



Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA

Tesselações Hiperbólicas Aplicadas a Codificação de Geodésicas e Códigos de Fonte

Lucila Helena Allan Leskow

Tese de Doutorado

Orientador: Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Júnior

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Júnior (Orientador)- FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Edson Agustini - FAMAT/UFU

Prof. Dr. Edson Donizete de Carvalho - MAT - FEIS/UNESP

Prof. Dr. Henrique Lazari - IGCE - RC/UNESP

Prof. Dr. Mercio Botelho Faria - DMA/UFV

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Telecomunicações e Telemática.

Campinas, SP
Julho 2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

L565t	<p>Leskow, Lucila Helena Allan</p> <p>Tesselações hiperbólicas aplicadas a codificação de geodésicas e códigos de fonte / Lucila Helena Allan Leskow. --Campinas, SP: [s.n.], 2011.</p> <p>Orientador: Reginaldo Palazzo Júnior. Tese de Doutorado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.</p> <p>1. Farey, Séries de. 2. Geometria hiperbólica. 3. Ladrilhamento (Matemática). 4. Geodésica (Matemática). I. Palazzo Júnior, Reginaldo. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.</p>
-------	---

Título em Inglês: Hyperbolic tessellations applied to geodesic coding and source codes

Palavras-chave em Inglês: Farey series, Hyperbolic geometry, Tiling (Mathematics),
Geodesics (Mathematics)

Área de concentração: Telecomunicações e Telemática

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Edson Agustini, Edson Donizete de Carvalho, Henrique Lazari,
Mercio Botelho Faria

Data da defesa: 11-07-2011

Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidata: Lucila Helena Allan Leskow

Data da Defesa: 11 de julho de 2011

Título da Tese: "Tesselações Hiperbólicas Aplicadas a Codificação de Geodésicas e Códigos de Fonte"

Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Júnior (Presidente): Reginaldo Palazzo Júnior

Prof. Dr. Edson Agustini: EDSON AGUSTINI

Prof. Dr. Edson Donizete de Carvalho: Edson D. Carvalho

Prof. Dr. Henrique Lazari: Henrique Lazari

Prof. Dr. Mércio Botelho Faria: Mércio Botelho Faria

Resumo

Neste trabalho apresentamos como contribuição um novo conjunto de tesselações do plano hiperbólico construídas a partir de uma tesselação bem conhecida, a tesselação de Farey. Nestas tesselações a região de Dirichlet é formada por polígonos hiperbólicos de n lados, com $n > 3$. Explorando as características dessas tesselações, apresentamos alguns tipos possíveis de aplicações. Inicialmente, estudando a relação existente entre a teoria das frações contínuas e a tesselação de Farey, propomos um novo método de codificação de geodésicas. A inovação deste método está no fato de ser possível realizar a codificação de uma geodésica pertencente a $PSL(2, \mathbb{Z})$ em qualquer uma das tesselações ou seja, para qualquer valor de n com $n > 3$. Neste método mostramos como é possível associar as sequências cortantes de uma geodésica em cada tesselação à decomposição em frações contínuas do ponto atrator desta. Ainda explorando as características dessas novas tesselações, propomos dois tipos de aplicação em teoria de codificação de fontes discretas. Desenvolvendo dois novos códigos para compactação de fontes (um código de árvore e um código de bloco), estes dois métodos podem ser vistos como a generalização dos métodos de Elias e Tunstall para o caso hiperbólico.

Palavras-chave: série de Farey, codificação de geodésicas, códigos de fonte, geometria hiperbólica, região de Dirichlet

Abstract

In this work we present as contribution a new set of tessellations of the hyperbolic plane, built from a well known tessellation, the Farey tessellation. In this set of tessellations the Dirichlet region is made of hyperbolic polygons with n sides where $n > 3$. While studying these tessellations and their properties, we found some possible applications. In the first one, while exploring the relationship between the continued fractions theory and the Farey tessellation we propose a new method for coding geodesics. Using this method, it is possible to obtain a relationship between the cutting sequence of a geodesic belonging to $PSL(2, \mathbb{Z})$ in each tessellation and the continued fraction decomposition of its attractor point. Exploring the characteristics of these tessellations we also propose two types of applications regarding the discrete memoryless source coding theory, a fixed-to-variable code and a variable length-to-fixed code. These methods can be seen as a generalized version of the Elias and Tunstall methods for the hyperbolic case.

Key-words: Farey series, coding geodesics, source codes, hyperbolic geometry, Dirichlet region

Agradecimentos

A Deus pelo Seu amor e cuidado a cada dia. Assim como em sua palavra diz: "O coração do homem planeja o seu caminho, mas o SENHOR lhe dirige os passos" (Pv 16:9), eu pude ver que foi pela Sua graça e direção que foi possível eu completar mais esta fase da minha vida acadêmica.

Ao meu marido Yuri por seu amor, apoio, otimismo e incentivo. Sua paciência e dedicação tem sido muito importantes para mim.

Ao meu orientador Prof. Reginaldo Palazzo, pela oportunidade de realizar este trabalho. Sua paciência, amizade, compreensão e incentivo foram essenciais para que eu pudesse terminar este trabalho.

Aos meus queridos pais em especial a meu pai, Prof. Nelo Allan que, além de pai, sempre foi meu amigo e professor, obrigada pela paciência e cuidado em cada fase da minha vida. Sua capacidade de apresentar problemas complexos de matemática de uma forma um pouco mais simples me permitiu ver a beleza do mundo matemático e me ajudou a conhecer melhor a área de geometria hiperbólica.

Aos meus filhinhos Ana Raquel e Dimitri pela sua alegria e inspiração. Cuidar deles durante este trabalho sempre foi um prazer.

Aos meus irmãos Rodolfo e Cláudia pela amizade e carinho que sempre tiveram comigo.

Aos amigos Eugênio e Vanda pelo apoio e amizade.

Aos colegas do LTIA em especial a Clarice, Andrea e Luzinete pela amizade e palavras de incentivo.

Ao colega Ralph dos Santos pelas dicas e modelos do Latex.

A Flávia e a Noêmia por toda ajuda e amizade.

Ao CNPq (144342/96-0) e a FAPESP (97/12259-4) pelo apoio financeiro no início deste doutorado.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Ao meu marido Yuri e aos meus pais Nelo e Cláudia por todo amor e apoio.

Louvai ao SENHOR, porque ele é bom; porque a sua benignidade dura para sempre.

Sl 118:29

SUMÁRIO

Resumo	v
Abstract	vii
Agradecimento	ix
Dedicatória	xi
Epígrafe	xiii
Lista de Tabelas	xvii
Lista de Figuras	xix
Lista de Símbolos	xxi
Capítulo 1: Introdução	1
Capítulo 2: Revisão de Conceitos Fundamentais	5
2.1 Introdução à Geometria Hiperbólica	5
2.1.1 Conceitos matemáticos básicos	6
2.1.2 Plano hiperbólico	8
2.2 Introdução à Teoria de Codificação de Fontes Discretas	13
2.2.1 Sistemas de comunicações	13
2.2.2 Códigos de fonte	14
Capítulo 3: Construção de Novas Tesselações em \mathbb{H}^2	23
3.1 Tesselação de Farey	24
3.2 Tesselações de \mathbb{H}^2 Formadas por Polígonos Elementares	33
3.2.1 Tesselações de \mathbb{H}^2 formadas por polígonos de $2n$ lados	34
3.2.2 Tesselações de \mathbb{H}^2 formadas por polígonos de $2n + 1$ lados	45

Capítulo 4:	Codificação de Geodésicas e Códigos de Fonte	57
4.1	Codificação de Geodésicas em Tesselações Formadas por Polígonos de n Lados . . .	58
4.1.1	Teoria das Frações Contínuas	58
4.1.2	Sequências Cortantes	59
4.1.3	Método de codificação de geodésicas proposto	63
4.2	Tesselações Hiperbólicas e Códigos de Fonte	74
4.2.1	Códigos de árvore	84
4.2.2	Comparação dos métodos de Elias, AH e AHIP em fontes binárias	94
4.2.3	Comparação dos métodos de Elias, AH e AHIP em fontes ternárias . . .	97
4.2.4	Códigos de bloco	99
4.2.5	Comparação dos métodos CBH e Tunstall em fontes binárias e ternárias	111
Capítulo 5:	Conclusões	117
5.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	120
Apêndice:		
Apêndice A:	Algoritmos para Obtenção de Códigos nas Novas Tesselações	123
A.1	Tesselações constituídas por polígonos de $2n$ lados	123
A.2	Tesselações constituídas por polígonos de $2n + 1$ lados	125
Referências		127
Índice Remissivo		131

LISTA DE TABELAS

4.1	Código CGP3 e código proposto para polígonos de 4 lados.	66
4.2	Código CGP3 e código para geodésicas proposto para polígonos de 6 lados. . . .	67
4.3	Tabela 4.1 reescrita.	68
4.4	Tabela 4.2 reescrita.	68
4.5	Código para geodésicas baseados em polígonos de $2n$ lados - região de Dirichlet.	69
4.6	Código para geodésicas baseados em polígonos de $2n$ lados - polígono qualquer.	69
4.7	Código CGP3 e código proposto para polígonos de 5 lados.	71
4.8	Código CGP3 e código proposto para polígonos de 7 lados.	71
4.9	Código para geodésicas baseado em polígonos de $2n + 1$ lados - região de Dirichlet.	72
4.10	Código para geodésicas baseado em polígonos de $2n + 1$ lados.	72
4.11	Geodésicas escolhidas.	74
4.12	Código para geodésicas proposto em algumas tesselações.	74
4.13	Fontes binárias selecionadas.	95
4.14	Número médio de <i>bits</i> necessário para o envio das sequências.	95
4.15	Percentual de sequências obtidas em cada situação.	95
4.16	Número médio de <i>bits</i> necessário para o envio das sequências utilizando fator de escala.	96
4.17	Percentual de sequências obtidas em cada situação com fator de escala.	96
4.18	Fontes ternárias selecionadas.	97
4.19	Número médio de <i>bits</i> necessário para o envio das sequências ternárias.	97
4.20	Percentual de sequências obtidas em cada situação.	97
4.21	Número médio de <i>bits</i> necessário para o envio das sequências utilizando fator de escala.	98
4.22	Percentual de sequências obtidas em cada situação com fator de escala.	98
4.23	Polígonos de 4 lados e seus vértices.	104
4.24	Polígonos de 5 lados e seus vértices.	109
4.25	Fontes binárias extras selecionadas.	112
4.26	Resultados da aplicação do método Código de Bloco Hiperbólico (CBH) e Tunstall em fontes binárias.	113
4.27	Fontes ternárias extras selecionadas.	114

4.28	Resultados da aplicação do método Código de Bloco Hiperbólico e Tunstall em fontes ternárias.	114
A.1	Valores de A_1 em uma tesselação formada por polígonos de $2n$ lados.	124
A.2	Valores de P_1, i e u_1	124
A.3	Valores de A_k, P_k, u_k e incremento para i	124
A.4	Valores de A_1 em uma tesselação formada por polígonos de $2n + 1$ lados.	125
A.5	Valores de P_k, i e u_k para $k = 1$	125
A.6	Valores de A_k, P_k, u_k e incremento para i	125

LISTA DE FIGURAS

2.1	Geodésicas em \mathbb{H}^2	9
2.2	Geodésica L e paralelas.	9
2.3	Região fundamental do grupo $PSL(2, \mathbb{Z})$	13
2.4	Diagrama de blocos de um sistema de comunicação simplificado.	14
2.5	Exemplo de árvore de decisão.	16
2.6	Exemplo de árvore de probabilidades.	18
3.1	Tesselação formada por $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ e \mathbb{F}_3	26
3.2	Tesselação de Farey no intervalo $[0; 1]$	27
3.3	Triângulo fundamental.	27
3.4	Tesselação de Farey no modelo do disco de Poincaré.	28
3.5	Triângulos elementares do tipo E.	29
3.6	Triângulos elementares do tipo D.	29
3.7	Triângulo elementar do tipo E.	30
3.8	Tesselação de Farey com alguns triângulos identificados.	32
3.9	Polígonos elementares de 4 lados.	34
3.10	Dois polígonos de 4 lados do tipo E consecutivos.	36
3.11	Polígono de 4 lados do tipo E.	37
3.12	Polígono de 4 lados do tipo D.	37
3.13	Tesselação formada por polígonos de 4 lados no intervalo $[0, 1]$	38
3.14	Tesselação formada por polígonos de 6 lados no intervalo $[0, 1]$	39
3.15	Polígono de $2(n - 1)$ lados.	44
3.16	Polígono de 5 lados do tipo FE	45
3.17	Tesselação formada por polígonos de 5 lados no intervalo $[0, 1]$	46
3.18	Tesselação formada por polígonos de 7 lados no intervalo $[0, 1]$	49
3.19	Polígono de 5 lados do tipo FE	52
3.20	Polígono de $2(n - 1) + 1$ lados.	53
4.1	Segmentos do tipo E e D	60
4.2	Exemplo de uma geodésica orientada em \mathbb{H}^2 na tesselação de Farey.	61
4.3	Polígono de $2n + 1$ lados do tipo FE	64

4.4	Segmentos de geodésicas com a classificação proposta (a direita) e a classificação segundo CGP3 (em itálico, a esquerda) para polígonos de 4 lados em um polígono do tipo FE.	65
4.5	Segmentos de geodésicas com a classificação proposta (a direita) e a classificação segundo CGP3 (em itálico, a esquerda) para polígonos de 4 lados em um polígono do tipo FD.	65
4.6	Polígono de 5 lados do tipo <i>FE</i>	70
4.7	Segmentos de geodésicas com a classificação proposta (a direita) e a classificação segundo CGP3 (em itálico, a esquerda) para polígonos com 5 lados.	70
4.8	Geodésica numa tesselação formada por polígonos de 4 lados.	75
4.9	Código de Elias.	86
4.10	Código binário.	87
4.11	Árvore de uma tesselação formada por polígonos de $j + 1$ lados.	88
4.12	Árvore de probabilidades obtida a partir da árvore da Fig. 4.11.	89
4.13	Geodésicas correspondentes a sequência a_2a_1 segundo os métodos AH e AHIP.	90
4.14	Árvore para obtenção do intervalo para ρ usando o método Árvore Hiperbólica.	92
4.15	Árvore para obtenção do intervalo para ρ usando o método Árvore Hiperbólica com Inversão de Polígono.	93
4.16	Árvore de probabilidades inicial.	101
4.17	Conjunto de mensagens de Tunstall, $l_q = 3$	102
4.18	Conjunto de mensagens do método CBH, $l_q = 3$	105
4.19	Conjunto de mensagens de Tunstall, $l_q = 6$	106
4.20	Conjunto de mensagens do método proposto, $l_q = 6$	107
4.21	Conjunto de mensagens de Tunstall, $l_q = 4$	108
4.22	Conjunto de mensagens do método proposto, $l_q = 4$	109
4.23	Conjunto de mensagens do código de bloco proposto, $l_q = 4$	110

Lista de Símbolos

$(H, *)$ $(G, *)$: Grupos
x, y, x', y'	: Elementos de G
S_G	: Subconjunto de um grupo
\dot{X}	: Interior de X
\mathbb{H}^2	: Semiplano superior
Δ	: Triângulo hiperbólico
$\theta_\alpha, \theta_\beta$ e θ_γ	: Ângulos de um triângulo hiperbólico
Π	: Polígono qualquer
S_Π	: Superfície associada a Π
$\chi()$: Característica de Euler
$p()$: Função de probabilidade
\mathbf{p}	: Distribuição de probabilidades
$H()$: Entropia
L_{Med}	: Comprimento médio de palavras-código
γ_i	: Transformação hiperbólica qualquer
T_i	: Matriz associada a uma transformação γ_i
D	: Discriminante
$C(\gamma)$: Eixo de geodésica associada a transformação γ
Γ	: Grupo fuchsiano
$SL()$: Grupo Especial Linear
$PSL()$: Grupo Especial Linear Projetivo
$d(P_i, P_j)$: Distância euclidiana entre dois pontos P_i e P_j
$(P_n)_X^{v_1, v_n}$: Polígono de n lados do tipo X , com vértices v_1 (menor) e v_n (maior)
M	: Superfície de curvatura constante
φ^t	: Fluxo geodésico
π	: Projecção
\mathcal{A}	: Conjunto de geodésicas
α	: Ponto repulsor de uma geodésica
β	: Ponto atrator de uma geodésica
$\hat{\beta}$: Número irracional qualquer
ξ_γ	: Ponto da geodésica que intercepta o eixo y
T_1M	: Fibrado tangente
X	: Seção fibrado

A :	Matriz $PSL(2, \mathbb{Z})$
v_k^i :	i -ésimo vértice do polígono X_k
ρ, ρ_{NP} :	Probabilidade de sequências
CGPx:	Código para geodésicas baseado em polígonos de x lados
AH:	Código proposto parecido ao método de Elias
AHIP:	Código proposto parecido ao método de Elias, com inversão de polígonos
CBH:	Código proposto parecido ao método de Tunstall

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Tesselações hiperbólicas tem sido muito estudadas nos últimos anos devido a grande possibilidades de aplicações. Os resultados de suas aplicações em sistemas de comunicações digitais, principalmente relacionados a área de transmissão de sinais digitais e técnicas de processamento digital de sinais, tem mostrado resultados promissores.

Com relação a modulação digital por exemplo, a busca por constelações de sinais que impliquem em um bom desempenho de sistemas de comunicações em termos de probabilidade de erro é um problema que tem atraído a atenção de pesquisadores. Ao contrário do caso Euclidiano, o número de tesselações hiperbólicas regulares que podem ser utilizadas para a construção de constelações de sinais é bem grande ([Agus 02] e [Cava 05]). Nos trabalhos [Cava 02], [Silv 00] e [Silv 06] vemos que o desempenho de um sistema de comunicações digital utilizando uma constelação de sinais provenientes de tesselações hiperbólicas é superior quando comparadas a tesselações Euclidianas equivalentes.

Com relação a codificação de canal, a proposta de construção de códigos quânticos topológicos apresentada por Kitaev ([Kita 03]) utilizando uma tesselação e sua dual, trouxe uma nova perspectiva aos estudos relacionados ao computador quântico. Nos trabalhos [Bomb 06] e [Albu 09] vemos que o uso de diferentes tesselações hiperbólicas para a elaboração de códigos quânticos fornecem códigos com diferentes parâmetros e taxas, possibilitando-se inclusive obter classes de bons códigos ([Albu 09]).

Outra área de aplicação de tesselações hiperbólicas é a área de codificação de geodésicas [Kato 07]. Os métodos de codificação de geodésicas sob determinados aspectos podem ser vistos como métodos de codificação de fontes. Isto devido ao fato de em geral associarem uma sequência de símbolos ao caminho de uma geodésica pertencente a uma superfície hiperbólica. Apesar de poder ser feita essa analogia, não há casos conhecidos anteriormente de aplicações feitas segundo essa abordagem.

Nesse contexto, o objetivo principal deste trabalho é apresentar um novo conjunto de tesselações hiperbólicas com aplicações na área de sistemas de comunicação digital de sinais. Estas tesselações são obtidas através de um processo de construção geométrico/aritmético, diferentes

das abordagens algébricas usuais e são baseadas na tesselação de Farey. Por terem pontos sob a série de Farey, este novo conjunto de tesselações possuem diversas propriedades interessantes que permitem sua fácil aplicação.

A primeira aplicação proposta está relacionada a um método de codificação de geodésicas.

Sob o ponto de vista geométrico, tesselações podem ser vistas como o particionamento do plano através de polígonos. No caso de trabalharmos com modelos da geometria hiperbólica, as tesselações são formadas por polígonos hiperbólicos. Tesselações em geral, estão relacionadas a uma região chamada de região de Dirichlet, um polígono hiperbólico com um número n de lados. Essa região, no caso de termos um grupo agindo no plano hiperbólico poderá ser chamada de região fundamental.

Os métodos de codificação de geodésicas podem ser classificados em dois tipos principais, os geométricos e os aritméticos. Os geométricos em geral associam uma sequência de símbolos ao número de vezes que uma geodésica corta uma determinada região de Dirichlet; eles são baseados no método de Hadamard, e dentre eles, o mais conhecido é o método de Morse [Kato 96]. Os aritméticos são específicos para o grupo modular e sua natureza é aritmética. Dentre estes podemos citar os que utilizam a decomposição em frações contínuas do ponto repulsor de uma geodésica e a teoria de redução de Gauss para gerar sequências de códigos como os métodos de Katok [Kato 96], Series [Seri 85] e Artin [Arti 65], dentre outros.

Na maioria desses métodos de codificação as tesselações utilizadas possuem uma região de Dirichlet formada por polígonos de três lados. Adler e Flatto [Adle 91] desenvolveram um código utilizando partições de Markov para superfícies de gênero g baseados em uma região de Dirichlet de $(8g-4)$ lados. Já Bowen e Series [Kato 07] desenvolveram um código que é uma generalização do trabalho de Nielsen utilizando como região de Dirichlet, um polígono simétrico com $4g$ lados.

Explorando a relação existente entre a tesselação de Farey e a teoria das frações contínuas, apresentamos um novo método de codificação de geodésicas associado a tesselações formadas por polígonos de n lados. Como será mostrado, este novo método é simples e rápido de ser aplicado e permite a obtenção da representação de uma geodésica em qualquer uma das tesselações propostas através de uma sequência de símbolos.

Em sistemas de telecomunicações existem muitos códigos sendo utilizados. No entanto, uma característica desses é que os mesmos foram construídos no plano Euclidiano. Nos estudos realizados em ([Cava 05]) vemos que o desempenho de um sistema de comunicações digital em superfícies com curvatura constante e negativa (ou seja, associadas a tesselações hiperbólicas) é o melhor possível.

Sendo assim, após apresentarmos o novo método de codificação de geodésicas, apresentamos duas novas contribuições, quais sejam: a generalização dos códigos de Elias e Tunstall para o contexto hiperbólico para a compactação de fontes construídas a partir das tesselações hiperbólicas estudadas. Com esses dois novos códigos esperamos introduzir na área de codificação de fontes

uma nova classe de códigos, os códigos hiperbólicos para compactação de fontes.

Dividimos o trabalho da seguinte forma: no Capítulo 2, revisamos alguns conceitos fundamentais necessários para o desenvolvimento do trabalho. Na parte de revisão matemática, procuramos abordar os principais conceitos relacionados à geometria hiperbólica. Na parte de revisão de teoria de fontes discretas, consideramos a área de códigos de compactação de fontes discretas apresentando suas principais características.

No Capítulo 3, apresentamos a primeira contribuição deste trabalho. Ao estudar a tesselação de Farey e suas propriedades, encontramos um novo conjunto de tesselações em \mathbb{H}^2 . A partir dessas novas tesselações, fazemos um estudo detalhado de suas propriedades, mostrando suas principais características.

No Capítulo 4 apresentamos como contribuição três tipos de aplicações das tesselações estudadas. Primeiramente propomos um novo método de codificação de geodésicas, abordando-o sob uma forma detalhada, apresentando inclusive resultados de sua aplicação. O algoritmo utilizado para a implementação deste método é apresentado no Apêndice A. Em seguida apresentamos a generalização dos códigos de Elias e Tunstall no contexto hiperbólico para a compactação de fontes. Mostraremos como esses dois códigos foram obtidos, explorando suas características e apresentando resultados de aplicação.

Finalizando o trabalho, no Capítulo 5 apresentamos as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

REVISÃO DE CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Um dos enfoques principais deste trabalho é a apresentação de um novo conjunto de tesselações hiperbólicas e, a partir destas, a obtenção de um método de codificação de geodésicas. Para entendermos o que é uma tesselação hiperbólica ou uma geodésica precisamos conhecer um pouco da geometria hiperbólica e suas características. Neste capítulo apresentamos alguns conceitos que consideramos fundamentais para a compreensão deste trabalho. Começamos introduzindo a geometria hiperbólica. Em seguida, apresentamos alguns conceitos matemáticos básicos como a noção de grupos e espaços métricos. Para compreendermos melhor a diferença entre o espaço hiperbólico e o espaço euclidiano, lembraremos alguns conceitos deste último, que consideramos importantes para a compreensão do que foi feito. Apesar de serem apresentados de forma sucinta, todos os conceitos aqui considerados podem ser vistos em [Ford 57], [Jone 88], [Kato 92], [Stil 92], [Gemi 71], [Boba 03] e [Silv 02] sob uma forma mais detalhada.

Neste trabalho, além do método de codificação de geodésicas, temos a aplicação das tesselações hiperbólicas propostas em fontes discretas sem memória, considerando códigos para compactação de dados. Por esse motivo, após as considerações sobre geometria hiperbólica, apresentamos um pouco sobre a teoria da informação, mais especificamente sobre a teoria de codificação/compactação de dados em fontes discretas. Estes conceitos são importantes para entendermos como é feita a aplicação dos resultados obtidos. Uma exposição mais detalhada é mostrada no Capítulo 4 quando apresentamos as propostas de aplicação. As referências básicas desta parte são [Pala 07], [Blah 87] e [Cove 91].

2.1 Introdução à Geometria Hiperbólica

Podemos ver a geometria como uma forma de descrevermos o que vemos na natureza em termos de pontos, retas e circunferências. Se tomarmos uma régua e um compasso e observarmos tudo o que pode ser feito com eles veremos algumas propriedades que caracterizam o comportamento desses pontos, retas e circunferências. Buscando formalizar essas propriedades, Euclides (300 AC) elaborou um conjunto de axiomas, os chamados axiomas ou postulados de Euclides. O desenvolvimento desses axiomas e os teoremas elaborados a partir deles basearam-se mais na lógica do que no formalismo das idéias envolvidas. Dentre estes axiomas, o axioma das paralelas recebeu uma atenção especial.

Durante muitos anos vários matemáticos procuraram demonstrar o axioma das paralelas a partir dos outros. Em meados do século 19, Lobachevski mostrou que o axioma das paralelas era independente dos outros axiomas. No final do século 19, Hilbert estudou bem esses axiomas e abordou-os sob uma forma mais rigorosa.

O axioma das paralelas, também chamado 5º Axioma de Euclides possui formulação equivalente a: em um plano, dada uma reta e um ponto não pertencente a ela existe uma e apenas uma reta passando pelo ponto e paralela à reta dada. Um resultado importante que Lobachevski mostrou é que a sua negativa determina dois outros tipos de geometria não euclidiana: a hiperbólica e a elíptica. Na geometria hiperbólica plana, dada uma reta e um ponto não pertencente a ela existem infinitas retas paralelas passando por esse ponto. Já na geometria elíptica (também conhecida como geometria da esfera) dada uma reta e um ponto não pertencente a ela não existe reta paralela que passe por esse ponto.

Neste trabalho estamos interessados na geometria hiperbólica e suas características. Na geometria hiperbólica, existe mais de um modelo que satisfaz o conjunto de axiomas de Euclides exceto o das paralelas. Nesses modelos, para uma reta e um ponto não pertencente a ela, existirão infinitas retas paralelas passando por esse ponto. Dentre os modelos existentes podemos citar o modelo do disco de Poincaré e o modelo do semiplano superior. Neste trabalho utilizamos apenas o modelo do semiplano superior como um modelo para a geometria hiperbólica.

Antes de falarmos mais sobre o modelo hiperbólico que será estudado vamos apresentar algumas definições e conceitos que serão úteis para compreendermos mais a geometria hiperbólica.

2.1.1 Conceitos matemáticos básicos

Começamos considerando sobre grupos e algumas de suas propriedades. Apesar de apresentarmos somente uma pequena parte dessa teoria, mais informações sobre este assunto podem ser obtidas em [Boba 03].

Grupos

Definição 2.1 *Seja um conjunto G não vazio e uma operação binária: $*$: $G \times G \rightarrow G$ entre os elementos do conjunto. Quando definirmos a operação entre dois elementos $x, y \in G$, por $(x, y) \rightsquigarrow x * y$, o par $(G, *)$ será um **grupo** se satisfizer as seguintes condições:*

1. *Associatividade: para $x, y, y' \in G$, $x * (y * y') = (x * y) * y'$;*
2. *Existência de Elemento Neutro (ou identidade): existe $e \in G$ tal que $x * e = e * x = x$ para todo $x \in G$;*
3. *Elemento Inverso: para qualquer $x \in G$, existe $y \in G$ tal que $x * y = y * x = e$.*

Se tivermos também $x * y = y * x$ para todo $x, y \in G$, dizemos que esse grupo é **comutativo** ou **abeliano**.

Definição 2.2 Um subconjunto S_G , não vazio, de um grupo G é um subgrupo de G quando S_G é um grupo sob a operação de G .

Se temos um grupo G , o conjunto de **pontos fixos** de um elemento do grupo $t \in G$ é dado por:

$$F_t = \{x \in G | t(x) = x\}.$$

Dados dois grupos $(G, *)$ e (H, \circ) , dizemos que $f : G \rightarrow H$ é um **homomorfismo** quando para todo $x, y \in G$, $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$. Chamamos f de um **isomorfismo** quando f for um homomorfismo bijetor. Neste caso dizemos que G e H são **isomorfos**.

Dado um grupo G , diremos que G é gerado por um subconjunto $S_G \subseteq G$ quando todo $x \in G$ puder ser escrito da forma $x = x_1 * x_2 * \dots * x_n$, com $x_1, x_2, \dots, x_n \in S_G$, $n \in \mathbb{N}$. Os elementos de S_G são chamados de **geradores do grupo**.

Espaços métricos

O plano hiperbólico e o plano euclidiano são espaços métricos. Vamos agora apresentar esse conceito e mais algumas características relacionadas. A referência básica desta seção é [Silv 02].

Definição 2.3 Seja um conjunto M não vazio. Uma **métrica** é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado $(x, y) \in M \times M$, um número real não negativo, $d(x, y)$, chamado **distância de x a y** .

A distância d satisfaz as seguintes condições para $x, y, y' \in M$:

- i. $d(x, x) = 0$;
- ii. Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;
- iii. $d(x, y) = d(y, x)$;
- iv. $d(x, y') \leq d(x, y) + d(y, y')$.

Definição 2.4 Um **espaço métrico** é um par (M, d) , onde M é um conjunto e d é uma métrica em M .

Num espaço métrico M , para um ponto $x_a \in M$ e um número real r_a , chamamos de **bola aberta** de centro x_a e raio r_a o conjunto:

$$B(x_a; r_a) = \{x \in M : d(x_a, x) < r_a\}.$$

Isto significa que uma bola aberta $B(x_a; r_a)$ é um conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto x_a é menor que r_a . A partir da definição de bola aberta podemos definir alguns aspectos de um espaço métrico como:

Seja X um subconjunto de um espaço métrico M . Um ponto $x_a \in X$ é chamado de **interior** quando é centro de uma bola aberta contida em X , $B(x_a; r_a) \subset X$, ou seja, quando existe $r > 0$ tal que $d(x_a, x) < r_a \implies x \in X$. Ao conjunto de pontos interiores de um subconjunto X chamamos de interior de X e denotamos por \dot{X} .

A **fronteira** de um subconjunto X de M é o conjunto de pontos $x_b \in M$ tais que toda bola aberta de centro em x_b contém pelo menos um ponto de X e um ponto de $M - X$.

O subconjunto X é chamado **aberto** quando todos os seus pontos são pontos interiores, ou seja, $\dot{X} = X$. Um subconjunto $X \subset M$ é dito ser **fechado** quando $M - X$ é aberto.

2.1.2 Plano hiperbólico

Vamos agora tomar o semiplano superior $\mathbb{H}^2 = \{x + yi \in \mathbb{C} | y > 0\}$ munido da métrica riemanniana.

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Com essa métrica, \mathbb{H}^2 torna-se um modelo para o plano hiperbólico chamado modelo do semiplano superior ou plano de Lobachevski.

No plano euclidiano, quando temos dois pontos P_1 e P_2 pertencentes ao plano, a curva que representa o menor caminho entre esses dois pontos com respeito a métrica d é chamada de geodésica. Nesse plano, a geodésica que liga dois pontos é sempre uma reta e a métrica d é dada por $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ onde $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ são dois pontos pertencentes ao plano euclidiano. Essa distância d é conhecida como distância euclidiana.

No plano hiperbólico, as geodésicas são sempre semiretas ou semicírculos ortogonais ao eixo x (ou eixo real dado por $\mathbb{R} = \{x + yi \in \mathbb{R} | y = 0\}$). Além disso, quaisquer dois pontos em \mathbb{H}^2 podem ser unidos por uma única geodésica tal que a distância entre esses dois pontos será medida ao longo dessa geodésica. Assim, quando mencionarmos “reta hiperbólica” que une dois pontos quaisquer de \mathbb{H}^2 , estaremos falando de geodésica. Estas geodésicas podem ser classificadas como: **paralelas**, **hiperparalelas** ou **concorrentes**. Na Fig. 2.1 vemos exemplos dessas três situações. As “retas” hiperbólicas (ou geodésicas) L_1 e L_2 são paralelas entre si, L_2 e L_3 são concorrentes e L_1 e L_3 são hiperparalelas.

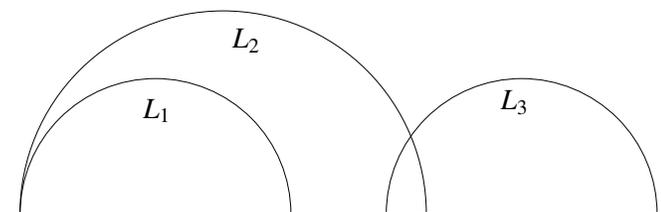


Figura 2.1: Geodésicas em \mathbb{H}^2 .

O 5º axioma de Euclides nos diz que para cada reta L pertencente ao plano euclidiano e um ponto $P_1 \notin L$, existe uma única reta L_1 que passa por P_1 que não encontra a reta L . A reta L_1 é chamada paralela.

Desde já podemos ver a diferença entre o plano hiperbólico e o plano euclidiano com relação a existência de paralelas. Agora no plano hiperbólico para uma reta L e um ponto $P_1 \notin L$, existe mais de uma reta paralela que passa por P_1 . Na Fig. 2.2 podemos ver duas “retas” hiperbólicas (ou geodésicas) L_1 e L_2 que são paralelas à geodésica L e passam pelo ponto P_1 .

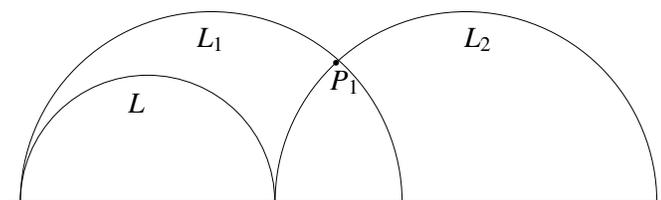


Figura 2.2: Geodésica L e paralelas.

Note que as retas L e L_1 se encontram em um único ponto assim como L e L_2 que está no eixo x . Este ponto é chamado **ideal**. De fato, todos os pontos que estão sob esse eixo são chamados **pontos ideais** ou **pontos no infinito** e não pertencem ao plano hiperbólico e sim a sua fronteira.

No plano euclidiano o axioma das paralelas afetava a soma interna dos ângulos de um triângulo qualquer. A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer era sempre igual a π . O mesmo acontece no plano hiperbólico mas de uma forma diferente. Agora a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer será sempre menor que π . Um resultado interessante é dado pelo Teorema de Gauss-Bonnet sobre a área de um triângulo hiperbólico:

Teorema 2.1 (Gauss-Bonnet) [Kato 92] *Seja Δ um triângulo hiperbólico qualquer com ângulos internos medindo θ_α , θ_β e θ_γ radianos. A área desse triângulo, que denotada por $\mu(\Delta)$ é dada*

por:

$$\mu(\Delta) = \pi - \theta_\alpha - \theta_\beta - \theta_\gamma.$$

Isto significa que se dois triângulos hiperbólicos possuem a mesma soma interna de ângulos eles não são congruentes, já que suas áreas coincidem. A demonstração do Teorema 2.1 pode ser vista em [Kato 92] ou [Jone 88].

Seja $M(2, \mathbb{R})$ o conjunto das matrizes 2×2 com coeficientes reais tal que

$$M(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} \text{ com } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tomando o subconjunto de matrizes de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ que possuem determinante diferente de zero e a operação produto de matrizes temos um grupo chamado **Grupo Linear Geral das Matrizes** 2×2 sobre \mathbb{R} , denotado por $GL(2, \mathbb{R})$ tal que

$$GL(2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} \text{ com } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R} \text{ e } \mathbf{ad} - \mathbf{bc} \neq 0 \right\}.$$

Agora, dentre os elementos de $GL(2, \mathbb{R})$, tomando apenas as matrizes cujo determinante é igual a 1, temos um subgrupo, o $SL(2, \mathbb{R}) \subset GL(2, \mathbb{R})$ chamado **Grupo Especial Linear** com

$$SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2, \mathbb{R}), \det A = 1\}.$$

Neste trabalho temos um interesse especial em $PSL(2, \mathbb{R})$, o **Grupo Especial Linear Projetivo**. O grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ é isomorfo a $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$, onde I é a matriz identidade 2×2 .

O grupo de transformações lineares fracionárias $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por:

$$z \rightarrow \frac{\mathbf{a}z + \mathbf{b}}{\mathbf{c}z + \mathbf{d}} \text{ com } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R} \text{ e } \mathbf{ad} - \mathbf{bc} = 1,$$

é chamado **grupo de transformações de Möebius**. A cada transformação, podemos associar uma matriz A que pertencerá a $PSL(2, \mathbb{R})$. O mais interessante neste caso é que o produto de duas transformações é equivalente ao produto das duas matrizes correspondentes. Já a transformação inversa, corresponde a matriz inversa.

Uma isometria euclidiana (ou simplesmente isometria) de \mathbb{R}^2 é uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que preserva a distância ou seja,

$$d(f(P_1), f(P_2)) = d(P_1, P_2) \text{ para } P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2.$$

No plano euclidiano, as isometrias estão relacionadas a “movimentos rígidos” de figuras geométricas e são classificadas como translação, reflexão e rotação e reflexão com deslizamento. Pode-se

também mostrar que as isometrias de \mathbb{R}^2 formam um grupo que satisfazem as características mencionadas na Definição 2.1.

No plano hiperbólico, as isometrias são transformações que preservam a distância segundo a métrica hiperbólica. No modelo do semiplano superior, o conjunto das isometrias de \mathbb{H}^2 , $\mathbf{Isom}(\mathbb{H}^2)$ é formado pelas transformações cujas matrizes associadas pertencem a $PSL(2, \mathbb{R})$ juntamente com as transformações do tipo $z \rightarrow -\bar{z}$. A partir deste ponto, quando a matriz A associada a cada transformação pertence ao grupo $PSL(2, \mathbb{R})$, dizemos que essa transformação pertence a $PSL(2, \mathbb{R})$.

Em \mathbb{H}^2 , as transformações que preservam a distância hiperbólica são, portanto, as pertencentes a $PSL(2, \mathbb{R})$, enquanto que as transformações do tipo $z \rightarrow -\bar{z}$ são as isometrias que “revertem” a orientação.

Além disso, para cada transformação pertencente a $PSL(2, \mathbb{R})$, podemos encontrar seus pontos fixos resolvendo-se a equação:

$$z = \frac{\mathbf{a}z + \mathbf{b}}{\mathbf{c}z + \mathbf{d}} \quad \text{com } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathbf{ad} - \mathbf{bc} = 1.$$

O grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ é constituído por três tipos de transformações que podem ser identificados através do traço da matriz A associada. Se

$$PSL(2, \mathbb{R}) = \left\{ T(z) = \frac{\mathbf{a}z + \mathbf{b}}{\mathbf{c}z + \mathbf{d}} \quad \text{com } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathbf{ad} - \mathbf{bc} = 1 \right\},$$

então o traço de T será dado por $Tr(T) = |\mathbf{a} + \mathbf{d}|$. Assim, as transformações de $PSL(2, \mathbb{R})$ podem ser classificadas como:

Parabólica

Uma transformação T é chamada de **parabólica** quando $Tr(T) = |\mathbf{a} + \mathbf{d}| = 2$. Neste caso, essa transformação possui um ponto fixo $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Essas transformações são conjugadas a translações da forma:

$$z \rightarrow z + \underline{c} \quad (\underline{c} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Elíptica

Quando $|\mathbf{a} + \mathbf{d}| < 2$, ou seja, $Tr(T)$ é um número real e $Tr(T) < 2$, dizemos que essa transformação é **elíptica**. Neste caso a transformação terá um par de pontos fixos complexos conjugados em \mathbb{C} . Este tipo de transformação é conjugada a transformações $z \rightarrow kz$ com $|k| = 1$ e equivale a rotação hiperbólica.

Hiperbólica

Quando $|\mathbf{a} + \mathbf{d}|$ é um número real e $Tr(T) > 2$ essa transformação é chamada de **hiperbólica**. As transformações hiperbólicas possuem dois pontos fixos $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e são conjugadas a transformações $z \rightarrow kz$ com k real e $k > 1$. Em geral, um ponto fixo é chamado **atrator** e outro

de **repulsor**. Este tipo de transformação é de grande interesse neste trabalho por isso falaremos um pouco mais dela no início do próximo capítulo.

Considerando novamente o grupo de isometrias de \mathbb{H}^2 , temos que um subgrupo discreto de $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ é chamado **fuchsiano**, e denotado por Γ , quando ele é constituído por transformações que preservam a orientação.

Seja Γ um grupo fuchsiano qualquer. Podemos definir uma **região de Dirichlet** $D(c)$ com centro c como sendo o conjunto

$$D(c) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d_{\mathbb{H}^2}(z, c) \leq d_{\mathbb{H}^2}(z, T(c)) \text{ para todo } T \in \Gamma\}$$

onde $d_{\mathbb{H}^2}$ é a distância em \mathbb{H}^2 . Pela invariância da métrica hiperbólica sob $PSL(2, \mathbb{R})$, esta região também pode ser definida como ([Kato 92]):

$$D(c) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d_{\mathbb{H}^2}(z, c) \leq d_{\mathbb{H}^2}(T(z), c) \text{ para todo } T \in \Gamma\}.$$

Além disso, para cada $T_1 \in PSL(2, \mathbb{R})$, $\{z \in \mathbb{H}^2 \mid d_{\mathbb{H}^2}(z, c) \leq d_{\mathbb{H}^2}(z, T_1(c))\}$ é o conjunto dos pontos mais próximos de c segundo a métrica hiperbólica. Se T é um conjunto de transformações pertencentes ao um grupo Γ , essas transformações aplicadas a $D(c)$, levam essa região em regiões fora da região de Dirichlet. Tais regiões produzem um particionamento de \mathbb{H}^2 que recobre todo o semiplano superior. Esse recobrimento é a tesselação também chamada **ladrilhamento** ou **pavimentação**. Geometricamente falando, uma tesselação de \mathbb{H}^2 pode ser vista como uma subdivisão do plano hiperbólico em regiões (polígonos) que não se sobrepõem. No próximo capítulo apresentaremos um tipo de tesselação conhecida como tesselação de Farey que será utilizada para apresentarmos uma das contribuições deste trabalho.

Como vimos anteriormente, os geradores de um grupo definem esse grupo e suas características. Existe uma grande variedade de grupos fuchsianos dentre os quais podemos citar os grupos cíclicos (hiperbólicos, elípticos e parabólicos) e o grupo modular.

Apesar de cada grupo ter suas aplicações e particularidades, para este trabalho estamos mais interessados no **grupo modular**. O grupo modular está contido em $PSL(2, \mathbb{R})$ e é dado por:

$$PSL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ z \rightarrow \frac{\mathbf{a}z + \mathbf{b}}{\mathbf{c}z + \mathbf{d}} \text{ com } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{Z} \text{ e } \mathbf{ad} - \mathbf{bc} = 1 \right\}.$$

Um resultado importante a respeito do grupo modular é que ele é gerado pelas transformações $z \rightarrow z+1$ e $z \rightarrow -1/z$. Se $\hat{\Gamma} = PSL(2, \mathbb{Z})$, a região dada por $R = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| \geq 1, |Re(z)| \leq \frac{1}{2}\}$ é a região de Dirichlet para $\hat{\Gamma}$ centrada em $c = ki$ onde $k > 1$ [Kato 92]. Além disso, essa região de Dirichlet possui vértices em \mathbb{H}^2 nos pontos $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ e i como pode ser visto na Fig. 2.3.

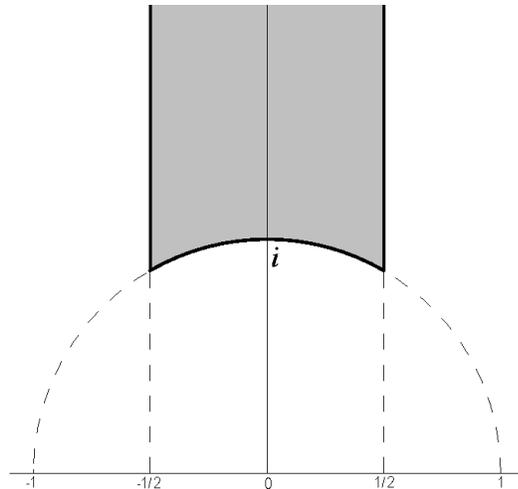


Figura 2.3: Região fundamental do grupo $PSL(2, \mathbb{Z})$.

O grupo modular é um dos mais estudados dentre os grupos fuchsianos e sua importância está relacionada principalmente à teoria de números. Suas características estão relacionadas aos estudos de Gauss ([Kato 96] e [Alla 05]) sobre formas quadráticas $c_1x^2 + c_2xy + c_3dy^2$ com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z}$. Voltaremos a considerar estas características no Capítulo 4, quando apresentaremos alguns métodos de codificação de geodésicas pertencentes ao grupo modular.

2.2 Introdução à Teoria de Codificação de Fontes Discretas

Começamos esta seção considerando o modelo tradicional de um sistema de comunicações. Em seguida, nos concentramos em codificação de fontes com o objetivo de apresentar apenas os conceitos que serão necessários no desenvolvimento deste trabalho. As referências básicas desta parte são [Pala 07] e [Blah 87].

2.2.1 Sistemas de comunicações

Um **sistema de comunicações** é constituído por uma fonte de informações, um canal de comunicação e um receptor. O seu objetivo principal é transmitir as informações geradas pela fonte através do canal de comunicações a um receptor. A fonte de informações pode ser contínua ou discreta dependendo do tipo de informação. O maior interesse neste trabalho é o estudo de fontes discretas, e informações como uma imagem ou um conjunto de sinais de voz podem ser vistos como exemplos desse tipo de fonte.

Normalmente as informações de uma fonte são sequências de bits que devem ser enviadas a um receptor. Muitas vezes estas sequências possuem informações que podem ser consideradas redundantes. Assim, associada a uma fonte de informações, temos um **codificador de fonte**.

Buscando eliminar redundâncias e com isso facilitar o envio das informações, um codificador de fonte gera a partir de uma sequência de dados original outra sequência codificada chamada **palavra-código**.

Um **canal de comunicação** é o meio através do qual a informação é transmitida. Este canal pode ser uma linha telefônica, uma fibra ótica ou o meio de propagação de sinais entre antenas de rádios por exemplo. Dependendo da aplicação, podemos também desejar armazenar as informações ao invés de transmiti-las. Neste caso o canal pode ser visto como o meio utilizado para esse fim. São exemplos desse tipo de canal discos rígidos de computador, mídia de computador (CD, DVD) ou mesmo mídias de áudio como fitas DAT, ou MD (mini-discs). A fim de evitar erros ou distorções na transmissão, junto com um canal temos um codificador e um modulador de canal.

O objetivo do **codificador de canal** é acrescentar redundâncias ao sinal original de forma a minimizar as perdas de informação devido a presença de interferências no canal. Já o **modulador** gera ondas apropriadas para a transmissão dos dados de acordo com o canal. Um **canal sem ruído** é constituído por um codificador de canal, um modulador, um canal, um demodulador e um decodificador de canal. No caso, tanto o demodulador como o decodificador de canal fazem a operação inversa do modulador e do codificador de canal. Num canal sem ruído assumimos que a sequência de dados que entra no canal é idêntica à que sai, não possuindo nenhuma distorção.

Podemos assim representar um sistema de comunicações sem ruído através do diagrama de blocos apresentado na Fig. 2.4.

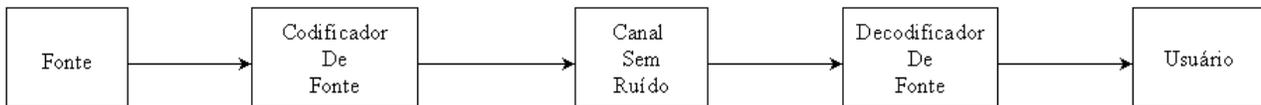


Figura 2.4: Diagrama de blocos de um sistema de comunicação simplificado.

Neste trabalho estamos interessados em estudar códigos de fontes. A seguir falaremos mais sobre eles, apresentando junto alguns conceitos importantes relacionados.

2.2.2 Códigos de fonte

Uma **fonte discreta** é caracterizada por um conjunto finito de símbolos emitidos pela fonte e um conjunto de probabilidades associadas a ocorrência de cada símbolo. A saída de uma fonte discreta estacionária pode ser vista como um processo aleatório discreto $\dots, Z_{-2}, Z_{-1}, Z_0, Z_1, Z_2, \dots$ onde a distribuição de probabilidade conjunta é invariante à translação na origem. Os símbolos

emitidos por uma fonte pertencem a um alfabeto j -ário. Assim, cada X_i pode tomar valores no conjunto finito $\zeta = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_j\}$ também chamado **alfabeto fonte**. Associado a cada símbolo a_i temos uma probabilidade $p(a_i)$ (ou simplesmente p_i) e o conjunto de distribuição de probabilidades é denotado por $\mathbf{p} = \{p(a_1), p(a_2), \dots, p(a_j)\}$. Para referenciarmos a fonte vamos usar o mesmo símbolo \mathbf{p} . Um caso especial de fontes discretas é quando temos uma **fonte discreta sem memória** (DMS). Numa fonte do tipo DMS, cada X_i é uma variável aleatória independente e identicamente distribuída.

A quantidade de **informação** associada a cada símbolo emitido a_i é dada por:

$$I(a_i) = -\log p(a_i).$$

Assim, para uma fonte discreta sem memória a informação média ou **entropia da fonte** ($H(\mathbf{p})$) é:

$$H(\mathbf{p}) = -\sum_{i=1}^j p(a_i) \log p(a_i).$$

A entropia de uma fonte, pode ser vista como a quantidade mínima de *bits* que deve ser utilizada para representar os símbolos emitidos por essa fonte. Ela também é chamada de incerteza da fonte. Se a base do logaritmo é 2 então a entropia é expressada em *bits*, já se a base é e , a entropia é expressada em *nats*.

A entropia possui algumas propriedades dentre as quais podemos citar:

1. É uma função contínua em \mathbf{p} . Esta propriedade nos diz que pequenas mudanças na distribuição de probabilidades produzem pequenas mudanças na incerteza da fonte.
2. $H(\mathbf{p}) \geq 0$ e $H(\mathbf{p}) = 0$ somente quando temos apenas um valor de j para o qual $p_j \neq 0$.
3. A entropia de um par de variáveis aleatórias independentes é igual a soma da entropia de cada uma das variáveis.

A entropia de uma fonte tem um papel muito importante na hora de escolhermos um método de codificação para os dados da fonte. O codificador da fonte, ao receber as mensagens enviadas por esta, gerará sequências de *bits* chamadas de palavra-código. Estas sequências em geral são formadas por símbolos numéricos como "0" e "1". Um código consiste de procedimentos que geram um conjunto de palavras-código.

Os códigos de fonte podem ser divididos em dois tipos: os códigos de compactação e os códigos de compressão de dados. Vamos chamar de L_{Med} o comprimento médio das palavras-códigos produzida por cada tipo de código. A comparação do valor de L_{Med} com a entropia é que

fará a diferença entre esses dois tipos de código. Códigos de compactação produzem palavras-código cujo comprimento médio será sempre maior ou igual a entropia da fonte ($L_{\text{Med}} \geq H(X)$). Já os códigos de compressão produzirão palavras-código com $L_{\text{Med}} < H(X)$. Como a entropia é o número de *bits* mínimo para representarmos os dados da fonte, vemos que os códigos de compactação não produzem distorções nos dados da fonte. No caso de compressão sempre temos uma distorção mesmo que seja pequena.

Dentre as características de um código as mais desejáveis são que ele seja de fácil interpretação e que não permita erros de reconstrução da mensagem original. Na área de codificação isto significa que desejamos códigos que sejam unicamente decodificáveis e instantâneos. Chamando de C_i um código qualquer, um código C_0 é chamado **unicamente decodificável** se e somente se nenhum dos conjuntos de outros códigos C_1, C_2, \dots contém uma palavra-código que pertença ao conjunto C_0 . Dentre os códigos unicamente decodificáveis, temos os chamados códigos instantâneos. Um código é chamado **instantâneo** (ou decodificável instantaneamente) quando o decodificador de fonte ao receber as palavras-código, passando apenas uma vez em cada símbolo, puder identificar a mensagem original sem erros.

Para obtermos um código instantâneo utilizamos tanto no processo de codificação quanto no de decodificação uma árvore chamada **árvore de decisão**. Na Fig. 2.5 podemos ver um exemplo de árvore de decisão.

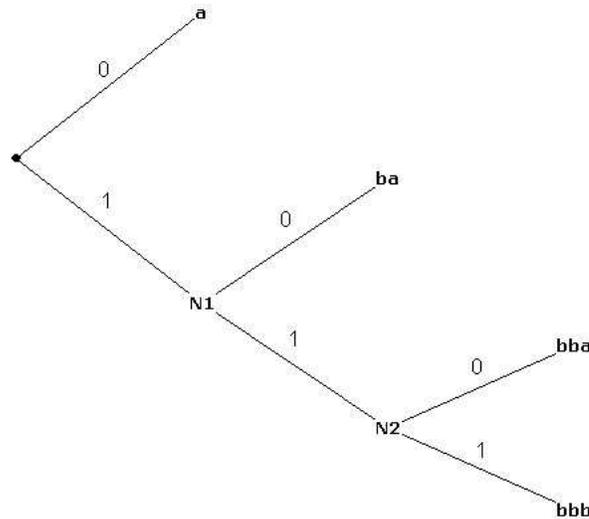


Figura 2.5: Exemplo de árvore de decisão.

Vamos supor que temos uma fonte discreta binária que emite mensagens e possui alfabeto fonte

que contém os símbolos “a” e “b”, ou seja, $\zeta = \{a, b\}$. O codificador ao receber as mensagens da fonte, gera palavras-código binárias que serão transmitidas num canal sem ruído. Por enquanto não nos preocuparemos com a probabilidade de ocorrência de cada símbolo. Para decodificarmos um mensagem recebida através de uma palavra-código utilizamos a árvore de decisão da Fig. 2.5.

Utilizamos o seguinte procedimento: observamos o primeiro *bit* recebido pelo canal sem ruído. Se o primeiro *bit* for “0”, a mensagem é “a”, caso contrário seguimos para o nó “N1”. Se o segundo *bit* é “0”, a mensagem é “ba” caso contrário, seguimos para o nó “N2”. Se o terceiro *bit* recebido é “0”, a mensagem é “bba” já se for “1”, a mensagem é “bbb”.

Utilizando a árvore de decisão podemos ver que ao receber a palavra-código, o decodificador observa apenas uma vez cada símbolo reconhecendo imediatamente a mensagem transmitida. As palavras-código de um código instantâneo são formadas pelos caminhos seguidos desde o nó raiz até os nós terminais da árvore. Neste caso, elas são pertencentes ao conjunto $\{0, 10, 110, 111\}$. Numa árvore binária, se nenhum nó terminal é deixado em aberto (ou seja, sem nenhuma mensagem associada) dizemos que esse código é um código **ótimo**.

Árvores de decisão são muito úteis quando desejamos elaborar códigos de fonte. Elas não são necessariamente binárias, podendo ter mais de um ramo ligado a cada nó. Nesse contexto vamos definir:

Definição 2.5 *Uma árvore r -ária é uma árvore tal que r ramos ou nenhum ramo emanam de cada nó.*

A profundidade de uma árvore será representada por um número real h e será definida pelo nó mais afastado do nó raiz. A partir de um determinado nó, cada nó abaixo dele aumenta a profundidade da árvore em uma unidade desde que esteja se afastando do nó raiz. Na árvore representada na Fig. 2.5, a profundidade da árvore é $h = 2$. O nó “N1” está a uma profundidade $h = 1$, já o nó “N2” está a profundidade $h = 2$. Assim, podemos definir o comprimento de uma árvore r -ária:

Definição 2.6 *Uma árvore r -ária completa de comprimento N é uma árvore r -ária cujos nós terminais são os nós à profundidade N do nó raiz.*

Vimos anteriormente que uma fonte emite símbolos aos quais está associada uma probabilidade de ocorrência. Como consequência, a cada mensagem emitida pela fonte podemos também associar uma probabilidade. Se vamos utilizar uma árvore de decisão para gerarmos as palavras-código, seria interessante associarmos a cada nó terminal uma probabilidade relacionada a probabilidade dos símbolos da fonte. Neste caso temos uma árvore de probabilidades.

Definição 2.7 *Uma árvore é classificada como uma árvore de probabilidades quando satisfizer as seguintes condições:*

1. $p_i \geq 0$, onde os p_i são as probabilidades associadas aos nós terminais para $i = 1, 2, \dots, N$;
2. $\sum_{i=1}^N p_i = 1$, isto é, a soma de todas as probabilidades dos nós terminais é igual a 1;
3. P_i denota a soma das probabilidades dos nós terminais da sub-árvore com profundidade $h = 1$ que emanam do nó à profundidade $h = h_i$, isto é, $P_i = \sum_j p_j$.

Muitas vezes os nós terminais são também chamados de folhas.

Exemplo 2.1 Na Fig. 2.6 podemos ver uma árvore de probabilidades que não é nem binária nem ternária.

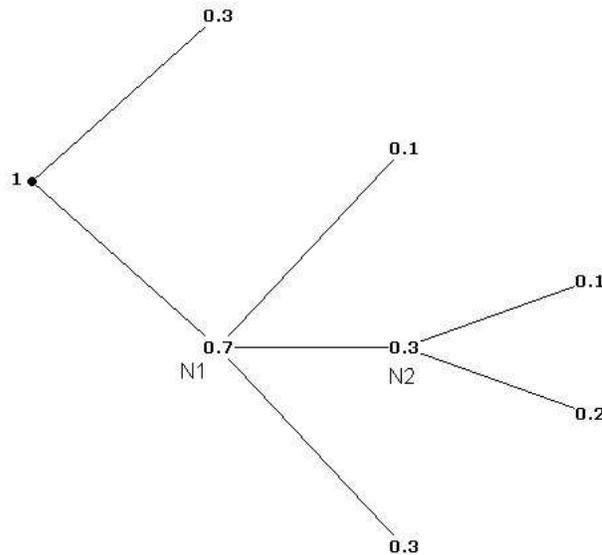


Figura 2.6: Exemplo de árvore de probabilidades.

O nó “N1” está a uma profundidade $h = 1$ e, neste caso, $P_1 = \sum_j p_j = 0.1 + 0.3 + 0.3 = 0.7$. Já “N2” está a uma profundidade $h = 2$ e $P_2 = 0.1 + 0.2 = 0.3$.

No caso de uma árvore de probabilidades, o Lema 2.1 apresentado a seguir nos fornece um resultado que será muito útil nos capítulos seguintes. A demonstração pode ser vista em [Pala 07].

Lema 2.1 (Comprimento do Caminho) Em uma árvore com probabilidades, a profundidade média dos nós terminais iguala a soma das probabilidades dos nós intermediários (incluindo o nó raiz).

No processo de codificação de fontes, a mensagem emitida pela fonte muitas vezes é muito longa para ser processada de uma vez só pelo codificador. Por esse motivo faz-se necessário utilizarmos alguma estratégia de separação da mensagem emitida pela fonte em segmentos. Normalmente a mensagem é separada em blocos de tamanho r e o codificador gera palavras-código de tamanho l_b .

Se um código, durante o processo de codificação de um determinado bloco, utiliza alguma informação dos blocos anteriores este código é chamado **código de árvore**. Se os valores de r e l_b são fixos este código é chamado **código de bloco de comprimento fixo**. Os códigos onde os valores de r e l_b variam (não necessariamente os dois juntos) são chamados **códigos de bloco de comprimento variável**. Dentre estes temos os códigos de comprimento fixo-variável (códigos B-V) e códigos de comprimento variável-fixo (códigos V-B). Nos códigos de comprimento fixo-variável, o valor de r é fixado e o codificador de fonte gera palavras-código com valor de l_b variável. No caso dos códigos de comprimento variável-fixo a situação se inverte, r varia enquanto o valor de l_b é deixado fixo.

Quando trabalhamos com códigos de compactação de fontes gostaríamos de obter um código cujo valor de L_{Med} se aproximasse da entropia da fonte. No caso de desejarmos comparar dois códigos, o que tiver menor valor de L_{Med} será considerado o mais **eficiente**. Normalmente os códigos de comprimento variável são mais eficientes que os códigos de comprimento fixo. Outra forma de avaliarmos um código é olharmos a entropia do conjunto formado pelas palavras-código geradas. Quanto mais próxima da entropia da fonte, melhor o código. A entropia desse conjunto é também chamada **taxa de compactação**.

Códigos de comprimento variável

Dentre os três tipos de códigos mencionados, os códigos de comprimento variável são os mais utilizados. Considerado um código instantâneo ótimo, o código de Huffman é um dos mais conhecidos. O código de Huffman pertence a classe dos códigos de prefixo e as palavras-códigos geradas por ele possuem o menor L_{Med} . Ele consegue compactar os dados com entropia bem próxima a da fonte. O código de Huffman é um código de comprimento Fixo-Variável e para sua implementação precisamos conhecer a distribuição de probabilidade das sequências emitidas pela fonte. Este método busca associar palavras-código de tamanho pequeno às sequências mais prováveis de forma que quanto mais provável a sequência, menor a palavra-código associada.

Existem situações nas quais não conhecemos a probabilidade das sequências emitidas pela fonte. Para estes casos temos os chamados códigos universais. Os códigos universais são uma classe de códigos no qual assumimos um total desconhecimento da distribuição de probabilidades dos símbolos da fonte. Eles são muito utilizados e dentre eles podemos citar os de Lempel-Ziv. Apesar de serem muito bons, no caso de termos algum conhecimento da distribuição de probabilidades

da fonte, o código de Huffman será melhor. Isto porque os códigos universais tendem a exigir um comprimento de bloco na entrada do codificador maior, o que aumenta um pouco a complexidade de implementação.

Podemos ver assim que nas aplicações em que precisamos de códigos do tipo comprimento fixo-variável, podemos escolher entre o código de Huffman ou um código universal. Na prática muitas vezes precisamos de um código cujas palavras-código tenham comprimento fixo. Por exemplo vamos supor que desejamos armazenar as informações de uma fonte na memória de um computador. A fonte pode ser uma imagem, um arquivo ou um programa entre outros. Neste caso é interessante que o tamanho das palavras-código coincidam com os comprimentos utilizados no “bus” do computador. Sendo assim, precisamos de um código do tipo variável-fixo.

Um exemplo de código variável-fixo é o código de Tunstall. Neste, através do conhecimento das probabilidades da fonte, geramos uma árvore de decisão com probabilidades de tal forma que a árvore possui ramos em profundidade variável. Neste caso como o comprimento das palavras-código é fixa, a otimização é feita de forma a minimizarmos a taxa de dígitos do código/dígitos da fonte. Essa razão é comparada com uma razão que leva em conta a entropia da fonte e o tipo de alfabeto (binário, ternário, ...) utilizado nas palavras-código.

Códigos de árvore

Os códigos de árvore também são chamados de aritméticos. Sua principal aplicação é o caso de termos uma fonte cujo alfabeto é pequeno onde o ideal seria codificarmos sequência longas. Como já mencionamos anteriormente, neste tipo de código não é possível muitas vezes subdividir as mensagens emitidas pela fonte em blocos independentes.

Um exemplo bem conhecido de código de árvore é o código de Elias. Este código é um código de comprimento variável e a forma como ele é elaborado nos permite receber sequências indefinidamente longas da fonte, gerando palavras-código também indefinidamente longas. Além disso ele permite variações no comprimento do bloco de entrada sem a necessidade de refazermos qualquer cálculo. Em geral, métodos como o de Huffman não nos permitem essa variação já que a mudança do comprimento do bloco de entrada altera as probabilidades das sequências iniciais o que nos leva a recalcular as palavras-código.

No código de Elias, a sequência emitida pela fonte é vista como a representação da probabilidade de ocorrência dessa sequência. A partir das probabilidades dos símbolos da fonte elaborase uma árvore de decisão que subdivide o intervalo $(0; 1)$ conforme a probabilidade de cada símbolo de entrada. Essa árvore é então utilizada para sabermos qual valor numérico a sequência original representa. Este valor será um número real que representará uma probabilidade. Numa abordagem simplificada do método de Elias, o valor da probabilidade é representada numa base adequada ao canal (binária, ternária,...). Esta representação será a palavra-código.

No código de Elias o comprimento médio das palavras-código é em geral menor que o comprimento médio das sequências de entrada. Além disso, resolvendo-se o problema da precisão com pequenas alterações na forma de representação das palavras-código, podemos compactar os dados com uma entropia próxima a da fonte.

Capítulo 3

CONSTRUÇÃO DE NOVAS TESSELAÇÕES EM \mathbb{H}^2

Neste capítulo apresentamos uma das principais contribuições deste trabalho, a construção de novas tesselações em \mathbb{H}^2 . Estas tesselações são construídas utilizando-se um método geométrico/aritmético, que consiste na união de triângulos da tesselação de Farey. A tesselação de Farey é uma tesselação de \mathbb{H}^2 formada por triângulos hiperbólicos cujos vértices são elementos da série de Farey e, devido a suas propriedades, ela já foi utilizada na obtenção de outras tesselações.

Através do estudo de propriedades algébricas dessa tesselação, Moeckel [Moec 82] fez o estudo de três tesselações cujas regiões de Dirichlet eram formadas por triângulos da tesselação de Farey, relacionadas a certas classes de grupos fuchsianos. Já no trabalho [Mumf 02], encontramos um par de geradores de $SL(2, \mathbb{Z})$ que geram uma tesselação relacionada a círculos de Schottky. Esta tesselação, formada por polígonos de 4 lados, pode ser vista como uma tesselação formada pela união de triângulos da tesselação de Farey.

Neste trabalho utilizamos um procedimento de obtenção de novas tesselações a partir da tesselação de Farey distinto dos abordados anteriormente. Através de um método sistemático de união dos triângulos, este procedimento explora as características geométricas e aritméticas da tesselação de Farey. Por serem obtidas a partir dessa tesselação, essas novas tesselações compartilham muitas de suas características e facilidades. Dentre estas está a representação de uma geodésica numa superfície modular através de sequências cortantes como será apresentado no próximo capítulo.

Uma das características importantes das tesselações apresentadas está no fato de serem formadas por polígonos de n lados, com $n > 3$. Além disso esses polígonos são irregulares sob o ponto de vista euclidiano mas regulares sob o ponto de vista hiperbólico.

Começamos apresentando a tesselação de Farey, seu método de construção e suas propriedades. Em seguida, apresentamos o método de construção utilizado, apresentando resultados para tesselações formadas por polígonos com número de lados par ($2n$ com $n \geq 2$) e ímpar ($2n+1$ com $n \geq 2$) de forma diferenciada. A partir da apresentação de teoremas e propriedades relacionadas a essas tesselações, veremos como pode ser feito a generalização dos resultados.

Além de obtermos novas tesselações, apresentaremos alguns resultados gerais que nos permitirão determinar explicitamente os vértices de cada polígono numa determinada tesselação.

3.1 Tesselação de Farey

Seja $\mathbb{H}^2 = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ o semiplano superior munido da métrica de Riemanniana.

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Já vimos anteriormente que o grupo $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$ age em \mathbb{H}^2 através das **transformações de Möbius** dadas por:

$$z \rightarrow \frac{\mathbf{a}z + \mathbf{b}}{\mathbf{c}z + \mathbf{d}},$$

onde estas transformações são isometrias de \mathbb{H}^2 que preservam a orientação segundo a métrica de Poincaré. Suas ações se estendem à fronteira de \mathbb{H}^2 , isto é, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e a cada transformação, sempre existe uma matriz A relacionada, dada por:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}.$$

Seja γ uma transformação hiperbólica tal que $\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$; através da solução da equação:

$$z = \gamma(z) = \frac{\mathbf{a}z + \mathbf{b}}{\mathbf{c}z + \mathbf{d}} \quad (3.1)$$

podemos encontrar os pontos fixos de γ . Como A está associada a uma transformação hiperbólica, γ possui dois pontos fixos hiperbólicos em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que chamamos de α e β . A partir da equação (3.1), obtemos o seguinte polinômio quadrático:

$$\mathbf{c}z^2 + (\mathbf{d} - \mathbf{a})z - \mathbf{b} = 0. \quad (3.2)$$

A solução deste polinômio nos fornece os pontos fixos de γ , ou seja, α e β . Quando $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ este polinômio é chamado de forma quadrática binária integral e seu discriminante D é dado por:

$$D = (\mathbf{a} + \mathbf{d})^2 - 4 > 0. \quad (3.3)$$

Uma geodésica orientada em \mathbb{H}^2 que vai de um ponto fixo α em direção ao outro ponto fixo β (ambos associados à mesma transformação γ) é chamada *eixo* de γ e será denotado por $C(\gamma)$. O ponto fixo β é chamado de atrator se

$$A'(\beta) = \frac{1}{(\mathbf{c}\beta + \mathbf{d})^2} < 1$$

e de repulsor se,

$$A'(\beta) = \frac{1}{(\mathbf{c}\beta + \mathbf{d})^2} > 1.$$

Isto significa que se β é atrator e α repulsor, $A'(\beta) < 1$ e $A'(\alpha) > 1$.

As retas de \mathbb{H}^2 são semi-círculos com centros no eixo x ou semi-retas euclidianas $x = \alpha$ com $y > 0$. Considerando as geodésicas como retas que unem dois pontos (minimizando a distância entre estes), no plano hiperbólico elas são semicírculos ortogonais ao eixo real [Kato 92].

No capítulo anterior, vimos que uma tesselação de \mathbb{H}^2 é formada por uma coleção de polígonos disjuntos. Associada a estes polígonos, temos uma região chamada de região de Dirichlet.

Seja \mathbb{Q} o conjunto dos números racionais e $C(\gamma)$ uma geodésica com pontos terminais em \mathbb{Q} . Se os pontos terminais de $C(\gamma)$ são da forma $\alpha = \frac{P}{Q}$ e $\beta = \frac{P'}{Q'}$, quando $PQ' - P'Q = \pm 1$ chamamos esta geodésica de *aresta elementar* e a referenciamos por $C(\gamma(\alpha, \beta))$ ou $C(\gamma(\frac{P}{Q}, \frac{P'}{Q'}))$.

Séries de Farey

Vamos chamar de \mathbb{F}_m a sequência de Farey de ordem m ; a m -ésima sequência de Farey F_m consiste de uma série de frações irredutíveis cujo denominador não excede m , ou seja, $\frac{P}{Q}$ com $|P|, |Q| \leq m$ arranjados na ordem crescente. Os termos da série de Farey podem ser obtidos principalmente a partir da aplicação do Teorema 3.1 cuja demonstração será omitida mas pode ser vista em [Hard 60].

Teorema 3.1 *Se P/Q , P''/Q'' e P'/Q' são três termos sucessivos de \mathbb{F}_m , então*

$$\frac{P''}{Q''} = \frac{P + P'}{Q + Q'}.$$

Se $\frac{P}{Q}$ pertence a \mathbb{F}_m , $0 \leq P \leq Q \leq m$, P e Q são primos entre si e o valor 0 está incluído sob a forma $\frac{0}{1}$. Portanto, temos:

$$\mathbb{F}_1 = \{-\infty, -1, 0, 1, \infty\}$$

$$\mathbb{F}_2 = \{-\infty, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, \infty\}$$

$$\mathbb{F}_3 = \{-\infty, -3, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, \infty\}$$

e assim por diante. O número de termos da série aumenta rapidamente a medida que o valor m aumenta. Por exemplo, se olhamos apenas os valores da série que estão entre $[0, 1]$, para $m = 5$ temos:

$$\mathbb{F}_5 = \{-\infty, \dots, \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1, \dots, \infty\}.$$

Dentre as diversas propriedades dessa série, podemos citar os seguintes teoremas cujas demonstrações podem ser vistas em [Hard 60].

Teorema 3.2 *Se P/Q e P'/Q' são dois termos consecutivos de \mathbb{F}_m , então*

$$QP' - PQ' = 1.$$

Teorema 3.3 *Se $m > 1$ então dois termos sucessivos de \mathbb{F}_m não possuem o mesmo denominador.*

Como consequência das propriedades dadas pelos Teoremas 3.2, 3.1 e 3.3 podemos ver que se temos dois termos consecutivos da série de Farey, P/Q e P'/Q' , a matriz formada por $\begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}$ possui determinante igual a 1.

Definição 3.1 *Um triângulo é chamado **elementar** se seus vértices pertencem a \mathbb{F}_m para algum $m > 2$.*

Vemos assim que um triângulo elementar é formado por arestas elementares. Se no plano hiperbólico para cada valor de m ($m \geq 1$) unimos os elementos consecutivos de \mathbb{F}_m através de uma geodésica, temos diversos triângulos elementares formando uma tesselação de \mathbb{H}^2 . Esta tesselação de \mathbb{H}^2 formada por triângulos elementares é conhecida por tesselação de Farey. Nas Figs. 3.1 e 3.2 podemos ver essa tesselação.

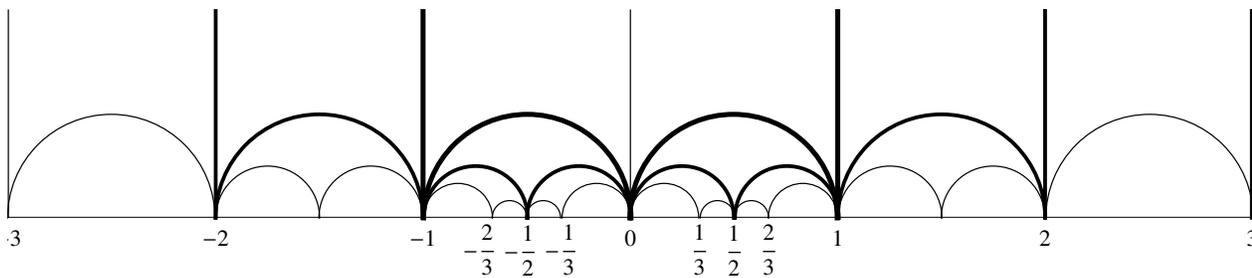


Figura 3.1: Tesselação formada por \mathbb{F}_1 , \mathbb{F}_2 e \mathbb{F}_3 .

Agora, vamos tomar o triângulo formado pelas geodésicas $C(\gamma(\infty, 0))$, $C(\gamma(0, 1))$ e $C(\gamma(1, \infty))$. Este triângulo é chamado de triângulo fundamental e pode ser visto na Fig. 3.3.

Cada triângulo em \mathbb{H}^2 localizado abaixo do triângulo fundamental possui seus três vértices no eixo x . No modelo do semiplano superior para a geometria hiperbólica, dizemos que esses vértices estão no infinito. Já no modelo do disco de Poincaré, esses vértices estão também no infinito mas localizados na fronteira do disco. Este fato pode ser visto na Fig. 3.4 onde podemos ver a tesselação de Farey no modelo do disco de Poincaré.

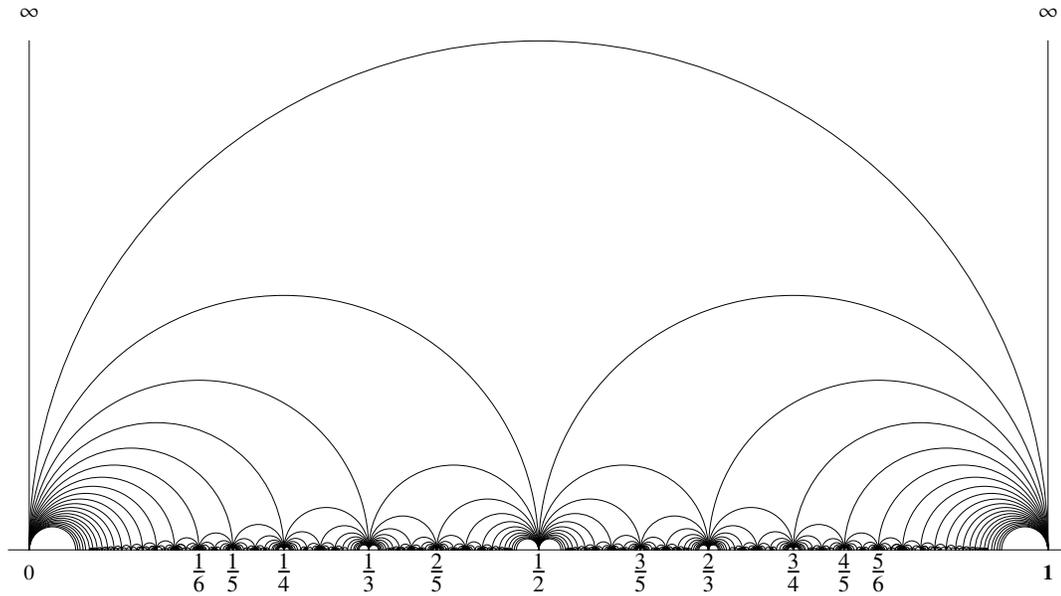


Figura 3.2: Tesselação de Farey no intervalo $[0; 1]$.

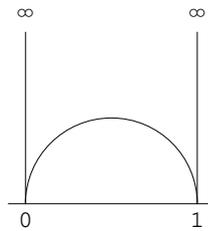


Figura 3.3: Triângulo fundamental.

Seja um triângulo geodésico com vértices v_1 , v_2 e v_3 tais que $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{Q}$ e $v_1 < v_2 < v_3$. Se referenciarmos cada triângulo apenas por seus dois vértices mais distantes entre si da forma: $(P_3)^{v_1, v_3}$ (com $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{F}_m$ para algum m), utilizando o resultado do Teorema 3.1 podemos sempre obter v_2 a partir dos outros dois vértices. Vamos chamar de $d(v_i, v_j)$ a distância euclidiana entre dois vértices v_i e v_j . Podemos definir:

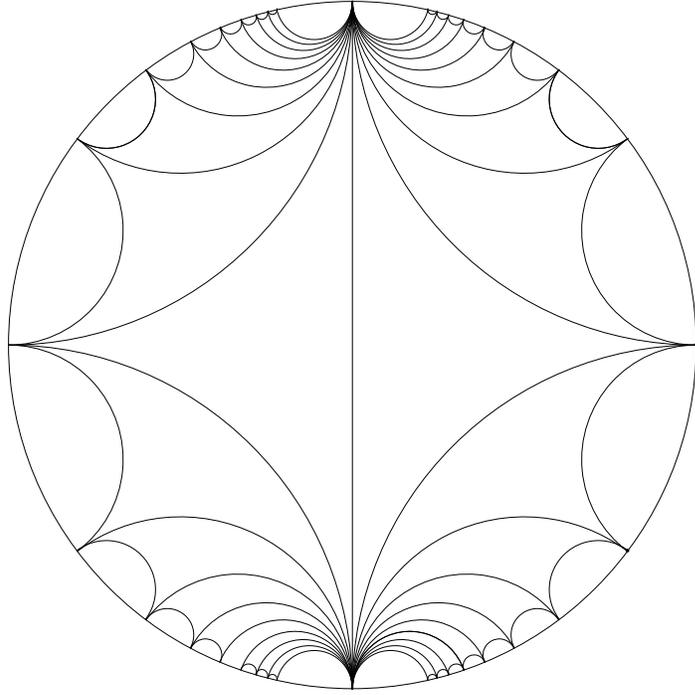


Figura 3.4: Tesselação de Farey no modelo do disco de Poincaré.

Definição 3.2 *Seja X um índice que pode assumir valores D ou E e v_1, v_2, v_3 um conjunto de vértices de um triângulo qualquer. X é dado por:*

$$\begin{aligned} X &= D, & \text{se } d(v_1, v_2) < d(v_2, v_3) \\ X &= E, & \text{se } d(v_1, v_2) > d(v_2, v_3). \end{aligned}$$

A partir do índice X , referenciaremos cada triângulo por $(P_3)_X^{v_1, v_3}$.

Na tesselação de Farey apresentada na Fig. 3.1, podemos ver que muitos triângulos compartilham um par de vértices e uma aresta e, em alguns casos, temos mais de um triângulo compartilhando um mesmo vértice. A fim de referenciar mais facilmente esses triângulos criamos um índice i que indica a posição que um triângulo ocupa numa sequência de compartilhamento. Além disso, estabelecemos que quanto menor o valor de i , maior a distância Euclidiana entre seus vértices mais distantes v_1 e v_3 ($d(v_1 v_3)$).

Para entendermos melhor esse índice, vamos tomar uma sequência de triângulos que compartilham um vértice à esquerda, $(P_3)_{E_1}^{v_c, v_1}$, $(P_3)_{E_2}^{v_c, v_2}$, $(P_3)_{E_3}^{v_c, v_3}$, ... tal que para cada valor de i ($i \geq 1$), $(P_3)_{E_i}^{v_c, v_i}$ e $(P_3)_{E_{i+1}}^{v_c, v_{i+1}}$ significa que esses dois triângulos compartilham um par de vértices e uma aresta (v_c, v_i e $C(\gamma(v_{i+1}, v_i))$). Esta situação pode ser vista na Fig. 3.5, onde $d(v_c, v_1) > d(v_c, v_2) > d(v_c, v_3) > d(v_c, v_4) \dots$ e, portanto, $d(v_c, v_i) > d(v_c, v_k)$ para $i < k$.

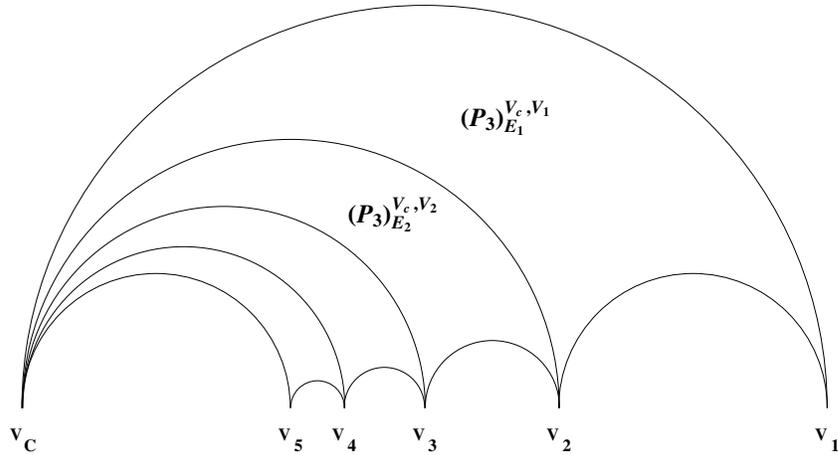


Figura 3.5: Triângulos elementares do tipo E.

O caso onde temos uma sequência de triângulos que compartilham um vértice a direita $(P_3)_{D_1}^{v_1, v_c}, (P_3)_{D_2}^{v_2, v_c}, (P_3)_{D_3}^{v_3, v_c}, \dots$ pode ser vista na Fig. 3.6. Note que, como no caso anterior, $d(v_i, v_c) > d(v_k, v_c)$ para $i < k$.

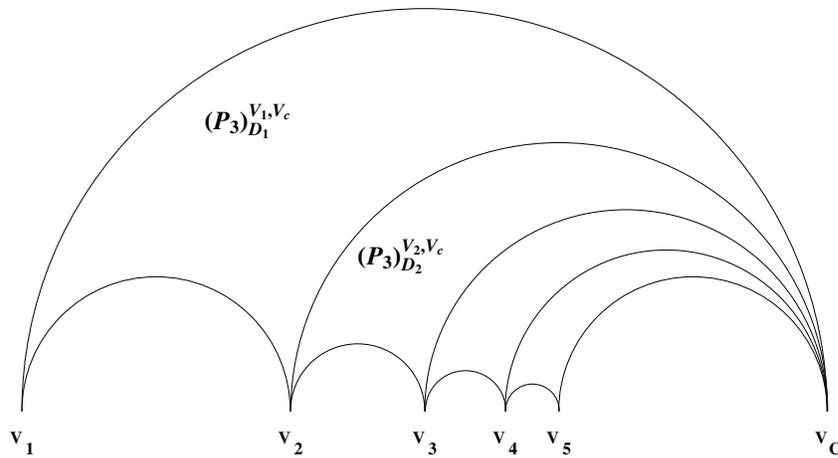


Figura 3.6: Triângulos elementares do tipo D.

Por terem vértices com valores na série de Farey, estes triângulos possuem diversas propriedades interessantes, muitas das quais serão abordadas neste capítulo. A primeira propriedade apresentada será estabelecida no Teorema 3.4. Através deste teorema, dado um triângulo elementar qualquer, poderemos saber qual o tipo de triângulo (tipo E ou D) que está abaixo dele na tesselação de Farey.

Teorema 3.4 *Seja $(P_3)_X^{v_1, v_3}$ um triângulo elementar qualquer pertencente a tesselação de Farey e v_1, v_2 e v_3 seus vértices tais que $v_1 < v_2 < v_3$ e X pode assumir valores E ou D . Abaixo das geodésicas $C(\gamma(v_1, v_2))$ e $C(\gamma(v_2, v_3))$ teremos dois triângulos que compartilham dois vértices e uma aresta com esse triângulo. Independente do valor de X , o triângulo abaixo de $C(\gamma(v_1, v_2))$ será sempre do tipo E e o triângulo abaixo de $C(\gamma(v_2, v_3))$ será sempre do tipo D .*

Demonstração:

Vamos começar mostrando o caso onde $X = E$.

Seja $v_1 = \frac{p}{q}$ e $v_3 = \frac{v}{w}$. Se $v_1, v_3 \in \mathbb{F}_m$, pelo Teorema 3.1, $v_2 = \frac{p+v}{q+w}$. Desejamos saber qual o tipo dos triângulos que estão abaixo das geodésicas $C(\gamma(v_1, v_2))$ e $C(\gamma(v_2, v_3))$. Na Fig. 3.7 podemos ver um triângulo desse tipo.

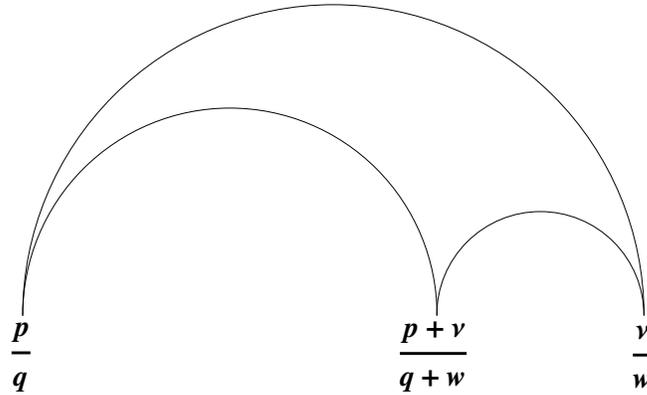


Figura 3.7: Triângulo elementar do tipo E.

A geodésica $C(\gamma(v_1, v_2))$ tem um triângulo abaixo, o $(P_3)_X^{v_1, v_2}$. Se $v_1 = \frac{p}{q}$ e $v_2 = \frac{p+v}{q+w}$, pelo Teorema 3.1 esse triângulo tem vértices $\frac{p}{q}, \frac{p+p+v}{q+q+w}, \frac{p+v}{q+w}$. Agora, pela Definição 3.2, se $d(\frac{p}{q}, \frac{2p+v}{2q+w}) > d(\frac{2p+v}{2q+w}, \frac{p+v}{q+w})$, o triângulo é do tipo E , caso contrário, ele é do tipo D . Calculando cada distância temos:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{p}{q}, \frac{2p+v}{2q+w}\right) &= \frac{2p+v}{2q+w} - \frac{p}{q} = \frac{2pq + qv - 2pq - pw}{q(2q+w)} \\ &= \frac{qv - pw}{q(2q+w)} = \frac{1}{q(2q+w)} \end{aligned}$$

onde $q\nu - pw = 1$ pelo Teorema 3.2. Também,

$$\begin{aligned} d\left(\frac{2p+\nu}{2q+w}, \frac{p+\nu}{q+w}\right) &= \frac{p+\nu}{q+w} - \frac{2p+\nu}{2q+w} \\ &= \frac{2pq + pw + 2q\nu + \nu w - 2pq - q\nu - 2pw - w\nu}{(q+w)(2q+w)} \\ &= \frac{q\nu - pw}{(q+w)(2q+w)} = \frac{1}{(q+w)(2q+w)}. \end{aligned}$$

Vamos supor que $(P_3)_X^{v_1, v_2}$ seja do tipo E . Isto significa que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q(2q+w)} &> \frac{1}{(q+w)(2q+w)} \\ q(2q+w) + w(2q+w) &> q(2q+w) \\ q(2q+w) &> 0 \\ 2wq + w^2 &> 0. \end{aligned}$$

Pela forma de construção dos triângulos deste trabalho, nunca teremos $\frac{p}{q} < 0$ e $\frac{\nu}{w} > 0$ já que a primeira geodésica que aparece com vértice negativo é $C(\gamma(-1, 0))$ e dentro do intervalo $[-1, 1]$ todos os triângulos estão abaixo de $C(\gamma(-1, 0))$ ou $C(\gamma(0, 1))$. Assim, se $q, w > 0$, $2wq + w^2 > 0$ sempre é verdade e, portanto, $(P_3)_X^{v_1, v_2}$ é do tipo E . Como para a obtenção desse resultado em nenhum lugar usamos o fato de $(P_3)_E^{v_1, v_3}$ ser do tipo E , esse resultado vale também para o caso do triângulo ser do tipo D , ou seja, $(P_3)_D^{v_1, v_3}$.

Olhando a geodésica $C(\gamma(v_2, v_3))$, abaixo desta teremos um triângulo, o $(P_3)_X^{v_2, v_3}$, tal que os vértices desse triângulo são: $\frac{p+\nu}{q+w}$, $\frac{p+\nu+\nu}{q+w+w}$ e $\frac{\nu}{w}$.

Calculando as distâncias entre os vértices temos:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{p+\nu}{q+w}, \frac{p+2\nu}{q+2w}\right) &= \frac{p+2\nu}{q+2w} - \frac{p+\nu}{q+w} \\ &= \frac{pq + 2q\nu + pw + 2w\nu - pq - q\nu - 2pw - 2w\nu}{(q+2w)(q+w)} \\ &= \frac{q\nu - pw}{(q+2w)(q+w)} = \frac{1}{(q+2w)(q+w)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } d\left(\frac{p+2\nu}{q+2w}, \frac{\nu}{w}\right) &= \frac{\nu}{w} - \frac{p+2\nu}{q+2w} = \frac{q\nu + 2\nu w - pw - 2\nu w}{w(q+2w)} \\ &= \frac{q\nu - pw}{w(q+2w)} = \frac{1}{w(q+2w)}. \end{aligned}$$

Supondo que este triângulo também é do tipo E , temos:

$$d\left(\frac{p+\nu}{q+w}, \frac{p+2\nu}{q+2w}\right) > d\left(\frac{p+2\nu}{q+2w}, \frac{\nu}{w}\right)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(q+2w)(q+w)} &> \frac{1}{w(q+2w)} \\ w(q+2w) &> q(q+w) + w(q+2w) \\ 0 &> q(q+w) \\ q^2 + qw &< 0 \end{aligned}$$

o que mostramos que não pode ser verdade já que sempre que $q > 0$ implica em $w > 0$. Portanto, $d(\frac{p+\nu}{q+w}, \frac{p+2\nu}{q+2w}) > d(\frac{p+2\nu}{q+2w}, \frac{\nu}{w})$ e, portanto, $(P_3)_X^{v_2, v_3}$ é do tipo D . Neste caso o resultado também independe do tipo do triângulo que está acima, $(P_3)_X^{v_1, v_3}$. ■

O resultado desse teorema pode ser visto mais claramente na Fig. 3.8 onde temos a tesselação de Farey com alguns triângulos e pontos identificados.

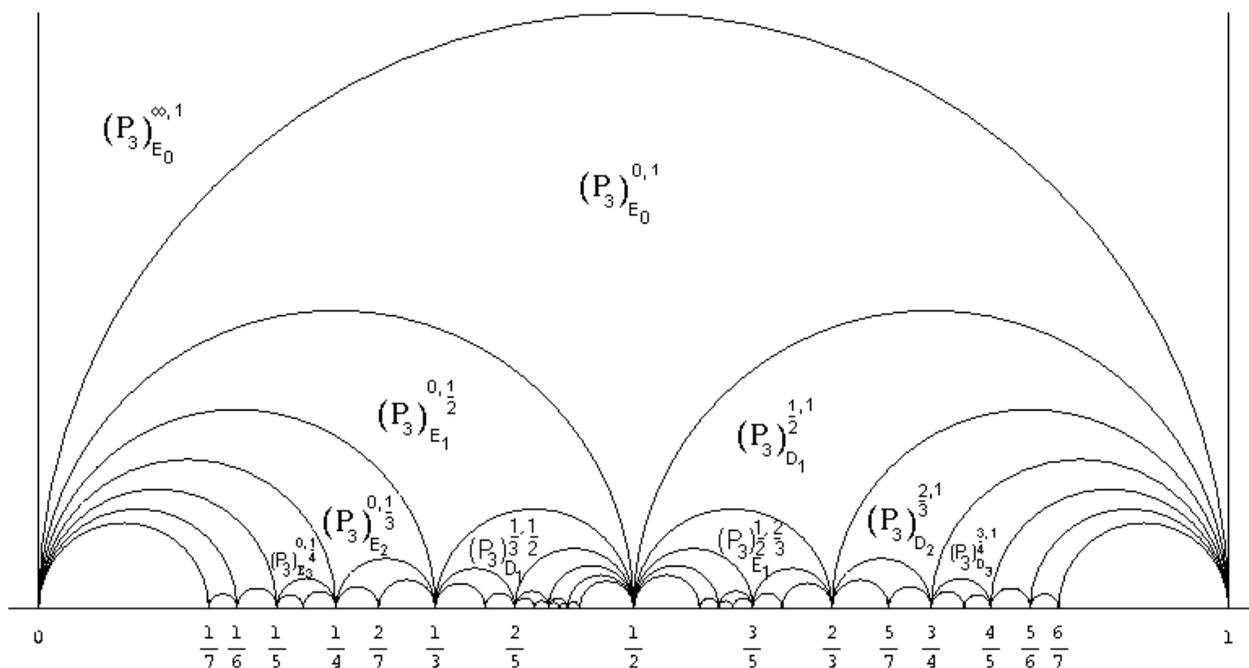


Figura 3.8: Tesselação de Farey com alguns triângulos identificados.

3.2 Tesselações de \mathbb{H}^2 Formadas por Polígonos Elementares

Nesta seção apresentamos um conjunto novo de tesselações formadas por polígonos de n lados. Essas tesselações são obtidas a partir da série de Farey e, por causa desta, apresentam muitas propriedades interessantes que serão consideradas nos teoremas desta seção. Vamos começar pelo conceito de polígono elementar.

Definição 3.3 *Um polígono é chamado **elementar** quando seus vértices pertencem a \mathbb{F}_m para algum $m > 2$.*

No plano Euclidiano, a união de triângulos nos fornece um polígono. No plano hiperbólico o mesmo ocorre, ao juntarmos triângulos hiperbólicos podemos obter um polígono regular, ou não, dependendo de como seja essa união. Assim, ao unirmos alguns triângulos elementares com vértices pertencentes à série de Farey obtemos um novo polígono elementar que possui também vértices nessa mesma série. Neste caso, o número de lados do polígono está relacionado à quantidade de triângulos utilizados na sua construção. Vamos agora iniciar a construção de polígonos elementares de forma a obter novas tesselações em \mathbb{H}^2 .

A construção de polígonos elementares está relacionada a união de triângulos elementares. Para referenciarmos esses polígonos vamos usar uma notação similar à utilizada no caso dos triângulos, onde no lugar de (P_3) usaremos (P_n) indicando que o polígono possui n lados.

Definição 3.4 *Seja um conjunto formado por $n_E + n_D$ triângulos tais que sua união forme um polígono qualquer de n lados dado por:*

$$(P_n)_{X_k}^{\frac{p, \nu}{q, w}} = \bigcup_{i=1}^{n_E} (P_3)_{E_{k_i}}^{v_{1i}, v_{3i}} \bigcup_{i=1}^{n_D} (P_3)_{D_{k_i}}^{v'_{1i}, v'_{3i}},$$

onde $v_{1i}, v_{3i}, v'_{1i}, v'_{3i} \in \mathbb{F}_m$ para algum $m > 3$, $k_i \geq 1$ e os valores de n_E e n_D correspondem ao número de triângulos do tipo E e D utilizados. Se $n_E > n_D$ e $X = E$ chamamos $(P_n)_{E_k}^{\frac{p, \nu}{q, w}}$ de polígono do tipo **FE** (Feixe de Esquerda). Se $n_E < n_D$ e $X = D$ chamamos este polígono de polígono do tipo **FD** (Feixe de Direita).

Podemos ver assim que todo polígono pode ser classificado como FE ou FD através da predominância de triângulos do tipo E ou D . O procedimento utilizado para a união dos triângulos deste trabalho implica na consideração dos polígonos terem um número par e ímpar de lados de forma diferenciada. Os polígonos com número par de lados terão seus lados referenciados por $2n$ e os com número ímpar de lados por $2n + 1$.

3.2.1 Tesselações de \mathbb{H}^2 formadas por polígonos de $2n$ lados

Começaremos formando polígonos de quatro lados. Os polígonos de 4 lados serão formados pela união consecutiva de triângulos, dois-a-dois, que estão sobre a tesselação de Farey. Uma consequência direta da Definição 3.4 é que quando um polígono de 4 lados for formado pela união de dois triângulos do tipo E será do tipo FE . Se juntarmos dois triângulos do tipo D , da mesma forma, teremos um polígono do tipo FD .

Vamos chamar de $(P_3)_{E_0}^{0,\infty}$ o triângulo com vértices em 0, 1 e ∞ e de $(P_3)_{E_0}^{0,1}$ o triângulo com vértices em 0, 1 e $\frac{1}{2}$ como pode ser visto na Fig. 3.9. Através da união desses dois triângulos, podemos obter um primeiro polígono com vértices em 0, $\frac{1}{2}$, 1 e ∞ , o quadrado elementar $(P_4)_{E_0}^{0,\infty}$ tal que $(P_4)_{E_0}^{0,\infty} = (P_3)_{E_0}^{0,\infty} \cup (P_3)_{E_0}^{0,1}$.

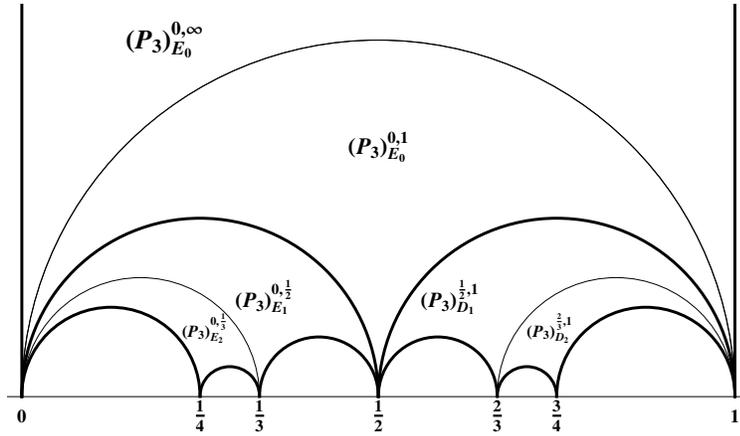


Figura 3.9: Polígonos elementares de 4 lados.

Este primeiro polígono obtido corresponde a região de Dirichlet da tesselação. Os vértices desse polígono que estão sobre o eixo x definem abaixo deles dois outros polígonos de quatro lados $(P_4)_{E_1}^{0,1/2} = (P_3)_{E_1}^{0,1/2} \cup (P_3)_{E_2}^{0,1/3}$ e $(P_4)_{D_1}^{1/2,1} = (P_3)_{D_1}^{1/2,1} \cup (P_3)_{D_2}^{2/3,1}$. Abaixo dos vértices desses dois novos polígonos, temos mais 3 polígonos abaixo de cada um e assim sucessivamente.

Para os outros polígonos, utilizando a notação estabelecida anteriormente e mostrada nas Figs. 3.5 e 3.6 temos:

Definição 3.5 *Um polígono qualquer de 4 lados é dado por:*

$$(P_4)_{E_k}^{v_c, v_i} = (P_3)_{E_i}^{v_c, v_i} \cup (P_3)_{E_{i+1}}^{v_c, v_{i+1}}$$

quando for do tipo E e,

$$(P_4)_{D_k}^{v_i, v_c} = (P_3)_{D_i}^{v_i, v_c} \cup (P_3)_{D_{i+1}}^{v_{i+1}, v_c},$$

se for do tipo D , de tal forma que os polígonos serão sempre disjuntos entre si.

A obtenção dos polígonos de 4 lados a partir dos triângulos elementares é estabelecida no Teorema 3.5.

Teorema 3.5 *Seja $(P_4)_{X}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}}$ um polígono qualquer tal que $\frac{p}{q}$ e $\frac{\nu}{w}$ é o par de vértices com a maior distância entre eles. Para $i \geq 1$, os polígonos de 4 lados podem ser obtidos da seguinte forma:*

Para $X = E$ temos:

$$\text{Se } p \neq 0, \text{ então } (P_4)_{E_i}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} = (P_3)_{E_{2i-1}}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} \cup (P_3)_{E_{2i}}^{\frac{p}{q}, \frac{p+\nu}{q+w}}.$$

$$\text{Se } p = 0, \text{ então } (P_4)_{E_i}^{0, \frac{1}{2i}} = (P_3)_{E_{2i-1}}^{0, \frac{1}{2i}} \cup (P_3)_{E_{2i}}^{0, \frac{1}{2i+1}}.$$

Para $X = D$ temos:

$$\text{Se } \frac{\nu}{w} \neq 1, \text{ então } (P_4)_{D_i}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} = (P_3)_{D_{2i-1}}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} \cup (P_3)_{D_{2i}}^{\frac{p+\nu}{q+w}, \frac{\nu}{w}}.$$

$$\text{Se } \frac{\nu}{w} = 1, \text{ então } (P_4)_{D_i}^{\frac{2i-1}{2i}, 1} = (P_3)_{D_{2i-1}}^{\frac{2i-1}{2i}, 1} \cup (P_3)_{D_{2i}}^{\frac{2i}{2i+1}, 1}.$$

Demonstração:

Seja $p \neq 0$ e $X = E$. Pela Definição 3.5 temos que $(P_4)_{E_k}^{v_c, v_j} = (P_3)_{E_j}^{v_c, v_j} \cup (P_3)_{E_{j+1}}^{v_c, v_{j+1}}$. Se $v_c = \frac{p}{q}$ e $v_j = \frac{\nu}{w}$, através da Fig. 3.5 podemos ver que v_{i+1} é o próximo ponto da série de Farey entre $\frac{p}{q}$ e $\frac{\nu}{w}$. Utilizando o resultado do Teorema 3.1 temos, portanto, que $v_{i+1} = \frac{p+\nu}{q+w}$. Se $k = 1$, isto significa que temos um primeiro polígono de quatro lados do tipo FE com vértice em $\frac{p}{q}$ formado pela união dos dois primeiros triângulos do tipo E com vértice em $\frac{p}{q}$. Assim, $j, k = 1$ e portanto,

$$(P_4)_{E_1}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} = (P_3)_{E_1}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} \cup (P_3)_{E_2}^{\frac{p}{q}, \frac{p+\nu}{q+w}}.$$

Mostramos então que o teorema vale para $i = 1$. Agora por indução, vamos supor que é verdade para $i = n - 1$, ou seja,

$$(P_4)_{E_{n-1}}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} = (P_3)_{E_{2(n-1)-1}}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} \cup (P_3)_{E_{2(n-1)}}^{\frac{p}{q}, \frac{p+\nu}{q+w}}.$$

Através da Definição 3.5, o próximo polígono, de índice E_n é formado pela união dos dois próximos triângulos abaixo de $(P_3)_{E_{2(n-1)-1}}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}}$ e $(P_3)_{E_{2(n-1)}}^{\frac{p}{q}, \frac{p+\nu}{q+w}}$ tendo $\frac{p}{q}$ como vértice em comum. O próximo elemento da série de Farey que está entre $\frac{p}{q}$ e $\frac{p+\nu}{q+w}$ é o vértice do próximo triângulo. Este vértice é dado por: $\frac{p+2p+\nu}{q+2q+w}$. Assim, o próximo triângulo com vértice $\frac{p}{q}$ em comum é o $(P_3)_{E_{2(n-1)+1}}^{\frac{p}{q}, \frac{2p+\nu}{q+2q+w}}$. Da mesma forma, seguindo a sequência de triângulos, o próximo polígono terá como vértice o termo da série de Farey que está entre $\frac{p}{q}$ e $\frac{2p+\nu}{q+2q+w}$, o termo $\frac{p+2p+\nu}{q+2q+w}$. O triângulo será o $(P_3)_{E_{2(n-1)+1+1}}^{\frac{p}{q}, \frac{3p+\nu}{q+3q+w}}$ e portanto, temos uma sequência de triângulos, $(P_3)_{E_{2(n-1)-1}}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}}$, $(P_3)_{E_{2(n-1)}}^{\frac{p}{q}, \frac{p+\nu}{q+w}}$, $(P_3)_{E_{2(n-1)+1}}^{\frac{p}{q}, \frac{2p+\nu}{q+2q+w}}$ e $(P_3)_{E_{2(n-1)+1+1}}^{\frac{p}{q}, \frac{3p+\nu}{q+3q+w}}$ onde os dois primeiros fazem parte do polígono de índice E_{n-1} . Os dois últimos fazem parte do polígono de índice E_n dado por:

$$(P_4)_{E_n}^{\frac{p}{q}, \frac{2p+\nu}{q+2q+w}} = (P_3)_{E_{2(n-1)+1}}^{\frac{p}{q}, \frac{2p+\nu}{q+2q+w}} \cup (P_3)_{E_{2(n-1)+1+1}}^{\frac{p}{q}, \frac{3p+\nu}{q+3q+w}}. \quad (3.4)$$

Estes triângulos podem ser vistos na Fig. 3.10 onde realçamos os dois polígonos.

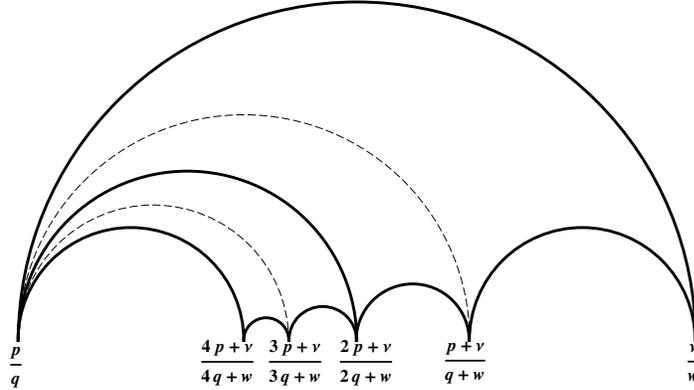


Figura 3.10: Dois polígonos de 4 lados do tipo E consecutivos.

Agora, $2(n-1) + 1 = 2n - 2 + 1 = 2n - 1$ e $2(n-1) + 1 + 1 = 2n - 2 + 2 = 2n$. Se fizermos $2p + v = v'$ e $2q + w = w'$, podemos reescrever a equação (3.4) como:

$$(P_4)_{E_n}^{\frac{p}{q}, \frac{v'}{w'}} = (P_3)_{E_{2n-1}}^{\frac{p}{q}, \frac{v'}{w'}} \cup (P_3)_{E_{2n}}^{\frac{p}{q}, \frac{p+v'}{q+w'}}$$

e, dessa forma mostramos que o teorema vale também para $i = n$.

O caso em que $a = 0$ é um caso particular do que acabamos de demonstrar. Pela Fig. 3.9 vemos que os dois primeiros triângulos que compartilham o vértice 0 são $(P_3)_{E_1}^{0, \frac{1}{2}}$ e $(P_3)_{E_2}^{0, \frac{1}{3}}$ que formam o quadrilátero $(P_4)_{E_1}^{0, \frac{1}{2}}$. Dessa forma, podemos ver que $(P_4)_{E_1}^{0, \frac{1}{2}} = (P_3)_{E_{2 \cdot 1 - 1}}^{0, \frac{1}{2 \cdot 1}} \cup (P_3)_{E_{2 \cdot 1}}^{0, \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}}$, ou seja, sabemos que a expressão vale para $i = 1$. Aproveitando o resultado já obtido na demonstração anterior, fazendo $\frac{p}{q} = \frac{0}{1}$ e $\frac{v}{q} = \frac{1}{2i}$, temos que:

$$\begin{aligned} (P_4)_{E_i}^{0, \frac{1}{2i}} &= (P_3)_{E_{2i-1}}^{0, \frac{1}{2i}} \cup (P_3)_{E_{2i}}^{0, \frac{0+1}{1+2i}} \\ &= (P_3)_{E_{2i-1}}^{0, \frac{1}{2i}} \cup (P_3)_{E_{2i}}^{0, \frac{1}{2i+1}}. \end{aligned}$$

A demonstração para os polígonos do tipo FD é similar às demonstrações anteriores e por isso será omitida. ■

Se observamos a Fig. 3.2, vemos que sob cada triângulo do tipo E temos abaixo dele um triângulo do tipo D que compartilha com este uma aresta e dois vértices. O próximo teorema estabelece a alternância de polígonos do tipo FE e FD .

Teorema 3.6 *Sejam v_1, v_2, v_3, v_4 um conjunto de vértices de um polígono qualquer de 4 lados do tipo FE , $(P_4)_{E_i}^{v_1, v_4}$ e sejam $C(\gamma((v_1, v_2)))$, $C(\gamma((v_2, v_3)))$ e $C(\gamma((v_3, v_4)))$ as geodésicas que unem cada par de vértices desse polígono. Abaixo dessas geodésicas, teremos 3 novos polígonos que serão da seguinte forma: um do tipo FE e dois do tipo FD ou seja, $(P_4)_{E_{i+1}}^{v_1, v_2}$, $(P_4)_{D_1}^{v_2, v_3}$ e $(P_4)_{D_1}^{v_3, v_4}$. De forma análoga, para um polígono do tipo FD , $(P_4)_{D_i}^{v_1, v_4}$ define abaixo dele dois polígonos do tipo FE e um do tipo FD : $(P_4)_{E_1}^{v_1, v_2}$, $(P_4)_{E_1}^{v_2, v_3}$ e $(P_4)_{D_{i+1}}^{v_3, v_4}$.*

Demonstração:

Nas Figs. 3.11 e 3.12 podemos ver dois tipos de polígonos, um do tipo FE , $(P_4)_{E_i}^{v_1, v_4}$ e outro do tipo FD , $(P_4)_{D_i}^{v_1, v_4}$, respectivamente. Começando pelo triângulo do tipo FE , o Teorema 3.4 estabelece que independente de um triângulo ser do tipo D ou do tipo E , com vértices v_1, v_2 e v_3 , abaixo da geodésica $C(\gamma(v_1, v_2))$ temos sempre um triângulo do tipo E e abaixo de $C(\gamma(v_2, v_3))$ um triângulo do tipo D .

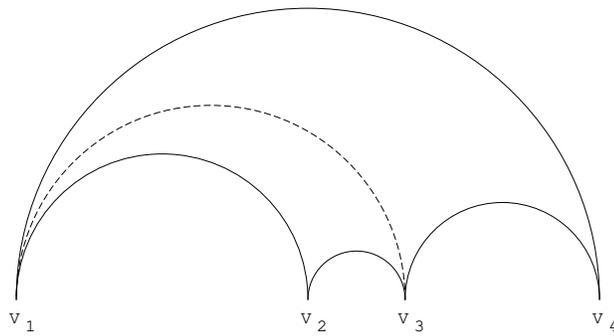


Figura 3.11: Polígono de 4 lados do tipo E.

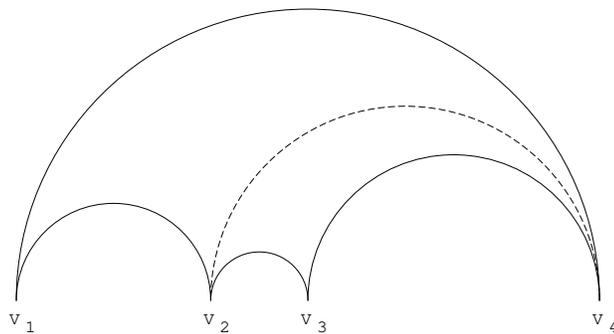


Figura 3.12: Polígono de 4 lados do tipo D.

No polígono mostrado na Fig. 3.11, abaixo de $C(\gamma(v_1, v_2))$ temos um triângulo do tipo E , abaixo de $C(\gamma(v_2, v_3))$ um triângulo do tipo D e abaixo de $C(\gamma(v_3, v_4))$, outro triângulo do tipo

D. Como pela Definição 3.5 os polígonos são sempre formados por triângulos do mesmo tipo, segue que abaixo dessas geodésicas temos 3 polígonos: 1 do tipo FE e dois do tipo FD , ou seja, $(P_4)_{E_{i+1}}$, $(P_4)_{D_1}$ e $(P_4)_{D_1}$.

Para o polígono do tipo FD mostrado na Fig. 3.12, abaixo de $C(\gamma(v_1, v_2))$ temos um triângulo do tipo E , abaixo de $C(\gamma(v_2, v_3))$ um triângulo do tipo E e abaixo de $C(\gamma(v_3, v_4))$ um triângulo do tipo D . Da Definição 3.5, segue que abaixo das mesmas geodésicas temos os seguintes polígonos: $(P_4)_{E_1}$, $(P_4)_{E_1}$ e $(P_4)_{D_{i+1}}$. ■

Utilizando os resultados dos Teoremas 3.5 e 3.6, podemos obter dessa forma todos os polígonos de quatro lados a partir da informação dos vértices relacionados aos polígonos que estão sobre eles. Com esses novos polígonos de 4 lados, temos uma nova tesselação de \mathbb{H}^2 formada por quadriláteros elementares, como pode ser vista na Fig. 3.13, onde as linhas pontilhadas representam os triângulos que foram utilizados para formar a nova tesselação.

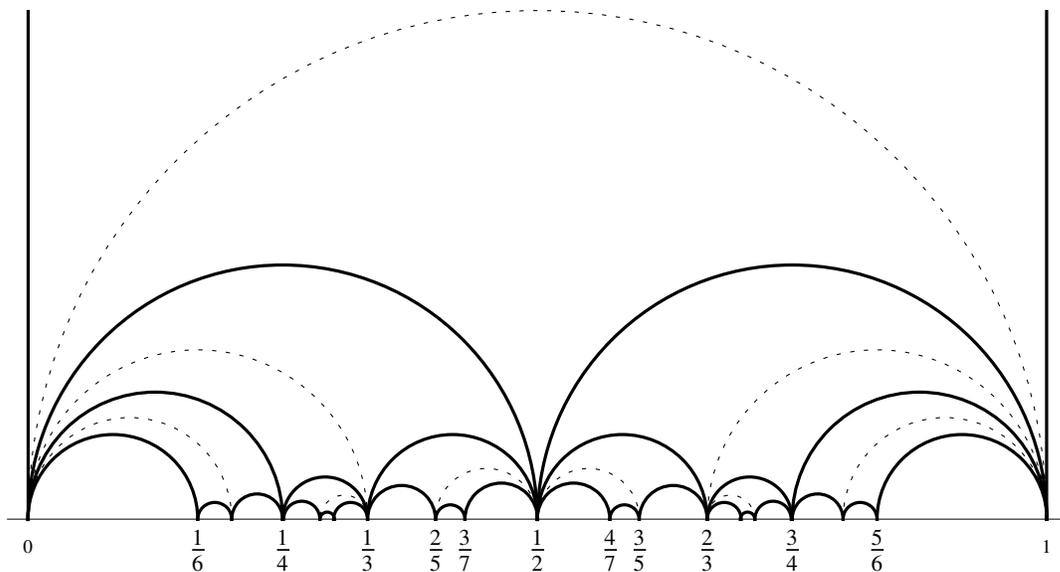


Figura 3.13: Tesselação formada por polígonos de 4 lados no intervalo $[0, 1]$.

Agora, de uma forma similar a que utilizamos para a formação dos polígonos de quatro lados, podemos também obter polígonos de $2n$ lados através dos quais novas tesselações formadas por polígonos de $2n$ lados são construídas. Pela forma de construção dos polígonos a ser apresentada, a união de $2n - 2$ triângulos fornecerá um polígono com $2n$ lados. Isto pode ser facilmente visto no caso dos polígonos de 4 lados e nos exemplos que serão mostrados ao longo deste trabalho. Para formarmos uma região de Dirichlet de $2n$ lados, com $n > 2$, vamos definir:

Definição 3.6 Uma região de Dirichlet de $2n$ lados é formado pela união dos triângulos $(P_3)_{E_0}^{0,\infty}$ e $(P_3)_{E_0}^{0,1}$, juntamente com a união de $n - 2$ triângulos do tipo E e D com índices consecutivos. Os triângulos do tipo E possuem o vértice 0 em comum e os de tipo D , o vértice 1 em comum.

Para os polígonos localizados abaixo da região de Dirichlet, temos:

Definição 3.7 Um polígono qualquer de $2n$ lados é formado pela união de $2n - 2$ triângulos com índices consecutivos.

A partir das Definições 3.6 e 3.7 vemos que se juntarmos quatro triângulos, obtemos um polígono de seis lados onde a região de Dirichlet é dada por:

$$(P_6)_{E_0}^{0,\infty} = (P_3)_{E_0}^{0,\infty} \cup (P_3)_{E_0}^{0,1} \cup (P_3)_{E_1}^{0,\frac{1}{2}} \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{2},1}. \quad (3.5)$$

Repetindo o mesmo processo de união dos triângulos utilizado para gerar os polígonos de quatro lados e através da Definição 3.7 podemos, ao juntar os triângulos quatro-a-quatro, obter uma nova tesselação de \mathbb{H}^2 formada agora por polígonos de seis lados como mostra a Fig. 3.14.

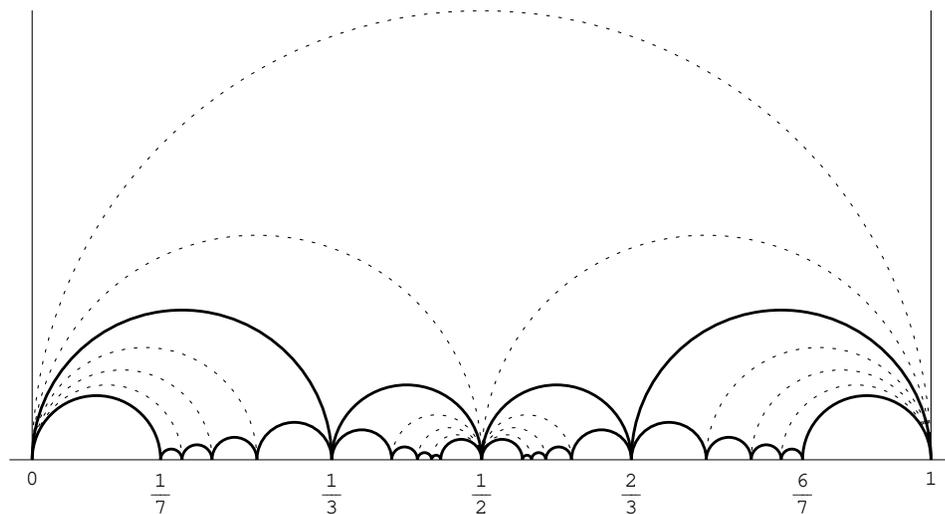


Figura 3.14: Tesselação formada por polígonos de 6 lados no intervalo $[0, 1]$.

Juntando os triângulos seis-a-seis, obtemos polígonos de oito lados onde a região de Dirichlet é dada por:

$$(P_8)_{E_0}^{0,\infty} = (P_3)_{E_0}^{0,\infty} \cup (P_3)_{E_0}^{0,1} \cup (P_3)_{E_1}^{0,\frac{1}{2}} \cup (P_3)_{E_2}^{0,\frac{1}{3}} \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{2},1} \cup (P_3)_{D_2}^{\frac{2}{3},1}. \quad (3.6)$$

A partir desses polígonos temos uma nova tesselação de \mathbb{H}^2 formada por polígonos de oito lados onde cada polígono possui vértices pertencentes à série de Farey (\mathbb{F}_n) . Consequentemente,

para tesselações de \mathbb{H}^2 formadas por polígonos de $2n$ lados, podemos estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 3.7 *A região de Dirichlet para uma tesselação formada por polígonos de $2n$ lados é dada por:*

$$(P_{2n})_{E_0}^{0,\infty} = (P_3)_{E_0}^{0,\infty} \cup (P_3)_{E_0}^{0,1} \bigcup_{i=1}^{n-2} (P_3)_{E_i}^{0,\frac{1}{i+1}} \bigcup_{j=1}^{n-2} (P_3)_{D_j}^{\frac{j}{j+1},1} \quad (3.7)$$

Demonstração:

Já vimos que essa fórmula vale para $n = 2$ quando consideramos o caso do polígono de 4 lados e $n = 3$ através da equação (3.5). Por indução, vamos supor que vale para $n - 1$. Se isso é verdade, temos:

$$\begin{aligned} (P_{2(n-1)})_{E_0}^{0,\infty} &= (P_3)_{E_0}^{0,\infty} \cup (P_3)_{E_0}^{0,1} \bigcup_{i=1}^{n-1-2} (P_3)_{E_i}^{0,\frac{1}{i+1}} \bigcup_{j=1}^{n-1-2} (P_3)_{D_j}^{\frac{j}{j+1},1} \\ &= (P_3)_{E_0}^{0,\infty} \cup (P_3)_{E_0}^{0,1} \cup (P_3)_{E_1}^{0,\frac{1}{2}} \cup (P_3)_{E_2}^{0,\frac{1}{3}} \cup \dots \cup (P_3)_{E_{n-3}}^{0,\frac{1}{n-2}} \cup \\ &\quad (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{2},1} \cup (P_3)_{D_2}^{\frac{2}{3},1} \cup \dots \cup (P_3)_{D_{n-3}}^{\frac{n-3}{n-2},1}. \end{aligned}$$

Uma região de Dirichlet de $2n$ lados será formada por um polígono de $2(n - 1)$ lados, acrescentando-se mais um triângulo do tipo D com vértice direito em 1 e mais um do tipo E com vértice esquerdo em 0, como uma consequência da Definição 3.6. Isto porque ao juntarmos aos triângulos anteriores esses dois novos triângulos passamos a ter mais 2 vértices (um em cada lado) e, conseqüentemente, mais duas arestas e, portanto, o polígono passa a ter $2(n - 1) + 2 = 2n - 2 + 2 = 2n$ lados.

No polígono $(P_{2(n-1)})_{E_0}^{0,\infty}$, o último triângulo do tipo E na seqüência é o $(P_3)_{E_{n-3}}^{0,\frac{1}{n-2}}$. Portanto, o próximo triângulo tipo E na seqüência com vértice esquerdo em 0 é aquele com o vértice no próximo elemento da seqüência de Farey entre 0 e $\frac{1}{n-2}$. Este vértice é dado por: $\frac{1+0}{n-2+1} = \frac{1}{n-1}$ e o triângulo é o $(P_3)_{E_{n-3+1}}^{0,\frac{1}{n-1}}$.

O último triângulo do tipo D na seqüência é o $(P_3)_{D_{n-3+1}}^{\frac{n-3}{n-2},1}$. Portanto, o próximo triângulo tipo D na seqüência com vértice direito em 1 será aquele com o vértice no próximo elemento da seqüência de Farey entre $\frac{n-3}{n-2}$ e 1. Este vértice é dado por: $\frac{n-3+1}{n-2+1} = \frac{n-2}{n-1}$ e o triângulo é o $(P_3)_{D_{n-3+1}}^{\frac{n-2}{n-1},1}$. Substituindo, temos:

$$\begin{aligned}
(P_{2n})_{E_0}^{0,\infty} &= (P_{2(n-1)})_{E_0}^{0,\infty} \cup (P_3)_{E_{n-2}}^{0,\frac{1}{n-1}} \cup (P_3)_{D_{n-2}}^{\frac{n-2}{n-1},1} \\
&= (P_3)_{E_0}^{0,\infty} \cup (P_3)_{E_0}^{0,1} \bigcup_{i=1}^{n-1-2} (P_3)_{E_i}^{0,\frac{1}{i+1}} \bigcup_{j=1}^{n-1-2} (P_3)_{D_j}^{\frac{j}{j+1},1} \cup (P_3)_{E_{n-2}}^{0,\frac{1}{n-1}} \cup (P_3)_{D_{n-2}}^{\frac{n-2}{n-1},1} \\
&= (P_3)_{E_0}^{0,\infty} \cup (P_3)_{E_0}^{0,1} \bigcup_{i=1}^{n-1-2} (P_3)_{E_i}^{0,\frac{1}{i+1}} \cup (P_3)_{E_{n-2}}^{0,\frac{1}{n-1}} \bigcup_{j=1}^{n-1-2} (P_3)_{D_j}^{\frac{j}{j+1},1} \cup (P_3)_{D_{n-2}}^{\frac{n-2}{n-1},1} \\
&= (P_3)_{E_0}^{0,\infty} \cup (P_3)_{E_0}^{0,1} \bigcup_{i=1}^{n-2} (P_3)_{E_i}^{0,\frac{1}{i+1}} \bigcup_{j=1}^{n-2} (P_3)_{D_j}^{\frac{j}{j+1},1}.
\end{aligned}$$

Mostramos assim que se o resultado é válido para $n - 1$, também vale para n e, portanto, concluímos a demonstração. ■

No caso de $2n = 4$, já vimos através do Teorema 3.6 que sempre existe uma alternância entre polígonos do tipo FE e FD . Vimos também que abaixo de um polígono de quatro lados teremos sempre três polígonos que compartilham uma aresta com o polígono anterior tal que se este é do tipo FE , os abaixo serão do tipo: FE , FD e FD . Agora, se o polígono anterior for do tipo FD , os abaixo serão do tipo: FE , FE e FD .

Utilizando o resultado do Teorema 3.4, podemos generalizar esse resultado para o caso do polígono de $2n$ lados ($n \geq 2$).

Propriedade 3.1 *Seja um polígono de $2n$ lados. Os polígonos abaixo do polígono fundamental $(P_{2n})_{E_0}^{0,\infty}$ são sempre da forma: $FE, \underbrace{FD, \dots, FD}_{n-2 \text{ vezes}}, \underbrace{FE, \dots, FE}_{n-2 \text{ vezes}}, FD$.*

Para os polígonos subsequentes, o tipo dos polígonos é dado por $FE, \underbrace{FD, \dots, FD}_{2n-2 \text{ vezes}}$ sempre que tivermos um polígono do tipo FE , $(P_{2n})_{E_i}^{\frac{p}{q}, \frac{v}{w}}$, e por $\underbrace{FE, \dots, FE}_{2n-2 \text{ vezes}}, FD$ sempre que tivermos um polígono do tipo FD , $(P_{2n})_{D_i}^{\frac{p}{q}, \frac{v}{w}}$.

Teremos também a seguinte propriedade que segue diretamente da Definição 3.7:

Propriedade 3.2 *Seja $(P_{2n})_X^{v_1, v_{2n}}$ um polígono de $2n$ lados. Quando o polígono é do tipo FE , ele é formado apenas por triângulos do tipo E . De forma equivalente, se é do tipo FD , ele é formado apenas por triângulos do tipo D .*

Quando $2n > 3$, a obtenção de todos os vértices a partir apenas da informação dos vértices mais distantes não é trivial já que neste caso, não podemos aplicar diretamente o resultado do

Teorema 3.1. Todavia, a Propriedade 3.2 nos permite obter uma fórmula geral para a obtenção dos vértices de cada polígono.

Considere um polígono de $2n$ lados $(P_{2n})_X^{v_1, v_{2n}}$ tal que $v_1 < v_2 < \dots < v_{2n}$, com $v_1, v_2, \dots, v_{2n} \in \mathbb{F}_m$. Para a obtenção dos vértices desse polígono, devemos determinar os $2n - 2$ maiores elementos da série de Farey que estão entre v_1 e v_{2n} . A forma usual utilizada para a obtenção desses números é aplicar o seguinte procedimento:

Se $v_1 = \frac{p}{q}$ e $v_{2n} = \frac{\nu}{w}$, utilizando o resultado do Teorema 3.1, podemos obter inicialmente o elemento $\frac{p + \nu}{q + w}$ tal que

$$\dots, \frac{p}{q}, \frac{p + \nu}{q + w}, \frac{\nu}{w}, \dots$$

Agora, aplicando novamente o resultado do mesmo teorema a esses três números, sabendo que eles pertencem a algum \mathbb{F}_m , temos:

$$\dots, \frac{p}{q}, \frac{p + p + \nu}{q + q + w}, \frac{p + \nu}{q + w}, \frac{p + \nu + \nu}{q + w + w}, \frac{\nu}{w}, \dots$$

ou seja, se $\frac{p}{q} = \frac{3}{5}$ e $\frac{\nu}{w} = \frac{2}{3}$, temos:

$$\dots, \frac{3}{5}, \frac{8}{13}, \frac{5}{8}, \frac{7}{11}, \frac{2}{3}, \dots$$

Aplicando novamente o resultado do Teorema 3.1:

$$\dots, \frac{3}{5}, \frac{11}{18}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{5}{8}, \frac{12}{19}, \frac{7}{11}, \frac{9}{14}, \frac{2}{3}, \dots$$

Repetindo esse mesmo procedimento até obtermos pelo menos $2n - 2$ elementos entre v_1 e v_{2n} , basta em seguida tomarmos os $2n - 2$ maiores valores como sendo os vértices do polígono. Este método apesar de simples é trabalhoso.

Utilizando a Propriedade 3.2 podemos desenvolver uma fórmula geral para a obtenção dos vértices de um polígono de $2n$ lados a partir dos seus vértices mais distantes.

Teorema 3.8 *Sejam v_1 e v_{2n} vértices de um polígono de $2n$ lados, $(P_{2n})_X^{v_1, v_{2n}}$ com $v_1, v_{2n} \in \mathbb{F}_m$ para algum $m > 2$. Os elementos da série de Farey, vértices desses polígonos que estão entre $v_1 = \frac{p}{q}$ e $v_{2n} = \frac{\nu}{w}$, tal que $v_2 < v_3 < \dots < v_{2n-1}$ são dados por:*

Se $X = E$, temos:

$$\text{Quando } v_1 \neq 0, v_{2n-i} = \frac{pi + \nu}{qi + w}.$$

$$\text{Se } v_1 = 0, v_{2n} \text{ é da forma } v_{2n} = \frac{1}{2k} \text{ e } v_{2n-i} = \frac{1}{2k + i}.$$

Se $X = D$, temos:

Quando $v_{2n} \neq 1$, $v_i = \frac{p + \nu i}{q + wi}$.

Se $v_{2n} = 1$, $v_i = \frac{p + (i - 1)}{q + (i - 1)}$, com $i = 1, \dots, 2n - 2$.

Demonstração:

Sabemos pela Propriedade 3.2 que todo polígono abaixo do primeiro polígono é formado apenas por triângulos do mesmo tipo. Além disso, vimos que cada polígono é formado por $2n - 2$ triângulos. Vamos começar com o caso de $X = E$ e $p \neq 0$.

Para $n = 2$, temos um polígono de 4 lados. Na demonstração do Teorema 3.5, já vimos que seus vértices são $\frac{p}{q}$, $\frac{2p+q}{2q+w}$, $\frac{p+\nu}{q+w}$ e $\frac{\nu}{w}$. Neste caso $v_1 = \frac{p}{q}$, $v_2 = \frac{2p+q}{2q+w}$, $v_3 = \frac{p+\nu}{q+w}$ e $v_4 = \frac{\nu}{w}$. Estes vértices podem ser reescritos como,

$$v_{4-1} = v_3 = \frac{p(1) + \nu}{q(1) + w} \quad \text{e} \quad v_{4-2} = v_2 = \frac{p(2) + \nu}{q(2) + w},$$

ou seja, o resultado do teorema vale para $n = 2$. Por indução, vamos supor que é verdadeiro para $n - 1$, ou seja que o resultado do teorema vale para $2(n - 1)$. Agora, temos que $v_{2n-2-i} = \frac{pi+\nu}{qi+w}$ com $i = 1, \dots, 2n - 4$. Isto significa que os vértices de $(P_{2(n-1)})_{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}}^E$ são dados por: $v_{2n-2-(2n-4)} = v_2$, $v_{2n-2-(2n-5)} = v_3$, ..., $v_{2n-2-2} = v_{2n-4}$ e $v_{2n-2-1} = v_{2n-3}$, ou seja,

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{p}{q} & v_2 &= \frac{p(2n-4) + \nu}{q(2n-4) + w} & v_3 &= \frac{p(2n-5) + \nu}{q(2n-5) + w} \\ & & & \dots & & \\ v_{2n-4} &= \frac{2p + \nu}{2q + w} & v_{2n-3} &= \frac{p + \nu}{q + w} & v_{2n-2} &= \frac{\nu}{w} \end{aligned}$$

Um polígono de $2(n - 1)$ lados é formado por $2(n - 1) - 2 = 2n - 4$ triângulos. Agora um polígono de $2n$ lados será formado por $2n - 2$ triângulos consecutivos. Para obtermos um polígono de $2n$ lados, devemos acrescentar na sequência de vértices anterior, mais dois vértices referentes a mais dois triângulos na sequência, como pode ser visto na Fig. 3.15.

Para obter um polígono de $2n$ lados onde $v_1 = \frac{p}{q}$ e $v_{2n} = \frac{\nu}{w}$, devemos considerar mais dois triângulos que compartilham o vértice $\frac{p}{q}$, que sejam consecutivos aos triângulos anteriores. Os vértices desses triângulos serão os próximos elementos da série de Farey que estejam entre $\frac{p}{q}$ e $\frac{p(2n-4)+\nu}{q(2n-4)+w}$. Estes triângulos são:

$$\text{Triângulo 1: } v_1 = \frac{p}{q}, v_2 = \frac{p + p(2n-4) + \nu}{q + q(2n-4) + w} \text{ e } v_3 = \frac{p(2n-4) + \nu}{q(2n-4) + w}.$$

$$\text{Triângulo 2: } v_1 = \frac{p}{q}, v_2 = \frac{p + p(2n-3) + \nu}{q + q(2n-3) + w} \text{ e } v_3 = \frac{p(2n-3) + \nu}{q(2n-3) + w}.$$

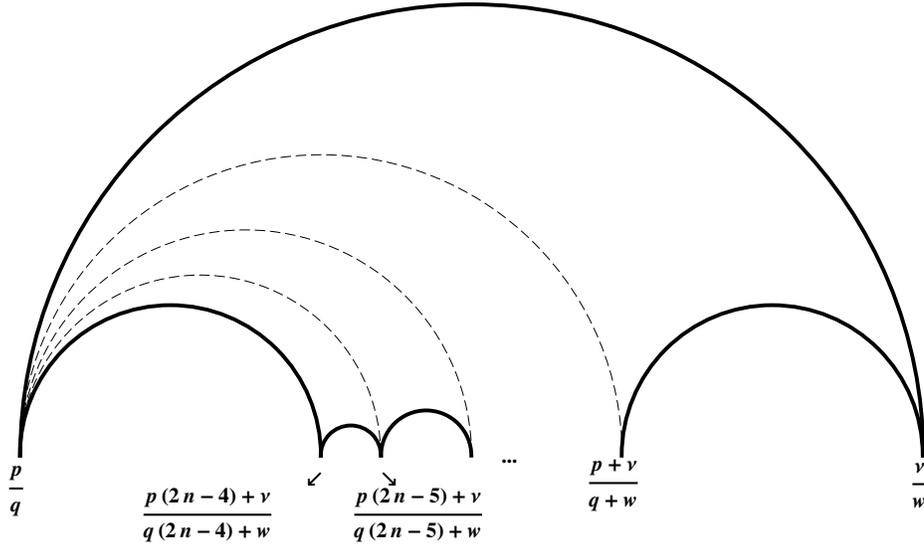


Figura 3.15: Polígono de $2(n - 1)$ lados.

Sendo assim, o polígono de $2n$ lados possuirá vértices:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{p}{q} & v_2 &= \frac{p(2n-2)+v}{q(2n-2)+w} & v_3 &= \frac{p(2n-3)+v}{q(2n-3)+w} \\
 & & \dots & & & \\
 v_{2n-2} &= \frac{2p+v}{2q+w} & v_{2n-1} &= \frac{p+v}{q+w} & v_{2n} &= \frac{v}{w}
 \end{aligned}$$

Agora, podemos escrever os primeiros vértices como: $v_2 = v_{2n-(2n-2)}$ e $v_3 = v_{2n-(2n-3)}$. Portanto, temos que $v_{2n-i} = \frac{pi+v}{qi+w}$ com $i = 1, \dots, 2n-2$, ou seja, a fórmula dos vértices vale também para $(P_{2n})_{\frac{p}{q}, \frac{v}{w}}$.

O caso em que $a = 0$ é um caso particular do caso anterior. Na demonstração do Teorema 3.5 vemos que os triângulos que compartilham o vértice esquerdo 0, tem vértices que podem ser escritos na forma $\frac{1}{k}$ ou $\frac{1}{2k}$ e $\frac{1}{2k+1}$ se separarmos os vértices em dois grupos, os de índice par e os de índice ímpar. Como um polígono de $2n$ lados sempre tem um número par de vértices podemos considerar que v_{2n} é da forma, $v_{2n} = \frac{1}{2k}$. Fazendo $\frac{p}{q} = \frac{0}{1}$ e substituindo na expressão que acabamos de mostrar ser verdadeira para polígonos de $2n$ lados, temos:

$$v_{2n-i} = \frac{pi+v}{qi+w} = \frac{0+1}{(1)i+2k} = \frac{1}{2k+i}.$$

A demonstração para $X = D$ é similar às anteriores e por isso não será apresentada. ■

3.2.2 Tesselações de \mathbb{H}^2 formadas por polígonos de $2n + 1$ lados

Até agora, vimos com obter tesselações em \mathbb{H}^2 formadas por polígonos com número par de lados, obtendo as fórmulas para os polígonos de 4 lados e alguns resultados generalizados para $2n$. Podemos obter também tesselações formadas por polígonos de $2n + 1$ lados ($n \geq 2$) a partir dos mesmos triângulos elementares. Nesta direção, vamos começar escolhendo um polígono de cinco lados.

Para obtermos um polígono de 5 lados vamos considerar dois triângulos consecutivos com um vértice em comum e para o triângulo com maior distância entre seu vértices v_1 e v_3 (ou o triângulo com menor índice), considerar o próximo triângulo abaixo da geodésica que une v_2 e v_3 . Por exemplo, se $(P_3)_{E_i}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}}$ e $(P_3)_{E_{i+1}}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu'}{w'}}$, pela definição dos triângulos, temos $d(\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}) > d(\frac{p}{q}, \frac{\nu'}{w'})$. Assim, consideraremos o triângulo $(P_3)_{D_1}^{\frac{\nu'}{w'}, \frac{\nu}{w}}$ abaixo da geodésica $C(\gamma(\frac{\nu'}{w'}, \frac{\nu}{w}))$ como pode ser visto na Fig. 3.16.

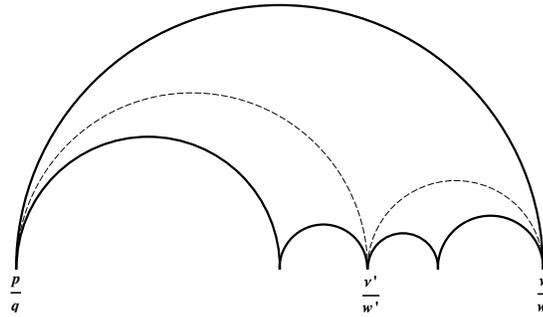


Figura 3.16: Polígono de 5 lados do tipo FE .

Seguindo esse raciocínio temos:

Definição 3.8 Um polígono qualquer de 5 lados é dado por:

$$(P_5)_{E_k}^{v_c, v_i} = (P_3)_{E_i}^{v_c, v_i} \cup (P_3)_{E_{i+1}}^{v_c, v_{i+1}} \cup (P_3)_{D_1}^{v_i, v_{i+1}},$$

quando for do tipo E e,

$$(P_5)_{D_k}^{v_i, v_c} = (P_3)_{D_i}^{v_i, v_c} \cup (P_3)_{D_{i+1}}^{v_{i+1}, v_c} \cup (P_3)_{E_1}^{v_i, v_{i+1}},$$

se for do tipo D , de tal forma que os polígonos são sempre disjuntos entre si.

Para a construção de uma tesselação em \mathbb{H}^2 formada por polígonos de cinco lados, a região de Dirichlet é formada pela junção dos seguintes triângulos:

$$(P_5)_{E_0}^{0,\infty} = (P_3)_{E_0}^{0,\infty} \cup (P_3)_{E_0}^{0,1} \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{2},1}.$$

Este polígono possui vértices em $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ e 1 pertencentes ao eixo real. A tesselação em \mathbb{H}^2 formada por polígonos de cinco lados pode ser vista na Fig. 3.17.

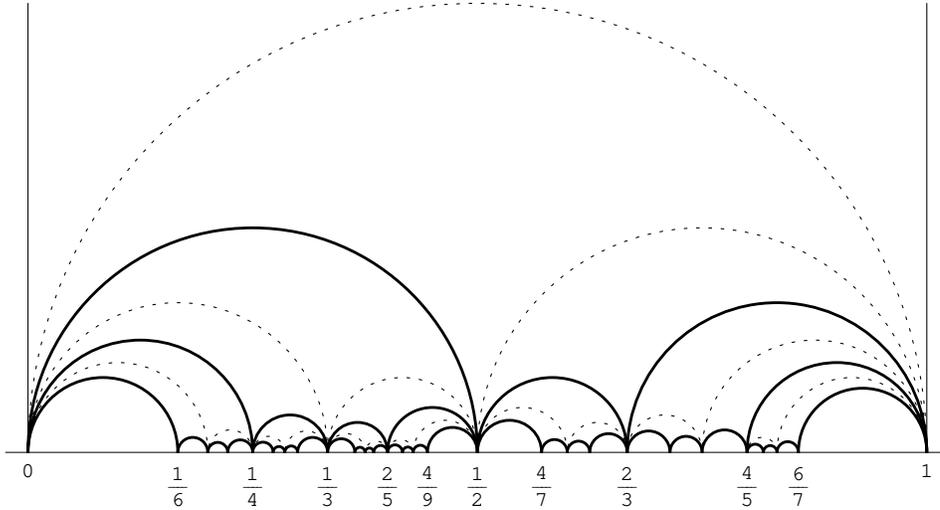


Figura 3.17: Tesselação formada por polígonos de 5 lados no intervalo $[0, 1]$.

A obtenção de uma fórmula geral para polígonos de 5 lados é possível, porém trabalhosa. Neste caso, a informação que temos sobre a alternância de triângulos do tipo D e E é essencial para a obtenção dessas fórmulas e dos códigos associados.

Com relação ao tipo de polígono que vem abaixo de um polígono de 5 lados, através do Teorema 3.4 podemos ver que a seguinte propriedade sempre vale:

Propriedade 3.3 *Seja $(P_5)_X^{v_1, v_5}$ um polígono de 5 lados, onde $v_1 < v_2 < v_3 < v_4 < v_5$ e $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \mathbb{F}_m$ para algum $m > 2$. Abaixo da região de Dirichlet, sob as geodésicas $C(\gamma(v_1, v_2))$, $C(\gamma(v_2, v_3))$ e $C(\gamma(v_3, v_4))$, os polígonos são do tipo FE, FE e FD. Para os outros polígonos, abaixo das geodésicas $C(\gamma(v_1, v_2))$, $C(\gamma(v_2, v_3))$, $C(\gamma(v_3, v_4))$ e $C(\gamma(v_4, v_5))$ os polígonos são do tipo FE, FD, FE e FD independente do valor de X.*

Agora, para obtermos os polígonos de 5 lados através dos triângulos elementares, podemos utilizar a Propriedade 3.4.

Propriedade 3.4 *Seja $(P_5)_X^{v_1, v_5}$ um polígono de 5 lados, onde $v_1 < v_2 < v_3 < v_4 < v_5$ e $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \mathbb{F}_m$ para algum $m > 2$. Os polígonos abaixo desse polígono são dados por:*

Abaixo de $C(\gamma(v_1, v_2))$: O polígono é do tipo FE . Se o polígono anterior for do tipo FE , $(P_5)_{E_j}^{v_1, v_5}$, temos:

Se $v_1 = 0$, v_2 é da forma $\frac{1}{2i}$ e o polígono é dado por:

$$(P_5)_{E_i}^{0, \frac{1}{2i}} = (P_3)_{E_{2i-1}}^{0, \frac{1}{2i}} \cup (P_3)_{E_{2i}}^{0, \frac{1}{2i+1}} \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{2i+1}, \frac{1}{2i}},$$

onde $i \geq j + 1$. Se $v_1 \neq 0$ com $v_1 = \frac{p}{q}$, v_2 é da forma $\frac{\nu}{w}$ e o polígono é dado por:

$$(P_5)_{E_i}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} = (P_3)_{E_{2i-1}}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} \cup (P_3)_{E_{2i}}^{\frac{p}{q}, \frac{p+\nu}{q+w}} \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{\nu}{w}, \frac{p+\nu}{q+w}}, \quad (3.8)$$

onde $i \geq 2$. Se o polígono anterior for do tipo FD , temos:

$$(P_5)_{E_i}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} = (P_3)_{E_{2i}}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} \cup (P_3)_{E_{2i+1}}^{\frac{p}{q}, \frac{p+\nu}{q+w}} \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{\nu}{w}, \frac{p+\nu}{q+w}}, \quad (3.9)$$

onde $i \geq 1$.

Abaixo de $C(\gamma(v_2, v_3))$: O polígono é do tipo FD e sempre é dado por:

$$(P_5)_{D_i}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} = (P_3)_{D_{2i-1}}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} \cup (P_3)_{D_{2i}}^{\frac{p+\nu}{q+w}, \frac{\nu}{w}} \cup (P_3)_{E_1}^{\frac{p}{q}, \frac{p+\nu}{q+w}},$$

onde $i \geq 1$.

Abaixo de $C(\gamma(v_3, v_4))$: O polígono é do tipo FE e sempre é dado por:

$$(P_5)_{E_i}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} = (P_3)_{E_{2i-1}}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} \cup (P_3)_{E_{2i}}^{\frac{p}{q}, \frac{p+\nu}{q+w}} \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{\nu}{w}, \frac{p+\nu}{q+w}},$$

onde $i \geq 1$.

Abaixo de $C(\gamma(v_4, v_5))$: O polígono é do tipo FD . Se o polígono anterior for do tipo FE temos:

$$(P_5)_{D_i}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} = (P_3)_{D_{2i}}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} \cup (P_3)_{D_{2i+1}}^{\frac{p+\nu}{q+w}, \frac{\nu}{w}} \cup (P_3)_{E_1}^{\frac{p}{q}, \frac{p+\nu}{q+w}},$$

onde $i \geq 1$. Se o polígono anterior for do tipo FD temos as seguintes condições:

Se $v_5 = 1$, v_4 é da forma $\frac{2i}{2i+1}$ e é dado por:

$$(P_5)_{D_i}^{\frac{2i}{2i+1}, 1} = (P_3)_{D_{2i}}^{\frac{2i}{2i+1}, 1} \cup (P_3)_{D_{2i+1}}^{\frac{2i+1}{2i+2}, 1} \cup (P_3)_{E_1}^{\frac{2i}{2i+1}, \frac{2i+1}{2i+2}},$$

onde $i \geq j + 1$. Se $v_5 \neq 1$, o polígono é dado por:

$$(P_5)_{D_i}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} = (P_3)_{D_{2i-1}}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} \cup (P_3)_{D_{2i}}^{\frac{p+\nu}{q+w}, \frac{\nu}{w}} \cup (P_3)_{E_1}^{\frac{p}{q}, \frac{p+\nu}{q+w}},$$

onde $i \geq 2$.

Agora, pode-se ver que apesar das fórmulas serem um pouco mais complexas para $n = 5$, elas possuem uma lógica de construção que nos permite definir regras para polígonos de $2n + 1$ lados, com $n \geq 2$. Ou seja, a partir da tesselação de polígonos de 5 lados, seguindo um raciocínio análogo podemos obter outras tesselações em \mathbb{H}^2 para polígonos de $2n + 1$ lados.

Para formarmos um primeiro polígono de $2n + 1$ lados, com $n \geq 2$, temos:

Definição 3.9 *Uma região de Dirichlet de $2n + 1$ lados é formada pela união do triângulo $(P_3)_{E_0}^{0,\infty}$ com $n - 1$ pares de triângulos formados por triângulos do tipo E de índices consecutivos (começando no índice 0) que compartilham o vértice 0, com triângulos do tipo D que ficam abaixo da geodésica $C(\gamma(v_2, v_3))$ de cada um destes triângulos.*

Para os polígonos abaixo da região de Dirichlet, temos:

Definição 3.10 *Um polígono qualquer de $2n + 1$ lados é formado pela união de n triângulos consecutivos do mesmo tipo, juntamente com o triângulo que fica abaixo da geodésica $C(\gamma(v_2, v_3))$ dos $n - 1$ triângulos de menor índice.*

Como consequência das Definições 3.9 e 3.10, juntando cinco triângulos da forma estabelecida, podemos obter uma região de Dirichlet de sete lados dada por:

$$(P_7)_{E_0}^{0,\infty} = (P_3)_{E_0}^{0,\infty} \cup (P_3)_{E_0}^{0,1} \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{2},1} \cup (P_3)_{E_1}^{0,\frac{1}{2}} \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{3},\frac{1}{2}}. \quad (3.10)$$

Na construção do polígono de cinco lados, juntávamos dois triângulos e tomávamos um triângulo abaixo do primeiro dos dois triângulos, segundo a ordem $(P_3)_{E_i}^{v_c, v_1}$, $(P_3)_{E_{i+1}}^{v_c, v_2}$. No polígono de sete lados, juntamos agora três triângulos consecutivos (por exemplo $(P_3)_{E_i}^{v_c, v_1}$, $(P_3)_{E_{i+1}}^{v_c, v_2}$ e $(P_3)_{E_{i+2}}^{v_c, v_3}$) e tomamos os triângulos abaixo dos dois primeiros (abaixo das geodésicas $C(\gamma(v_1, v_2))$ e $C(\gamma(v_2, v_3))$) obtendo assim uma tesselação em \mathbb{H}^2 formada por polígonos de sete lados como pode ser vista na Fig. 3.18.

Para a construção de um polígono de nove lados, podemos juntar sete triângulos e obter o primeiro polígono:

$$(P_9)_{E_0}^{0,\infty} = (P_3)_{E_0}^{0,\infty} \cup (P_3)_{E_0}^{0,1} \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{2},1} \cup (P_3)_{E_1}^{0,\frac{1}{2}} \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{3},\frac{1}{2}} \cup (P_3)_{E_2}^{0,\frac{1}{3}} \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{4},\frac{1}{3}}.$$

Para todo polígono abaixo do primeiro polígono de nove lados, seguindo o mesmo raciocínio utilizado para os polígonos de cinco e sete lados, ao juntarmos quatro triângulos consecutivos e tomarmos os triângulos abaixo dos três primeiros, obtemos no total sete triângulos que juntos formam um polígono de nove lados. Generalizando este resultado para polígonos de $2n + 1$ lados, temos o seguinte teorema:

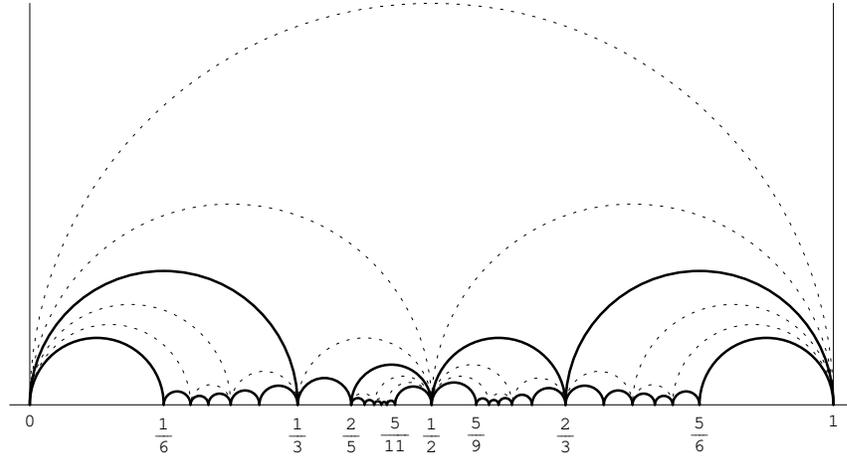


Figura 3.18: Tesselação formada por polígonos de 7 lados no intervalo $[0, 1]$.

Teorema 3.9 *A região de Dirichlet de uma tesselação formada por polígonos de $2n + 1$ lados é dada por:*

$$(P_{2n+1})_{E_0}^{0,\infty} = (P_3)_{E_0}^{0,\infty} \cup (P_3)_{E_0}^{0,1} \bigcup_{i=1}^{n-2} (P_3)_{E_i}^{0,\frac{1}{i+1}} \bigcup_{i=1}^{n-1} (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{i+1},\frac{1}{i}}. \quad (3.11)$$

Demonstração:

Já vimos que essa fórmula vale para $n = 2$ quando estudamos o caso do polígono de 5 lados e $n = 3$ através da equação (3.10). Por indução, vamos supor que vale para $n - 1$. Se isso é verdade, o polígono tem $2(n - 1) + 1 = 2n - 2 + 1 = 2n - 1$ lados e,

$$\begin{aligned} (P_{2n-1})_{E_0}^{0,\infty} &= (P_3)_{E_0}^{0,\infty} \cup (P_3)_{E_0}^{0,1} \bigcup_{i=1}^{n-1-2} (P_3)_{E_i}^{0,\frac{1}{i+1}} \bigcup_{i=1}^{n-1-1} (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{i+1},\frac{1}{i}} \\ &= (P_3)_{E_0}^{0,\infty} \cup (P_3)_{E_0}^{0,1} \cup (P_3)_{E_1}^{0,\frac{1}{2}} \cup (P_3)_{E_2}^{0,\frac{1}{3}} \cup \dots \cup (P_3)_{E_{n-3}}^{0,\frac{1}{n-2}} \\ &\quad \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{2},1} \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{3},\frac{1}{2}} \cup \dots \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{n-1},\frac{1}{n-2}}. \end{aligned}$$

O primeiro polígono de $2n$ lados é formado por um polígono de $2(n - 1)$ lados, juntando-se mais um triângulo do tipo E com vértice esquerdo em 0 e mais um do tipo D com vértice direito em v_3 , vértice do triângulo anterior como uma consequência da Definição 3.9. Isto porque ao juntarmos aos triângulos anteriores esses dois novos triângulos, passamos a ter mais 2 vértices e consequentemente mais duas arestas e, portanto, o polígono resultante passa a ter $2n - 1 + 2 = 2n + 1$ lados.

No polígono $(P_{2n-1})_{E_0}^{0,\infty}$, o último triângulo do tipo E na sequência é o $(P_3)_{E_{n-3}}^{0,\frac{1}{n-2}}$. Portanto, o próximo triângulo do tipo E na sequência com vértice esquerdo em 0 será aquele com o vértice no próximo termo da sequência de Farey entre 0 e $\frac{1}{n-2}$. Este vértice é dado por: $\frac{1+0}{n-2+1} = \frac{1}{n-1}$ e

o triângulo é o $(P_3)_{E_{n-3+1}}^{0, \frac{1}{n-1}}$.

O triângulo do tipo D que será acrescentado na sequência é o que fica abaixo da geodésica que liga o vértice v_3 ao v_2 do triângulo anterior. Neste caso, $v_3 = \frac{1}{n-1}$ e $v_2 = \frac{0+1}{1+n-1} = \frac{1}{n}$, assim este triângulo é o $(P_3)_{D_1}^{\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}}$. Substituindo, temos:

$$\begin{aligned}
(P_{2n})_{E_0}^{0, \infty} &= (P_{2n-1})_{E_0}^{0, \infty} \cup (P_3)_{E_{n-3+1}}^{0, \frac{1}{n-1}} \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}} \\
&= (P_3)_{E_0}^{0, \infty} \cup (P_3)_{E_0}^{0, 1} \bigcup_{i=1}^{n-3} (P_3)_{E_i}^{0, \frac{1}{i+1}} \bigcup_{i=1}^{n-2} (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}} \cup (P_3)_{E_{n-2}}^{0, \frac{1}{n-1}} \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}} \\
&= (P_3)_{E_0}^{0, \infty} \cup (P_3)_{E_0}^{0, 1} \cup (P_3)_{E_1}^{0, \frac{1}{2}} \cup (P_3)_{E_2}^{0, \frac{1}{3}} \cup \dots \cup (P_3)_{E_{n-3}}^{0, \frac{1}{n-2}} \cup (P_3)_{E_{n-2}}^{0, \frac{1}{n-1}} \\
&\quad \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{2}, 1} \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}} \cup \dots \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}} \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}} \\
&= (P_3)_{E_0}^{0, \infty} \cup (P_3)_{E_0}^{0, 1} \bigcup_{i=1}^{n-2} (P_3)_{E_i}^{0, \frac{1}{i+1}} \bigcup_{i=1}^{n-1} (P_3)_{D_1}^{\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}}.
\end{aligned}$$

Mostramos assim que se o resultado é válido para $n-1$, também vale para n e, portanto, concluímos a demonstração. ■

Através do Teorema 3.9 vemos que as tesselações são formadas agora por polígonos obtidos da união de $2 + n - 2 + n - 1 = 2n - 1$ triângulos. Com relação aos tipos de triângulos (se são do tipo FE ou FD) como consequência direta do Teorema 3.4 temos:

Propriedade 3.5 *Seja um polígono de $2n + 1$ lados ($n \geq 2$). Vamos definir: $(FD, FE)^n = \underbrace{FD, FE, \dots, FD, FE}_{n \text{ vezes}}$. Abaixo de $(P_{2n+1})_{E_0}^{0, \infty}$ temos: $FE, FE, (FD, FE)^{n-2}, FD$ e, para os outros polígonos abaixo destes temos sempre $(FE, FD)^n$.*

Para obtermos os vértices dos polígonos a partir de seus vértices mais distantes, utilizando os resultados do Teorema 3.8 podemos estabelecer um teorema válido para polígonos de $2n + 1$ lados. Agora, pela forma de construção dos polígonos, teremos uma fórmula para os vértices de índice par e outra para os vértices de índice ímpar.

Teorema 3.10 *Sejam v_1 e v_{2n+1} vértices de um polígono de $2n + 1$ lados, $(P_{2n+1})_X^{v_1, v_{2n+1}}$ tal que $v_1, v_{2n+1} \in \mathbb{F}_m$ para algum $m > 2$ e $v_1 = \frac{p}{q}$ e $v_{2n+1} = \frac{\nu}{w}$. Se $X = E$, temos:*

Quando $v_1 \neq 0$, os vértices de índice ímpar são dados por: $v_{2i+1} = \frac{(n-i)p + \nu}{(n-i)q + w}$, onde $i = 1, \dots, n-1$ e os vértices de índice par por: $v_{2i} = \frac{np + \nu}{nq + w}$ quando $i = 1$ e $v_{2i} = \frac{[2(n-i) + 1]p + 2\nu}{[2(n-i) + 1]q + 2w}$ para $i = 2, \dots, n$.

Quando $v_1 = 0$, para o caso dos vértices de índice ímpar temos: v_{2n+1} será da forma $v_{2n+1} = \frac{1}{k}$ e $v_{2i+1} = \frac{1}{k+n-i}$, com $i = 1, \dots, n-1$. Os vértices de índice par serão dados por $v_{2i} = \frac{1}{k+n}$ quando $i = 1$, e $v_{2i} = \frac{2}{2(k+n-i)+1}$ quando $i = 2, \dots, n$.

Se $X = D$, temos:

Quando $v_{2n+1} \neq 1$, os vértices de índice ímpar são dados por $v_{2i+1} = \frac{p+i\nu}{q+iw}$ com $i = 1, \dots, n$ e os vértices de índice par por $v_{2i} = \frac{2p+(2i-1)\nu}{2q+(2i-1)w}$ quando $i = 1, \dots, n-1$ e $v_{2i} = \frac{p+n\nu}{q+nw}$ quando $i = n$.

No caso de $v_{2n+1} = 1$, os vértices de índice ímpar são dados por $v_{2i+1} = \frac{p+i}{q+i}$, com $i = 1, \dots, n-1$ e os vértices de índice par por $v_{2i} = \frac{2p+2i-1}{2q+2i-1}$ para $i = 1, \dots, n-1$ e $v_{2i} = \frac{p+n}{q+n}$ para $i = n$.

Demonstração:

Vamos começar com o caso $X = E$ e $p \neq 0$. Se $n = 2$ então consideramos o polígono de 5 lados. Através das equações (3.8) e (3.9), vemos que se o polígono anterior for do tipo FE ou FD , haverá uma alteração nos índices dos triângulos que formam o polígono mas não dos vértices. Assim, consideramos somente o caso em que o polígono anterior é do tipo FE . Através da equação (3.8), temos

$$(P_5)_{E_i}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} = (P_3)_{E_{2i-1}}^{\frac{p}{q}, \frac{\nu}{w}} \cup (P_3)_{E_{2i}}^{\frac{p}{q}, \frac{p+\nu}{q+w}} \cup (P_3)_{D_1}^{\frac{\nu}{w}, \frac{p+\nu}{q+w}}.$$

Isto significa que $v_1 = \frac{p}{q}$, $v_3 = \frac{p+\nu}{q+w}$ e $v_5 = \frac{\nu}{w}$. O vértice v_2 é o próximo termo da série de Farey entre $\frac{p}{q}$ e $\frac{p+\nu}{q+w}$ ou seja, $v_2 = \frac{p+p+\nu}{q+q+w} = \frac{2p+\nu}{2q+w}$. Já o vértice v_4 é o termo da série de Farey que está entre $\frac{p+\nu}{q+w}$ e $\frac{\nu}{w}$, ou seja, $v_4 = \frac{p+\nu+\nu}{q+w+w} = \frac{p+2\nu}{q+2w}$. Isto pode ser visto na Fig. 3.19.

Aplicando o teorema com $v_1 = \frac{p}{q}$ e $v_5 = \frac{\nu}{w}$ os próximos vértices são dados por $v_{2.1+1} = v_3 = \frac{(2-i)p+\nu}{(2-i)q+w}$ para os vértices de índice ímpar e $v_{2.2} = v_4 = \frac{2p+\nu}{2q+w}$ e $v_{2.2} = v_4 = \frac{[2(2-i)+1]p+2\nu}{[2(2-i)+1]q+2w}$ para os vértices de índice par. Portanto, o teorema vale para $n = 2$.

Agora, por indução vamos supor que o teorema vale para $n-1$ ou seja, $2(n-1)+1 = 2n-1$. Os vértices de índice ímpar são dados por: $v_{2i+1} = \frac{(n-1-i)p+\nu}{(n-1-i)q+w}$ com $i = 1, \dots, n-1-1$ ou seja,

$$v_{2(1)+1} = v_3 = \frac{(n-2)p+\nu}{(n-2)q+w}, \quad v_{2(2)+1} = v_5 = \frac{(n-3)p+\nu}{(n-3)q+w},$$

$$v_{2(n-3)+1} = v_{2n-5} = \frac{(n-1-n+3)p+\nu}{(n-1-n+3)q+w} = \frac{2p+\nu}{2q+w}$$

$$\text{e } v_{2(n-2)+1} = v_{2n-3} = \frac{(n-1-n+2)p+\nu}{(n-1-n+2)q+w} = \frac{p+\nu}{q+w}$$

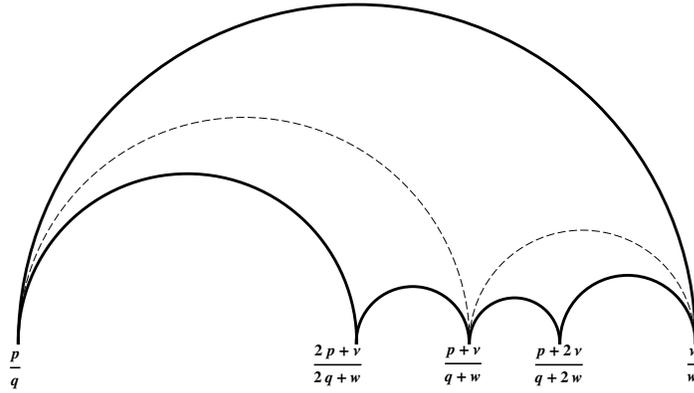


Figura 3.19: Polígono de 5 lados do tipo FE .

e os de índice par por: $v_{2i} = \frac{(n-1)p + \nu}{(n-1)q + w}$ quando $i = 1$ e $v_{2i} = \frac{[2(n-1-i) + 1]p + 2\nu}{[2(n-1-i) + 1]q + 2w}$
com $i = 2, \dots, n-1$.

ou seja, $v_{2(1)} = v_2 = \frac{(n-1)p + \nu}{(n-1)q + w}$,

$$v_{2(2)} = v_4 = \frac{[2(n-1-2) + 1]p + 2\nu}{[2(n-1-2) + 1]q + 2w} = \frac{(2n-5)p + 2\nu}{(2n-5)q + 2w}$$

$$v_{2(3)} = v_6 = \frac{[2(n-1-3) + 1]p + 2\nu}{[2(n-1-3) + 1]q + 2w} = \frac{(2n-7)p + 2\nu}{(2n-7)q + 2w},$$

$$v_{2(n-2)} = v_{2n-4} = \frac{[2(n-1-n+2) + 1]p + 2\nu}{[2(n-1-n+2) + 1]q + 2w} = \frac{3p + 2\nu}{3q + 2w}$$

$$\text{e } v_{2(n-1)} = v_{2n-2} = \frac{[2(n-1-n+1) + 1]p + 2\nu}{[2(n-1-n+1) + 1]q + 2w} = \frac{p + 2\nu}{q + 2w}.$$

Juntando todos os vértices temos:

$$v_1 = \frac{p}{q}$$

$$v_3 = \frac{(n-2)p + \nu}{(n-2)q + w}$$

$$v_5 = \frac{(n-3)p + \nu}{(n-3)q + w}$$

\vdots

$$v_2 = \frac{(n-1)p + \nu}{(n-1)q + w}$$

$$v_4 = \frac{(2n-5)p + 2\nu}{(2n-5)q + 2w}$$

$$v_6 = \frac{(2n-7)p + 2\nu}{(2n-7)q + 2w}$$

\vdots

$$\begin{aligned}
 v_{2n-5} &= \frac{2p + \nu}{2q + w} & v_{2n-4} &= \frac{3p + 2\nu}{3q + 2w} \\
 v_{2n-3} &= \frac{p + \nu}{q + w} & v_{2n-2} &= \frac{p + 2\nu}{q + 2w} \\
 v_{2n-1} &= \frac{\nu}{w}
 \end{aligned}$$

O polígono de $2n - 1$ lados pode ser visto na Fig. 3.20.

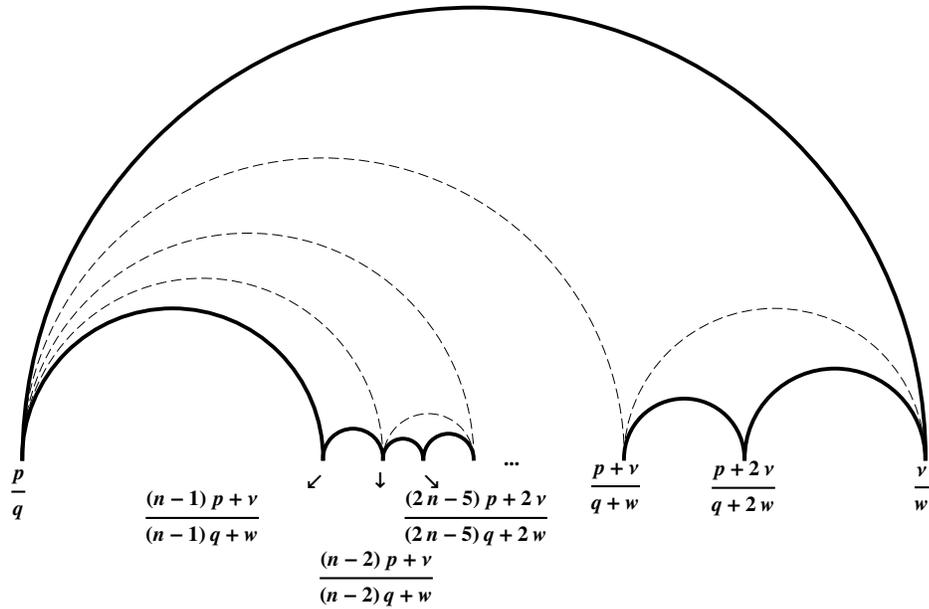


Figura 3.20: Polígono de $2(n - 1) + 1$ lados.

Como o polígono de $2n$ lados é formado por $2n$ vértices, e o de $2(n - 1)$ lados é formado por $2(n - 1) = 2n - 2$ vértices, então o polígono de $2n$ lados poderá ser obtido juntando-se um polígono de $2(n - 1)$ lados com mais dois triângulos estes fornecendo mais dois vértices. Seguindo a Definição 3.9, estes triângulos devem ser: o próximo triângulo na sequência que compartilha o vértice $\frac{p}{q}$ e o triângulo que fica abaixo da geodésica $C(\gamma(\frac{(n-1)p+\nu}{(n-1)q+w}, \frac{(n-2)p+\nu}{(n-2)q+w}))$. O primeiro triângulo é o $(P_3)_{E_{n-1}}^{\frac{p}{q}, \frac{(n-1)p+\nu}{(n-1)q+w}}$ que possui vértices $v_1 = \frac{p}{q}$, $v_3 = \frac{(n-1)p+\nu}{(n-1)q+w}$ e v_2 é o próximo termo da série de Farey entre v_1 e v_3 dado por $v_2 = \frac{p+(n-1)p+\nu}{q+(n-1)q+w} = \frac{np+\nu}{nq+w}$. O segundo triângulo tem vértices $v_1 = \frac{(n-1)p+\nu}{(n-1)q+w}$, $v_3 = \frac{(n-2)p+\nu}{(n-2)q+w}$ e $v_2 = \frac{(n-1)p+\nu+(n-2)p+\nu}{(n-1)q+w+(n-2)q+w} = \frac{(2n-3)p+2\nu}{(2n-3)q+2w}$. Acrescentando esses vértices, o polígono de $2n$ lados tem vértices:

$$\begin{array}{ll}
v_1 = \frac{p}{q} & v_2 = \frac{np + \nu}{nq + w} \\
v_3 = \frac{(n-1)p + \nu}{(n-1)q + w} & v_4 = \frac{(2n-3)p + 2\nu}{(2n-3)q + 2w} \\
v_5 = \frac{(n-2)p + \nu}{(n-2)q + w} & v_6 = \frac{(2n-5)p + 2\nu}{(2n-5)q + 2w} \\
\vdots & \vdots \\
v_{2n-3} = \frac{2p + \nu}{2q + w} & v_{2n-2} = \frac{3p + 2\nu}{3q + 2w} \\
v_{2n-1} = \frac{p + \nu}{q + w} & v_{2n} = \frac{p + 2\nu}{q + 2w} \\
v_{2n+1} = \frac{\nu}{w} &
\end{array}$$

Agora, podemos reescrever os vértices de índice ímpar da seguinte forma:

$$v_3 = v_{2(1)+1} = \frac{(n-1)p + \nu}{(n-1)q + w}, \quad v_5 = v_{2(2)+1} = \frac{(n-2)p + \nu}{(n-2)q + w} \quad e$$

$$v_{2n-1} = v_{2(n-1)+1} = \frac{p + \nu}{q + w} = \frac{[n - (n-1)]p + \nu}{[n - (n-1)]q + w},$$

ou seja, $v_{2i+1} = \frac{(n-i)p + \nu}{(n-i)q + w}$.

Já os vértices de índice par podem ser reescritos da seguinte forma:

$$v_4 = v_{2(2)} = \frac{(2n-3)p + 2\nu}{(2n-3)q + 2w} = \frac{[2(n-2) + 1]p + 2\nu}{[2(n-2) + 1]q + 2w},$$

$$v_6 = v_{2(3)} = \frac{(2n-5)p + 2\nu}{(2n-5)q + 2w} = \frac{[2(n-3) + 1]p + 2\nu}{[2(n-3) + 1]q + 2w} \quad e$$

$$v_{2n} = v_{2(n)} = \frac{[2(n-n) + 1]p + 2\nu}{[2(n-n) + 1]q + 2w},$$

ou seja, $v_{2i} = \frac{[2(n-i)+1]p+2\nu}{[2(n-i)+1]q+2w}$. Com esse resultado, acabamos de mostrar que se o teorema vale para polígonos de $2(n-1) + 1$ lados, também vale para polígonos de $2n + 1$ lados.

O caso $p = 0$ é um caso particular do caso anterior. Na demonstração do Teorema 3.5 vemos que os triângulos que compartilham o vértice esquerdo 0, podem ser escritos na forma $\frac{1}{k}$. Assim, $p = 0$ significa que $\frac{p}{q} = \frac{0}{1}$ e $v_{2n+1} = \frac{1}{k}$. Substituindo na expressão que acabamos de mostrar ser verdadeira para polígonos de $2n$ lados, para os vértices de índice ímpar temos:

$$v_{2i+1} = \frac{(n-i)p + \nu}{(n-i)q + w} = \frac{(n-i)0 + 1}{(n-i)1 + k} = \frac{1}{k + n - i}, \quad e \text{ para os vértices de índice par:}$$

$$v_{2i} = \frac{np + \nu}{nq + w} = \frac{n(0) + 1}{n(1) + k} = \frac{1}{k + n} \quad \text{quando } i = 1 \quad e$$

$$v_{2i} = \frac{[2(n-i) + 1]p + 2\nu}{[2(n-i) + 1]q + 2w} = \frac{[2(n-i) + 1](0) + 2(1)}{[2(n-i) + 1](1) + 2(k)} = \frac{2}{2n - 2i + 1 + 2k} = \frac{2}{2(k + n - i) + 1}$$

para $i = 2, \dots, n$.

A demonstração para o caso de $X = D$ pode ser feita de forma similar e por isso será omitida. ■

Podemos ver através desses resultados que uma grande vantagem dessas novas tesselações é o fato de termos a possibilidade de obter rapidamente todos os seus polígonos. Como para cada valor de $n \geq 3$ temos uma tesselação, basta escolhermos um valor de n e, através das equações (3.7) e (3.11) obter o polígono correspondente à região de Dirichlet.

Para sabermos a forma da tesselação, basta seguir o procedimento de construção apresentado nas Definições 3.7 e 3.10 juntamente com os resultados dos Teoremas 3.8 e 3.10 para obter os vértices dos polígonos. Em seguida, basta juntarmos os vértices consecutivos através de uma geodésica para obtermos o seu “gráfico”.

Como vimos no caso dos polígonos de 4 e 5 lados, também é possível para cada valor de n obtermos uma fórmula recursiva para a determinação dos polígonos numa determinada tesselação. Nesse caso, a partir de um polígono qualquer poderemos estabelecer todos os polígonos que estão abaixo deste. Por outro lado, em geral os resultados dos Teoremas 3.8 e 3.10 são suficientes no caso de não desejarmos fórmulas generalizadas.

Capítulo 4

CODIFICAÇÃO DE GEODÉSICAS E CÓDIGOS DE FONTE

No Capítulo 3, vimos como obter tesselações em \mathbb{H}^2 formadas por polígonos de n lados ($n > 3$) baseados na tesselação de Farey. Neste Capítulo veremos como, ao escolher uma geodésica reduzida em uma dessas tesselações, podemos associar as sequências cortantes ao seu ponto atrator.

A relação existente entre frações contínuas e uma geodésica numa superfície modular foi observada por diversos pesquisadores dentre os quais podemos citar o trabalho de [Arti 65] que inspirou muitos outros nessa área. O estudo dessa relação resultou em métodos que possibilitaram a codificação de geodésicas nesse tipo de superfície.

Apesar de diferirem em muitos aspectos, em [Seri 85] e [Kato 96] é utilizada a decomposição em frações contínuas do ponto atrator de uma geodésica como sendo o procedimento de codificação de geodésicas. Em [Seri 85], é feito o uso da decomposição em frações contínuas usual (onde temos apenas sinais positivos na decomposição) enquanto que em [Kato 96] é utilizada a decomposição em frações contínuas negativa (neste caso, temos apenas sinais negativos).

Neste capítulo apresentamos um método para codificação de geodésicas reduzidas em $PSL(2, \mathbb{Z})$ a partir dos estudos realizados em [Seri 85]. No método em consideração, mostramos como de uma forma rápida e simples podemos obter sequências cortantes de uma geodésica em tesselações cuja região fundamental é constituída por polígonos de n lados.

Em seguida mostramos como obter uma árvore de probabilidades para uma dada tesselação, a partir das propriedades da série de Farey. Com isso, surge a possibilidade de construção de códigos de fonte de comprimento fixo para comprimento variável (códigos de árvore), bem como de comprimento variável para comprimento fixo (código de Tunstall).

A primeira aplicação é feita observando uma classe de códigos aritméticos chamados *códigos de árvore* dentre os quais encontra-se o código de Elias. Tendo como base a construção do código de Elias, mostraremos como através dessa generalização podemos obter um novo código que pode ser utilizado para codificação de fontes j -árias.

Outra aplicação é feita observando-se os códigos de comprimento fixo para uma fonte discreta sem memória, mais especificamente os códigos de Tunstall. Veremos que através desse novo conjunto de tesselações podemos obter um novo código parecido ao de Tunstall que pode ser utilizado nas mesmas situações para os quais os códigos de Tunstall são mais indicados. Em ambas as aplicações veremos que os novos códigos apresentam um desempenho igual ou melhor

aos códigos já existentes.

4.1 Codificação de Geodésicas em Tesselações Formadas por Polígonos de n Lados.

Como já mencionamos anteriormente, neste trabalho utilizamos a decomposição em frações contínuas usual. Nesta seção, mostramos como a partir da relação existente entre sequências cortantes e as frações contínuas, podemos obter um método de codificação para geodésicas associadas a tesselações formadas por polígonos com um número de lados maior que 3. Dessa forma, o método apresentado em [Seri 85] pode ser visto como um caso particular quando $n = 3$.

Iniciamos esta seção apresentando a teoria das frações contínuas e sua relação com sequências cortantes.

4.1.1 Teoria das Frações Contínuas

A teoria das frações contínuas refere-se à forma de representar números através de sequências de inteiros. Todos os números reais possuem decomposição em frações contínuas.

Seja $[n_0, n_1, \dots, n_b]$ a fração contínua finita:

$$n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{n_b}}}.$$

Defina $[n_0, n_1, \dots] = \lim_{b \rightarrow \infty} [n_0, n_1, \dots, n_b]$. O limite existe e nos fornece um número irracional $\hat{\beta}$. Da mesma forma, todo número irracional $\hat{\beta}$ tem uma expansão única em frações contínuas $\hat{\beta} = [n_0, n_1, \dots]$. Se um número é racional, sua expansão em frações contínuas é finita, ou seja, $\hat{\beta} = [n_0, n_1, \dots, n_b]$ para algum $\hat{\beta} \geq 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

Podemos dizer que uma expansão em frações contínuas é eventualmente periódica se a partir de um certo ponto ela se repete periodicamente, ou seja, $\hat{\beta} = [n_0, \dots, n_b, \overline{n_{b+1}, \dots, n_{b+l}}]$, onde a barra sobre n_{b+1}, \dots, n_{b+l} indica que essa sequência se repete periodicamente. Dizemos que uma expansão é puramente periódica se a partir do primeiro dígito da expansão, se inicia uma sequência periódica, ou seja, $\hat{\beta} = [\overline{n_0, n_1, \dots, n_b}]$.

Um número irracional é um número que não pode ser representado pela razão de dois inteiros. Além disso, é uma irracionalidade quadrática se esse número irracional for solução de um polinômio quadrático da forma:

$$c_1^2 x^2 - 2c_2 c_3 x + (c_2^2 - c_4) = 0, \quad (4.1)$$

onde c_1, c_2, c_3 e c_4 são inteiros e c_4 é um número natural que não é um quadrado perfeito. O teorema a seguir nos fornece uma propriedade interessante relacionada às irracionalidades quadráticas. Sua demonstração será omitida mas pode ser vista em [Olds 63].

Teorema 4.1 Quando n_0, n_1, n_2, \dots são inteiros positivos, a fração contínua puramente periódica:

$$\hat{\beta} = [\overline{n_0, n_1, \dots, n_b}]$$

é maior que 1 e é raiz positiva de uma equação quadrática com coeficientes inteiros. Além disso, se $\hat{\beta}'_a = [\overline{n_b, n_{b-1}, \dots, n_0}]$ é a decomposição de $\hat{\beta}$ em frações contínuas em ordem inversa, então $-1/\hat{\beta}'_a = \hat{\beta}_a$ é a segunda raiz conjugada da equação satisfeita por $\hat{\beta}$. Além disso, $\hat{\beta}_a \in (-1, 0)$.

Para obtermos a decomposição em frações contínuas de um número $\hat{\beta}$, segue-se o seguinte procedimento: Seja $[[x]]$ a parte inteira de x ; n_0 será dado por $n_0 = [[\hat{\beta}]]$ e, indutivamente, $n_i = [[\hat{\beta}_i]]$, onde $\hat{\beta}_{i+1} = \frac{1}{\hat{\beta}_i - n_i}$.

Exemplo 4.1 Seja γ uma transformação cuja matriz A associada é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo-se a equação $z = \gamma(z) = \frac{11z+4}{8z+3}$, obtemos o polinômio quadrático $8z^2 + (3 - 11)z - 4 = 8z^2 - 9z - 4 = 0$ cujas soluções são dadas por: $z = \frac{8 \pm \sqrt{192}}{16} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Sendo assim, obtemos: $\beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \simeq 1.36603$ (atrator) e $\alpha \simeq \frac{1-\sqrt{3}}{2} = -0.36603$ (repulsor). Para obtermos a decomposição de β em frações contínuas fazemos:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 1.36603 \text{ e } n_0 = [[\beta_0]] = [[1.36603]] = 1 \\ \beta_1 &= \frac{1}{\beta_0 - n_0} = \frac{1}{1.36603 - 1} = 2.73202 \text{ e portanto, } n_1 = [[2.73202]] = 2 \\ \beta_2 &= \frac{1}{\beta_1 - n_1} = \frac{1}{2.73202 - 2} = 1.36608 \text{ e portanto, } n_2 = [[1.36608]] = 1 \\ \beta_3 &= \frac{1}{\beta_2 - n_2} = \frac{1}{1.36608 - 1} = 2.73162 \text{ e portanto, } n_3 = [[2.73162]] = 2 \\ \text{Continuando, teremos que } \beta &= (1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots) = [\overline{1, 2}]. \end{aligned}$$

4.1.2 Sequências Cortantes

Seja M uma superfície de curvatura negativa constante, resultante do quociente de \mathbb{H}^2 por um grupo Γ , ou seja, $M \cong \mathbb{H}^2/\Gamma$. Considere uma geodésica orientada em M , $C(\hat{\gamma})$; assumamos que $C(\hat{\gamma})$ possua um vetor tangente unitário (direcional) em cada posição e dessa forma seja uma órbita de um fluxo geodésico (ψ^t) em M . Se $\pi(C(\gamma)) = C(\hat{\gamma})$, onde π é a projeção tal que $\pi : \mathbb{H}^2 \rightarrow M$, então cada geodésica $C(\gamma)$ em \mathbb{H}^2 será o resultado do levantamento de uma geodésica $C(\hat{\gamma})$ em M .

Estamos interessados no caso em que Γ é um grupo Fuchsiano, em particular, Γ é um subgrupo de $PSL(2, \mathbb{Z})$, isto é, $\Gamma \subseteq PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})/\{\pm I\}$, ou seja, Γ é um subgrupo do grupo modular, M a superfície modular e as geodésicas que desejamos codificar pertencem a este grupo. Nosso interesse é codificar geodésicas $C(\gamma)$ pertencentes a um grupo Fuchsiano.

Como visto anteriormente, a tesselação de Farey possui vértices no conjunto $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Além disso, e como consequência do Teorema 3.2, se dois pontos P/Q e P'/Q' são vértices de um triângulo elementar, então $\begin{vmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{vmatrix} = \pm 1$ e, portanto, a tesselação de Farey pode ser vista como imagem do eixo imaginário sobre a ação de $SL(2, \mathbb{Z})$.

Agora, considere um triângulo elementar e uma geodésica orientada em \mathbb{H}^2 . Ao atravessar um triângulo esta geodésica irá deixar um ou dois vértices à sua direita. Chamando o segmento da geodésica dentro do triângulo de E quando tivermos um vértice à esquerda e de D quando tivermos um vértice à direita, temos a seguinte situação:

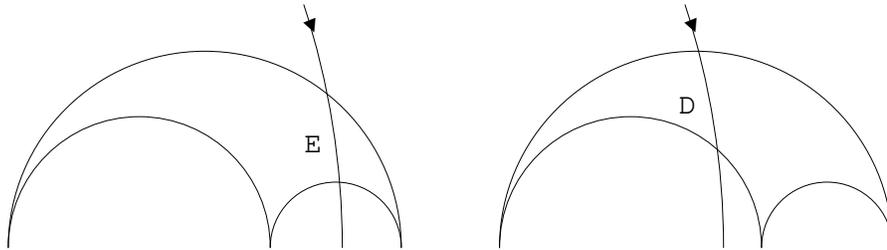


Figura 4.1: Segmentos do tipo E e D .

Seja agora uma geodésica orientada $C(\gamma(\alpha, \beta))$ que vai de α em direção a β em \mathbb{H}^2 . Esta geodésica é cortada por arestas elementares e subdividida em vários segmentos que podem ser classificados como D ou E . Dessa forma, fazendo $E^{n_i} = \underbrace{E \dots E}_{n_i \text{ vezes}}$ vemos que toda geodésica pode ser escrita como $E^{n_0} D^{n_1} E^{n_2} D^{n_3} \dots$ com $n_i \in \mathbb{N}$.

Topologicamente, a superfície modular M , é a esfera três vezes puncionada com pontos singulares nas imagens i , $1/2(1 + i\sqrt{3})$ e ∞ . As linhas da tesselação de Farey são projetadas na reta singular S que vai de $\pi(\infty)$ em direção a $\pi(i)$ e volta. Vamos considerar uma geodésica em M , $C(\hat{\gamma})$ tal que esta não coincida com S . Como mostramos anteriormente, essa geodésica pode ser levantada para uma geodésica $C(\gamma)$ em \mathbb{H}^2 e assim podemos obter uma sequência cortante $\dots E^{n_{-1}} D^{n_0} E^{n_1} \dots$ representando essa geodésica. Diferentes levantamentos de $C(\hat{\gamma})$ diferem por **translações**, o que deixa a tesselação de Farey invariante e preserva a orientação. Dessa forma, o modo como rotulamos cada segmento geodésico faz com que a sequência cortante obtida independa do levantamento escolhido.

Se a geodésica em \mathbb{H}^2 começa ou termina em $\pi(\infty)$ a sequência cortante termina em $\pi(\infty)$. Os segmentos iniciais ou finais podem ser do tipo D ou E e com isso podemos denotá-los por D_∞ ou E_∞ . Se em M a geodésica $C(\hat{\gamma})$ cruza com S num ponto x , $x \in C(\hat{\gamma}) \cap S$ podemos indicar a posição de x na sequência cortante da seguinte forma $\dots D^{n_0} x E^{n_1} \dots$. Podemos também dizer que a sequência muda de tipo em $x \in S$ onde há uma mudança dos segmentos de D para E ou

vice-versa.

Considere um conjunto de geodésicas em \mathbb{H}^2 cujos pontos terminais satisfaçam $|\beta| \geq 1$ e $0 \leq |\alpha| \leq 1$. Denominemos esse conjunto de \mathcal{A} . Qualquer geodésica pertencente a \mathcal{A} intercepta o eixo imaginário em um ponto ξ_γ e a sequência cortante dessa geodésica muda de tipo em ξ_γ . Tal situação pode ser vista na Fig. 4.2.

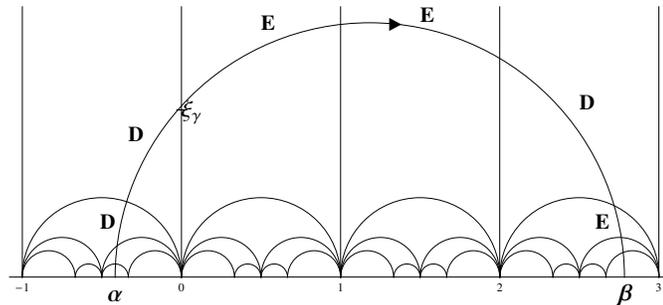


Figura 4.2: Exemplo de uma geodésica orientada em \mathbb{H}^2 na tesselação de Farey.

Olhando novamente na superfície M , as geodésicas que cortam repetidamente a reta singular S , geram uma seção transversal X' no fibrado tangente T_1M . Esta seção é formada pelo conjunto de vetores tangentes unitários de geodésicas que mudam de tipo em x , pertencentes a M e que também cortam a reta S . O ponto x corresponde ao levantamento ξ_γ como será apresentado mais claramente na demonstração do Teorema 4.2, teorema que relaciona as sequências cortantes como a teoria das frações contínuas.

Teorema 4.2 [Seri 85] *A função $i : \mathcal{A} \rightarrow X$, definida por $i(C(\gamma)) = \pi(u_\gamma)$ é sobrejetiva, contínua e aberta. É quase injetiva, isto é, é injetiva exceto nas duas geodésicas orientadas opostamente ligando $+1$ à -1 tendo a mesma imagem. Além disso, se $u_\gamma \in X$ define uma geodésica com sequência cortante $\dots D^{n_0} x E^{n_1} \dots$, então $C(\gamma) = i^{-1}(u_x)$ tem pontos terminais dados por:*

$$\beta = [n_1, n_2, \dots], \quad \frac{-1}{\alpha} = [n_0, n_{-1}, n_{-2}, \dots],$$

onde se a sequência cortante termina em um dos dois lados, o mesmo acontece com a fração contínua correspondente. Se na sequência cortante D e E são permutados, então,

$$\beta = -[n_1, n_2, \dots], \quad \frac{1}{\alpha} = [n_0, n_{-1}, n_{-2}, \dots].$$

Observação 4.1 *Note que β é independente de α e da parte da sequência cortante que precede ξ_γ e vice-versa.*

Observação 4.2 Como $n_r + 1 = n_r + \frac{1}{1+0}$, as sequências $\dots E^{n_r+1}$ e $\dots E^{n_r} D$ geram a mesma expansão no ponto terminal, causada pela ambiguidade do rotulamento de um ponto terminando num **cúspide**. A mesma observação também é válida para uma sequência começando com $ED^{n-r} \dots$ ou $D^{n-r+1} \dots$.

Demonstração:

Seja $C(\gamma)$ uma geodésica em \mathbb{H}^2 que intersecta $i\mathbb{R}$, e seja Δ o triângulo fundamental apresentado no Capítulo 3 e mostrado na Fig. 3.3. Como Δ é convexo, $\beta \geq 1$ se, e somente se, o segmento $C(\gamma) \cap \Delta$ é do tipo E , e $-1 \leq \alpha < 0$ se, e somente se, o segmento imediatamente precedente a Δ é do tipo D . Observação análoga se aplica quando $\beta \leq -1$ e $0 < \alpha \leq 1$. Como qualquer geodésica sobre M cortando S em x pode ser levantada para uma geodésica em \mathbb{H}^2 que intersecta $i\mathbb{R}$ no levantamento ξ_γ de x , vemos que i mapeia \mathcal{A} sobre X' . Além disso, suponha que $C(\gamma), C(\gamma') \in \mathcal{A}$ e que $i(C(\gamma)) = i(C(\gamma'))$. Como a única identificação de pares de pontos em $i\mathbb{R}$ por $SL(2, \mathbb{Z})$ é dada por $Q : z \rightarrow -1/z$ vemos que, se $C(\gamma) \neq C(\gamma')$, então $Q(C(\gamma)) = C(\gamma')$. As únicas geodésicas $C(\gamma) \in \mathcal{A}$ tais que $Q(C(\gamma)) \in \mathcal{A}$ são as geodésicas ligando $+1$ a -1 e sua inversa. Isto prova a primeira parte do Teorema.

Suponha agora que $C(\gamma) \in \mathcal{A}$ e $\beta > 1$. Seja $\beta = [n_1, n_2, \dots]$. Considere $p_1 = n_1$ se $\beta > n_1$ e $p_1 = n_1 - 1$ se $\beta = n_1$. Seja $\eta = C(\gamma) \cap (\text{Re } z = p_1)$. Entre ξ_γ e η_γ a tesselação de \mathbb{F} particiona $C(\gamma)$ em p_1 segmentos nas geodésicas verticais, $z = 0, 1, \dots, p_1$. Assim, a sequência cortante de $C(\gamma)$ entre ξ_γ e η_γ é E^{p_1} . Finalmente, se $\beta = 1$, então a sequência começando em ξ_γ é D^∞ ou E^∞ .

Considere a função $\tau_1 = -1/(z - p_1)$. Note que $\tau_1 \in SL(2, \mathbb{Z})$. Além disso, $\tau_1(\beta) \leq -1$, $0 < \tau_1(\alpha) \leq 1$ e $\tau_1(\eta_\gamma) = \xi_{\tau_1(\gamma)}$. Como $\tau_1 \in SL(2, \mathbb{Z})$, $\tau_1(C(\gamma))$ é também um levantamento de $\pi(C(\gamma))$ então a sequência cortante de $C(\gamma)$ começando em η_γ é a mesma sequência cortante de $\tau_1(C(\gamma))$ começando em $\xi_{\tau_1(\gamma)}$. Se $\tau_1(\beta) = -1$, esta sequência termina com um segmento ambíguo D^∞ ou E^∞ ; caso contrário, fixe $p_2 = n_2$ se $-\tau_1(\beta) \notin \mathbb{N}$ e $p_2 = n_2 - 1$ neste caso, a sequência cortante começa com p_2 segmentos do tipo D . Aplicando $\tau_2 = -1/(z + p_2)$, o argumento se repete. O argumento análogo se aplica se $\beta \leq -1$.

Note que se $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta > 1$, então essa sequência é ambigualmente $E^{n_1} D$ ou E^{n_1+1} , consistente com a ambiguidade nas expansões em frações contínuas.

Para estudar o ponto terminal negativo α aplicamos a função $Q : z \rightarrow -1/z$. Se $C(\gamma)$ tem sequência cortante $\dots E^{n-1} D^{n_0} \xi_\gamma E^{n_1} D^{n_2} \dots$, então como $Q \in SL(2, \mathbb{Z})$, a geodésica $Q(C(\gamma))^{-1}$ ligando $Q(\beta)$ à $Q(\alpha)$ tem sequência cortante $\dots E^{n_1} Q(\xi_\gamma) D^{n_0} E^{n-1} \dots$. Claramente $Q(C(\gamma))^{-1} \in \mathcal{A}$ e $\xi_{Q(C(\gamma))^{-1}} = Q(\xi_\gamma)$. Assim, $Q(\alpha) = [n_0, n_{-1}, \dots]$, o que prova o resultado. ■

Corolário 4.1 [Seri 85] *Duas geodésicas com a mesma sequência cortante coincidem.*

Demonstração:

Fixe os pontos iniciais x, x' nos mesmos pontos de divisão em cada sequência, e levante os pontos $\xi, \xi' \in i\mathbb{R}^+$ como no Teorema 4.2. Como os pontos terminais no infinito dos levantamentos das duas geodésicas têm a mesma expansão em frações contínuas, as geodésicas coincidem. ■

Vemos assim que o Teorema 4.2 estabelece uma relação entre a decomposição em frações contínuas do ponto atrator da geodésica e sua sequência cortante. Isto faz com que toda geodésica $C(\gamma(\alpha, \beta))$ pertencente a \mathbb{H}^2 possa ser representada através de uma sequência cortante da forma $E^{n_0} D^{n_1} E^{n_2} \dots$ onde os valores de n_i correspondem a decomposição em frações contínuas de seu ponto atrator β . Aos valores de n_i que definem a sequência cortante, chamaremos de código CGP3 (Código para Geodésicas em Polígonos de 3 lados) representação de uma geodésica uma vez que através deles podemos reconstruir a trajetória da geodésica na tesselação de Farey em \mathbb{H}^2 .

Agora, voltando à equação (4.1), quando fazemos $c_1 = \dot{c}$, $c_2 c_3 = (\dot{d} - \dot{a})$ e $(c_2^2 - c_4) = \dot{b}$, podemos ver essa equação como uma variação da equação (3.2) quando trabalhamos com a matriz $A \in SL(2, \mathbb{Z})$, matriz esta associada a uma geodésica $C(\gamma(\alpha, \beta))$. Sendo assim, quando o discriminante D (dado pela equação (3.3)) não é um quadrado perfeito, os pontos atrator e repulsor de uma geodésica são irracionalidades quadráticas. Neste caso, de acordo com o Teorema 4.1 quando $\beta \in (1, \infty)$ e $\alpha \in (-1, 0]$, α e β tem decomposição em frações contínuas puramente periódica e a sequência cortante também é periódica. Como consequência, o código CGP3 associado a geodésica também é uma sequência puramente periódica.

O algoritmo CGP3 para a representação de geodésicas que acabamos de descrever é baseado na tesselação de Farey que por sua vez é formada por triângulos elementares. Mostraremos a seguir como a partir da decomposição em frações contínuas dos pontos terminais de uma geodésica, podemos obter novos códigos para a codificação dessa geodésica em tesselações de polígonos de n lados ($n \geq 3$). Ao final, teremos um código associado a cada uma dessas tesselações.

4.1.3 Método de codificação de geodésicas proposto

Considere um polígono elementar de n lados e uma geodésica $C(\gamma(\alpha, \beta))$ que corta esse polígono. Como esse polígono é formado por triângulos elementares, o segmento geodésico corta um determinado número de triângulos, número este que depende de n e do fato de n ser par ou ímpar. Isto pode ser visto por exemplo na Fig. 4.3 onde temos um polígono de $2n + 1$ lados do tipo FE e uma geodésica orientada cortando esse polígono.

O método proposto consiste em, por meio da observação do código CGP3 para um segmento

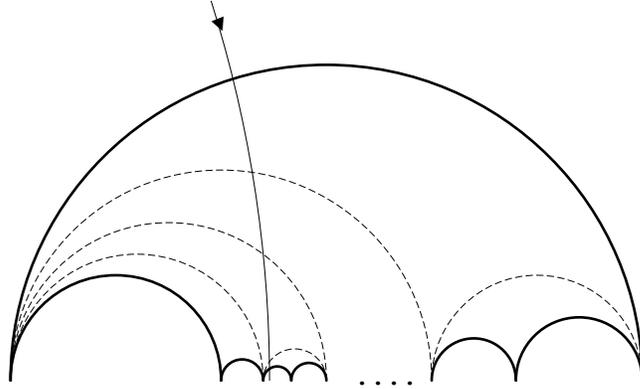


Figura 4.3: Polígono de $2n + 1$ lados do tipo FE.

geodésico dentro de um polígono qualquer, obtermos um novo código associado ao polígono. Vamos começar apresentando o código para polígonos de $2n$ lados.

Seja $n = 2$ e, portanto, tomemos o polígono de 4 lados. A partir da Definição 3.5 vemos que todo polígono elementar de 4 lados do tipo E é formado pela união de dois triângulos elementares do mesmo tipo. Se tomamos uma geodésica orientada que corta um polígono do tipo E , dependendo de onde o segmento geodésico esteja localizado (não coincidindo com nenhum vértice), este divide o polígono deixando 1, 2 ou 3 vértices à sua esquerda. Chamando de E_i quando à esquerda de um segmento geodésico temos i vértices, ao observarmos a classificação desse mesmo segmento segundo o algoritmo CGP3 para os triângulos, podemos ver que sempre que estivermos num polígono do tipo FE , a sequência DD corresponde a E_1 , DE a E_2 e E a E_3 . Isto pode ser visto na Fig. 4.4. Da mesma forma, se estivermos num polígono do tipo FD , EE corresponde a E_1 , ED a E_2 e D a E_3 como pode ser visto na Fig.4.5.

Uma tesselação de polígonos de 4 lados é constituída por três tipos de polígonos, os do tipo FE , os do tipo FD e o primeiro polígono que equivale à região de Dirichlet. Quando uma geodésica vem em direção ao ponto atrator, ela inicialmente corta este primeiro polígono. Neste caso, temos duas possibilidades segundo o código CGP3, DE que equivale a termos dois vértices à esquerda do segmento geodésico ou DD que deixa três vértices à sua esquerda. Vemos, portanto, que existe uma correspondência entre o código CGP3 e o código proposto tal que se temos uma geodésica que possui uma sequência cortante segundo o método CGP3 da forma $E^{n_0} D^{n_1} E^{n_2} \dots$ podemos reescrever essa sequência como $\underbrace{E \dots E}_{n_0 \text{ vezes}} \underbrace{D \dots D}_{n_1 \text{ vezes}} \underbrace{E \dots E}_{n_2 \text{ vezes}}$ e assim obter um novo código dado por $E_{i_1} E_{i_2} E_{i_3} E_{i_4} \dots$ com $i_n \in \{1, 2, 3\}$, que corresponde a geodésica codificada em uma

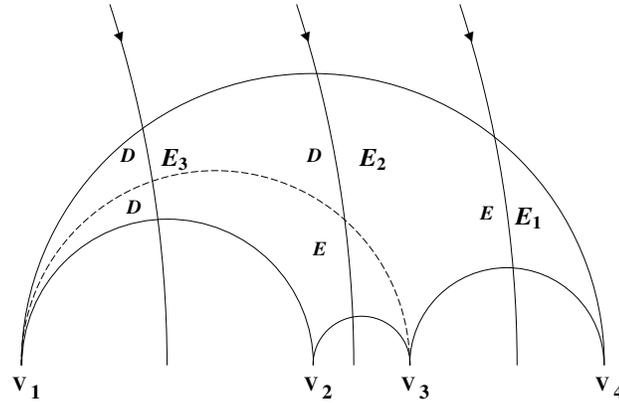


Figura 4.4: Segmentos de geodésicas com a classificação proposta (a direita) e a classificação segundo CGP3 (em itálico, a esquerda) para polígonos de 4 lados em um polígono do tipo FE.

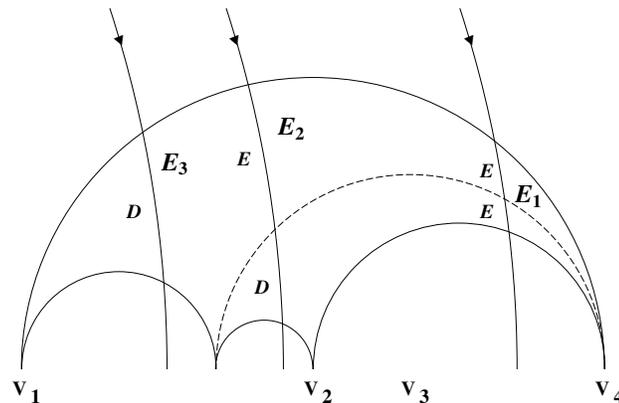


Figura 4.5: Segmentos de geodésicas com a classificação proposta (a direita) e a classificação segundo CGP3 (em itálico, a esquerda) para polígonos de 4 lados em um polígono do tipo FD.

tesselação formada por polígonos de 4 lados. Esse novo código é chamado de CGP4 (Código para Geodésicas baseado em Polígonos de 4 lados).

Para a implementação do novo código, precisamos saber quais os tipos dos polígonos que a geodésica está cortando. Por causa da alternância de polígonos mencionada no Teorema 3.6, podemos saber o tipo do próximo polígono que o segmento geodésico codificado entrará. Para isso podemos utilizar apenas a informação do código proposto já que o número de vértices que o segmento deixa a sua esquerda, nos diz quais triângulos o segmento está cortando. Na Tabela 4.1 podemos ver a correspondência existente entre o código CGP3 e o código proposto (CGP4) além do tipo de polígono que a geodésica cortará em seguida (coluna *Próximo*).

O processo de obtenção do novo código pode ser descrito da seguinte forma: Seja $C(\gamma(\alpha, \beta))$ a geodésica associada à transformação γ . Estamos interessados nas geodésicas que possuem

Polígonos de 4 Lados								
Dirichlet			Tipo FE			Tipo FD		
CGP3	CGP4	Próximo	CGP3	CGP4	Próximo	CGP3	CGP4	Próximo
DD	E_3	FE	DD	E_3	FE	EE	E_1	FD
DE	E_2	FD	DE	E_2	FD	ED	E_2	FE
			E	E_1	FD	D	E_3	FE

Tabela 4.1: Código CGP3 e código proposto para polígonos de 4 lados.

$\alpha \in (-1, 0]$ e $\beta \in (1, \infty)$. Tomemos a decomposição de β em frações contínuas, ou seja, $\beta = [\overline{n_0, n_1, \dots, n_b}]$. A partir dos valores de n_i podemos obter o código CGP3 fazendo $E^{n_0} D^{n_1} E^{n_2} \dots$. O primeiro dígito n_0 corresponde ao número de vezes que a geodésica corta as linhas paralelas ao eixo imaginário e nos fornece a sequência do novo código: $\underbrace{E_1 E_1 \dots}_{n_0 \text{ vezes}} = E_1^{n_0}$. Expandindo o código para n_i com $i \geq 1$, temos uma sequência da forma: $\underbrace{D \dots D}_{n_1 \text{ vezes}} \underbrace{E \dots E}_{n_2 \text{ vezes}} \underbrace{D \dots D}_{n_3 \text{ vezes}} \dots$

Inicialmente, tomemos uma sequência de tamanho 2 e a partir da Tabela 4.1 observemos qual o código correspondente. A partir deste, buscamos na mesma tabela o tipo do próximo polígono. Tomando mais dois elementos da sequência buscamos novamente na Tabela 4.1 o código correspondente e o tipo do próximo polígono.

Repetindo este procedimento algumas vezes obtemos uma sequência $E_1^{n_0} E_{i_1} E_{i_2} E_{i_3} \dots$ que corresponde ao novo código que também pode ser representado por $[\underbrace{1 \dots 1}_{n_0 \text{ vezes}}, i_1, i_2, i_3, \dots]$ com $i_k \in \{1, 2, 3\}$. No caso em consideração quando a decomposição em frações contínuas do ponto atrator da geodésica é puramente periódica, a nova sequência correspondente é eventualmente periódica. Antes de prosseguirmos vamos apresentar um exemplo:

Exemplo 4.2 Seja γ uma transformação cuja matriz A associada é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Já vimos no Exemplo 4.1 que os pontos fixos associados a transformação são dados por: 1,36603 (atrator) e $-0,36603$ (repulsor) e a decomposição em frações contínuas do ponto atrator é dada por: $[\overline{1, 2}]$. A partir desta informação, temos que o código CGP3 é dado por: $E^1 D^2 E^1 D^2 E^1 D^2 E^1 D^2 \dots$

Neste caso, $n_0 = 1$. Tomando a sequência expandida a partir de n_1 (DDEDDEDDED...), através da informação contida na Tabela 4.1 podemos obter o novo código da seguinte forma: a sequência DD nos fornece o código E_3 onde o próximo polígono é do tipo FE. Se a próxima letra na sequência expandida é E, como estamos num polígono FE, o código é E_1 e vamos para um polígono do tipo FD. Neste, temos a letra D que nos fornece o código E_3 e, portanto, vamos para um polígono do tipo FE. Em seguida temos a sequência DE que num polígono FE nos fornece o código E_2 . Este procedimento pode ser resumido da seguinte forma:

CGP3	DD	E	D	DE	D	DE	D	DE	...
CGP4	3	1	3	2	3	2	3	2	...
Polígono Atual	1 ^o	FE	FD	FE	FD	FE	FD	FE	...

Podemos ver que essa sequência se repete a partir do terceiro dígito do novo código que pode ser escrito como: $E_1E_3E_1E_3E_2E_3E_2 \dots$ ou $(131\overline{32})$. ■

Da mesma forma que obtivemos um código para polígonos de 4 lados, podemos obter também um código para polígonos de 6 lados, ou seja, $n = 3$. Seguindo o mesmo raciocínio temos agora um novo conjunto de regras que nos fornece o código em tesselações formadas por polígonos de 6 lados a partir do código CGP3. Estas regras podem ser vistas na Tabela 4.2 lembrando que a coluna *Próximo* indica qual o tipo do polígono que vem a seguir.

Polígono de 6 Lados								
Dirichlet			Tipo FE			Tipo FD		
CGP3	CGP6	Próximo	CGP3	CGP6	Próximo	CGP3	CGP6	Próximo
DDD	E_5	FE	DDDD	E_5	FE	EEEE	E_1	FD
DDE	E_4	FD	DDDE	E_4	FD	EEED	E_2	FE
DED	E_3	FD	DDE	E_3	FD	EED	E_3	FE
DEE	E_2	FE	DE	E_2	FD	ED	E_4	FE
			E	E_1	FD	D	E_5	FE

Tabela 4.2: Código CGP3 e código para geodésicas proposto para polígonos de 6 lados.

Exemplo 4.3 Considere a mesma geodésica do Exemplo 4.2 cujo código CGP3 é dado por:

$E^1 D^2 E^1 D^2 E^1 D^2 E^1 D^2 \dots$. A partir das informações da Tabela 4.2, a codificação pode ser vista

a seguir:

CGP3	DDE	D	DE	D	DE	D	...
CGP6	4	5	2	5	2	5	...
Polígono Atual	1°	FD	FE	FD	FE	FD	...

Portanto, a sequência correspondente ao novo código é $E_1 E_4 E_5 E_2 E_5 E_2 E_5 \dots$ o que equivale a $(14\overline{52})$. ■

A passagem do código CGP4 para o CGP6 mostra evidências de padrões que se repetem e que vão ficando mais claros à medida que aumentamos o valor de n . Para observarmos melhor esse padrão, vamos reescrever as Tabelas 4.1 e 4.2 da seguinte forma:

Polígonos de 4 Lados								
Dirichlet			Tipo FE			Tipo FD		
CGP3	CGP4	Próximo	CGP3	CGP4	Próximo	CGP3	CGP4	Próximo
D^2	$E_{2+(4/2-1)}$	FE	D^2	E_{2+1}	FE	E^2	$E_{4-(2+1)}$	FD
$D^1 E$	$E_{1+(4/2-1)}$	FD	$D^1 E$	E_{1+1}	FD	$E^1 D$	$E_{4-(1+1)}$	FE
			$D^0 E$	E_{0+1}	FD	$E^0 D$	$E_{4-(0+1)}$	FE

Tabela 4.3: Tabela 4.1 reescrita.

Polígono de 6 Lados								
Dirichlet			Tipo FE			Tipo FD		
CGP3	CGP6	Próximo	CGP3	CGP6	Próximo	CGP3	CGP6	Próximo
D^3	$E_{3+(6/2-1)}$	FE	D^4	E_{4+1}	FE	E^4	$E_{6-(4+1)}$	FD
$D^2 E$	$E_{2+(6/2-1)}$	FD	$D^3 E$	E_{3+1}	FD	$E^3 D$	$E_{6-(3+1)}$	FE
$D^1 E D$	$E_{1+(6/2-1)}$	FD	$D^2 E$	E_{2+1}	FD	$E^2 D$	$E_{6-(2+1)}$	FE
$D E^2$	E_2	FE	$D^1 E$	E_{1+1}	FD	$E^1 D$	$E_{6-(1+1)}$	FE
			$D^0 E$	E_{0+1}	FD	$E^0 D$	$E_{6-(0+1)}$	FE

Tabela 4.4: Tabela 4.2 reescrita.

Através da observação das Tabelas 4.3 e 4.4, podemos ver que os índices do código CGP3 estão relacionados tanto ao valor de $2n$ quanto ao código final. Agora, da mesma forma que generalizamos alguns resultados no capítulo anterior para polígonos de $2n$ lados podemos também obter a generalização do código para uma geodésica nessas tesselações.

Esta generalização pode ser vista na Tabelas 4.5 e 4.6 onde assumimos uma tesselação constituída por polígonos de $2n$ lados ($n \geq 3$). Considere uma geodésica orientada fechada pertencente a $PSL(2, \mathbb{Z})$ cujo ponto atrator tenha decomposição em frações contínuas dada por $\beta = [\overline{n_0, n_1, n_2, \dots, n_b}]$. Neste caso, o código CGP3 dessa geodésica pode ser visto da forma $E^{n_0} \underbrace{D \dots D}_{n_1 \text{ vezes}} \underbrace{E \dots E}_{n_2 \text{ vezes}} \underbrace{D \dots D}_{n_3 \text{ vezes}} \dots$. Para a obtenção do código em um polígono qualquer devemos começar a olhar essa sequência a partir de D^{n_1} . Além disso, toda sequência $D^k E^j$ ou $E^k D^j$ utilizada para a obtenção de palavras-código não deve ser reutilizada.

Região de Dirichlet de $2n$ Lados		
CGP3	CGPn	Próximo
D^n	E_{2n-1}	FE
$D^k E^1$	$E_{n-1+k}, \quad 2 \leq k \leq n-1$	FD
$D^1 E^k D^1$	$E_{n+1-k}, \quad 1 \leq k \leq n-2$	FD
$D^1 E^{n-1}$	E_2	FE

Tabela 4.5: Código para geodésicas baseados em polígonos de $2n$ lados - região de Dirichlet.

Polígono de $2n$ Lados			
Tipo	CGP3	CGPn	Próximo
FE	D^{2n-2}	E_{2n-1}	FE
	$D^k E^1$	$E_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq 2n-3$	FD
	E^1	E_1	FD
FD	E^{2n-2}	E_1	FD
	$E^k D^1$	$E_{2n-k-1}, \quad 1 \leq k \leq 2n-3$	FE
	D^1	E_{2n-1}	FE

Tabela 4.6: Código para geodésicas baseados em polígonos de $2n$ lados - polígono qualquer.

Para confirmarmos esse resultado, basta utilizarmos o mesmo raciocínio usado na demonstração do Teorema 3.7. Nessa demonstração vimos que quando passamos de um polígono de $2n$ lados para um de $2(n+1)$ lados, aumentamos um triângulo em cada lado da região de Dirichlet e dois triângulos de índices consecutivos nos polígonos do tipo FE ou FD . O aumento desses triângulos nos permite a demonstração do resultado por indução já que o aumento de n para $n+1$ reflete nos códigos dos polígonos de $2(n+1)$ lados que manterão sempre o mesmo padrão.

A obtenção de códigos para polígonos de $2n+1$ lados é feita de forma similar. Neste caso, por serem formados por um número ímpar de triângulos, o código é um pouco mais complexo mas da mesma forma que no caso dos polígonos de $2n$ lados, a generalização também é possível. Vamos começar pelo polígono de 5 lados.

Os polígonos de 5 lados podem ser divididos em: primeiro polígono (região de Dirichlet) e polígonos do tipo FE e FD . Vamos começar olhando um polígono do tipo FE . Ele é formado

por dois triângulos do tipo E e um do tipo D que compartilha um lado com o triângulo cuja distância entre seus vértices é maior como pode ser visto na Fig. 4.6.

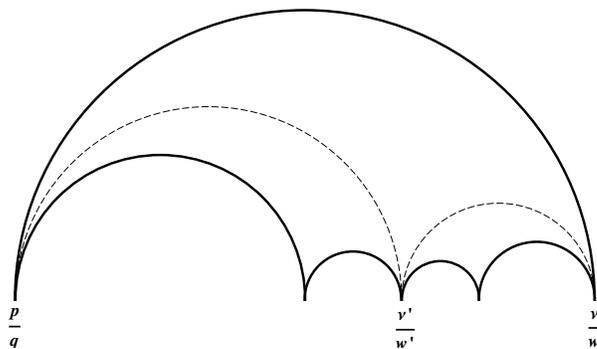


Figura 4.6: Polígono de 5 lados do tipo FE .

Agora, observando o código CGP3 para geodésicas orientadas que cortam esse polígono, temos 4 possibilidades: DD , DE , ED e EE que nos fornecem os códigos E_4 , E_3 , E_2 e E_1 , respectivamente, como pode ser visto na Fig. 4.7.

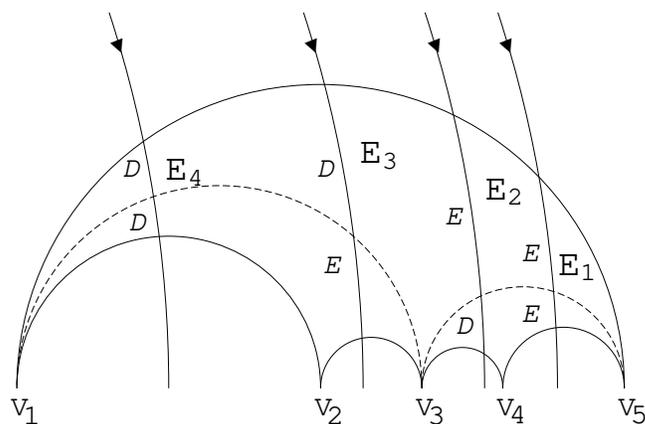


Figura 4.7: Segmentos de geodésicas com a classificação proposta (a direita) e a classificação segundo CGP3 (em itálico, a esquerda) para polígonos com 5 lados.

Se tomarmos um polígono do tipo FD vemos que também temos as mesmas possibilidades e códigos que o polígono do tipo FE . Assim, neste caso específico do polígono de 5 lados, o tipo do polígono não influencia na determinação do novo código; esta informação é útil apenas quando desejamos representar graficamente o caminho da geodésica que está sendo codificada. Acrescentando a informação do primeiro polígono podemos resumir a classificação por:

Polígono de 5 Lados					
Dirichlet			Tipo FE ou FD		
CGP3	CGP5	Próximo	CGP3	CGP5	Próximo
DD	E_4	FE	DD	E_4	FE
DED	E_3	FE	DE	E_3	FD
DEE	E_2	FD	ED	E_2	FE
			EE	E_1	FD

Tabela 4.7: Código CGP3 e código proposto para polígonos de 5 lados.

Exemplo 4.4 Considere a mesma geodésica do Exemplo 4.2 para calcularmos o novo código para polígonos de 5 lados. Através da informação da Tabela 4.7 o código pode ser obtido da seguinte forma:

CGP3	DD	ED	DE	DD	ED	DE	DD	...
CGP5	4	2	3	4	2	3	4	...

e, portanto, o novo código para a geodésica em uma tesselação constituída por polígonos de 5 lados é $E_1E_4E_2E_3E_4E_2E_3E_4 \dots$ ou seja, (1423) . ■

Através de um raciocínio análogo para a obtenção do código para polígonos de 5 lados, podemos obter um código para polígonos de 7 lados que pode ser visto na Tabela 4.8

Polígono de 7 Lados								
Dirichlet			Tipo FE			Tipo FD		
CGP3	CGP7	Próximo	CGP3	CGP7	Próximo	CGP3	CGP7	Próximo
DDD	E_6	FE	DDD	E_6	FE	EEE	E_1	FD
DDED	E_5	FE	DDE	E_5	FD	EED	E_2	FE
DDEE	E_4	FD	DED	E_4	FE	EDE	E_3	FD
DED	E_3	FE	DEE	E_3	FD	EDD	E_4	FE
DEE	E_2	FD	ED	E_2	FE	DE	E_5	FD
			EE	E_1	FD	DD	E_6	FE

Tabela 4.8: Código CGP3 e código proposto para polígonos de 7 lados.

Observe que agora temos sempre uma alternância no polígono que vem em seguida, exceto para o código E_6 abaixo do primeiro polígono. De uma forma geral, abaixo do primeiro polígono podemos ver que quando o código final é par, o tipo de polígono que vem a seguir é FD e, caso

contrário, FE . Para os outros polígonos a situação se inverte, ou seja, quando o código é par temos um polígono do tipo FE em seguida e, caso contrário, um do tipo FD . Podemos ver que esse padrão se repete também no caso do polígono de 5 lados (Tabela 4.7).

Assim, se formos aumentando o número de lados do polígono, vemos que existe um padrão que se repete e que da mesma forma que conseguimos generalizar os resultados para polígonos de lados par, podemos fazer o mesmo para os polígonos de lados ímpar, $2n + 1$. Esta generalização é dada pelas informações contidas nas Tabelas 4.9 e 4.10.

Neste caso também podemos utilizar o mesmo raciocínio usado na demonstração do Teorema 3.9. Nos caso de polígonos de lado ímpar, quando passamos de um polígono de $2n + 1$ lados para um de $2(n + 1) + 1$ lados, aumentamos dois triângulos no lado esquerdo da região de Dirichlet e dois triângulos de índices consecutivos nos polígonos do tipo FE ou FD . Esses triângulos sempre seguem a mesma lógica de construção usada no polígono anterior. O aumento desses triângulos garante-nos a demonstração desse resultado por indução.

Região de Dirichlet de $2n + 1$ Lados		
CGP3	CGPn	Próximo
D^n	E_{2n}	FE
$D^k E^1$	$E_{2k+1}, \quad 1 \leq k < n$	FE
$D^k E^2$	$E_{2k}, \quad 1 \leq k < n$	FD

Tabela 4.9: Código para geodésicas baseado em polígonos de $2n + 1$ lados - região de Dirichlet.

Polígono de $2n + 1$ Lados			
Tipo	CGP3	CGPn	Próximo
FE	D^n	E_{2n}	FE
	$D^{n-1} E^1$	E_{2n-1}	FD
	$D^k E^1 D^1$	$E_{2k+2}, \quad 1 \leq k \leq n - 2$	FE
	$D^k E^2$	$E_{2k+1}, \quad 1 \leq k \leq n - 2$	FD
	$E^1 D^1$	$E_2,$	FE
	E^2	$E_1,$	FD
FD	E^n	E_1	FD
	$E^{n-1} D^1$	E_2	FE
	$E^k D^1 E^1$	$E_{2n-2k-3}, \quad 1 \leq k \leq n - 2$	FD
	$E^k D^2$	$E_{2n-2k-4}, \quad 1 \leq k \leq n - 2$	FE
	$D^1 E^1$	$E_{2n-1},$	FD
	D^2	$E_{2n},$	FE

Tabela 4.10: Código para geodésicas baseado em polígonos de $2n + 1$ lados.

A generalização desses códigos tanto para polígonos de $2n$ como $2n + 1$ lados, pode também ser descrita por um algoritmo. Este pode ser visto com maiores detalhes no Apêndice A.

Observe que através da generalização de ambos os códigos podemos agora obter uma relação entre a decomposição em frações contínuas do ponto atrator de uma geodésica cuja transformação pertença a $PSL(2, \mathbb{Z})$ e sua sequência cortante em uma tesselação constituída por polígonos de n lados ($n > 3$).

O caminho inverso também é possível, ou seja, dada uma sequência cortante em uma tesselação e dado o valor de n , podemos obter a decomposição em frações contínuas do ponto atrator e, assim, saber qual o valor do ponto atrator e do repulsor da geodésica. Este procedimento inverso pode ser feito através da observação das tabelas de forma inversa.

Uma característica interessante deste método de codificação de geodésica é o fato dos pontos terminais das geodésicas nunca coincidirem com um vértice de um polígono. Este fato está relacionado ao tipo de geodésicas que estamos trabalhando. As geodésicas que estamos utilizando neste trabalho são as chamadas *A-reduzidas* (ver [Kato 07]), geodésicas pertencentes a \mathbb{H}^2 cujas transformações associadas são elementos do grupo $PSL(2, \mathbb{Z})$. Estas geodésicas possuem pontos terminais α e β que são números irracionais com $|\beta| > 1$ e $-1 < \text{sgn}(\beta)\alpha < 0$. Agora, como mencionamos anteriormente, a série de Farey é formada por números racionais. Como em todas as tesselações os vértices dos polígonos são pontos da série de Farey, segue que nunca teremos um vértice coincidindo com um ponto atrator ou repulsor da geodésica.

Antes de passarmos para a próxima seção, vamos selecionar algumas geodésicas $C(\gamma(\alpha, \beta))$ tais que as transformações associadas pertençam a $PSL(2, \mathbb{Z})$. Através dos algoritmos apresentados, mostraremos como será a representação de cada geodésica nas tesselações constituídas por polígonos de 4, 5, 6 e 7 lados através da decomposição em frações contínuas do ponto atrator β . A fim de mostrarmos o desempenho dos algoritmos em diversas situações, vamos escolher geodésicas que ao iniciar sua excursão em direção ao ponto atrator, entrem em regiões distintas nas tesselações. Isto é feito observando a parte fracionária do ponto atrator e buscando geodésicas cujas partes fracionárias não sejam aproximadamente iguais. Na Tabela 4.11 podemos ver as matrizes A associadas às transformações hiperbólicas de cada geodésica selecionada e seus pontos fixos.

Podemos ver que as partes fracionárias dos pontos atratores das geodésicas escolhidas estão distribuídas no intervalo $(0, 1)$. Em seguida, ao aplicar os algoritmos em cada geodésica, podemos obter os novos códigos para essas geodésicas nas tesselações constituídas por polígonos de 4, 5, 6 e 7 lados. O resultado pode ser visto na Tabela 4.12. Observe que na primeira coluna temos a geodésica identificada, na segunda coluna temos o valor de cada ponto atrator decomposto em frações contínuas e nas seguintes a representação de cada geodésica na tesselação correspondente. Através da observação dos valores dessa tabela podemos ver que todos os códigos obtidos são eventualmente periódicos.

$C(\gamma(\alpha, \beta))$	Matriz A	α	β
1	$\begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	-0.1882	3.1882
2	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	-0.2071	1.2071
3	$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	-0.2638	1.2638
4	$\begin{pmatrix} 25 & 21 \\ 19 & 16 \end{pmatrix}$	-0.8408	1.3145
5	$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$	-0.5798	1.3798
6	$\begin{pmatrix} 13 & 10 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$	-0.7722	1.4389
7	$\begin{pmatrix} 32 & 7 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$	-0.2190	3.5523
8	$\begin{pmatrix} 159 & 112 \\ 44 & 31 \end{pmatrix}$	-0.7044	3.6135
9	$\begin{pmatrix} 65 & 51 \\ 14 & 11 \end{pmatrix}$	-0.7848	4.6419
10	$\begin{pmatrix} 26 & 11 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$	-0.4236	3.7094
11	$\begin{pmatrix} 34 & 15 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$	-0.4415	3.7749
12	$\begin{pmatrix} 42 & 19 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}$	-0.4526	3.8163
13	$\begin{pmatrix} 17 & 15 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$	-0.8844	1.8844

Tabela 4.11: Geodésicas escolhidas.

$C(\gamma(\alpha, \beta))$	β	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
1	[35]	(332 13331)	(4 4314)	(53 351)	(65263 461)
2	[14]	(331 332)	(4 42434)	(52 54)	(64 62)
3	[13]	(32 331)	(4 34)	(51 15153)	(61 1563)
4	[1351]	(32 1131331)	(4 31134)	(51 15153)	(61 1563)
5	[1211]	(31 3132)	(4 22334)	(4 5152)	(542 24)
6	[1231]	(31 13132)	(4 1223134)	(4 3152)	(4223 361)
7	[3114]	(2 332131)	(3 431344122)	(3 4315)	(363 3652261)
8	[31111221]	(2 313221131)	(3 232122)	(3 15241315)	(341 52223)
9	[41131]	(2 311)	(3 12113313122)	(3 131215)	(315 155212213)
10	[3122]	(2 22131)	(2 4121)	(25 2314)	(25216 134)
11	[3132]	(2 132131)	(2 231314121)	(24 2313)	(2 233)
12	[3142]	(2 122131)	(2 14121)	(23 2312)	(2 1613)
13	[1171]	(2 1113131)	(2 11221)	(214 15113)	(2 1155)

Tabela 4.12: Código para geodésicas proposto em algumas tesselações.

4.2 Tesselações Hiperbólicas e Códigos de Fonte

Até agora vimos como gerar novas tesselações através da união de polígonos cujos vértices estão sobre a tesselação de Farey. Vimos também que ao considerarmos uma geodésica em cada uma dessas tesselações podemos obter uma associação entre a sua sequência cortante e a decomposição em frações contínuas do ponto atrator. A próxima etapa deste trabalho será mostrarmos como podemos aplicar o que foi obtido até o momento na área de codificação de fontes discretas sem memória.

Começemos por considerar $2n = 4$ e observar uma geodésica orientada fechada que corta essa tesselação formada por polígonos de 4 lados. Esta situação pode ser vista na Fig. 4.8.

Ao passar por ξ , a geodésica inicia uma excursão em direção ao seu ponto atrator β_∞ . Durante

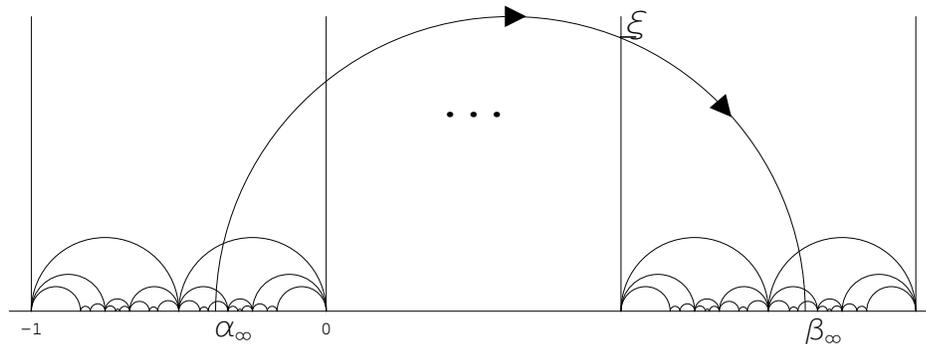


Figura 4.8: Geodésica numa tesselação formada por polígonos de 4 lados.

essa excursão, a cada polígono que está sendo cortado, existe um conjunto de polígonos que a geodésica poderá cortar em seguida. Se a sequência cortante a partir de ξ for $E_{a_1}E_{a_2}E_{a_3}\dots$ com $a_i \in [1, 2, 3]$, podemos ver que o valor de a_{k+1} não dependerá de a_k . Por outro lado, o polígono que será cortado por $E_{a_{k+1}}$ depende diretamente do polígono que E_{a_k} cortou. Isto porque os vértices do polígono cortado por $E_{a_{k+1}}$ serão termos da série de Farey que estão entre os vértices do polígono cortado por E_{a_k} .

Vamos supor que não conhecemos o valor do ponto atrator de uma geodésica, ou seja, apenas observamos o caminho percorrido a medida que ela segue em direção ao seu ponto atrator. Observando novamente a Fig. 4.8, podemos ver que enquanto a geodésica segue seu caminho nessa tesselação podemos associar uma probabilidade a cada caminho tomado. Saindo de um polígono, a geodésica sempre terá três opções de polígonos que poderá entrar. Note que se o ponto atrator da geodésica fosse conhecido, esse caminho seria fixo.

Vamos chamar de X_k o polígono que está sendo cortado por E_{a_k} , elemento da sequência cortante. No polígono X_k , cada par consecutivo de vértices define um novo polígono que pode ser cortado e uma probabilidade associada a este. Sendo assim, o valor a_k especifica quais dos polígonos abaixo de X_k está sendo cortado. Como consequência, a probabilidade de termos um valor E_{a_k} é a probabilidade da geodésica entrar no polígono X_{k+1} . Os vértices deste polígono dependem de a_k e X_k .

Assim, a probabilidade da geodésica possuir sequência cortante $E_{a_1}E_{a_2}\dots E_{a_k}$, ou seja $P(E_{a_1} \cap E_{a_2} \cap \dots \cap E_{a_k})$ é dada por $P(X_2 \cap X_3 \cap \dots \cap X_{k+1})$. Agora, pelo Teorema da Probabilidade Composta [Jame 81] temos:

$P(E_{a_1} \cap E_{a_2} \cap \dots \cap E_{a_k}) = P(E_{a_1}) \cdot P(E_{a_2} | E_{a_1}) \cdot P(E_{a_3} | E_{a_1} \cap E_{a_2}) \dots P(E_{a_k} | E_{a_1} \cap \dots \cap E_{a_{k-1}})$
e, portanto

$$P(X_2 \cap X_3 \cap \dots \cap X_{k+1}) = P(X_2) \cdot P(X_3 | X_2) \cdot P(X_4 | X_2 \cap X_3) \dots P(X_{k+1} | X_2 \cap \dots \cap X_k).$$

Ou seja, a probabilidade do caminho tomado pela geodésica é o produto das probabilidades associadas a cada um dos polígonos que estão na sua frente enquanto vai em direção ao seu ponto atrator. Cada uma dessas probabilidades é condicional ou seja, depende do caminho seguido pela geodésica até então. Para calcularmos essas probabilidades devemos então considerar que estando no polígono X_k qual seria a probabilidade de entrarmos no polígono X_{k+1} . Sabemos que existe uma dependência entre cada par de vértices do polígono atual com os vértices do polígono anterior. Chamando de v_j^k os vértices do polígono X_k , com $j = 1, \dots, n$, uma vez que cada polígono de n lados possui n vértices, temos:

$$P(X_{k+1} | X_2 \cap \dots \cap X_k) = \frac{v_{i+1}^k - v_i^k}{v_n^k - v_1^k} = \frac{v_n^{k+1} - v_1^{k+1}}{v_n^k - v_1^k} \quad (4.2)$$

onde o valor de i (com $i \in [1, \dots, n-1]$) depende do valor de a_k no elemento E_{a_k} da sequência cortante uma vez que este define qual par de vértices de X_k foi cortado. A equação (4.2) nos permite assim calcular as probabilidades condicionais. No entanto, utilizando essa equação, vemos que o cálculo da probabilidade de um caminho da geodésica é um pouco trabalhoso pois depende de fazermos um cálculo de probabilidade a cada polígono cortado pela geodésica. O Teorema a seguir e seu corolário nos mostrarão que esse cálculo pode ser feito de uma forma bem mais simples.

Teorema 4.3 *Seja uma tesselação em $PSL(2, \mathbb{Z})$ formada por polígonos de n lados ($n \geq 3$) e uma geodésica que inicia sua excursão em direção ao seu ponto atrator. Se num dado momento ao cortar um polígono X_i o elemento da sequência cortante, E_{a_i} possui probabilidade da forma $P(X_{i+1} | X_2 \cap \dots \cap X_i) = n_i / m_i$, a probabilidade de tomar um caminho cuja sequência cortante resultante seja $E_{a_1} E_{a_2} \dots E_{a_k}$ é dada por*

$$P(E_{a_1} \cap E_{a_2} \cap \dots \cap E_{a_k}) = P(X_2 \cap X_3 \cap \dots \cap X_{k+1}) = \frac{n_k}{m_1},$$

onde $n_i = v_n^{i+1} - v_1^{i+1}$ e $m_i = v_n^i - v_1^i$.

Demonstração:

Vamos começar mostrando que o resultado vale para $k = 1$. No caso de $k = 1$, temos que

encontrar a probabilidade $P(E_{a_1})$. Neste caso, E_{a_1} é o primeiro elemento da sequência cortante de uma geodésica ao iniciar sua excursão em direção ao seu ponto atrator. Assim, a geodésica corta a região de Dirichlet deixando a_1 vértices a sua esquerda. Sejam v_1^1, \dots, v_{n-1}^1 os vértices da região de Dirichlet que estão em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Assuma que $v_1^1 < v_2^1 < \dots < v_{n-1}^1$. Como vimos no Capítulo 3, cada par consecutivo de vértices tem um novo polígono abaixo. Se a geodésica cortar a região de Dirichlet entre os vértices v_ℓ^1 e $v_{\ell+1}^1$, a probabilidade de termos E_{a_1} é a probabilidade da geodésica entrar no polígono X_2 cujos vértices mais distantes são v_ℓ^1 e $v_{\ell+1}^1$. Assim,

$$P(E_{a_1}) = P(X_2) = \frac{v_{\ell+1}^1 - v_\ell^1}{v_{n-1}^1 - v_1^1}.$$

Como v_ℓ^1 é o menor vértice de X_2 temos que $v_1^2 = v_\ell^1$ e como $v_{\ell+1}^1$ é o maior, $v_n^2 = v_{\ell+1}^1$ portanto,

$$P(E_{a_1}) = P(X_2) = \frac{v_{\ell+1}^1 - v_\ell^1}{v_{n-1}^1 - v_1^1} = \frac{v_n^2 - v_1^2}{v_{n-1}^1 - v_1^1} = \frac{n_1}{m_1}.$$

Agora, por indução vamos supor que vale para k e mostrar que vale também para $k+1$. Se vale para k isto significa que

$$P(E_{a_1} \cap E_{a_2} \cap \dots \cap E_{a_k}) = P(X_2) \cdot P(X_3|X_2) \cdot P(X_4|X_2 \cap X_3) \dots P(X_{k+1}|X_2 \cap \dots \cap X_k) = \frac{n_k}{m_1}.$$

Sabemos que $n_i = v_n^{i+1} - v_1^{i+1}$ e $m_1 = v_n^1 - v_1^1$ portanto,

$$\begin{aligned} P(E_{a_1} \cap E_{a_2} \cap \dots \cap E_{a_k}) &= P(X_2) \cdot P(X_3|X_2) \cdot P(X_4|X_2 \cap X_3) \dots P(X_{k+1}|X_2 \cap \dots \cap X_k) \\ &= \frac{n_k}{m_1} = \frac{v_n^{k+1} - v_1^{k+1}}{v_n^1 - v_1^1}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ao cortar o polígono X_k a geodésica nos fornece o elemento da sequência cortante E_{a_k} . Neste ponto temos 4 possibilidades: X_k ser do tipo FE e X_{k+1} ser do tipo FE , X_k ser do tipo FE e X_{k+1} ser do tipo FD , X_k ser do tipo FD e X_{k+1} ser do tipo FD e X_k ser do tipo FD e X_{k+1} ser do tipo FD . Vamos começar supondo que X_k é do tipo FE e X_{k+1} é do tipo FD e que estamos numa tesselação constituída por polígonos de lado par.

Pelo Teorema 3.7 sabemos que os vértices de X_k são:

$$v_1^k = \frac{p}{q}, \quad v_i^k = \frac{pi + \nu}{qi + w}, \quad v_n^k = \frac{\nu}{w}$$

com $i = 1, \dots, n - 2$ e quando $v_1 \neq 0$. Vamos supor agora que a geodésica corta X_k entre os vértices v_ℓ^k e $v_{\ell+1}^k$, ou seja,

$$v_\ell^k = \frac{p\ell + \nu}{q\ell + w} \quad \text{e} \quad v_{\ell+1}^k = \frac{p(\ell + 1) + \nu}{q(\ell + 1) + w}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} P(X_{k+1}|X_2 \cap \dots \cap X_k) &= \frac{v_{\ell+1}^k - v_\ell^k}{v_n^k - v_1^k} \\ &= \frac{\frac{p(\ell+1)+\nu}{q(\ell+1)+w} - \frac{p\ell+\nu}{q\ell+w}}{\frac{\nu}{w} - \frac{p}{q}} \end{aligned}$$

Sabemos assim que $n_k = \frac{p(\ell+1)+\nu}{q(\ell+1)+w} - \frac{p\ell+\nu}{q\ell+w}$. Como o resultado vale para k , temos

$$P(X_2) \cdot P(X_3|X_2) \dots P(X_{k+1}|X_2 \cap \dots \cap X_k) = \frac{\frac{p(\ell+1)+\nu}{q(\ell+1)+w} - \frac{p\ell+\nu}{q\ell+w}}{m_1}. \quad (4.4)$$

Agora, ao entrar no polígono X_{k+1} a geodésica que veio do polígono anterior, possui os dois vértices mais distantes dados por:

$$v_1^{k+1} = v_\ell^k = \frac{p\ell + \nu}{q\ell + w} \quad \text{e} \quad v_n^{k+1} = v_{\ell+1}^k = \frac{p(\ell + 1) + \nu}{q(\ell + 1) + w}$$

Vamos fazer $v_1^{k+1} = \frac{p'}{q'}$ e $v_n^{k+1} = \frac{\nu'}{w'}$ obtendo:

$$\frac{p'}{q'} = \frac{p\ell + \nu}{q\ell + w} \quad \text{e} \quad \frac{\nu'}{w'} = \frac{p(\ell + 1) + \nu}{q(\ell + 1) + w}. \quad (4.5)$$

Como X_{k+1} é do tipo FD , pelo Teorema 3.7 temos que seus vértices são:

$$v_1^{k+1} = \frac{p'}{q'}, \quad v_i^{k+1} = \frac{p' + \nu'i}{q' + w'i} \quad \text{e} \quad v_n^{k+1} = \frac{\nu'}{w'}$$

com $i = 1, \dots, n - 2$ e quando $v_n \neq 1$. Vamos supor agora que a geodésica corta X_{k+1} entre os vértices v_l^{k+1} e v_{l+1}^{k+1} , ou seja,

$$v_l^{k+1} = \frac{p' + \nu' l}{q' + w' l} \quad \text{e} \quad v_{l+1}^{k+1} = \frac{p' + \nu'(l+1)}{q' + w'(l+1)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P(E_{a_{k+1}} | E_{a_1} \cap \dots \cap E_{a_k}) &= P(X_{k+2} | X_2 \cap \dots \cap X_{k+1}) \\ &= \frac{v_{l+1}^{k+1} - v_l^{k+1}}{v_n^{k+1} - v_1^{k+1}} \\ &= \frac{\frac{p'(l+1)+\nu'}{q'(l+1)+w'} - \frac{p'l+\nu'}{q'l+w'}}{\frac{\nu'}{w'} - \frac{p'}{q'}} \\ &= \frac{n_{k+1}}{m_{k+1}}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Agora

$$P(E_{a_1} \cap \dots \cap E_{a_k} \cap E_{a_{k+1}}) = P(X_2) \cdot P(X_3 | X_2) \dots P(X_{k+1} | X_2 \cap \dots \cap X_k) \cdot P(X_{k+2} | X_2 \cap \dots \cap X_{k+1}).$$

Substituindo as equações (4.4) e (4.6) na anterior temos:

$$P(E_{a_1} \cap \dots \cap E_{a_k} \cap E_{a_{k+1}}) = \frac{\left(\frac{p(\ell+1)+\nu}{q(\ell+1)+w} - \frac{p\ell+\nu}{q\ell+w} \right)}{m_1} \cdot \frac{\left(\frac{p'(l+1)+\nu'}{q'(l+1)+w'} - \frac{p'l+\nu'}{q'l+w'} \right)}{\left(\frac{\nu'}{w'} - \frac{p'}{q'} \right)}$$

Os valores de p', q', ν' e w' são dados pela equação (4.5). Substituindo esse valores somente no denominador da segunda parte, temos:

$$\begin{aligned} P(E_{a_1} \cap \dots \cap E_{a_k} \cap E_{a_{k+1}}) &= \frac{\left(\frac{p(\ell+1)+\nu}{q(\ell+1)+w} - \frac{p\ell+\nu}{q\ell+w} \right)}{m_1} \cdot \frac{\left(\frac{p'(l+1)+\nu'}{q'(l+1)+w'} - \frac{p'l+\nu'}{q'l+w'} \right)}{\left(\frac{p(\ell+1)+\nu}{q(\ell+1)+w} - \frac{p\ell+\nu}{q\ell+w} \right)} \\ &= \frac{\frac{p'(l+1)+\nu'}{q'(l+1)+w'} - \frac{p'l+\nu'}{q'l+w'}}{m_1} \\ &= \frac{n_{k+1}}{m_1}. \end{aligned}$$

Vemos assim que se o resultado vale para k também vale para $k + 1$. Provamos assim o Teorema para o caso de termos um polígono com número de lados par e de X_k ser do tipo FE e de X_{k+1} ser do tipo FD . Além disso, só abordamos os casos onde $v_k^1 \neq 0$ e $v_{k+1}^n \neq 1$. Para os outros casos, o resultado também vale e a demonstração é feita de forma similar. O único caso em que a demonstração não é feita de forma similar é o caso $n = 3$ que mostraremos a seguir.

O caso onde $n = 3$ é mostrado sobre os triângulos da série de Farey onde usaremos as propriedades do Teorema 3.4.

Vamos começar mostrando que o resultado vale para $k = 1$. No caso de $k = 1$, temos que encontrar a probabilidade $P(E_{a_1})$. Neste caso, a_1 somente pode assumir o valor 1 já que a geodésica corta o triângulo fundamental mostrado na Fig. 3.3 que possui apenas os vértices 0 e 1 em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Assim, o único triângulo possível é o triângulo $X_2 = (P_3)_{E_0}^{0,1}$. Neste caso,

$$P(E_1) = P(X_2) = \frac{1}{1} = \frac{v_n^2 - v_1^2}{v_2^1 - v_1^1} = \frac{n_1}{m_1}.$$

Vamos mostrar que o resultado vale também para $k = 2$.

No caso de $k = 2$, temos que encontrar a probabilidade $P(E_{a_2} \cap E_{a_1})$. E_{a_2} é o segundo elemento da sequência cortante de uma geodésica ao iniciar sua excursão em direção ao seu ponto atrator e corta o triângulo $X_2 = (P_3)_{E_0}^{0,1}$ podendo entrar no triângulo $(P_3)_{E_1}^{0,\frac{1}{2}}$ quando $a_2 = 1$ ou em $(P_3)_{D_1}^{\frac{1}{2},1}$ quando $a_2 = 2$. Para X_3 sendo um desses dois triângulos, temos:

$$P(E_{a_2} \cap E_{a_1}) = P(E_{a_1}) \cdot P(E_{a_2} | E_{a_1}) = P(X_2 \cap X_3) = P(X_2) \cdot P(X_3 | X_2). \quad (4.7)$$

Já vimos que $P(X_2) = 1$ e em ambas as possibilidades de X_3 , temos:

$$P(X_3 | X_2) = \frac{\frac{1}{2} - 0}{1 - 0} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - 0} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{n_2}{m_2}.$$

Como $m_1 = 1$, substituindo esses valores em (4.7) temos:

$$P(E_{a_2} \cap E_{a_1}) = P(X_2) \cdot P(X_3 | X_2) = 1 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{n_2}{m_1}.$$

Vemos assim que o resultado vale para $k = 1$ e $k = 2$. Agora, por indução vamos assumir que vale para um k qualquer e mostrar que vale também para $k + 1$.

Se vale para k isto significa que

$$P(E_{a_1} \cap E_{a_2} \cap \dots \cap E_{a_k}) = P(X_2).P(X_3|X_2).P(X_4|X_2 \cap X_3) \dots P(X_{k+1}|X_2 \cap \dots \cap X_k) = \frac{n_k}{m_1}.$$

Como $n_i = v_n^{i+1} - v_1^{i+1}$, isto significa que

$$\begin{aligned} P(E_{a_1} \cap E_{a_2} \cap \dots \cap E_{a_k}) &= P(X_2).P(X_3|X_2).P(X_4|X_2 \cap X_3) \dots P(X_{k+1}|X_2 \cap \dots \cap X_k) \\ &= \frac{n_k}{m_1} = \frac{v_n^{k+1} - v_1^{k+1}}{v_n^1 - v_1^1}. \end{aligned}$$

Ao cortar o polígono X_k a geodésica nos fornece o elemento da sequência cortante E_{a_k} . Neste ponto, como na demonstração anterior, temos 4 possibilidades: X_k ser do tipo FE e X_{k+1} ser do tipo E , X_k ser do tipo E e X_{k+1} ser do tipo D , X_k ser do tipo D e X_{k+1} ser do tipo D e X_k ser do tipo D e X_{k+1} ser do tipo D . A diferença é que agora essa informação sobre o tipo de triângulo não afeta o cálculo dos vértices. Cada triângulo possui apenas três vértices sendo que v_2^k é sempre o próximo ponto da série de Farey entre v_1^k e v_3^k independente do seu tipo D ou E .

Vamos supor que os vértices v_1^k e v_3^k são $v_1^k = \frac{p}{q}$ e $v_3^k = \frac{\nu}{w}$. Como consequência do Teorema 3.1, $v_2^k = \frac{p+\nu}{q+w}$. Vamos supor agora que a geodésica corta X_k entre os vértices v_1^k e v_2^k ; através da equação (4.2),

$$P(X_{k+1}|X_2 \cap \dots \cap X_k) = \frac{v_2^k - v_1^k}{v_3^k - v_1^k} = \frac{\frac{p+\nu}{q+w} - \frac{p}{q}}{\frac{\nu}{w} - \frac{p}{q}}.$$

Sabemos assim que $n_k = \frac{p+\nu}{q+w} - \frac{p}{q}$. Como o resultado vale para k , temos que

$$P(X_2).P(X_3|X_2) \dots P(X_{k+1}|X_2 \cap \dots \cap X_k) = \frac{\frac{p+\nu}{q+w} - \frac{p}{q}}{m_1}. \quad (4.8)$$

Ao entrar no triângulo X_{k+1} a geodésica que veio do triângulo anterior, possui os dois vértices mais distantes dados por:

$$v_1^{k+1} = v_1^k = \frac{p}{q} \quad \text{e} \quad v_3^{k+1} = v_2^k = \frac{p+\nu}{q+w}.$$

Vamos fazer $v_1^{k+1} = \frac{p'}{q'}$ e $v_3^{k+1} = \frac{\nu'}{w'}$ obtendo:

$$\frac{p'}{q'} = \frac{p}{q} \quad \text{e} \quad \frac{\nu'}{w'} = \frac{p + \nu}{q + w}. \quad (4.9)$$

Novamente como resultado do Teorema 3.1 temos que $v_2^{k+1} = \frac{p'+\nu'}{q'+w'}$. Vamos supor agora que a geodésica corta X_{k+1} entre os vértices v_2^{k+1} e v_3^{k+1} , ou seja,

$$v_2^{k+1} = \frac{p' + \nu'}{q' + w'} \quad \text{e} \quad v_3^{k+1} = \frac{\nu'}{w'}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P(E_{a_{k+1}} | E_{a_1} \cap \dots \cap E_{a_k}) &= P(X_{k+2} | X_2 \cap \dots \cap X_{k+1}) \\ &= \frac{v_3^{k+1} - v_2^{k+1}}{v_3^{k+1} - v_1^{k+1}} \\ &= \frac{\frac{\nu'}{w'} - \frac{p'+\nu'}{q'+w'}}{\frac{\nu'}{w'} - \frac{p'}{q'}} \\ &= \frac{n_{k+1}}{m_{k+1}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Agora

$$P(E_{a_1} \cap \dots \cap E_{a_k} \cap E_{a_{k+1}}) = P(X_2) \cdot P(X_3 | X_2) \dots P(X_{k+1} | X_2 \cap \dots \cap X_k) \cdot P(X_{k+2} | X_2 \cap \dots \cap X_{k+1}),$$

e, substituindo as equações (4.8) e (4.10) na anterior temos:

$$P(E_{a_1} \cap \dots \cap E_{a_k} \cap E_{a_{k+1}}) = \frac{\left(\frac{p+\nu}{q+w} - \frac{p}{q}\right)}{m_1} \cdot \frac{\left(\frac{\nu'}{w'} - \frac{p'+\nu'}{q'+w'}\right)}{\left(\frac{\nu'}{w'} - \frac{p'}{q'}\right)},$$

onde os valores de p' , q' , ν' e w' são dados pela equação (4.5). Substituindo esses valores somente no denominador da segunda parte, temos:

$$\begin{aligned}
P(E_{a_1} \cap \cdots \cap E_{a_k} \cap E_{a_{k+1}}) &= \frac{\left(\frac{p+\nu}{q+w} - \frac{p}{q}\right) \left(\frac{\nu'}{w'} - \frac{p'+\nu'}{q'+w'}\right)}{m_1 \left(\frac{p+\nu}{q+w} - \frac{p}{q}\right)} \\
&= \frac{\frac{\nu'}{w'} - \frac{p'+\nu'}{q'+w'}}{m_1} \\
&= \frac{n_{k+1}}{m_1}.
\end{aligned}$$

Vemos assim que quando $n = 3$ se o resultado vale para k ele também vale para $k + 1$. Note que abordamos somente o caso da geodésica cortar X_k entre os vértices v_1^k e v_2^k . Assim como também supomos que a geodésica cortou X_{k+1} entre os vértices v_2^{k+1} e v_3^{k+1} . A demonstração para os casos da geodésica passar entre: v_1^k, v_2^k em X_k e v_1^{k+1}, v_2^{k+1} em X_{k+1} , v_2^k, v_3^k em X_k e v_2^{k+1}, v_3^{k+1} em X_{k+1} e v_2^k, v_3^k em X_k e v_1^{k+1}, v_2^{k+1} em X_{k+1} é feita de forma similar. Concluimos desta forma a demonstração do teorema. ■

Corolário 4.2 *Seja uma geodésica em $PSL(2, \mathbb{Z})$ e uma tesselação formada por polígonos de n lados ($n \geq 3$). Após iniciar sua excursão em direção ao seu ponto atrator, a probabilidade da geodésica tomar um caminho cuja sequência cortante resultante seja $E_{a_1} E_{a_2} \dots E_{a_k}$ será equivalente a distância entre os vértices mais distantes v_1^{k+1} e v_n^{k+1} do último polígono cortado cuja sequência cortante é dada por E_{a_k} .*

Demonstração:

Sabemos pelo Teorema 4.3 que

$$P(E_{a_1} \cap E_{a_2} \cap \cdots \cap E_{a_k}) = P(X_2 \cap X_3 \cap \cdots \cap X_{k+1}) = \frac{v_{i+1}^k - v_i^k}{v_n^k - v_1^k} = \frac{v_n^{k+1} - v_1^{k+1}}{v_n^1 - v_1^1} = \frac{n_k}{m_1}.$$

O primeiro polígono X_1 , em todas as tesselações é o único onde temos $v_1 = 0$ e $v_{n-1} = 1$ onde v_{n-1} é o último vértice do polígono que está em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Isto porque somente neste caso $v_n = \infty$. Assim, $m_1 = v_1^1 - v_n^1 = v_1^1 - v_{n-1}^1 = 1$

$$\text{Portanto, } P(E_{a_1} \cap E_{a_2} \cap \cdots \cap E_{a_k}) = \frac{v_n^{k+1} - v_1^{k+1}}{v_n^1 - v_1^1} = v_n^{k+1} - v_1^{k+1}.$$

■

Como consequência do Corolário 4.2, para sabermos qual a probabilidade de uma geodésica tomar um determinado caminho, basta sabermos os vértices do último polígono cortado.

Agora, voltando a Fig. 4.8, vemos que uma geodésica em $PSL(2, \mathbb{Z})$ ao passar por ξ indo em direção ao seu ponto atrator possui vários caminhos. O conjunto de caminhos possíveis que uma geodésica percorre a partir de ξ pode ser representado por uma árvore onde em cada ramo teremos um polígono e nas folhas teremos a probabilidade da geodésica tomar esse caminho.

A cada caminho, teremos uma probabilidade associada e este será formado por um conjunto de polígonos. O número de polígonos que a geodésica pode cortar até alcançar seu ponto atrator é infinito uma vez que o ponto atrator está sob a fronteira de \mathbb{H}^2 . Por esse motivo, essa árvore pode ter infinitos ramos. Ao falarmos dessa árvore, assumiremos que estamos numa profundidade h para a qual sabemos a probabilidade de cada caminho, que depende exclusivamente do polígono associado ao último ramo.

Muitos dos códigos de compactação de dados discretos utilizam árvores de decisão ou árvores de probabilidades para a elaboração (obtenção) de códigos. Dentre estes, duas possíveis aplicações para os códigos obtidos até agora estão entre os códigos de árvore e os códigos de bloco.

4.2.1 Códigos de árvore

Os códigos de árvore constituem uma classe de códigos de compactação de dados que buscam enviar uma sequência de mensagens emitidas por uma fonte (não necessariamente binária) através de sequências de símbolos r -ários. Dentre os códigos de árvore, vamos nos concentrar num código em particular, o código de Elias. O código de Elias é um código de fonte de comprimento variável tal que para uma sequência longa de caracteres temos um código com comprimento longo. Já para sequências curtas, temos um código com comprimento curto o que dá ao código uma característica chamada *deslizante*. A característica do código de Elias é que o número de dígitos das palavras-código que deixam o codificador por símbolo de entrada é variável, dependendo do padrão particular de símbolos produzidos por uma fonte.

Podemos descrever o código de Elias da seguinte forma: Seja uma fonte de informação binária que emite símbolos (também chamados de alfabeto fonte) com uma distribuição de probabilidade associada $p(x)$. Vamos considerar o sinal enviado como a representação da probabilidade de ocorrência dessa sequência, ρ . A partir da distribuição de probabilidade dos símbolos podemos montar uma árvore de decisão e através dela e da sequência de sinais enviados, associar a probabilidade ρ referente a essa sequência emitida. Para encontrarmos o valor de ρ utilizamos o seguinte procedimento:

Seja p a probabilidade do símbolo a_0 e $1 - p$ probabilidade do símbolo a_1 . Após $n - 1$ símbolos da fonte serem emitidos, um intervalo será especificado, $[A_{n-1}, B_{n-1}]$. Se o n -ésimo símbolo for

a_0 , o novo intervalo será especificado pelas extremidades:

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n-1} \\ B_n &= A_{n-1} + p(B_{n-1} - A_{n-1}). \end{aligned}$$

Já se o n -ésimo símbolo da fonte for a_1 , o novo intervalo será especificado pelas extremidades:

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n-1} \\ B_n &= A_{n-1} + p(B_{n-1} - A_{n-1}). \end{aligned}$$

Dessa forma, o intervalo especificado por qualquer sequência de símbolos da fonte possui um comprimento igual a probabilidade daquela sequência. Os intervalos tornam-se cada vez mais estreitos a medida que a sequência aumenta em comprimento. Para uma sequência infinita, exatamente um ponto é especificado, já para uma sequência finita, temos um sub-intervalo de $[0, 1]$ especificado.

Em seguida para gerarmos a palavra-código, buscamos a representação binária de ρ ou do sub-intervalo em que ele está localizado.

Para ficar mais claro vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.5 *Uma fonte binária emite símbolos $\{a_0, a_1\}$ com distribuição de probabilidade $p(x) = (0.7, 0.3)$. A entropia dessa fonte é de 0.88 bits. Num determinado momento a sequência emitida foi: .01101... (ou seja, $a_0a_1a_1a_0a_1$).*

Observe que colocando um ponto antes da sequência, podemos ver essa sequência como uma expansão binária de um número real. O primeiro passo para gerarmos a palavra-código é encontrarmos qual o valor de ρ . Assim, inicialmente divida o intervalo semi-aberto $[0, 1)$ em dois sub-intervalos $[0, 0.7)$ e $[0.7, 1)$. Use o primeiro símbolo da fonte para especificar onde está ρ . Se o primeiro símbolo for 0, ρ estará no primeiro sub-intervalo e se for 1, ρ estará no segundo sub-intervalo. No nosso caso, ρ está no sub-intervalo $[0, 0.7)$. Agora, utilizando a distribuição de probabilidade da fonte, subdivida cada sub-intervalo na mesma proporção, isto é, $[0, 0.7)$ nos

sub-intervalos $[0, 0.49)$ e $[0.49, 0.7)$ e $[0.7, 1)$ nos sub-intervalos $[0.7, 0.91)$ e $[0.91, 1)$. Agora, use o segundo símbolo da fonte para especificar um desses sub-intervalos. Cada bit emitido pela fonte é utilizado para subdividir cada sub-intervalo da mesma forma. Este procedimento pode ser resumido através da Fig. 4.9 onde fazemos a subdivisão do intervalo $[0, 1)$ através das probabilidades da fonte.

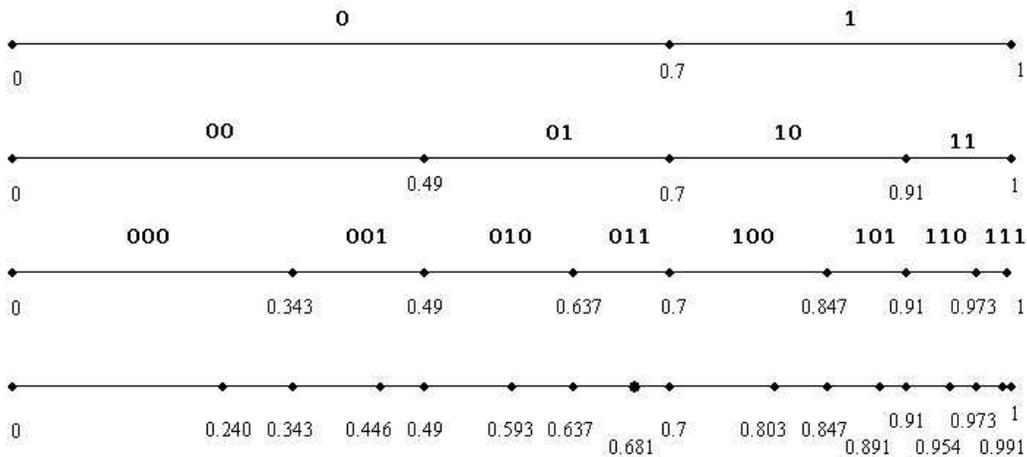


Figura 4.9: Código de Elias.

No nosso caso, a sequência 01101 especificará o intervalo $[0.6678, 0.6811)$. Assim, o valor de ρ estará dentro desse intervalo. Para gerarmos a palavra-código temos que obter a representação binária de ρ e para tal temos duas formas: a primeira é expressarmos as extremidades do intervalo final, A_n e B_n sob forma binária e tomarmos os bits em comum até que os bits de A_n e B_n não coincidam mais. Outra forma é, assim que tivermos suficiente símbolos da fonte, determinar se ρ está no intervalo $[0, 0.5)$ ou no intervalo $[0.5, 1)$, e com isso o primeiro bit da palavra-código poderá ser enviado. Da mesma forma o segundo bit da palavra-código poderá ser enviado tão logo o codificador saiba se ρ está nos intervalos $[0, 0.25)$ e $[0.25, 0.5)$, ou nos intervalos $[0.5, 0.75)$ e $[0.75, 1)$. Este procedimento é equivalente a utilizarmos a árvore da Fig. 4.10 para encontrarmos

onde está localizado o sub-intervalo de ρ e assim obtermos o código. No nosso caso, a palavra-código será 10101. Em média, a palavra-código tem menos bits que a sequência emitida pela fonte.

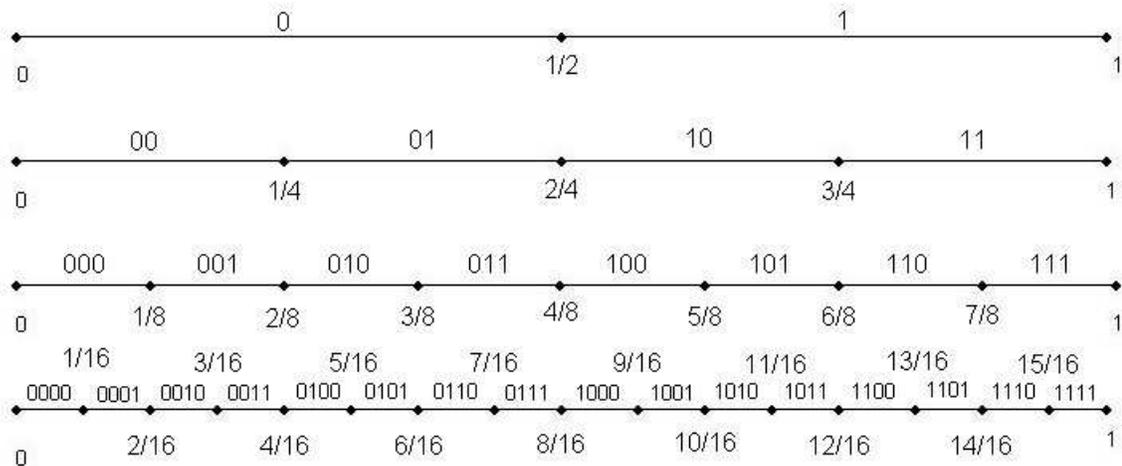


Figura 4.10: Código binário.

O decodificador pode começar a recuperar os símbolos emitidos pela fonte tão logo comece a receber alguns bits da palavra-código. Por exemplo, se a palavra-código binária começa com $011\dots$, então o valor de ρ deve estar entre 0.375 e 0.45 e o primeiro símbolo deve ser a_0 . Já se a palavra-código começasse com $0110\dots$, saberíamos que o valor de ρ deveria estar entre 0.375 e 0.4375 e sendo assim a sequência da fonte seria $a_0a_0a_1$.

Por esse exemplo vemos que ao utilizar o código de Elias temos um problema de precisão que pode ser contornado introduzindo-se estratégias de arredondamento e escala que podem ser vistas em [Blah 87]. Quando utilizadas, estas estratégias levam o código a compactar os dados com entropia próxima à da fonte.

Código de Árvore Proposto

Vamos inicialmente considerar o sinal enviado como a representação de um segmento de uma geodésica pertencente a $PSL(2, \mathbb{Z})$, após iniciar sua excursão em direção ao seu ponto atrator. A este sinal, poderemos associar uma probabilidade de ocorrência, um ponto atrator e uma sequência cortante.

Seja β , o ponto atrator dessa geodésica. $\beta = n_0 + \rho$ onde n_0 é a parte inteira do ponto atrator e ρ é sua parte decimal. Como estamos olhando sempre a geodésica após começar a ir em direção ao seu ponto atrator, o valor de n_0 não nos interessa, apenas o valor de ρ . Este valor sempre pertencerá ao intervalo $[0, 1)$, portanto vamos considerar este valor como sendo a probabilidade de ocorrência desse sinal ou desse segmento geodésico numa tesselação formada por polígonos de n lados.

Vimos que uma consequência do Corolário 4.2 é que a geodésica pode ser vista como um caminho em uma árvore de probabilidades. Observando a árvore na Fig. 4.11, notamos que a partir de caminhos percorridos por uma geodésica partindo de um ponto ξ , podemos construir uma outra árvore como mostrada na Fig. 4.12. Esta segunda árvore é uma árvore de probabilidades, onde $p_i^k = v_{i+1}^k - v_i^k$.

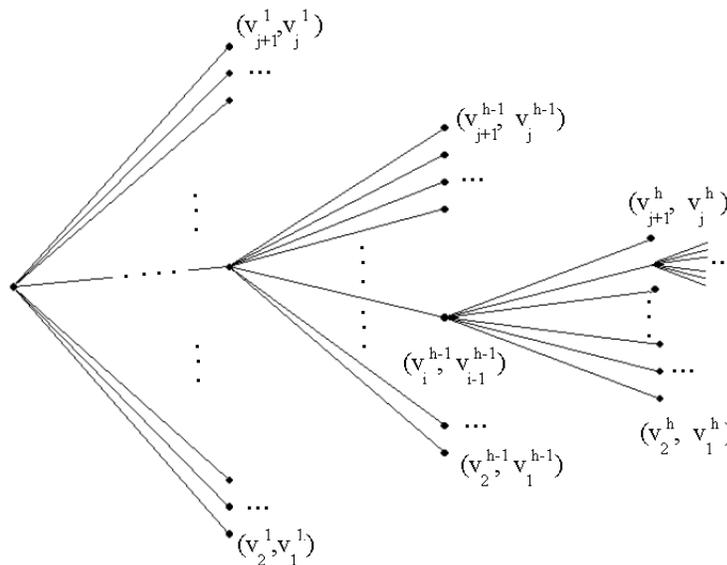


Figura 4.11: Árvore de uma tesselação formada por polígonos de $j + 1$ lados.

Agora, a partir da distribuição de probabilidades da fonte vamos buscar nessa árvore de probabilidades um ramo numa profundidade $h - 1$ cuja distribuição de probabilidades das folhas na profundidade h seja próxima da distribuição de probabilidade dos símbolos da fonte. Uma vez escolhido um ramo, ele será o ramo inicial para todo sinal emitido por essa fonte. A sub-árvore abaixo desse ramo e a sequência de sinais emitidos pela fonte será utilizada para encontrarmos o valor de ρ .

Para obtermos um intervalo para ρ através da sequência recebida, devemos associar a cada lado do polígono um símbolo da fonte. Faremos essa associação através do ramo inicial escolhido, que especifica um polígono inicial. Sabemos que a distância entre cada par de vértices consecutivos especifica uma probabilidade, assim utilizaremos as probabilidades dos símbolos da fonte para

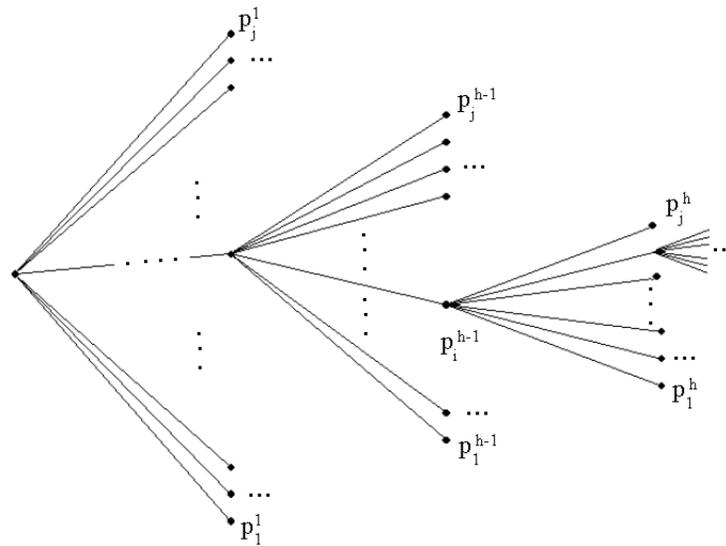


Figura 4.12: Árvore de probabilidades obtida a partir da árvore da Fig. 4.11.

fazer essa associação.

Neste trabalho buscamos fazer a implementação do novo método de duas formas: na primeira que chamamos de método de Árvore Hiperbólica ou AH, após fazermos a associação inicial dos símbolos utilizamos a sub-árvore para encontrar um intervalo para ρ . Nesta implementação não levamos em consideração o tipo do polígono (tipo FE ou FD) que a geodésica corta a medida que vai em direção ao seu ponto atrator. A associação inicial que relaciona os símbolos da fonte aos lados do polígono é utilizada para associar os símbolos ao número de vértices que ficam à esquerda da geodésica.

Na segunda implementação que chamamos de Árvore Hiperbólica com Inversão de Polígono (ou AHIP) a informação do tipo do polígono é muito importante. Nesta observamos o fato que, dependendo da sequência de sinais emitidos, durante a excursão de uma geodésica muitas vezes um polígono abaixo pode estar invertido (o que equivale a ele mudar de tipo - FE para FD por exemplo). Nesta abordagem, ao contrário da anterior, quando o polígono mudar de tipo, faremos a inversão das probabilidades associadas aos lados do polígono. Isto significa que o tipo do polígono é levado em consideração para obtermos um intervalo para ρ .

Para entendermos melhor a diferença entre esses dois métodos vamos supor por exemplo que estamos numa tesselação constituída por polígonos de 4 lados, que será utilizada para codificarmos uma fonte ternária ($j = 3$). A fonte emite símbolos a_1 , a_2 e a_3 com probabilidades $p(a_1)$, $p(a_2)$ e $p(a_3)$, respectivamente. Vamos supor que a uma profundidade h temos $p(a_1) \approx p_1^h$, $p(a_2) \approx p_2^h$ e $p(a_3) \approx p_3^h$.

Na Fig. 4.13 podemos ver como a sequência a_2a_1 será interpretada em ambas implementações.

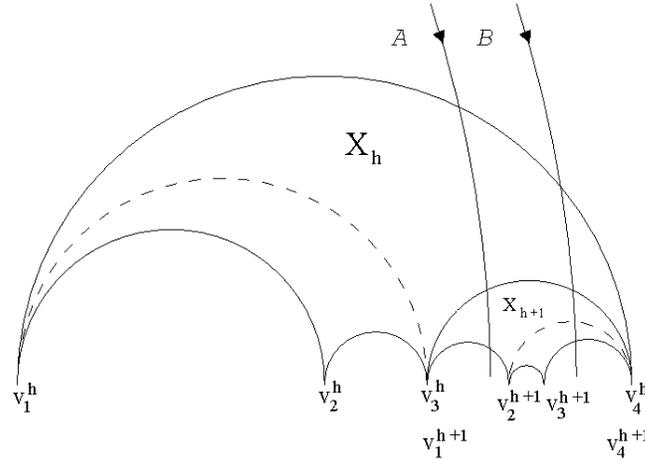


Figura 4.13: Geodésicas correspondentes a sequência a_2a_1 segundo os métodos AH e AHIP.

A geodésica A corresponde a uma geodésica na tesselação formada por polígonos de 4 lados utilizando a abordagem do método *Árvore Hiperbólica*. Neste caso, no polígono inicial X_h fazemos a seguinte associação, $p_1^h = v_2^h - v_1^h \rightarrow a_1$, $p_2^h = v_3^h - v_2^h \rightarrow a_3$ e $p_3^h = v_4^h - v_3^h \rightarrow a_2$. Esta associação é feita respeitando a proporção entre os lados desse polígono. Ao olharmos o polígono X_{h+1} , considerando a associação inicial, temos: $p_1^{h+1} = v_2^{h+1} - v_1^{h+1} \rightarrow a_1$, $p_2^{h+1} = v_3^{h+1} - v_2^{h+1} \rightarrow a_3$ e $p_3^{h+1} = v_4^{h+1} - v_3^{h+1} \rightarrow a_2$.

Na geodésica B que corresponde a geodésica utilizando a abordagem do método *Árvore Hiperbólica com Inversão de Polígono*, fazemos a mesma associação inicial que no caso anterior. Desta vez observamos o tipo do polígono inicial que é do tipo FE . A associação neste caso está indiretamente ligada ao tipo. Ao olharmos o polígono X_{h+1} como ele é do tipo FD , fazemos uma inversão na associação e assim temos: $p_1^{h+1} = v_2^{h+1} - v_1^{h+1} \rightarrow a_2$, $p_2^{h+1} = v_3^{h+1} - v_2^{h+1} \rightarrow a_3$ e $p_3^{h+1} = v_4^{h+1} - v_3^{h+1} \rightarrow a_1$.

Assim como no método de Elias, quanto maior a sequência recebida, mais preciso o valor de ρ e numa sequência de tamanho infinito, temos somente um ponto especificado. Como cada sequência enviada possui um comprimento k qualquer, se a sequência enviada for $(a_1a_2 \dots a_k)$ esta equivalerá à sequência cortante $E_{a_1} \dots E_{a_k}$ que ao final especifica um intervalo para ρ tal que $\rho \in (v_1^{k+1}, v_n^{k+1})$. Quanto maior o valor de k , menor o intervalo para ρ e maior a precisão requerida para o envio deste.

A sub-árvore escolhida deve ser vista como uma árvore de probabilidades. Note que para ser uma árvore de probabilidades, a soma de todas as probabilidades das folhas deve ser sempre igual a 1. Isto significa que ao selecionarmos uma sub-árvore a partir do ramo na profundidade $h - 1$ devemos considerar um fator de escala (δ) ao olhar as probabilidades. Este fator é sempre equivalente ao inverso da probabilidade do ramo escolhido e é utilizado para padronizarmos o

intervalo inicial de forma a que tenhamos no polígono inicial da sub-árvore: $v_1^1 = 0$ e $v_n^1 = 1$. Para calcularmos o valor de δ basta fazermos $\frac{1}{\delta} = v_{i+1}^{h-1} - v_i^{h-1} = v_n^h - v_1^h$.

Em seguida, utilizamos a sub-árvore para especificarmos um intervalo para ρ_{NP} que numa sequência de comprimento k é dado por $\rho_{NP} \in (v_n^{h+k}, v_1^{h+k})$. Note que o índice NP indica que este é o intervalo não padronizado. Em seguida, fazemos a padronização obtendo: $\rho \in ((v_n^{h+k} - v_1^h) \cdot \delta, (v_1^{h+k} - v_1^h) \cdot \delta)$.

Assim como no método de Elias, temos um problema de precisão quando trabalhamos com sequências longas. No entanto vamos começar comparando ambos os métodos sem utilizar nenhuma estratégia de escala.

Exemplo 4.6 *Vamos supor que estamos na mesma situação do Exemplo 4.5. Como a fonte é binária, estamos numa tesselação com $n = 3$, ou seja constituída por triângulos. Dentre todos os ramos da árvore de probabilidades dessa tesselação, vamos escolher o ramo equivalente ao triângulo $(P_3)_{E_1}^{0, \frac{1}{2}}$. Este triângulo possui vértices $v_1 = 0$, $v_2 = \frac{1}{3}$ e $v_3 = \frac{1}{2}$ que são os vértices do dois próximos triângulos: $(0, \frac{1}{3})$ e $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. A probabilidade de cada folha é: $p_1 = v_2 - v_1 = 0.3333$ e $p_2 = v_3 - v_2 = 0.1667$. De forma a observarmos a distribuição de probabilidades desse ramo, devemos padronizar essas probabilidades. Após padronizarmos essas probabilidades, temos: $p_1 = 0.6667$ e $p_2 = 0.3333$.*

Vamos começar apresentando o método Árvore Hiperbólica. Como $p(a_0) = p(0) = 0.7 \approx 0.6667$ (correspondente a $v_2 - v_1$ padronizado), fazemos a seguinte associação: no primeiro triângulo o eixo maior equivale ao dígito "0" e eixo menor ao "1". Isto quer dizer que sempre que a geodésica estiver entre os dois primeiros vértices associaremos o dígito "0". Se a sequência emitida pela fonte é 01101, temos a sub-árvore da tesselação como mostrada na Fig. 4.14. Neste caso, $h = 2$ e $k = 5$.

Agora, para ser uma árvore de probabilidades, a soma de todas as probabilidades das folhas

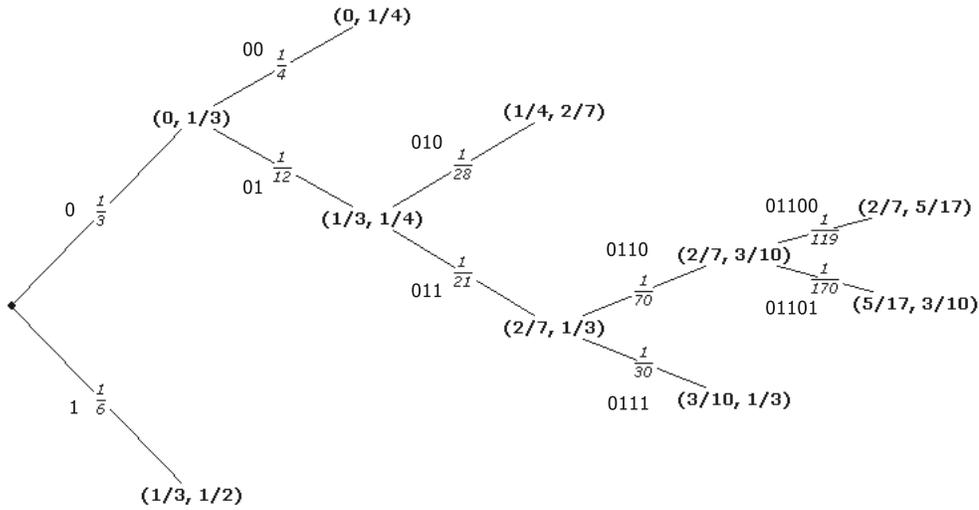


Figura 4.14: Árvore para obtenção do intervalo para ρ usando o método Árvore Hiperbólica.

deve ser sempre igual a 1. Na árvore da Fig. 4.14, temos:

$$p = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{119} + \frac{1}{170} + \frac{1}{30} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

A probabilidade do ramo acima da sub-árvore equivale a termos uma geodésica no triângulo de vértices $(0, \frac{1}{2})$ que como resultado do Teorema 4.3 é igual a $\frac{1}{2}$ ou seja, $\delta = 2$. Neste caso temos: $\rho_{NP} \in (\frac{5}{17}, \frac{3}{10}) = (0.29412, 0.30)$ e $\rho \in (0.58824, 0.60)$.

Usando as informações da Fig. 4.10, $\rho \in (\frac{9}{16}, \frac{10}{16}) = (0.5625, 0.6250)$, o que equivale a enviarmos o intervalo de ρ como 1001. Após o envio, ao recebermos esse intervalo vemos que este intervalo não nos fornece informações suficientes para a reconstrução perfeita do sinal. Isto porque olhando na Fig. 4.14, $\rho \in (0.5625, 0.6250)$ não podemos saber se a sequência original é 01100 que equivale a $\rho \in (\frac{2}{7}, \frac{5}{17}) = (0.57142, 0.58824)$ ou 01101 que equivale a $\rho \in (\frac{5}{17}, \frac{3}{10}) = (0.58824, 0.60)$. Mudando um pouco a estratégia, vamos buscar na árvore o ponto médio do intervalo recebido, o valor $\rho_{med} = \frac{19}{32} = 0.59375$. Neste caso, conseguiríamos reconstruir a

sequência original. Observe que a informação pode ser enviada corretamente com apenas 4 bits, ou seja um bit a menos que no método de Elias.

Uma outra forma de vermos qual o menor número de bits que podemos utilizar para representar o intervalo para ρ é decompor esse intervalo na forma binária. Fazendo assim, temos: $0.58824 = 100101\dots$ e $0.60 = 100110\dots$. Tomando os dígitos em comum, temos que o intervalo para ρ pode ser representado pela sequência 1001 como acabamos de ver.

Utilizando agora o método *Árvore Hiperbólica com Inversão de Polígono (AHIP)* vimos anteriormente que $p(a_0) = p(0) = 0.7 \approx 0.6667$ (correspondente a $v_2 - v_1$ padronizado). Agora fazemos a seguinte associação: no primeiro triângulo (e em todos abaixo dele), o eixo maior equivale ao dígito "0" e o eixo menor ao "1". Isto significa que para todos os triângulos que sejam do mesmo tipo do inicial, quando a geodésica cortar os dois primeiros vértices, temos o dígito "0". Já se o tipo do triângulo for diferente, o dígito "0" equivale a geodésica cortar o triângulo entre os dois últimos vértices. Para a sequência 01101, temos a sub-árvore da tesselação como na Fig. 4.15.

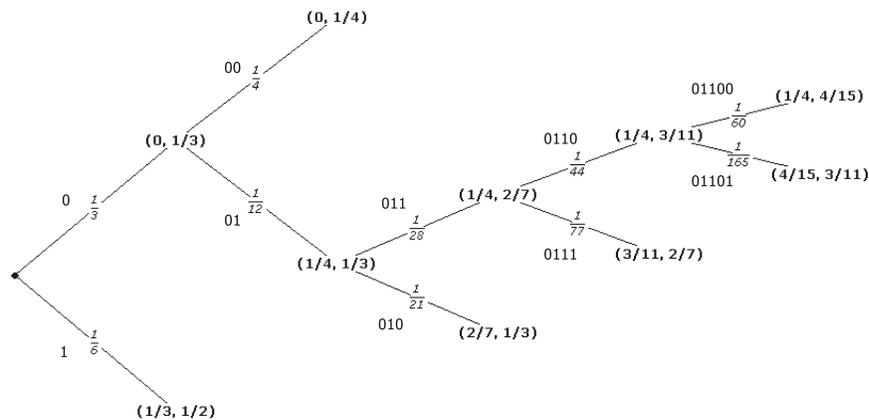


Figura 4.15: Árvore para obtenção do intervalo para ρ usando o método *Árvore Hiperbólica com Inversão de Polígono*.

Neste caso temos:

$$p = \frac{1}{4} + \frac{1}{60} + \frac{1}{165} + \frac{1}{77} + \frac{1}{21} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Ou seja, devemos utilizar o valor de $\delta = 2$ para olharmos o intervalo de ρ . Através da árvore apresentada na Fig. 4.15, temos que $\rho_{NP} \in (\frac{4}{15}, \frac{3}{11}) = (0.26667, 0.27273)$ e $\rho \in (0.53334, 0.54546)$.

Para sabermos quantos bits são necessários para enviar esse intervalo, devemos observar as extremidades deste sob a forma binária. Neste caso, $0.53334 = 1000100\dots$ e $0.54546 = 1000101\dots$. Tomando os dígitos em comum temos 100010 ou seja, 6 bits. Neste caso, a implementação AHIP apresenta um resultado pior que a AH. Por outro lado, o método Árvore Hiperbólica ao enviar a informação corretamente com apenas 4 bits apresenta um resultado melhor que o método de Elias.

Vemos assim que para $n = 3$, esta estratégia de envio de ρ é eficiente e nos dá indícios que uma codificação feita desta forma pode ter um desempenho superior ao código de Elias. O código de Elias é um código elaborado para fontes j -árias. Assim para sabermos se esta nova abordagem pode ser melhor devemos tentar implementá-la para valores de n superiores a 3.

Para testarmos o desempenho desses três métodos, vamos gerar algumas sequências de fontes distintas e comparar os resultados. Testaremos em fontes binárias e fontes ternárias.

4.2.2 Comparação dos métodos de Elias, AH e AHIP em fontes binárias

Inicialmente escolhemos 15 fontes distintas binárias e procuramos na tesselação o polígono cuja distribuição de probabilidades mais se aproximasse das probabilidades da fonte em cada caso. As probabilidades de cada fonte e os polígonos selecionados podem ser vistos na Tabela 4.13.

Em seguida, através de um gerador de números aleatórios, geramos para cada fonte 10 sequências de tamanhos 5, 7, 9 e 11 obtendo no total 600 sequências binárias. A cada sequência aplicamos os três métodos e observamos a quantidade necessária de *bits* para enviarmos cada uma delas. Em seguida, testamos para ver se a partir da informação enviada seria possível reconstruirmos a sequência original. Os resultados podem ser vistos nas Tabelas 4.14 e 4.15. Para facilitar as análises separamos as sequências em três categorias: quando o número de *bits* necessário para

Fonte	Polígono		δ	$p(0)$	Fonte	Polígono		δ	$p(0)$
	v_1	v_3				v_1	v_3		
1	1/3	1/2	6	0.600	9	0/1	1/5	5	0.833
2	2/11	1/5	55	0.688	10	1/5	6/29	145	0.853
3	2/7	1/3	21	0.300	11	6/25	1/4	100	0.862
4	1/4	3/11	44	0.267	12	1/3	7/20	60	0.870
5	3/16	1/5	80	0.762	13	7/22	1/3	66	0.880
6	1/3	4/11	33	0.786	14	0/1	1/9	9	0.900
7	0/1	1/4	4	0.800	15	1/6	1/5	30	0.545
8	4/9	1/2	18	0.818					

Tabela 4.13: Fontes binárias selecionadas.

o envio foi maior que o da sequência original, quando o número de *bits* foi menor, quando foi o mesmo (neste caso o método não ajudou nem piorou) e quando houve erro. O erro neste caso é a situação onde a sequência reconstruída foi diferente da original.

Situação	Método	Número de bits Original			
		5	7	9	11
Não Ajudou	Elias	7.39	10.02	12.48	15.10
	AH	6.21	8.68	10.73	12.79
	AHIP	6.13	8.51	10.57	12.91
Ajudou	Elias	3.01	4.88	6.22	8.34
	AH	2.88	4.73	6.79	8.86
	AHIP	3.28	4.82	6.86	9.06

Tabela 4.14: Número médio de *bits* necessário para o envio das sequências.

Situação	Método		
	Elias	AH	AHIP
Ajudou	39.36	40.83	43.17
Não Ajudou	47.74	38.33	33.17
Igual	12.90	20.84	23.66
Erro	0.50	0	0

Tabela 4.15: Percentual de sequências obtidas em cada situação.

Comparando o desempenho dos métodos AH e AHIP vemos que a medida que aumentamos o tamanho das sequências, o desempenho de ambos torna-se bem parecido. Comparando o número médio de *bits* necessário para enviar as sequências através do método de Elias com os outros métodos, vemos que para sequências maiores o método de Elias quando ajuda possui um desempenho um pouco melhor. Por outro lado, quando este não ajuda, ele acrescenta um número maior de *bits* às sequências enviadas.

Observando também a Tabela 4.15 vemos que o percentual de vezes que o método de Elias ajudou (ou seja, produziu sequências que poderiam ser enviadas com um número menor de *bits*) foi menor que os métodos AH e AHIP.

Sabemos que com uma estratégia de arredondamento e escala, o método de Elias é capaz de enviar as sequências com um número médio de *bits* menor que o original. Sendo assim buscamos uma estratégia de escala simples que pudesse nos dar uma ideia de como seria o desempenho de nossos métodos numa situação parecida. A estratégia escolhida foi aumentarmos a amplitude do intervalo encontrado para ρ através de um fator de escala fixo FT . Este aumento seria aplicado da forma $(FT)^b$ onde b é o número de *bits* da sequência. Escolhemos o valor desse fator como sendo $FT = 0,7$. Em alguns casos, o fator seria reajustado para $FT = 0,8$. Esta mudança no fator de escala se mostrou necessária em algumas situações (relacionadas as probabilidades da fonte) quando o aumento da amplitude do intervalo poderia ser maior. Os resultados obtidos assim podem ser visto nas Tabelas 4.16 e 4.17.

Situação	Método	Número de bits Original			
		5	7	9	11
Ajudou	AH	2.30	3.32	4.51	5.70
	AHIP	2.27	3.43	4.15	5.70

Tabela 4.16: Número médio de *bits* necessário para o envio das sequências utilizando fator de escala.

Situação	Método	
	AH	AHIP
Ajudou	97.17	99.00
Não Ajudou	0	0
Igual	2.00	0.17
Erro	0.83	0.83

Tabela 4.17: Percentual de sequências obtidas em cada situação com fator de escala.

Vemos que através do uso de uma estratégia de escala o desempenho dos métodos AH e AHIP é muito bom. Através dos resultados apresentados na Tabela 4.17 podemos perceber que o desempenho do método AHIP parece ser um pouco melhor que o de AH. No entanto quando observamos a Tabela 4.16 vemos que as diferenças de desempenho entre os dois métodos parecem se tornar menos significativas a medida que aumentamos os tamanhos das sequências.

Vemos assim que para uma estratégia de escala inicial, esta se mostrou bem eficiente. No entanto acreditamos que um fator de escala adaptado às probabilidades da fonte e aos polígonos selecionados podem vir a melhorar os resultados. Agora vamos observar os resultados quando temos fontes ternárias.

4.2.3 Comparação dos métodos de Elias, AH e AHIP em fontes ternárias

Assim como no caso binário, escolhemos 15 fontes distintas ternárias e procuramos na tesselação correspondente o polígono cuja distribuição de probabilidades mais se aproximasse das probabilidades da fonte em cada caso. As probabilidades de cada fonte e os polígonos selecionados podem ser vistos na Tabela 4.18.

Fonte	Polígono			δ	p(0)	p(1)	Fonte	Polígono			δ	p(0)	p(1)
	v_1	v_4	Tipo					v_1	v_4	Tipo			
1	1/3	1/2	FD	6	0.400	0.171	9	0/1	1/14	FE	14	0.875	0.067
2	0/1	1/2	FE	2	0.500	0.167	10	0/1	1/18	FE	18	0.900	0.053
3	0/1	1/4	FE	4	0.667	0.200	11	0/1	1/28	FE	28	0.933	0.034
4	0/1	1/6	FE	6	0.750	0.107	12	0/1	1/36	FE	36	0.947	0.026
5	0/1	1/8	FE	8	0.800	0.111	13	0/1	1/48	FE	48	0.960	0.020
6	9/19	1/2	FE	38	0.826	0.095	14	3/16	1/5	FD	80	0.615	0.147
7	0/1	1/10	FD	10	0.833	0.091	15	1/3	2/5	FE	15	0.455	0.375
8	0/1	1/12	FE	12	0.857	0.077							

Tabela 4.18: Fontes ternárias selecionadas.

Da mesma forma que no caso binário, geramos 10 seqüências de tamanhos 5, 7, 9 e 11 para cada fonte. Aplicando os métodos às seqüências geradas obtivemos os resultados apresentados nas Tabelas 4.19 e 4.20.

Situação	Método	Número de bits Original			
		5	7	9	11
Não Ajudou	Elias	8.94	11.90	15.30	19.98
	AH	6.97	9.08	11.09	13.78
	AHIP	7.20	9.51	11.45	14.82
Ajudou	Elias	3.38	5.86	7.43	9.67
	AH	3.08	5.14	7.88	9.50
	AHIP	3.79	5.27	7.23	9.22

Tabela 4.19: Número médio de *bits* necessário para o envio das seqüências ternárias.

Situação	Método		
	Elias	AH	AHIP
Ajudou	5.50	8.50	8.50
Não Ajudou	82.67	68.67	72.33
Igual	6.33	13.50	9.17
Erro	5.50	9.83	10.00

Tabela 4.20: Percentual de seqüências obtidas em cada situação.

No caso ternário, desde o início pudemos observar que o maior problema dos métodos aplicados era alta precisão necessária para o envio do intervalo para ρ . Este fato está evidenciado na Tabela 4.20 onde vemos que em boa parte dos casos nenhum dos métodos ajudou. Nesse caso, eles precisaram um número de *bits* ternários maior que o original para o envio da sequência original. No entanto podemos ver que os métodos AH e AHIP possuem um desempenho um pouco melhor se comparado ao desempenho do método de Elias.

Aplicando agora a mesma estratégia de escala, encontramos o valor $FT = 0.6$ como sendo mais adequado. Em algumas situações (também relacionadas a fonte) foi necessário fazermos um reajuste do fator para $FT = 0.5$. Os resultados podem ser vistos nas Tabelas 4.21 e 4.22.

Situação	Método	Número de bits Original			
		5	7	9	11
Não Ajudou	AH	6.00	8.22	10.00	23.00
	AHIP	6.38	8.25	10.10	23.00
Ajudou	AH	3.22	4.78	6.25	7.77
	AHIP	3.31	4.83	6.37	7.96

Tabela 4.21: Número médio de *bits* necessário para o envio das sequências utilizando fator de escala.

Situação	Método	
	AH	AHIP
Ajudou	59.33	55.83
Não Ajudou	4.33	8.17
Igual	7.00	6.50
Erro	29.33	29.50

Tabela 4.22: Percentual de sequências obtidas em cada situação com fator de escala.

No caso ternário o problema encontrado foi que para algumas sequências essa estratégia de escala não produziu resultados bons como o esperado. Apesar de ter havido uma melhora, através dos resultados observados na Tabela 4.22 vemos que ainda em aproximadamente 29.83% houve erro. Por outro lado, vemos agora que em geral, em mais de 50% dos casos os métodos ajudaram, ou seja, produziram sequências com um número de *bits* menor que o original. De uma forma geral, podemos ver que a estratégia de escala produziu bons resultados. Além disso, comparando o desempenho de ambos os métodos, através dos resultados podemos ver que o desempenho de ambos é muito próximo.

Vemos assim que tanto no caso binário quanto no ternário o desempenho dos métodos AH e AHIP apresentam bons resultados quando comparados com o método de Elias. No entanto pode-se ver que assim como no método de Elias, é necessário o estudo de uma estratégia de

escala eficiente, possivelmente adaptado a fonte. Comparando os métodos AH e AHIP vemos que, em geral, o método AH apresenta um desempenho melhor. Além disso, o fato do método AHIP levar em consideração o tipo de polígono a cada etapa e eventualmente fazer a inversão do polígono, torna-o bem mais complexo, uma vez que considerando a memória introduzida, conduz a códigos de treliça.

Uma outra alternativa para aplicarmos os resultados obtidos no capítulo anterior na elaboração de códigos seria olharmos a sequência emitida pela fonte como uma sequência cortante e assim obtermos a partir desta uma estimativa do ponto atrator (ou repulsor) através do uso de frações contínuas. Em seguida enviaríamos esse valor da mesma forma que no código de Elias. Ao recebermos o valor, poderíamos obter a sequência original através da decomposição em frações contínuas do valor recebido. Esta estratégia durante os cálculos somente se mostrou efetiva para o caso $n = 3$ apresentando resultados similares aos da abordagem apresentada. Para $n > 3$, mais testes são necessários mas existem indícios que para sequências muito grandes os valores do ponto atrator/repulsor exigem uma precisão tão alta que pequenos desvios do valor enviado já afetam a decomposição em frações contínuas do valor recebido causando erros na reconstrução do sinal.

4.2.4 Códigos de bloco

Códigos de blocos são um tipo de código onde as sequências de sinais emitidos por uma fonte são associadas a palavras código de tamanho fixo. Existem vários tipos de códigos de blocos sendo que muitos são de difícil implementação [Blah 87]. No nosso caso, estamos interessados em um tipo de código de bloco onde a codificação é feita associando-se palavras-código de comprimento fixo à sequências de símbolos da fonte de comprimento variável.

O processo de codificação para este tipo de código utiliza uma árvore de codificação. Nesta árvore, as folhas possuem profundidade variável e indicam qual a sequência da fonte está sendo associada à palavra-código. O método mais conhecido de obtenção de uma árvore ótima é o método de Tunstall.

A seguir apresentaremos o método de Tunstall de uma forma mais sucinta. Maiores informações sobre o método podem ser vistas em [Pala 07] e [Fabr 99].

Considere uma fonte discreta sem memória (DMS) que emite símbolos j -ários. Vamos chamar de $U = \{U_1, \dots, U_Y\}$ a sequência de símbolos emitida pela fonte a qual associaremos uma palavra-código $Z = \{Z_1, \dots, Z_N\}$. Como estas palavras possuem comprimento fixo, o valor de N é fixo. Por outro lado Y , o comprimento das mensagens, é uma variável aleatória discreta.

Desejamos agora enviar as sequências de símbolos emitidas pela fonte, U através de um canal utilizando palavras-código Z de um alfabeto r -ário. Se $E(Y)$ é o comprimento médio das mensagens, a razão $\frac{N}{E(Y)}$ é o número médio de símbolos r -ários por símbolo da fonte. Como mencionado, a codificação é realizada através de uma árvore de probabilidades. Assim o critério

de otimalidade é $E(Y)$ ou seja, desejamos uma árvore de probabilidades onde o valor de $E(Y)$ seja o maior possível. Para o cálculo de $E(Y)$ a partir da árvore de probabilidade podemos utilizar o Lema do Caminho (Lema 2.1) visto no Capítulo 2. Através do Lema do Caminho vemos que para calcularmos o valor de $E(Y)$, basta somarmos as probabilidades dos nós intermediários de uma árvore de probabilidades. O limite para a razão $\frac{N}{E(Y)}$ é dado pelo teorema a seguir.

Teorema 4.4 [Mass 93] (Recíproco do Teorema da Codificação de uma Fonte DMS) Para qualquer código livre de prefixo de qualquer conjunto de mensagens apropriado para uma fonte DMS, a razão do comprimento médio da palavra-código, $E[L]$, para o comprimento médio da mensagem $E[Y]$, satisfaz

$$\frac{E[L]}{E[Y]} \geq \frac{H(\zeta)}{\log r} \quad (4.11)$$

onde $H(\zeta)$ é a incerteza de um símbolo da fonte.

Note que no Teorema 4.4 a incerteza da fonte $H(\zeta)$ é dada por:

$$H(\zeta) = - \sum_{i=1}^j p_i \log p_i$$

onde p_i neste caso é a probabilidade de cada símbolo da fonte j -ária.

Quando procuramos o melhor código para a realização de uma codificação eficiente de uma fonte discreta sem memória, a razão “dígito do código por símbolo da fonte” é a razão que desejamos minimizar. Para isto, ao maximizarmos o valor de $E[Y]$, devemos sempre observar o limite imposto pelo Teorema 4.4 para não acontecer de termos um código com razão “dígito do código por símbolo da fonte” bem pequena mas pouco eficiente.

O método de Tunstall busca maximizar o valor de $E[Y]$ através da extensão progressiva dos nós da árvore de probabilidades inicialmente construída apenas com as probabilidades de cada símbolo da fonte j -ária. Esta árvore pode ser vista na Fig. 4.16.

O procedimento de extensão de nós é feito estendendo-se os nós mais prováveis l_q vezes. Isto é feito de tal forma a obtermos ao final nós terminais (ou folhas) com aproximadamente a mesma probabilidade, sempre levando-se em conta os limites impostos pelo Teorema 4.4.

O algoritmo de Tunstall é dado por:

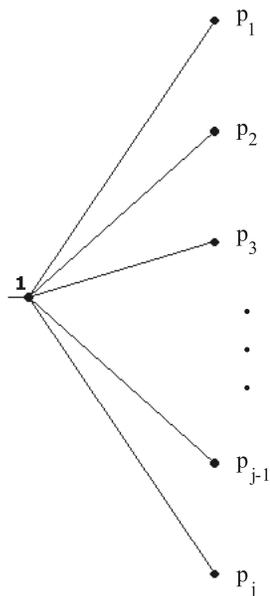


Figura 4.16: Árvore de probabilidades inicial.

Algoritmo de Tunstall

Passo 1 - Escolha os valores de r e N a serem utilizados para uma fonte j -ária. Verifique se $r^N \geq j$. Se esta condição não for satisfeita isto significa que não existe código para esses valores de r e N , por isso interrompa o procedimento. Caso contrário, calcule o valor de l_q :

$$l_q = \frac{r^N - j}{j - 1};$$

Passo 2 - Construa o conjunto de mensagens de Tunstall de tamanho $l_M = j + l_q(j - 1)$ para a fonte DMS iniciando a partir da árvore inicial como mostrada na Fig. 4.16 e fazendo l_q extensões nos nós terminais mais prováveis a cada passo;

Passo 3 - Associe uma palavra-código r -ária de comprimento N a cada mensagem no conjunto de mensagens de Tunstall.

Passo 4 - Verifique se a condição do Teorema 4.4 está sendo satisfeita.

Para entendermos melhor esse procedimento, vejamos o próximo exemplo:

Exemplo 4.7 Para uma fonte ternária sem memória ($j = 3$) com $p(a) = 0.1$, $p(b) = 0.4$ e $p(c) = 0.5$, suponha que desejamos realizar uma codificação ótima binária ($r = 2$) cujo comprimento dos blocos é $N = 3$ de um conjunto de mensagens apropriado.

Do Passo 1, temos que $l_q = \frac{r^N - j}{j - 1} = \frac{2^3 - 3}{3 - 1} = \frac{5}{2} \approx 3$.

Calculando o valor incerteza da fonte temos:

$$H(\zeta) = -(0.1) \log(0.1) - (0.4) \log(0.4) - (0.5) \log(0.5) = 0.9433.$$

Portanto, a razão $\frac{N}{E[Y]}$ não poderá ser inferior a $\frac{H(\zeta)}{\log 2} = \frac{0.9433}{\log 2} = 1.3610$ dígitos do código/dígito da fonte.

O Passo 2 nos fornece a árvore de probabilidades para o conjunto de mensagens de Tunstall como mostrado na Fig. 4.17.

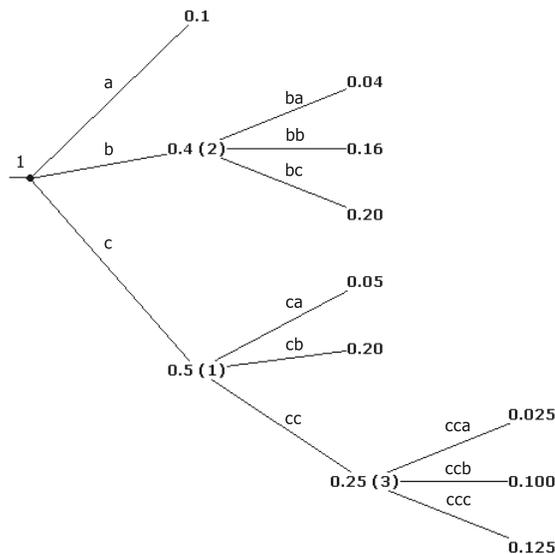


Figura 4.17: Conjunto de mensagens de Tunstall, $l_q = 3$.

Note que na árvore de probabilidades de Tunstall, nos nós terminais temos a probabilidade de cada sequência. Os números que aparecem entre parêntesis nos nós intermediários indicam a ordem em que os nós foram estendidos. Observe que ao final as palavras-código possuem probabilidades aproximadamente iguais.

Para sabermos se esse código é eficiente, precisamos agora calcular $E[Y]$. Pelo Lema do

Caminho (Lema 2.1) temos

$$E[Y] = 1 + 0.40 + 0.50 + 0.25 = 2.15,$$

portanto $\frac{N}{E[Y]} = \frac{3}{2.15} = 1,3953$ dígitos do código/dígito da fonte. Como o valor 1.3953 é superior ao limite dado por $\frac{H(\zeta)}{\log 2}$, esse código é um código eficiente.

As palavras-código neste caso são: $a, ba, bb, bc, ca, cb, cca, ccb$ e ccc . O envio das informações da fonte podem ser feitas associando-se agora palavras-código r -árias de tamanho N a cada uma das sequências obtidas na árvore final (Fig. 4.17).

Código Proposto

Na proposta para um código parecido ao de Elias, vimos que poderíamos obter uma nova árvore de probabilidades. Esta poderia ser obtida buscando na árvore associada a tesselação, um ramo cuja distribuição de probabilidade mais se aproximasse à da fonte. Considerando esse ramo como inicial selecionávamos a sub-árvore abaixo deste e através de um fator de escala, transformamos essa sub-árvore em uma árvore de probabilidades. Nosso objetivo agora é a partir dessas árvores, buscarmos uma aplicação parecida ao método de Tunstall. Chamaremos esse novo método de Código de Bloco Hiperbólico ou CBH.

Sabemos que o método de Tunstall realiza a extensão dos nós mais prováveis l_q -vezes na árvore de probabilidades inicial (Fig. 4.16). Se estendermos os nós mais prováveis das árvores de probabilidades, poderemos também obter um novo conjunto de palavras-código. Assim como no método de Tunstall, o que nos dirá se o código proposto é eficiente ou não será a razão $\frac{N}{E[Y]}$ obtida a partir da nova árvore de probabilidades.

Vamos começar a elaboração da árvore em um ramo cuja distribuição de probabilidades se aproxime à da fonte. Em seguida, faremos o cálculo de l_q da mesma forma que no método de Tunstall. Considerando a árvore mais adequada em cada caso, estenderemos os nós mais prováveis l_q vezes. Ao final compararemos os valores de $\frac{N}{E[Y]}$ e $\frac{H(\zeta)}{\log r}$ para verificarmos a eficiência do novo código. Para o envio das informações, a partir da árvore de probabilidades final, poderemos associar uma palavra r -ária de tamanho N a cada sequência. Vamos começar tomando a mesma fonte do Exemplo 4.7.

Exemplo 4.8 Para uma fonte ternária sem memória ($j = 3$) com $p(a) = 0.1$, $p(b) = 0.4$ e $p(c) = 0.5$, suponha que desejamos realizar uma codificação ótima binária ($r = 2$) cujo comprimento dos blocos é $N = 3$ de um conjunto de mensagens apropriado.

Aproveitando os cálculos realizados no Exemplo 4.7, temos que $q = 3$ e $\frac{H(\zeta)}{\log 2} = 1.3610$ dígitos do código/dígito da fonte.

O primeiro passo é buscarmos um polígono cuja distribuição de probabilidade se aproxime da distribuição de probabilidade da fonte. Como $j = 3$, a árvore mais adequada será a construída a partir de polígonos de 4 lados. Na Tabela 4.23 podemos ver alguns polígonos e sua distribuição de probabilidades associada.

Vértices				Probabilidades			
v_1	v_2	v_3	v_4	p_1	p_2	p_3	$1/\delta$
1/3	4/11	3/8	2/5	0.455	0.170	0.375	1/15
1/4	4/15	3/11	2/7	0.467	0.170	0.364	1/28
1/5	4/19	3/14	2/9	0.474	0.169	0.357	1/45
1/7	4/27	3/20	2/13	0.481	0.169	0.350	1/91
0	1/4	1/3	1/2	0.500	0.167	0.333	1/2

Tabela 4.23: Polígonos de 4 lados e seus vértices.

Através da observação da Tabela 4.23, vemos que o polígono cujas probabilidades mais se aproximam das probabilidades da fonte e que possui menor fator de escala é o polígono de vértices $v_1 = 0$, $v_2 = 1/4$, $v_3 = 1/3$ e $v_4 = 1/2$. A escolha do polígono com menor fator de escala é feita buscando-se tomar uma árvore com menor profundidade. Uma geodésica cortando esse polígono tem $p(E_3) = 0.5$, $p(E_2) = 0.167$ e $p(E_1) = 0.333$ assim, para podermos associar palavras-código na árvore fazemos a seguinte associação (por proximidade de probabilidade): $E_3 \rightarrow b$, $E_2 \rightarrow a$ e $E_1 \rightarrow c$.

A árvore de probabilidades para o conjunto de mensagens utilizando agora o método Código de Bloco Hiperbólico pode ser vista na Fig. 4.18.

Para sabermos se esse código é eficiente, precisamos calcular $E[Y]$. Pelo Lema do Caminho (Lema 2.1) temos que

$$E[Y] = 1 + 0.3333 + 0.50 + 0.3333 = 2.167,$$

portanto $\frac{N}{E[Y]} = \frac{3}{2.15} = 1.3846$ dígitos do código/dígito da fonte. Como o valor 1.3846 é superior ao limite dado por $\frac{H(\zeta)}{\log 2}$, esse código é um código eficiente.

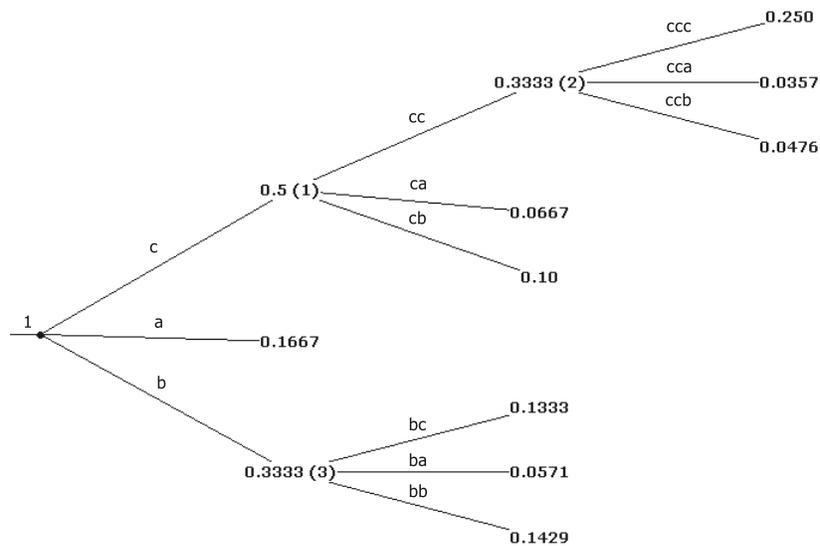


Figura 4.18: Conjunto de mensagens do método CBH, $l_q = 3$.

Para o método CBH as palavras-código são: $a, ba, bb, bc, ca, cb, cca, ccb$ e ccc . O envio das informações da fonte pode ser feito associando-se agora palavras-código r -árias de tamanho N a cada uma das sequências obtidas na árvore final mostrada na Fig. 4.18.

Através dos Exemplos 4.7 e 4.8 podemos ver que ambas as árvores produzem as mesmas palavras-códigos. A única diferença entre elas é a distribuição de probabilidades da árvore o que faz com que o valor da razão dígitos do código/dígito da fonte seja aproximadamente igual nos dois casos.

Para chegarmos a uma conclusão sobre o desempenho na nova abordagem, vamos agora apresentar outros exemplos que mostram os resultados obtidos pelo método de Tunstall e o método Código de Bloco Hiperbólico.

Exemplo 4.9 Para uma fonte binária sem memória ($j = 2$) com $p(a) = 0.2$ e $p(b) = 0.8$, suponha que desejamos realizar uma codificação ótima binária ($r = 2$) cujo comprimento dos blocos é $N = 3$ de um conjunto de mensagens apropriado.

Do Passo 1 do algoritmo de Tunstall, temos que $l_q = \frac{r^N - j}{j - 1} = \frac{2^3 - 2}{2 - 1} = 6$.

Calculando o valor da incerteza da fonte temos:

$$H(\zeta) = -(0.2) \log(0.2) - (0.8) \log(0.8) = 0.5004.$$

Portanto, a razão $\frac{N}{E[Y]}$ não poderá ser inferior a $\frac{H(\zeta)}{\log 2} = \frac{0.5004}{\log 2} = 0.7219$ dígitos do código/dígito da fonte.

A árvore de probabilidades do método de Tunstall pode ser vista na Fig. 4.19.

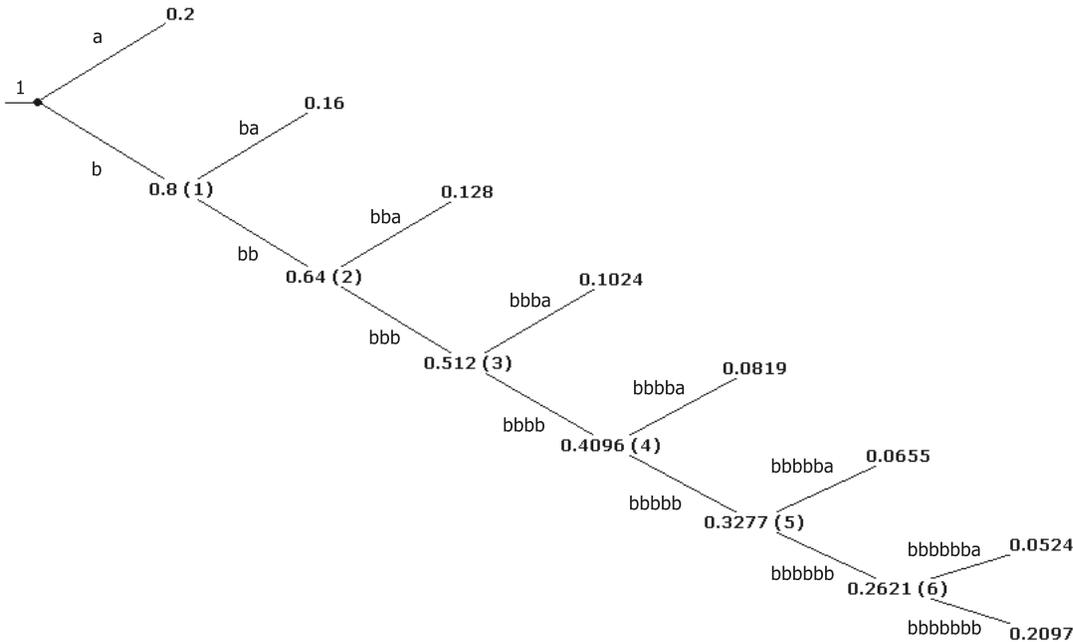


Figura 4.19: Conjunto de mensagens de Tunstall, $l_q = 6$.

Agora, $E[Y] = 1 + 0.80 + 0.64 + 0.512 + 0.4096 + 0.3277 + 0.2621 = 3.9514$, portanto $\frac{N}{E[Y]} = \frac{3}{3.9964} = 0.7592$ dígitos do código/dígito da fonte. Como o valor 0.7592 é superior ao limite dado por $\frac{H(\zeta)}{\log 2}$, esse código é um código eficiente. Neste caso, as palavras-código são dadas por: a , ba , bba , $bbba$, $bbbba$, $bbbbba$, $bbbbbba$ e $bbbbbbb$.

Para o método proposto, a árvore de probabilidades mais adequada ao caso é a correspondente a tesselação constituída por triângulos elementares ($n = 3$). Nesta tesselação, precisamos buscar algum triângulo cuja distribuição de probabilidades mais se aproxime a da fonte. Neste caso, o triângulo de vértices $v_1 = 0$, $v_2 = \frac{1}{5}$ e $v_3 = \frac{1}{4}$ possui a mesma distribuição de probabilidades dadas por $p(E_2) = 0.8$ e $p(E_1) = 0.2$. Para este triângulo obtemos $\delta = 4$ e para podermos associar palavras-código na árvore fazemos a seguinte associação: $E_2 \rightarrow b$ e $E_1 \rightarrow a$.

A árvore de probabilidades para o conjunto de mensagens utilizando agora o método proposto

pode ser visto na Fig. 4.20.

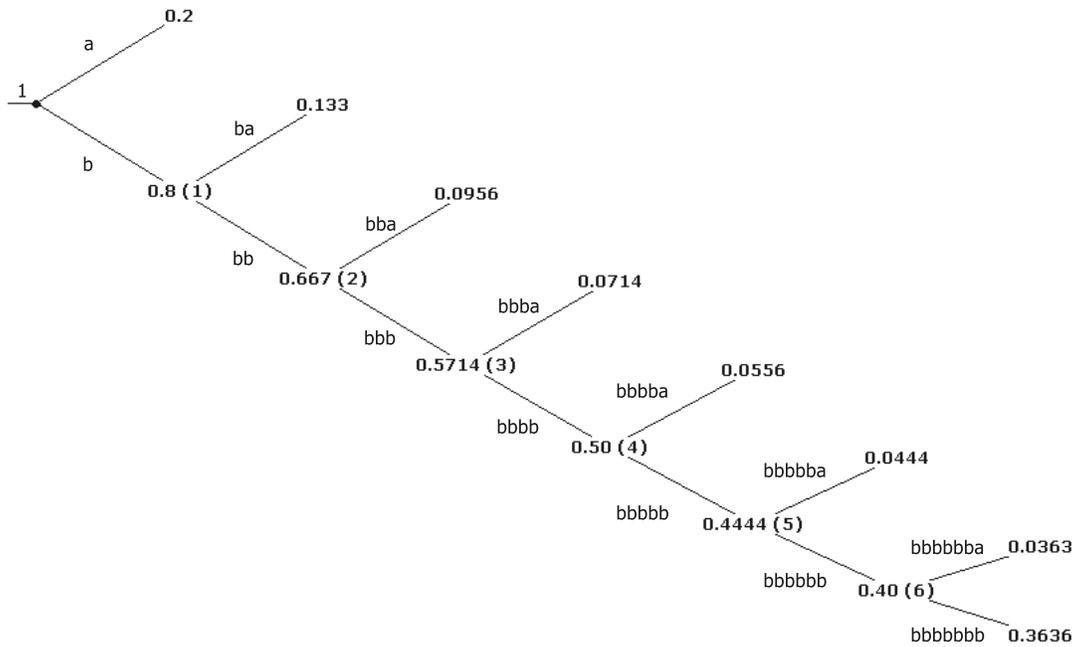


Figura 4.20: Conjunto de mensagens do método proposto, $l_q = 6$.

Agora, $E[Y] = 1 + 0.80 + 0.6667 + 0.5714 + 0.50 + 0.4444 + 0.40 = 4.3825$, portanto, $\frac{N}{E[Y]} = \frac{3}{4.3825} = 0.6846$ dígitos do código/dígito da fonte. Como o valor 0.6846 é inferior ao limite dado por $\frac{H(\zeta)}{\log 2}$, esse código não é um código eficiente. Neste caso, se fizermos $l_q = 5$, o valor de $E[Y]$ será 3.9825 e teremos $\frac{N}{E[Y]} = \frac{3}{3.9825} = 0.7533$.

Através da observação da Fig. 4.20, vemos que se eliminarmos o nó (6) as palavras-código para $q = 5$ serão dadas por: a , ba , bba , $bbba$, $bbbba$, $bbbbba$ e $bbbbbb$.

Exemplo 4.10 Para uma fonte quaternária sem memória ($j = 4$) com $p(a) = 0.10$, $p(b) = 0.15$, $p(c) = 0.20$ e $p(d) = 0.55$ suponha que desejamos realizar uma codificação ótima binária ($r = 2$) cujo comprimento dos blocos é $N = 4$ de um conjunto de mensagens apropriado.

Do Passo 1 do algoritmo de Tunstall, temos que $l_q = \frac{r^N - j}{j - 1} = \frac{2^4 - 4}{4 - 1} = \frac{12}{3} = 4$.

Calculando o valor da incerteza da fonte temos:

$$H(\zeta) = -(0.10) \log(0.10) - (0.15) \log(0.15) - (0.20) \log(0.20) - (0.55) \log(0.55) = 1.1655.$$

Portanto, a razão $\frac{N}{E[Y]}$ não pode ser inferior a $\frac{H(\zeta)}{\log 2} = \frac{1.1655}{\log 2} = 1.6815$ dígitos do código/dígito da fonte.

A árvore de probabilidades do método de Tunstall pode ser vista na Fig. 4.21.

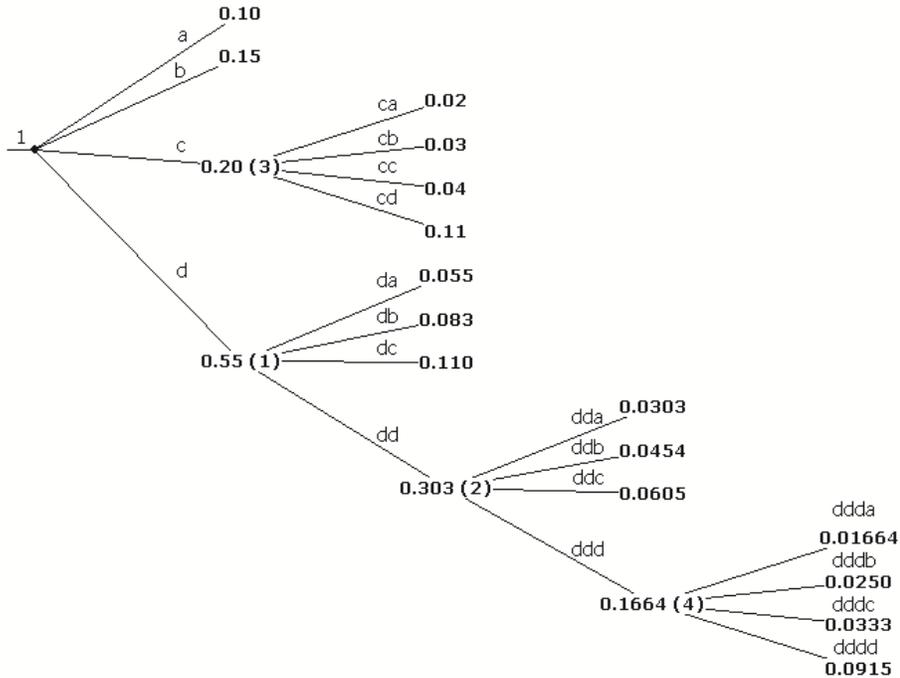


Figura 4.21: Conjunto de mensagens de Tunstall, $l_q = 4$.

Agora, $E[Y] = 1 + 0.20 + 0.55 + 0.3025 + 0.1664 = 2.2189$, portanto, $\frac{N}{E[Y]} = \frac{4}{2.2189} = 1.8027$ dígitos do código/dígito da fonte. Como o valor 1.8027 é superior ao limite dado por $\frac{H(\zeta)}{\log 2}$, esse código é um código eficiente. As palavras-código são dadas por: a, b, ca, cb, cc, cd, da, db, dc, dda, ddb, ddc, ddda, dddb, dddc e dddd.

Para o método CBH proposto, a árvore de probabilidade mais adequada ao caso é a correspondente a tesselação constituída por pentágonos elementares ($n = 5$). Nesta tesselação, precisamos buscar algum polígono cuja distribuição de probabilidades mais se aproxime a da fonte. Na Tabela 4.24 podemos ver alguns polígonos e sua distribuição de probabilidades associada. Os valores estão ordenados segundo o valor máximo da probabilidade de cada polígono.

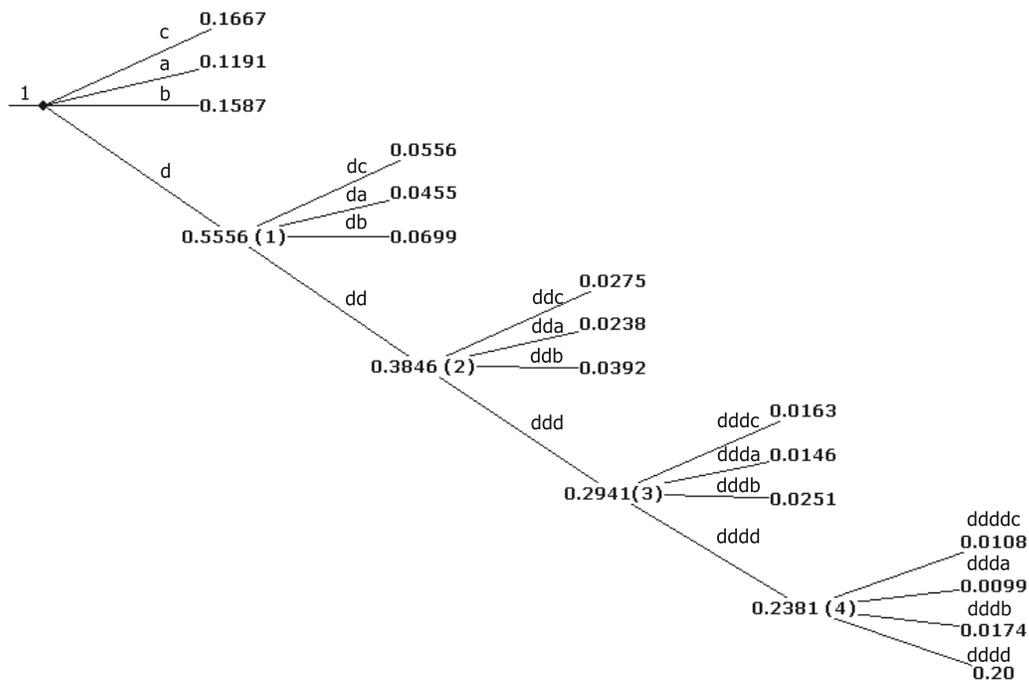
Através da observação da Tabela 4.24, vemos que o polígono cujas probabilidades mais se aproximam das probabilidades da fonte é o polígono de vértices $v_1 = 2/5$, $v_2 = 5/12$, $v_3 = 3/7$ e $v_4 = 4/9$ e $v_5 = 1/2$. Uma geodésica cortando esse polígono tem $p(E_4) = 0.167$, $p(E_3) = 0.119$,

Vértices					Probabilidades				
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	p_1	p_2	p_3	p_4	$1/\delta$
0	1/4	1/3	2/5	1/2	0.500	0.167	0.133	0.200	1/2
4/5	17/21	13/16	22/27	9/11	0.524	0.164	0.127	0.185	1/55
2/9	5/22	3/13	4/17	1/4	0.182	0.126	0.163	0.529	1/36
2/3	9/13	7/10	12/17	5/7	0.538	0.162	0.124	0.176	1/21
2/5	5/12	3/7	4/9	1/2	0.167	0.119	0.159	0.556	1/10
5/8	12/19	7/11	9/14	2/3	0.158	0.115	0.156	0.571	1/24

Tabela 4.24: Polígonos de 5 lados e seus vértices.

$p(E_2) = 0.159$ e $p(E_1) = 0.556$ assim, para podermos associar palavras-código na árvore fazemos a seguinte associação (por proximidade de probabilidade) $E_4 \rightarrow c$, $E_3 \rightarrow a$, $E_2 \rightarrow b$ e $E_1 \rightarrow d$.

A árvore de probabilidades para o conjunto de mensagens utilizando agora o método proposto pode ser visto na Fig. 4.22.

Figura 4.22: Conjunto de mensagens do método proposto, $l_q = 4$.

Agora, $E[Y] = 1 + 0.5556 + 0.3846 + 0.2941 + 0.2381 = 2.4724$, portanto, $\frac{N}{E[Y]} = \frac{4}{2.4724} = 1.6179$ dígitos do código/dígito da fonte. Como o valor 1.6179 é inferior ao limite dado por $\frac{H(\zeta)}{\log 2}$, esse código não é um código eficiente.

Ao nos depararmos com um código ineficiente, ao invés de diminuirmos o valor de l_q , podemos tentar utilizar outro polígono como aproximação. Através de outro polígono pode ser que tenhamos resultados melhores. Se tomarmos a sub-árvore com menor valor de δ , estaremos tomando uma sub-árvore menos profunda e isto talvez traga alguma vantagem. Através da observação da Tabela 4.24, vemos que o polígono cujas probabilidades mais se aproximam das probabilidades da fonte e que possui menor fator de escala é o polígono de vértices $v_1 = 0$, $v_2 = 1/4$, $v_3 = 1/3$ e $v_4 = 2/5$ e $v_5 = 1/2$. Uma geodésica cortando esse polígono tem $p(E_4) = 0.500$, $p(E_3) = 0.167$, $p(E_2) = 0.133$ e $p(E_1) = 0.200$ assim, para podermos associar palavras-código na árvore fazemos a seguinte associação (por proximidade de probabilidade): $E_4 \rightarrow d$, $E_3 \rightarrow b$, $E_2 \rightarrow a$ e $E_1 \rightarrow c$.

A árvore de probabilidades para o conjunto de mensagens utilizando agora o método CBH e o polígono com menor fator de escala pode ser vista na Fig. 4.23.

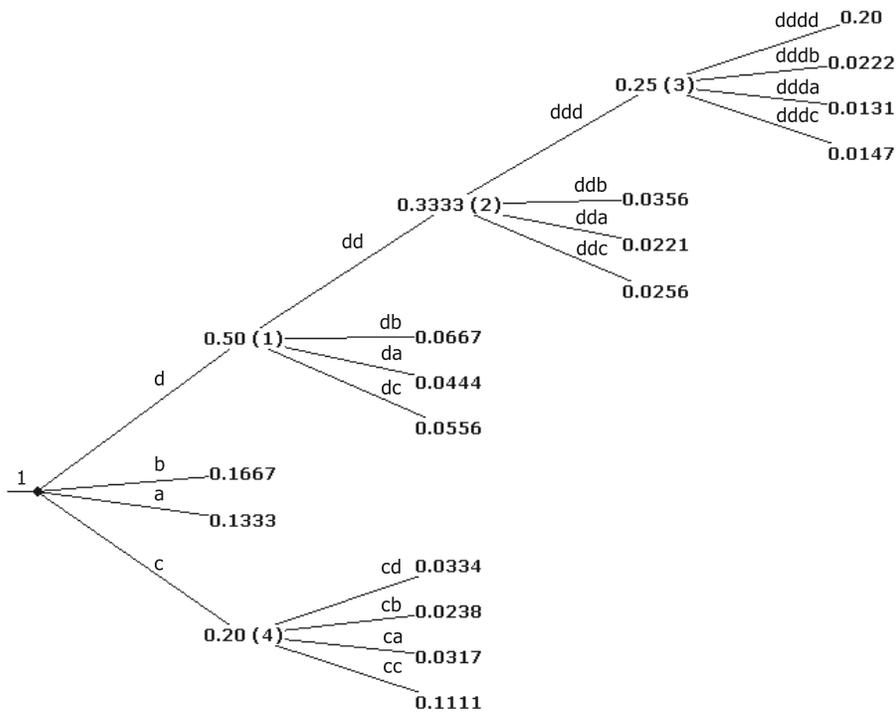


Figura 4.23: Conjunto de mensagens do código de bloco proposto, $l_q = 4$.

Neste caso, $E[Y] = 1 + 0.20 + 0.50 + 0.3333 + 0.25 = 2.2833$ portanto, $\frac{N}{E[Y]} = \frac{4}{2.2833} = 1.7519$ dígitos do código/dígito da fonte. Como o valor 1.7519 é superior ao limite dado por $\frac{H(\zeta)}{\log 2}$, esse código é um código eficiente. Agora, as palavras-códigos são dadas por: a, b, ca,

cb, cc, cd, da, db, dc, dda, ddb, ddc, ddda, dddb, dddc e dddd. Vemos, portanto, que as palavras-código de ambos os métodos foram iguais.

Através desses três exemplos vemos que, em geral, a razão dígitos do código/dígito da fonte obtida com o uso do método CBH é muito próxima da razão obtida quando utilizamos o método de Tunstall. Nos Exemplos 4.8 e 4.10 as palavras-código obtidas por ambos os métodos foram iguais. Já no Exemplo 4.9 o método CBH produziu uma árvore menos profunda e uma razão dígitos do código/dígito da fonte próxima à do método de Tunstall.

Sabemos que dentre os códigos do tipo variável-fixo o método de Tunstall é um método que possui um bom desempenho ([Fabr 99]). Sendo assim, se o método proposto produziu uma árvore menos profunda que a do método de Tunstall, isto significa que a árvore de Tunstall provavelmente terá um desempenho melhor. No Exemplo 4.9, ambos os métodos tiveram a razão dígitos do código/dígito da fonte parecidos, por outro lado a árvore produzida pelo método proposto é menos profunda. Já nos outros exemplos, vemos que podemos obter árvores iguais em ambos os métodos mesmo com razão dígitos do código/dígito da fonte não sendo exatamente iguais. Assim, podemos ver que a razão dígitos do código/dígito da fonte não é um bom índice para compararmos os métodos.

Diante de tal fato, decidimos mudar um pouco a forma de olharmos o método proposto. Para analisarmos os resultados obtidos, resolvemos considerar o método de Tunstall como referência para o CBH. Como consequência, quando o método CBH produzir uma árvore igual a do método de Tunstall, diremos que ele teve um bom desempenho.

Para podermos avaliar o desempenho do método CBH, decidimos testá-lo em mais algumas fontes comparando os resultados obtidos com o método de Tunstall.

4.2.5 Comparação dos métodos CBH e Tunstall em fontes binárias e ternárias

Para avaliarmos o desempenho do método CBH em comparação ao de Tunstall, vamos aplicar os métodos Tunstall e CBH em fontes binárias e ternárias. No caso binário, escolhemos as mesmas fontes utilizadas anteriormente quando testamos os métodos Elias, Árvore Hiperbólica e Árvore Hiperbólica com Inversão de Polígono. Para essas fontes encontramos um polígono com distribuição de probabilidades igual à da fonte. A fim de testarmos os métodos numa situação na qual o polígono escolhido tivesse uma distribuição de probabilidades próxima mas não igual à da fonte, escolhemos mais 7 fontes. Essas 7 fontes extras escolhidas e os polígonos selecionados podem ser vistas na Tabela 4.25. Observe que para cada fonte, escolhemos três polígonos com distribuição de probabilidades próxima a da fonte em cada caso.

Uma vez selecionadas as fontes, aplicamos os métodos CBH e Tunstall utilizando $N = 3$ e $r = 2$. Os resultados iniciais mostraram que em várias situações o método CBH não produziu

Fonte	Polígono		δ	$p(0)$	Fonte	Polígono		δ	$p(0)$
	v_1	v_3				v_1	v_3		
16a	1/3	1/2	6	0.620	20a	5/16	1/3	48	0.843
16b	1/3	2/5	15		20b	5/11	1/2	22	
16c	1/4	2/7	28		20c	1/3	6/17	51	
17a	2/11	1/5	55	0.689	21a	1/4	7/27	108	0.873
17b	2/9	1/4	36		21b	1/5	7/34	170	
17c	2/7	1/3	21		21c	0/1	1/7	7	
18a	1/5	3/14	4	0.740	22a	8/17	1/2	34	0.897
18b	0/1	1/3	3		22b	0/1	1/9	9	
18c	3/16	1/5	80		22c	9/19	1/2	38	
19a	3/7	1/2	14	0.785					
19b	1/3	4/11	33						
19c	1/4	4/15	60						

Tabela 4.25: Fontes binárias extras selecionadas.

bons resultados. Além disso, a razão dígitos do código/dígito da fonte não se mostrou um índice adequado.

Observando os resultados vimos que a razão entre a probabilidade máxima e mínima da fonte quando comparada com a razão entre a probabilidade máxima e mínima do polígono inicial selecionado poderia explicar uma parte dos resultados. Vamos chamar esse razão de PM. Quando essa razão for referente a fonte, ela será chamada de PMF e quando for referente ao polígono selecionado de PMP. Ela será dada por:

$$PM = \frac{\text{Probabilidade Máxima}}{\text{Probabilidade Mínima}}.$$

Desde o início pudemos observar que quando escolhemos uma árvore referente a uma tesselação qualquer, a medida que aumentamos a profundidade nessa árvore, a razão PMP aumenta. No caso das árvores obtidas pelo método de Tunstall, essa razão é a mesma em cada ramo. Assim, quando escolhemos um polígono inicial cuja distribuição de probabilidades é parecida à distribuição de probabilidades da fonte, na verdade estamos escolhendo uma árvore onde apenas o ramo inicial possui razão PMP parecida com a razão PMF.

Além de observarmos os valores das variáveis PMF e PMP para cada fonte, observamos o número de folhas e a profundidade máxima das árvores obtidas em cada método. Uma vez selecionado um valor para l_q , cada método gerou uma árvore onde os l_q ramos mais prováveis foram estendidos. Em alguns casos, a árvore gerada teve algum ramo cortado a fim de adequar a razão $\frac{N}{E[Y]}$ ao limite dado por $\frac{H(\zeta)}{\log 2}$.

Seja F_i o número de folhas da árvore antes de ter algum ramo cortado, F o número de

folhas da árvore final (após ter algum ramo cortado), Pf_i a profundidade máxima da árvore antes de ter algum corte em algum ramo e Pf a profundidade máxima da árvore final. No nosso caso, somente estamos interessados nas alterações feitas da árvore do método Código de Bloco Hiperbólico. Quando a árvore final de ambos os métodos tiverem os mesmos valores de Pf e F isto indicará que ambas as árvores são iguais.

Os resultados para o caso binário podem ser vistos na Tabela 4.26. Note que somente teremos valores para as variáveis Pf_i e F_i quando a árvore tiver sofrido alguma alteração. Para as 7 últimas fontes apresentamos apenas o resultado do polígono que obteve o melhor desempenho.

A partir dos resultados apresentados na Tabela 4.26 podemos ver que das 22 fontes testadas em apenas 8 dos casos o método CBH produziu uma árvore binária com as mesmas características das árvores produzidas pelo método de Tunstall. Nesses casos, vemos que a árvore inicialmente gerada não sofreu alterações e o valor da variável PMF foi maior que 5.0.

Fonte	PMF	PMP	Tunstall		CBH				Fonte	PMF	PMP	Tunstall		CBH			
			F	Pf	F_i	Pf_i	F	Pf				F	Pf	F_i	Pf_i	F	Pf
1	1.5	1.5	8	4	8	5	7	5	12	6.7	6.7	8	7	-	-	8	7
2	2.2	2.2	8	5	8	6	7	5	13	7.3	7.3	8	7	-	-	8	7
3	2.3	2.3	8	5	8	6	7	6	14	9.0	9.0	8	7	-	-	8	7
4	2.8	2.8	8	6	8	7	7	6	15	1.2	1.2	8	3	8	5	7	4
5	3.2	3.2	8	6	8	7	7	6	16b	1.6	1.7	8	4	8	6	7	5
6	3.7	3.7	8	7	8	7	7	6	17b	2.2	2.3	8	5	8	6	7	6
7	4.0	4.0	8	7	8	7	7	6	18a	2.8	2.8	8	6	8	7	7	6
8	4.5	4.5	8	7	8	7	7	6	19c	3.7	3.8	8	7	8	7	7	6
9	5.0	5.0	8	7	8	7	7	6	20a	5.4	5.3	8	7	-	-	8	7
10	5.8	5.8	8	7	-	-	8	7	21c	6.9	7.0	8	7	-	-	8	7
11	6.2	6.3	8	7	-	-	8	7	22c	8.7	9.5	8	7	-	-	8	7

Tabela 4.26: Resultados da aplicação do método Código de Bloco Hiperbólico (CBH) e Tunstall em fontes binárias.

Agora, vamos testar o método CBH em fontes ternárias e ver se podemos encontrar um comportamento parecido. No caso das fontes ternárias, repetimos o mesmo procedimento feito no caso das fontes binárias utilizando $N = 3$ e $r = 2$. Aproveitamos as 15 fontes anteriormente escolhidas e acrescentamos 7 novas. Nessas últimas, a distribuição de probabilidades apenas aproximava da distribuição de probabilidades da fonte. As 7 fontes extras selecionadas podem ser vistas na Tabela 4.27. Na Tabela 4.28 podemos ver os resultados da aplicação do método de Tunstall e CBH nas fontes selecionadas.

Agora no caso ternário, das 22 fontes testadas em apenas 4 o método CBH apresenta resultados diferentes do método de Tunstall. Observando o valor da variável PMF vemos que desses 18 casos, em 14 deles o valor dessa razão foi superior a 8 e a árvore não sofreu alterações posteriores.

Observando novamente os métodos, vemos que no método proposto, a árvore de probabilidades é fixa. Cada tesselação produz uma única árvore onde a cada profundidade h , as probabilidades variam de acordo com as variações da série de Farey. Uma particularidade dessa árvore é que conforme aumentamos a profundidade da árvore, a cada nó, a valor da razão PMP vai aumentando.

Fonte	Polígono			δ	p(0)	p(1)	Fonte	Polígono			δ	p(0)	p(1)	
	v_1	v_4	Tipo					v_1	v_4	Tipo				
16a	1/7	1/6	FD	42	0.470	0.400	20a	7/22	1/3	FD	66	0.790	0.150	
16b	1/8	1/7	FD	56			20b	7/15	1/2	FD	30			
16c	1/9	1/8	FD	72			20c	1/3	8/23	FE	69			
17a	3/13	1/4	FD	52	0.620	0.300	21a	1/7	2/13	FE	91	0.550	0.150	
17b	3/10	1/3	FD	30			21b	0/1	1/2	FE	2			
17c	3/7	1/2	FD	14			21c	3/28	1/9	FD	252			
18a	0/1	1/4	FE	4	0.715	0.250	22a	0/1	1/10	FE	10	0.835	0.070	
18b	5/46	1/9	FD	414			22b	11/100	1/9	FD	900			
18c	5/26	1/5	FD	130			22c	1/3	10/29	FE	87			
19a	1/3	6/17	FE	51	0.740	0.200								
19b	1/4	6/23	FE	92										
19c	1/6	6/35	FE	210										

Tabela 4.27: Fontes ternárias extras selecionadas.

Fonte	PMF	PMP	Tunstall		CBH				Fonte	PMF	PMP	Tunstall		CBH			
			F	Pf	F_i	Pf_i	F	Pf				F	Pf	F	Pf	F_i	Pf_i
1	2.5	2.5	9	3	9	3	7	2	12	36.4	37.0	9	4	-	-	9	4
2	3.0	3.0	7	2	9	3	7	2	13	48.0	49.0	9	4	-	-	9	4
3	5.0	5.0	9	4	9	4	7	3	14	4.2	4.2	9	3	9	4	7	3
4	7.0	7.0	9	4	9	4	7	3	15	2.7	2.7	7	2	9	3	7	2
5	9.0	9.0	9	4	-	-	9	4	16c	3.6	2.8	9	3	-	-	9	3
6	10.5	10.5	9	4	-	-	9	4	17b	7.8	4.3	9	3	-	-	9	4
7	11.0	11.0	9	4	-	-	9	4	18c	20.4	6.2	9	4	-	-	9	4
8	13.0	13.0	9	4	-	-	9	4	19c	12.3	6.8	9	4	-	-	9	4
9	15.1	15.0	9	4	-	-	9	4	20b	13.2	8.5	9	4	-	-	9	4
10	19.1	19.0	9	4	-	-	9	4	21c	3.7	4.1	7	3	9	4	7	3
11	28.3	29.0	9	4	-	-	9	4	22b	12.0	12.1	9	4	-	-	9	4

Tabela 4.28: Resultados da aplicação do método Código de Bloco Hiperbólico e Tunstall em fontes ternárias.

No método de Tunstall, a árvore de probabilidades é gerada de acordo com as probabilidades da fonte, sendo assim a razão PM de cada nó é sempre a mesma.

O método CBH sempre assume que um símbolo da fonte possui probabilidade muito maior que os outros dessa forma gerando árvores que ao serem estendidas tendem a prolongar primeiramente as folhas associadas ao símbolo de maior probabilidade. Sendo assim, a tendência do método CBH é produzir árvores mais profundas. Isto pode ser observado nas Tabelas 4.26 e 4.28 onde vemos que nos casos onde as árvores produzidas pelo método CBH tiveram que ter ramos cortados, as árvores iniciais quando não tinham a mesma profundidade que as árvores do método de Tunstall, eram mais profundas.

Quando o valor de PMF é alto, o método de Tunstall naturalmente produz árvores mais profundas já que temos um símbolo com probabilidade maior que outros e esse fato é refletido no momento de construção das árvores. Nesta situação, a ordem em que os ramos são estendidos por ambos os métodos coincide e por esse motivo temos árvores iguais. Quando o valor de PMF é baixo, o método CBH quase sempre acaba estendendo os ramos numa ordem distinta que o

método de Tunstall.

No caso binário, este fato é mais evidente já que as árvores produzidas pelo método CBH mesmo após terem alguns ramos cortados são distintas das produzidas pelo método de Tunstall. No caso ternário o método CBH teve um desempenho bem melhor. Para os casos 2, 15 e 21c apesar da árvore inicial do método CBH ter sido mais profunda que a do Tunstall, após o corte de alguns ramos, ela tornou-se igual. Já nos casos 1, 3 e 4, a árvore inicial produzida pelo método CBH era igual a árvore de Tunstall mas o corte do ramo acabou gerando uma árvore distinta. Nestes casos, vemos que o critério de corte dos ramos poderia ser aperfeiçoado para melhorar o desempenho do método.

De uma forma geral podemos ver que a razão PMF ajuda a explicar um pouco a diferença observada entre ambos os métodos. Além disso, vemos que no caso ternário o método CBH apresentou resultados bem melhores. Sendo assim podemos concluir que no caso onde temos uma fonte cujas probabilidades dos símbolos é mais dispersa (não produz símbolos equiprováveis, mas uns bem mais prováveis que outros), o método CBH terá um desempenho bom, produzindo árvores iguais ao método de Tunstall.

Capítulo 5

CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentamos um novo conjunto de tesselações hiperbólicas construídas a partir de uma tesselação conhecida, a tesselação de Farey. As diversas propriedades dessas tesselações permitiram a proposta de três tipos de aplicações, sendo duas diretamente ligadas a área de telecomunicações.

Em geral, a construção de tesselações hiperbólicas conhecidas não é realizada de forma trivial. A componente algébrica por trás delas faz com que seja necessário um conjunto de conhecimentos relacionados a teoria de grupos para sua construção. Isto porque, somente através do estudo da ação combinada dos geradores sobre uma determinada região fundamental, é possível a construção geométrica de uma tesselação. Neste trabalho ao invés de uma abordagem algébrica, é utilizada uma abordagem aritmética/geométrica. Uma vantagem da abordagem realizada é que através das propriedades da série de Farey, é possível construir rapidamente as tesselações sem a necessidade de se conhecer os geradores.

Um novo conjunto de tesselações é apresentado no Capítulo 3. Obtidas através da união sistemática de triângulos da tesselação de Farey, essas tesselações podem ser vistas como uma das principais contribuições deste trabalho. Inicialmente é estabelecida uma notação apropriada para representar cada triângulo, referenciando-os por $(P_3)_X^{v_1, v_3}$, onde v_1 e v_3 correspondem aos vértices mais distantes e o índice X separa os triângulos em dois tipos de acordo com a distância entre seus dois vértices (Definição 3.2). O Teorema 3.4 é um dos principais teoremas deste capítulo pois ele apresenta a principal característica dos triângulos: a presença dos dois tipos de triângulos (segundo a Definição 3.2) abaixo de um triângulo qualquer. O resultado deste teorema é utilizado em quase todas as demonstrações dos teoremas apresentados no capítulo.

Trabalhando com tesselações formadas por polígonos com um número de lados par e ímpar de forma diferenciada, foi feito um primeiro estudo abordando a tesselação formada por polígonos de 4 lados. O primeiro teorema relativo a essa tesselação, o Teorema 3.5, permite caracterizar completamente essa tesselação através dos triângulos da tesselação de Farey. Já o Teorema 3.6 pode ser visto como uma expansão do resultado do Teorema 3.4 para polígonos de 4 lados.

Esses resultados mostraram ser possível obter expressões gerais para tesselações formadas por polígonos de $2n$ lados. Nesse caso, os resultados principais são o Teorema 3.7, que estabelece a região de Dirichlet para o caso geral e o Teorema 3.8. Note que para a construção das tesselações

formadas por polígonos de $2n$ lados é necessário a aplicação da Propriedade 3.1 que estabelece o tipo dos polígonos de $2n$ lados.

Com relação às tesselações formadas por polígonos com número de lados ímpar (ou seja $2n+1$) pode-se ver que sua construção é similar à realizada no caso anterior. Ao invés de se juntar um número par de triângulos, temos a junção de um número ímpar sendo que agora eles não são mais do mesmo tipo. Por esse motivo as fórmulas para o caso ímpar tornam-se um pouco mais complexas. No entanto, foi possível obter fórmulas gerais, tanto para a região de Dirichlet como para os vértices dos polígonos, o que pode ser visto através dos Teoremas 3.9 e 3.10. Neste caso, a Propriedade 3.5 estabelece o tipo dos polígonos.

Note que enquanto no caso da tesselação formada por polígonos de quatro lados apresentou-se uma forma de caracterizar totalmente a tesselação através dos triângulos da tesselação de Farey (Teorema 3.5), o mesmo não foi feito para os casos gerais. Isto deve-se ao fato das informações fornecidas pelos resultados generalizados (Teoremas 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 e Propriedades 3.1 e 3.5) serem suficientes para a construção de qualquer tesselação dado um valor de n , desde que $n > 3$.

No Capítulo 4 são apresentadas as outras contribuições deste trabalho, as aplicações das tesselações estudadas. Na Seção 4.1 pode-se ver a primeira aplicação, um novo método de codificação de geodésicas. Em geral, os métodos de codificação de geodésicas são complexos em sua implementação, principalmente quando o número de lados da região de Dirichlet é superior a 4.

Nas tesselações sendo propostas, os vértices dos polígonos são elementos da série de Farey. Explorando a relação existente entre essas tesselações e a série de Farey, foi possível propor um novo método de codificação de geodésicas que pode ser visto como uma extensão do método de C. Series ([Seri 85]) para codificação de geodésicas. No método proposto, referenciado por CGPn (Código para Geodésicas em Polígonos de n lados), através da decomposição em frações contínuas do ponto atrator de uma geodésica pode-se encontrar sua sequência cortante em qualquer uma das tesselações propostas. Nas Tabelas 4.5, 4.6, 4.9 e 4.10 pode-se ver como obter as sequências cortantes (ou seja, o código para geodésicas) em tesselações formadas por polígonos com n lados a partir do código CGP3 de uma geodésica. Já no Apêndice A pode-se ver o algoritmo para a obtenção das sequências cortantes diretamente a partir da decomposição em frações contínuas do ponto atrator de uma geodésica.

Após a implementação e testes do método CGPn pode-se verificar que o novo método de codificação de geodésicas se mostrou eficaz na representação de uma geodésica no plano hiperbólico. Pela facilidade de implementação do método, tem-se uma nova perspectiva de construção de códigos para codificação de geodésicas.

Um dos maiores problemas encontrados no estudo dessas tesselações foi o fato das regiões de Dirichlet associadas terem todos os vértices na fronteira, situação que não é usual quando se trabalha com tesselações hiperbólicas. Além disso, estudos preliminares mostraram que a busca

por geradores e relações que estivessem casados com o particionamento considerado não é um problema trivial. Como para a implementação das aplicações o conhecimento dos geradores não era necessário, este problema foi deixado em aberto para estudos futuros.

A aplicação das tesselações em codificação de fontes é realizada na Seção 4.2 do Capítulo 4. Uma das motivações iniciais que levaram a este tipo de aplicação foi a possibilidade da construção de uma árvore de probabilidades a partir de cada tesselação. Um dos principais resultados aparece no Corolário 4.2, onde se verifica que a probabilidade da geodésica tomar um determinado caminho numa tesselação corresponde a distância entre os vértices mais distantes do último polígono cortado. Tal resultado permite a construção rápida da árvore de probabilidades.

A partir da árvore de probabilidades foi possível propor dois novos métodos de codificação, cada um apresentando uma contribuição para uma aplicação distinta. Considerando códigos de árvore para codificação de fontes, propomos inicialmente dois métodos, o método Árvore Hiperbólica (AH) e uma variação deste, o método Árvore Hiperbólica com Inversão de Polígono (AHIP). A diferença básica entre esses dois métodos está na forma em como é feita a associação dos símbolos da fonte aos lados de um polígono para a escolha da árvore de probabilidades. Esses dois novos métodos, AH e AHIP, permitiram generalizar o método de Elias uma vez que não estão mais limitados ao particionamento do intervalo $[0, 1]$.

Comparando ambos os métodos, vemos que em termos de implementação o método AH é bem menos complexo que o método AHIP. O fato do método AHIP levar em consideração o tipo de polígono a cada etapa e eventualmente fazer a inversão do polígono, torna-o bem mais complexo, uma vez que considerando a memória introduzida, conduz a códigos de treliça. No caso de uma implementação computacional, este método exige mais recursos (em termos de tempo de processamento) que o método AH.

Através dos resultados dos estudos comparativos apresentados nas Seções 4.2.2 e 4.2.3, pode-se ver que tanto no caso binário e ternário, o método AH apresentou um desempenho ligeiramente melhor que o método AHIP na maioria dos casos. Sendo assim, para aplicações futuras tanto em termos de resultados como em termos de complexidade, o método Árvore Hiperbólica (AH) é o mais adequado.

As comparações realizadas entre os métodos de Elias e os métodos Árvore Hiperbólica e Árvore Hiperbólica com Inversão de Polígono mostraram que os métodos propostos são promissores quando comparados ao método de Elias principalmente com o uso de uma estratégia simples de escala. Acreditamos que o uso de uma estratégia de escala mais elaborada possivelmente melhoraria o desempenho do algoritmo.

Considerando os códigos do tipo variável-fixa foi possível propor um novo código, o Código de Bloco Hiperbólico (CBH), que pode ser visto como uma generalização do método de Tunstall para o caso hiperbólico. Este novo método utilizou as tesselações estudadas para gerar árvores de decisão e, quando comparadas as árvores geradas pelo método de Tunstall apresentou resultados

muito parecidos.

Sabe-se que o método de Tunstall produz uma árvore ótima. Sendo assim, considerando o método de Tunstall como referência, vemos que o bom desempenho do novo método está relacionado à distribuição de probabilidades dos símbolos da fonte. Através dos resultados obtidos, pode-se ver quanto mais assimétrica esta distribuição de probabilidades (ou seja, mais dispersas as probabilidades), melhor o desempenho do método Código de Bloco Hiperbólico, igualando-se ao método de Tunstall.

A partir desses dois novos métodos, temos então uma nova classe de códigos de fonte, os códigos hiperbólicos. Até onde é de nosso conhecimento, este trabalho contém propostas inovadoras e não consideradas anteriormente na literatura.

O fato das probabilidades associadas aos vértices de cada polígono sofrerem pequenas variações à medida que a profundidade na árvore aumenta, sugere que talvez estes métodos sejam mais adequados ao caso de fontes variantes com o tempo. Além disso, nos casos estudados nem sempre as fontes possuíam entropia máxima (cujos símbolos são igualmente prováveis), evidenciando que talvez estes métodos possam ser mais adequados a uma situação onde esta suposição não seja verdadeira.

5.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Tendo em vista os resultados obtidos neste trabalho, apresentamos a seguir algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Estudo dos geradores de cada tesselação procurando verificar qual o gênero da superfície associada em cada caso;
- Aprimoramento da estratégia de escala para os métodos AH e AHIP, comparando os resultados com o método de Elias implementado com a estratégia de arredondamento e escala;
- Introduzir memória na árvore de probabilidades dos métodos AH e AHIP. Tal abordagem, levaria estes códigos a passarem de códigos simples de árvores à códigos de treliças, aumentando sua complexidade. Nessa situação seria interessante fazer um estudo da aplicação do código de Tunstall a esses códigos de treliça;
- Fazer um estudo da dinâmica simbólica para fontes caracterizadas estatisticamente como Gauss-Markov;

- Buscar através do estudo das transformações de reflexão, uma forma algébrica para a realização da codificação de geodésicas simples e fechadas. Uma alternativa de inclusão do “word problem”;
- Fazer um estudo do “word problem” utilizando grupos de reflexão com dois geradores para o grupo de tesselações estudadas num trabalho parecido ao apresentado em [Mumf 02].
- Estudo da aplicação dessas tesselações na área de constelação de sinas, calculando-se o erro associado a cada tesselação.

Apêndice A

ALGORITMOS PARA OBTENÇÃO DE CÓDIGOS NAS NOVAS TESSELAÇÕES

A.1 Tesselações constituídas por polígonos de $2n$ lados

Assumiremos que a tesselação será constituída por polígonos de $2n$ lados ($n \geq 3$); que a geodésica orientada pertence a $PSL(2, \mathbb{Z})$; e cujo ponto atrator tenha decomposição em frações contínuas dada por $\beta = [\overline{n_0, n_1, n_2, \dots, n_b}]$.

Sabemos que o código numa tesselação formada por polígonos de $2n$ lados será dado por $E_1^{n_0} E_{i_1} E_{i_2} E_{i_3} \dots$ com $i_k \in \{1, \dots, 2n - 1\}$. Desejamos obter o código a partir dos valores n_0, n_1, n_2, \dots . Afim de facilitar a obtenção deste código, vamos separá-los em sequências disjuntas chamadas de palavras-código, A_k de forma que a união de todos os valores de A_k nos fornecerá o código. Isto significa que:

$$A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots = E_1^{n_0} E_{i_1} E_{i_2} E_{i_3} \dots$$

O algoritmo é dado por:

Passo 1 - A partir de n_0 obtenha A_0 , fazendo $A_0 = E_1^{n_0}$;

Passo 2 - Considere os valores de n_1 e n_2 e selecione na Tabela A.1 o valor de A_1 correspondente. Seja r tal que $2n = 2(r + 1)$. Logo, $r = n - 1$;

Passo 3 - Vamos definir as variáveis P_k , i e u_k . A variável P_k conterá a informação do tipo do polígono, u_k será a quantidade de n_i que foi utilizada na elaboração da palavra-código A_k e a variável i será uma variável auxiliar. Utilize a tabela A.2 para obter os valores iniciais de P_1 , i , u_1 e $k=1$;

Passo 4 - Atualize os valores de k e n_i fazendo $k \rightarrow k + 1$ e $n_i \rightarrow n_i - u_{k-1}$. Agora, tome o valor atualizado de n_i e verifique se é maior ou igual a $2n$, caso seja verdade, faça $t = \lceil [n_i/2n] \rceil$

		A_1
$n_1 = 1$	$n_2 = r$	E_2
	$n_2 > r$	E_2
	$n_2 < r$	E_{r-n_2+2}
$n_1 > 1$	$n_1 = r + 1$	E_{2r+1}
	$n_1 > r + 1$	E_{2r+1}
	$n_1 < r + 1$	E_{r+n_1}

Tabela A.1: Valores de A_1 em uma tesselação formada por polígonos de $2n$ lados.

		P_1	u_1	i
$n_1 = 1$	$n_2 = r$	FD	0	3
	$n_2 > r$	FD	r	2
	$n_2 < r$	FE	1	3
$n_1 > 1$	$n_1 = r + 1$	FE	0	2
	$n_1 > r + 1$	FE	$r+1$	1
	$n_1 < r + 1$	FD	1	2

Tabela A.2: Valores de P_1 , i e u_1 .

e $s = n_i - 2n.t$. Caso contrário, faça $t = 0$ e $s = n_i$;

Passo 5 - Obtenha o valor da palavra-código A_k através da Tabela A.3;

			A_k	P_k	u_k	i
$P_{k-1} = FE$	i ímpar	$t = 0$	E_{s+1}	FD	0	+1
	i ímpar	$t \neq 0$	$E_{2r+1}^t E_{s+1}$	FD	1	+1
	i par		E_1	FD	1	+0
$P_{k-1} = FD$	i ímpar		E_{2r+1}	FE	1	+0
	i par	$t = 0$	E_{2n+1-s}	FE	0	+1
	i par	$t \neq 0$	$E_1^t E_{2r+1-s}$	FE	1	+1

Tabela A.3: Valores de A_k , P_k , u_k e incremento para i .

Passo 6 - Atualize os valores de P_k , u_k e i através da tabela A.3 e volte ao Passo 5 até o código formado por $A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_k$ apresentar uma periodicidade, fornecendo um código eventualmente periódico.

Observe também que o índice de n_i está relacionado ao código CGP3 uma vez que os índices ímpares de n_i correspondem aos índices da palavra D e os índices pares de n_i correspondem aos índices da palavra E . Assim, apesar do algoritmo de codificação não depender do conhecimento do código CGP3, este está sendo indiretamente utilizado no procedimento de codificação.

A.2 Tesselações constituídas por polígonos de $2n + 1$ lados

Da mesma forma considerada no caso de polígono de $2n$ lados, descreveremos o algoritmo para a obtenção do código para polígonos de $2n + 1$ lados.

Passo 1 - Obtenha o valor de A_0 fazendo $A_0 = E_1^{n_0}$;

Passo 2 - Calcule o valor de A_1 utilizando os valores de n_1 e n_2 na Tabela A.4;

	A_1
$n_1 \geq n$	E_{2n}
$n_1 < 1$ e $n_2 = 1$	E_{2n_1+1}
$n_1 < 1$ e $n_2 > 1$	E_{2n_1}

Tabela A.4: Valores de A_1 em uma tesselação formada por polígonos de $2n + 1$ lados.

Passo 3 - Inicialize as variáveis P_k , i e u_k para $k = 1$ através das informações da Tabela A.5;

	P_1	u_1	i
$n_1 \geq n$	FE	n	1
$n_1 < 1$ e $n_2 = 1$	FE	1	3
$n_1 < 1$ e $n_2 > 1$	FD	2	2

Tabela A.5: Valores de P_k , i e u_k para $k = 1$.

Passo 4 - Atualize os valores de k e n_i fazendo $k \rightarrow k + 1$ e $n_i \rightarrow n_i - u_{k-1}$;

Passo 5 - Se $P_{k-1} = FE$, obtenha o valor da palavra-código A_k diretamente da Tabela A.6.

Caso contrário obtenha o código que será da forma E_τ através da mesma tabela e faça $A_k = E_{2n+1-\tau}$;

		A_k	P_k	u_k	i
i par	$\lambda_k = 1$	E_2	FE	1	+1
	$\lambda_k \geq 2$	E_1	FD	2	+0
i ímpar	$\lambda_k > n - 1$	E_{2n}	FE	n	+0
	$\lambda_k = n - 1$	$E_{2\lambda_k+1}$	FD	1	+1
	$\lambda_k < n - 1$ e $n_{i+1} = 1$	$E_{2\lambda_k+2}$	FE	1	+2
	$\lambda_k < n - 1$ e $n_{i+1} > 1$	$E_{2\lambda_k+1}$	FD	2	+1

Tabela A.6: Valores de A_k , P_k , u_k e incremento para i .

Passo 6 - Atualize os valores de P_k , u_k e i através da Tabela A.6 e volte ao Passo 4 até o código formado por $A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_k$ apresentar uma periodicidade. Devido a essa relação existente entre as tesselações e a série de Farey, foi possível obter um novo método de codificação de geodésicas que pode ser visto como uma extensão do método de C. Series ([Seri 85]) para codificação de geodésicas. No método proposto (apresentado no início do Capítulo 4) através da decomposição em frações contínuas do ponto atrator de uma geodésica, podemos encontrar sua sequência cortante em qualquer uma dessas tesselações propostas.

REFERÊNCIAS

- [Adle 91] R. Adler e L. Flatto, “Geodesic flows, interval maps and symbolic dynamics”, *BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY*, Vol. 25, No. 2, pp. 229–334, October 1991.
- [Agus 02] E. Agustini, *Constelações de Sinais em Espaços Hiperbólicos*, Tese de Doutorado, IMECC, Unicamp, Fevereiro 2002.
- [Albu 09] C. D. Albuquerque, *Análise e Construção de Códigos Quânticos Topológicos sobre Variedades Bidimensionais*, Tese de Doutorado, FEEC, Unicamp, Abril 2009.
- [Alla 05] N. Allan, “A Aritmética de Gauss”, *Anais do VI Seminário Nacional de Historia da Matematica*, No. 1, pp. 41–50, 2005. IGCE-Rio Claro.
- [Arti 65] E. Artin, “Ein Mechanisches System mit quasi-ergodischen Bahnen”, *Collected Papers*, pp. 499–501, Addison Wesley, Reading Mass., 1965.
- [Blah 87] R. L. Blahut, *Principles and Practice of Information Theory*, Addison-Wesley, MA, 1987.
- [Boba 03] K. Bobadilha, *Pavimentação Hiperbólica: Algoritmo e Fórmulas de Crescimento*, Dissertação de Mestrado, IMECC, Unicamp, Outubro 2003.
- [Bomb 06] H. Bombin e M. Martin-Delgado, “Topological quantum error correction with optimal encoding rate”, *Physical Review A*, Vol. 73, p. 062303, 2006.
- [Cava 02] R. G. Cavalcante, *Análise de Desempenho de Constelações de Sinais em Variedades Riemannianas*, Dissertação de Mestrado, FEEC, Unicamp, Maio 2002.
- [Cava 05] R. Cavalcante, H. Lazari, J. Lima, e R. Palazzo, “A New Mathematical Approach for the Design of Digital Communication Systems”, *AMS-DIMACS Series*, Vol. 68, No. 1, pp. 145–177, 2005.
- [Cove 91] T. Cover e J. Thomas, *Elements of Information Theory*, John Wiley and Sons, INC., 1991.

- [Fabr 99] F. Fabris, "On the Composition of Tunstall Messages", *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 45, No. 5, pp. 1608–1612, July 1999.
- [Ford 57] L. Ford, *Automorphic Functions*, Chelsea Publishing Company, 1957.
- [Gemi 71] M. Gemignani, *Axiomatic Geometry, Addison-Wesley Series in Mathematics Education*, Addison-Wesley Publishing Company, INC, 1971.
- [Hard 60] G. H. Hardy e E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, 4 Ed., 1960.
- [Jame 81] B. James, *Probabilidade: um Curso em Nível Intermediário*, IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1981.
- [Jones 88] G. Jones e D. Singerman, *Complex Functions: an Algebraic and Geometric Viewpoint*, Cambridge University Press, 1988.
- [Kato 07] S. Katok e I. Ugarcovici, "Symbolic dynamics for the modular surface and beyond", *BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY*, Vol. 44, No. 1, pp. 87–132, Jan. 2007.
- [Kato 92] S. Katok, *Fuchsian Groups*, The University of Chicago Press, 1992.
- [Kato 96] S. Katok, "Coding of closed geodesics after Gauss and Morse", *Geometriae Dedicata*, Vol. 63, pp. 123–145, 1996.
- [Kita 03] A. Kitaev, "Fault-tolerant quantum computation by anyons", *Annals of Physics*, Vol. 303, pp. 2–30, 2003.
- [Mass 93] J. L. Massey, *Digital Information Theory*, Class Notes, curso 35-417G, ETH-Zürich, 1993.
- [Moec 82] R. Moeckel, "Geodesics on modular surfaces and continued fractions", *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Vol. 2, pp. 69–83, 1982.
- [Mumf 02] D. Mumford, C. Series, e D. Wright, *Indra's Pearls: The Vision of Felix Klein*, Cambridge University Press, 2002.
- [Olds 63] C. Olds, "Continued Fractions", M. A. of America, Ed., *New Mathematical Library*, San Jose State University, 1963.

- [Pala 07] R. Palazzo, *Notas de Aula: Introdução a Teoria de Informação*, Departamento de Telemática - DT, 2007.
- [Seri 85] C. Series, "The modular surface and continued fractions", *J. London Math. Soc.*, Vol. 2, No. 31, pp. 69–80, 1985.
- [Silv 00] E. B. da Silva, *Constelações de Sinais e Análise de Desempenho Hiperbólico*, Tese de Doutorado, FEEC, Unicamp, Fevereiro 2000.
- [Silv 02] M. Silva, *Codificação de Geodésicas Fechadas Simples em Superfícies Hiperbólicas*, Tese de Doutorado, Feec, Unicamp, Março 2002.
- [Silv 06] E. B. Silva, M. Firer, S. I. R. Costa, e R. P. Jr, "Signal constellations in the hyperbolic plane: A proposal for new communication systems", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 1, No. 343, pp. 69–82, 2006.
- [Stil 92] J. Stilwell, *Geometry of Surfaces*, Springer-Verlag, 1992.

Índice Remissivo

Algoritmo de Tunstall	101	Espaço métrico	7
Árvore		Feixe	
de decisão	16	de direita (FD)	33
de probabilidades	17	de esquerda (FE)	33
Canal		Frações contínuas	58
de comunicação	14	Fonte	
sem ruído	14	discreta	14
Codificação de geodésicas	1, 63	sem memória (DMS)	15
Codificador de canal	14	Geodésica	8, 9, 24
Código		A-reduzida	73
de árvore	19	Geometria hiperbólica	5
proposto	87	CGP3	63
de bloco de comprimento		CGP4	65
fixo	19	CGP5	71
variável	19	CGP6	67
de Bloco Hiperbólico (CBH)	103	CGP7	71
de bloco proposto	103	CGPn	69, 72
de Elias	20, 84	Fator de escala 96	
de fonte	14	Grupos	6
de Tunstall	20, 99	especial linear, $SL(2, \mathbb{R})$	10
eficiente	19	especial linear projetivo, $PSL(2, \mathbb{R})$..	10
instantâneo	16	linear geral das matrizes, $GL(2, \mathbb{R})$..	10
ótimo	17	de transformações de Möbius	24
para geodésicas em Polígonos		Fuchsiano	12
de 3 lados	63	modular, $PSL(2, \mathbb{Z})$	12
de 4 lados	65	Isometria	10, 11
de 5 lados	71	Método	
de 6 lados	67	Árvore Hiperbólica (AH)	89
de 7 lados	71	com Inversão de Polígono (AHIP) ..	89
unicamente decifrável	16	Modulador	14
universal	19	Palavra-código	14
Comprimento do caminho	18	Plano hiperbólico	8
Disco de Poincaré	26	Polígono elementar	33
Distância euclidiana	8	Ponto	
Entropia da fonte	15	ideal	9
		atrator	11, 24
		repulsor	12, 24

Probabilidade	
composta	75
do caminho	76
Região de Dirichlet	12
em tesselações formadas por polígonos	
de 4 lados	34
de 5 lados	46
de $2n$ lados	39, 40
de $2n + 1$ lados	48, 49
Razão PM, PMF, PMP	112
Série de Farey	25, 42
Sequências cortantes	59
Sistema de comunicações	13
Tesselação	12
de Farey	26
Transformação	
parabólica	11
elíptica	11
hiperbólica	11, 24
Triângulo	
elementar	26
fundamental	26
Vértices de polígonos	
de $2n$ lados	42
de $2n+1$ lados	50