

**Universidade Estadual de Campinas**

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO



# Detetabilidade de Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica, por

**Eduardo Fontoura Costa**

Mestre em Engenharia Elétrica - EESC/USP

em 01 de março de 2002, sob a orientação de

**João Bosco Ribeiro do Val**

perante a banca examinadora constituída por

**João Bosco Ribeiro do Val**

**Marcelo Dutra Fragoso**

**Marinho Gomes de Andrade Filho**

**Oswaldo Luiz do Valle Costa**

**Vilma Alves de Oliveira**

**José Claudio Geromel**

**FEEC/UNICAMP**

**LNCC**

**ICMC/USP**

**POLI/USP**

**EESC/USP**

**FEEC/UNICAMP**



À minha esposa Cláudia, com amor.



## AGRADECIMENTOS

Ao professor João Bosco Ribeiro do Val, pela excelente orientação fornecida para a elaboração deste trabalho e pela amizade da qual desfrutei.

À minha esposa Cláudia Maria Nascimento Fontoura Costa, por ter despendido amor e compreensão que me motivaram a prosseguir, mesmo nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais Oswaldo Fontoura Costa e Maria de Lourdes Moura Costa, por todo incentivo, suporte e carinho.

À Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pela bolsa concedida durante o primeiro ano de doutorado.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pela bolsa concedida durante os últimos três anos de doutorado.

A todos os colegas, professores e funcionários da Universidade Estadual de Campinas.



## Resumo

Este trabalho aborda conceitos estocásticos de detetabilidade e observabilidade para sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos. Obtêm-se resultados que estreitam as similaridades com os conceitos determinísticos correspondentes, como é o caso de uma versão estocástica para o conhecido resultado de invariância de trajetórias em espaços não observados. Também se introduz um conceito de detetabilidade fraca, o qual generaliza o conceito de observabilidade fraca e reproduz a propriedade de que trajetórias não observadas são estáveis. Com respeito ao problema linear quadrático e às equações algébricas de Riccati acopladas que a ele se relacionam, mostra-se que detetabilidade fraca vincula a finitude do funcional de custo com a convergência da trajetória de estado e que assegura a unicidade e a função estabilizante da equação de Riccati. Desenvolvem-se ainda métodos de solução baseados em recursões de equações de Riccati desacopladas que, aplicados a sistemas fracamente detetáveis, convergem se e somente se o sistema é estabilizável na média quadrática. Apresentam-se extensões de resultados para o caso a tempo discreto e para o caso no qual o conjunto de estados de Markov é enumerável. Exemplos ilustrativos encontram-se inclusos.

## Abstract

We deal with stochastic concepts of detectability and observability for Markov jump linear systems. Results that strengthen the similarities with the corresponding deterministic concepts are developed, like a stochastic counterpart of the well known result on the invariance of trajectories within non-observable subspaces. We introduce a concept of weak detectability, which generalizes the weak observability concept and it retrieves the property that a non-observed trajectory is stable. The role that those concepts play in the linear quadratic control problem and the associated coupled algebraic Riccati equations is presented; in particular, it is shown that the system is weakly detectable if and only if the state trajectory converges whenever the cost functional is finite. Relying on the assumption of weak detectability, we develop methods for solving the linear quadratic problem that are based on iterations of uncoupled algebraic Riccati equations, which converge if and only if the system is mean-square stabilizable. Extensions of the results to the discrete time case and the case of infinite Markov states are provided. Illustrative examples are included.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Os SLSM . . . . .	4
1.1.1	O SLSM em tempo discreto e de dimensão infinita . . . . .	7
1.2	Resultados Preliminares . . . . .	8
<b>2</b>	<b>W-observabilidade e W-detetabilidade para SLSM</b>	<b>13</b>
2.1	W-Observabilidade e Matrizes de Observabilidade . . . . .	16
2.1.1	Propriedades do conjunto de matrizes de observabilidade e invariância das trajetórias não fracamente observadas . . . . .	20
2.2	W-detetabilidade . . . . .	22
2.2.1	W-detetabilidade e MS-detetabilidade . . . . .	26
<b>3</b>	<b>W-Detetabilidade e o problema Linear Quadrático</b>	<b>33</b>
3.1	W-detetabilidade e o vínculo entre MS-estabilidade de trajetórias e a finitude do custo linear quadrático . . . . .	34
3.2	W-detetabilidade e o problema LQ com saltos . . . . .	35
3.3	Exemplos ilustrativos . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Métodos de solução para as EARA</b>	<b>45</b>
4.1	Resultados básicos para SLD . . . . .	47
4.2	O Método I para solução das EARA . . . . .	48
4.2.1	Unicidade da seqüência . . . . .	50
4.2.2	Sistema auxiliar aumentado e a prova do Teorema 4.1 . . . . .	54
4.3	O Método II para solução das EARA . . . . .	59
4.4	Exemplos numéricos . . . . .	61
<b>5</b>	<b>W-detetabilidade para SLSM a tempo discreto</b>	<b>65</b>
5.1	Síntese de resultados . . . . .	65



5.2	O artigo intitulado “ <i>Weak Detectability and the Linear-Quadratic Control Problem of Dis-crete-time Markov Jump Linear Sys-tems</i> ” . . . . .	68
5.2.1	Introduction . . . . .	69
5.2.2	Basic Concepts . . . . .	71
5.2.3	Observability matrices, weak detectability and stabi- lizing CARE . . . . .	72
5.2.4	A Method for Solving the LQ Problem . . . . .	76
5.2.5	Numerical Examples . . . . .	86
5.2.6	Conclusions . . . . .	87
5.2.7	Appendix A - Basic Results . . . . .	89
5.2.8	Appendix B - Data of the Examples . . . . .	89
<b>6</b>	<b>W-detetabilidade para SLSM de dimensão infinita</b>	<b>91</b>
6.1	Síntese de resultados . . . . .	92
6.2	O artigo intitulado “ <i>On a Detectability Concept of Discrete-Time Infinite Markov Jump Linear Systems</i> ” . . . . .	94
6.2.1	Introduction . . . . .	95
6.2.2	Notation and Basic Results . . . . .	96
6.2.3	Weak Detectability . . . . .	98
6.2.4	W-Observability Concept . . . . .	104
6.2.5	Examples . . . . .	105
6.2.6	Conclusions . . . . .	107
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>109</b>



# Lista de Exemplos

1.1	Um SLSM instável, com a forma $A_i + \frac{\lambda_{ii}}{2}I$ estável . . . . .	11
1.2	As formas $A_i + \frac{\lambda_{ii}}{2}I$ sempre são estáveis . . . . .	12
2.1	Um SLSM W-observável com pares $(A_i, C_i)$ não observáveis . .	20
2.2	Comparando MS-detetabilidade, W-observabilidade e W-detetabilidade . . . . .	29
2.3	Um SLSM simples, W-detetável, não MS-detetável . . . . .	30
3.1	Soluções múltiplas das EARA . . . . .	42
3.2	Solução única, MS-estabilizante e semidefinida positiva das EARA . . . . .	43
3.3	Solução única, MS-estabilizante e definida positiva das EARA	43
4.1	Comparando o Método I e o método em (do Val et al., 1999) .	61
4.2	Um exemplo numérico do problema LQ envolvendo o modelo de um mono-ciclo . . . . .	61
4.3	EARA com conjunto vazio de soluções associadas a um SLSM quase certamente estabilizável . . . . .	62
5.1	Escolha do horizonte do funcional $W$ como sendo $n^2N$ . . . . .	66
6.1	Funcional $W$ positivo, mas sem limitante inferior, associado a um SLSM de dimensão infinita . . . . .	93



# Capítulo 1

## Introdução

Os conceitos de detetabilidade e observabilidade aparecem em diferentes contextos na teoria de sistemas dinâmicos. Em um destes cenários, observabilidade assegura que a condição inicial do estado do sistema pode ser precisamente determinada através das observações da saída do sistema durante um tempo arbitrário, enquanto detetabilidade assegura que o estado aproxima-se da origem sempre que não se consiga determinar a condição inicial, o que pode ser interpretado como assegurar que trajetórias não observadas são estáveis.

Outro contexto relevante é o da caracterização do comportamento de soluções para problemas de filtragem e controle. Nesta perspectiva, observabilidade usualmente assegura que o funcional de custo considerado é positivo e detetabilidade assegura que o funcional de custo é positivo sempre que a trajetória do estado não converge suficientemente rápido para a origem. Além disto, garante-se que o sistema é estável sempre que é finito o funcional de custo de horizonte infinito. Este vínculo entre soluções ótimas e estabilizantes é fundamental, por exemplo, nos problemas de controle conhecidos como lineares quadráticos, nos quais se objetivam simultaneamente a minimização de um funcional de custo e a estabilização do sistema. Em outra interpretação possível, o conceito de detetabilidade relaciona a convergência do estado com a convergência da saída.

Levando em conta a relevância dos fatos acima descritos, depreende-se a grande importância de que os conceitos de observabilidade e detetabilidade desfrutem na teoria de sistemas dinâmicos. De fato, um grande número de resultados encontram-se disponíveis na literatura tratando destes conceitos, e atualmente a teoria a seu respeito é bastante completa. Este é o caso dos

sistemas lineares determinísticos invariantes no tempo (SLD) (Kailath, 1980), dos sistemas determinísticos variantes no tempo (Anderson e Moore, 1981; Hager e Horowitz, 1976), e, até certa extensão, dos Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos (SLSM) (Costa e Fragoso, 1995; do Val et al., 1999; Ji e Chizeck, 1990a; Morozan, 1995; Rami e Ghaoui, 1996).

Entre os resultados encontrados na literatura de SLD, para referência posterior destacamos os seguintes:

Propriedade I. Subespaços não observados são invariantes ou, em outras palavras, trajetórias não observadas permanecem não observadas;

Propriedade II. Detetabilidade generaliza observabilidade

Propriedade III. Detetabilidade assegura que trajetórias não observadas são estáveis;

e, se considerarmos as usuais matrizes de observabilidade de SLD,

Propriedade IV. Um sistema é observável se e somente se a matriz de observabilidade tem posto completo.

Ainda, no contexto do problema de controle linear quadrático e das equações de Riccati,

Propriedade V. Detetabilidade vincula finitude do funcional de custo com a convergência da trajetória associada;

Propriedade VI. Detetabilidade assegura que a equação de Riccati tem uma solução única e estabilizante.

Propriedade VII. Detetabilidade é equivalente a propriedade de que a solução mínima da equação de Riccati seja estabilizante.

Por outro lado, o desenvolvimento destes conceitos para SLSM não se encontra em igualdade com os casos citados acima. Mencionamos, como forte indício para esta afirmação, que não se sabe se as Propriedades I-V e VII valem para SLSM. Ainda, ressaltamos que a Propriedade VI vale para conceitos antes existentes de detetabilidade, como é o caso de detetabilidade na média quadrática, mas com um apreciável grau de conservadorismo.

Este trabalho visa, essencialmente, a preencher estas lacunas. Em particular, recupera-se cada uma das Propriedades I-VII, em termos próprios

para SLSM. Somando estes resultados à outras similaridades já existentes, como apresentado sucintamente na Seção 1.2, alcança-se um quadro bastante completo de paralelos com a teoria de SLD. Na seqüência, descrevem-se brevemente a estrutura do presente texto e os resultados obtidos.

No Capítulo 2, inicialmente apresenta-se um conjunto de matrizes de observabilidade para SLSM, bem como alguns resultados associados. Entre eles, destacamos o resultado que estabelece que um SLSM é fracamente observável ou *W*-observável (“*W*” do Inglês, *weak*) se e somente se cada matriz deste conjunto é de posto completo, e o resultado de que trajetórias não observadas permanecem não observadas, nos termos do Corolário 2.2 (ii); estes resultados recuperam as Propriedades I e IV, respectivamente. Na Seção 2.2, introduz-se um novo conceito de detetabilidade, chamado de detetabilidade fraca ou *W*-detetabilidade. O conceito é formulado como uma relaxação de *W*-observabilidade, de forma que vale trivialmente a Propriedade II. Novos resultados são alcançados a partir da análise do conceito de *W*-detetabilidade; entre eles, destacam-se o do Lema 2.7, que recupera a Propriedade III, e o do Teorema 2.2, que caracteriza *W*-detetabilidade em função de detetabilidade na média quadrática, sendo este último o conceito de detetabilidade usualmente encontrado na literatura de SLSM.

O problema linear quadrático (LQ) e as equações algébricas de Riccati acopladas (EARA) são abordados no Capítulo 3, no que tange a *W*-detetabilidade. Na Seção 3.1, mostra-se que a condição de *W*-detetabilidade é equivalente a requerer que a trajetória de estado convirja na média quadrática sempre que o custo seja finito, numa extensão da Propriedade V. Na Seção 3.2, no contexto de observação completa de estado, demonstra-se que *W*-detetabilidade é invariante à realimentação, nos termos do Lema 3.2. Esta invariância, em conjunto com o resultado antes mencionado, permite assegurar que se uma ação de controle tem custo finito associado, então é uma ação estabilizante na média quadrática, o que torna *W*-detetabilidade útil no problema LQ. Quanto ao papel de *W*-detetabilidade na caracterização de soluções para as EARA, elucida-se que o conceito assegura MS-estabilidade e, indiretamente, unicidade (veja o Lema 3.2).

No Capítulo 4 desenvolvem-se e analisam-se métodos numéricos de solução para as EARA. Ambos os métodos apresentados baseiam-se em recursões de equações algébricas de Riccati desacopladas (EARD). O Método I consiste em uma modificação do método encontrado em (do Val et al., 1999), visando a obter um método que possa ser aplicado em sistemas *W*-detetáveis. Para estes sistemas, mostra-se que o método converge para a solução das EARA

se e somente se uma solução existe ou, equivalentemente, se o sistema é estabilizável na média quadrática (veja o Teorema 4.1). Já o Método II apresenta convergência incondicional à solução mínima das EARA, evidentemente, desde que haja ao menos uma solução. Assim sendo, trata-se de um método utilizável para testar numericamente a existência de soluções das EARA.

Extensões de resultados para o caso a tempo discreto e para o caso em que o conjunto de estados de Markov é enumerável (não necessariamente finito) são apresentadas nos Capítulos 5 e 6, respectivamente. Em virtude de os resultados obtidos não serem extensões diretas dos resultados dos capítulos anteriores, mas, sim, serem similares a estes últimos, optou-se pela apresentação, em cada um destes capítulos, de uma síntese de resultados precedendo a inclusão de um artigo contendo os detalhes.

Mencionamos, finalmente, que os resultados encontrados neste texto são também encontrados em (Costa e do Val, n.d.a), no contexto a tempo contínuo, em (do Val e Costa, 2002), no contexto do método de solução para as EARA em tempo contínuo, em (Costa e do Val, 2001) e (Costa e do Val, n.d.b), onde se encontram extensões para tempo discreto, e em (Costa et al., n.d.a), onde se encontram extensões para o caso com um conjunto enumerável de estados de Markov.

## 1.1 Os SLSM

De forma sucinta, os SLSMs constituem-se em sistemas estocásticos cuja dinâmica muda de forma abrupta em certos instantes e comportam-se como sistemas lineares nos demais instantes. As alterações abruptas na dinâmica são denominadas saltos, os quais se referem à mudanças em parâmetros do sistema e ocorrem de acordo com uma cadeia de Markov subjacente. Desta forma, a mudança para outro modo de operação ocorre de acordo com certa probabilidade, dependente apenas do modo em que o sistema encontra-se em cada instante.

Para exemplificar, considere um sistema econômico a tempo contínuo assumindo três modos de operação, cada um com dinâmica descrita pelas representações  $(A_1, B_1)$ ,  $(A_2, B_2)$  e  $(A_3, B_3)$  de acordo com a situação da economia, respectivamente “boa”, “neutra” ou “ruim”. Enquanto a economia encontra-se numa situação “boa”, o sistema é descrito por uma equação dinâmica da forma  $\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t)$ , e apresenta taxas de transição para

os outros modos de operação dependendo unicamente do modo atual, dadas, digamos, por  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{12}$  e  $\lambda_{13}$ , e assim analogamente para os demais modos.

Os SLSM abordados neste trabalho são definidos em um espaço fundamental de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$  como sendo:

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \dot{x}(t) &= A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t), & x(t_0) &= x_0, \theta(t_0) \sim \mu_0 \\ y(t) &= C_{\theta(t)}x(t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

com  $t \geq t_0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , sendo  $x$  o vetor de estado,  $u$  o vetor de controle e  $y$  o vetor de saída medido. Assim, sempre que  $\theta(t) = i$ ,  $A_{\theta(t)} = A_i$ ,  $B_{\theta(t)} = B_i$ , e  $C_{\theta(t)} = C_i$ ;  $A = (A_1, \dots)$ ,  $B = (B_1, \dots)$ ,  $C = (C_1, \dots)$  são conjuntos de matrizes conhecidas de dimensões apropriadas. O estado de Markov  $\theta(t)$ , também chamado de variável de salto ou modo, assume valores em um conjunto  $S = \{1, \dots, N\}$ . A probabilidade de transição de  $i$  para  $j$  é dada por

$$\Pr\{\theta(t + \delta) = j | \theta(t) = i\} = \begin{cases} \lambda_{ij}\delta + o(\delta), & i \neq j \\ 1 + \lambda_{ij}\delta + o(\delta), & i = j \end{cases}$$

com  $\delta > 0$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} o(\delta)\delta^{-1} = 0$ , sendo  $\lambda_{ij} \geq 0$  a taxa de transição de  $i$  para  $j$ , com  $\lambda_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij}$ . A matriz de taxa de transição é denotada por  $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ . Ao longo do texto, utiliza-se a notação  $(A, \Lambda)$  para se referir à versão do sistema  $\Phi$  com entradas e saídas nulas; similarmente,  $(A, C, \Lambda)$  e  $(A, B, \Lambda)$  referem-se às versões com entrada nula e saída nula, respectivamente.

Tendo apresentado o SLSM, destacam-se, na seqüência, as razões pelas quais eles são intensamente estudados, juntamente com algumas das principais referências bibliográficas.

Atualmente, os sistemas de controle devem manter um comportamento aceitável e respeitar exigências de desempenho, mesmo em situações práticas qualificadas, como no caso de ocorrência de alterações abruptas nos parâmetros do sistema. Nestes casos, a utilização de um modelo estocástico baseado em pontos representativos que descrevam vários possíveis cenários ou combinações de parâmetros, como é o caso dos SLSM, é uma alternativa interessante. Estas ocorrências são freqüentes em sistemas encontrados na prática que apresentem alterações ambientais repentinas, alterações econômicas súbitas, ocorrências de falhas, reparos, ou modificações do ponto de operação. Entre as aplicações encontram-se receptores térmicos solares (Sworder e Rogers, 1983), modelos macroeconômicos (do Val e Başar, 1999), sistemas robóticos (Saridis, 1983) e sistemas aeronáuticos (Athans et al., 1977).

Além da motivação de aspecto prático mencionada acima, tem-se que os SLSM constituem uma classe de sistemas que generaliza a amplamente conhecida classe de sistemas lineares determinísticos e, ainda assim, é suficientemente especializada para apresentar resultados fortes que recuperam propriedades de sistemas lineares determinísticos. Destacamos os resultados que se referem às EARA associadas ao problema LQ e ao conceito de MS-estabilizabilidade, o qual garante a existência de soluções das EARA, os quais são encontrados, por exemplo, em (Ji e Chizeck, 1990a), (Ji e Chizeck, 1990b), (Ji et al., 1991), (Ji e Chizeck, 1992), (Morozan, 1995), (Rami e Ghaoui, 1996), (Costa e Fragoso, 1995), (Costa et al., 1999), (Costa e Marques, 2000) e (Fragoso e Baczynski, 2001).

Finalizando esta seção, tecemos algumas comparações entre a abordagem através de SLSM e a abordagem via controle robusto considerando intervalos dentro dos quais os parâmetros devam permanecer (veja, por exemplo, (Geromel et al., 1995) e (Boyd et al., 1994)). Em antecipação a resultados apresentados neste texto, mencionamos que o SLSM descrito pelo conjunto de matrizes  $A = (A_1, \dots, A_N)$  é estável em certo sentido estocástico apropriado se e somente se existir um conjunto de matrizes  $P = (P_1, \dots, P_N)$ , com  $P_i$  semidefinida positiva,  $i = 1, \dots, N$ , que satisfaça o seguinte conjunto de equações:

$$A_i' P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.2)$$

Agora, considere o sistema descrito por  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  onde  $A(t)$  assume valores no conjunto das combinações convexas dos elementos do conjunto  $A$ ; em outras palavras, seja o sistema com incertezas politópicas descritas pelos vértices  $A_1, \dots, A_N$ . Este sistema é deterministicamente estável se e somente se (1.2) for factível, considerando a restrição adicional:  $P_i = P_j$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ . Isto indica que o conjunto de soluções da abordagem robusta politópica é tão “menor” que o conjunto de soluções da abordagem via SLSM quanto mais restritiva for a condição  $P_i = P_j$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  e, evidentemente, quanto maior for a variação nos parâmetros, mais restritiva será esta condição. Assim sendo, se as alterações nos parâmetros são “extensas”, a abordagem robusta freqüentemente torna-se inadequada. Frisamos, contudo, que a abordagem via SLSM não permite combinações convexas dos parâmetros e proporciona estabilidade estocástica, em contraste com a abordagem robusta, a qual proporciona estabilidade robusta.

### 1.1.1 O SLSM em tempo discreto e de dimensão infinita

Este trabalho também aborda a versão a tempo discreto do SLSM em (1.1), bem como a versão de dimensão infinita em tempo discreto.

A versão a tempo discreto é obtida de forma imediata a partir do caso a tempo contínuo através da substituição das equações diferenciais por equações a diferenças. Denota-se por  $k \in \mathbb{N}$  os instantes amostrais. Quanto à cadeia de Markov, tem-se que a probabilidade de transição é dada simplesmente por  $Pr\{\theta(k+1) = j | \theta(k) = i\} = p_{ij}$ ; evidentemente,  $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$  para todo  $i = 1, \dots, N$ . A matriz de taxa de transição é representada por  $P = [p_{ij}]$ .

A versão denominada de dimensão infinita também é obtida de forma direta do caso de dimensão finita ao se considerar um conjunto enumerável  $S = \{1, 2, \dots\}$  de estados de Markov. Um ponto importante a ser ressaltado é que este caso é analiticamente muito mais delicado e que apresenta certas discrepâncias em relação ao caso de dimensão finita. Nesta linha, mencionamos antecipadamente que, no caso de dimensão infinita, a convergência na média quadrática,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E\{\|x(k)\|^2\} = 0$$

é mais fraca do que a convergência estocástica,

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\{\|x(k)\|^2\} < \infty$$

Isto faz com que, por exemplo, MS-estabilidade seja mais fraca do que S-estabilidade, diferentemente do que ocorre no caso de dimensão finita. No contexto do problema LQ, a noção estocástica é utilizada, uma vez que é mais adequada; por exemplo, citamos que MS-estabilidade não garante que o funcional de custo quadrático de horizonte infinito seja finito (veja a Seção 6.1).

Considerando que os resultados obtidos para os casos discreto e de dimensão infinita guardam semelhanças com o caso contínuo finito, mas que suas provas não são meras adaptações, adotou-se a exposição destes casos de forma isolada e autocontida, nos Capítulos 5 e 6 respectivamente. Ressaltamos que todos os resultados dos demais capítulos referem-se estritamente ao caso contínuo de dimensão finita.

Mencionamos que, em razão das dificuldades analíticas do caso de dimensão infinita, apenas alguns dos resultados do caso de dimensão finita são estendidos; outros não são extensíveis ou ainda não foram suficientemente estudados. Apenas o caso a tempo discreto é considerado.

## 1.2 Resultados Preliminares

Nesta seção, apresentam-se notações e resultados para referência posterior. Consideram-se estritamente SLSM em tempo contínuo e de dimensão finita.

Seja  $\mathbb{R}^n$  o espaço Euclidiano de dimensão  $n$ . Sejam  $\mathcal{R}^{r,n}$  (respectivamente,  $\mathcal{R}^n$ ) o espaço linear normado formado de todas as matrizes reais de dimensão  $r \times n$  (respectivamente,  $n \times n$ ) e  $\mathcal{R}^{n,0}$  ( $\mathcal{R}^{n,+}$ ) o cone convexo fechado das matrizes simétricas semidefinidas positivas (o cone aberto das matrizes simétricas definidas positivas);  $U'$  denota o transposto de  $U$  e  $U \geq V$  ( $U > V$ ) significa que  $U - V \in \mathcal{R}^{n,0}$  ( $U - V \in \mathcal{R}^{n,+}$ ). Para  $U \in \mathcal{R}^{n,q}$ ,  $\mathcal{N}\{U\}$  e  $\mathcal{R}\{U\}$  representam o núcleo e a imagem de  $U$ , respectivamente. Para  $U \in \mathcal{R}^n$  e  $V \in \mathcal{R}^{r,n}$ ,  $\mathcal{O}(U, V) = [V' : U'V' : \dots : U^{n-1}V']'$  é a matriz de observabilidade do par  $(U, V)$ .

Seja  $\mathcal{M}^{n,q}$  o espaço linear formado por um número  $N$  de matrizes tais que  $\mathcal{M}^{n,q} = \{U = (U_1, \dots, U_N) : U_i \in \mathcal{R}^{n,q}, i = 1, \dots, N\}$ ; ainda,  $\mathcal{M}^n \equiv \mathcal{M}^{n,n}$ . Denota-se como  $\mathcal{M}^{n,0}$  ( $\mathcal{M}^{n,+}$ ) o conjunto  $\mathcal{M}^n$  quando ele é constituído de  $U_i \in \mathcal{R}^{n,0}$  ( $U_i \in \mathcal{R}^{n,+}$ ) para todo  $i = 1, \dots, N$ .  $U \geq V$  ( $U > V$ ) significa que  $U - V \in \mathcal{M}^{n,0}$  ( $U - V \in \mathcal{M}^{n,+}$ ). Sabe-se que  $\mathcal{M}^{n,q}$  com o produto escalar

$$\langle U, V \rangle = \sum_{j=1}^N \text{tr}\{U'_j V_j\}$$

é um espaço de Hilbert. Além disto, define-se a norma  $\|U\| = \langle U, I \rangle$  em  $\mathcal{M}^{n,0}$ .

Considere o sistema  $\Phi$  em (1.1). Seja  $t_0 \geq 0$ ; para  $i = 1, \dots, N$  define-se

$$X_i(t) = E\{x(t)x(t)'\mathbf{1}_{\{\theta(t)=i\}}|\mathcal{F}_{t_0}\}, \quad t \geq t_0 \quad (1.3)$$

Usualmente  $t_0$  será considerado igual a zero. Com esta notação pode-se escrever, por exemplo, que  $E\{\|x(t)\|^2|\mathcal{F}_0\} = \langle X(t), I \rangle = \|X(t)\|$ .

Considere o operador  $\mathcal{L} : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{M}^n$  e o seu adjunto no sentido do produto

escalar  $\mathcal{T} : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{M}^n$  definidos como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_i(U) &= A_i'U_i + U_iA_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}U_j \\ \mathcal{T}_i(U) &= A_iU_i + U_iA_i' + \sum_{j=1}^N \lambda_{ji}U_j, \quad i = 1, \dots, N\end{aligned}\tag{1.4}$$

Denota-se  $\mathcal{L}^0(U) = U$  e, para  $k \geq 1$ ,  $\mathcal{L}^k(U)$  é definido recursivamente por  $\mathcal{L}^k(U) = \mathcal{L}(\mathcal{L}^{k-1}(U))$ ; a mesma notação aplica-se à  $\mathcal{T}$ . Sejam também  $L(t)$  e  $U(t)$ ,  $t \geq 0$ , definidos pelas equações lineares diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{L}_i(t) &:= \mathcal{L}_i(L(t)) + C_i' C_i, \quad L(0) = 0, t \geq 0 \\ \dot{U}_i(t) &:= \mathcal{T}_i(U(t)), \quad U(0) = U \in \mathcal{M}^n\end{aligned}\tag{1.5}$$

para cada  $i \in \mathcal{S}$ . Note que  $L(t_0) \leq L(t_1)$  sempre que  $0 \leq t_0 \leq t_1$ , já que  $\dot{L}_i(t) \geq 0$  para todo  $t \geq 0$ . Os operadores  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{T}$  são lineares e  $L(t), U(t) \in \mathcal{M}^{n0}$  definidos por (1.5) são únicos.

Considere agora o funcional

$$W^{t_0,t}(x, \theta) = E \left\{ \int_{t_0}^{t+t_0} x(\tau)' C_{\theta(\tau)}' C_{\theta(\tau)} x(\tau) d\tau \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right\}\tag{1.6}$$

definido sempre que  $x(t_0) = x$  e  $\theta(t_0) = \theta$ . Os seguintes resultados são adaptados de (Costa et al., 1999) e (Ji e Chizeck, 1990a); a prova é omitida.

**Proposição 1.1.** *As seguintes afirmações valem:*

(i)

$$W^{t_0,t}(x(t_0), \theta(t_0)) = \int_0^t \langle U(\tau), C' C \rangle d\tau = \langle U, L(t) \rangle\tag{1.7}$$

sempre que  $U_i = x(t_0)x(t_0)'$  para  $\theta(t_0) = i$  e  $U_j = 0$ ,  $j \neq i$ .

(ii)

$$\dot{X}_i(t) = \mathcal{T}_i(X(t)), \quad t \geq 0, i = 1, \dots, N\tag{1.8}$$

A Proposição 1.1 (i) permite-nos generalizar a definição do funcional  $W$ , como segue: para  $U \in \mathcal{M}^n$  define-se

$$W^{t_0,t}(U) = \int_0^t \langle U(\tau), C' C \rangle d\tau = \langle U, L(t) \rangle\tag{1.9}$$

e denota-se simplesmente  $W^t(\cdot)$  quando  $t_0$  é igual a zero.

Salientamos que, por conveniência, conforme o contexto emprega-se alternativamente uma das formas equivalentes  $W(x(t_0), \theta(t_0))$  ou  $W(X)$ , onde  $X_i = x(t_0)x(t_0)'$  para  $i = \theta(t_0)$  e  $X_i = 0$  para  $i \neq \theta(t_0)$ .

Na seqüência, apresenta-se a definição de estabilidade média quadrática (MS-estabilidade), a qual é encontrada, por exemplo, em (Ji et al., 1991), (Ji e Chizeck, 1992), (Morozan, 1995), (Costa e Fragoso, 1995) e (Fragoso e Baczynski, 2001).

**Definição 1.1 (MS-estabilidade).**  $(A, \Lambda)$  é estável na média quadrática (MS-estável) se  $\lim_{t \rightarrow \infty} E\{\|x(t)\|^2\} = 0, \forall x_0, \theta_0$ .

Condições necessárias e/ou suficientes para a estabilidade de sistemas com saltos são encontradas, por exemplo, em (Ji e Chizeck, 1990b), (Costa e Fragoso, 1995), (do Val e Başar, 1999) respectivamente para problemas de controle de horizonte infinito a tempo contínuo e a tempo discreto e para horizonte retrocedente. Por ilustração, vale mencionar que a estabilidade de cada modo de operação (autovalores com parte real negativa ou dentro do círculo unitário, respectivamente para o caso contínuo e discreto), não é uma condição necessária nem suficiente para a MS-estabilidade do sistema, em contraste com SLD. Sabe-se também que, o conceito de MS-estabilidade é equivalente a outros conceitos de segundo momento, como estabilidade estocástica e estabilidade exponencial (Feng et al., 1992). A proposição abaixo sintetiza alguns dos principais resultados, para referência posterior; veja, por exemplo, (Costa et al., 1999) e (Feng et al., 1992) ou (Costa e Marques, 2000) para a versão a tempo discreto. Para o operador linear  $\mathcal{V} : \mathcal{M}^{n_0} \rightarrow \mathcal{M}^{n_0}$ ,  $\lambda\{\mathcal{V}\}$  denota o autovalor de  $\mathcal{V}$ .

**Proposição 1.2.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $(A, \Lambda)$  é MS-estável;
- (ii) Existe  $0 < \xi < 1$  e  $\alpha \geq 1$  tais que  $\|X(t)\| \leq \alpha \xi^t \|X(0)\|$  para todo  $X(0) \in \mathcal{M}^{n_0}$ ;
- (iii)  $Re\{\lambda(\mathcal{T})\} < 0$  ou, equivalentemente,  $Re\{\lambda(\mathcal{L})\} < 0$ ;
- (iv)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| = 0$ , para todo  $X \in \mathcal{M}^{n_0}$ ;
- (v) (Equação de Lyapunov acoplada) Existe  $P \in \mathcal{M}^{n^+}$  tal que  $\mathcal{L}_i(P) < 0, \forall i$ .

Além disto, se  $(A, \Lambda)$  não é MS-estável, então existe  $X(0) \in \mathcal{M}^{n_0}$  para o qual  $\|X(t)\| \geq \beta \zeta^t \|X(0)\|$  para algum  $\zeta > 1$  and  $\beta \leq 1$ .

A definição de estabilizabilidade associada ao conceito de MS-estabilidade é apresentada adiante; o conceito é encontrado, por exemplo, em (Ji et al.,

1991), (Ji e Chizeck, 1992), (Morozan, 1995), (Costa e Fragoso, 1995) e (Fragoso e Baczynski, 2001).

**Definição 1.2 (MS-estabilizabilidade).**  $(A, B, \Lambda)$  é estabilizável na média quadrática (MS-estabilizável) se existe um conjunto de matrizes  $K \in \mathcal{M}^{r,n}$  tal que  $(A + BK, \Lambda)$  é MS-estável.

O conceito de MS-estabilizabilidade é o conceito mais geral conhecido que assegura a existência de soluções para o problema LQ e para as EARA associadas (veja o Exemplo 4.3).

**Nota 1.1 (Conceitos Desacoplados).** Conceitos de estabilidade, estabilizabilidade e detetabilidade formalizados em termos dos parâmetros de cada modo, conhecidos como conceitos “determinísticos” ou “desacoplados”, são encontrados na literatura de SLSM.

Nesta nota, comentamos os conceitos de estabilidade no sentido determinístico de cada forma  $A_i + \frac{\lambda_{ii}}{2}I$  (ou seja, todos os autovalores de  $A_i + \frac{\lambda_{ii}}{2}I$  têm parte real negativa) e os correspondentes conceitos de estabilizabilidade e detetabilidade, os quais surgem no contexto do problema LQ e das EARA associadas. Por exemplo, estes conceitos aparecem em (Abou-Kandil et al., 1994) e (Gajic e Losada, 2000) como condições para métodos de solução de EARA.

Entretanto, tecemos sérias críticas sobre estes conceitos. Em primeiro lugar, os conceitos valem sempre que as taxas  $\lambda_{ii}$  são suficientemente altas, em detrimento de outros parâmetros significativos. Além do mais, os conceitos são dependentes do modelo que descrevem o sistema, no sentido que as taxas  $\lambda_{ii}$  podem ser arbitrariamente aumentadas através de um aumento da dimensão da cadeia de Markov, sem alterar o processo. De fato, a partir desta perspectiva é que se desenvolve o método da Seção 4.3, o qual converge para a solução das EARA se e somente se uma solução existe. Os exemplos adiante ilustram os comentários acima.

**Exemplo 1.1 (Um SLSM instável, com a forma  $A_i + \frac{\lambda_{ii}}{2}I$  estável).** Considere o SLSM descrito por  $A_1 = 1/4$ ,  $A_2 = 1/8$  e

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

É fácil verificar que  $|x(t)| \geq e^{t/8}|x_0|$  e o processo  $x(\cdot)$  não é estável em nenhum sentido, seja ele estocástico ou determinístico. Por outro lado,  $A_1 + \frac{\lambda_{11}}{2}I = -1/4$  e  $A_2 + \frac{\lambda_{22}}{2}I = -3/8$ , ou seja, o conceito desacoplado de estabilidade de cada par  $A_i + \frac{\lambda_{ii}}{2}I$  vale.

**Exemplo 1.2 (As formas  $A_i + \frac{\lambda_{ii}}{2}I$  sempre são estáveis).** Considere o sistema descrito por  $\dot{x} = (1/4)x$ ,  $x(0) = x_0$ . Considere a descrição por SLSM dada por  $A_1 = 1/4$  e  $\Lambda = 0$ ; uma vez que  $A_i + \frac{\lambda_{ii}}{2}I = 1/4$ , a condição desacoplada de estabilidade não vale. Por outro lado, se considerarmos o modelo aumentado

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{4}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

o qual é estocasticamente equivalente ao primeiro sistema, então temos que  $A_i + \frac{\lambda_{ii}}{2}I = -1/4$ ,  $i = 1, 2$ , satisfazendo a condição desacoplada de estabilidade. Concluindo, as formas  $A_i + \frac{\lambda_{ii}}{2}I$  sempre são estáveis, desde que se considere um modelo adequado para o sistema.

Os conceitos associados com cada forma  $A_i + \frac{\lambda_{ii}}{2}I$  somente fazem sentido quando as taxas de salto são diretamente consideradas no problema, como em situações nas quais o funcional de custo depende do número de saltos, como em (do Val e Zuniga, 2002).

## Capítulo 2

# W-observabilidade e W-detetabilidade para SLSM

Os conceitos de observabilidade e detetabilidade encontrados na literatura de SLSM surgem em três diferentes contextos.

No primeiro cenário, considera-se o problema de determinar o estado  $x(t - T_d)$  para algum  $T_d > 0$  unicamente através das observações  $y(\cdot)$  e  $\theta(\cdot)$  durante o intervalo  $[t - T_d, t]$ ; claramente, neste problema o SLSM pode ser visto como um sistema linear variante no tempo. Os conceitos que surgem desta perspectiva são os mais antigos e conservadores conceitos de detetabilidade e observabilidade encontrados em (Ji e Chizeck, 1990a), (Ji e Chizeck, 1990b) e (Ji e Chizeck, 1992).

**Definição 2.1 (Observabilidade).**  $(A, C, \Lambda)$  é observável se existe um escalar  $T_d$  tal que, para toda trajetória  $y(\cdot), \theta(\cdot)$ , o conhecimento de  $y(s)$  e  $\theta(s)$ ,  $t - T_d \leq s \leq t$ , é suficiente para determinar  $x(t)$ .

**Definição 2.2 (Detetabilidade).**  $(A, C, \Lambda)$  é detetável se existe  $G \in \mathcal{M}^{n,q}$  para o qual os autovalores de  $A_i + G_i C_i$  têm parte real negativa, para todo  $i = 1, \dots, N$ .

Outra conjuntura é a da investigação de relações de dualidade, na qual aparece o conceito mais recente e geral de detetabilidade na média quadrática (MS-detetabilidade), obtido por dualidade do conceito de MS-estabilizabilidade. O conceito é encontrado, por exemplo, em (Costa e Fragoso, 1995), (do Val et al., 1999), (Fragoso e Baczyński, 2001) e (Morozan, 1995).

**Definição 2.3 (MS-detetabilidade).**  $(A, C, \Lambda)$  é MS-detetável se existe  $G \in \mathcal{M}^{n,q}$  para o qual  $(A + GC, \Lambda)$  é MS-estável.

Por último, tem-se a conjuntura na qual os valores futuros de  $x(\cdot), \theta(\cdot)$  são considerados em valor esperado. Nesta perspectiva, a natureza estocástica do SLSM é relevante, em contraste com a primeira conjuntura em que os valores passados são levados em conta e o sistema comporta-se como um sistema linear determinístico variante no tempo.

Neste contexto surge o conceito de observabilidade fraca (W-observabilidade), para o qual apenas se requer que existam  $t_d, \gamma > 0$  para os quais

$$W^{t_d}(x_0, \theta_0) > \gamma \|x_0\|^2$$

para toda condição inicial  $x_0, \theta_0$ . Lembrando que o funcional  $W^{t_d}(\cdot)$  está relacionado com o nível de energia na saída no intervalo  $[0, t_d]$ , o conceito de W-observabilidade pode ser interpretado como sendo equivalente a requerer que para toda condição inicial, a trajetória associada reflita um nível mínimo de energia na saída.

Empregando uma notação mais explícita, podemos definir W-observabilidade de forma equivalente, como em (Morozan, 1995, *Definition 3*), em termos da existência de  $t_d, \gamma > 0$  tais que

$$E \left\{ \int_0^{t_d} x(\tau)' C'_{\theta(\tau)} C_{\theta(\tau)} x(\tau) d\tau \middle| \mathcal{F}_0 \right\} > \gamma \|x_0\|^2$$

Note que a condição acima é mais fraca do que aquela da Definição 2.1, já que esta requer positividade da integral em valor esperado, enquanto aquela requer positividade da integral para todo caminho amostral  $x(t), \theta(t)$ .

O conceito de W-observabilidade é formalizado a seguir, empregando a notação da Seção 1.2; veja também (Morozan, 1995) ou (Costa e do Val, 2001) para o caso a tempo discreto.

**Definição 2.4 (W-observabilidade).**  $(A, C, \Lambda)$  é W-observável se existem escalares  $t_d, \gamma > 0$  tais que, para toda condição inicial  $X$ ,

$$W^{t_d}(X) > \gamma \|X\|$$

Considerando os conceitos de W-observabilidade e MS-detetabilidade, as seguintes críticas severas são cabíveis: (i) não se sabe se as Propriedades I, III e IV do Capítulo 1 são extensíveis para SLSM (de fato, nem há a definição de matrizes de observabilidade para SLSM); (ii) conforme mostraremos através do Exemplo 2.3, MS-detetabilidade não generaliza W-observabilidade. Além disto, o Exemplo 2.2 mostra que a condição de que as trajetórias não fracamente observadas sejam estáveis (no sentido médio quadrático, próprio para

SLSM) não é suficiente para que o sistema seja MS-detetável, o que sugere o conservadorismo desse conceito e demonstra inválida a Propriedade III.

As críticas mencionadas acima reforçam que a teoria a respeito de detetabilidade para SLSM é menos desenvolvida do que a correspondente teoria para SLD, como descrito no Capítulo 1. É também interessante mencionar que, neste cenário, alguns autores são obrigados a trabalhar simultaneamente com hipóteses de observabilidade e detetabilidade; exemplos são encontrados em (do Val et al., 1999) e (Morozan, 1995), onde estes conceitos aparecem como condições suficientes para unicidade e estabilidade de soluções para as EARA.

O conceito de W-detetabilidade surge neste trabalho como uma relaxação do conceito de W-observabilidade, a qual tem por objetivo superar as críticas acima. Uma interpretação útil para a compreensão do conceito, na formalização a seguir, é a de que sempre que a trajetória não converge suficientemente rápido na média quadrática, então observa-se certo nível de energia na saída. Mencionamos que uma interpretação semelhante aparece para detetabilidade de sistemas lineares determinísticos variantes no tempo (Anderson e Moore, 1981; Hager e Horowitz, 1976); de fato, o conceito de W-detetabilidade assemelha-se aos conceitos de detetabilidade usuais para estes últimos sistemas.

**Definição 2.5 (W-detetabilidade).**  $(A, C, \Lambda)$  é W-detetável se existem escalares  $\tau_d \geq 0$ ,  $t_d, \gamma > 0$  e  $0 \leq \delta < 1$ , tais que, para cada condição inicial  $X$ ,

$$W^{t_d}(X) > \gamma \|X\|$$

sempre que  $\|X(\tau_d)\| \geq \delta \|X\|$ .

Neste capítulo são desenvolvidas extensões das Propriedades I-IV para SLSM, em termos dos conceitos de W-observabilidade e W-detetabilidade.

Na Seção 2.1 introduz-se para os SLSM uma coleção de matrizes  $\mathcal{O} = (\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_N)$ , as quais se assemelham a matrizes de observabilidade de SLD; neste sentido, por exemplo, mostra-se que  $W^{t,\infty}(x, \theta) = \int_t^\infty E\{\|y(s)\|^2\} ds = 0$  sempre que  $x(t)$  encontra-se no núcleo de  $\mathcal{O}_{\theta(t)}$ , o que significa que a trajetória associada não é observada. Ainda, derivam-se extensões das Propriedades I e IV para SLSM, respectivamente nos seguintes termos: (i) mostra-se que se  $x(t)$  se encontra no núcleo de  $\mathcal{O}_{\theta(t)}$  para algum  $t \geq 0$ , então  $x(s)$  permanece no núcleo de  $\mathcal{O}_{\theta(s)}$  para todo  $s \geq t$ , o que significa invariância de trajetórias não observadas, (veja o Corolário 2.2 (ii)); (ii) mostra-se que  $(A, C, \Lambda)$  é W-

observável se e somente se cada uma das matrizes de  $\mathcal{O}$  é de posto completo (veja o Lema 2.2).

Na Seção 2.2, inicia-se apresentando caracterizações de  $W$ -detetabilidade e, em particular, estende-se a Propriedade III ao mostrar que trajetórias não observadas são MS-estáveis, veja o Lema 2.7. Na Seção 2.2.1, apresenta-se um dos principais resultados do trabalho: a caracterização de que  $(A, C, \Lambda)$  é  $W$ -detetável se e somente se  $(A, \mathcal{O}, \Lambda)$  é MS-detetável (veja o Teorema 2.2). Este resultado permite facilmente mostrar que  $W$ -detetabilidade generaliza MS-detetabilidade, já que  $\mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\} \in \mathcal{N}\{C_i\}$  para todo  $i = 1, \dots, N$ , assim recuperando a Propriedade II. Além disto, o resultado esclarece a relação entre  $W$ -detetabilidade e MS-detetabilidade e sugere o conservadorismo deste segundo conceito em relação ao primeiro, ao mesmo tempo em que permite reaproveitar resultados existentes para MS-detetabilidade, como a condição testável apresentada na Seção 2.2.1.

Finalmente, ressaltamos que a estrutura de observação não é relevante na definição do conceito de  $W$ -detetabilidade nem no desenvolvimento dos resultados deste capítulo, já que se consideram valores esperados futuros de  $x(\cdot), \theta(\cdot)$ .

## 2.1 $W$ -Observabilidade e Matrizes de Observabilidade

Seja a seqüência de coleções de matrizes  $O(k) \in \mathcal{M}^n$  definida para cada  $i = 1, \dots, N$  por

$$O_i(k) = \frac{d^{k+1}L_i}{dt^{k+1}}(0) \quad (2.1)$$

sendo  $L(t) \in \mathcal{M}^{n0}$ ,  $t \geq 0$ , definido pelas equações lineares diferenciais em (1.5). Note, inspecionando (1.5), que pode-se definir  $O(k)$  equivalentemente em termos do operador  $\mathcal{L}$ :

$$O_i(k) := \mathcal{L}_i(O(k-1)), \quad k > 0 \quad (2.2)$$

com  $O_i(0) := C_i' C_i$ , para cada  $i = 1, \dots, N$ .

Nesta seção, introduzimos e estudamos a coleção de matrizes em  $\mathcal{O}_i \in \mathcal{M}^{n(n^2N), n}$ , definidas para cada  $i = 1, \dots, N$  como

$$\mathcal{O}_i := [O_i(0) O_i(1) \cdots O_i(n^2N - 1)]' \quad (2.3)$$

a qual é denominada como sendo o conjunto de matrizes de observabilidade do sistema  $\Phi$ .

A motivação para a denominação mencionada acima será explicitada ao longo do capítulo, através de diversas semelhanças com as matrizes de observabilidade de SLD. Citamos, de passagem, que uma equivalência direta é obtida para estados de Markov isolados, isto é, estados  $i$  para os quais  $\lambda_{ji} = 0$ ,  $j = 1, \dots, N$ : o par  $(A_i, C_i)$  é observável no sentido determinístico se e somente se a matriz  $\mathcal{O}_i$  é de posto completo.

Na seqüência apresentam-se resultados preliminares.

Para  $V \in \mathcal{R}^n$ , identificamos as colunas de  $V$  como  $V = [v_1 : v_2 : \dots : v_n]$  e, para  $U = (U_1, \dots, U_N)$  e, em consonância com (Costa e Fragoso, 1993), introduzimos o operador linear inversível  $\hat{\varphi} : \mathcal{M}^{n0} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2N}$ ,

$$\hat{\varphi}(U) = \begin{bmatrix} \varphi(U_1) \\ \vdots \\ \varphi(U_N) \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \quad \varphi(V) = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Seja  $V \otimes Z$  o produto de Kronecker das matrizes  $V$  e  $Z$ . De (1.4), utilizando resultados básicos do produto de Kronecker (Brewer, 1979), obtem-se

$$\varphi(\mathcal{L}_i(U)) = (I_n \otimes A'_i)\varphi(U_i) + (A'_i \otimes I_n)\varphi(U_i) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}\varphi(U_j)$$

e pode-se verificar que

$$\hat{\varphi}(\mathcal{L}(U)) = \mathcal{A}\hat{\varphi}(U) \tag{2.4}$$

sendo  $\mathcal{A} \in \mathcal{R}^{n^2N}$  a matriz definida por

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_1 + \lambda_{11}I_{n^2} & \lambda_{12}I_{n^2} & \cdots & \lambda_{1N}I_{n^2} \\ \lambda_{21}I_{n^2} & \hat{A}_2 + \lambda_{22}I_{n^2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \lambda_{N1}I_{n^2} & & & \hat{A}_N + \lambda_{NN}I_{n^2} \end{bmatrix}$$

e  $\hat{A}_i = (I_n \otimes A'_i + A'_i \otimes I_n)$ . Aplicando o operador  $\hat{\varphi}$  em (1.5) e utilizando (2.4), obtem-se

$$\begin{aligned} \dot{\ell}(t) &= \hat{\varphi}[C'C + \mathcal{L}(L(t))] \\ &= q + \mathcal{A}\hat{\varphi}(L(t)) = q + \mathcal{A}\ell(t), \quad t \geq 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

sendo  $\ell(t) \in \mathbb{R}^{n^2N}$  e  $q \in \mathbb{R}^{n^2N}$  definidos por

$$\ell(t) = \widehat{\varphi}(L(t)), \quad q = \widehat{\varphi}(C'C)$$

Note, inspecionando (2.5), que

$$\frac{d^k \ell(0)}{dt^k} = \mathcal{A}^k q \quad (2.6)$$

Também se introduz a seguinte representação para a expressão  $\langle U, L(t) \rangle$ :

$$\langle U, L(t) \rangle = \widehat{\varphi}(U)' \ell(t) \quad (2.7)$$

**Lema 2.1.** Para  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $i \in \mathcal{S}$ , defina  $X \in \mathcal{M}^{n^0}$  como  $X_i = xx'$  e  $X_j = 0, \forall j \neq i$ ; defina também  $w \in \mathbb{R}^{n^2N}$  como  $w = \widehat{\varphi}(X)$ . As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i)  $x' L_i(s)x = 0$  ou, equivalentemente,  $w' \ell(s) = 0$  para algum  $s > 0$ ;
- (ii)  $w' d^m \ell / dt^m(0) = 0$ , para  $m = 1, \dots, n^2N$ ;
- (iii)  $w' \mathcal{A}^{m-1} q = 0$ , para  $m = 1, \dots, n^2N$ ;
- (iv)  $x \in \mathcal{N}(L_i(t))$  ou, equivalentemente,  $w' \ell(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ .
- (v)  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_i)$ .

*Prova.* (i)  $\Rightarrow$  (ii): uma vez que  $L(t) \leq L(s)$  para  $t \leq s$ , de (2.7) vem que  $w' \ell(t) = \langle \widehat{\varphi}^{-1}(w), L(t) \rangle \leq \langle \widehat{\varphi}^{-1}(w), L(s) \rangle = w' \ell(s) = 0, t \leq s$ . Em adição a isso, notando que  $w' \ell(t) \geq 0$  e lembrando que  $L(0) = 0$ , pode-se escrever  $w' \ell(t) = 0$  para todo  $0 \leq t \leq s$ , o que leva a

$$w' \frac{d^m \ell}{dt^m}(0) = 0, \quad \forall m \geq 0$$

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): o resultado segue imediatamente de (2.6).

(iii)  $\Rightarrow$  (iv): para o SLD em (2.5), para qualquer  $t \geq 0$  pode-se escrever

$$\begin{aligned} \ell(t) &= \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-\tau)} q d\tau = \int_0^t \sum_{m=1}^{n^2N} \alpha_m(\tau) \mathcal{A}^{m-1} q d\tau \\ &= \sum_{m=1}^{n^2N} \mathcal{A}^{m-1} q \int_0^t \alpha_m(\tau) d\tau = \sum_{m=1}^{n^2N} \hat{\alpha}_m(t) \mathcal{A}^{m-1} q \end{aligned}$$

sendo  $\alpha_m$  e  $\hat{\alpha}_m$  funções escalares. Então, tem-se que

$$w' \ell(t) = \sum_{m=1}^{n^2N} \hat{\alpha}_m(t) w' \mathcal{A}^{m-1} q = 0$$

(iv)  $\Rightarrow$  (i): trivial.

(ii)  $\Leftrightarrow$  (v): Utilizando (2.7), obtem-se:

$$w' \frac{d^m \ell}{dt^m}(0) = 0 \Leftrightarrow \langle X, \frac{d^m L}{dt^m}(0) \rangle = 0 \Leftrightarrow x' \frac{d^m L_i}{dt^m}(0) x = 0 \Leftrightarrow \frac{d^m L_i}{dt^m}(0) x = 0 \quad (2.8)$$

para  $m = 1, \dots, n^2 N$ . A prova é facilmente completada ao observar-se, de (2.1), que

$$\mathcal{O}_i = \begin{bmatrix} O_i(0) \\ \vdots \\ O_i(n^2 N - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d^1 L_i}{dt}(0) \\ \vdots \\ \frac{d^{n^2 N} L_i}{dt^{n^2 N}}(0) \end{bmatrix}$$

□

*Observação 2.1.* Através das afirmações (i) e (iv) do Lema 2.1, note que se as condições nas Definições 2.4 ou 2.5 valem para algum  $t_d \geq 0$ , então elas valem para todo  $t \geq 0$ , de forma que o valor de  $t_d$  é irrelevante naquelas definições.

O resultado adiante é imediato das afirmações (i), (iv) e (v) do Lema 2.1 e da Proposição 1.1.

**Corolário 2.1.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $x \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\}$ ;
- (ii)  $W^s(x, i) = 0$ , para algum  $s > 0$ ;
- (iii)  $W^t(x, i) = 0$ , para todo  $t \geq 0$ ;

Note que, de acordo com o Corolário 2.1, sempre que uma condição inicial  $x_0, \theta_0$  for tal que  $x_0$  encontra-se no espaço nulo de  $\mathcal{O}_{\theta_0}$ , então a trajetória associada não reflete energia na saída, em perfeita analogia com as matrizes de observabilidade de SLD. Refirimo-nos a estas trajetórias como sendo não fracamente observadas.

O próximo teorema proporciona um teste de W-observabilidade que consiste na verificação do posto das matrizes do conjunto  $\mathcal{O}$ , em mais uma analogia com matrizes de observabilidade de SLD.

**Teorema 2.1.** *(A, C,  $\Lambda$ ) é W-observável se e somente se  $\mathcal{O}_i$  é de posto completo para cada  $i = 1, \dots, N$ .*

*Prova.* De (1.9) pode-se escrever a condição na Definição 2.4 da seguinte forma equivalente:

$$\langle X, L(t_d) \rangle \geq \gamma \|X\|, \quad \forall X \in \mathcal{M}^{n_0}$$

Isso é equivalente a requerer que  $L_i(t_d)$  seja positivo definido para cada  $i = 1, \dots, N$ . As equivalências (i) e (v) do Lema 2.1 completam a prova.  $\square$

**Exemplo 2.1 (Um SLSM W-observável com pares  $(A_i, C_i)$  não observáveis).** Sejam  $N = 2$ ,  $n = 2$  e

$$A_1 = I_2; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; C_1 = [1 \ 0]; C_2 = 0; \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

De (2.3) avalia-se que  $\text{posto}(\mathcal{O}_1) = \text{posto}(\mathcal{O}_2) = 2$  e do Teorema 2.1 tem-se que  $(A, C, \Lambda)$  é W-observável. Note também que os pares  $(A_i, C_i)$ ,  $i = 1, \dots, S$ , não são observáveis.

*Observação 2.2.* Sabe-se que  $(A, C, \Lambda)$  é W-observável se cada par  $(A_i, C_i)$  é observável para  $i = 1, \dots, N$  (veja, por exemplo, (Morozan, 1995)). Contudo, esta condição não é necessária; o Exemplo 2.1 ilustra este fato.

### 2.1.1 Propriedades do conjunto de matrizes de observabilidade e invariância das trajetórias não fracamente observadas

O Lema a seguir estabelece um paralelo para o amplamente conhecido resultado sobre a dimensão da matriz de observabilidade de SLD.

**Lema 2.2.**

$$\mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\} = \mathcal{N}\{[O_i(0) : \dots : O_i(k)]'\}, \quad \forall k \geq n^2N - 1$$

*Prova.* Para  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_i)$ , defina  $X_i = xx'$  e  $X_j = 0$ ,  $\forall j \neq i$ , e seja  $w = \widehat{\varphi}(X)$ . Do Lema 2.1 tem-se que  $\mathcal{O}_i x = 0$  é equivalente  $w' \mathcal{A}^{r-1} q = 0$ ,  $r = 1, \dots, n^2N$ . Do lema de Cayley-Hamilton, vem que  $\mathcal{A}^m = \sum_{r=0}^{n^2N-1} \alpha_r \mathcal{A}^r$ ,  $m = 0, \dots, k$ , e obtem-se

$$\begin{cases} w'q = 0 \\ w'\mathcal{A}q = 0 \\ \vdots \\ w'\mathcal{A}^k q = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

o que, de (2.6), é equivalente a  $w' d^m \ell(0) / dt^m = 0$ ,  $m = 0, \dots, k$ . Finalmente, empregando (2.8) para um  $m$  genérico, obtem-se  $d^m L_i(0) / dt^m x = 0$  e de (2.1) vem que  $O_i(m)x = d^{m+1} L_i(0) / dt^{m+1} x = 0$  para  $m = 0, \dots, k$ .  $\square$

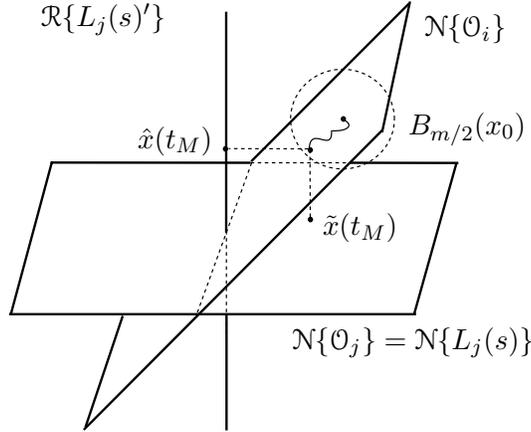


Figura 2.1: Construção geométrica da prova do Lema 2.3

Uma importante relação entre os espaços nulos das matrizes de observabilidade é apresentada na seqüência. Necessitaremos do resultado preliminar adiante.

**Proposição 2.1.** *Para cada escalar  $M > 0$ , existe  $t_M > 0$  tal que  $\|x(t) - x_0\| \leq M\|x_0\|$  quase certamente (q.c.),  $0 \leq t \leq t_M$ .*

**Lema 2.3.** *Seja o estado  $\theta = j$  acessível do estado  $\theta = i$ ; então  $\mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\} \subset \mathcal{N}\{\mathcal{O}_j\}$ .*

*Prova.* Nesta prova, procede-se por contradição. Inicialmente nega-se a afirmação do lema ao assumir que existem  $x_0 \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\}$  e um escalar  $m > 0$  para o qual  $|x_0 - x| \geq m, \forall x \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_j\}$ .

Define-se a condição inicial  $x_0$  e  $\theta_0 = i$ . Fazendo  $M = m/(2\|x_0\|)$  na Proposição 2.1, vem que existe  $t_M$  tal que  $\|x(t) - x_0\| \leq m/2, 0 \leq t \leq t_M$  ou, equivalentemente,  $x(t) \in B_{m/2}(x_0), 0 \leq t \leq t_M$ , sendo  $B_{m/2}(x_0)$  a esfera de raio  $m/2$  centrada em  $x_0$ .

Sejam  $\tilde{x}(t_M)$  e  $\hat{x}(t_M)$  respectivamente as projeções ortogonais de  $x(t_M)$  em  $\mathcal{N}\{\mathcal{O}_j\}$  e em  $\mathcal{R}\{\mathcal{O}'_j\}$ , de forma que  $\tilde{x}(t_M) \perp \hat{x}(t_M)$ ; note que  $\mathcal{N}\{\mathcal{O}_j\} = \mathcal{N}\{L_j(s)\}$  (veja a Figura 2.1).

Podemos escrever

$$x(t_M)'L_j(s)x(t_M) = \hat{x}(t_M)'L_j(s)\hat{x}(t_M) \geq \mu\|\hat{x}(t_M)\|^2 \geq \mu(m - m/2)^2$$

sendo  $\mu$  o menor valor singular não nulo de  $L_j(s)$ , e da Proposição 1.1 vem de imediato que

$$W^s(x(t_M), j) \geq \mu \frac{m^2}{4}, \quad q.c.$$

Agora, avalie-se

$$\begin{aligned} E\{W^s(x(t_M), \theta(t_M)) | \mathcal{F}_0\} &\geq E\{W^s(x(t_M), \theta(t_M)) 1_{\{\theta(t_M)=j\}} | \mathcal{F}_0\} \\ &= E\{W^s(x(t_M), j) 1_{\{\theta(t_M)=j\}} | \mathcal{F}_0\} \geq \frac{\mu m^2}{4} E\{1_{\{\theta(t_M)=j\}} | \mathcal{F}_0\} > 0 \end{aligned}$$

sendo que a última desigualdade vem da hipótese de que o estado  $j$  é acessível do estado  $i$ . Enfim, escreve-se

$$W^{s+t_M}(x_0, \theta_0) = E\{W^{s+t_M}(x_0, \theta_0) | \mathcal{F}_0\} \geq E\{W^s(x(t_M), \theta(t_M)) | \mathcal{F}_0\} > 0$$

contradizendo a hipótese de que  $x_0 \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta_0}\}$ .  $\square$

A seguir, apresentamos o resultado sobre a invariância “*pathwise*” de trajetórias não fracamente observadas. O resultado recupera a Propriedade I mencionada no Capítulo 1, assim estabelecendo mais um paralelo com SLD. A prova é omitida; apenas mencionamos que o ítem (i) segue de imediato do lema anterior e que o ítem (ii) decorre de (i).

**Corolário 2.2.** *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i)  $\mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta(t)}\} \subset \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta(s)}\}$  sempre que  $s \geq t$ .
- (ii) Se  $x(t) \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta(t)}\}$ , então  $x(s) \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta(s)}\}$  sempre que  $s \geq t$ .

## 2.2 W-detetabilidade

Iniciamos a seção apresentando o resultado que recupera a Propriedade II citada no Capítulo 1. O resultado segue de imediato do fato que W-detetabilidade somente requer positividade de  $W^{t_d}(\cdot)$  quando a condição  $\|X(\tau_d)\| \geq \delta \|X\|$ , relacionada à estabilidade do sistema, é satisfeita; a prova é omitida.

**Lema 2.4.** *Se  $(A, C, \Lambda)$  é W-observável, então  $(A, C, \Lambda)$  é W-detetável.*

Note que, sempre que  $(A, \Lambda)$  é MS-estável, então  $(A, C, \Lambda)$  é W-detetável com  $t_d$  e  $\gamma$  arbitrários e  $\delta$  e  $\tau_d$  tais que  $\delta = \alpha \xi^{\tau_d} < 1$ , sendo  $\alpha$  e  $\xi$  como na Proposição 1.2.

Na seqüência, resultados básicos são apresentados. Inicia-se com algumas propriedades sobre o funcional  $W^t(X)$ . Lembramos que a condição inicial  $X(0) \in \mathcal{M}^{n_0}$  é denotada por  $X$ ; também,  $W^t(X(s)) = W^t(X)$  sempre que  $X(s) = X$ .

**Lema 2.5.** *Seja  $T > 0$ . As seguintes afirmações valem:*

(i)  $W^T(X)$  é contínuo em  $X$ .

(ii) *Seja  $W^T(X) = 0$ ; então,  $W^t(X(s)) = 0$  para todo  $t, s \geq 0$ ;*

*Prova.* (i) segue de imediato da representação  $W^T(X) = \langle X, L(T) \rangle$  dada em (1.9), e da continuidade do produto interno.

(ii) Do Corolário 2.1 tem-se que  $W^t(X) = 0$  para  $t \geq 0$ , sempre que  $W^T(X) = 0$ . Substitui-se  $t$  por  $s + t$  para concluir que  $W^{s+t}(X) = 0$ . Agora, define-se  $U(0) = U = X(s)$ ; dos fatos que  $U(t)$  é definido por  $\dot{U}_i(t) = \mathcal{T}_i(U(t))$  e que  $\dot{X}_i(t) = \mathcal{T}_i(X(t))$  (veja a Proposição 1.1 (ii)), vem que  $U(\tau) = X(\tau + s)$  para  $0 \leq \tau \leq t$ . Então, da definição de  $W$  (1.9) vem que

$$\begin{aligned} W^t(X(s)) &= \int_0^t \langle U(\tau), C'C \rangle d\tau \\ &= \int_s^{s+t} \langle X(\tau), C'C \rangle d\tau \\ &\leq \int_0^{s+t} \langle X(\tau), C'C \rangle d\tau = W^{s+t}(X) = 0 \end{aligned}$$

□

O resultado no próximo lema é um paralelo da Propriedade III para SLD mencionada no Capítulo 1, a qual estabelece que trajetórias não observadas correspondem a modos estáveis do sistema.

**Lema 2.6.** *Considere o sistema  $\Phi$  e seja  $T > 0$ .  $(A, C, \Lambda)$  é W-detetável se e somente se  $\|X(t)\| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  sempre que  $W^T(X) = 0$ .*

*Prova.* Suficiência: considere o conjunto

$$\mathbb{Z} = \{Z : \|Z\| = 1, W^T(Z) = 0\} \quad (2.10)$$

e denote por  $Z(t)$  a trajetória correspondente à condição inicial  $Z \in \mathbb{Z}$ . Por hipótese,  $\|Z(t)\| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  e pode-se escrever, empregando a Proposição 1.2, que existem  $0 < \xi < 1$  e  $\alpha \geq 1$  tais que  $\|Z(t)\| \leq \alpha \xi^t$ .

Conseqüentemente, existem  $\tau_d \geq 0$  e  $0 \leq \delta < 1$  tais que  $\|Z(\tau_d)\| < \delta, \forall Z \in \mathbb{Z}$ , e pode-se escrever

$$\mathbb{Z} \subset \bar{\mathbb{C}} = \{Z : \|Z\| = 1, \|Z(\tau_d)\| < \delta\}$$

Nesta prova, deve-se mostrar que existe  $\gamma > 0$  tal que  $W^T(X) \geq \gamma \|X\|$  sempre que  $\|X(\tau_d)\| \geq \delta$  e, portanto,  $(A, C, \Lambda)$  é W-detetável. Proceda-se por contradição assumindo que, para cada  $\gamma > 0$ , existe  $X$ ,  $\|X\| = 1$ , tal que  $W^T(X) < \gamma$  e  $\|X(\tau_d)\| \geq \delta$ . Isto é, assume-se que  $X \in \mathbb{C}$ , sendo  $\mathbb{C}$  o conjunto definido como

$$\mathbb{C} = \{X : \|X\| = 1, \|X(\tau_d)\| \geq \delta\}$$

Em virtude de que  $X(\tau_d)$  é solução da equação diferencial (1.8), tem-se que  $X(\tau_d)$  é contínuo na condição inicial  $X$  e, portanto, o conjunto  $\mathbb{C}$  é um conjunto compacto. Assim sendo, pode-se definir uma seqüência  $X_n \in \mathbb{C}$  com  $\gamma_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , de tal maneira que, da compacidade de  $\mathbb{C}$ , existe uma subseqüência  $X_m$  que converge para algum  $\hat{X} \in \mathbb{C}$ . Da continuidade de  $W^T$ , vem que (veja o Lema 2.5),

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W^T(X_m) = W^T(\hat{X}) = 0$$

Em vista de (2.10),  $\hat{X} \in \mathbb{Z} \subset \bar{\mathbb{C}}$ , completando a prova por contradição.

Necessidade: mostra-se que, sob a hipótese de W-detetabilidade de  $(A, C, \Lambda)$ ,  $\|X(t)\| \rightarrow 0$  enquanto  $t \rightarrow \infty$  sempre que  $W^T(X) = 0$ . Sendo que  $W^T(X) = 0$ , do Lema 2.5 vem que  $W^T(X(t)) = 0$  para todo  $t \geq 0$ . Então, considerando a W-detetabilidade de  $(A, C, \Lambda)$ , tem-se que  $\|X(t + \tau_d)\| < \delta \|X(t)\|$ ,  $\tau_d \geq 0$ ,  $0 \leq \delta < 1$ , para todo  $t \geq 0$ ; conseqüentemente,  $\|X(t + n\tau_d)\| < \delta^n \|X(t)\|$  e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq \tau_d - 1} \|X(t + n\tau_d)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \delta^n \sup_{0 \leq t \leq \tau_d - 1} \|X(t)\| = 0$$

e o resultado segue de imediato.  $\square$

O próximo lema apresenta uma segunda versão do resultado anterior, reescrito em termos do conjunto de matrizes de observabilidade  $\mathcal{O}$ .

**Lema 2.7.**  $(A, C, \Lambda)$  é W-detetável se e somente se  $\lim_{t \rightarrow \infty} E\{|x(t)|^2\} = 0$  sempre que  $x_0 \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_{\theta_0})$ .

*Prova.* Suficiência: assumamos que há  $X \in \mathcal{M}^{n_0}$  tal que  $W^T(X) = 0$ . Qualquer  $X \in \mathcal{M}^{n_0}$  pode ser escrito na seguinte forma (veja o Teorema 7.5.2 de (Horn e Johnson, 1990)):

$$X_i = x_i^1 x_i^{1'} + \dots + x_i^{r_i} x_i^{r_i'} \quad (2.11)$$

sendo  $x_i^k \in \mathbb{R}^n, k = 1, \dots, r_i$  e  $r_i = \text{rank}(X_i) \leq n$ . De (1.9) tem-se que  $\langle X, L(T) \rangle = W^T(X) = 0$  o que permite escrever que  $\text{tr}(x_i^k x_i^{k'} L_i(T)) \leq \langle X, L(T) \rangle = 0$  para qualquer  $i$  e  $k$  ou, equivalentemente,  $x_i^{k'} L_i(T) x_i^k = 0$ . Então, do Lema 2.1 vem que

$$x_i^k \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_i), \quad i = 1, \dots, N; \quad k = 1, \dots, r_i$$

Agora, seja  $v^{i,k}(0) = x_i^k \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_i)$ . Seja  $v^{i,k}(t) \in \mathbb{R}^n, k = 1, \dots, r_i$ , dado pela equação diferencial  $\dot{v}^{i,k}(t) = A_{\theta(t)} v^{i,k}(t), \theta(0) = i$ . Sendo que  $x^{i,k}(0) \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_{\theta(0)})$ , da hipótese do lema tem-se que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\{|v^{i,k}(t)|^2\} = 0, \quad i = 1, \dots, N; \quad k = 1, \dots, r_i \quad (2.12)$$

Seja  $X^{i,k}(t) \in \mathcal{M}^{n_0}$  a matriz de segundo momento definida para cada  $j = 1, \dots, N$  como sendo  $X_j^{i,k}(t) = E\{v^{i,k}(t) v^{i,k}(t)' 1_{\{\theta(t)=j\}}\}$ . Tendo em vista (2.11) e que  $X_i^{i,k}(0) = x_i^k x_i^{k'}$  e  $X_j^{i,k}(0) = 0$  para  $j \neq i$ , pode-se escrever  $X_i = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{r_j} X_i^{j,k}$ . Então, de (1.8) e da linearidade do operador  $\mathcal{T}$ , tem-se que

$$X_i(t) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{r_j} X_i^{j,k}(t)$$

e de (2.12) avalia-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| \leq \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{r_j} \lim_{t \rightarrow \infty} \|X^{j,k}(t)\| = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{r_j} \lim_{t \rightarrow \infty} E\{|x^{j,k}(t)|^2\} = 0$$

Mostrou-se, sob a hipótese do lema, que  $\|X(t)\| \rightarrow 0$  enquanto  $t \rightarrow \infty$  para cada  $X \in \mathcal{M}^{n_0}$  tal que  $W^T(X) = 0$ ; nesta circunstância, o Lema 2.6 estabelece que  $(A, C, \Lambda)$  é W-detetável, completando a prova.

Necessidade: uma vez que  $x_0 \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_{\theta_0})$ , do Corolário 2.1 vem que  $W^t(X) = 0$  e o Lema 2.6 completa a prova, estabelecendo que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| = 0$ .  $\square$

**Corolário 2.3.** *Se  $(A, C, \Lambda)$  for não W-detetável, então existem  $i \in \mathcal{S}$  e  $x_0 \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_i)$  tais que  $\lim_{t \rightarrow \infty} E\{|x(t)|^2\} \neq 0$ , para a condição inicial  $x(0) = x_0$  e  $\theta(0) = i$ .*

### 2.2.1 W-detetabilidade e MS-detetabilidade

Esta seção aborda a relação entre os conceitos de MS-detetabilidade e W-detetabilidade e demonstra, em seu principal resultado, que W-detetabilidade de  $(A, C, \Lambda)$  é equivalente à MS-detetabilidade de  $(A, \mathcal{O}, \Lambda)$ .

Iniciamos lidando com a seguinte versão de malha fechada do SLSM:

$$\Phi_o : \dot{x}(t) = (A_{\theta(t)} + G_{\theta(t)}\mathcal{O}_{\theta(t)})x(t), \quad x(0) = x_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad (2.13)$$

Para cada  $i = 1, \dots, N$ , faz-se

$$G_i = (-A_i - I)\mathcal{O}_i^+ \quad (2.14)$$

onde  $\mathcal{O}_i^+$  denota a pseudo-inversa de  $\mathcal{O}_i$ .

Na seqüência, apresentamos algumas propriedades do sistema  $\Phi_o$  com  $G$  como em (2.14). Primeiro, note que  $\mathcal{O}_i^+\mathcal{O}_i x$  é a projeção ortogonal de  $x$  em  $\mathcal{R}\{\mathcal{O}'_i\}$  e  $(I - \mathcal{O}_i^+\mathcal{O}_i)x$  é a projeção em  $\mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\}$ . Assim, pode-se escrever  $x(t) = \hat{x}(t) + \tilde{x}(t)$  onde  $\hat{x}(t) = \mathcal{O}_{\theta(t)}^+\mathcal{O}_{\theta(t)}x(t)$  e  $\tilde{x}(t) = (I - \mathcal{O}_{\theta(t)}^+\mathcal{O}_{\theta(t)})x(t)$ , e pode-se mostrar que

$$\hat{x}(t) \perp \tilde{x}(t) \quad (2.15)$$

Cada componente  $\hat{x}$  e  $\tilde{x}$  é estudada a seguir, separadamente. Por facilidade de notação, escreve-se  $\mathcal{O}_{\theta(t^-)} = \lim_{s \uparrow t} \mathcal{O}_{\theta(s)}$  e similarmente para  $\hat{x}(t^-)$  e  $\tilde{x}(t^-)$ . Seja a seqüência de instantes de saltos  $t_1, t_2, \dots$ , definida como:

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_{m+1} = \inf\{t > t_m : \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta(t^-)}\} \neq \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta(t)}\}\}, \quad m \geq 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

**Lema 2.8.** *Considere o sistema  $\Phi_o$  com  $G$  dado em (2.14). Então,  $\|\hat{x}(t)\| \leq e^{-t}\|\hat{x}(0)\|$  quase certamente (q.c.).*

*Prova.* De (2.14) e (2.13) é simples verificar que, para  $t_{m-1} \leq t < t_m$ ,  $\dot{\hat{x}}(t) = -\hat{x}(t)$  com condição inicial  $\hat{x}(t_{m-1})$  devido à propriedade forte de Markov par SLSM (Davis, 1993) e à linearidade de  $\Phi_o$ ; isso significa que

$$\hat{x}(t) = e^{-(t-t_{m-1})}\hat{x}(t_{m-1}), \quad t_{m-1} \leq t < t_m, \quad \text{q.c} \quad (2.17)$$

Com respeito à seqüência de instantes de salto, de (2.16) e do Corolário 2.2 tem-se que  $\mathcal{N}\{\theta(t_m^-)\} \subset \mathcal{N}\{\theta(t_m)\}$  estritamente, o que permite concluir que a projeção ortogonal de  $\tilde{x}(t_m^-)$  em  $\mathcal{R}\{\mathcal{O}'_{\theta(t_m)}\}$  é nula e  $\hat{x}(t_m)$  é simplesmente

o resultado da projeção ortogonal de  $\hat{x}(t_m^-)$  em  $\mathcal{R}\{\mathcal{O}'_{\theta(t_m)}\}$ . Então, o valor da norma euclidiana de  $\hat{x}(\cdot)$  decresce em cada instante de salto da seqüência,

$$\|\hat{x}(t_m)\| \leq \|\hat{x}(t_m^-)\|, \text{ q.c} \quad (2.18)$$

O resultado segue de imediato de (2.17) e (2.18).  $\square$

**Lema 2.9.** *Considere o sistema  $\Phi_o$  com  $G$  dado em (2.14) e assuma que  $(A, C, \Lambda)$  é W-detetável. Então,  $E\{|\tilde{x}(t)|^2\} \rightarrow 0$  enquanto  $t \rightarrow \infty$ .*

*Prova.* Nesta prova,  $P_{t_m} = (I - \mathcal{O}_{\theta(t_m)}^+ \mathcal{O}_{\theta(t_m)})$  denota a projeção ortogonal em  $\mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta(t_m)}\}$ . Inicia-se mostrando, por indução, que  $E\{|\tilde{x}(t_m)|^2\} < \infty$ . Para  $m = 0$  o resultado é imediato, uma vez que  $E\{|\tilde{x}(0)|^2\} \leq |x_0|^2$ . Agora, como hipótese da indução, assume-se que  $E\{|\tilde{x}(t_{m-1})|^2\} < \infty$ . No instante  $t_m$ , a projeção ortogonal de  $\hat{x}(t_m^-)$  em  $\mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta(t_m)}\}$  é adicionada a  $\tilde{x}$ , ou seja,

$$\tilde{x}(t_m) = \tilde{x}(t_m^-) + P_{t_m} \hat{x}(t_m^-) \quad (2.19)$$

Note que  $P_{t_{m-1}} P_{t_m} = P_{t_{m-1}}$  pois  $\mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta(t_{m-1})}\} \subset \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta(t_m)}\}$ ; isso leva a  $P_{t_{m-1}} P_{t_m} \hat{x}(t_m^-) = P_{t_{m-1}} \hat{x}(t_m^-) = 0$ , i.e.,  $P_{t_m} \hat{x}(t_m^-) \in \mathcal{R}\{\mathcal{O}'_{\theta(t_{m-1})}\}$ , o que significa que

$$\tilde{x}(t_m^-) \perp P_{t_m} \hat{x}(t_m^-) \quad (2.20)$$

Por outro lado, de (2.14) e (2.13) é fácil verificar, para  $t_{m-1} \leq t < t_m$ , que  $\tilde{x}(t) = A_{\theta(t)} \tilde{x}(t)$  com condição inicial  $\tilde{x}(t_{m-1})$  devido à propriedade forte de Markov para SLSM (Davis, 1993) e à linearidade de  $\Phi_o$ . Lembrando que  $\tilde{x}(t) \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta(t)}\}$ , para  $t_m \leq t < t_{m+1}$ , o Lema 2.7 juntamente com a Proposição 1.2 e a propriedade forte de Markov proporcionam que

$$E\{|\tilde{x}(t)|^2 1_{\{t_m \leq t < t_{m+1}\}}\} \leq \alpha E\{\xi^{t-t_m} |\tilde{x}(t_m)|^2 1_{\{t_m \leq t < t_{m+1}\}}\} \quad (2.21)$$

onde  $0 < \xi < 1$  e  $\alpha \geq 1$ . Então, de (2.19), empregando (2.20), (2.21) e o Lema 2.8, avalia-se

$$\begin{aligned} E\{|\tilde{x}(t_m)|^2\} &= E\{|\tilde{x}(t_m^-) + P_{t_m} \hat{x}(t_m^-)|^2\} = E\{|\tilde{x}(t_m^-)|^2\} + E\{|P_{t_m} \hat{x}(t_m^-)|^2\} \\ &\leq \alpha E\{\xi^{t-t_{m-1}} |\tilde{x}(t_{m-1})|^2\} + E\{|\hat{x}(t_m^-)|^2\} \\ &< \alpha E\{|\tilde{x}(t_{m-1})|^2\} + E\{|\hat{x}(t_m^-)|^2\} < \infty \end{aligned} \quad (2.22)$$

o que completa a indução. De (2.21) e (2.22), pode-se encontrar  $o(t) > 0$  para o qual

$$E\{|\tilde{x}(t)|^2 1_{\{t_m \leq t < t_{m+1}\}}\} \leq \alpha E\{\xi^{t-t_m} |\tilde{x}(t_m)|^2 1_{\{t_m \leq t < t_{m+1}\}}\} \leq o(t)$$

vale para cada intervalo  $t_{m-1} < t < t_m$ , sendo que  $o(t) \rightarrow 0$  enquanto  $t \rightarrow \infty$ . Então, pode-se escrever

$$\begin{aligned} E\{|\tilde{x}(t)|^2\} &= E\{|\tilde{x}(t)|^2 1_{\{t_0 \leq t < t_1\}}\} + E\{|\tilde{x}(t)|^2 1_{\{t_1 \leq t < t_2\}}\} + \dots \\ &\leq \alpha E\{\xi^{t-t_0} |\tilde{x}(t_0)|^2 1_{\{t_0 \leq t < t_1\}}\} + \alpha E\{\xi^{t-t_1} |\tilde{x}(t_1)|^2 1_{\{t_1 \leq t < t_2\}}\} + \dots \\ &\leq o(t) + o(t) + \dots \end{aligned} \quad (2.23)$$

Finalmente, pode-se verificar que (2.23) tem, no máximo,  $n$  elementos. De fato, de (2.16) e do Corolário 2.2 é simples verificar que  $\mathcal{N}\{\theta(t_0)\} \subset \mathcal{N}\{\theta(t_1)\} \subset \dots \subset \mathcal{N}\{\theta(t_m)\}$ , estritamente, o que leva a  $m \leq \dim \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta(t_m)}\} \leq n$  onde o limite é devido ao fato que  $\mathcal{O}_i \in \mathcal{R}^{n(n^2N),n}$ ,  $\forall i$ . Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\{|\tilde{x}(t)|^2\} \leq n \lim_{t \rightarrow \infty} o(t) = 0$$

□

Os resultados anteriores permitem apresentar, a seguir, o principal resultado da seção.

**Teorema 2.2.**  $(A, C, \Lambda)$  é  $W$ -detetável se e somente se  $(A, \mathcal{O}, \Lambda)$  é  $MS$ -detetável.

*Prova.* Necessidade. Considere o sistema  $\Phi_o$  com  $G$  definido em (2.14) e assumo que  $(A, C, \Lambda)$  é  $W$ -detetável. De (2.15) e dos Lemas 2.8 e 2.9 avalia-se

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} E\{|x(t)|^2\} &= \lim_{t \rightarrow \infty} E\{|\hat{x}(t)|^2\} + \lim_{t \rightarrow \infty} E\{|\tilde{x}(t)|^2\} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-2t} E\{|\hat{x}(0)|^2\} + \lim_{t \rightarrow \infty} E\{|\tilde{x}(t)|^2\} = 0 \end{aligned}$$

Então,  $(A + G\mathcal{O}, \Lambda)$  é  $MS$ -estável, de forma que  $(A, \mathcal{O}, \Lambda)$  é  $MS$ -detetável.

Suficiencia. Mostra-se que  $(A, \mathcal{O}, \Lambda)$  não é  $MS$ -detetável quando  $(A, C, \Lambda)$  não é  $W$ -detetável. Considere  $i \in \mathcal{S}$  e  $x_0 \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_i)$  como no Corolário 2.3. Para a condição inicial  $x(0) = x_0$  e  $\theta(0) = i$ , do Corolário 2.2 (ii) tem-se que  $\mathcal{O}_{\theta(t)}x(t) = 0$ ,  $t \geq 0$ . Então, o termo  $G_{\theta(t)}\mathcal{O}_{\theta(t)}x(t)$  em (2.13) desaparece e  $x(t)$  evolui de acordo com  $\dot{x}(t) = A_{\theta(t)}x(t)$  para qualquer  $G \in \mathcal{M}^n$ , de forma que o sistema  $\Phi_o$  comporta-se como sua versão de malha aberta  $\Phi$ , em detrimento de como  $G$  é escolhido. Finalmente, do Corolário 2.3 tem-se que  $\lim_{t \rightarrow \infty} E\{|x(t)|^2\} \neq 0$ , o que permite concluir que não há  $G \in \mathcal{M}^n$  para o qual  $A + G\mathcal{O}$  é  $MS$ -estável, logo  $(A, \mathcal{O}, \Lambda)$  não é  $MS$ -detetável. □

A relação entre MS-detetabilidade e W-detetabilidade é estabelecida a seguir.

**Teorema 2.3.** *Se  $(A, C, \Lambda)$  é MS-detetável então  $(A, C, \Lambda)$  é W-detetável.*

*Prova.* Segue da definição de  $\mathcal{O}$  que  $\mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\} \subset \mathcal{N}\{C_i\}$ . Partindo deste fato, é simples verificar que, dado qualquer  $K \in \mathcal{M}^{n,q}$ , sempre existe  $G \in \mathcal{M}^{n,n^3N}$  tal que  $G_i \mathcal{O}_i = K_i C_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ; portanto, tem-se que MS-detetabilidade de  $(A, C, \Lambda)$  implica na MS-detetabilidade de  $(A, \mathcal{O}, \Lambda)$ . O Teorema 2.2 completa a prova.  $\square$

Note que o inverso da relação expressa no Teorema 2.3 não vale em geral, sendo que é relativamente simples encontrar situações nas quais  $\mathcal{N}\{C_i\} \subset \mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\}$ , estritamente.

*Observação 2.3 (Teste para MS-detetabilidade e W-detetabilidade).* O Teorema 2.2 permite testar W-detetabilidade de  $(A, C, \Lambda)$  através da verificação da MS-detetabilidade de  $(A, \mathcal{O}, \Lambda)$ . Visando uma diminuição na dimensionalidade, pode-se alternativamente verificar se  $(A, \mathcal{O}'\mathcal{O}, \Lambda)$  é MS-detetável. A seguinte forma computacional para o teste, escrita em termos de desigualdades matriciais lineares, segue diretamente da Proposição 1.2 (v); veja também (Rami e Ghaoui, 1996): MS-detetabilidade de  $(A, C, \Lambda)$  é equivalente à factibilidade do conjunto

$$A'_i X_i + X_i A_i + C'_i L'_i + L_i C_i + \mathcal{E}_i(X) < 0$$

nas variáveis  $X_i \in \mathcal{R}^{n^0}$  e  $L_i$  de dimensões apropriadas,  $i = 1, \dots, N$ .

**Exemplo 2.2 (Comparando MS-detetabilidade, W-observabilidade e W-detetabilidade).** Considere o SLSM descrito por

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0, 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 2 \end{bmatrix}; \\ C_1 = C_2 &= [0 \quad 1/4]; \quad R_1 = R_2 = 1; \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Empregando as condições testáveis do Teorema 2.1 e da Observação 2.3 respectivamente, encontra-se que  $(A, C, \Lambda)$  é W-observável e  $(A, C, \Lambda)$  é MS-detetável. Agora, façamos

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

de forma que a permanência no modo  $\theta = 2$  é aumentada, sendo que este modo não é detetável no sentido determinístico. Nesta situação, perde-se MS-detetabilidade. De fato, MS-detetabilidade depende dos valores da matriz de taxa de transição, enquanto W-observabilidade depende somente da localização dos elementos nulos. Em outras palavras, MS-detetabilidade depende dos tempos de permanência em modos detetáveis enquanto W-observabilidade depende apenas dos modos que são visitados. Nesse sentido, W-observabilidade apresenta uma espécie de robustez à variações em  $\Lambda$ .

Um sistema estritamente W-detetável pode ser obtido com uma pequena modificação: adicionamos um modo isolado  $\theta = 3$  com uma matriz estável  $A_3 = \frac{1}{2}I$  associada e  $C_3 = 0$ ; evidentemente, a matriz de taxas de transição fica

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Agora, sempre que  $\theta_0 = 3$ , a trajetória é (deterministicamente) estável e, sempre que  $\theta_0 = 1, 2$ , a trajetória é W-observável, o que indica que trajetórias não observadas são estáveis e, assim sendo, alguma espécie de detetabilidade deve valer. W-detetabilidade é o conceito que se adapta a esta perspectiva. Das condições testáveis do Teorema 2.1 e da Observação 2.3, pode-se verificar que o sistema é W-detetável mas não é nem MS-detetável nem W-observável.

**Exemplo 2.3 (Um SLSM simples, W-detetável, não MS-detetável).**

Neste exemplo, apresentamos um SLSM cujo vetor de estado é unidimensional e que é trivialmente W-detetável, mas não é MS-detetável; a simplicidade do sistema (unidimensionalidade) reforça o conservadorismo do conceito de MS-detetabilidade. Seja  $N = 2$ ,  $n = 1$  e

$$A_1 = -2; A_2 = 2; C_1 = 1; C_2 = 0; \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

De (2.3) avalia-se  $\mathcal{O}_1 = [1 \ -5]'$ ,  $\mathcal{O}_2 = [0 \ 1]'$  e do Teorema 2.1 conclui-se que  $(A, C, \Lambda)$  é W-observável. Note também que a condição no Lema 2.7 é trivialmente satisfeita. Por outro lado, do teste da Observação 2.3 vem que  $(A, C, \Lambda)$  não é MS-detetável.

*Observação 2.4.* Pode-se mostrar que a matriz  $\mathcal{O}_i$  é de posto completo se o par  $(A_i, C_i)$  é observável. Deste resultado e do resultado do Lema 2.3, conclui-se que uma condição suficiente para W-observabilidade de  $(A, C, \Lambda)$

consiste em que o par  $(A_i, C_i)$  seja observável e  $\lambda_{ji} > 0$  para todo  $j \neq i$ . Por exemplo, este é o cenário no Exemplo 2.3.

*Observação 2.5.* Considere o SLD descrito por  $(A_i, C_i)$  e lembre que  $\mathbb{O}(A_i, C_i)$  denota a matriz de observabilidade deste SLD. Sabe-se que detetabilidade de  $(A_i, \mathbb{O}(A_i, C_i))$  é equivalente a detetabilidade de  $(A_i, C_i)$ . Esta propriedade não é refletida no conceito de MS-detetabilidade, já que do Teorema 2.2 vem que MS-detetabilidade de  $(A, \mathcal{O}, \Lambda)$  é equivalente a W-detetabilidade de  $(A, C, \Lambda)$ , a qual é mais geral do que MS-detetabilidade de  $(A, C, \Lambda)$ . W-detetabilidade, por outro lado, apresenta esta propriedade:

$$(A, C, \Lambda) \text{ W-detetável} \Leftrightarrow (A, \mathcal{O}, \Lambda) \text{ W-detetável}$$

Uma demonstração concisa é como segue. Sejam  $\tilde{C} = \mathcal{O}'\mathcal{O}$  e o conjunto de matrizes de observabilidade  $\tilde{\mathcal{O}}$  associado a  $\tilde{C}$ , obtido empregando (2.3). Procedendo de forma similar ao Lema 2.2, pode-se verificar que  $\mathcal{N}\{\tilde{\mathcal{O}}\} = \mathcal{N}\{\mathcal{O}\}$ . Então, escreve-se:

$$(A, C, \Lambda) \text{ Wdt} \Leftrightarrow (A, \mathcal{O}, \Lambda) \text{ MSdt} \Leftrightarrow (A, \tilde{\mathcal{O}}, \Lambda) \text{ MSdt} \Leftrightarrow (A, \mathcal{O}, \Lambda) \text{ Wdt}$$

sendo que a segunda equivalência segue da relação entre os espaços nulos acima e as demais vêm diretamente do Teorema 2.2.

*Observação 2.6.* Nos casos degenerados nos quais  $\Lambda = 0$ , pode-se mostrar que W-detetabilidade é equivalente a MS-detetabilidade. Esta relação é explicada pelas equivalências a seguir; a maioria delas é simples de verificar e é apresentada sem referências. Utiliza-se uma notação concisa e evidente; lembre que  $\mathbb{O}(A_i, C_i)$  denota a matriz de observabilidade do SLD descrito por  $(A_i, C_i)$ .

- (i)  $\text{MSdt}(A, C, \Lambda) \Leftrightarrow \det(A_i, C_i), \forall i \Leftrightarrow \det(A_i, \mathbb{O}(A_i, C_i)), \forall i;$
- (ii)  $\mathcal{N}(\mathbb{O}(A_i, C_i)) \equiv \mathcal{N}(\mathcal{O}_i), \forall i;$
- (iii)  $\det(A_i, \mathbb{O}(A_i, C_i)) \Leftrightarrow \det(A_i, \mathcal{O}_i) .$
- (iv)  $\det(A_i, \mathcal{O}_i), \forall i \Leftrightarrow \text{MSdt}(A, \mathcal{O}, \Lambda) \Leftrightarrow \text{Wdt}(A, C, \Lambda) \text{ (Teo. 2.2);}$



## Capítulo 3

# W-Detetabilidade e o problema Linear Quadrático

Neste capítulo, obtemos resultados sobre o conceito de W-detetabilidade no contexto do problema LQ e das EARA. A estrutura do capítulo é descrita a seguir.

Na Seção 3.1, apresentamos o papel que o conceito de W-detetabilidade cumpre no problema LQ com saltos. No principal resultado da seção, mostramos que o conceito de W-detetabilidade vincula a MS-estabilidade de uma trajetória com a finitude do funcional de custo associado (veja o Lema 3.1). Destacamos que isto significa que W-detetabilidade é o conceito mais geral que garante MS-estabilidade de soluções, já que, ao se afrouxar este conceito, o vínculo acima mencionado deixa de existir e, conseqüentemente, existe ao menos uma trajetória MS-instável com custo associado finito. Frisamos, ainda, que este resultado recupera a Propriedade V mencionada na Seção 1.

Em seguida, na Seção 3.2, voltamos nossa atenção ao problema LQ com observação da variável de salto  $\theta$ , o qual conta com uma teoria bastante desenvolvida em relação ao caso sem observação de  $\theta$ . Neste contexto, mostramos que o conceito de W-detetabilidade é invariante à realimentação nos termos do Lema 3.2, bem como que o conceito assegura que a solução do problema LQ é MS-estável. Também apresentamos o papel do conceito de W-detetabilidade no contexto das EARA associadas ao problema LQ, que é o de assegurar MS-estabilidade de soluções e, indiretamente, unicidade, com isto recuperando a Propriedade VI. Ainda, mostramos que um sistema é W-detetável se e somente se a solução mínima das EARA é estabilizante, o que

recupera a Propriedade VII. Algumas propriedades adicionais são apresentadas, entre as quais destacamos a caracterização de que a solução mínima das EARA é positiva definida se e somente se o sistema é  $W$ -observável. Exemplos ilustrativos são apresentados na Seção 3.3.

### 3.1 $W$ -detetabilidade e o vínculo entre MS-estabilidade de trajetórias e a finitude do custo linear quadrático

Considere o funcional de custo

$$W(X) = \lim_{t \rightarrow \infty} W^t(X) \quad (3.1)$$

O resultado a seguir estabelece um paralelo para SLSM da Propriedade V citada no Capítulo 1.

**Lema 3.1.**  *$(A, C, \Lambda)$  é  $W$ -detetável se e somente se, para qualquer condição inicial  $X(0) = X$ ,  $W(X) < \infty$  assegura que  $\|X(t)\| \rightarrow 0$  enquanto  $t \rightarrow \infty$ .*

*Prova.* Necessidade. Sejam  $t_d$ ,  $\tau_d$ ,  $\delta$  e  $\gamma$  como na Definição 2.5. Proceda-se por contradição, assumindo que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| \neq 0$ . Nesta situação,

$$\|X(t)\| \geq \beta \zeta^t \|X(0)\| \quad (3.2)$$

para algum  $0 < \beta \leq 1$  e algum  $\zeta \geq 1$  (veja a Proposição 1.2). Defina a seqüência  $\mathcal{N} = \{n_0, n_1, \dots\}$  onde  $n_0 = 0$  e cada  $n_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$  são os menores inteiros tais que  $n_m > n_{m-1}$  e

$$\|X((n_m + 1)\tau_d)\| \geq \delta \|X(n_m \tau_d)\|$$

É simples verificar que, se o número de elementos de  $\mathcal{N}$  for finito, então

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|X(m \tau_d)\| = 0$$

o que contradiz (3.2) e, portanto, mostra que  $\mathcal{N}$  têm um número infinito de elementos. Assim sendo, pode-se tomar uma subsequência com infinitos elementos  $\mathcal{N}' = \{n_{m_0}, n_{m_1}, \dots\}$  onde  $n_{m_0} = m_0 = 0$  e cada  $m_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , é

o menor inteiro tal que  $n_{m_k} \geq n_{m_{k-1}} + \max\{1, (t_d/\tau_d)\}$ . Sendo que  $(A, C, \Lambda)$  é W-detetável por hipótese, pode-se avaliar

$$\begin{aligned} W^T(X) &= \int_0^T \langle X(\tau), C'C \rangle d\tau \geq \sum_{k=0}^{k'} \int_{n_{m_k}\tau_d}^{n_{m_k}\tau_d+t_d} \langle X(\tau), C'C \rangle d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{k'} W^{t_d}(X(n_{m_k}\tau_d)) \geq \sum_{k=0}^{k'} \gamma \|X(n_{m_k}\tau_d)\| \\ &\geq \gamma \sum_{k=0}^{k'} \beta \zeta^{(n_{m_k}\tau_d)} \|X(0)\| \geq \gamma \beta \zeta^{(n_{m_0}\tau_d)} (k' + 1) \|X(0)\| \end{aligned}$$

sendo  $k'$  definido como sendo o menor inteiro tal que  $n_{m_{k'}}\tau_d + t_d \leq T$ , de forma que  $k' \rightarrow \infty$  enquanto  $T \rightarrow \infty$  e, logo,  $W(X) = \infty$ , completando a prova por contradição.

Suficiência. A prova é imediata: da hipótese vem que  $\|X(t)\| \rightarrow 0$  enquanto  $t \rightarrow \infty$  sempre que  $W(X) = 0$  e o Lema 2.6 completa a prova, lembrando que  $W^\infty(X) = J^\infty(X)$ .  $\square$

**Corolário 3.1.** *Seja  $(A, C, \Lambda)$  W-detetável. Se  $W(X) < \infty$  para qualquer condição inicial  $X(0) = X$ , então  $(A, \Lambda)$  é MS-estável.*

*Observação 3.1.* O Lema 3.1 e o Corolário 3.1 permitem afirmar que W-detetabilidade é a condição mais fraca que assegura MS-estabilidade de sistemas com custo associado finito. De fato, se W-detetabilidade não valer, então do Lema 3.1 vem que existe uma trajetória MS-instável com custo associado finito.

*Observação 3.2.* Note que  $W(x_0, \theta_0) < \infty$  é equivalente a  $\int_0^\infty E\{\|y(t)\|^2\} dt < \infty$  ou, ainda,  $E\{\|y(t)\|\} \rightarrow 0$  enquanto  $t \rightarrow \infty$ . Assim sendo, do Lema 3.1 vem a interpretação de que W-detetabilidade associa a convergência do estado à da saída, na média quadrática.

## 3.2 W-detetabilidade e o problema LQ com saltos

Nesta seção, considera-se o problema LQ com saltos e com observação completa de estados, isto é, do estado contínuo  $x$  e de  $\theta$ . De forma sucinta, o

problema consiste na otimização de um funcional de custo quadrático, como segue:

$$J(x_0, \theta_0) = \inf_{u(\cdot)} E_{x_0, \theta_0} \left\{ \int_0^\infty (x(\tau)' C'_{\theta(\tau)} C_{\theta(\tau)} x(\tau) + u(\tau)' R_{\theta(\tau)} u(\tau)) d\tau \right\} \quad (3.3)$$

onde  $u(t) = g(s, x(s), \theta(s))$ ,  $s \leq t$ , é uma função  $\mathcal{F}_t$ -adaptada e as matrizes  $R_i$  pertencem a uma dada coleção de matrizes  $R \in \mathcal{M}^{r+}$ .

No problema LQ, usualmente se requer que o sistema seja MS-estabilizado. Uma possível forma de acomodar esta condição é através da imposição de uma classe de controles estabilizantes  $\mathcal{K}_S$ ; isto é empregado, por exemplo, em formulações utilizando desigualdades matriciais lineares, como em (Costa e Marques, 2000) ou em (Costa et al., 1997) no caso a tempo discreto.

Por outro lado, a condição mencionada acima é de difícil acomodação quando o problema é solucionado utilizando EARA. Neste cenário, é mais útil garantir que as soluções sejam estabilizantes, *a priori*. Como veremos nesta seção, este é justamente o papel fundamental do conceito de W-detetabilidade no problema LQ com saltos. Antes, necessitamos de alguns resultados preliminares.

É bem conhecido que, para o problema LQ com saltos formulado acima, a solução ótima é na forma  $u(t) = G_{\theta(t)} x(t)$ , o que consiste em uma realimentação linear de estado dependente da variável de salto. Neste contexto, pode-se considerar, sem perda de generalidade, a seguinte versão em malha fechada do SLSM:

$$\Phi_c : \dot{x}(t) = (A_{\theta(t)} + B_{\theta(t)} G_{\theta(t)}) x(t) \quad (3.4)$$

onde  $B \in \mathcal{M}^{n,r}$  é dado e  $G \in \mathcal{M}^{r,n}$  é considerado como um controle de realimentação de estado. O funcional de custo quadrático de horizonte infinito associado é

$$J_G(X) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^T \langle X(\tau), C' C + G' R G \rangle d\tau \quad (3.5)$$

sendo  $R \in \mathcal{M}^{r+}$ . Na seqüência,  $\mathcal{L}_G$  refere-se ao operador  $\mathcal{L}$  associado ao sistema em malha fechada com ganho  $G$ , formalmente,

$$\mathcal{L}_{G_i}(U) = \widehat{A}'_i U_i + U_i \widehat{A}_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} U_j \quad (3.6)$$

sendo  $\widehat{A}_i = A_i + B_i G_i$  para cada  $i$ . A mesma notação aplica-se a  $\mathcal{T}_G$ .

A primeira questão que surge é se um sistema em malha aberta W-detetável,  $(A, C, \Lambda)$ , é garantidamente W-detetável em malha fechada,  $(A + BG, C, \Lambda)$ ; em outras palavras, questiona-se se W-detetabilidade é invariante à realimentação. O lema a seguir responde esta questão em uma forma útil para referência posterior.

**Lema 3.2.** *Seja  $(A, C, \Lambda)$  W-detetável. Então,  $(A + BG, (C'C + G'RG)^{1/2}, \Lambda)$  é W-detetável para qualquer  $G \in \mathcal{M}^{r,n}$  e  $R \in \mathcal{M}^{r+}$ .*

*Prova.* Nesta prova,  $\mathcal{T}$  e  $W$  referem-se ao sistema  $\Phi$ , e  $\mathcal{T}_G$  e  $W_G$  referem-se ao sistema  $\Phi_c$ ;  $X(\cdot)$  representa a trajetória do sistema  $\Phi_c$ . Mostra-se que  $\|X(t)\| \rightarrow 0$  enquanto  $t \rightarrow \infty$  sempre que  $W_G^T(X) = 0$ . O Lema 2.5 permite concluir que, para todo  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= W_G^t(X) = \int_0^t \langle X(\tau), (C'C + G'RG)^{1/2}(C'C + G'RG)^{1/2} \rangle d\tau \quad (3.7) \\ &= \int_0^t \langle X(\tau), C'C + G'RG \rangle d\tau \geq \int_0^t \langle X(\tau), G'RG \rangle d\tau \end{aligned}$$

e da positividade do produto interno, vem que  $\langle X(t), G'RG \rangle = 0$  para quase todo  $t \geq 0$ . Da continuidade de  $X(\cdot)$  e do produto interno, avalia-se

$$\langle X(t), G'RG \rangle = \langle R^{1/2}GX(t)^{1/2}, R^{1/2}GX(t)^{1/2} \rangle = 0$$

para todo  $t \geq 0$  e, sendo  $R_i > 0$ , tem-se que  $G_i X_i(t) = 0$ , para todo  $t \geq 0$  e  $i$ . Então, escreve-se

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{G_i}(X(t)) &= \widehat{A}_i X_i(t) + X_i \widehat{A}'_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ji} X_j \\ &= A_i X_i(t) + X_i A'_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ji} X_j = \mathcal{T}_i(X(t)) \end{aligned}$$

para todo  $t \geq 0$ , e, levando em conta a Proposição 1.1 com  $\widehat{A}_i = (A_i + B_i G_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tem-se que as trajetórias dos sistemas  $\Phi_c$  e  $\Phi$  coincidem sempre que as condições iniciais coincidirem. Nesta situação,

$$W^T(X) = W_G^T(X) = 0$$

e a detetabilidade de  $(A, C, \Lambda)$  assegura que  $\|X(t)\| \rightarrow 0$  enquanto  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

*Observação 3.3.* Note que a estrutura de observação de estados não é fundamental na prova do lema anterior. Na verdade, o resultado de invariância à realimentação é válido para qualquer realimentação linear de estado; um exemplo é o caso em que se adota uma classe de controles na forma  $u(t) = G(t)x(t)$  em virtude de não se observar  $\theta$ . Note também que o fato de as matrizes  $R_i$  serem positivas definidas é fundamental. Caso esta condição seja violada, então é simples encontrar situações nas quais o resultado não valha; mesmo considerando um SLD, tem-se que o controle pode instabilizar um modo originalmente estável, sem o tornar observável. Esta é justamente a condição fundamental para a invariância: sempre que o controle instabilize uma trajetória, ele deve torná-la observada no sentido apropriado.

A seguir, formaliza-se que W-detetabilidade serve para garantir estabilidade de soluções.

**Lema 3.3.** *Considere o sistema em malha fechada  $\Phi_c$  com um controle de realimentação linear de estado  $G \in \mathcal{M}^{r,n}$ . Seja  $(A, C, \Lambda)$  W-detetável. Se  $J_G(X) < \infty$  para qualquer condição inicial  $X(0) = X$ , então  $(A + BG, \Lambda)$  é MS-estável.*

*Prova.* Nesta prova,  $W_G$  refere-se ao sistema descrito por  $(A + BG, (C'C + G'RG)^{1/2}, \Lambda)$ . Do Lema 3.2 vem que  $(A + BG, (C'C + G'RG)^{1/2})$  é W-detetável e, notando que  $W_G(X) = J_G(X) < \infty$ , o resultado desejado vem do Corolário 3.1, com as identificações apropriadas.  $\square$

Considere, agora, as EARA associadas ao problema LQ,

$$\mathcal{L}_i(P) - P_i B_i R_i^{-1} B_i' P_i + C_i' C_i = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.8)$$

sendo a variável  $P \in \mathcal{M}^{n_0}$ . Na proposição a seguir, para referência posterior, apresenta-se a relação entre a solução das EARA e o problema LQ (Fragoso e Baczynski, 2001; Costa et al., 1999; Ji e Chizeck, 1990a).

**Proposição 3.1.** *Seja  $P$  uma solução das EARA e defina  $G \in \mathcal{M}^{r,n}$  como  $G_i = -R_i^{-1} B_i' P_i$  para todo  $i = 1, \dots, N$ ; então,  $J_G(x_0, \theta_0) = x_0' P_{\theta_0} x_0$ . Além disso, se  $P$  é uma solução mínima das EARA, então  $\inf_{G \in \mathcal{M}^{r,n}} J_G(x_0, \theta_0) = x_0' P_{\theta_0} x_0$ .*

Assim sendo, sempre que há uma solução  $P$  para as EARA, tem-se  $J_G(x_0, \theta_0) = x_0' P_{\theta_0} x_0 < \infty$  e o Lema 3.3 garante, sob a hipótese de W-detetabilidade, que  $(A + BG, \Lambda)$  é MS-estável. Nestes casos, dizemos que a

solução das EARA é MS-estabilizante, conforme formalizado a seguir; veja também (Costa e Fragoso, 1995; do Val et al., 1999; Ji e Chizeck, 1990b; Rami e Ghaoui, 1996).

**Definição 3.1 (Solução estabilizante).** Se  $P \in \mathcal{M}^{n_0}$  satisfaz as EARA em (3.8) e se  $G \in \mathcal{M}^{r,n}$  definido por

$$G_i = -R_i^{-1}B_i'P_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.9)$$

é tal que  $(A + BG, \Lambda)$  é MS-estável, então  $P$  é denominada uma solução MS-estabilizante das EARA.

W-detetabilidade também serve, indiretamente, como garantia de unicidade de soluções das EARA. De fato, sabe-se que o conjunto de soluções MS-estabilizantes das EARA tem, no máximo, um elemento (Costa et al., 1999). Sob a hipótese de W-detetabilidade, o conjunto de soluções coincide com o conjunto de soluções MS-estabilizantes e, conseqüentemente, a unicidade é estendida ao primeiro conjunto. Mencionamos que estes resultados recuperam a Propriedade VI do Capítulo 1; os resultados são sintetizados na proposição a seguir.

**Proposição 3.2.** *Seja  $P \in \mathcal{M}^{n_0}$  uma solução das EARA. As seguintes implicações valem:*

(i)  $(A, C, \Lambda)$  é W-detetável  $\Rightarrow$  (ii)  $P$  é uma solução MS-estabilizante das EARA  $\Rightarrow$  (iii)  $P$  é a única solução das EARA  $\Rightarrow$  (iv)  $P$  é a solução ótima no sentido que ela proporciona a solução do problema LQ.

Na seqüência, apresenta-se uma caracterização para o conceito de W-detetabilidade em termos da solução mínima das EARA, a qual recupera a Propriedade VII mencionada no Capítulo 1. O resultado baseia-se na caracterização apresentada adiante dos espaços nulos da solução mínima das EARA em termos do conjunto de matrizes de observabilidade  $\mathcal{O}$ , análoga a do Lema 4.1 para SLD. Resultados preliminares sobre o funcional de custo serão necessários; o resultado a seguir é uma conseqüência direta dos resultados do Corolário 2.1.

**Proposição 3.3.** *Considere o sistema  $\Phi$  com condição inicial  $x(0) = x \in \mathbb{R}^n$  e  $\theta(0) = i \in \mathcal{S}$ . Então,  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_i)$  se e somente se*

$$E \left\{ \int_0^T x(\tau)' C'_{\theta(\tau)} C_{\theta(\tau)} x(\tau) d\tau \right\} \Big|_{u=0} = 0, \quad \forall T \geq 0, \quad (3.10)$$

A relação entre o conjunto de matrizes  $\mathcal{O}$  e o custo ótimo  $J(\cdot)$  é dada adiante.

**Lema 3.4.** *Sejam  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $i \in \mathcal{S}$  e  $R \in \mathcal{M}^{r+}$ . Então,  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_i)$  se e somente se  $J(x, i) = 0$ .*

*Prova.* Necessidade.  $u(t) = 0$ ,  $t \geq 0$ , é um controle admissível. Então, dado  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_i)$ , pode-se empregar (3.10) para avaliar

$$0 \leq J(x, i) \leq \lim_{s \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^s x(\tau)' C'_{\theta(\tau)} C_{\theta(\tau)} x(\tau) d\tau \right\} \Big|_{u=0} = 0$$

Suficiência.  $J(x, i) = 0$  leva a  $u(t) = 0$   $\mathbb{P}$ -quase certamente (q.c.) e  $t$ -q.c., de forma que (3.10) também vale para este  $u(\cdot)$  e a trajetória correspondente  $x(\cdot)$ . A Proposição 3.3 completa a prova.  $\square$

A relação entre os espaços nulos da solução mínima das EARA e o conjunto de matrizes de observabilidade é como segue.

**Lema 3.5.** *Seja  $P$  a solução mínima das EARA. Então,  $\mathcal{N}\{P_i\} = \mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ .*

*Prova.* Da Proposição 3.1,  $x \in \mathcal{N}\{P_i\}$  é equivalente a  $J(x, i) = x' P_i x = 0$  o que, de acordo com o Lema 3.4, é equivalente a  $x \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\}$ .  $\square$

*Observação 3.4.* Em (Morozan, 1995, *Proposition 9*), demonstra-se que W-observabilidade de  $(A, C, \Lambda)$  é uma condição suficiente para que as soluções das EARA sejam positivas definidas. O mesmo resultado vem diretamente do Teorema 2.1 e do Lema 3.5. Além disto, aqui facilmente se obtém que a condição é também necessária.

**Lema 3.6.** *Seja  $P$  a solução mínima das EARA. Então,  $(A, C, \Lambda)$  é W-detetável se e somente se  $P$  é uma solução estabilizante.*

*Prova.* Necessidade: segue de imediato da Proposição 3.2.

Suficiência: mostra-se que a solução não é estabilizante se o sistema não for W-detetável. Nesta situação, do Lema 2.7 vem que existe uma condição inicial  $x_0, \theta_0$ , com  $x_0 \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta_0}\}$ , tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} E\{\|x(t)\|^2\} \neq 0$ , sendo  $x(t)$  a trajetória do sistema em malha aberta. Além disto, do Corolário 2.2 (ii), vem que  $x(t) \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta(t)}\}$ , para todo  $t \geq 0$ . Agora, do Lema 3.5 vem que  $\mathcal{N}\{P_i\} = \mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\}$ , e tem-se  $u(t) = R_i^{-1} B_i' P_i x(t) = 0$ , para todo  $t \geq 0$ , o que significa que o controle obtido através da solução mínima não altera a trajetória  $x(t)$  MS-instável e não fracamente observada.  $\square$

*Observação 3.5.* O Lema 3.6 estabelece que se um sistema não é W-detetável, então a solução mínima das EARA não é MS-estabilizante. Em conexão com os comentários do início da Seção 3.2, caso MS-estabilidade seja requerida, ela deve ser imposta como uma restrição adicional, por exemplo através da imposição de uma classe estabilizante  $\mathcal{K}_S$ .

Exemplos ilustrando os resultados dos Lemas 3.5 e 3.6, bem como a Observação 3.4, são encontrados na Seção 3.3.

Finalizando a seção, apresentamos um teorema em uma forma frequentemente encontrada na literatura, a qual apresenta a caracterização do problema LQ sob hipóteses de detetabilidade e estabilizabilidade. Obviamente, a novidade aqui é a utilização de W-detetabilidade substituindo outros conceitos mais antigos e restritivos. A prova é omitida, sendo que os resultados já se encontram detalhados ao longo da seção.

**Teorema 3.1.** *Considere o sistema*

$$\dot{x}(t) = A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t) \quad (3.11)$$

o funcional de custo de horizonte infinito  $J^\infty(X)$  e as EARA associadas, na variável  $P \in \mathcal{M}^{n_0}$ :

$$A'_i P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j - P_i B_i R_i^{-1} B'_i P_i + Q_i = 0 \quad (3.12)$$

Seja  $(A, Q^{1/2})$  W-detetável. Então, as seguintes afirmativas valem:

(i) Existe uma solução  $P \in \mathcal{M}^{n_0}$  de (3.12) se e somente se o sistema é MS-stabilizável.

(ii) Se  $P$  é a solução de (3.12), então ela é única. O controle ótimo de realimentação linear de estado

$$u(t) = -R_i^{-1} B'_i P_i x(t), \quad \text{sempre que } \theta(t) = i \quad (3.13)$$

é tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\{|x(t)|^2\} = 0$$

### 3.3 Exemplos ilustrativos

Inicialmente, ressaltamos que as soluções mínimas e as MS-estabilizantes, nos exemplos a seguir, são encontradas utilizando o Método II apresentado

no próximo capítulo e o método encontrado em (Costa et al., 1999), respectivamente. Denomina-se  $P$  como sendo uma solução definida positiva quando  $P \in \mathcal{M}^{n+}$ .

**Exemplo 3.1 (Soluções múltiplas das EARA).** Considere a seguinte versão do SLSM descrito no Exemplo 2.2:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} \delta & 1/2 \\ \epsilon & 1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 2 \end{bmatrix}; \\ C_1 = C_2 &= [0 \quad 1/4]; R_1 = R_2 = 1; \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

com  $\delta = 1$  e  $\epsilon = 0$ . Da condição testável da Observação 2.3, verifica-se que  $(A, C, \Lambda)$  não é W-detetável e, conseqüentemente, o sistema não é nem W-observável nem MS-detetável. Este é um contexto interessante para analisar as soluções das EARA.

De início, apresentamos a solução mínima

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.6580 \end{bmatrix}; P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.8240 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Utilizando o teste de estabilidade da Proposição 1.2 (v), verifica-se que  $(\tilde{A}, \Lambda)$  com  $\tilde{A}_i = A_i - B_i R_i^{-1} B_i' P_i$ ,  $i = 1, \dots, S$ , não é MS-estável, o que significa que a solução  $P$  acima não é MS-estabilizante. Outra característica interessante é que  $\mathcal{N}\{P_i\} = \mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\}$ ,  $i = 1, 2$  (veja o Lema 3.5).

Outra solução das EARA é

$$\bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 53.35 & -8.977 \\ -8.977 & 2.685 \end{bmatrix}; \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 22.73 & -10.00 \\ -10.00 & 6.820 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

a qual é MS-estabilizante e, assim sendo, é a única solução MS-estabilizante.

Este exemplo ilustra que as soluções das EARA podem ser múltiplas e não MS-estabilizantes, quando o sistema não é W-detetável. Mencionamos também que o fato de a solução mínima não ser estabilizante é esperado, para sistemas não W-detetáveis, conforme estabelecido no Lema 3.6.

O sistema no Exemplo 3.1 não é W-detetável e a solução das EARA não é única nem MS-estabilizante. Nos exemplos a seguir, introduzimos modificações com as quais o sistema é W-detetável e estudamos o comportamento da solução.

**Exemplo 3.2 (Solução única, MS-estabilizante e semidefinida positiva das EARA).** Considere o SLSM no Exemplo 3.1 com  $\delta < 0$  e  $\epsilon = 0$ . Com esta alteração, estabilizam-se as trajetórias não observadas, fazendo com que  $(A, C, \Lambda)$  seja W-detetável e a solução das EARA associadas seja única e MS-estabilizante (veja a Proposição 3.2 ou o Teorema 3.1).

Uma vez que  $(A, C, \Lambda)$  não é W-observável, soluções definidas positivas não satisfazem as EARA (veja a Observação 3.4). Neste exemplo, a solução semidefinida positiva em (3.15) é válida para qualquer  $\delta < 0$ ; note que o espaço gerado pelo vetor  $u = [1 \ 0]'$  não é observado.

**Exemplo 3.3 (Solução única, MS-estabilizante e definida positiva das EARA).** Seja o SLSM do Exemplo 3.1 com  $\delta = 1$  e  $\epsilon \neq 0$ . Nesta configuração,  $(A, C, \Lambda)$  é W-observável. A solução das EARA é única, MS-estabilizante, definida positiva (veja a Observação 3.4) e aproxima-se de  $\bar{P}$  em (3.16) na medida em que  $\epsilon \rightarrow 0$ . Denotando por  $P(\epsilon)$  a solução mínima das EARA para enfatizar a dependência em  $\epsilon$ , observa-se que  $P(\epsilon)$  não é contínua em  $\epsilon = 0$ .



## Capítulo 4

# Métodos de solução para as EARA

Considere as EARA na variável  $P \in \mathcal{M}^{n_0}$ , com  $R \in \mathcal{M}^{r^+}$  dado,

$$A'_i P_i + P_i A_i - P_i B_i R_i^{-1} B'_i P_i + C'_i C_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.1)$$

que surgem no problema LQ associado ao SLSM, conforme descrito na Seção 3.2.

Existe um número considerável de métodos de solução para as EARA na literatura de SLSM. Entre os métodos disponíveis, citamos aqueles em (Abou-Kandil et al., 1994; do Val et al., 1999; Gajic e Borno, 1995; Gajic e Losada, 2000), os quais empregam recursões de equações de Lyapunov desacopladas ou de equações de Riccati desacopladas (EARD), e aqueles em (Rami e Ghaoui, 1996; Costa et al., 1999), que utilizam-se de formulações com desigualdades lineares matriciais (LMIs).

Apesar da variedade de métodos disponíveis, ainda há ao menos duas lacunas a serem preenchidas. A primeira delas surge com a introdução do conceito de  $W$ -detetabilidade e consiste na inexistência de métodos que possam ser utilizados em SLSM  $W$ -detetáveis. A segunda consiste na falta de métodos baseados em iterações de EARD que convirjam para a solução mínima das EARA se e somente se uma solução existir, dispensando condições adicionais.

Neste capítulo, propõem-se dois métodos de solução para as EARA que visam a preencher, respectivamente, cada uma das lacunas mencionadas acima.

Na seqüência, apresentamos uma breve descrição destes métodos e dos resultados obtidos.

O primeiro método é denominado Método I e abordado na Seção 4.2. Para o seu desenvolvimento, escolheu-se como ponto de partida o método em (do Val et al., 1999), o qual não requer condições especiais de inicialização e apresenta alta taxa de convergência, em relação a outros métodos. O método em (do Val et al., 1999) é baseado em iterações em  $k$  e  $i$  das seguintes EARD nas variáveis  $Z_i^k$ :

$$\left(A_i + \frac{\lambda_{ii}}{2}I\right)' Z_i^k + Z_i^k \left(A_i + \frac{\lambda_{ii}}{2}I\right) - Z_i^k B_i R_i^{-1} B_i' Z_i^k + C_i' C_i + \mathcal{E}_i^k = 0 \quad (4.2)$$

sendo  $\mathcal{E}_i^k$  uma função de  $Z_1^k, \dots, Z_{i-1}^k, Z_{i+1}^{k-1}, \dots, Z_N^{k-1}$ . Por outro lado, quando se tenta empregar este método em sistemas que são estritamente W-detetáveis, surge o problema de que a unicidade de solução de (4.2), fundamental em (do Val et al., 1999), não pode ser assegurada sob a condição mais geral de W-detetabilidade, veja a Observação 4.2.

Visando a superar esta dificuldade, modificamos o método em (do Val et al., 1999) através da introdução de certos termos dependentes de um parâmetro  $\kappa$ . Para este novo método, no Lema 4.2 mostramos que  $(A_i + \kappa \frac{\lambda_{ii}}{2}I, \mathcal{O}_i)$  é detetável e, além disto, mostramos no Lema 4.4 que  $\mathcal{N}(Z_i^k) \subset \mathcal{N}(\mathcal{O}_i)$  vale para  $k > n^2N$  e  $\kappa > 1$ . Combinando estes fatos, é possível demonstrar que  $(A_i + \kappa \frac{\lambda_{ii}}{2}I, C_i' C_i + \mathcal{E}_i^k)$  é detetável após  $n^2N$  iterações do método e, assim sendo, as soluções das EARD são únicas (veja o Lemma 4.6). Estes resultados permitem mostrar que o Método I converge se e somente se o sistema é MS-estabilizável, assumindo que  $(A, C, \Lambda)$  é W-detetável, independentemente da escolha da condição inicial (veja o Teorema 4.1). Desta forma, estabelecemos um vínculo entre a convergência do método e a MS-estabilizabilidade do sistema.

Também é importante mencionar que o método original em (do Val et al., 1999) é recuperado com  $\kappa = 1$ , de forma que a taxa de convergência pode ser arbitrariamente aproximada à do método em (do Val et al., 1999) através de um ajuste apropriado de  $\kappa$ .

Com respeito ao segundo método, intitulado como Método II e abordado na Seção 4.3, tem-se que ele consiste em uma generalização do método em (Abou-Kandil et al., 1994), no sentido de que recupera este último se as condições que lá aparecem (condições desacopladas de estabilizabilidade dos pares  $(A_i + (1/2)(\lambda_{ii}), B_i)$  e detetabilidade dos pares  $(A_i + (1/2)(\lambda_{ii}), C_i)$ ) forem verificadas. De fato, o método surge com a constatação de que as

condições desacopladas consideradas em (Abou-Kandil et al., 1994) sempre podem ser verificadas, a partir de um aumento na dimensionalidade do SLSM. Neste sentido, veja a Nota 1.1 e a Observação 4.3.

Conforme antes descrito, o Método II é o único que emprega iterações de EARDs e que converge para a solução mínima das EARA se e somente se uma solução existe, não necessitando de qualquer condição adicional. Estas características tornam-no interessante para aplicação em casos nos quais o sistema não é  $W$ -detetável e em que não se requer MS-estabilidade da solução; exemplos destes casos são aqueles em que se procuram limitantes inferiores para o funcional de custo ou em que se deseja verificar a existência de soluções para as EARA. Vale comentar que há apenas um outro método disponível na literatura que pode ser empregado nos mesmos casos; este método é encontrado em (Rami e Ghaoui, 1996), e emprega uma formulação com LMIs, as quais são numericamente mais delicadas.

Finalmente, salientamos que os métodos apresentados neste capítulo, em adição a outros métodos disponíveis, completam um conjunto de métodos de solução para EARA que varrem as situações de interesse: quando o SLSM é  $W$ -detetável, o Método I pode ser usado; quando o SLSM não é  $W$ -detetável e não se buscam soluções MS-estabilizantes, o Método II é aplicável; por último, quando o SLSM não é  $W$ -detetável e busca-se uma solução MS-estabilizante, então o método em (Costa et al., 1999) pode ser empregado, o qual utiliza uma formulação com desigualdades lineares matriciais (LMIs) que permite incorporar a condição de MS-estabilidade.

Exemplos numéricos e comparações são encontrados na Seção 4.4; citamos também que o Método II é empregado nos Exemplos 3.1 a 3.3.

## 4.1 Resultados básicos para SLD

Os resultados nesta seção são apresentados para facilitar a referência. Lembre que  $\mathbb{O}(A_i, C_i)$  é a matriz de observabilidade do sistema determinístico descrito por  $(A_i, C_i)$ .

A estabilizabilidade do par  $(A_i, B_i)$  e a detetabilidade do par  $(A_i, C_i)$  referem-se aos conceitos determinísticos usuais; lembre-se, da teoria de SLD, que  $(A_i, C_i)$  é detetável se  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{A_i t} z = 0$  para cada  $z \in \mathcal{N}(\mathbb{O}(A_i, C_i))$ .

Considere a EARD na variável  $P_i \in \mathcal{R}^n$

$$A_i' P_i + P_i A_i - P_i B_i R_i^{-1} B_i' P_i + C_i' C_i = 0 \quad (4.3)$$

**Proposição 4.1.** *Seja o par  $(A_i, C_i)$  detetável. Então a EARD em (4.3) têm uma solução  $P_i \in \mathcal{R}^n$  se e somente se  $(A_i, B_i)$  é estabilizável; além disto,  $P_i$  é a única solução de (4.3).*

**Lema 4.1.** *Assuma que  $P_i \in \mathcal{R}^{n_0}$  satisfaça a EARD em (4.3). Então,*

$$\mathcal{N}\{P_i\} \subset \mathcal{N}\{\mathbb{O}(A_i, C_i)\} \quad (4.4)$$

*Prova.* A prova é trivial para dimensão  $n = 1$ . Para  $n > 1$ , apresentam-se apenas os argumentos principais da prova. Considere o SLD  $\dot{x} = Ax + Bu$  e o funcional de custo  $J^\infty(x) = \inf_{u(\cdot)} \int_0^\infty (x(\tau)'C_i'C_i x(\tau) + u(\tau)'R_i u(\tau))d\tau$  definido para  $x(0) = x$ . Da Proposição 3.1, tem-se que

$$0 \leq J^\infty(x) \leq x'P_i x$$

de forma que  $x \in \mathcal{N}\{P_i\}$  leva a  $J^\infty(x) = 0$ . Então, tomando o sistema  $\Phi$  com  $\Lambda = 0$ , pode-se verificar que  $J^\infty(x, i) = J^\infty(x) = 0$  e do Lema 3.4 vem que  $x \in \mathcal{N}\{\mathbb{O}_i\}$ ; finalmente, é simples verificar por inspeção que  $\mathcal{N}\{\mathbb{O}_i\} = \mathcal{N}\{\mathbb{O}(A_i, C_i)\}$  sempre que  $\lambda_{ii} = 0$ .  $\square$

**Lema 4.2.** *Seja  $\kappa \geq 1$ . As seguintes afirmações valem:*

- (i)  $(A, B, \Lambda)$  é MS-estabilizável  $\Rightarrow$  cada par  $(A_i + \kappa \frac{\lambda_{ii}}{2} I, B_i)$  é estabilizável;
- (ii)  $(A, C, \Lambda)$  é MS-detetável  $\Rightarrow$  cada par  $(A_i + \kappa \frac{\lambda_{ii}}{2} I, C_i)$  é detetável;
- (iii)  $(A, C, \Lambda)$  é W-detetável  $\Rightarrow$  cada par  $(A_i + \kappa \frac{\lambda_{ii}}{2} I, \mathbb{O}_i)$  é detetável.

*Prova.* (i) e (ii) são adaptados do Remark 2.1 de (do Val et al., 1999). (iii) é imediato do Teorema 2.2 e da afirmação (ii).  $\square$

## 4.2 O Método I para solução das EARA

O Método I, proposto e estudado nesta seção, emprega recursões de um conjunto de EARDs, como segue:

Método I.

Passo 1. Ajuste arbitrariamente  $Z^0 = (Z_1^0, \dots, Z_N^0) \in \mathcal{M}^{n_0}$  e  $\kappa > 1$ .

Passo 2. Para  $k = 1, 2, \dots$  e  $i = 1, 2, \dots, N$ , calcule recursivamente

$$\left(A_i + \kappa \frac{\lambda_{ii}}{2} I\right)' Z_i^k + Z_i^k \left(A_i + \kappa \frac{\lambda_{ii}}{2} I\right) - Z_i^k B_i R_i^{-1} B_i' Z_i^k + C_i' C_i + \mathcal{E}_i(\hat{Z}_i^k) = 0 \quad (4.5)$$

sendo  $\hat{Z}_i^k = (\hat{Z}_{i1}^k, \dots, \hat{Z}_{iN}^k)$  definido como

$$\hat{Z}_{ij}^k = \begin{cases} Z_j^k, & j = 1, \dots, i-1, \\ (1 - \kappa)Z_j^{k-1}, & j = i, \\ Z_j^{k-1} & j = i+1, \dots, N. \end{cases} \quad (4.6)$$

Nesta seção, denota-se por  $Z^k = (Z_1^k, \dots, Z_N^k)$  a seqüência gerada pelo Método I.

O principal resultado do capítulo é apresentado a seguir.

**Teorema 4.1.** *Seja  $(A, C, \Lambda)$  W-detetável. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $(A, B, \Lambda)$  é MS-estabilizável;
- (ii)  $Z^k$  converge para algum  $Z^\infty \in \mathcal{M}^{n_0}$  enquanto  $k \rightarrow \infty$ ;
- (iii)  $Z^\infty = P$ , a solução única e MS-estabilizante das EARA.

Os resultados encontrados na seqüência são necessários para a prova do Teorema 4.1, apresentada na Seção 4.2.2.

*Observação 4.1.* A condição (ii) do Teorema 4.1 proporciona um teste de MS-estabilizabilidade; a condição de W-detetabilidade pode ser satisfeita *a priori* fazendo  $C_i = I$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

*Observação 4.2.* O Método I é uma adaptação do método apresentado em (do Val et al., 1999). De fato, o método em (do Val et al., 1999) é recuperado quando se faz  $\kappa = 1$  no Método I. Em (do Val et al., 1999), assumindo que o sistema é MS-estabilizável e que a condição de MS-detetabilidade ou detetabilidade no sentido determinístico de cada par vale, mostra-se que o método converge para a única solução  $P \in \mathcal{M}^{n_0}$  de (4.1). A prova baseia-se no fato de que qualquer das hipóteses mencionadas acima assegura que cada par  $((A_i + \frac{\lambda_{ii}}{2}I), C_i)$  é detetável e, conseqüentemente, a EARD (4.5) com  $\kappa = 1$  tem uma única solução; unicidade é fundamental nos argumentos das provas.

Entretanto, W-detetabilidade não garante que cada par  $((A_i + \frac{\lambda_{ii}}{2}I), C_i)$  seja detetável. De fato, é simples encontrar contra-exemplos: seja o sistema unidimensional definido por

$$A_1 = 1, A_2 = 0, C_1 = 0, C_2 = 1, \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Pode-se verificar que  $\mathcal{O}_i$  é de posto completo, para  $i = 1, 2$ , de forma que  $(A, C, \Lambda)$  é (trivialmente) W-detetável. Em contrapartida, o par  $(A_1 +$

$\frac{\lambda_{ii}}{2}I, C_1) = (1/2, 0)$  não é detetável. Também mencionamos o sistema do Exemplo 2.1, o qual não apresenta nenhum dos pares  $((A_i + \frac{\lambda_{ii}}{2}I), C_i)$  detetável, apesar de ser  $W$ -observável.

Concluindo, a prova de convergência do método em (do Val et al., 1999) não pode ser aplicada no caso em questão.

### 4.2.1 Unicidade da seqüência

Nesta seção, procuramos estabelecer a unicidade de solução da EARD (4.5), através de uma perspectiva diferente daquela em (do Val et al., 1999): mostra-se que cada par  $(A_i + \kappa \frac{\lambda_{ii}}{2}I, C_i' C_i + \mathcal{E}_i(\hat{\mathcal{Z}}_i^k))$  é detetável para valores suficientemente grandes de  $k$ , e utiliza-se a Proposição 4.1 para mostrar que a EARD tem uma única solução, nesta situação.

**Lema 4.3 (Estados Absorventes).** *Considere o sistema  $\Phi$ . Sejam  $(A, C, \Lambda)$   $W$ -detetável e  $\lambda_{ii} = 0$  para algum  $i \in \mathcal{S}$ . Então, o par  $(A_i, C_i)$  é detetável.*

*Prova.* Proceda-se por contradição, assumindo que o par  $(A_i, C_i)$  não é detetável, ou seja, assume-se que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{A_i t} z \neq 0$  para algum  $z \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}(A_i, C_i)\}$ . Considere o sistema  $\Phi$  com  $\lambda_{ii} = 0$  e a condição inicial  $x_0 = z$  e  $\theta_0 = i$ . Nesta situação, tem-se claramente que  $E\{x(t)\} = e^{A_i t} z$ , levando a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\{|x(t)|^2\} \neq 0 \quad (4.8)$$

Por outro lado, é fácil inspecionar que  $\mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\} = \mathcal{N}\{\mathcal{O}(A_i, C_i)\}$  sempre que  $\lambda_{ii} = 0$ . Então tem-se que  $x_0 \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\}$  e, tendo em vista (4.8), conclui-se que  $(A, C, \Lambda)$  não é  $W$ -detetável, completando a prova por contradição.  $\square$

**Lema 4.4.** *Considere o sistema  $\Phi$  e a seqüência  $\mathcal{Z}^k, k \geq 0$  gerada pelo Método I. Seja  $(A, B, \Lambda)$   $MS$ -estabilizável e  $(A, C, \Lambda)$   $W$ -detetável. Então,*

$$\mathcal{N}\{\mathcal{Z}_i^k\} \subset \mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\}, \quad \forall k \geq n^2 N \quad (4.9)$$

A prova do Lema 4.4 necessita do resultado adiante, utilizado em um argumento indutivo no índice  $k$  para demonstrar que  $\mathcal{N}\{Z_i^k\} \subset \mathcal{N}(\sum_{m=0}^{k-1} O_i' O_i(m))$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Recorde-se que as matrizes  $O$  são como em (2.3).

**Lema 4.5.** *Seja  $(A, B, \Lambda)$   $MS$ -estabilizável e  $(A, C, \Lambda)$   $W$ -detetável. Assuma que, para algum  $k \geq 1$  e  $0 \leq i \leq N$ ,*

$$\mathcal{N}\{Z_j^k\} \subset \mathcal{N}\left\{\sum_{m=0}^{k-1} O_j(m)' O_j(m)\right\}, \quad j = 1, \dots, i-1 \quad (4.10)$$

e

$$\mathcal{N}\{Z_j^{k-1}\} \subset \mathcal{N}\left\{\sum_{m=0}^{k-2} O_j(m)'O_j(m)\right\}, \quad j = i, \dots, N \quad (4.11)$$

valham. Então,

$$\mathcal{N}\{Z_i^k\} \subset \mathcal{N}\left\{\sum_{m=0}^{k-1} O_i(m)'O_i(m)\right\} \quad (4.12)$$

*Prova.* Nesta prova, consideram-se dois casos:  $\lambda_{ii} > 0$  e  $\lambda_{ii} = 0$ .

Caso 1:  $\lambda_{ii} > 0$ . Denota-se  $\tilde{A}_i = A_i + \kappa \frac{\lambda_{ii}}{2} I$ . Da regra de atualização (4.5), do Lema 4.1 e através do uso das propriedades (i) e (ii) do Lema A1 (no Apêndice A), tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\{Z_i^k\} &\subset \mathcal{N}\{\mathbb{O}(\tilde{A}_i, (C_i' C_i + \mathcal{E}_i(\hat{Z}_i^k))^{1/2})\} \\ &\subset \mathcal{N}\{C_i' C_i + \mathcal{E}_i(\hat{Z}_i^k) + \tilde{A}_i'(C_i' C_i + \mathcal{E}_i(\hat{Z}_i^k))\tilde{A}_i\} \end{aligned}$$

De (4.6) vem que  $\mathcal{E}_i(\hat{Z}_i^k) = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{ij} Z_j^k + \lambda_{ii}(1 - \kappa) Z_i^{k-1} + \sum_{j=i+1}^N \lambda_{ij} Z_j^{k-1}$ , e pode-se verificar, empregando o Lema A1 (ii) na expressão acima, que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\{Z_i^k\} &\subset \mathcal{N}\left\{C_i' C_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{ij} Z_j^k + \lambda_{ii}(1 - \kappa) Z_i^{k-1} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=i+1}^N \lambda_{ij} Z_j^{k-1} + \lambda_{ii}(1 - \kappa) \tilde{A}_i' Z_i^{k-1} \tilde{A}_i\right\} \quad (4.13) \end{aligned}$$

De (4.10), (4.11) e das propriedades (i)–(iv) do Lema A1, obtém-se:

$$\mathcal{N}\{\lambda_{ij} Z_j^k\} \subset \mathcal{N}\left\{\sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{ij} O_j(m)'O_j(m)\right\} \quad j \leq i - 1 \quad (4.14a)$$

$$\mathcal{N}\{\lambda_{ij} Z_j^{k-1}\} \subset \mathcal{N}\left\{\sum_{m=0}^{k-2} \lambda_{ij} O_j(m)'O_j(m)\right\}, \quad j \geq i + 1 \quad (4.14b)$$

$$\mathcal{N}\{\lambda_{ii}(1 - \kappa) \tilde{A}_i' Z_i^{k-1} \tilde{A}_i\} \subset \mathcal{N}\left\{\sum_{m=0}^{k-2} \tilde{A}_i' O_i(m)'O_i(m) \tilde{A}_i\right\} \quad (4.14c)$$

Então, a partir de (4.11), (4.13), (4.14) e da propriedade (iii) do Lema A1, encontra-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\{Z_i^k\} \subset \mathcal{N}\left\{C_i' C_i + \sum_{m=0}^{k-2} \left[ \sum_{j \neq i}^N \lambda_{ij} O_j(m)' O_j(m) \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda_{ii}(1 - \kappa) O_i(m)' O_i(m) + \tilde{A}_i' O_i(m)' O_i(m) \tilde{A}_i \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Agora, da propriedade (v) do Lema A1, pode-se escrever, para  $m = 0, \dots, k-1$  e  $\kappa > 1$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\{\lambda_{ii}(1 - \kappa) O_i(m)' O_i(m) + \tilde{A}_i' O_i(m)' O_i(m) \tilde{A}_i\} \\ \subset \mathcal{N}\{\lambda_{ii} O_i(m) + A_i' O_i(m) + O_i(m) A_i\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

e de (2.3) e (4.16) e da propriedade (iii) do Lema A1, tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\left\{ \sum_{j \neq i}^N \lambda_{ij} O_j(m)' O_j(m) + \lambda_{ii}(1 - \kappa) O_i(m)' O_i(m) + \tilde{A}_i' O_i(m)' O_i(m) \tilde{A}_i \right\} \\ \subset \mathcal{N}\left\{ \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} O_j(m) + A_i' O_i(m) + O_i(m) A_i \right\} \\ = \mathcal{N}\{O_i(m+1)\} = \mathcal{N}\{O_i(m+1)' O_i(m+1)\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Finalmente, de (4.15) e (4.17) e recordando que  $C_i' C_i = O_i(0)$ , conclui-se que

$$\mathcal{N}\{Z_i^k\} \subset \mathcal{N}\left\{C_i' C_i + \sum_{m=0}^{k-2} [O_i(m+1)' O_i(m+1)]\right\} = \mathcal{N}\left\{\sum_{m=0}^{k-1} O_i(m)' O_i(m)\right\} \quad (4.18)$$

Caso 2:  $\lambda_{ii} = 0$ . Do Lema 4.3, tem-se que o par  $(A_i, C_i)$  é detetável e, da afirmação (i) do Lema 4.2, o par  $(A_i + \kappa \frac{\lambda_{ii}}{2} I, B_i) = (A_i, B_i)$  é estabilizável. Assim sendo, da Proposição 4.1, conclui-se que a regra de atualização (4.5) tem solução única. Além do mais, pode-se verificar, inspecionando (4.5) e (4.1) para  $\lambda_{ii} = 0$ , que esta única solução é  $P_i$ , sendo  $P = (P_1, \dots, P_N)$  a única solução de (4.1), cuja unicidade é dedutível das hipóteses deste lema em conjunto com a Proposição 3.2. Então, tem-se que  $Z_i^k = P_i, \forall k$ . Agora, seja  $x \in \mathcal{N}\{P_i\}$ ; da Proposição 3.1 tem-se que  $J^\infty(x_0, \theta_0) \leq x_0' P_i x_0 = 0$  e, empregando o Lema 3.4, conclui-se que  $x \in \mathcal{N}\{O_i\}$ . Com isso, mostrou-se a

relação  $\mathcal{N}\{Z_i^k\} = \mathcal{N}\{P_i\} \subset \mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\}$ . Finalmente, utilizando a propriedade (i) do Lema A1 e a Proposição 2.2, avalia-se:

$$\mathcal{N}\{Z_i^k\} \subset \mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\} \subset \mathcal{N}\{[O_i(0) : \dots : O_i(k-1)]'\} = \mathcal{N}\left\{\sum_{m=0}^{k-1} O_i(m)'O_i(m)\right\} \quad (4.19)$$

o que completa a prova do Lema 4.5.  $\square$

#### Prova do Lema 4.4

Nesta prova, aplica-se o resultado do Lema 4.5 em um argumento indutivo em  $k$  para mostrar que  $\mathcal{N}\{Z_i^k\} \subset \mathcal{N}\{\sum_{m=0}^{k-1} O_i(m)'O_i(m)\} \forall i$ . Da regra de atualização (4.5), do Lema 4.1 e da propriedade (ii) do Lema A1, tem-se para  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\{Z_i^1\} &\subset \mathcal{N}\{\mathbb{O}(\tilde{A}_i, (C_i' C_i)^{1/2})\} \\ &\subset \mathcal{N}\{C_i' C_i\} = \mathcal{N}\{O_i(0)\} = \mathcal{N}\{O_i(0)'O_i(0)\} \end{aligned}$$

o que completa a demonstração para  $k = 1$ . Para  $k \geq 2$ , assume-se que  $\mathcal{N}\{Z_i^{k-1}\} \subset \mathcal{N}\{\sum_{m=0}^{k-2} O_i(m)'O_i(m)\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Aplicando o resultado na parte (1) para  $i = 1$ , obtém-se que  $\mathcal{N}\{Z_1^k\} \subset \mathcal{N}\{\sum_{m=0}^{k-1} O_1(m)'O_1(m)\}$ ; procedendo recursivamente para  $i = 2, \dots, N$ , encontra-se

$$\mathcal{N}\{Z_i^k\} \subset \mathcal{N}\left\{\sum_{m=0}^{k-1} O_i(m)'O_i(m)\right\}, \quad k \geq 1, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.20)$$

o que completa a indução. Finalmente, de (4.20) e das propriedades (i) e (ii) do Lema A1, avalia-se para  $k \geq n^2 N$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\{Z_i^k\} &\subset \mathcal{N}\left\{\sum_{m=0}^{k-1} O_i(m)'O_i(m)\right\} \\ &\subset \mathcal{N}\left\{\sum_{m=0}^{n^2 N-1} O_i(m)'O_i(m)\right\} = \mathcal{N}\{\mathcal{O}_i' \mathcal{O}_i\} = \mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\} \end{aligned}$$

Lembrando que  $\mathcal{Z}^k = Z^k$ , tem-se que a prova do Lema 4.4 está completa.  $\square$

**Lema 4.6.** *Considere o sistema  $\Phi$  e a seqüência  $\mathcal{Z}^k, k \geq 0$  gerada pelo Método I. Seja  $(A, C, \Lambda)$   $W$ -detetável. Então, cada par  $(A_i + \kappa \frac{\lambda_{ii}}{2} I, C_i' C_i + \mathcal{E}_i(\hat{\mathcal{Z}}_i^k))$*

é detetável para todo  $k > n^2N$  e  $\kappa > 1$ . Além disto, se  $(A, B, \Lambda)$  é MS-estabilizável, então a EARD em (4.5) tem uma única solução para cada  $k > n^2N$  e  $i \in \mathcal{S}$ .

*Prova.* Para  $\lambda_{ii} = 0$ , do Lema 4.3 tem-se que o par  $(A_i, C_i)$  é detetável e o resultado é imediato do Lema 4.1. Agora, seja  $\lambda_{ii} > 0$ . Da Propriedade (ii) do Lema A1, vem, para  $\kappa > 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\{C'_i C_i + \mathcal{E}_i(\hat{\mathcal{Z}}_i^k)\} &= \mathcal{N}\{C'_i C_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{ij} \mathcal{Z}_j^k + \lambda_{ii}(1 - \kappa) \mathcal{Z}_i^{k-1} + \sum_{j=i+1}^N \lambda_{ij} \mathcal{Z}_j^{k-1}\} \\ &\subset \mathcal{N}\{\lambda_{ii}(1 - \kappa) \mathcal{Z}_i^{k-1}\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

e sendo que, do Lema 4.4, tem-se que  $\mathcal{N}\{\mathcal{Z}_i^k\} \subset \mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\}$  para todo  $k \geq n^2N$ , pode-se escrever

$$\mathcal{N}\{C'_i C_i + \mathcal{E}_i(\hat{\mathcal{Z}}_i^k)\} \subset \mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\}, \quad k > n^2N \quad (4.22)$$

Uma vez que  $(A, C, \Lambda)$  é W-detetável, segue do Lema 4.2 (iii) que cada par  $(A_i + \kappa \frac{\lambda_{ii}}{2} I, \mathcal{O}_i)$  é detetável. De (4.22) vem que cada par  $(A_i + \kappa \frac{\lambda_{ii}}{2} I, C'_i C_i + \mathcal{E}_i(\hat{\mathcal{Z}}_i^k))$  é detetável para todo  $k > n^2N$  e  $\kappa > 1$ . Finalmente, sendo  $(A, B, \Lambda)$  MS-estabilizável, da afirmação (i) do Lema 4.2 segue que o par  $(A_i + \kappa \frac{\lambda_{ii}}{2} I, B_i)$  é estabilizável e a Proposição 4.1 completa a prova.  $\square$

## 4.2.2 Sistema auxiliar aumentado e a prova do Teorema 4.1

Na seqüência, introduzem-se um sistema auxiliar aumentado e um método associado que é útil para relacionar o método de (do Val et al., 1999) com o Método I. Isto permite a aplicação de resultados previamente estabelecidos em (do Val et al., 1999) na prova de convergência do Método I.

O sistema auxiliar é como segue:

$$\hat{\Phi} : \dot{x}(t) = \hat{A}_{\theta(t)} x(t) + \hat{B}_{\theta(t)} u(t) \quad (4.23)$$

sendo  $\hat{A}_i = A_i$  e  $\hat{B}_i = B_i$  para  $i = 1, \dots, N$  e  $\hat{A}_i = A_{i-N}$  e  $\hat{B}_i = B_{i-N}$  para  $i = N + 1, \dots, 2N$ . A cadeia de Markov aumentada  $\hat{\Theta}$  é como na Figura 4.1 com espaço de estado  $\hat{\mathcal{S}} = \{1, \dots, 2N\}$ ; as taxas de transição são como

indicadas na figura, de forma que a matriz de taxas de transição  $\hat{\Lambda} = [\hat{\lambda}_{ij}]$  é dada por:

$$\Lambda_0 = (1 - \kappa) \text{diag}\{\Lambda\} \quad (34a)$$

$$\hat{\Lambda} = \begin{bmatrix} \Lambda - \Lambda_0 & \Lambda_0 \\ \Lambda_0 & \Lambda - \Lambda_0 \end{bmatrix} \quad (34b)$$

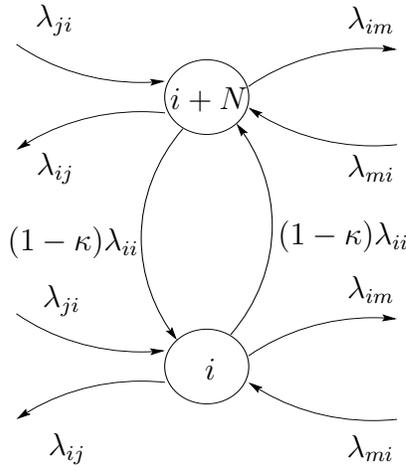


Figura 4.1: Cadeia de Markov aumentada  $\hat{\Theta}$ .

É simples verificar que  $\hat{\Phi}$  é, de fato, uma cadeia de Markov sempre que  $\kappa \geq 1$ . Também fazemos  $\hat{C}_i = C_i$  e  $\hat{R}_i = R_i$  para  $i = 1, \dots, N$  e  $\hat{C}_i = C_{i-N}$  e  $\hat{R}_i = R_{i-N}$  para  $i = N+1, \dots, 2N$ .

Note que os sistemas  $\Phi$  e  $\hat{\Phi}$  são intimamente relacionados. Por exemplo, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{O}_i(k) &= \hat{A}'_i \hat{O}_i(k-1) + \hat{O}_i(k-1) \hat{A}_i \\ &+ \sum_{j \neq i}^N \lambda_{ij} \hat{O}_j(k-1) + (\kappa \lambda_{ii}) \hat{O}_i(k-1) + (1-\kappa) \lambda_{ii} \hat{O}_i(k-1) \\ &= A'_i O_i(k-1) + O_i(k-1) A_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} O_j(k-1) = O_i(k), \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.25)$$

e, de forma similar,  $\hat{O}_i(k) = O_{i-N}(k)$  para  $i = N+1, \dots, 2N$ .

**Lema 4.7.** *Considere o sistema  $\Phi$  e sua versão aumentada  $\hat{\Phi}$ . As seguintes afirmativas são válidas:*

- (i) *se  $(A, C, \Lambda)$  é  $W$ -detetável, então  $(\hat{A}, \hat{C}, \hat{\Lambda})$  é  $W$ -detetável.*
- (ii) *se  $(A, B, \Lambda)$  é  $MS$ -estabilizável, então  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Lambda})$  é  $MS$ -estabilizável.*

*Prova.* (i) Segue de (4.25) que  $\mathcal{N}\{\hat{\mathcal{O}}_i\} = \mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$  e  $\mathcal{N}\{\hat{\mathcal{O}}_i\} = \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{i-N}\}$ ,  $i = N + 1, \dots, 2N$ , e pode-se verificar que  $MS$ -detetabilidade de  $(\hat{A}, \hat{\mathcal{O}}, \hat{\Lambda})$  é equivalente à  $MS$ -detetabilidade de  $(A, \mathcal{O}, \Lambda)$ ; o Teorema 2.2 completa a prova.

(ii) Nesta prova, omitem-se os detalhes. Da definição de  $MS$ -estabilizabilidade, tem-se que existe  $G \in \mathcal{M}^{r,s}$  tal que  $(A + BG, \Lambda)$  é  $MS$ -estável. Definindo  $G_i = G_{i-N}$  para  $i = N + 1, \dots, 2N$ , pode-se verificar que  $(\hat{A} + \hat{B}G, \hat{\Lambda})$  é  $MS$ -estável.  $\square$

O próximo método é uma variante do Método I de (do Val et al., 1999).

Passo 1. Considere a seqüência  $\mathcal{Z}^k$  gerada pelo Método I com uma condição inicial arbitrária  $\mathcal{Z}^0$ . Estabeleça, como condição inicial:

$$\mathcal{H}^0 = (\mathcal{Z}_1^{n^{2N+1}}, \dots, \mathcal{Z}_N^{n^{2N+1}}, \mathcal{Z}_1^{n^{2N+1}}, \dots, \mathcal{Z}_N^{n^{2N+1}}) \in \mathcal{M}^{(2n)^0} \quad (4.26)$$

Passo 2. Para  $k = 1, 2, \dots$  e  $i = 1, 2, \dots, N$ , calcule recursivamente

$$(\hat{A}_i + \frac{\hat{\lambda}_{ii}}{2}I)'Z_i^k + Z_i^k(\hat{A}_i + \frac{\hat{\lambda}_{ii}}{2}I) - Z_i^k\hat{B}_i\hat{R}_i^{-1}\hat{B}_i'Z_i^k + \hat{C}_i'\hat{C}_i + \hat{\mathcal{E}}_i(\hat{Z}_i^k) = 0 \quad (4.27)$$

sendo  $\hat{Z}_i^k = (\hat{Z}_{i1}^k, \dots, \hat{Z}_{i,2N}^k)$  definido como

$$\hat{Z}_{ij}^k = \begin{cases} Z_j^k, & j = 1, \dots, i-1, \\ 0, & j = i, \\ Z_j^{k-1} & j = i+1, \dots, 2N. \end{cases} \quad (4.28)$$

e, para  $i = N + 1, \dots, 2N$ , faça

$$Z_i^k = Z_{i-N}^k \quad (4.29)$$

Denota-se por  $\mathcal{H}^k = (\mathcal{H}_1^k, \dots, \mathcal{H}_N^k)$  a seqüência gerada pelo método acima. Uma caracterização da seqüência  $\mathcal{H}^k$  é dada no lema adiante; a relação entre as seqüências  $\mathcal{H}^k$  e  $\mathcal{Z}^k$  também é apresentada.

**Lema 4.8.** *Considere o sistema  $\Phi$ , sua versão aumentada  $\hat{\Phi}$  e as seqüências  $\mathcal{Z}^k$  e  $\mathcal{H}^k$  geradas respectivamente pelo Método I e pelo método acima. Sejam  $(A, B, \Lambda)$  MS-estabilizável e  $(A, C, \Lambda)$  W-detetável. Então, para cada  $i = 1, \dots, N$  e  $k \geq 1$ ,  $\mathcal{H}_i^k = \mathcal{H}_{i+N}^k = \mathcal{Z}_i^{k+n^2N+1}$  é a única solução da EARD em (4.27).*

*Prova.* O fato que  $\mathcal{H}_i^k = \mathcal{H}_{i+N}^k$  vem diretamente de (4.29). Agora, demonstre-se que  $\mathcal{H}_i^k = \mathcal{Z}_i^{k+n^2N+1}$  é a única solução da EARD em (4.27) para cada  $i = 1, \dots, N$  e  $k \geq 1$ . Seja  $k \geq 1$  e  $1 \leq i \leq N$  e assuma que

$$\mathcal{H}_j^k = \mathcal{Z}_j^{k+n^2N+1}, j = 1, \dots, i-1, \quad (40a)$$

$$\mathcal{H}_j^{k-1} = \mathcal{Z}_j^{k+n^2N} j = i+1, \dots, N. \quad (40b)$$

vale. Nesta situação, da EARD em (4.5) e da EARD em (4.27), tem-se que

$$\begin{aligned} & (A_i + \kappa \frac{\lambda_{ii}}{2} I)' Z_i + Z_i (A_i + \kappa \frac{\lambda_{ii}}{2} I) - Z_i B_i R_i^{-1} B_i' Z_i + C_i' C_i + \mathcal{E}_i(\tilde{\mathcal{Z}}_i^{k+n^2N+1}) \\ & = (\hat{A}_i + \frac{\hat{\lambda}_{ii}}{2} I)' Z_i + Z_i (\hat{A}_i + \frac{\hat{\lambda}_{ii}}{2} I) - Z_i \hat{B}_i \hat{R}_i^{-1} \hat{B}_i' Z_i + \hat{C}_i' \hat{C}_i + \hat{\mathcal{E}}_i(\hat{\mathcal{H}}_i^k) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Assim sendo, (4.5) e (4.27) têm as mesmas soluções e a unicidade de solução de (4.27) vem da mesma propriedade de (4.5), assegurada no Lema 4.6. A prova é completada utilizando o argumento acima em uma indução no índice  $k$  e  $i$ , lembrando de (4.26) que  $\mathcal{H}_i^0 = \mathcal{H}_{i+N}^0 = \mathcal{Z}_i^{n^2N+1}$  para  $i = 1, \dots, N$ .  $\square$

Como conseqüência do resultado anterior, quando se visa a demonstrar a convergência da seqüência  $\mathcal{Z}^k$ , basta mostrar a convergência da seqüência  $\mathcal{H}^k$ . Os resultados a seguir, os quais são adaptados de (do Val et al., 1999), serão úteis.

Sejam a seqüência de tempos de parada definida por

$$\begin{aligned} \xi(0) &= 0, \\ \xi(k) &= \min\{t > \xi(k-1) : \theta(t) > \theta(t^-) \text{ or } \theta(t) = \theta(t^-) - N\}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

sendo  $\theta(t^-) = \lim_{s \uparrow t} \theta(s)$ , e o funcional de custo

$$\begin{aligned} J^k(x_0, \theta_0) &= \inf_u E \left\{ \int_0^{\xi(k)} x(\tau)' C_{\theta(\tau)}' C_{\theta(\tau)} x(\tau) + u(\tau)' R_{\theta(\tau)} u(\tau) d\tau + \right. \\ & \quad \left. x(\xi(k))' \mathcal{H}_{\theta(\xi(k))}^0 x(\xi(k)) \right\} \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde  $x(t)$  e  $\theta(t)$  correspondem a trajetórias do sistema  $\hat{\Phi}$  com condições iniciais  $x_0$  e  $\theta_0$ , obtidas através da minimização em  $\{u(t), 0 \leq t \leq \xi(k)\}$ .

Pode-se demonstrar, de forma similar a (do Val et al., 1999), que

$$x_0' \mathcal{H}_i^k x_0 = J^k(x_0, i) \quad (4.34)$$

vale. Um ponto importante na prova de convergência do método em (do Val et al., 1999) é que a solução da EARD em (4.27) é única para cada  $k$  e  $i$ . Neste caso, assumindo que as EARA (4.1) para o sistema  $\hat{\Phi}$  têm uma solução única e MS-estabilizante,  $P = (P_1, \dots, P_{2N})$ , de forma similar a (do Val et al., 1999) pode-se mostrar que  $\mathcal{H}_i^k \rightarrow P_i$  enquanto  $k \rightarrow \infty$ . Note, através de (4.32), que  $\xi(k)$  diverge quase certamente enquanto  $k \rightarrow \infty$  e, quanto mais rapidamente a seqüência diverge, mais alta é a taxa de convergência do método, veja (4.33). Na seqüência, sumariam-se os resultados acima em uma forma conveniente para referência posterior.

**Proposição 4.2.** *Suponha que as seguintes hipóteses valham:*

(I) *As EARA em (4.1) associadas com o sistema  $\hat{\Phi}$  têm uma solução única e MS-estabilizante;*

(II) *A EARD em (4.27) tem uma única solução para cada  $i = 1, \dots, N$  e  $k \geq 0$ .*

*Então,  $\mathcal{H}_i^k \rightarrow P_i$  enquanto  $k \rightarrow \infty$  para cada  $\mathcal{H}^0$ , sendo  $P = (P_1, \dots, P_{2N})$  a solução de (4.1).*

### Prova do Teorema 4.1.

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Considere a versão aumentada  $\hat{\Phi}$  do sistema  $\Phi$ . Nesta prova, verificamos que as hipóteses (I) e (II) da Proposição 4.2 valem. Do Lema 4.7 tem-se que  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Lambda})$  é MS-estabilizável e  $(\hat{A}, \hat{C}, \hat{\Lambda})$  é W-detetável, e da Proposição 3.2, vem que as EARA associadas com o sistema  $\hat{\Phi}$  têm uma solução única e MS-estabilizante, assim comprovando a hipótese (I). Por outro lado, do Lema 4.8 tem-se que a EARD (4.27) tem uma única solução para  $k \geq 0$ , o que comprova a validade da hipótese (II). Então, da Proposição 4.2 vem que  $\mathcal{H}^k \rightarrow P_i$  enquanto  $k \rightarrow \infty$ , sendo  $P = (P_1, \dots, P_{2N})$  a solução de (4.1) para o sistema  $\hat{\Phi}$  e o Lema 4.8 proporciona que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{Z}_i^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}_i^k = P_i$$

for  $i = 1, \dots, N$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Inspeccionando (4.5), é simples verificar, para o sistema original  $\Phi$ , que  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , satisfaz as EARA em (4.1), cuja solução é única e MS-estabilizante (veja a Proposição 3.2).

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Segue de imediato; veja a Proposição 3.2.  $\square$

### 4.3 O Método II para solução das EARA

Nesta seção, apresentamos e estudamos o Método II, o qual é como segue:

Método II.

Passo 1. Para  $i = 1, \dots, N$ , ajuste  $\kappa_i \geq 0$  como o menor escalar positivo para o qual o par  $(A_i + (1/2)(\lambda_{ii} - \kappa_i), B_i)$  é estabilizável e  $(A_i + (1/2)(\lambda_{ii} - \kappa_i), C_i)$  é detetável (no sentido determinístico usual). Faça  $Z^0 = (Z_1^0, \dots, Z_N^0) = 0$ .

Passo 2. Para  $k = 1, 2, \dots$  e  $i = 1, 2, \dots, N$ , calcule recursivamente

$$\begin{aligned} & \left( A_i + \frac{\lambda_{ii} - \kappa_i}{2} I \right)' Z_i^k + Z_i^k \left( A_i + \frac{\lambda_{ii} - \kappa_i}{2} I \right) \\ & - Z_i^k B_i (R_i)^{-1} B_i' Z_i^k + C_i' C_i + \tilde{\mathcal{E}}_i(Z^{k-1}) = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

sendo  $\tilde{\mathcal{E}}(\cdot)$  definido como

$$\tilde{\mathcal{E}}_i(U) = \sum_{j \neq i}^N \lambda_{ij} U_j + \kappa_i U_i \quad (4.36)$$

A seqüência gerada pelo Método II é denotada por  $\mathcal{Y}^k$ ,  $k \geq 0$ .

*Observação 4.3.* Assim como no caso do Método I, para a prova de convergência necessita-se de unicidade de solução de cada EARD. Em (Abou-Kandil et al., 1994) e (Gajic e Losada, 2000), essa unicidade foi obtida através da consideração das condições desacopladas mencionadas na Nota 1.1. Aqui, obtem-se unicidade através da introdução do parâmetro  $\kappa_i$ . Mencionamos que isto corresponde a aumentar a cadeia de Markov, através da criação, para cada estado  $i$ , de um estado dual  $i + N$  com  $A_{i+N} = A_i$  e similarmente para  $B_i, C_i$ , com taxas associadas  $\lambda_{i,i+N} = \lambda_{i+N,i} = \kappa_i$  e  $\lambda_{i+N,j} = \lambda_{i,j}$ ,  $i \neq j$ , de forma idêntica à mencionada na Nota 1.1 e ilustrada no Exemplo 1.2. Evidentemente, a matriz de taxas é alterada de forma que  $\sum_{j=1}^{2N} \lambda_{ij} = 0$ . É interessante comentar que, quanto maior for  $\kappa$ , mais freqüentes são as transições entre os estados  $i$  e  $i + N$  e, conseqüentemente, mais lenta é a taxa

de convergência do método; o método pode apresentar convergência lenta quando as matrizes  $A_i$  são muito instáveis.

**Teorema 4.2.** *Existe uma solução para as EARA se e somente se  $\mathcal{Y}^k$  converge para  $\mathcal{Y}^\infty \in \mathcal{M}^{n_0}$  enquanto  $k \rightarrow \infty$ . Além disso,  $\mathcal{Y}^\infty$  é a solução mínima das EARA.*

Os resultados preliminares adiante são necessários para a prova do Teorema 4.2. Seja  $Q_i \in \mathcal{R}^{n_0}$  e  $R_i \in \mathcal{R}^{n^+}$  e considere a EARD na variável  $Z_i \in \mathcal{R}^{n_0}$ :

$$A'_i Z_i + Z_i A_i - Z_i B_i R_i^{-1} B'_i Z_i + Q_i = 0 \quad (4.37)$$

Um resultado amplamente conhecido é apresentado a seguir; a prova é omitida. Denota-se  $Z_i(Q_i)$  para enfatizar a dependência de  $Z_i$  do valor de  $Q_i$ .

**Proposição 4.3.** *Se  $(A_i, B_i)$  é estabilizável, então  $Z_i(Q_i^2) \geq Z_i(Q_i^1) \in \mathcal{R}^{n^+}$  sempre que  $Q_i^2 \geq Q_i^1 \in \mathcal{R}^{n^+}$ .*

**Lema 4.9.** *O seguinte ordenamento vale para cada  $i = 1, \dots, N$  e todo  $k \geq 0$ :*

$$0 \leq \mathcal{Y}^1 \leq \dots \leq \mathcal{Y}^k$$

*Prova.* Lembrando que cada par  $(A_i + (1/2)(\lambda_{ii} - \kappa_i), B_i)$  é estabilizável e  $(A_i + (1/2)(\lambda_{ii} - \kappa_i), C'_i C_i + \mathcal{E}_i(\mathcal{Y}^0))$  é detetável, a Proposição 4.3 permite concluir que  $\mathcal{Y}_i^0 \leq \mathcal{Y}_i^1$ , para todo  $i$ . Então,  $\mathcal{E}_i(\mathcal{Y}^0) \leq \mathcal{E}_i(\mathcal{Y}^1)$  e temos que o par  $(A_i + (1/2)(\lambda_{ii} - \kappa_i), C'_i C_i + \mathcal{E}_i(\mathcal{Y}^1))$  é detetável. A prova é completada empregando o mesmo argumento recursivamente no índice  $k$ .  $\square$

**Lema 4.10.** *Seja  $P = (P_1, \dots, P_N) \geq 0$  uma solução das EARA. Então, para cada  $i = 1, \dots, N$  e todo  $k \geq 0$ , vale a desigualdade*

$$\mathcal{Y}_i^k \leq P_i$$

*Prova.* Note que  $P$  satisfaz (4.35) com  $\mathcal{E}_i(Z^{k-1})$  substituído por  $\mathcal{E}_i(P)$ . Seja  $\mathcal{Y}^{k-1} \leq P$ ; então,  $\mathcal{E}(\mathcal{Y}^{k-1}) \leq \mathcal{E}(P)$  e, da Proposição 4.3 conclui-se que  $\mathcal{Y}^k \leq P$ . A prova é finalizada empregando o argumento acima em uma indução no índice  $k$ .  $\square$

**Prova do Teorema 4.2.** Necessidade. Assumindo que as EARA têm uma solução, dos Lemas 4.9 e 4.10 vem que  $0 \leq \mathcal{Y}^1 \leq \dots \leq \mathcal{Y}^k \leq P$  sendo  $P$  uma solução qualquer das EARA. Então, conclui-se que  $\mathcal{Y}^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{Y}^k$  existe e  $\mathcal{Y}^\infty \leq P$ , para qualquer solução  $P$ . Suficiência. É simples inspecionar que  $\mathcal{Y}^\infty$  satisfaz as EARA em (4.1).  $\square$

Exemplos empregando o Método II para resolver as EARA são encontrados na Seção 3.3.

## 4.4 Exemplos numéricos

**Exemplo 4.1 (Comparando o Método I e o método em (do Val et al., 1999)).** Neste exemplo, compara-se o Método I com o método no qual ele se baseia, encontrado em (do Val et al., 1999), denotado nesta seção por Método III. O sistema utilizado é o mesmo encontrado em (do Val et al., 1999); duas versões são empregadas, denotadas por versão normal e versão aumentada, sendo os dados apresentados no Apêndice B, para facilitar a referência.

A Tabela 4.1 exhibe a taxa de convergência em função do número de iterações,  $N$ , e do tempo utilizado pela unidade de processamento central (UPC),  $T_c$ . Como esperado, para  $\kappa = 1.05 \approx 1$ , a taxa de convergência e o esforço computacional dos Métodos I e III são similares; entretanto, lembre-se que o Método III não pode ser empregado em sistemas que são estritamente  $W$ -detetáveis.

Tabela 4.1: Resultados para os Métodos I e III

	Versão Normal		Versão Aumentada	
	Iterações	tempo-UPC	Iterações	tempo-UPC
Método I ( $\kappa = 1.05$ )	10	0.99	15	2.31
Método III	9	0.55	14	2.15

A Figura 2 ilustra como a convergência do Método I depende do parâmetro  $\kappa$ , indicando que o número de iterações e o tempo utilizado pela unidade de processamento central aumentam linearmente com  $\kappa$ . Menciona-se que a versão normal do sistema foi empregada.

**Exemplo 4.2 (Um exemplo numérico do problema LQ envolvendo o modelo de um mono-ciclo).** Neste exemplo, emprega-se o Método I para resolver o problema LQ para o modelo do mono-ciclo descrito em (de Jager, 1997).

O vetor de estado do sistema é  $x = [x_1 x_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2]'$ , sendo  $x_1$  a posição horizontal da roda e  $x_2$  a rotação do centro de massa em relação a uma direção vertical. A descrição completa do sistema é encontrada em (de Jager, 1997), sendo um resumo apresentado no Apêndice B.

Aqui, considera-se que o sistema é sujeito a falhas envolvendo a constante de torque do motor  $\alpha$  e a razão de transmissão  $\iota$ . Estas falhas são modeladas

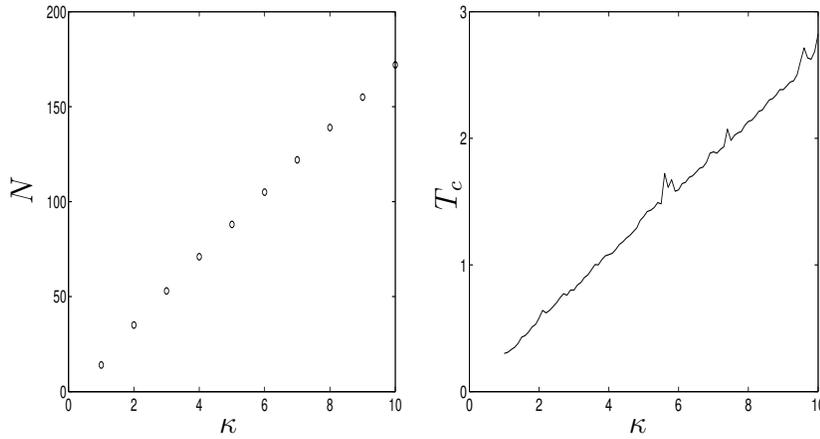


Figura 4.2: Curvas ilustrando como o Método I depende dos valores de  $\kappa$ .

por uma cadeia de Markov, de forma que  $\theta(t) = 2$  e  $\theta(t) = 4$  estão associados a modos nos quais a razão de transmissão é reduzida a  $1/2$  do valor nominal e  $\theta(t) = 3$  e  $\theta(t) = 4$  estão associados a modos para os quais o motor tem torque nulo;  $\theta(t) = 1$  é associado ao modelo nominal. A matriz de taxas de transição é fornecida no Apêndice B. O funcional de custo é da forma (3.5), com

$$C_1 = [1\ 0\ 0\ 0], C_2 = [1\ 0\ 0\ 0], C_3 = C_4 = 0$$

É fácil verificar que  $(A, C, \Lambda)$  não é MS-detetável (veja a Observação 2.3 para um teste de MS-detetabilidade e de W-detetabilidade), de forma que a convergência do Método II de (do Val et al., 1999) não é garantida. Por outro lado, as matrizes associadas  $\mathcal{O}_i$  in (2.3) são de posto completo, o que significa que a condição na Definição 2.5 é trivialmente satisfeita e, logo,  $(A, C, \Lambda)$  é W-detetável. Do Teorema 4.1 tem-se que a seqüência gerada pelo Método I converge para a única solução das EARA (4.1) e o sistema com o controle ótimo de realimentação de estado (3.9) é MS-estável. Considerando  $\|\mathcal{Z}^k - \mathcal{Z}^{k-1}\| < 10^{-8}$  como critério de parada e fazendo  $\kappa = 1.05$ , o Método I necessita de 134 iterações para convergir, utilizando a unidade de processamento durante 14.25 segundos. Os ganhos do controle ótimo são apresentados no Apêndice B.

**Exemplo 4.3 (EARA com conjunto vazio de soluções associadas a um SLSM quase certamente estabilizável).** Neste exemplo ilustra-se o uso do Método II para verificar a existência de soluções das EARA. Seja o

SLSM definido por

$$A_1 = a; A_2 = -1; B_1 = B_2 = 0; C_1 = C_2 = R_1 = R_2 = 1; \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

onde  $a$  é um escalar. Para  $a \geq 1/2$ , pode-se verificar que o Método II não converge, de forma que, de acordo com o Teorema 4.2, não há solução para as EARA. De fato, para  $a \geq 1/2$ , pode-se verificar que  $(A, C, \Lambda)$  é W-detetável e  $(A, B, \Lambda)$  não é MS-estabilizável; nesta situação, do Teorema 3.1 tem-se que não há solução das EARA. Também mencionamos que, para  $1/2 \leq a < 1$ , a condição necessária e suficiente encontrada em (Feng et al., 1992) para estabilidade quase certa,  $\sum_{j=1}^N \pi_j A_j < 0$ , vale, sendo  $\pi = [1/2 \ 1/2]$  a distribuição estacionária da cadeia de Markov, e conclui-se que o sistema é quase certamente estabilizável. Isto mostra que estabilizabilidade quase certa não assegura a existência de soluções para as EARA.



# Capítulo 5

## W-detetabilidade para SLSM a tempo discreto

Nos capítulos anteriores, apresentaram-se resultados referentes ao conceito de W-detetabilidade para SLSM em tempo contínuo, os quais estreitam as relações entre a teoria de SLSM e SLD, assim como métodos de solução para as EARA associadas ao problema LQ. Neste capítulo esses resultados são estendidos para o caso a tempo discreto.

Embora os resultados aqui apresentados não sejam uma extensão direta do caso a tempo contínuo, pode-se dizer que há muitas similaridades entre os casos. Assim sendo, optou-se por utilizar o recurso de inserir um artigo no texto da tese, em conformidade com o formato de teses adotado pela Universidade de Campinas. O artigo, que é de autoria do candidato ao título de doutor e de seu orientador, intitula-se “*Weak Detectability and the Linear-Quadratic Control Problem of Discrete-time Markov Jump Linear Systems*”, aceito para publicação no *International Journal of Control*, edição especial sobre sistemas lineares chaveados e politópicos, veja (Costa e do Val, n.d.b).

Uma breve síntese dos resultados é apresentada na seção seguinte, em Português, precedendo a Seção 5.2, na qual o artigo é incluído.

### 5.1 Síntese de resultados

Nesta seção, sumariamos os resultados obtidos relativos a W-detetabilidade para a versão a tempo discreto do SLSM. A apresentação inclui comentários e comparações com o caso a tempo contínuo, bem como relaciona os resultados alcançados com as propriedades mencionadas no Capítulo 1. Os detalhes

podem ser encontrados no artigo apresentado na Seção 5.2 ou em (Costa e do Val, 2001).

Inicialmente, mencionamos que os cenários em que surgem os conceitos de MS-detetabilidade, W-observabilidade e W-detetabilidade são análogos aos do caso a tempo contínuo, descritos no início do Capítulo 2. As definições são como segue.

**Definição 5.1 (MS-detetabilidade).**  $(A, C, P)$  é MS-detetável se existe  $L \in \mathcal{M}^{n,q}$  para o qual  $(A + LC, \Lambda)$  é MS-estável.

Seja a versão a tempo discreto do funcional  $W$ ,

$$W^T(U) = \sum_{k=0}^{T-1} \langle U(k), C' C \rangle \quad (5.1)$$

sendo  $U \in \mathcal{M}^n$ .

**Definição 5.2 (W-observabilidade).**  $(A, C, P)$  é W-observável se existe um escalar  $\gamma > 0$  tal que  $W^{n^2N}(X) \geq \gamma \|X\|$  para cada condição inicial  $X$ .

Note que, em contraste com o caso a tempo contínuo, o horizonte de tempo do funcional  $W$  é especificado como sendo de  $n^2N$  instantes amostrais. A razão para isto é exposta através do exemplo a seguir.

**Exemplo 5.1 (Escolha do horizonte do funcional  $W$  como sendo  $n^2N$ ).** Seja o SLSM descrito por

$$A_1 = I_3; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; C_1 = 0; C_2 = [1 \ 0 \ 0]; P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Pode-se verificar que  $W^t(X) \geq \|X\|$  sempre que  $t \geq 6$ , para toda condição inicial  $X$ ; isto significa que toda trajetória  $X(k)$ ,  $k \geq 0$ , apresenta energia refletida na saída e, neste sentido, satisfaz-se o conceito de W-observabilidade. Contudo, adotando o horizonte  $t = 5 < n^2N$ , verifica-se que  $W^t(X) = 0$ , sendo  $X_1 = x_0 x_0'$  onde  $x_0 = [0 \ 0 \ 1]'$  e  $X_j = 0$ ,  $j \neq 1$ , de forma que o sistema não seria W-observável.

De fato, para que o funcional  $W$  seja útil na caracterização do conceito de W-observabilidade, o horizonte  $t$  deve ser escolhido de forma que  $W^t(X) = 0$  se e somente se  $W^t(X(k)) = 0$  para qualquer  $k \geq 0$ , de maneira que  $W^t(X) =$

0 caracterize todas as condições iniciais originando trajetórias sem energia associada na saída. Com este objetivo,  $t$  pode ser adotado como sendo  $n^2N$  no caso discreto (veja o *Lemma 1* no artigo da Seção 5.2), enquanto, no caso contínuo, este valor é irrelevante (veja a Observação 2.1).

Resultados análogos aos do caso contínuo são obtidos para W-observabilidade. Mencionamos que, considerado a versão de tempo discreto do operador  $\mathcal{L}$ ,

$$\mathcal{L}_i(V) = A'_i \mathcal{E}_i(V) A_i \quad (5.3)$$

onde  $V \in \mathcal{M}^{n^0}$ , então pode-se definir o conjunto de matrizes de observabilidade  $\mathcal{O}$  de forma idêntica àquela das expressões (2.3) e (2.2). Os principais resultados alcançados, os quais representam extensões das Propriedades I e IV, são apresentados a seguir.

**Proposição 5.1.** *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *Se  $x(k) \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta(k)}\}$ , então  $x(s) \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta(s)}\}$  para todo  $s \geq k$ ;*
- (ii)  *$(A, C, P)$  é W-observável se e somente se  $\mathcal{O}_i$  é de posto completo para cada  $i = 1, \dots, N$ .*

Com respeito ao conceito de W-detetabilidade, tem-se que ele surge como uma relaxação do conceito de W-observabilidade. O conceito permite que a condição de positividade de  $W$  seja violada, sendo, nesses casos, exigida a convergência na média quadrática da trajetória  $X$  associada, de forma análoga ao caso contínuo.

**Definição 5.3 (W-detetabilidade).**  *$(A, C, P)$  é W-detetável se  $\|X(k)\| \rightarrow 0$  enquanto  $k \rightarrow \infty$ , sempre que  $W(X(0)) = 0$ .*

A proposição abaixo destaca alguns dos principais resultados obtidos, os quais recuperam as Propriedades II e III, no sentido de que, respectivamente, estabelecem que W-detetabilidade generaliza W-observabilidade e exigem que trajetórias não fracamente observadas sejam MS-estáveis. Também a caracterização de W-detetabilidade em termos de MS-detetabilidade é apresentada.

**Proposição 5.2.** *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i)  *$(A, C, P)$  é W-detetável se  $(A, C, P)$  é W-observável.*
- (ii)  *$(A, C, P)$  é W-detetável se e somente se  $\|X(k)\| \rightarrow 0$  enquanto  $k \rightarrow \infty$  sempre que  $W^{n^2N}(X(0)) = 0$*
- (iii)  *$(A, C, P)$  é W-detetável se e somente se  $(A, \mathcal{O}, P)$  é MS-detetável;*

Quanto ao problema LQ em tempo discreto, tem-se que ele consiste em minimizar, em  $u(k) = g(k, x(k), \theta(k))$ , o funcional de custo de horizonte infinito descrito por

$$E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^T x(k)' C'_{\theta(k)} C_{\theta(k)} x(k) + u(k)' R_{\theta(k)} u(k) \right\} \quad (5.4)$$

sendo  $R \in \mathcal{M}^{n+}$  e  $x$  e  $\theta$  os estados do SLSM. Resultados análogos ao do Capítulo 3 valem, mudando-se o que for necessário. Em particular, mencionamos que W-detetabilidade vincula a finitude do funcional acima com a convergência da trajetória, recuperando, assim, a Propriedade V.

Finalmente, considere as EARA que surgem no problema LQ, as quais, no caso discreto, têm a seguinte forma:

$$P_i = A'_i \mathcal{E}_i(P) \{ I - B_i (R_i + B'_i \mathcal{E}_i(P) B_i)^{-1} B'_i \mathcal{E}_i(P) \} A_i + C'_i C_i \quad (5.5)$$

Uma vez mais, valem resultados análogos ao do caso contínuo; destaca-se que W-detetabilidade garante a MS-estabilidade da solução e, indiretamente, a unicidade, portanto recuperando a Propriedade VI. Uma adaptação do Método I do Capítulo 4 também foi desenvolvida. Quanto à convergência, os resultados são como na proposição abaixo, análoga ao Teorema 4.1; denota-se por  $\mathcal{Z}^k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , a seqüência gerada pelo método.

**Proposição 5.3.** *Seja  $(A, C, P)$  W-detetável. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $(A, B, P)$  é MS-estabilizável;
- (ii)  $\mathcal{Z}^k$  converge para algum  $\mathcal{Z}^\infty \in \mathcal{M}^{n0}$  enquanto  $k \rightarrow \infty$ ;
- (iii)  $\mathcal{Z}^\infty = P$ , a solução única e MS-estabilizante das EARA em (5.5).

## 5.2 O artigo intitulado “Weak Detectability and the Linear-Quadratic Control Problem of Discrete-time Markov Jump Linear Systems”

### Abstract

The paper deals with the stochastic concepts of weak detectability and weak observability for Markov jump linear systems, which is a special class of composite linear systems. The concepts are explored here to strengthen

the similarities with the corresponding concepts of deterministic detectability and observability. We introduce a collection of matrices, referred to as the observability matrices. We show that weak observability is equivalent to full rank of each matrix in the set of observability matrices. In addition, we present a stochastic counterpart of the well known result on the invariance of trajectories within non-observable subspaces. These characterizations allow us to clarify the relationship between weak detectability and mean square detectability and to provide a testable condition for weak detectability. Relying on the assumption of weak detectability, we develop a method for solving the linear quadratic problem that is based on iterations of uncoupled algebraic Riccati equations, which converges to the solution of the coupled algebraic Riccati equation if and only if the system is mean-square stabilizable. Numerical examples are included.

### 5.2.1 Introduction

Markov jump linear systems (MJLS) constitute a class of systems described by switching among different linear forms. The switching occurs according to an underlying discrete-time Markov chain, having  $\mathcal{S} = \{1, \dots, N\}$  as state space, and  $\mathbb{P} = [p_{ij}]$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  as the transition probability matrix and  $\theta$  as the state variable  $\Theta = \{\theta(k); k \geq 0\}$ . The MJLS evolves according to one of the possible linear forms between successive switchings; it is defined in a fundamental probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k\}, P)$  as

$$\begin{aligned} \Phi : x(k+1) &= A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k), & x(0) &= x_0, \theta(0) = \theta_0 \\ y(k) &= C_{\theta(k)}x(k) \end{aligned} \quad (5.6)$$

where the variables  $x$ ,  $y$  and  $u$  are the state, the output and the input, respectively. Matrices  $A_i$ ,  $B_i$  and  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , belong to the collections of  $N$  real matrices:  $A = (A_1, \dots, A_N)$ ,  $\dim(A_i) = n \times n$ ,  $B = (B_1, \dots, B_N)$ ,  $\dim(B_i) = n \times r$  and  $C = (C_1, \dots, C_N)$ ,  $\dim(C_i) = q \times n$ . Thus, whenever  $\theta(k) = i$ , one has that  $A_{\theta(k)} = A_i$ ,  $B_{\theta(k)} = B_i$  and  $C_{\theta(k)} = C_i$ , and the MJLS evolves according to this triplet of matrices.

The MJLS provides meaningful models for systems subject to abrupt changes in their structures due to dependence of exogenous variables, as in the presence of failures and repairs. Another important feature is that the theory available for this class of systems comprises a number of specialized results, which extend ideas and concepts of deterministic linear systems theory in many aspects, e.g., see (Ji e Chizeck, 1990a; Ji et al., 1991; Feng

et al., 1992; Costa e Fragoso, 1995; Costa et al., 1997; do Val et al., 1999; de Farias et al., 2000). For instance, we mention the role that mean square stabilizability plays for closed-loop solutions of quadratic infinite horizon control problems, see (Ji et al., 1991; Costa e Fragoso, 1995). Another similarities are presented by the the stochastic concepts of weak detectability (W-detectability) and weak observability (W-observability) for Markov jump linear systems (MJLS) recently introduced in (Costa e do Val, 2001), which generalize previous concepts found in the literature and it retrieves the idea that non-observed trajectories are stable in the mean square (MS) sense.

This paper presents new advances in the study of W-detectability and W-observability, which strengthen the similarities with the deterministic linear systems theory. We introduce a certain collection of matrices, referred to as the set of observability matrices, for obvious reasons. Along this line, we show that W-observability of a MJLS is equivalent to impose that each matrix in the observability set is of full rank, in an exact generalization of the usual observability test for linear deterministic systems. In addition, we present a counterpart of the well known result on the invariance of trajectories within non-observable subspaces, see Lemma 3, coined here in terms of random paths. These characterizations are summoned up to produce a condition for W-detectability in terms of MS-detectability of a MJLS involving the set of observability matrices, see Theorem 1. By clarifying the relationship between W-detectability and MS-detectability and by providing a testable condition for W-detectability, some of the targets of the paper are attained.

As regards to the linear quadratic problem (LQ), it was shown in (Costa e do Val, 2001) that the W-detectability concept plays the same role of the previous concepts: it assures that the solution to the coupled Riccati equation (CARE) is unique and stabilizing in the MS sense. In spite of the importance of W-detectability in the LQ problem, to this date there is no method of solution to the CARE suitable to systems that are W-detectable only.

In order to fill this gap, in the second part of this paper we address a numerical method for solving the LQ problem that can be employed for W-detectable systems. The method is based upon iterations of uncoupled algebraic Riccati equations (UARE) and it consists of an adaptation of the method in (do Val et al., 1998), which presents the highest rate of convergence when compared with previous methods in (Abou-Kandil et al., 1995; Costa e Fragoso, 1995; Ji e Chizeck, 1988). The proof of uniqueness of solutions of the UARE iterations is a fundamental point, and here it relies in part on Theorem 1, in an independent argument. An important feature of the method

is that it converges if and only if the system is MS-stabilizable, see Theorem 2. We mention that the method in (do Val et al., 1998) is recovered from the present method, when a certain parameter is set to one, in such a manner that the present method inherits the fast rate of convergence exhibited by the method in (do Val et al., 1998).

The paper is organized as follows. Basic concepts and notation are presented in section 5.2.2. Section 5.2.3 introduces the collection of observability matrices and related results; the relationship between MS-detectability and W-detectability in terms of the set of observability matrices is also presented. The numerical method of solution for the LQ problem is studied in section 5.2.4 and numerical illustrative examples are provided in section 5.2.5.

## 5.2.2 Basic Concepts

Let  $\mathbb{R}^n$  be the Euclidean linear space formed by all  $n$ -vectors;  $\mathbb{R}^+$  denotes positive scalars. Let  $\mathcal{R}^{n,r}$  (respectively,  $\mathcal{R}^n$ ) represent the normed linear space formed by all  $n \times r$  real matrices (respectively,  $n \times n$ ),  $\mathcal{R}^{n0}$  the closed convex cone of all symmetric positive definite matrices and  $\mathcal{R}^{n+}$  the open cone of all symmetric positive semidefinite matrices.  $U'$  denotes the transpose of  $U$  and  $U \geq V$  ( $U > V$ ) signifies that  $U - V \in \mathcal{R}^{n0}$  ( $U - V \in \mathcal{R}^{n+}$ ). For  $U \in \mathcal{R}^n$  and  $V \in \mathcal{R}^{r,n}$ ,  $\mathcal{O}(U, V) = [V' : x \ U'V' : \dots : U^{n-1}V']'$  is the observability matrix of the pair  $(U, V)$ ;  $\mathcal{N}\{U\}$  denotes the null space of matrix  $U$ .

Let  $\mathcal{M}^{n,r}$  denote the linear space formed by a number  $N$  of matrices such that  $\mathcal{M}^{n,r} = \{U = (U_1, \dots, U_N) : U_i \in \mathcal{R}^{n,r}, i = 1, \dots, N\}$ ; also,  $\mathcal{M}^n \equiv \mathcal{M}^{n,n}$ . We denote by  $\mathcal{M}^{r0}$  ( $\mathcal{M}^{n+}$ ) the set  $\mathcal{M}^n$  when it is made up by  $U_i \in \mathcal{R}^{r0}$  ( $U_i \in \mathcal{R}^{n+}$ ) for all  $i = 1, \dots, N$ . We also define the operator  $\mathcal{E} : \mathcal{M}^{n0} \rightarrow \mathcal{M}^{n0}$  as:

$$\mathcal{E}_i(U) = \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} U_j, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.7)$$

The following concepts of MS-stabilizability and MS-detectability are the usual concepts found in the literature of MJLS, e.g. see (Costa e Fragoso, 1995), (do Val et al., 1998) and (Ji e Chizeck, 1990b).

**Definition 1 (MS-stabilizability).** We say that  $(A, B)$  is MS-stabilizable when there exists  $G \in \mathcal{M}^{r,n}$  such that  $\lim_{k \rightarrow \infty} E\{|z(k)|^2\} = 0$  for each  $z_0 \in \mathbb{R}^n$  and  $\theta_0 \in \mathcal{S}$ , where  $z(k)$  is given by  $z(k+1) = [A_{\theta(k)} + B_{\theta(k)}G_{\theta(k)}]z(k)$ ,  $z(0) = z_0$  and  $\theta(0) = \theta_0$ . In this case we say that  $G$  stabilizes  $(A, B)$  in the MS sense.

**Definition 2 (MS-detectability).** We say that  $(A, C)$  is MS-detectable when there exists  $L \in \mathcal{M}^{n,q}$  such that  $\lim_{k \rightarrow \infty} E\{|z(k)|^2\} = 0$  for each  $z_0 \in \mathbb{R}^n$  and  $\theta_0 \in \mathcal{S}$ , where  $z(k)$  is given by  $z(k+1) = [A_{\theta(k)} + L_{\theta(k)}C_{\theta(k)}]z(k)$ ,  $z(0) = z_0$  and  $\theta(0) = \theta_0$ .

Next we present the concepts of weak detectability and weak observability of (Costa e do Val, 2001). Similarly to (Ji e Chizeck, 1990a) we consider the pathwise observability gramian  $\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}^{n_0}$ , defined as:

$$\Gamma(k) = \sum_{t=0}^k \Psi'(t)C'_{\theta(t)}C_{\theta(t)}\Psi(t) \quad (5.8)$$

where  $k > 0$  and  $\Psi$  is the state transition matrix of the system  $\Phi$ .

**Definition 3 (W-detectability).** We say that  $(A, C)$  is W-detectable if  $\lim_{k \rightarrow \infty} E\{|x(k)|^2\} = 0$  whenever  $E_{x_0, \theta_0}\{x'_0\Gamma(n^2N)x_0\} = 0$ .

**Definition 4 (W-observability).** We say that  $(A, C)$  is W-observable when there exists a scalar  $\gamma > 0$  such that  $E_{x_0, \theta_0}\{x'_0\Gamma(n^2N)x_0\} \geq \gamma|x_0|^2$ ,  $\forall x_0 \in \mathcal{R}^n, \theta_0 \in \mathcal{S}$ .

### 5.2.3 Observability matrices, weak detectability and stabilizing CARE

We start the section by introducing the collection of matrices  $\mathcal{O}_i \in \mathcal{M}^{n(n^2N),n}$  defined as

$$\mathcal{O}_i := [O_i(0) : O_i(1) : \dots : O_i(n^2N - 1)]' \quad (5.9)$$

for each  $i = 1, \dots, N$ , where  $O(k) \in \mathcal{M}^{n_0}$ ,  $k = 0, \dots, n^2N - 1$  are defined recursively as

$$O_i(k) := A'_i\mathcal{E}_i(O(k-1))A_i \quad (5.10)$$

for each  $i = 1, \dots, N$ , with  $O_i(0) := C'_iC_i$ .

We shall refer to the set of matrices  $\mathcal{O}$  as the set of observability matrices. Indeed, as we shall see in the sequel, these matrices resemble observability matrices of deterministic linear systems in many aspects.

Let us present some preliminary results; consider the sequence of matrices  $L(k)$ ,  $k \geq 0$  on  $\mathcal{M}^{n_0}$ , defined recursively as

$$L_i(k) = C'_iC_i + A'_i\mathcal{E}_i(L(k-1))A_i, \quad (5.11)$$

for each  $i = 1, \dots, N$ , with  $L(0) = 0$ . Notice by inspection of (5.10) and (5.11) that  $O_i(k) = L_i(k+1) - L_i(k)$  and

$$L_i(k) = \sum_{t=0}^{k-1} (L_i(t+1) - L_i(t)) = \sum_{t=0}^{k-1} O_i(t) \quad (5.12)$$

**Lemma 1.**  $x' L_i(k)x = 0$  iff  $x \in \mathcal{N}\{[O_i(0)': \dots : O_i(k-1)']'\}$ . In particular,  $x' L_i(n^2 N)x = 0$  iff  $x \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\}$ .

*Proof.* One can easily check from (5.12) that the following equivalences hold:

$$x' L_i(k)x = 0 \Leftrightarrow x' \sum_{t=0}^{k-1} O_i(t)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} O_i(0) \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ O_i(k-1) \end{bmatrix} x = 0 \quad (5.13)$$

□

The following result is adapted from (Costa e Fragoso, 1993) and (do Val e Başar, 1999); see also (Costa e do Val, 2001).

**Proposition 1.** *The following assertions hold:*

- (i)  $E\{x_0' \Gamma(k)x_0 | \mathcal{F}_0\} = x_0' L_{\theta_0}(k)x_0$ ;
- (ii) If  $x' L_i(n^2 N)x = 0$  then  $x' L_i(k)x = 0$  for all  $k \geq 0$ .

The following lemma presents characterizations of the weak concepts in terms of the set of observability matrices.

**Lemma 2.** *The following assertions hold:*

- (i)  $(A, C)$  is W-detectable iff  $\lim_{k \rightarrow \infty} E\{|x(k)|^2\} = 0$  whenever  $x_0 \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_{\theta_0})$ ;
- (ii)  $(A, C)$  is W-observable iff  $\mathcal{O}_i$  is full rank for all  $i \in \mathcal{S}$ .

*Proof.* Assertion (i) is immediate from Lemma 1 and Proposition 1 (i).

(ii) From Lemma 1 and Proposition 1 (i), the following equivalences hold:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_i \text{ full rank, } \forall i \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow x \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_i) \text{ iff } x = 0, \forall i \in \mathcal{S} \\ &\Leftrightarrow x' L_i(k)x \geq \gamma |x|^2, \gamma > 0, \forall x \in \mathcal{R}^n, i \in \mathcal{S} \\ &\Leftrightarrow E\{x_0' \Gamma(k)x_0 | \mathcal{F}_0\} \geq \gamma |x_0|^2, \forall x_0 \in \mathcal{R}^n, \theta_0 \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad (5.14)$$

□

*Remark 1.* Notice that the condition for W-observability in Lemma 2 is an exact generalization of the usual observability condition of deterministic linear systems. We also mention that when the MJLS is reduced in some way to a deterministic system, the deterministic condition is retrieved. For instance, whenever  $\mathbb{P} = I$ , the condition of W-observability reduces to the condition that  $\mathbb{O}(A_i, C_i)$ , the observability matrix of the deterministic system  $(A_i, C_i)$ , is full rank for each  $i \in \mathcal{S}$ ; in particular, when  $N = 1$ , it is simple to see that  $\mathcal{O}_1 = [C_1' C_1 : \dots : A_1^{n^2-1'} C_1' C_1 A_1^{n^2-1}]$  is full rank iff the usual observability matrix  $\mathbb{O}(A_1, C_1)$  is full rank.

The next lemma presents a result on the pathwise invariance of a non-observed trajectory.

**Lemma 3.** *If  $x(k) \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta(k)}\}$ , then  $x(s) \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta(s)}\}$  for all  $s \geq k$ .*

*Proof.* We assume that  $k = 0$  with no loss of generality. Since  $x_0 \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta_0}\}$ , from Lemma 1 we conclude that  $x_0' L_{\theta_0}(n^2 N) x_0 = 0$  and Proposition 1 leads to

$$E\{x_0' \Gamma(t) x_0 | \mathcal{F}_0\} = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (5.15)$$

Now let us deny the assertion and assume that there exists a sample path  $\theta_0 \dots \theta_s$ , with  $P\{\{\theta(0) \dots \theta(s)\} = \{\theta_0 \dots \theta_s\}\} > 0$ , for which  $x(s) \notin \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta(s)}\}$  where  $x(s) = A_{\theta_{s-1}} \dots A_{\theta_0} x_0$ . From Lemma 1 we have that

$$x(s)' L_{\theta(s)}(n^2 N) x(s) > \epsilon$$

for some scalar  $\epsilon > 0$  and, employing the Tchebychev inequality, we evaluate

$$\begin{aligned} E\{x(s)' L_{\theta(s)}(n^2 N) x(s) | \mathcal{F}_0\} &\geq \epsilon P\{x(s)' L_{\theta(s)}(n^2 N) x(s) > \epsilon\} \\ &\geq \epsilon P\{\{\theta(0) \dots \theta(s)\} = \{\theta_0 \dots \theta_s\}\} > 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

From Proposition 1 (i) we have that

$$x(s)' L_{\theta(s)}(n^2 N) x(s) = E\{x(s)' \Gamma(n^2 N) x(s) | \mathcal{F}_s\}$$

and expectation with respect to  $\mathcal{F}_0$  and employing (5.16) we obtain

$$\begin{aligned} 0 < E\{x(s)' L_{\theta(s)}(n^2 N) x(s) | \mathcal{F}_0\} &= E\{x(s)' \Gamma(n^2 N) x(s) | \mathcal{F}_0\} \\ &\leq E\{x_0' \Gamma(s + n^2 N) x_0 | \mathcal{F}_0\} \end{aligned} \quad (5.17)$$

which is a contradiction in view of (5.15).  $\square$

*Remark 2.* Lemma 3 states that initial conditions  $x_0$ , with  $x_0 \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta_0}\}$ , yield non-observable trajectories  $x(k) \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta(k)}\}$   $k \geq 0$ . From Lemma 2 we have that every non-observable trajectory is stable in the MS-sense, provided the system is W-detectable.

Now we are ready to present the main result of this section.

**Theorem 1.** *The pair  $(A, C)$  is W-detectable iff the pair  $(A, \mathcal{O})$  is MS-detectable.*

*Proof.* Consider the following closed-loop version of the MJLS:

$$\Phi_o : x(k+1) = (A_{\theta(k)} + G_{\theta(k)}\mathcal{O}_{\theta(k)})x(k), \quad x(0) = x_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad (5.18)$$

and, for each  $i = 1, \dots, N$ , let us set

$$\hat{G}_i = -A_i\mathcal{O}_i^+ \quad (5.19)$$

where  $\mathcal{O}_i^+$  is the pseudo-inverse of  $\mathcal{O}_i$ . From the linearity of system  $\Phi_o$  we can represent any trajectory as  $x(k) = x_n(k) + x_t(k)$ ,  $k \geq 0$ , with  $x_0 = x_{0n} + x_{0t}$ , where  $x_n(k)$  and  $x_t(k)$  are associated with initial conditions  $x_{0n} \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta_0}\}$  and  $x_{0t} \in \mathcal{R}\{\mathcal{O}'_{\theta_0}\}$ , respectively. Since  $\mathcal{O}_{\theta_0}^+\mathcal{O}_{\theta_0}$  is the orthogonal projection onto  $\mathcal{R}\{\mathcal{O}'_{\theta_0}\}$ , see (Golub e Loan, 1996, Section 5.5.4), we write

$$x_t(1) = (A_{\theta_0} + \hat{G}_{\theta_0}\mathcal{O}_{\theta_0})x_{0t} = (A_{\theta_0} - A_{\theta_0}\mathcal{O}_{\theta_0}^+\mathcal{O}_{\theta_0})x_{0t} = 0 \quad (5.20)$$

which provides that  $x_t(k) = 0$  for  $k \geq 1$ . In addition, since  $x_{0n} \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta_0}\}$ , from Lemma 3 we have that  $\mathcal{O}_{\theta(k)}x_n(k) = 0$ ,  $\forall k \geq 0$ , which leads to  $x_n(k+1) = (A_{\theta(k)} - A_{\theta(k)}\mathcal{O}_{\theta(k)}^+\mathcal{O}_{\theta(k)})x_n(k) = A_{\theta(k)}x_n(k)$ ,  $k \geq 0$  and we conclude that the system evolves according to its open-loop version:

$$x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k), \quad k \geq 1 \quad (5.21)$$

*Necessity.* We have that: (i) the system  $\Phi_o$  with  $G = \hat{G}$  evolves according to (5.21), (ii) the pair  $(A, C)$  is W-detectable and (iii)  $x(1) = x_n(1) \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta(1)}\}$ ; then, from Lemma 2 (i) we obtain that  $\lim_{k \rightarrow \infty} E\{|x(k)|^2\} = 0$  which means that  $G = \hat{G}$  stabilizes the system in the MS-sense, and we conclude that  $(A, \mathcal{O})$  is MS-detectable.

*Sufficiency.* We show that  $(A, \mathcal{O})$  is not MS-detectable provided  $(A, C)$  is not W-detectable. Let  $x_0 \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta_0}\}$ ; from Lemma 3 we have that  $\mathcal{O}_{\theta(k)}x(k) = 0$ , for all  $k \geq 0$ , and the term  $G_{\theta(k)}\mathcal{O}_{\theta(k)}x(k)$  in (5.18) vanishes no matter how

$G$  is chosen. Then,  $x(\cdot)$  evolves according to (5.21) and, since  $(A, C)$  is not W-detectable, from Lemma 2 (i) it follows that there exists  $\theta_0 \in \mathfrak{S}$  and  $x_0 \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_{\theta_0})$  for which  $\lim_{k \rightarrow \infty} E\{|x(k)|^2\} \neq 0$ , and we conclude that  $(A, \mathcal{O})$  is not MS-detectable.  $\square$

*Remark 3.* Theorem 1 provides a test for W-detectability by means of MS-detectability of the pair  $(A, \mathcal{O})$ . One can also check alternatively if the pair  $(A, \mathcal{O}'\mathcal{O})$  is MS-detectable, for a downsizing in the dimensionality of the test. A testable form for MS-detectability can be given in a similar manner to that in (Costa e Marques, 2000). The pair  $(A, C)$  is MS-detectable whenever the following set of linear matrix inequalities in the unknowns  $X_i \in \mathcal{R}^{n^+}$ ,  $H_i \in \mathcal{R}^{n^+}$  and  $S_i \in \mathcal{R}^{n^q}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , is feasible:

$$\begin{bmatrix} A'_i X_i A_i + C'_i S'_i A_i + A'_i S_i C_i - H_i & C'_i S'_i \\ S_i C_i & -X_i \end{bmatrix} < 0; \quad \mathcal{E}_i(H) \leq X_i \quad (5.22)$$

We finish the section with a counterpart for MJLS of a well known result about the largest attainable dimension of observability matrices.

**Lemma 4.**  $\mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\} \subset \mathcal{N}\{[O_i(0) : \dots : O_i(k)]'\}$ ,  $\forall k \geq 0$ .

*Proof.* From Lemma 1 we have that  $x \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\}$  implies that  $x' L_i(n^2 N)x = 0$ . Then, from Proposition 1 (ii) we obtain  $x' L_i(k)x = 0$ ,  $\forall k \geq 0$  and Lemma 1 yields that  $x \in \mathcal{N}\{[O_i(0) : \dots : O_i(k)]'\}$ .  $\square$

## 5.2.4 A Method for Solving the LQ Problem

In this section we are concerned with the solution of the following CARE in the unknown  $X \in \mathcal{M}^{n^0}$ :

$$X_i = A'_i \mathcal{E}_i(X) \{I - B_i(R_i + B'_i \mathcal{E}_i(X) B_i)^{-1} B'_i \mathcal{E}_i(X)\} A_i + C'_i C_i \quad (5.23)$$

that arises in the linear quadratic control problem of minimizing over  $u(k) = g(t, x(k), \theta(k))$  the infinite-horizon cost functional

$$E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^T x(k)' C'_{\theta(k)} C_{\theta(k)} x(k) + u(k)' R_{\theta(k)} u(k) \right\} \quad (5.24)$$

with  $R \in \mathcal{M}^{n^+}$ .

**Definition 5 (Stabilizing CARE).** If the CARE in (5.23) has a unique solution  $X \in \mathcal{M}^{n_0}$ , and  $G \in \mathcal{M}^{r,n}$  defined as

$$G_i = -(R_i + B_i' \mathcal{E}_i(X) B_i)^{-1} B_i' \mathcal{E}_i(X) A_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.25)$$

stabilizes  $(A, B)$  in the MS sense, then we say that the CARE is stabilizing.

Conditions for stabilizing CARE that generalize and unify previous conditions are presented in (Costa e do Val, 2001); we summarize available results next.

**Proposition 2.** *Consider system  $\Phi$  and the CARE in (5.23). Assume that  $(A, C)$  is W-detectable. Then, the following assertions hold:*

- (i) *If there exists a solution  $X \in \mathcal{M}^{n_0}$  to the CARE, then the CARE is stabilizing;*
- (ii) *There exists a solution  $X \in \mathcal{M}^{n_0}$  to the CARE iff  $(A, B)$  is MS-stabilizable.*

This section addresses the following method for solving the CARE in (5.23).

Method I.

Step 1. Set arbitrarily  $X^0 = (X_1^0, \dots, X_N^0) \in \mathcal{M}^{n_0}$  and  $0 < \kappa < 1$ .

Step 2. For  $k = 1, 2, \dots$  and  $i = 1, 2, \dots, N$ , solve the following UARE:

$$\begin{aligned} -X_i^k + \kappa p_{ii} A_i' X_i^k A_i + A_i' \tilde{\mathcal{E}}_i^k A_i - (\kappa p_{ii} A_i' X_i^k B_i + A_i' \tilde{\mathcal{E}}_i^k B_i) \\ (R_i + \kappa p_{ii} B_i' X_i^k B_i + B_i' \tilde{\mathcal{E}}_i^k B_i)^{-1} (\kappa p_{ii} B_i' X_i^k A_i + B_i' \tilde{\mathcal{E}}_i^k A_i) + C_i' C_i = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

where

$$\tilde{\mathcal{E}}_i^k = \sum_{j=1}^{i-1} p_{ij} X_j^k + (1 - \kappa) p_{ii} X_i^{k-1} + \sum_{j=i+1}^N p_{ij} X_j^{k-1} \quad (5.27)$$

We shall denote by  $\mathcal{X}^k = (X_1^k, \dots, X_N^k)$  the sequence generated by Method I.

The main result of the section reads as follows.

**Theorem 2.** *Assume  $(A, C)$  is W-detectable. Then, the following assertions are equivalent:*

- (i)  *$(A, B)$  is MS-stabilizable;*
- (ii)  *$\mathcal{X}^k$  converges to some  $\mathcal{X}^\infty \in \mathcal{M}^{n_0}$  as  $k \rightarrow \infty$ ;*
- (iii)  *$\mathcal{X}^\infty = P$ , the solution of the stabilizing CARE.*

The proof of Theorem 2 is presented in Section 5.2.4.

*Remark 4.* Condition (ii) of Theorem 2 provides a test of MS-stabilizability.

*Remark 5.* Method I is an adaptation of the method presented in (do Val et al., 1998) and it retrieves that method if  $\kappa$  is set equal to one. The proof of that method relies on the assumption that  $(A, C)$  is MS-detectable, which implies the detectability in the standard sense of each pair  $(p_{ii}^{1/2}A_i, C_i)$ . Consequently, the UARE in (5.26) with  $\kappa = 1$  has a unique solution. However, regarding the assumption of W-detectability, one can not generally assure that each pair  $(p_{ii}^{1/2}A_i, C_i)$  is detectable; a counterexample is presented in Section 5.2.5. Concluding, the proof of convergence of method in (do Val et al., 1998) can not be applied to the present situation.

### Uniqueness of the sequence $\mathcal{X}^k$

A fundamental point in the proof of Theorem 2 concerns the uniqueness of solution of the UARE in (5.26); it is pursued in this section from a viewpoint different from that of (do Val et al., 1998): we show that each pair  $((\kappa p_{ii})^{1/2}A_i, (C_i' C_i + A_i' \tilde{\mathcal{E}}_i^k A_i)^{1/2})$  is detectable for all sufficiently large values of  $k$ .

We shall need some preliminary results. Recall that  $\mathbb{O}(A_i, C_i)$  is the observability matrix of the deterministic system described by the pair  $(A_i, C_i)$ . Stabilizability of the pair  $(A_i, B_i)$  and detectability of the pair  $(A_i, C_i)$  refer to the usual deterministic concepts. Consider the UARE in the unknown  $X_i \in \mathcal{R}^n$

$$-X_i + A_i' X_i A_i - (A_i' X_i B_i + S_i)(R_i + B_i' X_i B_i)^{-1} (B_i' X_i A_i + S_i') + C_i' C_i = 0 \quad (5.28)$$

The next result is stated without proof.

**Proposition 3.** *Assume that the pair  $(A_i, C_i)$  is detectable. Then the UARE in (5.28) has a solution  $X_i \in \mathcal{R}^n$  if and only if  $(A_i, B_i)$  is stabilizable; moreover,  $X_i$  is the unique solution of (5.28).*

**Lemma 5.** *Assume that  $X_i \in \mathcal{R}^{n_0}$  satisfies the UARE in (5.28). Then,*

$$\mathcal{N}\{X_i\} \subset \mathcal{N}\{\mathbb{O}(A_i, C_i)\} \quad (5.29)$$

*Proof.* The proof is trivial for dimension  $n = 1$ . For  $n > 1$  we present only the main line of the proof. Consider the linear deterministic system  $\Phi_d : x(k+$

$1) = A_i x + B_i u$  and the cost functional  $J^\infty(x_0) = \inf_{u(\cdot)} \sum_{k=0}^{\infty} (x(k)' C_i' C_i x(k) + u(k)' R_i u(k))$  defined for  $x(0) = x_0$ . It is a well known fact that

$$0 \leq J^\infty(x_0) \leq x_0' X_i x_0 \quad (5.30)$$

in such a manner that  $x_0 \in \mathcal{N}\{X_i\}$  implies that  $J^\infty(x_0) = 0$ . Then, considering system  $\Phi_d$ , one can check that  $x_0' L_i (n^2 N) x_0 = x_0' \Gamma (n^2 N) x_0 \leq J^\infty(x_0) = 0$  and Lemma 1 provides that  $x_0 \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\}$ ; finally, one can check by inspection that  $\mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\} = \mathcal{N}\{\mathcal{O}(A_i, C_i)\}$  holds.  $\square$

**Lemma 6.** *Let  $0 < \kappa \leq 1$ . The following assertions hold:*

- (i)  $(A, B)$  is MS-stabilizable  $\Rightarrow$  each pair  $((\kappa p_{ii})^{1/2} A_i, (\kappa p_{ii})^{1/2} B_i)$  is stabilizable;
- (ii)  $(A, C)$  is MS-detectable  $\Rightarrow$  each pair  $((\kappa p_{ii})^{1/2} A_i, C_i)$  is detectable;
- (iii)  $(A, C)$  is W-detectable  $\Rightarrow$  each pair  $((\kappa p_{ii})^{1/2} A_i, \mathcal{O}_i)$  is detectable.

*Proof.* (i) and (ii) are adapted from (do Val et al., 1998). (iii) is immediate from Theorem 1 and assertion (ii).  $\square$

**Lemma 7.** *Let  $X^k = (X_1^k, X_2^k, \dots, X_N^k)$  be the sequence generated by Method I and  $O = (O_1, O_2, \dots, O_N)$  given by (5.10). Assume that  $0 < \kappa < 1$  and, for some  $k \geq 1$  and  $0 \leq i \leq N$ ,*

$$\mathcal{N}\{X_j^k\} \subset \mathcal{N}\left\{\sum_{m=0}^{k-1} O_j^2(m)\right\}, \quad j = 1, \dots, i-1 \quad (5.31)$$

and

$$\mathcal{N}\{X_j^{k-1}\} \subset \mathcal{N}\left\{\sum_{m=0}^{k-2} O_j^2(m)\right\}, \quad j = i, \dots, N \quad (5.32)$$

hold. Then,

$$\mathcal{N}\{X_i^k\} \subset \mathcal{N}\{C_i' C_i + A_i' \tilde{\mathcal{E}}_i^k A_i\} \subset \mathcal{N}\left\{\sum_{m=0}^{k-1} O_i^2(m)\right\} \quad (5.33)$$

*Proof.* We denote  $\tilde{A}_i = (\kappa p_{ii})^{1/2} A_i$  and  $\tilde{B}_i = (\kappa p_{ii})^{1/2} B_i$  and we rewrite the update rule (5.26) as:

$$\begin{aligned} -X_i^k + \tilde{A}_i' X_i^k \tilde{A}_i - (\tilde{A}_i' X_i^k \tilde{B}_i + A_i' \tilde{\mathcal{E}}_i^k B_i) [\tilde{B}_i' X_i^k \tilde{B}_i + (R_i + B_i' \tilde{\mathcal{E}}_i^k B_i)]^{-1} \\ (\tilde{B}_i' X_i^k \tilde{A}_i + B_i' \tilde{\mathcal{E}}_i^k A_i) + (C_i' C_i + A_i' \tilde{\mathcal{E}}_i^k A_i) = 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

From Lemma 5, and applying properties (i) and (ii) of Lemma 11 in the Appendix 5.2.7, we obtain:

$$\mathcal{N}\{X_i^k\} \subset \mathcal{N}\{\mathbb{O}(\tilde{A}_i, (C'_i C_i + A'_i \tilde{\mathcal{E}}_i^k A_i)^{1/2})\} \subset \mathcal{N}\{C'_i C_i + A'_i \tilde{\mathcal{E}}_i^k A_i\} \quad (5.35)$$

which proves the first relation in (5.33). Substituting (5.27) in the expression above one can check that

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\{X_i^k\} \subset \mathcal{N}\left\{C'_i C_i + A'_i \sum_{j=1}^{i-1} p_{ij} X_j^k A_i \right. \\ \left. + A'_i p_{ii} (1 - \kappa) X_i^{k-1} A'_i + A'_i \sum_{j=i+1}^N p_{ij} X_j^{k-1} A_i\right\} \end{aligned} \quad (5.36)$$

and, from (5.31), (5.32) and properties (i)–(iii) of Lemma 11, we write:

$$\begin{cases} \mathcal{N}\{p_{ij} A'_i X_j^k A_i\} \subset \mathcal{N}\{\sum_{m=0}^{k-1} p_{ij} A'_i O_j^2(m) A_i\} \subset \mathcal{N}\{\sum_{m=0}^{k-2} p_{ij} A'_i O_j(m) A_i\}, & j \leq i-1 \\ \mathcal{N}\{p_{ij} A'_i X_j^{k-1} A_i\} \subset \mathcal{N}\{\sum_{m=0}^{k-2} p_{ij} A'_i O_j(m) A_i\}, & j \geq i+1 \\ \mathcal{N}\{p_{ii} (1 - \kappa) A'_i X_i^{k-1} A_i\} \subset \mathcal{N}\{\sum_{m=0}^{k-2} p_{ii} A'_i O_i(m) A_i\} \end{cases} \quad (5.37)$$

Then, employing (5.36), (5.37), property (iv) of Lemma 11 and (5.10), in this order, one has that

$$\mathcal{N}\{X_i^k\} \subset \mathcal{N}\left\{C'_i C_i + \sum_{m=0}^{k-2} \left[ \sum_{j=i}^N p_{ij} A'_i O_j(m) A_i \right]\right\} = \mathcal{N}\left\{C'_i C_i + \sum_{m=0}^{k-2} O_j(m+1)\right\} \quad (5.38)$$

and recalling that  $C'_i C_i = O_i(0)$ , we write

$$\mathcal{N}\{X_i^k\} \subset \mathcal{N}\left\{\sum_{m=0}^{k-1} O_i^2(m)\right\} \quad (5.39)$$

and the proof of Lemma 7 is completed.  $\square$

**Lemma 8.** *Consider the system  $\Phi$  and the sequence  $X^k, k \geq 0$  generated by Method I. Assume that  $(A, C)$  is  $W$ -detectable. Then, each pair  $((\kappa p_{ii})^{1/2} A_i, (C'_i C_i + A'_i \tilde{\mathcal{E}}_i^k A_i)^{1/2})$  is detectable for every  $k \geq n^2 N$  and  $0 < \kappa < 1$ . Moreover, if  $(A, B)$  is  $MS$ -stabilizable, then the UARE in (5.26) has a unique solution for each  $k > n^2 N$  and  $i \in \mathcal{S}$ .*

*Proof.* Part 1. We start the proof by applying the result of Lemma 7 in an inductive argument in the index  $k$  to show that  $\mathcal{N}(X_i^k) \subset \mathcal{N}(\sum_{m=0}^{k-1} O_i^2(m))$  for all  $i$  and  $k \geq 0$ . From the update rule (5.26), Lemma 5 and property (ii) of Lemma 11 we have for  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\{X_i^1\} &\subset \mathcal{N}\{\mathbb{O}(\tilde{A}_i, (C'_i C_i)^{1/2})\} \\ &\subset \mathcal{N}\{C'_i C_i\} = \mathcal{N}\{O_i(0)\} = \mathcal{N}\{O_i^2(0)\} \end{aligned} \quad (5.40)$$

and the result is shown for  $k = 1$ . Now, for  $k \geq 2$  we assume  $\mathcal{N}\{X_i^{k-1}\} \subset \mathcal{N}\{\sum_{m=0}^{k-2} O_i^2(m)\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Applying the result of Lemma 7 for  $i = 1$  we get that  $\mathcal{N}\{X_1^k\} \subset \mathcal{N}\{\sum_{m=0}^{k-1} O_1^2(m)\}$ ; proceeding recursively for  $i = 2, \dots, N$  we get that

$$\mathcal{N}\{X_i^k\} \subset \mathcal{N}\left\{\sum_{m=0}^{k-1} O_i^2(m)\right\}, \quad k \geq 1, i = 1, \dots, N \quad (5.41)$$

and the induction is completed.

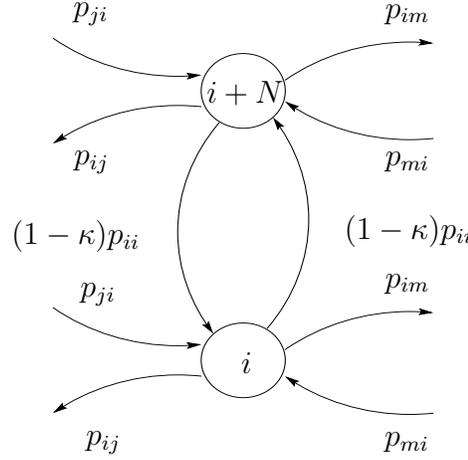
Part 2. Since (5.41) holds, from Lemma 7 we have that  $\mathcal{N}\{C'_i C_i + A'_i \tilde{\mathcal{E}}_i^k A_i\} \subset \mathcal{N}\{\sum_{m=0}^{k-1} O_i^2(m)\}$  for all  $i$  and  $k \geq 0$ . Then, from properties (i) and (ii) of Lemma 11 and we evaluate, for  $k \geq n^2 N$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\{C'_i C_i + A'_i \tilde{\mathcal{E}}_i^k A_i\} &\subset \mathcal{N}\left\{\sum_{m=0}^{k-1} O_i^2(m)\right\} \\ &\subset \mathcal{N}\left\{\sum_{m=0}^{n^2 N - 1} O_i^2(m)\right\} = \mathcal{N}\{\mathcal{O}'_i \mathcal{O}_i\} = \mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Since  $(A, C)$  is W-detectable, it follows from Lemma 6 (iii) that each pair  $(A_i, \mathcal{O}_i)$  is detectable. From (5.42) we have that each pair  $((\kappa p_{ii})^{1/2} A_i, C'_i C_i + A'_i \tilde{\mathcal{E}}_i^k A_i)$  is detectable for every  $k \geq n^2 N$  and  $0 < \kappa < 1$ . Finally, provided that  $(A, B)$  is MS-stabilizable, from assertion (i) of Lemma 6 it follows that the pair  $((\kappa p_{ii})^{1/2} A_i, (\kappa p_{ii})^{1/2} B_i)$  is stabilizable and Proposition 3 completes the proof.  $\square$

## Auxiliary Augmented System and Proof of Theorem 2

In the sequel we introduce an auxiliary MJLS with an augmented Markov chain and an associated method that is useful to relate the Method I in (do

Figure 5.1: Augmented Markov chain  $\hat{\Theta}$ .

Val et al., 1998) with the Method I in this paper. This allows us to apply previous results of (do Val et al., 1998) in the proof of convergence of Method I.

The auxiliary system is as follows.

$$\hat{\Phi} : x(k+1) = \hat{A}_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k) \quad (5.43)$$

where  $\hat{A}_i = A_i$  and  $\hat{B}_i = B_i$  for  $i = 1, \dots, N$  and  $\hat{A}_i = A_{i-N}$  and  $\hat{B}_i = B_{i-N}$  for  $i = N+1, \dots, 2N$ . The augmented Markov chain  $\hat{\Theta}$  is as in figure 5.1 with state space  $\hat{\mathcal{S}} = \{1, \dots, 2N\}$ ; the transition rates are as indicated in the figure, in such a manner that the transition probability matrix  $\hat{\mathbb{P}} = [\hat{p}_{ij}]$  is given by:

$$\begin{cases} P_0 = (1 - \kappa)\text{diag}\{\mathbb{P}\} \\ \hat{\mathbb{P}} = \begin{bmatrix} \mathbb{P} - P_0 & P_0 \\ P_0 & \mathbb{P} - P_0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.44)$$

It is easy to check that  $\hat{\Phi}$  is indeed a Markov chain whenever  $0 < \kappa \leq 1$ . We also set  $\hat{C}_i = C_i$  and  $\hat{R}_i = R_i$  for  $i = 1, \dots, N$  and  $\hat{C}_i = C_{i-N}$  and  $\hat{R}_i = R_{i-N}$  for  $i = N+1, \dots, 2N$ .

Notice that systems  $\Phi$  and  $\hat{\Phi}$  are closed related. For instance, it is easy to check by inspection that:

$$\hat{O}_i(k) = O_i(k), \quad i = 1, \dots, 2N \quad (5.45)$$

**Lemma 9.** *Consider the system  $\Phi$  and its augmented version  $\hat{\Phi}$ . The following assertions hold:*

- (i) *if  $(A, B)$  is MS-stabilizable, then  $(\hat{A}, \hat{B})$  is MS-stabilizable.*
- (ii) *if  $(A, C)$  is W-detectable, then  $(\hat{A}, \hat{C})$  is W-detectable.*

*Proof.* Details are omitted. (i) From the definition of MS-stabilizability, there exists  $G \in \mathcal{M}^{r,n}$  which stabilizes  $(A, B)$ . Now, defining  $\hat{G} \in \{\mathcal{M}^{r,n}:\mathcal{M}^{r,n}\}$  with  $\hat{G}_i = \hat{G}_{i+N} = G_i$  for  $i = 1, \dots, N$ , one can check that  $\hat{G}$  stabilizes  $(\hat{A}, \hat{B})$ . (ii) It follows from (5.45) that  $\mathcal{N}\{\hat{\mathcal{O}}_i\} = \mathcal{N}\{\mathcal{O}_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$  and  $\mathcal{N}\{\hat{\mathcal{O}}_i\} = \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{i-N}\}$ ,  $i = N + 1, \dots, 2N$ , and one can check that MS-detectability of  $(\hat{A}, \hat{\mathcal{O}})$  is equivalent to MS-detectability of  $(A, \mathcal{O})$ ; Theorem 1 completes the proof. □

The next method is a variant of Method I of (do Val et al., 1998).

Method II. (Applies to  $\hat{\Phi}$ ).

Step 1. Consider the sequence  $\mathcal{X}^k$  generated by Method I with arbitrary initial condition  $\mathcal{X}^0$ . Set initial condition

$$\mathcal{H}^0 = (X_1^{n^{2N+1}}, \dots, X_N^{n^{2N+1}}, X_1^{n^{2N+1}}, \dots, X_N^{n^{2N+1}}) \in \{\mathcal{M}^{n^0}:\mathcal{M}^{n^0}\} \quad (5.46)$$

Step 2. For  $k = 1, 2, \dots$  and  $i = 1, 2, \dots, N$ , solve the following UARE in the unknown  $X_i^k$ :

$$\begin{aligned} & -X_i^k + \kappa \hat{p}_{ii} \hat{A}'_i X_i^k \hat{A}_i + \hat{A}'_i \hat{\mathcal{E}}_i^k \hat{A}_i - (\kappa \hat{p}_{ii} \hat{A}'_i X_i^k \hat{B}_i + \hat{A}'_i \hat{\mathcal{E}}_i^k \hat{B}_i) \\ & (\hat{R}_i + \kappa \hat{p}_{ii} \hat{B}'_i X_i^k \hat{B}_i + \hat{B}'_i \hat{\mathcal{E}}_i^k \hat{B}_i)^{-1} (\kappa \hat{p}_{ii} \hat{B}'_i X_i^k \hat{A}_i + \hat{B}'_i \hat{\mathcal{E}}_i^k \hat{A}_i) + \hat{C}'_i \hat{C}_i = 0 \end{aligned} \quad (5.47)$$

where

$$\hat{\mathcal{E}}_i^k = \sum_{j=1}^{i-1} \hat{p}_{ij} X_j^k + \sum_{j=i+1}^{2N} \hat{p}_{ij} X_j^{k-1} \quad (5.48)$$

and set

$$X_{i+N}^k = X_i^k \quad (5.49)$$

We shall denote by  $\mathcal{H}^k = (H_1^k, \dots, H_{2N}^k)$  the sequence generated by method II.

A characterization of the sequence  $\mathcal{H}^k$  is given in the next lemma. In particular, it is shown that the sequences  $\mathcal{H}^k$  and  $(\mathcal{X}^k:\mathcal{X}^k)$  are equal; as a

result, in order to demonstrate the convergence of  $\mathcal{X}^k$ , it is enough to show that  $\mathcal{H}^k$  converges.

**Lemma 10.** *Consider the system  $\Phi$ , its augmented version  $\hat{\Phi}$  and the sequences  $\mathcal{X}^k$  and  $\mathcal{H}^k$  generated by methods I and II respectively. Assume  $(A, B)$  is MS-stabilizable and  $(A, C)$  is W-detectable. Then, for each  $i = 1, \dots, N$  and  $k \geq 1$ ,  $H_i^k = H_{i+N}^k = X_i^{k+n^2N+1}$  is the unique solution of the UARE in (5.47).*

*Proof.* The fact that  $H_i^k = H_{i+N}^k$  is immediate from (5.49). Now we show that  $H_i^k = X_i^{k+n^2N+1}$  is the unique solution of the UARE in (5.47) for each  $i = 1, \dots, N$  and  $k \geq 1$ . Let  $k \geq 1$  and  $1 \leq i \leq N$  and assume that

$$\begin{cases} H_j^k = X_j^{k+n^2N+1}, & j = 1, \dots, i-1, \\ H_j^{k-1} = X_j^{k+n^2N} & j = i+1, \dots, N. \end{cases} \quad (5.50)$$

holds. In this situation, from the UARE in (5.26) and the UARE in (5.47) we have that

$$\begin{aligned} & -X_i^k + \kappa p_{ii} A_i' X_i^k A_i + \hat{A}_i' \tilde{\mathcal{E}}_i^k A_i - (\kappa p_{ii} A_i' X_i^k \hat{B}_i + A_i' \tilde{\mathcal{E}}_i^k B_i) \\ & (R_i + \kappa p_{ii} B_i' X_i^k B_i + B_i' \tilde{\mathcal{E}}_i^k B_i)^{-1} (\kappa p_{ii} B_i' X_i^k A_i + B_i' \tilde{\mathcal{E}}_i^k A_i) + C_i' C_i \\ & = -X_i^k + \kappa \hat{p}_{ii} \hat{A}_i' X_i^k \hat{A}_i + \hat{A}_i' \hat{\mathcal{E}}_i^k \hat{A}_i - (\kappa \hat{p}_{ii} \hat{A}_i' X_i^k \hat{B}_i + \hat{A}_i' \hat{\mathcal{E}}_i^k \hat{B}_i) \\ & (\hat{R}_i + \kappa \hat{p}_{ii} \hat{B}_i' X_i^k \hat{B}_i + \hat{B}_i' \hat{\mathcal{E}}_i^k \hat{B}_i)^{-1} (\kappa \hat{p}_{ii} \hat{B}_i' X_i^k \hat{A}_i + \hat{B}_i' \hat{\mathcal{E}}_i^k \hat{A}_i) + \hat{C}_i' \hat{C}_i \end{aligned} \quad (5.51)$$

holds for  $i = 1, \dots, N$ . Thus, (5.47) inherits uniqueness of solution of (5.26), which is assured in Lemma 8. The proof is completed with the argument above applied inductively on the indices  $k$  and  $i$ , recalling from (5.46) that  $H_i^0 = H_{i+N}^0 = X_i^{n^2N+1}$  for  $i = 1, \dots, N$ .  $\square$

We shall use the next result, adapted from (do Val et al., 1998).

Let us define the following sequence of stopping times:

$$\begin{aligned} \xi(0) &= 0, \\ \xi(k) &= \min\{k > \xi(k-1) : \theta(k) > \theta(k-1) \text{ or } \theta(k) = \theta(k-1) - N\}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

and the cost functional

$$\begin{aligned} J^k(x_0, \theta_0) &= \inf_u E \left\{ \sum_{t=0}^{\xi(k)} x(t)' C'_{\theta(t)} C_{\theta(t)} x(t) + u(t)' R_{\theta(t)} u(t) \right. \\ & \quad \left. + x(\xi(k))' H_{\theta(\xi(k))}^0 x(\xi(k)) \right\} \end{aligned} \quad (5.53)$$

where  $x(k)$  and  $\theta(k)$  are the trajectories of the system  $\hat{\Phi}$  for initial conditions  $x_0$  and  $\theta_0$ , obtained under the minimization over  $\{u(k), 0 \leq t \leq \xi(k)\}$  where  $u(k)$  is  $\mathcal{F}_k$ -adapted.

Assume that the solution of the UARE in (5.47) is unique for each  $k$  and  $i$  and that there exists a unique and stabilizing solution  $P = (P_1, \dots, P_{2N})$  for the CARE (5.23) for system  $\hat{\Phi}$ . In this situation, in a similar manner to (do Val et al., 1998) one can show that  $x_0' H_i^k x_0 = J^k(x_0, i)$  holds and  $J^k(x_0, i) \rightarrow x_0' P_i x_0$  as  $k \rightarrow \infty$  for all  $x_0$  and  $i$ ; as a consequence, we have that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H_i^k = P_i \quad (5.54)$$

Notice from (5.52) that  $\xi(k)$  diverges almost surely as  $k \rightarrow \infty$  and the faster the sequence diverges, the higher is the rate of convergence of the method, see (5.53). Next we summarize the results above in a convenient form for later reference.

**Proposition 4.** *Suppose that the following assumptions hold:*

- (I) *The CARE in (5.23) associated with system  $\hat{\Phi}$  is stabilizing;*
- (II) *The UARE in (5.47) has a unique solution for every  $i = 1, \dots, N$  and  $k \geq 0$ .*

*Then,  $H_i^k \rightarrow P_i$  as  $k \rightarrow \infty$  for any  $\mathcal{H}^0$ , where  $P = (P_1, \dots, P_{2N})$  is the solution of (5.23).*

### Proof of Theorem 2.

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Consider the augmented version  $\hat{\Phi}$  of system  $\Phi$  and Method II. Let us check that the assumptions (I) and (II) of Proposition 4 hold. From Lemma 9 we have that  $(\hat{A}, \hat{B})$  is MS-stabilizable and  $(\hat{A}, \hat{C})$  is W-detectable, and from Proposition 2, the CARE associated with system  $\hat{\Phi}$  is stabilizing; then, assumption (I) of Proposition 4 holds. On the other hand, from Lemma 10 we have that the UARE in (5.47) has a unique solution for  $k \geq 0$ , and assumption (II) of Proposition 4 also holds. Then, Proposition 4 provides that  $\mathcal{H}^k \rightarrow P$  as  $k \rightarrow \infty$ , where  $P = (P_1, \dots, P_{2N})$  is the solution of (5.23) for system  $\hat{\Phi}$  and from Lemma 10 it follows that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_i^k = \lim_{k \rightarrow \infty} H_i^k = P_i \quad (5.55)$$

for  $i = 1, \dots, N$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). By inspection of (5.26), it is easy to check that  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  satisfies the CARE in (5.23) for the original system  $\Phi$ . The fact that the CARE is stabilizing follows immediately from Proposition 2 (i).

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Immediate from Proposition 2 (ii).

## 5.2.5 Numerical Examples

Example 1. The example is adapted from (do Val et al., 1998) and (Geromel et al., 1995), and it is obtained from discretization of a continuous-time system characterized by four different operating points. Matrices  $C_i$ ,  $R_i$  and  $\mathbb{P}$  are given by:

$$\begin{aligned} C_1 &= [1 \ 0 \ 0]; \quad C_2 = C_3 = C_4 = 0; \\ R_1 &= R_2 = R_3 = R_4 = 1; \\ \mathbb{P} &= \begin{bmatrix} 0.88 - \rho & 0.06 & 0.06 & \rho \\ 0.06 & 0.88 & 0.06 & 0 \\ 0.06 & 0.06 & 0.88 & 0 \\ \rho & 0 & 0 & 1 - \rho \end{bmatrix}; \quad 0 \leq \rho \leq 0.88 \end{aligned} \quad (5.56)$$

and matrices  $A_i$  and  $B_i$  are borrowed from (do Val et al., 1998); they are listed in the Appendix 5.2.8 for ease of reference.

One can check from (5.22) that  $(A, C)$  is not MS-detectable, no matter how  $\rho$ ,  $0 \leq \rho \leq 0.88$ , is chosen.

On the other hand, for  $\rho > 0$  one can check that matrices  $\mathcal{O}_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , are of full rank; then, from Lemma 2 one has that  $(A, C)$  is W-observable and, therefore, it is trivially W-detectable. Indeed, it can be shown from (5.10) that when (i) the Markov chain forms a communicating class, (ii) each matrix  $A_i$  are of full rank and (iii) at least one pair  $(A_i, C_i)$  is observable, then the system is W-observable. In the example, the condition (i) is satisfied for  $\rho > 0$ , the condition (iii) holds for  $i = 1$  and the condition (ii) holds for any system obtained from discretization of a continuous-time system, as in the present example. This illustrates the conservativeness of MS-detectability when compared with W-detectability.

The example also illustrates the fact that neither W-detectability nor W-observability is a sufficient condition for each pair  $(p_{ii}^{1/2} A_i, C_i)$  to be detectable: it is easy to check that the condition fails for  $i = 3$ .

Notice that the Markov state  $\theta = 4$  is stable and it is not observable; it can be shown that the isolation of such a chain state implies the loss

of W-observability, however W-detectability is preserved. Then, in order to produce an example that is W-detectable but not W-observable for the application of the Method I, we set  $\rho = 0$ . For this choice of  $\rho$ , one can check that  $\mathcal{O}_4 = 0$  and the system is not W-observable; furthermore, by applying (5.22), one has that  $(A, \mathcal{O})$  is MS-detectable, which means that  $(A, C)$  is W-detectable (see Theorem 1). In this situation, Method I is the only method in the MJLS literature that can be applied. The optimal control obtained is  $G_1 = [0.302 \ 0.520 \ 0.637]$ ,  $G_2 = [0.082 \ 0.238 \ 0.143]$ ,  $G_3 = [0.0849 \ 1.288 \ -0.479]$  and  $G_4 = 0$ ; for  $\kappa = 0.95$ , the method needs 19 iterations and 2.82 seconds of CPU time to converge to the solution of the CARE, with residual error of about  $10^{-8}$ .

Example 2. This is the example presented in (do Val et al., 1998); matrices  $A_i$ ,  $B_i$  and  $R_i$  are as in Example 1 and

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = I_3; \quad (5.57)$$

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.88 & 0.04 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & 0.88 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 0.88 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.88 \end{bmatrix}$$

In this example we compare Method I and the method in (do Val et al., 1998). Figure 5.2 illustrates how the rate of convergence of Method I depends on the parameter  $\kappa$ ; the results for the method in (do Val et al., 1998) are also displayed. One can infer from the figure that the number of iterations and the CPU time increase in an linear fashion with  $\kappa$ . We also notice that the methods are similar in terms of rate of convergence when  $\kappa$  is set near to one.

### 5.2.6 Conclusions

The paper presents new advances in the study of the weak detectability concept for MJLS, which is an special class of composite linear system. W-detectability is an important and rather general concept introduced in (Costa e do Val, 2001) that can assure uniqueness and MS-stability of closed-loop solutions of the LQ problem.

An extension of the concept of observability matrices for deterministic linear systems is produced by introducing the collection of observability matrices  $\mathcal{O}$  for the MJLS. This allows us to present results concerning the relationship between weak detectability for MJLS and the deterministic linear

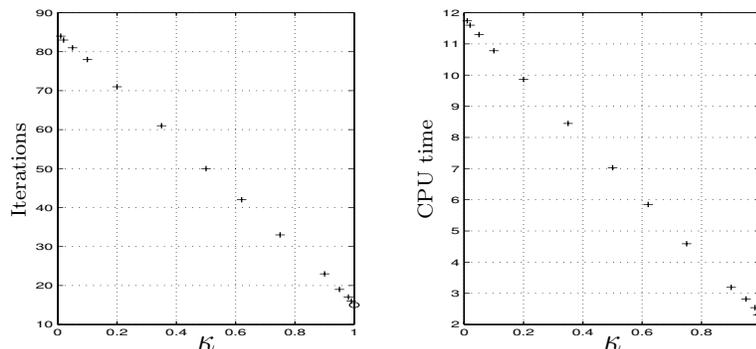


Figure 5.2: Convergence of the Method I for some values of  $\kappa$  in example 2; (+) refers to Method I and (o) refers to the method in (do Val et al., 1998).

systems, including the definition of the pathwise invariance of non-observable subspaces, see Lemma 3. The relationship between W-detectability and MS-detectability is clarified in Theorem 1, which states that W-detectability of the pair  $(A, C)$  is equivalently expressed by the MS-detectability of the pair  $(A, \mathcal{O})$ , thus revealing the conservativeness of the MS-detectability.

The concept of W-detectability is related to que pairwise detectability of each pair  $(p_{ii}^{1/2}A_i, \mathcal{O}_i)$  in the form expressed by Lemma 6, although it is not related to the detectability of each pair  $(p_{ii}^{1/2}A_i, C_i)$  as Example 1 shows. The latter detectability concept is a key condition in the proof of convergence of previous numerical methods based on uncoupled Riccati iterations.

The paper circumvent this difficulty by adapting the method of (do Val et al., 1998) and showing the convergence of the method from a different viewpoint: we introduce a parameter  $\kappa$  and for any  $0 < \kappa < 1$  we demonstrate that the pairs associated with the UARE sequences are detectable after  $n^2N$  iterations. This allows us to show that the sequence is unique, which is a central point in the proof of convergence of the method. Furthermore, it was shown and illustrated by examples that the proposed method inherits the high rate of convergence of the method in (do Val et al., 1998) when  $\kappa$  is set near to one.

## Acknowledgments

This research was supported in part by FAPESP, Grant 98/13095-8, in part by CNPq, Grant 300721/86-2(RN) and by the PRONEX Grant 015/98 'Con-

trol of Dynamical Systems’.

### 5.2.7 Appendix A - Basic Results

The following properties are basic results; the proof is presented for ease of reference.

**Lemma 11.** *Consider matrices  $U \in \mathcal{R}^{n_0}$ ,  $V \in \mathcal{R}^{n_0}$  and  $S \in \mathcal{R}^n$ . Then the following assertions hold:*

- (i)  $\mathcal{N}\{S\} = \mathcal{N}\{S'S\}$ ;
- (ii)  $\mathcal{N}\{U + V\} \subset \mathcal{N}\{U\}$  and  $\mathcal{N}\{U + V\} \subset \mathcal{N}\{V\}$ ;
- (iii) Assume  $\mathcal{N}\{U\} \subset \mathcal{N}\{V\}$ ; then,  $\mathcal{N}\{S'US\} \subset \mathcal{N}\{S'VS\}$ ;
- (iv) Assume  $\mathcal{N}\{U\} \subset \mathcal{N}\{S\}$ ; then,  $\mathcal{N}\{V + U\} \subset \mathcal{N}\{V + S\}$ ;

*Proof.* (i):  $\mathcal{N}\{S\} \subset \mathcal{N}\{S'S\}$  is trivial;  $\mathcal{N}\{S'S\} \subset \mathcal{N}\{S\}$ : if  $S'Sx = 0$  then we define  $v = Sx$  to get that  $v'v = x'S'Sx = 0$  which means that  $Sx = v = 0$ ; (ii): first assertion:  $(U+V)x = 0 \Rightarrow x'(U+V)x = 0 \Rightarrow 0 \leq x'Ux = -x'Vx \leq 0 \Rightarrow x'Ux = 0$ ; now let us write  $U = U^{1/2}U^{1/2}$  to get that  $x'U^{1/2}U^{1/2}x = 0 \Rightarrow Ux = 0$ ; the second assertion follows by symmetry; (iii): let us write  $U = U^{1/2}U^{1/2}$  to get that  $S'USx = 0 \Rightarrow x'S'U^{1/2}U^{1/2}Sx = 0 \Rightarrow U(Sx) = 0$  and from the assumption,  $V(Sx) = 0$ ; (iv): from assertion (ii)  $(V + U)x = 0$  implies  $Ux = 0$  and  $Vx = 0$  and the result is immediate.  $\square$

### 5.2.8 Appendix B - Data of the Examples

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0.9572 & 0.8329 & 2.2670 \\ 0.0127 & 0.9638 & -0.2682 \\ 0 & 0 & 0.2231 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0.9693 & 0.8767 & 1.9881 \\ 0.0040 & 0.9694 & -0.2691 \\ 0 & 0 & 0.2231 \end{bmatrix}; \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 0.9313 & 2.3567 & 5.2814 \\ 0.0102 & 0.9445 & -0.7538 \\ 0 & 0 & 0.2231 \end{bmatrix}; A_4 = \begin{bmatrix} 0.9498 & 1.4220 & 3.8014 \\ -0.0327 & 0.9161 & -0.8440 \\ 0 & 0 & 0.2231 \end{bmatrix}; \\
 B_1 &= [-2.5873 \quad -0.2909 \quad 0.7769]; B_2 = [-11.4728 \quad -0.2818 \quad 0.7769]; \\
 B_3 &= [1.3790 \quad -0.7506 \quad 0.7769]; B_4 = [-4.7405 \quad -0.6196 \quad 0.7769]
 \end{aligned} \tag{5.58}$$



## Capítulo 6

# W-detetabilidade para SLSM de dimensão infinita

Neste capítulo, abordam-se os conceitos de W-detetabilidade e W-observabilidade para SLSM a tempo discreto com um conjunto enumerável de estados de Markov, os quais são denominados neste texto simplesmente como SLSM de dimensão infinita.

Uma vez mais emprega-se o expediente de inserir um artigo no texto da tese, em conformidade com o formato de teses adotado pela Universidade de Campinas. A razão para isto é que os resultados apresentados neste capítulo apresentam certo grau de semelhança com os resultados do caso de dimensão finita e, em particular, reduzem-se à estes últimos quando à ele particularizados. Contudo, devemos frisar que encontram-se algumas diferenças conceituais e que o contexto de dimensão infinita é analiticamente muito mais delicado. De fato, neste texto apenas alguns resultados do caso de dimensão finita são estendidos; outros não são extensíveis ou ainda não foram suficientemente estudados.

O artigo, de autoria do candidato ao título de doutor, de seu orientador e de Marcelo Dutra Fragoso, intitula-se “ *On a Detectability Concept of Discrete-Time Infinite Markov Jump Linear Systems* ”, foi aceito para publicação no *IFAC World Congress 2002* e encontra-se submetido ao jornal *Stochastic Analysis and Applications* ; veja (Costa et al., n.d.a) e (Costa et al., n.d.b). Os resultados obtidos são apresentados sinteticamente e comentados na seção seguinte, em Português, precedendo a seção na qual o artigo é incluído.

## 6.1 Síntese de resultados

Nesta seção, apresentamos uma síntese dos resultados obtidos relativos aos conceitos de  $W$ -detetabilidade e  $W$ -observabilidade, introduzidos neste trabalho para SLSM de dimensão infinita.

Como mencionamos acima, o caso de dimensão infinita apresenta certas discrepâncias e dificuldades analíticas quando comparado ao caso de dimensão finita. Estas dificuldades representaram entraves na extensão de certos resultados, como na aplicação dos conceitos no problema LQ e, em particular, na extensão do resultado de invariância expresso no Lema 3.2.

As dificuldades enfrentadas são melhor compreendidas através das seguintes comparações entre os casos de dimensão finita e infinita, ambos a tempo discreto.

Inicialmente, considere as seguintes definições. Dizemos que uma trajetória  $X(\cdot)$  converge no sentido médio quadrático se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|X(k)\|_1 = 0$$

sendo, para  $X = (X_1, \dots)$ ,  $\|X\|_1 = \sum_{i \in \mathcal{S}} \|X_i\|$ ; dizemos que a trajetória converge estocasticamente se

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|X(k)\|_1 < \infty \quad (6.1)$$

No caso de dimensão finita, quando uma trajetória converge no sentido médio quadrático, sempre há uma função exponencial decrescente limitando a trajetória, de forma que se conclui a convergência no sentido estocástico. Em contraste, no caso de dimensão infinita, não se aplica tal limitante, e é simples encontrar casos em que uma trajetória converge tão lentamente no sentido médio quadrático, que não satisfaz (6.1). Em decorrência deste fato, a equivalência entre diferentes conceitos de estabilidade de segundo momento, como a equivalência entre MS-estabilidade e estabilidade estocástica (S-estabilidade), não vale no contexto de dimensão infinita; vide (Costa e Fragoso, 1995) ou (Fragoso e Baczynski, 2001) para o caso a tempo contínuo.

Ressaltamos que, no contexto de dimensão infinita, o conceito mais adequado para o problema LQ é o de S-estabilidade. Como exemplo, menciona-se que o conceito associado de S-estabilizabilidade garante a existência de solução para o problema LQ e para as EARA associadas; o conceito mais fraco de MS-estabilizabilidade não cumpre o mesmo papel. Com vistas à futura

aplicação no problema LQ, neste texto empregam-se noções associadas a S-estabilidade. Mesmo no conceito de W-detetabilidade, o qual é permeado pelo conceito de estabilidade (no sentido que exige convergência de trajetórias não observadas), aparece a condição de convergência estocástica ao invés de convergência na média quadrática; por esta razão, denomina-se o conceito como  $W_S$ -detetabilidade.

Outro ponto importante é que, para um SLSM de dimensão finita, dados  $x_0, \theta_0$ , sempre é possível escrever  $x_0 = \hat{x}_0 + \tilde{x}_0$ , sendo  $\hat{x}_0 \in \mathcal{R}\{\mathcal{O}_{\theta_0}\}$  e  $\tilde{x}_0 \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta_0}\}$ , de forma que  $W^{n^2N}(\tilde{x}_0, \theta_0) = 0$  e  $W^{n^2N}(\hat{x}_0, \theta_0) \geq \gamma E\{|\hat{x}_0|^2\}$ , para algum  $\gamma > 0$ . Por outro lado, no caso de dimensão infinita, esta decomposição não vale. O seguinte exemplo ilustra este fato.

**Exemplo 6.1 (Funcional  $W$  positivo, mas sem limitante inferior, associado a um SLSM de dimensão infinita).** Seja o SLSM de dimensão infinita descrito por

$$A_i = 1; C_i = q^{i/2}; p_{i,i+1} = 1$$

com  $0 < q < 1$ . Neste exemplo,  $W^T(x, i) \neq 0$  para qualquer  $T > 0$ ; por outro lado, é simples verificar que  $W^T(x, i) \leq W^\infty(x, i) = q^{1-i}(1-q)^{-1}|x|^2$ , de forma que não existe um limitante inferior  $\gamma > 0$  para o funcional  $W$ .

O exemplo acima também é útil para explicar por que uma caracterização de detetabilidade apenas em função do comportamento do sistema no espaço não fracamente observável (i.e., para  $x$  e  $\theta$  para os quais  $W^{n^2N}(x, \theta) = 0$ ), como aquela para W-detetabilidade expressa no Lema 2.7, não é útil no contexto do problema LQ de dimensão infinita, o que dificulta a extensão de resultados, como aquele expresso no Lema 3.2 sobre invariância à realimentação. De fato, teríamos que o sistema do Exemplo 6.1 é trivialmente  $W_S$ -detetável, enquanto é simples verificar que nenhuma trajetória converge, embora  $W^\infty(x, \theta) < \infty$  para todo  $x, \theta$ .

Estas questões são resolvidas ao exigir, na definição de  $W_S$ -detetabilidade, convergência da trajetória, sempre que o custo for finito (ao invés de nulo). Isto torna o conceito mais adequado para o problema LQ, na medida em que proporciona um vínculo entre a finitude do funcional de custo e a convergência da trajetória, similar àquele descrito no Capítulo 3.

**Definição 6.1 ( $W_S$ -detetabilidade).**  $(A, C, P)$  é  $W_S$ -detetável se

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|X(k)\|_1 < \infty \quad (6.2)$$

sempre que  $W(X) < \infty$ .

Os principais resultados obtidos são resumidos na proposição a seguir. Os conceitos de W-observabilidade e S-detetabilidade apresentados abaixo consistem, respectivamente, em uma adaptação do caso de dimensão finita e em um dual de S-estabilizabilidade, encontrado por exemplo em (Costa e Fragoso, 1995).

**Definição 6.2 (W-observabilidade).**  $(A, C, P)$  é W-observável se existem um inteiro positivo  $N_d$  e um escalar  $\gamma > 0$  para os quais  $W^{N_d}(X) \geq \gamma \|X\|_1$  para cada condição inicial  $X$ .

**Definição 6.3 (S-detetabilidade).**  $(A, C, P)$  é S-detetável se existe um conjunto de matrizes  $L = (L_1, \dots)$  de dimensões apropriadas tal que, para qualquer condição inicial  $X$ , a trajetória do sistema descrito por  $(A + LC, P)$  é convergente no sentido estocástico.

**Proposição 6.1.** *As seguintes afirmações valem:*

- (i) *Se  $(A, C, P)$  é W-observável, então  $(A, C, P)$  é  $W_S$ -detetável.*
- (ii) *Se  $(A, C, P)$  é S-detetável, então  $(A, C, P)$  é  $W_S$ -detetável.*
- (iii) *Se  $S = \{1, \dots, N\}$ , ou seja, se o SLSM é de dimensão finita, então  $(A, C, P)$  é  $W_S$ -detetável se e somente se  $(A, C, P)$  é W-detetável.*

Finalizando, mencionamos que a aplicação do conceito de detetabilidade no problema LQ ainda é uma questão em aberto, a ser abordada em trabalhos futuros. Mais especificamente, deve-se demonstrar que a invariância à realimentação vale, ou seja, que  $(A + BK, (C'C + G'RG)^{1/2}, P)$  é  $W_S$ -detetável sempre que  $(A, C, P)$  é  $W_S$ -detetável, de forma similar ao Lema 3.2 no caso contínuo de dimensão finita. É também interessante salientar que a classe de SLSM de dimensão infinita inclui a dos sistemas lineares variantes no tempo, os quais possuem conceitos próprios de detetabilidade, cujas relações com os conceitos existentes de detetabilidade para SLSM não se encontram exploradas na literatura.

## 6.2 O artigo intitulado “*On a Detectability Concept of Discrete-Time Infinite Markov Jump Linear Systems*”

Abstract. This paper introduces a concept of detectability for discrete-time infinite Markov jump linear systems that relates stochastic convergence of

the output with stochastic convergence of the state. It is shown that the new concept generalizes the previous stochastic detectability concept and, in the finite dimension scenario, it is reduced to the weak detectability concept. It is also shown that the detectability concept retrieves the well known property of linear deterministic systems that observability is stricter than detectability.

### 6.2.1 Introduction

This paper is concerned with the discrete-time Infinite Markov jump linear system (MJLS) defined in a fixed stochastic basis  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_k), \mathcal{P})$  by

$$\Psi : \begin{cases} x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k), & k \geq 0, \\ y(k) = C_{\theta(k)}x(k), & x(0) = x_0, \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \quad (6.3)$$

where  $x$  and  $y$  are the state and the output variables, respectively. The mode  $\theta$  is the state of an underlying discrete-time Markov chain  $\Theta = \{\theta(k); k \geq 0\}$  taking values in  $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots\}$  and having a stationary transition probability matrix  $\mathbb{P} = [p_{ij}]$ ,  $i, j \in \mathbb{Z}$ .  $\theta_0 \in \mathcal{S}$  is a random variable for which  $\mu_i = P(\theta_0 = i)$ ,  $i \in \mathcal{S}$ , and  $x_0$  is a second order random variable. It is assumed that matrices  $A_i$  and  $C_i$ ,  $i \in \mathcal{S}$ , belong to the collections of real matrices  $A = (A_1, A_2, \dots)$ ,  $\dim(A_i) = n \times n$ , and  $C = (C_1, C_2, \dots)$ ,  $\dim(C_i) = q \times n$ , for which  $\sup_{i \in \mathcal{S}} \|A_i\| < \infty$  and  $\sup_{i \in \mathcal{S}} \|C_i\| < \infty$ . We also assume that  $x(k)$  and  $\theta(k)$  are observed at each time instant  $k$ .

When one deals with system  $\Psi$ , the usual detectability concept is the stochastic detectability (S-detectability), see (Costa e Fragoso, 1995), or (Costa, 1995) and (Morozan, 1995) in the finite dimension case, which is a dual concept of stochastic stabilizability. However, the concept presents the drawbacks pointed out in the sequel.

Consider the weak observability (W-observability) concept that follows from extension of the finite state space case, see Section 6.2.4, which appears in (Costa e do Val, n.d.b), (Costa e do Val, 2001) and (Morozan, 1995), and it is more general than other observability concepts for MJLS, like the ones in (Ji e Chizeck, 1990a). We show by means of an example in Section 6.2.5 that S-detectability does not generalize W-observability. This suggests that S-detectability is conservative, recalling that detectability generalizes observability in the context of linear deterministic systems, linear time-varying systems, see e.g. (Anderson e Moore, 1981), or even in the context of MJLS in finite state space, see (Costa e do Val, n.d.b), (Costa e do Val, 2001), and

(do Val e Costa, 2002). Moreover, W-observability does not generalize S-detectability as well, and the concepts are not comparable; this sometimes compelled authors to consider both concepts, like in (do Val et al., 1999) and (Morozan, 1995). We also mention that some basic properties of the usual detectability concept in the linear deterministic setting are not retrieved by the S-detectability concept; along this line, S-detectability does not assure that non-observed trajectories are stable in the stochastic sense and it does not relate convergence (in the stochastic sense) of the state and output trajectory.

In the finite space state case, the above criticism was overcome by the introduction of the weak detectability (W-detectability) concept in (Costa e do Val, n.d.b) and (Costa e do Val, 2001), or in (Costa e do Val, n.d.a) for the continuous-time case. The concept generalizes the S-detectability concept and it reproduces geometric and qualitative properties of the deterministic concepts within the MJLS setting.

This paper extends the weak detectability concept to the infinite Markov state space case. The new concept, which is referred to as  $W_S$ -detectability, relates the stochastic convergence of the output with the stochastic convergence of the state. It is shown that the new concept generalizes the stochastic detectability concept and, in the finite dimension scenario, it is reduced to the concept of weak detectability. It is also shown that  $W_S$ -detectability generalizes W-observability.

The paper is organized as follows. In Section 6.2.2 we present basic concepts. In Section 6.2.3 we introduce the concept of  $W_S$ -detectability and we present the comparison with the S-detectability concept; the  $W_S$ -detectability concept in finite state space is studied in Section 6.2.3. The concept of W-observability is studied in Section 6.2.4 and Section 6.2.5 presents examples showing that a non S-detectable system can be  $W_S$ -detectable.

## 6.2.2 Notation and Basic Results

Let  $\mathbb{R}^n$  represent the linear space of all  $n$ -dimensional vectors. Let  $\mathcal{R}^{r,n}$  (respectively,  $\mathcal{R}^n$ ) represent the normed linear space formed by all  $r \times n$  real matrices (respectively,  $n \times n$ ) and  $\mathcal{R}^{n0}$  ( $\mathcal{R}^{n+}$ ) the closed convex cone  $\{U \in \mathbb{R}^n : U = U' \geq 0\}$  (the open cone  $\{U \in \mathbb{R}^n : U = U' > 0\}$ ) where  $U'$  denotes the transpose of  $U$ ;  $U \geq V$  ( $U > V$ ) signifies that  $U - V \in \mathcal{R}^{n0}$  ( $U - V \in \mathcal{R}^{n+}$ ). Let  $\mathcal{H}_1^{r,n}$  ( $\mathcal{H}_\infty^{r,n}$ ) denote the linear space formed by sequences of matrices  $H = \{H_i; i \in \mathcal{S}\}$  such that  $\sum_{i \in \mathcal{S}} \|H_i\| < \infty$  ( $\sup_{i \in \mathcal{S}} \|H_i\| < \infty$ );

also,  $\mathcal{H}^n \equiv \mathcal{H}^{n,n}$ . We denote by  $\mathcal{H}_1^{n0}$  ( $\mathcal{H}_1^{n+}$ ) the set  $\mathcal{H}^n$  when it is made up by  $H_i \in \mathcal{R}^{n0}$  ( $H_i \in \mathcal{R}^{n+}$ ) for all  $i \in \mathcal{S}$  and similarly for  $\mathcal{H}_\infty^{n0}$  and  $\mathcal{H}_\infty^{n+}$ . For  $H \in \mathcal{H}_1^{r,n}$  we define the inner product

$$\langle H, V \rangle = \sum_{i \in \mathcal{S}} \text{tr}\{H_i' V_i\}$$

and the norm

$$\|H\|_1 = \sum_{i \in \mathcal{S}} \|H_i\| \quad (6.4)$$

and for  $H \in \mathcal{H}_\infty^{r,n}$  we define  $\|H\|_\infty = \sup_{i \in \mathcal{S}} \|H_i\|$ .

*Remark 6.* Notice that for  $H \in \mathcal{H}_1^{n0}$  we have that  $\|H\|_1 \leq \langle H, I \rangle \leq n\|H\|_1$ . Indeed,

$$\begin{aligned} \|H\|_1 &= \sum_{i \in \mathcal{S}} \|H_i\| \leq \sum_{i \in \mathcal{S}} \text{tr}(H_i) = \langle H, I \rangle \\ &= \text{tr}\left(\sum_{i \in \mathcal{S}} H_i\right) \leq n \left\| \sum_{i \in \mathcal{S}} H_i \right\| \leq n \sum_{i \in \mathcal{S}} \|H_i\| = n \|H\|_1 \end{aligned}$$

Let us define the operators  $\mathcal{E} : \mathcal{H}_1^n \rightarrow \mathcal{H}_1^n$ , and  $\mathcal{T} : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathcal{H}^n$  as

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i(U) &= \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij} U_j \\ \mathcal{T}_i(U) &= A_i' \mathcal{E}_i(U) A_i, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.5)$$

and  $\mathcal{L} : \mathcal{H}_1^n \rightarrow \mathcal{H}_1^n$ , the dual of operator  $\mathcal{T}$ , as

$$\mathcal{L}_i(U) = \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ji} A_j U_j A_j', \quad i \in \mathcal{S}$$

It is shown in (Costa e Fragoso, 1995) that the limits in (6.5) are well defined. We denote  $\mathcal{T}^0(U) = U$ , and for  $k \geq 1$ , we can define  $\mathcal{T}^k(U)$  recursively by  $\mathcal{T}^k(U) = \mathcal{T}(\mathcal{T}^{k-1}(U))$  and similarly for  $\mathcal{L}$ . Notice that  $\mathcal{T}$  and  $\mathcal{L}$  are linear. We also define the following linear system related with system  $\Psi$ :

$$\Phi : \begin{cases} X_i(k+1) = \mathcal{L}_i(X(k)), k \geq 0 \\ X(0) = X \in \mathcal{H}_1^{n0} \end{cases} \quad (6.6)$$

The relationship between systems  $\Psi$  and  $\Phi$  is presented in the following proposition. The result is adapted from (Costa e Fragoso, 1995).

**Proposition 1.** Consider systems  $\Psi$  and  $\Phi$ . In connection with the initial condition  $(x_0, \theta_0)$ , define  $X \in \mathcal{H}_1^n$  as  $X_{\theta_0} = x_0 x_0'$  and  $X_i = 0, i \neq \theta_0$ . Then,

$$X_i(k) = E_{x_0, \mu_0} \{x(k)x(k)'\mathbf{1}_{\theta(k)=i}\} \quad (6.7)$$

Notice that with this result we can write, for instance,  $E_{x_0, \theta_0} \{|x(k)|^2\} = \langle X(k), I \rangle$ . We introduce the functional

$$W^N(X) = \sum_{k=0}^N \langle X(k), C'C \rangle \quad (6.8)$$

whenever  $X(0) = X$ , and

$$W(X) = \lim_{N \rightarrow \infty} W^N(X) \quad (6.9)$$

### Stochastic Detectability

**Definition 1.** We say that  $(A, \mathbb{P})$  is stochastically stable (S-stable) if for each  $X \in \mathcal{H}_1^{n_0}$ ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|X(k)\|_1 < \infty$$

*Remark 7.* Notice from Remark 6 that the condition of S-stability is equivalent to  $\sum_{k=0}^{\infty} \langle X(k), I \rangle < \infty$  and, in view of Proposition 1, we have that  $\sum_{k=0}^{\infty} E\{|x(k)|^2\} < \infty$  for each initial condition  $x_0$  and  $\theta_0$ .

*Remark 8.* Consider a linear operator  $\mathcal{R} : \mathcal{H}_1^n \rightarrow \mathcal{H}_1^n$ , let  $r_\sigma(\mathcal{R})$  denote the spectral radius of  $\mathcal{R}$ ; it is known that  $r_\sigma(\mathcal{R}) < 1$  if and only if  $\sum_{k=0}^{\infty} \|\mathcal{R}^k(H)\| < \infty$ . Then,  $(A, \mathbb{P})$  is S-stable if and only if  $r_\sigma(\mathcal{L}) < 1, \forall H \in \mathcal{H}_1^n$ .

**Definition 2.** We say that  $(A, C, \mathbb{P})$  is stochastically detectable (S-detectable) if there exists  $L \in \mathcal{H}_{\infty}^{q,n}$  for which  $(A + LC, \mathbb{P})$  is S-stable.

### 6.2.3 Weak Detectability

Notice that the functional in (6.9) has the physical interpretation of the accumulated energy of the output process  $y$  in the sense that

$$\begin{aligned} W(X) &= \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \sum_{k=0}^N x(k)' C'_{\theta(k)} C_{\theta(k)} x(k) \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \sum_{k=0}^N |y(k)|^2 \right\} \end{aligned} \quad (6.10)$$

whenever  $X_{\theta_0} = x_0 x'_0$  and  $X_i = 0, i \neq \theta_0$ . Then, the weak detectability concept relates the energy of the output and the trajectory, as follows.

**Definition 3 ( $W_S$ -detectability).** We say that  $(A, C, \mathbb{P})$  is  $W_S$ -detectable provided

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|X(k)\|_1 < \infty \quad (6.11)$$

whenever  $W(X) < \infty$ .

*Remark 9.* In view of (6.10), the condition  $W(X) < \infty$  has the interpretation of stochastic convergence of the output. Then, the  $W_S$ -detectability concept relates stochastic convergence of the state and the output.

*Remark 10.* We use the subscript  $S$  in the definition above to emphasize the condition (6.11) which comes from the stochastic stability condition. Variants of the concept of detectability arise with different conditions on the trajectory. For instance, when one replaces (6.11) by the weaker condition  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|X(k)\|_1 = 0$ , which is a mean square condition, then we denote  $W_{MS}$ -detectability. Of course, one has that  $W_{MS}$ -detectability is weaker than  $W_S$ -detectability.

### $W_S$ -detectability and S-detectability

In this section we examine the relationship between S-detectability and  $W_S$ -detectability to show that the former implies the latter. We show by means of examples, in Section 6.2.5, that the reverse implication fails.

**Theorem 1.** *Suppose  $(A, \mathbb{P})$  is S-stable. Then  $(A+GD, D, \mathbb{P})$  is  $W_S$ -detectable for each  $G \in \mathcal{H}_{\infty}^{n,q}$  and  $D \in \mathcal{H}_{\infty}^{q,n}$ .*

In the proof of the above theorem,  $X(\cdot)$  will refer to the system  $\Phi$  and  $\hat{X}(\cdot)$  will refer to:

$$\hat{\Phi} : \begin{cases} x(k+1) = (A_{\theta(k)} + G_{\theta(k)} D_{\theta(k)})x(k), k \geq 0 \\ y(k) = D_{\theta(k)}x(k), \\ x(0) = x_0, \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

We need the following preliminary result. Let  $\epsilon > 0$  be such that  $(1 + \epsilon^2)r_{\sigma}(\mathcal{L}) < 1$  (recall that  $r_{\sigma}(\cdot)$  is the spectral radius) and for  $H \in \mathcal{H}_1^{n_0}$  we

define the operator  $\mathcal{L}_G : \mathcal{H}_1^{n_0} \rightarrow \mathcal{H}_1^{n_0}$  as

$$\mathcal{L}_{G_i}(H) = (1 + 1/\epsilon^2) \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ji} G_j D_j H_j D_j' G_j'$$

**Lemma 1.** *The series  $\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_G(\hat{X}(k))$  converges provided  $\widehat{W}(X) < \infty$ .*

*Proof.* We start evaluating, for  $H \in \mathcal{H}_1^{n_0}$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_G(H)\|_1 &= \sum_{i \in \mathcal{S}} \|\mathcal{L}_{G_i}(H)\| & (6.12) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{S}} \left\| (1 + 1/\epsilon^2) \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ji} G_j D_j H_j D_j' G_j' \right\| \\ &\leq (1 + 1/\epsilon^2) \|G\|_{\infty}^2 \sum_{j \in \mathcal{S}} \sum_{i \in \mathcal{S}} p_{ji} \|D_j H_j D_j'\| \\ &= \alpha \sum_{j \in \mathcal{S}} \|D_j H_j D_j'\| = \alpha \|D H D'\|_1 \end{aligned}$$

where  $\alpha = (1 + 1/\epsilon^2) \|G\|_{\infty}^2$ . Employing (6.12) we can write, for  $T_1 < T_2$ ,

$$\left\| \sum_{k=0}^{T_1} \mathcal{L}_G(\hat{X}(k)) - \sum_{k=0}^{T_2} \mathcal{L}_G(\hat{X}(k)) \right\|_1 \leq \sum_{k=T_1}^{T_2} \left\| \mathcal{L}_G(\hat{X}(k)) \right\|_1 \leq \sum_{k=T_1}^{T_2} \alpha \|D \hat{X}(k) D'\|_1 \quad (6.13)$$

Recalling that  $\widehat{W}(X) < \infty$ , we obtain

$$\sum_{k=T_1}^{T_2} \langle D \hat{X}(k) D', I \rangle \rightarrow 0 \text{ as } T_1, T_2 \rightarrow \infty$$

and Remark 6 provides that

$$\sum_{k=T_1}^{T_2} \|D \hat{X}(k) D'\|_1 \rightarrow 0 \text{ as } T_1, T_2 \rightarrow \infty \quad (6.14)$$

From (6.13), and (6.14) we obtain

$$\left\| \sum_{k=0}^{T_1} \mathcal{L}_G(\hat{X}(k)) - \sum_{k=0}^{T_2} \mathcal{L}_G(\hat{X}(k)) \right\|_1 \rightarrow 0$$

as  $T_1, T_2 \rightarrow \infty$ . □

**Proof of Theorem 1**

We shall show that  $\sum_{k=0}^{\infty} \|\hat{X}(k)\|_1 < \infty$  provided

$$\widehat{W}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \hat{X}(k), D'D \rangle < \infty$$

Let us define  $\mathcal{L}_\epsilon : \mathcal{H}_1^{n_0} \rightarrow \mathcal{H}_1^{n_0}$  by  $\mathcal{L}_\epsilon = (1 + \epsilon^2)\mathcal{L}$ , that is,  $\mathcal{L}_\epsilon(H) = \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ji}(1 + \epsilon^2)A_j H_j A'_j$ . We also define the series  $M(k)$ ,  $k \geq 0$ , with  $M(k) \in \mathcal{H}_1^{n_0}$  by

$$\begin{cases} M(k+1) = \mathcal{L}_\epsilon(M(k)) + \mathcal{L}_G(\hat{X}(k)) \\ M(0) = \hat{X}(0) \end{cases}$$

Note that

$$\begin{aligned} M(m) &= \mathcal{L}_\epsilon^m(\hat{X}(0)) + \mathcal{L}_\epsilon^{m-1}(\mathcal{L}_G(\hat{X}(0))) \\ &\quad + \mathcal{L}_\epsilon^{m-2}(\mathcal{L}_G(\hat{X}(1))) + \dots + \mathcal{L}_G(\hat{X}(m-1)) \end{aligned} \quad (6.15)$$

and we can write

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \langle M(k), I \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle \mathcal{L}_\epsilon^k(\hat{X}(0)), I \rangle \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \langle \mathcal{L}_\epsilon^k(\mathcal{L}_G(\hat{X}(m-k-1))), I \rangle \end{aligned} \quad (6.16)$$

Lemma 1 allows us to define  $M = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{L}_G(\hat{X}(m))$ . Then, for the second term in the right hand side of (6.16) we evaluate

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \langle \mathcal{L}_\epsilon^k(\mathcal{L}_G(\hat{X}(m-k-1))), I \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k+1}^{\infty} \langle \mathcal{L}_\epsilon^k(\mathcal{L}_G(\hat{X}(m-k-1))), I \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle \mathcal{L}_\epsilon^k \left( \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{L}_G(\hat{X}(m)) \right), I \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle \mathcal{L}_\epsilon^k(M), I \rangle \end{aligned} \quad (6.17)$$

From (6.16) and (6.17) we obtain

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle M(k), I \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \mathcal{L}_\epsilon^k(\hat{X}(0) + M), I \rangle \quad (6.18)$$

and one has that  $\sum_{k=0}^{\infty} \|\mathcal{L}_\epsilon^k(\hat{X}(0) + M)\|_1$  converges (recall that  $r_\sigma(\mathcal{L}_\epsilon) < 1$  and see Remark 8) and from Remark 6 we conclude that

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|M(k)\|_1 < \infty \quad (6.19)$$

Now we show by induction that

$$\hat{X}(k) \leq M(k) \quad (6.20)$$

Indeed, for  $k = 0$  we defined  $M(0) = \hat{X}(0)$ ; assuming  $\hat{X}(k) \leq M(k)$  one can check that

$$\begin{aligned} \hat{X}(k+1) &= \sum_{j \in \mathcal{S}} (A_j - G_j D_j) \hat{X}(k) (A_j - G_j D_j) \\ &\leq \mathcal{L}_\epsilon(\hat{X}(k)) + \mathcal{L}_G(\hat{X}(k)) \\ &\leq \mathcal{L}_\epsilon(M(k)) + \mathcal{L}_G(\hat{X}(k)) = M(k+1) \end{aligned}$$

and the induction is complete. Finally, from (6.19) and (6.20) we obtain

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\hat{X}(k)\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|M(k)\|_1 < \infty$$

**Theorem 2.** *If  $(A, C, \mathbb{P})$  is S-detectable then  $(A, C, \mathbb{P})$  is  $W_S$ -detectable.*

*Proof.* Since  $(A, C, \mathbb{P})$  is S-detectable, from definition there exists  $L \in \mathcal{M}^{n,q}$  such that  $(A + LC, \mathbb{P})$  is S-stable and, from Theorem 1,  $(A + LC + GD, D, \mathbb{P})$  is  $W_S$ -detectable for each  $G \in \mathcal{M}^{s,q}$  and  $D \in \mathcal{M}^{q,s}$ . The proof is completed by retrieving the original system  $\Phi$  with the choice  $D = C$  and  $G = -L$ .  $\square$

### $W_S$ -detectability in Finite State Space

In this section we study the concept of  $W_S$ -detectability of Markov jump linear systems in finite state space,  $\mathcal{S} = \{1, \dots, N\}$ . We show that the

concept of  $W_S$ -detectability and the concept of W-detectability presented in (Costa e do Val, 2001) are equivalent.

**Definition 4 (W-detectability).** We say that  $(A, C, \mathbb{P})$  is W-detectable when there exist integers  $N_d, k_d \geq 0$  and scalars  $0 \leq \delta < 1, \gamma > 0$  such that  $W^{N_d}(X) \geq \gamma \|X\|$  whenever  $\|X(k_d)\|_1 \geq \delta \|X\|_1$

We shall need the following preliminary results, which are adapted from (Costa e do Val, 2001, Lemmas 7 and 8).

**Proposition 2.** (i)  $W(X) = 0$  if  $W^{n^2 N}(X) = 0$ ;

(ii)  $(A, C, \mathbb{P})$  is W-detectable if and only if  $\|X(k)\|_1 \rightarrow 0$  as  $k \rightarrow \infty$  whenever  $W^{n^2 N}(X) = 0$ .

Ji et al. in (Ji et al., 1991) have shown that S-stability concept is equivalent to other second moment stability concepts, such as MS-stability and exponential stability. The next result follows.

**Proposition 3.** (i)  $\|X(k)\|_1 \rightarrow 0$  as  $k \rightarrow \infty$  if and only if the series  $\sum_{k=0}^{\infty} \|X(k)\|_1$  converges.

(ii) If  $\sum_{k=0}^{\infty} \|X(k)\|_1$  diverges, then  $\|X(k)\|_1 \geq \rho \xi^k \|X(0)\|_1$  for some  $0 < \rho \leq 1$  and  $\xi \geq 1$ .

*Remark 11.* In finite space state, equivalence between the concepts of  $W_S$ -detectability and  $W_{MS}$ -detectability follows from the equivalence among the second moment stability concepts.

The main result of the section is as follows.

**Lemma 2.** Assume that  $\mathcal{S} = \{1, \dots, N\}$ . Then,  $(A, C, \mathbb{P})$  is  $W_S$ -detectable if and only if  $(A, C, \mathbb{P})$  is W-detectable.

*Proof.* Necessity. Provided  $W^{n^2 N}(X) = 0$ , from Proposition 2 (i) we have that  $W(X) = 0$ . Then, from the W-detectability hypothesis we have that  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \|X(k)\|_1 < \infty$  which means that  $\|X(k)\|_1 \rightarrow 0$  as  $k \rightarrow \infty$ . Proposition 2 (ii) concludes the proof.

Sufficiency. Assuming  $(A, C, \mathbb{P})$  is W-detectable, we show that  $W(X) = \infty$  whenever the series  $\sum_{k=0}^{\infty} \|X(k)\|_1$  diverges. In this situation, from Proposition 3 we have that there exists  $0 < \rho \leq 1$  and  $\xi \geq 1$  for which

$$\|X(k)\|_1 \geq \rho \xi^k \|X(0)\|_1 \quad (6.21)$$

Let us define the sequence  $\mathcal{N} = \{n_0, n_1, \dots\}$  where  $n_0 = 0$  and each  $n_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , is the smallest integer such that  $n_m \geq n_{m-1} + 1$  and  $n_m$  satisfies

$$\|X((n_m + 1)k_d)\|_1 \geq \delta \|X(n_m k_d)\|_1$$

If the number of elements of  $\mathcal{N}$  is finite, one can check that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t k_d)\|_1 = 0$$

which contradicts the initial hypothesis that the series  $\sum_{k=0}^{\infty} \|X(k)\|_1$  converges, see also Proposition 3. Then we conclude that  $\mathcal{N}$  has infinitely many elements, and we can take a subsequence from  $\mathcal{N}$  with infinitely many elements,  $\mathcal{N}' = \{n_{m_0}, n_{m_1}, \dots\}$ , where  $n_{m_0} = m_0 = 0$  and each  $m_t$ ,  $t = 1, 2, \dots$ , is the smallest integer such that  $n_{m_t} \geq n_{m_{t-1}} + \max\{1, (N_d/k_d)\}$ . We can write:

$$\begin{aligned} W^N(X) &= \sum_{k=0}^{N-1} \langle X(k), Q + C'C \rangle \\ &\geq \sum_{t=0}^{t'} \sum_{k=0}^{N_d} \langle X(n_{m_t} k_d + k), C'C \rangle \\ &\geq \sum_{t=0}^{t'} \gamma \|X(n_{m_t} k_d)\| \geq \gamma \rho \|X(0)\| t' \end{aligned}$$

where  $t'$  is the largest integer for which  $n_{m_{t'}} k_d + N_d < N$ , in such a manner that  $t' \rightarrow \infty$  as  $N \rightarrow \infty$  and we conclude that  $W(X) = W^\infty(X) = \infty$ .  $\square$

## 6.2.4 W-Observability Concept

The following W-observability concept is adapted from the finite state space case, see (Costa e do Val, n.d.b), (Costa e do Val, 2001) and (Morozan, 1995).

**Definition 5.** Consider system  $\Phi$ . We say that  $(A, C, \mathbb{P})$  is W-observable when there exist a positive integer  $N_d$  and a scalar  $\gamma > 0$  such that  $W^{N_d}(X) \geq \gamma \|X\|_1$  for each initial condition  $X$ .

Notice that the above concept reflects the idea that there exists  $N_d$  for which a minimal level  $\gamma$  of energy is present at the output in any interval of length  $N_d$ .

**Lemma 3.** *If  $(A, C, \mathbb{P})$  is W-observable then  $(A, C, \mathbb{P})$  is  $W_S$ -detectable.*

*Proof.* We shall show that  $\sum_{k=0}^{\infty} \|X(k)\|_1 < \infty$  provided  $W(X(0)) < \infty$ , assuming  $(A, C, \mathbb{P})$  is W-observable. From the W-observability condition we derive, for each  $t \geq 0$ ,

$$\|X(k)\|_1 \leq \frac{1}{\gamma} \sum_{t=k}^{k+N_d} \langle X(t), C'C \rangle \quad (6.22)$$

and we write

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \|X(k)\|_1 &\leq \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=k}^{k+N_d} \langle X(t), C'C \rangle \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \sum_{t=0}^{N_d-1} \sum_{k=0}^{\infty} \langle X(k), C'C \rangle \\ &= \frac{N_d}{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \langle X(k), C'C \rangle < \infty \end{aligned} \quad (6.23)$$

□

### 6.2.5 Examples

In this section we present examples of systems in infinite Markov space state which are W-observable or  $W_S$ -detectable but they are not S-detectable.

We shall need the following preliminary result.

**Proposition 4.**  *$(A, C, \mathbb{P})$  is S-detectable if and only if there exists  $L \in \mathcal{H}_{\infty}^{r,n}$  and  $P \in \mathcal{H}_{\infty}^{n+}$  such that*

$$P_i - (A_i + L_i C_i)' \mathcal{E}_i(P) (A_i + L_i C_i) > 0 \quad (6.24)$$

**Example 1.** In this example, a change in a single Markov state provides the lost of S-detectability without affecting the W-observability. let  $n = 1$  and  $C_i = 1, i \in \mathcal{S}$ . Notice that (6.24) holds with  $L = -A$  and one has that  $(A, C, \mathbb{P})$  is trivially S-detectable, no matter how  $A = (a_1, a_2, \dots)$  is chosen. Moreover,  $W(X) \geq \langle X, C'C \rangle \geq \|X\|_1$  and  $(A, C, \mathbb{P})$  is W-observable. Now, assume that there exists  $j \in \mathcal{S}$  for which  $a_j^2 p_{jj} > 1$  and  $p_{jj} < 1$ , and let  $C_j = 0$ . In this case, (6.24) provides

$$(1 - a_j^2 p_{jj}) P_j - a_j^2 \left( \sum_{i \neq j} p_{ji} P_i \right) > 0$$

which leads to  $(1 - a_j^2 p_{jj})P_j > 0$  and  $P_j < 0$ ; then, from Proposition 4 we conclude that  $(A, C, \mathbb{P})$  is not S-detectable. On the other hand, we evaluate

$$\begin{aligned}
W^2(X) &= \sum_{k=0}^1 \langle \mathcal{L}^k(X), C'C \rangle = \langle X, \sum_{k=0}^1 \mathcal{T}^k(C'C) \rangle \\
&\geq \sum_{i \neq j} tr(X_i C'_i C_i) + tr(X_j (\mathcal{T}_j(C'C))) \\
&= \sum_{i \neq j} tr(X_i) + tr(a_j^2 (1 - p_{jj}) X_j) \\
&\geq \min\{1, (a_j^2 (1 - p_{jj}))\} \sum_{i \in \mathcal{S}} tr(X_i) \\
&\geq \min\{1, (a_j^2 (1 - p_{jj}))\} \|X\|_1
\end{aligned}$$

and we have that  $(A, C, \mathbb{P})$  is W-observable.

The conservativeness of the S-detectability in face of  $W_S$ -detectability in the infinite Markov state space case is inherited, in some extension, from the finite state space case. For instance, let us consider systems that presents Markov chains with distinct communicating classes  $\mathcal{S}_j = \{i_1, \dots, i_{n_j}\}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , for which  $P\{\theta(k+1) \in \mathcal{S}_j | \theta(k) \in \mathcal{S}_i\} = 0$  for all  $i \neq j$ . Let us denote such a system by  $\Phi_c$ ; we also denote  $A^j = (A_i)$ ,  $i \in \mathcal{S}_j$  and similarly for  $C^j$  and  $\mathbb{P}^j$ . The following result holds.

**Lemma 4.** *Consider system  $\Phi_c$ .  $(A, C, \mathbb{P})$  is  $W_S$ -detectable (respectively, S-detectable) if and only if  $(A^j, C^j, \mathbb{P}^j)$  is  $W_S$ -detectable (S-detectable) for  $j = 1, \dots, N$ .*

*Proof.* We only present the mainlines of the proof. Necessity is straightforward to verify.

Sufficiency. Assume that  $W(X) < \infty$ . Let us decompose the initial condition  $X$  as  $X = X^1 + \dots + X^N$  in such a manner that  $X_i^j = 0$  for  $i \neq j$ , and  $W(X^j) < \infty$ ,  $j = 1, \dots, N$ . From  $W_S$ -detectability of  $(A^j, C^j, \mathbb{P}^j)$ , one has that  $\sum_{k=0}^{\infty} \|\mathcal{L}^k(X^j)\|_1 < \infty$ . The linearity of system  $\Phi_c$  provides  $X(k) = \sum_{j=1}^N \mathcal{L}^k(X^j)$  which leads to  $\sum_{k=0}^{\infty} \|X(k)\|_1 = \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathcal{L}^k(X^j)\|_1 < \infty$  and one has that the system is  $W_S$ -detectable. As regards to S-detectability, the result follows from the fact that there is no coupling between the equations in (6.24) related with different clusters.  $\square$

The next example retrieves an example in finite state space of (Costa e do Val, 2001).

Example 2. Let  $S_1 = \{1, 2\}$  and  $S_2 = \{3, 4, \dots\}$ ,

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & (1 - p_{11}) & 0 & \dots & \\ (1 - p_{22}) & p_{22} & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} & \dots \\ \vdots & \vdots & p_{43} & p_{44} & \dots \\ & & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

Let  $A_1 = a_1$ ,  $A_2 = a_2$ ,  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0$ ,  $p_{11} > 0$  and  $p_{22}a_2^2 > 1$  and assume that the system associated with  $S_2$  is S-detectable. For this simple example (6.24) provides  $(1 - a_1^2 p_{11})P_1 > a_1^2(1 - p_{11})P_2$  which has no positive solution, and thus the overall system is not S-detectable. On the other hand, it is shown in (Costa e do Val, 2001) that the system associated with  $S_1$  is W-observable, and we conclude from Lemma 4 that the overall system is  $W_S$ -detectable.

## 6.2.6 Conclusions

In this paper we study the concept of  $W_S$ -detectability for discrete-time infinite Markov jump linear systems. The  $W_S$ -detectability concept relates stochastic convergence of the output and the state, or equivalently the finiteness of the quadratic functional  $W(X)$  and stochastic stability of the system; this is an important feature for the linear quadratic problem.

The paper shows that the  $W_S$ -detectability concept generalizes the previous S-detectability concept and, in the finite dimension scenario, it is reduced to the W-detectability concept. It is also shown in the paper that  $W_S$ -detectability generalizes W-observability, thus retrieving a well known property of linear deterministic systems.



# Capítulo 7

## Conclusões

Este trabalho essencialmente aborda os conceitos de observabilidade e detetabilidade para SLSM, com ênfase no conceito de W-detetabilidade aqui introduzido.

A análise dos conceitos leva a resultados que estreitam os paralelos entre a teoria de SLSM e SLD, com destaque para aqueles que recuperam as Propriedades I-VII de SLD mencionadas no Capítulo 1, em termos de W-detetabilidade e W-observabilidade, como segue:

Propriedade I. Se  $x(t) \in \mathcal{O}_{\theta(t)}$ , então  $x(s) \in \mathcal{O}_{\theta(s)}$  para todo  $s \geq t$  ou, em outras palavras, trajetórias não fracamente observadas permanecem não fracamente observadas;

Propriedade II. Se  $(A, C, \Lambda)$  é W-observável, então  $(A, C, \Lambda)$  é W-detetável;

Propriedade III. Se  $(A, C, \Lambda)$  é W-detetável, então  $E\{\|x(t)\|^2\} \rightarrow 0$  enquanto  $t \rightarrow \infty$  sempre que  $x_0 \in \mathcal{N}\{\mathcal{O}_{\theta_0}\}$ , ou seja, W-Detetabilidade assegura que trajetórias não fracamente observadas são MS-estáveis;

Propriedade IV.  $(A, C, \Lambda)$  é W-observável se e somente se o posto de  $\mathcal{O}_i$  é completo, para cada  $i = 1, \dots, N$ ;

Propriedade V.  $(A, C, \Lambda)$  é W-detetável se e somente se  $E\{\|x(t)\|^2\} \rightarrow 0$  enquanto  $t \rightarrow \infty$  sempre que  $J(x_0, \theta_0) < \infty$ , isto é, W-detetabilidade vincula finitude do funcional de custo com a convergência da trajetória associada;

Propriedade VI. Se  $(A, C, \Lambda)$  é  $W$ -detetável, então qualquer solução das EARA é MS-estabilizante. Menciona-se que unicidade da solução é assegurada, indiretamente, pelo fato que há no máximo uma solução MS-estabilizante.

Propriedade VII.  $(A, C, \Lambda)$  é  $W$ -detetável se e somente se a solução mínima das EARA é MS-estabilizante.

Ressaltamos que a Propriedade V acima permite afirmar que  $W$ -detetabilidade é a condição mais adequada para o problema LQ associado a SLSM (veja a Observação 3.1).

Quanto ao conceito de MS-detetabilidade, o qual era o conceito de detetabilidade usualmente encontrado na literatura de SLSM, conclui-se que não se trata de um conceito adequado para SLSM, ao menos no contexto do problema LQ. A razão fundamental para isto reside no seu conservadorismo em relação ao conceito de  $W$ -detetabilidade, como indicado em diversas oportunidades ao longo do texto, entre as quais citamos os Exemplos 2.2 e 2.3, os quais mostram respectivamente que MS-detetabilidade não está atrelada à noção de convergência no sentido médio quadrático de trajetórias associadas a custo nulo (adequado para o problema LQ) e que um sistema pode ser trivialmente  $W$ -detetável sem ser MS-detetável. Um outro ponto importante é a demonstração de que  $(A, C, \Lambda)$  é  $W$ -detetável se e somente se  $(A, \Theta, \Lambda)$  é MS-detetável, o que propicia uma condição testável de  $W$ -detetabilidade ao mesmo tempo em que esclarece a relação entre os conceitos envolvidos, além de reforçar o conservadorismo do conceito de MS-detetabilidade, já que é simples verificar que  $\mathcal{N}\{\Theta_i\} \subset \mathcal{N}\{C_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Em outra linha de desenvolvimento do trabalho, elaboram-se dois métodos de solução para as EARA, baseados em recursões de Riccati desacopladas. Mostra-se que o Método I pode ser aplicado sob a hipótese de  $W$ -detetabilidade, no sentido de que a seqüência por ele gerada converge para a solução estabilizante das EARA se e somente se  $(A, B, \Lambda)$  é MS-estabilizável. Um ponto fundamental na prova de convergência é o da unicidade de cada elemento da seqüência, o que é demonstrado através de relações entre os núcleos da matriz de observabilidade  $\Theta_i$  e do  $k$ -ésimo elemento  $Z_i^k$  da seqüência gerada (veja o Lema 4.4). Um interessante subproduto é o de que o núcleo da solução mínima da Riccati é igual ao da matriz de observabilidade associada, nos termos dos Lemas 3.5 e 4.1, respectivamente para SLSM e SLD. Quanto ao Método II, mostra-se que a seqüência por ele gerada converge para a solução das EARA se e somente se existe uma solução; essa ausência

de condições torna o método útil como teste de existência de soluções das EARA.

Extensões de resultados para o caso a tempo discreto e para o caso denominado de dimensão infinita são apresentadas. No caso discreto, destaca-se a obtenção de um conjunto de resultados semelhante ao do caso contínuo. No caso de dimensão infinita, introduz-se o conceito de  $W_S$ -detetabilidade, o qual é adequado para o problema LQ, ao estabelecer que uma trajetória de estado converge no sentido estocástico sempre que o custo associado  $W^\infty(\cdot)$  é finito. Também se mostra que este conceito é reduzido ao de  $W$ -detetabilidade, no caso de dimensão finita. Contudo, deve-se mencionar que a aplicação do conceito no problema LQ não se encontra desenvolvida neste trabalho, sendo as justificativas descritas na Seção 6.1. A questão que permanece em aberto é a demonstração de invância à realimentação, o que, assumindo observação completa de estado, reduz-se a mostrar que  $(A + BK, (C'C + G'RG)^{1/2}, P)$  é  $W_S$ -detetável sempre que  $(A, C, P)$  é  $W_S$ -detetável.

Concluindo, tem-se que os resultados obtidos neste trabalho contribuem para a equiparação da teoria de SLSM com a teoria de SLD. Estes resultados, somados a outros resultados antes disponíveis, perfazem um quadro bastante completo de similaridades entre SLSM e SLD.



# Referências Bibliográficas

- Abou-Kandil, H., Freiling, G. e Jank, G. (1994). Solution and asymptotic behaviour of coupled Riccati equations in jump linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**: 1631–1636.
- Abou-Kandil, H., Freiling, G. e Jank, G. (1995). On the solution of discrete-time Markovian jump linear quadratic control problems, *Automatica* **31**: 765–768.
- Anderson, B. D. O. e Moore, J. B. (1981). Detectability and stabilizability of time-varying discrete-time linear systems, *SIAM Journal on Control and Optimization* **19**(1): 20–32.
- Athans, M., Castanon, D., Dunn, K. P., Greene, C. S., Lee, W. H., Sandell, N. R. e Willsky, A. S. (1977). The stochastic control of the F-8C aircraft using a multiple model adaptive control (MMAC) method - Part i: Equilibrium flight, *IEEE Transactions on Automatic Control* **22**: 768–780.
- Boyd, S., El Ghaoui, L. e Feron, E. (1994). Linear matrix inequalities in systems and control theory, *Volume 15 of studies in appl. Math. SIAM*.
- Brewer, J. W. (1979). Kronecker products and matrix calculus in system theory, *IEEE Trans. Circuits Syst.* **CAS-25**: 772–781.
- Costa, E. F. e do Val, J. B. R. (2001). On the detectability and observability of discrete-time Markov jump linear systems, *System and Control Letters* **44**: 135–145.
- Costa, E. F. e do Val, J. B. R. (n.d.a). On the detectability and observability of continuous-time Markov jump linear systems, *Submitted to the SIAM Journal on Control and Optimization* .

- Costa, E. F. e do Val, J. B. R. (n.d.b). Weak detectability and the linear quadratic control problem of discrete-time Markov jump linear systems, *International Journal of Control*, *accepted for publication in the special issue on Switched and Polytopic Linear Systems* .
- Costa, E. F., do Val, J. B. R. e Fragoso, M. D. (n.d.a). On a detectability concept of discrete-time infinite Markov jump linear systems, *Submitted to the Stochastic Analysis and Applications* .
- Costa, E. F., do Val, J. B. R. e Fragoso, M. D. (n.d.b). On a detectability concept of discrete-time infinite Markov jump linear systems, *Accepted for publication in the IFAC World Congress 20002* .
- Costa, O. L. e Fragoso, M. D. (1993). Stability results for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **179**: 154–178.
- Costa, O. L. V. (1995). Discrete-time coupled Riccati equations for systems with Markov switching parameters, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **194**: 197–216.
- Costa, O. L. V., do Val, J. B. R. e Geromel, J. C. (1997). A convex programming approach to  $H_2$  control of discrete-time Markovian jump linear systems, *Int. J. Control* **66**(4): 557–579.
- Costa, O. L. V., do Val, J. B. R. e Geromel, J. C. (1999). Continuous-time state-feedback  $H_2$ -control of Markovian jump linear systems via convex analysis, *Automatica* **35**: 259–268.
- Costa, O. L. V. e Fragoso, M. (1995). Discrete-time LQ-optimal control problems for infinite Markov jump parameter systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-40**: 2076–2088.
- Costa, O. L. V. e Marques, R. (2000). Robust  $H_2$ -control for discrete-time Markovian jump linear systems, *International Journal of Control* **73**(1): 11–21.
- Davis, M. H. (1993). *Markov Models and Optimization*, number 49, Chapman and Hall, London/New York.

- de Farias, D. P., Geromel, J. C., do Val, J. B. R. e Costa, O. L. V. (2000). Output feedback control of Markov jump linear systems in continuous-time, *IEEE Transactions on Automatic Control* **45**(5): 944–949.
- de Jager, B. (1997). Linear and nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$  control: An example, *in Proc. of the Autom. Control Conference 1997* pp. 396–397.
- do Val, J. e Başar, T. (1999). Receding horizon control of jump linear systems and a macroeconomic policy problem, *Journal of Economic Dynamics & Control* **23**: 1099–1131.
- do Val, J. e Costa, E. F. (2002). Numerical solution for the linear-quadratic control problem of Markov jump linear systems and a weak detectability concept, *Journal of Optimization Theory and Applications* **114**(1).
- do Val, J., Geromel, J. e Costa, O. (1998). Uncoupled Riccati iterations for the linear quadratic control problem of discrete-time Markov jump linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **43**(12): 1727–1733.
- do Val, J., Geromel, J. e Costa, O. (1999). Solutions for the linear quadratic control problem of Markov jump linear systems, *Journal of Optimization Theory and Applications* **103**: 283–311.
- do Val, J. e Zuniga, Y. R. C. (2002). Control of Markovian jumps linear systems with cost and information associated to jump times, *American Control Conference 2002*.
- Feng, X., Loparo, K. A., Ji, Y. e Chizeck., H. J. (1992). Stochastic stability properties of jump linear systems., *IEEE Transactions on Automatic Control* **37**(1): 38– 53.
- Fragoso, M. e Baczynski, J. (2001). Optimal control for continuous time LQ problems with infinite Markov jump parameters, *SIAM Journal on Control and Optimization* **40**(1): 270– 297.
- Gajic, Z. e Borno, I. (1995). Lyapunov iterations for optimal control of jump linear systems at steady state, *IEEE Transactions on Automatic Control* **40**: 1971–1975.
- Gajic, Z. e Losada, R. (2000). Monotonicity of algebraic Lyapunov iterations for optimal control of jump parameter linear systems, *Systems and Control Letters* **41**: 175–181.

- Geromel, J. C., Peres, P. L. D. e Souza, S. R. (1995). A convex approach to the mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control problem for discrete-time uncertain systems, *SIAM Journal of Control and Optimization* (33): 1816–1833.
- Golub, G. H. e Loan, C. V. (1996). *Matrix Computation*, third edn, Johns Hopkins Press, London.
- Hager, W. W. e Horowitz, L. L. (1976). Convergence and stability properties of the discrete Riccati operator equation and the associated optimal control and filtering problems, *SIAM Journal on Control and Optimization* **14**(2): 295–312.
- Horn, R. A. e Johnson, C. R. (1990). *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York.
- Ji, Y. e Chizeck, H. J. (1988). Controllability, observability and discrete-time Markovian jump linear quadratic control, *International Journal of Control* **48**(2): 481–498.
- Ji, Y. e Chizeck, H. J. (1990a). Controlability, stabilizability and continuous time Markovian jump linear quadratic control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **35**(7): 777–788.
- Ji, Y. e Chizeck, H. J. (1990b). Jump linear quadratic Gaussian control: Steady-state solution and testable conditions, *Control Theory and Advanced Technology* **6**(3): 289–319.
- Ji, Y. e Chizeck, H. J. (1992). Jump linear quadratic gaussian control in continuous time, *IEEE Transactions on Automatic Control* **37**(12): 1884–1892.
- Ji, Y., Chizeck, H. J., Feng, X. e Loparo, K. A. (1991). Stability and control of discrete-time jump linear systems, *Control Theory and Advanced Tecnology* **7**(2): 247–269.
- Kailath, T. (1980). *Linear Systems*, Prentice-Hall.
- Morozan, T. (1995). Stability and control for linear systems with jump Markov perturbations, *Stochastic Analysis and Applications* **13**(1): 91–110.

- 
- Rami, M. A. e Ghaoui, L. E. (1996). LMI optimization for nonstandard Riccati equations arising in stochastic control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(11): 1666–1671.
- Saridis, G. N. (1983). Intelligent robotic control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **28**: 547–557.
- Sworder, D. D. e Rogers, R. O. (1983). An LQ-solution to a control problem associated with a solar thermal central receiver, *IEEE Transactions on Automatic Control* **28**(10): 971–978.

## Apêndice A: Resultados Básicos

Neste apêndice, apresentam-se resultados básicos e suas provas, para facilitar a referência.

**Lema A1.** *Considere as matrizes  $U, V \in \mathcal{R}^{n_0}$ , e  $R, S \in \mathcal{R}^n$ . Então, as seguintes afirmações são válidas:*

- (i)  $\mathcal{N}\{S\} = \mathcal{N}\{S'S\}$ ;
- (ii)  $\mathcal{N}\{U + V\} \subset \mathcal{N}\{U\}$  e  $\mathcal{N}\{U + V\} \subset \mathcal{N}\{V\}$ ;
- (iii) Se  $\mathcal{N}\{U\} \subset \mathcal{N}\{R\}$  e  $\mathcal{N}\{V\} \subset \mathcal{N}\{S\}$ , então,  $\mathcal{N}\{U + V\} \subset \mathcal{N}\{R + S\}$ ;
- (iv) Se  $\mathcal{N}\{U\} \subset \mathcal{N}\{V\}$ , então,  $\mathcal{N}\{S'US\} \subset \mathcal{N}\{S'VS\}$ ;
- (v) Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ; então,  $\mathcal{N}\{R'R + (S + \alpha I)'R'R(S + \alpha I)\} \subset \mathcal{N}\{\beta R + S'R + RS\}$ ;

*Prova.* (i):  $\mathcal{N}\{S\} \subset \mathcal{N}\{S'S\}$  é trivial;  $\mathcal{N}\{S'S\} \subset \mathcal{N}\{S\}$ : se  $S'Sx = 0$ , então define-se  $v = Sx$  para obter  $v'v = x'S'Sx = 0$ , o que significa que  $Sx = v = 0$ ; (ii): primeira afirmação:  $(U + V)x = 0 \Rightarrow x'(U + V)x = 0 \Rightarrow 0 \leq x'Ux = -x'Vx \leq 0 \Rightarrow x'Ux = 0$ ; agora, escrevamos  $U = U^{1/2}U^{1/2}$  para obter  $x'U^{1/2}U^{1/2}x = 0 \Rightarrow Ux = 0$ ; a segunda afirmação segue por simetria; (iii): da afirmação (ii)  $(U + V)x = 0$  implica que  $Ux = 0$  e  $Vx = 0$  e o resultado é imediato; (iv): escrevamos  $U = U^{1/2}U^{1/2}$  para obter  $S'USx = 0 \Rightarrow x'S'U^{1/2}U^{1/2}Sx = 0 \Rightarrow U(Sx) = 0$  e da hipótese,  $V(Sx) = 0$ ;

(v): de (ii),  $(R'R + (S + \alpha I)'R'R(S + \alpha I))x = 0$  leva a  $R'Rx = 0$  e  $(S + \alpha I)'R'R(S + \alpha I)x = 0$  e, de forma similar a prova de (iv), obtém-se que  $Rx = 0$  e  $R(S + \alpha I)x = 0$ ; então, avalia-se  $RSx = R(S + \alpha I)x = 0$  e  $\beta Rx = 0$  e o resultado segue de imediato.  $\square$

## Apêndice B: Dados dos Exemplos 4.1 e 4.2

*Exemplo 4.1.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2.5 & 0.3 & 0.8 \\ 1 & -3 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & -2 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} -2.5 & 1.2 & 0.3 \\ -0.5 & 5 & -1 \\ 0.25 & 1.2 & -2 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1.5 & -0.4 \\ 2.2 & 3 & 0.7 \\ 1.1 & 0.9 & -2 \end{bmatrix};$$

$$B_1 = \text{diag}\{0.707, 1, 1\};$$

$$B_2 = \text{diag}\{0.707, 1, 0.707\};$$

$$B_3 = \text{diag}\{0.707, 1, 1\}$$

$$C_1 = \text{diag}\{5, 1, 3.31\};$$

$$C_2 = \text{diag}\{6.08, 8.36, 5.83\};$$

$$C_3 = \text{diag}\{3.16, 4, 4.58\};$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -3 & 0.5 & 2.5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0.7 & 0.3 & -1 \end{bmatrix}$$

*Exemplo 4.1 - versão aumentada.* Nesta versão aumentada, considera-se:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2.7 & 0.03 & 1.8 \\ 0.54 & 3.0 & 0.93 \\ 0.39 & 0.89 & 2.3 \end{bmatrix}; A_5 = \begin{bmatrix} -0.69 & -1.3 & -1.4 \\ -1 & -0.67 & -0.76 \\ -0.40 & -0.04 & -0.66 \end{bmatrix};$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 2.0 & 0.91 & 2.0 \\ 2.1 & 1.1 & 0.90 \\ 1.3 & 0.58 & 2.1 \end{bmatrix};$$

$$B_4 = \text{diag}\{0.151, 0.854, 0.822\};$$

$$B_5 = \text{diag}\{0.645, 0.289, 0.309\};$$

$$B_6 = \text{diag}\{0.838, 0.546, 0.795\};$$

$$C_4 = \text{diag}\{0.988, 0.334, 0.760\};$$

$$C_5 = \text{diag}\{0.530, 0.783, 0.794\};$$

$$C_6 = \text{diag}\{0.059, 0.305, 0.971\}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -3 & 0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & -1 & 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & -1 \end{bmatrix}$$

*Exemplo 4.2.* O modelo não linear do mono-ciclo é descrito por:

$$M_1 \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + M_2 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + M_3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = M_4 u$$

sendo

$$M_1 = \begin{bmatrix} M_w + M_f + \frac{1}{R^2} (J_w + \frac{J_m}{n^2}) & m_f h \cos(x_2) + \frac{(n-1)J_m}{Rn^2} \\ m_f h \cos(x_2) + \frac{(n-1)J_m}{Rn^2} & M_f h^2 + J_f + \frac{(n-1)^2 J_m}{n^2} \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -M_f h \sin(x_2) \dot{x}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} (\frac{\nu}{n^2} + \mu) (\frac{\dot{x}_1}{R} - \dot{x}_2) \\ -M_f g h \sin(x_2) - (\frac{\nu}{n^2} + \mu) (\frac{\dot{x}_1}{R} - \dot{x}_2) \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \frac{\alpha}{n} \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \\ -1 \end{bmatrix}$$

A descrição e os valores nominais dos parâmetros são dados na Tabela 7.1.

A matriz de taxa de transição é dada por:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 1 & -1.9 & 0.2 & 0.7 \\ 1 & 1 & -2.1 & 0.1 \\ 0.8 & 1 & 0.2 & -2.0 \end{bmatrix}$$

Empregando (3.9) obtêm-se os seguintes ganhos ótimos:

$$G_1 = [1.039 \quad 43.07 \quad 23.77 \quad 10.30]$$

$$G_2 = [0.6983 \quad 73.33 \quad 42.41 \quad 17.28]$$

$$G_3 = [0.48 \quad 108.9 \quad 57.71 \quad 25.41]$$

$$G_4 = [0.37 \quad 142.04 \quad 82.48 \quad 33.52]$$

Tabela 7.1: Descrição e valores dos parâmetros do mono-ciclo

Par.	Descrição	Valor	Unidade
$M_w$	massa da roda	1.5	kg
$M_f$	massa do eixo e da estrutura	6.0	kg
$J_w$	inércia da roda	0.2	kg m <sup>2</sup>
$J_f$	inércia da estrutura	0.608	kg m <sup>2</sup>
$R$	raio da roda	0.2	m
$h$	dist. centro de massa - eixo da roda	0.36	m
$\nu$	fricção do rotor	4.21	Nms/rad
$\mu$	fricção do rolimã da roda	2.12	Nms/rad
$a$	constante de torque do motor	7.81	Nm/V
$J_m$	inércia do rotor	0	kg m <sup>2</sup>
$\iota$	razão de transmissão	1	-
$g$	aceleração da gravidade	9.81	m/s <sup>2</sup>