Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - FEEC

Tese de Doutorado

Área de Concentração:
Eletrônica e Comunicações

Identificação e Estrutura Algébrica das Superfícies Compactas com e sem Bordos, Provenientes de Mergulhos de Canais Discretos sem Memória

João de Deus Lima

Orientador : ***Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Jr.***

Campinas - SP
Março de 2002

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - FEEC
Departamento de Telemática - DT

Identificação e Estrutura Algébrica das Superfícies Compactas com e sem Bordos, Provenientes de Mergulhos de Canais Discretos sem Memória

João de Deus Lima

Orientador : ***Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Jr.***

Banca Examinadora:

Dr. Prof. Akebo Yamakamy - DT-FEEC-UNICAMP

Prof. Dr. Carlos Eduardo Câmara - D.Mat.-USF

Prof. Dr. José Adonai Pereira Seixas - D.Mat-UFAL

Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade - D.Mat-IBILCE-UNESP

Prof. Dr. Pácido Francisco de Assis Andrade - D.Mat-UFC

Tese de Doutourado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de **Doutor em Engenharia Elétrica**.

Campinas - SP
Março de 2002

With love and affection to my wife

Zuleica (Zu),

for her encouragement and understanding.

Com amor a minha mãe

Alzira,

Em memória aos meus pais

Antero Alves, Joaquim Conrado e Luzia

Em memória aos meus grandes amigos.

Sr.Vasconcelos e Fernando Serpa,

Agradecimentos

A Deus, pela imensa generosidade demonstrada durante todas as etapas difíceis desta longa jornada;

Em especial ao Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Jr., meu orientador de tese e amigo, pelo constante apoio ao trabalho realizado; o seu estímulo e atenção, foram motivos para seguir em frente na conquista de cada pequena etapa; a sua orientação direcionada aos objetivos, permitiu que eu não me afastasse do tema central, reconduzindo-me de volta ao caminho seguro, além disso, pelas valiosas discussões, amizade, paciência e atenção;

Aos professores da banca examinadora: Prof. Dr. Akebo Yamakami - DT-FEEC-UNICAMP, Prof. Dr. Carlos Eduardo Câmara - USF, Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade - IBILCE-UNESP, Prof. Dr. Placido Franciso de Assis Andrade - UFC, Prof. Dr. José Adonai Pereira Seixas - UFAL, este último também pelas valiosas discussões, correções dos textos matemáticos e pelo formato latex da tese;

Às famílias de Humberto Oriá, Edilson Oriá, Aluízio Oriá, Hélio Oriá, Edmilsom Oriá, Carrim Oriá, Terezinha Oriá, Iracy Oriá, Socorrinha, Geiza Mara, Da. Zefinha e Jaime pelo constante apoio e excelente convivência. Em particular, às famílias de Irapuã & Terezinha e de Everardo & Socorrinha pela consideração e tratamento requintado;

À família Espósito, Sr. Antônio & Da. Vilma, pela amizade, o carinho e apoio durante os últimos dois anos na cidade de Campinas;

Às famílias Givaldo & Auriene, Amauri & Regina e Vânio & Beti pelo carinho e amizade dedicado desde o mestrado;

Aos amigos que contribuíram de diversas formas: José Maírtom Barbosa, Marinaldo Felipe, Edsom Donizete de Carvalho, Raulison Alves Resende, Diogo Robbis, Rodrigues, Alessandro, Leonardo Biliotti e José Carlos Oliveira Lima;

À CAPES, pelo apoio financeiro durante os quatro anos de doutorado.

À Universidade Estadual do Rio Grande do Norte (UERN), pelo respaldo financeiro e apoio irrestrito durante todo o período de doutorado;

Aos professores do Departamento de Matemática e Estatística da FANAT-UERN, pela convivência amigável e apoio neste empreendimento.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo identificar as estruturas algébricas e geométricas associadas a canais discretos sem memória. O procedimento utilizado para alcançar tal objetivo consiste dos seguintes passos: através do grafo associado a um canal discreto sem memória, determinar o conjunto das superfícies no qual este grafo está mergulhado; estabelecer o conjunto das estruturas algébricas dessas superfícies através do primeiro grupo de homologia; e identificar as tesselações regulares que possam ser utilizadas no projeto de moduladores e quantizadores.

Abstract

The aim of this work is to identify the algebraic and geometric structures associated to discrete memoryless channels. The procedure employed to achieve this goal is based on the following steps: knowing the graph associated to discrete memoryless channel, 1) to determine the set of surfaces in which the graph is embedded; 2) to establish the set of algebraic structures inherited by the surfaces through the first homology group; and 3) to identify the regular tessellations which may be used in the design of modulators and quantizers.

Sumário

1 Introdução **1**
1.1 Descrição do Problema 5

2 Conceitos Básicos **9**
2.1 Modelo do Sistema de Comunicações 9
2.2 Conjunto de Sinais Geometricamente Uniforme 11
2.3 Conceitos de Topologia 12
2.3.1 Homotopia 13
2.3.2 Homotopia de caminhos 14
2.3.3 Grupo fundamental 15
2.4 Conceitos sobre Grafos 15
2.4.1 Árvore maximal e número ciclotomático 15
2.4.2 Cadeias e ciclos sobre um grafo orientado 16
2.4.3 Base de laços sobre um grafo orientado 17
2.4.4 Complexo simplicial orientado 18
2.5 Grupo Abeliano 19
2.6 Grupo Abeliano Livre e Finitamente Gerado 20
2.7 Grupo Quociente 21
2.8 Soma Direta 21
2.9 Presentação 22
2.10 Grupos de Homologia 22
2.10.1 Grupos de cadeias e homomorfismo de bordo 23
2.10.2 Definição do grupo de homologia de um complexo simplicial orientado $\mathfrak{K}$ 24

3 Considerações sobre Superfícies Compactas com e sem Bordos **25**
3.1 Superfícies Compactas com Bordos 25
3.2 O Polígono Associado às Variedades Compactas Conexas Bi-dimensionais . 27
3.2.1 Modelo plano de uma superfície compacta 27
3.2.2 Modelo plano de uma superfície compacta com bordo 29
3.2.3 Forma normal da esfera com r componentes de bordo. 29
3.2.4 Forma normal da soma conexa de m toros com r componentes de bordo 30
3.2.5 Forma normal da soma conexa de m planos projetivos com r componentes de bordo 31

3.2.6 Contagem dos vértices de um polígono de n-lados 31
3.2.7 Operações sobre uma palavra associada a uma superfície 32
3.2.8 Realização geométrica de uma superfície com bordo 35
3.2.9 Superfícies orientadas 36
3.2.10 Superfícies não-orientadas 37
3.2.11 Exemplos de superfícies compactas com bordos 39
3.2.12 Característica de Eüler de superfícies compactas 40
3.3 Conjunto das Superfícies Geradas por Polígonos 41
3.3.1 Definições 42
3.3.2 Conjunto das Superfícies geradas por polígonos com exatamente n lados 43
3.3.3 Cardinalidade do conjunto das superfícies geradas por polígonos com até n lados 49

4 Considerações sobre o Grupo de Homologia de Superfícies Compactas 55
4.1 Canal Discreto Sem Memória e Grupo de Homologia 56
4.2 Procedimento para o cálculo de $H_1(\Omega)$ 57
4.2.1 Algoritmo para o cálculo de $H_1(\Omega)$ 57
4.2.2 Exemplo de aplicação: Garrafa de Klein 58
4.3 Diagrama Triangular Central sobre uma Superfície 61
4.3.1 Relações do diagrama triangular central 64
4.4 Grupo de Homologia de Superfícies Compactas 66
4.4.1 Primeiro grupo de homologia de uma superfície 67
4.4.2 Conseqüências do Teorema 4.4.6 73

5 Mergulhos de Grafos Completos Biparticionados 77
5.1 Exemplos de Mergulhos de Grafos Completos Biparticionados 78
5.1.1 Definições, característica e gênero do grafo completo biparticionado 78
5.1.2 Polígono orientado na forma natural 80
5.1.3 Mergulhos mínimos dos grafos $K_{2,2}$, $K_{3,3}$ e $K_{4,4}$ 82
5.1.4 Construção do mergulho de um grafo sobre o modelo plano da superfície a partir do modelo espacial 84
5.1.5 Mergulho mínimo do grafo $K_{5,5}$ 84
5.1.6 Mergulho mínimo do grafo $K_{6,6}$ 87
5.1.7 Mergulho mínimo orientado do grafo $K_{7,7}$ 89
5.1.8 Exemplos de mergulhos não-orientados 91
5.2 Mergulhos de Grafos em Superfícies Compactas com Bordos 92
5.2.1 Definições e exemplos 93
5.2.2 Algoritmo para a construção de mergulhos de grafos em superfícies com um bordo 95
5.2.3 Exemplos de mergulhos em superfícies com uma componente de bordo do grafo $K_{4,4}$ 96
5.2.4 Mergulhos de grafos em superfícies com bordos 97
5.2.5 Mergulho mínimo do $K_{4,4}$ em superfície com bordos 97

5.2.6 Exemplo de um mergulho mínimo do grafo $K_{4,4}$ em superfície com bordos isolados . . . 99
5.3 Modelos das Regiões Oriundos de Mergulho de Grafos em Superfícies . . . 100
5.3.1 Característica e gênero do grafo completo biparticionado . . . 100
5.3.2 Conjunto das superfícies para o mergulho do grafo completo biparticionado . . . 101
5.3.3 Tipos de modelos de mergulhos de 2-células . . . 102
5.3.4 Modelos com α regiões . . . 104
5.3.5 Modelos com duas regiões . . . 105
5.3.6 Modelos com 4 regiões . . . 106
5.3.7 Seqüência dos tipos de modelos com quatro regiões . . . 107
5.3.8 Triângulo dos modelos com quatro regiões . . . 113
5.3.9 Cardinalidade do conjunto dos modelos com quatro regiões . . . 113
5.4 Conjunto dos Modelos Orientados de Mergulhos do Grafo $K_{3,3}$ . . . 117
5.4.1 Definições . . . 117
5.4.2 Transformação em um sistema de rotações . . . 118
5.4.3 Classes de equivalências do conjunto dos sistemas de rotações equivalentes de um grafo . . . 119
5.4.4 Ação de transformação de um sistema de rotação do grafo $K_{3,3}$ . . . 121
5.4.5 Teorema da partição . . . 122

6 Mergulhos de Canais Discretos sem Memória em Superfícies Compactas 125
6.1 Mergulho de Canais (DMC) em Superfícies Compactas . . . 126
6.1.1 Definições . . . 127
6.1.2 Mergulhos do canal binário simétrico . . . 128
6.1.3 Classe de canal ternário . . . 129
6.1.4 Classes de canais quaternários . . . 132
6.1.5 Classes de canais quinários . . . 136
6.1.6 Classes de canais 6-ários . . . 138
6.1.7 Classes de canais 7-ários . . . 140
6.1.8 Classes de canais 8-ários . . . 142
6.1.9 Classes de canais passíveis de generalizações . . . 143
6.1.10 Mergulhos de canais m-ários com valência 4 . . . 146
6.1.11 Mergulhos mínimos de canais $\mathfrak{C}_m[4]$ em superfícies não-orientadas . . . 149
6.1.12 Canais $\mathfrak{C}_{2,n}[n,2]$ . . . 150
6.1.13 Uma justificativa para o ganho de decodificação de canal com o uso do quantizador . . . 151
6.2 Canal DMC, Estruturas Algébricas e Tesselações Regulares . . . 153
6.2.1 Mergulhos de canais DMC e tesselações regulares . . . 158
6.2.2 Canais associados a grafos completos biparticionados . . . 162
6.2.3 Projetos de quantizadores para canais DMC . . . 164
6.3 Mergulhos de Canais Discretos Sem Memória em Superfícies Mínimas . . . 166
6.3.1 Superfícies mínimas: conceitos e definições . . . 167
6.3.2 Mergulho de canais sobre o n-nóide . . . 167
6.3.3 Mergulhos de canais sobre o toro com bordo . . . 173

7 Conclusões **177**
7.1 Propostas Para Futuros Trabalhos 178

Lista de Figuras

1.1 Diagrama de blocos de um sistema de comunicações 1
1.2 Canais discretos sem memória satisfazendo as condições (1) e (2) 2
1.3 Canal segundo a condição (1) com 4-níveis de quantização 3
1.4 Regiões de decisão ótimas para o ruído gaussiano aditivo: (a) os bordos de $\{I_i\}$ são perpendiculares e passam pelo ponto médio dos lados do triângulo dos sinais sempre que $P[m_0] = P[m_1] = P[m_2]$; (b) os bordos de $\{I_i\}$ são deslocados quando $P[m_1] > P[m_0] > P[m_2]$. 4
1.5 Constelações de sinais 16-PSK e 16-QAM 5
1.6 Quantizador de nível-8 para um canal binário com ruído gaussiano branco aditivo. ($p\,(111/s_0) \equiv p\,(\tbinom{s_0}{111})$ = probabilidade da saída do canal ser 111 dado que o sinal s_0 estava na entrada.) 6

2.1 Diagrama de blocos de um sistema de comunicação 9

3.1 Modelos planos das superfícies compactas básicas 27
3.2 Modelos planos das superfícies básicas orientadas com setas 28
3.3 Modelos planos de superfícies de gênero 2 28
3.4 Esfera com cinco componentes de bordo 30
3.5 $3T$ com cinco componentes de bordo 30
3.6 A soma conexa de 3 planos projetivos com cinco componentes de bordo . . 31
3.7 Contagem dos vértices de um polígono de n-lados 32
3.8 Introdução ou remoção de lados consecutivos no modelo plano 33
3.9 Comutatividade de seqüências envolvendo lados orientados 33
3.10 Comutatividade de seqüências envolvendo lados não-orientados 34
3.11 Realização geométrica do $4T_5$ 36
3.12 Construção geométrica da soma conexa de dois toros 38
3.13 Exemplos de superfícies compactas com bordos 40

4.1 Complexo simplicial orientado $\mathfrak{K}$ sobre a garrafa de Klein 59
4.2 Complexos simpliciais sobre o 5T 62
4.3 Diagrama triangular central sobre o $5T$ 63
4.4 Relações triviais sobre um diagrama triangular central 64
4.5 Diagramas triangulares centrais sobre S, S_1 e P 66
4.6 Diagramas triangulares centrais sobre $2T, S_3, 2T_3, 4P_3$ e $4P$ 69
4.7 Diagramas triangulares centrais sobre mT_r e mP_r 75
4.8 Diagrama triangular central sobre S_r associado a forma normal de Massey 75

5.1 Mergulhos mínimos dos grafos completos biparticionados $K_{2,2}$, $K_{3,3}$ e $K_{4,4}$, respectivamente 83
5.2 Mergulho mínimo e corte do mergulho do grafo $K_{5,5}$ no $3T$ 85
5.3 Modelo do mergulho mínimo do grafo completo biparticionado $K_{5,5}$ sobre o modelo plano na forma natural do $3T$ 86
5.4 Corte no modelo espacial de um mergulho mínimo do grafo $K_{6,6}$ 87
5.5 Mergulho mínimo do $K_{6,6}$ sobre o modelo plano na forma natural do $4T$. 88
5.6 Mergulho mínimo do grafo completo biparticionado $K_{7,7}$ 90
5.7 Mergulho mínimo do grafo $K_{7,7}$ sobre o modelo plano do $7T$ 91
5.8 Mergulhos mínimos não-orientados dos grafos $K_{2,2}, K_{3,3}$ e $K_{4,4}$ 92
5.9 Mergulhos mínimos orientados com bordos dos grafos $K_{2,2}, K_{3,3}$ e $K_{4,4}$ . . 94
5.10 Mergulhos mínimos orientados sem e com bordo do grafo $K_{3,3}$ sobre T_1 . . 95
5.11 Mergulhos mínimos com bordos do grafo $K_{4,4}$ 96
5.12 Mergulhos mínimos do grafo $K_{4,4}$ obtidos pela eliminação de duas regiões de $\mathfrak{F}_1$ 98
5.13 Condições para a existência de modelos com duas componentes de bordo . 99
5.14 Mergulho do grafo $K_{4,4}$ sobre T_2 e o correspondente mergulho em T 100
5.15 Permutação nos rótulos dos vértices de um sistema de rotações de $K_{3,3}$ . . 119
5.16 Modelos de mergulhos do $K_{3,3}$ cujos sistemas associados geram as classes laterais de $\mathfrak{S}(K_{3,3})$ 122

6.1 Mergulhos dos canais $\mathfrak{C}_2[1]$ e $\mathfrak{C}_2[(1,2),(2,1)]$ no plano e no catenóide . . . 129
6.2 Classe de canais $\mathfrak{C}_3[2]$ 131
6.3 Exemplos de mergulhos de canais $\mathfrak{C}_3$ na esfera S 132
6.4 Mergulho da classe de canais $\mathfrak{C}_4[3]$ na esfera S 135
6.5 Tipos de mergulhos de canais da classe $\mathfrak{C}_4[2]$ sobre a esfera S 136
6.6 Mergulhos mínimos de canais representantes das classes $\mathfrak{C}_5[3]$ e $\mathfrak{C}_5[4]$ 137
6.7 Mergulhos de canais representantes das classes $\mathfrak{C}_6[3]$ e $\mathfrak{C}_6[4]$, respectivamente 139
6.8 Mergulho não-orientado do canal $\mathfrak{C}_6[4]$ em $K(12)$. 139
6.9 Mergulho mínimo orientado da classe de canais $\mathfrak{C}_6[4]$ sobre o toro 140
6.10 Mergulho mínimo de um canal representante da classe $\mathfrak{C}_7[3]$ 141
6.11 Mergulho mínimo orientado da classe de canais $\mathfrak{C}_7[4]$ sobre o bitoro 141
6.12 Mergulhos mínimos dos canais $\mathfrak{C}_8[3]$ e $\mathfrak{C}_8[4]$ 143
6.13 Mergulho mínimo da classe $\mathfrak{C}_8[4]$ sobre a garrafa de Klein 144
6.14 Mergulho das classes de canais $\mathfrak{C}_m[3]$ 146
6.15 Mergulho mínimo orientado de $\mathfrak{C}_9[4]$ no bitoro 147
6.16 Mergulho de $\mathfrak{C}_{9+6k}[4]$ sobre $2T$ com implemento de 2 filas 148
6.17 Mergulho da classe $\mathfrak{C}_{pk}[4]$ cobre a garrafa de Klein K 150
6.18 Quantizadores de 4-níveis e 2-níveis 151
6.19 Quantizador de nível-8 para um canal binário com ruido gaussiano branco aditivo 152
6.20 Canal discreto sem memória $\mathfrak{C}_{2,8}[8,2]$ relativo ao quantizador de 8-níveis . 152
6.21 Cardinalidades dos conjuntos das superfícies e das estruturas algébricas de uma classe de canal $\mathfrak{C}_m[p]$ 158
6.22 Tesselações regulares com km regiões, $k \geq 1$, da classe de canais $\mathfrak{C}_m[p]$ . . . 164

6.23 Canal 3-totem mergulhado no catenóide 168
6.24 Canal 5-totem mergulhado no trinóide 169
6.25 Sub-classes de canais em $\mathfrak{C}_m[3]$ típica do catenóide e do trinóide 171
6.26 Canal 8-totem mergulhado no 4-nóide 172
6.27 Mergulho do canal $\mathfrak{C}_6[4]$ sobre T_3 174
6.28 Mergulho do canal $\mathfrak{C}_{10}[4]$ sobre T_5 175

7.1 Triangulação sobre o modelo plano de K, construída a partir do mergulho do grafo $K_{4,4}$ sobre K 179

Lista de Tabelas

3.1 Forma normal das palavras das superfícies básicas 29
3.2 Característica de Euler das superfícies do conjunto M_{14} 41
3.3 Subconjuntos das superfícies geradas pelos polígonos com exatamente n lados 51
3.4 Cardinalidade dos subconjuntos de superfícies em N_n e em M_n 53

4.1 Matriz $M(S_r)$ da presentação $\mathfrak{P}_{S_r}$ de $H_1(S_r)$ 70
4.2 Matriz $M(mP)$ da presentação $\mathfrak{P}_{mP}$ de $H_1(mP)$ 70
4.3 Matriz $M(mT)$ da presentação $\mathfrak{P}_{mT}$ de $H_1(mT)$ 71
4.4 Matriz $M(mT_r)$ da presentação $\mathfrak{P}_{mT_r}$ de $H_1(mT_r)$ 71
4.5 Matriz $M(mP_r)$ da presentação $\mathfrak{P}_{mP_r}$ de $H_1(mP_r)$ 72
4.6 Primeiro grupo de homologia de uma superfície 76

5.1 Sistemas de rotações e modelos dos mergulhos dos grafos $K_{2,2}, K_{3,3}$ e $K_{4,4}$ 83
5.2 Sistemas de rotações e modelos dos mergulhos não-orientado dos grafos $K_{2,2}, K_{3,3}$ e $K_{4,4}$ 92
5.3 Triângulo dos modelos de mergulhos de $K_{n,n}$ com quatro regiões 113
5.4 Outro arranjo para o triângulo dos modelos 115
5.5 Número de modelos com quatro regiões de mergulhos orientados do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$, $m \in \{2, 4, \cdots, 18\}$ e $n \in \{4, 6, \cdots, 20\}$ . . . 116
5.6 Conjunto dos sistemas de rotações do grafo $K_{3,3}$ 121

6.1 Número de elementos das classes de canais em C_4 134
6.2 Estruturas algébricas das classes de canais 154
6.3 Tesselações regulares associadas às classes de canais 160
6.4 Tesselações regulares para projetos de quantizadores 165
6.5 Composição dos mergulhos dos canais alfa-totens na família n-nóide 171
6.6 Mergulho de uma sub-classe de canais de ordem 3 sobre a família n-nóide . 173
6.7 Mergulho de um subclasse de canal de ordem 4 sobre a família do toro . . 176

Lista dos Principais Símbolos

Simbologia	**Significado do Símbolo**	**Número da Página**
$\mathfrak{R}_i^{ab}$:	a e b ações no i-ésimo sistema de rotações de $K_{3,3}$	121
$\{m_i\}$:	alfabeto do código	1
f :	aplicação	13
$A \xrightarrow{f} B$:	aplicação f de A em B	20
$\mathcal{T}$:	árvore maximal	16,58
$\mathfrak{X}$:	árvore maximal sobre $\mathfrak{T}$	16, 58, 61
$a_t R_k$	a_t regiões com k lados	82
$\partial(R^i)$:	bordo da região R^i	97
$\partial(\Omega_r)$:	bordo da superfície Ω_r	
$\partial(I)$:	bordo do intervalo I	15**??**
∂e :	bordo do lado e	17
$\partial\sigma$:	bordo do simplexo σ	19
$\partial(t^i)$:	bordo do 2-simplexo t^i	59
γ :	caminho correspondente às curvas de homologias	84
$\mathfrak{C}$:	canal discreto sem memória	130
$\mathcal{C}$:	capacidade de canal	10
$\chi(\Omega)$:	característica de Eüler-Poicaré de Ω	40, 79
$\beta(G)$:	característica não-orientada do mergulho de G	80
$\gamma(G)$:	característica orientada do mergulho de G	79
$\#(A)$ ou $\|A\|$:	cardinalidade do conjunto A	43
$2N$:	catenóide	168
$\mathfrak{C} \hookrightarrow \Omega, \Omega \hookleftarrow \mathfrak{C}$:	$\mathfrak{C}$ está mergulhado em Ω	129, 145
$\top$:	ciclo (024) de $\mathsf{S_3}$	121
$\perp$:	ciclo (042) de $\mathsf{S_3}$	121
$\dashv$:	ciclo (135) de $\mathsf{S_3}$	121
$\vdash$:	ciclo (153) de $\mathsf{S_3}$	121
$\mathfrak{C}_m$:	classe de canais m-ária	134

$\mathfrak{C}_m[p]$: classe de canais m-ário com valência p 127

$\mathfrak{C}_{m,n}[p,q]$: classe de canais m,n-ários com vlências p e q 127, 162

$\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q], \mathfrak{C}_Q^P$: classe de canais m,n-ários com valências P e Q 126

$\bar{b}$: classe lateral de b 21

$\mathbb{C}$: código de classes laterais 11

$\mathfrak{K}$: complexo simplicial orientado 19, 61, 58

$\Omega(\alpha)$: composição de Ω por α regiões do mergulho de G 82

$\mathbb{H}_{m,n}$: conjunto das estruturas algébricas de $\mathfrak{C}_{m,n}$ 155

$\mathbb{H}(\Xi_m^p)$: conjunto das estruturas algébricas de Ξ_m^p 161

$C_i(G)$: conjunto da i-cadeias de G 17

S_3 : conjunto das permutações de ordem 3 118

$\{I_i\}$: conjunto das regiões de decisões dos sinais s_i's 3

$\mathrm{Reg}\, G$: conjunto das regiões do mergulho de G 82

$\mathbb{M}$: conjunto das superfícies compactas 26,42,101

$\overline{C}$: conjunto das superfícies compactas com bordos 42

N_n : conjunto das superfícies geradas por polígonos de n-lados 42

M_n : conjunto das superfícies geradas por polígonos de t-lados, $t \leq n$ ... 42

$\widetilde{O}$: conjunto das superfícies não-orientadas 42

$\overline{C}\widetilde{O}$: conjunto das superfícies não-orientadas com bordos 42

$\mathbb{S}_m^p(\widetilde{O})$: conjunto das superfícies não-orientadas de mergulhos de $\mathfrak{C}_m[p]$ ... 130

$C\widetilde{O}$: conjunto das superfícies não-orientadas sem bordos 42

O : conjunto das superfícies orientadas 42

$\overline{C}O$: conjunto das superfícies orientadas com bordos 42

$\mathbb{M}_{mn}$: conjunto das superfícies orientadas para o mergulho de $K_{m,n}$ 101

$\mathbb{S}_m^p(O)$: conjunto das superfícies orientadas para o mergulho de $\mathfrak{C}_m[p]$ 130

CO : conjunto das superfícies orientadas sem bordos 42

$\mathbb{S}$: conjunto das superfícies para o mergulho da classe $\mathfrak{C}$ 130

$\mathbb{S}_m$: conjunto das superfícies para o mergulho da classe $\mathfrak{C}_m$ 128

$\mathbb{S}_m^p$: conjunto das superfícies para o mergulho da classe $\mathfrak{C}_m[p]$ 130

$\mathbb{S}_{m,n}$: conjunto das superfícies para o mergulho da classe $\mathfrak{C}_{m,n}$ 154

C : conjunto das superfícies sem bordos 42

Ξ_m^p : conjunto das tesselações regulares de $\mathfrak{C}_m[p]$ com m regiões 161

$\Xi_{m,n}$: conjunto das tesselações regulares de $\mathfrak{C}_{m,n}$ com m regiões 155

$VL(\mathfrak{P}_\Omega)$: conjunto das variáveis livres de $\mathfrak{P}_\Omega$ 72

$\langle\Omega(\alpha)\rangle$: conjunto dos mergulhos gerados por $\Omega(\alpha)$ 130

$\{\langle\Omega(\alpha_i)\rangle\}_{i=0}^k$: conjunto dos mergulhos gerados por $\langle\Omega(\alpha)\rangle$ 133

$L_i(\Omega)$:	conjunto dos i-simplexes em $\mathfrak{T}$	65
$\mathfrak{I}_j$:	conjunto dos índices da j-ésima região de um modelo	107
$\mathfrak{I}_j^{\mu}$:	conjunto dos índices da.j-ésima região relativos a i_μ	107
$\mathfrak{M}_\alpha$:	conjunto dos modelos com.α regiões	104
$\mathfrak{M}_\alpha(G)$:	conjunto dos modelos com α regiões dos mergulhos de G	115
$\mathfrak{M}_\alpha(k)$:	conjunto dos modelos com α regiões que fixam R_k	106
$\mathfrak{M}$:	conjunto dos modelos dos mergulhos de G	101
$\mathfrak{M}_\alpha(\mu,\eta)$:	conjunto dos modelos dos mergulhos de G que fixam R_μ e R_η	109
$\mathbb{Z}_+$:	conjunto dos números inteiros positivos	49
$\mathbb{R}$:	conjunto dos números reais	13
$\mathbb{P}$:	conjunto dos polígonos orientados	42
$\{s_i(t)\}$:	conjunto dos sinais	3
$\langle\mathfrak{R}\rangle$:	conjunto dos sistemas de rotações com mesmo modelo	122
$\mathrm{Rot}\,G$:	conjunto dos sistemas de rotações de G	82
$\mathfrak{S}(G)$:	conjunto dos sistemas de rotações de G	118
$\mathfrak{S}(G)/\mathfrak{R}$:	conjunto dos sistemas de rotações com modelos de $G(\mathfrak{R})$	119
$\mathfrak{V}_\Omega$:	conjunto solução do sistema $\mathfrak{P}_\Omega$	70
V :	conjunto dos vértices de G	15,117
$\varnothing$:	conjunto vazio	12
$\mathfrak{T}$:	diagrama triangular central	61, 63, 64
$\dim\mathfrak{K}$:	dimensão de $\mathfrak{K}$	22
$d_{\mathfrak{P}_\Omega}, \dim\mathfrak{P}_\Omega$:	dimensão do espaço solução do $\mathfrak{P}_\Omega$	69,58
$d(x,y)$:	distância de x a y	13
S :	esfera	28
S_r :	esfera com r componentes de bordo	35
S^n :	esfera n-dimensional	14
$\mathbb{R}^N$:	espaço euclidiano N-dimensional	11,18
$\mathcal{S}$:	espaço de sinais	3
(X,Υ) :	espaço topológico	12
δ_i :	fator de torção	68
$\mathfrak{F}_{i_k}$:	$\mathfrak{F}_i - R^k$	99
$\mathfrak{F}_i$:	$\mathfrak{F}_{mn} - R^i$	95
$\mathfrak{F}_{ij}$:	$\mathfrak{F}_{mn} - (R^i \cup R^j)$	97
$\omega(\Omega)$:	forma mínima de Ω	34
$\widetilde{\omega}(\Omega)$:	forma natural de Ω	81
K :	garrafa de Klein	28,58

$\gamma_m(K_{m,n})$: gênero mínimo orientado de $K_{m,n}$ 100,130
$\gamma_M(K_{m,n})$: gênero máximo orientado de $K_{m,n}$ 100,130
$\bar{\gamma}(K_{m,n})$: gênero mínimo não-orientado de $K_{m,n}$ 127
$g(G)$: gênero orientado do mergulho mínimo de G 79
$G \hookrightarrow \Omega$: G está mergulhado em Ω 93
G : grafo 15
(V, L) : grafo abstrato 15,57
$K_{m,n}$: grafo completo biparticionado 79
$\mathbb{Z}_2$: grupo aditivo binário $\{0, 1\}$ 72
$\mathbb{Z}_k$: grupo das classes dos inteiros resto módulo k 20,68
$\Gamma(\mathcal{S})$: grupo de simetrias 11
$Z_1(G)$: grupo dos 1-ciclos sobre G 17
$U(\mathcal{S})$: grupo gerador do grupo de simetrias 11
B/A : grupo quociente de B por A 21,61
∂ : homomorfismo de bordo 17
$\mathcal{H}$: homotopia 13
id_X : identidade de X 14
F_k^i, R_k^i : i-ésima face com k lados 82
$F_k^i(j)$: i-ésima face de k-lados que fixa R_j 106
$\mathfrak{F}_\alpha^i(k)$: i-ésimo modelo de $\mathfrak{F}_\alpha(k)$ 106
$\mathfrak{F}_{mn}^i$: i-ésimo modelo dos mergulhos de $K_{m,n}$ 105
R^i : i-ésima região de um modelo 82
e^i : i-ésimo 1-simplexo de $\mathfrak{K}$ 15,107,58
t^i : i-ésimo 2-simplexo de $\mathfrak{K}$ 15
v^i : i-ésimo vértice de $\mathfrak{K}$ 15
$\operatorname{Im}\partial_p$: imagem do p-ésimo homomorfismo de bordo 24
$B_p, B_p(\mathfrak{K})$: imagem do p-ésimo homomorfismo de bordo 61
$\operatorname{Int} R^i$: interior da i-ésima região R^i 82
$\operatorname{Int}\sigma$: interior do simplexo σ 19
I : intervalo unitário da reta 14
u : isometria 11
$K_{m,n} \hookrightarrow \Omega$: $K_{m,n}$ está mergulhado em Ω 82
kR_i : k regiões com i lados 82
l^i : laço sobre $\mathcal{T} + e$ 17
$\{v, w\}$: lado com extremos v e w 15
$[a]$: maior inteiro $\leq a$ 79,100

$\{a\}$: maior inteiro $\geq a$ 100
$M(\Omega)$: matriz associada a $\mathfrak{P}_\Omega$ 70,71,72
$i_{j\max}$: máximo de I_j 107
$i^s_{j\max}$: máximo de I_j relativo a i_s 107
$i^{\mu,\eta}_{j\max}$: máximo de I_j relativos a i_μ e i_η 107
$i_{j\min}$: mínimo de I_j 107
$i^{\mu}_{j\min}$: mínimo de I_j relativo a i_μ 107
$i^{\mu,\eta}_{j\min}$: mínimo de i_j relativos a i_μ e i_η 107
$\mathfrak{F}_{mn}$: modelo do mergulho de $K_{m,n}$ 82
$G(\mathfrak{R})$: modelo do mergulho de G provido de $\mathfrak{R}$ 119
$\Omega(\alpha)$: modelo sobre Ω com α regiões 82,128
nN : n-nóide 167
Q : nível do quantizador 10,151
$\ker \partial_p$: núcleo do $(p-1)$-ésimo homomorfismo de bordo 24
$Z_p, Z_p(\mathfrak{K})$: núcleo do $(p-1)$-ésimo homomorfismo de bordo 61,58
$\mu(G)$: número ciclotomático de G 16,61
F : número das faces de um mergulho 79
$\alpha_i(\mathfrak{K})$: número das i-cadeias de $\mathfrak{K}$ 61
E : número de lados de um mergulho 79
$|\mathfrak{F}_{mn}|$: número de modelos do mergulho de $K_{m,n}$ 101
$|\overline{\mathfrak{F}}_{mn}|$: número de modelos com bordos de $\mathfrak{F}_{mn}$ 93
$|R|$: número de raios de $\mathfrak{T}$ 65
$|E_i|$: número de relações triviais E_i's em $\mathcal{P}$ 65
$|\,\mathrm{Rot}\,|$: número de sistemas rotações de $K_{n,n}$ 117
$\mathrm{var}\,\mathfrak{P}_\Omega$: número de variáreis de $\mathfrak{P}_\Omega$ 68,75
V : número de vértice de um grafo 79
ω : palavra associada a um polígono orientado 26
$\mathcal{S}/\mathcal{S}'$: partição geometricamente uniforme 11
$C_{p,q}$: p elementos combinados q a q 134
$DP(s)$: perfil de distância global de s 12
P : permutação agindo em $\mathfrak{R}$ 118
P_{ij} : permutação dos vértices i e j de $\mathfrak{F}_{mn}$ 119
$C_p(\mathfrak{K})$: p-ésimo grupo de cadeias 23
∂_p : p-ésimo homomorfismo de bordo 24
$H_p(\mathfrak{K})$: p-ésimo grupo de homologia 22
P : plano projetivo 28

n-lados: polígono orientados de n-lados 35
posto M: posto da matriz de M 68
$\mathcal{P}$: presentação de $H_1(\Omega)$ 58
$\mathfrak{P}_\Omega$: presentação do tipo E_3 ..... 71, 72
$H_1(\Omega)$: primeiro grupo de homologia de Ω 57,154,161
$p[m_i]$: probabilidade a priori de m_i 2
p_{yx}: probabilidade condicional de y dado x 4
$p(y/x)$: probabilidade condicional de y dado x 127
$p_{yx,z}$: probabilidade condicional de yx dado z 152
p_c: probabilidade de acerto 151
$p_e, p[\epsilon]$: probabilidade de erro 151
$p_x^{(s_i)}$: probabilidade do sinal s_i pertencer a região x 151
$X \times Y$: produto cartesiano de X com Y 13
π: projeção natural 21
B/A: quociente de B por A 21,61
r: raios de $\mathfrak{T}$ 63
R_i: região com i lados 106
I_i: região de decisão do sinal s_i 3
$R_V(s)$ região de Voronoi de s 12
$\widetilde{R}$: região diferente de uma 2-células 145
$\circ$: relação de composição 14
$\sim$: relação de equivalência 14
$\equiv$: relação de homeomorfismo 28
$\cong$: relação de isomorfismo 13,20
$f|_U$: restrição da aplicação f ao conjunto U 20
$\mathfrak{R}_i^{ab}$: $\mathfrak{R}_i$ sofreu a ações em A e b ações em B 121
$n_\omega(t)$: ruido gaussiano branco aditivo 10
$[x, y]$: segmento com extremos x e y 127
$\partial_2(t^i)$: segundo homomorfismo de bordo 28
$S_t(\mu)$: seqüência dos modelos que fixam R_μ 107
$S_t(\mu, \eta)$: seqüência dos modelos que fixam R_μ e R_η 109
σ: simplexe 18
s_i: sinal de transmissão 151
E_Ω: sistema associado a presentação $\mathcal{P}$ 74
E_i^Ω: sistema das relações E_i's de Ω 68
E_i: sistema das relações triviais com i termos 58, 62, 63, 64

$\mathfrak{R}$: sistema de rotações 118
P_i : sistema de rotações do vértice i 80
$\mathfrak{R}_0$: sistema referencial básico 121
mP_r : soma conexa de m planos projetivos cor r bordos 31
mT_r : soma conexa de m toros com r bordos 30
$m\Omega$: soma conexa de m superfícies iguais a Ω 26
$m\Omega_r$: soma conexa de m superfícies iguais a Ω com r bordos 61
$\Omega_1\Omega_2$: soma conexa de Ω_1 e Ω_2 21
$\oplus$: soma direta 72, 157
$\mathbb{Z}^m$: soma direta de m grupos aditivos $\mathbb{Z}$ 72,157
$T + e^i$: subgrafo de T anexando o lado e^i 17
$S_t^0(\mu)$: subseqüência dos termos ímpares de $S_t(\mu)$ 110
$S_t^0(\mu)$: subseqüência dos termos pares de $S_t(\mu)$ 110
Ω : superfície compacta 29,26,57
$\overline{\Omega}$: superfície compacta com bordos 29
Ω_r : superfície compacta com r bordos 26
$\Omega_r(\alpha)$: superfícies com r bordos modelada com α regiões 98
$\mathcal{R}$: taxa de transmissão 10
Υ : topologia 12
T : toro 10
∇ : triângulo de modelos com quatro regiões 113
$\Omega[mR_s]$: tesselação regular com m regiões de s lados sobre Ω 159
$\Omega[mR_s]^{[k]}$: tesselação regular sobre Ω com tm regiões de s lados 165
$\operatorname{val} v$: valência do vértice v 117
$k_{\max}$: valor máximo do inteiro k 43
z^i : 1-ciclo associado ao laço l^i 17,58,68

Capítulo 1

Introdução

Antes de apresentarmos o problema que será analisado neste trabalho iremos considerar o modelo tradicional em diagrama de blocos do sistema de comunicações, mostrado na Figura 1.1.

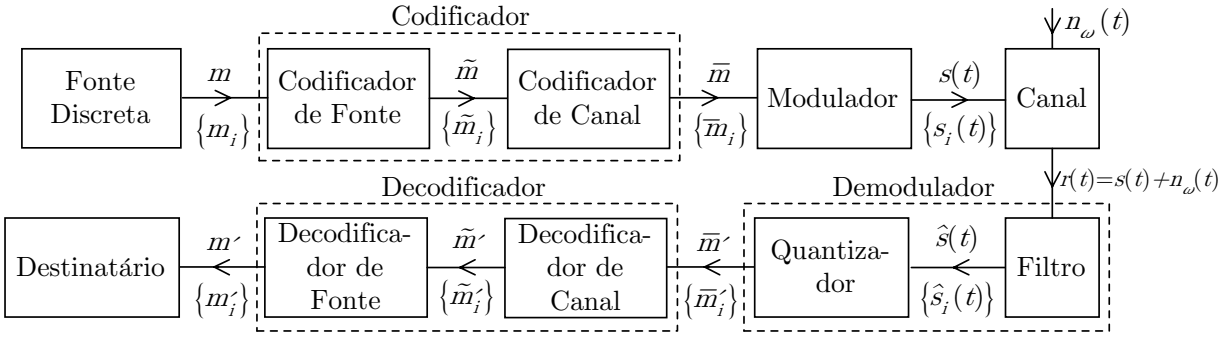

Figura 1.1: Diagrama de blocos de um sistema de comunicações

O sistema de comunicações da Figura 1.1 conecta uma fonte discreta a um destinatário.

Neste sistema, assume-se que a seqüência $m = (m_1, m_2, \cdots, m_N)$ de símbolos da fonte $\mathcal{S}$ é tal que cada m_i é selecionado aleatoriamente dentre os possíveis elementos do conjunto $\mathcal{S}$. Sem dúvida m sofre algumas transformações antes de ser enviada ao canal. O *codificador de fonte* tem como objetivo representar a mensagem na forma mais compacta, retirando redundância, transformando-a em *palavras-código fonte*. Por outro lado, o *codificador de canal* introduz redundância transformando-a em seqüências denominadas *palavras-código*; e o *modulador* converte cada símbolo da palavra-código em um sinal analógico. Como estamos considerando o canal discreto, o *quantizador* usado na saída do *demodulador*, tem como tarefa transformar um sinal analógico em um símbolo discreto. Este procedimento melhora o desempenho do sistema à medida que o nível Q do quantizador aumenta.

No diagrama de blocos do sistema de comunicações da Figura 1.1, podemos considerar duas maneiras de enviar a mensagem da fonte:

(1) cada dígito na saída da fonte será enviado um após o outro;

(2) N dígitos na saída da fonte são agrupados formando a seqüência m e esta é enviada.

As condições (1) , (2), mais o número de níveis do quantizador e a condição do canal ser sem memória são os elementos que definem a representação gráfica do canal discreto sem memória. O termo sem memória atribuído ao canal, significa, no caso (1) , que nenhum dígito depende estatisticamente dos dígitos enviados anteriormente; no caso (2) , significa que nenhuma seqüência m enviada depende estatisticamente de qualquer outra seqüência m' enviada anteriormente.

Supondo que a seqüência m é composta por quatro dígitos binários, então a representação gráfica do canal discreto sem memória terá uma das formas mostradas na Figura 1.2 (a). Sob a condição (1), cada dígito binário "*enxerga*" o canal como sendo binário na entrada e saída (canal BSC), como mostrada na Figura 1.2 (a). Sob a condição (2) cada seqüência m de quatro dígitos binários "*enxerga*" o canal como sendo 16-ário na entrada e saída, como mostra a Figura 1.2 (b).

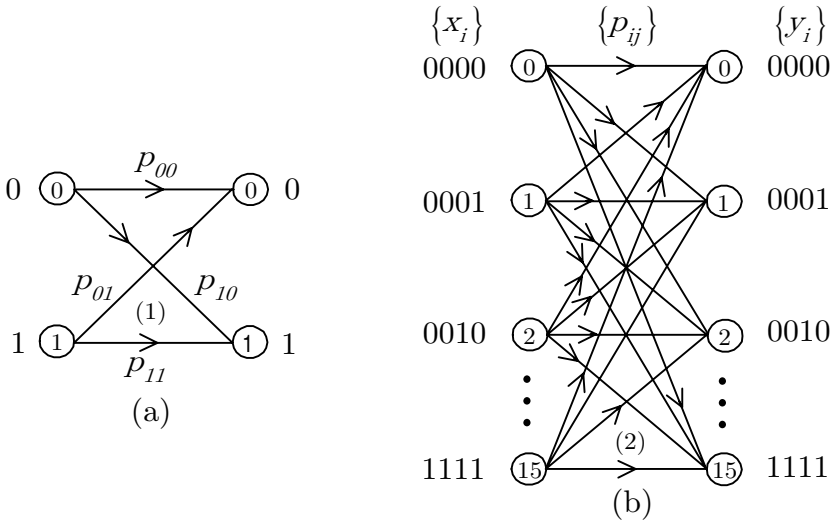

Figura 1.2: Canais discretos sem memória satisfazendo as condições (1) e (2)

Note na Figura 1.2 que muitos canais apresentam o mesmo número de elementos na entrada e na saída. Todavia, é possível "*refinar*" tais canais pela introdução de um quantizador na saída do demodulador.

Sob a condição (1) mais a hipótese de que o quantizador é de 4-níveis, o canal BSC mostrado na Figura 1.2 é identificado como o canal binário na entrada e 4-ário na saída como ilustra a Figura 1.3.

Além das representações gráficas do canais mostradas nas Figuras 1.2 e 1.3, estamos interessados na obtenção das propriedades geométricas/topológicas inerentes a este procedimento. Tais propriedades estão relacionadas com o objetivo de estabelecer uma forma de processar o sinal recebido $r(t)$, de modo a produzir uma estimativa ótima $\widehat{m}$, do sinal transmitido m, no sentido de que a probabilidade de erro $P[\varepsilon] = P[\widehat{m} \neq m]$ seja mínima. Este procedimento está diretamente relacionado com a determinação do receptor ótimo. Como resultado decorrente deste procedimento, o espaço de sinais deve ser particionado em um conjunto de M *regiões de decisão* $\{I_i\}$, ou *regiões de Voronoi*, onde cada região está associada a um sinal s_i. Cada I_i consiste do conjunto de todos os pontos ρ do espaço

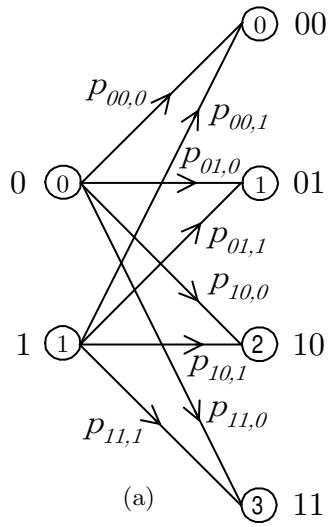

Figura 1.3: Canal segundo a condição (1) com 4-níveis de quantização

que estão mais próximos de s_i do que de qualquer outro ponto s_k, $i \neq k$.

O sinal analógico $s_i(t)$ é visto como um ponto no espaço euclidiano N-dimensional. Por exemplo, se o conjunto de sinais $\{s_i\}$ tem três elementos e os sinais modulados têm a seguinte associação: $s_1(t) = (1,3)$, $s_2(t) = (3,0)$ e $s_3(t) = (-1,4)$, então o espaço de sinais, pode ter as partições mostradas na Figura 1.4.

O receptor ótimo sob a hipótese de que as mensagens são igualmente prováveis é denominado *receptor de máxima verossimilhança*. Neste caso, quando o ruído é gaussiano branco aditivo, as regiões de Voronoi são como na Figura 1.4 (a). Neste processo, a tomada de decisão correta no receptor ocorre quando o sinal transmitido mais o ruído $s_i + n$ pertence a região I_i, caso contrário, ocorrerá um erro na tomada de decisão. Para se medir este evento em termos de probabilidades, coloca-se uma gaussiana sobre o sinal, isto é, a média da gaussiana é igual a s_i como ponto do $\mathbb{R}^N$ e, assim, o volume definido pela interseção da gaussiana com a região I_i será a probabilidade de acerto $p_c(s_i)$, e $1 - p_c(s_i)$ será a probabilidade de erro p_e em relação a s_i. Mas a translação simultânea desses elementos, sinal s_i, região I_i e gaussiana com média s_i, através do espaço de sinais, não afeta o cálculo das probabilidades $p_c(s_i)$ ou $p_e(s_i)$. Esta propriedade é freqüentemente utilizada para particionar o espaço de sinais em regiões $\{I_i\}$. Deste particionamento define-se, para cada região I_i, uma região poligonal I_i' limitada, tendo o sinal s_i como o baricentro dessa região. Em seguida, as regiões $\{I_i'\}$ são transladadas sobre o plano de tal maneira que a interseção entre duas regiões seja um lado, um vértice ou o vazio. Se este procedimento recobre inteiramente o plano, dizemos que o recobrimento é uma *tesselação do plano.* A tesselação do plano efetuada por regiões idênticas é denominada de *tesselação regular* e, por serem as mais simples, estas serão, provavelmente, as primeiras a serem utilizadas nos processos de comunicações. Daqui em diante estamos considerando apenas as tesselações regulares.

No processo de tesselação do plano, cada sinal s_i é associado a um conjunto infinito de pontos do plano, denominado de *classe de* s_i. Suponha que S é o conjunto cujos objetos

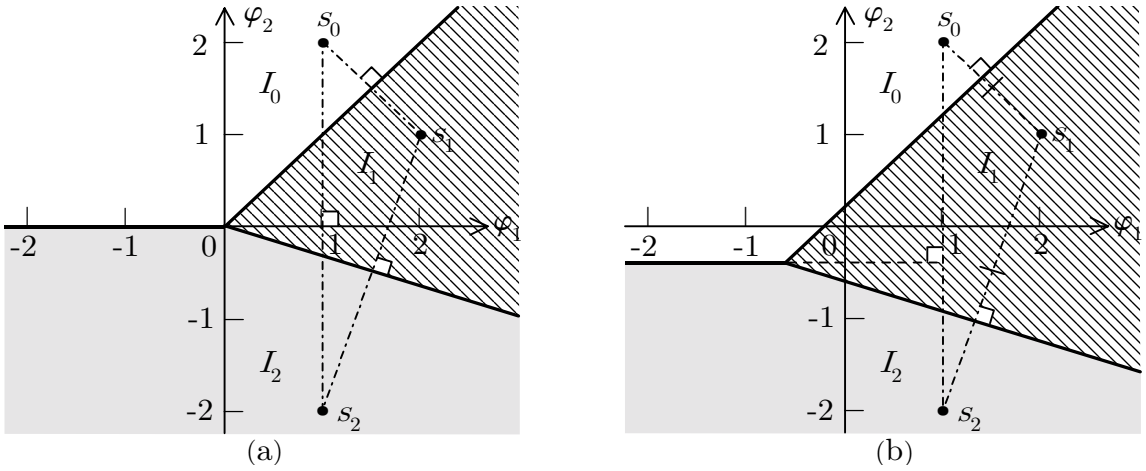

Figura 1.4: Regiões de decisão ótimas para o ruído gaussiano aditivo: (a) os bordos de $\{I_i\}$ são perpendiculares e passam pelo ponto médio dos lados do triângulo dos sinais sempre que $P[m_0] = P[m_1] = P[m_2]$; (b) os bordos de $\{I_i\}$ são deslocados quando $P[m_1] > P[m_0] > P[m_2]$.

são as classes de s_i. Segundo [11], o próximo objetivo é determinar o *grupo de simetrias,* $\Gamma(S)$, que age transitivamente em S, isto é, um grupo de *isometrias* $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ que deixa S invariante, ou seja, $u(S) = S$, para todo $u \in \Gamma(S)$. O grupo de simetrias $\Gamma(S)$ sobre S é transitivo se, e somente se, S é um *conjunto de sinais geometricamente uniformes*; ou, se a *órbita* de um ponto $s_0 \in S$ sob $\Gamma(S)$ é S. Em geral, o grupo de simetrias $\Gamma(S)$ de um conjunto de sinais geometricamente uniformes S apresenta mais geradores do que o necessário para gerar S. Neste caso, procura-se identificar um *grupo gerador* $U(S)$ de S dentre os subgrupos de $\Gamma(S)$, que é minimal dentre aqueles que geram S, a partir de um ponto inicial $s_0 \in S$. Ou seja, se $U(S)$ é um grupo gerador de S, e $s_0 \in S$, então S é a órbita de s_0 sob $U(S)$, $S = \{u(s_0), u \in U(s)\}$. Assumiremos que a aplicação $m : U(S) \to S$ é biunívoca. Os elementos de $U(S)$ são usados em sistemas de comunicações como o alfabeto do código. Certamente, $U(S)$ não é ainda o código. Este será formado por seqüências dos elementos de $U(S)$ da seguinte forma: identifica-se um subgrupo normal U' de $U(S)$ e efetua-se uma partição S/S'em S. Como S é geometricamente uniforme, S/S' é uma *partição geometricamete uniforme*. Os elementos da partição são os subconjuntos de S que correspondem as classes laterais de U' em $U(S)$. Identifica-se um grupo G isomorfo a $U(S)/U'$ e rotula-se os pontos de S com elementos de G através do *rotulamento isométrico* $m : G \to S/S'$, induzido pelo isomorfismo entre G e $U(S)/S$.

Considere um grupo (alfabeto) G, um conjunto de índices I, um código C (subgrupo do espaço de rótulos G^I), uma partição geometricamente uniforme S/S' e um rotulamento $\underline{m} : G^I \to (S/S')$ (extensão do rotulamento isométrico $m : G \to S/S'$). Então um código de classes generalizado, denotado por $\mathbb{C}(S/S'; C)$, é a união disjunta

$$\mathbb{C}(S/S'; C) = \bigcup_{\underline{c} \in C} \underline{m}(\underline{c})$$

do conjunto de seqüências de subconjunto $\underline{m}(\underline{c}) = \{m(c_k), k \in I\}$, $\underline{c} \in C$, isto é, $\underline{m}(\underline{c})$ é a

seqüência de subconjuntos selecionados pela seqüência de rótulos $\underline{c} \in C$ via o mapeamento de rótulos m.

Os objetivos deste trabalho estão fundamentados no processo da identificação do alfabeto do código e, conseqüentemente, com a determinação de códigos. Enfatizamos a questão das tesselações regulares porque elas estão relacionadas aos *conjuntos de sinais geometricamente uniformes*, constelações priorizadas nos processos de comunicações.

No nosso caso, o grupo de homologia $H_1(\Omega)$ da superfície Ω, aqui também associada ao canal discreto sem memória assumirá o papel do grupo de simetrias $\Gamma(S)$. É ele que irá agir transitivamente no conjunto de sinais S. É mais fácil obtê-lo do que o grupo de simetrias. Além do mais, a identificação das tesselações regulares com m regiões sobre a superfície Ω pode ser usada para identificar o subgrupo do grupo de homologia que será utilizado como o alfabeto do código. Para isto, basta identificar o subgrupo do grupo $H_1(\Omega)$ de ordem m que atua transitivamente no conjunto de sinais S.

1.1 Descrição do Problema

Antes de enunciar o problema que será analisado neste trabalho, descreveremos dois motivos que culminaram em sua formulação.

Fato 1. Das duas constelações de sinais mais usadas em sistemas de comunicações digitais, isto é, o PSK e o QAM, as do tipo QAM (Quadrature Amplitude Modulation) apresentam, sob condições de mesma energia média, melhores desempenhos do que as constelações PSK (Phase Shift Keying). A Figura 1.5 ilustra as modulações 16-PSK e 16-QAM.

Fato 2. O canal $\mathfrak{C}_{2,8}[8,2]$ quando comparado com o canal $C_{2,2}[2,2]$ apresenta um ganho de até 2 dBs. em relação ao canal BSC (Binary Symmetric Channel). A Figura 1.6 ilustra o canal resultante como sendo binário na entrada e 8-ário na saída.

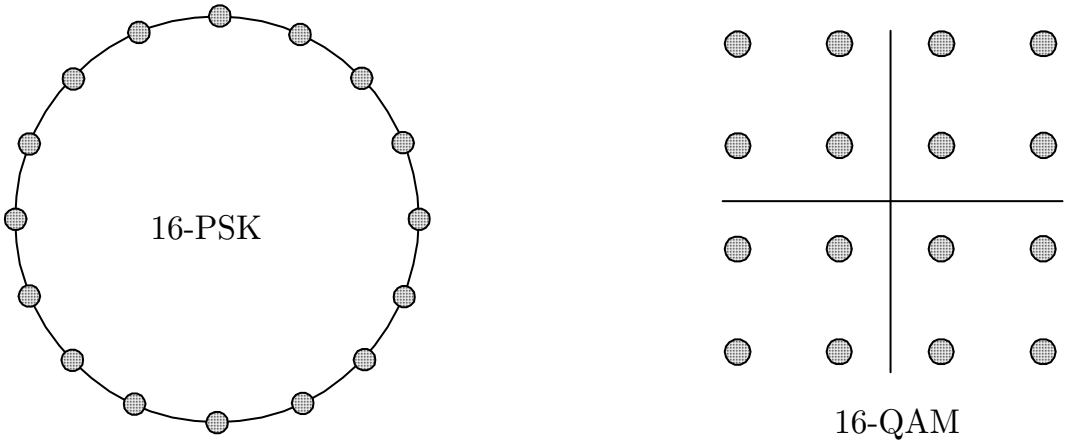

Figura 1.5: Constelações de sinais 16-PSK e 16-QAM

A justificativa para estes dois fatos existe e está fundamentada na medida da probabilidade de erro. Mas acontece que tanto as constelações PSK e QAM quanto aos canais BSC e $\mathfrak{C}_{2,8}$ [8, 2] certamente possuem diferenças geométricas que podem ajudar numa possível fundamentação. Nesta direção, sabemos que as constelações PSK encontram-se sobre esferas N-dimensionais e as QAM sobre o toro. A diferença topológica mais evidente é, sem dúvida, o gênero da superfície. Quanto aos canais discretos sem memória, até onde é do nosso conhecimento, não existe na literatura a identificação das superfícies que os caracterizam.

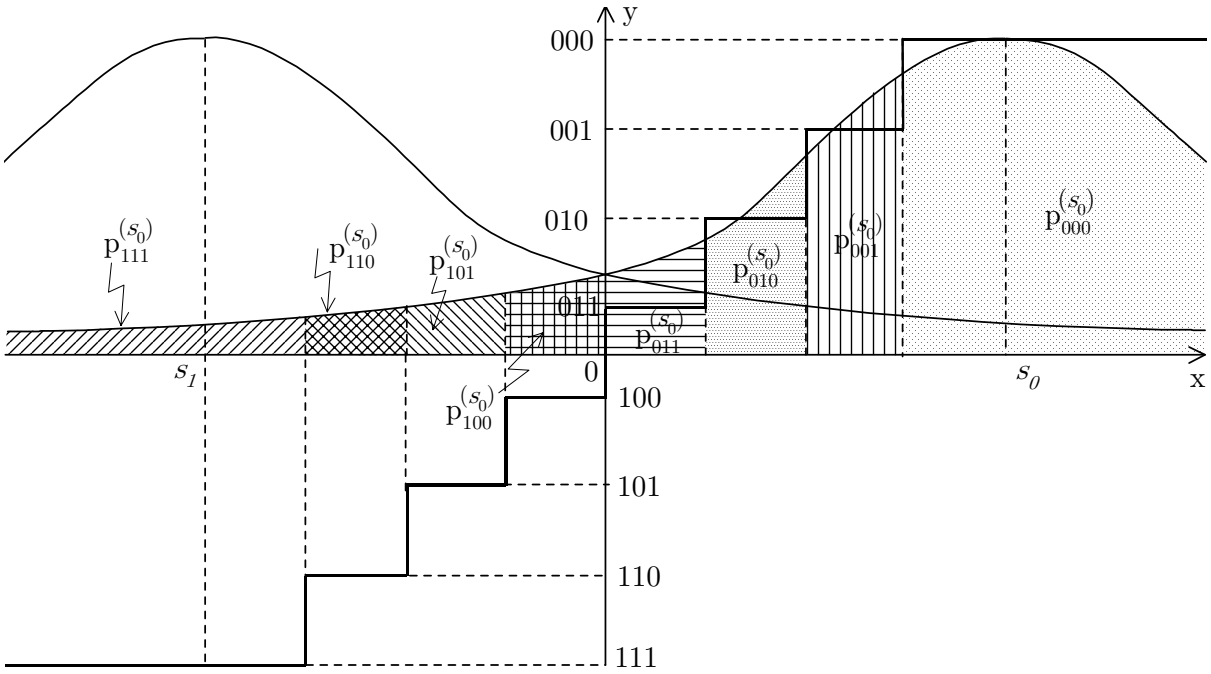

Figura 1.6: Quantizador de nível-8 para um canal binário com ruído gaussiano branco aditivo. ($p\,(111/s_0) \equiv p\,(^{s_0}_{111})$ = probabilidade da saída do canal ser 111 dado que o sinal s_0 estava na entrada.)

O fato do desempenho estar relacionado com a superfície onde os sinais estão inseridos e a necessidade de encontrar uma justificativa para o desempenho do "*canal quantizado*" $\mathfrak{C}_{2,8}$ quando comparado com o desempenho do canal BSC, nos levou a analisar a questão de identificação das superfícies associadas aos canais discretos sem memória. O procedimento para a abordagem do problema pode ser resumido da seguinte maneira.

> *Através do grafo associado a um canal discreto sem memória, determinamos o conjunto das superfícies no qual tal grafo está mergulhado, estabelecemos o conjunto das estruturas algébricas dessas superfícies (primeiro grupo de homologia) e identificamos as tesselações regulares que podem ser utilizadas como modulações e quantizadores.*

Até onde é do nosso conhecimento, este problema não foi abordado anteriormente sob este ponto de vista. Portanto, esta é uma (nova) proposta no sentido de tornar sistemático o procedimento de projetar um sistema de comunicações (transmissor e receptor) a

partir do processo de identificação das estruturas algébricas e geométricas das superfícies nas quais os canais encontram-se mergulhados. Neste processo, são identificadas as possíveis figuras/arranjos das regiões de decisão sobre as superfícies. Os arranjos onde o número de regiões é igual a cardinalidade do conjunto de sinais (alfabeto do código) serão os candidatos para fornecerem as estruturas algébricas a serem utilizadas pelos códigos corretores de erros. Deixamos claro que o grupo de homologia da superfície no qual se encontra este arranjo (modelo) não deverá ser a estrutura associada ao arranjo, mas sim um subgrupo.

O estudo de mergulhos de grafos em superfícies compactas sem bordo encontra-se num patamar bastante desenvolvido, contudo, consideramos o mergulho de grafos em superfícies com bordos. Além disso, atendendo às necessidades práticas da engenharia, construímos exemplos não-triviais de mergulhos em superfícies.

Em geral, o grafo associado a um canal discreto sem memória é um grafo completo biparticionado. Para estes, são conhecidos os limitantes mínimo e máximo dos gêneros das superfícies onde estão mergulhados, porém, é bastante comum a existência de canais que são apenas subgrafos dos grafos completos biparticionados. Não temos conhecimento da existência de limitantes para o mergulho destes tipos de grafos. Diante disso, determinamos os limitantes mínimo e máximo para muitos tipos de grafos que não são completos biparticionados os quais estão associados aos canais utilizados em comunicações digitais e para outros canais propostos. Determinamos todos os tipos de modelos com 4 regiões provenientes de mergulhos de um grafo completo biparticionado. O método utilizado também estabelece os tipos de modelos com um número de regiões diferente de 4. Identificamos, a partir dos sistemas de rotações do grafo completo $K_{3,3}$, todos os tipos de mergulhos orientados. A estratégia adotada pode identificar os tipos de mergulhos para outros grafos. Além de identificar as estruturas algébricas de um canal discreto sem memória e as tesselações importantes para uso em sistemas de comunicações digitais, introduzimos o conjunto das superfícies mínimas no universo da Teoria de Comunicações, até então não consideradas.

Este trabalho é organizado em capítulos, da seguinte maneira:

No Capítulo 2, é feita uma revisão dos conceitos básicos dos quais dependem este trabalho como um todo. São conceitos relacionados a Variedades Compactas e Polígonos, Topologia, Grafos, Topologia Algébrica e Álgebra Abstrata.

No Capítulo 3, apresentamos os polígonos das superfícies com e sem bordos, definimos uma forma poligonal padrão bem como a construção de superfícies com bordo a partir deste polígono. Mostramos ainda relações importantes de homeomorfismos entre superfícies não-orientadas e, também, são deduzidas as fórmulas para a característica de Eüler de uma superfície. Além disso, relacionamos o conjunto de todas as superfícies que são geradas por polígonos com exatamente n-lados, o conjunto das superfícies geradas por polígonos com até n-lados e exibimos as cardinalidades dos seus principais subconjuntos.

No Capítulo 4, apresentamos, na forma de algoritmo, instruções para se obter o primeiro grupo de homologia de uma superfície pelo método do complexo simplicial de Betti, fornecemos um exemplo de aplicação deste método e definimos uma triangulação sobre uma superfície da qual é deduzida o primeiro grupo de homologia.

No Capítulo 5, apresentamos os limitantes para o mergulho de um grafo completo biparticionado, propomos um método de construção do modelo de mergulho sobre a repre-

sentação poligonal de uma superfície e fornecemos vários exemplos. Definimos o mergulho de grafos em superfícies compactas com bordos, propomos algoritmos para construções desse tipo de mergulho, seguido de exemplos. Determinamos o conjunto dos modelos de mergulhos com 4 regiões de um grafo completo biparticionado sobre uma superfície e calculamos a cardinalidade deste conjunto. Identificamos, a partir do sistema de rotações do grafo completo biparticionado $K_{3,3}$, o conjunto de modelos de mergulhos do $K_{3,3}$ sobre superfícies orientadas.

No Capítulo 6, determinamos os conjuntos das superfícies para o mergulho de um canal discreto sem memória, estabelecemos o conjunto das estruturas algébricas e identificamos as tesselações regulares importantes para uso em sistemas de comunicações digitais. Fornecemos uma justificativa geométrica para o ganho do quantizador de 8-níveis quando comparado com o quantizador de 2-níveis. Mostramos também que os canais discretos sem memória podem ser mergulhados em superfícies mínimas, introduzindo esta importante família no universo da Teoria das Comunicações.

No Capítulo 7, apresentamos as conclusões e temas para estudos futuros.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

Em nossas exposições utilizamos muitos conceitos básicos de Teoria da Informação, Teoria da Codificação, Topologia das Superfícies, Topologia Algébrica, Teoria dos Grafos, Geometria Diferencial, Álgebra Abstrata e termos comuns à teoria de mergulhos de grafos. Para facilitar o entendimento relacionaremos neste capítulo os conceitos, definições e resultados a serem utilizados ao longo deste trabalho.

2.1 Modelo do Sistema de Comunicações

A Figura 2.1 ilustra o modelo tradicional de um sistema de comunicações digital do qual faremos uma breve descrição dos seus principais blocos. Este sistema de comunicações conecta uma fonte a um destinatário através de um canal o qual poderá ser um cabo coaxial, uma fibra óptica, uma fita ou disco magnético, o espaço, etc.

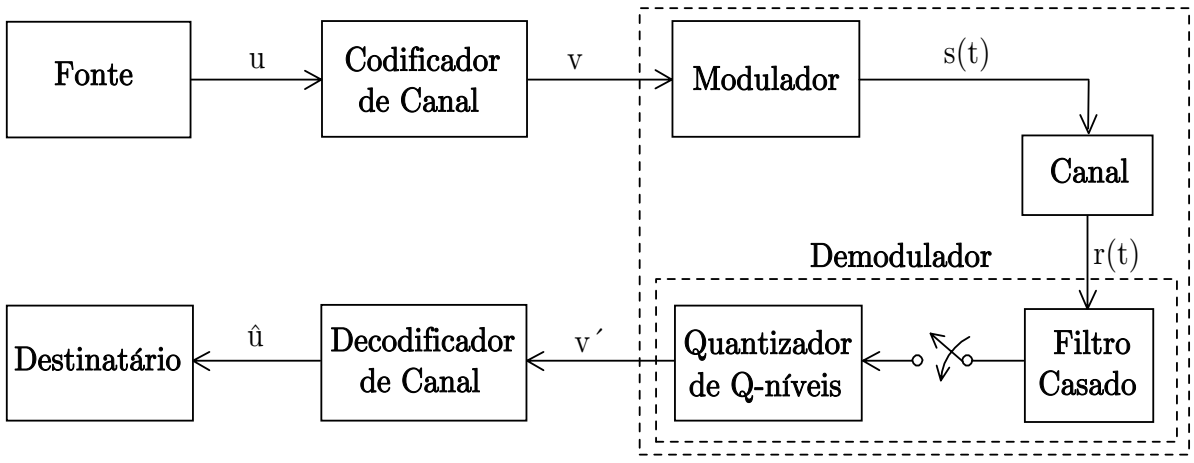

Figura 2.1: Diagrama de blocos de um sistema de comunicação

A **fonte** pode ser contínua ou discreta. Descreveremos apenas o caso discreto, ou seja, a **fonte digital.** Esta é composta pela **fonte de informação,** que pode ser uma pessoa ou uma máquina (por exemplo, um computador digital), cuja saída é uma seqüência de

símbolos discretos. Os dados que são enviados neste sistema de comunicação a partir da fonte são inicialmente processados pelo **codificador de fonte**, o qual tem como objetivo representá-las de forma mais compacta, retirando redundância, isto é, transforma a seqüência de símbolos da fonte em uma seqüência de dígitos chamada a **seqüência de informação** u. Esta seqüência é enviada ao **codificador de canal** o qual introduz redundância transformando-a em uma seqüência com um número maior de bits denominada **palavras-código** v. Cada símbolo de v é representado por bits (dígitos binários) no caso de sinalização binária e, por dígitos de um alfabeto q-ário, quando se usa mais de dois sinais. A seguir, o **modulador** seleciona, para cada símbolo da palavra-código, uma forma de onda de duração T segundos. No caso do código binário, o modulador deve gerar os seguintes sinais codificados

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \sqrt{\frac{2E}{T}} \sin\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2}\right),\ 0 \le t \le T, \\ s_1(t) &= \sqrt{\frac{2E}{T}} \sin\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right),\ 0 \le t \le T \end{aligned}$$

onde f_0 é um múltiplo de $1/T$ e E é a energia média dos sinais. Esta é chamada uma modulação BPSK (*binary-phase-shift-keying*), onde o sinal transmitido consiste de uma onda senoidal cuja fase é $+\pi/2$ ou $-\pi/2$, dependendo do símbolo na saída do codificador.

A forma do ruído mais comum num sistema de comunicação é o ruído gaussiano aditivo branco (AWGN). Se o sinal transmitido é $s(t)$, o sinal recebido é

$$r(t) = s(t) + n_w(t),$$

onde $n_w(t)$ é uma amostra do processo gaussiano com **densidade espectral de potência** N_0 em apenas um de seus lados.

O **demodulador** deve ser projetado para produzir, sempre com a melhor estimativa, uma saída correspondente ao sinal recebido em cada T-segundos de intervalo. Esta saída deve ser um número real ou um dos símbolos discretos pré-selecionados. Um demodulador ótimo sempre inclui um **filtro casado**, ou *detector de correlação* seguido por um dispositivo de tomada de decisão. Na saída do demodulador existe um **quantizador** com Q níveis cuja função é converter para a forma digital o valor amostrado do sinal recebido $r(t)$.

Finalmente, o **decodificador de canal** transforma a seqüência recebida v' em um seqüência binária $\hat{u}$ chamada **seqüência estimada**. O ideal seria que $\hat{u}$ fosse uma réplica fiel da seqüência de informação u, mesmo que o ruído do canal tivesse introduzido erros. A outra componente do decodificador, é o **decodificador de fonte** que transforma a seqüência estimada $\hat{u}$ em uma seqüência estimada do mesmo tipo da saída da fonte e a envia ao destinatário.

Neste trabalho, focalizamos apenas alguns aspectos dos códigos corretores de erros relacionados com os blocos modulador, canal e quantizador (Figura 2.1).

A teoria de códigos corretores de erros teve origem com o trabalho de Shannon [39]. Neste trabalho Shannon mostrou que associado a cada canal existe um valor $\mathcal{C}$ que possui, em linhas gerais, o seguinte significado: sempre que a taxa de informação $\mathcal{R}$ (expressada em dígitos por segundo) for menor do que $\mathcal{C}$, então é possível se projetar um sistema de

comunicações (usando códigos corretores de erros) tal que a probabilidade de erro seja tão pequena quanto se queira.

Desde então, a procura por estes bons códigos tem sido o objetivo de pesquisadores. Em geral, o alfabeto associado aos códigos corretores de erros provém da estrutura algébrica inerente à constelação de sinais, procedimento este que resultou em propostas e resultados importantes, e que ainda continua sendo um tópico de intensas pesquisas.

2.2 Conjunto de Sinais Geometricamente Uniforme

Os conceitos sobre códigos geometricamente uniformes no espaço euclidiano de interesse neste trabalho podem ser encontrados em [11]. Para um melhor entendimento do assunto a ser tratado neste trabalho, faremos, em seguida, uma breve revisão dos conceitos e definições necessários para alcançar tal objetivo.

Uma **isometria** u do espaço Euclidiano N-dimensional é uma transformação $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ que preserva distância euclidiana, isto é, $\|u(x) - u(y)\|^2 = \|x - y\|^2$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^N$, onde $u(x)$ e $u(y)$ denotam as imagens de x e y sob a transformação u.

Seja $\mathcal{S}$ um conjunto de pontos (finito ou infinito) do $\mathbb{R}^N$. Uma isometria u que deixa $\mathcal{S}$ invariante, $u(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$, é uma **simetria** de $\mathcal{S}$. As simetrias de $\mathcal{S}$ formam um grupo sob composição, o grupo de simetrias $\Gamma(\mathcal{S})$ de $\mathcal{S}$.

Um conjunto de sinais $\mathcal{S}$ **geometricamente uniforme** (GU) consiste de um conjunto de pontos em um espaço Euclidiano N-dimensional tendo um grupo de simetrias que atua transitivamente nestes pontos, isto é, dados quaisquer pontos s_1 e s_2 em $\mathcal{S}$, existe uma isometria que transforma s_1 em s_2, deixando $\mathcal{S}$ invariante.

Um **grupo gerador** $U(\mathcal{S})$ de $\mathcal{S}$ é um subgrupo de $\Gamma(\mathcal{S})$, que é minimal no sentido de que $U(\mathcal{S})$ gera $\mathcal{S}$ a partir de um ponto inicial $s_0 \in \mathcal{S}$. Iremos assumir que o mapeamento $m : U(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{S}$ definido por $m(u) = u(s_0)$ é biunívoco.

Uma **partição geometricamente uniforme** $\mathcal{S}/\mathcal{S}'$ é uma partição de um conjunto de sinais GU com grupo gerador $U(\mathcal{S})$ que é induzida por um subgrupo normal U' de $U(\mathcal{S})$. Os elementos da partição são os subconjuntos de $\mathcal{S}$ que correspondem às classes laterais de U' em $U(\mathcal{S})$. Seja G um grupo isomorfo a $U(\mathcal{S})/U'$. Um **rotulamento isométrico** $m : G \rightarrow \mathcal{S}/\mathcal{S}'$ é um rotulamento de pontos de $\mathcal{S}$ por elementos de G, induzido pelo isomorfismo entre G e $U(\mathcal{S})/U'$.

Considere um grupo (alfabeto) G, um conjunto de índices I, um código C (subgrupo do espaço de rótulos G^I), uma partição geometricamente uniforme $\mathcal{S}/\mathcal{S}'$ é um rotulamento $\bar{m} = G^I \rightarrow (\mathcal{S}/\mathcal{S}')^I$, (extensão do rotulamento isométrico $m : G \rightarrow \mathcal{S}/\mathcal{S}'$). Então um **código de classes laterais generalizado**, denotado por $\mathbb{C}(\mathcal{S}/\mathcal{S}', C)$, é a união disjunta

$$\mathbb{C}(\mathcal{S}/\mathcal{S}', C) = \bigcup_{\bar{c} \in C} \bar{m}(\bar{c})$$

do conjunto de seqüências de subconjuntos $\bar{m}(\bar{c}) = \{m(c_k), k \in I\}$, $\bar{c} \in C$; isto é, $\bar{m}(\bar{c})$ é a seqüência de subconjuntos selecionados pela seqüência de rótulos $\bar{c} \in C$ via o mapeamento de rótulos m.

Uma seqüência de sinais $\bar{s}$ é uma seqüência código em $\mathbb{C}(\mathcal{S}/\mathcal{S}', C)$ se $\bar{s} \in \bar{m}(\bar{c})$ para algum $\bar{c} \in C$, isto é, se $\{s_k \in m(c_k), k \in I\}$. Portanto, código de classes laterais genera-

lizado é um subconjunto do espaço de seqüências $\mathcal{S}^I$, o conjunto de todas as seqüências de elementos do conjunto de sinais.

É mostrado em [11], que $\mathbb{C}(\mathcal{S}/\mathcal{S}', C)$ é geometricamente uniforme. Portanto, um código $\mathbb{C}$, geometricamente uniforme, pode ser obtido via o mapeamento de palavras-código $\bar{c} \in C$ em seqüências de sinais $s \in \mathcal{S}$ de acordo com o mapeamento m estendido componente-a-componente, isto é,

$$\mathbb{C} = m(C) = \left\{ s \in \left(\mathbb{R}^N\right)^I : s = \bar{m}(\bar{c}),\, c \in C \right\}. \tag{2.1}$$

A igualdade (2.1) representa de fato uma construção de como se obter códigos geometricamente uniforme em maiores dimensões a partir de códigos geometricamente uniformes em dimensões menores, isto é, códigos geometricamente uniformes elementares.

A **região de Voronoi,** $R_V(s)$, associada com um ponto $s \in \mathcal{S}$ é o conjunto de todos os pontos em $\mathbb{R}^N$ que estão mais próximos de s do que de qualquer outro ponto $s' \in \mathcal{S}$:

$$R_V(s) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \|x - s\|^2 = \min_{s' \in \mathcal{S}} \|x - s'\|^2 \right\}.$$

O **perfil de distância global,** $DP(s)$, associado com um ponto $s \in \mathcal{S}$ é o conjunto de distâncias de todos os pontos em $\mathcal{S}$:

$$DP(s) = \{\|s - s'\|, s' \in \mathcal{S}\}.$$

Em [11] também é mostrado que se S é um conjunto de sinais geometricamente uniforme, então: a) todas as regiões de Voronoi tem a mesma forma e naturalmente $R_V(s') = u_{s,s'}[R_V(s)]$, onde $u_{s,s'}$ é uma isometria que leva s em s'; b) o perfil da distância global $DP(s)$ é o mesmo para todo $s \in S$.

2.3 Conceitos de Topologia

Os conceitos envolvidos nesta seção poder ser encontrados em [22].

Uma **topologia** Υ num conjunto X é uma coleção Γ de partes de X, chamados de **abertos** da topologia, com as seguintes propriedades:

(i) O conjunto vazio $\varnothing$ e X pertencem a Υ;

(ii) Se $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \Upsilon$ então $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \Upsilon$;

(iii) Dada uma família arbitrária $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ com $A_\lambda \in \Upsilon$ para cada $\lambda \in L$, têm-se $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \Upsilon$.

Um **espaço topológico** é um par (X, Υ) onde X é um conjunto e Υ é uma topologia em X.

Um espaço topológico X chama-se um **espaço de Hausdorff** quando, para cada par de pontos distintos x, y em X, existem abertos U, V tais que $x \in U,\ y \in V$ e $U \cap V = \varnothing$.

Uma **métrica** num conjunto A é uma função $d : A \times A \to \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in A$ um número real $d(x, y)$, chamado a **distância** de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in A$:

$d_1)$ $d(x, x) = 0$; $d_3)$ $d(x, y) = d(y, x)$;
$d_2)$ *Se* $x \neq y$ *então* $d(x, y) > 0$; $d_4)$ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Todo espaço métrico A pode ser considerado como um espaço topológico, no qual a família Υ é geradas pelas bolas abertas de A. Uma topologia Υ em X se diz **metrizável** quando existe uma métrica em X em relação à qual os abertos são os elementos de Υ.

Todo espaço topológico metrizável é um espaço de Hausdorff.

Sejam X e Y espaços topológicos. Um **homeomorfismo** de X em Y é uma bijeção contínua $f : X \to Y$ cuja inversa $f^{-1} : Y \to X$ também é contínua. Neste caso, diz-se que X e Y são homeomorfos.

Sejam X e Y variedades diferenciais. Uma aplicação $f : X \to Y$ chama-se um **homeomorfismo local** quando cada ponto $x \in X$ está contido num aberto U tal que $V = f(U)$ é um aberto em Y e a restrição $f|_U$ é um homeomorfismo de U sobre V.

Sejam X e Y espaços topológicos. Diz-se que X e Y são **difeomorfos** quando existe uma aplicação diferenciável $\varphi : X \to Y$ cuja inversa $\varphi^{-1} : Y \to X$ também é diferenciável. A aplicação φ é chamada **difeomorfismo**. Dizemos que φ é um **difeomorfismo local** quando cada ponto $x \in X$ está contido num aberto U tal que $V = \varphi(U)$ é um aberto em Y e a restrição $\varphi|_U$ é um **difeomorfismo** de U sobre V. Quando φ é uma aplicação de classe C^k dizemos que φ é um **difeomorfismo de classe** C^k.

Uma **partição** de um espaço métrico X é uma decomposição $X = A \cup B$, de X como reunião de dois subconjuntos abertos disjuntos A e B. As condições $X = A \cup B$ e $A \cap B = \varnothing$ equivalem a dizer que $A = X - B$ e $B = X - A$. Por conseguinte, numa partição $X = A \cup B$, os conjuntos A e B são abertos e fechados em X. Por exemplo, $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Uma partição $X = A \cup B$ diz-se **trivial** quando um dos abertos, A ou B, é vazio (o outro é igual a X). $X = X \cup \varnothing$.

Um espaço métrico X chama-se **conexo** quando a única partição possível em X é a trivial.

Um subconjunto B de um espaço métrico X diz-se **conjunto conexo** quando o subespaço $B \subset X$ é conexo. Quando B admite uma partição não trivial, dizemos que B é **desconexo**.

A existência de um homeomorfismo local $f : X \to Y$ faz com que X herde todas as propriedades topológicas locais de Y como, conexidade local, compacidade local, etc. Se for sobrejetivo, então Y herda também as propriedades topológicas locais de X.

2.3.1 Homotopia

Sejam X e Y espaços topológicos e $I = [0, 1]$. Duas aplicações $f, g : X \to Y$ são **homotópicas** quando existe uma aplicação contínua $\mathcal{H} : X \times I \to Y$ tal que $\mathcal{H}(x, 0) = f(x)$ e $\mathcal{H}(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. A aplicação $\mathcal{H}$ chama-se uma **homotopia** entre f e g. Escreve-se, neste caso, $\mathcal{H} : f \simeq g$, ou simplesmente $f \simeq g$.

A esfera n-dimensional de raio 1 será indicada por S^n ($S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$).

Uma aplicação contínua $f : X \to Y$ chama-se uma **relação de equivalência homotópica** quando existe $g : Y \to X$ contínua tal que $g \circ f \simeq id_X$ e $f \circ g \simeq id_Y$. Diz-se que g é um **inverso homotópico** de f e que os espaços topológicos X e Y têm o mesmo **tipo de homotopia**. Escrevemos, $X \equiv Y$ ou $f : X \equiv Y$.

Sejam X e Y espaços topológicos. A relação de homotopia, $f \sim g$, é uma **equivalência** no conjunto das aplicações contínuas de X em Y.

As classes de equivalência, segundo a relação de homotopia, são chamadas **classes de homotopia**. A classe de homotopia de uma aplicação contínua $f : X \to Y$ é indicada pelo símbolo $[f]$. O conjunto das classes de homotopia das aplicações contínuas de X em Y é representada pelo símbolo $[X, Y]$.

Quando X é metrizável ou localmente compacto de Hausdorff, as classes de homotopia das aplicações contínuas $f : X \to Y$ são as componentes conexas por caminhos do espaço topológico $C(X, Y)$, formado pelas aplicações contínuas de X em Y com a topologia compacto-aberta.

Diz-se que um espaço topológico X é **contrátil** quando ele tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto.

2.3.2 Homotopia de caminhos

Um **caminho** é uma aplicação contínua $a : J \to X$, definido num intervalo compacto $J = [s_0, s_1]$. Um caminho se diz **fechado** quando $a(s_0) = a(s_1)$.

Salvo quando dito explicitamente o contrário, $I = [0, 1]$. Como X é contrátil, todo caminho $a : I \to X$ é homotópico a uma constante. Assumiremos também que os extremos do caminho sejam mantidos fixos.

Dois caminhos fechados $a, b : I \to X$ dizem-se **livremente homotópicos** quando existe uma aplicação contínua $H : I \times I \to X$ tal que $H(s, 0) = a(s)$, $H(s, 1) = b(s)$ e $H(0, t) = H(1, t)$ para quaisquer $s, t \in I$.

O caminho **inverso** de $a : I \to X$ é, por definição, o caminho $a^{-1} : I \to X$, dado por $a^{-1}(s) = a(1 - s)$, $0 \leq s \leq 1$.

Indicaremos e_x o caminho **constante**, tal que $e_x(s) = x$ para todo $s \in [0, 1]$. Para sua classe de homotopia usaremos a notação $\varepsilon_x = [e_x]$.

Indicaremos sempre com $\alpha = [a]$ a **classe de homotopia** do caminho $\alpha : I \to X$, isto é, o conjunto de todos os caminhos em X que possuem as mesmas extremidades que a e que são homotópicos a a com extremos fixos.

Sejam $a, b : I \to X$ caminhos tais que o fim de a coincide com a origem de b. Definiremos o **produto** ab como sendo o caminho que consiste em percorrer primeiro a e depois b. Como o tempo de que dispomos para percorrer ab é igual a 1, isto nos obriga a dobrar a velocidade em a e b. Assim, definiremos $ab : I \to X$ como

$$ab(s) = \begin{cases} a(2s), & se \quad 0 \leq s \leq 1/2 \\ b(2s-1), & se \quad 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

O conjunto dos caminhos num espaço topológico X, munido da lei de composição e do inverso definidos acima não cumprem nenhum dos axiomas de grupo. As propriedades

desejadas para a lei de composição ab são encontradas quando se consideram classes de homotopia de caminhos.

Notação 2.3.1 *Quando os caminhos a, b forem homotópicos e tiverem extremos fixos usaremos a notação $a \simeq b$.*

2.3.3 Grupo fundamental

Seja X um espaço topológico e $x_0 \in X$. Então x_0 será chamado o **ponto básico** do espaço topológico X. Os caminhos fechados $a : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ serão chamados caminhos fechados com base no ponto x_0. As homotopias (salvo quando explicitamente mencionado o contrário) serão relativas a ∂I.

O subconjunto $\pi_1(X, x_0)$ formado pelas classes de homotopia de caminhos fechados com base em x_0 constitui um grupo, chamado o **grupo fundamental** do espaço X com base no ponto x_0. O elemento neutro desse grupo é a classe de homotopia $\varepsilon = \varepsilon_{x_0}$ do caminho constante no ponto x_0.

Uma aplicação contínua $f : X \to Y$ induz um homomorfismo

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0), \; y_0 = f(x_0),$$

definido por $f_*(\alpha) = [f \circ \alpha]$, onde $\alpha = [a]$. Como $a \simeq a' \Rightarrow f \circ a \simeq f \circ a'$, vemos que f_* está bem definido. Além disso, $f_*(\alpha\beta) = f_*(\alpha) f_*(\beta)$, isto é, f é um homomorfismo.

2.4 Conceitos sobre Grafos

Salvo menção em contrário, as definições, resultados e comentários que seguem podem ser encontrados em [12].

Um **grafo** é um par (V, L) onde V é um conjunto finito de pontos de um espaço e L é o conjunto de pares não-ordenados de elementos distintos de V. Então um elemento de L é da forma (v, w) onde v e w pertencem a V e $v \neq w$. Os elementos de V são chamados **vértices** e o elemento (v, w) de L é chamado de **lado** unindo v e w (ou w e v).

Um **grafo orientado** é um par (V, L) onde V é um conjunto finito e L é um conjunto de pares ordenados de elementos distintos de V com a propriedade de que, se $(v, w) \in L$ então $(w, v) \notin L$. Os elementos de V são chamados **vértices** e o elemento (v, w) de L é chamado o **lado** unindo v a w. No que segue-se usaremos (vw) para indicar o lado (v, w).

2.4.1 Árvore maximal e número ciclotomático

Um **caminho** sobre um grafo G de v_1 a v_{n+1} é uma seqüência de vértices e lados $v_1 e^1 v_2 e^2 \cdots v_n e^n v_{n+1}$ onde $e^1 = (v_1 v_2), e^2 = (v_2 v_3), \cdots, e^n = (v_n v_{n+1})$.

Aqui $n \geq 0$: se $n = 0$, temos exatamente v_1 e nenhum lado. Se G é orientado, então $e^i = (v_i v_{i+1})$ ou $(v_{i+1} v_i)$ para $i = 1, \cdots, n$. O caminho é chamado **simples** se os lados $e^1, \cdots, e^n$ são todos distintos, e os vértices $v_1, \cdots, v_{n+1}$ são todos distintos exceto possivelmente quando $v_1 = v_{n+1}$. Se o caminho simples tem $v_1 = v_{n+1}$ e $n > 0$ ele é

chamado um **laço**; então, num laço, sempre temos $n \geq 3$. Dois laços são iguais quando eles consistem dos mesmos vértices e dos mesmos lados.

Um grafo G é chamado **conexo** se, dado dois vértices v e w de G existe um caminho sobre G de v para w. Para um grafo não-vazio G, uma **componente** de G consiste de todos os lados e vértices os quais ocorrem em caminhos começando em algum vértice particular de G. Então um grafo conexo não-vazio tem exatamente uma componente. Um grafo conexo e sem laços é chamado de **árvore.**

Dado um grafo G, um grafo H é chamado um **subgrafo** de G se os vértices de H são vértices de G e os lados de H são lados de G. H é chamado um **subgrafo próprio** de G se $H \neq G$. Todo grafo G possui um subgrafo que é uma árvore (por exemplo, o subgrafo vazio é uma árvore) então o conjunto $\mathcal{T}$ dos subgrafos de G os quais são árvores possui elementos maximais. Isto é, existirá pelo menos um $T \in \mathcal{T}$ tal que T não é um subgrafo próprio de $T' \in \mathcal{T}$. Tal T é chamado **árvore maximal para** G. (alguns autores dizem **árvore geradora**).

Proposição 2.4.1 *[12]Seja G um grafo. Um subgrafo T de G é uma árvore maximal para G se, e somente se, T é uma árvore e contém todos os vértices de G.*

Seja G um grafo conexo com $\alpha_0 = \alpha_0(G)$ vértices e $\alpha_1 = \alpha_1(G)$ lados. O **número ciclotomático** de G é o inteiro

$$\mu = \mu(G) = \alpha_1 - \alpha_0 + 1.$$

Teorema 2.4.2 *[12]Seja G um grafo com número ciclotomático μ. Então*

(*i*) $\mu \geq 0$;

(*ii*) $\mu = 0$ *se, e somente se, G é uma árvore;*

(*iii*) *toda árvore maximal para G tem $\alpha_1 - \mu$ lados. Isto é, toda árvore maximal para G pode ser obtida de G pela remoção de μ possíveis lados (e nenhum vértice). Como T é conexo, estes lados devem ser os lados internos (lados entre dois vértices);*

(*iv*) *removendo menos que μ lados de G não produz uma árvore; removendo mais que μ lados sempre desconecta G.*

2.4.2 Cadeias e ciclos sobre um grafo orientado

Seja G um grafo orientado. Dado um caminho $v_1e^1v_2e^2\cdots v_ne^nv_{n+1}$ sobre G podemos associá-lo a soma formal

$$\epsilon_1e^1 + \epsilon_2e^2 + \cdots + \epsilon_ne^n,$$

onde $\epsilon_i = +1$ se $e^i = (v_iv_{i+1})$ e $\epsilon_i = -1$ se $e^i = (v_{i+1}v_i)$. Então a soma formal é obtida caminhando ao longo do caminho v_1 até v_n, escrevendo o sinal menos à medida que o lado é encontrado com orientação oposta. Mais precisamente, temos a seguinte definição.

Seja G um grafo orientado com lados $e^1, \cdots, e^r$. Uma **1-cadeia** sobre G é a soma formal

$$\lambda_1 e^1 + \lambda_2 e^2 + \cdots + \lambda_r e^r,$$

onde cada λ_i é um inteiro. Quando escrevemos uma 1-cadeia omitimos os lados com coeficientes 0. A 1-cadeia na qual todos os coeficientes são zeros é denotado por 0. Definimos a **soma** das 1-cadeias $\sum \lambda_i e^i$ e $\sum \lambda'_i e^i$ por

$$\sum \lambda_i e^i + \sum \lambda'_i e^i = \sum \left(\lambda_i + \lambda'_i\right) e^i,$$

a qual é ainda uma 1-cadeia. Com essa definição o conjunto das 1-cadeias sobre G é um grupo abeliano, denotado por $C_1(G)$.

De modo similar, definimos uma **0-cadeia** sobre G como a soma formal

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r,$$

onde $v_1, v_2, \cdots, v_r$ são os vértices de G. 0-cadeias são obtidas pela adição de coeficientes, e o conjunto das 0-cadeias é um grupo abeliano, denotado por $C_0(G)$.

Seja G um grafo orientado. Para um lado $e = (vw)$ de G (visto como uma 1-cadeia), definimos o **bordo** de e por $\partial e = w - v$ (visto como uma 0-cadeia). O **homomorfismo de bordo**

$$\partial : C_1(G) \to C_0(G)$$

é definido por $\partial\left(\sum \lambda_i e^i\right) = \sum \lambda_i \partial\left(e^i\right)$. Um **1-ciclo** sobre G é um elemento $c \in C_1(G)$ tal que $\partial(c) = 0$. O grupo de 1-ciclos sobre G é denotado por $Z_1(G)$.

2.4.3 Base de laços sobre um grafo orientado

Seja G um grafo conexo orientado com número ciclotomático μ. Se $\mu(G) = 1$ então G tem exatamente um laço. Esta prova é vista em [12]. Sejam, $e^1, \cdots, e^\mu$ os lados que removidos de G deixam uma árvore maximal T. Denominaremos por $T + e^i$ o grafo obtido de T anexando o lado e^i. Então $\mu(T + e^i) = 1$. Logo, existe um único laço l^i sobre $T + e^i$. Estes laços geram todos os laços de G. Denotemos o 1-ciclo associado a l^i por z^i, a direção do caminho através de l^i sendo escolhido tal que e^i ocorre em z^i com coeficiente $+1$. Com essas condições temos os seguinte teorema.

Teorema 2.4.3 *[12]Seja $z \in Z(G)$. Então são únicos os inteiros $\lambda_1, \cdots, \lambda_\mu$ tais que*

$$z = \textstyle\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i z^i.$$

(se $\mu = 0$ então $z = 0$). De fato, λ_i é o coeficiente do lado e^i em z.

Este resultado será de extrema utilidade no cálculo dos grupos de homologia.

2.4.4 Complexo simplicial orientado

Sabemos que os grupos de homologia são definidos nas classes de espaços chamadas as classes de todos os poliedros, [14]. Um **poliedro** é um espaço que pode ser obtido através da "construção de blocos" com linhas, triângulos, tetraedros e seus análogos em dimensões maiores, por "colagem" de todos eles, ao longo de suas faces.

Um conjunto de pontos $\{v_0, v_1, \cdots, v_n\} \in \mathbb{R}^n$ é chamado **geometricamente independente** se para todos os escalares reais λ_i, as equações

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0 \quad e \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i = 0$$

implicam que $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Um ponto é sempre geometricamente independente. Em geral, $\{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$ é geometricamente independente se, e só se, $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \cdots, v_n - v_0$ são linearmente independentes.

Dado um conjunto geometricamente independente de pontos $\{v_0, \cdots, v_n\}$, definimos o n**-plano** $\wp$ gerado por esses pontos como sendo o conjunto de todos os pontos x de $\mathbb{R}^N$ tal que

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i,$$

para alguns escalares λ_i com $\sum_i \lambda_i = 1$.

O plano $\wp$ pode também ser descrito como o conjunto de todos os pontos x tais que

$$x = v_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(v_i - v_0\right),$$

para alguns escalares $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Desta forma, nos referimos a $\wp$ como o plano que passa por v_0 paralelo aos vetores $v_i - v_0$.

Uma **transformação afim** $\breve{\mathrm{A}}$ de $\mathbb{R}^N$ é uma translação do $\mathbb{R}^N$,isto é, uma transformação da forma $\breve{\mathrm{A}}(x) = x + p$, onde p é um ponto fixo do $\mathbb{R}^N$. Obviamente $\breve{\mathrm{A}}$ é uma transformação não-linear e possui uma inversa.

Se $\breve{\mathrm{A}}$ é uma transformação afim, então $\breve{\mathrm{A}}$ preserva conjuntos geometricamente independentes, e leva o plano gerado pelos pontos $v_0, v_1, \cdots, v_n$ sobre o plano gerado por

$$\breve{A}\left(v_0\right), \breve{A}\left(v_1\right), \cdots, \breve{A}\left(v_n\right).$$

Seja $\{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$ um conjunto geometricamente independente em $\mathbb{R}^N$. Definimos o n**-simplexo** σ gerado por $v_0, v_1, \cdots, v_n$ como o conjunto de todos os pontos x de $\mathbb{R}^N$ tais que

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i,$$

onde $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ e $\lambda_i \geq 0$, para todo i. Os números λ_i's são unicamente determinados por x; eles são chamados **coordenadas baricêntricas** de pontos x.

Um 0-simplexo é certamente um ponto. O 1-simplexo gerado por v_0 e v_1 consiste de todos os pontos da forma

$$x = \lambda v_0 + (1 - \lambda) v_1,$$

com $0 \leq \lambda \leq 1$; isto é justamente o segmento ligando v_0 e v_1. Analogamente, o 2-simplexo σ gerado por v_0, v_1 e v_2 é igual ao triângulo tendo como vértices estes três pontos.

Os pontos $v_0, v_1, \cdots, v_n$ que geram σ são chamados os **vértices** de σ; o número n é chamado a **dimensão** de σ. Um simplexo gerado por um subconjunto de $\{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$ é chamado a **face** de σ. Em particular, a face de σ gerada por $v_1, v_2, \cdots, v_n$ é chamada a **face oposta** a v_0. As faces de σ diferentes da própria σ são chamadas as **faces próprias** de σ; sua união é chamada de **bordo** de σ e é denotada por $\partial\sigma$. O interior de σ é definido pela equação $\operatorname{Int}\sigma = \sigma - \partial\sigma$; o conjunto $\operatorname{Int}\sigma$ é algumas vezes chamado de **simplexo aberto.**

Seja $s_n = (v_0 \cdots v_n)$ um n-simplexo. Uma **orientação** para s_n é a coleção de ordens para os vértices consistindo de uma ordem particular e todas as permutações pares delas. Um **n-simplexo orientado** σ_n é um n-simplexo junto com uma orientação para s_n.

Uma ordem definitiva dos vértices de um simplexo resulta num **simplexo ordenado**. Associado a um n-simplexo existem $(n+1)!$ simplexos ordenados distintos.

Um **complexo simplicial** $\mathfrak{K}$ em $\mathbb{R}^n$ é uma coleção de simplexos em $\mathbb{R}^n$ tal que:

(i) Toda face de um simplexo de $\mathfrak{K}$ está em $\mathfrak{K}$;

(ii) A interseção de dois simplexos de $\mathfrak{K}$ é uma face comum de cada um deles.

Um **complexo simplicial orientado** é um complexo simplicial no qual todo simplexo possui uma orientação.

2.5 Grupo Abeliano

Todos os conceitos e resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em [12].

Um **grupo abeliano** é um conjunto A, junto com uma operação $+$ definida sobre A satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) Para todo a, b, c em A, $a + (b + c) = (a + b) + c$;

(ii) Existe $0 \in A$ tal que, para todo $a \in A$, $a + 0 = 0 + a = a$;

(iii) Para cada $a \in A$ existe $b \in A$ tal que $a + b = b + a = 0$;

(iv) Para todo a, b em A, $a + b = b + a$.

Um **subgrupo** de A é um subconjunto de A que é também um grupo abeliano sob a mesma operação binária.

Seja $a \in A$. Se, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, temos $na \neq 0$ então dizemos que a tem **ordem infinita**. Caso contrário, a **ordem** de a é o menor inteiro $n > 0$ tal que $na = 0$. Então a tem ordem 1 se, e somente se, $a = 0$ e, para um a, a e $-a$ tem a mesma ordem, ou ambos tem ordem infinita. A **ordem de um grupo** A é simplesmente o número de elementos de A, este será denotado por $|A|$.

Um grupo A é chamado **cíclico** se existe $a \in A$ tal que um $b \in A$ é da forma na para algum $n \in \mathbb{Z}$. O elemento a é chamado **gerador** de A. Note que $-a$ também é um gerador.

Um **homomorfismo** f de A em B é uma aplicação $f : A \to B$ tal que, para todo $a_1, a_2 \in A$, $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$. Isto implica que $f(0) = 0$ e $f(-a) = -f(a)$ para todo $a \in A$.

Seja $f : A \to B$ um homomorfismo. Definimos

$$\begin{array}{lcll} \textbf{Núcleo} \text{ de } f & = & \ker f & = & \{a \in A : f(a) = 0\}; \\ \textbf{Imagem} \text{ de } f & = & \text{Im } f & = & \{b \in B : b = f(a) \text{ para algum } a \in A\}. \end{array}$$

Esses conjuntos são subgrupos de A e de B, respectivamente. Chamamos f de **mônico** ou um **monomorfismo** se $\ker f = 0$. Dizemos que f é um **epimorfismo** se $\text{Im } f = B$. Se $\ker f = 0$ e $\text{Im } f = B$ diremos que f é um **isomorfismo.**

Se f é um isomorfismo então existe f^{-1} que também é um isomorfismo. Se existe um isomorfismo $f : A \to B$ diremos que A e B são **isomorfos**, e indicamos isto por $A \cong B$. A relação $\cong$ é uma relação de equivalência. Escreveremos $A = 0$ para significar que $A \cong 0$. Por exemplo, um grupo cíclico é isomorfo a $\mathbb{Z}_k$, para algum $k \geq 1$, ou isomorfo a $\mathbb{Z}$.

2.6 Grupo Abeliano Livre e Finitamente Gerado

Os conceitos e resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em [12].

Suponha que $a_1, \cdots, a_n$ são elementos de A com a propriedade de que todo $a \in A$ pode ser escrito na forma

$$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n,$$

com $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ inteiros. Então A é chamado **finitamente gerado** (**f.g.**) com **geradores** $a_1, a_2, \cdots, a_n$. A expressão para a é chamada uma **combinação linear inteira** de $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

Suponha que A é f.g. com geradores $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Suponha em adição que, para todos os inteiros $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Então A é chamado um **grupo abeliano livre f.g.** e $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são chamados **geradores livres** ou uma **base** para A. Como todos os grupos considerados são f.g. nos referiremos a eles como **grupos abelianos livres**, omitindo "f.g." da descrição. Por convenção 0 é livre com base nula. Duas bases de um mesmo grupo livre abeliano f.g. contém o mesmo número de elementos. Então A é abeliano livre e f.g. com base $a_1, a_2, \cdots, a_n$ se, e somente se, todo $a \in A$ pode ser expresso como uma combinação linear inteira de $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Os grupos abelianos livres são análogos aos espaços vetoriais de dimensão finita.

Seja $S = \{x_1, \cdots, x_n\}$ onde os x_i's são distintos. Seja FS o conjunto de expressões $\sum \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$, onde $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ são inteiros. A denominação FS vem do

inglês "*free abelian group on S*". Dois elementos de FS, $\sum \lambda_i x_i$ e $\sum \mu_i x_i$ são iguais se, e somente se, $\lambda_i = \mu_i$, para $i = 1, \cdots, n$. A adição é definida por

$$\sum \lambda_i x_i + \sum \mu_i x_i = \sum (\lambda_i + \mu_i) x_i.$$

Então FS é um grupo abeliano e chamamos FS de **grupo abeliano livre sobre** S. Por convenção $F\varnothing = 0$. Note que $FS \cong \mathbb{Z}^n$, um isomorfismo sendo dado por $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \to (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

Proposição 2.6.1 *[12]Seja A um grupo abeliano livre com base $a_1, \cdots, a_n$ e seja B um grupo abeliano. Dados $b_1, \cdots, b_n$ em B existe um único homomorfismo $f : A \to B$ com $f(a_i) = b_i$ para $i = 1, \cdots, n$.*

A condição sobre f implica que o homomorfismo é definido por

$$f(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n) = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$$

para alguns inteiros $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

2.7 Grupo Quociente

A definição de grupos de homologia depende do conceito de grupo quociente. Dado um subgrupo A de um grupo abeliano B o grupo quociente B/A é um instrumento para "ignorar" ou "zerar" os elementos de A.

Seja A um subgrupo de B. Para cada $b \in B$ o subconjunto

$$\overline{b} = b + A = \{b + a : a \in A\}$$

é chamado a **classe lateral à direita de** A **em** B. O conjunto das classes laterais de A em B é denotado por B/A e é um grupo abeliano sob a operação

$$\overline{b}_1 + \overline{b}_2 = \overline{b_1 + b_2}.$$

Este grupo é chamado o **grupo quociente** de B em A.

A **projeção natural** $\pi : B \to B/A$ (onde A é um subgrupo de B) é definido por $\pi(b) = \overline{b}$ para todo $b \in B$. Obviamente, π é um epimorfismo com núcleo A.

Teorema 2.7.1 (Teorema do Homomorfismo) *[12]Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de grupos abelianos. Então $A/\ker f \cong \operatorname{Im} f$, sendo o isomorfismo h definido por $\overline{x} \to f(x)$, para todo $x \in G$.*

2.8 Soma Direta

Sejam $A_1, \cdots, A_n$ grupos abelianos. A **soma direta** $A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ dos grupos é o conjunto das n-úplas $(a_1, \cdots, a_n)$ onde $a_1 \in A_1, \cdots, a_n \in A_n$, sob a operação binária

$$(a_1, \cdots, a_n) + (a'_1, \cdots, a'_n) = (a_1 + a'_1, \cdots, a_n + a'_n).$$

Então $A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ é um grupo abeliano.

2.9 Presentação

Seja A um grupo abeliano com geradores $a_1, \cdots, a_n$. Seja F um grupo abeliano livre de posto n com base $x_1, \cdots, x_n$ e seja $t : F \to A$ o epimorfismo definido por

$$t(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n,$$

para todos os inteiros $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. (Note que t está bem definido). A seqüência exata

$$0 \to \ker t \xrightarrow{i} F \xrightarrow{t} A \to 0$$

(i sendo a inclusão) é algumas vezes chamada uma **presentação** de A. Observe que pelo Teorema do Homomorfismo $A \cong F/\ker t$. Observe também que existe uma ampla escolha para $a_1, \cdots, a_n$ e em particular para n.

O grupo de homologia neste trabalho é obtido precisamente deste modo, isto é, como o quociente de um grupo abeliano livre por um subgrupo. Vamos analisar mais de perto o que isto significa. Cada elemento de um grupo abeliano livre com base $x_1, \cdots, x_n$ pode ser escrito de maneira única como uma combinação linear inteira de $x_1, \cdots, x_n$. Dado um subgrupo B de F, segue-se que B é livre; na prática estaremos obtendo geradores para B, então seja $y_1, \cdots, y_n$ esses geradores, não necessariamente livres, para B. Um elemento de F/B pode ser escrito como $\lambda_1 \overline{x}_1 + \cdots + \lambda_n \overline{x}_n$, onde os λ_i's são inteiros, mas a expressão não é única (a menos que $B = 0$). De fato:

$$\sum \lambda_i \overline{x}_i = \sum \mu_i \overline{x}_i \Longleftrightarrow \sum (\lambda_i - \mu_i)\, \overline{x}_i = 0 \Longleftrightarrow \sum (\lambda_i - \mu_i)\, x_i \in B.$$

Agora, se $x_1, \cdots, x_n$ é uma base para F, então são unicamente determinados os inteiros α_{ij} $(i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, n)$ tais que

$$y_i = \alpha_{i1} x_1 + \cdots + \alpha_{in} x_n, \quad (i = 1, \cdots, m)$$

é um elemento de F pertencente a B se, e somente se, é uma combinação linear dos $y's$. Dessa forma, o grupo F/B está plenamente especificado, uma vez que $\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n$ gera F/B e

$$\alpha_{i1} \bar{x}_1 + \cdots + \alpha_{in} \bar{x}_n = 0, \quad i = 1, \cdots, m. \tag{2.2}$$

As equações em (2.2) são chamadas **relações triviais** e a descrição de F/B por geradores e relações é chamada de **presentação** e denotada por

$$F/B = \langle x_1, x_2, \cdots, x_n;\ \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \cdots + \alpha_{in} x_n = 0,\ para\ 1 \leq i \leq m \rangle .$$

2.10 Grupos de Homologia

Formalizaremos nesta secão as idéias que definem os grupos de homologia para um complexo simplicial orientado $\mathfrak{K}$. Para cada dimensão p, $0 \leq p \leq \dim \mathfrak{K}$, existe um grupo, $H_p(\mathfrak{K})$, que mede o número de laços geometricamente independentes em $\mathfrak{K}$.

2.10.1 Grupos de cadeias e homomorfismo de bordo

Seja $\mathfrak{K}$ um complexo simplicial orientado de dimensão n, e seja α_p o número de p-simplexos de $\mathfrak{K}$; para cada p o p-ésimo **grupo de cadeias** de $\mathfrak{K}$, denotado por $C_p(\mathfrak{K})$, é o grupo abeliano livre gerado por $\left\{\sigma_p^1, \cdots, \sigma_p^{\alpha_p}\right\}$. Então um elemento de $C_p(\mathfrak{K})$ é uma combinação linear

$$\lambda_1\sigma_p^1 + \cdots + \lambda_{\alpha_p}\sigma_p^{\alpha_p},$$

com os λ's inteiros. Isto é chamado uma **p-cadeia** sobre $\mathfrak{K}$ e duas p-cadeias são adicionadas pela adição dos coeficientes correspondentes.

Quando escrevemos uma p-cadeia, costumamos omitir os p-simplexos cujos coeficientes são zeros, a menos que todos sejam zeros, quando escrevemos justamente 0. Escrevemos também σ para 1σ. Para $p > n$ ou $p < 0$ o grupo $C_p(\mathfrak{K})$ é definido por 0. (Observe que $C_p(\varnothing) = 0$ para todo p, desde que não existem simplexos em $\varnothing$).

Lembramos que o bordo $\partial(v_0v_1)$ de um 1-simplexo orientado (v_0v_1) é a 0-cadeia $v_1 - v_0$. Consideremos um 2-simplexo orientado $(v_0v_1v_2)$. É bastante natural definir o bordo de $(v_0v_1v_2)$ como sendo a 1-cadeia

$$\partial(v_0v_1v_2) = (v_1v_2) + (v_2v_0) + (v_0v_1).$$

Portanto, se o 2-simplexo pertence a um complexo simplicial orientado $\mathfrak{K}$, os três lados do triângulo também terão orientações específicas como elementos de $\mathfrak{K}$, e pode acontecer, por exemplo, que o lado da base tenha orientação (v^2v^1). Para evitar este tipo de inconveniência convencionaremos que

$$\begin{cases} (v_1v_2) \text{ significa a 1-cadeia } (v_1v_2) \text{ se } (v_1v_2) \in \mathfrak{K} \text{ e} \\ (v_1v_2) \text{ significa a 1-cadeia } -(v_1v_2) \text{ se } (v_2v_1) \in \mathfrak{K}. \end{cases}$$

Seja $(v_0 \cdots v_p)$ um p-simplexo orientado $(p \geq 1)$. Seja $\mathfrak{K}$ um complexo simplicial orientado e suponha que o simplexo orientado $\sigma = -(v_0 \cdots v_p)$, isto é, $\sigma = \left(v_{\pi(0)} \cdots v_{\pi(p)}\right)$ é uma permutação ímpar π dos índices pertencentes a $\mathfrak{K}$. Então convencionaremos que $(v_0 \cdots v_p)$ significa a p-cadeia $-\sigma$, isto é, a p-cadeia sobre $\mathfrak{K}$ na qual o coeficiente de σ é -1 e todos os outros coeficientes são iguais a zero. Então para uma permutação ímpar π

$$(v_0 \cdots v_p)\, v = -\left(v_{\pi(0)} \cdots v_{\pi(p)}\right)$$

ambos podem ser vistos como simplexos orientados e como p-cadeias sobre $\mathfrak{K}$.

Seja $\sigma = (v_0 \cdots v_p)$ um p-simplexo orientado de $\mathfrak{K}$ para algum $p > 0$. O **bordo** de σ é a $(p-1)$-cadeia

$$\partial\sigma = \partial_p\sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (v_0 \cdots \widehat{v_i} \cdots v_p)$$

onde o chapéu sobre v^i indica a sua omissão. Para $p = 0$, $\partial_p\sigma$ é definido como zero. O **homomorfismo de bordo** $\partial = \partial : C_p(\mathfrak{K}) \to C_{p-1}(\mathfrak{K})$ é definido como $\partial_p\left(\Sigma\lambda_i\sigma_p^i\right) = \Sigma\lambda_i\partial_p\left(\sigma_p^i\right)$.

2.10.2 Definição do grupo de homologia de um complexo simplicial orientado $\mathfrak{K}$

Finalmente, com os conceitos introduzidos, podemos definir o grupo de homologia de um complexo simplicial orientado.

Considere a seqüência

$$C_{p+1}(\mathfrak{K}) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(\mathfrak{K}) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(\mathfrak{K}).$$

O núcleo de ∂_p, $\ker \partial_p$, é denotado por Z_p ou $Z_p(\mathfrak{K})$, e os elementos de Z_p são chamados **p-ciclos**. Z_p é um grupo abeliano livre. A imagem de ∂_{p+1}, $\operatorname{Im} \partial_{p+1}$, é denotada por B_p ou $B_p(\mathfrak{K})$, e os elementos de B_p são chamados **p-bordos**. B_p é um grupo abeliano livre e todo p-bordo é um p-ciclo. A recíproca em geral é falsa: podem existir p-ciclos que não são p-bordos. Logo $B_p \subset Z_p$ e podemos definir o grupo quociente

$$H_p(\mathfrak{K}) = Z_p(\mathfrak{K}) / B_p(\mathfrak{K}),$$

chamado o p-ésimo **grupo de homologia** de $\mathfrak{K}$. Este grupo mede a quantidade de p-ciclos que não são bordos, isto é, a quantidade de "laços p-dimensionais" existentes em $\mathfrak{K}$. Observe que $H_p(\mathfrak{K})$ é um grupo abeliano.

Capítulo 3

Considerações sobre Superfícies Compactas com e sem Bordos

O objetivo central deste trabalho é realizar o mergulho do grafo associado a um canal discreto sem memória sobre uma superfície compacta. Além disso, desejamos determinar a estrutura algébrica correspondente, como também identificar os tipos de modelos oriundos dos mergulhos sobre a superfície através da representação poligonal.

A representação poligonal de uma superfície é o instrumento mais utilizado como agente fornecedor das relações matemáticas. Por isso, adotaremos uma forma padronizada para a representação poligonal visando os seguintes objetivos: (i) permitir identificar de forma única uma superfície compacta; (ii) não diminuir as opções do mergulho do grafo sobre a representação poligonal e (iii) não aumentar a complexidade do cálculo do primeiro grupo de homologia.

Importante aos nossos objetivos é, sem dúvida, a característica de Eüler de uma superfície, pois o gênero da superfície para o mergulho e o número de regiões do mergulho de um grafo sobre uma superfície dependem desse invariante topológico. Usamos a forma poligonal padronizada para identificar a característica de Eüler de uma superfície.

3.1 Superfícies Compactas com Bordos

Uma superfície com bordos é definida, [27], a seguir.

Definição 3.1.1 *Uma **variedade bidimensional com bordo** é um espaço de Hausdorff tal que cada ponto, ou tem uma vizinhança aberta homeomorfa a um disco plano ou tem uma vizinhança homeomorfa a uma vizinhança do semi-plano $y \geq 0$. O conjunto de pontos que têm uma vizinhança homeomorfa a um disco plano é chamado o **interior** da variedade, e o conjunto de pontos que têm uma vizinhança homeomorfa a uma vizinhança do semi-plano $y \geq 0$ é chamado o **bordo** da variedade.*

Assumiremos que Ω_r, $r \geq 1$, é uma variedade compacta bidimensional com r componentes de bordo. Cada componente de bordo é uma 1-variedade conexa (vista como subespaço), isto é, um círculo.

Em princípio, consideraremos as superfícies topológicas que são obtidas da transformação geométrica de um polígono de n-lados. Para ser mais preciso, analisaremos a seguinte questão: A representação poligonal de uma superfície não é única, por isso, adotaremos uma representação padrão que, além de identificar cada superfície de forma única, reduz o número de lados dos polígonos representantes das superfícies com bordos, simplificando um pouco a complexidade dos cálculos do primeiro grupo de homologia.

As superfícies compactas orientadas sem bordo possuem uma representação poligonal padronizada e, salvo referência em contrário, esta será a representação adotada (veja subseção 3.2.1). Nas superfícies compactas orientadas com bordos usaremos a "forma normal" de Massey com dois ou quatro lados a menos, visando a redução dos cálculos do grupo de homologia.

Firby, em [10], mostra como fazer a transformação geométrica do polígono de n-lados no modelo espacial da superfície associada e prova que toda superfície compacta sem bordo possui uma representação poligonal. No mesmo estilo da demonstração em Firby, mostramos que o mesmo ocorre para a superfície compacta com bordo e apresentamos o processo da realização geométrica para este caso.

De um modo geral, a identificação de duas superfícies homeomorfas é feita exibindo-se uma aplicação contínua bijetiva, com inversa contínua, entre as mesmas. Aqui, estudaremos o tipo de polígono associado a uma determinada classe de superfícies e comprovaremos que ele pode ser também um invariante topológico.

O nosso objetivo requer somente a noção intuitiva de superfície, por isso, devemos imaginar uma superfície compacta sem bordo como um conjunto de pontos onde em cada um deles existe uma vizinhança idêntica ao plano da geometria Euclidiana.

Lima em [23], define superfície como sendo uma variedade topológica bi-dimensional de Hausdorff localmente homeomorfa ao plano $\mathbb{R}^2$.

Denotaremos por $\mathbb{M}$ o conjunto de todas as superfícies (variedades riemannianas bi-dimensionais) e chamaremos de **classe de superfícies** de $M \in \mathbb{M}$ ao conjunto de todas as superfícies de $\mathbb{M}$ homeomorfas a M e a indicaremos pelo conjunto quociente $\mathbb{M}/M = \{\Omega \in \mathbb{M} : \Omega \equiv M\}$.

Um **polígono de** n-lados, $n \geq 1$, é um conjunto de pontos topologicamente equivalente a um disco plano com n vértices sobre o bordo. Os arcos entre os vértices sobre a fronteira são chamados de **lados** do polígono. Se existir uma orientação em cada lado do polígono diremos que é um **polígono orientado de** n-lados.

Devemos imaginar uma superfície como sendo o resultado da transformação geométrica de um polígono orientado de n-lados, pela colagem dos lados que aparecem aos pares, seguida de uma deformação contínua, que o transforma numa superfície representante de uma classe de homeomorfismos. Denominaremos esta transformação de **realização geométrica** de Ω. O **modelo espacial** de uma superfície Ω é a representação gráfica da superfície no espaço euclidiano tri-dimensional

Chamaremos também de **representação poligonal** de uma superfície Ω, ao polígono orientado de n-lados que será representado pela palavra

$$\omega = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n}, \quad p_i \in \{\pm 1\},$$

onde a_i denota o i-ésimo lado do polígono e o expoente p_i de a_i terá orientação no sentido horário se $p_i = 1$ e, a_i terá orientação no sentido anti-horário se $p_i = -1$.

Uma superfície compacta com r componentes de bordo será representada por Ω_r ou $\Omega - \{p_1, p_2, \cdots, p_r\}$. Obviamente Ω é qualquer uma das superfícies compactas básicas: S (esfera), T (toro), K (garrafa de Klein), P (plano projetivo) e $\{p_1, p_2, \cdots, p_r\}$ é um conjunto finito de pontos sobre Ω.

A superfície $m\Omega$ denota a soma conexa de m cópias de uma superfície simples básica. Por convenção, $0T$ é identificado como S.

Por exemplo, mP denota a soma conexa de m cópias do plano projetivo P, mTK denota a soma conexa de m cópias do toro T e da superfície de Klein K, mTP denota a soma conexa de m cópias do toro T e do plano projetivo P.

Assumiremos que Ω_r é uma superfície com r componentes de bordo isolados, $r \geq 1$. Escreveremos Ω para indicar uma superfície compacta sem bordo. Cada componente de bordo é uma variedade unidimensional conexa compacta, isto é, um círculo.

3.2 O Polígono Associado às Variedades Compactas Conexas Bi-dimensionais

Apresentaremos as representações poligonais das superfícies compactas com e sem bordos, o processo de contagem dos vértices de um polígono de n-lados e as transformações geométricas nos polígonos de uma superfície que não alteram a classe de homeomorfismo, indicando-as com igualdades algébricas através das palavras associadas aos polígonos.

3.2.1 Modelo plano de uma superfície compacta

É comum referir-se às representações poligonais de uma superfície como sendo o **modelo plano** da superfície. Fazendo uso da topologia combinatorial, Seifert-Therlffall, em [38], mostra que toda superfície compacta é o espaço quociente de um polígono por uma relação de equivalência segundo a qual os lados que constituem o bordo do polígono são identificados dois a dois, de acordo com os esquemas mostrados na Figura 3.1.

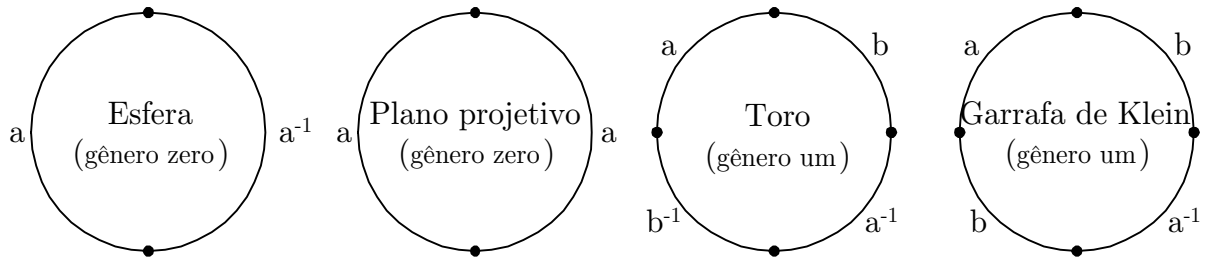

Figura 3.1: Modelos planos das superfícies compactas básicas

Quando usamos setas para indicar a orientação dos lados das representações poligonais das superfícies compactas básicas, os modelos planos têm as formas dos esquemas da Figura 3.2.

As demais classes de superfícies compactas são construídas a partir das superfícies

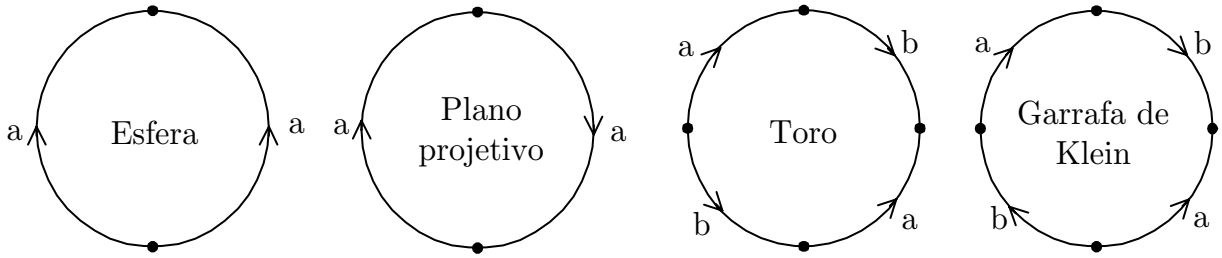

Figura 3.2: Modelos planos das superfícies básicas orientadas com setas

básicas. Quando compactas, são obtidas como somas conexas[1] dessas superfícies. Como exemplo, considere o esquema do bitoro e o esquema de uma superfície não-orientada dada pela soma conexa de três planos projetivos, conforme mostra a Figura 3.3.

A relação de homeomorfismo entre duas superfícies Ω e Ω' será indicada por $\Omega \equiv \Omega'$.

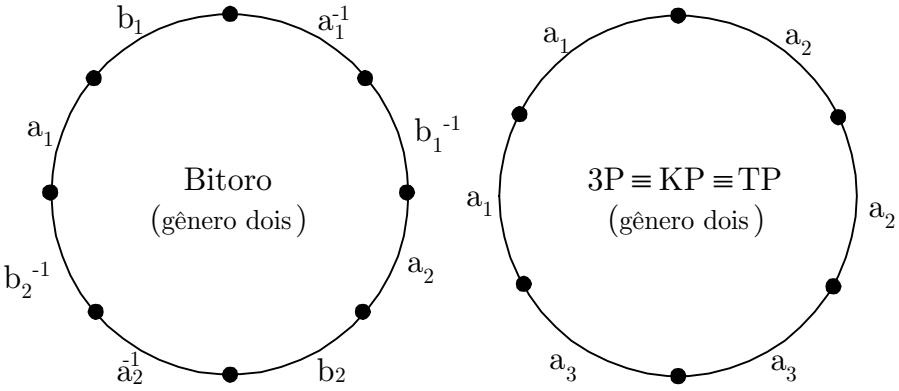

Figura 3.3: Modelos planos de superfícies de gênero 2

Observe, na Figura 3.3, a forma orientada das superfícies conexas. Tal forma nos diz como obter superfícies conexas orientadas e não-orientadas de qualquer gênero.

Note que o número de lados dos polígonos nos modelos planos das superfícies compactas ocorrem aos pares, formando um polígono de $2m$ lados.

A cada modelo plano de uma superfície podemos associar uma seqüência chamada **palavra** constituída pelos símbolos a_1, a_2, b_1, etc. Então dada uma palavra, podemos esboçar o modelo planar de uma superfície e, em seguida, reconstituir o seu **modelo espacial**. Tal representação não é única, já que uma rotação no polígono, correspondente a um ciclo na palavra, produz a mesma superfície. Logo, existem superfícies homeomorfas com palavras diferentes. As palavras das superfícies compactas básicas são mostradas na Tabela 3.1.

Cada palavra associada à superfície, mostrada na Tabela 3.1, é chamada de **forma normal** da superfície**.**

[1]Uma superfície S é dita soma conexa das superfícies S_1 e S_2, quando é obtida através da 'colagem' das fronteiras de pequenos discos, um em S_1 e outro em S_2.

S	P	T	K	nT	mP
aa^{-1}	aa	$aba^{-1}b^{-1}$	$aba^{-1}b$	$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$	$a_1a_1a_2a_2\cdots a_ma_m$

Tabela 3.1: Forma normal das palavras das superfícies básicas

3.2.2 Modelo plano de uma superfície compacta com bordo

Em [27], Massey classifica as superfícies compactas conexas com bordo. Essas superfícies são obtidas pela remoção de uma quantidade finita de discos fechados[2] disjuntos, selecionados sobre uma superfície compacta. O número de componentes do bordo é igual ao número de discos.

Assumiremos que $\overline{\Omega}$ é uma superfície com bordo e que o bordo tem k componentes, $k \geq 1$. Cada componente do bordo é uma variedade unidimensional conexa compacta, isto é, um círculo. É claro que se tomarmos k discos fechados e colarmos o bordo do i-ésimo disco na i-ésima componente do bordo obtemos uma superfície compacta $\overline{\Omega}^*$. O tipo de topologia de $\overline{\Omega}^*$, obviamente, depende apenas do tipo de topologia de $\overline{\Omega}$. O que não é óbvio é que a recíproca dessa afirmação seja verdadeira: o tipo de topologia da superfície com bordo depende somente do número de suas componentes de bordo e do tipo da superfície $\overline{\Omega}^*$ obtida pela colagem de um disco em cada componente do bordo. Massey formaliza este resultado no seguinte teorema.

Teorema 3.2.1 *Sejam $\overline{\Omega}_1$ e $\overline{\Omega}_2$ superfícies compactas com bordos; assuma que seus bordos têm o mesmo número de componentes. Então, $\overline{\Omega}_1$ e $\overline{\Omega}_2$ são homeomorfas se, e somente se, as superfícies $\overline{\Omega}_1^*$ e $\overline{\Omega}_2^*$ (obtidas pela colagem de um disco em cada componente de bordo) são homeomorfas.*

Na demonstração do Teorema 3.2.1, usa-se o fato de que se Ω_1 e Ω_2 são superfícies homeomorfas, então pode-se identificar os seus respectivos polígonos com uma certa paridade de lados, chamada "*forma normal*". A forma normal de um polígono é explicada detalhadamente em [27]. Na próxima seção, descreveremos na íntegra, o tipo de polígono representante de uma palavra na forma normal, mais conveniente para representar uma superfície.

3.2.3 Forma normal da esfera com r componentes de bordo.

A esfera é representada por um polígono de dois lados identificados com a palavra aa^{-1}. Faça r furos no polígono, como mostrado na Figura 3.4(a) para o caso $r = 5$. Então, de um vértice sobre o bordo do polígono faça os cortes $c_1, c_2, \cdots, c_r$ correspondentes às componentes de bordo $B_1, B_2, \cdots, B_r$. Abra cada corte para obter o polígono mostrado na Figura 3.4(b). Em geral, obtemos um polígono com $3r+2$ lados, os quais são identificados de acordo com a palavra

$$aa^{-1}c_1B_1c_1^{-1}c_2B_2c_2^{-1}\cdots c_rB_rc_r^{-1}. \tag{3.1}$$

[2]Um disco sobre uma superfície M se diz fechado quando consideramos o conjunto dos pontos de M que são interiores de uma circunferência sobre M junto com os pontos da própria circunferência.

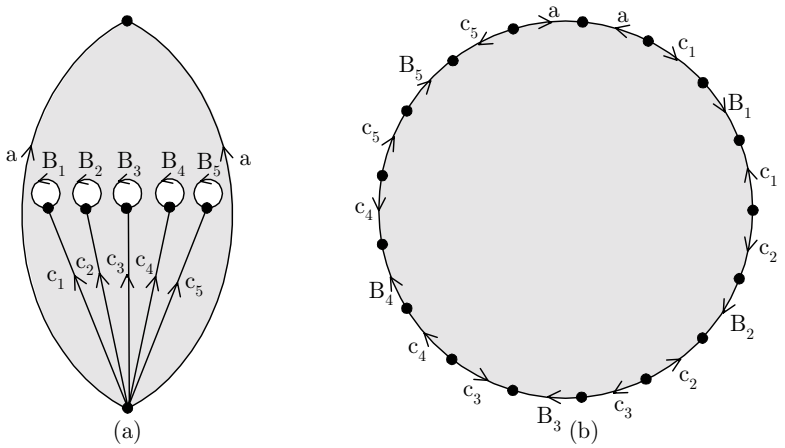

Figura 3.4: Esfera com cinco componentes de bordo

3.2.4 Forma normal da soma conexa de m toros com r componentes de bordo

Os diagramas (a) e (b) da Figura 3.5, mostram o procedimento para obter o polígono de n-lados associado a uma superfície homeomorfa à soma conexa de m toros e r componentes de bordo, mT_r, caso particular quando $m = 3$ e $r = 5$. A construção é inteiramente análoga ao caso da esfera. O resultado é um polígono com $4m+3r$ lados, que deve ser identificado com a seguinte palavra

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_m b_m a_m^{-1} b_m^{-1} c_1 B_1 c_1^{-1} c_2 B_2 c_2^{-1} \cdots c_r B_r c_r^{-1}. \tag{3.2}$$

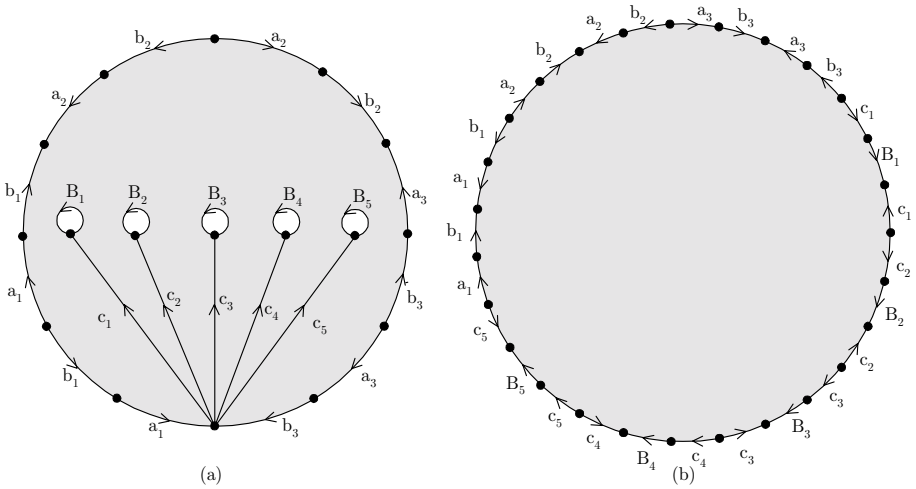

Figura 3.5: $3T$ com cinco componentes de bordo

3.2.5 Forma normal da soma conexa de m planos projetivos com r componentes de bordo

Os diagramas (a) e (b), Figura 3.6, mostram o polígono da soma conexa de m planos projetivos com r componentes de bordo, mP_r, caso particular de $m = 3$ e $r = 5$. O resultado é um polígono com $2m + 3r$ lados, que deve ser identificado com a seguinte palavra

$$a_1a_1a_2a_2 \cdots a_mb_mc_1B_1c_1^{-1}c_2B_2c_2^{-1} \cdots c_rB_rc_r^{-1}. \tag{3.3}$$

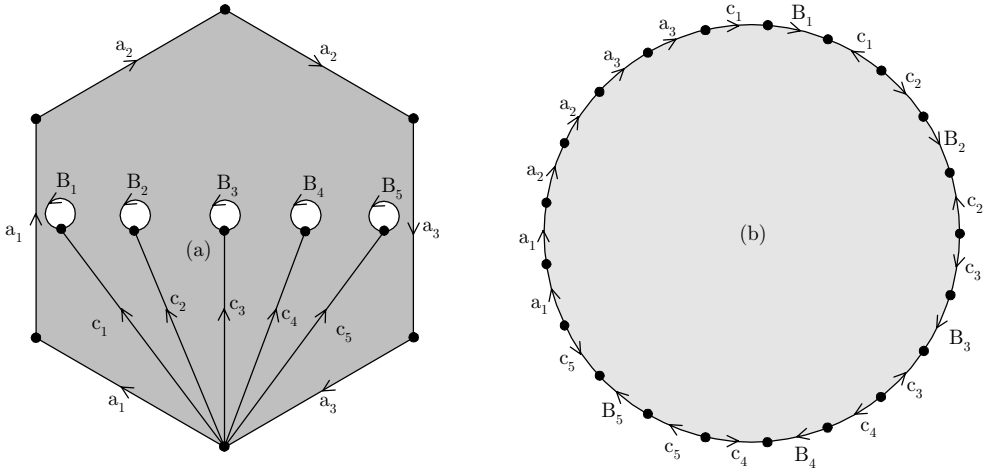

Figura 3.6: A soma conexa de 3 planos projetivos com cinco componentes de bordo

Teorema 3.2.2 *[27]Sejam Ω_1 e Ω_2 superfícies geradas por polígonos orientados. Então Ω_1 e Ω_2 são superfícies homeomorfas se, e somente se, os polígonos associados são representados por palavras cujos pares de lados são correspondentes.*

As definições e resultados sobre mergulhos de grafos, por serem em número reduzidos, encontram-se nos próprios capítulos onde estão sendo desenvolvidos os temas.

3.2.6 Contagem dos vértices de um polígono de n-lados

A contagem dos vértices do modelo espacial representantes dos vértices do modelo plano da superfície Ω, mostrada na Figura 3.7, é realizada do seguinte modo:

(i) Inicialmente, rotule por 1 o vértice final de a (lado superior); rotule também por 1 o vértice final do outro lado do polígono identificado por a. Este é o vértice final do lado b; rotule por 1 o vértice final do outro lado identificado por b. Este é o vértice inicial do lado c; rotule por 1 o vértice incial do outro lado identificado por c. Ele também é o vértice inicial do lado b. Como o outro vértice inicial de b já foi rotulado por 1, o processo acaba;

(*ii*) Estes quatros vértices rotulados com 1 representam um único ponto no modelo espacial da superfície Ω;

(*iii*) Escolha outro vértice que não foi rotulado, rotule-o com 2 e repita o procedimento em (*i*). Continuando assim, rotulamos todos os vértices do polígono de n-lados, como mostra a Figura 3.7. Isto mostra que os vértices no modelo plano representam três pontos no modelo espacial de Ω.

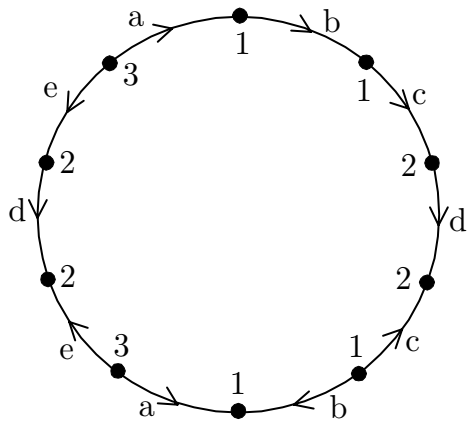

Figura 3.7: Contagem dos vértices de um polígono de n-lados

3.2.7 Operações sobre uma palavra associada a uma superfície

Em [10], vemos que é possível efetuar modificações na palavra da representação de um polígono de n-lados sem afetar, a menos de homeomorfismo, a superfície representada. Tais transformações são definidas na forma de operações, que podem ser manipuladas no sentido contrário para a reobtenção da forma original da palavra. Em cada estágio da manipulação, as palavras são distintas, representantes de superfícies diferentes, mas pertencentes a uma mesma classe de superfícies.

Operação 1. A permutação cíclica dos lados em uma palavra

Esta operação é representada pela identidade

$$AB \equiv BA, \tag{3.4}$$

onde A e B denotam seqüências de lados consecutivos do polígono de n-lados. Por exemplo, $a_1b_1a_1b_1^{-1}$ e $b_1^{-1}a_1b_1a_1$ representam a mesma superfície (garrafa de Klein). Em geral, uma permutação cíclica de uma palavra causa uma rotação em seu modelo plano não alterando a superfície que tal modelo representa.

Operação 2. Introdução ou remoção de um par de lados xx^{-1} na palavra

Dizemos que as palavras $Axx^{-1}B$ e AB, a menos de homeomorfismos, representam a mesma superfície, quando pelo menos uma seqüência de lados consecutivos A ou B é não nulo. Representamos esta relação pela identidade

$$Axx^{-1}B \equiv AB. \tag{3.5}$$

A interpretação geométrica para esta operação é mostrada na Figura 3.8.

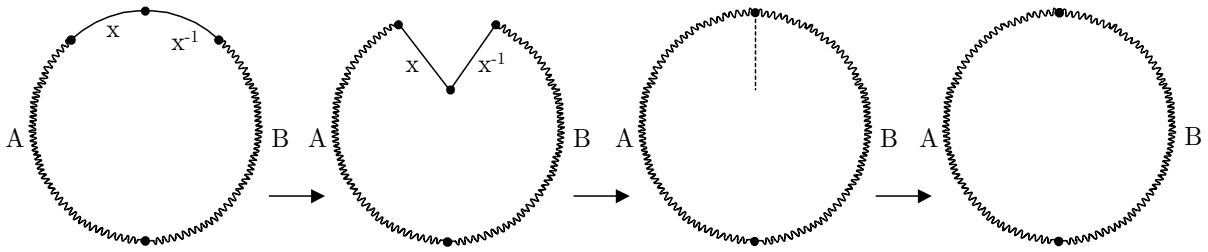

Figura 3.8: Introdução ou remoção de lados consecutivos no modelo plano

Operação 3. A substituição de $AxBCx^{-1}$ por $AyCBy^{-1}$ e vice-versa.

Nesta operação, escrevemos $y = xB$ para significar que o lado y conecta o mesmo par de vértices da seqüência xB. De modo análogo, a igualdade $x^{-1} = By^{-1}$ significa que o lado x^{-1} conecta o mesmo par de vértices da seqüência By^{-1}. Esta operação é indicada pela identidade

$$AxBCx^{-1} \equiv AyCBy^{-1}. \tag{3.6}$$

Entendemos esta operação como sendo uma espécie de comutatividade em duas seqüências de lados do modelo plano de uma superfície envolvida por lados orientados. A interpretação geométrica é mostrada na Figura 3.9.

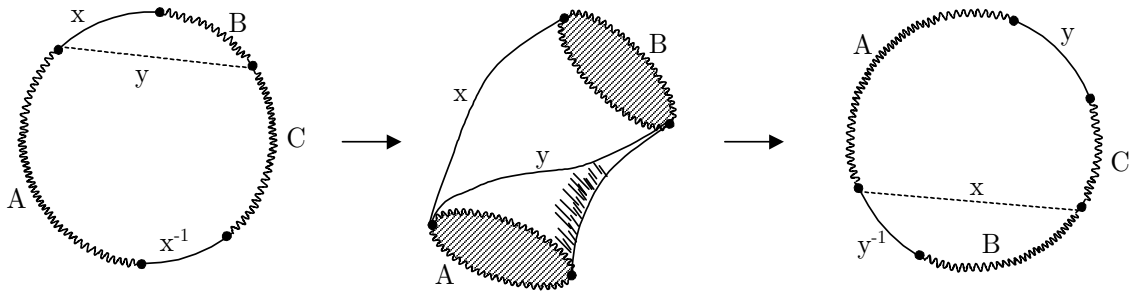

Figura 3.9: Comutatividade de seqüências envolvendo lados orientados

Operação 4. Substituição de AxBxC por AyyB^{-1}C e vice versa.

Escrevemos $y = xB$ para significar que y tem os mesmos vértices da seqüência xB e $x = yB^{-1}$para significar que x tem os mesmos vértices da seqüência yB^{-1}. Indicaremos esta operação pela identidade

$$AxBxC \equiv AyyB^{-1}C. \tag{3.7}$$

Esta operação pode ser interpretada como sendo uma forma de comutatividade em duas seqüências de lados do modelo plano de uma superfície dominada por lados não-orientados. A interpretação geométrica é mostrada na Figura 3.10.

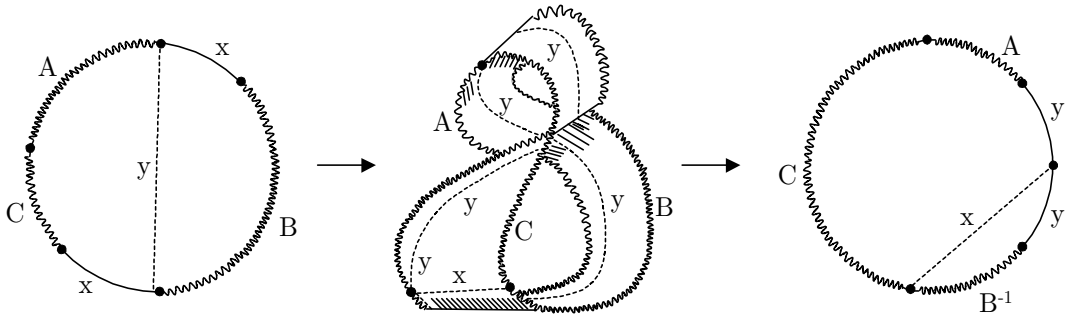

Figura 3.10: Comutatividade de seqüências envolvendo lados não-orientados

Estas operações, aparentemente complexas, são idéias que permitem manipular palavras associadas ao modelo plano de uma superfície, tornando possível a demonstração do teorema da classificação de superfícies.

Lembramos que, ao nos referirmos aos pares de lados não significa que eles estejam juntos na palavra. A situação mais comum é a existência de lados entre os mesmos, como no caso da palavra do m-toro.

Para atender os três objetivos desejados, a representação poligonal de uma superfície deve, em primeiro lugar, ser representada por uma seqüência padrão, porque senão ela perderia a unicidade. Em segundo lugar, ela tem que representar uma superfície compacta com bordo, caso contrário, teríamos menos opções para mergulhos de um grafo e, finalmente, ela não deverá ter excesso de lados, para não aumentar a complexidade do cálculo do grupo de homologia. Chegamos a conclusão que a representação poligonal de uma superfície compacta com bordo, que atenda a estes três objetivos, deverá ter a seguinte forma.

Definição 3.2.3 *Chamaremos de* ***forma mínima*** *de uma superfície Ω_r com r componentes de bordo as seguintes palavras associadas aos polígonos de n-lados de Ω_r:*

$$\begin{aligned}
\omega(S_1) &= b_1 \ e\ \omega(S_r) = c_1B_1c_1^{-1}c_2B_2c_2^{-1}\cdots c_{r-1}B_{r-1}c_{r-1}^{-1}B_r,\ r \geq 2,\\
\omega(mT_r) &= a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_mb_ma_m^{-1}b_m^{-1}c_1B_1c_1^{-1}\cdots c_{r-1}B_{r-1}c_{r-1}^{-1}B_r,\\
\omega(mP_r) &= a_1a_1a_2a_2\cdots a_mb_mc_1B_1c_1^{-1}\cdots c_{r-1}B_{r-1}c_{r-1}^{-1}B_r.
\end{aligned}$$

Pela Operação (3.5), não há necessidade de acrescentar o par aa^{-1} na palavra de $\omega(S_r)$ quando $r \geq 1$, isto só aumentaria a complexidade do cálculo do primeiro grupo de homologia da superfície S_r sem, entretanto, aumentar as opções de mergulho de um grafo sobre a representação poligonal de S_r.

Quando Ω for gerada por um polígono de n-lados, identificado por uma palavra na forma mínima ω, indicaremos esta relação por $\Omega \equiv n\text{-lados} \equiv \omega(\Omega)$.

3.2.8 Realização geométrica de uma superfície com bordo

A superfície Ω representada pela palavra na forma mínima $\omega(\Omega)$ da Definição 3.2.3 é sempre uma superfície com r componentes de bordo isolados, correspondentes aos r lados $b_1, \cdots, b_r$ de ω. Por exemplo, a Figura 3.11 mostra a construção do modelo espacial da superfície $4T_5$, a soma conexa de 4 toros com 5 componentes de bordo, cuja palavra na forma mínima é

$$\omega(4T_5) = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots a_4b_4a_4^{-1}b_4^{-1}c_1B_1c_1^{-1}\cdots c_4B_4c_4^{-1}B_5.$$

O termo "mínima" é usado em relação às componentes de bordo isoladas, porém, não implica na não existência de uma representação poligonal ω' de $4T_5$ com um número menor de lados, só que, neste caso, ω' teria, obrigatoriamente, pelo menos dois bordos conjugados, a interseção entre eles seria um ponto. As palavras $\omega_1(4T_5), \omega_2(4T_5)$ e $\omega_3(4T_5)$ representam superfícies homeomorfas a $4T_5$.

$$\omega_1(4T_5) = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_4b_4a_4^{-1}b_4^{-1}c_1B_1c_1^{-1}B_2c_2B_3c_2^{-1}c_3B_4c_3^{-1}B_5 \quad (3.8)$$

$$\omega_2(4T_5) = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_4b_4a_4^{-1}b_4^{-1}c_1B_1c_1^{-1}B_2c_2B_3c_2^{-1}B_4B_5, \quad (3.9)$$

$$\omega_3(4T_5) = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_4b_4a_4^{-1}b_4^{-1}B_1B_2B_3B_4B_5. \quad (3.10)$$

Note que estas representações poligonais do $4T_5$ em ω_1, ω_2 e ω_3 possuem $27, 25$ e 21 lados, respectivamente, todas representações poligonais de superfícies com bordos conjugados - pelo menos dois bordos têm um ponto em comum. A forma mínima do polígono do $4T_5$ é composta por 29 lados enquanto na forma normal de Massey, temos uma total de 31 lados. Se descartássemos a hipótese "*componentes de bordo isolados*", a forma mínima do $4T_5$ seria certamente representada por ω_3. Neste caso, teremos necessariamente todos os bordos conjugados, a interseção dos bordos seria um ponto, correspondente aos 21 vértices de 21-*lados* $\equiv 4T_5$, após a realização geométrica. Observe ainda que as componentes de bordo de uma superfície são geradas pelos lados sem os correspondentes pares de ω. Cada lado que não tem um par em ω representa uma componente de bordo.

Proposição 3.2.4 *Se a representação poligonal $\omega(\Omega_r)$ de uma superfície encontra-se na forma mínima, então os vértices do polígono de n-lados $\equiv \omega(\Omega_r)$, representam: 2 pontos se $\Omega_r \equiv S$; apenas 1 ponto sobre uma superfície compacta sem bordo $(r = 0)$; e r pontos no modelo espacial de uma superfície com r componentes de bordo $(r \geq 1)$.*

Demonstração. De fato, ω está na forma mínima. Basta aplicar, nos respectivos modelos planos de cada superfície, o critério de contagem de vértices de um polígono da Subseção 3.2.6. ∎

Usaremos a Proposição 3.2.4 para determinarmos a característica de Eüler de uma superfície em função do grau de conexidade e do número de componentes de bordo.

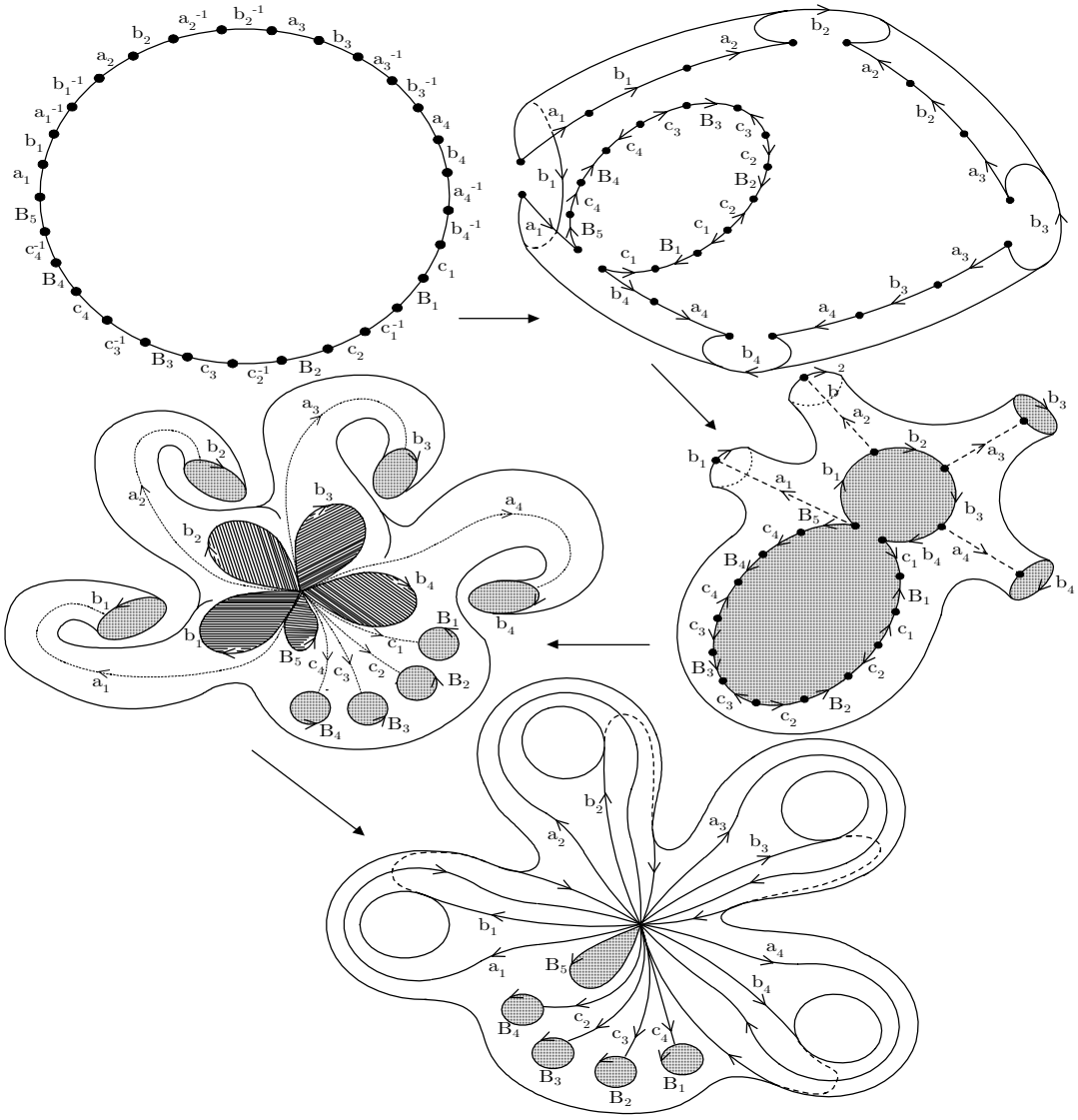

Figura 3.11: Realização geométrica do $4T_5$

3.2.9 Superfícies orientadas

As próximas afirmações são resultados clássicos, porém, insistimos nas demonstrações porque elas consistem basicamente do uso repetido das transformações preservadas por homeomorfismos, definidas na Subseção 3.2.7, de onde podem ser extraídas as estruturas algébricas relacionadas às superfícies.

Para efeito de simplificação, as operações definidas em (3.4) , (3.5) , (3.6) e (3.4) serão indicadas por (1), (2), (3) e (4) , respectivamente.

Teorema 3.2.5 *[10]Seja ω a palavra de um polígono de n-lados representante de uma superfície Ω que não contém pares não-orientados aa, então $\Omega \equiv mT_r$ ou $\Omega \equiv S_r$, para alguns inteiros $m, r \geq 0$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que, após algumas rotações em ω (equivale a operação (1)), os lados x, x^{-1} e y, y^{-1} são pares separados orientados de $\omega_0 \equiv AxByCx^{-1}Dy^{-1}$. Usando as operações (1) e (3) , segue que:

$$\begin{aligned}\omega_1 &\overset{(3)}{\equiv} Ax_1yCBx_1^{-1}Dy^{-1} \overset{(3)}{\equiv} Ax_1y_1x_1^{-1}DCBy_1^{-1} \\ &\overset{(1)}{\equiv} y_1x_1^{-1}DCBy_1^{-1}Ax_1 \overset{(3)}{\equiv} y_1x_2^{-1}y_1^{-1}ADCBx_2 \overset{(1)}{\equiv} x_2y_1x_2^{-1}y_1^{-1}ADCB.\end{aligned}$$

Fazendo $x_2y_1x_2^{-1}y_1^{-1} = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}$, $\omega_2 = ADCB$ e supondo que ω_2 tem pares separados, repetimos o processo e obtemos $\omega_2 \equiv a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\omega_3$. Como n é finito, prosseguimos até obtermos a forma $\omega_m \equiv (a_mb_ma_m^{-1}b_m^{-1})\,\omega_{m+1}$, onde ω_{m+1} não tem pares separados orientados, isto é,

$$\omega_m \equiv \left(a_mb_ma_m^{-1}b_m^{-1}\cdots a_3b_3a_3^{-1}b_3^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\right)\omega_{m+1}.$$

Como ω_{m+1} não tem pares separados e nem pares não-orientados, ela só pode representar as componentes de bordo, isto é, $\omega_{m+1} \equiv b_1z_1b_2z_1^{-1}z_2b_3z_2^{-1}\cdots z_{r-1}b_rz_{r-1}^{-1}$, para algum inteiro positivo r. Como as operações (1) a (4) não afetam, a menos de homeomorfismos, a superfície Ω, segue que $\Omega \equiv mT_r$. Por outro lado, se ω não contém pares separados (caso $m = 0$), então, $\Omega \equiv S_r$. ∎

Corolário 3.2.6 *[10]Todo polígono orientado de n-lados é um modelo plano de alguma superfície orientável.*

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 3.2.5. ∎

3.2.10 Superfícies não-orientadas

A soma conexa de duas superfícies compactas Ω_1 e Ω_2 é a superfície $\Omega_1\Omega_2$ obtida segundo a colagem dos discos $D_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2$, conforme a construção ilustrada na Figura 3.12.

Por exemplo, se $\Omega_1 \equiv mT$ e $\Omega_2 \equiv K$, escreveremos mTK (ou $(mT)\,K$)para indicar a soma conexa de Ω_1 com Ω_2.

Uma superfície não-orientada é do tipo mTK ou mTP. Verificamos que estas são as formas apropriadas para obtermos mergulhos de grafos, quando usamos a forma espacial. Outra maneira de identificação é encontrar a forma nP de uma superfície não-orientada, sendo esta bastante prática para determinar a característica de Eüler e o primeiro grupo de homologia de uma superfície não-orientada. As identidades em (3.11) permitem transformar a forma nP em mTK ou mTP e vice-versa.

É muito simples justificar as seguintes relações de homeomorfismos

$$2P \equiv K, \quad 2K \equiv TK \quad e \quad TP \equiv KP. \tag{3.11}$$

De fato, $2P \equiv aabb \equiv cb^{-1}cb \equiv K$. Por outro lado, $2K$ e TK são superfícies não-orientadas com características de Eüler $\chi(2K) = \chi(TK) = 0$, logo, pelo Teorema 4.3.1 em [10], segue que $2K \equiv TK$. De modo análogo, mostra-se que $TP \equiv KP$.

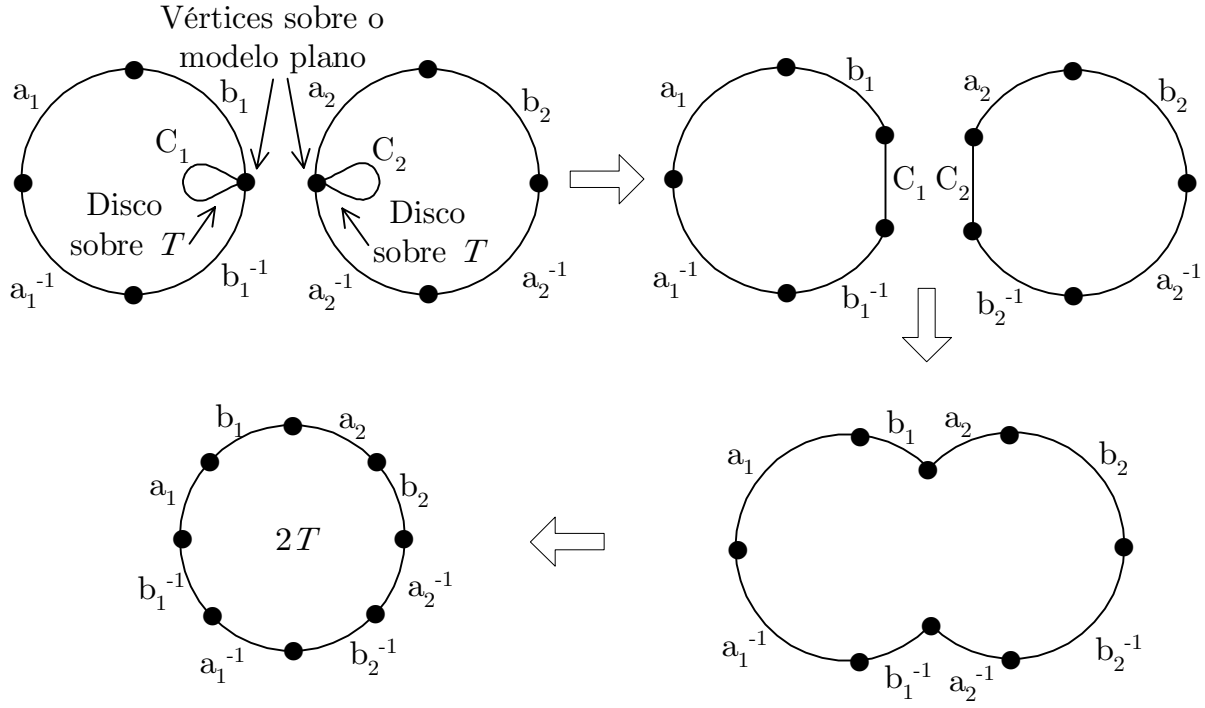

Figura 3.12: Construção geométrica da soma conexa de dois toros

Lema 3.2.7 *[10]Para todo inteiro positivo m, têm-se*

$$(i) \quad mTP \equiv (2m+1)\,P \tag{3.12}$$

$$(ii) \quad mTK \equiv [2\,(m+1)]\,P. \tag{3.13}$$

Demonstração. Se $m = 0$, então por definição, $0T \equiv S$. Logo, $0TP = SP \equiv P$. Como $(2 \cdot 0 + 1)\,P = P$, o caso $m = 0$ satisfaz a relação em (3.12). Usando as formas normais das superfícies T e P obtemos, para o caso $m = 1$, que

$$TP \equiv aba^{-1}b^{-1}cc \overset{(1)}{\equiv} a^{-1}b^{-1}ccab \overset{(4)}{\equiv} a^{-1}b^{-1}xb^{-1}a^{-1}x \overset{(4)}{\equiv} y^{-1}y^{-1}bx^{-1}bx \overset{(4)}{\equiv} y^{-1}y^{-1}zzxx \equiv 3P.$$

Como $3 = 2 \cdot 1 + 1$, o caso $m = 1$ satisfaz (3.12). Se $m = 2$, temos,

$$2TP = TTP \equiv TKP \equiv TPPP \equiv KPPP \equiv PPPPP \equiv 5P.$$

Como $5 = 2 \cdot 2 + 1$, portanto da forma $2m + 1$, então a relação (3.12) é verdadeira para $m = 2$. Suponha, por indução, que $mTP \equiv (2m+1)\,P$. Mas por (3.11), $2P \equiv K$ e $KP \equiv TP$. Logo, para o caso $m + 1$, temos

$$(m+1)\,TP = T\,(mT)\,P \equiv T\,(2m+1)\,P \equiv (TP)\,(2mP) \equiv (2\,(m+1)+1)\,P.$$

Portanto, pelo princípio de indução, a relação em (3.12) é verdadeira.

Por outro lado, usando indução sobre m na relação (3.13), resulta que, se $m = 0$, então: $0TK \equiv SK \equiv K \equiv PP = 2P = [2\,(0+1)]\,P$. Logo é verdadeira para $m = 0$.

Se $m = 1$, então: $TK \equiv TPP \equiv KPP \equiv PPPP \equiv 4P$. Como $4 = 2(1+1)$, então 4 é da forma $2(m+1)$, o que mostra a validade da relação em (3.13) para o caso $m = 1$. Suponha, por indução, que $mTK \equiv [2(m+1)]P$. Temos

$$(m+1)TK = T(mTK) \equiv T[2(m+1)]P \equiv (TP)(2m+1)P \equiv 2[(m+1)+1]P.$$

Portanto, a relação em (3.13) é verdadeira para $m+1$ e, pelo princípio de indução, é verdadeira para todo inteiro $m \geq 0$. ■

Teorema 3.2.8 *[10]Se Ω é uma superfície não-orientada com r componentes de bordo então $\Omega \equiv mTP_r$ ou $\Omega \equiv mTK_r$, para alguns inteiros $m, r \geq 0$.*

Demonstração. Seja ω uma palavra com pares não-orientados aa. Da demonstração do Teorema 3.2.5, podemos escrever $\omega \equiv kT\omega_1$, onde ω_1 não tem pares separados orientados. Mas pela operação (4), $\omega_1 \equiv AaBaC \equiv AxxB^{-1}C \equiv x_1x_1\omega_1$. Após esgotar todos os pares não-orientados, podemos escrever $\omega \equiv (kT)(hP)\omega'$, onde ω' não tem pares orientados separados e nem pares não-orientados. Logo $\omega' \equiv S_r$ e daí, $\omega \equiv (kT)(hP)S_r$. Pelo Lema 3.2.7, $\Omega \equiv (k + h/2 - 1)TK_r$, se h é par, ou $\Omega \equiv (k + (h-1)/2)TP_r$, se h é ímpar. Fazendo $m = k + h/2 - 1$, obtemos $\Omega \equiv mTK_r$ e fazendo $m = k + (h-1)/2$, temos $\Omega \equiv mTP_r$. ■

Proposição 3.2.9 *[10]Todo polígono não-orientado de n-lados é um modelo plano para alguma superfície não-orientada.*

Demonstração. Suponha que $\omega_0 \equiv \Omega$, Ω é não-orientada. Então $\omega_0 = AaBaC$. Pelas operações (1) e (4), resulta que $\omega_0 \equiv AyyB^{-1}C \equiv yyB^{-1}CA \equiv a_1a_1\omega_1$, com $\omega_1 \equiv B^{-1}CA$. Se ω_1 é não-orientada então $\omega_1 \equiv a_2a_2\Omega_2$. Como n é finito, as aplicações sucessivas das operações (1) e (4) nos dá: $\omega_{m-1} \equiv a_ma_m\omega_m$, onde ω_m é nula ou uma palavra orientada. Se ω_m for nula, então Ω é a soma conexa da m planos projetivos, caso contrário, pelo Teorema 3.2.5, Ω pode ser expressa como a esfera menos r pontos ou como a soma conexa de n toros menos s pontos. Então Ω é a soma conexa de m planos projetivos com uma dessas superfícies orientadas, portanto não-orientada.

Como conseqüência do Teorema 3.2.8, temos o seguinte resultado. ■

Corolário 3.2.10 *[10]Toda superfície conexa compacta não-orientada com r componentes de bordo é homeomorfa a mP_r, para algum inteiro $m \geq 0$.*

3.2.11 Exemplos de superfícies compactas com bordos

A palavra na forma mínima representante do polígono de uma superfície compacta com bordo, a partir do modelo espacial da superfície será apresentada. Para isso, basta identificar o gênero, a orientabilidade e o número de componentes de bordo. Usaremos as superfícies mínimas como exemplos de superfícies compactas com bordos.

Na Figura 3.13, a superfície (1) representa o catenóide; (2) corresponde a uma superfície mínima homeomorfa a esfera menos 6 pontos, S_6; (3) o trinóide de gênero 1, quando

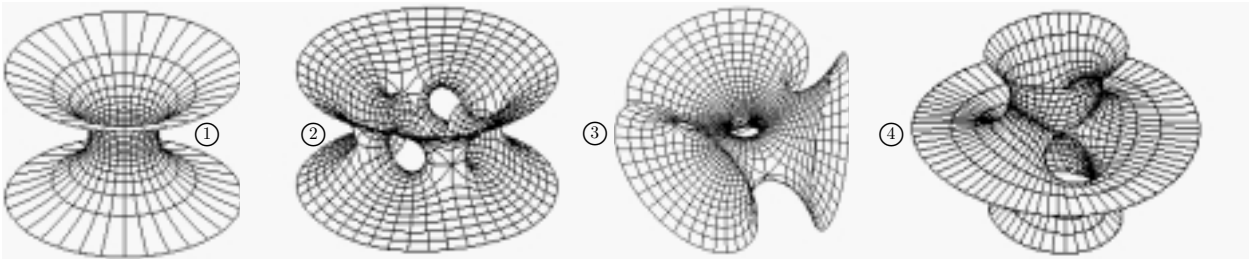

Figura 3.13: Exemplos de superfícies compactas com bordos

o seu gênero é zero é conhecida como a superfície de Jorge-Meeks, e (4) a superfície de Costa-Meeks.

Todos os exemplos mostradas na Figura 3.13 representam superfícies orientadas. As superfícies (3) e (4) , embora não pareçam, pertencem à mesma classe de superfície do T_3, pois ambas tem gênero um e três fins: (3) possui três fins tipo catenóides e (4) possui dois fins tipo catenóides e um fim tipo planar. Mas do ponto de vista de componentes de bordo, ambas possuem três componentes, logo são superfícies homeomorfas ao toro menos três pontos, portanto têm a mesma palavra na forma mínima, conforme discriminação abaixo:

$$\begin{aligned} \omega(S_2) &= b_0a_1b_1a_1^{-1},\ \ \omega(S_6) = b_0a_1b_1a_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}a_3b_3a_3^{-1}a_4b_4a_4^{-1}a_5b_5a_5^{-1}, \\ \omega(T_3) &= \omega(S_{Trinóide\ de\ gênero\ 1}) = \omega(S_{Costa}) = a_1b_1a_1b_1^{-1}d_1c_1d_2c_1^{-1}c_2d_3c_2^{-1}. \end{aligned}$$

3.2.12 Característica de Eüler de superfícies compactas

Um dos invariantes que auxiliam na classificação das superfícies é, sem dúvida, a característica de Eüler. Este invariante topológico é definido como: a **característica de Eüler** de uma superfície compacta Ω é o número inteiro $\chi(\Omega) = v - n' + 1$, onde v e n' denotam o número de rótulos distintos associados aos vértices e lados do polígono de n-lados de Ω, respectivamente.

Lembramos que a contagem do número de vértices do polígono, é feita segundo os critérios da Subseção 3.2.6.

Teorema 3.2.11 (Teorema de Eüler) *A característica de Eüler de uma superfície Ω gerada pelo polígono de n-lados na forma mínima é dada por*

$$\chi(\Omega) = \begin{cases} 2-r, \ se\ \Omega \equiv S_r \\ 2-2m, \ se\ \Omega \equiv mT \\ 2-m, \ se\ \Omega \equiv mP \\ 2-r-2m, \ se\ \Omega \equiv mT_r \\ 2-r-m, \ se\ \Omega \equiv mP_r. \end{cases} \tag{3.14}$$

Demonstração. Usando a forma mínima da Definição 3.2.3, concluímos que o número de lados distintos dos polígonos de n-lados das famílias de superfícies são

$$\begin{aligned} n'(S_r) &= 2(r-1)+1,\ \ n'(mT) = 2m,\ \ n'(mP) = m, \\ n'(mT_r) &= 2m+2r+1 \ \text{ e } \ n'(mP_r) = m+2r-1. \end{aligned}$$

n	Ω	$\omega(\Omega)$	χ	n	Ω	$\omega(\Omega)$	χ
1	S_1	a_1	1	10	S_4	$a_1b_1a_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}a_3b_3a_3^{-1}b_4$	-2
2	S	$a_1a_1^{-1}$	2	10	$5P$	$a_1a_1a_2a_2a_3a_3a_4a_4a_5a_5$	-3
2	P	a_1a_1	1	10	$3P_2$	$a_1a_1a_2a_2a_3a_3b_1c_1b_2c_1^{-1}$	-3
3	P_1	$a_1a_1b_1$	0	11	T_3	$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}d_1c_1d_2c_1^{-1}c_2d_3c_2^{-1}$	-3
4	T	$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}$	0	11	$2P_3$	$a_1a_1a_2a_2b_1c_1b_2c_1^{-1}c_2b_3c_2^{-1}$	-3
4	S_2	$a_1b_1a_1^{-1}b_2$	0	11	$5P_1$	$a_1a_1a_2a_2a_3a_3a_4a_4a_5a_5b_1$	-4
4	$2P$	$a_1a_1b_1b_1$	0	12	$3T$	$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_3b_3a_3^{-1}b_3^{-1}$	-4
5	T_1	$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}c_1$	-1	12	$2T_2$	$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}d_1c_1d_2c_1^{-1}$	-4
5	$2P_1$	$a_1a_1b_1b_1c_1$	-1	12	$6P$	$a_1a_1a_2a_2a_3a_3a_4a_4a_5a_5a_6a_6$	-4
6	$3P$	$a_1a_1a_2a_2a_3a_3$	-1	12	P_4	$a_1a_1b_1c_1b_2c_1^{-1}c_2b_3c_2^{-1}c_3b_4c_3^{-1}$	-3
6	P_2	$a_1a_1b_1c_1b_2c_1^{-1}$	-1	12	$4P_2$	$a_1a_1a_2a_2a_3a_3a_4a_4b_1c_1b_2c_1^{-1}$	-4
7	S_3	$a_1b_1a_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_3$	-1	13	S_5	$a_1b_1a_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}\cdots a_4b_4a_4^{-1}b_5$	-3
7	$3P_1$	$a_1a_1a_2a_2a_3a_3b_1$	-2	13	$3T_1$	$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_3b_3a_3^{-1}b_3^{-1}d_1$	-5
8	$2T$	$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}$	-2	13	$3P_3$	$a_1a_1\cdots a_3a_3b_1c_1b_2c_1^{-1}c_2b_3c_2^{-1}$	-4
8	T_2	$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}b_1c_1b_2c_1^{-1}$	-2	13	$6P_1$	$a_1a_1a_2a_2a_3a_3a_4a_4a_5a_5a_6a_6b_1$	-5
8	$4P$	$a_1a_1a_2a_2a_3a_3a_4a_4$	-2	14	T_4	$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}d_1c_1c_1^{-1}\cdots c_3d_4c_3^{-1}$	-4
8	$2P_2$	$a_1a_1a_2a_2b_1c_1b_2c_1^{-1}$	-2	14	$2P_4$	$a_1^2a_2^2b_1c_1b_2c_1^{-1}c_2b_3c_2^{-1}c_3b_4c_3^{-1}$	-4
9	$2T_1$	$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}b_1$	-3	14	$5P_2$	$a_1a_1a_2a_2a_3a_3\cdots a_5a_5b_1c_1b_2c_1^{-1}$	-5
9	P_3	$a_1a_1b_1c_1b_2c_1^{-1}c_2b_3c_2^{-1}$	-2	14	$7P$	$a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2a_5^2a_6^2a_7^2$	-5
9	$4P_1$	$a_1a_1a_2a_2a_3a_3a_4a_4b_1$	-3	15	$2T_3$	$a_1b_1a_1^{-1}\cdots a_2^{-1}b_2^{-1}d_1\cdots c_2d_3c_2^{-1}$	-5

Tabela 3.2: Característica de Euler das superfícies do conjunto M_{14}

Mas pelo critério da contagem dos vértices do polígono de n-lados da Subseção 3.2.6, temos que $v(mT) = v(mP) = 1$ e $v(S_r) = v(mT_r) = v(mP_r) = r$. Logo,

$$\begin{aligned}
\chi(S_r) &= r - (2(r-1)+1) + 1 = 2 - r,\\
\chi(mT) &= 1 - 2m + 1 = 2 - 2m,\\
\chi(mP) &= 1 - m + 1 = 2 - m,\\
\chi(mT_r) &= r - (2m + 2r - 1) + 1 = 2 - r - 2m,\\
\chi(mP_r) &= r - (m + 2r - 1) + 1 = 2 - r - m.
\end{aligned}$$

■

Do Teorema 3.2.11, a característica de Eüler do conjunto das superfícies geradas pelos polígonos de n-lados, $n \leq 14$, são mostrados na Tabela 3.2.

3.3 Conjunto das Superfícies Geradas por Polígonos

Algumas vezes teremos que identificar conjuntos de superfícies onde é possível realizar o mergulho de um grafo. Em outras, queremos saber qual é o conjunto das superfícies geradas pelos polígonos com até n lados. A primeira tarefa é simples pois depende da variação do gênero da superfície. Já a segunda é um pouco mais complicada. É preciso dispor de uma representação poligonal única para cada superfície. Para tal, usamos a forma mínima da Definição 3.2.3 para identificar os conjuntos das superfícies para em seguida determinar a cardinalidade dos principais subconjuntos especiais destas superfícies.

O procedimento a ser utilizado é o seguinte: particionamos o conjunto das superfícies em subconjuntos conhecidos, relacionamos os seus elementos através dos polígonos de n-lados representados na forma mínima e exibimos fórmulas para a cardinalidade de cada um. O mesmo procedimento será adotado para os subconjuntos das superfícies geradas pelos polígonos que têm até n-lados.

3.3.1 Definições

A fim de relacionar o conjunto das superfícies, identificamos os subconjuntos das superfícies que podem ser geradas por todos os polígonos com exatamente n lados representados na forma mínima de modo que o conjunto das superfícies geradas por polígonos na forma mínima seja a união desses subconjuntos.

Seja $\mathbb{P}$ o conjunto de todos os polígonos orientados na forma mínima. Chamaremos de **conjunto das superfícies geradas por polígonos,** o conjunto $\mathbb{M}$ de todas as superfícies (variedades bi-dimensionais) que podem ser geradas por polígonos em $\mathbb{P}$, isto é, $\mathbb{M} = \{\Omega \equiv n - lados\text{: } n\text{-lados} \in \mathbb{P}\}$. Serão considerados os seguintes subconjuntos de $\mathbb{M}$:

$$
\begin{aligned}
O &= \{\Omega \in \mathbb{M} : \Omega \text{ é orientada}\} \\
\widetilde{O} &= \{\Omega \in \mathbb{M} : \Omega \text{ é não-orientada}\} \\
M_n &= \{\Omega \in \mathbb{M} : \Omega \equiv q\text{-}lados \equiv \omega(\Omega),\ \forall\ q \leq n\} \\
N_n &= \{\Omega \in M_n : \Omega \equiv q\text{-}lados \equiv \omega(\Omega),\ q = n\} \\
O_n^t &= \{\Omega \in M_n\text{: } \Omega \in O\, e\, \Omega \equiv t\text{-}lados,\ t \leq n\} \\
\widetilde{O}_n^t &= \{\Omega \in M_n\text{: } \Omega \in \widetilde{O}\, e\, \Omega \equiv t\text{-}lados,\ t \leq n\} \\
C &= \{\Omega \in \mathbb{M} : \Omega \text{ é compacta sem bordo}\} \\
\overline{C} &= \{\Omega \in \mathbb{M} : \Omega \text{ é compacta com bordo}\} \\
CO &= \{\Omega \in \mathbb{M} : \Omega \in C \cap O\} \\
C\widetilde{O} &= \{\Omega \in \mathbb{M} : \Omega \in C \cap \widetilde{O}\} \\
\overline{C}O &= \left\{\Omega \in \mathbb{M} : \Omega \in \overline{C} \cap O\right\} \\
\overline{C}\widetilde{O} &= \{\Omega \in \mathbb{M} : \Omega \in \overline{C} \cap \widetilde{O}\}
\end{aligned}
$$

Usaremos, como notação, um índice n nos subconjuntos das superfícies, quando quisermos nos referir a um conjunto de superfícies geradas por todos os polígonos com n-lados. Usaremos o índice n e um expoente t para indicar a família de superfícies gerada pelo conjunto de todos os polígonos de t-lados, $t \leq n$. Por exemplo, o conjunto das superfícies compactas orientadas com bordos geradas por polígonos com exatamente n-lados, será indicado por $\overline{C}O_n$ e o conjunto da superfícies compactas não-orientadas sem bordos geradas pelos polígonos de t-lados, $t \leq n$, será representado por $C\widetilde{O}_n^t$.

O conjunto das superfícies N_n pode ser usado para obter uma partição em $\mathbb{M}$, pois $N_n = N_q \Leftrightarrow n = q$.

Observamos que, se Ω é uma superfície gerada por um polígono de n-lados na forma mínima, então Ω será uma superfície compacta com bordo sempre que n for um inteiro ímpar. Isto decorre do fato de que n-lados terá pelo menos um lado sem o seu correspondente par.

3.3.2 Conjunto das Superfícies geradas por polígonos com exatamente n lados

Para identificar os elementos do conjunto N_n das superfícies geradas por polígonos na forma mínima com exatamente n lados e o número desses, usaremos o fato de que todas as partições

$$\begin{aligned} N_n &= O_n \cup \widetilde{O}_n = C_n \cup \overline{C}_n,\ O_n \cap \widetilde{O}_n = C_n \cap \overline{C}_n = \varnothing, \\ O_n &= CO_n \cup \overline{C}O_n,\ CO_n \cap \overline{C}O_n = \varnothing,\ \widetilde{O}_n = C\widetilde{O}_n \cup \overline{C}\widetilde{O}_n,\ C\widetilde{O}_n \cap \overline{C}\widetilde{O}_n = \varnothing, \\ C_n &= CO_n \cup C\widetilde{O}_n,\ CO_n \cap C\widetilde{O}_n = \varnothing,\ \overline{C_n} = \overline{C}O_n \cup \overline{C}\widetilde{O}_n,\ \overline{C}O_n \cap \overline{C}\widetilde{O}_n = \varnothing \end{aligned}$$

são partições disjuntas e, portanto, o número de elementos de um desses conjuntos é a soma dos elementos da partição.

Para efeito de simplificação escreveremos c.c. para significar 'caso contrário' e se ocorre a condição $n \equiv a \bmod p$ ou $n \equiv b \bmod p$ escrevemos a forma simplificada $n \equiv a$ ou $b \bmod p$.

Observe que se $\Omega \in CO_n$ então, pelo Teorema 3.2.5, $\Omega \equiv S$ ou $\Omega \equiv mT$. Pela Definição 3.2.3, $\omega(S) = aa^{-1}$ e, $\omega(mT) = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots a_mb_ma_m^{-1}b_m^{-1}$; logo $S \equiv 2\text{-}lados$ e $mT \equiv 4m\text{-}lados$. Assim, $mT \equiv n$-lados se, e somente se, $m = 4/n \in \mathbb{Z}$, ou seja, se, e somente se, $n \equiv 0 \pmod 4$. Com isso, podemos afirmar que o conjunto das superfícies compactas orientadas geradas pelos polígonos com exatamente n lados é

$$CO_n = \{S\}, se\ n = 2;\ CO_n = \{mT : m \geq 1\}, se\ n = 4m\ e\ CO_n = \varnothing, \text{ c.c.} \tag{3.15}$$

Conseqüentemente, o número de elementos do conjunto CO_n é

$$\#(CO_n) = 1, \text{ se } n = 2 \text{ ou se } n \equiv 0 \bmod 4 \text{ e } n \neq 0;\ \#(CO_n) = 0, \text{c.c.} \tag{3.16}$$

Pelo Lema 3.2.7, as superfícies compactas não-orientadas são da forma mP. Pela Definição 3.2.3, $\omega(mP) = a_1a_1a_2a_2\cdots a_ma_m$; logo $mP \equiv 2m\text{-}lados$. Assim, $mP \equiv n$-lados se, e somente se, $m = 2/n \in \mathbb{Z}$, ou seja, se, e somente se, $n \equiv 0 \bmod 2$. Portanto, o conjunto das superfícies compactas não-orientadas geradas por polígonos com exatamente n lados é

$$C\widetilde{O}_n = \{mP :\ m \geq 1\},\ se\ n \equiv 0 \pmod 2\ e\ C\widetilde{O}_n = \varnothing,\ \text{c.c.} \tag{3.17}$$

Conseqüentemente, o número de elementos de $C\widetilde{O}_n$ é

$$\#(C\widetilde{O}_n) = 1,\ \text{se } n \equiv 0 \pmod 2 \quad \text{e} \quad \#(C\widetilde{O}_n) = 0,\ \text{c.c.} \tag{3.18}$$

Como $C_n = CO_n \cup C\widetilde{O}_n$ e $CO_n \cap C\widetilde{O}_n = \varnothing$, então o conjunto das superfícies compactas sem bordos geradas por polígonos com exatamente n lados é a união dos conjuntos indicados em (3.15) e (3.17). Portanto, o número de elementos de C_n é

$$\begin{aligned} &\#(C_n) = 0,\ se\ n = 0 \text{ ou } 1 \pmod 2;\ \#(C_n) = 1,\ se\ n \equiv 2 \pmod 4,\ n \neq 2 \\ &\#(C_n) = 2,\ se\ n = 2 \text{ ou } 0 \pmod 4\ e\ n \neq 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

A forma geral de uma superfície compacta com bordo é do tipo $m\Omega_r$. Algumas vezes, chamaremos o inteiro m de **grau de conexidade** de Ω (ou **fator de conexidade**) e o inteiro r, de **grau de compacticidade** (ou **fator de compacticidade**) de Ω.

O próximo lema tem como objetivo auxiliar na identificação do conjunto das superfícies compactas orientadas com componentes de bordo, ou seja, este lema é parte da demonstração do Teorema 3.3.2.

Lema 3.3.1 *Seja $m\Omega_r$ uma superfície compacta orientada com bordo. Se $m\Omega_r \in \overline{C}O_n$ então $\Omega \equiv S$ ou $\Omega \equiv T$ e $(n-4m+2)/3$ é um inteiro ≥ 1 satisfazendo as condições:*

$$\begin{aligned} m &\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3) \text{ e } n \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3), \text{ ou } m \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3) \text{ e } n \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3), \text{ ou} \\ m &\equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3) \text{ e } n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3) \end{aligned}$$

Reciprocamente, se ocorrer uma dessas condições existe uma única palavra na forma mínima $\omega(m\Omega_r)$ tal que $\omega(m\Omega_r) \equiv n\text{-lados} \equiv m\Omega_r \in \overline{C}O_n$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $\Omega \in \overline{C}O_n$. Pelo Teorema 3.2.5 (classificação de superfícies orientadas), $\Omega \equiv S_r$ (caso $m = 0$), ou $\Omega \equiv mT_r$. Mas a forma mínima de mT_r é

$$\omega(mT_r) = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_m b_m a_m^{-1} b_m^{-1} c_1 d_1 c_1^{-1} c_2 d_2 c_2^{-1} \cdots c_{r-1} d_{r-1} c_{r-1}^{-1} d_r.$$

Logo, se n-lados $\equiv \omega(mT_r)$, então $n = 4m + 3r - 2$, e portanto, $r = (n-4m+2)/3$, $\forall\, m \geq 0$. Mas $\Omega \in \overline{C}O_n$ se, e somente se, $(n-4m+2)/3 > 0$ está em $\mathbb{Z}$; logo, $n-4m+2 = 3q$, $q \geq 1$. Por outro lado, pondo n sob as formas $3t$, $3t+1$ ou $3t+2$, resulta nos seguintes casos:

1) Se $n = 3t$, r será um inteiro se, e somente se, $m = 3k + 2$. De fato,

$$(n - 4m + 2)/3 = (3t - 4(3k+2) + 2)/3 = t - 4k - 2 \in \mathbb{Z}.$$

Isto significa que $m = 3k + 2$ e $n = 3t$ se, e somente se, $r = t - 4k - 2 \in \mathbb{Z}$. De modo análogo, concluímos que

$$\begin{aligned} 2)\ Se\ n &= 3t+1,\ r \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m = 3k \Leftrightarrow r = t - 4k + 1 \in \mathbb{Z}, \\ 3)\ Se\ n &= 3t+2,\ r \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m = 3k+1 \Leftrightarrow r = t - 4k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Sejam m e n números inteiros como no Lema 3.3.1. Considere o polígono de n lados com $n = (4m - 3r + 2)/4$. Identificando este polígono com a palavra na forma mínima de mT_r, obtemos $mT_r \in \overline{C}O_n$. ∎

Teorema 3.3.2 *O conjunto das superfícies compactas orientadas com bordos em N_n são dos seguintes tipos:*

(*i*) *Se $m \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ e $n \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3)$, isto é, $m = 3k$, $n = 3t+1$, então:*

$$\overline{C}O_n = \begin{cases} \{S_{t+1}, 3T_{t-3}, \cdots, (3k)\,T_{t-4k+1}, \cdots, 3(a-1)\,T_5, (3a)\,T_1\}, & se\ t = 4a \\ \{S_{t+1}, 3T_{t-3}, \cdots, (3k)\,T_{t-4k+1}, \cdots, 3(a-1)\,T_6, (3a)\,T_2\}, & se\ t = 4a+1 \\ \{S_{t+1}, 3T_{t-3}, \cdots, (3k)\,T_{t-4k+1}, \cdots, 3(a-1)\,T_7, (3a)\,T_3\}, & se\ t = 4a+2 \\ \{S_{t+1}, 3T_{t-3}, \cdots, (3k)\,T_{t-4k+1}, \cdots, 3(a-1)\,T_8, (3a)\,T_4\}, & se\ t = 4a+3. \end{cases}$$

(*ii*) *Se* $m \equiv 1 \pmod 3$ *e* $n \equiv 2 \pmod 3$, *isto é,* $m = 3k+1$, $n = 3t+2$, *então:*

$$\overline{C}O_n = \begin{cases} \{T_t, 4T_{t-4}, \cdots, (3k+1)\,T_{t-4k}, \cdots, 3\,(a-2)\,T_8, 3\,(a-1)\,T_4\}, & \text{se } t = 4a \\ \{T_t, 4T_{t-4}, \cdots, (3k+1)\,T_{t-4k}, \cdots, 3\,(a-1)\,T_5, (3a)\,T_1\}, & \text{se } t = 4a+1 \\ \{T_t, 4T_{t-4}, \cdots, (3k+1)\,T_{t-4k}, \cdots, 3\,(a-1)\,T_6, (3a)\,T_2\}, & \text{se } t = 4a+2 \\ \{T_t, 4T_{t-4}, \cdots, (3k+1)\,T_{t-4k}, \cdots, 3\,(a-1)\,T_7, (3a)\,T_3\}, & \text{se } t = 4a+3; \end{cases}$$

(*iii*) *Se* $m \equiv 2 \pmod 3$ *e* $n \equiv 0 \pmod 3$, *isto é,* $m = 3k+2$, $n = 3t$, *então:*

$$\overline{C}O_n = \begin{cases} \{2T_{t-2}, 5T_{t-6}, \cdots, (3k+2)\,T_{t-4k-2}, \cdots, 3\,(a\text{-}2)\,T_6, 3\,(a\text{-}1)\,T_2\}, & \text{se } t = 4a \\ \{2T_{t-2}, 5T_{t-6}, \cdots, (3k+2)\,T_{t-4k-2}, \cdots, 3\,(a\text{-}2)\,T_7, 3\,(a\text{-}1)\,T_3\}, & \text{se } t = 4a+1 \\ \{2T_{t-2}, 5T_{t-6}, \cdots, (3k+2)\,T_{t-4k-2}, \cdots, 3\,(a\text{-}2)\,T_8, 3\,(a\text{-}1)\,T_4\}, & \text{se } t = 4a+2 \\ \{2T_{t-2}, 5T_{t-6}, \cdots, (3k+2)\,T_{t-4k-2}, \cdots, 3\,(a\text{-}1)\,T_5, (3a)\,T_1\}, & \text{se } t = 4a+3. \end{cases}$$

Demonstração. Pelo Lema 3.3.1, devemos analisar as seguintes condições de congruências:

1^o) Se $m \equiv 0 \pmod 3$ e $n \equiv 1 \pmod 3$, então $m = 3k$, $n = 3t+1$ e $r = t-4k+1$. Por definição, $\overline{C}O_n = \{mT_r \in N_n : m, r \in \mathbb{Z},\ m \geq 0 \text{ e } r > 0\}$. Como $m \geq 0$, os elementos de $\overline{C}O_n$ são definidos conforme atribuamos valores para $k = 0, 1, 2, 3 \cdots$. Além disso, $\overline{C}O_n$ é finito e, portanto, k é limitado. Seja $k_{\max}$ o valor máximo que k assume para definir todas as superfícies mT_r de $\overline{C}O_n$. Como as primeira superfícies desse conjunto são obtidas pela substituição de $k = 0, 1, 2, 3, \cdots$, então,

$$\overline{C}O_n = \{S_{t+1}, 3T_{t-3}, 6T_{t-7}, \cdots, (3k)\,T_{t-4k+1}, \cdots\}.$$

Notamos ainda que o fator de conexidade $m \in \{0, 3, 6, \cdots, 3k, \cdots\}$, enquanto o fator de compacticidade $r \in \{t+1, t-3, \cdots, t-4k+1, \cdots\}$. Os elementos deste conjunto estão em progressão aritmética, na ordem decrescente, com razão 4. Como $r > 0$, então $k_{\max}$ acontece quando $t-4k_{\max}-2$ é mínimo em $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \cdots\}$, isto é, $4 \leq t-4k_{\max}+1 \leq 1$, condição equivalente a

$$(3-t)/4 \leq -k_{\max} \leq -t/4 \quad \Rightarrow \quad (t-3)/4 \leq k_{\max} \leq t/4.$$

Como $k_{\max} \in \mathbb{Z}$, então temos que: $k_{\max} \in A = \{(t-3)/4, (t-2)/4, (t-1)/4, t/4\}$. Assim, devemos identificar para cada t, o número inteiro existente entre os quatro elementos do conjunto A. Portanto, $k_{\max}$ ocorre nos seguintes casos

$$\begin{array}{ll} t \equiv 0 \pmod 4 \ \Rightarrow\ k_{\max} = t/4, & t \equiv 1 \pmod 4 \ \Rightarrow\ k_{\max} = (t-1)/4 \\ t \equiv 2 \pmod 4 \ \Rightarrow\ k_{\max} = (t-2)/4, & t \equiv 3 \pmod 4 \ \Rightarrow\ k_{\max} = (t-3)/4. \end{array}$$

De fato,

1) Se $t \equiv 0 \pmod 4$, então: $t = 4a \Rightarrow k_{\max} = t/4 = 4a/4 = a \in \mathbb{Z}$. Note que nenhum outro elemento de A diferente de $t/4$, pertence a $\mathbb{Z}$, quando $t = 4a$, pois os numeradores dos elementos de A são números consecutivos, e o conjunto de quatro números inteiros consecutivos sempre contém um único múltiplo de 4. De modo análogo concluímos os seguinte casos:

2) Se $t \equiv 1 \pmod 4$, então $t = 4a+1 \Rightarrow k_{\max} = (t-1)/4 = (4a+1-1)/4 = a \in \mathbb{Z}$;

3) Se $t \equiv 2 \pmod 4$, então $t = 4a+2 \Rightarrow k_{\max} = (t-2)/4 = (4a+2-2)/4 = a \in \mathbb{Z}$;

4) Se $t \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 4)$, então $t = 4a+3 \Rightarrow k_{\max} = (t-3)/4 = (4a+3-3)/4 = a \in \mathbb{Z}$. Além do mais, como $r = t - 4k + 1$, segue que

$$\begin{cases} t = 4a \Rightarrow r = 4a - 4a + 1 = 1, & t = 4a+2 \Rightarrow r = 4a+2-4a+1 = 3, \\ t = 4a+1 \Rightarrow r = 4a+1-4a+1 = 2, & t = 4a+3 \Rightarrow r = 4a+3-4a+1 = 4. \end{cases}$$

Logo, se $m \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ e $n \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3)$, isto é, $m = 3k$, $n = 3t+1$, então o conjunto das superfícies compactas com bordos, orientadas assume uma das formas de (i).

2^o) Se $m \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ e $n \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3)$, então $m = 3k+1$, $n = 3t+2$ e

$$r = (n - 4m + 2)/3 = (3t + 2 - 4(3k+1) + 2)/3 = t - 4k. \tag{3.20}$$

3^o) Se $m \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ e $n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$, então $m = 3k+2$, $n = 3t$ e

$$r = (n - 4m + 2) = (3t - 4(3k+2) + 2)/3 = t - 4k - 2. \tag{3.21}$$

Aplicando o mesmo procedimento na demonstração da parte (i), nos 2^o) e 3^o) casos acima, provamos as partes (ii) e (iii) do teorema. ■

A próxima proposição garante a unicidade dos elementos dos conjuntos definidos nas partes (i), (ii) e (iii) do Teorema 3.3.2, e estabelece ainda que não existem elementos comuns nestes conjuntos, condições que não estão claras na demonstração. Estes fatores são decisivos para relacionarmos univocamente todos os elementos do conjunto das superfícies compactas orientadas com bordos de N_n.

Proposição 3.3.3 *Os conjuntos em N_n são conjuntos disjuntos.*

Demonstração. Sejam $(3k_1)\, T_{t-4k_1-2}$, $(3k_2)\, T_{t-4k_2-2} \in \overline{C}O_n$ superfícies como no Teorema 3.3.2 (i). Então $(3k_1)\, T_{t_1-4k_1-2} = (3k_2)\, T_{t_2-4k_2-2}$, se, e somente se,

$$\begin{cases} 3k_1 = 3k_2 \quad e \\ t_1 - 4k_1 - 2 = t_2 - 4k_2 - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} k_1 = k_2 \quad e \\ t_1 = t_2. \end{cases} \tag{3.22}$$

Pode acontecer uma das duas hipóteses. Se estão no mesmo conjunto, então $t_1 = t_2$ e $k_1 \neq k_2$; logo, por (3.22), $(3k_1)\, T_{t-4k_1-2}$ e $(3k_2)\, T_{t-4k_2-2}$ não são homeomorfas. Por outro lado, se estão em conjuntos distintos, então $t_1 \neq t_2$ e $k_1 = k_2$; logo não devem pertencer a mesma classe. Conseqüentemente, todos os conjuntos são disjuntos. A demonstração é análoga para as quatro formas assumidas do conjunto $\overline{C}O_n$, partes (ii) e (iii) do Teorema 3.3.2. Assim, são disjuntos os quatro conjuntos de (i), (ii), e (iii). Resta mostrar que (i), (ii), e (iii) também são, ente si, subconjuntos disjuntos. De fato, suponha que existam duas superfícies iguais $m_1 T_{r_1}$ e $m_2 T_{r_2}$, pertencentes a duas parte diferentes quaisquer (i), (ii), ou (iii). Mas se isso ocorresse, os fatores de conexidades m_1 e m_2 seriam diferentes, um absurdo. Logo, os conjuntos das partes (i), (ii), e (iii) ainda são conjuntos distintos. ■

Vimos na demonstração do Teorema 3.3.2, que o número de superfícies no conjunto $\overline{C}O_n$ é igual a variação do inteiro $k = 0, 1, 2, 3, \cdots, k_{\max}$. Portanto, este conjunto possui $k_{\max} + 1$ elementos, ou seja, $\left|\overline{C}O_n\right| = k_{\max} + 1$. Conseqüentemente, se a, t são inteiros positivos tais que $t \equiv a \,(\mathrm{mod}\, 4)$, então o número de elementos de $\overline{C}O_n$ é,

$$\begin{aligned} &\#(\overline{C}O_n) = a, \text{ se } n = 3t+2,\ t = 4a, \text{ ou } n = 3t,\ t \neq 4a+3; \\ &\#(\overline{C}O_n) = a+1, \text{ se } n = 3t+1, \forall t, \text{ ou } n = 3t+2, t \neq 4a, \text{ ou } n = 3t,\ t = 4a+3. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Corolário 3.3.4 *Sejam a, t inteiros positivos tais que $t \equiv a \pmod 4$. Então a cardinalidade do conjunto das superfícies orientadas em N_n, é dada por*

$$\begin{array}{l}
\#(O_n) = 1, \ \ se \ \ n = 3t+2, \ ou \ t = 4a \ \ e \ \ a = 0; \\
\#(O_n) = a\#(O_n) = a, \ se \ n = 3t \ e \ t \neq 4a+3, \ ou \ n = 3t+2 \ e \ t = 4a; \\
\#(O_n) = a+1, \left\{ \begin{array}{l} se \ n = 3t \ e \ t = 4a+3, \ ou \ se \ se \ n = 3t+1 \ e \ t \neq 4a+1 \\ se \ n = 3t+2 \ e \ t = 4a+1 \ ou \ t = 4a+3; \end{array} \right. \\
\#(O_n) = a+2, \ se \ n = 3t+1 \ e \ t = 4a+1, \ ou \ se \ n = 3t+2 \ e \ t = 4a+2.
\end{array}$$

Demonstração. Como O_n é uma união disjunta de CO_n e $\overline{C}O_n$, portanto disjuntos, segue das igualdades em (3.16) e (3.23) que

$$\begin{array}{ll}
se \ n = 3(4a)+2 \Rightarrow \#(O_n) = a, & se \ n = 3(4a+2)+1 \Rightarrow \#(O_n) = a+1, \\
se \ n = 3(4a+1) \Rightarrow \#(O_n) = a, & se \ n = 3(4a+3)+1 \Rightarrow \#(O_n) = a+1, \\
se \ n = 3(4a+2) \Rightarrow \#(O_n) = a, & se \ n = 3(4a+1)+2 \Rightarrow \#(O_n) = a+1, \\
se \ n = 3(4a+3) \Rightarrow \#(O_n) = a, & se \ n = 3(4a+2)+2 \Rightarrow \#(O_n) = a+2, \\
se \ n = 3(4a)+1 \Rightarrow \#(O_n) = a+1, & se \ n = 3(4a+3)+2 \Rightarrow \#(O_n) = a+1, \\
se \ n = 3(4a+1)+1 \Rightarrow \#(O_n) = a+2, & se \ n = 3(4a+3) \Rightarrow \#(O_n) = a+1.
\end{array}$$ ■

A relação dos elementos dos conjuntos das superfícies compactas não-orientadas com bordos geradas por polígonos com exatamente n lados é determinada de forma idêntica ao caso orientado. Por isso omitiremos as demonstrações para este caso.

De forma semelhante à demonstração do Lema 3.3.1, prova-se o seguinte lema, parte integrante da demonstração do Teorema 3.3.6.

Lema 3.3.5 *Seja $m\Omega_r$ uma superfície compacta não-orientada com bordo gerada por um polígono de n-lados. Então $\Omega \equiv P$, $m, r > 0$ e $(n-2m+2)/3$ é um inteiro maior ou igual a 1 satisfazendo as condições:*

$$\left\{ \begin{array}{l} m \equiv 0 \pmod 3 \ \ e \ n \equiv 1 \pmod 3, \\ m \equiv 1 \pmod 3 \ \ e \ n \equiv 0 \pmod 3, \ ou \\ m \equiv 2 \pmod 3 \ \ e \ n \equiv 2 \pmod 3. \end{array} \right.$$

Reciprocamente, se ocorrer uma dessas condições, então existe uma única palavra na forma mínima $\omega(m\Omega_r)$ tal que $\omega(m\Omega_r) \equiv n\text{-lados} \equiv m\Omega_r \in \overline{C}\widetilde{O}_n$.

De modo análogo à demonstração do Teorema 3.3.2, deduzimos que o conjunto das superfícies N_n compactas não-orientadas com bordos, são como no seguinte teorema.

Teorema 3.3.6 *Para cada inteiro positivo n, o subconjunto das superfícies compactas não-orientadas com bordos em N_n, é do seguinte tipo:*

(*i*) *Se $m \equiv 0 \pmod 3$ e $n \equiv 1 \pmod 3$, isto é, $m = 3k$, $n = 3t+1$, então:*

$$\overline{C}\widetilde{O}_n = \left\{ \begin{array}{l} \{3P_{t-1}, 6P_{t-3}, \cdots, (3k)P_{t-2k}, \cdots, 3(a-1)P_3, (3a)P_1\}, \ se \ t = 2a \\ \{3P_{t-1}, 6P_{t-3}, \cdots, (3k)P_{t-2k}, \cdots, 3(a-1)P_4, (3a)P_2\}, \ se \ t = 2a+1; \end{array} \right.$$

(*ii*) *Se* $m \equiv 1 \pmod 3$ *e* $n \equiv 2 \pmod 3$, *isto é,* $m = 3k+1$, $n = 3t+2$, *então:*

$$\overline{C}\widetilde{O}_n = \begin{cases} \{P_t, 4P_{t-2}, \cdots, (3k+1)\,P_{t-2k}, \cdots, 3\,(a-2)\,P_4, 3\,(a-1)\,P_2\}, \text{ se } t = 2a \\ \{P_t, 4P_{t-2}, \cdots, (3k+1)\,P_{t-2k}, \cdots, 3\,(a-1)\,P_3, (3a)\,P_1\}, \text{ se } t = 2a+1; \end{cases}$$

(*iii*) *Se* $m \equiv 2 \pmod 3$ *e* $n \equiv 0 \pmod 3$, *isto é,* $m = 3k+2$, $n = 3t$, *então:*

$$\overline{C}\widetilde{O}_n = \begin{cases} \{2P_t, 5P_{t-2}, \cdots, (3k+2)\,P_{t-2k}, \cdots, 3\,(a-2)\,P_4, 3\,(a-1)\,P_2\}, \text{ se } t = 2a \\ \{2P_t, 5P_{t-2}, \cdots, (3k+2)\,P_{t-2k}, \cdots, 3\,(a-1)\,P_3, (3a)\,P_1\}, \text{ se } t = 2a+1. \end{cases}$$

Corolário 3.3.7 *Todo os subconjuntos de superfícies compactas não-orientadas com bordos, das partes* $(i), (ii)$ *e* (iii) *do Teorema* 3.3.6*, são conjuntos disjuntos.*

Demonstração. Suponha que $\Omega_1, \Omega_2 \in \overline{C}\widetilde{O}_n$. Temos os seguintes casos

$$\begin{cases} \Omega_1, \Omega_2 \in (i) \Rightarrow \Omega_1 = (3k_1)\,P_{t_1-2k_1+1} \text{ e } \Omega_2 = (3k_2)\,P_{t_2-2k_2+1} \\ \Omega_1, \Omega_2 \in (ii) \Rightarrow \Omega_1 = (3k_1+1)\,P_{t_1-2k_1} \text{ e } \Omega_2 = (3k_2+1)\,P_{t_2-2k_2} \\ \Omega_1, \Omega_2 \in (iii) \Rightarrow \Omega_1 = (3k_1+2)\,P_{t_1-2k_1} \text{ e } \Omega_2 = (3k_2+2)\,P_{t_2-2k_2}. \end{cases}$$

Em quaisquer dos casos, temos que $\Omega_1 \equiv \Omega_2 \Rightarrow k_1 = k_2 \quad e \quad t_1 = t_2$. Se Ω_1 e Ω_2 estão num dos dois conjunto de $(i), (ii)$ ou (iii), isto é, quando t é fixo, então $t_1 = t_2$ e $k_1 \neq k_2$. Logo, Ω_1 e Ω_2 não são homeomorfas. Se Ω_1 e Ω_2 estão em dois conjuntos diferentes de $(i), (ii)$ ou (iii), então $t_1 \neq t_2$, e portanto, Ω_1 e Ω_2 não são homeomorfas. Resta analisar o caso em que estas superfícies estão em ítens diferentes, por exemplo, $\Omega_1 \in (i)$ e $\Omega_2 \in (ii)$. Neste caso, os fatores de conexidade são sempre diferentes, o que implica $k_1 \neq k_2$. Assim, também não seriam homeomorfas, o que prova o corolário. ∎

Observamos na demonstração do Teorema 3.3.6, que o número de superfície do conjunto $\overline{C}\widetilde{O}_n$ é igual a variação do inteiro k. Se a, t são inteiros positivos, tais que $t \equiv a \pmod 2$ podemos deduzir que o número de elementos do conjunto $\overline{C}\widetilde{O}_n$ é

$$\begin{cases} \#(\overline{C}\widetilde{O}_n) = a, \text{ se } n = 3t+1 \text{ e } \forall t, \text{ ou se } n \neq 3t+1,\ t = 2a \\ \#(\overline{C}\widetilde{O}_n) = a+1, \text{ se } n \neq 3t+1,\ t = 2a+1. \end{cases} \tag{3.24}$$

Como $\widetilde{O}_n = C\widetilde{O}_n \cup \overline{C}\widetilde{O}_n$ e $C\widetilde{O}_n \cap \overline{C}\widetilde{O}_n = \varnothing$ então usando as igualdades em (3.18) e (3.24) e considerando a, t inteiros positivos tais que $t \equiv a \pmod 4$, podemos concluir que o número de elementos do conjunto $\widetilde{O}_n$ é

$$\begin{array}{l} \#(\widetilde{O}_n) = a, \text{ se } n = 3\,(4a)+1,\ t = 4a, \text{ ou se } n = 3\,(4a+2)+1,\ t = 4a+2 \\ \#(\widetilde{O}_n) = a+1, \text{ caso contrário.} \end{array} \tag{3.25}$$

A cardinalidade do conjunto das superfícies compactas com bordos geradas por polígonos na forma mínima com exatamente n lados, pode ser determinada através do seguinte resultado.

Teorema 3.3.8 *Se $n, p \in \mathbb{Z}_+$, são tais que $n = 4p + \{1, 2, 3 \text{ ou } 4\}$, então, a cardinalidade do conjunto das superfícies compactas com bordos em N_n, é:*

$$\#(\overline{C}_n) = p, \text{ se } n = 4p + \{0 \text{ ou } 2\}; \;\; \#(\overline{C}_n) = p + 1, \text{ se } n = 4p + \{1 \text{ ou } 3\}.$$

Demonstração. Nas igualdades (3.23), $\#(\overline{C}O_n)$ é calculado em função de um inteiro positivo a, tal que $t \equiv a \,(\mathrm{mod}\, 4)$ *e* $n \equiv t \,(\mathrm{mod}\, 3)$. Nas igualdades (3.24), $\#(\overline{C}\widetilde{O}_n)$ é calculado em função de um inteiro positivo b, tal que $t \equiv b \,(\mathrm{mod}\, 2)$ *e* $n \equiv t \,(\mathrm{mod}\, 3)$. Na primeira situação, cada inteiro a produz 12 inteiros consecutivos, enquanto no cálculo de $\#(\overline{C}\widetilde{O}_n)$, cada inteiro b produz apenas seis inteiros consecutivos gerados durante o cálculo de $\#(\overline{C}\widetilde{O}_n)$. Logo, quando a percorre o conjunto dos inteiros positivos, b assume os seguintes valores

a	0	1	2	3	$\cdots$	s	$\cdots$
b	0 e 1	2 e 3	4 e 5	6 e 7	$\cdots$	2s e 2s+1	$\cdots$

Assim, no cálculo de $\#(\overline{C}_n)$, os primeiros seis $n's$ inteiros produzidos para cada valor de a, $\#(\overline{C}O_n)$ dependem da relação $b = 2a$, enquanto nos últimos seis inteiros, $\#(\overline{C}O_n)$ depende da relação $b = 2a + 1$. Esta propriedade, igualdades (3.23), (3.24) e pondo n sob a forma $n = 4p + \{0, 1, 2 \text{ ou } 3\}$, mostram o desejado. ∎

O próximo teorema estabelece a cardinalidade do conjunto das superfícies N_n geradas pelos polígonos na forma mínima com exatamente n lados, como sendo obtida da cardinalidade da união dos conjuntos $\overline{C}_n$ e C_n do Teorema 3.3.8 e da igualdade (3.19), respectivamente.

Teorema 3.3.9 *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}_+$, tais que $n = 4p + \{0, 1, 2 \text{ ou } 3\}$. Então o número de elementos do conjunto N_n, é dado por:*

$$\begin{aligned}
\#(N_n) &= 0, \text{ se } n = 0 \\
\#(N_n) &= 2, \text{ se } n = 2 \\
\#(N_n) &= p + 1, \text{ se } n = 4p + \{1, 2 \text{ ou } 3\} \\
\#(N_n) &= p + 2, \text{ se } n = 4p.
\end{aligned}$$

Demonstração. Como $N_n = \overline{C}_n \cup C_n$ e $\overline{C}_n \cap C_n = \varnothing$, usando o Teorema 3.3.8, igualdades (3.19) e escrevendo o inteiro n em função de um inteiro positivo p módulo 4, obtemos o desejado. ∎

3.3.3 Cardinalidade do conjunto das superfícies geradas por polígonos com até n lados

Nesta seção determinaremos o número de elementos dos subconjuntos das superfícies geradas pelos polígonos satisfazendo as condições: com exatamente n lados, e com até n lados. Este é um dado importante porque, ao identificarmos um subconjunto de superfícies através da representação poligonal, a sua cardinalidade nos diz quando devemos parar com o processo. Lembramos que a representação poligonal de uma superfície não é única.

Pela Definição 3.3.1 (i), o conjunto M_n é composto por todas as superfícies geradas pelos polígonos na forma mínima com até n lados. Assim, vamos obter o número de elementos de M_n somando os números de elementos de todos os conjunto N_k, $k = 1, ..., n$.

Teorema 3.3.10 *Sejam $a_i, p \in \mathbb{Z}_+$, tais que $i \equiv 4p + a_i$, $a_i \in \{0,1,2,3\}$. Seja $f : \{0,1,2,3\} \to \{0,1\}$ a função definida por $f(a_i) = 1$, se $a_i = 0$ e $f(a_i) = 0$, caso contrário. Então o número de elementos do conjunto M_n, é dado por:*

$$\#(M_n) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{i - a_i}{4} + 1 \right) (1 - f(a_i)) + \left(\frac{i - a_i}{4} + 2 \right) f(a_i) \right]. \tag{3.26}$$

Demonstração. Temos que $M_n = N_0 \cup N_1 \cup N_2 \cup \cdots \cup N_n$. Pelos Corolários 3.3.3 e 3.3.7 segue que $N_i \cap N_j \neq \varnothing$, $\forall\, i \neq j$. Como $\#(N_0) = 0$, então $\#(M_n) = \#(N_1) + \#(N_2) + \cdots + \#(N_n) = \sum_{i=1}^{n} \#(N_i)$. Se $n = 1$, então

$$\#(M_1) = \left[\left(\frac{1-1}{4} + 1 \right) (1 - f(1)) + \left(\frac{1-1}{4} + 2 \right) f(1) \right] = 1 = \#(N_1).$$

Suponha por indução que

$$\#(M_n) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{i - a_i}{4} + 1 \right) (1 - f(a_i)) + \left(\frac{i - a_i}{4} + 2 \right) f(a_i) \right] + 1 = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \#(N_i).$$

Pela definição de M_n, por indução e Teorema 3.3.9, segue que

$$\#(M_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \left[\left(\frac{i + 1 - a_{i+1}}{4} + 1 \right) (1 - f(a_{i+1})) + \left(\frac{i - a_{i+1}}{4} + 2 \right) f(a_{i+1}) \right] + 1.$$

Desse modo, a fórmula (3.26) é verdadeira para $n + 1$. ∎

Lema 3.3.11 *As cardinalidades dos subconjuntos importantes de M_n são:*

$$\#(CO_n^t) = \sum\nolimits_{m=0}^{[n/4]} 1, \qquad \#(C\widetilde{O}_n^t) = \sum_{m=1}^{[n/2]} 1,$$

$$\#(\overline{C}O_n^t) = \sum\nolimits_{m=0}^{[n/4]} \left[\tfrac{n-4m+2}{3} \right], \qquad \#(\overline{C}\widetilde{O}_n^t) = \sum_{m=1}^{[n/2]} \left[\tfrac{n-2m+2}{3} \right],$$

$$\#(C_n^t) = \sum\nolimits_{m=0}^{[n/4]} 1 + \sum\nolimits_{m=0}^{[n/2]} 1, \qquad \#(\overline{C}_n^t) = \sum_{m=0}^{[n/4]} \left[\tfrac{n-4m+2}{3} \right] + \sum_{m=1}^{[n/2]} \left[\tfrac{n-2m+2}{3} \right].$$

Demonstração. As cardinalidades de CO_n^t e $C\widetilde{O}_n^t$ seguem, respectivamente, das igualdades em (3.16) e (3.23), e implicam na cardinalidade de C_n^t. Se $m\Omega_r$ é compacta orientada com bordo, então $r \geq 1$, $m > 0$ e a forma mínima de mT_r nos dá: $3r = n - 4m + 2 \geq 0 \;\Rightarrow\; m \leq (n+2)/4$. Conseqüentemente, $m \in \{0, 1, 2, ..., [(n+2)/4]\}$. Mas m não pode ser $(n+1)/4$ e $(n+2)/4$, caso contrário, $r < 1$. Logo, $m \in \{0, 1, 2, ..., [n/2]\}$. Como $r = (n - 4m + 2)/2$ então

$$|\overline{C}O_n^t| = \sum\nolimits_{m=1}^{[n/4]} \left[\frac{n - 4m + 2}{3} \right], \;\; \forall\; n.$$

De modo análogo, mostra-se a cardinalidade de $\overline{C}\widetilde{O}_n^t$. A cardinalidade de $\overline{C}_n^t$ resulta da soma das cardinalidades de $\overline{C}O_n^t$ e $\overline{C}\widetilde{O}_n^t$, encerrando assim a demonstração do Lema. ∎

n	CO_n	$\overline{C}O_n$	$C\widetilde{O}_n$	$C\widetilde{O}_n$	n	CO_n	$\overline{C}O_n$	$\widetilde{CO}_n$	$\overline{C}\widetilde{O}_n$
1	$\varnothing$	S_1	$\varnothing$	$\varnothing$	21	$\varnothing$	$2T_5, 5T_1$	$\varnothing$	$2P_7, 5P_5, 8P_3, 11P_1$
2	S	$\varnothing$	P	$\varnothing$	22	$\varnothing$	$S_8, 3T_4$	$11P$	$P_8, 4P_6, 7P_4, 10P_2$
3	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	P_1	23	$\varnothing$	$T_7, 4T_3$	$\varnothing$	$3P_7, 6P_5, 9P_3, 12P_1$
4	T	S_2	$2P$	$\varnothing$	24	$6T$	$2T_6, 5T_2$	$12P$	$2P_8, 5P_6, 8P_4, 11P_2$
5	$\varnothing$	T_1	$\varnothing$	$2P_1$	25	$\varnothing$	$S_9, 3T_5, 6T_1$	$\varnothing$	$P_9, 4P_7, 7P_5, 10P_3, 13P_1$
6	$\varnothing$	$\varnothing$	$3P$	P_2	26	$\varnothing$	$T_8, 4T_4$	$13P$	$3P_8, 6P_6, 9P_4, 12P_2, 14P_1$
7	$\varnothing$	S_3	$\varnothing$	$3P_1$	27	$\varnothing$	$2T_7, 5T_3$	$\varnothing$	$2P_9, 5P_7, 8P_5, 11P_3, 14P_1$
8	$2T$	T_2	$4P$	$2P_2$	28	$7T$	$S_{10}, 3T_6, 6T_2$	$14P$	$P_{10}, 4P_8, 7P_6, 10P_4, 13P_2$
9	$\varnothing$	$2T_1$	$\varnothing$	$P_3, 4P_1$	29	$\varnothing$	$T_9, 4T_5, 7T_1$	$\varnothing$	$3P_9, 6P_7, 9P_5, 12P_3, 15P_1$
10	$\varnothing$	S_4	$5P$	$3P_2$	30	$\varnothing$	$2T_8, 5T_4$	$15P$	$2P_{10}, 5P_8, 8P_6, 11P_4, 14P_2$
11	$\varnothing$	T_3	$\varnothing$	$2P_3, 5P_1$	31	$\varnothing$	$S_{11}, 3T_7, 6T_3$	$\varnothing$	$P_{11}, 4P_9, 7P_7, 10P_5, 13P_3, 16P_1$
12	$3T$	$2T_2$	$6P$	$P_4, 4P_2$	32	$8T$	$T_{10}, 4T_6, 7T_2$	$16P$	$3P_{10}, 6P_8, 9P_6, 12P_4, 15P_2$
13	$\varnothing$	$S_5, 3T_1$	$\varnothing$	$3P_6, 6P_1$	33	$\varnothing$	$2T_9, 5T_5, 8T_1$	$\varnothing$	$P_{11}, 4P_9, 7P_7, 10P_5, 13P_3, 16P_1$
14	$\varnothing$	T_4	$7P$	$2P_4, 5P_2$	34	$\varnothing$	$S_{12}, 3T_8, 6T_4$	$17P$	$3P_{10}, 6P_8, 9P_6, 12P_4, 15P_2$
15	$\varnothing$	$2T_3$	$\varnothing$	$P_5, 4P_3, 7P_1$	35	$\varnothing$	$T_{11}, 4T_7, 7T_3$	$\varnothing$	$2P_{11}, 5P_9, 8P_7, 11P_5, 14P_3, 17P_1$
16	$4T$	$S_6, 3T_2$	$8P$	$3P_4, 6P_2$	36	$9T$	$2T_{10}, 5T_6, 8T_2$	$18P$	$P_{12}, 4P_{10}, 7P_8, 10P_6, 13P_4, 16P_2$
17	$\varnothing$	$T_5, 4T_1$	$\varnothing$	$2P_5, 5P_3, 8P_1$	37	$\varnothing$	$S_{13}, 3T_9, 6T_5, 9T_1$	$\varnothing$	$3P_{11}, 6P_9, 9P_7, 12P_5, 15P_3, 18P_1$
18	$\varnothing$	$2T_4$	$9P$	$P_6, 4P_4, 7P_2$	38	$\varnothing$	$T_{12}, 4T_8, 7T_4$	$19P$	$2P_{12}, 5P_{10}, 8P_8, 11P_6, 14P_4, 17P_2$
19	$\varnothing$	$S_7, 3T_3$	$\varnothing$	$3P_5, 6P_3, 9P_1$	39	$\varnothing$	$2T_{11}, 5T_7, 8T_3$	$\varnothing$	$P_{13}, 4P_{11}, 7P_9, 10P_7, 13P_5, 16P_3, 19P_1$
20	$5T$	$T_6, 4T_2$	$10P$	$2P_6, 5P_4, 8P$	40	$10T$	$S_{14}, 3T_{10}, 6T_6, 9T_2$	$20P$	$3P_{12}, 6P_{10}, 9P_8, 12P_6, 15P_4, 18P_2$

Tabela 3.3: Subconjuntos das superfícies geradas pelos polígonos com exatamente n lados

Corolário 3.3.12 *As cardinalidades dos subconjuntos O_n^t e $\widetilde{O}_n^t$ de M_n são:*

$$\#(O_n^t) = \sum\nolimits_{m=0}^{[n/4]} \left[(n-4m+2)/3\right] + 1 \quad e \quad \#(\widetilde{O}_n^t) = \sum\nolimits_{m=0}^{[n/2]} \left\{\left[(n-2m+2)/3\right] + 1\right\}.$$

Demonstração. Basta somar as cardinalidades de CO_n^t e $\overline{C}O_n^t$ no Lema 3.3.11 e as cardinalidades de $C\widetilde{O}_n^t$ e $\overline{C}\widetilde{O}_n^t$ no Lema 3.3.11. ■

Teorema 3.3.13 *A cardinalidade do conjunto M_n, das superfícies geradas por polígonos com até n lados, é dado pela fórmula*

$$|M_n| = \sum\nolimits_{m=0}^{[n/4]} \left\{\left[(n-4m+2)/3\right] + 1\right\} + \sum\nolimits_{m=1}^{[n/2]} \left\{\left[(n-2m+2)/3\right] + 1\right\}, \ \forall\, n.$$

Demonstração. Temos que $M_n = O_n^t \cup \widetilde{O}_n^t = CO_n^t \cup C\widetilde{O}_n^t \cup \overline{C}O_n^t \cup \overline{C}\widetilde{O}_n^t$. Como são disjuntos, então $|M_n| = |CO_n^t| + |C\widetilde{O}_n^t| + |\overline{C}O_n^t| + |\overline{C}\widetilde{O}_n^t|$. A substituição desses valores no Lema 3.3.11, fornece o desejado.

■

O Teorema 3.3.13 fornece a cardinalidade do conjunto de todas as superfícies que podem ser geradas por polígonos de k lados $1 \leq k \leq n$.

Os resultados da Seção 3.3.2 permitem relacionar na Tabela 3.3 o conjunto das superfícies geradas pelos polígonos de n-lados na forma mínima, $1 \leq n \leq 40$ e, na Tabela 3.4, a

quantidade de superfícies existentes em cada subconjunto de N_n e de M_n. Na Tabela 3.3, relacionamos, para cada $1 \leq n \leq 40$, as superfícies geradas pelos polígonos de n-lados na forma mínima pertencentes aos seguintes subconjuntos: a 1^acoluna contém as superfícies de CO_n, conjunto das superfícies compactas orientadas; a 2^acoluna contém as superfícies de $\overline{C}O_n$, conjunto das superfícies compactas orientadas com bordos; a 3^acoluna contém as superfícies de $C\widetilde{O}_n$, conjunto das superfícies compactas não-orientadas e, a 4^acoluna contém as superfícies de $\overline{C}\widetilde{O}_n$, conjunto das superfícies compactas não-orientadas com bordos. A união desses conjuntos é igual a N_n, o conjunto de todas as superfícies que podem ser geradas pelos polígonos na forma mínima com exatamente n lados. Os elementos de N_n estão na n-ésima linha da Tabela 3.3 e os elementos de M_n encontram-se nas k-ésimas linhas, $1 \leq k \leq n$, da Tabela 3.3.

Na Tabela 3.4, para cada $1 \leq n \leq 40$, a n-ésima linha é composta pelas cardinalidades dos seguintes subconjuntos: nas 8 primeiras colunas encontram-se as cardinalidades dos subconjuntos das superfícies que são geradas pelos polígonos na forma mínima com exatamente n lados; a 9^acoluna contém a cardinalidade do conjunto N_n e, nas demais colunas, constam as cardinalidades dos subconjuntos das superfícies geradas pelos polígonos na forma mínima com até n lados, sendo a última coluna, a cardinalidade de M_n, conjunto que relaciona todas as superfícies geradas pelos polígonos na forma mínima com até n lados.

n	CO_n	$\overline{C}O_n$	$C\tilde{O}_n$	$\overline{C}\tilde{O}_n$	C_n	$\overline{C}_n$	O_n	$\tilde{O}_n$	N_n	CO_n^t	$\overline{C}O_n^t$	$C\tilde{O}_n^t$	$\overline{C}\tilde{O}_n^t$	C_n^t	$\overline{C}_n^t$	O_n^t	$\tilde{O}_n^t$	M_n
1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1
2	1	0	1	0	2	0	1	1	2	1	1	1	0	2	1	2	1	3
3	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	4
4	1	1	1	0	2	1	2	1	3	2	2	2	1	4	3	4	3	7
5	0	1	0	1	0	2	1	1	2	2	3	2	2	4	5	5	4	9
6	0	0	1	1	1	1	0	2	2	2	3	3	3	5	6	5	6	11
7	0	1	0	1	0	2	1	1	2	2	4	3	4	5	8	6	7	13
8	1	1	1	1	2	2	5	2	4	3	5	4	5	7	10	8	9	17
9	0	1	0	2	0	3	5	2	3	3	6	4	7	7	13	9	11	20
10	0	1	1	1	1	2	5	2	3	3	7	5	8	8	15	10	13	23
11	0	1	0	2	0	3	5	2	3	3	8	5	10	8	18	11	15	26
12	1	1	1	2	2	3	5	3	5	4	9	6	12	10	21	13	18	31
13	0	2	0	2	0	4	5	2	4	4	11	6	14	10	25	15	20	35
14	0	1	1	2	1	3	5	3	4	4	12	7	16	11	28	16	23	39
15	0	1	0	3	0	4	5	3	4	4	13	7	19	11	32	17	26	43
16	1	2	1	2	2	4	5	3	6	5	15	8	21	13	36	20	29	49
17	0	2	0	3	0	5	5	3	5	5	17	8	24	13	41	22	32	54
18	0	1	1	3	1	4	5	4	5	5	18	9	27	14	45	23	36	59
19	0	2	0	3	0	5	5	3	5	5	20	9	30	14	50	25	39	64
20	1	2	1	3	2	5	5	4	7	6	22	10	33	16	55	28	43	71
21	0	2	0	4	0	6	5	4	6	6	24	10	37	16	61	30	47	77
22	0	2	1	3	1	5	5	4	6	6	26	11	40	17	66	32	51	83
23	0	2	0	4	0	6	5	4	6	6	28	11	44	17	72	34	55	89
24	1	2	1	4	2	6	5	5	8	7	30	12	48	19	78	37	60	97
25	0	3	0	4	0	7	5	4	7	7	33	12	52	19	85	40	64	104
26	0	2	1	4	1	6	5	5	7	7	35	13	56	20	91	42	69	111
27	0	2	0	5	0	7	5	5	7	7	37	13	61	20	98	44	74	118
28	1	3	1	4	2	7	5	5	9	8	40	14	65	22	105	48	79	127
29	0	3	0	5	0	8	5	5	8	8	43	14	70	22	113	51	84	135
30	0	2	1	5	1	7	5	6	8	8	45	15	75	23	120	53	90	143
31	0	3	0	5	0	8	5	5	8	8	48	15	80	23	128	56	95	151
32	1	3	1	5	2	8	5	6	10	9	51	16	85	25	136	60	101	161
33	0	3	0	6	0	9	5	6	9	9	54	16	91	25	145	63	107	170
34	0	3	1	5	1	8	5	6	9	9	57	17	96	26	153	66	113	179
35	0	3	0	6	0	9	5	6	9	9	60	17	102	26	162	69	119	188
36	1	3	1	6	2	9	5	7	11	10	63	18	112	28	175	73	130	199
37	0	4	0	6	0	10	5	6	10	10	67	18	118	28	185	77	136	211
38	0	3	1	6	1	9	5	7	10	10	70	19	124	29	194	80	143	221
39	0	3	0	7	0	10	5	7	10	10	73	19	131	29	204	83	150	231
40	1	4	1	6	2	10	5	7	12	11	77	20	137	31	214	88	157	243

Tabela 3.4: Cardinalidade dos subconjuntos de superfícies em N_n e em M_n

Capítulo 4

Considerações sobre o Grupo de Homologia de Superfícies Compactas

Estamos interessados em identificar uma estrutura algébrica que esteja relacionada com o mergulho de um canal discreto sem memória em uma superfície compacta. Como todo canal discreto sem memória está associado a um grafo, o mergulho deste sobre uma superfície pode ser visto como parte de um complexo simplicial orientado - veja Figura 7.1. Um complexo simplicial orientado sobre uma superfície é uma triangulação que pode ser identificado como um circuito elétrico. As relações triviais que compõem a presentação incial do primeiro grupo de homologia são obtidas de forma semelhante quando sem aplica a Lei de Kirshorff nas componentes de bordos de cada triângulo do circuito elétrico. Com isso, concluímos que a forma mais natural de associarmos a estrutura algébrica da superfície, na qual ocorre o mergulho, será através do primeiro grupo de homologia desta superfície via complexo simplicial. O objetivo é então identificar o primeiro grupo de homologia de uma superfície gerada por um polígono.

Giblin, em [12], descreve detalhadamente o processo de cálculo do grupo de homologia de uma superfície através do método desenvolvido por Betti, isto é, o método do complexo simplicial orientado sobre um modelo plano da superfície, superfície esta gerada por um polígono de n-lados.

A forma poligonal adotada será a da representação de uma superfície através de um polígono de n-lados na forma mínima, estabelecido na Definição 3.2.3. No lugar de um complexo simplicial orientado, usaremos o diagrama triangular central estabelecida na Definição 4.3.1. Apesar de não satisfazer todas as condições de um complexo simplicial orientado, o diagrama triangular central produz o mesmo resultado do complexo simplicial orientado, quando usado no cálculo do primeiro grupo de homologia de uma superfície compacta.

O primeiro grupo de homologia de uma superfície será estabelecido, no caso orientado, em função do gênero da superfície e do número de componentes de bordo e, no caso não-orientado, será determinado em função do grau de conexidade[1] da superfície e do número de componentes de bordo.

[1] O **grau de conexidade** ou **fator de conexidade** de uma superfície Ω é o valor de m quando Ω encontra-se sob uma das formas: $\Omega \equiv mT_r$ ou $\Omega \equiv mP_r$.

Para alguns dos subconjuntos das superfícies estabelecidos na Subseção 3.3.1, iremos determinar o primeiro grupo de homologia.

4.1 Canal Discreto Sem Memória e Grupo de Homologia

Neste capítulo iremos considerar a relação existente entre o processo de cálculo do primeiro grupo de homologia de uma superfície através do método do complexo simplicial orientado de Betti e a estrutura do código usado num sistema de transmissão de sinais para controle de erro do canal.

A mensagem recebida nem sempre coincide com a mensagem transmitida. Neste caso, diz-se que o canal introduziu erros. O controle dos erros introduzidos pelo canal é feito através da implementação de um sistema de codificação/decodificação, cuja função é recuperar a mensagem enviada ao canal. Em um sistema de comunicações, a informação é codificada sob a forma de uma seqüência de bits u, estes são modulados e enviados através do canal. No receptor, o sinal recebido é composto do sinal mais o ruído, isto é, $u + r$. O objetivo é identificar a seqüência enviada u.

A priori, duas estruturas algébricas são implementadas num sistema de transmissão de sinais. Um conjunto com uma estrutura de grupo, anel ou corpo é usado no sistema codificação/decodificação e, na modulação/demodulação, os sinais de transmissão geralmente estão vinculados a grupos de isometrias.

De um modo geral, os códigos corretores de erros são conjuntos formados por seqüências de dígitos de um alfabeto q-ário munidos de uma estrutura algébrica (sistemas de base q) - a base binária é evidentemente a mais usada. Na modulação, os elementos do alfabeto do código são associados a sinais de um espaço euclidiano n-dimensional, espaço hiperbólico ou outro qualquer - quando possível, estes sinais são distribuídos uniformemente formando um *conjunto de sinais geometricamente uniforme* [11].

Aparentemente, não existe nada em comum entre as estruturas algébricas dos sistemas codificação/decodificação e modulação/demodulação. Na prática, foi constatado que a funcionalidade do sistema depende da forma de escolha dessas estruturas. Loeliger, em [25], estabelece as condições para o casamento de um conjunto de sinais a um grupo de tal forma que resulte em uma constelação de sinais geometricamente uniforme. Neste caso, cada elemento do alfabeto do código está associado a um elemento do *conjunto de sinais* e o rotulamento desses sinais é realizado através da ação do subgrupo do grupo de simetrias do conjunto dos sinais.

Não descarta-se o uso de uma constelação que não seja geometricamente uniforme, só que, neste caso, o processo de decodificação torna-se bem mais complexo. São familiares as tesselações do plano euclidiano e hiperbólico. Por exemplo, sabemos que o plano euclidiano só pode ser tesselado por triângulos, quadrados ou hexágonos. No plano hiperbólico infinitas são as possibilidades. Por outro lado, os códigos de Slepian (versão n-dimensional do m-PSK) são tais que os sinais encontram-se distribuídos uniformemente na superfície de n-esferas, enquanto que as modulações do tipo QAM (do inglês Quadrature Amplitude Modulation) os sinais, topologicamente, encontram-se sobre toros.

O uso de codificação e modulação em um sistema de transmissão de sinais, é um fator preponderante para o desempenho do sistema. Por um lado, a estrutura algébrica usada no processo de codificação nos dá a informação a respeito da capacidade de correção de erro e, por outro, ela deve ser compatível com a estrutura geométrica do processo de modulação/demodulação.

A estrutura algébrica associada a cada um dos blocos componentes de um sistema de transmissão de sinais está relacionada de forma bastante natural com o grupo de homologia da superfície associada a cada um dos referidos blocos.

Ora, o grafo G associado a um canal discreto sem memória é um grafo completo biparticionado ou um subgrafo deste. Mergulhando-o numa superfície Ω como um mergulho de 2-células, temos um modelo sobre a superfície formado por regiões com um número par de lados maiores ou iguais a quatro, ou seja, são regiões do tipo quadráticas, hexagonais, octogonais, etc. Podemos decompor cada região desta em subregiões triangulares, traçando diagonais entre os vértices, até obter um complexo simplicial orientado sobre Ω, e com isso calcular o primeiro grupo de homologia de Ω, $H_1(\Omega)$. Como o mergulho de G não é todo o complexo simplicial, então G gera apenas um subgrupo H' de $H_1(\Omega)$. Certamente que H' é a estrutura algébrica que melhor descreve o comportamento do canal, só que não é fácil identificá-lo. Mas nada nos impede de usar o próprio $H_1(\Omega)$ como fornecedor de códigos corretores de erros, então será esta a nossa proposta de escolha do grupo que irá fornecer, com o mesmo processo em [11], a estrutura algébrica a ser utilizada pelos códigos corretores de erros.

4.2 Procedimento para o cálculo de $H_1(\Omega)$

Nesta seção, fornecemos instruções que permitem calcular o primeiro grupo de homologia de uma superfície, mostramos esta construção através do cálculo do primeiro grupo de homologia da superfície de Klein e exibimos uma propriedade que identifica os ciclos geradores deste grupo. Além disso, fornecemos relações importantes nos elementos de um complexo simplicial orientado e construímos um diagrama triangular central sobre uma superfície que permite simplificar o cálculo do grupo de homologia.

4.2.1 Algoritmo para o cálculo de $H_1(\Omega)$

Apresentaremos um resumo do método para o cálculo do primeiro grupo de homologia de uma superfície descrito em [12], na forma de instruções seqüenciadas, enunciadas nos seguintes passos

Cálculo de $H_1(\Omega)$

O primeiro grupo de homologia $H_1(\Omega)$ de uma superfície Ω, é determinado da seguinte forma:

(a) Construa um complexo simplicial orientado $\mathfrak{K}$ sobre o polígono orientado de n-lados de Ω

(*b*) Construa uma árvore maximal $\mathcal{T}$ sobre $\mathfrak{K}$;

(*c*) Determine o conjunto Z_1 dos 1-ciclos z^i's associados aos 1-simplexos $e^i s \notin \mathcal{T}$ (cada z^i é determinado de modo único);

(*d*) Encontre as relações de bordos de cada 2-simplexo de $\mathfrak{K}$, em função dos elementos de Z_1: são relações dos tipos $z^1 = 0$, $z^1 + z^2 = 0$ ou $z^1 + z^2 = z^3 = 0$, as quais denominaremos de relações dos tipos E_1, E_2 ou E_3, respectivamente. O conjunto dessas relações definem uma presentação $\mathcal{P}$ para $H_1(\Omega)$;

(*e*) Em $\mathcal{P}$, faça todas as substituições possíveis de variáveis:

  (*i*) nas relações do tipo $z^{i_1} = z^{i_2} = \cdots = z^{i_t}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_t$, substitua, em E_3, cada elemento do conjunto $z^{i_2}, z^{i_3} \cdots z^{i_t}$ pelo elemento de menor índice z^{i_1}, obtendo um sistema $\mathfrak{P}_\Omega$ composto somente por relações do tipo E_3;

  (*ii*) nas relações do tipo $z^{i_1} = z^{i_2} = \cdots = z^{i_t} = 0$, considere $z^{i_1}, z^{i_2}, \cdots, z^{i_t}$ como elementos neutros e não os inclua em $\mathfrak{P}_\Omega$, pois todo z^{i_t} tem esta característica;

(*f*) Calcule posto $\mathfrak{P}_\Omega$, número de variáveis var $\mathfrak{P}_\Omega$ e determine a dimensão do espaço solução de $\mathfrak{P}_\Omega$: $\dim \mathfrak{P}_\Omega = \text{var}\, \mathfrak{P}_\Omega - \text{posto}\, \mathfrak{P}_\Omega$;

(*g*) Encontre as relações do tipo: $\delta_1\phi^1 = 0, \delta_2\phi^2 = 0, \cdots, \delta_k\phi^k = 0$;

(*h*) A presentação final do Z_1/B_1 será

$$\left\langle \phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \phi^5, \cdots, \phi^{n-2}, \phi^{n-1}, \phi^n; \delta_1\phi^1 = 0, \delta_2\phi^2 = 0, \cdots, \delta_k\phi^k = 0 \right\rangle$$

onde $B_1 = \left\{\phi^1, \phi^2, \phi^3, \cdots, \phi^{n-1}, \phi^n\right\}$ é o conjunto das variáveis livres de $\mathfrak{P}_\Omega$ ($n = \dim \mathfrak{P}_\Omega$);

(*i*) Assim, o primeiro grupo de homologia da superfície Ω será dado pelo isomorfismo

$$H_1(\Omega) \cong \mathbb{Z}_{\delta_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\delta_k} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z},$$

onde existem $n - k$ $\mathbb{Z}$'s, isto é, posto $Z_1/B_1 = n - k$.

A presentação do primeiro grupo de homologia pelo método de Betti, é composta por relações triviais do tipo $z^1 + z^2 + z^3 = 0$. Diremos que a relação é do tipo E_i se, e somente se, o primeiro membro da relação possui exatamente i termos diferentes de zero. Por exemplo, $z^1 = 0$, $z^1 + z^2 = 0$ e $z^1 + z^2 + z^3 = 0$ são relações dos tipo E_1, E_2 e E_3, respectivamente.

4.2.2 Exemplo de aplicação: Garrafa de Klein

A **garrafa de Klein** K tem como palavra na forma mínima, $\omega(K) = aba^{-1}b$. Logo, é gerada por um polígono de 4-lados. Consideremos v_0 e v_1 como vértices do polígono de 4-lados e os demais vértices como componentes da triangulação $\mathfrak{K}$ sobre K. Os números

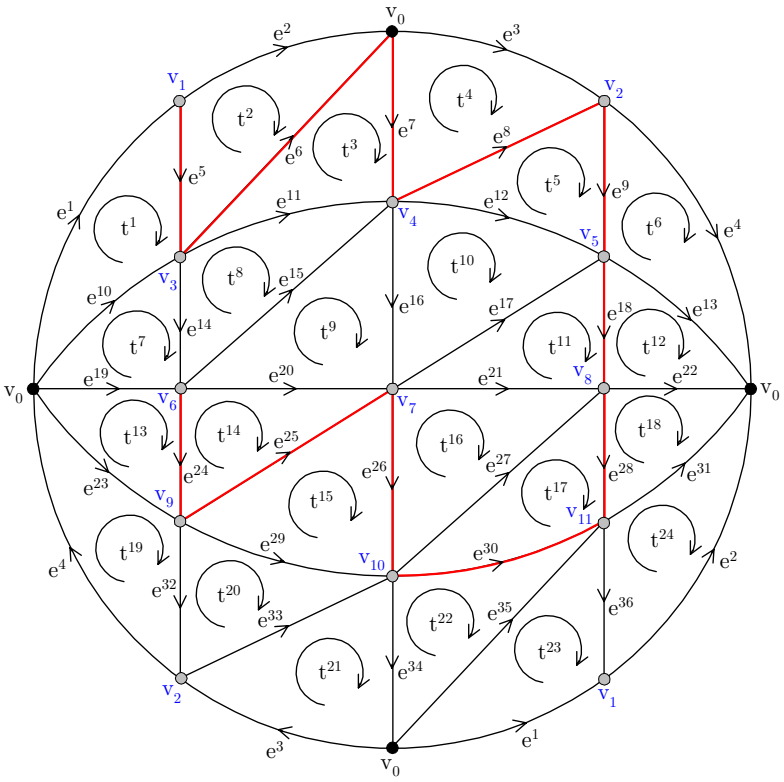

Figura 4.1: Complexo simplicial orientado $\mathfrak{K}$ sobre a garrafa de Klein

de 0-cadeias, 1-cadeias e o número ciclotomático da triangulação sobre $\mathfrak{K}$, mostrada na Figura 4.1 são, respectivamente,

$$\alpha_0(\mathfrak{K}) = 12, \quad \alpha_1(\mathfrak{K}) = 36 \quad e \quad \mu(\mathfrak{K}) = \alpha_1(\mathfrak{K}) - \alpha_0(\mathfrak{K}) + 1 = 36 - 12 + 1 = 25.$$

Seja $\mathcal{T}$ o subgrafo em vermelho sobre o complexo $\mathfrak{K}$ da Figura 4.1. Evidentemente, $\mathcal{T}$ é uma árvore maximal sobre $\mathfrak{K}$.

Em particular, as 1-cadeias de $\mathfrak{K}$, que não estão sobre $\mathcal{T}$, são:

$$\left\{e^1, e^2, e^3, e^4, e^{10}, e^{11}, \cdots, e^{17}, e^{19}, e^{20}, e^{21}, e^{22}, e^{23}, e^{27}, e^{29}, e^{31}, e^{32}, e^{33}, e^{34}, e^{35}, e^{36}\right\}.$$

Os caminhos conexos no complexo simplicial orientado $\mathfrak{K}$, na Figura 4.1, que determinam cada 1-ciclo z^i associados ao único laço l^i sobre o grafo $\mathcal{T} + e^i$, são

$$z^1 = e^1 + e^5 + e^6, \quad z^2 = e^2 - e^6 - e^5, \quad z^3 = e^3 - e^8 - e^7, z^4 = e^4 + e^7 + e^8,$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$z^{33} = e^{33} + e^{30} - e^{28} - e^{18} - e^9, \quad z^{34} = e^{34} + e^7 + e^8 + e^9 + e^{18} + e^{28} - e^{30},$$
$$z^{35} = e^{35} - e^{28} - e^{18} - e^9 - e^8 - e^7, \quad z^{36} = e^{36} + e^5 + e^6 + e^7 + e^8 + e^9 + e^{18} + e^{28}.$$

Usando o Lema 4.2.1, obtemos:

$$\partial_2(t^1) = e^1 + e^5 - e^{10} = z^1 - z^{10}, \partial_2(t^2) = e^2 - e^6 - e^5 = z^2, \partial_2(t^3) = e^6 + e^7 - e^{11} = -z^{11},$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$\partial_2(t^{19}) = e^{23} + e^{32} + e^4 = z^{23} + z^{32} + z^4$, $\partial_2(t^{20}) = e^{29} - e^{33} - e^{32} = z^{29} - z^{33} - z^{32}$,
$\partial_2(t^{21}) = e^{33} + e^{34} + e^3 = z^{33} + z^{34} + z^3$, $\partial_2(t^{22}) = e^{30} - e^{35} - e^{34} = -z^{35} - z^{34}$,
$\partial_2(t^{23}) = e^{35} + e^{36} - e^1 = z^{35} + z^{36} - z^1$, $\partial_2(t^{24}) = e^{31} - e^2 - e^{36} = z^{31} - z^2 - z^{36}$.

Logo, os geradores de $Z_1(\mathfrak{K})$ e suas relações triviais são dados pela seguinte presentação

$\langle z^1, z^2, z^3, z^4, z^{10}, \ldots, z^{16}, z^{17}, z^{19}, \ldots, z^{23}, z^{27}, z^{29}, z^{31}, z^{32}, z^{33}, z^{34}, z^{35}, z^{36};\ z^2 = z^3$
$= -z^{11} = -z^{12} = z^{20} = z^{27} = -z^{29} = z^1 - z^{10} = z^4 - z^{13} = z^{17} - z^{21} = z^{13}\text{-}z^{22} = z^{19}\text{-}z^{23}$
$= z^{21} - z^{27} = z^{22} - z^{31} = -z^{35} - z^{34} = z^{12} - z^{17} - z^{16} = z^{10} + z^{14} - z^{19} = z^{11} - z^{15}\text{-}z^{14}$
$= z^{15} + z^{16} - z^{20} = z^{23} + z^{32} + z^4 = z^{29} - z^{33} - z^{32} = z^{33} + z^{34} + z^3 = z^{35} + z^{36} - z^1$
$= z^{31} - z^2 - z^{36} = 0\rangle$

As relações triviais formam um sistema linear homogêneo nas variáveis z^i's. Este sistema é equivalente a

$$\begin{aligned} &z^2 = z^3 = z^{11} = z^{12} = z^{14} = z^{15} = z^{16} = z^{17} = z^{20} = z^{21} = z^{27} = z^{29} = 0 \\ &z^1 = z^{10} = z^{19} = z^{23},\ z^{32} = -z^{33} = z^{34} = -z^{35},\ z^4 = z^{13} = z^{22} = z^{31} = z^{36} \\ &z^4 + z^{23} + z^{32} = z^1 - z^{35} - z^{36} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo as primeiras relações nas duas últimas igualdades, a presentação do grupo $Z_1/B_1(\mathfrak{K})$ é equivalente a

$$\left\langle z^1, z^4, z^{32};\ z^1 + z^4 + z^{32} = z^1 - z^4 - z^{32} = 0 \right\rangle \simeq \left\langle z^4, z^{32};\ 2\left(-z^4 - z^{32}\right) = 0 \right\rangle.$$

Conseqüentemente, o primeiro grupo de homologia da garrafa de Klein é, pelo Corolário 4.4.2, isomorfo a soma direta de $\mathbb{Z}_2$ com $\mathbb{Z}$, isto é, $H_1(K) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$.

Como conseqüência do cálculo de $H_1(K)$, apresentaremos a seguir algumas considerações sobre o cálculo de $H_1(\Omega)$.

A primeira propriedade que se tornou evidente no cálculo de $H_1(\Omega)$ e que torna o cálculo dos 1-ciclos z^i's de Z_1 bastante simples, é enunciada na forma do seguinte resultado.

Proposição 4.2.1 *Sejam $\mathfrak{K}$ uma triangulação sobre uma superfície Ω e $\mathcal{T}$ uma árvore maximal sobre $\mathfrak{K}$. Se t é um 2-simplexo de $\mathfrak{K}$, tal que $\partial_2(t) = \pm e^1 \pm e^2 \pm e^3$, então $\partial_2(t) = \Sigma \pm z^i$ se $e^i \notin \mathcal{T}$, onde z^i é o único 1-ciclo associado ao sub-grafo $\mathcal{T} + e^i$.*

A Proposição 4.2.1 não deve passar desapercebida para quem calcula os ciclos por este processo, portanto ela provavelmente foi identificada e demonstrada pelo próprio criador do processo, isto é, Betti.

Observação 4.2.2 *É importante destacarmos as seguintes particularidades de um complexo simplicial $\mathfrak{K}$ sobre uma superfície Ω:*

1) Um subgrafo $\mathcal{T}$ de um grafo G é uma árvore maximal se $\mathcal{T}$ é um caminho conexo que passa por todos os vértices de G [12]. Em particular, um complexo simplicial $\mathfrak{K}$ sobre uma superfície Ω é um grafo;

2) Na realização geométrica de Ω os vértices de $\mathfrak{K}$ têm como propriedades:

   (i) Cada vértice de $\mathfrak{K}$ no interior do polígono de n-lados corresponde a um único vértice de $\mathfrak{K}$ no modelo espacial de Ω;

(b) Um vértice de $\mathfrak{K}$ no modelo espacial de Ω correspondente a vértices do bordo do polígono de n-lados representa, pelo menos, dois vértices deste;

3) Se V_i é o conjunto dos vértices do bordo do polígono de n-lados com o mesmo rótulo i, então a árvore maximal $\mathcal{T}$ sobre $\mathfrak{K}$, deve sair apenas de um único desses vértice de V_i.

4.3 Diagrama Triangular Central sobre uma Superfície

Na Seção 4.3.1, fixaremos um diagrama triangular central $\mathfrak{T}$ sobre uma superfície Ω e determinaremos invariantes em $\mathfrak{T}$ que compõem um conjunto de informações preliminares fundamentais na identificação de $H_1(\Omega)$, tais como, o número de componentes da árvore maximal $\mathfrak{X}$ sobre $\mathfrak{T}$, o número de 2-simplexos de $\mathfrak{T}$, a quantidade de rótulos distintos dos 1-simplexos de $\mathfrak{T}$ e o número das 1-cadeias ou variáveis da presentação $\mathfrak{P}_\Omega$.

O objetivo é definir um complexo simplicial orientado sobre uma superfície com o menor número possível de vértices e lados. O diagrama triangular cental da Definição 4.3.1 minimiza os números de vértices e lados em uma superfície compacta sem bordo. Quando com bordo, esta minimização só ocorre se todos forem isolados.

Observe que os complexos simpliciais $\mathfrak{K}_1$ e $\mathfrak{K}_2$ da Figura 4.2, sobre o modelo plano da soma conexa de cinco toros, encontram-se sobre polígonos de 20-lados e o número de vértices $\alpha_0(\ )$, de lados $\alpha_1(\ )$ e número ciclotomático $\mu(\ )$ são, respectivamente,

$$\begin{array}{rcl} \alpha_0(\mathfrak{K}_1) & = & 42; \quad \alpha_1(\mathfrak{K}_1) = 150; \quad \mu(\mathfrak{K}_1) = \alpha_1(\mathfrak{K}_1) - \alpha_0(\mathfrak{K}_1) + 1 = 110. \\ \alpha_0(\mathfrak{K}_2) & = & 22; \quad \alpha_1(\mathfrak{K}_2) = 90; \quad \mu(\mathfrak{K}_2) = \alpha_1(\mathfrak{K}_2) - \alpha_0(\mathfrak{K}_2) + 1 = 70. \end{array}$$

Segundo estes dados, no cálculo do primeiro grupo de homologia do $5T$ a partir de $\mathfrak{K}_1$, teríamos que determinar 109 1-ciclos que iriam gerar o grupo $Z_1/B_1(\mathfrak{K}_1)$ e 100 relações triviais, sendo: 18 do tipo E_3, 24 do tipo E_2 e 58 do tipo E_1. A partir de $\mathfrak{K}_2$, precisaríamos achar os 69 1-ciclos geradores do grupo $Z_1/B_1(\mathfrak{K}_2)$, 60 relações triviais, sendo: 19 são do tipo E_3, 40 são do tipo E_2 e 1 do tipo E_1. Comparando os dados, observamos uma diminuição acentuada em $\mathfrak{K}_2$, no número de relações do tipo E_1, uma pequena redução nas relações do tipo E_2, enquanto as relações do tipo E_3 permanecem estáveis. O certo é que não conseguiríamos diminuir este número, porque a palavra que identifica o $5T$, na Figura 4.2, encontra-se em sua forma mínima, e portanto, não existe um polígono de n-lados que gere o $5T$ com menos de 20 lados. O outro motivo é porque não existem vértices de $\mathfrak{K}_2$ sobre os lados do polígono diferentes dos vértices do polígono de 20-lados.

Motivados pela redução das relações E_1 e E_2 no complexo $\mathfrak{K}_2$ da Figura 4.2, procuramos determinar uma triangulação sobre uma superfície que minimizasse as relações triviais da presentação do grupo de homologia. Chegamos ao seguinte complexo.

Definição 4.3.1 *Chamamos de* ***diagrama triangular central*** $\mathfrak{T}$ *sobre uma superfície* Ω, *a triangulação sobre o polígono de* n*-lados de* Ω *formado por* $n+1$ *vértices, um central e os* n *vértices do polígono, e* $2n$ *lados, os que saem do vértice central até os vértices do*

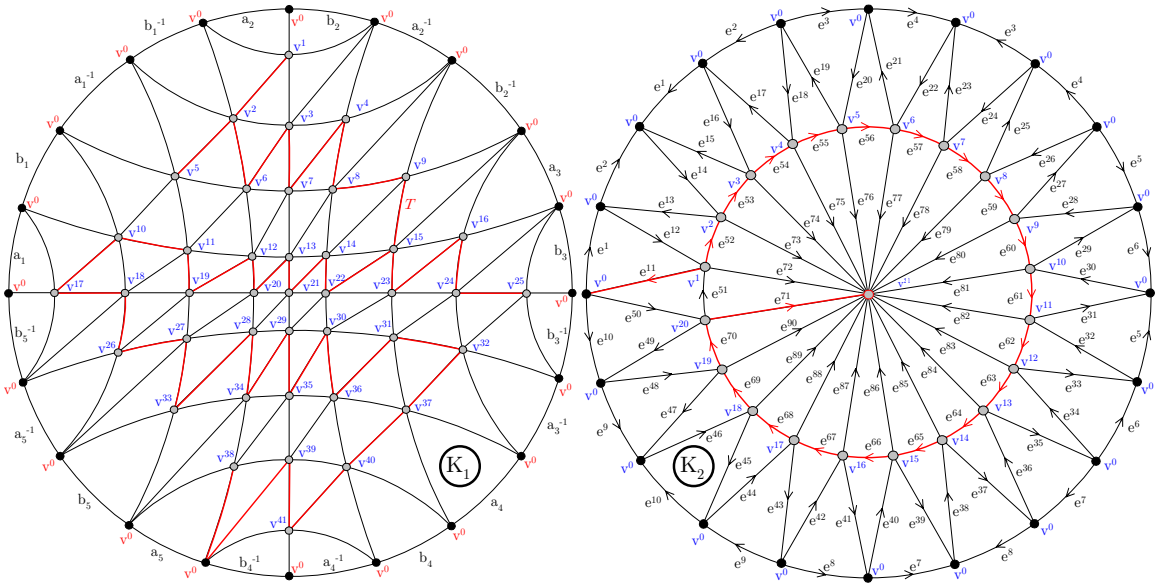

Figura 4.2: Complexos simpliciais sobre o 5T

polígono e os lados deste. Cada lado formado pelo segmento de reta unindo o vértice do polígono ao vértice central, será denominado de ***raio*** *de* $\mathfrak{T}$.

Exemplo 4.3.2 *A triangulação mostrada na Figura* 4.3 *é um diagrama triangular central sobre o* $5T$. *A árvore maximal* $\mathfrak{X}$ *sobre* $\mathfrak{T}$ *é formada por um único raio. Isto vale para o diagrama triangular central sobre o* mT *e o* mP.

No diagrama triangular central sobre o $5T$, da Figura 4.3, temos: $\alpha_0(K) = 21$, $\alpha_1(K) = 30$ e o número ciclotomático de $\mathfrak{T}$ é $\mu(\mathfrak{T}) = \alpha_1(K) - \alpha_0(K) + 1 = 30 - 21 + 1 = 10$. Além do mais, o número de relações triviais é dado por: $|E_1| = 0$, $|E_2| = 2$ *e* $|E_3| = 18$. Veja que o número de relações E_3 é o mesmo dos complexos da Figura 4.2.

Comprovamos ainda que se $\mathfrak{T}$ é um diagrama triangular central sobre uma superfície Ω, então uma árvore $\mathfrak{X}$ sobre $\mathfrak{T}$ não passa por mais de dois raios consecutivos de $\mathfrak{T}$, caso contrário, $\mathfrak{X}$ teria um laço, perdendo a sua condição de árvore. A próxima proposição caracteriza o tipo de árvore de um diagrama triangular central.

Proposição 4.3.3 *Toda árvore maximal* $\mathfrak{X}$ *sobre um diagrama triangular central* $\mathfrak{T}$ *é formada por raios com número igual ao número de vértices sobre o modelo espacial de* Ω, *que são imagens dos vértices do bordo do polígono de* n*-lados de* Ω.

Demonstração. De fato, $\mathfrak{T}$ está definida sobre um polígono de n-lados na forma mínima representante de Ω. Como $\omega(\Omega)$ é única então o número de vértices do bordo do polígono de n-lados é constante. A transformação geométrica do polígono de n-lados em Ω também é única. Assim, os pontos sobre Ω que são imagens dos vértices do bordo do polígono de n-lados também são únicos por esta transformação. Logo, são constantes e, pela Observação 4.2.2, é igual ao número de raios de $\mathfrak{X}$. ■

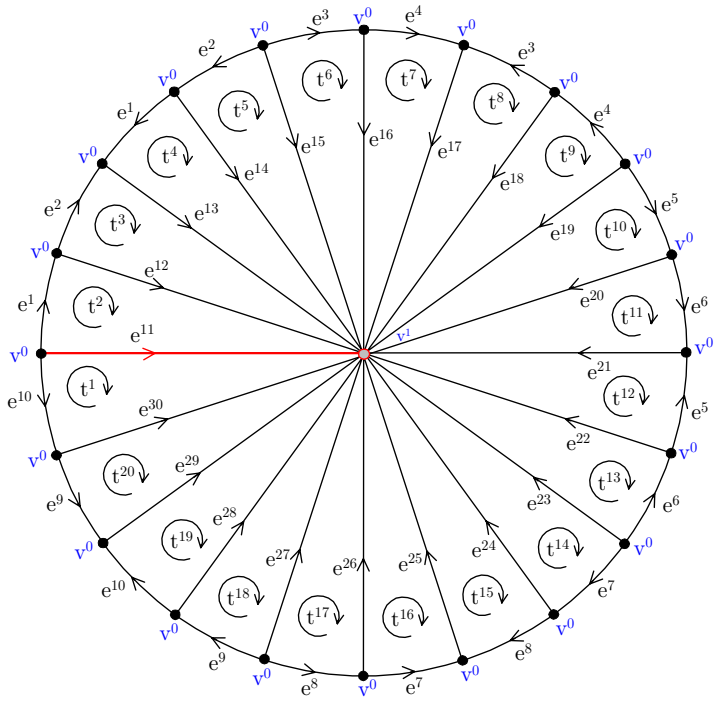

Figura 4.3: Diagrama triangular central sobre o $5T$

Proposição 4.3.4 *Seja $\mathfrak{T}$ o diagrama triangular central sobre uma superfícies $\Omega \equiv n$-lados. Se $\mathfrak{X}$ é uma árvore maximal sobre $\mathfrak{T}$ que passa por r raios de $\mathfrak{T}$. Então:*

(i) se nenhum desses raios são consecutivos, então $|E_1| = 0,\ |E_2| = 2r$ *e* $|E_3| = n - 2r$;

(ii) se dois deles são consecutivos, então $|E_1| = 1,\ |E_2| = 2\,(r-1)$ *e* $|E_3| = n - 2r$.

Demonstração. A Figura 4.4 resume todas as situações possíveis de escolhas de uma árvore maximal $\mathfrak{X}$ sobre $\mathfrak{T}$. Então a contagem das relações triviais nos diagramas triangulares centrais (a) e (b) da Figura 4.4, fornecem, respectivamente, as igualdades (i) e (ii). ∎

Observe que, pela Proposição 4.3.4, o número de relações triviais do tipo E_3 é sempre igual a $n-2r$, onde n é o número de lados do polígono de n-lados de Ω e r é o número de raios da árvore maximal $\mathfrak{X}$. Portanto, o número de relações triviais E_3 de um diagrama triangular central $\mathfrak{T}$ sobre uma superfícies Ω não depende da árvore maximal $\mathfrak{X}$ sobre $\mathfrak{T}$.

Proposição 4.3.5 *O diagrama triangular central $\mathfrak{T}$ é uma triangulação sobre o modelo plano de Ω que minimiza o número de relações triviais do tipo E_3 e pode minimizar as relações do tipo E_1 e E_2 conforme escolhamos, respectivamente, as árvores maximais sobre $\mathfrak{T}$ das formas (a) ou (b) da Figura 4.4.*

Demonstração. Suponha que exista um diagrama triangular $\mathfrak{T}'$ sobre Ω que minimiza as relações triviais. Como o número de relações triviais depende do número de 2-simplexos e este é igual a n, então $\mathfrak{T}'$ deverá ter menos triângulos que $\mathfrak{T}$. Logo $\mathfrak{T}'$ tem menos vértices

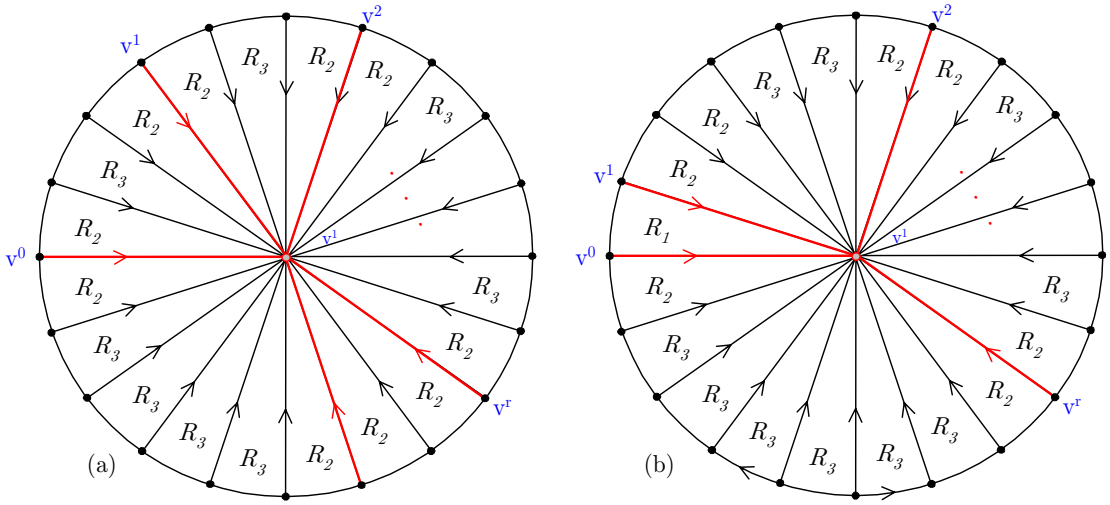

Figura 4.4: Relações triviais sobre um diagrama triangular central

que $\mathfrak{T}$. A primeira opção é eliminar um vértice do bordo do polígono de n-lados de Ω para obtermos $\mathfrak{T}'$; logo (n-1)-*lados* $\equiv \Omega$, o que é um absurdo, pois $\mathfrak{T}'$ está sobre um polígono de n-lados associado a uma palavra na forma mínima. Ao tirarmos um vértice estamos eliminando um lado do polígono de *n-lados*, com isso, a superfície ganha um bordo, se eliminarmos um lado de um par, ou perde um bordo se eliminarmos um lado isolado. Se retirarmos o vértice central, os três vértices de cada 2-simplexo de $\mathfrak{T}'$ estariam sobre o bordo, neste caso $\mathfrak{T}'$ não seria um diagrama triangular central. Conseqüentemente, $\mathfrak{T}$ é um diagrama triangular central com as condições de minimalidade descritas na proposição. ■

Proposição 4.3.6 *Seja $\mathfrak{T}$ o diagrama triangular central sobre uma superfície Ω. Se $\mathfrak{T} \to (a)$ ($\mathfrak{T} \to (b)$), indicam as relações triviais da triangulação (a) (triangulação (b)) da Figura* 4.4, *então o número de relações triviais é dado por*

$$|E_1| = \begin{cases} 0, \text{ se } \mathfrak{T} \to (a) \\ 1, \text{ se } \mathfrak{T} \to (b), \end{cases} \quad |E_2| = \begin{cases} 2r, \text{ se } \mathfrak{T} \to (a) \\ 2r\text{-}1, \text{ se } \mathfrak{T} \to (b), \end{cases} \quad |E_3| = \begin{cases} 4m\text{-}5r+2, \text{se } \Omega \equiv mT_r \\ 2m\text{-}5r+2, \text{se } \Omega \equiv mP_r. \end{cases}$$

Demonstração. As relações triviais dos tipos E_1 e E_2 só dependem dos 2-simplexos que possuem lados sobre $\mathfrak{X}$; logo, pela Observação 4.2.2, só depende do número de componentes de bordo, pois cada componente de bordo tem rótulo diferenciado. As palavras nas formas mínimas $\omega(mT_r)$ e $\omega(mP_r)$ estão associadas a polígonos de n-lados tais que $n = 4m - 3r + 2$ *e* $n = 2m - 3r + 2$, respectivamente. Estas igualdades e as do Teorema 4.3.4, mostram o desejado. ■

4.3.1 Relações do diagrama triangular central

Um diagrama triangular central é uma triangulação sobre o modelo plano da superfície que minimiza, em superfícies compactas sem bordos e com bordos isolados, o número de

relações triviais da presentação do primeiro grupo de homologia H_1 pelo método de Betti [12].

Seguindo a notação da Seção 4.4, denominaremos o conjunto de m-simplexos, $m = 1, 2$, de um complexo simplicial sobre uma superfície Ω pela seguinte notação

$$L_1(\Omega) = \left\{e^1, e^2, \cdots, e^h\right\} \quad e \quad L_2(\Omega) = \left\{t^1, t^2, \cdots, t^n\right\}.$$

No que segue, $\mathfrak{T}$ será sempre um diagrama triangular central sobre uma superfície com árvore maximal $\mathfrak{X}$ que não passa por dois raios consecutivos.

Proposição 4.3.7 *Uma árvore maximal em um diagrama triangular central $\mathfrak{T}$ sobre uma superfície Ω é constituída pelos seguintes números de raios (1-simplexos):*

$$|R| = \begin{cases} 2, \text{ se } \Omega \equiv S \text{ ou } S_1 \\ 1, \text{ se } \Omega \equiv mT \text{ ou } mP \\ r, \text{ se } \Omega \equiv mT_r \text{ ou } mP_r. \end{cases}$$

Demonstração. Uma árvore maximal só passa por um único raio de um conjunto de raios cujos vértices no polígono de n-lados têm o mesmo rótulo. Portanto, o número de componentes de $\mathfrak{T}$ é igual ao número de rótulos distintos dos vértices do polígono de n-lados e, pela Proposição 3.2.4, segue o enunciado. ■

Proposição 4.3.8 *Num diagrama triangular central $\mathfrak{T}$ sobre uma superfície Ω o número de 2-simplexos é:*

$$L_2(\Omega) = \begin{cases} 4m, \text{ se } \Omega = mT \\ 2m, \text{ se } \Omega = mP \\ 3r - 2, \text{ se } \Omega = S_r \\ 4m + 3r - 2, \text{ se } \Omega = mT_r \\ 2m + 3r - 2, \text{ se } \Omega = mP_r. \end{cases}$$

Demonstração. De fato, numa diagrama triangular central o número de 2-simplexos é igual ao número de lados do polígono de n-lados, e como está na forma mínima, basta calcular n em função de m e r para se obter o desejado. ■

Proposição 4.3.9 *O número de rótulos distintos dos 1-simplexos de um diagrama triangular central $\mathfrak{T}$ sobre uma superfície Ω é*

$$|L_1(\Omega)| = \begin{cases} 6m - 1, \text{ se } \Omega \equiv mT \\ 3m - 1, \text{ se } \Omega \equiv mP \\ 4r - 3, \text{ se } \Omega \equiv S_r \\ 6m + 4r - 3, \text{ se } \Omega \equiv mT_r \\ 3m + 4r - 3, \text{se } \Omega \equiv mP_r. \end{cases}$$

Demonstração. O número de 1-simplexos com rótulos diferentes de $\mathfrak{T}$ é igual ao número de rótulos distintos dos lados do polígono de n-lados mais o número de raios de $\mathfrak{T}$ que não passam pela árvore maximal $\mathfrak{X}$. Se $\Omega \equiv n$-lados na forma mínima então, pela

Proposição 4.3.8, temos que:

$$\begin{aligned}
&|L_1(mT)| = n/2 + n - 1 = 4m/2 + 4m - 1 = 6m - 1,\\
&|L_1(mP)| = n/2 + n - 1 = 2m/2 + 2m - 1 = 3m - 1,\\
&|L_1(S_r)| = (2(r-1)+1) + (n-r) = 2r - 1 - r + 3r - 2 = 4r - 3,\\
&|L_1(mT_r)| = (4m/2 + 2(r-1) + 1) + 4m + 3(r-1) + 1 - r = 6m + 4r - 3,\\
&|L_1(mP_r)| = (2m/2 + 2(r-1) + 1) + 2m + 3(r-1) + 1 - r = 3m + 4r - 3.
\end{aligned}$$ ■

As superfícies S e S_1 são as únicas exceções para as condições das Proposições 4.3.8 e 4.3.9, afirmações facilmente comprovadas nos diagramas triangulares centrais mostrados na Figura 4.5, pois $L_2(S) = 2$, $L_2(S_1) = 3$, $L_1(S) = 1$ e $L_2(S_1) = 3$. Já que $L_1(P) = 2 = 3 \cdot 1 - 1$ e $L_2(P) = 2 = 2 \cdot 1$, então a superfície P satisfaz as condições das Proposições 4.3.8 e 4.3.9.

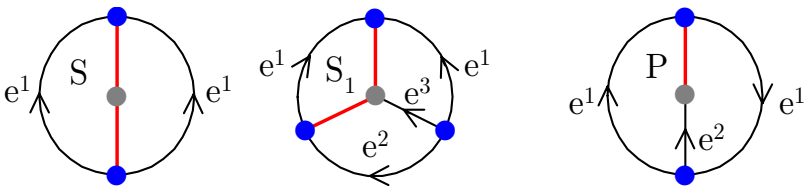

Figura 4.5: Diagramas triangulares centrais sobre S, S_1 e P

Proposição 4.3.10 *Seja $\mathfrak{P}$ a presentação de $H_1(\Omega)$ após as substituições das relações de E_2 em E_3 da presentação $\mathcal{P}$. Então o número de 1-cadeias ou variáveis de $\mathfrak{P}_\Omega$ é:*

$$\operatorname{var}\mathfrak{P}_\Omega = \begin{cases} 6m-3, & se\ \ \Omega \equiv mT \\ 3m-3, & se\ \Omega \equiv mP \\ 2r-3, & se\ \ \Omega \equiv S_r \\ 6m+2r-3, & se\ \ \Omega \equiv mT_r \\ 3m+2r-3, & se\ \ \Omega \equiv mP_r. \end{cases}$$

Demonstração. O número de variáveis da presentação $\mathfrak{P}_\Omega$ é igual ao número de 1-simplexos rotulados menos o número de relações do tipo E_2, pois cada substituição de uma relação de E_2 em E_3, elimina uma variável. Sendo assim, $\operatorname{var}\mathfrak{P}_\Omega = |L_1(\Omega)| - |E_2|$. Mas $\mathfrak{X}$ é uma árvore maximal que não passa por dois raios consecutivos. Logo, $|E_2| = 2r$ (veja Proposição 4.3.4(i)). Esta igualdade, mais os resultados do Lema 4.3.9, mostram a proposição. ■

Lembramos que se uma árvore maximal $\mathfrak{X}$ sobre um diagrama triangular central não possui dois raios consecutivos, então o número de relações triviais do tipo E_1 é zero, sobre mT ou mP, produz apenas duas relações triviais do tipo E_2 (Proposição 4.3.4).

4.4 Grupo de Homologia de Superfícies Compactas

O Teorema 4.4.1 e o Corolário 4.4.2 identificam o tipo de presentação dos grupos abelianos finitamente gerados, contexto no qual se enquadra o primeiro grupo de homologia de uma superfície. Em seguida, particularizamos o teorema para o caso $H_1(\Omega)$

calculado em função do diagrama triangular central $\mathfrak{T}$ com a árvore maximal $\mathfrak{X}$. Na Figura 4.6, exibimos um diagrama triangular central $\mathfrak{T}$ com árvore maximal $\mathfrak{X}$ que não passa por dois raios consecutivos de $\mathfrak{T}$ para cada superfície $2T, S_3, 2T_3, 4P_3$, e $4P$, representantes das famílias do conjunto das superfícies do conjunto $\mathbb{M} = \{mT, S_r, mT_r, mP_r, mP\}$, com o objetivo de mostrar como são os tipos de diagramas triangulares centrais nessas famílias de superfícies. Com isso, exibimos, para cada triangulação, as formas matriciais dos sistemas formados por relações triviais do tipo E_2 e E_3 que constituem a presentação $\mathcal{P}$ e as respectivas presentações $\mathfrak{P}_\Omega$. Na seqüência, analisando o comportamento da variação dos sistemas nos elementos de cada família, deduzimos a forma matricial da presentação $\mathfrak{P}_\Omega$. Com isso, será possível determinar, para cada família, a dimensão do espaço solução do sistema associado à presentação $\mathfrak{P}_\Omega$ (Proposição 4.4.3), o coeficiente de torção (Proposição 4.4.3) e a presentação final que identifica o grupo isomorfo ao primeiro grupo de homologia de Ω (Lema 4.4.5), reunindo os elementos necessários para obter uma fórmula para cada uma das cinco famílias de superfícies de $\mathbb{M}$ (Teorema 4.4.6), do qual extraímos imediatamente as condições para se colocar componentes de bordo em superfícies sem alterar o grupo de homologia (Corolário 4.4.7).

Consideraremos algumas conseqüências diretas do Teorema 4.4.6, como as condições de igualdades entre a soma direta dos grupos de homologia de duas superfícies e o grupo de homologia da superfície resultante da soma conexa destas (Teorema 4.4.8 e Corolário 4.4.9); uma outra forma de obter o posto da matriz $\mathfrak{P}_\Omega$, através das matrizes associadas às partes sem e com bordos do polígono de n-lados de Ω (Proposição 4.4.10) é mostrar que as representações poligonais na formas mínima e normal de Massey representam superfícies de uma mesma classe de homeomorfismos.

4.4.1 Primeiro grupo de homologia de uma superfície

Consideramos $\mathfrak{T}$ como sendo uma diagrama triangular central sobre uma superfície Ω. Já que Ω e $\mathfrak{T}$ se confundem, pois $\Omega = \mathfrak{T}$, então $H_1(\Omega)$ ou $H_1(\mathfrak{T})$ são formas distintas de indicar o primeiro grupo de homologia de Ω.

O cálculo do primeiro grupo de homologia de uma superfície Ω, pelo método do complexo simplicial orientado descrito em [12], consiste basicamente em identificar duas invariantes: a dimensão n do espaço solução do sistema $\mathfrak{P}_\Omega$ formado pelas substituições das relações E_2 em E_3 e a identificação dos coeficientes de torção.

O procedimento para manipular uma presentação de um grupo não é diferente do tratamento dado aos sistemas lineares. O método descrito por Giblin [12] está fundamentado no seguinte teorema, o qual será apresentado sem demonstração (para ver uma discussão completa, veja por exemplo, Hartley e Hawkes [15], Capítulos 7 e 10, Cairns [3], pp. 221-230).

Teorema 4.4.1 *Seja F um grupo abeliano livre finitamente gerado e B um subgrupo de F. Então F/B tem uma presentação da forma*

$$\left\langle x^1, x^2, \cdots, x^n;\ \delta_1 x^1 = 0, \delta_2 x^2 = 0, \cdots, \delta_k x^k = 0 \right\rangle$$

onde $\delta_1, \cdots, \delta_k$ são inteiros > 1 e $\delta_1 | \delta_2, \delta_2 | \delta_3, \cdots, \delta_{k-1} | \delta_k$, onde $k \leq n$. Se não existem

relações dizemos que $k = 0$). O inteiro $n - k$ e o δ_i são determinados pela classe de isomorfismo de F/B.

Como conseqüência do Teorema 4.4.1, temos o seguinte resultado.

Corolário 4.4.2

$$F/B \cong \mathbb{Z}_{\delta_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\delta k} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$$

onde existem $n - k$ $\mathbb{Z}$'s, isto é, o posto $F/B = n - k$.

Em particular, a presentação que identificará o grupo isomorfo ao primeiro grupo de homologia da superfícies Ω, calculado sobre um diagrama triangular central $\mathfrak{T}$ com árvore maximal $\mathfrak{X}$ é da forma:

$$\left\langle \phi^1, \phi^2, \phi^3, \cdots, \phi^{n-2}, \phi^{n-1}, \phi^n \,;\; f_1\left(\phi^1, \cdots, \phi^n\right) = \cdots = f_s\left(\phi^1, \cdots, \phi^n\right) = 0 \right\rangle, \qquad (4.1)$$

onde $\phi^1, \phi^2, \cdots, \phi^n$ são variáveis livres de $\mathfrak{P}_\Omega$ e $f_i\left(\phi^1, \cdots, \phi^n\right)$, $i = 1, \cdots, s$, é uma combinação linear de $\phi^1, \phi^2, \cdots, \phi^n$, isto é:

$$f_i\left(\phi^1, \phi^2, \cdots, \phi^n\right) = a_1\phi^1 + a_2\phi^2 + \cdots + a_n\phi^n,\ a_i \in \mathbb{Z}. \qquad (4.2)$$

Denominando por E_i^Ω os sistemas formados pelas relações do tipo $E_i, i = 1, 2$, e por $\mathfrak{P}_\Omega$ a presentação de $H_1(\Omega)$ após as substituições de E_2 em E_3, temos, de acordo com os complexos da Figura 4.6, os correspondentes sistemas de relações triviais que compõem a presentação dos respectivos grupos

De fato, a estratégia no cálculo de $H_1(\Omega)$ é simplificar ao máximo as relações triviais de bordos dos 2-simplexos. No sistema $\mathfrak{P}_\Omega$ já foram feitas todas as substituições das variáveis de E_2, restando somente as substituições das variáveis livres. Como não há mais nada para se fazer, esta deverá ser a presentação final do grupo $H_1(\Omega)$. É claro que nas substituições por variáveis livres as expressões finais só poderão ser combinações lineares dessas.

Para a obtenção do primeiro grupo de homologia de uma superfície, iremos fixar um diagrama triangular central $\mathfrak{T}$ sobre Ω, com árvore maximal $\mathfrak{X}$ que não passa por dois raios consecutivos de $\mathfrak{T}$ e cujos lados são rotulados como mostrado na Figura 4.6.

$$E_2^{2T}: \begin{cases} z^1 + z^{10} = 0 \\ z^4 + z^{16} = 0 \end{cases},\quad E_2^{4P}: \begin{cases} z^1 + z^{10} = 0 \\ z^4 - z^{16} = 0 \end{cases},\quad E_3^{S_3}: \begin{cases} z^7 + z^{20} - z^{19} = 0 \end{cases},\quad \mathfrak{P}_{S_3}: \begin{cases} -z^5 + z^7 + z^8 = 0 \end{cases}$$

$$E_2^{S_3}: \begin{cases} z^5 + z^{18} = 0 \\ z^6 - z^{18} = 0 \\ z^5 - z^{19} = 0 \\ z^8 - z^{20} = 0 \\ z^7 - z^{21} = 0 \\ z^9 - z^{21} = 0 \end{cases}, E_2^{2T_3} = E_2^{4P_3}: \begin{cases} z^1 + z^{10} = 0 \\ z^6 - z^{18} = 0 \\ z^5 - z^{19} = 0 \\ z^8 - z^{20} = 0 \\ z^7 - z^{21} = 0 \\ z^9 - z^{21} = 0 \end{cases},\quad \mathfrak{P}_{4P}: \begin{cases} z^2 + z^{11} + z^1 = 0 \\ z^1 - z^{12} + z^{11} = 0 \\ z^2 - z^{13} + z^{12} = 0 \\ z^3 + z^{14} - z^{13} = 0 \\ z^4 + z^{15} - z^{14} = 0 \\ z^3 - z^4 + z^{15} = 0 \end{cases},\quad \mathfrak{P}_{2T}: \begin{cases} z^2 + z^{11} + z^1 = 0 \\ z^1 - z^{12} + z^{11} = 0 \\ z^2 - z^{13} + z^{12} = 0 \\ z^3 + z^{14} - z^{13} = 0 \\ z^4 + z^{15} - z^{14} = 0 \\ z^3 + z^4 + z^{15} = 0 \end{cases}$$

$$E_3^{2T_3}: \begin{cases} z^2 + z^{11} - z^{10} = 0 \\ z^1 - z^{12} + z^{11} = 0 \\ z^2 - z^{13} + z^{12} = 0 \\ z^3 + z^{14} - z^{13} = 0 \\ z^4 + z^{15} - z^{14} = 0 \\ z^3 - z^{16} + z^{15} = 0 \\ z^4 - z^{17} + z^{16} = 0 \\ z^5 + z^{18} - z^{17} = 0 \\ z^7 - z^{20} + z^{19} = 0 \end{cases}, \mathfrak{P}_{2T_3}: \begin{cases} z^2 + z^{11} + z^1 = 0 \\ z^1 - z^{12} + z^{11} = 0 \\ z^2 - z^{13} + z^{12} = 0 \\ z^3 + z^{14} - z^{13} = 0 \\ z^4 + z^{15} - z^{14} = 0 \\ z^3 - z^{16} + z^{15} = 0 \\ z^4 - z^{17} + z^{16} = 0 \\ z^5 + z^6 - z^{17} = 0 \\ z^7 + z^8 - z^5 = 0 \end{cases}, E_3^{4P_3}: \begin{cases} z^1 + z^{11} - z^{10} = 0 \\ z^2 + z^{12} - z^{11} = 0 \\ z^2 + z^{13} - z^{12} = 0 \\ z^3 + z^{14} - z^{13} = 0 \\ z^3 + z^{15} - z^{14} = 0 \\ z^4 + z^{16} - z^{15} = 0 \\ z^4 + z^{17} - z^{16} = 0 \\ z^5 + z^{18} - z^{17} = 0 \\ z^7 + z^{20} - z^{19} = 0 \end{cases},\quad \mathfrak{P}_{4P_3}: \begin{cases} z^1 + z^{11} - z^1 = 0 \\ z^2 + z^{12} - z^{11} = 0 \\ z^2 + z^{13} - z^{12} = 0 \\ z^3 + z^{14} - z^{13} = 0 \\ z^3 + z^{15} - z^{14} = 0 \\ z^4 + z^{16} - z^{15} = 0 \\ z^4 + z^{17} - z^{16} = 0 \\ z^5 + z^6 - z^{17} = 0 \\ z^7 + z^8 - z^5 = 0. \end{cases}$$

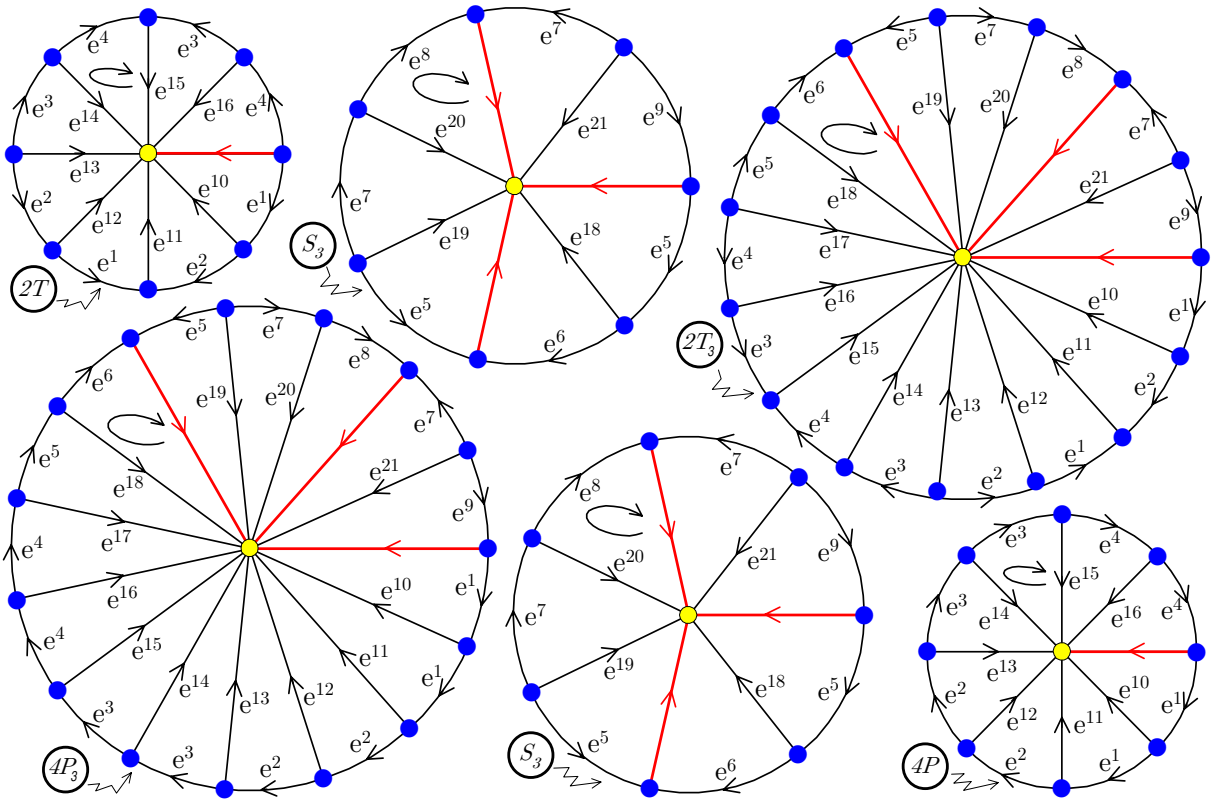

Figura 4.6: Diagramas triangulares centrais sobre $2T, S_3, 2T_3, 4P_3$ e $4P$

Note que cada diagrama triangular central da Figura 4.6 pode ser expandido, introduzindo-se superfícies do mesmo tipo ou componentes de bordo, sem alterar a forma orientada original e o tipo de árvore maximal. Considerando-se que os diagramas triangulares centrais sobre as superfícies mT, mP, S_r, mT_r e mP_s são triangulações do tipo mostrado na Figura 4.6, deduzimos que as matrizes na forma escalonada, relativas às presentações do primeiro grupo de homologia da cada superfície, são como nas Tabelas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5. Concluímos diretamente dessas matrizes a seguinte proposição.

Proposição 4.4.3 *A dimensão $d_{\mathfrak{P}_\Omega}$ do espaço solução do sistema associado à matriz $\mathfrak{P}_\Omega$ é*

$$d_{_{mT}} = 2m,\ d_{\mathfrak{P}_{mP}} = m-1,\ d_{\mathfrak{P}_{S_r}} = r-1,\ d_{\mathfrak{P}_{mT_r}} = 2m+r-1,\ d_{\mathfrak{P}_{mP_r}} = m+r-1.$$

Demonstração. Como $d_{\mathfrak{P}_\Omega} = \operatorname{var}\mathfrak{P}_\Omega - \operatorname{posto}\mathfrak{P}_\Omega$, segue da Proposição 4.3.10 e das $M(\Omega)$'s das Tabelas 4.1 a 4.5 que:

$$\begin{aligned} d_{\mathfrak{P}_{mT}} &= 6m-3-(4m-3) = 2m, \quad d_{\mathfrak{P}_{mP}} = 3m-3-(2m-2) = m-1, \\ d_{\mathfrak{P}_{mT_r}} &= 6m+2r-3-(4m+r-2)=2m+r-1,\ d_{\mathfrak{P}_{S_r}} = 2r-3-(r-2) = r-1, \\ d_{\mathfrak{P}_{mP_r}} &= 3m+2r-3-(2m+r-2) = 2m+r-1. \end{aligned}$$

■

No conjunto das variáveis livres dos sistemas $\mathfrak{P}_\Omega$, algumas variáveis possuem coeficientes ± 2 e outras não. Esta propriedade identifica o coeficiente de torção do primeiro

	1	3	4	5	6	7	8	9	10	⋯	2r-9	2r-8	2r-7	2r-6	2r-5	2r-4	2r-3	2r-2
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	-1	-1	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	-1	-1	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	-1	0	1	1	0	0
r-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	-1	0	1	1

Tabela 4.1: Matriz $M(S_r)$ da presentação $\mathfrak{P}_{S_r}$ de $H_1(S_r)$

	3m-2	3m-3	3m-4	⋯	m+5	m+4	m+3	m+3	m+2	m	m-1	⋯	5	4	3	2	1
1	1	0	0	⋯	0	0	0	0	0	-2	0	⋯	0	0	0	0	0
2	0	1	0	⋯	0	0	0	0	0	-2	-1	⋯	0	0	0	0	0
3	0	0	1	⋯	0	0	0	0	0	-2	-2	⋯	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2m-7	0	0	0	⋯	1	0	0	0	0	-2	2	⋯	2	0	0	0	0
2m-6	0	0	0	⋯	0	1	0	0	0	-2	-2	⋯	-2	-1	0	0	0
2m-5	0	0	0	⋯	0	0	1	0	0	-2	-2	⋯	-2	-2	0	0	0
2m-4	0	0	0	⋯	0	0	0	1	0	-2	-2	⋯	-2	-2	-1	0	0
2m-3	0	0	0	⋯	0	0	0	0	1	-2	-2	⋯	-2	-2	-2	0	0
2m-2	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	2	2	⋯	2	2	2	2	2

Tabela 4.2: Matriz $M(mP)$ da presentação $\mathfrak{P}_{mP}$ de $H_1(mP)$

grupo de homologia de Ω. Se escrevermos o conjunto solução do sistema associado $\mathfrak{P}_\Omega$ em função das variáveis livres chegaremos a seguinte conclusão.

Proposição 4.4.4 *Seja $\mathfrak{V}_\Omega$ o conjunto solução do sistema homogêneo $\mathfrak{P}_\Omega$. Então todos os coeficientes das variáveis livres de $\mathfrak{V}_\Omega$ são unitários se $\Omega \equiv mT_r$ e, se $\Omega \equiv mP_r$, existem exatamente m variáveis livres com coeficientes ± 2 em pelo menos uma das coordenadas de $\mathfrak{V}_\Omega$.*

Demonstração. Basta resolver os sistemas associados às matrizes $M(\Omega)$'s das Tabelas 4.1 a 4.5. A afirmação referente à parte orientada segue das matrizes $M(mT)$, $M(mT_r)$ e $M(S_r)$. A matriz $M(mP)$ nos fornece a relação $z^{3m-2} = -2z^m - 2z^{m-1} - \cdots - 2z^3 - 2z^2 - 2z^1$, enquanto em $M(mP_r)$, $z^{m+2} = -z^{m+1} - z^m - 2z^m - 2z^{m-1} - \cdots - 2z^3 - 2z^2 - 2z^1$, o que justifica a parte não-orientada. ∎

As superfícies não-orientadas são caracterizadas pelo coeficiente de torção 2. A ausência do coeficiente de torção, ou relações com coeficientes ± 1 em $\mathfrak{P}_\Omega$, identifica as superfícies orientadas. Das afirmações acima, concluímos que a presentação do primeiro grupo de homologia de uma superfície Ω é da forma discriminada pelo lema abaixo.

	1	2	3	4	⋯	2m-1	2m	2m+1	2m+2	2m+3	2m+4	2m+5	2m+6	2m+7	2m+8	⋯	4m-3	4m-2	4m-1	4m	4m+3	4m+4	4m+5	4m+6	4m+7	4m+8	⋯	6m+2r-8	6m+2r-7	6m+2r-6	6m+2r-5	6m+2r-4	6m+2r-3	6m+2r-2	6m+2r-1
1	1	1	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2m-1	0	0	0	0	⋯	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	-1	1	0	0	0	0	0	0
2m	0	0	0	0	⋯	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	-1	1	0	0	0	0	0
2m+1	0	0	0	0	⋯	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	-1
2m+2	0	0	0	0	⋯	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	-1
2m+3	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	1	0	-1	-1	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0
2m+4	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	-1	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2m+r-1	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	1	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0
2m+r	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0
2m+r+1	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4m+r-4	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	1	0	0	0	0
4m+r-3	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	1	-1	1	0
4m+r-2	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	-1

Tabela 4.3: Matriz $M(mT)$ da presentação $\mathfrak{P}_{mT}$ de $H_1(mT)$

	1	2	3	4	⋯	2m-1	2m	2m+1	2m+2	2m+3	2m+4	2m+5	2m+6	2m+7	2m+8	⋯	4m-3	4m-2	4m-1	4m	4m+3	4m+4	4m+5	4m+6	4m+7	4m+8	⋯	6m+2r-8	6m+2r -7	6m+2r -6	6m+2r-5	6m+2r-4	6m+2r-3	6m+2r-2	6m+2r-1
1	1	1	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2m-1	0	0	0	0	⋯	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	-1	1	0	0	0	0	0	0
2m	0	0	0	0	⋯	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	-1	1	0	0	0	0	0
2m+1	0	0	0	0	⋯	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	-1
2m+2	0	0	0	0	⋯	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	-1
2m+3	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	1	0	-1	-1	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0
2m+4	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	-1	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2m+r-1	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	1	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0
2m+r	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0
2m+r+1	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4m+r-4	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	1	0	0	0	0
4m+r-3	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	1	-1	1	0
4m+r-2	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	-1

Tabela 4.4: Matriz $M(mT_r)$ da presentação $\mathfrak{P}_{mT_r}$ de $H_1(mT_r)$

	3m+2r-1	3m+2r-2	3m+2r-3	3m+2r-4	3m+2r-5	...	3m+6	3m+5	3m+4	3m+3	3m	3m-1	3m-2	3m-3	3m-4	3m-5	...	m+4	m+3	m+2	m+1	m	m-1	m-2	...	4	3	2	1
1	1	-1	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	1	0	0	⋯	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	-1	-1	-1	0	0	⋯	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	-1	-1	-2	0	0	⋯	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	-1	-1	-2	-1	0	⋯	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	-1	-1	-2	-2	0	⋯	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	-1	-1	-2	-2	-1	⋯	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮	⋮
2m-4	0	0	0	0	0	⋯	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	-1	-1	-2	-2	-2	⋯	-2	-2	0	0
2m-3	0	0	0	0	0	⋯	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	-1	-1	-2	-2	-2	⋯	-2	-2	0	0
2m-2	0	0	0	0	0	⋯	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	-1	-1	-2	-2	-2	⋯	-2	-2	-1	0
2m-1	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	-1	-1	-2	-2	-2	⋯	-2	-2	-2	0
2m	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	1	1	0	-1	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0
2m+1	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	⋯	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮	⋮
2m+r-3	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	1	1	0	-1	0	0	0	⋯	0	0	0	0
2m+r-2	0	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	0	0	1	1	2	2	2	⋯	2	2	2	2

Tabela 4.5: Matriz $M(mP_r)$ da presentação $\mathfrak{P}_{mP_r}$ de $H_1(mP_r)$

Lema 4.4.5 *A presentação do primeiro grupo de homologia de uma superfície é:*

$$\begin{aligned} S_r &: \left\langle \phi^1, \phi^2, \phi^3, \cdots, \phi^{r-1} \right\rangle \\ mT &: \left\langle \phi^1, \phi^2, \phi^3, \cdots, \phi^{2m} \right\rangle \\ mT_r &: \left\langle \phi^1, \phi^2, \phi^3, \cdots, \phi^{2m+r-1} \right\rangle \\ mP &: \left\langle \phi^1, \phi^2, \phi^3, \cdots, \phi^{m-1};\ 2\phi^1 = 0,\ \phi^1 = z^1 \right\rangle \\ mP_r &: \left\langle \phi^1, \phi^2, \phi^3, \cdots, \phi^{m+r-1} \right\rangle. \end{aligned}$$

onde $\phi^1, \phi^2, \phi^3, \cdots, \phi^s \in VL(\mathfrak{P}_\Omega)$*, conjunto das variáveis livres do sistema* $\mathfrak{P}_\Omega$*.*

Numa superfície não-orientada mP_r, existem relações que caracterizam o coeficiente de torção 2, por exemplo: $2z^1 = 2z^2 = \cdots = 2z^m = 0$. Porém, podemos verificar direto das matrizes $M(mP)$ e $M(mP_r)$ que este é o maior coeficiente existente em $\mathfrak{V}_{mP}$ e $\mathfrak{V}_{mP_r}$; portanto, qualquer uma dessas relações poderia ser escolhida para a presentação de $H_1(mP_r)$. Com isso, concluímos que o primeiro grupo de homologia de uma superfície é da forma expressada pelo seguinte resultado clássico.

Teorema 4.4.6 *O primeiro grupo de homologia de uma superfície* Ω *é dado por:*

$$H_1(\Omega) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{2m}, \ \textit{se } \Omega \equiv mT \\ \mathbb{Z}^{2m+r-1}, \ \textit{se } \Omega \equiv mT_r \\ \mathbb{Z}^{r-1}, \ \textit{se } \Omega \equiv S_r; \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{m-1}, \ \textit{se } \Omega \equiv mP; \\ \mathbb{Z}^{m+r-1}, \ \textit{se } \Omega \equiv mP_r \end{cases}$$

onde $\mathbb{Z}^m$ *denota a soma direta de* $\mathbb{Z}$*'s,* m *vezes.*

Além dos coeficientes de torção distintos, as superfícies orientadas e não-orientadas diferem ainda no seguinte comportamento: a introdução de uma componente de bordo numa superfície sem bordo Ω altera o primeiro grupo de homologia de Ω se, e somente se, Ω é não-orientada.

Corolário 4.4.7 *Seja Ω uma superfície compacta sem bordo, então, $H_1(\Omega) \equiv H_1(\Omega_1)$ se, e somente se, $\Omega \equiv mT$.*

4.4.2 Conseqüências do Teorema 4.4.6

Conhecidos os grupos de homologias de uma superfície, tornam-se simples as conclusões apresentadas nesta seção, as quais não foram identificados os seus autores.

Seria desejável que a soma direta dos grupos de homologia de duas superfícies Ω_1 e Ω_2 fosse igual ao primeiro grupo de homologia de Ω, superfície igual a soma conexa das superfícies Ω_1 e Ω_2. Em alguns casos ocorre a igualdade e em outros não.

Considerando-se todas as possibilidades para Ω_1 e Ω_2, a igualdade $mTP = (2m+1)P$ do Lema 3.2.7 e do Teorema 4.4.6:

1) $H_1((mP)(nP)) \cong H_1((m+n)P) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{m+n-1} \neq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{m+n-2} \cong (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{m-1}) \oplus (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{n-1}) \cong H_1(mP) \oplus H_1(nP)$;
2) $H_1((mP_r)(nP_s)) \cong H_1((m+n)P_{r+s}) \cong \mathbb{Z}^{m+n+r+s-1} \neq \mathbb{Z}^{m+n+r+s-2} \cong \mathbb{Z}^{m+r-1} \oplus \mathbb{Z}^{n+s-1} \cong H_1(mP_r) \oplus H_1(nP_s)$;
3) $H_1((mT_r)(nT_s)) \cong H_1((m+n)T_{r+s}) \cong \mathbb{Z}^{2(m+n)+r+s-1} \cong \mathbb{Z}^{2m+r-1} \oplus \mathbb{Z}^{2n+s} \neq \mathbb{Z}^{2m+r-1} \oplus \mathbb{Z}^{2n+s-1} \cong H_1(mT_r) \oplus H_1(nT)$;
4) $H_1((mT_r)(nP_s)) \cong H_1((2m+n)P_{r+s}) \cong \mathbb{Z}^{2m+n+r+s\text{-}1} \neq \mathbb{Z}^{2m+r\text{-}1} \oplus \mathbb{Z}^{n+s\text{-}1} \cong H_1(mT_r) \oplus H_1(nP_s)$.
5) $H_1((mT)(nT)) \cong H_1((m+n)T) \cong \mathbb{Z}^{2(m+n)} \cong \mathbb{Z}^{2m} \oplus \mathbb{Z}^{2n} \cong H_1(mT) \oplus H_1(nT)$;
6) $H_1((mT_r)(nT)) \cong H_1((m+n)T_r) \cong \mathbb{Z}^{2(m+n)+r-1} \cong \mathbb{Z}^{2m+r-1} \oplus \mathbb{Z}^{2n} \cong H_1(mT_r) \oplus H_1(nT)$;
7) $H_1((mT_r)(nP)) \cong H_1((2m+n)P_r) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{2m+n+r-2} \cong (\mathbb{Z}^{2m+r-1}) \oplus (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{n-1}) \cong H_1(mT_r) \oplus H_1(nP)$;
8) $H_1((mT)(nP_r)) \cong H_1((2m+n)P_r) \cong \mathbb{Z}^{2m+n+r-1} \cong (\mathbb{Z}^{2m}) \oplus (\mathbb{Z}^{n+r-1}) \cong H_1(mT) \oplus H_1(nP_r)$;

Das oito relações acima, deduzimos que a igualdade entre soma direta dos grupos de homologia de duas superfícies e o grupo de homologia da superfície que é soma conexa dessas, só ocorre segundo as condições estabelecidas no próximo teorema.

Teorema 4.4.8 *Seja Ω a soma conexa de duas superfícies Ω_1 e Ω_2, com $\Omega_1, \Omega_2 \neq S_r$. Então $H_1(\Omega) = H_1(\Omega_1) \oplus H_1(\Omega_2)$ se, e somente se,*

(i) ambas são superfícies compactas orientadas sem bordo, ou;

(ii) apenas uma delas tem bordo e pelo menos uma tem que ser orientada.

Corolário 4.4.9 *Se Ω_r é uma superfície compacta com bordo então $H_1(\Omega_r) \cong H_1(\Omega) \oplus H_1(S_r)$ se, e somente se, $\Omega \equiv mT$, $m \geq 0$ $(0T \equiv 0P \equiv S)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.4.6, para todo inteiro $m \geq 0$, temos que:

$$\begin{aligned} H_1(mT) \oplus H_1(S_r) &\cong \mathbb{Z}^{2m} \oplus \mathbb{Z}^{r-1} \cong \mathbb{Z}^{2m+r-1} \cong H_1(mT_r), \\ H_1(S_r) \oplus H_1(S_t) &\cong \mathbb{Z}^{r-1} \oplus \mathbb{Z}^{t-1} \cong \mathbb{Z}^{t+r-2} \neq H_1(S_r S_t), \\ H_1(mP) \oplus H_1(S_r) &\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{m-1} \oplus \mathbb{Z}^{r-1} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{m+r-2} \neq H_1(mP_r). \end{aligned}$$ ■

Quando Ω é uma superfície compacta com bordo e o primeiro grupo de homologia é calculado sobre o diagrama triangular central $\mathfrak{T}$ com árvore maximal $\mathfrak{X}$ não contendo dois raios consecutivos, então para determinar o posto da matriz M_Ω, dado importante no cálculo de $H_1(\Omega)$, podemos recorrer ainda à

Proposição 4.4.10 *Seja Ω uma superfície com bordo e suponha que $\omega(\Omega) = \omega_1\omega_2$ onde ω_1 é a forma normal da parte sem bordo de Ω e ω_2 a forma normal da parte com bordo de Ω. Se M_1 e M_2 são submatrizes de M_Ω correspondentes aos 2-simplexos que contém lados em ω_1 e ω_2, respectivamente, então:*

(i) $\operatorname{posto} M_\Omega = \operatorname{posto} M_1 + \operatorname{posto} M_2$;

(ii) se $\Omega \equiv mT_r$ então $\operatorname{posto} M_1 = \operatorname{posto} mT + 2$ e $\operatorname{posto} M_2 = \operatorname{posto} S_r + 1$;

(iii) se $\Omega \equiv mP_r$ então $\operatorname{posto} M_1 = \operatorname{posto} mP + 1$ e $\operatorname{posto} M_2 = \operatorname{posto} S_r + 1$.

Demonstração. Considere $\Omega \equiv mT_r$ ou $\Omega \equiv mP_r$, $r \geq 1$ e os diagramas triangulares centrais sobre mT_r e mP_r como mostra a Figura 4.7. Se $\Omega \equiv mT_r$ então M_1 e M_2 correspondem às partes mT e S_r de mT_r, respectivamente. Caso $\Omega \equiv mP_r$ então M_1 e M_2 correspondem às partes mP e S_r de mP_r, respectivamente. Assim, os sistemas associados a M_1 e M_2 possuem apenas uma variável em comum, correspondente ao raio $e^{6m+2r-1}$ que faz fronteira entre o fim de ω_1 e o início de ω_2 associado ao 1-ciclo $z^{6m+2r-1}$ da triangulação sobre mT_r (primeiro diagrama triangular central da Figura 4.7) ou, no caso de mP_r, a variável $z^{3m+2r-1}$ associada ao raio $e^{3m+2r-1}$ (diagrama triangular central à direita da Figura 4.7). Como nenhuma linha de M_2 é combinação linear de linhas de M_1 e vice versa, pois essas matrizes têm apenas uma variável em comum, então a soma dos postos de M_1 e M_2 é igual ao posto de M, o que mostra (i). Por outro lado, no diagrama triangular central sobre mT_r, primeiro da Figura 4.7, o bordo do 2-simplexo t^{4m} gera uma relação a mais do tipo E_3 na parte mT de mT_r. Isto significa que o sistema associado a M_1 tem uma variável e uma equação a mais do que o sistema E_{mT}, no mais eles coincidem. Além disso, o bordo do 2-simplexo t^{4m+1} gera uma relação do tipo E_3 na parte com bordo S_r de mT_r, enquanto em E_{S_r}, gera apenas uma relação do tipo E_2. Isto representa uma equação e uma variável a mais do que no sistema E_{S_r}, no mais ocorre coincidência. Sendo assim, pela parte (i), deduzimos as igualdades em (ii). Com um raciocínio análogo mostra-se a parte (iii). ■

Aplicando o Lema 4.4.10 e Proposição 4.3.10 chegaremos às mesmas conclusões da Proposição 4.4.3. De fato, da Figura 4.7 concluímos que o sistema E_{mT_r} apresenta três variáveis diferentes dos sistemas E_{mT} e E_{S_r}: $z^{2m+2}, z^{6m+2r-2}$ e $z^{6m+2r-1}$. Em E_{mP_r} as variáveis diferentes de E_{mP} e E_{S_r} são $z^{m+2}, z^{3m+2r-2}$ e $z^{6m+2r-1}$. Pela Proposição 4.3.10 e matrizes $M(\Omega)$'s das Tabelas 4.1 a 4.5, resulta que

$$\begin{aligned} d_{E_{mT_r}} &= \operatorname{var} \mathfrak{P}_\Omega - \operatorname{posto} \mathfrak{P}_\Omega = \operatorname{var} E_{mT} + \operatorname{var} E_{S_r} + 1 - (\operatorname{posto} mT + 2 + \operatorname{posto} S_r + 1) \\ &= (6m-3) + (2r-3) + 3 - ((4m-3) + (r-2) + 3) = 2m + r - 1 \end{aligned}$$

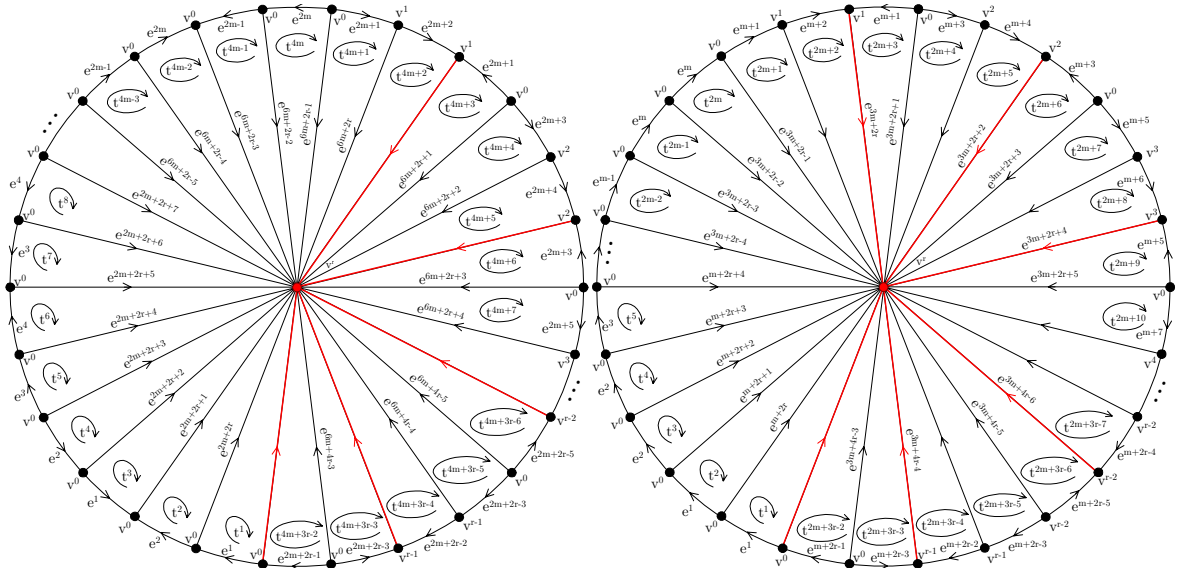

Figura 4.7: Diagramas triangulares centrais sobre mT_r e mP_r

e

$$\begin{aligned} d_{E_{mT_r}} &= \operatorname{var}\mathfrak{P}_\Omega - \operatorname{posto}\mathfrak{P}_\Omega = \operatorname{var}E_{mT} + \operatorname{var}E_{S_r} + 1 - (\operatorname{posto}mT + 2 + \operatorname{posto}S_r + 1) \\ &= (3m-3) + (2r-3) + 3 - ((2m-2) + (r-2) + 2) = m + r - 1. \end{aligned}$$

Resultados estes que coincidem com o número de variáveis livres de $\mathfrak{P}_{mT_r}$ e $\mathfrak{P}_{mP_r}$ da Proposição 4.4.3; portanto, podem ser usados para determinar o primeiro grupo de homologia de uma superfície com bordo.

Mostraremos, a seguir, que as formas mínima e normal de uma palavra correspondem a superfícies de uma mesma classe de homeomorfismo.

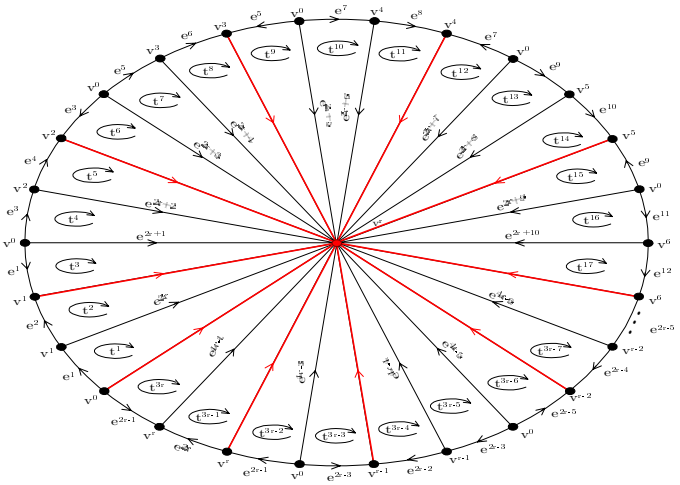

Figura 4.8: Diagrama triangular central sobre S_r associado a forma normal de Massey

n	Ω	$H_1(\Omega)$	n	Ω	$H_1(\Omega)$	n	Ω	$H_1(\Omega)$	n	Ω	$H_1(\Omega)$
1	S_1	$\{0\}$	7	S_3	$\mathbb{Z}^2$	10	$3P_2$	$\mathbb{Z}^4$	14	$2P_4$	$\mathbb{Z}^5$
2	S	$\{0\}$	7	$3P_1$	$\mathbb{Z}^3$	12	$3T$	$\mathbb{Z}^6$	14	$5P_2$	$\mathbb{Z}^6$
2	P	$\mathbb{Z}_2$	8	$2T$	$\mathbb{Z}^4$	12	$2T_2$	$\mathbb{Z}^5$	14	$7P$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^6$
3	P_1	$\mathbb{Z}$	8	T_2	$\mathbb{Z}^3$	12	$6P$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^5$	15	$2T_3$	$\mathbb{Z}^6$
4	T	$\mathbb{Z}^2$	8	$4P$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^3$	12	P_4	$\mathbb{Z}^4$	15	P_5	$\mathbb{Z}^5$
4	S_2	$\mathbb{Z}$	8	$2P_2$	$\mathbb{Z}^3$	12	$4P_2$	$\mathbb{Z}^5$	15	$4P_3$	$\mathbb{Z}^6$
4	$2P$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$	9	$2T_1$	$\mathbb{Z}^4$	13	S_5	$\mathbb{Z}^4$	15	$7P_1$	$\mathbb{Z}^7$
5	T_1	$\mathbb{Z}^2$	9	P_3	$\mathbb{Z}^3$	13	$3T_1$	$\mathbb{Z}^6$	16	$4T$	$\mathbb{Z}^8$
5	$2P_1$	$\mathbb{Z}^2$	9	$4P_1$	$\mathbb{Z}^4$	13	$3P_3$	$\mathbb{Z}^5$	16	S_6	$\mathbb{Z}^5$
6	$3P$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^2$	10	S_4	$\mathbb{Z}^3$	13	$6P_1$	$\mathbb{Z}^6$	16	$3T_2$	$\mathbb{Z}^7$
6	P_2	$\mathbb{Z}^2$	10	$5P$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^4$	14	T_4	$\mathbb{Z}^5$	16	$3P_4$	$\mathbb{Z}^6$

Tabela 4.6: Primeiro grupo de homologia de uma superfície

Proposição 4.4.11 *Seja ω a forma mínima de uma superfície compacta sem bordo. Se Ω e Ω' são superfícies associadas às palavras*

$$\omega(\Omega) = \omega_0 c_1 d_1 c_1^{-1} c_2 d_2 c_2^{-1} \cdots c_{r-1} d_{r-1} c_{r-1}^{-1} d_r$$

e

$$\omega(\Omega') = \omega_0 c_1 d_1 c_1^{-1} c_2 d_2 c_2^{-1} \cdots c_{r-1} d_{r-1} c_{r-1}^{-1} c_r d_r c_r^{-1},$$

então $\Omega' \equiv \Omega$.

Demonstração. Como Ω e Ω' contém ω_0, então são superfícies com a mesma orientação e o mesmo grau de compacticidade. Como possuem o mesmo número de componentes de bordo, então são homeomorfas. Logo, basta analisarmos as partes com bordos. Consideremos o diagrama triangular central da Figura 4.8 sobre S_r, gerada por $\omega = e_1 e_2 e_1^{-1} e_3 e_4 e_3^{-1} \cdots e_{2r-3} e_{2r-2} e_{2r-3}^{-1} e_{2r-1} e_{2r} e_{2r-1}^{-1}$.

Substituindo as relações E_2 em E_3, obtemos:

$$\overline{E}_3 : \begin{cases} \partial_2(t^4) : -z^1 + z^3 + z^4 = 0, \\ \partial_2(t^7) : -z^3 + z^5 + z^6 = 0, \\ \partial_2(t^{10}) : -z^5 + z^7 + z^8 = 0, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \partial_2(t^{3r-8}) : z^{2r-7} + z^{2r-5} - z^{2r-4} = 0, \\ \partial_2(t^{3r-5}) : z^{2r-5} + z^{2r-3} - z^{2r-2} = 0. \end{cases}$$

Mas $\overline{E}_3$ é igual a $\mathfrak{P}_{S_3}$, sistema gerado por $\omega = e_1 e_2 e_1^{-1} e_3 e_4 e_3^{-1} \cdots e_{2r-3} e_{2r-2} e_{2r-3}^{-1} e_{2r}$. Logo, $H_1(\Omega) = H_1(S_r)$. ∎

Segundo o Teorema 4.4.6, o primeiro grupo de homologia das superfícies geradas por polígonos com até 16 lados é mostrada na Tabela 4.6.

Capítulo 5

Mergulhos de Grafos Completos Biparticionados

Num processo de transmissão de sinais, chamamos a atenção para dois conjuntos: o conjunto de sinais que são usados para transmitir a informação e o conjunto de sinais que são recebidos no receptor. Estes conjuntos não são, necessariamente, iguais. Por exemplo, nos canais de apagamento o segundo conjunto tem mais elementos do que o primeiro.

Se o canal é ruidoso, a recepção de um sinal nem sempre é feita de modo único. As transições no canal indicam exatamente os possíveis sinais a serem recebidos no receptor dado que um determinado sinal foi enviado. Logo, quando o canal é discreto e sem memória o diagrama associado ao canal ou é um grafo completo biparticionado ou um subgrafo deste.

Um dos nossos objetivos é identificar o tipo de modelo proveniente do mergulho do grafo associado ao canal. E qual a importância de se saber os tipos de regiões sobre uma superfície de um mergulho do grafo? Sabemos que os conjuntos de sinais geometricamente uniformes (GU) são os preferidos tanto para o processo de codificação de canal quanto para modulações digitais. A identificação de conjuntos de sinais geometricamente uniformes no ambiente das superfícies não é fácil de ser realizada. Numa superfície, o conjunto de sinais GU corresponde aos complexos regulares, ou modelos sobre superfícies constituídos por regiões do mesmo tipo. Portanto, se desejamos encontrar conjuntos de sinais geometricamente uniformes sobre superfícies devemos identificar os complexos regulares.

Visando a identificação de complexos regulares sobre as superfícies compactas sem bordos, construiremos na Seção 5.1 alguns exemplos de modelos de mergulhos de grafos completos biparticionados, seguida de intruções sobre o processo de construção e da descrição desses modelos através de um sistema de rotações.

Na Seção 5.2 introduzimos a noção de mergulho de grafos em superfícies com bordos e identificamos alguns modelos de mergulhos de grafos sobre superfícies compactas orientadas com bordos, descrevendo as principais características e sistema de rotação associados.

Objetivando a identificação de complexos regulares gerados pelos mergulhos de um determinado grafo completo biparticionado, identificaremos, na Seção 5.3, o conjunto dos tipos de tesselações provenientes dos mergulhos de um grafo sobre superfícies compactas

orientadas e relacionamos, na Seção 5.4, todos os modelos de mergulhos do grafo completo biparticionado $K_{3,3}$ sobre superfícies orientadas.

5.1 Exemplos de Mergulhos de Grafos Completos Biparticionados

O nosso objetivo é construir o mergulho de um grafo completo biparticionado em uma superfície compacta, descrevê-lo na forma de um sistema de rotações e identificar os tipos de regiões provenientes deste mergulho. Com isso, estaremos fornecendo os elementos para a construção do mergulho do grafo sobre o modelo plano da superfície, bem como permitindo a identificação precisa dos tipos de regiões que compõem o mergulho. Conseqüentemente, estaremos estabelecendo os possíveis tipos de complexos regulares que poderão ser extraídos desse mergulho. Iremos considerar os mergulhos dos grafos completos biparticionados da forma $K_{n,n}$, para $2 \leq n \leq 7$.

5.1.1 Definições, característica e gênero do grafo completo biparticionado

O primeiro procedimento a ser utilizado quando do mergulho de um grafo em uma superfície é determinar o limitante superior da característica de Eüler da superfície [10]. Se não existir a restrição de que o mergulho seja de 2-células, este poderá ser realizado em todas as superfícies compactas orientadas com característica igual ou menor ao limitante da característica de Eüler, porém, quando o mergulho é de 2-células, sabemos de [32], que existe também um limitante inferior. Salvo referência em contrário, estaremos interessados nos mergulhos de 2-células, pois o número de superfícies para o mergulho do grafo é finito e é compatível com as condições de complexos regulares.

Nas construções dos mergulhos, levaremos em consideração as seguinte definições e resultados [10].

A **característica de Eüler** de uma superfície compacta Ω é o número inteiro $\chi(\Omega) = v - n + 1$, onde v é o número de vértices e n é o número de lados distintos do modelo plano de Ω.

Um **polígono** é um conjunto de pontos topologicamente equivalente a um disco plano com pelo menos dois vértices sobre a fronteira.

Um **modelo** sobre uma superfície compacta Ω é um mosaico de polígonos cobrindo o modelo espacial de Ω de tal maneira que cada polígono pode ser contraído num ponto sobre a superfície e

P_1) dois polígonos distintos encontram-se em vértices, ao longo de lados completos, ou nunca se encontram;

P_2) um polígono nunca se encontra consigo mesmo.

Um **complexo** é um modelo sobre uma superfície compacta Ω satisfazendo as seguintes condições: *a*) cada polígono têm pelo menos três lados; *b*) cada vértice encontra-se

pelo menos sobre três lados e c) dois polígonos distintos encontram-se em vértices simples, ou ao longo de lados simples incluindo os vértices associados, ou nunca se encontram.

Um **complexo regular** sobre uma superfície compacta Ω é um complexo no qual cada polígono tem o mesmo número de lados e cada vértice encontra-se sobre o mesmo número de lados.

Um **grafo** G sobre uma superfície Ω é um conjunto finito de pontos em Ω, chamado **vértices** de G, e um conjunto finito de linhas em Ω, chamado **lados** de G, ligando certos pares de vértices diferentes, de modo que um par distinto de vértices determina não mais que um lado.

Dizemos que o grafo G está **mergulhado** em Ω, quando os seus lados e vértices estão em Ω e os lados encontram-se apenas nos vértices.

Os grafos G_1 e G_2 são ditos **isomorfos** se os seus vértices podem ser colocados sob uma correspondência um-a-um de tal modo que um par de vértices em G_1 está ligado por um lado se, e somente se, o par correspondente de vértices em G_2 está ligado também por um lado.

Um **grafo completo biparticionado** sobre m e n vértices, denotado por $K_{m,n}$, é o grafo formado por dois conjuntos disjuntos com m e n vértices, onde cada vértice de um conjunto está ligado por um lado a todos os vértices do outro.

Seja G um grafo mergulhado numa superfície compacta orientável Ω. Seja $\gamma(G)$ o valor *máximo* de $\chi(\Omega)$ para todas as superfícies compactas orientáveis Ω na qual G pode ser mergulhado. O inteiro par $\gamma(G)$ é chamado a **característica** de G.

Seja G um mergulho numa superfície compacta orientável Ω. Chamamos este mergulho de **mergulho mínimo** de G (mínimo em relação ao gênero de Ω) se $\gamma(G) = \chi(\Omega)$. Também Ω é dita uma superfície **mínima** para G.

Um grafo pode ser mergulhado no plano se, e somente se, ele pode ser mergulhado na esfera S. Um grafo se diz **planar** quando $\gamma(G) = 2$.

Teorema 5.1.1 (Teorema de König) *Se o grafo conexo está mergulhado minimamente numa superfície compacta orientável, e se o grafo tem V vértices, E lados e o mergulho produz F faces, então*

$$V - E + F = \chi(\Omega). \tag{5.1}$$

Teorema 5.1.2 *[10]Para $m, n \geq 3$, a característica do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$ é dada por*

$$\gamma(K_{m,n}) = 2\left[(m + n - mn/2)/2\right]. \tag{5.2}$$

onde $[\alpha]$ denota o maior inteiro menor ou igual ao número real α.

Pelo Teorema de König e pelo Teorema 5.1.2 resulta que

$$2 - 2g(\Omega) = \chi(\Omega) = \gamma(K_{m,n}) \Rightarrow g(\Omega) = 1 - \left[(m + n - mn/2)/2\right],$$

portanto, o gênero da superfície compacta orientada Ω para o mergulho mínimo do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$, é:

$$g(K_{m,n}) = 1 - \left[(m + n - mn/2)/2\right]. \tag{5.3}$$

Seja G um grafo mergulhado numa superfície compacta não-orientável Ω. Seja $\beta(G)$ o valor *máximo* de $\chi(\Omega)$ para todas as superfícies compactas não-orientáveis Ω. O inteiro $\beta(G)$ é chamado a **característica** de G.

Seja G um mergulho numa superfície compacta não-orientável Ω. Chamamos este mergulho de **mergulho mínimo** de G (mínimo em relação ao gênero de Ω ou ao '*fator de conexidade*'[1] de Ω) se $\gamma(G) = \chi(\Omega)$. Ω é dita uma superfície **mínima** para G.

Um limitante inferior do gênero da superfície compacta não-orientada para o mergulho do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$, [35], é dado por

$$\beta(K_{m,n}) = [(m-2)(n-2)/2]. \tag{5.4}$$

Sabemos de [42] que um grafo G é chamado um **mergulho** numa variedade orientável fechada Ω, se a realização geométrica de G como 1-complexo é homeomorfa a um subespaço de Ω. As componentes do complemento de G em Ω são chamadas **regiões**. Uma região homeomorfa a um disco aberto é chamada **2-células**; se toda região é de 2-células, o mergulho é dito um **mergulho de 2-células**. Sabemos que se G é conexo, um mergulho mínimo deverá ser de 2-células, [42].

Existem vários métodos para descrever o mergulho de um grafo, porém, usaremos o método da **construção direta do sistema de rotação**, que associa cada mergulho de um grafo a um único sistema de rotações. O **sistema de rotação** de um grafo G descreve as conexões de cada vértice com os demais, adotando o sentido horário para tal descrição. Por exemplo, $P_1 = (12, 13, 14)$, para dizer que o vértice rotulado por 1 está ligado aos vértices 2, 3 e 4, nesta ordem e no sentido horário, tendo o lado $(1, 2)$ de G como referencial de partida.

5.1.2 Polígono orientado na forma natural

A dificuldade de construção de um mergulho mínimo de um grafo em uma superfície compacta, representada pelo polígono na forma mínima de mT, $m \geq 2$, leva-nos a estabelecer alguns critérios que minimizam a complexidade de tal construção.

Os mergulhos dos grafos $K_{5,5}$, $K_{6,6}$ e $K_{7,7}$ encontram-se em superfícies de gênero maior que 2. Não conseguimos obter um mergulho sobre o modelo plano do caso mais simples, que é a situação desejada para a identificação dos tipos de modelos. Para conseguir o mergulho desses grafos sobre a representação poligonal percorremos o caminho inverso do processo de realização da superfície.

> *Identificamos a superfície de gênero mínimo para o mergulho do grafo via igualdade* (5.2), *efetuamos o mergulho no modelo espacial da superfície, traçamos as curvas de homologia, efetuamos um corte sobre tais curvas e obtemos uma região conexa plana homeomorfa à forma poligonal da superfície.*

[1] Como toda superfície não-orientada Ω é homeomorfa à soma conexa de k planos projetivos, então o '*fator de conexidade*' de Ω será igual ao número inteiro k de planos projetivos se Ω é homeomorfa a soma conexa de k planos projetivos, isto é, $\Omega \equiv kP$. Assim, o gênero de Ω será igual a $k/2$ se k for par e igual $(k-1)/2$, se k for ímpar.

As Figuras 5.3, 5.5 e 5.7 são resultados deste processo. Verificamos que a forma poligonal resultante é diferente da forma normal, ela é como na próxima definição.

Definição 5.1.3 *Seja Ω a superfície compacta orientada para o mergulho do grafo G. Chamaremos de* ***forma natural*** *de Ω o polígono de $4m$-lados cuja orientação é dada pela palavra*

$$\widetilde{\omega}(\Omega) = a_1b_1a_1^{-1}a_2^{-1}a_3^{-1}\cdots a_m^{-1}b_m^{-1}a_mb_mb_{m-1}^{-1}a_{m-1}b_{m-1}\cdots a_3b_3b_2^{-1}a_2b_2b_1^{-1}.$$

A Figura 5.2 mostra o corte sobre as curvas de homologia do tri-toro com o mergulho mínimo do grafo $K_{5,5}$ e, na Figura 5.3, temos o modelo deste mergulho construído sobre o polígono $\widetilde{\omega}(3T) = a_1b_1a_1^{-1}a_2^{-1}a_3^{-1}b_3^{-1}a_3b_3b_2^{-1}a_2b_2b_1^{-1}$, forma natural do $3T$.

As Figuras 5.5 e 5.7 representam os mergulhos mínimos dos grafos completos biparticionados do $K_{6,6}$ e do $K_{7,7}$ sobre os polígonos nas formas naturais de $4T$ e $7T$, respectivamente, ou seja, sobre

$$\widetilde{\omega}(4T) = a_1b_1a_1^{-1}a_2^{-1}a_3^{-1}a_4^{-1}b_4^{-1}a_4b_4b_3^{-1}a_3b_3b_2^{-1}a_2b_2b_1^{-1},$$

e

$$\widetilde{\omega}(7T) = a_1b_1a_1^{-1}a_2^{-1}a_3^{-1}a_4^{-1}a_5^{-1}b_5^{-1}a_5b_5b_4^{-1}a_4b_4b_3^{-1}a_3b_3b_2^{-1}a_2b_2b_1^{-1}.$$

As operações definidas na Seção 3.2.7, mostram que a forma mínima representa uma superfície compacta orientada. É o que faz a

Proposição 5.1.4 *Seja Ω uma superfície compacta representada por uma palavra na forma natural $\widetilde{\omega}(mT)$, então Ω é homeomorfa a soma conexa de m toros.*

Demonstração. Se $m = 1$, nada temos a demonstrar. Se $m = 2$, aplicando as operações definidas em [10], obtemos

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega}(\Omega) &= a_1b_1a_1^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1}a_2b_2b_1^{-1} \equiv b_1a_1^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1}a_2b_2b_1^{-1}a_1\\ &\equiv b_1x_1^{-1}b_1^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1}a_2b_2x_1 \equiv x_1b_1x_1^{-1}b_1^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1}a_2b_2 \equiv 2T.\end{aligned}$$

Logo, $\Omega \equiv 2T$. Se $m = 3$ então

$$\begin{aligned}&\widetilde{\omega}(\Omega) = a_1b_1a_1^{-1}a_2^{-1}\left(a_3^{-1}b_3^{-1}a_3b_3\right)b_2^{-1}a_2b_2b_1^{-1} \equiv b_1a_1^{-1}a_2^{-1}\left(a_3^{-1}b_3^{-1}a_3b_3\right)b_2^{-1}a_2b_2b_1^{-1}a_1\\ &\equiv b_1x_1^{-1}b_1^{-1}a_2^{-1}\left(a_3^{-1}b_3^{-1}a_3b_3\right)b_2^{-1}a_2b_2x_1 \equiv \left(x_1b_1x_1^{-1}b_1^{-1}\right)a_2^{-1}\left(a_3^{-1}b_3^{-1}a_3b_3\right)b_2^{-1}a_2b_2\\ &\equiv (x_1b_1x_1^{-1}b_1^{-1})a_2^{-1}c_1c_1^{-1}(a_3^{-1}b_3^{-1}a_3b_3)b_2^{-1}a_2b_2 \equiv c_1^{-1}(a_3^{-1}b_3^{-1}a_3b_3)b_2^{-1}a_2b_2(x_1b_1x_1^{-1}b_1^{-1})a_2^{-1}c_1\\ &\equiv z_1^{-1}a_2b_2(x_1b_1x_1^{-1}b_1^{-1})a_2^{-1}(a_3^{-1}b_3^{-1}a_3b_3)b_2^{-1}z_1 \equiv z_1^{-1}a_2y_2(a_3^{-1}b_3^{-1}a_3b_3)(x_1b_1x_1^{-1}b_1^{-1})a_2^{-1}y_2^{-1}z_1\\ &\equiv z_2^{-1}a_2^{-1}y_2^{-1}a_2y_2(a_3^{-1}b_3^{-1}a_3b_3)(x_1b_1x_1^{-1}b_1^{-1})z_2 \equiv z_2z_2^{-1}(a_2^{-1}y_2^{-1}a_2y_2)(a_3^{-1}b_3^{-1}a_3b_3)(x_1b_1x_1^{-1}b_1^{-1})\\ &\equiv \left(a_2^{-1}y_2^{-1}a_2y_2\right)\left(a_3^{-1}b_3^{-1}a_3b_3\right)\left(x_1b_1x_1^{-1}b_1^{-1}\right) \equiv 3T.\end{aligned}$$

Logo $\Omega \equiv 3T$. A demonstração segue por indução. ∎

Dispomos agora da ferramenta necessária para obtermos alguns mergulhos de grafos sobre o modelo plano de uma superfície compacta orientada.

5.1.3 Mergulhos mínimos dos grafos $K_{2,2}$, $K_{3,3}$ e $K_{4,4}$

Por simplicidade, os mergulhos mostrados na Figura 5.1 foram construídos sem a utilização de um método específico. Primeiro, foram realizados sobre o modelo plano e depois sobre o modelo espacial da superfície. Conseguimos estes modelos colocando os vértices sobre o polígono e fazendo as conexões do grafo evitando a sobreposição de lados.

O mergulho de um grafo $K_{m,n}$ em uma superfície Ω será indicado por $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega$ e o modelo referente a este mergulho será representado por

$$\mathfrak{F}_{mn} \equiv \Omega(\alpha) = \cup_{i=1}^{\alpha} R^i, \tag{5.5a}$$

onde R^i é a i-ésima região do mergulho $K_{m,m} \hookrightarrow \Omega$. Escreveremos F_k^i ou R_k^i para indicar a i-ésima região com k-lados de $\mathfrak{F}_{mn}$.

Para descrever os tipos de regiões do mergulho $K_{m,m} \hookrightarrow \Omega$, escreveremos

$$K_{m,n} \hookrightarrow \Omega(\alpha) = a_1 R_4 + \cdots + a_t R_k,\ a_1 + \cdots + a_k = \alpha,$$

onde $a_t R_k$ significa a_t regiões de k lados. Assim, os mergulhos mostrados na Figura 5.1 têm a seguinte composição

$$K_{2,2} \hookrightarrow S(2) = 2R_4, \quad K_{3,3} \hookrightarrow T(3) = 2R_4 + R_8 \quad e \quad K_{4,4} \hookrightarrow T(8) = 8R_4.$$

É costume descrever uma região de um mergulho tomando-se um de seus vértices v_0 como referência, e descrevendo os demais vértices da região à medida em que eles são detectados quando percorremos o bordo da região no sentido horário até retornar ao vértice v_0. Por exemplo, $F_8^3 = 05210325430$ é a região de 10 lados do mergulho de $K_{3,3}$ da Figura 5.1.

A descrição de uma região é simples e precisa quando é realizada sobre o mergulho no modelo plano da superfície.

Para descrever uma região, escolha um de seus vértices v_0, caminhe sobre o bordo da região sempre no sentido horário até retornar ao v_0 e anote, a medida que for encontrado, a seqüência de vértices $v_0 v_1 v_2 \cdots v_l v_0$. Assim a região será do tipo

$$R_l = v_0 v_1 v_2 \cdots v_l v_0.$$

Lembramos que durante o processo, é possível passar por um vértice mais de uma vez, como também por um lado mais de uma vez e por regiões aparentemente isoladas do modelo do mergulho.

Para efeito de simplificação, não escrevemos o primeiro rótulo de cada par de uma rotação, pois ele é o mesmo do vértice. Assim o sistema de rotação do vértice 5 do mergulho do grafo $K_{4,4}$ será indicado por $P_5 = (4, 0, 6, 2)$, em vez de $P_5 = (54, 50, 56, 52)$. Com o mesmo propósito, não indicamos o último rótulo de uma região, já que é sempre igual ao primeiro rótulo. Desse modo, a região F_8^3 do mergulho do $K_{3,3}$ será indicada por $F_8^3 = 0521032543$.

Denotamos ainda por $\mathrm{Rot}\, G$ e $\mathrm{Reg}\, G$ o sistema de rotações e o conjunto das regiões do grafo G.

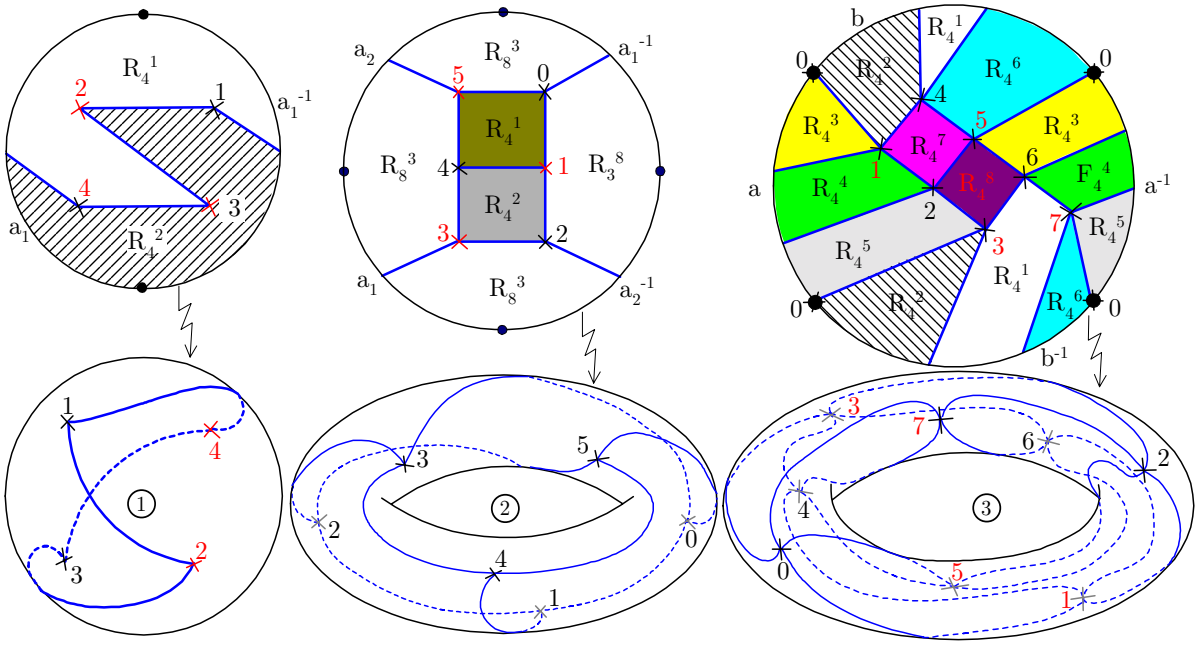

Figura 5.1: Mergulhos mínimos dos grafos completos biparticionados $K_{2,2}$, $K_{3,3}$ e $K_{4,4}$, respectivamente

O grafo completo biparticionado $K_{2,2}$ é o único exemplar da família $K_{n,n}$ que é um grafo planar e é o único que não forma um complexo, isto é, cada vértice está conectado a apenas dois lados.

Os sistema de rotação e as regiões formadas em cada mergulho orientado dos grafos $K_{2,2}, K_{3,3}$ e $K_{4,4}$, Figura 5.1, são descritos na Tabela 5.1.

Note que a região R_8^3 do mergulho (2) da Figura 5.1, passa duas vezes pelos lados 14 e 36, significando que existem duas auto-interseções. Portanto, R_8^3 não satisfaz a condição (P_2) da definição de modelo, no entanto, é um mergulho de 2-células, pois, sobre a superfície, é uma região homeomorfa a um disco aberto. Assim, o mergulho do grafo

Rot K_{22}	Reg K_{22}	Rot K_{33}	Reg K_{33}	Rot K_{44}	Reg K_{44}
$P_1 = (4,2)$	$R_4^1 = 1234$	$P_0 = (1,5,3)$	$R_4^1 = 0145$	$P_0 = (1,3,5,7)$	$R_4^1 = 3674$
$P_2 = (3,1)$	$R_4^2 = 1234$	$P_1 = (0,2,4)$	$R_4^2 = 1234$	$P_1 = (2,6,0,4)$	$R_4^2 = 1034$
$P_3 = (4,2)$		$P_2 = (1,5,3)$	R_8^3=05210	$P_2 = (3,7,1,5)$	$R_4^3 = 1650$
$P_4 = (3,1)$		$P_3 = (0,4,2)$	32543	$P_3 = (6,4,0,2)$	$R_4^4 = 1276$
		$P_4 = (1,3,5)$		$P_4 = (1,3,7,5)$	$R_4^5 = 2307$
		$P_5 = (0,4,2)$		$P_5 = (4,0,6,2)$	$R_4^6 = 4705$
				$P_6 = (5,1,7,3)$	$R_4^7 = 1452$
				$P_7 = (6,2,0,4)$	$R_4^8 = 2563$

Tabela 5.1: Sistemas de rotações e modelos dos mergulhos dos grafos $K_{2,2}, K_{3,3}$ e $K_{4,4}$

completo $K_{3,3}$, na Figura 5.1, apesar de não ser um modelo sobre o toro, não deixa de ser, como os outros dois mergulhos, um mergulho de 2-células. Concluímos ainda, que o mergulho mínimo do grafo completo biparticionado $K_{4,4}$ no toro, produz um complexo regular formado por oito polígonos de quatro lados.

5.1.4 Construção do mergulho de um grafo sobre o modelo plano da superfície a partir do modelo espacial

O objetivo é recuperar o mergulho no modelo plano a partir do mergulho do grafo sobre o modelo espacial da superfície. Se dispomos do mergulho de um grafo G no modelo espacial de uma superfície compacta orientada, podemos realizar uma série de cortes sobre determinados caminhos fechados da superfície de maneira a transformá-los numa região plana homeomorfa a um disco, portanto, homeomorfa à representação poligonal de Ω. E quais seriam tais caminhos? Nos dois próximos parágrafos responderemos esta questão.

Na realização do modelo espacial de uma superfície a partir do modelo plano, os lados do polígono de n-lados transformam-se sempre em caminhos fechados sobre Ω, [23]. Basta, portanto, identificá-los e efetuar os cortes no modelo espacial sobre tais caminhos, para reobter a forma poligonal, ou seja, uma região homeomorfa ao polígono de n-lados que contém o grafo mergulhado.

Sabemos de [23] que, na realização de uma superfície orientada mT, $m \geq 1$, por um polígono orientado de n-lados, os lados são levados em $2m$ caminhos fechados com um ponto em comum. Na forma natural, os vértices do polígono de n-lados representam dois pontos sobre o modelo espacial da esfera S, e apenas um ponto no modelo espacial das demais superfícies compactas orientadas, Proposição 3.2.4.

Na Figura 5.2 mostramos o corte (linha marrom do esquema à direita) sobre um caminho fechado γ, homeomorfo à imagem do bordo do polígono de 12-lados após a sua realização.

Observe, que se percorrermos o caminho γ a partir do lado a_1, no sentido horário, retornaremos ao ponto de partida; logo γ é um caminho fechado. Desse modo, podemos dizer que o caminho fechado γ é a composição dos seguintes caminhos

$$\gamma = a_1 b_1 a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1} b_3^{-1} a_3 b_3 b_2^{-1} a_2 b_2 b_1^{-1}.$$

Portanto, coincide com a forma natural do polígono de 12-lados gerador do $3T$. Conseqüentemente, o esquema sobre a região poligonal deverá representar o mergulho sobre o modelo espacial da superfície.

5.1.5 Mergulho mínimo do grafo $K_{5,5}$

Usaremos os procedimentos da Subseção 5.1.2 para obter um mergulho do grafo $K_{5,5}$ e descrever os tipos de regiões.

O mergulho mínimo do grafo completo biparticionado $K_{4,4}$ sobre o toro só foi possível porque as formas mínima e natural da representação poligonal do toro coincidem.

Pela igualdade (5.3), o gênero mínimo do grafo $K_{5,5}$ é 3, e portanto $K_{5,5} \hookrightarrow 3T$ minimamente. Colocando os vértices do $K_{5,5}$ sobre o modelo espacial do $3T$, conseguimos fa-

zer todas as conexões, através de caminhos sobre o $3T$, sem que houvessem sobreposições de caminhos, conforme mostra o primeiro esquema da Figura 5.2. Logo, este esquema representa o mergulho $K_{5,5} \hookrightarrow 3T$. Os caminhos com linhas cheias indicam que ele esta percorrendo a parte visível da superfície e os caminhos tracejados indicam o percurso na parte encoberta.

Uma vez realizado o mergulho do grafo no modelo espacial da superfície, é possível determinarmos o sistema de rotação. A dificuldade agora é como realizar a descrição das regiões poligonais. O sistema de rotação do mergulho esquematizado na Figura 5.2 é dado por

Rot K_{55} = {P_0=(1,5,9,7,3),P_1=(0,2,4,8,6),P_2=(1,7,9,5,3),P_3=(0,8,4,2,6),P_4=(1,3,7,9,5), P_5 = (0,6,2,8,4) , P_6 = (1,9,7,3,5) , P_7 = (0,2,6,4,8) , P_8 = (1,5,3,7,9) , P_9 = (0,4,6,8,2)}.

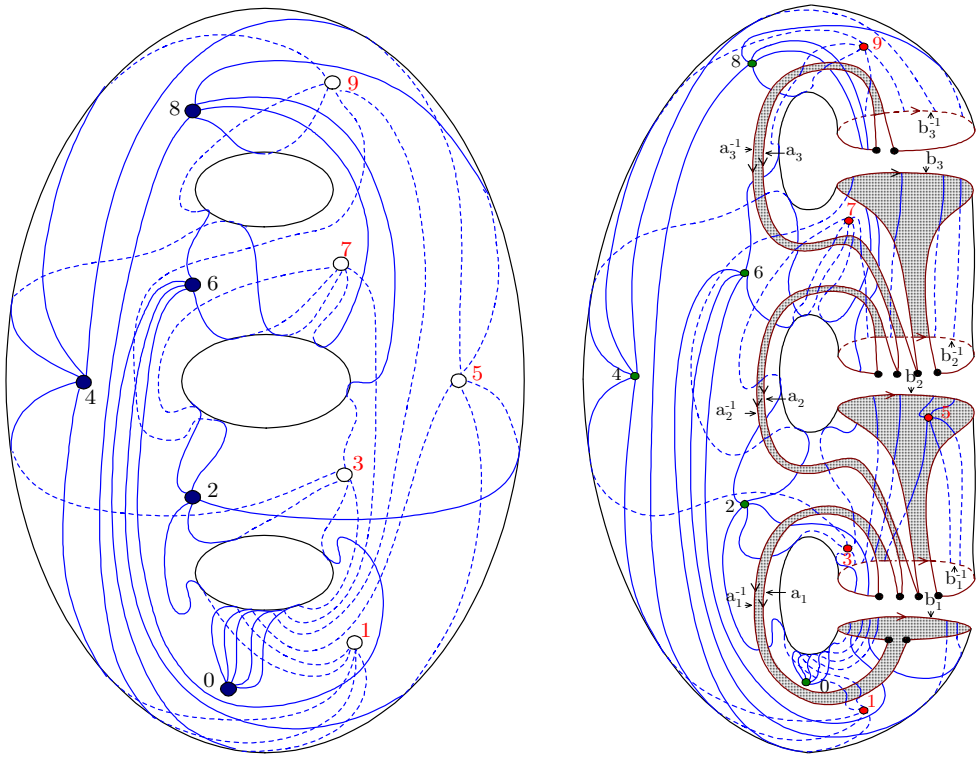

Figura 5.2: Mergulho mínimo e corte do mergulho do grafo $K_{5,5}$ no $3T$

O segundo esquema da Figura 5.2 representa o corte sobre as curvas de homologia no $3T$. A partir deste esquema reproduzimos o mergulho do grafo $K_{5,5}$ no $3T$, como mostra a Figura 5.3.

Infelizmente o sistema de rotação no mergulho do $K_{5,5}$, Figura 5.2, não é o mesmo que o sistema de rotações do mergulho mostrado na Figura 5.3. Na construção deste último, ocorreram algumas inversões nos lados causando tal diferença. Veja que o sistema de rotação do $K_{5,5}$ na Figura 5.3 é

Rot $K_{5,5}$={P_0=(1,5,9,7,3),P_1=(0,6,2,4, 8),P_2=(1,7,9,5,3),P_3=(0,4,2,8,6),P_4=(1,3,7,9,5),

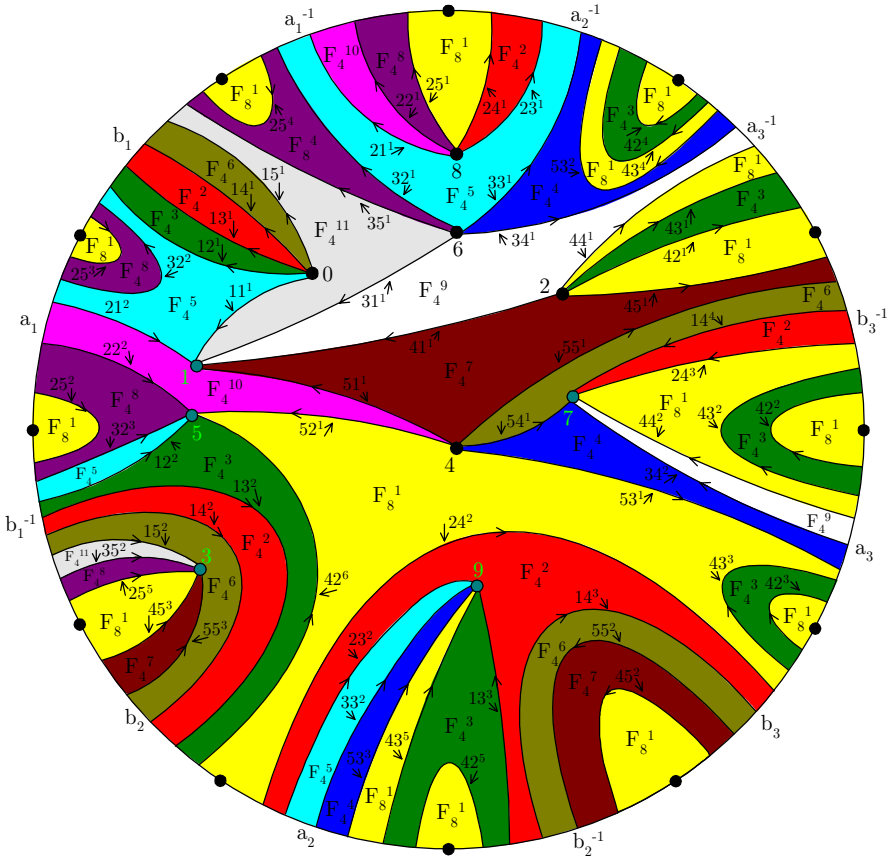

Figura 5.3: Modelo do mergulho mínimo do grafo completo biparticionado $K_{5,5}$ sobre o modelo plano na forma natural do $3T$

P_5=(0,6,8,4,2), P_6 = (1,3,5,9,6), P_7 = (0,8,2, 6, 4), P_8 = (1, 5, 3, 7, 9), P_9 = (0, 2, 4, 6, 8)}.

Portanto, os mergulhos não têm o mesmo sistema de rotações.

Uma vez encontrado o mergulho sobre a representação poligonal do $3T$, podemos perfeitamente determinar as regiões formadas pelo mergulho mínimo do $K_{5,5}$. Com o auxílio da Figura 5.3, obtemos as seguintes regiões para o mergulho do grafo $K_{5,5}$.

$$\text{Reg}\, K_{5,5} = \{F_8^1 = 278325492,\ F_4^2 = 09870,\ F_4^3 = 15290,\ F_4^4 = 47694,\ F_6^5 = 0189650,\ F_4^6 = 07430,\quad F_4^7 = 12341,\quad F_4^8 = 38563,\quad F_4^9 = 16721,\ F_4^{10} = 14581,\ F_4^{11} = 03610\}\,.$$

Denotaremos a composição do mergulho do grafo $K_{5,5}$ no $3T$ por

$$\mathfrak{F}_{55} \hookrightarrow 3T\,(11) = 9R_4 + R_6 + R_8.$$

Assim, o mergulho do grafo $K_{5,5}$, Figura 5.3, é composto por 11 regiões, e como a região F_8^1 não satisfaz a condição P_2), este é um mergulho de 2-células que não é um modelo sobre o tri-toro.

5.1.6 Mergulho mínimo do grafo $K_{6,6}$

Pela igualdade (5.3), o mergulho mínimo do $K_{6,6}$ é realizado numa superfície compacta orientada Ω de gênero 4, ou seja, sobre o $4T$. Um mergulho mínimo do $K_{6,6}$ é mostrado na Figura 5.4, cujo sistema de rotações é dado por

Rot $K_{66} = \{P_0 = (1,11,7,9,3,5), P_1$=(0,8,6,4,2,10) , P_2=(1,3,9,11,7,5), $P_3 = (0,2,4,6,8,10)$, $P_4 = (1,5,7,11,9,3)$, $P_5 = (0,10,2,4,6,8)$, $P_6 = (1,3,9,11,7,5)$, $P_7 = (0,8,6,4,2,10)$, $P_8 = (1,5,7,11,9,3), P_9 = (0,10,8,6,4,2), P_{10} = (1,5,3,9,7,11), P_{11} = (0,10,2,4,6,8)\}$.

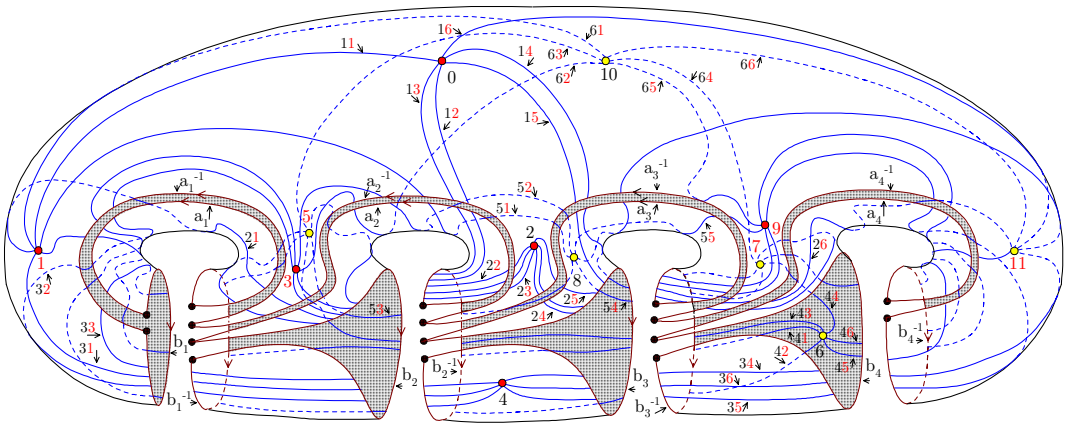

Figura 5.4: Corte no modelo espacial de um mergulho mínimo do grafo $K_{6,6}$

Usando o mesmo procedimento da Subseção 5.1.4, efetuaremos o corte no mergulho do $K_{6,6} \hookrightarrow 4T$, Figura 5.4, sobre o caminho fechado γ (linha marrom) homeomorfo a imagem do bordo do polígono de 16-lados na forma natural do $4T$.

É de se esperar que a transformação da região, mostrada na Figura 5.4, na forma poligonal conserve a orientação, desde que não haja alteração na ordem dos caminhos que saem de cada vértice. Se for possível realizar o mergulho do $K_{6,6}$ no modelo plano, na forma natural do $4T$, garantiremos que as regiões serão idênticas às do modelo espacial mostrada na Figura 5.4, onde por regiões idênticas queremos dizer regiões com a mesma ordem de rotulamentos.

Um mergulho mínimo do $K_{6,6}$ no modelo plano, na forma natural do $4T$, é mostrado na Figura 5.5.

Observe que o mergulho mínimo do $K_{6,6}$ no $4T$, mostrado na Figura 5.5 (nesta figura F_k^i significa que a k-ésima região do modelo possui i-lados), possui como sistema de rotação o seguinte conjunto

Rot $K_{66} = \{P_0 = (1,5,3,9,7,11), P_1$=(0,10,2,4,6,8),$P_2$=(1,5,7,11,9,3),$P_3$(0,10,8,6,4,2), $P_4 = (1,3,9,11,7,5)$, $P_5 = (0,8,6,4,2,10)$, $P_6 = (1,5,7,11,9,3)$, $P_7 = (0,10,2,4,6,8)$, $P_8 = (1,3,9,11,7,5)$, $P_9 = (0,2,4,6,8,10)$, $P_{10} = (1,11,7,9,3,5)$, P_{11} = (0,8,6,4,2,10)$\}$.

Este sistema é oposto, no sentido de percorrer o bordo na direção anti-horária, ao do

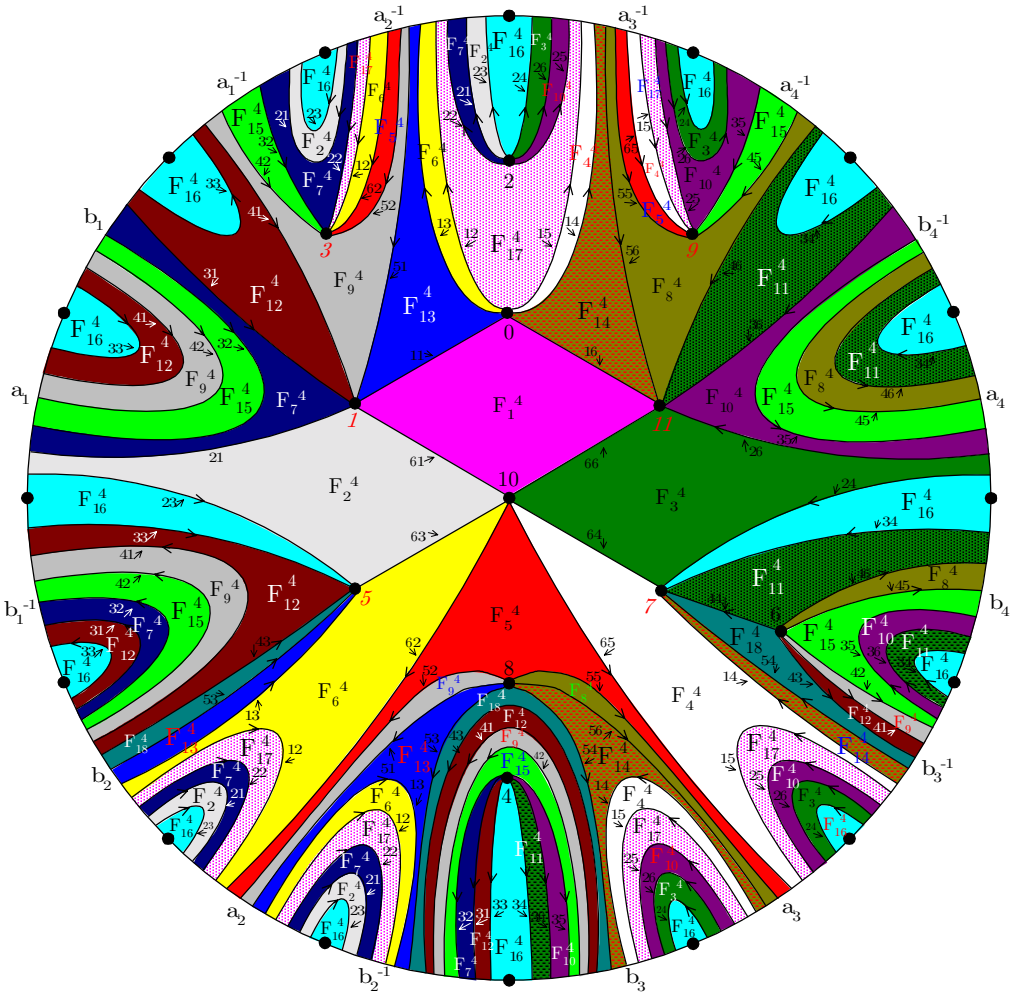

Figura 5.5: Mergulho mínimo do $K_{6,6}$ sobre o modelo plano na forma natural do $4T$

mergulho mínimo sobre o modelo espacial do $4T$, exibido na Figura 5.4. Isto não significa que estes mergulhos sejam diferentes. Ocorre que o mergulho mostrado na Figura 5.5 ilustra a parte interna da superfície e o outro a externa. Se imaginarmos que este mergulho foi desenhado sobre um papel que permite a sua visualização dos dois lados, no verso do lado mostrado pela Figura 5.4, teremos um mergulho com o mesmo sistema de orientação do grafo $K_{6,6}$, representado pela Figura 5.5. Essas afirmações conduzem ao seguinte resultado.

Proposição 5.1.5 *O mergulho do grafo $K_{6,6}$ sobre o $4T$ (Figura 5.4), é um complexo regular formado por 18 regiões quadrangulares, isto é, $\mathfrak{F}_{66} \hookrightarrow 4T\,(18) = 18R_4$.*

Demonstração. Como as regiões do mergulho no verso da Figura 5.5, tem rotulamento no sentido horário dado por

$\mathrm{Reg}(K_{66}) = \{F_1^4 = 0.11.10.1, F_2^4 = 1.10.5.2, F_3^4$=2.11.10.7,$F_4^4$=0.7.10.9,$F_5^4$=3.8.9.10,
$F_6^4 = 0.3.10.5, F_7^4 = 1.4.3.2, F_8^4 = 6.9.8.11, F_9^4 = 1.8.3.6, F_{10}^4 = 2.9.4.11, F_{11}^4 = 6.11.4.7,$

F^4_{12}=1.6.5.4,F^4_{13}=0.5.8.1,F^4_{14}=0.11.8.7,F^4_{15}=3.4.9.6,F^4_{16}=2.7.4.5,F^4_{17}=0.9.2.3,F^4_{18}=4.5.6.7},

então estes rotulamentos também descrevem todas as regiões poligonais produzidas pelo mergulho do $K_{6,6}$ esboçado na Figura 5.4, no sentido anti-horário. Mas cada vértice do mergulho está conectado a seis lados, e todas as regiões possuem quatro lados, portanto é verdadeira a proposição. ■

5.1.7 Mergulho mínimo orientado do grafo $K_{7,7}$

Pela igualdade (5.3), a característica de Eüler da superfície Ω para o mergulho do $K_{7,7}$ é $\chi(\Omega) = -12$. Portanto, o grafo $K_{7,7}$ está mergulhado minimamente numa superfície compacta orientada de gênero 7, ou seja, $K_{7,7} \hookrightarrow 7T$. Um mergulho mínimo do $K_{7,7}$ sobre o modelo espacial do $7T$ é mostrado na Figura 5.7, cujo sistema de rotação é dado por,

Rot K_{77}=$\{P_0 = (1,5,3,7,11,13,9), P_1 = (0,2,8,4,6,12,10), P_2 = (1,9,13,11,5,7,3),$
P_3 = (0,4,6,10,12,8,2), P_4=(1,3,5,11,9,13,7) , P_5=(0,10,12,2,6,8,4) , P_6=(1,7,5,11,13,9,3) ,
P_7=(0,2,12,8,6,4,10) , P_8=(1,3,11,9,13,5,7) , P_9=(0,8,10,6,4,12,2) , P_{10}=(1,3,9,11,7,13,5) ,
$P_{11} = (0,10,8,12,4,6,2)$, $P_{12} = (1,7,5,13,9,11,3)$, $P_{13} = (0,2,12,10,4,6,8)\}$.

Para evitar fragmentações das regiões poligonais no modelo plano, o caminho γ, imagem do polígono de n-lados na forma normal da superfície, deverá cruzar um lado do grafo, o menor número de vezes. Devemos desviar os lados do mergulho, sempre que cruzarem a parte de γ que sai dos dois vértices à direita dos quatro vértices que estão alinhados, em direção aos quatro vértices seguintes, porque se um caminho cruzar esta parte de γ, ele não sai do outro lado do caminho que se encontra emparelhado. Portanto, devemos desviar estes caminhos de forma que eles passem antes do primeiro entroncamento formado pelos seis pontos, a exemplo do que foi feito com os lados 75 e 76 do mergulho do $K_{7,7}$. Esta é a melhor maneira de evitar a fragmentação desnecessária das regiões do mergulho do $K_{7,7}$ no modelo plano do $7T$.

Na Figura 5.6, as linhas duplas representam o corte de γ cujos lados estão se afastando num processo de deformação para a formação do polígono de 28-lados na forma natural do $7T$. Veja que γ é constituído por 14 caminhos fechados sobre o $7T$ com um vértice em comum. Este vértice é quem vai gerar todos os vértices do polígono de 28-lados, pois, ao cortarmos um caminho fechado num vértice, ele gera outros dois que passam a ser os vértices externos dos lados do polígono. Como são 14 caminhos, daí a existência dos 28 vértices para o polígono gerador do $7T$.

A Figura 5.7, indica o mergulho $K_{7,7} \hookrightarrow 7T$ sobre o modelo plano do $7T$ correspondente ao mergulho sobre o modelo espacial do $7T$ mostrado na Figura 5.6. O sistema de rotações mostrado no mergulho da Figura 5.7 é dado por

Rot$(K_{77}) = \{P_0 = (0,9,13,11,7,3,5) , P_1 = (0,10,12,6,4,8,2) , P_2 = (1,3,7,5,11,13,9) ,$
P_3=(0,2,8,12,10,6,4) , P_4=(1,7,13,9,11,5,3) , P_5=(0,4,8,6,2,12,10) , P_6 = (1,3,9,13,11,5,7) ,
P_7=(0,10,4,6,8,12,2) , P_8=(1,7,5,13,9,11,3) , P_9=(0,2,12,4,6,10,8) , P_{10} = (1,5,13,7,11,9,3) ,
$P_{11} = (0,2,6,4,12,8,10)$, $P_{12} = (1,3,11,9,13,5,7)$, $P_{13} = (0,8,6,14,10,12,2)\}$.

Note que este tem orientação oposta à do mergulho mínimo sobre o modelo espacial do $7T$, exibido na Figura 5.6. Isto não significa mergulhos distintos, mas que o mergulho

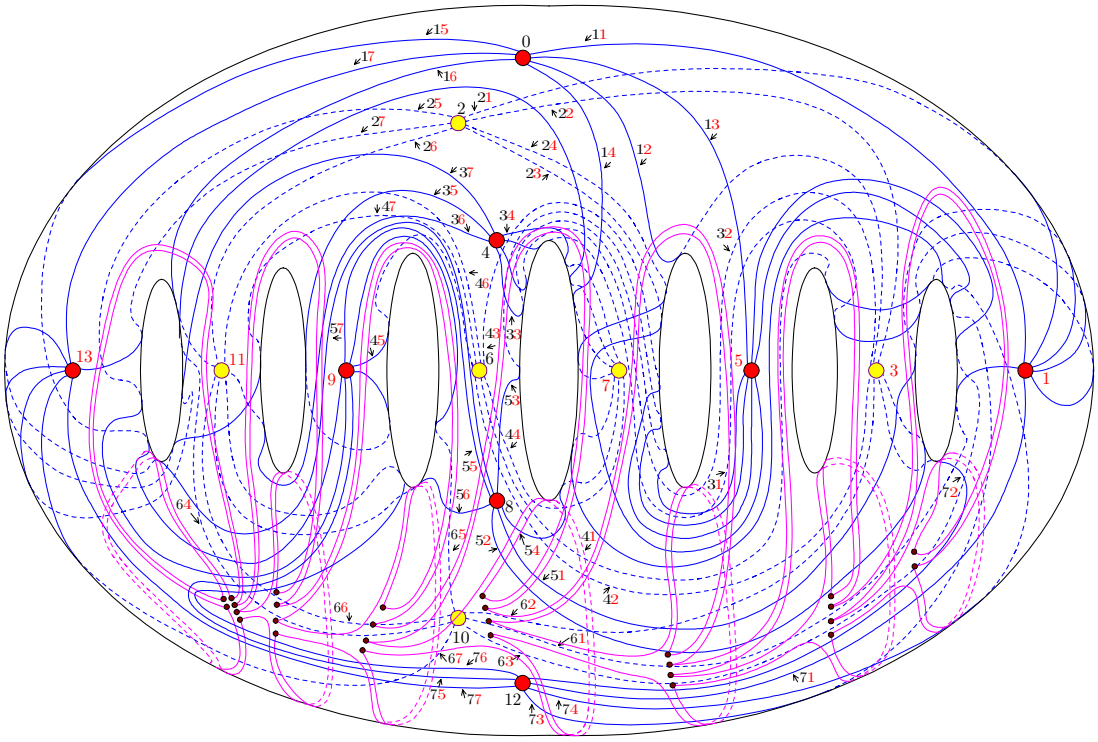

Figura 5.6: Mergulho mínimo do grafo completo biparticionado $K_{7,7}$

representado na Figura 5.7 é a exibição da parte interna da superfície mostrada na Figura 5.6.

Proposição 5.1.6 *O mergulho do grafo $K_{7,7}$, Figura 5.6, é formado por 23 regiões e tem a seguinte composição:* $\mathfrak{F}_{7,7} \hookrightarrow 7T\,(23) = 21R_4 + R_8 + R_6$.

Demonstração. Os modelos das Figura 5.7 e 5.6 deferem apenas porque um está na parte externa e outro na parte interna do $7T$, logo são isomorfos. As regiões poligonais do mergulho na parte interna da Figura 5.7, tem rotulamento no sentido horário dado por

Reg K_{77}=$\{F_4^1$=0.1.2.9,F_4^2=0.5.10.1,F_4^3=0.11.10.7,F_4^4=0.7.2.3,F_4^5=4.7.10.13,F_4^6=0.3.4.5, F_4^7=1.8.3.2, F_8^8=1.12.7.8.1.4.3, F_4^9=1.10.3.12, F_4^{10}=2.7.12.5, F_4^{11}=2.5.6.11, F_4^{12}=2.13.12.9, F_4^{13}=0.13.2.11, F_6^{14}=4.11.6.13.8.5, F_4^{15}=4.13.6.9, F_4^{16}=5.8.7.6, F_4^{17}=3.10.9.6,F_4^{18}=0.9.8.13, F_4^{19} = 8.9.10.11.8, F_4^{20} = 4.9.12.11.4, F_4^{21} = 3.8.11.12.3, F_4^{22}=5.12.13.10.5, F_4^{23}=1.6.7.4.1$\}$.

Estes rotulamentos também descrevem todas as regiões poligonais produzidas pelo mergulho do $K_{7,7}$, Figura 5.6, no sentido anti-horário. Como F_6^{14} é hexagonal e F_8^8 é uma região octogonal homeomorfa a um disco unitário e as demais regiões são quadrangulares, está provada a proposição. ■

Note que de cada vértice do mergulho partem 7 lados. Esta condição satisfaz parte da exigência para ser um complexo regular, porém, a existência das região F_8^8 e F_6^{14} são os únicos impedimentos para que o mergulho do $K_{7,7}$, Figura 5.6, não seja um complexo regular sobre o $7T$.

Figura 5.7: Mergulho mínimo do grafo $K_{7,7}$ sobre o modelo plano do $7T$

5.1.8 Exemplos de mergulhos não-orientados

Da equação (5.4), deduzimos que os mergulhos mínimos dos grafos completos biparticionados $K_{2,2}, K_{3,3}$ e $K_{4,4}$ são como mostrados na Figura 5.8. Os mergulhos mínimos do $K_{2,2}$ e $K_{3,3}$ são realizados no plano projetivo, enquanto que o mergulho mínimo do grafo $K_{4,4}$ é realizado no $2P$, superfície homeomorfa à garrafa de Klein.

Os sistema de rotação desses mergulhos e a descrição da composição dos modelos são mostrados na Tabela 5.2.

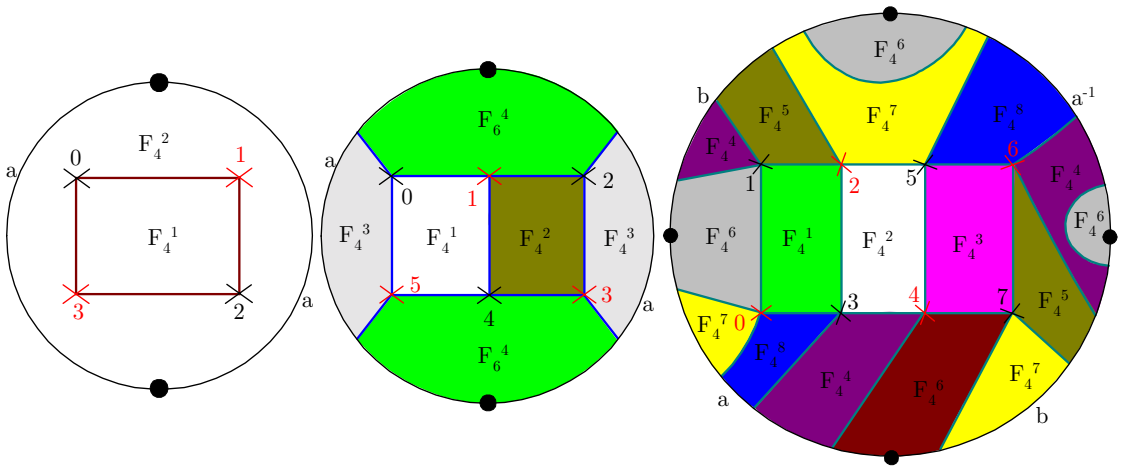

Figura 5.8: Mergulhos mínimos não-orientados dos grafos $K_{2,2}, K_{3,3}$ e $K_{4,4}$

Rot K_{22}	Reg K_{22}	Rot K_{33}	Reg K_{33}	Rot K_{44}	Reg K_{44}
$P_0 = (1,3)$	$F_4^1 = 0123$	$P_0 = (1,5,3)$	$F_4^1 = 0145$	$P_0 = (1,3,5,7)$	$F_4^1 = 0123$
$P_1 = (0,2)$	$F_4^2 = 0123$	$P_1 = (0,2,4)$	$F_4^2 = 1234$	$P_1 = (2,0,4,6)$	$F_4^2 = 2543$
$P_2 = (1,3)$		$P_2 = (1,5,3)$	$F_8^3 = 0523$	$P_2 = (3,1,7,5)$	$F_4^3 = 4567$
$P_3 = (0,2)$		$P_3 = (0,4,2)$	F_6^4=034521	$P_3 = (4,6,0,2)$	$F_4^4 = 0741$
		$P_4 = (1,3,5)$		$P_4 = (1,3,5,7)$	$F_4^5 = 3416$
		$P_5 = (0,4,2)$		$P_5 = (2,0,6,4)$	$F_4^6 = 0527$
				$P_6 = (3,1,7,5)$	$F_4^7 = 1672$
				$P_7 = (6,2,0,4)$	$F_4^8 = 0365$

Tabela 5.2: Sistemas de rotações e modelos dos mergulhos não-orientado dos grafos $K_{2,2}, K_{3,3}$ e $K_{4,4}$

5.2 Mergulhos de Grafos em Superfícies Compactas com Bordos

Em se tratando de tesselações, a incidência de complexos regulares em superfícies compactas com bordos é bem maior do que no conjunto das superfícies sem bordos. Só para termos uma idéia, o mergulho do grafo $K_{5,5}$, Figura 5.3, não é um complexo regular, no entanto, podemos extrair, no mínimo, 11 complexos regulares distintos deste mergulho.

A idéia que as superfícies compactas com bordos não são boas para mergulhos de grafos ou canais discreto sem memórias, também é falsa. Os canais que podem ser realizados sobre superfícies compactas sem bordos, sempre podem ser mergulhados em superfícies com bordos em proporções quase sempre superior, oferecendo mais opções para escolhas de estruturas algébricas que possam ser utilizadas nos processos de mo- dulação e de codificação.

5.2.1 Definições e exemplos

Comprovamos, nos mergulhos dos grafos $K_{5,5}$ e $K_{7,7}$, mostrados nas Figuras 5.3 e 5.6, respectivamente, a existência de sobreposição de lados das regiões, porém, esta sobreposição ocorre completamente sobre lados, conforme a condição P_1). O mergulho sobre o modelo plano da superfície, identifica com precisão o número de lados destas regiões. Identificadas estas regiões, verifica-se a ocorrência da relação (5.1) do Teorema de König, igualdade que nos interessa para conhecer o número de regiões de um mergulho. Por isso, este tipo de mergulho também será chamado de **modelo** sobre uma superfície.

Como os mergulhos de 2-células são um recobrimento sobre a superfície por regiões, poderemos dizer que este tipo de mergulho define uma **tesselação finita** sobre a superfície. Se as regiões do mergulho de 2-células tiverem o mesmo número de lados diremos que a tesselação é **regular**.

Salvo mensão em contrário, todos os mergulhos serão considerados como mergulhos de 2-células de um grafo completo biparticionado $K_{m,n}$.

Estamos interessados apenas em mergulhos de grafos sobre Ω_r que sejam mergulhos de 2-células e que preservam a característica de Eüler de Ω_r. Como Ω_r é homeomorfa a uma superfície compacta sem bordo menos r discos disjuntos, o nosso critério para o mergulho de um grafo G sobre Ω_r será a retirada do interior de r regiões do modelo do mergulho do grafo sobre Ω. Se o mergulho $G \hookrightarrow \Omega$ é de 2-células, cada região é homeomorfa a um disco aberto, por isso, ao retirar o interior de uma região de um mergulho de 2-células, estamos retirando o elemento topologicamente equivalente a um disco aberto no interior da região.

Definição 5.2.1 *Seja $\mathfrak{F}_{mn} \equiv \Omega(\alpha) = \cup_{i=1}^{\alpha} R^i$ o modelo formado por α regiões geradas pelo mergulho do grafo $K_{m,n}$ sobre uma superfície compacta orientada Ω. Chamaremos de* ***mergulho com*** *r* ***componentes de bordo*** *do grafo $K_{m,n}$, $r \leq \alpha$, sobre Ω_r, um mergulho obtido pela eliminação de r regiões de $\mathfrak{F}_{mn}$, denotado por $\mathfrak{F}_{mn}^r = \Omega_r(\alpha - r) = \cup_{i=1}^{\alpha-r} R^i$. Chamaremos o mergulho $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega$ de* ***mergulho de origem*** *para o mergulho na superfície com bordo $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega_r$.*

Concluímos, da Definição 5.2.1, que do mergulho $\mathfrak{F}_{mn} \equiv \Omega(\alpha)$ de um grafo $K_{m,n}$ sobre uma superfície sem bordo Ω, podemos eliminar k regiões, $1 \leq k \leq \alpha$, de $\mathfrak{F}_{mn}$ e obter um mergulho em uma superfície compacta com bordo de $\mathfrak{F}_{mn} \equiv \Omega_k(\alpha - k)$. No caso extremo $\alpha = k$, o mergulho de $K_{m,n}$ é da forma $\mathfrak{F}_{mn} \equiv \Omega_\alpha(0)$, onde $\Omega_\alpha(0)$ é uma variedade unidimensional homeomorfa à soma conexa de α círculos.

Como no mergulho com k componentes de bordo, podemos escolher k regiões num conjunto de α elementos, então, o número de modelos de mergulhos com bordos que podemos extrair do modelo $\mathfrak{F}_{mn} \equiv \Omega(\alpha)$ do mergulho $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega(\alpha)$ é

$$|\overline{\mathfrak{F}}_{mn}| = \sum\nolimits_{i=1}^{\alpha} C_{\alpha,i}, \tag{5.6}$$

onde $C_{\alpha,i}$ denota a combinação de α elementos tomados i a i.

Consideraremos um **mergulho mínimo com bordo** de um grafo G sobre Ω_r, qualquer mergulho proveniente de um mergulho mínimo $G \hookrightarrow \Omega$.

Na tentativa de definir um mergulho de um grafo G sobre uma superfície compacta com bordo Ω_r, não tivemos outra opção além das condições da Definição 5.2.1, conseqüentemente, o gênero da superfície para o mergulho com bordo é o mesmo que o da superfície do mergulho de origem.

Exemplos de mergulhos de grafos em superfícies com bordo são mostrados na Figura 5.9. O modelo (1) corresponde ao mergulho do grafo completo biparticionado $K_{2,2}$ sobre o plano, superfície homeomorfa a esfera menos um ponto S_1. Aqui, o bordo do polígono 1-*lado* $\equiv S_1$ coincide com o bordo da única região proveniente do mergulho. Os modelos (2) e (3) correspondem aos mergulhos mínimos orientados com bordos dos grafos completos biparticionados $K_{3,3}$ e $K_{4,4}$ sobre o toro, com uma componente de bordo T_1.

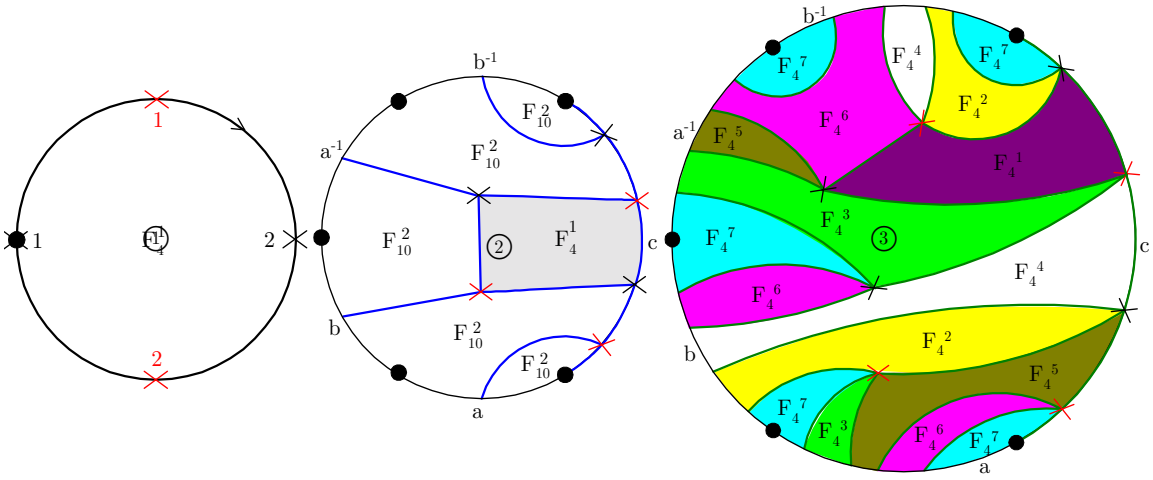

Figura 5.9: Mergulhos mínimos orientados com bordos dos grafos $K_{2,2}, K_{3,3}$ e $K_{4,4}$

Seja a_iR_j uma região com j lados que aparece a_i vezes quando do mergulho do grafo $K_{m,n}$ sobre a superfície Ω, então, quando desejarmos destacar os tipos de regiões do mergulho, escreveremos

$$\mathfrak{F}_{44} \equiv \Omega\,(\alpha) = a_1R_4 + \cdots + a_tR_{4+2s},\ \alpha = a_1 + \cdots + a_t.$$

Assim, as composições dos modelos de mergulhos de $K_{2,2}, K_{3,3}$ e $K_{4,4}$, Figura 5.9, são: $\mathfrak{F}_{22} \equiv S_1\,(1) = R_4$, $\mathfrak{F}_{33} \equiv T_1\,(2) = R_4 + R_6$ e $\mathfrak{F}_{44} \equiv T_1\,(7) = 7R_4$.

Os dois modelos mostrados na Figura 5.10, $\mathfrak{F}_{33} \equiv T\,(3) = 3R_6$ (modelo à esquerda) e $\mathfrak{F}_{33} \equiv T_1\,(2) = 2R_6$ (modelo à direita), representam mergulhos mínimos do grafo $K_{3,3}$ sobre toro e sobre o toro com uma componente de bordo. Ambos são exemplos de complexos regulares.

O segundo modelo foi obtido do primeiro pela remoção da região F_6^3 que se converteu no bordo de T_1.

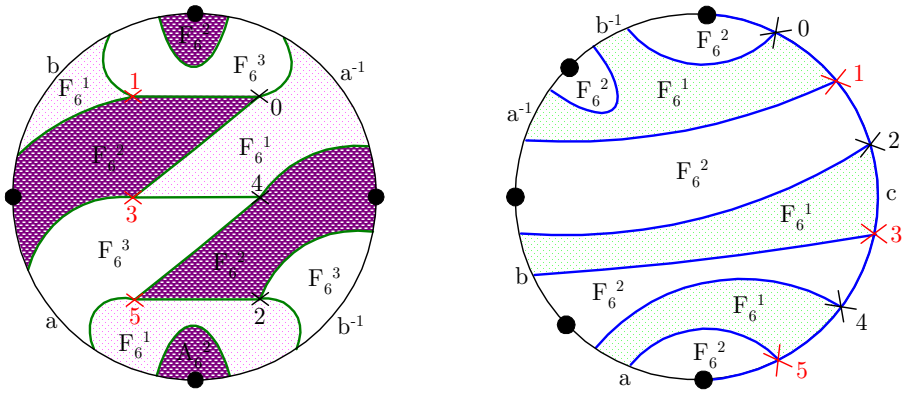

Figura 5.10: Mergulhos mínimos orientados sem e com bordo do grafo $K_{3,3}$ sobre T_1

5.2.2 Algoritmo para a construção de mergulhos de grafos em superfícies com um bordo

O primeiro passo para obtermos o mergulho de um grafo em superfícies com bordo $\mathfrak{F}_{mn} \equiv \Omega_1(\alpha - 1)$, é identificar uma região não-fragmentada em $\mathfrak{F}_{mn} \equiv \Omega(\alpha)$, na qual um dos seus vértices possua um lado que intercepta o bordo do polígono de n-lados no modelo do mergulho $\mathfrak{F}_{mn} \equiv \Omega(\alpha)$, o mais próximo de um dos vértice do polígono de n-lados.

Algorítmo 5.2.2 *Suponha que* $\mathfrak{F}_{mn} \equiv \Omega(\alpha) = \cup R^i$ *é o modelo do mergulho do grafo* $K_{m,n}$ *sobre a superfície compacta orientada* Ω. *Considere que* $l_i \in R^i$, *é o lado mais próximo do vértice* v_0 *pertencente ao polígono de n-lados de* Ω. *Nestas condições, para construir o modelo do mergulho* $\mathfrak{F}_i \equiv \Omega_1(\alpha - 1) = \mathfrak{F}_{mn} - R^i$, *os seguintes passos são necessários:*

($P1$) *Transporte o lado* l_i *da região* R^i *para o vértice* v_0 *(a continuação de* l_i *poderá sair de outro vértice do polígono de (n+1)-lados);*

($P2$) *Abra a região* R^i *no vértice* v_0 *de maneira a transformar o bordo de* R^i *num novo lado do polígono de* Ω, *transformando-o no polígono de* $(n+1)$*-lados* $\equiv \Omega_1$*;*

($P3$) *Transporte os vértices de* R^i *para este novo lado, seguindo a orientação oposta da região* R^i, *de maneira que os extremos contenham o mesmo rótulo do vértice* v_j*;*

($P4$) *Coloque os demais vértices do grafo G sobre a região interior do polígono de (n+1)-lados e faça as mesmas conexões do modelo* $\mathfrak{F}_{mn}$ *do mergulho de G em* Ω *até obter um mergulho com o mesmo sistema de rotações de* $\mathfrak{F}_{mn}$.

As conexões do mergulho com bordos do $K_{m,n}$ são as mesmas do mergulho de origem, com exceção da conexão do lado l_i, o qual é transferido para o vértice v_0 do polígono de n-lados. Mas esta transferência não interfere na ordem das conexões dos lados do mergulho com bordo de G, porque l_i é o lado mais próximo de v_0 e, portanto, não há outro lado do

mergulho entre v_0 e l_i. Assim, ao construirmos modelos com bordos a partir do modelo sem bordos, estamos preservando o sistema de rotações e, naturalmente, conservando os rotulamentos das regiões.

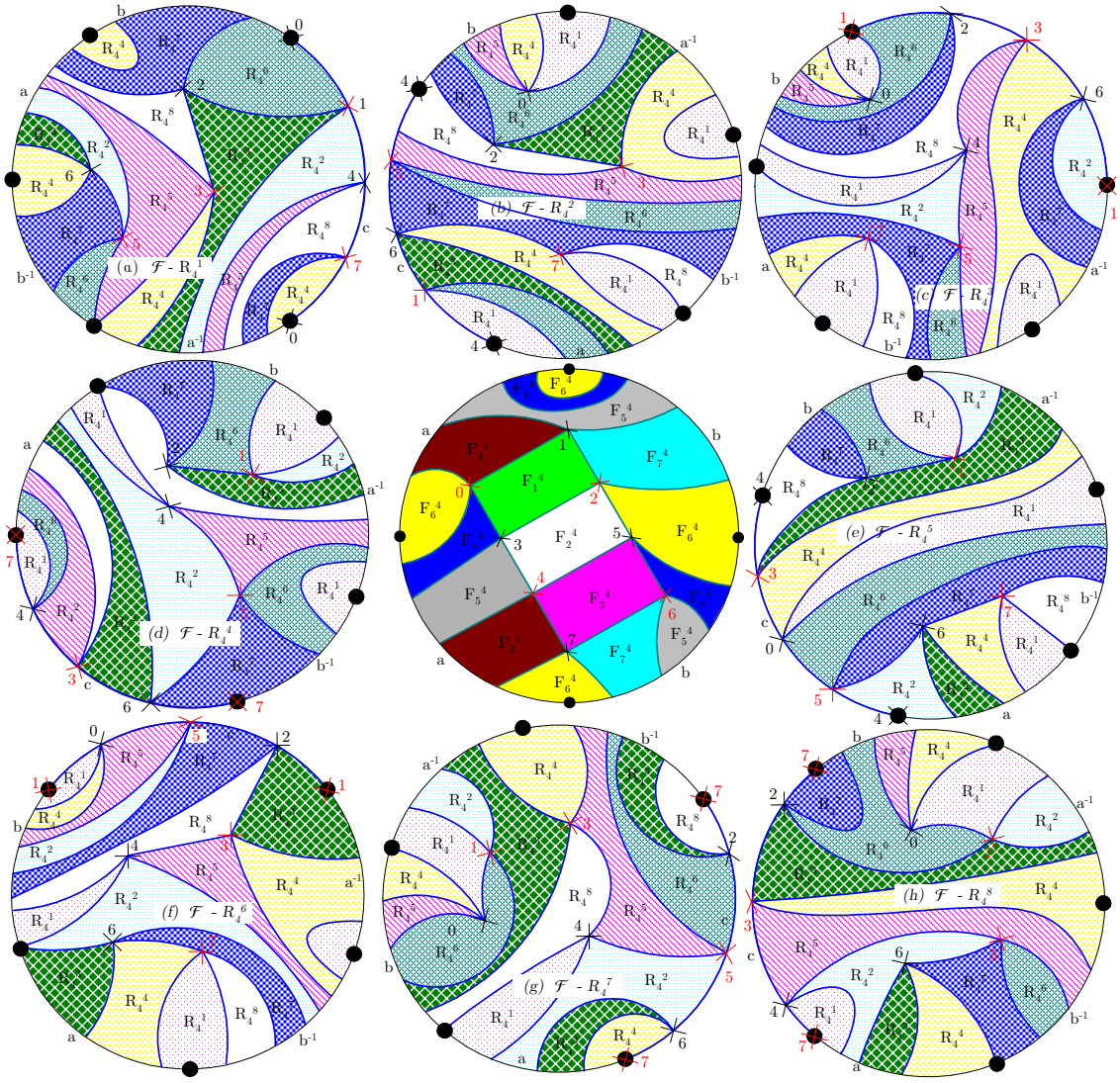

Figura 5.11: Mergulhos mínimos com bordos do grafo $K_{4,4}$

5.2.3 Exemplos de mergulhos em superfícies com uma componente de bordo do grafo $K_{4,4}$

Por definição, os mergulhos mínimos com bordos e sem bordos do grafo $K_{4,4}$ são todos realizados no toro. Usando o Algoritmo 5.2.2, construiremos todos os mergulhos com uma componente de bordo, derivados de um mergulho sobre o toro do grafo $K_{4,4}$. A Figura 5.11 mostra todos os mergulhos com uma componente de bordo extraídas do mergulho com bordo, modelo central.

Observe que todos os mergulhos com bordos indicados na Figura 5.11, possuem o mesmo sistema de rotações do modelo original, modelo central.

5.2.4 Mergulhos de grafos em superfícies com bordos

O objetivo é eliminar duas regiões do modelo de mergulho de um grafo em uma superfície compacta orientada. O procedimento será o mesmo para a eliminação de um número maior de regiões. Descreveremos esta construção na forma do seguinte algoritmo.

Algorítmo 5.2.3 *Seja $\mathfrak{F}_{mn} \equiv \Omega(\alpha) = \cup_{i=1}^{\alpha} R^i$ o modelo do mergulho do grafo $K_{m,n}$ sobre uma superfícies Ω. Para se construir o modelo $\mathfrak{F}_{ij} \equiv \mathfrak{F}_{mn} - (R^i \cup R^j)$, são necessários os seguintes passos:*

($P1$) *Utilizando o Algoritmo* 5.2.2, *construa o modelo $\mathfrak{F}_i \equiv \Omega_1(\alpha - 1) = \mathfrak{F}_{mn} - R^i$ de $K_{m,n}$ sobre Ω_1, cujo bordo será exatamente o bordo de R_i, isto é, $\partial(\Omega_1) = \partial(R^i)$;*

($P2$) *Se a região $R^j \in \mathfrak{F}_{mn}$ tem pelo menos um vértice $h \in \partial(R^j)$, a partir do vértice v_0 percorra $\partial(R^i)$ na direção anti-horária até encontrar h. No ponto h, acrescente um caminho, ampliando o bordo de R^i. Caminhe agora sobre o bordo de R^j na direção horária até retornar a h e transporte os vértices de R_j, na ordem encontrada, para a parte ampliada de $\partial(R^i)$. Continue o percurso sobre $\partial(R^i)$ e, na medida que for encontrando vértices comuns, proceda como em h até retornar ao vértice v_0;*

($P3$) *Manter fixos os vértices que não se encontram em $\partial(R^i)$ e $\partial(R^j)$ e faça as mesmas conexões existentes no modelo de $\mathfrak{F}_i$ conservando o sistema de rotações de G;*

($P4$) *Se as regiões R^i e R^j não possuem pontos em comum, aplique em cada região o Algoritmo* 5.2.2 *e acrescente um lado c no polígono de n-lados, em um dos bordos formados por essas regiões, acrescentar um lado c no bordo R^i, por exemplo, significa acrescentar dois lados com orientações opostas c e c^{-1}, um antes e outro depois do bordo de R^i. Este procedimento é para recuperar a forma mínima do polígono de n-lados de $\Omega_2 \equiv \mathfrak{F}_{ij} \equiv \mathfrak{F}_{mn} - (R^i \cup R^j)$.*

É claro que as transformações efetuadas no mergulho dos grafos pelo Algoritmo 5.2.3 podem ser todas revertidas. Assim, podemos construir um modelo sem bordo de um mergulho de um grafo G a partir de um modelo com bordo Ω. O segundo modelo da Figura 5.14 foi construído por este processo. A construção através do Algoritmo 5.2.3 também preserva o sistema de rotações.

5.2.5 Mergulho mínimo do $K_{4,4}$ em superfície com bordos

Nos parece claro que cada região retirada de um mergulho com bordo de G sobre Ω provoque uma componente de bordo em Ω. É fácil comprovar que o número e tipo de componentes de bordo de um mergulho formado pela eliminação de r regiões de um mergulho sobre uma superfície Ω, através do Algoritmo 5.2.3, satisfaz as condições do seguinte teorema.

Teorema 5.2.4 *Seja* $\mathfrak{F}_{mn} \equiv \Omega(\alpha) = \cup_{i=1}^{\alpha} R^i$ *o mergulho do grafo completo biparticionado* $K_{m,n}$ *sobre a superfície sem bordo* Ω *decompondo-a em* α *regiões. Seja* $\mathfrak{F}_{i_1 \cdots i_\mu}$ *o mergulho de* $K_{m,n}$ *sobre* Ω *pela eliminação das regiões* $R^{i_1}, \cdots R^{i_\mu}$, *então*

$$\mathfrak{F}_{i_1 \cdots i_\mu} \equiv \Omega_\mu(\alpha - \mu) \equiv \mathfrak{F}_{mn} - (R^{i_1} \cup \cdots \cup R^{i_\mu})$$

é um mergulho de $K_{m,n}$ *sobre* Ω *com* $\alpha - \mu$ *regiões e* μ *componentes de bordo. Os bordos de* Ω_μ *são isolados se, e somente se,* $\partial(R^{i_1}) \cap \cdots \cap \partial(R^{i_\mu}) = \varnothing$.

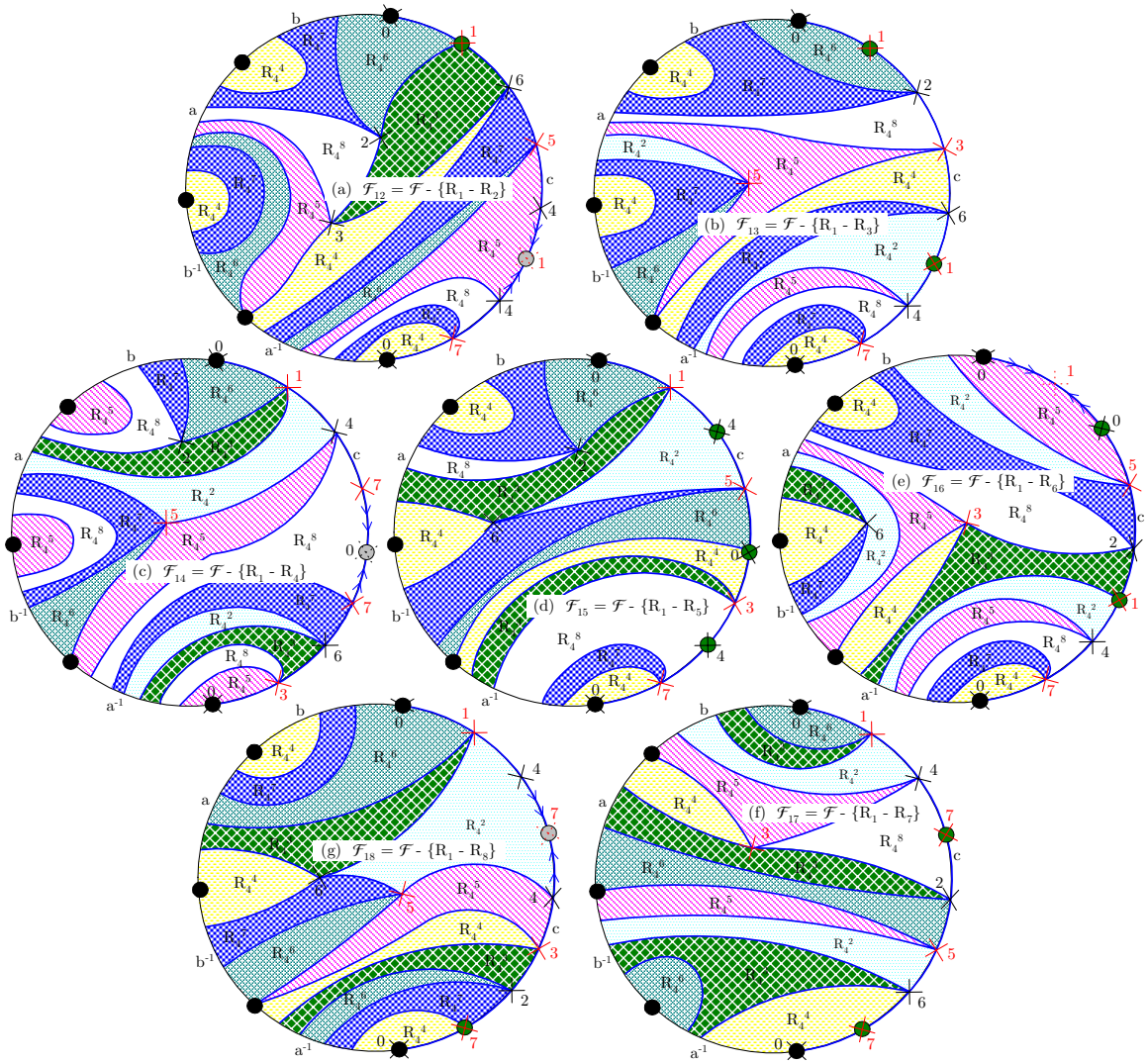

Figura 5.12: Mergulhos mínimos do grafo $K_{4,4}$ obtidos pela eliminação de duas regiões de $\mathfrak{F}_1$

Demonstração. Como o mergulho $K_{mn} \hookrightarrow \Omega$ é composto por α regiões e as μ regiões retiradas transformam-se em μ componentes de bordo (pois são curvas fechadas), então o mergulho $\mathfrak{F}_{i_1 \cdots i_\mu} \equiv \Omega_\mu$ é composto por $\alpha - \mu$ regiões. Por outro lado, regiões isoladas R^i e R^j, quando retiradas de um modelo, só podem gerar componentes de bordo isoladas,

caso contrário, os seus bordos teriam pelo menos um ponto p em comum, e assim o $\partial(R^i) \cap \partial(R^j) = p$, $R^i \cap R^j = p$, o que seria um absurdo. ■

Consideramos o mergulho central (destacado em cores diferentes) mostrado na Figura 5.11. Escolhemos R^1 como uma das regiões que será eliminada. Isso nos permitirá obter todos os mergulhos com duas regiões eliminadas, sendo uma delas R^1. Escolhemos ordenadamente as regiões $R^2, \cdots, R^8$ e construímos os modelos, $\mathfrak{F}_{1_k} = \mathfrak{F}_1 - R^k$, $k = 2, \cdots, 8$ (veja Figura 5.12).

Observe que todos os mergulhos do $K_{4,4}$, Figura 5.12, possuem o mesmo sistema de rotações. São todos mergulhos mínimos com duas componentes de bordo não isoladas do grafo $K_{4,4}$, isto é, correspondem ao mergulho $K_{4,4} \hookrightarrow T_2\,(6)$ e a interseção entre os bordos $\partial\,(R^1)$ e $\partial(R^j)$, $j = 2, \cdots, 8$, é sempre um vértice ou um lado, os bordos não são isolados.

5.2.6 Exemplo de um mergulho mínimo do grafo $K_{4,4}$ em superfície com bordos isolados

O primeiro modelo mostrado na Figura 5.14 representa o mergulho mínimo $K_{4,4} \hookrightarrow T_2$, construído por tentativa. Só foi possível realizá-lo porque o modelo correspondente sobre o toro (segundo modelo da Figura 5.14) possui duas regiões sem auto-interseções, que são transformadas no bordo de T_2. Fizemos aqui o caminho inverso do Algoritmo 5.2.3, isto é, construímos primeiro $K_{44} \hookrightarrow T_2$ e depois obtivemos $K_{44} \hookrightarrow T$.

Observação 5.2.5 *A existência da formação de duas componentes de bordo no modelo $\mathfrak{F}_{ij}$ é equivalente à existência de pelo menos três regiões consecutivas como mostradas na Figura* 5.13.

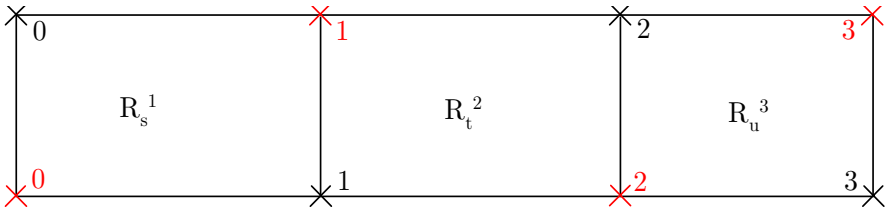

Figura 5.13: Condições para a existência de modelos com duas componentes de bordo

A experiência mostrou que é menos complicado obter o modelo sem bordo, tomando como referência o seu correspondente modelo com bordo, do que o procedimento inverso.

Ambos os mergulhos do grafo $K_{4,4}$, Figura 5.14, apresentam o mesmo sistema de rotações e as composições dos correspondentes modelos são: $\mathfrak{F}_{44} \equiv T_2\,(6) = 6R_4$ e $\mathfrak{F}_{44} \equiv T\,(8) = 8R_4$.

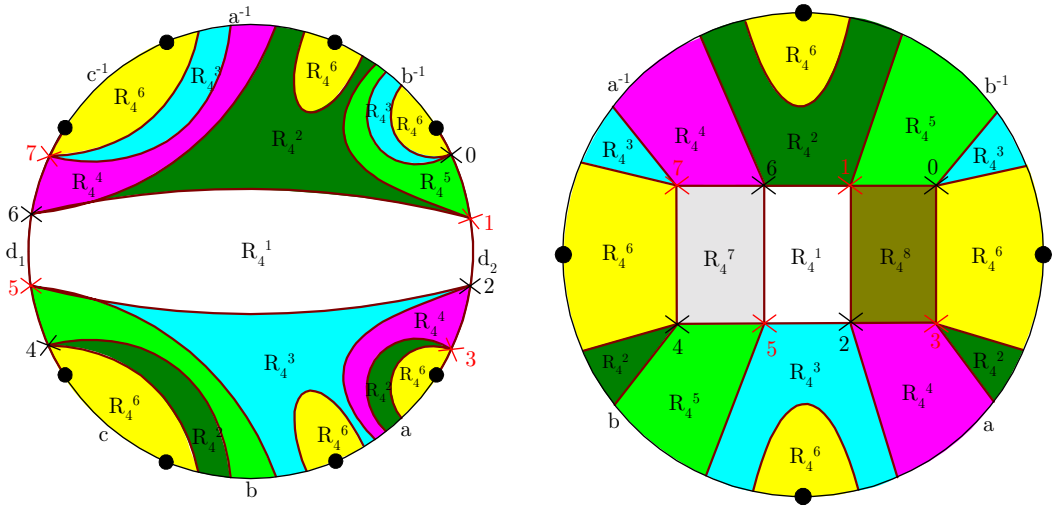

Figura 5.14: Mergulho do grafo $K_{4,4}$ sobre T_2 e o correspondente mergulho em T

5.3 Modelos das Regiões Oriundos de Mergulho de Grafos em Superfícies

A identificação de complexos regulares como tesselações formadas por mergulhos de grafos em superfícies, implica em determinar o conjunto das superfícies para o mergulho de 2-células desse grafo e, para cada uma delas, relacionar todos os possíveis tipos de modelos das regiões provenientes dos mergulhos desse grafo. No início, tentamos associar a cada sistema de rotação do grafo o tipo de modelo sobre a superfície. Por ser um trabalho árduo e sem nenhum poder de generalização, optamos em identificar o conjunto de todas as possíveis tesselações de uma superfície oriundas de mergulhos de um grafo, usando relações matemáticas que identificam a quantidade e os possíveis tipos de regiões que compõem essas tesselações.

Cada definição, notação, proposição, lema, teorema e corolário fazem parte de uma seqüência lógica da demonstração da fórmula que estabelece o número de modelos com 4 regiões do mergulho de 2-células do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$ sobre uma superfície compacta orientada Ω.

5.3.1 Característica e gênero do grafo completo biparticionado

Qualquer tentativa de identificar modelos de mergulhos de 2-células de grafos em superfícies começa com a identificação dos gêneros mínimos e máximos das superfícies nos quais estes mergulhos são realizados.

Ringel [34] mostrou que o gênero mínimo orientado do mergulho do grafo completo biparticionado é dado por

$$\gamma_m\left(K_{m,n}\right) = \{(m-2)\,(n-2)\,/4\}, \quad \text{para } m,n \geq 2, \tag{5.7}$$

onde $\{a\}$ denota o menor número inteiro maior ou igual ao número real a.

Ringeisen [32] mostrou que o gênero máximo para o mergulho do grafo completo biparticionado é dado por

$$\gamma_M\left(K_{m,n}\right) = \left[(m-1)\,(n-1)\,/2\right], \text{ para } m,n \geq 1, \tag{5.8}$$

onde $[a]$ é o maior número inteiro menor ou igual ao número real a.

Teorema 5.3.1 *[33]Se um grafo G tem um mergulho de 2-células sobre superfícies de gêneros γ_1 e γ_2, então para todo inteiro k, $\gamma_1 \leq k \leq \gamma_2$, G tem um mergulho de 2-células sobre a superfície de gênero k.*

Porque mergulho máximo? Se $\gamma_M(G)$ é o gênero máximo de G, porque não existe o mergulho do grafo G em uma superfície de gênero maior ou igual a $\gamma_M(G)+1$? Bom o mergulho existe, só que qualquer mergulho de G numa superfície compacta orientada com gênero nessas condições possui, pelo menos, uma região não homeomorfa a um disco unitário, e portanto não seria um mergulho de 2-células.

5.3.2 Conjunto das superfícies para o mergulho do grafo completo biparticionado

O número de regiões de um modelo provenientes do mergulho de um grafo G em uma superfície compacta orientada Ω é constante e depende da característica de Eüler de Ω. Para efeito de simplificação, indicaremos por $\mathfrak{M}$ o conjunto dos modelos $\mathfrak{F}_{mn}$ de mergulhos do grafo $K_{m,n}$ sobre uma superfície Ω, isto é,

$$\mathfrak{M} = \{\mathfrak{F}_{mn} : K_{m,n} \hookrightarrow \Omega \text{ e } \mathfrak{F}_{mn} \equiv \Omega\}. \tag{5.9}$$

Proposição 5.3.2 *Se $\Omega \equiv kT$ então o número de regiões de $\mathfrak{F}_{mn}$ é*

$$|\mathfrak{F}_{mn}| = 2-2k-m-n+mn,\ \forall\, \mathfrak{F}_{mn} \in \mathfrak{M}.$$

Demonstração. A característica de Eüler de Ω é $\chi(\Omega) = V-E+F$. Mas, $\chi(kT) = 2-2k$. Logo, $F = |\mathfrak{F}_{mn}| = 2-2k-V+E = 2-2k-m-n+mn$. ∎

Um grafo pode ser mergulhado em mais de uma superfície. O conjunto de superfícies para o mergulho do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$ e o número de seus elementos podem ser conseguidos através do seguinte teorema.

Teorema 5.3.3 *Seja $\mathbb{M}_{mn}$ o conjunto das superfícies compactas orientadas sem bordo para o mergulho de 2-células do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$, então a cardinalidade de $\mathbb{M}_{mn}$ é igual a*

$$|\mathbb{M}_{mn}| = \begin{cases} mn/4, \text{ se } m,n \equiv (0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(2,0),(2,2),(3,0) \bmod 4; \\ mn/4+1/2, \text{ se } m,n \equiv (1,2),(2,1),(2,3),(3,2) \bmod 4; \\ mn/4+1/4, \text{ se } m,n \equiv (1,3),(3,1) \bmod 4; \\ mn/4-1/4, \text{ se } m,n \equiv (1,1),(3,3) \bmod 4, \end{cases}$$

onde $m,n \equiv (a_1,b_1),\cdots,(a_s,b_s) \bmod 4$ significa que $m \equiv a_1 \bmod 4$ e $n \equiv b_1 \bmod 4$, $\cdots$, ou $m \equiv a_s \bmod 4$ e $n \equiv b_s \bmod 4$.

Demonstração. Pelas igualdades (5.8),(5.7) e Teorema 5.3.1, o grafo completo biparticionado $K_{m,n}$ está mergulhado no conjunto das superfícies orientadas

$$\mathbb{M}_{mn} = \{\gamma T, (\gamma+1)\,T, (\gamma+2)\,T, \cdots, (\gamma_M - 1)\,T, \gamma_M T\}, \tag{5.10}$$

onde γ e γ_M são os gêneros mínimo e máximo para os mergulhos orientados de $K_{m,n}$. Portanto, o número de elementos de $\mathbb{M}_{mn}$ é: $|\mathbb{M}_{mn}| = \gamma_M(K_{m,n}) - \gamma(K_{m,n}) + 1$. Escrevendo $m = 4t + a$, $n = 4s + b$, $a, b \in \{0,1,2,3\}$, temos 16 casos a considerar:

1) $a = b = 0 \Rightarrow |\mathbb{M}_{mn}| = [(m-1)(n-1)/2] - \{(m-2)(n-2)/4\} + 1 = mn/4$;
2) $a = 1$ e $b = 1 \Rightarrow |\mathbb{M}_{mn}| = [8ts] - \{4ts - t - s + 1/4\} + 1 = mn/4 - 1/4$;
3) $a = 1$ e $b = 2 \Rightarrow |\mathbb{M}_{mn}| = [4t(4s+1)/2] - \{(4t-1)\,4s/4\} + 1 = mn/4 + 1/2$;
4) $a = 1$ e $b = 3 \Rightarrow |\mathbb{M}_{mn}| = [4t(4s+2)/2] - \{(4t-1)(4s+1)/4\} + 1 = mn/4 + 1/4$.

Os demais casos são determinados de modo análogo. ∎

Particularizando para o caso em que $m = n$ no Teorema 5.3.3, temos o seguinte resultado.

Corolário 5.3.4 *Seja $\mathbb{M}_{nn}$ o conjunto das superfícies compactas orientadas para o mergulho do grafo completo biparticionado $K_{n,n}$, então a cardinalidade de $\mathbb{M}_{nn}$ é:*

$$|\mathbb{M}_{nn}| = n^2/4, \text{ se } n \equiv 0 \bmod 2 \text{ e } |\mathbb{M}_{nn}| = n(n+2)/4, \text{ se } n \equiv 1 \bmod 2.$$

5.3.3 Tipos de modelos de mergulhos de 2-células

As regiões obtidas através dos modelos de mergulhos de 2-células de um grafo completo biparticionado $K_{m,n}$ sobre uma superfície compacta orientada, apresentam uma característica em comum: *todas as regiões possuem um número par de lados,* Proposição 5.3.5. Esta particularidade nos permitirá descrever as regiões de um modelo de mergulho de $K_{m,n}$ em função dos parâmetros m e n e do número de regiões.

Proposição 5.3.5 *Seja $\mathfrak{F}_{mn} \equiv \Omega(\alpha)$ e $\mathfrak{F}_{mn} = \bigcup_{j=1}^{\alpha} R_{i_j}$, então i_j será sempre um inteiro par maior ou igual a 4.*

Demonstração. Sejam $A = \{a_1, \cdots, a_m\}$ e $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ os conjuntos de vértices com m e n elementos de um grafo completo biparticionado $K_{m,n}$. Suponha que existe uma região $R_k \in \mathfrak{F}_{mn}$ com um número ímpar de lados, então $R_k = a_1 b_1 \cdots a_{2k} b_{2k} a_{2k+1} a_1$ e, assim, o lado $a_{2k+1}a_1$ seria uma conexão entre dois vértices de A, e $K_{m,n}$ não seria um grafo completo biparticionado. Esta contradição mostra o desejado. ∎

Teorema 5.3.6 *Se $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega(\alpha)$ é um mergulho mínimo orientado então o número de regiões de $\mathfrak{F}_{mn}$ é:*

$$\alpha = \begin{cases} mn/2, \text{ se } m,n \equiv (0,0),(0,2),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2) \bmod 4; \\ mn/2 - 1, \text{ se } m,n \equiv (0,1),(0,3),(1,0),(3,0) \bmod 4; \\ mn/2 - 1/2, \text{ se } m,n \equiv (1,3),(3,1) \bmod 4; \\ mn/2 - 3/2, \text{ se } m,n \equiv (1,1),(3,3) \bmod 4, \end{cases}$$

onde $m,n \equiv (a_1,b_1), \cdots, (a_s,b_s) \bmod 4$ significa que $m \equiv a_1 \bmod 4$ e $n \equiv b_1 \bmod 4$, $\cdots$, ou $m \equiv a_s \bmod 4$ e $n \equiv b_s \bmod 4$.

Demonstração. Usando o Teorema de König 5.1.1 e o Teorema 5.1.2, resulta que

$$\chi(k_{m,n}) = m + n - mn + \mu \Rightarrow \mu = 2\left[(m + n - mn/2)/2\right] + mn - m - n$$

Escrevendo $m = 4k + a$ e $n = 4t + b$, $a, b \in \{0, 1, 2, 3\}$ e substituindo todos os casos possíveis para m e n na expressão de α acima, obtemos as igualdades do teorema.

1) $m = 4k$ *e* $n = 4t \Rightarrow F = 2((4k + 4t - 16kt/2)/2) + 16kt - 4k - 4t = 8kt = mn/2$;
2) $m = 4k$ *e* $n = 4t + 1 \Rightarrow F = 2\left[(m + n - mn/2)/2\right] + mn - m - n = mn/2 - 1$;
3) $m = 4k + 1$ *e* $n = 4t + 1 \Rightarrow F = 2\left[(m + n - mn/2)/2\right] + mn - m - n = mn/2 - 3/2$;
4) $m = 4k + 1$ *e* $n = 4t + 3 \Rightarrow F = 2\left[(m + n - mn/2)/2\right] + mn - m - n = mn/2 - 1/2$.

Os demais casos são determinados de modo análogo. ■

Corolário 5.3.7 *Se* $K_{n,n} \hookrightarrow \Omega(\alpha)$ *é um mergulho mínimo orientado e* $\mathfrak{F}_{nn} \equiv \Omega(\alpha)$, *então o número de regiões de* $\mathfrak{F}_{nn}$ *é:*

$$\alpha = n^2/2, \text{ se } n \equiv 0 \bmod 2 \quad ou \quad \alpha = n^2/2 - 3/2, \text{ se } n \equiv 1 \bmod 2.$$

Demonstração. Fazendo $m = n$ na fórmula de α do Teorema 5.3.6, obtemos as igualdades: $\alpha = 2\left[(2n - n^2/2)/2\right] + n^2 - 2n = 2\left[n - n^2/4\right] + n^2 - 2n$. Como $n = 2k$ ou $n = 2k + 1$ então:

1) $n \equiv 2k \Rightarrow \mu = 2(2k - (2k)^2/4) + (2k)^2 - 2(2k) = 2k^2 = n^2/2$;
2) $n \equiv 2k + 1 \Rightarrow \mu = 2[2k + 1 - (2k + 1)^2/4] + (2k + 1)^2 - 2(2k + 1) = n^2/2 - 3/2$. ■

Corolário 5.3.8 *Seja* $\mathfrak{F}_{mn} \equiv \Omega(\alpha)$ *um modelo com* α *regiões do mergulho do grafo* $K_{m,n}$ *sobre uma superfície compacta orientada* Ω. *Então* α *é par se, e somente se,* m *e* n *são inteiros pares.*

Demonstração. Suponha que $m = 4k + a$ e $n = 4t + b$, $a, b \in \{0, 1, 2, 3\}$. Analisando todos os casos possíveis para m e n e substituindo α no Teorema 5.3.6, resulta que:

1) $m = 4k$ *e* $n = 4t \Rightarrow \alpha = mn/2 = 8kt \Rightarrow \alpha$ é par;
2) $m = 4k$ *e* $n = 4t + 1 \Rightarrow \alpha = mn/2 - 1 = 2k(1 + 4t) - 1 \Rightarrow \alpha$ é ímpar;
3) $m = 4k$ *e* $n = 4t + 2 \Rightarrow \alpha = mn/2 = 4k(1 + 2t) \Rightarrow \alpha$ é par;
4) $m = 4k$ *e* $n = 4t + 3 \Rightarrow \alpha = mn/2 - 1 = 2k(3 + 4t) - 1 \Rightarrow \alpha$ é ímpar;

Os demais casos são mostrados de forma análoga, o que prova o desejado. ■

Corolário 5.3.9 *Seja* $\mathfrak{F}_{nn} \equiv \Omega(\alpha)$ *um modelo com* α *regiões de um mergulho do grafo completo biparticionado* $K_{n,n}$ *sobre uma superfície compacta orientada* Ω. *Então* α *é par se, e somente se,* n *é par.*

Demonstração. Pelo Corolário 5.3.7, temos que:

1) se n é par então: $\alpha = n^2/2 = (2k)^2/2 = 2k^2 \Rightarrow \alpha$ é par;
2) se n é ímpar então: $\alpha = n^2/2 - 3/2 = 2(k^2 + k) - 1 \Rightarrow \alpha$ é ímpar. ■

Concluímos assim que o número de regiões de qualquer mergulho do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$ sobre uma superfície compacta orientada Ω é sempre o mesmo. Portanto, quando nos referirmos ao conjunto de modelos $\mathfrak{F}$ sobre Ω de mergulhos de 2-células de um grafo G, estamos falando de modelos com o mesmo número de regiões.

Proposição 5.3.10 *Seja $\mathfrak{F}_{mn}$ o modelo de um mergulho de 2-células de um grafo completo biparticionado $K_{m,n}$ sobre uma superfície compacta orientada Ω. Então são verdadeiras as seguintes afirmações:*

(*i*) *O modelo $\mathfrak{F}_{mn}$ é formado apenas por uma região se, e somente se, $\mathfrak{F}_{mn}$ é o modelo de um mergulho máximo de 2-células e m ou n é um inteiro ímpar;*

(*ii*) *O modelo $\mathfrak{F}_{mn}$ é formado por duas regiões se, e somente se, $\mathfrak{F}_{mn}$ é o modelo de um mergulho máximo de 2-células e m e n são inteiros pares.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{F}_{mn} \equiv \Omega(\alpha)$ o modelo do mergulho $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega$. Então

$$\alpha = \chi(\Omega) - m - n + mn = 2 - 2\gamma_M(\Omega) - m - n + mn.$$

Suponha que $m = 2k + a$ e $n = 2t + b$, $a, b \in \{0, 1\}$. Temos quatro casos a considerar:

1) $m = 2k$ e $n = 2t \Rightarrow |\mathfrak{F}_{mn}| = 2 - 2[(m-1)(n-1)/2] - m - n + mn = 2$;
2) $m = 2k$ e $n = 2t + 1 \Rightarrow |\mathfrak{F}_{mn}| = 2 - 2[(2k-1)2t/2] - 2k - 2t - 1 + 2k(2t+1) = 1$;
3) $m = 2k + 1$ e $n = 2t \Rightarrow |\mathfrak{F}_{mn}| = 2 - 2[2k(2t-1)/2] - 2k - 1 - 2t + (2k+1)2t = 1$;
4) $m = 2k+1$ e $n = 2t+1 \Rightarrow |\mathfrak{F}_{mn}| = 2-2[2k2t/2]-2k-1-2t-1+(2k+1)(2t+1) = 1$.

O que prova o desejado. ■

5.3.4 Modelos com α regiões

Determinaremos o conjunto de todos os possíveis modelos com α regiões, $\alpha \in \{2, 4\}$ do modelo $\mathfrak{F}_{mn} \equiv \Omega(\alpha)$. A intenção é que a estratégia adotada nestes casos possa ser aplicada para descrever o conjunto de modelos com α regiões, com $\alpha \geq 1$. A decisão pelos casos pares não significa que os procedimentos sejam típicos desses casos. Os procedimentos também se aplicam aos casos ímpares.

Notação 5.3.11 *Denominaremos por $\mathfrak{M}_\alpha = \{\mathfrak{F}_{mn} : \mathfrak{F}_{mn} \equiv \Omega(\alpha)$ e $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega\}$ o conjunto dos modelos com exatamente α regiões formados pelos mergulhos do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$ sobre a superfície compacta Ω. Denotaremos por $\mathfrak{F}_{mn} = \bigcup_{j=1}^{\alpha} R_{i_j}$, $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_\alpha$ um modelo de $\mathfrak{M}_\alpha$, onde R_{i_j} é uma região com i_j lados.*

A condição $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_\alpha$ é fundamental aos nossos propósitos porque ao fixarmos o primeiro índice, a variação de i_2 será conhecida e, ao fixarmos os dois primeiros índices, saberemos determinar exatamente a variação de i_3 e assim por diante. Esta é a idéia usada para realizarmos a contagem dos modelos com a regiões.

Lema 5.3.12 *A cardinalidade do conjunto $\mathfrak{M}_\alpha$ é igual ao número de soluções inteiras positivas da equação*

$$2mn = 4F_4 + 6F_6 + 8F_8 + \cdots \quad e \quad \textstyle\sum_{i=0} F_{4+2i} = \alpha, \tag{5.11}$$

onde F_k é o número de regiões com k lados.

Demonstração. Por [10], pp. 85, se F_t, $t = 3, 4, 5, \cdots$ é uma região de $\mathfrak{F}_{mn}$ com t lados então $2E = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots$, onde E é o número de lados do $K_{m,n}$. Por outro lado, um grafo completo biparticionado $K_{m,n}$ tem mn lados, pela Proposição 5.3.5, o seu mergulho nunca produz faces com um número ímpar de lados e, pelo Teorema 5.3.6, $\sum_{i=0} F_{4+2i} = \alpha$, portanto:

$$2E = 2mn = 4F_4 + 6F_6 + 8F_8 + \cdots \quad e \quad \sum_{i=0} F_{4+2i} = \alpha,$$

o que prova o desejado. ∎

No próximo lema mostraremos que se um modelo $\mathfrak{F}_{mn} \equiv \Omega(a)$ é visto como a união de regiões simples R_i de i faces, então a soma dos índices de todas as regiões é igual a $2mn$.

Lema 5.3.13 *Se $\mathfrak{F}_{mn} \in \mathfrak{M}_\alpha$ é tal que $\mathfrak{F}_{mn} = \cup_{j=1}^{\alpha} R_{i_j}$ então $\sum_{j=1}^{\alpha} i_j = 2mn$, ou seja,*

$$\mathfrak{F}_{mn} = R_{i_1} \cup R_{i_2} \cdots \cup R_{i_2} \Rightarrow i_1 + i_2 + \cdots + i_\alpha = 2mn.$$

Demonstração. De fato, pela Proposição 5.3.5, todo modelo de mergulho de um grafo completo biparticionado $K_{m,n}$ sobre uma superfície compacta orientada é da forma $\mathfrak{F}_{mn} = R_4 \cup \cdots \cup R_4 \cup \cdots \cup R_{4+2k} \cup \cdots \cup R_{4+2k}$, onde o número de regiões do tipo R_i é igual i. Portanto, pelo Lema 5.3.12, a soma dos índices é

$$\sum_{j=1}^{\alpha} i_j = 4F_4 + 6F_6 + \cdots + (4 + 2k) F_{4+2k} = 2mn,$$

como desejávamos mostrar. ∎

5.3.5 Modelos com duas regiões

Descreveremos a forma geral dos modelos de duas regiões de mergulhos de 2-células do grafo completo biparticionado sobre uma superfície compacta orientada e calcularemos o correspondente número de elementos.

Proposição 5.3.14 *Seja $\mathfrak{M}_2$ o conjunto de todos os modelos de mergulhos de 2-células do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$ sobre uma superfície compacta orientada Ω formados por 2 regiões. Então $\mathfrak{M}_2$ tem $mn/2 - 1$ elementos e*

$$\mathfrak{M}_2 = \{\mathfrak{F}_{mn}^1 = R_4 \cup R_{2mn-4},\ \mathfrak{F}_{mn}^2 = R_6 \cup R_{2mn-6},\ \mathfrak{F}_{mn}^3 = R_8 \cup R_{2mn-8}, \cdots,$$
$$\mathfrak{F}_{mn}^k = R_{2k+2} \cup R_{2mn-2k-2}, \cdots, \mathfrak{F}_{mn}^{mn/2-2} = R_{mn-2} \cup R_{mn+2}, \mathfrak{F}_{mn}^{mn/2-1} = R_{mn} \cup R_{mn}\Big\}.$$

Demonstração. Seja $\mathfrak{F}_{mn}^2 \equiv \Omega(2)$, $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega$. Como $\alpha = 2$, pelo Corolário 5.3.8, m e n são inteiros pares. Suponha que $\mathfrak{F}_2^i = R_{i1} \cup R_{i2}$ está em $\mathfrak{M}_2$. Logo, pelo Lema 5.3.13, $i_1 + i_2 = 2mn$. Mas pelo Lema 5.3.12, os modelos $\mathfrak{F}_{mn}$ deverão ser necessariamente como discriminados no conjunto $\mathfrak{F}_2$ acima. Como que $i_1 = 4, 6, \cdots, mn$, concluímos que existem $(mn - 4)/2 + 1 = mn/2 - 1$ modelos distintos para $\mathfrak{F}_2$. ∎

5.3.6 Modelos com 4 regiões

Dedicaremos uma atenção especial ao estudo do modelo com quatro regiões porque permitirá tirar conclusões sobre os demais tipos de modelos. Em princípio estudaremos alguns casos específicos de modelos com 4 regiões, no intuito de descobrirmos leis de formações que se apliquem ao caso geral.

Lema 5.3.15 *Seja $\mathfrak{M}_4(4)$ o conjunto de modelos de $\mathfrak{M}_4$ que fixam a primeira região $R_{i_1} = R_4$, então o número de regiões distintas de $\mathfrak{M}_4(4)$ é:*

$$|\mathfrak{M}_4(4)| = \begin{cases} \sum_{t=0}^{mn/6-2}(4+6t), & se\ mn \equiv 0 \pmod 3 \\ \sum_{t=0}^{mn/6-8/3}(5+6t) + mn/2 - 3, & se\ mn \equiv 1 \pmod 3 \\ \sum_{t=0}^{mn/6-7/3}(3+6t) + mn/2 - 3, & se\ mn \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Demonstração. Seja $\mathfrak{F}^i_{mn}(4) = R_4 \cup R_{i_2} \cup R_{i_3} \cup R_{i_4} \in \mathfrak{M}_4(4)$. Pelo Lema 5.3.13, $4 + i_2 + i_3 + i_4 = 2mn$. A variação máxima de i_3 ocorre quando $i_1 = i_2 = 4$. Fazendo $\mathfrak{F}^i_{mn}(4) = \mathfrak{F}^i_4$ temos os seguintes modelos:

$i_2{=}4 \Rightarrow \mathfrak{F}^1_4{=}R_4{\cup}R_4{\cup}R_4{\cup}R_{2mn-12}, \mathfrak{F}^2_4{=}R_4{\cup}R_4{\cup}R_6{\cup}R_{2mn-14}, \cdots, \mathfrak{F}^{mn/2-3}_4{=}R_4{\cup}R_4{\cup}R_{mn-4}{\cup}R_{mn-4};$
$i_2{=}6 \Rightarrow \mathfrak{F}^1_4{=}R_4{\cup}R_6{\cup}R_6{\cup}R_{2mn-16}, \mathfrak{F}^2_4{=}R_4{\cup}R_6{\cup}R_8{\cup}R_{2mn-18}, \cdots, \mathfrak{F}^{mn/2-5}_4{=}R_4{\cup}R_6{\cup}R_{mn-6}{\cup}R_{mn-4};$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$
$i_2{=}(2mn{-}6)/3 \Rightarrow \mathfrak{F}^1_4{=}R_4{\cup}R_{(2mn-4)/3}{\cup}R_{(2mn-4)/3}{\cup}R_{(2mn-4)/3}, se\ 2mn{-}4{\equiv}0{,}1 \pmod 3$, *caso contrário,*
temos: $\mathfrak{F}^1_4{=}R_4{\cup}R_{(2mn-4)/3}{\cup}R_{(2mn-4)/3}{\cup}R_{(2mn-4)/3}, \mathfrak{F}^2_4{=}R_4{\cup}R_{(2mn-4)/3}{\cup}R_{(2mn-4)/3}{\cup}R_{(2mn-4)/3+2}$

Portanto, o número de modelos distintos quando $i_1 = 4$ é:
(i) Se $mn \equiv 0 \pmod 3$ então

$$\begin{aligned} |\mathfrak{F}_4(4)| &= (mn/2-3) + (mn/2-5) + (mn/2-6) + \cdots + 8 + 7 + 6 + 4 + 3 + 1 \\ &= \sum_{t=0}^{mn/6-2}(1+3t) + \sum_{t=0}^{mn/6-2}(3+3t) = \sum_{t=0}^{mn/6-2}(4+6t) \end{aligned}$$

(ii) Se $mn \equiv 1 \pmod 3$ então

$$\begin{aligned} |\mathfrak{F}_4(4)| &= (mn/2-3) + (mn/2-5) + (mn/2-6) + \cdots + 9 + 8 + 6 + 5 + 3 + 2 \\ &= \sum_{t=0}^{mn/6-5/3}(2+3t) + \sum_{t=0}^{mn/6-8/3} 3 + 3t = mn/2 - 3 + \sum_{t=0}^{mn/6-8/3}(5+6t). \end{aligned}$$

(iii) Se $mn \equiv 2 \pmod 3$ então

$$\begin{aligned} |\mathfrak{F}_4(4)| &= (mn/2-3) + (mn/2-5) + (mn/2-6) + \cdots + 8 + 7 + 5 + 4 + 2 + 1 \\ &= \sum_{t=0}^{mn/6-4/3}(1+3t) + \sum_{t=0}^{mn/6-7/3}(2+3t) = mn/2 - 3 + \sum_{t=0}^{mn/6-7/3}(3+6t). \end{aligned}$$

Os casos $(i), (ii)$ e (iii) provam o desejado. ∎

Lema 5.3.16 *Seja $\mathfrak{M}_4(6)$ o conjunto de modelos de $\mathfrak{M}_4$ que fixam a primeira região $R_{i_1} = R_6$, então o número de regiões distintas de $\mathfrak{M}_4(6)$ é:*

$$|\mathfrak{M}_4(6)| = \begin{cases} \left(\sum_{t=0}^{mn/6-3}(3+6t)\right) + mn/2 - 5, & se\ mn \equiv 0 \pmod 3 \\ \sum_{t=0}^{mn/6-8/3}(4+6t), & se\ mn \equiv 1 \pmod 3 \\ \sum_{t=0}^{mn/6-7/3}(5+6t) + mn/2 - 5, & se\ mn \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Demonstração. Análoga à demonstração do Lema 5.3.15. ∎

Lema 5.3.17 *Seja $\mathfrak{M}_4(8)$ o conjunto de modelos de $\mathfrak{M}_4$ que fixam a primeira região $R_{i_1} = R_8$, então o número de regiões distintas de $\mathfrak{M}_4(8)$ é:*

$$|\mathfrak{F}_4(8)| = \begin{cases} \sum_{t=0}^{mn/6-10/3}(4+6t), \text{ se } mn \equiv 0 \pmod 3 \\ \sum_{t=0}^{mn/6-4}(5+6t) + mn/2 - 7, \text{ se } mn \equiv 1 \pmod 3 \\ \sum_{t=0}^{mn/6-11/3}(3+6t) + mn/2 - 7, \text{ se } mn \equiv 2 \pmod 3 . \end{cases}$$

Demonstração. Análoga à demonstração do Lema 5.3.15. ∎

Apesar dos Lemas 5.3.15, 5.3.16 e 5.3.17 descreverem modelos de $\mathfrak{M}_4$ do mergulho $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega(4)$ que fixam a primeira região, apenas os casos $a_1 = 4, 6$ e 8, permitem deduzir os tipos e números de modelos para os demais casos de a_1. Observe que a variação do índice i_3 controla a quantidade de subconjuntos distintos de $\mathfrak{M}_4$ cujos índices i_1 e i_2 são fixos. Para determinados valores extremos de i_3, obteremos uma seqüência bem comportada que revela o número dos possíveis tipos de modelos de $\mathfrak{M}_4$.

5.3.7 Seqüência dos tipos de modelos com quatro regiões

No cálculo do número de modelos com quatro regiões, o conhecimento preciso das seqüências dos números de modelos que fixam a primeira região, representa um fator decisivo na questão da contagem. A seguir forneceremos as condições para as construções dessas seqüências e o correspondente número de elementos.

Definição 5.3.18 *Seja $\mathfrak{I}_1 = \{4, 6, 8, \cdots, mn/2\}$ o conjunto correspondente à variação do índice i_1. Seja $\mathfrak{M}_4(\mu) = \{\mathfrak{F}_{mn} \in \mathfrak{M}_4 : \mathfrak{F}_{mn} = R_\mu \cup R_{i_1} \cup R_{i_3} \cup R_{i_4},\ \mu \in \mathfrak{I}_1\}$ o conjunto de todos os modelos de $\mathfrak{M}_4$ que fixam o primeiro índice $i_1 = \mu$. Chamaremos de* ***seqüência dos números de modelos que fixam*** *i_1 a seqüência $S_t(\mu) = (a_0, a_1, \cdots, a_t)$, $a_k = |\mathfrak{M}_4(4+2k)|$.*

Devido a ordem estabelecida nos índices das regiões de um modelo (veja Notação 5.3.11), existe uma interdependência entre os índices das regiões de um modelo.

Definição 5.3.19 *Se $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega$ e $\mathfrak{F}_{mn} \equiv \Omega(\alpha)$, chamaremos de $\mathfrak{I}_s$, $s \in \{1, 2, \cdots, \alpha\}$, o conjunto dos índices da região R_s de um modelo $\mathfrak{F}_{mn} \in \mathfrak{M}_\alpha$. Se $s > 1$ chamaremos de* ***índice mínimo relativo*** *$i^{\text{rel}}_{s\,\min}$ o menor índice do conjunto $\mathfrak{I}_s$ relativo aos índices anteriores. Chamaremos de* ***índice máximo relativo*** *$i^{\text{rel}}_{s\,\max}$ o maior índice de $\mathfrak{I}_s$ relativo aos demais.*

Notação 5.3.20 *Denotamos por $\mathfrak{I}_2^\mu$ o conjunto dos índices da segunda região de um modelo relativa à primeira região $i_1 = \mu$. Neste caso, $i^\mu_{2\,\min}$ é o índice mínimo para a segunda região relativa à primeira. De modo análogo, chamaremos de $i_3^{\mu,\eta}$ o índice da terceira região relativa às duas primeiras. Observe que o conjunto dos índices da s-ésima região é $\mathfrak{I}_s = \{4, 6, 8, \cdots, i_{s\max}\}$.*

Proposição 5.3.21 *Se* $\mathfrak{F}^i_{mn} = R_{i_1} \cup R_{i_2} \cup R_{i_3} \cup R_{i_4} \in \mathfrak{M}_4$ *então o maior valor inteiro positivo assumido pelos índices é*

$$i_{1\max} = mn/2,\ i_{2\max} = [(2mn-4)/3],\ i_{3\max} = mn-4,\ i_{4\max} = mn-6.$$

Demonstração. O índice i_k será máximo quando os demais índices forem mínimos. Das condições $i_1 \le i_2 \le i_3 \le i_4$ e do Lema 5.3.13, segue que:

1) i_1 é máximo $\Rightarrow i_1 = i_2 = i_3 = i_4 \Rightarrow 4i_{1\max} = 2mn \Rightarrow i_{1\max} = mn/2$;
2) i_2 é máximo $\Rightarrow i_i = 4, i_{2\max} = i_3 = i_4 \Rightarrow 3i_{2\max} + 4 = 2mn \Rightarrow i_{2\max} = [(2mn-4)/3]$;
3) i_3 é máximo $\Rightarrow i_1 = i_2 = 4$ e $i_{3\max} = i_4 \Rightarrow 2i_{3\max} + 8 = 2mn \Rightarrow i_{3\max} = mn-4$;
4) i_4 é máximo $\Rightarrow i_1 = i_2 = i_3 = 4$; logo, $i_{4\max} + 12 = 2mn \Rightarrow i_{4\max} = mn-6$. ∎

No caso geral, os índices mínimo e máximo relativos de $\mathfrak{I}_s$ podem ser determinados conforme o lema.

Lema 5.3.22 *Seja* $\mathfrak{F}^i_{mn} = R_{i_1} \cup R_{i_2} \cup R_{i_3} \cup \cdots \cup R_{i\alpha}$ *o modelo com* α *regiões de um mergulho de 2-células do grafo completo biparticionado* $K_{m,n}$ *sobre uma superfície compacta orientada* Ω*, então os índices mínimo e máximo relativos de* $\mathfrak{I}_s$ *são*

$$i^{\mathrm{rel}}_{s\min} = i_{s-1} \quad e \quad i^{\mathrm{rel}}_{s\max} = (2mn - \textstyle\sum_{j=1}^{s-1} i_j)/(\alpha - s + 1).$$

Demonstração. De fato, a escolha de i_s depende dos índices anteriores, logo estes já estão fixados quando decidimos pela escolha de i_s e como $i_{s-1} \le i_s$ então $i^{i_1}_{s\min} = i_{s-1}$. Por outro lado, i_s é máximo quando os índices posteriores são mínimos; logo, $i_s \le i_{s+1} \le \cdots \le i_\alpha$, e pelo Lema 5.3.13, temos que

$$i_1 + \cdots + i_{s-1} + (k\text{-}s{+}1)\, i^{\mathrm{rel}}_{s\max} = 2mn \Rightarrow i^{\mathrm{rel}}_{s\max} = (2mn - \textstyle\sum_{j=1}^{s-1} i_j)/(k\text{-}s{+}1).$$ ∎

Proposição 5.3.23 *O número de modelos com 4 regiões do conjunto* $\mathfrak{M}_4$ *é*

$$|\mathfrak{M}_4| = \textstyle\sum_{k=0}^{mn/4-1} a_k.$$

Demonstração. De fato, pela Definição 5.3.18, $\mathfrak{M}_4 = \bigcup_{\mu\in\mathfrak{I}_1} \mathfrak{M}_4(\mu)$ e a_k é igual ao número de elementos $\mathfrak{M}_4(4+2k)$. Como $\mu \in \mathfrak{I}_1 = \{4, 6, \cdots, i^\mu_{2\max}\}$, $i^\mu_{2\max} = mn/2$, o valor máximo assumido por k é: $4 + 2k = i^\mu_{2\max} = mn/2 \Rightarrow k = mn/4 - 1$. Como todos os conjuntos $\mathfrak{M}_4(\mu)$'s são distintos, segue o resultado. ∎

Corolário 5.3.24 *O número de termos da seqüência* $S_t(\mu)$ *é* $mn/4$.

Demonstração. De fato, Pela Definição 5.3.18, $S_t(\mu)$ possui $t+1$ termos e, pela Proposição 5.3.23, temos que $t + 1 = k + 1 = mn/4$, o que mostra o desejado. ∎

Proposição 5.3.25 *O termo* a_k *da seqüência* $S_t(\mu)$ *do número de elementos do conjunto* $\mathfrak{M}_4(\mu)$ *de modelos de* $\mathfrak{M}_4$ *que fixam a primeira região* $\mu = i_1$ *é igual a*

$$a_k = \textstyle\sum_{t=0}^{[(mn-4k-8)/3]} ([(mn-3t)/2] - 3 - 2k).$$

Demonstração. De fato, pelas Definições 5.3.18 e 5.3.19 temos, para todo $\mu \in \mathfrak{I}_1$, que

$$\begin{aligned} a_k &= \mathfrak{M}_4(\mu) = \mathfrak{M}_4(4+2k) = \sum_{\eta\in\mathfrak{I}_2} |\mathfrak{I}_3^{\mu,\eta}| = \sum_{\eta\in\mathfrak{I}_2} \left(\left(i_{3\max}^{\mu,\eta} - i_{3\min}^{\eta}\right)/2+1\right) \\ &= \sum_{\eta\in\mathfrak{I}_2} \left(\left((2mn-\mu-\eta)/2-\eta\right)/2+1\right) = \sum_{t=0}^{(mn-4k-8)/3} \left((mn-3t)/2-3-2k\right). \end{aligned}$$

Como k é um número inteiro, segue o resultado. ∎

Proposição 5.3.26 *Os modelos do conjunto $\mathfrak{M}_4(\mu,\eta) \subset \mathfrak{M}_4$ que fixam $i_1 = \mu$ e $i_2 = \eta$ assumem uma das duas formas:*

$$\begin{array}{lll} R_\mu \cup R_\eta \cup R_\eta \cup R_{2mn-\mu-2\eta} & & R_\mu \cup R_\eta \cup R_\eta \cup R_{2mn-\mu-2\eta} \\ R_\mu \cup R_\eta \cup R_{\eta+2} \cup R_{2mn-\alpha-2\eta-2} & & R_\mu \cup R_\eta \cup R_{\eta+2} \cup R_{2mn-\mu-2\eta-2} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & \textit{ou} & \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ R_\mu \cup R_\eta \cup R_{\frac{2mn-\mu-\eta}{2}} \cup R_{\frac{2mn-\mu-\eta}{2}} & & R_\mu \cup R_\eta \cup R_{\frac{2mn-\mu-\eta-1}{2}} \cup R_{\frac{2mn-\mu-\eta+1}{2}} \end{array}$$

caso k seja par ou ímpar, respectivamente, onde $\eta = \mu + 2k$.

Demonstração. Fixados $i_1 = \mu$ e $i_2 = \eta$, o número de modelos de $\mathfrak{M}_4$ depende da variação do índice i_3. Mas, pelo Lema 5.3.22, $i_{3\min}^{\mu,\eta} = \eta$ e $i_{3\max}^{\mu,\eta} = (2mn-\mu-\eta)/2$, logo existem $\left(i_{3\max}^{\mu,\eta} - i_{3\min}^{\mu,\eta}\right)/2+1$ modelos distintos que fixam os índices i_1 e i_2. Fazendo $\eta = \mu + 2k$ e as devidas substituições, obtemos

$$i_{3\max}^{\mu,\eta} = (2mn - 2\mu - 2k)/2 = mn - \mu - k.$$

Mas pelo Lema 5.3.12, $i_{3\max}^{\mu,\eta}$ deve ser par. Se k é par então i_s é par para todo $s \in \{1,2,3,4\}$, e o último modelo será da forma

$$F_4^i(\mu) = \cup_{j=1}^4 R_{i_j} = R_\mu \cup R_\eta \cup R_{(2mn-\mu-\eta)/2} \cup R_{(2mn-\mu-\eta)/2}.$$

Como mn e μ são números pares, devemos subtrair uma unidade em i_3 e somar uma unidade ao índice i_4, quando k for ímpar, para satisfazer a condição da soma dos índices do Lema 5.3.13 e a condição de índices pares. Neste caso, o último modelo será do tipo

$$F_4^i(\alpha) = \cup_{j=1}^4 R_{i_j} = R_\mu \cup R_{\mu+2k} \cup R_{2mn-\mu-\eta-1/2} \cup R_{(2mn-\mu-\eta+1)/2}.$$ ∎

Proposição 5.3.27 *Seja $S_h(\mu,\eta) = (b_0, b_1, \cdots, b_h)$, $b_j = |\mathfrak{M}_4(\mu, \mu+4j)|$ a seqüência de números de elementos do conjunto $\mathfrak{M}_4(\mu,\eta)$ de modelos de $\mathfrak{M}_4$ que fixam $i_1 = \mu$ e $i_2 = \eta$, então*

$$h = \begin{cases} \sum_{\mu\in\mathfrak{I}_1} (mn-2\mu)/3, \textit{ se } mn \equiv p \bmod 3 \textit{ e } \mu \equiv q \bmod 3 \textit{ e } p+q \equiv 0 \pmod 3, \\ \sum_{\mu\in\mathfrak{I}_1} (mn-2\mu-1)/3, \textit{ se } mn \equiv p \bmod 3 \textit{ e } \mu \equiv q \bmod 3 \textit{ e } p+q \equiv 1 \pmod 3, \\ \sum_{\mu\in\mathfrak{I}_1} (mn-2\mu-2)/3, \textit{ se } mn \equiv p \bmod 3 \textit{ e } \mu \equiv q \bmod 3 \textit{ e } p+q \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Demonstração. Fixado $\mu \in \mathfrak{I}_i$, a variação de h é medida por $\mathfrak{I}_2^\mu$. Por definição, $b_j = |\mathfrak{M}_4(\mu, \mu+2k)|$, $j = 0, 1, \cdots, h$, e portanto o número de elementos de $S_h(\mu,\eta)$ será igual a $h+1 = \sum_{\mu\in\mathfrak{I}_1} |\mathfrak{I}_2^\mu| + 1$.

$$h = \sum_{\mu\in\mathfrak{I}_1} \left(\left(i_{2\max}^{\mu} - i_{2\min}^{\mu}\right)/2+1\right) = \sum_{\mu\in\mathfrak{I}_1} \left(\left((2mn-\mu)/3-\mu\right)/2+1\right).$$

Porém, $|\mathfrak{I}_2^\mu|$ é um número inteiro e $\mu = i_1$ é um inteiro par maior ou igual a 4. Fazendo um ajuste nos parâmetros da fórmula de h para que $|\mathfrak{I}_2^\mu| \in \mathbb{Z}$ e tomando o devido cuidado para não alterar o número de elementos de $\mathfrak{I}_2^\mu$, obtemos

$$|\mathfrak{I}_2^\mu| = \begin{cases} ((2mn-\mu)/3-\mu)/2+1, \text{ se } mn \equiv 0 \bmod 3 \text{ e } \mu \equiv 0 \bmod 3 \\ ((2mn-\mu+1)/3-\mu-1)/2+1, \text{ se } mn \equiv 0 \bmod 3 \text{ e } \mu \equiv 1 \bmod 3 \\ ((2mn-\mu-1)/3-\mu-1)/2+1, \text{ se } mn \equiv 0 \bmod 3 \text{ e } \mu \equiv 2 \bmod 3 \\ ((2mn-\mu-1)/3-\mu+1)/2+1, \text{ se } mn \equiv 1 \bmod 3 \text{ e } \mu \equiv 0 \bmod 3 \\ ((2mn-\mu+1)/3-\mu-1)/2+1, \text{ se } mn \equiv 1 \bmod 3 \text{ e } \mu \equiv 1 \bmod 3 \\ ((2mn-\mu)/3-\mu)/2+1, \text{ se } mn \equiv 1 \bmod 3 \text{ e } \mu \equiv 2 \bmod 3 \\ ((2mn-\mu-1)/3-\mu-1)/2+1, \text{ se } mn \equiv 2 \bmod 3 \text{ e } \mu \equiv 0 \bmod 3 \\ ((2mn-\mu)/3-\mu)/2+1, \text{ se } mn \equiv 2 \bmod 3 \text{ e } \mu \equiv 1 \bmod 3 \\ ((2mn-\mu+1)/3-\mu-1)/2-1, \text{ se } mn \equiv 2 \bmod 3 \text{ e } \mu \equiv 2 \bmod 3 \end{cases}$$

É fácil verificar que cada expressão acima é um número inteiro e representa exatamente o número de elementos do conjunto $\mathfrak{I}_2^\mu \in \mathbb{Z}$. Como estes casos esgotam todas as possibilidades para os inteiros mn e μ, isto é suficiente para concluir a demonstração. ■

Corolário 5.3.28 *Se $S_h(\mu,\eta)$ é a seqüência de números de elementos do conjunto de modelos $\mathfrak{M}_4(\mu,\eta)$ que fixam $i_1 = \mu$ e $i_2 = \eta$, então h é igual a*

$$\begin{array}{l} \sum_{j=0}^{mn/4-2}(mn-8-4j)/3, \text{ se } mn \equiv p \bmod 3 \text{ e } (4+2j) \equiv q \bmod 3 \text{ e } p+q \equiv 0 \pmod 3, \\ \sum_{j=0}^{mn/4-2}(mn-9-4j)/3, \text{ se } mn \equiv p \bmod 3 \text{ e } (4+2j) \equiv q \bmod 3 \text{ e } p+q \equiv 1 \pmod 3, \\ \sum_{j=0}^{mn/4-2}(mn-10-4j)/3, \text{ se } mn \equiv p \bmod 3 \text{ e } (4+2j) \equiv q \bmod 3 \text{ e } p+q \equiv 2 \pmod 3. \end{array}$$

Demonstração. Como $\mu \in \mathfrak{I}_1 = \{i_{1\min} = 4, 6, \cdots, i_{\max} = mn/2\}$, substitua μ por $4-2j$ na expressão de h na Proposição 5.3.27. ■

Proposição 5.3.29 *O k-ésimo termo da seqüência $S_h(\mu,\eta) = (b_0, b_1, \cdots, b_h)$ é*

$$b_k = \begin{cases} (mn-2\mu-3k)/2+1, \text{ se } k \equiv 0 \pmod 2 \\ (mn-2\mu-3k-1)/2+1, \text{ se } k \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Demonstração. Por definição temos que

$$\begin{aligned} b_k &= |\mathfrak{M}_4(\mu,\eta)| = |\mathfrak{M}_4(\mu,\mu+2k)| = \left(i_{3\max}^{\mu,\mu+2k} - i_{3\min}^{\mu,\mu+2k}\right)/2+1, \ \mu \in \mathfrak{I}_1 \text{ e } \eta \in \mathfrak{I}_2, \\ &= ((2mn-\mu-\mu-2k)/2-\mu-2k)/2+1 = (mn-2\mu-3k)/2+1. \end{aligned}$$

Como $b_k \in \mathbb{Z}$, resulta que $b_k = (mn-2\mu-3k)/2+1$, *se* $k \equiv 0 \pmod 2$ ou $b_k = (mn-2\mu-3k-1)/2+1$, se $k \equiv 1 \pmod 2$. Como mn e 2μ são inteiros pares, é fácil concluir que as duas expressões de b_k acima são sempre números inteiros. ■

Proposição 5.3.30 *Sejam $S_h^0(\mu,\eta) = (b_0, b_2, \cdots, b_{2p})$ e $S_h^1(\mu,\eta) = (b_1, b_3, \cdots, b_{2p+1})$ as subseqüências de $S_h(\mu,\eta)$ formadas pelos termos de índices pares e ímpares, respectivamente. Então os termos das seqüências $S_h^0(\mu,\eta)$ e $S_h^1(\mu,\eta)$ estão em progressão aritmética na ordem decrescente, ambas com razão -3.*

Demonstração. De fato, pela Proposição 5.3.29, a diferença entre dois termos consecutivos $b_{2p}, b_{2p+2} \in S_h^0(\mu,\eta)$, é a razão

$$r = b_{2p+2} - b_{2p} = (mn - 2\mu - 3(2p+2))/2 + 1 - ((mn - 2\mu - 3(2p))/2 + 1) = -3,$$

portanto, $S_h^0(\mu,\eta)$ é uma progressão aritmética decrescente de razão -3. Por outro lado, a diferença entre dois termos consecutivos $b_{2p+1}, b_{2p+3} \in S_h^1(\mu,\eta)$ é

$$r = (mn - 2\mu - 3(2p+3) - 1)/2 + 1 - ((mn - 2\mu - 3(2p+1) - 1)/2 + 1) = -3,$$

logo os termos da seqüência $S_h^1(\mu,\eta)$ estão em progressão aritmética de razão -3. ∎

Proposição 5.3.31 *Seja $\mathfrak{I}_2^\mu$ o conjunto de índices relativos a $\mu = i_1$ da região R_{i_2} de um modelo de $\mathfrak{M}_4$. Então o número de elementos $|\mathfrak{I}_2^\mu|$ de $\mathfrak{I}_2^\mu$ é par se, e somente se,*

$$mn \equiv p \,(\mathrm{mod}\, 3) \quad e \quad \mu \equiv q \,(\mathrm{mod}\, 3)\,,\ p, q \in \mathbb{Z}_3 \ e\ p + q \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3)\,.$$

Demonstração. Temos que: $|\mathfrak{I}_2^\mu| = h + 1 = ((2mn - \mu)/3 - \mu)/2 + 1$. Além disso, m, n e μ são inteiros positivos pares, logo $2mn = 24\xi + 8p$ e $\mu = 6\xi + 2q$. Substituindo $mn \equiv p \bmod 3$ e $\mu \equiv q \bmod 3$ na expressão de $|\mathfrak{I}_2^\mu|$ obtemos:

1) $mn \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ e $\mu \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3) \Rightarrow |\mathfrak{I}_2^\mu| = 2(p - 2q) + 1 \Rightarrow |\mathfrak{I}_2^\mu|$ é ímpar;
2) $mn \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ e $\mu \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3) \Rightarrow |\mathfrak{I}_2^\mu| = 2(p - 2q - 1) \Rightarrow \mathfrak{I}_2^\mu|$ é par;
3) $mn \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ e $\mu \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3) \Rightarrow |\mathfrak{I}_2^\mu| = 2(p - 2q) - 1 \Rightarrow |\mathfrak{I}_2^\mu|$ é ímpar;
4) $mn \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ e $\mu \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3) \Rightarrow |\mathfrak{I}_2^\mu| = 2(p - 2q + 1) \Rightarrow |\mathfrak{I}_2^\mu|$ é par;
5) $mn \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ e $\mu \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3) \Rightarrow |\mathfrak{I}_2^\mu| = 2(p - 2q) - 1 \Rightarrow |\mathfrak{I}_2^\mu|$ é ímpar;
6) $mn \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ e $\mu \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3) \Rightarrow |\mathfrak{I}_2^\mu| = 2(p - 2q) + 1 \Rightarrow |\mathfrak{I}_2^\mu|$ é ímpar;
7) $mn \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ e $\mu \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3) \Rightarrow |\mathfrak{I}_2^\mu| = 2(p - 2q) + 1 \Rightarrow |\mathfrak{I}_2^\mu|$ é par;
8) $mn \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ e $\mu \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3) \Rightarrow |\mathfrak{I}_2^\mu| = 2(p - 2q) - 1 \Rightarrow |\mathfrak{I}_2^\mu|$ é ímpar;
9) $mn \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ e $\mu \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3) \Rightarrow |\mathfrak{I}_2^\mu| = 2(p - 2q) \Rightarrow |\mathfrak{I}_2^\mu|$ é par. ∎

Corolário 5.3.32 *O número de elementos da seqüência $S_h(\mu,\eta)$ é um inteiro par se, e somente se,*

$$\mu \equiv 1 \bmod 3 \ e\ 2mn \equiv 0 \bmod 3,\ ou\ \mu \equiv 0 \bmod 3 \ e\ 2mn \equiv 2 \bmod 3,\ ou\ \mu \equiv 2 \bmod 3.$$

Demonstração. Usando a Proposição 5.3.31, construiremos a seguinte tabela: os numeradores representam a paridade (p = *par* e i = *ímpar*) do número de elementos de $\mathfrak{I}_2^\mu$, $\mu = i_1$, quando $p + q \equiv 0, 1, 2 \bmod 3$ e o denominador indica a paridade da soma $\sum_{j=4}^{\mu} |i_2^\mu|$.

$p+q \diagdown \mu$	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**	**22**	**24**	**26**	**28**	**30**	**32**	**34**	36	⋯
0	$\frac{p}{p}$	$\frac{i}{i}$	$\frac{i}{p}$	$\frac{p}{p}$	$\frac{i}{i}$	$\frac{i}{p}$	$\frac{p}{p}$	$\frac{i}{i}$	$\frac{i}{p}$	$\frac{p}{p}$	$\frac{i}{i}$	$\frac{i}{p}$	$\frac{p}{p}$	$\frac{i}{i}$	$\frac{i}{p}$	$\frac{p}{p}$	$\frac{i}{i}$	⋯
1	$\frac{i}{i}$	$\frac{p}{p}$	$\frac{i}{i}$	$\frac{i}{i}$	$\frac{p}{p}$	$\frac{i}{i}$	$\frac{i}{i}$	$\frac{p}{p}$	$\frac{i}{i}$	$\frac{i}{i}$	$\frac{p}{p}$	$\frac{i}{i}$	$\frac{i}{i}$	$\frac{p}{p}$	$\frac{i}{i}$	$\frac{i}{i}$	$\frac{p}{p}$	⋯
2	$\frac{i}{i}$	$\frac{i}{p}$	$\frac{p}{p}$	$\frac{i}{i}$	$\frac{i}{p}$	$\frac{p}{p}$	$\frac{i}{i}$	$\frac{i}{p}$	$\frac{p}{p}$	$\frac{i}{i}$	$\frac{i}{p}$	$\frac{p}{p}$	$\frac{i}{i}$	$\frac{p}{p}$	$\frac{p}{p}$	$\frac{i}{i}$	$\frac{i}{p}$	⋯

Uma análise na paridade dos denominadores da tabela acima mostra o enunciado. ∎

Teorema 5.3.33 *Se* $mn \equiv p \,(\mathrm{mod}\, 3)$ *e* $\mu \equiv q \,(\mathrm{mod}\, 3)$, $p, q \in \mathbb{Z}_3$ *então as seqüências de números de modelos do conjunto* $|\mathfrak{M}_4(\mu, \eta)|$, *que fixam os primeiros índices* $\mu \in \mathfrak{I}_1$, $\eta \in \mathfrak{I}_2$ *será*

$$S_h(\mu) = \begin{cases} \left(\frac{mn}{2} - \mu + 1, \frac{mn}{2} - \mu\text{-}1, \frac{mn}{2}\text{-}\mu\text{-}2, \cdots, 8, 7, 5, 4, 2, 1\right), \text{se } p + q \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3) \\ \left(\frac{mn}{2} - \mu + 1, \frac{mn}{2} - \mu\text{-}1, \frac{mn}{2}\text{-}\mu\text{-}2, \cdots, 9, 7, 6, 4, 3, 1\right), \text{se } p + q \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3) \\ \left(\frac{mn}{2} - \mu + 1, \frac{mn}{2} - \mu\text{-}1, \frac{mn}{2}\text{-}\mu\text{-}2, \cdots, 9, 8, 6, 5, 3, 2\right), \text{se } p + q \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3). \end{cases}$$

Demonstração. Escrevendo $mn \equiv p \,(\mathrm{mod}\, 3)$ e $\mu \equiv q \,(\mathrm{mod}\, 3)$, temos 9 casos a analisar:
1) Se $mn \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ e $\mu \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ então, pela Tabela do Corolário 5.3.32, $|S_h(\mu, \eta)|$ é ímpar, logo as subseqüências dos termos pares e ímpares de $S_h(\mu, \eta)$ são, respectivamente,

$$S^0_{h'}(\mu, \eta) = (b_0, \cdots, b_{h'}) = (a_0, a_2, \cdots, a_h) \text{ e } S^1_{h''}(\mu, \eta) = (c_0, \cdots, c_{h''}) = (a_1, a_3, \cdots, a_{h-1}).$$

Como $|S_h(\mu, \eta)| = h + 1$, então h é par; logo, $h' = h/2 + 1$ e $h'' = h/2$. Como $S^0_{h'}(\mu, \eta)$ e $S^1_{h''}(\mu, \eta)$ são, pela Proposição 5.3.30, ambas progressões aritméticas de razão -3, o conhecimento dos últimos termos dessas seqüências nos permite construir $S_h(\mu, \eta)$. Em particular $2mn \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$, e portanto pela Proposição 5.3.31 temos que

$$\begin{aligned} b_{h'} &= b_0 - 3(t' - 1) = a_0 - 3t/2 = mn/2 - 6p + 1 - 3(((2mn - 6p)/3\text{-}6p)/4) = 1 \ \ e \\ b_{h''} &= b_1 - 3(t'' - 1) = a_1 - 3(t/2 - 1) = mn/2 - \mu - 1\text{-}3(((2mn\text{-}\mu)/3\text{-}\mu)/4\text{-}1) = 2, \end{aligned}$$

desse modo temos que: $S^0_{h'}(\mu, \eta) = (mn/2 - \mu + 1, mn/2 - \mu - 2, \cdots, 13, 10, 7, 4, 1)$ e $S^1_{h''}(\mu, \eta) = (mn/2 - \mu - 1, mn/2 - \mu - 4, \cdots, 11, 8, 5, 2)$. Embaralhando os termos das duas seqüências, obtemos

$$S_h(\mu, \eta) = (mn/2 - \mu + 1, mn/2 - \mu - 1, mn/2 - \mu - 2, \cdots, 14, 13, 11, 10, 8, 7, 5, 4, 2, 1.$$

Os outros casos são mostrados de forma semelhante. ∎

O Teorema 5.3.33, mostra como é o tipo de seqüência $S_h(\mu, \eta)$ dos números de elementos do conjunto $\mathfrak{M}_4(\mu, \eta)$ de modelos com 4 regiões, que fixam as duas primeiras regiões $i_1 = \mu$ e $i_2 = \eta$, de mergulhos de 2-células de um grafo completo biparticionado $K_{m,n}$ sobre uma superfície compacta orientada Ω. Então a cardinalidade de $\mathfrak{M}_4(\mu, \eta)$ será alcançada quando determinarmos todas as seqüências $S_t(\mu)$'s, μ percorrendo o conjunto dos índices $\mathfrak{I}_1 = \{4, 6, 8, \cdots, mn/2\}$, e fizermos a soma de todos os seus elementos.

Corolário 5.3.34 *Se* $a_k \in S_t(\mu)$ *então* $a_k = \sum_{\eta \in \mathfrak{I}_2^{4+2k}} b_h$, $b_h \in S_h(4 + 2k, \eta)$.

Demonstração. Segue das Proposições 5.3.25 e 5.3.29. ∎

Observamos que os termos da seqüência $S_t(\mu)$ são obtidos em função dos termos de $S_h(\mu, \eta)$ segundo a relação $a_k = \sum_{\eta \in \mathfrak{I}_2^{4+2k}} a_h, a_h \in S_h(4 + 2k, \eta)$. O certo é que cada termo de $S_t(\mu)$ é igual ao somatório dos termos de uma seqüência $S_h(\mu, \eta)$. Foi esta a melhor maneira que conseguimos para calcular o número de regiões de modelos com 4 regiões.

l_0	$S_1(mn/2)$	1											
l_1	$S_2(mn/2-2)$	1	3										
l_2	$S_3(mn/2-4)$	2	3	5									
l_3	$S_5(mn/2-6)$	1	2	4	5	7							
l_4	$S_6(mn/2-8)$	1	3	4	6	7	9						
l_5	$S_7(mn/2-10)$	2	3	5	6	8	9	11					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
l_{3k}	$S_{4k+1}(mn/2-6k)$	1	2	4	5	7	8	10	$\vdots$	$6k+1$			
l_{3k+1}	$S_{4k+2}(mn/2-6k-2)$	1	3	4	6	7	9	10	12	$\vdots$	$6k+3$		
l_{3k+2}	$S_{4k+3}(mn/2-6k\ -4)$	2	3	5	6	8	9	11	12	14	$\vdots$	$6k+5$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$l_{mn/4-1}$	$S_h(4)$	b_0^4	b_1^4	b_2^4	b_3^4	b_4^4	b_5^4	b_6^4	b_7^4	b_8^4	b_9^4	$\vdots$	$mn/2-3$

Tabela 5.3: Triângulo dos modelos de mergulhos de $K_{n,n}$ com quatro regiões

5.3.8 Triângulo dos modelos com quatro regiões

A fim de obtermos uma visão geral da quantidade de elementos do conjunto $\mathfrak{M}_4$ disporemos os termos da seqüência $S_h(\mu,\eta)$ em uma forma triangular. Pelo Corolário 5.3.34, deduzimos que cada termo a_k da seqüência $S_t(\mu)$ é igual a soma dos termos b_k's da seqüência $S_h(\mu,\eta)$.

Definição 5.3.35 *Chamaremos de* ***triângulo dos modelos*** *de $\mathfrak{M}_4$ e denotamo-o por ∇, o triângulo de números inteiros formados pelas seqüências dos tipos de modelos $S_h(\mu,\eta)$, $\mu \in \{mn/2, mn/2-2, \cdots, 4\}$, $S_t(\mu,\eta) = \left(b_0^\mu, b_1^\mu, \cdots, b_{h_\mu}^\mu\right)$.*

Observe, na Tabela 5.3, que as seqüências que constituem o triângulo dos modelos são ordenadas de acordo com a ordem decrescente de $\mu \in \mathfrak{I}_1$, portanto, denominando por l_i a i-ésima linha de ∇ e se $\nabla = \{l_1, l_2, \cdots, l_k\}$, então o triângulo dos modelos de mergulhos de $K_{n,n}$ é como na Tabela 5.3.

5.3.9 Cardinalidade do conjunto dos modelos com quatro regiões

A cardinalidade do conjunto dos modelos com quatro regiões de mergulhos de 2-células do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$ sobre superfícies compactas orientadas será igual ao somatório dos elementos do triângulo ∇. Inicialmente, determinaremos o somatório dos elementos de cada linha l_i que corresponde ao elemento a_i da seqüência $S_t(\mu)$ e, em seguida, indicaremos com uma única expressão, a soma total desses somatórios.

Teorema 5.3.36 *Se* $mn \equiv p \,(\mathrm{mod}\, 3)$ *e* $\mu \equiv q \,(\mathrm{mod}\, 3)$, $p, q \in \mathbb{Z}_3$, *então o número de elementos de* $\mathfrak{M}_4(\mu)$ *é igual a*

$$|\mathfrak{M}_4(\mu)| = \begin{cases} \sum_{t=0}^{mn/6-\mu/3}(1+3t) + \sum_{t=0}^{mn/6-\mu/3-1}(2+3t), & \text{se } p+q \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3) \\ \sum_{t=0}^{mn/6-\mu/3-2/3}(1+3t) + \sum_{t=0}^{mn/6-\mu/3-2/3}(3+3t), & \text{se } p+q \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3) \\ \sum_{t=0}^{mn/6-\mu/3-1/3}(2+3t) + \sum_{t=0}^{mn/6-\mu/3-4/3}(3+3t), & \text{se } p+q \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3). \end{cases}$$

Demonstração. Pela Proposição 5.3.30, os termos da seqüência $S_h(\mu,\eta)$ formam duas subseqüências $S^0_{t'}(\mu,\eta)$ e $S^1_{t''}(\mu,\eta)$. Pelo Teorema 5.3.33, temos três casos para serem analisados:
Se $mn \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ *e* $\mu \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ então

$$\begin{aligned} S^0_{t'}(\mu,\eta) &= (1, 4, \cdots, 1+3t, \cdots, mn/2-\mu+1) \quad e \\ S^1_{t''}(\mu) &= (2, 5, \cdots, mn/2-\mu-1). \end{aligned}$$

Mas os limites superiores para t' e t'' ocorrem quando $1+3t' = mn/2-\mu+1$ e $2+3t'' = mn/2-\mu-1$, conseqüentemente, $t' = mn/6-\mu/3$ e $t'' = mn/6-\mu/3-1$. Portanto, se

$$S_t(\mu,\eta) = (a_j)_{j=0}^{t}, \; S^0_{t'}(\mu,\eta) = (b_k)_{k=0}^{t'} \;\; e \;\; S^1_{t''}(\mu,\eta) = (c_h)_{h=0}^{t''},$$

então o número de modelos com 4 regiões que fixam $i_1 = \mu$ será igual a

$$\begin{aligned} |\mathfrak{M}_4(\mu)| &= \textstyle\sum_{j=0}^{t} a_j = \left|\mathfrak{M}^0_{t'}(\mu)\right| + \left|\mathfrak{M}^1_{t''}(\mu)\right| = \sum_{k=0}^{t'} a_k + \sum_{h=0}^{t''} b_h \\ &= \textstyle\sum_{t=0}^{mn/6-\mu/3}(1+3t) + \sum_{t=0}^{mn/6-\mu/3-1}(3+3t). \end{aligned}$$

De modo análogo, concluímos que se $p+q \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ então o número de modelos com 4 regiões que fixam $i_1 = \mu$ será igual a

$$|\mathfrak{M}_4(\mu)| = \left|\mathfrak{M}^0_{t'}(\mu)\right| + \left|\mathfrak{M}^1_{t''}(\mu)\right| = \sum_{t=0}^{mn/6-\mu/3-2/3}(1+3t) + \sum_{t=0}^{mn/6-\mu/3-2/3}(3+3t)$$

e se $p+q \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ então o número de modelos com 4 regiões que fixam $i_1 = \mu$ será igual a

$$|\mathfrak{M}_4(\mu)| = \left|\mathfrak{M}^0_{t'}(\mu)\right| + \left|\mathfrak{M}^1_{t''}(\mu)\right| = \sum_{t=0}^{mn/6-\mu/3-1/3}(2+3t) + \sum_{t=0}^{mn/6-\mu/3-4/3}(3+3t).$$

Os casos acima provam o desejado. ∎

Uma forma mais simplificada de indicarmos a soma dos elementos da seqüência $S_t(\mu)$ é através da classe de congruência módulo 3 do inteiro $p+q$, segundo nos mostra o próximo corolário.

Corolário 5.3.37 *Se* $mn \equiv p \,(\mathrm{mod}\, 3)$ *e* $\mu \equiv q \,(\mathrm{mod}\, 3)$, $p, q \in \mathbb{Z}_3$, *a classe de congruência módulo 3, então o número de elementos do conjunto* $\mathfrak{M}_4(\mu)$, *de modelos com 4 regiões que fixam a primeira região* μ, *é igual a*

$$|\mathfrak{M}_4(\mu)| = \begin{cases} \sum_{t=0}^{mn/6-\mu/3-1}(3+6t) + mn/2-\mu+1, & \text{se } p+q \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3) \\ \sum_{t=0}^{mn/6-\mu/3-2/3}(4+6t), & \text{se } p+q \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3) \\ \sum_{t=0}^{mn/6-\mu/3-4/3}(5+6t) + mn/2-\mu+1, & \text{se } p+q \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3). \end{cases}$$

$a_{h_4}^4$	$\cdots$	a_8^4	a_7^4	a_6^4	a_5^4	a_4^4	a_3^4	a_2^4	a_1^4	a_0^4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
13	11	10	8	7	5	4	2	1		
11	9	8	6	5	3	2				
9	7	6	4	3	1					
7	5	4	2	1						
5	3	2								
3	1									
1										

Tabela 5.4: Outro arranjo para o triângulo dos modelos

Demonstração. Analisando cada expressão de $|S_t(\mu)|$ do Teorema 5.3.36, obtemos:
1) Se $p+q \equiv 0 \pmod 3$ então

$$|S_t(\mu)| = \sum_{t=0}^{mn/6-\mu/3} (1+3t) + \sum_{t=0}^{mn/6-\mu/3-1} (2+3t) = mn/2 - \mu + 1 + \sum_{t=0}^{mn/6-\mu/3-1} (3+6t).$$

2) Se $p+q \equiv 1 \pmod 3$ então

$$|S_t(\mu)| = \sum\nolimits_{t=0}^{mn/6-\mu/3-2/3} (1+3t) + \sum\nolimits_{t=0}^{mn/6-\mu/3-2/3} (3+3t) = \sum\nolimits_{t=0}^{mn/6-\mu/3\text{-}2/3} (4+6t)\, m.$$

3) Se $p+q \equiv 2 \pmod 3$ então

$$|S_t(\mu)| = \sum_{t=0}^{mn/6-\mu/3-1/3} (2+3t) + \sum_{t=0}^{mn/6-\mu/3-4/3} (3+3t) = mn/2\text{-}\mu+1+ \sum_{t=0}^{mn/6-\mu/3\text{-}4/3} (5+6t).$$

Se $m, n = 2$, o modelo do mergulho de $K_{m,n}$ possui apenas 2 regiões, logo não faz sentido falar de modelos com 4 regiões para o grafo $K_{2,2}$. ■

Observação 5.3.38 *No caso particular dos grafos $K_{2,4}$ e $K_{4,2}$ a expressão que fornece o número de modelos com quatro regiões é dada por*

$$|\mathfrak{M}_4(K_{2,4})| = |\mathfrak{M}_4(K_{4,2})| = \sum\nolimits_{t=0}^{0} (1+3t) + \sum\nolimits_{t=0}^{-1} (2+3t) = 1.$$

Afim de encontrar expressões simples para $|\mathfrak{M}_4|$, considere os elementos do triângulo ∇ da Tabela 5.4.

Teorema 5.3.39 *Seja $\mathfrak{M}_4$ o conjunto dos modelos com quatro regiões de mergulhos de 2-células do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$, $m, n \geq 4$, sobre uma superfície compacta Ω. Então o número de elementos de $\mathfrak{M}_4$ é igual a*

$$|\mathfrak{M}_4| = \begin{cases} \sum_{i=1}^{mn/4-1} i^2 + \sum_{i=1}^{mn/12-1} (3i)^2, & \text{se } mn \equiv 0 \pmod 3 \\ \sum_{i=1}^{mn/4-1} i^2 + \sum_{i=0}^{mn/12-4/3} (1+3i)^2, & \text{se } mn \equiv 1 \pmod 3 \\ \sum_{i=1}^{mn/4-1} i^2 + \sum_{i=0}^{mn/12-5/3} (2+3i)^2, & \text{se } mn \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

$m \diagdown n$	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**
2	1	5	15	34	64	108	169	249	351
4	15	64	169	351	632	1033	1575	2280	3169
6	64	249	632	1285	2280	3689	5584	8037	11120
8	169	632	1575	3169	5584	8991	13561	19464	26871
10	351	1285	3169	6336	11120	17584	26871	38505	53089
12	632	2280	5584	11120	19464	31192	46880	67104	92440
14	1033	3689	8991	17854	31192	49920	74953	107205	147591
16	1575	5584	13561	26871	46880	74953	112455	160752	221209
18	2288	8037	19464	38505	67104	107205	160752	229689	315960

Tabela 5.5: Número de modelos com quatro regiões de mergulhos orientados do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$, $m \in \{2, 4, \cdots, 18\}$ e $n \in \{4, 6, \cdots, 20\}$

Demonstração. Suponha que c_i seja a i-ésima coluna do triângulo ∇ da Tabela 5.4. Como as colunas de ∇ estão em progressão aritmética de razão 2, então a soma dos elementos de c_i é:
Se $mn \equiv 0 \pmod 3$ então

$$\begin{aligned}
|c_0| &= (mn/4-1)(1+mn/2-4+1)/2 = (mn/4-1)(mn/4-1)\\
|c_1| &= (mn/4-2)(1+mn/2-4-1)/2 = (mn/4-2)(mn/4-2)\\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\
|c_{t-2}| &= 2(2+4)/2 = 2\cdot 3\\
|c_{t-1}| &= 2(1+3)/2 = 2\cdot 2\\
|c_t| &= 1(1+1)/2 = 1\cdot 1,
\end{aligned}$$

onde t é o último índice da seqüência $S_t(4)$. Veja que a soma dos termos de $|c_i|$ é do tipo a^2, ou do tipo $(a-1)a + a(a+1) = 2a^2$, portanto podemos escrever a soma geral dos termos das colunas c_i de ∇ como sendo

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=0}^{t} |c_i| &= (mn/4-1)^2 + (mn/4-2)^2 + 2(mn/4-3)^2 + (mn/4-4)^2 +\\
&\quad (mn/4-5)^2 + \cdots + 7^2 + 2\cdot 6^2 + 5^2 + 4^2 + 2\cdot 3^2 + 2^2 + 1^2.
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, a soma dos modelos com 4 regiões é

$$|\mathfrak{M}_4| = \textstyle\sum_{i=1}^{mn/4-1} i^2 + \sum_{i=1}^{mn/12-1} (3i)^2.$$

De modo análogo, mostra-se os casos $mn \equiv 1 \pmod 3$ e $mn \equiv 2 \pmod 3$. ∎

Na Tabela 5.5 mostramos o número de possíveis modelos com quatro regiões de mergulhos de 2-células do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$, $m \in \{2, 4, \cdots, 18\}$ e $n \in \{4, 6, \cdots, 20\}$.

Apesar de termos considerado o problema do número de modelos distintos de mergulhos de grafos completos biparticionados em superfícies compactas orientadas, com duas e quatro regiões, o método utilizado poderá ser estendido para outros valores do número de regiões.

5.4 Conjunto dos Modelos Orientados de Mergulhos do Grafo $K_{3,3}$

Uma reação natural daqueles que lidam com mergulhos de grafos é desconfiar da existência de todos esses mergulhos. Quando determinamos o conjunto de todos os modelos com 4 regiões na Seção 5.3, tivemos a impressão que existem modelos demais e que alguns deles não poderiam ser realizados. Tentando esclarecer esta dúvida, iremos identificar todos os tipos de modelos de mergulhos do grafo completo biparticionado $K_{3,3}$.

5.4.1 Definições

Existem vários métodos para descrever o mergulho de um grafo, porém, usaremos o método conhecido por **construção direta do sistema de rotação**[40]. O sistema de rotações descreve a ordem em que cada vértice do grafo está conectado aos demais quando se percorre, no sentido horário, uma volta completa em torno do vértice no modelo do mergulho do grafo sobre a superfície. Uma descrição mais completa é encontrada em [40]. Este método foi usado pela primeira vez por Heffter [16] para calcular o gênero orientado de um grafo completo e também por Ringel para calcular o gênero de K_n, para $n \equiv 3, 5, 7, 10 \,(\mathrm{mod}\, 12)$, como também o gênero não-orientado do K_n para todos os valores de n. Outros pesquisadores também fizeram uso deste método para obter resultados similares para outras famílias de grafos. Dentre eles destacamos Youngs [36] que obteve a fórmula para o gênero orientável do grafo completo triparticionado $K_{n,n,n}$. Estranho que o gênero não-orientável desse grafo é ainda desconhecido. White [41], também usou este método para computar o gênero orientável de várias famílias de grafos completos tri-particionados.

O proceso de identificação dos mergulhos de um grafo baseia-se no seguinte teorema estabelecido sem prova por Edmonds [9]. A primeira prova foi publicada por Youngs [44].

Teorema 5.4.1 *[40]Existe uma correspondência um a um entre os sistema de rotação do grafo G e seus mergulhos sobre superfícies compactas orientadas.*

Não é difícil verificar que um grafo G tem

$$\prod_{v \in V(G)} (\mathrm{val}\, v - 1)! \tag{5.12}$$

sistemas de rotações distintos e, portanto o número de seus mergulhos é finito. Entenda por $V(G)$ como sendo o conjunto dos vértices de G e por $\mathrm{val}\, v$ a **valência** do vértice $v \in G$, isto é, o número de lados que saem do vértice v e estão conectados a outros vértices de G.

Da igualdade (5.12), deduz-se, facilmente que o número de sistemas de rotações dos grafos completos biparticionados $K_{n,n}$ é

$$|\mathrm{Rot}| = [(n-1)!]^{2n}. \tag{5.13}$$

Uma maneira criteriosa de determinar todos os mergulhos de $K_{m,n}$ é, sem dúvida, esboçar o modelo para cada sistema de rotação. Mas aí surge a seguinte pergunta: todos estes mergulhos podem ser realizados numa superfície compacta orientada de gênero

mínimo? A resposta é não. Depende do sistema de rotações. Alguns deles podem, outros exigem superfícies de gênero mais elevado e alguns parecem típicos de superfícies não-orientadas.

Pela equação (5.12) , existem

$$\prod_{v\in V(K_{3,3})} (\mathrm{val}\,(v)-1)! = (3-1)^6 = 64$$

sistemas de rotações distintos do grafo $K_{3,3}$. Em princípio, determinar todos os modelos do $K_{3,3}$, representa obter os 64 modelos associados a cada sistema de rotações. Seria, sem dúvida, uma tarefa e tanto. Contudo, existem permutações nos rótulos dos vértices do modelo de um mergulho do $K_{3,3}$, munido de um sistema de rotações, que produzem mergulhos com o mesmo tipo de modelo, porém, com sistemas de rotações distintos.

Definição 5.4.2 *Seja G um grafo com k vértices $v_1, v_2, \cdots v_k$ e denote por* $\mathrm{val}\, v_i$ *a* ***valência*** *do vértice v_i (isto é, o número de vértices de G que se encontram cone- ctados a v_i por um lado). Seja $\mathfrak{S}(G)$ o conjunto dos sistemas de rotações de G. Diremos que $\mathsf{P} = (p_1, p_2, \cdots, p_k)$ é uma* ***permutação*** *agindo em $\mathfrak{R} \in \mathfrak{S}(G)$, se cada $p_i \in \mathsf{S}_{\mathrm{val}\, v_i}$ é uma permutação*[2] *atuando nas rotações do vértice v_i de G.*

Por exemplo, uma permutação P agindo em um sistema de rotações do grafo completo biparticionado $K_{3,3}$ é um conjunto formado por seis permutações de S_3[3]. Em particular, se $\mathfrak{R}_1 = (135\ 024\ 135\ 024\ 153\ 042)$ *e* $\mathfrak{R}_2 = (135\ 042\ 153\ 042\ 135\ 024)$ são dois sistemas de rotações de mergulhos do grafo $K_{3,3}$, então a permutação P que atua em $\mathfrak{R}_1$ transformando-o em $\mathfrak{R}_2$ é

$$\mathsf{P} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 & 1\,2\,3 & 1\,2\,3 & 1\,2\,3 & 1\,2\,3 & 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 & 1\,3\,2 & 1\,3\,2 & 1\,3\,2 & 1\,3\,2 & 1\,3\,2 \end{pmatrix},$$

que corresponde a permutação dos vértices 2 e 4 no modelo de $\mathfrak{R}_1$.

Notação 5.4.3 *Indicaremos por $K_{3,3}(\mathfrak{R})$ o mergulho do grafo completo biparticionado $K_{3,3}$ em uma superfície compacta orientada, munido de um sistema de rotações $\mathfrak{R}$.*

5.4.2 Transformação em um sistema de rotações

Estamos interessados em subconjuntos de S_3, cujas ações em elementos de $\mathfrak{S}(K_{3,3})$ produzem uma partição diferente da partição trivial. Para isto, construiremos um modelo de mergulho do $K_{3,3}$ associado a um sistema de rotações $\mathfrak{R}$, consistindo na troca das posições de dois vértices e na identificação do novo sistema de rotações resultante. Continuaremos com este processo até identificar todos os sistemas de rotações que são transformações de dois vértices quaisquer de $\mathfrak{R}$ e de seus sistemas transformados. Verificamos que este processo, a partir de um certo instante, não produz sistema de rotação diferente do que já foi obtido e nem produz todos os sistemas de rotações de $\mathfrak{S}(K_{3,3})$.

[2] Usamos a notação $S_{\mathrm{val}\, v_i}$, para designar o conjunto das permutações dos elementos de um conjunto, cujo número de elementos e igual a valência do vértice v_i.

[3] $\mathsf{S}_m \triangleq$ Conjunto das permutações de ordem m

Definição 5.4.4 *Sejam $\mathfrak{S}(K_{3,3})$ o conjunto dos sistemas de rotações do grafo $K_{3,3}$ e $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2 \in \mathfrak{S}(G)$. Se $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_1(P_{ij})$ é obtido pela permutação dos vértices i, j de $\mathfrak{R}_1$, diremos que $\mathfrak{R}_2$ é a* ***permutação dos vértices*** *i, j de $\mathfrak{R}_1$.*

Se $A = \{p_1, p_2, p_3\}$ e $B = \{q_1, q_2, q_3\}$ são os conjuntos dos vértices do grafo $K_{3,3}$, então será estabelecido que a permutação da Definição 5.4.4, será realizada sempre em dois elementos de A ou de B, nunca em dois elementos de conjuntos distintos.

É claro que a ação de uma permutação de um sistema de rotações $\mathfrak{R}$, deixa o modelo fixo, sem alterar o tipo de regiões, transformando-o apenas em outro sistema de rotações distinto $\mathfrak{R}' \neq \mathfrak{R}$. Por exemplo, dado o sistema $\mathfrak{R}_1 = (135\ 024\ 135\ 024\ 153\ 042)$, a permutação dos vértices 0 e 2 transforma $\mathfrak{R}_1$ em $\mathfrak{R}_2 = (135\ 042\ 153\ 042\ 135\ 024)$, cujos modelos são como mostrados na Figura 5.15, e portanto preservam modelos.

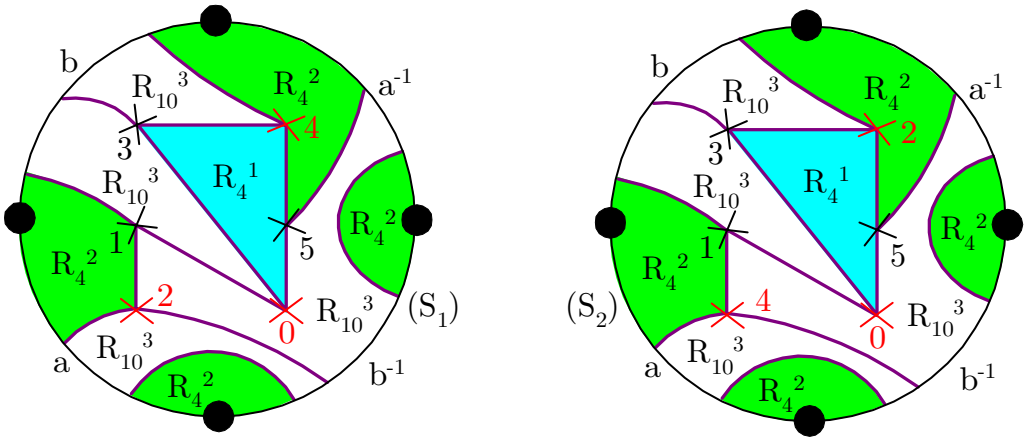

Figura 5.15: Permutação nos rótulos dos vértices de um sistema de rotações de $K_{3,3}$

5.4.3 Classes de equivalências do conjunto dos sistemas de rotações equivalentes de um grafo

No caso de mergulhos orientados do grafo $K_{3,3}$ em superfícies compactas, os tipos de modelos estão relacionados a subconjuntos especiais do conjunto dos sistemas de rotações. Mostraremos que existe uma partição do conjunto dos sistemas de rotações do grafo $K_{3,3}$ em que cada conjunto está associado a um determinado tipo de modelo.

Definição 5.4.5 *Diremos que os sistemas de rotações $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2 \in \mathfrak{S}(G)$ de um grafo G são* ***sistemas de rotações equivalentes*** *de $\mathfrak{S}(G)$ se os modelos de mergulhos de 2-células de $G(\mathfrak{R}_1)$ e $G(\mathfrak{R}_2)$ em uma superfície compacta Ω, são formados pelos mesmos tipos de regiões. Chamaremos de* ***classes de equivalência*** *de $\mathfrak{R}_i \in \mathfrak{S}(G)$ o conjunto $\mathfrak{S}(G)/\mathfrak{R}_i = \{\mathfrak{R}_j \in \mathfrak{S}(G) : G(\mathfrak{R}_i) \equiv G(\mathfrak{R}_j) \equiv \Omega(a) \equiv a_1 R_{i1} \cup \cdots \cup a_\alpha R_{i_\alpha}\}$ de todos os modelos de mergulhos de 2-células do grafo $G(\mathfrak{R}_j)$ sobre Ω que são compostos pelos mesmos tipos de regiões.*

Uma partição em $\mathfrak{S}(K_{3,3})$, conjunto de rotações do grafo G, em que todas as rotações produzem o mesmo tipo de modelo, pode ser obtida através do seguinte algoritmo.

Algorítmo: Construção das classes de equivalência de $\mathfrak{S}(G)$

Para construção das classes de equivalência de $\mathfrak{S}(G)$, siga os seguintes passos:

A_1) Determine o conjunto $\mathfrak{S}(G)$ dos sistemas de rotações do grafo G;

A_2) Dado um sistema $\mathfrak{R}_i$, construa o modelo plano de mergulho mínimo de 2-células sobre Ω e determine todos os sistemas transformados por permutações de dois vértices de $\mathfrak{R}_i$;

A_3) Obtenha todos os sistemas transformados por permutações de dois vértices de cada $\mathfrak{R}_j$ encontrado na etapa A_2), até o instante em que não haja mais produção de novos sistemas de rotações, além daqueles já determinados nas etapas anteriores e construa o conjunto dos sistemas de rotações gerados por $\mathfrak{R}_1$,

$$\mathfrak{S}(G)/\mathfrak{R}_1 = \{\mathfrak{R}_j \in \mathfrak{S}(G) : G(\mathfrak{R}_i) \equiv G(\mathfrak{R}_j) \equiv \Omega(a) \equiv a_1 R_{i1} \cup \cdots \cup a_\alpha R_{i_\alpha}\};$$

A_4) Escolha, agora, $\mathfrak{R}_2 \in \mathfrak{S}(G)$ tal que $\mathfrak{R}_2 \notin \mathfrak{S}(G)/\mathfrak{R}_1$ e construa, de modo análogo, o conjunto de geradores de $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{S}(G)/\mathfrak{R}_2$;

A_5) Continue com o processo, até obter todas as classes laterais de $\mathfrak{S}(G)$, e assim

$$\mathfrak{S}(G) = \{\mathfrak{S}(G)/\mathfrak{R}_1, \mathfrak{S}(G)/\mathfrak{R}_2, \cdots, \mathfrak{S}(G)/\mathfrak{R}_k\} \quad e \quad \bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{S}(G)/\mathfrak{R}_i = \varnothing;$$

A_6) Finalmente, verifique quais dessas classes laterais possuem modelos com o mesmo tipo de regiões. A união dessas classes irá compor uma classe de equivalência que cumpre as exigências da Definição 5.4.5. Desse modo, o conjunto dos sistemas de rotações de G, visto como classes de equivalências, será

$$\mathfrak{S}(G) = \left\{\mathfrak{S}(G)/\left(\mathfrak{R}_{i_1}, \cdots, \mathfrak{R}_{i_{k_1}}\right), \cdots, \mathfrak{S}(G)/\left(\mathfrak{R}_{i_{k_s}}, \cdots, \mathfrak{R}_{i_{k_t}}\right)\right\}.$$

Denotamos a classe de equivalência $\mathfrak{S}(G)/(\mathfrak{R}_1, \cdots, \mathfrak{R}_k)$ do conjunto $\mathfrak{S}(G)$ dos sistemas de rotações de um grafo G, gerada pelos elementos $\mathfrak{R}_1, \cdots, \mathfrak{R}_h$, por

$$\mathfrak{S}(G)/(\mathfrak{R}_1, \cdots, \mathfrak{R}_h) = \langle \mathfrak{R}_1, \cdots, \mathfrak{R}_h \rangle$$

O algoritmo das classes de equivalência de $\mathfrak{S}(G)$ se baseia no princípio de que o modelo de um mergulho de um grafo não se altera, quando trocamos dois rótulos dos vértices de um dos conjuntos A ou B. Apenas o sistema de rotação pode ser diferente com esta ação.

$\mathfrak{R}_{0}^{00}$=(⊣⊤⊣⊤⊣⊤) $\mathfrak{R}_{16}^{01}$=(⊣⊥⊣⊤⊣⊤) $\mathfrak{R}_{32}^{10}$=(⊢⊤⊣⊤⊣⊤) $\mathfrak{R}_{48}^{11}$=(⊢⊥⊣⊤⊣⊤) $\mathfrak{R}_{2}^{10}$=(⊣⊤⊣⊤⊢⊤) $\mathfrak{R}_{18}^{11}$=(⊣⊥⊣⊤⊢⊤)
$\mathfrak{R}_{1}^{01}$=(⊣⊤⊣⊤⊣⊥) $\mathfrak{R}_{17}^{02}$=(⊣⊥⊣⊤⊣⊥) $\mathfrak{R}_{33}^{11}$=(⊢⊤⊣⊤⊣⊥) $\mathfrak{R}_{49}^{12}$=(⊢⊥⊣⊤⊣⊥) $\mathfrak{R}_{3}^{11}$=(⊣⊤⊣⊤⊢⊥) $\mathfrak{R}_{19}^{12}$=(⊣⊥⊣⊤⊢⊥)
$\mathfrak{R}_{34}^{20}$=(⊢⊤⊣⊤⊢⊤) $\mathfrak{R}_{50}^{21}$=(⊢⊥⊣⊤⊢⊤) $\mathfrak{R}_{4}^{01}$=(⊣⊤⊣⊥⊣⊤) $\mathfrak{R}_{20}^{02}$=(⊣⊥⊣⊥⊣⊤) $\mathfrak{R}_{36}^{11}$=(⊢⊤⊣⊥⊣⊤) $\mathfrak{R}_{52}^{12}$=(⊢⊥⊣⊥⊣⊤)
$\mathfrak{R}_{35}^{21}$=(⊢⊤⊣⊤⊢⊥) $\mathfrak{R}_{51}^{22}$=(⊢⊥⊣⊤⊢⊥) $\mathfrak{R}_{5}^{02}$=(⊣⊤⊣⊥⊣⊥) $\mathfrak{R}_{21}^{03}$=(⊣⊥⊣⊥⊣⊥) $\mathfrak{R}_{37}^{12}$=(⊢⊤⊣⊥⊣⊥) $\mathfrak{R}_{53}^{13}$=(⊢⊥⊣⊥⊣⊥)
$\mathfrak{R}_{6}^{11}$=(⊣⊤⊣⊥⊢⊤) $\mathfrak{R}_{22}^{12}$=(⊣⊥⊣⊥⊢⊤) $\mathfrak{R}_{38}^{21}$=(⊢⊤⊣⊥⊢⊤) $\mathfrak{R}_{54}^{22}$=(⊢⊥⊣⊥⊢⊤) $\mathfrak{R}_{8}^{10}$=(⊣⊤⊢⊤⊣⊤) $\mathfrak{R}_{24}^{11}$=(⊣⊥⊢⊤⊣⊤)
$\mathfrak{R}_{7}^{12}$=(⊣⊤⊣⊥⊢⊥) $\mathfrak{R}_{23}^{13}$=(⊣⊥⊣⊥⊢⊥) $\mathfrak{R}_{39}^{22}$=(⊢⊤⊣⊥⊢⊥) $\mathfrak{R}_{55}^{23}$=(⊢⊥⊣⊥⊢⊥) $\mathfrak{R}_{9}^{11}$=(⊣⊤⊢⊤⊣⊥) $\mathfrak{R}_{25}^{12}$=(⊣⊥⊢⊤⊣⊥)
$\mathfrak{R}_{40}^{20}$=(⊢⊤⊢⊤⊣⊤) $\mathfrak{R}_{56}^{21}$=(⊢⊥⊢⊤⊣⊤) $\mathfrak{R}_{10}^{20}$=(⊣⊤⊢⊤⊢⊤) $\mathfrak{R}_{26}^{21}$=(⊣⊥⊢⊤⊢⊤) $\mathfrak{R}_{42}^{30}$=(⊢⊤⊢⊤⊢⊤) $\mathfrak{R}_{58}^{21}$=(⊢⊥⊢⊤⊢⊤)
$\mathfrak{R}_{41}^{21}$=(⊢⊤⊢⊤⊣⊥) $\mathfrak{R}_{57}^{22}$=(⊢⊥⊢⊤⊣⊥) $\mathfrak{R}_{11}^{21}$=(⊣⊤⊢⊤⊢⊥) $\mathfrak{R}_{27}^{22}$=(⊣⊥⊢⊤⊢⊥) $\mathfrak{R}_{43}^{31}$=(⊢⊤⊢⊤⊢⊥) $\mathfrak{R}_{59}^{32}$=(⊢⊥⊢⊤⊢⊥)
$\mathfrak{R}_{12}^{11}$=(⊣⊤⊢⊥⊣⊤) $\mathfrak{R}_{28}^{12}$=(⊣⊥⊢⊥⊣⊤) $\mathfrak{R}_{44}^{21}$=(⊢⊤⊢⊥⊣⊤) $\mathfrak{R}_{60}^{22}$=(⊢⊥⊢⊥⊣⊤) $\mathfrak{R}_{14}^{11}$=(⊣⊤⊢⊥⊢⊤) $\mathfrak{R}_{30}^{12}$=(⊣⊥⊢⊥⊢⊤)
$\mathfrak{R}_{13}^{02}$=(⊣⊤⊢⊥⊣⊥) $\mathfrak{R}_{29}^{03}$=(⊣⊥⊢⊥⊣⊥) $\mathfrak{R}_{45}^{12}$=(⊢⊤⊢⊥⊣⊥) $\mathfrak{R}_{61}^{13}$=(⊢⊥⊢⊥⊣⊥) $\mathfrak{R}_{15}^{22}$=(⊣⊤⊢⊥⊢⊥) $\mathfrak{R}_{31}^{23}$=(⊣⊥⊢⊥⊢⊥)
$\mathfrak{R}_{46}^{21}$=(⊢⊤⊢⊥⊢⊤) $\mathfrak{R}_{62}^{22}$=(⊢⊥⊢⊥⊢⊤) $\mathfrak{R}_{47}^{32}$=(⊢⊤⊢⊥⊢⊥) $\mathfrak{R}_{63}^{33}$=(⊢⊥⊢⊥⊢⊥)

Tabela 5.6: Conjunto dos sistemas de rotações do grafo $K_{3,3}$

5.4.4 Ação de transformação de um sistema de rotação do grafo $K_{3,3}$

Verificamos que existe uma relação entre os tipos de modelos e o conjunto das permutações. A rigor, os tipos de modelos dependem do número de permutações diferentes da identidade efetuadas num sistema de rotação, o qual será escolhido como referencial básico. Testamos apenas um tipo de referencial, mas tudo indica que o uso de um outro sistema de rotações como referencial básico conduz aos mesmos resultados.

Definição 5.4.6 *Sejam $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{0, 2, 4\}$ os conjuntos dos rótulos dos vértices do grafo completo biparticionado $K_{3,3}$. Chamaremos de* ***sistema referencial básico*** *o sistema*

$$\mathfrak{R}_0 = (135 \quad 024 \quad 135 \quad 024 \quad 135 \quad 024)\,,$$

cujas rotações estão na ordem natural.

Definição 5.4.7 *Seja $\mathfrak{R}_i \in \mathfrak{S}(K_{3,3})$, tal que $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}_0(\mathsf{P})$. Se P é a permutação identidade então $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}_0$, e portanto $\mathfrak{R}_i$ tem o mesmo tipo de modelo de $\mathfrak{R}_0$. Se P contém uma ou duas rotações na ordem não-natural do mesmo tipo, diremos que o sistema de rotações $\mathfrak{R}_i$ sofreu* ***uma ação de transformação do modelo****, e finalmente, se P contém três rotações na ordem não-natural do mesmo tipo, diremos que $\mathfrak{R}_i$ sofreu* ***duas ações de transformação do modelo*** *do mergulho de $K_{3,3}$. Denotaremos $\mathfrak{R}_i^{ab}$, $a, b \in \{0, 1, 2\}$, para designar que o sistema de rotação $\mathfrak{R}_i$ sofreu a ações no conjunto A e b ações no conjunto B.*

A Tabela 5.6, mostra o conjunto dos sistemas de rotações do grafo completo biparticionado $K_{3,3}$. A rotação $\mathfrak{R}_i^{pq}$ indica que, em relação ao sistema referencial básico, ocorreram p permutações em A e q permutações em B. Os expoentes p e q ainda não traduzem as ações, estas são identificadas aplicando-se os conceitos da Definição 5.4.7.

Em notação simplificada considere a seguinte simbologia para os sistemas de rotações S_3: $\dashv = 135$, $\vdash = 153$, $\top = 024$ e $\bot = 042$.

5.4.5 Teorema da partição

Provaremos no Teorema 5.4.8, que os sistemas de rotações dos mergulhos do grafo $K_{3,3}$, representados pelos modelos da Figura 5.16, geram todas as classes laterais de $\mathfrak{S}(K_{3,3})$.

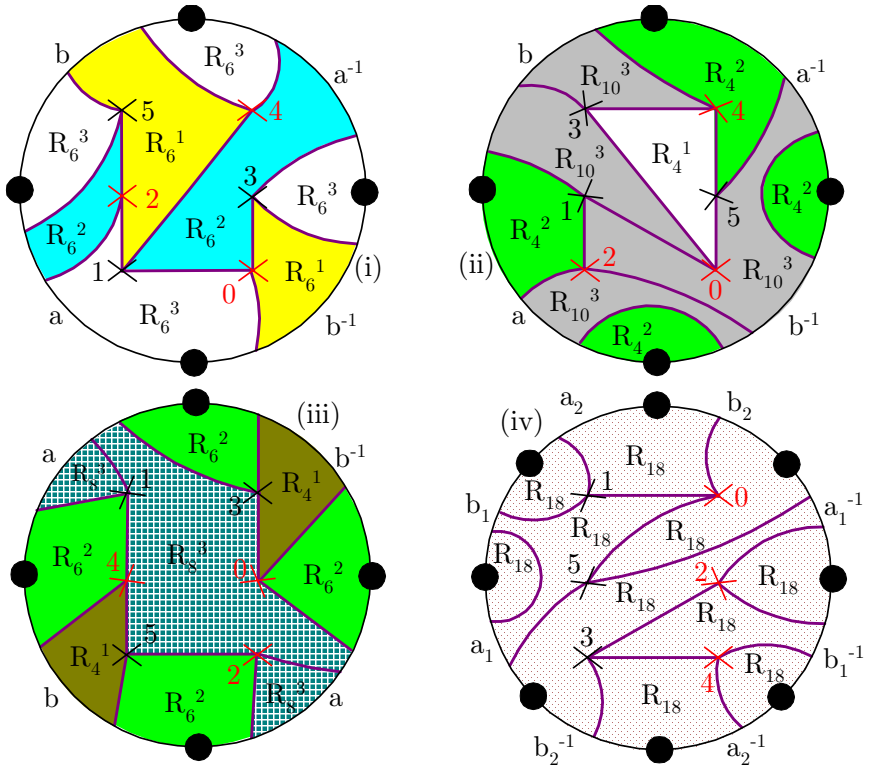

Figura 5.16: Modelos de mergulhos do $K_{3,3}$ cujos sistemas associados geram as classes laterais de $\mathfrak{S}(K_{3,3})$

Teorema 5.4.8 *Sejam* $A = \{1,3,5\}$ *e* $B = \{0,2,4\}$ *os conjuntos dos rótulos dos vértices do grafo* $K_{3,3}$ *com sistema referencial básico*

$$\mathfrak{R}_0 = (135 \quad 024 \quad 135 \quad 024 \quad 135 \quad 024)\,.$$

Se $\mathfrak{R}_i^{ab}$ *é o sistema de rotações* $\mathfrak{R}_i$ *obtido de* $\mathfrak{R}_0$ *através das* a *ações em* A *e* b *ações em* B*, então o conjunto dos sistemas de rotações* $\mathfrak{S}(K_{3,3})$ *é composto pelas quatro classes laterais*

$$\mathfrak{S}(K_{3,3}) = \{\langle\mathfrak{R}_0\rangle, \langle\mathfrak{R}_1\rangle, \langle\mathfrak{R}_2\rangle, \langle\mathfrak{R}_3\rangle\}\,. \tag{5.14}$$

onde $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ *e* $\mathfrak{R}_3$ *são os sistemas de rotações associados aos modelos* $(i), (ii), (iii)$ *e* (iv) *dos mergulhos mostrados na Figura* 5.16.

Demonstração. A aplicação do algoritmo das classes de equivalência nos sistemas referidos, geram os seguintes conjuntos

$$\langle\mathfrak{R}_0\rangle = \{\mathfrak{R}_0^{00}, \mathfrak{R}_{21}^{03}, \mathfrak{R}_{42}^{30}, \mathfrak{R}_{63}^{33}\},$$
$$\langle\mathfrak{R}_1\rangle = \{\mathfrak{R}_1^{01}, \mathfrak{R}_4^{01}, \mathfrak{R}_5^{02}, \mathfrak{R}_{16}^{01}, \mathfrak{R}_{17}^{02}, \mathfrak{R}_{20}^{02}, \mathfrak{R}_{43}^{31}, \mathfrak{R}_{46}^{31}, \mathfrak{R}_{47}^{32}, \mathfrak{R}_{58}^{31}, \mathfrak{R}_{59}^{32}, \mathfrak{R}_{62}^{32}\}$$
$$\langle\mathfrak{R}_2\rangle = \{\mathfrak{R}_2^{10}, \mathfrak{R}_8^{10}, \mathfrak{R}_{10}^{20}, \mathfrak{R}_{23}^{13}, \mathfrak{R}_{29}^{13}, \mathfrak{R}_{31}^{23}, \mathfrak{R}_{32}^{23}, \mathfrak{R}_{34}^{20}, \mathfrak{R}_{40}^{20}, \mathfrak{R}_{53}^{13}, \mathfrak{R}_{55}^{23}, \mathfrak{R}_{61}^{23}\}$$
$$\langle\mathfrak{R}_3\rangle = \{\mathfrak{R}_3^{11},\mathfrak{R}_6^{11},\mathfrak{R}_7^{12},\mathfrak{R}_9^{11},\mathfrak{R}_{11}^{21},\mathfrak{R}_{12}^{11},\mathfrak{R}_{13}^{12},\mathfrak{R}_{14}^{21},\mathfrak{R}_{15}^{22},\mathfrak{R}_{18}^{11},\mathfrak{R}_{19}^{12},\mathfrak{R}_{22}^{12},\mathfrak{R}_{24}^{11},\mathfrak{R}_{25}^{12},\mathfrak{R}_{26}^{21},\mathfrak{R}_{27}^{22},\mathfrak{R}_{28}^{12},\mathfrak{R}_{30}^{22},$$
$$\mathfrak{R}_{33}^{11},\mathfrak{R}_{35}^{21},\mathfrak{R}_{36}^{11},\mathfrak{R}_{37}^{12},\mathfrak{R}_{38}^{21},\mathfrak{R}_{39}^{22},\mathfrak{R}_{41}^{11},\mathfrak{R}_{44}^{12},\mathfrak{R}_{45}^{21},\mathfrak{R}_{48}^{22},\mathfrak{R}_{49}^{12},\mathfrak{R}_{50}^{22},\mathfrak{R}_{51}^{11},\mathfrak{R}_{52}^{21},\mathfrak{R}_{54}^{11},\mathfrak{R}_{56}^{12},\mathfrak{R}_{57}^{21},\mathfrak{R}_{60}^{22}\}.$$

É fácil verificar que estas quatro classes laterais compõem uma partição do conjunto $\mathfrak{S}(K_{3,3})$ e, portanto vale a partição (5.14). ■

Como conseqüência do Teorema 5.4.8 temos

Corolário 5.4.9 *O número de elementos das classes laterais de* $\mathfrak{S}(K_{3,3})$ *são:*

$$|\langle\mathfrak{R}_0\rangle| = 4,\ |\langle\mathfrak{R}_1\rangle| = |\langle\mathfrak{R}_2\rangle| = 12\ e\ |\langle\mathfrak{R}_3\rangle| = 36.$$

Não dispomos ainda de ferramentas necessárias para justificar o fato de que os mergulhos dos grafos $K_{3,3}(\mathfrak{R}_1)$ e $K_{3,3}(\mathfrak{R}_2)$ são diferentes. Vamos considerá-las como propriedades intrínsecas dos modelos de mergulhos do grafo $K_{3,3}$, detectadas após exaustivo trabalho de construção das classes de equivalências e de alguns testes dos tipos de modelos oriundos de mergulhos dessas classes.

No Teorema 5.4.10, os expoentes a e b em $\mathfrak{R}_i^{ab}$ indicam ações nos conjuntos de vértices $A = \{1,3,5\}$ e $B = \{0,2,4\}$, do grafo $K_{3,3}$, conforme a Definição 5.4.7. A notação tR_s significa que o modelo do mergulho associado ao sistema de rotação é composto pela união de t regiões com s lados. Por exemplo, $2R_4 \cup R_{10}$ representa os modelos compostos por 2 regiões de 4 lados e uma região de 10 lados. Usaremos, por exemplo, a notação $\mathfrak{R}_3^{11} = 2R_4 \cup R_{10}$, para indicar que os modelos de mergulhos dos elementos da classe lateral gerada por $\mathfrak{R}_3$ são todos do tipo $2R_4 \cup R_{10}$.

Sabemos de [42], que os mergulhos mínimo e máximo do grafo $K_{3,3}$ sobre superfícies orientadas são realizados no toro e no bitoro. Logo, só existem estas duas possibilidades de mergulhos orientados do $K_{3,3}$ provido de um particular sistema de rotações $\mathfrak{R}$. Observe que os modelos de mergulhos $(i), (ii), (iii)$ e (iv) da Figura 5.16 são compostos, nesta ordem, pelos seguintes sistemas de rotações

$$\mathfrak{R}_0^{00} = (\dashv \top \dashv \top \dashv \top), \mathfrak{R}_1^{01} = (\dashv \top \dashv \top \dashv \bot), \mathfrak{R}_2^{10} = (\dashv \top \dashv \top \vdash \top), \mathfrak{R}_3^{11} = (\dashv \top \dashv \top \vdash \bot).$$

Portanto, pelo Teorema 5.4.8, são os geradores das classes laterais de $\mathfrak{S}(K_{3,3})$ e, por isso existem, no máximo, três modelos distintos para os mergulhos orientados do $K_{3,3}$ ($\mathfrak{R}_2^{10}$ é não orientado).

Se o modelo é realizado no toro, então ele será sempre formado por um dos tipos de regiões, $3R_6$ e $2R_4 \cup R_{10}$. Se o modelo é realizado sobre o bitoro, a única possibilidade será um modelo com uma região. Logo, se pretendemos identificar o maior número de modelos distintos gerados pelos mergulhos orientados de 2-células do $K_{3,3}$, devemos determinar o mergulho mínimo orientado do $K_{3,3}$ de cada um dos geradores de classe $\mathfrak{R}_0, \cdots, \mathfrak{R}_4$ (observamos que poderia ser escolhido qualquer elemento da classe, pois todos produzem o mesmo tipo de modelos). Os modelos de $\mathfrak{R}_0$ e $\mathfrak{R}_1$ são mergulhos mínimos, $\mathfrak{R}_2$ não é máximo nem mínimo (é não-orientado). Não foi possível mergulhar o $\mathfrak{R}_2$ e o $\mathfrak{R}_3$ no toro, portanto o bi-toro é a única possibilidade de mergulho orientado de 2-células para o $K_{3,3}$ provido do sistema de rotações $\mathfrak{R}_3$, cujo modelo é formado por uma única região.

Teorema 5.4.10 (Teorema da Classificação dos Modelos do $K_{3,3}$) *Seja $\mathfrak{S}(K_{3,3})$ o conjunto dos sistemas de rotações do grafo completo biparticionado $K_{3,3}$ com vértices em $A=\{1,2,3\}$ e $B=\{0,2,4\}$. Se $\mathfrak{R}_i^{ab}\in\mathfrak{S}(K_{3,3})$ é um sistema de rotação com a ações em A e b ações em B, então os tipos de modelos orientados associados a $\mathfrak{R}_i^{ab}$ são tais que*

$$\mathfrak{R}_i^{ab}=\begin{cases} 3R_6, \text{ se, e sómente se, } a \text{ e } b \text{ são pares} \\ R_{18}, \text{ se, e sómente se, } a \text{ e } b \text{ têm paridades diferentes} \\ 2R_4\cup R_{10}, \text{ se, e sómente se, } a \text{ e } b \text{ são ímpares.} \end{cases}$$

Demonstração. Calculando a ação de transformação utilizando a Definição 5.4.7, concluímos do Teorema 5.4.8, que os tipos de ações $\mathfrak{R}^{ab}$ para cada classe lateral são:

Tipos de ações de $\langle\mathfrak{R}_0\rangle$	:	$\mathfrak{R}^{00},\mathfrak{R}^{02},\mathfrak{R}^{20}$ e $\mathfrak{R}^{22}$;	Tipos de ações de $\langle\mathfrak{R}_1\rangle$: $\mathfrak{R}^{01}$ e $\mathfrak{R}^{21}$;
Tipos de ações de $\langle\mathfrak{R}_2\rangle$	:	$\mathfrak{R}^{10}$ e $\mathfrak{R}^{12}$;	Tipos de ações de $\langle\mathfrak{R}_3\rangle$: $\mathfrak{R}^{11}$.

Pela Figura 5.16, os modelos orientados associados aos sistemas são $\mathfrak{R}_0=3R_6$, $\mathfrak{R}_1=R_{18}$ e $\mathfrak{R}_3=2R_4\cup R_{10}$. Como todos os elementos de uma classe tem o mesmo tipo de modelo, uma análise nas ações de transformação, provam o desejado. ■

Corolário 5.4.11 *As classes de equivalência do conjunto $\mathfrak{S}(K_{3,3})$ dos sistemas de rotações do grafo completo biparticionado $K_{3,3}$ são:*

$$\mathfrak{S}(K_{3,3})/\mathfrak{R}_0=\langle\mathfrak{R}_0\rangle,\ \mathfrak{S}(K_{3,3})/\mathfrak{R}_1=\langle\mathfrak{R}_1\rangle,\mathfrak{S}(K_{3,3})/\mathfrak{R}_2=\langle\mathfrak{R}_2\rangle \text{ e } \mathfrak{S}(K_{3,3})/\mathfrak{R}_3=\langle\mathfrak{R}_3\rangle.$$

Demonstração. Do Teorema 5.4.8, temos

$$\begin{aligned} K_{3,3}(\mathfrak{R}) &= 4R_6, \text{ se } \mathfrak{R}\in\langle\mathfrak{R}_0\rangle; & K_{3,3}(\mathfrak{R}) &= R_{18}, \text{ se } \mathfrak{R}\in\langle\mathfrak{R}_1\rangle; \\ K_{3,3}(\mathfrak{R}) &= R_4+R_6+R_8, \text{ se } \mathfrak{R}\in\langle\mathfrak{R}_2\rangle; & K_{3,3}(\mathfrak{R}) &= 2R_4\cup R_{10}, \text{ se } \mathfrak{R}\in\langle\mathfrak{R}_3\rangle. \end{aligned}$$

Isto encerra a demonstração. ■

O modelo (iii), Figura 5.16, é do tipo $R_4\cup R_6\cup R_8$ e representa o mergulho do grafo $K_{3,3}(\mathfrak{R}_2)$ na garrafa de Klein. Não é um mergulho máximo nem mínimo, este encontra-se no plano projetivo. Não é máximo porque não é formado por uma única região.

Capítulo 6

Mergulhos de Canais Discretos sem Memória em Superfícies Compactas

Um dos fatores de degradação da confiabilidade em sistemas de comunicações são, sem dúvida, os erros introduzidos pelo canal quando da transmissão de sinais. Quando os sinais de informação transitam no canal podem sofrer interferências de tal maneira que o sinal recebido difira do sinal transmitido. Em muitas situações se faz necessário a implementação no sistema de transmissão, de dispositivos de controle de erros de tal maneira que a comunicação seja confiável.

Diversos recursos são utilizados para se recuperar a informação transmitida. Os mais relacionados com os nossos objetivos são:

- o sistema *codificação de canal/decodificação* é introduzido no sistema de comunicações tem como função corrigir alguns tipos de erros;
- o *quantizador* é um refinamento do espaço de sinais visando minimizar a probabilidade de erro através de informações extras dando maior confiabilidade ao processo de demodulação.

E onde se enquadram estes dois elementos no contexto de mergulho de canais em superfícies? Se o canal é discreto sem memória, sabemos como associá-lo a um grafo completo biparticionado ou a um subgrafo deste. De posse deste, podemos mergulhá-lo, via Subseção 5.1.4, numa superfície, identificar uma estrutura de grupo associada ao canal e escolher, entre os subgrupos deste, aquele que será usado para rotular os vértices do grafo (alfabeto a ser utilizado pelo modulador/codificador). Por outro lado, se o mergulho é de 2-células, temos uma tesselação sobre a superfície que, no caso de ser esta regular, poderá ser usada no projeto do bloco modulação/demodulação como também um quantizador para o sistema de transmissão. Esta seria a maneira mais apropriada de tornar os blocos codificação de fonte, codificação de canal, modulação, demodulação, quantizador e decodificação compatíveis com o canal de comunicação e entre os mesmos.

O grafo associado a um canal discreto sem memória nem sempre faz parte das famílias de grafos cujos mergulhos mínimos são conhecidos. Quando é um grafo completo biparticionado, o conjunto das superfícies para o mergulho de um canal é obtida das fórmulas de Ringel [34], [35] e Ringensen [32] e Seções 5.1.2 e 5.1.3. Quando não, introduzimos o

conceito de classe de canais, a fim de reunir o maior número possível de canais com uma mesma característica, analisamo-os caso a caso e determinamos o conjunto de superfícies para o mergulho dessas classes. Além das análises em cada classe, as técnicas de mergulhos introduzidas no Capítulo 5, permitirão solucionar casos mais complexos de mergulhos de classes de canais cujos representantes não são grafos completos biparticionados. Neste contexto, as fórmulas de Ringel servem apenas como referência para os possíveis gêneros das superfícies onde os mergulhos do canal ocorrerão.

Finalmente, respondemos as questões fundamentais inseridas no contexto do objetivo central desta tese, identificaremos o conjunto das estruturas algébricas para o mergulho de um canal discreto sem memória, que está sendo operado com um conjunto de m sinais, determinamos o conjunto das tesselações regulares com m regiões e, quando existir, as tesselações regulares com tm regiões, seguido das cardinalidade desses conjuntos.

Com as definições e instruções da Seção 5.2, introduzimos o mergulho de canais discretos sem memória em superfícies com bordos, fornecendo opções de modelos que não são encontrados nos mergulhos desses canais em superfícies sem bordos. Este tipo de mergulho permite, pela primeira vez, a implementação de canais em superfícies de curvatura média zero (superfícies mínimas), introduzindo esta famosa família de superfícies no contexto da teoria de comunicações.

6.1 Mergulho de Canais (DMC) em Superfícies Compactas

Nesta seção iremos identificar o conjunto das superfícies compactas sobre as quais um canal discreto e sem memória, visto como um grafo, poderá ser mergulhado. Todos os mergulhos considerados são mergulhos de 2-células, caso contrário, este será referenciado. Para tal iremos considerar os seguintes pontos.

Introduzimos o conceito de grafo associado ao canal, as fórmulas do gênero de mergulho de Ringel e Ringensen e a definição de classes de canais. Tratamos dos canais que estão associados a subgrafos do grafo completo biparticionado $K_{n,n}$. O conjunto das superfícies para o mergulho do canal foi determinado nos seguintes casos:

1) canais associados a subgrafos de $K_{n,n}$, $2 \leq n \leq 4$, onde relacionamos ainda as possíveis classes e número de canais de cada classe;

2) classes de canais associadas a subgrafos de $K_{n,n}$, $5 \leq n \leq 8$ cujos vértices do grafo possuem a mesma valência com exceção das classes com vértices com valências $5, 6, \cdots, 7$;

3) classes de canais associadas a grafos completos biparticionados da forma $K_{2,n}$;

4) classes de canais m-ários com valências 1,2,3 e 4.

Para cada classe de canais $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$ tratada, no sentido da identificação do conjunto das superfícies para o mergulho de 2-células, estabelecemos o conjunto das estruturas algébricas com as correspondentes cardinalidades; o conjunto das tesselações regulares

com m regiões com as correspondentes cardinalidades; e as tesselações regulares com tm regiões, $t \geq 2$.

6.1.1 Definições

Um canal discreto sem memória (DMC) é representado por um conjunto de entradas X, um conjunto de saídas Y e o conjunto de probabilidades condicionais $p\left(y/x\right)$, $y \in Y$ e $x \in X$. Esta estrutura permite uma representação natural de um canal DMC através de um grafo com vértices em X e Y e lados (transições) conectando os vértices em cada um desses conjuntos.

Ringel [35] mostrou que o gênero para o mergulho mínimo não-orientado do mergulho do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$ é

$$\bar{\gamma}\left(K_{m,n}\right) = \left\{\left(m-2\right)\left(n-2\right)/2\right\},\ \forall\, m,n \geq 2. \tag{6.1}$$

Definição 6.1.1 *Sejam $X = \{x_1, \cdots, x_m\}$ e $Y = \{y_1, \cdots, y_n\}$ dois conjuntos de vértices, onde os x_i's e y_j's $\in \mathbb{Z}$. Seja $\mathfrak{C}_{m,n}$ o conjunto formado por todos os canais com m vértices em X e n vértices em Y, satisfazendo as seguintes propriedades:*

$P1$) *Todo vértice de X está conectado a pelo menos um vértice de Y e vice-versa;*

$P2$) *O segmento $[x, y]$ é uma transição (lado) do canal $\mathfrak{C}_{m,n}$ se, $x \in X$ está conectado a $y \in Y$.*

Suponha que $P = \{p_1, \cdots, p_m\}$ e $Q = \{q_1, \cdots, q_m\}$ são conjuntos de inteiros positivos não-nulos e que $X = \{x_1, \cdots, x_m\}$ e $Y = \{y_1, \cdots, y_n\}$ são os conjuntos de vértices do canal $\mathfrak{C}_{m,n}$. Denotaremos por $\operatorname{val} x$ a valência do vértice x. Se $\operatorname{val} x_i = p_i$ e $\operatorname{val} y_j = q_j$, $i \in \{1, \cdots, m\}$, $j \in \{1, \cdots, n\}$, faremos as seguintes denominações:

(i) chamaremos de **classe de canais com valências P e Q**, o conjunto

$$\mathfrak{C}_{m,n}\left[P, Q\right] = \mathfrak{C}_{m,n}\left[\{p_1, \cdots, p_m\}, \{q_1, \cdots, q_m\}\right] \tag{6.2}$$

constituído de todos os canais em $\mathfrak{C}_{m,n}$ tais que, para cada $p_i \in P$ e cada $q_j \in Q$ existem $x_i \in X$ e $y_j \in Y$ com $\operatorname{val} x_i = p_i$ e $\operatorname{val} y_j = q_j$.

(ii) Se os vértices de $\mathfrak{C}_{m,n}$ são tais que $\operatorname{val} x_1 = \cdots = \operatorname{val} x_m = p$ e $\operatorname{val} y_1 = \cdots = \operatorname{val} y_n = q$, então

$$\mathfrak{C}_{m,n}\left[p, q\right] \tag{6.3}$$

denotará a **classe de canais com valências p e q;**

(iii) Se $m = n$ e $\operatorname{val} x_1 = \cdots = \operatorname{val} x_m = \operatorname{val} y_1 = \cdots = \operatorname{val} y_n = p$, então $\mathfrak{C}_m\left[p\right]$ denotará a **classe de canais com valência** p.

Uma conseqüência imediata da Definição 6.1.1 é que o conjunto de canais $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$ é uma classe de canais em $\mathfrak{C}_{m,n}$ se, e somente se,

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j, \tag{6.4}$$

com $\operatorname{val} q_j \geq c$, onde c é o número de vértices de X com grau máximo.

A igualdade (6.4) é importante na identificação das classes de canais do conjunto $\mathfrak{C}_{4,4}$.

Uma classe de canais é formada por um único elemento se, e somente se, ela é do tipo $\mathfrak{C}_m[m]$.

Apesar da cardinalidade de $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$ ser finita, para m e n fixos, a quantidade de canais representativos é pequena. Iremos considerar somente os mergulhos dos canais comumente usados em sistemas de comunicações. Dentre estes, destacaremos as classes de canais do tipo $\mathfrak{C}_m[p]$.

Invariavelmente, nos referimos ao canal como sendo o seu grafo associado. Inicialmente, estabeleceremos o gênero da superfície para o mergulho do canal $\mathfrak{C}_m[p]$, através da identificação de um sub-grafo em $K_{m,n}$ isomorfo ao grafo de $\mathfrak{C}_m[p]$ que esteja mergulhado na mesma superfície. Este procedimento funciona para valores pequenos de m.

6.1.2 Mergulhos do canal binário simétrico

O canal binário simétrico, BSC, é o mais simples e também o canal mais utilizado num sistema de comunicações. Como não podia deixar de ser, o mesmo é apropriado para a transmissão de um alfabeto binário. A estrutura deste canal corresponde ao grafo completo biparticionado $K_{2,2}$ e, como veremos, está mergulhado, de modo único, na esfera S como um mergulho de 2-células, decompondo-a em duas regiões de quatro lados, como ilustra a Figura 5.1. Podemos ainda mergulhar o $K_{2,2}$ no plano em uma única região de quatro lados, ilustrada na Figura 5.9.

Como vimos na Seção 5.3, o número de regiões do modelo de um mergulho de um grafo numa superfície é constante, o que pode mudar é o tipo de região.

Se o mergulho de 2-células de um grafo G sobre uma superfície Ω recobre a superfície com α regiões, denotaremos esse mergulho por $\Omega(\alpha)$. Com esta notação podemos fazer a seguinte afirmação sobre o canal BSC.

Proposição 6.1.2 *O conjunto das superfícies no qual o canal BSC pode ser mergulhado como um mergulho de 2-células, é*

$$\mathcal{S}_2 = \{S(2), S_1(1), P(2), P_1(1)\}. \tag{6.5}$$

Demonstração. O canal BSC corresponde ao canal $\mathfrak{C}_2[2]$, sendo portanto identificado pelo grafo completo biparticionado $K_{2,2}$. Pelas igualdades (5.7) e (5.8), os gêneros mínimo e máximo para o mergulho do canal BSC são, respectivamente,

$$\gamma_m(K_{2,2}) = \{(2-2)^2/4\} = 0 = \left[(2-1)^2/2\right] = \gamma_M(K_{2,2}) \Rightarrow K_{2,2} \hookrightarrow S.$$

Logo, o único mergulho do canal BSC ocorre na esfera. Pelos Teoremas 5.3.3 e 5.3.6, o canal BSC está mergulhado de forma única em $S(2)$, isto é $\mathfrak{C}_2[2] \hookrightarrow S(2) = 2R_4$.

Além disso, pela Definição 5.2.1, podemos ainda mergulhar o canal BSC no plano com a seguinte composição $\mathfrak{C}_2[2] \hookrightarrow S_1(1) = R_4$. Por outro lado, pela igualdade (6.1) o gênero do mergulho mínimo não-orientado de $K_{2,2}$ é

$$\beta(K_{2,2}) \leq \left[(2-2)^2/2\right] = 0 \Rightarrow g(K_{2,2}) = 0 \Rightarrow K_{2,2} \hookrightarrow P.$$

De modo análogo ao caso orientado, concluímos que $\mathfrak{C}_2[2] \hookrightarrow P(2) = 2R_4$ e $\mathfrak{C}_2[2] \hookrightarrow P_1(1) = R_4$. ■

Os outros possíveis canais com duas entradas e duas saídas são o canal com ruído representado pelo grafo $\mathfrak{C}_2[(1,2),(2,1)]$ e o canal sem ruído $\mathfrak{C}_2[1]$. Como estes grafos não são conexos, nenhum desses mergulhos será de 2-células e, nem tão pouco produziria uma única região sobre a superfície mergulhada.

Para conseguirmos um mergulho de $\mathfrak{C}_2[(1,2),(2,1)]$ ou $\mathfrak{C}_2[1]$, cujos modelos dividem a superfície em regiões, teremos que utilizar as superfícies compactas com bordos. Mesmo assim, estes mergulhos não satisfazem as condições da Definição 5.2.1, pois os bordos das regiões não são os lados do grafo. A Figura 6.1, ilustra os mergulhos $\mathfrak{C}_2[1] \hookrightarrow S_1(3) = 2R_2 + R_4$, $\mathfrak{C}_2[1] \hookrightarrow S_2(2) = 2R_4$ e $\mathfrak{C}_2[(1,2),(2,1)] \hookrightarrow S_2(3) = 2R_3 + R_4$. Observe a presença de regiões com um número ímpar de lados.

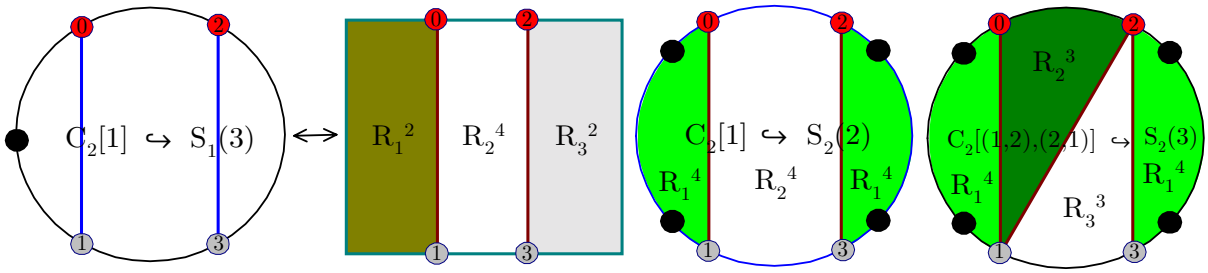

Figura 6.1: Mergulhos dos canais $\mathfrak{C}_2[1]$ e $\mathfrak{C}_2[(1,2),(2,1)]$ no plano e no catenóide

6.1.3 Classe de canal ternário

Este é um canal típico para a transmissão de um alfabeto 3-ário. Quando $p = 3$, $\mathfrak{C}_3[3]$ coincide com o grafo completo biparticionado $K_{3,3}$. Através desta identificação, estamos aptos a estabelecer as superfícies naturais para o mergulho desse canal.

Mergulho de canais ternários com valência 3

Esta classe é composta por um único canal, contudo, a cardinalidade do conjunto das superfícies onde o mesmo pode ser mergulhado, é a maior dentre qualquer outra classe de $\mathfrak{C}_3$.

Para descrever o conjunto das superfícies em que o canal $\mathfrak{C}_3[3]$ pode ser mergulhado, devemos levar em consideração a Definição 5.2.1, isto é, se $\mathfrak{C}_3[3] \hookrightarrow \Omega(\alpha)$ então $\mathfrak{C}_3[3] \hookrightarrow \Omega_r(\alpha - r)$, para todo $1 \leq r \leq \alpha$. Afim de simplificar a descrição do conjunto Ş, escreveremos $\langle \Omega(\alpha) \rangle$ para designar o conjunto das superfícies de mergulhos de $\mathfrak{C}$, gerado pelo

mergulho em uma superfície compacta sem bordo $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q] \hookrightarrow \Omega(\alpha)$, ou seja,

$$\langle \Omega(\alpha) \rangle = \{\Omega(\alpha), \Omega_1(\alpha-1), \Omega_2(\alpha-2), \cdots \Omega_{\alpha-2}(2), \Omega_{\alpha-1}(1)\}. \tag{6.6}$$

Consideraremos o conjunto de mergulhos para uma classe de canais, o conjunto que atende as condições da seguinte definição.

Definição 6.1.3 *Seja $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$ uma classe de canais em $\mathfrak{C}_{m,n}$. Se existe pelo menos um canal conexo $\mathfrak{C} \in \mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$ que pode ser mergulhado num conjunto de superfícies $\S$, sendo todos os mergulhos de 2-células, diremos que a* ***classe está mergulhada*** *em $\S$.*

Diremos que o canal $\mathfrak{C}$ referido na Definição 6.1.3 é o **representante** da classe $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$, de tal forma que através dele podemos determinar o conjunto das superfícies em que os canais de $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$ podem ser mergulhados como mergulhos de 2-células.

Em geral, os canais de uma classe podem ser mergulhados em um mesmo conjunto de superfícies, como por exemplo, os canais da classe $\mathfrak{C}_m[p]$. Convencionaremos que o representante da classe será o canal cujo conjunto das superfícies em que ele pode ser mergulhado, como mergulho de 2-células, apresenta a maior cardinalidade.

Proposição 6.1.4 *O conjunto de superfícies em que o canal $\mathfrak{C}_3[3]$ pode ser mergulhado como um mergulho de 2-células é*

$$\S_3^3 = \{\langle T(3) \rangle, 2T(1), \langle P(4) \rangle, \langle K(3) \rangle, \langle 3P(2) \rangle, 2K(1)\}.$$

Demonstração. O canal $\mathfrak{C}_3[3]$ é identificado pelo grafo completo biparticionado $K_{3,3}$. Pelas igualdades (5.7) e (5.8), os gêneros mínimo e máximo para o mergulho do canal $\mathfrak{C}_3[3]$ são

$$\gamma_m(K_{3,3}) = \{(3-2)^2/4\} = 1 \quad e \quad \gamma_M(K_{3,3}) = \left[(3-1)^2/2\right] = 2.$$

Pelos Teoremas 5.3.3 e 5.3.6, os mergulhos do canal $\mathfrak{C}_3[3]$ em superfícies compactas orientadas ocorrem no toro e no bi-toro com as seguintes composições: $\mathfrak{C}_3[3] \hookrightarrow T(3)$ e $\mathfrak{C}_3[3] \hookrightarrow 2T(1)$. Logo, o conjunto das superfícies orientadas para o mergulho do canal $\mathfrak{C}_3[3]$ é, pela igualdade (6.6),

$$\S_3(O) = \{\langle T(3) \rangle, 2T(1)\}. \tag{6.7}$$

Além do mais, o canal $\mathfrak{C}_3[3]$ está mergulhado minimamente no plano projetivo P com quatro regiões, como mostra a Figura 5.8. Usando o Teorema de König concluímos que $\mathfrak{C}_3[3]$ está mergulhado também em $K(3)$, $3P(2)$ e $2K(1)$. Assim, pela igualdade (6.6), deduzimos que o conjunto das superfícies não-orientadas para o mergulho de $\mathfrak{C}_3[3]$ é

$$\S_3(\widetilde{O}) = \{\langle P(4) \rangle, \langle K(3) \rangle, \langle 3P(2) \rangle, 2K(1)\}. \tag{6.8}$$

Da união dos conjuntos em (6.7) e (6.8) chegamos a $\S_3^3$. ∎

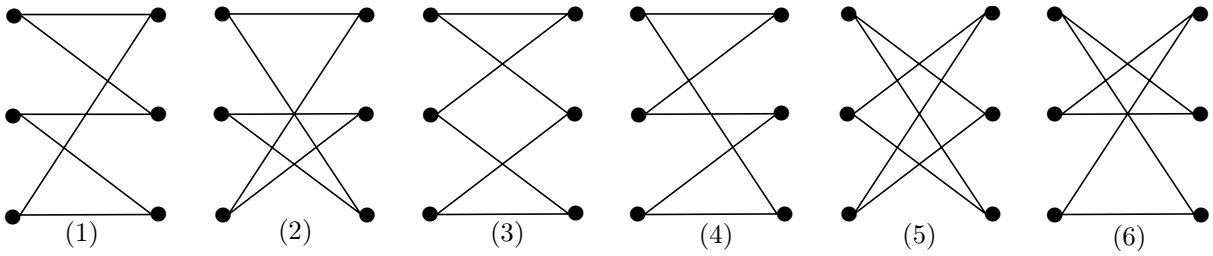

Figura 6.2: Classe de canais $\mathfrak{C}_3[2]$

Mergulhos de canais ternários com valência 2

Pela Definição 6.1.1, $\mathfrak{C}_3[2]$ representa canais com 3 entradas e 3 saídas e a valência de cada vértice do grafo é dois. A Figura 6.2 mostra todos os elementos dessa classe.

Observamos que os canais (1) e (4) , a menos de rotações, são do mesmo tipo. O mesmo acontece com os canais (2) e (6) . É fácil comprovar que estes canais estão mergulhados na esfera com duas regiões. Portanto, deduções análogas tiradas do canal BSC, são válidas para os canais da classe $\mathfrak{C}_3[2]$, ou seja: o conjunto das superfícies nas quais podemos mergulhar um canal da classe $\mathfrak{C}_3[2]$, como mergulhos de 2-células, é o conjunto $\S_3$ em (6.5) .

A cardinalidade do conjunto de canais $\mathfrak{C}_3$ é 104. A distribuição dentre as diferentes classes é a seguinte:

$$|\mathfrak{C}_{332}^{332}| = 9,\ |\mathfrak{C}_{322}^{322}| = 18,\ |\mathfrak{C}_{311}^{311}| = 9,\ |\mathfrak{C}_{211}^{211}| = 15,\ |\mathfrak{C}_{331}^{322}| = 9,$$
$$|\mathfrak{C}_{311}^{221}| = 18, \quad |\mathfrak{C}_{221}^{221}| = 15, \quad |\mathfrak{C}_3[3]| = 1, \quad |\mathfrak{C}_3[2]| = 6, \quad |\mathfrak{C}_3[1]| = 4.$$

Mergulhos de canais ternários com valência até 3

Verificamos que qualquer canal diferente do $\mathfrak{C}_3[3]$ cujo grafo é conexo, pode ser mergulhado na esfera. Na Figura 6.3, mostramos alguns mergulhos mínimos de 2-células de canais de classes diferentes. Com estes mergulhos, é possível deduzir os conjuntos das superfícies para o mergulho de 2-células das classes de canais em $\mathfrak{C}_3$.

Gostaríamos que todos os grafos associados aos canais fossem conexos e pudessem ser mergulhados como mergulhos de 2-células. As vezes, estas duas condições não são satisfeitas em um mesmo canal e tão pouco para todos os canais de uma mesma classe. Todavia, é possível encontrar um canal em uma classe, cujo mergulho mínimo, seja um mergulho de 2-células com o maior número possível de regiões.

Proposição 6.1.5 *O conjunto das superfícies para o mergulho de 2-células das classes de canais em $\mathfrak{C}_3$ é o seguinte:*

(*i*) *a classe $\mathfrak{C}_3[(3,3,2),(3,3,2)]$ está mergulhada no conjunto composto pelas seguintes superfícies*

$$\S_3' = \{\langle S(4)\rangle, \langle T(2)\rangle, \langle P(3)\rangle, \langle K(2)\rangle, 3P(1)\};$$

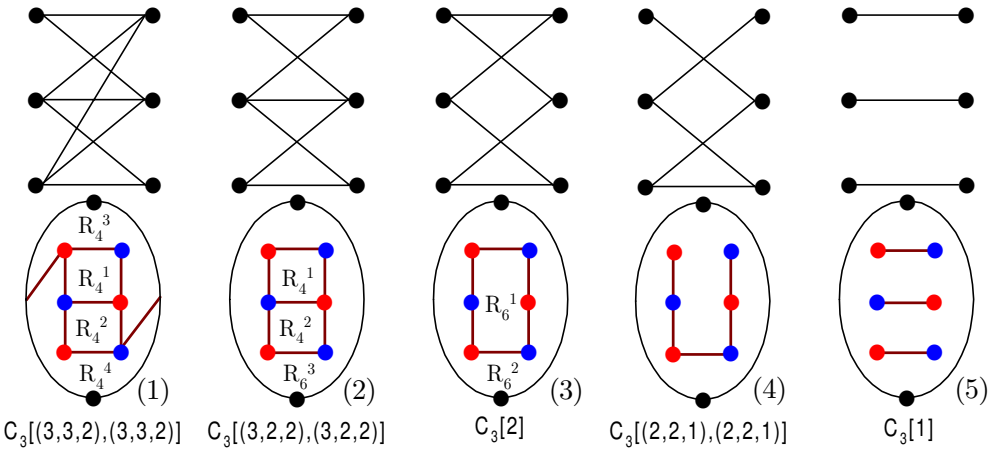

Figura 6.3: Exemplos de mergulhos de canais $\mathfrak{C}_3$ na esfera S

(*ii*) *a classe* $\mathfrak{C}_3[(3,2,2),(3,2,2)]$ *está mergulhada no seguinte conjunto de superfícies*

$$\mathcal{S}_3'' = \{\langle S\,(3)\rangle, \langle T\,(1)\rangle, \langle P\,(3)\rangle, \langle K\,(2)\rangle, \langle 3P\,(1)\rangle\};$$

(*iii*) *as classes* $\mathfrak{C}_3[2]$ *e* $\mathfrak{C}_3[(2,2,1),(2,2,1)]$ *estão mergulhadas no seguinte conjunto de superfícies*

$$\mathcal{S}_3''' = \{\langle S\,(2)\rangle, \langle P\,(2)\rangle\};$$

(*iv*) *as classes* $\mathfrak{C}_3[(3,1,1),(3,1,1)]$, $\mathfrak{C}_3[(3,1,1),(2,2,1)]$, $\mathfrak{C}_3[(2,1,1),(2,1,1)]$ *e a classe de canais sem ruídos* $\mathfrak{C}_3\,[1]$ *não são mergulhos de 2-células, portanto o conjunto de mergulho é vazio.*

Demonstração. Análoga à demonstração da Proposição 6.1.2. ∎

As Proposições 6.1.4 e 6.1.5, fornecem todos os possíveis conjuntos de superfícies para o mergulho de 2-células dos 104 canais que compõem o conjunto $\mathfrak{C}_3$, de todos os canais ternários (canais com 3 entradas e 3 saídas). Quando o mergulho de um canal $\mathfrak{C}$ não é de 2-células, convencionaremos que $\mathfrak{C}$ está sobre a superfície compacta de menor gênero possível, neste caso $\mathfrak{C} \in \mathfrak{C}_3$ está na esfera S e no plano projetivo P, pois estas são, pela Proposição 6.1.5, as superfícies com os menores gêneros em que podemos mergulhar um canal de $\mathfrak{C}_3$ como mergulho de 2-células.

6.1.4 Classes de canais quaternários

A classe $\mathfrak{C}_4\,[4]$ é composta por um único canal e corresponde ao grafo completo bipartitionado $K_{4,4}$.

Mergulhos de canais quaternários com valência 4

A razão de começarmos a identificação por esta classe é devido ao fato de dispormos de resultados que permitem relacionar as superfícies para o mergulho do grafo $K_{4,4}$.

Devido à grande quantidade de canais a serem considerados é que iremos utilizar a notação introduzida no Lema 6.1.6 para descrevermos o conjunto das superfícies para o mergulho de um canal $\mathfrak{C}$.

Lema 6.1.6 *Seja $\langle\Omega(\alpha)\rangle$ o conjunto das superfícies geradas pelo mergulho $\mathfrak{C}_m[p] \hookrightarrow \Omega(\alpha)$. Se $\mathfrak{C}_m[p] \hookrightarrow kT(\alpha)$ e $\mathfrak{C}_m[p] \hookrightarrow hP(\beta)$ são mergulhos mínimos, então o conjunto das superfícies para o mergulho de 2-células do canal $\mathfrak{C}_m[p]$ será:*

$$\mathcal{S}_m^p = \begin{cases} \left\{\langle (k+i)\,T(\alpha-2i)\rangle_{i=0}^{(\alpha-2)/2}\right\} \cup \left\{\langle (h+j)\,P(\beta-j)\rangle_{j=0}^{\beta-1}\right\} & \text{se } \alpha \text{ é par} \\ \left\{\langle (k+i)\,T(\alpha-2i)\rangle_{i=0}^{(\alpha-1)/2}\right\} \cup \left\{\langle (h+j)\,P(\beta-j)\rangle_{j=0}^{\beta-1}\right\} & \text{se } \alpha \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração. Segue das demonstrações dos Teoremas 5.3.3 e 5.3.6 e igualdade (6.6). ∎

Proposição 6.1.7 *O conjunto das superfícies para o mergulho da classe $\mathfrak{C}_4[4]$ é*

$$\mathcal{S}_4^4 = \left\{\langle (1+i)\,T(8-2i)\rangle_{i=0}^{3}\right\} \cup \left\{\langle (2+j)\,P(8-j)\rangle_{j=0}^{7}\right\}.$$

Demonstração. O canal $\mathfrak{C}_4[4]$ é identificado pelo grafo completo biparticionado $K_{4,4}$. Pela igualdades (5.7) e (5.8), os gêneros mínimo e máximo para o mergulho do canal $\mathfrak{C}_4[4]$ são, respectivamente

$$\gamma_m(K_{4,4}) = \{(4-2)^2/4\} = 1, \quad \gamma_M(K_{4,4}) = \left[(4-1)^2/2\right] = 4.$$

Pelo Lema 6.1.6, o conjunto das superfícies orientadas para o mergulho do canal $\mathfrak{C}_4[4]$ é

$$\mathcal{S}_4^4(O) = \{\langle (1+i)\,T(8-2i)\rangle\}_{i=0}^{3}.$$

Além disso, o canal $\mathfrak{C}_4[4]$ está mergulhado minimamente na garrafa de Klein, K, com 8 regiões, como mostra a Figura 5.8. Como $K \equiv 2P$, pelo Lema 6.1.6, temos

$$\mathcal{S}_4^4(\widetilde{O}) = \{\langle (2+j)\,P(8-j)\rangle\}_{j=0}^{7}$$

Da união dos conjuntos $\mathcal{S}_4(O)$ e $\mathcal{S}_4(\widetilde{O})$, segue o resultado desejado. ∎

Gostaríamos de lembrar que o conjunto das superfícies $\langle\Omega(a)\rangle$, geradas pelo mergulho mínimo de 2-células $\mathfrak{C} \hookrightarrow \Omega(a)$, contém poucas superfícies com bordos isolados. A maioria é composta por superfícies com bordos não isolados.

Cardinalidade das classes de canais quaternários

Sejam $X = \{x_1, \cdots, x_4\}, Y = \{y_1, \cdots, y_4\}$ os conjuntos dos vértices do canal $\mathfrak{C} \in \mathfrak{C}_4$ e $P = \{p_1, \cdots, p_4\}, Q = \{q_1, \cdots, q_4\}$ tal que $\operatorname{val} x_i = p_i$ e $\operatorname{val} y_j = q_j$. Pela condição (6.4), $\mathfrak{C}_4[\{p_1, \cdots, p_4\}, \{q_1, \cdots, q_4\}]$ é uma classe de canal em $\mathfrak{C}_4$ se, e somente se, $\sum_{i=1}^4 p_i = \sum_{j=1}^4 q_j$. Por outro lado, $p_i, q_j \in \{1, 2, 3, 4\}$ e portanto, existem classes cujas somas das valências dos vértices podem ser $4, 5, \cdots, 16$. Como notação, escrevemos, por exemplo, "10) {4411,4321,4222,3331,3322}" para indicar que existem cinco tipos de classes cuja

$\mathfrak{C}_{4444} = 1$	$\mathfrak{C}_{4443} = 16$	$\mathfrak{C}_{4433} = 72$	$\mathfrak{C}^{4433}_{4442} = 24$	$\mathfrak{C}_{4432} = 144$	$\mathfrak{C}_{4333} = 96$
$\mathfrak{C}^{4333}_{4441} = 16$	$\mathfrak{C}^{4333}_{4432} = 144$	$\mathfrak{C}_{4422} = 36$	$\mathfrak{C}_{4332} = 720$	$\mathfrak{C}_{3333} = 24$	$\mathfrak{C}^{4332}_{4431} = 144$
$\mathfrak{C}^{3333}_{4431} = 48$	$\mathfrak{C}^{4332}_{4422} = 144$	$\mathfrak{C}^{3333}_{4422} = 36$	$\mathfrak{C}^{3333}_{4332} = 144$	$\mathfrak{C}_{4331} = 144$	$\mathfrak{C}_{4322} = 720$
$\mathfrak{C}_{3332} = 144$	$\mathfrak{C}^{4322}_{4421} = 144$	$\mathfrak{C}^{3332}_{4421} = 144$	$\mathfrak{C}^{4322}_{4331} = 288$	$\mathfrak{C}^{3332}_{4331} = 288$	$\mathfrak{C}^{3332}_{4322} = 288$
$\mathfrak{C}_{4321} = 576$	$\mathfrak{C}_{4222} = 96$	$\mathfrak{C}_{3331} = 112$	$\mathfrak{C}_{3322} = 1224$	$\mathfrak{C}^{4222}_{4411} = 24$	$\mathfrak{C}^{3322}_{4411} = 72$
$\mathfrak{C}^{4222}_{4321} = 288$	$\mathfrak{C}^{3331}_{4321} = 288$	$\mathfrak{C}^{3322}_{4321} = 864$	$\mathfrak{C}^{3331}_{4222} = 96$	$\mathfrak{C}^{3322}_{4222} = 360$	$\mathfrak{C}^{3322}_{3331} = 432$
$\mathfrak{C}_{4221} = 288$	$\mathfrak{C}_{3321} = 1296$	$\mathfrak{C}_{3222} = 816$	$\mathfrak{C}^{4221}_{4311} = 288$	$\mathfrak{C}^{3321}_{4311} = 576$	$\mathfrak{C}^{3222}_{4311} = 288$
$\mathfrak{C}^{3321}_{4221} = 288$	$\mathfrak{C}^{3222}_{4221} = 576$	$\mathfrak{C}^{3222}_{3321} = 1296$	$\mathfrak{C}_{4211} = 144$	$\mathfrak{C}_{3311} = 144$	$\mathfrak{C}_{3221} = 3456$
$\mathfrak{C}_{2222} = 68$	$\mathfrak{C}^{3311}_{4211} = 144$	$\mathfrak{C}^{3221}_{4211} = 288$	$\mathfrak{C}^{2222}_{4211} = 72$	$\mathfrak{C}^{3221}_{3311} = 658$	$\mathfrak{C}^{2222}_{3311} = 96$
$\mathfrak{C}^{2222}_{3221} = 432$	$\mathfrak{C}_{4111} = 16$	$\mathfrak{C}_{3211} = 1584$	$\mathfrak{C}_{2221} = 744$	$\mathfrak{C}^{3211}_{4111} = 144$	$\mathfrak{C}^{2221}_{4111} = 144$
$\mathfrak{C}^{2221}_{3211} = 1248$	$\mathfrak{C}_{3111} = 16$	$\mathfrak{C}_{2211} = 1296$	$\mathfrak{C}^{2211}_{3111} = 432$	$\mathfrak{C}_{2111} = 384$	$\mathfrak{C}^{1111}_{1111} = 24$

Tabela 6.1: Número de elementos das classes de canais em C_4

soma das valências dos vértices em X é 10. Seja $C^r_{m,2}$, o número de combinações com repetições do conjunto com m elementos, tomados dois a dois. Então a cardinalidade das classes é

16) {4444},$C^r_{1,2}$=1; 15) {4443},$C^r_{1,2}$=1; 14) {4442,4433},$C^r_{2,2}$=4; 13) {4441,4432,4333},$C^r_{3,2}$=9; 12) {4431,4422,4332,3333}, $C^r_{4,2}$=16; 11) {4421,4331,4322,3332}$C^r_{4,2}$=16; 10) {4411,4321,4222,3331,3322},$C^r_{5,2}$=25; 9) {4311,4221,3321,3222}$C^r_{4,2}$=16; 8) {4211,3311,3221,2222}$C^r_{4,2}$=16; 7) {4111,3211,2221}$C^r_{3,2}$=9; 6) {3111,2211}$C^r_{2,2}$=4; 5) {2111}$C^r_{1,2}$=1; 4) {1111}$C^r_{1,2}$=1.

Assim, o número de classes de canais em $\mathfrak{C}_4$ é $|\mathfrak{C}_4| = 119$. Fazendo as combinações entre os elementos de cada conjunto acima obtemos:

$\mathfrak{C}^{4444}_{4444}$ $\mathfrak{C}^{4443}_{4443}$ $\mathfrak{C}^{4442}_{4442}$ $\mathfrak{C}^{4433}_{4433}$ $\mathfrak{C}^{4433}_{4442}$ $\mathfrak{C}^{4442}_{4433}$ $\mathfrak{C}^{4441}_{4441}$ $\mathfrak{C}^{4432}_{4432}$ $\mathfrak{C}^{4333}_{4333}$ $\mathfrak{C}^{4432}_{4441}$ $\mathfrak{C}^{4441}_{4432}$ $\mathfrak{C}^{4333}_{4441}$ $\mathfrak{C}^{4441}_{4333}$ $\mathfrak{C}^{4333}_{4432}$
$\mathfrak{C}^{4432}_{4333}$ $\mathfrak{C}^{4431}_{4431}$ $\mathfrak{C}^{4422}_{4422}$ $\mathfrak{C}^{4332}_{4332}$ $\mathfrak{C}^{3333}_{3333}$ $\mathfrak{C}^{4422}_{4431}$ $\mathfrak{C}^{4431}_{4422}$ $\mathfrak{C}^{4332}_{4431}$ $\mathfrak{C}^{4431}_{4332}$ $\mathfrak{C}^{3333}_{4431}$ $\mathfrak{C}^{4431}_{3333}$ $\mathfrak{C}^{4332}_{4422}$ $\mathfrak{C}^{4422}_{4332}$ $\mathfrak{C}^{3333}_{4422}$
$\mathfrak{C}^{4422}_{3333}$ $\mathfrak{C}^{3333}_{4332}$ $\mathfrak{C}^{4332}_{3333}$ $\mathfrak{C}^{4421}_{4421}$ $\mathfrak{C}^{4331}_{4331}$ $\mathfrak{C}^{4322}_{4322}$ $\mathfrak{C}^{3332}_{3332}$ $\mathfrak{C}^{4331}_{4421}$ $\mathfrak{C}^{4421}_{4331}$ $\mathfrak{C}^{4322}_{4421}$ $\mathfrak{C}^{4421}_{4322}$ $\mathfrak{C}^{3332}_{4421}$ $\mathfrak{C}^{4421}_{3332}$ $\mathfrak{C}^{4322}_{4331}$
$\mathfrak{C}^{4331}_{4322}$ $\mathfrak{C}^{3332}_{4331}$ $\mathfrak{C}^{4331}_{3332}$ $\mathfrak{C}^{3332}_{4322}$ $\mathfrak{C}^{4322}_{3332}$ $\mathfrak{C}^{4411}_{4411}$ $\mathfrak{C}^{4321}_{4321}$ $\mathfrak{C}^{4222}_{4222}$ $\mathfrak{C}^{3331}_{3331}$ $\mathfrak{C}^{3322}_{3322}$ $\mathfrak{C}^{4321}_{4411}$ $\mathfrak{C}^{4411}_{4321}$ $\mathfrak{C}^{4222}_{4411}$ $\mathfrak{C}^{4411}_{4222}$
$\mathfrak{C}^{3331}_{4411}$ $\mathfrak{C}^{4411}_{3331}$ $\mathfrak{C}^{3322}_{4411}$ $\mathfrak{C}^{4411}_{3322}$ $\mathfrak{C}^{4222}_{4321}$ $\mathfrak{C}^{4321}_{4222}$ $\mathfrak{C}^{3331}_{4321}$ $\mathfrak{C}^{4321}_{3331}$ $\mathfrak{C}^{3322}_{4321}$ $\mathfrak{C}^{4321}_{3322}$ $\mathfrak{C}^{3331}_{4222}$ $\mathfrak{C}^{4222}_{3331}$ $\mathfrak{C}^{3322}_{4222}$ $\mathfrak{C}^{4222}_{3322}$
$\mathfrak{C}^{3322}_{3331}$ $\mathfrak{C}^{3331}_{3322}$ $\mathfrak{C}^{4311}_{4311}$ $\mathfrak{C}^{4221}_{4221}$ $\mathfrak{C}^{3321}_{3321}$ $\mathfrak{C}^{3222}_{3222}$ $\mathfrak{C}^{4221}_{4311}$ $\mathfrak{C}^{4311}_{4221}$ $\mathfrak{C}^{3321}_{4311}$ $\mathfrak{C}^{4311}_{3321}$ $\mathfrak{C}^{3222}_{4311}$ $\mathfrak{C}^{4311}_{3222}$ $\mathfrak{C}^{3321}_{4221}$ $\mathfrak{C}^{4221}_{3321}$
$\mathfrak{C}^{3222}_{4221}$ $\mathfrak{C}^{4221}_{3222}$ $\mathfrak{C}^{3222}_{3321}$ $\mathfrak{C}^{3321}_{3222}$ $\mathfrak{C}^{4211}_{4211}$ $\mathfrak{C}^{3311}_{3311}$ $\mathfrak{C}^{3221}_{3221}$ $\mathfrak{C}^{2222}_{2222}$ $\mathfrak{C}^{3311}_{4211}$ $\mathfrak{C}^{4211}_{3311}$ $\mathfrak{C}^{3221}_{4211}$ $\mathfrak{C}^{4211}_{3221}$ $\mathfrak{C}^{2222}_{4211}$ $\mathfrak{C}^{4221}_{2222}$
$\mathfrak{C}^{3221}_{3311}$ $\mathfrak{C}^{3311}_{3221}$ $\mathfrak{C}^{2222}_{3311}$ $\mathfrak{C}^{3311}_{2222}$ $\mathfrak{C}^{2222}_{3221}$ $\mathfrak{C}^{3221}_{2222}$ $\mathfrak{C}^{4111}_{4111}$ $\mathfrak{C}^{3211}_{3211}$ $\mathfrak{C}^{2221}_{2221}$ $\mathfrak{C}^{3211}_{4111}$ $\mathfrak{C}^{4111}_{3211}$ $\mathfrak{C}^{2221}_{4111}$ $\mathfrak{C}^{4111}_{2221}$ $\mathfrak{C}^{2221}_{3211}$
$\mathfrak{C}^{3211}_{2221}$ $\mathfrak{C}^{3111}_{3111}$ $\mathfrak{C}^{2211}_{2211}$ $\mathfrak{C}^{2211}_{3111}$ $\mathfrak{C}^{3111}_{2211}$ $\mathfrak{C}^{2111}_{2111}$ $\mathfrak{C}^{1111}_{1111}$.

Mas pela condição em (6.4), algumas dessas classes não existem. Além disso, se um canal $\mathfrak{C} \in \mathfrak{C}^{q_1q_2q_3q_4}_{p_1p_2p_3p_4}$ então uma rotação de 180^o conduz a um canal $\overline{\mathfrak{C}} \in \mathfrak{C}^{p_1p_2p_3p_4}_{q_1q_2q_3q_4}$. Como essa operação é de equivalência, então o número de canais em cada uma dessas classes é igual. A Tabela 6.1 mostra a cardinalidade das classes de canais $\mathfrak{C}_4$.

O conjunto de canais com 4 entradas e 4 saídas $\mathfrak{C}_4$ é composto por 66 classes distintas de canais e 25647 canais diferentes.

Mergulhos de canais quaternários com valência 3

Os grafos associados aos canais da classe $\mathfrak{C}_4[3]$ não fazem parte dos grafos cujos mergulhos já foram classificados. Como são grafos relativamente simples, resolvemos relacionar todos os seus mergulhos mínimos orientados na esfera S, veja Figura 6.4.

Observe que todos os grafos de canais da classe $\mathfrak{C}_4[3]$ são conexos. Esta propriedade permite identificar, sem restrições, o conjunto das superfícies para o mergulho de $\mathfrak{C}_4[3]$.

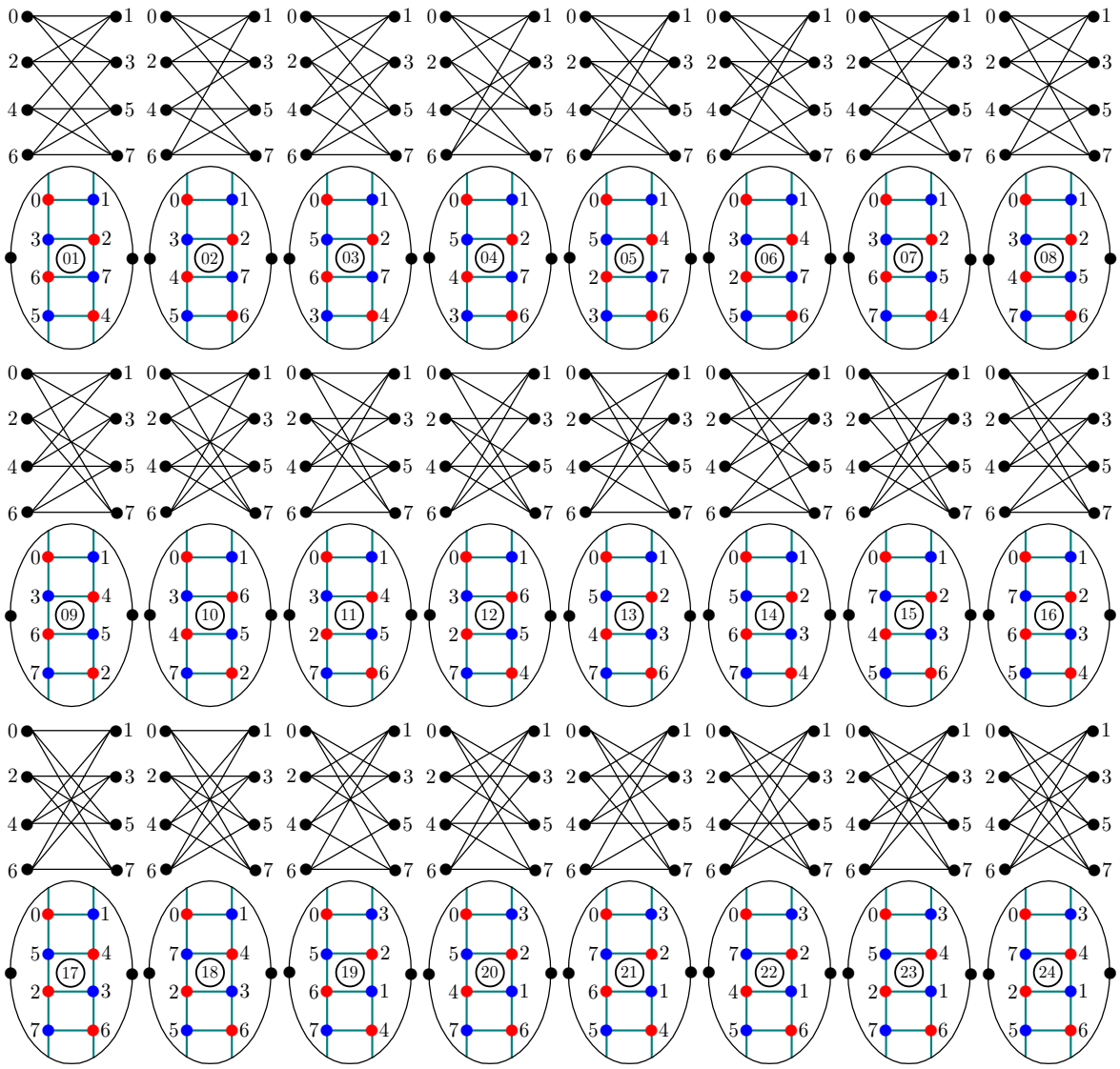

Figura 6.4: Mergulho da classe de canais $\mathfrak{C}_4[3]$ na esfera S

Proposição 6.1.8 *O conjunto das superfícies do mergulho da classe* $\mathfrak{C}_4[3]$ *é*

$$S_4^3 = \{\langle iT(6-2i)\rangle_{i=0}^{2}\} \cup \{\langle (1+j)\,P\,(5-j)\rangle_{j=0}^{4}\}.$$

Demonstração. Concluímos da Figura 6.4, que todo canal da classe $\mathfrak{C}_4[3]$ está mergulhado na esfera S com 6 regiões, como um mergulho de 2-células. É fácil constatar que o mergulho mínimo de $\mathfrak{C}_4[3]$, não-orientado de 2-células encontra-se sobre o plano projetivo P, com 5 regiões. Aplicando o Lema 6.1.6 obtemos o desejado. ■

Mergulhos de canais quaternários com valência 2

Encontramos apenas dois tipos de mergulhos de canais da classe $\mathfrak{C}_4[2]$ sobre superfícies compactas orientadas: os mergulhos de 2-células em S, modelando-a em duas regiões, provenientes dos canais cujos grafos são conexos (mergulho (3) da Figura 6.5), e os mergulhos correspondentes aos grafos desconexos em S (mergulhos (1) e (2) da Figura 6.5). Este último não é um mergulho de 2-células, pois uma das três regiões não é homotópica a um ponto.

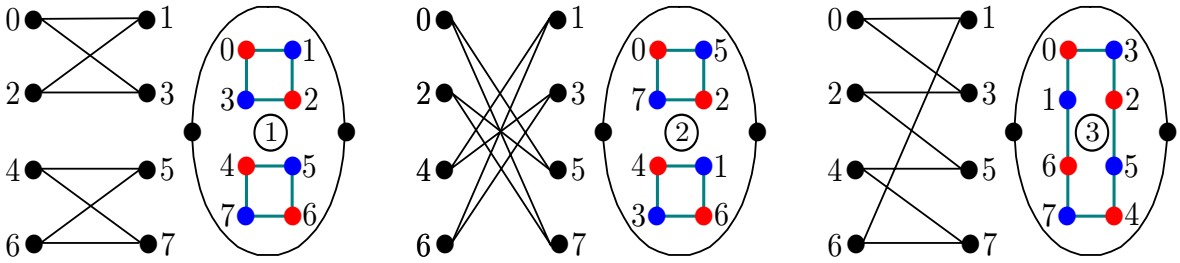

Figura 6.5: Tipos de mergulhos de canais da classe $\mathfrak{C}_4[2]$ sobre a esfera S

Observação 6.1.9 *A classe* $\mathfrak{C}_4[2]$ *é composta por 18 canais com grafos desconexos e 50 canais com grafos conexos. Todos os mergulhos dos grafos desconexos são do tipo* (1) *ou* (2) *da Figura* 6.5 *e os mergulhos dos grafos conexos são do tipo* (3) *da Figura* 6.5.

Portanto, em relação à classe de canais $\mathfrak{C}_4[2]$ temos o seguinte resultado.

Proposição 6.1.10 *O conjunto das superfícies do mergulho da classe de canais* $\mathfrak{C}_4[2]$ *é*

$$S_4^2 = \{S(2), P(2), S_1(1), P_1(1)\}.$$

Observamos que os conjuntos das superfícies para o mergulho de 2-células dos canais da forma $\mathfrak{C}_4[m]$, $1 \leq m \leq 4$, sempre possuem uma representação única. Nas demais classes, verificamos que a medida que a valência dos vértices aumenta a representação deixa de ser única.

6.1.5 Classes de canais quinários

Até agora foi possível determinar o conjunto de mergulhos (orientados e não-orientados) para as classes de canais $\mathfrak{C}_m$, $m \leq 4$. Entretanto, determinar o mergulho mínimo não-orientado para um elemento da classe $\mathfrak{C}_5[4]$ deixou de ser simples. Devido a essa

complexidade iremos considerar somente os mergulhos orientados desses canais bem como os casos triviais de mergulhos não-orientados.

Chamamos a atenção para o fato de que $\mathfrak{C}_5[2]$ e $\mathfrak{C}_5[1]$ são as únicas classes de $\mathfrak{C}_5$ que possuem canais desconexos. Os exemplos de mergulhos mostrados na Figura 6.6 são suficientes para descrever os conjuntos das superfícies das classes de $\mathfrak{C}_5$.

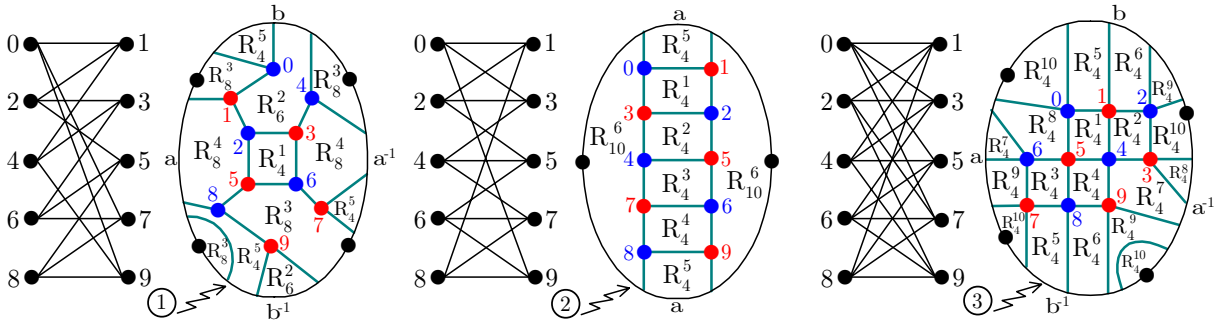

Figura 6.6: Mergulhos mínimos de canais representantes das classes $\mathfrak{C}_5[3]$ e $\mathfrak{C}_5[4]$

Definição 6.1.11 *Seja $\mathfrak{C}_m[n]$ uma classe de canais de $\mathfrak{C}_m$. Se um canal conexo $\mathfrak{C} \in \mathfrak{C}_m[n]$ está mergulhado em Ω como um mergulho de 2-células, diremos que $\mathfrak{C}$ é o **representante de classe** de $\mathfrak{C}_m[n]$.*

Proposição 6.1.12 *O conjunto das superfícies para o mergulho da classe $\mathfrak{C}_5[2]$ é*

$$\mathcal{S}_5^2 = \{S(2), P(2), S_1(1), P_1(1)\}.$$

Demonstração. É fácil comprovarmos que o mergulho de um representante da classe $\mathfrak{C}_5[2]$, a menos do número de vértices, não é diferente de qualquer um dos mergulhos mostrados na Figura 6.5. Portanto $\mathcal{S}_5^2 = \mathcal{S}_4^2$. ∎

Proposição 6.1.13 *O conjunto das superfícies para o mergulho da classe $\mathfrak{C}_5[3]$ é*

$$\mathcal{S}_5^3 = \left\{\langle (1+i)\, T(5-2i)\rangle_{i=0}^{2}\right\} \cup \left\{\langle (1+j)\, P(6-2j)\rangle_{j=0}^{5}\right\}.$$

Demonstração. Os mergulhos (1) e (2) mostrados na Figura 6.6 são mergulhos mínimos compactos, orientado e não-orientado, de um mesmo canal $\mathfrak{C}$ (indicado na Figura 6.6), representante da classe $\mathfrak{C}_5[3]$. Em particular, temos que

$$\mathfrak{C}_5[3] \hookrightarrow T(5) = 2R_4 + R_6 + 2R_8 \quad e \quad \mathfrak{C}_5[3] \hookrightarrow P(6) = 5R_4 + R_{10}.$$

Concluímos do Lema 6.1.6, que o conjunto das superfícies para o mergulho de $\mathfrak{C}_5[3]$ é da forma enunciada na proposição. ∎

As classes de canais $\mathfrak{C}_m[p]$, $p < m$, não podem ser representadas por grafos completos bipartidos, mas por subgrafos desses. Portanto, o gênero do mergulho mínimo não-orientado, (6.1), não identifica o mergulho mínimo desses canais, servindo apenas como um

limitante superior para os gêneros das superfícies onde se encontram os mergulhos mínimos de $\mathfrak{C}_m[p]$. Com isso, surge a seguinte pergunta: Como iremos identificar o mergulho mínimo não-orientado desses canais? A resposta a essa pergunta não parece ser simples. Todavia, nos casos onde foram possíveis realizar os mergulhos não-orientados constatamos o seguinte fato.

Observação 6.1.14 *Se γ é o gênero mínimo para o mergulho orientado do grafo G, então o gênero mínimo para o mergulho não orientado de G é γ_m ou $\gamma_m - 1$.*

Por exemplo, o grafo $K_{3,3}$ está mergulhado minimamente no toro e no plano projetivo. Em vista disso, quando não for possível identificar o mergulho mínimo não-orientado do canal $\mathfrak{C}_m[p]$, $p < m$, mergulharemos este canal numa superfície de mesmo gênero do mergulho mínimo orientado. É o caso das Proposições 6.1.15 e 6.1.22.

Proposição 6.1.15 *O conjunto das superfícies para o mergulho da classe $\mathfrak{C}_5[4]$ é*

$$S_5^4 = \left\{\langle (1+i)\,T\,(10-2i)\rangle_{i=0}^{4}\right\} \cup \left\{\langle (2+j)\,P\,(10-j)\rangle_{i=0}^{9}\right\}.$$

Demonstração. Segue do mergulho (3) mostrado na Figura 6.6; da Observação 6.1.14 e do Lema 6.1.6. ∎

Mergulhos de canais quinários com valência 5

Proposição 6.1.16 *O conjunto das superfícies para o mergulho de 2-células da classe $\mathfrak{C}_5[5]$ é*

$$S_5^5 = \left\{\langle (3+i)\,T\,(11-2i)\rangle_{i=0}^{5}\right\} \cup \left\{\langle (5+j)\,P\,(12-2j)\rangle_{j=0}^{11}\right\}.$$

Demonstração. Pela igualdade (5.7) e pelo Teorema de König, sabemos que $\mathfrak{C}_5[5] \hookrightarrow 2T(13)$ minimamente. Da equação (6.1) e do Teorema de König, sabemos que $\mathfrak{C}_5[5] \hookrightarrow 4P(13)$ minimamente. O Lema 6.1.6 nos fornece o resultado desejado. ∎

6.1.6 Classes de canais 6-ários

O objetivo em considerar o mergulho (2), mostrado na Figura 6.7, era construir um mergulho de 2-células, no entanto, isto não foi possível pois a região R_8^8 não é homotópica a um ponto. Este é um exemplo de um mergulho de um canal de $\mathfrak{C}_6[4]$ no bitoro que não é um mergulho de 2-células.

Observação 6.1.17 *O mergulho (2) da Figura 6.7 não é um mergulho mínimo da classe de canais $\mathfrak{C}_6[4]$, esta encontra-se mergulhada minimamente sobre o toro decompondo-o em 12 regiões quadradas conforme o mergulho ilustrado na Figura 6.9.*

Proposição 6.1.18 *O conjunto das superfícies para o mergulho da classe $\mathfrak{C}_6[3]$ é*

$$S_6^8 = \left\{\langle iT\,(8-2i)\rangle_{i=0}^{3}\right\} \cup \left\{\langle (1+j)\,P\,(8-j)\rangle_{j=0}^{7}\right\}.$$

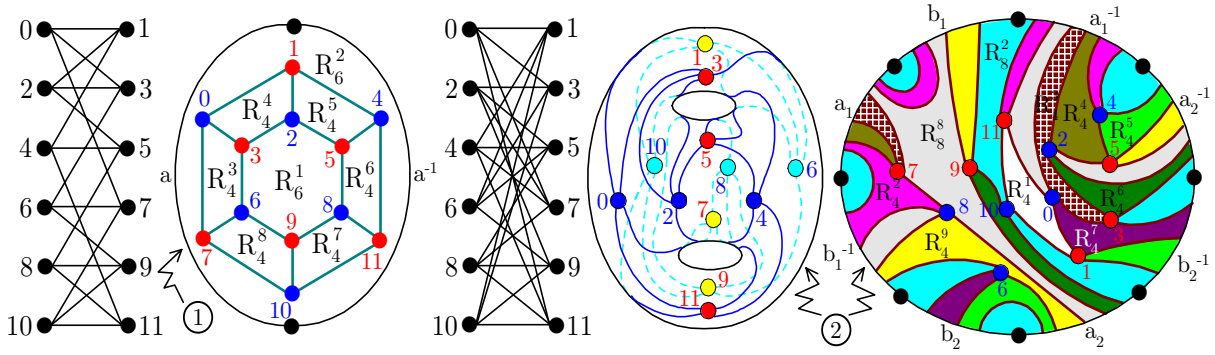

Figura 6.7: Mergulhos de canais representantes das classes $\mathfrak{C}_6[3]$ e $\mathfrak{C}_6[4]$, respectivamente

Demonstração. Lembre que $0T = S$. Segue da Figura 6.7 que $\mathfrak{C}_6[3] \hookrightarrow S(8) = 6R_4 + 2R_6$ é um mergulho mínimo. Observe que este mesmo tipo de mergulho pode ser realizado no plano projetivo. Aplicando o Lema 6.1.6, as demais superfícies são determinadas. ■

Devido à simplicidade do mergulho não-orientado da classe $\mathfrak{C}_6[4]$, iremos descrever o conjunto das superfícies para o mergulho dessa classe.

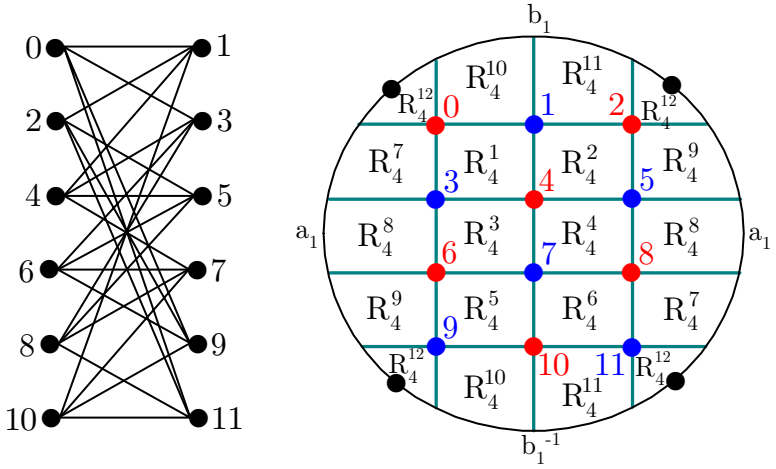

Figura 6.8: Mergulho não-orientado do canal $\mathfrak{C}_6[4]$ em $K(12)$.

Como não foi possível realizar um mergulho de 2-células no modelo (2) para a classe de canais $\mathfrak{C}_6[4]$ mostrado na Figura 6.7, iremos considerar o canal $\mathfrak{C}_6[4]$, mostrado na Figura 6.8. Para este canal foi possível realizar o mergulho mínimo de 2-células do grafo $\mathfrak{C}_6[4]$.

Proposição 6.1.19 *O conjunto das superfícies para o mergulho da classe* $\mathfrak{C}_6[4]$ *é*

$$S_6^4 = \left\{ \langle (1+i)\, T\, (12-2i) \rangle_{i=0}^{5} \right\} \cup \left\{ \langle (2+j)\, P\, (12-j) \rangle_{j=0}^{11} \right\}.$$

Demonstração. Pelas Figuras 6.9 e 6.8, a classe $\mathfrak{C}_6[4]$ está mergulhada minimamente no toro e na superfície de Klein, respectivamente, com as seguintes composições

$$\mathfrak{C}_6[4] \hookrightarrow 2T(10) = 6R_4 + 4R_6 \quad e \quad \mathfrak{C}_6[4] \hookrightarrow K(12) = 12R_4.$$

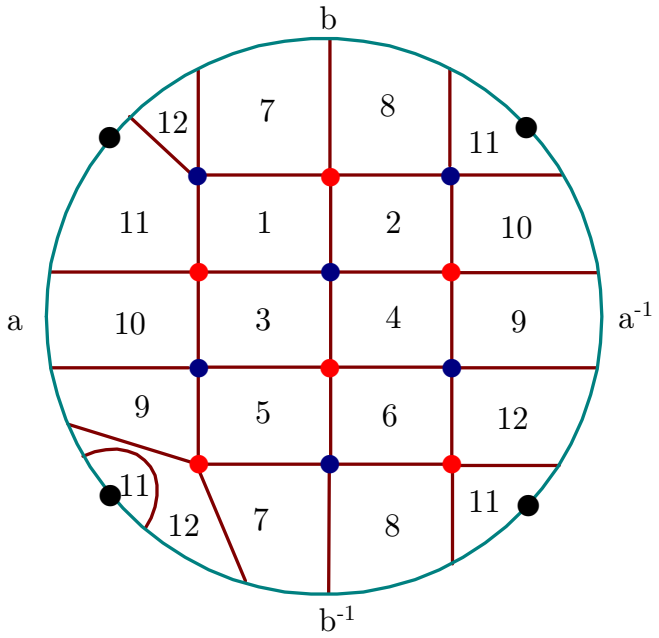

Figura 6.9: Mergulho mínimo orientado da classe de canais $\mathfrak{C}_6\,[4]$ sobre o toro

Aplicando o Lema 6.1.6, as demais superfícies são determinadas. ■

Mergulhos de canais 6-ários com valência 6

Lembramos que esta classe de canais é composta por um único canal correspondente ao grafo completo biparticionado $K_{6,6}$.

Proposição 6.1.20 *O conjunto das superfícies para o mergulho de 2-células da classe* $\mathfrak{C}_6\,[6]$ *é*

$$S_6^6 = \left\{\langle (4+i)\,T\,(18-2i)\rangle_{i=0}^{8}\right\} \cup \left\{\langle (8+j)\,P\,(18-j)\rangle_{j=0}^{17}\right\}.$$

Demonstração. Da igualdade (5.7) e do Teorema de König, sabemos que $\mathfrak{C}_6[6] \hookrightarrow 4T\,(18)$ (observe na Figura 5.5 que $\mathfrak{C}_6[6] \hookrightarrow 4T\,(18) = 18R_4$). Por outro lado, o grau de conexidade da superfície compacta não-orientada para o mergulho do $K_{6,6}$ é, pela fórmula de Ringel (6.1), $\bar{\gamma}\,(K_{6,6}) = \{(6-2)^2/2\} = 8$. Portanto, $K_{6,6}$ está mergulhado minimamente em $8P \equiv 4K$. O Lema 6.1.6 fornece as demais superfícies. ■

6.1.7 Classes de canais 7-ários

Observamos que o mergulho mínimo de um canal de $\mathfrak{C}_6[4]$ é realizado no bi-toro, podendo gerar frequentemente mergulhos que não são de 2-células, enquanto que os mergulhos de canais da classe $\mathfrak{C}_7[4]$, por terem mais lados, geram menos mergulhos que não são de 2-células. Na Figura 6.10 mostramos um mergulho mínimo compacto orientado de um canal representante da classe $\mathfrak{C}_7[3]$.

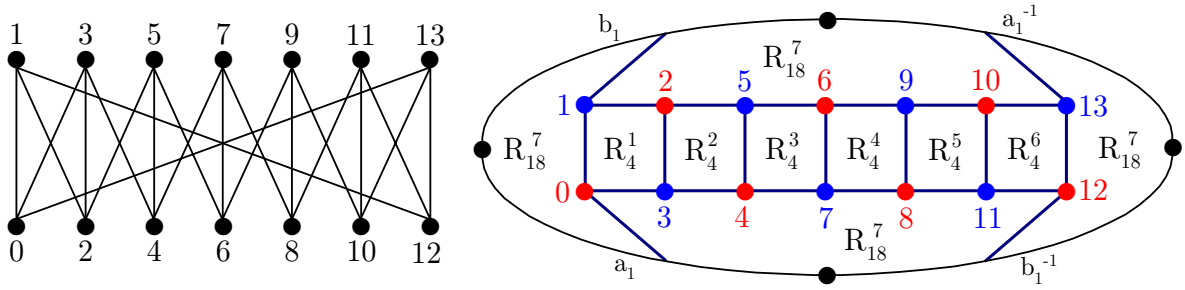

Figura 6.10: Mergulho mínimo de um canal representante da classe $\mathfrak{C}_7[3]$

Proposição 6.1.21 *O conjunto das superfícies para o mergulho da classe* $\mathfrak{C}_7\,[3]$ *é*

$$S_7^3 = \left\{\langle (1+i)\,T\,(7-2i)\rangle_{i=0}^{3}\right\} \cup \left\{\langle (1+j)\,P\,(8-j)\rangle_{j=0}^{7}\right\}.$$

Demonstração. Pela Figura 6.10, a classe $\mathfrak{C}_7[3]$ está mergulhada minimamente no toro, isto é, $\mathfrak{C}_7[3] \hookrightarrow T\,(7) = 6R_4 + R_{18}$. É fácil verificar (Figura 6.6), que podemos ainda mergulhar $\mathfrak{C}_7[3]$ no plano projetivo com a seguinte decomposição: $\mathfrak{C}_7[3] \hookrightarrow P\,(8) = 7R_4 + R_{14}$. Aplicando o Lema 6.1.6, as demais superfícies do conjunto S_7^3 são determinadas. ■

Os modelos das Figuras 6.7 (2) e 6.11, foram realizados segundo o processo de construção de mergulhos descritos na Seção 5.2.

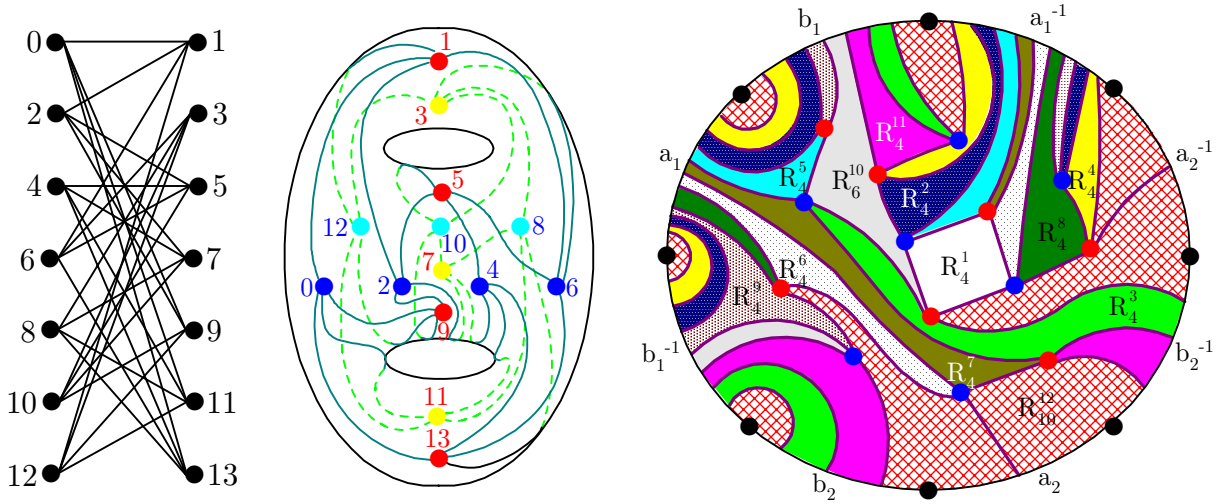

Figura 6.11: Mergulho mínimo orientado da classe de canais $\mathfrak{C}_7[4]$ sobre o bitoro

Proposição 6.1.22 *O conjunto das superfícies para o mergulho da classe* $\mathfrak{C}_7\,[4]$ *é*

$$S_7^4 = \left\{\langle (2+i)\,T\,(12-2i)\rangle_{i=0}^{5}\right\} \cup \left\{\langle (4+i)\,P\,(12-2i)\rangle_{i=0}^{11}\right\}.$$

Demonstração. Pela Figura 6.11, a classe $\mathfrak{C}_7[4]$ está mergulhada minimamente no bitoro com a seguinte composição: $\mathfrak{C}_7[4] \hookrightarrow 2T\,(12) = 10R_4 + R_6 + R_{10}$. Pela Observação 6.1.14 podemos realizar o mergulho $\mathfrak{C}_7[4] \hookrightarrow 5P\,(12)$. Aplicando o Lema 6.1.6, as demais superfícies de $\S_7^4$ são determinadas. ∎

Mergulhos de canais 7-ários com valência 7

Até aqui conseguimos exibir um exemplo concreto de um mergulho orientado de um grafo completo biparticionado $K_{7,7}$ no $7T$ (veja Figuras 5.6 e 5.7).

Proposição 6.1.23 *O conjunto das superfícies para o mergulho de 2-células da classe* $\mathfrak{C}_7\,[7]$ *é*

$$\S_7^7 = \left\{\langle (7+i)\,T\,(23-2i)\rangle_{i=0}^{11}\right\} \cup \left\{\langle (13+j)\,P\,(24-j)\rangle_{j=0}^{23}\right\}.$$

Demonstração. Da igualdade (5.7) e do Teorema de König, sabemos que $\mathfrak{C}_7[7] \hookrightarrow 7T\,(23)$ (da Figura 5.7 resulta que: $\mathfrak{C}_7[7] \hookrightarrow 7T\,(23) = 22R_4 + R_8$). Por outro lado, pela fórmula de Ringel (6.1), $\bar{\gamma}\,(K_{7,7}) = \{(7-2)^2/2\} = 12$. Portanto, $K_{7,7}$ está mergulhado minimamente em $12P$. Como a característica de Eüler de $12P$ é $\chi\,(12P) = -10$, então o número de regiões de um mergulho do $K_{7,7}$ em $6K$ é, pelo Teorema de König, igual a $F = A - V - 10 = 49 - 14 - 10 = 25$. Logo, o mergulho não-orientado de $\mathfrak{C}_7[7]$ é sobre o $6K\,(25)$. Aplicando o Lema 6.1.6, as demais superfícies de $\S_7^7$ são determinadas. ∎

6.1.8 Classes de canais 8-ários

Encerraremos a descrição dos conjuntos das superfícies para os mergulhos dos canais com as principais classes de canais de $\mathfrak{C}_8$. Na Figura 6.12 os modelos (1) e (2) indicam os mergulhos mínimos orientados de 2-células de canais representantes das classes $\mathfrak{C}_8[3]$ e $\mathfrak{C}_8[4]$, respectivamente.

Proposição 6.1.24 *O conjunto das superfícies para o mergulho da classe* $\mathfrak{C}_8\,[3]$ *é*

$$\S_8^3 = \left\{\langle iT\,(10-2i)\rangle_{i=0}^{4}\right\} \cup \left\{\langle (1+j)\,P\,(10-j)\rangle_{j=0}^{9}\right\}.$$

Demonstração. Pelo mergulho (1) da Figura 6.12, a classe $\mathfrak{C}_8[3]$ está mergulhada minimamente na esfera S. Mas todo mergulho de um grafo na esfera pode ser realizado no plano projetivo com a mesma composição, isto é,

$$\mathfrak{C}_8[3] \hookrightarrow S\,(10) = 8R_4 + 2R_8 = P\,(10) \hookleftarrow \mathfrak{C}_8[3].$$

Aplicando o Lema 6.1.6, as demais superfícies de $\S_8^3$ são obtidas. ∎

Proposição 6.1.25 *O conjunto das superfícies para o mergulho da classe* $\mathfrak{C}_8\,[4]$ *é*

$$\S_8^4 = \left\{\langle (1+i)\,T\,(16-2i)\rangle_{i=0}^{7}\right\} \cup \left\{\langle (2+j)\,P\,(16-j)\rangle_{j=0}^{15}\right\}.$$

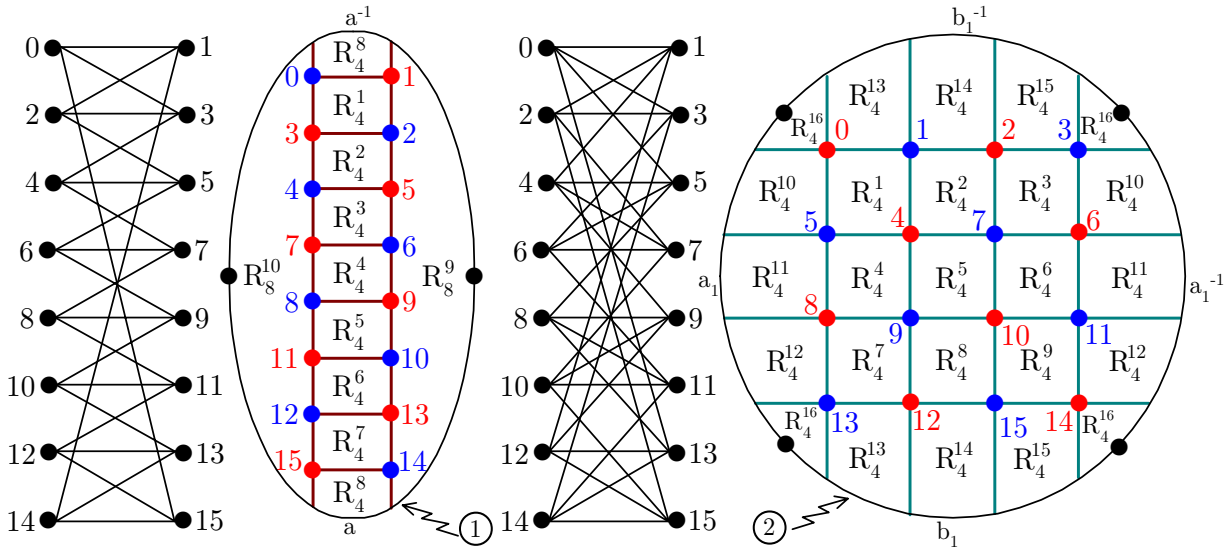

Figura 6.12: Mergulhos mínimos dos canais $\mathfrak{C}_8[3]$ e $\mathfrak{C}_8[4]$

Demonstração. Do modelo (2) da Figura 6.12 e Figura 6.13 segue que a classe de canais $\mathfrak{C}_8[4]$ está mergulhada minimamente no toro e na superfície de Klein com as seguintes composições

$$\mathfrak{C}_8[4] \hookrightarrow T(16) = 16R_4 = K(16) \hookleftarrow \mathfrak{C}_8[4].$$

Aplicando o Lema 6.1.6, as demais superfícies de $\mathfrak{C}_8[4]$ são obtidas ■

Mergulhos de canais 8-ários com valência 8

Usaremos a teoria de mergulhos dos grafos completos biparticionados para relacionar o conjunto das superfícies para o mergulho da classe $\mathfrak{C}_8[8]$

Proposição 6.1.26 *O conjunto das superfícies para o mergulho de 2-células da classe* $\mathfrak{C}_8[8]$ *é*

$$S_8^8 = \left\{\langle (9+i)\, T(32-2i)\rangle_{i=0}^{15}\right\} \cup \left\{\langle (18+j)\, P(32-j)\rangle_{j=0}^{31}\right\}.$$

Demonstração. A classe de canais $\mathfrak{C}_8[8]$ é equivalente ao grafo completo biparticionado $K_{8,8}$, então pela igualdade (5.7), deduzimos que $\mathfrak{C}_8[8]$ está mergulhado no $9T$ com a seguinte composição: $\mathfrak{C}_8[8] \hookrightarrow 9T(32) = 32R_4$. Por outro lado, das fórmulas de Ringel (6.1) e da característica de Eüler concluímos que $\mathfrak{C}_8[8]$ está mergulhado minimamente no $8K$ do seguinte modo: $\mathfrak{C}_8[8] \hookrightarrow 8K(34)$. Aplicando o Lema 6.1.6, as demais superfícies de S_8^8 são obtidas. ■

6.1.9 Classes de canais passíveis de generalizações

A classe de canais $\mathfrak{C}_m[t]$, $t \in \{1,2,3,4\}$, pode ser representada com esquemas de mergulhos bastante simples que permitem a generalização para alguns valores de m. Veremos

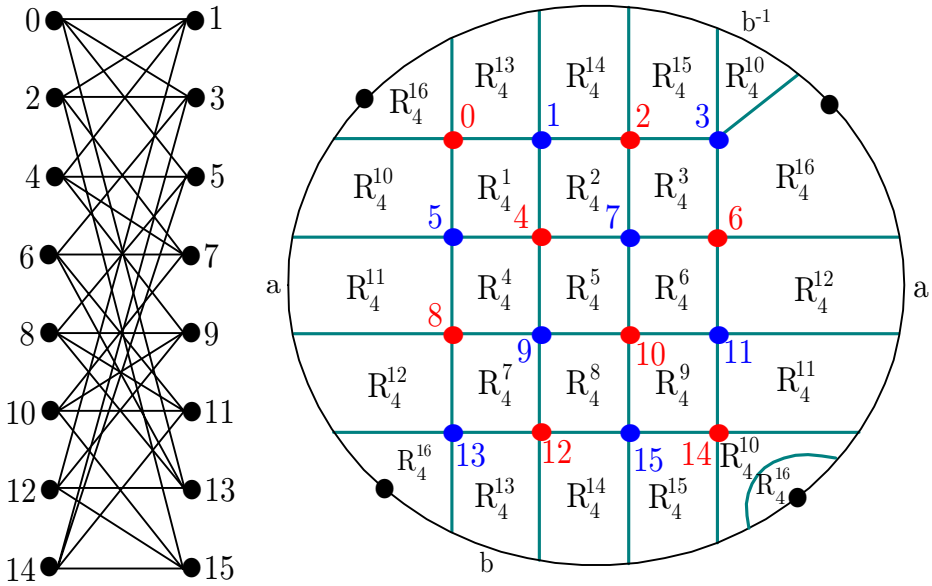

Figura 6.13: Mergulho mínimo da classe $\mathfrak{C}_8[4]$ sobre a garrafa de Klein

alguns resultados gerais para o conjunto das superfícies desses canais.

Mergulhos de canais m-ários com valências 1 e 2

Proposição 6.1.27 *Para todo inteiro m, $m \geq 2$, o conjunto das superfícies para o mergulho da classe de canais sem ruído $\mathfrak{C}_m[1]$ e da classe $\mathfrak{C}_m[2]$ são, respectivamente*

$$S_m^1 = \{S(0), P(0)\} \quad e \quad S_m^2 = \{S(2), S_1(1), P(2), P_1(2)\}.$$

Demonstração. Os grafos associados aos canais sem ruído das classes $\mathfrak{C}_m[1]$ não possuem caminhos fechados, logo os mergulhos em superfícies compactas sem bordos não formam regiões poligonais, portanto o número de regiões em qualquer mergulho é sempre 0. Os canais do tipo $\mathfrak{C}_m[2]$ sempre poderão ser mergulhados como na Figura 6.5. Como estamos considerando apenas o mergulho de um representante de classe cujo grafo é conexo, então

$$\mathfrak{C}_m[2] \hookrightarrow S(2) = 2R_{2m} = P(2) \hookleftarrow \mathfrak{C}_m[2].$$

Os outros mergulhos com bordos seguem da Definição 5.2.1. ∎

Quando o representante de classe não é um grafo conexo, o mergulho em uma superfície compacta sempre produz uma região não homotópica a um ponto, conseqüentemente não é mergulho de 2-células. Em particular, vale a seguinte afirmação.

Teorema 6.1.28 *Seja $m \geq 4$ e suponha que $\mathfrak{C}_m[2]$ está mergulhado minimamente numa superfície compacta. Se o canal representante de classe é um grafo com r componentes conexas então $2 \leq r \leq m/2$ e $\mathfrak{C}_m[2]$ está mergulhado minimamente em S e P com r regiões de 2-células e 1 região que não é de 2-células, isto é,*

$$\mathfrak{C}_m[2] \hookrightarrow S(r+1) \quad e \quad \mathfrak{C}_m[2] \hookrightarrow P(r+1).$$

Demonstração. Se $\mathfrak{C}$ é o representante de classe de $\mathfrak{C}_m[2]$ com r componentes conexas então, como os vértices de $\mathfrak{C}_m[2]$ têm valência 2, uma componente conexa de $\mathfrak{C}$ deve ter pelo menos 2 entradas e 2 saídas e, portanto $2 \leq r \leq m/2$ ($r = m/2$ se, e somente se, m é par). Mas o mergulho de cada componente conexa de $\mathfrak{C}$ forma uma região de 2-células, Figura 6.5. Por outro lado, cada componente conexa de $\mathfrak{C}$ é um grafo planar. Já que podemos mergulhar infinitos grafos planares na esfera ou no plano projetivo, segue o resultado desejado. ■

Corolário 6.1.29 *Se o canal representante da classe $\mathfrak{C}_m[2]$ é um grafo com r componentes conexas então o conjunto das superfícies de $\mathfrak{C}_m[2]$ é*

$$\mathcal{S}_m^2 = \langle S(r+1) \rangle \cup \langle P(r+1) \rangle .$$

Demonstração. Conseqüência da Proposição 6.1.28. Como não é um mergulho de 2-células não temos referencial para considerar mergulhos sobre mT ou mP. ■

Corolário 6.1.30 *Seja $\mathfrak{C}$ o canal representante da classe $\mathfrak{C}_m[2]$, $m \equiv 0 \pmod 2$, cujo grafo correspondente tem r componentes conexas. Se $r = m/2$ então o mergulho de $\mathfrak{C}_m[2]$ tem a seguinte composição*

$$\mathfrak{C}_m[2] \hookrightarrow S(r+1) = rR_4 + \widetilde{R} = P(r+1) \hookleftarrow \mathfrak{C}_m[2],$$

onde $\widetilde{R}$ é a região do mergulho que não é de 2-células.

Demonstração. Se $r = m/2$, então r é máximo e toda componente conexa de $\mathfrak{C}$ corresponde a um grafo completo biparticionado do tipo $K_{2,2}$, cujo mergulho numa superfície compacta é uma região do tipo R_4. Logo, o mergulho de $\mathfrak{C}_m[2]$ é da forma enunciada. ■

Mergulhos de canais m-ários com valência 3

Veremos que é possível descrever, num único teorema, o tipo de conjunto para o mergulho de todas as classes de canais com valência 3.

A Figura 6.14 mostra o mergulho genérico orientado ou não-orientado para o mergulho de uma classe de canal do tipo $\mathfrak{C}_m[3]$, $m \equiv 0 \pmod 2$. Observamos que o esquema representa o mergulho de $\mathfrak{C}_m[3]$ sobre o plano projetivo P. É claro que, a menos da região R_4^{m+2} (essa contém uma faixa de Möbius em P), este também é um mergulho sobre a esfera S, basta trocar a orientação de um dos lados do polígono de 2-lados.

Observamos ainda que, no caso em que $m \equiv 1 \pmod 2$, o mergulho mínimo orientado da classe $\mathfrak{C}_m[3]$ pode ser realizado como o mergulho mostrado na Figura 6.10. Assim, é fácil concluir que neste caso, o mergulho mínimo não-orientado de $\mathfrak{C}_m[3]$ está sobre o plano projetivo. Analisando os esquemas de mergulhos das Figuras 6.10 e 6.14, chegamos a seguinte conclusão.

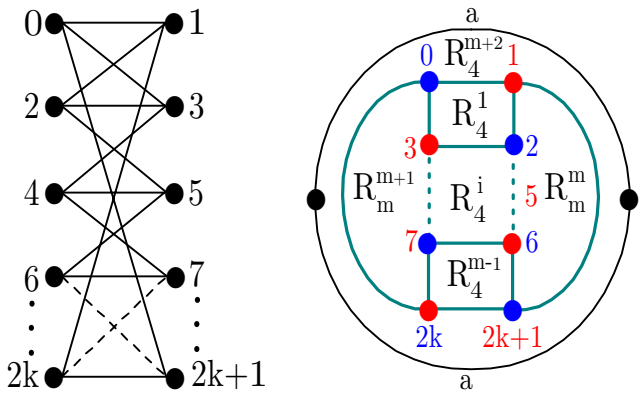

Figura 6.14: Mergulho das classes de canais $\mathfrak{C}_m[3]$

Teorema 6.1.31 *O conjunto das superfícies para o mergulho da classe de canais* $\mathfrak{C}_m[3]$ *é*

$$\begin{aligned} S_m^{\mathfrak{B}} &= \left\{\langle iT\,(m+2-2i)\rangle_{i=0}^{(m+2)/2-1}\right\} \cup \left\{\langle (1+j)\,P\,(m+1-j)\rangle_{j=0}^{m}\right\} \\ &\cup \left\{\langle (1+i)\,P\,(m+2-i)\rangle\right\}_{i=0}^{m+1}. \end{aligned}$$

caso m *seja par. Se* m *é ímpar substitua, na expressão de* $S_m^{\mathfrak{B}}$, $\left\{\langle iT\,(m+2-2i)\rangle\right\}_{i=0}^{m/2-1}$ *por* $\left\{\langle iT\,(m+2-2i)\rangle\right\}_{i=0}^{(m+1)/2}$.

Demonstração. Pelos comentários acima e análises das Figuras 6.10 e 6.14. ■

6.1.10 Mergulhos de canais m-ários com valência 4

A dificuldade neste caso, em identificar mergulhos de algumas classes de canais de $\mathfrak{C}_m[4]$ é bem superior aos casos anteriores. Contudo, conseguimos determinar um número bastante expressivo de mergulhos de classes de canais com valência quatro.

Mergulhos mínimos de canais $\mathfrak{C}_m[4]$ sobre o toro

A nossa primeira afirmação é sobre a generalização do esquema de mergulho (3) da Figura 6.6. Neste esquema podemos acrescentar um número par de filas verticais de três vértices entre a segunda e a terceira filas verticais, de tal modo que as conexões entre estes vértices conservam a estrutura do mergulho original. Analisando o esquema genérico resultante, chegamos a seguinte conclusão.

Teorema 6.1.32 *Para todo inteiro positivo* k*, a classe de canais* $\mathfrak{C}_{5+3k}[4]$ *está mergulhada minimamente no toro com a seguinte composição*

$$\mathfrak{C}_{5+3k}[4] \hookrightarrow T\,(10+6k) = (10+6k)\,R_4.$$

Demonstração. Segue do comentário acima e análise do esquema genérico construído a partir do esquema (3) da Figura 6.6, pelo incremento de um número par de filas verticais

de vértices entre as segunda e terceira filas, de maneira que as conexões entre os vértices conservem a estrutura do mergulho original. ■

Procedendo do mesmo modo que na dedução do Teorema 6.1.32, concluímos, do esquema de mergulho (2) da Figura 6.12, o seguinte resultado.

Teorema 6.1.33 *Para todo inteiro positivo k, a classe de canais $\mathfrak{C}_{8+4k}[4]$ está mergulhada minimamente no toro com a seguinte composição*

$$\mathfrak{C}_{8+4k}[4] \hookrightarrow T\,(16+8k) = (16+8k)\,R_4.$$

Demonstração. Podemos introduzir um número par de filas horizontais ou verticais entre duas filas quaisquer do esquema de mergulho (2) da Figura 6.12. Uma simples contagem nas regiões do esquema geral resultante nos dá a composição de mergulho desejada. ■

Mergulhos de canais $\mathfrak{C}_m[4]$ sobre o bitoro

Verificamos que nem todas as classes de canais com valência 4 estão mergulhadas sobre o toro. Os mergulhos mínimos orientados de muitas dessas classes se encontram sobre o bitoros.

No esquema de mergulho da Figura 6.15, existem vários locais que permitem a introdução de um número par de curvas com quatro vértices de maneira que o grafo associado corresponde a um canal de valência 4 - veja Figura 6.16.

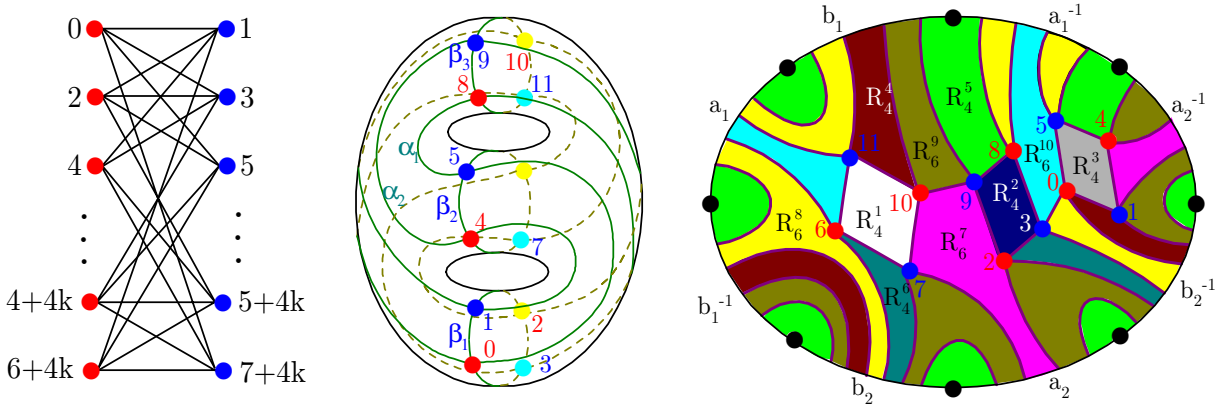

Figura 6.15: Mergulho mínimo orientado de $\mathfrak{C}_9[4]$ no bitoro

Lema 6.1.34 *Para todo inteiro positivo k, a classe de canais $\mathfrak{C}_{6+4k}[4]$ está mergulhada minimamente no bitoro com a seguinte composição*

$$\mathfrak{C}_{6+4k}[4] \hookrightarrow 2T\,(10+8k) = (6+8k)\,R_4 + 4R_6. \tag{6.9}$$

Demonstração. Observamos que no esquema de mergulho do canal $\mathfrak{C}_6[4]$ sobre o bitoro, Figura 6.15, podemos introduzir uma seqüência de $2k$ curvas γ_j, $j = 1, \cdots 2k$,

homotópicas a β_i, $i = 1, 2, 3$, de tal modo que nenhuma das curvas β_i esteja entre esta seqüência. Para cada γ_j, podemos colocar 4 vértices sobre as 4 interseções com os lados de $\mathfrak{C}_6[4]$, construindo um mergulho sobre o $2T$ de um grafo conexo correspondente ao canal $\mathfrak{C}_{6+4k}[4]$. Observe que os inteiros $6+4k$ são distintos dos inteiros das formas $5+3k$ e $8 = 3k$, portanto, $\mathfrak{C}_{6+4k}[4]$ está mergulhado minimamente no bitoro. Já que o incremento de cada curva produz 4 novas regiões do tipo R_4 e o mergulho de $\mathfrak{C}_6[4]$ é da forma

$$\mathfrak{C}_6[4] \hookrightarrow 2T\,(10) = 6R_4 + 4R_6,$$

deduzimos que o mergulho de $\mathfrak{C}_{6+4k}[4]$ é da forma (6.9). ■

Constatamos que no esquema de mergulho da Figura 6.15, tanto podemos introduzir um número par de filas sobre curvas homotópicas a β_i como também, por exemplo, entre as curvas α_1 e α_2. O modelo de mergulho da Figura 6.15 foi inspirado no esquema da Figura 6.15, construído a partir deste, com a introdução de duas filas sobre as duas curvas fechadas entre α_1 e α_2 e, apenas para indicar o outro tipo de implemento, dispusemos duas filas de vértices sobre curvas homotópicas a β_i. É claro que o modelo plano do mergulho não considerou este implemento.

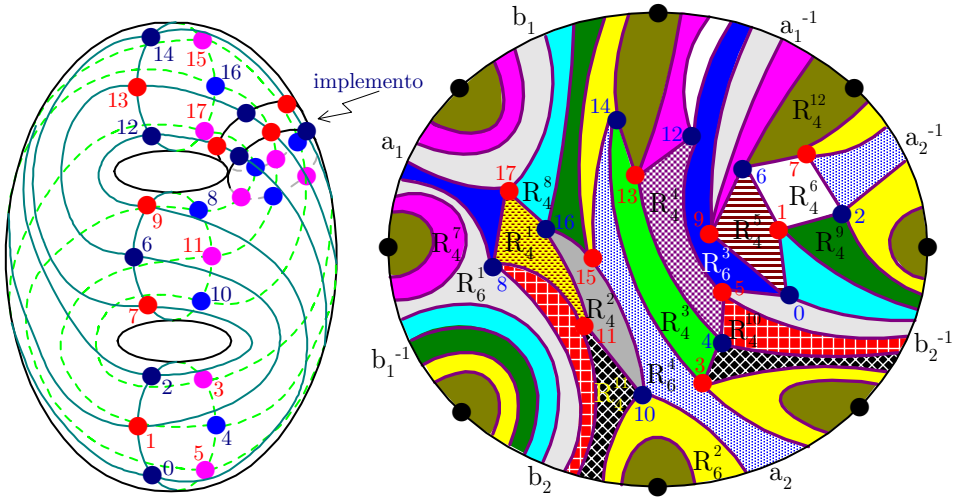

Figura 6.16: Mergulho de $\mathfrak{C}_{9+6k}[4]$ sobre $2T$ com implemento de 2 filas

Lema 6.1.35 *Para todo inteiro positivo k, a classe de canais $\mathfrak{C}_{9+6k}[4]$ está mergulhada minimamente no bitoro com a seguinte composição*

$$\mathfrak{C}_{9+6k}[4] \hookrightarrow 2T\,(16 + 12k) = (12 + 12k)\,R_4 + 4R_6.$$

Demonstração. Considerando o mergulho do canal representante da classe $\mathfrak{C}_{9+6k}[4]$ da Figura 6.16, observamos que podemos introduzir $2k$ filas de 6 vértices como mostra o local de implemento. Veja que a introdução de cada fila representa um acréscimo de 6 regiões do tipo R_4, logo a introdução de $2k$ filas acrescenta $12k$ regiões. Como o mergulho do modelo básico $\mathfrak{C}_9[4]$ é composto por

$$\mathfrak{C}_9[4] \hookrightarrow 2T\,(16) = 12R_4 + 4R_6,$$

então o mergulho de $\mathfrak{C}_{9+6k}[4]$ tem a composição enunciada. ■

Teorema 6.1.36 *Quaisquer que sejam os inteiros $t \geq 2$ e $k \geq 0$, a classe de canais $\mathfrak{C}_{t(3+2k)}[4]$ está mergulhada no bitoro com a seguinte composição*

$$\mathfrak{C}_{t(3+2k)}[4] \hookrightarrow 2T\left(6+6t+4kt-8k\right) = \left(2+6t+4kt-8k\right)R_4 + 4R_6.$$

Demonstração. Usando o mesmo artifício que nos Lemas 6.1.34 e 6.1.35 no mergulho da Figura 6.16 deduzimos que a classe $\mathfrak{C}_{12+8t}[4]$ está mergulhada no bitoro com a seguinte composição

$$\mathfrak{C}_{12+8k}[4] \hookrightarrow 2T\left(22+16K\right) = \left(18+16k\right)R_4 + 4R_6.$$

Escrevendo os índices dessas classes na forma fatorada, constatamos que elas são classes da forma $\mathfrak{C}_{t(3+2k)}[4]$, $t = 2, 3, 4, \cdots$. Escrevendo o número de regiões e a composição do mergulho em função de t, concluímos, indutivamente, a composição do mergulho de $\mathfrak{C}_{t(3+2k)}[4]$. ∎

Muitos dos mergulhos em $\mathfrak{C}_{t(3+2k)}[4]$ não são obviamente mínimos. Por exemplo, a classe $\mathfrak{C}_{14}[4]$ é uma classe de $\mathfrak{C}_{t(3+2k)}[4]$. Pelo Teorema 6.1.32, o seu mergulho mínimo encontra-se sobre o toro, pois é uma classe em $\mathfrak{C}_{5+3k3}$. Por outro lado, os mergulhos das classes $\mathfrak{C}_6[4]$ e $\mathfrak{C}_9[4]$, representadas nas Figuras 6.15 e 6.16, são mergulhos mínimos.

6.1.11 Mergulhos mínimos de canais $\mathfrak{C}_m[4]$ em superfícies não-orientadas

Também não identificaremos, como ocorreu no caso orientado, todas as classes de mergulhos mínimos não-orientados das classes de canais com valência quatro, mas relacionaremos uma grande parcela desse conjunto.

Mergulhos mínimos de canais $\mathfrak{C}_m[4]$ sobre a garrafa de Klein K

Antes de iniciarmos, gostaríamos de lembrar que não existem mergulhos de canais de $\mathfrak{C}_m[4]$ sobre o plano projetivo e, conseqüentemente, também sobre a esfera. Isto porque a menor classe em $\mathfrak{C}_m[4]$ é $\mathfrak{C}_4[4]$, que corresponde ao grafo biparticionado $K_{4,4}$, cujos mergulhos mínimos estão sobre superfícies de gênero 1, toro e garrafa de Klein.

A Figura 6.17 é uma generalização do modelo de mergulho mostrado na Figura 6.8. Descrevemos o caso em que k é ímpar.

Teorema 6.1.37 *Para todo inteiro $p \equiv 1 \pmod 2$ e todo inteiro $k \geq 2$, a classe de canais $\mathfrak{C}_{pk}[4]$ está mergulhada minimamente na garrafa de Klein K com a seguinte composição*

$$\mathfrak{C}_{(2+k)(3+2t)}[4] = K\left(2\left(2+k\right)\left(3+2t\right)\right) = \left(2\left(2+k\right)\left(3+2t\right)\right)R_4.$$

Demonstração. Note que o esquema de mergulho da Figura 6.8 permite a implementação de uma seqüência de $2k$ filas, tanto no sentido horizontal quanto no vertical. Considerando o modelo genérico da Figura 6.17, fixemos o número de filas horizontais em

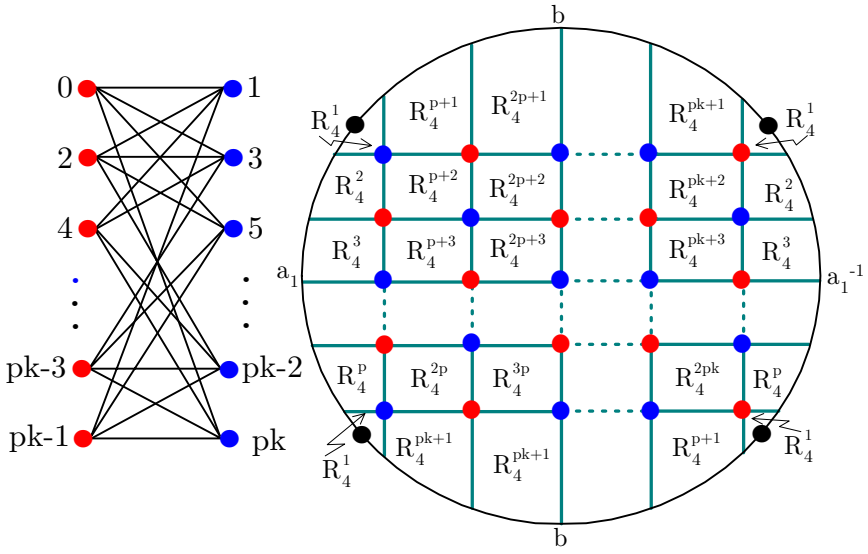

Figura 6.17: Mergulho da classe $\mathfrak{C}_{pk}[4]$ cobre a garrafa de Klein K

$3, 6, 9, \cdots$. Implementado $2k$ filas verticais de vértices que preservam a forma do modelo, deduzimos as seguintes composições de mergulhos mínimos de classes:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}_{6+3k}[4] &\hookrightarrow K\,(12+6k) = (12+6k)\,R_4 \\
\mathfrak{C}_{10+5k}[4] &\hookrightarrow K\,(20+10k) = (20+10k)\,R_4 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\mathfrak{C}_{(6+4t)+(3+2t)k}[4] &\hookrightarrow K\,((12+8t)+(6+4t)\,k) = ((12+8t)+(6+4t)\,k)\,R_4,
\end{aligned}$$

onde $t = 0, 1, 2, \cdots$. Escrevendo na forma fatorada, temos a seguinte composição

$$\mathfrak{C}_{(2+k)(3+2t)}[4] = K\,(2\,(2+k)\,(3+2t)) = (2\,(2+k)\,(3+2t))\,R_4. \qquad \blacksquare$$

Apesar do Teorema 6.1.37 ser bastante abrangente, todavia não contempla a classe que parece ser bem simples, isto é, a classe $\mathfrak{C}_5[4]$. Verificamos que o mergulho mínimo dessa classe não pode ser realizado sobre a garrafa de Klein, portanto sendo realizado numa superfície não-orientada de gênero 2.

6.1.12 Canais $\mathfrak{C}_{2,n}[n, 2]$

Os canais com número de entradas e saídas iguais a potências de 2 são muito utilizados em comunicação. Descreveremos o conjunto de mergulhos daqueles que estão associados a grafos completos biparticionados.

Como vimos anteriormente, os canais $\mathfrak{C}_{2,n}[n, 2]$ são todos planares, portanto os mergulhos mínimos desses canais encontram-se na esfera e no plano projetivo. A diferença está nos mergulhos máximos.

Proposição 6.1.38 *O conjunto das superfícies para o mergulho do canal* $\mathfrak{C}_{2,4}[4, 2]$ *é*

$$S_2^4 = \{\langle iT\,(4-2i)\rangle\}_{i=0}^{1} \cup \{\langle (1+j)\,P\,(4-j)\rangle\}_{j=0}^{3}.$$

Demonstração. Como o grafo associado ao canal $\mathfrak{C}_{2,4}[2,4]$ é o grafo completo biparticionado $K_{2,4}$, segue do Teorema 5.1.2, fórmulas de Ringel (6.1) e da característica de Eüler, que o $K_{2,4}$ está mergulhado em $S(4)$ e $P(4)$. Aplicando o Lema 6.1.6 obtemos o desejado. ■

Com a teoria que dispomos, é fácil descrever esses tipos de mergulhos, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 6.1.39 *O canal $\mathfrak{C}_{2,n}[n,2]$, está mergulhado minimamente na esfera $S(n)$ e no plano projetivo $P(n)$. Se n é par, então o mergulho máximo encontra-se sobre o $(n/2-1)T(2)$ e $(n/2)K(1)$.*

Demonstração. De fato, o grafo associado ao canal $\mathfrak{C}_{2,n}[n,2]$ é o grafo completo biparticionado $K_{2,n}$, então o Teorema 5.1.2, fórmulas de Ringel (6.1) e a característica de Eüler provam o desejado. ■

6.1.13 Uma justificativa para o ganho de decodificação de canal com o uso do quantizador

Sabe-se que o uso de quantizador num sistema de comunicações tem como objetivo tornar o sistema mais eficiente no sentido de fornecer maior confiabilidade no processo de decodificação.

Um quantizador com Q níveis é um refinamento no espaço de sinais no qual a região de decisão de um sinal é dividida em Q subregiões iguais, caso a distribuição de sinais seja uniforme. O número de níveis de um quantizador corresponde ao número de degraus, como mostra a Figura 6.18.

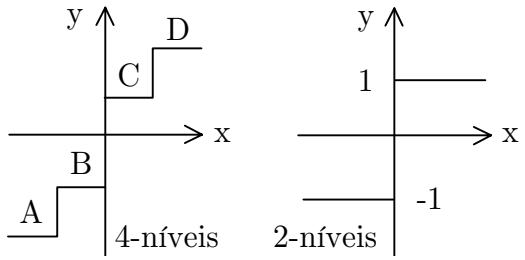

Figura 6.18: Quantizadores de 4-níveis e 2-níveis

Ao decidirmos por um alfabeto m-ário, podemos perfeitamente usar o canal $\mathfrak{C}_m[m]$ para transmitir a informação. O grafo completo biparticionado $K_{m,m}$ é o grafo associado. Um quantizador de Q-níveis ($Q = m^k$) corresponde ao canal $\mathfrak{C}_{m,m^k}[m^k, m]$ o qual está associado ao grafo completo biparticionado K_{m,m^k}.

No caso do alfabeto binário, devemos analisar os canais BSC e $\mathfrak{C}_{2,2^k}[2^k,2]$. Em particular, se o quantizador tem 8-níveis, $\mathfrak{C}_{2,8}[8,2]$ será o canal usado no sistema e $\mathcal{A} = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ será o alfabeto na saída do canal.

No diagrama do quantizador mostrado na Figura 6.19, as áreas hachuriadas estão relacionadas com as probabilidades de transição do canal, isto é, $p(j/s_0)$ e $p(j/s_1)$ para

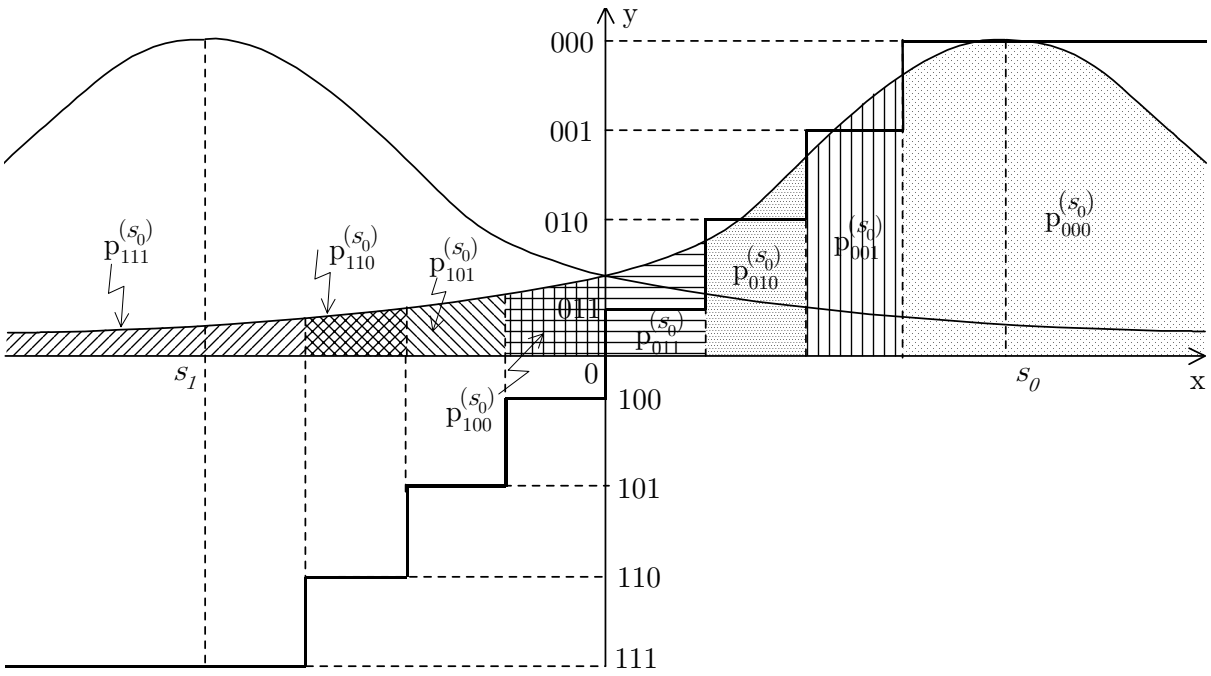

Figura 6.19: Quantizador de nível-8 para um canal binário com ruido gaussiano branco aditivo

$j \in \{000, 001, \cdots, 111\}$. Em particular,

$$p\,(111/s_0) \equiv p_{111}^{(s_0)} = \text{probabilidade da saída do canal ser 111 dado que o sinal } s_0 \text{ estava na entrada}$$

Sendo assim, o canal resultante será como o indicado na Figura 6.20.

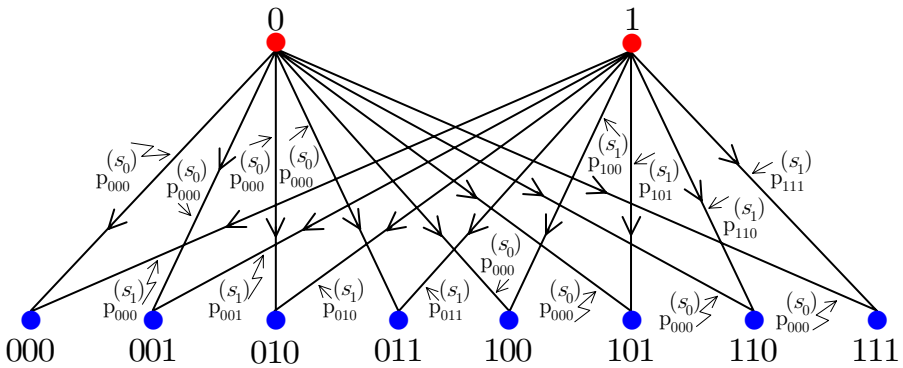

Figura 6.20: Canal discreto sem memória $\mathfrak{C}_{2,8}[8,2]$ relativo ao quantizador de 8-níveis

Sabe-se que o ganho de codificação aumenta à medida que o refinamento aumenta, isto é, quanto maior for o valor de Q, maior é o ganho. No caso do canal BSC, para um quantizador de 8-níveis correspondente ao canal $\mathfrak{C}_{2,8}[8,2]$ mostrado na Figura 6.20, um

ganho de decodificação da ordem de 2 dBs em relação ao canal BSC é obtido. Verificou-se ainda que, a partir de 8-níveis, a taxa de crescimento do ganho de codificação é muito pequena comparando com a complexidade computacional e de implementação.

Todavia, o objetivo é encontrar um argumento matemático que justifique este ganho. Com os resultados obtidos nesta seção, apresentaremos uma conjectura de que o ganho de codificação quando do uso de quantizador em um sistema de comunicações, está relacionado com o gênero da superfície na qual se encontra mergulhado o grafo associado ao canal. Mais precisamente temos:

> *Quanto maior for o número de níveis* $Q\ (= m^k,\ k > 1)$*do quantizador, maior é o gênero da superfície na qual o canal* $\mathfrak{C}_{m,Q}[Q, m]$ *está mergulhado, cujo modelo é formado por* m *regiões, pois o quantizador representa um alfabeto* m*-ário, implicando que a probabilidade depende do gênero da superfície.*

Tomemos como referência o caso binário. Suponha que usemos um quantizador com 8 níveis, isto é, $\mathfrak{C}_{2,8}[8, 2]$ é o canal usado no sistema e $K_{2,8}$ é o grafo associado. O canal $\mathfrak{C}_2[2]$ está associado ao grafo $K_{2,2}$ o qual, pela Proposição 6.1.2, está mergulhado na esfera com duas regiões, portanto, numa superfície de gênero zero. Por outro lado, o canal $\mathfrak{C}_{2,8}[8, 2]$ pode ser mergulhado em $S(8), T(6), 2T(4)$ e $3T(2)$. Note que tanto o $K_{2,2}$ como o $K_{2,8}$ podem ser mergulhados na esfera. Somente este fato não conduz a uma resposta conveniente. Por outro lado, os mergulhos do $\mathfrak{C}_2[2]$ e $\mathfrak{C}_{2,8}[8, 2]$ sobre a esfera são realizados com duas e oito regiões, respectivamente. Mas o canal $\mathfrak{C}_{2,8}[8, 2]$ é usado para transmitir dígitos binário, logo o espaço deve conter duas regiões, ou seja, $\mathfrak{C}_{2,8}[8, 2] \hookrightarrow 3T(2)$ é o único mergulho que representa esta situação. Supondo que o canal $\mathfrak{C}_{2,8}[8, 2]$ está mergulhado na S e no $3T$, como mergulhos de 2-células, e considerando distribuições uniformes dos vértices de $\mathfrak{C}_{2,8}[8, 2]$ sobre tais superfícies, temos razões para afirmar que, sobre o $3T$, o comprimento do lado que liga dois vértices do canal $\mathfrak{C}_{2,8}[8, 2]$ é maior do que o comprimento do lado que liga dois vértices correspondentes sobre a esfera, propriedade esta que implica na diminuição da probabilidade de erro de decodificação do canal, justificando o ganho de decodificação. Por indução, chegamos a conclusão que a probabilidade de erro diminui à medida que aumenta o número de níveis do quantizador.

Do ponto de vista intuitivo é fácil convencer-se da justificativa apresentada no parágrafo anterior, porém, uma demonstração formal requer mais do que isso. Nesta direção, teremos que fazer uso de conceitos pertinentes à geometria riemanniana, tema que extrapola o aspecto topológico abordado neste trabalho.

6.2 Canal DMC, Estruturas Algébricas e Tesselações Regulares

Como foi visto, todo canal discreto sem memória possui uma representação através de um grafo. Identificado este, podemos mergulhá-lo em uma superfície, como um mergulho de 2-células. Mas os modelos destes mergulhos, pela Proposição 5.3.5, só possuem regiões com um número par de lados, não sendo uma triangulação sobre a superfície, porém sendo parte desta triangulação. Conseqüentemente, existe um subgrupo do primeiro grupo de homologia associado ao grafo, e conseqüentemente associado ao canal DMC.

Canal	**Conjunto das Estruturas algébricas** $\mathbb{H}_{m,n}$	$\#\left(\mathbb{H}_{m,n}\right)$	$\#\left(\mathbb{S}_{m,n}\right)$
BSC	$\{0\}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}$	3	4
$\mathfrak{C}_3[3]$	$\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3, \mathbb{Z}^4, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^3$	7	14
$\mathfrak{C}_{24}[4,2]$	$\{0\}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^1, \cdots, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^3$	7	16
$\mathfrak{C}_4[3]$	$\{0\}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3, \mathbb{Z}^4, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, \cdots, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^4$	10	27
$\mathfrak{C}_5[3]$	$\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3, \cdots, \mathbb{Z}^6, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^2, \cdots, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^5$	11	30
$\mathfrak{C}_6[3]$	$\{0\}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3, \cdots, \mathbb{Z}^6, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, \cdots, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^7$	15	56
$\mathfrak{C}_7[3]$	$\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3, \cdots, \mathbb{Z}^8, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^2, \cdots, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^7$	15	52
$\mathfrak{C}_8[3]$	$\{0\}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3, \cdots, \mathbb{Z}^8, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, \cdots, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^9$	19	85
$\mathfrak{C}_4[4]$	$\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3, \cdots, \mathbb{Z}^8, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^2, \cdots, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^8$	15	56
$\mathfrak{C}_5[4]$	$\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3, \cdots, \mathbb{Z}^{10}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^2, \cdots, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{10}$	19	85
$\mathfrak{C}_6[4]$	$\mathbb{Z}^4, \mathbb{Z}^5, \cdots, \mathbb{Z}^{12}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^2, \cdots, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{12}$	21	108
$\mathfrak{C}_7[4]$	$\mathbb{Z}^4, \mathbb{Z}^5, \cdots, \mathbb{Z}^{14}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^3, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^4, \cdots, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{14}$	23	120
$\mathfrak{C}_8[4]$	$\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3, \cdots, \mathbb{Z}^{16}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^2, \cdots, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{16}$	31	208
$\mathfrak{C}_5[5]$	$\mathbb{Z}^6, \mathbb{Z}^7, \cdots, \mathbb{Z}^{16}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^4, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^5, \cdots, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{15}$	23	114
$\mathfrak{C}_6[6]$	$\mathbb{Z}^8, \mathbb{Z}^9, \cdots, \mathbb{Z}^{24}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^7, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^8, \cdots, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{24}$	35	261
$\mathfrak{C}_7[7]$	$\mathbb{Z}^{14}, \mathbb{Z}^{15}, \cdots, \mathbb{Z}^{36}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{12}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{13}, \cdots, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{35}$	48	469
$\mathfrak{C}_8[8]$	$\mathbb{Z}^{18}, \mathbb{Z}^{19}, \cdots, \mathbb{Z}^{48}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{17}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{18}, \cdots, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{48}$	63	800
$\mathfrak{C}_m[2]$	$\{0\}, \mathbb{Z}, \cdots, \mathbb{Z}^{m-2}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, \cdots, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{m-1}$	$2m$	$\frac{3}{4}m^2 + m$
$\mathfrak{C}_m[3]$	$\{0\}, \mathbb{Z}, \cdots, \mathbb{Z}^m, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, \cdots, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^m$, m par	$2m+2$	$\frac{3}{4}m^2+3m+3$
$\mathfrak{C}_m[3]$	$\{0\}, \mathbb{Z}, \cdots, \mathbb{Z}^{m+1}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, \cdots, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^m$, m ímpar	$2m+3$	$\frac{3}{4}m^2+3m+\frac{13}{4}$

Tabela 6.2: Estruturas algébricas das classes de canais

Determinaremos a seguir o conjunto dos grupos de homologia das superfícies em que o grafo associado ao canal pode ser mergulhado como mergulho de 2-células.

Além disso, estamos interessados também em identificar as tesselações regulares provenientes de mergulhos de 2-células do canal com tm regiões, $t \geq 1$. Note que ao identificarmos as tesselações regulares com m regiões, caso $t = 1$, atendemos às condições para que os conjuntos de sinais sejam geometricamente uniformes. As tesselações regulares com tm regiões, $t > 1$, podem ser usadas para projetos de quantizadores com t níveis, isto é, cada sinal do conjunto de sinais é representado por t novos símbolos.

Definição 6.2.1 *Seja $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$ um canal com valências P e Q. Seja $\mathbb{S}_{m,n}$ o conjunto das superfícies para o mergulho de 2-células do canal $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$. Então o* ***conjunto das estruturas algébricas de*** *$\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$ denotará o conjunto do primeiro grupo de homologia de cada uma das superfícies de $\mathbb{S}_{m,n}$.*

Nas condições do Lema 6.1.6, ou seja, se $\langle \Omega(\delta) \rangle$ é o conjunto das superfícies geradas pelo mergulho $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q] \hookrightarrow \Omega(\delta)$ e se $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q] \hookrightarrow kT(\alpha)$ e $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q] \hookrightarrow hP(\beta)$ são os mergulhos mínimos orientados e não-orientados, então podemos fazer as seguintes deduções sobre o mergulho de 2-células de um canal DMC.

Teorema 6.2.2 (Teorema Principal) *Se $\mathbb{S}_{m,n}$ é o conjunto das superfícies para o mergulho do canal discreto sem memória $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$, com valências P e Q, então:*

(*i*) *a cardinalidade de* S_m^p *é*

$$\#\left(S_m^p\right) = \sum_{i=0}^{(\alpha-2)/2}(\alpha-2i) + \sum_{j=0}^{\beta-1}(\beta-j) \tag{6.10}$$

se α *é par, caso contrário, substitua* $(\alpha-2)/2$ *por* $(\alpha-1)/2$;

(*ii*) *o conjunto das estruturas algébricas de* $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$ *que não estão sobre superfície não-orientadas com bordos é*

$$\mathbb{H}_{m,n} = \left\{\mathbb{Z}^{2k}, \mathbb{Z}^{2k+1}, \cdots, \mathbb{Z}^{2k+\alpha-3}, \mathbb{Z}^{2k+\alpha-2}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{h-1}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{h}, \cdots, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{h+\beta-2}\right\}$$

se α *é par, caso contrário, substitua* $2k+\alpha-2$ *por* $2k+\alpha-1$;

(*iii*) *o conjunto das tesselações regulares com* m *regiões idênticas é*

$$\begin{aligned}\Xi_{m,n} = \{&kT_{\alpha-m}(m), (k+1)T_{\alpha-2-m}(m), \cdots, (k+\tfrac{\alpha-m}{2})T(m),\\ &hP_{\beta-m}(m), (h+1)P_{\beta-1-m}(m), \cdots, (h+\beta-m)T(m)\};\end{aligned}$$

se α *e* m *têm a mesma paridade (isto é, se ambos forem pares ou se ambos forem ímpares), caso contrário substitua* $\left(k+\frac{\alpha-m}{2}\right)T(m)$ *por* $\left(k+\frac{\alpha-1-m}{2}\right)T(m)$.

(*iv*) *se* $m,n \geq 4$ *existem pelo menos duas tesselações regulares com* m *regiões em* $\Xi_{m,n}$.

Demonstração. Cada conjunto $\langle kT(\alpha)\rangle$ é composto por α elementos, assim a parte (i) segue da soma das variações dos índices i e j do Lema 6.1.6.

Para a parte (ii) basta identificar, via Teorema 4.4.6, o grupo de homologia dos conjuntos $\langle kT(\alpha)\rangle$ e $\langle hP(\beta)\rangle$, onde $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q] \hookrightarrow kP(\alpha)$ e $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q] \hookrightarrow hT(\beta)$ são os mergulhos mínimos orientados e não-orientados de $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$; levar em consideração a condição de igualdade do Corolário 4.4.7 e observar que este conjunto não é diferente do conjunto do grupo de homologia de $\langle kT(\alpha)\rangle$ se α é par, e é formado pelo grupo de homologia de $\langle kT(\alpha)\rangle$ e das superfícies $(k+\alpha-1)T(1)$ no caso em que α é ímpar. Em relação aos mergulhos não-orientados de $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$, o conjunto do grupo de homologia das superfícies é formado pelo grupo de homologia de $\langle hP(\beta)\rangle$.

Por outro lado, se $\alpha,\beta \geq m$, então existem tesselações regulares provenientes de mergulhos de 2-células do canal $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$. Se α e m têm a mesma paridade (ou a e m são parares ou são simultaneamente ímpares), para cada i, $0 \leq i \leq (\alpha-m)/2$, o mergulho $(k+i)T_{a-2i-m}(m)$ de $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$ é uma tesselação regular com m regiões; como são $k+\frac{\alpha-m}{2}+1$ conjuntos $\langle(k+i)T(\alpha-2i)\rangle$, aplicando o Lema 6.1.6 concluímos que as tesselações regulares com m regiões sobre superfícies orientadas são as superfícies de $\Xi_{m,n}$ relacionadas na primeira linha. De modo semelhante deduzimos o caso em que α e m têm paridades diferentes (α e m não podem ser simultaneamente pares ou simultaneamente ímpares). No caso não-orientado, as tesselações relacionadas na linha inferior de $\Xi_{m,n}$, é deduzido com raciocínio análogo, o que mostra a parte (iii).

A dedução de (iv) segue dos mergulhos de canais determinados nesta seção. ∎

Observação 6.2.3 *Em geral, as estruturas algébricas associadas as superfícies não-orientadas com bordos do conjunto* $S_{m,n}$ *são as mesmas geradas pelo conjunto das superfícies orientadas. A diferença é pequena. Nas classes de canais enumeradas na Tabela 6.2 foram identificadas as seguintes estruturas que não constam na relação da tabela.*

$$\mathbb{Z} \in S_3^3, S_5^3, S_7^3; \quad \mathbb{Z}^7 \in S_6^3; \quad \mathbb{Z}^9 \in S_8^3; \quad \mathbb{Z}^5 \in S_5^5; \quad \mathbb{Z}^{13} \in S_7^7 \ \ e \ \ \mathbb{Z}^{m-1} \in S_m^2.$$

Observe que a expressão da cardinalidade de $\S_{m,n}$ mostrada na igualdade (6.10), pode ainda ser representada por

$$\#\left(\S_m^p\right) = \begin{cases} \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1}{2}\beta, \text{ se } \alpha \text{ é par} \\ \\ \frac{1}{4}(\alpha+1)^2 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1}{2}\beta, \text{ se } \alpha \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Corolário 6.2.4 *Se $\S_{m,n}$ é o conjunto das superfícies para o mergulho do canal discreto sem memória $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$ com valências P e Q, então as cardinalidades de $\mathbb{H}_{m,n}$ e $\Xi_{m,n}$ são*

$$\#(\mathbb{H}_{m,n}) = \begin{cases} \alpha+\beta, \text{ se } \alpha \text{ é ímpar} \\ \\ \alpha+\beta-1, \text{ se } \alpha \text{ é par} \end{cases} \quad e \quad \#(\Xi_{\bar{m},n}) = \begin{cases} \frac{\alpha-3m+4}{2}+\beta, \text{ se } a+m \text{ é par} \\ \\ \frac{\alpha-3m+3}{2}+\beta, \text{ se } \alpha+m \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração. Pelo Corolário 4.4.7, as superfícies kT e kT_1 possuem o mesmo grupo de homologia, conseqüentemente, o conjunto do grupo de homologia de $\langle kT(\alpha)\rangle$ possui $\alpha-1$ elementos; este fato e as condições de α justificadas na demonstração do Teorema Principal, parte (ii), resultam na cardinalidade de $\mathbb{H}_{m,n}$ de (ii) enquanto que $\langle hP(\beta)\rangle$ possui β grupos de homologias distintos. Pela demonstração da parte (iii) do Teorema Principal, o mergulho $(k+i)\,T_{\alpha-2i-m}(m)$ de $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$ é uma tesselação regular com m regiões nos seguintes casos:

1) se $\alpha+m$ é par e $0 \le i \le (\alpha-m)/2$; logo existem $(\alpha-m)/2+1$ tesselações regulares com m regiões em superfícies orientadas;

2) se $\alpha+m$ é ímpar e $0 \le i \le (\alpha-m-1)/2$; logo existem tesselações regulares com m regiões em superfícies orientadas.

Por outro lado, para cada j, $0 \le j \le \beta-m$, o mergulho $(h+i)\,P_{\beta-i-m}(m)$ de $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$ é sempre uma tesselação regular com m regiões; logo existem $\beta-m+1$ tesselações regulares em superfícies não-orientadas. Conseqüentemente, a cardinalidade do conjunto $\Xi_{m,n}$ é

$$\#(\Xi_{m,n}) = \begin{cases} (\alpha-m)/2+1+\beta-m+1 = \frac{1}{2}\alpha-\frac{3}{2}m+2+\beta, \text{ se } a+m \text{ é par} \\ \\ (\alpha-m-1)/2+1+\beta-m+1 = \frac{1}{2}\alpha-\frac{3}{2}m+\frac{3}{2}+\beta, \text{ se } \alpha+m \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

o que mostra o desejado. ∎

Corolário 6.2.5 *Se α e β denotam o número de regiões dos mergulhos mínimos orientados e não-orientados sem bordos do canal $\mathfrak{C}_{m,n}$ então a razão entre o número de estruturas algébricas de $\mathbb{H}_{m,n}$ e o número de superfícies de $\S_{m,n}$ é*

$$\frac{\#(\mathbb{H}_{m,n})}{\#(\S_{m,n})} = \begin{cases} \dfrac{4(\alpha+\beta-1)}{\alpha^2+2\alpha+2\beta^2+2\beta}, \text{ se } \alpha \text{ é par} \\ \\ \dfrac{4(\alpha+\beta)}{\alpha^2+2\alpha+1+2\beta^2+2\beta}, \text{ se } \alpha \text{ é ímpar.} \end{cases} \tag{6.11}$$

Demonstração. Segue da fórmula da parte (i) do Teorema Principal e da primeira fórmula do Corolário 6.2.4. ∎

É fácil verificar que as expressões das igualdades em (6.11) são sempre menores ou iguais a 1. São estritamente menores que 1 sempre que α e β são diferentes de zero. Isto significa que o conjunto $\mathbb{H}_{m,n}$ sempre tem menos elementos do que o conjunto $\Sha_{m,n}$. Esta diferença é mostrada nos gráficos da Figura 6.21.

A Tabela 6.2 contém o conjunto das estruturas algébricas de uma classe de canais, sua cardinalidade e a cardinalidade do conjunto das superfícies nas quais o representante da classe de canais pode ser mergulhado como mergulho de 2-células.

Estas foram as classes de canais em que foi possível determinar os mergulhos orientados e não-orientados. A menos das classes $\mathfrak{C}_5[4]$ e $\mathfrak{C}_7[4]$, conseguimos exibir, para todas as classes de canais relacionadas na Tabela 6.2, os mergulhos mínimos orientados e não-orientados, condições essas que permitem identificar as demais superfícies onde se encontram mergulhadas as classes de canais.

Analisando a evolução dos dados da Tabela 6.2, concluímos que a quantidade de estruturas algébricas de um canal DMC é bem inferior ao número das superfícies do conjunto para o mergulho do canal. O certo é que, se o canal $\mathfrak{C}$ está mergulhado minimamente em $\Omega(a)$ então o conjunto das estruturas algébricas de $\mathfrak{C}$ é igual a:

(i) conjunto das estruturas algébricas de $\langle\Omega(\alpha)\rangle$ se Ω é orientada e α é par;

(ii) conjunto das estruturas algébricas de $\langle\Omega(\alpha)\rangle$ e $(t+(\alpha-1)/2)\,T(1)$ se $\Omega \equiv tT$ e α é ímpar;

(iii) conjunto das estruturas algébricas de $\langle\Omega(\alpha)\rangle$ se Ω é não-orientada.

Portanto, se $\mathfrak{C} \hookrightarrow \Omega(\alpha)$ minimamente, o conjunto das estruturas algébricas de $\langle\Omega(\alpha)\rangle$ ou de $\langle\Omega(\alpha)\rangle$ e $(t+(\alpha-1)/2)\,T(1)$ é uma amostra para o conjunto das estruturas algébricas do canal $\mathfrak{C}$.

Observamos que as classes de canais $\mathfrak{C}_m[p]$ possuem mergulhos orientados simples, em superfícies de gênero baixo, nos casos em que m é par e p é ímpar, conforme mostram os mergulhos de $\mathfrak{C}_m[3]$, $m = 2, 4, 6, 8$, na Tabela 6.2. Isto seria um indicativo para o mergulho mínimo de canais com esta característica?

O objetivo do gráfico da Figura 6.21, é confrontar a quantidade de elementos do conjunto das superfícies para o mergulho da classe de canais $\mathfrak{C}_m[p]$, com a quantidade de estruturas algébricas distintas que podem ser extraídas desse conjunto. A medida que os parâmetros m e p crescem, a diferença entre as cardinalidades desses conjuntos aumenta significativamente.

Por questão de clareza, no gráfico da Figura 6.21, o número próximo à bola preta, indica a cardinalidade do conjunto para o mergulho da classe de canais e o número próximo ao quadrado verde, indica a cardinalidade do conjunto das estruturas algébricas da respectiva classe de canais.

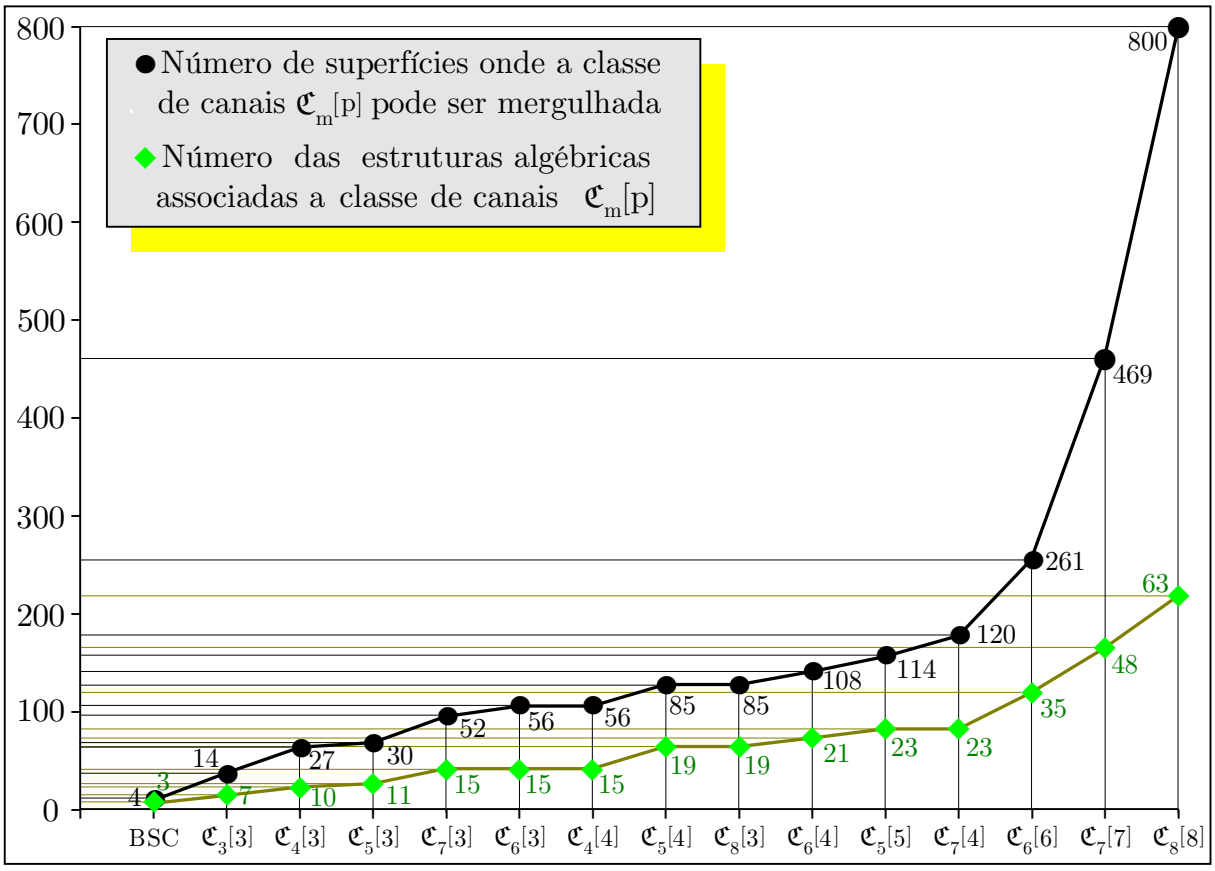

Figura 6.21: Cardinalidades dos conjuntos das superfícies e das estruturas algébricas de uma classe de canal $\mathfrak{C}_m[p]$

6.2.1 Mergulhos de canais DMC e tesselações regulares

Num processo de transmissão de sinais através de um canal ruidoso, parece-nos relevante identificar os possíveis espaços métricos naturais onde o conjunto de sinais/alfabeto do código estão inseridos. As estruturas algébricas inerentes a tais espaços podem ser determinadas através dos correspondentes grupo de homologia. Como conseqüência disto, pelo menos teoricamente, sabemos como realizar a decomposição de tais grupos. Este passo é importante no sentido de prover cadeias de decomposições de grupos. Dentre essas cadeias existe uma que estará casada ao conjunto de sinais decorrente do processo de mergulho do grafo associado ao canal. Com isso, acabamos de obter o rotulamento casado e conseqüentemente a propriedade de que tal conjunto de sinais é geometricamente uniforme. Como resultado deste procedimento, obtivemos o particionamento deste espaço em regiões cujas áreas representam as regiões de decisão e que estão associadas às probabilidades condicionais de acerto de cada sinal. Quando tais sinais têm uma distribuição uniforme, o arranjo correspondente é regular. Por outro lado, se existe um grupo de isometrias que age transitivamente no conjunto de sinais, dizemos que este forma um conjunto de sinais geometricamente uniforme.

Mas se o ambiente considerado para o conjunto de sinais é uma superfície, a condição de constelação de sinais geometricamente uniforme é equivalente a uma divisão na superfície em regiões com o mesmo número de lados, isto é, corresponde a um recobrimento da superfície por uma tesselação regular.

Relacionamos, na Tabela 6.3, o conjunto das tesselações regulares $\Xi_{m,n}$ provenientes dos mergulhos de 2-células do grafo associado a um canal representante da classe de canais $\mathfrak{C}_m[p]$, cujo conjunto das superfícies de mergulhos foram identificados na Seção 6.1. Estas tesselações foram identificadas a partir das condições de existência do conjunto $\Xi_{m,n}$, mostradas na demonstração da parte (iii) do Teorema Principal. O número de lados das regiões de uma tesselação regular é determinado em função das relações sobre as componentes de bordo da Seção 5.2 e das relações sobre o número de lados das regiões da Seção 5.3.

Na construção da Tabela 6.3, usamos a notação $\Omega_r\left[mR_k\right]$ para indicar a tesselação regular sobre a superfície Ω_r com m regiões, todas com k lados.

Vimos que cada conjunto das superfícies de mergulhos $\langle\Omega\left(\eta\right)\rangle$ de $\mathcal{S}_{m,n}$, gera uma tesselação regular com m regiões, caso $\eta \leq m$. Quando $\eta = m$ existe apenas uma opção para o modelo de tesselação regular, é aquela cujas regiões possuem o máximo de lados possíveis. Quando η é estritamente menor que m, identificamos apenas o modelo de mergulho sobre $\Omega\left(\eta\right)$ em que cada região possui o número máximo de lados. Vale ressaltar que se mR_k é o modelo sobre $\Omega\left(\eta\right)$, algumas das seguintes tesselações regulares

$$mR_4, mR_6, mR_8, \cdots, mR_{k-2}, \tag{6.12}$$

podem ainda ser realizados sobre $\Omega\left(\eta\right)$. Isto ocorre quando η não divide exatamente $2mp$. Não relacionamos essas tesselações na Tabela 6.3 porque não dispomos de meios para identificá-las.

Determinaremos somente as tesselações regulares das classes de canais $\mathfrak{C}_m[p]$, $2 \leq m \leq 8$, $2 \leq p \leq 4$ e $p = m$, cujas regiões possuem o máximo de lados, por termos a certeza da sua existência. O certo é que não existem muitas opções para a realização desses modelos. Nos casos em que m e p são pares, só existe uma única opção para este tipo de mergulho.

Definição 6.2.6 *Sejam kR_s e hR_t tesselações regulares provenientes de mergulhos do grafo representante de uma classe de canais $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$. Se $k \neq h$ ou se $s \pm t$, diremos que kR_s e hR_t são* ***tesselações regulares distintas*** *de $\Xi_{m,n}$.*

Na construção da Tabela 6.3, a coluna $\Xi_{m,n}$ **Orientadas** refere-se ao conjunto das tesselações regulares com m regiões sobre superfícies orientadas, a coluna $\Xi_{m,n}$ **Não-orientadas** relaciona as tesselações regulares com m regiões sobre superfícies não-orientadas. Cada número inteiro na coluna # representa a cardinalidade do conjunto $\Xi_{m,n}$ que é igual ao número de tesselações regulares relacionadas nas correspondentes linhas das segunda e terceira colunas. Cada número inteiro na coluna $\neq$ representa o número de tesselações regulares distintas em relação aos tipos de regiões; sob este aspecto, as tesselações $7T_6\left[6R_8\right]$ e $8T_4\left[6R_8\right]$ são do mesmo tipo, pois ambas são recobrimentos por octógonos, enquanto que $8T_4\left[6R_8\right]$ e $9T_2\left[6R_{10}\right]$ são tesselações diferentes, pois uma é um recobrimento por octógonos e a outra por decágonos.

Analisando os elementos da Tabela 6.3, destacamos imediatamente duas propriedades:

Canal	$\Xi_{m,n}$ **Orientadas**	$\Xi_{m,n}$ **Não-orientadas**	$\#$	$\neq$
BSC	$S\left[2R_4\right]$	$P\left[2R_4\right]$	2	1
$\mathfrak{C}_3[3]$	$T\left[3R_6\right]$	$P_1\left[3R_4\right],\ K\left[3R_6\right]$	3	2
$\mathfrak{C}_4[3]$	$S_2\left[4R_4\right],\ S_1\left[4R_6\right]$	$P_1\left[4R_4\right],\ K\left[4R_6\right]$	4	2
$\mathfrak{C}_5[3]$	$T\left[5R_6\right]$	$P_1\left[5R_4\right],\ K\left[5R_6\right]$	3	2
$\mathfrak{C}_6[3]$	$S_2\left[6R_4\right],\ T\left[6R_6\right]$	$P_2\left[6R_4\right],\ K_1\left[6R_4\right],\ 3P\left[6R_6\right]$	5	2
$\mathfrak{C}_7[3]$	$T\left[7R_6\right]$	$P_1\left[7R_4\right],\ K\left[7R_6\right]$	3	2
$\mathfrak{C}_8[3]$	$S\left[8R_4\right], T\left[8R_6\right]$	$P_2\left[8R_4\right],\ K_1\left[8R_4\right],\ 3P\left[8R_6\right]$	5	2
$\mathfrak{C}_4[4]$	$T_4\left[4R_4\right],\ 2T_2\left[4R_6\right],$ $3T\left[4R_8\right]$	$K_4\left[4R_4\right], 3P_3\left[4R_4\right],\ 2K_2\left[4R_6\right],$ $5P_1\left[4R_6\right], 3K\left[4R_8\right]$	8	3
$\mathfrak{C}_5[4]$	$T_5\left[5R_4\right], 2T_3\left[5R_6\right],$ $3T_1\left[5R_8\right]$	$K_5\left[5R_4\right], 3P_4\left[5R_4\right], 2K_3\left[5R_6\right],$ $5P_2\left[5R_6\right], 3K_1\left[5R_8\right], 7P\left[5R_8\right]$	9	3
$\mathfrak{C}_6[4]$	$2T_4\left[6R_4\right], 3T_2\left[6R_6\right],$ $4T\left[6R_8\right]$	$K_6\left[6R_4\right], 3P_5\left[6R_4\right], 2K_4\left[6R_4\right],$ $5P_3\left[6R_4\right], 3K_2\left[6R_6\right],$ $7P_1\left[6R_6\right], 4K\left[6R_8\right]$	10	3
$\mathfrak{C}_7[4]$	$2T_5\left[7R_4\right], 3T_3\left[7R_6\right],$ $4T_1\left[7R_8\right]$	$2K_5\left[7R_4\right], 5P_4\left[7R_4\right], 3K_3\left[7R_6\right],$ $7P_2\left[7R_6\right], 4K_1\left[7R_8\right], 9P\left[7R_8\right]$	9	3
$\mathfrak{C}_8[4]$	$T_8\left[8R_4\right], 2T_6\left[8R_4\right],$ $3T_4\left[8R_6\right], 4T_2\left[8R_6\right],$ $5T\left[8R_8\right]$	$K_8\left[8R_4\right], 3P_7\left[8R_4\right], 2K_6\left[8R_4\right],$ $5P_5\left[8R_4\right], 3K_4\left[8R_6\right], 7P_3\left[8R_6\right],$ $4K_2\left[8R_6\right], 9P_1\left[8R_6\right], 5K\left[8R_8\right]$	14	3
$\mathfrak{C}_5[5]$	$3T_6\left[5R_4\right], 4T_4\left[5R_6\right],$ $5T_2\left[5R_8\right], 6T\left[5R_{10}\right]$	$5P_7\left[5R_4\right], 3K_6\left[5R_4\right], 7P_5\left[5R_6\right],$ $4K_4\left[5R_6\right], 9P_3\left[5R_8\right], 5K_2\left[5R_8\right],$ $11P_1\left[5R_8\right], 6K\left[5R_{10}\right]$	12	4
$\mathfrak{C}_6[6]$	$4T_{12}\left[6R_4\right], 5T_{10}\left[6R_4\right],$ $6T_8\left[6R_6\right], 7T_6\left[6R_8\right],$ $8T_4\left[6R_8\right], 9T_2\left[6R_{10}\right],$ $10T\left[6R_{12}\right]$	$4K_{12}\left[6R_4\right], 9P_{11}\left[6R_4\right], 5K_{10}\left[6R_4\right],$ $11P_9\left[6R_6\right], 6K_8\left[6R_6\right], 13P_7\left[6R_6\right],$ $7K_6\left[6R_8\right], 15P_5\left[6R_8\right], 8K_4\left[6R_8\right],$ $17P_3\left[6R_{10}\right], 9K_2\left[6R_{10}\right],$ $19P_1\left[6R_{10}\right], 10K\left[6R_{12}\right]$	20	5
$\mathfrak{C}_7[7]$	$7T_{16}\left[7R_4\right], 8T_{14}\left[7R_6\right],$ $9T_{12}\left[7R_6\right], 10T_{10}\left[7R_8\right],$ $11T_8\left[7R_8\right], 12T_6\left[7R_{10}\right],$ $13T_4\left[7R_{10}\right], 14T_2\left[7R_{12}\right],$ $15T\left[7R_{14}\right]$	$13P_{17}\left[7R_4\right], 7K_{16}\left[7R_4\right], 15P_{15}\left[7R_4\right],$ $8K_{14}\left[7R_6\right], 17P_{13}\left[7R_6\right], 9K_{12}\left[7R_6\right],$ $19P_{11}\left[7R_6\right], 10K_{10}\left[7R_8\right], 21P_9\left[7R_8\right],$ $11K_8\left[7R_8\right], 23P_7\left[7R_{10}\right], 12K_6\left[7R_{10}\right],$ $25P_5\left[7R_{10}\right], 13K_4\left[7R_{10}\right], 27P_3\left[7R_{12}\right],$ $14K_2\left[7R_{12}\right], 29P_1\left[7R_{14}\right], 15K\left[7R_{14}\right]$	27	6
$\mathfrak{C}_8[8]$	$9T_{24}\left[8R_4\right], 10T_{22}\left[8R_4\right],$ $11T_{20}\left[8R_6\right], 12T_{18}\left[8R_6\right],$ $13T_{16}\left[8R_8\right], 14T_{14}\left[8R_8\right],$ $15T_{12}\left[8R_{10}\right], 16T_{10}\left[8R_{10}\right]$ $17T_8\left[8R_{12}\right], 18T_6\left[8R_{12}\right],$ $19T_4\left[8R_{14}\right], 20T_2\left[8R_{14}\right],$ $21T\left[8R_{16}\right]$	$9K_{24}\left[8R_4\right], 19P_{23}\left[8R_4\right], 10K_{22}\left[8R_4\right],$ $21P_{21}\left[8R_4\right], 11K_{20}\left[8R_6\right], 23P_{19}\left[8R_6\right],$ $12K_{18}\left[8R_6\right], 25P_{17}\left[8R_6\right], 13K_{16}\left[8R_8\right],$ $27P_{15}\left[8R_8\right], 14K_{14}\left[8R_8\right], 29P_{13}\left[8R_8\right],$ $15K_{12}\left[8R_{10}\right], 31P_{11}\left[8R_{10}\right], 16K_{10}\left[8R_{10}\right]$ $33P_9\left[8R_{10}\right], 17K_8\left[8R_{12}\right], 35P_7\left[8R_{12}\right],$ $18K_6\left[8R_{12}\right], 37P_5\left[8R_{12}\right], 19K_4\left[8R_{14}\right],$ $39P_3\left[8R_{14}\right], 20K_2\left[8R_{14}\right], 41P_1\left[8R_{14}\right],$ $21K\left[8R_{16}\right]$	38	7

Tabela 6.3: Tesselações regulares associadas às classes de canais

1) o conjunto das estruturas algébricas do conjunto das tesselações regulares com m regiões de uma classe de canais possui no máximo quatro elementos;

2) O número de **tesselações regulares distintas** com m regiões originadas por mergulhos da classe de canais $\mathfrak{C}_m[p]$ é igual a $p-1$.

Para sermos mais precisos, vamos descrever a primeira propriedade na forma do seguinte teorema.

Teorema 6.2.7 *Seja Ξ_m^p o conjunto das tesselações regulares com m regiões existentes no conjunto dos modelos de mergulhos do canal $C_m[p]$. Se $\mathfrak{C}_m[p] \hookrightarrow tT(\alpha)$ e $\mathfrak{C}_m[p] \hookrightarrow hP(\beta)$ são os mergulhos mínimos orientados e não-orientados, respectivamente, do grafo representante de $\mathfrak{C}_m[p]$. Então o conjunto das estruturas algébricas de Ξ_m^p é*

$$\mathbb{H}\left(\Xi_m^p\right) = \left\{\mathbb{Z}^{2k+\alpha-m-1}, \mathbb{Z}^{2k+\alpha-m}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{h+\beta-m-1}, \mathbb{Z}^{h+\beta-m-1}\right\}.$$

Demonstração. Pela parte (iii) da demonstração do Teorema 6.2.2, o conjunto das tesselações regulares de $\mathfrak{C}_m[p]$ é

$$\mathbb{H}\left(\Xi_m^p\right) = \left\{(k+i)\,T_{\alpha-2i-m}(m)\right\}_{i=0}^{(\alpha-m)/2} \cup \left\{(h+j)\,T_{\beta-j-m}(m)\right\}_{j=0}^{\beta-m}. \tag{6.13}$$

Por outro lado, o grupo de homologia das superfícies desses conjuntos é da forma

$$\begin{aligned} H_1\left((k+i)\,T_{\alpha-2i-m}\right) &= \mathbb{Z}^{2(k+i)+\alpha-2i-m-1} = \mathbb{Z}^{2k+\alpha-m-1}, \\ H_1\left((h+j)\,P_{\beta-j-m}\right) &= \mathbb{Z}^{h+j+\beta-j-m-1} = \mathbb{Z}^{h+\beta-m-1} \end{aligned}$$

e, quando $\alpha = 2i-m$, e $i = (\alpha-m)/2$, então $(k+i)\,T_{\alpha-2i-m}(m)$ é uma superfície compacta orientada, logo, o primeiro grupo de homologia é $H_1\left((k+(\alpha-m)/2)\,T\right) = \mathbb{Z}^{2k+\alpha-m}$. Comprovamos, na Tabela 6.3, que os canais BSC e $\mathfrak{C}_m[2]$ possuem tesselações regulares apenas em S e P; logo só tem dois elementos, o que mostra o desejado. ■

Corolário 6.2.8 *Seja $\mathbb{H}\left(\Xi_m^p\right)$ o conjunto das tesselações regulares de $\mathfrak{C}_m[p]$ então:*

(i) $\#\left(\mathbb{H}\left(\Xi_m^p\right)\right) = 2$ *se, e somente se,* $p = 2$;

(ii) Ξ_m^p *contém exatamente duas tesselações regulares sobre superfícies compactas sem bordos, uma orientada e outra não-orientada, a saber:*

$$(k+(\alpha-m)/2)\,T[mR_{2p}] \qquad e \qquad (h+\beta-m)\,P[mR_{2p}];$$

(iii) *Seja $H_1(\Omega) \in \mathbb{H}\left(\Xi_m^p\right)$. Então*

$$H_1(\Omega) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{2k+\alpha-m-1}, \text{ se } \Omega \text{ é compacta orientada com bordo} \\ \mathbb{Z}^{2k+\alpha-m}, \text{ se } \Omega \text{ é compacta orientada sem bordo} \\ \mathbb{Z}^{h+\beta-m-1}, \text{ se } \Omega \text{ é não-orientada.} \end{cases} \tag{6.14}$$

Demonstração. Suponha que $p \geq 3$. Então $mp \geq 6$, para todo $m \geq 2$. Se $m = 2$, $\mathfrak{C}_2[3] \hookrightarrow S(3)$ e $\mathfrak{C}_2[3] \hookrightarrow P(3)$ são mínimos; logo $\Xi_2^3 = \{S_1[2R_4], P_1[2R_4], K[2R_6]\}$, portanto, possuindo três tesselações regulares. Este é o caso em que poderia haver coincidência do número de tesselações regulares com os canais da forma $\mathfrak{C}_p[2]$. Portanto, se $p \geq 3$, para todo $m \geq 2$, concluímos por indução que $\#(\Xi_m^3) \geq 3$, o que mostra (i);

Segue da igualdade (6.13) que as tesselações regulares $(k + (\alpha - m)/2)\, T[mR_{2p}]$ e $(h + \beta - m)\, P[mR_{2p}]$ de Ξ_m^p são as únicas que se encontram sobre superfícies sem bordos, isto mostra (ii);

A parte (iii) segue de demonstração do Teorema 6.2.7. ∎

Justificaremos a propriedade 2) na forma da seguinte proposição.

Proposição 6.2.9 *Existem $p-1$ tesselações regulares distintas com m regiões no conjunto dos modelos de mergulhos da classe de canais $\mathfrak{C}_m[p]$, isto é,*

$$\#(\Xi_m^p) = p - 1.$$

Demonstração. O grafo representante da classe de canais $\mathfrak{C}_m[p]$ tem $2mp$ lados. Então o número máximo de lados de uma tesselação regular com m regiões da classe de canais $\mathfrak{C}_m[p]$ é $2mp/m = 2p$. Como existem tesselações regulares com m regiões de $4, 6, 8, \cdots, 2p$ lados, então existem $(2p-4)/2 + 1 = p - 1$ tesselações regulares distintas com m regiões. ∎

6.2.2 Canais associados a grafos completos biparticionados

Muitas das classes de canais relacionados na Tabela 6.2 estão associadas a grafos completos biparticionados, por exemplo, as classes do tipo $\mathfrak{C}_m[m]$ estão associadas aos grafos $K_{m,m}$. Não podemos deixar de incluir o estudo dessas classes porque vários tipos de canais usados em sistemas de comunicações estão associados a grafos completos biparticionados.

Consideraremos $\mathfrak{C}_{m,n}[n, m]$ o canal discreto sem memória cujos vértices em P e Q têm valências n e m, respectivamente. O Teorema Principal e Corolário 6.2.4 podem ser usados para determinar o conjunto das estruturas algébricas de $\mathfrak{C}_{m,n}[n, m]$, relativo aos conjuntos das superfícies de mergulhos ou em relação aos mergulhos que são tesselações regulares, com as correspondentes cardinalidades. Iremos a seguir descrever as estruturas algébricas relativas ao conjunto dos modelos de mergulhos $\mathfrak{C}_{m,n}[n, m]$ que são tesselações regulares.

Verificamos que alguns mergulhos de grafos não-orientados não satisfazem as condições da igualdade (5.1) do Teorema de König, por exemplo, os mergulhos do tipo mostrados na Figura 6.14, os quais não usam os bordos do polígono de n-lados. Mas notamos a existência de mergulhos de grafos em superfícies não-orientadas onde se verifica a igualdade (5.1). Se os grafos completos biparticionados $K_{m,n}$ possuem mergulhos de 2-células em superfícies não-orientadas satisfazendo a condição do Teorema de König, então podemos considerar o seguinte resultado.

Teorema 6.2.10 *Sejam $\mathfrak{C}_{m,n}[n,m]$ um canal DMC associado a um grafo completo bipartitionado $K_{m,n}$ e $\Xi_{m,n}$ o conjunto das tesselações regulares de $\mathfrak{C}_{m,n}$. Então o conjunto das estruturas algébricas de $\mathfrak{C}_{m,n}$ é*

$$\mathbb{H}\left(\Xi_{m,n}\right)=\left\{\mathbb{Z}^{mn-2m-n+1},\mathbb{Z}^{mn-2m-n+2},\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}^{mn-2m-n+1},\mathbb{Z}^{mn-2m-n+1}\right\}.$$

Demonstração. Da igualdade (5.7) e do Teorema de König resulta que

$$2k+\alpha-m=2\left\{\frac{(m-2)(n-2)}{4}\right\}+2\left[\frac{m+n-mn/2}{2}\right]+mn-2m-n. \tag{6.15}$$

Escrevendo m e n sob a forma $4t+s$, $s\in\{0,1,2,3\}$ e calculando os 16 casos em (6.15), verificamos que todos conduzem ao mesmo resultado, mais precisamente, temos que:

$$2k+\alpha-m=mn-2m-n+2. \tag{6.16}$$

Por outro lado, da igualdade (6.1) e da relação $\chi(\Omega)=V-A+F$ segue que

$$\begin{aligned} h+\beta-m-1 &= [(m-2)(n-2)/2]+2-[(m-2)(n-2)/2]+mn-2m-n-1 \\ &= mn-2m-n+1. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Aplicando as igualdades (6.16) e (6.17) em (6.14), obtemos o resultado desejado. ∎

Em particular, para os canais associados aos grafos $K_{m,m}$, vale o seguinte resultado.

Corolário 6.2.11 *O conjunto das estruturas algébricas de Ξ_m^m é*

$$\mathbb{H}\left(\Xi_m^m\right)=\left\{\mathbb{Z}^{2k+\alpha-m-1},\mathbb{Z}^{2k+\alpha-m},\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}^{h+\beta-1},\mathbb{Z}^{h+\beta-1}\right\}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 6.2.10, deduzimos que

$$\begin{aligned} 2k+\alpha-m &= 2\left\{\frac{(m-2)^2-2}{4}\right\}+2\left[\left(2m-\frac{m^2}{2}\right)\frac{1}{2}\right]+m^2-2m-m \\ &= m^2-3m+2, \text{ se } m \text{ é par.} \end{aligned}$$

O caso em que m é ímpar conduz ao mesmo resultado. Além disso, temos:

$$h+\beta-m-1=\left[(m-2)^2/2\right]+2-\left[(m-2)^2/2\right]+m^2-2m-m-1=m^2-3m+1.$$

O conjunto em (6.14) nos dá o desejado. ∎

Deduzimos, do Teorema 6.2.10 e do Corolário 6.2.11, que o número de estruturas algébricas distintas no conjunto das tesselações regulares de uma classe de canais $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$ nunca é superior a 3. Estas estruturas estão associadas às seguintes tesselações regulares:

1) uma está associada às tesselações sobre superfícies compactas com bordos;
2) outra à tesselação sobre a superfície compacta orientada sem bordo;
3) uma terceira está associada à tesselação sobre superfície não-orientada sem bordo
4) e a outra esta associada às tesselações sobre superfícies não-orientadas com bordos.

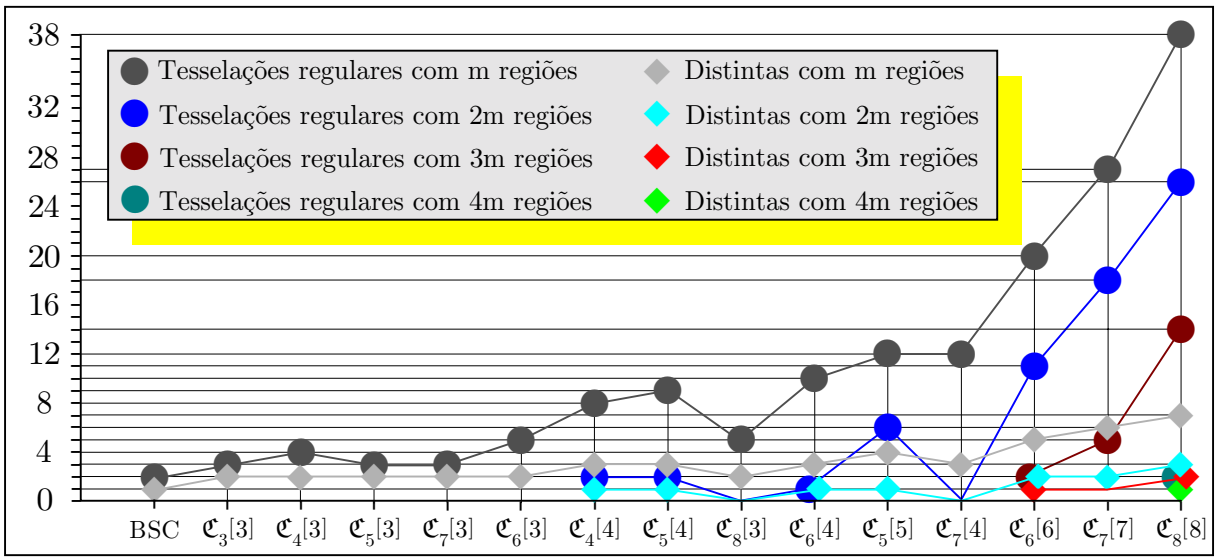

Figura 6.22: Tesselações regulares com km regiões, $k \geq 1$, da classe de canais $\mathfrak{C}_m[p]$

Notamos ainda que uma classe de canais $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$, pode possuir apenas uma única tesselação regular sobre uma superfície compacta orientada sem bordo. Há casos em que nenhuma tesselação regular de $\Xi_{m,n}$ encontra-se sobre superfícies compactas orientadas sem bordo, por exemplo o $\Xi_{7,4}$.

Por outro lado, sempre existe uma única tesselação regular sobre uma superfície não-orientada compacta sem bordo. Se m é par e n é ímpar, a tesselação está em uma superfície homeomorfa à soma conexa de planos projetivos, caso contrário, está em uma superfície homeomorfa à soma conexa de superfícies de Klein. A única exceção à regra é o canal BSC, a sua tesselação regular encontra-se sobre o plano projetivo.

6.2.3 Projetos de quantizadores para canais DMC

Um quantizador com Q níveis é um refinamento no alfabeto *m-ário* do código em que cada símbolo é representado por Q novos símbolos de um outro alfabeto *mQ-ário*. Isto significa que cada região associada a cada elemento da constelação de sinais (alfabeto *m-ário*) deve ser particionada em Q subregiões, resultando numa partição do espaço em mQ subregiões.

O refinamento que vamos propor, atende esta condição de divisão da região e conserva a estrutura de canal, pois esta partição é extraída do conjunto das tesselações regulares do mergulho do canal. Estas condições, sob o ponto de vista de superfícies, não é diferente daquela do quantizador usual no qual a estrutura do canal é modificada. Em ambas as situações ocorrerá uma alteração do grafo associado e, conseqüentemente podendo alterar o gênero da superfície. Como exemplo, considere o refinamento do canal $\mathfrak{C}_3[3]$ por um quantizador de 3 níveis. Observe que o grafo completo biparticionado $K_{3,3}$ associado ao canal $\mathfrak{C}_3[3]$ está mergulhado minimamente na esfera, enquanto o grafo completo biparticionado $K_{3,9}$ associado ao quantizador está mergulhado minimamente sobre o bitoro,

Canal	$\Xi_{m,n}$ **Orientadas**	$\Xi_{m,n}$ **Não-orientadas**	#	$\neq$
$\mathfrak{C}_4[4]$	$T\left[8R_4\right]^{[2]}$	$K\left[8R_4\right]^{[2]}$	2	1
$\mathfrak{C}_5[4]$	$T\left[10R_4\right]^{[2]}$	$K\left[10R_4\right]^{[2]}$	2	1
$\mathfrak{C}_6[4]$	$\varnothing$	$K_2\left[12R_4\right]^{[2]}$	1	1
$\mathfrak{C}_7[4]$	$\varnothing$	$K[14R_4]^{[2]}$?	1	1
$\mathfrak{C}_8[4]$	$T\left[16R_4\right]^{[2]}$	$K\left[16R_4\right]^{[2]}$	2	1
$\mathfrak{C}_5[5]$	$3T_3\left[10R_4\right]^{[2]}, 4T_1[10R_4]^{[2]}$	$5P_3\left[10R_4\right]^{[2]}, 3K_2\left[10R_4\right]^{[2]}, 7P_1[10R_4]^{[2]}, 4K[10R_4]^{[2]}$	6	1
$\mathfrak{C}_6[6]$	$4T_6\left[12R_4\right]^{[2]}, 5T_4\left[12R_4\right]^{[2]}, 6T_2\left[12R_4\right]^{[2]}, 7T\left[12R_6\right]^{[2]}, 4T\left[18R_4\right]^{[3]}$	$4K_6\left[12R_4\right]^{[2]}, 9P_5\left[12R_4\right]^{[2]}, 5K_4\left[12R_4\right]^{[2]}, 11P_3\left[12R_6\right]^{[2]}, 6K_2\left[12R_6\right]^{[2]}, 13P_1\left[12R_6\right]^{[2]}, 7K\left[12R_6\right]^{[2]}, 4K_6\left[18R_4\right]^{[3]}$	13	3
$\mathfrak{C}_7[7]$	$7T_9\left[14R_4\right]^{[2]}, 8T_7\left[14R_4\right]^{[2]}, 9T_5\left[14R_4\right]^{[2]}, 10T_3\left[14R_6\right]^{[2]}, 11T_1\left[14R_6\right]^{[2]}, 7T_2\left[21R_6\right]^{[2]}, 8T\left[21R_4\right]^{[3]}$	$13P_{10}[14R_4]^{[2]}$,$7K_2[14R_4]^{[2]}$, $15P_1[14R_4]^{[2]}$,$8K_7[14R_4]^{[2]}$, $17P_6[14R_4]^{[2]}$,$9K_5[14R_4]^{[2]}$, $19P_4[14R_6]^{[2]}$,$10K_3[14R_6]^{[2]}$, $21P_2[14R_6]^{[2]}$,$11K_1[14R_6]^{[2]}$, $23P[14R_6]^{[2]}$,$13P_3[21R_4]^{[3]}$ $7K_2[21R_4]^{[3]}$,$15P_1[21R_4]^{[3]}$, $8K[21R_4]^{[3]}$	23	3
$\mathfrak{C}_8[8]$	$9T_{16}\left[16R_4\right]^{[2]}, 10T_{14}\left[16R_4\right]^{[2]}, 11T_{12}\left[16R_4\right]^{[2]}, 12T_{10}\left[16R_4\right]^{[2]}, 13T_8\left[16R_6\right]^{[2]}, 14T_6\left[16R_8\right]^{[2]}, 15T_4\left[16R_6\right]^{[2]}, 16T_2\left[16R_6\right]^{[2]}$ $17T\left[16R_8\right]^{[2]}, 9T_8\left[24R_4\right]^{[3]}, 10T_6\left[24R_4\right]^{[3]}, 11T_4\left[24R_4\right]^{[3]}, 12T_2\left[24R_4\right]^{[3]}, 13T_1\left[24R_4\right]^{[3]}, 9T\left[32R_4\right]^{[4]}$	$9K_{16}[16R_4]^{[2]}$,$19P_{16}[16R_4]^{[2]}$, $10K_{14}[16R_4]^{[2]}$,$21P_{13}[16R_4]^{[2]}$, $11K_{12}[16R_4]^{[2]}$,$23P_{11}[16R_4]^{[2]}$, $12K_{10}[16R_4]^{[2]}$,$25P_9[16R_4]^{[2]}$, $13K_8[16R_6]^{[2]}$,$27P_7[16R_6]^{[2]}$, $14K_6[16R_6]^{[2]}$,$29P_5[16R_6]^{[2]}$, $15K_4[16R_6]^{[2]}$,$31P_3[16R_6]^{[2]}$, $16K_2[16R_6]^{[2]}$,$33P_1[16R_6]^{[2]}$, $17K[16R_8]^{[2]}$,$9K_8[24R_4]^{[3]}$, $19P_7[24R_4]^{[3]}$,$10K_6[24R_4]^{[3]}$, $21P_5[24R_4]^{[3]}$,$11K_4[24R_4]^{[3]}$, $23P_3[24R_4]^{[3]}$,$12K_2[24R_4]^{[3]}$, $25P_1[24R_4]^{[3]}$,$13K[24R_6]^{[3]}$, $9K[32R_4]^{[4]}$	42	6

Tabela 6.4: Tesselações regulares para projetos de quantizadores

portanto, conduzindo a superfície com gênero diferente.

A nossa proposta é identificar, no conjunto dos modelos de mergulhos do grafo representante do canal $\mathfrak{C}_m[p]$, aqueles que possuem mQ regiões com o mesmo número de lados e projetar o quantizador com Q níveis sobre este tipo de tesselações regulares. E por que usaríamos este ao invés do quantizador usual? Quando não ocorre a mudança de ambiente, dispomos da mesma estrutura algébrica no canal e no quantizador, podendo esta propriedade ser utilizada para melhorar o desempenho do sistema.

Na Tabela 6.4, identificamos as possíveis tesselações regulares que podem ser usadas como quantizadores com Q níveis, existentes nos conjuntos de modelos de mergulhos das classes de canais relacionadas na Tabela 6.3. Usamos a notação $\Omega\left[\xi R_k\right]^{[Q]}$ para indicar a tesselação regular sobre a superfície Ω, oriunda do mergulho do canal $\mathfrak{C}_m[p]$, com ξ regiões

de k lados, onde $\xi = mQ$ e $[Q]$ representa o nível do quantizador.

As classes de canais da Tabela 6.3 que não estão relacionadas na Tabela 6.4 são tais que não possuem tesselações regulares com mQ regiões, $Q > 1$.

Do mesmo modo que foi determinado o número de tesselações regulares distintas com m regiões de uma classe de canais $\mathfrak{C}_m[p]$, podemos concluir que existem

$$(2mp/km - 4)/2 + 1 = p/k - 1 \tag{6.18}$$

tesselações regulares distintas com km regiões na classe de canais $\mathfrak{C}_m[p]$.

Analisamos a Tabela 6.3 e identificamos, na Figura 6.22, a cardinalidade de Ξ^p_{km}, conjunto das tesselações regulares com km regiões da classe de canais $\mathfrak{C}_m[p]$, e o número de tesselações regulares distintas, para os casos $2 \leq m \leq 8$, $2 \leq p \leq 4$ e $p = m$. Estas classes de canais não contém tesselações regulares com km regiões, quando $k \geq 5$ e, nem tão pouco, existem tesselações regulares com regiões com um número de lados superior a 16. Caso desejamos encontrar tesselações regulares com km regiões, $k \geq 5$, devemos procurá-las nos canais m-ários com $m \geq 9$. A mesma condição vale para tesselações regulares com km regiões, cujas regiões possuem um número de lados superior a 16.

As afirmações do parágrafo acima, são verdadeiras porque estamos considerando apenas as classes de canais $\mathfrak{C}_m[p]$, onde $2 \leq p \leq 4$ e $p = m$. Pelo Teorema 5.3.6, uma classe de canais $\mathfrak{C}_m[p]$ contém tesselações regulares com $6m$ regiões se, e somente se $p \geq 12$, logo nas condições estabelecidas, a primeira classes de canais a ter uma tesselação regular com $6m$ regiões será $\mathfrak{C}_{12}[12]$. Por exemplo, a tesselação $80T[R(72)]^{[6]}$ está em $\Xi_{12,12}$. Além disso, o número de lados é superior a 16 se, e somente se, $n > 8$. Assim, devido a essas restrições, tesselações regulares com tais características, existem somente nas classes de canais $\mathfrak{C}_m[m]$, $m \geq 9$.

6.3 Mergulhos de Canais Discretos Sem Memória em Superfícies Mínimas

Nesta seção iremos considerar mergulhos de canais DMC em superfícies mínimas como uma proposta de possíveis superfícies para a alocação de constelações de sinais.

A abordagem realizada nas seções anteriores permite, de maneira direta ou indireta, estabelecer procedimentos para as construções de mergulhos de canais DMC de tal forma a incluir o conjunto das superfícies mínimas como ambientes naturais de cada um dos blocos que compõem um sistema de comunicações, tais como modulador, codificador de canal, codificador de fonte e quantizador.

Nesta seção consideramos as superfícies mínimas como sendo variedades riemannianas bidimensionais. Em seguida, descrevemos modelos de mergulhos de subclasses de canais sobre superfícies mínimas da família n-nóide, sobre superfícies mínimas de gênero 1 com r componentes de bordo, generalizando os mergulhos dessas classes.

A técnica usada para identificar os mergulhos das subclasses é diferente do processo utilizado na Seção 6.1, onde o mergulho é obtido a partir do canal. Nesta seção optamos pelo caminho inverso. Este procedimento permitirá identificar estruturas de canais e modelos diferentes daqueles obtidos na Seção 6.1.

6.3.1 Superfícies mínimas: conceitos e definições

Uma superfície mínima n-dimensional é uma variedade riemanniana de dimensão n cuja principal propriedade é a de minimizar a área local. Dentre as diferentes possibilidades de superfícies mínimas, aquelas que servirão aos nossos propósitos são as que apresentam componentes de bordo. Esta característica é constatada por Osserman [31], na forma do seguinte teorema.

Teorema 6.3.1 (Teorema de Osserman) *[31]Seja Ω uma variedade riemanniana bi-dimensional orientável completa cuja curvatura gaussiana K satisfaz as condições: $K \leq 0$ e $\int_\Omega |K|\, dA < \infty$. Então existe uma variedade riemanniana bi-dimensional $\overline{\Omega}$ tal que Ω e $\overline{\Omega}' = \overline{\Omega} - \{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$ são isométricas. Em outras palavras, existe um difeomorfismo entre Ω e $\overline{\Omega}'$.*

Por definição, uma superfície mínima é toda variedade de Riemman com curvatura média nula. Conseqüentemente, se uma variedade riemanniana bi-dimensional tem curvatura total finita, o equivalente para superfícies mínimas do Teorema de Osserman será, conforme a referência [17], o seguinte teorema.

Teorema 6.3.2 *Seja $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ um mergulho mínimo conforme completo não planar com curvatura total finita. Então Ω é conformemente difeomorfo a $\overline{\Omega}_k - \{p_1, \cdots, p_r\}$ onde $\overline{\Omega}_k$ é uma superfície de Riemman de gênero k e $p_1, p_2, \cdots, p_r$ são pontos em $\overline{\Omega}_k$, $r \geq 2$.*

Uma superfície Ω em $\mathbb{R}^3$ é chamada de **superfície mínima** quando a sua curvatura média é zero, [30].

Na nossa notação, as classes de superfícies que podem ser representadas por superfícies mínimas são as superfícies compactas com componentes de bordo da forma $m\Omega_r$, $r \geq 2$. No que segue, os representantes de classes para o mergulho de canais discretos sem memória serão sempre superfícies mínimas, uma vez que um canal discreto possui a representação de um grafo. Segue, da Definição 5.2.1, que todo canal associado a um grafo conexo pode ser também mergulhado em uma superfície compacta com bordo como um mergulho de 2-células.

6.3.2 Mergulho de canais sobre o n-nóide

A família n-nóide foi descoberta por Jorge e Meeks e tornou-se uma das mais famosas famílias de superfícies mínimas. Esta família é formada por todas as superfícies mínimas orientadas de gênero zero com n fins tipo catenóide. Sua definição algébrica e algumas de suas propriedades podem ser encontradas em [2]. Indicaremos um elemento da família n-nóide por nN. Na verdade, nN é o representante da classe de superfícies S_n, isto é, a esfera S com n componentes de bordo.

Usaremos o termo **canal típico** da superfície nN da família n-nóide, no sentido de designar um canal que só pode ser realizado numa única superfície dessa família. É claro que existem superfícies que não fazem parte da família n-nóide onde estes canais podem ser mergulhados como mergulhos de 2-células, por exemplo, as superfícies compactas.

Definição 6.3.3 *Denominaremos de* ***canal*** α***-totem*** *o canal resultante da torre de* α *canais* $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$, $\alpha \geq 3$.

Como exemplo considere o canal mostrado na Figura 6.23. O canal 3-totem consiste da torre de 3 canais $C_3[(2,2,2),(2,2,2)]$.

Para efeito de simplificação, eliminaremos as vírgulas da notação do canal α-totem, isto é, em vez de $C_3[(2,2,2),(2,2,2)]$ escreveremos $C_3[(222),(222)]$.

Para cada inteiro $\alpha \geq 3$, existem dois tipos de canais α-totens:

(i) se α é ímpar temos o canal com α torres mergulhado no $(\alpha-1)$-*nóide*

$$\mathfrak{C}_{7+4(\alpha-3)}[(2232323\cdots3232322),(2232323\cdots3232322)];$$

(ii) se α é par temos o canal com α torres na forma cilíndrica mergulhado no $(\alpha-2)$-*nóide*

$$\mathfrak{C}_{8+4(\alpha-4)}[(323232\cdots323232),(323232\cdots323232)].$$

A forma desta torre é cilíndrica porque ela encontra-se consigo mesma formando um cilindro.

Mergulhos de canais no catenóide

O catenóide é a primeira superfície mínima da família n-nóide. Os demais só foram descobertos recentemente por Jorge e Meeks. Veremos aqui dois tipos de canais típicos do catenóide. As Figuras 6.23 e 6.26 são suficientes para deduzirmos os possíveis tipos de canais DMC cujos mergulhos ocorrem no catenóide.

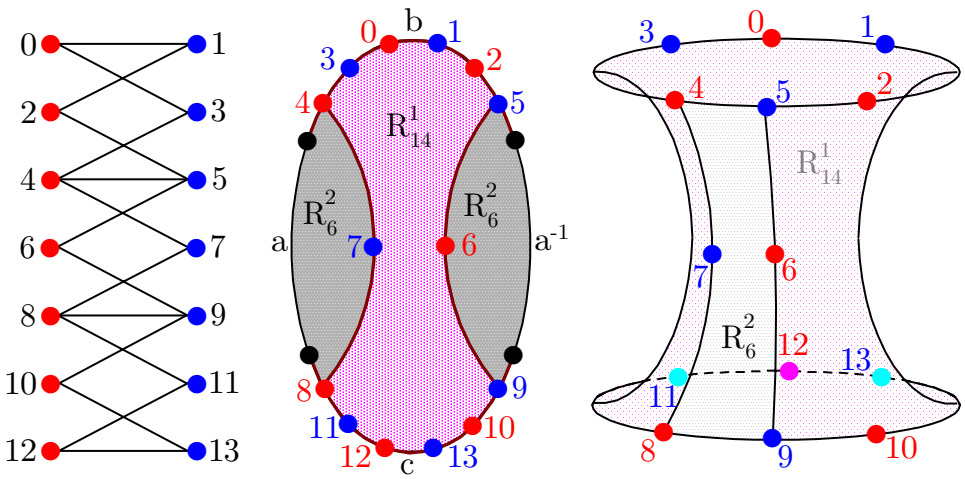

Figura 6.23: Canal 3-totem mergulhado no catenóide

A Figura 6.23 mostra um canal 3-totem cujo mergulho é de 2-células. O mergulho do canal mostrado na Figura 6.23 pode ser descrito por

$$\mathfrak{C}_7[(2232322),(2232322)] \hookrightarrow 2N(2) \equiv S_2(2) = R_6 + R_{14}.$$

Analisando a Figura 6.26, identificamos o canal 8-totem cujo mergulho também ocorre no catenóide, o canal $\mathfrak{C}_8[(32323232),(32323232)]$. Seu mergulho tem a seguinte composição

$$\mathfrak{C}_8[(32323232),(32323232)] \hookrightarrow 2N(5) \equiv S_2(4) = 2R_6 + 2R_8.$$

Além desses dois canais totens, podemos ainda mergulhar no catenóide uma sub-classe de canais de $\mathfrak{C}_m[3]$, conforme veremos na próxima proposição.

Proposição 6.3.4 *Para todo número inteiro $k \geq 2$, a sub-classe de canais $\mathfrak{C}_{2k}[3]$ de $\mathfrak{C}_m[3]$ está mergulhada no catenóide do seguinte modo*

$$\mathfrak{C}_{2k}[3] \hookrightarrow 2N(2k) \equiv S_2(2k) = (2k)R_4.$$

Demonstração. O mergulho (1) mostrado na Figura 6.25 representa o mergulho do canal $\mathfrak{C}_8[3]$ no catenóide com a seguinte composição

$$\mathfrak{C}_8[3] \hookrightarrow 2N(8) \equiv S_2(8) = 8R_4.$$

Este é o caso em que $k = 4$. A condição mínima de vértices para um mergulho deste tipo é, naturalmente, quando $k = 2$, daí a condição $k \geq 2$. De fato, se $k = 1$, cada componente de bordo define uma transição dupla entre dois vértices. A existência do mergulho da sub-classe $\mathfrak{C}_{2k}[3]$ em $2N$ é devido ao fato de que o modelo do mergulho (1) mostrado na Figura 6.25, permite a inclusão de $2t$ vértices em cada um dos bordos do catenóide, conservando a forma original do modelo. Portanto, o conjunto das entradas ou das saídas do canal é composto por $2k$ vértices, $k \geq 2$, e o modelo do mergulho é constituído por $2k$ regiões do tipo R_4. ■

O único canal da sub-classe $\mathfrak{C}_{2k}[3]$, $k \geq 2$, que é típico do catenóide é o canal $\mathfrak{C}_4[3]$, pois os demais canais podem ser mergulhados, como veremos nas próximas seções, em

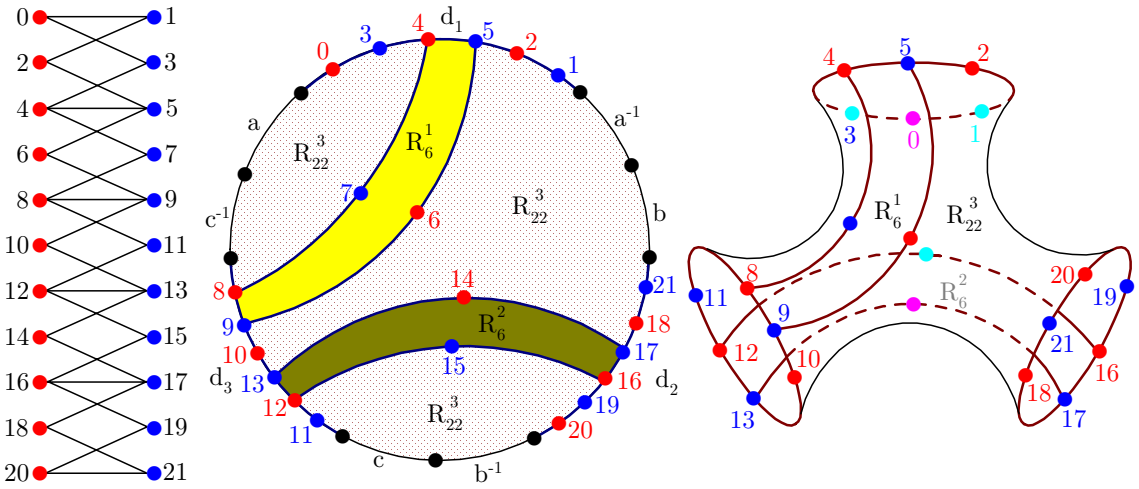

Figura 6.24: Canal 5-totem mergulhado no trinóide

outras superfícies da família n-nóide, tais como trinóides, 4-nóides, etc.

Mergulhos de canais no trinóide

A Figura 6.24, ilustra um exemplo de um canal 5-totem mergulhado no trinóide, $3N$, a superfície de Jorge e Meeks. Chamamos a atenção para o fato de que não foi possível realizar o mergulho de 2-células desse canal em uma outra superfície da família n-nóide que não fosse o trinóide. Disso, podemos dizer que o canal 5-totem, mostrado na Figura 6.24, é um canal típico do trinóide.

O mergulho mostrado na Figura 6.24 está definido pela seguinte composição

$$\mathfrak{C}_{11}[(22323232322), (22323232322)] \hookrightarrow 3N(4) \equiv S_3(4) = 2R_6 + R_{22}.$$

Observamos que existe um outro canal típico do trinóide, o canal 6-totem. O mergulho deste canal, realizado de maneira análoga ao mergulho mostrado na Figura 6.26, conduz à seguinte composição

$$\mathfrak{C}_{12}[(323232323232), (323232323232)] \hookrightarrow 3N(5) \equiv S_3(5) = 3R_6 + 2R_{12}.$$

De modo análogo a demonstração da Proposição 6.3.4, podemos concluir do mergulho (2) da Figura 6.25, que existe uma sub-classe de canais em $\mathfrak{C}_m[3]$ que pode ser mergulhada no trinóide.

Proposição 6.3.5 *Para todo número inteiro $k \geq 3$, a sub-classe de canais $\mathfrak{C}_{2k}[3]$ de $\mathfrak{C}_m[3]$ está mergulhada no trinóide do seguinte modo*

$$\mathfrak{C}_{2k}[3] \hookrightarrow 3N(2k-1) \equiv S_3(2k-1) = (2k-3)R_4 + 2R_6. \tag{6.19}$$

Demonstração. O mergulho (2) mostrado na Figura 6.25 representa o mergulho do canal $\mathfrak{C}_6[3]$ sobre o trinóide com a seguinte composição

$$\mathfrak{C}_6[3] \hookrightarrow 3N(5) \equiv S_3(5) = 3R_4 + 2R_6.$$

Este é o caso em que $k = 3$, e que é a condição mínima do número de vértices para um mergulho deste tipo. Observe que a inclusão de cada dois vértices de entrada e dois vértices de saída no modelo do mergulho, preservando a sua forma original, corresponde a formação de duas novas regiões do tipo R_4, logo, a inclusão de $2t$ vértices de entrada e $2t$ vértices de saída conservando a forma original do modelo, corresponde a formação de $2t$ regiões quadrangulares R_4's. Conseqüentemente, o mergulho da sub-classe de canais $\mathfrak{C}_{2k}[3]$, $k \geq 3$, no trinóide, é da forma descrita em (6.19). ∎

A sub-classe de canais $\mathfrak{C}_{2k}[4]$ originada pelo mergulho (2) mostrado na Figura 6.25 não é uma sub-classe típica do trinóide, pois qualquer um de seus elementos pode ser mergulhado no catenóide na forma indicada no mergulho (1) da Figura 6.25. Além disso, com exceção do canal $\mathfrak{C}_6[3]$ (este só pode ser mergulhado no catenóide e no trinóide), os demais podem ser mergulhados no $4N$.

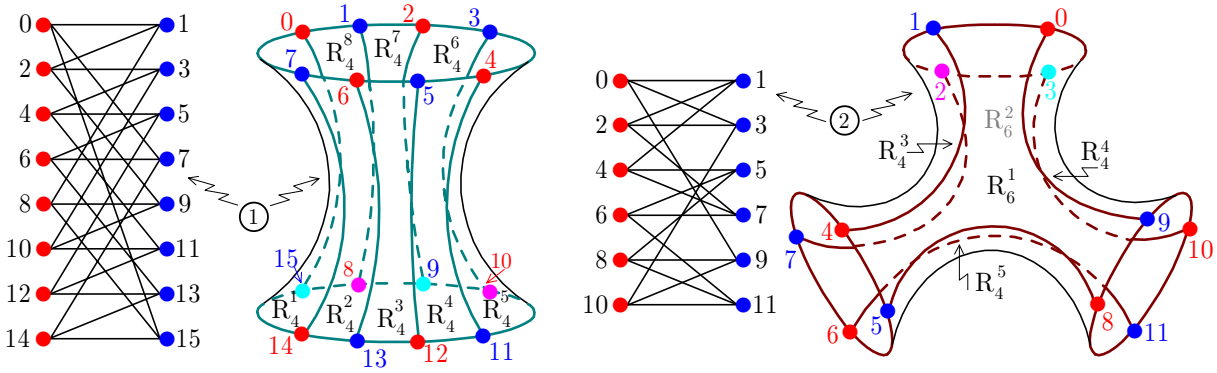

Figura 6.25: Sub-classes de canais em $\mathfrak{C}_m[3]$ típica do catenóide e do trinóide

Canal	Superfície	Composição	Canal	Superfície	Composição
$\mathfrak{C}_7$	$2N\,(2) \equiv S_2\,(2)$	$R_6 + R_{14}$	$\mathfrak{C}_{20}$	$5N\,(7) \equiv S_5\,(7)$	$5R_6 + 2R_{20}$
$\mathfrak{C}_8$	$2N\,(4) \equiv S_2\,(4)$	$2R_6 + 2R_8$	$\mathfrak{C}_{23}$	$6N\,(6) \equiv S_6\,(6)$	$5R_6 + R_{46}$
$\mathfrak{C}_{11}$	$3N\,(3) \equiv S_3\,(3)$	$2R_6 + R_{22}$	$\mathfrak{C}_{24}$	$6N\,(8) \equiv S_6\,(8)$	$6R_6 + 2R_{24}$
$\mathfrak{C}_{12}$	$3N\,(5) \equiv S_3\,(5)$	$3R_6 + 2R_{12}$	$\mathfrak{C}_{27}$	$7N\,(7) \equiv S_7\,(7)$	$6R_6 + R_{54}$
$\mathfrak{C}_{15}$	$4N\,(4) \equiv S_4\,(4)$	$3R_6 + R_{30}$	$\mathfrak{C}_{28}$	$7N\,(9) \equiv S_7\,(9)$	$7R_6 + 2R_{28}$
$\mathfrak{C}_{16}$	$4N\,(6) \equiv S_4\,(6)$	$4R_6 + 2R_{16}$	$\mathfrak{C}_{31}$	$8N\,(8) \equiv S_8\,(8)$	$7R_6 + R_{62}$
$\mathfrak{C}_{19}$	$5N\,(5) \equiv S_5\,(5)$	$4R_6 + 2R_{38}$	$\mathfrak{C}_{32}$	$8N^{(10)} \equiv S_8^{(10)}$	$8R_6 + 2R_{32}$

Tabela 6.5: Composição dos mergulhos dos canais alfa-totens na família n-nóide

Generalização

Os mergulhos dos grafos correspondentes ao canais $\mathfrak{C}_{2k}[3]$ no catenóide (para $k \geq 2$) e no trinóide (para $k \geq 3$), nos dão a idéia de como deve ser um mergulho de um elemento qualquer dessa família.

Antes da generalização desses modelos, gostaríamos de observar que a Figura 6.26 também indica, como nas Figuras 6.23 e 6.24, um mergulho típico de uma canal α-totem sobre uma superfície da família n-nóide, porém, convém destacarmos que o canal mostrado na Figura 6.26, utiliza melhor os espaços (coloca mais vértices e lados) da superfície do $4N$ do que os canais mostrados nas Figuras 6.23 e 6.24.

A generalização do canal α-totem $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q]$ será feita considerando o mergulho padrão da Figura 6.26. Quando $\alpha = 8$, consideraremos o mergulho de $\mathfrak{C}_{a+4k}$ como sendo da forma mostrada na Figura 6.26. Se $\alpha = 7$, o mergulho de $\mathfrak{C}_{a+4k}$ será o mesmo que o mostrado na Figura 6.26, menos dois vértices e lados que saem desses vértices. Em particular, eliminaríamos os vértices 30 e 31 e lados adjacentes do modelo da Figura 6.26, para obtermos o mergulho do canal $\mathfrak{C}_{15}[(223232323232322)\,,(223232323232322)]$ sobre o $4N$.

Verificamos nos mergulhos de canais α-totens sobre o catenóide e o trinóide, que cada superfície do n-nóide, só admite o mergulho de dois canais dessa natureza, ou seja, para cada inteiro $k \geq 0$ os canais $\mathfrak{C}_{7+4k}$ e $\mathfrak{C}_{8+4k}$ podem ser mergulhados numa mesma superfície, a saber, a superfície $(2+k)\,N$. Com isso, temos o seguinte resultado.

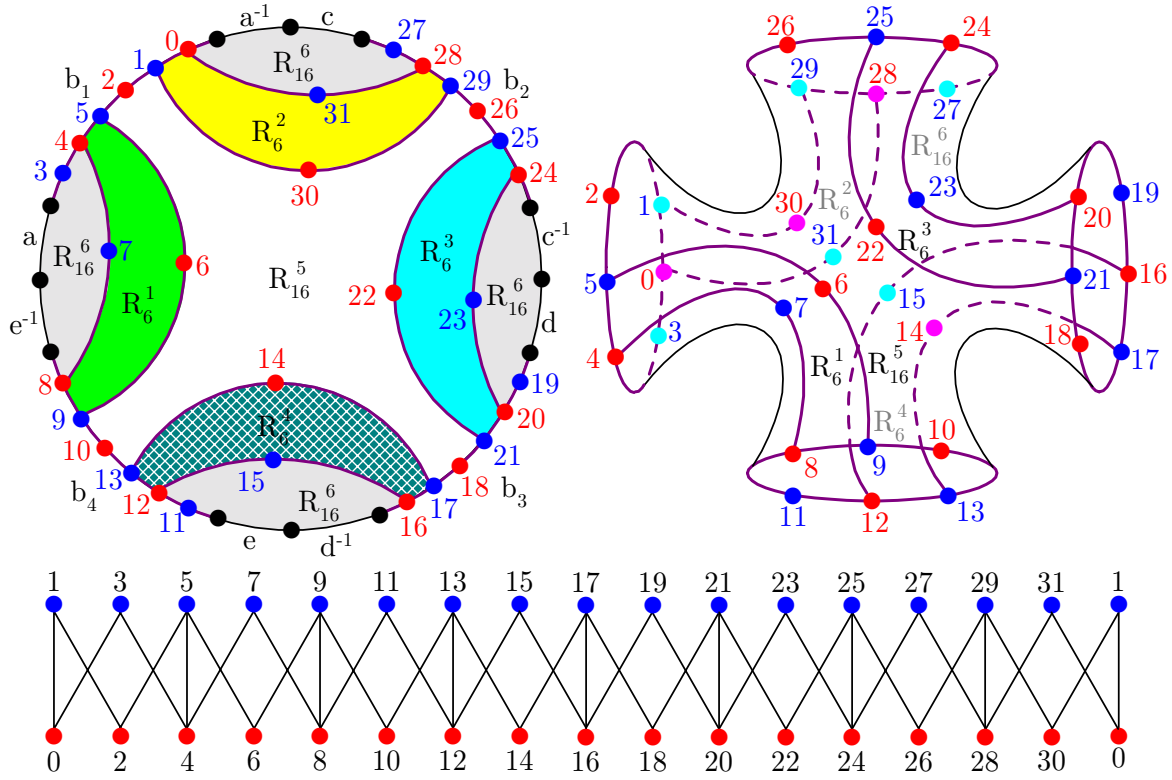

Figura 6.26: Canal 8-totem mergulhado no 4-nóide

Teorema 6.3.6 *Seja* $\mathfrak{C}_{a+4k}[(2,3),(2,3)]$, $a = 7, 8$, *um canal* α*-totem. Então*

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_{7+4k}[(2,3),(2,3)] &\hookrightarrow (2+k)\,N\,(2+k) \equiv S_{2+k}\,(2+k) = (1+k)\,R_6 + R_{14+8k}\\ \mathfrak{C}_{8+4k}[(2,3),(2,3)] &\hookrightarrow (2+k)\,N\,(4+k) \equiv S_{2+k}\,(4+k) = (2+k)\,R_6 + 2R_{8+4k}.\end{aligned}$$

Demonstração. Tomando como base o modelo do mergulho da Figura 6.26, é fácil constatarmos por indução, que o mergulho do canal $\mathfrak{C}_{8+4k}$ encontra-se no $(2+k)\,N$, decompondo-o em $4+k$ regiões: $2+k$ regiões hexagonais e 2 com $8+4k$ lados. Mas $\mathfrak{C}_{7+4k}$ também está no $(2+k)\,N$ e como o modelo elimina dois vértices e lados adjacentes do modelo do $\mathfrak{C}_{8+4k}$, podemos verificar que as 2 regiões R_{8+4k} do $\mathfrak{C}_{8+4k}$ transformam-se na região R_{14+8k} do mergulho do $\mathfrak{C}_{7+4k}$. Assim, os mergulhos do $\mathfrak{C}_{\alpha+4k}$, $\alpha = 7, 8$, são os das formas enunciadas no teorema. ■

Observe, na Tabela 6.5, a composição do mergulho dos canais α-totens nas superfícies da família n-nóide, construída através das composições do Teorema 6.3.6.

Usaremos, agora, os modelos de mergulhos dos canais da Figura 6.25 para generalizarmos os mergulhos das sub-classes de $\mathfrak{C}_m[3]$ sobre a família n-nóide.

Teorema 6.3.7 *Seja* n *um inteiro positivo maior ou igual 2. Para todo número inteiro* $k \geq n$, *a sub-classe de canais* $\mathfrak{C}_{2k}[3]$ *de* $\mathfrak{C}_m[3]$ *está mergulhada no* nN *com a seguinte composição*

$$\mathfrak{C}_{2k}[3] \hookrightarrow nN\,(2\,(k+1)-n) \equiv S_2\,(2\,(k+1)-n) = (2k-n)\,R_4 + 2R_{2n}.$$

Canal	Superfícies e modelos
$\mathfrak{C}_4[3]$	$2N(4) = 4R_4$
$\mathfrak{C}_6[3]$	$2N(6) = 6R_4$, $3N(5) = 3R_4 + 2R_6$
$\mathfrak{C}_8[3]$	$2N(8) = 8R_4$, $3N(7) = 5R_4 + 2R_6, 4N(6) = 4R_4 + 2R_8$
$\mathfrak{C}_{10}[3]$	$2N(10) = 10R_4$, $3N(9)=7R_4 + 2R_6, 4N(8)=6R_4+2R_8, 5N(7)=5R_4+2R_{10}$
$\mathfrak{C}_{12}[3]$	$2N(12) = 12R_4$, $3N(11) = 9R_4 + 2R_6, 4N(10) = 8R_4 + 2R_8$,
	$5N(9) = 7R_4 + 2R_{10}$, $6N(8) = 6R_4 + 2R_{12}$
$\mathfrak{C}_{14}[3]$	$2N(14) = 14R_4$, $3N(13) = 11R_4 + 2R_6, 4N(12) = 10R_4 + 2R_8$,
	$5N(11) = 9R_4 + 2R_{10}$, $6N(10) = 8R_4 + 2R_{12}$, $7N(9) = 7R_4 + 2R_{14}$
$\mathfrak{C}_{16}[3]$	$2N(16)=16R_4, 3N(15)=13R_4+2R_6, 4N^{(14)}=12R_4+2R_8, 5N^{(13)}=11R_4+2R_{10}$,
	$6N(12) = 10R_4+2R_{12}$, $7N(11) = 9R_4+2R_{14}, 8N(10) = 8R_4+2R_{16}$
$\mathfrak{C}_{18}[3]$	$2N(18) = 18R_4, 3N(17) = 15R_4 + 2R_6, 4N(16) = 14R_4 + 2R_8$,
	$8N(12) = 10R_4 + 2R_{16}, 5N(15) = 13R_4 + 2R_{10}, 6N(14) = 12R_4 + 2R_{12}$,
	$7N(13) = 11R_4 + 2R_{14}, 9N(11) = 9R_4 + 2R_{18}$.

Tabela 6.6: Mergulho de uma sub-classe de canais de ordem 3 sobre a família n-nóide

Demonstração. Se $n = 2$, temos que

$$\mathfrak{C}_{2k}[3] \hookrightarrow 2N(2(k+1)-2) = 2N(2k) = (2k-2)R_4 + 2R_4 = (2k)R_4.$$

Portanto, pela Proposição 6.3.4, vale a composição para $n = 2$. De modo análogo, podemos concluir, da Proposição 6.3.5, que a composição também vale para $n = 3$. Suponha, por indução, que a fórmula seja válida para um inteiro n. Para todo inteiro $k \geq n+1$ podemos concluir, do mergulho (2) da Figura 6.25, que

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{2k}[3] &\hookrightarrow (n+1)N(2(k+1)-n+1) = (2k-n+1)R_4 + 2R_{2n+2} \\ &\hookrightarrow (n+1)N(2(k+1)-n+1) = (2k-n+1)R_4 + 2R_{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Como $2k - n + 1 + 2 = 2(k+1) - n + 1$, então

$$2(k+1) - n + 1 = 2(k+2) - (n+1) \text{ e } 2k - n + 1 = 2(k+1) - (n+1).$$

Por indução, segue o resultado enunciado. ∎

Usando o Teorema 6.3.7, a Tabela 6.6 mostra algumas composições de mergulhos de canais das sub-classes de $\mathfrak{C}_m[3]$.

6.3.3 Mergulhos de canais sobre o toro com bordo

Iremos considerar um exemplo de uma sub-classe de canais de $\mathfrak{C}_m[4]$ cujo mergulho é típico da família do toro, o conjunto das superfícies orientadas de gênero um. Convém esclarecer que a condição de mergulho típico só ocorre porque iremos considerar apenas os mergulhos em que os vértices estão sobre as componentes de bordo.

Mergulho de canais sobre o toro com 3 componentes de bordo

A Figura 6.27 mostra o mergulho do canal $\mathfrak{C}_6[4]$ sobre uma superfície compacta orientada de gênero um com três componentes de bordo, denotada por T_3. É usual referirmos a esta superfície como sendo uma superfície com três fins.

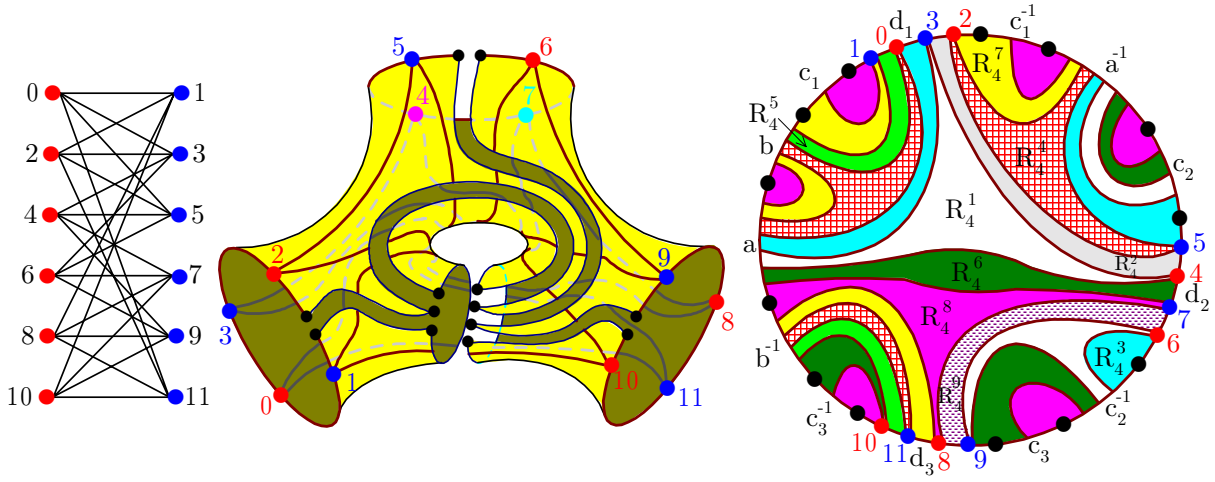

Figura 6.27: Mergulho do canal $\mathfrak{C}_6[4]$ sobre T_3

Apesar de termos adotado a forma de fins tipo catenóide, poderíamos ter decidido por dois fins catenóide e um fim do tipo planar. Neste caso, teríamos a superfície de Costa e Meeks. Dessa forma, a Figura 6.27 descreve também um mergulho sobre a superfície de Costa e Meeks, veja superfície (4) na Figura 3.13.

Devido ao grau de complexidade, recorremos ao método de obtenção do modelo de um mergulho através do corte na superfície sobre as suas curvas de homologia, segundo os exemplos dos modelos de mergulhos dos grafos completos biparticionados $K_{m,m}$, $m = 5, 6$ e 7, Seção 5.1. A única diferença é que optamos pelo polígono de n-lados, caracterizado pela forma normal de Massey [27], ao invés de um polígono de n-lados em sua forma mínima.

Por inspeção da Figura 6.27 sobre os tipos de polígonos formados pelo mergulho do canal $\mathfrak{C}_6[4]$ sobre a superfície T_3, comprovamos a seguinte composição

$$\mathfrak{C}_6[4] \hookrightarrow T_3 = 9R_4.$$

Proposição 6.3.8 *O mergulho do canal* $\mathfrak{C}_6[4]$ *sobre* T_3 *estabelecido na Figura* 6.27 *satisfaz a relação do Teorema de König.*

Demonstração. De fato, o grafo associado ao canal $\mathfrak{C}_6[4]$ é formado por 12 vértices e 24 arestas. Como o mergulho é composto por 9 regiões quadrangulares, então a característica de Eüler tem valor

$$V - A + F = 12 - 24 + 9 = -3.$$

Por outro lado, pelo Teorema 3.2.11 a característica de Eüler de T_3 vale

$$\chi(T_3) = 2 - r - 2m = 2 - 3 - 2 = -3.$$

Logo $\chi(T_3) = V - A + F$, como desejávamos mostrar. ■

Mergulho de canais sobre o toro com 5 componentes de bordo

Na Figura 6.28, mostramos o mergulho do canal $\mathfrak{C}_{10}[4]$ sobre uma superfície compacta orientada de gênero um com cinco componentes de bordo. Poderíamos identificar a composição desse mergulho usando o processo demonstrado na Figura 6.27. Com isso, seria possível ter uma amostragem precisa do tipo de regiões. Por simplicidade, iremos utilizar a relação de igualdade do Teorema de König.

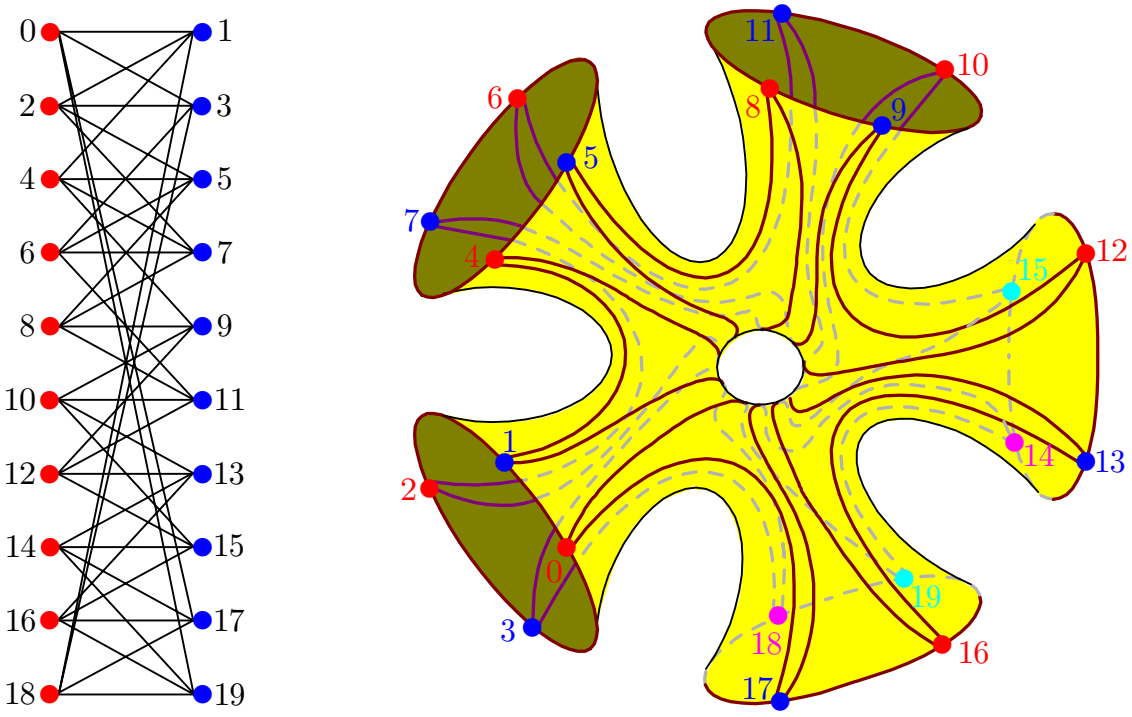

Figura 6.28: Mergulho do canal $\mathfrak{C}_{10}[4]$ sobre T_5

Proposição 6.3.9 *O mergulho do canal $\mathfrak{C}_{10}[4]$ sobre o toro com 5 componentes de bordo tem a seguinte composição*

$$\mathfrak{C}_{10}[4] \hookrightarrow T_5 = 15R_4.$$

Demonstração. O grafo associado ao canal $\mathfrak{C}_{10}[4]$ é formado por 20 vértices e 40 arestas. A característica de Eüler do toro com 5 componentes de bordo, pelo Teorema 3.2.11, vale

$$\chi(T_5) = 2 - 2m - r = 2 - 2 - 5 = -5.$$

Canal	**Composição**	**Canal**	**Composição**	**Canal**	**Composição**
$\mathfrak{C}_4[4]$	$T_2(6) = 6R_4$	$\mathfrak{C}_{12}[4]$	$T_6(18) = 18R_4$	$\mathfrak{C}_{20}[4]$	$T_{10}(30) = 30R_4$
$\mathfrak{C}_6[4]$	$T_3(9) = 9R_4$	$\mathfrak{C}_{14}[4]$	$T_7(21) = 21R_4$	$\mathfrak{C}_{22}[4]$	$T_{11}(33) = 33R_4$
$\mathfrak{C}_8[4]$	$T_4(12) = 12R_4$	$\mathfrak{C}_{16}[4]$	$T_8(24) = 24R_4$	$\mathfrak{C}_{24}[4]$	$T_{12}(36) = 36R_4$
$\mathfrak{C}_{10}[4]$	$T_5(10) = 10R_4$	$\mathfrak{C}_{18}[4]$	$T_9(27) = 27R_4$	$\mathfrak{C}_{26}[4]$	$T_{33}(39) = 39R_4$

Tabela 6.7: Mergulho de um subclasse de canal de ordem 4 sobre a família do toro

Pelo Teorema de König, resulta que o número de regiões do modelo do mergulho de $\mathfrak{C}_{10}[4]$ em T_5 é

$$F = A - V + \chi(T_5) = 40 - 20 - 5 = 15.$$

Agora, pelo Teorema 3.2.1, se colarmos cinco discos nas cinco componentes de bordo do T_5, obteremos uma superfície compacta homeomorfa ao toro. Assim, cada disco colado transforma-se em uma região quadrangular sobre o toro, pois cada componente de bordo possui 4 vértices. Logo, sobre T, o mergulho da Figura 6.28 passaria a ter 20 regiões. Como o toro é uma superfície compacta, vale a igualdade do Lema 5.3.12, cuja única solução é $2E = 80 = 20 \cdot 4$, implicando nas seguintes composições

$$\mathfrak{C}_{10}[4] \hookrightarrow T = 20R_4 \quad e \quad \mathfrak{C}_{10}[4] \hookrightarrow T_5 = 15R_4\,. \qquad \blacksquare$$

O próximo teorema exibe uma sub-classe de canais da classe com valência 4, onde cada um de seus elementos está mergulhado em uma superfície da família do toro, como um mergulho típico. Chamamos a atenção ao fato de que estamos nos referindo a um mergulho da forma esquematizada na Figura 6.28.

Teorema 6.3.10 *O canal $\mathfrak{C}_{2k}[4]$, $k \geq 2$ está mergulhado no toro com k componentes de bordo com a seguinte composição*

$$\mathfrak{C}_{2k}[4] \hookrightarrow T_k(3k) = (3k)\,R_4.$$

Demonstração. O grafo associado ao canal $\mathfrak{C}_{2k}[4]$ é formado por $4k$ vértices e $8k$ arestas. Colocando 4 vértices em cada componente de bordo de um toro, como existem $4k$ vértices, eles ocupam k componentes de bordo. Portanto, pela Figura 6.28, o mergulho de $\mathfrak{C}_{2k}[4]$ é realizado sobre T_k, cuja característica de Eüler é, pelo Teorema 3.2.11, dada por $\chi(T_k) = 2 - 2m - k = -k$. Logo, o número de regiões do modelo do mergulho de $\mathfrak{C}_{2k}[4]$ sobre T_k é

$$F = A - V + \chi(T_k) = 8k - 4k - k = 3k.$$

De forma análoga à demonstração da Proposição 6.3.9, podemos concluir que todas as regiões são da forma quadrangular, o que mostra a composição do teorema. $\blacksquare$

Pela composição apresentada no Teorema 6.3.10, os modelos de mergulhos dos canais $\mathfrak{C}_{2k}[4]$, $k = 2, 3, 4$ e 5, sobre a família do toro são mostrados na Tabela 6.7.

Lembramos que sempre é possível escolher superfícies mínimas como representantes de classes das superfícies do mergulho de qualquer um dos canais considerados neste capítulo.

Capítulo 7

Conclusões

0s objetivos deste trabalho estão fundamentados no processo de identificação das estruturas algébricas e geométricas associadas aos canais discretos sem memória. A estrutura geométrica está relacionada com a identificação das superfícies que os canais discretos sem memória poderão ser mergulhados bem como com a determinação das tesselações regulares associadas aos canais mergulhados. Enfatizamos a questão das tesselações regulares porque elas estão relacionadas aos *conjuntos de sinais geometricamente uniformes*, constelações priorizadas no processo de comunicações.

A estrutura algébrica está relacionada com a determinação do primeiro grupo de homologia das superfícies decorrentes dos mergulhos dos canais discretos sem memória. No nosso caso, o grupo de homologia $H_1(\Omega)$ da superfície Ω associada ao canal discreto sem memória, assumirá o papel do grupo de simetrias $\Gamma(S)$. É ele que irá agir transitivamente no conjunto de sinais S. É mais fácil obtê-lo do que o grupo de simetrias. Além do mais, a identificação da tesselação regular com m regiões sobre a superfície Ω, pode ser usada para identificar o subgrupo do grupo de homologia que será utilizado como o alfabeto do código. Para isto basta identificar o subgrupo do grupo $H_1(\Omega)$ de ordem m que atua transitivamente no conjunto de sinais S.

O procedimento para a abordagem do problema pode ser resumido da seguinte maneira.

> *Através do grafo associado a um canal discreto sem memória, determinamos o conjunto das superfícies no qual tal grafo está mergulhado, estabelecemos o conjunto das estruturas algébricas dessas superfícies (primeiro grupo de homologia) e identificamos as tesselações regulares que podem ser utilizadas como modulações e quantizadores.*

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho foram observadas as seguintes conclusões.

O Capítulo 3, introduzimos uma representação poligonal padrão, a *forma mínima*, mínima em relação às componentes de bordos isolados da superfície, que permitiu a identificação dos subconjuntos das superfícies geradas por estes polígonos e ilustramos um exemplo da realização geometrica de uma superfície compacta com bordo, $(4T_5)$, a partir da sua forma poligonal.

No Capítulo 4, construímos um diagrama triangular central sobre o modelo plano de uma superfície, aplicamos o método do complexo simplicial e calculamos o primeiro grupo de homologia de uma superfície em função do gênero e do número de componentes de bordo.

No Capítulo 5, obtivemos o mergulho do grafo sobre a forma poligonal de uma superfície, a partir do mergulho sobre o modelo espacial. Construímos o modelo de um mergulho de grafo, como um mergulho de 2-células sobre uma superfície compacta com bordo. Com isso, incluímos uma importante classe de superfícies no contexto da Teoria de Comunicação: as superfícies mínimas. Além disso, identificamos o número de modelos com 4 regiões provenientes de mergulhos de um grafo completo biparticionado, cujo processo de identificação, fornece os elementos para a identificação das tesselações regulares. Determinamos ainda os tipo de mergulhos do grafo completo biparticional $K_{3,3}$ sobre superfícies compactas sem bordos orientadas.

No Capítulo 6, introduzimos o conceito de mergulho de canal e identificamos o conjunto das estruturas algébricas (grupo de homologia) das superfícies compactas com e sem bordos provenientes de mergulhos de um canal discreto sem memória, identificamos as tesselações regulares para projetos de modulações e quantizadores, processo no qual permitiu justificar o ganho proveniente do uso de um quantizador. Verificamos que o conjunto das estruturas algébricas associadas ao conjunto das tesselações regulares é formado por dois ou quatro elementos: uma estrutura está associada ao conjunto das tesselações regulares sobre superfícies compactas orientadas com bordos, outra está associada à tesselação sobre a superfície compacta sem bordo, esta quando existe é única, e outra, ao conjunto das superfícies compatas não-orientadas. Introduzimos o conjunto das superfícies mínimas no contexto da Teoria de Comunicações, como elementos fornecedores de estruturas algébricas para composição de códigos corretores de erros, espaços para modulações de sinais e para projetos de quantizadores.

7.1 Propostas Para Futuros Trabalhos

No desenvolvimento dos temas, foram identificados vários problemas de interesse à teoria da codificação, dentre eles, destacamos aqueles que são conseqüências imediatas de resultados expostos neste trabalho e que podem ser solucionados a partir das informações e técnicas apresentadas. Os tópicos que despertaram a nossa atenção e que podem ser objetos de pesquisas futuras são:

- Analisar, sob o aspecto da propriedade de correção de erros, o código associado a matriz da presentação do primeiro grupo de homologia de uma superfície.

- Mergulhar o grafo $K_{m,n}$, associado ao canal DMC sobre uma superfície Ω, construir, conforme Figura 7.1, um complexo orientado sobre o modelo plano de Ω a partir deste mergulho e determinar o subgrupo de $H_1(\Omega)$ gerado somente pelos ciclos associados ao lados do grafo $K_{m,n}$.

- Seja $\mathfrak{C}_{m,n}[P,Q] \hookrightarrow \Omega[mR_k]$ o mergulho do canal DMC sobre uma superfície Ω, decompondo-a em m regiões idênticas: isto é, uma tesselação regular sobre Ω.

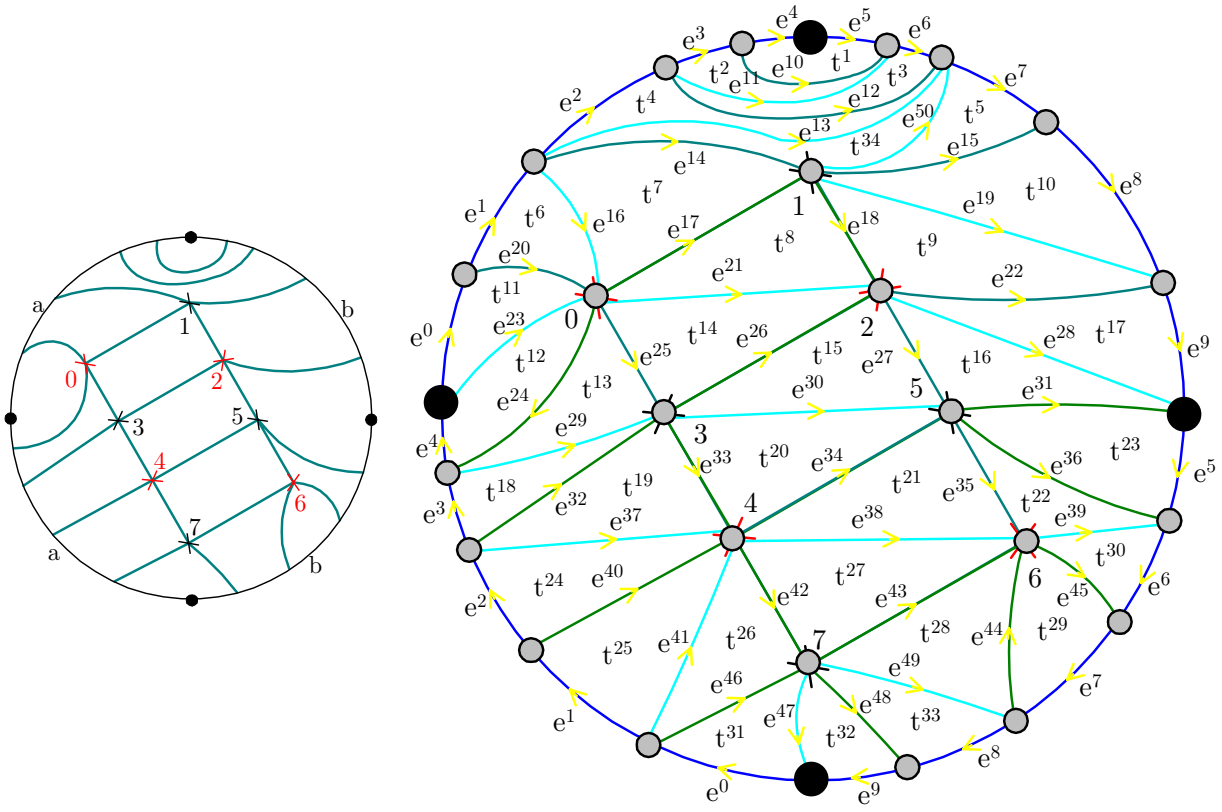

Figura 7.1: Triangulação sobre o modelo plano de K, construída a partir do mergulho do grafo $K_{4,4}$ sobre K

Suponha que esta tesselação seja uma modulação com m elementos, ou seja, cada região de Ω contém um único sinal $s_i \in S$ em seu centro. Neste caso, identificar um subgrupo de $H_1(\Omega)$ de ordem m que atua transitivamente no conjunto de sinais S.

Referências Bibliográficas

[1] ARTIN, Emil, BRAUN, Hel. **Introduction to Algebraic Topology,** 1st ed., Charles E. Merrill Publishing Company, Columbus, Ohio, 1969.

[2] BARBOSA, João Lucas M, COLARES, Antônio Gervásio. **Minimal Surfaces in** $\mathbb{R}^3$, 1st ed., Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq, Rio de Janeiro.

[3] CAIRNS, S. S. **Introductory Topology**, Ronald Press Co., New York (1961).

[4] CAMACHO, César, LINS Neto, Alcides. **Teoria Geométrica das Folheações**, 1^aed. Coleção Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq, Rio de Janeiro, 1979.

[5] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Differential Geometry of Curves and Surfaces**, 1st ed., Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[6] COSTA, José Celso da. **Funções Elípticas, Algébricas e Superfícies Mínimas**. 1^aed., Instituto de Matemática Pura e Aplica, IMPA, Rio de Janeiro, 1991.

[7] COXETER, H. S. M., MOSER, W. O. J. **Generators and Relations for Discrete Groups**, 3rd ed., Springer-Verlag, New Heidelber, Berlin, 1972.

[8] DIERKES, Ulrich, HILDEBRANDT, Stefan, KÜSTER, Albrecht, WOHLRAB, Ortwin. **Minimal Surfaces I**, 1st ed., Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[9] EDMONDS, J. **A combinatorial representation for polyhedral surfaces**. Notices Amer. Math. Soc. 7 (1960), 646.

[10] FIRBY, Peter A., GARDINER, Ciryl F. **Surface Topology**, 2nd ed., Ellis Horwood Limited, England, 1991.

[11] FORNEY Jr., G.D., **Geometrically Uniform Codes**, IEEE Trans. Inform. Theory, v. 37, p. 1241-1260, Sept. 1991.

[12] GIBLIN, P. J. **Graphs, Surfaces and Homolgy**. 1st ed., Chapman and Hall Ltd, London, 1977.

[13] GILBERT, William J. **Modern Algebra with Applications**, 1st ed., John Wiley & Sons, New York, 1976.

[14] GREENBERG, Marvin J. **Lectures on Algebraic Topology**, 1st ed., W. A. Benjamin, Inc., New York, 1967.

[15] HARTLEY, B., HAWKES T. O. **Rings, Modules and Linear Algebra**, Chapman and Hall (1970).

[16] HEFFTER, L. **Uber das problem der nachbargebiete**. Math. Ann. 38, 477-508 (1901).

[17] HOFFMAN, David, KARCHER, Hermann. **Complete Embedded Minimal Surfaces of Finite Total Curvature**, no. 35, Berkeley, 1995.CNPq, Rio de Janeiro, 1993.

[18] KÖNIG, D. **Theirue der Endlichen und Unendlichen Graphen**, Leipzig, 1936, (Reprinted, Chelsea, New York, 1950).

[19] KOSNIOWSKI, Czes. **Introduzione Alla Topologia Algebrica**, prima edizione, N. Zanichelli Editore, Bologna, 1988.

[20] LAWSOM Jr., H. Blaine. **Lectures on Minimal Submanifolds**, Vol. I, 1st ed., Perish Inc. Berkeley, 1980.

[21] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**, vol.2, 3ªed., Coleção Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq, Rio de Janeiro, 1991.

[22] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**, 2ªed., Coleção Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq, Rio de Janeiro, 1978.

[23] LIMA, Elon Lages, **Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento**, 1ªed., Coleção Projeto Euclides, Institudo de Matemática Pura e Aplicada - CNPq, Rio de Janeiro, 1993.

[24] LOCKWOOD, E. H., MACMILLAN, R. H. **Geometric Symmetry**. 1st ed., Cambridge University Press, London, 1978.

[25] LOELIGER, H. A., **Signal Sets Matched to Groups**, IEEE Trans, Inform. Theory, Vol. 37, n. 6, p. 1675-1682, Nov. 1991.

[26] KÖNIG, D., **Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen**, Leipzig, 1936, (Reprinted to Chelsea, New York, 1950).

[27] MASSEY, William S. **Algebraic Topology: An Introduction**, 5th ed. Springer Verlag, New York, 1977.

[28] MUNKRES, James R. **Elements of Algebraic Topology**, 7th ed. Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1993.

[29] NYKULIN, Viacheslav V., SHAFAREVICK, Igor R. **Geometries and Groups**. 1st ed., Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[30] O'NIELL, Barret. **Elementos de Geometria Diferencial**, 1^aed. Editora Limusa-Wiley, Mexico, 1972.

[31] OSSERMAN, Robert. **A Survey of Mínimal Surfaces**, 1st ed., Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1969.

[32] RINGEISEN, Richard D., **Determining all Compact Orientable 2-manifolds upon which $K_{m,n}$ has 2-cell Embeddings**. Journal Combinatorial Theory, Vol. 12 (1972) 101-104.

[33] RINGEISEN, Richard D., **Survey of Results on the Maximum Genus of a Graph**. Journal of Graph Theory, Vol. 3 (1979) 1-13.

[34] RINGEL, Gerhard. **Das Geschlecht des vollständigen paaren Graphen**, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, vol. 28 (1965), pp. 139-150.

[35] RINGEL, Gerhard. **Der vollstandige paare Graph auf Nichotorientierbaren Flächen**. J. Reine Angew. Math. (1965)220, 88-93.

[36] RINGEL, Gerhard. YOUNGS, J. W. T. **Das Geschelcht des symmetrische vollständige drei-Farbaren Graphen**, Comment. Math. Helv., vol. 45 (1970), pp. 152-158.

[37] RUSNING, T. Benny. **Topological Embeddings**, 1st ed., New York, Academic Press, 1973.

[38] SEIFERT, H., THRELFALL, W. **Leciones de Topologia**, Madrid, 1951.

[39] SHANNON, C. E. **A Mathematical Theory of Communication**, Bell Syst., Tech. J., Vol 27(1984), pp. 397-423 and 623-656.

[40] STAHL, Saul. **The Embeddings of a Graph - A Survey**. Journal of Graph Theory, Vol. 2 (1978) 275-298.

[41] WHITE, Arthur T. **The genus or the complete tripartite graph $K_{mn,n,n}$**. J. Combinatorial Theory 7 (1969), 283-285.

[42] WHITE, Arthur T. **Orientable Imbeddings of Cayley Graphs**. Bull. Amer. Math. Soc. (1974), 69, 272-275.

[43] WOZENCRAFT, John M., JACOBS, Irwin Mark. **Principles of Comunication Engineering,** 1st ed. New York, 1965.

[44] YOUNGS, J. W. T. **Minimal imbeddings and the genus or a graph**. J. Math. Mech, 12 (1963), 303-316.

Índice Remissivo

Aplicação
  projeção natural, 21
Aplicações homotópicas, 13

Código de classes laterais generalizado, 11
Caminho, 14
  constante, 14
  fechado, 14
  inverso, 14
  livremente homotópico, 14
  produto de caminhos, 14
Canais típicos, 168
  da família do toro, 173
  do catenóide, 168
  do trinóide, 169
Canal alfa totem, 168
  mergulho na família n-nóide, 171
  mergulho no 4-nóide, 171
  mergulho no catenóide, 168
  mergulho no trinóide, 170
  notação, 168
Canal discreto sem memória, 1
  grafo completo biparticionado, 162
    conunto das estruturas algébricas, 162
Cardinalidade
  classe de canal
    4-ário de grau 2, 136
Cardinalidade do conjunto
  classe de canal
    4-ário, 134
  superfícies não-orientadas, 48
Catenóide, 39, 168
Cisão, 13
  trivial, 13
Classe de canais
  conjunto das estruturas algébricas, 154, 155
    amostragem, 157
    cardinalidade, 156
  conjunto das tesselações regulares, 155, 156
  m,n-ários
    com graus em P e Q, 127
    condições sobre o grau, 128
  m,n-ários de graus p e q, 127
  m-ário de grau p, 127
  mergulhada sobre K, 149
  superfícies e estruturas algébricas, 157
    conjuntos, 157
    gráfico comparativo, 157
  tesselação regular
    existência, 159
    número máximo de lados, 159
Classe de superfícies, 26
Classes laterais
  dos modelos de K(3,3), 122
Classificação dos modelos de K(3,3), 124
Codificador de canal, 1
Codificador de fonte, 1
Combinação linear inteira, 20
Complexo simplicial, 19
  identifcação dos 1-ciclos, 60
  orientado, 19
    sobre o 5-toro, 61
Complexo simplicial orientado
  sobre a garrafa de Klein, 59
Condição
  modelo com bordos isolados, 99
Conjunto
  conexo, 13
  conjuntos isomorfos, 20
  das regiões, 82

desconexo, 13
geometricamente independente, 18
sistemas de rotações, 82
Conjunto das superfícies
classe m-particionada de grau 3, 146
geradas por n-lados, 43
não-orientadas com bordos, 47
não-orientadas sem bordos, 43
orientadas com bordos, 44
orientadas sem bordos, 43
subconjuntos disjuntos, 46, 48
geradas por polígonos, 26, 42
geradas por t-lados
t menor ou igual a n, 50
geradas por um mergulho, 129
mergulho da classe de canal, 130
(5+3k)-ário de grau 4, 146
(6+4k)-ário de grau 4, 147
(8+4k)-ário de grau 4, 147
(9+6k)-ário de grau 4, 148
2,4-ários de graus 4 e 2, 150
2,n-ários de graus n e 2, 151
2k-ário de grau 3, 170
3-ária de grau 3, 130
3-ário, 131
3-ário de grau 2, 131
4-ário de grau 2, 136
4-ário de grau 3, 135
4-ário de grau 4, 133
5-ário de grau 2, 137
5-ário de grau 3, 137
5-ário de grau 4, 138
5-ário de grau 5, 138
6-ário de grau 3, 138
6-ário de grau 4, 139
6-ário de grau 6, 140
7-ário de grau 3, 141
7-ário de grau 4, 141
7-ário de grau 7, 142
8-ário de grau 3, 142
8-ário de grau 4, 142
8-ário de grau 8, 143
m-ário de grau 1, 144
m-ário de grau 2, 144, 145
m-ário de grau 3, 146
t(3+2k)-ário de grau 4, 149
mergulho de um canal, 133, 154
mergulho de uma classe de canais, 155
cardinalidade, 155
mergulho do canal BSC, 128
mergulho não 2-células
canal BSC, 129
mergulho não-orientado da classe
(2+k)(3+2k)-ário de grau 4, 149
relações
não-orientadas com bordos, 47
orientadas com bordos, 44
Conjunto das tesselações regulares
canal m,n-ário de graus n e m, 162
estruturas algébricas, 163
do canal m-ário de grau m, 163
do canal m-ário de grau p, 161
cardinalidade, 161
estruturas algébricas, 162
Conjunto de canais
m,n-ários, 127
Conjunto de sinais
geometricamente uniformes, 159
sobre uma superfície, 159
Conjunto de sinais geometricamente uniforme, 11
Conjunto dos modelos
índice máximo relativo, 107, 108
índice mínimo relativo, 107, 108
Conjunto dos modelos com 2 regiões, 105
Conjunto dos modelos com 4 regiões
índice máximo, 108
índices relativos, 111
cardinalidade, 104, 108, 115
condições de índices, 105
do grafo K(2,4), 115
que fixa um hexágono, 106
que fixa um octógono, 107
que fixa um quadrado, 106
que fixa uma região
cardinalidade, 113, 114
que fixam dois índices, 109
Construção
mergulho com bordo
duas componentes, 97

uma componente, 95
primeiro grupo de homologia, 57
Coordenadas baricêntricas, 18
Curva de homologia
sobre o 4-toro, 87
sobre o 7-toro, 89

Decodificação de canal, 151
Demodulador, 1
Diagrama triangular central, 61
árvore maximal, 62
número de raios, 65
amostragem, 68
exemplos, 74, 75
k-simplexos, 65
número de 1-simplexos, 65
número de 2-simplexos, 65
raios, 61
relações triviais, 62–64
sobre 5-toro, 62
sobre o plano, S e P, 58
Difeomorfismo, 13
classe de, 13
local, 13
Distância, 13

Edmonds, 117
Epimorfismo, 20
Equivalência homotópica, 14
Espaço de Hausdorff, 12
Espaço métrico
conexo, 13
Espaço topológico, 12
contrátil, 14
equivalência, 14
homeomorfismo, 13

Família n-nóide, 167
Fonte de mensagens, 1

Grafo, 79
árvore geradora, 16
árvore maximal, 16, 60
árvores, 16
0-cadeias, 17
1-cadeia
bordo, 17
1-cadeias, 17
somas, 17
1-ciclos, 17
caminhos simples, 15
caminhos sobre grafos, 15
componentes conexas, 16
composição do mergulho, 82
conexos, 16
existência de mergulhos 2-células, 101
grau de um vértice, 117, 118
isomorfismo entre grafos, 79
laço, 17
1-ciclo associado, 17
laços sobre um grafo, 16
lados, 79
mergulho
sistema de rotações, 80, 117
mergulho 2-células, 80
mergulho de grafo em superfície, 79
mergulho mínimo não-orientado, 80
gênero, 80
mergulho mínimo orientado, 79
característica, 79
superfície mínima, 79
mergulho orientado
característica máxima, 80
número ciclotomático, 16
planar, 79
sistema de rotação
classe de equivalência, 119, 120
duas ações, 121
equivalência, 119
permutação de dois vértices, 119
sistema referencial básico, 121
uma ação, 121
subgrafos, 16
subgrafos próprios, 16
vértices, 79
Grafo abstrato, 15
lados, 15
orientado, 15
lado, 15
vértice, 15
vértices, 15

Grafo completo biparticionado, 79
  conjunto dos modelos
    com k regiões, 104
  mergulho máximo orientado
    gênero, 101
  mergulho mínimo orientado
    característica, 79
    gênero, 79, 100
  mergulho orientado
    conjunto das superfícies, 101, 102
  modelo de mergulho orientado
    número de regiões, 101–104
    tipo de regiões, 102
  sistema de rotações, 117
Grupo
  cíclico, 20
    gerador, 20
  finitamente gerado, 20
  ordem de um elemento, 19
  p-cadeias, 23
    conversão, 23
  subgrupo, 19
Grupo abeliano, 19
Grupo de homologia, 24
Grupo de simetrias, 11
Grupo fundamental, 15
Grupo gerador, 11
Grupo livre abeliano, 20, 21
  espaços vetoriais, 20
  finitamente gerado, 20
    base, 20
    geradores, 20
    homomorfismo, 21
  presentação, 67
  soma direta, 21
  Teorema da Classificação, 68
Grupo quociente, 21
  classe lateral à direita, 21

Heffter, 117
Homeomorfismo, 13
  local, 13
Homomorfismo, 20
  imagem, 20
  mônico, 20
  núcleo, 20
Homomorfismo de bordo, 17, 23
Homotopia, 13
  classe de, 14

Inverso homotópico, 14
Isometria, 11
Isomorfismo, 20

Métrica, 13
Mergulho com bordo
  bordos não isolados, 99
  com e sem bordos, 99
  condição de isolamento, 98
Mergulho de grafo
  em superfície com bordo, 93
  modelo, 93
  tesselação, 93
  tesselação regular, 93
Mergulho do canal
  10-ário de grau 4
    sobre o toro com 5 bordos, 173
  2k-ário de grau 3
    sobre o n-nóide, 171
  6-ário de grau 4
    sobre o toro, 173
Mergulho mínimo
  composição do modelo
    sobre o 4-toro, 88
    sobre o 7-toro, 90
    sobre o tri-toro, 86
  corte no modelo espacial
    sobre o 4-toro, 87
    sobre o tri-toro, 84
  modelo espacial
    sobre o 4-toro, 87
    sobre o 7-toro, 89
    sobre o tri-toro, 84
  modelo planar
    sobre o 4-toro, 87
    sobre o 7-toro, 90
    sobre o tri-toro, 85
  sistema de rotações
    sobre o 4-toro, 87
    sobre o 7-toro, 89

sobre o tri-toro, 85
sobre a esfera e toro, 83
Mergulho mínimo com bordo, 93
com uma componente, 96
exemplos, 94
Mergulho mínimo não-orientado
gênero, 127, 138
Mergulhos não-orientados, 91
Modelo espacial, 28
Modelo plano
de uma superfície compacta, 27
forma normal, 28
soma conexa de superfícies, 28
Modulador, 1
Monomorfismo, 20

n-plano, 18
n-simplexo, 18
bordo, 19
dimenção, 19
face oposta, 19
faces, 19
faces próprias, 19
ordenado, 19
orientação, 19
orientado, 19
simplex aberto, 19
vértices, 19
Número de elementos
das classes de K(3,3), 123

Otimização do canal, 2

p-bordos, 24
p-cadeias, 23
p-ciclos, 24
p-simplexos
bordo, 23
Palavra associada a uma superfície, 28
Palavra-código, 10
Palavras-código de canal, 1
Partição geometricamente uniforme, 11
Perfil de distância global, 12
Permutação
agindo sobre sistema de rotações, 118
de dois vértices de um modelo, 118
Polígono, 78
Polígono n-lados, 26
contagem dos vértices, 31
forma mínima, 34, 76
4-toro com 5 bordos, 35
forma natural, 81
forma normal, 29
esfera com bordo, 29
m planos projetivos com r bordos, 31
m toros com r bordos, 30
lados, 26
orientação, 26
realização geométrica, 26
Poliedro, 18
Ponto básico, 15
Primeiro grupo de homologia
garrafa de Klein, 60
igualdade
superfície com e sem bordo, 73
presentação, 22, 58, 72
coeficiente de torção, 70
dimensão, 69, 73
matriz associada, 69
número de variáveis, 66
posto da matriz, 74
soma conexa, 73
Teorema da Classificação, 72

Quantizador, 125, 151, 164
canal associado, 151
de nível 8, 153
ganho de decodificação, 153
justificativa, 153

Realização de Superfície, 35
Receptor de máxima verossimilhança, 3
Região de decisão, 2
Região de Voronoi, 2, 12
Ringel, 117
Rotulamento isométrico, 11
Ruido gaussiano branco aditivo, 10

Seqüência de tipos de modelos
formas distintas, 112
que fixa uma região, 107

k-ésimo termo, 108
k-ésimo termo da subseqüência, 112
número de termos, 108
que fixam duas regiões
k-ésimo termo, 110
número de termos, 109, 110
paridade de termos, 111
subseüências, 110
Simetria, 11
Sistema
codoficação e decodificação, 125
Sistema de comunicação codificado
codificador, 10
palavra código, 10
codificador de fonte, 10
decodificador, 10
decodificador de canal, 10
seqüência estimada, 10
decodificador de fonte, 10
dectetor de correlação, 10
demodulador, 10
densidade espectral de potência, 10
diagrama de bloco, 9
filltro casado, 10
fonte de informação, 9
fonte digital, 9
modulador
modulação BPSK, 10
palavra código, 10
quantizador, 10
ruído gaussiano branco aditivo, 10
seqüência de informação, 10
Sistema de rotação
classes de equivalências, 124
construção direta
de um grafo completo, 117
Soma conexa de superfícies, 27
Sub-classes de canais
típicas do catenóide, 169
típicas do trinóide, 170
Superfície
característica de Eüler-Poincaré, 40, 78
com bordo, 29
compacta com bordos isolados, 27
fator de conexidade, 80
grau de compacticidade, 44
grau de conexidade, 44
homeomofismo
com bordo, 29
homeomorfa a um m-toro, 81
homeomorfismo, 31
modelo, 78
complexo, 78
complexo regular, 79
região, 80
região 2-células, 80
modelo espacia, 26
modelo espacial
contagem de vértices, 35
não-orientada
clasificação via polígono, 38, 39
relações, 37
orientada
classificação, 36
realização geométrica, 35
representação poligonal, 26
superfícies básicas, 27
Tesselação regular, 159
Superfície de Costa-Meeks, 40
Superfície de Jorge-Meeks, 40
Superfície mínima, 167
para o mergulho não-orientado, 80
para o mergulho orientado, 79
Superfícies Básicas, 27
Superfícies compactas básicas, 27
Superfícies geradas por n-lados
cadinalidade, 49, 51
compactas com bordos, 49
não-orientadas com bordos, 48
não-orientadas sem bordos, 43
orientadas com bordos, 46
orientadas sem bordo, 43
orientadas sem bordos, 47
subconjuntos, 50, 51

Teorema de Konig, 79
Teorema de Shannon, 10
Teorema do homomorfismo, 21
Tesselações regulares

com km regiões, 165
com m regiões, 159
existência, 159
Tesselações regulares distintas, 156, 159
cardinalidade, 161, 166
com m regiões
cardinalidade, 162
existência, 166
gráfico comparativo, 166
Tipo de homotopia, 14
Topologia, 12
abertos, 12
metrizável, 13
Transformação afim, 18
Triângulo dos modelos
com quatro regiões, 113, 115

Variedade bidimensional com bordo, 25
interior, 25
Variedade Riemanniana bidimensional, 167

White, 117

Youngs, 117