcal{L}_m\left(\frac{\vec{E}_{tn}^s}{r^l}\right) = (n + l - m)\frac{\vec{E}_{tn}^s}{r^{l+1}} \quad (\text{C.114})$$

Observando (C.113) e (C.114), Webb e Kanellopoulos [64] definiram o operador:

$$\mathcal{B}_m \vec{E}^s = (\mathcal{L}_{m-1})^m \vec{E}_t^s + g(\mathcal{L}_m)^{m-1} \nabla_t E_r^s, \quad (\text{C.115})$$

onde g é um número qualquer, $(\mathcal{L}_{m-1})^m \vec{E}_t^s$ significa que o operador \mathcal{L}_{m-1} será aplicado m vezes sobre \vec{E}_t^s e $(\mathcal{L}_m)^{m-1} \nabla_t E_r^s$ significa que o operador \mathcal{L}_m será aplicado $m - 1$ vezes sobre $\nabla_t E_r^s$.

C.4.1 Ordem de Convergência do Operador de Webb e Kanellopoulos.

Com as equações (C.113) e (C.114) pode-se construir a Tabela C.3 com a aplicação dos operadores que pertencem ao operador (C.115) sobre o termo número n da expansão de Wilcox (C.75). Utilizando-se a Tabela C.3 operador \mathcal{B}_m operando sobre o termo número n da expansão de Wilcox pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_m(\vec{E}_n^s) &= (n - m + 1)(n - m + 2)(n - m + 3)(n - m + 4) \dots (n - 1)n \frac{\vec{E}_n^s}{r^m} + \\ &g(n - m + 1)(n - m + 2)(n - m + 3)(n - m + 4) \dots (n - 1) \frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r^{m-1}} \end{aligned} \quad (\text{C.116})$$

Como a componente radial do campo tende a zero para distâncias grandes da fonte, pode-se dizer que $\vec{E}_{r0}^s = 0$; então, $\mathcal{B}_m(\vec{E}_n^s)$ é igual a zero para $n = 0, 1, 2, \dots, m - 1$, isto é, o operador \mathcal{B}_m "aniquila" os primeiros m termos da expansão de Wilcox. O termo com $n = m$ varia com r na

	Primeiro Termo do Operador	Segundo Termo do Operador
1	$\mathcal{L}_{m-1}(\vec{E}_{tn}^s) = (n-m+1) \frac{\vec{E}_{tn}^s}{r}$	$\mathcal{L}_m(\nabla_t E_{rn}^s) = (n-m+1) \frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r}$
2	$\mathcal{L}_{m-1}(\frac{\vec{E}_{tn}^s}{r}) = (n-m+2) \frac{\vec{E}_{tn}^s}{r^2}$	$\mathcal{L}_m(\frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r}) = (n-m+2) \frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r^2}$
3	$\mathcal{L}_{m-1}(\frac{\vec{E}_{tn}^s}{r^2}) = (n-m+3) \frac{\vec{E}_{tn}^s}{r^3}$	$\mathcal{L}_m(\frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r^2}) = (n-m+3) \frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r^3}$
4	$\mathcal{L}_{m-1}(\frac{\vec{E}_{tn}^s}{r^3}) = (n-m+4) \frac{\vec{E}_{tn}^s}{r^4}$	$\mathcal{L}_m(\frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r^3}) = (n-m+4) \frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r^4}$
\vdots	\vdots	\vdots
m-1	$\mathcal{L}_{m-1}(\frac{\vec{E}_{tn}^s}{r^{m-2}}) = (n-1) \frac{\vec{E}_{tn}^s}{r^{m-1}}$	$\mathcal{L}_m(\frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r^{m-2}}) = (n-1) \frac{\nabla_t E_{rn}^s}{r^{m-1}}$
m	$\mathcal{L}_{m-1}(\frac{\vec{E}_{tn}^s}{r^{m-1}}) = n \frac{\vec{E}_{tn}^s}{r^m}$...

Tabela C.3: Aplicação Recursiva dos Operadores Pertencentes ao Operador (C.115)

forma $\frac{1}{r^{2m+1}}$, já que \vec{E}_{tn}^s varia com $\frac{1}{r^{n+1}}$ e $\nabla_t E_{rn}^s$ varia com $\frac{1}{r^{n+2}}$, o pode ser observado com as equações (C.75) e (C.103). Assim:

$$\mathcal{B}_m(\vec{E}_n^s) = 0 \left(\frac{1}{r^{2m+1}} \right) \quad (\text{C.117})$$

C.4.2 Obtenção da Condição de Contorno Absorvente Vetorial da Família Bayliss-Turkel de Primeira Ordem.

Utilizando-se o operador de Webb-Kanellopoulos (C.115), a condição de contorno absorvente vetorial da família Bayliss-Turkel de primeira ordem pode ser escrita como:

$$\mathcal{B}_1 \vec{E}^s = \mathcal{L}_0 \vec{E}^s + g \nabla_t E_r^s = 0 \left(\frac{1}{r^3} \right) \cong 0 \quad (\text{C.118})$$

A equação (C.98) em (C.118), fica:

$$\mathcal{B}_1 \vec{E}^s = \hat{r} \times \nabla \times \vec{E}_t^s - jk \vec{E}_t^s + g \nabla_t E_r^s = 0 \quad (\text{C.119})$$

Da equação (C.94) pode-se escrever:

$$\hat{r} \times \nabla \times \vec{E}_t^s = \hat{r} \times \nabla \times \vec{E}^s - \nabla_t E_r^s \quad (\text{C.120})$$

Assim, aplicando a equação (C.120) em (C.119), vem:

$$\hat{r} \times \nabla \times \vec{E}^s = jk \vec{E}_t^s - (g-1) \nabla_t E_r^s, \quad (\text{C.121})$$

sendo g um número qualquer. Esta é a condição de contorno absorvente vetorial de ordem 1 da família Bayliss-Turkel.

C.4.3 Obtenção da Condição de Contorno Absorvente Vetorial da Família Bayliss-Turkel de Segunda Ordem.

Utilizando-se o operador de Webb-Kanellopoulos (C.115), a condição de contorno absorvente vetorial da família Bayliss-Turkel de segunda ordem pode ser escrita como:

$$\mathcal{B}_2 \vec{E}^s = \mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1 \vec{E}^s) + g \mathcal{L}_2 \nabla_t E_r^s = 0 \left(\frac{1}{r^5} \right) \cong 0 \quad (\text{C.122})$$

A equação (C.98) em (C.122), fica:

$$\mathcal{B}_2 \vec{E}^s = [\hat{r} \times \nabla \times -(jk + 1/r)] \{ [\hat{r} \times \nabla \times -(jk + 1/r)] \vec{E}_t^s \} \quad (\text{C.123})$$

$$+ g [\hat{r} \times \nabla \times -(jk + 2/r)] \nabla_t E_r^s \cong 0$$

$$\mathcal{B}_2 \vec{E}^s = (\hat{r} \times \nabla \times)(\hat{r} \times \nabla \times) \vec{E}_t^s - 2(jk + 1/r) \hat{r} \times \nabla \times \vec{E}_t^s + (jk + 1/r)^2 \vec{E}_t^s \quad (\text{C.124})$$

$$+ g \hat{r} \times \nabla \times \nabla_t E_r^s - g(jk + 2/r) \nabla_t E_r^s \cong 0$$

Lembrando de (C.103) que $\hat{r} \times \nabla \times \vec{E}_r^s = \nabla_t E_r^s$, acrescentando o termo $-2(jk + 1/r) \hat{r} \times \nabla \times \vec{E}_r^s + 2(jk + 1/r) \nabla_t E_r^s$ que é igual a zero na equação (C.124), vem:

$$\mathcal{B}_2 \vec{E}^s = (\hat{r} \times \nabla \times)(\hat{r} \times \nabla \times) \vec{E}_t^s - 2(jk + 1/r) \hat{r} \times \nabla \times \vec{E}_t^s + (jk + 1/r)^2 \vec{E}_t^s \quad (\text{C.125})$$

$$+ g \hat{r} \times \nabla \times \nabla_t E_r^s - g(jk + 2/r) \nabla_t E_r^s + 2(jk + 1/r) \nabla_t E_r^s \cong 0$$

Acrescentando o termo $\hat{r} \times \nabla \times \hat{r} \times \nabla \times \vec{E}_r^s - \hat{r} \times \nabla \times \nabla_t E_r^s$ que é igual a zero na equação (C.125), vem:

$$\mathcal{B}_2 \vec{E}^s = (\hat{r} \times \nabla \times)(\hat{r} \times \nabla \times) \vec{E}^s - 2(jk + 1/r) \hat{r} \times \nabla \times \vec{E}^s \quad (\text{C.126})$$

$$+ k^2 \vec{E}_t^s - 2k^2 \vec{E}_t^s + 2jk/r \vec{E}_t^s + \frac{\vec{E}_t^s}{r^2}$$

$$+ (g - 1) \hat{r} \times \nabla \times \nabla_t E_r^s + (2 - g)jk \nabla_t E_r^s - 2(g - 1) \frac{\nabla_t E_r^s}{r} \cong 0$$

Com a equação rotacional-rotacional $\nabla \times \nabla \times \vec{E}^s - k^2 \vec{E}^s = 0$ na direção transversal, $(\nabla \times \nabla \times \vec{E}^s)_t = k^2 \vec{E}_t^s$

$$\mathcal{B}_2 \vec{E}^s = (\hat{r} \times \nabla \times)(\hat{r} \times \nabla \times) \vec{E}^s - 2(jk + 1/r) \hat{r} \times \nabla \times \vec{E}^s \quad (\text{C.127})$$

$$+ (\nabla \times \nabla \times \vec{E}^s)_t + 2jk(jk + 1/r) \vec{E}_t^s + \frac{\vec{E}_t^s}{r^2}$$

$$+ (g - 1) \hat{r} \times \nabla \times \nabla_t E_r^s + (2 - g)jk \nabla_t E_r^s - 2(g - 1) \frac{\nabla_t E_r^s}{r} \cong 0$$

Com a observação (C.137), descrita no final do Apêndice C, tem-se $(\hat{r} \times \nabla \times)(\hat{r} \times \nabla \times)\vec{E}^s + (\nabla \times \nabla \times \vec{E}^s)_t = \nabla \times \{[(\nabla \times \vec{E}^s) \cdot \hat{r}]\hat{r}\}$, e vem:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 \vec{E}^s &= -2(jk + 1/r)\hat{r} \times \nabla \times \vec{E}^s \\ &+ \nabla \times \{[(\nabla \times \vec{E}^s) \cdot \hat{r}]\hat{r}\} + 2jk(jk + 1/r)\vec{E}_t^s + \frac{\vec{E}_t^s}{r^2} \\ &+ (g-1)(\hat{r} \times \nabla \times \nabla_t E_r^s - 2\frac{\nabla_t E_r^s}{r}) + (2-g)jk\nabla_t E_r^s \approx 0 \end{aligned} \quad (\text{C.128})$$

Com a observação (C.143), descrita no final do Apêndice C, tem-se $\hat{r} \times \nabla \times \nabla_t E_r^s - 2\frac{\nabla_t E_r^s}{r} = -\nabla_t(\nabla \cdot \vec{E}_t^s)$, com a equação de Gauss, $-\nabla \cdot \vec{E}_t^s = \nabla \cdot \vec{E}_t^s$ e diminuindo o grau de aproximação da equação para $0(\frac{1}{r^3})$, isto é, fazendo $\frac{\vec{E}_t^s}{r^2} \rightarrow 0$, fica:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 \vec{E}^s &= -2(jk + \frac{1}{r})\hat{r} \times \nabla \times \vec{E}^s + \nabla \times \{[(\nabla \times \vec{E}^s) \cdot \hat{r}]\hat{r}\} + 2jk(jk + \frac{1}{r})\vec{E}_t^s + \\ &(g-1)\nabla_t(\nabla \cdot \vec{E}_t^s) + (2-g)jk\nabla_t E_r^s \approx 0 \end{aligned} \quad (\text{C.129})$$

Daí a condição de contorno pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \hat{r} \times \nabla \times \vec{E}^s &= jk\vec{E}_t^s + \\ &\frac{1}{2(jk + \frac{1}{r})} \left(\nabla \times \{[(\nabla \times \vec{E}^s) \cdot \hat{r}]\hat{r}\} + (g-1)\nabla_t(\nabla \cdot \vec{E}_t^s) + (2-g)jk\nabla_t E_r^s \right) \end{aligned} \quad (\text{C.130})$$

Em [65], Andrew F. Peterson mostra que o valor ótimo de g está na proximidade de 0,5.

C.4.4 Observações referentes à passagens para obtenção da equação (C.130)

A primeira observação a ser mostrada é $(\hat{r} \times \nabla \times)(\hat{r} \times \nabla \times)\vec{E}^s + (\nabla \times \nabla \times \vec{E}^s)_t = \nabla \times \{[(\nabla \times \vec{E}^s) \cdot \hat{r}]\hat{r}\}$:

$$\begin{aligned} \hat{r} \times \nabla \times \vec{E} &= \frac{1}{r} \left\{ \left[\frac{1}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rE_\phi) \right] \hat{\phi} \right. \\ &\left. - \left[\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \hat{\theta} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.131})$$

Daí,

$$\nabla \times \hat{r} \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rE_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi} \right\} \quad (\text{C.132})$$

Logo:

$$\hat{r} \times \nabla \times \hat{r} \times \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) \right] \hat{\phi} - \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \hat{\theta} \right\} \quad (\text{C.133})$$

Agora;

$$(\nabla \times \nabla \times \vec{E})_t = [\nabla \times (\nabla \times \vec{E})_t]_t + [\nabla \times (\nabla \times \vec{E})_r]_t \quad (\text{C.134})$$

$$(\nabla \times \nabla \times \vec{E})_t = \left(\nabla \times \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi} \right\} \right)_t \quad (\text{C.135})$$

$$+ [\nabla \times (\nabla \times \vec{E})_r]_t$$

$$(\nabla \times \nabla \times \vec{E})_t = \frac{1}{r} \left\{ - \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) \right] \hat{\phi} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \hat{\theta} \right\} \quad (\text{C.136})$$

$$+ [\nabla \times (\nabla \times \vec{E})_r]_t$$

Logo, comparando (C.133) com (C.136), pode-se escrever:

$$(\hat{r} \times \nabla \times) (\hat{r} \times \nabla \times) \vec{E}^s + (\nabla \times \nabla \times \vec{E}^s)_t = \nabla \times \{ [(\nabla \times \vec{E}^s) \cdot \hat{r}] \hat{r} \} \quad (\text{C.137})$$

A segunda observação a ser mostrada é $\hat{r} \times \nabla \times \nabla_t E_r^s - 2 \frac{\nabla_t E_r^s}{r} = -\nabla_t (\nabla \cdot \vec{E}_r^s)$, lembrando que $\vec{E}_r = E_r \hat{r}$.

Começando com :

$$\nabla_t E_r = \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \text{sen}(\theta)} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \hat{\phi} \quad (\text{C.138})$$

Então, pode-se escrever:

$$\hat{r} \times \nabla \times \nabla_t E_r = \hat{r} \times \left\{ \frac{1}{r} \left[- \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \right) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) \right] \hat{\phi} \right\} \quad (\text{C.139})$$

Daí:

$$\hat{r} \times \nabla \times \nabla_t E_r - \frac{2}{r} \nabla_t E_r = - \left(\frac{1}{r \text{sen}(\theta)} \frac{\partial^2 E_r}{\partial r \partial \phi} \hat{\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 E_r}{\partial r \partial \theta} \hat{\theta} \right) - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial E_r}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \hat{\phi} \right) \quad (\text{C.140})$$

A parcela $-\nabla_t (\nabla \cdot \vec{E}_r)$ pode ser desmembrada como;

$$-\nabla \cdot \vec{E}_r = \frac{-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \frac{-2}{r} E_r + \frac{\partial E_r}{\partial r} \quad (\text{C.141})$$

Daí:

$$-\nabla_t (\nabla \cdot \vec{E}_r) = -2 \nabla_t \left(\frac{E_r}{r} \right) - \nabla_t \left(\frac{\partial E_r}{\partial r} \right) = \quad (\text{C.142})$$

$$-\frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial E_r}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \hat{\phi} \right) - \left(\frac{1}{r \text{sen}(\theta)} \frac{\partial^2 E_r}{\partial r \partial \phi} \hat{\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 E_r}{\partial r \partial \theta} \hat{\theta} \right)$$

Logo:

$$\hat{r} \times \nabla \times \nabla_t E_r^s - 2 \frac{\nabla_t E_r^s}{r} = -\nabla_t (\nabla \cdot \vec{E}_r^s) \quad (\text{C.143})$$

C.5 Camadas Perfeitamente Absorventes, PMLs.

A primeira PML proposta por Berenger [12] foi para utilização com o método das diferenças finitas. Porém, a PML original apresentada por Berenger para uso no método das Diferenças Finitas não era apropriada para o uso com o método dos Elementos Finitos. No entanto, a PML anisotrópica proposta em [14] é de fácil aplicação no método dos elementos finitos com funções de base de aresta, pois com estas funções de base, que garantem a continuidade tangencial dos campos entre elementos e permitem a variação das componentes normais, a aplicação das PML anisotrópicas é imediata. Como a PML é uma ABC perfeitamente casada com o espaço livre, ela pode ser localizada bem próxima do corpo dielétrico ou da antena radiadora. O objetivo das PMLs é simular a continuidade do espaço livre para uma onda incidente. Este resultado é atingido se as componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético forem iguais na fronteira entre a PML e o espaço livre para a solução geral da equação de onda nos dois meios. Como uma onda eletromagnética qualquer pode ser decomposta por ondas planas, é feita a análise das PMLs utilizando-se a solução da equação de onda para uma onda plana. A interface que será analisada estará em um plano normal à direção z , portanto as componentes de campo procuradas na PML serão as das direções x e y . A formulação apresentada nesta seção foi retirada de [66] e [14]. A equação de onda em um meio com anisotropia diagonal em μ e ϵ é:

$$\nabla \times [v_r] \nabla \times \vec{E}_p - k_0^2 [\epsilon_r] \vec{E}_p = 0, \quad (\text{C.144})$$

onde $[v_r] = [\mu_r]^{-1}$ e:

$$[\epsilon_r] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (\text{C.145})$$

$$[v_r] = \begin{bmatrix} v_x & 0 & 0 \\ 0 & v_y & 0 \\ 0 & 0 & v_z \end{bmatrix} \quad (\text{C.146})$$

A partir de (C.144), pode-se obter:

$$\begin{aligned} & \left(v_z \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial x} - v_z \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - v_y \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - v_y \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial x} - k_0^2 \epsilon_x E_x \right) \hat{x} \\ & + \left(v_x \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial y} - v_x \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - v_z \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - v_z \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} - k_0^2 \epsilon_y E_y \right) \hat{y} \\ & + \left(v_y \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial z} - v_y \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - v_x \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - v_x \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} - k_0^2 \epsilon_z E_z \right) \hat{z} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.147})$$

Assumindo uma onda plana na PML;

$$\vec{E}_p = (E_{px}\hat{x} + E_{py}\hat{y} + E_{pz}\hat{z})e^{-j\vec{k}_p \cdot \vec{r}}, \quad (\text{C.148})$$

onde o índice p indica que o campo está na PML, $\vec{k}_p = k_{px}\hat{x} + k_{py}\hat{y} + k_{pz}\hat{z}$ é o vetor de propagação na PML e $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ é o vetor posição.

Na equação (C.147), vem:

$$\begin{aligned} & \left[-v_z k_{py} k_{px} E_{py} + (v_z k_{py}^2 + v_y k_{pz}^2) E_{px} - v_y k_{pz} k_{px} E_{pz} - k_0^2 \epsilon_x E_{px} \right] \hat{x} + \\ & \left[-v_x k_{pz} k_{py} E_{pz} + (v_x k_{pz}^2 + v_z k_{px}^2) E_{py} - v_z k_{px} k_{py} E_{px} - k_0^2 \epsilon_x E_{py} \right] \hat{y} + \\ & \left[-v_y k_{px} k_{pz} E_{px} + (v_y k_{px}^2 + v_x k_{py}^2) E_{pz} - v_x k_{py} k_{pz} E_{py} - k_0^2 \epsilon_x E_{pz} \right] \hat{z} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.149})$$

Pode-se colocar a componente de campo na direção z em função das outras componentes utilizando-se da lei de Gauss, assim;

$$\nabla \cdot \epsilon \vec{E}_p = -j k_{px} \epsilon_x E_{px} - j k_{py} \epsilon_y E_{py} - j k_{pz} \epsilon_z E_{pz} = 0 \quad (\text{C.150})$$

Daí:

$$E_{pz} = \frac{-1}{k_{pz} \epsilon_z} (k_{px} \epsilon_x E_{px} + k_{py} \epsilon_y E_{py}) \quad (\text{C.151})$$

Substituindo-se (C.151) em (C.149), vem:

$$\begin{aligned} & \left[-v_z k_{py} k_{px} E_{py} + (v_z k_{py}^2 + v_y k_{pz}^2) E_{px} + \frac{v_y k_{pz}}{\epsilon_z} (k_{px} \epsilon_x E_{px} + k_{py} \epsilon_y E_{py}) - k_0^2 \epsilon_x E_{px} \right] \hat{x} + \\ & \left[\frac{v_x k_{py}}{\epsilon_z} (k_{px} \epsilon_x E_{px} + k_{py} \epsilon_y E_{py}) + (v_x k_{pz}^2 + v_z k_{px}^2) E_{py} - v_z k_{px} k_{py} E_{px} - k_0^2 \epsilon_y E_{py} \right] \hat{y} + \\ & \left[-v_y k_{px} k_{pz} E_{px} - \frac{(v_y k_{pz}^2 + v_x k_{py}^2)}{k_{pz} \epsilon_z} (k_{px} \epsilon_x E_{px} + k_{py} \epsilon_y E_{py}) - v_x k_{py} k_{pz} E_{py} + \frac{k_0^2}{k_{pz}} (k_{px} \epsilon_x E_{px} + k_{py} \epsilon_y E_{py}) \right] \hat{z} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.152})$$

Rearrmando os termos da equação (C.152), vem:

$$\begin{aligned} & \left[\left(-\frac{v_z}{\epsilon_y} k_{py} k_{px} \epsilon_y + \frac{v_y}{\epsilon_z} k_{px} k_{py} \epsilon_y \right) E_{py} + \left(\frac{v_z}{\epsilon_x} k_{py}^2 \epsilon_x + \frac{v_y}{\epsilon_x} k_{pz}^2 \epsilon_x + \frac{v_x}{\epsilon_z} k_{px}^2 \epsilon_x - k_0^2 \epsilon_x \right) E_{px} \right] \hat{x} + \\ & \left[\left(\frac{v_x}{\epsilon_z} k_{py} k_{px} \epsilon_x - \frac{v_z}{\epsilon_x} k_{px} k_{py} \epsilon_x \right) E_{px} + \left(\frac{v_x}{\epsilon_z} k_{py}^2 \epsilon_y + \frac{v_z}{\epsilon_y} k_{pz}^2 \epsilon_y + \frac{v_x}{\epsilon_y} k_{px}^2 \epsilon_y - k_0^2 \epsilon_y \right) E_{py} \right] \hat{y} + \\ & \frac{1}{k_{pz}} \left\{ - \left[\frac{v_y}{\epsilon_x} k_{px} k_{pz}^2 \epsilon_x + \frac{(v_y k_{pz}^2 + v_x k_{py}^2)}{\epsilon_z} k_{px} \epsilon_x - k_0^2 k_{px} \epsilon_x \right] E_{px} \right. \\ & \left. - \left[\frac{(v_y k_{pz}^2 + v_x k_{py}^2)}{\epsilon_z} k_{py} \epsilon_y + \frac{v_x}{\epsilon_y} k_{py} k_{pz}^2 \epsilon_y - k_0^2 k_{py} \epsilon_y \right] E_{py} \right\} \hat{z} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.153})$$

Como o material da PML é artificial, pode-se definir:

$$a_x \triangleq \frac{v_y}{\epsilon_z} = \frac{v_z}{\epsilon_y} \quad a_y \triangleq \frac{v_x}{\epsilon_z} = \frac{v_z}{\epsilon_x} \quad a_z \triangleq \frac{v_x}{\epsilon_y} = \frac{v_y}{\epsilon_x} \quad (\text{C.154})$$

(C.154) em (C.153), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} & \left[(a_y k_{py}^2 + a_z k_{pz}^2 + a_x k_{px}^2 - k_0^2) \epsilon_x E_{px} \right] \hat{x} + \\ & \left[(a_y k_{py}^2 + a_z k_{pz}^2 + a_x k_{px}^2 - k_0^2) \epsilon_y E_{py} \right] \hat{y} + \\ & \frac{1}{k_{pz}} \left\{ -k_{px} [a_z k_{pz}^2 + a_x k_{px}^2 + a_y k_{py}^2 - k_0^2 k_{px}] \epsilon_x E_{px} \right. \\ & \left. - k_{py} [a_x k_{px}^2 + a_y k_{py}^2 + a_z k_{pz}^2 - k_0^2 k_{py}] \epsilon_y E_{py} \right\} \hat{z} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.155})$$

Da equação (C.155), pode-se escrever:

$$(a_x k_{px}^2 + a_y k_{py}^2 + a_z k_{pz}^2 - k_0^2) [\epsilon_{tt}] \vec{E}_{pt} = 0, \quad (\text{C.156})$$

onde:

$$[\epsilon_{tt}] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 \\ 0 & \epsilon_y \end{bmatrix} \quad (\text{C.157})$$

e $\vec{E}_{pt} = (E_{px} \hat{x} + E_{py} \hat{y}) e^{-j \vec{k}_p \cdot \vec{r}}$

Logo, da equação (C.156) pode-se escrever que:

$$k_0^2 = a_x K_{px}^2 + a_y K_{py}^2 + a_z K_{pz}^2 \quad (\text{C.158})$$

Supondo-se que as componentes tangenciais do campo elétrico e magnético estejam casadas na interface, sem a necessidade da existência de uma onda refletida, pode-se encontrar as soluções da equação de onda nos dois meios e daí obter os valores de a_x , a_y e a_z . Dentro da PML, a equação de Faraday na forma diferencial é:

$$[v_r] \nabla \times \vec{E}_p = -j \omega \mu_0 \vec{H}_p \quad (\text{C.159})$$

Da equação (C.159) pode-se escrever:

$$H_{px} = \frac{-1}{\omega \mu_0} \left[\frac{-a_y k_{py} D_{pz}}{\epsilon_0} + v_x k_{pz} E_{py} \right] \quad (\text{C.160})$$

$$H_{py} = \frac{-1}{\omega \mu_0} \left[v_y k_{pz} E_{px} - \frac{a_x k_{px} D_{pz}}{\epsilon_0} \right], \quad (\text{C.161})$$

onde D_{pz} é a componente do vetor densidade de fluxo elétrico na direção normal à interface dentro da PML e é dada por:

$$D_{pz} = \epsilon_0 \epsilon_z \bar{E}_{pz} \quad (\text{C.162})$$

No dielétrico que faz fronteira com a PML, tendo E_x , E_y , E_z , H_x , H_y e H_z como as componentes de campo, D_x , D_y , D_z , B_x , B_y e B_z como as componentes dos vetores densidade de fluxo e k_x , k_y e k_z como as componentes do vetor propagação, H_x e H_y são:

$$H_x = \frac{-1}{\omega \mu_0} \left[\frac{-k_y D_z}{\epsilon_0 \epsilon_{rd}} + k_z E_y \right] \quad (\text{C.163})$$

$$H_y = \frac{-1}{\omega \mu_0} \left[k_z E_{px} - \frac{k_x D_z}{\epsilon_0 \epsilon_{rd}} \right] \quad (\text{C.164})$$

onde D_z é a componente do vetor densidade de fluxo elétrico na direção normal à interface no lado do dielétrico. Como a componente normal do vetor densidade de fluxo elétrico é contínuo em todo plano da interface, tem-se:

$$D_{pz} = D_z \quad (\text{C.165})$$

Também são contínuas as derivadas nas direções paralelas ao plano; resultando em:

$$k_{px} = k_x \quad e \quad k_{py} = k_y \quad (\text{C.166})$$

Assim, para que $H_{px} = H_x$ e $H_{py} = H_y$, deve-se fazer:

$$a_x = a_y = \frac{1}{\epsilon_{rd}} \quad (\text{C.167})$$

e

$$v_x k_{pz} = k_z = v_y k_{pz} \quad (\text{C.168})$$

Assim, $v_x = v_y$. Com (C.158), tem-se que:

$$K_{pz} = \frac{1}{\sqrt{a_z}} \sqrt{k_0^2 - a_x K_{px}^2 - a_y K_{py}^2} = \frac{1}{\sqrt{a_z \epsilon_{rd}}} \sqrt{k_0^2 \epsilon_{rd} - K_{px}^2 - K_{py}^2} \quad (\text{C.169})$$

Como $k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}$ e com (C.168) e (C.169) pode-se escrever:

$$\frac{v_x}{\sqrt{a_z \epsilon_{rd}}} \sqrt{k_0^2 \epsilon_{rd} - K_{px}^2 - K_{py}^2} = \sqrt{k_0^2 \epsilon_{rd} - K_x^2 - K_y^2} \quad (\text{C.170})$$

(C.166) e (C.170), chega-se a:

$$v_x^2 = v_y^2 = a_z \epsilon_{rd} \quad (\text{C.171})$$

Com (C.167), (C.168) e (C.171) em (C.154), finalmente, resulta em:

$$\frac{\epsilon_x}{\epsilon_{rd}} = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_{rd}} = \frac{\epsilon_{rd}}{\epsilon_z} = \frac{1}{v_x} = \frac{1}{v_y} = v_z = \mathbb{C} \quad (\text{C.172})$$

onde \mathbb{C} é um número complexo qualquer, $\mathbb{C} = \alpha - j\beta$

A relação (C.172) garante a continuidade dos campos tangenciais elétricos e magnéticos de uma onda plana na interface plana normal à direção z entre o dielétrico e a PML. Esta equação pode ser reescrita em termos dos tensores elétrico e magnético na forma:

$$[\epsilon_r] = \epsilon_{rd} \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{C} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mathbb{C}} \end{bmatrix} \quad e \quad [\mu_r] = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{C} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mathbb{C}} \end{bmatrix} \quad (\text{C.173})$$

C.5.1 Análise do Desempenho Teórico da PML.

Considerando a PML terminada por paredes elétricas ou magnéticas, pode-se verificar a intensidade do campo que retorna à interface após a atenuação sofrida dentro da PML. De (C.166), (C.168) e (C.172), pode-se escrever:

$$k_{px} = k_x, \quad k_{py} = k_y \quad e \quad k_{pz} = \mathbb{C}k_z \quad (\text{C.174})$$

Observando-se a equação (C.174), pode-se afirmar que dentro da camada PML tem-se uma onda plana não-uniforme e esta só é atenuada na direção normal ao plano da interface. Continuando com uma onda plana cujo o vetor de propagação está no plano x - z , mostrada na Figura C.4 e com a equação (C.178), a equação de onda pode ser escrita como:

$$\vec{E}_p = (E_{px}\hat{x} + E_{py}\hat{y} + E_{pz}\hat{z})e^{-jk_0[\text{sen}(\theta)x + (\alpha - j\beta)\text{cos}(\theta)z]} \quad (\text{C.175})$$

Assim, considerando o caminho de ida e volta, se a PML for terminada por parede elétrica ou magnética, totalmente refletiva, a atenuação total que a onda sofre dentro da camada antes de retornar à interface, fornece o seguinte coeficiente de reflexão::

$$R = e^{-2\beta k_0 \text{cos}(\theta)L}, \quad (\text{C.176})$$

sendo L a espessura da camada PML e β é a parte imaginária de $\mathbb{C} = \alpha - j\beta$.

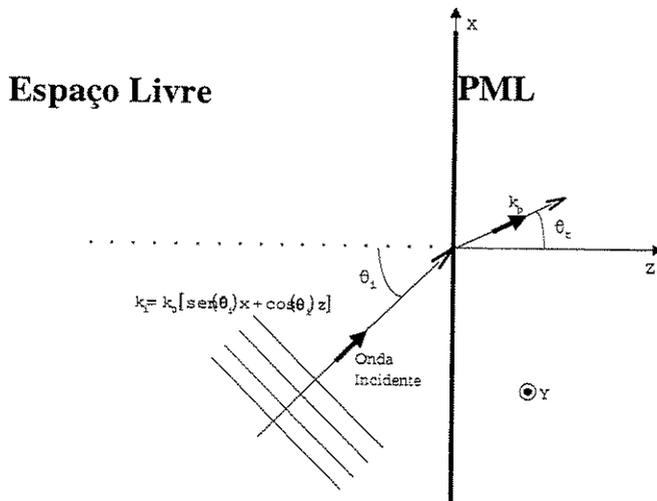


Figura C.4: Plano contendo os vetores de propagação das ondas incidente e transmitida na interface da PML com o espaço livre.

C.5.2 A PML de Berenger

A obtenção da PML de Berenger foi descrita Chew e Weedon em [13], e será mostrado aqui o que foi descrito por eles. No domínio da frequência, fazendo uma alteração no operador ∇ , o que

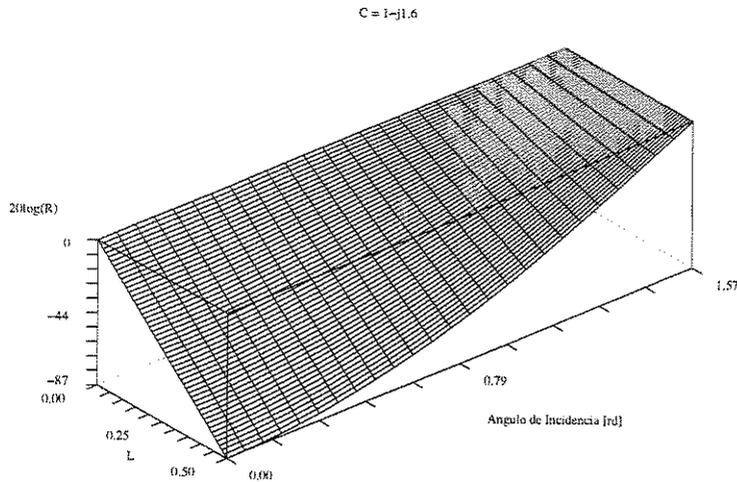


Figura C.5: Coeficiente de Reflexão, em dB's, de uma camada PML com $C = 1, 0 - j1, 6$, espessura L (em comprimentos de onda) e ângulo de incidência em radianos.

foi denominado em [67] como *coordinate stretching*, as equações de Maxwell foram reescritas como:

$$\begin{aligned}\nabla_h \cdot \epsilon \vec{E}_p &= 0 \\ \nabla_e \cdot \mu \vec{H}_p &= 0 \\ \nabla_h \times \vec{H}_p &= j\omega\epsilon \vec{E}_p \\ \nabla_e \times \vec{E}_p &= -j\omega\mu \vec{H}_p\end{aligned}\tag{C.177}$$

onde:

$$\begin{aligned}\nabla_e &= \frac{1}{e_x} \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{1}{e_y} \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{1}{e_z} \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \\ \nabla_h &= \frac{1}{h_x} \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{1}{h_y} \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{1}{h_z} \frac{\partial}{\partial z} \hat{z},\end{aligned}\tag{C.178}$$

sendo e_x , e_y , e_z , h_x , h_y e h_z as variáveis de modificação das coordenadas.

Considerando uma onda plana na PML, $\vec{E}_p = (E_{px}\hat{x} + E_{py}\hat{y} + E_{pz}\hat{z})e^{-j\vec{k}_p \cdot \vec{r}}$ e $\vec{H}_p = (H_{px}\hat{x} + H_{py}\hat{y} + H_{pz}\hat{z})e^{-j\vec{k}_p \cdot \vec{r}}$, sendo \vec{E}_p o campo elétrico na PML e \vec{H}_p o campo magnético na PML, $\vec{k}_p = k_{px}\hat{x} + k_{py}\hat{y} + k_{pz}\hat{z}$ o vetor de propagação, pode-se escrever:

$$\nabla_e \times \vec{E}_p = -j\vec{k}_e \times \vec{E}_p = -j\omega\mu \vec{H}_p,\tag{C.179}$$

sendo $\vec{k}_e = \frac{k_{px}}{e_x} \hat{x} + \frac{k_{py}}{e_y} \hat{y} + \frac{k_{pz}}{e_z} \hat{z}$. Daí:

$$\vec{k}_e \times \vec{E}_p = \omega\mu \vec{H}_p\tag{C.180}$$

Fazendo o mesmo com a equação de Ampère, vem:

$$\vec{k}_h \times \vec{H}_p = -\omega\epsilon \vec{E}_p,\tag{C.181}$$

sendo $\vec{k}_h = \frac{k_{px}}{h_x} \hat{x} + \frac{k_{py}}{h_y} \hat{y} + \frac{k_{pz}}{h_z} \hat{z}$.

Fazendo;

$$\vec{k}_h \times \vec{k}_e \times \vec{E}_p = \omega\mu \vec{k}_h \times \vec{H}_p = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{E}_p = -k_p^2 \vec{E}_p\tag{C.182}$$

Da identidade vetorial $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$, pode-se escrever:

$$\vec{k}_h \times \vec{k}_e \times \vec{E}_p = (\vec{k}_h \cdot \vec{E}_p)\vec{k}_e - (\vec{k}_h \cdot \vec{k}_e)\vec{E}_p\tag{C.183}$$

Da equação (C.181), $\vec{E}_p \perp \vec{k}_h$, assim $\vec{k}_h \cdot \vec{E}_p = 0$ e da equação (C.201), vem:

$$(\vec{k}_e \cdot \vec{k}_h)\vec{E}_p = k_p^2 \vec{E}_p\tag{C.184}$$

logo, conclui-se que na PML tem-se:

$$\frac{k_{px}^2}{e_x h_x} + \frac{k_{py}^2}{e_y h_y} + \frac{k_{pz}^2}{e_z h_z} = k_p^2, \quad (\text{C.185})$$

que é a equação da elipse 3D; então:

$$\begin{aligned} k_{px} &= k_p \sqrt{e_x h_x} \text{sen}(\theta) \cos(\phi) \\ k_{py} &= k_p \sqrt{e_y h_y} \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) \end{aligned} \quad (\text{C.186})$$

$$k_{pz} = k_p \sqrt{e_z h_z} \cos(\theta),$$

sendo θ e ϕ os ângulos das coordenadas esféricas.

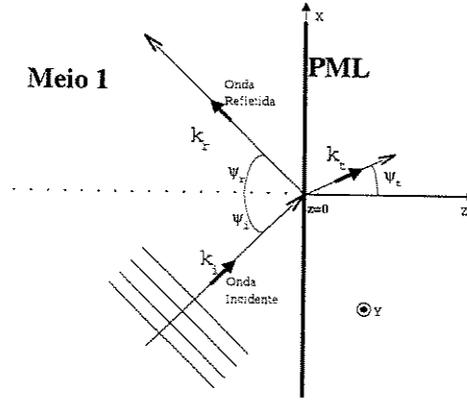


Figura C.6: Plano x - z com os vetores de propagação e o plano da interface, $z = 0$.

Na Figura C.6, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} \vec{k}_i &= k_1 [\text{sen}(\psi_i) \hat{x} + \cos(\psi_i) \hat{z}] \\ \vec{k}_r &= k_1 [\text{sen}(\psi_r) \hat{x} - \cos(\psi_r) \hat{z}] \end{aligned} \quad (\text{C.187})$$

$$\vec{k}_t = k_1 [\sqrt{e_x h_x} \text{sen}(\psi_t) \hat{x} + \sqrt{e_z h_z} \cos(\psi_t) \hat{z}]$$

Assim, assumindo que a amplitude do campo elétrico da onda incidente é 1, para onda TM em relação ao plano x - z , $E_x = 0$, $E_z = 0$ e $H_y = 0$, e considerando a continuidade do campo elétrico tangencial, $E_{yi} + E_{yr} = E_{yt}$ na interface $z = 0$, vem:

$$e^{-jk_1 \text{sen}(\psi_i)x} + R_{TM} e^{-jk_1 \text{sen}(\psi_r)x} = T_{TM} e^{-jk_p \sqrt{e_x h_x} \text{sen}(\psi_t)x} \quad (\text{C.188})$$

Para haver o casamento de fases na interface $z = 0$,

$$\psi_i = \psi_r = \psi \quad (\text{C.189})$$

e

$$k_1 \text{sen}(\psi_i) = k_p \sqrt{e_x h_x} \text{sen}(\psi_t) \quad (\text{C.190})$$

Daí:

$$1 + R_{TM} = T_{TM} \quad (\text{C.191})$$

Da equação (C.187), para uma onda TM em relação ao plano x - z dentro da PML, pode-se dizer que:

$$H_{px} = \frac{1}{j\omega\mu_p} \frac{1}{e_z} \frac{\partial E_{py}}{\partial z} \quad (\text{C.192})$$

No meio 1 tem-se que:

$$H_x = \frac{1}{j\omega\mu_1} \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (\text{C.193})$$

Considerando a continuidade do campo magnético tangencial, $H_{xi} + H_{xr} = H_{xt}$ na interface $z = 0$, com (C.189), (C.190), (C.192) e (C.193), vem:

$$\frac{-jk_1 \cos(\psi)}{j\omega\mu_1} + R_{TM} \left(\frac{jk_1 \cos(\psi)}{j\omega\mu_1} \right) = T_{TM} \left(\frac{-jk_p \sqrt{e_z h_z} \cos(\psi_t)}{j\omega\mu_p e_z} \right) \quad (\text{C.194})$$

Fazendo uma passagem, vem:

$$\frac{k_1 \cos(\psi)}{\mu_1} (1 - R_{TM}) = T_{TM} \left(\frac{k_p \sqrt{h_z} \cos(\psi_t)}{\mu_p \sqrt{e_z}} \right), \quad (\text{C.195})$$

que resulta em:

$$1 - R_{TM} = T_{TM} \left(\frac{k_p \mu_1 \cos(\psi_t) \sqrt{h_z}}{k_1 \mu_p \cos(\psi) \sqrt{e_z}} \right) \quad (\text{C.196})$$

Somando as equações (C.191) e (C.196), vem:

$$T_{TM} \left(\frac{k_1 \mu_p \cos(\psi) \sqrt{e_z} + k_p \mu_1 \cos(\psi_t) \sqrt{h_z}}{k_1 \mu_p \cos(\psi) \sqrt{e_z}} \right) = 2 \quad (\text{C.197})$$

Daí:

$$T_{TM} = \frac{2k_1 \mu_p \cos(\psi) \sqrt{e_z}}{k_1 \mu_p \cos(\psi) \sqrt{e_z} + k_p \mu_1 \cos(\psi_t) \sqrt{h_z}} \quad (\text{C.198})$$

A equação (C.196) em (C.191), resulta em:

$$R_{TM} = \frac{k_1 \mu_p \cos(\psi) \sqrt{e_z} - k_p \mu_1 \cos(\psi_t) \sqrt{h_z}}{k_1 \mu_p \cos(\psi) \sqrt{e_z} + k_p \mu_1 \cos(\psi_t) \sqrt{h_z}} \quad (\text{C.199})$$

Para que não exista onda refletida, isto é, $R_{TM} = 0$, deve-se ter:

$$k_1 \mu_p \cos(\psi) \sqrt{e_z} = k_p \mu_1 \cos(\psi_t) \sqrt{h_z} \quad (\text{C.200})$$

Como a PML é um meio artificial, e k_p , μ_1 , e_x , h_x , e_z e h_z são graus de liberdade, pode-se fazer:

$$\begin{aligned} k_p &= k_1 \\ \mu_p &= \mu_1 \end{aligned} \quad (\text{C.201})$$

$$\epsilon_p = \epsilon_1$$

$$e_z = h_z \triangleq s_z$$

Assim, da equação (C.200), e para garantir o casamento $\psi = \psi_t$, e com a equação (C.201), leva a:

$$e_x = h_x = 1 \quad (\text{C.202})$$

Para que qualquer onda plana possa ser representada por uma combinação linear deve-se ter também uma onda TE em relação ao plano x - z , $H_x = 0$, $H_z = 0$ e $E_y = 0$. Considerando a continuidade do campo magnético tangencial, $H_{yi} + H_{yr} = H_{yt}$ na interface $z = 0$, vem:

$$e^{-jk_1 \text{sen}(\psi_i)x} + R_{TE} e^{-jk_1 \text{sen}(\psi_r)x} = T_{TE} e^{-jk_p \sqrt{e_z h_x} \text{sen}(\psi_t)x} \quad (\text{C.203})$$

Com as mesmas condições da polarização TM, vem:

$$1 + R_{TE} = T_{TE} \quad (\text{C.204})$$

Das equações (C.188), sabe-se que:

$$E_{px} = \frac{-1}{j\omega\epsilon_p} \frac{1}{h_z} \frac{\partial H_{py}}{\partial z} \quad (\text{C.205})$$

No meio 1 tem-se que:

$$E_x = \frac{-1}{j\omega\epsilon_1} \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (\text{C.206})$$

Considerando a continuidade do campo elétrico tangencial, $E_{xi} + E_{xr} = E_{xt}$ na interface $z = 0$, com (C.189), (C.190), (C.192) e (C.193), vem:

$$\frac{-jk_1 \cos(\psi)}{-j\omega\epsilon_1} + R_{TE} \left(\frac{jk_1 \cos(\psi)}{-j\omega\epsilon_1} \right) = T_{TE} \left(\frac{-jk_p \sqrt{e_z h_z} \cos(\psi_t)}{j\omega\epsilon_p h_z} \right) \quad (\text{C.207})$$

Com as condições (C.201), fica:

$$1 - R_{TE} = T_{TE} \quad (\text{C.208})$$

A equação (C.204), com (C.208), garante o casamento dos campos de uma onda TE em relação ao plano x - z , bastando as condições do casamento da onda TM. Fazendo o mesmo para as duas polarizações, agora considerando o plano y - z , com a interface ainda perpendicular ao eixo z , pode-se concluir que $e_y = h_y = 1$; logo, como qualquer onda plana pode ser uma combinação linear das duas, pode-se dizer que as condições necessárias para o casamento na interface perpendicular a z são:

$$\begin{aligned} k_p &= k_1 \\ s_x &\triangleq e_x = h_z = 1 \\ s_y &\triangleq e_y = h_y = 1 \\ s_x &\triangleq e_z = h_z \end{aligned} \quad (\text{C.209})$$

Da equação (C.186), sabe-se que $k_{pz} = k_p \sqrt{e_z h_z} \cos(\psi_t)$, e como $k_p = k_1$, para o casamento sabe-se que $k_p = k_1$, $e_z = h_z = s_z$ e $\psi = \psi_t$, tem-se que $k_{pz} = k_1 s_z \cos(\psi)$; logo, para que a onda atenuie na direção z , deve-se ter:

$$s_x = \alpha - j\beta \quad (\text{C.210})$$

Para interfaces perpendiculares à direção x tem-se:

$$\begin{aligned} s_x &= \alpha - j\beta \\ s_y &= 1 \\ s_x &= 1 \end{aligned} \quad (\text{C.211})$$

Para interfaces perpendiculares à direção y tem-se:

$$\begin{aligned}
 s_x &= 1 \\
 s_y &= \alpha - j\beta \\
 s_z &= 1
 \end{aligned} \tag{C.212}$$

C.5.3 Comparação entre a PML de Berenger e a PML Anisotrópica.

Esta comparação foi feita por Jo-Yu *et al.* em [67] e tem como objetivo mostrar que as duas formas de implementação de PMLs são muito semelhantes. Partindo das equações para PMLs de Berenger (C.177), pode-se fazer:

$$\nabla_e \times \nabla_e \times \vec{E}_{pb} = \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{s_x} \frac{\partial E_{pbx}}{\partial x} + \frac{1}{s_y} \frac{\partial E_{pby}}{\partial y} + \frac{1}{s_z} \frac{\partial E_{pbz}}{\partial z} \right) - \left(\frac{1}{s_x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{s_y^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{s_z^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_{pbx} \right] \hat{x} + \\ \left[\frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{s_x} \frac{\partial E_{pbx}}{\partial x} + \frac{1}{s_y} \frac{\partial E_{pby}}{\partial y} + \frac{1}{s_z} \frac{\partial E_{pbz}}{\partial z} \right) - \left(\frac{1}{s_x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{s_y^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{s_z^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_{pby} \right] \hat{y} + \\ \left[\frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{s_x} \frac{\partial E_{pbx}}{\partial x} + \frac{1}{s_y} \frac{\partial E_{pby}}{\partial y} + \frac{1}{s_z} \frac{\partial E_{pbz}}{\partial z} \right) - \left(\frac{1}{s_x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{s_y^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{s_z^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_{pbz} \right] \hat{z} \end{array} \right\} \tag{C.213}$$

sendo $\vec{E}_{pb} = E_{pbx}\hat{x} + E_{pby}\hat{y} + E_{pbz}\hat{z}$ o campo elétrico dentro da PML de Berenger.

Na PML anisotrópica, pode-se fazer:

$$\Lambda^{-1} \nabla \times \Lambda^{-1} \nabla \times \vec{E}_{pa} = \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{a_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{a_x} \frac{\partial E_{pax}}{\partial x} + \frac{1}{a_y} \frac{\partial E_{pay}}{\partial y} + \frac{1}{a_z} \frac{\partial E_{paz}}{\partial z} \right) - \frac{1}{a_x} \left(\frac{1}{a_x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{a_y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{a_z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_{pax} \right] \hat{x} + \\ \left[\frac{1}{a_y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{a_x} \frac{\partial E_{pax}}{\partial x} + \frac{1}{a_y} \frac{\partial E_{pay}}{\partial y} + \frac{1}{a_z} \frac{\partial E_{paz}}{\partial z} \right) - \frac{1}{a_y} \left(\frac{1}{a_x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{a_y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{a_z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_{pay} \right] \hat{y} + \\ \left[\frac{1}{a_z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{a_x} \frac{\partial E_{pax}}{\partial x} + \frac{1}{a_y} \frac{\partial E_{pay}}{\partial y} + \frac{1}{a_z} \frac{\partial E_{paz}}{\partial z} \right) - \frac{1}{a_z} \left(\frac{1}{a_x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{a_y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{a_z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_{paz} \right] \hat{z} \end{array} \right\} \tag{C.214}$$

sendo $\vec{E}_{pa} = E_{pax}\hat{x} + E_{pay}\hat{y} + E_{paz}\hat{z}$ o campo elétrico dentro da PML de anisotrópica e assumindo

que:

$$\Lambda = \mu_r = \epsilon_r = \begin{pmatrix} a_x & 0 & 0 \\ 0 & a_y & 0 \\ 0 & 0 & a_z \end{pmatrix} \quad (\text{C.215})$$

As equações (C.213) e (C.214) aparentemente são totalmente distintas; mas, se observarmos bem em (C.213), pode-se fazer:

$$\nabla_e \times \nabla_e \times \vec{E}_{pb} - \nabla_e(\nabla_e \cdot \vec{E}_{pb}) = -\left(\frac{1}{s_x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{s_y^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{s_z^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \vec{E}_{pb} \quad (\text{C.216})$$

Agora, analisando os 3 casos, isto é, interface normal ao eixo x , normal ao eixo y e normal ao eixo z , pode-se encontrar a semelhança entre as duas PMLs.

Primeiro a interface normal ao eixo x , $s_x \neq 1$ é um número complexo da forma $s_x = s = \alpha - j\beta$ e $s_y = s_z = 1$ para a PML de Berenger e $\frac{1}{a_x} = a_y = a_z = \mathbb{C}$, também sendo um número complexo da forma $\alpha - j\beta$. A equação (C.216) pode ser reescrita como:

$$\nabla_e \times \nabla_e \times \vec{E}_{pb} - \nabla_e(\nabla_e \cdot \vec{E}_{pb}) = -\left(\frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \vec{E}_{pb} \quad (\text{C.217})$$

e a equação (C.214) pode ser reescrita na forma:

$$\Lambda^{-1} \nabla \times \Lambda^{-1} \nabla \times \vec{E}_{pa} = \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbb{C}^2 \frac{\partial E_{pax}}{\partial x} + \frac{\partial E_{pay}}{\partial y} + \frac{\partial E_{paz}}{\partial z} \right) - \left(\mathbb{C}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_{pax} \right] \hat{x} + \\ \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mathbb{C}^2} \frac{\partial E_{pax}}{\partial x} + \frac{1}{\mathbb{C}^2} \frac{\partial E_{pay}}{\partial y} + \frac{\partial E_{paz}}{\partial z} \right) - \left(\frac{1}{\mathbb{C}^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\mathbb{C}^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_{pay} \right] \hat{y} + \\ \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mathbb{C}^2} \frac{\partial E_{pax}}{\partial x} + \frac{\partial E_{pay}}{\partial y} + \frac{1}{\mathbb{C}^2} \frac{\partial E_{paz}}{\partial z} \right) - \left(\frac{1}{\mathbb{C}^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{\mathbb{C}^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_{paz} \right] \hat{z} \end{array} \right\} \quad (\text{C.218})$$

tem-se:

$$\nabla(\nabla \cdot \Lambda \vec{E}_{pa}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) \left(a_x \frac{\partial E_{pax}}{\partial x} + a_y \frac{\partial E_{pay}}{\partial y} + a_z \frac{\partial E_{paz}}{\partial z} \right) \quad (\text{C.219})$$

Para PML com interface normal ao eixo x , fica:

$$a_x \nabla(\nabla \cdot \Lambda \vec{E}_{pa}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) \left(\frac{1}{\mathbb{C}^2} \frac{\partial E_{pax}}{\partial x} + \frac{\partial E_{pay}}{\partial y} + \frac{\partial E_{paz}}{\partial z} \right) \quad (\text{C.220})$$

Daí pode-se escrever:

$$\Lambda^{-1}\nabla \times \Lambda^{-1}\nabla \times \vec{E}_{pa} - a_x \nabla(\nabla \cdot \Lambda \vec{E}_{pa}) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_{pay}}{\partial y} + \frac{\partial E_{paz}}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_{pax} \right] \hat{x} + \\ \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mathcal{C}^2} \frac{\partial E_{pax}}{\partial x} + \frac{\partial E_{paz}}{\partial z} \right) - \left(\frac{1}{\mathcal{C}^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_{pay} \right] \hat{y} + \\ \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mathcal{C}^2} \frac{\partial E_{pax}}{\partial x} + \frac{\partial E_{pay}}{\partial y} \right) - \left(\frac{1}{\mathcal{C}^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_{paz} \right] \hat{z} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mathcal{C}^2} \frac{\partial E_{pax}}{\partial x} + \frac{\partial E_{pay}}{\partial y} + \frac{\partial E_{paz}}{\partial z} \right) \right] \hat{x} + \\ \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mathcal{C}^2} \frac{\partial E_{pax}}{\partial x} + \frac{\partial E_{pay}}{\partial y} + \frac{\partial E_{paz}}{\partial z} \right) \right] \hat{y} + \\ \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mathcal{C}^2} \frac{\partial E_{pax}}{\partial x} + \frac{\partial E_{pay}}{\partial y} + \frac{\partial E_{paz}}{\partial z} \right) \right] \hat{z} \end{array} \right\} \quad (\text{C.221})$$

A equação (C.221) pode ser reescrita como:

$$\Lambda^{-1}\nabla \times \Lambda^{-1}\nabla \times \vec{E}_{pa} - a_x \nabla(\nabla \cdot \Lambda \vec{E}_{pa}) = - \left(\frac{1}{\mathcal{C}^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{E}_{pa} \quad (\text{C.222})$$

Repetindo a equação (C.217), tem-se:

$$\nabla_e \times \nabla_e \times \vec{E}_{pb} - \nabla_e(\nabla_e \cdot \vec{E}_{pb}) = - \left(\frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{E}_{pb} \quad (\text{C.223})$$

Fazendo o mesmo para PMLs com interfaces perpendiculares ao eixo y , isto é, $s_x = s_z = 1$ e $s_y = s = \alpha - j\beta$ na PML de Berenger e $a_x = \frac{1}{a_y} = a_z = \mathcal{C}$, tem-se:

$$\Lambda^{-1}\nabla \times \Lambda^{-1}\nabla \times \vec{E}_{pa} - a_y \nabla(\nabla \cdot \Lambda \vec{E}_{pa}) = - \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\mathcal{C}^2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{E}_{pa} \quad (\text{C.224})$$

$$\nabla_e \times \nabla_e \times \vec{E}_{pb} - \nabla_e(\nabla_e \cdot \vec{E}_{pb}) = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{E}_{pb} \quad (\text{C.225})$$

Fazendo o mesmo para PMLs com interfaces perpendiculares ao eixo y , isto é, $s_x = s_y = 1$ e $s_z = s = \alpha - j\beta$ na PML de Berenger e $a_x = a_y = \frac{1}{a_z} = \mathcal{C}$, tem-se:

$$\Lambda^{-1}\nabla \times \Lambda^{-1}\nabla \times \vec{E}_{pa} - a_z \nabla(\nabla \cdot \Lambda \vec{E}_{pa}) = - \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\mathcal{C}^2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{E}_{pa} \quad (\text{C.226})$$

$$\nabla_e \times \nabla_e \times \vec{E}_{pb} - \nabla_e(\nabla_e \cdot \vec{E}_{pb}) = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{E}_{pb} \quad (\text{C.227})$$

Comparando as equações (C.222) com (C.223), (C.224) com (C.225), (C.226) com (C.227), pode-se concluir que a equação de Helmholtz modificada é a mesma para a PML de Berenger e para a PML anisotrópica [67]; é natural acreditar que as duas PMLs produzam a mesma solução de campo, porém isto não é verdade, já que a condição de divergência na PML de Berenger não é "Maxwelliana"; assim, apesar de ambas PMLs assegurarem a continuidade tangencial dos campos sem a necessidade de onda refletida, a condição de continuidade da componente normal não está garantida na PML de Berenger. A vantagem da PML anisotrópica em relação a PML de Berenger é que há uma interpretação física para o material, já que a PML anisotrópica obedece às equações de Maxwell.

C.5.4 PML Para Materiais Bianisotrópicos.

Fernando L. Teixeira e W. C. Chew apresentaram, em [68], uma formulação que permite usar a PML de Berenger, descrita em C.5.4, em interfaces com materiais bianisotrópicos. O melhor desta formulação é que as equações resultantes respeitam as equações de Maxwell e a obtenção é muito simples.

Assumimos que:

$$\nabla_e = \nabla_h = \nabla_s = \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} = \bar{\bar{S}} \cdot \nabla \quad (\text{C.228})$$

onde $\bar{\bar{S}} = \frac{1}{s_x} \hat{x}\hat{x} + \frac{1}{s_y} \hat{y}\hat{y} + \frac{1}{s_z} \hat{z}\hat{z}$ é um tensor diagonal. Na observação descrita na equação (C.243), no final desta seção, pode-se mostrar que:

$$(\det \bar{\bar{S}}) \nabla \times (\bar{\bar{S}}^{-1} \cdot \vec{A}) = \bar{\bar{S}} \cdot (\bar{\bar{S}} \cdot \nabla) \times \vec{A} \quad (\text{C.229})$$

sendo $\det \bar{\bar{S}} = (s_x s_y s_z)^{-1}$. Em um meio bianisotrópico as equações de Maxwell são escritas como:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (\text{C.230})$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \vec{D},$$

onde:

$$\vec{D} = \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \vec{E} + \bar{\bar{\xi}} \cdot \vec{H} \quad (\text{C.231})$$

$$\vec{B} = \bar{\bar{\zeta}} \cdot \vec{E} + \bar{\bar{\mu}} \cdot \vec{H}$$

Como explicado na Seção C.5.4, a PML de Berenger deve ter as mesmas características do meio com o qual há a interface e deve-se usar as modificações nos operadores; assim, pode-se escrever:

$$\nabla_s \times \vec{E}_{pb} = (\bar{\bar{S}} \cdot \nabla) \times \vec{E}_{pb} = -j\omega \vec{B}_{pb} \quad (\text{C.232})$$

$$\nabla_s \times \vec{H}_{pb} = (\bar{\bar{S}} \cdot \nabla) \times \vec{H}_{pb} = j\omega \vec{D}_{pb},$$

onde o índice pb significa que os campos, que não obedecem às equações de Maxwell, estão nas PMLs de Berenger e

$$\vec{D}_{pb} = \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \vec{E}_{pb} + \bar{\bar{\xi}} \cdot \vec{H}_{pb} \quad (\text{C.233})$$

$$\vec{B}_{pb} = \bar{\bar{\zeta}} \cdot \vec{E}_{pb} + \bar{\bar{\mu}} \cdot \vec{H}_{pb}$$

A observação (C.229), na equação (C.232), resulta em:

$$\nabla \times \bar{\bar{S}}^{-1} \cdot \vec{E}_{pb} = -j\omega (\det \bar{\bar{S}})^{-1} \bar{\bar{S}} \cdot \vec{B}_{pb} \quad (\text{C.234})$$

$$\nabla \times \bar{\bar{S}}^{-1} \cdot \vec{H}_{pb} = j\omega (\det \bar{\bar{S}})^{-1} \bar{\bar{S}} \cdot \vec{D}_{pb}$$

Define-se novos campos por:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{pn} &= \bar{\bar{S}}^{-1} \cdot \vec{E}_{pb} \\
 \vec{H}_{pn} &= \bar{\bar{S}}^{-1} \cdot \vec{H}_{pb} \\
 \vec{B}_{pn} &= (\det \bar{\bar{S}})^{-1} \bar{\bar{S}} \cdot \vec{B}_{pb} \\
 \vec{D}_{pn} &= (\det \bar{\bar{S}})^{-1} \bar{\bar{S}} \cdot \vec{D}_{pb}
 \end{aligned} \tag{C.235}$$

Colocando as definições (C.235) em (C.234), pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{E}_{pn} &= -j\omega \vec{B}_{pn} \\
 \nabla \times \vec{H}_{pn} &= j\omega \vec{D}_{pn}
 \end{aligned} \tag{C.236}$$

Então, com (C.231) e (C.235), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \vec{D}_{pn} &= (\det \bar{\bar{S}})^{-1} \bar{\bar{S}} \cdot \{ \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \bar{\bar{S}} \vec{E}_{pn} + \bar{\bar{\xi}} \cdot \bar{\bar{S}} \vec{H}_{pn} \} \\
 \vec{B}_{pn} &= (\det \bar{\bar{S}})^{-1} \bar{\bar{S}} \cdot \{ \bar{\bar{\zeta}} \cdot \bar{\bar{S}} \vec{E}_{pn} + \bar{\bar{\mu}} \cdot \bar{\bar{S}} \vec{H}_{pn} \}
 \end{aligned} \tag{C.237}$$

Daí, pode-se definir os novos materiais:

$$\begin{aligned}
 \bar{\bar{\epsilon}}_{PMLn} &= \det \bar{\bar{S}}^{-1} \bar{\bar{S}} \cdot \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \bar{\bar{S}} \\
 \bar{\bar{\xi}}_{PMLn} &= \det \bar{\bar{S}}^{-1} \bar{\bar{S}} \cdot \bar{\bar{\xi}} \cdot \bar{\bar{S}} \\
 \bar{\bar{\mu}}_{PMLn} &= \det \bar{\bar{S}}^{-1} \bar{\bar{S}} \cdot \bar{\bar{\mu}} \cdot \bar{\bar{S}} \\
 \bar{\bar{\zeta}}_{PMLn} &= \det \bar{\bar{S}}^{-1} \bar{\bar{S}} \cdot \bar{\bar{\zeta}} \cdot \bar{\bar{S}},
 \end{aligned} \tag{C.238}$$

sendo $\bar{\bar{\epsilon}}_{PMLn}$, $\bar{\bar{\xi}}_{PMLn}$, $\bar{\bar{\mu}}_{PMLn}$ e $\bar{\bar{\zeta}}_{PMLn}$ os materiais da nova PML.

Logo, na nova PML descrita por Fernando L. Teixeira e W. C. Chew em [68], tem-se o respeito pelas equações de Maxwell e através da comparação entre a PML de Berenger e a PML anisotrópica, feita na Subseção das equações (C.222) à (C.227), pode-se concluir que para materiais bianisotrópicos a

PML anisotrópica, equações (C.171) à (C.173), se transformam em:

$$\begin{aligned}
 \bar{\bar{\epsilon}}_{PMLn} &= \bar{\bar{\epsilon}}_r \bar{\bar{\epsilon}} \\
 \bar{\bar{\xi}}_{PMLn} &= \bar{\bar{\epsilon}}_r \bar{\bar{\xi}} \\
 \bar{\bar{\mu}}_{PMLn} &= \bar{\bar{\epsilon}}_r \bar{\bar{\mu}} \\
 \bar{\bar{\zeta}}_{PMLn} &= \bar{\bar{\epsilon}}_r \bar{\bar{\zeta}},
 \end{aligned} \tag{C.239}$$

sendo $\bar{\bar{\epsilon}}_r$ descrito nas equações (C.190) e (C.191).

C.5.4.1 Observação Utilizada na Obtenção das Expressões da PML para Meios Bianisotrópicos.

Pode-se escrever:

$$\nabla \times (\bar{\bar{S}}^{-1} \cdot \vec{A}) = (s_z \frac{\partial A_z}{\partial y} - s_y \frac{\partial A_y}{\partial z}) \hat{x} + (s_x \frac{\partial A_x}{\partial z} - s_z \frac{\partial A_z}{\partial x}) \hat{y} + (s_y \frac{\partial A_y}{\partial x} - s_x \frac{\partial A_x}{\partial y}) \hat{z} \tag{C.240}$$

Pode-se, também, escrever:

$$\bar{\bar{S}}[(\bar{\bar{S}} \cdot \nabla) \times \vec{A}] = \frac{1}{s_x} \left(\frac{1}{s_y} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{1}{s_z} \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \frac{1}{s_y} \left(\frac{1}{s_z} \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{1}{s_x} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \frac{1}{s_z} \left(\frac{1}{s_x} \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{1}{s_y} \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z} \tag{C.241}$$

Multiplicando por $\det[\bar{\bar{S}}]^{-1} = s_x s_y s_z$, vem:

$$\det[\bar{\bar{S}}]^{-1} \bar{\bar{S}}[(\bar{\bar{S}} \cdot \nabla) \times \vec{A}] = (s_z \frac{\partial A_z}{\partial y} - s_y \frac{\partial A_y}{\partial z}) \hat{x} + (s_x \frac{\partial A_x}{\partial z} - s_z \frac{\partial A_z}{\partial x}) \hat{y} + (s_y \frac{\partial A_y}{\partial x} - s_x \frac{\partial A_x}{\partial y}) \hat{z} \tag{C.242}$$

Logo, observando as equações (C.240) e (C.242), tem-se que:

$$\det[\bar{\bar{S}}] \nabla \times (\bar{\bar{S}}^{-1} \cdot \vec{A}) = \bar{\bar{S}}[(\bar{\bar{S}} \cdot \nabla) \times \vec{A}] \tag{C.243}$$