

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

NOVAS PROPOSTAS PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE, CONTROLE
E PROCESSAMENTO DE SINAIS NO CONTEXTO DE DINÂMICAS
NÃO-LINEARES

Autor

Diogo Coutinho Soriano

Orientador

Prof. Dr. Romis Ribeiro de Faissol Attux

Co-Orientador

Prof. Dr. Ricardo Suyama

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Romis Ribeiro de Faissol Attux (FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Marcio Eisencraft (UFABC)

Prof. Dr. Marcelo Bussotti Reyes (UFABC)

Prof. Dr. José Wilson Magalhães Bassani (FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Marconi Kolm Madrid (FEEC/UNICAMP)

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.
Área de concentração: AA - Automação.

Campinas, Agosto de 2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

So68n	<p>Soriano, Diogo Coutinho</p> <p>Novas propostas para análise de estabilidade, controle e processamento de sinais no contexto de dinâmicas não-lineares / Diogo Coutinho Soriano. --Campinas, SP: [s.n.], 2011.</p> <p>Orientadores: Romis Ribeiro de Faissol Attux, Ricardo Suyama.</p> <p>Tese de Doutorado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.</p> <p>1. Dinâmica. 2. Teorias não-lineares. 3. Caos. 4. Sistemas caóticos. 5. Processamento de sinais. I. Attux, Romis Ribeiro de Faissol. II. Suyama, Ricardo. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.</p>
-------	--

Título em Inglês: Contributions for stability analysis, control and signal processing in the context of nonlinear dynamics

Palavras-chave em Inglês: Dynamics, Nonlinear theories, Chaos, Chaotic systems, Signal Processing

Área de concentração: Automação

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Marcio Eisencraft, Marcelo Bussotti Reyes, José Wilson Magalhães Bassani, Marconi Kolm Madrid

Data da defesa: 18-08-2011

Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidato: Diogo Coutinho Soriano

Data da Defesa: 18 de agosto de 2011

Título da Tese: "Novas propostas para análise de estabilidade, controle e processamento de sinais no contexto de dinâmicas não-lineares"

Prof. Dr. Romis Ribeiro de Faissol Attux (Presidente): _____

Prof. Dr. Marcelo Bussotti Reyes: _____

Prof. Dr. Márcio Eisencraft: _____

Prof. Dr. José Wilson Magalhães Bassani: _____

Prof. Dr. Marconi Kolm Madrid: _____

Resumo

A presente tese de doutoramento apresenta contribuições à análise de estabilidade, ao controle e ao processamento de sinais no contexto de sistemas dinâmicos não-lineares. No que se refere à análise de estabilidade, este trabalho apresenta um novo método para calcular o espectro de Lyapunov para soluções de sistemas dinâmicos a partir de cópias (“clones”) das equações de estado com pequenas perturbações nas condições iniciais. A proposta se caracteriza por: não exigir linearizações das equações de movimento; possibilitar a estimação parcial do espectro de Lyapunov; viabilizar a estimação do espectro para sistemas dinâmicos não-suaves. Além disso, este procedimento de cálculo é utilizado para construir uma estratégia de controle de sistemas dinâmicos baseada no ajuste de parâmetros livres que levam a um determinado espectro de Lyapunov desejado, estratégia esta que é testada no âmbito do modelo neuronal de Hodgkin-Huxley. Como contribuição no contexto de processamento de sinais, este trabalho se dedica a apresentar uma nova metodologia para separação de sinais caóticos misturados com sinais estocásticos baseada na análise por quantificação de recorrência, assim como uma nova técnica de somreamento e filtragem de sinais caóticos quando a estrutura das equações de estado está disponível.

Palavras-chave: dinâmica não-linear; caos; controle; separação cega de fontes; filtragem de sinais caóticos.

Abstract

This doctoral thesis presents contributions to the stability analysis, control and signal processing in the context of nonlinear dynamical systems. With regard to the stability analysis, this work presents a new method to calculate the Lyapunov spectrum of solutions for dynamical systems based on copies (“clones”) of the state equations with small perturbations in the initial conditions. The proposal has the following key features: it does not require linearization of the motion equations; it allows the partial estimation of the Lyapunov spectrum; it allows the spectrum estimation for non-smooth dynamical systems. Moreover, this calculation procedure is used to construct a strategy of control of dynamical systems based on the selection of parameters that lead to a particular desired Lyapunov spectrum, which is tested for the neuronal model proposed by Hodgkin and Huxley. As a contribution in the context of signal processing, this work presents a new methodology for blind source separation of chaotic signals mixed with stochastic sources based on recurrence quantification analysis, as well as a new technique for shadowing and filtering chaotic signals when the structure of the state equations is available.

Keywords: nonlinear dynamics; chaos; control; blind source separation; chaotic signal processing.

Agradecimentos

O carinho e o cuidado por este trabalho vem, na verdade, das relações pessoais desenvolvidas ao longo do mesmo. Gostaria de agradecer:

aos meus pais Nestor e Marly pelo eterno apoio e incentivo incondicional.

à Marianne Kimura pela alegria, carinho, apoio, companheirismo e pelos melhores momentos da vida.

ao querido Romis Attux por me ensinar muito mais que ciência, pela sua amizade, pela sua confiança e por tantas coisas que são difíceis de enumerar.

ao Ricardo Suyama pelas suas sábias perguntas, pela sua paciência, pela sua inestimável ajuda técnica e pela sua amizade.

ao professor Bassani por me contagiar com o entusiasmo pela pesquisa, pela amizade e pelas conversas de corredor.

ao professor Madrid pela estimulante iniciação ao mundo das dinâmicas não-lineares.

ao Filipe Fazanaro pela sua amizade, pela paciência de me ouvir nos momentos de baixa e pela sua inestimável ajuda técnica em diversos trabalhos.

ao André Delai pelo convívio, amizade e senso de humor.

aos queridos amigos do DSPCom que tornam o trabalho tão agradável e diversificado. Em especial, agradeço aos amigos Rafael Krummenauer, Rafael Ferrari e Marcos Covre pela ajuda (e extrema paciência) com o editor LATEX. Agradeço à Celi por toda a sua ajuda e carinho por todos nós. Ao Everton Nadalin pela amizade e pelas eternas discussões. Aos professores Renato Lopes e João Marcos Romano pelo convívio e ensinamentos.

aos queridos amigos de Campinas e São José.

aos meus irmãos Nestor, Filipe e Cassiano.

aos funcionários da faculdade de engenharia elétrica.

à CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual esse trabalho seria impossível.

a Deus por estas e por todas as outras coisas.

Aos queridos: Nestor, Marly e Marianne

*“If nature were not beautiful,
it would not be worth knowing,
and if nature were not worth knowing,
life would not be worth living”*

Henri Poincaré

Sumário

Abreviaturas	xix
Notação Matemática	xxi
Trabalhos publicados pelo autor	xxiii
1 Introdução	1
2 Revisão Teórica	5
2.1 Sistemas Dinâmicos: definições básicas	5
2.2 Conjuntos-limite de sistemas dinâmicos	8
2.3 Análise de estabilidade de conjuntos-limite	10
2.3.1 Conceitos básicos de estabilidade linear	12
2.3.2 Conceitos básicos de estabilidade não-linear	15
2.4 Estabilidade estrutural, bifurcações e diagramas de bifurcação	20
2.5 Medidas estatísticas, invariantes e de informação	25
2.5.1 Elementos da teoria de probabilidades	25
2.5.2 Medidas invariantes	29
2.5.3 Medidas teóricas de informação	32
3 Expoentes de Lyapunov e o método das dinâmicas clonadas	37
3.1 Introdução	37
3.2 Métodos numéricos para estimação do espectro de Lyapunov	40
3.2.1 O método do mapa tangente (TANMAP)	40
3.2.2 O método das dinâmicas clonadas (CLDYN)	42
3.3 Experimentos numéricos	48
3.3.1 Estimativas do espectro de Lyapunov usando o método CLDYN em dinâmicas clássicas	48

3.3.2	Variabilidade espaço-temporal dos expoentes de Lyapunov de tempo finito	54
3.3.3	Aplicação do método CLDYN ao modelo de FitzHugh-Nagumo para entradas descontínuas	65
3.3.4	Variabilidade espaço-temporal dos expoentes de Lyapunov locais no modelo de FitzHugh-Nagumo	73
3.4	Discussão e Conclusões	75
3.5	Apêndice	79
4	Medidas invariantes e controle por projeto de sistemas dinâmicos	83
4.1	Introdução	83
4.2	O modelo de Hodgkin-Huxley e metodologias de busca por comportamentos específicos	86
4.2.1	O modelo de Hodgkin-Huxley	86
4.2.2	O espectro de Lyapunov e a busca por padrões oscilatórios específicos	89
4.2.3	O algoritmo de otimização por enxame de partículas	91
4.3	Resultados	92
4.3.1	Evidências de caos no modelo de Hodgkin-Huxley	92
4.3.2	Busca por comportamentos oscilatórios no modelo HH usando PSO	95
4.4	Discussão e Conclusões	101
5	Mapas de retorno e separação de fontes caóticas	105
5.1	Introdução	105
5.2	O problema de separação/extração cega de fontes	107
5.2.1	O <i>cocktail party-problem</i>	107
5.2.2	Análise de componentes independentes aplicada ao problema de BSS/BSE	109
5.2.3	Sinais caóticos e geração de mapas de retorno	112
5.2.4	O problema de extração cega de fontes no contexto de sinais determinísticos	115
5.3	Resultados	115
5.3.1	Extração cega de fontes caóticas: modelos de misturas inversíveis	115
5.3.2	Influência dos parâmetros do mapa de retorno na qualidade de extração	124
5.3.3	Extração cega de fontes caóticas: modelos de misturas sub-determinados	126
5.4	Discussão e Conclusão	129
6	Sombreamento e filtragem de sinais caóticos	133
6.1	Introdução	133
6.2	O problema de estimação de estados	136
6.2.1	Definindo o problema de estimação de estados	136

6.2.2	Método comparativo 1: filtro de Kalman estendido	137
6.2.3	Método comparativo 2: filtro de Wiener	138
6.3	Filtragem de séries temporais caóticas por meio de uma abordagem evolutiva	139
6.3.1	A tarefa de filtragem como um problema de otimização	139
6.3.2	Otimização inspirada em sistemas imunológicos artificiais	141
6.4	Resultados	142
6.4.1	Filtragem de séries temporais caóticas usando a metodologia proposta	142
6.4.2	Teste e comparação do desempenho da proposta	145
6.5	Discussão e conclusões	154
7	Considerações Finais	157
	Referências bibliográficas	159
	Referências bibliográficas	159

Abreviaturas

BSE	<i>blind source extraction</i> – extração cega de fontes
BSS	<i>blind source separation</i> – separação cega de fontes
CLDYN	<i>cloned dynamics</i> – dinâmicas clonadas
EKF	<i>extended Kalman filter</i> – filtro de Kalman estendido
entropia K2	entropia de correlação
entropia KS	entropia de Kolmogorov-Sinai
EQM	erro quadrático médio
EQM _O	erro quadrático médio de observação
FTLE	<i>finite time Lyapunov exponents</i> – expoentes de Lyapunov de tempo finito
FHN	FitzHugh-Nagumo
GSR	<i>Gram-Schmidt reorthogonalization</i> – reortogonalização de Gram-Schmidt
HH	Hodgkin-Huxley
ICA	<i>independent component analysis</i> – análise de componentes independentes
LCS	<i>Lagrangian coherent structure</i> – estrutura Lagrangiana coerente
PA	potencial de ação
PSO	<i>particle swarm optimization</i> – otimização por enxame de partículas
RQA	<i>recurrence quantification analysis</i> – análise por quantificação de recorrência
SNR	<i>signal-to-noise ratio</i> – relação sinal-ruído
TANMAP	<i>tangent map</i> – mapa tangente
WF	<i>Wiener filter</i> – filtro de Wiener

Notação Matemática

a	escalar
\mathbf{a}	vetor coluna (letra minúscula em negrito)
\mathbf{A}	matriz (letra maiúscula em negrito)
\mathbf{I}	matriz identidade
$(\cdot)^T$	transposto de um vetor ou matriz
$\ \mathbf{a}\ $	norma 2 do vetor \mathbf{a}
$ a $	módulo do escalar a
$\text{tr}(\mathbf{A})$	traço da matriz \mathbf{A}
$E\{\cdot\}$	operador esperança
$f(\cdot), g(\cdot)$	função
$\arg \min_{\mathbf{a}}\{f(\cdot)\}$	argumento \mathbf{a} que minimiza a função $f(\cdot)$
\sum_i	somatório com índice i
$\det(\mathbf{A})$	determinante da matriz \mathbf{A}
$\max(\cdot)$	máximo valor de (\cdot)
$Re(\cdot)$	parte real de (\cdot)
\mathbb{R}^N	espaço real de dimensão N
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$	produto escalar entre os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b}

Trabalhos publicados pelo autor

Trabalhos publicados ou aceitos em periódicos internacionais

1. Soriano, D. C., Suyama, R., Attux, R. R. F. “Blind Extraction of Chaotic Sources from White Gaussian Noise Based on a Measure of Determinism”. *Lecture Notes in Computer Science*, v. 5441, pp. 122 - 129, 2009.
2. Soriano, D. C., Suyama, R., Attux, R. R. F. “Blind extraction of chaotic sources from mixtures with stochastic signals based on recurrence quantification analysis”, *Digital Signal Processing*, v. 21, pp. 417 - 426, 2011.
3. Soriano, D. C., Fazanaro, F. I., Suyama, R., Oliveira, J. R., Attux, R. R. F., Madrid, M. K. “A method for Lyapunov spectrum estimation using cloned dynamics and its application to the discontinuously-excited FitzHugh-Nagumo model”, aceito para publicação em *Nonlinear Dynamics* - disponível online, DOI: 10.1007/s1171-011-9989-2, 2011.
4. Eisencraft, M., Fanganiello, R., Grzybowski, J. M., Soriano, D. C., Attux, R. R. F., Batista, A. M., Macau, E. E. N., Monteiro, L. H. A., Romano, J. M. T., Suyama, R., Yoneyama, T. “Chaos-based Communication Systems in Non-ideal Channels”, aceito para publicação em *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation* - disponível online, DOI: 10.1016/j.cnsns.2011.05.030, 2011.
5. Soriano, D. C., Suyama, R., Attux, R. R. F., Romano, J. M. T. “Searching for Specific Periodic and Chaotic Oscillations in a Periodically-Excited Hodgkin-Huxley Model”, aceito para publicação em *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 2011.

Trabalhos submetidos para publicação em periódicos internacionais

1. Soriano, D. C., Loiola, M. B., Eisencraft, M., Suyama, R., Romano, J. M. T., Attux, R. R. F. “An evolutionary state estimation approach applied to shadowing and denoising of chaotic time series”, Submetido para publicação em *Evolving Systems - Special Issue on Evolving Learning and Adaptive Model*, 2011.

Trabalhos completos publicados em anais de eventos

1. Soriano, D. C., Nadalin, E. Z., Wada, C., Ferrari, R., Suyama, R., Attux, R. R. F. “Equalização Cega com Realimentação de Decisões Baseada em Redes Imunológicas Artificiais”, Anais do Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT’08), Rio de Janeiro - RJ, 2008.

2. Soriano, D. C., Suyama, R., Bassani, R. A., Attux, R. R. F., Bassani, J. W. M. “Bifurcações e caos em modelo de transporte intracelular de Ca^{2+} em miócitos cardíacos isolados”, Anais do XXI Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica (CBEB2008), Salvador- BA, pp. 1222 - 1225, 2008.
3. Soriano, D. C., Suyama, R., Attux, R. R. F. “Análise do comportamento dinâmico do modelo de FitzHugh-Nagumo para estímulos não-suaves”, Anais do XXI Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica (CBEB2008), Salvador - BA, pp. 1214 - 1217, 2008.
4. Soriano, D. C., Suyama, R., Attux, R. R. F. “Previsibilidade local e estruturas Lagrangianas coerentes no modelo de FitzHugh-Nagumo”, Anais do XXII Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica (CBEB2010), Tiradentes - MG, pp. 461 - 464, 2010.
5. Fazanaro F. I., Soriano, D. C., Madrid, M. K., Suyama, R., Attux, R. R. F., Oliveira, J. R. “Cálculo do espectro de Lyapunov via dinâmicas clonadas e sua aplicação no circuito de Chua”, Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática, Bonito - MS, pp. 2511 - 2518, 2010.
6. Soriano, D. C., Attux, R. R. F., Romano, J. M. T., Loiola, M. B., Suyama, R. “Denoising chaotic time series using an evolutionary state estimation approach”, Proceedings of the IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI2011), Paris - França, pp. 116 - 122, 2011.

Resumos expandidos publicados em anais de eventos

1. Soriano, D. C., Suyama, R., Attux, R. R. F., Romano, J. M. T. “An evolutionay approach to the search for periodic and chaotic oscillations in Hodgkin-Huxley model”, Proceedings of International Conference on Chaos and Nonlinear Dynamics (I Dynamics Days: South America), São José dos Campos - SP, disponível online, 2010.
2. Soriano, D. C., Suyama, R., Romano, J. M. T., Attux, R. R. F. “Blind extraction and separation of chaotic sources - results and perspectives”, Proceedings of International Conference on Chaos and Nonlinear Dynamics (I Dynamics Days South America), São José dos Campos - SP, disponível online, 2010.

Capítulo 1

Introdução

A presente tese de doutoramento apresenta contribuições à análise de estabilidade, ao controle e ao processamento de sinais no contexto de sistemas dinâmicos não-lineares, e, em especial, de dinâmicas caóticas. Mais especificamente, no que concerne à análise de estabilidade, apresenta-se aqui uma via alternativa de cálculo do espectro de Lyapunov, na qual este é estimado a partir das taxas de divergências ou convergências de condições inicialmente próximas por meio de cópias (“clones”) perturbados da dinâmica. Este método se caracteriza por não exigir a solução das equações variacionais que descrevem a evolução temporal do sistema linear subjacente à dinâmica, e, portanto, torna-se uma estratégia atraente de estimação do espectro de Lyapunov para sistemas dinâmicos com uma descrição matemática muito complexa ou mesmo com características não-suaves. Esta última aplicação, em particular, é ilustrada aqui por meio da análise de estabilidade do modelo neuronal de FitzHugh-Nagumo com entradas descontínuas, um cenário de difícil tratamento matemático, mas de significativa relevância teórica e prática.

Como uma extensão natural do conceito de expoentes de Lyapunov definidos para o comportamento assintótico da solução do sistema dinâmico, mostra-se aqui que o método proposto também pode ser utilizado para avaliar as divergências ou convergências de tempo finito de condições inicialmente próximas, o que permite analisar de forma mais precisa a previsibilidade e a própria estrutura local do campo vetorial. Estes expoentes de Lyapunov de tempo finito foram aqui utilizados para localizar a separatriz que caracteriza o limiar de disparo de potenciais de ação no modelo de FitzHugh-Nagumo e também para associar os estados fisiológicos que este busca capturar à estabilidade local da solução do modelo.

O procedimento de cálculo do espectro de Lyapunov também é aqui utilizado para construir uma nova estratégia de controle de sistemas dinâmicos baseada no ajuste de parâmetros livres que levam a um determinado espectro de Lyapunov desejado. Em particular, o espectro de Lyapunov destaca-se por permitir a caracterização de soluções atratoras e impor restrições sobre a forma de evolução de

uma perturbação infinitesimal na estrutura do sistema dinâmico, o que possibilita definir, portanto, um meio robusto de controle por projeto de sistemas dinâmicos caso um ajuste adequado dos parâmetros livres possa ser encontrado. Este procedimento de ajuste envolve a reformulação do problema de controle em termos de um problema de otimização, o qual, devido a sua multimodalidade intrínseca e à impossibilidade de construção analítica de um vetor gradiente é aqui resolvido por meio de métodos alternativos (bio-inspirados) de otimização. A abordagem de controle aqui proposta visa obter séries temporais que definem um atrator com mesmas medidas invariantes e estatísticas da solução de referência, mas não necessariamente séries idênticas. Este tipo de controle é especialmente atraente quando deseja-se buscar um padrão oscilatório específico que regula processos ou mesmo define algum tipo de memória associativa, tal como tem sido comumente evocado no contexto de computação com atratores em sistemas biológicos, em especial, os neuronais. Justamente por isso, a estratégia de controle proposta é testada aqui tendo por plataforma de testes o modelo neuronal de Hodgkin-Huxley, para o qual é mostrado que alguns parâmetros que caracterizam a excitabilidade de membrana podem ser combinados para estabilizar órbitas caóticas ou mesmo desestabilizar órbitas periódicas.

Como contribuição no contexto de processamento de sinais, este trabalho apresenta uma nova metodologia para extração cega de sinais caóticos misturados com sinais estocásticos baseada na análise por quantificação de recorrência. Esta abordagem dedica-se a resolver o problema de extração de sinais determinísticos quando apenas versões corrompidas com ruído do sinal de interesse estão disponíveis em um cenário multiregistro, ou seja, quando se tem acesso a mais de uma mistura ruidosa das fontes originalmente misturadas. Esta técnica de processamento visa adaptar um sistema separador de tal forma que a aplicação deste às misturas leva a maximização das características determinísticas do sinal de saída, o que define aqui uma primeira proposta de análise de componentes determinísticos.

Quando o problema de filtragem de sinais caóticos é colocado fora do cenário multiregistro, busca-se um outro conjunto de informações disponíveis *a priori* para realizar um processamento adequado, uma vez que a abordagem clássica de Fourier torna-se imprópria nesta situação. Com este propósito, a presente tese também se propõe a apresentar uma estratégia de filtragem quando a estrutura das equações de estado está disponível, mas não suas condições iniciais e parâmetros, o que define uma situação muito próxima do problema de sobreamento de sinais determinísticos, i.e., do problema de se encontrar trajetórias puramente determinísticas que aproximam observações ruidosas. O método aqui proposto para realizar esta tarefa também se fundamenta na reformulação do problema de filtragem como um problema de otimização, o que é resolvido via métodos alternativos (bio-inspirados) e permite contornar diversos inconvenientes numéricos das abordagens clássicas de solução. Outras duas abordagens clássicas de filtragem são utilizadas aqui para embasar a avaliação de desempenho

da proposta, a qual se mostra capaz de apresentar uma boa capacidade de filtragem em ambientes ruidosos. Acredita-se que esta proposta de filtragem possa ser muito atraente no contexto de simulações analógicas de sistemas dinâmicos e das recentes propostas de sistemas de comunicações baseados em sinais caóticos, para os quais o conhecimento da estrutura das equações de estado é uma premissa coerente.

Esta tese está estruturada como descrito a seguir: o capítulo 2 apresenta uma breve revisão teórica dos conceitos fundamentais utilizados nos capítulos que se seguem. Já no âmbito das contribuições, o capítulo 3 apresenta o método das dinâmicas clonadas para o cálculo do espectro de Lyapunov, bem como a sua extensão para o cálculo do espectro de Lyapunov de tempo finito. Essas medidas são então utilizadas para estabelecer diferentes análises relativas ao modelo de FitzHugh-Nagumo para entradas descontínuas, um caso clássico de sistema não-suave. O capítulo 4 apresenta a estratégia de controle por projeto de sistemas dinâmicos baseado no ajuste de parâmetros livres da dinâmica que levam a um determinado espectro de Lyapunov desejado, o que é aqui aplicado para controle do modelo de Hodgkin-Huxley. Os capítulos 5 e 6 abordam, respectivamente, o problema de extração de fontes caóticas a partir de misturas destas com sinais estocásticos e o problema de filtragem quando estão disponíveis uma observação ruidosa do sinal de interesse e conhecimento em relação à estrutura das equações de estado. Por fim, o capítulo 7 apresenta as considerações finais desta tese.

Capítulo 2

Revisão Teórica

2.1 Sistemas Dinâmicos: definições básicas

A dinâmica e a cinemática formam os dois ramos fundamentais da mecânica, a área do conhecimento voltada para a descrição e o entendimento do movimento de forma geral. Historicamente, a mecânica foi assim denominada devido à idéia de que todo movimento pudesse ser decomposto e entendido por meio de máquinas simples tais como polias, rodas, roldanas, alavancas, entre outras máquinas elementares (Mitchell, 2009). Em especial, a cinemática ocupa-se fundamentalmente da descrição do movimento em si (e.g. leis de Kepler), enquanto a dinâmica busca entender o movimento por meio de suas origens, à luz de noções tais como massa, carga elétrica, entre outras grandezas fundamentais (e.g. leis de Newton).

As tentativas de compreensão e descrição das leis de movimento são antigas, tendo nascido e se desenvolvido juntamente com o intelecto da própria humanidade. Por exemplo, Aristóteles, em sua Física (Aristóteles, 2009), tinha uma autêntica teoria de dinâmica fundamentada, sobretudo, no senso comum. Segundo Aristóteles, objetos compostos por elementos semelhantes tinham uma afinidade intrínseca, tendendo naturalmente a se agruparem e dando assim origem aos movimentos. Isso explicaria, por exemplo, o movimento de queda de uma pedra em direção ao solo ou mesmo a tendência da fumaça de se misturar ao ar (Mitchell, 2009).

Posteriormente, a introdução de meios mais empíricos e sistemáticos como paradigma de método investigativo, em detrimento do puro senso comum, teve um impacto profundo no desenvolvimento da teoria de sistemas dinâmicos, sobretudo com os trabalhos de Galileo e Newton (Monteiro, 2006). Desde então, pode-se dizer que muitos dos grandes cientistas da humanidade têm se debruçado para o desenvolvimento deste ramo da ciência, tais como Leibniz, Laplace, Lagrange, Euler, Poisson, Poincaré, Einstein, Kolmogorov e von Neumann (Monteiro, 2006; Leine, 2010).

Seguindo as concepções mais modernas da área, sistemas dinâmicos podem ser vistos como ma-

peamentos de estados matematicamente descritos de diferentes formas, tais como um conjunto de equações diferenciais, integro-diferenciais, integrais, grafos, equações a diferenças, cadeias de Markov, etc. Por meio destes mapeamentos de estados, busca-se avaliar a evolução temporal de grandezas de qualquer natureza, o que é feito mediante sucessivas aplicações do mapa a um estado inicial.

No presente trabalho, apenas sistemas dinâmicos descritos por equações a diferenças e equações diferenciais serão abordados, fazendo com que a iteração do mapeamento possa ser vista como a aplicação de um operador puramente determinístico. Assim, o conjunto de quantidades x_j , com $j = 1, 2, \dots, N$ determinam o estado do sistema dinâmico, caracterizando um ponto $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ no espaço \mathbb{R}^N (Anishchenko et al., 2007). As quantidades x_j evoluem no tempo e são chamadas de variáveis de estado, enquanto os parâmetros da dinâmica são quantidades fixas que também influenciam no comportamento do sistema. O conjunto de todos os estados possíveis de um sistema é chamado de espaço de estados ou espaço de fase. As equações de estado (ou equações de movimento) fazem referência às relações que fornecem o próximo estado do mapeamento dado o estado corrente, e correspondem no seu conjunto ao mapeamento propriamente dito. O número de equações de diferenciais ou a diferenças de primeira ordem necessárias para descrever o sistema definem a sua ordem, sendo que toda equação diferencial ou a diferenças de ordem N pode ser reescrita como um sistema com N equações de primeira ordem (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995; Strogatz, 2001; Monteiro, 2006; Anishchenko et al., 2007).

Em geral, os sistemas dinâmicos podem ser classificados segundo diferentes aspectos associados às características fundamentais do mapeamento utilizado. Neste sentido, caso o operador determinístico exista para qualquer instante de tempo, tem-se um sistema dinâmico de tempo contínuo; caso contrário, a existência restrita a tempos isolados dá origem a um sistema dinâmico de tempo discreto. Caso o mapeamento seja uma combinação linear das variáveis de estado, tem-se uma dinâmica linear, e, se esse não for o caso, tem-se um sistema não-linear. Os sistemas dinâmicos são ditos autônomos quando existe apenas dependência implícita do tempo nas equações de estado, enquanto sistemas com dependência explícita do tempo são chamados de não-autônomos. Em especial, todo sistema não-autônomo pode ser reescrito como um sistema autônomo fazendo uma transformação de forma a incorporar o tempo como uma variável de estado.

Em relação à conservação de energia, um sistema é dito conservativo quando as aplicações das equações de movimento preservam o volume no espaço de estados¹, caso contrário, o sistema dissipa energia e é dito dissipativo (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995; Strogatz, 2001; Monteiro, 2006; Anishchenko et al., 2007).

¹O lugar geométrico dos pontos equidistantes de uma determinada condição inicial no espaço de fase define uma hiper-esfera, a qual vai sendo deformada mediante a aplicação das equações de estado. Observa-se, portanto, que algumas direções da dinâmica são contrativas e outras expansivas, sendo que o volume inicial desta hiper-esfera pode ou não ser preservado após as aplicações das equações de movimento.

De maneira geral, sistemas dinâmicos descritos por um conjunto de equações diferenciais assumem mapeamentos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= F_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), t) \\ \dot{x}_2(t) &= F_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), t) \\ &\vdots = \vdots \\ \dot{x}_N(t) &= F_N(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde o operador $\dot{x}(t)$ equivale a $\frac{dx(t)}{dt}$. O sistema de equações diferenciais dado em (2.1) pode assumir a seguinte forma vetorial:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t) \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t)$ é um vetor de funções com componentes $F_j(\mathbf{x}(t), t)$, para $j = 1, 2, \dots, N$, o qual é denominado campo velocidade vetorial (Anishchenko et al., 2007). De forma análoga, sistemas de equações a diferenças são descritos pelo seguinte mapeamento de estados:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= F_1(x_1(n), x_2(n), \dots, x_N(n), n) \\ x_2(n+1) &= F_2(x_1(n), x_2(n), \dots, x_N(n), n) \\ &\vdots = \vdots \\ x_N(n+1) &= F_N(x_1(n), x_2(n), \dots, x_N(n), n) \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde n é o índice de tempo discreto. Um sistema de equações a diferenças assume a seguinte forma vetorial:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(n), n) \quad (2.4)$$

Assim, o conjunto de pontos resultante das sucessivas aplicações do mapeamento de estados a partir de uma determinada condição inicial $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ no caso contínuo ou $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(n_0)$ no caso discreto define uma trajetória de fase ou simplesmente uma trajetória (também chamada de movimento) $\phi_t(\mathbf{x}_0(t_0))$ e $\phi_n(\mathbf{x}_0(n_0))$, para os respectivos casos.

A idéia de regime permanente refere-se ao comportamento assintótico do sistema quando $t \rightarrow \infty$, o que pressupõe a delimitação deste por uma região compacta no espaço de estados. A diferença entre uma trajetória e seu regime permanente é chamada de transiente ou transitório (Parker & Chua, 1989).

2.2 Conjuntos-limite de sistemas dinâmicos

O conceito de regime permanente pode ser traduzido para o espaço de estados na forma de conjuntos-limite. Mais formalmente, assumindo que existam dois conjuntos, U e $L \in U$, onde U é o conjunto de todos os pontos \mathbf{x}_0 do espaço de estados para os quais $\phi_t(\mathbf{x}_0) \in L$ quando $t \rightarrow \infty$ ou quando $t \rightarrow -\infty$, então L é dito um conjunto-limite do sistema dinâmico. Mais especificamente, L é dito um conjunto ω -limite no primeiro caso ($t \rightarrow \infty$) e um conjunto α -limite no segundo caso ($t \rightarrow -\infty$) (Parker & Chua, 1989; Anishchenko et al., 2007). Se todos os pontos do conjunto U pertencem a L no limite quando $t \rightarrow \infty$, então o conjunto-limite L é um atrator, e, conseqüentemente, U é sua bacia de atração. Caso os pontos de U pertençam a L quando $t \rightarrow -\infty$, o conjunto L é dito um repulsor. É possível ainda que U seja composto de dois subconjuntos, tal que $U = W^s \cup W^u$, onde os pontos pertencentes a W^s se aproximam de L no sentido do tempo direto e os pontos pertencentes a W^u tendem a L em tempo reverso. Neste caso, L é chamado conjunto-limite do tipo sela (do inglês *saddle limit set*), e os conjuntos W^s e W^u são as variedades estáveis e instáveis deste conjunto, respectivamente (Anishchenko et al., 2007).

Uma variedade (do inglês *manifold*) pode ser vista como uma coleção de “caminhos” (e.g. trajetórias) ligadas de forma suave. Cada caminho pode ser representado por alguma equação paramétrica, enquanto a conexão suave entre eles significa que não há bicos, descontinuidades ou auto-cruzamentos no objeto geométrico obtido (Burns & Gidea, 2005). Assim, uma variedade M k -dimensional define um espaço matemático localmente homeomórfico (topologicamente equivalente) a um espaço euclidiano \mathbb{R}^k (Parker & Chua, 1989).

O conceito de equivalência topológica é de fundamental importância para a teoria de sistemas dinâmicos, e, mais precisamente, para o estudo da estabilidade de conjuntos-limite. Duas trajetórias são ditas topologicamente equivalentes quando há um homeomorfismo entre elas que preserva o sentido (a orientação) no espaço de fases (Monteiro, 2006). Um homeomorfismo corresponde a uma transformação F injetora, sobrejetora, contínua, inversível e com inversa também contínua aplicada sobre um domínio X de tal forma a produzir uma imagem Y , o que pode ser descrito por $F : X \rightarrow Y$. Um homeomorfismo é chamado de difeomorfismo quando a transformação F e sua inversa são também diferenciáveis em todos os pontos dos seus respectivos domínios (Monteiro, 2006). A existência de equivalência topológica entre trajetórias significa que elas podem ser continuamente deformadas (ou seja, “esticadas” ou “alongadas”, mas não “cortadas” ou “emendadas”) até se tornarem iguais, representando, portanto, comportamentos dinâmicos similares (Monteiro, 2006).

De maneira geral, dinâmicas lineares apresentam apenas pontos fixos e soluções periódicas não-isoladas como conjuntos-limite ², enquanto dinâmicas não-lineares apresentam repertório mais vasto

²Soluções periódicas não-isoladas em dinâmicas lineares estão associadas à presença de pontos de equilíbrio do tipo centro que se caracterizam por estabilidade neutra e são comumente encontrados em sistemas mecânicos ideais tais como

de possíveis soluções, o qual abrange pontos fixos, ciclos-limite, soluções quase-periódicas e caóticas.

Pontos fixos são objetos geométricos de dimensão nula que caracterizam pontos do espaço de estados para os quais o movimento torna-se estacionário, ou seja, $\dot{\mathbf{x}}(t) = 0$ para sistemas de tempo contínuo e $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{x}(n)$ para sistemas de tempo discreto. Ciclos-limite são soluções periódicas, fechadas e isoladas de dimensão unitária para as quais trajetórias vizinhas devem se afastar ou se aproximar, sendo válida a condição $\phi_t^*(\mathbf{x}^*(t+T)) = \phi_t^*(\mathbf{x}^*(t))$ para sistemas de tempo contínuo e $\phi_n^*(\mathbf{x}^*(n+T)) = \phi_n^*(\mathbf{x}^*(n))$ para sistemas de tempo discreto, onde T é o período da oscilação. Observa-se que, para ciclos-limite do tipo sela, as trajetórias vizinhas se aproximam por um lado e se afastam por outro (Monteiro, 2006), de forma análoga ao que topologicamente ocorre para pontos fixos do tipo sela.

Soluções quase-periódicas se caracterizam por definir um movimento composto por um número finito (duas ou mais) de frequências independentes cuja razão é um número irracional. Neste caso, típicas soluções estáveis residem na superfície de um toro k -dimensional, onde k é o número de frequências independentes (Parker & Chua, 1989; Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995).

Uma trajetória caótica, quer pertença a um atrator estranho, um repulsor ou sela, é definida por pelo menos uma direção instável no espaço de estados (Anishchenko et al., 2007), ou seja, tem-se pelo menos uma direção para a qual uma pequena perturbação é amplificada diante da evolução temporal do sistema. Do ponto de vista prático, o comportamento caótico pode ser classificado simplesmente como “nenhum dos anteriores” (Parker & Chua, 1989), ou seja, como um regime permanente no espaço compacto que não é nem um ponto fixo, nem uma oscilação periódica e também não é quase-periódico. O lugar geométrico no espaço de estados para o qual as trajetórias caóticas são atraídas é chamado de atrator estranho, embora não haja consenso acerca da definição rigorosa deste termo, que foi proposto originalmente por Ruelle e Takens em 1971, (Ruelle & Takens, 1971). De maneira geral, este termo é comumente utilizado para definir um atrator que apresenta aperiodicidade e sensibilidade em relação às condições iniciais (Eckmann & Ruelle, 1985). Observa-se ainda que o atrator de um sistema caótico não é um objeto geométrico simples como um ponto, um círculo ou um toro (nem sequer uma variedade (Parker & Chua, 1989)), mas se vincula a estruturas fractais do tipo Cantor geradas a partir do processo de estiramento e dobra decorrente das direções expansivas e contrativas da dinâmica (Parker & Chua, 1989; Monteiro, 2006; Anishchenko et al., 2007).

Com o intuito de exemplificar os típicos conjuntos-limite estáveis passíveis de observação em sistemas físicos, a figura 2.1 mostra tanto o curso temporal como o retrato de fase das variáveis de estado para o modelo neuronal de FitzHugh-Nagumo (FHN)(FitzHugh, 1961, 1969), definido pelas

aqueles compostos por osciladores massa-mola sem dissipação de energia (Strogatz, 2001).

seguintes equações de estado:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= V - \frac{V^3}{3} - W + I(t) \\ \dot{W} &= c(V + a - bW)\end{aligned}\tag{2.5}$$

onde V e W são as variáveis de estado; a , b e c são parâmetros da dinâmica e $I(t)$ é uma entrada externa dada por um trem de pulsos retangulares de amplitude A e frequência ω com ciclo de trabalho de 50%. Todas as unidades são adotadas como sendo arbitrárias ([u.a.] - unidades arbitrárias), e o significado físico deste modelo será analisado de forma mais detalhada no próximo capítulo.

Observa-se no painel 2.1(a) que, na ausência de estimulação externa, as variáveis de estado após um transitório tendem a um ponto fixo e lá permanecem indefinidamente. Quando uma estimulação externa é aplicada com uma determinada amplitude e frequência, pode-se comumente encontrar soluções periódicas na forma de ciclos-limite, tal como é mostrado no painel 2.1(b). Configurações particulares de A e ω também podem levar a soluções quase-periódicas (painel 2.1(c)) e caóticas (painel 2.1(d)), que correspondem, respectivamente, a um toro e a um atrator estranho no retrato de fase. Observa-se ainda que, embora os painéis mostrem planos de fase bidimensionais, o sistema não-autônomo obtido é tridimensional, e as trajetórias nunca se interceptam quando todas as coordenadas do espaço de estados são consideradas, o que é um corolário do teorema de existência e unicidade da solução de um sistema descrito por um conjunto de equações diferenciais (Strogatz, 2001).

2.3 Análise de estabilidade de conjuntos-limite

A estabilidade e a instabilidade dos conjuntos-limite obtidos a partir da solução das equações de movimento definem propriedades fundamentais dos sistemas dinâmicos (Anishchenko et al., 2007). O conceito de estabilidade pode ser fundamentado segundo diferentes noções, o que se reflete nas diferentes definições que norteiam os paradigmas mais usuais dados pela estabilidade segundo Lyapunov, estabilidade assintótica, estabilidade orbital e estabilidade segundo Poisson (Monteiro, 2006; Anishchenko et al., 2007). O termo técnico “estabilidade” parece ter surgido no contexto do estudo de sistemas dinâmicos no século XVIII, tendo sido proposto por Euler em seu trabalho sobre a análise dos corpos flutuantes (Leine, 2010). Posteriormente, o estudo da estabilidade foi extensivamente desenvolvido no contexto da mecânica celeste por Lagrange e Poisson, sendo a atuação de Poincaré crucial para a reinterpretação do trabalho destes dois últimos (Leine, 2010).

Historicamente, a teoria moderna de estabilidade tem o seu início no final do século XIX / início do século XX com o trabalho de Lyapunov sobre a teoria de perturbações. Vale frisar que, embora a associação entre o conceito de estabilidade e soluções que permanecem numa determinada vizi-

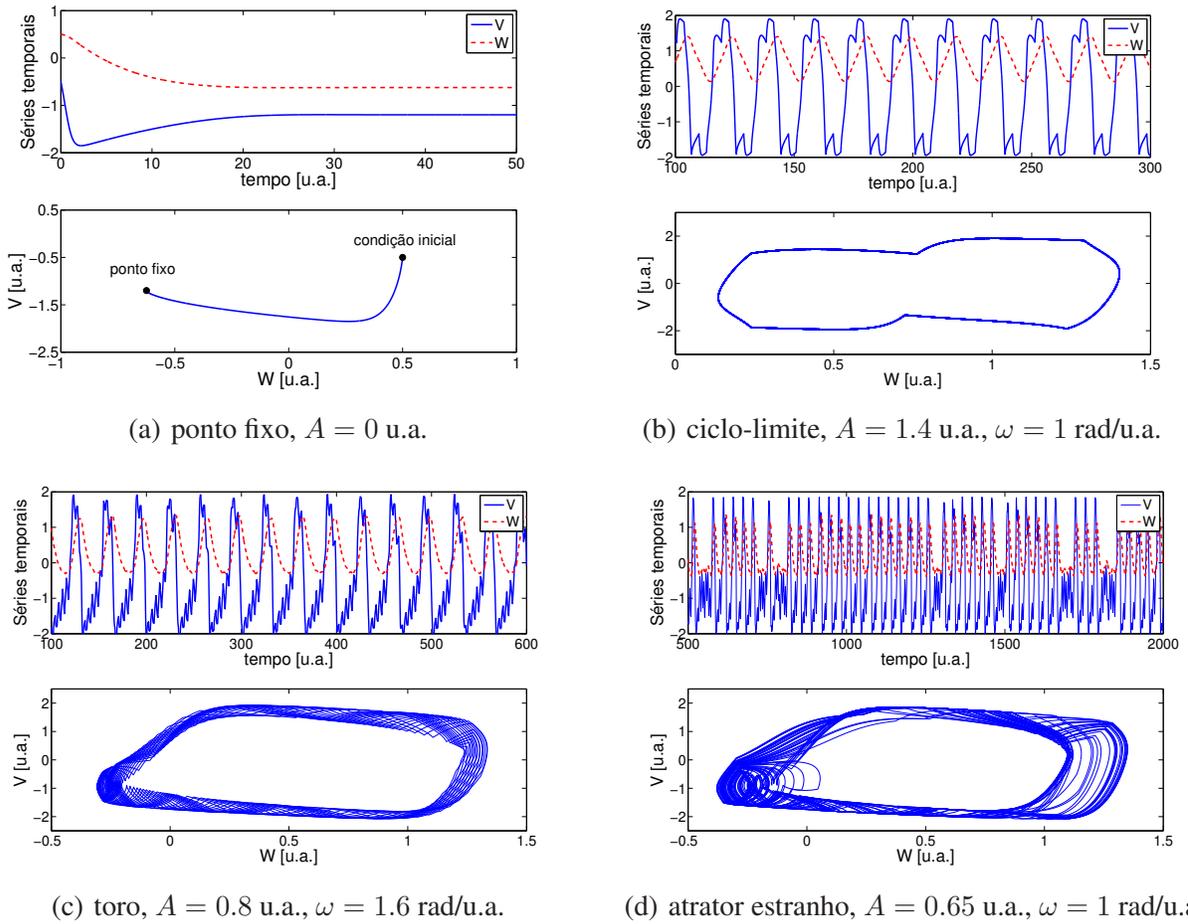


Figura 2.1: O painel 2.1(a) mostra na sua parte superior o curso temporal das variáveis de estado V e W para o modelo de FHN (tomando $A = 0$), bem como seu respectivo plano de fase na parte inferior. De forma análoga, os painéis 2.1(b), 2.1(c) e 2.1(d) mostram as séries temporais para as variáveis de estado e os respectivos conjuntos-limite (ciclo-limite, toro e atrator estranho) obtidos para diferentes valores de A e ω da estimulação externa.

nhança do espaço de estados já pudesse ser encontrada nos trabalhos de Laplace e Poisson, ela só foi formalmente desenvolvida em termos das técnicas matemáticas envolvendo ε e δ posteriormente pela escola russa (Leine, 2010).

Uma determinada trajetória $\phi_t^*(\mathbf{x}_0^*)$ é dita estável segundo Lyapunov se, para um $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, existe um $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que qualquer trajetória $\phi_t(\mathbf{x}_0)$ sujeita à restrição $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^*\| < \delta(\varepsilon)$ satisfaça a desigualdade $\|\phi_t(\mathbf{x}_0) - \phi_t^*(\mathbf{x}_0^*)\| < \varepsilon$ para todo $t > t_0$ (Monteiro, 2006; Anishchenko et al., 2007). Assim, se uma determinada perturbação inicial não cresce mediante a evolução temporal dada pela aplicação das equações de movimento, o sistema é estável no sentido de Lyapunov. Caso o efeito desta perturbação desapareça quando o tempo tende a infinito, ou seja, se

$\|\phi_t(\mathbf{x}_0) - \phi_t^*(\mathbf{x}_0^*)\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, a trajetória é dita assintoticamente estável.

Assim, a estabilidade segundo Lyapunov e a estabilidade assintótica são definidas segundo a evolução temporal de uma pequena perturbação aplicada a uma determinada trajetória. De maneira geral, existem duas abordagens fundamentais para a análise de estabilidade neste contexto: o método direto e o método indireto de Lyapunov. No método direto, a estabilidade é avaliada em termos de funções que descrevem a energia presente no sistema (as quais nem sempre podem ser determinadas de uma forma direta), enquanto o método indireto baseia-se em sucessivas linearizações, o que permite analisar o sistema à luz de conceitos relativos à estabilidade linear (Monteiro, 2006; Leine, 2010).

O método indireto de Lyapunov relaciona-se com algumas contribuições desta tese de doutoramento, e, portanto, é necessário abordar em detalhe os conceitos fundamentais da análise de estabilidade linear.

2.3.1 Conceitos básicos de estabilidade linear

Os princípios que regem a estabilidade linear podem ser bem compreendidos do ponto de vista geométrico em termos do comportamento assintótico de fluxos no espaço de estados bidimensional. Assim, considere o sistema dinâmico linear bidimensional dado pela Eq. (2.6):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.6)$$

onde a matriz \mathbf{A} é:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

e o vetor \mathbf{x} é dado por:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Dada a natureza linear da dinâmica, podem-se encontrar soluções analíticas para a Eq. (2.6) na forma (Strogatz, 2001):

$$\mathbf{x}(t) = e^{\rho t} \mathbf{v} \quad (2.9)$$

onde ρ é a taxa de crescimento e \mathbf{v} é um vetor a ser determinado, o que pode ser feito por meio da substituição da Eq. (2.9) na Eq. (2.6) de forma a obter:

$$\rho e^{\rho t} \mathbf{v} = e^{\rho t} \mathbf{A}\mathbf{v} \quad (2.10)$$

Após uma simplificação, tem-se:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \rho \mathbf{v} \quad (2.11)$$

Observa-se que os valores de ρ_i e \mathbf{v}_i que resolvem a Eq. (2.11) são, respectivamente, os autovalores e autovetores da matriz \mathbf{A} , que podem ser encontrados por meio Eq. (2.12):

$$\det \begin{pmatrix} a - \rho & b \\ c & d - \rho \end{pmatrix} = 0 \quad (2.12)$$

que leva à seguinte equação característica:

$$\rho^2 - \tau\rho + \Delta = 0 \quad (2.13)$$

sendo τ e Δ definidos pelas equações:

$$\tau = \text{tr}(\mathbf{A}) = a + d \quad (2.14)$$

$$\Delta = \det(\mathbf{A}) = ad - bc \quad (2.15)$$

onde $\text{tr}(\mathbf{A})$ e $\det(\mathbf{A})$ são, respectivamente, o traço e o determinante da matriz \mathbf{A} , o que permite obter os autovalores:

$$\rho_i = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}, \quad \text{com } i = 1, 2 \quad (2.16)$$

A substituição de um autovalor na Eq. (2.11) leva ao respectivo autovetor. Em particular, qualquer condição inicial pode ser escrita como uma combinação linear dos autovetores na forma (Strogatz, 2001):

$$\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 \quad (2.17)$$

definindo assim a solução geral:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\rho_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\rho_2 t} \mathbf{v}_2 \quad (2.18)$$

Os pontos fixos ou mesmo as soluções periódicas não-isoladas têm as suas respectivas estruturas topológicas definidas pelos autovalores da matriz \mathbf{A} (Strogatz, 2001), o que possibilita uma análise concisa em termos dos valores de τ e Δ definidos nas Eqs. (2.14) e (3.15) (Strogatz, 2001; Anishchenko et al., 2007; Izhikevich, 2007), a qual é ilustrada na figura 2.2.

Observa-se que, quando $\Delta < 0$, tem-se autovalores reais e com sinais diferentes (i.e. um autovalor positivo e outro negativo), o que caracteriza a presença de uma direção expansiva e outra contrativa, algo típico de um ponto de equilíbrio do tipo sela. Quando $\Delta > 0$, os autovalores podem ser tanto reais de mesmo sinal - o que define pontos fixos do tipo nó - como complexos conjugados - o que define centros e focos. Nós e focos obedecem às restrições $\tau^2 - 4\Delta > 0$ e $\tau^2 - 4\Delta < 0$, respectivamente, sendo a estabilidade dos mesmos definida pela parte real dos autovalores ($Re\{\rho_i\}$).

Estes pontos fixos são ditos estáveis quando $Re\{\rho_i\} < 0$, e, portanto, $\tau < 0$, e instáveis quando $Re\{\rho_i\} > 0$, o que implica em $\tau > 0$.

A parábola $\tau^2 - 4\Delta = 0$ define estrelas e nós degenerados que são casos de fronteira ou transição entre estruturas topológicas mais comuns (nós e focos). Tanto estrelas como nós degenerados apresentam autovalores repetidos, sendo que as estrelas se caracterizam por apresentarem autovetores independentes, enquanto os nós degenerados apresentam multiplicidade tanto dos autovalores como dos autovetores (Strogatz, 2001). Outro típico caso de fronteira ou transição é dado pelos centros de estabilidade neutra obtidos quando $\tau = 0$.

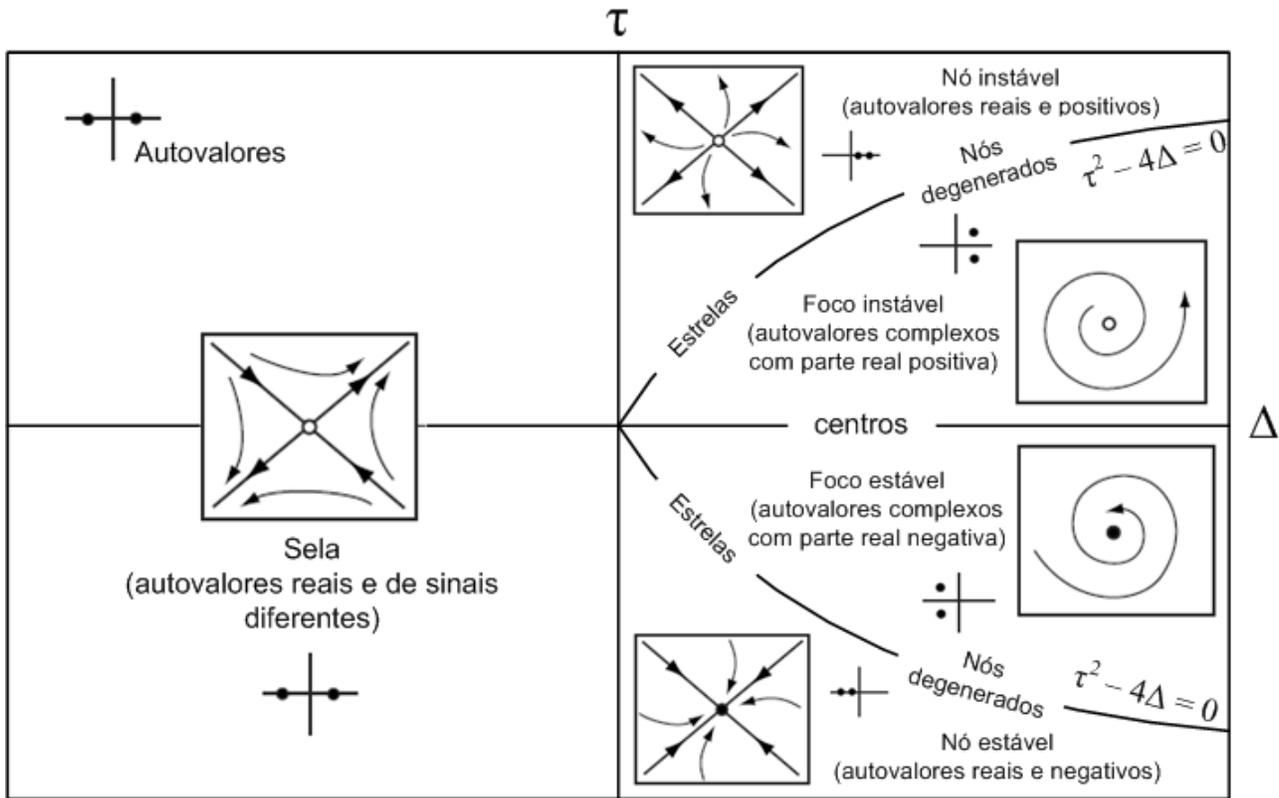


Figura 2.2: Classificação dos pontos de equilíbrio para uma dinâmica linear de acordo com os valores do traço (τ) e do determinante (Δ) da matriz A . Para cada região do plano $\Delta \times \tau$ tem-se os respectivos pontos fixos obtidos, a posição qualitativa dos autovalores da matriz A no plano complexo e o fluxo de algumas trajetórias próximas aos pontos fixos. Pontos de equilíbrio instáveis e estáveis são representados, respectivamente, por círculos vazios e cheios.

Pontos de equilíbrio com $Re\{\rho_i\} \neq 0$ são chamados de hiperbólicos, enquanto pontos de equilíbrio com $Re\{\rho_i\} = 0$ são chamados não-hiperbólicos.

2.3.2 Conceitos básicos de estabilidade não-linear

Conforme mencionado anteriormente, a estabilidade de Lyapunov, assim como a estabilidade assintótica para sistemas não-lineares, é norteadada pela evolução temporal de uma pequena perturbação aplicada a uma trajetória específica no espaço de estados. No método indireto de Lyapunov, pode-se estudar a evolução da perturbação por meio da linearização do operador transição de estados em torno da trajetória perturbada. Assim, dado um sistema autônomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, pode-se estudar a estabilidade da solução $\phi_t^*(\mathbf{x}_0^*)$ mediante a introdução de uma pequena perturbação $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^*$, para a qual tem-se (Anishchenko et al., 2007):

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0^* + \boldsymbol{\delta}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0^*) \quad (2.19)$$

o que pode ser mais facilmente analisado por meio da expansão em série de Taylor de $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0^* + \boldsymbol{\delta})$ em torno de \mathbf{x}_0^* , assumindo ainda que a perturbação seja pequena o suficiente para que os termos de ordem superior a um sejam desprezados. Tem-se assim:

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}(t))\boldsymbol{\delta} \quad (2.20)$$

onde a matriz $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ é a matriz de linearização ou jacobiana de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, cujos elementos são dados por:

$$a_{j,k} = \left. \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \right|_{\mathbf{x}}, \quad j, k = 1, 2, \dots, N \quad (2.21)$$

De forma análoga à definida para a estabilidade linear, tem-se que os autovetores \mathbf{v}_i e autovalores ρ_i da matriz $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ definem a estabilidade local e podem ser obtidos resolvendo Eq. (2.22):

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x})\mathbf{v}_i = \rho_i\mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.22)$$

onde os autovalores são dados pelas raízes da equação característica:

$$\det[\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) - \rho\mathbf{I}] = 0 \quad (2.23)$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade $N \times N$.

Assim, uma perturbação inicial $\boldsymbol{\delta}^i(t_0)$ aplicada num momento t_0 evolui sobre o i -ésimo autovetor na forma:

$$\boldsymbol{\delta}^i(t) = \boldsymbol{\delta}^i(t_0)e^{(t-t_0)\rho_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.24)$$

sendo que o crescimento ou decaimento da magnitude da perturbação ($\|\boldsymbol{\delta}^i(t_0)\|$) depende do sinal da parte real de ρ_i . Embora a matriz $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ possa ser variante no tempo, pode-se assumir que, caso

$\Delta t = t - t_0 \rightarrow 0$, a evolução temporal da perturbação é dada por (Anishchenko et al., 2007):

$$\delta^i(t_0 + \Delta t) = \delta^i(t_0)e^{\rho_i(t_0)\Delta t}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.25)$$

Diante da suposição de que Δt é pequeno, tem-se que a direção do autovetor \mathbf{v}_i não muda para o intervalo de tempo considerado, e, portanto, $\delta^i(t_0 + \Delta t)$ permanece na direção do mesmo. Considerando ainda que a trajetória $\phi_t^*(\mathbf{x}_0^*)$ move-se com pequenos passos Δt , tem-se que a evolução para K passos é dada por (Anishchenko et al., 2007):

$$\delta^i(t) = \delta^i(t_0)\exp\left(\sum_{k=1}^K \rho_i(t_k)\Delta t\right), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.26)$$

o que, tomando os limites quando $\|\delta^i(t_0)\| \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$, leva à igualdade (Anishchenko et al., 2007):

$$\delta^i(t) = \delta^i(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t \rho_i(t')dt'\right), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.27)$$

A estabilidade pode também ser analisada em termos da evolução da norma da perturbação considerada, o que corresponde à abordagem mais comum. Assim, de forma análoga à mostrada na Eq. (2.24), pode-se definir a evolução da norma da perturbação como (Fujisaka & Yamada, 1983; Wolf et al., 1985; G. P. Williams, 1997):

$$\|\delta^i(t)\| = \|\delta^i(t_0)\|e^{(t-t_0)\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.28)$$

onde λ_i é o chamado expoente de Lyapunov associado ao crescimento médio da perturbação sobre o autovetor \mathbf{v}_i . Isso permite que a estabilidade assintótica possa ser avaliada por meio do isolamento de λ_i na Eq. (2.28), o que, no limite quando $t \rightarrow \infty$, leva à expressão (Fujisaka & Yamada, 1983; Wolf et al., 1985; G. P. Williams, 1997):

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln \frac{\|\delta^i(t)\|}{\|\delta^i(t_0)\|}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.29)$$

Deste modo, para um sistema N -dimensional, tem-se uma matriz de linearização $N \times N$, com N autovetores e N autovalores, cuja estabilidade pode ser avaliada por meio de N expoentes de Lyapunov, que são usualmente ordenados de forma decrescente ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$). O conjunto destes expoentes define o chamado espectro de Lyapunov. A rigor, os expoentes de Lyapunov são grandezas locais, e os procedimentos de cálculo dos mesmos, conforme definido para o comportamento assintótico na Eq. (2.29), exige correções numéricas, o que será abordado em detalhe no próximo capítulo.

Das equações Eqs. (2.29) e (2.26), tem-se que os expoentes de Lyapunov se relacionam com os respectivos autovalores da matriz de linearização por meio da relação (Anishchenko et al., 2007):

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \operatorname{Re}\{\rho_i(t')\} dt', \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.30)$$

o que permite concluir que os expoentes de Lyapunov são dados pelo valor médio da parte real dos autovalores da matriz de linearização.

Quando a solução $\phi_t^*(\mathbf{x}_0^*)$ do sistema é um ponto de equilíbrio, a matriz de linearização $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t))$ é considerada apenas neste ponto particular do espaço de estados, e, portanto, assume coeficientes constantes, o que, por sua vez, também é válido para seus autovetores e autovalores (Anishchenko et al., 2007). Neste caso, tem-se uma estrutura análoga à desenvolvida no contexto da estabilidade linear, sendo que os sinais dos expoentes de Lyapunov - que aqui são simplesmente a parte real dos respectivos autovalores da matriz de linearização - permitem inferir sobre a estabilidade do estado de equilíbrio, ou seja, para $\lambda_i = \operatorname{Re}\{\rho_i\} < 0$, com $i = 1, \dots, N$, têm-se pontos de equilíbrio estáveis, e, para $\lambda_i = \operatorname{Re}\{\rho_i\} > 0$, têm-se equilíbrios instáveis. A descrição completa da estrutura do campo vetorial na vizinhança do equilíbrio se dá por meio do conhecimento também da parte imaginária dos autovalores, e, portanto, não pode ser inferida exclusivamente a partir dos expoentes de Lyapunov.

Deve-se ainda observar que a analogia entre a estabilidade de um ponto de equilíbrio em uma dinâmica não-linear e o sistema linear obtido por meio da expansão até primeira ordem por uma série de Taylor só pode ser garantida para pontos do tipo nó, sela ou foco, não sendo necessariamente válida para os casos de fronteira (estrelas, nós degenerados e centros). Para estes últimos, os termos de ordem superior da aproximação por Taylor que foram *a priori* desprezados podem exercer influência relevante na estabilidade. Na verdade, a estabilidade de estrelas e nós degenerados não muda, mas, eventualmente, a estrutura do campo vetorial pode ser diferente daquela estabelecida pela linearização (e.g. uma estrela estável definida pelo sistema linear associado pode ser na verdade uma espiral estável no sistema não-linear original (Strogatz, 2001)). No caso de centros, a estabilidade é influenciada pelos termos de ordem superior da expansão, uma vez que estes se constituem como um caso de fronteira especial onde pode haver troca do sinal da parte real dos autovalores (vide figura 2.2). De fato, o teorema de Hartman-Grobman (Strogatz, 2001; Monteiro, 2006) estabelece que o retrato de fase local próximo a um ponto de equilíbrio hiperbólico é topologicamente equivalente ao retrato de fase da linearização, sendo que o mesmo não é necessariamente válido para pontos não hiperbólicos. Um retrato de fase é dito estruturalmente estável quando sua topologia não é alterada para uma perturbação arbitrariamente pequena no campo vetorial (Guckenheimer & Holmes, 1983; Monteiro, 2006).

Já a análise de soluções periódicas $\phi_t^*(\mathbf{x}_0^*(t_0))$ segue uma abordagem um pouco diferente, uma

vez que a seguinte condição é satisfeita:

$$\phi_t^*(\mathbf{x}_0^*(t_0)) = \phi_t^*(\mathbf{x}_0^*(t_0 + T)) \quad (2.31)$$

onde T é o período da solução. Isso faz com que os elementos da matriz $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}(t))$ também sejam periódicos, o que implica em:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}(t)) = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}(t + T)) \quad (2.32)$$

e permite que a estabilidade da solução seja analisada exclusivamente por meio do comportamento da perturbação no intervalo de um período T , o que pode ser representado por meio da aplicação de um operador $\hat{\mathbf{M}}_T = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}(t + T))$ à perturbação inicial:

$$\delta^i(t_0 + T) = \hat{\mathbf{M}}_T \delta^i(t_0), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.33)$$

onde $\hat{\mathbf{M}}_T$ é a chamada matriz monódroma (Monteiro, 2006; Anishchenko et al., 2007), e caracteriza-se por ser independente do tempo. De forma análoga à realizada na análise de estabilidade do ponto fixo, a estabilidade da solução periódica é definida pelos autovalores da matriz monódroma, obtidos por meio das raízes da equação característica:

$$\det[\hat{\mathbf{M}}_T - \rho \mathbf{I}] = 0 \quad (2.34)$$

e chamados de multiplicadores característicos (μ_i), uma vez que a aplicação do operador monódromo sobre a perturbação inicial projetada nos autovetores \mathbf{v}_i de $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}(t_0))$ é multiplicada pelo respectivo μ_i no período T , sendo que sua relação com os respectivos expoentes de Lyapunov é dada por (Wiesel, 1992; Anishchenko et al., 2007):

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \ln |\mu_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.35)$$

Assim, uma solução periódica é estável segundo Lyapunov se seus multiplicadores característicos satisfazem $|\mu_i| \leq 1$, com $i = 1, \dots, N$. Soluções periódicas apresentam pelo menos um multiplicador igual a um, ou seja, apresentam pelo menos uma direção perturbada tangente ao fluxo, o que implica em pelo menos um expoente de Lyapunov nulo. O ciclo-limite é um atrator quando todos os demais expoentes são negativos. Caso o restante do espectro contenha expoentes com sinais diferentes, tem-se um ciclo-limite do tipo sela, e, caso todos os demais expoentes sejam positivos, tem-se um repulsor.

No caso de uma solução $\phi_t^*(\mathbf{x}_0^*)$ quase-periódica, ou seja, de um movimento composto por um número finito (duas ou mais) de frequências cuja razão entre elas é um número irracional, tem-se uma matriz linearização $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}(t))$ também quase-periódica, e os expoentes de Lyapunov são definidos

apenas para o comportamento assintótico quando $t \rightarrow \infty$. O número de freqüências independentes neste tipo de solução é o mesmo de expoentes de Lyapunov nulos. Caso todos os demais expoentes do espectro sejam negativos, tem-se uma hipersuperfície do tipo toro k -dimensional que define o lugar geométrico da solução atratora, onde k é o número de freqüências independentes. Quando todos os demais expoentes são positivos, o toro é um repulsor, e, quando os demais expoentes apresentam sinais diferentes, tem-se um toro do tipo sela.

Por fim, soluções caóticas levam a um comportamento aperiódico de mesma natureza para os coeficientes da matriz linearização, e os expoentes de Lyapunov também só são definidos para um comportamento assintótico da solução quando $t \rightarrow \infty$. Neste cenário, pode-se avaliar a estabilidade por meio de sucessivas linearizações do sistema dinâmico, o que implica em encontrar um conjunto de equações diferenciais (as chamadas equações variacionais) que descrevem a evolução temporal do sistema linear subjacente à dinâmica não-linear de interesse. Mais que isso, essa abordagem é bem geral e permite obter o espectro de Lyapunov com o intuito de analisar a estabilidade para todos os conjuntos-limite mencionados.

Deve-se observar ainda que, além de ser útil para inferência de estabilidade, o espectro de Lyapunov permite também caracterizar a estrutura topológica do atrator para sistemas dinâmicos de tempo contínuo. Por exemplo, uma solução de um sistema dinâmico de tempo contínuo tridimensional com espectro de Lyapunov descrito por $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ caracteriza-se por ser um ponto fixo quando os sinais dos expoentes são dados, respectivamente, por $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-, -, -)$, enquanto ciclos-limite são dados por espectros do tipo $(0, -, -)$. Um toro bidimensional é obtido quando $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, -)$ e um típico atrator estranho quando $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, 0, -)$ considerando que a solução permanece no espaço compacto, ou seja, vale a restrição $|\lambda_3| > |\lambda_1|$ que caracteriza o sistema dissipativo.

De forma análoga à realizada para sistemas dinâmicos de tempo contínuo, pode-se estudar a estabilidade de sistemas de tempo discreto por meio da evolução temporal de uma pequena perturbação considerando linearizações locais dadas por uma expansão em série de Taylor de primeira ordem, o que leva à seguinte dinâmica de perturbação (Abarbanel, 1996; Anishchenko et al., 2007), Eq. (2.36):

$$\delta(n+1) = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}(n))\delta(n) \quad (2.36)$$

onde, mais uma vez, $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}(n))$ é a matriz linearização, cujos coeficientes são dados pela Eq. (2.21), sendo que, para L_p passos à frente no tempo, a sua sucessiva aplicação sobre a perturbação inicial $\delta(n_0)$ pode ser descrita por:

$$\delta(n_0 + L_p) = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}(n_0 + L_p - 1))\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}(n_0 + L_p - 2)) \dots \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}(n_0))\delta(n_0) \quad (2.37)$$

e, por analogia com o desenvolvimento já realizado para sistemas dinâmicos de tempo contínuo,

tem-se os expoentes de Lyapunov na seguinte forma:

$$\lambda_i = \lim_{L_p \rightarrow \infty} \frac{1}{L_p} \ln \frac{\|\delta^i(n_0 + L_p)\|}{\|\delta^i(n_0)\|}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.38)$$

Eles, por sua vez, relacionam-se com os respectivos autovalores μ_i de $\hat{A}(\mathbf{x}(n))$ por meio da expressão:

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |\mu_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.39)$$

A Eq. (2.39) estabelece que a estabilidade de pontos fixos e ciclos-limite é caracterizada pelos multiplicadores μ_i , sendo estes análogos aos definidos para a matriz monódroma na análise da estabilidade de sistemas de tempo contínuo. Assim, quando $|\mu_i| < 1$, com $i = 1, 2, \dots, N$, o conjunto-limite definido pela solução do mapa é assintoticamente estável (Parker & Chua, 1989; Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995; Abarbanel, 1996; Monteiro, 2006; Anishchenko et al., 2007).

Observa-se ainda que sistemas autônomos de tempo contínuo exigem ao menos três variáveis de estado para apresentar caos, restrição esta não aplicável para dinâmicas de tempo discreto (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995; Monteiro, 2006). Neste último caso, mesmo dinâmicas unidimensionais podem apresentar um comportamento caótico no espaço de estados compacto. A caracterização topológica da solução atratora para sistemas de tempo discreto em termos dos expoentes de Lyapunov também não é única, sendo que tanto pontos de equilíbrio estáveis como ciclos-limites podem apresentar espectro de Lyapunov com todos os expoentes negativos.

2.4 Estabilidade estrutural, bifurcações e diagramas de bifurcação

As características topológicas qualitativas do retrato de fase de um sistema dinâmico são intrinsecamente dependentes dos seus parâmetros, sendo que a variação de um ou mais deles além de um determinado valor crítico pode provocar uma bifurcação, ou seja, uma mudança na estabilidade estrutural do campo vetorial (i.e. perde-se a equivalência topológica em relação a uma versão perturbada deste campo vetorial (Monteiro, 2006)), e, conseqüentemente, uma mudança qualitativa no comportamento da solução (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995; Strogatz, 2001; Monteiro, 2006). Esta fragilidade na estabilidade estrutural implica na criação, destruição ou alteração da estabilidade de conjuntos-limite. A teoria de bifurcações de um modo geral é muito ampla, e sua descrição detalhada transcende o escopo desta tese, para a qual faz-se necessário entender apenas sua idéia fundamental e seus conceitos básicos, bem como as estratégias numéricas adotadas para detectar mudanças

qualitativas no retrato de fase (para mais detalhes, vide Kuznetsov (Kuznetsov, 2010)).

Assim, define-se aqui codimensão de uma bifurcação como sendo o número de parâmetros de controle utilizados com o intuito de produzir a bifurcação propriamente dita. Sistemas dinâmicos podem apresentar bifurcações dos tipos local e/ou global. Bifurcações locais podem ser capturadas dentro do cenário de análise da estabilidade linear e estão associadas à vizinhança local de uma trajetória, refletindo a mudança de estabilidade, criação ou destruição de conjuntos-limite (Anishchenko et al., 2007). Já as bifurcações globais estão associadas a mudanças qualitativas no retrato de fase de sistemas dinâmicos que não podem ser capturadas mediante análise local.

Essas alterações topológicas mediante a modificação de um determinado parâmetro de controle podem acontecer com qualquer conjunto-limite, mas, do ponto de vista prático, são especialmente interessantes no estudo das soluções atratoras. As bifurcações de atratores são usualmente classificadas como internas ou crises (Anishchenko et al., 2007). No primeiro caso, há mudanças qualitativas na estrutura topológica do atrator, sem a alteração da sua bacia de atração, enquanto, no segundo caso, tais mudanças são também acompanhadas de alterações qualitativas na bacia de atração. O termo catástrofe é também usualmente utilizado para se referir a bifurcações do tipo crise, embora os dois conceitos tenham sido desenvolvidos em diferentes âmbitos da teoria de sistemas não-lineares (Thom, 1994; Poston & Stewart, 1996). Dentre as típicas bifurcações locais de codimensão unitária podem-se citar as bifurcações sela-nó, transcritical, forquilha e Hopf (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995; Strogatz, 2001; Monteiro, 2006).

A bifurcação sela-nó também é chamada de bifurcação tangente ou bifurcação de dobra, e refere-se ao mecanismo de criação ou destruição de um par de pontos de equilíbrio - mais especificamente, um ponto de sela e um nó estável - dado pela colisão destes pontos fixos de estabilidade contrárias. Quando os pontos de equilíbrio são criados a partir do aumento do parâmetro de controle, tem-se um caso supercrítico, enquanto o caso subcrítico caracteriza-se pelo desaparecimento deste pontos de equilíbrio diante do incremento do parâmetro de controle (Monteiro, 2006). O surgimento ou desaparecimento destes conjuntos-limite é acompanhado de uma mudança qualitativa na bacia de atração, o que define uma bifurcação do tipo crise (Anishchenko et al., 2007).

A bifurcação transcritical caracteriza-se pela troca de estabilidade de pontos de equilíbrio após a colisão dos mesmos (Strogatz, 2001), enquanto a bifurcação de forquilha caracteriza-se pelo surgimento (caso supercrítico) ou desaparecimento (caso subcrítico) de um par de pontos fixos de mesma estabilidade diante do aumento de um determinado parâmetro de controle. Já na bifurcação de Hopf, tem-se a presença de autovalores puramente imaginários para a matriz linearização no ponto de bifurcação e a perda de estabilidade de um ponto fixo do tipo foco estável, o que pode dar origem a um ciclo-limite (caso supercrítico) ou a um foco instável (caso subcrítico) (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995; Anishchenko et al., 2007).

De forma análoga ao que se tem para bifurcações de ponto fixos, pode-se também definir bifurcações para outros conjuntos-limite, o que leva a um vasto repertório de mecanismos (e.g. bifurcações por duplicação de período, bifurcações de Neimark, dentre tantas outras), o que se torna ainda mais complexo quando o número de dimensões no espaço de estados é superior a dois. Uma descrição bem mais completa e detalhada da teoria de bifurcações, bem como suas respectivas formas normais pode ser encontrada em Kuznetsov (Kuznetsov, 2010).

Nas bifurcações globais, as colisões entre conjuntos-limite usualmente se dão entre soluções de dimensão maior que zero, ou entre conjuntos deste último tipo e pontos de equilíbrio, tal como acontece nas chamadas bifurcações homoclínicas (onde um ciclo-limite colide com um ponto de equilíbrio do tipo sela) ou nas bifurcações heteroclínicas (onde um ciclo-limite colide com dois ou mais pontos de equilíbrio do tipo sela). Nestes dois últimos casos, as bifurcações globais estão intrinsecamente relacionadas com o comportamento das variedades estáveis e instáveis de conjuntos-limite do tipo sela, em particular, com as trajetórias homoclínicas e heteroclínicas que definem separatrizes do sistema dinâmico. Uma trajetória é dita heteroclínica quando ela conecta dois pontos de equilíbrio distintos, podendo conectar diferentes pontos de sela, ou mesmo pontos de equilíbrio instáveis e estáveis. Já trajetórias homoclínicas são aquelas que conectam o ponto de equilíbrio de sela a ele mesmo (Parker & Chua, 1989; Monteiro, 2006; Izhikevich, 2007). Ambas as trajetórias desempenham papel fundamental na análise geométrica de sistemas dinâmicos.

A análise das bifurcações produzidas quando um determinado parâmetro da dinâmica é variado pode ser feita por meio do diagrama de bifurcação, no qual típicos valores dos conjuntos-limite são mostrados em função destes parâmetros de controle da dinâmica, o que pode, para efeitos didáticos, ser aqui introduzido no contexto de sistemas de tempo discreto. Por exemplo, considere o mapa logístico dado por:

$$x(n+1) = \alpha x(n)(1 - x(n)) \quad (2.40)$$

onde α é um parâmetro de controle. O diagrama de bifurcação para as soluções estáveis (também chamado de diagrama de bifurcação de fase (Anishchenko et al., 2007)) pode ser construído por meio dos pontos que caracterizam o conjunto-limite obtido em função do respectivo parâmetro de controle. Com este intuito, a figura 2.3 mostra os últimos 30 pontos da solução da Eq. (2.40) após 1000 iterações, o que é suficiente para assumir que o regime permanente tenha sido atingido. Considera-se ainda para a construção do diagrama uma varredura no parâmetro de controle no intervalo $2.8 \leq \alpha \leq 4$, com passos de 0.0005, com a dinâmica partindo sempre de uma mesma condição inicial $x_0 = 0.49$.

É interessante observar que, para $\alpha < 3$, o sistema apresenta apenas um ponto de equilíbrio estável, o qual, a partir de $\alpha = 3$, perde a sua estabilidade e apresenta uma bifurcação do tipo duplicação de período (*flip*). Esse mecanismo de perda de estabilidade se dá quando algum autovalor da matriz linearização cruza o círculo unitário - que delimita a região dos autovalores que levam a

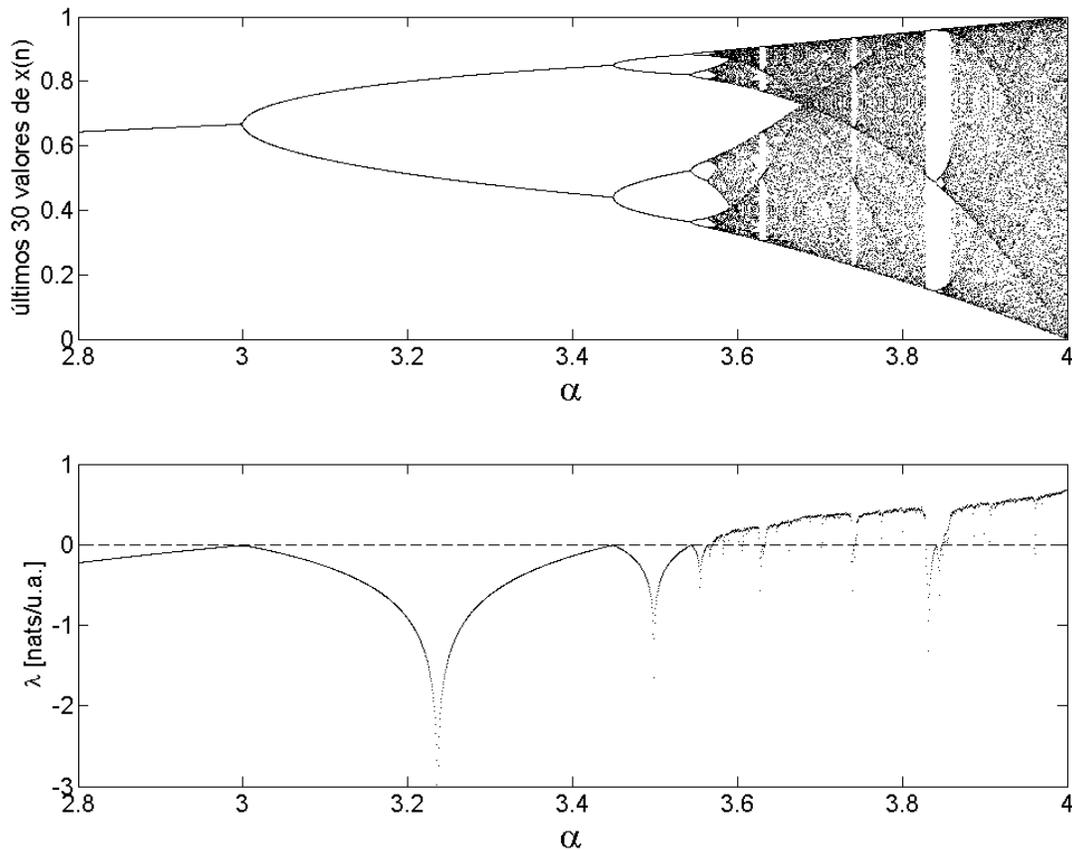


Figura 2.3: O painel superior mostra o diagrama de bifurcação para o mapa logístico para o parâmetro de controle α , enquanto o painel inferior mostra os respectivos expoentes de Lyapunov associados aos comportamentos assintóticos da solução para os respectivos valores dos parâmetros de controle.

um sistema estável - por -1 na reta real (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995) e pode se repetir mediante o aumento de α , provocando uma cascata de bifurcações do tipo *flip* supercrítica até que um número virtualmente infinito de períodos é alcançado, levando ao comportamento caótico. Este tipo de cascata de bifurcações descreve uma rota para o caos bem definida e que aparece em diferentes sistemas dinâmicos que modelam vários processos naturais, caracterizando o chamado cenário de Feigenbaum (Feigenbaum, 1978; Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995). Em particular, este cenário se destaca pela presença de invariância de escala, como aquela obtida pela razão entre as distâncias dos pontos (α_n) em que ocorrem as sucessivas bifurcações:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} = 4.6692016091029909 \dots \quad (2.41)$$

Uma vez que o comportamento caótico tenha sido atingido, é possível observar que o posterior aumento do parâmetro de controle pode induzir ao aparecimento de janelas de comportamentos periódicos provocados pela existência de bifurcações do tipo sela-nó. O comportamento caótico pode ser retomado mediante novas cascatas de duplicações de período, sendo que o tamanho do atrator estranho pode variar subitamente por meio do mecanismo de crise interior tal como proposto por Grebogi e Ott (Grebogi & Ott, 1983). Este vasto repertório de soluções e de mecanismos de perda da estabilidade estrutural mostram a riqueza de comportamentos associados a dinâmicas não-lineares, e justificam de forma contundente o título do trabalho de May (May, 1976): “modelos matemáticos simples com dinâmicas muito complicadas” (do inglês *simple mathematical models with very complicated dynamics*), o qual tornou o mapa logístico um modelo emblemático no estudo de sistemas não-lineares.

A estrutura topológica da solução obtida quando α é variado no mapa logístico apresenta plena correspondência com os respectivos expoentes de Lyapunov calculados e mostrados no painel inferior da figura 2.3. Em sistemas discretos, tanto pontos fixos como ciclos-limite apresentam expoentes de Lyapunov negativos. Pontos de bifurcação se caracterizam por expoentes de Lyapunov nulos, enquanto solução caóticas apresentam expoentes de Lyapunov positivos.

No caso de sistemas de tempo contínuo, torna-se pouco prático mostrar diretamente a estrutura do conjunto-limite em função do parâmetro de controle tal como feito para sistemas discretos. No entanto, pode-se definir uma seção de Poincaré a partir de um hiperplano representativo no espaço de estados da dinâmica de tal forma que a intersecção deste hiperplano com a solução do sistema defina os instantes de tempo de amostragem das variáveis de estado (Parker & Chua, 1989). Nesta abordagem, soluções periódicas em regime permanente vão sempre interceptar o plano nos mesmos pontos (figura 2.4(a)), enquanto soluções tipicamente aperiódicas tendem a interceptar a seção de Poincaré em pontos diferentes, levando à amostragem de um número de pontos que tende a infinito (figura 2.4(b)) conforme o tempo evolui.

Por meio deste procedimento, pode-se plotar os pontos amostrados de uma determinada variável de estado em função dos parâmetros de controle do sistema, tal como foi feito para a construção do diagrama de bifurcação no caso de sistemas de tempo discreto, o que permite observar de forma adequada a estrutura topológica do atrator. Para uma descrição detalhada desta abordagem e detalhes de interpretação desses diagramas, recomenda-se consultar Parker e Chua (Parker & Chua, 1989).

Alternativamente à amostragem por meio da definição de uma seção de Poincaré, podem-se também definir os instantes de amostragem das variáveis de estado por meio de uma frequência fixa ω_s , e, caso esta seja adequada, tem-se o chamado mapa estroboscópico da dinâmica, o qual é qualitativamente equivalente ao diagrama de bifurcação. Mais uma vez, esses pontos amostrados (ou pelo menos uma coordenada deles) podem ser plotados em função do parâmetro de controle, fornecendo

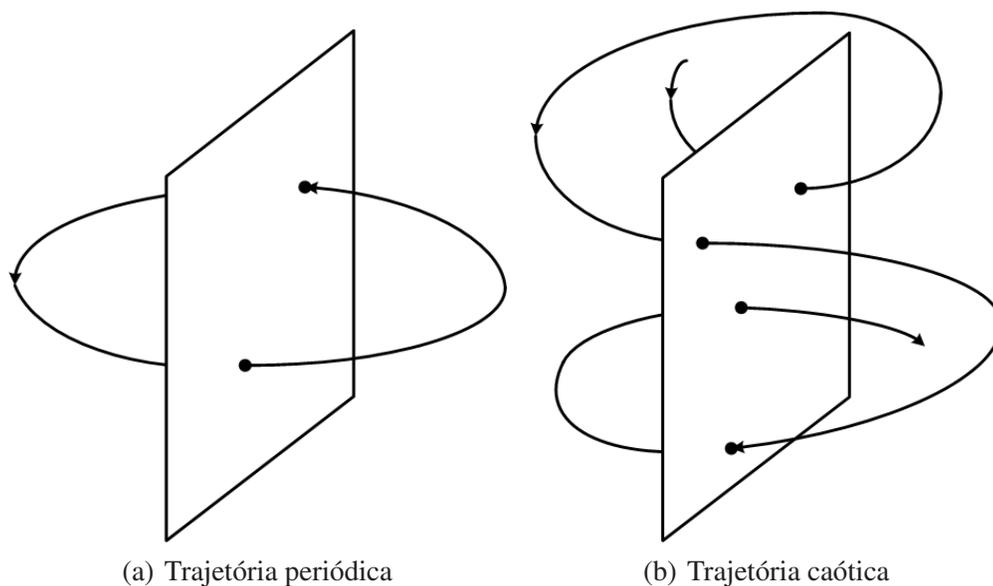


Figura 2.4: O painel 2.4(a) mostra típicas intersecções de uma trajetória periódica com uma seção de Poincaré, enquanto o painel 2.4(b) mostra típicas intersecções de uma seção de Poincaré dadas pela evolução de uma trajetória caótica.

um importante retrato qualitativo da estrutura topológica dos conjuntos-limite obtidos. De modo geral, a abordagem aqui descrita estabelece a construção de diagramas de bifurcação para conjuntos atratores no espaço de estados, o que se torna interessante na medida em que estes são os conjuntos-limite tipicamente observados experimentalmente. Entretanto, nem todas as soluções co-existentes do sistema dinâmico (e.g. as soluções instáveis) são capturadas por este procedimento, sendo, portanto, impossível precisar os tipos de bifurcações observadas, mas apenas o resultado delas na alteração qualitativa da estrutura topológica do atrator (Parker & Chua, 1989).

2.5 Medidas estatísticas, invariantes e de informação

2.5.1 Elementos da teoria de probabilidades

Embora esta tese de doutoramento trate fundamentalmente de sinais determinísticos gerados por dinâmicas não-lineares, nem todas as séries temporais observadas na prática podem ser tratadas neste contexto, o que se justifica pela existência de fontes de incertezas de diversas origens. Neste caso, torna-se extremamente útil a descrição destas observações em termos da teoria de probabilidades, o que, essencialmente, visa capturar a regularidade estatística de um processo aleatório (Romano et al., 2010).

Mais especificamente, o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório define um espaço amostral Ω , sendo que um determinado evento A pode se referir a um elemento, um subconjunto ou mesmo um conjunto de subconjuntos de Ω . Assim, o número de ocorrências de A ($N(A)$) diante das N realizações de um experimento define a frequência relativa de A :

$$f(A) = \frac{N(A)}{N} \quad (2.42)$$

para a qual vale a seguinte propriedade:

$$0 \leq f(A) \leq 1 \quad (2.43)$$

Caso o experimento exiba regularidade estatística, tem-se a definição da probabilidade de ocorrência de A como sendo:

$$Pr(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(A)}{N} \quad (2.44)$$

Embora a Eq. (2.44) estabeleça um conceito intuitivo de probabilidade em termos de frequência relativa, a teoria de probabilidades propriamente dita apenas ganha papel de destaque na ciência após sua fundamentação axiomática estabelecida por Kolmogorov (Romano et al., 2010). Axiomas esses que são enunciados a seguir (Papoulis, 2002; Romano et al., 2010):

$$Pr(A) \geq 0 \quad (2.45)$$

$$Pr(\Omega) = 1 \quad (2.46)$$

$$\text{Se } A \cap B = \emptyset, \text{ então } Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) \quad (2.47)$$

onde \cap e \cup são, respectivamente, as operações de intersecção e união de conjuntos.

Diante destes axiomas, podem-se estabelecer conceitos fundamentais da teoria de probabilidades. Por exemplo, dado dois eventos A e B , a probabilidade condicional entre eles, ou seja, a probabilidade de ocorrência de A dado um evento B , pode ser descrita por:

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)} \quad (2.48)$$

Decorre da Eq. (2.48) que, caso dois eventos A e B sejam independentes, tem-se que a ocorrência de A não exerce influência sobre a probabilidade de ocorrência de B , o que fornece:

$$Pr(A \cap B) = Pr(A)Pr(B) \quad (2.49)$$

Uma vez introduzido o conceito de probabilidade e seus axiomas, pode-se também apresentar o

conceito de variável aleatória de forma mais rigorosa. Uma variável aleatória é definida como uma função $X(\cdot)$ que associa um número $x_i = X(\omega_i)$, com $\omega_i \in \Omega$ a cada resultado do conjunto de observações. Quando a imagem deste espaço amostral mapeado por X é definida por um conjunto contável, tem-se uma variável aleatória discreta, enquanto variáveis aleatórias contínuas se caracterizam por um conjunto imagem também contínuo.

Nestes termos, pode-se definir a probabilidade de uma variável aleatória X ser menor ou igual a x por meio da função distribuição cumulativa de X (cdf - do inglês *cumulative distribution function*), a qual pode ser descrita por:

$$P_X(x) = Pr[X(\omega) \leq x] = Pr[X \leq x] \quad (2.50)$$

para x no domínio $-\infty < x < \infty$. A partir da função distribuição cumulativa, pode-se introduzir a função massa de probabilidade (pmf - do inglês *probability mass function*) para variáveis aleatórias discretas, ou função densidade de probabilidade (pdf - do inglês *probability density function*) para variáveis contínuas, como sendo:

$$p_X(x) = \frac{d}{dx}(P_X(x)) \quad (2.51)$$

Tanto $P_X(x)$ como $p_X(x)$ contêm a informação completa sobre o modelo probabilístico que gera X (Yates & Goodman, 1999). Entretanto, a determinação destas funções por meio de um modelo estatístico exato pode ser trabalhosa ou mesmo indisponível na prática (Romano et al., 2010), o que torna algumas medidas estatísticas relativamente simples muito atraentes para a caracterização do comportamento estatístico de X . Um exemplo disso é dado pela noção de momento. Formalmente, o momento estatístico de ordem n de uma variável aleatória pode ser definido pela expressão:

$$E\{X^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p_X(x) dx \quad (2.52)$$

onde $E\{\cdot\}$ é o operador esperança estatística, e o caso particular $n = 1$ leva à definição da média ou valor esperado de X :

$$\mu_X = E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx \quad (2.53)$$

Já a variância desta variável pode ser definida como o momento de segunda ordem de X em torno da média, i.e.:

$$\text{var}\{X^n\} = E\{(X - \mu_X)^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^n p_X(x) dx \quad (2.54)$$

No caso de eventos descritos por múltiplas variáveis aleatórias, pode-se generalizar os conceitos até aqui desenvolvidos por meio da descrição da estatística conjunta destas variáveis. Por exemplo, a

cdf $P_{X,Y}(x, y)$ refere-se a probabilidade de as variáveis aleatórias X e Y serem menores ou iguais a x e y , respectivamente, o que é dado por:

$$P_{X,Y}(x, y) = Pr[X \leq x, Y \leq y] \quad (2.55)$$

e fornece a pmf ou pdf conjunta das variáveis X e Y por meio da expressão:

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 P_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (2.56)$$

A inclusão da teoria de probabilidades no âmbito do tratamento de sinais se faz mais propriamente pela associação de um espaço amostral a um conjunto de funções, o que dá origem ao conceito de processo estocástico. Formalmente, um processo estocástico $X(t)$ é uma coleção ou conjunto de funções geradas por uma regra que associa uma função amostral $x(t, \omega_i)$ a cada possível realização de um elemento do espaço amostral.

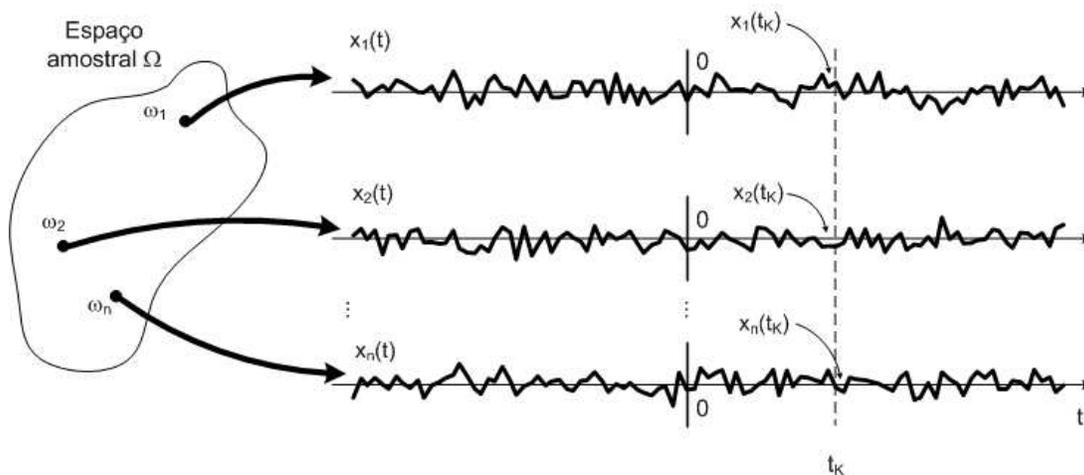


Figura 2.5: Representação de um processo estocástico com variáveis aleatórias contínuas, para o qual diferentes elementos do espaço amostral são associados a funções amostrais. Figura modificada de (Romano et al., 2010).

Assim, para um dado ω_i tem-se uma única função do tempo que se configura como resultado de um experimento aleatório (conforme representado na figura 2.5, modificada de (Romano et al., 2010)), sendo que, para um dado instante de tempo t_K o valor de $X(t_K)$ depende de ω_i , e, portanto, também se configura como uma variável aleatória. Conseqüentemente, $x(t, \omega_i)$ pode ser visto como um fluxo temporal de variáveis aleatórias e sua caracterização por meio dos momentos estatísticos se dá de forma análoga à definida anteriormente quando um determinado instante de tempo t é fixado.

Isso permite definir a média de um processo estocástico como sendo:

$$\kappa_1(X, t) = E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_{X(t)}(x)dx \quad (2.57)$$

onde $p_{X(t)}(x)$ é chamado de pdf de primeira ordem do processo, uma vez que leva em consideração apenas um instante das funções $x(t, \omega_i)$. O análogo ao momento de segunda ordem de uma variável aleatória também pode ser usado para definir a função de autocorrelação para um processo estocástico. Esta função pode ser vista como a esperança estatística do produto das variáveis aleatórias obtidas mediante a fixação de dois instantes de tempo distintos, t_1 e t_2 , o que pode ser descrito na forma:

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2p_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)dx_1dx_2 \quad (2.58)$$

onde $p_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)$ é a pdf de segunda ordem do processo. Caso uma amostragem no tempo da variável aleatória seja realizada, dando origem a uma seqüência discreta $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$, pode-se então introduzir a matriz de autocorrelação na forma, (Romano et al., 2010):

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{xx}^T\} &= E \left\{ \begin{pmatrix} X(t_1)X(t_1) & \dots & X(t_1)X(t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X(t_n)X(t_1) & \dots & X(t_n)X(t_n) \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} R_X(t_1, t_1) & \dots & R_X(t_1, t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_X(t_n, t_1) & \dots & R_X(t_n, t_n) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.59)$$

onde $\mathbf{x} = [X(t_1) X(t_2) \dots X(t_n)]^T$.

De maneira geral, a teoria de probabilidades é bem ampla, e seus aspectos são abordados em detalhe em diversos textos na literatura (Yates & Goodman, 1999; Haykin, 2001; Papoulis, 2002; Romano et al., 2010), sendo que aqui são explorados apenas alguns conceitos fundamentais para os propósitos desta tese, sobretudo no que concerne a uma definição mais intuitiva do conceito de medidas invariantes e de informação.

2.5.2 Medidas invariantes

A capacidade de previsão limitada de estados futuros de um sistema diante um ponto de partida definido com precisão finita em sistemas caóticos suscita de forma ainda mais contundente o debate sobre a natureza probabilística ou determinística dos processos físicos. É interessante observar que,

embora sistemas ditos caóticos sejam puramente determinísticos, ou seja, não recorram a qualquer espécie de função densidade de probabilidade nas suas descrições, a incerteza no estado inicial aliada à decorrelação decorrente da própria aplicação das equações de estado introduzem um fator de “aleatoriedade”, fazendo com as respectivas soluções obtidas diante de condições iniciais diferentes possam ser vistas como diferentes realizações de um processo estocástico.

Neste sentido, o estudo de sistemas dinâmicos se faz mais adequado no contexto de medidas que sejam robustas em relação a incertezas nas condições iniciais que definem a bacia de atração de um determinado conjunto-limite, tal como é feito no âmbito da teoria ergódica (Guckenheimer & Holmes, 1983; Pollicott & Yuri, 1998) por meio da introdução do conceito de medidas invariantes.

Formalmente, uma medida invariante ξ para um mapeamento $f : X \rightarrow X$ em um espaço métrico (i.e. um conjunto onde a noção de distância é bem definida entre seus respectivos elementos) é aquela que obedece à seguinte propriedade (Guckenheimer & Holmes, 1983):

$$\xi(f^{-1}(U)) = \xi(U) \quad (2.60)$$

para todos os conjuntos U .

De maneira geral, as medidas invariantes são entidades matemáticas que descrevem quantitativamente as propriedades do sistema dinâmico gerado por f , e, em especial, algumas delas são frequentemente utilizadas para a caracterização da estrutura topológica, previsibilidade e taxa de geração de informação de um atrator. Vale ressaltar aqui que Guckenheimer e Holmes (Guckenheimer & Holmes, 1983) apresentam provas formais de que entropias, dimensões e expoentes de Lyapunov de conjuntos-limite obedecem à propriedade enunciada na Eq. (2.60).

As medidas invariantes de dimensão relacionam-se, de certa forma, com um conceito primitivo da geometria euclidiana. A dimensão de um conjunto de pontos é o número mínimo de coordenadas necessárias para localizar cada ponto deste conjunto a partir de uma determinada referência (Monteiro, 2006), o que permite definir classicamente a dimensão de um ponto como sendo nula, de uma reta como sendo unitária (necessita-se apenas de um determinado comprimento de arco a partir de uma referência para especificar o conjunto), de uma superfície como sendo 2 e assim por diante. Entretanto, alguns conjuntos apresentam estruturas geométricas mais complicadas exigindo uma definição mais geral de dimensão para descrevê-los. Tal definição geral de dimensão pode ser introduzida a partir do número mínimo de hipercubos ($N(\epsilon)$) de lado ϵ necessários para cobrir todo o conjunto de pontos quando $\epsilon \rightarrow 0$ (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995; Monteiro, 2006), tal como definido pela dimensão de contagem de caixas (do inglês, *box-counting dimension*) ou dimensão de capacidade:

$$D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\epsilon))}{\log(1/\epsilon)} \quad (2.61)$$

que, em condições específicas (quando a otimalidade em relação à cobertura do espaço é atingida), define também a chamada dimensão fractal de Hausdorff (D_H) (Monteiro, 2006). Na prática, esta situação de otimalidade dificilmente é encontrada, e D_0 costuma servir como uma aproximação da dimensão de Hausdorff, sendo portanto ambas aqui chamadas indiscriminadamente de dimensão fractal.

Em especial, alguns conjuntos de dimensão fractal são não homogêneos em relação à métrica de escala ϵ (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995; Monteiro, 2006), o que motiva uma definição alternativa da dimensão em termos da frequência relativa com que regiões do conjunto são visitadas. Assim, a probabilidade p_i de se encontrar um ponto na i -ésima caixa de escala ϵ é dada por:

$$p_i = p_i(\epsilon) = \lim_{N_p \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N_p} \quad (2.62)$$

onde N_p é o número total de pontos do conjunto e N_i é o número de pontos na i -ésima caixa, sendo que, a forma com que p_i varia quando $\epsilon \rightarrow 0$ leva à definição da dimensão generalizada de Renyi (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995):

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log_2 \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q}{\log_2 \epsilon}, \quad (q \in \mathbb{R}, q \neq 1) \quad (2.63)$$

A partir da definição de dimensão generalizada de Renyi, tem-se a definição de dimensão fractal quando $q = 0$ (Eq. (2.61)) e a definição de dimensão de informação³ quando $q = 1$, a qual assume a forma:

$$D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \log_2 p_i}{\log_2(1/\epsilon)} \quad (2.64)$$

Outro caso particular de dimensão bastante utilizado na caracterização de conjuntos-limite é obtido quando $q = 2$, o que define a chamada dimensão de correlação do conjunto:

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log_2 \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^2}{\log_2(\epsilon)} \quad (2.65)$$

As dimensões generalizadas de Renyi permitem definir uma métrica de não-homogeneidade do atrator, uma vez que realçam as regiões mais visitadas do conjunto quando q é aumentado e ressaltam as regiões menos densas quando q é reduzido, sendo que vale a restrição $D_q \leq D_{q'}$ com $q > q'$ (e.g. $D_0 \geq D_1 \geq D_2 \geq \dots$) (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995).

Esta teoria geométrica de conjuntos se integra à teoria de sistemas dinâmicos não-lineares na me-

³A dimensão de informação é obtida após a manipulação adequada do limite $\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{q-1} \log_2 \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q$, que leva à informação de Shannon para os pontos do conjunto (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995).

didada em que o regime permanente destes sistemas define objetos geométricos (eventualmente complexos, mas ordenados) passíveis de caracterização invariante por meio das Eqs. (2.61), (2.64), (2.65) e das dimensões generalizadas de Renyi de um modo geral. Curiosamente, enquanto conjuntos-limite do tipo ponto fixo, ciclo-limite e toro se caracterizam por apresentar dimensões inteiras, atratores estranhos destacam-se por apresentar dimensões fractais, o que justifica o uso de definições mais gerais de dimensão.

O conceito de dimensão fractal pode ser relacionado com os expoentes de Lyapunov por meio da conjectura de Kaplan-Yorke (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995). Esta conjectura define a dimensão de Kaplan-Yorke como:

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{\|\lambda_{j+1}\|} \quad (2.66)$$

sendo λ_i com $i = 1, \dots, N$ o espectro de Lyapunov ordenado de forma decrescente e j o maior inteiro tal que $\sum_{i=1}^j \lambda_i > 0$ (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995). A conjectura estabelece que D_{KY} aproxima D_0 , e tem sido comprovada para vários sistemas dinâmicos. Entretanto, existem casos em que esta aproximação é imprecisa, o que se deve ao fato de os expoentes de Lyapunov considerarem apenas os aspectos expansivos da dinâmica, e não o processo de dobra associado à aplicação das equações de estado (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995; Monteiro, 2006).

2.5.3 Medidas teóricas de informação

O conceito de cobrimento do espaço de estados por meio de hipercubos, bem como a caracterização do atrator por meio da frequência relativa com que suas regiões são visitadas, guarda profunda relação com os conceitos da teoria de informação. De fato, a teoria de probabilidades já traz em si alguns conceitos fundamentais do ponto de vista de informação⁴, mas o sentido mais preciso, bem como a quantificação mais adequada desta, se faz, sem dúvida, no contexto da teoria da informação desenvolvida por Shannon (Shannon, 1948). Neste cenário, pode-se definir a informação ganha ($I(x_i)$) a partir do conhecimento da realização de um determinado evento $X = x_i$ de probabilidade p_i dentre um conjunto de N_s estados discretos e finitos como sendo (Haykin, 2001):

$$I(x_i) = \log(1/p_i) = -\log(p_i) \quad (2.67)$$

onde a base da função logarítmica é arbitrária. A escolha da função logarítmica confere algumas características fundamentais à função de informação. Por exemplo, a informação ganha diante do evento certo ($p_i = 1$) é nula ($I(x_i) = 0$), e a ocorrência de um evento nunca implica perda de

⁴Por exemplo, uma função massa de probabilidade ou função densidade de probabilidade pode ser usada para a construção de modelos estatísticos e trazem muita informação em relação à distribuição de probabilidade de um evento (Yates & Goodman, 1999).

informação (i.e. $I(x_i) \geq 0$ para $0 \leq p_i \leq 1$). Além disso, quanto menos provável for um evento, mais informação será ganha por meio de sua ocorrência (Haykin, 2001), o que condiz com a intuição.

Essas definições fazem da informação $I(x_i)$ também uma variável aleatória, cujo valor médio no cenário discreto sobre o intervalo completo dos N_s estados é dado pela entropia de Shannon:

$$H(X) = E\{I(x_i)\} = \sum_{i=1}^{N_s} p_i I(x_i) = - \sum_{i=1}^{N_s} p_i \log(p_i) \quad (2.68)$$

O nome “entropia” evoca o conceito homônimo que tem um papel de destaque na física estatística tal como formulada por Boltzmann⁵. Em especial, a função de entropia de Shannon também apresenta algumas propriedades intrinsecamente relacionadas com a idéia intuitiva de informação, por exemplo, ela é limitada ($0 \leq H(X) \leq \log(N_s)$), apresenta valor nulo ($H(X) = 0$) se, e somente se, algum estado apresenta-se como evento certo (i.e. se $p_i = 1$ para algum i) e é máxima quando todos os estados são equiprováveis (quando a distribuição da variável aleatória em estudo é uniforme (Haykin, 2001)).

Os conceitos expostos podem ser estendidos no sentido de fornecer outras medidas de informação, como por exemplo, a informação mútua. Essencialmente, esta corresponde a uma métrica de dependência de duas variáveis aleatórias, a qual pode ser definida por:

$$I(X, Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (2.69)$$

onde $H(X|Y)$ é a entropia condicional da variável aleatória X dado um certo valor de Y . Assim, $I(X, Y)$ fornece, portanto, a informação ganha sobre X diante do conhecimento de Y , sendo que, para eventos independentes, essa quantidade é nula, ou seja, a incerteza condicional $H(X|Y)$ é igual a própria incerteza $H(X)$.

Tanto a entropia como a informação mútua (além de diversas outras medidas de informação não expostas aqui por concisão) possuem seu correlato definido no domínio contínuo. Mais que isso, a teoria de Shannon oferece ainda teoremas importantes a respeito dos limites de transmissão de informação por canais ruidosos assumindo uma determinada probabilidade de erro, assim como para o próprio processo de codificação da informação de um modo geral. Para os propósitos desta tese, o conceito de informação pode ser transportado para a teoria de sistemas dinâmicos por meio da definição da entropia de Kolmogorov-Sinai, que consiste basicamente na informação necessária para localizar uma trajetória específica $\phi_t^*(\mathbf{x}_0^*)$ a partir da cobertura de um atrator com hipercubos de lado ϵ . Neste caso, a informação de Shannon (utilizando o logaritmo natural) associada à probabilidade

⁵Há vários bons textos introdutórios que podem ser consultados para que se tenha uma visão apropriada do desenvolvimento deste conceito desde a termodinâmica à teoria da informação (Brooks & Wiley, 1988; Monteiro, 2006; Gleick, 2011).

$p(i_1, i_2, \dots, i_k)$ de se encontrar a trajetória sucessivamente na sequência de k cubos i_1, i_2, \dots, i_k para passos regulares de tempo τ é (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995):

$$I_k(\epsilon) = - \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} p(i_1, i_2, \dots, i_k) \ln p(i_1, i_2, \dots, i_k) \quad (2.70)$$

sendo que o somatório refere-se a todas as possibilidades de escolha dos cubos e I_k sintetiza a quantidade de informação necessária para localizar os estados de uma trajetória i_1, i_2, \dots, i_k discretizados segundo o cobrimento utilizado, dadas as probabilidade de ocorrência $p(i_1, i_2, \dots, i_k)$ (Attux, 2001). Decorre da equação (2.70) que a informação adicional (I_a) necessária para localizar um determinado estado (hipercubo a ser visitado) conhecendo todo o passado da trajetória pode ser dada por:

$$I_a(\epsilon) = I_{k+1}(\epsilon) - I_k(\epsilon) \quad (2.71)$$

e esta fornece a quantidade de informação gerada pelo sistema (ou, alternativamente, perdida pelo observador (Shaw, 1981; Wolf et al., 1985)) para um passo no tempo. Caso os valores de ϵ e do passo no tempo sejam assumidos como suficientemente pequenos, pode-se definir a taxa média de criação de informação do comportamento assintótico da dinâmica - também chamada de entropia de Kolmogorov-Sinai (KS) - como (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995):

$$KS = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k\tau} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} p(i_1, i_2, \dots, i_k) \ln p(i_1, i_2, \dots, i_k) \quad (2.72)$$

sendo que, para mapas, $\tau = 1$ e não há necessidade do respectivo limite.

O conceito de informação gerada pelo sistema dinâmico diante da aplicação das equações de movimento está intrinsecamente relacionado com o processo de decorrelação de estados próximos quantificado por meio dos expoentes de Lyapunov (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995). Essa relação é dada pela formula de Pesin (Hasselblatt & Pesin, 2008), a qual estabelece que a entropia de uma medida invariante de um sistema dinâmico para uma determinada bacia de atração é dada pela taxa assintótica de expansão da dinâmica no espaço de estados, o que equivale à soma dos expoentes de Lyapunov positivos, ou seja:

$$KS = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \quad (2.73)$$

Segundo a fórmula de Pesin, processos regulares são caracterizados por entropia KS nula, ou seja, nenhuma informação adicional é exigida para especificar o próximo estado, e a solução do sistema é puramente previsível, tal como ocorre para conjuntos-limite do tipo ponto fixo, ciclo-limite e toro. No caso de processos caóticos, a sensibilidade em relação às condições iniciais leva a uma

entropia KS positiva e finita dada pela Eq. (2.73). Já processos estocásticos brancos (i.e. processos estocásticos com densidade espectral de potência plana) apresentam pontos próximos distribuídos de forma equiprovável, o que faz com que a entropia KS assintoticamente tenda ao infinito. Entretanto, faz-se interessante aqui acrescentar a ressalva de que processos estocásticos correlacionados podem levar a entropias finitas e positivas, mimetizando processos caóticos (Provenzale et al., 1992).

Com esta breve introdução, os conceitos fundamentais a serem explorados ou desenvolvidos nos capítulos seguintes foram apresentados. Observa-se que existem excelentes textos introdutórios ao estudo de sistemas dinâmicos não-lineares que são fortemente recomendados para aqueles interessados em maiores detalhes dos tópicos aqui apresentados (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995; G. P. Williams, 1997; Strogatz, 2001; Monteiro, 2006; Izhikevich, 2007), assim como trabalhos mais específicos (Guckenheimer & Holmes, 1983; Parker & Chua, 1989; Anishchenko et al., 2007; Kuznetsov, 2010).

Capítulo 3

Expoentes de Lyapunov e o método das dinâmicas clonadas

3.1 Introdução

Os expoentes de Lyapunov ocupam lugar de destaque entre as medidas invariantes não só por permitirem a caracterização topológica de conjuntos-limite de um sistema dinâmico, mas também por possibilitarem a quantificação da sua previsibilidade no espaço de estados. Essas propriedades tornam o espectro de Lyapunov uma métrica intrinsecamente relacionada ao estudo da estabilidade das soluções atratoras e uma via de acesso importante para outras áreas do conhecimento, tal como a própria teoria da informação (Wolf et al., 1985; Parker & Chua, 1989; Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995; Boffetta et al., 2002; Monteiro, 2006), na medida em que quantifica a taxa de geração de informação de um sistema dinâmico no processo de amplificação da incerteza do estado inicial provocado pelas aplicações das equações de estado (Boffetta et al., 2002).

De posse das equações de movimento, existem basicamente dois métodos para estimar o espectro de Lyapunov, ambos baseados na evolução temporal de sistemas lineares subjacentes à dinâmica não-linear. A primeira abordagem consiste em usar o teorema ergódico multiplicativo de Oseledec (Oseledec, 1968) para formar a matriz de Oseledec e extrair seus autovalores, evitando o colapso do mapa tangente (i.e. da matriz referente às linearizações do sistema dinâmico para diferentes instantes de tempo) por meio do uso de um método numérico de decomposição QR (Eckmann et al., 1986; Abarbanel, 1996).

A segunda abordagem de cálculo foi introduzida independentemente por Bennettin et al. (Bennettin et al., 1980) e por Shimada e Nagashima (Shimada & Nagashima, 1979), tendo sido posteriormente revisitada por Wolf et al. (Wolf et al., 1985). Nestes trabalhos, os expoentes de Lyapunov são obtidos por meio da quantificação da divergência (ou convergência) de perturbações infinitesimais para a

solução original do sistema dinâmico, após as transformações provocadas pela aplicação do sistema linear (mapa tangente) subjacente à dinâmica não-linear¹ a vetores ortogonais e independentes, inicialmente ancorados na trajetória fiducial (solução original do sistema dinâmico). Mesmo de posse das versões linearizadas da dinâmica, o cálculo do espectro de Lyapunov apresenta dois inconvenientes numéricos: a contínua mudança de orientação do sistema dinâmico e a possível existência de uma direção expansiva para o mapa tangente. O primeiro inconveniente refere-se ao fato de ser impossível caracterizar uma determinada direção do espaço de estados como expansiva ou contrativa, uma vez que essas características são sempre definidas em relação à trajetória fiducial, enquanto o segundo inconveniente numérico se associa ao possível colapso do mapa tangente em uma única direção (que seria, no caso, a direção mais expansiva da dinâmica, associada ao autovalor positivo da matriz jacobiana). Esses problemas podem ser resolvidos por meio da aplicação do método de reorto-normalização de Gram-Schmidt (GSR) após cada transformação do vetor perturbação realizada pelo mapa tangente, conforme será detalhado na próxima seção (Wolf et al., 1985; Parker & Chua, 1989).

Entretanto, os desafios de estimação numérica dos expoentes de Lyapunov não estão totalmente resolvidos, principalmente quando dinâmicas não-suaves ou com descrição matemática demasiadamente complexa são consideradas. Esses casos motivam a contribuição central deste capítulo, que consiste em prover uma abordagem alternativa de estimação do espectro de Lyapunov, chamada aqui de método das dinâmicas clonadas (CLDYN). Esta estratégia utiliza cópias infinitesimalmente perturbadas do sistema dinâmico original para avaliar o processo de divergência ou convergência para a trajetória fiducial, fornecendo meios de calcular todos os expoentes de Lyapunov sem recorrer à construção do mapa tangente, ou seja, sem a necessidade de resolver as equações variacionais que descrevem a evolução temporal do sistema linear subjacente à dinâmica não-linear.

A proposta aqui apresentada tem como vantagem possibilitar a estimação parcial do espectro de Lyapunov (i.e. a estimação apenas dos maiores expoentes e não necessariamente de todos), além de ser extremamente conveniente para uso em mapeamentos para os quais a obtenção das equações variacionais é trabalhosa ou mesmo inexistente em alguns pontos, o que é muito comum, por exemplo, para sistemas não-autônomos com entradas descontínuas.

A fim de testar a idéia proposta, o espectro de Lyapunov foi estimado para modelos emblemáticos na literatura tanto para tempo contínuo como para tempo discreto, e comparado com uma abordagem clássica de cálculo, o método do mapa tangente (TANMAP), baseado na solução das equações variacionais tal como originalmente proposto na literatura (Shimada & Nagashima, 1979; Bennettin et al., 1980; Wolf et al., 1985). Por fim, para ilustrar a aplicabilidade do método proposto no contexto de dinâmicas não-suaves ou descontínuas, o espectro de Lyapunov do modelo neuronal de FitzHugh-

¹Mais especificamente, o sistema linear subjacente à dinâmica original que caracteriza o mapa tangente refere-se à solução das equações variacionais que governam a evolução temporal das versões linearizadas das equações de estado (Parker & Chua, 1989).

Nagumo (FHN) (FitzHugh, 1961) sob excitação periódica e descontínua foi obtido tomando a amplitude de estimulação como parâmetro de controle. Esta aplicação mostra-se interessante na medida em que possibilita o tratamento matemático de um cenário de estimulação de células excitáveis até então de difícil análise, não obstante sua relevância prática (Doi & Sato, 1995). Esta análise dos comportamentos oscilatórios por meio do espectro de Lyapunov e do diagrama de bifurcação revela padrões de oscilação complexos no modelo de FitzHugh-Nagumo, fornecendo mais um suporte à existência de caos em dinâmicas neuronais, o que motiva a discussão sobre o possível papel deste tipo de comportamento oscilatório nos processos cognitivos (Rabinovich & Abarbanel, 1998; Korn & Faure, 2003).

Além de prover meios para a caracterização do comportamento assintótico segundo a definição clássica dos expoentes de Lyapunov, o método CLDYN proporciona também a possibilidade de cálculo dos expoentes de Lyapunov de tempo finito (FTLEs, do inglês *finite time Lyapunov exponents*), que são muito mais precisos na caracterização da previsibilidade e estabilidade local do campo vetorial, uma vez que sua avaliação leva em conta a posição no atrator, bem como o tempo para o qual se deseja prever os estados futuros (Abarbanel et al., 1991; Doerner et al., 1999; Haller & Yuan, 2000; Haller, 2000a, 2000b, 2001; Shadden et al., 2005).

As regiões no espaço de estados para os quais os FTLEs são maiores definem as chamadas estruturas Lagrangianas coerentes (LCSs, do inglês *Lagrangian coherent structures*), e correspondem a cristas (região de máximos) na superfície que associa uma determinada posição no espaço de estados ao maior expoente do espectro local. Estas cristas configuram-se como as separatrizes do campo vetorial associadas às variedades instáveis e estáveis dos pontos fixos ou das órbitas periódicas (Abarbanel et al., 1991; Doerner et al., 1999; Haller & Yuan, 2000; Haller, 2000a, 2000b, 2001; Shadden et al., 2005) em sistemas autônomos. Estas trajetórias são de extrema relevância para o estudo do campo vetorial, pois separam diferentes comportamentos oscilatórios, e, justamente por isso, têm sido frequentemente utilizadas em análises no âmbito da teoria de mecânica dos fluidos (Haller & Yuan, 2000; Haller, 2000a, 2000b, 2001; Shadden et al., 2005).

Tendo isso em vista, o presente capítulo também busca evidenciar a equivalência entre a metodologia proposta e a abordagem clássica de cálculo dos FTLEs baseada no método TANMAP, assim como a vantagem de aplicação da proposta para alguns casos particulares. Destaca-se, neste sentido, o cálculo dos FTLEs por meio da abordagem CLDYN para a localização da separatriz que caracteriza o limiar de disparo de potenciais de ação no modelo de FHN, além da associação dos estados fisiológicos retratados por este modelo à organização espaço-temporal da previsibilidade local.

O presente capítulo está estruturado da seguinte forma: a seção 3.2 trata dos métodos numéricos para estimação do espectro de Lyapunov, com enfoque no método TAMAP e CLDYN. A seção 3.3 apresenta experimentos numéricos para os quais o espectro de Lyapunov é obtido para modelos não-

lineares emblemáticos na literatura tanto pelo método clássico como pelo proposto. Nesta mesma seção, mostra-se a equivalência entre essas diferentes metodologias para o cálculo dos FTLEs, bem como a organização espaço-temporal dos FTLEs para o sistema de Lorenz operando em caos. Como aplicação especial, o espectro de Lyapunov para o modelo de FitzHugh-Nagumo é obtido para entradas descontínuas e o cálculo dos FTLEs é utilizado para encontrar a separatriz das oscilações sublimiáres e supralimiáres associada ao limiar de disparo do potencial de ação. Uma associação entre a organização espaço-temporal dos FTLEs e os estados fisiológicos retratados pelo modelo de FitzHugh-Nagumo operando em caos também é aqui fornecida. Por fim, a seção 3.4 apresenta uma discussão sobre os dados obtidos à luz de trabalhos previamente publicados na literatura.

3.2 Métodos numéricos para estimação do espectro de Lyapunov

3.2.1 O método do mapa tangente (TANMAP)

Dado um sistema dinâmico N -dimensional descrito por $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, com condição inicial \mathbf{x}_0 , o primeiro passo para estimar o espectro de Lyapunov por meio do método TANMAP consiste em estabelecer um conjunto de N vetores linearmente independentes e ortogonais ancorados na trajetória de referência (solução original do sistema dinâmico), na forma:

$$\{\boldsymbol{\delta}_{1x}, \boldsymbol{\delta}_{2x}, \dots, \boldsymbol{\delta}_{Nx}\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N\} = \mathbf{I}_N \quad (3.1)$$

sendo \mathbf{I}_N a matriz identidade $N \times N$. Esses vetores são então transformados por sucessivas aplicações do mapa tangente associado às equações de movimento. Os eixos principais do mapa tangente são determinados pelas equações variacionais que governam a evolução temporal das versões linearizadas das equações de estado:

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, t) \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ é a matriz Jacobiana (ou matriz de linearização) de $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, já definida no capítulo anterior, cujos elementos são dados por:

$$J_{ij}(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \right|_{\mathbf{x}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (3.3)$$

A taxa de divergência ou convergência em relação a trajetória fiducial pode ser calculada integrando todo o sistema, ou seja, as equações de movimento e as equações variacionais, por um intervalo de tempo T , a partir de \mathbf{x}_0 , com $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{I}_N$. Em seguida, atualizam-se os vetores-perturbação ancorados na trajetória fiducial após a transformação provocada pela aplicação do mapa tangente.

Caso se deseje estimar a divergência associada apenas à direção mais expansiva, pode-se descrever a transformação do vetor-perturbação provocada pela aplicação do mapa tangente como:

$$\delta_{1x}^{(1)} = \Phi(\mathbf{x}, T)\mathbf{u}_1^{(0)} \quad (3.4)$$

sendo $\mathbf{u}_1^{(0)} = \delta_{1x}^{(0)} / \|\delta_{1x}^{(0)}\|$, onde o índice sobrescrito denota o estado corrente da iteração. Repetindo esse processo K vezes, para K suficientemente grande de modo a capturar o comportamento médio de todo o atrator, pode-se calcular o maior expoente de Lyapunov por meio da expressão (Parker & Chua, 1989; Wolf et al., 1985):

$$\lambda_1 = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^K \ln \|\delta_{1x}^{(k)}\| \quad (3.5)$$

Como o sistema muda continuamente de orientação, é impossível definir um eixo específico do espaço de estados como expansivo ou contrativo. Além disso, os vetores $\delta_{1x}, \delta_{2x}, \dots, \delta_{Nx}$ tendem a alinhar-se com a direção mais expansiva do movimento conforme o tempo evolui, o que pode levar a erros numéricos significativos e ao próprio colapso do espaço tangente em uma única direção. Este problema pode ser resolvido pela aplicação do método GSR para subtrair a contribuição da direção mais expansiva das demais direções do movimento, permitindo o cálculo correto de todo o espectro de Lyapunov. O procedimento GSR produz um conjunto de vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N$ que representa uma versão numericamente corrigida do espaço de perturbação dado por $\delta_{1x}, \delta_{2x}, \dots, \delta_{Nx}$. Mais especificamente, o procedimento GSR estabelece que, fazendo $\mathbf{v}_1^{(k)} = \delta_{1x}^{(k)}$ e $\mathbf{u}_1^{(k)} = \mathbf{v}_1^{(k)} / \|\mathbf{v}_1^{(k)}\|$, tem-se os vetores corrigidos nas demais direções dados por (Parker & Chua, 1989; Wolf et al., 1985):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2^{(k)} &= \delta_{2x}^{(k)} - \langle \delta_{2x}^{(k)}, \mathbf{u}_1^{(k)} \rangle \mathbf{u}_1^{(k)} \\ \mathbf{u}_2^{(k)} &= \frac{\mathbf{v}_2^{(k)}}{\|\mathbf{v}_2^{(k)}\|} \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_N^{(k)} &= \delta_{Nx}^{(k)} - \langle \delta_{Nx}^{(k)}, \mathbf{u}_1^{(k)} \rangle \mathbf{u}_1^{(k)} - \dots - \langle \delta_{Nx}^{(k)}, \mathbf{u}_{N-1}^{(k)} \rangle \mathbf{u}_{N-1}^{(k)} \\ \mathbf{u}_N^{(k)} &= \frac{\mathbf{v}_N^{(k)}}{\|\mathbf{v}_N^{(k)}\|} \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ denota o produto interno entre os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} . Assim, para a K -ésima iteração, o

espectro de Lyapunov é dado por:

$$\lambda_i = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^K \ln \left\| \mathbf{v}_i^{(k)} \right\|, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.7)$$

É importante observar que, após cada iteração, o mapa tangente dado por $\Phi(\mathbf{x}, T)$ precisa ser definido novamente como a matriz identidade para que a taxa de divergência (ou convergência) possa ser corretamente avaliada na próxima iteração. Vale ressaltar ainda que o procedimento descrito para o cálculo do espectro de Lyapunov vale tanto para sistemas de tempo contínuo como de tempo discreto, sendo que neste último caso deve-se realizar a substituição da variável t pelo índice temporal n , e apenas tomar o cuidado de realizar o procedimento GSR para cada iteração do mapa.

Diante da Eq. (3.7), pode-se facilmente introduzir a definição de expoentes de Lyapunov de tempo finito (FTLEs) no contexto do método TANMAP, o que se faz a partir de uma média dos expoentes em um intervalo de tempo limitado. Neste caso, para um determinado tempo de evolução $T_e = KT$, tem-se o espectro de Lyapunov de tempo finito como sendo:

$$\lambda_i^{T_e}(\mathbf{x}, T_e) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=1}^{T_e/T} \ln \left\| \mathbf{v}_i^{(k)} \right\|, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.8)$$

onde a medida de divergência local $\lambda_i^{T_e}(\mathbf{x}, T_e)$ é uma função da posição \mathbf{x} no espaço de estados e do tempo de evolução T_e , e, portanto, não pode ser considerada uma medida invariante da dinâmica. Por conveniência, os FTLEs serão simplesmente representados aqui por $\lambda_i^{T_e}$.

3.2.2 O método das dinâmicas clonadas (CLDYN)

O método das dinâmicas clonadas pode ser fundamentado à luz dos conceitos de estabilidade não-linear apresentados no capítulo anterior, os quais serão eventualmente revisitados aqui com o intuito de fornecer uma introdução mais didática à abordagem proposta. Embora os conceitos de estabilidade tenham sido desenvolvidos no capítulo 2 de forma dual, ou seja, separadamente para sistemas de tempo contínuo e discreto, a abordagem CLDYN pode ser introduzida de forma unificada desde que algumas precauções (que serão discutidas durante o desenvolvimento) sejam tomadas. Por simplicidade, a correspondência entre o mapa tangente e a divergência de uma cópia perturbada é apresentada no contexto do cálculo do maior expoente de Lyapunov para um sistema discreto. Na seqüência, o procedimento de cálculo que descreve a abordagem CLDYN será apresentado para sistemas contínuos, tal como realizado para o método TANMAP, o que facilita analogias entre os métodos.

Considere o sistema de tempo discreto $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(n))$, cuja condição inicial \mathbf{x}_0 é perturbada por um vetor $\Delta(n) = \delta_{x_0} \mathbf{e}_1$, sendo a dinâmica de evolução da perturbação dada por ² (Eckmann & Ruelle, 1985; Abarbanel, 1996; Anishchenko et al., 2007):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n+1) + \Delta(n+1) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}(n) + \Delta(n)) \\ &\approx \mathbf{J}(\mathbf{x}(n))\Delta(n) + \mathbf{F}(\mathbf{x}(n)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde, mais uma vez, $\mathbf{J}(\mathbf{x}(n))$ é a matriz Jacobiana de $\mathbf{F}(\mathbf{x}(n))$. A manipulação da Eq. (3.9) leva à seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \Delta(n+1) &\approx \mathbf{J}(\mathbf{x}(n))\Delta(n) \\ &= \mathbf{J}(\mathbf{x}(n))\delta_{x_0} \mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Assim, a estabilidade do conjunto-limite obtido pode ser analisada em termos da evolução temporal do vetor perturbação $\Delta(n+1)$, sendo que a perturbação para L passos à frente no tempo é definida por meio da aplicação da regra da cadeia à matriz Jacobiana (Eckmann & Ruelle, 1985; Abarbanel, 1996):

$$\begin{aligned} \Delta(n+L) &\approx \mathbf{J}(\mathbf{x}(n+L-1))\mathbf{J}(\mathbf{x}(n+L-2)) \dots \\ &\quad \dots \mathbf{J}(\mathbf{x}(n))\Delta(n) \\ &= \mathbf{J}^L(\mathbf{x}(n))\Delta(n) \\ &= \mathbf{J}^L(\mathbf{x}(n))\delta_{x_0} \mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde $\mathbf{J}^L(\mathbf{x}(n))$ é a composição das L matrizes Jacobianas durante a evolução temporal. Usando as Eqs. (3.10)-(3.11), é possível encontrar uma relação entre a evolução temporal da perturbação e a composição da matriz Jacobiana após L aplicações sobre a perturbação inicial, o que deve levar em consideração o fato de esta ter caráter infinitesimal, ou seja, tomando o limite quando $\delta_{x_0} \rightarrow 0$:

$$\lim_{\delta_{x_0} \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta(n+L)}{\delta_{x_0}} \right) = (\mathbf{J}^L(\mathbf{x}(n))\mathbf{e}_1) \quad (3.12)$$

Além disso, as Eqs. (3.10)-(3.11) referem-se a um crescimento (ou decaimento) de primeira ordem, e, conforme mostrado no capítulo anterior, assumem uma solução dada pela seguinte função

²Assume-se, nesta representação, que δ_{x_0} e \mathbf{e}_1 correspondem, respectivamente, à magnitude e a um vetor base que especifica a direção do vetor perturbação $\Delta(n)$. Um exemplo usual de vetor base pode ser dado por $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]_{N \times 1}^T$ para um sistema N -dimensional.

exponencial:

$$\|\Delta(n+L)\| = \|\Delta(n)\| \exp(\lambda L) \quad (3.13)$$

onde λ é a maior taxa média de crescimento da perturbação aplicada no intervalo finito L . Isolando λ na Eq. (3.13) e fazendo $L \rightarrow \infty$, tem-se a maior taxa média de crescimento da perturbação para todo o atrator:

$$\lambda = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln \left(\left\| \frac{\Delta(n+L)}{\Delta(n)} \right\| \right) \quad (3.14)$$

Manipulando a relação dada pela Eq. (3.13), e sabendo que $\Delta(n) = \delta_{x0} \mathbf{e}_1$, tem-se a definição formal do maior expoente de Lyapunov do movimento, tanto na sua forma clássica (utilizada na abordagem do mapa tangente), como por meio da expansão $\|\Delta(n+L)/\delta_{x0}\|$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lim_{\delta_{x0} \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln \left(\left\| \frac{\Delta(n+L)}{\delta_{x0}} \right\| \right) \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln \left(\|\mathbf{J}^L(\mathbf{x}(n)) \mathbf{e}_1\| \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

É interessante observar que, desde que a perturbação não seja tangente ao fluxo, ela sempre acabará por encontrar a direção mais expansiva da dinâmica, não importando a sua direção de aplicação³. Um exemplo clássico de perturbação tangente ao fluxo pode ser encontrado quando um sistema não-autônomo é transformado em autônomo por meio da incorporação do tempo como uma variável de estado na dinâmica, definido, portanto, uma direção de estabilidade neutra⁴, o que, por sua vez, implica na existência de um expoente de Lyapunov nulo. De fato, dinâmicas não-lineares periodicamente perturbadas não apresentam atratores estáticos (pontos de equilíbrio estáveis), mas sim ciclos-limite, quase-periodicidade ou caos, ou seja, apresentam comportamentos oscilatórios com pelo menos um expoente de Lyapunov nulo.

Quando perturbações infinitesimais são aplicadas a todas as direções do espaço de estados, é possível estimar todos os expoentes de Lyapunov do movimento tanto pelo método do mapa tangente como por meio da razão $\|\Delta(n+L)/\delta_{x0}\|$, desde que métodos numéricos que evitem o colapso do espaço tangente e corrijam o efeito da contínua mudança de orientação da trajetória de referência (e.g. GSR) sejam aplicados. Até o presente momento, essas correções numéricas têm sido aplicadas apenas no contexto das divergências calculadas pela aplicação do mapa tangente, estando a utilização de cópias perturbadas para o cálculo de $\|\Delta(n+L)/\delta_{x0}\|$ restrita apenas ao cálculo do maior expoente de Lyapunov (Bennettin et al., 1976). A introdução desse método de correção numérica para o cálculo

³Por exemplo, tanto para $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T_{N \times 1}$ como para $\mathbf{e}_1 = [0 \ 1 \ \dots \ 0]^T_{N \times 1}$, essas perturbações invariavelmente apresentarão uma contribuição na direção mais expansiva da dinâmica, a qual será amplificada pela aplicação das equações de estado, dando origem ao maior expoente de Lyapunov.

⁴Avalia-se neste caso, a evolução temporal de uma perturbação aplicada exclusivamente à própria variável tempo (perturbação tangente ao fluxo), o que, naturalmente, não converge e nem diverge para a trajetória de referência.

do espectro de Lyapunov usando diversas cópias perturbadas fundamenta a idéia central do método da dinâmicas clonadas e define a contribuição central desta tese para a análise de estabilidade de sistemas não-lineares.

A essência do método CLDYN consiste em analisar a evolução temporal do vetor diferença de estados definido como a distância entre a trajetória fiducial e cópias (“clones”) da dinâmica inicialmente perturbadas com uma pequena magnitude em direções ortogonais. Assim, dado um sistema dinâmico N -dimensional, N clones são criados (caso deseja-se estimar todos os N expoentes de Lyapunov) na forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{c1} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_{c1}, t) \\ \dot{\mathbf{x}}_{c2} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_{c2}, t) \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_{cN} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_{cN}, t)\end{aligned}\tag{3.16}$$

Cada clone recebe a mesma condição inicial do sistema de referência perturbada de uma pequena magnitude δ_{x0} em uma direção ortogonal específica, i.e.:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{0c1} &= \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}_{1x}^{(0)} \\ \mathbf{x}_{0c2} &= \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}_{2x}^{(0)} \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_{0cN} &= \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}_{Nx}^{(0)}\end{aligned}\tag{3.17}$$

sendo $\{\boldsymbol{\delta}_{1x}, \boldsymbol{\delta}_{2x}, \dots, \boldsymbol{\delta}_{Nx}\}$ uma base ortogonal inicialmente definida como $\delta_{x0}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N\} = \delta_{x0}\mathbf{I}_N$. Note que, neste caso, a matriz identidade é multiplicada pela magnitude da perturbação aplicada, o que implica em uma importante diferença em relação à abordagem TANMAP. Para que haja a devida correspondência entre a metodologia proposta de cálculo do espectro e a metodologia clássica, deve-se escolher o valor de δ_{x0} como sendo pequeno o suficiente para ser considerado infinitesimal em relação ao tamanho do conjunto-limite obtido quando $t \rightarrow \infty$.

Na abordagem CLDYN, tem-se que, após a evolução de longo termo (i.e. $t \rightarrow \infty$), cada clone corresponderá a uma direção específica associada a um expoente de Lyapunov a ser calculado como parte do espectro. Assim, com o intuito de avaliar a taxa de divergência ou convergência dos clones em relação à trajetória de referência, integram-se numericamente (ou iteram-se, no caso do sistema de tempo discreto) as equações de movimento (ou seja, o sistema original mais os clones) por um intervalo de tempo T (cuja definição numérica será discutido mais adiante). Ao final deste processo, o vetor diferença de estados pode ser construído fazendo a diferença entre os estados finais alcançados

pelos clones em relação à trajetória de referência:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta}_{1x}^{(1)} &= \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_{c1}(T) \\
\boldsymbol{\delta}_{2x}^{(1)} &= \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_{c2}(T) \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\delta}_{Nx}^{(1)} &= \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_{cN}(T)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Para evitar o colapso do espaço definido pelos vetores diferença de estados na direção mais expansiva do movimento, aplica-se o procedimento GSR tal como é feito na abordagem TANMAP, seguindo exatamente a mesma descrição matemática fornecida nas Eqs. (3.6). Depois disso, antes de começar uma nova iteração, os clones são novamente dispostos na vizinhança da trajetória fiducial, recebendo novas “condições iniciais” no espaço ortogonal definido pelos vetores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N\}$, o que matematicamente significa que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{0c1}^{(1)} &= \mathbf{x}(T) + \delta_{x0} \mathbf{u}_1^{(1)}, \\
\mathbf{x}_{0c2}^{(1)} &= \mathbf{x}(T) + \delta_{x0} \mathbf{u}_2^{(1)}, \\
&\vdots \\
\mathbf{x}_{0cN}^{(1)} &= \mathbf{x}(T) + \delta_{x0} \mathbf{u}_N^{(1)}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Assim as pequenas perturbações novamente introduzidas em outro ponto do atrator permanecerão nas direções corrigidas correspondentes aos expoentes a serem estimados. Finalmente, para a K -ésima iteração do algoritmo, considerando K grande o suficiente para capturar o comportamento médio do atrator, os expoentes de Lyapunov são dados por:

$$\lambda_i = \lim_{\delta_{x0} \rightarrow 0} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^K \ln \left\| \frac{\mathbf{v}_i^{(k)}}{\delta_{x0}} \right\|, \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{3.20}$$

A figura 3.1 ilustra uma típica iteração da abordagem CLDYN para perturbações inicialmente aplicadas a duas direções ortogonais no espaço de estados ($\boldsymbol{\delta}_{1x}^{(0)}$ e $\boldsymbol{\delta}_{2x}^{(0)}$). Para cada iteração, os vetores diferença de estados são atualizados por meio das Eqs. (3.18), sendo a tendência de alinhamento com a direção mais expansiva do movimento corrigida por meio da aplicação do procedimento GSR. Antes que a próxima iteração se inicie, os clones são dispostos na vizinhança da trajetória fiducial de maneira ortogonal, conforme estabelecido nas Eqs. (3.19), e, finalmente, a próxima iteração inicia-se com os clones partindo dos pontos A e B. Este processo é repetido até que o comportamento médio de divergência ou convergência da perturbação em relação à trajetória de referência seja capturado,

forneendo ao seu final os expoentes já ordenados de forma decrescente.

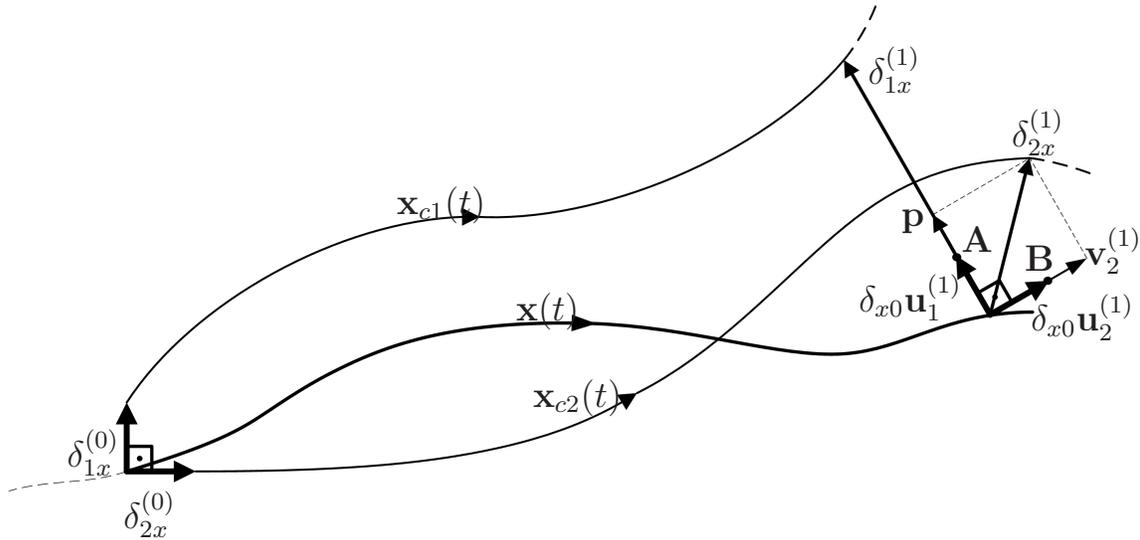


Figura 3.1: Ilustração da evolução temporal do sistema de equações e das correções empregadas em uma iteração típica da abordagem CLDYN. $\delta_{1x}^{(0)}$ e $\delta_{2x}^{(0)}$ representam os vetores diferença de estados iniciais dados por $\delta_{x0}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. \mathbf{p} representa a projeção de $\delta_{2x}^{(1)}$ em $\delta_{1x}^{(1)}$ usada para obter o vetor \mathbf{v}_2 . \mathbf{A} e \mathbf{B} representam as condições iniciais para a próxima iteração do algoritmo. O valor de δ_{x0} foi propositalmente exagerado a título de ilustração.

De forma análoga ao que é feito para o método TANMAP, pode-se aqui definir o espectro de Lyapunov de tempo finito $T_e = KT$ como sendo:

$$\lambda_i^{T_e}(\mathbf{x}, T_e) = \lim_{\delta_{x0} \rightarrow 0} \frac{1}{T_e} \sum_{k=1}^{T_e/T} \ln \left\| \frac{\mathbf{v}_i^{(k)}}{\delta_{x0}} \right\|, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.21)$$

O procedimento de cálculo do espectro de Lyapunov para sistemas de tempo discreto é análogo ao aqui realizado para sistemas de tempo contínuo, mas exige a substituição da variável t pelo índice temporal n e sugere-se a aplicação do procedimento de correção GSR a cada iteração devido ao rápido crescimento da direção mais expansiva tipicamente encontrado neste tipo de sistema dinâmico.

3.3 Experimentos numéricos

3.3.1 Estimativas do espectro de Lyapunov usando o método CLDYN em dinâmicas clássicas

Antes de apresentar os resultados numéricos relativos ao cálculo do espectro de Lyapunov para várias dinâmicas caóticas clássicas, convém apresentar um pouco melhor a principal dinâmica utilizada como plataforma de testes nos experimentos numéricos que se seguem, o modelo de Lorenz (Lorenz, 1963).

O modelo de Lorenz ocupa lugar de destaque no desenvolvimento histórico da teoria do caos (Strogatz, 2001, 2004; Mitchell, 2009) e relaciona-se com um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares simplificado para o estudo do fenômeno da instabilidade de Rayleigh-Béarnard para transferência de calor em termos de condução e convecção de massas atmosféricas (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995). O modelo pode ser descrito pelas seguintes equações de estados:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \dot{x} = \sigma(y - x) \\ g(x, y, z) &= \dot{y} = -xz + rx - y \\ h(x, y, z) &= \dot{z} = xy - bz \end{aligned} \quad (3.22)$$

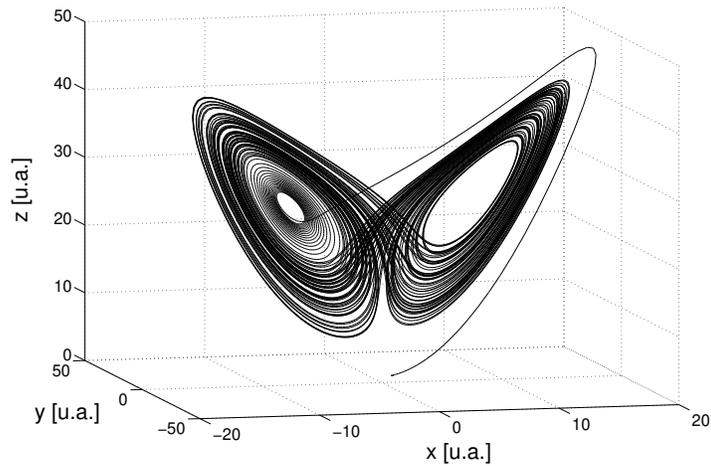
onde os parâmetros $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = \frac{8}{3}$ são classicamente adotados na geração de comportamento caótico. Embora as variáveis de estado x , y e z tenham significados físicos precisos, adotam-se aqui suas unidades como sendo arbitrárias (assim como a unidade de tempo), conforme é comumente feito na literatura e para fins de concisão, uma vez que não se objetiva discutir aqui os fenômenos físicos descritos pelo modelo.

A dinâmica descrita nas Eqs. (3.22) apresenta três pontos fixos, situados em $\mathbf{x}^* = [0 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{x}^* = [s \ s \ r - 1]^T$ e $\mathbf{x}^* = [-s \ -s \ r - 1]^T$, onde $s = (br - b)^{1/2}$, sendo que a estabilidade desses pontos depende dos parâmetros do modelo. A matriz jacobiana, neste caso, é dada por:

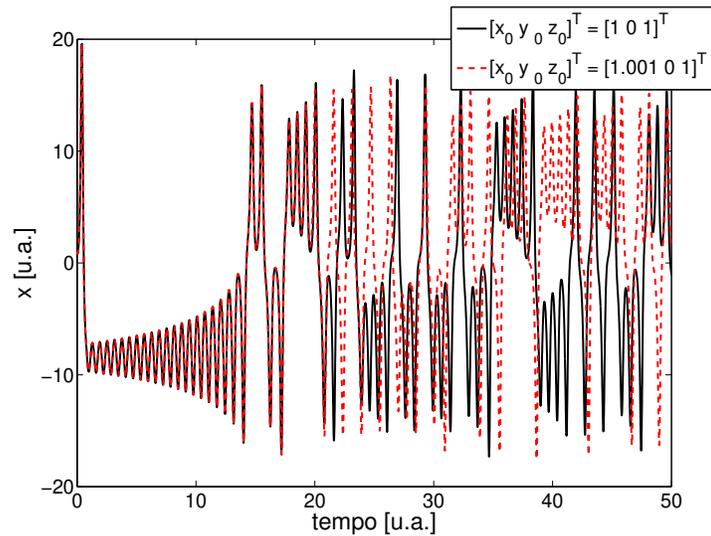
$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z + r & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

o que, para os parâmetros definidos acima, implica na existência de três pontos de sela e um típico atrator estranho no espaço de estados, ou seja, tem-se um movimento errático num espaço compacto (figura 3.2(a)) e com sensibilidade em relação às condições iniciais (figura 3.2(b)).

Dado o grande volume de trabalhos na literatura que usam o modelo de Lorenz como plataforma



(a) atrator estranho para o modelo de Lorenz



(b) Séries caóticas de Lorenz para condições iniciais próximas

Figura 3.2: O painel 3.2(a) mostra o atrator estranho de Lorenz obtido quando $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = \frac{8}{3}$. O painel 3.2(b) mostra típicas séries temporais caóticas com condições iniciais próximas.

de testes numéricos e analíticos, sua adoção aqui como principal dinâmica para os experimentos numéricos é praticamente uma escolha natural. Tendo isto em vista, a figura 3.3 traz a evolução temporal do espectro de Lyapunov calculado para o sistema de Lorenz a partir de ambas as abordagens, TANMAP e CLDYN. Nas duas simulações, os parâmetros T e δ_{x_0} foram, respectivamente, estabelecidos como 0.5 u.a. e 10^{-4} . Pode-se observar que ambos os algoritmos têm características similares de convergência e fornecem valores praticamente idênticos para o espectro de Lyapunov obtido em regime permanente. Em particular, os valores numéricos obtidos para os expoentes de Lyapunov

por ambos os algoritmos coincidem, com uma boa precisão, com os obtidos por Ramasubramanian e Sriram (Ramasubramanian & Sriram, 2000) por diferentes métodos (variantes do mapa tangente clássico ou pela abordagem matricial de Oseledec).

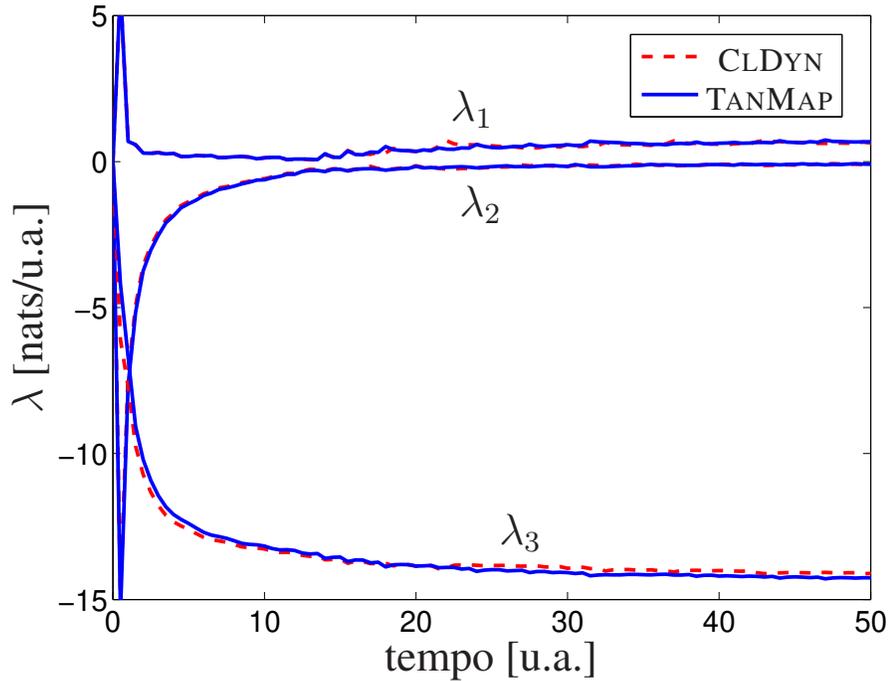


Figura 3.3: Evolução temporal do espectro de Lyapunov para o modelo de Lorenz operando em caos usando o método TANMAP e CLDYN. Os parâmetros de simulação neste caso foram: $\mathbf{x}_0 = [1 \ 0 \ 1]^T$, $T = 0.5$ u.a., $\delta_{x_0} = 10^{-4}$.

Com o intuito de evidenciar a generalidade da proposta, a tabela 3.1 mostra os valores numéricos obtidos para os espectros de Lyapunov para diferentes sistemas dinâmicos na literatura, utilizando tanto o método CLDYN como TANMAP. Nesta tabela, constam os valores numéricos dos expoentes obtidos para o já mencionado sistema de Lorenz, para o sistema caótico e hipercaótico de Rössler e para os mapas logístico e de Hénon (todos descritos no apêndice deste capítulo - seção 3.5).

Em todas as simulações de modelos de tempo contínuo da tabela 3.1, os valores de δ_{x_0} e do tempo virtual final de simulação (t_f) foram estabelecidos, respectivamente, como 10^{-4} e 10000 u.a. Assim, todos os expoentes de Lyapunov são dados em nats/u.a. Ambas as abordagens de cálculo utilizaram os seguintes parâmetros: Lorenz, $\mathbf{x}_0 = [1 \ 0 \ 1]^T$, $T = 0.5$ u.a., Rössler, $\mathbf{x}_0 = [1 \ 0 \ 1]^T$, $T = 1.0$ u.a.; Rössler hyperchaos (Rösslerh), $\mathbf{x}_0 = [-20 \ 0 \ 0 \ 15]^T$ e $T = 0.1$ u.a.. Para modelos de tempo discreto, os expoentes são dados em nats/iteração, e, neste caso, os parâmetros δ_{x_0} e o número final de iteração N_f foram estabelecidos como sendo, respectivamente, 10^{-4} , e 10000. Para o mapa logístico, tem-se: $x_0 = 0.49$, $T = 1$ iteração. No caso do mapa de Hénon: $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0]^T$, $T = 1$

iteração. A tabela 3.1 mostra ainda o tempo real de simulação em segundos (t_{sim}) exigido para a obtenção do espectro⁵. Em relação aos tempos de simulação, fazem-se aqui necessárias algumas definições para evitar ambiguidades. Define-se tempo virtual de simulação como o tempo que se deseja simular no ambiente computacional, enquanto o tempo real de simulação refere-se ao tempo de fato exigido para executar a simulação.

Tabela 3.1: Espectro de Lyapunov e tempo real de simulação obtido por meio dos métodos TANMAP e CLDYN para os sistemas de Lorenz, Rössler, Rössler hipercaótico, mapa logístico e mapa de Hénon.

Dinâmica	Método	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	t_{sim}
Lorenz	TANMAP	0.9037	0.0011	-14.5672	-	689.9463
	CLDYN	0.9025	-0.0014	-14.5293	-	564.3825
Rössler	TANMAP	0.0886	0.0002	-9.8009	-	239.9587
	CLDYN	0.0895	0.0002	-9.8079	-	135.0057
Rösslerh	TANMAP	0.1083	0.0228	-0.0007	-25.4881	1179.8421
	CLDYN	0.1128	0.0324	-0.0247	-23.9892	452.6063
Logístico	TANMAP	0.3634	-	-	-	0.0021
	CLDYN	0.3637	-	-	-	0.0024
Hénon	TANMAP	0.4173	-1.6213	-	-	0.1767
	CLDYN	0.4173	-1.6213	-	-	0.1695

Torna-se clara, diante dos valores numéricos mostrados na tabela, a equivalência entre os métodos TANMAP e CLDYN. Observa-se que com exceção do sistema hipercaótico de Rössler, as demais soluções dos sistemas dinâmicos apresentam diferenças numéricas para os expoentes de Lyapunov apenas a partir da segunda casa decimal. A maior discrepância encontrada entre os métodos foi dada pela estimativa do quarto expoente de Lyapunov (em torno de 6%) para a solução do sistema hipercaótico de Rössler. Este sistema configura-se reconhecidamente como um cenário desafiador, dada a presença de dois expoentes de Lyapunov positivos e dois expoentes muito próximos de zero (Ramasubramanian & Sriram, 2000). Conforme será exposto em mais detalhes adiante, o aumento do tempo total de simulação pode contribuir para a convergência numérica dos expoentes, e, conseqüentemente, produzir valores mais precisos destes, assim como a redução de T pode contribuir para o aumento da precisão da estimativa do expoente mais negativo. Independente disso, é importante

⁵Todos os sistemas de tempo contínuo aqui utilizados foram integrados usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem com passo variável de integração e precisão relativa e absoluta de 10^{-10} . Todas as simulação foram realizadas usando um computador com CPU Intel Core 2 Quad Q8200 @ 2.33GHz (4 cores/4 threads), 4GB RAM DDR2 @ 800 MHz, Microsoft Windows XP x86 e MATLAB R2009a (v7.8.0.347).

ressaltar que embora o método TANMAP seja uma abordagem clássica, é difícil estabelecer qual dos métodos (TANMAP ou CLDYN) é o mais preciso na estimativa do real espectro de Lyapunov da solução de um sistema dinâmico.

Em particular, em relação ao sistema hipercaótico de Rössler, tem-se uma situação em que o método CLDYN pode ser útil caso deseje-se obter apenas os dois expoentes positivos da dinâmica, o que permitiria, por exemplo, calcular a entropia de Kolmogorov-Sinai a partir da solução de apenas 12 equações diferenciais (as equações do sistema original mais as equações de 2 clones), enquanto o método TANMAP necessariamente exige a construção do mapa tangente e a solução de 20 equações diferenciais.

Observa-se ainda na tabela 3.1 que, em quase todas as simulações realizadas, o método CLDYN exigiu um tempo real de simulação menor do que o da abordagem TANMAP. Embora essa diferença de desempenho pareça ser significativa em alguns casos - como observado, por exemplo, para o sistema hipercaótico de Rössler - ela está intrinsecamente relacionada à dificuldade de um determinado método numérico em resolver os diferentes conjuntos de equações diferenciais. Neste caso, é difícil estabelecer *a priori* qual é o método que exige menos recursos computacionais para o cálculo do espectro de Lyapunov.

Ainda que os experimentos numéricos aqui realizados tenham revelado valores praticamente idênticos para os espectros de Lyapunov obtidos pelas diferentes abordagens, é importante observar que deve-se tomar um certo cuidado na escolha de certos parâmetros na abordagem CLDYN para que a relação dada pela Eq. (3.15) se sustente. Conforme já apontado por Wolf et al. (Wolf et al., 1985), a abordagem TANMAP apresenta boa robustez em relação ao intervalo de integração T , ou seja, o colapso do espaço tangente em uma única direção ocorre apenas quando o intervalo entre os procedimentos GSR é tomado como sendo exageradamente grande. Este intervalo pode heurísticamente ser definido a partir de uma fração (e.g. 25%) do pseudo-período do atrator estranho no caso de uma dinâmica caótica, o qual é definido pelo tempo médio de intersecção da trajetória que caracteriza o conjunto-limite com um hiperplano de Poincaré representativo da dinâmica (Wolf et al., 1985). Assim, tanto para o método CLDYN como para o TANMAP, deseja-se obter um valor razoável de T de tal forma que este não seja exageradamente pequeno a ponto de aumentar significativamente o custo computacional de cálculo do espectro, mas, ao mesmo tempo, não seja exageradamente grande a ponto de afetar as estimativas dos métodos.

Retomando o modelo de Lorenz como principal plataforma de testes, tal como definido anteriormente, a figura 3.4 ilustra a robustez de ambos os métodos em relação ao intervalo de integração T , o que é feito por meio da repetição do cálculo do espectro quando este parâmetro é variado de 0.2 u.a. até 2 u.a. com passos de 0.2 u.a. Observa-se que o aumento progressivo de T dentro desta escala de tempo praticamente não afeta o cálculo do espectro de Lyapunov para a abordagem TANMAP (fi-

gura 3.4(a)), enquanto sobrestimativas no valor de λ_3 podem ser encontradas no caso da abordagem CLDYN para $T > 0.6$ u.a. (figura 3.4(b)). De fato, conforme também já apontado por Wolf et al. (Wolf et al., 1985), o menor expoente de Lyapunov é o mais difícil de se estimar dada a perda de informação nesta direção com a rápida convergência da perturbação para a trajetória fiducial, sendo que o método CLDYN parece exigir uma abordagem mais conservadora em relação a escolha de T . Uma forma sistemática de determinação de um valor numericamente adequado para este parâmetro pode ser estabelecida por meio da progressiva redução do mesmo e da avaliação do espectro até que um limitante inferior para λ_3 seja atingido.

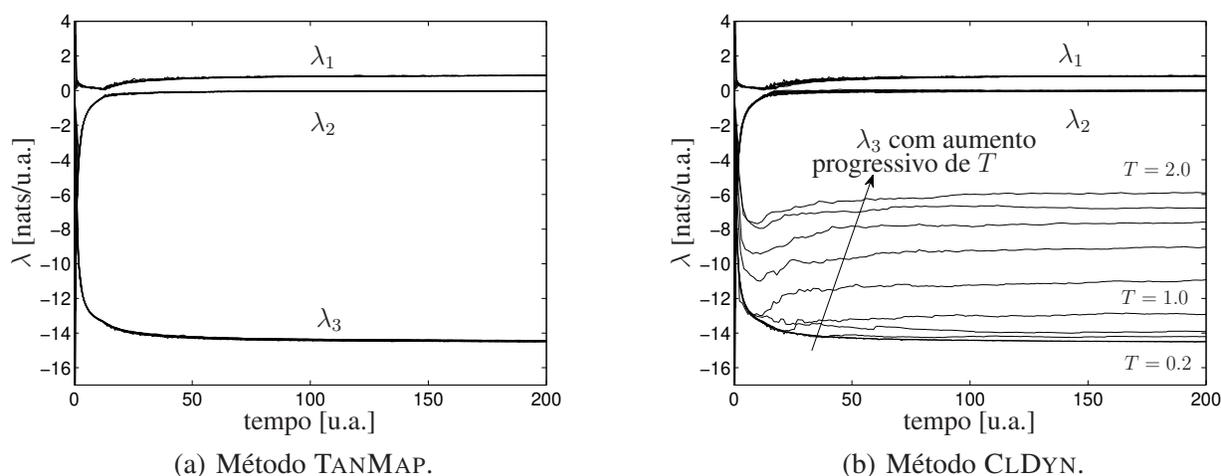


Figura 3.4: Espectro de Lyapunov para o sistema de Lorenz obtido pelo método TANMAP - 3.4(a) - e CLDYN - 3.4(b) - com o aumento progressivo do intervalo de integração T de 0.2 u.a. até 2 u.a., com passos de 0.2 u.a.

Sobrestimativas de λ_3 também podem ocorrer quando se usa o método CLDYN caso a magnitude da perturbação inicial δ_{x_0} não for pequena o suficiente para ser considerada infinitesimal em relação ao tamanho do atrator. A figura 3.5 mostra o espectro de Lyapunov para o atrator de Lorenz (tal como definido na seção 3.5) considerando um aumento em δ_{x_0} de 10^{-5} até 10^{-1} na forma de um progressão geométrica de razão 10. Pode-se observar que sobrestimativas no valor de λ_3 começam a ocorrer a partir de $\delta_{x_0} = 10^{-2}$, enquanto λ_1 e λ_2 praticamente não são afetados. Uma perturbação pequena, da ordem de 10^{-4} , parece ser adequada para todos os atratores analisados aqui. Mais uma vez, uma progressiva redução neste parâmetros pode ser empregada com o intuito de achar o limitante inferior para o menor expoente e assegurar a consistência do cálculo, assim como sugerido para o intervalo de integração T .

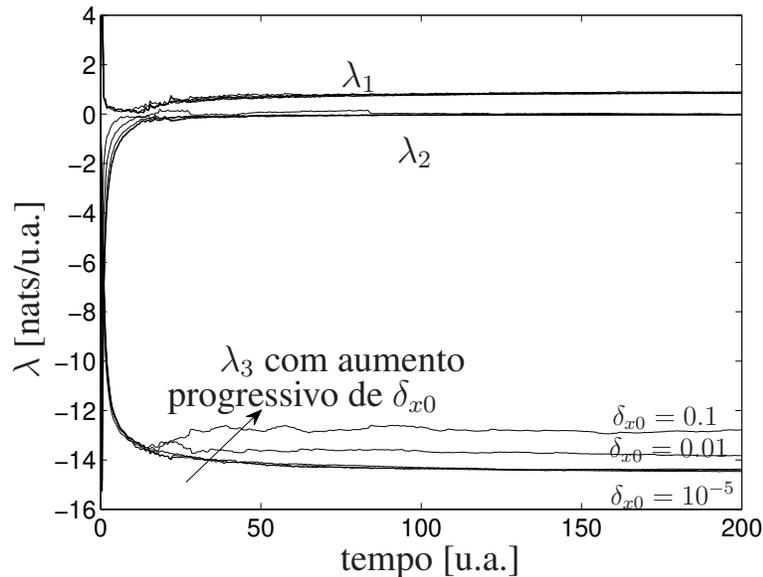


Figura 3.5: Espectro de Lyapunov do sistema de Lorenz obtido por meio do método CLDYN diante do aumento progressivo da magnitude da perturbação aplicada δ_{x0} variando de 10^{-5} a 10^{-1} com razão geométrica 10.

3.3.2 Variabilidade espaço-temporal dos expoentes de Lyapunov de tempo finito

Os expoentes de Lyapunov como definidos até aqui constituem uma importante ferramenta para identificação e caracterização dos conjuntos-limite obtidos a partir da solução das equações de estado de um modo geral. No entanto, estes expoentes consideram médias globais de divergência de trajetórias que mascaram a não-uniformidade local da previsibilidade do sistema dinâmico. Não obstante, a partir da noção de divergência de trajetórias inicialmente próximas, é possível definir taxas locais de divergências (Nese, 1989; Abarbanel et al., 1991) na forma dos chamados expoentes de Lyapunov de tempo finito (FTLE) (Shadden et al., 2005), tal como feito nas Eqs. (3.8) e (3.21).

A significativa variabilidade dos FTLEs no espaço de estados já foi evidenciada por diferentes abordagens na literatura. Por exemplo, Grassberger e Proccacia (Grassberger & Proccacia, 1984) calculam as taxas de divergência local por meio de métodos da teoria de probabilidades e de flutuações estocásticas, enquanto Nese (Nese, 1989) exprimiu estas divergências por meio da definição de expoentes de Lyapunov locais a partir do método do mapa tangente, tal como introduzido pela Eq. (3.8). Em especial, Nese analisou a variabilidade dos expoentes em função da sua posição no espaço de estados para o modelo de Lorenz, o que foi feito por meio da construção de diversas secções de Poincaré e de médias locais destes expoentes em regiões específicas do espaço de fase. Outro passo fundamental na consolidação da definição e na aplicação dos expoentes locais foi dado por Abarbanel

et al. (Abarbanel et al., 1991), por meio da análise da variabilidade espaço-temporal dos expoentes de tempo finito em atratores estranhos clássicos tal como os engendrados pelos mapas de Hénon e de Ikeda.

Neste contexto, torna-se interessante evidenciar aqui a variabilidade dos expoentes de tempo finito por meios estatísticos no âmbito da abordagem proposta. Com este objetivo, a figura 3.6 mostra a frequência relativa de aparecimento dos FTLEs por meio de histogramas para o modelo de Lorenz, considerando $T_e = KT = 0.5$ u.a., $T = 0.1$ u.a. e $\delta_{x0} = 10^{-4}$. Observa-se claramente uma distribuição não-uniforme para os FTLEs com uma variabilidade relativamente alta dos mesmos, sendo que a condição $\lambda_1^{T_e} > \lambda_2^{T_e}$ não necessariamente se sustenta localmente ⁶, ou seja, a previsibilidade local crítica pode ser dada por direções diferentes daquela mais expansiva obtida para o comportamento assintótico quando $T_e \rightarrow \infty$. Isso, de certa forma, ilustra a importância da metodologia proposta de cálculo para todo o espectro de Lyapunov, pois, assim, podem-se estimar as divergências locais para todas as direções da dinâmica e tomar aquela que é localmente maior, o que não depende apenas da posição no atrator, mas também do tempo de evolução da dinâmica (T_e) usado nas estimativas dos expoentes.

Em relação à proposta de cálculo por meio da abordagem CLDYN, observa-se que esta é completamente compatível com a metodologia TANMAP - tal como usada por Nese (Nese, 1989) - para o cálculo dos expoentes locais. A figura 3.7 mostra uma comparação entre os histogramas da frequência relativa de aparecimento de $\lambda_1^{T_e}$ para ambas as abordagens considerando diferentes tempos de evolução da dinâmica ($T_e = T_a = 0.5$ u.a. e $T_e = T_b = 10$ u.a.). Torna-se nítido nesta figura que as discrepâncias entre as distribuições dos expoentes locais obtidas pelos métodos CLDYN e TANMAP são pequenas o suficiente para que eles sejam considerados similares.

A figura 3.7 evidencia ainda a tendência de convergência do expoente local $\lambda_1^{T_e}$ em direção à média global com o aumento do tempo de evolução. Obviamente, quando T_e é suficientemente grande para capturar o comportamento médio de divergência do atrator, tem-se a definição clássica de expoente de Lyapunov como uma medida invariante que caracteriza o comportamento assintótico da solução. Além disso, observa-se que, independentemente do valor utilizado para T_e , a média espacial dos valores de $\lambda_1^{T_e}$ sempre converge para o expoente de Lyapunov global (λ_1) dado quando $T_e \rightarrow \infty$, sendo o mesmo válido para todo o espectro. Fundamentalmente, isso revela a ergodicidade intrínseca aos expoentes de Lyapunov, sendo que a média espacial de suas valores (em relação aos diversos FTLE em diferentes pontos do atrator) equivale a uma média temporal dos expoentes para um longo tempo de evolução.

Com o intuito de evidenciar de forma mais rigorosa que as abordagens CLDYN e TANMAP apre-

⁶Faz-se aqui, portanto, uma importante distinção da idéia clássica de espectro de Lyapunov para os FTLEs, o que consiste basicamente na violação da condição $\lambda_1^{T_e} \geq \lambda_2^{T_e} \geq \dots \geq \lambda_N^{T_e}$.

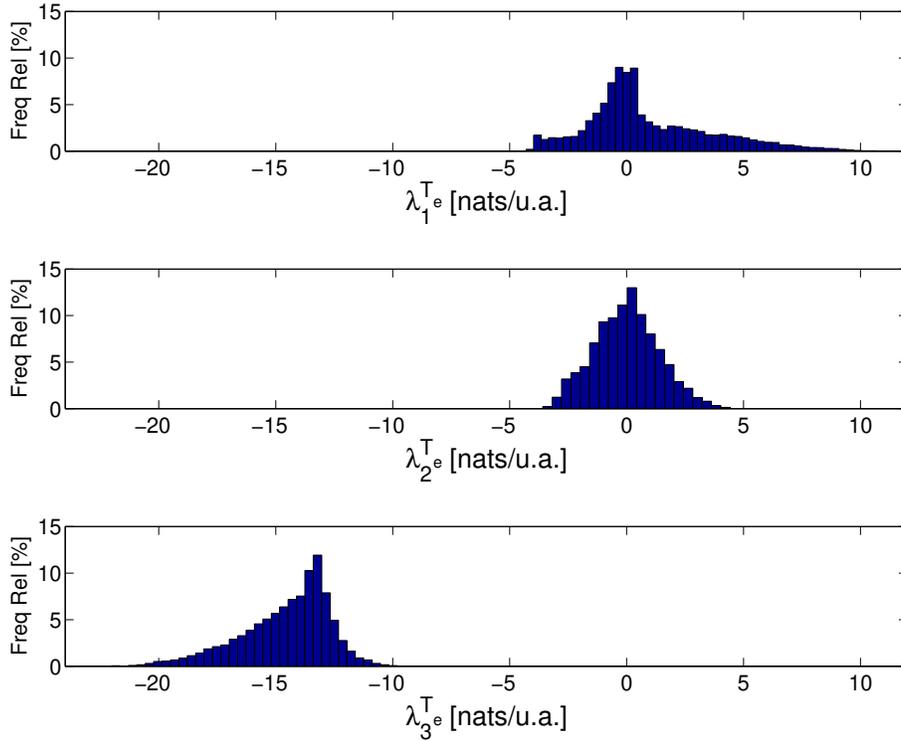


Figura 3.6: Os painéis superior, central e inferior mostram, respectivamente, o histograma da frequência relativa - Freq Rel - de aparecimento dos expoentes de Lyapunov locais $\lambda_1^{T_e}$, $\lambda_2^{T_e}$ and $\lambda_3^{T_e}$ obtidos para o atrator estranho de Lorenz considerando $T_e = KT = 0.5$ u.a., $T = 0.1$ u.a. e $\delta_{x_0} = 10^{-4}$ para a avaliação da divergência local.

sentam o mesmo padrão de convergência para o expoente de Lyapunov global, a figura 3.8 mostra o comportamento de decaimento dos desvios-padrão das distribuições dos FTLEs conforme T_e é aumentado. Observa-se que os desvios-padrão das distribuições dos expoentes locais tanto para o sistema caótico de Lorenz quanto para o de Rössler (conforme definido na seção 3.5) tendem assintoticamente a zero segundo um padrão exponencial. De fato, essa análise de convergência é análoga à realizada por Abarbanel et al. (Abarbanel et al., 1991) utilizando a abordagem do mapa tangente no contexto das matrizes de Oseledec, na qual uma medida de ajuste exponencial para a queda do desvio-padrão com o aumento de T_e é proposta na forma:

$$\sigma_1^{T_e} = \frac{c}{T_e^\nu} \quad (3.24)$$

sendo c e ν constantes. Embora um significado geométrico ou mesmo físico para o expoente ν

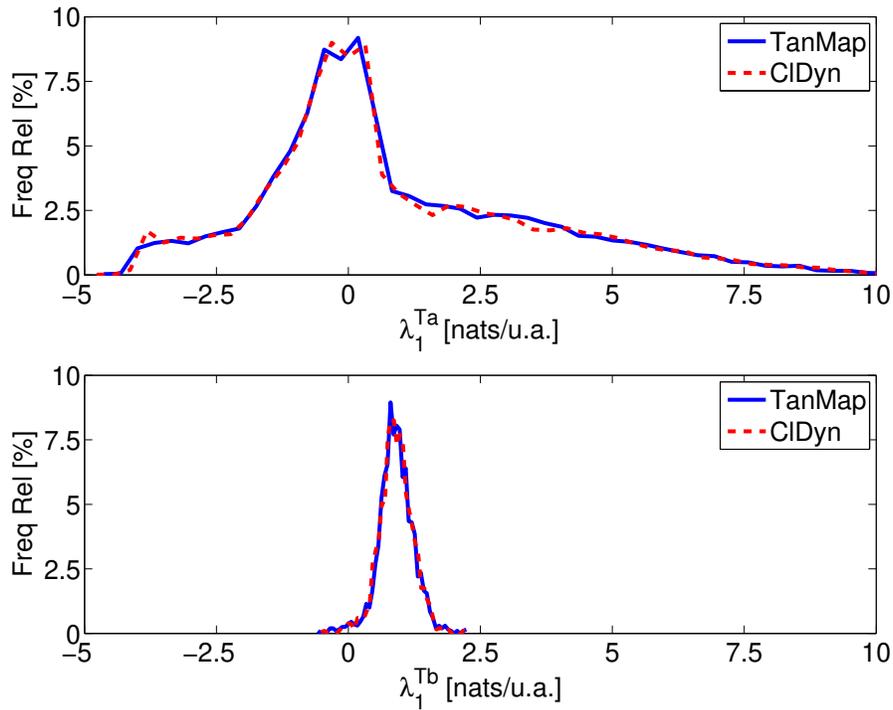


Figura 3.7: O painel superior mostra a frequência relativa de aparecimento de $\lambda_1^{T_e}$ obtida tanto por meio da abordagem CLDYN (linha tracejada) como por meio da metodologia TANMAP (linha contínua) para $T_e = T_a = 0.5$ u.a. O painel inferior é análogo ao superior mas assumindo $T_e = T_b = 10$ u.a. Foram consideradas um total de 20000 amostras de FTLEs.

ainda seja desconhecido, está claro que este fornece uma medida de quão rapidamente (em termos do tempo de evolução T_e) e de quão precisamente (em termos do desvio-padrão obtido) os expoentes locais convergem para o expoente de Lyapunov global (i.e. os expoentes de Lyapunov tal como classicamente definidos para o comportamento assintótico da solução). A figura 3.8 mostra ainda que os ajustes de curva para o desvio-padrão em função de T_e - tal como proposto por Abarbanel et al. (Abarbanel et al., 1991) - são praticamente idênticos, fornecendo valores muito próximos para c e ν . A tabela 3.2 mostra as constantes c , ν e a medida de qualidade de ajuste R-quadrado ⁷ para três sistemas dinâmicos caóticos clássicos: Lorenz, Rössler e Duffing (como definidos na seção 3.5).

Além da correspondência entre os valores das constantes e os ajustes de curva para as diferentes metodologias de cálculo dos expoentes apresentados na tabela 3.2 e na figura 3.8, os resultados aqui obtidos possuem boa correspondência numérica com os obtidos por Abarbanel et al., nos quais valores entre 0.5 e 1 são tipicamente encontrados para o expoente ν .

Os FTLEs não encontram aplicações apenas para a caracterização da previsibilidade local de

⁷R-quadrado = 1 indica ajuste perfeito (Ruggiero & Lopes, 1996).

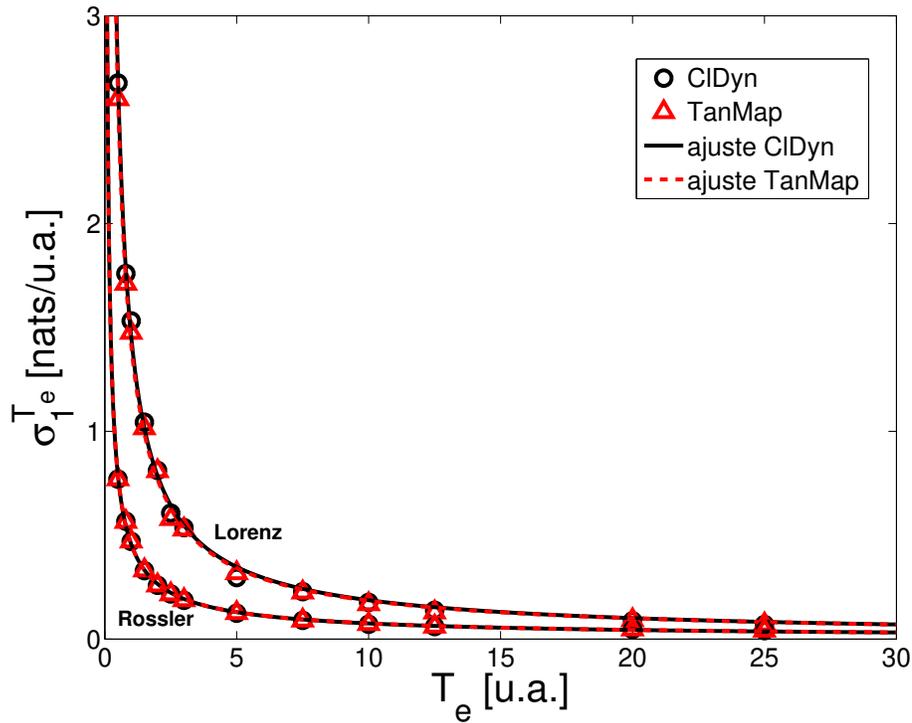


Figura 3.8: Ajuste de curva $\sigma_1^{T_e} = c/T_e^\nu$ para o desvio-padrão $\sigma_1^{T_e}$ da distribuição de $\lambda_1^{T_e}$ para os sistemas de caóticos de Rössler e Lorenz obtidos pelos métodos CLDYN e TanMap.

Tabela 3.2: Constantes c , ν e qualidade (R-quadrado) do ajuste $\sigma_1^{T_e} = c/T_e^\nu$ para as dinâmicas caóticas clássicas de Lorenz, Rössler e Duffing usando as abordagens TANMAP e CLDYN para a obtenção da distribuição dos $\lambda_1^{T_e}$ em termos de T_e

Dinâmica	Método	c	ν	R-quadrado
Lorenz	TANMAP	1.418	0.8853	0.9984
	CLDYN	1.457	0.8913	0.9981
Rössler	TANMAP	0.4569	0.7798	0.9982
	CLDYN	0.4567	0.7829	0.9981
Duffing	TANMAP	0.5625	0.5675	0.9939
	CLDYN	0.5639	0.5718	0.9940

sistemas dinâmicos, mas também têm sido estudados no contexto do fenômeno de advecção pela comunidade de mecânica dos fluidos. A advecção diz respeito ao transporte de substâncias sob a ação do fluxo de um fluido, o que é comumente descrito por meio de um campo vetorial. Isso

faz com que a advecção possa ser estudada imaginando cada condição inicial no espaço de estados como sendo um marcador passivo que é transportado segundo as equações de estado (Shadden et al., 2005). Assim, é interessante observar que existem trajetórias que definem separatrizes destes campos vetoriais dividindo comportamentos dinâmicos comuns a regiões específicas do espaço de estados. Estas separatrizes são de fundamental importância para a caracterização do fluxo de um modo geral, e usualmente estão relacionadas em sistemas autônomos às variedades estáveis e instáveis de conjuntos-limite tais como pontos fixos ou mesmo órbitas periódicas. Tipicamente, tanto trajetórias homoclínicas como trajetórias heteroclínicas definem as variedades estáveis e instáveis de pontos fixos na medida em que são dadas por pontos que tendem para este conjunto-limite tanto em tempo direto como em tempo reverso. Dada a importância destas trajetórias no comportamento dinâmico observado, existem diversos trabalhos na literatura dedicados a métodos computacionais de cálculo das mesmas (Parker & Chua, 1989; Haller, 2000a; Homburg et al., 2003), sendo a maior parte deles dedicados a sistemas bidimensionais, para os quais as variedades estáveis e instáveis são objetos geométricos unidimensionais (Parker & Chua, 1989). O cálculo de variedades de maior dimensão é ainda um problema em aberto em sistemas dinâmicos, mas tem havido contribuições recentes significativas (Haller, 2001; Homburg et al., 2003; Lekien, Shadden, & Marsden, 2007), as quais, em particular, baseiam-se no cálculo da divergência crítica por meio dos FTLEs.

O cálculo das separatrizes por meio dos FTLEs ganha um caráter mais geral quando sistemas não-autônomos são considerados. Neste caso, a dependência explícita do tempo existente na dinâmica torna as separatrizes objetos geométricos também variantes no tempo, e as noções de variedades estáveis e instáveis não são bem definidas, sendo, portanto, denominadas estruturas Lagrangianas coerentes (Shadden et al., 2005), podendo ainda ser capturadas por meio do cálculo da divergência crítica de tempo finito no espaço de estados.

A possibilidade de localização de separatrizes por meio dos FTLEs, bem como a sua relação com as variedades instáveis e estáveis da dinâmica, podem ser exemplificadas como se segue. Considere o seguinte sistema dinâmico hamiltoniano⁸:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3\end{aligned}\tag{3.25}$$

onde a função hamiltoniana⁹ $H(x, y)$ que o descreve é dada por, Eq. (3.26):

⁸Um sistema dinâmico é dito hamiltoniano quando todas as forças que atuam sobre ele são conservativas, isto é, o trabalho destas é independente da trajetória.

⁹Uma função hamiltoniana é aquela que fornece a soma das energias potenciais e cinéticas de um sistema dinâmico hamiltoniano, e que permite obter as equações de Hamilton que o descrevem. Por exemplo, no caso do sistema dado na Eq. (3.25), a função hamiltoniana $H(x, y)$ é aquela que leva às equações de Hamilton: $\dot{x} = \partial H / \partial y$ e $\dot{y} = -\partial H / \partial x$ (Monteiro, 2006).

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \quad (3.26)$$

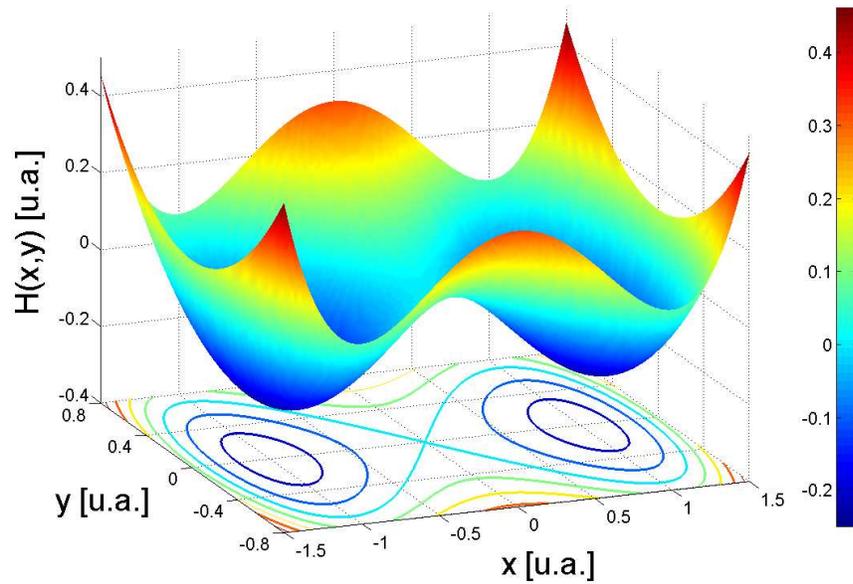
As curvas de nível de $H(x, y)$ descrevem as trajetórias do sistema no espaço de estados (Monteiro, 2006), as quais podem ser visualizadas no retrato de fases $x \times y$ da figura 3.9(a). Em particular, observa-se, a partir das Eqs. (3.25), que o sistema apresenta um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}^* = [0, 0]^T$ do tipo sela e dois pontos de equilíbrio do tipo centro em $\mathbf{x}^* = [\pm 1, 0]^T$. Observa-se ainda (figura 3.9(a)) que o ponto de sela $\mathbf{x}^* = [0, 0]^T$ exerce uma profunda influência no campo vetorial do sistema como um todo, dividindo comportamentos dinâmicos distintos no espaço de estados. Isso faz com que possam ser encontradas trajetórias periódicas de menor amplitude próximas a cada um dos centros separadas pela trajetória homoclínica que passa pelo ponto de sela, bem como trajetórias periódicas de maior amplitude externas à trajetória homoclínica. Em particular, a trajetória homoclínica é dada pela curva de nível $H(x, y) = 0$ (Monteiro, 2006) e corresponde às variedades estáveis e instáveis do ponto de sela, fazendo o papel de separatriz de comportamentos dinâmicos distintos no espaço de estados.

A localização destas separatrizes e da própria trajetória homoclínica pode também ser feita por meio da caracterização espaço-temporal da região de divergência crítica da dinâmica, algo extremamente importante, uma vez que nem sempre se tem acesso a uma função hamiltoniana que descreve sistema (Strogatz, 2001; Monteiro, 2006). Assim, define-se o expoente de Lyapunov local crítico para um determinado tempo de evolução T_e e posição \mathbf{x} no espaço de estados ($\lambda_{\max}^{T_e}(\mathbf{x}, T_e)$ em nats/u.a.) como o maior expoente do espectro dos FTLEs obtido, ou seja:

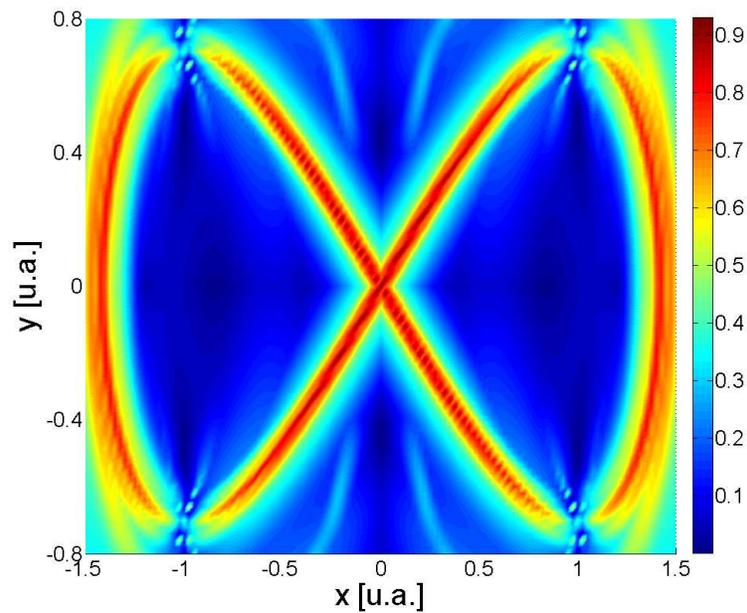
$$\lambda_{\max}^{T_e}(\mathbf{x}, T_e) = \max_i(\lambda_i^{T_e}(\mathbf{x}, T_e)), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.27)$$

Pode-se assim capturar a estrutura de divergência da dinâmica associando uma escala de cores a pontos no espaço de estados segundo o valor do seu respectivo $\lambda_{\max}^{T_e}(\mathbf{x}, T_e)$, sendo que as cristas (regiões de máximos) desta superfície (figura 3.9(b)) definem as LCSs, e, portanto, fornecem a posição das separatrizes, bem como da trajetória homoclínica observada na figura 3.9(a).

Embora o estudo da advecção se desenvolva em sua maior parte em sistemas dinâmicos bidimensionais, a análise da variabilidade espaço-temporal dos FTLEs não se restringe apenas a este tipo de mapeamento, e pode também ser extrapolada para sistemas com conjuntos-limite mais complexos, tais como atratores estranhos. Faz-se interessante, neste último caso, a quantificação dos FTLEs para diferentes pontos do conjunto-limite (e não para uma varredura nas condições iniciais almejando um cobertura de todo o espaço de estados), o que permite caracterizar a previsibilidade para diferentes posições no atrator.



(a) função hamiltoniana



(b) perfil de divergência

Figura 3.9: O painel superior mostra a função hamiltoniana para o sistema dinâmico, bem como suas curvas de nível no plano $x \times y$. O painel inferior mostra o perfil de divergência para $-1.5 \leq x_0 \leq 1.5$ e $-0.8 \leq y_0 \leq 0.8$ por meio de uma escala de cores proporcional à $\lambda_{\max}^{T_e}$ em nats/u.a. para um tempo de evolução $T_e = 5$ u.a. obtido por meio da abordagem CLDYN com $T = 0.05$ u.a. e $\delta_{x_0} = 10^{-4}$.

Uma abordagem de caracterização da previsibilidade semelhante a esta foi desenvolvida por Nese (Nese, 1989) e por Abarbanel et al. (Abarbanel et al., 1991) no estudo da variabilidade espacial dos expoentes locais em atratores estranhos. Neste cenário, pode-se entender a estrutura do campo vetorial da dinâmica mediante as divergências locais avaliadas em pontos específicos no espaço de estados, para o qual a não uniformidade dos FTLEs torna-se clara. Por exemplo, a figura 3.10(a) mostra a distribuição espacial tridimensional de $\lambda_{\max}^{T_e}$ (escala de cores) com $T_e = 0.2$ u.a. para o sistema de Lorenz. Observam-se claramente nesta figura regiões de alta previsibilidade na parte superior das alças do atrator, enquanto a região próxima ao ponto de sela existente em $\mathbf{x}^* = [0 \ 0 \ 0]^T$ apresenta alta instabilidade e baixa previsibilidade. É interessante observar que, do ponto de vista prático, este resultado evidencia a importância e o ganho de informação obtido quando a posição no atrator é levada em consideração para a previsão dos estados futuros no espaço de fase, a qual pode ser muito imprecisa caso apenas o valor do expoente de Lyapunov global seja considerado.

Outro fator determinante da organização da previsibilidade no espaço de estados relaciona-se com o tempo de evolução ou horizonte de previsão (tempo no futuro para qual deseja-se prever o estado do sistema) da dinâmica. A seqüência de painéis das figuras 3.10 e 3.11 mostra que as regiões de previsibilidade crítica também se modificam com o aumento de T_e , adquirindo uma estrutura geométrica particular (vinculada à variedade estável do ponto de sela na origem (Doerner et al., 1999)). Esta estrutura geométrica está intrinsecamente ligada ao próprio processo de amplificação de uma dada incerteza próxima à origem mediante a aplicação das equações de estado, sendo que a propagação desta pela dinâmica se dá forma organizada até que um valor de T_e suficientemente grande seja atingido. Quando T_e é grande, tem-se o espalhamento da incerteza por todo atrator (figura 3.11(c)), o que leva à uniformidade da previsibilidade associada à convergência para o expoente global e à perda de informação local da estrutura do campo vetorial. Este tempo de evolução associado a uma uniformidade espacial dos expoentes locais é atingido de forma relativamente rápida para o atrator estranho de Lorenz aqui analisado, conforme pode também ser observado diante do comportamento de convergência evidenciado na figura 3.8.

Embora a variabilidade dos FTLEs para o modelo de Lorenz já tenha sido examinada na literatura (Nese, 1989; Doerner et al., 1999), a organização espaço-temporal, tal como aqui exposta, parece não ter ainda sido tratada. De fato, Nese dedica-se a analisar a variabilidade dos expoentes locais para tempos de evolução relativamente pequenos da dinâmica e não adota a representação dos expoentes no espaço tridimensional na forma de uma escala de cores, fazendo suas análises por meio de médias locais em volumes no espaço de estados e secções de Poincaré. Além disso, a descrição da variabilidade feita por Nese é idêntica à obtida na figura 3.10(a). Já o trabalho de Doerner et al. (Doerner et al., 1999) apresenta uma descrição da estrutura espiral das curvas de nível de $\lambda_{\max}^{T_e}(\mathbf{x}, T_e)$ para o modelo de Lorenz por meio de funções de Bessel, o que é analisado em termos de diferentes valores

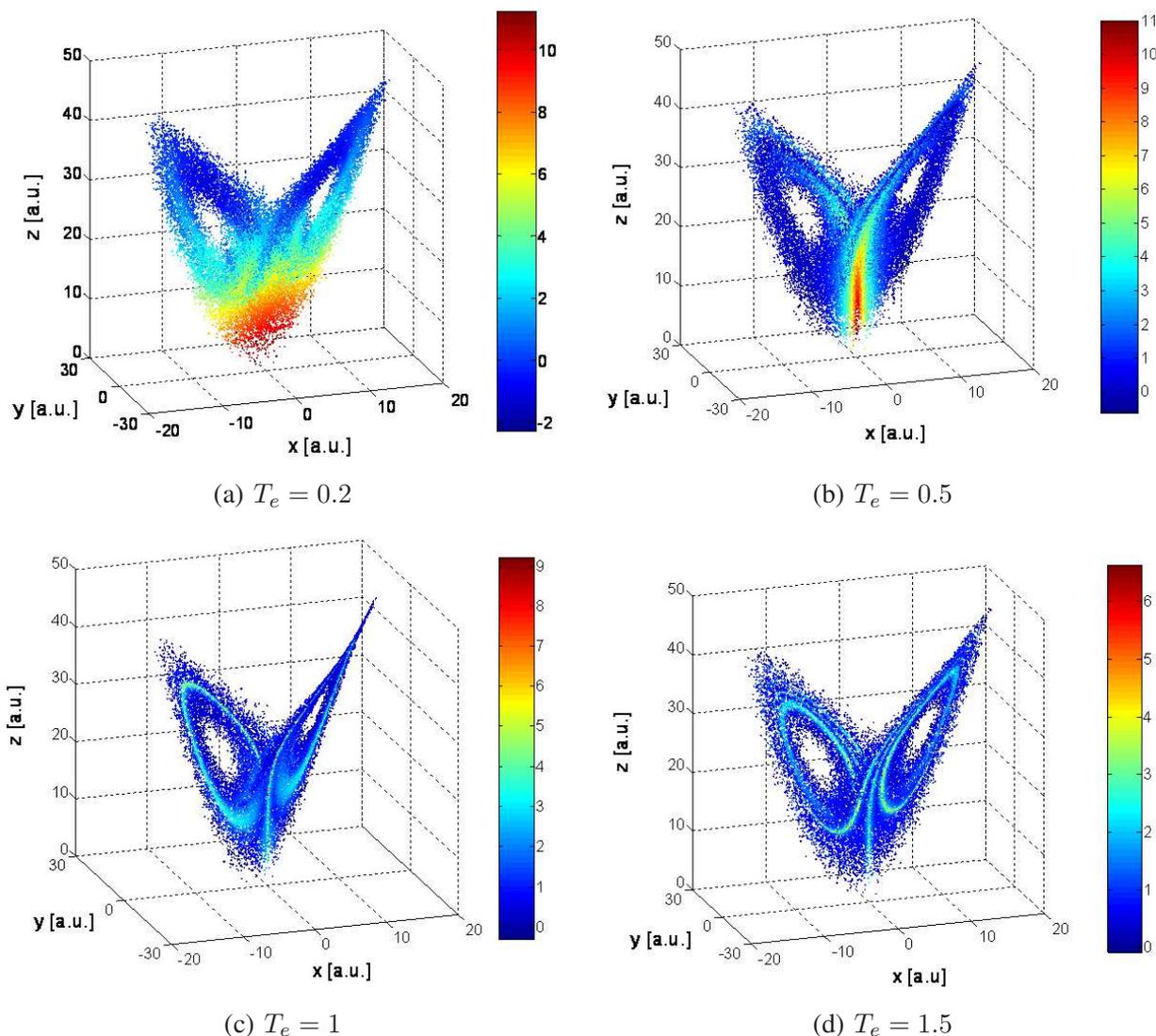


Figura 3.10: Os painéis 3.10(a), 3.10(b), 3.10(c) e 3.10(d) mostram a variabilidade espacial dos $\lambda_{\max}^{T_e}$ em nats/u.a. para diferentes tempos de evolução do sistema dinâmico de Lorenz quantificados por meio da abordagem CLDYN assumindo $T = 0.1$ u.a. e $\delta_{x_0} = 10^{-4}$.

do parâmetro r da dinâmica, e não para diferentes tempo de evolução.

No mais, conclui-se desta seção que, enquanto os expoentes de Lyapunov globais são ferramentas importantes na caracterização do comportamento assintótico da solução do sistema dinâmico, bem como uma métrica robusta às condições iniciais dentro de uma mesma bacia de atração, os FTLEs são medidas muito mais adequadas para caracterizar a previsibilidade, sendo que a sua organização espaço-temporal está intrinsecamente relacionada à estrutura do campo vetorial. Em ambos os contextos, o método das dinâmicas clonadas mostra-se como uma ferramenta consistente na quan-

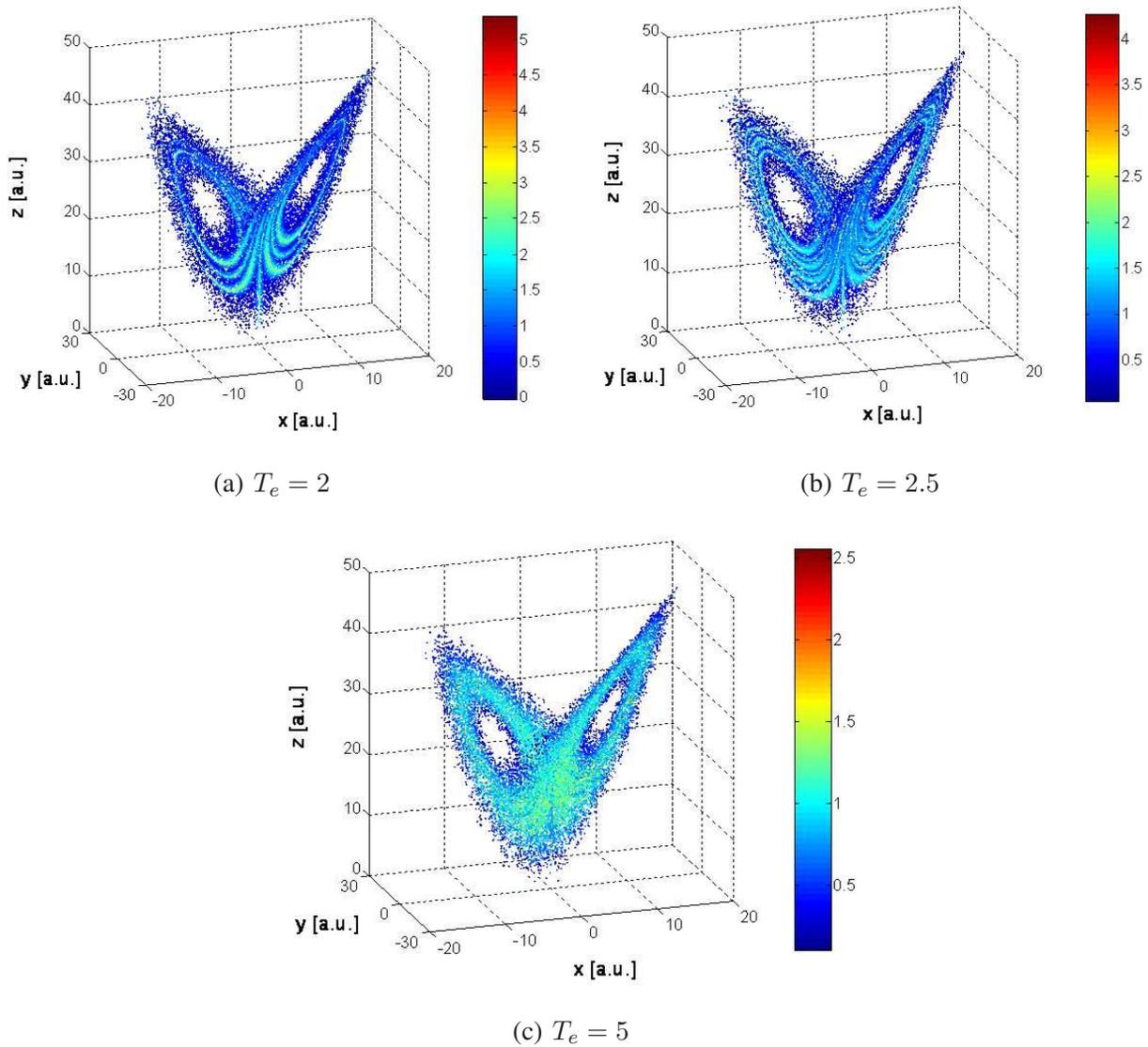


Figura 3.11: Os painéis 3.11(a), 3.11(b) e 3.11(c) mostram a variabilidade espacial dos $\lambda_{\max}^{T_e}$ em nats/u.a. para diferentes tempos de evolução do sistema dinâmico de Lorenz quantificados por meio da abordagem CLDYN assumindo $T = 0.1$ u.a. e $\delta_{x,0} = 10^{-4}$.

tificação dos expoentes de Lyapunov, o que até aqui foi estudado no âmbito de dinâmicas suaves e bem comportadas. Apresenta-se a seguir um caso de sistema dinâmico com entradas descontínuas que é muito comum em neurociência computacional (Koch, 1999; Izhikevich, 2007) e configura-se como um cenário desafiador para a obtenção do espectro de Lyapunov como classicamente feito pelo método TANMAP, mas não para o método CLDYN.

3.3.3 Aplicação do método CLDYN ao modelo de FitzHugh-Nagumo para entradas descontínuas

Conforme exposto, uma das principais vantagens da metodologia proposta é a possibilidade de calcular o espectro de Lyapunov sem a necessidade de construção do mapa tangente, o que pode ser útil em diversas aplicações, e, em especial, na análise de dinâmicas com entradas não-suaves ou descontínuas. A fim de ilustrar essa aplicabilidade, pode-se empregar o método CLDYN para analisar os comportamentos oscilatórios do modelo neuronal de FitzHugh-Nagumo (FHN) para entradas descontínuas - pulsos retangulares de frequência ω e amplitude A .

A teoria de sistemas dinâmicos não-lineares tem sido comumente empregada na descrição e análise de diversos processos biológicos, e, em particular, tem contribuído de maneira significativa para o desenvolvimento da neurociência. Desde o trabalho pioneiro de Alan Hodgkin e Andrew Huxley (Hodgkin & Huxley, 1952), diversos modelos neuronais vêm sendo extensivamente criados, modificados e analisados sob vários aspectos na tentativa de explicar os intrincados mecanismos fisiológicos por trás da geração, transmissão e processamento da informação associados ao potencial de ação (o sinal elétrico que se propaga pelas células excitáveis e efetivamente carrega informação neuronal). Neste contexto, destacam-se basicamente duas classes de modelos, os realistas e os simplistas. Os modelos realistas buscam representar com fidelidade os fenômenos biofísicos, fornecendo um melhor entendimento quantitativo do sistema biológico, enquanto os modelos simplistas buscam capturar de forma qualitativa os comportamentos oscilatórios envolvidos. Neste último caso, os comportamentos oscilatórios, bem como os fenômenos de transição de fase, podem ser estudados por métodos analíticos ou numéricos eficientes, mas de difícil aplicação no contexto de sistemas mais complexos.

Dentre os modelos neuronais de tempo contínuo, talvez o modelo de FHN (FitzHugh, 1961, 1969) seja o mais simples dentre os capazes de capturar qualitativamente diversos aspectos importantes das dinâmicas de neurônios. De forma sucinta, este modelo consiste em uma versão modificada das equações de Van der Pol para a descrição de osciladores de relaxação, a qual tem por objetivo capturar as características oscilatórias neuronais por meio de duas variáveis de estado representando excitabilidade e refratariedade neuronal, conforme já visto anteriormente e rerepresentado a seguir:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= V - \frac{V^3}{3} - W + I(t) \\ \dot{W} &= c(V + a - bW)\end{aligned}\tag{3.28}$$

onde V é o potencial de membrana, W é uma variável de recuperação relacionada com a refratariedade de membrana e $I(t)$ é a estimulação externa. Os parâmetros a , b e c são constantes com valores 0.7, 0.8 e 0.1, respectivamente, sendo as unidades das variáveis de estado arbitrárias.

Originalmente, o modelo foi criado com o intuito de fornecer uma plataforma rápida de testes para sistemas de computação analógicos que almejavam resolver as equações de estado proposta por Hodgkin e Huxley (Hodgkin & Huxley, 1952) para a potencial de ação no axônio gigante de lula (Izhikevich & FitzHugh, 2006). No entanto, sua capacidade de síntese e reprodução qualitativa das características neuronais mostraram-se tão atraentes que o modelo tornou-se um paradigma importante no estudo de sistemas excitáveis (Izhikevich, 2007; Koch, 1999). Em especial, este sistema destaca-se por oferecer a possibilidade de estudar a excitabilidade neuronal por meio de um retrato de fase bidimensional, bem como por relacionar este último a estados fisiológicos representativos que são percorridos pelas trajetórias tipicamente obtidas em resposta a estímulos impulsivos (ou seja, de duração aproximadamente infinitesimal), ou mesmo retangulares, tal como mostrado na figura 3.12.

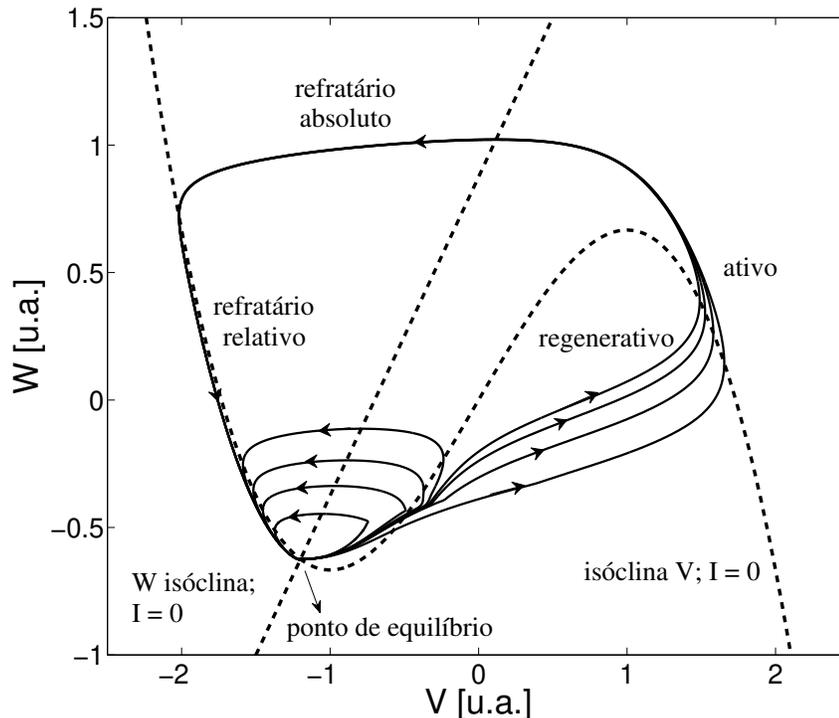


Figura 3.12: Plano de fase do modelo de FHN e seus respectivos estados fisiológicos. As linhas tracejadas mostram as isóclinas e as linhas contínuas mostram as soluções do sistema dinâmico para estímulos impulsivos com amplitude A (aumentados progressivamente) evidenciando respostas sub e supra-limiare para o potencial de membrana.

Observa-se que, para $I(t) = 0$, as equações de estado apresentadas em (3.28) apresentam um ponto de equilíbrio do tipo foco estável localizado na intersecção das isóclinas¹⁰ V e W para o qual as

¹⁰As isóclinas, neste caso, referem-se ao lugar geométrico dos pontos no espaço de estados para os quais \dot{V} e \dot{W} são

trajetórias tendem em regime permanente. Quando um estímulo impulsivo de amplitude A é aplicado, oscilações sublimiáres ou supralimiáres (na forma de potenciais de ação - PAs) podem ser observadas dependendo do valor de A .

Na ausência de qualquer estímulo, o espaço de estados é dividido por uma separatriz que exerce o papel de limiar do PA, localizada próxima da isóclina V (FitzHugh, 1961, 1969). Nesta divisão do espaço de estados, uma oscilação sublimiar corresponde a uma trajetória de excursão limitada, passando por uma região de excitabilidade aumentada (à direita do ponto de equilíbrio e mais próxima do limiar), e, posteriormente, deprimida (à esquerda do ponto de equilíbrio e mais distante do limiar). Já uma oscilação supralimiar está associada a uma trajetória com excursão de maior amplitude, passando pelos estados fisiológicos regenerativo, ativo, refratário absoluto, refratário relativo e de excitabilidade deprimida. Nesta descrição, a região regenerativa refere-se à subida do PA, e é assim denominada devido ao fato de um pulso estimulatório com amplitude negativa suficientemente intenso abolir o PA, o que se torna impossível quando a trajetória entra na região ativa (pico do PA). Segue-se a partir daí o período refratário absoluto, no qual a trajetória está acima da separatriz e um novo PA não pode ser evocado, não importando quão intenso seja um novo estímulo I , e o período refratário relativo, no qual um novo PA pode ser evocado, desde que I seja suficientemente intenso. Conforme apontado pelo próprio FitzHugh (FitzHugh, 1969), não existem fronteiras definidas entre os respectivos estados fisiológicos e a transição entre eles se dá por uma gradação contínua de estados intermediários.

Uma característica importante do modelo de FHN é a sua capacidade de gerar conjuntos-limite dependentes da forma de estimulação aplicada, produzindo comportamentos análogos aos de fato tipicamente observados em neurônios. Por exemplo, quando $I(t) = A$, sendo A uma constante, tem-se um cenário em que tanto pontos fixos como ciclos-limite podem ser encontrados dependendo do valor de A . Assim, um aumento progressivo de A implica em um deslocamento da isóclina V (de formato cúbico - figura 3.12), fazendo com que o ponto de equilíbrio do tipo foco estável se mova para cima sobre a reta definida pela isóclina W (que não depende de A). Este movimento do ponto fixo é acompanhado da manutenção da sua característica estável até que um determinado valor crítico de I seja alcançado, e uma mudança qualitativa no retrato de fase ocorre, dando origem a um foco instável e um ciclo-limite estável por meio de uma bifurcação de Hopf. Observa-se que não apenas a estimulação I influencia na estabilidade (ou na perda de estabilidade) do ponto fixo, mas também os parâmetros a , b e c da dinâmica são cruciais neste sentido.

Embora várias das características oscilatórias neuronais já possam ser observadas quando $I(t) = A$, talvez seja no cenário de estimulação periódica que o modelo de FHN mostre de forma mais contundente a sua riqueza de comportamentos oscilatórios. De fato, o cenário de estimulação constante

iguais a zero, respectivamente, (Monteiro, 2006).

define um sistema dinâmico bidimensional para o qual o teorema de Poincaré-Bendixson garante a inexistência de atratores estranhos (Monteiro, 2006). Entretanto, quando uma estimulação externa variante no tempo é aplicada, o sistema não-autônomo obtido pode ser reescrito como uma dinâmica autônoma com três variáveis de estado, o que permite, *inter alia*, a presença de oscilações caóticas.

Em particular, a estimulação periódica é usualmente empregada para se obter a resposta em regime permanente em células excitáveis, o que comumente é feito por meio de pulsos com características não suaves (e.g. retangulares) (Koch, 1999; Izhikevich, 2007). De fato, pulsos retangulares são freqüentemente empregados em experimentos para melhor entendimento da excitabilidade de sistemas biológicos, como por exemplo na avaliação do período refratário ou mesmo no levantamento da curva intensidade por duração de um estímulo necessário para evocar um potencial de ação. Neste contexto, o tratamento matemático destes cenários experimentais torna-se mais complicados na medida em que os métodos clássicos e mais aceitos de análise de estabilidade de dinâmicas não-lineares exigem linearizações nem sempre disponíveis (Doi & Sato, 1995).

Diante deste cenário em particular, a abordagem CLDYN mostra-se extremamente atraente, uma vez que não exige a construção do espaço tangente, permitindo inferir e caracterizar a estabilidade da solução atratora por meios quantitativos e robustos. Assim, considera-se como exemplo o modelo de FHN com uma estimulação externa dada por, Eq. (3.29):

$$I(t) = A \cdot \text{square}(\omega t) \quad (3.29)$$

onde a função $\text{square}(\omega t)$ corresponde a um trem de pulsos de amplitude unitária com freqüência angular ω em rad/u.a. e ciclo de trabalho de 50%. Neste caso, dependendo do valor de A , o sistema de FHN pode mudar drasticamente o respectivo conjunto-limite observado no espaço de estados. A figura 3.13(a) mostra por meio do mapa estroboscópico as características topológicas da solução atratora justamente quando a amplitude de estimulação na Eq. (3.29) é tomada como parâmetro de controle, sendo a freqüência de estimulação ω fixada em 1 rad/u.a., o que revela um rico cenário de comportamentos oscilatórios.

Observa-se claramente na figura 3.13(a) uma faixa de amplitude de estimulação para a qual um número finito de pontos no mapa estroboscópico sugere um comportamento oscilatório neuronal periódico (e.g. as faixas de amplitude: $0.55 < A < 0.59$; $0.75 < A < 1.2$; $1.24 < A < 1.3$), enquanto outros intervalos deste parâmetro de controle (e.g. $0.61 < A < 0.63$; $0.64 < A < 0.70$; $0.73 < A < 0.75$) associam-se a comportamentos aperiódicos (um número aparentemente infinito de pontos é obtido no mapa estroboscópico para cada valor de amplitude empregado), o que sugere a existência de típicos atratores estranhos para vários valores de A .

A figura 3.13(a) mostra ainda o surgimento de janelas de periodicidade e o reaparecimento de soluções com características aperiódicas mediante diferentes tipos de bifurcação, o que se dá tanto por

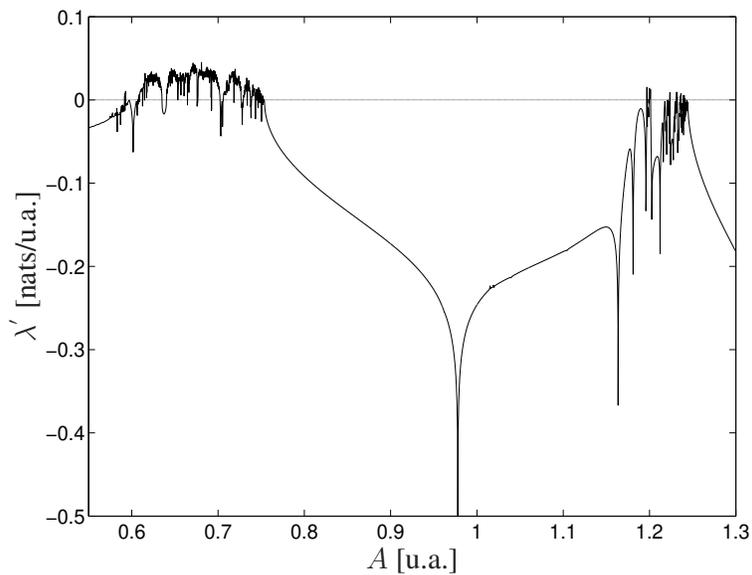
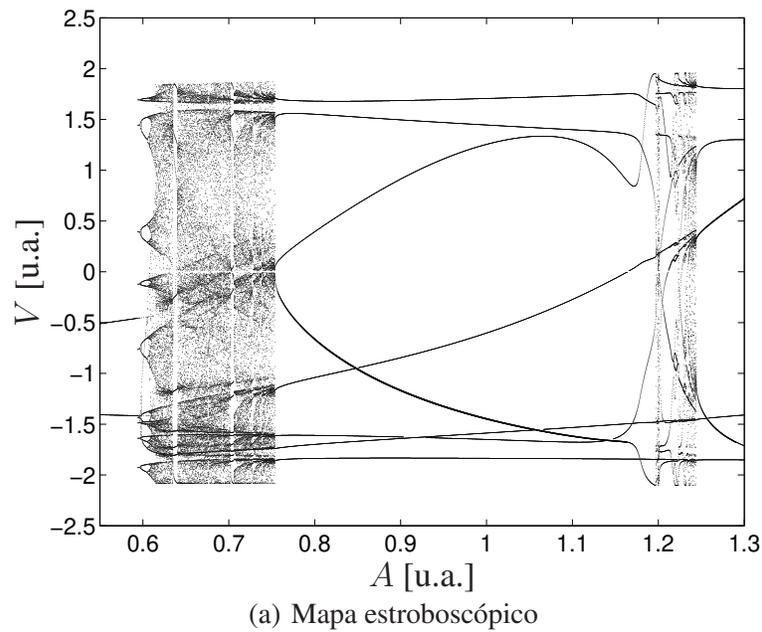


Figura 3.13: O painel 3.13(a) mostra o mapa estroboscópico obtido a partir da amostragem do potencial de membrana V com uma frequência de 1 rad/u.a. tomando a amplitude A da estimulação do modelo de FHN como parâmetro de controle. O painel 3.13(b) mostra o maior expoente de Lyapunov (excluindo o expoente nulo associado a direção da variável tempo) associado ao mesmo parâmetro de controle do painel 3.13(a).

transições de fase mais suaves, com sucessivas duplicações de período em direção ao comportamento caótico, tal como fundamentado por Feigenbaum (Feigenbaum, 1978) (como acontece a partir de $A = 0.60$), como também pelo colapso abrupto ($A = 0.635$) e o reaparecimento repentino do suposto atrator estranho ($A = 0.64$), num indicativo típico de bifurcações do tipo crise (Grebogi & Ott, 1983). Outro aspecto interessante da dinâmica analisada é a existência do comportamento intermitente do potencial de membrana (Pomeau & Manneville, 1980; Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995). Este padrão oscilatório é classicamente definido em termos de oscilações periódicas (regimes laminares) espaçadas por intervalos aparentemente irregulares, analogamente ao que se observa aqui para trens de potenciais de ação de tamanho irregular, espaçados por intervalos de atividade sublimiar também de duração irregular. Este comportamento intermitente pode claramente ser observado no painel inferior da figura 3.14 para $A = 0.65$ e $\omega = 1$ rad/u.a., enquanto o painel superior da mesma figura mostra o plano de fase da dinâmica, no qual um atrator estranho pode ser observado.

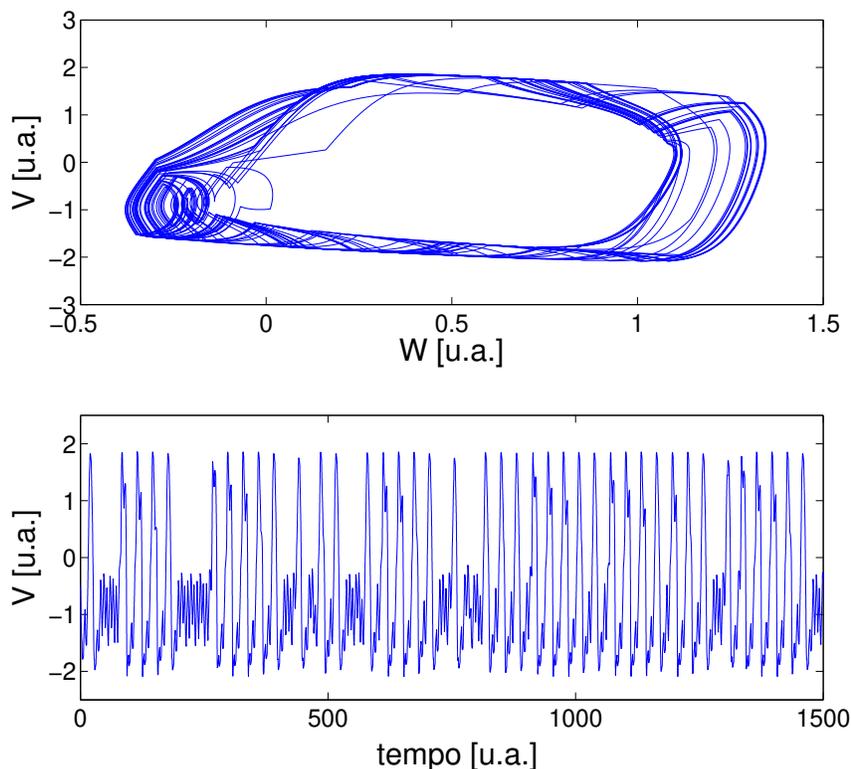


Figura 3.14: O painel superior mostra o plano de fase para o modelo de FHN mediante estimulação de pulsos quadrados com $A = 0.65$, $\omega = 1$ rad/u.a. e ciclo de trabalho de 50 %. O painel inferior mostra a série temporal do potencial de membrana onde o comportamento caótico relacionado com o fenômeno de intermitência pode ser observado.

É no mínimo interessante observar que o comportamento intermitente é comumente encontrado em sistemas neuronais na forma dos chamados *burstings* de potenciais de ação, sendo, além disso, de fundamental importância na regulação de diversos processos biológicos (Koch, 1999). A completa caracterização deste comportamento dinâmico, bem como sua relação com a rota para o caos por intermitência conforme estabelecido por Pomeau e Manneville (Pomeau & Manneville, 1980), exige uma análise mais detalhada do mecanismo de perda de estabilidade da oscilação periódica, o que é usualmente feito por meio dos autovalores da matriz monódroma, tal como definida no capítulo anterior, e também recai sobre as estratégias de linearização aqui evitadas.

Os resultados qualitativos apontados pelo mapa estroboscópico são fortemente suportados pelos resultados quantitativos obtidos a partir do cálculo do maior expoente de Lyapunov por meio da abordagem CLDYN. A figura 3.13(b) mostra o maior expoente de Lyapunov λ' (excluindo o expoente nulo associado à perturbação na direção do tempo) em regime permanente (após 3000 u.a. de tempo, com $T = 0.1$ u.a. e $\delta_{x0} = 10^{-4}$), tomando A como parâmetro de controle no domínio $0.55 < A < 1.3$ com passo de 2×10^{-4} . Observa-se que os valores obtidos para λ' são condizentes com os comportamentos oscilatórios qualitativamente capturados pelo mapa estroboscópico, ou seja, expoentes positivos estão associados a amplitudes de estimulação que levam a comportamentos aparentemente caóticos, enquanto expoentes negativos estão associados a valores de A que levam a oscilações aparentemente periódicas.

A riqueza de comportamentos oscilatórios exibidos pelo modelo de FHN torna-se ainda mais nítida quando o espaço de parâmetros variantes incorpora também a frequência ω de estimulação. Neste sentido, a figura 3.15(a) mostra a superfície obtida para λ' quando A e ω são variados, na qual observam-se regiões de comportamento periódico ($\lambda' < 0$), quase-periódico ($\lambda' = 0$) e caótico ($\lambda' > 0$), conforme mostrado em detalhe pelos retratos de fase apontados no painel. Nota-se que a superfície obtida é extremamente acidentada, o que é um reflexo direto da sensibilidade da dinâmica aos parâmetros de controle da estimulação. Embora seja possível identificar regiões bem definidas para os respectivos comportamentos oscilatórios (conforme mostrado, por exemplo, na figura 3.15(b) para comportamento caótico) parece impossível explicar a geometria destas regiões por meio de uma descrição mais analítica.

De maneira geral, os resultados aqui apresentados tornam transparente a riqueza oscilatória de um modelo neuronal relativamente simples, o que tem despertado discussões importantes a respeito da forma de manipulação e processamento de informação por meio dos conjuntos-limite classicamente obtidos como soluções destes sistemas não-lineares, tópico este a ser abordado em mais detalhes na seção 3.4.

Uma vez que a abordagem CLDYN foi bem-sucedida na caracterização da estrutura topológica do atrator obtido, pode-se empregá-la na caracterização da variabilidade espaço-temporal da previsibili-

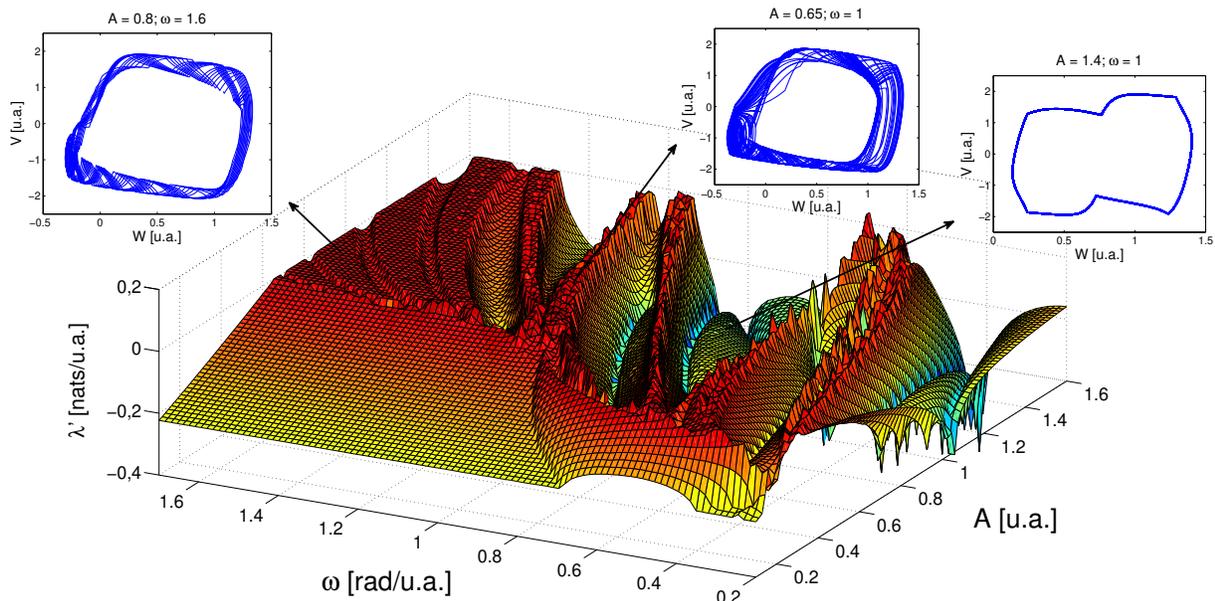
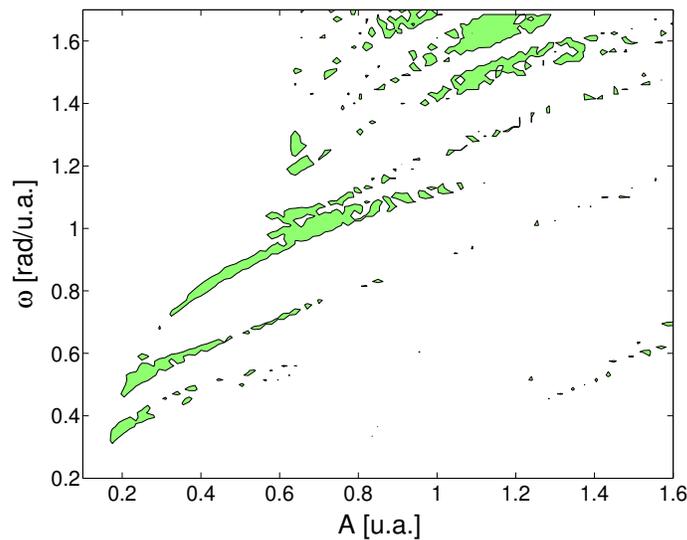
(a) λ' para uma varredura em A e ω (b) regiões do espaço de parâmetros onde $\lambda' > 0$

Figura 3.15: O painel 3.15(a) mostra a superfície obtida para o maior expoente de Lyapunov (excluindo o expoente nulo associado à variável tempo incorporada na dinâmica) λ' quando tanto a frequência de estimulação como a amplitude são variadas no modelo de FHN. O Painel 3.15(b) mostra as regiões no espaço de parâmetros onde $\lambda' > 0$, o que implica no comportamento caótico da dinâmica.

dade no espaço de estados, o que é feito a seguir.

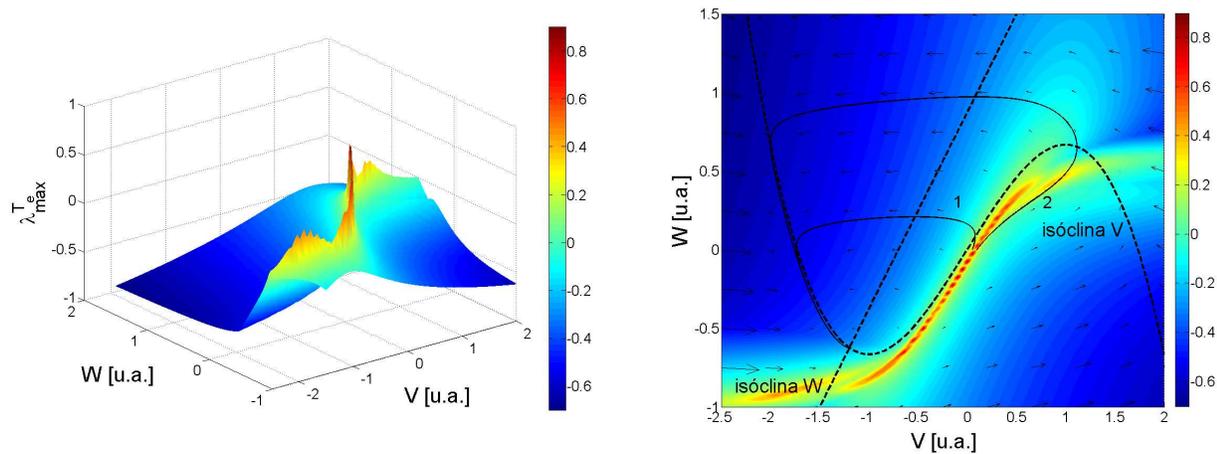
3.3.4 Variabilidade espaço-temporal dos expoentes de Lyapunov locais no modelo de FitzHugh-Nagumo

Dada a possibilidade do modelo de FHN retratar a excitabilidade por meio de um retrato de fase bidimensional, pode-se associar cada um dos estados fisiológicos descritos pelo modelo à estabilidade local por meio dos FTLEs. A fim de melhor explicitar esta relação, a figura 3.16(a) mostra a superfície obtida para o maior expoente de Lyapunov de tempo finito a partir de uma varredura nas condições iniciais (V_0 variando de -2.5 a 2 , com passo de 0.05 , e W_0 de -1 a 1.5 , com passo de 0.025) que cobrem a região do espaço de estados para a qual os conjuntos-limite clássicos presentes no modelo de FHN são observados. Neste cenário de simulação - para o qual consideram-se $I(t) = 0$, $\delta_{x0} = 10^{-4}$, $T_e = 6$ u.a. e $T = 0.1$ u.a. - é possível observar uma estrutura relativamente organizada e contínua para $\lambda_{\max}^{T_e}$ conforme expresso na própria escala de cores atribuídas à divergência em cada ponto. Esta organização dos $\lambda_{\max}^{T_e}$ faz referência, sobretudo, à região de previsibilidade crítica (crista de $\lambda_{\max}^{T_e}$) que define uma estrutura Lagrangiana coerente próxima à isóclina V decorrente da abrupta divergência entre trajetórias sublimiares e supralimiais, o que permite localizar a separatriz associada ao limiar de disparo do PA.

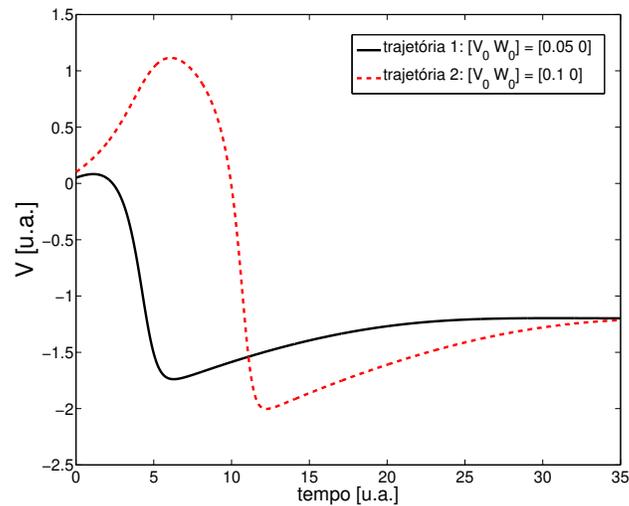
A localização do limiar de disparo do PA pode ser melhor observada na figura 3.16(b), na qual a escala de cores atribuída aos $\lambda_{\max}^{T_e}$ é preservada e mostrada no plano de fase do sistema acompanhada de trajetórias sublimiares e supralimiais próximas à separatriz (cujo curso temporal é mostrado na figura 3.16(c)). Observa-se, neste caso, que a localização do limiar coincide com a trajetória separatriz apontada por FitzHugh (FitzHugh, 1969), situada próxima da isóclina V , o que também é perfeitamente condizente com o comportamento das trajetórias na sua vizinhança e o próprio campo vetorial do sistema.

Deve-se observar que a localização precisa da LCS depende da escolha do tempo de evolução T_e e da precisão com que a varredura das condições iniciais é feita. Quando T_e é excessivamente pequeno, a localização da crista pode ser afetada pela falta de tempo para avaliar os reais pontos de divergência crítica, enquanto um valor excessivamente alto de T_e pode levar à perda de informação local (e.g. diante da convergência para um ponto fixo, um T_e excessivamente alto pode tender à uniformizar os valores de divergência obtidos).

A separatriz associada ao limiar de disparo do PA destaca-se por ser uma região de alta instabilidade, o que, na prática, torna a sua detecção mediante a observação da evolução temporal das soluções do sistema dinâmico (por meio de integração direta no tempo) praticamente impossível, uma vez que as trajetórias invariavelmente acabam sendo defletidas para uma das zonas de oscilação sub-

(a) superfície $\lambda_{max}^{T_e}$ para diferentes condições iniciais

(b) divergências críticas no plano de fase



(c) trajetórias sublimiars e supralimiars próximas à separatriz

Figura 3.16: O painel 3.16(a) mostra a superfície obtida para $\lambda_{max}^{T_e}$ quando uma varredura nas condições iniciais é realizada. O painel 3.16(b) mostra essa superfície na forma de uma escala de cores no plano de fase do modelo de FHN, bem como suas isóclinas, algumas trajetórias representativas e o campo vetorial associado. O painel 3.16(c) mostra o curso temporal das trajetórias sublimiar (trajetória 1 no painel 3.16(b)) e supralimiar (trajetória 2 no painel 3.16(c)) próximas à separatriz.

ou supralimiar. Fisicamente, a localização da separatriz é importante na medida em que a distância horizontal de um ponto (estado) à crista (região de divergência crítica) fornece o valor da amplitude A de um estímulo impulsivo $I(t)$ que deve ser aplicado para que a solução do sistema dinâmico possa cruzar o limiar e disparar um potencial de ação.

Esta caracterização do perfil de divergência torna-se ainda mais interessante quando conjuntos-limite específicos (e.g. atratores estranhos) são considerados, permitindo, neste contexto, associar os estados fisiológicos que o modelo de FHN busca capturar a posições específicas da trajetória no espaço de estados. Esta situação particular pode ser observada na figura 3.17, na qual mostram-se as máximas divergências locais para o atrator estranho obtido no cenário de simulação da figura 3.14.

Em particular, observa-se, na figura 3.17(a), que, neste cenário de simulação, existem basicamente duas regiões de divergência crítica, uma associada ao limiar de disparo do potencial de ação que divide trajetórias sublimiáres de supralimiáres e outra (não menos importante) associada ao pico do PA imediatamente antes de a trajetória entrar no período refratário absoluto. O painel 3.17(b) mostra em detalhe o comportamento de uma típica trajetória caótica, sendo nítido o efeito das regiões de divergência crítica (mapa de cores ao fundo) nas deflexões das trajetórias. As isóclinas W , V para $I = \text{constante} = 0$ e V para $I = \text{constante} = 0.65$ são mostradas a título de referência, uma vez que a trajetória caótica tipicamente oscila entre limites relativamente bem delineados por essas curvas. É de certa forma surpreendente observar que a região imediatamente antes do período refratário também define uma separatriz, uma vez que divide pontos ainda capazes de responder à estimulação daqueles já em estado refratário absoluto.

De maneira geral, a estrutura de divergência obtida neste cenário de simulação é melhor observada no painel 3.17(c), no qual torna-se clara a complexa distribuição de $\lambda_{\max}^{T_e}$ no espaço de estados e as características de estabilidade neutra das regiões de refratariedade relativa, absoluta e regenerativa (i.e. $\lambda_{\max}^{T_e} = 0$).

3.4 Discussão e Conclusões

A idéia fundamental de estimação do sistema linearizado (matriz Jacobiana) subjacente à dinâmica não-linear baseada na criação de um vetor diferença de estados na vizinhança de um dado ponto do atrator não é nova, e pode ser encontrada em trabalhos anteriores na literatura na estimação do espectro de Lyapunov a partir de séries temporais (Eckmann & Ruelle, 1985; Eckmann et al., 1986). Esta abordagem visa estimar o espectro de Lyapunov a partir de uma única observação da série temporal, reconstruindo os demais eixos do espaço de estados usando o teorema de Takens, e, em seguida, construindo o mapa tangente para cada ponto do atrator a partir da diferença com seus vizinhos. De certa forma, este conceito assemelha-se à abordagem aqui desenvolvida, na qual é acrescentado o conhecimento *a priori* das equações de estado na avaliação da taxa de divergência ou convergência de perturbações infinitesimais em direção à trajetória fiducial.

A proposta de cálculo de todos os expoentes de Lyapunov aqui apresentada pode ser vista como uma extensão do trabalho de Bennetin et al. (Bennetin et al., 1976), que utiliza uma cópia perturbada

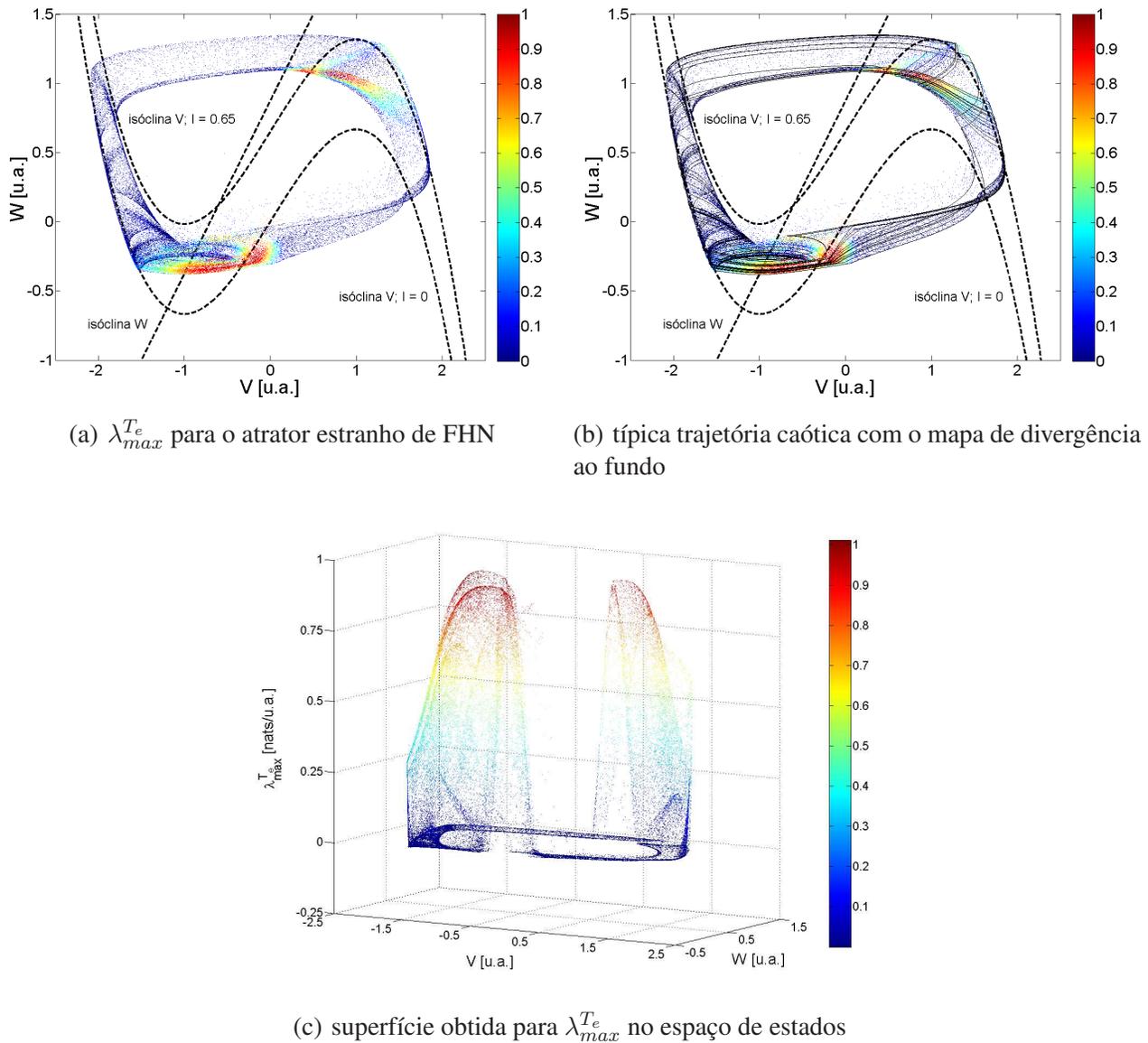


Figura 3.17: O painel 3.17(a) mostra os padrões de divergência crítica $\lambda_{max}^{T_e}$ (escala de cor) com $T_e = 6$ u.a., $T = 0.1$ u.a., $\delta_{x0} = 10^{-4}$ para o atrator estranho obtido quando o modelo FHN é estimulado com um trem de pulsos retangulares de amplitude $A = 0.65$ u.a. e $\omega = 1$ rad/u.a.. Os painéis 3.17(b) e 3.17(c) são análogos ao primeiro, mas mostram, respectivamente, uma típica trajetória caótica com o mapa de divergência ao fundo e a estrutura tridimensional da superfície obtida para $\lambda_{max}^{T_e}$ no espaço de estados.

da dinâmica original para o cálculo do maior expoente. Este trabalho, no entanto, não estende a abordagem para os demais expoentes, o que exigiria as correções numéricas aqui empregadas. A idéia de cópia de sistemas dinâmicos para o cálculo de λ_1 também fundamenta o trabalho de Fujisaka

e Yamada (Fujisaka & Yamada, 1983), o qual apresenta uma relação entre o maior expoente e o fator de acoplamento entre osciladores idênticos quando um padrão síncrono é atingido. Em condições particulares, o cálculo de λ_1 pelo método CLDYN e a abordagem de Fujisaka & Yamada, 1983 são semelhantes, sendo este último, no entanto, também restrito ao cálculo apenas do maior expoente.

Posteriormente, o trabalho Fujisaka e Yamada foi adaptado por Stefanski (Stefanski, 2000) para cálculo de λ_1 no oscilador Duffing com impacto, um caso clássico de sistema dinâmico não-suave. A abordagem de Stefanski também se baseia no sincronismo de sistemas idênticos, e torna clara a potencial aplicação do trabalho de Fujisaka e Yamada a sistemas não-suaves. Embora estas abordagens guardem alguma semelhança com a proposta aqui apresentada, deve-se ressaltar que o método CLDYN baseia-se essencialmente na análise da evolução temporal de pequenas perturbações em sistemas dinâmicos, ou seja, na idéia primitiva de análise de estabilidade desses sistemas e não essencialmente no princípio de sincronismo entre dinâmicas. Essa mudança de paradigma possibilitou uma via alternativa de cálculo do espectro sem a necessidade de buscas exaustivas por parâmetros que sincronizem dinâmicas, ou mesmo o tratamento de pontos de descontinuidade como exceções, forçando transições de estado e evitando o cálculo da matriz Jacobiana nesses pontos, conforme proposto em Müller, 1995. No caso da abordagem CLDYN, funções não-suaves que aparecem nas equações de movimento originais também aparecem em seus clones, o que não torna proibitivo o processo de obtenção do vetor diferença de estados para o cálculo dos expoentes, tal como aqui ilustrado para o modelo de FHN com entradas descontínuas.

É interessante observar que, mesmo quando sistemas suaves são considerados, existem algumas vantagens de se usar a metodologia proposta. Por exemplo, a possibilidade de estimação parcial do espectro de Lyapunov permite a obtenção de todos os expoentes positivos do atrator mesmo quando sistemas hipercaóticos são considerados, o que implica em resolver um número menor de equações diferenciais em relação a abordagem do mapa tangente. Neste último caso, faz-se necessária a solução das $N(N + 1)$ equações para um sistema N -dimensional, enquanto, na abordagem CLDYN, exige-se apenas a solução das N equações originais de movimento mais as equações de cada clone associado a um expoente de Lyapunov. Este procedimento, no pior dos casos (cálculo de todo espectro), exigiria a solução das $N(N + 1)$ equações de estado, ou seja, do mesmo número de equações diferenciais obtido quando o método TANMAP é usado.

Deve-se destacar ainda o fato de a metodologia aqui proposta também estabelecer um paradigma de cálculo do espectro de Lyapunov muito conveniente no caso de sistemas dinâmicos com descrição matemática muito complexa, para os quais o cálculo da matriz Jacobiana é trabalhoso. Um típico caso desta natureza será abordado no próximo capítulo, quando a abordagem CLDYN será empregada para cálculo do espectro de Lyapunov do modelo neuronal de Hodgkin-Huxley mediante estimulação descontínua, o qual é depois utilizado como uma medida invariante para definir um controle por projeto

do mesmo.

Também foi aqui evidenciada a equivalência entre as abordagens CLDYN e TANMAP para o cálculo das divergências locais por meio dos FTLEs, assim como a organização espaço-temporal desses últimos para modelos clássicos na literatura. Como aplicação particular, destaca-se a utilização dos FTLEs na localização da separatriz que define o limiar de disparo do potencial de ação para o modelo de FHN, tanto na ausência de estímulos como para entradas periódicas. Neste último caso, as estruturas Lagrangianas coerentes foram obtidas para pontos do atrator estranho, revelando, além da divergência crítica entre as regiões de oscilação sublimiar e supralimiar, uma separatriz localizada imediatamente antes da entrada no período refratário absoluto. Destaca-se aqui ainda, fundamentalmente, o fato de que regiões específicas do espaço de estados do modelo de FHN atuam como agentes promotores da decorrelação de estados próximos, enquanto determinados estados fisiológicos se caracterizam por serem de estabilidade neutra, o que permite identificar as regiões mais propensas a previsões imprecisas, ou seja, definir as limitações do modelo como ferramenta de previsão.

Outro aspecto de extrema relevância aqui apontado refere-se à presença de caos para um dos modelos neuronais mais simples da literatura. De fato, já foi mostrado que processos caóticos são capazes de estabelecer um paradigma sólido para a transmissão e codificação de informação (Baptista et al., 2003), e eles vêm sendo relacionados a processos cognitivos por meio da análise de sistemas neuronais tanto de baixa como de alta dimensão, o que conta, inclusive, com intensa investigação experimental (Skarda & Freeman, 1987; Rabinovich & Abarbanel, 1998; Korn & Faure, 2003).

Neste contexto, especula-se que o comportamento caótico exerça um papel de explorador do espaço de estados, possibilitando adaptação e aprendizado diante de mudanças do ambiente. Em particular, complexos circuitos neuronais se desenvolvem a partir de estruturas não-lineares elementares (os neurônios propriamente ditos), e, portanto, é natural que o processo evolutivo tenha se desenvolvido de forma a lidar com o processamento da informação baseado em conjuntos-limite comuns a estes sistemas, tais como os aqui observados para o modelo FHN (Rabinovich & Abarbanel, 1998).

Um trabalho experimental emblemático que suporta esta conjectura foi desenvolvido por Skarda e Freeman (Skarda & Freeman, 1987), envolvendo a formação de padrões espaço-temporais e memória no bulbo olfativo. Neste experimento, a atividade elétrica do bulbo olfativo foi registrada, revelando a presença de um atrator estranho no espaço de estados (reconstruído pelo teorema de Takens) para a atividade elétrica basal do bulbo, isto é, na ausência de qualquer estímulo externo (odor). Quando um estímulo é apresentado, a atividade elétrica do bulbo muda a sua forma no espaço de estados, dando origem a um ciclo-limite ou mesmo a um atrator estranho de menor dimensão, o que caracteriza uma memória associativa que relaciona cada atrator com um odor específico. Este mecanismo oferece a vantagem de rápida convergência para respostas específicas no curso da tarefa de reconhecimento de odores, bem como uma fácil inserção de novos atratores (aprendizado de novos odores) e a rápida

recuperação do estado basal para a recepção de novos estímulos.

Os resultados de Skarda e Freeman foram extensivamente desenvolvidos em uma série de artigos, influenciando boa parte da comunidade de sistemas dinâmicos (Freeman, 2000) e impulsionando o desenvolvimento de uma teoria dinâmica da percepção fundamentada no mecanismo de itinerância caótica (Kaneko & Tsuda, 2000, 2003). Em linhas gerais, este mecanismo sugere a construção de memórias ou associações por meio de uma atividade caótica basal de alta dimensão que, mediante algum estímulo específico, converge para determinadas regiões deste conjunto-limite, o que constituiria um mecanismo poderoso de processamento de informação, algo perfeitamente factível no âmbito de sistemas biológicos.

Dentre as possíveis aplicações para a metodologia proposta, sua utilização em sistemas mais complexos (tal como realizada no próximo capítulo) e de maior dimensão (como por exemplo, dinâmicas capazes de exibir itinerância caótica) parece ser um caminho natural. Por fim, a estratégia de análise de estabilidade aqui proposta pode ser valiosa para a caracterização e melhor entendimento de alguns mecanismos fundamentais para a emergência dos padrões de biopotenciais (e.g. sincronismo transiente (Tanaka et al., 2006) e itinerância caótica (Kaneko & Tsuda, 2000, 2003)) relacionados à formação de certos tipos de memória, aprendizado e reconhecimento em sistemas biológicos.

3.5 Apêndice

O modelo de Lorenz é dado pelas equações:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{3.30}$$

onde os seguintes parâmetros são classicamente na geração de comportamento caótico: $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = \frac{8}{3}$.

O sistema de Rössler é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c)\end{aligned}\tag{3.31}$$

onde os seguintes parâmetros são classicamente empregados na geração do comportamento caótico: $a = 0.15$, $b = 0.2$, $c = 10$.

O sistema hipercaótico de Rössler é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay + w \\ \dot{z} &= b + xz \\ \dot{w} &= cw - dz\end{aligned}\tag{3.32}$$

onde os seguintes parâmetros são classicamente empregados para a geração do comportamento hipercaótico: $a = 0.25$, $b = 3.0$, $c = 0.05$, $d = 0.5$.

O sistema de Duffing é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x - x^3 - \epsilon y + \gamma \cos(\omega z) \\ \dot{z} &= 1\end{aligned}\tag{3.33}$$

onde os seguintes parâmetros são classicamente empregados na geração do comportamento caótico: $\epsilon = 0.25$, $\gamma = 0.3$, $\omega = 1$.

O modelo de FitzHugh-Nagumo é descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= V - \frac{V^3}{3} - W + I(t) \\ \dot{W} &= c(V + a - bW)\end{aligned}\tag{3.34}$$

$$\tag{3.35}$$

onde os seguintes parâmetros são classicamente empregados: $a = 0.7$, $b = 0.8$, $c = 0.1$, e $I(t)$ é uma entrada externa.

O mapa logístico é dado por:

$$x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n)\tag{3.36}$$

onde o parâmetro $\alpha = 3.75$ foi empregado para a geração do comportamento caótico.

O mapa de Hénon é descrito por:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + by_n \\ y_{n+1} &= x_n\end{aligned}\tag{3.37}$$

onde foram empregados os seguintes parâmetros para a geração do comportamento caótico: $a = 1.4$ e $b = 0.3$.

Em todos os modelos, tanto as unidades das variáveis de estados como de tempo foram assumidas aqui como sendo arbitrárias.

Capítulo 4

Medidas invariantes e controle por projeto de sistemas dinâmicos

4.1 Introdução

Diante da riqueza de comportamentos oscilatórios que podem eventualmente ser produzidos por dinâmicas não-lineares, tem-se, do ponto de vista prático, uma questão de maior relevância, que consiste em encontrar uma forma adequada de controlar essas dinâmicas complexas no sentido de produzir conjuntos-limite específicos. Desde o trabalho seminal de Ott, Grebogi e Yorke (Ott, Grebogi, & Yorke, 1990) - que deu origem ao chamado método OGY devido às iniciais dos sobrenomes dos respectivos autores - e seus desdobramentos (Romeiras et al., 1992; Boccaletti et al., 2000), diferentes técnicas para controle de sistemas não-lineares têm sido desenvolvidas em múltiplos cenários teóricos e experimentais (Abarbanel, 1996; Kapitaniak, 1996; Boccaletti et al., 2000; Lynch, 2003).

De maneira geral, as técnicas mais comuns de controle de sistemas dinâmicos não-lineares baseiam-se na alteração de determinados parâmetros de controle acessíveis, na inserção de sinais de controle específicos, na realimentação de estados ou na indução de sincronismo entre sistemas dinâmicos (Kapitaniak, 1996; Lynch, 2003).

Dentre os métodos baseados em perturbações externas, talvez o procedimento de controle OGY seja o exemplo mais representativo. Nesta abordagem, pequenas perturbações são aplicadas com o intuito de estabilizar órbitas periódicas instáveis, o que supõe que, invariavelmente, a solução do sistema dinâmico passará nas proximidades do conjunto-limite que se deseja obter para que o atuador (controle externo) possa agir, ou seja, recorre à propriedade de transitividade topológica dos atratores estranhos (Monteiro, 2006). Sinais externos com períodos próximos ao da órbita periódica instável que se deseja controlar também estabelecem uma importante estratégia de controle de caos, tal como proposto no também emblemático trabalho de Pyragas (Pyragas, 1992). Neste mesmo

trabalho, mostra-se que a realimentação de versões atrasadas das variáveis de estado também pode estabilizar órbitas instáveis caso seja feita uma escolha adequada do atraso e do ganho da malha de realimentação do sistema. O trabalho de Pecora e Carroll (Pecora & Carroll, 1990), desenvolvido no âmbito de sistemas de comunicação, também define um importante paradigma de controle na medida em que estabelece que uma dinâmica “escrava” (receptor) pode ter seu comportamento oscilatório comandado por uma dinâmica “mestra” (transmissor) por meio de um acoplamento adequado entre elas.

Tipicamente, os métodos de controle de caos ocupam-se de estabilizar comportamentos caóticos, uma vez que eles são indesejáveis em um grande número de casos, embora esse apelo puramente pela estabilização esteja cedendo terreno a um grande número de exceções em que o comportamento caótico é necessário para o funcionamento adequado de vários sistemas (Gleick, 2008).

Destarte, o presente capítulo visa apresentar uma estratégia de inteligência computacional guiada por uma medida robusta de estabilidade - o espectro de Lyapunov - para adaptar parâmetros acessíveis da dinâmica de interesse com intuito de produzir um comportamento oscilatório análogo ao estabelecido por uma referência (comportamento alvo ou controle). Mais especificamente, o termo “análogo” aqui empregado refere-se a comportamentos dinâmicos semelhantes, ou seja, com mesmas medidas invariantes, mas não com séries temporais idênticas, o que é interessante para uma ampla classe de situações, definindo uma abordagem de controle por projeto de sistemas dinâmicos (Kapitaniak, 1996).

A abordagem aqui apresentada destaca-se por oferecer uma reformulação do problema de controle como um problema de otimização, viabilizando o uso da função de adaptação dos parâmetros da dinâmica (desvio em relação ao espectro de Lyapunov) por meio do emprego de uma metaheurística bio-inspirada de otimização, a chamada otimização por enxame de partículas (PSO - do inglês *particle swarm optimization*) (Kennedy, Eberhart, & Shi, 2001). Esta estratégia possui duas características fundamentais para a solução do problema aqui colocado: significativo poder de busca global e não-exigência de manipulação (e.g. diferenciação) da função de adaptação dos parâmetros da dinâmica (função custo). De fato, assim como o controle de dinâmicas não-lineares, o problema de otimização subjacente a esta reformulação também é desafiador, uma vez que se objetiva encontrar mínimos globais de superfícies extremamente acidentadas mediante uma métrica que impossibilita a construção analítica de um vetor gradiente.

Como uma aplicação especial, a proposta de controle por projeto aqui introduzida (i.e. a busca por comportamentos assintóticos específicos por meio do ajuste de parâmetros livres da dinâmica) tem como principal plataforma de testes um dos modelos mais emblemáticos em neurociência: o modelo neuronal de Hodgkin-Huxley (HH) (Hodgkin & Huxley, 1952). A utilização deste modelo ilustra uma importante aplicação do método CLDYN desenvolvido no capítulo anterior, viabilizando

o cálculo do espectro de Lyapunov sem a necessidade de obtenção das equações variacionais para este sistema, cujas equações de movimento são bem mais complexas que as de FitzHugh-Nagumo, além de permitir análises em cenários de estimulações não-suaves tal como realizado para o modelo FHN.

Desse modo, este capítulo, além de estender as análises numéricas realizadas no capítulo anterior para um modelo com descrição matemática mais complexa e de maior significado fisiológico, apresenta como contribuição central a construção de uma metodologia de busca por comportamentos oscilatórios específicos - caracterizados pelo espectro de Lyapunov -, sem a necessidade de manipulação das equações de estado. Em especial, na estratégia de controle por projeto para o modelo HH, mostra-se aqui que as condutâncias máximas ao sódio e ao potássio que definem de forma crucial a excitabilidade do sistema neuronal podem ser combinadas para estabilizar órbitas caóticas ou mesmo desestabilizar órbitas periódicas para um dado padrão estimulatório. Do ponto de vista experimental, as simulações aqui realizadas são motivadas pela possibilidade de alteração dessas condutâncias por meio da aplicação de drogas tais como o tetraethylammonium (TEA) - um bloqueador de canais de potássio - e tetrodotoxina (TTX) - um bloqueador de canal de sódio (Hille, 1992; Aidley, 1998). Embora essas drogas atuem no sentido de reduzir as respectivas condutâncias máximas, o espaço de busca aqui definido para estas grandezas permitiu também que valores maiores que as condutâncias originais (tais como definidas por Hodgkin e Huxley (Hodgkin & Huxley, 1952)) fossem possíveis, o que tem como objetivo apenas o melhor entendimento de como o arranjo particular destes dois parâmetros influencia a excitabilidade do sistema neuronal.

Por fim, é importante observar que a escolha da exposição dessa metodologia por meio de sua aplicação no contexto neuronal deve-se também ao fato de que desordens de ritmo em sistemas biológicos serem usualmente associadas a condições patológicas, definindo o que os estudiosos de sistemas dinâmicos chamam de doenças dinâmicas (do inglês, *dynamical diseases*) (Glass & Mackey, 1988). Entre esses padrões oscilatórios patológicos estão a fibrilação cardíaca e as arritmias de um modo geral (J. N. Weiss et al., 1999), a epilepsia (Avoli et al., 2005) e a doença de Parkinson (Fuentes et al., 2009). Neste cenário, este procedimento de busca por padrões oscilatórios específicos pode ser visto como uma maneira de procurar novos pontos de operação fisiológicos, o que pode ter papel fundamental no entendimento e tratamento de diversas doenças mediante o planejamento da administração de fármacos ou mesmo através de padrões estimulatórios. Observa-se ainda que, embora o cenário aqui estudado pareça bastante particular, a proposta introduzida oferece uma metodologia de busca que pode ser útil em diversos contextos, e não apenas no biológico.

Este capítulo está organizado como se segue: a seção 4.2 apresenta o modelo neuronal de Hodgkin-Huxley, que será utilizado como plataforma de testes para a abordagem aqui proposta, além da fundamentação da proposta de busca por comportamentos oscilatórios a partir do espectro de Lyapunov.

Essa seção traz ainda uma breve revisão sobre o método de otimização por enxame de partículas. A seção 4.3 mostra os resultados obtidos, que evidenciam a presença de comportamento caótico no modelo HH para diferentes valores de amplitude de estimulação (assumida aqui como um trem de pulsos retangulares), assim como a possibilidade de estabilização de órbitas caóticas em órbitas periódicas ou mesmo a desestabilização de órbitas periódicas em órbitas caóticas mediante alteração da excitabilidade do modelo (alteração na condutância máxima ao sódio e potássio). Por fim, a seção 4.4 traz uma discussão dos resultados obtidos, assim como possíveis perspectivas de aplicação da proposta.

4.2 O modelo de Hodgkin-Huxley e metodologias de busca por comportamentos específicos

4.2.1 O modelo de Hodgkin-Huxley

O potencial elétrico que se propaga pelas células excitáveis, conhecido como o potencial de ação, consiste em uma alteração não-linear do potencial de membrana em resposta a um estímulo suficientemente intenso (supralimiar). Esta resposta está intrinsecamente relacionada com mudanças seletivas na permeabilidade da membrana celular aos diferentes íons assimetricamente distribuídos nos compartimentos extra- e intracelulares (T. F. Weiss, 1996; Aidley, 1998; Koch, 1999; Dayan & Abbott, 2001). A origem desses biopotenciais foi explicada tanto por meios teóricos como experimentais pelo notável trabalho dos ganhadores do prêmio Nobel de fisiologia e medicina de 1963, Alan Hodgkin e Andrew Huxley (Hodgkin et al., 1952; Hodgkin & Huxley, 1952), que propuseram um modelo matemático capaz de reproduzir com fidelidade diversas características eletrofisiológicas observadas nas células excitáveis.

O modelo de Hodgkin-Huxley (HH) para o potencial de ação não-propagado é descrito por quatro equações diferenciais ordinárias não-lineares. Nesta descrição, existem basicamente dois íons que definem o potencial de repouso da membrana celular e suas alterações: o sódio e potássio. Os gradientes de concentração desses íons atuam de forma análoga a baterias cujas forças eletromotrizes são dadas pela equação de Nernst (Hodgkin & Huxley, 1952; T. F. Weiss, 1996; Aidley, 1998; Koch, 1999) (representadas por V_K para o potássio e V_{Na} para o sódio). Em repouso, a membrana celular possui maior permeabilidade ao potássio, estabelecendo o potencial de repouso da membrana celular próximo a V_K . Quando um estímulo suficientemente intenso é aplicado à célula, a membrana aumenta a sua permeabilidade ao sódio, o que leva o potencial entre as faces da membrana (V_m) a um valor próximo de V_{Na} . Depois deste transiente, o potencial retorna ao seu valor de repouso (considerando que estímulo tenha sido removido). Além das componentes iônicas, a corrente transmembrana (I_m)

4.2 O modelo de Hodgkin-Huxley e metodologias de busca por comportamentos específicos 87

possui ainda uma componente capacitiva, sendo, portanto, a resultante dessas duas componentes dada por:

$$I_m = C_m \frac{dV_m}{dt} + I_{Na} + I_K + I_L \quad (4.1)$$

onde C_m , I_{Na} , I_K e I_L são, respectivamente, a capacitância de membrana, a corrente de sódio, a corrente de potássio e a corrente de vazamento (o que leva em consideração a influência de outros íons, especialmente Cl^-), conforme mostrado no circuito elétrico equivalente apresentado na figura 4.1.

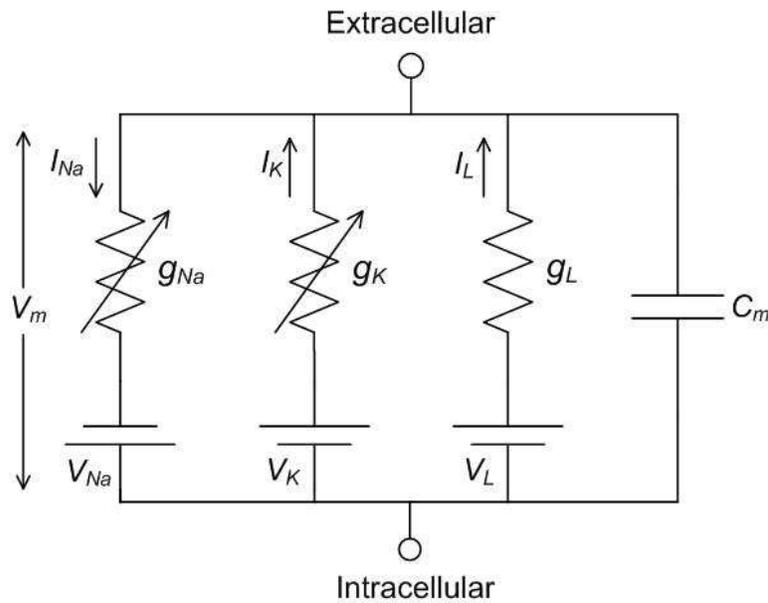


Figura 4.1: Circuito elétrico equivalente para o modelo HH

Neste circuito equivalente, as correntes de sódio e potássio se associam a condutâncias variáveis (g_{Na} , g_K) que dependem de V_m e do instante de tempo. Este controle resulta do estabelecimento de um determinado arranjo de partículas fictícias de ativação (M e N) e inativação (H) em dois estados possíveis, no qual o movimento de três partículas M do estado um para o estado dois leva à abertura de um canal de sódio, enquanto a presença adicional de uma partícula H neste mesmo estado inativa o canal (Garcia, 2005). Para o canal de potássio, apenas uma partícula de ativação é considerada, sendo a presença de quatro partículas N no estado dois responsável pela abertura do canal. Como consequência, é possível definir as variáveis de estado adimensionais m , h e n como coeficientes numéricos variando continuamente de 0 a 1 e representando a fração das condutâncias máximas de fato abertas por meio da quantidade de partículas em cada um dos estados (Aidley, 1998; Koch, 1999; Garcia, 2005; Izhikevich, 2007), conforme esquematicamente descrito na figura 4.2 (modificada de Garcia, 2005).

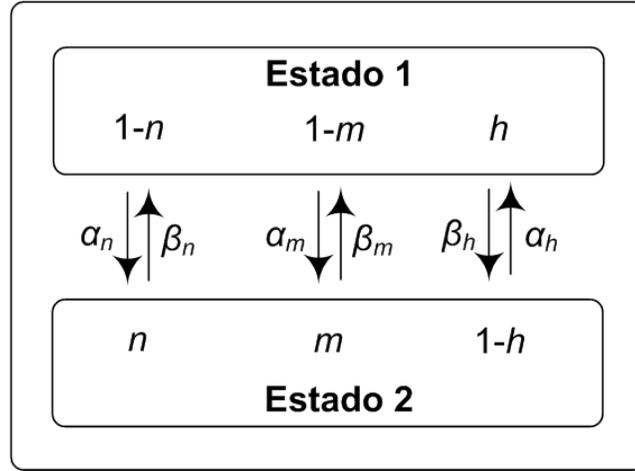


Figura 4.2: Descrição esquemática para a dinâmica de transição das variáveis de estado m , h e n que controlam as condutâncias no modelo HH. Neste esquema, α e β representam as taxas de transições entre os estados 1 e 2 para as respectivas variáveis de estado. Figura modificada de Garcia, 2005

As correntes iônicas através da membrana celular podem ser matematicamente expressas como o produto entre um valor máximo de condutância, combinações específicas de m , h e n e o gradiente de potencial, na forma:

$$\begin{aligned}
 I_{Na} &= G_{Na} m^3 h (V_m - V_{Na}) \\
 I_K &= G_K n^4 (V_m - V_K) \\
 I_L &= G_L (V_m - V_L)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde G_{Na} , G_K e G_L são, respectivamente, as máximas condutâncias ao sódio, potássio e de vazamento. V_L é o potencial de equilíbrio de vazamento. As equações diferenciais para m , h e n são dadas por funções dependentes de tempo e V_m que ponderam a quantidade de partículas em cada estado para as respectivas variáveis, conforme mostrado no esquema da figura 4.2. Após essas considerações, e isolando V_m em Eq. (4.1), obtém-se o seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}
 \frac{dV_m}{dt} &= \frac{1}{C_m} (I_m - I_{Na} - I_K - I_L) \\
 \frac{dm}{dt} &= \alpha_m (1 - m) - \beta_m m \\
 \frac{dh}{dt} &= \alpha_h (1 - h) - \beta_h h \\
 \frac{dn}{dt} &= \alpha_n (1 - n) - \beta_n n
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde α e β são as taxas de transições entre os estados um e dois, que possuem a seguinte dependência em relação a V_m para cada partícula:

$$\begin{aligned}
 \alpha_m(V_m) &= \frac{25 - V_m}{10 \left(e^{\frac{25 - V_m}{10}} - 1 \right)} \\
 \beta_m(V_m) &= 4e^{-\frac{V_m}{18}} \\
 \alpha_h(V_m) &= 0.07e^{-\frac{V_m}{20}} \\
 \beta_h(V_m) &= \frac{1}{e^{\frac{30 - V_m}{10}} + 1} \\
 \alpha_n(V_m) &= \frac{10 - V_m}{100 \left(e^{\frac{10 - V_m}{10}} - 1 \right)} \\
 \beta_n(V_m) &= 0.125e^{-\frac{V_m}{80}}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Assumem-se aqui os parâmetros originais do modelo HH, o que implica em tomar $G_{Na} = 120$ mS/cm², $G_K = 36$ mS/cm², $G_L = 0.3$ mS/cm², $V_K = -12$ mV, $V_{Na} = 115$ mV, $V_L = 10.6$ mV, $C_m = 1$ μ F/cm². O leitor interessado pode encontrar mais detalhes do modelo HH em vários bons textos (T. F. Weiss, 1996; Aidley, 1998; Koch, 1999; Dayan & Abbott, 2001; Izhikevich, 2007). Finalmente, dada a complexidade das equações de estado apresentadas, é compreensível que técnicas matemáticas mais rigorosas de análise, tal como cálculo do espectro de Lyapunov na caracterização topológica e na análise de estabilidade das soluções obtidas, sejam usualmente empregadas para modelos simplificados, numa abordagem reducionista. De fato, o cálculo das equações variacionais para o modelo HH pode ser uma operação trabalhosa.

4.2.2 O espectro de Lyapunov e a busca por padrões oscilatórios específicos

Conforme visto no capítulo 2, existem diversas medidas invariantes capazes de prover uma caracterização quantitativa do comportamento dinâmico, tal como a dimensão fractal, o espectro de Lyapunov e a entropia de Kolmogorov-Sinai. Dentre estas medidas, a escolha específica do espectro de Lyapunov para guiar o processo de adaptação dos parâmetros do sistema dinâmico se justifica pelo fato de o mesmo fornecer as características de divergência em todas as direções da dinâmica, o que impõe uma forte restrição sobre a forma de evolução do fluxo de um modo geral, permitindo, inclusive, a distinção entre conjuntos-limite de mesma natureza. Esta distinção entre diferentes soluções de mesma estrutura topológica não se sustenta quando outras medidas invariantes usuais são utilizadas. Por exemplo, diferentes ciclos-limite possuem mesma dimensão D_0 e entropia de Kolmogorov-Sinai, mas seus espectros de Lyapunov podem ser significativamente diferentes. Além disso, o espectro de Lyapunov parece ser uma medida de significativa generalidade, uma vez que, a partir dele, pode-se

obter (sob algumas restrições) a própria dimensão fractal da solução do sistema dinâmico por meio da conjectura de Kaplan-Yorke, e a entropia de Kolmogorov-Sinai por meio da fórmula de Pesin conforme visto, respectivamente, nas seções 2.5.2 e 2.5.3 do capítulo 2.

Essa possibilidade de caracterização do espectro de Lyapunov, bem como sua intrínseca relação com a estabilidade da solução, viabiliza a reformulação do problema de controle por projeto aqui abordado em termos de um problema de otimização. Com este intuito, define-se o desvio em relação a um espectro de Lyapunov de referência como uma função custo a ser minimizada, transformando os parâmetros de controle do sistema dinâmico em componentes do espaço de busca de um problema de otimização, i.e. a combinação de valores dos parâmetros livres que leva ao conjunto-limite cujo espectro de Lyapunov melhor aproxima o desejado. Assim, pode-se definir matematicamente a função custo como o desvio em relação ao espectro de Lyapunov desejado na forma:

$$f(\mathbf{p}_c) = \sum_{i=1}^N \sqrt{(\lambda_i - \hat{\lambda}_i(\mathbf{p}_c))^2} \quad (4.5)$$

onde λ_i , $i = 1, \dots, N$, são os expoentes de Lyapunov que compõem o espectro de referência e $\hat{\lambda}_i$ são os expoentes estimados, que dependem dos k parâmetros de controle dados pelo vetor $\mathbf{p}_c = [p_1, p_2, \dots, p_k]$ do sistema dinâmico. Os parâmetros de controle que resolvem o problema de otimização posto e fornecem o comportamento dinâmico desejado podem ser encontrados por meio da solução do seguinte problema de otimização:

$$\arg \min_{\mathbf{p}_c} \{f(\mathbf{p}_c)\} \quad (4.6)$$

Observa-se ainda que, embora o espectro de Lyapunov defina uma medida invariante robusta em uma determinada bacia de atração, a sensibilidade em relação aos parâmetros de controle, bem como as oscilações numéricas associadas ao cálculo dos expoentes, podem dar origem a superfícies multimodais desafiadoras do ponto de vista de otimização. Esta presença de vários mínimos locais tende a tornar métodos clássicos de otimização (e.g. métodos baseados no gradiente da função custo) inadequados devido à demanda por mecanismos de busca multimodal (Kennedy et al., 2001; Castro, 2006). Ademais, a própria manipulação da função custo (e.g. sua diferenciação) para a construção analítica de um vetor gradiente torna-se inviável diante da definição estabelecida.

Uma alternativa aos métodos clássicos de otimização consiste no uso de meta-heurísticas, e.g. técnicas bio-inspiradas de otimização, que apresentam significativo poder de busca por mínimos globais em superfícies acidentadas e exigem exclusivamente acesso aos valores fornecidos pela função custo (Castro, 2006). Depois de alguns testes usando sistemas de redes imunológicas artificiais (Castro & Timmis, 2002) e otimização por enxame de partículas (Kennedy et al., 2001), optou-se por utilizar este último algoritmo devido à maior simplicidade em ajustar seus parâmetros para o problema aqui

delineado. Observa-se que este método de otimização já vem sendo utilizado em diferentes contextos relacionados a sistemas dinâmicos não-lineares, principalmente para a identificação de parâmetros, tendo como função de ajuste o erro quadrático médio entre as séries temporais dadas pelas soluções candidatas e as de referência (Li et al., 2006; Gao et al., 2009; Alfi, 2011).

4.2.3 O algoritmo de otimização por enxame de partículas

O algoritmo de otimização por enxame de partículas (PSO) é uma estratégia de otimização bio-inspirada que consiste na emulação do comportamento social de certos grupos de animais, especialmente certos padrões típicos de movimento que emergem quando o conhecimento individual e também o conhecimento coletivo do ambiente são levados em consideração (Kennedy et al., 2001; Castro, 2006).

Na implementação clássica do PSO, cada solução candidata do problema de otimização corresponde a uma partícula com uma posição específica no espaço de busca. Cada partícula possui a propriedade de memorizar a melhor posição por ela obtida até o instante corrente, bem como de acessar a melhor posição de seus vizinhos. O algoritmo permite a definição de diferentes tipos de relação topológica de vizinhança: por exemplo, pode-se definir cada partícula como tendo acesso à melhor posição de todas as outras, ou, simplesmente, à melhor posição de dois vizinhos (vizinhança em anel) (Castro, 2006). A melhor posição individual (p_i) e a melhor posição dos vizinhos (p_g) são então combinadas para atualizar a direção de cada uma das partículas (cada posição é dada por x_i) para a próxima geração. Essas idéias são sucintamente expostas no pseudo-código 4.1.

Neste pseudo-código, φ_1 e φ_2 representam vetores aleatórios com valores positivos dados por uma distribuição uniforme entre 0 e AC_1 e entre 0 e AC_2 , respectivamente. As constantes AC_1 e AC_2 são chamadas constantes de aceleração, e seus valores canônicos foram estabelecidos como $AC_1 = AC_2 = 2.05$, conforme discutido em de Castro (Castro, 2006). O segundo membro da Eq.(4.7) é proporcional à diferença entre a melhor posição visitada pela i -ésima partícula e sua posição atual. O último termo na Eq.(4.7) é proporcional à diferença entre a melhor posição ocupada pelos vizinhos e a posição atual da partícula. O símbolo \odot denota o produto de Hadamard (elemento por elemento) entre os vetores. Os valores V_{min} e V_{max} foram estabelecidos como -0.5 e 0.5 , respectivamente. Essa restrição tem como objetivo apenas limitar a magnitude do passo dado pelas partículas a cada iteração (geração) do algoritmo.

Algoritmo 4.1 Pseudo-código para o algoritmo de otimização por enxame de partícula (PSO)

1. Distribua aleatoriamente (N_p) partículas no espaço de busca. Escolha o valor das velocidades máximas (V_{max} and V_{min} , vide Eq. (4.7) e (4.8)) para restringir o termo de atualização. Avalie a função custo ($f(\cdot)$) para cada partícula.
2. Para $i = 1$ até N_p
 - (a) se $f(\mathbf{x}_i) < f(\mathbf{p}_i)$, então $\mathbf{p}_i = \mathbf{x}_i$
 - (b) $g = i$
 - (c) se $f(\mathbf{p}_j) < f(\mathbf{p}_g)$, considerando j como o índice dos vizinhos, então $g = j$
 - (d) Atualize os vetores velocidade ($\Delta\mathbf{x}_i$) e posição (\mathbf{x}_i) usando a expressão:

$$\Delta\mathbf{x}_i \leftarrow \varphi_1 \odot (\mathbf{p}_i - \mathbf{x}_i) + \varphi_2 \odot (\mathbf{p}_g - \mathbf{x}_i) \quad (4.7)$$

$$\Delta\mathbf{x}_i \in [V_{min}, V_{max}] \quad (4.8)$$

$$\mathbf{x}_i \leftarrow \mathbf{x}_i + \Delta\mathbf{x}_i \quad (4.9)$$

3. Repita o procedimento começando do passo 2 até que o critério de parada tenha sido atingido.

4.3 Resultados

4.3.1 Evidências de caos no modelo de Hodgkin-Huxley

Dada a sua natureza histórica e sua relevância biológica, o modelo de HH tornou-se um “laboratório” interessante e desafiador para o estudo da dinâmica de modelos neuronais. Os possíveis comportamentos oscilatórios sob estimulação constante parecem ser limitados a pontos fixos e ciclos-limite (Hassard, 1978; Rinzel & Miller, 1980; Fukai et al., 2000). Embora a possibilidade de caos nesse cenário tenha sido conjecturada por Guckenheimer & Oliva, 2002 por meio da análise no espaço de estados, não existem evidências numéricas ou mesmo experimentais de existência de soluções caóticas neste contexto. No caso da estimulação periódica, a presença de oscilações caóticas já foram evidenciadas tanto em abordagens teóricas como experimentais (Aihara & Matsumoto, 1986; Parmananda et al., 2002; Korn & Faure, 2003; Jin et al., 2006) sob estimulação suave (e.g. cossenoidal).

Nas simulações a seguir, o modelo de HH foi numericamente resolvido por meio do método Runge-Kutta de quarta ordem com passo fixo de 0.01 ms^1 . Os parâmetros T_i , δ_{xo} , e K para o cálculo do espectro de Lyapunov foram estabelecidos como 0.25 ms , 10^{-4} e 6000 , respectivamente. A

¹Considerou-se aqui o modelo HH como sendo moderadamente *stiff* (Mascagni, 1989) e adotou-se aqui um passo de integração mais conservador do que os tipicamente adotados na literatura (Parmananda et al., 2002). Testes utilizando passos de integração menores foram realizados e não foram observadas diferenças no comportamento oscilatório obtido. Para detalhes sobre métodos numéricos de solução de equações diferenciais recomenda-se (Parker & Chua, 1989). No caso específico de modelos neuronais recomenda-se (Mascagni, 1989).

condição inicial utilizada em todas as simulações foi $[-5 \ 0 \ 0.5 \ 0.33]^T$. A densidade de corrente de estimulação é dada por um trem de pulsos descrito por $I_m = A \sum_{n=0}^{n=214} f(t - nT)$, com $T = 7$ ms e:

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1, \alpha < T/2 \\ 0, \alpha \geq T/2 \end{cases} \quad (4.10)$$

Em um primeiro cenário de simulação, considerando $A = 6 \mu\text{A}/\text{cm}^2$, duas características do fenômeno caótico podem ser observadas na figura 4.3(a): a primeira é a aperiodicidade do trem de potenciais de ação gerado, e a segunda é a divergência entre as soluções obtidas quando uma pequena perturbação é aplicada às condições iniciais, o que ocorre a partir (aproximadamente) de 200 ms. A figura 4.3(b) mostra o padrão caótico obtido para o potencial de membrana em contraste com a forma de onda da estimulação empregada, para uma melhor visualização das escalas de tempo envolvidas. A natureza aperiódica da solução pode também ser observada no plano de fase mostrado na figura 4.3(c), no qual as variáveis V e m definem uma trajetória aberta, uma característica intrínseca a atratores estranhos. Observa-se também (figura 4.3(d)) um espectro de banda larga² para $V(t)$ (em contraste com as raias espectrais que caracterizariam uma oscilação periódica), o que também é comumente apontado como um indicativo de caos (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995).

As características caóticas das soluções do modelo HH emergem para um significativo intervalo de valores da amplitude de estimulação. A figura 4.4 mostra as mudanças nos comportamentos oscilatórios dessas soluções quando A é tomado como parâmetro de controle. O painel superior fornece o diagrama de bifurcação por meio da amostragem da variável V toda vez que m cruza o limiar $m = 0.5$, fornecendo assim uma visão qualitativa da estrutura topológica do atrator obtida conforme A é variado. Observa-se que oscilações periódicas são aparentemente predominantes no intervalo de A de 3.8 até 4.3 $\mu\text{A}/\text{cm}^2$, com exceção de uma estreita faixa de valores de $A = 4.13$ até $A = 4.16 \mu\text{A}/\text{cm}^2$. Além de $A = 4.3 \mu\text{A}/\text{cm}^2$, o comportamento aperiódico torna-se predominante até aproximadamente $A = 7 \mu\text{A}/\text{cm}^2$, e, deste ponto em diante, o sistema exhibe características periódicas novamente.

A existência de caos é confirmada pelo cálculo do maior expoente de Lyapunov (excluindo o expoente nulo associado à perturbação na direção da estimulação externa) utilizando a abordagem CLDYN no mesmo cenário de simulação. A figura 4.4 mostra a boa correspondência entre λ_1 e os resultados fornecidos pelo diagrama de bifurcação, fornecendo expoentes positivos para regiões com oscilações aperiódicas, e, como esperado, valores negativos para regiões com oscilações periódicas. Torna-se claro, por meio dessas simulações, que o modelo de HH exhibe oscilações periódicas e caóticas, sendo

²Embora usualmente atribua-se a espectros de sinais caóticos uma característica de banda larga (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995), deve-se enfatizar que isso se dá de forma um tanto indiscriminada, e alguns mapeamentos caóticos podem ter seu comportamento espectral controlado no sentido de “estretar” sua banda em frequência (Eisencraft & Kato, 2009).

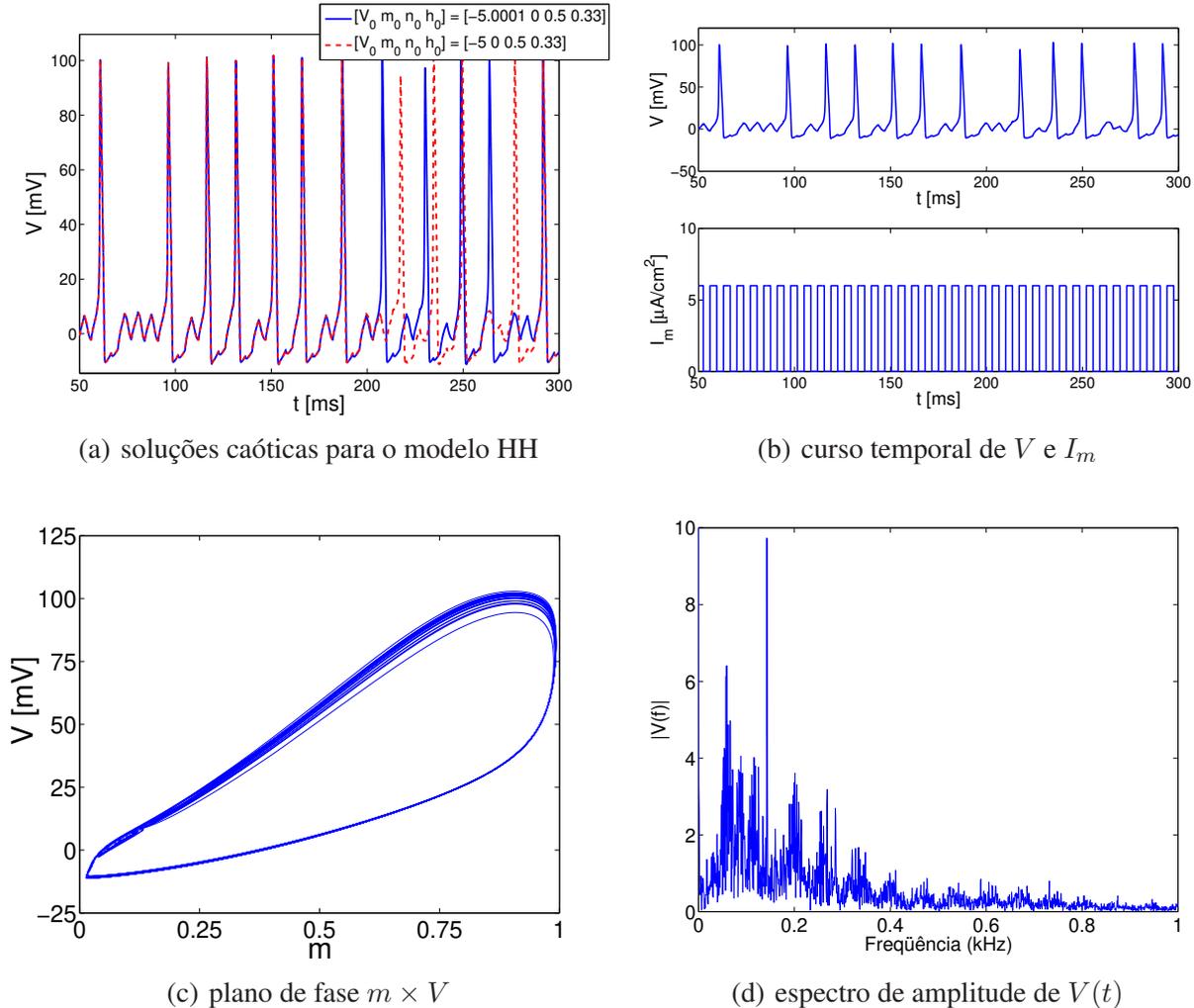


Figura 4.3: O painel 4.3(a) mostra a aperiodicidade e sensibilidade em relação às condições iniciais para às soluções obtidas no modelo de HH; o painel 4.3(b) mostra o curso temporal caótico do potencial de membrana em contraste com a regularidade da estimulação; painel 4.3(c) mostra o plano de fase $m \times V$ definindo uma solução aberta; e painel 4.3(d) mostra o espectro em amplitude banda-larga de $V(t)$.

que as transições entre esses tipos de comportamentos ocorrem de modo abrupto.

Mais uma vez, a existência de caos em modelos neuronais de maior relevância fisiológica motivam questões cruciais sobre os possíveis mecanismos de controle do comportamento oscilatório em sistemas biológicos e sobre o papel que eles podem desempenhar no processamento de informação realizado por neurônios (Rabinovich & Abarbanel, 1998), tal como discutido no capítulo anterior no contexto do modelo de FHN.

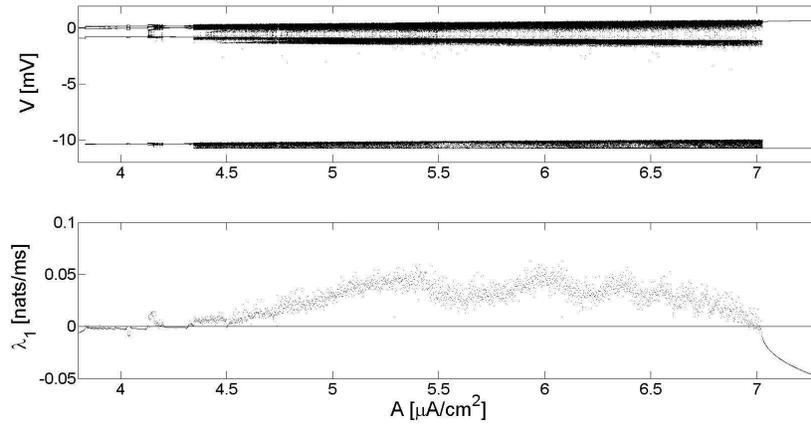


Figura 4.4: O painel superior mostra o diagrama de bifurcação construído a partir da amostragem de V quando $m = 0.05$ tomando a amplitude de estimulação (A) como parâmetro de controle variando com passos de 10^{-4} . Um tempo de transitório de 1500 ms foi considerado antes do início da construção do mapa para cada valor de A . O painel inferior mostra o maior expoente de Lyapunov (λ_1) para a mesma faixa de A variando com passos de 2.5×10^{-4} .

4.3.2 Busca por comportamentos oscilatórios no modelo HH usando PSO

Uma vez observado que o modelo HH pode exibir comportamentos oscilatórios qualitativamente distintos, é possível utilizar a equação Eq. (4.5) para buscar comportamentos específicos, assumindo certos parâmetros que possuem significados fisiológicos bem definidos como parâmetros de controle. Primeiramente, observa-se, na figura 4.4, que diferentes valores de amplitude estimulação podem levar ao mesmo valor de λ_1 , mas, quando mais informação é adicionada à caracterização do atrator, como, por exemplo, as divergências (ou convergências) para perturbações nas demais direções da dinâmica, uma correspondência mais estrita entre os padrões oscilatórios em diferentes cenários de simulação (mais especificamente, no caso, para diferentes vetores de parâmetros da dinâmica) pode ser estabelecida por meio da sua caracterização dada pelo espectro de Lyapunov.

Por exemplo, assumindo as condutâncias máximas ao sódio (G_{Na}) e potássio (G_K) como os parâmetros de controle que compõem o espaço de busca do problema de otimização estabelecido na seção 4.2.2, mostra-se que é possível restaurar as características oscilatórias alteradas mediante a aplicação de um padrão estimulatório diferente apenas alterando G_{Na} e G_K , ou seja, a excitabilidade da célula. Assim, a Eq. (4.5) pode mais especificamente ser reescrita como:

$$f(G_K, G_{Na}) = \sum_{i=1}^N \sqrt{(\lambda_i - \hat{\lambda}_i(G_K, G_{Na}))^2} \quad (4.11)$$

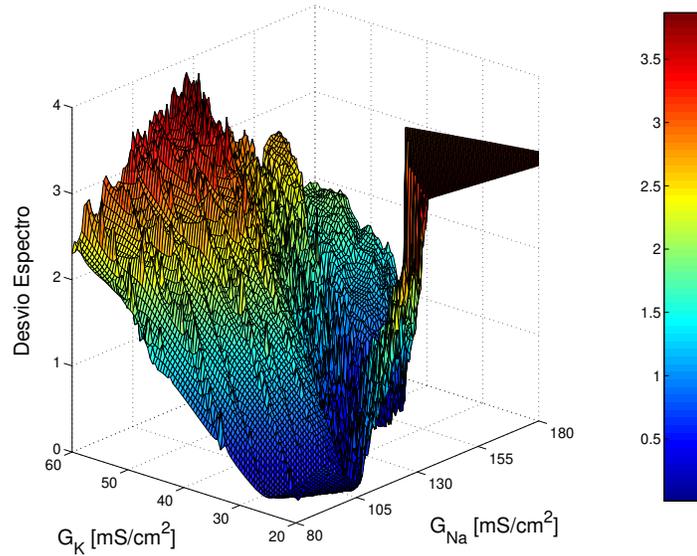


Figura 4.5: Superfície da função custo definida pela Eq. (4.11) assumindo as condutâncias máximas de sódio e potássio como espaço de busca. O espectro de Lyapunov de referência foi escolhido como aquele que fornece o comportamento caótico quando $A = 6 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ e $[G_K \ G_{Na}]^T = [36 \ 120]^T \text{ mS}/\text{cm}^2$, o que é numericamente dado por $[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4 \ \lambda_5]^T = [0.0498 \ 0 \ -0.1855 \ -1.4833 \ -7.6988]^T$ em nats/ms.

onde os expoentes de Lyapunov estimados $\hat{\lambda}_i, i = 1, \dots, N$, para a solução candidata dependem dos parâmetros G_K e G_{Na} . Isso possibilita a descrição do problema de otimização a ser resolvido na forma:

$$\arg \min_{G_K, G_{Na}} \{f(G_K, G_{Na})\} \quad (4.12)$$

ou seja, encontrar os valores de G_K e G_{Na} que minimizam a função custo estabelecida na Eq. (4.11).

A fim de ilustrar o efeito da sensibilidade em relação aos parâmetros de controle sobre o processo de busca pelo mínimo global, a figura 4.5 mostra a superfície da função custo definida pela Eq. (4.11) assumindo que G_K varia de 20 até 60 mS/cm², com passos de 0.4 mS/cm², e que G_{Na} varia de 80 até 180 mS/cm² com passos de 1 mS/cm². Neste cenário de simulação, o espectro de Lyapunov de referência foi definido como aquele obtido quando todos os parâmetros originais do modelo HH foram considerados (seção 4.2.1) sob estimulação externa definida tal como na Eq. (4.10), com $A = 6 \mu\text{A}/\text{cm}^2$, o que leva exatamente ao comportamento caótico observado na figura 4.3.

Observa-se que a superfície mostrada na figura 4.5 exibe vários mínimos locais inadequados ou incompatíveis com uma solução satisfatória, ou seja, com valores das suas respectivas função custo distantes do mínimo global, sendo este último localizado exatamente nos valores originais do modelo HH, $[G_K \ G_{Na}]^T = [36 \ 120]^T \text{ mS}/\text{cm}^2$. Esta figura ilustra bem a multimodalidade inerente à função

Tabela 4.1: Média (μ) e desvio-padrão (σ) para G_K , G_{Na} em mS/cm² e melhor valor encontrado para a função custo (fit_b) pelo algoritmo PSO em 10 rodadas usando 40 partículas e 100 gerações, tendo o comportamento caótico gerado quando $A = 6 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ como padrão oscilatório alvo e mantendo esta amplitude de estimulação durante a busca.

$G_K (\mu \pm \sigma)$	$G_{Na} (\mu \pm \sigma)$	fit_b
37.20 ± 1.63	120.50 ± 2.19	0.0097 ± 0.0035

custo a ser otimizada em G_K e G_{Na} conforme mencionado anteriormente.

Com o intuito de testar o potencial de busca do método de otimização por enxame de partículas, este algoritmo foi empregado para encontrar o mínimo global da superfície mostrada na figura 4.5 (i.e. mantendo $A = 6 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ durante a busca). Observou-se que o algoritmo foi bem-sucedido em evitar a convergência para mínimos locais e encontrar o mínimo global dado pelas condutâncias originais do modelo. A figura 4.6 mostra as curvas de nível da função custo e as 40 primeiras posições da partícula que alcançou o menor valor de custo ao final do processo de otimização. Embora 100 gerações tenham sido utilizadas como critério de parada do algoritmo, uma realização típica do PSO é capaz de encontrar o mínimo global em 40 gerações (conforme mostrado na figura 4.6) quando 40 partículas são utilizadas. Isto implica em calcular o espectro de Lyapunov 1600 vezes e não 10000, como foi realizado para a construção da superfície da função custo mostrada na figura 4.5. Conclui-se assim que a introdução de metaheurísticas relativamente simples como o PSO pode reduzir drasticamente o custo computacional de busca, possibilitando inclusive resolver o problema de otimização em espaços multidimensionais maiores dos que os aqui tratados em tempo razoável, adotando o espectro de Lyapunov como métrica fundamental de busca. Obviamente, o desempenho do método de otimização é fortemente dependente da superfície imposta pelo problema, o que exige atenção ao ajuste de parâmetros de qualquer ferramenta para que se realize uma busca de boa qualidade.

Como o método de otimização é intrinsecamente estocástico, é necessário empregar uma metodologia estatística em sua validação. Com este objetivo, o algoritmo PSO foi executado 10 vezes, o que parece ser um número razoável, dado o custo computacional do cálculo do espectro de Lyapunov para as 40 partículas num total de 100 gerações. Em todas as execuções, a convergência para os valores originais de condutâncias foi verificada, a menos de pequenas flutuações, conforme mostrado na tabela 4.1, sendo a solução ideal $[G_K \ G_{Na}]^T = [36 \ 120]^T$ mS/cm².

Depois de verificar que o algoritmo PSO é de fato capaz de lidar com o problema de encontrar os parâmetros que levam a um determinado comportamento oscilatório de referência, torna-se necessário testá-lo em diferentes cenários. Um cenário de simulação interessante relaciona-se à degeneração da órbita periódica obtida quando $A = 7.3 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ (veja figura 4.4) em uma órbita caótica (análoga

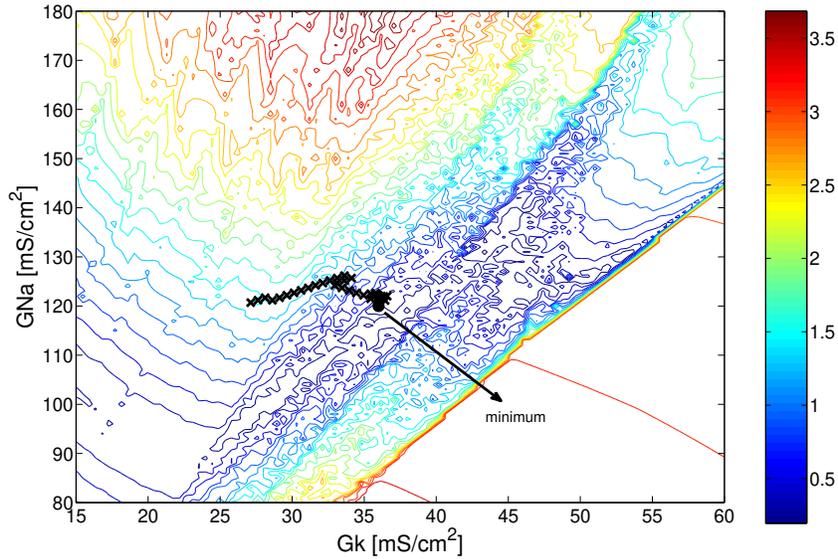


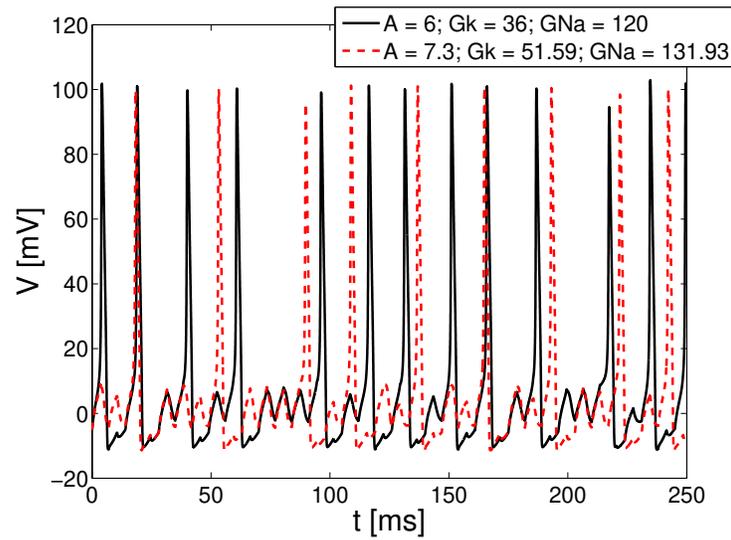
Figura 4.6: Curvas de nível para a superfície definida pela Eq. (4.11) mostrada na Figura 4.5. O símbolo \times denota as posições das primeiras 40 gerações da partícula com a menor função custo ao final do processo de otimização.

àquela obtida quando $A = 6 \mu\text{A}/\text{cm}^2$) sem mudar as características do estímulo, apenas alterando as características de membrana por meio dos parâmetros G_K e G_{Na} .

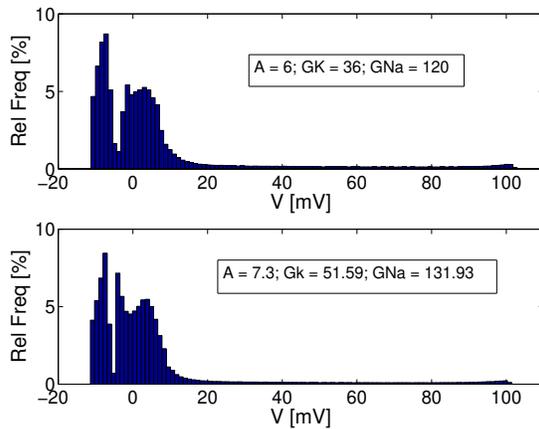
Após o processo de otimização, é possível observar na figura 4.7(a) que a série temporal caótica obtida para o potencial de membrana V , tomando $A = 7.3 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ e $[G_K \ G_{Na}]^T = [51.59 \ 131.93]^T$ mS/cm², com espectro de Lyapunov dado por $[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4 \ \lambda_5]^T = [0.0448 \ 0 \ -0.1736 \ -1.5057 \ -7.7502]^T$, é muito parecida com o padrão de disparo de potenciais de ação associado ao espectro de referência quando $A = 6 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ e $[G_K \ G_{Na}]^T = [36 \ 120]^T$ mS/cm². Obviamente, dada a natureza caótica das soluções, é natural que as séries temporais não sejam coincidentes, mas elas são semelhantes em termos de suas propriedades estatísticas e medidas invariantes. De fato, as soluções obtidas nesses dois cenários de simulação possuem distribuições estatísticas semelhantes (conforme mostrado para o potencial de membrana na figura 4.7(b)), bem como posições muito próximas no espaço de estados (conforme mostrado na figura 4.7(c)).

Como realizado no cenário de simulação anterior, o processo de busca foi repetido 10 vezes, e, em todas as simulações, praticamente os mesmos valores de G_K e G_{Na} foram obtidos. A tabela 4.2 mostra a média para os valores de condutância, seus respectivos desvios-padrão e a média do melhor valor da função custo (fit_b) encontrado após 100 gerações.

Não apenas órbitas periódicas podem ser degeneradas em órbitas caóticas mediante o ajuste de



(a) séries temporais caóticas para o modelo HH



(b) histograma das séries caóticas

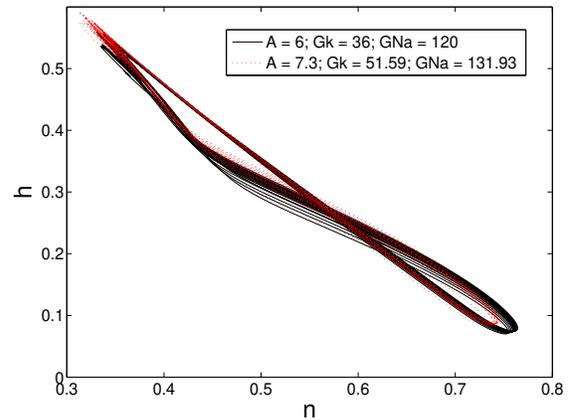
(c) espaço de fase $n \times h$

Figura 4.7: O painel 4.7(a) mostra o curso temporal do potencial de membrana associado ao espectro de Lyapunov de referência (obtido quando $A = 6 \mu\text{A}/\text{cm}^2$, e $[G_K \ G_{Na}]^T = [36 \ 120]^T \text{ mS}/\text{cm}^2$) e o curso temporal do potencial de membrana obtido pela solução encontrada pelo processo de otimização ($A = 7.3 \mu\text{A}/\text{cm}^2$, $[G_K \ G_{Na}]^T = [51.59 \ 131.93]^T \text{ mS}/\text{cm}^2$). O painel 4.7(b) mostra a frequência relativa das amostras que compõe essa série temporal por meio de histogramas (com 100 divisões). O painel 4.7(c) mostra o retrato de fase $n \times h$ obtido tanto para a solução de referência como para a solução proposta pelo método de otimização.

G_K e G_{Na} , como também o método permite a estabilização de órbitas caóticas em periódicas. O próximo cenário ilustra justamente essa situação. Neste caso, a referência é estabelecida como sendo o espectro de Lyapunov dado por $[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4 \ \lambda_5]^T = [0 \ -0.0492 \ -0.2138 \ -2.1662 \ -9.2500]^T$, associado à solução periódica obtida quando $A = 7.3 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ e $[G_K \ G_{Na}]^T = [36 \ 120]^T \text{ mS}/\text{cm}^2$.

Tabela 4.2: Média (μ) e desvio-padrão (σ) para os parâmetros G_K , G_{Na} em mS/cm² e média do melhor valor da função custo (fit_b) encontrado pelo algoritmo PSO em 10 realizações usando 40 partículas e 100 gerações, tendo o comportamento caótico ($A = 6 \mu\text{A}/\text{cm}^2$, e $[G_K \ G_{Na}]^T = [36 \ 120]^T$ mS/cm²) como padrão oscilatório alvo e mantendo $A = 7.3 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ durante a busca.

G_K ($\mu \pm \sigma$)	G_{Na} ($\mu \pm \sigma$)	fit_b
51.79 ± 1.95	131.64 ± 3.60	0.0228 ± 0.0128

Caso a amplitude de estimulação fosse estabelecida como sendo $A = 6 \mu\text{A}/\text{cm}^2$, o comportamento do sistema seria caótico considerando-se os parâmetros originais de condutância do modelo HH, mas, realizando a busca por meio do algoritmo PSO, é possível encontrar os parâmetros de condutância ($[G_K \ G_{Na}]^T = [30.34 \ 128.99]^T$ mS/cm²) que levam ao espectro de Lyapunov $[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4 \ \lambda_5]^T = [0 \ -0.0321 \ -0.2212 \ -2.0826 \ -9.2674]^T$, ou seja, a um conjunto muito próximo do espectro de referência. Neste caso, a figura 4.8(a) mostra que as séries temporais obtidas são praticamente idênticas, enquanto a figura 4.8(b) mostra a similaridade no plano de fase $n \times h$.

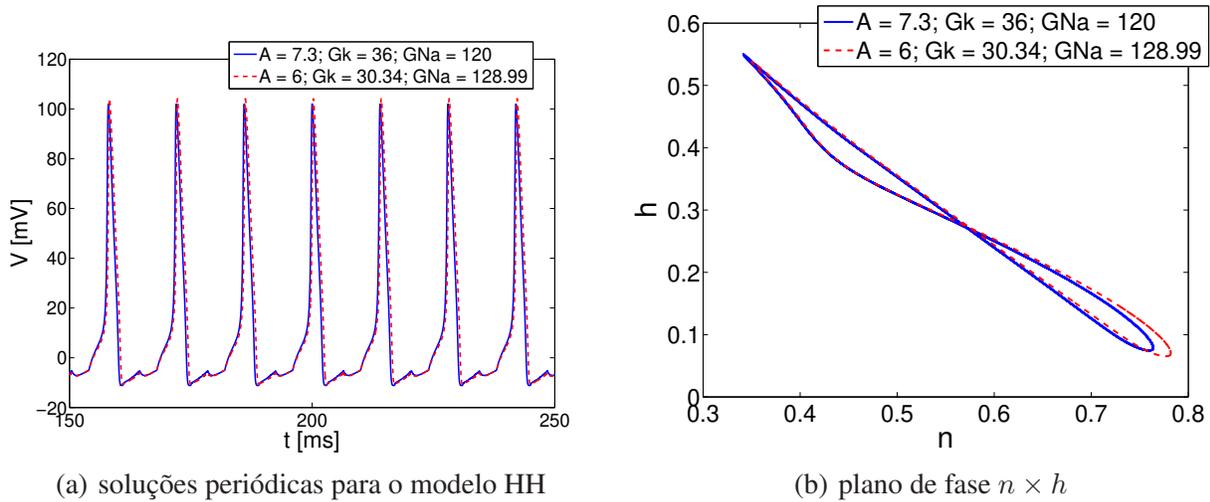


Figura 4.8: O painel 4.8(a) mostra as o potencial de membrana associado ao espectro de Lyapunov de referência obtido quando $A = 7.3 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ e $[G_K \ G_{Na}]^T = [36 \ 120]^T$ mS/cm², e o potencial de membrana obtido depois do ajuste das condutâncias ($[G_K \ G_{Na}]^T = [30.34 \ 128.99]^T$ mS/cm²) fornecido pela solução do problema de otimização considerando $A = 6 \mu\text{A}/\text{cm}^2$. O painel 4.8(b) mostra o plano de fase $n \times h$ dado pelos respectivos ciclos-limite nestes dois cenários de estimulação.

Novamente, o procedimento de busca foi repetido 10 vezes para uma melhor caracterização estatística, usando 40 partículas em 100 gerações, sendo que as soluções convergem praticamente para o mesmo ponto, o que é confirmado pelo valor baixo de desvio-padrão obtido mostrado na tabela 4.3.

Tabela 4.3: Média (μ) e desvio-padrão (σ) para os parâmetros G_K , G_{Na} e melhor valor da função custo (fit_b) encontrado pelo algoritmo PSO em 10 realizações usando 40 partículas em 100 gerações, tendo o comportamento caótico obtido quando $A = 6 \mu\text{A}/\text{cm}^2$, e $[G_K \ G_{Na}]^T = [36 \ 120]^T \text{ mS}/\text{cm}^2$ como comportamento oscilatório alvo e estabelecendo $A = 7.3 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ durante o procedimento de busca.

$G_K (\mu \pm \sigma)$	$G_{Na} (\mu \pm \sigma)$	fit_b
30.50 ± 0.53	129.15 ± 0.88	0.0941 ± 0.0213

Finalmente, é importante enfatizar que a opção de escolha da amplitude de estimulação e das condutâncias máximas G_K e G_{Na} serve puramente para ilustrar cenários específicos de estudo, ou seja, não é obrigatória. Os parâmetros livres para ajuste do sistema dinâmico podem ser definidos segundo o caso experimental estudado que se deseja simular. Além disso, o método aqui proposto não se restringe apenas a dois parâmetros de controle, mas pode abranger até mesmo todos os parâmetros da dinâmica (e.g. G_{Na} , G_K , G_L , V_K , V_{Na} , V_L , C_m), o que, obviamente, demandaria um maior custo computacional para que uma busca de boa qualidade seja realizada.

4.4 Discussão e Conclusões

No presente capítulo, foi apresentada uma estratégia de inteligência computacional construída com o objetivo de obter comportamentos oscilatórios específicos mediante ajuste de parâmetros de controle acessíveis de uma dinâmica de interesse. O método se destaca por utilizar uma medida de estabilidade construída a partir das características de divergência ou convergência em todas as direções da dinâmica, o que foi quantificado por meio do espectro de Lyapunov. O uso combinado do método para cálculo do espectro desenvolvido no capítulo anterior e de uma metaheurística bio-inspirada de otimização permitiu guiar o ajuste dos parâmetros sem a necessidade de construção do mapa tangente associado à dinâmica não-linear, de construção analítica do vetor gradiente e de busca do mínimo global em uma superfície multimodal significativamente acidentada.

A facilidade introduzida pela metodologia CLDYN de cálculo do espectro de Lyapunov, bem como as vantagens da otimização por enxame de partículas, possibilitaram aplicar a proposta de controle por projeto nos moldes aqui estabelecidos para um modelo neuronal representativo em neurociência e capaz de capturar diversos aspectos quantitativos associados às correntes iônicas e aos potenciais de membrana deste tipo específico de células.

A escolha, em especial, de um modelo neuronal extensivamente estudado na literatura tem como objetivo ilustrar a aplicação deste método de controle no contexto de sistemas biológicos, nos quais

o padrão oscilatório produzido pode controlar diversos processos fisiológicos, e distúrbios de ritmos são comumente associados a condições patológicas (Glass & Mackey, 1988). Dentre esses padrões patológicos estão a fibrilação cardíaca (associada à rápida, irregular e desordenada contração de células cardíacas), a epilepsia e a doença de Parkinson (ambos associados à atividade elétrica síncrona e anormal de um determinado conjunto de células neuronais), sendo que a análise dos mecanismos fisiológicos em nível celular pode fornecer informações importantes para o melhor entendimento e para a proposta de tratamentos mais eficientes para estas patologias. Por exemplo, a fibrilação cardíaca pode estar relacionada, entre outros fatores, com o transporte intracelular anormal de cálcio nas células cardíacas (J. N. Weiss et al., 1999), enquanto as correntes de potássio parecem desempenhar um papel fundamental nos mecanismos de sincronismo que levam a crises de epilepsia (Avoli et al., 2005). Curiosamente, trabalhos recentes na literatura mostram que, além do uso de fármacos específicos, tanto o tratamento de epilepsia (Faselow et al., 2000) como da doença de Parkinson (Fuentes et al., 2009) podem ter a sua eficiência significativamente melhorada caso sejam acompanhados de estimulação elétrica periódica das regiões neuronais específicas envolvidas na gênese destes ritmos patológicos, o que é capaz de suprimir a atividade elétrica síncrona do tecido e recuperar o padrão normal de disparo das células neuronais.

Assim, embora a metodologia de controle por projeto tenha sido exposta aqui no âmbito de uma dinâmica mais simples que as complexas redes celulares envolvidas nos mecanismos que geram fibrilação, epilepsia ou doença de Parkinson, observa-se que a mesma define uma heurística para encontrar pontos de operação fisiológicos em sistemas com descrição matemática relativamente complexa. Isso contribui não apenas para o melhor entendimento da influência dos parâmetros de controle no processo biológico sob análise, mas pode também ser útil para simular os efeitos da administração de drogas, ou mesmo padrões de estimulação específicos.

Além da metodologia de inteligência computacional proposta, o presente capítulo evidenciou a presença de caos no modelo HH mediante estimulação periódica abrupta, o que foi aqui caracterizado por meio do espectro de Lyapunov utilizando a abordagem CLDYN. Conforme mencionado no capítulo anterior, este cenário é de difícil tratamento matemático, tendo sido abordado para o modelo HH por poucos trabalhos na literatura, e, ainda sim, em situações ou por metodologia distinta da aqui empregada (Lin, 2006; Sun et al., 2010). Mais uma vez, a presença do comportamento caótico neste modelo neuronal tão representativo para a explicação da origem dos biopotenciais traz à tona novamente o papel do comportamento caótico e da computação por atratores instáveis nos processos cognitivos de organismos mais desenvolvidos (Skarda & Freeman, 1987; Rabinovich & Abarbanel, 1998; Korn & Faure, 2003; Freeman, 2004).

Por fim, observa-se que existem outros possíveis critérios ou possíveis funções que poderiam guiar o ajuste dos parâmetros dos sistemas não-lineares, como, por exemplo, a minimização da divergência

entre as distribuições de probabilidade da solução candidata e da desejada, ou mesmo a maximização da informação mútua entre essas soluções. Estas abordagens definiriam, em um sentido mais estrito, um controle por medidas teóricas de informação, e, com certeza, surgem como uma perspectiva de trabalho futuro. De maneira geral, independentemente da forma de ajuste em si, tem-se aqui uma proposta de controle especialmente atraente para sistemas com descrição matemática complexa e passível de aplicação em diferentes contextos.

Capítulo 5

Mapas de retorno e separação de fontes caóticas

5.1 Introdução

Do ponto de vista prático, a análise de séries temporais é um dos ramos mais promissores da teoria de sistemas dinâmicos não-lineares no que se refere ao potencial de aplicação de estratégias de inteligência computacional guiadas por medidas de informação. É importante recordar que grande parte da pesquisa em sistemas dinâmicos se faz a partir da observação de séries temporais, tanto com a finalidade de conceber modelos adequados que capturem a estrutura determinística destes sinais como para previsão de seus valores futuros, extração de características, identificação de parâmetros, etc. (Abarbanel, 1996; Box et al., 2008).

Neste contexto, um problema particularmente importante consiste na identificação experimental de fenômenos caóticos a partir da observação de suas respectivas séries temporais, bem como a extração das medidas invariantes que os caracterizam (Fiedler-Ferrara & Carmo, 1995). Entretanto, a impossibilidade de repetir um experimento de natureza caótica rigorosamente a partir de um mesmo estado inicial faz com que suas várias realizações produzam séries temporais distintas, aperiódicas e com espectro em frequência contínuo, características que podem facilmente ser atribuídas a processos aleatórios, e dificultam significativamente a correta identificação de um comportamento determinístico caótico (Abarbanel, 1996; Provenzale et al., 1992).

Na prática, a clara distinção entre sinais caóticos e aleatórios baseada na observação de séries temporais é uma tarefa nada trivial (Provenzale et al., 1992; Schittenkopf & Deco, 1997; Zbilut et al., 2000; Rohde et al., 2008), sendo que a abordagem mais comum neste sentido consiste na obtenção de algumas medidas invariantes que diferenciam essas duas classes de sinais, o que pode ser feito, por exemplo, por meio da entropia de Kolmogorov-Sinai (KS), ou melhor, pelo cálculo do seu limitante

inferior dado pela entropia de correlação (K_2) (Grassberger & Proccacia, 1983), conforme definições apresentadas no capítulo 2. Apenas recordando, estas grandezas são nulas para sinais periódicos, finitas e positivas para processos caóticos e tendem a infinito para sinais aleatórios (Provenzale et al., 1992; Kubin, 1995). Entretanto, alguns processos estocásticos são caracterizados por espectros de potência semelhante aos de sinais caóticos, e podem ser citados como exceções a este critério de classificação, fornecendo valores positivos e finitos para as entropias K_S e K_2 (Provenzale et al., 1992). Além disso, observa-se que a presença de interferentes estocásticos nas observações pode degenerar significativamente as estimativas dessas medidas invariantes e conduzir a diagnósticos ou caracterizações inadequadas.

Portanto, torna-se clara a necessidade de se empregar algum estágio de pré-processamento com o objetivo de melhorar a qualidade destes sinais, destacando as características determinísticas da observação em detrimento das componentes interferentes estocásticas, o que delinea o arcabouço de um problema de filtragem. No entanto, as possíveis similaridades espectrais entre sinais caóticos e esses interferentes tornam a filtragem por meio da abordagem de Fourier inadequada, podendo levar a uma perda expressiva de informação (Abarbanel, 1996; Badii et al., 1988; Kostelich & Schreiber, 1993; Grassberger et al., 1993). Assim, o problema de filtragem de sinais caóticos tem motivado o desenvolvimento de métodos alternativos para a realização desta tarefa considerando diferentes cenários ou informações disponíveis *a priori* (Kostelich & Yorke, 1988; Hammel, 1990; Farmer & Sidorowich, 1991; Sauer, 1992; Cawley & Hsu, 1992).

Do ponto de vista teórico, quando mais de uma observação da mistura do sinal caótico com o interferente estocástico estão disponíveis, o problema de filtragem pode ser tratado no âmbito do problema de separação cega de fontes (BSS - do inglês *blind source separation*) ou da tarefa de extração cega de fontes (BSE - do inglês *blind source extraction*). Nesta classe de problemas, objetiva-se basicamente a recuperação das fontes originais a partir das observações produzidas por um processo de mistura linear sem a utilização de um sinal de referência ou conhecimento dos elementos da matriz de mistura (Hyvärinen et al., 2001; Romano et al., 2010).

Uma abordagem classicamente utilizada para resolver os problemas de BSS e BSE tem por base a análise de componentes independentes (ICA - do inglês *independent component analysis*) (Hyvärinen et al., 2001; Romano et al., 2010). Neste tipo de análise, busca-se encontrar um sistema separador que, quando aplicado às misturas, recupera as fontes originais por meio da maximização da independência ou não-gaussianidade dos sinais de saída. Embora a recuperação de independência seja uma estratégia poderosa e de caráter bem geral na recuperação das fontes originais, ela não explora as particularidades ou todas as informações disponíveis no caso da separação ou extração de um sinal caótico misturado com um interferente estocástico, algo que pode aumentar o desempenho do processo de recuperação da fonte determinística. De fato, a identificação de particularidades a serem

exploradas na tentativa de construção de um critério mais específico de separação ou extração de fontes já se afigura como um tópico da maior relevância na área de processamento de sinais, o que pode ser atestado, por exemplo, pelo desenvolvimento da análise de componentes esparsos (SCA - do inglês *sparse component analysis*) (Bonfill & Zibulevsky, 2001) e pela busca por outras características latentes que permitem identificar ou separar sinais específicos (Romano et al., 2010).

Neste capítulo, um método alternativo para solução do problema de extração cega de fontes caóticas misturadas com sinais estocásticos é proposto. A técnica desenvolvida objetiva propor um critério de adaptação do sistema separador com o intuito de obter um sinal de saída (fonte recuperada) que é o mais determinístico possível. A solução emprega mapas de retorno para construir funções custo clássicas em análise por quantificação de recorrência (RQA - do inglês *recurrence quantification analysis*) (Eckmann et al., 1987; Trulla et al., 1996; Marwan et al., 2007), as quais são usadas para guiar o processo de adaptação do sistema separador. Grosso modo, essa idéia corresponde a uma primeira proposta para a criação de uma análise de componentes determinísticos.

O presente capítulo está estruturado da seguinte forma: a seção 5.2 introduz os problemas BSS e BSE, assim como a abordagem clássica de solução mediante ICA e a proposta de extração baseada na maximização de determinismo e na análise por quantificação por recorrência. A seção 5.3 dedica-se a mostrar os resultados obtidos para o cenário de inversão perfeita do processo de mistura, os efeitos dos parâmetros que definem o mapa de retorno no processo de recuperação das fontes, e, por fim, a performance do método proposto no caso de modelos de misturas sub-determinados, ou seja, no caso em que o número de fontes é maior que o número de observações. Nesta mesma seção, comparações com abordagens clássicas de análise de componentes independentes também são fornecidas. A seção 5.4 apresenta uma discussão das contribuições dadas à luz dos trabalhos publicados na literatura.

5.2 O problema de separação/extração cega de fontes

5.2.1 O *cocktail party-problem*

Talvez a forma mais didática e intuitiva de introduzir o problema separação ou extração cega de fontes seja por meio do chamado *cocktail party-problem* (Hyvärinen et al., 2001). Neste problema (conforme ilustrado na figura 5.1), tem-se acesso por meio de diferentes sensores a diversos sinais de voz misturados que caracterizam um ambiente de festa. Objetiva-se, neste cenário, recuperar as vozes originais, o que implica em separar de forma adequada as vozes misturadas (problema de separação cega de fontes), ou pelo menos extrair algumas das vozes originais (problema de extração cega de fontes).

O *cocktail party problem* assume implicitamente algumas premissas importantes para que a con-

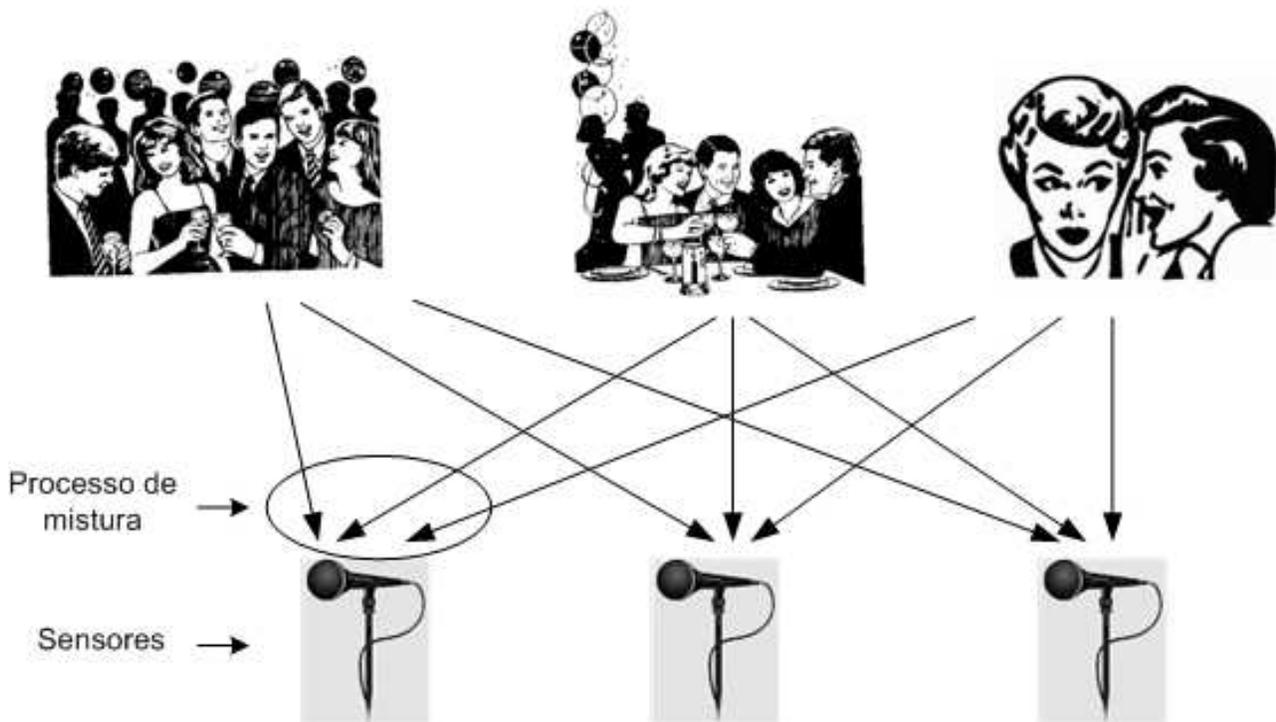


Figura 5.1: Esquema simplificado do *cocktail party problem* onde vários sensores registram diferentes misturas de vozes dando origem às observações a partir das quais deseja-se recuperar as fontes originais.

dição de perfeita inversão do processo de mistura seja alcançada. A primeira delas considera um processo de mistura linear, ou seja, que cada mistura é uma combinação linear das fontes. A segunda premissa prevê que o número mínimo de sensores necessário para uma separação perfeita seja igual ao número de fontes originais. Caso o número de sensores, e consequentemente, o número de observações ou misturas disponíveis seja menor que o número de fontes, tem-se o caso sub-determinado, em que é impossível inverter perfeitamente o processo de mistura. O problema de separação/extração cega de fontes assume ainda que as observações fornecidas pelos sensores possuem algum grau de diversidade espacial.

Diante deste cenário, o problema de separação pode ser formalmente melhor descrito pelo diagrama de blocos da figura 5.2, no qual considera-se que as fontes $s_1(n)$, $s_2(n)$, ..., $s_N(n)$ são linearmente misturadas, dando origem ao vetor observação (ou vetor de misturas) $\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}s(n)$. O vetor de misturas pode simplificarmente ser descrito por $\mathbf{x}(n) = [x_1(n), \dots, x_N(n)]^T$, sendo \mathbf{A} a matriz de mistura e $\mathbf{s}(n) = [s_1(n), \dots, s_N(n)]^T$ o vetor de fontes.

Objetiva-se, neste caso, recuperar as fontes originais sem a exigência de um sinal de referência (a qual caracterizaria uma abordagem supervisionada e não cega), ou mesmo conhecimento dos coeficientes da matriz de mistura. A separação pode ser estruturalmente realizada através de um sistema

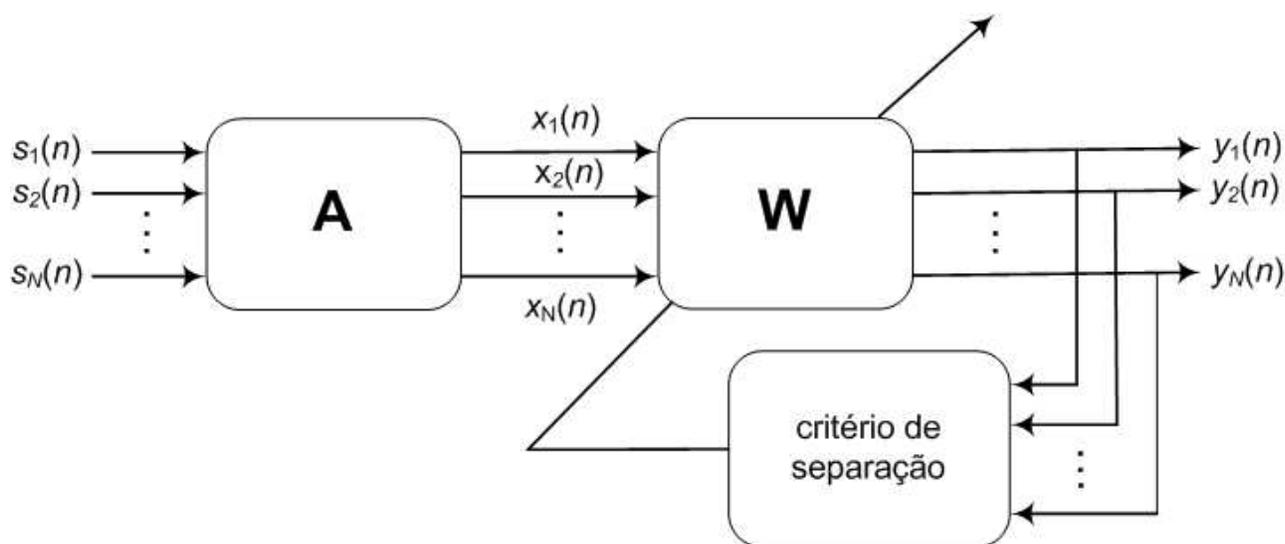


Figura 5.2: Representação esquemática do problema de separação cega de fontes. As fontes originais são representadas por $s_1(n), s_2(n), \dots, s_N(n)$, \mathbf{A} é a matriz de mistura, $x_1(n), \dots, x_N(n)$ são as misturas observadas, \mathbf{W} é o sistema separador adaptado segundo algum critério no sentido a recuperar as fontes originais na saída dada pelos sinais $y_1(n), \dots, y_N(n)$.

separador dado por uma matriz \mathbf{W} , no caso da separação cega de fontes, ou por um vetor \mathbf{w} , no caso da extração cega de fontes. O sistema separador deve ser escolhido adequadamente de forma que o vetor de saída $\mathbf{y}(n) = [y_1(n), \dots, y_N(n)]^T$ seja dado por $\mathbf{y}(n) = \mathbf{W}^T \mathbf{x}(n) = G\mathbf{s}(n)$ (caso de BSS), ou $\mathbf{y}(n) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}(n) = Gs_k(n)$ (caso de BSE). Neste caso, G é um fator de escala e $s_k(n)$ é um vetor que contém algumas das fontes originais. Deve-se ainda observar que as fontes recuperadas correspondem a versões permutadas das originais, ou seja, mesmo diante da recuperação perfeita dos sinais, é impossível afirmar qual deles se refere a cada uma das fontes $s_1(n), \dots, s_N(n)$.

5.2.2 Análise de componentes independentes aplicada ao problema de BSS/BSE

Conforme exposto, uma solução clássica para os problemas de separação/extração cega de fontes consiste no uso da análise de componentes independentes (ICA) (Hérault et al., 1985; Comon, 1994). Nesta abordagem, assume-se como premissa essencial que as fontes originais são estatisticamente independentes, o que de fato é válido para uma ampla classe de problemas, como, por exemplo, o próprio *cocktail party problem*.

Sendo obedecidas todas as premissas estabelecidas, o sistema separador pode ser adaptado com o intuito de recuperar a independência estatística no vetor de saída, o que implica em inverter o processo de mistura. O critério de adaptação do separador, baseado, portanto, em independência, permite recuperar as fontes originais (no caso de perfeita inversão) a menos de um fator de escala e

de uma permutação (para uma prova matemática rigorosa, veja Comon (Comon, 1994)).

Além das premissas originais que, de certa forma, delineiam o problema de separação/extração, algumas outras podem ser introduzidas sem qualquer perda de generalidade. Por exemplo, pode-se assumir que o processo de mistura é ortogonal, ou seja, a matriz de mistura \mathbf{A} , satisfaz à condição:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (5.1)$$

sendo \mathbf{A}^T a matriz transposta de \mathbf{A} e \mathbf{I} a matriz identidade. A condição de ortogonalidade do processo de mistura pode ser sempre atingida por meio do branqueamento do vetor de misturas (Hyvärinen et al., 2001; Romano et al., 2010), o que confere generalidade ao cenário abordado. Como exemplo, caso apenas duas fontes sejam misturadas por uma matriz de mistura $\mathbf{A}_{2 \times 2}$ ortogonal, a matriz separadora $\mathbf{W}_{2 \times 2}$ pode ser definida em termos de uma única variável θ , fornecendo uma parametrização do tipo:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

No caso de BSE, tem-se o seguinte vetor separador parametrizado em θ :

$$\mathbf{w} = [\cos\theta \ \sin\theta]^T \quad (5.3)$$

No caso geral, quando N fontes são consideradas, exige-se um sistema separador com $N - 1$ variáveis para a adequada parametrização do separador $\mathbf{W}_{N \times N}$, enquanto o número de parâmetros para o vetor de extração depende do número de misturas disponíveis e do número de fontes que se deseja extrair.

Encontrada a parametrização adequada, pode-se então guiar o processo de ajuste do separador por meio da alteração dos seus parâmetros orientada por alguma função contraste que quantifique o nível de independência da saída, o que dá origem à ICA propriamente dita.

Uma forma intuitiva de buscar por independência no vetor de saída é minimizar a informação mútua entre os sinais que compõe este vetor. Assim, pode-se buscar a solução em θ que leva à minimização do estimador ou função custo fit_m , definido da seguinte forma:

$$\text{fit}_m = \sum_i H\{y_i\} - H\{\underline{y}\} \quad (5.4)$$

onde $H\{y_i\}$ é a entropia diferencial de Shannon da i -ésima saída do sistema separador (Cover & Thomas, 2005) e $H\{\underline{y}\}$ é a entropia diferencial conjunta de suas saídas. Para o cálculo de fit_m , foi utilizado aqui o estimador fornecido por Darbellay e Vajda (Darbellay & Vajda, 1999), uma vez que este é, para os fins deste trabalho, suficientemente rápido e eficiente. Observa-se ainda que,

para avaliar o desempenho do estimador de informação mútua, faz-se necessário sair do cenário de extração de fontes e entrar obrigatoriamente no cenário de separação, uma vez que é exigida a estimação de todas as fontes envolvidas para o cálculo da informação comum a elas.

Alternativamente à busca estrita por independência, podem-se buscar critérios que a recuperem por meios indiretos. Um exemplo clássico e muito empregado em ICA é a maximização da não-gaussianidade dos sinais de saída. Este critério decorre diretamente do teorema central do limite (Haykin, 2002), que estabelece, em termos simples, que a soma de um conjunto de variáveis aleatórias independentes tende a produzir uma variável aleatória resultante com características mais próximas de uma distribuição gaussiana do que as variáveis originalmente envolvidas no processo de mistura (Hyvärinen et al., 2001). A não-gaussianidade de um sinal $y_1(n)$ pode ser calculada por meio da curtose, o que define o seguinte estimador ou função custo:

$$\text{fit}_k = E\{y_1(n)\}^4 - 3E\{y_1(n)^2\}^2 \quad (5.5)$$

onde o operador $E\{\alpha\}$ é a esperança estatística da variável aleatória α (Cover & Thomas, 2005).

Existem outros critérios ou mesmo estimadores que, direta ou indiretamente, levam à independência (e.g. estimação da máxima verossimilhança, princípio de maximização da informação (Infomax), entre outros), entretanto, apenas os dois estimadores apresentados nas Eqs. (5.4) e (5.5) foram aqui considerados. Para aqueles interessados em uma apresentação mais rigorosa do problema BSS/BSE, de ICA, bem como detalhes de implementação de seus diferentes critérios, sugere-se os trabalhos de Hyvärinen et al. (Hyvärinen et al., 2001), Duarte (Duarte, 2006) e Romano et al. (Romano et al., 2010).

Embora ICA seja uma abordagem baseada em uma idéia relativamente geral (recuperação da independência na saída), existem casos em que informações mais específicas sobre os sinais envolvidos no processo de mistura podem levar a um melhor desempenho de separação ou mesmo possibilitar a extração de uma fonte específica. Por exemplo, quando se sabe que uma das fontes envolvidas no processo de mistura é um sinal caótico, e que as demais são ruído de natureza estocástica, pode-se procurar um critério que maximize o determinismo do sinal de saída caso se queira extrair a fonte caótica. Este caso traz como consequência imediata a perda da ambiguidade existente quando ICA é empregada, uma vez que passa a ser possível expressar as características de um subconjunto de fontes.

Apresenta-se a seguir o critério de maximização do determinismo, bem como os estimadores baseados na análise por quantificação de recorrência que fundamentam seu uso na recuperação de sinais caóticos a partir de observações ruidosas.

5.2.3 Sinais caóticos e geração de mapas de retorno

Em termos formais, um sinal caótico pode ser definido como um sinal de valores contínuos com taxa de entropia finita e positiva e taxa de redundância infinita (Kubin, 1995). Para os propósitos do presente trabalho, um sinal caótico pode ser simplesmente entendido como uma série temporal gerada por um sistema caótico, o que significa que suas propriedades são definidas pela dinâmica que o gera.

Neste contexto, tem-se que a observação de uma única série temporal pode conter a informação necessária para a reconstrução das demais coordenadas da solução do sistema dinâmico no espaço de estados, um passo importante na caracterização do atrator (Abarbanel, 1996). Com este intuito, o teorema da imersão de Takens pode ser aplicado para se obter o vetor de estados $\mathbf{x}(k)$, dado por:

$$\mathbf{x}(k) = \left[x(k) \quad x(k - \tau) \quad \cdots \quad x(k - (d_e - 1)\tau) \right]^T \quad (5.6)$$

onde d_e representa a dimensão de imersão - definida como o número de coordenadas que “desdobra” o atrator¹ - e τ representa o atraso temporal entre as amostras. Mesmo que essas trajetórias não sejam exatamente as mesmas geradas pelo sistema original, elas são topologicamente equivalentes a elas, ou seja, possuem as mesmas medidas invariantes (Abarbanel, 1996).

Após a reconstrução, é possível caracterizar o atrator por meio de seus estados revisitados, o que pode ser feito através da estatística fornecida pelo mapa de retorno (Eckmann et al., 1987). Assim, a partir do vetor de estados reconstruído $\mathbf{x}(k)$ de tamanho N , o mapa de recorrência pode ser representado por uma matriz binária (composta apenas por valores 0 ou 1) $N \times N$ tal que o elemento (i, j) corresponde a um ponto preto (associado ao valor binário 1) quando $\mathbf{x}(i)$ está suficientemente próximo de $\mathbf{x}(j)$, isto é, quando $\|\mathbf{x}(i) - \mathbf{x}(j)\| < \varepsilon$ e um ponto branco (valor binário 0) caso contrário.

A caracterização e a aplicabilidade dos mapas de retorno se tornam claras quando os mapas obtidos para os sinais de diferentes naturezas são comparados. Na figura 5.3, mapas gerados por um sinal periódico (figura 5.3(a)), um sinal caótico (figura 5.3(b)), um sinal estocástico (figura 5.3(c)) e um mistura de sinais aleatórios e estocásticos (figura 5.3(d)) são apresentados. Observa-se que os padrões obtidos em cada mapa diferem em estrutura e regularidade. De fato, esses aspectos fornecem informações relevantes sobre o comportamento da dinâmica em si. Por exemplo, estruturas diagonais estão relacionadas a uma característica de correlação temporal bem-definida e são indícios do caráter

¹O número de coordenadas que caracteriza o atrator reconstruído deve ser escolhido de tal forma que, a partir de uma única observação, a posição dos pontos no espaço reconstruído deve ser definida a partir da estrutura da dinâmica, e não devido à projeção das demais coordenadas no vetor observação (Abarbanel, 1996). Takens mostrou que a observação pode ser sempre “desdobrada” (na condição sem ruído) caso a dimensão de imersão obedeça a restrição: $d_e \geq 2D_0 + 1$, onde D_0 é a dimensão fractal do atrator original (Takens, 1981). No entanto, para diversos sistemas dinâmicos, a reconstrução pode ser realizada com sucesso utilizando um número de coordenadas menor do que o estabelecido pelo teorema (Abarbanel, 1996).

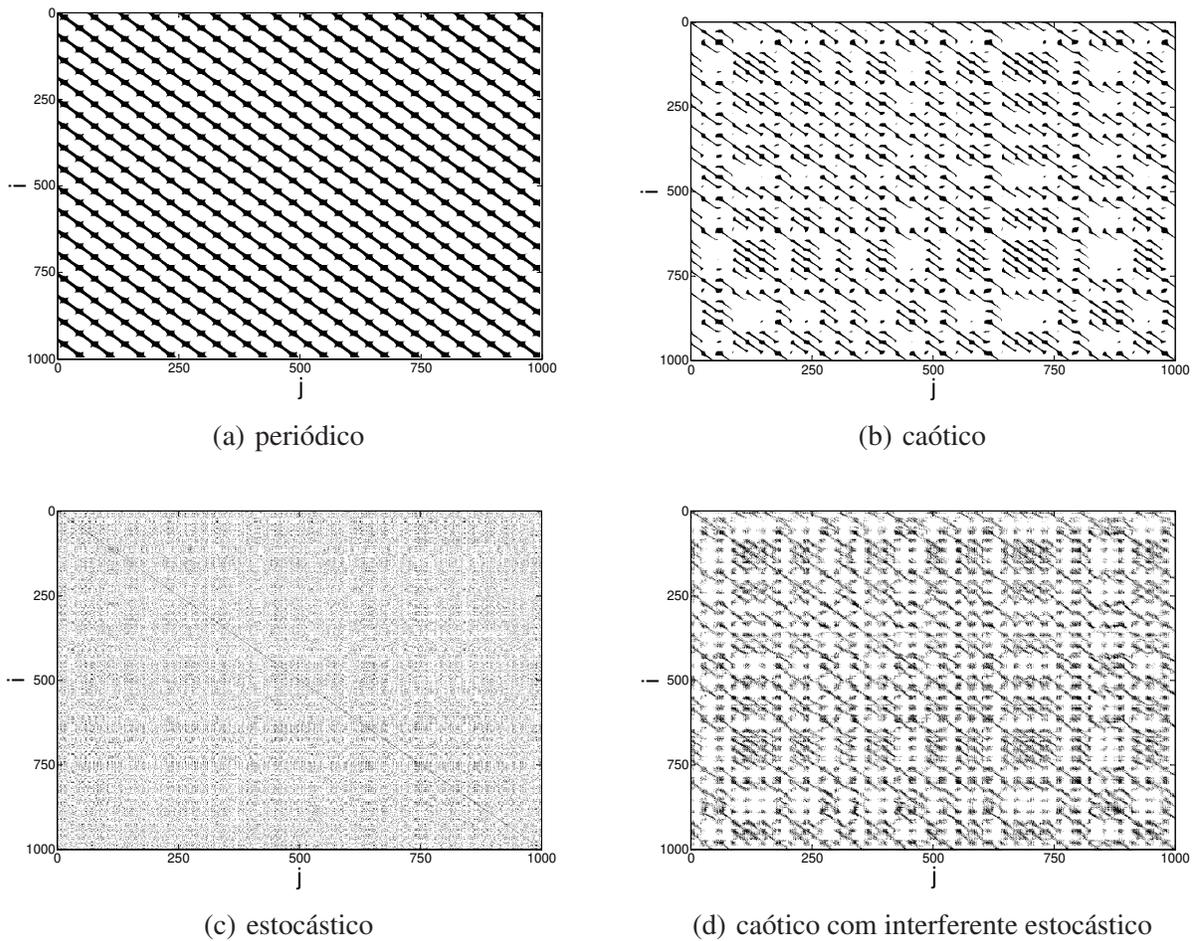


Figura 5.3: Os painéis 5.3(a), 5.3(b), 5.3(c), 5.3(d), mostram, respectivamente, os mapas de retorno ($N_s = 1000$ amostras, $d_e = 3$, $\tau = 3$, $\varepsilon = 0.5$) para oscilações periódicas ($\sin(10t)$), uma série caótica obtida a partir do modelo de Lorenz, uma fonte aleatória gaussiana (de média zero e variância unitária) e uma mistura da fonte caótica com a fonte aleatória.

determinístico que não se pode encontrar em processos estocásticos². Neste caso, a presença de linhas verticais ou horizontais revelam sinais estáticos no tempo, enquanto o espaçamento vertical entre diagonais bem definidas fornecem o período (no caso de sinais periódicos) da oscilação (Marwan et al., 2007).

Um ponto crucial observável na figura 5.3 relaciona-se ao fato de sinais caóticos apresentarem diagonais mais curtas que as de sinais periódicos e mais longas que as de processos aleatórios típicos (e.g. um ruído branco e gaussiano). Este fato sugere que medidas invariantes baseadas em estatísticas do mapa de recorrência podem ser usadas no sentido de fornecer funções contraste para separar

²Na verdade, estruturas diagonais indicando correlação temporal podem aparecer em processos estocásticos correlacionados - ruídos coloridos - mas, mesmo assim, com diferenças significativas em relação à estrutura fornecida pelos processos puramente determinísticos.

ou extrair sinais caóticos a partir de observações ruidosas produzidas por meio da mistura destes com interferentes estocásticos. Essas funções contraste podem ser construídas a partir de medidas estatísticas clássicas já utilizadas e bem-consolidadas no domínio da análise de sistemas dinâmicos não-lineares (Trulla et al., 1996; Zbilut et al., 2000; Marwan et al., 2007), tais como a porcentagem de determinismo (fit_d), a entropia das diagonais (fit_e) e a maior diagonal (excluindo a diagonal principal) (fit_l) encontrada no mapa.

Formalmente, se $P(\varepsilon, l)$ é definida como a frequência de distribuição de diagonais de comprimento l para um mapa de resolução ε , a função custo associada ao conteúdo determinístico para diagonais de comprimento de a até b pode ser matematicamente descrita como:

$$\text{fit}_d = \frac{\sum_{l=a}^{l=b} lP(l)}{\sum_{l=1}^{l=N} lP(l)} \quad (5.7)$$

que consiste basicamente na porcentagem dos pontos do mapa que formam linhas nessa faixa de tamanhos, o que justifica aqui a expressão “conteúdo determinístico”. Já a função custo relacionada à maior diagonal do mapa (excluindo a diagonal principal) pode ser definida como:

$$\text{fit}_l = \max(\{l_i\}_{i=1}^{N_l}) \quad (5.8)$$

onde N_l é o número total de linhas diagonais (excluindo a principal). Finalmente, para os propósitos de separação e extração aqui estabelecidos, a função custo que descreve a entropia de Shannon associada à probabilidade de $p(l) = P(l)/N_l$ de encontrar um diagonal de comprimento l é definida por:

$$\text{fit}_e = - \sum_{l=l_{\min}}^{N_l} p(l) \ln(p(l)) \quad (5.9)$$

e estabelece uma medida de complexidade do mapa de recorrência (e.g. um ruído descorrelacionado fornece pequenos valores para fit_e , refletindo baixa complexidade, enquanto sinais periódicos tendem a uniformizar o mapa de retorno, aumentando a entropia (Marwan et al., 2007)). O fato de sinais aleatórios (tipicamente associados a um maior grau de incerteza quando comparados com os sinais de natureza determinística) fornecerem valores de entropia menores que os de sinais determinísticos parece contraditório à luz da definição clássica de entropia segundo a teoria da informação (Cover & Thomas, 2005). No entanto, deve-se observar que a entropia é definida aqui em termos da probabilidade de encontrar diagonais de comprimento l , e sinais determinísticos (em especial, os periódicos tal como mostrado na figura 5.3(a)) são justamente aqueles que fornecem mapas mais uniformes.

No caso da função dada pela Eq. (5.9), o limiar l_{\min} é estabelecido apenas para excluir as linhas diagonais que são formadas pelo movimento tangencial das trajetórias no espaço de estados (Marwan

et al., 2007).

5.2.4 O problema de extração cega de fontes no contexto de sinais determinísticos

Considera-se aqui o caso particular em que duas fontes - uma caótica $s_c(n)$ e outra estocástica $s_s(n)$ - são linearmente misturadas, dando origem ao vetor observação $\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}s(n)$. Em um primeiro cenário de simulação, a matriz de mistura \mathbf{A} é assumida como sendo de posto completo, 2×2 e ortogonal (ou seja, assume-se que o processo de branqueamento já tenha sido aplicado). Assim, tem-se:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Neste caso, o objetivo do problema de extração cega de fontes aqui posto é recuperar o sinal determinístico a partir das observações, usando diferentes funções custo para guiar o processo de adaptação dos sistemas separadores. Deste modo, a matriz \mathbf{W} dada pela Eq. (5.2) pode ser adaptada por meio dos valores de fit_m , enquanto o vetor separação \mathbf{w} (Eq. (5.3)) pode ser adaptado com o auxílio dos demais estimadores (fit_k , fit_d , fit_l e fit_e), de tal forma que $y(n) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}(n) = G s_c(n)$. De forma mais específica, o diagrama da figura 5.2 pode ser transposto para o contexto de extração abordado aqui conforme mostrado esquematicamente na figura 5.4, tomando como exemplo clássico a série caótica de Lorenz misturada com um ruído gaussiano branco.

Por fim, pode-se dizer sucintamente que a metodologia proposta de extração por meio das funções custo derivadas do mapa de retorno baseia-se no fato de que diagonais mais longas e organizadas caracterizam o comportamento determinístico, o que pode ser usado para discriminar os sinais caóticos (ou mesmo periódicos) dos estocásticos. Assim, objetiva-se encontrar os valores de θ que fornecem o vetor separador \mathbf{w} tal que maximizam as funções custo definidas nas Eqs. (5.7), (5.8) e (5.9) no sentido de fornecer a saída $y(n)$ mais determinística que se puder alcançar.

5.3 Resultados

5.3.1 Extração cega de fontes caóticas: modelos de misturas inversíveis

Com o intuito de avaliar a validade da metodologia proposta, diferentes cenários de simulação são aqui abordados. Em todos os casos, considera-se $s_c(n)$ como sendo a variável de estado x do modelo de Lorenz (vide Capítulo 3 seção 3.5), pré-processada, sem perda de generalidade, para ter média zero e variância unitária, bem como diferentes fontes estocásticas $s_s(n)$ (e.g. ruído branco

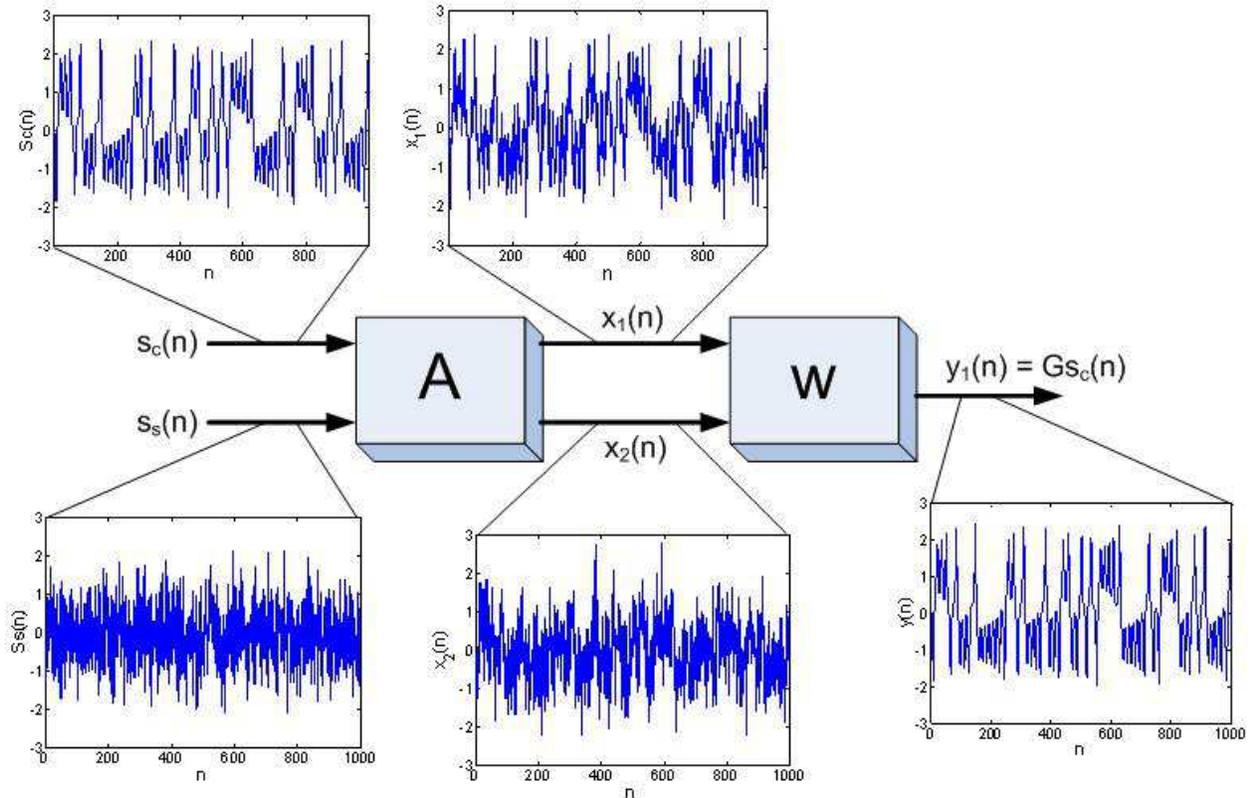


Figura 5.4: Representação esquemática do problema de extração cega de fontes envolvendo sinais caóticos e estocásticos. Neste cenário, $s_c(n)$ é uma fonte caótica, $s_s(n)$ é uma fonte estocástica, $x_1(n)$ e $x_2(n)$ são as misturas observadas, A é a matriz mistura, w é o vetor separador e $y_1(n)$ é o sinal recuperado a menos de um fator de escala G .

gaussiano, ruído branco uniforme e processos gaussianos coloridos com média zero). A escolha do sinal caótico utilizado foi feita tendo por base a popularidade e a quantidade de dados disponíveis para o sistema de Lorenz, mas não é de forma alguma obrigatória. Observou-se que outros sistemas dinâmicos, tais como o de Rössler ou mesmo o mapa logístico, levam a resultados semelhantes, desde que os parâmetros de construção do mapa de retorno sejam propriamente ajustados.

No primeiro cenário de simulação escolhido, considera-se a fonte estocástica como sendo um processo gaussiano branco - 10 dB abaixo da fonte caótica em potência - que é misturado ao sinal caótico por meio de uma matriz de mistura de posto completo, tal como definido na Eq. (5.10), estabelecendo-se $\theta = \pi/6$. Todos os coeficientes da matriz de mistura e as amostras das fontes originais são desconhecidos *a priori*. Com o intuito de recuperar a fonte caótica, o vetor separador w pode ser escolhido de tal forma que $y_1(n) = w^T x(n)$ seja tão determinístico quanto possível, o que significa escolher θ no sistema separador dado pelas Eqs. (5.2) e (5.3) de forma a maximizar as funções custo fit_d , fit_l e fit_e .

A figura 5.5 mostra os valores das funções custo baseadas em recorrência e também das funções custo comumente utilizadas como contrastes em ICA: a informação mútua entre $y_1(n)$ e $y_2(n)$ e a curtose de $y_1(n)$, conforme definido respectivamente nas Eqs. (5.4) e (5.5). Neste caso, a solução em θ que maximiza os estimadores definidos nas Eqs. (5.7),(5.8), (5.9) e (5.5) e minimiza o estimador dado pela Eq. (5.4) pode ser encontrada por meio de uma busca exaustiva, o que implica em variar θ de 0 a π e avaliar os respectivos valores obtidos para as funções custo.

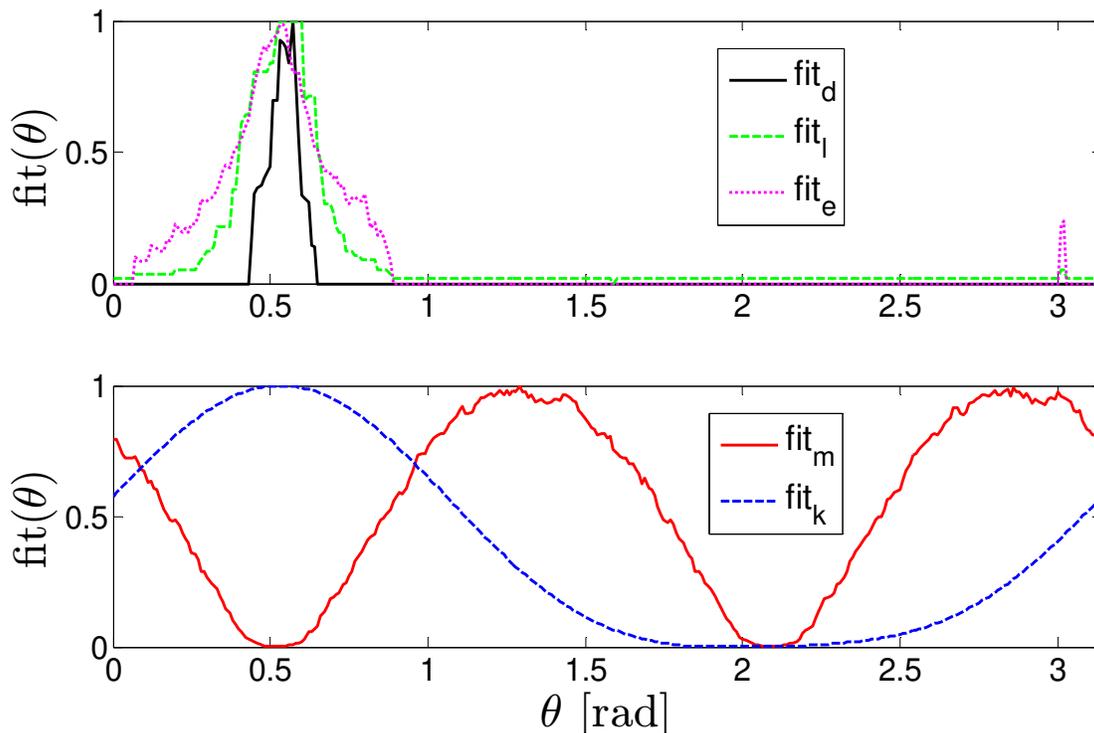


Figura 5.5: O painel superior mostra as funções custo normalizadas associadas ao conteúdo determinístico (fit_d), o comprimento da maior diagonal (fit_l) e entropia das diagonais (fit_e) de $y_1(n)$ para θ variando de 0 a π , ($N_s = 1000$, $d_e = 3$, $\tau = 3$, $\varepsilon = 0.1$, $a = 40$, $b = 60$, $l_{\min} = 2$) considerando a fonte estocástica como um ruído gaussiano branco 10 dB abaixo da fonte caótica em potência. O painel inferior traz a curtose normalizada de $y_1(n)$ (fit_k) e a informação mútua normalizada entre $y_1(n)$ e $y_2(n)$ (fit_m) para θ variando de 0 a π .

A primeira conclusão importante que se pode tirar mediante os resultados apresentados na figura 5.5 é que os estimadores baseados nas medidas de recorrência possuem ótimos globais nas soluções que levam à perfeita inversão do processo de mistura, uma característica que é compartilhada pelas medidas clássicas de ICA. Isso faz com que a proposta cumpra os requisitos exigidos por um método de extração de forma compatível com as abordagens existentes e possa ser cogitada como uma alternativa viável. É interessante ainda observar algumas vantagens da proposta que justificam o

uso de informações mais específicas que a existência de independência na construção do critério de separação. Por exemplo, as funções baseadas em recorrência apresentam melhor desempenho como critérios de separação quando a potência de ruído é aumentada, ou seja, elas definem a solução que inverte o processo de mistura de forma mais precisa em ambientes ruidosos. O cenário de simulação que ilustra isso é mostrado na figura 5.6, em que a potência da fonte estocástica é aumentada de 10 para 2 dB abaixo da potência do sinal caótico. Observa-se, neste caso, uma melhor definição dos estimadores baseados em recorrência na identificação da solução ótima, um fato que não se sustenta para as medidas baseadas em ICA. Na verdade, a informação mútua deixa de ser um critério robusto de separação neste cenário, exigindo, possivelmente, um maior número de amostras para apontar o ótimo global. A curtose mostra-se ainda capaz de inverter o processo de mistura, embora a solução encontrada em ambientes menos ruidosos seja de melhor qualidade.

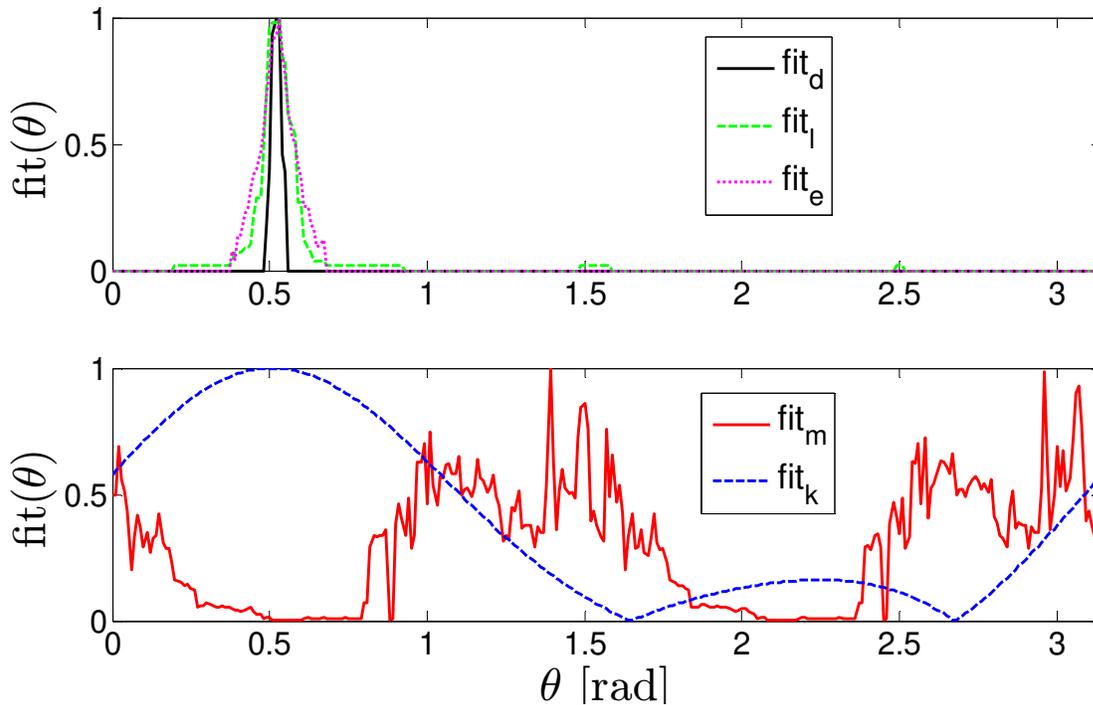


Figura 5.6: A mesma simulação que dá origem aos resultados mostrados na Fig. 5.5 é repetida, mas agora uma fonte ruidosa mais potente, apenas 2 dB abaixo do sinal caótico em potência.

Para ilustrar o potencial de recuperação da fonte original associado ao método proposto, a figura 5.7 mostra a série temporal obtida quando a solução que inverte o processo de mistura é adotada no cenário de simulação que fornece os resultados mostrados na figura 5.6. Os painéis superior, central e inferior (figura 5.7) mostram, respectivamente, a fonte caótica original, uma das misturas observadas e a fonte caótica recuperada. É possível observar que, depois que o sistema separador foi

propriamente adaptado com a solução em θ que maximiza as medidas dadas pelas Eqs. (5.7), (5.8) e (5.9), a fonte caótica recuperada é praticamente idêntica à fonte caótica original, o que decorre da perfeita inversão do processo de mistura.

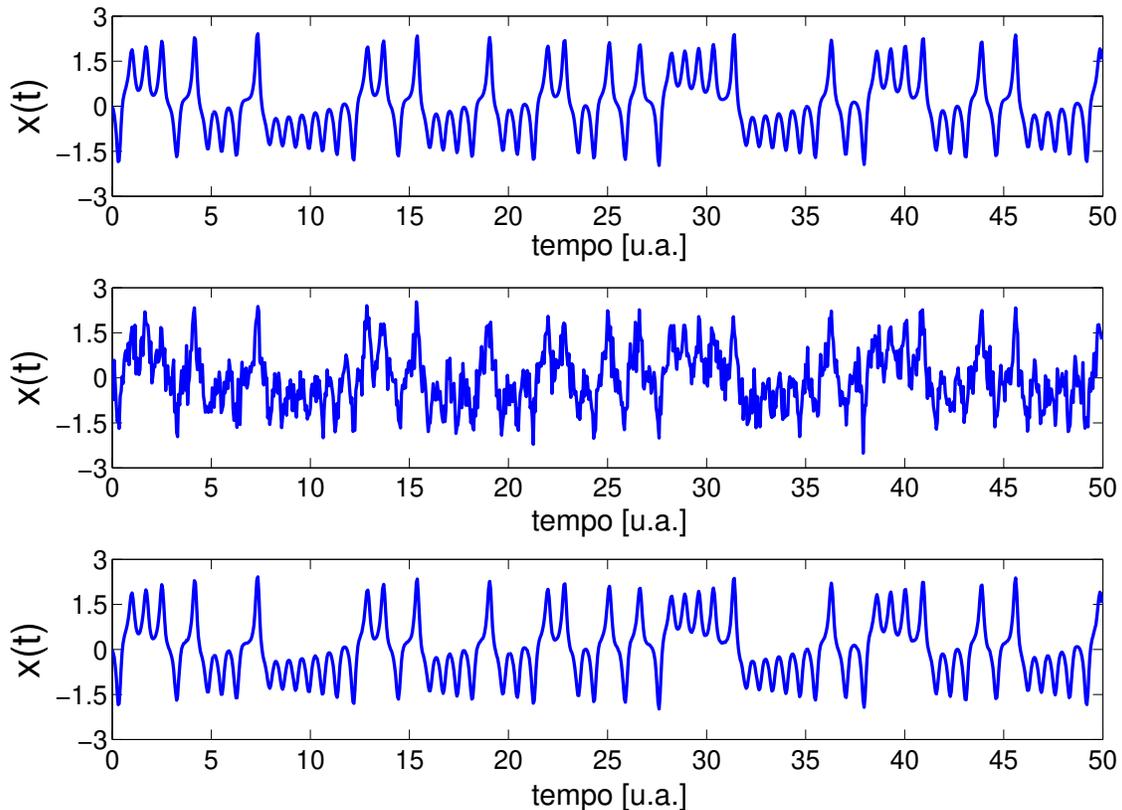


Figura 5.7: Os painéis superior, central e inferior mostram, respectivamente, a série caótica de Lorenz original, uma das misturas observadas e o sinal caótico recuperado. A unidade de tempo é assumida aqui como arbitrária - u.a.

Quando a mesma simulação é realizada considerando a fonte estocástica como sendo um ruído uniformemente distribuído branco, é possível observar que o critério de adaptação do separador baseado nas funções de recorrência leva novamente à condição de perfeita inversão da matriz de misturas (painel superior na figura 5.8). No entanto, observa-se no painel inferior desta mesma figura que os critérios clássicos de separação e extração baseados em ICA encontram significativas dificuldades neste cenário de simulação, o que se refere, mais especificamente, ao fato da maximização da não-gaussianidade de $y_1(n)$ não implicar na recuperação da fonte caótica (assim como a minimização da informação mútua considerando o número de amostras fornecido). Estes resultados mostram concordância com o trabalho de Hong-Bin et al. (Hong-Bin et al., 2008), o qual aponta limitações das

abordagens clássicas de ICA - utilizando o algoritmo FastICA, que consiste em uma estratégia de separação também baseada em não-gaussianidade (Hyvärinen et al., 2001; Romano et al., 2010) - quando um ruído sub-gaussiano (e.g. sinais de distribuição uniforme) com SNR maior que 5 dB é misturado com fontes caóticas. Mais uma vez, este tipo de restrição não se sustenta para critérios de separação baseados em recorrência³.

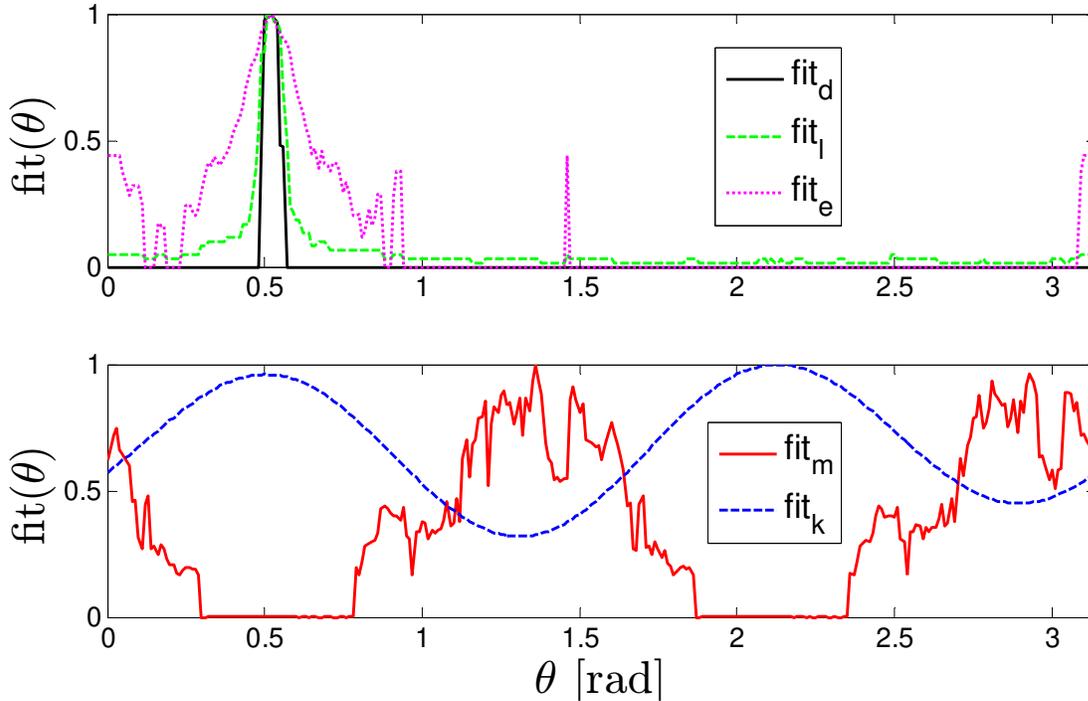


Figura 5.8: O painel superior mostra as funções custo normalizadas associadas ao conteúdo determinístico (fit_d), o comprimento da maior diagonal (fit_l) e entropia das diagonais (fit_e) de $y_1(n)$ para θ variando de 0 a π , ($N_s = 1000$, $d_e = 3$, $\tau = 3$, $\varepsilon = 0.1$, $a = 40$, $b = 60$, $l_{\min} = 3$). Considera-se aqui a fonte estocástica como sendo um ruído uniforme 2 dB abaixo do sinal caótico em potência. O painel inferior mostra a curtose normalizada de $y_1(n)$ (fit_k) e a informação mútua normalizada entre $y_1(n)$ e $y_2(n)$ (fit_m) para θ variando de 0 a π .

Uma vez que a RQA se baseia nas características de correlação definidas pelo mapa de retorno, um cenário desafiador para o método de extração baseado nas medidas derivadas do mapa consiste em separar sinais caóticos misturados com ruídos com características de autocorrelação semelhantes às do sinal de interesse. Sinais caóticos apresentam um decaimento exponencial na função de autocorrelação, decaimento este relacionado à presença de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo (Abarbanel, 1996), o que pode ser mimetizado por um ruído colorido adequadamente projetado. Com

³As séries temporais deste último conjunto de simulações são omitidas aqui apenas por concisão, uma vez que apenas a forma de onda das misturas observadas são diferentes daquelas apresentadas na figura 5.7.

este intuito, sinais estocásticos com função de autocorrelação análoga à de sinais caóticos podem ser gerados por meio da filtragem de um processo gaussiano branco usando a abordagem autoregressiva de Yule-Walker (Haykin, 2002). A figura 5.9(a) mostra a função de autocorrelação de um ruído colorido projetado de forma a mimetizar a característica de correlação da série de Lorenz. É interessante observar que o sinal estocástico também possui características oscilatórias muito parecidas com as do sinal caótico que se deseja recuperar (figura 5.9(b)), o que leva a um aumento do comprimento das diagonais no mapa de retorno (figura 5.9(c)), diminuindo o poder de distinção entre sinais determinísticos e estocásticos dos estimadores baseados em recorrência.

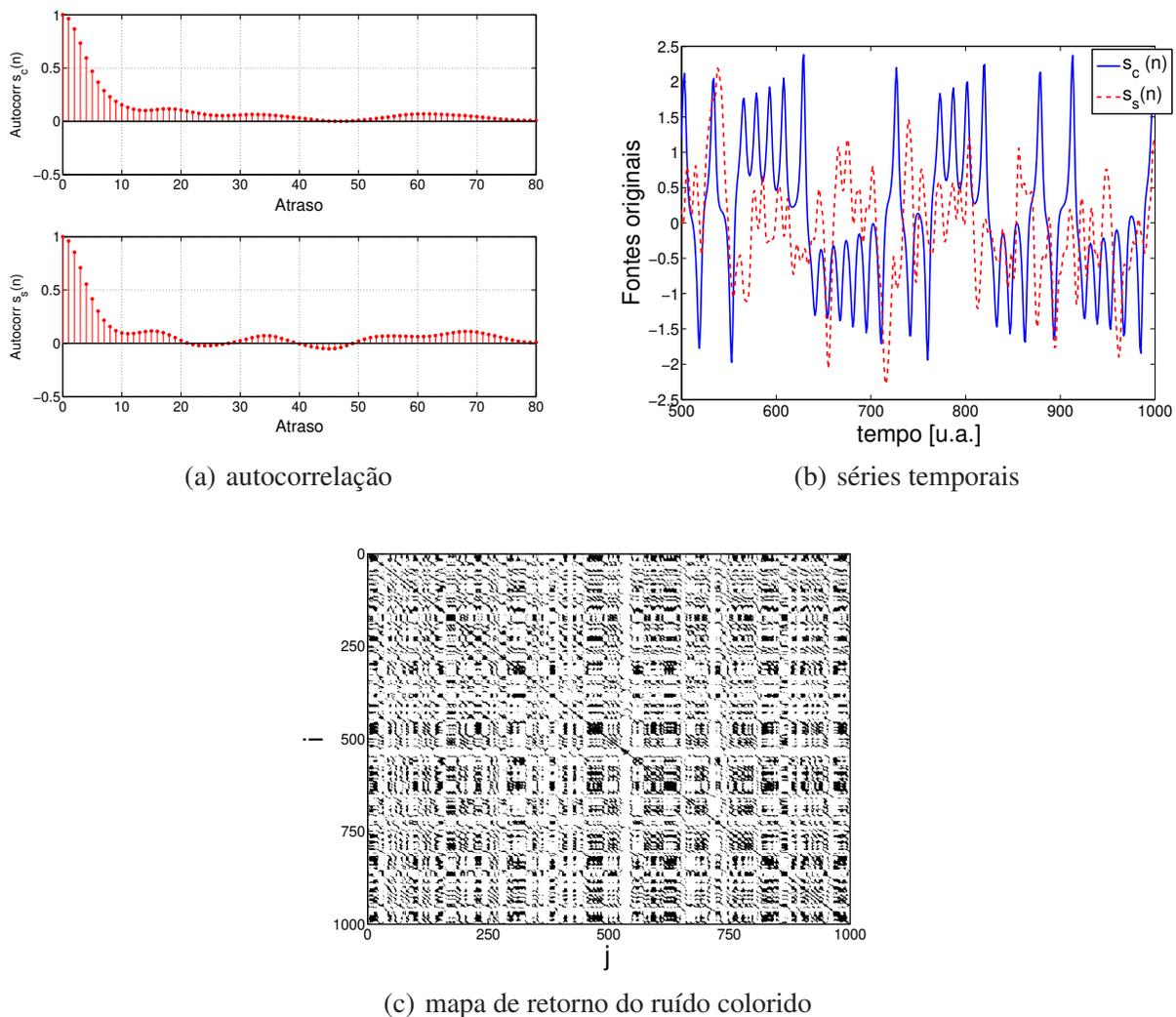


Figura 5.9: O painel 5.9(a) mostra o perfil da função de autocorrelação para a série caótica de Lorenz ($s_c(n)$) e do ruído colorido (fonte estocástica - $s_s(n)$). As respectivas séries temporais caóticas e estocásticas são mostradas no painel 5.9(b). O painel 5.9(c) mostra o mapa de recorrência para o processo gaussiano colorido ($N_s = 1000$, $d_e = 3$, $\tau = 3$, $\varepsilon = 0.1$).

A figura 5.10 mostra que, não obstante, todos os estimadores baseados em recorrência foram capazes de encontrar a solução que inverte a matriz de mistura, o que também é válido para a função custo dada pela curtose da saída. Observa-se no cenário de simulação exposto que a função custo dada por fit_d parece ser a mais precisa na indicação da solução ótima, uma vez que fit_e apresenta um deslocamento em relação a sua linha de base devido à maior característica determinística (ou, pelo menos, maior similaridade em termos das características de correlação) das misturas. Por fim, o estimador fit_l também apresenta oscilações devido à introdução de diagonais mais longas com a adição de ruído colorido.

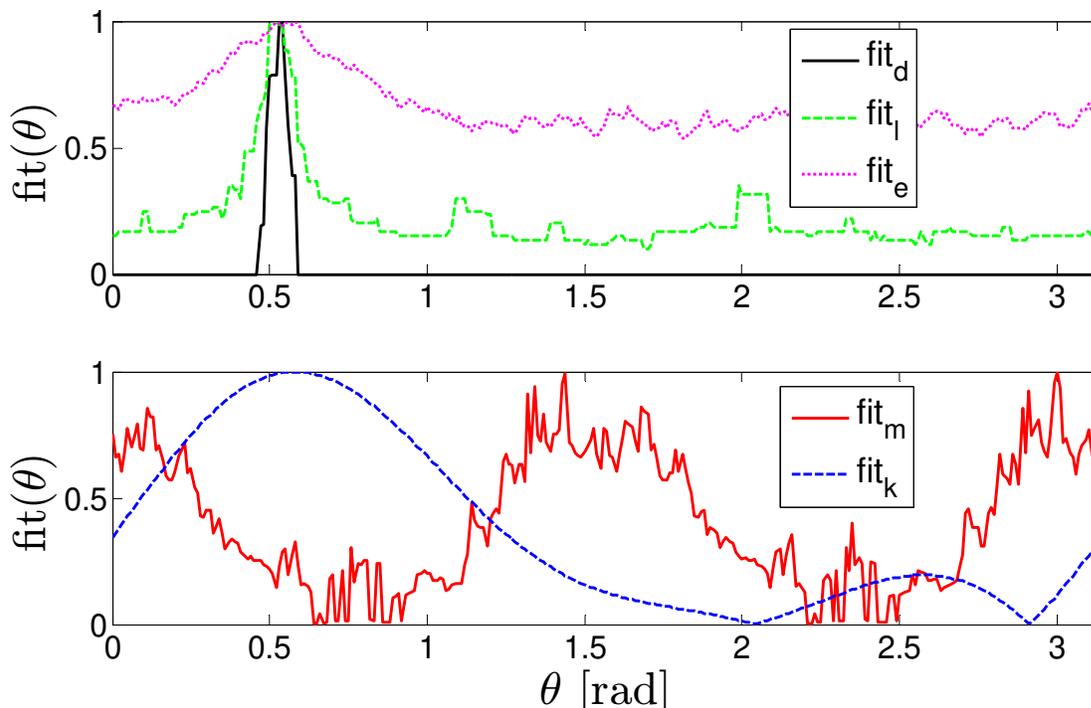


Figura 5.10: O painel superior mostra as funções custo normalizadas associadas ao conteúdo determinístico (fit_d), o comprimento da maior diagonal (fit_l) e entropia das diagonais (fit_e) de $y_1(n)$ para θ variando de 0 a π , ($N_s = 1000$, $d_e = 3$, $\tau = 3$, $\varepsilon = 0.1$, $a = 40$, $b = 60$, $l_{\min} = 3$). Considera-se aqui a fonte estocástica como sendo um ruído colorido 2 dB abaixo do sinal caótico em potência. O painel inferior traz a curtose normalizada de $y_1(n)$ (fit_k) e a informação mútua normalizada entre $y_1(n)$ e $y_2(n)$ (fit_m) para θ variando de 0 a π .

A figura 5.11 mostra em seu painel superior que o sinal corrompido por ruído colorido caracteriza-se por ser mais suave do que as misturas observadas nos cenários de simulação anteriores, o que poderia prejudicar de forma significativa o critério de separação. Na prática, a introdução de um ruído correlacionado implica em uma maior instabilidade ou oscilação indesejável dos estimadores fit_e e fit_l , mas não inviabiliza o processo de recuperação da fonte caótica, conforme pode-se observar

no painel inferior da figura 5.11.

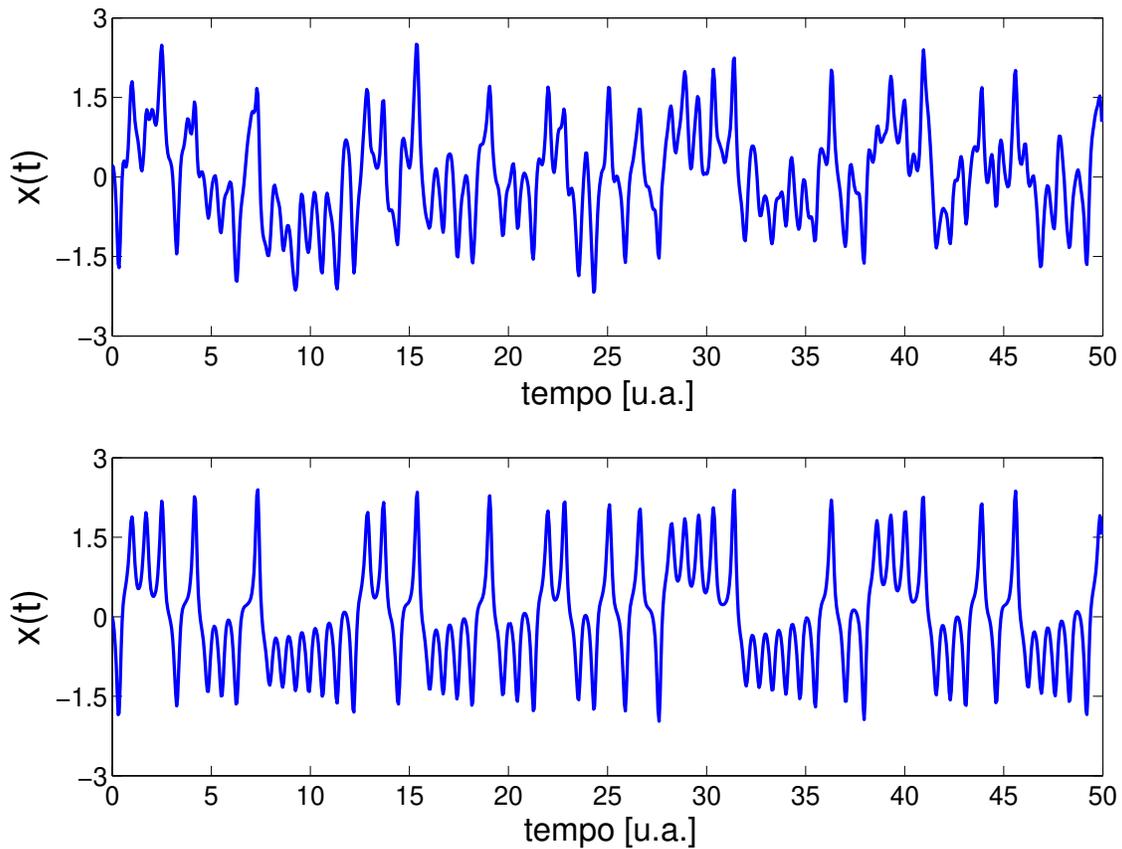


Figura 5.11: O painel superior mostra uma das observações corrompidas com o ruído colorido, enquanto o painel inferior mostra a fonte caótica recuperada utilizando o estimador fit_e . A fonte caótica original neste caso é a mesma mostrada no painel superior da Fig. 5.7.

A tabela 5.1 mostra a qualidade das estimativas obtidas para a fonte caótica em termos do erro quadrático médio (EQM), usando as medidas de recorrência para os diferentes processos estocásticos estabelecidos nos cenários de simulação anteriores. Nota-se que todas as funções baseadas em recorrência obtiveram desempenho de recuperação da fonte caótica superior ao obtido através da medida de curtose. Dentre as funções custo baseadas em recorrência, a entropia das diagonais fit_e foi a que encontrou de forma mais precisa a solução que recupera a fonte caótica em todos os cenários de simulação.

Tabela 5.1: Média \pm desvio-padrão (σ) do EQM entre a fonte caótica recuperada e a fonte original para as diferentes funções custo em 100 realizações. EQM_d , EQM_l , EQM_e e EQM_k , referem-se, respectivamente, ao erro quadrático médio para as soluções obtidas usando as funções custo dadas pelas Eqs. (5.7), (5.8), (5.9) e (5.5). GB, UB, GC referem-se, respectivamente, aos ruídos gaussiano branco, uniforme branco e gaussiano colorido. Os parâmetros utilizados para a construção do mapa de retorno foram: $N_s = 1000$, $\tau = 3$, $d_e = 3$, $\varepsilon = 0.1$, $a = 40$, $b = 60$, $l_{\min} = 3$.

	GB	UB	GC
$EQM_d \pm \sigma$	$(3.8 \pm 5.2) \times 10^{-5}$	$(3.8 \pm 5.7) \times 10^{-5}$	$(2.8 \pm 2.3) \times 10^{-4}$
$EQM_l \pm \sigma$	$(1.1 \pm 1.9) \times 10^{-4}$	$(1.1 \pm 1.7) \times 10^{-4}$	$(4 \pm 5.6) \times 10^{-4}$
$EQM_e \pm \sigma$	$(2.7 \pm 3.5) \times 10^{-5}$	$(2.3 \pm \pm 2.3) \times 10^{-5}$	$(0.7 \pm 1.3) \times 10^{-4}$
$EQM_k \pm \sigma$	$(3.9 \pm 5.7) \times 10^{-3}$	$(0.5 \pm 3.5) \times 10^{-1}$	$(1.8 \pm 2.2) \times 10^{-2}$

5.3.2 Influência dos parâmetros do mapa de retorno na qualidade de extração

A construção do mapa de retorno depende de vários parâmetros que devem ser estabelecidos *a priori*, tais como a dimensão de imersão (d_e), o atraso entre as amostras (τ) e a resolução do mapa (ε). Embora (Marwan et al., 2007) tenha mostrado que algumas medidas extraídas do mapa de retorno - e.g. entropia de correlação e dimensão de correlação - apresentam boa robustez em relação à escolha dos parâmetros de reconstrução do atrator, uma análise desta robustez também deve ser aqui empreendida com o intuito de avaliar a generalidade da proposta de extração de sinais caóticos baseada nas características de recorrência.

Neste sentido, a figura 5.12 mostra que todas as funções custo baseadas em recorrência usadas praticamente não foram afetadas por um aumento na dimensão de imersão quando o cenário de perfeita inversão de uma mistura da série caótica de Lorenz com uma fonte gaussiana branca (2 dB abaixo da fonte caótica em potência) é considerado. O mesmo é válido quando o atraso entre as amostras é aumentado (figura 5.13). Neste último caso, o perfil da função custo (fit_e) associada à entropia das diagonais revelou algumas oscilações, mas nada que de fato afetasse a posição do seu máximo e comprometesse a qualidade da solução encontrada.

Embora a alteração de d_e e τ não afete as funções custo de forma significativa, o mesmo não pode ser dito da resolução do mapa. Observa-se na figura 5.14 que, para um valor relativamente pequeno de ε (aproximadamente 5% amplitude do sinal observado), obtêm-se funções custo por RQA que são contundentes na indicação da posição da solução ótima no sentido de inversão do processo de mistura. Entretanto, quando valores inadvertidamente altos para ε são adotados (i.e. superiores a 15% da amplitude do sinal observado), os estimadores não são mais eficientes no sentido de apontar a posição da solução ideal, sendo que esta imprecisão compromete o desempenho do método de extração quando ε é superior à 50% da amplitude do sinal observado.

Embora a construção do mapa de retorno pareça envolver uma escolha de parâmetros de forma

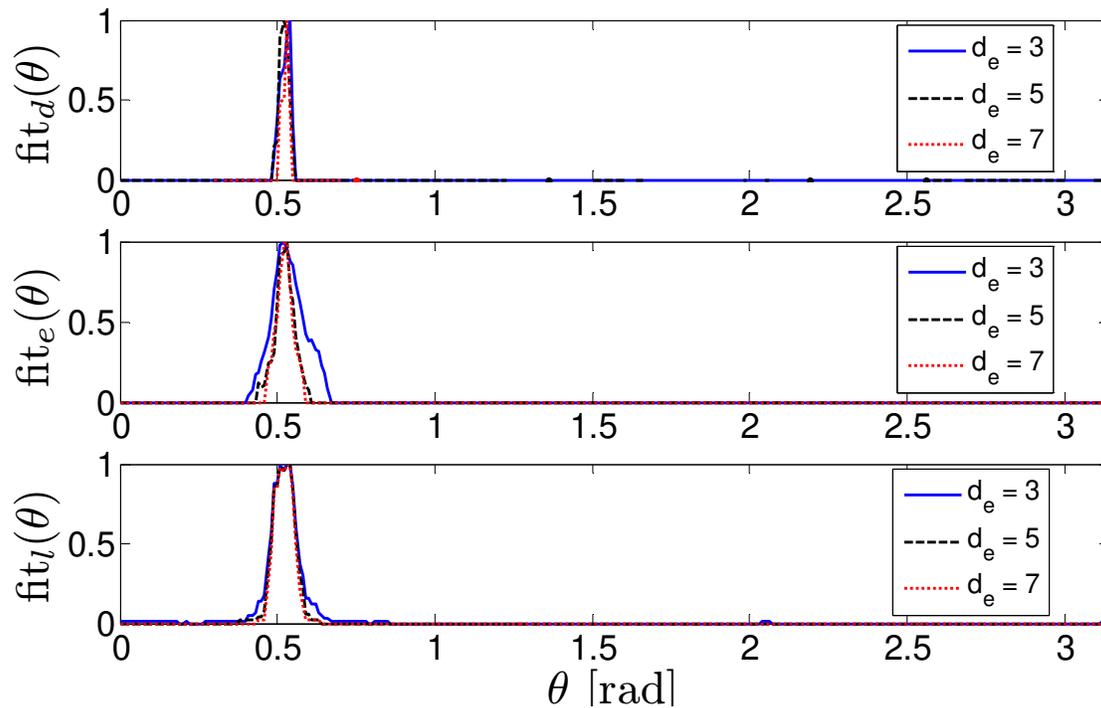


Figura 5.12: O painel superior, central e inferior mostram, respectivamente, as funções custo normalizadas associadas ao conteúdo determinístico (fit_d), ao comprimento da maior diagonal (fit_l), e a entropia das linhas diagonais (fit_e) obtidas por RQA considerando diferentes dimensões de imersão para a reconstrução do atrator ($N_s = 1000$, $\tau = 3$, $\varepsilon = 0.1$, $a = 40$, $b = 60$, $l_{\min} = 2$).

um tanto arbitrária, deve-se enfatizar que existem métodos, ou pelo menos heurísticas, razoáveis para a determinação dos mesmos. Por exemplo, a dimensão de imersão (d_e) pode ser escolhida por meio da técnica do vizinho mais próximo, conforme exposto por Abarbanel (Abarbanel, 1996), enquanto o atraso entre as amostras (τ) para a construção dos demais eixos do espaço de estados pode ser determinado pelo primeiro mínimo da função de informação mútua entre o sinal original e suas versões atrasadas no tempo (Fraser & Swinney, 1986). Por fim, Marwan et al. (Marwan et al., 2007) heurísticamente estabelecem o valor de ε como sendo aproximadamente 10% da amplitude do sinal, uma regra que se sustenta para um grande número de dinâmicas. Embora estes procedimentos de escolha não garantam otimalidade na reconstrução do atrator ou mesmo na construção do mapa de retorno, eles são adequados para gerar uma primeira aproximação sujeita a posteriores refinamentos mediante experimentação numérica.

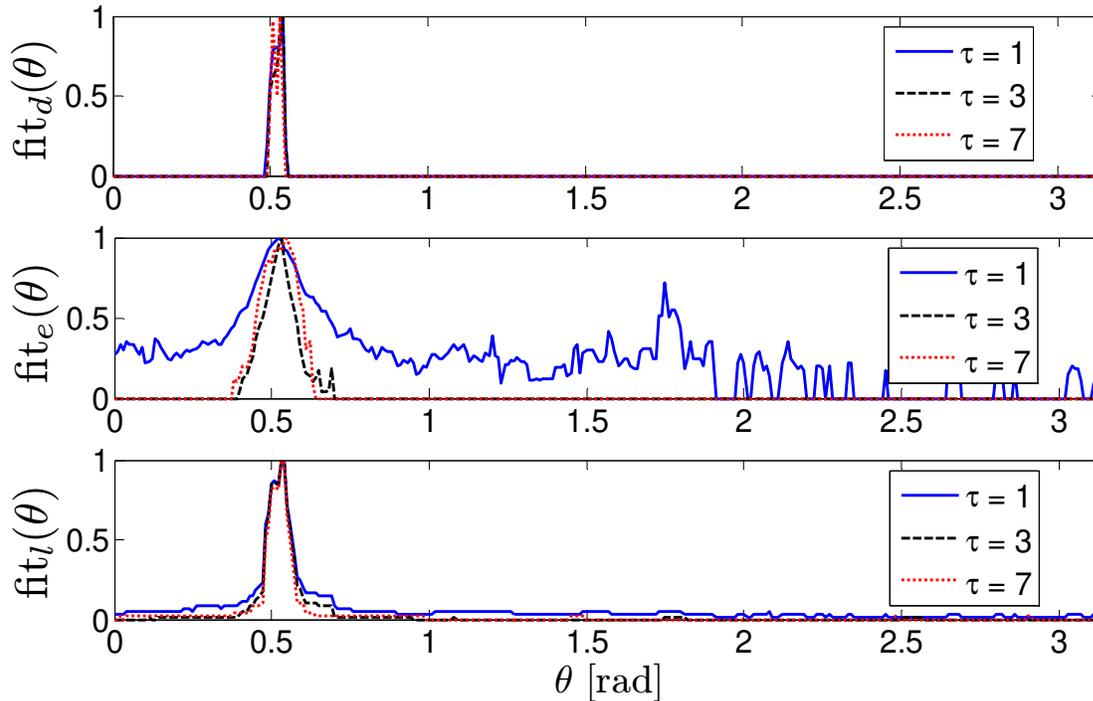


Figura 5.13: O painel superior, central e inferior mostram, respectivamente, as funções custo normalizadas associadas ao conteúdo determinístico (fit_d), ao comprimento da maior diagonal (fit_l), e a entropia das linhas diagonais (fit_e) obtidas por RQA considerando diferentes atrasos entre as amostras para a reconstrução do atrator ($N_s = 1000$, $d_e = 3$, $\varepsilon = 0.1$, $a = 40$, $b = 60$, $l_{\min} = 2$).

5.3.3 Extração cega de fontes caóticas: modelos de misturas sub-determinados

A análise da técnica proposta para modelos de misturas perfeitamente inversíveis revelou sua viabilidade e algumas características desejáveis, tal como a verificada robustez a ruído, assim como um melhor desempenho frente a abordagens clássicas de ICA no que se refere à determinação da solução ótima que inverte o processo de mistura. Entretanto, talvez seja para modelos de mistura sub-determinados (ou seja, com um número maior de fontes do que de sensores) que o método proposto possua uma melhor aplicabilidade. Dessa forma, assume-se agora que a fonte caótica é misturada com outros dois sinais estocásticos, sendo, no entanto, apenas duas observações conhecidas. Deve-se ressaltar, neste caso, que a extração perfeita da fonte caótica é impossível.

Neste cenário de teste, a matriz de mistura foi intencionalmente escolhida de forma a fornecer um erro mínimo de recuperação para a fonte caótica relativamente baixo. Este erro mínimo refere-se à melhor performance que uma estrutura linear trabalhando em um cenário supervisionado poderia alcançar⁴. A escolha de coeficientes da matriz de mistura que produzem erros mínimos de recuperação

⁴Empregou-se aqui o critério de filtragem supervisionada ótima canônico, ou seja, o critério de erro quadrático médio

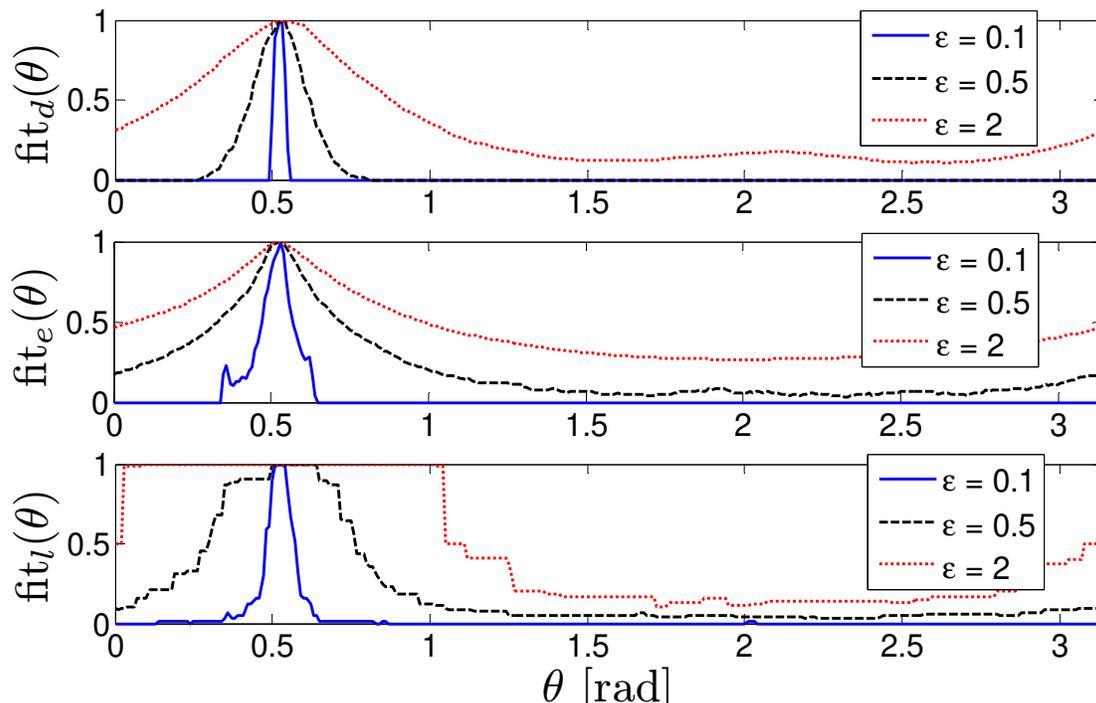


Figura 5.14: O painel superior, central e inferior mostram, respectivamente, as funções custo normalizadas associadas ao conteúdo determinístico (fit_d), ao comprimento da maior diagonal (fit_l), e a entropia das linhas diagonais (fit_e) obtidas por RQA considerando diferentes resoluções do mapa ($N_s = 1000$, $d_e = 3$, $\tau = 3$, $a = 40$, $b = 60$, $l_{\min} = 2$).

relativamente baixos é conveniente na medida em que escolhas arbitrárias destes coeficientes podem levar a casos em que a informação a ser extraída é severamente comprometida, tornando praticamente impossível a comparação justa entre os diferentes métodos que buscam a extração.

Neste caso, a matriz de mistura foi assumida como sendo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.7 & 0.4 \\ 0.7 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Após o processo de mistura, aplica-se um filtro branqueador (Romano et al., 2010) ao vetor de misturas de forma a obter apenas dois vetores de mistura ortogonais. Essa mistura transformada é então multiplicada pelo vetor separador \mathbf{w} dado pela Eq. (5.3).

O desempenho do método de extração proposto diante deste novo cenário de extração pode ser sumarizado na tabela 5.2, na qual mostram-se a média e desvio-padrão para o EQM entre a fonte caótica recuperada e a original em 100 realizações usando o paradigma de Wiener, as funções custo

ou critério de Wiener. Esse critério será exposto de modo mais sistemático no capítulo 6, e o leitor interessado em mais detalhes é remetido à clássica literatura (Haykin, 2002).

Tabela 5.2: Média \pm desvio-padrão (σ) do EQM obtido no cenário de modelos de misturas sub-determinado fornecido pelas diferentes funções custo em 100 realizações. EQM_d , EQM_l , EQM_e , EQM_k e EQM_w referem-se, respectivamente, ao erro quadrático médio entre a série caótica recuperada e a original usando as Eqs. (5.7), (5.8), (5.9), (5.5) e a abordagem de Wiener que define o erro mínimo. GB, UB, GC referem-se, respectivamente, às fontes estocásticas gaussianas branca, uniforme branca e gaussiana colorida. Parâmetros do mapa de retorno: $N_s = 1000$, $\tau = 3$, $d_e = 3$, $\varepsilon = 0.5$, $a = 5$, $b = 20$, $l_{\min} = 2$.

	GB	UB	GC
$EQM_d \pm \sigma$	$(3.1 \pm 0.2) \times 10^{-1}$	$(3.5 \pm 0.3) \times 10^{-1}$	$(0.2 \pm 0.06) \times 10^{-1}$
$EQM_l \pm \sigma$	$(3.6 \pm 1.1) \times 10^{-1}$	$(3.6 \pm 1.2) \times 10^{-1}$	$(9.0 \pm 6.0) \times 10^{-1}$
$EQM_e \pm \sigma$	$(3.6 \pm 1.1) \times 10^{-1}$	$(3.2 \pm 0.3) \times 10^{-1}$	$(0.2 \pm 0.06) \times 10^{-1}$
$EQM_k \pm \sigma$	$(16.4 \pm 2.8) \times 10^{-1}$	$(6.6 \pm 5.2) \times 10^{-1}$	$(3.8 \pm 5.9) \times 10^{-1}$
$MSE_w \pm \sigma$	$(2.6 \pm 0.1) \times 10^{-1}$	$(2.6 \pm 0.1) \times 10^{-1}$	$(0.1 \pm 0.01) \times 10^{-1}$

baseadas em recorrência e a função custo baseada na curtose. Os resultados relativos à informação mútua foram aqui omitidos devido ao desempenho pouco expressivo deste critério para o número de amostras considerado. As fontes estocásticas utilizadas assumem as mesmas distribuições usadas no caso de modelos de misturas inversíveis.

Observa-se que, em geral, as funções associadas ao conteúdo determinístico e à entropia das diagonais apresentaram melhor desempenho de extração. Destaca-se ainda que todas as funções custo baseadas em recorrência aproximaram-se bastante do erro mínimo de Wiener quando comparadas, por exemplo, com os resultados obtidos por meio da função custo baseada em não-gaussianidade, o que, considerando a informação disponível *a priori* no cenário cego, define um resultado representativo de bom desempenho. Em relação às diferenças de desempenho entre os estimadores do sistema separador baseados em recorrência, deve-se enfatizar que os parâmetros do mapa de retorno (especialmente sua resolução ε) podem afetar as diversas funções custo de diferentes formas, o que torna inadequado falar em uma delas como sendo absolutamente melhor. O mais prudente neste caso seria explorar as características de cada uma delas, uma vez que estas podem ter diferentes desempenhos dependendo dos modelos de misturas e das fontes envolvidas em cada cenário de simulação. Pode-se, a partir daí, criar também combinações ou mesmo propor diferentes funções custo para situações específicas. Por exemplo, no presente caso, não seria absurdo pensar em um novo estimador que fosse a soma das três medidas de recorrência aqui utilizadas.

A figura 5.15 ilustra o potencial de extração das abordagens aqui adotadas em termos da extração da fonte caótica neste cenário de simulação. O painel superior da figura mostra uma das misturas observadas, enquanto o painel central e inferior mostram, respectivamente, a série caótica de Lorenz recuperada usando a função custo baseada em determinismo (Eq. (5.7)) e na curtose (Eq. (5.5)). É possível observar que a inversão do processo de mistura neste caso não é perfeita, mas que a estrutura

determinística quase imperceptível na observação é significativamente aumentada após a extração. Mais uma vez, o desempenho das funções baseadas em recorrência foi superior ao observado para a abordagem baseada na curtose.

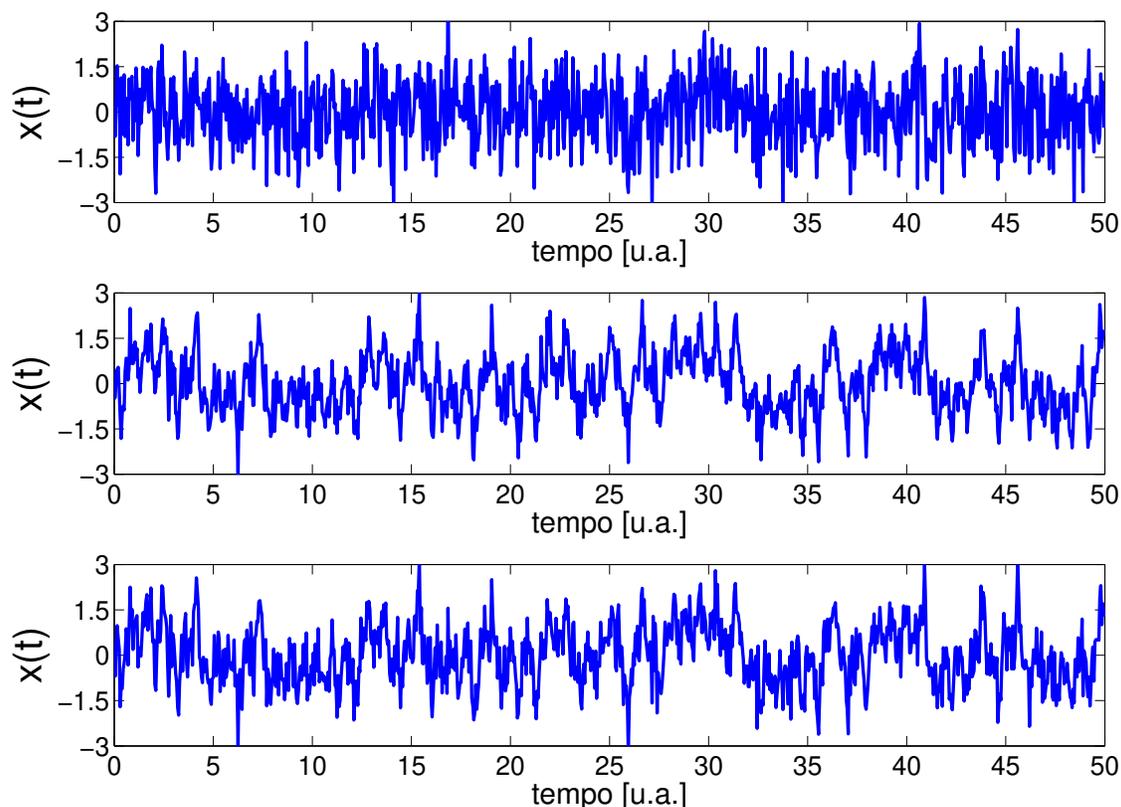


Figura 5.15: O painel superior mostra uma das observações no caso do modelo de misturas não inversível estudado, os painéis central e inferior mostram, respectivamente, o sinal caótico recuperado usando função custo baseada em recorrência (entropia - Eq. (5.7)) e função custo baseada na curtose (Eq. (5.5)).

5.4 Discussão e Conclusão

Um novo método para extração cega de fontes baseado nas características de recorrência foi proposto e testado neste capítulo. Os resultados mostraram que o método foi capaz de fornecer soluções de qualidade superior a de métodos clássicos baseados em análise de componentes independentes tanto para modelos de misturas inversíveis como sub-determinados. Neste último caso, o método foi

capaz de aumentar de forma significativa as características determinísticas do sinal mesmo diante de um número relativamente pequeno de amostras.

Esse desempenho do método proposto diante de um número relativamente pequeno de amostras é um aspecto extremamente relevante, uma vez que métodos clássicos que caracterizam detectores de determinismo baseados em medidas de informação tal como a entropia de Kolmogorov-Sinai ou mesmo a entropia de correlação exigem um elevado número de amostras para caracterizar plenamente o fluxo de informação associado à dinâmica (Schittenkopf & Deco, 1997), exigência esta que parece se sustentar também para outros estimadores teóricos de informação, o que justificaria aqui, por exemplo, o baixo desempenho da estratégia de separação baseada na informação mútua. Assim, a construção de detectores de determinismo baseados apenas na estrutura de recorrência, e não na caracterização do fluxo de informação, torna-se extremamente vantajosa.

A possibilidade de uso da RQA como um tipo de detector de determinismo já havia sido anteriormente apontada por Zbilut et al. (Zbilut et al., 2000), expondo o contraste das suas funções clássicas na caracterização de sinais caóticos e estocásticos. Em particular, em um outro trabalho, Zbilut et al. (Zbilut et al., 1998) usaram a chamada quantificação de recorrência cruzada (um tipo particular de RQA) para extrair sinais determinísticos em ambientes ruidosos empregando um sinal de prova capaz de realizar a extração quando este tem sua estrutura determinística casada com o sinal imerso em ruído (levando à máxima recorrência cruzada). Claramente, este é um cenário de extração muito diferente dos aqui abordados, e talvez restrito a condições bem particulares em que uma quantidade significativa de informação *a priori* esteja disponível.

Embora o presente capítulo tenha abordado apenas os estimadores clássicos de recorrência, existem algumas maneiras alternativas de defini-los, tal como feito por Rohde et al. (Rohde et al., 2008), relacionando a estatística obtida por um mapa de retorno não-limitado (um tipo específico de mapa de retorno que não impõe uma resolução ε específica, mas lida com a distância entre os pontos na matriz de recorrência) com as estatísticas de primeira e segunda ordem da série temporal. Rohde et al. afirmam que esta abordagem é mais robusta (em termos de sensibilidade aos parâmetros do mapa de retorno) e mais eficiente (em termos de detecção de um sinal determinístico) do que a obtida por meio das medidas de RQA clássicas (fit_d , fit_l e fit_e), embora exija o conhecimento de um elevado número de observações para uma caracterização estatística confiável. A estratégia aqui desenvolvida leva em consideração o caso prático em que apenas algumas misturas são conhecidas (e.g. duas e não mil, tal como feito em (Rohde et al., 2008)) e mostra que as medidas clássicas são detectores simples e suficientemente robustos para realizar uma extração de boa qualidade.

Além do problema de extração, o problema de separação cega de fontes envolvendo a mistura de vários sinais caóticos tem recebido maior atenção recentemente com a possibilidade de novos paradigmas de sistemas de comunicação baseados em sinais caóticos, uma vez que tem sido atribuída

a esta classe de sinais a capacidade de alcançar eficiência (em termos de baixa probabilidade de erros), baixo consumo de potência e maior segurança na transmissão de informação (Larson et al., 2006; Tam et al., 2006; Eisencraft & Kato, 2009; Eisencraft et al., 2011). Neste contexto, alguns trabalhos têm se dedicado a separar sinais envolvendo ambientes de comunicação multiusuário caóticos, nos quais é assumido que a dinâmica é conhecida (Andreyev et al., 2002; Arena et al., 2006; Hu & Liu, 2008). Uma tentativa de solução deste problema por meio de técnicas de ICA também já foi apresentada por Hong-Bin et al. (Hong-Bin et al., 2008), com desempenho satisfatório para SNRs relativamente baixas (em torno de 5 dB), obedecendo às premissas aqui apontadas para as medidas de ICA. Embora a separação a partir da mistura de diferentes sinais caóticos não tenha sido aqui abordada, esta parece ser uma perspectiva natural de continuidade do trabalho, o que pode inclusive abranger a possibilidade de combinação de técnicas de ICA e RQA.

A extração cega de fontes caóticas a partir de misturas com sinais estocásticos, aqui abordada, tem uma relação muito estreita com o problema de filtragem, o qual é extremamente relevante para o estudo de diversos processos não-lineares conduzidos a partir da observação experimental de suas respectivas séries temporais (Abarbanel, 1996; Kostelich & Schreiber, 1993; Grassberger et al., 1993). Neste caso, as premissas estabelecidas para os problemas de separação e extração são melhor atendidas no contexto de situações multiregistro, tais como ocorrem, por exemplo, no âmbito de eletroencefalograma (EEG) ou eletromiograma (EMG). Estes casos já vêm recebendo extensiva contribuição de técnicas baseadas em ICA e análise de componentes principais (Vigario et al., 2000). Em particular, conforme comentado nos capítulos anteriores, processos caóticos determinísticos podem desempenhar um papel central na formação do padrão espaço-temporal da atividade elétrica de bio-potenciais (Korn & Faure, 2003; Skarda & Freeman, 1987), o que torna a presente proposta ou mesmo puramente a análise por quantificação por recorrência uma abordagem promissora e ainda pouco explorada na caracterização, filtragem e análise destes sinais.

No entanto, embora as técnicas de separação de fontes possam fornecer bons resultados no cenário sub-determinado, quando o problema de filtragem clássico é colocado fora do contexto multiregistro e apenas uma observação ruidosa do sinal caótico está disponível, talvez seja interessante lançar mão de outras técnicas de processamento. Mais especificamente, podem-se empregar outras premissas ou mesmo explorar o conjunto de informações *a priori* para a definição da abordagem a ser adotada, o que caracteriza, de um modo geral, o *modus operandi* dos tratamentos dados a dinâmicas não-lineares. Uma situação particular deste tipo será tratada no próximo capítulo.

Finalmente, é importante enfatizar que, mais do que simplesmente um técnica, o presente capítulo objetiva apresentar uma forma diferente de empregar a informação disponível *a priori* sobre a natureza determinística da fonte que se deseja recuperar, o que pode ser de relevância teórica e prática para diferentes classes de problemas ainda em aberto na área de sistemas dinâmicos. Neste sentido,

o potencial desta proposta de “análise de componentes determinísticos” merece uma análise cuidadosa, assim como feito pela comunidade de processamento de sinais para as análises de componentes principais, independentes e esparsos (Romano et al., 2010).

Capítulo 6

Sombreamento e filtragem de sinais caóticos

6.1 Introdução

Embora o problema de filtragem de sinais caóticos já tenha sido introduzido no capítulo anterior no âmbito da separação de sinais quando várias misturas estão disponíveis, é fora do contexto multiregistro que esse problema vem sendo usualmente tratado pela comunidade de processamento de sinais e análise de séries temporais (Abarbanel, 1996). De fato, existe um grande número de experimentos em que apenas uma observação de um fenômeno descrito por um modelo não-linear está disponível, e, comumente, técnicas de processamento que visam privilegiar as características determinísticas do sinal observado são extremamente úteis ou mesmo necessárias para que um estudo adequado do processo físico seja realizado.

Entretanto, mesmo neste cenário em que apenas uma observação ruidosa do fenômeno de interesse está disponível, o problema de filtragem pode assumir diferentes formas dependendo das informações conhecidas *a priori*. Por exemplo, os diferentes graus de conhecimento das equações de estado que descrevem o fenômeno, ou mesmo o pleno desconhecimento dessas, irão definir de forma crucial a estratégia de filtragem a ser adotada, assim como a performance e os limites de desempenho do método empregado (Abarbanel, 1996).

Mesmo algumas técnicas de filtragem que não assumem qualquer conhecimento das equações de estado baseiam-se no fato de que dinâmicas não-lineares podem ser localmente linearizadas, e, portanto, residem na variedade mais suave do espaço de estados reconstruído (Cawley & Hsu, 1992; Grassberger et al., 1993; Abarbanel, 1996), o que fundamenta o princípio de filtragem a ser empregado por estes métodos. Como limitação, este tipo de abordagem tem seu desempenho condicionado ao sucesso obtido na estimativa dos diversos parâmetros (e.g. parâmetros de reconstrução do atrator) que levam à correta projeção geométrica da trajetória ruidosa na variedade localmente linear associada à componente determinística.

Quando a estrutura e os parâmetros da dinâmica que geram a série temporal observada são conhecidos (o que pode ser alcançado apenas em situações muito específicas, em que uma descrição muito boa do sistema físico está disponível), mas não a condição inicial, o problema de filtragem torna-se análogo ao problema do sombreamento (Hammel, 1990; Farmer & Sidorowich, 1991), isto é, ao problema de encontrar a órbita puramente determinística que sombreia a observação ruidosa. No caso de sinais caóticos, é interessante notar que, apesar da completa descrição do fenômeno pelas equações de estado, a incerteza em relação à condição inicial dá origem a uma série temporal que diverge da observação em um intervalo de tempo finito, e, portanto, leva a um intervalo de sombreamento restrito e dependente da precisão com que o estado inicial pode ser estimado.

Tipicamente, a solução para o sombreamento é dada pela trajetória puramente determinística que minimiza a distância euclidiana em relação à observação (Farmer & Sidorowich, 1991), sendo que a capacidade de sombreamento - i.e. o intervalo em que a trajetória determinística encontrada sombreia de forma adequada a observação - é fortemente dependente do nível de ruído presente no estado inicial. A solução clássica deste problema de otimização também exige a criação de mapas localmente lineares, o que requer estimativas da matriz jacobiana associada ao sistema dinâmico, e traz à tona os mesmos inconvenientes numéricos presentes na estimativa dos expoentes de Lyapunov, ou seja, direções expansivas instáveis devido à presença de autovalores positivos para estas matrizes. Essas instabilidades numéricas são uma consequência natural do fenômeno caótico e são usualmente contornadas por meio da decomposição da matriz jacobiana nas suas variedades estáveis e instáveis, sendo que o processo de integração é sempre realizado em tempo reverso para a variedade instável quando necessário. Mesmo diante dessas estratégias, não existem garantias de estabilidade deste método de filtragem (Farmer & Sidorowich, 1991), principalmente para pontos patológicos da dinâmica, nos quais as variedades estáveis e instáveis tornam-se praticamente paralelas (Abarbanel, 1996).

Este cenário torna-se ainda mais complexo quando os parâmetros da dinâmica são desconhecidos. Nessa situação, os trabalhos na literatura tipicamente tentam aproximar a trajetória livre de ruído por meio do ajuste de um mapa localmente linear (ou mesmo polinomial) para o atrator reconstruído segundo o teorema de Takens (Kostelich & Yorke, 1990; Grassberger et al., 1993; Kostelich & Schreiber, 1993; Cawley & Hsu, 1992), o que também exige estimativas da matriz jacobiana da dinâmica e é fortemente dependente da qualidade da reconstrução realizada.

Este capítulo tem como contribuição central apresentar um método de filtragem de séries temporais caóticas quando a estrutura da dinâmica é conhecida, mas não suas condições iniciais e seus parâmetros. Mostra-se aqui que é possível, dentro de certos limites, usar métodos de otimização bio-inspirada para encontrar as condições iniciais e os parâmetros livres da dinâmica que levam à trajetória puramente determinística que minimiza o desvio em relação à observação ruidosa, evitando assim linearizações locais, e, portanto, os inconvenientes numéricos presentes nos algoritmos clássicos

de filtragem (Abarbanel, 1996). Para realizar esta tarefa, o problema de filtragem é tratado como um sombreamento por partes, em que resolve-se implicitamente um problema típico de otimização para obter a trajetória determinística livre de ruído. Em particular, o processo de otimização empregado usa o sistema imunológico como inspiração para a construção de uma heurística de busca (Castro & Timmis, 2002). Esta estratégia possui duas características desejáveis: um significativo poder de busca global e o fato de não exigir manipulação da função custo associada ao problema de otimização, algo que simplifica significativamente a tarefa de encontrar a trajetória determinística desejada.

Mesmo diante da adoção de uma estratégia alternativa de otimização que evita as instabilidades numéricas associadas à matriz jacobiana, é importante observar que a natureza caótica da dinâmica, em conjunto com a precisão finita para as estimativas das condições iniciais e dos parâmetros do sistema (o que invariavelmente ocorre para qualquer método de estimação), implicam em uma capacidade de sombreamento limitada, o que obriga a divisão da série temporal em partes ou, no jargão da análise de sinais, em janelas. Esta estratégia de janelamento do vetor observação exige a proposição de uma heurística para estabelecer o número adequado de amostras que deve ser empregado por janela, o qual deve ser suficientemente grande para capturar a estrutura determinística da série temporal e pequeno o suficiente para preservar a capacidade de sombreamento.

Com o intuito de melhor avaliar o desempenho do método proposto, métodos clássicos de filtragem que não se baseiam na reconstrução do atrator foram também aqui implementados, tais como o filtro de Wiener e o filtro de Kalman estendido. O primeiro oferece a performance padrão que uma estrutura linear pode alcançar no cenário supervisionado, enquanto o segundo é uma metodologia emblemática da teoria de estimação não-linear (Wan & Merwe, 2000; Haykin, 2002).

O cenário de filtragem aqui abordado pode ter aplicação em situações em que experimentos são primeiramente delineados de forma a obedecer uma descrição matemática específica, e, portanto, em que está disponível a estrutura das equações de estado, mas não seus parâmetros e condições iniciais, tal como se observa nas simulações analógicas de sistemas dinâmicos de um modo geral (Jackson, 1960). Outra possível aplicação insere-se no contexto das recentes propostas de sistemas de comunicação baseados em sinais caóticos (Cuomo & Oppenheim, 1993; C. Williams, 2001; Baptista et al., 2003; Argyris et al., 2005; Lau & Tse, 2003; Tam et al., 2006; Eisencraft & Batista, 2011; Eisencraft et al., 2011), nos quais a transmissão de uma mensagem usualmente se dá mediante o sincronismo entre dinâmicas caóticas que definem, respectivamente, um transmissor e receptor de sinais. Obviamente, a robustez a ruído deste mecanismo de sincronismo define a própria capacidade do canal de transmitir informação, e estratégias de filtragem ocupam um papel fundamental na viabilização prática de tais sistemas.

O presente capítulo está estruturado da seguinte forma. A seção 6.2 introduz o problema de estimação de estados no contexto de filtragem aqui abordado, e apresenta os métodos clássicos de filtragem

empregados para comparação com a proposta. A seção 6.3 introduz a proposta de sombreamento e filtragem baseada em computação evolutiva, bem como o método de otimização bio-inspirado utilizado. A seção 6.4 mostra o desempenho da proposta frente aos métodos clássicos de filtragem quando um número adequado de amostras por janela é utilizado tanto para o mapa de Hénon como para o mapa logístico. Por fim, a seção 6.5 traz uma discussão sobre os resultados obtidos pela proposta, e algumas conclusões e perspectivas à luz do atual estágio dos trabalhos desenvolvidos na literatura.

6.2 O problema de estimação de estados

6.2.1 Definindo o problema de estimação de estados

Considera-se aqui o problema de extrair uma série temporal caótica a partir da observação de uma mistura (do tipo aditiva) desta com um ruído gaussiano, assumindo que a dinâmica $F(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ é conhecida, mas não seu vetor de parâmetros \mathbf{p} nem a condição inicial \mathbf{x}_0 . Neste caso, a informação disponível consiste em uma observação ruidosa do sinal caótico ($z(n)$) e na estrutura da dinâmica. Por exemplo, no caso do mapa de Hénon tal como apresentado anteriormente (capítulo 3 - apêndice), e reproduzido aqui por simplicidade, assume-se que o sinal caótico é gerado segundo:

$$\begin{aligned}x(n+1) &= y(n) + 1 - \alpha x^2(n) \\y(n+1) &= \beta x(n)\end{aligned}\tag{6.1}$$

e a condição inicial $\mathbf{x}_0 = [x(1) \ y(1)]^T$ e o vetor de parâmetros $\mathbf{p} = [\alpha \ \beta]^T$ são desconhecidos e o sinal observado é dado pela Eq. (6.2):

$$z(n) = x(n) + \zeta(n)\tag{6.2}$$

sendo $\zeta(n)$ um processo gaussiano e branco com média zero e $x(n)$ a série produzida pelo mapa de Hénon. Nas simulações realizadas, a variância das amostras de $\zeta(n)$ é usada para controlar a relação sinal-ruído. A presente proposta consiste, portanto, em estimar o sinal caótico livre de ruído $x(n)$ tendo exclusivamente acesso à estrutura da dinâmica fornecida pelas equações (6.1) e à observação ruidosa $z(n)$. Este mesmo procedimento de filtragem foi aplicado ao mapa logístico (tal como definido no capítulo 3 - apêndice) com o intuito de ilustrar a generalidade do método.

Embora apenas esses dois modelos caóticos clássicos tenham sido aqui abordados, tanto a metodologia proposta como os métodos de filtragem usados para comparação têm caráter geral e podem ser testados e aplicados a outros sistemas não-lineares de tempo discreto ou contínuo.

Antes de introduzir a proposta em mais detalhes, apresentam-se a seguir brevemente os métodos

de filtragem usados como referência para comparação na avaliação de desempenho.

6.2.2 Método comparativo 1: filtro de Kalman estendido

O filtro de Kalman (KF) é um poderoso e bem-conhecido método de estimação que fornece estimativas de estado recursivas de mínimo erro quadrático médio para um sistema linear imerso em ruído gaussiano (Haykin, 2002). Entretanto, muitos sistemas dinâmicos de interesse não são descritos por equações lineares, e, nestes casos, o filtro de Kalman não pode ser diretamente aplicado. Conseqüentemente, para obter uma solução que permita estender a abordagem de filtragem de Kalman para modelos não-lineares, pode-se usar o filtro de Kalman estendido (EKF). A idéia por trás do EKF é fornecer estimativas recursivas para as variáveis de estado por meio da aplicação do filtro de Kalman clássico ao sistema linear localmente subjacente à dinâmica não-linear. Isso pode ser feito por meio da linearização das equações de estado em torno dos estados correntes (Haykin, 2002). Em outras palavras, a idéia básica do EKF é linearizar a dinâmica para cada instante de tempo em torno da amostra mais recente. Assim, para um sistema dinâmico genérico, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n+1) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}(n), \mathbf{p}) + \mathbf{v}_1(n) \\ \mathbf{z}(n) &= \mathbf{C}(\mathbf{x}(n)) + \mathbf{v}_2(n) \end{aligned} \quad (6.3)$$

onde $\mathbf{F}(\mathbf{x}(n), \mathbf{p})$ representa a dinâmica não-linear de interesse, $\mathbf{C}(\mathbf{x}(n))$ é a observação e $\mathbf{v}_1(n)$ e $\mathbf{v}_2(n)$ são processos descorrelacionados, de média zero, gaussianos, com matrizes de correlação dadas por $\mathbf{Q}_1(n)$ e $\mathbf{Q}_2(n)$, respectivamente. Assim, o EKF pode ser obtido meio das expressões (Haykin, 2002):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n) &= \mathbf{P}(n, n-1) \mathbf{C}'^T(n) \left[\mathbf{C}'(n) \mathbf{P}(n, n-1) \mathbf{C}'^T(n) + \mathbf{Q}_2(n) \right]^{-1} \\ a(n) &= \mathbf{z}(n) - \mathbf{C}(\hat{\mathbf{x}}(n, n-1)) \\ \hat{\mathbf{x}}(n, n) &= \hat{\mathbf{x}}(n, n-1) + \mathbf{K}(n) a(n) \\ \hat{\mathbf{x}}(n+1, n) &= \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}(n, n), \mathbf{p}) \\ \mathbf{P}(n, n) &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}(n) \mathbf{C}'(n)] \mathbf{P}(n, n-1) \\ \mathbf{P}(n+1, n) &= \mathbf{F}'(n+1) \mathbf{P}(n, n) \mathbf{F}'^T(n+1) + \mathbf{Q}_1(n) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Nestas equações, $\mathbf{z}(n)$ é um vetor com os sinais observados, $\mathbf{F}(\mathbf{x}(n), \mathbf{p})$ e $\mathbf{C}(\mathbf{x}(n))$ são definidos como em (6.3) e $\mathbf{P}(n, k)$ e $\hat{\mathbf{x}}(n, k)$ são os erros de predição da matriz de covariância e a estimativa dos estados no instante n computado a partir dos sinais observados até o instante k , respectivamente. As matrizes jacobianas $\mathbf{F}'(n)$ e $\mathbf{C}'(n)$ são computadas, respectivamente, a partir da linearização de

$\mathbf{F}(\mathbf{x}(n), \mathbf{p})$ e $\mathbf{C}(\mathbf{x}(n))$ em torno da estimativa do estado corrente, e são dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}'(n) &= \left. \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}(n))}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(n,n-1)} \\ \mathbf{F}'(n) &= \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}(n-1), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(n-1,n-1)} \end{aligned} \quad (6.5)$$

É importante observar que o EKF exige conhecimento do vetor de parâmetros \mathbf{p} para a completa caracterização do sistema dinâmico, e a condição inicial pode ser estimada como a amostra inicial da observação ruidosa.

6.2.3 Método comparativo 2: filtro de Wiener

O filtro de Wiener (WF) baseia-se na idéia de obter uma estimativa $\hat{x}(n)$ que seja a mais próxima possível do sinal livre de ruído $x(n)$ no sentido do erro quadrático médio (Haykin, 2002). Matematicamente, os parâmetros do filtro são obtidos como a solução do seguinte problema de otimização:

$$\arg \min_{\mathbf{w}} J_{wiener} = E\{[x(n) - \hat{x}(n)]^2\} \quad (6.6)$$

onde \mathbf{w} denota o vetor de parâmetros do filtro.

Se for considerada uma estrutura de filtragem linear e invariante no tempo com resposta ao impulso finita, sua saída é dada por:

$$\hat{x}(n) = w_0 z(n) + w_1 z(n-1) + \dots + w_{L-1} z(n-L+1) = \mathbf{w}^T \mathbf{z}(n) \quad (6.7)$$

onde \mathbf{w} e $\mathbf{z}(n)$ são dados pela Eq. (6.8):

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= [w_0 \ w_1 \ \dots \ w_{L-1}]^T \\ \mathbf{z}(n) &= [z(n) \ z(n-1) \ \dots \ z(n-L+1)]^T \end{aligned} \quad (6.8)$$

Pode-se demonstrar (Haykin, 2002) que o vetor de parâmetros ótimo do filtro é dado por:

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{k} \quad (6.9)$$

onde $\mathbf{R} = E\{\mathbf{z}(n)\mathbf{z}^T(n)\}$ é a matriz de autocorrelação da entrada e $\mathbf{k} = E\{\mathbf{z}(n)x(n)\}$ é o vetor de correlação cruzada entre o sinal desejado e a entrada. Nota-se que o projeto do filtro de Wiener exige conhecimento do sinal desejado $x(n)$, o que torna este paradigma uma importante referência para indicar a performance que uma estrutura linear pode atingir num cenário supervisionado.

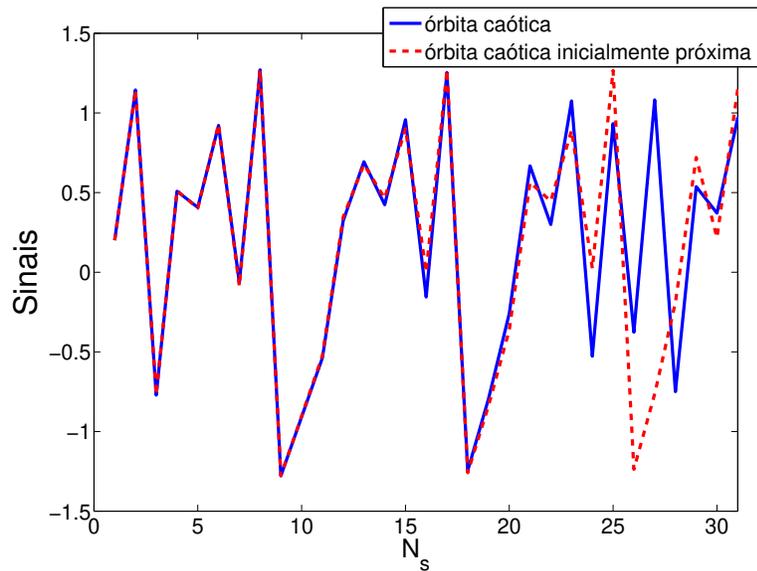
6.3 Filtragem de séries temporais caóticas por meio de uma abordagem evolutiva

6.3.1 A tarefa de filtragem como um problema de otimização

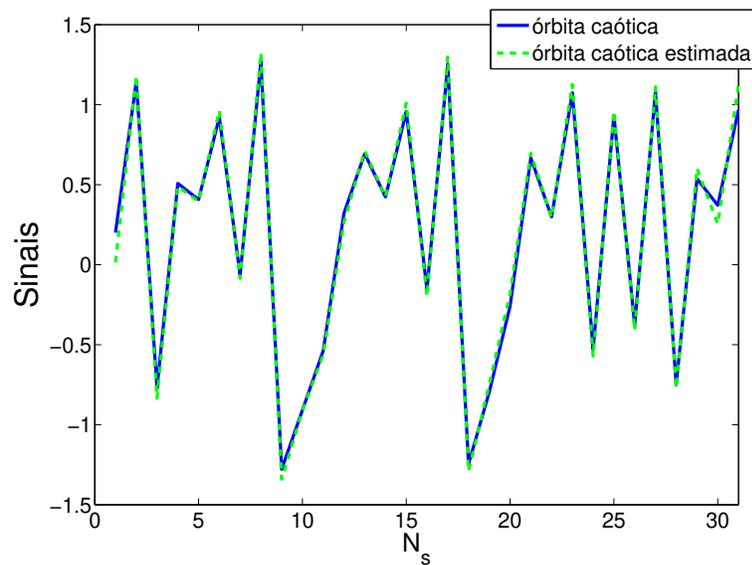
Uma vantagem curiosa e relevante para o método de filtragem aqui proposto reside no fato de o desconhecimento do vetor de parâmetros p da dinâmica permitir que o sistema que busca aproximar a série temporal observada passe a ter mais graus de liberdade, o que torna possível uma determinada incerteza nas condições iniciais ser “acomodada nos parâmetros da dinâmica”. Isso fornece um maior poder de sobreamento ao mapeamento aproximador da observação. Com o intuito de ilustrar de forma apropriada este fenômeno, a figura 6.1(a) mostra a divergência de duas órbitas inicialmente próximas (com condições iniciais perturbadas por uma magnitude de 0.001) para o sistema de Hénon operando em caos. Observa-se nesta situação um intervalo de sobreamento limitado, o que se deve à imprecisão nas condições iniciais e tem suas características de divergências impostas pelo maior expoente de Lyapunov. No entanto, quando o vetor de parâmetros também é tomado como livre, o sistema torna-se mais flexível e o poder de sobreamento aumenta, conforme mostrado na figura 6.1(b). Neste último caso, a condição inicial estimada para a trajetória de sobreamento é muito mais discrepante daquela que leva à trajetória caótica original do que no cenário de simulação da figura 6.1(a). Esta maior imprecisão na condição inicial é compensada por flutuações no vetor de parâmetros, revelando uma interessante capacidade de aproximação do mapeamento.

A maior capacidade de sobreamento, conforme mostrado na figura 6.1(b), tem importantes conseqüências práticas. A primeira relaciona-se com a possibilidade de encontrar trajetórias de sobreamento mais longas sem a necessidade de estimativas extremamente precisas para a condição inicial. A segunda conseqüência prática reside na possibilidade de obtenção de uma pseudo-órbita de sobreamento definida aqui como a união de órbitas que sobreem adequadamente partes (janelas) da observação. Esta estratégia de estimação permite resolver o problema de filtragem, uma vez que fornece uma estimativa da série caótica puramente determinística imersa em ruído. O termo pseudo-órbita foi aqui utilizado devido ao fato de a união de trajetórias fornecidas por sistemas dinâmicos distintos não definir rigorosamente uma órbita na teoria formal de sistemas dinâmicos. No entanto, a introdução de tal idéia permite aqui definir um novo cenário na solução do problema de estimação de estados, sobreamento e filtragem de sinais caóticos.

A fim de resolver o problema de filtragem, é importante estabelecer uma forma robusta de estimação dos parâmetros e condições iniciais que levam a uma trajetória de sobreamento para um intervalo relativamente longo da série temporal observada. Isso motiva a proposta de reformulação



(a) Órbitas caóticas inicialmente próximas



(b) Maior poder de sombreamento

Figura 6.1: O painel 6.1(a) mostra a divergência entre órbitas caóticas inicialmente próximas para o mapa de Hénon com condições iniciais $\mathbf{x}_0 = [0.2 \ 0.2]^T$ e $\mathbf{x}_0 = [0.201 \ 0.2]^T$ considerando $\mathbf{p} = [1.4 \ 0.3]^T$. N_s é o número de amostras. O painel 6.1(b) mostra o aumento no poder de sombreamento quando \mathbf{p} também é tomado como um parâmetro livre. Neste caso, a órbita caótica foi obtida para $\mathbf{x}_0 = [0.2 \ 0.2]^T$ e $\mathbf{p} = [1.4 \ 0.3]^T$, enquanto a órbita de sombreamento foi obtida para $\mathbf{x}_0 = [0.0149 \ 0.1812]^T$ e $\mathbf{p} = [1.3194 \ 0.3460]^T$.

do problema de sombreamento no seguinte problema de otimização:

$$\arg \min_{\mathbf{x}_0, \mathbf{p}} \{f(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})\} \quad (6.10)$$

com:

$$f(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}) = \frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} (g(n) - z(n))^2 \quad (6.11)$$

onde N_s é o número de amostras. Deseja-se, portanto, encontrar os valores de \mathbf{x}_0 e \mathbf{p} que minimizam a função custo $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})$ dada pelo erro quadrático médio entre a solução candidata $g(n)$ e o vetor observado $z(n)$. A solução candidata $g(n)$ é obtida resolvendo (iterando ou integrando) $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ para um dado vetor de parâmetros candidato \mathbf{p} e uma dada condição inicial candidata \mathbf{x}_0 .

Como a função custo apresentada em Eq. (6.11) depende de equações de estado não-lineares, que são fortemente sensíveis ao vetor de parâmetros e a condição inicial, métodos clássicos de otimização (e.g. métodos baseados no gradiente) são usualmente inadequados para lidar com a multimodalidade inerente as funções custo obtidas, o que justifica o emprego de métodos alternativos de otimização. Com o intuito de resolver este problema, adota-se aqui uma heurística de busca inspirada no sistema imunológico que tem significativo poder de busca (Castro & Timmis, 2002; Castro, 2006). É importante observar que outras meta-heurísticas de otimização, como otimização por enxame de partículas ou evolução diferencial, poderiam ser empregadas, mas, a título de comparação, torna-se mais informativo investigar o desempenho do método proposto frente à performance de metodologias clássicas na teoria de estimação, e não propriamente investigar quão bem os diferentes métodos de otimização resolvem o problema formulado.

6.3.2 Otimização inspirada em sistemas imunológicos artificiais

Sistemas imunológicos artificiais (AIS) correspondem a uma estratégia computacional bio-inspirada que usa conceitos derivados do estudo do sistema imune de organismos superiores (Castro & Zuben, 2002; Castro, 2006). Estes sistemas têm sido aplicados em diversos problemas de engenharia, e, no presente trabalho, são usados para otimização no contexto das idéias de seleção clonal e maturação por afinidade que levam a uma boa performance em termos de convergência global em problemas com significativa multimodalidade (Castro & Timmis, 2002).

O princípio de seleção clonal estabelece que, quando um organismo é invadido por um antígeno (e.g. vírus ou bactéria), células específicas do sistema imune reconhecem o elemento exógeno e são selecionadas para proliferar, o que dá um origem a um processo de clonagem com taxas proporcionais à afinidade - definida partir de alguma medida de reconhecimento - entre essas células e o antígenos. No processo de maturação por afinidade, os indivíduos produzidos na geração corrente

sofrem mutações, e a geração mutada pode eventualmente apresentar indivíduos mais bem adaptados ao reconhecimento (Castro & Timmis, 2002; Castro & Zuben, 2002).

Para efetivamente converter essas idéias em um algoritmo de otimização adequado, como o algoritmo CLONALG proposto por Castro e Timmis (Castro & Timmis, 2002) e Castro e Von Zuben (Castro & Zuben, 2002) e aqui utilizado, é necessário fazer algumas considerações. Primeiramente, cada solução candidata ao problema de otimização corresponde a um indivíduo que é descrito por um vetor de valores reais representando, em termos simples, a estrutura de uma célula imune. A qualidade de um indivíduo (chamada aqui de medida de ajuste - do inglês *fitness measure*) é definida pela função custo, fornecendo meios de quantificar a afinidade anticorpo-antígeno (Castro & Timmis, 2002; Castro & Zuben, 2002).

Finalmente, o algoritmo considera ainda a inserção de novos indivíduos aleatoriamente gerados para substituir os indivíduos de pior qualidade com o intuito de realizar uma melhor exploração do espaço de busca. Todos esses passos podem ser sumarizados no pseudo-código 6.1.

É importante notar que o algoritmo CLONALG busca a maximização da medida de ajuste (definida como J_{FIT}) e não a minimização direta da função custo apresentada na Eq. (6.10). Consequentemente, deve-se utilizar a seguinte transformação para a conversão do problema de minimização em maximização:

$$J_{FIT} = \frac{1}{1 + f(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})} \quad (6.14)$$

Nas simulações aqui realizadas, foram considerados ainda uma população de $N = 75$ indivíduos, $N_c = 10$ clones e um valor adaptativo de η começando em 1 e, após a metade do número de gerações (estabelecido aqui num total de 2000), aumentado linearmente até que um valor de 200 seja alcançado. Para que o espaço de busca possa ser adequadamente explorado, os 20 indivíduos com pior ajuste são substituídos por indivíduos aleatoriamente gerados a cada 40 gerações. Para mais detalhes sobre as heurísticas utilizadas para o ajuste de parâmetros deste algoritmo recomenda-se (Castro & Timmis, 2002; Castro, 2006)

6.4 Resultados

6.4.1 Filtragem de séries temporais caóticas usando a metodologia proposta

Uma vez que a estratégia de filtragem proposta foi estabelecida na seção 6.3, é esperado que dois fatores sejam cruciais na definição do desempenho do método: o número de amostras a ser usado em cada janela para qual se deseja encontrar a órbita de sombreamento e a SNR do sinal observado. Com o intuito de capturar a influência destes parâmetros, a figura 6.2 mostra o erro quadrático médio (EQM) obtido para diferentes SNRs e para séries temporais de diferentes tamanhos para o

Algoritmo 6.1 Pseudo-código para o algoritmo CLONALG

[CLONALG]

1. Inicialize aleatoriamente a população (N);
2. Determine a medida de ajuste de cada indivíduo: J_{FIT} ;
3. Enquanto o número máximo de gerações não for atingido, faça
 - (a) Crie N_c clones para cada indivíduo;
 - (b) Mantenha o indivíduo original, e aplique o processo de mutação para cada clone conforme descrito na Eq. (6.12):

$$c' = c + \gamma Y(0, 1) \quad (6.12)$$

com:

$$\gamma = \frac{1}{\eta} \exp(-J_{FIT}) \quad (6.13)$$

onde c' e c representam os clones modificados por mutação e os originais, respectivamente. $Y(0, 1)$ representa uma variável aleatória gaussiana com média zero e variância unitária e η representa um parâmetro de controle que estabelece a mutação aplicada;

- (c) Avalie a medida de ajuste de cada indivíduo da população e mantenha na população apenas a melhor solução de cada grupo dado pelo indivíduo e seus clones mutados;
 - (d) A cada t gerações, elimine os m elementos com pior ajuste e os substitua por indivíduos aleatoriamente gerados;
4. Retorne ao passo 3.

mapa de Hénon. A série original caótica corrompida por ruído foi gerada assumindo $\mathbf{p} = [1.4 \ 0.3]^T$, $\mathbf{x}_0 = [0.2 \ 0.2]^T$ na Eq. (6.1) e iterando o mapa 100 vezes. Nota-se que a abordagem evolutiva para o problema de estimação de estados leva a soluções ruins quando janelas com um número muito grande de amostras são utilizadas (curva 1 - figura 6.2), o que é um reflexo da inevitável capacidade limitada de somreamento obtida para um dinâmica caótica. A performance do método de estimação também é deteriorada com a redução da SNR, dado que a característica determinística da observação tende a ser mascarada com o aumento da presença de ruído. Entretanto, quando um janelamento adequado da observação é empregado, ou seja, quando um número adequado de amostras por janela ($N_{s/w}$) é utilizado, e.g. $N_{s/w} = 20$ - curva 2, figura 6.2 -, o método de filtragem proposto pode apresentar uma melhora expressiva no seu desempenho. A progressiva redução do $N_{s/w}$ pode deteriorar o processo de estimação, o que pode ser observado na curva 3, figura 6.2. Assim, um número significativamente baixo ($N_{s/w} = 10$) de amostras por janela impossibilita capturar a estrutura determinística da série

temporal, incorporando ruído na estimativa dos parâmetros e das condições iniciais. Apenas como ilustração da melhora obtida com o processo de filtragem, tem-se que o EQM obtido para duas trajetórias caóticas inicialmente próximas (conforme mostrado na figura 6.1(a)) é de 0.9020, isto é, mais que o dobro do EQM obtido no pior cenário de simulação da figura 6.2.

A partir da figura 6.2, é possível concluir que o comprimento da janela utilizada para se encontrar a trajetória de sombreamento tem um duplo efeito no método de filtragem. Se, por um lado, o número de amostras não pode ser excessivamente grande devido à capacidade de sombreamento inevitavelmente limitada das dinâmicas caóticas, por outro, ele deve ser suficientemente grande para capturar as características determinísticas presentes na observação, minimizando assim o efeito das componentes estocásticas.

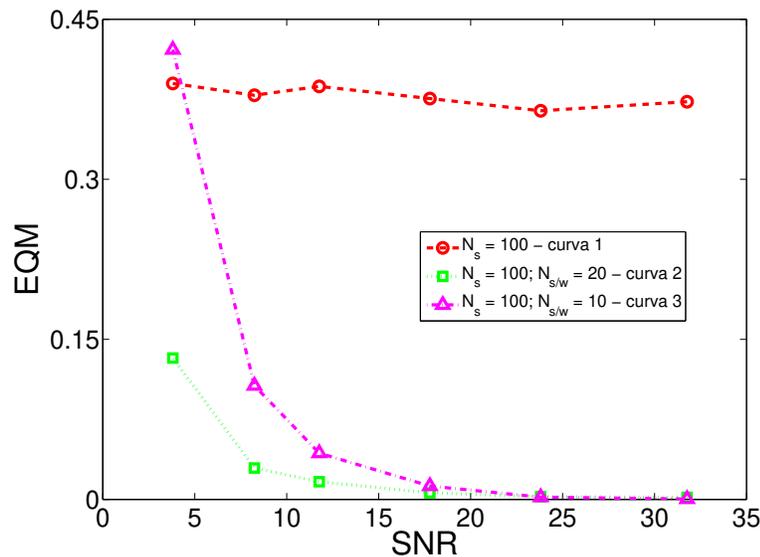


Figura 6.2: Erro quadrático médio (EQM) obtido para o método proposto considerando diferentes SNRs e número de amostras por janela ($N_{s/w}$) para a variável de estado $x(n)$ do mapa de Hénon. N_s é o número total de amostras

A qualidade da filtragem realizada pelo método proposto quando um valor adequado de $N_{s/w}$ é utilizado é ilustrada na figura 6.3. O painel superior desta figura mostra o sinal estimado para uma de observação com uma SNR de 5.7 dB, assumindo $N_{s/w} = 20$, enquanto o painel inferior mostra uma solução puramente determinística inadequado ao problema quando $N_{s/w} = 100$, ou seja, além do poder de aproximação do mapeamento estimado por meio da estratégia de computação evolutiva. Observa-se na figura 6.3(b) que a trajetória de sombreamento estimada aproxima a observação e a própria solução original apenas em intervalos de tempo específicos, o que implica na existência de um sinal puramente determinístico que resolve o problema de otimização proposto, mas não mais

associado com o sinal caótico original imerso em ruído que dá origem à observação. O mesmo não ocorre no cenário de simulação da figura 6.3(a), em que a solução do problema de otimização leva a um sinal estimado muito próximo da observação e do sinal caótico original.

6.4.2 Teste e comparação do desempenho da proposta

Em termos práticos, é necessário definir o número de amostras por janela a ser empregado de forma cega, ou seja, a partir apenas das informações disponíveis que consistem no vetor observação e na própria série estimada pelo método. Nesta situação, um valor adequado para $N_{s/w}$ pode ser encontrado baseado na convergência dos parâmetros estimados da dinâmica e no erro quadrático médio de observação EQM_O , definido aqui como o erro quadrático médio entre a série estimada e a observação. Isso implica que, quando um valor de $N_{s/w}$ for insuficiente para caracterizar a estrutura determinística da série, uma maior flutuação deve ser observada nas estimativas dos parâmetros da dinâmica, o que pode ser quantificado pelo aumento dos desvios-padrão associados aos mesmos. Por outro lado, quando um valor inadvertidamente grande de amostras por janelas é utilizado, tem-se o aumento significativo do erro de observação indicando que a capacidade de somreamento foi tomada além de seu limite de aproximação.

Quando um vetor observação relativamente longo é considerado, por exemplo, um vetor de 1000 amostras, a heurística para encontrar o número adequado de amostras por janelas pode ser verificada pelos resultados mostrados na figura 6.4, na qual é mostrada a média \pm o desvio-padrão (barra de erro) para os parâmetros estimados da dinâmica considerando diferentes valores de $N_{s/w}$ e uma SNR de 11.7 dB (figura 6.4(a) e 6.4(b)). Observa-se claramente que, para $N_{s/w} = 10$, o valor obtido para a média dos parâmetros da dinâmica divergem de seus valores ideais e um alto desvio-padrão é obtido (quando comparado, por exemplo, aos resultados obtidos tomando $N_{s/w} = 25$), um fato que decorre da influência do ruído no processo de estimação. Com o aumento progressivo de $N_{s/w}$, as estimativas tendem a convergir para seus valores ideais, reduzindo o EQM em relação à série original (figura 6.4(c)), assim como o desvio-padrão dos parâmetros estimados até que um ótimo é alcançado, o que acontece entre $N_{s/w} = 20$ e 25. Depois destes valores (i.e. $N_{s/w} > 30$), o EQM começa a crescer novamente, o que também é acompanhado por um suave aumento do erro de observação (mostrado na figura 6.4(d)). Este aumento no EQM_O está associado às referidas soluções inadequadas do problema de otimização quando a capacidade de somreamento do mapeamento ajustado pelo algoritmo evolutivo é insuficiente para contornar a natureza caótica da observação. Assim, a busca por convergência dos parâmetros estimados e, ao mesmo tempo, por um baixo EQM_O levam a estabelecer $N_{s/w}$ em torno de 20 e 25, o que é perfeitamente compatível com o erro quadrático mínimo em relação à série original, indicando a eficiência da heurística proposta.

Nota-se ainda na figura 6.4(c) que, para uma escolha adequada de $N_{s/w}$, o EQM obtido com

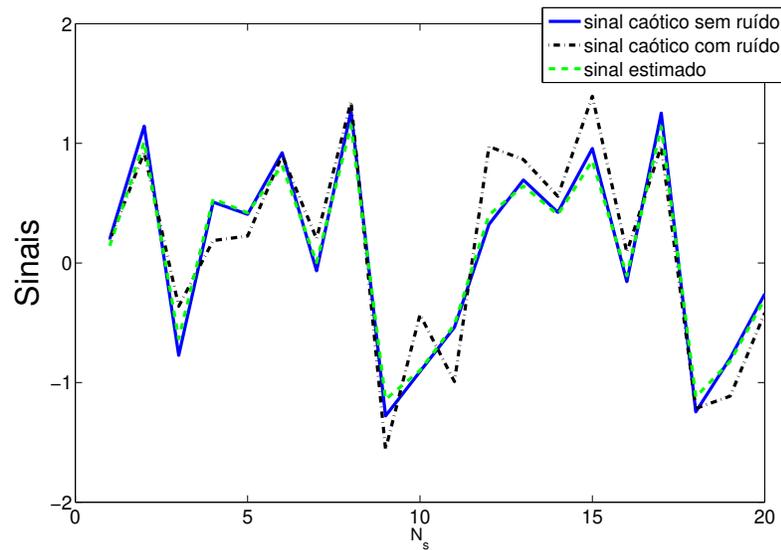
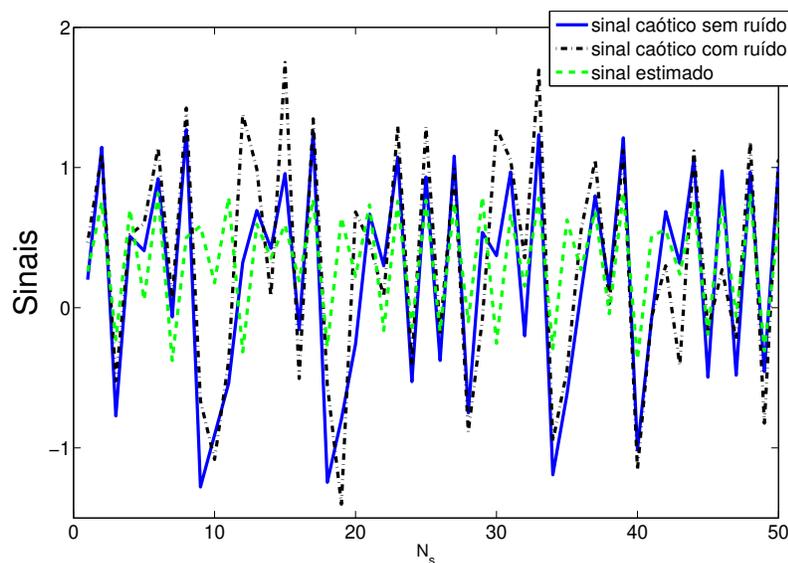
(a) $N_{s/w} = 20$ (b) $N_{s/w} = 100$

Figura 6.3: O painel 6.3(a) e 6.3(b) mostram a série caótica original livre de ruído, a observação (série caótica com ruído) e o sinal caótico livre de ruído estimado para $N_{s/w} = 20$ e $N_{s/w} = 100$, respectivamente, considerando uma SNR de 5.7 dB para a variável $x(n)$ do mapa de Hénon. O painel inferior mostra apenas as 50 primeiras amostras para uma melhor visualização das séries temporais.

o método proposto aproxima o EQM fornecido pelo filtro de Wiener no cenário supervisionado, ou seja, está próximo do desempenho de uma estrutura linear de filtragem ótima quando o sinal desejado

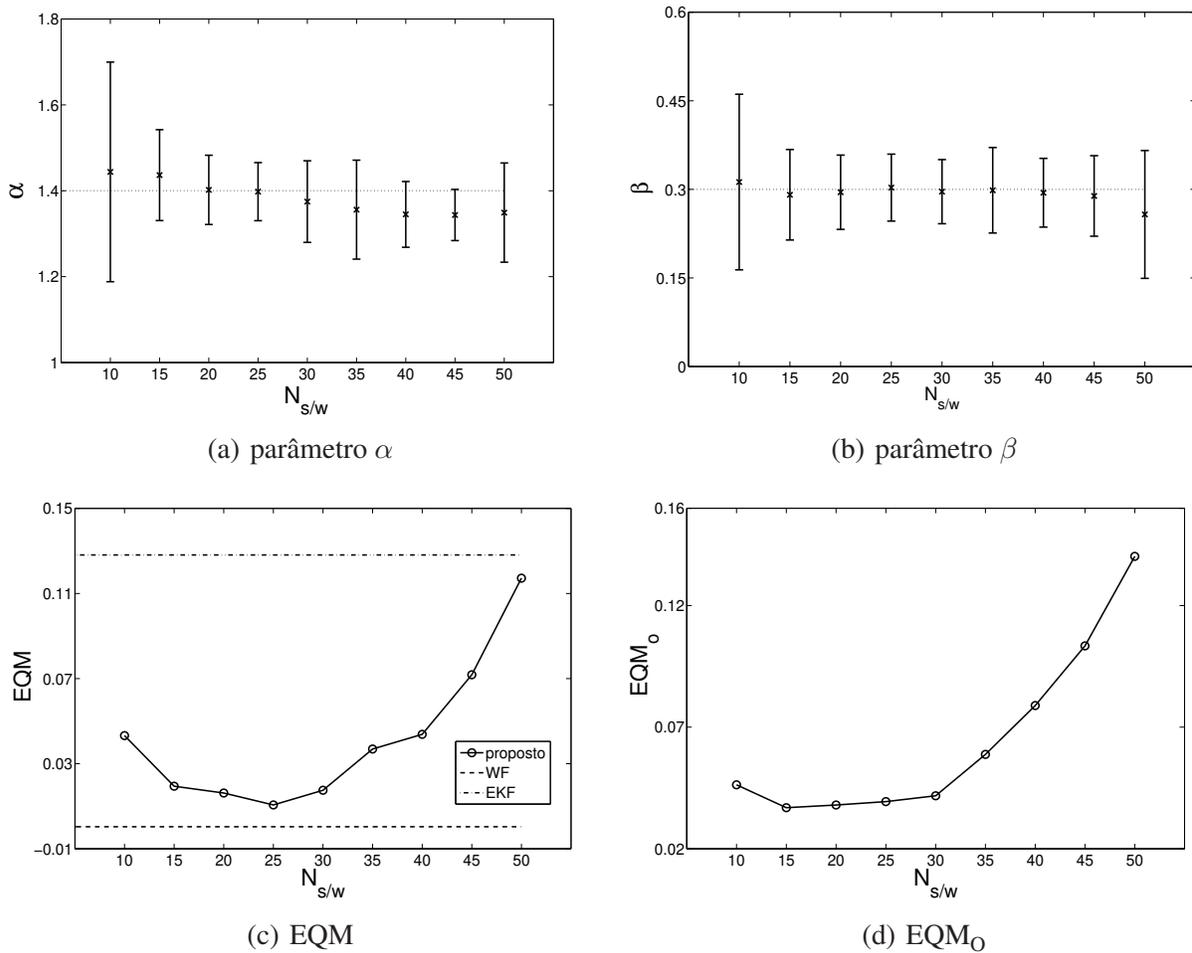


Figura 6.4: O painel 6.4(a) e 6.4(b) mostram, respectivamente, a média \pm e desvio-padrão (barra de erro) para os parâmetros α e β estimados considerando diferentes número de amostras por janela ($N_{s/w}$). O painel 6.4(c) mostra o EQM obtido pelo método proposto, para o filtro de Wiener (WF) e para o filtro de Kalman estendido (EKF). O painel 6.4(d) mostra o erro quadrático médio de observação (EQM_O). A SNR da observação é aproximadamente 11.7 dB e um total de 1000 amostras foi considerado. As linhas tracejadas nos painéis 6.4(a) e 6.4(b) denotam os valores originais dos parâmetros ($\alpha = 1.4$ e $\beta = 0.3$).

é conhecido (Haykin, 2002), o que é um indicativo de uma filtragem de boa qualidade. Além disso, o método proposto mostra-se também mais eficiente do que o filtro do Kalman estendido mesmo exigindo menos informação em relação à dinâmica (o EKF exige conhecimento dos parâmetros do modelo). É importante observar que ambos os métodos usados aqui a título de comparação possuem a vantagem de não exigirem um janelamento da observação, mas, a partir da comparação com os resultados obtidos, e considerando a informação exigida por cada um deles, é razoável afirmar que o método proposto tem um bom potencial de filtragem quando a heurística aqui proposta para

estabelecer $N_{s/w}$ é utilizada.

Visando fornecer uma melhor visualização do desempenho da proposta, a figura 6.5 mostra as séries temporais obtidas pelos diferentes métodos de filtragem utilizados aqui. Assim, o painel 6.5(a) mostra a série temporal obtida usando o filtro de Wiener (WF), enquanto o painel 6.5(b) mostra a série temporal estimada pelo método proposto. Por fim, o painel 6.5(c) mostra a série obtida por meio da abordagem do EKF. Pode-se claramente observar na figura 6.5 que a proposta exibe um desempenho próximo do WF, mesmo trabalhando em um cenário não-supervisionado.

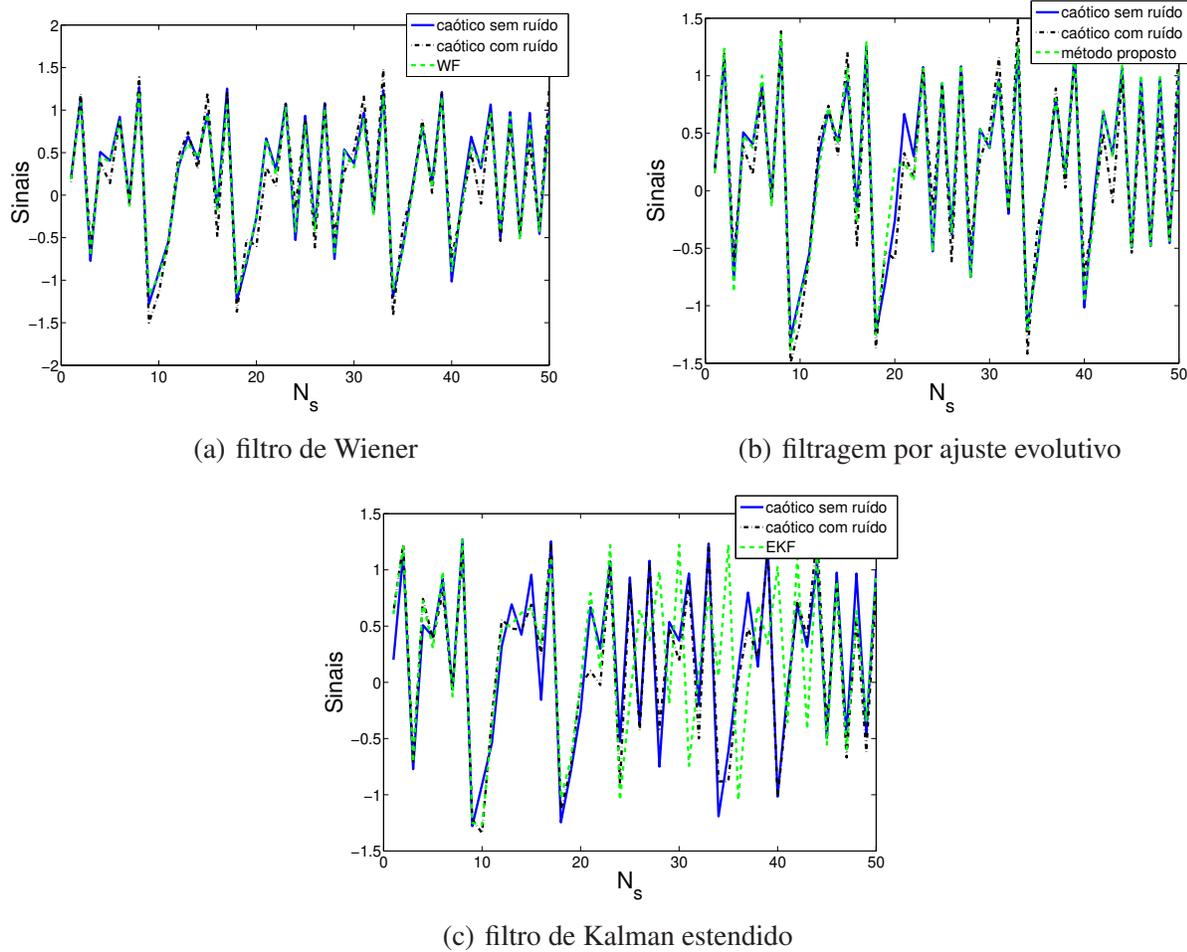


Figura 6.5: O painel 6.5(a) mostra a série temporal caótica original (livre de ruído), a observação corrompida por ruído com uma SNR de 11.7 dB e o sinal caótico obtido após a filtragem de Wiener (WF). Os painéis 6.5(b) e 6.5(c) são análogos ao primeiro, mas trazem o sinal estimado pelo método proposto considerando $N_{s/w} = 25$ e estimado pelo EKF, respectivamente.

A fim de evidenciar que a metodologia proposta não está restrita apenas a situações de baixo nível de ruído, a figura 6.6 traz os resultados das simulações análogas às realizadas na figura 6.4, mas

agora com uma SNR de 5.6 dB. Observa-se, nesta situação, que o aumento da potência do ruído contribui para um aumento no desvio-padrão dos parâmetros estimados da dinâmica para baixos valores de $N_{s/w}$. Além disso, o aumento no EQM_O segue um padrão similar ao observado no cenário da simulação anterior, aumentando suavemente quando $N_{s/w} \geq 30$, o que sugere que o valor adequado para $N_{s/w}$ não sofre desvio neste caso. De fato, um mínimo EQM é obtido para $N_{s/w} = 25$, algo que ilustra a robustez da heurística em ambientes ruidosos.

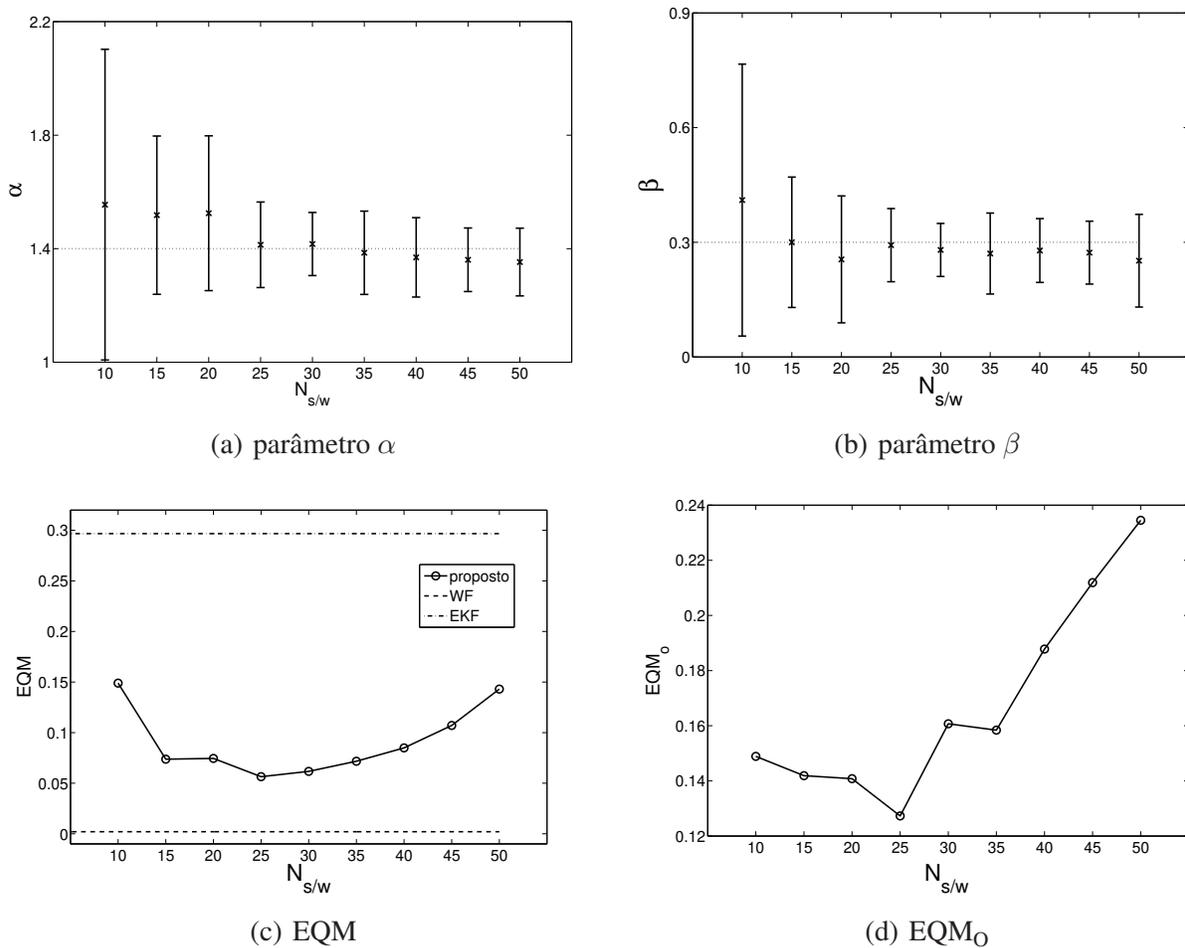


Figura 6.6: Os painéis 6.6(a) e 6.6(b) mostram, respectivamente, a média \pm desvio-padrão (barra de erro) para os parâmetros estimados α e β considerando diferentes número de amostras por janela ($N_{s/w}$). O painel 6.6(c) mostra o EQM obtido pelo método proposto, pelo filtro de Wiener (WF) e pelo filtro de Kalman estendido (EKF). O painel 6.6(d) mostra o erro quadrático de observação (EQM_O). A SNR da observação é aproximadamente 5.6 dB e um total de 1000 amostras foi considerado. As linhas tracejadas no primeiro e segundo painel denotam os valores originais dos parâmetros da dinâmica ($\alpha = 1.4$ e $\beta = 0.3$).

As séries temporais obtidas para este cenário de simulação considerando os diferentes métodos

de filtragem empregados são mostradas na figura 6.7. Novamente, nota-se que o desempenho do método proposto aproxima-se da abordagem de Wiener que fornece um EQM relativamente baixo e é bem superior à abordagem EKF.

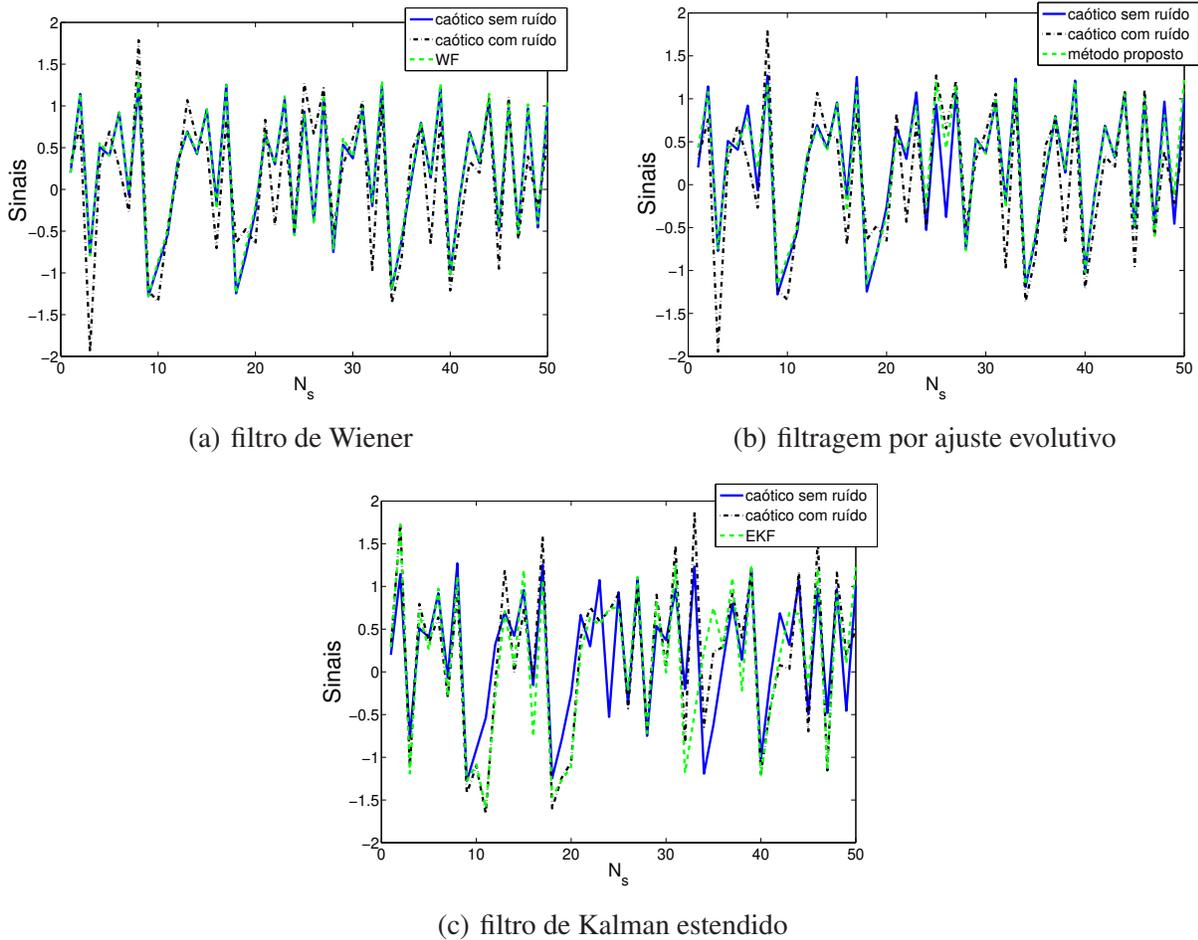


Figura 6.7: O painel 6.5(a) mostra a série temporal caótica original (livre de ruído), a observação corrompida por ruído com uma SNR de 5.6 dB e o sinal caótico obtido após a filtragem de Wiener (WF). Os painéis 6.5(b) e 6.5(c) são análogos ao primeiro, mas trazem o sinal estimado pelo método proposto considerando $N_{s/w} = 25$ e estimado pelo EKF, respectivamente.

A heurística proposta para estimar o comprimento adequado da trajetória de sombreamento exigida para propiciar uma filtragem de boa qualidade também foi verificada no caso do mapa logístico (capítulo 3 - apêndice). Neste cenário, o vetor observação é gerado adicionando ruído às séries caóticas obtidas pela iteração do mapa quando $\alpha = 3.75$ e $x(1) = 0.2$, fornecendo um vetor $z(n)$ com uma SNR de 10.7 dB. A figura 6.8(a) mostra a média \pm desvio-padrão do parâmetro α , enquanto a figura 6.8(b) mostra o EQM obtido pelo método proposto, pelo filtro de Wiener e pelo filtro de

Kalman estendido, respectivamente. O erro quadrático médio de observação é mostrado na figura 6.8(c). Como observado nos casos anteriores para o mapa de Hénon, o EQM decresce conforme a estimativa dos parâmetros da dinâmica vai convergindo para a média ideal dos parâmetros originais diante do aumento progressivo de $N_{s/w}$. Depois de atingir um valor adequado, o EQM passa a crescer novamente indicando que a capacidade de sombreamento foi ultrapassada, o que também é acompanhado por um aumento no erro quadrático médio de observação.

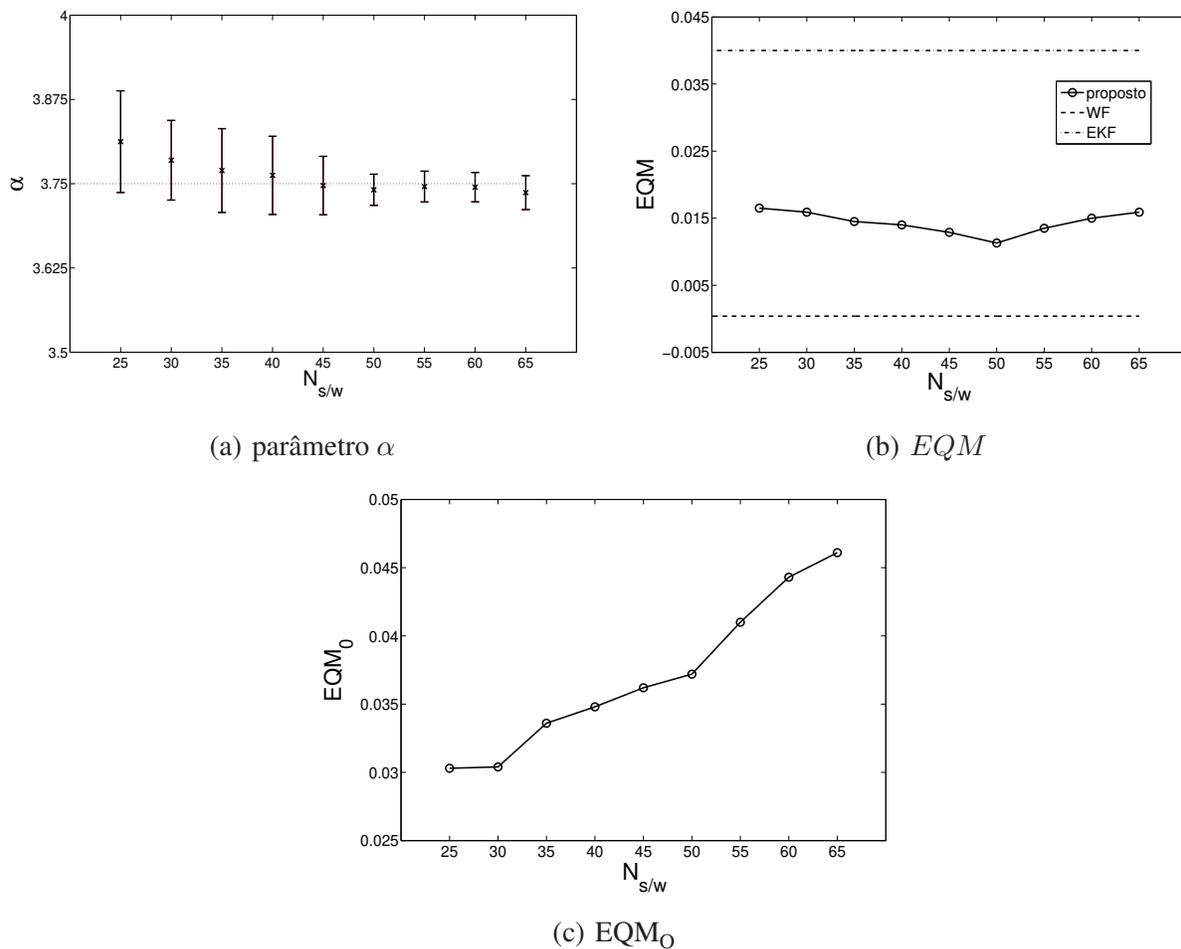


Figura 6.8: O painel 6.8(a) mostra a média \pm desvio-padrão (barra de erro) para os parâmetros α estimados da dinâmica considerando diferente número de amostras por janelas ($N_{s/w}$). O painel 6.8(b) mostra o EQM obtido pelo método proposto, o filtro de Wiener (WF) e pelo filtro de Kalman estendido (EKF). O painel 6.8(c) mostra o erro quadrático médio de observação (EQM_O). A SNR da observação é aproximadamente 10.7 dB e um total de 1000 amostras foi considerado. A linha tracejada no primeiro painel denota o valor do parâmetro original da dinâmica ($\alpha = 3.75$).

A figura 6.9 mostra as séries temporais obtidas para as diferentes abordagens de filtragem empregadas. Observa-se claramente o bom desempenho do filtro de Wiener (figura 6.9(a)), enquanto o

método proposto apresenta algumas estimativas com significativa divergência em relação ao desejado (figura 6.9(a)), mas, mesmo assim, com qualidade muito superior a da observação ruidosa. Já o EKF produz estimativas muito mais próximas do ruído do que do sinal desejado (figura 6.9(c)), o que revela uma impossibilidade de realizar de forma adequada o processo de filtragem.

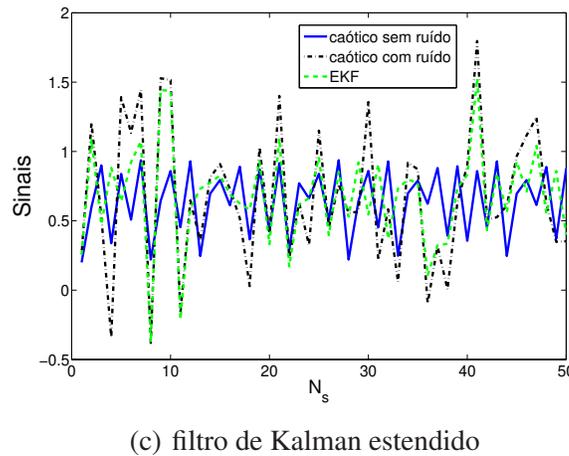
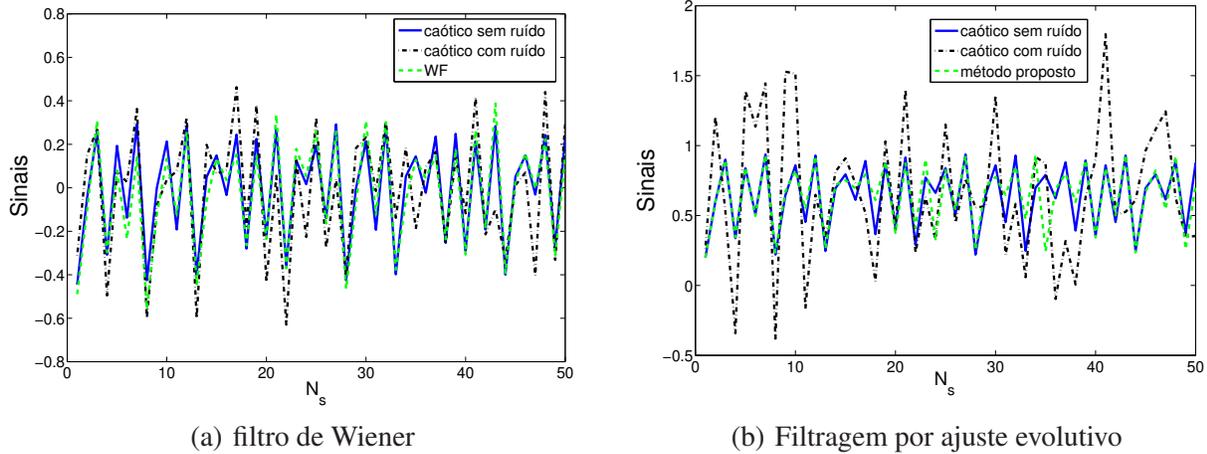
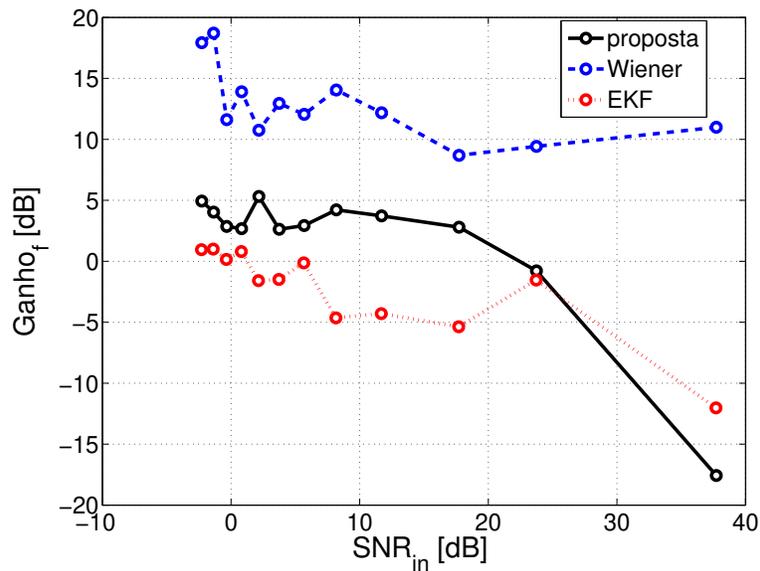


Figura 6.9: O painel 6.9(a) mostra a série caótica original (livre de ruído), a observação corrompida com ruído com uma SNR de 10.7 dB e o sinal filtrado pela abordagem de Wiener (WF). Os painéis 6.9(b) e 6.9(c) são análogos ao primeiro painel, mas trazem o sinal estimado pelo método proposto considerando $N_{s/w} = 50$ e o sinal estimado pela abordagem EKF, respectivamente.

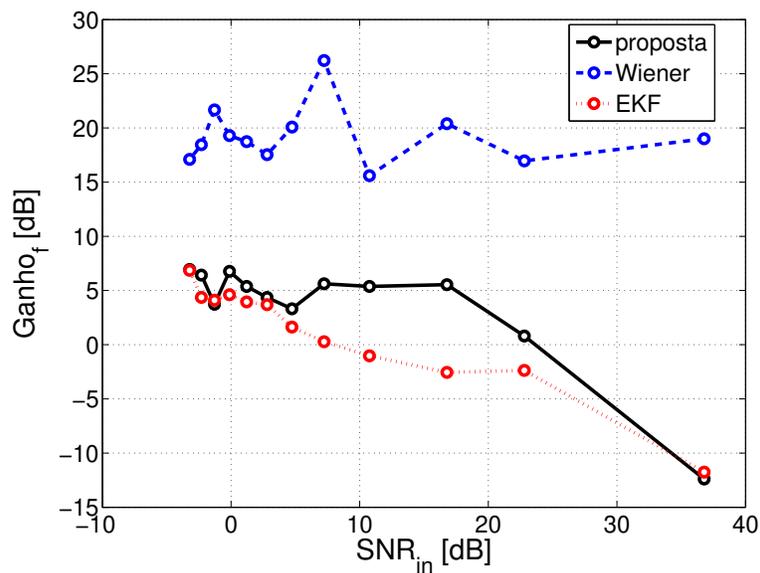
Com o objetivo de avaliar o desempenho das diferentes abordagens de filtragem para diferentes SNRs, pode-se definir o ganho de filtragem (G_f em dB) em relação à potência do ruído adicionado, na forma:

$$G_f = 10 \log_{10} \left[\frac{\sigma_r^2}{\sigma_e^2} \right] \quad (6.15)$$

onde σ_r^2 é a variância do ruído e σ_e^2 é o EQM entre o sinal estimado e o desejado.



(a) Ganho de filtragem em função da SNR - mapa de Hénon



(b) Ganho de filtragem em função da SNR - mapa de logístico

Figura 6.10: Desempenho de filtragem para as abordagens evolutiva (proposta), Wiener e EKF aqui estudadas em termos do ganho de filtragem (G_f) pela SNR da observação (SNR_{in}). Os painéis 6.10(a) e 6.10(b) mostram, respectivamente, os resultados obtidos para o mapa de Hénon e para o mapa logístico

A figura 6.10 mostra o ganho de filtragem obtido para diferentes SNRs tanto para o mapa de Hénon (figura 6.10(a)) como para o mapa logístico (figura 6.10(b)). Observa-se que o ganho de

filtragem do filtro de Wiener é bem superior ao obtido pelos demais métodos para ambos os mapas discretos. Isto de certa forma é reflexo do uso de uma grande quantidade de informação *a priori* (o próprio sinal desejado usado para o projeto do filtro), o que não é feito para as demais abordagens. O método proposto mostra um ganho significativo de filtragem tanto para ambientes ruidosos (SNRs abaixo de 10 dB) como para ambientes moderadamente ruidosos (SNRs entre 10 e 20 dBs) para ambos os mapas. Já em ambientes de baixo ruído, observa-se um ganho abaixo de 0 dB para o método proposto e eventualmente um pior desempenho que o próprio EKF. Isso se deve ao fato da potência do ruído ser praticamente desprezível diante da potência do sinal caótico de interesse, o que faz com que as mínimas divergências da série estimada em relação à original forneçam séries temporais mais distorcidas do que a própria observação, situação esta em que, muito provavelmente, o processo de filtragem não é mais necessário em termos práticos.

Observa-se ainda que, em ambientes bem ruidosos (em torno de 0 dB), tanto o processo de filtragem via ajuste evolutivo como o EKF são capazes de melhorar a qualidade do sinal obtido, sendo que o método proposto pode chegar a apresentar um ganho de filtragem G_f de 5 dB. Em especial, no caso do mapa logístico, observa-se que o EKF possui desempenho comparável ao da proposta neste cenário de simulação (e.g. para $\text{SNR} = -3.2$ dB e $\text{SNR} = -1.3$ dB), mas seu desempenho é significativamente inferior entre 0 e 20 dB, o que é compatível com as formas de onda mostradas nas figuras 6.9 e 6.5, onde tem-se uma observação de 10.7 dB e o EKF é incapaz de encontrar estimativas satisfatórias para a série desejada.

As limitações da abordagem EKF na filtragem de séries temporais caóticas já foram apontadas por Wan e Merwe (Wan & Merwe, 2000), onde um desempenho similar ao aqui obtido foi evidenciado para a série caótica de Mackay-Glass. Neste trabalho, os autores propõem a utilização de uma versão modificada do EKF chamada *unscented Kalman filter - UKF* - para realizar a filtragem da série caótica, obtendo uma melhora significativa de desempenho. A implementação do UKF, bem como a sua comparação com a metodologia proposta, aparece aqui como uma perspectiva natural para um trabalho futuro.

6.5 Discussão e conclusões

O problema de filtragem de séries temporais caóticas foi abordado neste capítulo assumindo que a estrutura da dinâmica é conhecida, mas não sua condição inicial, nem mesmo seus parâmetros. De maneira geral, os métodos disponíveis na literatura que visam resolver o problema de filtragem e sombreamento incorporam a informação *a priori* de que dinâmicas não-lineares assumem linearizações locais, obtendo a trajetória livre de ruído por meio de projeções do vetor de observação na variedade suave subjacente à dinâmica (veja Abarbanel (Abarbanel, 1996) e Grassberger et al. (Grassberger et

al., 1993) para uma revisão). De fato, os métodos propostos por Hammel (Hammel, 1990) e Farmer e Sidorowich (Farmer & Sidorowich, 1991) apresentam bons desempenhos de filtragem para séries temporais com SNR maiores que 10 dB. Em particular, destaca-se que o algoritmo proposto por Kostelich e Yorke (Kostelich & Yorke, 1990) - baseado na estimativa da matriz jacobiana diretamente a partir das séries temporais - é capaz de fornecer resultados análogos aos obtidos tanto por Hammel como por Farmer e Sidorowich, mas sem qualquer conhecimento das equações de estado ou condições iniciais. A partir de uma abordagem análoga, Sauer (Sauer, 1992) mostrou alguns cenários de simulação em que o processo de filtragem é bem sucedido mesmo envolvendo observações em ambientes altamente ruidosos (e.g. 0 dB), embora o processo de filtragem seja numericamente instável para alguns pontos da dinâmica e fortemente dependente da qualidade da reconstrução do atrator realizada.

De forma alternativa a estes métodos de filtragem, a abordagem aqui proposta para o problema de filtragem apresenta como contribuição central uma estratégia de computação evolutiva para o ajuste do vetor de parâmetros da dinâmica e de suas condições iniciais, o que possibilitou contornar as instabilidades numéricas presentes na abordagem clássica adotada na solução do problema de sombreamento, tal como exposto por Hammel. Mais que isso, a presente abordagem ilustra a flexibilidade e aumento da capacidade de sombreamento quando o vetor de parâmetros também é tomado como livre, fazendo com que uma determinada série caótica possa ser dividida por partes (“janelas”), e, dentro de cada uma delas, aproximada por uma trajetória de sombreamento adequada. Este método permitiu filtrar de forma apropriada sinais com SNR inferiores a 5 dB. Além disso, quando comparada com os métodos clássicos de filtragem que usam maior grau de conhecimento *a priori* (e.g. os próprios sinais originais ou mesmo os parâmetros da dinâmica), a metodologia proposta mostrou-se com desempenho próximo ao filtro de Wiener, obtendo um EQM bem inferior a outras estruturas clássicas (e.g. EKF) da teoria de estimação não-linear para ambientes com alto e moderado nível de ruído. Em ambientes de baixo ruído, o processo de filtragem tanto pela metodologia proposta como pelo EKF introduzem mais distorções do que o próprio ruído da observação, e, muito provavelmente, não são necessários na prática.

O método de filtragem proposto pode ser considerado estruturalmente simples, não exigindo qualquer manipulação (e.g. diferenciação) das equações da dinâmica, estimativas de jacobiano, ou reconstrução do atrator no espaço de estados. Em especial, essas vantagens permitiram contornar diversas dificuldades numéricas observadas nos métodos clássicos de filtragem mais próximos da teoria de sistemas dinâmicos, sendo que o preço a ser pago pelas facilidades apontadas consiste em uma estimativa adequada do tamanho da janela de sombreamento a ser empregada, o que está intrinsecamente relacionado com a capacidade de sombreamento do mapeamento diante da precisão do método de estimação do vetor de parâmetros e das condições iniciais. Com o intuito de melhorar o desempenho da metodologia proposta, uma heurística para definir o tamanho da janela de sombreamento foi intro-

duzida e validada considerando modelos emblemáticos da teoria de sistemas dinâmicos não-lineares. O emprego desta heurística revelou um compromisso entre o número de amostras a ser utilizada de forma a capturar a característica determinística da observação e a capacidade de sombreamento limitada das dinâmicas caóticas. Embora tenha sido observado que a convergência dos parâmetros estimados da dinâmica acompanhada de um baixo erro de observação possa conduzir a um desempenho de filtragem próximo ao melhor que o método pode alcançar, deve-se enfatizar que talvez este problema seja melhor formulado no contexto de otimização multi-objetivo, para o qual estes dois critérios sejam atendidos, o que se configura como mais uma perspectiva natural de prosseguimento do trabalho.

Como aplicação, espera-se que o cenário de filtragem aqui abordado seja particularmente interessante para as novas propostas de sistemas de comunicações baseado em sinais caóticos, um paradigma atraente em termos de consumo de potência e tido como seguro em termos de transmissão de dados (Lau & Tse, 2003; Baptista et al., 2003; Tam et al., 2006). Obviamente, o uso destas técnicas de filtragem para aumentar a robustez da sincronização de sistemas caóticos no contexto de sistemas de comunicação (Pecora & Carroll, 1990; Cuomo & Oppenheim, 1993; Wu & Chua, 1993; Eisencraft & Batista, 2011; Eisencraft et al., 2011) também se configura como uma perspectiva de trabalhos futuros.

Capítulo 7

Considerações Finais

Embora as conclusões e perspectivas tenham sido tratadas em mais detalhes nos respectivos capítulos desta tese, pode-se dizer, sucintamente, que, no presente trabalho foram apresentadas novas contribuições para análise de estabilidade, controle e processamento de sinais no contexto de dinâmicas não-lineares.

Destaca-se como uma das principais vantagens da metodologia para análise de estabilidade mediante o cálculo do espectro de Lyapunov a sua potencial aplicação em dinâmicas não-suaves. Esta característica, em especial, foi aqui explorada na análise do modelo de FitzHugh-Nagumo excitado por pulsos retangulares tanto para a análise do comportamento assintótico como comportamento local do campo vetorial. Esta análise permitiu evidenciar a presença de oscilações caóticas para este modelo neuronal relativamente simples, o que tem motivado diversas discussões sobre o papel deste tipo de comportamento oscilatório nos processos cognitivos de organismos superiores e na computação com atratores de um modo geral.

Este procedimento de cálculo dos expoentes de Lyapunov também foi utilizado em conjunto com estratégias alternativas de otimização para propor uma metodologia de controle por projeto de sistemas dinâmicos que visa ajustar os parâmetros livres das equações de estado no sentido de obter um espectro de Lyapunov desejado, produzindo assim padrões análogos de oscilação com mesmas medidas invariantes e estatísticas. Esta abordagem é extremamente atraente no contexto do estudo de diversas doenças dinâmicas (i.e. doenças que estão associadas a ritmos patológicos de oscilação de grandezas fundamentais para o funcionamento de uma célula ou todo um sistema biológico de um modo geral), e, justamente por isso, foi aqui testada no controle do modelo neuronal de Hodgkin-Huxley.

Em relação às contribuições no contexto de processamento de sinais produzidos por dinâmicas não-lineares foi introduzida aqui uma forma de extração cega de sinais caóticos misturados com fontes estocásticas no cenário multiregistro, o que teve por base uma análise por quantificação por recorrência.

Especula-se aqui que esta estratégia possa estabelecer um importante paradigma de processamento de sinais determinísticos em diferentes contextos teóricos e práticos.

Por fim, um caso particular do desafiador problema de filtragem de sinais caóticos também foi aqui tratado mediante a reformulação deste como um problema de otimização, resolvido por meio de estratégias alternativas (bio-inspiradas), o que possibilitou contornar uma série de inconvenientes numéricos presentes até então na abordagem clássica de solução. Considera-se que esta estratégia seja atraente no contexto de filtragem de sinais caóticos produzidos no âmbito de simulações analógicas de sistemas dinâmicos ou mesmo para sistemas de comunicação baseado em sinais caóticos.

Referências bibliográficas

- Abarbanel, H. D. I. (1996). *Analysis of observed chaotic data*. Springer-Verlag.
- Abarbanel, H. D. I., Brown, R., & Kennel, M. B. (1991). Variation of Lyapunov Exponents on a Strange Attractor. *Journal of Nonlinear Science*, *1*, 175-199.
- Aidley, D. J. (1998). *The Physiology of Excitable Cells* (4th ed.). Cambridge University Press.
- Aihara, K., & Matsumoto, G. (1986). Chaos. In A. Holden (Ed.), (p. 257-269). Princeton University Press.
- Alfi, A. (2011). PSO with Adaptive Mutation and Inertia Weight and Its Application in Parameter Estimation of Dynamic Systems. *Acta Automatica Sinica*, *37*, 541-549.
- Andreyev, Y. V., Dmitriev, A. S., & Efremova, E. V. (2002). Dynamic separation of chaotic signals in the presence of noise. *Physical Review E*, *65*, 046220-1-046120-6.
- Anishchenko, V. S., Astakhov, V., Neiman, A., Vadivasova, T., & Schimansky-Geier, L. (2007). *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems: Tutorial and Modern Developments* (2nd ed.). Springer-Verlag.
- Arena, P., Buscarino, A., Fortuna, L., & Frasca, M. (2006). Separation and synchronization of piecewise linear chaotic systems. *Physical Review E*, *74*, 026212-1-026212-11.
- Argyris, A., Syvridis, D., Larger, L., Annovazzi-Lodi, V., Colet, P., Fisher, I., et al. (2005). Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links. *Nature*, *438*, 343-346.
- Aristóteles. (2009). *Física I e II*. UNICAMP.
- Attux, R. F. F. (2001). *Sobre Dinâmica Caótica e Convergência em Algoritmos de Equalização Autodidata*. Dissertação de mestrado, Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação (FEEC), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).
- Avoli, M., Louvel, J., Pumain, R., & Köhling, R. (2005). Cellular and molecular mechanisms of epilepsy in the human brain. *Progress in Neurobiology*, *77*, 166-200.
- Badii, R., Broggi, G., Derighetti, B., Ravani, M., & Rubio, M. A. (1988). Dimension Increase in Filtered Chaotic Signals. *Physical Review Letters*, *11*, 979-982.
- Baptista, M. S., Macau, E. E., & Grebogi, C. (2003). Conditions for efficient chaos-based communication. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, *13*, 145-150.
- Bennettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A., & Strecyn, J. (1980). Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems: A Method for Computing All of Them. Part 2: Numerical Application. *Meccanica*, *15*, 21-30.
- Bennettin, G., Galgani, L., & Strecyn, J. M. (1976). Kolmogorov entropy and numerical experiments. *Physical Review A*, *14*, 2338-2345.

- Boccaletti, S., Grebogi, C., Lai, Y.-C., Mancini, H., & Maza, D. (2000). The control of chaos: theory and applications. *Physics Reports*, 329, 103-197.
- Boffetta, G., Cencini, M., Falcioni, M., & Vulpiani, A. (2002). Predictability: a way to characterize complexity. *Physics Reports*, 356, 367-474.
- Bonfill, P., & Zibulevsky, M. (2001). Undetermined blind source separation using sparse representations. *Signal Processing*, 81, 2353-2363.
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M., & Reinsel, G. C. (2008). *Time series analysis: Forecasting and control* (4th ed.). Wiley.
- Brooks, D. R., & Wiley, E. O. (1988). *Evolution as Entropy*. University of Chicago Press.
- Burns, K., & Gidea, M. (2005). *Differential Geometry and Topology With a View to Dynamical Systems*. Chapman & Hall.
- Castro, L. N. de. (2006). *Fundamentals of Natural Computing*. Chapman & Hall.
- Castro, L. N. de, & Timmis, J. (2002). *Artificial Immune Systems: A New Computational Intelligence Approach*. Springer Verlag.
- Castro, L. N. de, & Zuben, F. J. V. (2002). Learning and optimization using the clonal selection principle. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6, 239-251.
- Cawley, R., & Hsu, G.-H. (1992). Local-geometric-projection method for noise reduction in chaotic maps and flows. *Physical Review A*, 46, 3057-3082.
- Comon, P. (1994). Independent Component Analysis, a New Concept? *Signal Processing*, 36, 287-314.
- Cover, T. M., & Thomas, J. A. (2005). *Elements of information theory* (2nd ed.). Wiley-Interscience.
- Cuomo, K. M., & Oppenheim, A. V. (1993). Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. *Physics Review Letters*, 71, 65-68.
- Darbellay, G. A., & Vajda, I. (1999). Estimation of the information by adaptive partitioning of the observation space. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45, 1315-1321.
- Dayan, P., & Abbott, L. F. (2001). *Theoretical Neuroscience*. MIT Press.
- Doerner, R., Hübinger, B., Martienssen, W., Grossmann, S., & Thomae, S. (1999). Stable Manifolds and Predictability of Dynamical Systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 10, 1759-1782.
- Doi, S., & Sato, S. (1995). The Global Bifurcation Structure of the BVP Neuronal Model Driven by Periodic Pulse Trains. *Mathematical Biosciences*, 125, 229-250.
- Duarte, L. T. (2006). *Um estudo sobre separação cega de fontes e contribuições ao caso de misturas não-lineares*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.
- Eckmann, J.-P., Kamphorst, S. O., & Ruelle, D. (1987). Recurrence Plots of Dynamical Systems. *Europhysics Letters*, 4, 973-977.

- Eckmann, J.-P., Kamphorst, S. O., Ruelle, D., & Ciliberto, S. (1986). Liapunov exponents from time series. *Physical Review A*, *34*, 4971-4979.
- Eckmann, J.-P., & Ruelle, D. (1985). Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics*, *57*, 617-656.
- Eisencraft, M., & Batista, A. (2011). Discrete-time chaotic systems synchronization performance under additive noise. *Signal Processing, In Press, Corrected Proof*.
- Eisencraft, M., Fanganiello, R. D., Grzybowski, J. M., Soriano, D. C., Attux, R., Batista, A. M., et al. (2011). Chaos-based Communication Systems in Non-ideal Channels. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. (Accepted)
- Eisencraft, M., & Kato, D. M. (2009). Spectral properties of chaotic signals with applications in communications. *Nonlinear Analysis*, *71*, e2592-e2599.
- Fanselow, E. E., Reid, A. P., & Nicoletis, M. A. L. (2000). Reduction of Pentylentetrazone-Induced Seizure Activity in Awake Rats by Seizure-Triggered Trigeminal Nerve Stimulation. *Journal of Neuroscience*, *20*, 8160-8168.
- Farmer, J. D., & Sidorowich, J. J. (1991). Optimal shadowing and noise reduction. *Physica D*, *47*, 373-392.
- Feigenbaum, M. J. (1978). Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, *21*, 25-52.
- Fiedler-Ferrara, N., & Carmo, C. P. C. do. (1995). *Caos: uma introdução*. Edgard Blücher.
- FitzHugh, R. (1961). Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane. *Biophysical Journal*, *1*, 445-466.
- FitzHugh, R. (1969). Biological engineering. In H. P. Schwan (Ed.), (p. 1-85). McGraw-Hill.
- Fraser, A. M., & Swinney, H. L. (1986). Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Physical Review Letters A*, *33*, 1134-1140.
- Freeman, W. J. (2000). *Neurodynamics "An Exploration In Mesoscopic Brain Dynamics"*. Springer.
- Freeman, W. J. (2004). How and why brains create meaning from sensory information. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, *14*, 515-530.
- Fuentes, R., Petersson, P., Siesser, W. B., Caron, M. G., & Nicoletis, M. (2009). Spinal Cord Stimulation Restores Locomotion in Animal Models of Parkinson's Disease. *Science*, *323*, 1578-1582.
- Fujisaka, H., & Yamada, T. (1983). Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator Systems. *Progress of Theoretical Physics*, *69*, 32-47.
- Fukai, H., Doi, S., Nomura, T., & Sato, S. (2000). Hopf bifurcation in multiple-parameter space of the Hodgkin-Huxley equations I. Global organization of bistable periodic solutions. *Biological Cybernetics*, *82*, 215-222.

- Gao, F., Lee, J.-J., Li, Z., Tong, H., & Lü, X. (2009). Parameter estimation for chaotic system with initial random noises by particle swarm optimization. *Chaos, Solitons and Fractals*, *42*, 1286-1291.
- Garcia, E. A. C. (2005). *Biofísica* (2nd ed.). Sarvier.
- Glass, L., & Mackey, M. C. (1988). *From clocks to chaos*. Princeton University Press.
- Gleick, J. (2008). *Chaos: Making a new science*. Penguin.
- Gleick, J. (2011). *The Information: A History, a Theory, a Flood*. Pantheon.
- Grassberger, P., Hegger, R., Kantz, H., & Schaffrath, C. (1993). On noise reduction methods for chaotic data. *Chaos*, *3*, 127-141.
- Grassberger, P., & Proccacia, I. (1983). Estimation of the kolmogorov entropy from a chaotic signals. *Physical Review A*, *28*, 2591-2593.
- Grassberger, P., & Proccacia, I. (1984). Dimensions and Entropies of Strange Attractors from a Fluctuating Dynamics Approach. *Physica D*, *13*, 34-54.
- Grebogi, C., & Ott, E. (1983). Crisis, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. *Physica D*, *7*, 181-200.
- Guckenheimer, J., & Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag.
- Guckenheimer, J., & Oliva, R. A. (2002). Chaos in the Hodgkin-Huxley Model. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, *1*, 105-114.
- Haller, G. (2000a). Finding finite-time invariant manifolds in two-dimensional velocity fields. *Chaos*, *10*, 99-108.
- Haller, G. (2000b). Lagrangian coherent structures and mixing in two-dimensional turbulence. *Chaos*, *10*, 99-108.
- Haller, G. (2001). Distinguished material surfaces and coherent structures in 3d fluid flows. *Physica D*, *149*, 248-277.
- Haller, G., & Yuan, G. (2000). Lagrangian coherent structures and mixing in two-dimensional turbulence. *Physica D*, *147*, 352-370.
- Hammel, S. M. (1990). A noise reduction method for chaotic systems. *Physics Letters A*, *148*, 421-428.
- Hassard, B. (1978). Bifurcation of Periodic Solutions of the Hodgkin-Huxley Model for the Squid Giant Axon. *Journal of Theoretical Biology*, *71*, 401-420.
- Hasselblatt, B., & Pesin, Y. B. (2008). Pesin Entropy Formula. *Scholarpedia*, *3*, 3733.
- Haykin, S. (2001). *Redes Neurais* (2nd ed.). Bookman.
- Haykin, S. (2002). *Adaptive Filter Theory*. Prentice Hall.
- Hérault, J., Jutten, C., & Ans, B. (1985). Détection de grandeurs primitives dans un message compo-

- site par une architecture de calcul neuromimétique en apprentissage non supervisé. In *Actes du Xème Colloque GRETSI* (p. 1017-1022).
- Hille, B. (1992). *Ionic Channels of Excitable Membranes* (2nd ed.). Sinauer Associates Inc.
- Hodgkin, A. L., & Huxley, A. F. (1952). A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *Journal Physiology*, *117*, 500-544.
- Hodgkin, A. L., Huxley, A. F., & Katz, B. (1952). Measurement of current-voltage relations in membrane of the giant axon of *Loligo*. *Journal Physiology*, *116*, 424-448.
- Homburg, A. J., Vilder, R. D., & Sands, D. (2003). Computing Invariant sets. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, *13*, 497-504.
- Hong-Bin, C., Jiu-Chao, F., & Yong, F. (2008). Blind extraction of chaotic signals by using the fast independent component analysis algorithm. *Chinese Physics Letters*, *25*, 405-408.
- Hu, W., & Liu, Z. (2008). Partially blind source separation of continuous chaotic signals from linear mixture. *IET Signal Processing*, *2*, 424-430.
- Hyvärinen, A., Karhunen, J., & Oja, E. (2001). *Independent component analysis*. John Wiley & Sons.
- Izhikevich, E. M. (2007). *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. MIT Press.
- Izhikevich, E. M., & FitzHugh, R. (2006). FitzHugh-Nagumo Model. *Scholarpedia*, *1*, 1349.
- Jackson, A. S. (1960). *Analog computation*. McGraw-Hill.
- Jin, W., Xu, J., Wu, Y., Hong, L., & Wei, Y. (2006). Crisis of interspike intervals in the Hodgkin-Huxley model. *Chaos, Solitons and Fractals*, *27*, 952-958.
- Kaneko, K., & Tsuda, I. (2000). *Complex systems: Chaos and beyond, a constructive approach with applications in life science*. Springer.
- Kaneko, K., & Tsuda, I. (2003). Chaotic Itinerancy. *Chaos*, *13*, 926-936.
- Kapitaniak, T. (1996). *Controlling Chaos*. Academic Press Inc.
- Kennedy, J., Eberhart, R. C., & Shi, Y. (2001). *Swarm intelligence*. Morgan Kaufmann Publishers.
- Koch, C. (1999). *Biophysics of Computation*. Oxford University Press.
- Korn, H., & Faure, P. (2003). Is there chaos in the brain? II. Experimental evidence and related models. *Comptes Rendus Biologies*, *326*, 787-840.
- Kostelich, E. J., & Schreiber, T. (1993). Noise reduction in chaotic time-series data: a survey of common methods. *Physical Review E*, *48*, 1752-1763.
- Kostelich, E. J., & Yorke, J. A. (1988). Noise reduction in dynamical systems. *Physical Review A*, *38*, 1649-1652.
- Kostelich, E. J., & Yorke, J. A. (1990). Noise reduction: finding the simplest dynamical system consistent with the data. *Physica D*, *41*, 183-196.

- Kubin, G. (1995). What is a chaotic signal ? In I. Pitas (Ed.), *Proceedings of 1995 IEEE workshop on nonlinear signal and image processing* (p. 141-144).
- Kuznetsov, Y. (2010). *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer.
- Larson, L., Liu, J.-M., & Tsimring, L. (Eds.). (2006). *Digital communications using chaos and nonlinear dynamics*. Springer.
- Lau, F. C. M., & Tse, C. K. (2003). *Chaos-based digital communication system*. Springer.
- Leine, R. I. (2010). The historical development of classical stability concepts: Lagrange, Poisson and Lyapunov stability. *Nonlinear Dynamics*, 59, 173-182.
- Lekien, F., Shadden, S. C., & Marsden, J. E. (2007). Lagrangian coherent structures in n-dimensional systems. *Journal of Mathematical Physics*, 48, 065404-1-19.
- Li, L., Yang, Y., Peng, H., & Wang, X. (2006). Parameters identification of chaotic systems via chaotic ant swarm. *Chaos, Solitons and Fractals*, 28, 1204-1211.
- Lin, K. (2006). Entrainment and chaos in a pulse-driven Hodgkin-Huxley oscillator. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 5, 179-204.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, 20, 130-141.
- Lynch, S. (2003). *Dynamical Systems with Applications using Matlab*. Birkhäuser.
- Marwan, N., Romano, M. C., Thiel, M., & Kurths, J. (2007). Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Physics Reports*, 438, 237-329.
- Mascagni, M. V. (1989). Methods in neuronal modeling: From synapses to networks. In C. Koch & I. Segev (Eds.), (p. 439-484). MIT Press.
- May, R. M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261, 459-467.
- Mitchell, M. (2009). *Complexity: a guided tour*. Oxford University Press.
- Monteiro, L. H. A. (2006). *Sistemas dinâmicos. (in portuguese)* (2nd ed.). Livraria da Física.
- Müller, P. C. (1995). Calculation of Lyapunov exponents for dynamic systems with discontinuities. *Chaos, Solitons and Fractals*, 5, 1671-1681.
- Nese, J. M. (1989). Quantifying local predictability in phase space. *Physica D*, 35, 237-250.
- Oseledec, V. (1968). A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Transactions of Moscow Mathematical Society*, 19, 197-231.
- Ott, E., Grebogi, C., & Yorke, J. A. (1990). Controlling Chaos. *Physical Review Letters*, 64, 1196-1199.
- Papoulis, A. (2002). *Probability, random variables and stochastic processes* (4th ed.). McGraw-Hill.
- Parker, T. S., & Chua, L. O. (1989). *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer Verlag.

- Parmananda, P., Mena, C. H., & Baier, G. (2002). Resonant forcing of a silent Hodgkin-Huxley neuron. *Physical Review E*, *66*, 047202-1-047202-4.
- Pecora, L. M., & Carroll, T. L. (1990). Synchronization in chaotic system. *Physics Review Letters*, *64*, 821-824.
- Pollicott, M., & Yuri, M. (1998). *Dynamical Systems and Ergodic Theory*. Cambridge University Press.
- Pomeau, Y., & Manneville, P. (1980). Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Communications in Mathematical Physics*, *74*, 189-197.
- Poston, I., & Stewart, I. (1996). *Catastrophe theory and its applications*. Dover.
- Provenzale, A., Smith, L. A., Vio, R., & Murante, G. (1992). Distinguishing between low-dimensional dynamics and randomness in measured time series. *Physica D*, *58*, 31-49.
- Pyragas, K. (1992). Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letters A*, *170*, 421-426.
- Rabinovich, M. I., & Abarbanel, H. D. I. (1998). The Role of Chaos in Neural Systems. *Neuroscience*, *87*, 5-14.
- Ramasubramanian, K., & Sriram, M. S. (2000). A comparative study of computation of Lyapunov spectra with different algorithms. *Physica D*, *139*, 72-86.
- Rinzel, J., & Miller, R. N. (1980). Numerical calculation of stable and unstable periodic solutions to the Hodgkin-Huxley equations. *Mathematical Biosciences*, *49*, 27-59.
- Rohde, G. K., Nichols, J. M., Dissinger, B. M., & Bucholtz, F. (2008). Stochastic analysis of recurrence plots with applications to the detection of deterministic signals. *Physica D*, *237*, 619-629.
- Romano, J. M. T., F. Attux, R. de, Cavalcante, C. C., & Suyama, R. (2010). *Unsupervised signal processing: Channel equalization and source separation*. CRC Press.
- Romeiras, F. J., Grebogi, C., Ott, E., & Dayawansa, W. P. (1992). Controlling chaotic dynamical systems. *Physica D*, *58*, 165-184.
- Ruelle, D., & Takens, F. (1971). On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, *20*, 167-192.
- Ruggiero, M. A. G., & Lopes, V. L. R. (1996). *Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais*. Makron.
- Sauer, T. (1992). A noise reduction method for signal from nonlinear systems. *Physica D*, *58*, 193-201.
- Schittnekopf, C., & Deco, G. (1997). Identification of deterministic chaos by information-theoretic measure of the sensitive dependence on the initial conditions. *Physica D*, *110*, 173-181.
- Shadden, S. C., Lekien, F., & Marsden, J. E. (2005). Definition and properties of Lagrangian coherent

- structures from finite-time Lyapunov exponents in two dimension aperiodic flow. *Physica D*, 212, 271-304.
- Shannon, C. (1948). A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, 27, 379-423.
- Shaw, R. (1981). Strange attractors, Chaotic Behavior and Information Flow. *Z. Naturforsch*, 36A, 80-112.
- Shimada, I., & Nagashima, T. (1979). A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems. *Progress of Theoretical Physics*, 61, 1605-1616.
- Skarda, C. A., & Freeman, W. J. (1987). How brains make chaos in order to make sense of the world. *Behavioral and Brain Sciences*, 10, 161-195.
- Stefanski, A. (2000). Estimation of the largest Lyapunov exponent in systems with impacts. *Chaos, Solitons and Fractals*, 11, 2444-2451.
- Strogatz, S. H. (2001). *Nonlinear dynamics and chaos: With application to physics, biology, chemistry, and engineering*. Westview Press.
- Strogatz, S. H. (2004). *Sync: The emerging science of spontaneous order*. Hyperion.
- Sun, Y., Zhou, D., Rangan, A. V., & Cai, D. (2010). Pseudo-Lyapunov exponents and predictability of Hodgkin-Huxley neuronal network dynamics. *Journal of Computational Neuroscience*, 28, 247-266.
- Takens, F. (1981). Detecting Strange Attractors in Turbulence. *Lecture Notes in Mathematics*, 898, 366-381.
- Tam, M. W., Lau, F. C. M., & Tse, C. K. (2006). *Digital Communications with Chaos: Multiple Access Techniques and Performance*. Elsevier Science Inc.
- Tanaka, G., Ibarz, B., Sanjuan, M. A. F., & Aihara, K. (2006). Synchronization and propagation of bursts in networks of coupled map neurons. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 16, 013113-1-013113-10.
- Thom, R. (1994). *Strutural Stability and Morphogenesis*. Westview Press.
- Trulla, L. L., Giuliani, A., Zbilut, J. P., & Webber, C. L. (1996). Recurrence quantification analysis of the logistic equation with transients. *Physics Letters A*, 223, 255-260.
- Vigario, R., Sarela, J., Jousmiki, V., Hamalainen, M., & Oja., E. (2000, May). Independent component approach to the analysis of EEG and MEG recordings. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 47(5), 589-593.
- Wan, E. A., & Merwe, R. V. der. (2000). The unscented kalman filter for nonlinear estimation. In *Proceedings of adaptive systems for signal processing, communication and control simposium* (p. 153-158).
- Weiss, J. N., Garfinkel, A., Karagueuzian, H. S., Qu, Z., & Chen, P.-S. (1999). Chaos and the

- Transition to Ventricular Fibrillation - A New approach to the Antiarrhythmic Drug Evaluation. *Circulation*, 99, 2819-2826.
- Weiss, T. F. (1996). *Cellular Biophysics* (Vol. 2). MIT Press.
- Wiesel, W. E. (1992). Extended Lyapunov Exponents. *Physical Review A*, 46, 7480-7491.
- Williams, C. (2001). Chaotic communications over radio channels. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental theory and Applications*, 48, 1394-1404.
- Williams, G. P. (1997). *Chaos Theory Tamed*. Joseph Henry Press.
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., & Vastano, J. A. (1985). Determining Lyapunov exponents from time series. *Physica D*, 16, 285-317.
- Wu, C. W., & Chua, L. O. (1993). A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 3, 1619-1627.
- Yates, R. D., & Goodman, D. J. (1999). *Probability and Stochastic Processes*. John Wiley & Sons.
- Zbilut, J. P., Giuliani, A., & Webber, C. L. (1998). Detecting deterministic signals in exceptionally noise environments using cross-recurrence quantification. *Physics Letters A*, 246, 122-128.
- Zbilut, J. P., Giuliani, A., & Webber, C. L. (2000). Recurrence quantification analysis as an empirical test to distinguish relatively short deterministic versus random number series. *Physics Letters A*, 267, 174-178.