



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação
Departamento de Telemática

CONSTRUÇÕES DE CONSTELAÇÕES DE SINAIS GEOMETRICAMENTE
UNIFORMES HIPERBÓLICAS

Autor: Eliane Cristina Geroli Pilla

Dissertação de Mestrado

Orientador: Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Jr

Banca Examinadora

Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Jr

Prof. Dr. Carlos Eduardo Câmara

Prof. Dr. Claudemir Murari

Prof. Dr. Marinaldo Felipe da Silva

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas – FEEC – UNICAMP. Como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Telecomunicação e Telemática

Campinas – SP

Junho - 2005

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

P644c Pilla, Eliane Cristina Geroli
Construções de constelações de sinais
geometricamente uniformes hiperbólicas / Eliane
Cristina Geroli Pilla. --Campinas, SP: [s.n.], 2005.

Orientador: Reginaldo Palazzo Júnior.
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Espaços hiperbólicos. 2. Modelos geométricos. 3.
Comunicações digitais. 4. Teoria da codificação. 5.
Geometria hiperbólica. I. Palazzo Júnior, Reginaldo. II.
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Construct hyperbolic geometrically uniform signal constellations
Palavras-chave em Inglês: Hyperbolic spaces, Geometric models, Digital
communications, Coding theory, Hyperbolic geometry

Área de concentração: Telecomunicação e Telemática

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Carlos Eduardo Câmara, Claudemir Murari, Marinaldo Felipe da
Silva

Data da defesa: 09-06-2005

Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA – TESE DE MESTRADO

Candidato(a): Eliane Cristina Geroli Pilla

Data da Defesa: 09/06/2005

Título da Tese: Construções de Constelações de Sinais Geometricamente Uniformes Hiperbólicas

Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Júnior (Matr. 118290): Reginaldo Palazzo Júnior

Prof. Dr. Marinaldo Felipe da Silva: Marinaldo Felipe 309512

Prof. Dr. Carlos Eduardo Câmara: Câmara 300960

Prof. Dr. Claudemir Murari: Claudemir 309511

Secretária Giane Cristina Sales Geraldo: Giane

Coordenador de PG Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub: Michel Daoud Yacoub

Resumo

O presente trabalho tem como meta principal construir constelações de sinais geometricamente uniformes no plano hiperbólico, visando considerá-las como alfabeto para geração de códigos de espaço de sinais, em particular os códigos de classes laterais generalizados. Para estabelecer estas constelações foi escolhido um conjunto de sinais geometricamente uniforme, constituído pelos centros dos octógonos da tesselação $\{8, 8\}$. Depois foi obtido um rotulamento para os elementos do grupo gerador dos conjuntos de sinais geometricamente uniformes em cada classe lateral. Finalmente, a partir do isomorfismo rótulo obtivemos um rotulamento isométrico para os elementos do conjunto de sinais.

Abstract

Our goal in this work is to construct hyperbolic geometrically uniform signal constellations (more specifically g -torus) that are able to act as alphabets for generation of codes. To obtain these constellations we choose geometrically uniform signal sets consisting of the centers of the p -gons of tessellations of type $\{p, q\}$. From these constellations we obtain labelings for the elements of the generator group of the geometrically uniform signal sets in each coset. Finally, by the label isomorphism we obtain an isometric labeling for the elements of the signal set.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Jesus Cristo pela concretização de mais uma etapa em minha vida.

Ao meu marido César, meus pais Dorival e Hercília, minha avó Delfina e meus irmãos Alexandre e Elisângela pelo carinho e incentivo dado durante a realização deste trabalho.

De maneira especial gostaria de agradecer aos professores Reginaldo Palazzo Jr e Henrique Lazari. Ao professor Reginaldo Palazzo Jr por ter confiado em mim, dando todo o apoio que estive ao seu alcance para realização deste trabalho.

Ao professor Henrique Lazari pela competente e segura orientação bem como o constante incentivo e amizade.

Aos professores João Peres, Isabel Cristina Rossini, Henrique, Suzi e Alice pelo apoio durante a graduação.

Aos meus amigos Sônia Borges e Nilson Dias pelo carinho e confiança que sempre me transmitiram nos momentos mais difíceis de minha vida pessoal e acadêmica.

A minha amiga Solange e a Capes pelo apoio financeiro concedido.

Dedico este trabalho
à minha mãe, Hercília;
ao meu pai, Dorival;
à minha amiga Sonia.

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Símbolos	x
Capítulo 1	12
Introdução	12
Capítulo 2	15
Grupos e Espaços Métricos.....	15
2.1 Revisão de Teoria dos Grupos	15
2.2 Apresentação de Grupos.....	19
2.3 Espaços Métricos.....	23
2.4 O Plano Hiperbólico.....	28
2.5 Grupos Discretos e Propriamente Descontínuos	32
Capítulo 3.....	40
Noções de Teoria da Informação e Codificação. Tesselações Regulares.....	40
3.1 Tópicos de Teoria da Informação e Codificação.....	40
3.2 Tesselações Planares	44
Capítulo 4.....	47
Conjuntos de Sinais Geometricamente Uniformes	47
4.1 Introdução aos Conjuntos de Sinais Geometricamente Uniformes	47
4.2 Propriedades de Simetria dos Conjuntos de Sinais Geometricamente Uniformes	51
Capítulo 5.....	54
Partições Geometricamente Uniformes e Constelações de Sinais Geometricamente Uniformes	54
Capítulo 6.....	69
Códigos de Espaços de Sinais Geometricamente Uniformes	69
Capítulo 7.....	72
Conclusões e Sugestões	72
7.1 Conclusões.....	72
7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros.	74
Referências Bibliográficas	76

Lista de Figuras

Figura 1 Identificação para $g = 2$	28
Figura 2 Bitoro	28
Figura 3 Retas no modelo do semiplano superior.....	29
Figura 4 Retas no modelo do círculo unitário	30
Figura 5 Representação planar de uma superfície H^2/Γ com $g = 2$ e $r = 4$	38
Figura 6 Sistema de comunicação digital	41
Figura 7 Codificador convolucional binário com taxa $R = \frac{1}{2}$	41
Figura 8 Determinação das possíveis tesselações nas geometrias euclidiana e hiperbólica.	45
Figura 9 Reflexões geradoras.....	45
Figura 10 Tesselação dual mostrada em linhas tracejadas.	46
Figura 11 Representação geométrica da constelação 8 – PSK com grupo gerador mínimo R_8 . ..	49
Figura 12 Representação geométrica para a constelação 8 – PSK, usando $U(S) = V \cdot R_4$ como grupo gerador mínimo.....	50
Figura 13 Região de Voronoi.....	53
Figura 14 Tabela do isomorfismo $A \simeq R_8/R_2$	56
Figura 15 Rotulamento isométrico para os quatro subconjuntos na partição do conjunto de sinais 8 – PSK.	57
Figura 16 Tabela do isomorfismo $A \simeq V \cdot \frac{R_4}{R_2}$	56
Figura 17 Rotulamento isométrico para os quatro subconjuntos na partição do conjunto de sinais 8 – PSK induzido pelo quociente $V \cdot R_4/R_2$	58
Figura 18 Rotulamento isométrico para os 16 subconjuntos na partição do conjunto de sinais $S = \mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	60
Figura 19 Rotulamento isométrico para os quatro subconjuntos na partição $\frac{S}{S'}$	61
Figura 20 Rotulamento isométrico para os dezesseis subconjuntos na partição $\frac{S}{S'} \times \frac{S}{S'}$	62
Figura 21(a) Constelação de sinais geometricamente uniforme C_1	64
Figura 21(b) Constelação C_2 geometricamente uniforme.....	63
Figura 21(c) Constelação de sinais G U C_3 resultante da união das constelações C_1 e C_2	63
Figura 21(d) Constelação de sinais geometricamente uniforme C_4	64
Figura 21(e) Constelação de sinais geometricamente uniforme C_5	65
Figura 21(f) Constelação de sinais não geometricamente uniforme	65
Figura 22 Codificador para o código \mathcal{C}	68

Lista de Símbolos

$(G, *)$: grupo.

$\frac{G}{H}$: grupo quociente do grupo G pelo subgrupo H .

D_m : o grupo diedral de grau m .

$H \leq G$: H é um subgrupo normal do grupo G .

$[G : H]$: índice do subgrupo H de G .

$|G|$: ordem do grupo G .

$\prod_{i \in I} G_i$: produto direto dos grupos G_i .

$\text{Ker}(f)$: núcleo do homomorfismo de grupos $f : G \rightarrow H$.

$MPSK$ ou Z_n : o grupo cíclico de ordem n .

$\mathbb{R}^{2 \times 2}$: o grupo aditivo das matrizes 2×2 sobre os números reais.

$GL(2, \mathbb{R})$: o grupo linear geral das matrizes 2×2 sobre os números reais.

$SL^*(2, \mathbb{R})$: o grupo ortogonal.

$SL(2, \mathbb{R})$: o grupo ortogonal especial.

$PSL^*(2, \mathbb{R})$: o grupo ortogonal projetivo.

$PSL(2, \mathbb{R})$: o grupo ortogonal especial projetivo.

$G = H \rtimes_{\varphi} J$: o produto semi-direto de H por J .

$G = \langle \{g_i\}_{i \in I}; \{R_j = 1\}_{j \in J} \rangle$: apresentação do grupo G pelos geradores $\{g_i\}_{i \in I}$ e pelas relações $\{R_j = 1\}_{j \in J}$.

$d(x, y)$: distância entre os pontos x e y do espaço M .

$\|x\|$: norma do vetor x .

\mathbb{B}^2 : modelo do círculo unitário do plano hiperbólico

\mathbb{H}^2 : modelo do semi-plano superior do plano hiperbólico.

S : conjunto de sinais.

C : constelação de sinais.

$m : A \rightarrow \frac{S}{S'}$: rotulamento isométrico.

C : código em geral.

R : taxa de um código.

$V_v(s)$: região de Voronoi associada ao ponto de sinal s .

$DP(s)$: perfil de distância global associado a um ponto $s \in S$.

Γ : grupo fuchsiano.

F : região fundamental de um grupo G .

$D_p(\Gamma)$: região de Dirichlet de Γ centrada em p .

$C(\frac{S}{S'})$: código de espaço de sinais.

$U(S)$: grupo gerador do conjunto de sinais geometricamente uniforme S .

$U'(S)$: subgrupo normal de $U(S)$.

$\frac{S}{S'}$: partição geometricamente uniforme.

$\{p, q\}$: tesselação.

$[p, q]$: grupo de isometrias da tesselação $\{p, q\}$.

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho tem como meta principal construir constelações de sinais geometricamente uniformes no plano hiperbólico.

Apesar do número infinito de tesselações existentes no plano hiperbólico, as que se destacam para nossos propósitos são aquelas da forma $\{4g, 4g\}$, $g > 1$ (neste caso $g = 2$). Estas se mostraram ferramenta eficiente na construção de constelações de sinais com importantes propriedades algébricas e geométricas. As propriedades algébricas e geométricas apresentadas por estas constelações é que tornam a implementação de um sistema de comunicação digital mais simples possível, mantendo ainda assim seu bom desempenho. Destas tesselações podemos afirmar que:

Os conjuntos de sinais S consistindo dos centros dos $4g$ -ágonos da tesselação $\{4g, 4g\}$ são geometricamente uniformes.

Cada grupo fuchsiano Γ gerado pelas isometrias que emparelham os lados do $4g$ -ágono (região fundamental F para Γ) é isomorfo ao grupo fundamental da superfície compacta do g -toro resultante da relação de equivalência que identifica os lados de F , ou seja, $\frac{F}{\Gamma}$

Durante esta dissertação, alguns trabalhos foram de grande importância. Por exemplo, em [5] encontra-se a idéia de representação geométrica de códigos por meio de constelações de sinais, ou seja, o conceito de códigos geometricamente uniformes em \mathbb{R}^n .

Em [10], Lazari estendeu os conceitos descritos por Forney [5] em \mathbb{R}^n ao plano hiperbólico. Em seguida obteve subgrupos normais do grupo fuchsiano

$$\Gamma = \langle A_1, B_1, A_2, B_2 : A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} A_2 B_2 A_2^{-1} B_2^{-1} = 1 \rangle$$

gerador da tesselação $\{8, 8\}$, possibilitando-nos particionar o plano hiperbólico para construir as constelações de sinais abordadas no capítulo 5.

A idéia de associar cada ponto de uma constelação de sinais um elemento de um grupo iniciou-se com Slepian, introduzindo o conceito de códigos de grupo. Estes são caracterizados como conjuntos finitos de pontos do espaço euclidiano \mathbb{R}^n gerado por grupos G de matrizes ortogonais R atuando em um ponto inicial x_0 , ou seja, $C = \{R(x_0) : R \in G\}$.

Mais tarde, em [5], Forney introduziu uma classe de códigos de grupos mais geral que os códigos de grupo do tipo Slepian, os assim chamados códigos geometricamente uniformes. Para este tipo de código, o grupo gerador G é considerado como sendo um grupo de isometrias arbitrárias e não somente de transformações ortogonais.

Como as palavras-código são sequências de símbolos sujeitas a algum padrão, a forma de padronização que se mostrou mais adequada é aquela em que existe uma ação transitiva de um grupo no conjunto de sinais. Portanto, considerando constelações de sinais geometricamente uniformes como alfabeto para geração de código, o resultado são os códigos geometricamente uniformes.

A caracterização algébrica e geométrica de uma constelação geometricamente uniforme, consiste em uma ferramenta importante para trabalhar com códigos tanto se em espaços euclidianos como em espaços mais gerais, como no caso do plano hiperbólico, onde não dispomos da estrutura de espaço vetorial.

Este trabalho está dividido da seguinte forma.

No capítulo 2 introduzimos os conceitos básicos de estruturas matemáticas (grupos e espaços métricos). Em seguida apresentamos noções da geometria hiperbólica; tratamos de alguns modelos para esta geometria e algumas de suas propriedades. Fazendo $r = 0$ no teorema de Poincaré (teorema 2.5.12), obtém-se o resultado mais importante deste capítulo, este diz que o plano hiperbólico é o recobrimento universal de qualquer g -toro, $g > 1$.

No capítulo 3, apresentamos alguns tópicos referentes à teoria da informação e codificação, em seguida, estudamos tesselações regulares nos planos euclidiano e hiperbólico.

No capítulo 4, estudamos as propriedades de simetrias dos conjuntos de sinais geometricamente uniformes.

O tema central da dissertação encontra-se no capítulo 5, nele construímos constelações de sinais geometricamente uniformes obtidas da tesselação $\{8, 8\}$.

No capítulo 6 abordando o conceito de códigos geometricamente uniformes. Em particular, os códigos de classes laterais generalizado.

Capítulo 2

Grupos e Espaços Métricos

2.1 Revisão de Teoria dos Grupos

Definição 2.1.1. Um conjunto não vazio G , possui uma estrutura de grupo se existe uma operação binária,

$*$: $G \times G \rightarrow G$, denotada por: $(a * b) \rightarrow a * b$, satisfazendo os axiomas:

G_1 : $a * (b * c) = (a * b) * c$, para todos $a, b, c \in G$. (Associativa)

G_2 : Existe $e \in G$ tal que $a * e = e * a$, para todo $a \in G$. (Existência do elemento neutro)

G_3 : Se para cada elemento $a \in G$ podemos determinar um elemento $a' \in G$ tal que

$a * a' = a' * a = e$. (Existência do elemento inverso).

Se em um grupo $(G, *)$ ainda valer a propriedade adicional,

G_4 : Para todo $a, b \in G$, $a * b = b * a$, dizemos que G é um grupo **comutativo** ou **abeliano**.

Exemplo 2.1.1. O conjunto $MPSK = \{e^{\frac{2k\pi i}{M}} : k = 0, \dots, M - 1\}$ é um grupo com a operação de multiplicação de números complexos.

Iremos introduzir agora duas classes de grupo muito utilizadas no processo de modulação codificada.

O grupo \mathbb{Z}_n , das classes de restos **módulo n** , com a operação de soma módulo n . ($x * y$ é o resto da divisão da soma usual de $x + y$ por n). Como consequência temos que

$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$, para todo $n \geq 2$.

Analogamente, define-se a operação **produto módulo n** .

A outra classe importante de grupos, são os **grupos diedrais** que denotamos por D_M , com $M \geq 3$, também conhecidos como **grupo de simetrias** de polígonos regulares planos de M lados.

A operação em D_M é dada pela composição de funções. Seja r a rotação do polígono de $\frac{2\pi}{M}$ radianos em torno do eixo de simetria perpendicular ao plano poligonal, e s a reflexão em torno da mediana de qualquer aresta do polígono. Então os elementos de D_M são:

$$id, r, \dots, r^{M-1}, s, r \circ s, \dots, r^{M-1} \circ s$$

As simetrias r e s podem ser representadas na forma matricial por:

$$r = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{M} & -\sin \frac{2\pi}{M} \\ \sin \frac{2\pi}{M} & \cos \frac{2\pi}{M} \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{M} & \sin \frac{\pi}{M} \\ \sin \frac{\pi}{M} & -\cos \frac{\pi}{M} \end{pmatrix}$$

Definição 2.1.2. Seja $(G, *)$ um grupo. Um subconjunto H de G é um **subgrupo** de G , se H munido da mesma operação de G , forma um grupo. Denotamos o fato de H ser um subgrupo de G por $H \leq G$. Seja agora o subgrupo de G obtido da seguinte forma: dado $g \in G$, o conjunto $\langle g \rangle = \{ g^n : n \in \mathbb{Z} \}$ é um subgrupo de G , é chamado de **subgrupo cíclico** de G gerado por g . Podemos definir a **ordem** de um elemento $g \in G$, como sendo o número $|g| = |\langle g \rangle|$. Dessa forma, a ordem de g é finita se for finita a ordem de $\langle g \rangle$, caso contrário, dizemos que g tem ordem infinita.

Exemplo 2.1.2. $H = \langle r \rangle = \{id, r, r^{M-1}\}$ é um subgrupo cíclico de D_M e $|r| = M$.

Definição 2.1.3. Uma partição de um conjunto X é uma decomposição deste conjunto em subconjuntos X_i , tal que

- (i) $X_i \neq \emptyset$ para todo i
- (ii) $X_i \cap X_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$
- (iii) $\cup X_i = X$.

Seja X um conjunto e \mathfrak{R} um subconjunto do produto cartesiano $X \times X$. Em outras palavras, \mathfrak{R} é a coleção de pares ordenados (x, y) cujas coordenadas estão em X . Dados x e $y \in X$, dizemos que x está **relacionado** com y (e denotamos por $x\mathfrak{R}y$) se o par ordenado $(x, y) \in \mathfrak{R}$. Se ainda valer as seguintes propriedades:

- (a) Para todo $x \in X$, $x\mathfrak{R}x$. (reflexiva)
- (b) Se $x\mathfrak{R}y$ então $y\mathfrak{R}x$, $\forall x, y \in X$. (simétrica)
- (c) Se $x\mathfrak{R}y$ e $y\mathfrak{R}z$, então $x\mathfrak{R}z$. (transitiva).

Chamamos \mathfrak{R} uma **relação de equivalência** em X .

Para cada $x \in X$ a coleção de todos os pontos que estão relacionados com x é escrito por $\mathfrak{R}(x)$ e dito a classe de equivalência de x . Pode-se mostrar que $\mathfrak{R}(x) = \mathfrak{R}(y)$ sempre que $(x, y) \in \mathfrak{R}$.

Teorema 2.1.1. *As classes de equivalências distintas de uma relação de equivalência em X formam uma partição de X .*

Sejam H um subgrupo de G e $\mathfrak{R} = \{(x, y) \in G \times G : y^{-1}x \in H\}$. Pode-se mostrar que \mathfrak{R} é uma relação de equivalência em G .

A classe de equivalência de um particular elemento $g \in G$ consiste de todos aqueles $x \in G$ que satisfazem $g^{-1}x \in H$. Neste caso $g^{-1}x \in H$ se $x = gh$ para algum $h \in H$. Portanto, $\mathfrak{R}(g) = gH = \{gh : h \in H\}$. O conjunto gH é chamado **classe lateral à esquerda módulo H** . Agora, se $\mathfrak{R} = \{(x, y) \in G \times G : xy^{-1} \in H\}$, teremos novamente uma relação de equivalência em G . Neste caso a classe de equivalência de g é $\mathfrak{R}(g) = Hg = \{hg : h \in H\}$ denominada **classe lateral à direita módulo H** . Pelo Teorema 2.1.1, as classes laterais à esquerda e a direita de H em G constituem partições para G .

Observamos que em geral $g * H \neq H * g$. No caso em que valer $g * H = H * g$ para todo $g \in G$, dizemos que H é um **subgrupo normal** de G e indicamos por $H \triangleleft G$. Neste caso, o conjunto $\frac{G}{H} = \{g * H : g \in G\}$ munido da operação $(g * H) * (g' * H) := (g * g') * H$ é um grupo chamado **grupo quociente** de G pelo subgrupo normal H . Se ocorrer que o número de classes laterais à esquerda ou à direita forem finito e iguais, então este valor comum é chamado **índice de H em G** e indicamos por $[G : H]$. Segue que $\left| \frac{G}{H} \right| = [G : H]$.

Definição 2.1.4. Um elemento de G da forma $xyx^{-1}y^{-1}$ é denominado um **comutador** de G e o subgrupo gerado por todos os comutadores é o **subgrupo comutador** de G , denotado por $[G, G]$

Teorema 2.1.2. *Seja G um grupo. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(1) *O subgrupo comutador de G é normal*

(2) *O grupo quociente $G/[G, G]$ é abeliano*

(3) *Se H é um subgrupo normal de G no qual G/H é abeliano, então $[G, G] \subset H$.*

O subgrupo comutador é o menor subgrupo normal de G para o qual o correspondente grupo quociente é abeliano. Quando formamos o grupo quociente $G/[G, G]$, dizemos que **abelianizamos** G .

Em um grupo G , um subconjunto S de elementos com a propriedade que, todo elemento de G pode ser escrito como produto de elementos de S é chamado um **conjunto de geradores** de G . Denota-se isto por $G = \langle S \rangle$ e diz-se que G é **gerado** por S .

Definição 2.1.5. Uma aplicação, definida entre dois grupos $(G, *)$ e (G', \circ) , tal que $\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b), \forall a, b \in G$, é chamada de **homomorfismo** de G em G' . No caso do homomorfismo ser ainda bijetor, diremos que φ é um **isomorfismo** e os grupos G e G' isomorfos. Usamos a notação $G \simeq G'$ para denotar este último caso. Um **automorfismo** é um isomorfismo de um grupo $(G, *)$ nele mesmo, o qual indicamos por $\text{Aut}(G)$.

Teorema 2.1.3. *Se o índice $[G : H] = 2$, então H é um subgrupo normal de G e o grupo quociente G/H é isomorfo a \mathbb{Z}_2 .*

Vamos agora apresentar um exemplo envolvendo os conceitos mencionados acima. Considere o conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} sob a operação de adição usual. Claramente o conjunto $4\mathbb{Z}$ é um subgrupo (normal) de \mathbb{Z} .

$$0 + 4\mathbb{Z} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$

$$1 + 4\mathbb{Z} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

$$2 + 4\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$$

$$3 + 4\mathbb{Z} = \{-5, -1, 3, 7, 11, \dots\}.$$

Cada classe lateral de $4\mathbb{Z}$ em \mathbb{Z} pode ser representada escolhendo um de seus elementos, o qual denominamos representante da classe lateral. Neste exemplo os elementos $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ são os representantes das classes laterais $0 + 4\mathbb{Z}, 1 + 4\mathbb{Z}, 2 + 4\mathbb{Z}, 3 + 4\mathbb{Z}$ respectivamente.

O conjunto das classes laterais $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ forma um grupo isomorfo a \mathbb{Z}_4 , com operação definida pela tabela abaixo.

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Definição 2.1.6. Sejam X um conjunto não vazio e G um grupo. Uma **ação de G sobre X** é uma função $* : G \times X \rightarrow X$ satisfazendo:

- 1) $ex = x$,
- 2) $(g_1 g_2)(x) = g_1(g_2 x)$, para todo $x \in X$ e $g_1, g_2 \in G$.

2.2. Apresentação de Grupos

Considere um conjunto S cujos elementos são símbolos distintos $\{x_i\}_{i \in I}$. Com esses elementos podemos formar palavras, estas são expressas na forma:

$$W = x_1^{\xi(1)} x_2^{\xi(2)} \dots x_k^{\xi(k)},$$

com $x_i \in S$ e $\xi(i) = \pm 1$, ou seja, do conjunto $S = \{x_i^1, x_i^{-1}; i \in I\}$ com o qual formamos palavras. Com esta notação, dizemos que uma palavra é vazia se não

possui símbolo algum. Uma palavra é dita **reduzida** se não contém x^1 seguido por x^{-1} , ou x^{-1} seguido por x^1 para todo $x \in S$. Observe que cada palavra pode ser simplificada na forma reduzida, desde que eliminamos os pares semelhantes $x^{-1}x^1$ ou x^1x^{-1} sempre que ocorrer na palavra.

Usando justaposição de palavras reduzidas como regra de composição, e reduzindo a palavra resultante, se necessário (pois pode ocorrer que depois de feita a composição, a palavra não esteja mais na forma reduzida), isto torna o conjunto G das palavras reduzidas nos símbolos de S um grupo. A palavra vazia é o elemento identidade de G , e para cada palavra $W = x_1^{\xi(1)} x_2^{\xi(2)} \dots x_k^{\xi(k)} \in G$ sua inversa é a palavra

$$W^{-1} = x_k^{-\xi(k)} x_{k-1}^{-\xi(k-1)} \dots x_1^{-\xi(1)}.$$

Então G com esta operação é chamado **grupo livre gerado por S** . Se, além disso, S é finito com n elementos, dizemos que o grupo gerado por S é o **grupo livre com n geradores**.

Veremos agora uma forma mais conveniente de obter grupos livres, considerando classe de equivalências de palavras sobre uma apropriada relação de equivalência. Considere as seguintes operações nas palavras:

- (i) inserir xx^{-1} ou $x^{-1}x$ na palavra, com $x \in S$
- (ii) eliminar xx^{-1} ou $x^{-1}x$ na palavra, com $x \in S$.

Dizemos que duas palavras W e W' são equivalentes se, e somente se, W' pode ser obtida de W por um número finito de operações do tipo (i), (ii). É fácil ver que esta é uma relação de equivalência, e mais, o conjunto das classes de equivalência de palavras em S , com justaposição como regra de composição, forma o grupo livre formado por S , isto porque esta relação de equivalência reduz cada palavra W na sua forma reduzida. Logo o elemento identidade deste conjunto é a classe de equivalência da palavra vazia e a inversa da classe de equivalência da palavra reduzida W é a classe de equivalência da palavra inversa W^{-1} .

Suponhamos agora que R seja um conjunto de palavras em S . Podemos considerar as seguintes operações adicionais em S :

- (iii) inserir r ou r^{-1} na palavra, onde $r \in R$

(iv) eliminar r ou r^{-1} na palavra, onde $r \in R$

Então dizemos que as palavras W e W' são equivalentes se, e somente se, W' pode ser obtido de W por um número finito de operações dos tipos (i), (ii), (iii) e (iv). Novamente isto nos dá uma relação de equivalência e como já dissemos, o conjunto das classes de equivalências forma um grupo. Este grupo é chamado grupo com **apresentação** $(S;R)$ e denotado por $\langle S;R \rangle$. S é chamado **conjunto de geradores** e R **conjunto de relatores**. Às vezes é mais conveniente escrever os relatores R do grupo $\langle S;R \rangle$ como um conjunto de relações. Isto significa que o conjunto $\{r; r \in R\}$ é reescrito como $\{r = l; r \in R\}$.

Exemplo 2.2.1. A sequência $\langle r, s : r^m = s^2 = e, sr = r^{m-1}s \rangle$ é uma apresentação para o grupo diedral D_M .

Exemplo 2.2.2. O grupo $\langle \{x, y\}; \{xyx^{-1}y^{-1}\} \rangle$ é isomorfo ao grupo $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$. De fato, usando as operações (iii) e (i) acima, obtemos $xy = yx$, visto que

$$xy = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1}xy = yxy^{-1}x^{-1}xy = yxy^{-1}y = yx$$

Segue imediatamente desta propriedade que $x^a y^b = y^b x^a$ para quaisquer inteiros a, b . Logo toda palavra $g = x^{a(1)}y^{b(1)} \dots x^{a(k)}y^{b(k)}$ pode ser reescrita como $g = x^a y^b$, onde $a = \sum_{i=1}^k a(i)$ e $b = \sum_{i=1}^k b(i)$. Deste modo, definimos o isomorfismo

$$\Phi: \langle \{x, y\}; \{xyx^{-1}y^{-1}\} \rangle \rightarrow (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$$

Por

$$g = x^a y^b \mapsto \Phi(x^a y^b) = (a, b)$$

e disto segue o resultado.

Teorema 2.2.1.[12] (teorema de apresentação de Quocientes). Sejam G grupo com apresentação

$$G = \langle \{x_i\}_{i \in I}; \{r_j = 1\}_{j \in J} \rangle$$

e N o subgrupo normal de G gerado pelas palavras $\{S_k\}_{k \in K}$, então:

$$\frac{G}{N} = \langle \{x_i\}_{i \in I}; \{r_j = 1\}_{j \in J} \{S_k = 1\}_{k \in K} \rangle$$

Uma consequência imediata deste teorema é que todo grupo é quociente de algum grupo livre.

Teorema 2.2.2.[12] *Seja, $G = \langle a_1, \dots, a_n; r(a_1, \dots, a_n) = 1 \rangle$ então G tem um elemento ($\neq 1$) de ordem finita, se $r(a_1, \dots, a_n)$ é a k – ésima potência de alguma palavra do grupo livre nos $\{a_1, \dots, a_n\}$.*

Definição 2.2.1. Dados grupos H, J e um homomorfismo $\varphi: J \rightarrow \text{Aut}(H)$. Podemos construir um novo grupo $H \times_{\varphi} J$ clamado o **produto semidireto** de H e J determinado por φ , como segue. Seus elementos são pares ordenados (x, y) onde $x \in H, y \in J$, e multiplicação definida por:

$$(x, y)(x', y') = (x \cdot \varphi(y)(x'), y \cdot y').$$

Teorema 2.2.3. Se H, J são subgrupos de um grupo G satisfazendo

(i) $H \triangleleft G$

(ii) $HJ = G$

(iii) $H \cap J = \{e\}$.

Então G é isomorfo ao produto semidireto $H \times_{\varphi} J$, onde $\varphi: J \rightarrow \text{Aut}(H)$ é o homomorfismo definido por $\varphi(y)(x) = yxy^{-1}$ para todo $x \in H, y \in J$.

Se $f: G \rightarrow G'$ é um homomorfismo de grupos, dois subgrupos naturais de G e G' são respectivamente; $\ker f = \{g \in G : f(g) = e_{G'}\}$ e $\text{Im } f = \{f(g) : g \in G\}$. Pode-se mostrar que $\ker f \triangleleft G$. Dessa forma podemos enunciar o

Teorema 2.2.4. (teorema do homomorfismo) *Seja $f: G \rightarrow G'$ um homomorfismo, então,*

$$\frac{G}{\ker f} \cong \text{Im } f$$

A seguir apresentaremos alguns subgrupos importantes dos grupos das matrizes reais de ordem 2. Na seção 2.5 mostraremos a relação que existe entre alguns destes subgrupos com as transformações de Möbius e consequentemente com as isometrias do plano hiperbólico.

Consideremos o conjunto das matrizes reais de ordem 2

$$\mathbb{R}^{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

temos que $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, +)$ forma um grupo com a operação de adição de matrizes. O conjunto $GL(2, \mathbb{R})$ consistindo das matrizes $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que o determinante é não nulo

$$GL(2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : ad - bc \neq 0 \right\}$$

é um grupo $(GL(2, \mathbb{R}), \cdot)$, com a operação multiplicação de matrizes. Este grupo é chamado **grupo linear geral das matrizes** 2×2 sobre \mathbb{R} . Ainda com a mesma operação de $GL(2, \mathbb{R})$ temos o grupo

$$SL^*(2, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) : \det A = \pm 1\}$$

denominado o **grupo ortogonal**. Um subgrupo de $SL^*(2, \mathbb{R})$ é

$$SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$$

chamado o **grupo especial**.

A partir destes grupos obtemos os seguintes quocientes:

$$PS^*L(2, \mathbb{R}) = SL^*(2, \mathbb{R}) / \{\pm I\}$$

$$PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) / \{\pm I\}$$

2.3. Espaços Métricos.

Seja M um conjunto. Uma função $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

$$(d_1) \quad d(x, x) = 0$$

$$(d_2) \quad \text{Se } x \neq y \text{ então } d(x, y) > 0$$

$$(d_3) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(d_4) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ para todo } x, y, z \in M$$

é chamada uma **métrica** para M . O conjunto M munido de particular métrica é chamado **espaço métrico** e é denotado por (M, d) ou simplesmente por M .

Exemplo 2.3.1. O espaço \mathbb{R}^n junto com a métrica Euclidiana, $d(x, y) = \|x - y\| = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}$ é um espaço métrico.

Se X é um conjunto finito, é sempre possível definir uma métrica em M dada pela regra

$$\begin{cases} d(x, y) = 0 & \text{se } x = y \\ d(x, y) = 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

A métrica resultante é chamada a métrica discreta em X .

Definição 2.3.1. Uma **bola aberta** em M de centro a e raio $\varepsilon > 0$ é o conjunto, denotado por $B(a, \varepsilon)$, dos pontos $x \in M$ que distam de a menos que ε , isto é,

$$B(a, \varepsilon) = \{x \in M, d(x, a) < \varepsilon\}$$

Dizemos que um subconjunto U de M é **aberto** em M , se para todo $x \in U$ existe uma bola aberta $B(x, \varepsilon) \subset U$. Um subconjunto $V \subseteq M$ é chamado de **vizinhança** de $x \in V$, se existe um conjunto aberto U com $x \in U \subseteq V$.

Dado um subconjunto X de um espaço métrico M , dizemos que $x \in X$ é um ponto **interior** de X se existir $\varepsilon > 0$, tal que $B(x, \varepsilon) \subset X$. Denomina-se interior de X o conjunto X formado pelos pontos interiores de X .

Definição 2.3.2. Uma aplicação $f: M \rightarrow M'$ entre espaços métricos é chamada **contínua** se, para cada $x \in M$ e cada bola aberta $B(f(x), \varepsilon) \subseteq M'$, existe uma bola aberta $B(x, \delta) \subseteq M$ tal que $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$. Um **homeomorfismo** $f: M \rightarrow M'$ é uma bijeção contínua cuja inversa $f^{-1}: M' \rightarrow M$ é também contínua.

Definição 2.3.3. Um ponto $x \in M$ é dito **isolado** quando ele é uma bola aberta em M , ou seja, quando existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) = \{x\}$. Um espaço métrico chama-se **discreto**, quando todos os seus pontos são isolados.

Sejam M um espaço métrico e G um grupo de homeomorfismo de M . Para cada $x \in M$, definimos a **órbita** de x por G como o conjunto $Gx = \{g(x) : g \in G\}$. A multiplicidade de um elemento Gx é a ordem do **estabilizador** de x , ou seja, $|E_G(x)|$ sendo $E_G(x) = \{g \in G : g(x) = x\}$ (subgrupo que fixa x).

Definição 2.3.4. Sejam \tilde{M}, M espaços métricos. Uma aplicação $p : \tilde{M} \rightarrow M$ chama-se uma **aplicação de recobrimento** (ou simplesmente, um **recobrimento**) quando cada ponto $x \in M$ pertence a algum aberto $V \subset M$ tal que,

- $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ é uma reunião de abertos U_{α}
- se $U_{\alpha} \neq U_{\beta}$, então $U_{\alpha} \cap U_{\beta} = \emptyset$
- cada um dos U_{α} é aplicado homeomorficamente por p sobre V .

O espaço \tilde{M} é chamado um **espaço de recobrimento** de M .

Definição 2.3.5. Sejam $(M, d), (M', d')$ espaços métricos. Uma bijeção contínua $f : M \rightarrow M'$ é dita uma **isometria** se $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$.

Definição 2.3.6. Dado um subconjunto X de um espaço métrico M , definimos a **fronteira** de X , denotada por ∂X , ao conjunto formado pelos pontos $x \in X$ tais que toda bola $B(x, \varepsilon)$ contém pelo menos um ponto $x \in X$ e um ponto de $M - X$.

Exemplo 2.3.2. Sejam os conjuntos $\mathbb{H}^2 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ e $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, então, $\partial \mathbb{H}^2 = \mathbb{R}$ e $\partial \mathbb{D}^2 = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Definição 2.3.7. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M . Uma **cobertura** de X é uma coleção $\mathcal{C} = (C_{\lambda})_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de M tal que $X \subset (\bigcup_{\lambda \in L} C_{\lambda})$. Um espaço métrico chama-se **compacto** quando toda cobertura consistindo de conjuntos abertos possui uma subcobertura finita.

Definição 2.3.8. Seja X um conjunto \mathfrak{T} e uma coleção de subconjuntos de X . Dizemos que \mathfrak{T} é uma **topologia** de X e que o par (X, \mathfrak{T}) é um **espaço topológico**, se os seguintes axiomas forem satisfeitos:

(i) $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$

(ii) Se $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma família de membros de \mathfrak{T} então $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

(iii) Se $U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathfrak{T}$ então $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathfrak{T}$.

Os elementos $U \in \mathfrak{T}$ são chamados os conjuntos abertos do espaço topológico (X, \mathfrak{T}) .

Seja $I = [0, 1]$ o intervalo fechado unitário. Um **caminho** em um espaço topológico M é uma função contínua $f: I \rightarrow M$. No caso em que os extremos coincidem $f(0) = f(1)$, chamamos f de **caminho fechado**.

Se f_1, f_2 são caminhos em M com $f_1(1) = f_2(0)$ definimos o **produto** de f_1 e f_2 por:

$$(f_1 \cdot f_2)(t) = \begin{cases} f_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_2(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Para cada $x \in M$ definimos os caminhos $\epsilon_x: I \rightarrow M$ por $\epsilon_x(t) = x$ (caminho constante); se f_1 é um caminho em M , definimos o caminho inverso de f_1 por $f_1^{-1}(t) = f_1(1 - t)$.

Definição 2.3.9. Dois caminhos $f_1, f_2: I \rightarrow M$ entre espaços topológicos, são ditos **homotópicos** se existir uma aplicação contínua $f: I \times I \rightarrow M$ tal que

$$F(t, 0) = f_1(t) \quad \text{e} \quad F(t, 1) = f_2(t) \quad \text{para } t \in I.$$

A aplicação contínua F é chamada **homotopia** e os caminhos, f_1, f_2 , chamados homotópicos são denotados por $f_1 \cong f_2$. Pode-se mostrar que a relação \cong no conjunto dos caminhos é uma relação de equivalência.

Seja f_1 um caminho em M . Se $f_1(0) = f_1(1) = x$ dizemos que f é um caminho fechado com ponto base em x . Denotando por $[f_1]$ a classe de equivalência deste caminho, temos bem definido uma operação no quociente por, $[f_1] \cdot [f_2] = [f_1 \cdot f_2]$. O conjunto de todos esses caminhos munido desta operação forma um grupo chamado o **grupo fundamental** de M , com ponto base em x ,

denotado por $\pi(M, x)$. O elemento identidade de $\pi(M, x)$ é a classe de equivalência do caminho constante $[\epsilon_x]$ e, a inversa da classe $[f] \in \pi(M, x)$ é a classe de equivalência do caminho inverso de f , isto é, $[f^{-1}]$.

Definição 2.3.10. Uma **superfície** é um espaço topológico X com a propriedade que cada ponto $x \in X$ possui uma vizinhança aberta homeomorfa ao disco aberto $\overset{\circ}{D}_2 = \{x \in \mathbb{R}^2: \|x\| < 1\}$.

Uma **superfície compacta orientável** de gênero $g \geq 1$ é uma superfície construída da seguinte forma: Considere um polígono regular de $4g$ lados, marcados sequencialmente por $b_1 a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1} \dots b_g a_g b_g^{-1} a_g^{-1}$. Cada um dos lados é orientado por meio de uma seta, (ver figura abaixo para o caso $g = 2$). Percorrendo o contorno do polígono no sentido horário, marcamos as letras dos diferentes lados na sucessão. Se a seta aponta na mesma direção que estamos percorrendo, então escrevemos a letra sem expoente. Por outro lado, se a seta aponta na direção oposta, então escrevemos a letra para esse lado com o expoente -1. Assim obtemos uma palavra $w = b_1 a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1} \dots b_g a_g b_g^{-1} a_g^{-1}$, a qual representa um caminho fechado na superfície. Considerando, agora, a relação de equivalência que identifica (“cola”) os lados do polígono rotulados por x e x^{-1} coerentemente com a orientação das setas e mantém os outros pontos fixos, obtemos então a superfície, a qual é representada pela palavra w descrita anteriormente.

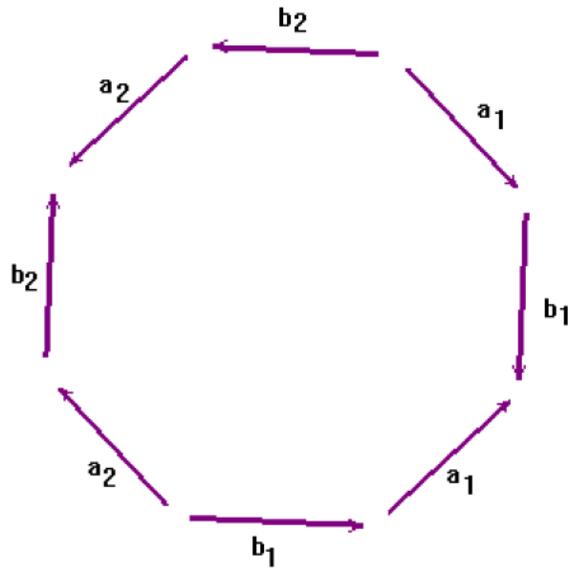


Figura 1 Identificação para $g = 2$

A figura abaixo mostra o aspecto da superfície.

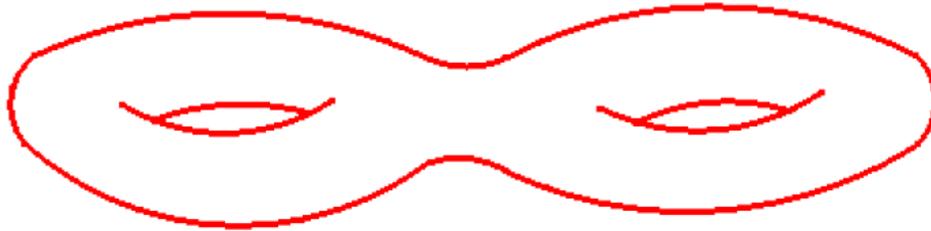


Figura 2 Bitoro

2.4. O Plano Hiperbólico

O estudo de tesselações hiperbólicas bem como os conjuntos de sinais geometricamente uniformes obtidos através destas tesselações, baseia-se nos modelos euclidianos de Poincaré para a geometria hiperbólica. A seguir faremos uma breve exposição destes modelos.

Seja $\mathbb{H}^2 = \{z = x + iy \in \mathbb{R}^2: Im(z) > 0\} \subset \mathbb{C}$ o semi plano superior. Definimos para $z, w \in \mathbb{H}^2$; $d_{\mathbb{H}^2}(z, w) = \log \frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|}$. O conjunto \mathbb{H}^2 com esta métrica constitui um espaço métrico $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$ chamado de **plano hiperbólico**. Este modelo é conhecido como **modelo de**

Lobachevski. Além deste modelo, há também outro, considerando o conjunto $\mathbb{B}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ com a função $d_{\mathbb{D}^2}(z, w) = \log \frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|}$, $z, w \in \mathbb{B}^2$, denominado modelo do **disco unitário de Poincaré**.

A geometria hiperbólica pode ser estudada com enfoque axiomático, admitindo a seguinte negação do 5º axioma de Euclides, para a geometria plana: Dados uma reta r e um ponto p não pertencente a r , existe mais de uma reta passando por p e que não encontra r .

As semi-retas euclidianas de \mathbb{H}^2 ortogonais a fronteira de \mathbb{H}^2 e os semi-círculos euclidianos de \mathbb{H}^2 com centro na fronteira de \mathbb{H}^2 são as retas de $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$.

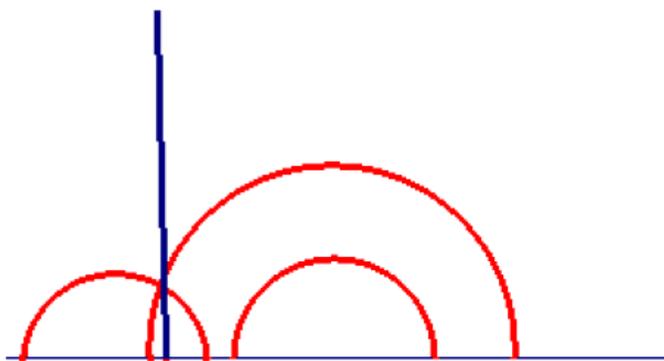


Figura 3 Retas no modelo do semiplano superior.

As retas do disco de Poincaré são dadas pelos diâmetros de \mathbb{B}^2 e arcos de circunferências euclidianas de \mathbb{B}^2 ortogonais a fronteira de \mathbb{B}^2

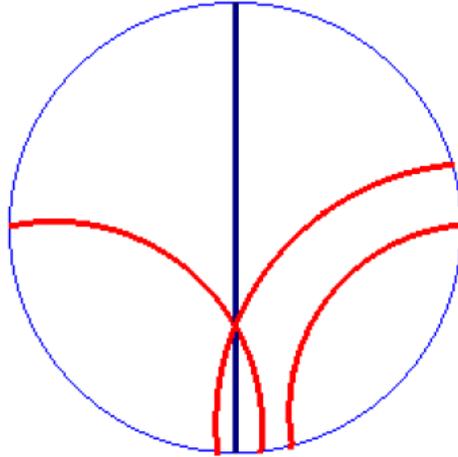


Figura 4 Retas no modelo do círculo unitário

Definição 2.4.1. O ângulo hiperbólico entre duas retas hiperbólicas que se encontram no ponto $z \in \mathbb{H}^2$, é o ângulo entre os seus vetores tangentes (como na geometria euclidiana) no ponto z .

Teorema 2.4.1.[2] (*Gaus-Bonnet*) Se \triangle é um triângulo hiperbólico com ângulos α, β, γ ; então

$$\text{área}(\triangle) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Como consequência deste teorema temos:

- 1) A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo hiperbólico é estritamente menor que π ;
- 2) A área hiperbólica de qualquer polígono em \mathbb{H}^2 é obtida através da decomposição deste polígono em triângulos.

A seguir vamos caracterizar as isometrias em \mathbb{H}^2 e \mathbb{B}^2 .

Chamamos de **transformações de Möbius** ao conjunto formado pelas transformações lineares fracionárias complexas do tipo $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc \neq 0$. Note que chamando $\Delta = ad - bc$ e fazendo

$$T(z) = \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}}\right)z + \frac{b}{\sqrt{\Delta}}}{\left(\frac{c}{\sqrt{\Delta}}\right)z + \frac{d}{\sqrt{\Delta}}} \text{ e } \frac{a}{\sqrt{\Delta}} \frac{d}{\sqrt{\Delta}} - \frac{b}{\sqrt{\Delta}} \frac{c}{\sqrt{\Delta}} = 1$$

podemos supor que $ad - bc = 1$. Logo, o conjunto de todas estas transformações munido da operação composição de funções forma um grupo que denotamos por \mathcal{M} . Associado a uma transformação de Möbius $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, existe um par de matrizes A e $-A$ do tipo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $\det(A) = 1$, ou seja, com A e $-A \in SL(2, \mathbb{R})$. Isto nos induz a definição de um homomorfismo (sobrejetor) entre os grupos $SL(2, \mathbb{R})$ e \mathcal{M} dado por:

$$\varphi: SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Como o $(\ker(\varphi) = \{\pm Id\})$, pelo teorema do homomorfismo, temos que $\mathcal{M} \simeq \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{\pm Id\}} = PSL(2, \mathbb{R})$, então podemos definir

$$PSL(2, \mathbb{R}) = \left\{ T(z) = \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}; ad - bc = 1 \right\}$$

O teorema seguinte identifica todas as isometrias do plano hiperbólico \mathbb{H}^2 .

Teorema 2.4.2. [2] *O conjunto de todas as isometrias do plano hiperbólico \mathbb{H}^2 denotado por $Iso(\mathbb{H}^2)$ é isomorfo ao grupo $PS^*L(2, \mathbb{R})$, isto é:*

$$Iso(\mathbb{H}^2) \simeq PS^*L(2, \mathbb{R}) = PSL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_2$$

O traço de uma matriz qualquer $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é definido por, $tr(A) = a + d$. Portanto, vale a afirmação $tr(-A) = -tr(A)$, e então, $tr^2(A) = tr^2(-A)$. Deste modo, dado $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in PSL(2, \mathbb{R})$ e sua correspondente matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, fica bem definida uma função

$$tr: PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \text{ por } tr(T) = |tr(A)| = |a + d|$$

O importante significado geométrico da função traço é que ela permite classificar as isometrias em \mathbb{H}^2 como sendo;

- elíptica se $tr(T) < 2$
- parabólicas se $tr(T) = 2$
- hiperbólicas se $tr(T) > 2$.

Observação 2.4.1. A aplicação $f(z) = \frac{zi+1}{z+i}$ é uma isometria entre os modelos \mathbb{H}^2 e \mathbb{B}^2 . Portanto todos os conceitos e resultados que citaremos nas secções subseqüentes, para umdos modelos, se estende naturalmente para o outro.

2.5. Grupos Discretos e Propriamente Descontínuos

Iniciamos este parágrafo introduzindo o conceito de grupos discretos de isometrias. Começamos com a estrutura de grupo topológico em $PS^*L(2, \mathbb{R})$. Uma norma em $PS^*L(2, \mathbb{R})$ é definida por:

Seja $T: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, tal que a cada $z \in \mathbb{H}^2$, $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, então

$$\|T\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

O grupo $PSL^*(2, \mathbb{R})$ com esta norma é um grupo topológico e a topologia é a induzida pela norma.

Definição 2.5.1. Um subgrupo Γ de $PSL^*(2, \mathbb{R})$ é **discreto**, se este é um subespaço topológico discreto de $PSL^*(2, \mathbb{R})$.

Observação 2.5.1. Dizer que Γ é discreto, significa valer a seguinte propriedade: se $T_n = id$ em Γ , então existe m tal que $T_n = id$ se $n > m$.

Definição 2.5.2. Um subgrupo discreto Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ é chamado de grupo **fuchsiano**.

Observação 2.5.2. Vamos considerar os **reticulados** em \mathbb{R}^n , os quais são grupos discretos de isometrias euclidianas que preservam orientação. Estes possuem a seguinte propriedade importante: sua ação em \mathbb{R}^n é **descontínua**, no sentido que cada ponto em \mathbb{R}^n possui uma vizinhança que é carregada para fora dela por qualquer elemento do reticulado, exceto a identidade. Em geral, os grupos discretos de isometrias não apresentam este comportamento descontínuo, visto que, se algum elemento do grupo possui ponto fixo, este ponto não possuirá tal vizinhança. Entretanto eles satisfazem uma condição um pouco enfraquecida de descontinuidade. Veja definição abaixo.

Definição 2.5.3. Dizemos que um grupo G de homeomorfismo de um espaço métrico M é **propriamente descontínuo**, quando para todo ponto $x \in M$, existe uma vizinhança $V(x)$ tal que, para qualquer $g \in G - \{id\}$, tem-se $g(V(x)) \cap V(x) = \emptyset$ somente para um número finito de $g \in G$.

Teorema 2.5.1. [8] *Seja Γ um subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$, então Γ é um grupo fuchsiano se, e somente se, a ação de Γ sobre \mathbb{H}^2 é propriamente descontínua.*

Observação 2.5.3. Duas consequências do teorema 2.5.1, são:

- (i) A ação de Γ é propriamente descontínua em \mathbb{H}^2 , se e somente se, para todo $z \in \mathbb{H}^2$, $\Gamma \cdot z$, a Γ – órbita de z , é um subconjunto discreto de \mathbb{H}^2 ;
- (ii) Todos os pontos fixos de elementos elípticos de Γ não fazem acúmulo em \mathbb{H}^2 .

Observação 2.5.4. Consideremos G um grupo de homeomorfismo de M , $\frac{M}{G}$ o espaço quociente de M pela relação de equivalência cujas classes são as órbitas $G \cdot x, x \in M$ e $p: M \rightarrow \frac{M}{G}$ a aplicação que associa a cada ponto $x \in M$ sua órbita $p(x)$. Nestas condições, se a ação de G for livre e propriamente descontínua, então a aplicação $p: M \rightarrow \frac{M}{G}$ é uma aplicação de recobrimento.

Teorema 2.5.2. [8] *Seja $T \in PSL(2, \mathbb{R})$.*

- *Se T é parabólica ou hiperbólica, então $\langle T \rangle$ é fuchsiano*
- *Se T é elíptica e $\langle T \rangle$ é finito, então $\langle T \rangle$ é fuchsiano.*

O próximo teorema mostra que todo grupo fuchsiano abeliano deve ser cíclico.

Teorema 2.5.3. [8] *Cada grupo fuchsiano abeliano é cíclico.*

Observação 2.5.5. O teorema 2.5.3 garante que não existe grupo fuchsiano isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Neste trabalho estaremos interessados nas regiões fundamentais dos grupos fuchsianos. Entretanto começaremos com uma definição na situação mais geral.

Definição 2.5.4. Seja X um espaço métrico, G um grupo de homeomorfismo atuando de modo propriamente descontínuo em X . Uma região fechada $F \subseteq X$ é uma região fundamental de G se:

- (i) $\bigcup_{T \in G} T(F) = X$
- (ii) $\overset{\circ}{F} \cap T(\overset{\circ}{F}) = \emptyset$ para todo $T \in G - \{id\}$
- (iii) $\{T(F) : T \in G\}$ é a tesselação de X .

Definição 2.5.5. Uma família $\{M_\alpha / \alpha \in A\}$ de subconjuntos de X indexada por elementos de um conjunto A é **chamada localmente** finita se para qualquer subconjunto compacto $K \subset X$, tivermos $M_\alpha \cap K \neq \emptyset$ somente para um número finito $\alpha \in A$.

Teorema 2.5.4. [8] *Sejam Γ um grupo discreto de isometrias de \mathbb{H}^2 , e A um subgrupo de Γ de índice finito n . Se $\Gamma = T_1A \cup \dots \cup T_nA$ é a decomposição de Γ em classes laterais e F a região fundamental de Γ , então:*

- $F_1 = T_1(F) \cup \dots \cup T_n(F)$ é a região fundamental de A
- se $\text{área}(F) < \infty$ e $\text{área } \partial F = 0$, então $\text{área}(F_1) = n \text{área}(F)$.

Teorema 2.5.5. [8] *Sejam F_1 e F_2 regiões fundamentais de um grupo fuchsiano Γ , tal que*

$$\text{área}(F_1) < \infty \text{ e } \text{área } \partial(F_1) = \partial(F_2) = 0, \text{ então } \text{área}(F_1) = \text{área}(F_2).$$

Este último teorema estabelece um resultado muito importante: a área de uma região fundamental de um grupo fuchsiano, quando finita, é um número invariante do grupo.

Mais adiante, estaremos restringindo nosso estudo a grupos fuchsianos que possuem regiões fundamentais de área hiperbólica finita e com um número finito de lados.

Definição 2.5.6. Sejam Γ um grupo fuchsiano e $p \in \mathbb{H}^2$ um elemento qualquer não fixado por nenhum elemento de $\Gamma - \{id\}$; chamamos de **região de Dirichlet** de Γ centrada em p , o conjunto:

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 : d(z, p) \leq d(z, T(p)) \text{ para todo } T \in \Gamma\}.$$

Pode-se mostrar que toda região de Dirichlet de um grupo fuchsiano em um ponto $p \in \mathbb{H}^2$ não fixado por nenhum elemento de $\Gamma - \{id\}$ é uma região fundamental na forma de um polígono convexo.

Chamamos dois pontos $u, v \in \mathbb{H}^2$ de congruentes se eles pertencem à mesma Γ -órbita. Esta é uma relação de equivalência e é claro, dois pontos congruentes na região fundamental F devem estar contidos em sua fronteira. A restrição da relação de congruência tanto ao conjunto dos vértices como ao conjunto das arestas de uma região de Dirichlet também define uma relação de equivalência. Começemos estudando as classes de equivalências de vértices de uma região de Dirichlet $D_p(\Gamma)$. A essas classes chamamos de **ciclos** e definimos por: $C = \{T(x) : T \in \Gamma \text{ e } x \text{ e } T(x) \text{ são vértices de } D_p(\Gamma)\}$.

Se u é fixado por um elemento elíptico S , então $v = T(u)$ é fixado pelo elemento elíptico TST^{-1} . Assim, se um vértice do ciclo é fixado por um elemento elíptico, teremos todos os outros vértices do ciclo fixados por elementos elípticos conjugado. Chamamos tal ciclo de **ciclo elíptico** e os vértices de vértices elípticos. O número de ciclos elípticos é igual ao número de vértices elípticos não-congruentes em $F = D_p(\Gamma)$.

Desde que a região de Dirichlet é uma região fundamental, cada ponto $w \in \mathbb{H}^2$ fixado por um elemento elíptico S' pertence à fronteira de $T(F)$ para algum $T \in \Gamma$. Portanto, $u = T^{-1}(w)$ esta na fronteira de F e é fixado pelo elemento elíptico $S = T^{-1}S'T$. Como dito anteriormente, os elementos elípticos tem ordem finita, digamos k . A seguir faremos uma análise para os possíveis valores assumidos por k ;

1) suponhamos primeiramente que S tem ordem $k \geq 3$, então como S é uma isometria que fixa u e mapeia geodésica em geodésica, u deve ter um vértice cujo ângulo θ atinge no máximo a

medida $2\pi/k$ e sendo F limitada por uniões de geodésicas, a intersecção de F com essas geodésicas ou é um simples ponto ou um segmento de geodésicas (ver figura 5);

2) se S tem ordem $k = 2$, seus pontos fixos devem estar no interior de um lado de F , e neste caso, S permuta os dois segmentos deste lado separados pelo ponto fixo. Considerando estes pontos fixos como vértices de F , o ângulo nesses vértices possui medida π (ver figura 5).

O resultado seguinte relaciona a soma dos ângulos de vértices elípticos pertencente a um ciclo com a ordem deste ciclo.

Teorema 2.5.7. [8] *Sejam $D_p(\Gamma)$ uma região de Dirichlet para Γ , v_1, v_2, \dots, v_r vértices de um ciclo e $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ os ângulos internos nos respectivos vértices. Então, denotando por m a ordem do estabilizador em Γ de um dos vértices do ciclo, temos que $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_r = \frac{2\pi}{m}$.*

Observação 2.5.6.

i) Como os estabilizadores de dois pontos em um conjunto congruente são subgrupos conjugados de Γ , estes possuem a mesma ordem.

ii) Se nenhum vértice é ponto fixo, temos $m = 1$ e $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_r = 2\pi$.

Vamos considerar agora congruência de arestas. Dizemos que duas arestas a_1, a_2 de uma região de Dirichlet F são **congruentes** ou **emparelhadas**, se existe $T - \{id\} \in \Gamma$, tal que $a_2 = T(a_1)$. Se uma aresta de F possui um ponto fixo de um elemento elíptico S de ordem 2, então S permuta os dois segmentos desta aresta e podemos então considerar estes dois segmentos como arestas distintas de F separadas por um ponto fixo. Segue desta convenção e do teorema abaixo que se F possui um número finito de arestas, este é necessariamente um número par.

Teorema 2.5.8. [8] *Cada classe de equivalência de arestas de uma região de Dirichlet possui dois elementos.*

Teorema 2.5.9. [8] *Seja $\{T_i\}$ o conjunto de Γ consistindo daqueles elementos que emparelham as arestas de $D_p(\Gamma)$. Então $\{T_i\}$ é um conjunto de geradores para Γ .*

Teorema 2.5.10.[8]

1 . Se um grupo fuchsiano Γ possui região de Dirichlet compacta, então Γ não contém elementos parabólicos.

2 . Se Γ possui uma região de Dirichlet não-compacta então o espaço quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ não é compacto.

3 . Se uma região de Dirichlet $F = D_p(\Gamma)$ para um grupo fuchsiano Γ possui área hiperbólica finita, mas não compacta, então esta possui pelo menos um vértice no infinito.

Teorema 2.5.11. [2] O espaço quociente de um grupo fuchsiano $\Gamma, \mathbb{H}^2/\Gamma$ é compacto, se e somente se, qualquer região de Dirichlet para Γ é compacta.

Seja Γ grupo Fuchsiano com região de Dirichlet $D_p(\Gamma)$ compacta. Vimos que se $D_p(\Gamma)$ possui vértices que são pontos fixos por elementos elípticos este número é finito. Considere m_1, \dots, m_r as correspondentes ordens dos elementos elípticos e g o gênero da superfície compacta $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$. O conjunto ordenado $(g; m_1, \dots, m_r)$ é chamado **assinatura de Γ** .

O próximo teorema é central para nossos propósitos.

Teorema 2.5.12. [8] (Poincaré) Sejam $g \geq 0; r \geq 0, m_i \geq 0, (1 \geq i \geq r)$ números inteiros tais que:

$$(2g - 2) + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 0$$

Então existe um grupo fuchsiano Γ cujo espaço das órbitas H^2/Γ é uma superfície compacta orientável com assinatura $(g; m_1, \dots, m_r)$.

A figura 5 mostra a representação plana de uma tal superfície \mathbb{H}^2/Γ . Nela temos considerado $g = 2, r = 4, m_i > 2$ para $i = 1, 2, 3$ e $m_4 = 2$. Neste caso a região de Dirichlet é um polígono N semelhante a uma estrela com $4g + 2$ lados, obtido considerando o modelo do disco unitário \mathbb{B}^2 para a geometria hiperbólica. Do centro de \mathbb{B}^2 tiramos $(4g + r)$ raios de igual ângulo e escolhemos pontos com distância Euclidiana t do centro em cada raio, onde $0 < t < 1$. Unindo

esses pontos por geodésicas obtemos um polígono hiperbólico regular P . Nos primeiros r lados de P construímos r triângulos hiperbólico isósceles tal que os ângulos entre os lados iguais dos triângulos são respectivamente $2\pi/m_1, \dots, 2\pi/m_r$ (como $m_4 = 2$ o correspondente triângulo é degenerado). Notamos que por construção os lados a_i e a'_i tem o mesmo comprimento hiperbólico como também os lados b_j e b'_j e c_k e c'_k . Conforme [8], existem isometrias hiperbólicas que preservam orientação A_i, B_j , e elípticas X_k ($i, j = 1, \dots, g; k = 1, \dots, r$) tal que

$$A_i(a'_i) = a_i, \quad B_j(b'_j) = b_j, \quad X_k(c'_k) = c_k$$

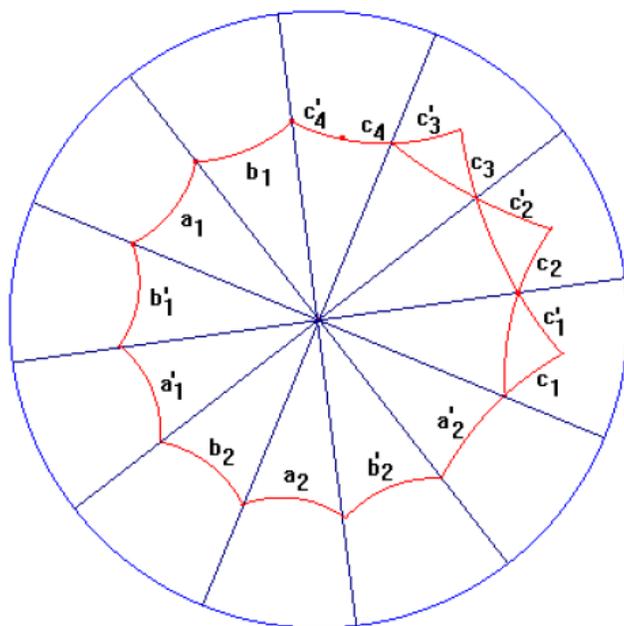


Figura 5 Representação planar de uma superfície \mathbb{H}^2/Γ com $g = 2$ e $r = 4$.

Seja Γ o grupo fuchsiano gerado pelas isometrias A_i, B_j, X_k descritas acima. Observa-se que as Γ – imagens de N tessela \mathbb{B}^2 e N é uma região fundamental para Γ .

Se Γ é um grupo fuchsiano que não possui elemento elíptico, então a ação de Γ em \mathbb{H}^2 é livre, ou seja, a projeção $P: \mathbb{H}^2 \rightarrow \frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ é uma aplicação de recobrimento. Neste caso, no teorema acima vamos ter $r = 0$ e disto segue o resultado mais importante para nossos propósitos.

Teorema 2.5.13. [8] *Para todo inteiro $g > 1$, existe um grupo fuchsiano atuando em \mathbb{H}^2 sem pontos fixos tal que a superfície $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ tem genero g .*

Em outras palavras, o teorema 2.5.13 garante que toda superfície compacta de gênero $g \geq 2$ pode ser modelada pelo plano hiperbólico. De fato, temos $2g - 2 > 0$, logo, existe grupo fuchsiano Γ com assinatura $(g; -)$. Como Γ não possui elementos elípticos, temos que a aplicação $p : \mathbb{H}^2 \rightarrow \frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ é de recobrimento. Logo $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ é superfície de gênero g e $\pi \left(\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma} \right) \simeq \Gamma$. Devemos deixar claro que é neste ambiente que as constelações de sinais obtidas neste trabalho (capítulo 5) serão construídas. Neste caso as regiões de Dirichet F serão sempre polígonos de $4g$ - lados, com $g > 1$ e as superfícies resultantes do espaço quociente $\frac{F}{\Gamma}$ Serão sempre g -toros. Da tesselação de \mathbb{H}^2 , por $\{T(F) : T \in \Gamma\}$ obtemos constelações de sinais cujos pontos de sinais são os centros dos polígonos dos $4g$ -lados.

A figura 2 mostra a representação planar da superfície do bitoro, obtida pelo espaço quociente de um grupo fuchsiano Γ de assinatura $(2, -)$ que conforme [8], é gerado pelas isometrias hiperbólicas B_1, A_1, B_2, A_2 descrita abaixo.

$$B_1 = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(2 + \sqrt{2}) & -\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}(\sqrt{2} + 2i + i\sqrt{2}) \\ \frac{1}{2}\sqrt[4]{2}(-\sqrt{2} + 2i + i\sqrt{2}) & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)(2 + \sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)(2 + \sqrt{2}) & -\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}(-\sqrt{2} + 2i + i\sqrt{2}) \\ \frac{1}{2}\sqrt[4]{2}(\sqrt{2} + 2i + i\sqrt{2}) & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(2 + \sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(2 + \sqrt{2}) & \frac{1}{2}\sqrt[4]{2}(\sqrt{2} + 2i + i\sqrt{2}) \\ -\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}(-\sqrt{2} + 2i + i\sqrt{2}) & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)(2 + \sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)(2 + \sqrt{2}) & \frac{1}{2}\sqrt[4]{2}(-\sqrt{2} + 2i + i\sqrt{2}) \\ -\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}(\sqrt{2} + 2i + i\sqrt{2}) & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(2 + \sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

Capítulo 3

Noções de Teoria da Informação e Codificação. Tesselações Regulares.

Os sistemas de comunicações digitais atualmente existentes surgiram da demanda ocorrida por transmissão de dados confiável em alta velocidade.

Em vista dos canais de comunicações serem geralmente limitados em faixa e os sinais corrompidos pela ação de ruídos, a obtenção no receptor de uma réplica da mensagem enviada é, em geral difícil de ser conseguida. Portanto, existe uma grande necessidade de se elaborar esquemas de codificação que permitam minimizar ou corrigir erros provenientes de canais ruidosos. O marco inicial nesta direção veio com o teorema da capacidade de canal de Claude Shannon, mostrando que a diminuição da probabilidade de erro fica dependente apenas do esquema de codificação/decodificação do canal. A partir deste resultado, intensificou a pesquisa em busca de apropriados esquemas de codificação/decodificação de canal. Atualmente usa-se a concepção moderna de codificação combinada com modulação.

Neste capítulo abordaremos alguns tópicos sobre teoria da informação e codificação. Estudaremos tesselações regulares no plano hiperbólico e grafo de Cayley de um grupo G .

3.1 Tópicos de Teoria da Informação e Codificação

Um sistema de comunicações digital pode ser resumido no seguinte diagrama:

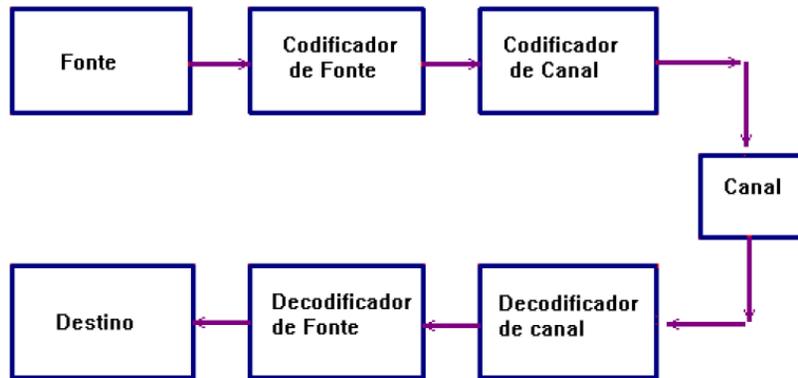


Figura 6 Sistema de comunicação digital

A seguir faremos um breve comentário sobre cada um dos componentes deste sistema de comunicação.

- **Fonte:** gerador da informação a ser transmitida (ser humano ou máquina). Pode gerar um sinal contínuo ou uma sequência de símbolos discretos.
- **Codificador de Fonte:** Este codificador converte as sequências na saída da fonte em sequências chamadas palavras-código de fonte. O objetivo desta codificação é reduzir a redundância da fonte, isto é, utilizar o menor número possível de dígitos por unidade de tempo para representar a saída da fonte e de tal forma a garantir a eficiência da transmissão.
- **Codificação de Canal:** introduz uma redundância controlada na palavra código fonte transformando-a em uma sequência chamada palavra-código de canal. Esta redundância tem por finalidade proteger a informação de interferências e ruídos no canal.
- **Canal:** meio físico que fornece a conexão entre a fonte e o destinatário.
- **Decodificação de Canal:** recebe o sinal do canal e faz uma estimativa deste sinal. Este tentará recuperar a sequência de informação, corrigindo erros (se houver) no sinal recebido.
- **Decodificação de Fonte:** transforma a sequência estimada na saída do decodificador de canal em uma estimativa na saída da fonte a qual é enviada ao destinatário.

Cada sinal é uma função $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na variável $t \in I$, onde $I = [0, T]$ para algum $T \in \mathbb{R}$. T a duração do sinal em segundos. Desta forma, podemos supor que no canal transitam

sequências de vetores que são somadas com outras sequências correspondentes do ruído. Existem dois modelos ideais para canais:

1) O canal discreto sem memória; onde destacamos pelas suas aplicações o canal binário discreto sem memória (BSC) e 2) O canal contínuo; com destaque para o canal gaussiano branco aditivo (AWGN).

No caso de canais AWGN, se o sinal a ser transmitido é $f(t)$, o sinal recebido é $f(t) + n(t)$, sendo $n(t)$ uma amostra do processo gaussiano com variância σ^2 . Seja $f \in \mathbb{R}^n$ um sinal com faixa W e duração T segundos, então a taxa de transmissão é dada por

$$R = \frac{1}{T} \log_2 M \text{ bits/seg}$$

onde M denota a quantidade de sinais a serem transmitidos.

Agora, denotando por P a potência média do sinal, a qual é dada pela expressão $P = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt$ e $C = W \log_2 \left[1 + \left(\frac{P}{\sigma^2} \right) \right]$, a capacidade do canal, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.1.[6] *(teorema da Capacidade de Canal AWGN ou 3º o teorema de Shannon).* Para cada taxa $R < C$, fazendo T suficientemente grande, existe um código de taxa R cuja probabilidade de erro é arbitrariamente pequena.

A definição a seguir é suficientemente geral para englobar os diferentes casos de códigos, inclusive o caso em que os sinais estão contidos no espaço hiperbólico.

Definição 3.1. Dados os conjuntos \mathcal{A} e I , um **código sobre \mathcal{A}** é um conjunto não vazio $C \subseteq \mathcal{A}^I$, (geralmente, $\mathcal{A} = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathbb{H}^2, \mathcal{A} = \mathbb{F}_q$). Chamamos \mathcal{A} de **alfabeto do código** e os elementos de C são chamados palavras-código. O conjunto I é suposto um conjunto enumerável. Com isso, dizemos que C é um código de bloco ou um código convolucional (de treliça), conforme I seja finito ou infinito.

A seguir faremos um breve comentário sobre cada um desses códigos:

1) Códigos de bloco: é um subespaço de \mathbb{F}_q^n , ou seja, um conjunto não vazio de n -uplas sobre \mathbb{F}_q , chamadas palavras-código. Cada sequência $u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ik})$ de comprimento k na saída

da fonte está associada bijectivamente a uma sequência $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$ de comprimento n , palavra-código. Estaremos impondo às palavras-código $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$ a condição $k < n$, para que haja inserção de redundâncias. Assim, um código de bloco é caracterizado por possuir taxa $R = \frac{k}{n}$ ou parâmetros (n, k) .

2) Códigos Convolucionais: são caracterizados pelos parâmetros (n, k, m) , significando que uma sequência de k bits que entra no codificador é codificada em uma sequência de n bits. Neste caso, a sequência de entrada é suposta ter comprimento infinito enumerável, as quais são divididas em blocos de comprimento k . O que diferencia esta classe de códigos da classe dos códigos de blocos é a memória. Esta é caracterizada da seguinte forma: uma sequência de comprimento n resultante da codificação de uma sequência de comprimento k depende deste último e dos m blocos de k dígitos armazenados no codificador. Assim, como os códigos de bloco, os códigos convolucionais possuem taxa $R = \frac{k}{n}$, e $n > k$. A figura 7 ilustra um codificador convolucional binário com $k = 1$, $n = 2$ e $m = 2$.

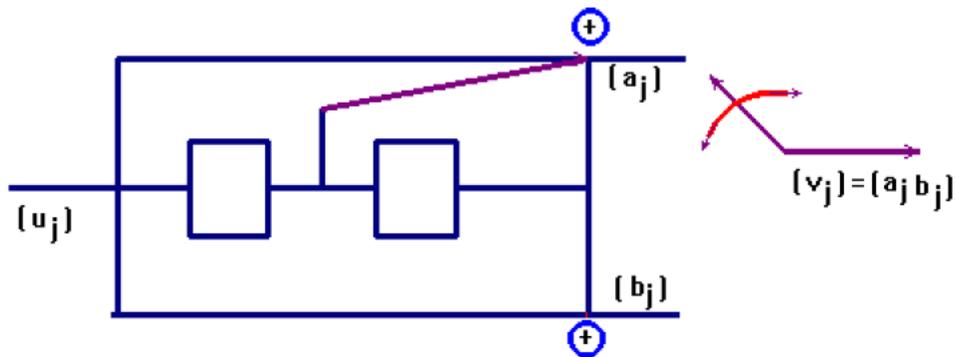


Figura 7 Codificador convolucional binário com taxa $R = \frac{1}{2}$

Neste codificador a sequência 1001..., por exemplo é codificada na sequência 11 10 11 11 A decodificação é feita pelo algoritmo de Viterbi.

3.2. Tesselações Planares

Nesta seção estaremos abordando o conceito de tesselação regular no plano hiperbólico, e mostrando a riqueza deste plano quanto ao número de tesselações regulares existente.

Definição 3.2.1. Uma **tesselação regular** no plano euclidiano (hiperbólico) é uma partição deste plano por polígonos regulares não sobrepostos, todos congruentes, sujeitos a restrição de se interceptarem somente em suas arestas ou vértices, e de modo a terem o mesmo número de polígonos partilhando um mesmo vértice, independente do vértice. Um tesselação regular em que q p -ágonos regulares se encontram em cada vértice é denotada por $\{p, q\}$. No caso onde $p = q$ a tesselação $\{p, p\}$ é chamada **auto-dual**.

Poderíamos perguntar quantas tesselações existem em cada uma das geometrias em consideração (euclidiana e hiperbólica). Para responder a esta pergunta, consideremos uma tesselação $\{p, q\}$ primeiramente no plano euclidiano. Seja O o centro de um p -ágono e \overline{AB} uma de suas arestas, como mostra a figura 8. O ângulo interior do encontro de q p - ágonos em um vértice mede $\frac{2\pi}{q}$. Da figura 9 concluímos que o ângulo $A\hat{O}B$ mede $\frac{2\pi}{p}$ e sendo $\frac{\pi}{q} = O\hat{A}B = O\hat{B}A$, temos então

$$\frac{2\pi}{p} + \frac{2\pi}{q} = \pi \Rightarrow (p - 2)(q - 2) = 4.$$

Desta última equação, apenas três soluções são possíveis, logo existem justamente três tesselações regulares no plano euclidiano; a saber: $\{4, 4\}$, $\{6, 3\}$, $\{3, 6\}$.

Considere agora uma tesselação $\{p, q\}$ no plano hiperbólico. Como neste plano a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor que π ; devemos ter

$$\frac{2\pi}{p} + \frac{2\pi}{q} < \pi \Rightarrow (p - 2)(q - 2) > 4$$

Esta inequação possui infinitas soluções, portanto existem infinitas tesselações regulares no plano hiperbólico.

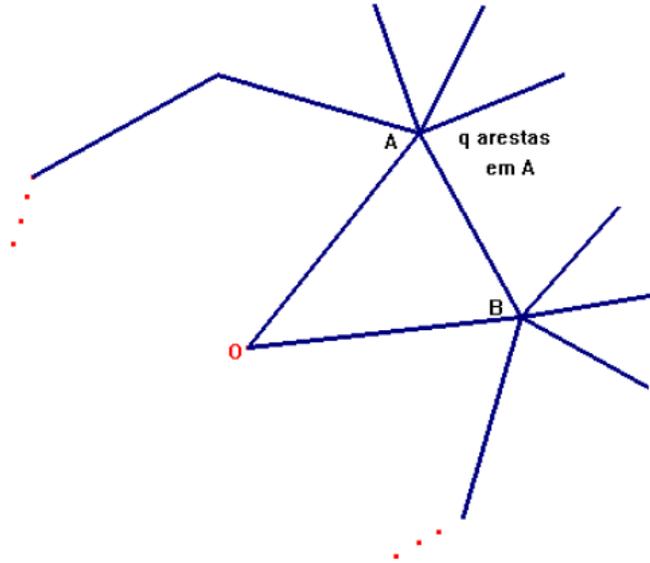


Figura 8 Determinação das possíveis tesselações nas geometrias euclidiana e hiperbólica.

Associado a cada tesselação hiperbólica $\{p, q\}$ existe um grupo $[p, q]$ denominado o **grupo completo de simetrias de $\{p, q\}$** . Este é um subgrupo do grupo de todas as isometrias do plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , gerado pelas reflexões em torno de todas as retas (hiperbólicas) que deixam $\{p, q\}$ invariante. Por [2] $[p, q]$ é gerado pelas reflexões R_1, R_2 e R_3 nos lados do triângulo hiperbólico \triangle com ângulos internos $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}$, como mostrado na figura 9. A apresentação deste grupo é

$$\langle R_0, R_2, R_3 : R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_2 R_1)^p = (R_3 R_2)^q = (R_1 R_3)^2 = e \rangle$$

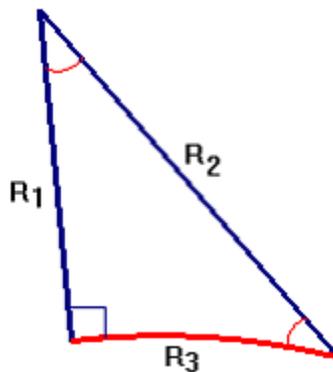


Figura 9 Reflexões geradoras

No capítulo 5 estaremos extraindo constelações de sinais para uso em sistemas de comunicações das tesselações regulares no plano hiperbólico. Para tanto, vamos precisar do conceito de tesselação dual. Começamos estudando o grafo de Cayley de um grupo G .

Seja G um grupo gerado por elementos a_1, a_2, a_3, \dots . Cada elemento distinto g_i do grupo é considerado um vértice do grafo de Cayley. O vértice g_i é conectado por uma aresta a um vértice g_k se, e somente se, $g_k = a_j g_i$ para algum gerador a_j . Rotulamos a aresta de conexão entre os vértices g_k e g_i pelo mesmo símbolo do gerador a_j . A figura 10 ilustra este conceito.

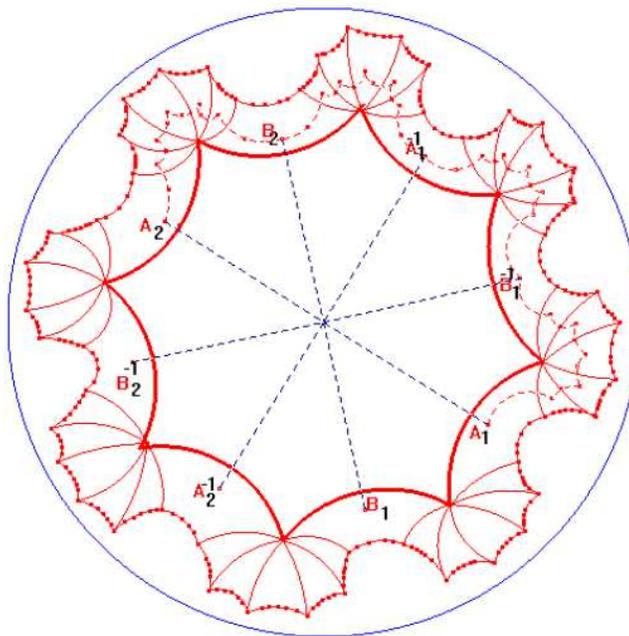


Figura 10 Tesselação dual mostrada em linhas tracejadas.

Sobreponemos na figura 10 o grafo de Cayley para o grupo fuchsiano $\Gamma = \langle A_1, B_1, A_2, B_2 \rangle$ de assinatura $(2, -)$ como descrito no final do capítulo 2. Isto resulta em um grafo de Cayley, o qual, descreve a tesselação dual. Neste caso a tesselação dual tem a mesma forma da original.

Capítulo 4

Conjuntos de Sinais Geometricamente Uniformes

Muitos dos conjuntos de sinais utilizados em sistemas de comunicações são obtidos a partir das tesselações euclidianas (reticulados). Estes são subconjuntos discretos do espaço euclidiano. O conhecimento do número infinito de tesselações existentes no plano hiperbólico possibilitou a escolha de infinitos conjuntos de sinais hiperbólicos. Desde então, esforços estão sendo despendidos com o objetivo de obter constelação de sinais que resultem num bom desempenho para sistemas de comunicações. No caso euclidiano os conjuntos de sinais que se mostraram eficazes neste sentido, são aqueles em que existe uma ação transitiva de um grupo no conjunto de sinais. Este tipo de conjunto de sinais foi introduzido por Forney em [5] no contexto euclidiano, e recebeu o nome de conjunto de sinais geometricamente uniforme. Lazari em [10] estendeu este conceito ao plano hiperbólico, construindo conjunto de sinais geometricamente uniformes, onde os pontos de sinais considerados são os vértices da tesselação dual.

Neste capítulo estaremos apresentando exemplos de conjuntos de sinais geometricamente uniformes tanto no plano euclidiano como no hiperbólico e mostrando as propriedades importantes de simetrias que estes conjuntos possuem.

4.1 Introdução aos Conjuntos de Sinais Geometricamente Uniformes

Definição 4.1.1. Um **conjunto de sinais** S é um subconjunto discreto de um espaço E que pode ser tanto euclidiano como hiperbólico. Um subconjunto finito de pontos de sinais é chamado uma **constelação de sinais**.

Como mencionado, os conjuntos de sinais de interesse são aqueles em que existe uma ação transitiva de um grupo no conjunto de sinais. Para isto, consideremos a seguinte definição.

Definição 4.1.2. Um conjunto de sinais S é **geometricamente uniforme** se para quaisquer pontos s e $s' \in S$, existe $u \in \Gamma(S)$ tal que;

$$u_{s,s'}(s) = s' \quad e \quad u_{s,s'}(S) = S$$

Equivalentemente, S é geometricamente uniforme se a ação de seu grupo de simetrias $\Gamma(S)$ é transitiva; ou se a órbita de qualquer ponto $s_0 \in S$ por $\Gamma(S)$ é S . Chamamos de **constelação uniforme** ao conjunto de sinais geometricamente uniforme finito e **arranjo regular** ao conjunto de sinais geometricamente uniforme infinito.

Como veremos através dos exemplos apresentados a seguir, os grupos de simetrias de muitos conjuntos de sinais geometricamente uniformes possuem mais elementos do que o necessário. Para isto, vamos considerar o menor grupo que gera S . Veremos também, que muitos conjuntos de sinais possuem mais que um grupo gerador mínimo. O Exemplo 4.1.2 mostra as duas representações geométricas da constelação de sinal 8 – *PSK*.

Definição. 4.1.3. Seja S um conjunto de sinais geometricamente uniforme. Um grupo gerador mínimo $U(S)$ de S é um subgrupo de $\Gamma(S)$ tal que, para todo $s_0 \in S$,

$$S = \{u(s_0), u \in U(S)\},$$

ou seja, S é a órbita de s_0 sobre $U(S)$ e a função $m : U(S) \rightarrow S$, definida por $m(u) = u(s_0)$ é bijetora.

A aplicação $m : U(S) \rightarrow S$ definida acima é de importância fundamental, visto que, ela induz em S uma estrutura de grupo isomorfa ao grupo gerador $U(S)$.

Exemplos 4.1.1. Seja $S = \{\pm d\}$ a constelação de sinais binária uni-dimensional. Afirmamos que S é geometricamente uniforme. De fato, seu grupo de simetrias $\Gamma(S) = V$, onde V é o grupo consistindo da identidade e e da reflexão v em torno do ponto médio entre d e $-d$, isto é, $V = \{e, v\}$. Como $v \in V$ satisfaz,

$$v(d) = -d, v(-d) = d \quad e \quad v(S) = S$$

segue a veracidade da afirmação.

Observação 4.1.1. O conjunto de sinais $S = \{\pm d\}$ é um exemplo de um conjunto de sinais geometricamente uniforme que possui um único grupo gerador $U(S) = \Gamma(S)$.

Exemplos 4.1.2. A constelação de sinais $M - PSK$ é um conjunto de sinais geometricamente uniforme. De fato, seu grupo de simetrias é $\Gamma(S) = V.R_M \simeq D_M$, onde $V.R_M$ denota o produto semi-direto de V por R_M . Um grupo gerador para S é o subgrupo das rotações $R_M \simeq \mathbb{Z}_M$. A figura 12 ilustra como são gerados os elementos do conjunto $M - PSK$ pelo grupo gerador R_M ,

quando $M = 8$. Neste caso, $r = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ é a rotação de $\frac{\pi}{4}$ no sentido anti-horário e $R_8 = \{e, r, r^2, r^4, r^5, r^6, r^7\}$.

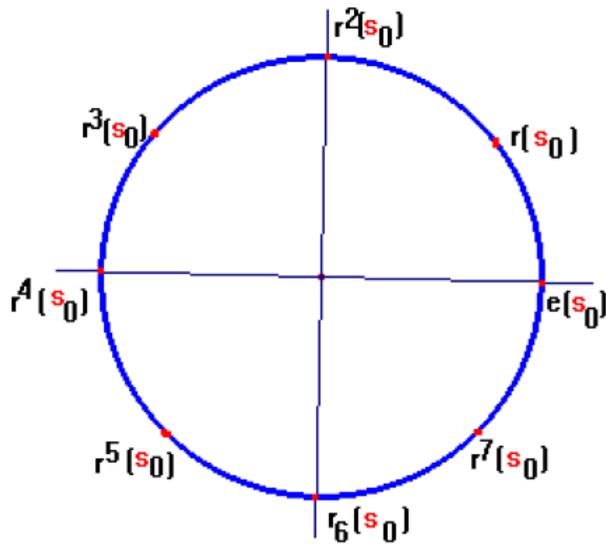


Figura 11 Representação geométrica da constelação 8 - PSK com grupo gerador mínimo R_8 .

Observação 4.1.2. Sempre que M for par, o conjunto $M - PSK$ possui um grupo gerador alternativo $U(S) = V.R_{M/2}$. Este é isomorfo ao grupo diedral $D_{M/2}$ e é o grupo de simetrias do único outro tipo de constelação uniforme em duas dimensões. Considere por exemplo $M = 8$. Então $U(S) = V.R_4$ é o produto semi direto de V por R_4 , onde $V = \{e, s\}$ consiste de dois elementos : a identidade e a reflexão $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ em torno do eixo x . Assim como no exemplo

anterior, $r = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ é a rotação de $\frac{\pi}{4}$ e, portanto,

$$R_4 = \{e, r^2, r^4, r^6\} \quad e \quad V.R_4 = \{e, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}.$$

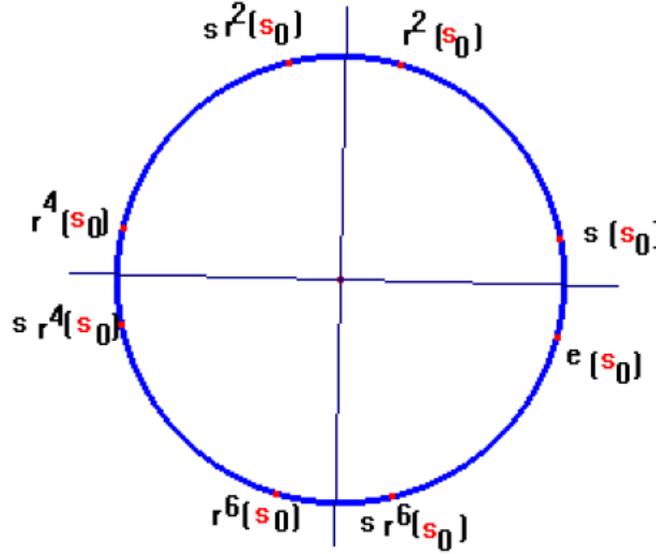


Figura 12 Representação geométrica para a constelação 8-PSK, usando $U(S) = V.R_4$ como grupo gerador mínimo.

Exemplo 4.1.3. Conjuntos de sinais do tipo reticulado, dados por

$$S = \mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

possui $T(\mathbb{Z}^2)$ como seu grupo gerador, o conjunto de todas as translações por inteiros em cada coordenada. O grupo de simetrias é $\Gamma(S) = D_4.T(\mathbb{Z}^2)$. Igualmente como no exemplo anterior, S possui mais de um grupo gerador. Além de $T(\mathbb{Z}^2)$ os outros grupos geradores, com ponto inicial $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ são:

O grupo $R_4.T(\mathbb{Z}^2)$, rotações compostas com translações;

O grupo $V^2.T(2\mathbb{Z}^2)$, reflexões compostas com translações onde $V^2.T(2\mathbb{Z}^2)$ é o produto cartesiano do grupo unidimensional $V.T(2\mathbb{Z})$ por ele mesmo.

Exemplo 4.1.4. Na figura 10 mostramos a tesselação hiperbólica $\{8, 8\}$ juntamente com sua dual. Os vértices da tesselação dual ou equivalentemente, os centros dos octógonos da tesselação

original formam um conjunto de sinais geometricamente uniforme. De fato, para cada $x \in S$ fixo, temos que $S = \{T(x) : T \in \Gamma\}$, com grupo gerador mínimo Γ (Γ é o grupo fuchsiano gerado pelas translações hiperbólicas A_1, B_1, A_2, B_2 descrita no final do capítulo 2).

Observação 4.1.3. Em [5] Forney chama atenção para o fato que o produto cartesiano de conjuntos de sinais geometricamente uniformes é um conjunto de sinais geometricamente uniforme. Fazendo uso deste resultado, podemos obter muitos conjuntos de sinais geometricamente uniformes. O exemplo a seguir ilustra este conceito.

Exemplo 4.1.5. Seja $S = \{\pm d\}$ a constelação de sinais binária unidimensional. Como vimos no Exemplo 4.1.1, S é geometricamente uniforme. Fazendo o produto cartesiano de S por S , n vezes, obtemos a constelação hiper-cubo n -dimensional $S = \{(\pm d, \pm d, \dots, \pm d)\}$. Pela observação 4.1.3, $S = \{(\pm d, \pm d, \dots, \pm d)\}$ é geometricamente uniforme.

4.2. Propriedades de Simetria dos Conjuntos de Sinais Geometricamente Uniformes

Um conjunto de sinais geometricamente uniforme S possui a importante propriedade de “ter o mesmo aspecto quando visto de qualquer um de seus elementos”. Esta propriedade implica que qualquer ponto arbitrário em S pode ser tomado como “centro do universo,” e que toda propriedade geométrica relativa a um ponto não depende do ponto escolhido.

Em particular, duas importantes propriedades geométrica são descritas a seguir.

Definição. 4.2.1. Seja S um conjunto de sinais geometricamente uniforme. A **região de Voronoi** associada a um ponto $s \in S$, denotada por $V_S(s)$ é o conjunto

$$V_S(s) = \{x \in \mathbb{E} : d(x, s) = \min_{t \in S} d(x, t)\}$$

ou seja, $V_S(s)$ é o conjunto de todos os pontos de \mathbb{E} que estão mais próximos de s que de qualquer outro ponto de S . O **perfil de distância global**, $\mathcal{DP}(s)$, associado a um ponto $s \in S$, é definido como $\mathcal{DP}(s) = \{d(s, s') : s' \in S\}$.

Teorema 4.2.1. [3] (*uniformidade geométrica*). Se S é um conjunto de sinais geometricamente uniforme então:

a) Todas as regiões de Voronoi são congruentes. Matematicamente isto é descrito por:

$$s, s' \in S \Rightarrow V_S(s') = u_{s,s'}(V_S(s))$$

onde $u_{s,s'}(s)$ é qualquer isometria que transforma s em s' .

b) O perfil de distância global $DP(s)$ é o mesmo para todo $s \in S$.

O fato de que a forma de cada região de Voronoi é a mesma para a constelação de sinais é uma propriedade de simetria muito forte porque a forma da região de Voronoi do conjunto de sinais S é que determina quase todas as propriedades de S que são importantes para um sistema de comunicações. Dessa forma, o perfil de distâncias e a probabilidade de erro associados a cada sinal em S são determinados localmente.

Finalizamos este capítulo esboçando a região de Voronoi de alguns conjuntos de sinais.

Exemplo 4.2.1. Consideremos o conjunto de sinais $S = \{-d, d\}$ e seja $w = 0$ o ponto médio do segmento $[-d, d]$. A região de Voronoi associada ao ponto $d \in S$, $V_S(d) = [0, \infty)$.

Exemplo 4.2.2. Consideremos agora o conjunto de sinais $S = 8\text{-PSK}$ e o ponto $s_0 = e^{i0} = (1, 0) \in S$. A região de Voronoi de s_0 é a região interna entre as duas semi-retas (bissetrizes dos ângulos $\frac{\pi}{4}$ e $-\frac{\pi}{4}$ respectivamente).

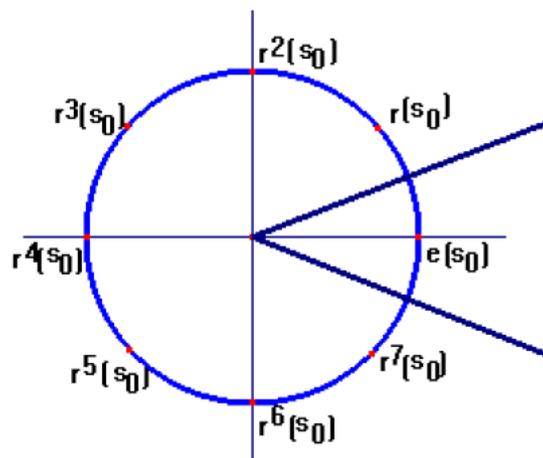


Figura 13 Região de Voronoi.

Os conjuntos de sinais considerados no próximo exemplo são de particular interesse para nossos propósitos.

Exemplo 4.2.3. Seja S o conjunto de sinais geometricamente uniforme determinado pelos centros dos p -ágonos da tesselação $\{p, q\}$, então cada p -ágonos é uma região de Voronoi.

Capítulo 5

Partições Geometricamente Uniformes e Constelações de Sinais Geometricamente Uniformes

O conceito de partições geometricamente uniformes no plano euclidiano foi proposto por Forney em [5]. Considerando os elementos do grupo gerador, como sendo isometrias arbitrárias deste plano, Forney generalizou partições tais como as de Ungerboeck [14] e Calderbank & Sloane [1]. A contribuição para o plano hiperbólico veio como trabalho de Lazari [10], por estender o conceito de partições geometricamente uniformes ao plano hiperbólico. Em [10] são apresentados vários subgrupos (normais) do grupo $\Gamma = \langle A_1, B_1, A_2, B_2 : A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} A_2 B_2 A_2^{-1} B_2^{-1} = 1 \rangle$ gerador da tesselação $\{8, 8\}$. Nosso objetivo é construir constelações de sinais geometricamente uniformes no plano hiperbólico fazendo uso destes subgrupos.

Neste capítulo estaremos apresentando alguns exemplos de partições geometricamente uniformes no plano euclidiano e construindo constelações de sinal geometricamente uniforme no plano hiperbólico.

Definição 5.1. Seja S um conjunto de sinais geometricamente uniforme com grupo gerador mínimo $U(S)$. Uma **partição geometricamente uniforme** S/S' , é uma partição de S , induzida por um subgrupo normal U' de $U(S)$. Os elementos de S/S' são os subconjuntos de S que correspondem às classes laterais de U' em $U(S)$.

O teorema a seguir garante que os subconjuntos na partição de S também são geometricamente uniformes.

Teorema 5.1 [5]. *(Partições geometricamente uniformes) Seja S/S' uma partição geometricamente uniforme. Então os subconjuntos de S na partição são geometricamente uniformes, congruentes entre si, e possuem U' como grupo gerador comum.*

Exemplo 5.1. Se M' é um divisor de M , o conjunto de sinais $M - PSK$ pode ser particionado em $\left| \frac{R_M}{R_{M'}} \right| = \frac{M}{M'}$ conjuntos de sinais pelo subgrupo $R_{M'}$ de seu grupo de rotações R_M . O grupo quociente $R_M / R_{M'}$ é isomorfo a $\frac{\mathbb{Z}_M}{M'}$.

Exemplo 5.2. Seja Λ' um sub-reticulado de um reticulado Λ no plano euclidiano. Um reticulado transladado $S = \Lambda + a$ pode ser particionado em $\left| \frac{\Lambda}{\Lambda'} \right|$ classes laterais de pelo subgrupo $T(\Lambda')$ do grupo de translações $T(\Lambda)$. O grupo $\frac{T(\Lambda)}{T(\Lambda')}$ é isomorfo a $\frac{\Lambda}{\Lambda'}$.

O teorema 5.1 pode ser estendido para mostrar que se $U(S)/U'(S)/U''(S) \dots$ é uma cadeia de partições de grupos, então existe uma correspondente cadeia $S/S'/S'' \dots$ de partições geometricamente uniformes, onde os subconjuntos em cada nível são geometricamente uniformes, mutuamente congruentes e possuem grupo gerador comum $U'(S)$.

Definição 5.2. Sejam S/S' uma partição geometricamente uniforme e A um grupo isomorfo a $U(S)/U'(S)$. Um **rotulamento isométrico** é uma função bijetora $m : A \rightarrow S/S'$ definida pela composição de um isomorfismo entre A e $U(S)/U'(S)$ chamado isomorfismo de rotulamento e a função bijetora de $U(S)/U'(S)$ em S/S' . O diagrama abaixo deixa claro a definição da função m

$$A \rightarrow \frac{U(S)}{U'(S)} \rightarrow \frac{S}{S'}$$

$$a \mapsto u_a U' \mapsto m(a) = u_a(S') = \{u_a u(s_0) : u \in U'\}$$

O grupo $A \simeq \frac{U(S)}{U'(S)}$ é chamado grupo rótulo.

Exemplo 5.3. Nos exemplos 5.1.1 e 5.1.2 temos respectivamente $A = \frac{\mathbb{Z}_M}{M'}$ e $A = \frac{\Lambda}{\Lambda'}$.

No exemplo 4.1.2 mostramos que o conjunto de sinais S sendo o $8 - PSK$ possui dois grupos geradores distintos, a saber: $U(S) = \mathcal{R}_8$ e $U(S) = V \cdot \mathcal{R}_4$, e portanto duas diferentes representações no plano. O rotulamento isométrico proveniente de cada um destes grupos geradores é mostrado nas figuras 15 e 17.

Exemplo 5.4. Considere o conjunto de sinais 8 - PSK com grupo gerador $U(S) = \mathcal{R}_8 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$, onde r é a rotação de $\frac{\pi}{4}$ no sentido anti-horário. Como $\mathcal{R}_2 = \{e, r^4\}$ é normal em \mathcal{R}_8 , podemos particionar a constelação 8 - PSK em quatro subconjuntos, digamos, m_0, m_1, m_2 e m_3 . O grupo quociente $\frac{\mathcal{R}_8}{\mathcal{R}_2}$ é isomorfo a \mathbb{Z}_4 , então tomando $A = \mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ como grupo rótulo, este isomorfismo significa que para cada $a \in A$, existe uma classe de equivalência de isometrias \mathfrak{R}_a no grupo quociente $\frac{\mathcal{R}_8}{\mathcal{R}_2}$, conforme ilustrado na tabela da figura 14.

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathfrak{R}_0 = \{e \quad r^4\} \\ 1 &\rightarrow \mathfrak{R}_1 = \{r \quad r^5\} \\ 2 &\rightarrow \mathfrak{R}_2 = \{r^2 \quad r^6\} \\ 3 &\rightarrow \mathfrak{R}_3 = \{r^3 \quad r^7\} \end{aligned}$$

Figura 14 Tabela do isomorfismo $A \simeq \mathbf{R}_8/\mathbf{R}_2$.

Para cada $a \in A$, considere u_a uma isometria fixa em \mathfrak{R}_a . Como definimos a aplicação de rotulamento $m: A \rightarrow \frac{S}{S'}$ por $m(a) = u_a(S') = \{u_a u(s_0) : u \in U'\}$, então

$$\begin{aligned} m(0) &= \{u(s_0) : u \in U' = \{e(s_0), r^4(s_0)\}\} \\ m(1) &= \{r \circ u(s_0) : u \in U'\} = \{r(e(s_0), r^4(s_0))\} = \{r(s_0), r^5(s_0)\} \\ m(2) &= \{r^2 \circ u(s_0) : u \in U'\} = \{r^2(e(s_0), r^4(s_0))\} = \{r^2(s_0), r^6(s_0)\} \\ m(3) &= \{r^3 \circ u(s_0) : u \in U'\} = \{r^3(e(s_0), r^4(s_0))\} = \{r^3(s_0), r^7(s_0)\} \end{aligned}$$

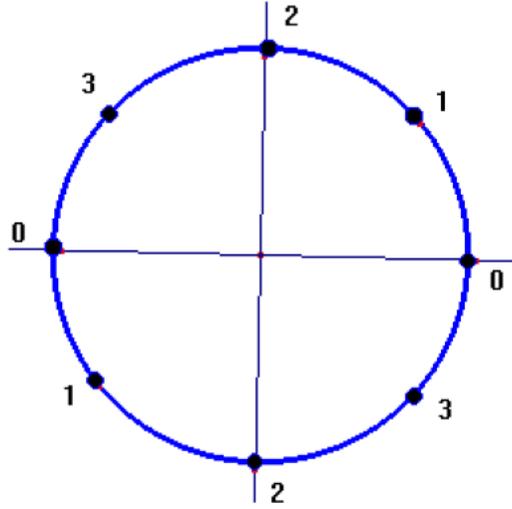


Figura 15 Rotulamento isométrico para os quatro subconjuntos na partição do conjunto de sinais 8 – PSK.

Exemplo 5.5. Como mencionado, o grupo $U(S) = V \cdot \mathcal{R}_4$ também gera o conjunto de sinais 8 – PSK. Na observação 4.1.2 mostramos que este grupo é o produto semi-direto de V por \mathcal{R}_4 , onde V consiste de dois elementos: a identidade e a reflexão $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ em torno do eixo x .

Denotando a rotação de $\frac{\pi}{4}$ por $r = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$, temos

$$\mathcal{R}_4 = \{e, r^2, r^4, r^6\} \quad \text{e} \quad V \cdot \mathcal{R}_4 = \{e, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}$$

Considerando novamente $U'(S) = \mathcal{R}_2$, particionamos o conjunto 8 – PSK em quatro subconjuntos. O grupo quociente $\frac{V \cdot \mathcal{R}_4}{\mathcal{R}_2}$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, então escolhendo $A = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ como grupo rótulo, a aplicação de rotulamento $m : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow 8 - \text{PSK}/2 - \text{PSK}$ resulta nos seguintes subconjuntos:

$$m(00) = \{u(s_0) : u \in U'\} = \{e(s_0), r^4(s_0)\} = S'$$

$$m(01) = \{s \circ u(s_0) : u \in U'\} = \{s \circ e(s_0), r^4(s_0)\} = \{s(s_0), s \circ r^4(s_0)\}$$

$$m(10) = \{r^2 \circ u(s_0) : u \in U'\} = \{r^2(e(s_0), r^4(s_0))\} = \{r^2(s_0), r^6(s_0)\}$$

$$m(11) = \{sr^2 \circ u(s_0) : u \in U'\} = \{sr^2(e(s_0), r^4(s_0))\} = \{sr^2(s_0), sr^6(s_0)\}$$

$$00 \rightarrow \mathfrak{R}_{00} = \{e \quad r^4\}$$

$$10 \rightarrow \mathfrak{R}_{10} = \{r^2 \quad r^6\}$$

$$01 \rightarrow \mathfrak{R}_{01} = \{s \quad sr^4\}$$

$$11 \rightarrow \mathfrak{R}_3 = \{sr^2 \quad sr^6\}$$

Figura 16 Tabela do isomorfismo $A \simeq V \cdot \mathfrak{R}_4 / \mathfrak{R}_2$.

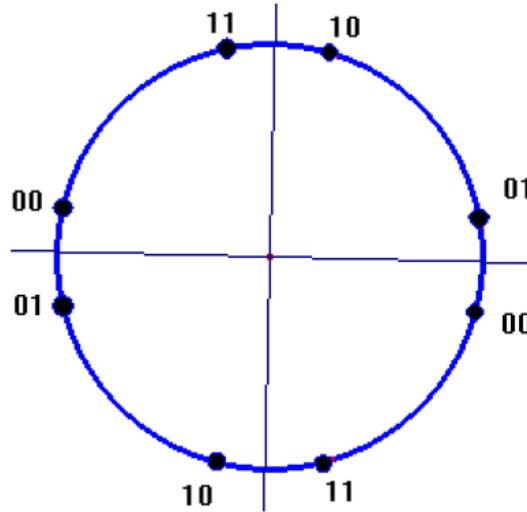


Figura 17 Rotulamento isométrico para os quatro subconjuntos na partição do conjunto de sinais 8 – PSK induzido pelo quociente $V \cdot \mathfrak{R}_4 / \mathfrak{R}_2$.

No exemplo 4.1.3 mostramos que o conjunto de sinais $S = \mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ possui três grupos geradores mínimos, a saber

$$U(S) = T(\mathbb{Z}^2), \quad U(S) = \mathfrak{R}_4 T(2\mathbb{Z}^2), \quad \text{e} \quad U(S) = V^2 T(2\mathbb{Z}^2).$$

Sendo assim, para cada grupo gerador considerado, o conjunto $S =$ é particionado em 16 subconjuntos (classes laterais de $4\mathbb{Z}^2$) pelo subgrupo $T(4\mathbb{Z}^2)$. Destes três grupos geradores, podemos obter três grupos quocientes $\frac{U(S)}{U'(S)}$ e, portanto, três rotulamento isométrico para os subconjuntos em $\frac{S}{S'}$. Como os rotulamentos isométricos provenientes dos quocientes $\frac{U(S)}{U'(S)}$ são de particular interesse, nos detemos a explicitar o rotulamento somente para estes dois casos. Em

([3], pag. 1251) é mostrado o rotulamento para os subconjuntos na partição $\frac{S}{S'}$ induzida pelo quociente $\frac{R}{T}$.

Exemplo 5.6. Seja $S = \mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ o reticulado semi-inteiro com grupo gerador $U(S) = T(\mathbb{Z}^2)$. Do grupo quociente $\frac{U(S)}{U'(S)} = \frac{T(\mathbb{Z}^2)}{T(4\mathbb{Z}^2)} \simeq \frac{\mathbb{Z}^2}{4\mathbb{Z}^2}$ isomorfo a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$, particionamos S em 16 subconjuntos. Tomando $A = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ como grupo rótulo e aplicando a definição do rotulamento m , obtemos o rotulamento isométrico para os subconjuntos na partição de $\frac{S}{S'} = \frac{\mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{4\mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$ como se

$$m(00) = id(s_0) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = (0,0) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2$$

$$m(10) = T_{(1,0)}(s_0) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = (1,0) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2$$

$$m(20) = T_{(2,0)}(s_0) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = (2,0) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2$$

$$m(30) = T_{(3,0)}(s_0) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = (3,0) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2$$

$$m(01) = T_{(0,1)}(s_0) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = (0,1) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2$$

$$m(11) = T_{(1,1)}(s_0) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = (1,1) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2$$

$$m(21) = T_{(2,1)}(s_0) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = (2,1) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2$$

$$m(31) = T_{(3,1)}(s_0) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = (3,1) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2$$

$$m(02) = T_{(0,2)}(s_0) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = (1,2) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2$$

$$m(12) = T_{(1,2)}(s_0) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = (1,2) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2$$

$$m(22) = T_{(2,2)}(s_0) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = (2,2) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2$$

$$m(32) = T_{(3,2)}(s_0) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = (3,2) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2$$

$$m(03) = T_{(0,3)}(s_0) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = (0,3) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2$$

$$m(13) = T_{(1,3)}(s_0) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = (1,3) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2$$

$$m(23) = T_{(2,3)}(s_0) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = (2,3) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2$$

$$m(33) = T_{(3,3)}(s_0) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = (3,3) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2 = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) \bmod 4\mathbb{Z}^2$$

Desta forma, se escolhermos um elemento de cada classe lateral de S' em S , obtemos um sistema completo de representantes para a partição $\frac{S}{S'}$, denotado por $\left[\frac{S}{S'}\right]$. Neste caso, $\left[\frac{S}{S'}\right] = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right), \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) \right\}$ forma um conjunto completo de representantes de $\frac{S}{S'} = \frac{\mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{4\mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$. A figura

18 mostra a representação geométrica de $\left[\frac{S}{S'}\right]$

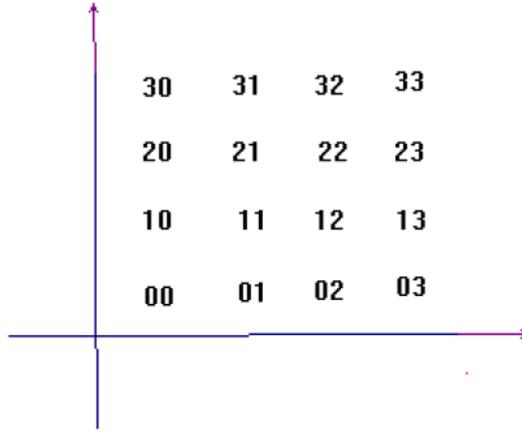


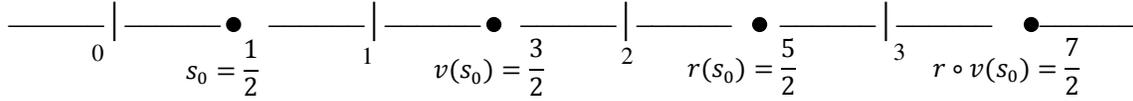
Figura 18 Rotulamento isométrico para os 16 subconjuntos na partição do conjunto de sinais $S = \mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Exemplo 5.7. Seja agora o conjunto de sinais $\mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ com grupo gerador $V^2.T(2\mathbb{Z}^2)$. Do isomorfismo $\frac{V^2.T(2\mathbb{Z}^2)}{T(4\mathbb{Z}^2)} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ podemos particionar este conjunto de sinais em 16 subconjuntos. O rotulamento isométrico destes 16 subconjuntos pode ser obtido fazendo o produto cartesiano do rotulamento de $\frac{S}{S'}$ por si mesmo, onde $S = \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ e $S' = 4\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. De fato, seja $U(S) = V.T(2\mathbb{Z})$ o grupo gerador de $S = \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, podemos particionar S em quatro subconjuntos pelo subgrupo $U'(S) = T(4\mathbb{Z})$. O grupo quociente $\frac{U(S)}{U'(S)} = \frac{V.T(2\mathbb{Z})}{T(4\mathbb{Z})} \simeq V \times \frac{2\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} = \{id, v\} \times \{4\mathbb{Z}, 2 + 4\mathbb{Z}\}$ onde:

- v é a reflexão em torno por exemplo do ponto 1,

- $4\mathbb{Z}$ é a identidade
- $r = t_2 = 2 + 4\mathbb{Z}$ é a translação gerada por $[0,2]$.

Então $\frac{U(S)}{U'(S)} = \{id, v, r, r \circ v\}$ O diagrama abaixo mostra o efeito destas isometrias quando aplicadas no ponto inicial $s_0 = \frac{1}{2}$.



Como: $v \circ v = id \text{ mod } 4\mathbb{Z}$; $r \circ r = id \text{ mod } 4\mathbb{Z}$; $(r \circ v) \circ (r \circ v) = id \text{ mod } 4\mathbb{Z}$, temos que $\frac{U(S)}{U'(S)} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ então podemos tomar $A = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{00, 10, 01, 11\}$. Aplicando o isomorfismo rótulo $m: A \rightarrow \frac{S}{S'}$, obtemos um rotulamento isométrico para os subconjuntos de S em $\frac{S}{S'}$. A representação geométrica deste rotulamento é mostrada na figura 19.

$$m(00) = id(s_0) \text{ mod } 4\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$$

$$m(10) = v(s_0) \text{ mod } 4\mathbb{Z} = \frac{3}{2} + 4\mathbb{Z}$$

$$m(01) = r(s_0) \text{ mod } 4\mathbb{Z} = \frac{5}{2} + 4\mathbb{Z}$$

$$m(11) = (r \circ v)(s_0) \text{ mod } 4\mathbb{Z} = \frac{7}{2} + 4\mathbb{Z}$$

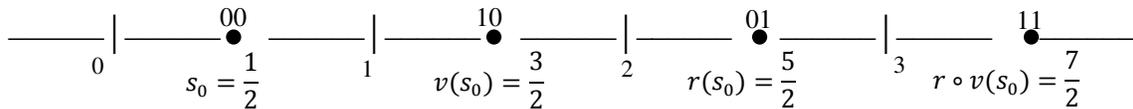


Figura 19 Rotulamento isométrico para os quatro subconjuntos na partição $\frac{S}{S'}$

Sejam, agora, $A^2 = A \times A$ e $\underline{m}: A \times A \rightarrow \frac{S}{S'} \times \frac{S}{S'}$, então

$A \times \{11\}$	● 0011	● 1011	● 0111	● 1111
$A \times \{01\}$	● 0001	● 1001	● 0101	● 1101
$A \times \{10\}$	● 0010	● 1010	● 0110	● 1110
$A \times \{00\}$	● 0000	● 1000	● 0100	● 1100

Figura 20 Rotulamento isométrico para os dezesseis subconjuntos na partição $\frac{s}{s'} \times \frac{s}{s'}$

corresponde ao rotulamento dos subconjuntos na partição $\frac{\mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{4\mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$ pois, $(\frac{s}{s'})^2 = \frac{s^2}{(s')^2} = \frac{\mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{4\mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$

com grupos correspondentes:

$$[V.T(2\mathbb{Z})]^2 = V^2.T(2\mathbb{Z}^2) \quad \text{e} \quad T(4\mathbb{Z}^2)$$

Observação 5.1. O rotulamento dos subconjuntos de $\mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ na partição $\frac{\mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{4\mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$ é isométrico, pois como mostraremos no próximo capítulo a aplicação $\underline{m} : A^2 \rightarrow (\frac{s}{s'})^2$ é uma extensão natural da aplicação de rotulamento $m : A \rightarrow \frac{s}{s'}$ e, portanto, é também uma aplicação de rotulamento.

Observamos que os rotulamentos apresentados nas figuras 18 e 20 mesmo sendo diferentes (em vista de possuírem grupos geradores distintos e, portanto, resultam quocientes $\frac{U(s)}{U(s')}$ isomorfos a grupos rótulos A diferentes), ambos possam $[\frac{s}{s'}] = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{7}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{7}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{5}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}), (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}), (\frac{7}{2}, \frac{5}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{7}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{7}{2}), (\frac{5}{2}, \frac{7}{2}), (\frac{7}{2}, \frac{7}{2})\}$ como um sistema completo de representantes da partição $\frac{s}{s'}$ em questão. Considere, agora, um conjunto alternativo de representantes para estas mesmas partições, onde o elemento escolhido como representante de cada classe lateral é o que possui a menor energia na sua classe. Desta forma, ambas as partições possuem

$\left\{ \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right), \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2} \right), \left(\pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2} \right), \left(\pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{2} \right) \right\}$ como conjunto completo de representantes de cada classe lateral, o qual representa a modulação 16 – QAM.

Exemplo 5.9. Considere o conjunto de sinais S com grupo gerador $U(S) = \Gamma = \langle B_1, A_1, B_2, A_2 \rangle$. Seja, agora, $U(S) = \langle B_1^2, A_1, B_2, A_2 \rangle$ o subgrupo normal de $U(S)$. Como $\frac{U(S)}{U'(S)} \simeq \mathbb{Z}_2$ escolhamos o grupo rótulo $A = \mathbb{Z}_2$ e do rotulamento isométrico $m : A \rightarrow \frac{S}{S'}$ obtemos os dois subconjuntos na partição $\frac{S}{S'}$

$$m(0) = \{(A_2^{-1}B_1^{-1} A_1B_1)u(e) : u \in U'(S)\} = (A_2^{-1}B_1^{-1} A_1B_1)(e) S'$$

$$m(1) = \{(A_2B_2A_2^{-1}B_1^{-1})u(e) : u \in U'(S)\} = (A_2B_2A_2^{-1}B_1^{-1})(e) S'$$

Neste exemplo, iremos construir algumas constelações de sinais geometricamente uniformes no primeiro nível da tesselação $\{8, 8\}$. Começamos com uma constelação de sinais geometricamente uniforme C_1 em S com quatro pontos correspondentes às imagens de e pelas isometrias

$$(A_2^{-1}B_1^{-1} A_1B_1)(e), (A_2B_2A_2^{-1}B_1^{-1})(e)$$

e suas inversas

$$(B_1^{-1}A_1^{-1} B_1A_2)(e), (B_1A_2B_2^{-1}A_2^{-1})(e)$$

conforme ilustrado na figura 21(a).

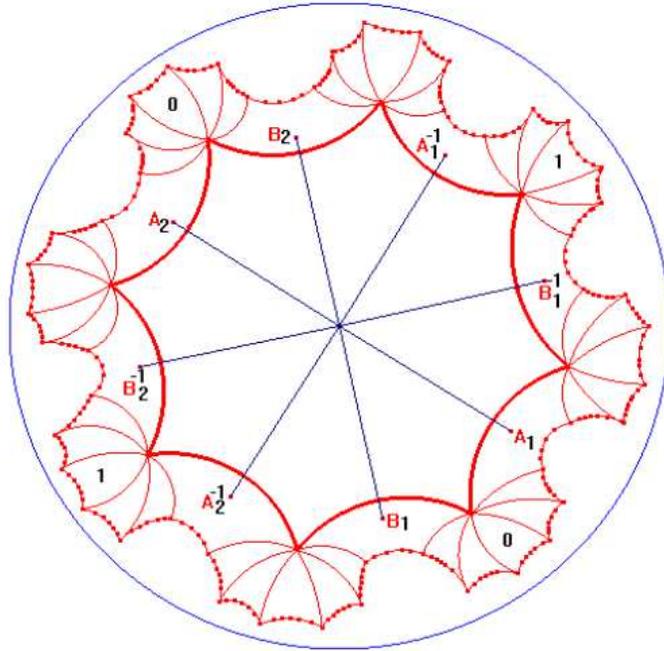


Figura 21(a). Constelação de sinais geometricamente uniforme C_1

Observação 5.1. Estaremos sempre representando por e o centro do octógono fundamental de tesselação $\{8, 8\}$.

Podemos obter outra constelação de sinais geometricamente uniforme C_2 em S , considerando os quatro pontos de S correspondendo a

$$(B_1^{-1}A_1B_1A_1^{-1})(e), (B_2A_2^{-1}B_1^{-1}A_1)(e)$$

e suas inversas

$$(A_1B_1^{-1}A_1^{-1}B_1)(e), (A_1^{-1}B_1A_2B_2^{-1})(e)$$

A figura 21(b) mostra esta constelação.

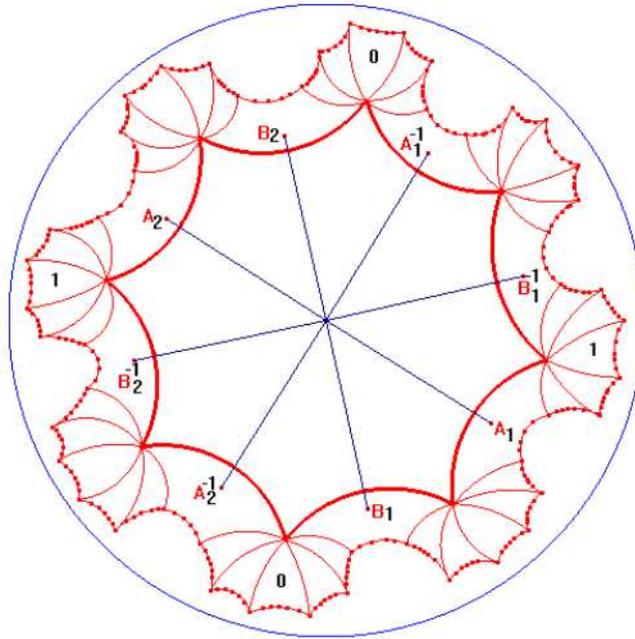


Figura 21(b) Constelação \mathcal{C}_2 geometricamente uniforme

A constelação de sinais geometricamente uniforme \mathcal{C}_3 mostrada na figura 21(c), é o resultado da união das constelações geometricamente uniforme \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 .

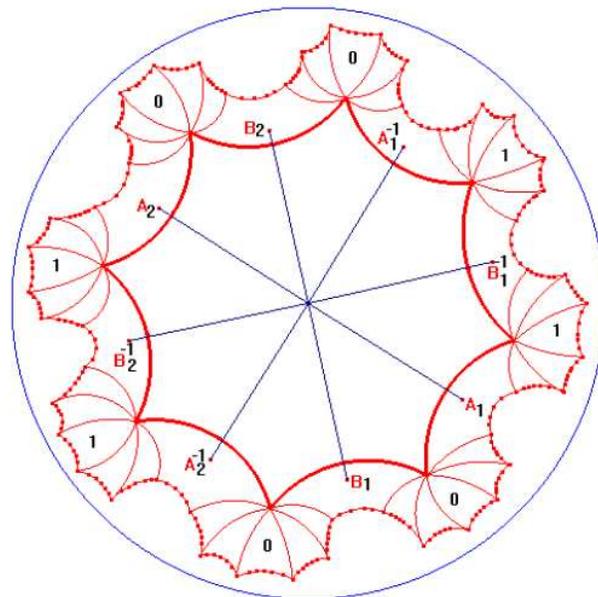


Figura 21(c). Constelação de sinais G U \mathcal{C}_3 resultante da união das constelações \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2

Ainda neste exemplo podemos construir mais duas constelações de sinais geometricamente uniformes C_4 e C_5 . A primeira delas C_4 é obtida considerando os pontos de S correspondendo a:

$$(A_2^{-1}B_1^{-1}A_1B_1)(e), (B_1^{-1}A_1B_1)(e), (A_2B_2A_2^{-1}B_1^{-1})(e), (B_2A_2^{-1}B_1^{-1})(e)$$

$$(B_1^{-1}A_1^{-1}B_1A_2)(e), (B_2^{-1}A_2B_2)(e), (B_1A_2B_2^{-1}A_2^{-1})(e), (B_1A_1^{-1}B_2^{-1})(e)$$

respectivamente. A visualização desta constelação é mostrada na figura 21(d).

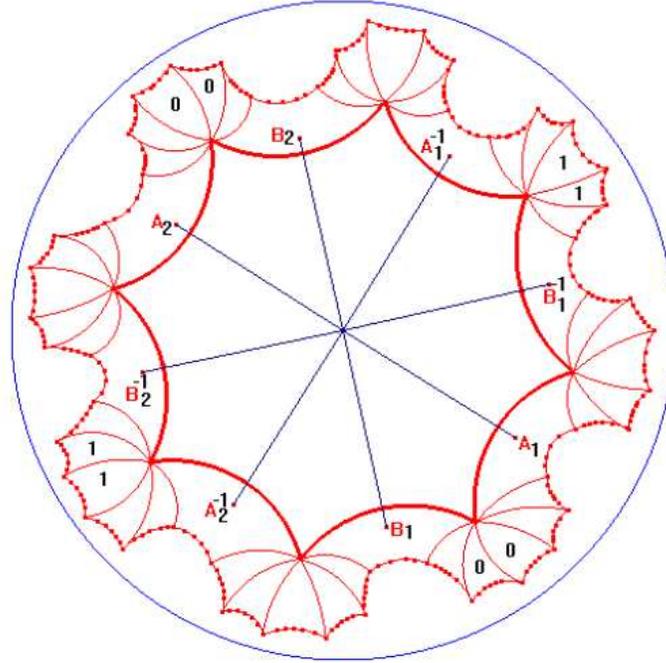


Figura 21(d). Constelação de sinais geometricamente uniforme C_4

Uma constelação C_5 , análoga a C_4 , é construída escolhendo os seguintes pontos de S :

$$(B_2A_2^{-1}B_1^{-1}A_1)(e), (B_2A_1B_1^{-1})(e), B_1^{-1}A_1B_1A_1^{-1}(e), (B_2^{-1}A_2^{-1}B_2)(e)$$

$$B_1A_1^{-1}B_2^{-1}A_2(e), B_1A_2B_2^{-1}(e), B_2^{-1}A_2B_2A_2^{-1}(e), B_1^{-1}A_1^{-1}B_1(e)$$

A constelação C_5 é mostrada na figura 21(e)

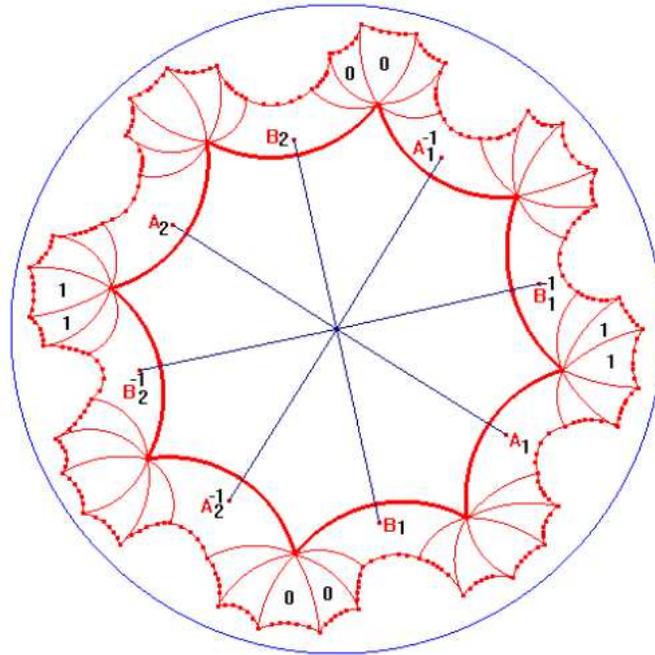


Figura 21(e). Constelação de sinais geometricamente uniforme C_5 .

Vimos que a união das constelações geometricamente uniformes C_1 e C_2 resultou em outra constelação geometricamente uniforme C_3 . O mesmo não acontece com as constelações C_4 e C_5 , que tem união não geometricamente uniforme conforme ilustra a figura 21(f).

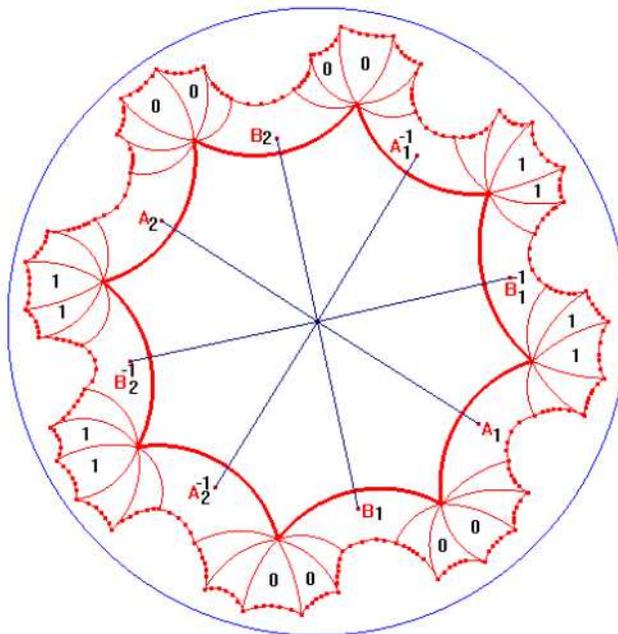


Figura 21(f). Constelação de sinais não geometricamente uniforme.

Observação 5.2. Devemos notar que as constelações de sinais geometricamente uniformes C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 , são todas obtidas da partição $\frac{S}{S'}$ induzidas pelo subgrupo normal $U'(S) = \langle B_1^2, A_1, B_2, A_2 \rangle$ de $U(S) = \langle B_1, A_1, B_2, A_2 \rangle$. Pode-se verificar que estas mesmas constelações são também obtidas considerando o subgrupo normal $U'(S) = \langle B_1, A_1, B_2^2, A_2 \rangle$.

Exemplo 3. Sejam as constelações C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 do exemplo anterior. Aplicando uma rotação de $\frac{\pi}{4} rad$ (no sentido horário) em cada ponto destas constelações, o resultado são outras cinco constelações de sinais geometricamente uniformes $C'_1, C'_2, C'_3, C'_4, C'_5$, cujos pontos pertencem à partição $\frac{S}{S'}$ induzidas pelo grupo quociente $\frac{US}{U'S} = \frac{\langle B_1, A_1, B_2, A_2 \rangle}{\langle B_1, A_1^2, B_2, A_2 \rangle}$. Observa-se que estas cinco últimas constelações podem também ser obtidas usando o subgrupo normal $U'(S) = \langle B_1, A_1, B_2, A_2^2, \rangle$ de $U(S)$.

Capítulo 6

Códigos de Espaços de Sinais Geometricamente Uniformes

Vimos anteriormente que dado um conjunto de sinais S geometricamente uniforme com grupo gerador $U(S)$, podemos escolher subgrupos normais de $U(S)$ para construir constelações de sinais geometricamente uniformes em S , induzidas pelas partições de grupos $\frac{U(S)}{U'(S)}$. A seguir faremos uso das constelações de sinais construídas anteriormente para abordarmos o conceito de códigos de espaços de sinais geometricamente uniformes.

Iniciamos com a seguinte definição:

Definição 6.1. Um **espaço de sequência** A^I é o conjunto de todas as sequências $\underline{a} = \{a_k, k \in I\}$ de elementos a_k de algum alfabeto A , onde o conjunto de índice I é um subconjunto dos números inteiros, $I \subseteq \mathbb{Z}$.

Considere $(A, *)$ um grupo, então o espaço de sequências A^I é também um grupo com a operação estendida para sequências no modo usual, componente a componente, ou seja, para cada $\underline{a}, \underline{b} \in A^I$,

$$\underline{a} * \underline{b} = (a_k * b_k) \quad k \in I$$

Desta forma, dados um conjunto de sinais S , uma partição $\frac{S}{S'}$ um grupo rótulo A , a aplicação de rotulamento $m : A \rightarrow \frac{S}{S'}$ possui extensão natural da seguinte forma:

$$\underline{m}: A^I \rightarrow \left(\frac{S}{S'}\right)^I$$

Chamamos de **código rótulo** a qualquer subconjunto $C \subseteq A^I$. A especificação de um código rótulo C define um código de espaço de sinais como segue:

Definição 6.2. Um **código de espaço de sinais** é a união

$$\mathbb{C}\left(\frac{S}{S'}, C\right) = \bigcup_{c \in C} \underline{m}(c)$$

de sequências de subconjuntos $\underline{m}(c) = \{m(c_k), k \in I\}$, $c \in C$, isto é, $\underline{m}(c)$ é a sequência de subconjuntos de S selecionados pela sequência de rótulo $c \in C$ via a aplicação de rotulamento $m : A \rightarrow \frac{S}{S'}$

Como $\mathbb{C}\left(\frac{S}{S'}, C\right) = \bigcup_{c \in C} \underline{m}(c) = \bigcup_{c \in C} \{m(c_k) | k \in I\}$, temos que $\mathbb{C}\left(\frac{S}{S'}, C\right) \subset S^I$. No caso de S ser um subconjunto de \mathbb{R}^n , então S^I e \mathbb{C} são subconjuntos do espaço de sequências $(\mathbb{R}^n)^I$.

Devemos observar que \mathbb{H}^2 não é um espaço vetorial, portanto, não existe uma forma padrão para produtos.

Na figura 22, ilustramos um codificador para um código de espaços de sinais.

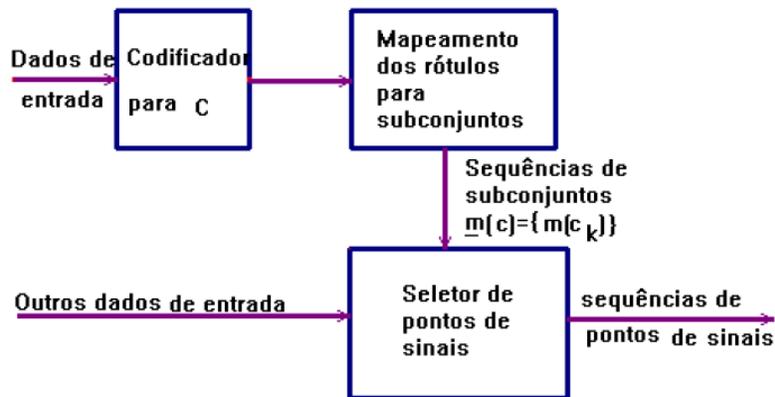


Figura 22 Codificador para o código \mathbb{C}

Um codificador para o código rótulo C gera uma sequência codificada de rótulos $c = \{c_k\}$ pertencente a C . A sequência individual c é determinada por uma sequência adequada de dados na entrada do codificador. Agora, a aplicação de rotulamento $m : A \rightarrow \frac{S}{S'}$ é usada para determinar a

sequência de subconjuntos $\underline{m}(c) = \{m(c_k), k \in I\}$. Outros dados de entrada são usados então para determinar um elemento (sequência) específico de $\underline{m}(c)$ para que possa ser transmitido através do canal. Esta última operação é de natureza secundária, as propriedades de um código gerado por um codificador deste tipo dependem fundamentalmente das propriedades do código de espaço de sinais $\mathbb{C}\left(\frac{S}{S'}, C\right)$ que são determinados pela entrada a ser codificada por C .

Seja agora $\frac{S}{S'}$ uma partição geometricamente uniforme induzida pelos grupos geradores $U(S)$ e $U(S')$ e $A \simeq U(S)/U'(S)$ o grupo rótulo. Então, um **código de classes laterais generalizado** é o subconjunto

$$\mathbb{C}\left(\frac{S}{S'}, C\right) = \{s \in \underline{m}(c) : c \in C\} \subseteq S^I$$

onde $C \subseteq A^I$ é um subgrupo normal de A^I .

Em suma, um código de classes laterais $\mathbb{C}\left(\frac{S}{S'}, C\right)$ é o conjunto de todas as sequências de pontos de sinais que pertencem a uma sequência de classes laterais de S' especificada por uma sequência de bits codificados de C .

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões

7.1 Conclusões.

A proposta do presente trabalho foi a de construir constelações de sinais geometricamente uniformes no plano hiperbólico. Mais especificamente constelações de sinais obtidas no primeiro nível da tesselação $\{8, 8\}$. Como o grupo de isometrias

$$\Gamma = \{\langle B_1, A_1, B_2, A_2 \rangle : B_1 A_1 B_1^{-1} A_1^{-1} B_2 A_2 B_2^{-1} A_2^{-1} = 1\}$$

fuchsiano e sua ação é livre em \mathbb{H}^2 , vimos que a projeção $P : \mathbb{H}^2 \rightarrow \frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ é uma aplicação de recobrimento. No caso geral de qualquer g -toro, $g \geq 2$ temos que os grupos fuchsianos gerados por isometrias hiperbólicas que fazem o emparelhamento dos lados de uma região de Dirichlet (polígono de $4g$ -lados) são isomorfos aos grupos fundamentais das superfícies compactas orientáveis obtidas da identificação dos lados opostos da região fundamental. Decidimos por construir constelações de sinais contidas em g -toros (no nosso caso bitoros) por possuírem as seguintes propriedades:

1. Apesar dos pontos de sinais estarem contidos topologicamente na superfície de um g -toro, existem modelos euclidianos que permitem sua visualização no plano, o que nos possibilita lidar com ferramentas convencionais para seu estudo.
2. Para qualquer g -toro, o grupo fuchsiano Γ é conhecido, conforme mostra [3] págs. 171 e 172.
3. Homogeneidade de suas regiões de Voronoi (Dirichlet).

Estas propriedades exercem funções importante, tais como:

- O fato da uniformidade geométrica de uma constelação de sinais estar associada diretamente a seu grupo de simetrias, torna necessário o conhecimento do grupo Γ .

- A homogeneidade de suas regiões de Voronoi é que garante o mesmo perfil de vizinhos para cada ponto e mesma probabilidade de erro em canais AWGN.

No capítulo 2 foram introduzidos os subsídios algébricos e geométricos básicos usados no desenvolvimento deste trabalho.

No capítulo 3 foram fornecidos alguns conceitos básicos de teoria da informação, seguido do estudo de tesselações no plano hiperbólico.

A uniformidade geométrica de uma constelação de sinais bem como suas propriedades de simetrias foram tratadas no capítulo 4. .

No capítulo 5, consideramos o conjunto de sinais S consistindo dos centros dos octógonos da tesselação $\{8, 8\}$ para construção de constelações de sinais geometricamente uniformes. A escolha de elementos apropriados contidos nas classes laterais da partição de S induzida pela partição de grupos $\frac{U(S)}{U'(S)}$ resultou nas constelações C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 geometricamente uniformes, onde

$$\Gamma = \{\langle B_1, A_1, B_2, A_2 \rangle : B_1 A_1 B_1^{-1} A_1^{-1} B_2 A_2 B_2^{-1} A_2^{-1} = 1\} \text{ e}$$

$$U'(S) = \langle B_1^2, A_1, B_2, A_2 \rangle$$

Vimos que estas mesmas constelação de sinais também podem ser obtidas usando o subgrupo de Γ ,

$$U'_1(S) = \langle B_1, A_1, B_2^2, A_2 \rangle$$

Ainda neste capítulo, vimos que fazendo uma rotação de $\frac{\pi}{4} rad$ (no sentido horário) em cada um dos pontos destas constelações, o resultado são outras cinco constelações de sinais geometricamente uniformes $C'_1, C'_2, C'_3, C'_4, C'_5$, cujos pontos pertencem a partição $\frac{S}{S'}$ induzidas pelo grupo quociente $\frac{U(S)}{U'(S)} = \frac{\langle B_1, A_1, B_2, A_2 \rangle}{\langle B_1, A_1^2, B_2, A_2 \rangle}$. Observou-se também que estas mesmas cinco últimas constelações podem ser obtidas usando o subgrupo normal $U'(S) = \langle B_1, A_1, B_2, A_2^2 \rangle$ de $U(S)$.

7.2. Sugestões para Trabalhos Futuros.

Durante o desenvolvimento desta dissertação, nos deparamos com alguns tópicos que podem ser considerado como um possível caminho para novas pesquisas. Gostaríamos, para finalizar, de apresentar alguns destes tópicos.

No processo de construção de constelações de sinais geometricamente uniformes, consideramos S como o conjunto de sinais formado pelos centros dos octógonos da tesselação $\{8, 8\}$. Da uniformidade geométrica deste conjunto afirmamos que, a existência ou não, de constelações de sinais geometricamente uniformes obtidas no primeiro nível da tesselação, escolhendo pontos na partição de S induzida pelos quocientes de $U(S) = \langle A_1, B_1, A_2, B_2 \rangle$ por certos subgrupos normais, são estendidas aos outros níveis da tesselação. Ou seja, se para um determinado subgrupo normal $U'(S)$ de $U(S)$, fôr possível obter uma constelação de sinais geometricamente uniforme no primeiro nível da tesselação, para este mesmo subgrupo será também possível obter constelações de sinais geometricamente uniformes nos outros níveis da tesselação. A pergunta que se faz agora é: suponhamos que para um certo subgrupo $U'(S)$, o quociente não induz partição em S em que seja possível formar constelação geometricamente uniforme com os pontos considerados no primeiro nível da tesselação, esta impossibilidade será também estendida para os outros níveis da tesselação?.

- Outra questão que surge seria: suponhamos que para um certo subgrupo normal em $U(S)$, o quociente $\frac{U(S)}{U'(S)}$ induz uma partição de S em que seja possível construir uma constelação de sinais geometricamente uniforme em vários níveis da tesselação, ou seja, se tanto no primeiro nível da tesselação como no segundo e demais níveis existir uma constelação geometricamente uniforme: será que considerando pontos destes vários níveis, obteremos outra constelação de sinais geometricamente uniforme?. A escolha de pontos de sinais para formar esta nova constelação pode ser mais geral do que considerar como pontos da nova constelação somente aqueles resultantes da união dos pontos de cada uma das constelações obtidas em cada um dos níveis considerados.
- Esta mesma questão é levantada novamente para o caso onde o quociente $\frac{U(S)}{U'(S)}$ não induz uma partição em S em que seja possível obter constelações geometricamente

uniformes nos níveis da tesselação. Então será possível ou não construir uma constelação de sinais geometricamente uniforme escolhendo pontos nestes níveis?.

Referências Bibliográficas

- [1] A.R. Calderbank and N.J.A.Sloane, “New trellis codes based on lattices and cosets,” IEEE Trans. Inform. Theory, vol. it-33, pp. 177-195, Jan.1987.
- [2] Beardon, A.F., The Geometry of Discrete Groups, New York, Springer, 1982.
- [3] Firby and Gardiner. Surface Topology, second edition.
- [4] Firer, M., Fuchsian Groups, Notas de Aula, IMECC-Unicamp,1992.
- [5] Forney, Jr.G.D., Geometricall Uniform Codes. IEEE Trans. Inf. Theory, v.37 no.5, p.1241-1260, Sep.1991.
- [6] Haykin, S. “Digital Communications”, New York, Wiley, 1988.
- [7] Herstein, I.N., Topics in Algebra, 2nd. Edition. New York, Wiley, 1975.
- [8] Katok, S., Fuchsian Groups, The University of Chicago Press, 1992.
- [9] Kosniowski, C., A First Course in Algebraic Topology, Cambridge University Pres, 1980.
- [10] Lazari, H., Uma Contribuição à Teoria dos Códigos Geometricamente Uniformes Hiperbólicos, Tese, FEEC-Unicamp, 2000.
- [11] Lima,E.L., Grupo Fundamental e Espaço de Recobrimento, Rio de Janeiro, IMPA, 1993.
- [12]. Magnus, W. Karras, A. Solitar D. “Combinatorial Group Theory”. New York, Interscience, 1966.
- [13] Massey. W.S., Algebraic Topology: An Introduction, Harcout, Brace & World,1967.
- [14] Ungerboeck, G., Channel Coding with Multilevel/Plase Signals, IEEE Trans. Inf. Theory vol. it-28, no. 1 p. 55-67, Jan 1982.